Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Національний університет водного господарства та природокористування

Кафедра землеустрою, геодезії та геоінформатики

076-142

Методичні вказівки

до виконання практичних робіт з дисципліни „Основи системного аналізу” студентами за напрямом підготовки 0801 «Геодезія, картографія та землеустрій» за професійним спрямуванням **«Геоінформаційні системи та технології»** денної форми навчання

Частина 2. Застосування методів системного аналізу в умовах прийняття рішень

Рекомендовано методичною комісією за напрямом підготовки „Геодезія, картографія та землеустрій”
Протокол № 2 від 25.10.11.

Рівне 2011

Методичні вказівки до виконання практичних робіт з дисципліни „Основи системного аналізу" студентами за напрямом підготовки 0801 «Геодезія, картографія та землеустрій» за професійним спрямуванням «Геоінформаційні системи та технології» денної та заочної форм навчання. Частина 2. Застосування методів системного аналізу в умовах прийняття рішень / А.М. Кундрат, А.В. Люсак. – Рівне: НУВГП, 2011. – 31 с.

Упорядники: Кундрат Андрій Миколайович, кандидат фізико-математичних наук, доцент;
Люсак Анна Володимирівна, кандидат технічних наук, старший викладач.

Відповідальний за випуск: П.Г. Черняга, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри землеустрою, геодезії та геоінформатики.

Зміст

Передмова

Цілеспрямована діяльність людини є деякою закономірністю вибору найоптимальнішої дії, визначеної з сукупності можливих. Кожний такий вибір називають актом прийняття рішення. Формально задачу прийняття рішення можна подати як процес відновлення (апроксимації) бінарного відношення слабкої переваги на множині допустимих альтернатив на основі інформації про умови та мету функціонування системи. Носієм інформації є особа, яка приймає рішення (ОПР), саме на спеціаліста у визначеній предметній області припадає основне навантаження. Дані методичні вказівки є продовженням раніше розглядуваних описів систем (Частина 1. Складання та форми опису систем) та призначені допомогти студентам при вивченні основних методів системного аналізу в умовах прийняття рішень.

Тема № 6. Апроксимація елементарними функціями

Часто в системному аналізі формулюються задачі, коли маючи обмежену кількість експериментальних даних, необхідно спрогнозувати очікувані наслідки при інших умовах експерименту над тією ж системою. Для досягнення цієї мети використовують аналітичні функції різного вигляду, які з тою чи іншою похибкою моделюють поведінку досліджуваного об’єкта. Підбір таких рівнянь називають апроксимацією експериментальних даних. *Апроксимація* (від лат. approximo – наближаюся) – заміна одних математичних об’єктів (чисел чи функцій) іншими, простішими і в тому чи іншому сенсі близькими до вихідних. Апроксимація усередині області одержання експериментальних даних називається інтерполяцією, а за межами цієї області – екстраполяцією.

Припустимо, що дві змінні величини x та y пов’язані між собою деякою функціональною залежністю. Для значень незалежної змінної x_i відомі значення функції y_i: $y_i = f(x_i)$

$(i=\overline{0,m})$. Необхідно визначити (з певних міркувань) вид залежності, який пов'язує змінні, при цьому параметри (коефіцієнти), що входять в формулу, вважатимемо невідомими. Функцію $y=f(x)$ можна шукати і у вигляді інтерполяційного поліному. Але інтерполяційні поліноми не завжди добре відображають характер поведінки таблично заданої функції. До того ж значення y_i, які дістають за результатами експерименту, як правило, є наближеними. У цьому разі задача інтерполювання табличної функції втрачає сенс. Тому шукають таку функцію $y=F(x)$, значення якої при $x=x_i$ досить близькі до табличних значень y_i $(i=\overline{1,n})$. Формулу $y=F(x)$ називають *емпіричною* або *рівнянням регресії у* на x. Емпіричні формули мають велике практичне значення, вдало підібрана емпірична формула дає змогу не лише апроксимувати сукупність експериментальних даних, "згладжуючи" значення величини y, а й екстраполювати знайдену залежність на інші проміжки значень змінної x.

Процес побудови емпіричних формул складається з двох етапів: визначення загального виду цієї формули та обчислення найоптимальніших її параметрів (коефіцієнтів).

Щоб визначити вигляд емпіричної формули, на площині *xOy* будують точки з координатами (x_i, y_i), $i=\overline{1,n}$. Отримані точки сполучають плавною кривою, якомога ближче до всіх заданих точок та візуально визначають графік якої з відомих функцій найкраще підходить до побудованої кривої. Звичайно, намагаються підібрати найпростіші функції: лінійну, квадратичну, дробово-раціональну, степеневу, показникову, логарифмічну.

В обраній емпіричній формулі обчислюємо невідомі параметри (коефіцієнти). Найбільш часто значення коефіцієнтів емпіричної формули визначають *методом найменших квадратів* (запропонований К. Гауссом і А. Лежандром).

Нехай емпірична формула має вигляд

$$y=F(x;\, a_1, a_2, \ldots, a_m), \tag{6.1}$$

де $a_1, a_2, \ldots, a_m$ — невідомі коефіцієнти. Треба знайти такі значення коефіцієнтів a_i, ($i=\overline{1,m}$) за яких крива (6.1) якомога ближче проходитиме до всіх n експериментальних точок (x_1, y_1), (x_2, y_2), …, (x_n, y_n). Зрозуміло, що жодна з експериментальних точок не задовольняє точно рівняння (6.1). Відхилення від підстановки координат (x_i, y_i) у рівняння (6.1) дорівнюватимуть величинам

$$\delta_i = y_i - F(x_i; a_1, \ldots, a_m), \quad i=\overline{1,n}.$$

За методом найменших квадратів найкращі значення коефіцієнтів $a_1, a_2, \ldots, a_m$, вважаються такі, для яких сума квадратів відхилень

$$S(a_1, a_2, \ldots, a_m) = \sum_{i=1}^{n} \delta_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - F(x_i; a_1, \ldots, a_m)\right)^2 \qquad (6.2)$$

дослідних даних y_i від обчислених за емпіричною формулою (6.1) є найменшою. Звідси випливає, що величина (6.2), яка є функцією від коефіцієнтів $a_1, a_2, \ldots, a_m$, повинна мати мінімум. Необхідна умова мінімуму функції багатьох змінних – її частинні похідні мають дорівнювати нулю, тобто

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = 0, \ \frac{\partial S}{\partial a_2} = 0, \ \ldots, \ \frac{\partial S}{\partial a_m} = 0.$$

Диференціюючи вираз (6.2) по невідомих параметрах $a_1, a_2, \ldots, a_m$, отримуємо стосовно них систему m рівнянь:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} \left(y_i - F(x_i; a_1, a_2, \ldots, a_m)\right) \cdot \dfrac{\partial F(x_i; a_1, \ldots, a_m)}{\partial a_1} = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \left(y_i - F(x_i; a_1, \ldots, a_m)\right) \cdot \dfrac{\partial F(x_i; a_1, \ldots, a_m)}{\partial a_2} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \left(y_i - F(x_i; a_1, \ldots, a_m)\right) \cdot \dfrac{\partial F(x_i; a_1, \ldots, a_m)}{\partial a_m} = 0. \end{cases} \qquad (6.3)$$

Система (6.3) називається *нормальною*, причому, якщо розв'язок існує, то він єдиний і може бути знайдений методами лінійної алгебри.

Якщо емпірична функція (6.1) лінійна стосовно $a_1, a_2, \ldots, a_m$, то нормальна система (6.3) буде системою m лінійних рівнянь відносно тих же параметрів.

Будуючи емпіричні формули, вважатимемо, що експериментальні дані (x_i, y_i) додатні. Якщо серед значень x_i і y_i є від'ємні, то завжди можна знайти такі додатні числа p і q, що $\overline{x}_i = x_i + p > 0$ і $\overline{y}_i = y_i + q > 0$, $i = \overline{1, n}$. Тому розв'язування поставленої задачі завжди можна звести до побудови емпіричної формули для додатніх значень $(\overline{x}_i, \overline{y}_i)$.

6.1. Побудова лінійної емпіричної залежності

Нехай між даними (x_i, y_i) виявлена лінійна залежність. Тоді шукатимемо емпіричну формулу у вигляді

$$y = ax + b, \tag{6.4}$$

де коефіцієнти a і b є поки що невідомими.

Знайдемо значення a і b, за яких сума квадратів відхилень $S(a, b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)^2$ матиме мінімальне значення. Для цього прирівняємо до нуля частинні похідні функції $S(a, b)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a} = 2\sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)(-x_i) = 0, \\ \dfrac{\partial S}{\partial b} = 2\sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)(-1) = 0. \end{cases}$$

Врахувавши, що $\sum_{i=1}^{n} b = nb$, отримаємо систему з двох рівнянь

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + nb = \sum_{i=1}^{n} y_i. \end{cases} \tag{6.5}$$

Розв’язавши систему (6.5) стосовно a і b, знайдемо

$$a = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}, \tag{6.6}$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \sum_{i=1}^{n} x_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}. \tag{6.7}$$

Зазначимо, що, крім графічного, використовують й аналітичний критерій виявлення лінійної залежності між значеннями x та y. Суть його полягає у наступному.

Приймемо $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$, $k_i = \Delta y_i / \Delta x_i$ $(i = \overline{1, n-1})$. Якщо параметр $k_i = const$, то залежність між значеннями x та y є лінійною і точки (x_i, y_i) лежатимуть на деякій прямій. Якщо $k_1 \approx k_2 \approx \ldots \approx k_{n-1}$, то вважається, що між x та y існує наближена лінійна залежність, оскільки точки (x_i, y_i) розташовані поблизу деякої прямої.

6.2. Побудова квадратичної емпіричної залежності

Нехай виявлена функціональна залежність між значеннями x та y є квадратичною. Тоді емпіричну формулу шукатимемо у вигляді

$$y = ax^2 + bx + c. \tag{6.8}$$

Суму квадратів відхилень (6.2)

$$S(a,b,c)=\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-ax_i^2-bx_i-c\right)^2.$$

Для обчислення коефіцієнтів a, b, c, за яких функція $S(a,b,c)$ мінімальна, знайдемо частинні похідні $\dfrac{\partial S}{\partial a}$, $\dfrac{\partial S}{\partial b}$, $\dfrac{\partial S}{\partial c}$ та прирівняємо їх до нуля. В результаті отримаємо систему з трьох рівнянь

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-ax_i^2-bx_i-c\right)\cdot x_i^2=0,\\ \sum_{i=1}^{n}\left(y_i-ax_i^2-bx_i-c\right)\cdot x_i=0,\\ \sum_{i=1}^{n}\left(y_i-ax_i^2-bx_i-c\right)=0.\end{cases}$$

Після рівносильних перетворень маємо систему

$$\begin{cases}a\sum_{i=1}^{n}x_i^4+b\sum_{i=1}^{n}x_i^3+c\sum_{i=1}^{n}x_i^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2y_i,\\ a\sum_{i=1}^{n}x_i^3+b\sum_{i=1}^{n}x_i^2+c\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i,\\ a\sum_{i=1}^{n}x_i^2+b\sum_{i=1}^{n}x_i+nc=\sum_{i=1}^{n}y_i.\end{cases}\qquad(6.9)$$

Її розв'язок стосовно a, b, c визначає єдину параболу, яка краще від усіх можливих парабол (6.8) подає на розглядуваному проміжку задану таблично функціональну залежність.

Сформулюємо аналітичний критерій для квадратичної залежності. Для цього введемо поділені різниці першого і другого порядку:

$$[x_i,\,x_{i+1}]=\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i},$$

$$[x_i,\,x_{i+1},\,x_{i+2}]=\frac{[x_{i+1},\,x_{i+2}]-[x_i,\,x_{i+1}]}{x_{i+2}-x_i}=\frac{\Delta(\Delta y_i/\Delta x_i)}{\Delta_1 x_i},$$

де $\Delta_1 x_i = x_{i+2} - x_i = \Delta x_i + \Delta x_{i+1}$.

Точки (x_i, y_i) розміщені на параболі (6.8) тоді і лише тоді, коли всі поділені різниці другого порядку зберігають сталі значення.

Якщо точки x_i, $i = \overline{1,n}$ рівновіддалені, тобто $\Delta x_i = h = const$, то для існування квадратичної залежності (6.8) необхідно і достатньо, щоб була сталою скінченна різниця другого порядку $\Delta^2 y_i = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i$, $i = \overline{1, n-2}$, причому $\Delta^2 y_i = 2h^2 a$.

6.3. Побудова емпіричних формул найпростіших нелінійних залежностей

Нехай у системі координат xOy виявлено нелінійну залежність $y = F(x, a, b)$, неперервну і монотонну на відрізку $[x_1; x_n]$.

Введемо нові змінні $X = \varphi(x)$, $Y = \psi(y)$ так, щоб у новій системі координат XOY задана емпірична нелінійна залежність $y = F(x, a, b)$ перетворилися у лінійну стосовно X, Y:

$$Y = AX + B. \qquad (6.10)$$

Тоді точки з координатами $(\varphi(x_i), \psi(y_i))$ в площині XOY лежатимуть на прямій лінії.

Покажемо, як від нелінійних залежностей перейти до лінійних на прикладах функцій:

1. $y = ax^b$; 2. $y = ab^x$; 3. $y = a\ln x + b$;

4. $y = \dfrac{a}{x} + b$; 5. $y = \dfrac{1}{ax+b}$; 6. $y = \dfrac{x}{ax+b}$.

Приклад 1. Розглянемо степеневу залежність $y = ax^b$, де $x > 0$, $a > 0$, $b > 0$.

Логарифмуючи її, знаходимо $\ln y = b\ln x + \ln a$. Поклавши $X = \ln x$, $Y = \ln y$, $B = \ln a$ та $A = b$, отримуємо $Y = AX + B$.

Приклад 2. Логарифмуючи показникову залежність

$y = ab^x$, маємо $\ln y = \ln a + x \ln b$. Поклавши $Y = \ln y$, $X = x$, $A = \ln b$ та $B = \ln a$, в системі координат XOY отримаємо залежність (6.10).

Зазначимо, що замість показникової залежності $y = ab^x$ часто шукають залежність $y = ae^{bx}$. Остання перетворюється в лінійну, при позначеннях $X = x$, $Y = \ln y$, $B = \ln a$, $A = b$.

Приклад 3. Щоб перейти від логарифмічної залежності $y = a \ln x + b$ до лінійної $Y = aX + b$, достатньо зробити підстановку $Y = y$, $X = \ln x$.

Приклад 4. У гіперболічній залежності виконуємо заміну змінних: $1/x = X$, $y = Y$. Тоді гіперболічна залежність перетвориться в лінійну (6.10), в якій $A = a$, $B = b$.

Приклад 5. Розглянемо дробово-лінійну функцію $y = \dfrac{1}{ax+b}$. Знайдемо обернену функцію $1/y = ax + b$. Тоді, ввівши нові координати $Y = 1/y$, $X = x$, дістанемо лінійну залежність (6.10), де $A = a$, $B = b$.

Приклад 6. Нехай маємо дробово-раціональну залежність $y = \dfrac{x}{ax+b}$. Оберненою до неї буде залежність $1/y = a + b/x$. Ввівши нові змінні $Y = 1/y$, $X = 1/x$, дістанемо лінійну залежність (6.10) з коефіцієнтами $A = b$, $B = a$.

Отже, для побудови будь-якої з емпіричних формул (1–6) необхідно:

а) за вихідною таблицею даних (x_i, y_i) побудувати нову таблицю (X_i, Y_i), використавши відповідні формули переходу до нових координат;

б) за новою таблицею даних знайти методом найменших квадратів коефіцієнти A та B лінійної функції (6.10);

в) за відповідними формулами знайти коефіцієнти a та b даної нелінійної залежності.

При виборі емпіричної формули для нелінійних залежностей графічним методом часто виникають складнощі. Тоді вдаються до перевірки аналітичних критеріїв існування певної залежності. Для цього зводять її до лінійної і перевіряють виконання критерію лінійної залежності між перетвореними вихідними даними $\left(X_i, Y_i\right)$. Але є й власні аналітичні критерії наявності кожної з розглянутих вище нелінійних залежностей. Найпростіші необхідні умови їх наявності подано в табл. 6.1.

Таблиця 6.1

№	Емпірична формула	$\bar{x}_s$	$\bar{y}_s$	Спосіб вирівнювання
1.	$y = ax + b$	$\dfrac{x_1 + x_n}{2}$	$\dfrac{y_1 + y_n}{2}$	
2.	$y = ax^b$	$\sqrt{x_1 \cdot x_n}$	$\sqrt{y_1 \cdot y_n}$	$Y = AX + B$, де $X = \ln x$, $Y = \ln y$, $A = b$, $B = \ln a$
3.	$y = ab^x$	$\dfrac{x_1 + x_n}{2}$	$\sqrt{y_1 \cdot y_n}$	$Y = AX + B$, де $Y = \ln y$, $A = \ln b$, $B = \ln a$
4.	$y = a \ln x + b$	$\sqrt{x_1 \cdot x_n}$	$\dfrac{y_1 + y_n}{2}$	$y = aX + b$, де $X = \ln x$
5.	$y = \dfrac{a}{x + b}$	$\dfrac{2x_1 x_n}{x_1 + x_n}$	$\dfrac{y_1 + y_n}{2}$	$y = aX + b$, де $X = 1/x$
6.	$y = \dfrac{1}{ax + b}$	$\dfrac{x_1 + x_n}{2}$	$\dfrac{2y_1 y_n}{y_1 + y_n}$	$Y = ax + b$, де $Y = 1/y$
7.	$y = \dfrac{x}{ax + b}$	$\dfrac{2x_1 x_n}{x_1 + x_n}$	$\dfrac{2y_1 y_n}{y_1 + y_n}$	$Y = bX + a$, де $X = 1/x$, $Y = 1/y$

Умови перевіряють у такий спосіб. На заданому відрізку зміни незалежної змінної *x* вибирають дві точки, досить надійні і розміщені якомога далі одна від одної. Нехай, наприклад, це будуть точки x_1, x_n. Потім, залежно від типу емпіричної формули, що перевіряється, обчислюють значення $\bar{x}_s$, яке є або середнім арифметичним, або середнім геометричним, або середнім гармонічним значень x_1, x_n. Маючи значення y_1 і y_n аналогічно обчислюють і відповідне значення $\bar{y}_s$. Далі, користуючись заданою таблицею значень (x_i, y_i), $(i = \overline{1, n})$ для значення $\bar{x}_s$ знаходять відповідне йому значення y_s^*. Якщо $\bar{x}_s$ немає в таблиці, то y_s^* знаходять наближено з побудованого графіка заданої залежності або за допомогою лінійної інтерполяції

$$y_s^* = y_i + \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}\left(\bar{x}_s - x_i\right),$$

де x_i і x_{i+1} – проміжні значення, між якими лежить значення $\bar{x}_s \left(x_i < \bar{x}_s < x_{i+1}\right)$. Обчисливши y_s^*, знаходять величину $\left|\bar{y}_s - y_s^*\right|$. Якщо вона велика, то відповідна емпірична формула не придатна для апроксимації заданих табличних даних. З кількох придатних емпіричних формул перевагу надають тій, для якої відхилення $\left|\bar{y}_s - y_s^*\right|$ якомога менше.

Завдання. Визначити найбільш придатну для апроксимації емпіричну формулу. В кінцевому результаті мають бути знайдені всі коефіцієнти функції за своїм варіантом заданих значень. Потрібно записати формулу з числовими значеннями знайдених коефіцієнтів, обчислити значення відповідних функцій від тих *x*, які не наведені (пропущені) в таблиці з вихідними даними на проміжку від нуля до одиниці.

Таблиця 1		Таблиця 2		Таблиця 3		Таблиця 4	
x	*y*	*x*	*y*	*x*	*y*	*x*	*y*
0,43	1,63597	0,02	1,02316	0,35	2,73951	0,41	2,57418
0,48	1,73234	0,08	1,09590	0,41	2,30080	0,46	2,32513
0,55	1,87686	0,12	1,14725	0,47	1,96864	0,52	2,09336
0,62	2,03345	0,17	1,21483	0,51	1,78776	0,60	1,86203
0,70	2,22846	0,23	1,30120	0,56	1,59502	0,65	1,74926
0,75	2,35973	0,30	1,40976	0,64	1,34310	0,72	1,62098

Таблиця 5		Таблиця 6		Таблиця 7		Таблиця 8	
x	*y*	*x*	*y*	*x*	*y*	*x*	*y*
0,68	0,80866	0,11	9,05421	1,375	5,04192	0,115	8,65729
0,73	0,89492	0,15	6,61659	1,380	5,17744	0,120	8,29329
0,80	1,02964	0,21	4,69170	1,385	5,32016	0,125	7,95829
0,88	1,20966	0,29	3,35106	1,390	5,47069	0,130	7,64893
0,93	1,34087	0,35	2,73951	1,395	5,62968	0,135	7,36235
0,99	1,52368	0,40	2,36522	1,400	5,79788	0,140	7,09613

Таблиця 9		Таблиця 10		Таблиця 11		Таблиця 12	
x	*y*	*x*	*y*	*x*	*y*	*x*	*y*
0,150	6,61659	0,180	5,61543	0,210	4,83170	1,415	0,888551
0,155	6,39989	0,185	5,46693	0,215	4,72261	1,420	0,889599
0,160	6,19658	0,190	5,32634	0,220	4,61855	1,425	0,890637
0,165	6,00551	0,195	5,19304	0,225	4,51919	1,430	0,891667
0,170	5,82558	0,200	5,06649	0,230	4,42422	1,435	0,892687
0,175	5,65583	0,205	4,94619	0,235	4,33337	1,440	0,893698

Таблиця 13		Таблиця 14		Таблиця 15		Таблиця 16	
x	*y*	*x*	*y*	*x*	*y*	*x*	*y*
0,05	0,050042	0,210	4,83170	1,415	0,888551	0,101	1,26183
0,10	0,100335	0,215	4,72261	1,420	0,889599	0,106	1,27644
0,17	0,171657	0,220	4,61855	1,425	0,890637	0,111	1,29122
0,25	0,255342	0,225	4,51919	1,430	0,891667	0,116	1,30617
0,30	0,309336	0,230	4,42422	1,435	0,892687	0,121	1,32130
0,36	0,376403	0,235	4,33337	1,440	0,893698	0,126	1,32660

Таблиця 17		Таблиця 18		Таблиця 19		Таблиця 20	
x	*y*	*x*	*y*	*x*	*y*	*x*	*y*
0,68	0,80866	0,11	9,05421	1,375	5,04192	0,115	8,65729
0,73	0,89492	0,15	6,61659	1,380	5,17744	0,120	8,29329
0,80	1,02964	0,21	4,69170	1,385	5,32016	0,125	7,95829
0,88	1,20966	0,29	3,35106	1,390	5,47069	0,130	7,64893
0,93	1,34087	0,35	2,73951	1,395	5,62968	0,135	7,36235
0,99	1,52368	0,40	2,36522	1,400	5,79788	0,140	7,09613

Таблиця 21		Таблиця 22		Таблиця 23		Таблиця 24	
x	*y*	*x*	*y*	*x*	*y*	*x*	*y*
0,43	1,63597	0,02	1,02316	0,35	2,73951	0,41	2,57418
0,48	1,73234	0,08	1,09590	0,41	2,30080	0,46	2,32513
0,55	1,87686	0,12	1,14725	0,47	1,96864	0,52	2,09336
0,62	2,03345	0,17	1,21483	0,51	1,78776	0,60	1,86203
0,70	2,22846	0,23	1,30120	0,56	1,59502	0,65	1,74926
0,75	2,35973	0,30	1,40976	0,64	1,34310	0,72	1,62098

Таблиця 25		Таблиця 26		Таблиця 27		Таблиця 28	
x	*y*	*x*	*y*	*x*	*y*	*x*	*y*
0,150	6,61659	0,180	5,61543	0,210	4,83170	1,415	0,888551
0,155	6,39989	0,185	5,46693	0,215	4,72261	1,420	0,889599
0,160	6,19658	0,190	5,32634	0,220	4,61855	1,425	0,890637
0,165	6,00551	0,195	5,19304	0,225	4,51919	1,430	0,891667
0,170	5,82558	0,200	5,06649	0,230	4,42422	1,435	0,892687
0,175	5,65583	0,205	4,94619	0,235	4,33337	1,440	0,893698

Таблиця 29		Таблиця 30		Таблиця 31		Таблиця 32	
x	*y*	*x*	*y*	*x*	*y*	*x*	*y*
0,68	0,80866	0,11	9,05421	1,375	5,04192	0,115	8,65729
0,73	0,89492	0,15	6,61659	1,380	5,17744	0,120	8,29329
0,80	1,02964	0,21	4,69170	1,385	5,32016	0,125	7,95829
0,88	1,20966	0,29	3,35106	1,390	5,47069	0,130	7,64893
0,93	1,34087	0,35	2,73951	1,395	5,62968	0,135	7,36235
0,99	1,52368	0,40	2,36522	1,400	5,79788	0,140	7,09613

Таблиця 33		Таблиця 34		Таблиця 35		Таблиця 36	
x	*y*	*x*	*y*	*x*	*y*	*x*	*y*
0,05	0,050042	0,210	4,83170	1,415	0,888551	0,101	1,26183
0,10	0,100335	0,215	4,72261	1,420	0,889599	0,106	1,27644
0,17	0,171657	0,220	4,61855	1,425	0,890637	0,111	1,29122
0,25	0,255342	0,225	4,51919	1,430	0,891667	0,116	1,30617
0,30	0,309336	0,230	4,42422	1,435	0,892687	0,121	1,32130
0,36	0,376403	0,235	4,33337	1,440	0,893698	0,126	1,32660

Питання, що виносяться на захист.

1. Що таке апроксимація?
2. Що таке інтерполяція?
3. Що таке екстраполяція?
4. Яку функцію називають емпіричною?
5. Що розуміють під рівнянням регресії?
6. З яких етапів складається процес побудови емпіричних формул?
7. В чому полягає метод найменших квадратів?
8. Суть квадратичної апроксимації.
9. Як від заданих нелінійних залежностей перейти до лінійних?

Тема № 7. Методи ідентифікації систем

Ідентифікація (від лат. indenticus – тотожній, facio – роблю) – це спосіб пізнання, при якому виявляється подібність об'єктів шляхом знаходження спільного та відмінного в їх ознаках.

Ідентифікація системи – за результатами спостереження вхідних та вихідних даних необхідно визначити адекватну поведінку системи або побудувати математичну модель.

7.1. Метод експертних оцінок

Цей метод ідентифікації системи застосовується тоді, коли ОПР має мінімум інформації про систему.

Суть методу експертних оцінок полягає в тому, що в системі виділяються параметри (фактори), що потребують експертизи. Потім експерти, кожному з яких присвоюється власний ваговий коефіцієнт, оцінюють кожен з факторів (параметрів), як правило, в десятибальній шкалі. Далі математична обробка результатів відбувається за формулами:

$$\bar{x}_i = \sum_{j=1}^{m} k_j x_{ij} \Big/ \sum_{j=1}^{m} k_j , \quad i = \overline{1,n},$$

$$\lambda_i = \bar{x}_i \Big/ \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i ,$$

де $\bar{x}_i$ – середньовагова оцінка по i-му фактору;

λ_i – відносний коефіцієнт значимості i-го фактора;

x_{ij} – бальна оцінка дана i-му параметру j-тим експертом;

k_j – вага кожного з експертів;

n – кількість факторів;

m – кількість експертів.

Завдання. Використовуючи метод експертних оцінок необхідно виявити та проаналізувати ряд важливості інженерних комунікацій (x_1 – електроенергія, x_2 – газопостачання, x_3 – кабельний зв'язок, x_4 – радіозв'язок), причому, якщо відносний коефіцієнт значимості невеликий, то приналежність до системи незначна (вихідні дані додаються). Потрібно знайти відносні коефіцієнти значимості λ_i кожного фактора X_i.

Експерти	k_i	x_1	x_2	x_3	x_4	
1	5	9	5	3	6	
2	4	10	6	5	8	
3	3	9	7	4	9	
4	2	8	6	3	7	
5	2	7	7	5	7	
$\Sigma\, k_j$						
$\Sigma\, k_j\, x_{ij}$						$\Sigma\,\overline{x_i}$
λ_i						$\Sigma\ \lambda_i = 1$

Питання, що виносяться на захист.

1. В чому полягає суть методу експертних оцінок.
2. Що виражають коефіцієнти λ_i?
3. В яких випадках застосовується метод експертних оцінок?

Тема № 8. Вибір структури автоматизованої системи управління на прикладі процесу створення топоплану

Автоматизована система управління (АСУ) – людино-машинна система збору та обробки інформації, яка використовує математичні моделі та ЕОМ для оптимальної реалізації функцій управління.

В межах АСУ підприємства кожна задача управління може бути вирішена декількома методами, кожному з яких відповідає певне математичне, програмне та технічне забезпечення. На практиці автоматизувати відразу всі задачі управління не вдається із-за обмеженості ресурсів, які виділяються на розробку і впровадження АСУ. Тому виникає проблема вибору автоматизації із загального складу задач управління, в першу чергу деякої їх частини з врахуванням виділених ресурсів та максимального досягнення мети впровадження системи.

Введемо позначення: $\{\zeta_j\}_m$ – множина можливих задач управління; $\{\Gamma_{jk}\}_K$ – множина алгоритмів розв’язання кожної j-тої задачі управління; η_{ij} – характеристики відносного впливу розв’язку j-тої задачі на i-тий критерій досягнення мети впровадження АСУ (ефективність задачі); ρ_{jk} – ресурс, необхідний для реалізації j-тої задачі k-тим алгоритмом; K – кількість можливих алгоритмів; R – фонд ресурсів, виділених для розробки та впровадження першої черги АСУ.

В цьому випадку модель вибору складу задач і алгоритмів АСУ можна представити як оптимізаційну:

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{K} \eta_{ij} x_{jk} \right) \to \max , \qquad (8.1)$$

де

$$x_{jk} = \begin{cases} 1, \text{ якщо } j\text{-та задача, реалізована } k\text{-тим} \\ \text{алгоритмом, включається в АСУ;} \\ 0, \text{ в протилежному випадку.} \end{cases}$$

Необхідно також враховувати:

1) обмеження на фонд ресурсів R: вимога реалізації будь-якої задачі лише одним способом (алгоритмом)

$$\sum_{k=1}^{K} x_{jk} \le 1, \quad j = \overline{1, m} ; \qquad (8.2)$$

2) обмеження пов’язане з інформаційним взаємозв’язком задач: якщо в склад АСУ включена задача ς_j, то незалежно від її ефективності також повинні бути включені всі задачі, вихідну інформацію яких ς_j використовує на вході. Дане обмеження формально задається у вигляді $(\alpha_{jl})_m$ – матриці інформаційних взаємозв’язків, елементи якої задані формулою:

$$a_{jl} = \begin{cases} 1, \text{ якщо вихідна інформація } \varsigma_l \text{ використовуєть-} \\ \text{ся на вході } \varsigma_j; \\ 0, \text{ в протилежному випадку.} \end{cases} \qquad (8.3)$$

Для вибору оптимального складу задач та алгоритмів АСУ використовується евристичний алгоритм, який реалізується в такій послідовності:

1) кожній задачі ставиться у відповідність алгоритм Γ_j, ресурс для реалізації якого мінімальний:

$$\varsigma_j \leftrightarrow \Gamma_j \mathrm{I} \rho_j = \min_{k=\overline{1,K}} \rho_{jk}, \quad j = \overline{1,m}; \qquad (8.4)$$

2) визначається приріст узагальненого критерію оптимальності $\Delta\varphi(\varsigma_j)$ від реалізації кожної з m задач управління:

$$\Delta\varphi(\varsigma_j) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \eta_{ij}, \quad j = \overline{1,m}; \qquad (8.5)$$

3) виконується впорядкування множини задач за спаданням приросту узагальненого критерію оптимальності:

$$\Delta\varphi(\varsigma_1) > \Delta\varphi(\varsigma_2) > \ldots > \Delta\varphi(\varsigma_m) \rightarrow \varsigma_1 \succ \varsigma_2 \succ \ldots \succ \varsigma_m;$$

4) послідовно включаються в склад АСУ задачі за спаданням приросту узагальненого критерію з врахуванням інформаційних зв'язків та обмеження на фонд ресурсів:

а) $j = 1$; $\varphi = 0$;

б) вибір j-тої задачі;

в) вибір задач $\{\varsigma_l, \ \ l \in [1,m]\}$ інформаційно пов'язаних з задачею ς_j, тобто задач, для яких $\alpha_{jl} = 1$;

г) якщо сумарний ресурс, необхідний для реалізації задач $\{\varsigma_j, \varsigma_l, l \in [1,m]\}$ заданими алгоритмами $\{\Gamma_j, \Gamma_l \ l \in [1,m]\}$ та ресурс включених в склад АСУ задач φ менший фонду ресурсів R, тобто $\varphi + \rho_j + \sum_l \rho_l < R$, то необхідно перейти до наступного пункту, в протилежному випадку – до п. *є*;

д) включення в склад АСУ задачі $\{\varsigma_j, \varsigma_l, \ \ l \in [1,m]\}$;

е) збільшення ресурсу, необхідного для реалізації задач φ включених в склад АСУ, на величину сумарного ресурсу задач $\{\varsigma_j, \varsigma_l,\ \ l \in [1, m]\}$, тобто $\varphi = \varphi + \rho_j + \sum_l \rho_l$;

є) якщо перебір задач закінчений $(j = m)$, необхідно перейти до п. *з*, в протилежному випадку – до п. *ж*;

ж) перехід до вибору наступної задачі, тобто $j = j + 1$, та перехід до п. *б*;

з) в склад АСУ включаються задачі п. *д* та відповідні їм алгоритми.

Кінець алгоритму.

Значення узагальненого критерію оптимальності для вибраного складу задач дорівнює

$$\varphi = \sum_{\varsigma_j \in Z} \Delta\varphi(\varsigma_j)\,, \qquad (8.6)$$

де Z – множина задач, включених в склад АСУ.

Приклад.

Таблиця 8.1

Вихідні дані

λ_i	Γ_i	Ресурси	Ефективність задач управління h_{ij}						Обмеження
			ζ_1	ζ_2	ζ_3	ζ_4	ζ_5	ζ_6	
0,4	Γ_1		0,2	0,4	0	0,1	0,3	0	$R = 20$
		ρ_{j1}	10	5	4	2	6	4	
0,6	Γ_2		0	0	0,4	0,3	0	0,3	$\alpha = 1$
		ρ_{j2}	6	∞	7	5	4	∞	

Кожній задачі управління ставиться у відповідність алгоритм, для якого ресурс реалізації мінімальний:

$$\varsigma_1 \leftrightarrow \Gamma_{12},\ \rho_{12} = 6;\ \ \varsigma_3 \leftrightarrow \Gamma_{31},\ \rho_{31} = 4;\ \ \varsigma_5 \leftrightarrow \Gamma_{52},\ \rho_{52} = 4;$$

$$\varsigma_2 \leftrightarrow \Gamma_{21},\ \rho_{21} = 5;\ \ \varsigma_4 \leftrightarrow \Gamma_{41},\ \rho_{41} = 2;\ \ \varsigma_6 \leftrightarrow \Gamma_{61},\ \rho_{61} = 4.$$

Визначаємо приріст узагальненого критерію оптимальності від автоматизації кожної задачі управління:

$$\Delta\varphi(\varsigma_1) = 0{,}4 \cdot 0{,}2 + 0{,}6 \cdot 0 = 0{,}08\,;$$

$$\Delta\varphi(\varsigma_2) = 0{,}4 \cdot 0{,}4 + 0{,}6 \cdot 0 = 0{,}16;$$
$$\Delta\varphi(\varsigma_3) = 0{,}4 \cdot 0 + 0{,}6 \cdot 0{,}4 = 0{,}24;$$
$$\Delta\varphi(\varsigma_4) = 0{,}4 \cdot 0{,}1 + 0{,}6 \cdot 0{,}3 = 0{,}22;$$
$$\Delta\varphi(\varsigma_5) = 0{,}4 \cdot 0{,}3 + 0{,}6 \cdot 0 = 0{,}12;$$
$$\Delta\varphi(\varsigma_6) = 0{,}4 \cdot 0 + 0{,}6 \cdot 0{,}3 = 0{,}18.$$

Впорядкована множина задач управління за спаданням приросту узагальненого критерію

$$\varsigma_3 \succ \varsigma_4 \succ \varsigma_6 \succ \varsigma_2 \succ \varsigma_5 \succ \varsigma_1.$$

Послідовне включення в склад АСУ вказаних задач здійснюють з врахуванням інформаційних зв'язків та обмеження на фонд ресурсів:

a) вибір ς_3 та інформаційно пов'язаної ς_1. Оскільки $\rho_{31} + \rho_{12} = 10 < R$, то ς_3, ς_1 включаються в множину *Z*, тобто $Z = \{\varsigma_1, \varsigma_3\}$.

b) вибір ς_4, оскільки $10 + \rho_{41} = 12 < R$, то $Z = \{\varsigma_1, \varsigma_3, \varsigma_4\}$.

c) вибір ς_6, оскільки $12 + \rho_{61} = 16 < R$, то $Z = \{\varsigma_1, \varsigma_3, \varsigma_4, \varsigma_6\}$.

d) вибір ς_2, оскільки $16 + \rho_{21} = 21 > R$, то дана задача в склад АСУ не включається, тобто $Z = \{\varsigma_1, \varsigma_3, \varsigma_4, \varsigma_6\}$.

e) вибір ς_5, оскільки $16 + \rho_{52} = 20 = R$, то $Z = \{\varsigma_1, \varsigma_3, \varsigma_4, \varsigma_5, \varsigma_6\}$.

Кінець алгоритму.

В склад першої черги АСУ увійшли наступні задачі та алгоритми: $\varsigma_1 \leftrightarrow \Gamma_{12}$, $\varsigma_3 \leftrightarrow \Gamma_{31}$, $\varsigma_4 \leftrightarrow \Gamma_{41}$, $\varsigma_5 \leftrightarrow \Gamma_{52}$, $\varsigma_6 \leftrightarrow \Gamma_{61}$. Узагальнений критерій оптимальності (цільова функція) для вибраного складу задач АСУ

$$\varphi = \sum_{\varsigma_j \in Z} \Delta\varphi(\varsigma_j) = 1 - \sum_{\varsigma_j \notin Z} \Delta\varphi(\varsigma_j) =$$

$$= 0{,}8 + 0{,}24 + 0{,}22 + 0{,}12 + 0{,}18 = 1 - 0{,}16 = 0{,}84.$$

Завдання. Серед задач, що входять в побудову топографічного плану місцевості визначити які з них повинні входити в першу чергу виконання та знайти узагальнений критерій оптимальності для вибраного складу задач АСУ.

Питання, що виносяться на захист.

1. Що розуміють під автоматизованою системою управління?
2. Які обмеження враховують при оптимізаційній моделі АСУ?
3. В якій послідовності реалізується евристичний алгоритм?

Тема № 9. Діалогова модель системного аналізу

В процесі СА експерт і аналітик спілкуються звичайною мовою (ЗМ). Отриману від експерта інформацію про задачі та проблеми в певній предметній області аналітик транслює (перекладає) в різні формалізовані описи (теоретико-множинний, логічний, алгебраїчний і т.д.), які використовує для аналізу проблем та розв'язання задач методами СА.

Сучасні комп'ютери дають можливість автоматизувати процес СА за рахунок передачі їм функцій аналітика. Тут ключовою є проблема мови спілкування між експертом та моделлю СА. Зазвичай це обмежена лексикою певної предметної області ЗМ, тобто мова ділової прози (МДП).

Діалогова модель системного аналізу – це модель, в якій розв'язання задач СА здійснюється в режимі активної інформаційної взаємодії експерта і ПК з використанням МДП. Для роботи з діалоговою моделлю СА експерту необхідно сформулювати і здійснити декомпозицію проблеми до рівня окремих задач СА, а також декомпозицію мети до рівня часткових критеріїв.

Діалогове рішення задачі СА – це процес пошуку оптимального рішення та інформаційне визначення мети впровадження системи (їх усвідомлення експертом), які реалізуються паралельно, тобто безпосередньо в процесі діалогу.

Відображення множини альтернатив X в просторі показників $V = V_1 \times V_2 \times ... \times V_n$ можна подати у вигляді нечіткої відповідності ψ_1 з функцією належності

$$\mu_1(x,v): X \times V \to [0,1].$$

Тут $\mu_1(x,v)$ інтерпретується як ступінь наявності у альтернативи $x \in X$ властивості описаної показником f_i, $i = \overline{1,n}$ і визначається операцією нормування:

$$f_i = \begin{cases} (f_i - v_i^-)/(v_i^+ - v_i^-), & якщо \;\; f_i \to \max; \\ (v_i^+ - f_i)/(v_i^+ - v_i^-), & якщо \;\; f_i \to \min. \end{cases} \qquad (9.1)$$

У відповідності з поданням $R_1 = I_1 \cup P_1$ здійснимо декомпозицію відношення R на I_1 та P_1. Відношенню I_1 відповідає нечітке розбиття множини показників $\{V_i\}_n$ на класи, кожен з яких описується агрегованим показником U_j, $j = \overline{1,m}$. Система агрегованих показників та їх значень виділяється експертним шляхом і відповідає системі понять, через які експерт оцінює різні якісні сторони мети. Відношення I_1 дає змогу отримати нечітку відповідність ψ_2 з функцією належності:

$$\mu_2(u,v): V \times U \to [0,1].$$

Тут $\mu_2(v,u)$ інтерпретується як ступінь впливу показника $v \in \{V_i\}_n$ на значення агрегованого показника $u \in \{U_j\}_m$.

Абсолютне вираження відносної значимості кожного з агрегованих показників U_j, $j = \overline{1,m}$ описується відношенням недомінованості P_1^{ND} з функцією належності

$$\mu_4(u): U \to [0,1]. \qquad (9.2)$$

Тут $\mu_4(u)$ інтерпретується як значимість кожного агрегованого показника $u \in \{U_j\}_m$.

Відображення множини альтернатив X в просторі агрегованих показників $U_1, U_2, ..., U_m$ описує нечітку відповідність ψ_3 виражену у вигляді наступної композиції:

$$\psi_3 = \psi_1 \cdot \psi_2 \,. \tag{9.3}$$

Тут $\mu_3(x, y)$ інтерпретується як ступінь наявності у альтернативи $x \in X$ якісного аспекту мети $u \in \{U_j\}_m$.

На рівні прийняття рішення виявляється відповідність між описом довільної альтернативи *x* в системі агрегованих показників $U = (U_1, U_2, ..., U_m)$ та значенням глобального критерію *Y*, який представляється у вигляді лінгвістичної змінної

$$Y = <N_y, T(Y), V, M_y>,$$

де N_y – назва лінгвістичної змінної;

$T(Y) = \{y_l^j\}_L$ – терм-множина лінгвістичної змінної;

$\{y_l^j\}$ – множина первинних за змістом термів;

V – універсальна множина;

M_y – семантичне правило, яке формалізує смисл термів з $T(Y)$ у вигляді нечітких множин $M(y)$ з функціями належності $\mu[M(y)\mathrm{I}V]$ для всіх $y \in T(Y)$.

Розбиття множини альтернатив X на класи $X_1, X_2, ..., X_N$ описується нечітким відображенням ψ_5:

$$\psi_5 = \psi_3 \cdot P_1^{ND} \,. \tag{9.4}$$

Тут $\mu_5(x, y)$ інтерпретується як ступінь належності альтернативи $x \in X$ до нечіткої множини $M(y)$, $y \in Y^1$. Кількісно цією функцією оцінюється належність альтернативи до відповідного класу розбиття $X_1, X_2, ..., X_N$.

Для визначення у вищенаведеній формулі відношення недомінування агрегованих показників P_1^{ND} необхідно отримати від експерта додаткову інформацію про ціль системного аналізу у вигляді вербального опису $B = \{B_k\}_N$, де B_k – матриця значень лінгвістичних змінних:

$$B_k = \begin{pmatrix} t_{\alpha 1}^1 & t_{\alpha 1}^2 & \dots & t_{\alpha 1}^m & y_{\alpha 1}^k \\ t_{\alpha 2}^1 & t_{\alpha 2}^2 & \dots & t_{\alpha 2}^m & y_{\alpha 2}^k \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{\alpha L}^1 & t_{\alpha L}^2 & \dots & t_{\alpha L}^m & y_{\alpha L}^k \end{pmatrix}, \quad k = \overline{1, N}, \qquad (9.5)$$

де $t_{\alpha l}^j \in T(U_j)$, $j = \overline{1, m}$;

$y_{\alpha l}^k \in T(Y)$, $k = \overline{1, N}$, $l = \overline{1, L}$, $\alpha \in \{1,2,..., r\}$.

9.1. Алгоритм розв'язку задач системного аналізу

Діалоговий алгоритм системного аналізу включає дві процедури: П1 – процедура формальної ідентифікації мети системного аналізу, яка забезпечує перетворення отриманого від експерта лінгвістичного опису мети в алгебраїчний (у вигляді цільової функції) та вибір відповідного типу операції композиції (5.1) для обробки інформації;

П2 – процедура лінгвістичної оцінки альтернатив, яка структуризує множину альтернатив X та дозволяє вибрати найкращу.

Процедура П1 складається з наступних кроків.

Крок 1. Введення вербального опису мети системного аналізу $B = \{B_k\}_N$ від експерта.

Крок 2. Фазифікація B_k, $k = \overline{1, N}$ вербального опису (9.5) реалізується формулою (5.3).

Крок 3. Розв'язання системи нечітких рівнянь (9.4). Матриця $\{\mu_3(x,u)\}_{m \times L}$ та вектор $\{\mu_5(x, y)\}_L$ визначені на кроці 2, а вектор $\{\mu_4(U_j)\}_m$ є невідомим.

Крок 4. Якщо система (9.4) для всіх типів операції композиції (5.1) не має розв'язку або має нескінченне число розв'язків, то експертом проводиться корегування вербального опису B з метою виключення його суперечності (при відсутності розв'язку) чи для підвищення інформативності (при декількох розв'язках). Перехід до кроку 1.

Крок 5. Вибір розв'язку системи (9.4) та відповідного йому типу композиції за критерієм максимальної точності $\mu_4(u)$.

Крок 6. Вивід розв'язку $\mu_4(u)$ для всіх $u \in \{U_j\}_m$ та відповідного типу композиції в базу знань системи (БЗ) та на монітор експерту.

Крок 7. Якщо експерт незадоволений результатом розв'язку, то здійснюється коригування вербального опису B та перехід до кроку 1.

Крок 8. Кінець процедури П1.

Процедура П2 включає наступні кроки.

Крок 1. Ввід експертом альтернативи $x \in X$.

Крок 2. Обчислення значень функції належності $\mu_1(x, v)$ нечіткої відповідності ψ_1 за формулою (9.1).

Крок 3. Обчислення значень функції належності $\mu_3(x, u)$ нечіткої відповідності ψ_3 за формулою (9.3). Значення функції належності нечіткої відповідності ψ_2 та типу композиції беруться з БЗ системи.

Крок 4. Дефазифікація $\psi_3 : U_j = t_\alpha^j, \quad j = \overline{1, m}$ за формулою (5.2).

Крок 5. Обчислення значень функції належності $\mu_5(x, y_1^k)$ нечіткої відповідності $\psi_5, \quad k = \overline{1, N}$ за формулою (9.4). Значення $\mu_4(u)$ для всіх $u \in \{U_j\}_m$ та типу композиції беруться з процедури П1 (через БЗ системи).

Крок 6. Дефазифікація ψ_5:

$$Y = \{ y_1^* \mid y_1^* \in Y^1,\ \mu_5(x, y_1^*) = \max_k \{\mu_5(x, y_1^k)\}\}.$$

Крок 7. Вивід $x \leftrightarrow (U_j = t_\alpha^j,\ j = \overline{1, m};\ Y = y_1^*) \quad x \in X$ з БЗ системи до експерта.

Крок 8. Якщо експерт не задоволений результатом, то здійснюється коригування вербального опису B і виклик процедури П1.
Крок 9. Кінець процедури П2.

Приклад. Потрібно здійснити вибір найкращого проекту внутрішньогосподарського землеустрою з використанням діалогової моделі системного аналізу.

Для оцінки проекту на якісному рівні виділяються дві лінгвістичні змінні з назвами N_1 = ”ефективність”, N_2 = ”якість” та терм-множинами $T(U_j)$, $j = 1, 2$.

На рівні прийняття розв’язку виділена терм-множина абсолютних оцінок якості проекту $T(Y)$ з первинним за змістом термом $Y^1 = \{y =$ ”відмінно”$\}$.

Вихідні дані для оцінки проекту подані у вигляді нечіткого відношення ψ_1 в табл. 9.1. Взаємозв’язок системи критеріїв $\{V_i\}_4$ та лінгвістичних ознак $\{U_j\}_2$ заданий у вигляді нечіткої відповідності ψ_2 в табл. 9.2, а ціль проектування – у вигляді вербального опису $B(Y)$ в табл. 9.3.

Таблиця 9.1.

Вихідні дані для визначення найкращого проекту внутрішньогосподарського землеустрою

Номер проекту	Часткові критерії			
	$f_1 / \hat{f}_1$	$f_2 / \hat{f}_2$	$f_3 / \hat{f}_3$	$f_4 / \hat{f}_4$
Проект №1	20 / 0	2 / 1	65 / 0,6	3 / 0,67
Проект №2	15 / 0,33	4 / 0,33	45 / 0,2	4 / 0,33
Проект №3	10 / 0,67	5 / 0	85 / 1	5 / 0
λ_i	0,42	0,24	0,20	0,14
v_i^-	5	2	35	2
v_i^+	20	5	85	5

де f_1 – відстань від садиби (ферми) до населеного пункту, *км*;

f_2 – середня крутизна схилу, *градуси*;

f_3 – якість ґрунту, *бали бонітету*;

f_4 – потреба в меліораціях, *га*.

Примітка: $\widehat{f}_i$ – нормоване значення критерію, в межах від 0 до 1. $\widehat{f}_i$ – визначається за формулою (9.1).

Таблиця 9.2.

Взаємозв'язок системи критеріїв та лінгвістичних змінних

Лінгвістичні ознаки	Критерії			
	V_1	V_2	V_3	V_4
U_1	1	0,8	1	0,1
U_2	0	0,2	0	0,9

Таблиця 9.3.

Опис мети проектування

Еталони	Вербальний опис			Числовий опис		
	U_1	U_2	Y	$\mu_3(x, U_1)$	$\mu_3(x, U_2)$	$\mu_5(x, y)$
x_1^e	Майже ефективно	Якісно	Майже відмінно	0,8	1	0,8
x_2^e	Ефективно	Не дуже якісно	Майже відмінно	1	0,6	0,8

Розв'язок. 1. За формулою (5.3) визначаємо значення функцій належності первинних за змістом термів вербального опису $B(Y)$: $\mu_3(x,U_1)$, $\mu_3(x,U_2)$, $\mu_5(x,y)$ (табл. 9.3).

2. Підставляючи отримані значення функцій належності в формулу (9.4) і розв'язавши систему двох лінійних рівнянь з двома невідомими, визначаємо елементи відношення недомінування P_1^{ND}:

$$\begin{matrix} 0{,}8\mu_4(U_1)+\mu_4(U_2)=0{,}8 \\ \mu_4(U_1)+0{,}6\mu_4(U_2)=0{,}8 \end{matrix} \to \begin{cases} \mu_4(U_1)=0{,}615 \\ \mu_4(U_2)=0{,}308 \end{cases}.$$

3. За формулою (9.3) визначаємо відображення множини альтернатив $X=\{x_1,x_2,x_3\}$ в простір лінгвістичних змінних $\{U_j\}_2$:

$$\overset{\mu_1(x,V)}{\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} V_1 & V_2 & V_3 & V_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1,0 & 0,6 & 0,67 \\ 0,33 & 0,33 & 0,2 & 0,33 \\ 0,67 & 0 & 1,0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}} \cdot \overset{\mu_2(x,U)}{\begin{array}{c} \begin{array}{cc} U_1 & U_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1,0 & 0 \\ 0,8 & 0,2 \\ 1,0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}} = \overset{\mu_3(x,U)}{\begin{array}{cc} \begin{array}{cc} U_1 & U_2 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0,8 \\ 0,82 & 0,46 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \end{array}}.$$

Отримані значення функцій належності первинних за змістом термів $\mu_3(x,u)$ дають можливість зробити лінгвістичну оцінку кожному з проектів (формула (5.2)): x_1 – “ефективно і майже якісно”; x_2 – “майже ефективно і не дуже якісно”; x_3 – “ефективно і неякісно”.

4. За формулою (9.4) визначаємо ступінь належності кожної з альтернатив до нечіткої множини $M(y)$, де y = “відмінно”, тобто належить до класу “відмінних” проектів:

$$\overset{\mu_3(x,U)}{\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} U_1 & U_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1,0 & 0,8 \\ 0,82 & 0,46 \\ 1,0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}} \cdot \overset{\mu_4(U,y)}{\begin{array}{cc} y & \\ \begin{pmatrix} 0,615 \\ 0,308 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} U_1 \\ U_2 \end{array} \end{array}} = \overset{\mu_5(x,y)}{\begin{array}{cc} y & \\ \begin{pmatrix} 0,86 \\ 0,64 \\ 0,62 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \end{array}}.$$

Отримані значення функцій належності альтернатив до класу “відмінних” проектів дають змогу визначити інтегральні оцінки якості у вербальній формі (5.2): x_1 – “відмінно”, x_2 та x_3 – “не дуже відмінно”.

5. В якості найкращого вибирають проект внутрішньогосподарського землеустрою $\boldsymbol{x_1}$, так як йому відповідає найвище значення інтегральної оцінки якості “відмінно”.

Завдання. Здійснити вибір найкращого проекту внутрішньогосподарського землеустрою з використанням діалогової моделі системного аналізу, використовуючи вихідні дані для свого варіанту. Як альтернативи (x_i) використати фермерські господарства, що знаходиться в різних районах області. Критеріями оцінювання характеристик землеустрою (v_i) може слугувати відстань до населеного пункту, крутизна схилу ділянки, родючість ґрунтів (бали бонітету), визначена площа території, що потребує меліорації.

Серед якісних характеристик цілей потрібно виділити ефективність та якість.

Література

1. Згуровський М.З., Панкратова Н.Д. Основи системного аналізу: Підручник / За заг. ред. М.З. Згуровського. – Київ: Видавнича група BHV, 2007. – 544 с.
2. Катренко А.В. Системний аналіз об’єктів та процесів комп’ютеризації: Навч. посіб. – Львів: Новий світ-2000, 2003. – 424 с.
3. Ладанюк А.П. Основи системного аналізу: Навч. посібник. – Вінниця: Нова книга, 2004. – 176 с.
4. Сорока К.О. Основи теорії систем і системного аналізу: Навч. посіб. – 2-ге вид., перероб. та випр. – Харків: Тимченко, 2005. – 288 с.
5. Тимченко А.А. Основи системного проектування та системного аналізу складних об’єктів. 2: Основи системного підходу та системного аналізу об’єктів нової техніки : Навч. посібник / За ред. Ю.Г. Леги. – Київ: Либідь, 2004. – 288 с.
6. Шарапов О.Д. Системний аналіз: Навч.-метод. посібник / О.Д. Шарапов, В.Д. Дербенцев, Д.Є. Семьонов. – Київ: КНЕУ, 2003. – 154 с.
7. Спицнадель В.Н. Основы системного анализа. – С.-П. «Бизнес-пресса», 2000. – 203 с.
8. Roussopoulos N.D. A semantic network model of data bases. — TR № 104, Department of Computer Science, University of Toronto, 1976.

Розробники: _____________ доцент, к.ф.-м.н. А. Кундрат
_____________ ст. викладач, к.т.н. А. Люсак

“24” жовтня 2011 р.