УДК 628.315.3+519.63

Сівак В. М., к.т.н., доцент (Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне), **Пригорницький Д. О., к.т.н., доцент, Климюк Ю. Є., к.т.н., викладач** (Рівненський державний гуманітарний університет, м. Рівне)

ПОБУДОВА ПРОСТОРОВОГО ФІЛЬТРАЦІЙНОГО ПОЛЯ ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ ФІЛЬТРІВ ІЗ ОДНОРІДНИМ ЗАВАНТАЖЕННЯМ

Розроблено алгоритм числової побудови просторового фільтраційного поля для фільтрів із однорідним завантаженням, що мають форму криволінійних паралелепіпедів, обмежених двома еквіпотенціальними поверхнями і чотирма поверхнями течії, які задаються параметрично. Наведено результати числових розрахунків.

Разработан алгоритм числового построения пространственного фильтрационного поля для фильтров с однородной загрузкой, которые имеют форму криволинейных параллелепипедов, ограниченных двумя эквипотенциальными поверхностями и четырьмя поверхностями течения, которые задаются параметрически. Приведены результаты числовых расчетов.

The algorithm for numerical construction of spatial filtration field for filters with homogeneous loading, which are curvilinear parallelepipeds, bounded by two equipotential surfaces and four surfaces of current, which are given parametrically. The results of numerical calculations are presented.

Вступ. При дослідженні просторових процесів доочистки води шляхом її фільтрування через пористі завантаження виникає чимало труднощів, пов'язаних не лише з постановкою або формуванням самої задачі за рахунок побудови системи диференціальних рівнянь у частинних похідних і накладання відповідних граничних умов, а й з врахуванням геометричної складності області, у якій розв’язується задача, що, зокрема, включає її повздовжню та поперечну викривленості. Тому у зв'язку із цим для випадків областей, обмежених еквіпотенціальними (або квазіеквіпотенціальними) поверхнями і поверхнями течії, у рівняннях конвективної дифузії й граничних умовах доцільно перейти до нових незалежних змінних – координат області комплексного (квазікомплексного) потенціалу. Також, завдяки цьому, суттєво спрощується запис задачі, а її розв’язання полягає в послідовному розв’язанні фільтраційної задачі, яка в [1-3] зводиться до побудови просторових аналогів конформних (квазіконформних) відображень одно- та двозв’язних областей, обмежених еквіпотенціальними (квазіеквіпотенціальними) поверхнями та поверхнями течії, на відповідні прямокутні паралелепіпеди, що автоматично дозволяє вирішити проблему побудови розрахункової сітки у фізичній

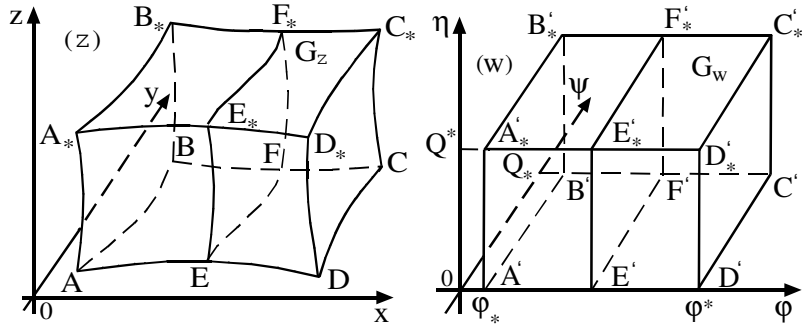
області, знаходженні повної витрати та поля швидкості фільтрації, і задачі типу «конвекція-фільтрація-масообмін» в області просторової комплексної змінної, наближений розв'язок якої у випадку переважання конвективних і сорбційних процесів над дифузійними та десорбційними шукається з використанням асимптотичних методів та побудовою відповідних примежових поправок [4-6]. У цій роботі нами адаптовано алгоритм, описаний в [1], для безпосереднього застосування його до побудови просторового фільтраційного поля у фільтрах, що мають форму криволінійних паралелепіпедів, обмежених двома еквіпотенціальними поверхнями і чотирма поверхнями течії, у випадку, коли поверхні задаються параметрично.

Постановка задачі. Для фільтра із однорідним пористим завантаженням, що має форму криволінійного паралелепіпеда $G_z = ABCDA_*B_*C_*D_*$ ($z=(x,y,z)$), обмеженого гладкими, ортогональними між собою в кутових точках та вздовж ребер, двома еквіпотенціальними поверхнями $ABB_*A_* = \{z:\ x = x_1(\alpha_1,\beta_1),\ y = y_1(\alpha_1,\beta_1),\ z = z_1(\alpha_1,\beta_1),\ \alpha_1^* \le \alpha_1 \le \alpha_1^{**},\ \beta_1^* \le \beta_1 \le \beta_1^{**}\}$, $CDD_*C_* = \{z:\ x = x_2(\alpha_2,\beta_2),\ y = y_2(\alpha_2,\beta_2),\ z = z_2(\alpha_2,\beta_2),\ \alpha_2^* \le \alpha_2 \le \alpha_2^{**},\ \beta_2^* \le \beta_2 \le \beta_2^{**}\}$ і чотирма поверхнями течії $BCC_*B_* = \{z:\ x = x_3(\alpha_3,\beta_3),\ y = y_3(\alpha_3,\beta_3),\ z = z_3(\alpha_3,\beta_3),\ \alpha_3^* \le \alpha_3 \le \alpha_3^{**},\ \beta_3^* \le \beta_3 \le \beta_3^{**}\}$, $ADD_*A_* = \{z:\ x = x_4(\alpha_4,\beta_4),\ y = y_4(\alpha_4,\beta_4),\ z = z_4(\alpha_4,\beta_4),\ \alpha_4^* \le \alpha_4 \le \alpha_4^{**},\ \beta_4^* \le \beta_4 \le \beta_4^{**}\}$, $ABCD = \{z:\ x = x_5(\alpha_5,\beta_5),\ y = y_5(\alpha_5,\beta_5),\ z = z_5(\alpha_5,\beta_5),\ \alpha_5^* \le \alpha_5 \le \alpha_5^{**},\ \beta_5^* \le \beta_5 \le \beta_5^{**}\}$, $A_*B_*C_*D_* = \{z:\ x = x_6(\alpha_6,\beta_6),\ y = y_6(\alpha_6,\beta_6),\ z = z_6(\alpha_6,\beta_6),\ \alpha_6^* \le \alpha_6 \le \alpha_6^{**},\ \beta_6^* \le \beta_6 \le \beta_6^{**}\}$, розглянемо модельну задачу, що описує процес фільтрації:

$$\vec{v} = \kappa \cdot grad\ \varphi,\ div\ \vec{v} = 0, \tag{1}$$

$$\varphi\big|_{ABB_*A_*} = \varphi_*,\ \varphi\big|_{CDD_*C_*} = \varphi^*,\ \varphi'_{\vec{n}}\big|_{ADD_*A_* \cup BCC_*B_* \cup ABCD \cup A_*B_*C_*D_*} = 0, \tag{2}$$

де $\varphi = \varphi(x,y,z)$ і $\vec{v}(v_x, v_y, v_z)$ – відповідно потенціал та вектор швидкості фільтрації ($0 < \varphi_* \le \varphi \le \varphi^* < \infty$, $|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2(x,y,z) + v_y^2(x,y,z) + v_z^2(x,y,z)} > v_* >> 0$), κ – коефіцієнт фільтрації ($\kappa = const$), $\vec{n}$ – зовнішня нормаль до відповідної поверхні.



а) б)

Рис. 1. Просторова область фільтрації G_z (а) та відповідна їй область комплексного потенціалу G_w (б)

Шляхом введення пари функцій $\psi = \psi(x, y, z)$, $\eta = \eta(x, y, z)$ (просторово комплексно спряжених із функцією $\varphi = \varphi(x, y, z)$), таких, що $\kappa \cdot grad\,\varphi(x, y, z) = grad\,\psi(x, y, z) \times grad\,\eta(x, y, z)$ [7], і заміною останньої з граничних умов (2) на умови: $\psi\big|_{ADD_*A_*} = 0$, $\psi\big|_{BCC_*B_*} = Q_*$, $\eta\big|_{ABCD} = 0$, $\eta\big|_{A_*D_*C_*B_*} = Q^*$, задачу (1)-(2) замінимо більш загальною задачею на знаходження просторового аналогу конформного відображення області G_z на відповідну область комплексного потенціалу $G_w = \{w = (\varphi, \psi, \eta):\ \varphi_* \le \varphi \le \varphi^*,\ 0 \le \psi \le Q_*,\ 0 \le \eta \le Q^*\}$ (рис. 1, б), де Q_*, Q^*, $Q = Q_* \cdot Q^*$ – невідомі величини:

$$
\begin{cases}
\kappa \cdot \varphi'_x = \psi'_y \cdot \eta'_z - \psi'_z \cdot \eta'_y, \quad \kappa \cdot \varphi'_y = \psi'_z \cdot \eta'_x - \psi'_x \cdot \eta'_z, \quad \kappa \cdot \varphi'_z = \psi'_x \cdot \eta'_y - \psi'_y \cdot \eta'_x; \\
\varphi(x, y, z)\big|_{ABB_*A_*} = \varphi\big(x_1(\alpha_1, \beta_1), y_1(\alpha_1, \beta_1), z_1(\alpha_1, \beta_1)\big) = \tilde{\varphi}(\alpha_1, \beta_1) = \varphi_*, \\
\varphi(x, y, z)\big|_{DCC_*D_*} = \varphi\big(x_2(\alpha_2, \beta_2), y_2(\alpha_2, \beta_2), z_2(\alpha_2, \beta_2)\big) = \tilde{\tilde{\varphi}}(\alpha_2, \beta_2) = \varphi^*, \\
\psi(x, y, z)\big|_{ADD_*A_*} = \psi\big(x_3(\alpha_3, \beta_3), y_3(\alpha_3, \beta_3), z_3(\alpha_3, \beta_3)\big) = \tilde{\psi}(\alpha_3, \beta_3) = 0, \\
\psi(x, y, z)\big|_{BCC_*B_*} = \psi\big(x_4(\alpha_4, \beta_4), y_4(\alpha_4, \beta_4), z_4(\alpha_4, \beta_4)\big) = \tilde{\tilde{\psi}}(\alpha_4, \beta_4) = Q_*, \\
\eta(x, y, z)\big|_{ABCD} = \eta\big(x_5(\alpha_5, \beta_5), y_5(\alpha_5, \beta_5), z_5(\alpha_5, \beta_5)\big) = \tilde{\eta}(\alpha_5, \beta_5) = 0, \\
\eta(x, y, z)\big|_{A_*B_*C_*D_*} = \eta\big(x_6(\alpha_6, \beta_6), y_6(\alpha_6, \beta_6), z_6(\alpha_6, \beta_6)\big) = \tilde{\tilde{\eta}}(\alpha_6, \beta_6) = Q^*, \\
(x, y, z) \in G_z, \quad \alpha_s^* \le \alpha_s \le \alpha_s^{**}, \quad \beta_s^* \le \beta_s \le \beta_s^{**}, \quad s = \overline{1,6}.
\end{cases}
\tag{3}
$$

Відповідний просторовий аналог оберненої до (3) крайової задачі на конформне відображення $z = z(w)$ області G_w на G_z при невідомих значеннях величин Q_*, Q^*, Q запишеться у вигляді:

$$\begin{cases} x'_\varphi = \kappa\cdot\left(y'_\psi\cdot z'_\eta - z'_\psi\cdot y'_\eta\right),\quad y'_\varphi = \kappa\cdot\left(z'_\psi\cdot x'_\eta - x'_\psi\cdot z'_\eta\right),\quad z'_\varphi = \kappa\cdot\left(x'_\psi\cdot y'_\eta - y'_\psi\cdot x'_\eta\right); \\ x(\varphi_*,\psi,\eta) = x_1(\alpha_1,\beta_1),\ y(\varphi_*,\psi,\eta) = y_1(\alpha_1,\beta_1),\ z(\varphi_*,\psi,\eta) = z_1(\alpha_1,\beta_1), \\ x\left(\varphi^*,\psi,\eta\right) = x_2(\alpha_2,\beta_2),\ y\left(\varphi^*,\psi,\eta\right) = y_2(\alpha_2,\beta_2),\ z\left(\varphi^*,\psi,\eta\right) = z_2(\alpha_2,\beta_2), \\ x(\varphi,0,\eta) = x_3(\alpha_3,\beta_3),\ y(\varphi,0,\eta) = y_3(\alpha_3,\beta_3),\ z(\varphi,0,\eta) = z_3(\alpha_3,\beta_3), \\ x(\varphi,Q_*,\eta) = x_4(\alpha_4,\beta_4),\ y(\varphi,Q_*,\eta) = y_4(\alpha_4,\beta_4),\ z(\varphi,Q_*,\eta) = z_4(\alpha_4,\beta_4), \\ x(\varphi,\psi,0) = x_5(\alpha_5,\beta_5),\ y(\varphi,\psi,0) = y_5(\alpha_5,\beta_5),\ z(\varphi,\psi,0) = z_5(\alpha_5,\beta_5), \\ x\left(\varphi,\psi,Q^*\right) = x_6(\alpha_6,\beta_6),\ y\left(\varphi,\psi,Q^*\right) = y_6(\alpha_6,\beta_6),\ z\left(\varphi,\psi,Q^*\right) = z_6(\alpha_6,\beta_6), \\ (\varphi,\psi,\eta)\in G_w,\quad \alpha_s^* \le \alpha_s \le \alpha_s^{**},\quad \beta_s^* \le \beta_s \le \beta_s^{**},\quad s=\overline{1,6}. \end{cases} \tag{4}$$

Різницевий аналог задачі та алгоритм числового розв'язання. Аналогічно [1] в області G_w вводимо рівномірну ортогональну сітку

$$G_w^\gamma = \left\{\left(\varphi_i,\psi_j,\eta_k\right):\quad \varphi_i = \varphi_* + \Delta\varphi\cdot i,\quad i=\overline{0,n+1};\quad \psi_j = \Delta\psi\cdot j,\quad j=\overline{0,m+1};\right.$$

$$\left.\eta_k = \Delta\eta\cdot k,\ k=\overline{0,l+1};\ \Delta\varphi = \frac{\varphi^*-\varphi_*}{n+1},\ \Delta\psi = \frac{Q_*}{m+1},\ \Delta\eta = \frac{Q^*}{l+1};\ \gamma = \frac{\Delta\varphi}{\Delta\psi\cdot\Delta\eta}\right\},$$

де n, m, $l\in\mathbb{N}$ – параметри розбиття області комплексного потенціалу, а $\Delta\varphi$, $\Delta\psi$, $\Delta\eta$ – кроки сітки відповідно по змінних φ, ψ та η (рис. 1, б).

Домовимося за позначення, які будуть використані пізніше:

$$\begin{gathered} x_{i,j,k} = x(\varphi_i,\psi_j,\eta_k),\ y_{i,j,k} = y(\varphi_i,\psi_j,\eta_k),\ z_{i,j,k} = z(\varphi_i,\psi_j,\eta_k), \\ \alpha_{s,j} = \alpha_s\left(\psi_j\right),\ \beta_{s,k} = \beta_s\left(\eta_k\right)\ \left(s=\overline{1,2},\ j=\overline{0,m+1},\ k=\overline{0,l+1}\right), \\ \alpha_{s,i} = \alpha_s\left(\varphi_i\right),\ \beta_{s,k} = \beta_s\left(\eta_k\right)\ \left(s=\overline{3,4},\ i=\overline{0,n+1},\ k=\overline{0,l+1}\right), \\ \alpha_{s,i} = \alpha_s\left(\varphi_i\right),\ \beta_{s,j} = \beta_s\left(\psi_j\right)\ \left(s=\overline{5,6},\ i=\overline{0,n+1},\ j=\overline{0,m+1}\right). \end{gathered} \tag{5}$$

Для числової побудови відображення прямокутного паралелепіпеда G_w на криволінійну область G_z (при відповідності вершин) запишемо різницеві аналоги перших трьох рівнянь (4) у рівномірній сітковій області G_w^γ через ліві та праві різницеві схеми відповідно:

$$\begin{cases} x_{i,j,k} = x_{i-1,j,k} + \dfrac{\kappa\cdot\gamma}{4}\left(\left(y_{i,j+1,k}-y_{i,j-1,k}\right)\left(z_{i,j,k+1}-z_{i,j,k-1}\right) - \left(y_{i,j,k+1}-y_{i,j,k-1}\right)\left(z_{i,j+1,k}-z_{i,j-1,k}\right)\right), \\ y_{i,j,k} = y_{i-1,j,k} + \dfrac{\kappa\cdot\gamma}{4}\left(\left(x_{i,j,k+1}-x_{i,j,k-1}\right)\left(z_{i,j+1,k}-z_{i,j-1,k}\right) - \left(x_{i,j+1,k}-x_{i,j-1,k}\right)\left(z_{i,j,k+1}-z_{i,j,k-1}\right)\right), \\ z_{i,j,k} = z_{i-1,j,k} + \dfrac{\kappa\cdot\gamma}{4}\left(\left(x_{i,j+1,k}-x_{i,j-1,k}\right)\left(y_{i,j,k+1}-y_{i,j,k-1}\right) - \left(x_{i,j,k+1}-x_{i,j,k-1}\right)\left(y_{i,j+1,k}-y_{i,j-1,k}\right)\right), \\ i=\overline{1,n},\quad j=\overline{1,m},\quad k=\overline{1,l}; \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases} x_{i,j,k} = x_{i+1,j,k} - \dfrac{\kappa\cdot\gamma}{4}\Big(\big(y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k}\big)\big(z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1}\big) - \big(y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1}\big)\big(z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k}\big)\Big), \\ y_{i,j,k} = y_{i+1,j,k} - \dfrac{\kappa\cdot\gamma}{4}\Big(\big(x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1}\big)\big(z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k}\big) - \big(x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k}\big)\big(z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1}\big)\Big), \\ z_{i,j,k} = z_{i+1,j,k} - \dfrac{\kappa\cdot\gamma}{4}\Big(\big(x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k}\big)\big(y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1}\big) - \big(x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1}\big)\big(y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k}\big)\Big), \\ i = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,m}, \quad k = \overline{1,l}. \end{cases} \tag{7}$$

Із врахуванням введених позначень (5), крайові умови, які визначають область G_z, запишемо у вигляді системи:

$$\begin{cases} x_{0,j,k} = x\big(\varphi_*, \psi_j, \eta_k\big) = x_1\big(\alpha_1\big(\psi_j\big), \beta_1\big(\eta_k\big)\big) = x_1\big(\alpha_{1,j}, \beta_{1,k}\big), \\ y_{0,j,k} = y\big(\varphi_*, \psi_j, \eta_k\big) = y_1\big(\alpha_1\big(\psi_j\big), \beta_1\big(\eta_k\big)\big) = y_1\big(\alpha_{1,j}, \beta_{1,k}\big), \\ z_{0,j,k} = z\big(\varphi_*, \psi_j, \eta_k\big) = z_1\big(\alpha_1\big(\psi_j\big), \beta_1\big(\eta_k\big)\big) = z_1\big(\alpha_{1,j}, \beta_{1,k}\big), \\ x_{n+1,j,k} = x\big(\varphi^*, \psi_j, \eta_k\big) = x_2\big(\alpha_2\big(\psi_j\big), \beta_2\big(\eta_k\big)\big) = x_2\big(\alpha_{2,j}, \beta_{2,k}\big), \\ y_{n+1,j,k} = y\big(\varphi^*, \psi_j, \eta_k\big) = y_2\big(\alpha_2\big(\psi_j\big), \beta_2\big(\eta_k\big)\big) = y_2\big(\alpha_{2,j}, \beta_{2,k}\big), \\ z_{n+1,j,k} = z\big(\varphi^*, \psi_j, \eta_k\big) = z_2\big(\alpha_2\big(\psi_j\big), \beta_2\big(\eta_k\big)\big) = z_2\big(\alpha_{2,j}, \beta_{2,k}\big), \\ x_{i,0,k} = x\big(\varphi_i, 0, \eta_k\big) = x_3\big(\alpha_3\big(\varphi_i\big), \beta_3\big(\eta_k\big)\big) = x_3\big(\alpha_{3,i}, \beta_{3,k}\big), \\ y_{i,0,k} = y\big(\varphi_i, 0, \eta_k\big) = y_3\big(\alpha_3\big(\varphi_i\big), \beta_3\big(\eta_k\big)\big) = y_3\big(\alpha_{3,i}, \beta_{3,k}\big), \\ z_{i,0,k} = z\big(\varphi_i, 0, \eta_k\big) = z_3\big(\alpha_3\big(\varphi_i\big), \beta_3\big(\eta_k\big)\big) = z_3\big(\alpha_{3,i}, \beta_{3,k}\big), \\ x_{i,m+1,k} = x\big(\varphi_i, Q_*, \eta_k\big) = x_4\big(\alpha_4\big(\varphi_i\big), \beta_4\big(\eta_k\big)\big) = x_4\big(\alpha_{4,i}, \beta_{4,k}\big), \\ y_{i,m+1,k} = y\big(\varphi_i, Q_*, \eta_k\big) = y_4\big(\alpha_4\big(\varphi_i\big), \beta_4\big(\eta_k\big)\big) = y_4\big(\alpha_{4,i}, \beta_{4,k}\big), \\ z_{i,m+1,k} = z\big(\varphi_i, Q_*, \eta_k\big) = z_4\big(\alpha_4\big(\varphi_i\big), \beta_4\big(\eta_k\big)\big) = z_4\big(\alpha_{4,i}, \beta_{4,k}\big), \\ x_{i,j,0} = x\big(\varphi_i, \psi_j, 0\big) = x_5\big(\alpha_5\big(\varphi_i\big), \beta_5\big(\psi_j\big)\big) = x_5\big(\alpha_{5,i}, \beta_{5,j}\big), \\ y_{i,j,0} = y\big(\varphi_i, \psi_j, 0\big) = y_5\big(\alpha_5\big(\varphi_i\big), \beta_5\big(\psi_j\big)\big) = y_5\big(\alpha_{5,i}, \beta_{5,j}\big), \\ z_{i,j,0} = z\big(\varphi_i, \psi_j, 0\big) = z_5\big(\alpha_5\big(\varphi_i\big), \beta_5\big(\psi_j\big)\big) = z_5\big(\alpha_{5,i}, \beta_{5,j}\big), \\ x_{i,j,l+1} = x\big(\varphi_i, \psi_j, Q^*\big) = x_6\big(\alpha_6\big(\varphi_i\big), \beta_6\big(\psi_j\big)\big) = x_6\big(\alpha_{6,i}, \beta_{6,j}\big), \\ y_{i,j,l+1} = y\big(\varphi_i, \psi_j, Q^*\big) = y_6\big(\alpha_6\big(\varphi_i\big), \beta_6\big(\psi_j\big)\big) = y_6\big(\alpha_{6,i}, \beta_{6,j}\big), \\ z_{i,j,l+1} = z\big(\varphi_i, \psi_j, Q^*\big) = z_6\big(\alpha_6\big(\varphi_i\big), \beta_6\big(\psi_j\big)\big) = z_6\big(\alpha_{6,i}, \beta_{6,j}\big), \\ i = \overline{0,n+1}, \quad j = \overline{0,m+1}, \quad k = \overline{0,l+1}. \end{cases} \tag{8}$$

З метою забезпечення ортогональності сітки за рівняння зв'язку приграничних вузлів із граничними використаємо умови ортогональності ліній течії та еквіпотенціальних ліній до відповідних ділянок границь області G_z, які через їх громіздкість не наводитимемо.

Інваріант відображення γ визначається в процесі розрахунку аналогічно [1] за формулою

$$\gamma = \frac{\kappa}{(n+1)(m+1)(l+1)} \sum_{i,j,k=0}^{n,m,l} \gamma_{i,j,k} , \tag{9}$$

де

$$\begin{aligned}
\gamma_{i,j,k} = 4\Bigg(& \sqrt{\left(x_{i+1,j,k}-x_{i,j,k}\right)^2+\left(y_{i+1,j,k}-y_{i,j,k}\right)^2+\left(z_{i+1,j,k}-z_{i,j,k}\right)^2} + \\
& +\sqrt{\left(x_{i+1,j+1,k}-x_{i,j+1,k}\right)^2+\left(y_{i+1,j+1,k}-y_{i,j+1,k}\right)^2+\left(z_{i+1,j+1,k}-z_{i,j+1,k}\right)^2} + \\
& +\sqrt{\left(x_{i+1,j,k+1}-x_{i,j,k+1}\right)^2+\left(y_{i+1,j,k+1}-y_{i,j,k+1}\right)^2+\left(z_{i+1,j,k+1}-z_{i,j,k+1}\right)^2} + \\
& +\sqrt{\left(x_{i+1,j+1,k+1}-x_{i,j+1,k+1}\right)^2+\left(y_{i+1,j+1,k+1}-y_{i,j+1,k+1}\right)^2+\left(z_{i+1,j+1,k+1}-z_{i,j+1,k+1}\right)^2}\Bigg) / \\
& \Bigg(\Bigg(\sqrt{\left(x_{i,j+1,k}-x_{i,j,k}\right)^2+\left(y_{i,j+1,k}-y_{i,j,k}\right)^2+\left(z_{i,j+1,k}-z_{i,j,k}\right)^2} + \\
& +\sqrt{\left(x_{i+1,j+1,k}-x_{i+1,j,k}\right)^2+\left(y_{i+1,j+1,k}-y_{i+1,j,k}\right)^2+\left(z_{i+1,j+1,k}-z_{i+1,j,k}\right)^2} + \\
& +\sqrt{\left(x_{i,j+1,k+1}-x_{i,j,k+1}\right)^2+\left(y_{i,j+1,k+1}-y_{i,j,k+1}\right)^2+\left(z_{i,j+1,k+1}-z_{i,j,k+1}\right)^2} + \\
& +\sqrt{\left(x_{i+1,j+1,k+1}-x_{i+1,j,k+1}\right)^2+\left(y_{i+1,j+1,k+1}-y_{i+1,j,k+1}\right)^2+\left(z_{i+1,j+1,k+1}-z_{i+1,j,k+1}\right)^2}\Bigg)\times \\
& \times\Bigg(\sqrt{\left(x_{i,j,k+1}-x_{i,j,k}\right)^2+\left(y_{i,j,k+1}-y_{i,j,k}\right)^2+\left(z_{i,j,k+1}-z_{i,j,k}\right)^2} + \\
& +\sqrt{\left(x_{i+1,j,k+1}-x_{i+1,j,k}\right)^2+\left(y_{i+1,j,k+1}-y_{i+1,j,k}\right)^2+\left(z_{i+1,j,k+1}-z_{i+1,j,k}\right)^2} + \\
& +\sqrt{\left(x_{i,j+1,k+1}-x_{i,j+1,k}\right)^2+\left(y_{i,j+1,k+1}-y_{i,j+1,k}\right)^2+\left(z_{i,j+1,k+1}-z_{i,j+1,k}\right)^2} + \\
& +\sqrt{\left(x_{i+1,j+1,k+1}-x_{i+1,j+1,k}\right)^2+\left(y_{i+1,j+1,k+1}-y_{i+1,j+1,k}\right)^2+\left(z_{i+1,j+1,k+1}-z_{i+1,j+1,k}\right)^2}\Bigg)\Bigg).
\end{aligned}$$

Невідому витрату Q знаходимо за формулою

$$Q = \Delta\varphi \cdot \frac{(m+1)(l+1)}{\gamma} . \tag{10}$$

При потребі знаходимо і величини Q_*, Q^* [1].

Аналогічно [1] умовами стабілізації координат вузлів сітки і величини Q відносно кроку ітерації відповідно є:

$$\max_{x_{i,j,k},\, y_{i,j,k},\, z_{i,j,k}\in\partial G_z} \left(\left|x_{i,j,k}^{(s+1)} - x_{i,j,k}^{(s)}\right|, \left|y_{i,j,k}^{(s+1)} - y_{i,j,k}^{(s)}\right|, \left|z_{i,j,k}^{(s+1)} - z_{i,j,k}^{(s)}\right|\right) < \varepsilon\,, \quad \left|Q^{(s+1)} - Q^{(s)}\right| < \varepsilon\,. \tag{11}$$

Розв'язок різницевої задачі (6)-(11) знаходимо шляхом поетапної параметризації величин γ, координат граничних та внутрішніх вузлів відповідної сітки у вихідній області G_z^γ. А саме, задавши параметри розбиття сіткової області G_w^γ (n, m та l), параметр ε, що характеризує точність наближення розв'язку відповідної різницевої задачі, початкові наближення координат граничних вузлів $\left(x_{0,j,k}^{(0)}, y_{0,j,k}^{(0)}, z_{0,j,k}^{(0)}\right)$, $\left(x_{n+1,j,k}^{(0)}, y_{n+1,j,k}^{(0)}, z_{n+1,j,k}^{(0)}\right)$, $j=\overline{0,m+1}$, $k=\overline{0,l+1}$, $\left(x_{i,0,k}^{(0)}, y_{i,0,k}^{(0)}, z_{i,0,k}^{(0)}\right)$, $\left(x_{i,m+1,k}^{(0)}, y_{i,m+1,k}^{(0)}, z_{i,m+1,k}^{(0)}\right)$, $i=\overline{1,n}$, $k=\overline{0,l+1}$, $\left(x_{i,j,0}^{(0)}, y_{i,j,0}^{(0)}, z_{i,j,0}^{(0)}\right)$, $\left(x_{i,j,l+1}^{(0)}, y_{i,j,l+1}^{(0)}, z_{i,j,l+1}^{(0)}\right)$, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,m}$ (так, щоб виконувались рівності (8)), початкові наближення координат внутрішніх вузлів обох областей $\left(x_{i,j,k}^{(0)}, y_{i,j,k}^{(0)}, z_{i,j,k}^{(0)}\right)$, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,m}$, $k=\overline{1,l}$, за формулою (9) знаходимо початкове наближення $\gamma^{(0)} = \gamma\left(x_{i,j,k}^{(0)}, y_{i,j,k}^{(0)}, z_{i,j,k}^{(0)}\right)$ інваріанта відображення γ. Уточнення координат внутрішніх вузлів $\left(x_{i,j,k}^{(s)}, y_{i,j,k}^{(s)}, z_{i,j,k}^{(s)}\right)$, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,m}$, $k=\overline{1,l}$ проводимо на основі почергового розв'язання систем (6) і (7) із використанням значень з попереднього кроку ітерації s ($s=0,1,\ldots$ – номер кроку ітерації). Далі підправляємо координати граничних вузлів. Потім знаходимо нові наближення γ за формулою (9), величини Q – за формулою (10) (при потребі величини Q_* і Q^* [1]) та перевіряємо виконання умов (11) стабілізації координат вузлів сітки і величини Q відносно кроку ітерації.

Якщо умови (11) не виконуються, то повертаємося до уточнення координат внутрішніх вузлів сітки і т.д. У протилежному випадку для отриманих вузлів сітки обчислюємо нев'язку перших трьох рівнянь системи (4) $\delta = \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2}$, де $\delta_1 = \max\limits_{i,j,k=1}^{n,m,l} \left| \left(x_{i+1,j,k} - x_{i-1,j,k}\right) - \frac{\kappa\cdot\gamma}{2}\cdot\left(\left(y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k}\right)\times\right.\right.$

$\left.\left.\times\left(z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1}\right) - \left(z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k}\right)\left(y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1}\right)\right)\right|$, $\delta_2 = \max\limits_{i,j,k=1}^{n,m,l} \left| \left(y_{i+1,j,k} - y_{i-1,j,k}\right) - \right.$

$\left. - \frac{\kappa\cdot\gamma}{2}\cdot\left(\left(z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k}\right)\left(x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1}\right) - \left(x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k}\right)\left(z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1}\right)\right)\right|$, $\delta_3 =$

$= \max\limits_{i,j,k=1}^{n,m,l} \left| \left((z_{i+1,j,k} - z_{i-1,j,k}) - \frac{\kappa \cdot \gamma}{2} \cdot \left((x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k})(y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1}) - (y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k}) \times \right. \right. \right.$

$\left. \left. \left. \times (x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1}) \right) \right) \right|$. Якщо точність отриманого розв'язку нас не задовольняє, то збільшуємо кількість вузлів розбиття сітки G_z^γ та розв'язуємо задачу заново.

Для одержаних координат вузлів гідродинамічної сітки величини швидкості знаходимо за різницевими формулами, отриманими в [1], зокрема, для внутрішніх вузлів сітки G_z^γ відповідна формула має такий вигляд:

$$v_{i,j,k} = \sqrt{v_{x\,i,j,k}^2 + v_{y\,i,j,k}^2 + v_{z\,i,j,k}^2}\ ,\ i = \overline{1,n}\ ,\ j = \overline{1,m}\ ,\ k = \overline{1,l}\ ,$$

де $v_{x\,i,j,k} = 2\frac{\Delta\varphi}{J_{i,j,k}} \left(\left(y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k} \right) \left(z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1} \right) - \left(y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1} \right) \left(z_{i,j+1,k} - \right. \right.$

$\left. \left. - z_{i,j-1,k} \right) \right)$, $v_{y\,i,j,k} = 2\frac{\Delta\varphi}{J_{i,j,k}} \left(\left(x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1} \right) \left(z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k} \right) - \left(x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k} \right) \times \right.$

$\left. \times \left(z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1} \right) \right)$, $v_{z\,i,j,k} = 2\frac{\Delta\varphi}{J_{i,j,k}} \left(\left(x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k} \right) \left(y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1} \right) - \left(x_{i,j,k+1} - \right. \right.$

$\left. \left. - x_{i,j,k-1} \right) \left(y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k} \right) \right)$, $J_{i,j,k} = \left(x_{i+1,j,k} - x_{i-1,j,k} \right) \left(y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k} \right) \left(z_{i,j,k+1} - \right.$

$- z_{i,j,k-1} \left. \right) + \left(x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1} \right) \left(y_{i+1,j,k} - y_{i-1,j,k} \right) \left(z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k} \right) + \left(x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k} \right) \times$

$\times \left(y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1} \right) \left(z_{i+1,j,k} - z_{i-1,j,k} \right) - \left(x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1} \right) \left(y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k} \right) \left(z_{i+1,j,k} - \right.$

$- z_{i-1,j,k} \left. \right) - \left(x_{i+1,j,k} - x_{i-1,j,k} \right) \left(y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1} \right) \left(z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k} \right) - \left(x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k} \right) \times$

$\times \left(y_{i+1,j,k} - y_{i-1,j,k} \right) \left(z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1} \right)$.

Числові розрахунки. На основі вище описаного алгоритму проведено комп'ютерний експеримент для фільтру з однорідним пористим завантаженням криволінійної форми – області, обмеженої двома еквіпотенціальними поверхнями $ABB_*A_* = \left\{ z: \quad x = x_1(\alpha_1, \beta_1) = 2\ ,\quad y = y_1(\alpha_1, \beta_1) = \frac{2 \cdot \sin(\alpha_1) \cdot \cos(\beta_1)}{\cos(\alpha_1) \cdot \cos(\beta_1) - 1}\ , \right.$

$\left. z = z_1(\alpha_1, \beta_1) = \frac{2 \cdot \sin(\beta_1)}{\cos(\alpha_1) \cdot \cos(\beta_1) - 1}\ ,\quad 2{,}827 \le \alpha_1 \le 3{,}456\ ,\quad -0{,}393 \le \beta_1 \le 0{,}393 \right\}$,

$CDD_*C_* = \left\{ z: \quad x = x_2(\alpha_2, \beta_2) = \frac{28{,}97097194 \cdot \left(\cos(\alpha_2) \cdot \cos(\beta_2) - 7{,}24274299 \right)}{14{,}48548597 \cdot \cos(\alpha_2) \cdot \cos(\beta_2) - 53{,}45732595}\ , \right.$

$$y = y_2(\alpha_2,\beta_2) = \frac{28{,}97097194\cdot\sin(\alpha_2)\cdot\cos(\beta_2)}{14{,}48548597\cdot\cos(\alpha_2)\cdot\cos(\beta_2)-53{,}45732595},\ z = z_2(\alpha_2,\beta_2) =$$

$$= \frac{28{,}97097194\cdot\sin(\beta_2)}{14{,}48548597\cdot\cos(\alpha_2)\cdot\cos(\beta_2)-53{,}45732595},\ 2{,}827 \le \alpha_2 \le 3{,}456,\ -0{,}393 \le$$

$$\le \beta_2 \le 0{,}393\Big\} \text{ і чотирма поверхнями течії } BCC_*B_* = \Big\{z:\ x = x_3(\alpha_3,\beta_3) =$$

$$= \frac{2\cdot e^{\alpha_3}\cdot\left(4\cdot e^{\alpha_3}+3{,}8042261\cdot\cos(\beta_3)\right)}{2{+}2\cdot e^{2\cdot\alpha_3}+3{,}8042261\cdot e^{\alpha_3}\cdot\cos(\beta_3)},\ y = y_3(\alpha_3,\beta_3) = \frac{-2{,}47213595\cdot e^{\alpha_3}\cdot\cos(\beta_3)}{2{+}2\cdot e^{2\cdot\alpha_3}+3{,}8042261\cdot e^{\alpha_3}\cdot\cos(\beta_3)},$$

$$z = z_3(\alpha_3,\beta_3) = \frac{-8\cdot e^{\alpha_3}\cdot\sin(\beta_3)}{2{+}2\cdot e^{2\cdot\alpha_3}+3{,}80422607\cdot e^{\alpha_3}\cdot\cos(\beta_3)},\ 0 \le \alpha_3 \le 1{,}980,\ -0{,}393 \le \beta_3 \le$$

$$\le 0{,}393\Big\},\ ADD_*A_* = \Big\{z:\ x = x_4(\alpha_4,\beta_4) = \frac{2\cdot e^{\alpha_4}\cdot\left(4\cdot e^{\alpha_4}+3{,}80422607\cdot\cos(\beta_4)\right)}{2{+}2\cdot e^{2\cdot\alpha_4}+3{,}80422607\cdot e^{\alpha_4}\cdot\cos(\beta_4)},$$

$$y = y_4(\alpha_4,\beta_4) = \frac{2{,}47213595\cdot e^{\alpha_4}\cdot\cos(\beta_4)}{2{+}2\cdot e^{2\cdot\alpha_4}+3{,}80422607\cdot e^{\alpha_4}\cdot\cos(\beta_4)},\ z = z_4(\alpha_4,\beta_4) =$$

$$= \frac{-8\cdot e^{\alpha_4}\cdot\sin(\beta_4)}{2{+}2\cdot e^{2\cdot\alpha_4}+3{,}80422607\cdot e^{\alpha_4}\cdot\cos(\beta_4)},\ 0 \le \alpha_4 \le 1{,}980,\ -0{,}393 \le \beta_4 \le 0{,}393\Big\},$$

$$ABCD = \Big\{z:\ x = x_5(\alpha_5,\beta_5) = \frac{2\cdot e^{\alpha_5}\cdot\left(2\cdot e^{\alpha_5}-1{,}8477591\cdot\cos(\beta_5)\right)}{1{+}e^{2\cdot\alpha_5}-1{,}8477591\cdot e^{\alpha_5}\cdot\cos(\beta_5)},\ y = y_5(\alpha_5,\beta_5) =$$

$$= \frac{-1{,}53073373\cdot e^{\alpha_5}\cdot\sin(\beta_5)}{1{+}e^{2\cdot\alpha_5}-1{,}847759\cdot e^{\alpha_5}\cdot\cos(\beta_5)},\ z = z_5(\alpha_5,\beta_5) = \frac{1{,}53073373\cdot e^{\alpha_5}}{1{+}e^{2\cdot\alpha_5}-1{,}8477591\cdot e^{\alpha_5}\cdot\cos(\beta_5)},$$

$$0 \le \alpha_5 \le 1{,}980,\quad 2{,}827 \le \beta_5 \le 3{,}456\Big\},\quad A_*B_*C_*D_* = \Big\{z:\quad x = x_6(\alpha_6,\beta_6) =$$

$$= \frac{2\cdot e^{\alpha_6}\cdot\left(2\cdot e^{\alpha_6}-1{,}8477591\cdot\cos(\beta_6)\right)}{1{+}e^{2\cdot\alpha_6}-1{,}8477591\cdot e^{\alpha_6}\cdot\cos(\beta_6)},\ y = y_6(\alpha_6,\beta_6) = \frac{-1{,}53073373\cdot e^{\alpha_6}\cdot\sin(\beta_6)}{1{+}e^{2\cdot\alpha_6}-1{,}8477591\cdot e^{\alpha_6}\cdot\cos(\beta_6)},$$

$$z = z_6(\alpha_6,\beta_6) = \frac{-1{,}53073373\cdot e^{\alpha_6}}{1{+}e^{2\cdot\alpha_6}-1{,}8477591\cdot e^{\alpha_6}\cdot\cos(\beta_6)},\ 0 \le \alpha_6 \le 1{,}980,\ 2{,}827 \le \beta_6 \le 3{,}456\Big\}.$$

В результаті побудовано розрахункову динамічну сітку в G_z (рис. 2) при $n = 20$, $m = 16$, $l = 12$, $\varphi_* = 0$, $\varphi^* = 26{,}676$, $\kappa = 5{,}6$ м/добу (параметри n, m і l вибирали з умови найбільшої подібності побудованої сітки до кубічної), що відповідає величині середньої швидкості руху води через пористе завантаження 1 м/год, обчислено фільтраційну витрату $Q = 0{,}493$ м^3/год і величини швидкості фільтрації $|v|$ (рис. 3). При цьому нев'язка δ числових розрахунків ста-

новить $1,35\cdot10^{-3}$.

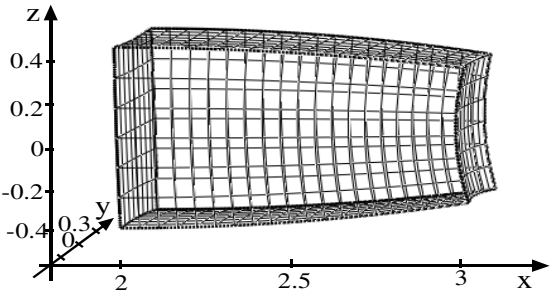


Рис. 2. Розрахункова динамічна сітка в G_z

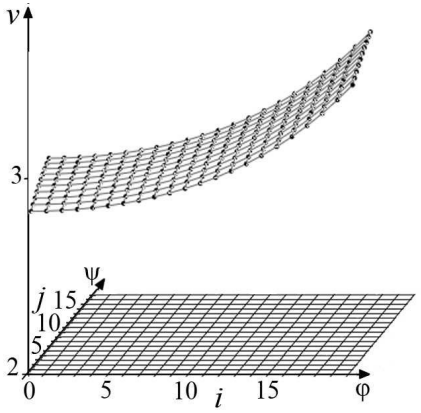


Рис. 3. Розподіл величин швидкості фільтрації вздовж поверхні течії $\eta(x, y, z) = \overline{\eta}_4$

Висновки і зауваження. Розроблений алгоритм побудови просторових фільтраційних полів у криволінійних фільтрах із однорідним пористим завантаженням, які мають форму однозв'язних областей, обмежених двома еквіпотенціальними поверхнями і чотирма поверхнями течії, які задаються параметрично. Таке задання поверхонь суттєво спрощує проблему вибору початкового наближення граничних вузлів, побудову контурів області та дозволяє більше часу зосередити на оптимізації параметрів процесу фільтрування: часу захисної дії завантаження, співвідношення розмірів фільтра та швидкості фільтрування тощо.

1. Климюк Ю. Є. Числове розв'язання обернених крайових задач на просторові конформні відображення криволінійних паралелепіпедів на прямокутні / Ю. Є. Климюк, Д. О. Пригорницький // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. Випуск 5 (14). – Рівне : РДГУ, 2008. – С. 104-143. **2.** Климюк Ю. Є. Числове розв'язання обернених крайових задач на просторові конформні відображення двоз'язних областей із розрізом на прямокутні паралелепіпеди / Ю. Є. Климюк,

Д. О. Пригорницький // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. Випуск 6 (15). – Рівне: РДГУ, 2009. – С. 59-71. **3.** Климюк Ю. Є. Числова реалізація просторових аналогів конформних відображень областей, обмежених двома замкненими еквіпотен-ціальними поверхнями / Ю. Є. Климюк, Д. О. Пригорницький // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. Випуск 7 (16). – Рівне : РДГУ, 2010. – С. 84-92. **4.** Бомба А. Я. Числово-асимптотичне наближення розв'язків просторових модельних задач процесу фільтрування / А. Я. Бомба, Ю. Є. Климюк, А. П. Сафоник, В. М. Сівак // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2010. – Вип. 11. – С. 29-39. **5.** Сівак В. М. Числово-асимптотичне наближення розв'язку просторової модельної задачі процесу видалення залишкового алюмінію при фільтруванні через окислювально-відновні завантаження / В. М. Сівак, А. Я. Бомба, Ю. Є. Климюк // Гідромеліорація та гідротехнічне будівництво: Збірн. наук. праць. – Вип. 34. – Рівне : НУВГП. – 2009. – С. 252-261. **6.** Климюк Ю. Є. Моделювання процесу доочистки води від залишкових катіонів алюмінію фільтруванням через аніоноактивні завантаження із врахуванням зміни фільтраційних властивостей середовища / Ю. Є. Климюк, В. М. Сівак // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. Випуск 7 (16). – Рівне : РДГУ, 2010. – С. 93-109. **7.** Рауз. Х. Механика жидкости / Х. Рауз. – М. : Стройиздат, 1967. – 390 с.

Рецензент: д.т.н., проф. Власюк А. П. (НУВГП)