УДК 627.324.2/3:532.72

Мартинюк П. М., к. ф.-м. н., доц. (Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне)

ПОРІВНЯННЯ ЧИСЕЛЬНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ СІТКОВИМИ ТА БЕЗСІТКОВИМИ МЕТОДАМИ В ДВОВИМІРНОМУ ВИПАДКУ. І. ЧИСЕЛЬНІ РОЗВ'ЯЗКИ ТА ПОХИБКИ

Наведено схему чисельного розв'язання нелінійної крайової задачі сітковими та безсітковими методами в двовимірному випадку. Запропоновано різні типи похибок для порівняння наближених розв'язків.
Ключові слова: метод радіальних базисних функцій, метод скінченних елементів, похибка.

Отображена схема численного решения нелинейной краевой задачи сеточными и бессеточными методами в двухмерном случае. Предложены разные типы погрешностей для сравнения приближенных решений.
Ключевые слова: метод радиальных базисных функций, метод конечных элементов, погрешность.

The numerical solutions of nonlinear two-dimensional boundary-value problem have been found by the finite element method and the radial basis function method. Different types of errors have been offered.
Keywords: radial basis function method, finite element method, error.

Одна із **складових процесу чисельного розв'язання** крайової задачі – програмна реалізація запропонованих алгоритмів. Але досить часто дана складова в наукових публікаціях, що стосуються математичного моделювання та чисельних методів, залишається в стороні. **Одна із цілей даної статті** – запропонувати структури даних, які можуть використовуватись при програмній реалізації чисельних методів скінченних елементів (МСЕ) та радіальних базисних функцій (РБФ) в двовимірному випадку. Стаття є продовженням ряду робіт вказаного напрямку [5, 6, 8-11]. Як і в попередніх публікаціях, викладки проведемо на прикладі нелінійної крайової задачі, якою описується математична модель фільтраційної консолідації ґрунтів з урахуванням впливу тепло-масопереносу [3, 4].

І МСЕ, і метод РБФ відносяться до одного класу проекційних методів [12]. Однак, між ними існує дві важливі відмінності. МСЕ належить до класу сіткових методів і дозволяє знаходити наближений узагальнений розв'язок крайової задачі [12, 13, 15]. В той же час метод РБФ [17] є одним із цілої групи безсіткових проекційних методів [20] і дозволяє шукати класичний на-

ближений розв'язок, оскільки побудований на основі методу колокації в точці.

В роботах [5, 6, 8-11] проведено порівняння наближених розв'язків крайових задач різними чисельними методами: методом скінченних різниць, МСЕ та методом РБФ. Однак у вказаних роботах, для відображення похибок використовувалась або максимальна відносна похибка, або візуальне графічне представлення різниці двох чисельних розв'язків. Такі дані не в повній мірі відображають співвідношення наближених розв'язків. Дана **стаття покликана** ліквідувати вказану прогалину через застосування похибок інших видів.

Розглянемо **процес фільтраційної консолідації** масиву двофазного ґрунту під впливом миттєво прикладеного рівномірного зовнішнього навантаження інтенсивністю q в двовимірному випадку. Згідно [3, 4] математичну модель задачі фільтраційної консолідації масиву ґрунту в умовах фільтрації сольових розчинів в неізотермічному режимі при урахуванні повзучості скелета ґрунту можна описати наступною крайовою задачею:

$$a_0\frac{\partial^2 h}{\partial t^2}+(a_0+a_1)\beta_1\frac{\partial h}{\partial t}=\frac{(1+e)(1+\xi)}{2\gamma}\nabla\cdot\Bigg(\beta_1(\mathbf{K_h}(c,T)\nabla h-\mathbf{K_c}\nabla c-\mathbf{K_T}\nabla T)\ + \\ +\frac{\partial}{\partial t}[\mathbf{K_h}(c,T,e)\nabla h-\mathbf{K_c}(c)\nabla c-\mathbf{K_T}\nabla T]\Bigg),\quad \mathbf{X}=(x,y)\in\Omega,\quad t>0, \tag{1}$$

$$\nabla\cdot(\mathbf{D_c}(c,T)\nabla c)+\nabla\cdot(\mathbf{D_T}\nabla T)-\mathbf{u}\nabla c+\gamma_1(C_m-c)=n\frac{\partial c}{\partial t},\quad \mathbf{X}\in\Omega,\quad t>0\,, \tag{2}$$

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{\lambda}\nabla T)-\rho c_\rho\mathbf{u}\nabla T=c_T\frac{\partial T}{\partial t},\quad \mathbf{X}\in\Omega,\quad t>0\,, \tag{3}$$

$$\mathbf{u}-e\mathbf{v}=-\mathbf{K_h}(c,T)\nabla h+\mathbf{K_c}\nabla c+\mathbf{K_T}\nabla T\,, \tag{4}$$

$$\mathbf{q_c}=c\mathbf{u}-\mathbf{D_c}(c,T)\nabla c-\mathbf{D_T}\nabla T\,, \tag{5}$$

$$\mathbf{q_T}=\rho c_\rho T\mathbf{u}-\boldsymbol{\lambda}\nabla T\,, \tag{6}$$

$$h(\mathbf{X},t)\big|_{\Gamma_1^{(h)}}=H_1(\mathbf{X},t)\,,\ \mathbf{X}\in\Gamma_1^{(h)},\ \ (\mathbf{u},\mathbf{n})\big|_{\Gamma_2^{(h)}}=0\,, \tag{7}$$

$$c(\mathbf{X},t)\big|_{\Gamma_1^{(c)}}=C_1(\mathbf{X},t)\,,\ \mathbf{X}\in\Gamma_1^{(c)},\ \ (\mathbf{q_c},\mathbf{n})\big|_{\Gamma_2^{(c)}}=0\,, \tag{8}$$

$$T(\mathbf{X},t)\big|_{\Gamma_1^{(T)}}=T_1(\mathbf{X},t)\,,\ \mathbf{X}\in\Gamma_1^{(T)},\ \ (\mathbf{q_T},\mathbf{n})\big|_{\Gamma_2^{(T)}}=0\,, \tag{9}$$

$$h(\mathbf{X},0)=h_0(\mathbf{X})\,,\ c(\mathbf{X},0)=c_0(\mathbf{X})\,,\ T(\mathbf{X},0)=T_0(\mathbf{X})\,,\ \mathbf{X}\in\overline{\Omega}, \tag{10}$$

$$a_0\frac{\partial h_0}{\partial t}=\frac{(1+e)(1+\xi)}{2\gamma}\nabla\cdot(\mathbf{K_h}(c_0,T_0)\nabla h_0-\mathbf{K_c}\nabla c_0-\mathbf{K_T}\nabla T_0)- \\ -a_1\beta_1\Big(h_0+\frac{1}{2\gamma}(\Theta_0^*+2p_0^*)\Big),\quad \mathbf{X}\in\overline{\Omega}, \tag{11}$$

де $C_1(t)$, $T_1(t)$, $H_1(t)$, $h_0(\mathbf{X})$, $c_0(\mathbf{X})$, $T_0(\mathbf{X})$ – задані функції; $\Gamma_1^{(h)} \bigcup \Gamma_2^{(h)} = \Gamma$, $\Gamma_1^{(h)} \bigcap \Gamma_2^{(h)} = \varnothing$; $\Gamma_1^{(c)} \bigcup \Gamma_2^{(c)} = \Gamma$, $\Gamma_1^{(c)} \bigcap \Gamma_2^{(c)} = \varnothing$; $\Gamma_1^{(T)} \bigcup \Gamma_2^{(T)} = \Gamma$, $\Gamma_1^{(T)} \bigcap \Gamma_2^{(T)} = \varnothing$. Тут використано такі позначення: $h(\mathbf{X},t)$ – надлишкові напори; $c(\mathbf{X},t)$ – концентрація порового сольового розчину; $T(\mathbf{X},t)$ – температура; $\mathbf{K_h}(c,T) = \left\{k_h^{(ij)}\right\}_{i,j=1}^{2;2}$, $\mathbf{K_c} = \left\{k_c^{(ij)}\right\}_{i,j=1}^{2;2}$, $\mathbf{D_c}(c,T) = \left\{D_c^{(ij)}\right\}_{i,j=1}^{2;2}$, $\mathbf{D_T} = \left\{D_T^{(ij)}\right\}_{i,j=1}^{2;2}$, $\mathbf{K_T} = \left\{k_T^{(ij)}\right\}_{i,j=1}^{2;2}$, $\boldsymbol{\lambda} = \left\{\lambda^{(ij)}\right\}_{i,j=1}^{2;2}$ – відповідно коефіцієнти фільтрації, хімічного осмосу, конвективної дифузії, термодифузії, термоосмосу та ефективної теплопровідності вологого ґрунту; $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{q_c}$, $\mathbf{q_T}$ – швидкості фільтрації сольового розчину та руху твердих частинок ґрунту, потоки розчинених солей і тепла, відповідно; a_0, a_1, β_1 – параметри повзучості скелета ґрунту; ρ, c_ρ – густина та питома теплоємність порового розчину; c_T – об'ємна теплоємність ґрунту за постійного об'єму; t – час; e – коефіцієнт пористості; ξ – коефіцієнт стисливості ґрунту; γ – питома вага сольового розчину; n – пористість ґрунту; γ_1 – константа швидкості масообміну; C_m – концентрація граничного насичення.

Початкову умову (11) запропоновано в [7, 16]. В роботах [1, 2] замість умови (11) використано простішу $\left.\frac{\partial h_0}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$. При дискретизації в часі вказана умова означає, що на двох перших часових шарах значення надлишкових напорів є однаковим.

При **застосуванні методу РБФ** існує проблема з недостатньою точністю апроксимації граничних умов другого та третього родів. В роботі [18] цю проблему запропоновано вирішити через вибір параметра форми мультиквадратичної РБФ. Зокрема, для внутрішніх вузлів області $\varepsilon = \sqrt{N}/5$, а для граничних $\varepsilon = 0.1\sqrt{N}/5$. Тут N – загальна кількість вузлових точок. Однак, при розв'язуванні отриманих систем лінійних алгебричних рівнянь (СЛАР) виникають проблеми з числом обумовленості відповідних матриць. При вказаному співвідношенні параметрів форми у випадку збільшення кількості N вузлів число обумовленості теж зростає і, наприклад, метод Гауса, який чутливий до похибок, дає невірні результати. І якщо в одновимірному випадку межа області складається з однієї точки, то в двовимірному – це крива, на яку при дискретизації попадає ціла множина вузлів. В одновимірному випадку цей метод був використаний в [8, 9] і дав прийнятні результати. В двовимірному – наближені розв'язки втрачають стійкість і в них з'являються неприродні осциляції. Тому для вирішення вказаної проблеми в двовимірному ви-

падку використаємо підхід, запропонований в [19]. Згідно вказаного методу множини вузлових та колокаційних точок є різними. Причому, вузлові точки є лише внутрішніми.

Для застосування методу РБФ покриємо область Ω вузловими точками $\mathbf{X}_j = (x_j^{(x)}; y_j^{(x)})$, $j = \overline{1, N}$. Наближений розв'язок крайової задачі (1)-(11) шукаємо у вигляді:

$$h(\mathbf{X},t) \approx \sum_{j=1}^{N} a_j(t)\varphi_j\left(r_j, \varepsilon_j^{(h)}\right), \quad c(\mathbf{X},t) \approx \sum_{j=1}^{N} b_j(t)\varphi_j\left(r_j, \varepsilon_j^{(c)}\right), \quad T(\mathbf{X},t) \approx \sum_{j=1}^{N} s_j(t)\varphi_j\left(r_j, \varepsilon_j^{(T)}\right), \qquad (12)$$

де $a_j(t)$, $b_j(t)$, $s_j(t)$, $j = \overline{1, N}$, – невідомі коефіцієнти, які залежать лише від часу; φ_j – відомі РБФ, причому $r_j = \left\|\mathbf{X} - \mathbf{X}_j\right\|_2 = \sqrt{\left(x - x_j^{(x)}\right)^2 + \left(y - y_j^{(x)}\right)^2}$; $\varepsilon_i^{(h)} > 0$, $\varepsilon_i^{(c)} > 0$, $\varepsilon_i^{(T)} > 0$ – параметри форми, які також залежать від координат вузлів $\mathbf{X}_j$, $j = \overline{1, N}$.

Замикання $\overline{\Omega} = \Omega \bigcup \Gamma$ області Ω покриємо колокаційними точками $\mathbf{Y}_i = (x_i^{(y)}; y_i^{(y)})$, $i = \overline{1, M}$. Нехай $\omega = \{i: \ \mathbf{Y}_i \in \Omega\}$, $\gamma_1^{(h)} = \{i: \ \mathbf{Y}_i \in \Gamma_1^{(h)}\}$, $\gamma_2^{(h)} = \{i: \ \mathbf{Y}_i \in \Gamma_2^{(h)}\}$. Аналогічно визначаємо множини номерів колокаційних точок $\gamma_1^{(c)}$, $\gamma_2^{(c)}$, $\gamma_1^{(T)}$, $\gamma_2^{(T)}$.

Використовуючи метод колокації у точці, з рівнянь (1)-(3), граничних і початкових умов (7)-(11) отримуємо задачу Коші для системи нелінійних диференціальних рівнянь [4]

$$\mathbf{M}^{(3)} \cdot \frac{d\mathbf{S}}{dt} + \mathbf{L}^{(3)}(\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{S}) \cdot \mathbf{S} = \mathbf{F}^{(3)}, \ \mathbf{M}^{(2)} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{dt} + \mathbf{L}^{(2)}(\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{S}) \cdot \mathbf{B}(t) = \mathbf{G}^{(2)} \cdot \mathbf{S}(t) + \mathbf{F}^{(2)}, \qquad (13)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}^{(1)} \cdot \frac{d^2\mathbf{A}}{dt^2} + \mathbf{M}^{(1)} \cdot \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \mathbf{L}^{(1)}(\mathbf{B},\mathbf{S}) \cdot \mathbf{A}(t) = \\ = \mathbf{G}^{(1)} \cdot \mathbf{B}(t) + \mathbf{G}'^{(1)} \cdot \mathbf{S}(t) + \mathbf{M}^{(12)} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{dt} + \mathbf{M}^{(13)} \cdot \frac{d\mathbf{S}}{dt} + \mathbf{F}^{(1)}, \end{aligned} \qquad (14)$$

$$\mathbf{M}^{(0)} \cdot \frac{d\mathbf{A}^{(0)}}{dt} + \mathbf{L}^{(0)}(\mathbf{B}^{(0)}, \mathbf{S}^{(0)}) \cdot \mathbf{A}^{(0)} = \mathbf{G}^{(0)} \cdot \mathbf{B}^{(0)}(t) + \mathbf{G}'^{(0)} \cdot \mathbf{S}^{(0)}(t) + \mathbf{F}^{(0)}, \qquad (15)$$

$$\tilde{\mathbf{M}}^{(1)} \cdot \mathbf{A}^{(0)} = \tilde{\mathbf{F}}^{(1)}, \ \tilde{\mathbf{M}}^{(2)} \cdot \mathbf{B}^{(0)} = \tilde{\mathbf{F}}^{(2)}, \ \tilde{\mathbf{M}}^{(3)} \cdot \mathbf{S}^{(0)} = \tilde{\mathbf{F}}^{(3)}, \qquad (16)$$

де $\mathbf{A}(t) = \{a_i(t)\}_{i=1}^{N}$, $\mathbf{B}(t) = \{b_i(t)\}_{i=1}^{N}$, $\mathbf{S}(t) = \{s_i(t)\}_{i=1}^{N}$, $\mathbf{A}^{(0)} = \{a_i(0)\}_{i=1}^{N}$, $\mathbf{B}^{(0)} = \{b_i(0)\}_{i=1}^{N}$, $\mathbf{S}^{(0)} = \{s_i(0)\}_{i=1}^{N}$, $\mathbf{M}^{(k)} = \{m_{ij}^{(k)}\}_{i,j=1}^{M,N}$, $\mathbf{L}^{(k)} = \{l_{ij}^{(k)}\}_{i,j=1}^{M,N}$, $\mathbf{F}^{(k)} = \{f_i^{(k)}\}_{i=1}^{M}$, $\tilde{\mathbf{M}}^{(k)} = \{\tilde{m}_{ij}^{(k)}\}_{i,j=1}^{M,N}$,

$\tilde{\mathbf{F}}^{(k)} = \left\{\tilde{f}_i^{(k)}\right\}_{i=1}^{M}$, $k = \overline{0,3}$, $\mathbf{G}^{(k)} = \left\{g_{ij}^{(k)}\right\}_{i,j=1}^{M,N}$, $\mathbf{G}'^{(k)} = \left\{g_{ij}'^{(k)}\right\}_{i,j=1}^{M,N}$, $k = \overline{0,2}$, $\mathbf{Q}^{(1)} = \left\{q_{ij}^{(1)}\right\}_{i,j=1}^{M,N}$.

Визначення елементів матриць вказаної задачі Коші є однотипним, але досить громіздким [4]. Так, наприклад для рівняння теплопровідності маємо:

$$m_{ij}^{(3)} = c_T\varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_j^{(T)}),\ i \in \omega;\ \tilde{m}_{ij}^{(3)} = \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_j^{(T)}),\ \ \tilde{f}_i^{(3)} = T_0(\mathbf{Y}_i),\ i = \overline{1,M};$$

$$l_{ij}^{(3)} = \begin{cases} -\nabla\cdot\left(\lambda\nabla\varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_j^{(T)})\right) + \rho c_\rho \mathbf{u}\nabla\varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_j^{(T)}),\ i \in \omega; \\ \left(\lambda\nabla\varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_j^{(T)}) - \rho c_\rho \mathbf{u}\varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_j^{(T)}), \mathbf{n}\right), i \in \gamma_2^{(T)}; \\ \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_j^{(T)}),\ i \in \gamma_1^{(T)}; \end{cases} \quad f_i^{(3)} = \begin{cases} 0,\ i \in \omega; \\ 0,\ i \in \gamma_2^{(T)}; \\ T_1(\mathbf{Y}_i, t),\ i \in \gamma_1^{(T)}; \end{cases}$$

$$r_{ji} = \left\|\mathbf{Y}_i - \mathbf{X}_j\right\|_2.$$

Наближений розв'язок задачі (1)-(11) МСЕ шукаємо у вигляді

$$h(\mathbf{X},t) \approx \sum_{j=1}^{M} a_j(t)\varphi_j(\mathbf{X}),\ \ c(\mathbf{X},t) \approx \sum_{j=1}^{M} b_j(t)\varphi_j(\mathbf{X}),\ \ T(\mathbf{X},t) \approx \sum_{j=1}^{M} s_j(t)\varphi_j(\mathbf{X}), \qquad (17)$$

де $\varphi_j(\mathbf{X})$ – базисні функції МСЕ. Використовуючи стандартний підхід [3, 13, 15], отримаємо задачу Коші (13)-(16), де, наприклад, для рівняння теплопровідності маємо:

$$\tilde{m}_{ij}^{(3)} = \int_\Omega \varphi_i(\mathbf{X})\varphi_j(\mathbf{X})d\mathbf{X},\ \ \tilde{f}_i^{(3)} = \int_\Omega T_0(\mathbf{X})\varphi_i(\mathbf{X})d\mathbf{X},\ \ m_{ij}^{(3)} = \begin{cases} c_T\int_\Omega \varphi_i(\mathbf{X})\varphi_j(\mathbf{X})d\mathbf{X},\ i \in \omega \cup \gamma_2^{(T)}; \\ 0,\ i \in \gamma_1^{(T)}; \end{cases}$$

$$l_{ij}^{(3)} = \begin{cases} \int_\Omega \left(\lambda\nabla\varphi_j(\mathbf{X})\varphi_i(\mathbf{X}) + \rho c_\rho \varphi_i(\mathbf{X})\mathrm{u}\nabla\varphi_j(\mathbf{X})\right)d\mathbf{X},\ i \in \omega \cup \gamma_2^{(T)}; \\ 1, \quad i \in \gamma_1^{(T)}, i = j; \\ 0, \quad i \in \gamma_1^{(T)}, i \neq j; \end{cases} \quad f_i^{(3)} = \begin{cases} T_1(\mathbf{X}_i, t), i \in \gamma_1^{(T)}; \\ 0, i \in \omega \cup \gamma_2^{(T)}. \end{cases}$$

Для знаходження чисельного розв'язку задачі Коші (13)-(16) дискретизуємо часовий відрізок $[0; t_0]$ з кроком τ. Наближений розв'язок системи нелінійних диференціальних рівнянь (13), (14) можна знайти, наприклад, за допомогою лінеаризованої повністю неявної різницевої схеми [14]. Детальніше схеми дискретизації в часі наведено в роботах [3, 4].

В роботах [5, 6, 10, 11] **для оцінки якості співпадання двох наближених розв'язків** $u_1(\mathbf{X},t)$, $u_2(\mathbf{X},t)$ (при $t = t_s = s\cdot\tau$) крайової задачі використана

лише *максимальна відносна похибка* $\max\limits_{1\le i\le M}\dfrac{\left|u_1(\mathbf{X}_i,t_s)-u_2(\mathbf{X}_i,t_s)\right|}{\left|u_1(\mathbf{X}_i,t_s)\right|}100\%$ (при умові $u_1(\mathbf{X}_i,t_s)\neq 0$). В якості дискретної множини точок $\mathbf{X}_i$ вибирались, як правило, вузли в МСЕ. Також в знаменнику може стояти $u_2(\mathbf{X},t)$. Однак, при «належному» співпаданні функцій $u_1(\mathbf{X},t)$, $u_2(\mathbf{X},t)$ це мало впливає на величину похибки.

Окрім вказаної, можна використати ще наступні оцінки для похибок:
середня відносна похибка

$$\overline{\mathrm{v}}^{(s)}=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}\mathrm{v}_i^{(s)},$$

де $\mathrm{v}_i^{(s)}=\dfrac{\left|u_1(\mathbf{X}_i,t_s)-u_2(\mathbf{X}_i,t_s)\right|}{\left|u_1(\mathbf{X}_i,t_s)\right|}100\%$ – відносна похибка у вузлі $\mathbf{X}_i$ на часовому шарі під номером s;
середньоквадратична відносна похибка

$$\mathrm{v}^{(s)}=\sqrt{\frac{1}{M-1}\sum_{i=1}^{M}\left(\mathrm{v}_i^{(s)}\right)^2}.$$

Отже, **в першій частині роботи** наведено схему чисельного розв'язання нелінійної крайової задачі, якою описується двовимірна задача фільтраційної консолідації ґрунтів в умовах тепло-масопереносу. Запропоновано типи похибок, які будуть використані для аналізу співпадання наближених розв'язків.

1. Булавацький В. М. Математичне моделювання фільтраційної консолідації з урахуванням солепереносу в рамках системи з подвійною релаксацією / В. М. Булавацький // Кибернетика и системный анализ. – 2008. – №1. – С. 116-126. **2.** Булавацький В. М. Некласичні математичні моделі процесів тепло- та масопереносу / В. М. Булавацький, Ю. Г. Кривонос, В. В.Скопецький. – К. : Наук. думка, 2005. – 282 с. **3.** Власюк А. П. Математичне моделювання консолідації ґрунтів при фільтрації сольових розчинів в неізотермічних умовах / А. П. Власюк, П. М. Мартинюк. – Рівне: НУВГП, 2008. – 416 с. **4.** Власюк А. П. Чисельне розв'язування задач консолідації та фільтраційного руйнування ґрунтів в умовах тепло-масопереносу методом радіальних базисних функцій / А. П. Власюк, П. М. Мартинюк. – Рівне: НУВГП, 2010. – 277 с. **5.** Власюк А. П. Порівняльний аналіз чисельних розв'язків двовимірної задачі фільтраційної консолідації ґрунтового масиву при наявності переносу солей в неізотермічному режимі / А. П. Власюк, П. М. Мартинюк // Вісник Київського ун-ту. Серія фіз.-мат. науки. – 2004. – Вип. 3. – С. 165-176. **6.** Власюк А. П. Порівняння чисельних розв'язків задачі фільтраційної консолідації з урахуванням повзучості скелета ґрунту за наявності теп-

ломасоперенесення методами радіальних базисних функцій та скінченних елементів / А. П. Власюк, П. М. Мартинюк // Вісник Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. інформ. – 2012. – Вип. 18. **7.** Иванов П. Л. Грунты и основания гидротехнических сооружений. Механика грунтов / П. Л. Иванов. – М. : Высш. школа, 1991. – 447 с. **8.** Мартинюк П. М. Структури даних та похибки в порівнянні наближених розвязків крайових задач чисельними методами. I. Структури даних та похибки / П. М. Мартинюк // Вісник НУВГП. Сер. технічні науки. – 2011. – Вип. 4. **9.** Мартинюк П. М. Структури даних та похибки в порівнянні наближених розвязків крайових задач чисельними методами. II. Результати чисельних експериментів / П. М. Мартинюк // Вісник НУВГП. Сер. технічні науки. – 2011. – Вип. 4. **10.** Мартинюк П. М. Порівняльний аналіз наближених розв'язків крайових задач сітковими та безсітковими чисельними методами в одновимірному випадку / П. М. Мартинюк, Н. М. Боднар // Вісник НУВГП. – 2009. – Вип. 1(45). – С. 272-283. **11.** Мартинюк П. М. Чисельне порівняння методу радіальних базисних функцій та методу скінченних елементів на прикладі одновимірної крайової задачі тепломасопереносу з домінуючим конвективним членом / П. М. Мартинюк, А. М. Дворжак // Вісник НУВГП. – 2009. – Вип. 3(47). – С. 84-90. **12.** Марчук Г. И. Введение в проекционно-сеточные методы. / Г. И. Марчук, В. И. Агошков. – М. : Наука, 1981. – 416 с. **13.** Савула Я. Г. Числовий аналіз задач математичної фізики варіаційними методами / Я. Г. Савула. – Львів: Видавничий центр ЛНУ ім. Івана Франка, 2004. – 222 с. **14.** Самарский А. А. Численные методы математической физики / А. А. Самарский, А. В. Гулин. – М. : Научный мир, 2003. – 316 с. **15.** Сергиенко И. В. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах / И. В. Сергиенко, В. В. Скопецкий, В. С. Дейнека. – Киев : Наук. думка, 1991. – 432с. **16.** Флорин В. А. Основы механики грунтов. В 2 т. / В. А. Флорин. – М. : Госстройиздат, 1961. – Т.2. – 544 с. **17.** Kansa E. J. Multiquadrics – a scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics. II. Solutions to parabolic, hyperbolic and elliptic partial differential equations / E. J. Kansa // Comput. Math. Appl. – 1990. – 19. – Pp. 147-161. **18.** Kansa E. J. The role of multiquadric shape parameters in the numerical solution of PDEs /E. J. Kansa // ECCOMAS Thematic Conferense on Meshless Methods. – Lisbon, 2005. – A41.1. **19.** Least-squares collocation meshless method / X. Zhang, X.-H. Liu, K.-Z. Song, M.-W. Lu // Int. J. Numer. Methods Engin. – 2001. – Vol.51. – P. 1089-1100. **20.** Liu G. R. Mesh Free Methods: Moving beyond the Finite Element Method / G. R. Liu. – Boca Raton: CRC Press, 2009. – 872 p.

Рецензент: д.т.н., професор Власюк А. П. (НУВГП)