

Филимонов П. Е., к.т.н (ПАО «Шахта им. А.Ф. Засядько», г. Донецк),
Морус В. Л., к.т.н. (ИГТМ НАН Украины, г. Днепропетровск)

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДВУХФАЗНОГО ПОТОКА "ЖИДКОСТЬ-ТВЕРДЫЕ ЧАСТИЦЫ" В ПОЛЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ СИЛ

Розроблено математичну модель, що враховує характеристики потоку з параметрами рідкої й твердої фаз, умовами проходження рідини й твердих часток крізь сито, умовами на завантаженні й характеристиками сита.

Ключові слова: математична модель, двофазний потік, поле гідродинамічних сил.

Разработана математическая модель, учитывающая характеристики потока с параметрами жидкой и твердой фаз, условиями прохождения жидкости и твердых частиц сквозь сито, условиями на загрузке и характеристиками сита.

Ключевые слова: математическая модель, двухфазный поток, поле гидродинамических сил.

A mathematical model taking into account characteristics of the flow with the parameters of the liquid and solid phases, the terms of the passage of liquids and solids through a sieve, and the loading conditions on the characteristics of the screen.

Keywords: mathematical model, two-phase flow, the field of hydrodynamic forces.

Процесс ситовой классификации суспензии (т.е. двухфазной среды, состоящей из смеси жидкости и твердых частиц) может быть смоделирован потокам переменной массы и структуры на перфорированной поверхности. В стационарном потоке изменение глубины происходит на счет его ускорения и выделения жидкости и частиц мелкой фракции через отверстия. Очевидно, что расход суспензии через одно из сечений потока зависит от вязкости жидкости, физических свойств частиц, их геометрических характеристик, размеров и формы отверстий сита, глубины и скорости потока на начальном участке. Структура потока по его длине изменяется за счет изменения концентрации и перераспределения по крупности частиц твердой фазы.

Рассмотрение процесса ситовой классификация суспензии с учетом эффекта неоднородности существенно осложняет исследование, однако позволяет выявить физические особенности процесса, его закономерности, без чего невозможно создание научных основ многих технологических процессов, свя-

занных с движением потоков переменной массы и структуры. При моделировании двухфазного потока принимаем следующие допущения [1]: размеры твердых частиц во много раз превышают молекулярно-кинетические, частицы абсолютно твердые сферической формы, жидкость несжимаема, а смесь монодисперсная, перфорированная поверхность принимается плоской.

В [2] приведены уравнения гидродинамики гетерогенной смеси, отвечающие теории многоскоростного континуума [1], а также решена задача течения жидкости по наклонной ситовой поверхности.

В [2] разработана математическая модель двухфазного потока "жидкость – сферические частицы" на перфорированной плоскости. Эта задача включает в себя составление уравнений сохранения масс и импульсов для составляющих потока, балансовые соотношения, а также выбор соответствующих граничных условий.

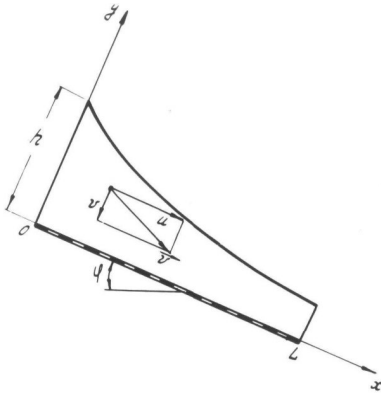


Рис. 1. Расчетная схема потока на перфорированной плоскости

Расчетная схема потока на перфорированной плоскости показана на рис. 1.

В соответствии с [1] уравнения сохранения масс двухкомпонентной смеси с учетом допущения об отсутствии измельчения и слипания дисперсных частиц имеют вид

$$\begin{cases} \frac{\delta \rho_1}{\delta t} + \frac{\delta \rho_1 v_1^k}{\delta x^k} = n j_{21}, \\ \frac{\delta \rho_2}{\delta t} + \frac{\delta \rho_2 v_2^k}{\delta x^k} = n j_{12}, \\ \frac{\delta n}{\delta t} + \frac{\delta n v_2^k}{\delta x^k} = 0. \end{cases}, \quad (1)$$

где ρ_1 и ρ_2 – приведенные плотности

жидкости и дисперсных частиц соответственно, т.е. $\rho_1 = \rho_1^0 \alpha$, $\rho_2 = \rho_2^0 \alpha$ – истинные плотности жидкости и дисперсной фазы; ρ_1^0 , ρ_2^0 – соответственно их объемные концентрации; n – число твёрдых частиц в единице объема смеси; v_1^k и v_2^k – скорости компонентов смеси; $k = 1, 2$ – номер декартовой координаты, такой, что, $x^1 \equiv x$, $x^2 \equiv y$; j_{21} и j_{12} – скорости фазовых переходов.

Здесь и далее индекс 1 соответствует жидкой, а 2 – твердой фазам.

Аналогичным способом запишем одну из форм уравнений сохранения импульсов фаз

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_1 \frac{d_1 \bar{v}_1}{dt} = \alpha_1 \frac{\delta \bar{\sigma}_1^k}{\delta x^k} - \alpha_1 n \bar{f}_* + \alpha_1 n j_{21} (\bar{v}_2 - \bar{v}_1) + \rho_1 \bar{g} \\ \rho_2 \frac{d_2 \bar{v}_2}{dt} = \alpha_2 \frac{\delta \bar{\sigma}_2^k}{\delta x^k} - \alpha_2 n \bar{f}_* + \alpha_2 n j_{21} (\bar{v}_2 - \bar{v}_1) + \rho_2 \bar{g} \end{array} \right. , \quad (2)$$

где $\bar{\sigma}^k$ – тензор напряжений в жидкой фазе; $f_* = f_m + f_\mu$; f_m – сила присоединенных масс из-за инерционных эффектов; f_μ – сила трения из-за вязкости несущей жидкости; g – ускорение силы тяжести.

Для двумерного стационарного течения смеси при стоксовом обтекании уравнения систем (1)-(2) можно переписать следующим образом

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\delta u_1 \alpha_1}{\delta x} + \frac{\delta v_1 \alpha_1}{\delta y} = 0, \\ \frac{\delta u_2 \alpha_2}{\delta x} + \frac{\delta v_2 \alpha_2}{\delta y} = 0, \\ \frac{\delta P_1}{\delta x} - \frac{9}{2R^2} \alpha_2 \mu_1 (u_1 - u_2) + \rho_1^0 g \sin \varphi = 0, \\ \frac{\delta P_1}{\delta y} - \frac{9}{2R^2} \alpha_2 \mu_1 (v_2 - v_1) + \rho_1^0 g \cos \varphi = 0, \\ \frac{\delta P_1}{\delta x} - \frac{9}{2R^2} \alpha_1 \mu_1 (u_1 - u_2) + \rho_2^0 g \sin \varphi = 0, \\ \frac{\delta P_1}{\delta y} - \frac{9}{2R^2} \alpha_1 \mu_1 (v_2 - v_1) + \rho_2^0 g \cos \varphi = 0. \end{array} \right. , \quad (3)$$

где u – составляющие скоростей по оси x , а v по y ; φ – угол наклона перфорированной плоскости.

Определим для системы (3) граничные условия, включающие описание состояния потока на ситовой и свободной поверхностях.

Для жидкой фазы условие протекания сквозь сито при низком содержании твердых частиц

$$v_1|_{y=0} = -\mu \sqrt{2gH(x)},$$

где μ – коэффициент скорости при истечении жидкости сквозь отверстия сита [3-5]; $H(x)$ – глубина потока.

В соответствии с [6] определим граничное условие для просеивания твердых сферических частиц радиусом R сквозь ситовую поверхность с радиусом отверстий D

$$v_2|_{y=0} = \frac{2}{9} \frac{R^2 g}{\mu_1} (\rho_1^0 - \rho_2^0) \left(\frac{2R}{D} - 1 \right) \cos \varphi.$$

Условие для свободной поверхности потока будет иметь вид

$$\frac{\rho_1 v_1 + \rho_2 v_2}{\rho_1 u_1 + \rho_2 u_2} \Big|_{y=H(x)} = H'(x).$$

Кроме того, для поверхности потока должно выполняться условие отсутствия избыточного давления, т.е.

$$P_1|_{y=H(x)} = 0.$$

Полученные граничные условия можно дополнить начальными условиями

$$\alpha_1|_{x=0} = \alpha_1(0), \alpha_2|_{x=0} = \alpha_2(0), (\alpha_1 + \alpha_2) = 1.$$

Принято допущение о линейности зависимости

f_μ от \bar{W}_{12} , при которой

$Re_{12} < 1$. В этом случае уравнения (3) справедливы не для всех значений параметров потока $R, \rho_1^0, W_{12},$

μ_1 . Для определения области значений параметров смеси твердых частиц в воде построен график зависимости

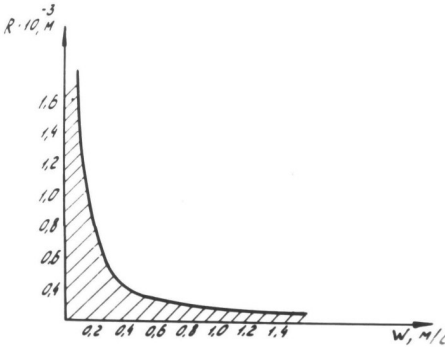


Рис. 2. Зависимость $F(R, W)$ для $Re = 0,3$

$F(R, W)$ для $Re_{12} = 0,3$

(рис. 2). Заштрихованная область соответствует R, W при которых $Re_{12} < 0,3$ [7, 8]. Таким образом, для $Re_{12} < 1$ при линейной зависимости сопротивления при обтекании частиц с учетом этих составляющих уравнения (1) и (2) запишем следующим образом

$$\begin{cases} \frac{\delta\alpha_1 u_1}{\delta x} + \frac{\delta\alpha_1 v_1}{\delta y} = 0, \\ \frac{\delta\alpha_2 u_2}{\delta x} + \frac{\delta\alpha_2 v_2}{\delta y} = 0, \\ \alpha_1 \frac{\delta P_1}{\delta x} + \alpha_1 n \left\{ \frac{2}{3} \pi R^3 \rho_1^0 \left[u_1 \frac{du_1}{dx} + u_2 \frac{du_2}{dx} \right] + \frac{1}{2} C_\mu \pi R^3 \rho_1^0 \left(\sqrt{u_1^2 + v_1^2} - \sqrt{u_2^2 + v_2^2} \right) (u_1 - u_2) \right\} + \\ + \alpha_1 \frac{\delta P_1}{\delta y} + \alpha_1 n \left\{ \frac{2}{3} \pi R^3 \rho_1^0 \left[u_1 \frac{dv_1}{dy} + u_2 \frac{dv_2}{dy} \right] + \frac{1}{2} C_\mu \pi R^3 \rho_1^0 \left(\sqrt{u_1^2 + v_1^2} - \sqrt{u_2^2 + v_2^2} \right) (v_1 - v_2) \right\} - \rho_1 g \cos \varphi = 0, \\ \alpha_2 \frac{\delta P_1}{\delta x} - \alpha_2 n \left\{ \frac{2}{3} \pi R^3 \rho_1^0 \left[u_1 \frac{du_1}{dx} + u_2 \frac{du_2}{dx} \right] + \frac{1}{2} C_\mu \pi R^3 \rho_1^0 \left(\sqrt{u_1^2 + v_1^2} - \sqrt{u_2^2 + v_2^2} \right) (u_1 - u_2) \right\} + \rho_2 g \sin \varphi = 0, \\ \alpha_2 \frac{\delta P_1}{\delta y} + \alpha_2 n \left\{ \frac{2}{3} \pi R^3 \rho_1^0 \left[u_1 \frac{dv_1}{dy} + u_2 \frac{dv_2}{dy} \right] + \frac{1}{2} C_\mu \pi R^3 \rho_1^0 \left(\sqrt{u_1^2 + v_1^2} - \sqrt{u_2^2 + v_2^2} \right) (v_1 - v_2) \right\} - \rho_2 g \cos \varphi = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Получим дифференциальное уравнение, связывающее глубину потока двухкомпонентной смеси со всеми основными параметрами фаз, ситовой поверхности и начальных условий

$$\begin{aligned}
 & -\rho_2\mu\sqrt{2gH(x)} + \frac{2}{9}\frac{\rho_2gR^2}{\mu_1}\left(\frac{2R}{D}-1\right)(\rho_1^0-\rho_2^0)\cos\varphi = \\
 & = H'(x)\left[\frac{\rho_1a_1(0)\alpha_1(0)}{1-\alpha_2(0)h\frac{\exp(-k_2x)}{H(x)}} + \frac{\rho_2b_1(0)H(x)}{h\exp(-k_2x)}\right]
 \end{aligned} \tag{5}$$

Сделаем следующие обозначения

$$\begin{aligned}
 A' &= -\frac{\sqrt{2g}\rho_1^0\mu}{a_1(0)\alpha_1(0)\rho_1^0 + b_1(0)\alpha_2(0)\rho_2^0}; \\
 B' &= -\frac{\sqrt{2g}\rho_1^0\mu h\alpha_2(0)}{a_1(0)\alpha_1(0)\rho_1^0 + b_1(0)\alpha_2(0)\rho_2^0}; \\
 C' &= -\frac{\frac{2}{9\mu}\alpha_2(0)gh(\rho_1^0-\rho_2^0)\left(\frac{2R}{D}-1\right)\cos\varphi R^2}{a_1(0)\alpha_1(0)\rho_1^0 + b_1(0)\alpha_2(0)\rho_2^0}.
 \end{aligned} \tag{6}$$

При этих обозначениях уравнение (5) примет следующий вид

$$H'(x) = AH^{\frac{1}{2}}(x) - BH^{\frac{1}{2}}(x)e^{-k_2x} + CH^{-1}(x)e^{-k_2x}. \tag{7}$$

Нелинейное дифференциальное уравнение (7) не относится ни к одному из частных типов, линеаризации не поддается, и поэтому интегрирование его в квадратурах не представляется возможным. Для численного интегрирования уравнения (7) приведем его к более удобному виду. С этой целью обозначим $k_2x = y$, $\frac{dH(x)}{dx} = k_2\frac{dH(y)}{dy}$; $e^{-k_2x} = e^{-y}$. В этих обозначениях уравнение (6) запишем следующим образом

$$H'(y)AH^{\frac{1}{2}}(y) - BH^{\frac{1}{2}}(y)e^{-y} + CH^{-1}(y)e^{-y}, \tag{8}$$

где $A = A'/k^2$, $B = B'/k^2$, $C = C'/k^2$.

Для решения уравнения (8) воспользуемся методом Эйлера (методом ломаных). В правой части уравнения (8) стоят члены, учитывающие параметры обеих фаз и начальные условия. Как видно из (6) первые два члена правой части учитывают также просачивание первой (жидкой) фазы сквозь сито, а третий член содержит в себе условие просеивания твердых частиц. Причем при равенстве плотностей фаз $C = 0$. Этот случай соответствует, очевидно однокомпонентной жидкости. Вообще говоря, функция $C(R)$ существенно нелинейна. Характер зависимости $C = C(R)$ иллюстрируется графиком на рис. 3.

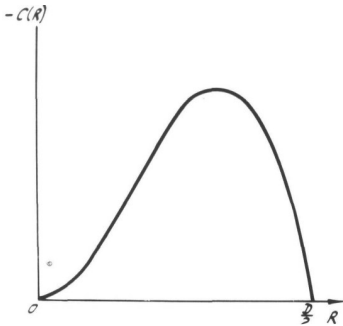


Рис. 3. Зависимость коэффициента C от радиуса частиц R

Как уже отмечалось, при $R=0$ имеем однокомпонентную жидкость. При малых радиусах и малой массе скорость осаждения частиц и прохождения сквозь сито невелика. С увеличением размеров частиц масса их возрастает пропорционально, а сопротивление сита еще небольшое. Экстремум функции достигается при соотношении $R/D \approx 0,3$. Это условие оптимальности массового расхода в процессе просеивания. Когда $R \rightarrow D/2$ функция C/R круто

стремится к нулю и просеивание резко ухудшается. Этот случай характеризует условие просеивания так называемых "трудных" зерен.

Уравнение (8) решалось с использованием программного комплекса. Значения постоянных параметров полагались следующими: $\rho_1^0 = 10^3$ кг/м³; $\rho_2^0 = 2 \cdot 10^3$ кг/м³; $\alpha_1(0) = 0,9$; $\alpha_2(0) = 0,1$; $\mu_1 = 10^{-3}$ кг/см (для воды [9]); $\varphi = 15^\circ$; $\cos \varphi = 0,97$; $h = 0,1$ м; $D = 10^{-3}$ м; $d_1(0) = b_1(0) = 1$ м/с.

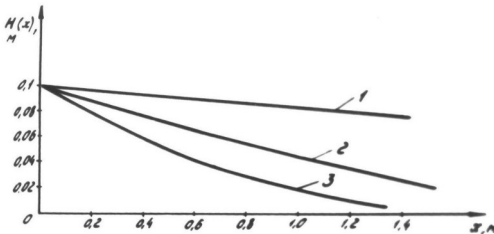


Рис. 4. Изменение глубины потока суспензии $H(x)$ по длине сита x в зависимости от коэффициента μ

На рис. 4 приведен график изменения глубины потока суспензии по длине сита в зависимости от значения коэффициента μ для частиц радиусом 0,4 мм и коэффициента $k_2 = 0,01$ м⁻¹.

На другом графике (рис. 5) показано изменение глубины потока вдоль сита в зависимости от радиуса частиц. Очевидно различие зависимости влияния коэффициента скорости при истечении и радиуса частиц. Это объясняется невысоким содержанием твердых частиц в потоке ($\alpha_2 = 0,1$). С увеличением содержания частиц и соответственно, уменьшением содержания жидкости перераспределяется степень влияния на характеристики потока коэффициентов μ_1 и k_2 .

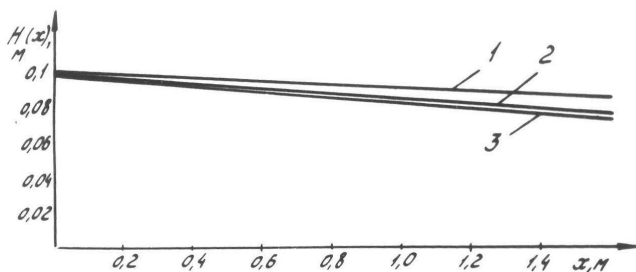


Рис. 5. Изменение глубины потока в зависимости от радиуса частиц

На рис. 6 показана поверхность $H = f(R, k_2)$. Эта зависимость построена для указанных выше постоянных параметров, а также для $\mu = 0,05$, $x = 1,5$ м по уравнению (8). При малых R поверхность достаточно пологая, при $R = (0,3 - 0,4)D$ имеет явно выраженный экстремум, а при $R \rightarrow D/2$ характеризуется наибольшей крутизной. Это естественно объясняется соответствием участка $R \rightarrow D/2$ условию прохождения "трудных" зерен.

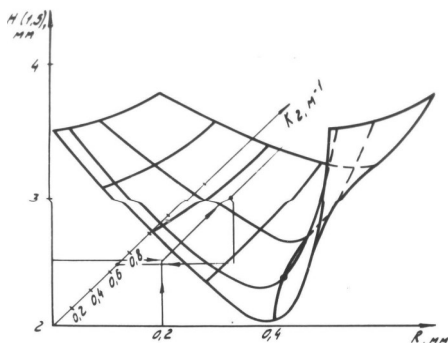


Рис. 6. Зависимость $H(R, k_2)$ при $\mu = 0,05$; $x = 1,5$

Для практического использования полученных результатов могут быть предложены следующие рекомендации.

Коэффициент скорости истечения жидкости μ сквозь отверстия сита зависит только от вида жидкости и геометрических характеристик сита. Поэтому определение коэффициента μ , может быть не связано с идентификацией, проводящейся на промышленном грохоте. Коэффициент μ может быть легко определен в лабораторных условиях.

Алгоритм исчисления технологических показателей заключается в следующем. По имеющейся информации о μ , R и измеренной на длине сита x_i глубине $H(x_i)$ по формуле (7) определяется коэффициент k_2 , по которому в свою очередь подсчитывается извлечение твердой фракции под сито. Геометрически этот алгоритм иллюстрируется на рис. 6 с помощью стрелок.

Выводы.

1. Разработана и исследована математическая модель двухфазного потока "жидкость – твердые частицы" на наклонной ситовой поверхности, математическая модель основана на теории многоскоростного континуума движения многофазных сред. Составленные уравнения связывают характеристики потока с параметрами жидкой и твердой фаз, параметрами ситовой поверхности и начальными условиями. Здесь под характеристиками потока понимаются: глубина по длине сита, давление, содержание фаз, скорости компонентов.

2. В результате решения модельных уравнений удалось получить (без учета малых величин) выражения для глубины потока по его длине, давления в потоке, скоростей компонентов по длине сита, содержания фаз по длине сита.

3. Полученное дифференциальное уравнение (7) связывающее глубину потока с перечисленными выше параметрами, интегрировалось численным методом Эйлера.

4. Новизна полученных результатов исследования заключается в том, что в результате учета взаимовлияния жидкой и твердой фаз в потоке, в единой математической модели удалось связать характеристики потока с параметрами жидкой ($\rho_1^0, \mu_1, \alpha_1$) и твердой фаз (ρ_2^0, R, α_2) условиями прохождения жидкости (μ) и твердых частиц (k_2) сквозь сито, условиями на загрузке $[h, a_1(0), b_1(0), \alpha_1(0), \alpha_2(0)]$ характеристиками сита (D, y).

1. Нигматулин Р. И. Динамика многофазных сред / Р. И. Нигматулин. – М.: Наука, 1987. – Ч. 1. – 464 с. 2. Исследование динамики рабочего органа вибромашины и технологической нагрузки в жидкости / Потураев В. Н., Борохович Д. Е., Шевченко Г. А., Лысенко Г. М. // Вибрационные эффекты и процессах добычи и переработки минерального сырья: сб. науч.тр. – Киев: Наук. думка, 1989. – С. 123-132. 3. Барский Л. А. Системный анализ в обогащении полезных ископаемых / Барский Л. А., Козин В. З. – М.: Недра, 1978. – 486 с. 4. Каминяр А. А. Гидромеханика в инферной практике / А. А. Каминяр, О. М. Яхно. – Киев: Техника, 1987. – 175 с. 5. Яворский Б. М. Справочник по физике / Б. М. Яворский, А. А. Детлаф. – М.: Наука, 1974. – 944 с. 6. Непомнящий Е. А. Некоторые результаты теоретического анализа процесса грохочения / Е. А. Непомнящий // Обогащение руд, 1962. – № 5. – С. 29-35. 7. Найфэ А. Х. Методы возмущений / А. Х. Найфэ. – М.: Мир, 1975. – 456 с. 8. Андреев С. Е. Дробление, измельчения и грохочение полезных ископаемых / Андреев С. Е., Зверевич В. В., Перов В. А. – М.: Недра, 1974. 9. Соболев И. И. ЛП-поиск и задачи оптимального конструирования / И. И. Соболев, Р. В. Статников // Проблемы случайного поиска. – Рига: Зинатне, 1972. – № 1. – 92 с.

Рецензент: д.т.н., профессор Маланчук З. Р. (НУВГП)