Національний університет
водного господарства
та природокористування

Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України

Національний університет водного господарства та природокористування

Кафедра експлуатації і ремонту машин

033-80

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання практичних робіт з навчальної дисципліни "Якість машин" для студентів напряму підготовки 6.050503 „Машинобудування" всіх професійних спрямувань денної та заочної форми навчання

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Затверджено
методичною комісією
напряму підготовки
„Машинобудування"
Протокол № 7 від 25.10.2011 р.

Рівне - 2011

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Методичні вказівки до виконання практичних робіт з дисципліни “Якість машин” для студентів напряму підготовки 6.050503 „Машинобудування” всіх професійних спрямувань денної та заочної форми навчання / Є.І. Тхорук, М.В. Голотюк. – Рівне: НУВГП, 2011. – 36 с.

Розробники: Є.І. Тхорук – доцент, М.В. Голотюк – асистент.

Відповідальний за випуск Гавриш В.С., доцент, завідувач кафедри експлуатації і ремонту машин.

ЗМІСТ

Практична робота № 5. Статистичні методи регулювання технологічних процесів 3

Практична робота № 6. Моніторинг якості на основі контрольних карт для кількісних ознак 15

Практична робота № 7. Показники надійності продукції 32

Додатки 35

Національний університет
водного господарства
та природокористування

ЛІТЕРАТУРА

1. Статистика якості: Підруч. для студ. вищ. навч. зак. / В.Б.Захожай, А.Ю. Чорний. – К.: МАУП, 2005. – 576 с.

2. Басовский Л.Е., Протасьев В.Б. Управление качеством: Учебник для ВУЗов. М.: ИНФРА-М, 2002. – 360 с.

3. Новіков В.М. Никитюк О.А. Розробка систем якості та аналіз вимог ISO\IEC 17025 –К.,”Нора-прінт”, 2002. − 226 с.

4. Ефимов В.В. Статистические методы в управлении качеством продукции: учебное пособие / В.В. Ефимов. – Ульяновск: УлГТУ, 2002. – 232 с.

© Є.І. Тхорук, 2011
М.В. Голотюк, 2011
© НУВГП, 2011

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Практична робота 5.
СТАТИСТИЧНІ МЕТОДИ РЕГУЛЮВАННЯ ТЕХНОЛОГІЧНИХ ПРОЦЕСІВ

Мета – отримати теоретичні знання та практичні навички щодо виявлення розладки технологічного процесу на основі результатів періодичного контролю вибірок малого об'єму, який здійснюється за кількісною ознакою.

Короткі теоретичні відомості.

1.1. Перевірка гіпотез про рівність дисперсій.

Порівняння дисперсії з ідеальною дисперсією генеральної сукупності.

На практиці часто виникають ситуації, коли потрібно перевірити точність устаткування, пристроїв перевірки, стабільність технологічних процесів. З цією метою на основі вибіркової дисперсії потрібно перевірити гіпотезу про рівність генеральної дисперсії досліджуваної сукупності певному очікуваному значенню.

Припустимо, що з певної генеральної сукупності взята вибірка, де n – обсяг вибірки і s^2 – незміщена вибіркова дисперсія для цього обсягу. Якщо потрібно перевірити гіпотезу про рівність генеральної дисперсії гіпотетичній генеральній дисперсії, тобто

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2, \qquad H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2, \tag{5.1}$$

де σ^2 – невідома генеральна дисперсія; σ_0^2 - гіпотетичне значення генеральної дисперсії, то необхідно обчислити спостережуване значення критерію x_i – квадрат (χ^2) Пірсона

$$\chi^2_{спост} = \frac{(n-1)\cdot s^2}{\sigma_0^2}, \tag{5.2}$$

і з таблиці критичних точок χ^2 - розподілу для рівня суттєвості α і числа ступенів вільності $k = n-1$ знайти критичну точку $\chi^2_{kp}(\alpha, k)$.

Дисперсія генеральної сукупності σ^2 оцінюється на основі вибіркової дисперсії s^2.

У тому разі, якщо $\chi^2_{спост} > \chi^2_{kp}$, нульова гіпотеза H_0 відкидається на користь альтернативної. Якщо $\chi^2_{спост} < \chi^2_{kp}$ - беруть нульову гіпотезу.

Приклад 1. На основі хронометражу часу, потрібного на встановлення певного елемента у виріб різними працівниками, визначено, що дисперсія дорівнює $\sigma_0^2 = 2$ (хв.). Результати хронометражу часу роботи нового робітника за 20 спостереженнями наведені у таблиці 5.1.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Таблиця 5.1.

Дані хронометражу часу роботи нового працівника

Час, x	56	58	60	62	64
Кількість f	1	4	10	3	2

Чи можемо ми вважати, що при рівні суттєвості a=0,05 новий робітник працює ритмічно?

Розв'язання. Потрібно перевірити гіпотезу, що дисперсія часу, який витрачає на встановлення елемента новий робітник, істотно не відрізняється від дисперсії часу інших робітників (гіпотетичної дисперсії).

Таблиця 5.2.

Дані розрахунку вибіркової дисперсії s^2

№	x	f	$\left(x-\bar{x}\right)^2$	$\left(x-\bar{x}\right)^2 \cdot f$
1	56	1	16,81	16,81
2	58	4	4,41	17,64
3	60	10	0,01	0,1
4	62	3	3,61	10,83
5	64	2	15,21	30,42
Середнє	60,1	-	-	3,98

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Визначаємо дисперсію витрат часу нового робітника.

Середній час за формулою середнього арифметичного зваженого дорівнює

$$\bar{x} = \frac{56 \cdot 1 + 58 \cdot 4 + 60 \cdot 10 + 62 \cdot 3 + 64 \cdot 2}{1 + 4 + 10 + 3 + 2} = \frac{1202}{20} = 60{,}1 .$$

Дисперсія становить $S^2 = 3{,}98$.

Знаходимо розрахункове значення критерію χ^2:

$$\chi^2_{спост} = \frac{(n-1) \cdot S^2}{\sigma_0^2} = \frac{(20-1) \cdot 3{,}98}{2} = 37{,}81.$$

Оскільки альтернативна гіпотеза має вигляд рівності, то потрібно встановити ліву і праву критичні точки. В нашому випадку для 19 ступенів вільності ліва критична точка $\chi^2_{лів_кр} = 8{,}91$ і права критична точка $\chi^2_{прав_кр} = 32{,}9$. Спостережуване значення перевищує праву критичну точку, тому є підстава відкинути гіпотезу про рівність вибіркової дисперсії гіпотетичній і зробити висновок, що новий робітник працює ритмічно.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Порівняння дисперсій двох генеральних сукупностей, розподілених за нормальним законом. Коли виникає потреба порівняти два методи вимірювання, точність роботи двох видів обладнання, однорідність двох сукупностей тощо, доцільно скористатися перевіркою гіпотези про рівність двох дисперсій генеральних сукупностей.

Нехай з двох генеральних сукупностей отримано вибірки обсягом n_1 і n_2, для кожної з яких визначено скориговану (незміщену) вибіркову дисперсію S_X^2 та S_Y^2 відповідно. Потрібно порівняти дисперсії цих сукупностей, тобто перевірити гіпотезу

$$H_0\text{: } \sigma_1^2 = \sigma_2^2, \tag{5.3}$$

$$H_1\text{: } \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2.$$

При рівні суттєвості α.

Для цього потрібно знайти спостережуване значення критерію як відношення більшої дисперсії до меншої:

$$F_{cp} = \frac{S_б^2}{S_м^2}. \tag{5.4}$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Потім за таблицею критичних точок розподілу Фішера-Снедекора для рівня суттєвості α і числа ступенів вільності $k_1 = n-1$, $k_2 = n-1$ (де значення k_1 беремо для більшої дисперсії) потрібно знайти критичну точку $F_{kp}(\alpha, k_1, k_2)$ і порівняти спостережуване і критичне значення критерію:

- якщо $F_{cp} > F_{kp}$ - відкидаємо гіпотезу H_0;
- якщо $F_{cp} < F_{kp}$ - застосовуємо гіпотезу H_0.

Приклад 2. За допомогою двох методів виміряно певну величину. За першим методом отримано такі результати – 9,6; 10,0; 9,8; 10,2; 10,6, за другим – 10,4; 9,7; 10,0; 10,3.

Чи можемо ми вважати, що обидва методи забезпечують однакову точність вимірів, якщо візьмемо рівень суттєвості α=0,1?

Розв’язання. Для перевірки точності методів перевіряємо їхні дисперсії. Якщо дисперсії однакові, то можемо вважати, що методи забезпечують однакову точність вимірювання. Перевіримо нульову гіпотезу про рівність дисперсій:

$$H_0\text{: } \sigma_1^2 = \sigma_2^2,$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

при альтернативній гіпотезі:

$$H_1\colon\ \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

при рівні суттєвості α=0,1.

Спочатку знайдемо вибіркові дисперсії.

Знаходимо спостережуване значення критерію як відношення більшої дисперсії до меншої:

$$F_{cp} = \frac{S_б^2}{S_м^2} = \frac{0{,}1184}{0{,}075} = 1{,}58.$$

За умовою конкуруюча гіпотеза має вигляд нерівності, тому критична область є двосторонньою, і для визначення критичного значення критерію потрібно брати рівень суттєвості, вдвічі менший, ніж заданий.

З таблиці критичних точок розподілу Фішера-Снедекора для рівня суттєвості α/2=0,1/2=0,05 і числа ступенів вільності $k_1 = 5-1 = 4$ і $k_2 = 4-1 = 3$ знаходимо критичну точку $F_{kp}(0{,}05{,}4{,}3) = 9{,}12$. Оскільки $F_{cp} < F_{kp}$, то можемо вважати, що обидва методи забезпечують однакову точність вимірювання.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Таблиця 5.3.

Дисперсія для першого методу

№	Спостереження	$(X-\overline{X})^2$
1	9,6	0,1936
2	10,0	0,0016
3	9,8	0,0576
4	10,2	0,0256
5	10,6	0,3136
Середнє	10,04	0,1184

Таблиця 5.4.

Дисперсія для другого методу

№	Спостереження	$(X-\overline{X})^2$
1	10,4	0,09
2	9,7	0,16
3	10,0	0,01
4	10,3	0,04
Середнє	10,1	0,075

Національний університет
водного господарства
та природокористування

5.2. Перевірка гіпотез про рівність середніх.

Порівняння середнього генеральної сукупності з його очікуваним значенням. Виготовлена продукція повинна відповідати вимогам стандартів, виробничим специфікаціям. Кількісною характеристикою міри такої відповідності є результати перевірки гіпотези про рівність середнього значення досліджуваної сукупності певному очікуваному або стандартно встановленому значенню.

У тому разі, якщо дисперсія генеральної сукупності відома, для перевірки гіпотези про рівність середньої величини гіпотетичному генеральному середньому:

$$H_0:\ \mu_1 = \mu_0\,, \tag{5.5}$$

$$H_1:\ \mu_1 \neq \mu_0\,,$$

де μ_1 – невідоме середнє із сукупності з відомою дисперсією; μ_0 – гіпотетичне значення середнього цієї сукупності.

Потрібно обчислити спостережуване значення критерію

$$t_0 = \frac{\left(\overline{X} - \mu_0\right)\cdot\sqrt{n}}{\sigma}. \tag{5.6}$$

і з таблиці функції Лапласа знайти критичну точку $u_{кр}$ з рівняння

$$\Phi\left(u_{кр}\right) = \frac{1-\alpha}{2}. \tag{5.7}$$

Якщо $\left|t_0\right| > u_{кр}$ - відкидаємо гіпотезу H_0, і навпаки, коли $\left|t_0\right| < u_{кр}$ - застосовуємо H_0 при визначеному рівні суттєвості α.

Приклад 3. Проектований розмір певної деталі виробу має дорівнювати a_0=35 мм. За результатами виробництва пробної партії деталей визначено такі розміри:

Таблиця 5.5.

Розміри деталей пробної партії

Розмір X, мм	34,8	34,9	35,0	35,1	35,3
Кількість f, шт.	2	3	4	6	5

При рівні суттєвості 0,05 потрібно перевірити гіпотезу

$$H_0:\ a = a_0 = 35$$

при альтернативній гіпотезі H_1: $a \neq 35$.

Розв’язання. Визначимо середній розмір деталі за формулою середнього арифметичного зваженого

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$\overline{X} = \frac{34{,}8 \cdot 2 + 34{,}9 \cdot 3 + 35{,}0 \cdot 4 + 35{,}1 \cdot 6 + 35{,}3 \cdot 5}{20} = 35{,}07 .$$

Визначимо незміщену дисперсію

$$S^2 = 0{,}022$$

Отже, середнє квадратичне відхилення дорівнює

$$\sigma = \sqrt{0{,}022} = 0{,}15 .$$

Спостережуване значення критерію таке:

$$t = \frac{\left(\overline{X} - \mu_0\right) \cdot \sqrt{n}}{\sigma} = \frac{(35{,}07 - 35{,}0) \cdot \sqrt{20}}{0{,}15} = 2{,}087 .$$

З таблиці критичних точок розподілу Стьюдента при рівні суттєвості 0,05 і з $k = 20 - 1 = 19$ ступенями вільності знаходимо критичне значення критерію 2,09. Оскільки спостережуване значення критерію дещо менше, ніж критичне значення, то немає підстав відкинути нульову гіпотезу на користь альтернативної.

Таким чином, виробництво деталей на поточний момент відповідає встановленим вимогам і не потребує подальшого вдосконалення.

Порівняння середніх двох сукупностей. На виробництві часто виникають ситуації, коли потрібно порівняти між собою роботу обладнання, якість отриманої від різних постачальників сировини, якість виготовленої за різних умов продукції тощо. Для здійснення такого порівняння доцільно перевірити гіпотезу про рівність середніх двох сукупностей. Порівняння здійснюється на основі визначених з вибірки значень середніх. При цьому вибіркові середні порівнюються не з певним стандартно вибраним значенням, якого часто не існує, а одне з одним.

Порівняння вибіркових середніх дещо відрізняються залежно від того, однакові вибіркові дисперсії досліджуваних явищ чи ні. Тому перед тим, як порівняти дві середні величини, доцільно перевірити гіпотезу про рівність дисперсій. Коли гіпотеза про рівність дисперсій вибіркових сукупностей підтверджується, використовують один критерій перевірки, якщо ні – інший.

Коли ми вважаємо, що дисперсії є рівними, для перевірки гіпотези про рівність середніх двох сукупностей

$$H_0\colon\ \mu_1 = \mu_2 , \qquad (5.8)$$

$$H_1\colon\ \mu_1 \neq \mu_2 .$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Використовується критерій

$$t = \frac{\overline{X_1} - \overline{X_2}}{S_Y \cdot \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}, \qquad (5.9)$$

який має розподіл Стьюдента з двома ступенями вільності $\upsilon = n_1 + n_2 - 2$ при рівні суттєвості α, де n_1, n_2 – обсяг першої та другої вибіркової сукупності відповідно; S_Y – узагальнена дисперсія.

Використовувану у критерії узагальнену дисперсію визначають на основі вибіркових дисперсій S_1^2 та S_2^2 першої і другої сукупностей відповідно:

$$S_Y = \frac{(n-1)\cdot s_1^2 + (n-1)\cdot s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}. \qquad (5.10)$$

Нульову гіпотезу про рівність вибіркових середніх H_0 відкидаємо, якщо абсолютне спостережуване значення критерію $|t|$ перевищує критичне значення $t_{\alpha/2,\upsilon}$:

$$|t| > t_{\alpha/2;\upsilon}. \qquad (5.11)$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Приклад 4. На підприємстві встановили нову очисну систему. Перед встановленням за допомогою випадкової вибірки обсягом 10 спостережень одержали таку інформацію про відсоток забруднення $\overline{X}_1 = 9{,}85$, $S_1 = 1{,}73$. Після встановлення системи випадкова вибірка обсягом 8 спостережень дала такі результати: $\overline{X}_2 = 8{,}08$, $S_2 = 1{,}71$. Постає запитання стосовно того, чи справді використання нової очисної системи зменшує відсоток забруднення хімічними речовинами.

Розв'язання. Спочатку візьмемо рівень помилки першого виду, який нас влаштовує. Нехай α=0,05.

Тепер потрібно перевірити гіпотезу про рівність вибіркових дисперсій

$$H_0\colon\ \sigma_1^2 = \sigma_2^2, \qquad (5.12)$$

$$H_1\colon\ \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2.$$

Скориставшись відповідним критерієм, визначимо його розрахункове значення

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{1{,}73}{1{,}71} = 1{,}012.$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Знаходимо з таблиць розподілу Фішера критичне значення критерію для числа ступенів вільності $k_1 = 10 - 1 = 9$ у чисельнику та $k_2 = 8 - 1 = 7$ у знаменнику і рівня суттєвості α=0,05. Воно становить $F_{0,05;9;7}$=3,68.

Оскільки розрахункове значення критерію 1,012 менше, ніж критичне, немає підстав відкидати гіпотезу про рівність дисперсій. Отже, вважаємо, що вони рівні.

Тепер маємо можливість скористатися критерієм для перевірки гіпотези

$$H_0\text{: } \mu_1 = \mu_2 , \qquad (5.13)$$

$$H_1\text{: } \mu_1 \neq \mu_2 .$$

Якщо в нас не буде підстав прийняти нульову гіпотезу, тобто середні будуть значуще відмінними, буде підтверджено ефективність використання нового обладнання.

Узагальнена дисперсія дорівнює:

$$S_Y = \frac{(n-1)\cdot s_1^2 + (n-1)\cdot s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{(10-1)\cdot 1{,}73 + (8-1)\cdot 1{,}71}{10+8-2} = \frac{27{,}54}{16} = 1{,}721 .$$

Розрахункове значення критерію становить

$$t = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{S_Y \cdot \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} = \frac{9{,}85 - 8{,}08}{1{,}72 \cdot \sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{8}}} = \frac{1{,}77}{0{,}815} = 2{,}179 .$$

Критичне значення t – критерію становить $t_{0,025;6}$=2,120. Оскільки розрахункове значення критерію 2,18 не перевищує критичне значення 2,12, то при прийнятому рівні суттєвості відкидаємо нульову гіпотезу на користь альтернативної. Робимо висновок, що середні є суттєво відмінними, і використання нового обладнання справді зменшує відсоток забруднення.

Порівняння середніх двох сукупностей, дисперсії яких є суттєво відмінними. Припустимо, що за результатами попередньої перевірки гіпотези про рівність дисперсій двох сукупностей визначено, що вони є суттєво відмінними. Для того, аби у цьому разі перевірити гіпотезу про рівність двох середніх

$$H_0\text{: } \mu_1^2 = \mu_2^2 , \qquad (5.14)$$

$$H_1\text{: } \mu_1^2 \neq \mu_2^2 ,$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

потрібно використати критерій

$$t = \frac{\overline{X_1} - \overline{X_2}}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}, \tag{5.15}$$

який має t – розподіл Стьюдента із υ ступенями вільності

$$\upsilon = \frac{\left(S_1^2 / n_1 + S_2^2 / n_2\right)^2}{\left(S_1^2 / n_1\right)^2 / \left(n_1 + 1\right) + \left(S_2^2 / n_2\right)^2 / \left(n_2 + 1\right)} - 2 . \tag{5.16}$$

5.3. Перевірка гіпотез про частку сукупності.

Для кількісної характеристики відповідності частоти появи певної події визначеному значенню доцільно скористатися гіпотезою про порівняння спостережуваної та стандартної частоти появи події. Припустимо, є n незалежних дослідів, ймовірність появи події p в яких є постійною, але невідомою. З цієї сукупності знайдена відносна частота кількості певних подій m у загальній кількості n одиниць. Потрібно перевірити гіпотезу, що вибіркова частота $p=m/n$ дорівнює гіпотетичній частоті p_0, тобто

$$H_0\colon\ p = p_0 , \tag{5.17}$$

$$H_1\colon\ p \neq p_0 ,$$

де p_0 – гіпотетична частота.

Для перевірки цієї гіпотези при визначеному рівні суттєвості α потрібно визначити значення критерію

$$V_{сппос} = \frac{\left(\frac{m}{n} - p_0\right) \cdot \sqrt{n}}{\sqrt{p_0 \cdot q_0}} \tag{5.18}$$

і з таблиці функції Лапласа знайти критичну точку u_{kp} з рівняння

$$\Phi(u_{KP}) = \frac{1-\alpha}{2} . \tag{5.19}$$

Якщо $\left|V_{спост}\right| > u_{KP}$, відкидаємо нульову гіпотезу H_0, коли $\left|V_{спост}\right| < u_{KP}$ - беремо гіпотезу H_0.

Приклад 5. Партія виробів приймається в тому разі, якщо частка бракованих серед них не перевищує 0,02. Чи має сенс приймати пар-

Національний університет
водного господарства
та природокористування

тію виробів, якщо серед 480 відібраних випадковим чином виробів виявилось 12 виробів, що не відповідають вимогам?

Розв'язання. Потрібно перевірити гіпотезу про рівність вибіркової частки гіпотетичній, тобто H_0: $p=p_0=0{,}02$ при альтернативній гіпотезі H_1: $p>p_0>0{,}02$. Візьмемо рівень суттєвості $\alpha=0{,}01$.

Спочатку знаходимо вибіркову частку бракованих виробів у партії:

$$\frac{m}{n}=\frac{12}{480}=0{,}025\,.$$

Визначаємо спостережуване значення критерію

$$V_{спос}=\frac{\left(\frac{m}{n}-p_0\right)\cdot\sqrt{n}}{\sqrt{p_0\cdot q_0}}=\frac{(0{,}025-0{,}02)\cdot\sqrt{480}}{\sqrt{0{,}02\cdot(1-0{,}02)}}=0{,}71.$$

Знаходимо точку правосторонньої критичної області

$$\Phi(u_{KP})=\frac{1-2\cdot 0{,}01}{2}=0{,}490\,.$$

З таблиці функції Лапласа знаходимо критичну точку $u_{kp}=2{,}99$. Оскільки розрахункове значення критерію не перевищує критичного, то немає підстав відкидати нульову гіпотезу. Тому можна зробити висновок, що частка браку не перевищує встановлений рівень. Отже, можна прийняти партію виробів. З метою порівняння у двох партіях часток продукції, що не відповідає вимогам, доцільно скористатися гіпотезою про рівність часток двох сукупностей

$$H_0:\ p_1=p_2\,, \tag{4.20}$$

$$H_1:\ p_1\neq p_2\,.$$

критерієм перевірки якої є величина

$$t_0=\frac{p_1+p_2}{\sqrt{p\cdot(1-p)\cdot\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}\,, \tag{5.21}$$

де

$$p=\frac{n_1\cdot p_1+n_2\cdot p_2}{n_1+n_2}\,. \tag{5.22}$$

Ця величина має нормований нормальний розподіл, тому нульова гіпотеза відкидається на користь альтернативної, якщо абсолютне зна-

Національний університет
водного господарства
та природокористування

чення критерію не перевищує критичну точку, знайдену з таблиці функції Лапласа для прийнятого рівня суттєвості.

Приклад 6. На підприємстві протягом місяця в середньому створювалося 38 невідповідностей на 1000 виробів. Після вжиття заходів із вдосконалення виробництва на 500 виробів було визначено 12 невідповідностей. Постає запитання, чи можна з рівнем суттєвості 0,01 стверджувати, що заходи були ефективними?

Розв'язання. Для встановлення ефективності виконаних дій перевіримо гіпотезу про рівність двох часток.

Частка виробів, що не відповідають вимогам, до дій із вдосконалення виробництва становить p_1=38/1000=0,038. Частка невідповідностей після вдосконалення дорівнює p_2=12/500=0,024.

Таким чином, розрахункове значення критерію становить

$$p = \frac{n_1 \cdot p_1 + n_2 \cdot p_2}{n_1 + n_2} = \frac{1000 \cdot 0{,}038 + 500 \cdot 0{,}024}{1000 + 500} = 0{,}033 ,$$

$$t_0 = \frac{p_1 + p_2}{\sqrt{p \cdot (1-p) \cdot \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} = \frac{0{,}038 - 0{,}024}{\sqrt{0{,}033 \cdot (1 - 0{,}033) \cdot \left(\frac{1}{1000} + \frac{1}{500}\right)}} = 1{,}431 .$$

Двостороння критична точка дорівнює

$$\Phi(u_{KP}) = \frac{1 - 2 \cdot 0{,}01}{2} = 0{,}490 .$$

З таблиці функції Лапласа знаходимо критичне значення цього критерію, яке дорівнює 2,34. Оскільки розрахункове значення критерію менше за критичне, то з рівнем суттєвості 0,01 можна стверджувати, що немає підстав відкинути нульову гіпотезу, тобто вжиті заходи не підвищили ефективності виробництва.

5.4. Завдання для самостійної роботи.

Завдання 1. Для двох коліс з різним тиском здійснили вибіркове дослідження з 8 незалежних вимірів ознак якості для кожного колеса, результати яких наведено в таблиці 5.6.

Таблиця 5.6.

Результати вимірів для тиску двох видів коліс

Тиск А	37	31	34	26	29	28	30	32
Тиск Б	32	30	33	31	29	32	30	30

На основі цих даних потрібно встановити, чи впливає тиск у колесі на якість експлуатації.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Завдання 2. Виробник стверджує, що термін використання акумулятора дорівнює 1200 дням при середньому квадратичному відхиленні 100 днів. Було перевірено 16 одиниць продукту і встановлено, що середній термін використання 1050днів при середньому квадратичному відхиленні 180 діб.

Перевірити при рівні суттєвості 0,05, чи існують підстави сумніватися у даних, заявлених виробником.

Завдання 3. Якісний показник виробничого процесу вимірюється рентгенівським і хімічним методом. Стосовно 10 послідовно виготовлених партій було виконано виміри.

Таблиця 5.7.

Результати виміру ознаки двома методами

Рентгенівський метод	81	78	91	82	73	68	82	88	96	81
Хімічний метод	82	70	80	75	75	69	80	85	80	80

На основі цих даних при рівні суттєвості 0,05 перевірити, чи відрізняються методи при застосуванні гіпотези про рівність середніх.

Завдання 4. Було визначено середнє квадратичне відхилення певного процесу на рівні 2,55 грама. Після певних коригуючих дій було зроблено вибірку у 10 одиниць продукту і встановлено, що середнє квадратичне відхилення дорівнює 3,3 грама.

При рівні суттєвості α=0,05 перевірити гіпотезу про те, що рівень варіабельності процесу не змінився.

Завдання 5. Зразки двох різних видів пластика було перевірено на силу розриву. Результати наведено в таблиці.

Таблиця 5.8.

Сила розриву двох видів пластика

Тип А	60	53	45	47	-	-	-
Тип Б	47	72	64	67	69	71	63

Перевірити, чи мають два види пластика однакову варіацію сили розриву.

Завдання 6. Для перевірки певної партії продукту було отримано 20 вибірок. 10 з них аналізувалися в лабораторії А, інші 10 – в лабораторії Б. За результатами аналізу в лабораторії А дисперсія становить 18,5, в лабораторії Б – 7,8.

Перевірити гіпотезу про узгодженість результатів аналізу (рівність дисперсій).

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Практична робота 6
МОНІТОРИНГ ЯКОСТІ НА ОСНОВІ КОНТРОЛЬНИХ КАРТ ДЛЯ КІЛЬКІСНИХ ОЗНАК

Мета - отримати теоретичні знання та практичні навички з використання та побудови контрольних карт для кількісних даних та прийняття рішень про хід технологічного процесу.

Кількісні ознаки є такими показниками, як вага, розмір, температура, час та ін. Вони містять більше інформації, ніж альтернативні дані, тому карти, які використовують кількісні ознаки, є інформативнішими, ніж контрольні карти для альтернативних ознак.

Контрольні карти для кількісних ознак дають можливість досягти двох цілей: досліджувати стабільність процесу відносно встановлених значень (центрованість процесу) і його варіації (розсіювання індивідуальних значень відносно середнього процесу).

Для реалізації першої мети використовують такі контрольні карти:

- середніх значень $\overline{X}$;
- медіан *Me*.

Для реалізації другої мети застосовують такі контрольні карти:

- розмахів варіації R;
- середньоквадратичних відхилень S.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Звичайно використовують не одну карту, а пару карт, сконструйованих на основі одного масиву даних, що дає можливість одночасно оцінити розміщення та варіацію процесу.

6.1. Контрольні карти середніх значень і розмахів: $\left(\overline{X}-R\right)$-карти.

Контрольна карта середніх значень і розмахів є найбільш використовуваним типом карт. Це зумовлене відносною простотою визначення середньоквадратичного відхилення процесу, яке оцінюється на основі вибіркових розмахів варіації. Контрольна карта середніх значень і розмахів створюється в такій послідовності. Спочатку конструюють *R*-частину, а потім, оскільки контрольні межі для карти середніх значень визначаються на основі розмахів варіації, вже карту середніх

Спочатку для кожної підгрупи оцінюють розмах її варіації R_i. Потім знаходять середній розмах варіації для всіх підгруп

$$\overline{R}=\frac{\sum R}{k}, \qquad (6.1)$$

де k — кількість груп (звичайно 20-25).

Середня лінія визначається як загальне середнє всіх розмахів

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$ЦЛ = \overline{R}\,. \tag{6.2}$$

Верхня та нижня контрольні межі для контрольної карти розмахів такі:

$$\begin{aligned} ВКМ\left(\overline{R}\right) &= \overline{R} + 3\cdot\sigma_R \\ НКМ\left(\overline{R}\right) &= \overline{R} - 3\cdot\sigma_R \end{aligned}, \tag{6.3}$$

Між вибірковими розмахами і стандартним відхиленням нормального розподілу існує залежність, яка має назву відносного розмаху. Параметри розподілу цієї випадкової змінної $W = R/\sigma$ визначаються обсягом вибірки *n*. Середнім значенням цієї змінної є величина d_2, а середньоквадратичним відхиленням — величина d_3.

Між середнім розмахом варіації, його середньоквадратичним відхиленням і середньоквадратичним відхиленням процесу, з якого взято вибіркові дані, існує така залежність

$$\overline{R} = d_2\cdot\sigma\,,\ \sigma_R = d_3\cdot\sigma\,, \tag{6.4}$$

де d_2 і d_3 – константи, що залежать лише від обсягу вибірки.

Тоді

$$ВКМ\left(\overline{R}\right) = d_2\cdot\sigma + 3\cdot d_3\cdot\sigma = d_2\cdot\sigma\cdot\left(1 + 3\cdot\frac{d_3}{d_2}\right) = \overline{R}\cdot\left(1 + 3\cdot\frac{d_3}{d_2}\right) \tag{6.5}$$

Аналогічно

$$НКМ\left(\overline{R}\right) = \overline{R}\cdot\left(1 - 3\cdot\frac{d_3}{d_2}\right) \tag{6.6}$$

Нехай $D_3 = 1 - 3\cdot\frac{d_3}{d_2}$ і $D_4 = 1 + 3\cdot\frac{d_3}{d_2}$, тоді

$$\begin{aligned} ВКМ\left(\overline{R}\right) &= D_4\cdot\overline{R}; \\ НКМ\left(\overline{R}\right) &= D_3\cdot\overline{R}, \end{aligned} \tag{6.7}$$

де D_3, D_4 – константи, що залежать лише від обсягу вибірки *n*.

Якщо варіація процесу є стабільною, її оцінку можна використати для створення карти середніх значень.

Далі конструюють $\overline{X}$-частину контрольної карти. Для кожної вибіркової підгрупи знаходять середні значення $\overline{X}$, на основі яких визначають загальне середнє $\overline{\overline{X}}$ як середнє з вибіркових середніх

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$\overline{\overline{X}} = \frac{\sum \overline{X}}{k}, \tag{6.8}$$

де *к* – кількість вибіркових підгруп.

Контрольні межі та центральна лінія визначаються так

$$\begin{aligned} ВКМ\left(\overline{X}\right) &= \overline{\overline{X}} + 3 \cdot \sigma_{\overline{X}}, \\ НКМ\left(\overline{X}\right) &= \overline{\overline{X}} - 3 \cdot \sigma_{\overline{X}}, \\ ЦЛ\left(\overline{X}\right) &= \overline{\overline{X}}. \end{aligned} \tag{6.9}$$

Середньоквадратичне значення вибіркових спостережень можна виразити через вибіркові розмахи варіації

$$\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{R}{d_2 \cdot \sqrt{n}}, \tag{6.10}$$

оскільки $\sigma = R/d_2$.

Нехай $A_2 = \frac{3}{d_2 \cdot \sqrt{n}}$, тоді контрольні "межі можна виразити через константи A_2 і середні вибіркові розмахи варіації:

$$\begin{aligned} ВКМ\left(\overline{X}\right) &= \overline{\overline{X}} + A_2 \cdot \overline{R}, \\ НКМ\left(\overline{X}\right) &= \overline{\overline{X}} - A_2 \cdot \overline{R}. \end{aligned} \tag{6.11}$$

Значення констант A_2 протабульовані і залежать лише від обсягу вибірки *n*.

У деяких випадках легше визначати варіацію процесу на основі медіан розмахів варіації. У цьому разі використовують такі формули для характеристик контрольної карти середніх значень і медіан розмахів:

$$\begin{aligned} ВКМ &= D_6 \cdot R_{Me}, \\ ЦЛ &= R_{Me}, \\ НКМ &= D_5 \cdot R_{Me}. \end{aligned} \tag{6.12}$$

Для карти медіан розмахів і для карти середніх значень:

$$\begin{aligned} ВКМ &= \overline{\overline{X}} + A_4 \cdot R_{Me}, \\ ЦЛ &= \overline{\overline{X}}, \\ НКМ &= \overline{\overline{X}} - A_4 \cdot R_{Me}. \end{aligned} \tag{6.13}$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

де R_{Me} – медіана розмахів варіації; A_4 – константа, яка залежить від обсягу вибірки n.

Іноді існує можливість визначити стандартні значення для середньої величини ознаки процесу та її стандартного відхилення. Ці значення використовують для створення контрольних карт без отримання попередніх даних. Припустимо, що існують стандартно встановлені величини для генерального середнього μ і генерального стандартного відхилення σ. Тоді параметри карти середніх значень будуть такими:

$$\begin{aligned} ВКМ &= \mu + 3 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \\ ЦЛ &= \mu, \\ НКМ &= \mu + 3 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \end{aligned} \tag{6.14}$$

Нехай $\frac{3}{\sqrt{n}} = A$, де A — множник, який визначається лише обсягом вибірки n.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Тепер перепишемо параметри карти середніх значень із такими заданими значеннями:

$$\begin{aligned} ВКМ &= \mu + A \cdot \sigma, \\ ЦЛ &= \mu, \\ НКМ &= \mu - A \cdot \sigma. \end{aligned} \tag{6.15}$$

Для створення карти розмахів R із стандартними значеннями пригадаємо, що $\sigma = R/d_2$, де d_2 – це середнє значення розподілу відносних розмахів. Оскільки середньоквадратичне відхилення цього розподілу $\sigma_R = d_3 \cdot \sigma$, де d_3 – середньоквадратичне відхилення розподілу відносних розмахів, то формули карти розмахів із стандартними значеннями будуть такі:

$$\begin{aligned} ВКМ &= d_2 + 3 \cdot d_3 \cdot \sigma, \\ ЦЛ &= d_2, \\ НКМ &= d_2 - 3 \cdot d_3 \cdot \sigma. \end{aligned} \tag{6.16}$$

Нехай

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$D_1 = d_2 - 3 \cdot d_3,$$
$$D_2 = d_2 + 3 \cdot d_3, \qquad (6.17)$$

тоді

$$ВКМ = D_2 \cdot \sigma,$$
$$НКМ = D_1 \cdot \sigma. \qquad (6.18)$$

До використання стандартних значень параметрів процесу потрібно підходити дуже уважно. Може статися, що стандартні значення не відповідають характеристиці ознаки процесу на момент її оцінки.

6.2. Приклади створення та використання контрольних карт середніх значень і розмахів варіації

Моніторинг відповідності процесу стандартним значенням на основі $\overline{X}$ - карти і R - карти, коли стандартні значення задано.

Менеджер з виробництва організації-імпортера присадок ХАДО хоче проконтролювати процес пакування так, щоб середня вага пакетика становила 100,6 г. Очікуване стандартне відхилення процесу дорівнює 1,4 г, що ґрунтується на подібному процесі пакування.

Оскільки стандартні значення задано (X_0=100,6; σ_0=1,4), можна побудувати контрольні карти для середніх значень і розмаху варіації, використовуючи формули для контрольних меж контрольних карт та коефіцієнти A, d_2, D_2 і D_1) для обсягу вибірок n = 5.

$\overline{X}$ -карта:

$$ЦЛ = X_0 = 100{,}6,$$
$$ВКМ = X_0 + A\sigma_0 = 100{,}6 + (1{,}342 - 1{,}4) = 102{,}5,$$
$$НКМ = X_o - A\sigma_0 = 100{,}6 - (1{,}342 - 1{,}4) = 98{,}7.$$

R-карта:

$$ЦЛ = d_2\sigma_0 = 2{,}326 \cdot 1{,}4 = 3{,}3,$$
$$ВКМ = D_2\sigma_0 = 4{,}918 \cdot 1{,}4 = 6{,}9,$$
$$НКМ = D_1\sigma_0 = 0 \cdot 1{,}4 = 0.$$

Оскільки обсяг вибірок п менше ніж 7 одиниць, то D_1 = 0, і $НКМ$ не буде зображена.

Двадцять п'ять вибірок обсягом 5 пакетиків взято з процесу пакування. Для кожної з них обчислюються середні і значення розмаху варіації (таблиця 6.1) і наносяться на контрольну карту з обчисленими вище контрольними межами (рис. 6.1а, рис. 6.1б).

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Висновок. Карти, зображені на рис. 6.1, свідчать про те, що процес не перебуває устані статистичного контролю на бажаному рівні. Це пов'язане з тим, що існує послідовність з 13 точок нижче центральної лінії на $\overline{X}$-карті та 16 точок вище центральної лінії на *R*-карті. Причину такої довгої серії низьких значень середнього слід дослідити та усунути.

Таблиця 6.1.

Вибіркові дані з процесу пакування присадок ХАДО

Номер вибірки	Середнє значення вибірки	Розмах варіації вибі-	Номер вибірки	Середнє значення	Розмах варіації вибі-
1	100,6	3,4	14	99,4	5,1
2	101,3	4,0	15	99,4	4,5
3	99,6	2,2	16	99,6	4,1
4	100,5	4,5	17	99,3	4,7
5	99,9	4,8	18	99,9	5,0
6	99,5	3,8	19	100,5	3,9
7	100,4	4,1	20	99,5	4,7
8	100,5	1,7	21	100,1	4,6
9	101,1	2,2	22	100,4	4,4
10	100,3	4,6	23	100,1	4,9
11	100,1	5,0	24	99,9	4,7
12	99,6	6,1	25	99,7	3,4
13	99,2	3,5			

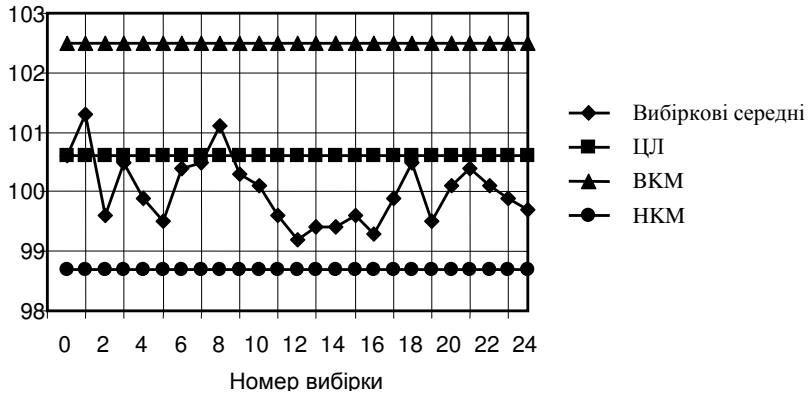

Рис. 6.1а. Контрольна карта середніх значень

Національний університет
водного господарства
та природокористування

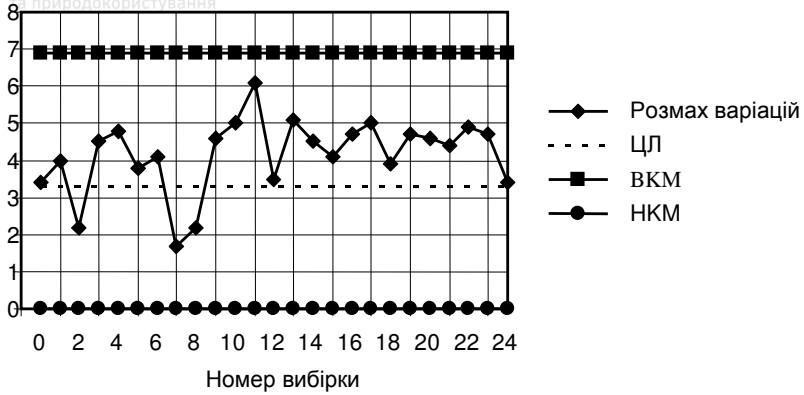

Рис. 6.1б. Контрольна карта розмахів варіацій

6.3. Контрольні карти середніх значень і середньоквадратичних відхилень: $\left(\overline{X} - S\right)$-карти.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Контрольна карта середніх значень і середньоквадратичних відхилень є другим типом карти, який застосовується для оцінки стабільності процесів та моніторингу за стабільністю середнього значення і варіації процесу.

Цей тип контрольних карт ґрунтується на визначенні середньоквадратичного відхилення процесу на основі вибіркових середніх квадратичних відхилень замість вибіркових розмахів варіації, як для ($\overline{X} - R$)-карти. Незважаючи на більшу складність розрахунків, цей тип контрольних карт є особливо ефективним, якщо обсяг окремих вибірок становить 10-12 і більше виробів або якщо обсяг змінюється від вибірки до вибірки.

Контрольна карта середніх значень і середньоквадратичних відхилень створюється в тій самій послідовності, що й ($\overline{X} - R$)-карта.

Спочатку для кожної підгрупи *i* знаходимо вибіркове середньоквадратичне відхилення S_i, яке визначається за формулою

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2}{n-1}}\,. \qquad (6.19)$$

На його основі визначаємо загальне середньоквадратичне відхилення

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$\overline{S} = \frac{\sum S_i}{k}, \tag{6.20}$$

де k – кількість вибірок, отриманих з процесу.

Середньоквадратичне відхилення процесу можна виразити так

$$\sigma = \frac{\overline{S}}{c_4}, \tag{6.21}$$

де c_4 – константа, що залежить від обсягу вибірки.

Контрольні межі карти середньоквадратичних відхилень встановлюються за допомогою виразу:

$$\overline{S} \pm 3 \cdot \sigma_S . \tag{6.22}$$

Середньоквадратичне відхилення процесу, оцінене через середньоквадратичні відхилення вибірок, буде таким:

$$\sigma_S = \sigma \cdot \sqrt{1 - c_4} . \tag{6.23}$$

Тоді

$$BKM(S) = \overline{S} + 3 \cdot \sigma \cdot \sqrt{1 - c_4} = \overline{S} + \frac{3 \cdot \overline{S} \cdot \sqrt{1 - c_4}}{c_4} =$$

$$= \overline{S} \cdot \left(1 + \frac{3 \cdot \sqrt{1 - c_4}}{c_4} \right), \tag{6.24}$$

$$HKM(S) = \overline{S} \cdot \left(1 - \frac{3 \cdot \sqrt{1 - c_4}}{c_4} \right).$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Визначимо, що

$$\frac{1 - 3 \cdot \sqrt{1 - c_4}}{c_4} = B_3 , \qquad \frac{1 - 3 \cdot \sqrt{1 - c_4}}{c_4} = B_4 . \tag{6.25}$$

Тоді контрольні межі для карт середньоквадратичних відхилень дорівнюватимуть:

$$\begin{aligned} BKM(S) &= B_4 \cdot \overline{S}, \\ HKM(S) &= B_3 \cdot \overline{S}. \end{aligned} \tag{6.26}$$

У свою чергу, для $\overline{X}$ - частини контрольної карти маємо розміщення контрольних меж на відстані

$$\overline{\overline{X}} \pm \frac{3 \cdot \sigma}{\sqrt{n}}. \tag{6.27}$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Оскільки $\sigma = \dfrac{\overline{S}}{c_4}$, то контрольні межі визначаються так

$$\overline{\overline{X}} \pm 3 \cdot \frac{\overline{S}}{c_4 \cdot \sqrt{n}}. \tag{6.28}$$

Нехай $A_3 = \dfrac{3}{c_4 \cdot \sqrt{n}}$, тоді формули для контрольних меж будуть такими

$$\begin{aligned} ВКМ\left(\overline{\overline{X}}S\right) &= \overline{\overline{X}} + A_3 \cdot \overline{S}, \\ НКМ\left(\overline{\overline{X}}S\right) &= \overline{\overline{X}} + A_3 \cdot \overline{S}. \end{aligned} \tag{6.29}$$

Значення A_3 залежить лише від обсягу вибірки n і можуть бути взяті із дод. У тому разі, якщо обсяг вибірок відрізняється, то контрольні межі визначаються на основі відповідних значень і будуть індивідуальні для кожної вибірки.

Крім середнього стандартного відхилення, варіація процесу може визначатися на основі медіани стандартних відхилень $\overline{S}$. У цьому разі контрольні межі для карти середньоквадратичних відхилень будуть такі

$$\begin{aligned} ВКМ &= B_{10} \cdot \overline{S}, \\ ЦЛ &= \overline{S}, \\ НКМ &= B_9 \cdot \overline{S}. \end{aligned} \tag{6.30}$$

а карти середніх

$$\begin{aligned} ВКМ &= \overline{\overline{X}} + A_{10} \cdot \overline{S}, \\ ЦЛ &= \overline{\overline{X}}, \\ НКМ &= \overline{\overline{X}} - A_{10} \cdot \overline{S}. \end{aligned} \tag{6.31}$$

Значення B_9, B_{10}, A_{10} наведено у дод. В.

Оскільки для отримання незміщеного стандартного відхилення його потрібно скоригувати на величину c_4, то центральна лінія карти середньоквадратичних відхилень із стандартними значеннями дорівнює

$$ÖËÌ = \tilde{n}_4 \cdot \sigma \tag{6.32}$$

Враховуючи, що значення σ відоме, з формул

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$BKM = \tilde{n}_4 \cdot \sigma + 3 \cdot \sigma \cdot \sqrt{1 - \tilde{n}_4},$$
$$HKM = \tilde{n}_4 \cdot \sigma - 3 \cdot \sigma \cdot \sqrt{1 - \tilde{n}_4}. \quad (6.33)$$

припустивши, що

$$B_5 = \tilde{n}_4 - 3 \cdot \sqrt{1 - \tilde{n}_4},$$
$$B_6 = \tilde{n}_4 + 3 \cdot \sqrt{1 - \tilde{n}_4}. \quad (6.34)$$

Отримаємо параметри для карти середньоквадратичних відхилень із стандартними значенням:

$$BKM = B_6 \cdot \sigma,$$
$$HKM = B_5 \cdot \sigma. \quad (6.35)$$

Значення B_5 B_6 визначаються обсягом вибірок n.

6.4. Приклади застосування карт середніх значень і середньоквадратичних відхилень

Статистична оцінка стабільності процесу за допомогою створення $\left(\overline{X} - S\right)$-карти для малих вибірок неоднакового обсягу, коли стандартні значення задано.

Припустимо, що виробник хотів проконтролювати електричний опір деякого виробу після того, як той пропрацював 100 год; при цьому μ=150 Ом, а σ =7,5 Ом. З кожних 15 послідовних партій випадковим чином брали по 5 виробів і протягом 100 год. випробували їх. Внаслідок механічних пошкоджень деякі вироби з вибірки виходили з ладу до закінчення терміну випробувань. У табл. 6.3 наведені середні значення $\overline{X}$ і середні квадратичні відхилення 15 вибірок із їх зазначеним обсягом.

Оскільки стандартні значення параметрів процесу задано, центральні лінії контрольних карт визначаються так:

- для карти середніх $\overline{X}$: *ЦЛ*=μ=150;

- для карти середньоквадратичних відхилень S – з урахуванням обсягів кожної окремої вибірки:

при n=3:

$$\overline{S} = c_4 \cdot \sigma = 0{,}7236 \cdot 7{,}5 = 5{,}43;$$

при n=4:

$$\overline{S} = c_4 \cdot \sigma = 0{,}7979 \cdot 7{,}5 = 5{,}98;$$

при n=5:

$$\overline{S} = c_4 \cdot \sigma = 0{,}8407 \cdot 7{,}5 = 6{,}31.$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Таблиця 6.3.

Дані контролю опору послідовних партій виробів після 100 год роботи

Номер вибірки	Обсяг вибірки n	Середнє арифметичне $\overline{X}$	Середньоквадратичне відхилення S
1	5	154,6	12,20
2	5	143,4	9,75
3	4	160,8	11,20
4	3	152,7	7,43
5	5	136,0	4,32
6	3	147,3	8,65
7	3	161,7	9,23
8	5	151,0	7,24
9	5	156,2	8,92
10	4	137,5	3,24
11	5	153,8	6,85
12	5	143,4	7,64
13	4	156,0	10,18
14	5	149,8	8,86
15	5	138,2	7,38

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Контрольні межі контрольних карт визначаються для різних обсягів вибірки окремо.

Для карти середніх $\overline{X}$:

при n=3:

$$\mu \pm A \cdot \sigma = 150 \pm 1{,}32 \cdot 7{,}5 = \langle \frac{159{,}9}{140{,}1};$$

при n=4:

$$\mu \pm A \cdot \sigma = 150 \pm 1{,}500 \cdot 7{,}5 = \langle \frac{161{,}3}{138{,}8};$$

при n=5:

$$\mu \pm A \cdot \sigma = 150 \pm 1{,}342 \cdot 7{,}5 = \langle \frac{160{,}1}{139{,}9}.$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

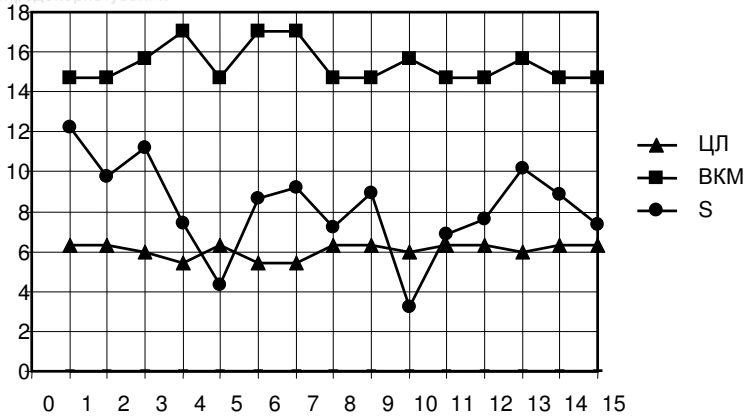

Рис. 6.2а. Карта середніх значень

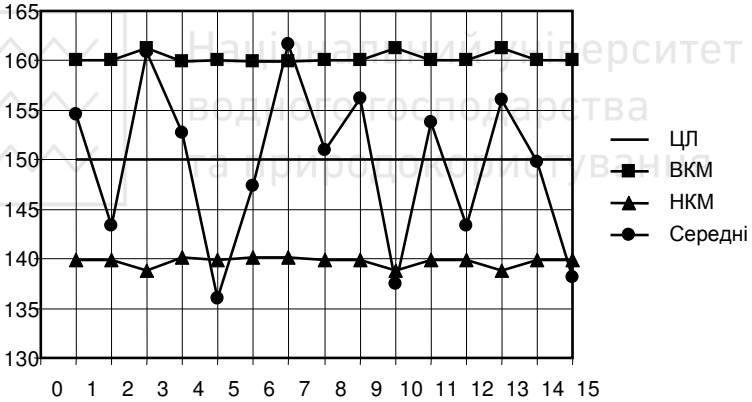

Рис. 6.2б. Карта стандартних відхилень

Для карти середньоквадратичних відхилень *S*:
при n=3:

$$B_6 \cdot \sigma = 2{,}276 \cdot 7{,}5 = 17{,}07;$$
$$B_5 \cdot \sigma = 0 \cdot 7{,}5 = 0;$$
;

при n=4:

$$B_6 \cdot \sigma = 2{,}088 \cdot 7{,}5 = 15{,}66;$$
$$B_5 \cdot \sigma = 0 \cdot 7{,}5 = 0;$$
;

при n=5:

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$B_6 \cdot \sigma = 1{,}964 \cdot 7{,}5 = 14{,}73;$$
$$B_5 \cdot \sigma = 0 \cdot 7{,}5 = 0;$$

Висновок. Процес статистично некерований, оскільки вибіркові середні партій 5 і 10 виходять за нижню контрольну межу. Середньоквадратичне відхилення для цих партій не виходить за контрольну межу, отже варіація є статистично стабільною. Тому необхідно вжити заходів для зменшення розсіювання середніх значень між партіями.

6.5. Контрольні карти медіан і розмахів варіацій: (*me-r*)-карти

Карта медіан і розмахів варіації була впроваджена з метою спрощення розрахунків при визначенні стабільності розташування процесу. Замість розрахунку середнього значення для кожної вибірки визначається її медіана. Цей вид контрольної карти був особливо популярним при веденні контрольних карт без застосування обчислювальної техніки.

R-частина контрольної карти обчислюється аналогічно до частини розмахів ($\overline{X} - R$)-карт. Якщо варіація процесу є стабільною, її оцінку можна використати для створення карти медіан.

Спочатку для кожної вибірки визначаємо медіану. Потім знаходимо медіану для всіх підгруп як середнє з вибіркових медіан

$$\overline{Me} = \frac{\sum Me}{k}, \tag{6.36}$$

де k – кількість вибіркових підгруп.

Вона і буде використана як центральна лінія контрольної карти

$$ЦЛ = \overline{Me} = \frac{\sum Me}{k}. \tag{6.37}$$

Середньоквадратичне відхилення для вибіркових медіан становить:

$$\sigma_{Me} = \frac{A_6}{3} \cdot \overline{R}. \tag{6.38}$$

Тоді контрольні межі для карти медіан будуть такі:

$$\begin{aligned} ВКМ\,(Me) &= \overline{Me} + A_6 \cdot \overline{R}, \\ НКМ\,(Me) &= \overline{Me} - A_6 \cdot \overline{R}. \end{aligned} \tag{6.39}$$

Значення константи A_6 отримують з таблиць констант для контрольних карт.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

У тому разі, коли варіація процесу визначається на основі медіани розмахів, як і для карти середніх і медіан розмахів варіації, то для визначення контрольних меж використовуємо формули

$$\begin{aligned} BKM &= \overline{X} + A_5 \cdot \overline{R}, \\ HKM &= \overline{X} - A_5 \cdot \overline{R}, \\ ÖË &= \overline{Me} = \overline{X}. \end{aligned} \tag{6.40}$$

6.6. Приклад використання контрольних карт медіан і розмахів варіацій: (*me*-*r*)-карти.

Оцінка статистичної стабільності процесу на основі створення карти медіан та розмахів, коли стандартні значення не задано.

Виготовляють лазерні диски з технічними специфікаціями, товщина яких перебуває в інтервалі від 0,07 до 0,16 см. Кожні півгодини збирають вибірки обсягом 5 одиниць, і товщина дисків у міліметрах заноситься у протокол (таблиця 6.4). Було вирішено розробити карту медіан з метою контролю якості.

Таблиця 6.4.

Значення вибіркових спостережень з процесу виготовлення лазерних дисків

Номер вибірки	Товщина диска, мм					Медіана	Розмах
	1	2	3	4	5		
1	14	8	12	12	8	12	6
2	11	10	13	8	10	10	5
3	11	12	16	14	9	12	7
4	16	12	17	15	13	15	5
5	15	12	14	10	7	12	8
6	13	8	15	15	8	13	7
7	14	12	13	10	16	13	6
8	11	10	8	16	10	10	8
9	14	10	12	9	7	10	7
10	12	10	12	14	10	12	4
11	10	12	8	10	12	10	4
12	10	10	8	8	10	10	2
13	8	12	10	8	10	10	4
14	13	8	11	14	12	12	6
15	7	8	14	13	11	11	7

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Для створення карти медіан і розмахів виконують такі дії. Обчислюють середнє з вибіркових медіан і розмахів:

$$\overline{Me} = \frac{\sum Me}{k} = \frac{12+10+12+...+11}{15} = \frac{172}{15} = 11{,}47.$$

$$\overline{R} = \frac{\sum R}{k} = \frac{6+5+7+...+7}{15} = \frac{86}{15} = 5{,}73.$$

Параметри карти розмахів обчислюються так:

$$ЦЛ = \overline{R} = 5{,}73,$$

$$ВКМ = D_4 \cdot \overline{R} = 2{,}114 \cdot 5{,}73 = 12{,}11,$$

$$НКМ = D_3 \cdot \overline{R} = 0 \cdot 5{,}73 = 0.$$

Оскільки n менше ніж 7, НКМ не буде зображено. Значення констант D_3 і D_4 беруть для n=5. Оскільки карта розмахів відповідає стану контрольованості, можна обчислити параметри карти медіан.

Параметри контрольної карти медіан:

$$ЦЛ = \overline{Me} = 11{,}47,$$

$$ВКМ_{Me} = \overline{Me} + A_4 \cdot \overline{R} = 11{,}47 + (0{,}69 \cdot 5{,}73) = 15{,}42,$$

$$НКМ_{Me} = \overline{Me} - A_4 \cdot \overline{R} = 11{,}47 - (0{,}69 \cdot 5{,}73) = 7{,}52.$$

Контрольні карти зображені на рисунку 6.3а, 6.3б. З візуального аналізу карт можна дійти висновку, що процес виявляє стан статистичної керованості.

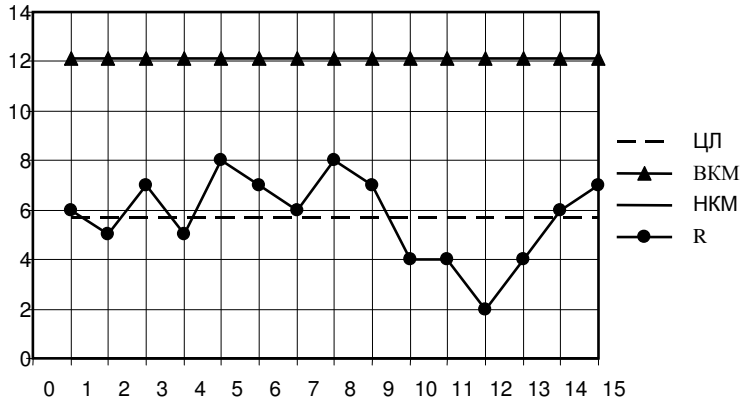

Рис.6.3а. Контрольна карта медіан

Національний університет
водного господарства
та природокористування

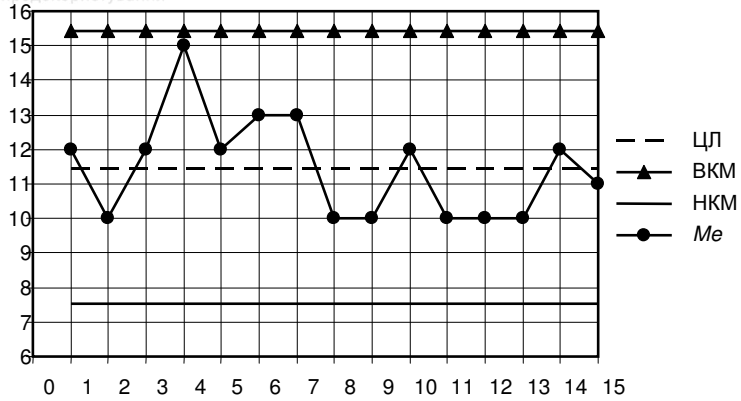

Рис.6.3б. Контрольна карта розмахів варіацій

6.7. Завдання для самостійної роботи.

Завдання 1. Виробник електроліту досліджує її чистоту. Чистота електроліту вимірюється в кожній партії.

Таблиця 6.5.

Дані про вимірювання чистоти електроліту в 20 послідовних партіях

Номер партії	Чистота, %	Номер партії	Чистота, %
1	0,81	11	0,81
2	0,82	12	0,83
3	0,81	13	0,81
4	0,82	14	0,82
5	0,82	15	0,81
6	0,83	16	0,85
7	0,81	17	0,83
8	0,80	18	0,87
9	0,81	19	0,86
10	0,82	20	0,84

Використовуючи наведені дані, визначити, чи перебуває процес у стані статистичного контролю.

Завдання 2. Досліджується концентрація активної добавки у рідині для чищення. У таблиці наведено результати 30 послідовних замірів концентрації.

На основі наведених даних створити контрольну карту окремих спостережень. Оцінити стабільність процесу.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Таблиця 6.6.

Результати виміру концентрації активної добавки

Спостереження	Концентрація, г/л	Спостереження	Концентрація, г/л
1	60,4	16	99,9
2	69,5	17	59,3
3	78,4	18	60,0
4	72,8	19	74,7
5	78,2	20	75,8
6	78,7	21	76,6
7	56,9	22	68,4
8	78,4	23	83,1
9	79,6	24	61,1
10	100,8	25	54,9
11	99,6	26	69,1
12	64,9	27	67,5
13	75,5	28	69,2
14	70,4	29	87,2
15	68,1	30	73,0

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Завдання 3. З певного виробничого процесу взято 20 вибірок обсягом 4 вироби кожна. Результати вимірів певної ознаки якості X для кожного виробу наведено в таблиці 6.7.

На основі наведених даних визначити тип контрольної карти, яку доцільно застосувати для оцінки стабільності процесу. Обґрунтувати вибір.

Розрахувати характеристику контрольної карти. Навести формули для центральної лінії, контрольних меж і техніку розрахунку. Нанести вибіркові значення ознаки на контрольну карту. Оцінити стабільність процесу. Обґрунтувати наявність особливих причин (якщо вони є).

Таблиця 6.7.

Результати вибіркових спостережень з виробничого процесу

№ вибірки	X_1	X_2	X_3	X_4
1	70,291	72,224	70,566	73,090
2	71,401	71,930	70,311	74,323
3	70,048	70,534	69,762	74,539
4	69,028	69,836	69,552	74,444
5	69,892	68,808	70,884	74,247

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Продовження таблиці 6.7.

№ вибірки	X_1	X_2	X_3	X_4
6	70,152	70,559	71,593	72,979
7	71,006	69,288	70,242	71,824
8	70,196	68,740	70,863	74,612
9	70,477	68,322	69,895	74,368
10	69,510	68,713	70,244	75,109
11	67,744	68,973	69,716	76,569
12	67,607	69,508	70,244	75,959
13	68,168	68,808	69,716	76,005
14	69,979	69,931	68,914	73,206
15	68,227	69,763	69,216	72,251
16	68,497	69,541	68,431	70,386
17	67,113	69,889	67,616	70,519
18	67,993	71,243	67,542	71,005
19	68,113	69,701	69,136	71,542
20	69,149	71,135	69,905	72,692

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Практична робота № 7
ПОКАЗНИКИ НАДІЙНОСТІ ПРОДУКЦІЇ

Мета - розрахунок показників надійності продукції.

Надійністю виробу називається його властивість виконувати задані функції, зберігаючи свої експлуатаційні показники (продуктивність, економічність, рентабельність та ін.) в заданих межах протягом необхідного проміжку часу або необхідного напрацювання в певних режимах в умовах експлуатації.

Надійність виробу обумовлюється його безвідмовністю, ремонтопридатністю, збережуваністю, а також довговічністю його частин.

Безвідмовністю називається властивість виробу зберігати працездатність протягом деякого напрацювання без вимушених перерв. У цьому визначенні під напрацюванням розуміється тривалість або об'єм роботи виробу, вимірюваний в годинах, кілометрах, гектарах, кубометрах і тому подібне.

Довговічність це властивість виробу зберігати працездатність до певного стану з необхідними перервами для технічних обслуговування і ремонтів. Граничний стан визначається неможливістю подальшої експлуатації виробу, обумовленої або зниженням ефективності, або

Національний університет
водного господарства
та природокористування

вимогами безпеки, і обмовляється в технічній документації. Напрацювання виробу до граничного стану називається ресурсом.

Ремонтопридатність - властивість виробу, що полягає в його пристосованості до запобігання, виявлення і усунення відмов і несправностей шляхом проведення технічного обслуговування і ремонту. Мається на увазі, що при усуненні відмови або несправності відновлюється працездатність виробу.

Збережуваність - властивість виробу зберігати обумовлені експлуатаційні показники під час і після терміну зберігання і транспортування, встановленого в технічній документації.

Всі можливі види виробів розділяють на не відновлювані (що не ремонтуються) і відновлювані (ремонтопридатні).

До перших відносяться широка номенклатура радіоелементів (напівпровідникові і електровакуумні прилади, конденсатори, резистори і т. д.), електротехнічні вироби (освітлювальні прилади, реле, вимикачі), деталі машин і тому подібне До невідновних виробів відносяться також складні вироби: апаратура супутників і космічних кораблів, бортова апаратура літаків під час польотів і деяких типів кораблів під час плавання.

До ремонтованих виробів відносяться складні вироби: автомашини, комбайни, стаціонарна електронна апаратура.

Приклад 1.

В результаті випробувань з 500 електронних ламп протягом 1000 годин відмовлено10 ламп.

Визначити: а) ймовірність безвідмовної роботи;

б) інтенсивність відмов.

Рішення:

1. Вірогідність безвідмовної роботи за час t = 1000 ч. оцінюється по наступній формулі:

$$\tilde{P}(t) = \frac{N - m}{N},$$

де N = 500 – кількість виробів для випробувань; m = 10 - число виробів, що відмовили, за час t.

$$\tilde{P}\,(1000) = \frac{500 - 10}{500} = 0{,}98;$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Інтенсивність відмов невідновного виробу $\tilde{\lambda}(t)$ оцінюється за допомогою співвідношення:

$$\tilde{\lambda}(t) = \frac{m}{(N-m)t},$$

Завдання:

1. Визначити:

а) вірогідністьбезвідмовної роботи;

б) інтенсивність відмов, якщо при дослідній експлуатації *N* виробів число відмов за декілька діб рівне *m*.

Результати занести в таблицю.

Зробити висновки.Таблиця 7.1

Кількість виробів, *N*	Число відмов, *m*	Час роботи, діб.	Вірогідність безвідмовної роботи	Інтенсивність відмов, 1/год
100+50n	5+r	60+5r		
200+60r	12+2n	55+4n		

Національний університет
водного господарства
та природокористування

2. Визначити число відмов (*m*) при експлуатації *N* виробів за *t* годин, якщо інтенсивність відмов рівна таблиця 7.2.

Результати занести в таблицю

Таблиця 7.2.

Кількість виробів, N	Інтенсивність відмов, 1/год.	Час роботи, год.	Число відмов, *m*
100+5n	0,00005	15+n	
200+10r	0,0001	10+r	

Додаток

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Таблиця А1

Коефіцієнти для обчислення ліній контрольних карт

Кількість спостережень у підгрупі, n	Коефіцієнти для обчислювання контрольних меж											Коефіцієнти для обчислювання центральної лінії			
	A	A_2	A_3	B_3	B_4	B_5	B_6	D_1,	D_2	D_3	D_4	C_4	$1/C_4$	d_2	$1/d_2$
2	2,121	1,880	2,659	0,000	3,267	0,000	2,606	0,000	3,686	0,000	3,267	0,7979	1,2533	1,128	0,8865
3	1,732	1,023	1,954	0,000	2,568	0,000	2,276	0,000	4,358	0,000	2,574	0,8862	1,1284	1,693	0,5907
4	1,500	0,729	1,628	0,000	2,266	0,000	2,088	0,000	4,698	0,000	2,282	0,9213	1,0854	2,059	0,4857
5	1,342	0,577	1,427 ,	0,000.	2,089	0,000_	,,1,964	0,000	4.9Л8	0,000	2,114	0,9400	1,0638	2,326	0,4299
6	1,225	0,483	1,287	0,030	1,970	0,029	1,874	0,000	5,078	0,000	2,004	0,9515	1,0510	2,534	0,3946
7	1,134	0,419	1,182	0,118	1,882	0,113	1,806	0,204	5,204	0.076	1,924	0,9594	1,0423	2,704	0,3698
8	1,061	0,373	1,099	0,185	1,815	0,179	1,751	0,388	5,306	0,136	1,864	0,9650	1,0363	2,847	0,3512
9	1,000	0,337	1,032	0,239	1,761	0,232	1,707	0,547	5,393	0,184	1,816	0,9693	1,0317	2,970	0,3367
10	0,949	0,308	0,975	0,284	1,716	0,276	1,669	0,687	5,469	0,223	1,777	0,9727	1,0281	3,078	0,3249
11	0,905	0,285	0,927	0,321	1,679	0,313	1,637	0,811	5,535	0,256	1,744	0,9754	1,0252	3,173	0,3152
12	0,866	0,266	0,886	0,354	1,646	0,346	1,610	0,922	5,594	0,283	1,717	0,9776	1,0229	3,258	0,3069
13	0,832	0,249	0,850	0,382	1,618	0,374	1,585	1,025	5,647	0,307	1,693	0,9794	1,0210	3,336	0,2998
14	0,802	0,235	0,817	0,406	1,594	0,399	1,563	1,118	5,696	0,328	1,672	0,9810	1,0194	3,407	0,2935
15	0,775	0,223	0,789	0,428	1,572	0,421	1,544	1,203	5,741	0,347	1,653	0,9823	1,0180	3,472	0,2880
16	0,750	0,212	0,763	0,448	1,552	0,440	1,526	1,282	5,782	0,363	1,637	0,9835	1,0168	3,532	0,2831
17	0,728	0,203	0,739	0,466	1,534	0,458	1,511	1,356	5,820	0,378	1,622	0,9845	1,0157	3,588	0,2787
18	0,707	0,194	0,718	0,482	1,518	0,475	1,496	1,424	5,856	0,391	1,608	0,9854	1,0148	3,640	0,2747
19	0,688	0,187	0,698	0,497	1,503	0,490	1,483	1,487	5,891	0,403	1,597	0,9862	1,0140	3,689	0,2711
20	0,671	0,180	0,680	0,510	1,490	0,504	1,470	1,549	5,921	0,415	1,585	0,9869	1,0133	3,735	0,2677
21	0,655	0,173	0,663	0,523	1,477	0,516	1,459	1,605	5,951	0,425	1,575	0,9876	1,0126	3,778	0,2647
22	0,640	0,167	0,647	0,534	1,466	0,528	1,448	1,659	5,979	0,434	1,566	0,9882	1,0119	3,819	0,2618
23	0,626	0,162	0,633	0,545	1,455	0,539	1,438	1,710	6,006	0,443	1,557	0,9887	1,0114	3,858	0,2592
24	0,612	0,157	0,619	0,555	1,445	0,549	1,429	1,759	6,031	0,451	1,548	0,9892	1,0109	3,895	0,2567
25	0,600	0,153	0,606	0,565	1,434	0,559	1,420	1,806	6,056	0,459	1,541	0,9896	1,0105	3,931	0,2544

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Національний університет
водного господарства
та природокористування