

УДК 626.862.3

Власюк А. П., д.т.н., професор, Кузло М. Т., к.т.н., доцент, Кушнір І. О., студент ФПМ і КІС (Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне)

### МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ВОДОНАСИЧЕНОГО ҐРУНТОВОГО МАСИВУ У ПРОЦЕСІ ЙОГО ОСУШЕННЯ

Отримано аналітичну залежність, що описує положення депресійної поверхні в ґрунтовому масиві при відкачуванні води в паралельних горизонтальних дренах з різними швидкостями. Розроблено математичну модель напружено-деформованого стану водонасиченого ґрунтового масиву в процесі його осушення, на основі якої проведені чисельні експерименти та їх аналіз.

Ключові слова: депресійна поверхня, горизонтальні дрени, напружено-деформований стан.

Получено аналитическую зависимость, что описывает положение депрессионной поверхности в грунтовом массиве при откачке воды в параллельных горизонтальных дренах с разными скоростями. Разработано математическую модель напряжённо-деформированного состояния водонасыщенного грунтового массива в процессе его осушения, на основании которой выполнены численные эксперименты и их анализ.

Ключевые слова: депрессионная поверхность, горизонтальные дрены, напряжённо-деформированное состояние.

The analytical dependence describing location of depression surface in the soil massif under pumping of water in the parallel horizontal drains with different speeds has been obtained. The mathematical model of water-saturated soil massif's stressed-deformed state in the process of its drainage has been elaborated, on the basis of which numerous experiments and their analysis have been carried out.

Keywords: depression surface, horizontal drains, stressed-deformed state.

При проектуванні об'єктів будівництва на водонасичених ґрунтових основах виникає необхідність у визначенні їх напружено-деформованого стану (НДС) [1-5]. Основними кількісними характеристиками НДС ґрунту основ є напруження, деформації та зміщення. Знаючи НДС ґрунту основи споруди, можна прогнозувати стійкість, надійність та безпеку експлуатації даного об'єкта.

Суттєві зміни НДС викликають: наповнення або спорожнення водоймищ;

фільтрація рідини; пониження рівня ґрунтових вод тощо. Пониження рівня підземних вод викликає значне осідання поверхні землі на великих площах, які іноді займають сотні квадратних кілометрів.

Фізико-хімічні процеси також здійснюють значний вплив на ґрунтові масиви та розміщені на них споруди. Особливо у зв'язку з використанням все більш глибоких горизонтів земної кори як основи масивних споруд і середовища для влаштування підземних споруд.

**Аналіз останніх досліджень** показав, що в науковій літературі розв'язано достатню кількість задач розрахунку НДС ґрунтових масивів [1-6]. Однак питання оцінки НДС водонасичених ґрунтових масивів у процесі їх осушення на будь-який момент часу недостатньо вивчено.

**Метою роботи** є отримання теоретичних залежностей, що описують положення депресійної поверхні в ґрунтовому масиві та вертикальні зміщення його поверхні при пониженні рівня води в горизонтальних відкритих дренах. При цьому в одній горизонтальній дрени пониження рівня води буде відбуватися з однією швидкістю, а в другій – з іншою.

**Постановка задачі.** Розглянемо задачу пониження рівня ґрунтових вод у ґрунтовому масиві шляхом відкачування води з відкритих горизонтальних дрен (рис. 1).

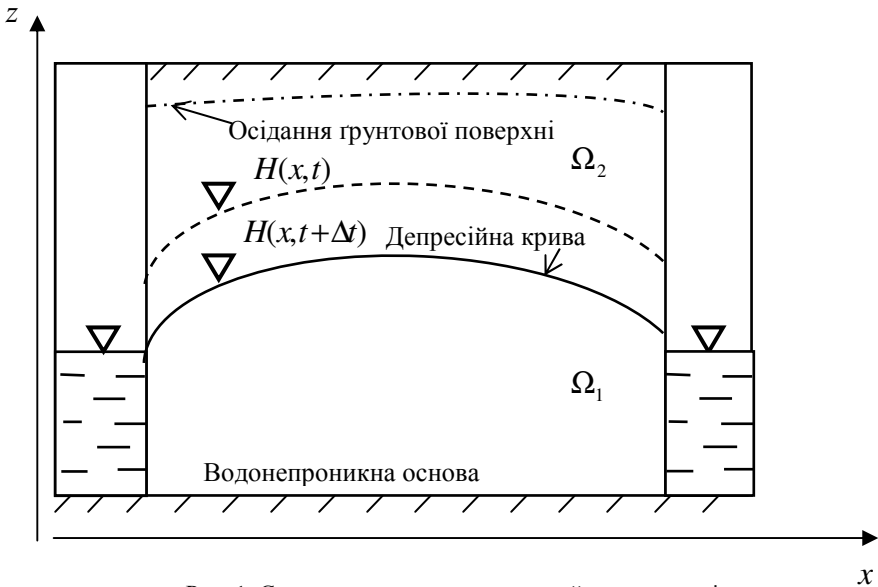


Рис. 1. Схема ґрунтового масиву при його осущенні

У зв'язку з осушенням верхньої частини ґрунту та інтенсивними фільтра-

ційними потоками води змінюється НДС ґрунтового масиву, в результаті чого поверхня ґрунту починає просідати.

У результаті розв'язку задачі необхідно: розрахувати поле напорів води у ґрунтовому масиві; визначити НДС ґрунтового масиву; отримати зміщення верхньої межі ґрунтового масиву.

**Математична модель та розв'язання задачі.** Для проведення математичного моделювання даних процесів зроблено наступні припущення:

- 1) розглядається двовимірна задача;
- 2) ґрунтовий масив має форму прямокутника, обмеженого з обох боків горизонтальними дренами, а знизу водонепроникною нерухомою основою;
- 3) пониження рівня води в горизонтальних дренах відбувається за лінійним законом зі швидкостями  $V_0$  та  $V_r$ ;
- 4) навантаження на поверхні ґрунту відсутні;
- 5) ґрунт розглядається як двофазне середовище;
- 6) ґрунт вважається пружним середовищем, тому його можна розглядати в межах лінійної теорії пружності.

Для того, щоб знайти вертикальні зміщення ґрунтової поверхні, необхідно знати напори в усіх точках ґрунтового масиву на певний момент часу.

Для визначення напорів у змінній області  $\Omega_1 = \{(x, z, t) \mid x \in (0, r), z \in (0, h(x, t)), t > 0\}$  знайдемо розв'язок диференціального рівняння нестационарної фільтрації, що має вигляд

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{kh_{col}}{\mu} \left( \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} \right) \quad (1)$$

при таких крайових умовах:

$$H(x, z, 0) = H_1(x, z), \quad (2)$$

$$H(0, z, t) = H_0(0) - V_0 t, \quad (3)$$

$$H(r, z, t) = H_0(l) - V_r t, \quad (4)$$

$$\frac{\partial H(x, 0, t)}{\partial z} = 0, \quad (5)$$

$$H(x, h(x, t), t) = h(x, t), \quad (6)$$

де  $H(x, z, t)$  – напір води в момент часу  $t$  у точці  $(x, z)$  ґрунтового масиву;  $k$  – коефіцієнт фільтрації;  $h_{col}$  – потужність фільтраційного потоку;  $\mu$  – коефіцієнт водовіддачі;  $H_1(x, z)$  – розподіл напорів у початковий момент часу;  $H_0(x)$  – висота розміщення ґрунтових вод у початковий момент часу (відома функція);  $h(x, t)$  – висота розміщення ґрунтових вод у момент часу  $t$ .

Введемо позначення

$$a^2 = \frac{kh_{col}}{\mu}. \quad (7)$$

Тоді рівняння (1) набуде вигляду:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = a^2 \left( \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} \right) \quad (8)$$

Для розв'язання цієї задачі потрібно знайти  $h(x, t)$  та  $H_1(x, z)$ . У зв'язку з цим розглянемо дві допоміжні задачі.

**Задача 1.** В області  $\Omega = \{(x, t) \mid x \in (0, r), t > 0\}$  знайти розв'язок диференціального рівняння

$$\frac{\partial h}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \quad (9)$$

при таких крайових умовах:

$$h(x, 0) = H_0(x), \quad (10)$$

$$h(0, t) = H_0(0) - V_0 t, \quad (11)$$

$$h(r, t) = H_0(r) - V_r t. \quad (12)$$

**Задача 2.** В області  $\Omega = \{(x, z) \mid x \in (0, r), z \in (0, H_0(x))\}$  знайти розв'язок диференціального рівняння

$$\frac{\partial^2 H_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_1}{\partial z^2} = 0 \quad (13)$$

при таких крайових умовах:

$$\frac{\partial H_1(x, 0)}{\partial z} = 0, \quad (14)$$

$$H_1(0, z) = H_0(0), \quad (15)$$

$$H_1(r, z) = H_0(r), \quad (16)$$

$$H_1(x, H_0(x)) = H_0(x). \quad (17)$$

Розв'яжемо задачу (9)-(12). Вимагаємо, щоб  $H_0(x) \in C^{(1)}(0, r)$ . Зведемо однорідне рівняння (9) до неоднорідного, але з однорідними граничними умовами [7]. Для цього проведемо заміну

$$h(x, t) = v(x, t) + H_0(0) - V_0 t + \frac{H_0(r) - V_r t - (H_0(0) - V_0 t)}{r} x. \quad (18)$$

Отримаємо наступну крайову задачу:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + f(x), \quad (19)$$

$$v(x, 0) = H_0(x) - H_0(0) - \frac{H_0(r) - H_0(0)}{r} x, \quad (20)$$

$$v(0, t) = v(r, t) = 0, \quad (21)$$

де 
$$f(x) = V_0 + \frac{V_r - V_0}{r} x. \quad (22)$$

Позначимо  $v(x,0) = \varphi(x)$ . Розв'язок даної задачі на основі [7] має вигляд:

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{r}\right)^2 t} \sin \frac{\pi n}{r} x + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_0^t e^{-\left(\frac{\pi n a}{r}\right)^2 (t-\tau)} f_n(\tau) d\tau \right) \sin \frac{\pi n}{r} x, \quad (23)$$

де 
$$A_n = \frac{2}{r} \int_0^r \varphi(\xi) \sin \frac{\pi n}{r} \xi d\xi, \quad f_n(t) = \frac{2}{r} \int_0^r f(\xi, t) \sin \frac{\pi n}{r} \xi d\xi. \quad (24)$$

Функції  $f_n$  у даному випадку обчислюються наступним чином:

$$f_n = \frac{2}{\pi n} (V_0 - V_r (-1)^n). \quad (25)$$

Підставивши  $f_n$  в отриманий розв'язок та звівши доданки біля однакових  $\sin\left(\frac{\pi n}{r} x\right)$ , отримаємо:

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \left( A_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{r}\right)^2 t} + \frac{2}{\pi n} (V_0 - V_r (-1)^n) \int_0^t e^{-\left(\frac{\pi n a}{r}\right)^2 (t-\tau)} d\tau \right) \times \sin\left(\frac{\pi n}{r} x\right) \right). \quad (26)$$

Повернувшись до заміни, отримаємо:

$$h(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \left( A_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{r}\right)^2 t} + \frac{2}{\pi n} (V_0 - V_r (-1)^n) \int_0^t e^{-\left(\frac{\pi n a}{r}\right)^2 (t-\tau)} d\tau \right) \times \sin\left(\frac{\pi n}{r} x\right) \right) + H_0(0) - V_0 t + \frac{H_0(r) - V_r t - (H_0(0) - V_0 t)}{r} x. \quad (27)$$

Після спрощення, рівняння (27) можна записати у вигляді

$$h(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \left( A_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{r}\right)^2 t} + \frac{2}{\pi n} (V_0 - V_r (-1)^n) \left(\frac{r}{\pi n a}\right)^2 \left(1 - e^{-\left(\frac{\pi n a}{r}\right)^2 t}\right) \right) \times \right)$$

$$\times \sin\left(\frac{\pi n}{r} x\right) + H_0(0) - V_0 t + \frac{H_0(r) - V_r t - (H_0(0) - V_0 t)}{r} x, \quad (28)$$

де

$$A_n = \frac{2}{r} \int_0^r H_0(x) \sin\left(\frac{\pi n}{r} x\right) dx + \frac{2}{\pi n} (-H_0(0) + H_0(r)(-1)^n). \quad (29)$$

Розв'язок даної задачі отримано також з використанням чисельних методів – за допомогою явної та неявної різницевих схем [8]. В усіх трьох результатах отримано достатньо добре узгодження в межах заданої точності.

Отримаємо розв'язок задачі (13)-(17). Для цього здійснимо чисельне конформне відображення області  $\Omega = \{(x, z) \mid x \in (0, r), z \in (0, H_0(x))\}$  на параметричний прямокутник [9]. Побудована сітка конформного відображення є гідродинамічною сіткою, тобто розв'язком задачі. Значення напорів на лініях рівних напорів рівні значенням у верхніх точках цих ліній, які, в свою чергу, рівні вертикальній координаті поверхні ґрунтових вод.

Для розв'язання задачі (8),(2)-(6) перейдемо до змінних  $\xi, \eta$ :

$$\xi = \xi(x, z), \eta = \eta(x, z). \quad (30)$$

З умов Коші – Рімана маємо:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial z}, \frac{\partial \xi}{\partial z} = -\frac{\partial \eta}{\partial x}. \quad (31)$$

Підставивши (30) у (8), отримаємо:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial t} = & a^2 \left( \frac{\partial^2 H}{\partial \xi^2} \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial H}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial \eta^2} \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial H}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \right. \\ & + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 H}{\partial \xi^2} \left( \frac{\partial \xi}{\partial z} \right)^2 + \frac{\partial H}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial \eta^2} \left( \frac{\partial \eta}{\partial z} \right)^2 + \\ & \left. + \frac{\partial H}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{\partial \eta}{\partial z} \right). \quad (32) \end{aligned}$$

Врахувавши те, що  $\xi(x, z)$  та  $\eta(x, z)$  – спряжені гармонічні функції, матимемо:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = a^2 \left( \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right) \left( \frac{\partial^2 H}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial \eta^2} \right). \quad (33)$$

При повільному відкачуванні води із дренажів  $\frac{\partial H}{\partial t} \approx 0$ . Тоді рівняння (33)

набуде вигляду:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial \eta^2} = 0. \quad (34)$$

У цьому випадку побудована при чисельному конформному відображенні сітка буде гідродинамічною сіткою, тобто розв'язком задачі (8),(2)-(6). Розв'язання буде аналогічним, як розв'язання задачі (14)-(18). При цьому використовуємо отримані точні формули для  $h(x, t)$  (для обчислення застосовуються заміна суми ряду скінченною сумою, інтегрування методом парабол). Перевагою даного підходу є те, що ми можемо знаходити напори й зміщення в будь-який момент часу, не знаходячи їх у попередні моменти часу (лише у початковий момент часу).

Розв'яжемо задачу (8), (2)-(6) без спрощення рівняння (33). Для розв'язання параболічного рівняння (33) застосуємо два методи: ітераційний та локально-одновимірну схему О.А. Самарського [8].

Між модулями похідних справедливе співвідношення

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 = \frac{1}{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)^2}. \quad (35)$$

З урахуванням (35) (33) набуде вигляду:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{a^2}{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)^2} \left( \frac{\partial^2 H}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial \eta^2} \right). \quad (36)$$

Як початкову умову для обох методів використаємо гідродинамічну сітку, побудовану для задачі (13)-(17).

Для (36) і відповідних крайових умов побудуємо неявну різницеву схему та отримаємо її розв'язок ітераційним методом. Нехай знайдено значення функції  $H$  у вузлах сітки області у площині  $xOz$  на перших  $k$  кроках по часу,  $k \geq 0$ . На  $(k+1)$  кроці задаємо початкові значення функції  $H$  на кожній вертикалі рівні значенню напору у верхній точці, тобто координаті РГВ.

Провівши різницеву апроксимацію рівняння (36), отримаємо:

$$\frac{H_{ij}^{k+1} - H_{ij}^k}{\tau} = \frac{a^2}{\left(\frac{x_{i+1,j}^{k+1} - x_{i-1,j}^{k+1}}{2h_1}\right)^2 + \left(\frac{z_{i+1,j}^{k+1} - z_{i-1,j}^{k+1}}{2h_1}\right)^2} \times$$

$$\times \left( \frac{H_{i+1,j}^{k+1} - 2H_{ij}^{k+1} + H_{i-1,j}^{k+1}}{h_1^2} + \frac{H_{i,j+1}^{k+1} - 2H_{ij}^{k+1} + H_{i,j-1}^{k+1}}{h_2^2} \right), \quad (37)$$

де  $h_1$  – крок сітки по  $\xi$ ,  $h_2$  – крок по  $\eta$ .

Позначимо

$$b_{ij}^{k+1} = \frac{a^2 \tau}{\left( \frac{x_{i+1,j}^{k+1} - x_{i-1,j}^{k+1}}{2h_1} \right)^2 + \left( \frac{z_{i+1,j}^{k+1} - z_{i-1,j}^{k+1}}{2h_1} \right)^2}. \quad (38)$$

Величина  $b_{ij}^{k+1}$  не змінюється під час ітерацій, залежить лише від конформної сітки на  $(k+1)$  кроці по часу.

Для уточнення значення функції виразимо  $H_{ij}^{k+1}$  з рівняння (37).

$$H_{ij}^{k+1} = \frac{\left( H_{ij}^k + b_{ij}^{k+1} \left( \frac{H_{i+1,j}^{k+1} + H_{i-1,j}^{k+1}}{h_1^2} + \frac{H_{i,j+1}^{k+1} + H_{i,j-1}^{k+1}}{h_2^2} \right) \right)}{1 + 2b_{ij}^{k+1} \left( \frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2} \right)}. \quad (39)$$

Ітерації проводимо до тих пір, поки максимальна різниця між значеннями функції на двох послідовних ітераціях більша від заданої точності  $\mathcal{E}$ . Але значення  $H_{ij}^k$  відоме в попередній момент часу на попередній сітці. Для знаходження  $H_{ij}^k$  у вузлі  $(i, j)$  поточної сітки використаємо інтерполяцію по чотирикутнику попередньої сітки, в який потрапляє вузол  $(i, j)$  поточної сітки. Цю операцію потрібно проводити на початку  $(k+1)$  кроку, бо сітка під час ітерацій, а отже, й розташування вузла  $(i, j)$  незмінні. Хоча невеликим ітераційного методу для параболічних рівнянь є проблема швидкодії, в даному випадку вона несуттєва, бо побудова ітераційним методом конформної сітки займає значно більше часу, ніж уточнення значення функції у її вузлах (при однаковій точності). Збіжність ітераційного методу досягалась у процесі чисельного експерименту.

Побудуємо для (36) локально-одновимірну схему О.А. Самарського. Провівши різницеву апроксимацію рівняння (36) на  $(k+0,5)$  кроці, отримаємо:



$$\frac{H_{ij}^{k+0,5} - H_{ij}^k}{0,5\tau} = \frac{a^2}{\left(\frac{x_{i+1,j}^k - x_{i-1,j}^k}{2h_1}\right)^2 + \left(\frac{z_{i+1,j}^k - z_{i-1,j}^k}{2h_1}\right)^2} \times \times \frac{H_{i+1,j}^{k+0,5} - 2H_{ij}^{k+0,5} + H_{i-1,j}^{k+0,5}}{h_1^2}. \quad (40)$$

Як видно з рівняння, ми не будемо сітку на половинному кроці по часу і нехтуємо різницею сіток на двох сусідніх кроках по часу.

На  $(k+1)$  кроці апроксимація рівняння (36) має вигляд:

$$\frac{H_{ij}^{k+1} - H_{ij}^{k+0,5}}{0,5\tau} = \frac{a^2}{\left(\frac{x_{i+1,j}^{k+1} - x_{i-1,j}^{k+1}}{2h_1}\right)^2 + \left(\frac{z_{i+1,j}^{k+1} - z_{i-1,j}^{k+1}}{2h_1}\right)^2} \times \times \frac{H_{i,j+1}^{k+1} - 2H_{ij}^{k+1} + H_{i,j-1}^{k+1}}{h_2^2}. \quad (41)$$

Граничні умови для рівняння (41)

$$H_{i0}^{k+1} = H_{i1}^{k+1}, \quad H_{im}^{k+1} = h(ih_1, (k+1)\tau), \quad (42)$$

де  $h(x, t)$  – знайдений розв'язок задачі (9)-(12).

Граничні умови для рівняння (40) можна визначити із (41). Згідно з (3), (4),

$$\left. \frac{\partial H}{\partial z} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial H}{\partial z} \right|_{x=r} = 0, \text{ тому при } i=0 \text{ і при } i=n \text{ права частина рівняння}$$

(41) рівна 0, тобто

$$H_{0j}^{k+0,5} = H_{0j}^{k+1}, \quad H_{nj}^{k+0,5} = H_{nj}^{k+1}, \quad (43)$$

де  $n$  – кількість кроків по  $\xi$ ,  $H_{0j}^{k+1}$  та  $H_{nj}^{k+1}$  визначаються із (3) та (4) відповідно.

Розв'язок задачі на кроках  $(k+0,5)$ ,  $(k+1)$  знаходимо методом прогонки,  $k \geq 0$ .

Перевагами ітераційного методу над методом Самарського є врахування зміни сітки на послідовних кроках по часу, а також те, що зі зменшенням розмірів області  $\Omega_1$  при використанні ітераційного методу можна зменшувати кількість ліній сітки по вертикалі (кількість кроків по  $\eta$ ).

Після проведення чисельних експериментів отримано наступні результати: значення зміщень, розраховані за методом, описаним нижче, при використанні трьох вище описаних способів знаходження напорів практично однакові (майже непомітні візуально, лінії поверхні землі в різні моменти часу накладаються). Крім того, похибки не накопичуються з часом, тобто всі три результати практично рівнозначні. Враховуючи те, що при великій кількості спрощуючих припущень знаходження зміщень не претендує на високу точність, можна зробити висновок про доцільність застосування простого і дуже швидкого методу на основі рівняння (34) при повільному відкачуванні води із дрен.

Рух вільної поверхні ґрунтових вод веде до виникнення різноманітних об'ємних сил і зміни НДС ґрунтового масиву [4]. Нерідко трапляється так, що інтенсивне пониження рівня ґрунтових вод призводить до виникнення в ґрунтових масивах значних осідань поверхні землі і, як наслідок цього, деформації будівель та споруд у вигляді тріщин, а іноді їх руйнування.

Розглянемо зміщення ґрунту в точці  $x = x_1$  у момент часу  $t = t_1$ . Для знаходження зміщень в областях ґрунтового масиву нижче рівня ґрунтових вод  $\Omega_1$  та вище рівня ґрунтових вод  $\Omega_2$  маємо наступну крайову задачу [4]

$$k_1 \frac{d^2 u_1}{dz^2} = \gamma_{sb} + \gamma_w \left( \frac{dh}{dz} - 1 \right), x \in (0, l_1), \quad (44)$$

$$k_2 \frac{d^2 u_2}{dz^2} = \gamma_n, x \in (l_1, l), \quad (45)$$

$$u_1(0) = 0, \quad (46)$$

$$\frac{du_2(l)}{dz} = 0, \quad (47)$$

$$u_1(l_1) = u_2(l_1), \quad (48)$$

$$k_1 \frac{du_1(l_1)}{dz} = k_2 \frac{du_2(l_1)}{dz}, \quad (49)$$

де  $\gamma_{sb}$  – питома вага ґрунту, що знаходиться у зваженому стані;  $\gamma_n$  – питома вага ґрунту, що знаходиться у природному стані;  $\gamma_w$  – питома вага води;  $h(z)$  – напір у точці  $(x_1, z)$  на момент часу  $t_1$ ;  $k_1 = \lambda_1 + 2\mu_1, k_2 = \lambda_2 + 2\mu_2$  – пружні сталі;  $u_1(z), u_2(z)$  – зміщення точки, яка у момент  $t_1$  знаходиться у точці  $(x_1, z)$ ;  $l_1$  – рівень ґрунтових вод, а  $l$  – шукана вертикальна координата верхньої точки ґрунтового масиву в точці

$x = x_1$  у момент часу  $t = t_1$ ; індекси 1, 2 біля  $k, \lambda, \mu, u$  означають розміщення точки  $(x_1, z)$  нижче або вище РГВ відповідно.

Інтегруючи рівняння (44), (45), отримуємо:

$$\frac{du_1}{dz} = \frac{\gamma_{sb}z}{k_1} + \frac{\gamma_w}{k_1}(h(z) - z) + c_1, \quad (50)$$

$$u_1 = \frac{\gamma_{sb}z^2}{2k_1} + \frac{\gamma_w}{k_1} \left( \int_0^z h(\xi) d\xi - \frac{z^2}{2} \right) + c_1z + c_2, \quad (51)$$

$$\frac{du_2}{dz} = \frac{\gamma_n z}{k_2} + c_3, \quad (52)$$

$$u_2 = \frac{\gamma_n z^2}{2k_2} + c_3z + c_4. \quad (53)$$

Підставляючи (51) у (46), отримуємо:

$$c_2 = 0.$$

Підставляючи (52) у (47), отримуємо:

$$c_3 = -\frac{\gamma_n l}{k_2}. \quad (54)$$

Із (49), (50), (52), (54) маємо:

$$\gamma_{sb}l_1 + \gamma_w(h(l_1) - l_1) + c_1k_1 = \gamma_n l_1 - \gamma_n l.$$

Враховуючи, що  $h(l_1) = l_1$ , отримаємо:

$$c_1 = \frac{1}{k_1}(\gamma_n(l_1 - l) - \gamma_{sb}l_1).$$

Підставляючи в (48) (51), (53), знайдені константи  $c_1, c_2, c_3$ , маємо:

$$\begin{aligned} & \frac{\gamma_{sb}l_1^2}{2k_1} + \frac{\gamma_w}{k_1} \left( \int_0^{l_1} h(\xi) d\xi - \frac{l_1^2}{2} \right) + c_1l_1 = \frac{\gamma_n l_1^2}{2k_2} - \frac{\gamma_n l_1 l}{k_2} + c_4, \\ c_4 = & \frac{\gamma_{sb}l_1^2}{2k_1} + \frac{\gamma_w}{k_1} \left( \int_0^{l_1} h(\xi) d\xi - \frac{l_1^2}{2} \right) + \frac{l_1}{k_1}(\gamma_n(l_1 - l) - \gamma_{sb}l_1) - \frac{\gamma_n l_1^2}{2k_2} + \\ & + \frac{\gamma_n l_1 l}{k_2} = \frac{1}{k_1} \left( \gamma_w \int_0^{l_1} h(\xi) d\xi - \frac{\gamma_w l_1^2}{2} - \frac{\gamma_{sb}l_1^2}{2} + \gamma_n(l_1^2 - l_1 l) \right) + \frac{\gamma_n l_1}{k_2} \left( l - \frac{l_1}{2} \right). \end{aligned}$$

Оскільки ми враховуємо всі фактори тиску на ґрунт, зміщення знаходяться відносно деякого початкового рівня  $l_0$ . Цей початок відліку необхідно знайти, використовуючи відоме в початковий момент значення  $l$ .

$$u_2(l) = l - l_0. \quad (55)$$

Із (53), (54) отримаємо:

$$u_2(l) = \frac{\gamma_n l^2}{2k_2} - \frac{\gamma_n l^2}{k_2} + c_4 = -\frac{\gamma_n l^2}{2k_2} + c_4. \quad (56)$$

Підставляючи (55), знайдене значення  $c_4$  у рівняння (56), отримаємо:

$$l_0 = l + \frac{\gamma_n l^2}{2k_2} - \frac{1}{k_1} \left( \gamma_w \int_0^{l_1} h(\xi) d\xi - \frac{\gamma_w l_1^2}{2} - \frac{\gamma_{sb} l_1^2}{2} + \gamma_n (l_1^2 - l_1 l) \right) - \frac{\gamma_n l_1 l}{k_2} + \frac{\gamma_n l_1^2}{2k_2}. \quad (57)$$

Підставивши в отриману формулу значення відомих величин у початковий момент часу, знайдемо  $l_0$ .

Для знаходження  $l$  у будь-який момент часу з (57) отримуємо квадратне рівняння:

$$\left( \frac{\gamma_n}{2k_2} \right) l^2 + \left( \frac{\gamma_n l_1}{k_1} + 1 - \frac{\gamma_n l_1}{k_2} \right) l + \left( -l_0 + \frac{\gamma_n l_1^2}{2k_2} + \frac{1}{k_1} \left( -\gamma_w \int_0^{l_1} h(\xi) d\xi + \frac{\gamma_w l_1^2}{2} + \frac{\gamma_{sb} l_1^2}{2} - \gamma_n l_1^2 \right) \right) = 0. \quad (58)$$

Розв'язавши квадратне рівняння (58), знайдемо вертикальну координату деформованої верхньої межі ґрунту для довільних значень  $x$  і  $t$ .

$$l = \frac{k_2}{\gamma_n} \left( -1 + \gamma_n l_1 \left( \frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1} \right) + \left( \left( -1 + \gamma_n l_1 \left( \frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1} \right) \right)^2 - \left( \frac{2\gamma_n}{k_2} \right) \times \left( -l_0 + \frac{\gamma_n l_1^2}{2k_2} + \frac{1}{k_1} \left( -\gamma_w \int_0^{l_1} h(\xi) d\xi + \frac{\gamma_w l_1^2}{2} + \frac{\gamma_{sb} l_1^2}{2} - \gamma_n l_1^2 \right) \right) \right)^{\frac{1}{2}} \right). \quad (59)$$

Ми вибрали знак “+” перед коренем квадратним з урахуванням того, що  $l > 0$ .

Для знаходження інтегралу від функції напору  $\int_0^{l_1} h(\xi) d\xi$  використаємо побудовану конформну сітку. Алгоритм знаходження інтегралу в точці  $x = x_1$  у момент часу  $t = t_1$  можна записати таким чином. На конформній сітці для часу  $t = t_1$  проводимо вертикальну пряму  $x = x_1$ . У точках перетину цієї прямої з лініями  $\eta = const$  сітки знаходимо значення напору за допомогою лінійної інтерполяції між сусідніми вузлами. Знаходимо інтеграл за допомогою формули центральних прямокутників для нерівномірно розміщених вузлів. Цей алгоритм просто реалізується на мові програмування з використанням аналітичної геометрії.

Для прикладу виконано числові розрахунки при наступних вхідних даних:

$$\lambda_1 = 25220 \text{ кг} / \text{м}^2; \lambda_2 = 30000 \text{ кг} / \text{м}^2; \mu_1 = 16800 \text{ кг} / \text{м}^2;$$

$$\mu_2 = 20000 \text{ кг} / \text{м}^2; \mu = 0,15; k_x = k_z = 0,5 \text{ м} / \text{добу};$$

$$\gamma_{np.} = 16,5 \text{ кН} / \text{м}^3; \gamma_w = 9,8 \text{ кН} / \text{м}^3; r = 100 \text{ і}; l(x,0) = 40 \text{ м};$$

$$V_0 = 0,1 \text{ м} / \text{добу}; V_1 = 0,2 \text{ м} / \text{добу}.$$

Результати обчислень наведені на рис. 2-4, на яких показано поверхню ґрунту та гідродинамічну (або конформну) сітку на початковий момент часу та через 36 і 72 доби після пониження рівня води в горизонтальних дренах. Із рисунків видно, що разом зі зниженням рівня ґрунтових вод відбувається осідання поверхні ґрунтового масиву.

**Висновки.** В даній роботі було розглянуто лише одну з багатьох інженерних задач оцінки напружено-деформованого стану водонасиченого ґрунтового масиву в процесі його осушення шляхом відкачування води з горизонтальних дренах. Розглянуто двовимірну математичну модель, що у багатьох випадках може відповідати вимогам практики. У даній роботі було значно спрощено математичні моделі процесів фільтрації, що, безумовно, впливає на точність визначення НДС. Виконані числові експерименти показують вплив пониження рівня ґрунтових вод на НДС.

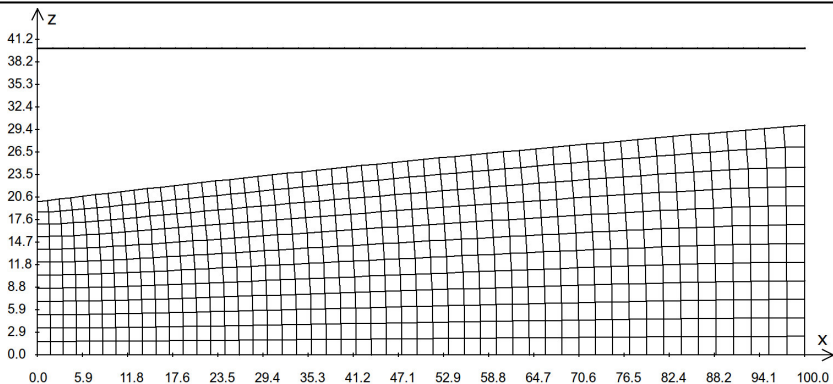


Рис. 2. Поверхня ґрунтового масиву та гідродинамічна сітка в початковий момент часу  $t = 0$

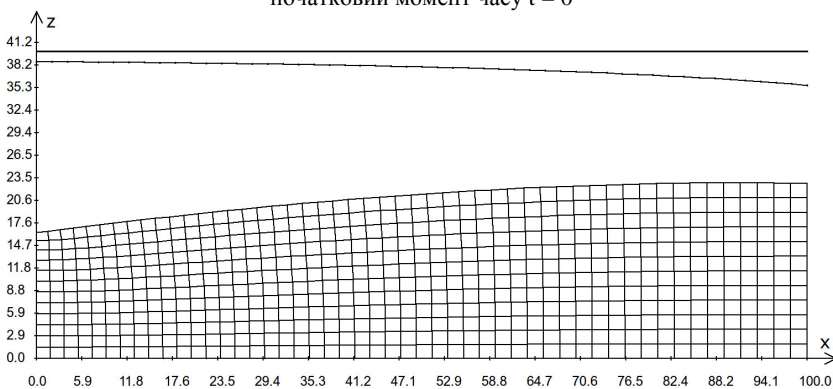


Рис. 3. Поверхня ґрунтового масиву та конформна сітка при пониженні рівня води в горизонтальних дренах на момент часу  $t = 36$  діб

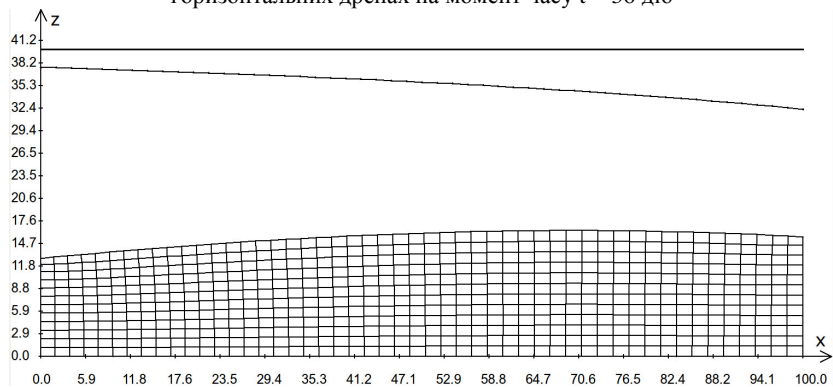


Рис. 4. Поверхня ґрунтового масиву та конформна сітка при пониженні рівня води в горизонтальних дренах на момент часу  $t = 72$  доби

Розглянуту задачу можна розширювати для врахування різноманітних факторів, що дозволить отримати точніший розв'язок. Простий розв'язок, що розглянутий в даній роботі, має перевагу в можливості знаходження НДС ґрунтового масиву в будь-який окремий момент часу без знаходження НДС в попередні моменти часу. Складніші розв'язки, розглянуті в роботі, дозволяють отримати зміщення поверхні ґрунту при досить високих швидкостях відкачування води із дрен. Подальшим дослідженням у даному напрямку є отримання відповідних рішень для багатопарових ґрунтових масивів.

1. Сергиенко И. В. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах / Сергиенко И. В., Скопецкий В. В., Дейнека В. С. – К., 1991. – 432 с.
2. Иванов П. Л. Грунты и основания гидротехнических сооружений. Механика грунтов / П. Л. Иванов. – М.: Высш. шк., 1991. – 447 с.
3. Кузло М. Т. Про деякі математичні моделі напружено-деформованого стану ґрунтових масивів в процесі руху вільної поверхні ґрунтових вод / М. Т. Кузло, І. А. Філатова // Вісник НУВГП. – Рівне, 2005. – Вип. 2(30). – С. 282-287.
4. Філатова І. А. Математичне моделювання напружено-деформованого стану багатопарового ґрунтового масиву при наявності рівня ґрунтових вод / І. А. Філатова // Вісник Київського ун-ту. Сер. «Фіз.-мат. науки». – Вип. 1. – 2008. – С. 161-165.
5. Філатова І. А. Математичне моделювання одновимірної задачі напружено-деформованого стану шару ґрунту з врахуванням масопереносу при фільтрації сольових розчинів / І. А. Філатова // Вісник НУВГП. – Рівне, 2009. – Вип. 4(36), Ч. 2 – С. 332-339.
6. Власюк І. А. Математичне моделювання напружено-деформівного стану ґрунтових масивів у процесі руху вільної поверхні / І. А. Власюк, М. Т. Кузло / Тези Всеукр. наук. конф. “Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики”. – Львів, 2004. – С. 36.
7. Тихонов А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – М.: Наука, 1972. – 735 с.
8. Самарский А. А. Теория разностных схем / А. А. Самарский. – М.: Наука, 1977. – 656 с.
9. Власюк А. П. Автоматическое построение конформных и квазиконформных отображений двухсвязных и трёхсвязных областей / А. П. Власюк, В. Г. Михальчук. – Киев, 1991. – 56 с. – (Препр. / АН Украины. Ин-т математики; 91.57).

Рецензент: к.т.н., доцент Жеребятъев О. В. (НУВГП)