ОСНОВАНІЯ АНАЛИЗА БЕЗКОНЕЧНО-МАЛЫХЪ ВЪ СВЯЗИ СЪ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ СТАТЬЯМИ АЛГЕБРЫ,

примѣнительно къ программѣ курса дополнительнаго класса реальныхъ училищъ.

ЧАСТЬ I.

АЛГЕБРА.

СОСТАВИЛЪ

В. Александровъ,

инспектирующій Костромского реальнаго училища.

ИЗДАНІЕ КНИЖНАГО МАГАЗИНА В. В. ДУМНОВА,
подъ фирмою „Наслѣдники бр. Салаевыхъ“.

МОСКВА.
Типографія Г. Лисснера и Д. Собко.
Воздвиженка, Крестовоздвиж. пер., д. Лисснера
1908.

Предисловіе.

Составленный мною курсъ «Основанія анализа безконечно-малыхъ въ связи съ дополнительными статьями алгебры» содержитъ въ себѣ больше матеріала противъ министерской программы, а именно, въ него вошли слѣдующія лишнія статьи: въ I части, тригонометрическій способъ обозначенія комплексныхъ величинъ, рѣшеніе двухчленныхъ уравненій при помощи тригонометрическихъ функцій, подробное изслѣдованіе корней квадратнаго уравненія съ одной неизвѣстной, предложенія о степеняхъ положительнаго основанія и свойствахъ логариѳмовъ, разложеніе въ рядъ выраженій e^x, a^x и $\lg\frac{n+1}{n}$; во II части, производныя и дифференціалы высшаго порядка, приложеніе теоремы Лагранжа, выводъ формулы Тайлора (и Маклорена), выраженія подкасательной и поднормали.

Но эти лишнія прибавленія при самостоятельномъ усвоеніи дадутъ лучшимъ ученикамъ возможность получить болѣе цѣльное и глубокое знаніе предмета и тѣмъ самымъ облегчатъ имъ переходъ къ дальнѣйшему обогащенію себя знаніями въ области математики.

Курсъ сопровождается достаточнымъ числомъ задачъ для достиженія лучшаго усвоенія учениками излагаемой теоріи, при чемъ задачи частію составлены мною, частію заимствованы изъ сборника задачъ Frenet и курса анализа г. Поссе.

Что касается изложенія курса, то я долженъ предупредить, что въ главѣ о перемѣнныхъ величинахъ я разсматриваю перемѣнныя вообще и безконечно-малыя въ частности не въ любой моментъ ихъ измѣненія, а близъ предѣла ихъ и это дѣлаю для удобства разсужденія о предѣлахъ перемѣнныхъ.

Въ заключеніе долженъ принести бывшему профессору математики въ Московскомъ техническомъ институтѣ Н. А. Шапошникову глубокую благодарность за его указаніе нѣкоторыхъ недосмотровъ, которые вкрались-было при составленіи этого курса.

Авторъ.

ГЛАВА I.

Мнимыя величины.

§ 1. Мнимой величиной называется корень четной степени изъ отрицательнаго числа. Дѣйствительно, нѣтъ ни положительнаго, ни отрицательнаго числа, которое, будучи возведено въ четную степень, давало бы отрицательное число; слѣд., корень четной степени изъ отрицательнаго числа не есть ни положительное, ни отрицательное число; вотъ почему и назвали его мнимой величиной.

Долго держался взглядъ въ наукѣ на эту величину какъ на невозможную и потому не имѣющую никакого значенія; даже Коши, который первый пользовался ею въ теоріи эллиптическихъ функцій, еще какъ будто сомнѣвался въ ея формальной реальности. Но благодаря громадной пользѣ, оказанной этой величиной при изученіи трудной теоріи эллиптическихъ функцій, мнимая величина вскорѣ послѣ этого завоевала себѣ право гражданства въ математикѣ.

Ей часто придаютъ геометрическій смыслъ, но она и безъ этого геометрическаго представленія имѣетъ смыслъ какъ такой величины, четная степень которой даетъ отрицательное число.

Въ отличіе отъ мнимой величины прочія величины называются вещественными или дѣйствительными.

Остановимся на квадратномъ корнѣ изъ отрицательнаго числа, такъ какъ корни другихъ четныхъ степеней изъ отрицательнаго числа приводятся къ квадратному корню.

Пусть данъ $\sqrt{-2}$; исходя изъ понятія о квадратномъ корнѣ, мы говоримъ, что $\sqrt{-2}$ есть такое количество, которое, будучи возведено во вторую степень, даетъ подкоренное количество; поэтому

$$(\sqrt{-2})^2 = -2.$$

Подъ такимъ только условіемъ и вводится мнимая величина въ разрядъ другихъ величинъ въ математикѣ какъ формально-реальная величина. Такъ какъ на мнимую величину мы будемъ смотрѣть какъ на формально-реальную величину, то и будемъ подвергать ее всѣмъ математическимъ дѣйствіямъ по общимъ правиламъ.

Тогда будемъ имѣть: $(\sqrt{-2})^2 = (\sqrt{-1 \,.\, 2})^2 = -2$,
откуда $\sqrt{-2} = \sqrt{-1 \,.\, 2} = \sqrt{-1} \,.\, \sqrt{2} = \sqrt{2} \,.\, \sqrt{-1}$.

Это значитъ, что всякую мнимую величину такого вида можно представить въ видѣ произведенія квадратнаго корня изъ отрицательной единицы на квадратный корень изъ подкоренного количества мнимой величины, взятаго со знакомъ плюсъ.

$\sqrt{-1}$ обозначается обыкновенно черезъ i; конечно, слѣдуя выше сдѣланному основному условію относительно мнимой величины, мы должны положить, что $(\sqrt{-1})^2 = i^2 = -1$.

Различныя степени i. Относительно цѣлыхъ положительныхъ степеней i можно высказать слѣдующее положеніе: всякая цѣлая положительная степень i можетъ быть сведена или къ 1-й, или ко 2-й, или къ 3-й, или къ 4-й степени отъ i, а эти степени въ свою очередь сводятся къ $+i$, -1, $-i$ и $+1$.

Въ самомъ дѣлѣ, всякое цѣлое положительное число можно представить въ видѣ $4n+1$, или $4n+2$, или $4n+3$, $4n+4$, гдѣ n можетъ имѣть всевозможныя цѣлыя значенія отъ 0 до ∞; поэтому различныя цѣлыя положительныя степени i суть или $4n+1$-я, или $4n+2$, или $4n+3$, или $4n+4$.

Но $i^{4n} = (i^2)^{2n} = (-1)^{2n} = +1$, а потому

$$i^{4n+1} = i^{4n} \,.\, i = +i;\quad i^{4n+2} = i^{4n} \,.\, i^2 = i^2 = -1;\quad i^{4n+3} = i^{4n} \,.\, i^3 = i^3 =$$
$$= i^2 \,.\, i = -i;\quad i^{4n+4} = i^{4n} \,.\, i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = +1.$$ Что и тр. док.

Мнимая величина $\sqrt{-2} = \sqrt{-1} \,.\, \sqrt{2}$ при введеніи i выразится черезъ $i \,.\, \sqrt{2}$ и вообще $\sqrt{-a}$ черезъ $i\sqrt{a}$.

Въ выраженіи $i\sqrt{a}$ на количество $\sqrt{a}$ можно смотрѣть, какъ на результатъ сравненія всякой мнимой величины вида $i\sqrt{a}$ съ величиной i, и тогда i будетъ величиной, съ которой сравнивается всякая мнимая величина, и, какъ таковая, можетъ быть названа мнимой единицей.

Корень квадратный изъ a въ выраженіи $i\sqrt{a}$ можетъ быть точнымъ или неточнымъ корнемъ, но въ каждомъ общемъ случаѣ для удобства мы будемъ полагать извлеченіе корня какъ бы совершеннымъ точно и потому сомножитель при i будемъ писать безъ знака квадратнаго корня.

Извѣстно, что произведеніе всякой опредѣленной величины на нуль равняется нулю; слѣд., при распространеніи этого правила на мнимыя величины, будемъ имѣть $i.0=0$. Отсюда заключаемъ, что мнимая величина bi равна нулю, если сомножитель b равенъ нулю.

Въ математикѣ чаще встрѣчается мнимая величина не въ такомъ простомъ видѣ, какъ bi, а въ сложеніи съ вещественной величиной a и слѣд. она чаще имѣетъ видъ $a+bi$. Въ отличіе отъ простѣйшей собственно-мнимой величины величина $a+bi$ называется мнимой комплексной величиной или просто комплексной величиной.

Комплексная величина есть общій видъ всѣхъ величинъ, какъ вещественныхъ, такъ и мнимыхъ. Если $a=0$, то комплексная величина обращается въ собственно-мнимую; если же $b=0$, то комплексная величина обращается въ вещественную величину. Отсюда заключаемъ:

Чтобы комплексная величина обратилась въ нуль, необходимо, чтобы отдѣльно обратились въ нуль и вещественная величина и сомножитель при i.

Двѣ комплексныя величины $a+bi$ и $a-bi$, отличающіяся только знакомъ предъ собственно-мнимой величиной, называются сопряженными величинами.

§ 2. При сложеніи, вычитаніи и умноженіи комплексныхъ величинъ поступаютъ такъ же, какъ съ многочленами вещественными; при этомъ собственно-мнимыя величины соединяютъ въ одну группу вынесеніемъ i, какъ общаго множителя, за скобки, а вещественныя величины соединяютъ въ другую группу.

Примѣръ на сложеніе:

$$(a+bi)+(c+di)+(e-fi)=(a+c+e)+(b+d-f)i.$$

Въ частномъ случаѣ, когда $b+d-f=0$, отъ сложенія комплексныхъ величинъ получится вещественная величина.

Сумма сопряженныхъ величинъ всегда вещественная величина, напримѣръ:

$$(a+bi)+(a-bi)=2a.$$

Примѣры.

1) $(3+2\sqrt{-1})+(-5+\sqrt{-1})+(7-5\sqrt{-1})$. *Отв.* $5-2i$.

2) $(-8+3\sqrt{-1})+(11-6\sqrt{-1})+(1-4\sqrt{-1})$. *Отв.* $4-7i$.

3) $(-7+2\sqrt{-3})+(8-\sqrt{-12})+(2+5\sqrt{-6})$. *Отв.* $3+5i\sqrt{6}$.

4) $\left(5-8\sqrt{-\frac{1}{2}}\right)+(-2+3\sqrt{-8})+(4-2\sqrt{-2})$. *Отв.* 7.

5) $\left(2+\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{-15}\right)+(3+\sqrt{2}.\sqrt{-10})+(-5-1{,}5\sqrt{-20})$. *Отв.* 0,

6) $(3{,}08(6)+\sqrt{-0{,}25})+(2{,}24(6)-\sqrt{-0{,}81})+$
$+(-5{,}(3)+2\sqrt{-0{,}36})$. *Отв.* $+0{,}8i$.

7) $(2+\sqrt{-3})+(2-\sqrt{-3})$. *Отв.* 4.

Примѣры на вычитаніе:

$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i.$$

Въ частномъ случаѣ, когда $b-d=0$, отъ вычитанія комплексныхъ величинъ получится вещественная величина.

Примѣры.

1) $(8+3\sqrt{-6})-(5-2\sqrt{-24})$. *Отв.* $3+7i\sqrt{6}$.

2) $(1-2\sqrt{-0{,}5})-(4+3\sqrt{-4{,}5})$. *Отв.* $-3-11i\sqrt{0{,}5}$.

3) $(5-4\sqrt{-7})-\left(3-\frac{4\sqrt{-21}}{\sqrt{3}}\right)$. *Отв.* 2.

4) $\left(2-\sqrt{-\frac{4}{7}}\right)-\left(2-\frac{3\sqrt{-28}}{14}\right)$. *Отв.* $\frac{i}{\sqrt{7}}=\frac{i\sqrt{7}}{7}$.

5) $(7+\sqrt{-40})-(5+\sqrt{-90})-(2-\sqrt{-10})$. *Отв.* 0.

§ 3. 1. Теорема. **Двѣ комплексныя величины равны, когда отдѣльно равны и вещественныя величины и сомножители при i.**

Пусть имѣемъ $a+bi=c+di$; отсюда получаемъ

$$(a-c)+(b-d)i=0,$$

что возможно только тогда, когда $a-c=0$ и $b-d=0$, откуда $a=c$ и $b=d$. Что и тр. док.

§ 4. Примѣръ на умноженіе:

$$(a+bi)\,.\,(c-di)=(ac+bd)+(bc-ad)i.$$

Отъ умноженія комплексныхъ величинъ всегда получается комплексная величина, только произведеніе мнимыхъ сопряженныхъ величинъ даетъ вещественную величину:

$$(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2.$$

Величина a^2+b^2 называется квадратомъ модуля сопряженныхъ комплексныхъ величинъ: $a+bi$ и $a-bi$; при этомъ условились называть модулемъ комплексной величины ариѳметическое значеніе корня квадратнаго изъ суммы квадратовъ вещественной величины и сомножителя при i.

Примѣры.

1) $(2+3\sqrt{-1})(5-2\sqrt{-1})(1+\sqrt{-1})$. *Отв.* $5+27i$.

2) $(1+2\sqrt{-1})(-4+\sqrt{-1})(3-5\sqrt{-1})$. *Отв.* $-53+9i$.

3) $(3,(3)+\sqrt{-4})(1,5-\sqrt{-1})(2+\sqrt{-9})(0,2-\sqrt{-16})$.
Отв. $84,(3)-55,9(3)i$.

4) $(0,6-4,(6)\sqrt{-1})(2,(9)+\frac{1}{7}\sqrt{-1})$. *Отв.* $2,4(6)-13\frac{32}{35}i$.

5) $(4+3\sqrt{-1})(4-3\sqrt{-1})$. *Отв.* 25.

6) $(0,2(7)-5\sqrt{-1})(0,2(7)+5\sqrt{-1})$. *Отв.* $25\frac{25}{324}$.

Разсматривая результаты первыхъ трехъ дѣйствій надъ комплексными величинами, мы видимъ, что они всѣ вообще представляютъ также комплексныя величины; исключеніе составляютъ только сумма и произведеніе сопряженныхъ комплексныхъ величинъ и результаты сложенія и вычитанія въ выше указанныхъ случаяхъ.

Дѣленіе. Частное комплексныхъ величинъ есть вообщ[е вели]чина комплексная.

Положимъ, что $\frac{a+bi}{c+di}=x+yi$. Докажемъ, что пр[и] c и d отличныхъ отъ нуля всегда можно найти для x [и y] опредѣленныя значенія, вообще, отличныя отъ нуля.

На основаніи понятія о дѣленіи имѣемъ:

$$a+bi=(c+di)(x+yi)=(cx-dy)+(dx+cy)i.$$

Если же двѣ комплексныя величины равны межд[у собою,] то отдѣльно равны и вещественныя величины ихъ и [сомно]жители при i, слѣд., $a=cx-dy$, $b=dx+cy$.

Рѣши[въ] эту систему уравненій относительно x и y, [по]лучим[ъ]

$$x=\frac{ac+bd}{c^2+d^2},\quad y=\frac{bc-ad}{c^2+d^2}.$$

Подставивъ э[ти з]наченія x и y въ (1) раве[нс]тво, на[ходимъ]

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i,$$

т.-е., частное комплексныхъ величинъ дѣйствительно ко[мплекс]ная величина опредѣленнаго вида.

(Тотъ же результатъ можно получить и другимъ спос[обомъ,] умножая числитель и знаменатель дроби $\frac{a+bi}{c+di}$ на колич[ество,] сопряженное съ знаменателемъ).

Въ частномъ случаѣ, когда $bc-ad=0$ или [$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$,] т.-е., когда вещественныя величины и сомножители при [i бу]дутъ между собою пропорціональны, тогда частное компл[екс]ныхъ величинъ будетъ величина вещественная.

Примѣры.

1) $(7-2\sqrt{-1}):(5+3\sqrt{-1})$. *Отв.* $+\frac{29}{34}-\frac{31}{34}i$

2) $(-8+\sqrt{-15}):(2-3\sqrt{-60})$. *Отв.* $-\frac{53}{272}-\frac{23}{272}i$

3) $(2{,}6-5\sqrt{-3}):(7+\sqrt{-12})$. *Отв.* $-\frac{59}{305}-\frac{201}{305}i\sqrt{3}$.

4) $(\sqrt{15}-2\sqrt{-6}):(2+\sqrt{-5})$. *Отв.* $\frac{2\sqrt{15}(1-\sqrt{2})}{9}-\frac{4\sqrt{2}+5}{9}i\sqrt{3}$.

5) $(12+21\sqrt{-1}):(4+7\sqrt{-1})$. *Отв.* 3.

6) $(8{,}4-35\sqrt{-1}):(1{,}2-5\sqrt{-1})$. *Отв.* 7.

7) $(4{,}1(6)+20\sqrt{-1}):(0{,}8(3)+4\sqrt{-1})$. *Отв.* 5.

Такъ какъ возведеніе въ цѣлую положительную степень есть кратное умноженіе, то результатъ возведенія комплексной величины въ цѣлую положительную степень есть также комплексная величина. Возведеніе комплексной величины въ цѣлую полож. степень дѣлается по формулѣ бинома Ньютона.

Примѣры: $(a+bi)^2=(a^2-b^2)+2abi$.

$$(a+bi)^3=(a^3-3ab^2)+(3a^2b-b^3)i=a(a^2-3b^2)+b(3a^2-b^2)i.$$

Не трудно видѣть, что измѣненіе знака при i въ количествѣ, служащемъ основаніемъ степени, ведетъ за собою въ самой степени только измѣненіе знака при членахъ, содержащихъ множитель i. Для этого возьмемъ предыдущіе примѣры съ обратнымъ знакомъ при i:

$$(a-bi)^2=(a^2-b^2)-2abi.$$

$$(a-bi)^3=a(a^2-3b^2)-b(3a^2-b^2)i.$$

Примѣры.

1) $(0{,}5-3\sqrt{-1})^3$. *Отв.* $-13{,}375+24{,}75i$.

2) $(2{,}(9)-1{,}5\sqrt{-2})^3$. *Отв.* $-13{,}5-33{,}75i\sqrt{2}$.

3) $(0{,}7-2{,}4\sqrt{-3})^2$. *Отв.* $-16{,}79-3{,}36i\sqrt{3}$.

4) $(0{,}7(2)+\sqrt{-5})^2$. *Отв.* $-4\frac{155}{324}+\frac{13}{9}i\sqrt{5}$.

5) $\left(1{,}(1)-\sqrt{-\frac{1}{7}}\right)^3$. *Отв.* $\frac{6757}{5103}-\frac{673}{189}i\sqrt{\frac{1}{7}}$.

6) $(2-\sqrt{-1})^4$. *Отв.* $-7-24i$.

7) $(1-2\sqrt{-1})^5$. *Отв.* $41+38i$.

8) $(3+\sqrt{-1})^6$. *Отв.* $-352+936i$.

Какъ на приложеніе комплексныхъ величинъ, можно указать слѣдующую теорему о числахъ:

§ 5. 2. Теорема. Если нѣкоторое число есть сумма квадратовъ двухъ чиселъ, то и квадратъ его есть также сумма квадратовъ двухъ чиселъ.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть $n=p^2+q^2=(p+qi)(p-qi)$. Возведемъ обѣ части этого равенства въ квадратъ:

$$n^2=(p+qi)^2.(p-qi)^2=(p^2-q^2+2pqi)(p^2-q^2-2pqi)=$$
$$=(p^2-q^2)^2+4p^2q^2;$$

слѣд., n^2 представляетъ сумму квадратовъ новыхъ чиселъ, находящихся въ опредѣленной связи съ предыдущими числами. Что и тр. док.

§ 6. Извлеченіе корня. Корень изъ комплексной величины есть комплексная величина.

Ограничимся нахожденіемъ квадратнаго корня изъ комплексной величины, какъ простѣйшаго корня.

Пусть $\sqrt{a+bi}=x+yi$ (1). Опредѣлимъ x и y. Для этого возведемъ обѣ части (1) равенства въ квадратъ, получимъ

$$a+bi=(x^2-y^2)+2xyi,$$

откуда $a=x^2-y^2$ (2) и $b=2xy$ (3). Представимъ послѣднее равенство (3) въ иномъ видѣ: $-\frac{b^2}{4}=x^2.(-y^2)$ (3′).

Равенства (2) и (3′) даютъ намъ возможность смотрѣть на a какъ на сумму корней квадратнаго уравненія и на $-\frac{b^2}{4}$ какъ на ихъ произведеніе, при чемъ одинъ корень x^2, а другой $-y^2$; самое же квадратное уравненіе будутъ имѣть такой видъ:

$$z^2-az-\frac{b^2}{4}=0.$$

Рѣшимъ это уравненіе:

$$z=\frac{a\pm\sqrt{a^2+b^2}}{2};\quad z_1=x^2=\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2};\quad z_2=-y^2=\frac{a-\sqrt{a^2+b^2}}{2};$$

отсюда $\quad x=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}},\quad y=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}.$

Подставивъ найденныя величины x и y въ (1) равенство, получимъ:

$$\sqrt{a+bi}=\pm\left[\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right].$$

Нетрудно убѣдиться, что

$$\sqrt{a-bi}=\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right),$$

что и тр. док.

Эти двѣ полученныя формулы суть общія формулы квадратнаго корня изъ комплексныхъ величинъ, отличающихся знакомъ при i. Примѣнимъ эти формулы къ частнымъ случаямъ.

Примѣры:

1) $\sqrt{4+3i}=\pm\left(\sqrt{\frac{9}{2}}+i\sqrt{\frac{1}{2}}\right)=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}(3+i)=\pm\frac{\sqrt{2}(3+i)}{2}.$

2) $\sqrt{1-2i}=\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\right).$

3) $\sqrt{2+i}=\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2}}\right).$

4) $\sqrt{-2+3i}=\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{13}-2}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{13}+2}{2}}\right).$

5) $\sqrt{8-6i}=\pm(3-i).$ 9) $\sqrt{\frac{2}{3}-7i}.$ 13) $\sqrt{-0{,}2+2i}.$

6) $\sqrt{5+2i}.$ 10) $\sqrt{2{,}3-0{,}7\sqrt{-1}}.$ 14) $\sqrt{1{,}2-0{,}5i}.$

7) $\sqrt{7+0{,}2i}.$ 11) $\sqrt{-5-1{,}2\sqrt{-1}}.$ 15) $\sqrt{-1{,}7+0{,}5i}.$

8) $\sqrt{0{,}3-5i}.$ 12) $\sqrt{-1{,}4-9i}.$

Умѣя находить квадратный корень изъ комплексной величины, можно найти корень 4-ой, 8-ой, 16-ой и вообще 2^n-степени изъ комплексной величины.

Дѣлая обзоръ результатовъ всѣхъ математическихъ дѣйствій съ комплексными величинами, заключаемъ, что всѣ они вообще также комплексныя величины.

§ 7. Далѣе, обратимъ вниманіе на выраженія корня различныхъ четныхъ положительныхъ степеней изъ $i=\sqrt{-1}$, такъ какъ всякій корень четной степени изъ отрицательнаго числа сводится къ корню четной степени изъ i, а послѣдній сводится къ квадратному корню изъ -1, въ чемъ нетрудно убѣдиться. Въ самомъ дѣлѣ, пусть m какое-нибудь цѣлое положительное четное число; отбирая его множители 2 въ одно произведеніе, а нечетные въ другое, можно m представить въ видѣ $2^n.(2p+1)$.

Въ частномъ случаѣ p можетъ равняться нулю. Тогда $\sqrt[m]{-}$ гдѣ $a>0$, будетъ мнимая величина; преобразуемъ этотъ корень:

$$\sqrt[m]{-a}=\sqrt[m]{a}\cdot\sqrt[m]{-1}=\sqrt[m]{a}\cdot\sqrt[2^n(2p+1)]{-1}=\sqrt[m]{a}\cdot\sqrt[2^n]{\sqrt[2p+1]{-1}}=$$
$$=\sqrt[m]{a}\cdot\sqrt[2^n]{-1}=\sqrt[m]{a}\cdot\sqrt{\sqrt{\sqrt{\ldots\sqrt{-1}}}}=\sqrt[m]{a}\sqrt{\sqrt{\sqrt{\ldots\sqrt{i}}}}.$$

Отсюда видно, что для опредѣленія $\sqrt[m]{-a}$ придется $(n-1)$ разъ извлекать квадратный корень, при чемъ первое извлеченіе совершается изъ i. Поэтому сначала найдемъ квадратный корень изъ i. Здѣсь $a=0$, $b=1$, слѣд.,

$$\sqrt{i}=\pm\left(\sqrt{\tfrac{1}{2}}+i\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right)=\pm\sqrt{\tfrac{1}{2}}(1+i).$$
$$\sqrt[4]{i}=\sqrt{\sqrt{i}}=\pm\sqrt{\pm\sqrt{\tfrac{1}{2}}(1+i)}.$$

Возьмемъ сначала знакъ + подъ корнемъ:

$$\sqrt[4]{i}=\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\right)\sqrt[4]{\frac{1}{2}}.$$

Теперь возьмемъ знакъ − подъ корнемъ:

$$\sqrt[4]{i}=\pm\left(i\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}-\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\right)\sqrt[4]{\frac{1}{2}}=$$
$$=\mp\left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}\right)\sqrt[4]{\frac{1}{2}}.$$

Съ возрастаніемъ степени корня будутъ усложняться раженія вещественной величины и сомножителя при i, в всякій разъ будемъ получать комплексную величину, слѣд., корень четной положительной степени изъ i есть комплексная величина, а потому корень всякой положительной четной степени изъ отрицательнаго числа есть также комплексная величина.

§ 8. **Тригонометрическое выраженіе комплексной величины.** Нерѣдко комплексную величину выражаютъ черезъ тригонометрическія функціи, полагая $a+bi=r(\operatorname{cs}\vartheta+i\operatorname{sn}\vartheta)$, гдѣ r ариѳметическое число. Отсюда заключаемъ, что $a=r\operatorname{cs}\vartheta$, $b=r\operatorname{sn}\vartheta$. Возведя обѣ части послѣднихъ равенствъ въ квадратъ и складывая ихъ, получимъ: $a^2+b^2=r^2$, откуда $r=\sqrt{a^2+b^2}$, т.-е. r есть модуль данной комплексной величины; уголъ ϑ называется аргументомъ комплексной величины. Аргументъ опредѣляется изъ уравненія $\operatorname{tg}\vartheta=\frac{b}{a}$, которое получается отъ дѣленія вышеприведенныхъ двухъ равенствъ.

При тригонометрическомъ способѣ выраженія комплексныхъ величинъ особенно замѣчательны результаты умноженія, дѣленія, возведенія въ степень и извлеченія корня.

Разсмотримъ сначала произведеніе комплексныхъ величинъ. Пусть комплексныя величины $r(\operatorname{cs}\vartheta+i\operatorname{sn}\vartheta)$ и $r_1(\operatorname{cs}\vartheta_1+i\operatorname{sn}\vartheta_1)$; перемноживъ ихъ между собою, получимъ:

$$r(\operatorname{cs}\vartheta+i\operatorname{sn}\vartheta)\,.\,r_1(\operatorname{cs}\vartheta_1+i\operatorname{sn}\vartheta_1)=rr_1[\operatorname{cs}\vartheta\operatorname{cs}\vartheta_1-\operatorname{sn}\vartheta\operatorname{sn}\vartheta_1+$$
$$+i(\operatorname{sn}\vartheta\operatorname{cs}\vartheta_1+\operatorname{cs}\vartheta\operatorname{sn}\vartheta_1)]=rr_1[\operatorname{cs}(\vartheta+\vartheta_1)+i\operatorname{sn}(\vartheta+\vartheta_1)].$$

Сравнивая по виду произведеніе съ его производителями, находимъ, что при умноженіи комплексныхъ величинъ модули ихъ перемножаются между собою, а аргументы ихъ складываются. Умножая произведеніе двухъ комплексныхъ величинъ на третью комплексную величину и пользуясь только что высказаннымъ правиломъ, получимъ, что произведеніе трехъ комплексныхъ величинъ равно комплексной величинѣ, которой модуль равняется произведенію модулей производителей, а аргументъ равенъ суммѣ ихъ аргументовъ.

Очевидно, что, какое бы число производителей ни было, правило это сохраняетъ силу.

Если всѣ производители будутъ равны между собою, то при m равныхъ производителяхъ получимъ: $[r(\mathrm{cs}\,\vartheta+i\,\mathrm{sn}\,\vartheta)]^m=$ $=r^m(\mathrm{cs}\,m\vartheta+i\,\mathrm{sn}\,m\vartheta)$, что представляетъ изъ себя (по сокращеніи на r^m обѣихъ частей этого равенства) извѣстную формулу Моавра.

Примѣры на умноженіе:

1) $(\cos 60^0+i\,\mathrm{sn}\,60^0)(\mathrm{cs}\,58^0+i\,\mathrm{sn}\,58^0)$. *Отв.* $-\mathrm{cs}\,62^0+i\,\mathrm{sn}\,62^0$.

2) $(\mathrm{cs}\,30^0+i\,\mathrm{sn}\,30^0)(\mathrm{cs}\,25^0-i\,\mathrm{sn}\,25^0)$. *Отв.* $\mathrm{cs}\,5^0+i\,\mathrm{sn}\,5^0$.

3) $\mathrm{cs}\,(120^0+i\,\mathrm{sn}\,120^0)(\mathrm{cs}\,30^0-i\,\mathrm{sn}\,30^0)$. *Отв.* i.

4) $\mathrm{cs}\,(154^0+i\,\mathrm{sn}\,154^0)(\mathrm{cs}\,26^0+i\,\mathrm{sn}\,26^0)$. *Отв.* -1.

5) $\sqrt{6}(\mathrm{cs}\,20^0+i\,\mathrm{sn}\,20^0)\sqrt{2}(\mathrm{cs}\,27^0-i\,\mathrm{sn}\,27^0)\sqrt{3}(\mathrm{cs}\,52^0+i\,\mathrm{sn}\,52^0)$. *Отв.* $3\sqrt{2}(1+i)$.

6) $3\sqrt{5}(\mathrm{cs}\,48^0-i\,\mathrm{sn}\,48^0)\sqrt{2}(\mathrm{cs}\,10^0-i\,\mathrm{sn}\,10^0)\sqrt{10}(\mathrm{cs}\,88^0+i\,\mathrm{sn}\,88^0)$. *Отв.* $15(\sqrt{3}+i)$.

Примѣры на возведеніе въ степень:

1) $[\sqrt{2}(\mathrm{cs}\,20^0+i\,\mathrm{sn}\,20^0)]^6$. *Отв.* $4(-1+i\sqrt{3})$.

2) $\left[\dfrac{3}{\sqrt{3}}(\mathrm{cs}\,35^0-i\,\mathrm{sn}\,35^0)\right]^8$. *Отв.* $81(\mathrm{cs}\,80^0+i\,\mathrm{sn}\,80^0)$.

3) $[3(\mathrm{cs}\,18^0+i\,\mathrm{sn}\,18^0)]^5$. *Отв.* $243i$.

Такъ какъ дѣленіе и извлеченіе корня суть дѣйствія обратныя умноженію и возведенію въ степень, то при дѣленіи комплексныхъ величинъ надо дѣлить ихъ модули, а аргументы вычитать; при извлеченіи корня изъ комплексной величины надо извлекать корень изъ ея модуля, а аргументъ ея дѣлить на показателя степени корня.

Въ этомъ нетрудно убѣдиться.

Пусть $\dfrac{r(\mathrm{cs}\,\vartheta+i\,\mathrm{sn}\,\vartheta)}{r_1(\mathrm{cs}\vartheta_1+i\,\mathrm{sn}\,\vartheta_1)}=x(\mathrm{cs}\,y+i\,\mathrm{sn}\,y)$; отсюда

$$r(\mathrm{cs}\,\vartheta+i\,\mathrm{sn}\,\vartheta)=r_1x[\mathrm{cs}(\vartheta_1+y)+i\,\mathrm{sn}\,(\vartheta_1+y)] \text{ и далѣе:}$$

$$r\,\mathrm{cs}\,\vartheta=r_1x\,\mathrm{cs}\,(\vartheta_1+y);\quad r\,\mathrm{sn}(\vartheta)=r_1x\,\mathrm{sn}\,(\vartheta_1+y).$$

Возведя обѣ части послѣднихъ двухъ равенствъ въ квадратъ и складывая почленно, получимъ:

$$r^2=r_1{}^2x^2 \quad \text{или} \quad r=r_1x, \quad \text{откуда} \quad x=\frac{r}{r_1}.$$

Подставляя значеніе x въ равенство

$$r\operatorname{cs}\vartheta = r_1 x \operatorname{cs}(\vartheta_1 + y),\quad \text{находимъ:}\quad \operatorname{cs}\vartheta = \operatorname{cs}(\vartheta_1 + y).$$

Ограничиваясь простѣйшимъ значеніемъ y, получимъ

$$\vartheta = \vartheta_1 + y \quad \text{или} \quad y = \vartheta - \vartheta_1 \quad \text{и слѣд.},$$

$$\frac{r(\operatorname{cs}\vartheta + i\operatorname{sn}\vartheta)}{r_1(\operatorname{cs}\vartheta_1 + i\operatorname{sn}\vartheta_1)} = \frac{r}{r_1}\,[\operatorname{cs}(\vartheta - \vartheta_1 + i\operatorname{sn}(\vartheta - \vartheta_1)].$$

Примѣняя тотъ же способъ разсужденія, найдемъ, что

$$\sqrt[m]{r(\operatorname{cs}\vartheta + i\operatorname{sn}\vartheta)} = \sqrt[m]{r}\left(\operatorname{cs}\frac{\vartheta}{m} + i\operatorname{sn}\frac{\vartheta}{m}\right).$$

Примѣры на дѣленіе:

1) $\sqrt{6}(\operatorname{cs}48^0 + i\operatorname{sn}48^0) : 2\sqrt{3}(\operatorname{cs}30^0 + i\operatorname{sn}30^0)$.

Отв. $\frac{\sqrt{2}}{2}(\operatorname{cs}18^0 + i\operatorname{sn}18^0)$.

2) $\sqrt{3}(\operatorname{cs}16^0 + i\operatorname{sn}16^0) : \frac{1}{\sqrt{12}}(\operatorname{cs}14^0 - i\operatorname{sn}14^0)$. *Отв.* $3(\sqrt{3} + i)$.

3) $5\sqrt{21}(\operatorname{cs}62^0 - i\operatorname{sn}62^0) : \frac{1}{\sqrt{3}}(\operatorname{cs}17^0 - i\operatorname{sn}17^0)$.

Отв. $\frac{15\sqrt{14}}{2}(1 - i)$.

4) $(2 - \sqrt{2})(\operatorname{cs}53^0 + i\operatorname{sn}53^0) : (\sqrt{2} - 1)(\operatorname{cs}7^0 - i\operatorname{sn}7^0)$.

Отв. $\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i\sqrt{3})$.

5) $(3 + \sqrt{6})(\operatorname{cs}72^0 + i\operatorname{sn}72^0) : (\sqrt{2} + \sqrt{3})(\operatorname{cs}18^0 - i\operatorname{sn}18^0)$.

Отв. $i\sqrt{3}$.

Примѣры на извлеченіе корня:

1) $\sqrt[3]{0{,}125(\operatorname{cs}63^0 + i\operatorname{sn}63^0)}$. *Отв.* $0{,}5(\operatorname{cs}21^0 + i\operatorname{sn}21^0)$.

2) $\sqrt[4]{0{,}0081(\operatorname{cs}48^0 - i\operatorname{sn}48^0)}$. *Отв.* $0{,}3(\operatorname{cs}12^0 - i\operatorname{sn}12^0)$.

3) $\sqrt[5]{32(\operatorname{cs}150^0 + i\operatorname{sn}150^0)}$. *Отв.* $\sqrt{3} + i$.

4) $\sqrt[6]{0{,}046656(\operatorname{cs}60^0\,30' - i\operatorname{sn}60^0\,30')}$.

Отв. $0{,}6(\operatorname{cs}10^0\,5' - i\operatorname{sn}10^0\,5')$.

N3

ГЛАВА II.

Перемѣнныя величины, имѣющія предѣлъ.

§ 9. Перемѣнной величиной называется такая величина, которая измѣняетъ свое значеніе во время разсужденія о ней, напримѣръ хорда въ данномъ кругѣ; величина же, которая сохраняетъ свое значеніе во время разсужденія о ней, называется постоянной величиной, напр. діаметръ въ данномъ кругѣ. Но діаметръ въ разныхъ кругахъ будетъ величина перемѣнная.

Постоянныя величины суть вполнѣ опредѣленныя величины; но къ числу постоянныхъ величинъ относятъ и безконечность, хотя послѣдняя не всегда отличается опредѣленностью.

Изъ перемѣнныхъ величинъ разсмотримъ тѣ, которыя при своемъ безпредѣльномъ измѣненіи приближаются къ нѣкоторымъ соотвѣтственнымъ имъ постояннымъ величинамъ, такъ что разность между перемѣнной и соотвѣтствующей ей постоянной можетъ сдѣлаться меньше напередъ заданной сколь угодно малой величины и при дальнѣйшемъ измѣненіи оставаться меньше этой величины.

Эти перемѣнныя величины и составляютъ предметъ изученія въ отдѣлѣ математики о предѣлахъ перемѣнныхъ величинъ.

Надо замѣтить, что перемѣнная величина при своемъ измѣненіи можетъ все время оставаться или меньше, или больше соотвѣтственной ей постоянной, никогда ея не достигая, или въ концѣ концовъ сливаясь съ нею. Примѣромъ перемѣнныхъ величинъ такого рода могутъ служить періодическія дроби, периметръ правильнаго многоугольника, вписаннаго въ кругъ или описаннаго около круга съ перемѣннымъ числомъ сторонъ и т. д.

Нерѣдко встрѣчаются и такія перемѣнныя величины, которыя при своемъ безпредѣльномъ измѣненіи дѣлаются то больше, то меньше соотвѣтственныхъ имъ постоянныхъ величинъ, напр. подходящія дроби періодическихъ непрерывныхъ дробей.

Перемѣнныя величины, безпредѣльно приближающіяся къ постояннымъ, бываютъ: конечныя перемѣнныя и безконечно-малыя перемѣнныя.

Конечныя перемѣнныя — тѣ, которыя приближаются къ нѣкоторымъ конечнымъ постояннымъ, отличнымъ отъ нуля; безконечно-малыя перемѣнныя величины — тѣ, которыя безпредѣльно приближаются къ нулю.

Кромѣ этихъ двухъ родовъ перемѣнныхъ величинъ есть еще одинъ родъ перемѣнныхъ, которыя при своемъ измѣненіи безпредѣльно возрастаютъ и могутъ сдѣлаться больше всякой напередъ заданной большой величины и при дальнѣйшемъ измѣненіи оставаться больше этой величины.

Про эти величины говорятъ, что онѣ стремятся къ безконечности; ихъ называютъ безконечно-большими перемѣнными величинами.

Если перемѣнная величина, измѣняясь, приближается безпредѣльно къ постоянной и разность между перемѣнной и этой постоянной можетъ сдѣлаться сколь угодно малой величиной и при дальнѣйшемъ измѣненіи оставаться меньше этой величины, то эта постоянная величина называется предѣломъ перемѣнной величины; слѣд., чтобы постоянная величина могла быть предѣломъ перемѣнной, необходимо, чтобы перемѣнная приближалась къ ней при своемъ измѣненіи, и достаточно, если разность между ними можетъ сдѣлаться сколь угодно малой величиной и при дальнѣйшемъ измѣненіи оставаться меньше этой величины.

Въ этомъ случаѣ говорятъ, что близъ предѣла разность между перемѣнной и постоянной равна безконечно-малой величинѣ.

Перемѣнную величину обозначаютъ послѣдними буквами латинской азбуки, ея предѣлъ начальными буквами, а разность между ними близъ предѣла будемъ обозначать начальными буквами греческой азбуки; такъ, напр., если x — перемѣнная, a — ея предѣлъ, то разность между ними близъ предѣла можно обозначить черезъ α и, слѣд., $x-a=\alpha$, откуда получается способъ обозначенія перемѣнной величины близъ предѣла черезъ ея предѣлъ и черезъ безконечно-малую разность между нею и ея предѣломъ: $x=a+\alpha$; $y=b+\beta$ и т. д.

Эти выраженія равносильны слѣдующимъ другимъ выраженіямъ: пред $(x)=a$ или $\lim(x)=a$, пред $(y)=b$ или $\lim(y)=b$ и т. д.

Такъ какъ безконечно-малая величина безпредѣльно приближается къ нулю, то, очевидно, ея предѣлъ равенъ нулю, и потому если желаютъ показать, что величина α есть безконечно-малая величина, то пишутъ такъ: пред $(\alpha)=0$ или $\lim(\alpha)=0$.

Безконечно-малая величина по знаку можетъ быть и положительная и отрицательная величина, но предѣлъ какъ той, такъ и другой равенъ нулю *).

Способъ нахожденія предѣла перемѣнной называется способомъ предѣловъ.

Способъ предѣловъ.

§ 10. Прежде чѣмъ перейти къ изложенію этого способа, докажемъ нѣсколько теоремъ относительно безконечно-малыхъ величинъ.

1. Теорема. Сумма конечнаго числа безконечно-малыхъ слагаемыхъ есть величина безконечно-малая.

Пусть имѣется опредѣленное число n положительныхъ безконечно-малыхъ слагаемыхъ $\alpha, \beta, \gamma, \ldots k$; ихъ сумма $\sigma=\alpha+\beta+\gamma+\ldots+k$.

Докажемъ, что σ есть безконечно-малая величина.

Всегда можно найти такую безконечно-малую величину, которой n-ая часть будетъ больше каждой изъ заданныхъ безконечно-малыхъ величинъ; пусть эта безконечно-малая величина μ; тогда будемъ имѣть:

$$\alpha<\frac{\mu}{n};\ \beta<\frac{\mu}{n};\ \gamma<\frac{\mu}{n};\ldots\ k<\frac{\mu}{n}.$$

Сложивъ всѣ эти неравенства почленно, получимъ:

$$\alpha+\beta+\gamma+\ldots+k<\frac{\mu}{n}\cdot n=\mu.$$

---

*) Точнѣе: предѣлъ безконечно-малой со знакомъ + равняется +0, предѣлъ безконечно-малой со знакомъ − равняется −0.

Итакъ $\sigma=\alpha+\beta+\gamma+\ldots+k<\mu$, т.-е., меньше безконечно малой величины μ, и, слѣд., сама σ подавно будетъ безконечно-малая величина, что и тр. док.

Замѣчаніе 1. Если нѣкоторыя слагаемыя будутъ отрицательныя величины, то алгебраическая сумма конечнаго числа безконечно-малыхъ слагаемыхъ будетъ также безконечно-малая величина.

Замѣчаніе 2. Что касается суммы безконечно-большого числа безконечно-малыхъ слагаемыхъ, то относительно ея нельзя доказать что-либо общее: она можетъ быть и безконечно-малой величиной, конечной и безконечно-большой, напр.

$$\overbrace{\left(\frac{a}{n}+\frac{a}{n}+\frac{a}{n}+\cdots\right)}^{n \text{ слагаемыхъ}}_{n=\infty}=a.$$

2. Теорема. Произведеніе безконечно-малой величины на постоянную величину есть безконечно-малая величина.

При доказательствѣ этой теоремы ограничимся только положительными безконечно-малыми.

Здѣсь могутъ быть три случая. 1) n — число цѣлое; тогда $n\alpha=\alpha+\alpha+\alpha\ldots+\alpha$ по доказанному (1-я теорема) есть безконечно-малая величина.

2) $n>1$ и дробное число. Въ этомъ случаѣ можно взять цѣлое число $n_1>n$, и тогда $n_1\alpha>n\alpha$; но $n_1\alpha$ — безконечно-малая величина, а слѣд. $n\alpha$, какъ меньшая $n_1\alpha$, и подавно будетъ безконечно-малая величина.

3) $n<1$. Въ этомъ случаѣ n равняется правильной дроби $\frac{p}{q}$ или не превышаетъ ея, если n несоизмѣримое число, т.-е. $n\leqslant\frac{p}{q}$, откуда $n\alpha\leqslant\frac{p\alpha}{q}$; но $p\alpha$ — безконечно-малая величина, слѣд. $n\alpha$ и подавно безконечно-малая величина. Итакъ, каково бы ни было постоянное число n, $n\alpha$ всегда будетъ безконечно-малой величиной.

Указавъ эти свойства безконечно-малыхъ, перейдемъ къ изложенію способа предѣловъ конечныхъ перемѣнныхъ.

3. Теорема. Если двѣ конечныя перемѣнныя величины при всѣхъ своихъ измѣненіяхъ равны между собою, то равны и ихъ предѣлы.

Пусть x и y двѣ перемѣнныя величины, которыя равны при всѣхъ своихъ измѣненіяхъ; ихъ предѣлы соотвѣтственно равны a и b. Докажемъ, что, если $x=y$, то $a=b$.

Близъ предѣла $x=a+\alpha$, $y=b+\beta$; такъ какъ $x=y$, то $a+\alpha=b+\beta$. Перенесемъ постоянныя величины въ одну часть равенства, а безконечно-малыя въ другую; получимъ

$$a-b=\beta-\alpha;$$

но $a-b$ постоянная величина, а $\beta-\alpha$ безконечно-малая.

Безконечно-малая величина можетъ равняться постоянной величинѣ только тогда, когда эта постоянная величина равна нулю, что слѣдуетъ изъ понятія о безконечно-малой величинѣ; слѣд., $a-b=0$, откуда $a=b$, что и тр. док.

4. Теорема. Если двѣ перемѣнныя величины при всѣхъ своихъ измѣненіяхъ находятся въ постоянномъ отношеніи, то и предѣлы ихъ находятся въ томъ же отношеніи.

Пусть даны перемѣнныя x и y, ихъ предѣлы соотвѣтственно равны a и b; кромѣ того дано, что $\frac{x}{y}=\frac{m}{n}$, гдѣ m и n постоянныя количества; требуется доказать, что $\frac{a}{b}=\frac{m}{n}$.

Близъ предѣла $x=a+\alpha$, $y=b+\beta$; въ данномъ отношеніи $\frac{x}{y}$ замѣнимъ x и y равными имъ выраженіями, получимъ $\frac{a+\alpha}{b+\beta}=\frac{m}{n}$, откуда $na+n\alpha=mb+m\beta$. Такъ какъ здѣсь na и mb — постоянныя величины, а $n\alpha$ и $m\beta$ — безконечно-малыя, то это равенство означаетъ постоянное равенство двухъ перемѣнныхъ величинъ, предѣлы которыхъ na и mb; поэтому въ силу 3-й теоремы $na=mb$, а отсюда $\frac{a}{b}=\frac{m}{n}$, что и тр. док.

5. Теорема. Предѣлъ суммы конечнаго числа перемѣнныхъ слагаемыхъ равняется суммѣ предѣловъ слагаемыхъ.

Пусть имѣется n перемѣнныхъ величинъ: $x, y, z \ldots t$; ихъ предѣлы соотвѣтственно равны $a, b, c \ldots k$.

Близъ предѣла: $x = a + \alpha$.

$$y = b + \beta.$$

$$z = c + \gamma.$$

$$\ldots\ldots$$

$$t = k + \mu.$$

Сложимъ эти равенства почленно, соединивъ постоянныя величины въ одну группу, а безконечно-малыя въ другую группу, получимъ:

$$x + y + z + \ldots + t = (a + b + c + \ldots + k) + (\alpha + \beta + \gamma + \ldots + \mu);$$

но $\alpha + \beta + \gamma \ldots + \mu$ (по 1-й теоремѣ) безконечно-малая величина; $a + b + c + \ldots + k$ — постоянная величина; слѣд., послѣднее равенство означаетъ постоянное равенство двухъ перемѣнныхъ величинъ, а потому въ силу 3-й теоремы заключаемъ, что пред $(x + y + z + \ldots + t) = a + b + c + \ldots + k$, гдѣ

$$a = \text{пред}\,(x), \quad b = \text{пред}\,(y) \ldots k = \text{пред}\,(t).$$

Подставляя вмѣсто $a, b, \ldots k$ то, что онѣ означаютъ, получимъ: пред$(x + y + z + \ldots + t) =$ пред$(x) +$ пред $(y) + \ldots +$ пред (t). Что и тр. док.

6. Теорема. Предѣлъ разности перемѣнныхъ величинъ равенъ разности ихъ предѣловъ.

Имѣемъ перемѣнныя величины x и y; предѣлы ихъ соотвѣтственно равны a и b; требуется доказать, что

$$\text{пред}\,(x - y) = a - b.$$

Близъ предѣла $x = a + \alpha$, $y = b + \beta$; вычтя эти равенства почленно, получимъ: $x - y = (a - b) + (\alpha - \beta)$, откуда на основаніи 3-й теоремы находимъ:

$$\text{пред}\,(x - y) = a - b = \text{пред}\,(x) - \text{пред}\,(y), \quad \text{что и тр. док.}$$

7. Теорема. Если разность двухъ перемѣнныхъ величинъ близъ предѣла безконечно-малая величина, то предѣлы этихъ перемѣнныхъ величинъ равны между собою.

Даны перемѣнныя величины x и y; ихъ разность близъ предѣла равна α; требуется доказать, что пред $(x) =$ пред (y).

Намъ дано: $x-y=\alpha$; возьмемъ предѣлъ отъ обѣихъ частей этого равенства: пред $(x-y)=$ пред $(\alpha)=0$;
въ силу же 6-й теоремы пред $(x-y)=$ пред $(x)-$ пред $(y)=0$, откуда находимъ: пред $(x)=$ пред (y), что и тр. док.

Слѣдствіе. Если имѣемъ два безконечныхъ ряда перемѣнныхъ величинъ, слѣдующихъ другъ за другомъ по какому-нибудь закону,

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots x_n, \ldots$$
$$y_0,\ y_1,\ y_2,\ y_3, \ldots y_n, \ldots$$

и при этомъ перемѣнныя величины перваго ряда по мѣрѣ возрастанія номера ихъ мѣста въ ряду стремятся къ одному опредѣленному предѣлу, то и величины второго ряда будутъ стремиться къ тому же предѣлу, если только разность между величинами одинаковаго номера обоихъ рядовъ при безпредѣльномъ возрастаніи номера ихъ мѣста будетъ безконечно-малая величина.

Примѣчаніе. Примѣромъ подобныхъ двухъ безконечныхъ рядовъ могутъ служить приближенія несоизмѣримыхъ чиселъ съ недостаткомъ и съ избыткомъ или подходящія дроби непрерывной періодической дроби четнаго и нечетнаго порядка.

8. Теорема. Если двѣ перемѣнныя величины x и y имѣютъ одинаковый предѣлъ, то величина z, лежащая между ними, имѣетъ тотъ же самый предѣлъ.

Пусть $x > z > y$; дано, что пред $(x)=$ пред (y); разность же двухъ перемѣнныхъ величинъ, имѣющихъ одинаковый предѣлъ, есть безконечно-малая величина близъ предѣла (по 7-й теор.); поэтому $x-y=\alpha$. Такъ какъ по положенію $z-y < x-y$, то $z-y$ будутъ также близъ предѣла безконечно-малая величина и слѣд., пред $z=$ пред $(y)=$ пред (x), что и тр. док.

Примѣръ. Изъ тригонометріи извѣстно, что при $x < \frac{\pi}{2}$ имѣетъ мѣсто слѣдующая формула $\operatorname{sn} x < x < \operatorname{tg} x$ (1); раздѣливъ всѣ члены этой формулы на $\operatorname{sn} x > 0$, получимъ: $1 < \frac{x}{\operatorname{sn} x} < \frac{1}{\operatorname{cs} x}$. При $x=0$ крайнія величины этой формулы

равны единицѣ, а потому и средняя величина при $x=0$ будетъ равна единицѣ, т.-е., пред $\left(\dfrac{x}{\operatorname{sn} x}\right)=1.$
$x=0.$

Если всѣ члены (1)-й формулы раздѣлить на $\operatorname{tg} x > 0$, то получимъ $\operatorname{cs} x < \dfrac{x}{\operatorname{tg} x} < 1$. При $x=0$ крайнія величины равны единицѣ; потому и средняя величина при $x=0$ будетъ равна единицѣ, т.-е., пред $\left(\dfrac{x}{\operatorname{tg} x}\right)=1.$
$x=0.$

9. Теорема. Предѣлъ произведенія конечнаго числа перемѣнныхъ равенъ произведенію предѣловъ этихъ перемѣнныхъ.

Эту теорему докажемъ для двухъ производителей, такъ какъ послѣ этого легко ее распространить и на большее число производителей.

Даны перемѣнныя x и y; ихъ предѣлы соотвѣтственно равны a и b. Близъ предѣла $x=a+\alpha$, $y=b+\beta$; перемноживъ эти равенства почленно, получимъ

$$xy=ab+(a\beta+b\alpha+\alpha\beta)\ .\ (1).$$

Величины $a\beta$ и $b\alpha$ безконечно-малыя (по 2-й теор.); поэтому $a\beta+b\alpha+\alpha\beta$ (по 1-й теор.) безконечно-малая величина и слѣд., равенство (1) означаетъ постоянное равенство двухъ перемѣнныхъ величинъ, а въ силу 3-й теоремы

$$\text{пред}\,(xy)=ab=\text{пред}\,(x)\,.\,\text{пред}\,(y), \text{ что и тр. док.}$$

Если имѣется три производителя x, y и z, то два изъ нихъ временно можно разсматривать какъ одинъ; тогда

$$\text{пред}\,(x\,.\,y\,.\,z)=\text{пред}\,(xy)\,.\,\text{пред}\,(z)=\text{пред}\,(x)\,.\,\text{пред}\,(y)\,.\,\text{пред}\,(z).$$

Такимъ же образомъ можно доказать эту теорему и для большаго числа производителей.

Слѣдствія. 1) Предѣлъ произведенія постоянной на перемѣнную равенъ постоянной, умноженной на предѣлъ перемѣнной; иначе говоря, постоянный множитель можно вынести изъ-подъ знака предѣла.

2) Предѣлъ цѣлой положительной степени отъ перемѣнной величины равенъ той же степени отъ предѣла перемѣнной.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть x перемѣнная величина, а m цѣлое положительное число; тогда $x^m = x.x.x\ldots x$; отсюда пред $(x^m) =$ пред (x). пред $(x)\ldots$ пред $(x) = [\text{пред}\,(x)]^m$.

10. Теорема. Предѣлъ корня цѣлой положительной степени изъ перемѣнной величины равняется корню той же степени изъ предѣла перемѣнной величины.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть m цѣлое положительное число, а x перемѣнная величина; требуется доказать, что пред $(\sqrt[m]{x}) = \sqrt[m]{\text{пред}\,(x)}$. Замѣнимъ $\sqrt[m]{x}$ черезъ z, получимъ $\sqrt[m]{x} = z$, откуда $x = z^m$.

Беремъ предѣлъ отъ обѣихъ частей этого равенства:

пред $(x) =$ пред $(z^m) = [\text{пред}\,(z)]^m$; отсюда, извлекая корень m-ой степени, находимъ: пред $(z) =$ пред $(\sqrt[m]{x}) = \sqrt[m]{\text{пред}\,(x)}$, что и тр. док.

Слѣдствіе. Предѣлъ положительной дробной степени перемѣнной величины равенъ той же степени отъ предѣла перемѣнной.

11. Теорема. Предѣлъ частнаго перемѣнныхъ величинъ равняется частному предѣловъ этихъ величинъ.

Пусть $\frac{x}{y} = z$, гдѣ x, y и z суть перемѣнныя величины; отсюда имѣемъ $x = y.z$. Беремъ предѣлы отъ обѣихъ частей этого равенства: пред $(x) =$ пред $(y.z) =$ пред (y) . пред (z), откуда пред $(z) =$ пред $\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\text{пред}\,(x)}{\text{пред}\,(y)}$, что и тр. док.

Слѣдствія. 1) Предѣлъ частнаго постоянной величины на перемѣнную равняется постоянной величинѣ, дѣленной на предѣлъ перемѣнной.

2) Предѣлъ отрицательной степени съ перемѣннымъ основаніемъ равенъ той же степени отъ предѣла этой перемѣнной.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть имѣется отрицательная степень x^{-m}, гдѣ x перемѣнная величина, а m положительное число, цѣлое или дробное; извѣстно, что $x^{-m}=\frac{1}{x^m}$; беремъ предѣлъ отъ обѣихъ частей этого равенства: пред $(x^{-m})=\frac{1}{[\text{пред}\,(x)]^m}=$ $[\text{пред}\,(x)]^{-m}$, что и тр. док.

12. Теорема. Предѣлъ безконечно-малой степени отъ постояннаго количества равенъ единицѣ.

Пусть имѣется положительное постоянное количество N и безконечно-малая величина α; безконечно-малая степень будетъ N^α; требуется доказать, что пред $(N^\alpha)=1$.

При доказательствѣ этой теоремы слѣдуетъ разсмотрѣть 4 случая, а именно: 1-й случай, когда $N>1$ и $\alpha>0$, 2-й случай, когда $N<1$ и $\alpha>0$, 3-й случай, когда $N\gtrless 1$ и $\alpha<0$, и, наконецъ, 4-й случай, когда α не можетъ быть представлено въ видѣ дроби, числитель которой единица, а знаменатель цѣлое число, или когда α неисоизмѣримое число.

1-й случай. Пусть $\alpha=\frac{1}{n}$, гдѣ n цѣлое положительное число.

Возьмемъ сумму членовъ такого вида:

$$N^0+N^{\frac{1}{n}}+N^{\frac{2}{n}}+N^{\frac{3}{n}}+\ldots+N^{\frac{n-1}{n}},$$

что представляетъ изъ себя геометрическую прогрессію со знаменателемъ $=N^{\frac{1}{n}}$. Сумма членовъ этой прогрессіи равна $\frac{N-1}{N^{\frac{1}{n}}-1}$.

Такъ какъ всѣ слагаемыя выше написанной суммы кромѣ перваго, который равенъ единицѣ, больше единицы, ихъ же всего n, то, очевидно, $n<\frac{N-1}{N^{\frac{1}{n}}-1}$, откуда $N^{\frac{1}{n}}-1<\frac{N-1}{n}$.

Если n будемъ безпредѣльно увеличивать, то $\frac{N-1}{n}$ будетъ безпредѣльно уменьшаться и сдѣлается безконечно малой вели-

чиной; тогда $N^{\frac{1}{n}}-1$ и подавно будетъ безконечно-малая вели-

чина и, слѣд., пред $(N^{\frac{1}{n}}-1)=0$, откуда пред $(N^{\frac{1}{n}})=1$, а за-

мѣняя $\frac{1}{n}$ черезъ α, получимъ пред $(N^{\alpha})=1$, что и тр. док.

2-й случай, когда $N<1$ и $\alpha>0$. Въ этомъ случаѣ мы

можемъ найти такое число $N_1>1$, чтобы $N=\frac{1}{N_1}\cdot$ Возвысивъ

обѣ части этого равенства въ степень α, получимъ $N^{\alpha}=\frac{1}{N_1{}^{\alpha}}\cdot$

Возьмемъ предѣлы отъ обѣихъ частей послѣдняго равенства:

пред $(N^{\alpha})=\frac{1}{\text{пред}\,(N_1{}^{\alpha})}$; но по доказанному въ 1-мъ случаѣ

пред $(N_1)^{\alpha}=1$, слѣд., и пред $(N^{\alpha})=1$, что и тр. док.

3-й случай, когда $N \lesseqgtr 1$ и $\alpha<0$. Положимъ $\alpha=-\beta$,

гдѣ β уже положительная величина; тогда $N^{\alpha}=N^{-\beta}=\frac{1}{N^{\beta}}\cdot$

Взявъ предѣлъ отъ обѣихъ частей этого равенства, получимъ

пред $(N^{\alpha})=\frac{1}{\text{пред}\,N^{\beta}}$; но пред $(N^{\beta})=1$, слѣд., и пред $(N^{\alpha})=1$,

что и тр. док.

4-й случай, когда $\alpha=\frac{1}{n}$, гдѣ n положительное дробное или несоизмѣримое число.

Въ этомъ случаѣ, въ ряду цѣлыхъ чиселъ всегда можно найти два смежныхъ цѣлыхъ числа p и $p+1$, между которыми заключается n, такъ что $p<n<p+1$.

Обратныя имъ числа будутъ таковы: $\frac{1}{p}>\frac{1}{n}>\frac{1}{p+1}\cdot$

Далѣе, если $N>1$, то очевидно, что

$$N^{\frac{1}{p}}>N^{\frac{1}{n}}>N^{\frac{1}{p+1}}\text{*)}.$$

если же $N<1$, то $N^{\frac{1}{p}}<N^{\frac{1}{n}}<N^{\frac{1}{p+1}}$ *).

*) При $n<0$ эти неравенства будутъ того же смысла.

Въ обоихъ случаяхъ $N^{\frac{1}{n}}$ оказывается величиной, лежащей между $N^{\frac{1}{p}}$ и $N^{\frac{1}{p+1}}$. Если теперь n будетъ безпредѣльно возрастать, то и p такъ же будетъ возрастать безпредѣльно, по $\underset{p=\infty}{\text{пред}}\,(N^{\frac{1}{p}})$ и $\underset{p=\infty}{\text{пред}}\,(N^{\frac{1}{p+1}})$ по доказанному равенъ единицѣ, слѣд., и предѣлъ величины, заключенной между ними (по 8-й теор.) будетъ равенъ единицѣ, т.-е.

$$\text{пред}\,(N^{\frac{1}{n}}) = \text{пред}\,(N^{\alpha}) = 1, \text{ что и тр. док.}$$

Замѣчаніе. Случай, когда $N < 0$ легко сводится къ разсмотрѣннымъ выше случаямъ, если только условиться принимать пред $(-1)^{\alpha}$ за единицу. Въ самомъ дѣлѣ, пусть $N = -N_1$, гдѣ $N_1 > 0$; тогда $N^{\alpha} = (-N_1)^{\alpha} = (-1)^{\alpha}.N_1{}^{\alpha}$. Взявъ предѣлъ отъ обѣихъ частей этого равенства и принявъ во вниманіе вышеприведенное условіе, получимъ пред $(N^{\alpha}) = 1$.

13. Теорема. Предѣлъ степени съ перемѣннымъ показателемъ и постояннымъ основаніемъ равняется постоянному основанію въ степени, равной предѣлу перемѣннаго показателя.

Пусть дана степень a^x, гдѣ a — постоянная величина, x — перемѣнная, которой предѣлъ равенъ n.

Близъ предѣла $x = n + \alpha$ и потому $a^x = a^{n+\alpha} = a^n.a^{\alpha}$.

Беря предѣлъ отъ обѣихъ частей этого равенства и имѣя въ виду, что a^n — постоянная величина, получимъ:

пред $(a^x) = a^n.$ пред (a^{α}); но по теоремѣ 12-й пред $(a^{\alpha}) = 1$, слѣд.

$$\text{пред}\,(a^x) = a^n = a^{\text{пред}\,(x)} \text{ что и тр. док.}$$

14. Теорема. Предѣлъ логариѳма перемѣнной величины равенъ логариѳму предѣла перемѣнной величины.

Пусть имѣется $\lg x$, гдѣ x есть перемѣнная величина; требуется доказать, что пред $(\lg x) = \lg$ пред (x).

Обозначивъ логариѳмъ отъ x при основаніи a черезъ y, получимъ: $x = a^y$.

Беря предѣлы отъ обѣихъ частей этого равенства, имѣемъ:

$$\text{пред}\,(x) = \text{пред}\,(a^y) = a^{\text{пред}\,(y)};$$

логариѳмируя это послѣднее равенство и замѣняя y через $\lg x$, получимъ: $\lg$ пред $(x) =$ пред (y) или

$$\text{пред}\,(\lg x) = \lg \text{пред}\,(x), \text{ что и тр. док.}$$

15. Теорема. Предѣлъ степени съ перемѣннымъ основаніемъ и перемѣннымъ показателемъ равняется предѣлу основанія въ степени, равной предѣлу перемѣннаго показателя.

Пусть имѣемъ x^y, гдѣ x и y суть перемѣнныя величины. Положимъ $x^y = z$; логариѳмируя обѣ части этого равенства, получимъ: $y \lg x = \lg z$.

Беремъ предѣлы отъ обѣихъ частей послѣдняго равенства:

$$\text{пред}\,(y \lg x) = \text{пред}\,(\lg z);$$

но на основаніи 8-й и 14-й теоремъ этому равенству придаемъ слѣдующій видъ:

$$\text{пред}\,(y)\,.\,\lg \text{пред}\,(x) = \lg \text{пред}\,(z),$$

откуда $\lg\,[\text{пред}\,(x)]^{\text{пред}\,y} = \lg \text{пред}\,(z)$.

Если же логариѳмы равны, то равны и подлогариѳмическія количества; слѣд., пред $(z) =$ пред $(x^y) = [\text{пред}\,(x)]^{\text{пред}\,y}$, что и тр. док.

§ 11. Изложивъ сущность способа предѣловъ перемѣнныхъ величинъ, сдѣлаемъ нѣкоторое добавленіе о безконечно-малыхъ величинахъ.

Если въ вопросѣ встрѣчается нѣсколько безконечно-малыхъ величинъ $\alpha, \beta, \gamma,$ и т. д., находящихся между собою въ нѣкоторой зависимости, то, обыкновенно, одну изъ нихъ, напр. α, принимаютъ за главную и сравниваютъ прочія съ нею.

Изъ сравненія ихъ вытекаетъ раздѣленіе безконечно-малыхъ на порядки.

Если предѣлъ отношенія β безконечно-малой къ главной α равенъ k — конечной постоянной, отличной отъ нуля, то такую безконечно-малую называютъ безконечно-малой перваго порядка.

Близъ предѣла $\frac{\beta}{\alpha} = k + \varepsilon$; отсюда получается общій видъ безконечно-малыхъ перваго порядка:

$$\beta = \alpha(k + \varepsilon).$$

Если предѣлъ отношенія γ къ α^2 равняется k_1 конечной постоянной, отличной отъ нуля, то говорятъ, что γ — безконечно-малая второго порядка.

Близъ предѣла $\frac{\gamma}{\alpha^2} = k_1 + \varepsilon_1$; отсюда получается общій видъ безконечно-малыхъ второго порядка:

$$\gamma = \alpha^2(k_1 + \varepsilon_1).$$

Если предѣлъ отношенія δ къ α^3 равняется k_2 конечной постоянной, отличной отъ нуля, то δ будетъ безконечно-малая третьяго порядка, и общій видъ безконечно-малыхъ третьяго порядка:

$$\delta = \alpha^3(k_2 + \varepsilon_2),$$

и вообще условіе, чтобы μ была безконечно-малая n-аго порядка, гдѣ n цѣлое или дробное число, выражается слѣдующимъ равенствомъ:

$$\mu = \alpha^n(k_{n-1} + \varepsilon_{n-1});$$

отбрасывая знаки при k и ε, получимъ:

$$\mu = \alpha^n(k + \varepsilon).$$

Сравнивая безконечно-малую высшаго порядка съ безконечно-малой низшаго порядка, находимъ, что предѣлъ ихъ отношенія равенъ нулю: это значитъ, что безконечно-малая высшаго порядка безконечно-мала сравнительно съ безконечно-малой низшаго порядка.

Для примѣра сравнимъ $\alpha^4(k + \varepsilon)$ съ $\alpha^2(k_1 + \varepsilon_1)$;

пред $\cdot \frac{\alpha^4(k+\varepsilon)}{\alpha^2(k_1+\varepsilon_1)} =$ пред α^2 . пред $\frac{k+\varepsilon}{k_1+\varepsilon_1} = \frac{k}{k_1}$ пред. α^2; но пред$(\alpha^2) = 0$;

слѣд. и пред $\frac{\alpha^4(k+\varepsilon)}{\alpha^2(k_1+\varepsilon_1)} = 0$, т.-е., $\frac{\alpha^4(k+\varepsilon)}{\alpha^2(k_1+\varepsilon_1)}$ — безконечно-малая величина, что возможно только тогда, когда $\alpha^4(k+\varepsilon)$ будетъ безконечно-мала сравнительно съ $\alpha^2(k_1 + \varepsilon_1)$.

§ 12. Еще Архимедъ предложилъ конечныя перемѣнныя величины, предѣлъ которыхъ ищется, разсматривать какъ суммы безконечно-малыхъ слагаемыхъ, которыхъ число безгранично увеличивается.

Лейбницъ и Ньютонъ присоединили къ этому другое представленіе конечныхъ величинъ, а именно, они конечную величину разсматриваютъ какъ предѣлъ отношенія двухъ безконечно-малыхъ величинъ.

При этомъ какъ въ томъ, такъ и въ другомъ способѣ допускается свободный выборъ безконечно-малыхъ величинъ, составляющихъ конечныя величины, лишь бы только предѣлъ отношенія однихъ безконечно-малыхъ къ другимъ, ихъ замѣняющимъ, былъ равенъ единицѣ. Изъ всѣхъ возможныхъ безконечно-малыхъ выбираютъ тѣ, вычисленіе съ которыми значительно упрощается. Эта возможность свободнаго выбора основывается на слѣдующихъ двухъ теоремахъ.

16. Теорема. Предѣлъ конечной суммы безконечно-большого числа положительныхъ безконечно-малыхъ слагаемыхъ не измѣнится, если замѣнить эти безконечно-малыя другими при условіи, чтобы отношеніе вторыхъ безконечно-малыхъ къ соотвѣтствующимъ первымъ имѣло предѣломъ единицу.

Пусть конечная сумма безконечно-большого числа положительныхъ безконечно-малыхъ слагаемыхъ вида

$$\alpha+\alpha_1+\alpha_2+\ldots$$

имѣетъ опредѣленный предѣлъ; требуется доказать, что

пред $(\alpha+\alpha_1+\alpha_2+\ldots)=$ пред $(\beta+\beta_1+\beta_2+\ldots)$,

если пред $\dfrac{\beta}{\alpha}=1$, пред $\dfrac{\beta_1}{\alpha_1}=1$, пред $\dfrac{\beta_2}{\alpha_2}=1$ и т. д.

Близъ предѣла $\dfrac{\beta}{\alpha}=1+\varepsilon$, $\dfrac{\beta_1}{\alpha_1}=1+\varepsilon_1$, $\dfrac{\beta_2}{\alpha_2}=1+\varepsilon_2$ и т. д.; отсюда $\beta=\alpha+\alpha\varepsilon$, $\beta_1=\alpha_1+\alpha_1\varepsilon_1$, $\beta_2=\alpha_2+\alpha_2\varepsilon_2$ и т. д.

Сложивъ послѣднія равенства почленно и заключивъ сумму произведеній безконечно-малыхъ въ скобки, получимъ

$$(1)\quad \beta+\beta_1+\beta_2+\ldots=\alpha+\alpha_1+\alpha_2+\ldots+(\alpha\varepsilon+\alpha_1\varepsilon_1+\alpha_2\varepsilon_2+\ldots).$$

Не трудно убѣдиться, что количество въ скобкахъ есть безконечно-малая величина.

Въ самомъ дѣлѣ, взявъ изъ числа безконечно-малыхъ ε, ε_1, ε_2 и т. д. самую большую ε_μ по абсолютной величинѣ, будемъ имѣть:

абс. вел. $(\alpha\varepsilon+\alpha_1\varepsilon_1+\alpha_2\varepsilon_2+\ldots) <$ абс. вел. $\varepsilon_\mu(\alpha+\alpha_1+\alpha_2+\ldots)$; но $\varepsilon_\mu(\alpha+\alpha_1+\alpha_2+\ldots)$ есть безконечно-малая величина, такъ какъ представляетъ произведеніе безконечно-малой на конечную величину; слѣд., $\alpha\varepsilon+\alpha_1\varepsilon_1+\alpha_2\varepsilon_2+\ldots$ и подавно будетъ безконечно-малая величина.

Беря предѣлъ отъ обѣихъ частей (1) равенства и принимая во вниманіе только что доказанное, находимъ

$$\text{пред}\,(\beta+\beta_1+\beta_2+\ldots)=\text{пред}\,(\alpha+\alpha_1+\alpha_2+\ldots),\ \text{что и тр. док.}$$

17. Теорема. **Предѣлъ отношенія двухъ безконечно-малыхъ не измѣнится, если замѣнить эти безконечно-малыя другими при условіи, чтобы отношеніе первыхъ безконечно-малыхъ къ соотвѣтствующимъ вторымъ имѣло предѣломъ единицу.**

Пусть $\frac{\alpha}{\beta}$ имѣетъ опредѣленный предѣлъ; требуется доказать, что $\text{пред}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)=\text{пред}\left(\frac{\alpha_1}{\beta_1}\right)$, если $\text{пред}\,\frac{\alpha}{\alpha_1}=1$ и $\text{пред}\,\frac{\beta}{\beta_1}=1$.

Составимъ тождество такого вида:

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha_1}{\beta_1}\cdot\frac{\alpha}{\alpha_1}\cdot\frac{\beta_1}{\beta}.$$

Беря предѣлъ отъ обѣихъ частей этого тождества и принимая во вниманіе данныя условія, что

$$\text{пред}\,\frac{\alpha}{\alpha_1}=1,\quad \text{пред}\,\frac{\beta_1}{\beta}=\text{пред}\cdot\frac{1}{\frac{\beta}{\beta_1}}=\frac{1}{\text{пред}\,\frac{\beta}{\beta_1}}=1,\ \text{получимъ}$$

$$\text{пред}\,\frac{\alpha}{\beta}=\text{пред}\,\frac{\alpha_1}{\beta_1},\ \text{что и тр. док.}$$

Если предѣлъ отношенія безконечно-малыхъ равенъ единицѣ, то не трудно видѣть, что разность между ними безконечно-малая величина по отношенію каждой изъ нихъ; другими словами, эта разность безконечно-малая высшаго порядка сравнительно съ каждой изъ нихъ.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть $\text{пред}\,\frac{\alpha}{\beta}=1$; близъ предѣла

$\frac{\alpha}{\beta}=1+\varepsilon$ или $\alpha=\beta+\beta\varepsilon$, откуда $\alpha-\beta=\beta\varepsilon$ и $\frac{\alpha-\beta}{\beta}=\varepsilon$, т.-е. $\alpha-\beta$ безконечно-мала сравнительно съ β.

Дѣля выраженіе $\frac{\alpha-\beta}{\beta}=\varepsilon$ на $\frac{\alpha}{\beta}=1+\varepsilon$, получимъ $\frac{\alpha-\beta}{\alpha}=$ $=\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}=$ безконечно-малой величинѣ. Это также подтверждаетъ, что $\alpha-\beta$ безконечно-мала сравнительно и съ α.

§ 13. Нахожденіе истинныхъ значеній выраженій $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty-\infty$, 1^{∞}.

Иногда при нахожденіи предѣла алгебраическаго выраженія нельзя непосредственно примѣнять методы предѣловъ, не преобразовавъ надлежащимъ образомъ подпредѣльное количество, такъ какъ получаются выраженія неопредѣленнаго вида $\frac{0}{0}$, или $\frac{\infty}{\infty}$, или $\infty-\infty$, или 1^{∞}.

Разсмотримъ нѣсколько случаевъ, представляющихъ эти особенности.

Остановимся прежде всего на простѣйшемъ примѣрѣ, который въ предѣлѣ, повидимому, даетъ $\frac{0}{0}$.

Пусть $\underset{x=m}{\text{пред}}\left(\frac{ax^2+bx+c}{a_1x^2+b_1x+c_1}\right)=\frac{0}{0}$, т.-е., числитель и знаменатель этой дроби при $x=m$ обращаются порознь въ нуль.

Для нахожденія истиннаго значенія этой дроби при $x=m$ и для обнаруженія причины кажущейся неопредѣленности возьмемъ x близъ предѣла и дадимъ ему значеніе $x=m+\alpha$; тогда данная дробь приметъ слѣдующій видъ:

$$\frac{a(m+\alpha)^2+b(m+\alpha)+c}{a_1(m+\alpha)^2+b_1(m+\alpha)+c_1}=\frac{am^2+bm+c+a\alpha^2+2ma\alpha+b\alpha}{a_1m^2+b_1m+c_1+a_1\alpha^2+2ma_1\alpha+b_1\alpha};$$

но такъ какъ $am^2+bm+c=0$ и $a_1m^2+b_1m+c_1=0$, то данная дробь будетъ равна дроби $\frac{a\alpha^2+2ma\alpha+b\alpha}{a_1\alpha^2+2ma_1\alpha+b_1\alpha}=\frac{\alpha(a\alpha+2ma+b)}{\alpha(a_1\alpha+2ma_1+b_1)}$.

При $x=m$ количество α будетъ равно нулю, и такъ какъ числитель и знаменатель послѣдней дроби, равной данной, имѣютъ $a=x-m$ общимъ множителемъ, то поэтому они и обращаются въ нуль при $x=m$; слѣд., для нахожденія истиннаго значенія предложенной дроби надо прежде всего сократить ее на $a=x-m$ и тогда уже полагать $x=m$, что дастъ для данной дроби значеніе $\frac{2ma+b}{2ma_1+b_1}$.

Если предложенная дробь будетъ содержать радикалы, то, подвергая ее преобразованію, вытекающему изъ вида предложенной дроби, слѣдуетъ открыть общій множитель, обращающій числитель и знаменатель въ нуль при предѣльномъ значеніи x и предварительно на него сократить дробь. Указать общій способъ обнаруженія подобнаго множителя нельзя: каждый разъ слѣдуетъ сообразоваться съ видомъ числителя и знаменателя предложенной дроби.

Если числитель и знаменатель дроби суть цѣлые многочлены относительно x, то эта дробь принимаетъ видъ $\frac{\infty}{\infty}$ при $x=\infty$.

Чтобы найти истинное значеніе этой дроби, слѣдуетъ числитель и знаменатель ея раздѣлить на высшую степень x, въ которой x входитъ въ составъ числителя или знаменателя этой дроби, и послѣ этого полагать $x=\infty$; тогда найдется истинное значеніе данной дроби.

Разсмотримъ три случая: 1) числитель и знаменатель одинаковой степени относительно x, 2) знаменатель высшей степени, нежели числитель, и 3) числитель высшей степени, чѣмъ знаменатель.

1-й случай. Пусть дана дробь $\frac{ax^2+bx+c}{a_1x^2+b_1x+c_1}$, истинное значеніе которой надо найти при $x=\infty$.

Раздѣливъ числитель и знаменатель на x^2 и положивъ $x=\infty$, получимъ:

$$\text{пред}\left(\frac{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}{a_1+\frac{b_1}{x}+\frac{c}{x^2}}\right)_{x=\infty}=\frac{a}{a_1}.$$

2-й случай. Дана дробь $\dfrac{ax^2+bx+c}{mx^3+nx^2+px+q}$. Найти ея значеніе при $x=\infty$.

Раздѣливъ числитель и знаменатель на x^3 и положивъ $x=\infty$, получимъ:

$$\text{пред}\left(\frac{\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}+\frac{c}{x^3}}{m+\frac{n}{x}+\frac{p}{x^2}+\frac{q}{x^3}}\right)_{x=\infty}=\frac{0}{m}=0.$$

3-й случай. $\text{Пред}\left(\dfrac{mx^3+nx+px+q}{ax^2+bx+c}\right)_{x=\infty}$.

$$=\text{пред}\left(\frac{m+\frac{n}{x}+\frac{p}{x^2}+\frac{q}{x^3}}{\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}+\frac{c}{x^3}}\right)_{x=\infty}=\frac{m}{0}=\infty.$$

Отсюда заключаемъ, что если числитель и знаменатель данной дроби одинаковой степени относительно x, то эта дробь при $x=\infty$ имѣетъ опредѣленное значеніе, отличное отъ нуля. Если степень числителя относительно x ниже степени знаменателя, то дробь при $x=\infty$ равна нулю, въ противномъ случаѣ она равна ∞.

Выраженіе, содержащее x, при $x=\infty$ можетъ принять видъ $\infty-\infty$. Это выраженіе тоже неопредѣленное и требуется найти его истинное значеніе.

Для примѣра возьмемъ выраженіе:

$$\sqrt{x^2+px+q}-\sqrt{x^2+p_1x+q_1}.$$

Чтобы открыть истинное значеніе этого выраженія при $x=\infty$, умножимъ и раздѣлимъ его на количество, сопряженное съ нимъ:

$$\frac{x^2+px+q-x^2-p_1x-q_1}{\sqrt{x^2+px+q}+\sqrt{x^2+p_1x+q_1}}=\frac{(p-p_1)x+(q-q_1)}{\sqrt{x^2+px+q}+\sqrt{x^2+p_1x+q_1}}.$$

Раздѣливъ числитель и знаменатель послѣдней дроби на x

и положивъ $x=\infty$, получимъ истинное значеніе даннаго количества:

$$\text{пред}\left(\frac{p-p_1+\dfrac{q-q_1}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{p}{x}+\dfrac{q}{x^2}}+\sqrt{1+\dfrac{p_1}{x}+\dfrac{q_1}{x^2}}}\right)_{x=\infty}=\frac{p-p_1}{2}.$$

Наконецъ, найдемъ истинное значеніе выраженія $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x_{x=\infty}$, которое при непосредственной подстановкѣ $x=\infty$ принимаетъ видъ 1^∞.

Здѣсь могутъ представиться три случая: 1) x — цѣлое положительное число, 2) x — дробное положительное число и 3) x — отрицательное число.

Размотримъ отдѣльно всѣ три случая и докажемъ, что во всѣхъ этихъ случаяхъ $\text{пред}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x_{x=\infty}=e$, гдѣ $3>e>2$ и называется неперовымъ числомъ.

Это число несоизмѣримое и равно 2,71828184...

1-й случай. Пользуясь формулой бинома Ньютона, получимъ:

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=1+1+\frac{x(x-1)}{1.2}\cdot\frac{1}{x^2}+\frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}\cdot\frac{1}{x^3}+$$

$$+\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1.2.3.4}\cdot\frac{1}{x^4}+\ldots=1+1+$$

$$+\frac{1-\frac{1}{x}}{1.2}+\frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{2}{x}\right)}{1.2.3}+\frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{2}{x}\right)\left(1-\frac{3}{x}\right)}{1.2.3.4}+\ldots$$

Переходимъ къ предѣлу, когда $x=\infty$:

$$\text{пред}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x_{x=\infty}=1+1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}+\ldots{}^{*)}=e.$$

Вторая часть послѣдняго равенства больше 2, но меньше 3. Дѣйствительно, безконечный рядъ $\dfrac{1}{1.2}+\dfrac{2}{1.3.3}+\dfrac{1}{1.2.3.4}+\ldots$ меньше безконечнаго ряда $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}+\ldots$

---

*) Этотъ рядъ быстро стремится къ своему предѣлу; ограничиваясь 12 первыми слагаемыми, получаемъ для e восемь десят. знаковъ постоянныхъ.

Но послѣдній рядъ есть сумма безконечно-убывающей геометрической прогрессіи, предѣлъ которой равенъ единицѣ; слѣд., сумма предыдущаго ряда будетъ меньше единицы, а потому

$$\text{пред}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x_{x=\infty}=e,\quad \text{гдѣ}\quad 3>e>2,\quad \text{что и тр. док.}$$

2-й случай. Пусть x дробное положительное число.

Въ ряду цѣлыхъ положительныхъ чиселъ найдемъ два смежныхъ числа m и $m+1$, между которыми заключается x:

$$m<x<m+1.$$

Составимъ выраженія, въ справедливости которыхъ нетрудно убѣдиться:

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1}>\left(1+\frac{1}{x}\right)^x>\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^m \quad \text{или}$$

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\cdot\left(1+\frac{1}{m}\right)>\left(1+\frac{1}{x}\right)^x>\frac{\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{m+1}}{1+\frac{1}{m+1}}.$$

Если x будетъ возрастать до ∞, то и m будетъ расти до ∞. Предѣлъ выраженій $\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1}$ и $\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^m$ при $m=\infty$ одинаковъ. Въ самомъ дѣлѣ,

$$\text{пред}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1}_{m=\infty}=\text{пред}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\cdot\text{пред}\left(1+\frac{1}{m}\right)_{m=\infty}=$$

$$\text{пред}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m_{m=\infty}=e;\quad \text{пред}\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^m_{m=\infty}=$$

$$=\text{пред}\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{m+1}_{m=\infty}:\text{пред}\left(1+\frac{1}{m+1}\right)_{m=\infty}=$$

$$=\text{пред}\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{m+1}_{m=\infty}=e.$$

Слѣд., и предѣлъ промежуточной между ними величины равенъ e:

$$\text{пред}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x_{x=\infty}=e.$$

3-й случай, когда x — отрицательное число.

Положимъ $x = -x_1$, гдѣ x_1 положительное число; тогда

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \left(1-\frac{1}{x_1}\right)^{-x_1} = \left(\frac{x_1-1}{x_1}\right)^{-x_1} = \left(\frac{x_1}{x_1-1}\right)^{x_1} =$$
$$= \left(1+\frac{1}{x_1-1}\right)^{x_1} = \left(1+\frac{1}{x_1-1}\right)^{x_1-1} \cdot \left(1+\frac{1}{x_1-1}\right).$$

Взявъ предѣлъ отъ обѣихъ частей этого равенства при $x = \infty$, получимъ:

$$\text{пред}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x_{x=\infty} =$$
$$= \text{пред}\left(1+\frac{1}{x_1-1}\right)^{x_1-1}_{x_1=\infty} \cdot \text{пред}\left(1+\frac{1}{x_1-1}\right)_{x_1=\infty} =$$
$$= \text{пред}\left(1+\frac{1}{x_1-1}\right)^{x_1-1}_{x_1=\infty} = e.$$

Итакъ, при всякомъ значенiи x, когда послѣднее по абсолютной величинѣ будетъ расти до безконечности,

$$\text{пред}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x_{x=\infty} = e, \quad \text{гдѣ} \quad 3 > e > 2.$$

Примѣры на предѣлы:

1) $\text{Пред}\left[\operatorname{sn}(a+\alpha) + 2\operatorname{cs}\alpha - \operatorname{sn}(a-\alpha)\right]_{\alpha=0}.$ *Отв.* $2(1+\operatorname{sn} a)$.

2) $\text{Пред}\left[2\operatorname{sn}^2(a+\alpha) + \operatorname{cs}(\alpha-2a) + \operatorname{tg}^2\left(a-\frac{\alpha}{3}\right)\right]_{\alpha=0}.$ *Отв.* $\frac{1}{\operatorname{cs}^2 a}$.

3) $\text{Пред}\left[a\left(\operatorname{cs}\alpha + \frac{\alpha}{\operatorname{sn}\frac{\alpha}{b}}\right)\right]_{\alpha=0}.$ *Отв.* $a(1+b)$.

4) $\text{Пред}\left(\frac{\operatorname{sn}\alpha + \operatorname{sn}\beta}{\alpha+\beta}\right)_{\alpha=0,\ \beta=0}.$ *Отв.* 1.

5) $\text{Пред}\left[\frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg}(\alpha - a)}{\alpha}\right]_{\alpha=0}.$ *Отв.* $\sec^2 a$.

6) $\text{Пред}\left[\frac{3(1-\operatorname{cs}\alpha)}{\alpha^2}\right]_{\alpha=0}.$ *Отв.* 3.

7) $\text{Пред}\left[\frac{1}{\alpha}(\operatorname{sn}\alpha - \operatorname{cs}\alpha \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right]_{\alpha=0}.$ *Отв.* $\frac{1}{2}$.

8) Пред $[\alpha \operatorname{sn} \alpha (1 + \operatorname{cs} \alpha + \operatorname{cs}^2 \alpha + \operatorname{cs}^3 \alpha + \ldots)]_{\alpha=0}$.

9) Пред $\left[\sqrt[\alpha]{a^{\operatorname{sn}\alpha}}\right]_{\alpha=0}$. *Отв.* 1.

10) Пред $\left[\sqrt[1-\operatorname{cs}\alpha]{\sqrt[\alpha]{\sqrt{a^{\alpha^3}}}}\right]_{\alpha=0}$. *Отв.* a.

11) Пред $\left[\frac{2(1-\operatorname{cs}\alpha)}{\alpha \operatorname{sn}\alpha}\right]^{\frac{\alpha-\sqrt{\alpha}}{(\sqrt{\alpha}-1)\sqrt{\operatorname{sn}\alpha}}}_{\alpha=0}$. *Отв.* 1.

12) Пред $\left[\frac{1}{\alpha}\lg a^{\operatorname{sn}\alpha}\right]_{\alpha=0}$. *Отв.* $\lg a$.

13) Пред $\left[\sqrt{\operatorname{sn}\alpha}\lg(1+\operatorname{cs}\alpha)^{\frac{1}{\sqrt{\alpha}}}\right]_{\alpha=0}$. *Отв.* $\lg 2$.

14) Пред $\left[\operatorname{csc}\alpha \lg\left[\frac{\operatorname{sn}\alpha}{\alpha(1+\operatorname{cs}\alpha)}\right]^{\frac{\alpha}{3}}\right]_{\alpha=0}$. *Отв.* $-\lg 8$.

15) Пред $\left[\sqrt[3]{1-\operatorname{cs}\alpha}\lg\left[\frac{0{,}2 \operatorname{tg}\alpha}{\alpha}\right]^{\frac{1}{\sqrt[3]{\alpha^2}}}\right]_{\alpha=0}$. *Отв.* $-\frac{\lg 5}{\sqrt[3]{2}}$.

16) Пред $\left[\frac{1-\operatorname{cs} mx}{x^2}\right]_{x=0}$. *Отв.* $\frac{m^2}{2}$.

17) Пред $\left[\frac{x-\frac{\pi}{2}}{\operatorname{cs} x}\right]_{x=\frac{\pi}{2}}$. *Отв.* 1.

18) Пред $\left(\frac{1-\operatorname{cs} ax}{1-\operatorname{cs} bx}\right)_{x=0}$. *Отв.* $\frac{a^2}{b^2}$.

19) Пред $\left[\frac{x^2 . \operatorname{ctg} x}{\operatorname{sn} x - \operatorname{sn} 2x}\right]_{x=0}$. *Отв.* -1.

20) Пред $\left[\dfrac{\lg x}{x-1}\right]_{x=1}$. Полагая $x=1+h$, находимъ:

$$\text{пред}\left[\frac{\lg(1+h)}{h}\right]_{h=0}=\text{пред}\left[\lg(1+h)^{\frac{1}{h}}\right]_{h=0}=\lg e.$$

21) Пред $\left[\dfrac{x^2+x+6}{x^3-2x^2-x+2}\right]_{x=2}$. *Отв.* $\frac{5}{3}$.

22) Пред $\left[\dfrac{x^4-13x^2+36}{x^2-2x-15}\right]_{x=-3}$. *Отв.* $\frac{4}{15}$.

23) Пред $\left[\dfrac{8x^2-32x+30}{4x^2-8x+3}\right]_{x=\frac{3}{2}}$. *Отв.* -1.

24) Пред $\left[\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{2x-1}{x^2-x-6}\right]_{x=-2}$. *Отв.* 0,2.

25) Пред $\left[\dfrac{x^2-x-1}{x^2-2x-3}-\dfrac{x+2}{x^2-4x+3}\right]_{x=3}$. *Отв.* $-\infty$.

26) Пред $\left[\dfrac{x-a}{2a-\sqrt{5x^2-a^2}}\right]_{x=a}$. *Отв.* $-\frac{2}{5}$.

27) Пред $\left[\sqrt{x^2-3x+5}-\sqrt{x^2-5x+4}\right]_{x=\infty}$. *Отв.* 1.

28) Пред $\left[\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x-a}}\right]_{x=a}$. *Отв.* 0.

Указаніе: $x-a=(\sqrt{x})^2-(\sqrt{a})^2$.

29) Пред $\left[\dfrac{\sqrt{a^2+ax}-a}{x}\right]_{x=0}$. *Отв.* $\frac{1}{2}$.

Указаніе: умножить числ. и знам. на $\sqrt{a^2+ax}+a$.

30) Пред $\left[x-\sqrt[4]{x^4-1}\right]_{x=\infty}$. *Отв.* 0.

Указаніе: $a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}}=\dfrac{a-b}{a^{\frac{3}{4}}+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{4}}+a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{3}{4}}}$; $a=x^4$, $b=x^4-1$.

31) Пред $\left[x-\sqrt[5]{x^5+1}\right]_{x=\infty}$. *Отв.* 0.

32) Пред $\left[\dfrac{\sqrt{2x^2+4x-5}-\sqrt{3x-2}}{\sqrt{3x^2-5x+8}-\sqrt{x^2+3x+2}}\right]_{x=1}$. *Отв.* $-\frac{5\sqrt{6}}{4}$.

Указаніе: умн. числ. и знам. на количества, сопряженныя с[ъ] числ. и знам.

33) Пред $\left[x-\dfrac{x}{1+\dfrac{1}{x}}\right]_{x=\infty}$. *Отв.* 1

34) Пред $\left[\dfrac{(x-1)\sqrt{x-1}+x\sqrt{x}-1}{\sqrt{x-1}}\right]_{x=1}$. *Отв.* 0

Указаніе: $x-1=(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)$.

35) Пред $[2x-5-\sqrt{4x^2+2x+1}]_{x=\infty}$. *Отв.* -3

36) Пред $\left[\dfrac{(x-1)\sqrt{x-1}+x\sqrt{x}-1}{(x-1)\sqrt{x-1}-x+1}\right]_{x=1}$. *Отв.* $-\dfrac{3}{2}$

37) Пред $\left[\dfrac{(x^2+ax)\sqrt{a}-(x^2+a^2)\sqrt{x}}{2a\sqrt{x}-(a+x)\sqrt{a}}\right]_{x=a}$. *Отв.* $3a$

38) Пред $\left[1.2.4.8.16\ldots2^n\right]^{\frac{1}{n^2}}_{n=\infty}$. *Отв.* $\sqrt{2}$

39) Пред $\left[\dfrac{2x^2-3x+1}{5x^3+4x-3}\right]_{x=\infty}$. *Отв.* 0

40) Пред $\left[\dfrac{5x^3+2x-1}{-2x^3+5x^2-x+7}\right]_{x=\infty}$. *Отв.* $-2{,}5$

Несоизмѣримыя и ирраціональныя числа.

§ 14. Всякое число, означающее совокупность единицъ или долей единицы, называется точнымъ числомъ или соизмѣримымъ, или раціональнымъ числомъ; число же, которое не можетъ быть точно выражено ни цѣлымъ, ни дробнымъ числомъ, называется несоизмѣримымъ: оно, говорятъ, не соизмѣримо ни съ единицей, ни съ ея долями.

Примѣромъ несоизмѣримаго числа можетъ служить отношеніе двухъ несоизмѣримыхъ между собою линій, т.-е., не имѣющихъ общей мѣры, напр., отношеніе окружности къ діаметру.

Ирраціональнымъ числомъ называется корень какой-нибудь степени, не извлекающійся точно.

кой

Иррацiональное число не можетъ быть точно выражено ни цѣлымъ, ни дробнымъ числомъ и потому оно называется также несоизмѣримымъ числомъ.

Если разность между несоизмѣримымъ и соизмѣримымъ числомъ меньше $\frac{1}{n}$, гдѣ n цѣлое число, то говорятъ, что соизмѣримое число равно несоизмѣримому съ точностью или приближенiемъ до $\frac{1}{n}$ и это соизмѣримое число называется приближеннымъ значенiемъ или просто приближенiемъ несоизмѣримаго числа; при этомъ, если приближенное число больше несоизмѣримаго числа, то оно называется приближенiемъ съ избыткомъ; если же приближенiе меньше несоизмѣримаго числа, то оно называется приближенiемъ съ недостаткомъ.

Когда въ вычисленiе входятъ несоизмѣримыя числа, то послѣднiя должны быть замѣнены ихъ приближенiями, при чемъ степень приближенiя можетъ быть сколь угодно велика.

О степени приближенiя судятъ по дроби $\frac{1}{n}$, которая указываетъ на высшiй предѣлъ разности между несоизмѣримымъ числомъ и его даннымъ приближенiемъ.

Чѣмъ n будетъ больше, тѣмъ дробь $\frac{1}{n}$ будетъ меньше, и тѣмъ степень приближенiя будетъ больше.

Если n въ дроби $\frac{1}{n}$ будетъ возрастать, то, значитъ, разность между приближенiемъ и несоизмѣримымъ числомъ будетъ уменьшаться. Послѣдовательно увеличивая n, мы получимъ рядъ приближенiй, болѣе и болѣе приближающихся къ несоизмѣримому числу; слѣд., этотъ рядъ приближенiй представляетъ какъ бы рядъ перемѣнныхъ величинъ, приближающихся къ несоизмѣримой постоянной величинѣ, и такъ какъ разность между несоизмѣримымъ числомъ и его приближенiемъ можетъ сдѣлаться сколь угодно малой величиной, для чего стоитъ только взять для n сколь угодно большое значенiе, то на несоизмѣримое число можно смотрѣть, какъ на предѣлъ его приближенiй, когда степень приближенiя ихъ будетъ безпредѣльно возрастать.

Повторить

§ 15. 18. Теорема. **Два несоизмѣримыхъ числа равны, если ихъ приближенія равны при всякой одинаковой степени приближенія.**

Пусть имѣемъ два несоизмѣримыхъ числа A и B, которыя имѣютъ приближенія соотвѣтственно x и y. Если степень приближенія будетъ безпредѣльно возрастать, то x и y будутъ уже перемѣнными величинами, предѣлы которыхъ соотвѣтственно равны A и B. Такъ какъ по условію теоремы постоянно при одинаковой степени приближенія $x=y$, то, слѣд., и $A=B$, что и тр. док.

§ 16. Для того чтобы имѣть понятіе о нахожденіи приближеній несоизмѣримыхъ чиселъ съ извѣстной степенью точности, покажемъ сначала вычисленіе приближенія вообще несоизмѣримаго числа, а потомъ вычисленіе приближенія ирраціональнаго числа.

Возьмемъ для примѣра отношеніе двухъ несоизмѣримыхъ между собою линій A и B. Ихъ отношеніе $\frac{A}{B}$ — число несоизмѣримое; помножимъ его на достаточно большое цѣлое число n; тогда въ ряду цѣлыхъ чиселъ всегда найдемъ два смежныхъ цѣлыхъ числа k и $k+1$, между которыми будетъ заключаться $\frac{An}{B}$, такъ что

$$k<\frac{An}{B}<k+1. \quad (1)$$

Раздѣливъ на n (полож. число) всѣ члены (I) формулы, получимъ

$$\frac{k}{n}<\frac{A}{B}<\frac{k+1}{n}. \quad (II)$$

Разность между крайними величинами этой формулы равна $\frac{1}{n}$; понятно, что разность между средней величиной и каждой изъ крайнихъ будетъ меньше $\frac{1}{n}$:

$$\frac{A}{B}-\frac{k}{n}<\frac{1}{n} \quad (III) \quad и \quad \frac{k+1}{n}-\frac{A}{B}<\frac{1}{n}. \quad (IV)$$

А это, согласно понятію о приближеніи, и значитъ, что $\frac{k}{n}$ и $\frac{k+1}{n}$ суть приближенія несоизмѣримой величины $\frac{A}{B}$ съ точностью до $\frac{1}{n}$, одно съ недостаткомъ, другое съ избыткомъ.

Умножая обѣ части неравенствъ (III) и (IV) на B и означая n-ую часть B черезъ E, получимъ:

$$A - kE < E \text{ (III}') \quad \text{и} \quad (k+1)E - A < E. \text{ (IV}')$$

Неравенства (III′) и IV′) показываютъ, что n-ная часть B содержится въ A болѣе k, но менѣе $k+1$ разъ.

Отсюда нетрудно вывести правило вычисленія приближенія несоизмѣримаго числа $\frac{A}{B}$ съ точностью до $\frac{1}{n}$, гдѣ n данное цѣлое число: для этого надо B раздѣлить на n равныхъ частей и узнать, какое цѣлое число разъ содержится n-ная часть B въ A. Полученное цѣлое число и другое, большее его на единицу, раздѣлить на n, тогда получатся два приближенія, одно съ недостаткомъ, другое съ избыткомъ съ точностью до $\frac{1}{n}$.

Далѣе, возьмемъ неточный корень какой-нибудь цѣлой положительной степени изъ раціональнаго числа и покажемъ, какъ найти приближеніе этого ирраціональнаго числа съ извѣстной степенью точности.

Пусть $\sqrt[m]{A}$ — неточный корень изъ раціональнаго числа A.

Умножимъ $\sqrt[m]{A}$ на положительное достаточно большое цѣлое число n, получимъ: $n\sqrt[m]{A} = \sqrt[m]{An^m}$. Въ ряду цѣлыхъ чиселъ всегда можно найти два послѣдовательныхъ цѣлыхъ числа k и $k+1$, между которыми будетъ заключаться $\sqrt[m]{An^m}$, такъ что:

$$k < \sqrt[m]{An^m} < k+1.$$

Всѣ части этой формулы раздѣливъ на n, получимъ:

$$\frac{k}{n}<\frac{\sqrt[m]{An^m}}{n}<\frac{k+1}{n},\ \text{гдѣ}\ \frac{\sqrt[m]{An^m}}{n}=\sqrt[m]{A}.$$

Разность между $\frac{k+1}{n}$ и $\frac{k}{n}$ равна $\frac{1}{n}$, а потому

$$\sqrt[m]{A}-\frac{k}{n}<\frac{1}{n}\ \text{и}\ \frac{k+1}{n}-\sqrt[m]{A}<\frac{1}{n}.$$

Согласно понятію о приближеніи несоизмѣримаго числа заключаемъ, что $\frac{k}{n}$ и $\frac{k+1}{n}$ суть приближенія $\sqrt[m]{A}$, одно съ недостаткомъ, другое съ избыткомъ, и степень приближенія ихъ равна $\frac{1}{n}$; при этомъ k есть цѣлая часть корня: $\sqrt[m]{An^m}$

Отсюда находимъ правило вычисленія приближеній ирраціональнаго числа вида $\sqrt[m]{A}$ съ точностью до $\frac{1}{n}$:

Подкоренное число A надо умножить на n въ степени, равной показателю степени корня, и изъ полученнаго произведенія извлечь корень данной степени съ точностью до единицы; полученное цѣлое число и другое число, увеличенное на единицу, слѣдуетъ раздѣлить на n; тогда получатся два приближенія, одно съ недостаткомъ, другое съ избыткомъ съ точностью до $\frac{1}{n}$ *).

§ 17. Теперь покажемъ, что надо разумѣть подъ степенью, у которой показатель ирраціональное число, а основаніе раціональное число; такая степень называется ирраціональной степенью.

Пусть A — раціональное число, m — ирраціональное; тогда ирраціональная степень будетъ A^m.

Возьмемъ два приближенія m, одно съ недостаткомъ, другое съ избыткомъ одинаковой степени точности: $m_1+n\varepsilon$ и

---

*) Если степень точности выражена черезъ h, то $h=\frac{1}{n}$, откуда $n=\frac{1}{h}$.

$m_1+(n+1)\varepsilon$, гдѣ m_1 и n цѣлыя числа, при чемъ m_1 можетъ быть равно нулю, если $m<1$; ε есть степень приближенія. Составимъ двѣ раціональныхъ степени съ основаніемъ A:

$$A^{m_1+n\varepsilon} \text{ и } A^{m_1+(n+1)\varepsilon}.$$

Разность между этими степенями равна $A^{m_1+n\varepsilon}(A^{\varepsilon}-1)$. Если степень приближенія будетъ расти безпредѣльно, то ε будетъ безконечно-малая величина, а слѣд. и $A^{\varepsilon}-1$ будетъ безконечно-малая величина; количество $A^{m_1+n\varepsilon}$ конечная величина; поэтому вышеуказанная разность степеней будетъ въ предѣлѣ равна нулю, а потому пред $A^{m_1+n\varepsilon}=$ пред $A^{m_1+(n+1)\varepsilon}$.

Но пред $A^{m_1+n\varepsilon}=A^{\text{пред}\,(m_1+n\varepsilon)}$; пред. $A^{m_1+(n+1)\varepsilon}=A^{\text{пред}\,[m_1+(n+1)\varepsilon]}$; при этомъ пред $(m_1+n\varepsilon)=$ пред $[m_1+(n+1)]\varepsilon=m$; слѣд.,

$$A^{m}=\text{пред}\,A^{m_1+n\varepsilon}=\text{пред}\,A^{m_1+(n+1)\varepsilon}.$$

Этотъ выводъ показываетъ, что ирраціональная степень отъ раціональнаго числа есть предѣлъ раціональныхъ степеней того же числа, показатели которыхъ суть приближенія ирраціональнаго показателя съ недостаткомъ и избыткомъ, когда степень приближенія ихъ растетъ безпредѣльно.

19. Теорема. Предѣлъ ирраціональной степени перемѣннаго основанія равняется той же степени отъ предѣла основанія.

Пусть x перемѣнная величина, a ея предѣлъ, m ирраціональное число; требуется доказать, что пред $(x^m)=a^m$.

Закрѣпляя за x нѣкоторое значеніе на время и взявъ два приближенія m одинаковой точности, одно съ избыткомъ, другое съ недостаткомъ и безпредѣльно увеличивая степень точности, будемъ имѣть $x^m=$ пред $x^{\mu}=$ пред x^{μ_1}, гдѣ $\mu<m<\mu_1$. Предыдущія равенства можно написать иначе:

$$x^m=x^{\text{пред}\,\mu}=x^{\text{пред}\,\mu_1}$$

Пусть теперь x становится перемѣнной величиной; тогда это равенство означаетъ равенство двухъ перемѣнныхъ величинъ при всѣхъ ихъ измѣненіяхъ, а потому

$$\text{пред}\,(x^m) = \text{пред}\,x^{\text{пред}\,\mu} = \text{пред}\,x^{\text{пред}\,\mu_1} \quad \text{или}$$

$$\text{пред}\,(x^m) = (\text{пред}\,x)^{\text{пред}\,\mu} = (\text{пред}\,x)^{\text{пред}\,\mu_1}; \quad \text{но}$$

$\text{пред}\,x = a$, $\text{пред}\,\mu = m = \text{пред}\,\mu_1$, слѣд.

$$\text{пред}\,x^m = a^m, \quad \text{что и тр. док.}$$

Познакомившись съ несоизмѣримыми числами и ирраціональными степенями, перейдемъ къ ирраціональнымъ выраженіямъ вообще, которыя представляютъ результатъ нѣсколькихъ дѣйствій надъ ирраціональными числами A, B, C, и т. д. Докажемъ относительно этихъ выраженій общую теорему:

20. Теорема. Математическія дѣйствія надъ ирраціональными числами совершаются по тѣмъ же правиламъ, какъ и надъ соизмѣримыми числами.

Математическія дѣйствія обозначимъ символомъ F и результатъ дѣйствій будемъ называть функціей тѣхъ величинъ, надъ которыми совершены эти дѣйствія, при чемъ этотъ результатъ долженъ обладать свойствомъ непрерывности*), т.-е., при безконечно-маломъ измѣненіи одной изъ входящихъ въ него величинъ измѣняться на безконечно-малую величину.

Пусть дано ограниченное число ирраціональныхъ чиселъ*) $A, B, C, \ldots K$; ихъ приближенія съ недостаткомъ равны соотвѣтственно $x, y, z, \ldots t$, а приближенія съ избыткомъ той же степени точности соотвѣтственно равны $x', y', z', \ldots t'$.

Послѣдовательно выполняя надъ тѣми и другими приближеніями отдѣльно рядъ данныхъ дѣйствій, получимъ выраженія вида $F(x, y, z, \ldots t)$ и $F(x', y', z', \ldots t')$.

Разность между $F(x', y', \ldots t')$ и $F(x, y, \ldots t)$ будетъ все болѣе и болѣе уменьшаться по мѣрѣ возрастанія степени

*) Только при этихъ условіяхъ и справедлива предложенная теорема.

приближенія и можетъ сдѣлаться безконечно-малой величиной, въ чемъ не трудно убѣдиться.

Дѣйствительно, при безпредѣльномъ возрастаніи степени приближенія, будемъ имѣть рядъ равенствъ

$$F(x', y, z, \ldots t) - F(x, y, z, \ldots t) = \alpha.$$
$$F(x', y', z, \ldots t) - F(x', y, z, \ldots t) = \beta.$$
$$F(x', y', z', \ldots t) - F(x', y', z, \ldots t) = \gamma.$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$F(x', y', z', \ldots s', t') - F(x', y', z', \ldots s', t) = \mu,$$

гдѣ $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \mu$ будутъ безконечно-малыя величины вслѣдствіе непрерывности функціи F.

Сложивъ всѣ эти равенства почленно, получимъ

$F(x', y', z', \ldots t) - F(x, y, z, \ldots t) = \alpha + \beta + \gamma + \ldots + \mu$, гдѣ $\alpha + \beta + \gamma + \ldots + \mu$, какъ извѣстно, безконечно-малая величина.

Но численнно $F(x', y', z', \ldots t) - F[\text{пред}\, x', \text{пред}\, y', \ldots \text{пред}\, t'] < \alpha + \beta + \gamma + \ldots + \mu$, также и $F[\text{пред}\, x, \text{пред}\, y, \ldots \text{пред}\, t] - F(x, y, z, \ldots t) < \alpha + \beta + \gamma \ldots + \mu$, гдѣ $\text{пред}\, x' = \text{пред}\, x$; $\text{пред}\, y' = \text{пред}\, y$ и т. д.

Слѣд. $F[\text{пред}\, x, \text{пред}\, y, \ldots \text{пред}\, t] = \text{пред}\, F(x, y, z, \ldots t) = \text{пред}\, F(x', y', \ldots t')$.

Обозначая пред x черезъ A, пред y черезъ B и т. д., получимъ:

$$F(A, B, C, \ldots K) = \text{пред}\, F(x, y, \ldots t) = \text{пред}\, F(x', y', \ldots t').$$

Это значитъ, что тѣ дѣйствія, которыя совершены надъ соизмѣримыми числами $x, y, z, \ldots t$, или $x'\ y' \ldots\ t'$, приближеніями ирраціональныхъ чиселъ, слѣдуетъ совершить и надъ самими ирраціональными числами и по тѣмъ же правиламъ, чтобы получить предѣлъ результата дѣйствій надъ приближеніями ирраціональныхъ чиселъ, когда степень приближенія ихъ будетъ безпредѣльно возрастать.

Для лучшаго усвоенія этого вывода разсмотримъ два частныхъ случая.

Пусть x есть приближеніе ирраціональнаго числа A, y числа B (степень приближенія одинакова).

Составимъ формулу: $(x^2 + y^2)(x^2 - y^2) = x^4 - y^4$

Будемъ увеличивать степень приближенія безпредѣльно получимъ $\text{пред}\,(x^2+y^2)(x^2-y^2)=\text{пред}\,(x^4-y^4)$ или $[(\text{пред}\,x)^2+(\text{пред}\,y)^2]\,.\,[(\text{пред}\,x)^2-(\text{пред}\,y)^2)=(\text{пред}\,x)^4-(\text{пред}\,y)^4$; отсюда $(A^2+B^2)(A^2-B^2)=A^4-B^4$, что подтверждаетъ доказанную теорему.

Пусть μ и μ_1 суть приближенія одинаковой степени точности ирраціональныхъ чиселъ m и n; докажемъ, что $a^m:a^n=a^{m-n}$, какъ и въ случаѣ раціональныхъ степеней.

Въ самомъ дѣлѣ, $a^\mu:a^{\mu}=a^{\mu-\mu_1}$; будемъ увеличивать степень приближенія безпредѣльно, получимъ:

$$\text{пред}\,\frac{a^\mu}{a^{\mu_1}}=\text{пред}\,a^{\mu-\mu_1} \quad \text{или} \quad \frac{\text{пред}\,a^\mu}{\text{пред}\,a^{\mu_1}}=\frac{a^{\text{пред}\,\mu}}{a^{\text{пред}\,\mu_1}}=a^{\text{пред}\,\mu-\text{пред}\,\mu_1},$$

где $\text{пред}\,\mu=m$ и $\text{пред}\,\mu_1=n$;

отсюда $a^m:a^n=a^{m-n}$, что и тр. док.

ГЛАВА III.

Основныя свойства цѣлой функціи и ея корней.

§ 18. 1. Теорема Безу. **Цѣлый многочленъ n-ой степени, гдѣ n цѣлое положительное число, расположенный по нисходящимъ степенямъ буквы x, съ постоянными вещественными или мнимыми коэффиціентами вида $f(x)=Ax^n+A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}+\ldots+A_{n-1}x+A_n$ *) при дѣленіи на двучленъ $x-a$ даетъ въ остаткѣ количество, которое есть результатъ подстановки въ данный многочленъ вмѣсто x значенія a, т.-е., даетъ въ остаткѣ $f(a)$.**

Докажемъ эту теорему непосредственнымъ дѣленіемъ.

---

*) f есть символъ тѣхъ дѣйствій, которыя нужно совершить надъ x, чтобы получить данный многочленъ.

$$\ldots + A_2x^{n-2} + \ldots + A_{n-1}x + A_n \;\Big|\; x-a$$

$$Ax^{n-1} + \left.\begin{array}{l} +Aa \\ +A_1 \end{array}\right| x^{n-2} + \left.\begin{array}{l} +Aa^2 \\ +A_1a \\ +A_2 \end{array}\right| x^{n-3} + \left.\begin{array}{l} +Aa^3 \\ +A_1a^2 \\ +A_2a \\ +A_3 \end{array}\right| x^{n-4} + \ldots + \left.\begin{array}{l} +Aa^{n-1} \\ +A_1a^{n-2} \\ +A_2a^{n-3} \\ +\ldots\ldots \\ \ldots\ldots \\ +A_{n-1} \end{array}\right| x^0$$

$$+A_2x^{n-2}$$

$$\left.\begin{array}{l} \pm Aa^2 \\ \pm A_1a \end{array}\right| x^{n-2}$$

$$\left.\begin{array}{l} +Aa^2 \\ +A_1a \\ +A_2 \end{array}\right| x^{n-2} + A_3x^{n-3}$$

$$\left.\begin{array}{l} \mp Aa^2 \\ \mp A_1a \\ \mp A_2 \end{array}\right| x^{n-2} \left.\begin{array}{l} \pm Aa^3 \\ \pm A_1a^2 \\ \pm A_2a \end{array}\right| x^{n-3}$$

$$\left.\begin{array}{l} +Aa^3 \\ +A_1a^2 \\ +A_2a \\ +A_3 \end{array}\right| x^{n-3} + A_4x^{n-4}$$

$$\left.\begin{array}{l} \mp Aa^3 \\ \mp A_1a^2 \\ \mp A_2a \\ \mp A_3 \end{array}\right| x^{n-3} \left.\begin{array}{l} \pm Aa^4 \\ \pm A_1a^3 \\ \pm A_2a^2 \\ \pm A_3a \end{array}\right| x^{n-4}$$

$$\left.\begin{array}{l} +Aa^4 \\ +A_1a^3 \\ +A_2a^2 \\ +A_3a \\ +A_4 \end{array}\right| x^{n-4} + A_5x^{n-5}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\begin{array}{l} +Aa^n \\ +A_1a^{n-1} \\ +A_2a^{n-2} \\ +\ldots\ldots = f(a). \\ \ldots\ldots \\ +A_{n-1}a \\ +A_n \end{array}$$

Частное при дѣленіи даннаго многочлена $f(x)$ на $x-a$ оказалось цѣлымъ многочленомъ $\varphi(x)$ $(n-1)$-ой степени съ постоянными коэффиціентами, при чемъ коэффиціентъ перваго члена частнаго равняется коэффиціенту перваго члена дѣлимаго.

Законъ составленія коэффиціентовъ прочихъ членовъ частнаго очевиденъ: коэффиціентъ m-аго члена частнаго равенъ коэффиціенту предыдущаго члена частнаго, умноженному на количество a, и сложенному съ коэффиціентомъ m-аго члена дѣлимаго. Остатокъ при дѣленіи получился, дѣйствительно, въ видѣ результата подстановки въ дѣлимомъ вмѣсто x значенія a, что и тр. док.

Теорему Безу можно доказать и безъ непосредственнаго дѣленія, основываясь на томъ, что дѣлимое равно дѣлителю, умноженному на частное и сложенному съ остаткомъ.

Въ самомъ дѣлѣ, обозначая данный многочленъ черезъ $f(x)$, частное черезъ $\varphi(x)$ и остатокъ черезъ R, будемъ имѣть

$$f(x)=(x-a)\varphi(x)+R.$$

Это равенство есть тождество; оно вѣрно при всѣхъ значеніяхъ x, при чемъ R, какъ не содержащее x, не зависитъ отъ него; поэтому, полагая $x=a$, получимъ

$$f(a)=R, \text{ что и тр. док.}$$

2. Теорема. Если цѣлый многочленъ n-ой степени съ постоянными вещественными или мнимыми коэффиціентами раздѣлить на $x+a$, то остатокъ отъ дѣленія будетъ представлять результатъ подстановки въ многочленъ вмѣсто x значенія $-a$.

Въ самомъ дѣлѣ: $f(x)=(x+a)\varphi(x)+R$.

Подставимъ въ это тождество вмѣсто x количество $-a$ получимъ $f(-a)=R$, что и тр. док.

Слѣдствія. 1) Если цѣлый многочленъ n-ой степени вида $Ax^n+A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}+\ldots+A_n$ при $x=a$ обращается въ нуль, то онъ дѣлится на $x-a$ безъ остатка. (Значеніе x, обращающее многочленъ въ нуль, называется его корнемъ.)

2. Если цѣлый многочленъ вида $Ax^n+A_1x^{n-1}+\ldots+A_n$ при $x=-a$ обращается въ нуль, то онъ дѣлится на $x+a$ безъ остатка.

Полагая въ данномъ многочленѣ $Ax^n+A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}+$ $+\ldots+A_{n-1}x+A_n$ коэффиціенты $A=1$, $A_1=0$, $A_2=0,\ldots$ $A_{n-1}=0$ и $A_n=\pm a^n$, получимъ извѣстный двучленъ: $x^n\pm a^n$.

Примѣняя къ двучлену $x^n \pm a^n$ теорему Безу и слѣдствія изъ нея, находимъ замѣчательные случаи дѣленія:

1) Сумма равныхъ четныхъ степеней двухъ количествъ не дѣлится ни на сумму, ни на разность этихъ количествъ; остатокъ отъ дѣленія на сумму или разность равенъ $2a^n$.

2) Разность равныхъ четныхъ степеней двухъ количествъ дѣлится и на сумму и на разность этихъ количествъ, а слѣдовательно, и на разность квадратовъ этихъ количествъ.

3) Сумма равныхъ нечетныхъ степеней двухъ количествъ дѣлится на сумму этихъ количествъ, но не дѣлится на ихъ разность; въ послѣднемъ случаѣ остатокъ равенъ $2a^n$.

4) Разность равныхъ нечетныхъ степеней двухъ количествъ дѣлится на разность этихъ количествъ, но не дѣлится на ихъ сумму; въ послѣднемъ случаѣ остатокъ равенъ $-2a^n$.

Частное въ этихъ случаяхъ составляется по извѣстному закону, въ чемъ можно убѣдиться изъ слѣдующихъ двухъ примѣровъ: $(x^{2m}-a^{2m}):(x-a)=x^{2m-1}+ax^{2m-2}+a^2x^{2m-3}+\ldots+a^{2m-2}x+$ $+a^{2m-1}$ и $(x^{2m}-a^{2m}):(x+a)=x^{2m-1}-ax^{2m-2}+a^2x^{2m-3}-a^3x^{2m-4}+$ $+\ldots+a^{2m-2}x-a^{2m-1}$.

3. **Теорема.** Если уравненіе цѣлой положительной степени вида $f(x)=Ax^n+A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}+\ldots$ $+A_{n-1}x+A_n=0$, гдѣ коэффиціенты $A, A_1, A_2, \ldots A_n$ постоянныя количества, имѣетъ корень $x=a$, то степень этого уравненія можно понизить на единицу для отысканія прочихъ корней.

Дѣйствительно, уравненіе даннаго вида, какъ доказалъ Коши, всегда имѣетъ, по крайней мѣрѣ, одинъ корень; пусть этотъ корень $x=a$. Тогда въ силу 1-го слѣдствія изъ теоремы Безу $f(x)=(x-a)\varphi(x)=0$, гдѣ $\varphi(x)$ есть цѣлый многочленъ $(n-1)$-ой степени, если $f(x)$ n-ой степени.

Такъ какъ $f(x)=(x-a)\varphi(x)$ есть тождество, то всѣ корни $f(x)$ будутъ корнями и $(x-a)\varphi(x)$; поэтому корни уравненія $f(x)=0$ кромѣ $x=a$ будутъ корнями и уравненія $\varphi(x)=0$; слѣд., вмѣсто уравненія $f(x)=0$ можно взять уравненіе $\varphi(x)=0$ для отысканія прочихъ корней даннаго уравненія кромѣ $x=a$;

но уравненіе $\varphi(x)=0$ степени $(n-1)$-ой, т.-е., степень его на единицу ниже степени предложеннаго уравненія, что и тр. док.

4. Теорема. Уравненіе цѣлой положительной n-ой степени съ постоянными коэффиціентами

$$Ax^n+Ax_1^{n-1}+A_2x^{n-2}+\ldots+A_{n-1}x+A_n=f(x)=0$$

имѣетъ n корней.

По теоремѣ Коши уравненіе даннаго вида $f(x)=0$ имѣетъ, по крайней мѣрѣ, одинъ корень, напр., $x=a$; тогда $f(x)=(x-a)\varphi_1(x)=0$, гдѣ $\varphi_1(x)$ есть многочленъ $(n-1)$-ой степени, первый членъ котораго Ax^{n-1}.

Всѣ корни уравненія $f(x)=0$ кромѣ $x=a$ суть корни уравненія $\varphi_1(x)=0$. Это же уравненіе по теоремѣ Коши имѣетъ, по крайней мѣрѣ, одинъ корень, напр., $x=b$; поэтому $\varphi_1(x)=(x-b)\varphi_2(x)=0$; гдѣ $\varphi_2(x)$ — многочленъ $(n-2)$-ой степени, первый членъ котораго Ax^{n-2}. Всѣ корни уравненія $\varphi_1(x)=0$ кромѣ $x=b$ суть корни уравненія $\varphi_2(x)=0$. Но это уравненіе должно имѣть, по крайней мѣрѣ одинъ корень, напр., $x=c$; поэтому $\varphi_2(x)=(x-c)\varphi_3(x)=0$, гдѣ $\varphi_3(x)$—многочленъ $(n-3)$-ой степени, первый членъ котораго Ax^{n-3}. Всѣ корни уравненія $\varphi_2(x)=0$ кромѣ $x=c$ суть корни уравненія $\varphi_3(x)=0$. Продолжая разсуждать такимъ же образомъ объ уравненіи $\varphi_3(x)=0$ и о послѣдующихъ уравненіяхъ, мы дойдемъ до уравненія $\varphi_{n-2}(x)=0$, гдѣ $\varphi_{n-2}(x)$ — многочленъ 2-й степени, первый членъ котораго Ax^2.

Обозначая одинъ изъ корней этого уравненія черезъ $x=k$, получимъ: $\varphi_{n-2}(x)=(x-k)\varphi_{n-1}(x)=0$, гдѣ $\varphi_{n-1}(x)$ — многочленъ 1-й степени, первый членъ котораго Ax.

Корни уравненія $\varphi_{n-2}(x)=0$ кромѣ $x=k$ суть корни уравненія $\varphi_{n-1}(x)=0$. Обозначивъ въ послѣднемъ уравненіи члены, свободные отъ x, черезъ B, получимъ:

$$\varphi_{n-1}(x)=Ax+B=A\left(x+\frac{B}{A}\right)=0.$$

Корень этого уравненія $x=-\frac{B}{A}=l$; поэтому

$$\varphi_{n-1}(x)=A(x-l)=0.$$

Напишемъ весь рядъ тождествъ, полученныхъ выше, число которыхъ n:

$$
\begin{aligned}
f(x)&=(x-a)\varphi_1(x)=0.\\
\varphi_1(x)&=(x-b)\varphi_2(x).\\
\varphi_2(x)&=(x-c)\varphi_3(x).\\
&\dots\dots\dots\dots\\
&\dots\dots\dots\dots\\
\varphi_{n-2}(x)&=(x-k)\varphi_{n-1}(x).\\
\varphi_{n-1}(x)&=A(x-l).
\end{aligned}
$$

Перемноживъ эти тождества почленно и сдѣлавъ надлежащее сокращеніе, получимъ:

$$f(x)=A(x-a)(x-b)(x-c)\dots(x-k)(x-l)=0.$$

Очевидно, что $x=a$, $x=b$,... $x=k$, $x=l$, суть корни предложеннаго уравненія и число ихъ n; значитъ, уравненіе $f(x)=0$ цѣлой положительной n-ой степени имѣетъ n корней, что и тр. док.

Замѣчаніе. Нѣкоторые изъ корней уравненія

$$Ax^n+A_1x^{n-1}+\dots+A_{n-1}x+A_n=0.$$

могутъ быть равны между собою.

Слѣдствіе 1-е. Первую часть уравненія

$$Ax^n+A_1x^{n-1}+\dots+A_{n-1}x+A_n=0$$

всегда можно представить въ видѣ $A(x-a)(x-b)\dots(x-l)$, гдѣ a, b,... l суть его корни, число которыхъ n.

Слѣдствіе 2-е. Уравненіе n-ой цѣлой положительной степени $f(x)=0$ имѣетъ не болѣе n корней.

Въ самомъ дѣлѣ, уравненіе цѣлой положительной n-ой степени съ постоянными коэффиціентами $f(x)=0$ можетъ быть представлено въ видѣ:

$$f(x)=A(x-a)(x-b)(x-c)\dots(x-l)=0.$$

Очевидно, что всякое новое значеніе $x=m$, неравное ни одному изъ n корней этого уравненія, не можетъ обратить послѣднее въ тождество, и слѣд. уравненіе n-ой степени (n—цѣлое, полож. число) не можетъ имѣть болѣе n корней, что и тр. док.

Слѣдствіе 3-е. Цѣлый многочленъ

$$Ax^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + \ldots + A_n$$

всегда можно представить въ разложенномъ видѣ, а именно:

$$Ax^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_n = A(x-a)(x-b)\ldots(x-l),$$

гдѣ $a, b, \ldots l$ суть корни его и число ихъ равно его степени.

5. Теорема. Если уравненіе цѣлой положительной n-ой степени съ постоянными коэффиціентами вида $f(x) = Ax^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_n = 0$ удовлетворяется $(n+1)$ различными значеніями x, то всѣ его коэффиціенты равны нулю.

Въ самомъ дѣлѣ $f(x) = A(x-a)(x-b)\ldots(x-l) = 0$, гдѣ $a, b, \ldots l$ суть корни предложеннаго уравненія и число ихъ n.

Если при $x = m$, неравномъ ни одному изъ приведенныхъ выше корней, имѣемъ: $A(m-a)(m-b)\ldots(m-l) = 0$, то это возможно только тогда, когда $A = 0$, такъ какъ никакой другой изъ сомножителей не равенъ нулю. Но тогда уравненіе $f(x) = 0$ есть уравненіе $(n-1)$-ой степени съ первымъ членомъ A_1x^{n-1}, и такъ какъ это уравненіе удовлетворяется, по крайней мѣрѣ, n различными значеніями x, то по предыдущему заключаемъ, что $A_1 = 0$. Разсуждая такимъ же образомъ далѣе, найдемъ, что $A_2 = 0$, $A_3 = 0, \ldots A_n = 0$, что и тр. док.

Слѣдствіе 1-е. Если два многочлена цѣлой положительной n-ой степени $f(x)$ и $f_1(x)$ равны между собою при $(n+1)$ различныхъ значеніяхъ x, то коэффиціенты ихъ при одинаковыхъ степеняхъ x тождественно равны между собою.

Въ самомъ дѣлѣ $f(x) - f(x_1)$, будучи степени не выше n-ой, обращается въ нуль при $(n+1)$ различныхъ значеніяхъ x слѣд., коэффиціенты этого многочлена равны въ отдѣльности нулю; а эти коэффиціенты представляютъ изъ себя разности коэффиціентовъ $f(x)$ и $f(x_1)$ при одинаковыхъ степеняхъ x; поэтому, дѣйствительно, коэффиціенты $f(x)$ и $f_1(x)$ при одинаковыхъ степеняхъ x тождественно равны, что и тр. док.

Слѣдствіе 2-е. Если многочленъ

$$f(x)=Ax^n+A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}+\ldots+A_{n-1}x+An,$$

и, составивъ другой многочленъ $\varphi(x)$ такъ, чтобы $\varphi(x)=(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$, гдѣ $x_0, x_1, \ldots x_n$ суть произвольныя частныя значенія x, и обозначивъ черезъ $\varphi_i(x)$ выраженіе $\varphi_i(x)=\frac{\varphi(x)}{x-x_i}$, можно придать многочлену $f(x)$ другой видъ, извѣстный подъ названіемъ формулы Лагранжа, именно:

$$f(x)=\frac{\varphi_0(x)}{\varphi_0(x_0)}f(x_0)+\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_1(x_1)}f(x_1)+\ldots+\frac{\varphi_n(x)}{\varphi_n(x_n)}f(x_n).$$

Въ самомъ дѣлѣ, оба выраженія n-ой степени и становятся равными при $(n+1)$ различныхъ значеніяхъ x; слѣд., эти выраженія тождественны.

6. Теорема. Если уравненіе цѣлой положительной степени $f(x)=Ax^n+A_1x^{n-1}+\ldots+A_n=0$ съ вещественными коэффиціентами имѣетъ одинъ корень мнимый, то оно обязательно должно имѣть еще и другой мнимый корень, сопряженный съ первымъ.

Пусть уравненіе $f(x)=Ax^n+A_1x^{n-1}+\ldots+A_n=0$ имѣетъ мнимый корень $x=a+bi$. Подставивъ это значеніе x въ уравненіе, получимъ $M+Ni=0$, гдѣ M есть сумма вещественныхъ членовъ въ результатѣ подстановки, N есть сумма членовъ, содержащихъ множитель i. Но $M+Ni$ будетъ равно нулю только тогда, когда $M=0$ и $N=0$; поэтому и $M-Ni$ будетъ также тождественно равно нулю, а $M-Ni=0$ представляетъ результатъ подстановки въ данное уравненіе вмѣсто x значенія $a-bi$, такъ какъ при измѣненіи знака при i въ различныхъ степеняхъ количества $a+bi$ измѣнится знакъ только при членахъ, содержащихъ множитель i. Слѣд., данное уравненіе, имѣя одинъ мнимый корень $a+bi$, имѣетъ и другой мнимый корень $a-bi$, сопряженный съ первымъ.

Слѣдствія. 1) Уравненіе цѣлой положительной четной степени съ вещественными коэффиціентами либо совсѣмъ не имѣетъ вещественныхъ корней, либо имѣетъ ихъ четное число.

2) Уравненіе цѣлой положительной нечетной степени съ вещественными коэффиціентами всегда имѣетъ, по крайней мѣрѣ, одинъ вещественный корень.

3) Многочленъ цѣлой положительной степени съ вещественными коэффиціентами можетъ быть представленъ въ видѣ произведенія линейныхъ и квадратныхъ множителей съ вещественными коэффиціентами.

Въ самомъ дѣлѣ, $f(x)=Ax^n+A_1x^{n-1}+\ldots+A_n=$ $=A(x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-i)(x-k)(x-l)$. Если окажется, что $b=\alpha+\beta i$ и $c=\alpha-\beta i$, $i=\alpha_1+\beta_1 i$ и $k=\alpha_1-\beta_1 i$, то $f(x)=(x-a)(x-\alpha-\beta i).(x-\alpha+\beta i)\ldots(x-\alpha_1-\beta_1 i)(x\alpha_1+\beta_1 i)(x-l)=$ $=(x-a)[(x-\alpha)^2+\beta^2]\ldots[(x-\alpha_1)^2+\beta_1{}^2](x-l)$, при чемъ количества $(x-a)$, $(x-l)$ и т. п. принято называть линейными, а количества вида $(x-\alpha)^2+\beta^2$ — квадратными количествами.

Задачи.

1. Данъ многочленъ x^3-mx^2+x+6; найти m, если одинъ корень многочлена равенъ 2. *Отв.* $m=4$.

2. $x^4+x^3-mx^2-x+20$; найти m, если одинъ изъ корней даннаго многочлена равенъ -5. *Отв.* $m=21$.

3. $3x^3-16x^2+mx+42$; найти m, если одинъ изъ корней многочлена равенъ 7. *Отв.* $m=-41$.

4. $2x^3+mx^2-28x-84$; найги m, если одинъ изъ корней многочлена равенъ -7. *Отв.* $m=14$.

5. $5x^3+8x^2+mx+3$; найти m, если одинъ изъ корней многочлена равенъ 1,2. *Отв.* $m=-20$.

6. Найти корни уравненія: $x^4-3x^3+9x^2-21x+14=0$, если одинъ корень $=-7i$. *Отв.* $7i$, 1, 2.

7. Найти корни уравненія: $2x^4-5x^3+21x^2-45x+27=0$, если одинъ корень $=3i$. *Отв.* $-3i$, $\frac{3}{2}$, 1.

8. Найти корни уравненія: $x^4+4x^3-2x^2+12x-15=0$, если одинъ корень равенъ $-i\sqrt{3}$. *Отв.* $i\sqrt{3}$, -5, $+1$.

9. $x^4-2x^3+22x^2-50x-75=0$; найти его корни, если одинъ изъ корней $=5i$.

Отв. $-5i$, 3, -1.

10. $x^3+x^2+5x-25=0$; найти корни, если одинъ изъ корней равенъ $i\sqrt{5}$.

Отв. $-i\sqrt{5}$, 2, -3.

11. $x^3+3x^2-15x+91=0$; найти корни, если одинъ изъ корней равенъ $2-3i$.

Отв. $2+3i$, -7.

12. Разложить на множители $x^4-2x^3+33x^2-14x+182$, если одинъ корень многочлена равенъ $1-5i$.

Отв. $(x^2-2x+26).(x^2+7)$.

13. Разложить на множители $x^4-8x^3+27x^2-38x+26$, если одинъ корень многочлена равенъ $3-2i$.

Отв. $(x^2-6x+13).(x^2-2x+2)$.

14. Разложить на множители $x^4-6x^3-7x^2+34x+182$, если одинъ изъ корней многочлена равенъ $5-i$.

Отв. $(x^2-10x+26)(x^2+4x+7)$.

Рѣшеніе возвратныхъ уравненій 4-й степени, трехчленныхъ и нѣкоторыхъ двухчленныхъ уравненій.

§ 19. Если предложенное уравненіе съ одной неизвѣстной будетъ цѣлой степени выше второй, то рѣшать его мы не можемъ, ибо это не входитъ въ программу нашего курса. Исключеніе составляютъ возвратныя уравненія 4 й степени, трехчленныя, нѣкоторыя двухчленныя и, наконецъ, тѣ уравненія, которыхъ нѣкоторые корни опредѣляются легко помощію испытанія. Въ послѣднемъ случаѣ, какъ извѣстно, степень уравненія можетъ быть понижена, и если она будетъ понижена до второй степени, то такія уравненія будетъ возможно рѣшить. Не трудно найти нѣкоторые корни уравненія цѣлой положительной степени, если эти корни суть цѣлыя числа, такъ какъ изъ формулы

$$Ax^n+A_1x^{n-1}+\ldots+A_n=A(x-a)(x-b)\ldots(x-k)(x-l)=0$$

слѣдуетъ, что $A_n=(-1)^n.Aabc\ldots kl$, т.-е., корни уравненія суть сомножители члена въ уравненіи, свободнаго отъ x.

Напр., дано уравненіе: $x^4+4x^3-7x^2-22x+24=0$. Положимъ, что найдены четыре его корня a, b, c и d; тогда $24=abcd$.

Чтобы найти корни этого уравненія въ дѣйствительнос мы должны составные или простые множители числа 24 п ставлять вмѣсто x въ данное уравненіе, и если при нѣко рыхъ изъ нихъ получится тождество $0=0$, то сейчасъ можно будетъ понизить степень уравненія. Оказывается, что $x=2$ и $x=1$ суть корни этого уравненія; поэто можно понизить степень предложеннаго уравненія до втор уравненіе же 2-й степени можно рѣшить непосредственно.

Рѣшить уравненія помощію пониженія степени:

1) $x^4+4x^3-x^2+16x-20=0$. 5) $x^3-4x^2-11x+30=0$.
2) $x^4+x^3-8x^2+8=0$. 6) $x^4+8x^3+11x^2-32x-60=0$.
3) $x^3-1{,}5x^2-1{,}5x-1=0$. 7) $x^4+8x^3-10x^2-104x+105=$(
4) $x^3+2x^2-x+28=0$. 8) $x^4-7x^3+6x^2+28x-40=0$.
9) $2x^3-13x^2+23x-12=0$; одинъ корень дробное число.
10) $2x^4-7x^3-23x^2+28x+60=0$; одинъ корень дробное чис

Возвратныя уравненія 4-й степени.

§ 20. Послѣ этого замѣчанія приступаемъ къ рѣшенію та называемаго возвратнаго уравненія 4-й степени.

Возвратнымъ уравненіемъ называется уравненіе цѣлой п ложительной степени, въ которомъ коэффиціенты члено равноотстоящихъ отъ начала и конца равны между собо Возьмемъ возвратное уравненіе 4-й степени:

$$ax^4\pm bx^3\pm cx^2\pm bx+a=0.$$

Корни этого уравненія попарно количества, обратныя дру другу, т.-е., если одинъ корень α, то другой $\frac{1}{\alpha}$. Въ этом не трудно убѣдиться непосредственной подстановкой вмѣст x значенія $\frac{1}{\alpha}$:

$$\frac{a}{\alpha^4}\pm\frac{b}{\alpha^3}\pm\frac{c}{\alpha^2}\pm\frac{c}{\alpha}+a=0; \quad (1)$$

такъ какъ здѣсь α отлично отъ нуля и безконечности, т можно умножить обѣ части этого выраженія на α^4 и получим

$$a\pm b\alpha\pm c\alpha^2\pm b\alpha^3+a=0, \quad (2)$$

но это по условію, что $x=a$ есть корень даннаго уравненія, представляетъ тождество, слѣд., и равенство (1)-е, изъ котораго получилось (2)-е тождество, есть также тождество; а это значитъ, что $x=\frac{1}{a}$ есть корень предложеннаго уравненія.

Покажемъ, какъ рѣшить возвратное уравненіе 4-й степени:

$$ax^4 \pm bx^3 \pm cx^2 \pm bx + a = 0.$$

Такъ какъ здѣсь $x=0$ и $x=\infty$ не суть корни уравненія, то поэтому можно обѣ части этого уравненія раздѣлить на x^2; тогда уравненіе приметъ видъ

$$ax^2 \pm bx \pm c \pm \frac{b}{x} + \frac{a}{x^2} = 0.$$

Сгруппируемъ члены его: первый отъ начала съ первымъ отъ конца, второй отъ начала со вторымъ отъ конца, вынося общій множитель за скобки; получимъ

$$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) \pm b\left(x + \frac{1}{x}\right) \pm c = 0. \quad (3)$$

Положимъ въ этомъ уравненіи $x + \frac{1}{x} = y$; возведемъ обѣ части этого равенства въ квадратъ, получимъ

$$x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = y \quad \text{или} \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2.$$

Подставимъ выраженіе x черезъ y въ (3)-е уравненіе:

$$a(y^2-2) \pm by \pm c = 0; \quad ay^2 \pm by - 2a \pm c = 0,$$

откуда

$$y = \frac{\mp b \pm \sqrt{b^2 - 4a(\pm c - 2a}}{2a}.$$

Для y получимъ два значенія, обозначимъ ихъ черезъ y_1 и y_2; подставляя эти значенія одно за другимъ въ уравненіе $x + \frac{1}{x} = y$, имѣемъ $x + \frac{1}{x} = y_1$ и $x + \frac{1}{x} = y_2$. Оба эти уравненія 2-й степени относительно x; рѣшая ихъ, получаемъ

$$x = \frac{y_1 \pm \sqrt{y_1{}^2 - 4}}{2} \quad \text{и} \quad x = \frac{y_2 \pm \sqrt{y_2{}^2 - 4}}{2}.$$

Отсюда заключаемъ, что возвратное уравненіе 4-й степени имѣетъ четыре корня, что подтверждаетъ справедливость теоремы относительно корней уравненія цѣлой положительной степени.

Только что разсмотрѣнный пріемъ рѣшенія примѣняется и къ уравненіямъ

$$ax^4 \pm bx^3 \pm cx^2 \mp bx + a = 0 \quad \text{и} \quad ax^4 \pm bx^3 \mp bx + a = 0.$$

Задачи:

1) $30x^4 + 91x^3 - 278x^2 + 91x + 30 = 0.$
2) $12x^4 + 11x^3 - 146x^2 + 11x + 12 = 0.$
3) $2x^4 + 9x^3 + 14x^2 + 9x + 2 = 0.$
4) $6x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 5x + 6 = 0.$
5) $x^4 - 16x^2 + 50x^2 - 16x + 1 = 0.$
6) $x^4 - 10x^3 + 26x^2 - 10x + 1 = 0.$
7) $x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x + 1 = 0.$
8) $2x^4 + 5x^3 - 7x^2 - 5x + 2 = 0.$
9) $3x^4 + 11x^3 - 11x + 3 = 0.$
10) $x^4 - 3x^3 + 3x + 1 = 0.$

Трехчленныя уравненія.

§ 21. Теперь перейдемъ къ трехчленному уравненію вида $ax^{2n} + bx^n + c = 0$, гдѣ n можетъ быть цѣлымъ или дробнымъ, положительнымъ или отрицательнымъ числомъ.

Положимъ $x^n = y$, откуда $x^{2n} = y^2$; подставивъ эти выраженія x черезъ y въ данное уравненіе, получимъ

$$ay^2 + by + c = 0, \quad \text{откуда} \quad y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = x^n,$$

а отсюда $$x = \sqrt[n]{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}.$$

Если n число четное, то нужно взять передъ корнемъ два знака $\pm$. Эта формула при n четномъ даетъ четыре рѣшенія, при n нечетномъ — два рѣшенія. Чтобы показать, что и въ данномъ случаѣ при n цѣломъ и пол. уравненіе должно имѣть столько корней, какова его степень, т.-е., $2n$, обозначимъ ради сокращенія письма значенія y черезъ $A_1^{\,n}$ и $A_2^{\,n}$; тогда получимъ

$$x^n - A_1^{\,n} = 0 \quad \text{и} \quad x^n - A_2^{\,n} = 0.$$

Эти уравненія представимъ въ разложенномъ видѣ при n нечетномъ:

$$x^n - A_1^{\,n} = (x - A_1)(x^{n-1} + A_1 x^{n-2} + A_1^{\,2} x^{n-3} + \ldots + A_1^{\,n-2} x + A_1^{\,n-1}) = 0$$

и

$$x^n - A_2^{\,n} = (x - A_2)(x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + A_2^{\,2} x^{n-3} + \ldots + A_2^{\,n-2} x + A_2^{\,n-1}) = 0.$$

Но каждое изъ этихъ уравненій распадается на два уравненія, изъ которыхъ одно даетъ одинъ корень, а другое $n-1$ корней; всего же корней отъ двухъ паръ уравненій будетъ $2n$.

При n четномъ вышеприведенныя уравненія примутъ видъ

$$x^n - A_1^{\,n} = (x^2 - A_1^{\,2})(x^{n-2} + A_1^{\,2} x^{n-4} + \ldots + A_1^{\,n-4} x^2 + A_1^{\,n-2}) = 0 \quad \text{и}$$

$$x^n - A_2^{\,n} = (x^2 - A_2^{\,2}) \,.\, (x^{n-2} + A_2^{\,2} x^{n-4} + \ldots + A_2^{\,n-4} x^2 + A_2^{\,n-2}) = 0.$$

Каждое изъ этихъ уравненій распадается на два уравненія изъ которыхъ одно даетъ два корня, отличающіеся другъ отъ друга знакомъ, другое $n-2$ корня; всего отъ двухъ паръ уравненій получимъ $2n$ корней.

Трехчленное количество.

§ 22. Трехчленное уравненіе, какъ показано было выше, сводится къ квадратному уравненію вида $ay^2 + by + c = 0$, а потому сужденіе о количествѣ вида $ax^{2n} + bx^n + c$ должно основываться на сужденіи о количествѣ вида $ay^2 + by + c$.

Количество $ay^2 + by + c$*) называется трехчленнымъ количествомъ; разсмотримъ измѣненіе знака его, когда y будетъ измѣняться отъ $-\infty$ до $+\infty$. Промежутокъ между $-\infty$ и $+\infty$ будетъ составлять область всѣхъ значеній y, и $-\infty$ и $+\infty$ будутъ предѣлами (границами) этой области.

Значенія y, которыя обращаютъ этотъ трехчленъ въ нуль, называются, какъ извѣстно, корнями трехчлена, которые мы

---

*) Коэффиціенты a, b и c предполагаются вещественными.

можемъ найти, приравнявъ трехчленъ нулю и рѣшивъ по
ченное уравненіе. Этотъ трехчленъ имѣетъ два корня:

$$y=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

при чемъ подкоренное количество b^2-4ac можетъ бы
меньше нуля или равно нулю, или больше нуля. Въ пе
вомъ случаѣ оба корня будутъ мнимые, во второмъ — оба вещ
ственные и равные между собою, въ третьемъ случаѣ об
корня вещественные и неравные между собою.

Трехчленному количеству ay^2+by+c можно придать та
кую форму:

$$ay^2+by+c=a\left[\left(y+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right].$$

Если $b^2-4ac<0$, т.-е., если корни трехчлена мнимые, т
количество, заключенное въ большихъ скобкахъ, будетъ по
ложительное при всѣхъ вещественныхъ значеніяхъ y, лежа
щихъ въ области отъ $-\infty$ до $+\infty$, такъ какъ оба члена
въ большихъ скобкахъ количества положительныя: одно по
своей природѣ, другое по условію; отсюда заключаемъ, что
въ этомъ случаѣ знакъ трехчлена будетъ все время одина
ковъ со знакомъ коэффиціента a. Если $b^2-4ac=0$, т.-е., если
корни трехчлена будутъ вещественные и равные, то коли
чество, заключенное въ большихъ скобкахъ, будетъ также
положительное, и знакъ трехчлена будетъ все время одина
ковъ со знакомъ коэффиціента a. Но если $b^2-4ac>0$, т.-е.,
если корни трехчлена вещественные и неравные, то для опре
дѣленія знака трехчлена разложимъ его на множители; по
лучимъ

$$ay^2+by+c=a(y-y_1)(y-y_2),$$

гдѣ y_1 и y_2 суть корни трехчлена.

Положимъ, что $y_2>y_1$ и разсмотримъ три случая, кото
рые могутъ здѣсь встрѣтиться.

1-й случай, когда $y<y_1$, тогда также $y<y_2$ и слѣд.
$y-y_1<0$ и $y-y_2<0$, а потому знакъ трехчлена будетъ
одинаковъ со знакомъ коэффиціента a для всѣхъ значеній y,
лежащихъ въ области отъ $-\infty$ до y_1.

2-й случай, когда $y > y_2$; тогда $y > y_1$; а потому $y - y_1 > 0$ и $y - y_2 > 0$; откуда видно, что знакъ трехчлена будетъ также одинаковъ со знакомъ коэффиціента a для всѣхъ значеній y, лежащихъ въ области отъ y_2 до $+\infty$.

3-й случай, когда $y_2 > y > y_1$; тогда $y - y_1 > 0$, а $y - y_2 < 0$; потому знакъ трехчлена будетъ противоположенъ знаку коэффиціента a для всѣхъ значеній y, лежащихъ въ области отъ y_1 до y_2, т. е., въ области корней трехчлена.

Принимая во вниманіе все изложенное выше относительно знака трехчлена въ случаѣ его вещественныхъ и неравныхъ корней, можно сказать, что при всѣхъ вещественныхъ значеніяхъ y, лежащихъ въ области отъ $-\infty$ до y_1 и отъ y_2 до $+\infty$, т. е., лежащихъ внѣ области корней, знакъ трехчлена все время одинаковъ со знакомъ коэффиціента a; при значеніяхъ же y, лежащихъ въ области корней трехчлена, знакъ его противоположенъ знаку коэффиціента a.

Отсюда заключаемъ, что знакъ трехчлена при вещественныхъ и неравныхъ корняхъ два раза мѣняется: одинъ разъ, когда y переходитъ изъ области отъ $-\infty$ до y_1 въ область корней черезъ y_1, другой разъ, когда y переходитъ изъ области корней въ область отъ y_2 до $+\infty$, переходя черезъ y_2; при этомъ измѣненіе знака трехчлена всякій разъ совершается послѣ прохожденія трехчлена черезъ нулевое значеніе, соотвѣтствующее корнямъ его.

На основаніи изложеннаго относительно знака трехчленнаго количества можно утверждать, что трехчленное количество имѣетъ два вещественныхъ корня и неравныхъ между собою, если при двухъ вещественныхъ значеніяхъ y знаки соотвѣтствующихъ значеній трехчлена противоположны, и притомъ одинъ изъ корней лежитъ между заданными значеніями y.

Двухчленныя уравненія.

§ 23. Теперь разсмотримъ двухчленныя уравненія вида $x^n \pm a = 0$, гдѣ n цѣлое положительное число.

Уравненіе $x^n \pm a = 0$ можно преобразовать, полагая $x = y\sqrt[n]{a}$; получимъ:

$$ay^n \pm a = 0 \quad \text{или} \quad a(y^n \pm 1) = 0, \quad \text{откуда} \quad y^n \pm 1 = 0.$$

Итакъ, двухчленное уравненіе всегда можно привести къ уравненію вида $y^n \pm 1 = 0$.

Разсмотримъ два случая: во-первыхъ, $n = 2m$, во-вторыхъ, $n = 2m+1$.

1-й случай. Уравненіе имѣетъ видъ $y^{2m} \pm 1 = 0$; отсюда

$$y^{2m} = \mp 1 \quad \text{и} \quad y = \pm \sqrt[2m]{\mp 1}.$$

Знаку плюсъ въ уравненіи соотвѣтствуютъ два мнимыхъ корня, отличающіеся другъ отъ друга знакомъ. Знаку минусъ въ уравненіи соотвѣтствуютъ два вещественныхъ корня $+1$ и -1. Остальные корни какъ въ уравненіи $y^{2m}+1=0$, такъ и въ уравненіи $y^{2m}-1=0$ будутъ мнимые.

Послѣднее уравненіе всегда можно преобразовать:

$$y^{2m} - 1 = (y^2 - 1)(y^{2m-2} + y^{2m-4} + \ldots + y^2 + 1) = 0,$$

что равносильно двумъ уравненіямъ:

$$y^2 - 1 = 0 \quad \text{и} \quad y^{2m-2} + y^{2m-4} + \ldots + y^2 + 1 = 0.$$

Первое изъ нихъ даетъ корни ± 1; второе даетъ всѣ мнимые корни уравненія $y^{2m} - 1 = 0$.

2-й случай. Двухчленное уравненіе $y^{2m+1} \pm 1 = 0$ (I); рѣшивъ его относительно y, получимъ: $y = \sqrt[2m+1]{\mp 1} = \mp 1$. Знаку плюсъ въ уравненіи соотвѣтствуетъ вещественный корень -1; знаку минусъ въ уравненіи соотвѣтствуетъ вещественный корень $+1$. Остальные корни будутъ мнимые и опредѣляются при знакѣ плюсъ въ (I) уравненіи изъ уравненія:

$$y^{2m} - y^{2m-1} + \ldots - y + 1 = 0.$$

Разсмотримъ частные случаи двухчленныхъ уравненій, приведя ихъ рѣшеніе.

1) $y^2 + 1 = 0$; $y_{1,2} = \pm i$; 2) $y^2 - 1 = 0$; $y_{1,2} = \pm 1$.

3) $y^3 + 1 = 0$; $y^3 + 1 = (y+1)(y^2 - y + 1) = 0$ или $y + 1 = 0$ и $y^2 - y + 1 = 0$, откуда $y_1 = -1$ и $y_{2,3} = \dfrac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

$-1=0;\quad y^3-1=(y-1)(y^2+y+1)=0$ или $y-1=0$ и

$+1=0,$ откуда $y_1=1$ и $y_{2,3}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}.$

$+1=0;\quad (y^2+1)^2-2y^2=(y^2+\sqrt{2}\,.\,y+1)(y^2-\sqrt{2}\,.\,y+1)=0$

$$y^2+\sqrt{2}\,.\,y+1=0 \text{ и } y^2-\sqrt{2}\,.\,y+1=0,$$

уда $\quad y_{1,2}=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1\pm i);\quad y_{3,4}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1\pm i).$

6) $y^4-1=0;\quad (y^2+1)(y^2-1)=0$ или $y^2+1=0$ и $y^2-1=0,$

ткуда $\quad y_{1,2}=\pm i,\quad y_{3,2}=\pm 1.$

7) $y^5+1=0;\quad y^5+1=(y+1)(y^4-y^3+y^2-y+1)=0$

или $\quad y+1=0$ и $y^4-y^3+y^2-y+1=0,$

откуда $\quad y_1=-1;\quad y_{2,3}=\frac{1+\sqrt{5}\pm\sqrt{2\sqrt{5}(1-\sqrt{5})}}{4};$

$$y_{4,5}=\frac{1-\sqrt{5}\pm i\sqrt{2\sqrt{5}(1+\sqrt{5})}}{4}.$$

8) $y^5-1=0;\quad y^5-1=(y-1)(y^4+y^3+y^2+y+1)=0$

или $\quad y-1=0$ и $y^4+y^3+y^2+y+1=0,$

откуда $\quad y_1=1;\quad y_{2,3}=\frac{-1+\sqrt{5}\pm i\sqrt{2\sqrt{5}(1+\sqrt{5})}}{4};$

$$y_{4,5}=\frac{-1-\sqrt{5}\pm\sqrt{2\sqrt{5}(1-\sqrt{5})}}{4}.$$

9) $y^6+1=0;\quad (y^2+1)(y^4-y^2+1)=0$ или $y^2+1=0$

и $y^4-y^2+1=0,$ откуда $y_{1,2}=\pm i;\quad y_{3,4,5,6}=\pm\sqrt{\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}}.$

10) $y^6-1=0;\quad (y^3+1)(y^3-1)=0$ или $y^3+1=0$ и $y^3-1=0,$

откуда $y_1=-1;\quad y_{2,3}=\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2};\quad y_4=1;\quad y_{5,6}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}.$

11) $y^8+1=0;\quad (y^4+1)^2-2y^4=0$ или $y^4+\sqrt{2}\,.\,y^2+1=0$ и

$y^4-\sqrt{2}y^2+1=0,$ откуда $y_{1,2,3,4}=\pm i\sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}}(1\mp i)};$

$$y_{5,6,7,8}=\pm\sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}}(1\pm i)}.$$

12) $y^8-1=0$; $(y^4+1)(y^4-1)=0$ или $y^4+1=0$ и y^4

откуда $y_{1,2}=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1\pm i)$; $y_{3,4}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1\pm i)$; $y_{5,6}=\pm i$; $y_{7,8}$

Рѣшеніе двухчленнаго уравненія $y^n-1=0$, гдѣ n положительное число, даетъ намъ возможность убѣдит томъ, что корень цѣлой положительной степени изъ вещес наго числа имѣетъ столько значеній, каковъ показатель степ корня. Обыкновенно, въ общемъ курсѣ, имѣется въ виду толь одно, такъ называемое, ариѳметическое значеніе корня.

Въ самомъ пусть дѣлѣ, $x=\sqrt[5]{7}$; отсюда $x^5=7$ или $x^5-7=$ полагая $x=y\sqrt[5]{7}$, получимъ $y^5-1=0$, откуда получимъ пять значеній для y и слѣд. пять значеній и для x, при чемъ $y=1$ соотвѣтствуетъ ариѳметическмоу значенію корня: $\sqrt[5]{7}$.

Есть еще тригонометрическій способъ рѣшенія двухчленныхъ уравненій вида $y^n\pm 1=0$, гдѣ n цѣлое положительное число.

Рѣшенія уравненія $y^n+1=0$ заключаются въ формулѣ:

$$y=\mathrm{cs}\,\frac{(2k+1)\pi}{n}+i\,\mathrm{sn}\,\frac{(2k+1)\pi}{n},\ \text{гдѣ}\ k=0,\,1,\,2,\ldots(n-1).$$

Рѣшенія уравненія $y^n-1=0$ заключаются въ формулѣ:

$$y=\mathrm{cs}\,\frac{2k\pi}{n}+i\,\mathrm{sn}\,\frac{2k\pi}{n},\quad \text{гдѣ}\quad k=0,\,1,\,2,\ldots(n-1).$$

Нетрудно при помощи подстановки убѣдиться, что эти общія формулы рѣшеній удовлетворяютъ соотвѣтствующимъ уравненіямъ, и что, придавая k значеніе, большее указанныхъ, мы не получимъ новаго рѣшенія, а одно изъ первыхъ n рѣшеній.

Рѣшеніе неравенства 2-ой степени вида $ax^2+bx+c>0$.

§ 24. Извѣстно, что, если трехчленъ ax^2+bx+c имѣетъ мнимые или вещественные равные корни, то при всякомъ вещественномъ значеніи x этотъ трехчленъ имѣетъ знакъ одинаковый со знакомъ коэффиціента a; поэтому, если $a>0$, то предложенное неравенство 2-й степени имѣетъ безчисленное