УДК 621.926.5:539.215

Науменко Ю. В., д.т.н., доцент (Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне)**, Сівко В. Й., д.т.н., професор** (Київський національний університет будівництва і архітектури)

МОДЕЛЮВАННЯ ВІЗУАЛЬНИХ ПАРАМЕТРІВ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ В'ЯЗКОЇ ТЕЧІЇ В КАМЕРІ ОБЕРТОВОГО БАРАБАНА

Розглянуто чисельне визначення двовимірного неусталеного руху рідини в камері обертового барабана. Використано метод «маркерів і комірок» у полярній системі координат. Наведено результати візуалізації напружено-деформованого стану режиму пристінкового шару та циркуляційного режиму, що виникають при швидкому та повільному обертанні барабана.
Ключові слова: обертовий барабан, рух рідини, візуалізація.

Рассмотрено численное определение двумерного неустановившегося движения жидкости в камере вращающегося барабана. Использован метод «маркеров и ячеек» в полярной системе координат. Приведены результаты визуализации напряженно-деформированного состояния режима пристеночного слоя и циркуляционного режима, возникающих при быстром и медленном вращении барабана.
Ключевые слова: вращающийся барабан, движение жидкости, визуализация.

The numerical simulation of stationary rotating drum filling time-dependent viscous flow is considered. The Marker-and-Cell method in polar coordinates is used. The results of the wall layer flow and circulating flow stress-strain behaviour visualization, which take place when drum rotates fast and slowly, are represented.
Keywords: rotating drum, stress-strain behaviour, visualization.

Задача визначення руху рідини в циліндричній камері, що обертається навколо власної горизонтальної осі, викликає сталий прикладний інтерес. Характер течії визначає ефективність реалізації технологічних процесів.

Особливістю розглядуваної задачі є складна геометрія та велика деформація вільної границі та рухомість твердої стінки.

Досить широкого розповсюдження набув алгоритм для розв'язання нестаціонарних задач руху зі складною формою вільної поверхні – метод «маркерів і комірок» [1, 2]. Розроблену для прямокутної декартової системи координат, методику згодом було поширено і на циліндричну систему [3]. Для визначення обертових течій доцільним є застосування такого методу у полярних координатах, що найбільш відповідають геометрії руху та границь [4].

Мета досліджень – комп'ютерне моделювання та візуалізація параметрів в'язкої течії в камері обертового барабана.

Рівняння Нав'є-Стокса у консервативній формі та рівняння нерозривності після перетворень мають вигляд

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{1}{r}\frac{\partial\left(rU^2\right)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\left(UV\right)}{\partial\varphi}-\frac{V^2}{r}=$$

$$=-g_r-\frac{1}{\rho_г}\frac{\partial p}{\partial r}+\nu\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial\left(rU\right)}{\partial r}\right]+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial V}{\partial\varphi}\right\},$$

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{r}\frac{\partial\left(rUV\right)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\left(V^2\right)}{\partial\varphi}+\frac{UV}{r}=$$

$$=-g_\varphi-\frac{1}{\rho_г}\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\varphi}+\nu\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial\left(rV\right)}{\partial r}\right]+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial U}{\partial\varphi}\right\},$$

$$D=\frac{1}{r}\frac{\partial\left(rU\right)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\varphi}=0, \qquad (1)$$

де r, φ – полярні координати, U, V – складові швидкості завантаження, D – дивергенція швидкості, g_r та g_φ – компоненти прискорення масових сил.

Похідна дивергенції швидкості по часу має вигляд

$$\frac{\partial D}{\partial t}=\frac{\partial^2 U}{\partial r\partial t}+\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi\partial t}. \qquad (2)$$

Після перетворень (1) та (2) можна отримати рівняння Пуассона для тиску в полярних координатах

$$\frac{\partial D}{\partial t}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2\left(rU^2\right)}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2\left(UV\right)}{\partial r\partial\varphi}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\left(rUV\right)}{\partial r\partial\varphi}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\left(V^2\right)}{\partial\varphi^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial\left(V^2\right)}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(UV\right)}{\partial\varphi}=$$

$$=-\frac{1}{\rho_г}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 p}{\partial\varphi^2}\right]+\nu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial D}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 D}{\partial\varphi^2}\right]. \qquad (3)$$

Область круглого поперечного перерізу камери, що вивчається, покривається ейлеревою сіткою комірок у вигляді кільцевого сектора зі сторонами Δr та $\Delta\varphi$ із центром (i,j) (рис. 1). Складові швидкості визначаються на границях комірки, а тиск – в центрі. Можна прийняти: $Re=\omega R^2/\nu$, $Re=\omega^2 R/g$, R – радіус камери, ω – кутова швидкість, ν – кінематична в'язкість. Для визначення положення вільної поверхні та візуалізації течії використовується лагранжева сітка часток-маркерів, що переносяться полем швидкостей.

Тоді за допомогою кінцево-різницевих виразів для розв'язання рівнянь (1)

можна одержати такий алгоритм у безрозмірному вигляді [5]:

$$U_{i+1/2,j}^{n+1} = F_{i+1/2,j}^{n} - \Delta t \frac{\left(p_{i+1,j} - p_{i,j}\right)^{n+1}}{\Delta r},$$

$$F_{i+1/2,j}^{n} = U_{i+1/2,l}^{n} + \Delta t \left\{ -\frac{\left(rU^2\right)_{i+1,j} - \left(rU^2\right)_{i,j}}{r_{i+1/2}\Delta r} - \frac{\left(UV\right)_{i+1/2,j+1/2} - \left(UV\right)_{i+1/2,j-1/2}}{r_{i+1/2}\Delta\varphi} + \right.$$

$$+ \left(\frac{V^2}{r}\right)_{i+1/2,j} - \frac{\sin\varphi_j}{Fr} + \frac{1}{Re}\left\{ \frac{\left[\left(rU\right)_{i+3/2,j} - \left(rU\right)_{i+1/2,j}\right]/r_{i+1} - \left[\left(rU\right)_{i+1/2,j} - \left(rU\right)_{i-1/2,j}\right]/r_i}{\Delta r^2} + \right.$$

$$\left.\left. + \frac{U_{i+1/2,j+1} - 2U_{i+1/2,j} + U_{i+1/2,j-1}}{r_{i+1/2}^2 \Delta\varphi^2} - \frac{2\left(V_{i+1/2,j+1/2} - V_{i+1/2,j-1/2}\right)}{r_{i+1/2}^2 \Delta\varphi} \right\}\right\}^{n}, \qquad (4)$$

$$V_{i,j+1/2}^{n+1} = G_{i,j+1/2}^{n} - \Delta t \frac{\left(p_{i,j+1} - p_{i,j}\right)^{n+1}}{r_i \Delta\varphi},$$

$$G_{i,j+1/2}^{n} = V_{i,j+1/2}^{n} + \Delta t \left\{ -\frac{\left(rUV\right)_{i+1/2,j+1/2} - \left(rUV\right)_{i-1/2,j+1/2}}{r_i \Delta r} - \frac{V^2{}_{i,j+1} - V^2{}_{i,j}}{r_i \Delta\varphi} - \left(\frac{UV}{r}\right)_{i,j+1/2} - \right.$$

$$- \frac{\cos\varphi_{j+1/2}}{Fr} + \frac{1}{Re}\left\{ \frac{\left[\left(rV\right)_{i+1,j+1/2} - \left(rV\right)_{i,j+1/2}\right]/r_{i+1/2} - \left[\left(rV\right)_{i,j+1/2} - \left(rV\right)_{i-1,j+1/2}\right]/r_{i-1/2}}{\Delta r^2} + \right.$$

$$\left.\left. + \frac{V_{i,j+3/2} - 2V_{i,j+1/2} + V_{i,j-1/2}}{r_i^2 \Delta\varphi^2} + \frac{2\left(U_{i,j+1} - V_{i,j}\right)}{r_i^2 \Delta\varphi} \right\}\right\}^{n}, \qquad (5)$$

де Δt – крок по часу, n та n+1 – номер часового шару.

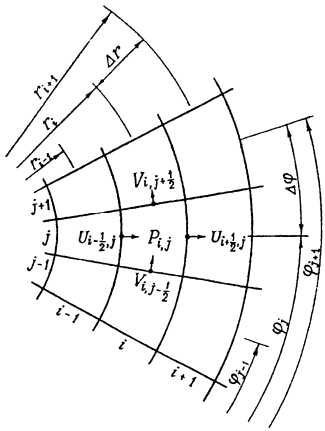

Рис. 1. Схема розрахункової сітки

Кінцево-різницева апроксимація рівняння нерозривності має вигляд

$$D_{i,j}^{n+1}=\left[\frac{(rU)_{i+1/2,j}-(rU)_{i-1/2,j}}{r_i\Delta r}+\frac{V_{i,j+1/2}-V_{i,j-1/2}}{r_i\Delta\varphi}\right]^{n+1}=0,$$

а рівняння Пуассона (3)

$$\left[\frac{r_{i+1/2}\left(p_{i+1,j}-p_{i,j}\right)-r_{i-1/2}\left(p_{i,j}-p_{i-1,j}\right)}{r_i\Delta r^2}+\frac{p_{i,j+1}-2p_{i,j}+p_{i,j-1}}{r_i^2\Delta\varphi^2}\right]^{n+1}=$$

$$=\frac{1}{\Delta t}\left[\frac{(rF)_{i+1/2,j}-(rF)_{i-1/2,j}}{r_i\Delta r}+\frac{G_{i,j+1/2}-G_{i,j-1/2}}{r_i\Delta\varphi}\right]^{n}. \qquad (6)$$

Із урахуванням (4) та (5) праву частину рівняння (6) можна записати у вигляді

$$\frac{1}{\Delta t}\left[\frac{(rF)_{i+1/2,j}-(rF)_{i-1/2,j}}{r_i\Delta r}+\frac{G_{i,j+1/2}-G_{i,j-1/2}}{r_i\Delta\varphi}\right]^{n}=\frac{D_{i,j}^{n}}{\Delta t}-L_{i,j}^{n},$$

$$L_{i,j}^{n}=\left\{\frac{(rU)_{i+1,j}-2(rU)_{i,j}+(rU)_{i-1,j}}{r_i\Delta r^2}+\right.$$

$$+\frac{(UV)_{i+1/2,j+1/2}-(UV)_{i+1/2,j-1/2}-(UV)_{i-1/2,j+1/2}+(UV)_{i-1/2,j-1/2}}{r_i\Delta r\Delta\varphi}+$$

$$+\frac{r_{i+1/2}\left[(UV)_{i+1/2,j+1/2}-(UV)_{i+1/2,j-1/2}\right]-r_{i-1/2}\left[(UV)_{i-1/2,j+1/2}-(UV)_{i-1/2,j-1/2}\right]}{r_i^2\Delta r\Delta\varphi}+$$

$$+\frac{V_{i,j+1}^2-2V_{i,j}^2+V_{i,j-1}^2}{r_i^2\Delta\varphi^2}-\frac{V_{i+1/2,j}^2-V_{i-1/2,j}^2}{r_i\Delta r}+\frac{(UV)_{i,j+1/2}-(UV)_{i,j-1/2}}{r_i^2\Delta\varphi}-$$

$$\left.-\frac{1}{Re}\left[\frac{r_{i+1/2}\left(D_{i+1,j}-D_{i,j}\right)-r_{i-1/2}\left(D_{i,j}-D_{i-1,j}\right)}{r_i\Delta r^2}+\frac{D_{i,j+1}-2D_{i,j}+D_{i,j-1}}{r_i^2\Delta\varphi^2}\right]\right\}^{n}.$$

Обчислювальний процес після задавання початкових умов складався з кроків по часу та циклів. Розрахунковий цикл для одного часового шару містив такі етапи: розрахунок поля тиску, розрахунок поля швидкостей, розрахунок нових координат маркерів після переміщення та нового положення вільної поверхні, уточнення полів швидкостей та тиску поблизу границі, перехід до нового часового шару та нового розрахункового циклу.

Картини складових швидкості на рис. 2 демонструють прискорення частини шару, що опускається, та сповільнення частини, що піднімається, та помітну різностінність пристінкового шару, що змінюється в процесі руху.

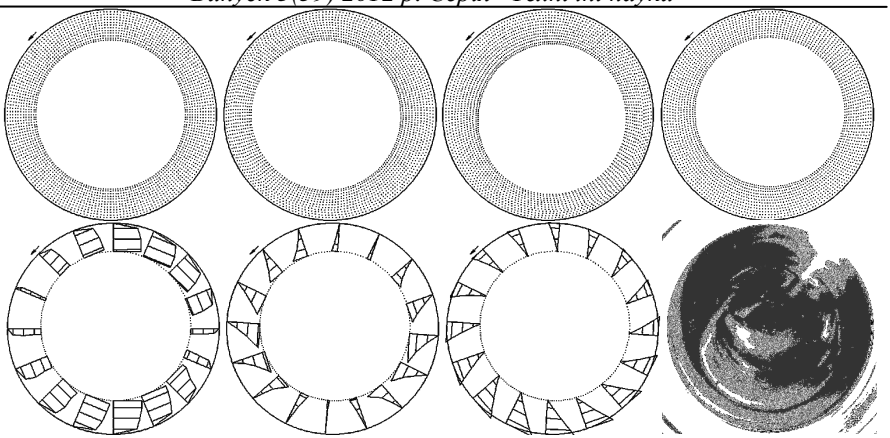

Рис. 2. Розрахункові та фотографічна картини режиму пристінкового шару при *Re*=133000, *Fr*=4,24, *к*=0,5 для *t*=0; 10,1; 20,2; 30,3 та епюри V_{rel}, *U*, *P* для *t*=30,3

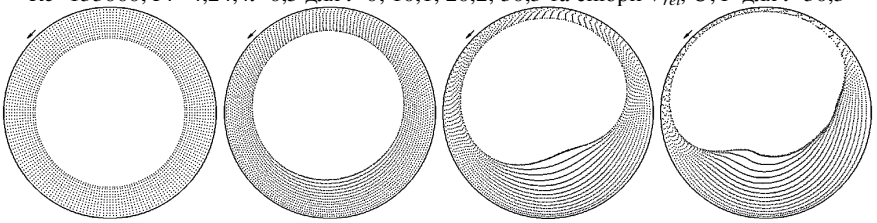

Рис. 3. Картини циркуляційного режиму при *Re*=133000, *Fr*=4,24, *к*=0,5для *t*=0; 10,1; 20,2; 30,3

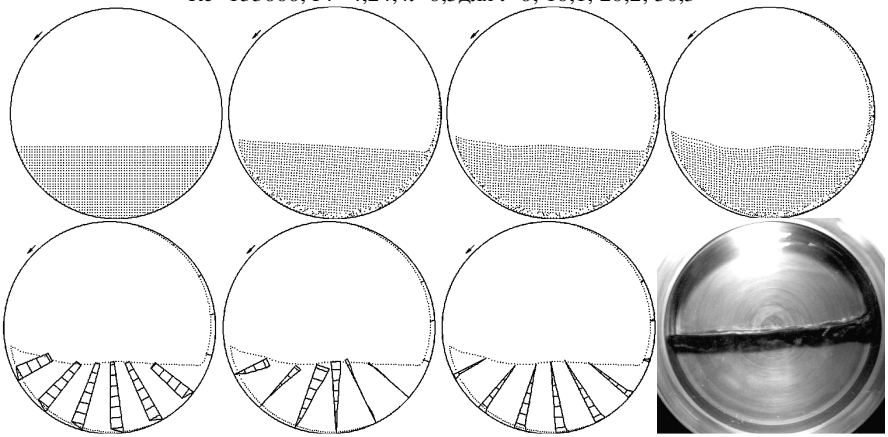

Рис. 4. Розрахункові та фотографічна картини циркуляційного режиму при *Re*=225000, *Fr*=3,06, *к*=0,3 для *t*=0; 0,57; 1,13; 1,17 та епюри V_{rel}, *U*, *P* для *t*=1,17

Для розрахунку циркуляційного режиму можна використати також умову із нескінченно швидкого обертання, вважаючи обертання камери повільним

порівняно із швидким відносним рухом завантаження. На рис. 3 показано картини розвитку режиму при умовах для параметрів руху, що відповідають наведеним на рис. 2.

На рис. 4-6 показано розрахункові та фотографічну картини розвитку режиму та епюри V_{rel}, U та P для останньої картини із використанням таких умов при великих числах Рейнольдса Re для трьох ступенів заповнення камери. Величина максимальної ординати епюри V_{rel} для останньої картини становить 1,14, епюри U – 0,02 і епюри P – 0,0909.

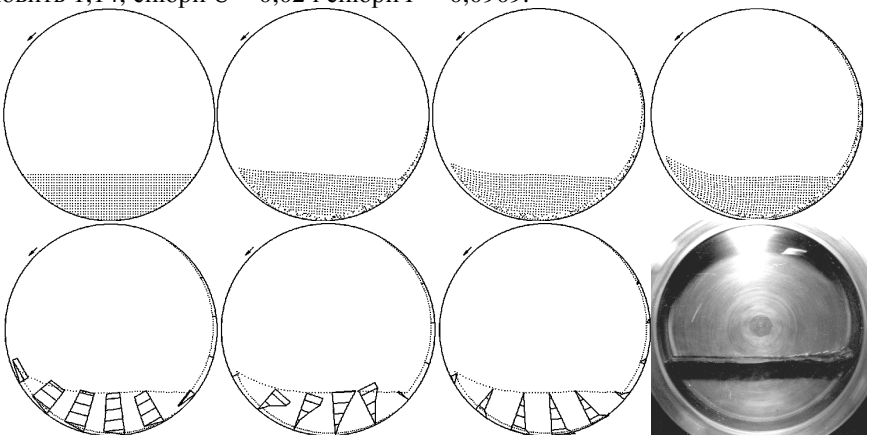

Рис. 5. Розрахункові та фотографічна картини циркуляційного режиму при Re=225000, Fr=3,06, $к$=0,15 для t=0; 0,57; 1,13; 1,17 та епюри V_{rel}, U, P для t=1,17

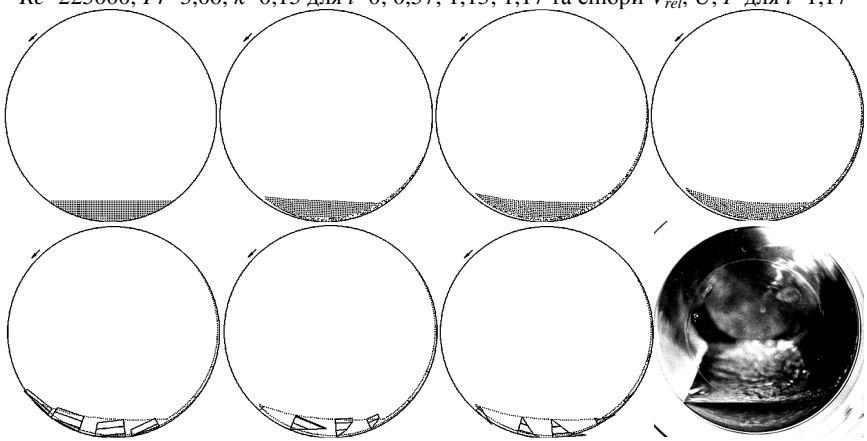

Рис. 6. Розрахункові та фотографічна картини циркуляційного режиму при Re=225000, Fr=3,06, $к$=0,05 для t=0; 0,57; 1,13; 1,17 та епюри V_{rel}, U, P для t=1,17

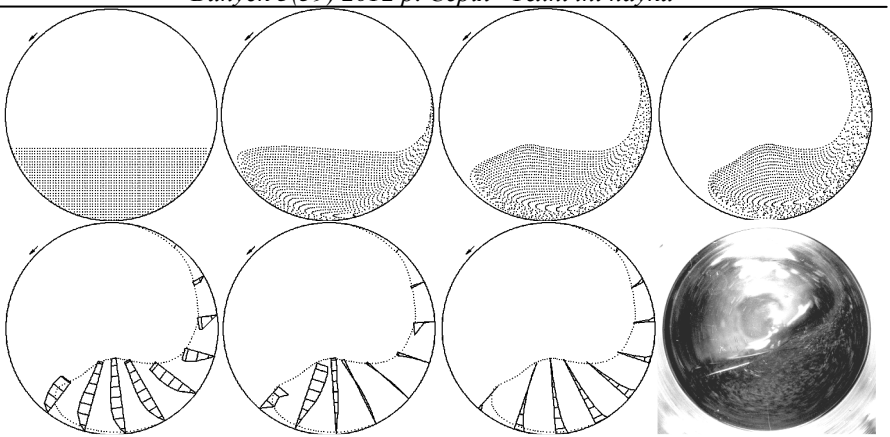

Рис. 7. Розрахункові та фотографічна картини циркуляційного режиму при *Re*=1125, *Fr*=3,06, *к*=0,3 для *t*=0; 0,57; 1,13; 1,17 та епюри V_{rel}, *U*, *P* для *t*=1,17

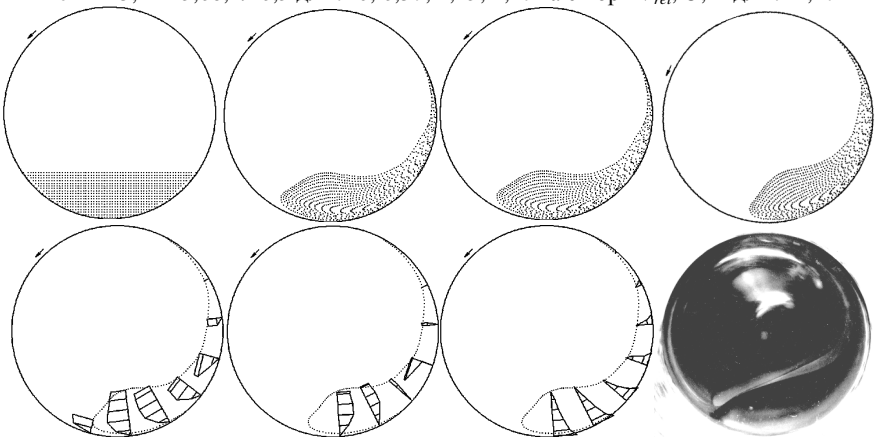

Рис. 8. Розрахункові та фотографічна картини циркуляційного режиму при *Re*=1125, *Fr*=3,06, *к*=0,15 для *t*=0; 0,57; 1,13; 1,17 та епюри V_{rel}, *U*, *P* для *t*=1,17

На рис. 7-9 наведено розрахункові та фотографічну картини розвитку такого режиму при малих *Re* для параметрів руху, що відповідають рис. 4-6. Величина максимальної ординати епюри V_{rel} для останньої картини – 0,327, *U* – 0,0262 і *P* – 0,131.

Згідно картин руху на рис. 4-6 при слабкій взаємодії зі стінкою камери практично все завантаження, навіть при малому ступені заповнення, знаходиться у нижній частині камери із майже горизонтальною вільною поверхнею, проковзуючи відносно барабана, і лише тонкий його шар прилипає до стінки, що піднімається.

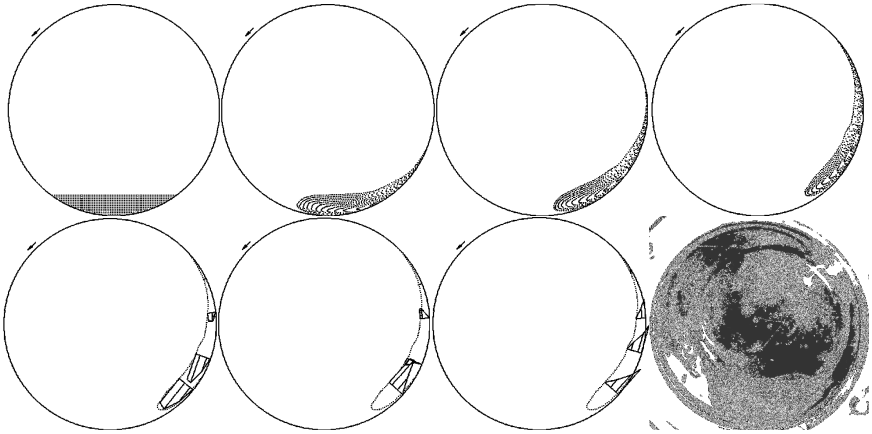

Рис. 9. Розрахункові та фотографічна картини циркуляційного режиму при Re=1125, Fr=3,06, κ=0,05 для t=0; 0,57; 1,13; 1,17 та епюри V_{rel}, U, P для t=1,17

Згідно картин на рис. 7-9 при сильній взаємодії із камерою основна частина завантаження здійснює інтенсивний циркуляційний рух із утворенням вихрового валика на частині стінки, що опускається, та меніску зі значним налиплим шаром на стінці, що піднімається. При малому ж ступені заповнення завантаження у перерізі набуває краплеподібної форми, внаслідок сильного налипання не встигає проковзувати відносно стінки та розтікається по ній.

Було проведено контрольні розрахунки, які показали хорошу апроксимаційну збіжність та алгоритмічну універсальність методу [5-7]. З метою контролю обчислень, за допомогою візуалізації картин течії, перевірялось також виконання умов збереження маси. Похибка була незначною.

1. Harlow F. H. Numerical calculation of time-dependent viscous flow of fluid with free surface / F. H. Harlow, J. E. Welch // Phys. Fluids. – 1965. – Vol. 8, № 12. – P. 2182-2189. **2.** Harlow F. H. Distortion of a splashing liquid drop / F. H. Harlow, J. P. Shannon // Science. – 1967. – Vol. 157, № 3788. – P. 547-550. **3.** Daly B.J. Numerical study of the effect of surface tension on interface instability / B. J. Daly // Phys. Fluids. – 1969. – Vol. 12, № 7. – P. 1340-1354. **4.** Науменко Ю. В. Применение численного метода «маркеров и ячеек» в полярной системе координат / Ю. В. Науменко // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1999. – Т. 39, № 2. – С. 294-299. **5.** Науменко Ю. В. Численный расчет режимов течения жидкости, частично заполняющей горизонтальный вращающийся теплообменный цилиндр / Ю. В. Науменко // Инженерно-физический журнал. – 2001. – Т. 74, № 3. – С. 143-150. **6.** Науменко Ю. В. Чисельне моделювання обертових течій методом маркерів і комірок / Ю. В. Науменко // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2001. – Т. 44, № 2. – С. 171-176. **7.** Науменко Ю. В. Чисельне визначення в'язкої течії з вільною поверхнею в горизонтальному обертовому циліндрі / Ю. В. Науменко // Прикладна гідромеханіка. – 2001. – Т. 3(75), № 4. – С. 13-19.

Рецензент: к.т.н., професор Сухарєв Е. О. (НУВГП)