Проф. А. А. Адамовъ

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

ИЗДАНІЕ
КАССЫ ВЗАИМОПОМОЩИ
СТУДЕНТОВЪ
СПБ. ПОЛИТЕХНИЧЕСКАГО ИНСТИТУТА
ИМПЕРАТОРА
ПЕТРА ВЕЛИКАГО.

Проф. А. А. Адамовъ. ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

ИИГребенщ

Изданіе Кассы Взаимопомощи Студентовъ СПБ. Политехническаго Института
Императора Петра Великаго.

Проф. А. А. Адамовъ.

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

КУРСЪ ЛЕКЦІЙ

(III-IV сем. Кораблестроительнаго
и Инженерностроительнаго отдѣленій
СПБ. Политехническаго Института).

Изданіе 3-е
исправленное и дополненное.

С.-ПЕТЕРБУРГЪ.

Типо-Литографія И. Трофимова, Можайская ул., д. № 3.

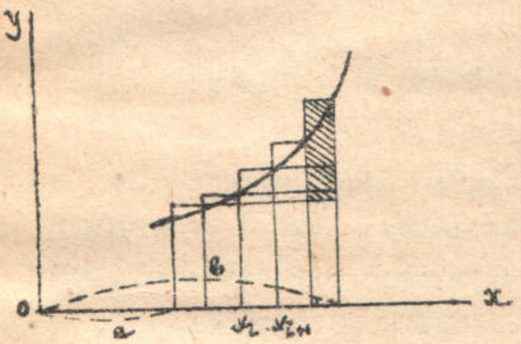
1912.

О ПРИБЛИЖЕННОМЪ ВЫЧИСЛЕНІИ ПЛОЩАДЕЙ.

Положимъ, что намъ задана кривая $y = f(x)$ въ прямоугольной системѣ координатъ, и требуется вычислить площадь, ограниченную этой кривой, осью абсциссъ и двумя ординатами, заданными уравненіями:

$$x = a \text{ и } x = b.$$

Положимъ для опредѣленности, что кривая возрастающая въ промежуткѣ (a, b); это обстоятельство не ограничитъ общности нашихъ разсужденій, такъ какъ случай, когда кривая представляется убывающей функціей, разбирается подобнымъ же образомъ; если же функція то возрастаетъ, то убываетъ, тогда мы можемъ разбить площадь на такія части, гдѣ функція только возрастаетъ или только убываетъ, и въ каждой части примѣнить нижеслѣдующія разсужденія. Чтобы вычислить требуемую площадь, раздѣлимъ основаніе ея $b-a$ на n равныхъ частей; каждая часть будетъ:



Фиг. 1.

$$\frac{b - a}{n} = \Delta x .$$

Введемъ такое знакоположеніе:

$$x_i = a + i \Delta x ,$$

такъ что

$$x_{i+1} - x_i = \Delta x .$$

Проведя прямыя, параллельныя оси у-овъ, черезъ точки съ абсциссами $x_0 = a$, x_1, x_2, ... x_i, x_{i+1}, ... $x_n = b$ строимъ прямоугольники входящіе (внутренніе) и выходящіе. Сумма площадей всѣхъ внутреннихъ прямоугольниковъ будетъ

Фиг.2.

$$S_1 = \sum_{i=0}^{i=n-1} f(x_i)\,\Delta x_i$$

Сумма площадей выходящихъ прямоугольниковъ:

$$S_2 = \sum_{i=0}^{i=n-1} f(x_{i+1})\,\Delta x_i\,.$$

Разность между этими площадями, какъ видно изъ чертежа (она заштрихована), равна:

$$S_2 - S_1 = [f(b) - f(a)]\,\Delta x$$

Если S обозначаетъ истинную величину искомой площади, то, очевидно, имѣемъ слѣдующее неравенство:

$$S_1 < S < S_2\,.$$

Увеличивая n безпредѣльно, получимъ:

$$\text{пред.}\,\Delta x = 0 \quad \text{и пред.}(S_2 - S_1) = 0,$$

откуда

$$\text{пред.}S_2 = \text{пред.}\,_1.$$

Въ силу неравенства:

$$S_1 < S < S_2$$

и равенства предѣловъ S_1 и S_2 заключаемъ, что S есть общій предѣлъ S_1 и S_2. Этотъ предѣлъ называется опредѣленнымъ интеграломъ и обозначается такъ:

$$S = \text{пред.} \sum_{i=0}^{i=n-1} f(x_i)\,\Delta x_i = \text{пред.}_{n=\infty} \sum_{i=0}^{i=n-1} f(x_{i+1})\,\Delta x_i =$$

$$= \int_a^b f(x)\,dx$$

Непосредственное вычисленіе опредѣленнаго интеграла, какъ предѣла суммы, очень затруднительно, но дѣло упрощается благодаря дифференціальному исчисленію. Именно, разсмотримъ такую функцію F(x), производная которой: $F'(x) = f(x)$. $\int f(x)dx = F(x) + \int dx$

Напишемъ равенство: $f(x)dx = f(x)\,\Delta x = dF(x)$.

Имѣемъ также по опредѣленію производной:

$$\frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x) + \varepsilon,$$

откуда

$$F(x + \Delta x) - F(x) = F'(x)\,\Delta x + \varepsilon\,\Delta x = d\,F(x) + \varepsilon\,\Delta x$$

или

$$d\,F(x) = f(x)\,\Delta\,x = F(x + \Delta\,x) - F(x) - \varepsilon\,\Delta\,x.$$

Выраженіе $f(x)\,\Delta\,x$ представляетъ площадь элементарнаго прямоугольника. Написавъ выраженія для всѣхъ площадокъ и сложивъ ихъ, получимъ въ предѣлѣ всю искомую площадь:

$$f(x_0)\,\Delta\,x_0 = F(x_1) - F(a) - \varepsilon_0\,\Delta\,x_0$$

$$f(x_1)\,\Delta\,x_1 = F(x_2) - F(x_1) - \varepsilon_1\,\Delta\,x_1$$

$$\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f(x_{n-\;})\Delta\;_{n-2} = F(x_{n-1}) - F(x_{n-2}) - \varepsilon_{n-2}\,\Delta\,x_{n-2}$$

$$f(x_{n-\;})\,\Delta\,x_{n-1} = F(b) - F(x_{n-1}) - \varepsilon_{n-1}\,\Delta\,x_{n-1}$$

$$\sum_{i=o}^{i=n-1} f(x_i)\,\Delta\,x_d = F(b) - F(a) - \sum_{i=o}^{i=n-1} \varepsilon_i\,\Delta\,x_i$$

и въ предѣлѣ:

$$\text{пред.}_{n=}\ \sum_{i=0}^{i=n-1} f(x_i)\,\Delta\,x_i = \int_a^b f(x)dx =$$

$$= F(b) - F(a) - \text{пред.}\sum_{i=o}^{i=n-1} \varepsilon_i\,\Delta\,x_i.$$

При достаточно большомъ n - ε_i будетъ сколь угодно мало по абсолютной величинѣ. Обозначивъ черезъ ε наибольшее по абсолютной величинѣ изъ чиселъ ε_i, будемъ имѣть $|\varepsilon_i| < \varepsilon$, и потому

$$|\Sigma\ \varepsilon_i\,\Delta\,x_i)| \leqq \Sigma\ |\varepsilon_i|\ \Delta\,x_i < |\varepsilon|\ \Sigma\,\Delta\,x_i = |\varepsilon|(b - a)$$

и въ предѣлѣ

$$\text{пред.}_{n=\infty}\ \Sigma\,\varepsilon_i\,\Delta\,x_i = 0;$$

такимъ образомъ

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

гдѣ $F(x)$ такая функція, что $F'(x) = f(x)$.

Для примѣра найдемъ площадь параболы k-го порядка, отнесенной къ касательной при вершинѣ и къ оси симметріи въ прямоугольныхъ координатахъ; уравненіе ея пусть будетъ:

$$y = x^k,$$

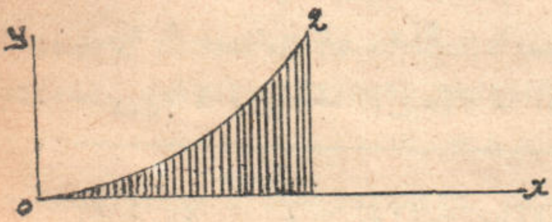
гдѣ $k > 1$; такъ какъ

$$\left(\frac{x^{k+1}}{k+1}\right)' = x^k \text{ (здѣсь } f(x) = x^k,\ F(x) = \frac{x^{k+1}}{k+1}\text{)},$$

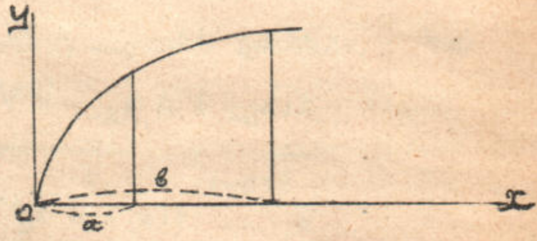
то площадь въ предѣлахъ отъ 0 до 1 найдется слѣдующимъ образомъ:

$$Q = \int_0^1 x^k dx = \left(\frac{x^{k+1}}{k+1}\right)_0^1 = \frac{1}{K+1}.$$

Если бы было $0 < k < 1$, то парабола имѣла бы такой видъ:



Фиг.3.



Фиг.4.

Но не всегда возможно найти точное выраженіе площади путемъ интегрированія. На практикѣ могутъ встрѣтиться слѣдующія затрудненія:

1) Не всегда возможно найти $F(x)$. Напримѣръ, положивъ

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} = F'(x),$$

мы не можемъ найти $F(x)$, такъ какъ такой функціи, производная которой равна $\frac{\sin x}{x}$, нѣтъ среди извѣстныхъ намъ функцій.

2) Кривая $y = f(x)$ задана не аналитически, а графически (напримѣръ, въ техникѣ).

3) Заданы отдѣльныя ординаты кривой $y = f(x)$. Для этихъ случаевъ необходимо составить формулы приближеннаго вычисленія интеграловъ. Общій видъ формулъ приближеннаго вычисленія интеграловъ слѣдующій:

$$\int_a^b f(x)dx = (b - a)\,[C_1 f(x_1) + C_2 f(x_2) + \ldots + C_k f(x_k)],$$

гдѣ: $C_1, C_2, C_3 \ldots C_k$ - постоянныя числа, а $x_1, x_2, x_3 \ldots x_k$ абсциссы нѣкоторыхъ промежуточныхъ точекъ между a и b.

Здѣсь мы имѣемъ $2k$ постоянныхъ. Всѣ формулы отличаются между собою: 1) числомъ k и 2) выборомъ постоянныхъ C_j и x_j.

Если мы назначимъ заранѣе m зависимостей между 2k востоянными, то наша задача будетъ состоять въ томъ, чтобы распорядиться остающимися (2k - m) зависимостями такъ, чтобы наша формула приближеннаго вычисленія была точною для цѣлой функціи возможно высокой степени, именно, степени 2k - m - 1, такъ какъ число произвольныхъ коэффиціентовъ такой функціи равно 2k-m.

Прежде чѣмъ идти далѣе, преобразуемъ нашъ интегралъ, введя новую перемѣнную. Положимъ

$$x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}\,t.$$

Найдемъ при какихъ значеніяхъ t это выраженіе обращается въ a и въ b. Подставляя вмѣсто x его значенія a и b, получимъ

$$a = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}\,t,$$

$$b = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}\,t,$$

откуда

$$t = \frac{a-b}{b-a} = -1 \quad \text{и} \quad t = \frac{b-a}{b-a} = +1.$$

Дифференцируя выраженія для x, получимъ:

$$dx = \frac{b-a}{2}\,dt.$$

Если мы теперь подставимъ вмѣсто x его выраженіе въ f(x), то получимъ функцію отъ t

$$f(x) = f\left(\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}\,t\right) = F(t),$$

а нашъ интегралъ представится въ видѣ:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{-1}^{+1} F(t)\,\frac{b-a}{2}\,dt = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{+1} F(t)dt =$$

$$= (b-a)\sum_{j=1}^{k} C_j\,F(t_j),$$

причемъ

$$x_j = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}\,t_j\,.$$

Такимъ образомъ мы избавились отъ чиселъ a и b и пришли къ слѣдующей формулѣ приближеннаго вычисленія площадей

$$\int_{-1}^{+1} F(t)dt = 2\sum_{j=1}^{k} C_j F(t_j) = 2[C_1F(t_1) + C_2F(t_2)+\ldots+C_kF(t_k)],$$

гдѣ $t_1, \ldots t_k$ представляютъ нѣкоторыя числа, заключенныя между -1 и $+1$. Постараемся найти условія необходимыя и достаточныя для того, чтобы приведенная формула была точною для цѣлой функціи $F(t)$ нѣкоторой степени $2p-1$. Разложивъ нашу функцію въ рядъ по формулѣ Маклорена:

$$F(t) = F(0) + \frac{t}{1}F'(0) + \frac{t^2}{1.2}F''(0) + \ldots + \frac{t^{2p-1}}{(2p-1)!}F^{2p-1}(0).$$

Рядъ обрывается самъ собою, такъ какъ производныя порядка $2p$ и выше равны 0.

Интегрируя этотъ рядъ, получимъ слѣдующее:

$$\int_{-1}^{+1} F(t)dt = \int_{-1}^{+1} F(0)dt + \int_{-1}^{+1}\frac{t}{1}F'(0)dt + \int_{-1}^{+1}\frac{t^2}{1.2}F''(0)dt + \ldots$$

$$\ldots + \int_{-1}^{+1}\frac{t^{2p-1}}{(2p-1)!}F^{2p-1}(0)dt.$$

Всѣ входящіе сюда интегралы имѣютъ видъ

$$\int_{-1}^{+1} t^k dt = \left|\frac{t^{k+1}}{k+1}\right|_{-1}^{+1} = \begin{cases} 0 & \text{— если } k \text{ нечетное} \\ \dfrac{2}{k+1} & \text{— если } k \text{ четное} \end{cases}$$

А потому окончательно имѣемъ:

$$\int_{-1}^{+1} F(t)dt = 2F(0) + \frac{2}{3}\,\frac{F''(0)}{1.2} + \frac{2}{5}\,\frac{F^{IV}(0)}{1.2.3.4} + \ldots + \frac{2}{2p-1}\,\frac{F^{2p-2}(0)}{(2p-2)!} \quad (*)$$

По формулѣ Маклорена можно написать:

$$F(t_j) = F(0) + \frac{t_j}{1}F'(0) + \frac{t_j^2}{1.2}F''(0) + \ldots + \frac{t_j^{2p-1}}{(2p-1)}F^{2p-1}(0).$$

Помощью этой формулы составимъ выраженіе

$$2\sum_{j=1}^{k} C_j F(t_j).$$

Получимъ слѣдующее:

$$2\sum_{j=1}^{k} C_j F(t_j) = 2F(0)\sum C_j + 2F'(0)\sum C_j t_j +$$

$$+ 2\frac{F''(0)}{1.2}\sum C_j t_j^2 + \ldots + \frac{2F^{2p-1}(0)}{(2p-1)!}\sum C_j t_j^{2p-1} \quad \ldots\ldots (**).$$

Выраженія (*) и (**) представляютъ собою лѣвую и правую части равенства I:

$$\int_{-1}^{+1} F(t)dt = 2 \sum_{j=1}^{k} C_j F(t_j),$$

а такъ какъ это равенство должно быть тождествомъ, то приравнивая коэффиціенты при производныхъ одного и того же порядка въ выраженіяхъ (*) и (**), получимъ 2p условій, необходимыхъ и достаточныхъ для того, чтобы наша исходная формула была точною для цѣлой функціи степени 2p-1. Эти условія слѣдующія:

$$\left.\begin{array}{lll} \Sigma C_j = 1 & \Sigma C_j t_j^3 = 0 & \ldots\ldots \\ \Sigma C_j t_j = 0 & \Sigma C_j t_j^4 = 1/5 & \Sigma C_j t_j^{2p-2} = \dfrac{1}{2p-1} \\ \Sigma C_j t_j^2 = 1/3 & \Sigma C_j t_j^5 = 0 & \Sigma C_j t_j^{2p-1} = 0 \end{array}\right| \ldots\ldots(A).$$

Если мы хотимъ, чтобы исходная формула была точною для цѣлой функціи степени 2p, то къ предыдущимъ условіямъ присоединится еще (2p+1)-ое условіе

$$\Sigma C_j t_j^{2p} = \frac{1}{2p + 1}.$$

Итакъ, если число заранѣе заданныхъ зависимостей будетъ четное, то

$$2k - m = 2p$$

и мы поставимъ условія (A), чтобы наша приближенная формула была точною для цѣлой функціи степени 2p-1.

Если же m нечетное, то 2k - m = 2p + 1; тогда мы поставимъ зависимости (A) съ присоединеніемъ

$$\Sigma C_j t_j^{2p} = \frac{1}{2p + 1}$$

и тогда формула будетъ вѣрна для цѣлой функціи степени 2p.

Разберемъ теперь 3 частныхъ случая выбора чиселъ t_j и C_j.

1 случай: Формула Гаусса.

Въ формулѣ Гаусса нѣтъ вовсе заранѣе заданныхъ зависимостей между t_j и C_j, такъ что m = 0, и формула

$$\int_{-1}^{+1} F(t)dt = 2 \sum_{j=1}^{k} C_j F(t_j) \ldots\ldots\ldots\ldots(I)$$

будетъ точною для цѣлой функціи степени 2k-1 (или ниже), если C_j и t_j подчинить уравненіямъ:

$$\left.\begin{array}{l}\Sigma C_j = 1, \ \ \Sigma C_j t_j = 0, \ \ \Sigma C_j t_j^2 = \frac{1}{3}, \ \ \Sigma C_j t_j^3 = 0, \\ \Sigma C_j t_j = \frac{1}{5}, \ldots \ \Sigma C_j t_j^{2k-2} = \frac{1}{2k-1}, \ \ \Sigma C_j t_j^{2k-1} = 0.\end{array}\right| \quad (*)$$

Чтобы найти отсюда C_j и t_j замѣтимъ, что при выполненіи условій (*) формула (I) должна быть справедливою между прочимъ для функціи вида

$$F(t) = \lambda_i(t) = \frac{\omega(t)}{(t - t_i)\omega'(t_i)},$$

гдѣ $\omega(t) = (t - t_1)(t - t_2)\ldots (t - t_k)$ и $i = 1, 2, \ldots k$, такъ какъ эта функція $\lambda_i(t)$ будетъ степени $(k-1)$. Подставляя же въ формулу (I) $F(t) = \lambda_i(t)$, мы находимъ, что

$$F(t_j) = \lambda_i(t_j) = 0 \ \text{при } j \text{ не} = i$$

$$F(t_i) = \lambda_i(t_i) = 1$$

(при $t = t_i$, $\lambda_i(t)$ представляется въ неопредѣленной формѣ $\frac{0}{0}$, но раскрывая эту неопредѣленность по извѣстному правилу, найдемъ истинное значеніе = 1:

$$\left[\frac{\omega(t)}{(t - t_i)\omega'(t_i)}\right]_{t=t_i} = \left|\frac{\omega'(t)}{1}\right|_{t=t_i} \cdot \frac{1}{\omega'(t_i)} = 1.$$

Итакъ, при $F(t) = \lambda_i(t)$ изъ формулы (I) слѣдуетъ:

$$\int_{-1}^{+1} \lambda_i(t)dt = 2C_i,$$

откуда

$$C_i = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \frac{\omega(t)dt}{(t - t_i)\omega'(t_i)} \ \ldots\ldots\ldots \ (*')$$

при $i = 1, 2, \ldots k$.

Такимъ образомъ всѣ числа C_i будутъ извѣстны, если намъ удастся найти числа t_i, представляющія корни уравненія степени k-ой: $\omega(t) = 0$.

Для нахожденія функціи $\omega(t)$, замѣчаемъ, что формула (I) должна быть вѣрна для всякой функціи вида

$$F(t) = \omega(t).\varphi(t),$$

если степень цѣлой функціи $\varphi(t)$ не превосходитъ $(k-1)$ (такъ какъ тогда степень $\omega(t)\varphi(t)$ не выше $2k-1$); подставляя это выраженіе $F(t)$ въ формулу (I), замѣчаемъ, что $F(t_j) = 0$ при всѣхъ

$j = 1, 2, \ldots k$, такъ что формула (I) даетъ для опредѣленія $\omega(t)$ равенство

$$\int_{-1}^{+1} \omega(t).\varphi(t)dt = 0, \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; (*")$$

справедливое для всякой цѣлой функціи $\varphi(t)$ степени не выше $(k-1)$. Отсюда можно найти $\omega(t)$ слѣдующимъ образомъ. Составимъ функцію

$$\Phi(t) = \frac{(t+1)^k}{k!}\omega(-1) + \frac{(t+1)^{k+1}}{(k+1)!}\omega'(-1) + \ldots.$$

$$\ldots. + \frac{(t+1)^{2k}}{2k!}\omega^{k}(-1) = (t+1)^k\,\psi(t),$$

гдѣ $\psi(t)$ - цѣлая функція степени k-ой; тогда

$$\Phi^{(k)}(t) = \omega(-1) + \frac{t+1}{1}\omega'(-1) + \ldots + \frac{(t+1)^k}{k}\omega^{k}(-1) = \omega(t)$$

(по формулѣ Тэйлора), и формула (*") даетъ

$$\int_{-1}^{+1} \Phi^{k}(t).\varphi(t)dt = 0.$$

Приложимъ къ послѣднему интегралу k разъ подрядъ интегрированіе по частямъ:

$$\int_{-1}^{+1} \Phi^{k}(t).\varphi(t)dt = \Big|\Phi^{k-1}(t).\varphi(t)\Big|_{-1}^{+1} - \int_{-1}^{+1}\Phi^{k-1}(t).\varphi'(t)dt =$$

$$= \Big|\Phi^{k-1}(t).\varphi(t) - \Phi^{k-2}(t)\varphi'(t)\Big|_{-1}^{+1} + \int_{-1}^{+1}\Phi^{k-2}(t).\varphi''(t)dt =$$

$$= \ldots. = \Big|\Phi^{k-1}(t).\varphi(t) - \Phi^{k-2}(t).\varphi'(t) + \Phi^{k-3}(t).\varphi''(t) -$$

$$- \ldots. + (-1)^{k-1}\,\Phi(t).\varphi^{k-1}(t)\Big|_{-1}^{+1} + (-1)^k\int_{-1}^{+1}\Phi(t).\varphi^{k}(t)dt;$$

но такъ какъ $\varphi(t)$ степени не выше $(k-1)$-ой, то $\varphi^{k}(t) = 0$; кромѣ того, при $t = -1$ выходитъ

$$\Phi(-1) = \Phi'(-1) = \ldots. = \Phi^{k-1}(-1) = 0,$$

такъ какъ

$$\Phi(t) = (t+1)^k.\psi(t)$$

имѣетъ k кратный корень $t = -1$. Итакъ, внося въ формулу

$$\int_{-1}^{+} \Phi^{k}(t).\varphi(t)dt = 0$$

найденное нами выраженіе послѣдняго интеграла, получаемъ:

$$\Phi^{k-1}(1).\varphi(1) - \Phi^{k-2}(1).\varphi'(1) + \Phi^{k-3}(1).\varphi''(1) - .$$

$$. (-1)^{k-1}\Phi(1).\varphi^{k-1}(1) = 0 ,$$

и такъ какъ функція $\varphi(t)$, степени не выше $k-1$, совершенно произвольна, то предыдущее равенство требуетъ, чтобы

$$\Phi(1) = \Phi'(1) = \dots . = \Phi^{k-1}(1) = 0,$$

т.е., на основаніи теоремъ Высшей Алгебры (гл.II, § 3, курсъ проф. Адамова чтобы $\Phi(t)$ имѣло множитель $(t - 1)^{k}$, а такъ какъ

$$\Phi(t) = (t + 1)^{k}.\psi(t)$$

и $\psi(t)$ какъ разъ степени k, то должно быть

$$\psi(t) = A(t - 1)^{k} \quad \text{(А постоянное)},$$

и слѣдовательно

$$\Phi(t) = A(t^2 - 1)^{k};$$

отсюда находимъ:

$$\omega(t) = \Phi^{k}(t) = A \frac{d^{k}}{dt^{k}} [(t^2 - 1)^{k}],$$

т.е.

$$\omega = P_k(t)$$

представляетъ *полиномъ Лежандра* степени k-ой, и слѣдовательно, всѣ его k корней t_1, t_2, ... t_k представляютъ числа вещественныя и различныя и заключенныя между $- 1$ и $+ 1$, какъ доказано въ Высшей Алгебрѣ.

Итакъ, оказывается, что условія (*) выполняются, если за числа t_1, t_2, ... t_k взять k корней полинома Лежандра $P_k(t)$, и тогда числа C_j могутъ быть опредѣлены уравненіями (*')

$$C_j = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \frac{\omega(t)dt}{(t - t_j).\omega'(t_j)}$$

или найдены изъ системы (*). При этомъ формула Гаусса

$$\int_{-1}^{+1} F(t)dt = 2 \sum_{j=1}^{k} C_j F(t_j)$$

или

$$\int_a^b f(x)dx = (b - a) \sum_{j=1}^{k} C_j \, f\Big(\frac{b + a}{2} \quad \frac{b - a}{2} t_j\Big)$$

будетъ точною для цѣлой функціи степени $2k-1$ (или ниже).

Разберемъ 2 частныхъ случая:

$k = 2$:

$$P_2(t) = \frac{d^2}{dt^2}\,[(t^2 - 1)^2] = \frac{d^2}{dt^2}\,[t^4 - 2t^2 + 1] = 12\,t^2 - 4,$$

$$t^2 = \frac{1}{3}, \quad t_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad t_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Формулы (*) даютъ:

$$C_1 + C_2 = 1, \quad C_1 t_1 + C_2 t_2 = 0,$$

откуда

$$C_1 = C_2 = \frac{1}{2}.$$

Итакъ, формула

$$\int_{-1}^{+1} F(t)dt = 2\,\frac{1}{2}\,\Big[F\Big(-\frac{1}{\sqrt{3}}\Big) + F\Big(+\frac{1}{\sqrt{3}}\Big)\Big] \quad \text{или}$$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b - a}{2}\Big[f\Big(\frac{b + a}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\,\frac{b - a}{2}\Big) + f\Big(\frac{b + a}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\frac{b - a}{2}\Big)\Big]$$

вѣрна для цѣлой функціи степени 3-ей или ниже

$k = 3$:

$$P_3(t) = \frac{d^3}{dt^3}\,[(t^2 - 1)^3] = \frac{d^3}{dt^3}\,[t^6 - 3t^4 + 3t^2 - 1] =$$

$$= 120t^3 - 72t = 24t(5t^2 - 3).$$

Отсюда

$$t_1 = -\sqrt{{}^3/_5}\,, \quad t_2 = 0, \quad t_3 = +\sqrt{{}^3/_5}$$

C_1, C_2, C_3 опредѣляются системою

$$C_1 + C_2 + C_3 = 1$$

$$-C_1 + C_3 = 0$$

$${}^2/_5(C_1 + C_3) = {}^1/_3,$$

такъ что

$$C_1 = C_3 = {}^1/_{18}\,, \quad C_2 = {}^8/_{18} = {}^4/_9\,.$$

Формула

$$\int_{-1}^{+1} F(t)dt = \tfrac{1}{9}[5F(-\sqrt{3/5}) + 8F(0) + 5F(+\sqrt{3/5})]$$

или

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{18}[5f(\frac{b+a}{2} - \frac{b-a}{2}\sqrt{3/5}) +$$

$$+ 8f(\frac{b+a}{2}) + 5f(\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}\sqrt{3/5})]$$

оказывается точной для цѣлой функціи степени 5-ой или ниже.

При большихъ значеніяхъ k числа C_j представляются уже вообще ирраціональными.

II случай. Формула Котеса. Числа t_j принимаютъ значенія, равноотстоящія другъ отъ друга, отъ - 1 до + 1, такъ что имѣемъ k условій:

$$t_1 = -1; \quad t_2 = -1 + \frac{2}{k+1}; \ \ldots$$

$$t_j = -1 + \frac{2(j-1)}{k-1} \ \ldots \ t_k = -1 + 2 = +1.$$

Число заранѣе заданныхъ условій m = k. Въ нашемъ распоряженіи остается 2k - m = k условій, которыя совпадаютъ съ первыми k уравненіями системы (A).

Положимъ k = 2.

Имѣемъ условія для t_j и C_j:

$$t_1 = -1 \text{ и } t_2 = +1$$

$$\left.\begin{aligned} C_1 + C_2 &= 1 \\ -C_1 + C_2 &= 0 \end{aligned}\right| \text{ отсюда } C_1 = C_2 = 1/2$$

Посмотримъ, не выполнилось ли условіе третье само собою:

$$C_1 + C_2 = 1/3.$$

Это условіе не выполнено, такъ какъ $C_1 + C_2 = 1$.

Имѣемъ:

$$\int_{-1}^{+1} F(t)dt = 2[\tfrac{1}{2}F(-1) + \tfrac{1}{2}F(+1)]$$

или

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)[\tfrac{1}{2}f(a) + \tfrac{1}{2}f(b)].$$

Это извѣстная *формула трапецій*. Она точна для цѣлой функціи 1-ой степени. Для функціи степени выше 1-ой она приближенна.

<u>k = 3.</u> Имѣемъ условія:

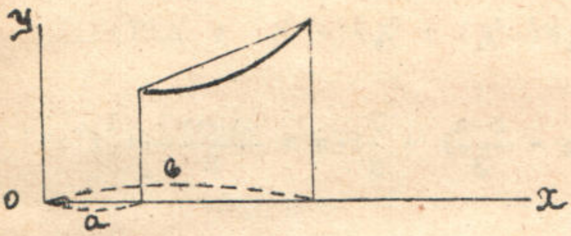
$$t_1 = -1\ ;\ t_2 = 0\ ;\ t_3 = +1$$

$$\left.\begin{aligned} C_1 + C_2 + C_3 &= 1 \\ -C_1 + C_3 &= 0 \\ C_1 + C_3 &= 1/3 \end{aligned}\right| \quad \begin{aligned} C_1 = C_3 &= 1/6 \\ C_2 &= 4/6 \end{aligned}$$

Если мы возьмемъ 4-е условіе, то окажется, что оно случайно выполнено:

$$-C_1 + C_3 = 0.$$

Условіе же пятое: $C_1 + C_3 = 1/5$ не выполнено, такъ какъ противорѣчитъ 3-му.



Фиг.5.

Итакъ:

$$\int_{-1}^{+1} F(t)dt = 2[1/6\ F(-1) + 4/6\ F(0) + 1/6\ F(+1)]$$

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)[1/6 f(a) + 4/6 f(\frac{a+b}{2}) + 1/6 f(b)].$$

Полученная формула есть *1-я формула Симпсона.* Она вѣрна для цѣлой функціи степени 3-ей (такъ какъ выполнено условіе 4-е) и ниже.

<u>k = 4.</u> Для этого случая условія будутъ слѣдующія:

$$t_1 = -1\ ;\ t_2 = -1/3\ ;\ t_3 = +1/3\ ;\ t_4 = +1.$$

4 уравненія системы (A) даютъ:

$$C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = 1 \ \ldots\ldots\ldots \ (1)$$

$$-C_1 - 1/3 C_2 + 1/3 C_3 + C_4 = 0 \ \ldots\ldots \ (2)$$

$$C_1 + 1/9 C_2 + 1/9 C_3 + C_4 = 2/3 \ \ldots\ldots \ (3)$$

$$-C_1 - 1/27 C_2 + 1/27 C_3 + C_4 = 0 \ \ldots\ldots \ (4).$$

Вычитаемъ изъ (1) (3):

$$C_2 + C_3 = 2/3 \,.\, 9/8 = 3/4\,,$$

вычитаемъ изъ (2) (4):

$$C_2 - C_3 = 0,$$

такъ что

$$C_2 = C_3 = \frac{3}{8};$$

теперь изъ (1)

$$C_1 + C_4 = \frac{1}{4},$$

а изъ второго, такъ какъ $C_2 = C_3$:

$$C_1 = C_4.$$

Слѣдовательно:

$$C_1 = C_4 = \frac{1}{8}.$$

Такимъ образомъ

$$\int_{-1}^{+1} F(t)dt = 2[\frac{1}{8}F(-1) + \frac{3}{8}F(-\frac{1}{3}) + \frac{3}{8}F(+\frac{1}{3}) + \frac{1}{8}F(+1)]$$

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)[\frac{1}{8}f(a) + \frac{3}{8}f(a + \frac{b-a}{3}) + \frac{3}{8}f(a + \frac{2(b-a)}{3}) + \frac{1}{8}f(b)].$$

Условіе пятое:

$$C_1 + \frac{1}{81}C_2 + \frac{1}{81}C_3 + C_4 = \frac{1}{5}$$

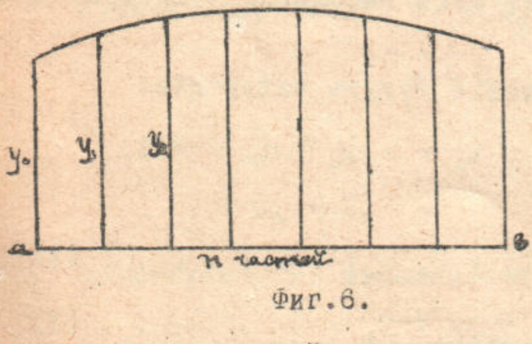
не выполняется, а потому формула вѣрна только для цѣлой функціи степени не выше 3-ей. Это *2-я формула Симпсона.*

Замѣчаніе 1. Обыкновенно вычисляемую площадь дѣлятъ предварительно на n полосъ съ равными основаніями и къ каждой полосѣ прилагаютъ формулу трапецій или *Симпсона.*

Положимъ сперва намъ нужно вычислить площадь по формулѣ трапецій.

Раздѣлимъ основаніе на n равныхъ частей (см. чертежъ), и обозначивъ

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$



Фиг.6.

приложимъ къ каждой части, заключенной между ординатами y_i и y_{i+1} формулу трапецій:

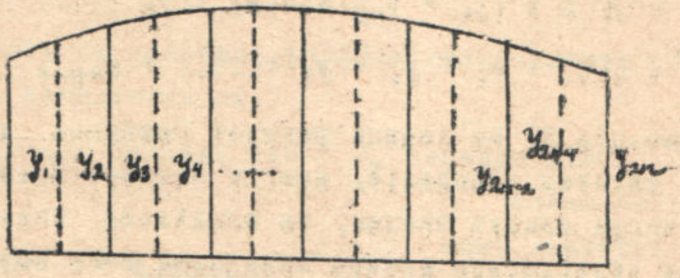
$$q_i = \Delta x[\frac{1}{2}y_i + \frac{1}{2}y_{i+1}].$$

Тогда, если взять сумму всѣхъ полосокъ, то всѣ ординаты, кромѣ y_0 и y_n войдутъ въ формулу дважды, а потому будутъ имѣть коэффиціентами не половину, а 1. Выраженіе для площади будетъ такое:

$$Q = \Delta x\,[\tfrac{1}{2}\,y_0 + \tfrac{1}{2}\,y_n + (y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_{n-1})].$$

При вычисленіи по 1-ой формулѣ *Симпсона* поступаютъ нѣсколько иначе. Такъ какъ въ этой формулѣ площадь вычисляется по 3-мъ ординатамъ, то на чертежѣ необходимо провести среднія ординаты (см. чертежъ). Здѣсь обозначимъ:

$$\Delta x = \frac{b - a}{2n}.$$



Фиг.7.

Тогда вся площадь выразится такъ:

$$Q = \frac{b - a}{n} \cdot \frac{1}{6}\,[(y_0 + 4y_1 + y_2) + (y_2 + 4y_3 + y_4) + \ldots$$

$$\ldots + (y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n})].$$

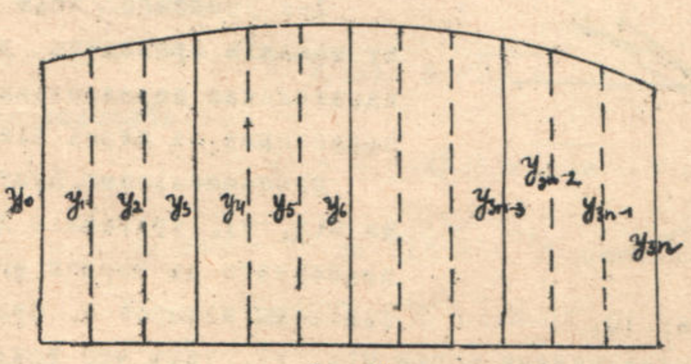
Принимая во вниманіе, что

$$\Delta x = \frac{b - a}{2n},$$

можемъ написать

$$Q = \frac{\Delta x}{3}\,[y_0 + y_{2n} + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2n-2}) + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2n-1})].$$

Для вычисленія по 2-ой формулѣ *Симпсона*, проводимъ двѣ промежуточныя ординаты (см. чертежъ).



Фиг.8.

Тогда, полагая

$$\Delta x = \frac{b - a}{3n}$$

получимъ

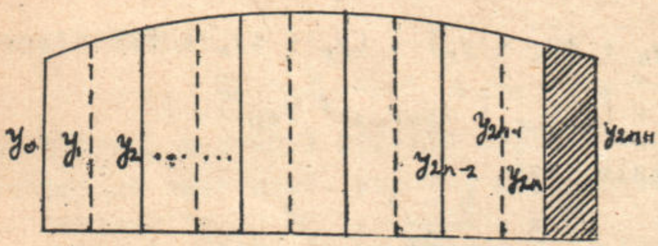
$$Q = \frac{b - a}{8n} [(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3) + (y_3 + 3y_4 + 3y_5 + y_6) +$$

$$+ \ldots + (y_{3n-3} + y_{3n-2} + y_{3n-1} + y_{3n})] =$$

$$= {}^3/_8 \, \Delta x \, [y_0 + y_{3n} + 2(y_3 + y_6 + \ldots + y_{3n-3}) +$$

$$+ 3(y_1 + y_2 + y_4 + y_5 + \ldots + y_{3n-2} + y_{3n-1})].$$

Замѣчаніе 2. Въ первой формулѣ *Симпсона* число частей, на которое дѣлится основаніе, всегда четное. Если же задано нечетное число такихъ частей, то послѣднюю полоску вычисляютъ, замѣнивъ неизвѣстную кривую параболой 2-го порядка, проходящей черезъ концы ординатъ (см. чертежъ).



Фиг. 9.

Обозначивъ дополнительную площадку (между ординатами y_{2n} и y_{2n+1}) черезъ q, напишемъ выраженіе для всей площади пока въ такомъ видѣ:

$$Q = \frac{\Delta x}{3} [y_0 + y_{2n} + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2n-2}) + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2n-1})] + q.$$

Вычисляемъ теперь отдѣльно площадь q. Для этого припомнимъ свойства параболы (см. чертежъ).

Фиг. 10.

1-е свойство. Если черезъ точку касанія проведенъ діаметръ, то касательная параллельна хордамъ сопряженнымъ съ этимъ діаметромъ.

Доказательство. Пусть дана точка $M(x, y)$, уравненіе діаметра, сопряженнаго съ хордою, угловой коэффиціентъ которой m, будетъ удовлетворяться координатами точки $M(x, y)$, такъ что тождественно

$$f'_x\,(x, y) + m\, f'_y\,(x, y) = 0,$$

откуда

$$m = -\frac{f'_x(x,y)}{f'_y(x,y)}.$$

Напишемъ уравненіе касательной въ точкѣ M(x, y):

$$x f'_x(x,y) + y f_y(x,y) + f'_z(x,y,z) = 0,$$

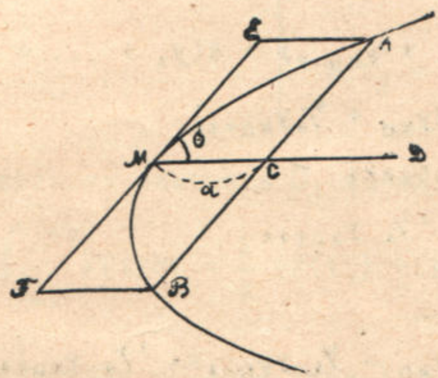
причемъ $z = 1$.

Угловой коэффиціентъ ея равенъ:

$$-\frac{f'_x(x,y)}{f'_y(x,y)} = m,$$

т.е. совпадаетъ съ угловымъ коэффиціентомъ хордъ, чѣмъ и доказывается ихъ параллельность.

2-е свойство. Площадь MAC = $^2/_3$ площади MEAC.



Фиг.11.

Доказательство. Примемъ діаметръ MD за ось x-овъ, а касательную ME за ось y-овъ. Уравненіе параболы, отнесенной къ касательной въ точкѣ пересѣченія ея съ діаметромъ, сопряженнымъ съ нею, будетъ

$$y^2 = 2p_1x.$$

Найдемъ площадь MAC путемъ интегрированія

$$\text{пл.MAC} = \text{Sin}\,\theta\int_0^a f(x)dx = \text{Sin}\,\theta\int_0^a \sqrt{2p_1x}\,dx =$$

$$= \sqrt{2p_1}\,\text{Sin}\,\theta\int_0^a x^{1/2}\,dx = \sqrt{2p_1}\,\text{Sin}\,\theta\left|\frac{x^2}{3/2}\right|_0^a = {}^2/_3\text{Sin}\theta\,\sqrt{2p_1}\,\sqrt{a^3} =$$

$$= {}^2/_3\,\text{Sin}\,\theta\,\sqrt{2p_1a}\,.\,a.$$

Если положить

$$QA = b = ME = \sqrt{2p_1a}\,,$$

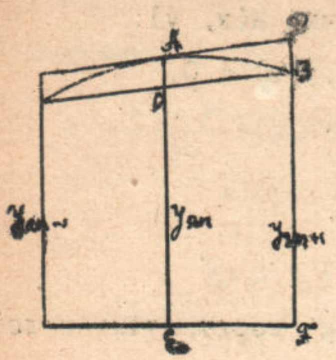
то

$$\text{пл.MAC} = {}^2/_3\,ab\,\text{Sin}\,\theta = {}^2/_3\,\text{пл.MEAC}$$

$$\text{пл.MBC} = {}^2/_3\,\text{пл.MCBF}$$

$$\text{пл.MAB} = {}^2/_3\,\text{пл.FEAB}.$$

Обратимся теперь къ вычисленію площади q. По 2-му свойству параболы можемъ написать:



Фиг.12.

$$q = \text{пл.}ECBF + \frac{2}{3}\ \text{пл.}CADB =$$

$$= \frac{\Delta x}{2}\left[y_{2n+1} + \frac{y_{2n-1} + y_{2n+1}}{2}\right] +$$

$$+ \frac{2}{3}\Delta x\left[y_{2n} - \frac{y_{2n-1} + y_{2n+1}}{2}\right] =$$

$$= \frac{\Delta x}{3}\left[\frac{5}{4}y_{2n+1} + 2y_{2n} - \frac{1}{4}y_{2n-1}\right].$$

Вся же искомая площадь

$$Q = \frac{\Delta x}{3}\left[y_0 + y_{2n} + 2(y_2 + \ldots + y_{2n-2}) + 4(y_1 + \ldots + y_{2n-1}) - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{4}y_{2n-1} + 2y_{2n} + \frac{5}{4}y_{2n+1}\right].$$

Прибавляя и вычитая въ скобкахъ

$$y_0 \text{ и } \frac{11}{4}y_{2n+1},$$

окончательно получимъ:

$$Q = \frac{\Delta x}{3}\left[2P + 4Y - y_0 + y_{2n} - \frac{1}{4}y_{2n-1} - \frac{1}{4}y_{2n+1}\right],$$

гдѣ P есть сумма четныхъ ординатъ

$$P = y_0 + y_2 + \ldots . + y_{2n},$$

а Y сумма нечетныхъ ординатъ:

$$Y = y_1 + y_3 + \ldots . + y_{2n-1}.$$

2-й случай. Формула Чебышева. Свяжемъ числа C_j такими добавочными условіями

$$C_1 = C_2 = C_3 = \ldots . = C_k .$$

Это даетъ намъ $k - 1 = m$ заранѣе заданныхъ условій, а потому въ нашемъ распоряженіи остается

$$2k - m = k + 1$$

условій, совпадающихъ съ $(k + 1)$ условіями системы (A).

Имѣемъ:

$$\Sigma C_j = 1 ,$$

откуда, въ силу поставленныхъ нами условій:

$$C_1 = C_2 = C_3 = \ldots\ldots = C_k = \frac{1}{k}\,.$$

Остальныя k условій напишутся такъ:

$$(A')\ \ldots\ldots\quad \left|\ \begin{array}{l} \Sigma\, t_j = 0 \\ \Sigma\, t_j^2 = \dfrac{k}{3} \\ \Sigma\, t_j^3 = 0 \\ \Sigma\, t_j^4 = \dfrac{k}{5} \\ \ldots\ldots \\ \Sigma\, t_j^k = \begin{array}{l} 0, \text{ если } k \text{ нечетное} \\ \dfrac{k}{k+1}, \text{ если } k \text{ четное.} \end{array} \end{array}\right.$$

Подставивъ значенія C_j въ конечныя формулы, получимъ:

$$\int_{-1}^{+1} F(t)dt = \frac{2}{k}\,[F(t_1) + F(t_2) + \ldots\ldots + F(t_k)]$$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{k}\,[f(x_1) + f(x_2) + \ldots\ldots + f(x_k)],$$

гдѣ

$$x_j = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}\,t_j.$$

Теперь все дѣло сводится къ опредѣленію t_j. Будемъ разсматривать значенія t_1, t_2, t_3, ... t_k, число которыхъ k, какъ корни нѣкотораго уравненія степени k:

$$t^k + p_1 t^{k-1} + p_2 t^{k-2} + \ldots\ldots + p_{k-1} t + p_k = 0\ \ .\ .\ .\ (*)$$

и постараемся опредѣлить числа p_1, p_2, p_3, ... p_k.

Такъ какъ намъ извѣстны суммы одинаковыхъ степеней корней уравненія (*), то эти числа p_1, p_2, p_3....p_k легко найдутся по *формуламъ Ньютона*, устанавливающимъ связь между коэффиціентами и суммами одинаковыхъ степеней корней уравненія

$$S_l = \Sigma\, t_j^l.$$

Эти формулы слѣдующія

$$S_1 + p_1 = 0$$

$$S_2 + p_1S_1 + 2p_2 = 0$$

$$S_3 + p_1S_2 + p_2S_1 + 3p_3 = 0$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$S_k + p_1S_{k-1} + p_2S_{k-2} + \ldots + kp_k = 0.$$

Въ силу условій (A') имѣемъ:

$$0 + p_1 = 0\ ;\quad p_1 = 0$$

$$\frac{k}{3} + p_1 0 + 2p_2 = 0\ ;\quad \frac{k}{3} + 2p_2 = 0$$

$$0 + p_1\frac{k}{3} + p_2 0 + 3p_3 = 0\ ;\quad p_3 = 0$$

$$\frac{k}{5} + p_1 0 + p_2\frac{k}{3} + p_3 0 + 4p_4 = 0\ ;\quad \frac{k}{5} + p_2\frac{k}{3} + 4p_4 = 0$$

$$. \quad .$$

Для опредѣленія p_1, p_2, p_3.... и т.д. имѣемъ рядъ уравненій

$$p_1 = p_3 = p_5 = \ldots = 0$$

$$\frac{k}{3} + 2p_2 = 0$$

$$\frac{k}{5} + p_2\frac{k}{3} + 4p_4 = 0$$

$$\frac{k}{7} + p_2\frac{k}{5} + p_4\frac{k}{3} + 6p_6 = 0$$

$$\frac{k}{9} + p_2\frac{k}{7} + p_4\frac{k}{5} + p_6\frac{k}{3} + 8p_8 = 0$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Написать эти уравненія очень легко, такъ какъ законъ ихъ составленія ясенъ.

Если k четное, то уравненіе (*) содержитъ только четныя степени t, и слѣдовательно, числа t_j попарно равны по абсолютной величинѣ и отличаются знаками. Отсюда слѣдуетъ, что, если разсматривать въ этой системѣ (A') слѣдующее за этими уравненіями $\Sigma\, t^{k+1} = 0$, то окажется, что оно выполняется само собою, а потому всего выполняется $(k+1)$ уравненій системы (A); слѣдовательно, формула *Чебышева* при k четномъ, оказывается точною для целой функціи степени (k+1) и ниже. Если k нечетное, то уравненіе (*) содержитъ только нечетныя степени t, и слѣдовательно, имѣетъ одинъ корень t = 0, а остальные корни попрежнему равны попарно по абсолютной величинѣ и отличаются знаками.

Въ этомъ случаѣ слѣдующее за выполненными условіями условіе

$$\sum t_j^{k+1} = \frac{k}{k+2}$$

вообще не выполняется само собою; слѣдовательно, въ системѣ (A) удовлетворяются (k+1) уравненій и формула Чебышева при k нечетномъ оказывается точной для целой функціи степени только k и ниже.

Частные случаи.

<u>k = 2.</u> Уравненіе для опредѣленія t_j - квадратное

$$t^2 + p_1 t + p_2 = 0.$$

Для опредѣленія p_1 и p_2 имѣемъ уравненія:

$$p_1 = 0$$

$$2/3 + 2p_2 = 0\ ;\quad p_2 = -1/3\ .$$

Рѣшая уравненіе $t^2 - 1/3 = 0$, находимъ

$$t_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0{,}577350$$

$$t_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -t_1$$

слѣдовательно

$$\int_{-1}^{+1} F(t)dt = F(-\frac{1}{\sqrt{3}}) + F(+\frac{1}{\sqrt{3}})$$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\left[f(\frac{b+a}{2} - \frac{b-a}{2}\frac{1}{\sqrt{3}}) + f(\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}\frac{1}{\sqrt{3}})\right];$$

формула точна для функціи 3-ей степени и ниже.

<u>k = 3.</u> Находимъ значенія t_j:

$$t^3 + p_1 t^2 + p_2 t + p_3 = 0$$

$$p_1 = p_3 = 0$$

$$1 + 2p_2 = 0; \quad p_2 = -\tfrac{1}{2}.$$

Рѣшаемъ уравненіе

$$t^3 - \tfrac{1}{2}t = 0.$$

Для t_j получаемъ значенія:

$$t_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707107$$

$$t_2 = 0$$

$$t_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -t_1$$

$$\int_{-1}^{+1} F(t)dt = \tfrac{2}{3}[F(-\frac{1}{\sqrt{2}}) + F(0) + F(+\frac{1}{\sqrt{2}})]$$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{3}[f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)]$$

Формула точна для функціи 3-ей степени и ниже.

<u>$k = 4.$</u>

$$t^4 + p_1t^3 + p_2t^2 + p_3t + p_4 = 0$$

$$p_1 = p_3 = 0$$

$$\tfrac{4}{3} + 2p_2 = 0; \quad p_2 = -\tfrac{2}{3}$$

$$\tfrac{4}{5} + \tfrac{4}{3}p_2 + 4p_4 = 0; \quad p_4 = \tfrac{1}{45}.$$

Уравненіе

$$t^4 - \tfrac{2}{3}t^2 + \tfrac{1}{45} = 0$$

биквадратное и имѣетъ корни

$$t_1 = 0,794654$$

$$t_2 = 0,187592$$

$$t_3 = -t_2$$

$$t_4 = -t_1.$$

$$\int_{-1}^{+1} F(t)dt = \tfrac{1}{2}[F(t_1) + F(t_2) + F(t_3) + F(t_4)]$$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{4}[\sum_{j=1}^{j=4} f(x_j)].$$

Формула точна для функціи 5-й степени и ниже.

k = 5.

$$t^5 - \frac{5}{6}t^3 + \frac{7}{12}t = 0$$

$$t_1 = 0{,}832497\ ; \quad t_5 = -\,t_1$$

$$t_2 = 0{,}374541\ ; \quad t_4 = -\,t_2$$

$$t_3 = 0$$

$$\int_{-1}^{+1} F(t)dt = \frac{2}{5}\sum_{j=1}^{5} F(t_j).$$

Формула точна для функцій 5-й степени и ниже.

k = 6.

$$t^6 - t^4 + \frac{1}{3}t^2 - \frac{1}{105} = 0.$$

Это уравненіе рѣшается какъ кубическое подстановкой $t^2 = y$. Тогда получимъ

$$y^3 - y^2 + \frac{1}{3}y - \frac{1}{105} = 0$$

$$t_1 = 0{,}866247\ ; \quad t_6 = -\,t_1$$

$$t_2 = 0{,}422519\ ; \quad t_5 = -\,t_2$$

$$t_3 = 0{,}266635\ ; \quad t_4 = -\,t_3$$

$$\int_{-1}^{+1} F(t)dt = \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{6} F(t_j)$$

Для функціи 7-й степени и ниже.

k = 7.

$$t^7 - \frac{7}{6}t^5 + \frac{119}{360}t^3 - \frac{149}{6480}t = 0$$

$$t_1 = 0{,}883862\ ; \quad t_7 = -\,t_1$$

$$t_2 = 0{,}529657\ ; \quad t_6 = -\,t_2$$

$$t_3 = 0{,}323912\ ; \quad t_5 = -\,t_3$$

$$t_4 = 0$$

$$\int_{-1}^{+1} F(t)dt = \frac{2}{7}\sum_{j=1}^{7} F(t_j).$$

Для функціи 7-й степени и ниже.

k = 8. Уравненіе для этого случая имѣетъ комплексные корни.

k = 9.

$$t^9 - \frac{3}{2} t^7 + \frac{27}{40} t^5 - \frac{57}{560} t^3 + \frac{53}{22400} t = 0.$$

послѣ сокращенія на t, подстановкой $t^2 = y$ приводимъ это уравненіе къ уравненію 4-й степени

$$y^4 - \frac{3}{2} y^3 + \frac{27}{40} y^2 - \frac{57}{560} y + \frac{53}{22400} = 0.$$

Значенія t_j будутъ слѣдующія:

$$t_1 = 0,911589\ ; \quad t_9 = -t_1$$
$$t_2 = 0,601019\ ; \quad t_8 = -t_2$$
$$t_3 = 0,528762\ ; \quad t_7 = -t_3$$
$$t_4 = 0,167907\ ; \quad t_6 = -t_4$$
$$t_5 = 0$$

$$\int_{-1}^{+1} F(t)\,dt = {}^2/_9 \sum_{j=1}^{9} F(t_j).$$

Формула точна для функціи 9-й степени и ниже.

ПОСТРОЕНІЕ ИНТЕГРАЛЬНОЙ КРИВОЙ СЪ ПОМОЩЬЮ ФОРМУЛЫ ТРАПЕЦІЙ.

Мы уже знаемъ, что площадь въ предѣлахъ отъ a до b выражается опредѣленнымъ интеграломъ

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Если теперь считать верхній предѣлъ перемѣннымъ, равнымъ x, то и сама площадь будетъ функціей этого x.

Условившись откладывать по ординатамъ въ извѣстномъ масштабѣ численныя значенія площадей при заданныхъ абсциссахъ, и, соединяя потомъ крайнія точки ординатъ плавной кривой, мы получимъ такъ называемую *"интегральную кривую"*. Уравненіе ея слѣдующее:

$$\overline{Y} = \int_a^X y\,dx = F(X).$$

Построимъ интегральную кривую по точкамъ съ помощью формулы трапецій.

Имѣемъ:

$$\text{при } x = a \quad \Big| \quad \overline{Y}_0 = \int_a^a ydx = 0$$

$$\text{" } x = a+h \quad \Big| \quad \overline{Y}_1 = \int_a^{a+h} ydx = \frac{h}{2}(y_0 + y_1) = \frac{h}{2}z_1.$$

Причемъ мы обозначимъ

$$z_{k+1} = y_k + y_{k+1}.$$

Далѣе при $x = a + 2h$:

$$\overline{Y}_2 = \int_a^{a+2h} ydx = \int_a^{a+h} ydx + \int_{a+h}^{a+2h} ydx =$$

$$= \overline{Y}_1 + \frac{h}{2}(y_1 + y_2) = \frac{h}{2}Z_1 + \frac{h}{2}Z_2 = \frac{h}{2}(Z_1 + Z_2);$$

при $x = a + 3h$.

$$\overline{Y}_3 = \int_a^{a+3h} ydx = \overline{Y}_2 + \int_{a+2h}^{a+3h} ydx = \overline{Y}_2 + \frac{h}{2}(y_2 + y_3) =$$

$$= \frac{h}{2}(Z_1 + Z_2) + \frac{h}{2}Z_3 = \frac{h}{2}(Z_1 + Z_2 + Z_3) \text{ и т.д.}$$

при $x = a + kh$:

$$\overline{Y}_k = \frac{h}{2}(Z_1 + Z_2 + Z_3 + \ldots + Z_k).$$

Составимъ слѣдующую табличку:

k	x_k	y_k	z_k	Σz_k	$\frac{h}{2}\Sigma z_k = \overline{Y}_k$
0	a	y_0	$z_0=0$	0	0
1	$a+h$	y_1	z_1	z_1	$\frac{h}{2}(z_1)$
2	$a+2h$	y_2	z_2+	z_1+z_2	$\frac{h}{2}(z_1+z_2)$
3	$a+3h$	y_3	z_3	$z_1+z_2+z_3$	$\frac{h}{2}(z_1+z_2+z_3)$
4	$a+4h$	y_4	z_4	$z_1+z_2+z_3+z_4$	$\frac{h}{2}(z_1+z_2+z_3+z_4)$
5	$a+5h$	y_5	z_5	$z_1+z_2+z_3+z_4+z_5$	$\frac{h}{2}(z_1+z_2+z_3+z_4+z_5)$
. . .	. . .	. . .	. . .	. . . .	. . . .

Послѣдній столбецъ ея заключаетъ въ себѣ значенія ординатъ интегральной кривой. Покажемъ, какъ построить ее графически. Представимъ единицу площади равной $^1/l$ единицы длины, гдѣ l есть нѣкоторый отрѣзокъ прямой. Тогда получимъ слѣдующія выраженія для ординатъ интегральной кривой

$$\overline{Y}_k = \frac{h}{2} \Sigma Z_k \cdot \frac{1}{l} .$$

Найдемъ теперь приращеніе ординаты при измѣненіи x на x+h. Имѣемъ:

$$\overline{Y}_k - \overline{Y}_{k-1} = \frac{h}{2} Z_k \cdot \frac{1}{l} = \Delta \overline{Y}_{k-1} ,$$

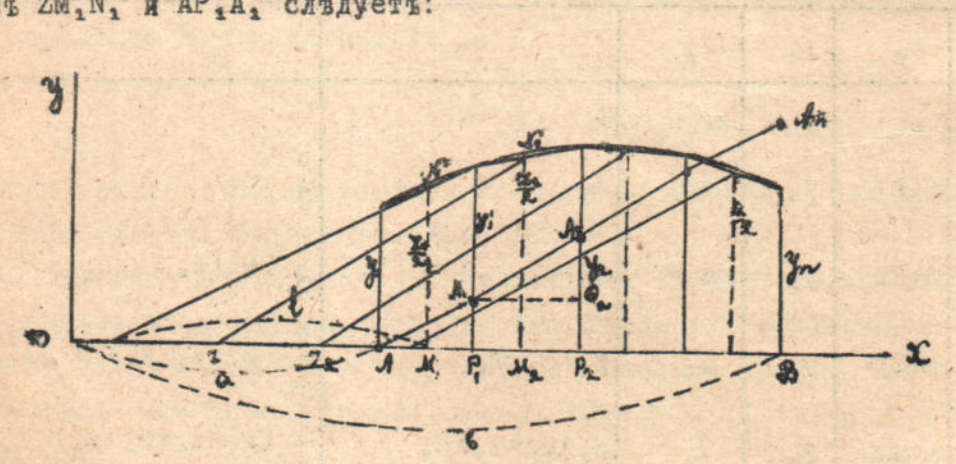
откуда

$$\frac{\Delta \overline{Y}_{k-1}}{h} = \frac{\frac{Z_k}{2}}{l}$$

$\frac{Z_k}{2}$ мы можемъ построить. Это есть перпендикуляръ, опущенный на ось x-овъ изъ средины хорды, соединяющей концы ординатъ y_{k-1} и y_k, и равный

$$\frac{Z_k}{2} = \frac{y_k + y_{k-1}}{2} .$$

Чтобы построить Δy_{k-1}, поступаемъ слѣдующимъ образомъ. Для первой площадки откладываемъ отъ точки M_1 влѣво длину $l = M_1Z$. Соединяемъ точку Z съ N_1; проводя изъ точки A прямую, параллельную ZN_1 получимъ въ пересѣченіи ея съ ординатой y_1 точку A_1 интегральной кривой. Въ самомъ дѣлѣ изъ подобія треугольниковъ ZM_1N_1 и AP_1A_1 слѣдуетъ:



Фиг.13.

$$\frac{A_1P_1}{h} = \frac{M_1N_1}{l}$$

или, такъ какъ $M_1N_1 = \frac{Z_1}{2}$

$$A_1P_1 = \frac{Z_1}{2} \quad h \cdot \frac{1}{1} = \overline{Y}_1 .$$

Откладываемъ отъ точки M_2 длину $1 = M_2Z_1$ и соединяя точку Z_1 съ N_2 проводимъ изъ точки A_1 прямую, параллельную Z_1N_2, до пересѣченія ея съ ординатой y_2, получимъ A_2 интегральной кривой, такъ какъ

$$\frac{Q_2A_2}{h} = \frac{\frac{Z_2}{2}}{1} ,$$

откуда

$$Q_2A_2 = h \cdot \frac{Z_2}{2} \cdot \frac{1}{1} = \Delta \overline{Y}_1 .$$

Вся же ордината

$$A_2P_2 = \overline{Y}_2 = \overline{Y}_1 + \Delta \overline{Y}_1 .$$

Рассуждая подобнымъ образомъ, мы, наконецъ, построимъ всю интегральную кривую $AA_1A_2 \ldots A_n$.

——— " ———

ИНТЕГРИРОВАНІЕ ФУНКЦІЙ.

ОТДѢЛЪ I.

ИНТЕГРИРОВАНІЕ РАЦІОНАЛЬНЫХЪ ФУНКЦІЙ.

КЛАССЪ 1. Интегрированіе цѣлыхъ функцій. Интегралъ всякой цѣлой функціи находится на основаніи слѣдующихъ основныхъ формулъ интегральнаго исчисленія

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C \quad (m \neq -1)$$

$$\int a\, f(x)\,dx = a \int f(x)\,dx$$

$$\int [f(x) \pm f_1(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int f_1(x)\,dx .$$

Первая формула даетъ интегралъ степени, вторая показываетъ, что постоянное число можно выносить изъ подъ знака интеграла, а третья - что интегралъ суммы равенъ суммѣ интеграловъ.

Поэтому:

$$\int (a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \dots + a_{m-1} x + a_m) dx =$$

$$= a_0 \frac{x^{m+1}}{m+1} + a_1 \frac{x^m}{m} + a_2 \frac{x^{m-1}}{m-1} + \dots + a_{m-1} \frac{x^2}{2} + a_m x + C.$$

КЛАССЪ 2. Интегрированіе раціональныхъ дробей. Въ высшей алгебрѣ доказывается, что всякую раціональную дробь $\frac{f(x)}{F(x)}$ можно представить въ видѣ:

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \psi(x) + \Sigma \left| \frac{A_1}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-1}} + \dots + \frac{A_\alpha}{x-a} \right| +$$

$$+ \Sigma \left| \frac{P_1 x + Q_1}{(x^2 + px + q)^m} + \frac{P_2 x + Q_2}{(x^2 + px + q)^{m-1}} + \dots + \frac{P_m x + Q_m}{x^2 + px + q} \right|$$

гдѣ $\psi(x)$ - выдѣленная изъ дроби цѣлая часть, которая получается въ томъ случаѣ, если степень $f(x) \geq$ степени $F(x)$.

Умножая на dx и беря отъ обѣихъ частей равенства интегралы, получимъ:

$$\int \frac{f(x)}{F(x)} dx = \int \psi(x) dx + \Sigma \left| A_1 \int \frac{dx}{(x-a)^\alpha} + A_2 \int \frac{dx}{(x-a)^{\alpha-1}} + \dots \right.$$

$$\left. \dots + A_\alpha \int \frac{dx}{x-a} \right| + \Sigma \left| \int \frac{P_1 x + Q_1}{(x^2+px+q)^m} dx + \dots + \int \frac{P_m x + Q_m}{x^2+px+q} dx \right|.$$

Интегралъ $\int \psi(x) dx$ относится къ классу 1; слѣдовательно, намъ остается только изучить интегралы слѣдующихъ двухъ типовъ:

1-й типъ: $- \int \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$, гдѣ $\alpha > 0$ и цѣлое.

2-й типъ: $- \int \frac{Px + Q}{(x^2 + px + q)^m} dx$, гдѣ $m > 0$ и цѣлое.

1-й типъ. - Этотъ интегралъ легко рѣшается, если мы dx замѣнимъ на $d(x-a)$. Тогда, въ случаѣ $\alpha > 1$, получимъ:

$$\int \frac{dx}{(x-a)^\alpha} = \int (x-a)^{-\alpha} d(x-a) = \frac{(x-a)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} + C = \frac{-1}{(\alpha-1)(x-a)^{\alpha-1}} + C.$$

Въ случаѣ же $\alpha = 1$:

$$\int \frac{dx}{x-a} = \int \frac{d(x-a)}{x-a} = \log (x-a) + C ,$$

согласно основной формулѣ $\int \frac{dy}{y} = \text{Log } y + C.$

2-й типъ. - Прежде всего сдѣлаемъ въ интегралѣ

$$\int \frac{Px + Q}{(x^2 + px + q)^m} dx$$

нѣкоторыя преобразованія, а именно: написавъ

$$x^2 + px + q = (x + \frac{p}{2})^2 + q - \frac{p^2}{4} ,$$

обозначимъ

$$(q - \frac{p^2}{4}) = \pm k^2 \quad \text{и} \quad (x + \frac{p}{2}) = z. \qquad x = z - p/2$$

Тогда

$$x^2 + px + q = z^2 \pm k^2$$

$$Px + Q = P(z - \frac{p}{2}) + Q = Pz + (Q - \frac{Pp}{2})$$

$$dx = dz.$$

Перепишемъ нашъ интегралъ:

$$\int \frac{Px + Q}{(x^2 + px + q)^m} dx = \int \frac{Pz + (Q - \frac{Pp}{2})}{(z^2 \pm k^2)^m} dz = P \int \frac{zdz}{(z^2 \pm k^2)^m} +$$

$$+ (Q - \frac{Pp}{2}) \int \frac{dz}{(z^2 \pm k^2)^m} .$$

Первый интегралъ правой части берется легко:

$$\int \frac{zdz}{(z^2 \pm k^2)^m} = \frac{1}{2} \int \frac{d(z^2 \pm k^2)}{(z^2 \pm k^2)^m} = \begin{cases} -\frac{1}{2} \frac{1}{(m-1)(z^2 \pm k^2)^{m-1}} , & m > 1 \\ \frac{1}{2} \log (z^2 \pm k^2), & m = 1. \end{cases}$$

Въ окончательномъ результатѣ нужно только ввести значеніе z:

$$z = x + \frac{p}{2} . \qquad k = q - \frac{p^2}{4}$$

Займемся теперь вторымъ интеграломъ

$$I_m = \int \frac{dz}{(z^2 \pm k^2)^m}$$

и выведемъ для него *формулу приведенія*. Перепишемъ интегралъ I_m въ такомъ видѣ:

$$I_m = \frac{1}{k^2}\int \frac{(z^2 + k^2) - z^2}{(z^2 + k^2)^m}\, dz = \frac{1}{k^2} I_{m-1} - \frac{1}{k^2}\int \frac{z^2 dz}{(z^2 + k^2)^m} .$$

Здѣсь для удобства мы беремъ только знакъ + въ выраженіи $z^2 \pm k^2$.

Разсмотримъ пока интегралъ: $-\int \frac{z^2 dz}{(z^2 + k^2)^m}$

$$-\int \frac{z^2 dz}{(z^2 + k^2)^m} = \int \frac{z \cdot -\frac{1}{2} d(z^2 + k^2)}{(z^2 + k^2)^m} = \int z . d\left[\frac{1}{2(m-1)(z^2 + k^2)^{m-1}}\right]$$

Интегрируя по частямъ, получимъ:

$$\frac{z}{2(m-1)(z^2 + k^2)^{m-1}} - \frac{1}{2(m-1)}\int \frac{dz}{(z^2 + k^2)^{m-1}} =$$

$$= \frac{z}{2(m-1)(z^2 + k^2)^{m-1}} - \frac{1}{2(m-1)} I_{m-1} .$$

Подставляя теперь найденныя выраженія для $-\int \frac{z^2 dz}{(z^2 + k^2)^m}$ въ I_m, получимъ:

$$I_m = \frac{1}{k^2} I_{m-1} + \frac{z}{k^2(2m-2)(z^2 + k^2)^{m-1}} - \frac{1}{k^2(2m-2)} I_{m-1} =$$

$$= \frac{z}{k^2(2m-2)(z^2 + k^2)^{m-1}} + \frac{2m - 3}{2m - 2} \cdot \frac{1}{k^2} I_{m-1} \; .....(*) .$$

Введя при k^2 оба знака $\pm$, получимъ общую формулу:

$$\int \frac{dz}{(z^2 \pm k^2)^m} = \frac{z}{\pm k^2(2m-2)(z^2 \pm k^2)^{m-1}} + \frac{2m - 3}{2m - 2} \; \frac{1}{\pm k^2}\int \frac{dz}{(z^2 \pm k^2)^{m-1}} .$$

Повторяя такое пониженіе степени знаменателя каждый разъ на единицу, всего $(m-1)$ разъ, мы придемъ къ интеграламъ:

$$\int \frac{dz}{z^2 + k^2} \quad \text{и} \quad \int \frac{dz}{z^2 - k^2} ,$$

а эти интегралы легко берутся непосредственно. А именно:

$$1) \int \frac{dz}{z^2 + k^2} = \int \frac{\frac{1}{k^2}\, dz}{(\frac{z}{k})^2 + 1} = \frac{1}{k}\int \frac{d\,\frac{z}{k}}{(\frac{z}{k})^2 + 1} = \frac{1}{k} \operatorname{arctg} \frac{z}{k} + C,$$

согласно основной формулѣ $\int \frac{dy}{y^2 + 1} = \operatorname{arctg} y + C$.

2) $$\int \frac{dz}{z^2 - k^2} = \frac{1}{2k}\int \frac{(z+k) - (z-k)}{z^2 - k^2}\, dz = \frac{1}{2k}\left|\int \frac{dz}{z-k} - \int \frac{dz}{z+k}\right| =$$

$$= \frac{1}{2k} \log \frac{z - k}{z + k} + C.$$

Чтобы получить окончательный результатъ, нужно въ этихъ формулахъ вмѣсто z подставить $x + \frac{p}{2}$. При нахожденіи интеграловъ указаннаго 2-го типа въ частныхъ случаяхъ мы будемъ пользоваться общими разсужденіями, а не самой формулой приведенія.

Примѣръ 1. Найти

$$\int \frac{x^2 + 3x - 2}{(x - 1)^2 (x^2 - x + 1)^2}\, dx .$$

Разложивъ подъинтегральную функцію на простѣйшія дроби, получимъ:

$$\frac{x^2 + 3x - 2}{(x-1)^2 (x^2 - x + 1)^2} = \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{1}{x - 1} - \frac{3x + 1}{(x^2 - x + 1)^2} - \frac{x + 2}{x^2 - x + 1}.$$

Предложенный интегралъ распадается на 4 интеграла:

$$\int \frac{x^2 + 3x - 2}{(x-1)^2 (x^2-x+1)^2}\, dx = 2\int \frac{dx}{(x-1)^2} - \int \frac{3x + 1}{(x^2-x+1)^2}\, dx + \int \frac{dx}{x-1} -$$

$$- \int \frac{x + 2}{x^2 - x + 1}\, dx .$$

Найдемъ каждый интегралъ отдѣльно

$$2\int \frac{dx}{(x - 1)^2} = - \frac{2}{x - 1} + C$$

$$\int \frac{dx}{x - 1} = \log(x - 1) + C.$$

Далѣе, такъ какъ

$$x^2 - x + 1 = (x - 1/2)^2 + 3/4 ,$$

то положивъ

$$x - 1/2 = z , \quad \text{откуда} \quad x = z + 1/2 ,$$

будемъ имѣть

$$-\int\frac{3x+1}{(x^2-x+1)^2}dx = -\int\frac{3z+{}^5\!/_2}{(z^2+{}^3\!/_4)^2}dz = -3\int\frac{{}^1\!/_2 d(z^2+{}^3\!/_4)}{(z^2+{}^3\!/_4)^2} - {}^5\!/_2 I_2$$

гдѣ

$$I_2 = \int\frac{dz}{(z^2+{}^3\!/_4)^2}.$$

Первый интегралъ находится согласно основной формулѣ

$$\int\frac{dy}{y^2} = -\frac{1}{y} + C$$

и равенъ

$${}^3\!/_2 \cdot \frac{1}{z^2+{}^3\!/_4},$$

а ко второму мы примѣнимъ преобразованія, указанныя въ общей теоріи. Но прежде, чѣмъ это дѣлать, займемся интеграломъ

$$-\int\frac{x+2}{x^2-x+1}dx.$$

Преобразуемъ его также, какъ и предыдущій:

$$-\int\frac{x+2}{x^2-x+1}dx = -\int\frac{z+{}^5\!/_2}{z^2+{}^3\!/_4}dz = -\int\frac{{}^1\!/_2 d(z^2+{}^3\!/_4)}{z^2+{}^3\!/_4} - {}^5\!/_2 I_1 =$$

$$= -{}^1\!/_2\log(z^2+{}^3\!/_4) - {}^5\!/_2 I_1.$$

Итакъ, искомый интегралъ мы привели къ виду:

$$\int\frac{x^2+3x-2}{(x-1)^2(x^2-x+1)^2}dx = -\frac{2}{x-1} + \log(x-1) + {}^3\!/_2\,\frac{1}{(x^2-x+1)} -$$

$$-{}^1\!/_2\log(x^2-x+1) - {}^5\!/_2 I_2 - {}^5\!/_2 I_1.$$

Найдемъ теперь послѣдніе два интеграла I_2 и I_1:

$$I_2 = \int\frac{dz}{(z^2+{}^3\!/_4)^2} = {}^4\!/_3\int\frac{z^2+{}^3\!/_4-z^2}{(z^2+{}^3\!/_4)^2}dz = {}^4\!/_3 I_1 - {}^4\!/_3\int\frac{z^2dz}{(z^2+{}^3\!/_4)^2} =$$

$$= {}^4\!/_3 I_1 + {}^2\!/_3\int z\frac{-d(z^2+{}^3\!/_4)}{(z^2+{}^3\!/_4)^2} = {}^4\!/_3 I_1 + {}^2\!/_3\,\frac{z}{z^2+{}^3\!/_4} - {}^2\!/_3\int\frac{dz}{z^2+{}^3\!/_4} =$$

$$= {}^2\!/_3 \cdot \frac{z}{z^2+{}^3\!/_4} + {}^2\!/_3 I_1.$$

Отсюда слѣдуетъ:

$$-\frac{5}{2}\,[I_2 + I_1] = -\frac{5}{3}\cdot\frac{z}{z^2 + {}^3/_4} - \frac{25}{6}\,I_1 = -\frac{5}{3}\cdot\frac{x - {}^1/_2}{x^2-x+1} - \frac{25}{6}\,I_1.$$

Интегралъ I_1 находится легко

$$I_1 = \int\frac{dz}{z^2 + {}^3/_4} = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\left(\frac{x - {}^1/_2}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) + C = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C.$$

Окончательно:

$$\int\frac{x^2+3x-2}{(x-1)^2(x^2-x+1)^2}\,dx = -\frac{2}{x-1} + \log(x-1) + {}^3/_2\,\frac{1}{x^2-x+1} -$$

$$- {}^1/_2\log(x^2 - x + 1) - {}^5/_6\,\frac{2x-1}{x^2-x+1} - \frac{25}{3\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C.$$

Особенные случаи.

1-й. Интегралы вида $\int\frac{f(x)}{(x-a)^\alpha}dx$ гораздо скорѣе рѣшать помощью слѣдующей подстановки. Положивъ

$$x - a = y,$$

будемъ имѣть

$$x = a + y.$$

$$f(x) = f(a+y) = f(a) + y\,\frac{f'(a)}{1} + y^2\,\frac{f''(a)}{1.2} + \ldots + y^n\,\frac{f^n(a)}{n!}$$

$$dx = dy.$$

Слѣдовательно:

$$\int\frac{f(x)}{(x-a)^\alpha}\,dx = \int\frac{f(a) + y\,\frac{f'(a)}{1} + y^2\,\frac{f''(a)}{1.2} + \ldots + y^n\,\frac{f^n(a)}{n!}}{y^\alpha}\,dy =$$

$$= f(a)\int\frac{dy}{y^\alpha} + \frac{f'(a)}{1}\int\frac{dy}{y^{\alpha-1}} + \frac{f''(a)}{1.2}\int\frac{dy}{y^{\alpha-2}} + \ldots$$

Возьмемъ примѣръ на этотъ случай:

$$I = \int\frac{2x^2 - x + 1}{(x-1)^6}\,dx.$$

Положимъ:

$$x - 1 = y\,; \quad \text{тогда} \quad x = y + 1.$$

$$= \int\frac{2(y+1)^2 - (y+1)+1}{y^6}\,dy = \int\frac{2y^2+3y+2}{y^6}\,dy = 2\int\frac{dy}{y^4} + 3\int\frac{dy}{y^5} +$$

$$+2\frac{dy}{y^6} = -\frac{2}{3y^3} - \frac{3}{4y^4} - \frac{2}{5y^5} + C = -\frac{2}{3(x-1)^3} - \frac{3}{4(x-1)^4} - \frac{2}{5(x-1)^5} + C.$$

2-й. Интегралы вида:

$$\int \frac{dx}{(x-a)^m (x-b)^n},$$

гдѣ m и n - цѣлыя числа, вообще рѣшаются такъ:

Раздѣлимъ числителя и знаменателя на одинъ изъ множителей въ степени (m+n), положимъ на $(x-b)^{m+n}$. Получимъ:

$$\int \frac{\frac{dx}{(x-b)^{m+n}}}{\left(\frac{x-a}{x-b}\right)^m};$$

затѣмъ полагаемъ $\frac{x-a}{x-b} = y$. Возьмемъ примѣръ:

$$\int \frac{dx}{(x-1)^4 (x+2)^3} = \int \frac{\frac{dx}{(x+2)^7}}{\left(\frac{x-1}{x+2}\right)^4};$$

положивъ $\frac{x-1}{x+2} = y$, выразимъ числитель черезъ y. Для этого пишемъ:

$$\frac{x-1}{x+2} = \frac{x+2-3}{x+2} = 1 - \frac{3}{x+2} = y,$$

откуда дифференцированіемъ находимъ:

$$3\frac{dx}{(x+2)^2} = dy \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1).$$

Изъ того же выраженія имѣемъ:

$$\frac{3}{x+2} = 1 - y \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

Возведя равенство (2) въ пятую степень и перемноживъ съ (1), сразу составимъ числитель. Въ самомъ дѣлѣ

$$\frac{3^6 dx}{(x+2)^7} = (1-y)^5 dy,$$

откуда

$$\frac{dx}{(x+2)^7} = \frac{1}{3^6}(1-y)^5 dy.$$

Итакъ:

$$I = \frac{1}{3^6}\int \frac{(1-y)^5 dy}{y^4} = \frac{1}{3^6}\int \frac{1}{y^4}(1-5y+10y^2-10y^3+5y^4-y^5)dy =$$

$$= \frac{1}{3^6}\left[\int \frac{dy}{y^4} - 5\int \frac{dy}{y^3} + 10\int \frac{dy}{y^2} - 10\int \frac{dy}{y} + 5\int dy - \int ydy\right] =$$

$$= \frac{1}{3^6}\left[-\frac{1}{3y^3} + \frac{5}{2y^2} - \frac{10}{y} - 10 \log y + 5y - \tfrac{1}{2}y^2\right] + C.$$

Остается подставить только

$$y = \frac{x-1}{x+2}.$$

3-й.

$$\int \frac{dx}{x^4 + 2bx^2 + C}.$$

1-й случай Если $b^2 - C > 0$, то

$$x^4 + 2bx^2 + C = (x^2 - \alpha)(x^2 - \beta),$$

гдѣ α и β - вещественныя. Дальнѣйшій ходъ виденъ изъ примѣра.

Примѣръ.

$$\int \frac{dx}{(x^4+x^2-6)} = \int \frac{dx}{(x^2+3)(x^2-2)} = \tfrac{1}{5}\int \frac{(x^2+3) - (x^2-2)}{(x^2+3)(x^2-2)} dx =$$

$$= \tfrac{1}{5}\int \frac{dx}{x^2 - 2} - \tfrac{1}{5}\int \frac{dx}{x^2 + 3} =$$

$$= \tfrac{1}{5} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} \log \frac{x - \sqrt{2}}{x + \sqrt{2}} - \tfrac{1}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{3}} + C.$$

2-й случай. Если $b^2 - C < 0$, то $b^2 < C$, а это требуетъ, чтобы C было положительное. Пусть

$$C = d^2 \text{ и } d > 0.$$

Тогда

$$x^4 + 2bx^2 + C = x^4 + 2bx^2 + d^2 = x^4 + 2dx^2 + d^2 - 2dx^2 + 2bx^2 =$$

$$= (x^2 + d)^2 - 2x^2(d - b),$$

причемъ $d - b > 0$, такъ какъ

$$b^2 < C = d^2$$

и потому, если $b > 0$, то $b < d$ и $d - b > 0$; при $b < 0$, очевидно, что $d - b > 0$.

Положимъ

$$2(d - b) = g^2 .$$

Тогда

$$x^4 + 2bx + C = (x^2 + d)^2 - g^2x^2 = (x^2 + gx + d)(x^2 - gx + d)$$

и подъинтегральная дробь распадается на двѣ, такого вида

$$\frac{1}{x^4 + 2bx^2 + C} = \frac{Px + Q}{x^2 + gx + d} + \frac{P_1x + Q_1}{x^2 - gx + d} .$$

Примѣръ.

$$\int \frac{dx}{x^4 - x^2 + 1} .$$

Разложимъ знаменатель на произведенiе двухъ множителей

$$x^4 - x^2 + 1 = (x^4 + 2x^2 + 1) - 3x^2 = (x^2 + 1)^2 - (x\sqrt{3})^2 =$$
$$= (x^2 + x\sqrt{3} + 1)(x^2 - x\sqrt{3} + 1) .$$

Тогда

$$\frac{1}{x^4 - x^2 + 1} = \frac{Px + Q}{x^2 + x\sqrt{3} + 1} + \frac{P_1x + Q_1}{x^2 - x\sqrt{3} + 1}$$

и вопросъ приводится къ интегрированiю двухъ дробей 2-го типа.

4-й.

$$I = \int \frac{x^{km-1}}{a + bx^{mn}} dx ,$$

гдѣ k, m и n - цѣлыя, положительныя. Полагая $x^m = y$, будемъ имѣть:

$$mx^{m-1}dx = dy , \quad x^{(k-1)m} = y^{k-1} ,$$

$$I = \frac{1}{m}\int \frac{y^{k-1}\,dy}{a + by^n} .$$

Примѣръ

$$\int \frac{x\,dx}{1+x^8} = \int \frac{\frac{1}{2}dx^2}{1+(x^2)^4} = \frac{1}{2}\int \frac{dy}{1+y^4}, \quad \int \frac{x^5dx}{1+x^8} = \frac{1}{2}\int \frac{(x^2)^2d(x^2)}{1+(x^2)^4} = \frac{1}{2}\int \frac{y^2dy}{1+y^4}$$

$$\int \frac{x^3dx}{1+x^8} = \int \frac{\frac{1}{4}dx^4}{1+(x^4)^2} = \frac{1}{4}\int \frac{dy}{1+y^2} ,$$

$$\int \frac{x^7dx}{1+x^8} = \int \frac{\frac{1}{8}dx^8}{1+x^8} = \frac{1}{8}\int \frac{dy}{1+y} ,$$

остальные интегралы

$$\int \frac{x^2dx}{1+x^8}, \int \frac{x^4dx}{1+x^8}, \int \frac{x^6dx}{1+x^8}$$

не упрощаются. Здѣсь $8 = m.n = 1.8 = 2.4 = 4.2 = 8.1$.

5-й.

$$I = \int \frac{dx}{x(a+bx^n)^p} = \int \frac{x^{n-1}dx}{x^n(a+bx^n)^p}.$$

Полагая $x^n = y$, имѣемъ:

$$nx^{n-1}dx = dy$$

и слѣдовательно

$$I = \frac{1}{n}\int \frac{dy}{y(a+by)^p}.$$

Примѣръ.

$$I = \int \frac{dx}{x(1+x^6)} = \int \frac{x^5dx}{x^6(1+x^6)}.$$

Полагая $x^6 = y$, имѣемъ:

$$I = \tfrac{1}{6}\int \frac{dy}{y(1+y)} = \tfrac{1}{6}\int \frac{(1+y)-y}{y(1+y)}dy = \tfrac{1}{6}\left|\int \frac{dy}{y} - \int \frac{dy}{1+y}\right| =$$

$$= \tfrac{1}{6}\log\frac{y}{1+y} + C = \tfrac{1}{6}\log\frac{x^6}{1+x^6} + C.$$

6-й. Интегралы вида

$$\int \frac{x^k dx}{(a+bx^n)^p}$$

при $k \geqq n$ выгодно, не разлагая на простѣйшія дроби, интегрировать по частямъ. Именно, полагая

$$u = x^{k-n+1} \qquad dv = \frac{x^{n-1}dx}{(a+bx^n)^p}$$

$$du = (k-n+1)x^{k-n}dx \qquad v = -\frac{1}{bn(p-1)}\cdot\frac{1}{(a+bx^n)^{p-1}},$$

находимъ:

$$\int \frac{x^k dx}{(a+bx^n)^p} = -\frac{x^{k-n+1}}{bn(p-1)(a+bx^n)^{p-1}} + \frac{k-n+1}{bn(p-1)}\int \frac{x^{k-n}dx}{(a+bx^n)^{p-1}},$$

причемъ, если $k-n \geqq n$, опять можно повторить интегрированіе по частямъ и т.д.

Примѣръ.

$$\int \frac{t^4\,dt}{(1+t^2)^3}$$

$$\int \frac{t^4\,dt}{(1+t^2)^3} = t^3 \cdot \frac{-1}{4(t^2+1)^2} + {}^3\!/_4 \int \frac{t^2\,dt}{(t^2+1)^2}$$

$$\frac{t^2\,dt}{(t^2+1)^2} = t \cdot \frac{-1}{2(t^2+1)} + {}^1\!/_2 \int \frac{dt}{t^2+1},$$

окончательно

$$\int \frac{t^4\,dt}{(1+t^2)^3} = -\,{}^1\!/_4\,\frac{t^2}{(t^2+1)^2} - {}^3\!/_8\,\frac{t}{t^2+1} + {}^3\!/_8 \operatorname{arctg} t + C.$$

ОТДѢЛЪ II.

ИНТЕГРИРОВАНІЕ ИРРАЦІОНАЛЬНЫХЪ ФУНКЦІЙ.

КЛАССЪ 1. Къ этому классу относятся всѣ интегралы вида:

$$I = \int f\left[x, \left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{\frac{m}{n}}, \left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{\frac{m_2}{n_2}} \ldots\right] dx,$$

гдѣ f - знакъ раціональныхъ дѣйствій надъ x и функціями, стоящими въ скобкахъ. Всѣ подобные интегралы приводятся къ раціональному виду подстановкою

$$\left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right) = y^N \quad \ldots\ldots\ldots\ (*),$$

гдѣ N равно общему наименьшему кратному всѣхъ знаменателей n, n_1, n_2 и т.д.:

$$N = \text{О.Н.К.}[n, n_1, n_2 \ldots].$$

Пусть

$$\frac{N}{n} = p, \quad \frac{N}{n_1} = p_1, \quad \frac{N}{n_2} = p_2 \ldots$$

p, p_1, $p_2 \ldots$ - цѣлыя числа.

Дѣлая указанную подстановку, получимъ:

$$\left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{\frac{m}{n}} = y^{\frac{mN}{n}} = y^{mp}$$

$$\left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{\frac{m_1}{n_1}} = y^{\frac{m_1 N}{n}} = y^{m_1 p_1}$$

. . . .

Рѣшая уравненіе (*) относительно x, найдемъ x, какъ функцію отъ y^N:

$$x = \varphi(y^N),$$

причемъ ясно, что φ - раціональная функція. Дифференцируя, получимъ:

$$dx = \varphi'(y^N)\cdot Ny^{N-1}dy = \psi(y)dy ,$$

гдѣ $\psi(y)$ - также раціональная функція отъ y.

Теперь искомый интегралъ выразится раціонально въ функціи отъ y:

$$I = \int f[\varphi(y^N), y^{mp}, y^{m_1p_1}\ldots]\psi(y)dy = F(y)dy$$

и приводится къ отдѣлу I.

Примѣръ 1.

$$I = \int \frac{\sqrt[6]{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx .$$

Здѣсь

$$\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta} = x \quad \text{и слѣдовательно} \quad \left|\begin{matrix}\alpha = 1; & \gamma = 0\\ \beta = 0; & \delta = 1.\end{matrix}\right.$$

Составимъ общее наименьшее кратное N

$$= \text{О.Н.К.}(6, 2) = 6.$$

Полагая $x = y^6$, найдемъ:

$$\sqrt[6]{x} = y ; \quad \sqrt{x} = y^3 ;$$

$$dx = 6y^5dy.$$

Предложенний интегралъ въ новой перемѣнной выражается такъ

$$I = 6\int\frac{y^6dy}{1+y^3} = 6\int\frac{(y^6+y^3) - (y^3+1)+1}{1+y^3}dy = 6\int(y^3-1+\frac{1}{1+y^3}dy =$$

$$= \tfrac{3}{2}y^4 - 6y + 2\lg(y+1) - \lg(y^2-y+1) + \frac{6}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2y-1}{\sqrt{3}} + C.$$

Въ полученний интегралъ остается еще ввести

$$y = \sqrt[6]{x} .$$

Примѣръ 2.

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt[n]{(x-a)^m (x-b)^\rho}} .$$

При условіи $\frac{m+\rho}{n}$ = цѣлому числу этотъ интегралъ относится къ классу 1.

Полагая $\frac{m+\rho}{n} = t$, получимъ:

$$m + \rho = nt \quad \text{и} \quad \rho = nt - m$$

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt[n]{(x-a)^m (x-b)^{nt-m}}} = \int \frac{dx}{(x-b)^t \left(\frac{x-a}{x-b}\right)^{\frac{m}{n}}} .$$

Этотъ интегралъ легко рѣшается подстановкой $\frac{x-a}{x-b} = y^n$.

Частный примѣръ.

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt[5]{(x-1)^2 (x+2)^3}} .$$

Здѣсь выполняется указанное выше условіе:

$$\frac{2+3}{5} = 1.$$

Вынося изъ подъ знака корня множитель $x+2$, получимъ:

$$I = \int \frac{dx}{(x+2) \sqrt[5]{\left(\frac{x-1}{x+2}\right)^2}} = \int \frac{dx}{(x+2)\left(\frac{x-1}{x+2}\right)^{2/5}} .$$

Полагаемъ:

$$\frac{x-1}{x+2} = y^5.$$

Отсюда находимъ $(x + 2)$:

$$\frac{x+2-3}{x+2} = 1 - \frac{3}{(x+2)} = y^5 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (*)$$

$$x + 2 = \frac{3}{1-y^5} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (**).$$

Дифференцированіе равенства (*) дастъ

$$\frac{3}{(x+2)^2}\, dx = 5y^4 dy ,$$

а почленное перемноженіе полученнаго равенства и равенства (**), по сокращенію на 3, даетъ:

$$\frac{dx}{x+2} = \frac{5y^4\,dy}{1-y^5}.$$

Теперь имѣемъ:

$$I = 5\int \frac{y^4dy}{(1-y^5)\,y^2} = 5\int \frac{y^2dy}{1-y^5}.$$

Этотъ интегралъ относится къ отдѣлу I.

КЛАССЪ 2. Интегралы вида

$$\int f(x,\ y)dx\ ,$$

гдѣ f - знакъ раціональныхъ дѣйствій надъ x и y, а

$$y = \sqrt{Ax^2 + 2Bx + C}\ .$$

Общій видъ функціи f будетъ:

$$f(x,y) = \frac{\Sigma\ ax^k y^l}{\Sigma\ bx^{k_1}y^{l_1}}\ ,$$

гдѣ a и b - постоянныя и k, l, k_1, l_1 - цѣлыя положительныя числа. Такъ какъ числа l и l_1 могутъ быть четныя и нечетныя, а

$$y^{2n} = (Ax^2 + 2Bx + C)^n$$

$$y^{2n+1} = y(Ax^2 + 2x + C)^n,$$

то очевидно, что результатъ всегда будетъ такого вида:

$$f(x,y) = \frac{M(x) + yN(x)}{M_1(x) + yN_1(x)}\ ,$$

гдѣ M, N, M_1, N_1 - цѣлыя функціи отъ x. Помноживъ числителя и знаменателя на выраженіе, сопряженное съ знаменателемъ, получимъ:

$$f(x,y) = \frac{[M(x) + yN(x)]\,[M_1(x) - yN_1(x)]}{[M_1(x) + yN_1(x)]\,[M_1(x) - yN_1(x)]} =$$

$$= \frac{P(x) + y.Q\ (x)}{S(x)} = \frac{P(x)}{S(x)} + \frac{Q(x)}{S(x)}\,.\ y =$$

$$= \frac{P(x)}{S(x)} + \frac{y^2.Q(x)}{y\ .S(x)} = \frac{P(x)}{S(x)} + \frac{T(x)}{S(x)}\,.\,\frac{1}{y}\ .$$

Такимъ образомъ, какой бы раціональной функціей ни была $f(x,y)$, мы всегда можемъ подъинтегральное выраженіе $f(x,y)$ послѣ нѣкоторыхъ преобразованій привести къ только что указанному виду, а потому искомый интегралъ будетъ равенъ

$$\int f(x,y)dx = \int \frac{P(x)}{S(x)}dx + \int \frac{T(x)}{S(x)} \cdot \frac{dx}{y}.$$

Такъ какъ первый интегралъ правой части относится къ отдѣлу I, то намъ нужно изучить только второй. Выдѣлимъ изъ дроби $\frac{T(x)}{S(x)}$ цѣлую часть и разложивъ дробный остатокъ на простѣйшія дроби, получимъ:

$$\frac{T(x)}{S(x)} = \psi(x) + \Sigma \frac{A}{(x-a)^{\alpha}} + \Sigma \frac{Px+Q}{(x^2+px+q)^{m}}.$$

Искомый интегралъ распадается такимъ образомъ на сумму слѣдующихъ интеграловъ:

$$\int \frac{T(x)}{S(x)} \frac{dx}{y} = \int \frac{\psi(x)dx}{y} + \Sigma A \int \frac{dx}{(x-a)^{\alpha}.y} + \Sigma \int \frac{(Px+Q)dx}{(x^2+px+q)^{m}.y}.$$

Здѣсь имѣемъ три типа интеграловъ:

1-й типъ. $\int \frac{\psi(x)dx}{y}$, гдѣ $\psi(x)$ - цѣлая функція.

2-й типъ. $\int \frac{dx}{(x-a)^{\alpha}.y}$.

3-й типъ. $\int \frac{Px+Q}{(x^2+px+q)^{m}.y} dx$,

причемъ мы можемъ считать, что выраженіе $x^2 + px + q$ не имѣетъ вещественныхъ корней, такъ какъ въ противномъ случаѣ мы могли бы его разложить на произведеніе двухъ множителей

$$(x-a)(x-b),$$

гдѣ a и b - корни этого трехчлена, и привести къ двумъ интеграламъ 2-го типа.

Покажемъ на частномъ примѣрѣ, какъ интегралъ класса 2, приводится къ указаннымъ тремъ типамъ. Пусть данъ интегралъ:

$$I = \int \frac{dx}{2x+1-y}, \text{ гдѣ } y = \sqrt{3x^2+x+1}.$$

Помноживъ и числителя, и знаменателя подъинтегральной дроби на выраженіе, сопряженное съ знаменателемъ, получимъ.

$$I = \int \frac{2x + 1 + y}{(2x+1)^2 - y^2}\,dx = \int \frac{2x + 1 + y}{x^2 + 3x}\,dx =$$

$$= \int \frac{2x + 1}{x^2 + 3x}\,dx + \int \frac{3x^2 + x + 1}{x(x+3)} \cdot \frac{dx}{y}\,.$$

Выдѣлимъ изъ дроби

$$\frac{3x^2 + x + 1}{x(x+3)}$$

цѣлую часть

$$\begin{array}{r|l} 3x^2 + x + 1 & x^2 + 3x \\ \cline{2-2} -\ 3x^2 + 9x & 3 \\ \cline{1-1} -\ 8x + 1. & \end{array}$$

Оставшуюся дробь разложимъ на простѣйшія

$$\frac{-\ 8x + 1}{x(x + 3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x + 3}\,.$$

Умноживъ обѣ части равенства на $x(x+3)$, получимъ:

$$-\ 8x + 1 = A(x + 3) + Bx\,,$$

откуда имѣемъ:

$$\begin{array}{l|l} \text{полагая } x = 0 & 1 = 3A \text{ и } A = 1/3 \\ \text{"} \quad x = -3 & 25 = -3B \text{ и } B = -\ 25/3. \end{array}$$

Итакъ

$$I = \int \frac{2x + 1}{x^2 + 3x}\,dx + 3\int \frac{dx}{y} + 1/3 \int \frac{dx}{xy} - 25/3 \int \frac{dx}{(x+3)y}\,.$$

Первый интегралъ относится къ отдѣлу I, второй, третій и четвертый - къ отдѣлу II, причемъ второй - къ 1-му типу, а третій и четвертый къ 2-му.

1-й типъ.

$$\int \frac{\psi(x)\,dx}{y}\,,$$

гдѣ $\psi(x)$ - цѣлая функція n-ой степени:

$$\psi(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n\,,$$

$$y = \sqrt{Ax^2 + 2Bx + C}$$

Введемъ такое обозначенiе:

$$U_n = \int \frac{x^n\,dx}{y}.$$

Тогда будемъ имѣть

$$\int \frac{\psi(x)\,dx}{y} = a_0U_n + a_1U_{n-1} + a_2U_{n-2} + \ldots + a_{n-1}U_1 + U_0 a_n$$

Выведемъ *формулу приведенiя* для интеграла U_n. Для этого составимъ производную отъ $x^{n-1}.y$:.

$$(x^{n-1}.y)' = (n-1)x^{n-2}.y + x^{n-1}.y' =$$

$$= (n-1)x^{n-2}.y + \frac{x^{n-1}(Ax + B)}{y} =$$

$$= \frac{1}{y}[(n-1)Ax^n + 2(n-1)Bx^{n-1} + (n-1)Cx^{n-2} + Ax^n + Bx^{n-1}] =$$

$$= \frac{1}{y}[nAx^n + (2n-1)Bx^{n-1} + (n-1)Cx^{n-2}].$$

Проинтегрировавъ это выраженiе, получимъ:

$$x^{n-1}.y = nA.U_n + (2n-1)B.U_{n-1} + (n-1)C.U_{n-2},$$

откуда

$$U_n = \frac{x^{n-1}.y}{nA} - \frac{(2n-1)B}{nA}U_{n-1} - \frac{(n-1)C}{nA}U_{n-2}$$

и въ частности, при $n = 1$,

$$U_1 = \frac{1}{A}y - \frac{B}{A}U_0.$$

На основанiи этой формулы мы можемъ напередъ сказать, какого вида долженъ быть результатъ при интегрированiи $\int \frac{\psi(x)\,dx}{y}$. Въ самомъ дѣлѣ, подставляя найденное выраженiе для U_n, мы получимъ вмѣсто перваго члена a_0U_n въ выраженiи интеграла три члена: первый членъ вида

$$\alpha x^{n-1}.y$$

и два другiе, содержащiе U_{n-1} и U_{n-2}. Соединяя ихъ со вторымъ и третьимъ членами въ выраженiи интеграла a_1U_{n-1} и a_2U_{n-2}, будемъ имѣть:

$$\int \frac{\psi(x)\,dx}{y} = \alpha x^{n-1}y + \alpha_1U_{n-1} + \alpha_2U_{n-2} + a_3U_{n-3} + a_4U_{n-4} + \ldots + a_nU_0,.$$

Примѣняя тотъ же способъ разсужденія къ полученному второму члену нашего интеграла и идя далѣе подобнымъ же образомъ, мы найдемъ:

$$\int \frac{\psi(x)\,dx}{y} = \alpha x^{n-1} y + \beta_1 x^{n-2} y + \beta_2 U_{n-2} + \beta_3 U_{n-3} + a_4 U_{n-4} + \ldots + a_n U_0 =$$

$$= \alpha x^{n-1} y + \beta_1 x^{n-2} y + \gamma_2 x^{n-3} y + \gamma_3 U_{n-3} + \gamma_4 U_{n-4} + a_5 U_{n-4} + \ldots + a_n U_0 .$$

Наконецъ мы дойдемъ до $U_1 = \frac{y}{A} - \frac{B}{A} U_0$ и получимъ:

$$\int \frac{\psi(x)\,dx}{y} = \alpha x^{n-1} y + \beta_1 x^{n-2} y + \gamma_2 x^{n-3} y + \ldots + \lambda_{n-2} x y + \lambda_{n-1} U_1 + \lambda_n U_0 =$$

$$= \alpha x^{n-1} y + \beta_1 x^{n-2} y + \gamma_2 x^{n-3} y + \ldots + \lambda_{n-2} x y + \mu_{n-1} y + \mu_n U_0 =$$

$$= y(\alpha x^{n-1} + \beta_1 x^{n-2} + \gamma_2 x^{n-3} + \ldots + \lambda_{n-2} x + \mu_{n-1}) + \mu_n U_0 .$$

Отсюда *теорема:*

Интегралъ 1-го типа $\int \frac{\psi(x)\,dx}{y}$, въ которомъ $\psi(x)$ - цѣлая функція степени n-ой представляется въ видѣ:

$$y(b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + b_2 x^{n-3} + \ldots + b_{n-2} x + b_{n-1}) + b_n \int \frac{dx}{y} ,$$

гдѣ $b_0, b_1, b_2 \ldots b_{n-1}, b_n$ - неопредѣленные коэффиціенты, которые вычисляются слѣдующимъ образомъ.

Дифференцируя равенство

$$\int \frac{\psi(x)\,dx}{y} = y(b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \ldots + b_{n-1}) + b_n \int \frac{dx}{y} ,$$

имѣемъ:

$$\frac{\psi(x)}{y} = y[(n-1)b_0 x^{n-2} + (n-2)b_1 x^{n-3} + \ldots + b_{n-2}] +$$

$$+ \frac{Ax + B}{y} (b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \ldots + b_{n-1}) + \frac{b_n}{y} .$$

Умножая на y, получаемъ:

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = (Ax^2 + 2Bx + C)(\overline{n-1}.b_0 x^{n-2} + \overline{n-2}.b_1 x^{n-2} + \ldots$$

$$\ldots + b_{n-2}) + (Ax + B)(b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \ldots + b_{n-1}) + b_n .$$

Сравнивая коэффиціенты при одинаковыхъ степеняхъ x въ лѣвой и правой части, получимъ (n+1) уравненіе для опредѣленія (n+1) неизвѣстныхъ коэффиціентовъ $b_0, b_1, b_2, \ldots b_n$.

Примѣръ. Найти интегралъ

$$I = \int \frac{x^2 - x + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1}}\, dx.$$

На основанiи предыдущей теоремы пишемъ:

$$I = \sqrt{x^2 + x + 1}\,(\alpha x + \beta) + \gamma \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$$

Дифференцируя обѣ части этого равенства, получимъ:

$$\frac{x^2-x+1}{\sqrt{x^2+x+1}} = \frac{x + 1/2}{\sqrt{x^2+x+1}}(\alpha x + \beta) + \sqrt{x^2+x+1}\,\alpha + \gamma \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}},$$

а по умноженiи на $\sqrt{x^2+x+1}$ будемъ имѣть:

$$x^2 - x + 1 = (x + 1/2)(\alpha x + \beta) + (x^2 + x + 1)\alpha + \gamma.$$

Отбирая теперь коэффицiенты въ правой части при одинаковыхъ степеняхъ x и приравнивая ихъ коэффицiентамъ лѣвой части при тѣхъ же степеняхъ x, получимъ:

при x^2	$1 = \alpha + \alpha = 2\alpha$	$\alpha = 1/2$
" x	$-1 = \beta + 1/2\alpha + \alpha$	$\beta = -7/4$
" x^0	$1 = 1/2\beta + \alpha + \gamma$	$\gamma = 11/8$.

Итакъ, нашъ интегралъ

$$\int \frac{x^2 - x + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1}}\, dx = (1/2 x - 7/4)\sqrt{x^2 + x + 1} + 11/8 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$$

Здѣсь мы интегралъ 1-го типа привели къ интегралу U_0. При вычисленiи интеграла $U_0 = \int \frac{dx}{y}$ нужно отличить два случая:

1) $A > 0$ и 2) $A < 0$.

1) $A > 0$. Перепишемъ интегралъ U_0 такимъ образомъ:

$$U_0 = \int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}} = \frac{1}{\sqrt{A}} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2\rho x+q}} = \frac{1}{\sqrt{A}} \int \frac{dx}{\sqrt{(x+\rho)^2 + q - \rho^2}},$$

гдѣ для удобства мы положимъ:

$$\frac{B}{A} = \rho \text{ и } \frac{C}{A} = q.$$

Полагая теперь

$$x + p = z\ ;\quad dx = dz\ ;\quad q - p^2 = k$$

(k можетъ быть $\gtrless 0$), можемъ написать

$$= \frac{1}{\sqrt{A}}\int\frac{dz}{\sqrt{z^2 + k}}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (*).$$

Легко доказать, что

$$\int\frac{dz}{\sqrt{z^2 + k}} = \log(z + \sqrt{z^2 + k}) + C.$$

Для этого введемъ новую перемѣнную:

$$\sqrt{z^2 + k} = t - z,$$

откуда

$$z^2 + k = t^2 - 2tz + z^2.$$

Дифференцируя и сокращая на 2, находимъ:

$$0 = tdt - tdz - zdt$$

$$tdz = (t-z)dt$$

и далѣе

$$\frac{dz}{t - z} = \frac{dt}{t}\ .$$

Замѣняя t-z его выраженіемъ $\sqrt{z^2+k}$ и интегрируя:

$$\int\frac{dz}{\sqrt{z^2 + k}} = \int\frac{dt}{t} = \log t + C = \log(z + \sqrt{z^2 + k}) + C.$$

Подставляя вмѣсто z и k ихъ выраженія въ формулу (*) получимъ:

$$U_0 = \int\frac{dx}{\sqrt{Ax^2 + 2Bx + C}} = \frac{1}{\sqrt{A}}\log(x + p + \sqrt{x^2 + 2px + q}) + C_1 =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{A}}\log(x + \frac{B}{A} + \frac{\sqrt{Ax^2 + 2Bx + C}}{\sqrt{A}}) + C_1$$

или, прибавляя и вычитая въ правой части $\frac{1}{\sqrt{A}}\log A$ и замѣняя $C_1 - \frac{1}{\sqrt{A}}\log A$ другой произвольной постоянной C, окончательно будемъ имѣть:

$$U_{01} = \frac{1}{\sqrt{A}} \log(Ax + B + \sqrt{A}\,\sqrt{Ax^2 + 2Bx + C}) + C.$$

Примѣръ 1.

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + x + 1}} = \int \frac{d(x + 1/2)}{\sqrt{(x + 1/2)^2 + 3/4}}.$$

Положимъ $x + 1/2 = z$; тогда

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{z^2 + 3/4}} = \lg(z + \sqrt{z^2 + 3/4}) + C = \lg(x + 1/2 + \sqrt{x^2 + x + 1}) + C.$$

Примѣръ 2.

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{2x^2 + 3x - 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 3/2\,x - 1/2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{(x + 3/4)^2 - 1/2 - 9/16}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d(x + 3/4)}{\sqrt{(x + 3/4)^2 - 17/16}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \lg(x + 3/4 + \sqrt{x^2 + 3/2\,x - 1/2}) + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \lg(2x + 3/2 + \sqrt{2}.\sqrt{2x^2 + 3x - 1} + C_1.$$

2) $A < 0$. Въ этомъ случаѣ вынесемъ въ знаменателѣ изъ подъ корня $\sqrt{-A}$. Тогда

$$\int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2 + 2Bx + C}} = \frac{1}{\sqrt{-A}} \int \frac{dx}{\sqrt{q + 2px - x^2}},$$

гдѣ

$$q = -\frac{C}{A}; \quad p = -\frac{B}{A};$$

и далѣе преобразуемъ такъ:

$$\frac{1}{\sqrt{-A}} \int \frac{dx}{\sqrt{q - (x^2 - 2px + p^2 - p_2)}} = \frac{1}{\sqrt{-A}} \int \frac{d(x-p)}{\sqrt{q + p^2 - (x-p)^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-A}} \int \frac{dz}{\sqrt{k^2 - z^2}},$$

причемъ мы полагаемъ:

$$x - p = z; \quad q + p^2 = k^2$$

(число положительное). Если бы $q + p^2$ было отрицательнымъ, то подъ знакомъ корня $\sqrt{(q+p^2)-(x-p)^2}$ стояло бы число отрицательное при всѣхъ вещественныхъ X; тогда корень, а съ нимъ и интегралъ были бы мнимыми; такой случай мы исключаемъ. Мы знаемъ, что:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{k^2-z^2}} = \int \frac{d\,{}^z/_k}{\sqrt{1-(\frac{z}{k})^2}} = \text{arc Sin}\,\frac{z}{k} + C.$$

Слѣдовательно

$$\int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}} = \frac{1}{\sqrt{-A}}\,\text{arc Sin}\,\frac{x+\frac{B}{A}}{\sqrt{-\frac{C}{A}+\frac{B^2}{A^2}}} + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-A}}\,\text{arc Sin}\,\frac{Ax+B}{-\sqrt{B^2-AC}} + C.$$

Примѣръ 1.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x-2x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{{}^1/_2-{}^1/_2x-x^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{{}^1/_2-(x^2+{}^1/_2x+{}^1/_{16}-{}^1/_{16})}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{d(x+{}^1/_4)}{\sqrt{{}^9/_{16}-(x+{}^1/_4)^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\,\text{arc Sin}\,\frac{x+{}^1/_4}{{}^3/_4} + C = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\text{arc Sin}\,\frac{4x+1}{3} + C.$$

Примѣръ 2.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x-5x^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\int \frac{dx}{\sqrt{{}^3/_5-{}^2/_5x-x^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\int \frac{dx}{\sqrt{{}^3/_5-(x^2+{}^2/_5x+{}^1/_{25}-{}^1/_{25})}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\int \frac{d(x+{}^1/_5)}{\sqrt{{}^{16}/_{25}-(x+{}^1/_5)^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\,\text{arc Sin}\,\frac{x+{}^1/_5}{\sqrt{5}}\;\text{arc Sin}\,\frac{5x+1}{4}\,.$$

2-й типъ.

$$\int \frac{dx}{(x-a)^{\alpha}y}\,, \quad y = \sqrt{Ax^2+2Bx+C}\,.$$

Второй типъ приводится къ первому подстановкой

$$x - a = \frac{1}{z},$$

откуда

$$x = a + \frac{1}{z}$$

$$dx = -\frac{dz}{z^2};$$

y въ новой перемѣнной z выразится такъ:

$$y = \sqrt{A(a + \frac{1}{z})^2 + 2B(a + \frac{1}{z}) + C} = \frac{1}{z}\sqrt{A_1z^2 + 2B_1z + C_1},$$

гдѣ

$$A_1 = Aa^2 + 2Ba + C$$

$$B_1 = Aa + B; \quad C_1 = A.$$

Подставляя полученные результаты въ данный интегралъ, мы приведемъ его къ первому типу:

$$\int \frac{dx}{(x-a)^\alpha y} = -\int \frac{\frac{dz}{z^2}}{(\frac{1}{z})^\alpha \frac{1}{z}\sqrt{A_1z^2 + 2B_1z + C_1}} = -\int \frac{z^{\alpha-1}dz}{\sqrt{A_1z^2+2B_1z+C_1}}.$$

Примѣръ. Найти интегралъ

$$\int \frac{dx}{(x-1)^2\sqrt{x^2+1}}.$$

Дѣлая подстановку

$$x - 1 = \frac{1}{z},$$

получимъ: $x = 1 + \frac{1}{z}$; $dx = -\frac{dz}{z^2}$

$$\sqrt{x^2+1} = \sqrt{(1+\frac{1}{z})^2 + 1} = \frac{1}{z}\sqrt{(z+1)^2 + z^2} = \frac{1}{z}\sqrt{2z^2 + 2z + 1}$$

$$\int \frac{dx}{(x-1)^2\sqrt{x^2+1}} = -\int \frac{\frac{dz}{z^2}}{\frac{1}{z^2}\frac{1}{z}\sqrt{2z^2+2z+1}} = -\int \frac{zdz}{\sqrt{2z^2+2z+1}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{(2z+1)-1}{\sqrt{2z^2+2z+1}}dz = -\frac{1}{2}\int \frac{d(2z^2+2z+1)}{2\sqrt{2z^2+2z+1}} + \frac{1}{2}\int \frac{d(z+\frac{1}{2})}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{(z+\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}}} =$$

$$= -\tfrac{1}{2}\sqrt{2z^2+2z+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\log(z+\tfrac{1}{2}+\sqrt{z^2+z+\tfrac{1}{2}}) + C =$$

$$= -\tfrac{1}{2}\frac{\sqrt{x^3+1}}{x-1} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\log\left|\frac{x+1}{x-1}+\sqrt{2}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x-1}\right| + C_1.$$

3-й типъ. Интегралъ вида:

$$\int\frac{(Px+Q)dx}{(x^2+pz+q)^m.y},$$

$y=\sqrt{Ax^2+2Bx+C}$ и x^2+px+q не имѣютъ вещественныхъ корней.

1-й случай. Разсмотримъ сначала частный случай предложеннаго интеграла, когда въ обоихъ трехчленахъ только два члена, т.е. интегралъ вида:

$$\int\frac{(Px+Q)dx}{(x^2+a)^m\sqrt{x^2+b}} = P\int\frac{xdx}{(x^2+a)^m\sqrt{x^2+b}} + Q\int\frac{dx}{(x^2+a)^m\sqrt{x^2+b}}.$$

Обозначимъ

$$I_1=\int\frac{xdx}{(x^2+a)^m\sqrt{x^2+b}}; \quad I_2=\int\frac{dx}{(x^2+a)^m\sqrt{x^2+b}}.$$

Въ интегралѣ I_1 полагаемъ:

$$x^2+b=z^2$$

отсюда находимъ:

$$x^2+a=z^2+a-b,$$

$$xdx=zdz$$

$$I_1=\int\frac{zdz}{(z^2+a-b)^m z}=\int\frac{dz}{(z^2+a-b)^m}.$$

Этотъ интегралъ берется на основанiи формулъ приведенiя (см. отдѣлъ I, классъ 2).

Въ интегралѣ I_2 дѣлаемъ слѣдующее преобразованiе:

$$\int\frac{dx}{x^{2m}(1+ax^{-2})^m x\sqrt{1+bx^{-2}}}=\int\frac{x^{-(2m+1)}}{(1+ax^{-2})^m\sqrt{1+bx^{-2}}}.$$

Теперь дѣлаемъ подстановку

$$1+bx^{-2}=t^2 \quad \dots\dots\dots (1).$$

Дифференцируя это равенство, находимъ:

$$-bx^{-3}dx = tdt \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2).$$

На основанiи полученныхъ выраженiй составимъ числитель нашего интеграла. Изъ равенства (1) имѣемъ:

$$x^{-2} = \frac{t^2-1}{b} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

$$x^{-(2m-2)} = (x^{-2})^{m-1} = \left(\frac{t^2-1}{b}\right)^{m-1} \; . \; . \; . \; . \; (4),$$

а изъ равенства (2):

$$x^{-3}dx = -\frac{tdt}{b} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (5).$$

Перемножая равенства (4) и (5), получимъ:

$$x^{-(2m+1)}dx = -\frac{t(t^2-1)^{m-1}}{b^m}dt.$$

Такъ какъ

$$1 + ax^{-2} = 1 + a\frac{t^2-1}{b} = \frac{at^2+b-a}{b},$$

то окончательно

$$I_2 = -\int \frac{\cancel{b^m}\,t(t^2-1)^{m-1}dt}{\cancel{b^m}(at^2+b-a)^m\,\cancel{t}} = -\int \frac{(t^2-1)^{m-1}dt}{(at^2+b-a)^m}.$$

Интегралъ приведенъ къ рацiональной дроби (см.отдѣлъ I, классъ 2-й).

Замѣчанiе. Предыдущiй способъ одинаково относится къ случаю, когда a положительное и когда a отрицательное; равнымъ образомъ подкоренное выраженiе можетъ имѣть видъ $a_1x^2+b_1$, гдѣ a_1 можетъ быть положительнымъ или отрицательнымъ.

Примѣръ.

$$\int\frac{(3x-1)dx}{(x^2-1)\sqrt{x^2+1}} = 3\int\frac{xdx}{(x^2-1)\sqrt{x^2+1}} - \int\frac{dx}{(x^2-1)\sqrt{x^2+1}} = 3\,I_1 - I_2.$$

Полагаемъ въ интегралѣ I_1

$$x^2+1 = z^2.$$

Отсюда

$$xdx = zdz$$

$$x^2-1 = z^2-2,$$

$$I_1 = \int \frac{zdz}{(z^2-2)z} = \int \frac{dz}{z^2-2} \quad \frac{1}{2\sqrt{2}} \log\left(\frac{z-\sqrt{2}}{z+\sqrt{2}}\right) + C =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \log\left(\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2}}\right) + C.$$

Обратимся къ интегралу I_2:

$$I_2 = \int \frac{dx}{x^3(1-x^{-2})\sqrt{1+x^{-2}}} = \int \frac{x^{-3}dx}{(1-x^{-2})\sqrt{1+x^{-2}}}.$$

Полагая

$$1 + x^{-2} = t^2,$$

находимъ отсюда дифференцированіемъ

$$-x^{-3}dx = tdt.$$

$$1 - x^{-2} = 1 - (t^2 - 1) = 2 - t^2,$$

$$I_2 = \frac{-t\,dt}{(2-t^2)t} = \frac{dt}{t^2-2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \log\left(\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right) + C.$$

Подставляя вмѣсто t его значеніе

$$t = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$$

$$I_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \log\left(\frac{\sqrt{x^2+1}+x\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+1}+x\sqrt{2}}\right) + C.$$

2-й случай. Интегралы вида

$$\int \frac{dx}{y^{2m+1}} = \int \frac{dx}{(Ax^2+2Bx+C)^m . y},$$

гдѣ m - цѣлое и положительное число.

Представимъ нашъ интегралъ въ такомъ видѣ:

$$\int \frac{dx}{y^{2m+1}} = \frac{1}{A^{\frac{2m+1}{2}}} \int \frac{dx}{(x^2+2px+q)^{\frac{2m+1}{2}}} = \frac{1}{A^{\frac{2m+1}{2}}} \int \frac{d(x+p)}{[(x+p)^2+q-p^2]^{\frac{2m+1}{2}}} =$$

$$= \frac{1}{A^{\frac{2m+1}{2}}} \int \frac{dx}{(z^2+a)^{\frac{2m+1}{2}}} = \frac{1}{A^{\frac{2m+1}{2}}} I_m .$$

Здѣсь мы ввели новыя обозначенія, положивъ: $p = \frac{B}{A}$; $q = \frac{C}{A}$; $x + p = z$; $q - p^2 = a$, считая при этомъ для опредѣленности что $A > 0$. Преобразуемъ нашъ интегралъ далѣе

$$I_m = \int \frac{dz}{(z^2+a)^{\frac{2m+1}{2}}} = \int \frac{dz}{z^{2m+1}(1+az^{-2})^{\frac{2m+1}{2}}} = \int \frac{z^{-(2m+1)}dz}{(1+az^{-2})^{\frac{2m+1}{2}}}.$$

Полагая

$$1 + az^{-2} = t^2$$

найдемъ

$$- az^{-3} dz = tdt$$

$$z^{-(2m-2)} = (z^{-2})^{m-1} = (\frac{t^2 - 1}{a})^{m-1} .$$

Перемноживъ два послѣднія равенства, получимъ:

$$- az^{-(2m+1)} dz = (\frac{t^2-1}{a})^{m-1} tdt,$$

$$I_m = -\int \frac{(t^2-1)^{m-1} tdt}{a^m t^{2m+1}} = - \frac{1}{a^m}\int \frac{(t^2-1)^{m-1} dt}{t^{2m}} .$$

Полученный интегралъ будетъ алгебраическій.

Замѣчаніе. Для вычисленія интеграла I_m можно пользоваться формулой приведенія, составленной въ отдѣлѣ I, классѣ 2:

$$\int \frac{dz}{(z^2 + a)^n} = \frac{z}{a(2n - 2)(z^2 + a)^{n-1}} + \frac{2n - 3}{2n - 2} \cdot \frac{1}{a} \int \frac{dx}{(z^2 + a)^{n-1}} ,$$

гдѣ $n = \frac{2m+1}{2}$. Послѣдовательное пониженіе степени $\frac{2m+1}{2}$ приведетъ къ интегралу съ показателемъ $n = 3/2$, который, вслѣдствіе равенства $2n - 3 = 0$ непосредственно берется по предыдущей формулѣ приведенія.

Примѣръ.

$$I = \int \frac{dx}{(x^2 + x + 1)^{\frac{5}{2}}} = \int \frac{dx}{[(x + 1/2)^2 + 3/4]^{\frac{5}{2}}} = \int \frac{dz}{(z^2 + 3/4)^{\frac{5}{2}}} =$$

$$= \int \frac{dz}{z^5(1 + {}^3/_4 z^{-2})^{\frac{5}{2}}} = \int \frac{z^{-5}\,dz}{(1 + {}^3/_4 z^{-2})^{\frac{5}{2}}},$$

гдѣ

$$z = x + {}^1/_2 .$$

Полагая

$$1 + {}^3/_4 z^{-2} = t^2$$

находимъ:

$$- {}^3/_4\, z^{-3}\,dz = tdt ,$$

$$z^{-2} = {}^4/_3(t^2 - 1).$$

Отсюда

$$z^{-5}\,dz = - {}^{16}/_9\, t(t^2 - 1)dt$$

$$I = - {}^{16}/_9 \int \frac{(t^2 - 1)tdt}{t^5} = - {}^{16}/_9 \int \frac{dt}{t^2} + {}^{16}/_9 \int \frac{dt}{t^4} =$$

$$= {}^{16}/_9 \left[\frac{1}{t} - \frac{1}{3t^3}\right] + C = {}^{16}/_9 \,.\, \frac{3t^2 - 1}{3t^3} + C.$$

Такъ какъ у насъ

$$t = \frac{\sqrt{z^2 + {}^3/_4}}{z} = \frac{\sqrt{x^2 + x + 1}}{x + {}^1/_2},$$

то

$$I = {}^{16}/_9 \,.\, \frac{3(x^2 + x + 1) - (x + {}^1/_2)^2}{3(x^2 + x + 1)^{\frac{3}{2}}}(x + {}^1/_2) + C =$$

$$= \frac{16}{27} \,.\, \frac{(2x^2 + 2x + {}^{11}/_4)(x + {}^1/_2)}{(x^2 + x + 1)^{\frac{3}{2}}} + C.$$

Рѣшая предложенный интегралъ по формулѣ приведенія, получимъ:

$$I = \int \frac{dz}{(z^2 + {}^3/_4)^{\frac{5}{2}}} = \frac{z}{{}^3/_4 . 3(z^2 + {}^3/_4)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \int \frac{dz}{(z^2 + {}^3/_4)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\int \frac{dz}{(z^2 + {}^3/_4)^{\frac{3}{2}}} = \frac{z}{{}^3/_4 . 1 . (z^2 + {}^3/_4)^{\frac{1}{2}}} + C,$$

$$I = \frac{4}{9} \cdot \frac{z}{(z^2 + {}^3/_4)^{\frac{3}{2}}} + \frac{32}{27} \cdot \frac{z}{(z^2 + {}^3/_4)^{\frac{1}{2}}} + C,$$

что по замѣнѣ z его значеніемъ, даетъ прежній результатъ.

3-й случай. Интегралы вида:

$$I = \int \frac{dx}{(x^2 + 2px + q)^m \sqrt{x^2 + 2px + q_1}}$$

приводятся подстановкой $x + p = z$ къ случаю 1-му:

$$I = \int \frac{dz}{(z^2 + q - p^2)^m \sqrt{z^2 + q_1 - p^2}} .$$

Примѣръ.

$$I = \int \frac{dx}{(2x^2 + 2x - 1)\sqrt{x^2+x+1}} = \tfrac{1}{2}\int \frac{dx}{(x^2 + x - \tfrac{1}{2})\sqrt{x^2+x+1}} =$$

$$= \tfrac{1}{2}\int \frac{d(x + \tfrac{1}{2})}{[(x + \tfrac{1}{2})^2 - \tfrac{3}{4}]\sqrt{(x+\tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{3}{4}}} = \tfrac{1}{2}\int \frac{dz}{(z^2 - \tfrac{3}{4})\sqrt{z^2+\tfrac{3}{4}}} =$$

$$= \tfrac{1}{2}\int \frac{z^{-3}\,dz}{(1 - \tfrac{3}{4}z^{-2})\sqrt{1 + \tfrac{3}{4}z^{-2}}} .$$

Полагая теперь

$$1 + \tfrac{3}{4}z^{-2} = t^2 ,$$

найдемъ:

$$-\tfrac{3}{4}z^{-3}\,dz = tdt$$

$$1 - \tfrac{3}{4}z^{-2} = 1 - (t^2 - 1) = 2 - t^2$$

и наконецъ

$$I = -\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\int\frac{tdt}{(2 - t^2)t} = \frac{2}{3}\int\frac{dt}{t^2 - 2} = \frac{1}{3\sqrt{2}}\log\left(\frac{t - \sqrt{2}}{t + \sqrt{2}}\right) + C$$

гдѣ

$$t = \frac{\sqrt{z^2 + \tfrac{3}{4}}}{z} = \frac{\sqrt{x^2 + x + 1}}{x + \tfrac{1}{2}} .$$

4-й случай (общій). Интегралы вида:

$$\frac{(Px + Q)dx}{(x^2 + 2px + q)^m \sqrt{x^2 + 2p_1x + q_1}} ,$$

гдѣ $x^2 + 2px + q$ не имѣетъ вещественныхъ корней, т.е.

$$q - p^2 > 0, \quad \text{а} \quad q_1 - p_1^2 \gtrless 0.$$

Положимъ:

$$x = \frac{\alpha z + \beta}{z + 1},$$

гдѣ α и β пока неопредѣленныя постоянныя, и подберемъ эти постоянныя такъ, чтобы свести 4-й случай къ 1-му.

Имѣемъ:

$$x^2 + 2px + q = \frac{(\alpha z+\beta)^2 + 2p(\alpha z+\beta)(z+1) + q(z+1)^2}{(z+1)^2} =$$

$$= \frac{1}{(z+1)^2}\left[z^2(\alpha^2+2p\alpha+q) + 2z(\alpha\beta+p\overline{\alpha+\beta}+q) + (\beta^2+2p\beta+q)\right].$$

Подобнымъ образомъ находимъ:

$$x^2 + 2p_1x + q_1 = \frac{1}{(z+1)^2}\left[z^2(\alpha^2+2p_1\alpha+q_1) + 2z(\alpha\beta+p_1\overline{\alpha+\beta}+q_1) + \right.$$

$$\left. + (\beta^2 + 2p_1\beta + q_1)\right].$$

Выберемъ α и β такимъ образомъ, чтобы

$$\alpha\beta + p\overline{\alpha + \beta} + q = 0,$$

$$\alpha\beta + p_1\overline{\alpha + \beta} + q_1 = 0.$$

Вычитая второе уравненіе изъ перваго, найдемъ:

$$\alpha + \beta = \frac{q_1 - q}{p - p_1} = M.$$

Умноживъ теперь первое на $-p_1$, а второе на p и сложивъ ихъ, получимъ:

$$\alpha\beta = \frac{p_1q - pq_1}{p - p_1} = N.$$

Тогда α и β найдутся какъ корни квадратнаго уравненія

$$\lambda^2 - M\lambda + N = 0.$$

Но является вопросъ, возможно ли всегда найти вещественныя значенія для α и β. Мы докажемъ сейчасъ, что уравненіе

$$\lambda^2 - M\lambda + N = 0 \quad \text{при} \quad q - p^2 > 0$$

имѣетъ вещественные корни, т.е. что

$$\Delta = M^2 - 4N$$

есть число положительное. Дѣйствительно, подставляя въ это выраженіе вмѣсто M и N ихъ значенія, получимъ:

$$\Delta = \frac{1}{(p-p_1)^2}\left[(q_1-q)^2 - 4(p_1q - pq_1)(p - p_1)\right] = \frac{1}{(p-p_1)^2}\,\Delta_1 .$$

Преобразуемъ Δ_1 слѣдующимъ образомъ:

$$\left.\begin{array}{rl} \Delta_1 = q_1^2 - 2qq_1 + q^2 - 4pp_1q & + 4pp_1q_1 + 4p^2q_1 + 4p_1^2q \\ + 4qq_1 + 4p^2p_1^2 & - 4qq_1 - 4p^2p_1^2 \end{array}\right| =$$

$$= (q_1 + q)^2 - 4pp_1(q + q_1) + 4p^2p_1^2 - 4(q - p^2)(q_1 - p_1^2) =$$

$$= (q_1 + q - 2pp_1)^2 - 4(q - p^2)(q_1 - p_1^2).$$

Числа p, q, p_1 и q_1 связаны у насъ слѣдующими условіями:

$$q - p^2 > 0\,; \quad q_1 - p_1^2 \lessgtr 0.$$

Если $q_1 - p_1^2 < 0$, то очевидно, что Δ_1 будетъ больше 0.

Если $q_1 - p_1^2 > 0$, то введя слѣдующія обозначенія:

$$q - p^2 = S > 0\,; \quad q_1 - p_1^2 = S_1 > 0\,,$$

будемъ имѣть:

$$q + q_1 - 2pp_1 = p^2 - 2pp_1 + p_1^2 + S + S_1 = (p-p_1)^2 + S + S_1 > S + S_1,$$

а слѣдовательно

$$\Delta_1 \geqq (S + S_1)^2 - 4SS_1 = (S - S_1)^2 \geqq 0$$

безразлично при $S \gtreqless S_1$.

Отмѣтимъ, что Δ_1 не можетъ быть = 0, такъ какъ это возможно при $p - p_1 = 0$ (когда $q + q_1 - 2pp_1 = S + S_1$) и при $S = S_1$, но въ этомъ случаѣ $q = q_1$, и мы приходимъ къ случаю 2-му.

Итакъ, Δ_1 а съ нимъ и Δ остаются больше 0.

Мы имѣли:

$$x = \frac{\alpha z + \beta}{z + 1} = \frac{\alpha z + \alpha + \beta - \alpha}{z + 1} = \alpha + \frac{\beta - \alpha}{z + 1}\,;$$

отсюда

$$dx = \frac{\alpha - \beta}{(z+1)^2}\,dz$$

$$Px + Q = \frac{P(\alpha z + \beta)}{z+1} + Q = \frac{z(P\alpha + Q) + P\beta + Q}{z+1} = \frac{P_1 z + Q_1}{z+1};$$

$$x^2 + 2px + q = \frac{1}{(z+1)^2}[az^2 + b]$$

$$x^2 + 2p_1x + q_1 = \frac{1}{(z+1)^2}[a_1z^2 + b_1]$$

$$I = (\alpha - \beta)\int \frac{(P_1z+Q_1)(z+1)^{2m}(z+1)}{(z+1)(az^2+b)^m\sqrt{a_1z^2+b_1}} \cdot \frac{dz}{(z+1)^2} =$$

$$= (\alpha - \beta)\int \frac{(P_1z+Q_1)(z+1)^{2m-2}}{(az^2+b)^m\sqrt{a_1z^2+b_1}}\,dz = \sum_{k=1}^{m}\int \frac{R_kz + S_k}{(az^2+b)^k} \cdot \frac{dz}{\sqrt{a_1z^2+b_1}},$$

такъ какъ дробь

$$\frac{(\alpha - \beta)(P_1z+Q_1)(z+1)^{2m-2}}{(az^2+b)^m}$$

можно разложить на простѣйшія дроби вида:

$$\frac{R_kz + S_k}{(az^2 + b)^k}$$

при $k = 1, 2, 3 \ldots m$.

Мы привели, такимъ образомъ, нашъ интегралъ къ суммѣ нѣсколькихъ интеграловъ, которые подходятъ подъ 1-й случай.

Примѣръ. Найти

$$\int \frac{(4x + 3)dx}{(2x^2 - x + 2)\sqrt{x^2 - 3x + 1}}.$$

Положимъ

$$x = \frac{\alpha z + \beta}{z + 1}.$$

Тогда

$$2x^2 - x + 2 = \frac{1}{(z+1)^2}[2(\alpha z+\beta)^2 - (\alpha z+\beta)(z+1) + 2(z+1)^2] =$$

$$= \frac{1}{(z+1)^2}[z^2(2\alpha^2-\alpha+2) + 2z(2\alpha\beta-\tfrac{1}{2}\overline{\alpha + \beta} + 2) + (2\beta^2-\beta+2)];$$

$$x^2-3x+1 = \frac{1}{(z+1)^2}[z^2(\alpha^2-3\alpha+1) + 2z(\alpha\beta-\tfrac{3}{2}\overline{\alpha+\beta}+1) + (\beta^2-3\beta+1)].$$

Для α и β ставимъ условія:

$$2\alpha\beta - \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) + 2 = 0$$

$$\alpha\beta - \tfrac{3}{2}(\alpha+\beta) + 1 = 0,$$

откуда

$$\alpha + \beta = 0\ ;\ \ \alpha\beta = -1$$

$$\alpha = 1\ ;\ \ \beta = -1.$$

Опредѣливъ α и β, находимъ:

$$x = \frac{z-1}{z+1},$$

$$2x^2 - x + 2 = \frac{1}{(z+1)^2}[3z^2 + 5]$$

$$x^2 - 3x + 1 = \frac{1}{(z+1)^2}[-z^2 + 5].$$

Далѣе

$$x = \frac{z+1-2}{z+1} = 1 - \frac{2}{z+1}$$

$$dx = \frac{2dz}{(z+1)^2}$$

$$4x + 3 = \frac{4(z-1) + 3(z+1)}{z+1} = \frac{7z-1}{z+1}.$$

Въ новой перемѣнной нашъ интегралъ выразится такъ:

$$I = \int \frac{7z-1}{x+1} \cdot \frac{2dz}{(z+1)^2} \cdot \frac{(z+1)^2}{3z^2+5} \cdot \frac{z+1}{\sqrt{5-z^2}} =$$

$$= 2\int \frac{(7z-1)dz}{(3z^2+5)\sqrt{5-z^2}} = 14\int \frac{zdz}{(3z^2+5)\sqrt{5-z^2}} - 2\int \frac{dz}{(3z^2+5)\sqrt{5-z^2}} =$$

$$= 14\, I_1 - 2\, I_2.$$

Интегралы I_1 и I_2 вычислимъ отдѣльно. Въ первомъ полагаемъ:

$$5 - z^2 = t^2,$$

откуда

$$-zdz = tdt$$

$$3z^2 + 5 = 5 + 3(5 - t^2) = 20 - 3t^2$$

$$I_1 = -\int \frac{tdt}{(20-3t^2)t} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{d(t\sqrt{3})}{(t\sqrt{3})^2 - (\sqrt{20})^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{20}} \log \frac{t\sqrt{3} - \sqrt{20}}{t\sqrt{3} + \sqrt{20}} + C.$$

Второй интегралъ преобразуемъ такъ:

$$I_2 = \int \frac{z^{-3}\,dz}{(3 + 5z^{-2})\sqrt{5z^{-2} - 1}}.$$

Дѣлая подстановку

$$5z^{-2} - 1 = u^2$$

$$-5z^{-3}\,dz = u\,du$$

$$5z^{-2} + 3 = u^2 + 4,$$

получимъ:

$$I_2 = -\tfrac{1}{5} \int \frac{u\,du}{(u^2 + 4)u} = -\tfrac{1}{10} \operatorname{arctg}\left(\frac{u}{2}\right) + C =$$

$$= -\tfrac{1}{10} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{5 - z^2}}{2z} + C.$$

Выразивъ z черезъ x и подставляя въ эту формулу, получимъ въ окончательной формѣ.

Классъ 3. Двучленныя ирраціональности или дифференціальные биномы. - Интеграломъ отъ двучленной ирраціональности или дифференціальнаго бинома называется интегралъ вида

$$\int x^m (a + bx^n)^p\,dx,$$

гдѣ m, n и p - любыя раціональныя числа. Эти интегралы приводятся къ интеграламъ отъ раціональныхъ функцій (отдѣлу I) въ слѣдующихъ трехъ случаяхъ.

1-й. p = цѣлому. При $m = \frac{m_1}{n_1}$, $n = \frac{m_2}{n_2}$ имѣемъ классъ 1-й отд. II-го. Интегралъ рѣшается подстановкой $x = y^N$, гдѣ

$$N = \text{О.Н.К.}(n_1, n_2).$$

2-й. $\frac{m+1}{n} = 0$ или t, числу цѣлому. Пусть $p = \frac{\alpha}{\beta}$. Въ этомъ случаѣ, дѣлая подстановку

$$a + bx^n = z^\beta$$

мы, навѣрное, приведемъ подъинтегральную функцію къ раціональному виду. Въ самомъ дѣлѣ, на основаніи предыдущаго равенства мы можемъ написать:

$$(a + bx^n)^p = z^{p\beta} = z^\alpha$$

$$x^n = \frac{z^\beta - a}{b}\ ;\quad x = \frac{(z^\beta - a)^{\frac{1}{n}}}{(b)^{\frac{1}{n}}}$$

$$x^m = \left(\frac{z^\beta - a}{b}\right)^{\frac{m}{n}}\ ;$$

$$dx = \frac{1}{n}\left(\frac{z^\beta - a}{b}\right)^{\frac{1}{n}-1} \cdot \frac{\beta z^{\beta-1}dz}{b}\ .$$

И слѣдовательно

$$\int x^m(a + bx^n)^p dx = \frac{\beta}{nb}\left(\frac{z^\beta - a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}-1} z^{\alpha+\beta-1}dz =$$

$$= \frac{\beta}{nb}\int\left(\frac{z^\beta - a}{b}\right)^{t-1} z^{\alpha+\beta-1}dz\ ,$$

гдѣ t, α и β - цѣлыя числа. Это интегралъ отъ раціональной функціи (отдѣлъ I).

Примѣръ.

$$\int \frac{(a + bx^n)^p}{x}dx = \int x^{-1}(a + bx^n)^p dx.$$

Этотъ интегралъ подходитъ подъ указанный случай 2-й, такъ какъ здѣсь $m = -1$ и условіе

$$\frac{m+1}{n} = 0$$

выполняется. Рѣшимъ частный примѣръ:

$$I = \int\frac{\sqrt{1+x^3}}{x}dx = \int\frac{\sqrt{1+x^3}}{x^3}x^2dx.$$

Положимъ:

$$1 + x^3 = z^2\ ;$$

отсюда

$$3x^2dx = 2dz.z$$

$$x^3 = z^2 - 1.$$

Такимъ образомъ предложенный интегралъ:

$$I = {}^2\!/_3\int\frac{z.zdz}{z^2-1} = {}^2\!/_3\int\frac{z^2-1+1}{z^2-1}dz = {}^2\!/_3\, z + {}^1\!/_3 \log\frac{z-1}{z+1} + C,$$

гдѣ

$$z = \sqrt{1 + x^3}\ .$$

3-й. $\frac{m+1}{n} + p = 0$ или t (цѣлому).

Этотъ случай приводится ко второму, если преобразовать предложенный интегралъ слѣдующимъ образомъ. Напишемъ:

$$\int x^m (a + bx^n)^p dx = \int x^{m+np}(ax^{-n} + b)^p dx = \int x^{m_1}(a_1 + b_1 x^{n_1})^p dx,$$

дѣ $m_1 = m + np$; $n_1 = -n$; $a_1 = b$; $b_1 = a$.

Составимъ для новаго интеграла условіе, когда онъ приводится къ раціональному виду; для этого нужно, согласно случаю 2-му, чтобы

$$\frac{m_1 + 1}{n_1} = \frac{m + np + 1}{-n} = -\left(\frac{m+1}{n} + p\right) = 0,$$

или цѣлому числу. Подстановка будетъ такая:

$$a_1 + b_1 x^{n_1} = z^\beta$$

или переходя къ прежнимъ буквамъ: $ax^{-n} + b = z^\beta$. Слѣдуетъ обратить вниманіе на различіе подстановокъ въ случаяхъ 2-мъ и 3-мъ:

$$a + bx^n = z^\beta \quad \text{и} \quad ax^{-n} + b = z^\beta .$$

Примѣръ 1. Всѣ интегралы вида:

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt[n]{a + bx^n}}$$

подходятъ подъ признакъ 3-й. Въ самомъ дѣлѣ,

$$I = \int (a + bx^n)^{-\frac{1}{n}} dx\ ;$$

здѣсь $m = 0$; $p = -\frac{1}{n}$, а потому условіе

$$\frac{m+1}{n} + p = \frac{1}{n} - \frac{1}{n} = 0$$

выполняется. Вынося x изъ подъ знака корня, получаемъ:

$$\frac{dx}{\sqrt[n]{a + bx^n}} = \frac{dx}{x\sqrt[n]{ax^{-n} + b}}$$

и теперь полагаемъ:

$$ax^{-n} + b = z^n$$

Возьмемъ частный примѣръ:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1 + x^3}} = \int \frac{dx}{x\sqrt[3]{x^{-3} + 1}} = \int \frac{x^{-4}\,dx}{x^{-3}\sqrt[3]{x^{-3} + 1}} .$$

Полагая

$$x^{-3} + 1 = z^3$$

найдемъ:

$$- x^{-4}\,dx = z^2 dz$$

$$x^{-3} = z^3 - 1.$$

Тогда будемъ имѣть:

$$I = - \int \frac{z^2\,dz}{(z^3 - 1)z} = - \int \frac{zdz}{z^3 - 1} .$$

Далѣе интегралъ берется по правиламъ отдѣла I.

Примѣръ 2.

$$\int \frac{dx}{(c + dx^n)\sqrt[n]{a + bx^n}} = \int \frac{x^{-(n+1)}\,dx}{(cx^{-n} + d)\sqrt[n]{ax^{-n} + b}}$$

приводится къ раціональному виду подстановкой

$$ax^{-n} + b = z^n,$$

откуда легко составить знаменатель, а также при помощи дифференцированія и числитель. Напримѣръ:

$$I = \int \frac{dx}{(1 - x^4)\sqrt[4]{1 + x^4}} = \int \frac{x^{-5}\,dx}{(x^{-4} - 1)\sqrt[4]{x^{-4} + 1}}$$

Дѣлая подстановку $x^{-4} + 1 = z^4$, найдемъ:

$$- x^{-5}\,dx = z^3 dz$$

$$x^{-4} - 1 = z^4 - 2.$$

И далѣе

$$I = \int \frac{z^3\,dz}{(z^4-2)z} = - \int \frac{z^2 dz}{z^4-2} = - \tfrac{1}{2} \int \frac{(z^2 - \sqrt{2}) + (z^2 + \sqrt{2})}{(z^2 - \sqrt{2})(z^2 + \sqrt{2})}\,dz =$$

$$= - \tfrac{1}{2} \int \frac{dz}{z^2+\sqrt{2}} - \tfrac{1}{2} \int \frac{dz}{z^2-\sqrt{2}} = - \frac{1}{2\sqrt[4]{2}} \operatorname{arctg} \frac{z}{\sqrt[4]{2}} - \frac{1}{4\sqrt[4]{2}} \log\frac{z-\sqrt[4]{2}}{z+\sqrt[4]{2}} + C,$$

гдѣ $z = \dfrac{\sqrt[4]{1 + x^4}}{x}$.

Признаки интегрируемости двучленныхъ ирраціональностей 2-й и 3-й, а именно:

$$\frac{m+1}{n} = 0 \text{ или цѣлому}$$

$$\frac{m+1}{n} + p = 0 \text{ или цѣлому}$$

называются *признаками Бернулли*. Чебышевъ доказалъ, что эти три случая - единственные случаи интегрируемости въ конечномъ видѣ. Покажемъ еще, какъ нѣкоторые интегралы можно свести къ указаннымъ 3-мъ случаямъ.

Примѣръ.

$$I = \int (1+x+x^2)^{\frac{5}{2}} dx = \int [(x+{}^1\!/_2)^2 + {}^3\!/_4]^{\frac{5}{2}} d(x+{}^1\!/_2) = \int (z^2+{}^3\!/_4)^{\frac{5}{2}} dz.$$

Здѣсь

$$m = 0\ ;\ n = 2\ ;\ p = {}^5\!/_2$$

$$\frac{m+1}{n} = {}^1\!/_2\ ;\ \frac{m+1}{n} + p = 3\ ;$$

условіе 3-ье выполняется.

Преобразуемъ предложенный интегралъ въ слѣдующій:

$$I = \int z^5 (1 + {}^3\!/_4 z^{-2})^{\frac{5}{2}} dz$$

и положимъ

$$1 + {}^3\!/_4 z^{-2} = t^2.$$

Отсюда найдемъ:

$$- {}^3\!/_4 z^{-3} dz = tdt$$

$$z^8 = \left(\frac{1}{z^{-2}}\right)^4 = ({}^3\!/_4)^4 \frac{1}{(t^2-1)^4} .$$

Перемножая послѣднія равенства почленно и сокращая на $-{}^3\!/_4$, получимъ:

$$z^5 dz = -({}^3\!/_4)^3 \frac{tdt}{(t^2-1)^4} ,$$

и подставивъ найденные результаты въ нашъ интегралъ, будемъ имѣть

$$I = -\frac{27}{64}\int\frac{t^6\,dt}{(t^2-1)^4}.$$

Послѣдній интегралъ легко находится интегрированіемъ по частямъ:

$$\int\frac{t^6\,dt}{(t^2-1)^4} = \int t^5\,\frac{tdt}{(t^2-1)^4} = t^5\,\frac{-1}{6(t^2-1)^3} + {}^5\!/_6\int\frac{t^4\,dt}{(t^2-1)^3}$$

$$\int t^3\,\frac{tdt}{(t^2-1)^3} = t^3\,\frac{-1}{4(t^2-1)^2} + {}^3\!/_4\int\frac{t^2\,dt}{(t^2-1)^2}$$

$$\int t\,\frac{tdt}{(t^2-1)^2} = t\,\frac{-1}{2(t^2-1)} + {}^1\!/_2\int\frac{dt}{t^2-1} = \frac{-t}{2(t^2-1)} + {}^1\!/_4\,\log\frac{t-1}{t+1} + C.$$

Теперь остается только соединить результаты и сдѣлать соотвѣтствующія подстановки.

ОТДѢЛЪ III.

ИНТЕГРИРОВАНІЕ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХЪ ФУНКЦІЙ.

КЛАССЪ 1. Интегралы вида

$$\int k^{\mu x}\operatorname{Cos}^m(ax+\alpha)\operatorname{Cos}^{m_1}(a_1x+\alpha_1)\ldots\operatorname{Sin}^n(bx+\beta)\operatorname{Sin}^{n_1}(b_1x+\beta_1)\ldots$$
$$\ldots f(x)dx,$$

гдѣ k и μ - числа постоянныя,

$m, m_1, n, n_1 \ldots$ - числа цѣлыя и положительныя,

$\alpha, \alpha_1, a, a_1 \ldots b, \beta, b_1, \beta_1$ - также числа постоянныя,

а $f(x)$ - цѣлая функція.

Докажемъ, что эти интегралы всегда берутся въ конечномъ видѣ. Это удастся намъ сдѣлать послѣ нѣкоторыхъ преобразованій, а именно:

1-е преобразованіе. - Замѣнимъ степени Cos и Sin ихъ выраженіями черезъ кратныя дуги:

$$\operatorname{Cos}^m(ax+\alpha) = A_0\operatorname{Cos} m(ax+\alpha) + A_1\operatorname{Cos}(m-2)(ax+\alpha) +$$
$$+ A_2\operatorname{Cos}(m-4)(ax+\alpha) + \ldots$$

$\operatorname{Sin}^n(bx+\beta) = B_0\operatorname{Cos} n(bx+\beta) + B_1\operatorname{Cos}(n-2)(bx+\beta) + \ldots$ n - четное

$$\mathrm{Sin}^n(bx+\beta) = C_0 \mathrm{Sin}\, n(bx+\beta) + C_1 \mathrm{Sin}(n-2)(bx+\beta) + \ldots \quad n \text{ - нечетн.}$$

Результатъ нашего преобразованія въ общемъ случаѣ будетъ такого вида:

$$\mathrm{Cos}^m(ax+\alpha)\mathrm{Cos}^{m_1}(a_1x+\alpha_1)\ldots\mathrm{Sin}^n(bx+\beta)\mathrm{Sin}^{n_1}(b_1x+\beta_1)\ldots. =$$

$$= \Sigma\, D\, \mathrm{Cos}(cx+d)\mathrm{Cos}(c_1x+d_1)\ldots.\ \mathrm{Sin}(fx+g)\mathrm{Sin}(f_1x+g_1)\ldots.$$

2-е преобразованіе. - Замѣнимъ теперь произведенія Sin и Cos суммами или разностями Sin и Cos согласно формуламъ:

$$\mathrm{Sin}\,\rho\ \mathrm{Cos}\,\sigma = \tfrac{1}{2}\,[\mathrm{Sin}(\rho+\sigma) + \mathrm{Sin}(\rho-\sigma)]$$

$$\mathrm{Cos}\,\rho\ \mathrm{Cos}\,\sigma = \tfrac{1}{2}\,[\mathrm{Cos}(\rho+\sigma) + \mathrm{Cos}(\rho-\sigma)]$$

$$\mathrm{Sin}\,\rho\ \mathrm{Sin}\,\sigma = \tfrac{1}{2}\,[\mathrm{Cos}(\rho-\sigma) - \mathrm{Cos}(\rho+\sigma)].$$

Если каждое слагаемое суммы Σ содержитъ $(l+1)$ множителей (кромѣ D), то послѣ l - кратнаго примѣненія указанныхъ формулъ получится слѣдующее выраженіе этой суммы:

$$\Sigma = P + \Sigma\, M\, \mathrm{Cos}(px+q) + \Sigma\, N\, \mathrm{Sin}(rx+s).$$

Итакъ, послѣ указанныхъ двухъ преобразованій, первоначальный интегралъ приводится къ слѣдующему виду:

$$P\int k^{\mu x} f(x)dx + \Sigma\, M \int k^{\mu x}\mathrm{Cos}(px+q)f(x)dx +$$
$$+ \Sigma\, N \int k^{\mu x}\mathrm{Sin}(rx+s)f(x)dx.$$

Замѣчая, что

$$\mathrm{Cos}(px+q) = \mathrm{Cos}\,px\ \mathrm{Cos}\,q - \mathrm{Sin}\,px\ \mathrm{Sin}\,q$$

$$\mathrm{Sin}(rx+s) = \mathrm{Sin}\,rx\ \mathrm{Cos}\,s + \mathrm{Cos}\,rx\ \mathrm{Sin}\,s,$$

окончательно заключаемъ, что для выполненія интегрированія придется имѣть дѣло съ интегралами двухъ типовъ

$$\int k^{\mu x} f(x)dx \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (I)$$

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\int k^{\mu x}\ \mathrm{Cos}\,mx\ f(x)dx \\ \displaystyle\int k^{\mu x}\ \mathrm{Sin}\,mx\ f(x)dx\end{array}\right| \ldots\ldots\ldots \quad (II).$$

Замѣчаніе. Въ виду того, что k можно представить въ видѣ

$$k = e^{\log k},$$

откуда получаемъ:

$$k^{\mu x} = e^{\mu \log kx} = e^{\mu_1 x},$$

можно ограничиться разсмотрѣніемъ интеграловъ

$$\int e^{\mu x} f(x)dx$$

$$\int e^{\mu x} \operatorname{Cos} mx\, dx$$

$$\int e^{\mu x} \operatorname{Sin} mx\, dx.$$

Примѣръ. Пусть требуется преобразовать интегралъ

$$\int e^{\mu x} f(x) \operatorname{Cos}^3(2x-1) \operatorname{Sin}^2(x+1) dx.$$

Замѣнимъ въ этомъ интегралѣ прежде всего степени Sin и Cos ихъ выраженіями черезъ Sin и Cos кратныхъ дугъ, для чего поступимъ слѣдующимъ образомъ.

Полагая

$$u = \operatorname{Cos} \theta + i \operatorname{Sin} \theta$$
$$v = \operatorname{Cos} \theta - i \operatorname{Sin} \theta,$$

имѣемъ:

$$u + v = 2 \operatorname{Cos} \theta$$

$$u - v = 2i \operatorname{Sin} \theta.$$

Далѣе, замѣчая, что

$$u^m + v^m = 2 \operatorname{Cos} m\theta$$

$$u^m - v^m = 2i \operatorname{Sin} m\theta$$

$$uv = 1,$$

находимъ

$$(2 \operatorname{Cos} \theta)^3 = (u + v)^3 = u^3 + 3u^2v + {}$$
$$+ v^3 + 3u v^2$$
$$\overline{2 \operatorname{Cos} 3\theta + 3.2 \operatorname{Cos} \theta}$$

откуда

$$\operatorname{Cos}^3\theta = \tfrac{1}{4} \operatorname{Cos} 4\theta + \tfrac{3}{4} \operatorname{Cos} \theta.$$

$\operatorname{Sin}^2\theta$ выразимъ черезъ Cos двойного угла

$$\operatorname{Sin}^2\theta = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} \operatorname{Cos} 2\theta.$$

Въ данномъ примѣрѣ имѣемъ:

$$\operatorname{Cos}^3(2x-1) = \tfrac{1}{4} \operatorname{Cos}(6x-3) + \tfrac{3}{4} \operatorname{Cos}(2x-1)$$

$$\operatorname{Sin}^2(x+1) = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} \operatorname{Cos}(2x+2)$$

Преобразуемъ теперь произведенія:

$$\text{Cos}(6x-3)\text{Cos}(2x+2) = \tfrac{1}{2}\,[\text{Cos}(8x-1) + \text{Cos}(4x-5)]$$

$$\text{Cos}(2x-1)\text{Cos}(2x+2) = \tfrac{1}{2}\,[\text{Cos}(4x+1) + \text{Cos}\,3]$$

и окончательно:

$$\text{Cos}^3(2x-1)\text{Sin}^2(x+1) = \tfrac{1}{8}\,\text{Cos}(6x-3) + \tfrac{3}{8}\,\text{Cos}(2x-1) -$$

$$- \tfrac{1}{16}\,\text{Cos}(8x-1) - \tfrac{1}{16}\,\text{Cos}(4x-5) - \tfrac{3}{16}\,\text{Cos}(4x+1) - \tfrac{3}{16}\,\text{Cos}\,3.$$

Такимъ образомъ данный интегралъ приводится къ 6 простѣйшимъ интеграламъ; къ интеграламъ I-го типа относится интегралъ:

$$\tfrac{3}{16}\,\text{Cos}\,3 \int e^{\mu x} f(x)dx,$$

всѣ остальные интегралы будутъ II-го типа:

$$\tfrac{1}{8} \int e^{\mu x} f(x)\text{Cos}(6x-3)dx$$

и т.д.

1-й типъ. Интегралы вида:

$$\int e^{\mu x} f(x)dx\ ,$$

гдѣ $f(x)$ - цѣлая функція степени n-ой. Докажемъ, что

$$\int e^{\mu x} f(x)dx = e^{\mu x}\varphi(x) + C,$$

гдѣ $\varphi(x)$ - цѣлая функція той же степени n-ой. Примѣняя способъ интегрированія по частямъ, получимъ:

$$\int f(x)\,e^{\mu x}\,dx = f(x)\,\frac{e^{\mu x}}{\mu} - \frac{1}{\mu}\int e^{\mu x}\,f'(x)dx$$

$$\int f'(x)e^{\mu x}\,dx = f'(x)\,\frac{e^{\mu x}}{\mu} - \frac{1}{\mu}\int e^{\mu x}\,f''(x)dx$$

. . . .

$$\int f^{n-1}(x)e^{\mu x}dx = f^{n-1}(x)\,\frac{e^{\mu x}}{\mu} - \frac{1}{\mu}\int f^{n}(x)e^{\mu x}dx$$

или, такъ какъ $f^{n}(x)$ постоянное число,

$$\int f^{n-1}(x)e^{\mu x}dx = f^{n-1}(x)\,\frac{e^{\mu x}}{\mu} - \frac{1}{\mu}\,f^{n}(x)\,\frac{e^{\mu x}}{\mu} + C.$$

Послѣдовательной подстановкой получимъ:

$$\int f(x)e^{\mu x}dx = \frac{e^{\mu x}}{\mu}\left[f(x) - \frac{f'(x)}{\mu} + \frac{f''(x)}{\mu^2} - \frac{f'''(x)}{\mu^3} + \ldots\right.$$

$$\left.\ldots + (-1)^n \frac{f^{(n)}(x)}{\mu^n}\right] + C$$

или

$$\int f(x)e^{\mu x}dx = e^{\mu x}(a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n) + C.$$

Эти коэффиціенты a_0, a_1, $a_2 \ldots a_{n-1}$, a_n опредѣляются слѣдующимъ образомъ. Дифференцируя написанное тождество, получимъ:

$$e^{\mu x}f(x) = e^{\mu x}(\mu a_0 x^n + \mu a_1 x^{n-1} + \ldots + \mu a_{n-1}x + \mu a_n) +$$

$$+ e^{\mu x}(na_0 x^{n-1} + (n-1)a_1 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1})$$

сокращая на $e^{\mu x}$, получимъ двѣ функціи степени n-ой. Приравнивая коэффиціенты при одинаковыхъ степеняхъ, получимъ (n+1) условій, для опредѣленія a_0, $a_1 \ldots a_{n-1}$, a_n.

Примѣръ.

$$\int e^{-x}(x^2 - x + 1)dx = e^{-x}(a_0 x^2 + a_1 x + a_2) + C.$$

Дифференцируемъ это тождество и находимъ:

$$e^{-x}(x^2 - x + 1) = e^{-x}(-a_0 x^2 - a_1 x - a_2) + e^{-x}(2a_0 x + a_1).$$

Сравнивая коэффиціенты въ лѣвой и правой части, находимъ:

$$\begin{array}{lll} 1 = -a_0 & \text{откуда} & a_0 = -1 \\ -1 = -a_1 + 2a_0 & \text{"} & a_1 = 2a_0 + 1 = -1 \\ 1 = -a_2 + a_1 & \text{"} & a_2 = a_1 - 1 = -2. \end{array}$$

Слѣдовательно:

$$\int e^{-x}(x^2 - x + 1)dx = -e^{-x}(x^2 + x + 2) + C.$$

II типъ. Интегралы вида:

$$\int e^{\mu x} \operatorname{Cos} mx\, f(x)dx = I_1$$

$$\int e^{\mu x} \operatorname{Sin} mx\, f(x)dx = I_2.$$

Докажемъ, что каждый изъ интеграловъ I_1 и I_2 имѣетъ слѣдующій видъ:

$$e^{\mu x}[\operatorname{Cos} mx\, \varphi(x) + \operatorname{Sin} mx\, \psi(x)] + C,$$

причемъ обѣ функціи $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ той же степени n-ой, какъ и функцiя f(x).

Доказательство. Замѣтивъ, что

$$\mathrm{Cos}\,\theta + i\,\mathrm{Sin}\,\theta = e^{\theta i},$$

составимъ сумму:

$$I_1 + i\,I_2 = \int e^{\mu x} f(x)(\mathrm{Cos}\,mx + i\,\mathrm{Sin}\,mx)dx =$$

$$= \int e^{\mu x}.f(x).e^{mxi}dx = \int e^{(\mu+mi)}.f(x)dx.$$

Приложимъ къ этому интегралу тотъ результатъ, который мы получили для интеграловъ I-го типа

$$\int e^{(\mu+mi)x} f(x)dx = \frac{e^{(\mu+mi)x}}{\mu + mi}\left[f(x) - \frac{f'(x)}{\mu + mi} + \frac{f''(x)}{(\mu+mi)^2} + \dots \right.$$

$$\left. \dots + (-1)^n \frac{f^{(n)}(x)}{(\mu + mi)^n}\right].$$

Въ полученномъ выраженiи нужно отдѣлить вещественныя части отъ мнимыхъ. Для этого помножимъ числителя и знаменателя каждой дроби на число, сопряженное съ знаменателемъ, т.е. на

$$(\mu - mi)^l,$$

$(l = 1, 2, \dots n)$. Найдемъ:

$$\int e^{(\mu+mi)x} f(x)dx =$$

$$= \frac{e^{\mu x}(\mathrm{Cos}\,mx + i\,\mathrm{Sin}\,mx)(\mu-mi)}{\mu^2 + m^2}\left|f(x) - \frac{(\mu-mi)f'(x)}{\mu^2 + m^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{(\mu-mi)^2 f''(x)}{(\mu^2 + m^2)^2} - \dots + (-1)^n \frac{(\mu-mi)^n f^{(n)}(x)}{(\mu^2 + m^2)^n}\right|.$$

Если мы отберемъ въ скобкахъ вещественные члены, то получимъ результатъ такого вида:

$$\frac{e^{\mu x}(\mathrm{Cos}\,mx + i\,\mathrm{Sin}\,mx)}{\mu^2 + m^2}(\mu-mi)[\omega_n(x) + i\,\omega_{n-1}(x)]$$

гдѣ $\omega_n(x)$ - функцiя степени n-ой, а $\omega_{n-1}(x)$ - функцiя степени (n-1)-ой.

Помножая то, что стоитъ въ прямыхъ скобкахъ, на $\mu - mi$, получимъ въ результатѣ

$$e^{\mu x}(\mathrm{Cos}\,mx + i\,\mathrm{Sin}\,mx)[\delta_n(x) + i\,\eta_n(x)] =$$

$$= e^{\mu x}\left\{[\cos mx\ \delta_n(x) - \sin mx\ \eta_n(x)] + i[\sin mx\ \delta_n(x) + \cos mx\ \eta_n(x)]\right\},$$

гдѣ $\delta_n(x)$ и $\eta_n(x)$ цѣлыя функціи степени n-ой. Приравнивая вещественныя и мнимыя части, найдемъ:

$$I_1 = e^{\mu x}[\cos mx\ \delta_n(x) - \sin mx\ \eta_n(x)]$$

$$I_2 = e^{\mu x}[\cos mx\ \eta_n(x) + \sin mx\ \delta_n(x)].$$

На основаніи доказаннаго результата интегралы II-го типа вычисляются слѣдующимъ образомъ:

$$\int e^{\mu x} \left| \begin{matrix} \cos mx \\ \sin mx \end{matrix} \right| f(x)dx =$$

$$= e^{\mu x}\cos mx(a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n) + e^{\mu x}\sin mx(b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_n) + C.$$

Неопредѣленные коэффиціенты опредѣляются помощью дифференцированія и сравненія въ обѣихъ частяхъ полученнаго равенства коэффиціентовъ при

$$x^k \cos mx$$

и

$$x^l \sin mx \quad (k = 0, 1, \ldots n,\ l = 0, 1, \ldots n).$$

Примѣръ 1.

$$\int e^{-x}\cos 3x(x-1)dx = e^{-x}\cos 3x(\alpha x+\beta) + e^{-x}\sin 3x(\gamma x+\delta) + C.$$

Дифференцируя находимъ:

$$e^{-x}\cos 3x(x-1) = e^{-x}\cos 3x(-\alpha x-\beta) + e^{-x}\sin 3x(-\gamma x-\delta)$$

$$+ e^{-x}\cos 3x(3\gamma x+3\delta) + e^{-x}\sin 3x(-3\alpha x-3\beta)$$

$$+ e^{-x}\cos 3x(\alpha) + e^{-x}\sin 3x(\gamma).$$

Для опредѣленія α, β, γ и δ имѣемъ уравненія:

$$1 = 3\gamma - \alpha;\quad 0 = -\gamma - 3\alpha$$

$$-1 = \alpha - \beta + 3\delta;\quad 0 = \gamma - \delta - 3\beta.$$

Изъ уравненій

$$1 = 3\gamma - \alpha;\quad \gamma = -3\alpha$$

находимъ

$$\alpha = -0{,}1;\quad \gamma = 0{,}3;$$

а изъ уравненій

$$\begin{array}{r|l} 3\delta - \beta = -0,9 & 3 \\ \delta + 3\beta = 0,3 & 1 \end{array}$$

послѣ умноженія перваго на 3, второго на 1

$$10\delta = 0,3 - 2,7 = -2,4$$

$$\delta = -0,24$$

и наконецъ

$$\beta = 3\delta + 0,9 = 0,90 - 0,72 = +0,18.$$

Итакъ

$$I = e^{-x}[\mathrm{Cos}\,3x(-0,1x + 0,18) + \mathrm{Sin}\,3x(0,3x - 0,24)] + C.$$

Примѣръ 2.

$$\int 2^{-3x}\,\mathrm{Sin}\,4x\,dx = 2^{-3x}(\mathrm{Sin}\,4x.A + \mathrm{Cos}\,4x.B) + C.$$

Дифференцируя имѣемъ:

$$2^{-3x}\,\mathrm{Sin}\,4x = 2^{-3x}(\mathrm{Sin}\,4x - 3A\log 2 + \mathrm{Cos}\,4x - 3B\log 2) +$$

$$+ 2^{-x}(\mathrm{Sin}\,4x. - 4B + \mathrm{Cos}\,4x.4A).$$

Сравнивая коэффиціенты въ лѣвой и правой части нашего равенства, получимъ два уравненія для опредѣленія A и B:

$$1 = -3A\log 2 - 4B$$

$$0 = 4A - 3\log 2.B,$$

откуда

$$A = \frac{3\log 2}{4}.B,$$

$$B = -\frac{4}{16 + 9\log^2 2}$$

$$A = -\frac{3\log 2}{16 + 9\log^2 2}$$

и слѣдовательно

$$\int 2^{-3x}\mathrm{Sin}\,4x\,dx = -\frac{2^{-3x}}{16 + 9\log^2 2}(3\log 2\,\mathrm{Sin}\,4x + 4\mathrm{Cos}\,4x) + C.$$

Замѣчаніе. Интегралы вида:

$$\int f(x) \begin{vmatrix} \mathrm{Cos}\; mx \\ \mathrm{Sin}\; mx \end{vmatrix} dx,$$

не содержащіе показательной функціи, удобнѣе брать по частямъ, чѣмъ по способу неопредѣленныхъ коэффиціентовъ.

Примѣръ. Найти интегралъ:

$$\int (x^2 - x + 1)\mathrm{Cos}\; 3x\; dx.$$

Если бы мы написали интегралъ въ видѣ:

$$\int (x^2 - x+1)\mathrm{Cos}\; 3x\; dx = \mathrm{Cos}\; 3x(\alpha x^2+\beta x+\gamma)+\mathrm{Sin}\; 3x(\alpha_1 x^2+\beta_1 x+\gamma_1)+C,$$

то пришлись бы опредѣлять 6 неизвѣстныхъ коэффиціентовъ, изъ которыхъ многіе могутъ оказаться нулями.

Интегрируемъ по частямъ:

$$\int (x^2-x+1)\mathrm{Cos}\; 3x\; dx = (x^2-x+1)\,\frac{\mathrm{Sin}\; 3x}{3} - \frac{1}{3}\int \mathrm{Sin}\; 3x(2x-1)dx.$$

Подобнымъ же образомъ находимъ:

$$\int (2x-1)\mathrm{Sin}\; 3x\; dx = (2x-1)\,\frac{-\mathrm{Cos}\; 3x}{3} + \frac{1}{3}\int \mathrm{Cos}\; 3x\; 2dx =$$

$$= (2x-1)\,\frac{-\mathrm{Cos}\; 3x}{3} + \frac{2}{9}\,\mathrm{Sin}\; 3x + C.$$

Такимъ образомъ мы получили послѣ двукратнаго интегрированія по частямъ окончательный результатъ:

$$\int (x^2-x+1)\mathrm{Cos}\; 3x\; dx = \frac{\mathrm{Sin}\; 3x}{3}\,(x^2-x+1 - \frac{2}{9}) + \frac{\mathrm{Cos}\; 3x}{9}\,(2x-1) + C.$$

2-й классъ. Интегралы вида:

$$\int f(\mathrm{Sin}\; x,\; \mathrm{Cos}\; x)dx.$$

Докажемъ для этого класса слѣдующую теорему.

Теорема. - Подстановкою

$$\mathrm{tg}\,\frac{x}{2} = z$$

предложенный интегралъ приводится къ интегралу отъ алгебраической функціи, если функція $f(\mathrm{Sin}\; x,\; \mathrm{Cos}\; x)dx$ алгебраическая или просто къ интегралу отъ раціональной функціи, если f функція раціональная. Доказательство этой теоремы основано на зависимости, существующей между Sin x, Cos x и tg x/2.

Имѣемъ:

$$\operatorname{Sin} x = 2 \operatorname{Sin}\frac{x}{2}\operatorname{Cos}\frac{x}{2} = 2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\operatorname{Cos}^2\frac{x}{2} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\operatorname{Sec}^2\frac{x}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2z}{1+z^2}$$

$$\operatorname{Cos} x = \operatorname{Cos}^2\frac{x}{2} - \operatorname{Sin}^2\frac{x}{2} = \operatorname{Cos}^2\frac{x}{2}\left(1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right) =$$

$$= \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{\operatorname{Sec}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-z^2}{1+z^2},$$

гдѣ

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = z;$$

отсюда

$$\frac{x}{2} = \operatorname{arctg} z$$

$$x = 2\operatorname{arctg} z$$

$$dx = \frac{2dz}{1+z^2}.$$

Итакъ:

$$\int f(\operatorname{Sin} x, \operatorname{Cos} x)dx = \int f\left(\frac{2z}{1+z^2}, \frac{1-z^2}{1+z^2}\right)\frac{2dz}{1+z^2} = \int F(z)dz.$$

Очевидно, что если f была алгебраической, то и F(z) будетъ алгебраической функціей, и F(z) будетъ раціональной, если f была раціональной.

Примѣръ. - Найти интегралъ:

$$\int\frac{dx}{1+3\operatorname{Cos} x - 2\operatorname{Sin} x}.$$

Полагая

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = z,$$

получимъ:

$$\int\frac{dx}{1+3\operatorname{Cos} x-2\operatorname{Sin} x} = \int\frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{1+3\frac{1-z^2}{1+z^2}-2\frac{2z}{1+z^2}} = \int\frac{2dz}{1+z^2+3-3z^2-4z} =$$

$$= 2\int\frac{dz}{4-4z-2z^2} = -\int\frac{dz}{z^2+2z-2} = -\int\frac{dz}{(z+1)^2-3} = -\frac{1}{2\sqrt{3}}\log\frac{z+1-\sqrt{3}}{z+1+\sqrt{3}}+C.$$

Здѣсь остается только подставить

$$z = tg\,\frac{x}{2}\,.$$

Въ виду того, что этотъ универсальный пріемъ часто приводитъ къ сложнымъ выкладкамъ, въ частныхъ случаяхъ пользуются иными способами для вычисленія интеграловъ этого класса.

1-й типъ. - Интегралы такого вида:

$$(p,\ q) = \int Sin^p\,x.\ Cos^q\,xdx.$$

Теорема. - Интегралы $(p,\ q)$ берутся въ конечномъ видѣ при соблюденіи лишь одного изъ слѣдующихъ трехъ условій:

1) если q цѣлое нечетное - интегралъ берется подстановкой $Sin\ x = z$;
2) если p цѣлое нечетное - подстановкой $Cos\ x = z$;
3) если $p + q$ цѣлое четное число - подстановкой $tg\ x = z$.

Доказательство. - Приведемъ интегралъ $(p,\ q)$ къ интегралу отъ двучленной ирраціональности

$$\int Sin^p x.Cos^q x\,dx = \int Sin^p x(Cos^2 x)^{\frac{q-1}{2}}\,Cos\ x\,dx =$$

$$= \int Sin^p x(1 - Sin^2 x)^{\frac{q-1}{2}}\,d\,Sin\ x = \int z^p(1 - z^2)^{\frac{q-1}{2}}\,dz\,,$$

гдѣ

$$z = Sin\ x.$$

Условія интегрируемости двучленныхъ ирраціональностей слѣдующія (см. Отд. II, кл.3-ій):

1) $\frac{q-1}{2} = t$, цѣлому; $q = 2t + 1$ - первое указанное условіе.

2) $\frac{p+1}{2} = t$; $p = 2t - 1$, нечетному числу, - второе условіе.

3) $\frac{p+1}{2} + \frac{q-1}{2} = t$; $p + q = 2t$ - третье условіе.

Покажемъ, что указанныя въ теоремѣ подстановки являются самыми удобными. Дѣйствительно,

1) при q нечетномъ - $q = 2k + 1$ - примѣняя подстановку $Sin\ x = z$, получимъ

$$(p,\ q) = \int z^{p}(1 - z^{2})^{k}\,dz.$$

Если p дробь вида $\frac{\alpha}{\beta}$, то нужно еще въ случаѣ $k < 0$ сдѣлать подстановку $z = t^{\beta}$.

2) При p нечетномъ -

$$p = 2k + 1 -$$

примѣняя подстановку $\cos x = z$, находимъ:

$$(p,\ q) = \int (\sin^{2}x)^{\frac{p-1}{2}} \cos^{q}x \sin x\,dx = -\int (1-z^{2})^{k} z^{q}dz.$$

Если $q = \frac{\alpha}{\beta}$ и $k < 0$, то нужно еще сдѣлать подстановку $z = t^{\beta}$.

3) При $p+q$ четномъ, полагая

$$p + q = 2k\ ;\quad \mathrm{tg}\,x = z,$$

получимъ:

$$(p,\ q) = \int \mathrm{tg}^{p}x \cos^{p+q}x\,dx = \int \mathrm{tg}^{p}x \cos^{p+q+2}x\,d\,\mathrm{tg}\,x =$$

$$= \int \frac{\mathrm{tg}^{p}x}{(\sec^{2}x)^{k+1}}\,d\,\mathrm{tg}\,x = \int \frac{\mathrm{tg}^{p}\,x}{(1+\mathrm{tg}^{2}x)^{k+1}}\,d\,\mathrm{tg}\,x = \int \frac{z^{p}}{(1+z^{2})^{k+1}}\,dz.$$

Если при этомъ $k + 1 \leq 0$, то результатъ будетъ очень простой; если $k + 1 > 0$ и $p = \frac{\alpha}{\beta}$, то нужно сдѣлать еще подстановку $z = t^{\beta}$.

Примѣръ 1.

$$\int \sqrt[3]{\sin x}\,\cos^{3}x\,dx = \int z^{\frac{1}{3}}\,(1-z^{2})dz.$$

Мы положили $\sin x = z$, такъ какъ q нечетное. Далѣе имѣемъ:

$$\int z^{\frac{1}{3}}\,(1-z^{2})dz = \int z^{\frac{1}{3}}\,dz - \int z^{\frac{7}{3}}\,dz = {}^{3}\!/_{4}\,z^{\frac{4}{3}} - {}^{3}\!/_{10}\,z^{\frac{10}{3}} + C =$$

$$= 3\sqrt[3]{\sin x}\,({}^{1}\!/_{4}\,\sin x - {}^{1}\!/_{10}\,\sin^{3}x) + C.$$

Примѣръ 2.

$$\int \sin^{5}x \cos^{2}x\,dx.$$

Такъ какъ здѣсь p - нечетное, то полагаемъ:

$$\cos x = z.$$

Имѣемъ:

$$\int \sin^{5}x \cos^{2}x dx = \int (1-\cos^{2}x)^{2}\cos^{2}x d(-\cos x) = -\int z^{2}(1-z^{2})^{2}dz =$$

$$= -\int z^2 dz + 2\int z^4 dz - \int z^6 dz = -\frac{1}{3}\operatorname{Cos}^3 x + \frac{2}{5}\operatorname{Cos}^5 x - \frac{1}{7}\operatorname{Cos}^7 x + C.$$

Примѣръ 3. - Найти интегралъ

$$\int \frac{\operatorname{Sin}^3 x}{\operatorname{Cos}^5 x} dx.$$

Въ предложенномъ интегралѣ $p = 3$ нечетное

$$q = -5$$

и

$$p + q = -2 .$$

Удобнѣе всего взять этотъ интегралъ, положивъ $\operatorname{tg} x = z$.

Помощью этой подстановки находимъ:

$$\int \frac{\operatorname{Sin}^3 x}{\operatorname{Cos}^5 x} dx = \int \operatorname{tg}^3 x \, d \operatorname{tg} x = \int z^3 dz = \frac{1}{4} \operatorname{tg}^4 x + C.$$

Примѣръ 4. - Найти интегралъ:

$$\int \operatorname{Sin}^{\frac{1}{3}} x \operatorname{Cos}^{\frac{5}{3}} x \, dx.$$

Здѣсь имѣемъ

$$p + q = 2.$$

Пользуясь подстановкой:

$$\operatorname{tg} x = z$$

и замѣчая, что

$$\operatorname{Sin} x = z \operatorname{Cos} x,$$

находимъ:

$$\int \operatorname{Sin}^{\frac{1}{3}} x \operatorname{Cos}^{\frac{5}{3}} x \, dx = \int z^{\frac{1}{3}} \operatorname{Cos}^2 x \, dx = \int z^{\frac{1}{3}} \operatorname{Cos}^4 x \, dz =$$

$$= \int \frac{z^{\frac{1}{3}} dz}{(\operatorname{Sec}^2 x)^2} = \int \frac{z^{\frac{1}{3}} dz}{(1+z^2)^2} .$$

Чтобы привести этотъ интегралъ къ раціональному виду, полагаемъ:

$$z = t^3,$$

откуда

$$dz = 3t^2 dt ,$$

$$\int \operatorname{Sin}^{\frac{1}{3}} x \operatorname{Cos}^{\frac{5}{3}} x \, dx = 3 \int \frac{t^3 \, dt}{(1+t^6)^2} .$$

Полагая опять

$$t^2 = u$$

$$tdt = \tfrac{1}{2}\, du\ ,$$

$$\int \operatorname{Sin}^{\frac{1}{3}} x \operatorname{Cos}^{\frac{5}{3}} x\, dx = \tfrac{3}{2} \int \frac{udu}{(1+u^3)^2}\ ,$$

что возможно довести до конца.

Замѣчаніе 1. - Если въ интегралѣ (p, q) числа p и q цѣлыя и положительныя и оба четныя, то удобно интегрировать, замѣнивъ $\operatorname{Sin}^p x . \operatorname{Cos}^q x$ его выраженіемъ черезъ Sin и Cos кратныхъ дугъ (вмѣсто того, чтобы дѣлать подстановку $tg\, x = z$).

Примѣръ.

$$\int \operatorname{Cos}^6 x\, dx.$$

Полагая

$$u = \operatorname{Cos} \theta + i \operatorname{Sin} \theta$$

$$v = \operatorname{Cos} \theta - i \operatorname{Sin} \theta$$

находимъ отсюда:

$$\operatorname{Cos} \theta = \frac{u+v}{2}\ , \quad u^m + v^m = 2 \operatorname{Cos} m\theta \quad и \quad uv = 1.$$

Далѣе

$$\operatorname{Cos}^6\theta = \left(\frac{u+v}{2}\right)^6 = \frac{1}{2^6}\,(u^6 + 6u^5v + 15u^4v^2 + 20u^3v^3 +$$

$$+ v^6 + 6uv^5 + 15\, u^2v^4) =$$

$$= \frac{1}{2^5}\,(\operatorname{Cos} 6\theta + 6 \operatorname{Cos} 4\theta + 15 \operatorname{Cos} 2\theta + 10).$$

Пользуясь полученнымъ результатомъ, находимъ:

$$\int \operatorname{Cos}^6 x\, dx = \frac{1}{2^5}\left[\int \operatorname{Cos} 6x\, dx + 6\int \operatorname{Cos} 4x\, dx + 15 \int \operatorname{Cos} 2x\, dx + \right.$$

$$\left. + 10 \int dx\right] = \frac{1}{32}\left|\frac{\operatorname{Sin} 6x}{6} + \frac{3}{2}\operatorname{Sin} 4x + \frac{15}{2}\operatorname{Sin} 2x + 10x\right| + C.$$

Замѣчаніе 2. - Если p и q числа цѣлыя отрицательныя различной четности, то удобно разбивать интегралъ на два болѣе простыхъ, вводя въ числитель

$$1 = \sin^2 x + \cos^2 x$$

(вмѣсто того, чтобы дѣлать подстановки $\sin x = z$ или $\cos x = z$).

Примѣръ. - Найти интегралъ:

$$I = \int \frac{dx}{\cos^5 x}.$$

Имѣемъ:

$$\int \frac{dx}{\cos^5 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^5 x} dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^5 x} dx + \int \frac{dx}{\cos^3 x}.$$

Интегрируя по частямъ первый интегралъ правой части, находимъ:

$$I = \sin x \frac{1}{4 \cos^4 x} - {}^1/_4 \int \frac{dx}{\cos^3 x} + \int \frac{dx}{\cos^3 x} = \frac{\sin x}{4 \cos^4 x} + {}^3/_4 \int \frac{dx}{\cos^3 x}.$$

Подобнымъ же образомъ находимъ второй интегралъ

$$\int \frac{dx}{\cos^3 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^3 x} dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} dx + \int \frac{dx}{\cos x} =$$

$$= \sin x \frac{1}{2 \cos^2 x} - {}^1/_2 \int \frac{dx}{\cos x} + \int \frac{dx}{\cos x} = \frac{\sin x}{2 \cos^2 x} + {}^1/_2 \int \frac{dx}{\cos x}.$$

Послѣдній интегралъ берется непосредственно, какъ будетъ указано дальше.

Замѣчаніе 3. - Интегралъ (p, q) можетъ быть преобразованъ въ одинъ изъ слѣдующихъ шести видовъ:

$$(p-2, q+2);\ (p-2, q);\ (p+2, q);$$

$$(p+2, q-2);\ (p, q-2);\ (p, q+2);$$

помощью формулъ приведенія. Эти формулы выводятся слѣдующимъ образомъ. Интегрируя по частямъ, имѣемъ:

$$\int \sin^p x \cos^q x\, dx = - \int \sin^{p-1} x \cos^q x\, d \cos x =$$

$$= \sin^{p-1} x \frac{-\cos^{q+1} x}{q+1} + \frac{p-1}{q+1} \int \sin^{p-2} x \cos^{q+2} x\, dx,$$

откуда

$$(p, q) = - \frac{\sin^{p-1} x \cos^{q+1} x}{q+1} + \frac{p-1}{q+1} (p-2, q+2) \quad . \ . \ . \ . \ (I).$$

Изъ формулы (I) находимъ:

$$(p, q) = -\frac{\operatorname{Sin}^{p-1}x \operatorname{Cos}^{q+1}x}{q+1} + \frac{p-1}{q+1}\int \operatorname{Sin}^{p-2}x \operatorname{Cos}^{q}x(1-\operatorname{Sin}^2 x)dx =$$

$$= \frac{-\operatorname{Sin}^{p-1}x \operatorname{Cos}^{q+1}x}{q+1} + \frac{p-1}{q+1}(p-2, q) - \frac{p-1}{q+1}(p, q).$$

Въ правой части мы получили интегралъ, тождественный съ первоначальнымъ интеграломъ. Перенося его въ лѣвую часть и раздѣливъ все равенство на коэффиціентъ при (p, q) въ лѣвой части, равный

$$1 + \frac{p-1}{q+1} = \frac{p+q}{q+1},$$

получимъ формулу:

$$(p, q) = -\frac{\operatorname{Sin}^{p-1}x \operatorname{Cos}^{q+1}x}{p+q} + \frac{p-1}{p+q}\cdot(p-2, q) \ldots (II).$$

Чтобы вывести третью формулу приведенія, замѣнимъ во второй формулѣ p на $p+2$. Получимъ:

$$(p+2, q) = -\frac{\operatorname{Sin}^{p+1}x \operatorname{Cos}^{q+1}x}{p+q+2} + \frac{p+1}{p+q+2}(p, q).$$

Рѣшивъ это уравненіе относительно (p, q) имѣемъ:

$$(p, q) = \frac{\operatorname{Sin}^{p+1}x \operatorname{Cos}^{q+1}x}{p+1} + \frac{p+q+2}{p+1}(p+2, q) \ldots (III).$$

Совершенно подобнымъ же образомъ найдемъ три остальныя формулы. Имѣемъ, интегрируя по частямъ:

$$\int \operatorname{Sin}^{p}x \operatorname{Cos}^{q}x\, dx = \int \operatorname{Cos}^{q-1}x \operatorname{Sin}^{p}x\, d \operatorname{Sin} x =$$

$$= \operatorname{Cos}^{q-1}x \frac{\operatorname{Sin}^{p+1}x}{p+1} + \frac{q-1}{p+1}\int \operatorname{Sin}^{p+1}x \operatorname{Cos}^{q-2}x \operatorname{Sin} x\, dx,$$

откуда

$$(p, q) = \frac{\operatorname{Sin}^{p+1}x \operatorname{Cos}^{q-1}x}{p+1} + \frac{q-1}{p+1}(p+2, q-2) \ldots (IV).$$

Изъ (IV) находимъ:

$$(p, q) = \frac{\operatorname{Sin}^{p+1}x \operatorname{Cos}^{q-1}x}{p+1} + \frac{q-1}{p+1}\int \operatorname{Sin}^{p}x \operatorname{Cos}^{q-2}x\,(1-\operatorname{Cos}^2 x)dx =$$

$$= \frac{\operatorname{Sin}^{p+1}x \operatorname{Cos}^{q-1}x}{p+1} + \frac{q-1}{p+1}[(p, q-2) - (p, q)].$$

Откуда

$$(p,\ q) = \frac{\operatorname{Sin}^{p+1}x \operatorname{Cos}^{q-1}x}{p+q} + \frac{q-1}{p+q}(p,\ q-2)\ .\ .\ .\ .\ (V).$$

Замѣняя въ послѣдней формулѣ q на q+2 и рѣшая относительно (p, q), получимъ формулу:

$$(p,\ q+2) = \frac{\operatorname{Sin}^{p+1}x \operatorname{Cos}^{q+1}x}{p+q+2} + \frac{q+1}{p+q+2}(p,\ q).$$

Откуда

$$(p,\ q) = -\frac{\operatorname{Sin}^{p+1}x \operatorname{Cos}^{q+1}x}{q+1} + \frac{p+q+2}{q+1}(p,\ q+2)\ldots(VI).$$

Просматривая выведенныя 6 формулъ, легко подмѣтить слѣдующее мнемоническое правило. Если одинъ изъ показателей p, q измѣняется при переходѣ отъ прежняго интеграла къ новому, то выдѣленный членъ содержитъ средній между ними показатель. Если же показатель p или q не измѣняется при переходѣ отъ стараго интеграла къ новому, то выдѣленный членъ содержитъ показатель на единицу больше. На основаніи этого правила можно примѣнять при вычисленіи разсматриваемыхъ интеграловъ способъ неопредѣленныхъ коэффиціентовъ.

Примѣръ 1. - Найдемъ помощью указаннаго правила интегралъ:

$$\int \operatorname{Cos}^6 x\, dx.$$

Понизимъ сперва степень Cos на 2, оставивъ безъ измѣненія степень Sin - (0). Имѣемъ [см. ф. VI]:

$$\int \operatorname{Cos}^6 x\, dx = A \operatorname{Sin} x \operatorname{Cos}^5 x + B\int \operatorname{Cos}^4 x\, dx.$$

Дифференцируя это равенство, получимъ:

$$\operatorname{Cos}^6 x = A \operatorname{Cos}^6 x - 5A \operatorname{Cos}^4 x \operatorname{Sin}^2 x + B \operatorname{Cos}^4 x =$$

$$= A \operatorname{Cos}^6 x - 5A \operatorname{Cos}^4 x + 5A \operatorname{Cos}^6 x + B \operatorname{Cos}^4 x.$$

Приравнивая члены съ $\operatorname{Cos}^6 x$ и съ $\operatorname{Cos}^4 x$, получимъ уравненія для опредѣленія A и B:

$$1 = 6A\ ; \qquad A = 1/6\ .$$

$$-5A + B = 0\ ; \qquad B = 5/6\ .$$

Итакъ

$$\int \operatorname{Cos}^6 x\, dx = 1/6 \operatorname{Sin} x \operatorname{Cos}^5 x + 5/6 \int \operatorname{Cos}^4 x\, dx \quad \text{и т.д.}$$

Примѣръ 2.

$$\int \frac{\operatorname{Sin}^2 x}{\operatorname{Cos}^8 x}\, dx = A \operatorname{Sin} x \operatorname{Cos}^{-7} x + B \int \frac{dx}{\operatorname{Cos}^8 x} .$$

Здѣсь мы преобразуемъ интегралъ (2, -8) въ (0, -8) [см. ф. (II)]. Дифференцируя имѣемъ:

$$\operatorname{Sin}^2 x \operatorname{Cos}^{-8} x = A \operatorname{Cos}^{-6} x + 7A \operatorname{Cos}^{-8} x \operatorname{Sin}^2 x + B \operatorname{Cos}^{-8} x .$$

Замѣнимъ теперь $\operatorname{Sin}^2 x$ на $1 - \operatorname{Cos}^2 x$; будемъ имѣть:

$$\operatorname{Cos}^{-8} x - \operatorname{Cos}^{-6} x = A \operatorname{Cos}^{-6} x + 7A \operatorname{Cos}^{-8} x - 7A \operatorname{Cos}^{-6} x + B \operatorname{Cos}^{-8} x.$$

Откуда изъ сравненія коэффиціентовъ получимъ:

$$-1 = -6A ; \quad A = 1/6 .$$

$$1 = 7A + B ; \quad B = 1 - 7/6 = -1/6 .$$

Подставимъ полученныя значенія A и B въ написанное выше значеніе интеграла:

$$\int \frac{\operatorname{Sin}^2 x}{\operatorname{Cos}^2 x}\, dx = 1/6\, \frac{\operatorname{Sin}^2 x}{\operatorname{Cos}^7 x} - 1/6 \int \frac{dx}{\operatorname{Cos}^6 x} \quad \text{и т. д.}$$

Пользуясь формулами приведенія, мы можемъ привести интегралъ (p, q) къ одному изъ слѣдующихъ простѣйшихъ интеграловъ, не допускающихъ дальнѣйшаго пониженія

(0, 0), (-1, 1), (1, -1),

(-1, 0), (0, -1),

(-2, 0), (0, -2), (-1, -1),

(1, 0), (0, 1),

(1, 1).

Эти интегралы находятся непосредственно

$$(0, 0) = \int dx = x + C$$

$$(-1, 1) = \int \frac{\operatorname{Cos} x}{\operatorname{Sin} x}\, dx = \int \frac{d \operatorname{Sin} x}{\operatorname{Sin} x} = \log \operatorname{Sin} x + C$$

$$(1, -1) = \int \frac{\operatorname{Sin} x}{\operatorname{Cos} x}\, dx = -\int \frac{d \operatorname{Cos} x}{\operatorname{Cos} x} = -\log \operatorname{Cos} x + C$$

$$(-1,\ 0) = \int \frac{dx}{\operatorname{Sin} x} = \int \frac{dx}{2\operatorname{Sin}\frac{x}{2}\operatorname{Cos}\frac{x}{2}} = \int \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}\operatorname{Cos}^2\frac{x}{2}}\, d\,\frac{x}{2} =$$

$$= \int \frac{d\,\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \log \operatorname{tg}\frac{x}{2} + C$$

$$(0,-1) = \int \frac{dx}{\operatorname{Cos} x} = -\int \frac{d(\frac{\pi}{2} - x)}{\operatorname{Sin}(\frac{\pi}{2} - x)} = \int \frac{dy}{\operatorname{Sin} y} = -\log \operatorname{tg}\frac{y}{2} + C =$$

$$= -\log \operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}) + C = \log \operatorname{Cotg}(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}) + C = \log \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - \overline{\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}}) + C =$$

$$= \log \operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}) + C$$

$$(-2,\ 0) = \int \frac{dx}{\operatorname{Sin}^2 x} = -\operatorname{Cotg} x + C$$

$$(0,\ -2) = \int \frac{dx}{\operatorname{Cos}^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

$$(-1,\ -1) = \int \frac{dx}{\operatorname{Sin} x \operatorname{Cos} x} = \int \frac{\frac{dx}{\operatorname{Cos}^2 x}}{\operatorname{tg} x} = \int \frac{d\,\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x} = \log \operatorname{tg} x + C$$

$$(1,\ 0) = \int \operatorname{Sin} x\, dx = -\operatorname{Cos} x + C$$

$$(0,\ 1) = \int \operatorname{Cos} x\, dx = \operatorname{Sin} x + C$$

$$(1,\ 1) = \int \operatorname{Sin} x \operatorname{Cos} x\, dx = \int \operatorname{Sin} x\, d\operatorname{Sin} x = \tfrac{1}{2}\operatorname{Sin}^2 x + C.$$

2-ой типъ. - Интегралы вида $\int f(\operatorname{tg} x)dx$.

Теорема. - Если f алгебраическая функція, то подстановкою $\operatorname{tg} x = z$ приходимъ къ интегралу отъ алгебраической функціи, если f раціональна, то приходимъ къ интегралу отъ раціональной функціи отъ z.

Въ самомъ дѣлѣ, полагая

$$\operatorname{tg} x = z\ ,$$

находимъ:

$$x = \operatorname{arctg} z$$

$$dx = \frac{dz}{1 \pm z^2}$$

и

$$\int f(\operatorname{tg} x)\,dx = \int f(z)\,\frac{dz}{1+z^2}\,.$$

Разсмотримъ слѣдующіе интегралы этого типа.

1°. $\int \operatorname{tg}^m x\,dx\,;\quad m > 0.$

Въ этомъ случаѣ степень m можно понизить слѣдующимъ образомъ:

$$\int \operatorname{tg}^m x\,dx = \int \operatorname{tg}^{m-2} x(\operatorname{Sec}^2 x - 1)\,dx =$$

$$= \int \operatorname{tg}^{m-2} x\,d\operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg}^{m-2} x\,dx = \frac{\operatorname{tg}^{m-1} x}{m-1} - \int \operatorname{tg}^{m-2} x\,dx.$$

2° $\int \frac{dx}{\operatorname{tg}^m x}\,;\quad m > 0.$ Понизимъ степень m:

$$\int \frac{dx}{\operatorname{tg}^m x} = \int \frac{\operatorname{Sec}^2 x - \operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^m x}\,dx = \int \frac{d\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}^m x} - \int \frac{dx}{\operatorname{tg}^{m-2} x} =$$

$$= -\frac{1}{(m-1)\operatorname{tg}^{m-1} x} - \int \frac{dx}{\operatorname{tg}^{m-2} x}\,.$$

3°. Интегралы вида

$$\int \frac{dx}{(a + b\operatorname{tg} x)^m}$$

подстановкою $\operatorname{tg} x = z$ приводятся къ виду:

$$\int \frac{dz}{(1+z^2)(a+bz)^m}\,.$$

4° Подобная же подстановка $\operatorname{tg} x = z$ употребляется для приведенія къ раціональному виду интеграловъ:

$$\int \frac{dx}{(a+b\operatorname{Cos}^2 x)^m},\ \int \frac{dx}{(a+b\operatorname{Sin}^2 x)^m},\ \int \frac{dx}{(a\operatorname{Sin}^2 x + b\operatorname{Sin} x\operatorname{Cos} x + c\operatorname{Cos}^2 x)^m},$$

$$\int \frac{\operatorname{Cos} x\,dx}{\operatorname{Cos}^3 x + \operatorname{Sin}^3 x},\ \int \frac{dx}{\operatorname{Sin}^4 x + \operatorname{Cos}^4 x},$$

$$\int \frac{(\operatorname{Sin}^5 x + \operatorname{Cos}^3 x - 2\operatorname{Sin} x)\,dx}{\operatorname{Sin}^7 x + 2\operatorname{Cos}^5 x - 3\operatorname{Sin}^3 x + 4\operatorname{Cos} x}\,,\quad \text{и т.д.}$$

Общій признакъ этихъ интеграловъ:

Если числитель и знаменатель представляютъ цѣлыя функціи отъ Sin x и Cos x, причемъ всѣ члены будутъ имѣть сумму показателей Sin и Cos одной и той же четности, то интегралъ приводится къ раціональному виду подстановкою

$$\operatorname{tg} x = z.$$

Короче сказать, подъинтегральная функція не должна измѣняться при замѣнѣ x на x + π. Возьмемъ нѣсколько примѣровъ.

Примѣръ 1.

$$\int \frac{dx}{3+4\operatorname{Cos}^2 x} = \int \frac{d \operatorname{tg} x}{3\operatorname{Sec}^2 x+4} = \int \frac{d \operatorname{tg} x}{3 \operatorname{tg}^2 x+7} = \int \frac{dz}{3z^2+7} = \tfrac{1}{3} \int \frac{dz}{z^2+\tfrac{7}{3}} =$$

$$= \tfrac{1}{3} \sqrt{\tfrac{3}{7}} \operatorname{arctg} \frac{z\sqrt{3}}{\sqrt{7}} + C = \frac{1}{\sqrt{21}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\tfrac{3}{7}} \operatorname{tg} x\right) + C.$$

Примѣръ 2.

$$\int \frac{\operatorname{Cos} x \, dx}{\operatorname{Sin}^3 x + \operatorname{Cos}^3 x} = \int \frac{d \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^3 x} = \int \frac{dz}{1 + z^3} -$$

этотъ интегралъ берется легко (отд.I).

Примѣръ 3.

$$\int \frac{dx}{\operatorname{Sin}^4 x + \operatorname{Cos}^4 x} = \int \frac{\operatorname{Sec}^2 x \, d \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^4 x} = \int \frac{1 + z^2}{1 + z^4} dz.$$

Примѣръ 4.

$$I = \int \frac{\operatorname{Sin}^5 x + \operatorname{Cos}^3 x - 2\operatorname{Sin} x}{\operatorname{Sin}^7 x + 2\operatorname{Sin}^2 x.\operatorname{Cos}^3 x - 3\operatorname{Sin} x.\operatorname{Cos}^2 x + 4\operatorname{Cos} x}$$

Полагая

$$\operatorname{tg} x = z ,$$

находимъ:

$$\operatorname{Sin} x = z \operatorname{Cos} x.$$

Откуда

$$I = \int \frac{z^5 \operatorname{Cos}^5 x + \operatorname{Cos}^3 x - 2z \operatorname{Cos} x}{z^7 \operatorname{Cos}^7 x + 2z^2 \operatorname{Cos}^5 x - 3z \operatorname{Cos}^3 x + 4 \operatorname{Cos} x} dx =$$

$$= \int \frac{z^5 \operatorname{Cos}^4 x + \operatorname{Cos}^2 x - 2z}{z^7 \operatorname{Cos}^6 x + 2z^2 \operatorname{Cos}^4 x - 3z \operatorname{Cos}^2 x + 4} dz =$$

$$= \int \frac{z^6 + 1 + z^2 - 2z(1+z^2)^2}{z^7 + 2z^2(1+z^2) - 3z(1+z^2)^2 + 4(1+z^2)^3}\, dz.$$

Будетъ ли интегрироваться это выраженіе, это другой вопросъ; намъ важно было только привести нашъ интегралъ къ раціональному виду.

3-й типъ. - Интегралы вида:

$$\int \frac{f(\mathrm{Sin}\, x, \mathrm{Cos}\, x)}{(a + b\, \mathrm{Cos}\, x)^m}\, dx \qquad \int \frac{f(\mathrm{Sin}\, x, \mathrm{Cos}\, x)}{(a + b\, \mathrm{Sin}\, x)^m}\, dx\ ;$$

гдѣ f - знакъ цѣлой функціи.

Такъ какъ второй интегралъ берется аналогично съ первымъ, то мы ограничимся разсмотрѣніемъ только интеграла

$$I = \int \frac{f(\mathrm{Sin}\, x, \mathrm{Cos}\, x)}{(a + b\, \mathrm{Cos}\, x)^m}\, dx.$$

Замѣнимъ въ выраженіи цѣлой функціи $f(\mathrm{Sin}\, x, \mathrm{Cos}\, x)$

$$\mathrm{Sin}^{2n} x = (1 - \mathrm{Cos}^2 x)^n$$

$$\mathrm{Sin}^{2n+1} x = \mathrm{Sin}\, x(1 - \mathrm{Cos}^2 x)^n.$$

Послѣ такой замѣны получимъ:

$$f(\mathrm{Sin}\, x, \mathrm{Cos}\, x) = \varphi(\mathrm{Cos}\, x) + \mathrm{Sin}\, x\, \psi(\mathrm{Cos}\, x),$$

гдѣ φ и ψ - цѣлыя функціи. Тогда интегралъ распадается на два:

$$I = \int \frac{\varphi(\mathrm{Cos}\, x)}{(a + b\, \mathrm{Cos}\, x)^m}\, dx + \int \frac{\mathrm{Sin}\, x\, \psi(\mathrm{Cos}\, x)}{(a + b\, \mathrm{Cos}\, x)^m}\, dx.$$

Сдѣлавъ во второмъ интегралѣ подстановку

$$a + b\, \mathrm{Cos}\, x = z$$

$$- b\, \mathrm{Sin}\, x\, dx = dz,$$

найдемъ:

$$\int \frac{\mathrm{Sin}\, x\, \psi(\mathrm{Cos}\, x)}{(a + b\, \mathrm{Cos}\, x)^m}\, dx = -\frac{1}{b} \int \frac{\psi\left(\frac{z-a}{b}\right) dz}{z^m}$$

Этотъ интегралъ берется, какъ указано въ отд. I. Въ первомъ интегралѣ преобразуемъ функцію

$$\varphi(\mathrm{Cos}\, x).$$

Положимъ, что она n-ой степени относительно Cos x. Подберемъ коэффиціенты a_0, a_1.... a_n такъ, чтобы выходило

$$\varphi(\mathrm{Cos}\, x) = a_0 + a_1(a + b\, \mathrm{Cos}\, x) + a_2(a + b\, \mathrm{Cos}\, x)^2 + \ldots.$$

$$\ldots\ldots + a_n(a + b \operatorname{Cos} x)^n$$

и введемъ обозначенія

$$\int \frac{dx}{(a + b \operatorname{Cos} x)^k} = U_k.$$

Теперь

$$\int \frac{\varphi(\operatorname{Cos} x)dx}{(a + b \operatorname{Cos} x)^m} = a_0 U_m + a_1 U_{m-1} + a_2 U_{m-2} + \ldots\ldots + a_n U_{m-n}.$$

Можно предполагать, что $m > n$, такъ какъ при $m \leqq n$ можно выдѣлить предварительно цѣлую часть дѣленіемъ. Предположимъ также, что въ интегралѣ

$$U_m = \int \frac{dx}{(a + b \operatorname{Cos} x)^m}$$

a^2 не $= b^2$, такъ какъ случай $a = b$ и $a = - b$ приводитъ къ интеграламъ:

$$\int \frac{dx}{(1 + \operatorname{Cos} x)^m} = \frac{1}{2^m} \int \frac{dx}{\operatorname{Cos}^{2m}(\frac{x}{2})},$$

$$\int \frac{dx}{(1 - \operatorname{Cos} x)^m} = \frac{1}{2^m} \int \frac{dx}{\operatorname{Sin}^{2m}(\frac{x}{2})},$$

которые берутся подстановкою

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = z \quad \text{(см. типъ 2).}$$

Интегралъ U_m берется помощью слѣдующей формулы приведенія:

$$U_m = \frac{A \operatorname{Sin} x}{(a + b \operatorname{Cos} x)^{m-1}} + B\, U_{m-1} + C\, U_{m-2},$$

гдѣ коэффиціенты A, B, C находятся легко послѣ дифференцированія и оказываются:

$$A = \frac{b}{(m-1)(b^2-a^2)}; \quad B = - \frac{(2m-3)a}{(m-1)(b^2-a^2)}, \quad C = \frac{m-2}{(m-1)(b^2-a^2)}.$$

При $m = 2$ имѣемъ

$$U_2 = A \frac{\operatorname{Sin} x}{a + b \operatorname{Cos} x} + B.U_1, \quad \text{такъ какъ } C = 0.$$

Формула приведенія, здѣсь указанная, выводится такъ: вводя въ числителѣ $\operatorname{Sin}^2 x + \operatorname{Cos}^2 x = 1$, имѣемъ:

$$U_m = \int \frac{\mathrm{Sin}^2 x + \mathrm{Cos}^2 x}{(a + b\,\mathrm{Cos}\,x)^m}\,dx = \int \frac{\mathrm{Sin}^2 x\,dx}{(a + b\,\mathrm{Cos}\,x)^m} + \int \frac{\mathrm{Cos}^2 x\,dx}{(a + b\,\mathrm{Cos}\,x)^m}$$

Первый интегралъ беремъ по частямъ:

$$\int \frac{\mathrm{Sin}^2 x\,dx}{(a + b\,\mathrm{Cos}\,x)^m} = \mathrm{Sin}\,x . \frac{1}{b(m-1)(a + b\,\mathrm{Cos}\,x)^{m-1}} -$$

$$- \frac{1}{b(m-1)} \int \frac{\mathrm{Cos}\,x\,dx}{(a + b\,\mathrm{Cos}\,x)^{m-1}} = \frac{\mathrm{Sin}\,x}{b(m-1)(a + b\,\mathrm{Cos}\,x)^{m-1}} -$$

$$- \frac{1}{b^2(m-1)} \int \frac{(b\,\mathrm{Cos}\,x + a) - a}{(a + b\,\mathrm{Cos}\,x)^{m-1}}\,dx = \frac{\mathrm{Sin}\,x}{b(m-1)(a + b\,\mathrm{Cos}\,x)^{m-1}} -$$

$$- \frac{1}{b^2(m-1)}\,U_{m-2} + \frac{a}{b^2(m-1)}\,U_{m-1}\,;$$

во второмъ интегралѣ замѣняемъ:

$$b^2\mathrm{Cos}^2 x = (b\,\mathrm{Cos}\,x + a)^2 - 2a(a + b\,\mathrm{Cos}\,x) + a^2\,,$$

послѣ чего

$$\int \frac{\mathrm{Cos}^2 x\,dx}{(a + b\,\mathrm{Cos}\,x)^m} = \frac{1}{b^2}\,[U_{m-2} - 2a\,U_{m-1} + a^2\,U_m].$$

Итакъ:

$$U_m = \frac{a^2}{b^2}\,U_m + \left(\frac{a}{b^2(m-1)} - \frac{2a}{b^2}\right)U_{m-1} + \left(-\frac{1}{b^2(m-1)} + \frac{1}{b^2}\right)U_{m-2} +$$

$$+ \frac{\mathrm{Sin}\,x}{b(m-1)(a + b\,\mathrm{Cos}\,x)^{m-1}}\,,$$

откуда

$$U_m = \frac{b\,\mathrm{Sin}\,x}{(m-1)(b^2-a^2)(a + b\,\mathrm{Cos}\,x)^{m-1}} - \frac{(2m-3)\,a}{(m-1)(b^2-a^2)}\,U_{m-1} +$$

$$+ \frac{m-2}{(m-1)(b^2-a^2)}\,U_{m-2}\,,$$

какъ и данс выше.

Примѣняя формулу приведенія нѣсколько разъ, мы приходимъ къ интегралу U_1, который берется непосредственно подстановкою

$$\mathrm{tg}\,\frac{x}{2} = z\,,$$

откуда

$$\mathrm{Cos}\,x = \frac{1 - z^2}{1 + z^2}$$

$$dx = \frac{2dz}{1 + z^2}$$

и интегралъ

$$U_1 = \int \frac{dx}{a + b \operatorname{Cos} x}$$

приводится къ отдѣлу I.

Примѣръ.

$$I = \int \frac{2 \operatorname{Sin}^2 x - 3 \operatorname{Cos}^2 x + 4 \operatorname{Sin} x - \operatorname{Cos} x + 2}{(2 + 3 \operatorname{Cos} x)^3} dx.$$

Замѣняя $\operatorname{Sin}^2 x$ на $1 - \operatorname{Cos}^2 x$, напишемъ числитель въ такомъ видѣ:

$$f(\operatorname{Sin} x, \operatorname{Cos} x) = -5 \operatorname{Cos}^2 x - \operatorname{Cos} x + 4 + 4 \operatorname{Sin} x.$$

Тогда будемъ имѣть:

$$I = \int \frac{-5 \operatorname{Cos}^2 x - \operatorname{Cos} x + 4}{(2 + 3 \operatorname{Cos} x)^3} dx + 4 \int \frac{\operatorname{Sin} x \, dx}{(2 + 3 \operatorname{Cos} x)^3}.$$

Обозначивъ первый интегралъ черезъ I_1, найдемъ:

$$I = I_1 - \frac{4}{3} \int \frac{d(2 + 3 \operatorname{Cos} x)}{(2 + 3 \operatorname{Cos} x)^3} = I_1 - \frac{4}{3} \frac{1}{-2(2 + 3 \operatorname{Cos} x)^2} + C =$$

$$= I_1 + \frac{2}{3} \frac{1}{(2 + 3 \operatorname{Cos} x)^2} + C.$$

Теперь обратимся къ вычисленію перваго интеграла и разложимъ въ немъ числитель по степенямъ $(2 + 3 \operatorname{Cos} x)$:

$$-5 \operatorname{Cos}^2 x - \operatorname{Cos} x + 4 = (2 + 3 \operatorname{Cos} x)^2 \alpha + (2 + 3 \operatorname{Cos} x)\beta + \gamma.$$

Приравнивая коэффиціенты, получимъ:

$$-5 = 9\alpha; \quad -1 = 12\alpha + 3\beta; \quad 4 = 4\alpha + 2\beta + \gamma;$$

откуда

$$\alpha = -\frac{5}{9}$$

$$\beta = \frac{1}{3}\left(-1 + 12 . \frac{5}{9}\right) = \frac{17}{9}$$

$$\gamma = 4 + \frac{20}{9} - \frac{34}{9} = \frac{22}{9}.$$

Итакъ

$$I = \frac{2}{3} \frac{1}{(2 + 3 \operatorname{Cos} x)^2} + \frac{22}{9} \int \frac{dx}{(2 + 3 \operatorname{Cos} x)^3} +$$

$$+\frac{17}{9}\int\frac{dx}{(2+3\,\mathrm{Cos}\,x)^2}-\frac{5}{9}\int\frac{dx}{2+3\,\mathrm{Cos}\,x}\,.$$

Вычислимъ оставшіеся интегралы, пользуясь формулой приведенія

$$\int\frac{dx}{(2+3\,\mathrm{Cos}\,x)^3}=$$

$$=\frac{A\,\mathrm{Sin}\,x}{(2+3\,\mathrm{Cos}\,x)^2}+B\int\frac{dx}{(2+3\,\mathrm{Cos}\,x)^2}+C\int\frac{dx}{2+3\,\mathrm{Cos}\,x}$$

Дифференцируемъ это равенство

$$\frac{1}{(2+3\,\mathrm{Cos}\,x)^3}=\frac{A\,\mathrm{Cos}\,x}{(2+3\,\mathrm{Cos}\,x)^2}+A\,\mathrm{Sin}\,x\,\frac{-2.\,-3\,\mathrm{Sin}\,x}{(2+3\,\mathrm{Cos}\,x)^3}+$$

$$+\frac{B}{(2+3\,\mathrm{Cos}\,x)^2}+\frac{C}{2+3\,\mathrm{Cos}\,x}\,.$$

Освобождаясь отъ знаменателей, будемъ имѣть:

$$1=A\,\mathrm{Cos}\,x(2+3\,\mathrm{Cos}\,x)+6\,A(1-\mathrm{Cos}^2x)+B(2+3\,\mathrm{Cos}\,x)+$$

$$+C(2+3\,\mathrm{Cos}\,x)^2.$$

Можно было бы теперь отобрать коэффиціенты при различныхъ степеняхъ Cos x, но лучше поступить иначе. Обозначимъ

$$2+3\,\mathrm{Cos}\,x=z$$

и выразимъ черезъ z правую часть. Имѣемъ:

$$1=A.z\,{}^1\!/_3(z-2)+6\,A\,[1-{}^1\!/_9(z^2-4z+4)]+B.z+C.z^2.$$

Откуда

$$1=6\,A.\,{}^5\!/_9=A.\,{}^{10}\!/_3\,;\quad A={}^3\!/_{10}=0{,}3$$

$$0=-\,{}^2\!/_3A+{}^8\!/_3A+B\,;\quad B=-\,2A=-\,{}^3\!/_5$$

$$0={}^1\!/_3A-{}^2\!/_3A+C\,;\quad C={}^1\!/_3A={}^1\!/_{10}\,.$$

Итакъ:

$$\int\frac{dx}{(2+3\,\mathrm{Cos}\,x)^3}={}^3\!/_{10}\,\frac{\mathrm{Sin}\,x}{(2+3\,\mathrm{Cos}\,x)^2}-$$

$$-\,{}^3\!/_5\int\frac{dx}{(2+3\,\mathrm{Cos}\,x)^2}+{}^1\!/_{10}\int\frac{dx}{2+3\,\mathrm{Cos}\,x}\,.$$

Припоминая, что этотъ интегралъ имѣлъ коэффиціентомъ ${}^{22}\!/_9$, введемъ полученный результатъ въ первоначальное выраженіе

$$I = \frac{(\frac{2}{3} + \frac{11}{15}\,\mathrm{Sin}\,x)}{(2 + 3\,\mathrm{Cos}\,x)^2} + \frac{19}{45}\int\frac{dx}{(2 + 3\,\mathrm{Cos}\,x)^2} - \frac{14}{45}\int\frac{dx}{2 + 3\,\mathrm{Cos}\,x}.$$

Найдемъ второй интегралъ:

$$\int\frac{dx}{(2 + 3\,\mathrm{Cos}\,x)^2} = \frac{A\,\mathrm{Sin}\,x}{2 + 3\,\mathrm{Cos}\,x} + B\int\frac{dx}{2 + 3\,\mathrm{Cos}\,x}.$$

Дифференцируя, находимъ:

$$\frac{1}{(2 + 3\,\mathrm{Cos}\,x)^2} = \frac{A\,\mathrm{Cos}\,x}{(2 + 3\,\mathrm{Cos}\,x)} + \frac{3A\,\mathrm{Sin}^2 x}{(2 + 3\,\mathrm{Cos}\,x)^2} + \frac{B}{2 + 3\,\mathrm{Cos}\,x}$$

$$1 = A\,\mathrm{Cos}\,x(2 + 3\,\mathrm{Cos}\,x) + 3A(1 - \mathrm{Cos}^2 x) + B(2 + 3\,\mathrm{Cos}\,x)\;;$$

приравнивая коэффиціенты, находимъ уравненіе для опредѣленія A и B:

$$0 = 3A - 3A;\quad 0 = 2A + 3B;\quad 1 = 3A + 2B.$$

Умножая второе уравненіе на -2, а третье на 3 и складывая опредѣлимъ:

$$A = \tfrac{3}{5}\;;\quad B = -\tfrac{2}{3}A = -\tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{3}{5} = -\tfrac{2}{5}.$$

Второй интегралъ мы нашли

$$\int\frac{dx}{(2 + 3\,\mathrm{Cos}\,x)^2} = \frac{3}{5}\cdot\frac{\mathrm{Sin}\,x}{2 + 3\,\mathrm{Cos}\,x} - \frac{2}{5}\int\frac{dx}{2 + 3\,\mathrm{Cos}\,x}\;;$$

такъ какъ онъ входитъ въ выраженіе всего интеграла съ коэффиціентомъ $\frac{19}{45}$, то весь интегралъ будетъ:

$$I = \frac{1}{15}\cdot\frac{10 + 11\,\mathrm{Sin}\,x}{(2 + 3\,\mathrm{Cos}\,x)^2} + \frac{19}{75}\cdot\frac{\mathrm{Sin}\,x}{2 + 3\,\mathrm{Cos}\,x} - \frac{12}{25}\quad\frac{dx}{2 + 3\,\mathrm{Cos}\,x}.$$

Желая вычислить послѣдній интегралъ

$$\int\frac{dx}{2 + 3\,\mathrm{Cos}\,x},$$

мы можемъ положить

$$\mathrm{tg}\,\frac{x}{2} = z\,,$$

откуда

$$\mathrm{Cos}\,x = \frac{1 - z^2}{1 + z^2}\;;$$

$$dx = \frac{2dz}{1 + z^2}$$

$$\int \frac{dx}{2 + 3 \operatorname{Cos} x} = 2 \int \frac{dz}{2(1+z^2) + 3(1-z^2)} =$$

$$= 2 \int \frac{dz}{5 - z^2} = \cancel{2} \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{5}} \log \frac{\sqrt{5} + \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sqrt{5} - \operatorname{tg} \frac{x}{2}} .$$

Окончательно имѣемъ:

$$I = \frac{1}{15} \frac{10 + 11 \operatorname{Sin} x}{(2 + 3 \operatorname{Cos} x)^2} + \frac{19}{75} \frac{\operatorname{Sin} x}{2 + 3 \operatorname{Cos} x} - \frac{12}{25\sqrt{5}} \log \frac{\sqrt{5} + \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sqrt{5} - \operatorname{tg} \frac{x}{2}} + C.$$

Замѣчаніе. - Интегралы вида

$$\int \frac{dx}{(a + b \operatorname{Sin} x + c \operatorname{Cos} x)^m}$$

могутъ быть приведены помощью подстановки къ виду:

$$\int \frac{dx}{(a_1 + b_1 \operatorname{Cos} x)^m}$$

и тогда уже взяты по формулѣ приведенія. Для преобразованія указаннаго интеграла, нужно положить:

$$b = r \operatorname{Sin} \theta$$

$$c = r \operatorname{Cos} \theta .$$

Откуда

$$r = \sqrt{b^2 + c^2}$$

$$\operatorname{Sin} \theta = \frac{b}{\sqrt{b^2 + c^2}}$$

$$\operatorname{Cos} \theta = \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}} .$$

Тогда

$$a + b \operatorname{Sin} x + c \operatorname{Cos} x = a + r(\operatorname{Cos} x . \operatorname{Cos} \theta + \operatorname{Sin} x . \operatorname{Sin} \theta) =$$

$$= a + r \operatorname{Cos}(x - \theta) .$$

Положивъ

$$x - \theta = z ,$$

найдемъ

$$\int \frac{dx}{(a + b \operatorname{Sin} x + c \operatorname{Cos} x)^m} = \int \frac{dz}{(a + r \operatorname{Cos} z)^m} .$$

Примѣръ. - Найти интегралъ

$$\int \frac{dx}{1 + \operatorname{Cos} x - \operatorname{Sin} x} .$$

Положивъ

$$1 = r \operatorname{Cos} \theta$$

$$- 1 = r \operatorname{Sin} \theta ,$$

найдемъ

$$r = \sqrt{2} ; \quad \operatorname{Cos} \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} ; \quad \operatorname{Sin} \theta = - \frac{1}{\sqrt{2}} ;$$

$$\theta = - \frac{\pi}{4} .$$

Откуда найдемъ:

$$\int \frac{dx}{1 + \operatorname{Cos} x - \operatorname{Sin} x} = \int \frac{dz}{1 + \sqrt{2} \operatorname{Cos} z} ,$$

гдѣ

$$z = x + \frac{\pi}{4} .$$

Этотъ послѣднiй интегралъ берется, какъ указано выше (см. предыдущiй примѣръ).

КЛАССЪ 8-й. Интегралы, берущiеся подстановкой. Сюда относятся интегралы вида:

$$\int f[\varphi(x)] \varphi'(x) dx ,$$

гдѣ $\varphi(x)$ нѣкоторая трансцендентная функцiя. Подстановка

$$\varphi(x) = z$$

приводитъ интегралъ къ виду:

$$\int f(z) dz .$$

Если этотъ интегралъ берется въ конечномъ видѣ, то и первый интегралъ также берется. Отмѣтимъ слѣдующіе типы интеграловъ этого класса:

$$1^\circ.\ \int f(\log x)\,\frac{dx}{x}\,;\qquad 2^\circ.\ \int f(e^x)e^x dx\,;$$

$$3^\circ.\ \int f(\operatorname{Sin} x)\operatorname{Cos} x\,dx\,;\qquad 4^\circ.\ \int f(\operatorname{Cos} x)\operatorname{Sin} x\,dx\,;$$

$$5^\circ.\ \int f(\operatorname{tg} x)\,\frac{dx}{\operatorname{Cos}^2 x}\,;\qquad 6^\circ.\ \int f(\operatorname{arc\,Sin} x)\,\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\,;$$

$$7^\circ.\ \int f(\operatorname{arctg} x)\,\frac{dx}{1+x^2}\,.$$

Примѣръ 1. - Интегралъ

$$\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{\log(x+1)}}$$

рѣшается подстановкой

$$\log(x+1) = z\,;$$

откуда

$$\frac{dx}{x+1} = dz$$

$$\int\frac{dz}{\sqrt{z}} = 2\sqrt{z} + C = 2\sqrt{\log(x+1)} + C.$$

Примѣръ 2.

$$\int\frac{dx}{e^x+1}$$

Этотъ интегралъ по умноженіи числителя и знаменателя на e^x легко рѣшается подстановкой

$$e^x = z$$

$$\int\frac{dx}{e^x+1} = \int\frac{e^x dx}{e^x(e^x+1)} = \int\frac{dz}{z(z+1)} = \log\frac{z}{z+1} + C = \log\frac{e^x}{e^x+1} + C.$$

Примѣръ 3.

$$\int\frac{\operatorname{Cos} x\,dx}{\sqrt{\operatorname{Cos} 2x}} = \int\frac{d\operatorname{Sin} x}{\sqrt{1-2\operatorname{Sin}^2 x}} = \int\frac{dz}{\sqrt{1-2z^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d(z\sqrt{2})}{\sqrt{1 - (z\sqrt{2})^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ arcSin}(\sqrt{2} \text{ Sin } x) + C.$$

Примѣръ 4.

$$\int \frac{dx}{\text{Cos}^2 x \sqrt[3]{1 + \text{tg}^3 x}} = \int \frac{dz}{\sqrt[3]{1 + z^3}} ,$$

гдѣ $z = \text{tg } x$. Этотъ интегралъ разсмотрѣнъ нами раньше на стр. 64 (см. отд. II, классъ 3-й, пр. 1).

Примѣръ 5.

$$\int \text{arc Sin}^2 x \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \tfrac{1}{3} \text{ arc Sin}^3 x + C.$$

Примѣръ 6.

$$\int f(x + \sqrt{1 + x^2}) \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}} .$$

Полагая здѣсь

$$x + \sqrt{1 + x^2} = z ,$$

имѣемъ

$$(1 + \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}) dx = dz$$

$$\frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}} = \frac{dz}{z} .$$

Слѣдовательно

$$\int f(x + \sqrt{1 + x^2}) \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}} = \int f(z) \frac{dz}{z} .$$

Рѣшимъ частный примѣръ:

$$\int (x + \sqrt{1 + x^2})^{\frac{2}{3}} \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}} = \int z^{\frac{2}{3}} \frac{dz}{z} = \int z^{-\frac{1}{3}} dz = \tfrac{2}{3} z^{\frac{2}{3}} + C.$$

КЛАССЪ 4-й. - Интегралы, берущіеся по частямъ. Разсмотримъ отдѣльные типы такихъ интеграловъ.

Типъ 1.

$$I = \int x^m (\log x)^n dx ,$$

гдѣ n - цѣлое положительное число, а m - какое угодно. Обозначивъ

$$(\log x)^n = u,$$

$$x^m dx = dv,$$

будемъ имѣть:

$$du = n(\log x)^{n-1}\frac{dx}{x}$$

$$v = \frac{x^{m+1}}{m+1}.$$

Отсюда мы видимъ, что m не можетъ быть = -1. На основанiи формулы интегрированiя по частямъ, имѣемъ:

$$I = \frac{x^{m+1}}{m+1}(\log x)^n - \frac{n}{m+1}\int(\log x)^{n-1}x^m dx.$$

Степень n стала на единицу ниже; интегрируя по частямъ полученный интегралъ, мы понизимъ степень еще на одну единицу, и послѣ m подобныхъ операцiй придемъ къ интегралу

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C.$$

Типъ 2.

$$\int \varphi(x)\log\psi(x)dx.$$

Этотъ интегралъ берется въ конечномъ видѣ лишь при соблюденiи нѣкоторыхъ условiй. Если $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ функцiи алгебраическiя, причемъ интегралъ

$$\int \varphi(x)dx$$

также алгебраическiй, то предложенный интегралъ приводится къ интегралу отъ алгебраической функцiи и въ частности можетъ быть взятъ въ конечномъ видѣ, если новая алгебраическая функцiя содержитъ только корни изъ линейной функцiи или корни квадратные изъ функцiи 2-ой степени.

Примѣръ 1. - Найти

$$I = \int\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}\log(x-1)dx.$$

Положивъ

$$u = \log(x-1)$$

$$dv = \frac{2x + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1}} dx ,$$

находимъ

$$du = \frac{dx}{x - 1}$$

$$v = \int \frac{d(x^2+x+1)}{\sqrt{x^2 + x + 1}} = 2\sqrt{x^2 + x + 1} + C$$

$$I = \log(x-1)\, 2\sqrt{x^2 + x + 1} - 2\int \frac{\sqrt{x^2 + x + 1}}{x - 1} dx .$$

Послѣднiй интегралъ берется въ конечномъ видѣ.

Примѣръ 2. - Найти

$$I = \int x \log (x + \sqrt{1 + x^2}) dx.$$

Имѣемъ:

$$\log(x + \sqrt{1 + x^2}) = u$$

$$xdx = dv$$

$$du = \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}} ; \quad v = \tfrac{1}{2} x^2$$

$$I = \tfrac{1}{2} x^2 \log(x + \sqrt{1 + x^2}) - \tfrac{1}{2} \int \frac{x^2 \, dx}{\sqrt{1 + x^2}} .$$

Послѣднiй интегралъ берется по частямъ. Положивъ:

$$x = u ; \quad \frac{xdx}{\sqrt{1 + x^2}} = dv ,$$

откуда

$$du = dx ; \quad v = \sqrt{1 + x^2},$$

найдемъ

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1+x^2}} = x\sqrt{1 + x^2} - \int \sqrt{1 + x^2}\, dx = x\sqrt{1 + x^2} - \int \frac{1+x^2}{\sqrt{1+x^2}} dx =$$

$$= x\sqrt{1 + x^2} - \int \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}} - \int \frac{x^2 \, dx}{\sqrt{1 + x^2}} .$$

Перенеся послѣднiй интегралъ въ лѣвую часть и раздѣливъ все равенство на 2 окончательно получимъ:

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{2}\sqrt{1+x^2} - \frac{1}{2}\log(x+\sqrt{1+x^2}) + C$$

Типъ 3.

$$\int (\arcsin x)^m\,dx$$

- берется въ конечномъ видѣ при m цѣломъ и положительномъ. Интегрируемъ по частямъ:

$$\int (\arcsin x)^m dx = x(\arcsin x)^m - m\int x \arcsin^{m-1} x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Далѣе переписавъ послѣднiй интегралъ въ видѣ:

$$-\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin^{m-1} x$$

и полагая

$$-\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = dv\ ,$$

$$\arcsin^{m-1} x = u\ ,$$

интегрируемъ его опять по частямъ:

$$-\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin^{m-1} x = \sqrt{1-x^2}\arcsin^{m-1} x - (m-1)\int \arcsin^{m-2} x dx.$$

Итакъ, послѣ двухъ послѣдовательныхъ интегрированiй мы получимъ слѣдующiй результатъ

$$\int \arcsin^m x\,dx =$$

$$= x\arcsin^m x + m\sqrt{1-x^2}\arcsin^{m-1} x - m(m-1)\int \arcsin^{m-2} x\,dx.$$

Послѣдовательнымъ пониженiемъ придемъ или къ интегралу

$$\int \arcsin x\,dx \quad \text{(при } m \text{ нечетномъ)}$$

или къ

$$\int dx \quad \text{(при } m \text{ четномъ).}$$

Типъ 4. - Интегралы вида:

$$\int f(x)\arcsin x\,dx\ ,$$

причемъ функцiя $f(x)$ имѣетъ алгебраическiй интегралъ:

$$\int f(x)dx\ ,$$

который или раціоналенъ или содержитъ $\sqrt{1-x^2}$; при этихъ условіяхъ интегралы указаннаго типа берутся въ конечномъ видѣ.

Примѣръ 1.

$$\int (x^2 - x + 1) \operatorname{arc\,Sin} x \, dx =$$

$$= \operatorname{arc\,Sin} x \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x\right) - \int \frac{\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Полученный интегралъ алгебраическій и берется въ конечномъ видѣ.

Примѣръ 2.

$$\int \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \operatorname{arc\,Sin} x \, dx =$$

$$= \operatorname{arc\,Sin} x \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \operatorname{arc\,Sin} x \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2} \log(1-x^2) + C.$$

Примѣръ 3.

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} \operatorname{arc\,Sin} x = \operatorname{arc\,Sin} x \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \operatorname{arc\,Sin} x \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^4}}.$$

Полагая въ послѣднемъ интегралѣ

$$x^2 = y,$$

получимъ

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{2} \int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{1}{2} \operatorname{arcSin} y + C = \frac{1}{2} \operatorname{arcSin} x^2 + C.$$

Типъ 5. - Интегралы вида

$$\int \varphi(x) \operatorname{arctg} x \, dx.$$

Если интегралъ

$$\int \varphi(x) dx$$

алгебраическій и не содержитъ другихъ иррацiональностей, кромѣ корней изъ линейныхъ функцій или корней квадратныхъ изъ функцій 2-ой степени, то интегралы берутся въ конечкомъ видѣ.

Примѣръ 1. - Найти интегралъ

$$\int (x^2 - x - 1)\operatorname{arctg} x\, dx.$$

Полагая

$$u = \operatorname{arctg} x$$

$$dv = (x^2 - x + 1)dx$$

находимъ

$$du = \frac{dx}{1 + x^2}$$

$$v = \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{2}x^2 + x.$$

Интегрируя по частямъ предложенный интегралъ, получаемъ:

$$\int (x^2 - x + 1)\operatorname{arctg} x\, dx = \operatorname{arctg} x(\tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{2}x^2 + x) - \int \frac{\tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{2}x^2 + x}{1 + x^2}dx,$$

мы пришли къ алгебраическому интегралу, который берется въ конечномъ видѣ.

Примѣръ 2. - Найти

$$\int \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \operatorname{arctg} x.$$

Интегрируемъ его по частямъ; полагаемъ

$$u = \operatorname{arctg} x,$$

$$dv = \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}};$$

отсюда

$$du = \frac{dx}{1 + x^2},$$

$$v = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Имѣемъ:

$$\int \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \operatorname{arctg} x = \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1 - x^2}} - \int \frac{x dx}{(1+x^2)\sqrt{1 - x^2}}.$$

Послѣдній интегралъ рѣшается подстановкой

$$1 - x^2 = z^2,$$

откуда имѣемъ

$$- xdx = zdz,$$

$$1 + x^2 = 1 + 1 - z^2 = 2 - z^2.$$

Итакъ

$$\int \frac{- xdx}{(1+x^2)\sqrt{1 - x^2}} = \int \frac{zdz}{(2-z^2)z} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \log \frac{\sqrt{2} + z}{\sqrt{2} - z} + C.$$

Типъ 6. - Интегралы, зависящіе отъ гиперболическихъ функцій. - Гиперболическіе синусъ, косинусъ, тангенсъ и котангенсъ опредѣляются формулами:

$$\mathrm{Sh}\,x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \mathrm{Ch}\,x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

$$\mathrm{th}\,x = \frac{\mathrm{Sh}\,x}{\mathrm{Ch}\,x}, \quad \mathrm{Coth}\,x = \frac{\mathrm{Ch}\,x}{\mathrm{Sh}\,x}$$

Изъ опредѣленія непосредственно видно, что:

$$\mathrm{Sh}(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = - \mathrm{Sh}\,x, \quad \mathrm{Ch}(-x) = \mathrm{Ch}\,x,$$

$$\mathrm{th}(-x) = - \mathrm{th}\,x, \quad \mathrm{Coth}(-x) = - \mathrm{Coth}\,x,$$

такъ что функціи $\mathrm{Sh}\,x$, $\mathrm{th}\,x$, $\mathrm{Coth}\,x$ будутъ нечетными функціями, а $\mathrm{ch}\,x$ - четная функція. Основныя соотношенія между гиперболическими функціями суть:

$$\mathrm{Ch}^2 x - \mathrm{Sh}^2 x = 1, \quad \mathrm{th}^2 x = 1 - \frac{1}{\mathrm{Ch}^2 x},$$

$$\mathrm{Coth}^2 x = 1 + \frac{1}{\mathrm{Sh}^2 x},$$

причемъ первое слѣдуетъ изъ того, что

$$\mathrm{Ch}\,x + \mathrm{Sh}\,x = e^x, \quad \mathrm{Ch}\,x - \mathrm{Sh}\,x = e^{-x},$$

а второе и третье выводится изъ перваго дѣленіемъ его на $\mathrm{Ch}^2 x$ и на $\mathrm{Sh}^2 x$. Производныя этихъ функцій вычисляются непосредственно:

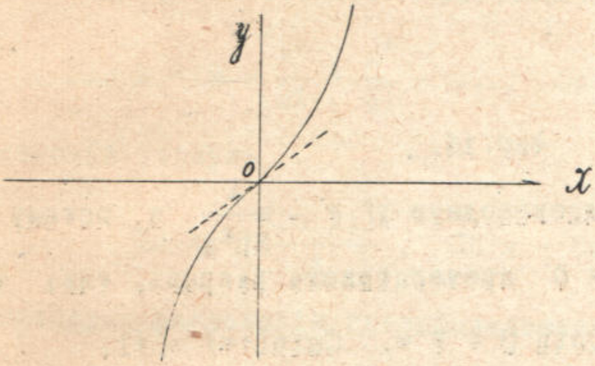
$$\mathrm{Sh}\,x' = \tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x})' = \tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \mathrm{Ch}\,x,$$

$$(\mathrm{Ch}\,x)' = \tfrac{1}{2}(e^{x} + e^{-x})' = \tfrac{1}{2}(e^{x} - e^{-x}) = \mathrm{Sh}\,x,$$

$$(\mathrm{th}\,x)' = \left(\frac{\mathrm{Sh}\,x}{\mathrm{Ch}\,x}\right)' = \frac{\mathrm{Ch}^2x - \mathrm{Sh}^2x}{\mathrm{Ch}^2x} = \frac{1}{\mathrm{Ch}^2x},$$

$$(\mathrm{Coth}\,x)' = \left(\frac{\mathrm{Ch}\,x}{\mathrm{Sh}\,x}\right)' = \frac{\mathrm{Sh}^2x - \mathrm{Ch}^2x}{\mathrm{Sh}^2x} = \frac{-1}{\mathrm{Sh}^2x}.$$

Построимъ графики этихъ функцій.

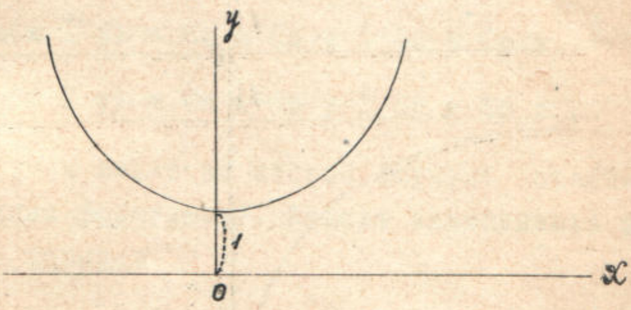


Фиг. 14.

a) $y = \mathrm{Sh}\,x$ имѣетъ производную $y' = \mathrm{Ch}\,x$ положительную, слѣдовательно, y непрерывно растетъ вмѣстѣ съ x, причемъ

$$\mathrm{Sh}(-\infty) = -\infty,$$
$$\mathrm{Sh}(0) = 0,$$
$$\mathrm{Sh}(+\infty) = +\infty.$$

b) $y = \mathrm{Ch}\,x$ имѣетъ производную $y' = \mathrm{Sh}\,x$, которая обращается въ нуль при $x = 0$, и такъ какъ $y'' = \mathrm{Ch}\,x > 0$, то y достигаетъ при $x = 0$ своего минимума, причемъ

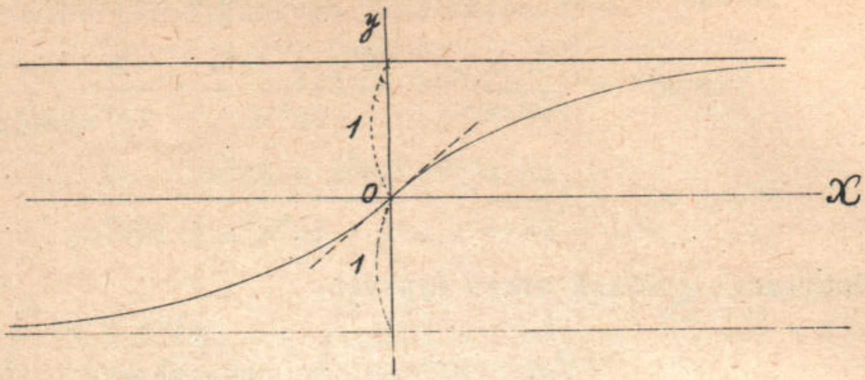


Фиг. 15.

$$\mathrm{Ch}(-\infty) = +\infty, \quad \mathrm{Ch}\,0 = 1, \quad \mathrm{Ch}(+\infty) = +\infty.$$

c) $y = \mathrm{th}\,x$ имѣетъ производную $y' = \dfrac{1}{\mathrm{Ch}^2\,x}$ положительную, слѣдовательно y непрерывно растетъ, причемъ

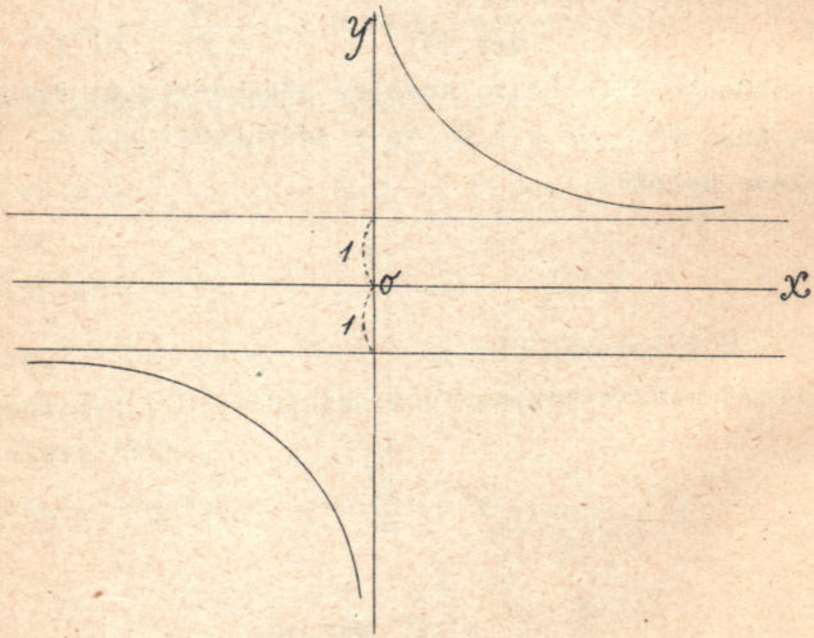
$$\mathrm{th}(-\infty) = -1, \quad \mathrm{th}\,0 = 0, \quad \mathrm{th}(+\infty) = 1.$$



Фиг. 16.

d) $y = \mathrm{Coth}\, x$ имѣетъ производную $y' = -\dfrac{1}{\mathrm{Sh}^2 x}$ и потому y убываетъ, причемъ при $x = 0$ претерпѣваетъ разрывъ, такъ что

$$\mathrm{Coth}(-\infty) = -1, \quad \mathrm{Coth}\, 0 = \mp\infty, \quad \mathrm{Coth}(+\infty) = +1.$$



Фиг. 17.

На основаніи извѣстныхъ формулъ Эйлера:

$$\mathrm{Sin}\, x = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i}, \quad \mathrm{Cos}\, x = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2}$$

выводимъ зависимости между тригонометрическими и гиперболическими функціями. Именно:

$$\operatorname{Sin}(xi) = \frac{e^{-x} - e^{+x}}{2i} = i \operatorname{Sh} x$$

$$\operatorname{Cos}(xi) = \frac{e^{-x} + e^{+x}}{2} = \operatorname{Ch} x \, ,$$

и дѣленіемъ отсюда слѣдуетъ:

$$\operatorname{tg}(xi) = i \operatorname{th} x, \quad \operatorname{Cotg}(xi) = - i \operatorname{Coth} x.$$

Пользуясь извѣстными разложеніями Sin x и Cos x въ ряды:

$$\operatorname{Sin} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots, \quad \operatorname{Cos} x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots,$$

помощью формулъ

$$\operatorname{Sh} x = \frac{\operatorname{Sin}(xi)}{i}, \quad \operatorname{Ch} x = \operatorname{Cos}(xi)$$

находимъ разложенія гиперболическихъ функцій:

$$\operatorname{Sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots, \quad \operatorname{Ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots,$$

причемъ ряды остаются сходящимися при всѣхъ конечныхъ x.

Формулы сложенія для гиперболическихъ функцій представляютъ полную аналогію съ тригонометрическими, именно:

$$\operatorname{Sh}(x \pm y) = \operatorname{Sh} x \operatorname{Ch} y \pm \operatorname{Sh} y \operatorname{Ch} x \, ,$$

$$\operatorname{Ch}(x \pm y) = \operatorname{Ch} x \operatorname{Ch} y \pm \operatorname{Sh} x \operatorname{Sh} y \, ,$$

(отмѣтимъ разницу въ знакѣ во второй формулѣ сравнительно съ тригонометрическими формулами). Выводъ написанныхъ формулъ слѣдующій: выпишемъ формулы

$$e^{\pm x} = \operatorname{Ch} x \pm \operatorname{Sh} x \, , \quad e^{\pm y} = \operatorname{Ch} y \pm \operatorname{Sh} y \, ,$$

$$e^{\pm(x+y)} = \operatorname{Ch}(x+y) \pm \operatorname{Sh}(x+y)$$

(знаки $\pm$ берутся въ обѣихъ частяхъ формулы оба верхніе или оба нижніе). Перемножимъ первыя два равенства, беря одновременно или оба съ + или оба съ – ; получимъ:

$$e^{\pm(x+y)} = (\operatorname{Ch} x \pm \operatorname{Sh} x)(\operatorname{Ch} y \pm \operatorname{Sh} y) =$$

$$= (\operatorname{Ch} x \operatorname{Ch} y + \operatorname{Sh} x \operatorname{Sh} y) \pm (\operatorname{Sh} x \operatorname{Ch} y + \operatorname{Sh} y \operatorname{Ch} x),$$

и тогда изъ сравненія съ третьей формулой, въ виду двойного знака, слѣдуетъ:

$$\mathrm{Ch}(x+y) = \mathrm{Ch}\, x\, \mathrm{Ch}\, y + \mathrm{Sh}\, x\, \mathrm{Sh}\, y$$

$$\mathrm{Sh}(x+y) = \mathrm{Sh}\, x\, \mathrm{Ch}\, y + \mathrm{Sh}\, y\, \mathrm{Ch}\, x.$$

Мѣняя здѣсь y на $-y$ и имѣя въ виду четность $\mathrm{Ch} y$ и нечетность $\mathrm{Sh}\, y$, находимъ

$$\mathrm{Ch}(x-y) = \mathrm{Ch}\, x\, \mathrm{Ch}\, y - \mathrm{Sh}\, x\, \mathrm{Sh}\, y$$

$$\mathrm{Sh}(x-y) = \mathrm{Sh}\, x\, \mathrm{Ch}\, y - \mathrm{Sh}\, y\, \mathrm{Ch}\, x.$$

Изъ формулъ сложенія непосредственно получаются формулы, аналогичныя тригонометрическимъ:

$$\mathrm{Sh}(x+y) + \mathrm{Sh}(x-y) = 2\mathrm{Sh}\, x\, \mathrm{Ch}\, y$$

$$\mathrm{Ch}(x+y) + \mathrm{Ch}(x-y) = 2\mathrm{Ch}\, x\, \mathrm{Ch}\, y$$

$$\mathrm{Ch}(x+y) - \mathrm{Ch}(x-y) = 2\mathrm{Sh}\, x\, \mathrm{Sh}\, y$$

и отсюда

$$\mathrm{Sh}\, x\, \mathrm{Ch}\, y = \tfrac{1}{2}\,[\mathrm{Sh}(x+y) + \mathrm{Sh}(x-y)],$$

$$\mathrm{Ch}\, x\, \mathrm{Ch}\, y = \tfrac{1}{2}\,[\mathrm{Ch}(x+y) + \mathrm{Ch}(x-y)],$$

$$\mathrm{Sh}\, x\, \mathrm{Sh}\, y = \tfrac{1}{2}\,[\mathrm{Ch}(x+y) - \mathrm{Ch}(x-y)].$$

Для гиперболическихъ функцій существуетъ формула умноженія аналогичная формулѣ Моавра:

$$(\mathrm{Ch}\, x \pm \mathrm{Sh}\, x)^n = \mathrm{Ch}\, nx \pm \mathrm{Sh}\, nx.$$

Для вывода ея замѣтимъ, что

$$\mathrm{Ch}\, x \pm \mathrm{Sh}\, x = e^{\pm x}, \quad \mathrm{Ch}\, nx \pm \mathrm{Sh}\, nx = e^{\pm nx},$$

и что

$$(e^{\pm x})^n = e^{\pm nx}\ .$$

Приравнивая въ этой формулѣ (гдѣ въ обѣихъ частяхъ берутся одновременно оба + или оба −) члены съ опредѣленнымъ знакомъ и члены съ двойнымъ знакомъ, находимъ:

$$\mathrm{Ch} nx = \mathrm{Ch}^n x + \frac{n(n-1)}{1.2}\mathrm{Ch}^{n-2} x \mathrm{Sh}^2 x + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}\mathrm{Ch}^{n-4} x \mathrm{Sh}^4 x + \ldots$$

$$\mathrm{Sh}\, nx = \frac{n}{1}\,\mathrm{Ch}^{n-1} x\, \mathrm{Sh}\, x + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\mathrm{Ch}^{n-3} x\, \mathrm{Sh}^3 x + \ldots .$$

- формулы, выражающія гиперболическіе косинусъ и синусъ кратной дуги черезъ такія же функціи простой дуги.

Столь же легко получаются формулы для выраженія степеней $\mathrm{Ch}^n x$ и $\mathrm{Sh}^n x$ въ видѣ линейныхъ функцій отъ Ch и Sh кратныхъ дугъ:

$$\mathrm{Ch}^n x = \frac{1}{2^n}(e^x + e^{-x})^n, \quad \mathrm{Sh}^n x = \frac{1}{2^n}(e^x - e^{-x})^n$$

причемъ послѣ возвышенія въ степень въ правой части нужно соединить попарно члены, одинаково отстоящіе отъ начала и конца разложенія.

Напримѣръ:

$$\mathrm{Ch}^2 x = \tfrac{1}{4}(e^{2x} + 2 + e^{-2x}) = \tfrac{1}{2}\left(\frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} + 1\right) = \frac{\mathrm{Ch}\,2x + 1}{2},$$

$$\mathrm{Sh}^3 x = \tfrac{1}{8}(e^{3x} - 3e^{x} + 3e^{-x} - e^{-3x}) =$$

$$= \tfrac{1}{4}\left(\frac{e^{3x} - e^{-3x}}{2} - 3\,\frac{e^{x} - e^{-x}}{2}\right) = \tfrac{1}{4}(\mathrm{Sh}\,3x - 3\mathrm{Sh}\,x).$$

Обратимся къ обратнымъ гиперболическимъ функціямъ:

$$y = \mathrm{arcsh}\,x \quad \text{и} \quad y = \mathrm{arcth}\,x,$$

которыя будутъ однозначными и возрастающими функціями вмѣстѣ съ прямыми функціями Sh x и th x, причемъ въ первой функціи x можетъ быть любымъ числомъ отъ $-\infty$ до $+\infty$, а во второй x содержится между -1 и +1. Составимъ ихъ производныя.

a) Такъ какъ при $y = \mathrm{arcsh}\,x$ выходитъ $x = \mathrm{Sh}\,y$, то $dx = \mathrm{Ch}\,y\,dy$, откуда

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\mathrm{Ch}\,y} = \frac{1}{+\sqrt{1 + \mathrm{Sh}^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

b) Такъ какъ при $y = \mathrm{arcth}\,x$ выходитъ $x = \mathrm{th}\,y$, то $dx = \dfrac{dy}{\mathrm{Ch}^2 y}$, откуда

$$\frac{dy}{dx} = \mathrm{Ch}^2 y = \frac{1}{1 - \mathrm{th}^2 y} = \frac{1}{1 - x^2}.$$

Итакъ:

$$(\mathrm{arcSh}\,x)' = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}, \quad (\mathrm{arcth}\,x)' = \frac{1}{1 - x^2}.$$

Припоминая, что

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}} = \log(x + \sqrt{1 + x^2}) + C,$$

находимъ, что

$$[\log(x + \sqrt{1 + x^2})]' = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}},$$

т.е. функціи $\operatorname{arcSh} x$ и $\log(x + \sqrt{1 + x^2})$ имѣютъ одинаковыя производныя, откуда слѣдуетъ, что разность ихъ постоянна:

$$\operatorname{arcSh} x = \log(x + \sqrt{1 + x^2}) + C$$

и такъ какъ при $x = 0$ обѣ функціи равны 0, то $C = 0$ и слѣдовательно

$$\operatorname{arcSh} x = \log(x + \sqrt{1 + x^2}).$$

Помощью этой формулы получается легко опредѣленіе функціи $\operatorname{arcSin}(xi)$:

$$\operatorname{arcSin}(xi) = i\log(x + \sqrt{1 + x^2}).$$

Дѣйствительно, положимъ

$$\operatorname{arcSin}(xi) = yi;$$

тогда

$$xi = \operatorname{Sin} yi = i \operatorname{Sh} y, \quad x = \operatorname{Sh} y,$$

$$y = \operatorname{arcSh} x, \quad yi = i \operatorname{arcSh} x = i\log(x + \sqrt{1 + x^2}).$$

Подобнымъ же образомъ, припоминая формулу

$$\int \frac{dx}{1 - x^2} = \tfrac{1}{2} \log \frac{1 + x}{1 - x},$$

находимъ

$$\left(\tfrac{1}{2} \log \frac{1 + x}{1 - x}\right)' = \frac{1}{1 - x^2} = (\operatorname{arcth} x)',$$

откуда

$$\operatorname{arcth} x = \tfrac{1}{2} \log \left(\frac{1 + x}{1 - x}\right) + C$$

и такъ какъ при $x = 0$ обѣ функціи обращаются въ 0, то $C = 0$ и выходитъ

$$\operatorname{arcth} x = \tfrac{1}{2} \log \frac{1 + x}{1 - x}.$$

Отсюда легко выводится опредѣленіе функціи $\operatorname{arctg}(xi)$:

$$\operatorname{arctg}(xi) = \frac{i}{2}\log\frac{1+x}{1-x}.$$

Именно, положивъ

$$\operatorname{arctg}(xi) = yi,$$

находимъ

$$xi = \operatorname{tg}(yi) = i\ \operatorname{th} y,$$

откуда

$$x = \operatorname{th} y, \quad y = \operatorname{arcth} x$$

$$yi = i\ \operatorname{arcth} x = \frac{i}{2}\log\frac{1+x}{1-x}.$$

Обратимся теперь къ интеграламъ отъ гиперболическихъ функцій и отличимъ нѣсколько классовъ, аналогичныхъ классамъ интеграловъ отъ тригонометрическихъ функцій.

Классъ 1. - Интегралы вида

$$\int f(x)\, \operatorname{Sh}^{m_1} a_1x\ \operatorname{Sh}^{m_2} a_2x \ldots \operatorname{Ch}^{n_1} b_1x\ \operatorname{Ch}^{n_2} b_2x \ldots dx,$$

гдѣ $f(x)$ цѣлая функція, $m_1, m_2, \ldots n_1, n_2, \ldots$ цѣлыя положительныя числа и $a_1, a_2, \ldots b_1, b_2, \ldots$ произвольныя постоянныя. Замѣнивъ степени $\operatorname{Sh}^m ax$, $\operatorname{Ch}^n bx$ по формуламъ:

$$\operatorname{Sh}^m ax = \operatorname{Ch} max - \frac{m}{1}\operatorname{Ch}(m-2)ax + \ldots \quad (m \text{ четн.})$$

$$\operatorname{Sh}^m ax = \operatorname{Sh} max - \frac{m}{1}\operatorname{Sh}(m-2)ax + \ldots \quad (m \text{ нечетн.})$$

$$\operatorname{Ch}^n bx = \operatorname{Ch} nbx + \frac{n}{1}\operatorname{Ch}(n-2)bx + \ldots$$

и произведя перемноженіе этихъ разложеній, прійдемъ къ произведеніямъ вида:

$$\operatorname{Sh} m_1ax\ \operatorname{Sh} m_2ax \ldots \operatorname{Ch} n_1bx\ \operatorname{Ch} n_2bx \ldots;$$

затѣмъ помощью формулъ

$$\operatorname{Sh} x \operatorname{Ch} y = \tfrac{1}{2}\left[\operatorname{Sh}(x+y) + \operatorname{Sh}(x-y)\right]$$

и т.п. приводимъ произведеніе къ суммѣ членовъ вида $\operatorname{Sh} px$, $\operatorname{Ch} qx$, послѣ чего интегралъ нашъ приведется къ простѣйшимъ интеграламъ $\int \operatorname{Sh} px\, f(x)dx$ $\int \operatorname{Ch} qx\, f(x)dx$, которые берутся по частямъ.

Примѣръ 1.

$$\mathrm{Sh}^3 2x = \tfrac{1}{4}(\mathrm{Sh}\,6x - 3\,\mathrm{Sh}\,2x),$$

$$\int x^2 \mathrm{Sh}^3\,2x\,dx = \tfrac{1}{4}\int x^2\,\mathrm{Sh}\,6x\,dx - \tfrac{3}{4}\int x^2 \mathrm{Sh}\,2x\,dx.$$

Далѣе

$$\int x^2 \mathrm{Sh}\,mx\,dx = x^2\,\frac{\mathrm{Ch}\,mx}{m} - \frac{2}{m}\int x\,\mathrm{Ch}\,mx\,dx =$$

$$= x^2\,\frac{\mathrm{Ch}\,mx}{m} - \frac{2}{m}\,x\,\mathrm{Sh}\,mx + \frac{2}{m^3}\,\mathrm{Ch}\,mx + C,$$

и окончательно

$$\int x^2 \mathrm{Sh}^3 2x\,dx = x^2[\tfrac{1}{24}\,\mathrm{Ch}\,6x - \tfrac{3}{8}\,\mathrm{Ch}\,2x] +$$

$$+ x[-\tfrac{1}{72}\,\mathrm{Sh}\,6x + \tfrac{3}{8}\,\mathrm{Sh}\,2x] + [\tfrac{1}{432}\,\mathrm{Ch}\,6x - \tfrac{3}{16}\,\mathrm{Ch}\,2x] + C.$$

Примѣръ 2.

$$\int \mathrm{Sh}\,3x\,\mathrm{Ch}\,4x\,\mathrm{Sh}\,5x\,dx.$$

Имѣемъ:

$$\mathrm{Sh}\,3x\,\mathrm{Ch}\,4x = \tfrac{1}{2}[\mathrm{Sh}\,7x - \mathrm{Sh}\,x]$$

$$\mathrm{Sh}\,3x\,\mathrm{Ch}\,4x\,\mathrm{Sh}\,5x = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Sh}\,7x\,\mathrm{Sh}\,5x - \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Sh}\,x\,\mathrm{Sh}\,5x =$$

$$= \tfrac{1}{4}(\mathrm{Ch}\,12x - \mathrm{Ch}\,2x - \mathrm{Ch}\,6x + \mathrm{Ch}\,4x),$$

$$\int \mathrm{Sh}\,3x\,\mathrm{Ch}\,4x\,\mathrm{Sh}\,5x\,dx = \tfrac{1}{4}[\tfrac{1}{12}\,\mathrm{Sh}\,12x - \tfrac{1}{6}\,\mathrm{Sh}\,6x +$$

$$+ \tfrac{1}{4}\,\mathrm{Sh}\,4x - \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Sh}\,2x] + C.$$

КЛАССЪ 2. - Интегралы вида

$$\int f(x)\,\mathrm{Sin}^m ax\,\mathrm{Cos}^n bx\,\mathrm{Sh}^{m_1} a_1x\,\mathrm{Ch}^{n_1} b_1x\,dx,$$

гдѣ $f(x)$ - цѣлая функція, числа m, n, m_1, n_1 - цѣлыя положительныя; числа a, b, a_1, b_1 - произвольныя.

Способомъ, указаннымъ въ предыдущемъ классѣ, приведемъ $\mathrm{Sh}^{m_1} a_1x\,\mathrm{Ch}^{n_1} b_1x$ къ суммѣ членовъ вида $A_1\mathrm{Sh}\,p_1x$, $B_1\mathrm{Ch}p_1x$ (A_1 и B_1 - постоянныя числа). Такимъ же пріемомъ приведемъ произведеніе $\mathrm{Sin}^m ax\,\mathrm{Cos}^n bx$ къ суммѣ членовъ вида $A\,\mathrm{Sin}\,px$, $B\,\mathrm{Cos}\,px$. Послѣ перемноженія обоихъ произведеній, интегралъ приведется къ суммѣ интеграловъ 4 видовъ:

$$\left.\begin{array}{ll} \int f(x)\mathrm{Sh}\,p_1x\,\mathrm{Sin}\,px\,dx, & \int f(x)\,\mathrm{Sh}\,p_1x\,\mathrm{Cos}\,px\,dx, \\ \int f(x)\mathrm{Ch}\,p_1x\,\mathrm{Sin}\,px\,dx, & \int f(x)\,\mathrm{Ch}\,p_1x\,\mathrm{Cos}\,px\,dx. \end{array}\right| \quad (*)$$

Такъ какъ

$$\mathrm{Sh}\ p_1x = \tfrac{1}{2}(e^{p_1x} - e^{-p_1x}) \quad \text{и} \quad \mathrm{Cos}\ p_1x = \tfrac{1}{2}(e^{p_1x} + e^{-p_1x}),$$

то каждый изъ предыдущихъ 4 видовъ приведется къ алгебраической суммѣ 2 интеграловъ

$$\int f(x)e^{p_1x}\,{}^{\mathrm{Sin}}_{\mathrm{Cos}}(px)\,dx, \qquad \int f(x)e^{-p_1x}\,{}^{\mathrm{Sin}}_{\mathrm{Cos}}(px)\,dx.$$

Въ отд. II, кл. I, 2-ой типъ, мы видѣли, что такіе интегралы имѣютъ слѣдующія значенія:

$$e^{p_1x}[\mathrm{Sin}\ px.\varphi(x) + \mathrm{Cos}\ px.\psi(x)]$$

$$e^{-p_1x}[\mathrm{Sin}\ px.\varphi(x) + \mathrm{Cos}\ px.\psi(x)],$$

гдѣ $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ - цѣлыя функціи одной степени съ $f(x)$. Замѣняя здѣсь $e^{p_1x} = \mathrm{Ch}\ p_1x + \mathrm{Sh}\ p_1x$, $e^{-p_1x} = \mathrm{Ch}\ p_1x - \mathrm{Sh}\ p_1x$, окончательно каждый изъ 4 видовъ (*) приведемъ къ выраженію

$$\left.\begin{aligned}&\mathrm{Sh}\ p_1x\ \mathrm{Sin}\ px.\omega_1(x) + \mathrm{Sh}\ p_1x\ \mathrm{Cos}\ px.\omega_2(x) + \\ &+ \mathrm{Ch}\ p_1x\ \mathrm{Sin}\ px.\omega_3(x) + \mathrm{Ch}\ p_1x\ \mathrm{Cos}\ px.\omega_4(x)\end{aligned}\right| \quad (**)$$

гдѣ $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ - цѣлыя функціи одной степени съ функціей $f(x)$, которыя можно написать съ неопредѣленными коэффиціентами и опредѣлить ихъ дифференцированіемъ. Если $f(x) = 1$, то всѣ функціи ω дѣлаются постоянными, и для каждаго изъ 4 видовъ (*) двѣ изъ этихъ 4 постоянныхъ будутъ нулями. Именно, интегралы

$$\int \mathrm{Sh}\ p_1x\ \mathrm{Sin}\ px\ dx, \quad \int \mathrm{Ch}\ p_1x\ \mathrm{Cos}\ px\ dx$$

при замѣнѣ x на -x мѣняютъ знакъ, слѣдовательно и выраженіе (**), къ которому они приводятся, должно мѣнять знакъ при замѣнѣ x на -x, т.е. въ немъ $\omega_1 = \omega_4 = 0$. Напротивъ интегралы

$$\int \mathrm{Sh}\ p_1x\ \mathrm{Cos}\ px\ dx, \quad \int \mathrm{Ch}\ p_1x\ \mathrm{Sin}\ px\ dx$$

не мѣняются при замѣнѣ x на -x, слѣдовательно и выраженіе (**) обладаетъ тѣмъ же свойствомъ, т.е. въ немъ $\omega_2 = \omega_3 = 0$.

Примѣръ.

$$\int \mathrm{Sh}\ 3x\ \mathrm{Sin}\ 4x\ dx.$$

Имѣемъ:

$$\int \mathrm{Sh}\, 3x\, \mathrm{Sin}\, 4x\, dx = \omega_2 . \mathrm{Sh}\, 3x\, \mathrm{Cos}\, 4x + \omega_3 . \mathrm{Ch}\, 3x\, \mathrm{Sin}\, 4x + C.$$

Дифференцируемъ:

$$\mathrm{Sh}\, 3x\, \mathrm{Sin}\, 4x = \omega_2 . 3\mathrm{Ch}\, 3x\, \mathrm{Cos}\, 4x - \omega_2 . 4\mathrm{Sh}\, 3x\, \mathrm{Sin}\, 4x +$$

$$+ \omega_3 . 4\mathrm{Ch}\, 3x\, \mathrm{Cos}\, 4x + \omega_3 . 3\mathrm{Sh}\, 3x\, \mathrm{Sin}\, 4x\ ;$$

приравнивая коэффиціенты, имѣемъ 2 уравненія:

$$3\omega_2 + 4\omega_3 = 0, \quad -4\omega_2 + 3\omega_3 = 1,$$

откуда

$$\omega_2 = -\frac{4}{25}\ , \quad \omega_3 = \frac{3}{25}\ .$$

Итакъ:

$$\int \mathrm{Sh}\, 3x\, \mathrm{Sin}\, 4x\, dx = \frac{1}{25}\,[-\, 4\mathrm{Sh}\, 3x\, \mathrm{Cos}\, 4x + 3\mathrm{Ch}\, 3x\, \mathrm{Sin}\, 4x].$$

Классъ э. - Интегралы вида

$$\int \mathrm{Sh}^p x\, \mathrm{Ch}^q x\, dx.$$

Полагая

$$\mathrm{Sh}\, x = y, \quad \mathrm{Ch}\, x\, dx = dy,$$

$$\mathrm{Ch}^{q-1} x = (\mathrm{Ch}^2 x)^{\frac{q-1}{2}} = (1+y^2)^{\frac{q-1}{2}}\ ,$$

получимъ двучленную иррацiональность

$$\int y^p (1+y^2)^{\frac{q-1}{2}}\, dy.$$

Отсюда заключаемъ, что интегралъ берется въ конечномъ видѣ лишь въ трехъ случаяхъ:

1) q нечетное - подстановка $\mathrm{Sh}\, x = y$
2) p нечетное - подстановка $\mathrm{Ch}\, x = y$
3) $p + q$ четное - подстановка $\mathrm{th}\, x = y$.

Примѣръ

$$\int \frac{dx}{\mathrm{Sh}^3 x\, \mathrm{Ch}^5 x}\ .$$

Преобразуемъ:

$$\int \frac{dx}{\mathrm{th}^3 x\, \mathrm{Ch}^8 x} = \int \frac{d\ \mathrm{th}\ x}{\mathrm{th}^3 x} \left(\frac{1}{\mathrm{Ch}^2 x}\right)^3 =$$

$$= \int \frac{d\ \mathrm{th}\ x}{\mathrm{th}^3 x} (1 - \mathrm{th}^2 x)^3 = \int \frac{(1 - z^2)^3 dz}{z^3} =$$

$$= \int \left(\frac{1}{z} - z\right)^3 dz = \int \left(\frac{1}{z^3} - \frac{3}{z} + 3z - z^3\right) dz =$$

$$= -\frac{1}{2z^2} - 3\log z + {}^3\!/_2 z^2 - {}^1\!/_4 z^4 + C,$$

гдѣ $z = \mathrm{th}\ x$.

Классъ 4. - Интегралы $\int f(\mathrm{Sh}\ x, \mathrm{Ch}\ x) dx$, гдѣ f раціональная функція. Подстановкой $\mathrm{th}\ \frac{x}{2} = z$ можно привести къ интегралу отъ раціональной функціи отъ z, такъ какъ

$$\mathrm{Sh}\ x = 2\mathrm{Sh}\ \frac{x}{2}\ \mathrm{Ch}\ \frac{x}{2} = \frac{2\mathrm{th}\ \frac{x}{2}}{1 - \mathrm{th}^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2z}{1 - z^2},$$

$$\mathrm{Ch}\ x = \mathrm{Ch}^2\ \frac{x}{2} + \mathrm{Sh}^2\ \frac{x}{2} = \frac{1 + \mathrm{th}^2\ \frac{x}{2}}{1 - \mathrm{th}^2\ \frac{x}{2}} = \frac{1 + z^2}{1 - z^2},$$

$$dx = 2d\ \mathrm{arcth}\ z = 2\ \frac{dz}{1 - z^2}.$$

Если функція f не мѣняется при замѣнѣ обоихъ аргументовъ одновременно $\mathrm{Sh}\ x$ и $\mathrm{Ch}\ x$ на $-\mathrm{Sh}\ x$, $-\mathrm{Ch}\ x$, то удобнѣе брать подстановку

$$\mathrm{th}\ x = z,$$

такъ какъ

$$\mathrm{Sh}^2 x = \frac{\mathrm{th}^2 x}{\mathrm{Ch}^2 x} = \frac{\mathrm{th}^2 x}{1 - \mathrm{th}^2 x} = \frac{z^2}{1 - z^2},$$

$$\mathrm{Ch}^2 x = \frac{\mathrm{Sh}^2 x}{\mathrm{th}^2 x} = \frac{1}{1 - z^2},$$

$$\mathrm{Sh}\ x\ \mathrm{Ch}\ x = \frac{z}{1 - z^2}.$$

Примѣръ 1.

$$\int \frac{dx}{2 + 3\ \mathrm{Ch}^2 x}$$

преобразуемъ:

$$\int \frac{dx}{2 + 3\,Ch^2x} = \int \frac{\frac{dx}{Ch^2x}}{2(1 - th^2x) + 3} = \int \frac{dz}{5 - 2z^2} = \tfrac{1}{2}\int \frac{dz}{\frac{5}{2} - z^2} =$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{\frac{5}{2}}}\log\left(\frac{\sqrt{\frac{5}{2}} + z}{\sqrt{\frac{5}{2}} - z}\right) + C = \frac{1}{2\sqrt{10}}\log\left(\frac{\sqrt{10} + 2th\frac{x}{2}}{\sqrt{10} - 2th\frac{x}{2}}\right) + C.$$

Примѣръ 2.

$$\int \frac{dx}{Ch\ x}.$$

Преобразуемъ:

$$\int \frac{dx}{Ch\ x} = \int \frac{dx}{Ch^2\frac{x}{2} + Sh^2\frac{x}{2}} = \int \frac{\frac{dx}{Ch^2\ x/2}}{1 + th^2\frac{x}{2}} =$$

$$= 2\int \frac{d\ th\frac{x}{2}}{1 + th^2\frac{x}{2}} = 2\ \mathrm{arctg}\left(th\frac{x}{2}\right) + C.$$

Чтобы закончить главу объ интегрированіи функцій, укажемъ здѣсь нѣсколько интеграловъ, которые не берутся въ конечномъ видѣ, несмотря на весьма простую форму:

$$1^\circ.\ \int \frac{e^x dx}{x}; \quad 2^\circ.\ \int \frac{Sin\ x\ dx}{x}; \quad 3^\circ.\ \int \frac{Cos\ x\ dx}{x}.$$

Они носятъ особыя названія. Первый называется интегральнымъ логарифмомъ, второй интегральнымъ синусомъ, третій интегральнымъ косинусомъ.

Не берутся также интегралы

$$\int e^{-x^2} dx$$

- интегралъ, встрѣчающійся въ теоріи вѣроятностей, и

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2 Sin^2 x}}$$

- эллиптическій интегралъ 1-го рода.

ВОЗСТАНОВЛЕНІЕ ФУНКЦІИ ОТЪ НѢСКОЛЬКИХЪ ПЕРЕМѢННЫХЪ НЕЗАВИСИМЫХЪ ПО ДАННОМУ ЕЯ ПОЛНОМУ ДИФФЕРЕНЦІАЛУ.

Положимъ, что мы имѣемъ функцію отъ нѣсколькихъ перемѣнныхъ независимыхъ

$$u = f(x, y, z\ldots).$$

Подъ именемъ полнаго дифференціала ея разумѣется выраженіе

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz + \ldots.$$

Поставимъ себѣ задачей опредѣлить, при какихъ условіяхъ выраженіе вида

$$Mdx + Ndy + Pdz + \ldots.,$$

гдѣ M, N, P,.... данныя функціи отъ x, y, z,...., представляетъ полный дифференціалъ функціи

$$u = f(x, y, z\ldots)$$

и какъ эту функцію найти.

Случай 2-хъ перемѣнныхъ. - Теорема. - Необходимое и достаточное условіе того, чтобы выраженіе

$$Mdx + Ndy,$$

въ которомъ M и N суть функціи отъ x и y, было полнымъ дифференціаломъ функціи

$$u = f(x, y),$$

заключается въ равенствѣ

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Докажемъ необходимость поставленнаго условія. Если дѣйствительно

$$Mdx + Ndy = du,$$

то, такъ какъ

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy,$$

изъ сравненія вытекаетъ:

$$Mdx + Ndy = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy,$$

и въ виду произвольности чиселъ dx и dy должно быть

$$M = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad N = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Составимъ частныя производныя:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x . \partial y};$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y . \partial x}.$$

Но изъ дифференціальнаго исчисленія извѣстно, что

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x . \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y . \partial x}$$

Слѣдовательно

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Докажемъ теперь достаточность условія, т. е. докажемъ, что если

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x},$$

то существуетъ такая функція:

$$u = f(x, y),$$

для которой полный дифференціалъ

$$du = Mdx + Ndy,$$

такъ что

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N.$$

Въ самомъ дѣлѣ, если такая функція u существуетъ, то

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y).$$

такъ какъ при составленіи частной производной $\frac{\partial u}{\partial x}$ перемѣнная y считается за постоянное, то

$$u = \int M(x, y) dx + \varphi(y) = \omega(x, y) + \varphi(y),$$

гдѣ

$$\omega(x, y) = \int M(x, y)dx,$$

причемъ при вычисленіи послѣдняго интеграла y считается постояннымъ; отмѣтимъ для дальнѣйшаго, что

$$\frac{\partial\omega}{\partial x} = M(x, y).$$

Обращаясь къ опредѣленію $\varphi(y)$, возьмемъ частную производную по y отъ равенства

$$u = \omega(x, y) + \varphi(y).$$

Имѣемъ:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial\omega}{\partial y} + \varphi'(y),$$

откуда

$$\varphi'(y) = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial\omega}{\partial y} = N(x, y) - \frac{\partial\omega}{\partial y}.$$

Такъ какъ лѣвая часть равенства есть функція одной только y, то и правая часть не должна содержать x, ибо иначе x выходила бы функціей отъ y, тогда какъ онѣ независимыя перемѣнныя.

Покажемъ, что при условіи

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

эта правая часть

$$N(x, y) - \frac{\partial\omega}{\partial y}$$

не содержитъ x, т.е. ея частная производная по x = 0. Дѣйствительно,

$$\frac{\partial}{\partial x}[N - \frac{\partial\omega}{\partial y}] = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial^2\omega}{\partial y.\partial x} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}[\frac{\partial\omega}{\partial x}] = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 0$$

въ силу равенства

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Итакъ

$$N(x,y) - \frac{\partial\omega}{\partial y} = \psi(y)$$

и потому изъ равенства

$$\varphi'(y) = \psi(y)$$

имѣемъ

$$\varphi(y) = \int \psi(y)dy + C$$

и окончательно

$$u = \omega(x,y) + \int \psi(y)dy + C.$$

Примѣръ.

$$(2x \operatorname{Sin} y - y \operatorname{Cos} x + \log x)dx + (x^2 \operatorname{Cos} y - \log y - \operatorname{Sin} x)dy.$$

Посмотримъ, будетъ ли это выраженіе полнымъ дифференціаломъ нѣкоторой функціи u и, если будетъ, то найдемъ эту функцію.

Составимъ частныя производныя

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x \operatorname{Cos} y - \operatorname{Cos} x$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 2x \operatorname{Cos} y - \operatorname{Cos} x.$$

Оказывается

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x};$$

значитъ существуетъ такая функція u, для которой данное выраженіе служитъ полнымъ дифференціаломъ. Имѣемъ

$$du = Mdx + Ndy$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \operatorname{Sin} y - y \operatorname{Cos} x + \log x.$$

Разсматривая y, какъ постоянное число, находимъ:

$$u = \int (2x \operatorname{Sin} y - y \operatorname{Cos} x + \log x)dx + \varphi(y)$$

$$u = x^2 \operatorname{Sin} y - y \operatorname{Sin} x + x \log x - x + \varphi(y).$$

Взявъ отъ u частную производную по y, получимъ:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N = x^2 \operatorname{Cos} y - \log y - \operatorname{Sin} x = x^2 \operatorname{Cos} y - \operatorname{Sin} x + \varphi'(y).$$

Члены съ x исчезаютъ и мы имѣемъ отсюда

$$\varphi'(y) = -\log y$$

$$\varphi(y) = -\int \log y\, dy = -y \log y + y + C.$$

Итакъ, окончательно

$$u = x^2 \operatorname{Sin} y - y \operatorname{Sin} x + x \log x - x - y \log y + y + C.$$

СЛУЧАЙ 3-ХЪ ПЕРЕМѢННЫХЪ. - Теорема. - Необходимое и достаточное условіе того, чтобы выраженіе

$$Mdx + Ndy + Pdz,$$

гдѣ M, N и P суть данныя функціи отъ x, y, z было полнымъ дифференціаломъ функціи

$$u = f(x,y,z)$$

заключается въ равенствахъ

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}; \quad \frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x}; \quad \frac{\partial N}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

Необходимость условія очевидна изъ слѣдующаго. Если дѣйствительно

$$Mdx + Ndy + Pdz = du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz,$$

то въ виду произвольности чиселъ dx, dy, dz должно быть

$$M = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad N = \frac{\partial u}{\partial y}; \quad P = \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Составимъ частныя производныя 2-го порядка по двумъ различнымъ перемѣннымъ двумя способами, а именно по x и по y и затѣмъ по y и по x и т.д., получимъ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x.\partial y} = \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x.\partial z} = \frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y.\partial z} = \frac{\partial N}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Докажемъ достаточность условія, т.е. если указанныя 3 равенства выполнены, то возможно найти такую функцію

$$u = f(x,y,z)$$

чтобы

$$du = Mdx + Ndy + Pdz,$$

т.е., чтобы

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = P.$$

Дѣйствительно, изъ равенства

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x,y,z)$$

заключаемъ, что

$$u = \int M(x,y,z)dx + \varphi(y,z),$$

причемъ при вычисленіи интеграла $M(x,y,z)dx$ буквы y и z считаются за постоянныя, такъ какъ при составленіи $\frac{\partial u}{\partial x}$ y и z считались постоянными. Обозначимъ

$$u = \omega(x,y,z) + \varphi(y,z)$$

причемъ функція

$$\omega(x,y,z) = \int M(x,y,z)dx,$$

и частная производная

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = M(x,y,z).$$

Обращаясь къ опредѣленію $\varphi(z,y)$ возьмемъ полный дифференціалъ отъ обѣихъ частей равенства

$$u = \omega(x,y,z) + \varphi(y,z).$$

Имѣемъ

$$du = Mdx + Ndy + Pdz = \frac{\partial \omega}{\partial x} dx + \frac{\partial \omega}{\partial y} dy + \frac{\partial \omega}{\partial z} dz + d\varphi(y,z),$$

откуда

$$d\varphi(y,z) = \left(M - \frac{\partial \omega}{\partial x}\right)dx + \left(N - \frac{\partial \omega}{\partial y}\right)dy + \left(P - \frac{\partial \omega}{\partial z}\right)dz,$$

причемъ

$$M - \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0$$

въ силу равенства

$$M = \frac{\partial \omega}{\partial x}.$$

Для того, чтобы $\varphi(y,z)$ могла быть опредѣлена, во-первыхъ, необходимо, чтобы коэффиціенты

$$N - \frac{\partial \omega}{\partial y}, \quad P - \frac{\partial \omega}{\partial z}$$

не содержали x, такъ какъ его нѣтъ въ лѣвой части; во-вторыхъ, необходимо и достаточно, согласно случаю двухъ перемѣнныхъ, чтобы

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[N - \frac{\partial\omega}{\partial y}\right] = \frac{\partial}{\partial y}\left[P - \frac{\partial\omega}{\partial z}\right] .$$

Но эти условія дѣйствительно выполнены. Въ самомъ дѣлѣ

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[N - \frac{\partial\omega}{\partial y}\right] = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial^2\omega}{\partial y.\partial x} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right) = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[P - \frac{\partial\omega}{\partial z}\right] = \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial^2\omega}{\partial z.\partial x} = \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right) = \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial z} = 0;$$

далѣе,

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[N - \frac{\partial\omega}{\partial y}\right] = \frac{\partial N}{\partial z} - \frac{\partial^2\omega}{\partial y.\partial z}$$

и

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[P - \frac{\partial\omega}{\partial z}\right] = \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial^2\omega}{\partial z.\partial y} ,$$

такъ что

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[N - \frac{\partial\omega}{y}\right] = \frac{\partial}{\partial y}\left[P - \frac{\partial\omega}{\partial z}\right].$$

Итакъ, функція $\varphi(y,z)$ можетъ быть опредѣлена по ея полному дифференціалу, какъ это указано въ случаѣ двухъ перемѣнныхъ, послѣ чего имѣемъ:

$$u = \omega(x,y,z) + \varphi(y,z).$$

Примѣръ.

$$\left(yz + \frac{1}{x} + 2xy + z^2\right)dx + \left(xz + \frac{1}{y} + x^2 + 2yz\right)dy +$$

$$+ \left(yx + \frac{1}{z} + y^2 + 2xz\right)dz.$$

Провѣримъ сначала, выполнены ли три указанныя условія. Имѣемъ

$$\frac{\partial M}{\partial y} = z + 2x ; \quad \frac{\partial N}{\partial x} = z + 2x ;$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = y + 2z ; \quad \frac{\partial M}{\partial z} = y + 2z ;$$

$$\frac{\partial N}{\partial z} = x + 2y ; \quad \frac{\partial P}{\partial y} = x + 2y .$$

Указанныя условія выполнены. Найдемъ теперь функцію u. Такъ какъ

$$\frac{\partial u}{\partial x} = yz + \frac{1}{x} + 2xy + z^2,$$

то

$$u = \int (yz + \frac{1}{x} + 2xy + z^2)dx + \varphi(y,z).$$

Выполнивъ интегрированіе, считая при этомъ y и z постоянными, получимъ

$$u = xyz + \log x + x^2y + xz^2 + \varphi(y,z).$$

Возьмемъ отъ u частныя производныя по y и по z. Имѣемъ:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = xz + \frac{1}{y} + x^2 + 2yz = xz + x^2 + \frac{\partial\varphi}{\partial y},$$

откуда

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{1}{y} + 2yz;$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = yx + \frac{1}{z} + y^2 + 2xz = xy + 2xz + \frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

откуда

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{1}{z} + y^2.$$

Полный дифференціалъ φ равенъ

$$d\varphi(y,z) = (\frac{1}{y} + 2yz)dy + (\frac{1}{z} + y^2)dz.$$

Такъ какъ здѣсь выполнены условія

$$\frac{\partial}{\partial z}(\frac{1}{y} + 2yz) = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{1}{z} + y^2),$$

то

$$\varphi(y,z) = \int (\frac{1}{y} + 2yz)dy + \psi(z) = \log y + y^2z + \psi(z).$$

Чтобы найти ψ(z), беремъ частную производную отъ φ(y,z) по z:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{1}{z} + y^2 = y^2 + \psi'(z),$$

откуда

$$\psi'(z) = \frac{1}{z},$$

$$\psi(z) = \int \frac{dz}{z} = \log z + C.$$

Опредѣливъ функцію $\psi(z)$, находимъ:

$$\varphi(y,z) = \log y + y^2 z + \log z + C$$

и наконецъ

$$u = xyz + \log x + x^2 y + xz^2 + \log y + y^2 z + \log z + C =$$

$$= xyz + \log xyz + x^2 y + y^2 z + z^2 x + C.$$

Мы дадимъ здѣсь еще другія формулы, опредѣляющія первообразную функцію по ея полному дифференціалу прямо по даннымъ функціямъ M, N, P.

СЛУЧАЙ 2-ХЪ ПЕРЕМѢННЫХЪ.

Пусть дано выраженіе

$$du(x,y) = Mdx + Ndy$$

при условіи $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$. Выше мы опредѣлили $u(x,y)$ формулой

$$u(x,y) = \omega(x,y) + \varphi(y),$$

причемъ

$$\omega(x,y) = \int M(x,y)dx.$$

Но если мы начнемъ опредѣленіе $u(x,y)$ не съ формулы $\frac{\partial u}{\partial x} = M$, какъ выше, а съ другой формулы $\frac{\partial u}{\partial y} = N$, то мы найдемъ другое выраженіе для $u(x,y)$:

$$u(x,y) = \omega_1(x,y) + \psi(x),$$

причемъ

$$\omega_1(x,y) = \int N(x,y)dy.$$

Приравнивая два выраженія для u, получаемъ равенство изъ трехъ членовъ:

$$u(x,y) = \omega(x,y) + \varphi(y) = \omega_1(x,y) + \psi(x) \quad . \ . \ . \ (*).$$

Беря второй членъ съ третьимъ и полагая $x = x_0$ (произвольное частное значеніе x), находимъ:

$$\varphi(y) = \omega_1(x_0,y) - \omega(x_0,y) + \psi(x_0);$$

беря въ равенствѣ (*) третій членъ съ первымъ и полагая $x = x_0$, $y = y_0$, имѣемъ:

$$\psi(x_0) = u(x_0,y_0) - \omega_1(x_0,y_0).$$

Складывая три равенства:

$$u(x,y) = \omega(x,y) + \varphi(y)$$

$$\varphi(y) = \omega_1(x_0, y) - \omega(x_0, y) + \psi(x_0)$$

$$\psi(x_0) = u(x_0, y_0) - \omega_1(x_0, y_0),$$

находимъ:

$$u(x,y) = u(x_0, y_0) + [\omega(x,y) - \omega(x_0,y)] + [\omega_1(x_0,y) - \omega_1(x_0,y_0)]$$

Далѣе, такъ какъ

$$\omega(x,y) = \int^x M(x,y)dx,$$

то

$$\omega(x,y) - \omega(x_0,y) = \int_{x_0}^x M(x,y)dx\ ;$$

подобнымъ образомъ

$$\omega_1(x_0,y) = \int^y N(x_0,y)dy,$$

слѣдовательно

$$\omega_1(x_0,y) - \omega_1(x_0,y_0) = \int_{y_0}^y N(x_0,y)dy.$$

Окончательно:

$$u(x,y) = u(x_0,y_0) + \int_{x_0}^x M(x,y)dx + \int_{y_0}^y N(x_0,y)dy.$$

СЛУЧАЙ 3-ХЪ ПЕРЕМѢННЫХЪ.

Желая опредѣлить функцію $u(x,y,z)$ по ея полному дифференціалу:

$$du = Mdx + Ndy + Pdz,$$

мы можемъ начать съ любого изъ трехъ равенствъ:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M,\quad \frac{\partial u}{\partial y} = N,\quad \frac{\partial u}{\partial z} = P,$$

и соотвѣтственно получимъ три различныхъ выраженія для $u(x,y,z)$:

$$u(x,y,z) = \omega(x,y,z) + \varphi(y,z) = \omega_1(x,y,z) + \psi(x,z) =$$

$$= \omega_2(x,y,z) + \chi(x,y)\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (*')$$

причемъ

$\omega(x,y,z) = \int M(x,y,z)dx$ (y и z при интегрир. постоянны)

$\omega_1(x,y,z) = \int N(x,y,z)dy$ (z и x считаются постоянными)

$\omega_2(x,y,z) = \int P(x,y,z)dz$ (x и y считаются постоянными).

Въ равенствѣ (*'), состоящемъ изъ четырехъ членовъ, беремъ сперва 1-й и 2-й членъ:

$$u(x,y,z) = \omega(x,y,z) + \varphi(y,z) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1);$$

затѣмъ беремъ 2-й и 3-й членъ, полагая $x = x_0$:

$$\varphi(y,z) = \omega_1(x_0,y,z) + \psi(x_0,z) - \omega(x_0,y,z) \quad . \; . \; . \; . \; (2);$$

беремъ 3-й и 4-й члены равенства (*'), полагая $x = x_0$, $y = y_0$:

$$\psi(x_0,z) = \omega_2(x_0,y_0,z) + \chi(x_0,y_0) - \omega_1(x_0,y_0,z) \quad . \; (3);$$

наконецъ, беремъ 4-й и 1-й члены равенства (*'), полагая въ немъ $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$:

$$\chi(x_0,y_0) = u(x_0,y_0,z_0) - \omega_2(x_0,y_0,z_0) \quad . \; . \; . \; . \; . \; (4).$$

Складывая равенства (1) - (4), получаемъ:

$$u(x,y,z) = u(x_0,y_0,z_0) + [\omega(x,y,z) - \omega(x_0,y,z)] +$$

$$+ [\omega_1(x_0,y,z) - \omega_1(x_0,y_0,z)] + [\omega_2(x_0,y_0,z) - \omega_2(x_0,y_0,z_0)]$$

или

$$u(x,y,z) = u(x_0,y_0,z_0) + \int_{x_0}^{x} M(x,y,z)dx +$$

$$+ \int_{y_0}^{y} N(x_0,y\;,z)dy + \int_{z_0}^{z} P(x_0,y_0,z)dz.$$

------ " ------

ГЕОМЕТРИЧЕСКІЯ ПРИЛОЖЕНІЯ ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНАГО ИСЧИСЛЕНІЯ.

§ 1.

Аналитическое изображенiе плоскихъ кривыхъ.

Плоскую кривую аналитически можно представить въ одномъ изъ трехъ видовъ

$$1^\circ. \quad y = f(x)$$

$$2^\circ. \quad f(x,y) = 0$$

$$3^\circ. \quad \left. \begin{aligned} x &= \varphi(t) \\ y &= \psi(t) \end{aligned} \right|$$

Третій видъ называется параметрическимъ изображеніемъ плоскихъ кривыхъ; по исключеніи t, мы приходимъ къ виду 1° или 2°.

Примѣръ 1.

$$x = x_0 + lt$$

$$y = y_0 + mt.$$

Исключая отсюда t, находимъ

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}.$$

Это уравненіе прямой.

Примѣръ 2.

$$x = a \operatorname{Cos} t$$

$$y = a \operatorname{Sin} t$$

По исключеніи t получимъ

$$x^2 + y^2 = a^2 \quad -$$

- уравненіе окружности.

Примѣръ 3.

$$\left.\begin{aligned} x &= a\,\mathrm{Cos}\,t \\ y &= b\,\mathrm{Sin}\,t \end{aligned}\right|$$

Чтобы исключить отсюда t, воспользуемся тождествомъ

$$\mathrm{Sin}^2 t + \mathrm{Cos}^2 t = 1$$

и находимъ уравненіе эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Примѣръ 4.

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{a}{\mathrm{Sin}\,t} \\ y &= b.\mathrm{Cos}\,t \end{aligned}\right|$$

На основаніи

$$\mathrm{Cosec}^2 t - \mathrm{Cotg}^2 t = 1,$$

получимъ, по исключеніи t, уравненіе гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Гиперболу можно задать также уравненіями:

$$\begin{aligned} x &= a\,\mathrm{Ch}\,t \\ y &= b\,\mathrm{Sh}\,t\,. \end{aligned}$$

Примѣръ 5.

$$\left.\begin{aligned} x &= a(t - \mathrm{Sin}\,t) \\ y &= a(1 - \mathrm{Cos}\,t) \end{aligned}\right| \quad \text{- уравненіе циклоиды.}$$

Циклоиду описываетъ любая точка окружности круга, катящагося безъ скольженія по прямой линіи. Пусть эта точка совпадаетъ въ начальный моментъ съ началомъ координатъ, а прямая, по которой катится окружность, пусть служитъ осью абсциссъ.

При движеніи точка O переходитъ въ M, причемъ радіусъ CO поворачивается на уголъ TC'M = t. Выразимъ координаты точки M через параметръ t. Опустивъ изъ точки M перпендикуляръ на OX и проведя линію

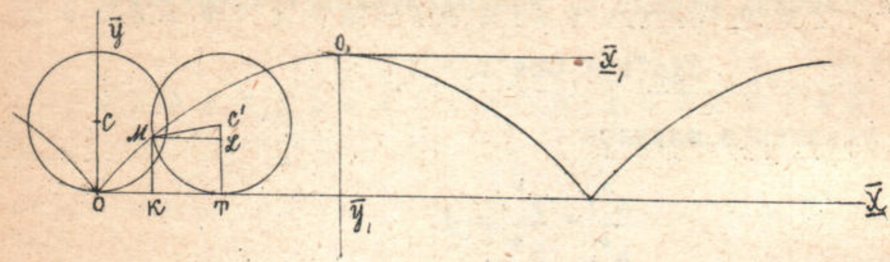
$$ML \parallel O\bar{X},$$

получимъ

$$OT = MT = at,$$

гдѣ a радіусъ круга; поэтому

$$x = OK = OT - KT = OT - ML = at - a \operatorname{Sin} t = a(t - \operatorname{Sin} t),$$



Черт. 18.

такъ какъ ML катетъ прямоугольнаго Δ-ка MLC'. Другая координата

$$y = KM = TL = TC' - LC' = a - a \operatorname{Cos} t = a(1 - \operatorname{Cos} t).$$

Циклоида состоитъ изъ безконечнаго множества отдѣльныхъ вѣтвей, идущихъ въ обѣ стороны отъ начала координатъ; каждая вѣтвь образуется при возрастаніи угла на 2π. Въ механикѣ часто принимаютъ за оси O_1Y_1 и O_1X_1. Составимъ уравненіе циклоиды для новыхъ осей. Для этого нужно перенести начало координатъ въ точку $O_1(\pi a, 2a)$. Формулы перехода отъ старыхъ осей къ новымъ будутъ:

$$x = \pi a + x_1$$

$$y = 2a - y_1$$

и уравненіе циклоиды представится въ видѣ

$$x_1 = at - a \operatorname{Sin} t - \pi a = a(t - \pi) + a \operatorname{Sin}(t - \pi) = at_1 +$$

$$+ a \operatorname{Sin} t_1 = a(t_1 + \operatorname{Sin} t_1),$$

гдѣ

$$t_1 = t - \pi$$

$$y_1 = 2a - a + a \operatorname{Cos} t = a - a \operatorname{Cos}(t - \pi) = a - a \operatorname{Cos} t_1 =$$

$$= a(1 - \operatorname{Cos} t_1).$$

§ 2.

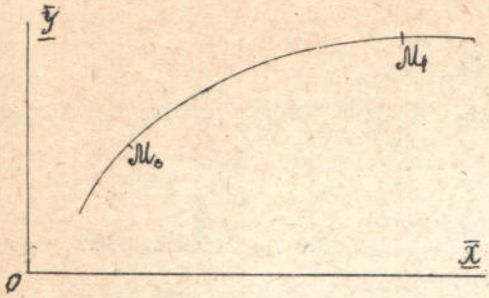
Дифференціалъ дуги плоской кривой.

Пусть намъ задана кривая параметрически, т. е. двумя уравненіями

$$x = \varphi(t)$$

$$y = \psi(t).$$

Положимъ, что на этой кривой даны точки M_0 и M_1 (см. черт. 19) съ координатами, соотвѣтствующими значеніямъ



Черт. 19.

$$t = t_0$$

$$t = t_1.$$

Опредѣленіе. Длиною дуги M_0M_1 называется предѣлъ периметра вписанной ломаной линіи при неограниченномъ увеличеніи числа ея сторонъ и уменьшеніи каждой изъ нихъ до нуля.

Теорема. Длина дуги M_0M_1 выражается опредѣленнымъ интеграломъ:

$$\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, dt .$$

Предположимъ, согласно опредѣленію, что въ кривую вписана ломаная линія. Пусть вершины этой ломаной линіи будутъ

$$M_0,\ M',\ M'', \ldots\ M^{(i)},\ M^{(i+1)}, \ldots\ M^{(n)} = M_1;$$

соотвѣтственныя значенія t пусть будутъ

$$t,\ t',\ t'', \ldots\ t^{(i)},\ t^{(i+1)}, \ldots\ t_1.$$

По опредѣленію длина дуги M_0M_1 равна

$$\text{дл.}\smile M_0M_1 = \underset{n=\infty}{\text{пред.}} \sum_{i=0}^{i=n-1} M^{(i)} M^{(i+1)} .$$

Чтобы выразить длину хорды $M^{(i)}M^{(i+1)}$, обратимся къ Аналитической Геометріи. Имѣемъ:

$$M^{(i)}M^{(i+1)} = \sqrt{[\varphi(t^{(i+1)})-\varphi(t^{(i)})]^2+[\psi(t^{(i+1)})-\psi(t^{(i)})]^2}.$$

Введя обозначеніе

$$t^{(i+1)} - t^{(i)} = \Delta t^{(i)}$$

по формулѣ Лагранжа будемъ имѣть

$$\varphi(t^{(i+1)}) - \varphi(t^{(i)}) = \Delta t^{(i)}.\varphi'(t^{(i)}+\theta\Delta t^{(i)}),$$

гдѣ

$$0 < \theta < 1,$$

и далѣе, въ силу непрерывности функціи $\varphi(t)$, послѣднее произведеніе равно

$$\Delta t^{(i)} \cdot [\varphi'(t^{(i)}) + \alpha^{(i)}],$$

гдѣ $\alpha^{(i)}$ безконечно малая.

Подобнымъ же образомъ находимъ

$$\psi(t^{(i+1)}) - \psi(t^{(i)}) = \Delta t^{(i)} \cdot [\psi'(t^{(i)}) + \beta^{(i)}],$$

гдѣ $\beta^{(i)}$ - безконечно малая.

Послѣ этого длину хорды $M^{(i)}M^{(i+1)}$ можемъ переписать въ такомъ видѣ

$$M^{(i)}M^{(i+1)} = \sqrt{[\varphi'(t^{(i)})+\alpha^{(i)}]^2 + [\psi'(t^{(i)})+\beta^{(i)}]^2} \cdot \Delta t^{(i)} =$$

$$= \left[\sqrt{\varphi'(t^{(i)})^2 + \psi'(t^{(i)})^2} + \varepsilon^{(i)}\right] \cdot \Delta t^{(i)}.$$

Послѣднее можно написать на основаніи того, что

$$\alpha^{(i)} \text{ и } \beta^{(i)}$$

суть величины безконечно малыя и потому корень приводится къ главной части и безконечно малой величинѣ $\varepsilon^{(i)}$. Далѣе имѣемъ

$$\text{дл.}\smile M_0M_1 = \underset{n=\infty}{\text{пред.}} \sum_{i=0}^{i=n-1} \left[\sqrt{\varphi'(t^{(i)})^2 + \psi'(t^{(i)})^2}\, \Delta t^{(i)} + \right.$$

$$\left. + \varepsilon^{(i)} \cdot \Delta t^{(i)}\right].$$

По теоремѣ объ эквивалентныхъ безконечно малыхъ величинахъ при отысканіи предѣла суммы безконечно большого числа безконечно малыхъ слагаемыхъ можно откинуть безконечно малыя величины высшаго порядка въ каждомъ слагаемомъ. Въ данномъ случаѣ замѣнивъ каждое слагаемое главною его частью, получимъ

$$\text{дл.}\smile M_0M_1 = \underset{n=\infty}{\text{пред.}} \sum_{i=0}^{i=n-1} \sqrt{\varphi'(t^{(i)})^2 + \psi'(t^{(i)})^2}\, \Delta t^{(i)}.$$

Этотъ предѣлъ есть опредѣленный интегралъ

$$\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}\, dt$$

Замѣчаніе. Выраженіе для длины дуги мы вывели въ томъ предположеніи, что кривая задана въ формѣ

$$x = \varphi(t),$$

$$y = \psi(t).$$

Найдя дифференціалы x и y

$$dx = \varphi'(t)\ dt$$

$$dy = \psi'(t)\ dt,$$

выразимъ длину дуги черезъ нихъ. Имѣемъ

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}\ .\ dt = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{dx^2 + dy^2}\ .$$

Если уравненіе кривой задано въ видѣ $y = f(x)$ или

$$f(x,\ y) = 0$$

то

$$dy = y'dx$$

и

$$S = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2}\ dx,$$

гдѣ x_0 абсцисса точки M_0, а x_1 абсцисса точки M_1.

Слѣдствіе. Если точка M_1 (конецъ дуги) перемѣщается по кривой, то S будетъ функціей отъ значенія t, отвѣчающаго точкѣ M_1, такъ что

$$S = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}\ dt$$

и

$$dS = \sqrt{dx^2 + dy^2}\ .$$

Доказательство. Согласно зависимости, существующей между опредѣленнымъ и неопредѣленнымъ интегралами, имѣемъ

$$S = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}\ .\ dt = F(t) - F(t_0),$$

гдѣ F(t) есть неопредѣленный интегралъ

$$\int \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}\ .\ dt,$$

т.е. такая функція, для которой дифференціалъ

$$dF(t) = \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}\ dt = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Взявъ равенство

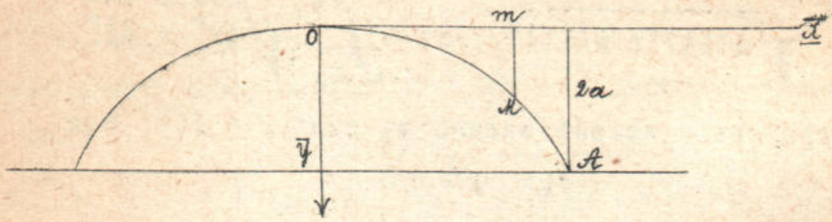
$$S = F(t) - F(t_0),$$

находимъ

$$dS = dF(t) = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Примѣръ. Вычислить длину вѣтви циклоиды, заданной уравненіями (см. черт. 20):

$$x = a(t+\operatorname{Sin} t)$$
$$y = a(1-\operatorname{Cos} t).$$



Черт. 20.

Имѣемъ

$$dx = a(1+\operatorname{Cos} t)dt$$
$$dy = a \operatorname{Sin} t\, dt,$$

$$dS^2 = dx^2 + dy^2 = a^2dt^2(1+2 \operatorname{Cos} t+\operatorname{Cos}^2 t+\operatorname{Sin}^2 t) =$$
$$= a^2dt^2(2+2 \operatorname{Cos} t) = 4a^2\operatorname{Cos}^2 \frac{t}{2}\, dt^2,$$

откуда

$$dS = 2a \operatorname{Cos} \frac{t}{2}\, dt.$$

Длина дуги отъ начала 0 до нѣкоторой точки M будетъ

$$S = \int_0^t 2a \operatorname{Cos} \frac{t}{2}\, dt = 4a \operatorname{Sin} \frac{t}{2}.$$

Полезно замѣтить, что

$$S^2 = 16\, a^2\operatorname{Sin}^2 \frac{t}{2} = 8a\ .\ a(1-\operatorname{Cos} t) = 8ay,$$

гдѣ $y = mM$.

Отсюда длина половины вѣтви циклоиды

$$CA = \sqrt{8a\ .\ 2a} = 4a$$

и длина полной вѣтви $8a$.

§ 3.

Касательная, нормаль, подкасательная и поднормаль въ прямоугольной системѣ координатъ.

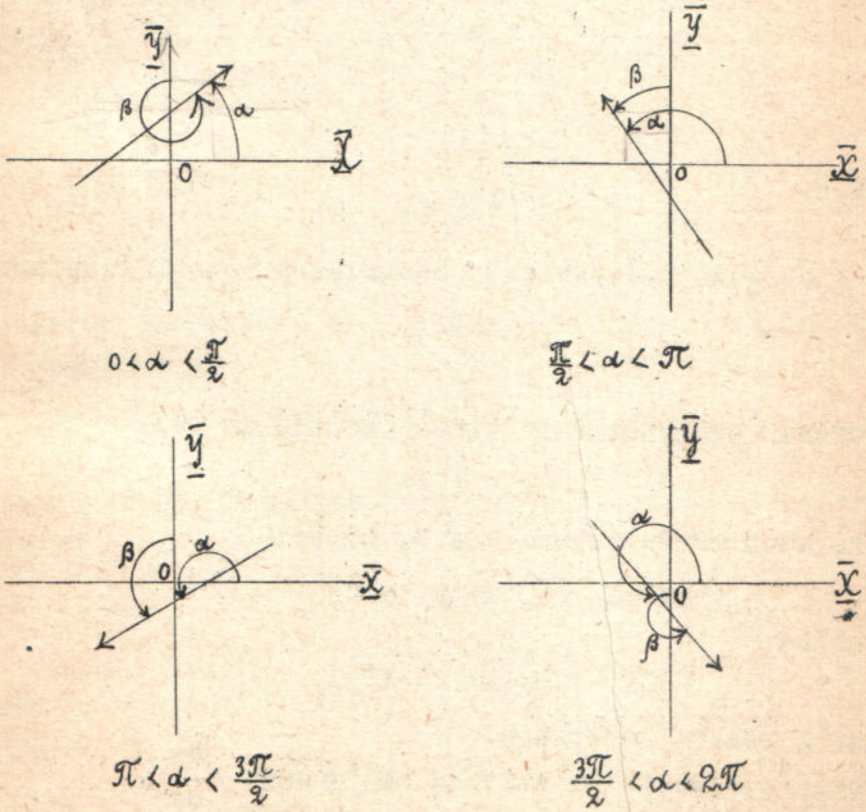
Замѣчаніе. Какъ бы ни была расположена прямая L относительно осей прямоугольной системы $\bar{X}$, $\bar{Y}$, если назнать

$$\widehat{\bar{X},L} = \alpha, \quad \widehat{\bar{Y},L} = \beta,$$

то всегда окажется

$$\cos\beta = \sin\alpha.$$

Слѣдующіе чертежи поясняютъ это:



Черт.21.

Въ самомъ дѣлѣ:

въ 1-мъ случаѣ $360^\circ - \beta = 90^\circ - \alpha$, $\cos\beta = \sin\alpha$

во II-мъ случаѣ $\beta = \alpha - 90^\circ$, $\cos\beta = \sin\alpha$

въ III случаѣ $360^\circ - \alpha = 90^\circ + (180^\circ - \beta)$, $\sin\alpha = \cos\beta$

въ IV случаѣ $360^\circ - \alpha = 90^\circ - (\beta - 180^\circ)$, $\sin\alpha = \cos\beta$.

Опредѣленіе. Пусть задана точка M (x,y) (см. черт. 22) на кривой MM_1.

Черт.22.

Касательною въ данной точкѣ M(x,y) къ плоской кривой называется предѣльное положеніе сѣкущей, проходящей чрезъ точку M и безконечно близкую къ ней точку кривой M_1.

Теорема. Уравненіе касательной въ точкѣ M(x,y) къ кривой, заданной уравненіями

$$y = f(x)$$

$$f(x,y) = 0$$

или:

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t) \\ y &= \psi(t) \end{aligned}\right|$$

имѣетъ видъ

$$\underline{Y} - y = y'\,(\underline{X} - x),$$

гдѣ $\underline{Y}$ и $\underline{X}$ означаютъ перемѣнныя координаты точекъ касательной и

$$y' = \frac{dy}{dx}.$$

Положимъ, что уравненіе кривой задано въ видѣ

$$y = f(x).$$

Пусть координаты точекъ M и M_1 будутъ

$$M(x,y),\quad M_1(x+\Delta x,\ y+\Delta y)$$

тогда имѣемъ

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x),$$

такъ какъ M лежитъ на кривой.

Угловой коэффиціентъ сѣкущей MM_1 равенъ $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, и угловой коэффиціентъ касательной MT равенъ

$$\text{пред.}\ \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = \frac{dy}{dx}.$$

Слѣдовательно, уравненіе касательной MT будетъ

$$\underline{Y} - y = y'.(\underline{X} - x).$$

Замѣчаніе I. Геометрическое значеніе y': такъ какъ угловой коэффиціентъ касательной есть y', то, какъ извѣстно изъ Аналитической Геометріи,

$$y' = \operatorname{tg} \alpha,$$

гдѣ α - уголъ, составляемый касательной съ осью $\overline{OX}$.

Замѣчаніе II. Замѣняя y' на $\dfrac{dy}{dx}$, получимъ другую форму уравненія касательной:

$$\frac{\bar{X} - x}{dx} = \frac{\bar{Y} - y}{dy}$$

Замѣчаніе III. Если уравненіе кривой задано въ видѣ

$$f(x,y) = 0,$$

то, чтобы найти y', нужно взять отъ $f(x,y)$ производную по x. Тогда будемъ имѣть

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot y' = 0,$$

откуда

$$y' = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}}.$$

Внося это выраженіе въ уравненіе касательной, находимъ

$$(\bar{X}-x)\frac{\partial f}{\partial x} + (\bar{Y}-y)\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Замѣчаніе IV. Если уравненіе кривой задано въ параметрическомъ видѣ

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t) \\ y &= \psi(t) \end{aligned}\right|,$$

то уравненіе касательной будетъ

$$\frac{\bar{X} - \varphi(t)}{\varphi'(t)} = \frac{\bar{Y} - \psi(t)}{\psi'(t)}.$$

Примѣръ 1. Найти уравненіе касательной къ кривой

$$y = x^2 - 3x + 4$$

въ точкѣ (0,4).

Изъ уравненія кривой находимъ

$$y' = 2x - 3;$$

?

въ данной точкѣ (0, 4) $y' = -3$. Слѣдовательно, искомое урав - неніе будетъ

$$\bar{Y} - 4 = -3(\bar{X} - 0)$$

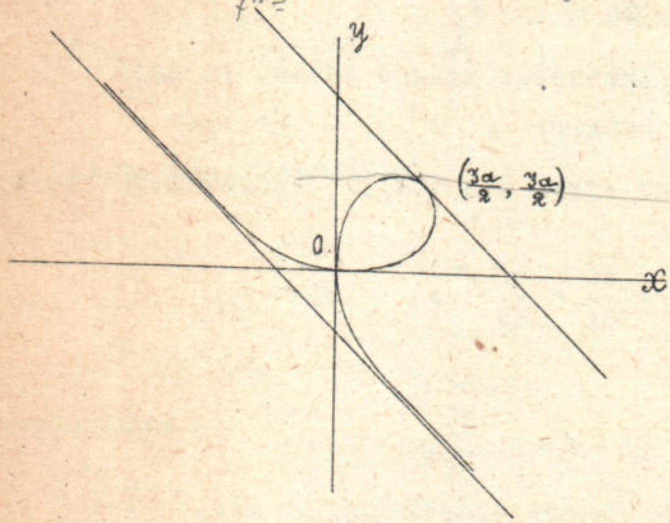
или:

$$\bar{Y} + 3x - 4 = 0.$$

Примѣръ 2. Дана кривая (Декартовъ листъ)

$$x^3 + y^3 - 3\,axy = 0 \quad \text{(см. черт. 23).}$$

$f' = 3x^2 + 3y^2 - 3ax - 3ay = 0$
$f'' =$



Черт. 23.

Найти касательную къ ней въ точкѣ

$$x = y = \frac{3a}{2}.$$

Чтобы убѣдиться, что эта точка дѣйствительно лежитъ на кривой, положимъ въ уравненіи данной кривой

$$x = y.$$

Имѣемъ:

$$2x^3 - 3ax^2 = 0$$
$$x^2\,(2x - 3a) = 0,$$

откуда видно, что точка съ координатами

$$x = y = \frac{3a}{2}$$

лежитъ на кривой (см. черт. 23). Взявъ производную по x отъ $f(x, y)$, найдемъ

y=x
y=mx

$$3x^2 - 3ay + (3y^2 - 3ax)\,y' = 0,$$

откуда

$$y' = -\frac{x^2 - ay}{y^2 - ax}. \quad < \frac{\frac{9a^2}{4} - \frac{3a^2}{2}}{\frac{9a^2}{4} - \frac{3a^2}{2}} = 1$$

Въ данной точкѣ

$$y' = -1$$

и уравненіе касательной будетъ

$$y - \frac{3a}{2} = -1\left(x - \frac{3a}{2}\right),$$

или

$$y + x - 3a = 0.$$

Примѣръ 3. Дана циклоида (см. черт. 24)

$$x = a\,(t - \mathrm{Sin}\ t),$$

$$y = a\,(1 - \mathrm{Cos}\ t);$$

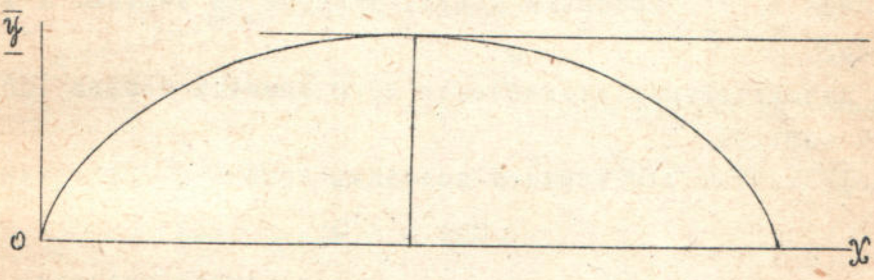
найти уравненіе касательной при $t = \pi$.

Опредѣлимъ сначала угловой коэффиціентъ касательной

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{a\ \mathrm{Sin}\ t\ dt}{a(1-\mathrm{Cos}\ t)dt} = \frac{\mathrm{Sin}\ t}{1-\mathrm{Cos}\ t} = \mathrm{Cotg}\ \frac{t}{2} = \frac{1}{tg\frac{t}{2}}$$

Отмѣтимъ здѣсь, что

$$y' = tg\ \alpha = \mathrm{Cotg}\ \frac{t}{2},$$



Черт. 24.

откуда

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}.$$

Уравненіе касательной при $t = \pi$, гдѣ

$$x = \pi a$$

$$y = 2a$$

$$y' = \mathrm{Cotg}\ ^{\pi}/_{2} = 0,$$

будетъ

$$y - 2a = 0\ (x - \pi a),$$

или

$$y = 2a.$$

Найдемъ выраженіе для косинусовъ угловъ, составляемыхъ касательной съ осями координатъ. Пользуясь выраженіями для Cos α и Sin α черезъ tg α, и замѣчая, что для угла касательной съ осью $O\underline{X}$ имѣемъ равенство

$$tg\ \alpha = y' = \frac{dy}{dx},$$

находимъ

$$\cos\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1+tg^2\alpha}} = \frac{dx}{\pm\sqrt{dx^2+dy^2}} = \pm\frac{dx}{dS}$$

$$\sin\alpha = \frac{tg\alpha}{\pm\sqrt{1+tg^2\alpha}} = \frac{dy}{\pm\sqrt{dx^2+dy^2}} = \pm\frac{dy}{dS}$$

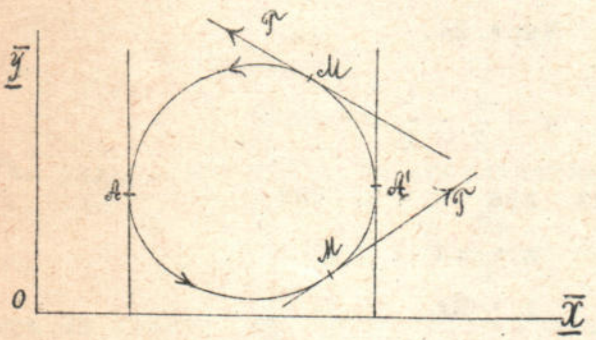
Теорема. Знакъ +, взятый въ предыдущихъ формулахъ, отвѣчаетъ тому направленiю касательной, которое совпадаетъ съ направленiемъ возрастающихъ дугъ (такое направленiе касательной будемъ называть положительнымъ направленiемъ).

Для доказательства возьмемъ какую-нибудь замкнутую кривую (см. черт.25). Проводя касательныя, параллельныя оси OY, найдемъ точки A, A', которыми кривая дѣлится на верхнюю и нижнюю половины.

За положительное направленiе дуги примемъ сперва обратное часовой стрѣлкѣ.

Тогда имѣемъ для верхней половины кривой уголъ α тупой,

$$\cos\alpha < 0;$$



Черт.25.

съ другой стороны, при переходѣ отъ A' къ A, по направленiю, указанному стрѣлкой,

$$dx < 0$$
$$dS > 0,$$

слѣдовательно

$$\frac{dx}{dS} < 0;$$

такъ какъ вопросъ идетъ только о знакѣ, то

$$\cos\alpha = +\frac{dx}{dS}.$$

Для нижней половины кривой имѣемъ

$$\cos\alpha > 0;$$

съ другой стороны, при переходѣ отъ A къ A'

$$dx > 0,$$

$$dS > 0,$$

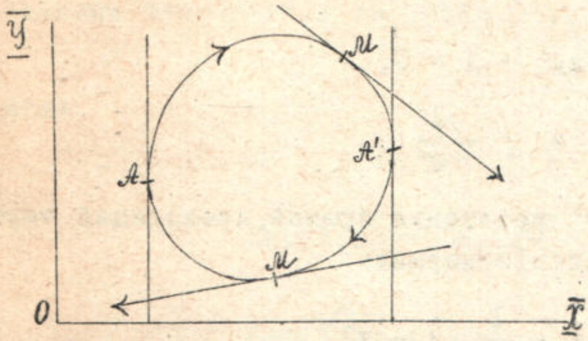
слѣдовательно

$$\frac{dx}{dS} > 0$$

и

$$\cos\alpha = +\frac{dx}{dS}\,.$$

Пусть теперь дуги возрастаютъ въ направленіи часовой стрѣлки (см. черт.26).



Черт. 26.

Имѣемъ для верхней половины:

$$\cos\alpha > 0;\quad dx > 0;$$

$$dS > 0;\quad \frac{dx}{dS} > 0;$$

и

$$\cos\alpha = +\frac{dx}{dS}\,.$$

Для нижней половины

$$\cos\alpha < 0;\quad dx < 0;$$

$$dS > 0;\quad \frac{dx}{dS} < 0;$$

$$\cos\alpha = +\frac{dx}{dS}$$

Итакъ для положительнаго направленія касательной имѣемъ

$$\cos\alpha = +\frac{dx}{dS}$$

и, согласно замѣчанію въ началѣ §-а,

$$\cos\beta = \sin\alpha = +\frac{dy}{dS}\,,$$

гдѣ

$$\alpha = \widehat{\underline{\bar{X}},T};\quad \beta = \widehat{\underline{\bar{Y}},T}$$

Опредѣленіе. Прямая, проходящая черезъ точку M данной кривой перпендикулярно касательной въ этой точкѣ кривой, называется *нормалью*.

Теорема. Уравненіе нормали имѣетъ видъ

$$\underline{\bar{X}} - x + y'.(\bar{Y} - y) = 0$$

или

$$(\underline{\bar{X}} - x)dx + (\underline{\bar{Y}} - y)dy = 0.$$

Доказательство. Уравненіе любой прямой, проходящей чрезъ точку $M(x, y)$, будетъ

$$\underline{\bar{Y}} - y = a(\underline{\bar{X}} - x).$$

Угловой коэффиціентъ нормали опредѣляется изъ условія перпендикулярности къ касательной. Если a угловой коэффиціентъ нормали, а y' — угловой коэффиціентъ касательной, то условіе перпендикулярности будетъ:

$$ay' + 1 = 0,$$

откуда

$$a = -\frac{1}{y'}.$$

Внося это значеніе a въ уравненіе прямой, проходящей черезъ точку (x, y), получимъ уравненіе нормали:

$$\underline{\bar{Y}} - y = -\frac{1}{y'}(\underline{\bar{X}} - x)$$

или

$$\underline{\bar{X}} - x + y'(\underline{\bar{Y}} - y) = 0.$$

Замѣчаніе. Если кривая задана въ видѣ $f(x,y) = 0$, то

$$y' = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}},$$

и уравненіе нормали принимаетъ видъ:

$$\frac{\underline{\bar{X}} - x}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{\underline{\bar{Y}} - y}{\frac{\partial f}{\partial y}}.$$

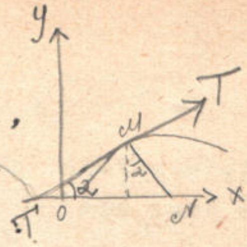
Если кривая задана уравненіями

$$\left.\begin{array}{l} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{array}\right| ,$$

то уравненіе нормали будетъ

$$[\underline{\bar{X}} - \varphi(t)]\varphi'(t) + [\underline{\bar{Y}} - \psi(t)]\psi'(t) = 0.$$

Теорема. Если назвать положительной нормалью то направленіе ея, которое такъ расположено относительно положительной касательной, какъ положительная ось $\underline{\bar{Y}}$-овъ относительно положительной оси $\overline{X}$-овъ, то



$$\mathrm{Cos}(\widehat{\overline{X},N}) = -\frac{dy}{dS},$$

$$\mathrm{Cos}(\widehat{\overline{Y},N}) = +\frac{dx}{dS}$$

Въ самомъ дѣлѣ, чтобы получить уголъ между положительною нормалью и осью $\overline{X}$-овъ, нужно касательную повернуть въ положительномъ направленіи на уголъ $\pi/_2$. Пусть

$$\alpha = \widehat{\overline{X},T};$$

тогда

$$\widehat{\overline{X},N} = \alpha + \pi/_2$$

и

$$\mathrm{Cos}(\widehat{\overline{X},N}) = \mathrm{Cos}(\alpha+\pi/_2) = -\,\mathrm{Sin}\,\alpha = -\frac{dy}{dS}$$

$$\mathrm{Cos}(\widehat{\overline{Y},N}) = \mathrm{Sin}(\alpha+\pi/_2) = \mathrm{Cos}\,\alpha = +\frac{dx}{dS}.$$

Замѣчаніе. Возьмемъ опять два расположенія касательныхъ, соотвѣтствующихъ возрастанію дугъ противъ и по часовой стрѣлкѣ, и посмотримъ, какъ будутъ направлены въ обоихъ случаяхъ нормали (см. черт. 27). При первомъ расположеніи положительная нормаль - внутренняя N_i, направленная въ сторону вогнутости кривой; при второмъ - внѣшняя N_e, направленная въ сторону выпуклости кривой.

Черт.27.

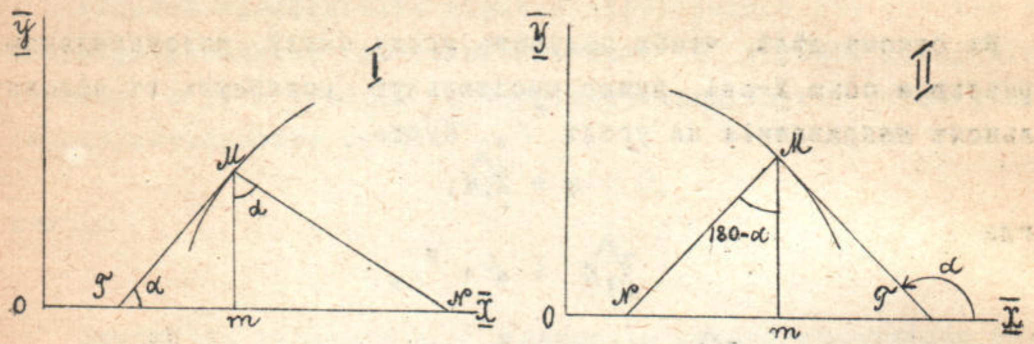
Опредѣленіе. Если MT и MN представляютъ касательную и нормаль къ кривой въ точкѣ M, то отрѣзокъ (см.черт.28) mN называется *поднормалью* (Sn), отрѣзокъ mT называется *подкасательною* (St), отрѣзокъ MN называется длиною нормали (N); отрѣзокъ MT называется длиною касательной (T).

Теорема. Указанные отрѣзки имѣютъ слѣдующія выраженія:

$$Sn = yy'; \quad N = \left| y\sqrt{1 + y'^2} \right|$$

$$St = -\frac{y}{y'}\ ; \quad T = \left|\frac{y}{y'}\cdot\sqrt{1+y'^2}\right|.$$

Доказательство. Для I и II расположенія имѣемъ изъ прямоугольнаго Δ-ка mMN



Черт.28.

$$Sn = \begin{cases} mN = mM\ tg\ \alpha = yy' \\ -Nm = -y\ tg(180^\circ-\alpha) = yy'. \end{cases}$$

Изъ прямоугольнаго Δ-ка mMT:

$$St = \begin{cases} -Tm = -y\ Cotg\ \alpha = -\frac{y}{y'} \\ mT = y\ Cotg\ (180^\circ-\alpha) = -\frac{y}{y'}. \end{cases}$$

Изъ тѣхъ же ΔΔ-овъ находимъ:

$$N = \sqrt{y^2+y^2y'^2} = \left|y\sqrt{1+y'^2}\right|$$

$$T = \sqrt{y^2+\frac{y^2}{y'^2}} = \left|\frac{y}{y'}\sqrt{1+y'^2}\right|.$$

Примѣръ. Возьмемъ параболу

$$y^2 = 2px$$

и найдемъ для нея Sn и St. Дифференцируя ур-іе параболы, получимъ

$$2yy' = 2p$$

$$Sn = yy' = p.$$

Это извѣстное свойство параболы, на которомъ основано построеніе касательной (см. черт.29).

Далѣе

$$St = -\frac{y}{y'} = -\frac{y^2}{yy'} = -\frac{2px}{p} = -2x;$$

такъ какъ

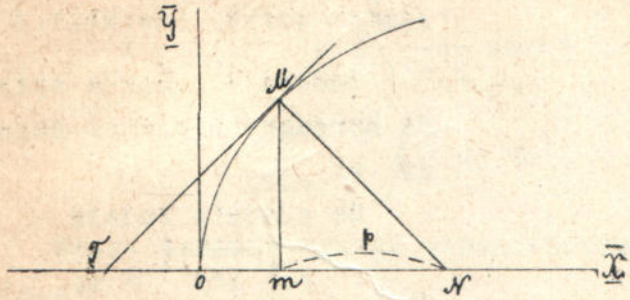
$$mT = -2x \quad \text{и} \quad mO = -x,$$

то отсюда слѣдуетъ:

$$OT = -x,$$

т.е., что вершина параболы дѣлитъ подкасательную пополамъ.

Чтобы построить касательную къ параболѣ въ точкѣ M, нужно отложить отъ вершины параболы O отрѣзокъ OT, равный абсциссѣ точки M, и соединить точку T съ M.



Черт. 29.

Задача 1. Найти кривыя съ постоянной поднормалью: p.

Имѣемъ условіе

$$yy' = p$$

или

$$ydy = pdx, \quad 2ydy = 2pdx,$$

$$d(y^2) = d(2px), \quad d(y^2 - 2px) = 0,$$

$$y^2 - 2px = \text{пост.} = -2px_0,$$

откуда

$$y^2 = 2p(x - x_0).$$

Такимъ образомъ постоянной поднормалью обладаютъ только параболы, у которыхъ ось совпадаетъ съ осью абсциссъ.

Задача 2. Найти кривыя съ постоянной подкасательной: a.

По условію задачи

$$-\frac{y}{y'} = a$$

или

$$\frac{y'}{y} = -\frac{1}{a}, \quad \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{a},$$

$$d \log y = d\left(-\frac{x}{a}\right), \quad d\left(\log y + \frac{x}{a}\right) = 0,$$

$$\log y + \frac{x}{a} = \text{пост.} = \log y_0,$$

откуда

$$\log y - \log y_0 = - \frac{x}{a},$$

$$\log \frac{y}{y_0} = - \frac{x}{a}, \quad \frac{y}{y_0} = e^{-\frac{x}{a}}, \quad y = y_0\, e^{-\frac{x}{a}}.$$

Эти кривыя имѣютъ слѣдующую фигуру (см. черт. 30):

Задача 3. Найти кривыя съ постоянной длиною нормали: a:

По условію задачи

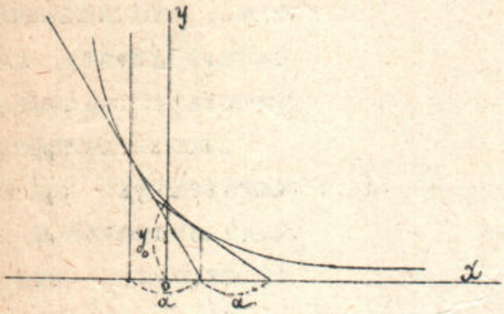
$$y \cdot \sqrt{1+y'^2} = a,$$

но

$$y' = \text{tg}\alpha, \quad \sqrt{1+y'^2} = \frac{1}{\text{Cos}\alpha}$$

такъ что

$$y = a\, \text{Cos}\, \alpha.$$



Черт. 30.

Далѣе,

$$dy = - a\, \text{Sin}\, \alpha\, d\alpha,$$

и такъ какъ

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{dy}{\text{tg}\alpha} = \text{Cotg}\, \alpha . dy,$$

то

$$dx = \text{Cotg}\, \alpha\, . - a\, \text{Sin}\, \alpha\, d\alpha = - a\, \overset{\text{Cos}2}{\cancel{\text{Sin}\,\alpha}}. \quad ? \quad \alpha 2$$

откуда

$$dx = d(- a\, \text{Sin}\, \alpha), \quad x - x_0 = - a\, \text{Sin}\, \alpha.$$

Итакъ искомыя кривыя опредѣляются параметрическими уравненіями

$$x - x_0 = - a\, \text{Sin}\, \alpha, \quad y = a\, \text{Cos}\, \alpha,$$

которыя, по исключеніи α, даютъ окружность

$$(x - x_0)^2 + y^2 = a^2$$

съ центромъ на оси OX и съ радіусомъ a.

Задача 4. Найти кривыя съ постоянной длиною касательной: a.

По условію

$$\frac{y}{y'} \sqrt{1+y'^2} = a$$

или, такъ какъ

$$y' = \text{tg}\, \alpha, \quad \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y'} = \frac{\text{Sec}\alpha}{\text{tg}\, \alpha} = \frac{1}{\text{Sin}\alpha},$$

находимъ

$$y = a \operatorname{Sin} \alpha.$$

Отсюда

$$dy = a \operatorname{Cos} \alpha \, d\alpha,$$

слѣдовательно

$$dx = \frac{dy}{y'} = \operatorname{Cotg}\alpha . dy = a \frac{\operatorname{Cos}^2\alpha}{\operatorname{Sin}\alpha} d\alpha,$$

и

$$x - x_0 = a \int \frac{\operatorname{Cos}^2\alpha}{\operatorname{Sin}\alpha} d\alpha = a \int \frac{1-\operatorname{Sin}^2\alpha}{\operatorname{Sin}\alpha} d\alpha =$$

$$= a \left[\int \frac{d\alpha}{\operatorname{Sin}\alpha} - \int \operatorname{Sin}\alpha \, d\alpha \right] = a \left[\log \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{Cos} \alpha \right].$$

Итакъ искомыя кривыя опредѣляются параметрическими уравненіями

$$x - x_0 = a (\operatorname{Cos} \alpha + \log \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2})$$

$$y = a \operatorname{Sin} \alpha.$$

Ясно, что для построенія кривой достаточно давать α значенія 0 до 2π, причемъ картина измѣненія x и y будетъ слѣдующая:

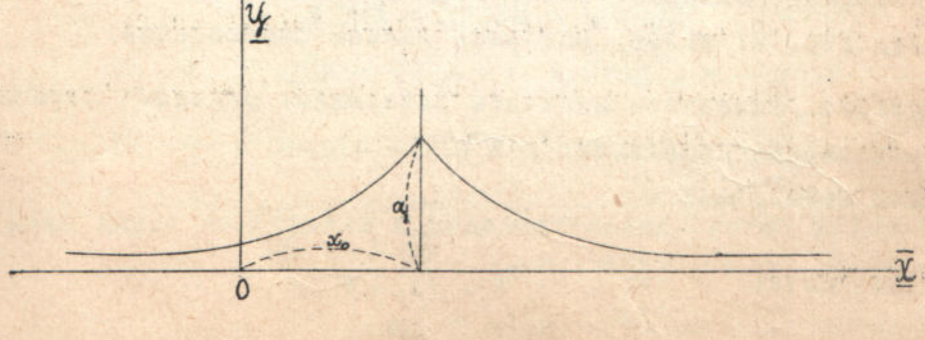
α	0	$\pi/_2$	π
x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
y	0	a	0

Отмѣтимъ еще, что

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \alpha$$

при $\alpha = \pi/_2$ обращается въ ∞, такъ что въ точкѣ (x_0, a) касательная || оси y-овъ.

Кривая, обладающая постоянной касательной, называется трактриссой и имѣетъ слѣдующую фигуру (см. черт. 31):

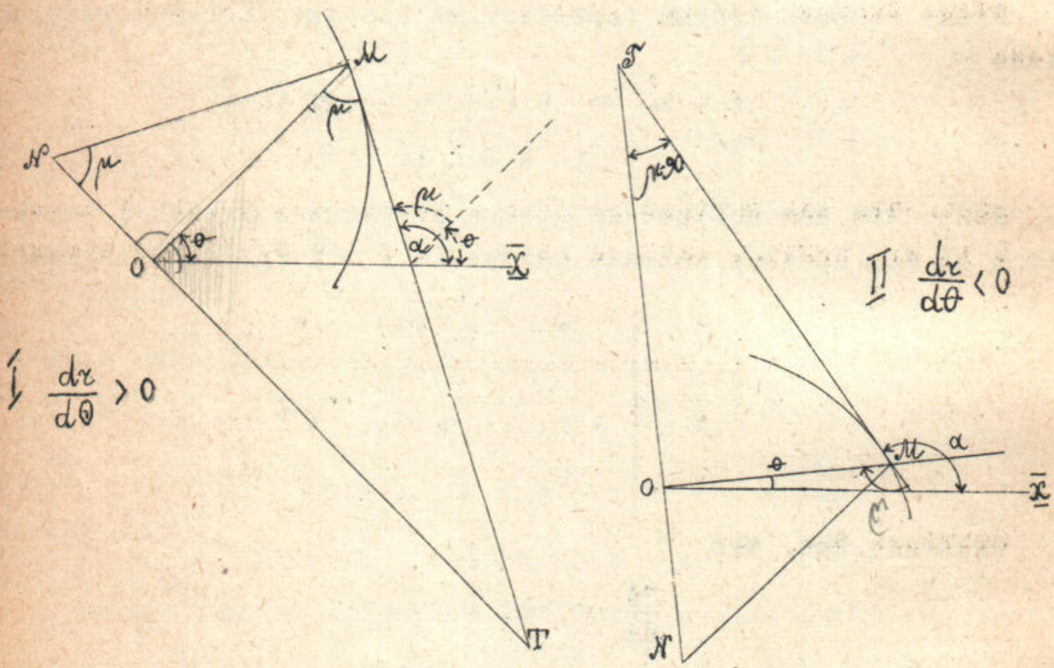


Черт. 31.

§ 4.

Касательная, нормаль, подкасательная и поднормаль въ полярной системѣ координатъ.

Опредѣленіе. Въ полярной системѣ координатъ положеніе касательной (см. черт. 32) опредѣляется угломъ μ; $\mu = (\widehat{OM, MT})$ между радіусомъ векторомъ точки касанія и касательной.



Черт. 32.

Проведя OT $\perp$ OM и MN $\perp$ MT, находимъ слѣдующіе отрѣзки: отрѣзокъ ON называется полярною поднормалью, отрѣзокъ OT назыв. полярною подкасательною, отр. MN назыв. полярной длиной нормали, отр. MT назыв. полярной длиной касательной.

Теорема. Указанныя величины слѣдующимъ образомъ выражаются черезъ полярныя координаты r и θ.

Если обозначимъ

$$r' = \frac{dr}{d\theta},$$

то будемъ имѣть

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{r}{r'}$$

$$Sn = \pm r'; \quad N = \sqrt{r^2+r'^2}$$

$$St = \pm \frac{r^2}{r'}; \quad T = \left| \frac{r}{r'} \sqrt{r^2+r'^2} \right|.$$

Доказательство. Замѣтимъ относительно угла μ слѣдующее (см. черт. 32): $\mu = \alpha - \theta$. Отсюда

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\theta}{1+\operatorname{tg}\alpha . \operatorname{tg}\theta} = \frac{\frac{dy}{dx} - \operatorname{tg}\theta}{1+\frac{dy}{dx} . \operatorname{tg}\theta} = \frac{\operatorname{Cos}\theta \, dy - \operatorname{Sin}\theta \, dx}{\operatorname{Cos}\theta \, dx + \operatorname{Sin}\theta \, dy}.$$

Такъ какъ

$$x = r \operatorname{Cos} \theta$$

$\cancel{\cos\theta\sin\theta\,dr} + r\cos^2\theta\,d\theta - \cancel{\cos\theta\sin\theta\,dr} + r\sin^2\theta\,d\theta$

$= r(\cos^2\theta+\sin^2\theta)d\theta = r\,d\theta$

$$y = r \operatorname{Sin} \theta,$$

то

$$dx = \operatorname{Cos}\theta \, dr - r \operatorname{Sin}\theta \, d\theta$$

$$dy = \operatorname{Sin}\theta \, dr + r \operatorname{Cos}\theta \, d\theta,$$

$\cos^2\theta\,dr - \cancel{r\sin\theta\cos\theta\,d\theta} + \sin^2\theta\,dr + \cancel{r\sin\theta\cos\theta\,d\theta} =$

отсюда

$$\operatorname{Cos}\theta \, dy - \operatorname{Sin}\theta \, dx = r \, d\theta$$

$= (\cos^2\theta+\sin^2\theta)dr = dr$

$$\operatorname{Cos}\theta \, dx + \operatorname{Sin}\theta \, dy = dr,$$

и слѣдовательно:

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{r \, d\theta}{dr} = \frac{r}{r'}.$$

Изъ чертежа (I) видно, что

$$\measuredangle ONM = \measuredangle OMT = \mu.$$

Изъ прямоугольныхъ треугольниковъ ONM и OMT имѣемъ для чертежа I:

$$Sn = OM \operatorname{Cotg} \mu = r . \frac{r'}{r} = r'$$

$$St = OM \operatorname{tg} \mu = r . \frac{r}{r'} = \frac{r^2}{r'}.$$

Изъ чертежа II находимъ:

$$\measuredangle OMN = \measuredangle OTM = \mu - 90^\circ$$ $90 - \mu$

$$Sn = r \operatorname{tg}(\mu - 90^\circ) = - r \operatorname{Cotg} \mu = - r';$$

$$St = r \operatorname{Cotg}(\mu - 90^\circ) = - r \operatorname{tg} \mu = - \frac{r^2}{r'}.$$

Зная длину поднормали и подкасательной, легко найдемъ:

$$N = MN = \sqrt{r^2 + r'^2}$$

$$T = \sqrt{r^2 + \frac{r^4}{r'^2}} = \frac{r}{r'}\sqrt{r^2 + r'^2}$$

Замѣчаніе. Въ полярной системѣ координатъ выраженіе дифференціала дуги имѣетъ слѣдующій видъ:

$$dS = \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\theta = N\, d\theta .$$

Доказательство. Выше мы уже нашли:

$$dx = \operatorname{Cos}\theta\, dr - r \operatorname{Sin}\theta\, d\theta$$

$$dy = \operatorname{Sin}\theta\, dr + r \operatorname{Cos}\theta\, d\theta ,$$

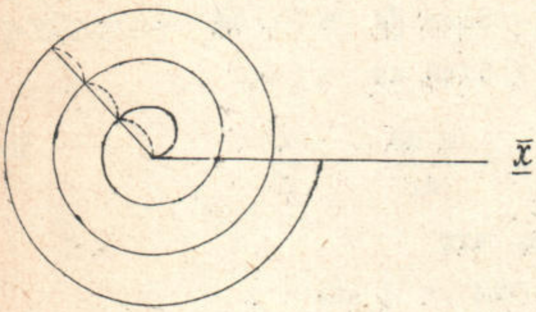
слѣдовательно

$$dS = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2} = \sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2} \cdot d\theta =$$

$$= \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\theta = N\, d\theta .$$

Примѣры. 1°. $r = a\theta$ - спираль Архимеда (см. черт. 33). У этой кривой поднормаль постоянна

$$Sn = r' = a.$$



Черт. 33.

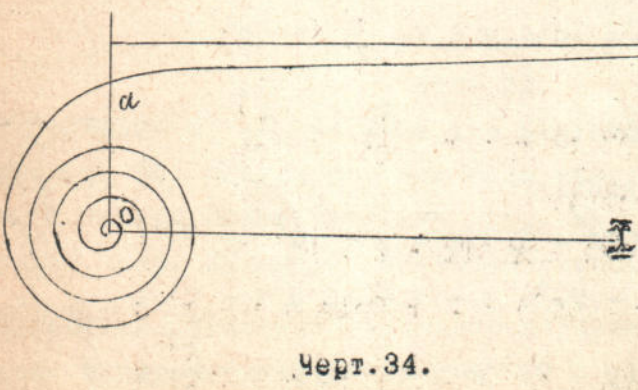
2°. $r\theta = a$ - гиперболическая спираль (см. черт. 34). Она имѣетъ постоянную подкасательную. Въ самомъ дѣлѣ, имѣемъ

$$r = \frac{a}{\theta}\ ;\ r' = -\frac{a}{\theta^2}$$

и такъ какъ

$$\frac{dr}{d\theta} = r' < 0,$$

то по формулѣ для случая II находимъ:



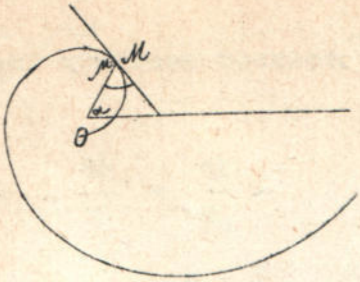
Черт. 34.

$$St = -\frac{r^2}{r'} = a.$$

3°. $r = a e^{m\theta}$ - логарифмическая спираль. У ней уголъ μ

постоянный (см. черт. 35).

Имѣемъ:



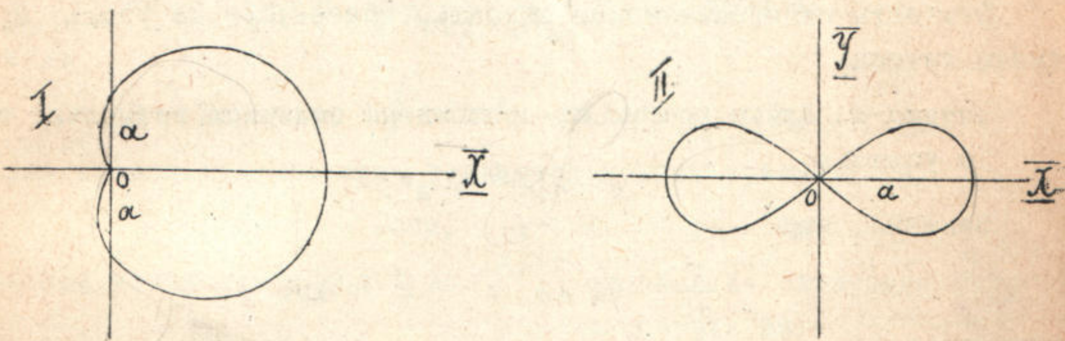
$$r' = mae^{m\theta} = mr$$

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{r}{r'} = \frac{1}{m}.$$

4°. $r = a\,(1+\operatorname{Cos}\theta)$ — кардіоида (см. черт. 36, I).

Черт.35.

5°. $r^2 = a^2 \operatorname{Cos} 2\theta$ — Лемниската - Бернулли. Она имѣетъ видъ восьмерки (см. черт. 36, II).



Черт.36.

Задача 1. Найти кривую съ постояннымъ угломъ μ.

По условію задачи

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{r}{r'} = \frac{1}{m} \text{ (постоянному)}$$

откуда

$$\frac{dr}{r} = m\,d\theta, \quad d \log r = d(m\theta), \quad d(\log r - m\theta) = 0,$$

$$\log r - m\theta = \log a, \quad \log\frac{r}{a} = m\theta, \quad \frac{r}{a} = e^{m\theta}, \quad r = ae^{m\theta}.$$

Такимъ образомъ одна только логарифмическая спираль обладаетъ указаннымъ свойствомъ.

Задача 2. Найти кривую съ постоянною полярною длиною поднормали: a.

По условію

$$r' = a, \quad \frac{dr}{d\theta} = a,$$

откуда

$$dr = a\,d\theta, \quad d(r - a\theta) = 0, \quad r - a\theta = \text{пост.} = -a\theta_0,$$

$$r = a(\theta - \theta_0).$$

Это есть спираль Архимеда $r = a\theta$, повернутая на уголъ θ_0 около полюса.

Задача 3. Найти кривую съ постоянною полярною подкасательною: a.

По условію

$$-\frac{r^2}{r'} = a \qquad -\frac{dr}{r^2} = \frac{d\theta}{a},$$

$$d\left(\frac{1}{r}\right) = d\left(\frac{\theta}{a}\right), \quad d\left(\frac{1}{r} - \frac{\theta}{a}\right) = 0, \quad \frac{1}{r} - \frac{\theta}{a} = \text{пост.} = -\frac{\theta_0}{a},$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a}(\theta - \theta_0), \quad r(\theta - \theta_0) = a.$$

Это есть гиперболическая спираль, повернутая на уголъ θ_0 около полюса.

Задача 4. Найти кривую съ постоянною полярною нормалью: a.

По условію

$$r^2 + r'^2 = a^2.$$

Замѣчая, что

$$\frac{r}{r'} = \operatorname{tg}\mu, \quad r' = r\operatorname{Cotg}\mu,$$

находимъ:

$$r^2(1+\operatorname{Cotg}^2\mu) = a^2, \quad r^2 = a^2\operatorname{Sin}^2\mu, \quad r = a\operatorname{Sin}\mu.$$

Далѣе

$$r' = \frac{dr}{d\theta} = r\operatorname{Cotg}\mu = a\operatorname{Sin}\mu.\operatorname{Cotg}\mu = a\operatorname{Cos}\mu,$$

откуда

$$d\theta = \frac{dr}{a\operatorname{Cos}\mu} = \frac{a\operatorname{Cos}\mu\, d\mu}{a\operatorname{Cos}\mu} = d\mu$$

$$\theta - \theta_0 = \mu.$$

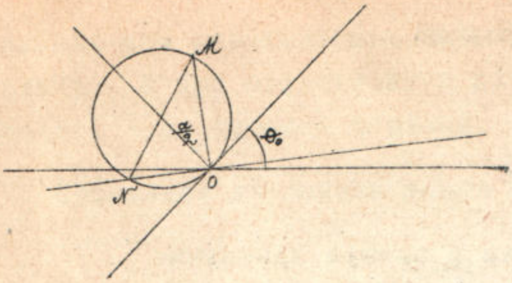
Итакъ

$$r = a\operatorname{Sin}\mu, \quad \theta - \theta_0 = \mu,$$

такъ что

$$r = a\operatorname{Sin}(\theta - \theta_0).$$

Это есть уравненіе окружности радіуса $\frac{a}{2}$, проходящей черезъ полюсъ, причемъ касательная къ окружности въ полюсѣ наклонена къ полярной оси подъ угломъ θ_0 (см. черт. 37). Въ этомъ убѣждаемся, преобразовавъ уравненіе къ прямоугольнымъ координатамъ:



Черт. 37.

$$x^2 + y^2 = ay \operatorname{Cos}\theta_0 - ax \operatorname{Sin}\theta_0 .$$

Задача 5. Найти кривую съ постоянной полярной касательной: a.

По условію

$$\frac{r}{r'}\sqrt{r^2 + r'^2} = a.$$

Вводя

$$r' = r \operatorname{Cotg}\mu,$$

находимъ

$$r \operatorname{tg}\mu \sqrt{1 + \operatorname{Cotg}^2\mu} = a, \quad r = a \operatorname{Cos}\mu.$$

Далѣе

$$d\theta = \frac{dr}{r'} = \frac{-a \operatorname{Sin}\mu \, d\mu}{a \operatorname{Cos}\mu . \operatorname{Cotg}\mu} = - \operatorname{tg}^2\mu \, d\mu,$$

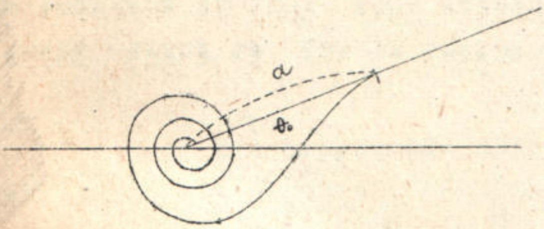
откуда

$$\theta - \theta_0 = - \int (\operatorname{Sec}^2\mu - 1) \, d\mu = - \operatorname{tg}\mu + \mu;$$

итакъ кривая опредѣляется параметрическими уравненіями:

$$r = a \operatorname{Cos}\mu, \quad \theta - \theta_0 = \mu - \operatorname{tg}\mu.$$

При измѣненіи μ отъ 0 до $\pi/_2$ получается слѣдующая фигура (черт. 38).



Черт. 38.

Задача 6. Найти кривыя, у которыхъ уголъ μ пропорціоналенъ углу θ:

$$\mu = k\theta.$$

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{r}{r'} = \operatorname{tg} k\theta,$$

откуда

$$\frac{dr}{r} = \frac{\operatorname{Cos} k\theta}{\operatorname{Sin} k\theta} d\theta, \quad k\frac{dr}{r} = \frac{d \operatorname{Sin} k\theta}{\operatorname{Sin} k\theta},$$

$$k.\log r - \log \operatorname{Sin} k\theta = \text{пост.} = k.\log a,$$

откуда

$$k.\log\frac{r}{a} = \log \operatorname{Sin} k\theta,$$

$$\left(\frac{r}{a}\right)^k = \operatorname{Sin} k\theta \quad \text{и} \quad r^k = a^k \operatorname{Sin} k\theta.$$

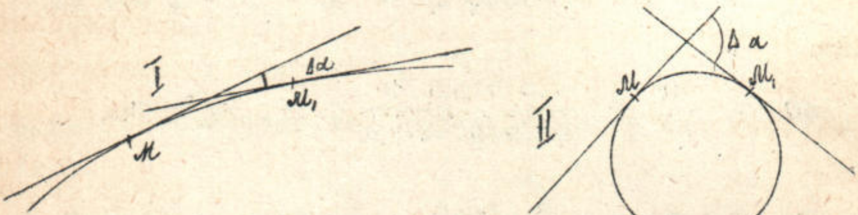
Искомыя кривыя изображаются уравненіемъ:

$$r^k = a^k \operatorname{Sin} k\theta .$$

§ 5.

Кривизна, радіусъ кривизны и центръ кривизны.

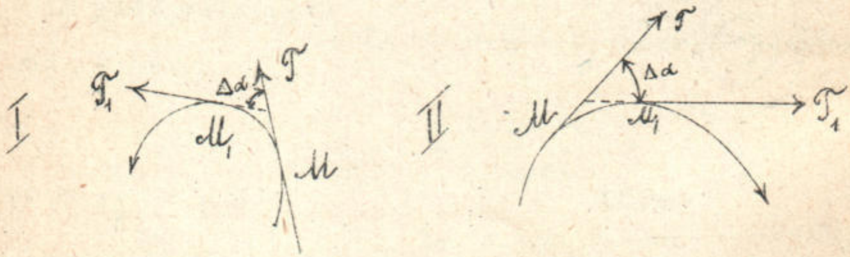
Понятіе "кривизна" принадлежитъ къ числу апріорныхъ понятій, такъ какъ мы ясно представляемъ, что изъ двухъ кривыхъ (черт. 39) вторая обладаетъ большею кривизною, чѣмъ первая



Черт.39.

Когда точка M пробѣгаетъ дугу одной и той же длины MM_1 на той и другой кривой, касательная на первой кривой поворачивается на уголъ гораздо меньшій, чѣмъ на второй.

Измѣреніе кривизны производится такъ. Если мы возьмемъ кривую линію (см. черт. 40) и проведемъ къ ней въ двухъ точкахъ



Черт.40.

M и M_1 касательныя, то уголъ между ними $\Delta\alpha$ называется угломъ смежности; для I расположенія будемъ имѣть:

$$\Delta\alpha > 0 ; \quad \smile MM_1 = \Delta S > 0 ;$$

для II расположенія

$$\Delta\alpha < 0 ; \quad \Delta S > 0.$$

Опредѣленіе I. Отношеніе $\frac{\Delta\alpha}{\Delta S}$ называется *среднею кривизною* дуги MM_1. Оно тѣмъ больше, чѣмъ быстрѣе поворачивается каса -

тельная при переходѣ отъ точки M къ точкѣ M_1. Это отношеніе выходитъ > 0 при отсчетѣ дуги противъ часовой стрѣлки и < 0 при отсчетѣ - по часовой стрѣлкѣ.

Кривизною въ данной точкѣ M кривой называется

$$\underset{\text{при } \Delta S = 0}{\text{Пред.}} \frac{\Delta\alpha}{\Delta S} .$$

стремящемся к нулю

Если представимъ, что кривая задана параметрическими уравненіями

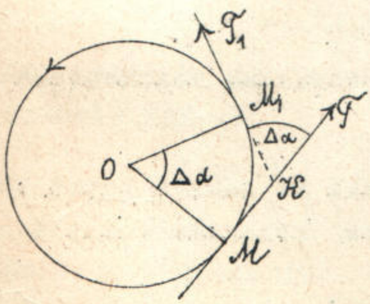
$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

и назовемъ черезъ Δt приращеніе параметра t при переходѣ отъ точки M къ точкѣ M_1, то $\Delta\alpha$ и ΔS будутъ функціями отъ t и Δt; тогда кривизна въ данной точкѣ представится слѣдующ. образомъ:

$$\underset{\Delta S=0}{\text{Пред.}} \frac{\Delta\alpha}{\Delta S} = \underset{\Delta t=0}{\text{Пред.}} \left[\frac{\frac{\Delta\alpha}{\Delta t}}{\frac{\Delta S}{\Delta t}} \right] = \frac{\underset{\Delta t=0}{\text{Пред.}} \left(\frac{\Delta\alpha}{\Delta t} \right)}{\underset{\Delta t=0}{\text{Пред.}} \left(\frac{\Delta S}{\Delta t} \right)} = \frac{\frac{d\alpha}{dt}}{\frac{dS}{dt}} =$$

$$= \frac{\frac{d\alpha}{dt} \cdot dt}{\frac{dS}{dt} \cdot dt} = \frac{d\alpha}{dS} .$$

Теорема. Для окружности радіуса R кривизна во всѣхъ точкахъ постоянна и равна $^1/R$ (см. черт. 41).



Черт. 41.

Въ самомъ дѣлѣ, проведя черезъ точки M и M_1 касательныя и соединивъ эти точки съ центромъ окружности, найдемъ:

$$\measuredangle TKT_1 = \measuredangle MOM_1 = \Delta\alpha,$$

$$\smile MM_1 = R\Delta\alpha = \Delta S,$$

откуда

$$\frac{\Delta\alpha}{\Delta S} = \frac{1}{R}$$

и слѣдовательно:

$$\underset{\Delta S=0}{\text{Пред.}} \frac{\Delta\alpha}{\Delta S} = \frac{1}{R} .$$

Замѣчаніе. Можно доказать, что окружность есть единственная кривая, кривизна которой во всѣхъ точкахъ постоянна. Для прочихъ кривыхъ кривизна мѣняется при переходѣ отъ одной точки къ другой.

Дѣйствительно, по условію

$$\frac{d\alpha}{dS} = \text{постоянному } \frac{1}{R}.$$

Отсюда

$$dS = Rd\alpha ;$$

но

$$dS = \sqrt{1+y'^2}\, dx = \sqrt{1+tg^2\alpha}\, dx = \frac{dx}{Cos\alpha},$$

такъ что

$$\frac{dx}{Cos\alpha} = Rd\alpha$$

и

$$dx = R\, Cos\, \alpha\, d\alpha, \quad x - x_0 = R\, Sin\, \alpha.$$

Далѣе

$$dy = y'dx = tg\alpha \,.\, R\, Cos\alpha\, d\alpha = R\, Sin\alpha\, d\alpha,$$

откуда

$$y - y_0 = - R\, Cos\alpha.$$

Итакъ, кривая съ постоянною кривизною $^1/R$ опредѣляется уравненіями

$$x - x_0 = R\, Sin\alpha,$$

$$y - y_0 = -R\, Cos\alpha,$$

которыя даютъ

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2,$$

т.е. окружность радіуса R съ произвольнымъ положеніемъ центра (x_0, y_0).

Опредѣленіе II. Радіусомъ кривизны въ данной точкѣ M кривой называется радіусъ той окружности, кривизна которой равна кривизнѣ данной кривой въ точкѣ M.

Теорема. Выраженіе радіуса кривизны въ данной точкѣ M имѣетъ слѣдующій видъ:

$$R = \left| \frac{dS}{d\alpha} \right|,$$

причемъ при I расположеніи (отсчетъ дугъ противъ часов. стрѣлки):

$$R = + \frac{dS}{d\alpha},$$

при II (отсчетъ дугъ по часов. стрѣлкѣ):

$$R = - \frac{dS}{d\alpha}.$$

Черезъ координаты точки M радіусъ кривизны выражается слѣдующимъ образомъ:

$$R = \pm \frac{(dx^2 + dy^2)^{3/2}}{dxd^2y - dyd^2x}$$

и въ частности, если x есть независимая перемѣнная, то

$$R = \pm \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}.$$

Доказательство. Такъ какъ кривизна данной кривой въ точкѣ M будетъ:

$$\frac{d\alpha}{dS},$$

а кривизна окружности радіуса R равна $1/R$, то R будетъ радіусомъ кривизны (согласно опредѣленію 2), если

$$\frac{1}{R} = \left| \frac{d\alpha}{dS} \right|,$$

откуда

$$R = \left| \frac{dS}{d\alpha} \right|.$$

Такъ какъ R считается числомъ положительнымъ, то при I расположеніи имѣемъ:

$$\left.\begin{matrix} \Delta\alpha > 0 \\ \Delta S > 0 \end{matrix}\right| \frac{\Delta\alpha}{\Delta S} > 0 ; \quad \frac{1}{R} = + \frac{d\alpha}{dS}.$$

При II расположеніи:

$$\left.\begin{matrix} \Delta\alpha < 0 \\ \Delta S > 0 \end{matrix}\right| \frac{\Delta\alpha}{\Delta S} < 0 ; \quad \frac{1}{R} = - \frac{d\alpha}{dS}.$$

Чтобы найти выраженіе R черезъ координаты точки M, замѣтимъ, что

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx}.$$

Отсюда

$$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

$$d\alpha = \frac{1}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot \frac{dx.d^2y - dy.d^2x}{dx^2} = \frac{dx.d^2y - dy.d^2x}{dx^2+dy^2};$$

такъ какъ

$$dS = \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

то, подставляя найденныя значенія $d\alpha$ и dS въ выраженіе R, получимъ:

$$R = \pm \frac{(dx^2+dy^2)^{3/2}}{dx.d^2y - dy.d^2x}.$$

Если x независимая перемѣнная, то dx постоянное число и

$$d^2x = 0.$$

Раздѣливъ числителя и знаменателя предыдущаго выраженія на dx^3, получимъ:

$$R = \pm \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}$$

Замѣчаніе 1. Если x и y заданы въ функціи t, то тогда удобнѣе вычислять радіусъ кривизны непосредственно по формулѣ:

$$R = \pm \frac{dS}{d\alpha}$$

Примѣръ.

$$\left.\begin{aligned} x &= a(t - \operatorname{Sin} t) \\ y &= a(1 - \operatorname{Cos} t) \end{aligned}\right| .$$

Имѣемъ

$$dx = a(1-\operatorname{Cos} t)dt = a\, 2\operatorname{Sin}^2\frac{t}{2}\,dt$$

$$dy = a \operatorname{Sin} t\, dt = a\, 2\operatorname{Sin}\frac{t}{2}\operatorname{Cos}\frac{t}{2}\,dt,$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx} = \operatorname{Cotg}\frac{t}{2} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{t}{2}\right),$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}; \quad d\alpha = -\tfrac{1}{2}\,dt.$$

Далѣе

$$dS = \sqrt{dx^2+dy^2} = 2a\operatorname{Sin}\frac{t}{2}\,dt$$

и, наконецъ,

$$R = -\frac{2a \operatorname{Sin}\frac{t}{2}\,dt}{-\frac{1}{2}\,dt} = 4a \operatorname{Sin}\frac{t}{2}$$

Здѣсь выраженіе R мы взяли со знакомъ $-$, такъ какъ знаменатель отрицательный (отсчетъ пол. дуги по часовой стрѣлкѣ).

Найдемъ еще длину нормали той же кривой.

$$N = y\sqrt{1+y'^2} = y\sqrt{1+\operatorname{Cotg}^2 t/_2} = \frac{a(1-\operatorname{Cos} t)}{\operatorname{Sin} t/_2} =$$

$$= 2a \operatorname{Sin}\frac{t}{2}.$$

Оказывается

$$R = 2N,$$

т.е. радіусъ кривизны циклоиды равенъ удвоенной длинѣ нормали.

Замѣчаніе 2. Если кривая задана въ полярныхъ координатахъ, то

$$R = \pm\frac{(r^2 + r'^2)^{3/_2}}{r^2 + 2r'^2 - rr''};$$

это нетрудно вывести. Въ самомъ дѣлѣ:

$$R = \pm\frac{dS}{d\alpha};$$

но

$$\alpha = \mu + \theta$$

откуда

$$d\alpha = d\mu + d\theta;$$

кромѣ того мы имѣли

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{r}{r'};$$

слѣдовательно

$$\mu = \operatorname{arctg}\frac{r}{r'}$$

$$d\mu = \frac{\frac{r'^2 - r.r''}{r'^2}\,d\theta}{1 + \left(\frac{r}{r'}\right)^2} = \frac{r'^2 - r.r''}{r^2 + r'^2}\,d\theta.$$

Итакъ

$$d\alpha = d\mu + d\theta = \left[\frac{r'^2 - rr''}{r^2 + r'^2} + 1\right] d\theta = \frac{r^2 + 2r'^2 - rr''}{r^2 + r'^2}\,d\theta.$$

Далѣе

$$dS = \sqrt{r^2 + r'^2}\,d\theta,$$

отсюда находимъ окончательное выраженіе R :

$$R = \pm \frac{(r^2 + r'^2)^{3/2}}{r^2 + 2r'^2 - rr''}.$$

Въ частныхъ случаяхъ удобнѣе вычислять радіусъ кривизны по формулѣ

$$R = \pm \frac{dS}{d\alpha},$$

причемъ

$$\alpha = \mu + \theta \text{ и } \operatorname{tg}\mu = \frac{r}{r'}.$$

Напримѣръ, для логарифмической спирали

$$r = ae^{m\theta},$$

имѣемъ

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{1}{m}, \quad \mu = \text{Const}, \quad d\mu = 0,$$

а потому

$$d\alpha = d\theta$$

и

$$R = \pm \frac{dS}{d\theta} = \frac{N\,d\theta}{d\theta} = N,$$

но длина нормали

$$N = \sqrt{r^2+r'^2} = r\sqrt{1+m^2};$$

слѣдовательно

$$R = r\sqrt{1+m^2}.$$

Замѣчаніе 3. Если кривая задана въ видѣ

$$f(x, y) = 0,$$

то радіусъ R вычисляется слѣдующимъ образомъ.

Приравняемъ нулю полную производную функціи $f(x,y)$, по x:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot y' = 0.$$

Лѣвая часть есть сложная функція отъ x, такъ какъ зависитъ отъ 3 аргументовъ x, y и y', представляющихъ функціи отъ x; перепишемъ поэтому предыдущее уравненіе въ видѣ:

$$\varphi(x,y,y') = 0.$$

Такъ какъ функція $\varphi = 0$, то и полная производная ея по x равна 0:

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \cdot y' + \frac{\partial\varphi}{\partial y'} \cdot y'' = 0.$$

Изъ этого уравненія опредѣляемъ y''. Тогда

$$R = \pm \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}.$$

Напримѣръ, найдемъ радіусъ кривизны кривой

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0$$

въ точкѣ

$$x = y = {}^3/_2\, a.$$

Дифференцируемъ данное уравненіе

$$3x^2 - 3ay + (3y^2 - 3ax)y' = 0,$$

откуда въ данной точкѣ

$$y' = -1.$$

Еще разъ дифференцируемъ предыдущее равенство по x:

$$(2x - ay') + (-a + 2yy')y' + (y^2 - ax)y'' = 0.$$

Полагая

$$x = y = {}^3/_2\, a, \quad y' = -1,$$

получимъ

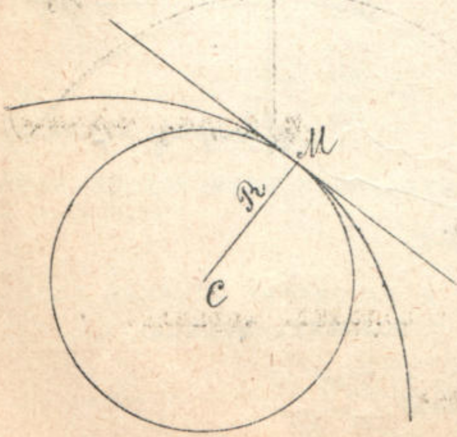
$$4a + 4a + {}^9/_4\, a^2 y'' = 0.$$

Отсюда находимъ

$$y'' = -\frac{32}{3a}$$

$$R = -\frac{2\sqrt{2}}{-\frac{32}{3a}} = \frac{3a\sqrt{2}}{16}.$$

Опредѣленіе 3. Центромъ кривизны для данной точки M кривой называется центръ того круга, который имѣетъ въ точкѣ M общую съ данной кривой касательную и равную съ ней кривизну, причемъ этотъ кругъ расположенъ съ вогнутой стороны кривой, куда направлена внутренняя нормаль. Такой кругъ называется кругомъ кривизны, а радіусъ его, какъ было установлено въ предыдущемъ опредѣленіи, называется радіусомъ кривизны (см. черт. 42).



Черт. 42.

Теорема. Координаты центра кривизны (x_c, y_c) опредѣляются слѣдующимъ образомъ:

$$x_c = x - \frac{dS}{d\alpha} \cdot \operatorname{Sin} \alpha = x - \frac{dy}{d\alpha},$$

$$y_c = y + \frac{dS}{d\alpha} \cdot \operatorname{Cos} \alpha = y + \frac{dx}{d\alpha},$$

или черезъ координаты точки $M(x, y)$:

$$x_c = x - \frac{(1 + y'^2)y'}{y''}$$

$$y_c = y + \frac{1 + y'^2}{y''}.$$

Доказательство. Отрѣзокъ МС (см. черт. 42) имѣетъ проекціями разности координатъ конца и начала:

$$x_c - x, \quad y_c - y;$$

съ другой стороны эти проекціи могутъ быть выражены такъ:

$$R \operatorname{Cos}(\overline{X}, N_i), \quad R \operatorname{Cos}(\overline{Y}, N_i).$$

Приравнивая эти выраженія, получимъ:

$$x_c - x = R \operatorname{Cos}(\overline{X}, N_i)$$
$$y_c - y = R \operatorname{Cos}(\overline{Y}, N_i).$$

Въ зависимости отъ отсчета дугъ имѣемъ при I расположеніи (см. черт. 43):

Черт. 43.

$$R = + \frac{dS}{d\alpha} \text{ и } N_i \text{ - положит. нормаль.}$$

При второмъ расположеніи имѣемъ:

$$R = - \frac{dS}{d\alpha} \text{ и } N_i \text{ - отрицат. нормаль.}$$

Въ I случаѣ, согласно форм. § 3, стр. 139:

$$\cos(\bar{X}, N_1) = \cos(\bar{X}, N) = -\sin\alpha$$

$$\cos(\bar{Y}, N_1) = \cos(\bar{Y}, N) = +\cos\alpha\ ;$$

во II случаѣ:

$$\cos(\bar{X}, N_1) = -\cos(\bar{X}, N) = +\sin\alpha$$

$$\cos(\bar{Y}, N_1) = -\cos(\bar{Y}, N) = -\cos\alpha\ ;$$

а потому въ произведеніи на R въ обоихъ случаяхъ получимъ:

$$x_c - x = -\sin\alpha\,\frac{dS}{d\alpha} = -\frac{dy}{dS}\cdot\frac{dS}{d\alpha} = -\frac{dy}{d\alpha}$$

$$y_c - y = +\cos\alpha\,\frac{dS}{d\alpha} = +\frac{dx}{dS}\cdot\frac{dS}{d\alpha} = +\frac{dx}{d\alpha}$$

Отъ этихъ выраженій можно перейти къ выраженіямъ через координаты точки M. Имѣемъ

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{dy}{dx},$$

$$d\alpha = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^2 + dy^2};$$

$$dS = \sqrt{dx^2 + dy^2}\ ; \quad \cos\alpha = \frac{dx}{dS}\ ; \quad \sin\alpha = \frac{dy}{dS}\ .$$

Подставляя найденныя значенія въ предидущія формулы, получимъ

$$x_c - x = -\frac{dS}{d\alpha}\cdot\frac{dy}{dS} = -\frac{dy}{d\alpha} = -\frac{dy(dx^2 + dy^2)}{dx.d^2y - dy.d^2x}$$

$$y_c - y = +\frac{dS}{d\alpha}\cdot\frac{dx}{dS} = +\frac{dx}{d\alpha} = +\frac{dx(dx^2 + dy^2)}{dx.d^2y - dy.d^2x}.$$

Если независимая перемѣнная x, то dx постоянное и

$$d^2x = 0.$$

Послѣ дѣленія числителя и знаменателя на dx^3 получаемъ:

$$x_c - x = -\frac{y'(1+y'^2)}{y''}$$

$$y_c - y = +\frac{1 + y'^2}{y''}\ .$$

Примѣръ 1. Для циклоиды

$$\left.\begin{aligned} x &= a(t-\mathrm{Sin}\ t) \\ y &= a(1-\mathrm{Cos}\ t) \end{aligned}\right|$$

найти координаты x_c и y_c.

Для вычисленія удобно брать формулы

$$x_c - x = -\frac{dy}{d\alpha}$$

$$y_c - y = +\frac{dx}{d\alpha}$$

Выше мы имѣли (замѣч. 1):

$$\alpha = \pi/_2 - t/_2$$

$$d\alpha = -\tfrac{1}{2}\,dt$$

$$dx = a(1-\mathrm{Cos}\ t)dt$$

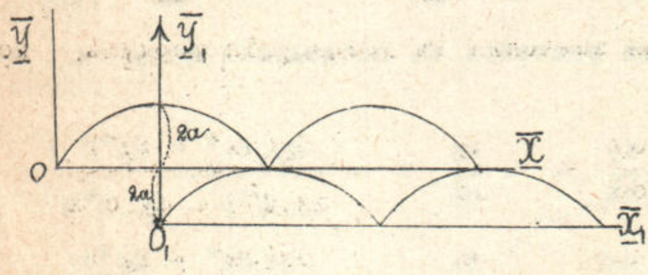
$$dy = a\ \mathrm{Sin}\ t\ dt\ .$$

Слѣдовательно:

$$x_c = a(t-\mathrm{Sin}\ t) + 2a\ \mathrm{Sin}\ t = a(t+\mathrm{Sin}\ t)$$

$$y_c = a(1-\mathrm{Cos}\ t) - 2a(1-\mathrm{Cos}\ t) = -a\ (1-\mathrm{Cos}\ t).$$

Покажемъ, что центры кривизны циклоиды сами лежатъ на циклоидѣ, равной данной и расположенной слѣдующимъ образомъ (черт. 44):



Черт.44.

Дѣйствительно, перенесемъ начало координатъ въ точку $O_1(\pi a, -2a)$; формулы перехода къ новымъ осямъ будутъ:

$$x = x_1 + \pi a$$

$$y = y_1 - 2a\ ;$$

Подставляя вмѣсто x и y найденныя выше выраженія x_c и y_c, получимъ такія новыя значенія для координатъ центра кривизны:

$$x_1 = x - \pi a = at + a\ \mathrm{Sin}\ t - \pi a = a(t-\pi) - a\ \mathrm{Sin}(t-\pi) =$$

$$= at_1 - a\ \mathrm{Sin}\ t_1 = a(t_1 - \mathrm{Sin}\ t_1),$$

гдѣ

$$t_1 = t - \pi,$$

и

$$y_1 = y + 2a = -a(1-\cos t) + 2a = a + a\cos t = a -$$
$$- a\cos(t-\pi) = a(1-\cos t_1).$$

Итакъ въ новой системѣ координатъ $\overline{X}_1$, O_1, $\overline{Y}_1$ общее мѣсто центровъ кривизны данной циклоиды представляетъ ту же самую циклоиду.

Примѣръ 2. Найти центръ кривизны для логарифмической спирали

$$r = ae^{m\theta}.$$

Раньше (замѣч. 2) мы нашли для логарифмической спирали

$$\operatorname{tg}\mu = {}^1/_m$$

$$\mu = \text{Const.}$$

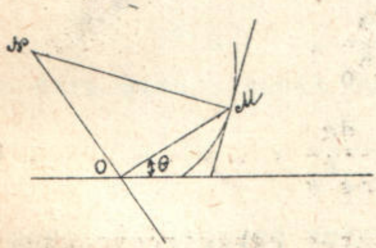
$$d\mu = 0$$

$$R = \frac{dS}{d\alpha} = \frac{dS}{d\theta} = N,$$

т.е. центръ кривизны (см. черт. 45) совпадаетъ съ точкой N. Полярныя координаты его будутъ

$$r_c = ON = \text{поднормали } r' = mr$$

$$\theta_c = \theta + {}^\pi/_2.$$



Черт. 45.

Задача 1. Найти кривыя въ прямоугольной системѣ координатъ, у которыхъ радіусъ кривизны въ каждой точкѣ пропорціоналенъ длинѣ нормали.

По условію

$$R = kN$$

$$\pm\frac{dS}{d\alpha} = k\left[\sqrt{1+y'^2}\,.\,y\right].$$

Это можно переписать съ однимъ знакомъ:

$$\frac{dS}{d\alpha} = ky\sqrt{1+y'^2},$$

если считать k числомъ положительнымъ или отрицательнымъ.

Такъ какъ

$$dS = \sqrt{1+y'^2}\,dx\,,$$

то, по сокращенiи на

$$\sqrt{1+y'^2}\,,$$

получимъ

$$dx = ky\,d\alpha\,.$$

Но

$$y' = \frac{dy}{dx} = tg\,\alpha\,,$$

откуда

$$dx = dy\,.\,Cotg\,\alpha,$$

и слѣдовательно

$$dy\,.\,Cotg\alpha = ky\,d\alpha,$$

$$\frac{dy}{y} = k\frac{Sin\,\alpha}{Cos\,\alpha}\,d\alpha\,, \quad d\log y = d(-k\log Cos\,\alpha),$$

$$\log y + k\log Cos\,\alpha = \text{пост}. = \log a,$$

откуда

$$y\,.\,Cos^k\alpha = a\,, \quad y = \frac{a}{Cos^k\alpha} \quad \dots\dots\dots (1).$$

Далѣе, такъ какъ

$$dx = k.y\,d\alpha,$$

то

$$dx = k.a\frac{d\alpha}{Cos^k\alpha}\,,$$

откуда

$$x - x_0 = ka\int\frac{d\alpha}{Cos^k\alpha} \quad \dots\dots\dots (2).$$

Итакъ, искомыя кривыя представляются параметрическими уравненiями

$$\left|\begin{array}{l} x - x_0 = ka\displaystyle\int\frac{d\alpha}{Cos^k\alpha} \\[2ex] y = \dfrac{a}{Cos^k\alpha} \end{array}\right.$$

(a и x_0 постоянныя произвольныя). Квадратура берется въ конечномъ видѣ только при k цѣломъ. Разберемъ частные случаи.

1) $k = -1$. Здѣсь

$$x - x_0 = -a\int Cos\,\alpha\,d\alpha = -a\,Sin\,\alpha$$

$$y = a\,Cos\,\alpha,$$

$$(x - x_0)^2 + y^2 = a^2\,.$$

Это есть окружность произвольнаго радiуса съ центромъ на оси X-овъ.

2) k = 1. Здѣсь

$$x - x_0 = a\int\frac{d\alpha}{\operatorname{Cos}\alpha} = a\log\operatorname{tg}(\pi/_4 + \alpha/_2)$$

$$y = \frac{a}{\operatorname{Cos}\alpha}.$$

Отсюда

$$e^{\frac{x-x_0}{a}} = \operatorname{tg}(\pi/_4 + \alpha/_4)$$

$$e^{-\frac{x-x_0}{a}} = \operatorname{Cotg}(\pi/_4 + \alpha/_4),$$

но вообще

$$\operatorname{tg}\omega + \operatorname{Cotg}\omega = \frac{2}{\operatorname{Sin}2\omega},$$

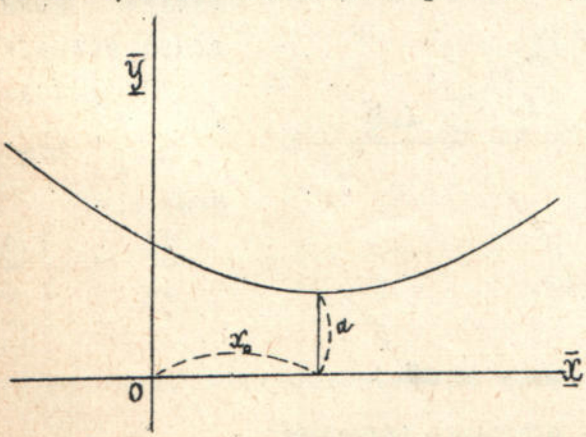
поэтому

$$e^{\frac{x-x_0}{a}} + e^{-\frac{x-x_0}{a}} = \frac{2}{\operatorname{Sin}(\pi/_2 + \alpha)} = \frac{2}{\operatorname{Cos}\alpha} = \frac{2y}{a},$$

откуда

$$y = \frac{a}{2}\left[e^{\frac{x-x_0}{a}} + e^{-\frac{x-x_0}{a}}\right] = a\operatorname{Ch}\frac{x-x_0}{a}.$$

Это есть *цѣпная линiя* съ вершиною (x_0, a) (черт. 46). (Форму цѣпной линiи принимаетъ тяжелая нить или цѣпь, концы которой закрѣплены).



Черт. 46.

3) k = 2.

Здѣсь

$$x - x_0 = 2a\int\frac{d\alpha}{\operatorname{Cos}^2\alpha} = 2a\operatorname{tg}\alpha$$

$$y = \frac{a}{\operatorname{Cos}^2\alpha} = a(1 + \operatorname{tg}^2\alpha).$$

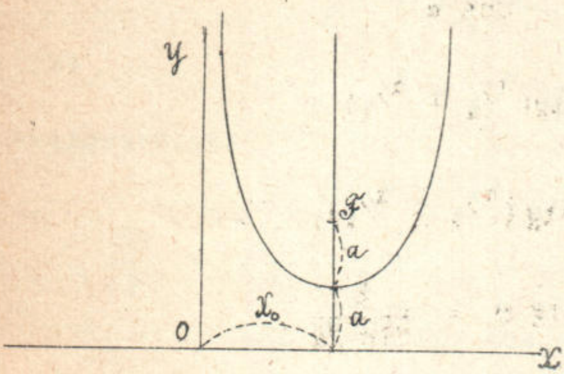
Исключенiе $\operatorname{tg}\alpha$ даетъ:

$$\frac{y - a}{a} = \frac{(x - x_0)^2}{4a^2}$$

или

$$(x - x_0)^2 = 4a(y - a) .$$

Это есть парабола 2-го порядка, вершина которой лежитъ въ точкѣ (x_0, a) и ось || оси у-овъ (черт. 47).



Черт. 47.

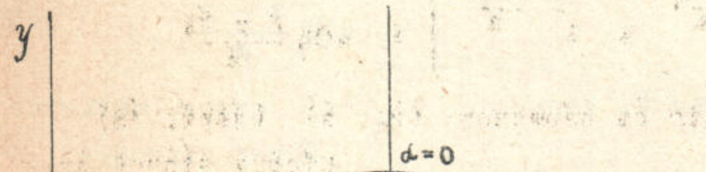
4) $k = -2$. Здѣсь

$$x - x_0 = -2a \int \cos^2\alpha \, d\alpha = -a \int (1+\cos 2\alpha) d\alpha = -{}^a/_2 (2\alpha + \sin 2\alpha) ,$$

$$y = a \cos^2\alpha = {}^a/_2 (1 + \cos 2\alpha) .$$

Это есть циклоида, расположенная слѣдующимъ образомъ (см. черт. 48).

Задача 2°. Найти кривыя въ полярныхъ координатахъ, у которыхъ радіусъ кривизны въ каждой точкѣ пропорціоналенъ полярной длинѣ нормали.



Черт. 48.

По условію

$$R = {}^1/k \, N$$

или

$$\frac{dS}{d\alpha} = \frac{1}{k} \frac{dS}{d\theta} ,$$

откуда слѣдуетъ:

$$d\alpha = k . d\theta ;$$

но

$$\alpha = \mu + \theta , \quad d\alpha = d\mu + d\theta ,$$

слѣдовательно

$$d\mu + d\theta = k . d\theta , \quad d\mu = (k-1) d\theta ,$$

$$\mu = (k-1)(\theta - \theta_0) .$$

Но мы видѣли (стр. 148 - задача о кривыхъ, обладающихъ пропорціональностью угловъ μ и θ), что при такой зависимости между μ и θ выходитъ

$$r^{k-1} = a^{k-1}\,\mathrm{Sin}(k-1)(\theta-\theta_0).$$

Полагая $\theta_0 = 0$, что равносильно выбору одной кривой изъ безчисленнаго множества кривыхъ, получаемыхъ вращенiемъ этой кривой около полюса, отмѣтимъ частные случаи:

1) $k = 2$. Здѣсь

$$R = {}^1/_2\,N.$$

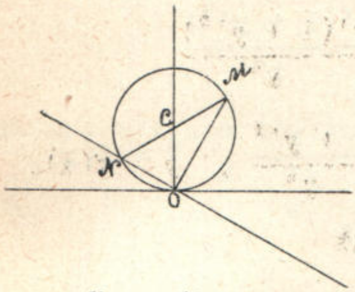
Уравненiе

$$r = a\,\mathrm{Sin}\,\theta \quad \text{или} \quad x^2 + y^2 = ay$$

изображаетъ окружность радiуса ${}^a/_2$ съ центромъ на оси у-овъ $(0,\ {}^a/_2)$ (черт.49):

$$MC = R = {}^1/_2\,a$$

$$MN = N = a.$$



Черт.49.

2) $k = 3$.

$$R = {}^1/_3\,N.$$

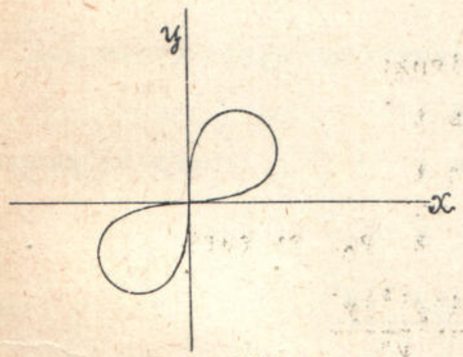
Уравненiе

$$r^2 = a^2\,\mathrm{Sin}\,2\theta$$

преобразуемъ такъ:

$$r^2 = a^2\mathrm{Cos}(2\theta - {}^\pi/_2) =$$
$$= a^2\mathrm{Cos}\,2(\theta - {}^\pi/_4)$$

и тогда видно, что это есть Лемниската Бернулли, повернутая на уголъ 45° (черт. 50).



Черт 50.

§ 6.

Эволюта, какъ общее мѣсто центровъ кривизны.

Свойства эволюты.

Опредѣленiе. Общее мѣсто центровъ кривизны всѣхъ точекъ данной кривой называется эволютой этой кривой. Сама же кривая называется по отношенiю къ эволютѣ эвольвентой.

Теорема. Уравненiе эволюты получается исключенiемъ t изъ системы:

$$x_c - x = -\frac{(dx^2 + dy^2)dy}{dx.d^2y - dy.d^2x}$$

$$y_c - y = \frac{(dx^2 + dy^2)dx}{dx.d^2y - dy.d^2x},$$

если уравненіе эвольвенты задано въ видѣ:

$$x = \varphi(t)$$

$$y = \psi(t),$$

или исключеніемъ x и y изъ системы:

$$\left|\begin{array}{l} x_c - x = -\dfrac{y'(1 + y'^2)}{y''} \\ \\ y_c - y = +\dfrac{1 + y'^2}{y''}, \quad y = f(x), \end{array}\right.$$

если уравненіе кривой задано въ видѣ

$$y = f(x).$$

1^c. *Эволюта эллипса.*

Пусть эллипсъ заданъ уравненіями:

$$\left|\begin{array}{l} x = a \operatorname{Cos} t \\ y = b \operatorname{Sin} t \end{array}\right.$$

Будемъ искать координаты x_c и y_c въ видѣ

$$x_c = x - \frac{(1+y'^2)y'}{y''}$$

$$y_c = y + \frac{1 + y'^2}{y''}.$$

Имѣемъ:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{b.\operatorname{Cos} t.dt}{- a \operatorname{Sin} t.dt} = -\frac{b}{a}\operatorname{Cotg}t$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{\dfrac{b}{a}\,\dfrac{dt}{\operatorname{Sin}^2 t}}{- a.\operatorname{Sin} t.dt} = -\frac{b}{a^2}\cdot\frac{1}{\operatorname{Sin}^3 t}.$$

Отсюда

$\frac{b}{a}\frac{\cos t}{\sin^3 t}\left(1+\frac{b^2}{a^2}\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}\right)\frac{a^2\sin^3 t}{b} =$
$= a\cos t\left(\sin^2 t + \frac{b^2}{a^2}\cos^2 t\right)$

$$x_c = a\,\mathrm{Cos}\,t - \frac{\frac{b}{a}\,\mathrm{Cotg}\,t\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\,\mathrm{Cotg}^2 t\right)}{\frac{b}{a^2}\cdot\frac{1}{\mathrm{Sin}^3 t}} = a\,\mathrm{Cos}\,t\left(1 - \mathrm{Sin}^2 t - \right.$$

$$\left. - \frac{b^2}{a^2}.\,\mathrm{Cos}^2 t\right) = a\,\mathrm{Cos}^3 t.\,\frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a}.\,\mathrm{Cos}^3 t\,,$$

$$y_c = b\,\mathrm{Sin}\,t - \frac{a^2}{b}\,\mathrm{Sin}^3 t\left(1 + \frac{b^2}{a^2}.\mathrm{Cotg}^2 t\right) =$$

$$= b\,\mathrm{Sin}\,t\left(1 - \frac{a^2}{b^2}.\,\mathrm{Sin}^2 t - \mathrm{Cos}^2 t\right) = b\,\mathrm{Sin}^3 t.\frac{b^2 - a^2}{b^2} =$$

$$= -\,\frac{a^2 - b^2}{b}\,.\,\mathrm{Sin}^3 t\,.$$

Эволюта эллипса получится исключенiемъ t изъ системы:

$$x_c = \frac{a^2 - b^2}{a}\,.\,\mathrm{Cos}^3 t$$

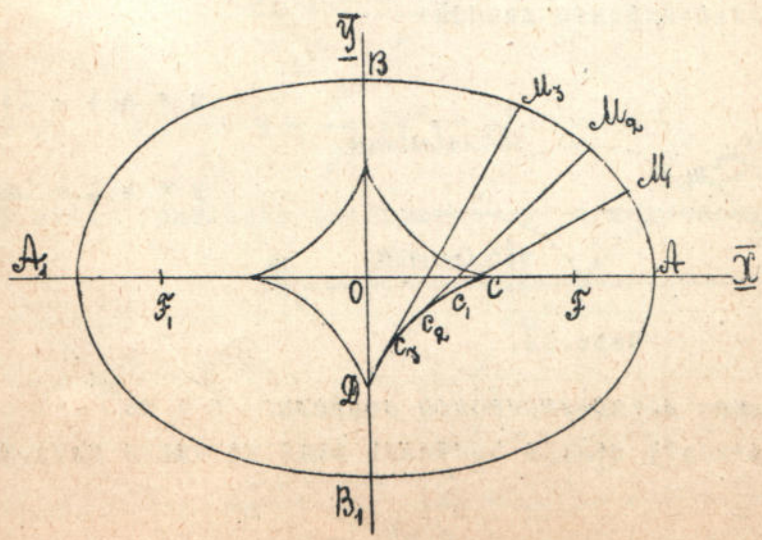
$$y_c = -\,\frac{a^2 - b^2}{b}\,.\,\mathrm{Sin}^3 t.$$

Для этого нужно составить

$$\mathrm{Sin}^2 t + \mathrm{Cos}^2 t = 1,$$

и тогда получимъ:

$$\left[\frac{ax_c}{a^2 - b^2}\right]^{2/3} + \left[\frac{by_c}{a^2 - b^2}\right]^{2/3} = 1.$$



Черт.51.

Для точки A при $t = 0$ (см. черт. 51) находимъ координаты центра кривизны C:

$$x_C = \frac{a^2 - b^2}{a} = ae^2 < a$$

$$y_C = 0$$

(e - эксцентриситетъ эллипса $= \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}$), слѣдовательно

$$OC = \frac{a^2 - b^2}{a} = ae^2$$

и такъ какъ OF (F фокусъ) $= ae$, то C лежитъ между O и F.

Для точки B при $\pi/2$ имѣемъ

$$x_C = 0$$

$$y_C = -\frac{a^2 - b^2}{b},$$

откуда

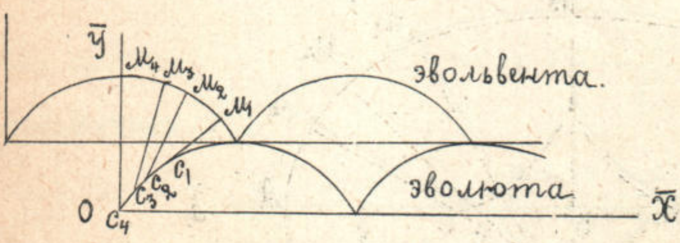
$$|OD| = \frac{a^2 - b^2}{b} \left| \begin{array}{l} < b, \text{ если } a^2 < 2b^2 \\ = b, \text{ если } a^2 = 2b^2 \\ > b, \text{ если } a^2 > 2b^2, \end{array} \right.$$

т.е. D можетъ лежать внутри, на обводѣ или внѣ эллипса въ зависимости отъ отношенія a къ b.

2°. *Эволюта циклоиды.* Выше мы нашли, что эволюта циклоиды есть такая же циклоида (см. черт.52), извѣстнымъ образомъ расположенная относительно данной:

$$x = a(t - \sin t)$$

$$y = a(1 - \cos t).$$



Черт.52.

3°. *Эволюта логарифмической спирали:* $r = ae^{m\theta}$.

Для координатъ центра кривизны выше мы нашли слѣдующія выраженія

$$r_C = mr$$

$$\theta_c = \theta + \pi/2 .$$

Подставляя выведенныя отсюда r и θ въ уравненіе логарифмической спирали, получимъ

$$\frac{r_c}{m} = ae^{m(\theta_c - \pi/2)}$$

откуда $\quad r_c = mae^{m(\theta_c-\pi/2)} = ae^{m(\theta_c - \pi/2 + \frac{\log m}{m})}$

Обозначимъ: $\theta_0 = \pi/2 - \frac{\log m}{m}$; тогда получимъ: $r_c = ae^{m(\theta_c - \theta_0)}$,

т.е. эволюта логарифмической спирали есть та же спираль, но повернутая въ положительномъ направленіи на уголъ θ_0.

4°. *Эволюта параболы:* $y^2 = 2px$. $\quad x = \frac{y^2}{2p}$

Беремъ

$$x_c = x - \frac{dy}{d\alpha}, \qquad y_c = y + \frac{dx}{d\alpha}.$$ $\quad dx = \frac{y}{p}dy.$

Здѣсь

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{y/_p . dy} = \frac{p}{y},$$

откуда

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{p}{y},$$

$$d\alpha = \frac{-\frac{p}{y^2}.dy}{1 + \frac{p^2}{y^2}} = -\frac{pdy}{y^2 + p^2}. \qquad \frac{dy(y^2+p^2)}{pdy} = \frac{y^2+p^2}{p}$$

Такимъ образомъ

$$x_c = \frac{y^2}{2p} + \frac{y^2 + p^2}{p} = \frac{3y^2}{2p} + p,$$

$$y_c = y - \frac{y}{p^2}(y^2 + p^2) = -\frac{y^3}{p^2}.$$

Изъ этихъ уравненій исключаемъ y и получаемъ:

$$(x_c - p)^3 = \frac{27}{8p^3}y^6$$

$$y_c^2 = \frac{y^6}{p^4},$$

$$y_c^2 = \frac{8}{27p}(x_c - p)^3.$$

Фигура эволюты параболы слѣдующая: $C_2C_0CC_1$ на прилагаемомъ чертежѣ 53.

Свойства эволюты.

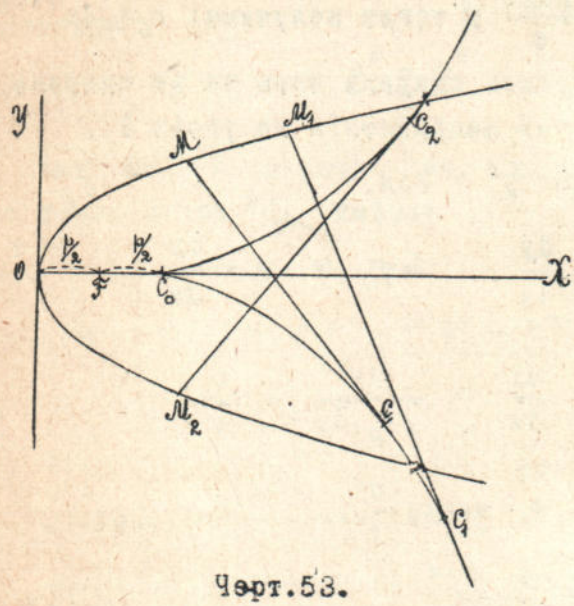
Теорема. 1) нормаль къ эвольвентѣ въ точкѣ $M(x, y)$ служитъ касательной къ эволютѣ въ точкѣ $C(x_c, y_c)$ (см. черт. 54).

2) Длина дуги эволюты C_1C_2 равна разности радіусовъ кривизны эвольвенты M_1C_1 и M_2C_2, если при возрастаніи дуги радіусъ кривизны также все время растетъ (или все время убываетъ).

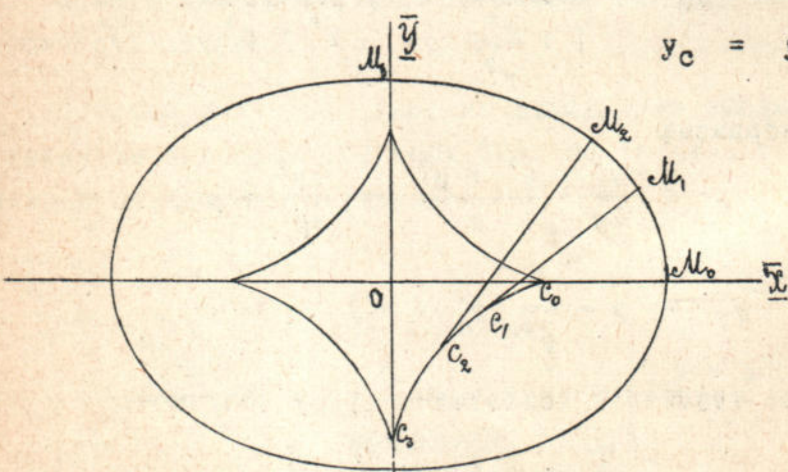
Доказательство. Для координатъ точекъ эволюты имѣемъ выраженія:

$$x_c = x - \frac{dS}{d\alpha}\,\mathrm{Sin}\,\alpha$$

$$y_c = y + \frac{dS}{d\alpha}\,\mathrm{Cos}\,\alpha$$



Черт.53.



Черт.54.

Найдемъ угловой коэффиціентъ касательной къ эволютѣ въ точкѣ x_c, y_c. Для этого находимъ:

$$dx_c = dx - \frac{dS}{d\alpha}\,.\,\mathrm{Cos}\,\alpha . d\alpha - \mathrm{Sin}\,\alpha . d\left(\frac{dS}{d\alpha}\right) = -\,\mathrm{Sin}\,\alpha . d\left(\frac{dS}{d\alpha}\right),$$

такъ какъ

$$\operatorname{Cos} \alpha = \frac{dx}{dS}$$

и потому

$$dx - \frac{dS}{d\alpha} \operatorname{Cos} \alpha \, d\alpha = dx - \frac{dS}{d\alpha} \cdot \frac{dx}{dS} \cdot d\alpha = dx - dx = 0;$$

также:

$$dy_c = dy - \frac{dS}{\cancel{d\alpha}} \operatorname{Sin} \alpha . \cancel{d\alpha} + \operatorname{Cos} . d(\frac{dS}{d\alpha}) = \operatorname{Cos} \alpha . d(\frac{dS}{d\alpha}),$$

такъ какъ

$$\operatorname{Sin} \alpha = \frac{dy}{dS}$$

и потому

$$dy - \operatorname{Sin} \alpha . dS = 0.$$

Угловой коэффиціентъ касательной равенъ отношенію

$$\frac{dy_c}{dx_c} = - \operatorname{Cotg} \alpha = - \frac{1}{y'} ,$$

но $-{}^1/y'$ есть въ то же время угловой коэффиціентъ нормали къ эвольвентѣ въ точкѣ $M(x, y)$, такъ, что касательныя C_2M_2 и C_1M_1 къ эволютѣ въ точкахъ C_2, C_1 являются нормалями къ эвольвентѣ въ точкахъ M_2, M_1. Для доказательства второй части теоремы имѣемъ:

$$dx_c^2 + dy_c^2 = \left[d(\frac{dS}{d\alpha}) \right]^2 = dR^2 .$$

Обозначимъ черезъ σ дугу эволюты, отсчитываемую отъ нѣкотораго начала C_0, имѣемъ выраженіе для дифференціала дуги:

$$d\sigma^2 = dx_c^2 + dy_c^2$$

такъ что оказывается:

$$d\sigma^2 = dR^2$$

$$d\sigma = dR,$$

если σ и R растутъ одновременно ($d\sigma = - dR$, если при возрастаніи σ радіусъ R постоянно убываетъ).

Отсюда

$$d(\sigma - R) = 0.$$

Слѣдовательно

$\sigma - R$ = постоянному для всѣхъ точекъ,

т.е.

$$\sigma_1 - R_1 = \sigma_2 - R_2 .$$

или

$$\sigma_2 - \sigma_1 = R_2 - R_1 .$$

Если за начало дугъ эволюты принять точку C_0, то

$$C_0C_1 = \sigma_1 ,$$

$$C_0C_2 = \sigma_2 ,$$

и

$$\sigma_2 - \sigma_1 = \smile C_1C_2 = M_2C_2 - M_1C_1 ,$$

что и требовалось доказать.

Примѣръ. Вычислить длину обвода эволюты эллипса.

Для дуги

$$C_0C_3 = \left|M_3C_3\right| - \left|M_0C_0\right| .$$

Пользуясь выведенными выше выраженіями для координатъ центровъ кривизны

$$x_c = \frac{a^2 - b^2}{a} \operatorname{Cos}^3 t$$

$$y_c = -\frac{a^2 - b^2}{b} \operatorname{Sin}^3 t$$

находимъ при

$$t = 0$$

$$OC_0 = \frac{a^2 - b^2}{a}$$

$$C_0M_0 = a - \frac{a^2 - b^2}{a} = \frac{b^2}{a} ;$$

при $t = {}^{\pi}/_{2}$ имѣемъ

$$OC_3 = -\frac{a^2 - b^2}{b} ,$$

$$\left|M_3C_3\right| = b + \frac{a^2 - b^2}{b} = \frac{a^2}{b} .$$

Отсюда

$$\text{длина} \smile C_0C_3 = \frac{a^2}{b} - \frac{b^2}{a} = \frac{a^3 - b^3}{ab} ;$$

полный обводъ равенъ

$$4 \cdot \frac{a^3 - b^3}{ab} .$$

Замѣчаніе 1. Если нить, навитая на эволюту по направленію

$C_3C_0 - C_0M_0$, развивается такъ, что сходитъ съ эволюты всегда по касательной, то свободный конецъ нити вычерчиваетъ дугу M_0M_3. Отсюда понятна причина названія эволюты (отъ лат. слова evolvere - развивать).

Замѣчаніе 2. Въ виду того, что

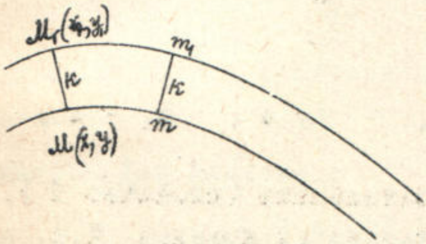
$$R - \sigma = \text{Const}$$

(см. св. 2 эволюты), то по данной σ, дугѣ эволюты, имѣемъ

$$R = \sigma + l\,,$$

гдѣ l постоянная произвольная, и, слѣдовательно, по данной эволютѣ можно построить безчисленное множество эвольвентъ, которыя представляютъ систему равноотстоящихъ или *параллельныхъ кривыхъ*.

Вообще для данной кривой Mm мы получимъ ей параллельную, если на всѣхъ нормаляхъ къ данной кривой отложимъ отрѣзки MM_1, mm_1, ... постоянной длины k въ ту или другую сторону и точки $M_1 m_1$, ... соединимъ кривою. Если мы будемъ отрѣзки k считать положительными, когда они отложены по положительной нормали, то (по форм. § 3, стр. 148) найдемъ слѣдующія зависимости между координатами точекъ $M(x, y)$ и $M_1(x_1, y_1)$:



Черт. 55.

$$x_1 - x = k\,\text{Cos}(N, \bar{X}) = -k\frac{dy}{dS} = -k\,\text{Sin}\,\alpha$$

$$y_1 - y = k\,\text{Cos}(N, \bar{Y}) = +k\frac{dx}{dS} = +k\,\text{Cos}\,\alpha,$$

такъ что

$$\left|\begin{aligned} x_1 &= x - k\,\text{Sin}\,\alpha \\ y_1 &= y + k\,\text{Cos}\,\alpha \end{aligned}\right. \quad \ldots\ldots (*).$$

Докажемъ слѣдующую теорему относительно параллельныхъ кривыхъ:

Теорема. Въ соотвѣтственныхъ точкахъ параллельныхъ кривыхъ 1) касательныя параллельны, 2) разность радіусовъ кривизны постоянна для всѣхъ паръ точекъ и 3) всѣ параллельныя кривыя имѣютъ одну и ту же эволюту.

Формулы (*) даютъ намъ

$$dx_1 = dx - k.\mathrm{Cos}\,\alpha.d\alpha = dx - k.\frac{dx}{dS}.d\alpha = dx(1-k.\frac{d\alpha}{dS})$$

$$dy_1 = dy - k.\mathrm{Sin}\,\alpha.d\alpha = dy - k.\frac{dy}{dS}.d\alpha = dy(1-k.\frac{d\alpha}{dS}),$$

и такъ какъ

$$\frac{d\alpha}{dS} = \pm\frac{1}{R}$$

(гдѣ R радіусъ кривизны кривой Mm), то окончательно

$$dx_1 = dx(1 \mp \frac{k}{R}),$$

$$dy_1 = dy(1 \mp \frac{k}{R}).$$

Отсюда дѣленіемъ находимъ

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{dy}{dx}, \quad tg\,\alpha_1 = tg\,\alpha, \quad \alpha_1 = \alpha,$$

что выражаетъ параллельность касательныхъ (свойство 1), такъ какъ α_1 и α суть углы касательныхъ къ кривымъ M_1m_1 и Mm въ точкахъ M_1 и M, составляемые съ осью x-овъ.

Далѣе находимъ

$$dx_1^2 + dy_1^2 = (1 \mp \frac{k}{R})^2(dx^2 + dy^2),$$

т.е.

$$dS_1^2 = (1 \mp \frac{k}{R})^2\,dS^2,$$

$$dS_1 = (1 \mp \frac{k}{R}).dS$$

(dS_1 и dS - дифференціалы дугѣ кривыхъ M_1m_1 и Mm).

Дѣля послѣднее равенство на другое:

$$d\alpha_1 = d\alpha,$$

находимъ

$$\frac{dS_1}{d\alpha_1} = (1 \mp \frac{k}{R})\,.\,\frac{dS}{d\alpha}$$

или

$$R_1 = R(1 \mp \frac{k}{R}) = R \mp k,$$

откуда

$$R_1 - R = \mp k$$

(свойство 2° - постоянная разность радіусовъ кривизны).

Составимъ, наконецъ, координаты центра кривизны кривой M_1m_1:

$$(x_1)_c = x_1 - \frac{dy_1}{d\alpha_1} = x_1 - \frac{dy_1}{d\alpha} = x - k.\sin\alpha -$$

$$- \left(\frac{dy}{d\alpha} - k.\sin\alpha\right) = x - \frac{dy}{d\alpha},$$

$$(y_1)_c = y_1 + \frac{dx_1}{d\alpha_1} = y_1 + \frac{dx_1}{d\alpha} = y + k.\cos\alpha +$$

$$+ \left(\frac{dx}{d\alpha} - k.\cos\alpha\right) = y + \frac{dx}{d\alpha},$$

но для кривой Mm координаты центра кривизны будутъ также

$$x_c = x - \frac{dy}{d\alpha} \quad \text{и} \quad y_c = y + \frac{dx}{d\alpha},$$

слѣдовательны центры кривизны совпадаютъ, а потому совпадаютъ и эволюты.

Примѣръ. Для эллипса

$$x = a.\cos t, \quad y = b.\sin t,$$

гдѣ

$$\frac{dx}{dS} = \frac{-a\sin t}{\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}}, \quad \frac{dy}{dS} = \frac{b.\cos t}{\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}},$$

параллельныя кривыя:

$$x = a.\cos t + \frac{bk.\cos t}{\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}}$$

$$y = b.\sin t + \frac{ak.\sin t}{\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}}$$

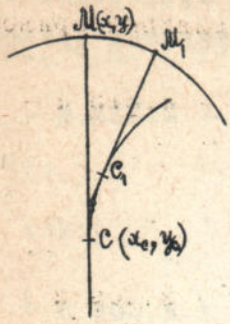
(мы перемѣнили здѣсь k на $-k$ сравнительно съ формулами (*)) не будутъ уже эллипсами, но всѣ эти кривыя имѣютъ общую съ эллипсомъ эволюту

$$\left[\frac{aX}{a^2 - b^2}\right]^{2/3} + \left[\frac{bY}{a^2 - b^2}\right]^{2/3} = 1.$$

Перейдемъ теперь къ вопросу о нахожденіи эвольвенты по данной эволютѣ.

Пусть дано уравненіе эволюты

$$f(x_c,\ y_c) = 0.$$



Черт.56.

Выражая, что прямая MC въ одно и то же время имѣетъ угловой коэффиціентъ:

$\dfrac{dy_c}{dx_c}$ - какъ касат. къ эволютѣ CC_1 въ точкѣ $(x_c,\ y_c)$

$-\dfrac{dx}{dy}$ - какъ нормаль къ эвольвентѣ MM_1 въ точкѣ $(x,\ y)$

$\dfrac{y - y_c}{x - x_c}$ - какъ прямая, проходящая черезъ точки

$$M(x,\ y) \text{ и } C(x_c,\ y_c),$$

получаемъ два уравненія

$$\frac{dy_c}{dx_c} = -\frac{dx}{dy} = \frac{y - y_c}{x - x_c} \ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (*).$$

Исключая x_c, y_c изъ этихъ двухъ уравненій и уравненія

$$f(x_c,\ y_c) = 0\ ,$$

найдемъ дифференціальное уравненіе 1-го порядка

$$\varphi(x,\ y,\ \frac{dy}{dx}) = 0\ ,$$

которое даетъ намъ систему эвольвентъ, имѣющихъ данную эволюту.

Если уравненіе эволюты задано въ параметрической формѣ

$$x_c = \varphi(t)$$

$$y_c = \psi(t),$$

то поступаемъ такъ. Изъ уравненій (*) находимъ:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = -\frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)} = \omega(t)\ ,$$

такъ что

$$\frac{dy}{dt} = \omega(t)\ .\ \frac{dx}{dt}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (1),$$

изъ тѣхъ же уравненій (*):

$$[y - \psi(t)].\varphi'(t) = [x - \varphi(t)].\psi'(t)$$

или

$$x.\lambda(t) + y.\mu(t) = \nu(t) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2).$$

Дифференцируя эту зависимость по t, находимъ:

$$\frac{dx}{dt}.\lambda(t) + \frac{dy}{dt}.\mu(t) + x.\lambda'(t) + y.\mu'(t) = \nu'(t) \; . \; . \; . \; (3).$$

Сюда вносимъ

$$\frac{dy}{dt} = \omega(t) . \frac{dx}{dt}$$

изъ (1) и

$$y = \frac{\nu(t)}{\mu(t)} - x.\frac{\lambda(t)}{\mu(t)}$$

изъ (2), послѣ чего уравненіе (3) приметъ форму:

$$\frac{dx}{dt} . \rho(t) + x.\sigma(t) = \tau(t).$$

Это есть такъ называемое линейное уравненіе, которое легко интегрируется; опредѣливъ отсюда x черезъ t и постоянную C:

$$x = F(t, C),$$

изъ (2) затѣмъ найдемъ и y какъ функцію t и C:

$$y = F_1(t, C).$$

Эти два уравненія и дадутъ систему эвольвентъ.

Примѣръ. Найти кривыя, эволютою которыхъ служитъ окружность

$$x_c^2 + y_c^2 = a^2 .$$

Положивъ

$$x_c = a.\mathrm{Cos}\, t,$$

$$y_c = a.\mathrm{Sin}\, t,$$

имѣемъ

$$\frac{dy_c}{dx_c} = \frac{a.\mathrm{Cos}\, t}{- a.\mathrm{Sin}\, t} = - \mathrm{Cotg}\, t;$$

т.е., что изъ уравненій (*)

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt} . \mathrm{tg}\, t.$$

Далѣе

$$(y - a.\mathrm{Sin}\, t).a.\mathrm{Sin}\, t + (x - a.\mathrm{Cos}\, t).a.\mathrm{Cos}\, t = 0,$$

откуда

$$x.\mathrm{Cos}\ t + y.\mathrm{Sin}\ t = a.$$

Дифференцируя по t, имѣемъ:

$$\frac{dx}{dt}.\mathrm{Cos}\ t + \frac{dy}{dt}.\mathrm{Sin}\ t - x.\mathrm{Sin}\ t + y.\mathrm{Cos}\ t = 0;$$

но

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt}.\mathrm{tg}\ t, \quad y = \frac{a}{\mathrm{Sin}\ t} - x.\mathrm{Cotg}\ t,$$

слѣдовательно

$$\frac{dx}{dt}\left(\mathrm{Cos}\ t + \frac{\mathrm{Sin}^2 t}{\mathrm{Cos}\ t}\right) - x\left(\mathrm{Sin}\ t + \frac{\mathrm{Cos}^2 t}{\mathrm{Sin}\ t}\right) + a.\mathrm{Cotg}\ t = 0$$

или

$$\frac{dx}{dt}.\frac{1}{\mathrm{Cos}\ t} - x.\frac{1}{\mathrm{Sin}\ t} = -a.\mathrm{Cotg}\ t.$$

Умножая уравненіе на Cotg t, находимъ

$$\frac{dx}{dt}.\frac{1}{\mathrm{Sin}\ t} - x.\frac{\mathrm{Cos}\ t}{\mathrm{Sin}^2 t} = -a.\mathrm{Cotg}^2 t$$

или

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{x}{\mathrm{Sin}\ t}\right] = -a.\mathrm{Cotg}^2 t.$$

Отсюда

$$\frac{x}{\mathrm{Sin}\ t} = C - a\int \mathrm{Cotg}^2 t\, dt =$$

$$= C - a\int\left(\frac{1}{\mathrm{Sin}^2 t} - 1\right)dt = C + a.\mathrm{Cotg}\ t + at,$$

и слѣдовательно

$$x = a(\mathrm{Cos}\ t + t.\mathrm{Sin}\ t) + C.\mathrm{Sin}\ t.$$

Далѣе

$$y = \frac{a}{\mathrm{Sin}\ t} - x.\mathrm{Cotg}\ t = \frac{a}{\mathrm{Sin}\ t} - a.\frac{\mathrm{Cos}^2 t}{\mathrm{Sin}\ t} -$$

$$- at.\mathrm{Cos}\ t - C.\mathrm{Cos}\ t = a(\mathrm{Sin}\ t - t.\mathrm{Cos}\ t) - C.\mathrm{Cos}\ t$$

Искомыя эвольвенты будутъ:

$$x = a(\mathrm{Cos}\ t + t.\mathrm{Sin}\ t) + C.\mathrm{Sin}\ t$$

$$y = a(\mathrm{Sin}\ t - t.\mathrm{Cos}\ t) - C.\mathrm{Cos}\ t.$$

Кривая, получаемая при $C = 0$, обыкновенно и называется *эвольвентой круга;* она имѣетъ форму спирали.

§ 7.

Огибающія и огибаемыя кривыя. Эволюта, какъ огибающая нормалей.

Опредѣленіе. Если разсматривать систему линій

$$f(x, y, \alpha) = 0,$$

зависящихъ отъ одного произвольнаго параметра α, то *характеристической точкой* кривой

$$f(x, y, \alpha) = 0$$

называется предѣльное положеніе точки пересѣченія этой кривой съ другой кривой системы, которой отвѣчаетъ безконечно близкое значеніе α.

Теорема. Характеристическая точка кривой

$$f(x, y, \alpha) = 0$$

опредѣляется системой уравненій

$$\left| \begin{array}{l} f(x, y, \alpha) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial \alpha}(x, y, \alpha) = 0 . \end{array} \right.$$

Доказательство. По опредѣленію, чтобы найти характеристическую точку, мы должны рѣшить систему 2-хъ уравненій:

$$\left| \begin{array}{l} f(x, y, \alpha) = 0 \\ f(x, y, \alpha+\Delta\alpha) = 0 \quad \text{при} \quad \Delta\alpha = 0; \end{array} \right.$$

но эту систему можно замѣнить другой системой, ей равносильной:

$$\left| \begin{array}{l} f(x, y, \alpha) = 0 \\ \dfrac{f(x,y,\alpha+\Delta\alpha) - f(x,y,\alpha)}{\Delta\alpha} = 0; \end{array} \right.$$

съ приближеніемъ $\Delta\alpha$ къ 0, эта система стремится къ указанной системѣ

$$\left| \begin{array}{l} f(x, y, \alpha) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial \alpha}(x, y, \alpha) = 0 \end{array} \right.$$

Опредѣленіе. Общее мѣсто характеристическихъ точекъ для кривыхъ данной системы

$$f(x,\ y,\ \alpha) = 0$$

называется *огибающей кривой* или обверткой для данной системы: *линіи* системы называются въ такомъ случаѣ *огибаемыми.*

Теорема. Уравненіе обвертки получается исключеніемъ α изъ системы

$$\left|\begin{array}{l} f(x,\ y,\ \alpha) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\ y,\ \alpha) = 0 \end{array}\right.$$

Доказательство. Написанную систему можно разсматривать какъ два параметрическихъ уравненія для опредѣленія координатъ характеристическихъ точекъ въ функціи параметра α, а потому исключеніе α дастъ зависимость между x и y – координатами точекъ на оберткѣ.

Замѣчаніе. Если мы продифференцируемъ уравненіе

$$f(x,\ y,\ \alpha) = 0$$

по x, разсматривая y и α какъ функцію отъ x, то получимъ:

$$f'_x(x,y,\alpha) + f'_y(x,y,\alpha)\ .\ y'_x + f'_\alpha(x,y,\alpha)\ .\ \alpha'_x = 0.$$

Это уравненіе обратится въ

$$f'_\alpha(x,y,\alpha).\alpha'_x = 0$$

или просто въ

$$f'_\alpha(x,y,\alpha) = 0$$

(такъ какъ α'_x не равно тождественно нулю), если одновременно

$$f'_x(x,y,\alpha) = 0 \quad \text{и} \quad f'_y(x,y,\alpha) = 0.$$

Мы увидимъ ниже, что такъ называемыя особенныя точки кривой

$$f(x,\ y,\ \alpha) = 0$$

какъ разъ удовлетворяютъ системѣ уравненій

$$\left|\begin{array}{l} f(x,\ y,\ \alpha) = 0 \\ f'_x(x,\ y,\ \alpha) = 0 \\ f'_y(x,\ y,\ \alpha) = 0\ , \end{array}\right.$$

и такъ какъ при выполненіи этой системы выполняется также и другая система

$$\left| \begin{array}{l} f(x, y, \alpha) = 0 \\ f'_\alpha(x, y, \alpha) = 0, \end{array} \right.$$

то отсюда заключаемъ, что эта послѣдняя система не только опредѣляетъ, по исключеніи α, огибающую кривую, но также можетъ, по исключеніи α, дать *общее мѣсто особенныхъ точекъ* кривыхъ системы

$$f(x, y, \alpha) = 0.$$

Теорема. Касательная къ оберткѣ въ точкѣ M совпадаетъ съ касательною въ этой точкѣ къ той изъ огибаемыхъ, для которой M служитъ характеристической точкой.

Положимъ, что мы имѣемъ систему кривыхъ

$$f(x, y, \alpha) = 0.$$

Задавъ $\alpha = \alpha_0$, мы выдѣлимъ нѣкоторую опредѣленную огибаемую

$$f(x, y, \alpha_0) = 0.$$

Ея характеристическая точка опредѣляется системою

$$\left| \begin{array}{l} f(x, y, \alpha_0) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial \alpha}(x, y, \alpha_0) = 0; \end{array} \right.$$

пусть это будетъ точка $M(x_0, y_0)$, такъ что тождественно:

$$\left| \begin{array}{l} f(x_0, y_0, \alpha_0) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial \alpha}(x_0, y_0, \alpha_0) = 0 \end{array} \right. \quad . \; . \; . \; . \; . \; (**).$$

Имѣемъ уравненіе касательной въ точкѣ M огибаемой

$$\overline{Y} - y_0 = y'.(\overline{X} - x_0)$$

и уравненіе касательной въ точкѣ M къ оберткѣ

$$\overline{Y} - y_0 = \overline{Y}'.(\overline{X} - x_0).$$

Докажемъ, что

$$y' = \overline{Y}'.$$

Въ самомъ дѣлѣ, для огибаемой y' опредѣляется изъ ур-нія

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, \alpha_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, \alpha_0).y' = 0,$$

такъ какъ α_0 постоянное; откуда находимъ въ данной точкѣ

$M(x_0, y_0)$

$$y' = - \frac{f'_x(x_0, y_0, \alpha_0)}{f'_y(x_0, y_0, \alpha_0)} .$$

Для обвертки $\bar{Y}'$ опредѣляется на основаніи системы

$$\left| \begin{array}{l} f(x, y, \alpha) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, y, \alpha) = 0 \quad \text{при } \alpha \text{ перемѣнномъ} \end{array} \right. \qquad \ldots\ldots\ldots (*)$$

именно, дифференцируемъ уравненіе

$$f(x, y, \alpha) = 0$$

по x, разсматривая не только y, но и α какъ функцію отъ x, опредѣляемую условіемъ

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, y, \alpha) = 0 ;$$

получимъ уравненіе

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} . \bar{Y}' + \frac{\partial f}{\partial \alpha} . \frac{d\alpha}{dx} = 0,$$

въ которомъ послѣдній членъ пропадаетъ въ силу равенства

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, y, \alpha) = 0.$$

Въ данной точкѣ $M(x_0, y_0)$ имѣемъ для опредѣленія $\bar{Y}'$

$$f'_x(x_0, y_0, \alpha) + f'_y(x_0, y_0, \alpha) . \bar{Y}' = 0,$$

причемъ α не произвольное число, но $\alpha = \alpha_0$. Дѣйствительно, точка $M(x_0, y_0)$ принадлежитъ обверткѣ (*), слѣдовательно удовлетворяетъ системѣ

$$\left| \begin{array}{l} f(x_0, y_0, \alpha) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x_0, y_0, \alpha) = 0. \end{array} \right.$$

Здѣсь α должно удовлетворять двумъ уравненіямъ, слѣдовательно оно не можетъ быть произвольно; изъ сравненія съ системою (**) видно, что одно изъ значеній α будетъ $\alpha = \alpha_0$.

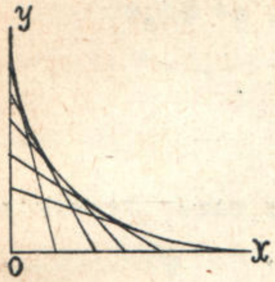
Итакъ, имѣемъ

$$\bar{Y}' = - \frac{f'_x(x_0, y_0, \alpha_0)}{f'_y(x_0, y_0, \alpha_0)} = y',$$

что и требовалось доказать.

Слѣдствіе. Если огибаемыя линіи суть прямыя, то онѣ образуютъ систему касательныхъ къ оберткѣ, такъ какъ касательныя къ прямымъ суть эти самыя прямыя.

Примѣръ. Найти кривую, для которой отрѣзокъ касательной, заключенный между осями координатъ, сохраняетъ постоянную длину, т.е. найти огибающую для системы прямыхъ (см. черт. 57):



Черт.57.

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1,$$

при условіи

$$\alpha^2 + \beta^2 = a^2 \text{ *)}.$$

Чтобы найти уравненіе обертки, нужно исключить параметры α и β изъ системы

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} - 1 = 0, \quad \alpha^2 + \beta^2 = a^2$$

$$-\frac{x}{\alpha^2} - \frac{y}{\beta^2}\cdot\frac{d\beta}{d\alpha} = 0.$$

Для опредѣленія $\frac{d\beta}{d\alpha}$ продифференцируемъ равенство

$$\alpha^2 + \beta^2 = a^2.$$

Имѣемъ

$$\alpha.d\alpha + \beta.d\beta = 0,$$

откуда

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = -\frac{\alpha}{\beta}.$$

Теперь послѣднее уравненіе системы можно представить въ такомъ видѣ

$$-\frac{x}{\alpha^2} + \frac{\alpha}{\beta^3}\cdot y = 0$$

---

*) *Мы могли бы выразить β черезъ α:*

$$\beta = \sqrt{a^2 - \alpha^2}$$

и внести въ уравненіе огибаемыхъ прямыхъ, тогда мы имѣли бы систему, зависящую отъ одного параметра α: но для упрощенія выкладокъ лучше сохранить оба параметра, только нужно β считать функціей отъ α.

или

$$\frac{x}{\alpha^3} = \frac{y}{\beta^3}.$$

Итакъ, уравненіе обвертки получится исключеніемъ α и β изъ системы

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{x}{\alpha} + \dfrac{y}{\beta} = 1, \quad \alpha^2 + \beta^2 = a^2 \\ \dfrac{x}{\alpha^3} = \dfrac{y}{\beta^3}. \end{array}\right.$$

Чтобы исключить α и β, поступаемъ такъ. Переписавъ уравненіе

$$\frac{x}{\alpha^3} = \frac{y}{\beta^3}$$

въ видѣ пропорціи

$$\frac{x/\alpha}{\alpha^2} = \frac{y/\beta}{\beta^2},$$

составимъ производную пропорцію

$$\frac{x/\alpha}{\alpha^2} = \frac{y/\beta}{\beta^2} = \frac{x/\alpha + y/\beta}{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{1}{a^2},$$

откуда

$$\frac{x}{\alpha^3} = \frac{y}{\beta^3} = \frac{1}{a^2}$$

и слѣдовательно

$$\alpha^3 = xa^2$$

$$\beta^3 = ya^2$$

$$\alpha^2 = (xa^2)^{2/3}$$

$$\beta^2 = (ya^2)^{2/3}.$$

Складывая, находимъ

$$a^2 = (xa^2)^{2/3} + (ya^2)^{2/3},$$

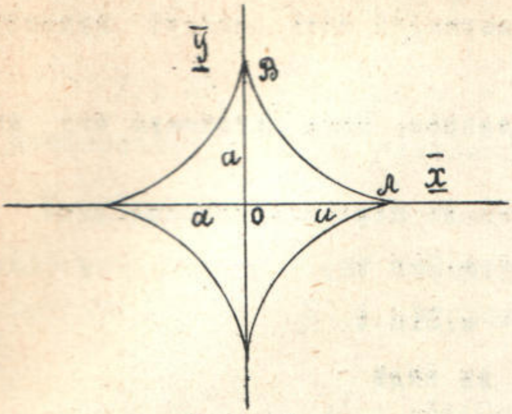
а сокращая на $a^{4/3}$, получимъ окончательно

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}.$$

Эта кривая называется *астроидой* и хотя напоминаетъ (черт. 58) эволюту эллипса, но не выводится какъ частный случай изъ ея уравненія, такъ какъ уравненіе эволюты эллипса теряетъ смыслъ при

$$a = b.$$

Теорема. Эволюта кривой представляетъ огибающую нормалей эвольвенты.



Черт.58.

Теорема эта слѣдуетъ уже изъ того, что нормали эвольвенты, какъ огибаемыя прямыя, образуютъ систему касательныхъ къ эволютѣ - обверткѣ этихъ нормалей, но мы выведемъ ее еще иначе. Докажемъ, что характеристическая точка нормали къ данной кривой есть центръ кривизны, тогда огибающая нормалей данной кривой будетъ общимъ мѣстомъ центровъ кривизны, т.е. согласно предыдущему § 6 - эволютой.

Мы знаемъ, что уравненіе нормали имѣетъ видъ

$$\bar{X} - x + y'(\bar{Y} - y) = 0;$$

это уравненіе системы прямыхъ, зависящихъ отъ параметра x и его функціи $y = f(x)$ (уравненіе эвольвенты).

Координаты характеристической точки опредѣляются двумя уравненіями

$$\left|\begin{array}{l} \bar{X} - x + y'(\bar{Y} - y) = 0 \\ -1 + y''(\bar{Y} - y) - y'^2 = 0, \end{array}\right.$$

изъ которыхъ второе выводится изъ перваго дифференцированіемъ по x, причемъ y и y' разсматриваются какъ функціи отъ x.

Изъ второго уравненія имѣемъ

$$\bar{Y} - y = \frac{1 + y'^2}{y''},$$

послѣ чего первое даетъ

$$\bar{X} - x = -\frac{(1 + y'^2)}{y''} \cdot y'.$$

Сравнивая съ формулами § 5 для выраженія координатъ центра кривизны, имѣемъ:

$$\bar{Y} - y = y_c - y;$$

$$\bar{X} - x = x_c - x,$$

откуда находимъ координаты характеристической точки

$$\bar{X} = x_c$$

$$\bar{Y} = y_c ,$$

т.е. характеристическая точка нормалей есть центръ кривизны, что и требовалось доказать.

Примѣръ 1. Найти эволюту эллипса, какъ огибающую его нормалей.

Пусть уравненіе эллипса дано въ параметрическомъ видѣ

$$\left| \begin{array}{l} x = a.\mathrm{Cos}\ t \\ y = a.\mathrm{Sin}\ t \end{array} \right.$$

Написавъ уравненіе нормали въ видѣ

$$(\bar{X} - x)dx + (\bar{Y} - y)dy = 0,$$

подставимъ въ него вмѣсто x и y его выраженіе въ функціи t; сокративъ на dt, будемъ имѣть

$$- (\bar{X} - a.\mathrm{Cos}\ t).a.\mathrm{Sin}\ t + (\bar{Y} - b.\mathrm{Sin}\ t).b.\mathrm{Cos}\ t = 0$$

или

$$- \bar{X}a.\mathrm{Sin}\ t + \bar{Y}b.\mathrm{Cos}\ t = - (a^2 - b^2).\mathrm{Sin}\ t.\mathrm{Cos}\ t \quad . \ . \ . \ (1).$$

Дифференцируя по параметру t, находимъ

$$- \bar{X}a.\mathrm{Cos}\ t - \bar{Y}b.\mathrm{Sin}\ t = - (a^2 - b^2)(\mathrm{Cos}^2 t - \mathrm{Sin}^2 t) \quad . \ . \ . \ (2).$$

Помножая (1) уравненіе на $\mathrm{Sin}\ t$, а (2) на $\mathrm{Cos}\ t$ и сложивъ, получимъ

$$- a\bar{X} = - (a^2 - b^2)\mathrm{Cos}^3 t ;$$

подобнымъ же образомъ найдемъ:

$$+ b\bar{Y} = - (a^2 - b^2)\mathrm{Sin}^3 t .$$

Отсюда имѣемъ совокупность уравненій эволюты

$$\bar{X} = \frac{a^2 - b^2}{a} \mathrm{Cos}^3 t .$$

$$\bar{Y} = - \frac{a^2 - b^2}{b} \mathrm{Sin}^3 t .$$

Этотъ результатъ найденъ былъ выше (§ 6, 1°) другимъ путемъ.

Примѣръ 2. Найти эволюту гиперболы, какъ огибающую ея нормалей.

Возьмемъ гиперболу въ видѣ

$$x = a.\mathrm{Ch}\,t$$

$$y = b.\mathrm{Sh}\,t$$

Уравненiе нормали будетъ

$$(\bar{X} - a.\mathrm{Ch}\,t)a.\mathrm{Sh}\,t + (\bar{Y} - b.\mathrm{Sh}\,t)b.\mathrm{Ch}\,t = 0$$

или

$$\bar{X}.a.\mathrm{Sh}\,t + \bar{Y}.b.\mathrm{Ch}\,t = (a^2 + b^2)\mathrm{Sh}\,t\,\mathrm{Ch}\,t \;.\;.\;.\;(1).$$

Дифференцируя по t, находимъ

$$\bar{X}.a.\mathrm{Ch}\,t + \bar{Y}.b.\mathrm{Sh}\,t = (a^2 + b^2)(\mathrm{Ch}^2 t + \mathrm{Sh}^2 t) \;.\;.\;.\;(2).$$

Изъ системы (1) - (2) опредѣляемъ $\bar{X}$ и $\bar{Y}$.

Умножая (1) на $-\mathrm{Sh}\,t$, второе (2) на $\mathrm{Ch}\,t$ и складывая, имѣемъ:

$$a\bar{X}(\mathrm{Ch}^2 t - \mathrm{Sh}^2 t) = (a^2 + b^2)(\mathrm{Ch}^3 t + \mathrm{Sh}^2 t\,\mathrm{Ch}\,t - \mathrm{Sh}^2 t\,\mathrm{Ch}\,t),$$

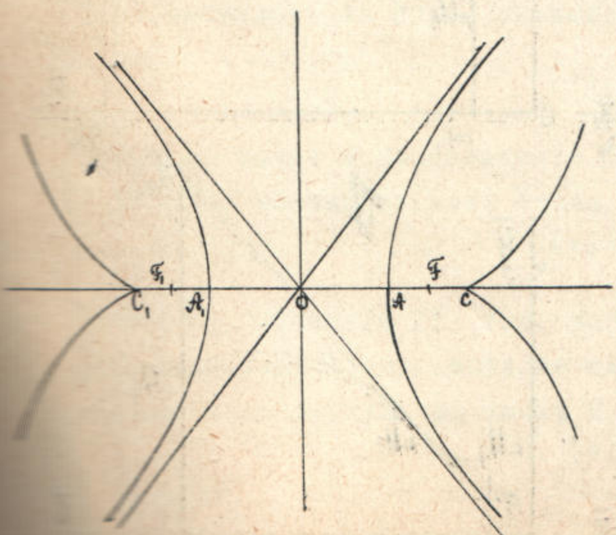
откуда

$$\bar{X} = \frac{a^2 + b^2}{a}\mathrm{Ch}^3 t\;;$$

Умножая (1) на $\mathrm{Ch}\,t$, (2) на $-\mathrm{Sh}\,t$ и складывая, находимъ:

$$b\bar{Y}(\mathrm{Ch}^2 t - \mathrm{Sh}^2 t) = (a^2 + b^2)(\mathrm{Sh}\,t\,\mathrm{Ch}^2 t - \mathrm{Sh}\,t\,\mathrm{Ch}^2 t - \mathrm{Sh}^3 t),$$

$$\bar{Y} = -\frac{a^2 + b^2}{b}\mathrm{Sh}^3 t\,.$$



Черт.59.

На основанiи тождества

$$\mathrm{Ch}^2 t - \mathrm{Sh}^2 t = 1$$

производимъ исключенiе t:

$$\left[\frac{a\bar{X}}{a^2 + b^2}\right]^{2/3} - \left[\frac{b\bar{Y}}{a^2 + b^2}\right]^{2/3} = 1.$$

Фигура эволюты гиперболы приведена на чертежѣ 59.

Отмѣтимъ, что отрѣзокъ OC представляетъ и при $t = 0$, так что

$$OC = \frac{a^2 + b^2}{a} = \frac{a^2 + b^2}{a^2}.a = ae^2,$$

абсцисса же фокуса

$$OF = ae,$$

и такъ какъ

$$e > 1,$$

то

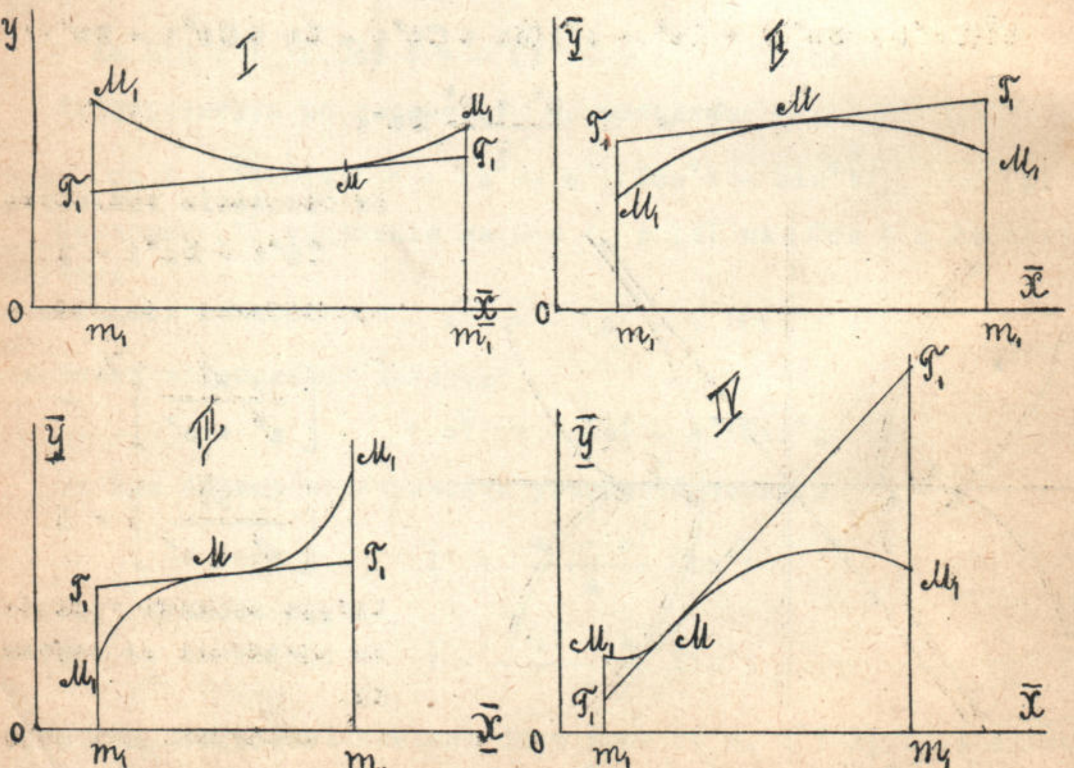
$$OC > OF,$$

т.е. C лежитъ правѣе фокуса F.

§ 8.

Направленіе вогнутости. Точки сплющенности и перегиба. Построеніе графиковъ въ простѣйшихъ случаяхъ.

Если въ данной точкѣ M(x, y) кривая имѣетъ одну касательную и вѣтви ея идутъ въ обѣ стороны отъ M, то возможны слѣдующія 4 расположенія кривой относительно касательной, которая не || оси Y-овъ (см. черт. 60). На I чертежѣ имѣемъ вогнутость въ



Черт.60.

точкѣ М, направленнную въ сторону положительныхъ Y-овъ, на черт. II - вогнутость, направленную въ сторону отрицательнныхъ Y-овъ; на черт. III имѣемъ въ точкѣ М восходящій перегибъ; на чертежѣ IV - нисходящій перегибъ.

Если обозначимъ отрѣзокъ

$$T_1M_1 = m_1M_1 - m_1T_1$$

черезъ δ, то можно написать:

$$\text{для I случая} \quad \delta > 0 \quad \text{при} \quad \Delta x \lessgtr 0 \quad \text{безразлично}$$

$$\text{" II "} \quad \delta < 0 \quad \text{"} \quad \Delta x \gtrless 0 \quad \text{"}$$

т.е. δ не мѣняетъ знакъ съ измѣненіемъ знака Δx;

$$\begin{array}{llll} \text{для III случая} & \delta < 0 & \text{при} & \Delta x < 0 \\ & \delta > 0 & \text{"} & \Delta x > 0 \\ \text{IV} \quad \text{"} & \delta > 0 & \text{"} & \Delta x < 0 \\ & \delta < 0 & \text{"} & \Delta x > 0, \end{array}$$

т.е. δ мѣняетъ знакъ вмѣстѣ съ Δx.

Теорема. Если въ данной точкѣ $M(x, y)$, гдѣ касательная не параллельна оси у-овъ, первая изъ производныхъ

$$y'', y''', y^{IV}, y^{V}, \ldots \ldots \ldots \quad (*)$$

не обращающаяся въ нуль, оказывается *четнаго* порядка: $y^{(2l)}$, то при

$$y^{(2l)} > 0$$

имѣемъ въ точкѣ М расположеніе I, т.е. вогнутость направлена въ сторону положительныхъ Y-овъ, и при

$$y^{(2l)} < 0$$

имѣемъ расположеніе II, т.е. вогнутость направлена въ сторону отрицательныхъ Y-овъ; если же первая изъ производныхъ (*), не обращающихся въ нуль въ точкѣ М, оказывается *нечетнаго* порядка

$$y^{(2l+1)},$$

то при $y^{(2l+1)} > 0$ имѣемъ восходящій перегибъ (расположеніе (III), а при $y^{(2l+1)} < 0$ - нисходящій перегибъ (расположеніе

IV). Въ частности, если въ данной точкѣ y'' не $= 0$, то при $y'' > 0$ вогнутость направлена въ сторону положительныхъ Y-овъ, при $y'' < 0$ – въ сторону отрицательныхъ Y-овъ.

Доказательство. Положимъ, что мы имѣемъ точку $M(x, y)$ и безконечно близкую къ ней точку кривой $M_1(x+\Delta x, y+\Delta y)$. Пусть точка касательной при абсциссѣ $x+\Delta x$ будетъ T_1; найдемъ ея ординату.

Имѣемъ уравненіе касательной

$$\bar{Y} - y = y'(\bar{X} - x).$$

Полагая

$$\bar{X} = x + \Delta x,$$

находимъ

$$y + y'\Delta x = \bar{Y}.$$

Итакъ, координаты точки T_1 будутъ $T_1(x+\Delta x, y+y'\Delta x)$.

Согласно нашимъ обозначеніямъ имѣемъ

$$\delta = (y + \Delta y) - (y + y'\Delta x) = \Delta y - y'\Delta x.$$

Напишемъ разложеніе Δy въ рядъ по формулѣ Тейлора съ дополнительнымъ членомъ въ формѣ Лагранжа:

$$\Delta y = \frac{\Delta x}{1} y' + \frac{\Delta x^2}{1.2} y'' + \frac{\Delta x^3}{1.2.3} y''' + \ldots + \frac{\Delta x^n}{1.2.3\ldots n} y^{(n)} + \frac{\Delta x^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)} y^{(n+1)}_{x+\theta\Delta x}$$

Отсюда

$$\delta = \frac{\Delta x^2}{1.2} y'' + \frac{\Delta x^3}{1.2.3} y''' + \ldots .$$

Если $y^{(2l)}$ первая, не обращающаяся въ нуль производная, то

$$\delta = \frac{\Delta x^{2l}}{1.2\ldots 2l} y^{(2l)} + \frac{\Delta x^{(2l+1)}}{1.2\ldots(2l+1)} y^{(2l+1)} + \ldots .$$

причемъ

$$n > 2.l.$$

При $|\Delta x|$ достаточно маломъ знакъ δ одинаковъ со знакомъ перваго члена разложенія, т.е. δ имѣетъ знакъ $y^{(2l)}$ при $\Delta x \gtrless 0$ и слѣдовательно, мы имѣемъ I распол. при $y^{(2l)} > 0$ и II расположеніе при $y^{(2l)} < 0$.

Если число $2l > 2$, то точка M называется точкой *сплющен* -

ности (point meplat).

Если $y^{(2l+1)}$ перная не = 0, то имѣемъ

$$\delta = \frac{\Delta x^{2l+1}}{1.2\ldots(2l+1)}\, y^{(2l+1)} + \frac{\Delta x^{(2l+2)}}{1.2\ldots(2l+2)}\, y^{(2l+2)} + \ldots.$$

причемъ

$$n > 2l + 1;$$

при $|\Delta x|$ достаточно маломъ знакъ δ одинаковъ со знакомъ перваго члена, т.е. при $\Delta x < 0$ δ имѣетъ знакъ обратный $y^{(2l+1)}$, при $\Delta x > 0$ δ имѣетъ знакъ одинаковый съ $y^{(2l+1)}$; поэтому, если $y^{(2l+1)} > 0$, то мы имѣемъ расположенie III; если $y^{(2l+1)} < 0$ - расположенie IV.

Слѣдствiе. Для нахожденiя точекъ перегиба данной кривой слѣдуетъ рѣшить уравненie

$$y'' = f''(x) = 0$$

и отобрать лишь тѣ корни, при переходѣ черезъ которые y'' мѣняетъ знакъ; эти корни и дадутъ абсциссы точекъ перегиба (изгиба).

Доказательство. Разложимъ $\Delta y''$ въ рядъ по формулѣ Тейлора съ дополнительнымъ членомъ. Имѣемъ:

$$\Delta y'' = \frac{\Delta x}{1}\, y^{(''')} + \frac{\Delta x^2}{1.2}\, y^{(IV)} + \ldots + \frac{\Delta x^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)}\, y^{(n+3)}_{x+\theta\Delta x},$$

гдѣ

$$0 < \theta < 1.$$

Въ точкѣ $M(x, y)$ по предыдущей теоремѣ имѣемъ перегибъ, если первая не равная нулю производная будетъ $y^{(2l+1)}$, тогда

$$\Delta y'' = \frac{\Delta x^{2l-1}}{1.2\ldots(2l-1)}\, y^{(2l+1)} + \frac{\Delta x^{2l}}{1.2\ldots 2l}\, y^{(2l+2)} + \ldots.$$

Изъ этого разложенiя слѣдуетъ, что $\Delta y''$ мѣняетъ знакъ при перемѣнѣ знака Δx, именно $\Delta y''$ мѣняетъ знакъ съ - на + при восходящемъ перегибѣ (такъ какъ тогда $y^{(2l+1)} > 0$ и $\Delta y''$ мѣняетъ знакъ съ + на - при нисходящемъ перегибѣ (такъ какъ тогда $y^{(2l+1)} < 0$).

Остается добавить, что

$$\Delta y'' = y''(x+\Delta x) - y''(x),$$

и такъ какъ $y''(x) = 0$, то

$$\Delta y'' = y''(x+\Delta x).$$

Такимъ образомъ при переходѣ черезъ точку перегиба $y'' = f''(x)$ мѣняетъ свой знакъ.

Примѣръ 1. $y = x^5$.

Составимъ производныя

$$y' = 5x^4$$

$$y'' = 20x^3,$$

$y''' = 60x^2$

$y^{IV} = 120x$

$y^{V} = 120$

$y^{VI} = 0$

находимъ изъ уравненія

$$y'' = 0$$

абсциссу точки перегиба

$$x = 0.$$

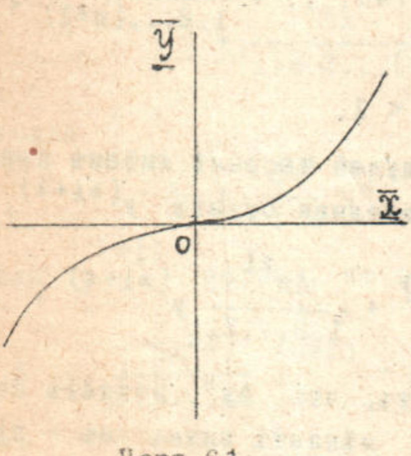
Ордината найдется изъ уравненія кривой:

$$y = 0.$$

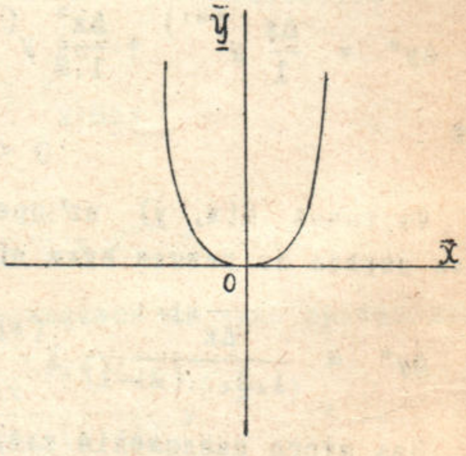
Въ точкѣ (0,0) имѣемъ перегибъ, такъ какъ при $x = 0$ первая производная, не обращающаяся въ нуль, будетъ нечетнаго порядка

$$y^{(5)} = A > 0.$$

Въ то же время $x = 0$ есть корень 3-го порядка функціи y'',



Черт.61.



Черт.62.

слѣдовательно, y'' мѣняетъ знакъ при переходѣ черезъ 0. Такъ какъ y'' мѣняетъ знакъ съ − на +, то мы имѣемъ восходящій перегибъ (см. черт. 61).

Примѣръ 2. $y = x^6$.

Имѣемъ (см. черт. 62):

$$y' = 6x^5$$

$$y'' = 30x^4 \ .$$

Вторая производная $y'' = 0$ при $x = 0$, но знака не мѣняетъ; слѣдовательно, перегиба нѣтъ, имѣемъ точку сплющенности (такъ какъ $y^{(6)}$ первая не обращается въ 0 и $21 > 2$).

Замѣчаніе 1. Въ точкахъ перегиба y'' можетъ мѣнять знакъ, обращаясь не въ нуль, а въ безконечность.

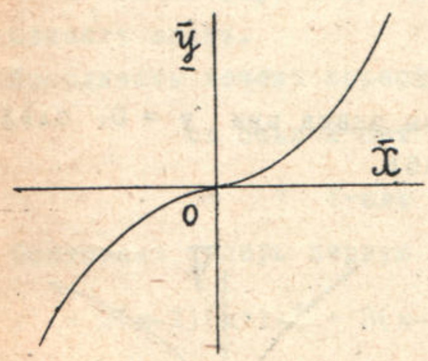
Примѣръ 3. $y = x^{5/3}$.

Находимъ

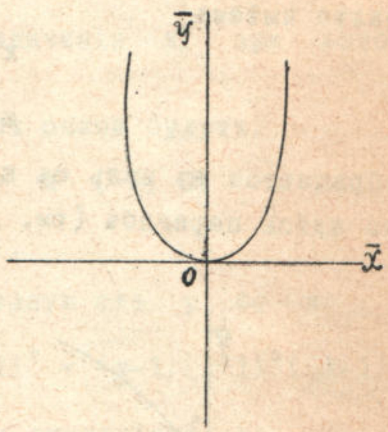
$$y' = \frac{5}{3}\, x^{2/3}$$

$$y'' = \frac{10}{9}\, x^{-1/3} \ .$$

При $x = 0$ y'' обращается въ безконечность съ перемѣной знака - получается восходящій перегибъ (см. черт. 63).



Черт.63.



Черт.64.

Примѣръ 4.

$$y = x^{4/3} \ .$$

Здѣсь

$$y' = \frac{4}{3}\, x^{1/3}$$

$$y'' = \frac{4}{9}\, x^{-2/3}$$

и y'' при $x = 0$ обращается въ безконечность, но безъ перемѣны знака - перегиба нѣтъ (см. черт. 64).

Замѣчаніе 2. Въ случаѣ, если въ точкѣ M касательная || оси Y-овъ, т.е. $y' = \infty$, то можно разсматривать x, какъ функцію y и такъ какъ при $y' = \infty$ оказывается

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y'} = 0,$$

то можно примѣнять предыдущія правила; такъ, для нахожденія точекъ перегиба, нужно взять тѣ корни уравненія

$$\frac{d^2x}{dy^2} = x''_{yy} = 0,$$

при переходѣ черезъ которые x'' мѣняетъ знакъ.

Примѣръ 5. $y = x^{1/3}$; первая производная

$$y' = \tfrac{1}{3}\, x^{-2/3}$$

при $x = 0$ обращается въ безконечность. Согласно замѣчанію 2-му рѣшаемъ предложенное уравненіе относительно x:

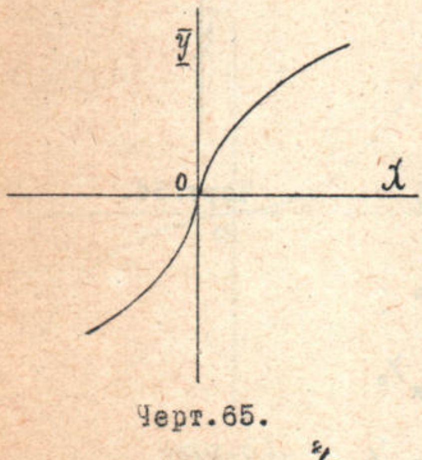
$$x = y^3.$$

Далѣе имѣемъ

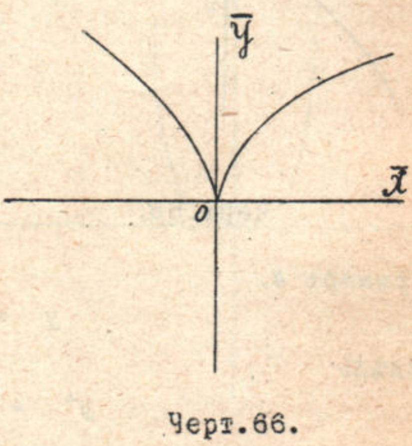
$$x' = 3y^2$$

$$x'' = 6y.$$

x'' обращается въ нуль съ перемѣною знака при $y = 0$, слѣдовательно здѣсь перегибъ (см. черт. 65).



Черт.65.



Черт.66.

Примѣръ 6. $y = x^{2/3}$.

Такъ какъ производная

$$y' = \tfrac{2}{3}\, x^{-1/3}.$$

при $x = 0$ обращается въ безконечность, то рѣшаемъ уравненіе относительно x:

$$x = y^{3/2}.$$

находимъ производныя x по y:

$$x' = \frac{3}{2} y^{1/2}$$

$$x'' = \frac{3}{4} y^{-1/2};$$

x'' обращается въ ∞ при $y = 0$ безъ перемѣны знака (см. зам. 1), слѣдовательно перегиба нѣтъ. Кривая имѣетъ слѣдующій видъ (см. черт. 66).

Разсмотримъ теперь два примѣра на построеніе графиковъ кривыхъ, заданныхъ уравненіями вида $y = f(x)$.

Примѣръ 1. Кривая задана уравненіемъ

$$y = (x-1)^2(x+1)^3.$$

Найти: 1° точки пересѣченія съ осями

2° вершины кривой, т.е. тѣ точки, гдѣ y' обращается въ 0 съ перемѣною знака.

3° точки перегиба, т.е. тѣ значенія x, при которыхъ y'' мѣняетъ знакъ.

Координаты точекъ пересѣченія съ осями будутъ:

съ осью X-овъ $(1, 0)$ и $(-1, 0)$

" " Y-овъ $(0, 1)$.

Составимъ теперь первую производную отъ y по x:

$$y' = 2(x-1)(x+1)^3 + 3(x-1)^2(x+1)^2 = (x-1)(x+1)^2(5x-1);$$

y' обращается въ 0 при слѣдующихъ значеніяхъ x:

1) $x = -1$,

причемъ y' не мѣняетъ знака и, слѣдовательно, y не будетъ ни maximum ни minimum:

2) $x = \frac{1}{5}$

при этомъ значеніи x производная y' мѣняетъ знакъ съ + на - и y достигаетъ max. $y = 1,1$;

3) $x = +1$

y' мѣняетъ знакъ съ - на + и y достигаетъ min. $y = 0$.

Чтобы найти точки перегиба, составляемъ

$$y'' = (x+1)^2(5x-1) + 2(x-1)(x+1)(5x-1) + 5(x-1)(x+1)^2 =$$

$$= (x+1).[(x+1)(5x-1) + 2(x-1)(5x-1) + 5(x-1)(x+1)] =$$

$$= (x+1)(20x^2-3x-4) = 4(x+1)(5x^2-2x-1) \equiv$$

$$\equiv 20(x+1)(x-0,69)(x+0,29),$$

гдѣ знакъ $\equiv$ означаетъ приближенное равенство.

Имѣемъ, слѣдовательно, въ точкахъ съ абсциссами:

$x = -1$ восходящій перегибъ

$x = -0,29$ нисходящій перегибъ.

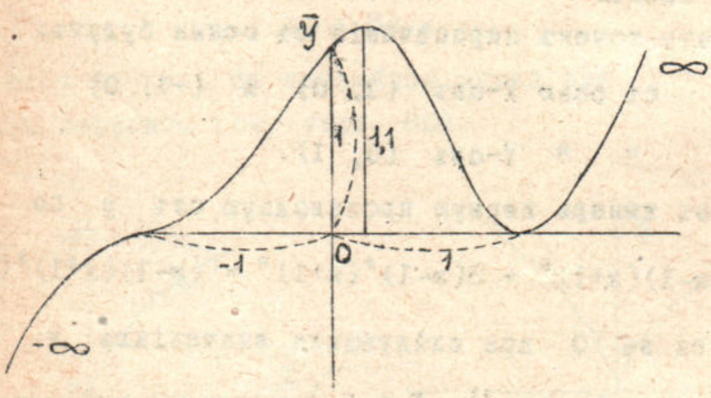
$x = 0,69$ восходящій перегибъ.

Ходъ измѣненія y, какъ функціи отъ x, будетъ:

x:	$-\infty$	-1	0	$^1/_5$	1	$+\infty$
y:	$-\infty$	0	1	max.$=1,1$	min.$=0$	$+\infty$

ф-ія растетъ ф-ія убываетъ ф-ія растетъ.

Геометрически это представляется такъ (см. черт. 67).



Черт.67.

Примѣръ 2. $y = \mathrm{Sin}^4x + \mathrm{Cos}^4x$.

Эта кривая не пересѣкаетъ ось X-овъ, такъ какъ постоянно

$$y > 0.$$

Ось Y-овъ она пересѣкаетъ въ точкѣ (0,1), такъ при $x = 0$

$$y = 1.$$

Составимъ производную отъ y.

$$y' = 4\mathrm{Sin}^3x.\mathrm{Cos}x - 4\mathrm{Cos}^3x.\mathrm{Sin}x = 4\mathrm{Sin}x.\mathrm{Cos}x(\mathrm{Cos}^2x-\mathrm{Sin}^2x) =$$

$$= -2.\mathrm{Sin}\,2x.\mathrm{Cos}\,2x = -\mathrm{Sin}\,4x.$$

такъ какъ y имѣетъ періодъ $^\pi/_2$, то достаточно разо -

брать промежутокъ

$$0 \leq x \leq \pi/2 .$$

Производная $y' = 0$ при значеніяхъ x:

1) при $x = 0$,

когда она мѣняетъ знакъ съ + на - ; функція y достигаетъ при этомъ

$$\max.\ y = 1.$$

2) при $x = \pi/4$,

производная y' мѣняетъ знакъ съ - на + ; y достигаетъ

$$\min.\ y = 1/2 ;$$

3) при $x = \pi/2$

производная, обращаясь въ 0, мѣняетъ знакъ съ + на - , и y достигаетъ опять

$$\max.\ y = 1.$$

Итакъ, ходъ измѣненія y будетъ

$$x:\quad 0 \qquad \pi/4 \qquad \pi/2$$

$$y:\quad \underbrace{\max.=1;\ \min.}_{\textit{ф-ія убываетъ}}=\underbrace{1/2;\ \max.=1}_{\textit{ф-ія возрастаетъ}}$$

Находимъ вторую производную:

$$y'' = -\,4\cos 4x.$$

Въ промежуткѣ

$$0 \leq x \leq \pi/2$$

y'' обращается въ 0 при

$$x = \pi/8 \quad \text{и} \quad x = 3\pi/8 ,$$

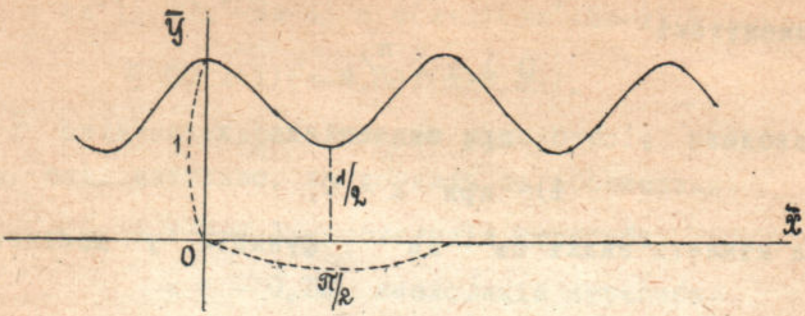
измѣняя знакъ съ - на + въ точкѣ

$x = \pi/8$ (восходящій перегибъ)

и мѣняя знакъ съ + на - въ точкѣ

$x = 3\pi/8$ (нисходящій перегибъ)

Геометрически ходъ измѣненія функціи представляется въ видѣ (см. черт. 68).



Черт.68.

Займемся теперь разысканіемъ точекъ перегиба для кривой, заданной нерѣшеннымъ уравненіемъ

$$f(x, y) = 0,$$

причемъ ограничимся только тѣмъ случаемъ, когда уравненіе $f(x, y) = 0$ изображаетъ *алгебраическую* кривую, т.е. когда лѣвая часть $f(x,y) = 0$ есть многочленъ, зависящій отъ x и y.

Мы видѣли, что въ точкѣ перегиба оказывается

$$y'' = 0,$$

если y' конечна (касательная не ||-на оси Y-овъ), т.е. если f'_y не $= 0$, такъ какъ

$$y' = -\frac{f'_x}{f'_y};$$

если же $f'_y = 0$, т.е. касательная ||-на оси Y-овъ, то точка перегиба опредѣлялась у насъ условіемъ:

$$x'' = 0,$$

причемъ f'_x уже было не равно 0 (иначе бы f'_x и f'_y одновременно были нулями, и мы имѣли бы особенную точку, чего мы здѣсь не предполагаемъ).

Значеніе y'' опредѣляется уравненіемъ

$$f''_{xx} + 2f''_{xy} \cdot y' + f''_{yy} \cdot y'^2 + f'_y \cdot y'' = 0,$$

полученнымъ изъ $f(x, y) = 0$ двукратнымъ дифференцированіемъ по x; внося сюда

$$y' = -\frac{f'_x}{f'_y}$$

и умножая на f'^2_y - не равное 0, находимъ

$$f''_{xx} \cdot f'^2_y - 2f''_{xy} \cdot f'_x \cdot f'_y + f''_{yy} \cdot f'^2_x + f'^3_y \cdot y'' = 0,$$

и если

$$y'' = 0,$$

то уравненіе принимаетъ видъ:

$$D = f''_{xx} \cdot f'^2_y - 2f''_{xy} \cdot f'_x \cdot f'_y + f''_{yy} \cdot f'^2_x = 0.$$

Во второмъ случаѣ, когда опредѣляются точки перегиба, полагая

$$x'' = 0,$$

мы дважды дифференцируемъ уравненіе $f(x, y) = 0$ по y и получаемъ:

$$f''_{yy} + 2f''_{yx} \cdot x' + f''_{xx} \cdot x'^2 + x'' \cdot f'_x = 0$$

или, вводя

$$x' = -\frac{f'_y}{f'_x}$$

и умножая на f'^2_x, не равное 0, находимъ

$$f''_{yy} \cdot f'^2_x - 2f''_{xy} \cdot f'_x \cdot f'_y + f''_{xx} \cdot f'^2_y + x'' \cdot f'^3_x = 0,$$

что при

$$x'' = 0$$

даетъ намъ опять

$$D = f''_{yy} \cdot f'^2_x - 2f''_{xy} \cdot f'_x \cdot f'_y + f''_{xx} \cdot f'^2_y = 0.$$

Итакъ, въ обоихъ случаяхъ безразлично, точки перегиба удовлетворяютъ уравненіямъ

$$f = 0$$

$$D = 0$$

или, можно сказать, лежатъ на пересѣченіи двухъ кривыхъ

$f = 0$ порядка m-го

$D = 0$ порядка $3m-4$-го,

такъ какъ при f степени m-ой оказывается

f'_x, f'_y степени $(m-1)$-ой,

f''_{xx}, f''_{xy}, f''_{yy} степени $(m-2)$-ой.

Замѣтимъ, что среди этихъ точекъ пересѣченія находятся также особенныя точки кривой $f = 0$, такъ какъ для нихъ

$$f'_x = f'_y = 0,$$

слѣдовательно

$$D = 0.$$

Теперь мы покажемъ, что систему

$$f = 0$$

$$D = 0$$

можно замѣнить другою, ей равносильною, причемъ второе уравненіе будетъ уже не степени $3m-4$, а $3m-6$.

Для этой цѣли сдѣлаемъ сперва уравненіе $f(x,y) = 0$ однороднымъ, замѣнивъ x и y на $^x/z$ и $^y/z$ и умноживъ затѣмъ уравненіе на z^m; положимъ тогда

$$z^m . f\left[\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right] = F(x, y, z).$$

Отсюда

$$z^{m-1} . f'_{\frac{x}{z}}\left[\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right] = F'_x(x, y, z)$$

$$z^{m-2} . f''_{\frac{xx}{zz}}\left[\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right] = f''_{xx}(x, y, z)$$

(подобныя же равенства для производныхъ по y), но если положить $z = 1$, то получится

$$f(x, y) = F(x, y, z)_{z=1}$$

$$f'_x(x, y) = F'_x(x, y, z)_{z=1}$$

$$f''_{xx}(x, y) = F''_{xx}(x, y, z)_{z=1} \quad \text{и т.д.}$$

Отмѣтимъ еще, что такъ какъ $F(x,y,z)$ однородная функція степени m-ой, а ея первыя производныя - однородныя степени $(m-1)$-ой, то теорема Эйлера даетъ намъ:

$$x.F'_x + y.F'_y + z.F'_z = mF \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (1)$$

$$x.F''_{xx} + y.F''_{xy} + z.F''_{xz} = (m-1)F'_x \quad . \ . \ . \ . \ (2)$$

$$x.F''_{xy} + y.F''_{yy} + z.F''_{yz} = (m-1)F'_y \quad . \ . \ . \ . \ (3)$$

$$x.F''_{xz} + y.F''_{yz} + z.F''_{zz} = (m-1)F'_z \quad . \ . \ . \ . \ . \ (4).$$

Теперь мы представимъ функцію D опредѣлителемъ

$$- D = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f'_x \\ f''_{xy} & f''_{yy} & f'_y \\ f'_x & f'_y & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} & F'_x \\ F''_{xy} & F''_{yy} & F'_y \\ F'_x & F'_y & 0 \end{vmatrix}_{z=1}$$

и подвергнемъ этотъ опредѣлитель послѣдовательнымъ преобразованіямъ на основаніи того свойства, что опредѣлитель не мѣняется, если къ элементамъ какого-нибудь столбца (строки) прибавить соотвѣтственные элементы другихъ столбцовъ (строкъ), умноженные на произвольные постоянные множители. Итакъ имѣемъ:

$$-(m-1).D = \begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} & (m-1)F'_x - x.F''_{xx} - y.F''_{xy} \\ F''_{xy} & F''_{yy} & (m-1)F'_y - x.F''_{xy} - y.F''_{yy} \\ F'_x & F'_y & - x.F'_x - y.F'_y \end{vmatrix}_{z=1}$$

и въ силу уравненій (2), (3), (4) (при $z = 1$)

$$-(m-1).D = \begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} & F''_{xz} \\ F''_{xy} & F''_{yy} & F''_{yz} \\ F'_x & F'_y & F'_z - m.F \end{vmatrix}_{z=1}$$

Далѣе

$$-(m-1)^2 D = \begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} & F''_{xz} \\ F''_{xy} & F''_{yy} & F''_{yz} \\ \begin{matrix}(m-1)F'_x - \\ - x.F''_{xx} - \\ - y.F''_{xy}\end{matrix} , & \begin{matrix}(m-1)F'_x - \\ - x.F''_{xy} - \\ - y.F''_{yy}\end{matrix} , & \begin{matrix}(m-1)F'_z - x.F''_{xz} - \\ - y.F''_{yz} - \\ - m(m-1)F\end{matrix} \end{vmatrix}$$

и на основаніи (2), (3), (4):

$$-(m-1)^2 D = \begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} & F''_{xz} \\ F''_{xy} & F''_{yy} & F''_{yz} \\ F''_{xz} & F''_{yz} & F''_{zz} - m(m-1)F \end{vmatrix}_{z=1}$$

Теперь мы видимъ, что система уравненій

$$F(x, y, z) = 0$$

$$\Gamma = 0$$

равносильна системѣ

$$F(x, y, z)_{z=1} = 0$$

и

$$H = \begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} & F''_{xz} \\ F''_{xy} & F''_{yy} & F''_{yz} \\ F''_{xz} & F''_{yz} & F''_{zz} \end{vmatrix}_{z=1} = 0.$$

Послѣдняя функція $H(x,y,z)_{z=1}$ называется *Гессіаной* (Hessienne) алгебраической кривой

$$f(x,y) = F(x,y,z)_{z=1} = 0$$

(въ честь Hesse, который ввелъ ее въ употребленіе) и будетъ порядка $3m-6$ (такъ какъ F''_{xx} и проч. всѣ $m-2$-ой степени относительно x, y, z).

Итакъ, мы можемъ установить слѣдующую теорему:

Теорема. Для алгебраической кривой m-го порядка

$$f(x,y) = F(x,y,z)_{z=1} = 0$$

точки перегиба ея (а также и особенныя точки) находятся среди точекъ пересѣченія этой кривой съ ея Гессіаной

$$H(x,y,z)_{z=1} = 0,$$

которая представляетъ алгебраическую кривую порядка $3m-6$.

Изъ этой теоремы очевидно, что алгебраическая кривая порядка m-го не можетъ имѣть болѣе $m(3m-6)$ точекъ перегиба, если она не имѣетъ особенныхъ точекъ.

Примѣръ. Найти точки перегиба кривой

$$x^3 + y^3 - 3x^2 = 0.$$

Здѣсь

$$F(x,y,z) = x^3 + y^3 - 3x^2z$$

$$F''_{xx} = 6x - 6z, \quad F''_{xy} = 0, \quad F''_{yy} = 6y,$$

$$F''_{xz} = -6x, \quad F''_{yz} = 0, \quad F''_{zz} = 0.$$

Гессіана имѣетъ видъ:

$$\begin{vmatrix} 6(x-1) & 0 & -6x \\ 0 & 6y & 0 \\ -6x & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} 6(x-1) & 0 \\ 0 & =6y \\ -6x & 0 \end{matrix} - 216x^2y = 0,$$

откуда $x = 0$ или $y = 0$. Подставляя $x = 0$ въ уравненіе кривой, находимъ $y = 0$, но это есть особенная точка, такъ какъ въ ней одновременно

$$f'_x = 3x^2 - 6x = 0,$$

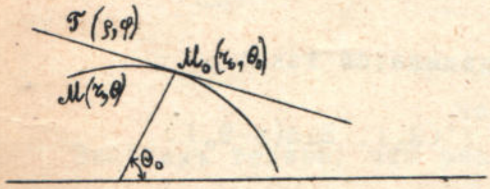
$$f'_y = 3y^2 = 0.$$

Подставляя въ уравненіе кривой $y = 0$, находимъ

$$x^3 - 3x^2 = 0,$$

откуда или $x = 0$ или $x = 3$. Точка $(3,0)$ представляетъ единственную точку перегиба данной кривой.

Въ заключеніе этого §-а мы разсмотримъ вопросъ о направленіи вогнутости и точкахъ перегиба въ полярныхъ координатахъ.



Черт. 69.

Пусть (см. черт. 69): r, θ - полярные координаты точекъ кривой MM_0; ρ, φ - полярные координаты точекъ касательной TM_0; r_0, θ_0 - полярные координаты точки касанія.

Выведемъ уравненіе касательной TM_0 въ полярныхъ координатахъ.

Въ прямоугольныхъ координатахъ уравненіе TM_0 будетъ:

$$\bar{Y} - y_0 = \operatorname{tg} \alpha \, (\bar{X} - x_0),$$

но

$$\bar{X} = \rho . \operatorname{Cos}\varphi, \quad \bar{Y} = \rho . \operatorname{Sin}\varphi, \quad x_0 = r_0 \operatorname{Cos}\theta_0, \quad y_0 = r_0 \operatorname{Sin}\theta_0$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy_0}{dx_0} = \frac{r_0 \operatorname{Cos}\theta_0 + r'_0 \operatorname{Sin}\theta_0}{-r_0 \operatorname{Sin}\theta_0 + r'_0 \operatorname{Cos}\theta_0},$$

гдѣ

$$r_0' = \left(\frac{dr}{d\theta}\right)_{\theta=\theta_0}$$

Вносявэти величины въ уравненіе касательной и освобождаясь отъ знаменателя, находимъ:

$$(\rho.\mathrm{Sin}\varphi - r_0\mathrm{Sin}\theta_0).(r_0'\mathrm{Cos}\theta_0 - r_0\mathrm{Sin}\theta_0) =$$
$$= (r_0'\mathrm{Sin}\theta_0 + r_0\mathrm{Cos}\theta_0).(\rho.\mathrm{Cos}\varphi - r_0\mathrm{Cos}\theta_0)\ ;$$

выполняемъ умноженіе:

$$\rho.r_0'\mathrm{Sin}\varphi.\mathrm{Cos}\theta_0 - r_0r_0'\mathrm{Sin}\theta_0.\mathrm{Cos}\theta_0 - \rho.r_0\mathrm{Sin}\varphi.\mathrm{Sin}\theta_0 +$$
$$+ r_0^2\mathrm{Sin}^2\theta_0 = \rho.r_0'\mathrm{Sin}\theta_0.\mathrm{Cos}\varphi - r_0r_0'\mathrm{Sin}\theta_0.\mathrm{Cos}\theta_0 +$$
$$+ \rho.r_0\mathrm{Cos}\varphi.\mathrm{Cos}\theta_0 - r_0^2\mathrm{Cos}^2\theta_0\ ;$$

сокращая и собирая подобные члены, получаемъ:

$$\rho.r_0\mathrm{Cos}(\varphi-\theta_0) - \rho.r_0'\mathrm{Sin}(\varphi-\theta_0) = r_0^2$$

или

$$\frac{1}{r_0}.\mathrm{Cos}(\varphi-\theta_0) + \left[\frac{1}{r_0}\right]'.\mathrm{Sin}(\varphi-\theta_0) = \frac{1}{\rho}.$$

Если уравненіе кривой MM_0 имѣетъ форму

$$\frac{1}{r} = f(\theta),$$

то уравненіе касательной TM_0 напишется такъ:

$$\frac{1}{\rho} = f(\theta_0).\mathrm{Cos}(\varphi-\theta_0) + f'(\theta_0).\mathrm{Sin}(\varphi-\theta_0).$$

Предполагая, что касательная въ данной точкѣ (r_0, θ_0) не проходитъ черезъ полюсъ, мы имѣемъ 4 различныхъ случая расположенія кривой относительно касательной (черт.70).

Въ (I) случаѣ кривая обращена вогнутостью къ полюсу, во (II) - отъ полюса; въ (III) и (IV) - въ точкѣ M_0 кривая имѣетъ перегибъ. Чтобы аналитически отличить эти случаи будемъ разсматривать разность

$$OT - OM = \rho - r = \delta$$

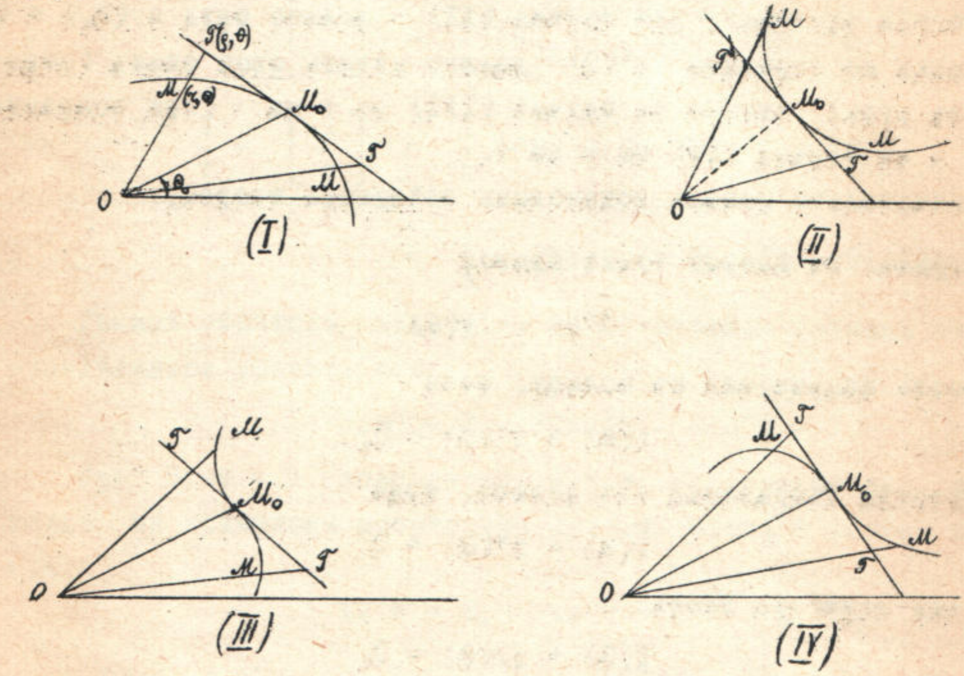
между радіусами векторами точекъ касательной и кривой, отвѣчающихъ полярному углу

$$\theta = \theta_0 + \Delta\theta_0.$$

Въ (I) случаѣ при $\Delta\theta_0 \gtrless 0$ число $\delta > 0$ и при $\Delta\theta_0 = 0$ число $\delta = 0$, слѣдовательно δ достигаетъ minimum'a при $\theta = \theta_0$.

Во (II) случаѣ при $\Delta\theta_0 \gtrless 0$ число $\delta > 0$ и при $\Delta\theta_0 = 0$ число $\delta = 0$, слѣдовательно δ достигаетъ maximum'a при $\theta = \theta_0$.

Въ (III) и (IV) случаяхъ δ мѣняетъ знакъ съ измѣненіемъ знака $\Delta\theta_0$ и не имѣетъ при $\theta = \theta_0$ ни maximum'a, ни minimum'a.



Черт.70.

Замѣтимъ теперь, что разность

$$z(\theta) = \frac{1}{r} - \frac{1}{\rho} = \frac{\rho - r}{\rho . r} = f(\theta) - f(\theta_0).\mathrm{Cos}(\theta-\theta_0) - f'(\theta_0).\mathrm{Sin}(\theta-\theta_0)$$

будетъ имѣть знакъ одинаковый съ $\rho - r$ (такъ какъ ρ и r положит.) и вмѣстѣ съ $\rho - r$ обращается въ нуль. Поэтому мы можемъ сказать, что въ случаѣ (I) $z(\theta)$ достигаетъ minimum'a, а въ случаѣ (II) - maximum'a при $\theta = \theta_0$. Составимъ же производныя

$$z'(\theta) = f'(\theta) + f(\theta_0).\mathrm{Sin}(\theta-\theta_0) - f'(\theta_0).\mathrm{Cos}(\theta-\theta_0)$$

$$z''(\theta) = f''(\theta) + f(\theta_0).\mathrm{Cos}(\theta-\theta_0) + f'(\theta_0).\mathrm{Sin}(\theta-\theta_0).$$

При $\theta = \theta_0$ находимъ

$$z'(\theta_0) = 0$$

$$z''(\theta_0) = f''(\theta_0) + f(\theta_0) = \frac{1}{r_0} + \left[\frac{1}{r_0}\right]''.$$

Итакъ оказывается, что для случая (I) должно быть $z''(\theta_0) > > 0$ (тогда minimum), для случая (II) - должно быть $z(\theta_0) < 0$. Въ точкахъ же перегиба $z''(\theta)$ должно мѣнять свой знакъ (обращаясь въ нуль), именно въ случаѣ (III) съ + на - (при возрастаніи θ) и въ случаѣ (IV) съ - на +.

Окончательно можемъ установить слѣдующую теорему:

Теорема. Въ данной точкѣ кривой

$$1/r = f(\theta)$$

вогнутость направлена къ полюсу, если

$$f(\theta) + f''(\theta) > 0,$$

и вогнутость направлена отъ полюса, если

$$f(\theta) + f''(\theta) < 0.$$

Точки перегиба даютъ

$$f(\theta) + f''(\theta) = 0,$$

причемъ лѣвая часть должна мѣнять знакъ при переходѣ черезъ 0.

Замѣчаніе. Такъ какъ имѣемъ

$$\frac{1}{r} + \left[\frac{1}{r}\right]'' = \frac{1}{r} + \frac{2r'^2}{r^3} - \frac{r''}{r^2} = \frac{1}{r^3}\left[r^2 + 2r'^2 - rr''\right]$$

и

$$r^3 > 0,$$

то вопросъ о направленіи вогнутости можно рѣшить по знаку выраженія

$$r^2 + 2r'^2 - rr''.$$

Точно также точки перегиба отвѣчаютъ корнямъ нечетной кратности уравненія

$$r^2 + 2r'^2 - rr'' = 0.$$

Примѣръ. Найти точки перегиба кривой

$$r = \frac{a}{\operatorname{Sin}^3\theta}.$$

Имѣемъ

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a}\,.\,\operatorname{Sin}^3\theta,$$

$$\left[\frac{1}{r}\right]' = \frac{1}{a}\,.\,3\operatorname{Sin}^2\theta.\operatorname{Cos}\theta,$$

$$\left[\frac{1}{r}\right]'' = \frac{1}{a}\,(6\operatorname{Sin}\theta.\operatorname{Cos}^2\theta - 3\operatorname{Sin}^3\theta),$$

$$\frac{1}{r} + \left[\frac{1}{r}\right]'' = \frac{1}{a}\,(6\operatorname{Sin}\theta.\operatorname{Cos}^2\theta - 2\operatorname{Sin}^3\theta) =$$

$$= \frac{1}{a}\;2\operatorname{Sin}\theta\,.\,(3\operatorname{Cos}^2\theta - \operatorname{Sin}^2\theta).$$

Такимъ образомъ, значенія θ, отвѣчающія точкамъ перегиба, опредѣляются уравненіями:

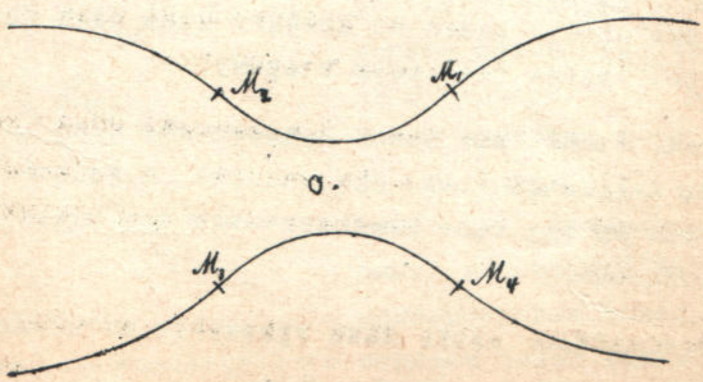
$$\operatorname{Sin}\theta = 0, \quad 3\operatorname{Cos}^2\theta - \operatorname{Sin}^2\theta = 0.$$

При $\operatorname{Sin}\theta = 0$ получается $r = \infty$ - безконечно далекая точка; на конечномъ разстояніи кривая имѣетъ 4 точки перегиба при

$$\operatorname{tg}^2\theta = 3, \quad \operatorname{tg}\theta = \pm\sqrt{3},$$

$$\theta = \pi/_3, \quad 2\pi/_3, \quad 4\pi/_3, \quad 5\pi/_3$$

(точки M_1, M_2, M_3, M_4 на чертежѣ 71).



Черт.71.

§ 9.

Особенныя точки плоскихъ кривыхъ.

а) Алгебраическія кривыя.

Алгебраической кривой называется такая кривая, уравненіе которой можно привести къ виду

$$f(x,y) = 0,$$

гдѣ лѣвая часть представляетъ многочленъ, зависящій отъ x и y.

Точки алгебраической кривой бываютъ *простыя* (или обыкновенныя) и *кратныя* (или особенныя). Различіе между ними мы установимъ слѣдующимъ опредѣленіемъ.

Опредѣленіе. Въ обыкновенной точкѣ (x, y) алгебраической кривой $f(x,y) = 0$ по крайней мѣрѣ одна изъ частныхъ производныхъ

$$f'_x\ ,\quad f'_y$$

не равна нулю; напротивъ, въ особенной точкѣ обѣ производныя f'_x, f'_y одновременно равны нулю; въ частности, для двукратной точки по крайней мѣрѣ одна изъ частныхъ производныхъ 2-го порядка

$$f''_{xx}\ ,\quad f''_{xy}\ ,\quad f''_{yy}$$

не равна нулю, и вообще для n-кратной точки всѣ частныя производныя до порядка (n-1)-го включительно равны нулю, но изъ производныхъ n-го порядка по крайней мѣрѣ одна не равна 0.

Докажемъ теперь слѣдующую теорему:

Теорема. Въ простой точкѣ существуетъ одна касательная къ кривой, въ n-кратной точкѣ существуетъ n касательныхъ къ кривой, которыя могутъ быть вещественными или мнимыми, различными или совпадающими.

Доказательство. Пусть дано уравненіе алгебраической кривой:

$$f(x,y) = 0.$$

Дифференцируя его по x, находимъ

$$f'_x + f'_y \cdot y' = 0 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (1),$$

откуда

$$y' = -\frac{f'_x}{f'_y}.$$

Въ простой точкѣ по крайней мѣрѣ одна изъ производныхъ не равна 0, слѣдовательно, получаетъ одно опредѣленное значеніе, хотя бы $y' = \infty$ (при $f'_y = 0$), и кривая имѣетъ одну касательную (припомнимъ, что y' есть угловой коэффиціентъ касательной).

Такъ какъ въ кратной точкѣ $f'_x = f'_y = 0$, то уравненіе, изъ котораго мы опредѣляли y', обращается въ тождество

$$0 = 0.$$

Дифференцируя уравненіе (1) еще разъ по x, получимъ

$$f''_{xx} + f''_{xy}\cdot y' + y'\cdot(f''_{xy} + f''_{yy}\cdot y') + y''\cdot f'_y = 0$$

или

$$f''_{xx} + 2f''_{xy}\cdot y' + f''_{yy}\cdot y'^2 + \underbrace{y''\cdot f'_y}_{=0} = 0 \quad \ldots\ldots (2),$$

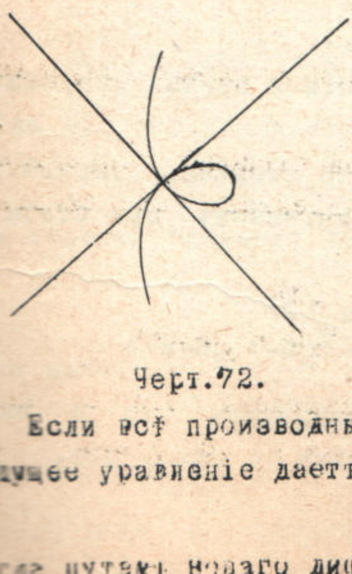
гдѣ послѣдній членъ = 0 въ силу условія

$$f'_y = 0.$$

Такъ какъ въ двукратной точкѣ изъ производныхъ 2-го порядка по крайней мѣрѣ одна не равна 0, то y' опредѣляется изъ квадратнаго уравненія

$$f''_{xx} + 2f''_{xy}\cdot y' + f''_{yy}\cdot y'^2 = 0$$

и, слѣдовательно, y' имѣетъ два значенія и кривая допускаетъ 2 касательныя въ этой точкѣ.



Черт.72.

При этомъ, если два значенія y' *вещественныя и различныя, то имѣемъ узелъ* (см. черт. 72); *если 2 значенія* y' *равны, имѣемъ точку возврата 1-го или 2-го рода* (см. черт. 73); *если 2 значенія* y' *оказываются комплексными, получается такъ называемая изолированная точка.*

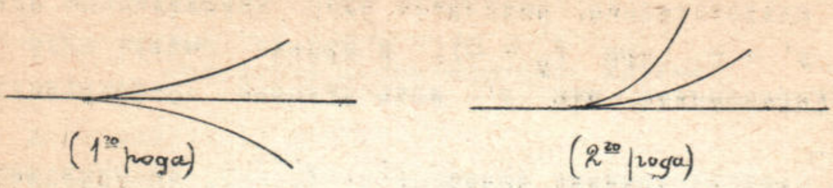
Если всѣ производныя 2-го порядка также равны нулю, то предыдущее уравненіе даетъ

$$0 = 0$$

тогда путемъ новаго дифференцированія уравненія (2) получимъ

$$f'''_{xxx} + 3f'''_{xxy}\cdot y' + 3f'''_{xyy}\cdot y'^2 + f'''_{yyy}\cdot y'^2 + 3f''_{xy}\cdot y'' +$$

$$+ 3f''_{yy}\cdot y'.y'' + f'_{y}\cdot y'' = 0 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. (3).$$



Черт.73.

При сдѣланномъ предположенiи относительно равенства нулю вторыхъ производныхъ наше уравненiе принимаетъ видъ:

$$f'''_{xxx} + 3f'''_{xxy}\cdot y' + 3f'''_{xyy}\cdot y'^2 + f'''_{yyy}\cdot y'^3 = 0,$$

т.е. получается кубическое уравненiе относительно y'.

Если мы имѣемъ трехкратную точку, гдѣ не всѣ коэффицiенты уравненiя нули, то, рѣшивъ его, найдемъ три значенiя для y' и, слѣдовательно, 3 касательныя.

И вообще, если всѣ производныя до порядка $(n-1)$-го включительно равны 0, но изъ производныхъ n-го порядка хотя одна не нуль (т.е. точка n-кратная), то y' опредѣляется изъ уравненiя n-ой степени

$$f^{(n)}_{x^n} + \frac{n}{1}\cdot f^{(n)}_{x^{n-1}y}\cdot y' + \frac{n(n-1)}{1.2}\cdot f^{(n)}_{x^{n-2}y^2}\cdot y'^2 + \ldots\ldots +$$

$$+ f^{(n)}_{y^n}\cdot y'^n = 0$$

и, слѣдовательно, y' имѣетъ n значенiй и кривая допускаетъ n касательныхъ.

Если случится, что въ уравненiи n-ой степени, опредѣляющемъ n значенiй y', нѣсколько коэффицiентовъ при старшихъ степеняхъ y', т.е.

$$f^{(n)}_{y^n}, \quad f^{(n)}_{xy^{n-1}}, \;\ldots\ldots\; f^{(n)}_{x^{n-1}\,y^{n-k+1}}$$

равны нулю въ данной точкѣ, то это показываетъ, что k значенiй y' равны ∞, т.е. k касательныхъ || оси y-овъ. Дѣйствительно, положивъ

$$y' = \frac{1}{x},$$

и умноживъ уравненіе на $(x')^n$, дадимъ ему такой видъ:

$$f^{(n)}_{x^n} \cdot (x')^n + \frac{n}{1} f^{(n)}_{x^{n-1}y} \cdot (x')^{n-1} + \ldots .$$

$$\ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1.2.\ldots k} f^{(n)}_{x^k y^{n-k}} \cdot (x')^k = 0,$$

такъ что k корней x' будутъ $= 0$, а слѣдовательно, k корней

$$y' = \frac{1}{x'},$$

равны безконечности.

Изъ даннаго выше опредѣленія особенныхъ точекъ вытекаетъ правило нахожденія ихъ:

Правило. Для нахожденія особенныхъ точекъ алгебраической кривой $f(x,y) = 0$ *нужно рѣшить совмѣстно уравненія*

$$f'_x = 0; \quad f'_y = 0$$

и выбрать изъ всѣхъ рѣшеній только тѣ, которыя удовлетворяютъ уравненію $f(x,y) = 0$.

Примѣръ.

$$(x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 - y^2) = 0.$$

Составляемъ производныя f'_x и f'_y и приравниваемъ ихъ 0.

$$f'_x = 2(x^2 + y^2).2x - 2a^2x = 4x(x^2 + y^2 - \frac{a^2}{2}) = 0.$$

$$f'_y = 2(x^2 + y^2).2y + 2a^2y = 4y(x^2 + y^2 + \frac{a^2}{2}) = 0.$$

Изъ второго уравненія имѣемъ

$$y = 0 ;$$

тогда первое уравненіе даетъ

$$x(x^2 - \frac{a^2}{2}) = 0 ,$$

откуда находимъ

$$\left| \begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm \dfrac{a}{\sqrt{2}} \end{array} \right.$$

Мы получили три рѣшенія

$$(0,\ 0)\quad \left(\pm \frac{a}{\sqrt{2}},\ 0\right);$$

точка (0, 0) принадлежитъ кривой; точка $\left(\pm \frac{a}{\sqrt{2}},\ 0\right)$ не принадлежитъ кривой, такъ какъ полагая въ уравненіи кривой

$$y = 0,$$

находимъ выраженіе

$$x^2(x^2 - a^2),$$

не обращающая въ 0 при

$$x^2 = \frac{a^2}{2}.$$

Итакъ, единственная особенная точка - начало координатъ (0, 0).

Посмотримъ, какого она порядка кратности?

Для этого составимъ вторыя производныя:

$$f''_{xx} = 4\left(x^2 + y^2 - \frac{a^2}{2}\right) + 8x^2$$

$$f''_{xy} = 8xy$$

$$f''_{yy} = 4\left(x^2 + y^2 + \frac{a^2}{2}\right) + 8y^2.$$

Въ точкѣ (0, 0) онѣ получаютъ значенія:

$$f''_{xx} = -2a^2$$

$$f''_{xy} = 0$$

$$f''_{yy} = 2a^2.$$

Для опредѣленія y' имѣемъ уравненіе

$$-2a^2 + 2a^2.y'^2 = 0,$$

откуда

$$y'^2 = 1;\quad y' = \pm 1.$$

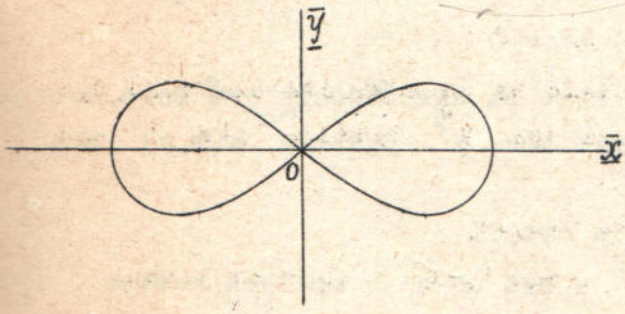
Такимъ образомъ начало координатъ представляетъ двукратную точку - *узелъ*. Данная кривая - лемниската Бернулли (черт. 74).

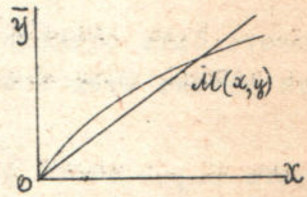
Теорема. Если алгебраическая кривая проходитъ черезъ начало координатъ, то мы получимъ уравненіе пучка касательныхъ въ началѣ координатъ, приравнивая нулю совокупность членовъ низшаго измѣренія въ уравненіи кривой, т.е. если уравненіе кривой представляется въ видѣ

$$\varphi_n(x,y) + \varphi_{n-1}(x,y) + \ldots + \varphi_j(x,y) = 0,$$

гдѣ $\varphi_j(x,y)$ означаетъ однородную совокупность членовъ измѣренія j, то уравненіе пучка касательныхъ будетъ

$$\varphi_p(x\ y) = 0.$$





Черт.74. Черт.75.

Доказательство. Угловой коэффиціентъ сѣкущей OM (см. черт. 75) будетъ

$$\frac{y}{x};$$

угловой коэффиціентъ касательной въ точкѣ (0, 0) равенъ

$$\text{пред.}_{x=0} \frac{y}{x} = t.$$

Опредѣлимъ $\text{Пред.}_{x=0} \frac{y}{x}$ изъ уравненія кривой, которое перепишемъ въ такомъ видѣ:

$$x^n.\varphi_n(1, \frac{y}{x}) + x^{n-1}.\varphi_{n-1}(1, \frac{y}{x}) + \ldots + x^p.\varphi_p(1, \frac{y}{x}) = 0,$$

замѣчая, что по свойству однородныхъ функцій степени p

$$\varphi_p(x, y) = x^p.\varphi_p(1, \frac{y}{x})$$

и подобнымъ же образомъ

$$\varphi_{n-1}(x, y) = x^{n-1}.\varphi_{n-1}(1, \frac{y}{x}),$$

$$\varphi_n(x, y) = x^n.\varphi_n(1, \frac{y}{x}).$$

Сокративъ все уравненіе на x^p, получимъ теперь:

$$x^{n-p}.\varphi_n(1, \frac{y}{x}) + x^{n-p-1}.\varphi_{n-1}(1, \frac{y}{x}) + \ldots + \varphi_p(1, \frac{y}{x}) = 0.$$

Полагая въ этомъ уравненіи $x = 0$ и замѣняя отношеніе $\frac{y}{x}$ его предѣломъ

$$\text{Пред.}_{x=0} \frac{y}{x} = t,$$

получимъ уравненіе

$$\varphi_p(1, t) = 0;$$

оно можетъ быть степени p и ниже въ зависимости отъ того, будетъ ли равенъ нулю коэффиціентъ при y^p функціи $\varphi(x, y)$ или нѣтъ.

Пусть корни этого уравненія будутъ

$t_1, t_2, t_3, \ldots t_q$ $(q \leqq p)$ и еще $(p-q)$ - кратный корень

$$t = \infty;$$

по свойству цѣлой функціи имѣемъ

$$\varphi_p(1, t) = A(t-t_1)(t-t_2)(t-t_3)\ldots(t-t_q).$$

Замѣнимъ въ этомъ тождествѣ t на $\frac{\overline{Y}}{\overline{X}}$

$$\varphi_p(1, \frac{\overline{Y}}{\overline{X}}) = A(\frac{\overline{Y}}{\overline{X}} - t_1)(\frac{\overline{Y}}{\overline{X}} - t_2)(\frac{\overline{Y}}{\overline{X}} - t_3)\ldots(\frac{\overline{Y}}{\overline{X}} - t_q).$$

Умноживъ теперь обѣ части равенства на X^p, получимъ

$$\overline{X}^p.\varphi_p(1, \frac{\overline{Y}}{\overline{X}}) = A\overline{X}^{p-q}(\overline{Y}-t_1\overline{X})(\overline{Y}-t_2\overline{X})(\overline{Y}-t_3\overline{X})\ldots(\overline{Y}-t_q\overline{X})$$

или

$$\varphi_p(\overline{X}, \overline{Y}) = A\overline{X}^{p-q}(\overline{Y}-t_1\overline{X})(\overline{Y}-t_2\overline{X})\ldots(\overline{Y}-t_q\overline{X}).$$

Приравнивая

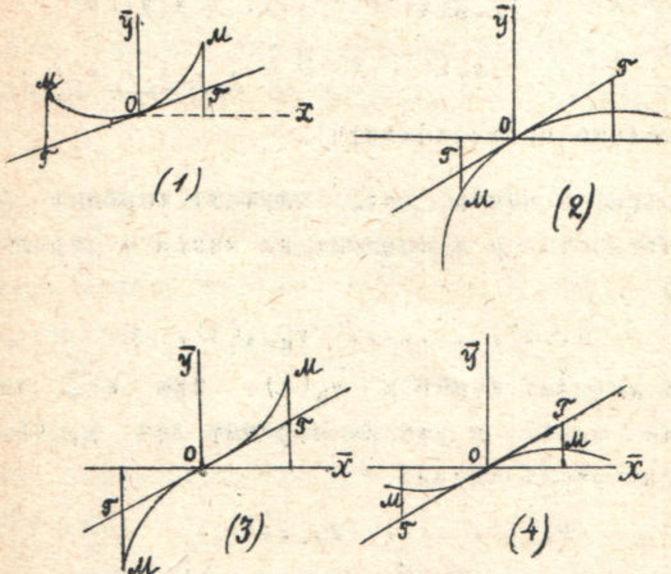
$$\varphi_p(\overline{X}, \overline{Y})$$

нулю, получаемъ совокупность уравненій прямыхъ

$$\left|\begin{array}{l} \overline{X}^{p-q} = 0 \quad \text{(отвѣчаетъ корню } t = \infty) \\ \overline{Y} = t_1\overline{X} \\ \overline{Y} = t_2\overline{X} \\ \ldots\ldots \\ \overline{Y} = t_q\overline{X}; \end{array}\right.$$

онѣ представляютъ собою всѣ касательныя, которыя имѣетъ данная кривая въ началѣ координатъ.

Когда мы нашли всѣ касательныя данной кривой въ началѣ координатъ, то является вопросъ о расположенiи каждой вѣтви кривой относительно ея касательной. Вопросъ этотъ рѣшается изученiемъ знака безконечно малой разности TM (см. черт..76) между ординатою кривой y и ординатою касательной $\bar{Y} = t\bar{X}$ при одной и той же безконечно малой абсциссѣ:



$y = tx$

Черт.76.

$y < tx$

$t \quad \frac{y}{x} < t$

$$TM = y - tx.$$

$t=$

Такъ въ случаѣ (1) $\quad y - tx > 0$ при $x \gtrless 0$,

въ случаѣ (2) $\quad y - tx < 0$ при $x \gtrless 0$.

въ случаѣ (3) $\quad \left| \begin{array}{l} y - tx < 0 \text{ при } x < 0 \\ y - tx > 0 \text{ при } x > 0, \end{array} \right.$

въ случаѣ (4) $\quad \left| \begin{array}{l} y - tx > 0 \text{ при } x < 0 \\ y - tx < 0 \text{ при } x > 0 \end{array} \right.$ и т.п.

Мы дадимъ здѣсь два способа изслѣдованiя хода кривой въ области начала координатъ.

Способъ А.

Положивъ $y = tx$ въ уравненiи алгебраической кривой

$$\varphi_n(x, y) + \varphi_{n-1}(x, y) + \ldots + \varphi_p(x, y) = 0,$$

получимъ по свойству однородныхъ функцій

$$x^n\varphi_n(1, t) + x^{n-1}\varphi_{n-1}(1, t) + \ldots + x^p\varphi_p(1, t) = 0,$$

или, сокративъ на x^p и положивъ для сокращенія

$$\varphi_j(1, t) = \psi_{j-p}(t),$$

находимъ

$$x^{n-p}\psi_{n-p}(t) + x^{n-p-1}\psi_{n-p-1}(t) + \ldots + x.\psi_1(t) +$$
$$+ \psi_0(t) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (*).$$

Отличимъ нѣсколько предположеній:

1-ое предположеніе: пусть $t=t_0$ служитъ корнемъ функціи $\psi_0(t)$ порядка кратности μ и корнемъ не низшаго порядка кратности для функцій

$$\psi_1(t), \ldots\ldots\ldots \psi_{k-1}(t),$$

но уже не служитъ корнемъ функціи $\psi_k(t)$. При $k=1$ число t_0 будетъ корнемъ для $\psi_0(t)$ и уже не корнемъ для $\psi_1(t)$.

Замѣчая, что въ этомъ случаѣ

$$\psi_0(t), \ldots\ldots \psi_{k-1}(t)$$

всѣ выдѣляютъ множитель $(t-t_0)^\mu$, представимъ уравненіе (*) въ формѣ

$$x^k\left[x^{n-p-k}\psi_{n-p}(t) + \ldots + x.\psi_{k+1}(t) + \psi_k(t)\right] +$$
$$+ (t-t_0)^\mu\left[x^{k-1}\omega_{k-1}(t) + \ldots + x.\omega_1(t) + \omega_0(t)\right] = 0,$$

гдѣ положено

$$\psi_j(t) = (t-t_0)^\mu.\omega_j(t)$$

при

$$j = 0, 1, \ldots\ldots(k-1).$$

Такъ какъ при достаточно малыхъ численныхъ значеніяхъ x знакъ каждой скобки $[\ldots]$ будетъ опредѣляться знакомъ члена, свободнаго отъ x, то наше уравненіе приметъ форму

$$x^k[\psi_k(t_0) + \varepsilon] + (t-t_0)^\mu[\omega_0(t_0) + \eta] = 0 \ldots\ldots (*_1),$$

гдѣ ε и η безконечно малыя величины при безконечно маломъ x; здѣсь мы подставили въ функціяхъ $\psi_k(t)$ и $\omega_0(t)$ вмѣсто t значеніе t_0, такъ какъ съ приближеніемъ x къ нулю, значение t приближается къ t_0 и значенія $\psi_k(t)$ и $\omega_0(t)$ - приближаются къ $\psi_k(t_0)$ и $\omega_0(t_0)$. Отмѣтимъ еще, что сумма двухъ членовъ въ лѣвой части равенства (*') тогда только можетъ быть равна нулю, когда эти члены разныхъ знаковъ, т.е. когда

$$x^k \psi_k(t_0) \quad (t-t_0)^\mu \omega_0(t_0) < 0,$$

откуда слѣдуетъ, что два произведенія

$$\underline{x^k (t-t_0)^\mu} \quad \text{и} \quad \psi_k(t_0)\,\omega_0(t_0) = M$$

должны быть разныхъ знаковъ. Дальнѣйшее изслѣдованіе заставляетъ отличить 4 случая въ зависимости отъ четности показателей k и μ.

1-ый случай: k нечетное и μ нечетное.

Здѣсь $x^k (t-t_0)^\mu$ будетъ имѣть знакъ одинаковый съ $x.(t-t_0)$ (такъ какъ четныя степени x^{k-1} и $(t-t_0)^{\mu-1}$ всегда положительны), поэтому

$$x\,.\,(t-t_0) = y - t_0 x$$

будетъ знака противоположнаго съ числомъ M, такъ что при $M < 0$ мы будемъ имѣть расположеніе (1) (см. выше) и при $M > 0$ - расположеніе (2).

2-ой случай: k четное, μ нечетное.

Здѣсь $x^k > 0$, $(t-t_0)^\mu$ имѣетъ знакъ $t - t_0$, поэтому $t-t_0$ должно быть знака обратнаго M; слѣдовательно, если $M < 0$, разность $t - t_0 > 0$, а произведеніе

$$x.(t-t_0) = y - t_0 x$$

мѣняетъ знакъ вмѣстѣ съ x, т.е. мы имѣемъ расположеніе (3). Подобнымъ образомъ, при $M > 0$ получимъ расположеніе (4).

3-ій случай: k нечетное, μ четное.

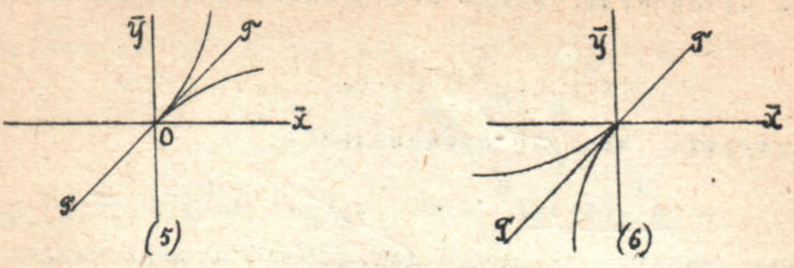
Здѣсь x^k имѣетъ знакъ одинаковый съ x, $(t-t_0)^\mu > 0$, поэтому x должно быть знака обратнаго съ M; что касается $t-t_0$, то изъ уравненія (*') слѣдуетъ, что $t-t_0$ имѣетъ два значенія противоположныхъ знаковъ:

$$(t - t_0) = \pm \sqrt[\mu]{x^k \left(-\frac{\psi_k(t_0)}{\omega_0(t_0)} + \eta_1\right)} \;;$$

отсюда и

$$y - t_0 x = x(t - t_0)$$

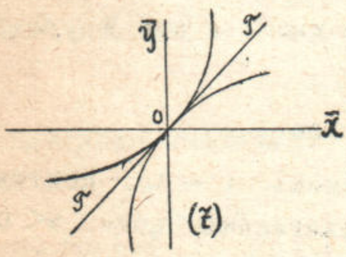
будетъ имѣть два значенія противоположныхъ знаковъ. Здѣсь мы имѣемъ точку возврата 1-го рода, и расположеніе будетъ (5) при $M < 0$, (6) при $M > 0$ (см. черт. 77).



Черт.77.

4-ый случай: k четное и μ четное.

Здѣсь $x^k (t-t_0)^\mu > 0$ и потому уравненіе (*') возможно лишь при $M < 0$; если же $M > 0$, то вещественныхъ касательныхъ нѣтъ, и мы имѣемъ изолированную точку. Напротивъ, при $M > 0$ x и $t - t_0$ могутъ быть любого знака, и мы имѣемъ расположеніе (7) (см. черт. 78).



Черт.78.

2-ое предположеніе: пусть $t = t_0$ двукратный корень функціи $\psi_0(t)$, простой корень для $\psi_1(t)$ и не корень для $\psi_2(t)$.

Положивъ

$$\psi_0(t) = (t-t_0)^2\, \omega_0(t),$$

$$\psi_1(t) = (t-t_0)\, \omega_1(t),$$

получимъ изъ уравненія (*):

$$x^2.[\psi_2(t_0) + \varepsilon_2] + x(t-t_0).[\omega_1(t_0) + \varepsilon_1] +$$
$$+ (t-t_0)^2.[\omega_0(t_0) + \varepsilon_0] = 0 \ldots\ldots (*'').$$

Сдѣлаемъ здѣсь

$$t - t_0 = \lambda x ;$$

сокративъ на x^2, получимъ въ предѣлѣ (при $x = 0$) квадратное уравненіе для λ :

$$\lambda^2\omega_0(t_0) + \lambda.\omega_1(t_0) + \psi_2(t_0) = 0 \ldots\ldots (*''').$$

Отмѣтимъ слѣдующіе случаи:

1-ый случай: уравненіе (*''') имѣетъ комплексные корни; тогда начало будетъ изолированной точкой.

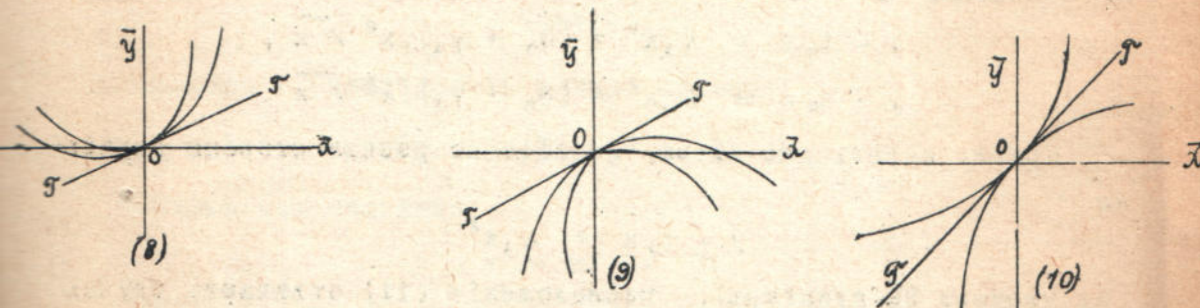
2-ой случай: уравненіе (*"') имѣетъ корни λ_1 и λ_2 вещественные и различные. Тогда $t - t_0$ имѣетъ 2 значенія

$$t - t_0 = (\lambda_1 + \alpha_1).x ,$$
$$t - t_0 = (\lambda_2 + \alpha_2).x ,$$

а отсюда

$$y - t_0 x = (\lambda_1 + \alpha_1).x^2 ,$$
$$y - t_0 x = (\lambda_2 + \alpha_2).x^2$$

(числа α_1 и α_2 безконечно малыя). Такимъ образомъ x можетъ быть любого знака, а $y - t_0 x$ имѣетъ два значенія знаковъ λ_1 и λ_2. Это даетъ три расположенія: (8) при λ_1 и $\lambda_2 > 0$; (9) при λ_1 и $\lambda_2 < 0$; (10) при λ_1 и λ_2 разныхъ знаковъ (см. черт. 79).



Черт.79.

3-ій случай: уравненіе (*"') имѣетъ равные корни, такъ что

$$\lambda^2\omega_0(t_0) + \lambda.\omega_1(t_0) + \psi_2(t_0) = \omega_0(t_0)(\lambda - \lambda_1)^2 ;$$

тогда мы въ уравненіи (*") ставимъ на видъ еще одинъ членъ:

$$x^3\psi_3(t) ;$$

полагая затѣмъ

$$t - t_0 = \lambda x$$

и сокращая на x^2, находимъ

$$x.[\psi_3(t_0) + \varepsilon_3] + (\lambda - \lambda_1)^2[\omega_0(t_0) + \varepsilon_0] = 0 \; . \; . \; . \; . \; (*^{IV}).$$

Для возможности этого уравненія x должно быть знака обратнаго съ произведеніемъ

$$\psi_3(t_0) \, . \, \omega_0(t_0) = N.$$

Поэтому, если $N < 0$, то $x > 0$ и мы положимъ

$$\lambda - \lambda_1 = \theta \, . \sqrt{x} ;$$

уравненіе $(*^{IV})$ по сокращеніи на x даетъ

$$\psi_3(t_0) + \varepsilon_3 + \theta^2\,[\omega_0(t_0) + \varepsilon_0] = 0,$$

откуда

$$\theta = \pm\sqrt{-\frac{\psi_3(t_0)}{\omega_0(t_0)} + \gamma} = \pm(\theta_0 + \gamma_1).$$

Далѣе λ получаетъ два значенія:

$$\lambda = \lambda_1 + (\theta_0 + \gamma_1).\sqrt{x}\,,$$

$$\lambda = \lambda_2 - (\theta_0 + \gamma_1).\sqrt{x}\,,$$

$t - t_0$ два значенія:

$$t - t_0 = \lambda_1 x + (\theta_0 + \gamma_1).\sqrt{x^3}\,,$$

$$t - t_0 = \lambda_1 x - (\theta_0 + \gamma_1).\sqrt{x^3}$$

и, наконецъ, $y - t_0 x$ два значенія:

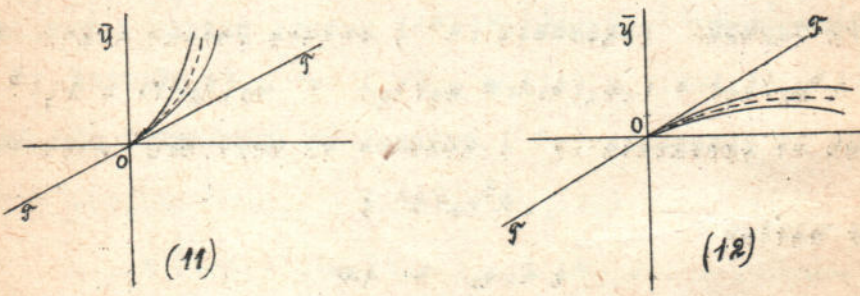
$$y - t_0 x = \lambda_1 x^2 + (\theta_0 + \gamma_1).x^2\sqrt{x}\,,$$

$$y - t_0 x = \lambda_1 x^2 - (\theta_0 + \gamma_1).x^2\sqrt{x}\,.$$

Кривая имѣетъ двѣ вѣтви, лежащія по разныя стороны параболы

$$y - t_0 x = \lambda_1 x^2$$

(на чертежѣ 80 пунктиръ); расположеніе (11) отвѣчаетъ случаю $\lambda_1 > 0$ и (12) – $\lambda_1 < 0$.



Черт.80.

Если число $N > 0$, то x должно быть < 0; тогда полагаемъ:

$$\lambda - \lambda_1 = \theta.\sqrt{-x}\,,$$

получаемъ 2 значенія θ:

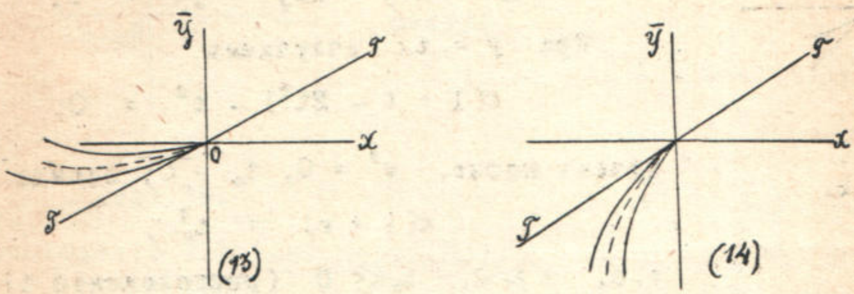
$$\theta = \pm\sqrt{+\frac{\psi_3(t_0)}{\omega_0(t_0)} + \gamma} = \pm(\theta_0 + \gamma_1),$$

и отсюда 2 значенія $y - t_0 x$

$$y - t_0 x = \lambda_1 x^2 + (\vartheta_0 + \gamma_1) . x^2 \sqrt{-x}$$

$$y - t_0 x = \lambda_1 x^2 - (\vartheta_0 + \gamma_1) . x^2 \sqrt{-x} .$$

Расположеніе (13) (черт. 81) получается при $\lambda_1 > 0$ и (14) при $\lambda_1 < 0$.



Черт.81.

Примѣръ 1. Изслѣдовать начало кривой:

$$x^2 y + 2xy^2 + y^2 - x^2 = 0.$$

Пучекъ касательныхъ

$$y^2 - x^2 = 0$$

даетъ биссекторы коорд. угловъ:

$$y - x = 0$$

$$y + x = 0.$$ $x(t+1)=0 \quad t=-1$

Для касательной $y - x = 0$ имѣемъ $t_0 = 1$; уравненіе кривой будетъ (полагая $y = tx$):

$$x(t + 2t^2) + t^2 - 1 = 0$$

и при $t_0 = 1$:

$$x(3 + \varepsilon) + (t - 1)(2 + \eta) = 0,$$

откуда

$$x(t - 1) = y - x < 0$$

(расположеніе (2)).

Для касательной $y + x = 0$ имѣемъ $t_0 = -1$, уравненіе кривой даетъ

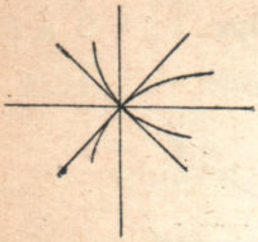
$$x(1 + \varepsilon) + (t + 1)(-2 + \eta) = 0,$$

откуда

$$x(t + 1) = y + x > 0$$

(расположеніе (1)).

Въ началѣ координатъ узелъ слѣдующаго вида (черт. 82):



Черт.82.

Примѣръ 2. Изслѣдовать начало координатъ у кривой

$$x^3 + x^2y - 2xy^2 - y^2 = 0.$$

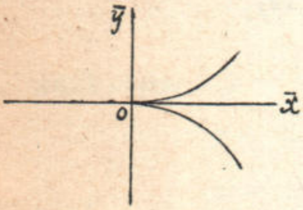
При $y = tx$ получаемъ

$$x(1 + t - 2t^2) - t^2 = 0;$$

пучекъ касат. $y^2 = 0$, $t_0 = 0$; отсюда

$$x(1 + \varepsilon) = t_0^2 ,$$

т.е. $x \geq 0$, $t_0 \lessgtr 0$ (расположеніе 5) (см. черт. 83).



Черт.83.

Примѣръ 3. Изслѣдовать начало для кривой:

$$- 2x^4 + x^3y + x^2y^2 + 4x^2y - y^2 = 0.$$

При $y = tx$:

$$x^2(- 2 + t + t^2) + 4tx - t^2 = 0.$$

Дѣлаемъ $t = \lambda x$ (предполож. 2, $t_0 = 0$):

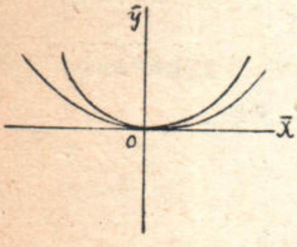
$$- 2 + t + t^2 + 4\lambda - \lambda^2 = 0 ;$$

при $x = 0$ и $t = 0$ получаемъ

$$- 2 + 4\lambda - \lambda^2 = 0,$$

$$\lambda_1 = 2 + \sqrt{2} , \quad \lambda_2 = 2 - \sqrt{2}$$

(расположеніе (8)) (см. черт. 84).



Черт.84.

Примѣръ 4. Изслѣдовать начало для кривой

$$x^5 + x^2y^3 - x^4 + 2x^2y - y^2 = 0.$$

При $y = tx$:

$$x^3(1 + t^3) - x^2 + 2tx - t^2 = 0.$$

Дѣлаемъ $t = \lambda x$:

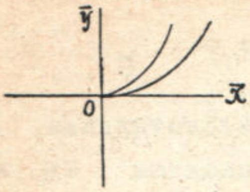
$$x(1 + t^3) - 1 + 2\lambda - \lambda^2 = 0,$$

$$x(1 + \varepsilon) - (\lambda - 1)^2 = 0.$$

При $x = 0$ два значенія $\lambda = 1$; полагаемъ

$$\lambda - 1 = \theta . \sqrt{x};$$

тогда



Черт.85.

$$1 + \varepsilon - \theta^2 = 0,$$

$$\theta = \pm (1 + \gamma);$$

откуда

$$\lambda = 1 \pm (1 + \gamma).\sqrt{x},$$

$$t = x \pm (1 + \gamma).x\sqrt{x},$$

$$y = x^2 \pm (1 + \gamma).x^2\sqrt{x}$$

(расположеніе 11) (см. черт. 85).

Замѣчаніе 1. Если касательная въ началѣ координатъ совпадаетъ съ осью у-овъ, то $t = \infty$, и тогда для изслѣдованія надо полагать не $y = tx$, а $x = uy$, причемъ u будетъ $= 0$.

Замѣчаніе 2. Предыдущій способъ изслѣдованія кривой въ области начала можетъ быть приложенъ къ изслѣдованію любой ея точки, если предварительно въ эту точку перенести начало.

Способъ В. (Параллелограммъ Ньютона).

Изложенный выше способъ А далеко не во всѣхъ случаяхъ обнаруживаетъ расположеніе кривой, и потому мы укажемъ болѣе совершенный способъ (Ньютона).

Пусть уравненіе алгебраической кривой имѣетъ видъ

$$\sum_{j=1}^{j=n} A_j x^{\alpha_j} y^{\beta_j} = 0.$$

Подстановкой $y = zx^{\mu}$ приводимъ его къ формѣ

$$\sum_j A_j z^{\beta_j} x^{\alpha_j + \mu\beta_j} = 0.$$

Постараемся подобрать число μ (цѣлое или дробное > 0), чтобы въ двухъ или большемъ числѣ членовъ нашего уравненія показатель $\alpha_j + \mu\beta_j$ былъ одинъ и тотъ же, а въ остальныхъ больше. Пусть напримѣръ

$$\alpha_1 + \mu\beta_1 = \alpha_2 + \mu\beta_2 = \ldots . = \alpha_k + \mu\beta_k = p_0,$$

$$\alpha_{k+1} + \mu\beta_{k+1} = p_1 > p_0, \ldots .$$

$$\alpha_n + \mu\beta_n = \rho_{n-k} > \rho_0 .$$

Тогда, по сокращенiи на x^{ρ_0}, уравненiе кривой принимаетъ слѣдующiй видъ:

$$A_n . z^{\beta_n} . x^{\rho_{n-k}-\rho_0} + \ldots + A_{k+1} . z^{\beta_{k+1}} . x^{\rho_1-\rho_0} +$$

$$+ (A_k . z^{\beta_k} + \ldots + A_2 . z^{\beta_2} + A_1 . z^{\beta_1}) = 0 \; . \; . \; . \; (**).$$

Такъ какъ всѣ показатели x числа положительныя, то съ приближенiемъ x къ нулю числа z приближаются къ корнямъ уравненiя

$$A_k . z^{\beta_k} + \ldots + A_2 z^{\beta_2} + A_1 z^{\beta_1} = 0$$

и каждому вещественному корню этого уравненiя $z = z_0$ отвѣчаетъ вѣтвь кривой, опредѣляемая уравненiемъ

$$y = x^{\mu} (z_0 + \varepsilon);$$

если же корень $z = z_0$ выходитъ мнимый, то нужно испробовать подстановку $y = z(-x)^{\mu}$, и она можетъ привести къ вещественному значенiю для y.

Итакъ, вопросъ объ изслѣдованiи вѣтвей кривой въ области начала сводится къ подбору числа μ, указанному выше. Ньютонъ далъ весьма простой способъ такого подбора. Изобразимъ на клѣтчатой бумагѣ точки

$$M_j (\alpha_j, \beta_j)$$

- координаты которыхъ цѣлыя положительныя числа. Положимъ, что, соединивъ двѣ точки $M_1(\alpha_1, \beta_1)$ и $M_2(\alpha_2, \beta_2)$ прямою, мы замѣчаемъ, что всѣ остальныя нанесенныя нами точки лежатъ или на этой же прямой или по ту сторону ея, гдѣ не лежитъ начало. Тогда легко доказать, что беря μ изъ уравненiя

$$\alpha_1 + \mu\beta_1 = \alpha_2 + \beta_2 = \rho_0,$$

т.е.

$$\mu = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\beta_1 - \beta_2} ,$$

мы будемъ имѣть для всѣхъ точекъ M_j лежащихъ внѣ этой прямой (со стороны противоположной началу)

$$\alpha_j + \mu\beta_j > \rho_0$$

и, конечно, для точекъ M_j, оказавшихся на той же прямой M_1M_2,

$$\alpha_j + \mu\beta_j = \rho_0 .$$

Дѣйствительно, уравненіе прямой M_1M_2, проходящей черезъ точки $M_1(\alpha_1, \beta_1)$ и $M_2(\alpha_2, \beta_2)$ будетъ

$$\bar{Y} - \beta_1 = \frac{\beta_2 - \beta_1}{\alpha_2 - \alpha_1} \cdot (\bar{X} - \alpha_1)$$

или

$$\bar{Y} - \beta_1 = - {}^1/\mu\, (\bar{X} - \alpha_1),$$

$$\bar{X} + \mu\bar{Y} - \alpha_1 - \mu\beta_1 = 0,$$

$$\bar{X} + \mu\bar{Y} - \rho_0 = 0.$$

Если какая-нибудь точка $M_j(\alpha_j, \beta_j)$ окажется на этой же прямой, то для нея

$$\alpha_j + \mu\beta_j - \rho_0 = 0,$$

$$\alpha_j + \mu\beta_j = \rho_0 ;$$

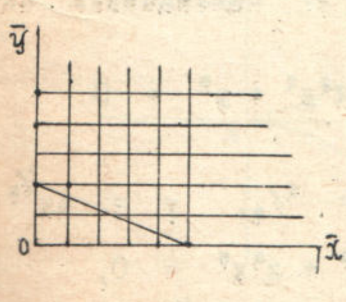
если же точка M_j лежитъ отъ этой прямой со стороны, противоположной началу, то результатъ подстановки этой точки въ уравненіе должно быть > 0 (такъ какъ подстановка начала даетъ $- \rho_0 < 0$), т.е.

$$\alpha_j + \mu\beta_j - \rho_0 > 0, \qquad \alpha_j + \mu\beta_j > \rho_0,$$

что и требовалось доказать. Добавимъ, что въ одномъ и томъ же примѣрѣ число μ можетъ имѣть нѣсколько различныхъ значеній.

Примѣръ 1. Изслѣдовать начало для кривой

$$x^5 + y^5 + y^4 - 2xy^2 + y^2 = 0.$$



Черт.86.

Здѣсь только прямая, проходящая черезъ точки (5,0) и (0,2) обладаетъ такимъ свойствомъ, что всѣ остальныя точки лежатъ отъ нея со стороны противоположной началу (черт. 86).

Число

$$\mu = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\beta_1 - \beta_2} = {}^5/_2 .$$

Полагаемъ:

$$y = zx^{5/2} .$$

Имѣемъ

$$x^5 + z^5 x^{25/2} + z^4 . x^{10} - 2z^2 . x^6 + z^2 . x^5 = 0;$$

по сокращенiи на x^5:

$$1 + z^2 + x(-2z^2 + x^4 . z^4 + x^{13/2} . z^5) = 0.$$

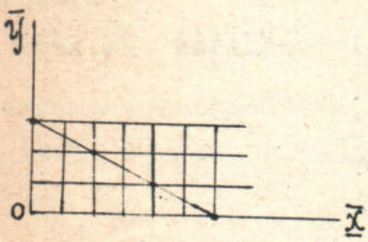
при $x = 0$ будетъ $z^2 + 1 = 0$, z мнимое. Беря же $y = z(-x)^{5/2}$, имѣемъ

$$1 - z^2 + x(2z^2 + \varepsilon) = 0, \quad z = \pm 1, \quad y = \pm (1 + \varepsilon)(-x)^{5/2},$$

возвратъ 1-го рода при $x < 0$.

Примѣръ 2. Изслѣдовать начало для кривой

$$x^6 - x^4 y + x^2 y^2 - y^3 = 0.$$



Черт.87.

Здѣсь всѣ четыре точки лежатъ на одной прямой. Число

$$\mu = {}^6/_3 = 2.$$

При $y = zx^2$ получаемъ

$$x^6 - x^6 z + x^6 z^2 - x^6 z^3 = 0 ;$$

по сокращенiи на x^6 :

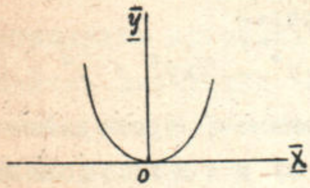
$$1 - z - z^2 - z^3 = 0$$

или

$$(1 - z)(1 + z^2) = 0.$$

Одинъ корень z вещественный: $z = 1$, въ началѣ одна вещественная вѣтвь (черт. 88)

$$y = x^2(1 + \varepsilon).$$



Черт.88.

Примѣръ 3. Изслѣдовать начало для кривой

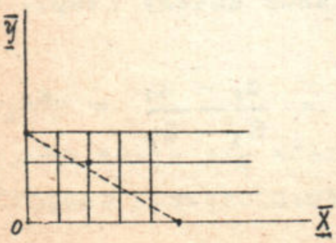
$$x^5 - 4x^2 y^2 + y^3 = 0.$$

Здѣсь

$$\mu = {}^5/_3, \quad y = zx^{5/3} ;$$

$$x^5 - 4z^2 x^{16/3} + z^3 x^5 = 0,$$

$$1 + z^3 - 4z^2 x^{1/3} = 0.$$



Черт.89.

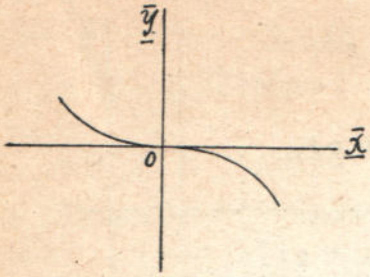
Одинъ корень z вещественный:

$$z = -1;$$

одна вѣтвь въ началѣ

$$y = (-1 + \varepsilon)x^{5/3} :$$

Расположеніе на чертежѣ 90.



Черт. 90.

Примѣръ 4. Изслѣдовать начало для кривой

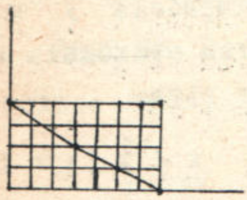
$$x^7 - 2x^5y + x^3y^2 - y^4 = 0.$$

Здѣсь μ имѣетъ два значенія: для точки $(0,4)$ и $(3,2)$

$$\mu = 3/2,$$

для остальныхъ

$$\mu = 2.$$



Черт. 91.

Полагая

$$y = zx^{3/2},$$

имѣемъ

$$x^7 - 2zx^{13/2} + z^2x^6 - z^4x^6 = 0,$$

$$\sqrt{x}\,(\sqrt{x} - 2z) + z^2(1 - z^2) = 0.$$

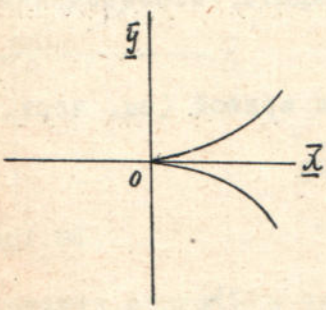
Ясно, что $x > 0$, два вещественныя значенія z будутъ

$$z = \pm 1$$

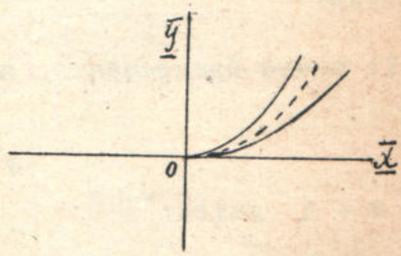
и дадутъ двѣ вѣтви кривой

$$y = \pm x\sqrt{x}\,(1 + \varepsilon)$$

(корнямъ $z = 0$ отвѣчаютъ вѣтви, гдѣ показатель $\mu > 3/2$). Расположеніе этихъ двухъ вѣтвей на чертежѣ 92.



Черт. 92.



Черт. 93.

Положимъ теперь $y = zx^2$:

$$x^7 - 2zx^7 + z^2x^7 - z^2x^8 = 0,$$

$$1 - 2z + z^2 - z^4x = 0.$$

Съ приближеніемъ x къ нулю два значенія z стремятся къ

$z = 1$; переписавъ уравненіе въ формѣ

$$(z-1)^2 = x(1+\varepsilon),$$

видимъ, что $x > 0$ и

$$z = 1 \pm \sqrt{x}\,(1+\varepsilon),$$

откуда два значенія y:

$$y = x^2 \pm x^2\sqrt{x}\,(1+\varepsilon).$$

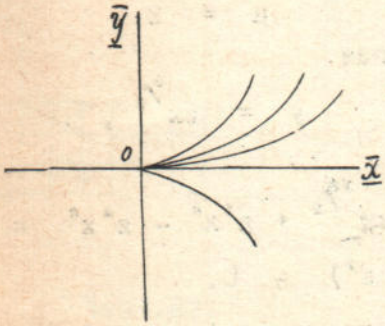
Расположеніе этихъ двухъ вѣтвей на чертежѣ 93 (пунктиромъ начерчена парабола $y = x^2$); эти обѣ вѣтви проходятъ вблизи начала ниже вѣтви

$$y = x\sqrt{x}\,(1+\varepsilon),$$

такъ какъ при малыхъ x имѣемъ

$$x\sqrt{x} > x^2.$$

Итакъ въ настоящемъ примѣрѣ къ одной касательной касаются 4 вѣтви.



Черт.94.

b) *Трансцендентныя кривыя.*

Трансцендентныя кривыя допускаютъ еще два вида особенныхъ точекъ, кромѣ тѣхъ, которыя были перечислены выше для алгебраическихъ кривыхъ (узелъ, точка возврата, изолированная точка), а именно:

1) *точка прекращенія,* напр. для кривой (см. черт. 95)

$$y = e^{\frac{1}{1-x}}$$

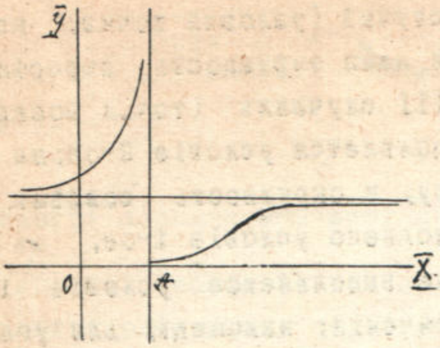
при $x = 1$ имѣемъ

$$\left|\begin{array}{l} x = 1-\varepsilon:\ \text{Пред. } y = \text{Пред.}_{\varepsilon=0}\ e^{1/\varepsilon} = e^{+\infty} = \infty \\[2ex] x = 1+\varepsilon:\ \text{Пред. } y = \text{Пред.}_{\varepsilon=0}\ e^{-1/\varepsilon} = e^{-\infty} = 0. \end{array}\right.$$

Здѣсь A - точка прекращенія.

2) Точка *угловая* или *выступающая,* напримѣръ для кривой

$$y = \frac{x}{1 + e^{1/x}}$$



Черт.95.

находимъ, что угловой коэффиціентъ касательной въ точкѣ (0,0) равенъ

$$\text{Пред.}_{x=o} \frac{y}{x} = $$

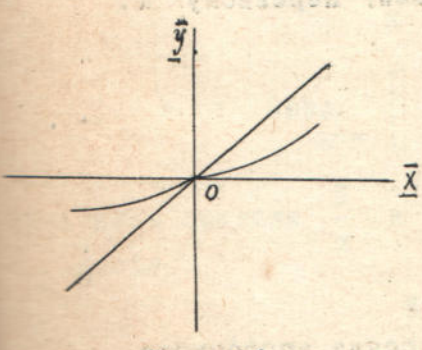
$$= \text{Пред.}_{x=o} \frac{x}{1 + e^{1/x}} ;$$

этотъ предѣлъ зависитъ отъ знака безконечно малаго x, именно:

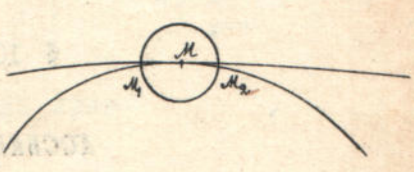
$$\text{при } x = -\varepsilon \quad \text{Пред.}_{\varepsilon=o} \frac{1}{1 + e^{-1/\varepsilon}} = 1$$

$$\text{при } x = +\varepsilon \quad \text{Пред.}_{\varepsilon=o} \frac{1}{1 + e^{1/\varepsilon}} = 0.$$

Фигура кривой представляетъ слѣдующую особенность (см. черт. 96). Точка 0 угловая или выступающая. Мы не станемъ доказывать, что такая точка невозможна для алгебраической кривой.



Черт.96.



Черт.97.

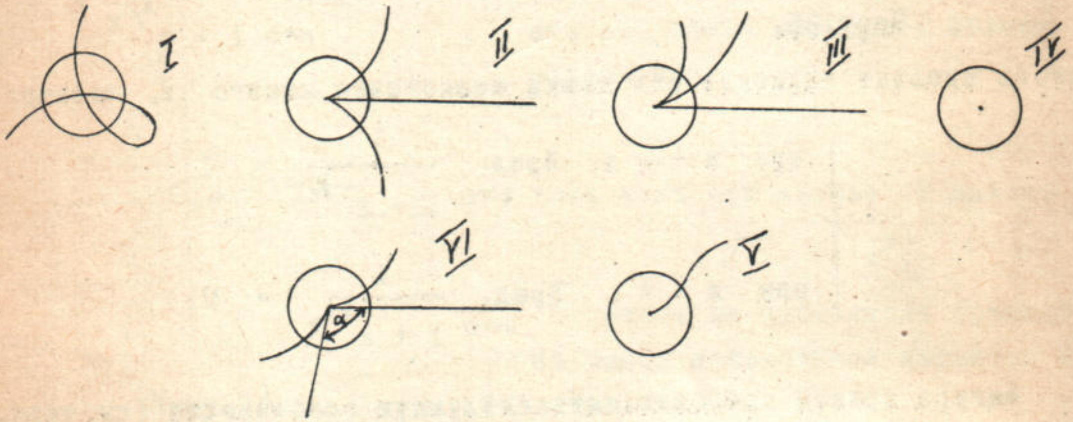
Въ заключеніе этого §-а укажемъ общій геометрическій признакъ особенныхъ точекъ.

Въ обыкновенной точкѣ, если около нея описать окружность безконечно малымъ радіусомъ, выполнены слѣдующія 2 условія (см. черт. 97):

1) точекъ пересѣченія двѣ: M_1, M_2;

2) уголъ между хордами M_1M и MM_2 съ приближеніемъ точекъ M_1, M_2 къ M имѣетъ предѣломъ π.

Изъ слѣдующихъ примѣровъ особенныхъ точекъ (см. черт. 98) видно, что, дѣйствительно, въ I случаѣ (узловая точка) не выполнено условіе 1-ое, и описанная нами окружность пересѣкаетъ кривую въ 4-хъ точкахъ; во II и III случаяхъ (точки возврата) уголъ стремится къ нулю, и не выполняется условіе 2-ое; на чертежѣ IV имѣемъ изолированную точку, и окружность совсѣмъ не встрѣчаетъ точекъ кривой - не выполнено условіе 1-ое; въ случаѣ точки прекращенія (черт. V) не выполняется условіе 1-ое, такъ какъ имѣемъ одну точку пересѣченія; наконецъ, для угловой



Черт.98.

точки не выполнено условіе 2-ое, и уголъ между хордами M_1MM_2 стремится къ α - углу между касательными, неравному π.

§ 10.

АССИМПТОТЫ.

а) *Ассимптоты, не параллельныя осямъ координатъ.*

Опредѣленіе. Если существуетъ такая прямая

$$\bar{Y} = \alpha\bar{X} + \beta,$$

что разность Δ между ординатою данной кривой

$$y = f(x)$$

и ординатою этой прямой

$$\bar{Y} = \alpha\bar{X} + \beta,$$

отвѣчающимъ одной абсциссѣ x, стремится къ 0 при безпредѣльномъ возрастаніи $|x|$, т.е.

$$\text{Пред.}_{x=\infty} \Delta = \text{Пред.}_{x=\infty} (y-\alpha x-\beta) = 0,$$

то прямая

$$Y = \alpha X + \beta$$

называется *ассимптотой* этой кривой.

Теорема. Коэффиціенты α и β въ уравненіи ассимптоты опредѣляются слѣдующимъ образомъ:

$$\alpha = \text{Пред.}_{x=\infty} \left(\frac{y}{x} \right)$$

$$\beta = \text{Пред.}_{x=\infty} (y - \alpha x),$$

гдѣ

$$y = f(x)$$

берется изъ уравненія кривой.

Въ самомъ дѣлѣ, согласно опредѣленію:

$$y - \alpha x - \beta = \Delta;$$

отсюда имѣемъ

$$\frac{y}{x} - \frac{\beta}{x} - \frac{\Delta}{x} = \alpha,$$

$$\alpha = \text{Пред.}_{x=\infty} \left[\frac{y}{x} - \frac{\beta}{x} - \frac{\Delta}{x} \right] = \text{Пред.}_{x=\infty} \left(\frac{y}{x} \right),$$

такъ какъ предѣлы $\frac{\beta}{x}$ и $\frac{\Delta}{x}$ равны нулю.

Далѣе

$$\beta = y - \alpha x - \Delta$$

при всякомъ x, слѣдовательно:

$$\beta = \text{Пред.}_{x=\infty} (y - \alpha x - \Delta) = \text{Пред.}_{x=\infty} (y - \alpha x),$$

такъ какъ Пред. $\Delta = 0$.

Замѣчаніе 1. Число α, опредѣляемое уравненіемъ

$$\alpha = \text{Пред.}_{x=\infty} \left(\frac{y}{x} \right),$$

можетъ имѣть нѣсколько различныхъ значеній и соотвѣтственно каждому значенію $\alpha = \alpha_j$ слѣдуетъ отдѣльно находить

$$\beta = \underset{x=\infty}{\text{Пред.}} (y - \alpha_j x).$$

Замѣчаніе 2. Изучая знакъ безконечно малой разности

$$\Delta = y - \alpha x - \beta$$

въ зависимости отъ знака безконечно большого x, можно опредѣлить расположеніе вѣтви кривой относительно ассимптоты.

Примѣръ. Найти ассимптоты кривой

$$y = \frac{x}{1 + e^{1/x}} .$$

Опредѣлимъ коэффиціенты уравненія ассимптоты:

$$\alpha = \underset{x=\infty}{\text{Пред.}} \left(\frac{y}{x} \right) = \underset{x=\infty}{\text{Пред.}} \frac{1}{1 + e^{1/x}} = \frac{1}{2} ;$$

далѣе, пользуясь разложеніемъ $e^{1/x}$ въ рядъ:

$$e^{1/x} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{6x^3} + \dots ,$$

находимъ:

$$\beta = \underset{x=\infty}{\text{Пред.}} (y - {}^1/_2\, x) = \underset{x=\infty}{\text{Пред.}} \left[\frac{x}{1 + e^{1/x}} - {}^1/_2\, x \right] =$$

$$= \underset{x=\infty}{\text{Пред.}} \left[\frac{x - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}xe^{1/x}}{1 + e^{1/x}} \right] = \underset{x=\infty}{\text{Пред.}} \frac{\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{6x^3} + \dots\right)}{1 + e^{1/x}} =$$

$$= \underset{x=\infty}{\text{Пред.}} \frac{-\frac{1}{2} - \frac{1}{4x} - \frac{1}{12x^2} - \dots}{1 + e^{1/x}} = -\frac{1}{4} .$$

Уравненіе ассимптоты будетъ

$$\overline{Y} = {}^1/_2\, \overline{X} - {}^1/_4 .$$

Находимъ теперь Δ:

$$\Delta = y - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} = \frac{-\frac{1}{2} - \frac{1}{4x} - \frac{1}{12x^2} - \dots}{1 + e^{1/x}} + \frac{1}{4} =$$

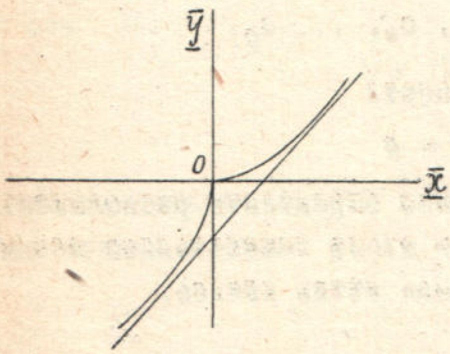
$$= \frac{-\frac{1}{2} - \frac{1}{4x} - \frac{1}{12x^2} - \ldots + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \ldots\right)}{1 + e^{1/x}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{24x^2} + \ldots}{1 + e^{1/x}} .$$

Изъ выраженія Δ видно, что

$$\Delta > 0$$

при $|x|$ достаточно большомъ, безразлично, будетъ ли $x \lessgtr 0$.



Черт. 99.

Такъ какъ

$$\Delta = y - \bar{Y} > 0,$$

то отсюда заключаемъ, что

$$y > \bar{Y},$$

т.е. кривая проходитъ выше ассимптоты у обоихъ ея концовъ.

Расположеніе кривой представлено на чертежѣ 99.

b) *Ассимптоты, параллельныя оси $\bar{X}$-овъ.* $\bar{Y} = c$.

Опредѣленіе. Если при безпредѣльномъ возрастаніи $|x|$ одно изъ значеній

$$y = f(x)$$

стремится къ постоянному числу c такъ что, полагая

$$\Delta = y - c$$

оказывается

$$\text{Пред.}_{x=\infty}\ \Delta = 0 ,$$

то прямая

$$\bar{Y} = c$$

называется ассимптотою, параллельной оси $\bar{X}$-овъ.

Теорема. Если уравненіе алгебраической кривой представлено въ видѣ

$$x^m \cdot \varphi_0(y) + x^{m-1}\varphi_1(y) + \ldots + \varphi_m(y) = 0;$$

то ассимптоты, параллельныя оси X-овъ, нужно искать среди корней уравненія

$$\varphi_0(y) = 0.$$

Доказательство. Представимъ уравненіе кривой въ видѣ

$$\varphi_0(y) + \frac{1}{x}\varphi_1(y) + \frac{1}{x^2}\varphi_2(y) + \ldots + \frac{1}{x^m}\varphi_m(y) = 0;$$

при $x = \infty$ значенія y совпадаютъ съ корнями уравненія

$$\varphi_0(y) = 0.$$

Рѣшая это уравненіе, находимъ ассимптоты

$$y = c_1, c_2, c_3, \ldots c_p.$$

Замѣчаніе. Изучая знакъ разности

$$\Delta = y - c$$

въ зависимости отъ знака x можно опредѣлить расположеніе кривой относительно ассимптотъ; при этомъ вещественной ассимптотѣ, можетъ оказаться, отвѣчаетъ мнимая вѣтвь кривой.

c) *Ассимптоты, параллельныя оси $\bar{Y}$-овъ:*

$$\bar{X} = c.$$

Опредѣленіе. Если, при безпредѣльномъ возрастаніи y, x, взятое изъ уравненія кривой, стремится къ постоянной c такъ, что, полагая

$$\Delta = x - c$$

оказывается

$$\text{Пред.}_{y=\infty}\ \Delta = 0,$$

то прямая $\bar{X} = c$ называется ассимптотою, параллельной оси $\bar{Y}$-овъ.

Теорема. Если уравненіе алгебраической кривой представлено въ видѣ

$$y^m\varphi_0(x) + y^{m-1}\varphi_1(x) + \ldots . + \varphi_m(x) = 0,$$

то ассимптоты, параллельныя оси Y-овъ, нужно искать среди корней уравненія

$$\varphi_0(x) = 0.$$

Доказательство подобно предыдущему.

Замѣчаніе. Изучая знакъ

$$\Delta = x - c$$

въ зависимости отъ знака y, можно опредѣлить расположеніе кривой относительно ассимптотъ.

Примѣръ.

$$xy^2 + 2xy + x - y + 2 = 0.$$

Переписавъ это уравненіе въ видѣ

$$x(y + 1)^2 + 2 - y = 0,$$

находимъ на основаніи предыдущаго уравненіе ассимптоты, параллельной оси OX:

$$(y + 1)^2 = 0$$

или

$$y + 1 = 0.$$

Опредѣлимъ знакъ $y + 1$ въ зависимости отъ знака x. Изъ уравненія кривой имѣемъ

$$(y + 1)^2 = \frac{y - 2}{x},$$

откуда

$$y + 1 = \pm\sqrt{\frac{y - 2}{x}} = \pm\sqrt{\frac{-3 + \varepsilon}{x}},$$

такъ какъ, при безпредѣльномъ возрастаніи x, y стремится къ $- 1$ и $y - 2$ къ $- 3$.

Чтобы $y + 1$, а слѣдовательно и y были вещественными, должно быть

$$x < 0;$$

тогда изъ двухъ вѣтвей кривой (см. черт. 100) будемъ имѣть для одной

$$y_1 > - 1,$$

для другой

$$y_2 < - 1.$$

Такимъ образомъ обѣ вѣтви кривой подходятъ къ лѣвому концу ассимптоты

$$y + 1 = 0$$

(при $x = - \infty$), причемъ одна сверху, другая снизу ассимптоты.

Найдемъ ассимптоты, параллельныя оси Y-овъ. Переписывая уравненіе кривой въ видѣ

$$y^2x + y(2x-1) + x + 2 = 0$$

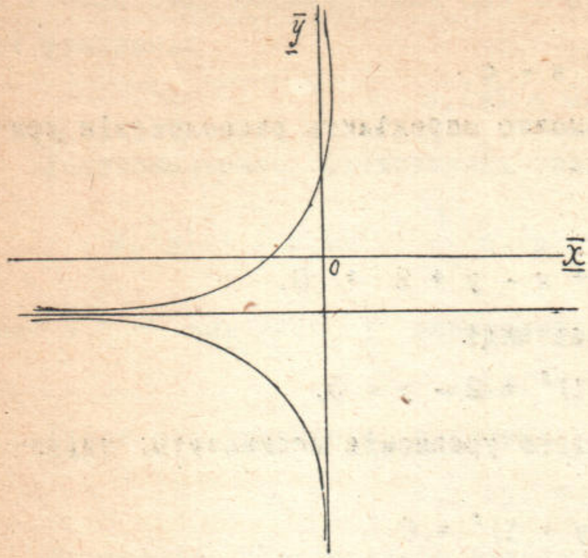
и приравнивая нулю коэффиціентъ при y^2, получимъ

$$\bar{X} = 0$$

– уравненіе ассимптоты, параллельной оси $\bar{Y}$-овъ. Раздѣливъ уравненіе кривой на y^2, находимъ

$$x + \frac{1}{y}(2x-1) + \frac{x+2}{y^2} = 0.$$

Такъ какъ при $|y|$ достаточно большомъ x будетъ сколько угодно близко къ нулю, то послѣднее равенство можно переписать въ видѣ



Черт. 100.

$$x + \frac{1}{y}(-1 + \varepsilon) = 0$$

или

$$x = \frac{1}{y}(1 - \varepsilon).$$

Отсюда имѣемъ

$$x < 0 \quad \text{при} \quad y = -\infty$$

$$x > 0 \quad \text{при} \quad y = +\infty$$

(см. черт. 100), т.е. кривая подходитъ слѣва къ нижнему концу ассимптоты $\bar{X} = 0$ и справа къ верхнему концу.

Замѣтимъ, что

$$x = \frac{y-2}{(y+1)^2}$$

$$x' = \frac{5-y}{(y+1)^3}$$

$$x'' = \frac{2(y-8)}{(y+1)^4},$$

находимъ: 1) точки пересѣченія съ осями координатъ

$$\left|\begin{array}{l} 0,2 \\ -2,0, \end{array}\right.$$

2) вершину въ точкѣ кривой

$$y = 5$$

$$x = {}^1/_{12}$$

и 3) перегибъ въ точкѣ

$$y = 8$$

$$x = {}^2/_{27} .$$

Теорема. Если уравненіе алгебраической кривой представлено въ видѣ

$$\varphi_m(x,y) + \varphi_{m-1}(x,y) + \ldots + \varphi_p(x,y) = 0,$$

гдѣ $\varphi_j(x,y)$ означаетъ однородную совокупность членовъ измѣренія j, то мы получимъ уравненіе пучка *ассимптотическихъ направленій,* приравнивая нулю совокупность членовъ высшаго измѣренія

$$\varphi_m(x,y) = 0.$$

Ассимптотическимъ направленіемъ называется направленіе съ угловымъ коэффиціентомъ α, равнымъ угловому коэффиціенту ассимптотъ:

$$\alpha = \text{Пред.}_{x=\infty} \frac{y}{x} .$$

Доказательство. Переписавъ уравненіе кривой въ видѣ

$$x^m \varphi_m(1, \frac{y}{x}) + x^{m-1} \varphi_{m-1}(1, \frac{y}{x}) + \ldots + x^p \varphi_p(1, \frac{y}{x}) = 0,$$

раздѣливъ его на x^m, получимъ

$$\varphi_m(1, \frac{y}{x}) + \frac{1}{x} \varphi_{m-1}(1, \frac{y}{x}) + \ldots + \frac{1}{x^{m-p}} \varphi_p(1, \frac{y}{x}) = 0.$$

При $x = \infty$ найдемъ

$$\varphi_m(1, \alpha) = 0.$$

Отсюда опредѣляемъ q значеній α :

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_q ,$$

причемъ

$$q \leq m \text{ (при } q < m, \ m - q \text{ корней } \alpha \text{ равны } \infty).$$

Зная же значенія α, можно написать

$$\varphi_m(1, \alpha) = A(\alpha - \alpha_1)(\alpha - \alpha_2)\ldots(\alpha - \alpha_q).$$

Подставляя сюда $\frac{\bar{Y}}{\bar{X}}$ вмѣсто α, получимъ

$$\varphi_m(1, \frac{\bar{Y}}{\bar{X}}) = A(\frac{\bar{Y}}{\bar{X}} - \alpha_1)(\frac{\bar{Y}}{\bar{X}} - \alpha_2)\ldots(\frac{\bar{Y}}{\bar{X}} - \alpha_q),$$

что, по умноженіи обѣихъ частей равенства на $\bar{X}^m$, даетъ

$$\bar{X}^m\varphi_m(1, \frac{\bar{Y}}{\bar{X}}) = \varphi_m(\bar{X},\bar{Y}) = A\bar{X}^{m-q}(\bar{Y} - \alpha_1\bar{X})(\bar{Y} - \alpha_2\bar{X})\ldots(\bar{Y} - \alpha_q\bar{X}).$$

Приравнивая нулю $\varphi_m(\bar{X}, \bar{Y})$, получимъ уравненіе совокупности прямыхъ:

$$\bar{X}^{m-q} = 0 \quad \textit{(ассимпт. направленія } \parallel \textit{ оси } O\bar{Y})$$

$$\left.\begin{array}{l} \bar{Y} - \alpha_1\bar{X} = 0 \\ \bar{Y} - \alpha_2\bar{X} = 0 \\ \ldots\ldots \\ \bar{Y} - \alpha_q\bar{X} = 0 \end{array}\right|$$

это суть прямыя ассимптотич. направленія съ угловыми коэффиціентами $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_q$, *т. к.* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_q$ *опредѣлены, какъ значенія*

$$\textit{Пред.}_{x=\infty}\; y/x .$$

Замѣчаніе. Если совокупность членовъ старшаго измѣренія въ уравненіи алгебраической кривой, напримѣръ,

$$(x^2 + y^2)^2 \;;\; x^4 + y^4 \;;\; x^6 + y^6 \text{ и т.п.}$$

не разлагается на вещественные линейные множители, то кривая должна быть замкнутая (если вообще уравненіе изображаетъ дѣйствительное геометрическое мѣсто.

Опредѣливъ, на основаніи доказанной теоремы, угловые коэффиціенты ассимптотъ: α, обратимся къ нахожденію начальныхъ ординатъ β (уравненіе ассимптоты у насъ $\bar{Y} = \alpha\bar{X} + \beta$).

Положивъ $y = tx$ въ уравненіи кривой, имѣемъ, по свойству однородныхъ функцій:

$$x^m\varphi_m(1, t) + x^{m-1}\varphi_{m-1}(1, t) + \ldots + x^\rho\varphi_\rho(1, t) = 0;$$

раздѣливъ на x^m и положивъ для сокращенія

$$\varphi_j(1, t) = \psi_j(t),$$

получаемъ уравненіе

$$\psi_m(t) + \frac{1}{x}\psi_{m-1}(t) + \frac{1}{x^2}\psi_{m-2}(t) + \ldots = 0 \quad . \; . \; . \; (*).$$

Выбравъ одно изъ значеній α (угловой коэффиціентъ ассимптоты), положимъ

$$t = \alpha + \frac{\gamma}{x},$$

причемъ, такъ какъ

$$y = tx = \alpha x + \gamma,$$

то можно положить

$$\gamma = \beta + \Delta,$$

гдѣ β начальная ордината ассимптоты, а Δ - безконечно малая при безконечно маломъ $^1/x$.

По формулѣ Тэйлора находимъ:

$$\psi_m(t) = \psi_m(\alpha) + \frac{\gamma}{x}\psi'_m(\alpha) + \left(\frac{\gamma}{x}\right)^2\frac{\psi''_m(\alpha)}{2} + \left(\frac{\gamma}{x}\right)^3\frac{\psi'''_m(\alpha)}{\beta} + \ldots$$

(причемъ $\psi_m(\alpha) = 0$, такъ какъ α есть корень уравненія: $\psi_m(t) = \varphi_m(1, t) = 0$).

$$\psi_{m-1}(t) = \psi_{m-1}(\alpha) + \frac{\gamma}{x}\psi'_{m-1}(\alpha) + \frac{\gamma^2}{2x^2}\psi''_{m-1}(\alpha) + \ldots$$

$$\psi_{m-2}(t) = \psi_{m-2}(\alpha) + \frac{\gamma}{x}\psi'_{m-2}(\alpha) + \frac{\gamma^2}{2x^2}\psi''_{m-2}(\alpha) + \ldots$$

Вносяя эти выраженія въ уравненіе (*) и располагая члены по степенямъ $^1/x$, получаемъ послѣ сокращенія на $^1/x$ слѣдующій результатъ:

$$\gamma\cdot\psi'_m(\alpha) + \psi_{m-1}(\alpha) + \frac{1}{x}\left[\frac{1}{2}\gamma^2\psi''_m(\alpha) + \gamma\cdot\psi'_{m-1}(\alpha) + \psi_{m-2}(\alpha)\right] +$$

$$+ \frac{1}{x^2}\left[\frac{1}{6}\gamma^3\psi'''_m(\alpha) + \frac{1}{2}\gamma^2\psi''_{m-1}(\alpha) + \gamma\cdot\psi'_{m-2}(\alpha) + \psi_{m-3}(\alpha)\right] =$$

$$= 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (*').$$

Если теперь $\psi'_m(\alpha)$ не $= 0$, т.е. $t = \alpha$ является лишь простымъ корнемъ уравненія

$$\psi_m(t) = \varphi_m(1, t) = 0,$$

то при $x = \infty$, замѣняя γ на β (такъ какъ $\Delta = 0$), находимъ

$$\beta . \psi'_m(\alpha) + \psi_{m-1}(\alpha) = 0,$$

$$\beta = - \frac{\psi_{m-1}(\alpha)}{\psi'_m(\alpha)},$$

и ассимптота опредѣлена.

Если же $\psi'_m(\alpha) = 0$ ($t = \alpha$ двукратный корень уравненія: $\psi_m(t) = \varphi_m(1, t) = 0$), но $\psi_{m-1}(\alpha)$ не $= 0$, то β выходитъ безконечнымъ; ассимптоты тогда нѣтъ, и соотвѣтствующая безконечная вѣтвь кривой называется *параболической* (по аналогіи съ параболой, которая имѣетъ ассимптотическое направленіе и не имѣетъ ассимптоты).

Если $\psi'_m(\alpha) = 0$ и $\psi_{m-1}(\alpha) = 0$, но $\psi''_m(\alpha)$ не $= 0$, то въ уравненіи (*') первый членъ пропадаетъ и по сокращеніи на $1/x$ оно даетъ - по замѣнѣ γ на β при $x = \infty$ - квадратное уравненіе для опредѣленія β:

$$\frac{1}{2} \beta^2 \psi''_m(\alpha) + \beta . \psi_{m-1}(\alpha) + \psi_{m-2}(\alpha) = 0,$$

изъ котораго - если β имѣетъ 2 вещественныхъ различныхъ значенія - получаются двѣ параллельныя ассимптоты.

Подобнымъ образомъ можно продолжать разсужденіе. Такъ, если въ уравненіи (*') пропадаетъ не только свободный членъ, но и коэффиц. при $1/x$ то, по сокращеніи на $1/x^2$ и замѣнѣ γ на β, мы получаемъ уже уравненіе 3-ьей степени относительно β, которое можетъ намъ дать 3 параллельныя ассимптоты съ однимъ и тѣмъ же угловымъ коэффиціентомъ α; послѣдній при этомъ является 3-кратнымъ корнемъ уравненія

$$\varphi_m(1, t) = \psi_m(t) = 0,$$

такъ какъ

$$\psi'_m(\alpha) = 0 \quad \text{и} \quad \psi''_m(\alpha) = 0.$$

Вообще можно замѣтить, что кратному корню порядка μ уравненія $\varphi_m(1, t) = 0$ можетъ отвѣчать не болѣе μ параллельныхъ ассимптотъ, а такъ какъ полное число корней этого уравненія m (могутъ быть и безконечные корни), то можно утверждать, что алгебраическая кривая m-го порядка можетъ имѣть не болѣе m ассимптотъ. Когда опредѣлена ассимптота, можно обратиться къ опредѣленію расположенія безконечныхъ вѣтвей кривой относительно этой ассимптоты.

Въ случаѣ, когда данному α отвѣчаетъ одна ассимптота:

$$\bar{Y} = \alpha\bar{X} - \frac{\psi_{m-1}(\alpha)}{\psi'_m(\alpha)},$$

то, полагая въ уравненіи (*')

$$\gamma = \beta + \Delta,$$

мы получаемъ (такъ какъ $\beta.\psi'_m(\alpha) + \psi_{m-1}(\alpha) = 0$)

$$\Delta.\psi'_m(\alpha) + \frac{1}{x}\left[\frac{1}{2}\beta^2\psi''_m(\alpha) + \beta.\psi'_{m-1}(\alpha) + \psi_{m-2}(\alpha) + \right.$$

$$\left. + \Delta.\left\{\beta.\psi''_m(\alpha) + \psi'_{m-1}(\alpha)\right\} + \Delta^2.\frac{1}{2}\psi''_m(\alpha)\right] +$$

$$+ \frac{1}{x^2}\left[\frac{1}{6}\beta^3\psi'''_m(\alpha) + \frac{1}{2}\beta^2\psi''_{m-1}(\alpha) + \beta.\psi'_{m-2}(\alpha) + \psi_{m-3}(\alpha) + \right.$$

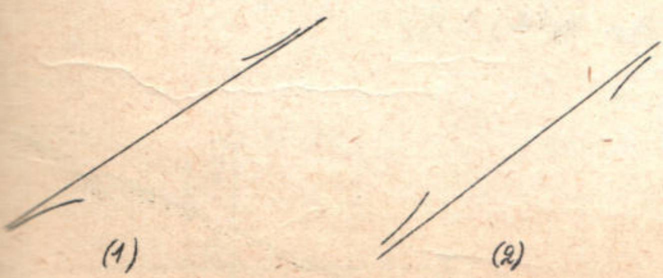
$$\left. + \Delta.\left\{\ldots\right\} + \ldots\right] + \ldots = 0 \ldots (*")$$

Если здѣсь

$$A = \frac{1}{2}\beta^2\psi''_m(\alpha) + \beta.\psi'_{m-1}(\alpha) + \psi_{m-2}(\alpha) \text{ не } = 0,$$

то уравненіе (*") принимаетъ форму

$$\Delta.\psi'_m(\alpha) + \frac{1}{x}\left[A + \varepsilon\right] = 0;$$



(1) (2)

Черт. 101.

отсюда, при

$$A.\psi'_m(\alpha) < 0,$$

находимъ

$$\Delta.\frac{1}{x} > 0,$$

т.е.

$\Delta < 0$ $x = -\infty$

и

$\Delta > 0$ $x = +\infty$

(расположеніе (1) черт. 101), напротивъ при $A.\psi'_m(\alpha) < 0$ находимъ

$$\Delta \cdot \frac{1}{x} < 0,$$

т.е.

$$\Delta > 0 \quad \text{при} \quad x = -\infty$$

и

$$\Delta < 0 \quad \text{при} \quad x = +\infty$$

(расположенiе (2) черт. 101).

Пусть теперь выраженiе $A = 0$; тогда, привлекая въ уравненiе (*") еще членъ съ $^1/x^2$, получаемъ:

$$\Delta \left\{ \psi_m'(\alpha) + \frac{1}{x}\,[\beta.\psi_m''(\alpha) + \psi_{m-1}'(\alpha)] + \frac{\Delta}{x} \cdot \frac{1}{2}\,\psi_m''(\alpha) \right\} +$$

$$+ \frac{1}{x^2}\left[B + \Delta \left\{\ldots\right\} + \Delta^2 \left\{\ldots\right\} + \Delta^3 \left\{\ldots\right\} \right] + \ldots = 0$$

или

$$\Delta \left[\psi_m'(\alpha) + \varepsilon \right] + \frac{1}{x^2}\left[B + \eta \right] = 0,$$

гдѣ

$$B = \frac{1}{6}\,\beta^3\psi_m''(\alpha) + \frac{1}{2}\,\beta^2\psi_{m-1}''(\alpha) + \beta.\psi_{m-2}'(\alpha) + \psi_{m-3}(\alpha).$$

Если здѣсь B не нуль, то Δ имѣетъ знакъ обратный

$$B \cdot \psi_m'(\alpha)$$

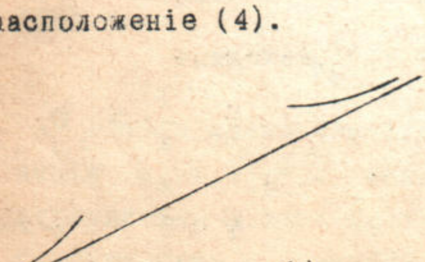
при $x = \pm \infty$; такимъ образомъ при

$$B \cdot \psi_m'(\alpha) < 0$$

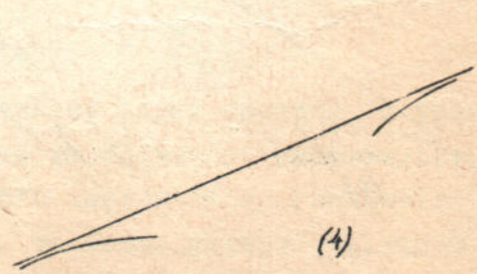
получается расположенiе (3) (черт. 102) и при

$$B \cdot \psi_m'(\alpha) > 0$$

расположенiе (4).



(3)



(4)

Черт. 102.

Не входя въ разсмотрѣніе другихъ случаевъ, замѣтимъ, что здѣсь мы имѣемъ дѣло въ сущности съ такимъ же вопросомъ изученія знака безконечно малой разности $\Delta = y - \overline{Y}$ въ зависимости отъ знака $1/x$ какъ въ предыдущемъ §-ѣ (способъ A и B) - при изученіи расположенія кривой въ области начала координатъ.

Примѣръ 1. Найти ассимптоты кривой

$$x^3 + x^2y - 2xy^2 - y^2 = 0,$$

опредѣляя также расположеніе безконечныхъ вѣтвей.

Пучекъ ассимпт. направленій:

$$x^3 + x^2y - 2xy^2 = x(x^2 + xy - 2y^2)$$

даетъ три вещественныхъ направленія:

$$x = 0, \quad x - y = 0, \quad x + 2y = 0.$$

1°. Параллельно оси $\overline{Y}$-овъ проходитъ ассимптота $2x + 1 = 0$, такъ какъ, расположивъ уравненіе по степенямъ y и раздѣливъ на y^2, имѣемъ

$$-(2x + 1) + \frac{x^2}{y} + \frac{x^3}{y^2} = 0.$$

При $y = \infty$ имѣемъ

$$x = -1/2,$$

слѣдовательно

$$-(2x + 1) + \frac{1/4 + \varepsilon}{y} = 0.$$

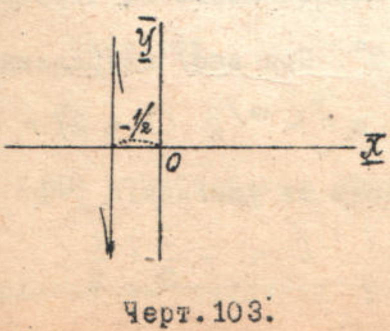
Отсюда знакъ $2x + 1$ одинаковъ со знакомъ y, т.е.

$$2x + 1 > 0 \quad \text{при} \quad y = +\infty$$

и

$$2x + 1 < 0 \quad \text{при} \quad y = -\infty.$$

Расположеніе представлено на чертежѣ 103.



Черт.103.

2°. При ассимпт. направленіи

$$\alpha = 1 \; (\overline{Y} - \overline{X} = 0)$$

полагаемъ въ уравненіи кривой

$$t = 1 + \frac{Y}{X},$$

причемъ самое уравненіе, положивъ $y = tx$ и раздѣливъ на x^3, приводимъ къ виду

$$1 + t - 2t^2 - \frac{t^2}{x} = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (*).$$

Имѣемъ:

$$1 + \left[1 + \frac{\gamma}{x}\right] - 2\left[1 + 2\frac{\gamma}{x} + \frac{\gamma^2}{x^2}\right] - \frac{1}{x}\left[1 + 2\frac{\gamma}{x} + \frac{\gamma^2}{x^2}\right] = 0.$$

Сокращая свободные члены и умножая на x, получаемъ

$$-1 - 3\gamma + \frac{1}{x}(-2\gamma - 2\gamma^2) - \frac{\gamma^2}{x^2} = 0.$$

При $x = \infty$, полагая $\gamma = \beta$, находимъ

$$-1 - 3\beta = 0, \quad \beta = -{}^1/_3 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (*')$$

Искомая ассимптота

$$\bar{Y} = \bar{X} - {}^1/_3 .$$

Чтобы найти расположеніе вѣтвей, дѣлаемъ

$$\gamma = \beta + \Delta = -{}^1/_3 + \Delta.$$

Уравненіе (*') принимаетъ форму:

$$-3\Delta + \frac{1}{x}\left({}^2/_3 - {}^2/_9 + \ldots\right) + \ldots = 0,$$

или

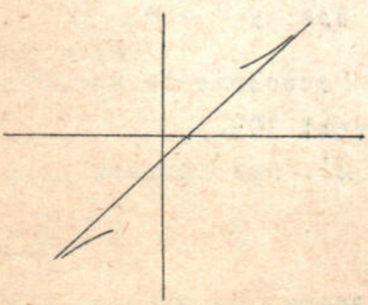
$$-3\Delta + \frac{1}{x}\left({}^4/_9 + \varepsilon\right) = 0,$$

откуда Δ и $\frac{1}{x}$ одного знака, т.е. при

$x = +\infty \; . \; . \; . \; . \; \Delta > 0$

и при

$x = -\infty \; . \; . \; . \; . \; \Delta < 0.$



Черт. 104.

Расположеніе на чертежѣ 104.

3°. При асс. направленіи

$$\alpha = -{}^1/_2 \quad (\bar{X} + 2\bar{Y} = 0)$$

дѣлаемъ въ уравненіи (*)

$$t = -\frac{1}{2} + \frac{\gamma}{x} .$$

Имѣемъ:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{\gamma}{x} - 2\left[\frac{1}{4} - \frac{\gamma}{x} + \frac{\gamma^2}{x^2}\right] - \frac{1}{x}\left[\frac{1}{4} - \frac{\gamma}{x} + \frac{\gamma^2}{x^2}\right] = 0.$$

Сокращая свободные члены и умножая на x, получаемъ

$$-\frac{1}{4} + 3\gamma + \frac{1}{x}(\gamma - 2\gamma^2) - \frac{\gamma^2}{x^3} = 0.$$

При $x = \infty$ и $\gamma = \beta$ находимъ

$$-{}^1/_4 + 3\beta = 0, \quad \beta = {}^1/_{12}.$$

Ассимптота будетъ

$$\bar{Y} = -{}^1/_2\bar{X} + {}^1/_{12}.$$

Чтобы найти расположеніе, дѣлаемъ

$$\gamma = {}^1/_{12} + \Delta;$$

получаемъ:

$$3\Delta + {}^1/x\,({}^1/_{12} - {}^1/_{72}) - \ldots = 0,$$

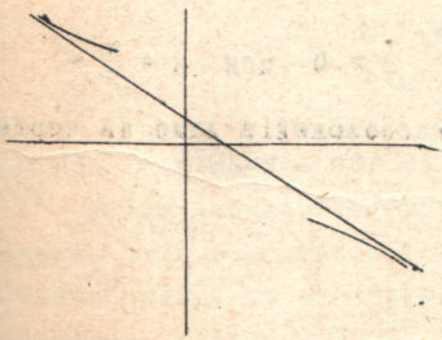
$$3\Delta + {}^1/x\,({}^5/_{72} + \varepsilon) = 0,$$

отсюда Δ и ${}^1/x$ противоположныхъ знаковъ, т.е.

$$\Delta < 0 \text{ при } x = +\infty$$

и

$$\Delta > 0 \text{ при } x = -\infty.$$



Черт. 105.

Расположеніе на чертежѣ 105.

Примѣръ 2. Найти ассимптоту кривой

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0$$

(Декартовъ листъ), $a > 0$.

Пучекъ асс. направленій

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$$

даетъ одно вещественное рѣшеніе

$$x + y = 0, \quad \alpha = -1.$$

Полагая въ уравненіи $y = tx$ и дѣля на x^3, имѣемъ:

$$1 + t^3 - \frac{3at}{x} = 0.$$

Дѣлая $t = -1 + \frac{Y}{x}$, находимъ:

$$1 - 1 + 3\frac{Y}{x} - 3\frac{Y^2}{x^2} + \frac{Y^3}{x^3} - \frac{3a}{x}\left(-1 + \frac{Y}{x}\right) = 0.$$

Сокращая свободный членъ и умножая на x, получаемъ:

$$3\gamma + 3a + \frac{1}{x}(-3\gamma^2 - 3a\gamma) + \frac{\gamma^3}{x^2} = 0.$$

При $x = \infty$ и $\gamma = \beta$, находимъ:

$$3\beta + 3a = 0, \quad \beta = -a,$$

ассимптота

$$\overline{Y} = -\overline{X} - a, \quad \overline{X} + \overline{Y} + a = 0.$$

Для опредѣленія расположенія дѣлаемъ:

$$\beta = -a + \Delta;$$

тогда

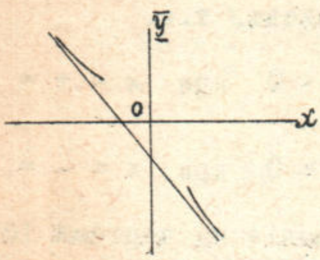
$$3\Delta - \frac{3\Delta(-a + \Delta)}{x} + \frac{(-a + \Delta)^3}{x^2} = 0$$

или

$$3\Delta(1 + \varepsilon) - \frac{a^3(1 + \eta)}{x^2} = 0,$$

$$\Delta > 0 \text{ при } x = \pm\infty.$$

Расположеніе дано на чертежѣ 106.



Черт.106.

§ 11.

Построеніе алгебраическихъ кривыхъ, заданныхъ уравненіями

$$f(x, y) = 0.$$

Для выясненія вопроса о фигурѣ кривой слѣдуетъ рѣшить такія задачи:

1°. Опредѣлить, если возможно, сколько вещественныхъ значеній y отвѣчаетъ одному значенію x въ извѣстномъ промежуткѣ (или наоборотъ).

2°. Найти точки пересѣченія кривой съ осями координатъ.

3°. Найти вершины кривой, гдѣ касательная ||-на оси $\overline{X}$-овъ, т.е. $y' = 0$, для чего надо рѣшить систему

$$\left| \begin{array}{l} f(x, y) = 0 \\ f'_x(x, y) = 0. \end{array} \right.$$

4°. Найти вершины кривой, гдѣ касательная ||-на оси $\overline{Y}$-овъ, т.е. $y' = \infty$, для чего надо рѣшить систему

$$\left| \begin{array}{l} f(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) = 0. \end{array} \right.$$

5°. Найти особенныя точки кривой, рѣшая систему

$$\left| \begin{array}{l} f(x, y) = 0 \\ f'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) = 0, \end{array} \right.$$

и изслѣдовать расположеніе кривой въ области каждой особенной точки, для чего, перенеся въ эту точку начало координатъ, примѣнить способъ A или B § 9.

6°. Найти точки перегиба (см. § 8), рѣшая систему

$$\left| \begin{array}{l} f(x, y) = 0 \\ H(x, y) = 0 \end{array} \right.$$

(Гессіана) и исключая изъ ея рѣшеній особенныя точки.

7°. Найти ассимптоты кривой и опредѣлить расположеніе безконечныхъ вѣтвей по способу § 10. Полезно также найти точки пересѣченія кривой съ ея ассимптотами, если таковыя существуютъ на конечномъ разстояніи.

Рѣшивъ всѣ эти вопросы, мы составимъ себѣ безошибочное представленіе о фигурѣ кривой. Для болѣе точнаго вычерчиванія ея можно построить рядъ болѣе или менѣе близкихъ точекъ ея. Приведемъ примѣры.

1°. Изслѣдовать и построить кривую

$$x^2y + 2xy^2 + y^2 - x^2 = 0.$$

1) Вещественныя значенія y изъ уравненія

$$y^2(2x + 1) + x^2y - x^2 = 0$$

получаются при условіи

$$x^4 + 4x^2(2x + 1) > 0,$$

т.е. при

$$x^2 + 8x + 4 > 0,$$

откуда слѣдуетъ:

$$\text{или } x \leqq -(4 + \sqrt{12})$$

$$\text{или } x \geqq \sqrt{12} - 4;$$

въ промежуткѣ значеній x:

$$-(\sqrt{12} + 4) < x < \sqrt{12} - 4,$$

напротивъ, нѣтъ вещественныхъ значеній y.

2) Кривая пересѣкаетъ оси координатъ только въ началѣ, такъ какъ при $x = 0$ выходитъ $y^2 = 0$, при $y = 0$ выходитъ $-x^2 = 0$.

3) Вершины кривой съ касательными оси $\overline{X}$-овъ опредѣляются какъ рѣшенія системы:

$$\left| \begin{aligned} f(x, y) &= x^2y + 2xy^2 + y^2 - x^2 = 0 \\ {}^1/_2 f'_x(x, y) &= xy + y^2 - x = 0; \end{aligned} \right.$$

исключая изъ двухъ уравненій члены съ x^2 (умножаемъ второе на $-x$ и складываемъ съ первымъ), получаемъ:

$$xy^2 + y^2 = 0,$$

откуда

$$\text{или } y^2 = 0$$

$$\text{или } x + 1 = 0;$$

но при $y^2 = 0$ изъ уравненія $f(x, y) = 0$ выходитъ $x = 0$, что даетъ точку $(0,0)$, но эта точка будетъ не вершиной, а особенной точкой, такъ какъ въ ней также

$$f'_y = x^2 + 4xy + 2y = 0;$$

беря же $x = -1$, получимъ изъ любого уравненія $f = 0$ или $f'_x = 0$:

$$y^2 - y + 1 = 0,$$

это даетъ мнимыя значенія для y. Такимъ образомъ, вершинъ этого рода нѣтъ у данной кривой.

4) Вершины съ касательными || оси $\bar{Y}$-овъ опредѣляются системой

$$\left|\begin{array}{l} f = x^2y + 2xy^2 + y^2 - x^2 = 0 \\ f'_y = x^2 + 4xy + 2y = 0. \end{array}\right.$$

Очевидное рѣшеніе: $x = 0$, $y = 0$ отбрасываемъ, какъ отвѣчающее особенной точкѣ. Тогда, умножая первое уравненіе на 2, второе на $-y$ и складывая, получаемъ:

$$x^2y - 2x^2 = 0,$$

откуда (отбрасывая $x = 0$) получается

$$y = 2.$$

Внося $y = 2$ въ одно изъ нашихъ уравненій $f = 0$ или $f'_y=0$, имѣемъ:

$$x^2 + 8x + 4 = 0,$$

откуда

$$x = -4 + \sqrt{12} = -0,54$$

$$x = -4 - \sqrt{12} = -7,46.$$

Итакъ, кривая наша имѣетъ двѣ вершины съ касательными || оси $\bar{Y}$-овъ:

$$(-4 + \sqrt{12}, \ 2) \qquad (-4 - \sqrt{12}, \ 2).$$

Согласно пункту 1° касательныя въ этихъ точкахъ выдѣляютъ полосу, внутри которой нѣтъ точекъ кривой.

5) Особенная точка только одна $(0,0)$, такъ какъ изъ пункта 3° мы нашли лишь одно вещественное рѣшеніе системы $f = 0$, $f'_x = 0$, именно $(0,0)$; это рѣшеніе удовлетворяетъ также и уравненію $f'_y = 0$, слѣдовательно, даетъ особенную точку. Добавимъ здѣсь, что вообще кривая 3-го порядка не можетъ имѣть двухъ особенныхъ точекъ, такъ какъ иначе прямая, ихъ соединяющая, имѣла бы по крайней мѣрѣ 4 точки пересѣченія съ кривою (два двукратныхъ корня, если точки двойныя), а это противорѣчитъ извѣстной теоремѣ аналитической геометріи, по которой число точекъ пересѣченія двухъ алгебраическихъ кривыхъ порядковъ m и n (у насъ 3 и 1) не больше $m.n$.

Въ началѣ координатъ пучекъ касательныхъ

$$y^2 - x^2 = 0$$

даетъ

$$y - x = 0, \quad y + x = 0.$$

Для изслѣдованія фигуры кривой въ области начала координатъ примѣнимъ пріемъ A § 9. Полагая въ уравненіи кривой $y = tx$ и сокращая на x^2, получаемъ:

$$x(t + 2t^2) + t^2 - 1 = 0.$$

При $t = 1$ имѣемъ

$$x(3 + \varepsilon) + (t - 1)(2 + \eta) = 0,$$

откуда

$$x(t - 1) = y - x < 0;$$

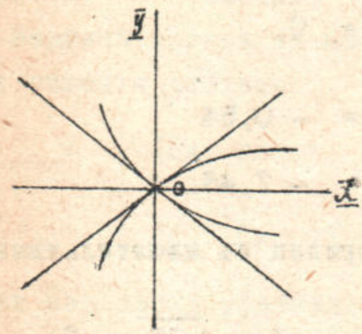
при $t = - 1$ имѣемъ

$$x(1 + \varepsilon) + (t + 1)(- 2 + \eta) = 0,$$

откуда

$$x(t + 1) = y + x > 0.$$

Расположеніе вѣтвей на чертежѣ 107.



Черт. 107.

6) Для нахожденія точекъ перегиба составляемъ Гессіану. Уравненіе, приведенное къ однородному виду, будетъ:

$$F(x,y,z) = x^2y + 2xy^2 + y^2z - x^2z = 0,$$

откуда

$$F''_{xx} = 2y - 2z, \quad F''_{xy} = 2x + 4y,$$

$$F''_{yy} = 4x + 2z, \quad F''_{xz} = - 2x,$$

$$F''_{yz} = 2y, \quad F''_{zz} = 0\,;$$

полагая здѣсь $z = 1$, получаемъ

$$H(x, y) = \begin{vmatrix} 2y - 2 & 2x + 4y & - 2x \\ 2x + 4y & 4x + 2 & 2y \\ - 2x & 2y & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 8 \begin{vmatrix} y - 1, & x + 2y, & - x \\ x + 2y, & 2x + 1, & y \\ - x, & y, & 0 \end{vmatrix}$$

или

$$H(x, y) = - 8(y^3 + 4xy^2 - y^2 + 2x^2y + 2x^3 + x^2).$$

Рѣшаемъ систему:

$$H = y^3 + y^2(4x - 1) + 2x^2y + 2x^3 + x^2 = 0 \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

$$f = y^2(2x + 1) + x^2y - x^2 = 0, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

подвергая ее послѣдовательнымъ преобразован. для исключенія y. Сперва, умноживъ (1) на $2x + 1$, (2) на $- y$, сложимъ; получимъ

$$y^2 [(4x-1)(2x+1) - x^2] + y[2x^2(2x+1) + x^2] + x^2(2x+1)^2 = 0$$

или

$$y^2(7x^2 + 2x - 1) + y \, . \, x^2(4x + 3) + x^2(2x + 1)^2 = 0 \; . \; . (3)$$

Такимъ образомъ исключилось y^3.

Теперь, выписавъ уравненія

$$y^2(7x^2 + 2x - 1) + y \; x^2(4x + 3) + x^2(2x + 1)^2 = 0 \; . \; . \; (3)$$

$$y^2(2x + 1) \qquad + y \, . \, x^2 \qquad - x^2 \qquad = 0 \, , \; . \; (2)$$

исключимъ y^2, для чего умножимъ (3) на $(2x + 1)$, (2) на $- (7x^2 + 2x - 1)$ и сложимъ. Получимъ:

$$y . x^2[(4x+3)(2x+1) - (7x^2+2x-1)] + x^2[(2x+1)^3 + 7x^2 + 2x - 1] = 0$$

или

$$y(x^2 + 8x + 4) + x(8x^2 + 19x + 8) = 0 \; . \; . \; . \; . \; (4)$$

(мы сократили на x^2, такъ какъ при $x = 0$ выходитъ изъ уравненія $f = 0$ также $y = 0$, что даетъ начало-особенную точку).

Изъ уравненія (4) находимъ

$$y = - \frac{x(8x^2 + 19x + 8)}{x^2 + 8x + 4} \; ; \; . \; . \; . \; . \; . \; (5)$$

подставляя въ уравненіе (2), получаемъ:

$$x^2(8x^2 + 19x + 8)^2(2x + 1) - x^3(8x^2 + 19x + 8)(x^2 + 8x + 4) -$$
$$- x^2(x^2 + 8x + 4)^2 = 0 ;$$

сокращая на x^2 и дѣлая приведеніе членовъ, находимъ уравненіе:

$$120x^5 + 588x^4 + 1074x^3 + 885x^2 + 336x + 48 = 0$$

или

$$40x^5 + 196x^4 + 358x^3 + 295x^2 + 112x + 16 = 0 \; . \; . \; (6)$$

опредѣляющее абсциссы точекъ перегиба.

Ординаты ихъ опредѣляются изъ уравненія (5).

Уравненіе (6) имѣетъ двукратный корень

$$x = - {}^1/_2,$$

которому отвѣчаетъ изъ (5)

$$y = 1;$$

однако точка $(- {}^1/_2, 1)$ не будетъ точкой перегиба, такъ какъ она не удовлетворяетъ уравненію Гессіаны

$$H(x, y) = 0;$$

кромѣ того, вычисляя въ этой точкѣ производныя y', y'' изъ уравненія $f = 0$, находимъ:

$$y' = - 8, \quad y'' = 192;$$

это постороннее рѣшеніе получилось оттого, что мы два раза умножали, при исключеніи степеней y на $2x + 1$.

Раздѣливъ лѣвую часть уравненія (6) на $(2x + 1)^2$, получимъ уравненіе 3-ьей степени

$$\varphi(x) = 10x^3 + 39x^2 + 48x + 16 = 0 \; . \; . \; . \; . \; (7).$$

Составляя для него функціи Штурма:

$$\varphi' = 5x^2 + 13x + 8,$$

$$\varphi_2(x) = 3x + 8$$

$$\varphi_3(x) = - 1,$$

убѣждаемся, что оно имѣетъ только одинъ отрицательный корень между 0 и $- 1$, или точнѣе между

$$x = -4 + \sqrt{12} \quad \text{и} \quad x = {}^1/_2,$$

такъ какъ

$$\varphi(-4 + \sqrt{12}) = 12(-97 + 28\sqrt{12}) = 12(-\sqrt{9409} + \sqrt{9408}) < 0$$

и

$$\varphi(-{}^1/_2) = {}^1/_2 > 0.$$

Такимъ образомъ кривая имѣетъ лишь одну точку перегиба при абсциссѣ между

$$-4 + \sqrt{12} = -0,54 \quad \text{и} \quad -0,5.$$

7°. Обращаемся къ разысканію ассимптотъ.

Пучекъ асс. направленій

$$x^2y + 2xy^2 = 0$$

даетъ 3 направленія:

$$x = 0, \quad y = 0, \quad x + 2y = 0.$$

a) Располагая члены по степенямъ y:

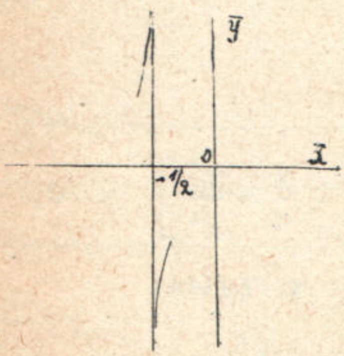
$$y^2(2x + 1) + yx^2 - x^2 = 0$$

и дѣля на y^2, имѣемъ

$$2x + 1 + \frac{x^2(y - 1)}{y^2} = 0,$$

или

$$2x + 1 + \frac{x^2}{y}(1 + \varepsilon) = 0,$$



Черт. 108.

откуда слѣдуетъ, что $2x + 1 = 0$ есть ассимптота; кромѣ того, $2x+1$ имѣетъ знакъ $(-y)$, т.е.

$$2x + 1 < 0 \quad \text{при} \quad y = +\infty$$

и

$$2x + 1 > 0 \quad \text{при} \quad y = -\infty.$$

b) Располагая члены по степенямъ x:

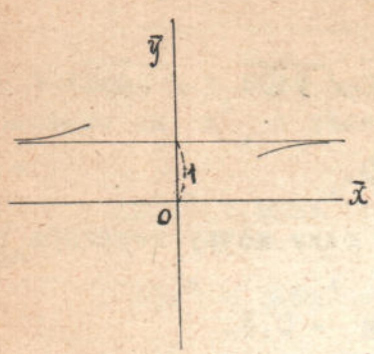
$$x^2(y - 1) + y^2(2x + 1) = 0$$

и дѣля на x^2, получаемъ:

$$y - 1 + \frac{y^2}{x}\left(2 + \frac{1}{x}\right) = 0$$

или

$$y - 1 + \frac{y^2}{x}(2 + \varepsilon) = 0,$$



Черт.109.

откуда получаемъ ассимптоту

$$\bar{Y} - 1 = 0,$$

и такъ какъ $y - 1$ имѣетъ знакъ $(-x)$, то

$$y - 1 < 0 \quad \text{при} \quad x = +\infty,$$

$$y - 1 > 0 \quad \text{при} \quad x = -\infty.$$

c) Соотвѣтственно угловому коэффиціенту

$$\alpha = -\ ^1/_2$$

(изъ $x + 2y = 0$) полагаемъ въ уравненіи кривой

$$t + 2t^2 + \frac{1}{x}(t^2 - 1) = 0$$

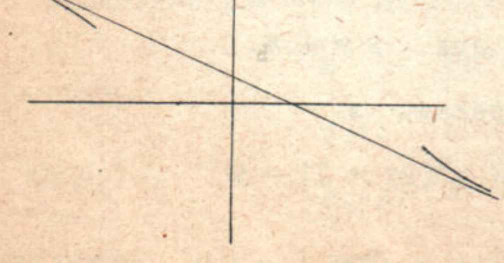
букву

$$t = -\frac{1}{2} + \frac{\gamma}{x}:$$

$$-\frac{1}{2} + \frac{\gamma}{x} + \frac{1}{2} - \frac{2\gamma}{x} + \frac{2\gamma^2}{x^2} + \frac{1}{x}\left[-\frac{3}{4} - \frac{\gamma}{x} + \frac{\gamma^2}{x^2}\right] = 0,$$

сокращая свободные члены и умножая на x, имѣемъ

$$-\gamma - \frac{3}{4} + \frac{1}{x}(2\gamma^2 - \gamma) + \frac{\gamma^2}{x^2} = 0.$$



Черт 110.

При $x = \infty$, дѣлаемъ $\gamma = \beta$ и получаемъ

$$-\beta - \ ^3/_4 = 0, \quad \beta = -\ ^3/_4,$$

такъ что ассимптота будетъ

$$\bar{Y} = -\ ^1/_2 \bar{X} - \ ^3/_4$$

Дѣлая $\gamma = \beta + \Delta$, имѣемъ.

$$-\Delta + \frac{1}{x}(2.^9/_{16} + \ ^3/_4 + \varepsilon) = 0,$$

откуда Δ имѣетъ знакъ x, т.е.

$$\Delta > 0 \quad \text{при} \quad x = +\infty$$

и

$$\Delta < 0 \quad \text{при} \quad x = -\infty.$$

Отмѣтимъ еще точки пересѣченія кривой съ ея ассимптотами.

При $x = -{}^1/_2$ изъ уравненія кривой выходитъ $y = 1$ и при $y = 1$ обратно $x = -{}^1/_2$, такъ что ассимптоты

$$2\bar{X} + 1 = 0 \text{ и } \bar{Y} - 1 = 0$$

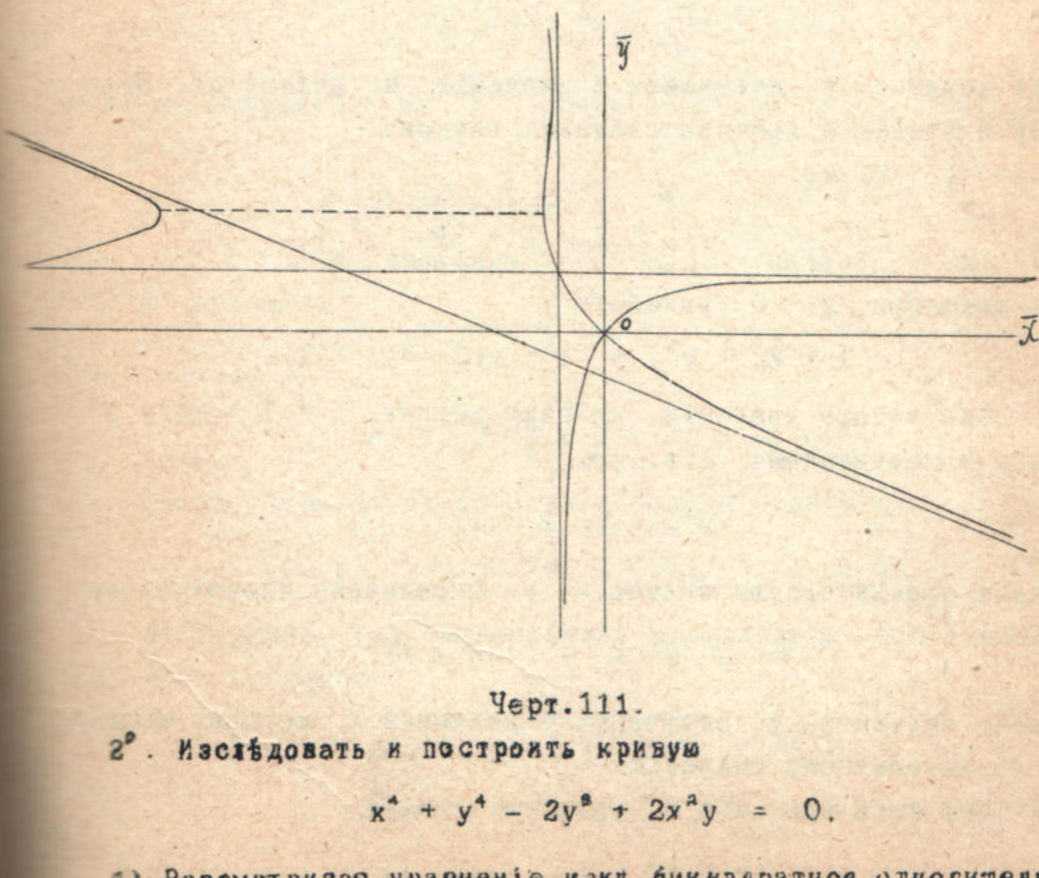
пересѣкаются въ точкѣ, лежащей на кривой; съ ассимптотой

$$\bar{X} + 2\bar{Y} + {}^3/_2 = 0$$

кривая пересѣкается въ точкѣ

$$(-{}^3/_{10},\ -{}^3/_5).$$

Графикъ кривой см. на чертежѣ 111.



Черт.111.

2^0. Изслѣдовать и построить кривую

$$x^4 + y^4 - 2y^3 + 2x^2y = 0.$$

1) Разсматривая уравненіе какъ биквадратное относительно x, имѣемъ

$$x^2 = -y \pm \sqrt{y^2 + 2y^3 - y^4}$$

или

$$x^2 = y\left[-1 \pm \sqrt{1 + 2y - y^2}\right].$$

Прежде всего подкоренное $1 + 2y - y^2$ должно быть $\geqq 0$, что даетъ

$$-(\sqrt{2} - 1) \leqq y \leqq 1 + \sqrt{2}.$$

Далѣе, если $y > 0$, то нужно брать корень $\sqrt{1 + 2y - y^2}$ только съ + (иначе $x^2 < 0$):

$$x^2 = y\left[-1 + \sqrt{1 + 2y - y^2}\right]$$

и чтобы выходило $x^2 \geqq 0$ должно быть

$$1 + 2y - y^2 > 1, \quad 2y - y^2 > 0,$$

откуда при $y > 0$ получается $y \leqq 2$. Итакъ положительныя значенія y ограничены промежуткомъ:

$$0 \leqq y \leqq 2,$$

и тогда каждому y отвѣчаетъ 2 значенія x, равныя по абсолютному значенію и противоположныхъ знаковъ.

Если $y < 0$, то

$$x^2 = -y\left[1 \mp \sqrt{1 + 2y - y^2}\right],$$

и такъ какъ при $y < 0$ выходитъ

$$1 + 2y - y^2 = 1 + y(2 - y) < 1,$$

то возможны четыре значенія x, пока корень $\sqrt{1 + 2y - y^2}$ остается вещественнымъ, т.е. при

$$y \geqq -(\sqrt{2} - 1).$$

Итакъ отрицательныя значенія y ограничены промежуткомъ

$$0 \geqq y \geqq -(\sqrt{2} - 1),$$

и каждому значенію y отвѣчаютъ 4 значенія x, которыя попарно равны по абсолютному значенію.

2) Такъ какъ при $x = 0$ уравненіе даетъ

$$y^4 - 2y^3 = 0,$$

откуда $y = 0$, $y = 2$, то кривая пересѣкаетъ ось Y-овъ въ точкахъ:

$$(0,\ 0) \text{ и } (0,\ 2).$$

Такъ какъ при $y = 0$ получается $x^4 = 0$, то кривая пересѣкаетъ ось $\bar{X}$-овъ только въ началѣ.

3) Вершины, гдѣ касательныя $\parallel$ оси $\bar{X}$-овъ, опредѣляются системой

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2y^3 + 2x^2y = 0$$

$$f'_x(x,y) = 4x^3 + 4xy = 4x(x^2+y) = 0;$$

изъ второго уравненія или $x = 0$ или $y = -x^2$; при $x = 0$ первое уравненіе даетъ

$$y = 0 \text{ и } y = 2,$$

но въ началѣ координатъ и $f'_y(x,y) = 0$, слѣдовательно, это есть особенная точка; вершиной же будетъ $(0,2)$. Подставляя $x^2 = -y$ въ уравненіе $f = 0$, находимъ

$$y^2 + y^4 - 2y^3 - 2y^2 = 0$$

или, по сокращеніи на y^2 (такъ какъ при $y = 0$ выходитъ $x^2 = -y = 0$):

$$y^2 - 2y - 1 = 0, \quad y = 1 \pm \sqrt{2};$$

при $y = 1 + \sqrt{2}$ выходитъ $x^2 < 0$, x мнимое, а при $y = 1 - \sqrt{2}$ выходитъ

$$x^2 = \sqrt{2} - 1 = 0,4142$$

и

$$x = \pm\sqrt{\sqrt{2} - 1} = \pm 0,64.$$

Итакъ, вершинъ съ касат. $\parallel$ оси $O\bar{X}$ будетъ *три:*

$$(0,2), \quad (+0,64,\ -0,41), \quad (-0,64,\ -0,41).$$

4) Вершины, гдѣ касательныя параллельны оси $\bar{Y}$-овъ, опредѣляются системою:

$$\left|\begin{array}{l} f(x,y) = x^4 + y^4 - 2y^3 + 2x^2y = 0 \\ f'_y(x,y) = 4y^3 - 6y^2 + 2x^2 = 2(2y^3 - 3y^2 + x^2) = 0; \end{array}\right.$$

Изъ второго уравненія

$$x^2 = 3y^2 - 2y^3$$

подставляемъ въ первое:

$$(9y^4 - 12y^5 + 4y^6) + y^4 - 2y^3 + 6y^3 - 4y^4 = 0$$

или

$$4y^6 - 12y^5 + 6y^4 + 4y^3 = 0;$$

по сокращеніи на y^3 (такъ какъ при $y = 0$ выходитъ $x^2=3y^2 - - 2y^3 = 0$) получаемъ кубич. уравненіе

$$2y^3 - 6y^2 + 3y + 2 = 0.$$

Оно имѣетъ корень $y = 2$, которому отвѣчаетъ $x^2 = - 4$, x мнимое; раздѣляя уравненіе на $y - 2$, находимъ

$$2y^2 - 2y - 1 = 0,$$

откуда

$$y = {}^1/_2(1 \pm \sqrt{3});$$

такъ какъ изъ послѣдняго уравненія

$$2y^2 = 2y + 1 \qquad 2y^3 = 2y^2 + y = 3y + 1,$$

то

$$x^2 = 3y^2 - 2y^2 = 3(y + {}^1/_2) - 3y - 1 = {}^1/_2,$$

$$x = \frac{\pm 1}{\sqrt{2}} = \pm 0{,}71.$$

Итакъ, кривая имѣетъ четыре вершины, гдѣ касат. || оси $\bar{Y}$-овъ

(замѣтимъ, что $\dfrac{1 + \sqrt{3}}{2} = 1{,}35$, $\dfrac{1 - \sqrt{3}}{2} = - 0{,}35$);

$$(+ 0{,}71;\ 1{,}35),\quad (- 0{,}71;\ 1{,}35),\quad (+ 0{,}71;\ - 0{,}35),$$
$$(- 0{,}71;\ - 0{,}35).$$

5) Для нахожденія особенныхъ точекъ обращаемся къ системѣ:

$$\left|\begin{array}{l} f(x,y) = x^4 + y^4 - 2y^3 + 2x^2y = 0 \\ f'_x(x,y) = 4x(x^2 + y) = 0 \\ f'_y(x,y) = 2(2y^3 - 3y^2 + x^2) = 0. \end{array}\right.$$

Изъ уравненія $f_x = 0$ беремъ рѣшеніе $x = 0$ и подставляемъ въ уравненіе $f_y = 0$, что даетъ

$$2y^3 - 3y^2 = 0,$$

откуда или $y = 0$ или $y = {}^3/_2$: изъ двухъ точекъ $(0, 0)$ и

$(0, \ ^3/_2)$ только первая удовлетворяетъ уравненію $f = 0$. Беремъ затѣмъ изъ уравненія $f'_x = 0$ другое рѣшеніе $x^2 = -y$ и подставляемъ въ уравненіе $f'_y = 0$, получаемъ

$$2y^3 - 3y^2 - y = 0,$$

откуда

$$\text{или } y = 0 \quad \text{или } \quad 2y^2 - 3y - 1 = 0;$$

при $y = 0$ выходитъ

$$x^2 = -y = 0,$$

и это рѣшеніе $(0,0)$ удовлетворяетъ уравненію $f = 0$; для провѣрки того будутъ ли удовлетворять уравненію $f = 0$ рѣшенія, получаемыя изъ системы:

$$\left| \begin{array}{l} 2y^2 - 3y - 1 = 0 \\ x^2 = -y \end{array} \right.$$

мы подставимъ $x^2 = -y$ въ уравненіе $f = 0$ и получимъ (по сокращеніи на y^2):

$$y^2 - 2y - 1 = 0$$

но уравненія

$$\left| \begin{array}{l} 2y^2 - 3y - 1 = 0 \\ y^2 - 2y - 1 = 0 \end{array} \right.$$

не имѣютъ общихъ корней, слѣдовательно, особенная точка единственная

$$(0, 0).$$

Для изслѣдованія фигуры кривой въ области начала примѣнимъ способъ А § 9. Пучекъ касательныхъ

$$-2y^3 + 2x^2y = 0$$

даетъ три рѣшенія

$$y = 0, \quad y = x, \quad y = -x.$$

Полагая въ уравненіи кривой $y = tx$ и сокращая на x^3, находимъ

$$x(1 + t^4) - 2t^3 + 2t = 0,$$

$$x(1 + t^4) - 2t(t - 1)(t + 1) = 0.$$

а) При $t = 0$ находимъ

$$x(1 + \varepsilon) + t(2 + \eta) = 0,$$

откуда

$$y = xt < 0,$$

т.е.; кривая идетъ подъ осью $\bar{X}$-овъ.

b) При $t = 1$ находимъ

$$x(1 + \varepsilon) - 2(t - 1)(2 + \eta) = 0,$$

откуда

$$x(t - 1) = y - x > 0,$$

кривая идетъ надъ касательной $\bar{Y} = \bar{X}$.

c) При $t = -1$ находимъ

$$x(1 + \varepsilon) - 2(t + 1)(2 + \eta) = 0,$$

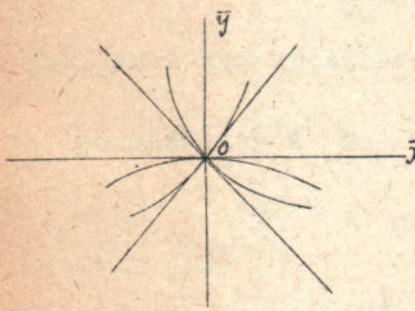
откуда

$$x(t + 1) = y + x > 0,$$

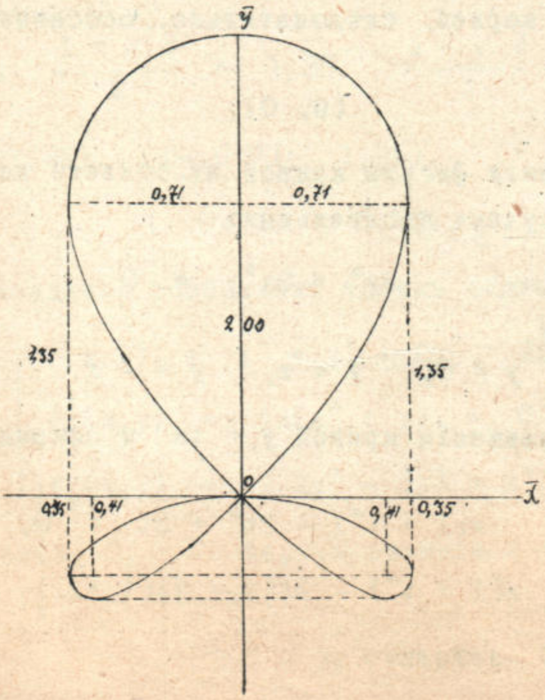
кривая идетъ надъ касательной

$$\bar{Y} + \bar{X} = 0.$$

Фигура кривой въ началѣ на чертежѣ 112.



Черт.112.



Черт. 113.

6) Точекъ перегиба кривая не имѣетъ.

7) Ассимптотъ кривая не имѣетъ, такъ какъ совокупность членовъ высшаго измѣренія въ уравненіи кривой

$$x^4 + y^4 = 0$$

не разлагается на вещественные множители. Кривая поэтому замкнутая.

Фигура кривой изображена на чертежѣ 113.

§ 12.

Линіи въ пространствѣ.

Всякую линію въ пространствѣ можно представить какъ пересѣченіе двухъ поверхностей I и II (см. черт. 114), заданныхъ уравненіями:

$$\text{I} \quad f(x, y, z) = 0$$

$$\text{II} \quad \varphi(x, y, z) = 0,$$

такъ что линія въ пространствѣ опредѣляется системой двухъ уравненій

$$\left| \begin{array}{l} f(x, y, z) = 0 \\ \varphi(x, y, z) = 0 \end{array} \right. \quad \ldots\ldots\ldots (*);$$

дѣйствительно, каждая точка этой линіи, удовлетворяя уравненію той и другой поверхности, удовлетворяетъ системѣ двухъ уравненій. Такъ какъ линія можетъ быть разсматриваема какъ пересѣченіе двухъ поверхностей на безчисленное множество способовъ, то и система (*) можетъ быть замѣнена безчисленнымъ множествомъ другихъ системъ, алгебраически ей равносильныхъ.

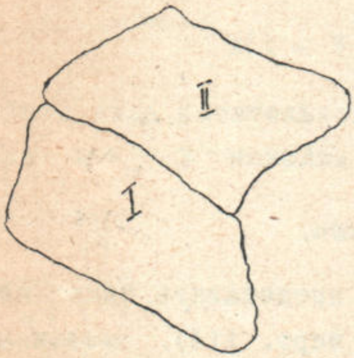
Напримѣръ, окружность въ пространствѣ можно представить, какъ пересѣченіе (см. черт. 115):

1) шара и плоскости
2) цилиндра и плоскости
3) конуса и плоскости
4) поверхности вращенія и плоскости и т.д.

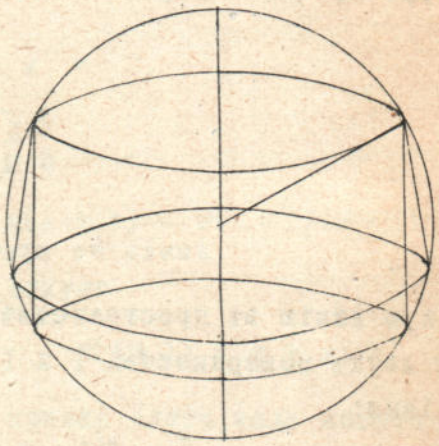
Линіи въ пространствѣ можно задавать также параметрическими уравненіями

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \omega(t) \end{cases}$$

Исключая t изъ этой системы, получимъ 2 уравненія между x, y, z, т.е. приходимъ къ системѣ (*).



Черт. 114.



Черт. 115.

Примѣръ 1. Дана система

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt. \end{cases}$$

Эта система изображаетъ прямую линію, такъ какъ исключеніе t даетъ

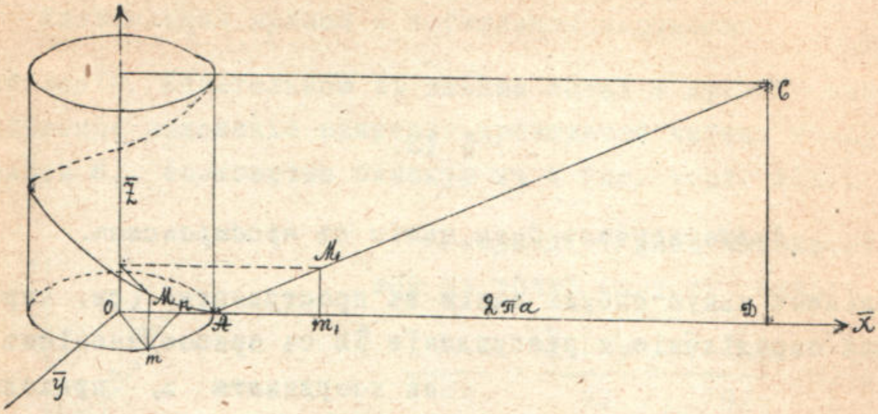
$$t = \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}.$$

Примѣръ 2. Составимъ уравненіе винтовой линіи на круговомъ цилиндрѣ. Пусть a (см. черт. 116) радіусъ основанія цилиндра и h его высота.

Винтовую линію мы получимъ, если, развернувъ боковую поверхность цилиндра и проведя діагональ AC, навернемъ прямоугольникъ $ABCD$ на цилиндръ: діагональ AC дастъ одинъ завитокъ винтовой линіи.

Чтобы составить уравненіе винтовой линіи, возьмемъ точку M

на кривой и опустимъ изъ нея на основаніе перпендикуляръ Mm, который очевидно составитъ часть образующей. Построимъ теперь мѣсто точки на разверткѣ.



Черт.116.

Отложивъ

$$Am_1 = \smile Am,$$

и проведя $m_1M_1 \perp AD$, получимъ M_1 - мѣсто точки M на разверткѣ; обозначивъ

$$\measuredangle AOm = t ,$$

имѣемъ теперь

$$x = On = a.\cos t$$

$$y = nm = a.\sin t$$

$$z = mM = m_1M_1 ;$$

z опредѣляемъ изъ подобія треугольниковъ AM_1m_1 и ACD:

$$\frac{M_1m_1}{Am_1} = \frac{CD}{AD}$$

или

$$\frac{z}{\cancel{a}t} = \frac{h}{2\pi\cancel{a}},$$

откуда

$$z = \frac{h}{2\pi} . t = kt,$$

гдѣ

$$k = \frac{h}{2\pi} .$$

Слѣдовательно, для винтовой линіи имѣемъ систему:

$$x = a.\mathrm{Cos}\ t$$

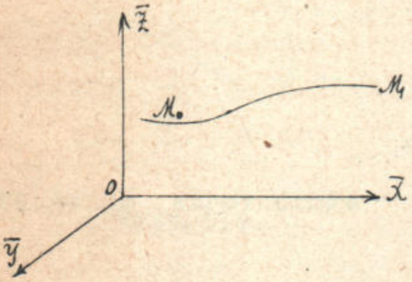
$$y = a.\mathrm{Sin}\ t$$

$$z = kt\ .$$

§ 13.

Дифференціалъ дуги линіи въ пространствѣ.

Возьмемъ какую-нибудь линію въ пространствѣ (см. черт.117). Повторяя опредѣленіе и разсужденіе §2 съ присоединеніемъ третьей координаты z, приходимъ къ слѣдующей теоремѣ.



Черт.117.

Теорема. Длина дуги M_0M_1 кривой, заданной уравненіями:

$$x = \varphi(t)$$

$$y = \psi(t)$$

$$z = \omega(t),$$

выражается формулой

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2 + \omega'(t)^2}\, dt,$$

причемъ t_0 и t_1 суть значенія параметра t, соотвѣтствующія началу и концу дуги.

Слѣдствіе. Дифференціалъ дуги выражается формулами

$$dS = \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2 + \omega'(t)^2}\, dt = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

послѣднее выраженіе дифференціала дуги выводится на основаніи соотношеній

$$dx = \varphi'(t)dt$$

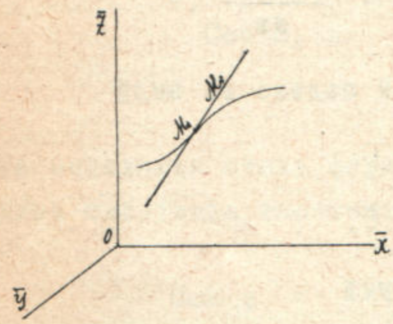
$$dy = \psi'(t)dt$$

$$dz = \omega'(t)dt.$$

§ 14.

Касательная прямая и нормальная плоскость.

Опредѣленіе. Касательною въ данной точкѣ M кривой называется предѣльное положеніе сѣкущей, проходящей черезъ точку M и точку кривой M_1, безконечно близкую къ M (см. черт. 118).



Черт.118.

Теорема. Уравненіе касательной въ точкѣ (x, y, z) имѣетъ видъ

$$\frac{\bar{X}-x}{dx}=\frac{\bar{Y}-y}{dy}=\frac{\bar{Z}-z}{dz}\quad . . . (1).$$

Доказательство. Точка M и безконечно близкая къ ней точка M_1 имѣютъ слѣдующія координаты

$$M(x,\ y,\ z)$$

$$M_1(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z),$$

причемъ, если кривая задана уравненіями

$$x=\varphi(t)$$

$$y=\psi(t)$$

$$z=\omega(t),$$

то должно быть

$$\Delta x=\varphi(t+\Delta t)-\varphi(t)$$

$$\Delta y=\psi(t+\Delta t)-\psi(t)$$

$$\Delta z=\omega(t+\Delta t)-\omega(t).$$

Уравненіе прямой, проходящей черезъ точки M и M_1 имѣетъ видъ

$$\frac{\bar{X}-x}{\Delta x}=\frac{\bar{Y}-y}{\Delta y}=\frac{\bar{Z}-z}{\Delta z}.$$

Введя въ знаменатель множитель $^1/\Delta t$, перепишемъ это уравненіе въ новой формѣ:

$$\frac{\bar{X}-x}{\frac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{\bar{Y}-y}{\frac{\Delta y}{\Delta t}} = \frac{\bar{Z}-z}{\frac{\Delta z}{\Delta t}},$$

переходя къ предѣлу при $\Delta t = 0$, имѣемъ

$$\frac{\bar{X}-x}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\bar{Y}-y}{\frac{dy}{dt}} = \frac{\bar{Z}-z}{\frac{dz}{dt}},$$

откуда по умноженіи знаменателей на dt, получимъ

$$\frac{\bar{X}-x}{dx} = \frac{\bar{Y}-y}{dy} = \frac{\bar{Z}-z}{dz}.$$

Замѣчаніе 1. Если уравненіе кривой задано въ видѣ

$$\left| \begin{array}{l} f(x,\ y,\ z) = 0 \\ \varphi(x,\ y,\ z) = 0, \end{array} \right.$$

то уравненіе касательной пишется въ формѣ

$$\left| \begin{array}{l} (\bar{X}-x)f'_x + (\bar{Y}-y)f'_y + (\bar{Z}-z)f'_z = 0 \\ (\bar{X}-x)\varphi'_x + (\bar{Y}-y)\varphi'_y + (\bar{Z}-z)\varphi'_z = 0. \end{array} \right.$$

Докажемъ это. Въ точкѣ касанія (x, y, z) выполнены 2 уравненія

$$\left. \begin{array}{l} df(x,y,z) = f'_x .\ dx + f'_y .\ dy + f'_z .\ dz = 0 \\ d\varphi(x,y,z) = \varphi'_x .\ dx + \varphi'_y .\ dy + \varphi'_z .\ dz = 0 \end{array} \right| \ldots (*)$$

но изъ уравненія касательной (1) слѣдуетъ, что dx, dy, dz соотвѣтственно пропорціональны разностямъ

$$\bar{X}-x,\quad \bar{Y}-y,\quad \bar{Z}-z$$

и могутъ быть замѣнены этими разностями въ уравненіяхъ (*).

Слѣдовательно, для касательной выполнены слѣдующія уравненія

$$(\bar{X}-x)f'_x + (\bar{Y}-y)f'_y + (\bar{Z}-z)f'_z = 0$$

$$(\bar{X}-x)\varphi'_x + (\bar{Y}-y)\varphi'_y + (\bar{Z}-z)\varphi'_z = 0.$$

Замѣчаніе 2. Выраженіе для косинусовъ угловъ касательной съ осями координатъ.

Если прямая задана уравненіями

$$\frac{\bar{X} - x_0}{l} = \frac{\bar{Y} - y_0}{m} = \frac{\bar{Z} - z_0}{n},$$

то косинусы этихъ угловъ, составленныхъ этой прямой съ осями координатъ, имѣютъ, какъ извѣстно, слѣдующія выраженія:

$$\operatorname{Cos}(R, \bar{x}) = \frac{l}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$$

$$\operatorname{Cos}(R, \bar{y}) = \frac{m}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$$

$$\operatorname{Cos}(R, \bar{z}) = \frac{n}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

На основанiи этихъ формулъ изъ уравненiя касательной (1) находимъ слѣдующiя выраженiя для косинусовъ угловъ ея съ осями

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{Cos}\alpha &= \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}} = \frac{dx}{dS} \\ \operatorname{Cos}\beta &= \frac{dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}} = \frac{dy}{dS} \\ \operatorname{Cos}\gamma &= \frac{dz}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}} = \frac{dz}{dS} \end{aligned}\right| \quad \ldots (2)$$

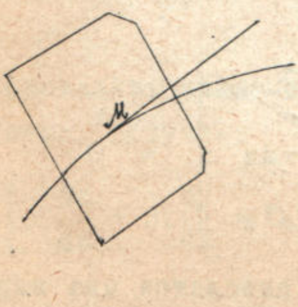
Опредѣленiе. Нормальной плоскостью въ данной точкѣ M кривой называется плоскость, проходящая черезъ M и перпендикулярная къ касательной въ этой точкѣ (см. черт. 119).

Теорема. Уравненiе нормальной плоскости въ точкѣ $M(x,y,z)$ будетъ

$$(\bar{X} - x)dx + (\bar{Y} - y)dy + (\bar{Z} - z)dz = 0.$$

Дѣйствительно, общее уравненiе всѣхъ плоскостей, проходящихъ черезъ точку $M(x,y,z)$ имѣетъ видъ

$$A(\bar{X} - x) + B(\bar{Y} - y) + C(\bar{Z} - z) = 0.$$



Черт. 119.

Изъ условія перпендикулярности къ касательной слѣдуетъ

$$\frac{A}{dx} = \frac{B}{dy} = \frac{C}{dz}.$$

Подставивъ въ общее уравненіе вмѣсто (A, B, C) величины, имъ пропорціональныя, получимъ

$$(\overline{X}-x)dx + (\overline{Y}-y)dy + (\overline{Z}-z)dz = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; (3).$$

§ 15.

Соприкасающаяся плоскость (плоскость кривизны).

Бинормаль.

Опредѣленіе. Плоскостью кривизны въ точкѣ М называется предѣльное положеніе плоскости, проходящей черезъ касательную въ точкѣ М и черезъ точку кривой M_1, безконечно близкую къ М (см. черт. 120).

Черт. 120.

Теорема. Уравненіе плоскости кривизны въ точкѣ М имѣетъ слѣдующій видъ

$$A(\overline{X}-x) + B(\overline{Y}-y) + C(\overline{Z}-z) = 0,$$

гдѣ

$$\begin{aligned} A &= dy.d^2z - dz.d^2y \\ B &= dz.d^2x - dx.d^2z \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4) \\ C &= dx.d^2y - dy.d^2x \end{aligned}$$

или въ формѣ опредѣлителя

$$\begin{vmatrix} \overline{X}-x & \overline{Y}-y & \overline{Z}-z \\ dz & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \end{vmatrix} = 0.$$

Замѣтимъ, что выраженія для В и С выводятся изъ выраженія А круговой перестановкой буквъ (x, y, z).

Доказательство. Уравненіе всякой плоскости, проходящей через точку $M(x, y, z)$ имѣетъ видъ

$$A(\overline{X}-x) + B(\overline{Y}-y) + C(\overline{Z}-z) = 0 \quad . \; . \; (*).$$

Если мы подчинимъ коэффиціенты A, B и C условію ||-ости съ прямой MT, то и это будетъ означать, что плоскость пройдетъ черезъ касательную. Это условіе слѣдующее:

$$Adx + Bdy + Cdz = 0.$$

Возьмемъ точку M_1, безконечно близкую къ M:

$$M_1(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z),$$

гдѣ

$$\Delta x = \varphi(t+\Delta t) - \varphi(t)$$

$$\Delta y = \psi(t+\Delta t) - \psi(t)$$

$$\Delta z = \omega(t+\Delta t) - \omega(t).$$

Такъ какъ плоскость (*) должна проходить черезъ точку M_1, то координаты ея должны удовлетворять уравненію плоскости. Отсюда имѣемъ

$$A\Delta x + B\Delta y + C\Delta z = 0.$$

Разложимъ въ рядъ по степенямъ Δt приращенія Δx, Δy, Δz:

$$\Delta x = \frac{dx}{dt}\Delta t + \frac{1}{1.2}\frac{d^2x}{dt^2}.\Delta t^2 + \frac{1}{1.2.3}\left[\frac{d^3x}{dt^3}\right]_{t+\vartheta\Delta t}.\Delta t^3$$

$$\Delta y = \frac{dy}{dt}.\Delta t + \frac{1}{1.2}.\frac{d^2y}{dt^2}.\Delta t^2 + \frac{1}{1.2.3}\left[\frac{d^3y}{dt^3}\right]_{t+\vartheta\Delta t}.\Delta t^3$$

$$\Delta z = \frac{dz}{dt}.\Delta t + \frac{1}{1.2}.\frac{d^2z}{dt^2}.\Delta t^2 + \frac{1}{1.2.3}\left[\frac{d^3z}{dt^3}\right]_{t+\vartheta\Delta t}.\Delta t^3 .$$

Подставивъ найденныя значенія Δx, Δy, Δz въ предыдущее равенство, получимъ

$$\Delta t\left[A.\frac{dx}{dt} + B.\frac{dy}{dt} + C.\frac{dz}{dt}\right] + \frac{1}{1.2}.\Delta t^2\left[A.\frac{d^2x}{dt^2} + B.\frac{d^2y}{dt^2} + C.\frac{d^2z}{dt^2}\right] +$$

$$+\frac{1}{1.2.3}\Delta t^3\left[A\left(\frac{d^3x}{dt^3}\right)_{t+\vartheta\Delta t}+B\left(\frac{d^3y}{dt^3}\right)_{t+\vartheta\Delta t}+C\left(\frac{d^3z}{dt^3}\right)_{t+\vartheta\Delta t}\right]=0.$$

Изъ условія параллельности плоскости съ прямой МТ

$$Adx + Bdy + Cdz = 0$$

послѣ раздѣленія на dt получимъ

$$A.\frac{dx}{dt}+B.\frac{dy}{dt}+C.\frac{dz}{dt}=0,$$

слѣдовательно, первый членъ написаннаго выше равенства обращается въ 0.

Раздѣливъ теперь обѣ части равенства на $\frac{1}{1.2}\Delta t^2$, будемъ имѣть

$$A.\frac{d^2x}{dt^2}+B.\frac{d^2y}{dt^2}+C.\frac{d^2z}{dt^2}+\frac{1}{3}\Delta t\left[A\left(\frac{d^3x}{dt^3}\right)_{t+\vartheta\Delta t}+B\left(\frac{d^3y}{dt^3}\right)_{t+\vartheta\Delta t}+C.\left(\frac{d^3z}{dt^3}\right)_{t+\vartheta\Delta t}\right]=0.$$

Въ предѣлѣ при $\Delta t = 0$ получимъ

$$A.\frac{d^2x}{dt^2}+B.\frac{d^2y}{dt^2}+C.\frac{d^2z}{dt^2}=0.$$

Умножая обѣ части равенства на величину dt^2, найдемъ

$$A.d^2x + B.d^2y + C.d^2z = 0.$$

Итакъ, буквы A, B, C опредѣляются системой

$$\left|\begin{array}{l} Adx + Bdy + Cdz = 0 \\ Ad^2x + Bd^2y + Cd^2z = 0, \end{array}\right.$$

изъ которой получаемъ

$$\frac{A}{dy.d^2z - dz.d^2y}=\frac{B}{dz.d^2x - dx.d^2z}=\frac{C}{dx.d^2y - dy.d^2x}.$$

Въ уравненіе соприкасающейся плоскости можно подставить величины пропорціональныя A, B, C, такъ какъ множитель пропорціональности пропадаетъ.

Опредѣленіе. Бинормалью въ точкѣ M данной кривой называется прямая, проходящая черезъ M и перпендикулярная къ плоскости кривизны въ этой точкѣ.

Теорема. Уравненіе бинормали въ точкѣ M имѣетъ слѣдующій видъ

$$\frac{\bar{X} - x}{A} = \frac{\bar{Y} - y}{B} = \frac{\bar{Z} - z}{C}, \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

гдѣ A, B, C имѣютъ тѣ же значенія, что и въ предыдущей теоремѣ. Это доказывается слѣдующимъ образомъ:

$$\frac{\bar{X} - x}{l} = \frac{\bar{Y} - y}{m} = \frac{\bar{Z} - z}{n}.$$

есть общее уравненіе прямой, проходящей черезъ точку $M(x, y, z)$. Условіе перпендикулярности этой прямой къ соприкасающейся плоскости будетъ

$$\frac{l}{A} = \frac{m}{B} = \frac{n}{C}.$$

Замѣняя l, m, n пропорціональными имъ величинами A, B, C, получимъ уравненіе (5).

Слѣдствіе. Выраженія для косинусовъ угловъ бинормали съ осями координатъ будутъ слѣдующія:

$$\cos\lambda = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$\cos\mu = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$\cos\nu = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Замѣчаніе. Бинормаль лежитъ въ нормальной плоскости.

Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ бинормаль перпендикулярна къ плоскости кривизны, то она перпендикулярна и къ касательной MT, лежащей въ этой плоскости, т.е. бинормаль лежитъ въ нормальной плоскости.

§ 16.

Главная нормаль.

Опредѣленіе. Главною нормалью въ точкѣ М кривой называется линія пересѣченія нормальной и соприкасающейся плоскостей, построенныхъ для этой точки.

Теорема. Уравненіе главной нормали имѣетъ видъ

$$\frac{\bar{X}-x}{M} = \frac{\bar{Y}-y}{N} = \frac{\bar{Z}-z}{P},$$

гдѣ

$$M = Bdz - Cdy$$

$$N = Cdx - Adz$$

$$P = Ady - Bdx$$

и

$$A = dy.d^2z - dz.d^2y$$

$$B = dz.d^2x - dx.d^2z$$

$$C = dx.d^2y - dy.d^2x,$$

или въ другой формѣ

$$\frac{\bar{X}-x}{d.\cos\alpha} = \frac{\bar{Y}-y}{d.\cos\beta} = \frac{\bar{Z}-z}{d.\cos\gamma},$$

гдѣ

$$\cos\alpha = \frac{dx}{dS}; \quad \cos\beta = \frac{dy}{dS}; \quad \cos\gamma = \frac{dz}{dS}$$

означаютъ косинусы угловъ касательной въ точкѣ М съ осями координатъ.

Доказательство. Имѣемъ уравненія

$$A(\bar{X}-x) + B(\bar{Y}-y) + C(\bar{Z}-z) = 0$$

- соприкасающейся плоскости и

$$(\bar{X}-x)dx + (\bar{Y}-y)dy + (\bar{Z}-z)dz = 0$$

- нормальной плоскости.

Рѣшая эти уравненія совмѣстно, получимъ уравненіе нормали:

$$\frac{\bar{X} - x}{Bdz - Cdy} = \frac{\bar{Y} - y}{Cdx - Adz} = \frac{\bar{Z} - z}{Ady - Bdx} \quad . \; . \; . \; . \; (6).$$

Чтобы получить уравненіе нормали въ другой формѣ, преобразуемъ знаменатели уравненія (6):

$$Bdz - Cdy = dz(dz.d^2x - dx.d^2z) - dy(dx.d^2y - dy.d^2x) =$$

$$= d^2x(dz^2 + dy^2 + dx^2) - dx(dz.d^2z + dy.d^2y + dx.d^2x).$$

Замѣчая, что $dS^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, и дифферницируя это равенство, получимъ послѣ сокращенія на 2:

$$dS.d^2S = dx.d^2x + dy.d^2y + dz.d^2z \;;$$

откуда

$$Bdz - Cdy = d^2x.dS^2 - dx.dS.d^2S = dS^3 \frac{dS.d^2x - dx.d^2S}{dS^2} =$$

$$= dS^3.d\left[\frac{dx}{dS}\right] = dS^3.d \operatorname{Cos} \alpha.$$

Совершенно подобнымъ же образомъ найдемъ

$$Cdx - Adz = dS^3.d \operatorname{Cos} \beta$$

$$Ady - Bdx = dS^3.d \operatorname{Cos} \gamma.$$

Вводя эти выраженія въ уравненіе (6) мы приходимъ къ уравненію

$$\frac{\bar{X} - x}{d \operatorname{Cos} \alpha} = \frac{\bar{Y} - y}{d \operatorname{Cos} \beta} = \frac{\bar{Z} - z}{d \operatorname{Cos} \gamma} \quad . \; . \; . \; . \; (7).$$

Слѣдствіе. Выраженія для косинусовъ угловъ главной нормали съ осями координатъ имѣютъ слѣдующій видъ

$$\operatorname{Cos} \xi = \frac{M}{\sqrt{M^2 + N^2 + P^2}} = \frac{d \operatorname{Cos} \alpha}{\sqrt{d \operatorname{Cos} \alpha^2 + d \operatorname{Cos} \beta^2 + d \operatorname{Cos} \gamma^2}}$$

$$\operatorname{Cos} \eta = \frac{N}{\sqrt{M^2 + N^2 + P^2}} = \frac{d \operatorname{Cos} \beta}{\sqrt{d \operatorname{Cos} \alpha^2 + d \operatorname{Cos} \beta^2 + d \operatorname{Cos} \gamma^2}} \quad . \; . \; (8)$$

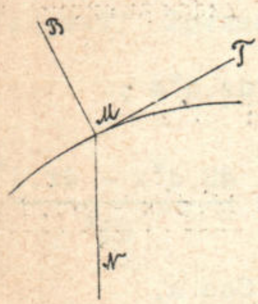
$$\operatorname{Cos} \zeta = \frac{P}{\sqrt{M^2 + N^2 + P^2}} = \frac{d \operatorname{Cos} \gamma}{\sqrt{d \operatorname{Cos} \alpha^2 + d \operatorname{Cos} \beta^2 + d \operatorname{Cos} \gamma^2}} .$$

Въ дальнѣйшемъ

$$\sqrt{d\ \mathrm{Cos}\ \alpha^2 + d\ \mathrm{Cos}\ \beta^2 + d\ \mathrm{Cos}\ \gamma^2}$$

будетъ у насъ обозначаться черезъ $d\sigma$.

Замѣчаніе. Касательная, главная нормаль и бинормаль въ точкѣ M кривой образуютъ систему трехъ взаимно перпендикулярныхъ прямыхъ. Въ § 15 доказано, что бинормаль (см. черт. 121) $MB \perp MT$; далѣе, главная нормаль MN лежитъ, по опредѣленію въ нормальной плоскости, но касательная MT, будучи перпендикулярна къ нормальной плоскости, перпендикулярна и ко всякой прямой, лежащей въ этой плоскости, слѣдовательно, $MN \perp MT$. Точно также, главная нормаль MN лежитъ, по опредѣленію, въ плоскости кривизны, но бинормаль $MB \perp$ къ плоскости кривизны, слѣдовательно, $MB \perp$ къ главной нормали MN, какъ лежащей въ плоскости кривизны.



Черт. 121.

Воспользуемся этими свойствами касательной, бинормали и главной нормали, чтобы вывести соотношенія между косинусами угловъ, составленныхъ ими съ осями координатъ. Выписавъ эти углы въ слѣдующую таблицу:

	x	y	z
T	α	β	γ
N	ξ	η	ζ
B	λ	μ	ν

на основаніи формулъ аналитической геометріи имѣемъ:

$$\mathrm{Cos}^2\alpha + \mathrm{Cos}^2\beta + \mathrm{Cos}^2\gamma = 1$$

$$\mathrm{Cos}^2\xi + \mathrm{Cos}^2\eta + \mathrm{Cos}^2\zeta = 1$$

$$\mathrm{Cos}^2\lambda + \mathrm{Cos}^2\mu + \mathrm{Cos}^2\nu = 1,$$

а въ силу перпендикулярности прямыхъ T, N и B имѣемъ:

$$\mathrm{Cos}\ \alpha . \mathrm{Cos}\ \xi + \mathrm{Cos}\ \beta . \mathrm{Cos}\ \eta + \mathrm{Cos}\ \gamma . \mathrm{Cos}\ \zeta = 0$$

$$\cos\alpha.\cos\lambda + \cos\beta.\cos\mu + \cos\gamma.\cos\nu = 0$$

$$\cos\xi.\cos\lambda + \cos\eta.\cos\mu + \cos\zeta.\cos\nu = 0.$$

Переписавъ теперь таблицу угловъ въ видѣ:

	T	N	B
x	α	ξ	λ
y	β	η	μ
z	γ	ζ	ν

т.е. разсматривая MT, MN, MB какъ оси прямоугольной системы координатъ и $O\overline{X}$, $O\overline{Y}$, $O\overline{Z}$ какъ 3 взаимно-перпендикулярныя прямыя, получимъ

$$\cos^2\alpha + \cos^2\xi + \cos^2\lambda = 1$$

$$\cos^2\beta + \cos^2\eta + \cos^2\mu = 1$$

$$\cos^2\gamma + \cos^2\zeta + \cos^2\nu = 1$$

$$\cos\alpha.\cos\beta + \cos\xi.\cos\eta + \cos\lambda.\cos\mu = 0$$

$$\cos\alpha.\cos\gamma + \cos\xi.\cos\zeta + \cos\lambda.\cos\nu = 0$$

$$\cos\beta.\cos\gamma + \cos\eta.\cos\zeta + \cos\mu.\cos\nu = 0.$$

На основаніи установленныхъ соотношеній докажемъ еще теорему:

Теорема. Уравненіе главной нормали можно представить также въ формѣ

$$\frac{\overline{X} - x}{d\cos\lambda} = \frac{\overline{Y} - y}{d\cos\mu} = \frac{\overline{Z} - z}{d\cos\nu} \quad . \; . \; . \; . \; (7')$$

и косинусы угловъ ея съ осями координатъ въ видѣ

$$\cos\xi = \frac{d\cos\lambda}{\sqrt{(d\cos\lambda)^2 + (d\cos\mu)^2 + (d\cos\nu)^2}}$$

$$\cos\eta = \frac{d\cos\mu}{\sqrt{(d\cos\lambda)^2 + (d\cos\mu)^2 + (d\cos\nu)^2}}$$

$$\text{Cos}\,\zeta = \frac{d\,\text{Cos}\,\nu}{\sqrt{(d\,\text{Cos}\,\lambda)^2 + (d\,\text{Cos}\,\mu)^2 + (d\,\text{Cos}\,\nu)^2}} \qquad (8'),$$

гдѣ λ, μ, ν - углы бинормали съ осями координатъ.

Корень

$$\sqrt{(d\,\text{Cos}\,\lambda)^2 + (d\,\text{Cos}\,\mu)^2 + (d\,\text{Cos}\,\nu)^2}$$

въ дальнѣйшемъ будемъ обозначать черезъ $d\tau$.

Для доказательства теоремы воспользуемся формулой

$$\text{Cos}^2\lambda + \text{Cos}^2\mu + \text{Cos}^2\nu = 1.$$

Взявъ дифференціалъ ея:

$$\text{Cos}\,\lambda.d\,\text{Cos}\,\lambda + \text{Cos}\,\mu.d\,\text{Cos}\,\mu + \text{Cos}\,\nu.d\,\text{Cos}\,\nu = 0,$$

замѣнимъ въ немъ косинусы пропорціональными имъ величинами (см. слѣдствіе § 15) A, B, C, такъ что получится

$$A.d\,\text{Cos}\,\lambda + B.\text{Cos}\,\mu + C.d\,\text{Cos}\,\nu = 0.$$

Такъ какъ $T \perp B$, то имѣемъ

$$\text{Cos}\,\alpha.\text{Cos}\,\lambda + \text{Cos}\,\beta.\text{Cos}\,\mu + \text{Cos}\,\gamma.\text{Cos}\,\nu = 0.$$

Дифференцируя это равенство, получимъ

$$(\text{Cos}\,\alpha.d\,\text{Cos}\,\lambda + \text{Cos}\,\beta.d\,\text{Cos}\,\mu + \text{Cos}\,\gamma.d\,\text{Cos}\,\nu) +$$

$$+ (\text{Cos}\,\lambda.d\,\text{Cos}\,\alpha + \text{Cos}\,\mu.d\,\text{Cos}\,\beta + \text{Cos}\,\nu.d\,\text{Cos}\,\gamma) = 0.$$

Послѣдняя изъ этихъ скобокъ будетъ 0 въ силу перпендикулярности нормали и бинормали; дѣйствительно, по ф. (8), полагая

$$d\sigma = \sqrt{(d\,\text{Cos}\,\alpha)^2 + (d\,\text{Cos}\,\beta)^2 + (d\,\text{Cos}\,\gamma)^2},$$

имѣемъ:

$$\text{Cos}\,\lambda.d\,\text{Cos}\,\alpha + \text{Cos}\,\mu.d\,\text{Cos}\,\beta + \text{Cos}\,\nu.d\,\text{Cos}\,\gamma =$$

$$= d\sigma(\text{Cos}\,\lambda.\text{Cos}\,\xi + \text{Cos}\,\mu.\text{Cos}\,\eta + \text{Cos}\,\nu.\text{Cos}\,\zeta) = 0,$$

а потому получаемъ:

$$\text{Cos}\,\alpha.d\,\text{Cos}\,\lambda + \text{Cos}\,\beta.d\,\text{Cos}\,\mu + \text{Cos}\,\gamma.d\,\text{Cos}\,\nu = 0.$$

Замѣняя здѣсь Cos α, Cos β, Cos γ пропорціональными имъ величинами dx, dy, dz, получимъ:

$$dx.d\,\text{Cos}\,\lambda + dy.d\,\text{Cos}\,\mu + dz.d\,\text{Cos}\,\nu = 0.$$

Съ другой стороны выше мы нашли, что

$$A.d\,\mathrm{Cos}\,\lambda + B.d\,\mathrm{Cos}\,\mu + C.d\,\mathrm{Cos}\,\nu = 0.$$

Система двухъ послѣднихъ уравненій даетъ:

$$\frac{d\,\mathrm{Cos}\,\lambda}{Bdz - Cdy} = \frac{d\,\mathrm{Cos}\,\mu}{Cdx - Adz} = \frac{d\,\mathrm{Cos}\,\nu}{Ady - Bdx}$$

или:

$$\frac{d\,\mathrm{Cos}\,\lambda}{M} = \frac{d\,\mathrm{Cos}\,\mu}{N} = \frac{d\,\mathrm{Cos}\,\nu}{P} =$$

$$= \frac{\sqrt{(d\,\mathrm{Cos}\,\lambda)^2 + (d\,\mathrm{Cos}\,\mu)^2 + (d\,\mathrm{Cos}\,\nu)^2}}{\sqrt{M^2 + N^2 + P^2}} = \frac{d\tau}{\sqrt{M^2 + N^2 + P^2}}.$$

Отсюда имѣемъ:

$$\frac{d\,\mathrm{Cos}\,\lambda}{d\tau} = \frac{M}{\sqrt{M^2 + N^2 + P^2}} = \mathrm{Cos}\,\xi$$

и такъ же

$$\frac{d\,\mathrm{Cos}\,\mu}{d\tau} = \mathrm{Cos}\,\eta,$$

$$\frac{d\,\mathrm{Cos}\,\nu}{d\tau} = \mathrm{Cos}\,\zeta.$$

§ 17.

Радіусы 1-ой и 2-ой кривизны.

Опредѣленіе. Первой кривизной въ данной точкѣ M кривой называется *предѣлъ отношенія угла* ε между касательными въ точкѣ M и въ точкѣ кривой M_1, безконечно близкой къ M, *къ длинѣ дуги* MM_1,

$$\textit{Пред.}\ \frac{\varepsilon}{\Delta S}, \quad \textit{гдѣ}\ \Delta S = \textit{дл.} \smile MM_1.$$

Второю кривизною въ данной точкѣ M кривой называется *предѣлъ отношенія угла* ω между соприкасающимися плоскостями въ точкѣ M и въ точкѣ кривой M_1, безконечно близкой къ M (ω = углу между бинормалями въ точкѣ M и въ точкѣ M_1) *къ длинѣ дуги*

MM_1, т.е.

$$\textit{Пред.}\ \frac{\omega}{\Delta S}, \quad \text{гдѣ} \quad \Delta S = \textit{дл.} \smile MM_1.$$

Первая кривизна опредѣляетъ быстроту поворота касательной и характеризуетъ отклоненіе кривой отъ прямолинейной формы, т.ч. *"первая кривизна"* совпадаетъ съ *"кривизною"* для плоскихъ кривыхъ и равна нулю только для прямой.

Вторая кривизна опредѣляетъ быстроту поворота плоскости кривизны и характеризуетъ отклоненіе кривой отъ плоской формы, такъ что *"вторая кривизна"* равна 0 для всѣхъ плоскихъ кривыхъ и существуетъ лишь для такъ называемыхъ линій двоякой кривизны, т.е. такихъ, которыя не помѣщаются всѣми точками въ одной плоскости.

Величины, обратныя кривизнѣ называются *радіусами 1-ой и 2-ой кривизны,* такъ что

$$R_1 = \textit{Пред.} \left| \frac{\Delta S}{\varepsilon} \right|$$

$$R_2 = \textit{Пред.} \left| \frac{\Delta S}{\omega} \right|.$$

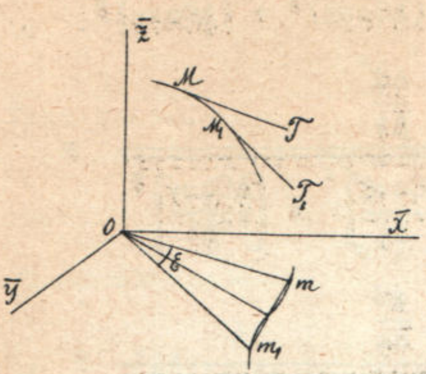
Прямыя скобки поставлены потому, что R_1 и R_2 считаются числами положительными.

Теорема 1. Радіусы 1-ой и 2-ой кривизны имѣютъ слѣдующія выраженія:

$$R_1 = \frac{dS}{\sqrt{(d\,\mathrm{Cos}\,\alpha)^2 + (d\,\mathrm{Cos}\,\beta)^2 + (d\,\mathrm{Cos}\,\gamma)^2}} = \frac{dS}{d\sigma},$$

$$R_2 = \frac{dS}{\sqrt{(d\,\mathrm{Cos}\,\lambda)^2 + (d\,\mathrm{Cos}\,\mu)^2 + (d\,\mathrm{Cos}\,\nu)^2}} = \frac{dS}{d\tau}.$$

Доказательство 1°. Пусть дана намъ нѣкоторая кривая MM_1 (см. черт. 122). Опишемъ около начала координатъ O сферу радіусомъ = 1 и проведемъ черезъ O прямыя, параллельныя касательнымъ MT и M_1T_1 въ точкахъ M и M_1 и во всѣхъ промежуточныхъ между ними точкахъ кривой. Тогда мы получимъ $\measuredangle\, mOm_1 = \varepsilon$ (углу между MT и M_1T_1) и кромѣ того на поверхности нашей сферы единичнаго радіуса мы найдемъ кривую, образованную точками пересѣченія со сферою тѣхъ прямыхъ, которыя мы провели



|| касательнымъ въ различныхъ точкахъ $M, \ldots M_1$ данной кривой. Эту сферическую кривую будемъ для краткости называть *годографомъ касательныхъ*.

Имѣемъ теперь

$$\measuredangle mOm_1 = \widehat{MT, M_1T_1} = \varepsilon$$

$$\smile MM_1 = \Delta S$$

Черт. 122:

$$R_1 = \text{Пред.} \frac{\Delta S}{\varepsilon}.$$

Такъ какъ

$$Om = 1, \quad Om_1 = 1,$$

то

$$mm_1 = 2\sin{}^{\varepsilon}/_2$$

и слѣдовательно:

$$R_1 = \text{Пред.} \frac{\Delta S}{\varepsilon} = \text{Пред.} \frac{\Delta S}{2\sin{}^{\varepsilon}/_2} \cdot \frac{2\sin{}^{\varepsilon}/_2}{\varepsilon} = \text{Пред.} \frac{\Delta S}{2\sin{}^{\varepsilon}/_2} =$$

$$= \text{Пред.} \frac{\Delta S}{mm_1},$$

такъ какъ

$$\text{Пред.} \frac{2\sin{}^{\varepsilon}/_2}{\varepsilon} = \text{Пред.}_{\varepsilon=0} \left[\frac{\sin{}^{\varepsilon}/_2}{{}^{\varepsilon}/_2}\right] = 1.$$

Точки m и m_1 имѣютъ слѣдующія координаты:

$$m(1.\cos\alpha, \ 1.\cos\beta, \ 1.\cos\gamma)$$

$$m_1(\cos\alpha + \Delta\cos\alpha, \ \cos\beta + \Delta\cos\beta, \ \cos\gamma + \Delta\cos\gamma),$$

причемъ приращенія

$$\Delta\cos\alpha, \quad \Delta\cos\beta, \quad \Delta\cos\gamma$$

соотвѣтствуютъ приращенію Δt параметра t при переходѣ отъ M къ M_1.

Слѣдовательно:

$$mm_1 = \sqrt{(\Delta\cos\alpha)^2 + (\Delta\cos\beta)^2 + (\Delta\cos\gamma)^2},$$

отсюда

$$R_1 = \text{Пред.} \frac{\Delta S}{\sqrt{(\Delta Cos\alpha)^2 + (\Delta Cos\beta)^2 + (\Delta Cos\gamma)^2}} =$$

$$= \underset{\Delta t = o}{\text{Пред.}} \frac{\frac{\Delta S}{\Delta t}}{\sqrt{\left[\frac{\Delta Cos\alpha}{\Delta t}\right]^2 + \left[\frac{\Delta Cos\beta}{\Delta t}\right]^2 + \left[\frac{\Delta Cos\gamma}{\Delta t}\right]^2}} =$$

$$= \frac{\frac{dS}{dt}}{\sqrt{\left[\frac{dCos\alpha}{dt}\right]^2 + \left[\frac{dCos\beta}{dt}\right]^2 + \left[\frac{dCos\gamma}{dt}\right]^2}} .$$

Помноживъ числителя и знаменателя на dt, получимъ:

$$R_1 = \frac{dS}{\sqrt{(dCos\alpha)^2 + (dCos\beta)^2 + (dCos\gamma)^2}} = \frac{dS}{d\sigma} ,$$

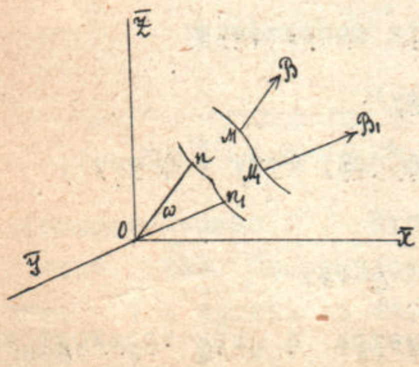
причемъ $d\sigma$ является дифференціаломъ дуги годографа касательныхъ:

$$d\sigma = \sqrt{(dCos\alpha)^2 + (dCos\beta)^2 + (dCos\gamma)^2} ,$$

такъ какъ $Cos\alpha$, $Cos\beta$, $Cos\gamma$ суть координаты точки m этого годографа.

2°. Возьмемъ чертежъ, подобный предыдущему, но для бинормалей (см. черт. 123).

Представимъ, что около начала координатъ описана сфера радіусомъ = 1 и изъ точки O проведены прямыя, параллельныя бинормалямъ въ каждой точкѣ данной кривой; концы этихъ прямыхъ выдѣлятъ сферическую кривую, называемую годографомъ бинормали и дадутъ намъ уголъ



$$nOn_1 = MB, \widehat{\ } M_1B_1 .$$

Черт. 123.

Имѣемъ теперь

$$\omega = MB, \widehat{\ } M_1B_1 = \angle nOn_1 ,$$

$$\Delta S = \smile MM_1 ,$$

$$R_2 = \text{Пред.}\ \frac{\Delta S}{\omega}.$$

Такъ какъ

$$On = 1, \quad On_1 = 1,$$

и

$$nn_1 = 2\operatorname{Sin}{}^{\omega}/_{2},$$

то

$$R_2 = \text{Пред.}\ \frac{\Delta S}{\omega} = \text{Пред.}\ \frac{\Delta S}{2\operatorname{Sin}{}^{\omega}/_{2}} \cdot \frac{2\operatorname{Sin}{}^{\omega}/_{2}}{\omega} = \text{Пред.} \frac{\Delta S}{2\operatorname{Sin}{}^{\omega}/_{2}} =$$

$$= \text{Пред.}\ \frac{\Delta S}{nn_1}.$$

Длину хорды nn_1 легко вычислить, зная координаты точекъ

$$n\,(1.\operatorname{Cos}\lambda,\ 1.\operatorname{Cos}\mu,\ 1.\operatorname{Cos}\nu)$$

$$n_1(\operatorname{Cos}\lambda+\Delta\operatorname{Cos}\lambda,\ \operatorname{Cos}\mu+\Delta\operatorname{Cos}\mu,\ \operatorname{Cos}\nu+\Delta\operatorname{Cos}\nu),$$

причемъ приращенія $\Delta\operatorname{Cos}\lambda$, $\Delta\operatorname{Cos}\mu$, $\Delta\operatorname{Cos}\nu$ соотвѣтствуютъ приращенію Δt параметра t, получающемуся при переходѣ отъ M къ M_1.

Отсюда имѣемъ:

$$nn_1 = \sqrt{(\Delta\operatorname{Cos}\lambda)^2 + (\Delta\operatorname{Cos}\mu)^2 + (\Delta\operatorname{Cos}\nu)^2}$$

$$R_2 = \text{Пред.} \frac{\Delta S}{\sqrt{(\Delta\operatorname{Cos}\lambda)^2 + (\Delta\operatorname{Cos}\mu)^2 + (\Delta\operatorname{Cos}\nu)^2}} =$$

$$= \underset{\Delta t = o}{\text{Пред.}} \frac{\frac{\Delta S}{\Delta t}}{\sqrt{\left|\frac{\Delta\operatorname{Cos}\lambda}{\Delta t}\right|^2 + \left|\frac{\Delta\operatorname{Cos}\mu}{\Delta t}\right|^2 + \left|\frac{\Delta\operatorname{Cos}\nu}{\Delta t}\right|^2}} =$$

$$= \frac{\frac{dS}{dt}}{\sqrt{\left|\frac{d\operatorname{Cos}\lambda}{dt}\right|^2 + \left|\frac{d\operatorname{Cos}\mu}{dt}\right|^2 + \left|\frac{d\operatorname{Cos}\nu}{dt}\right|^2}} =$$

$$= \frac{dS}{\sqrt{(d\operatorname{Cos}\lambda)^2 + (d\operatorname{Cos}\mu)^2 + (d\operatorname{Cos}\nu)^2}} = \frac{dS}{d\tau},$$

причемъ $d\tau$ является дифференціаломъ дуги годографа бинормалей:

$$d\tau = \sqrt{(dCos\lambda)^2 + (dCos\mu)^2 + (dCos\nu)^2},$$

такъ какъ $Cos\lambda$, $Cos\mu$, $Cos\nu$ суть координаты точки n годографа бинормалей.

Замѣчаніе 1. Касательная къ годографу касательной въ точкѣ m и касательная къ годографу бинормали въ точкѣ n обѣ параллельны главной нормали данной кривой въ точкѣ M.

Дѣйствительно, пусть углы касательной къ годографу касательной съ осями координатъ будутъ α_1, β_1, γ_1 (въ точкѣ m); тогда

$$Cos\,\alpha_1 = \frac{dCos\alpha}{d\sigma}$$

$$Cos\,\beta_1 = \frac{dCos\beta}{d\sigma}$$

$$Cos\,\gamma_1 = \frac{dCos\gamma}{d\sigma}.$$

Сравнивая эти выраженія съ выраженіями (8) для $Cos\xi$, $Cos\eta$, $Cos\zeta$, имѣемъ:

$$Cos\,\xi = Cos\,\alpha_1$$

$$Cos\,\eta = Cos\,\beta_1$$

$$Cos\,\zeta = Cos\,\gamma_1,$$

т.е. касательная къ годографу касательной параллельна главной нормали кривой.

Подобнымъ образомъ, пусть углы касательной къ годографу бинормали съ осями координатъ будутъ α_2, β_2, γ_2 въ точкѣ n); тогда

$$Cos\,\alpha_2 = \frac{dCos\lambda}{d\tau}$$

$$Cos\,\beta_2 = \frac{dCos\mu}{d\tau}$$

$$Cos\,\gamma_2 = \frac{dCos\nu}{d\tau},$$

тогда по форм. (8'):

$$Cos\,\alpha_2 = Cos\,\xi$$

$$\cos\beta_2 = \cos\eta$$

$$\cos\gamma_2 = \cos\zeta,$$

т.е. касательная къ годографу бинормалей параллельна главной нормали кривой.

Замѣчаніе 2. Косинусы угловъ главной нормали съ осями координатъ могутъ быть представлены въ видѣ

$$\cos\xi = R_1 \frac{d\cos\alpha}{dS} = R_2 \frac{d\cos\lambda}{dS}$$

$$\cos\eta = R_1 \frac{d\cos\beta}{dS} = R_2 \frac{d\cos\mu}{dS}$$

$$\cos\zeta = R_1 \frac{d\cos\gamma}{dS} = R_2 \frac{d\cos\nu}{dS}.$$

Эти выраженія выводятся непосредственно, если воспользоваться выраженіями

$$R_1 = \frac{dS}{d\sigma}, \quad R_2 = \frac{dS}{d\tau}$$

и формулами (8) и (8') для угловъ главной нормали съ осями.

Замѣчаніе 3. Отмѣтимъ формулу, важную для дальнѣйшаго:

$$A.d\cos\xi + B.d\cos\eta + C.d\cos\zeta = -\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\, d\tau.$$

Доказательство. Воспользуемся результатами § 16, въ которомъ мы имѣли слѣдующее соотношеніе:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\xi + \cos^2\lambda = 1.$$

Дифференцируя это равенство, получимъ

$$\cos\alpha.d\cos\alpha + \cos\xi.d\cos\xi + \cos\lambda.d\cos\lambda = 0,$$

но въ § 16 (форм. (8) и (8')) мы имѣли

$$\cos\xi = \frac{d\cos\alpha}{d\sigma} = \frac{d\cos\lambda}{d\tau};$$

поэтому

$$d\cos\xi = -\frac{\cos\alpha.d\cos\alpha}{\cos\xi} - \frac{\cos\lambda.d\cos\lambda}{\cos\xi} = -\cos\alpha.d\sigma - \cos\lambda.d\tau.$$

Подобныя же выраженія найдемъ для $dCos\eta$ и $dCos\zeta$, такъ что

$$\begin{array}{ll} dCos\xi = -Cos\alpha.d\sigma - Cos\lambda.d\tau & \Big| \; A \\ dCos\eta = -Cos\beta.d\sigma - Cos\mu.d\tau & \Big| \; B \\ dCos\zeta = -Cos\gamma.d\sigma - Cos\nu.d\tau & \Big| \; C. \end{array}$$

Умноживъ эти равенства соотвѣтственно на A, B, C и сложивъ ихъ почленно, получимъ:

$$A.dCos\xi + B.dCos\eta + C.dCos\zeta =$$

$$= - d\sigma(A.Cos\alpha + B.Cos\beta + C.Cos\gamma) - d\tau(A.Cos\lambda + B.Cos\mu + CCos\nu).$$

Въ силу формулъ въ концѣ § 15 (слѣдствіе) имѣемъ

$$A.Cos\alpha + B.Cos\beta + C.Cos\gamma =$$

$$= \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\,(Cos\lambda.Cos\alpha + Cos\mu.Cos\beta + Cos\nu.Cos\gamma) = 0$$

вслѣдствіе перпендикулярности бинормали и касательной; далѣе

$$A.Cos\lambda + B.Cos\mu + C.Cos\nu = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\,(Cos^2\lambda +$$

$$+ Cos^2\mu + Cos^2\nu) = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2},$$

такъ какъ

$$Cos^2\lambda + Cos^2\mu + Cos^2\nu = 1$$

(см. формулы въ § 16).

Итакъ

$$A.dCos\xi + B.dCos\eta + C.dCos\zeta = - \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\,d\tau.$$

Теорема 2. Для вычисленія радіусовъ 1-ой и 2-ой кривизны служатъ формулы

$$R_1 = \left| \frac{dS^3}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|$$

$$R_2 = \left| \frac{A^2 + B^2 + C^2}{A.d^3x + B.d^3y + C.d^3z} \right|$$

Доказательство 1°. Въ теоремѣ 1 § 17 мы нашли слѣдующее выраженіе радіуса 1-ой кривизны

$$R_1 = \frac{dS}{d\sigma},$$

гдѣ

$$d\sigma = \sqrt{(dCos\alpha)^2 + (dCos\beta)^2 + (dCos\gamma)^2};$$

но въ § 16 мы имѣли

$$dCos\alpha = dS^{-3}(B.dz - C.dy)$$

$$dCos\beta = dS^{-3}(C.dx - A.dz)$$

$$dCos\gamma = dS^{-3}(A.dy - B.dx),$$

слѣдовательно

$$d\sigma^2 = dS^{-6}\left[(Bdz - Cdy)^2 + (Cdx - Adz)^2 + (Ady - Bdx)^2\right].$$

Это выраженіе можно преобразовать въ слѣдующее:

$$d\sigma^2 = dS^{-6}\left[(A^2 + B^2 + C^2)(dx^2 + dy^2 + dz^2) - (Adx + Bdy + Cdz)^2\right]$$

на основаніи тождества Эйлера

$$(a^2 + b^2 + c^2)(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2) - (aa_1 + bb_1 + cc_1)^2 =$$

$$= (ab_1 - a_1b)^2 + (bc_1 - cb_1)^2 + (ca_1 - ac_1)^2.$$

Изъ условія перпендикулярности касательной T къ бинормали B слѣдуетъ (см. § 15):

$$Adx + Bdy + Cdz = 0;$$

кромѣ того изъ § 13 извѣстно

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = dS^2.$$

Слѣдовательно

$$d\sigma^2 = dS^{-6}(A^2 + B^2 + C^2)\, dS^2;$$

отсюда

$$R_1^2 = \frac{dS^2}{d\sigma^2} = \frac{dS^6}{A^2 + B^2 + C^2}$$

$$R_1 = \left| \frac{dS^3}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|.$$

2°. Въ § 16 форм. (8) мы имѣли:

$$\mathrm{Cos}\,\xi = \frac{d\mathrm{Cos}\,\alpha}{d\sigma}$$

или

$$\mathrm{Cos}\,\xi = \frac{d\left(\frac{dx}{dS}\right)}{d\sigma} = \frac{dS.d^2x - dx.d^2S}{dS^2\,.\,d\sigma},$$

отсюда

$$\mathrm{Cos}\,\xi.d\sigma.dS^2 = dS.d^2x - dx.d^2S.$$

Дифференцируя это равенство, получимъ:

$$d\mathrm{Cos}\xi.d\sigma.dS^2 + \mathrm{Cos}\xi.d(d\sigma.dS^2) = dS.d^3x + d^2S.d^2x -$$

$$- d^2x.d^2S - dx.d^3S = dS.d^3x - dx.d^3S.$$

Подобнымъ же образомъ можемъ написать

$$d\mathrm{Cos}\eta.d\sigma.dS^2 + \mathrm{Cos}\eta.d(d\sigma.dS^2) = dS.d^3y - dy.d^3S$$

$$d\mathrm{Cos}\zeta.d\sigma.dS^2 + \mathrm{Cos}\zeta.d(d\sigma.dS^2) = dS.d^3z - dz.d^3S.$$

Умножая эти три равенства соотвѣтственно на A, B, C и складывая почленно, получимъ

$$d\sigma.dS^2(A.d\mathrm{Cos}\xi + B.d\mathrm{Cos}\eta + C.d\mathrm{Cos}\zeta) + d(d\sigma.dS^2)(A.\mathrm{Cos}\xi +$$

$$+ B.\mathrm{Cos}\eta + C.\mathrm{Cos}\zeta) = dS(A.d^3x + B.d^3y + C.d^3z) -$$

$$- d^3S(Adx + Bdy + Cdz).$$

Но мы знаемъ, что (зам. 3)

$$A.d\mathrm{Cos}\xi + B.d\mathrm{Cos}\eta + C.d\mathrm{Cos}\zeta = - d\tau\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.$$

$$A.\mathrm{Cos}\xi + B.\mathrm{Cos}\eta + C.\mathrm{Cos}\zeta = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\,(\mathrm{Cos}\lambda.\mathrm{Cos}\xi +$$

$$+ \mathrm{Cos}\mu.\mathrm{Cos}\eta + \mathrm{Cos}\nu.\mathrm{Cos}\zeta) = 0 \quad (\text{см. §16}),$$

$$Adx + Bdy + Cdz = 0 \quad (\text{см. §15}).$$

Итакъ имѣемъ

$$- d\sigma.dS^2.d\tau\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = dS(A.d^3x + B.d^3y + C.d^3z)\;.\;.\;(*).$$

Въ силу соотношенія

$$R_1 = \frac{dS}{d\sigma} = \frac{dS^3}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

имѣемъ

$$dS^2 . d\sigma = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2},$$

такъ что последнее равенство (*) можно переписать въ видѣ

$$- d\tau(A^2 + B^2 + C^2) = dS(A.d^3x + B.d^3y + C.d^3z).$$

Отсюда на основанiи теоремы 1 § 17 имѣемъ

$$\frac{dS}{d\tau} = - \frac{A^2 + B^2 + C^2}{A.d^3x + B.d^3y + C.d^3z}$$

и слѣдовательно

$$R_2 = \left| \frac{A^2 + B^2 + C^2}{Ad^3x + Bd^3y + Cd^3z} \right|.$$

Слѣдствiе. Необходимое и достаточное условiе того, чтобы данная кривая была плоская, заключается въ выполненiи равенства

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \\ d^3x & d^3y & d^3z \end{vmatrix} = 0$$

для каждой точки данной кривой.

Доказательство. Вторая кривизна характеризуетъ уклоненiе кривой отъ плоской формы. Поэтому, если данная кривая плоская, то вторая кривизна равна 0, т.е.

$$\frac{Ad^3x + Bd^3y + Cd^3z}{A^2 + B^2 + C^2} = 0.$$

Отсюда слѣдуетъ

$$Ad^3x + Bd^3y + Cd^3z = 0.$$

Присоединяя сюда уравненiя § 15, получимъ систему 3 уравненiй относительно A, B, C:

$$\left| \begin{aligned} Adx + Bdy + Cdz &= 0 \\ Ad^2x + Bd^2y + Cd^2z &= 0 \\ Ad^3x + Bd^3y + Cd^3z &= 0. \end{aligned} \right.$$

По известной теоремѣ теорiи опредѣлителей, исключая буквы A, B и C изъ этой системы, находимъ равенство нулю опредѣлителя:

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \\ d^3x & d^3y & d^3z \end{vmatrix} = 0.$$

§ 13.

Примѣры.

1°. Найти выраженіе для косинусовъ угловъ касательной, главной нормали и бинормали, и радіусы 1-ой и 2-ой кривизны въ каждой точкѣ винтовой линіи:

$$\left| \begin{aligned} x &= a.\cos t \\ y &= a.\sin t \\ z &= k.t \end{aligned} \right.$$

Выпишемъ сначала общія формулы.

Для косинусовъ касательной имѣемъ выраженія:

$$\cos\alpha = \frac{dx}{dS}\ ; \quad \cos\beta = \frac{dy}{dS}\ ; \quad \cos\gamma = \frac{dz}{dS}\ ;$$

гдѣ

$$dS = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}\ ;$$

для бинормали:

$$\cos\lambda = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\ ;$$

$$\cos\mu = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\ ;$$

$$\cos\nu = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\ ;$$

гдѣ

$$A = dy.d^2z - dz.d^2y\ ;$$

$$B = dz.d^2x - dx.d^2z\ ;$$

$$C = dx.d^2y - dy.d^2x\ .$$

Для главной нормали:

$$\mathrm{Cos}\ \xi = \frac{M}{\sqrt{M^2 + N^2 + P^2}}\ ;$$

$$\mathrm{Cos}\ \eta = \frac{N}{\sqrt{M^2 + N^2 + P^2}}\ ;$$

$$\mathrm{Cos}\ \zeta = \frac{P}{\sqrt{M^2 + N^2 + P^2}}\ ;$$

гдѣ

$$M = Bdz - Cdy$$

$$N = Cdx - Adz$$

$$P = Ady - Bdx.$$

Для радіусовъ 1-ой и 2-ой кривизны воспользуемся выраженіями

$$R_1 = \left| \frac{dS^3}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|$$

$$R_2 = \left| \frac{A^2 + B^2 + C^2}{Ad^3x + Bd^3y + Cd^3z} \right|$$

Замѣтимъ здѣсь, что найдя косинусы всѣхъ угловъ мы можемъ убѣдиться, что 12 уравненій въ § 16 между 9-ью косинусами угловъ выполняются.

Обращаемся къ вычисленію искомыхъ величинъ; изъ уравненія данной кривой находимъ:

$$dx = -\,a.\mathrm{Sin}\ t.dt\ ; \quad dy = a.\mathrm{Cos}\ t.dt\ ; \quad dz = k.dt\ ;$$

$$d^2x = -\,a.\mathrm{Cos}\ t.dt^2\ ; \quad d^2y = -\,a.\mathrm{Sin}\ t.dt^2\ ; \quad d^2z = 0\ ;$$

$$d^3x = a.\mathrm{Sin}\ t.dt^3\ ; \quad d^3y = -\,a.\mathrm{Cos}\ t.dt^3\ ; \quad d^3z = 0\ .$$

Отсюда, пользуясь написанными выше выраженіями, находимъ:

$$dS = \sqrt{a^2 + k^2}\ dt$$

$$\mathrm{Cos}\,\alpha = \frac{-\,a.\mathrm{Sin}t}{\sqrt{a^2+k^2}}\ ; \quad \mathrm{Cos}\,\beta = \frac{a.\mathrm{Cos}\ t}{\sqrt{a^2+k^2}}\ ; \quad \mathrm{Cos}\,\gamma = \frac{k}{\sqrt{a^2+k^2}}\ ;$$

$$A = +\,a.k.\mathrm{Sin}\ t.dt^3$$

$$B = -\,a.k.\mathrm{Cos}\ t.dt^3$$

$$C = a^2.dt^3\ ;$$

$$\sqrt{A^2+B^2+C^2} = a.dt^3\sqrt{a^2+k^2}\ ;$$

$$\mathrm{Cos}\,\lambda = \frac{k.\mathrm{Sin}t}{\sqrt{a^2+k^2}}\ ; \quad \mathrm{Cos}\quad = \frac{-\,k.\mathrm{Cos}t}{\sqrt{a^2+k^2}}\ ; \quad \mathrm{Cos}\quad = \frac{a}{\sqrt{a^2+k^2}}\ ;$$

$$M = -ak^2.\mathrm{Cos}\ t.dt^4 - a^3.\mathrm{Cos}\ t.dt^4 = -\,a.\mathrm{Cos}\ t.dt^4(a^2+k^2)$$

$$N = -a^3\mathrm{Sin}\ t.dt^4 - ak^2.\mathrm{Sin}\ t.dt^4 = -\,a.\mathrm{Sin}\ t.dt^4(a^2+k^2)$$

$$P = a^2k.\mathrm{Sin}\ t.\mathrm{Cos}\ t.dt^4 - a^2k.\mathrm{Sin}\ t.\mathrm{Cos}\ t.dt^4 = 0.$$

$$\sqrt{M^2+N^2+P^2} = a(a^2+k^2).dt^4$$

$$\mathrm{Cos}\,\xi = -\,\mathrm{Cos}\ t$$

$$\mathrm{Cos}\,\eta = -\,\mathrm{Sin}\ t$$

$$\mathrm{Cos}\,\zeta = 0.$$

Изъ послѣднихъ формулъ слѣдуетъ, что главная нормаль пересѣкаетъ ось цилиндра подъ прямымъ угломъ. Это доказывается слѣдующимъ образомъ. Уравненіе нормали въ точкѣ $M(x,y,z)$ будетъ:

$$\frac{\bar{X} - a.\mathrm{Cos}t}{-\,\mathrm{Cos}t} = \frac{\bar{Y} - a.\mathrm{Sin}t}{-\,\mathrm{Sin}t} = \frac{\bar{Z} - kt}{0}.$$

Отсюда слѣдуетъ: 1) что

$$\bar{Z} - kt = 0,$$

т.е. главная нормаль лежитъ въ плоскости ||-ой основанію цилиндра

$$\bar{Z} = kt \quad \dots\dots\dots\dots \quad (1)$$

и 2), что

$$\frac{\bar{X}}{-\,\mathrm{Cos}t} + \cancel{1} = \frac{\bar{Y}}{-\,\mathrm{Sin}t} + \cancel{1},$$

или

$$\frac{\bar{X}}{x} = \frac{\bar{Y}}{y} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2),$$

т.е. главная нормаль лежитъ въ плоскости, проходящей чрезъ ось Z-овъ или ось цилиндра; изъ совокупности условій (1) и (2) слѣдуетъ, что главная нормаль пересѣкаетъ ось цилиндра подъ прямымъ угломъ.

Радіусы 1-ой и 2-ой кривизны будутъ:

$$R_1 = \frac{(a^2 + k^2)^{3/2} dt^3}{a(a^2 + k^2)^{1/2} dt^3} = \frac{a^2 + k^2}{a}$$

$$R_2 = \frac{a^2(a^2 + k^2).dt^6}{a^2 k.dt^6} = \frac{a^2 + k^2}{a}.$$

Итакъ касательная и бинормаль винтовой линіи пересѣкаютъ образующую цилиндра подъ постояннымъ угломъ (такъ какъ $\cos\gamma$ и $\cos\lambda$ постоянны). Радіусы кривизны постоянны. Главная нормаль пересѣкаетъ ось цилиндра подъ прямымъ угломъ (слѣдовательно и къ образующей наклонена подъ прямымъ угломъ).

2°. Найти тѣ же величины для кривой

$$\left| \begin{aligned} x^2 - y^2 + 2z^2 &= 2 \\ x^2 - 3y + 5z &= 3 \end{aligned} \right.$$

въ точкѣ (1, 1, 1).

Примемъ x за независимую перемѣнную. Тогда найдемъ

$$y' = \frac{dy}{dx}; \quad z' = \frac{dz}{dx};$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2}; \quad z'' = \frac{d^2z}{dx^2};$$

$$y''' = \frac{d^3y}{dx^3}; \quad z''' = \frac{d^3z}{dx^3};$$

$$dx = \textit{пост.}; \quad d^2x = 0; \quad d^3x = 0.$$

Дифференцируя предложенныя уравненія, получимъ

$$\left| \begin{aligned} x - yy' + 2zz' &= 0 \\ 2x - 3y' + 5z' &= 0 \end{aligned} \right. \quad \ldots\ldots\ldots (*)$$

и въ данной точкѣ (1, 1, 1) имѣемъ

$$- y' + 2z' = - 1,$$

$$- 3y' + 5z' = - 2,$$

откуда

$$y' = - 1$$

$$z' = - 1.$$

Дифференцируя по x уравненія (*), получимъ:

$$\left| \begin{array}{l} 1 - y'^2 - yy'' + 2z'^2 + 2zz'' = 0; \\ 2 - 3y'' + 5z'' = 0; \end{array} \right. \quad . \ . \ . \ . \ (**)$$

въ данной точкѣ (1, 1, 1) имѣемъ:

$$- y'' + 2z'' = - 2$$

$$- 3y'' + 5z'' = -2,$$

отсюда

$$y'' = - 6$$

$$z'' = - 4.$$

Дифференцируя теперь уравненія (**) по x, найдемъ:

$$- 2y'y'' - y'y'' - y.y''' + 4z'z'' + 2z'z'' + 2zz''' = 0$$

$$- 3y''' + 5z''' = 0 ;$$

въ данной точкѣ имѣемъ:

$$- y''' + 2z''' = 18 - 24 = - 6$$

$$- 3y''' + 5z''' = 0,$$

откуда

$$y''' = - 30$$

$$z''' = - 18.$$

Далѣе находимъ:

$$S' = \frac{dS}{dx} = \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} = \sqrt{3}$$

$$\cos \alpha = \frac{dx}{dS} = \frac{1}{S'} = \frac{1}{\sqrt{3}} ;$$

$$\operatorname{Cos}\beta = \frac{dy}{dS} = \frac{y'}{S'} = \frac{-1}{\sqrt{3}};$$

$$\operatorname{Cos}\gamma = \frac{dz}{dS} = \frac{z'}{S'} = \frac{-1}{\sqrt{3}}.$$

Составимъ выраженія:

$$\frac{A}{dx^3} = y'z'' - z'y'' = -2; \quad \frac{B}{dx^3} = -z'' = 4; \quad \frac{C}{dx^3} = y'' = -6,$$

находимъ

$$\operatorname{Cos}\lambda = \frac{-2}{\sqrt{4+16+36}} = \frac{-1}{\sqrt{14}};$$

$$\operatorname{Cos}\mu = \frac{4}{\sqrt{56}} = \frac{2}{\sqrt{14}}; \quad \operatorname{Cos}\nu = \frac{-6}{\sqrt{56}} = \frac{-3}{\sqrt{14}}.$$

Для главной нормали имѣемъ:

$$\frac{M}{dx^4} = \frac{B}{dx^3}\,.\,z' - \frac{C}{dx^2}\,.\,y' = -4-6 = -10;$$

$$\frac{N}{dx^4} = \frac{C}{dx^3} - \frac{A}{dx^3}\,.\,z' = -6-2 = -8;$$

$$\frac{P}{dx^4} = \frac{A}{dx^3}\,.\,y' - \frac{B}{dx^3} = 2-4 = -2;$$

отсюда

$$\operatorname{Cos}\xi = \frac{-10}{\sqrt{168}} = \frac{-5}{\sqrt{42}}; \quad \operatorname{Cos}\eta = \frac{-8}{\sqrt{168}} = \frac{-4}{\sqrt{42}};$$

$$\operatorname{Cos}\zeta = \frac{-2}{\sqrt{168}} = \frac{-1}{\sqrt{42}}.$$

Наконецъ,

$$R_1 = \frac{S'^3}{\sqrt{\left[\frac{A}{dx^3}\right]^2 + \left[\frac{B}{dx^3}\right]^2 + \left[\frac{C}{dx^3}\right]^2}} = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{14}}.$$

$$R_2 = \left|\frac{\left[\frac{A}{dx^3}\right]^2 + \left[\frac{B}{dx^3}\right]^2 + \left[\frac{C}{dx^3}\right]^2}{0 + \frac{B}{dx^3}.y''' + \frac{C}{dx^3}\,.\,z'''}\right| =$$

$$= \left| \frac{56}{-120 + 108} \right| = \frac{56}{12} = \frac{14}{3}.$$

Выписавъ таблицу 9 косинусовъ

$$\begin{array}{ccc} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \\ -\frac{1}{\sqrt{14}} & \frac{2}{\sqrt{14}} & -\frac{3}{\sqrt{14}} \\ \\ -\frac{5}{\sqrt{42}} & -\frac{4}{\sqrt{42}} & -\frac{1}{\sqrt{42}} \end{array}$$

легко провѣряемъ (согл. формул. въ §16), что сумма квадратовъ чиселъ каждой горизонтальной и каждой вертикальной строки = 1, а сумма произведенiй соотвѣтственныхъ членовъ 2 горизонт. или вертикальныхъ строкъ равна нулю, напримѣръ

$$1/_3 + 1/_{14} + 25/_{42} = 1; \quad -1/_3 - 2/_{14} + 20/_{42} = 0 \quad \text{и т.д.}$$

§ 19.

Аналитическое изображенiе поверхностей. Касательная плоскость и нормаль къ поверхности.

Поверхность аналитически можно изобразить или 1) уравненiемъ

$$f(x, y, z) = 0,$$

или системою уравненiй

$$\left| \begin{array}{l} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \\ z = \omega(u, v), \end{array} \right.$$

если во 2-омъ случаѣ можно исключить буквы u и v, то по исключенiи ихъ придемъ къ уравненiю 1)

$$f(x, y, z) = 0.$$

Напримѣръ: дана система

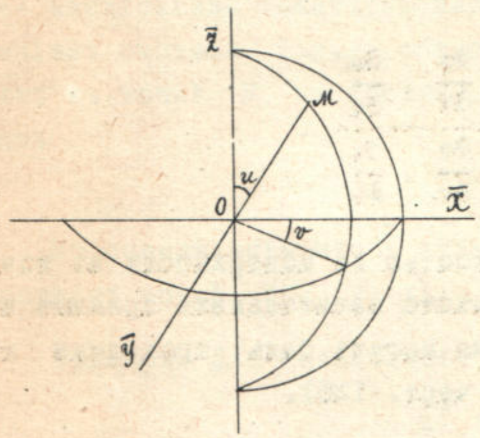
$$\left| \begin{aligned} x &= R.\mathrm{Sin}\, u.\mathrm{Cos}\, v \\ y &= R.\mathrm{Sin}\, u.\mathrm{Sin}\, v \\ z &= R.\mathrm{Cos}\, u\ . \end{aligned} \right.$$

Исключая u и v слѣдующимъ образомъ

$$x^2 + y^2 = R^2\mathrm{Sin}^2 u, \qquad z^2 = R^2\mathrm{Cos}^2 u,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2,$$

получаемъ уравненіе поверхности шара радіуса $R = OM$ (см. чертежъ 124).



Черт. 124.

Здѣсь уголъ v = долготѣ относительно пл. $\overline{X}O\overline{Z}$; u :- дополненіе до широты.

Для дальнѣйшаго полезно отмѣтить, какъ выражаются частныя производныя

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} \qquad q = \frac{\partial z}{\partial y}\ ,$$

если уравненіе поверхности задано въ видѣ

$$x = \varphi(u,\ v)$$

$$y = \psi(u,\ v)$$

$$z = \omega(u,\ v)\ .$$

Имѣемъ

$$dz = \frac{\partial \omega}{\partial u}\ .\ du + \frac{\partial \omega}{\partial v}\ .\ dv$$

$$dx = \frac{\partial \varphi}{\partial u}\ .\ du + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\ .\ dv$$

$$dy = \frac{\partial \psi}{\partial u}\ .\ du + \frac{\partial \psi}{\partial v}\ .\ dv.$$

Умножая эти уравненія на $1,\ -p,\ -q$, сложимъ. Тогда налѣво будетъ

$$dz - p dx - q dy = 0,$$

а направо, приравниваемъ отдѣльно нулю коэффиціенты при du и dv (такъ какъ они представляютъ произвольныя постоянныя), и получаемъ 2 уравненія:

$$\frac{\partial\omega}{\partial u} = p\frac{\partial\varphi}{\partial u} + q\frac{\partial\psi}{\partial u},$$

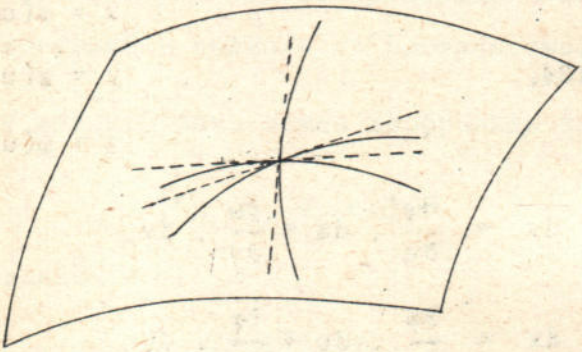
$$\frac{\partial\omega}{\partial v} = p\frac{\partial\varphi}{\partial v} + q\frac{\partial\psi}{\partial v},$$

откуда

$$p = \frac{\frac{\partial\omega}{\partial u}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial v} - \frac{\partial\omega}{\partial v}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial u}}{\frac{\partial\varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial v} - \frac{\partial\varphi}{\partial v}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial u}}$$

$$q = \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial v} - \frac{\partial\varphi}{\partial v}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial u}}{\frac{\partial\varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial v} - \frac{\partial\varphi}{\partial v}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial u}}.$$

Опредѣленіе. Касательной плоскостью къ поверхности въ точкѣ M называется геометрическое мѣсто касательныхъ прямыхъ въ точкѣ M ко всѣмъ линіямъ, которыя могутъ быть проведены по поверхности черезъ точку M (см. черт. 125).



Черт. 125.

Теорема. Уравненіе касательной плоскости къ поверхности

$$f(x, y, z) = 0$$

имѣетъ видъ:

$$(\bar{X}-x)f'_x + (\bar{Y}-y)f'_y + (\bar{Z}-z)f'_z = 0.$$

Пусть $f(x,y,z) = 0$ - уравненіе поверхности. Всякую линію на этой поверхности можно представить такъ

$$\begin{vmatrix} f(x, y, z) = 0 \\ \varphi(x, y, z) = 0, \end{vmatrix}$$

гдѣ φ мѣняется при переходѣ отъ одной линіи къ другой.

Уравненіе касательной прямой въ точкѣ M къ этой линіи будетъ (см. § 14 замѣч. 1):

$$\begin{vmatrix} (\bar{X}-x)f'_x + (\bar{Y}-y)f'_y + (\bar{Z}-z)f'_z = 0 \\ (\bar{X}-x)\varphi'_x + (\bar{Y}-y)\varphi'_y + (\bar{Z}-z)\varphi'_z = 0. \end{vmatrix}$$

Такимъ образомъ, какова бы ни была функція $\varphi(x,y,z)$, всякая касательная лежитъ въ плоскости, изображаемой первымъ уравненіемъ системы. Такимъ образомъ геометрическое мѣсто касательныхъ въ точкѣ M къ кривымъ, проведеннымъ по поверхности, будетъ

$$(\bar{X}-x)f'_x + (\bar{Y}-y)f'_y + (\bar{Z}-z)f'_z = 0.$$

По опредѣленію это и есть касательная плоскость къ поверхности въ точкѣ $M(x, y, z)$.

Примѣръ. Для поверхности

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$$

найти касательную плоскость въ точкѣ (1, 1, 1).

Составимъ частныя производныя:

$$f'_x = 2x; \quad f'_y = 4y; \quad f'_z = 6z;$$

въ данной точкѣ:

$$f'_x = 2; \quad f'_y = 4; \quad f'_z = 6.$$

Слѣдовательно, уравненіе касательной плоскости въ точкѣ (1, 1, 1) будетъ:

$$(\bar{X}-1)2 + (\bar{Y}-1)4 + (\bar{Z}-1)6 = 0,$$

$$(\bar{X}-1) + (\bar{Y}-1)2 + (\bar{Z}-1)3 = 0$$

или

$$\bar{X} + 2\bar{Y} + 3\bar{Z} = 6.$$

Замѣчаніе 1. Если въ данной точкѣ всѣ 3 частныя производнея

$$f'_x = f'_y = f'_z = 0,$$

то опредѣленной касательной плоскости въ этой точкѣ не существуетъ, и такая точка называется особенной точкой поверхности; такова вершина конуса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

для котораго въ точкѣ (0, 0, 0) имѣемъ:

$$f'_x = \frac{2x}{a^2} = 0; \qquad f'_y = \frac{2y}{b^2} = 0; \qquad f'_z = -\frac{2z}{c^2} = 0.$$

Замѣчаніе 2. Если въ уравненіи поверхности $f(x,y,z) = 0$ считать z функціей отъ 2-хъ перемѣнныхъ независимыхъ x и y, то вводя обозначенія

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q,$$

имѣемъ съ одной стороны

$$dz = pdx + qdy;$$

съ другой же стороны, приравнивая 0 полный дифференціалъ функціи $f(x,y,z) = 0$, получимъ

$$f'_x.dx + f'_y.dy + f'_z.dz = 0,$$

откуда

$$dz = -\frac{f'_x}{f'_z}dx - \frac{f'_y}{f'_z}dy.$$

Сравнивая два выраженія дифференціала dz, имѣемъ:

$$p = -\frac{f'_x}{f'_z}; \qquad q = -\frac{f'_y}{f'_z}.$$

Раздѣливъ теперь уравненіе касательной плоскости на f'_z, дадимъ ему новую форму:

$$(\bar{X}-x)p + (\bar{Y}-y)q = \bar{Z} - z.$$

Опредѣленіе. Нормалью въ точкѣ M поверхности называется прямая, проведенная черезъ M $\perp$'но къ касательной плоскости въ этой точкѣ.

Теорема. Уравненіе нормали въ точкѣ $M(x, y, z)$ имѣетъ видъ:

$$\frac{\bar{X} - x}{f'_x} = \frac{\bar{Y} - y}{f'_y} = \frac{\bar{Z} - z}{f'_z},$$

если уравненіе поверхности будетъ $f(x, y, z) = 0$.

Доказательство. Уравненіе всякой прямой, проходящей черезъ точку M будетъ:

$$\frac{\bar{X} - x}{l} = \frac{\bar{Y} - y}{m} = \frac{\bar{Z} - z}{n},$$

а уравненіе касательной плоскости:

$$(\bar{X} - x) f'_x + (\bar{Y} - y) f'_y + (\bar{Z} - z) f'_z = 0.$$

Такъ какъ условіе перпендикулярности прямой къ плоскости будетъ

$$\frac{l}{f'_x} = \frac{m}{f'_y} = \frac{n}{f'_z},$$

то отсюда, замѣняя числа l, m, n величинами, имъ пропорціональными, найдемъ уравненіе нормали:

$$\frac{\bar{X} - x}{f'_x} = \frac{\bar{Y} - y}{f'_y} = \frac{\bar{Z} - z}{f'_z}.$$

Замѣчаніе 1. Косинусь угловъ нормали къ поверхности съ осями координатъ имѣютъ слѣдующія выраженія:

$$\operatorname{Cos}(N, \bar{X}) = \frac{f'_x}{\sqrt{f'^2_x + f'^2_y + f'^2_z}};$$

$$\operatorname{Cos}(N, \bar{Y}) = \frac{f'_y}{\sqrt{f'^2_x + f'^2_y + f'^2_z}};$$

$$\operatorname{Cos}(N, \bar{Z}) = \frac{f'_z}{\sqrt{f'^2_x + f'^2_y + f'^2_z}};$$

причемъ нормаль, опредѣляемая предыдущими формулами со знакомъ $+$ при корнѣ квадратномъ, направлена въ ту сторону поверхности

$f(x,y,z) = 0$, гдѣ значенія лѣвой части уравненія $f(x,y,z) > 0$.

Напримѣръ, нормаль къ поверхности шара въ указанномъ предположеніи будетъ направлена въ сторону выпуклости, такъ какъ, если

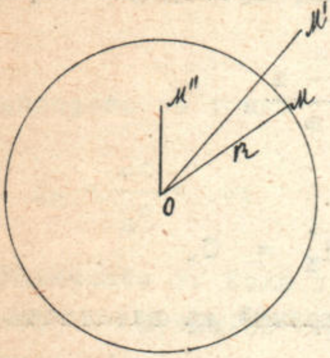
$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$$

есть уравненіе поверхности шара, то для точекъ M' внѣ этой поверхности

$$f(x,y,z) > 0,$$

а для точекъ M'' внутри ея (см. черт. 126)

$$f(x,y,z) < 0.$$



Черт. 126.

Доказательство. Мы уже знаемъ, что, если прямая задана уравненіемъ

$$\frac{\overline{X} - x}{l} = \frac{\overline{Y} - y}{m} = \frac{\overline{Z} - z}{n},$$

то косинусы угловъ ея съ осями координатъ выражаются формулами:

$$\operatorname{Cos}(R, \overline{x}) = \frac{l}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}};$$

$$\operatorname{Cos}(R, \overline{y}) = \frac{m}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}};$$

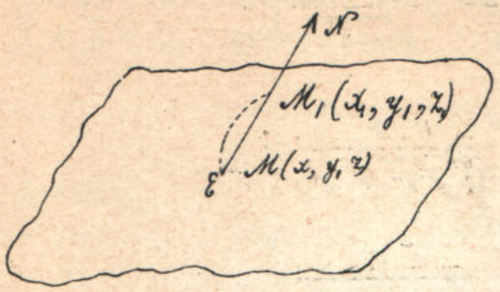
$$\operatorname{Cos}(R, \overline{z}) = \frac{n}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

Подставляя сюда вмѣсто l, m и n соотвѣтственно выраженія

$$f'_x, \quad f'_y, \quad f'_z$$

изъ уравненія нормали, получимъ выраженія для косинусовъ нормали съ осями, написанныя выше. Чтобы оправдать замѣчаніе относительно направленія нормали, положимъ, что мы имѣемъ нормаль къ нѣкоторой поверхности, опредѣляемой уравненіемъ

$$f(x,y,z) = 0,$$



Черт. 127.

въ точкѣ съ координатами x, y и z (см. черт. 127), причемъ нормаль опредѣляется предыдущими формулами со знакомъ + при корнѣ. Взявъ на этой нормали точку M' съ координатами

$$x_1 = x + \Delta x$$

$$y_1 = y + \Delta y$$

$$z_1 = z + \Delta z,$$

будемъ имѣть:

$$\Delta x = \varepsilon . \operatorname{Cos}(N, \overline{X}) = \varepsilon . \frac{f'_x}{\sqrt{f'^2_x + f'^2_y + f'^2_z}} ;$$

$$\Delta y = \varepsilon . \operatorname{Cos}(N, \overline{Y}) = \varepsilon . \frac{f'_y}{\sqrt{f'^2_x + f'^2_y + f'^2_z}} ;$$

$$\Delta z = \varepsilon . \operatorname{Cos}(N, \overline{Z}) = \varepsilon . \frac{f'_z}{\sqrt{f'^2_x + f'^2_y + f'^2_z}} ,$$

гдѣ ε означаетъ длину отрѣзка MM_1.

Докажемъ, что $f(x_1, y_1, z_1) > 0$. Для этого разложимъ въ рядъ эту функцію. Имѣемъ:

$$f(x_1, y_1, z_1) = f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) = f(x, y, z) +$$

$$+ (\Delta x . f'_x + \Delta y . f'_y + \Delta z . f'_z) + R_2 = + \varepsilon \sqrt{f'^2_x + f'^2_y + f'^2_z} +$$

$$+ \varepsilon^2 . A ;$$

при достаточно маломъ ε очевидно выходитъ $f(x_1, y_1, z_1) > 0$.

Замѣчаніе 2. Полагая

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q,$$

можно уравненіе нормали къ поверхности представить въ видѣ

$$\frac{\bar{X} - x}{-p} = \frac{\bar{Y} - y}{-q} = \frac{\bar{Z} - z}{1};$$

отсюда

$$\cos(N, \bar{X}) = \frac{-p}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}};$$

$$\cos(N, \bar{Y}) = \frac{-q}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}};$$

$$\cos(N, \bar{Z}) = \frac{1}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}}.$$

Въ самомъ дѣлѣ мы видѣли выше, что

$$p = -\frac{f'_x}{f'_z}; \quad q = -\frac{f'_y}{f'_z}.$$

Раздѣливъ знаменатели въ уравненіи нормали

$$\frac{\bar{X} - x}{f'_x} = \frac{\bar{Y} - y}{f'_y} = \frac{\bar{Z} - z}{f'_z}$$

на $+ f'_z$ и вводя выраженія p и q, получимъ

$$\frac{\bar{X} - x}{-p} = \frac{\bar{Y} - y}{-q} = \frac{\bar{Z} - z}{1}.$$

Въ заключеніе этого §-а разберемъ нѣсколько примѣровъ.

Примѣръ 1. Къ поверхности

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$$

провести касательныя плоскости параллельно плоскости:

$$\bar{X} + \bar{Y} + \bar{Z} = 0.$$

Здѣсь

$$f'_x = 2x, \quad f'_y = 4y, \quad f'_z = 6z;$$

общее уравненіе касательной плоскости въ точкѣ (x, y, z) будетъ

$$(\bar{X}-x)x + (\bar{Y}-y)2y + (\bar{Z}-z)3z = 0$$

$Xx - x^2 + 2Yy - 2y^2 + 3Zz - 3z^2 = 0$ $\quad$ $Xx + 2Yy + 3Zz + \underbrace{(-x^2 - 2y^2 - 3z^2)}_{= -6}$

или

$$\bar{X}.x + \bar{Y}.2y + \bar{Z}.3z = 6.$$

Чтобы эта плоскость была параллельна данной плоскости $\bar{X} + \bar{Y} + \bar{Z} = 0$, должно быть

$$\frac{x}{1} = \frac{2y}{1} = \frac{3z}{1} = \lambda.$$

Отсюда

$$x = \lambda, \quad y = {}^1/_2\lambda, \quad z = {}^1/_3\lambda;$$

подставляя эти значенія въ уравненіе поверхности, находимъ

$$\lambda^2(1 + {}^1/_2 + {}^1/_3) = 6, \quad 11\lambda^2 = 36, \quad \lambda = \pm\frac{6}{\sqrt{11}},$$

и координаты точекъ касанія:

$$x = \frac{6}{\pm\sqrt{11}}, \quad y = \frac{3}{\pm\sqrt{11}}, \quad z = \frac{2}{\pm\sqrt{11}}.$$

Уравненія касательныхъ плоскостей будутъ:

$$\bar{X} + \bar{Y} + \bar{Z} = \pm\sqrt{11}.$$

Примѣръ 2. Къ поверхности

$$z = 2x^2 + y^2$$

провести касательныя плоскости черезъ прямую

$$\frac{x}{1} = \frac{y - 1}{-1} = \frac{z + 2}{0}.$$

Здѣсь

$$f = 2x^2 + y^2 - z = 0,$$

$$f'_x = 4x, \quad f'_y = 2y, \quad f'_z = -1,$$

уравненіе касательной плоскости

$$(\bar{X} - x)4x + (\bar{Y} - y)2y + (\bar{Z} - z).-1 = 0$$

или

$$4x.\bar{X} + 2y.\bar{Y} - \bar{Z} = z.$$

Условія прохожденія этой плоскости черезъ прямую выражаются: 1) прохожденіемъ плоскости черезъ точку $(0, 1, -2)$ прямой:

$$2y + 2 = z$$

2) параллельностью прямой и плоскости:

$$4x - 2y = 0.$$

Такимъ образомъ для точекъ касанія выполнены три уравненія:

$$y = 2x, \quad z = 2y + 2, \quad z = 2x^2 + y^2.$$

Отсюда

$$z = 2y + 2 = 4x + 2 = 2x^2 + 4x^2,$$

$$6x^2 - 4x - 2 = 0, \quad 3x^2 - 2x - 1 = 0,$$

$$x = \frac{1 \pm 2}{3}.$$

Итакъ

$$x = 1, -{}^1/_3; \quad y = 2, -{}^2/_3; \quad z = 6, {}^2/_3.$$

Касательныхъ плоскостей двѣ:

$$4\bar{X} + 4\bar{Y} - \bar{Z} = 6$$

$$4\bar{X} + 4\bar{Y} + 3\bar{Z} = -2.$$

Примѣръ 3. На поверхности

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

найти линію, во всѣхъ точкахъ которой нормали къ поверхности параллельны плоскости

$$l\bar{X} + m\bar{Y} + n\bar{Z} = 0.$$

Уравненіе нормали къ данной поверхности будетъ

$$\frac{\bar{X} - x}{x/a^2} = \frac{\bar{Y} - y}{y/b^2} = \frac{\bar{Z} - z}{z/c^2};$$

изъ условія $||$-ности ея съ плоскостью слѣдуетъ

$$\frac{lx}{a^2} + \frac{my}{b^2} + \frac{nz}{c^2} = 0.$$

Искомая кривая есть эллипсъ, опредѣляемый уравненіями

$$\left| \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right.$$

$$\left| \frac{lx}{a^2} + \frac{my}{b^2} + \frac{nz}{c^2} = 0. \right.$$

Примѣръ 4. Найти общее мѣсто основаній перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ начала координатъ на всѣ касательныя плоскости къ эллипсоиду

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, (1)$$

(подэрная поверхность).

Уравненіе касательной плоскости

$$\frac{\overline{X}x}{a^2} + \frac{\overline{Y}y}{b^2} + \frac{\overline{Z}z}{c^2} = 1 \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, (2).$$

Уравненіе перпендикуляра на нее изъ начала

$$\frac{\overline{X}}{x/a^2} = \frac{\overline{Y}}{y/b^2} = \frac{\overline{Z}}{z/c^2} \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, (3).$$

Точка пересѣченія ихъ, т.е. основаніе перпендикуляра, опредѣляется уравненіями (2) и (3); исключая x, y, z изъ этихъ уравненій и изъ (1), получимъ зависимость между $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$, которая представляетъ уравненіе подэрной поверхности.

Изъ (3) имѣемъ

$$\frac{a\overline{X}}{x/a} = \frac{b\overline{Y}}{y/b} = \frac{c\overline{Z}}{z/c} = \lambda = \frac{\sqrt{a^2\overline{X}^2 + b^2\overline{Y}^2 + C^2\overline{Z}^2}}{1},$$

откуда

$$\frac{x}{a^2} = \frac{\overline{X}}{\lambda}, \quad \frac{y}{b^2} = \frac{\overline{Y}}{\lambda}, \quad \frac{z}{c^2} = \frac{\overline{Z}}{\lambda}.$$

Внося въ уравненіе (2), находимъ

$$\overline{X}^2 + \overline{Y}^2 + \overline{Z}^2 = \lambda$$

или

$$(\overline{X}^2 + \overline{Y}^2 + \overline{Z}^2)^2 = a^2\overline{X}^2 + b^2\overline{Y}^2 + c^2\overline{Z}^2.$$

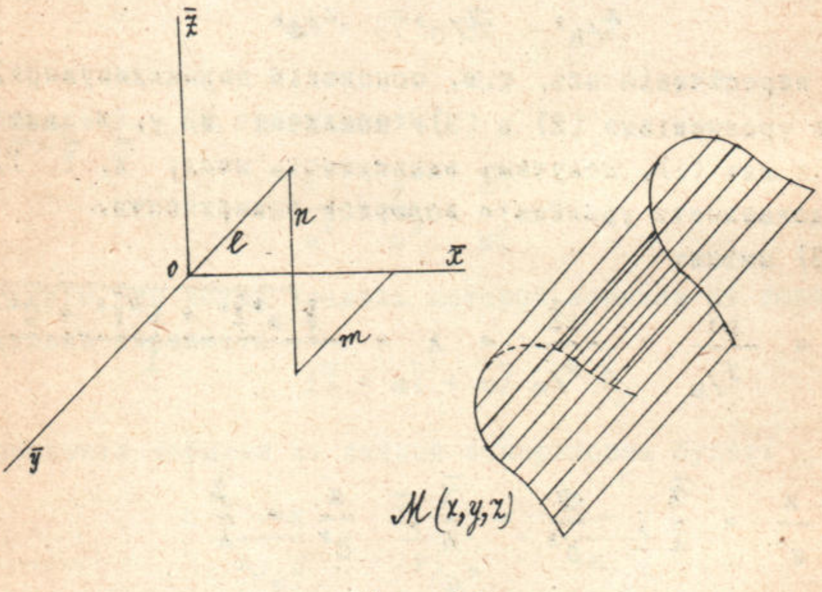
§ 20.

Цилиндрическія поверхности.

Опредѣленіе. Цилиндрическою поверхностью называется общее мѣсто прямыхъ (образующихъ), ||'ныхъ данному направленію и пересѣкающихъ данную кривую (направляющую).

Задача. Составить уравненіе цилиндрической поверхности по данному направленію образующей (l, m, n) и по данному уравненію направляющей:

$$\begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ \varphi(x, y, z) = 0 \end{cases} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$



Черт. 128.

Проведемъ черезъ точку $M(x, y, z)$ (черт. 128), лежащую на направляющей, прямую ||'ую заданному направленію. Уравненіе этой прямой (образующей) будетъ

$$\frac{\bar{X} - x}{l} = \frac{\bar{Y} - y}{m} = \frac{\bar{Z} - z}{n} \quad \ldots\ldots\ldots (2).$$

Исключая буквы x, y, z изъ 4-хъ уравненій (1) и (2), получимъ уравненіе искомой цилиндрической поверхности:

$$F(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}) = 0.$$

Примѣръ. Положимъ, что направляющій линіей будетъ эллипсъ

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = 0, \end{array}\right.$$

а образующія параллельны направленію (l, m, n).

Тогда уравненіе образующей будетъ

$$\frac{\bar{X} - x}{l} = \frac{\bar{Y} - y}{m} = \frac{\bar{Z} - z}{n}.$$

Исключая буквы x, y, z изъ этихъ уравненій, получимъ въ силу уравненія $z = 0$:

$$\frac{\bar{X} - x}{l} = \frac{\bar{Y} - y}{m} = \frac{\bar{Z}}{n},$$

откуда

$$\frac{\bar{X} - x}{l} = \frac{\bar{Z}}{n}; \quad \bar{X} - x = \frac{l}{n}\bar{Z}; \quad x = \frac{n\bar{X} - l\bar{Z}}{n};$$

подобнымъ же образомъ найдемъ

$$y = \frac{n\bar{Y} - m\bar{Z}}{n};$$

и слѣдовательно уравненіе искомой цилиндрической поверхности будетъ

$$\left[\frac{n\bar{X} - l\bar{Z}}{na}\right]^2 + \left[\frac{n\bar{Y} - m\bar{Z}}{nb}\right]^2 = 1.$$

Замѣчаніе. Если образующія параллельны оси $\bar{Z}$'овъ, то

$$l = 0, \quad m = 0, \quad n = 1,$$

и слѣдовательно для нахожденія цилиндрической поверхности придется исключать x, y и z изъ уравненій

$$\left|\begin{array}{l} f(x, y, z) = 0 \\ \varphi(x, y, z) = 0 \\ \bar{X} = x \end{array}\right.$$

$$\left| \bar{Y} = y \right.$$

т.е. просто исключить z изъ уравненій

$$\left| \begin{array}{l} f(\bar{X}, \bar{Y}, z) = 0 \\ \varphi(\bar{X}, \bar{Y}, z) = 0. \end{array} \right.$$

Такимъ образомъ для нахожденія цилиндрической поверхности, проектирующей данную кривую на плоскость $\bar{X}\bar{Y}$, нужно исключить z изъ уравненій этой кривой.

Напримѣръ, если кривая задана уравненіями

$$\left| \begin{array}{l} x^2 + y^2 = z \\ x + y - z^2 = 1, \end{array} \right.$$

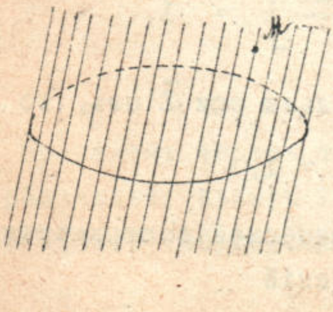
то уравненіе цилиндра, проектирующаго ее на плоскость $\bar{X}O\bar{Y}$, будетъ

$$\bar{X} + \bar{Y} - 1 = (\bar{X}^2 + \bar{Y}^2)^2.$$

Полученная кривая 4-го порядка есть слѣдъ цилиндра на плоскости $\bar{X}\bar{Y}$.

Теорема. Касательная плоскость въ каждой точкѣ цилиндрической поверхности содержитъ образующую, проходящую черезъ эту точку.

Доказательство. Съ геометрической стороны эта теорема очевидна изъ самаго опредѣленія касательной плоскости, такъ какъ эта послѣдняя содержитъ всѣ касательныя прямыя, проведенныя въ точкѣ M, а въ числѣ этихъ касательныхъ будетъ и образующая цилиндра (касат. сама по себѣ). Докажемъ зе аналитически. Положимъ, что мы имѣемъ точку $M(x, y, z)$ на цилиндрической поверхности (см. черт. 129). Если намъ извѣстно направленіе образующей (l, m, n), то уравненіе образующей напишется въ видѣ



Черт. 129.

$$\frac{\bar{X} - x}{l} = \frac{\bar{Y} - y}{m} = \frac{\bar{Z} - z}{n};$$

придадимъ этому уравненію другую форму:

$$\bar{X} = \frac{l}{n}\bar{Z} + \left(x - \frac{l}{n}z\right)$$

$$\bar{Y} = \frac{m}{n}\bar{Z} + \left(y - \frac{m}{n}z\right)$$

или

$$\bar{X} = a\bar{Z} + \alpha, \qquad \bar{Y} = b\bar{Z} + \beta,$$

гдѣ a и b постоянныя числа, зависящія отъ направленія образующей; α и β - перемѣнныя величины, зависящія отъ вида направляющей. Теперь мы имѣемъ уравненіе образующей

$$\left|\begin{array}{l} \bar{X} = a\bar{Z} + \alpha \\ \bar{Y} = b\bar{Z} + \beta \end{array}\right.$$

и уравненіе направляющей

$$\left|\begin{array}{l} f(x, y, z) = 0 \\ \varphi(x, y, z) = 0 \end{array}\right. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Изъ условія, что каждая образующая пересѣкаетъ направляющую, получаемъ

$$\left|\begin{array}{l} x = az + \alpha \\ y = bz + \beta \end{array}\right. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

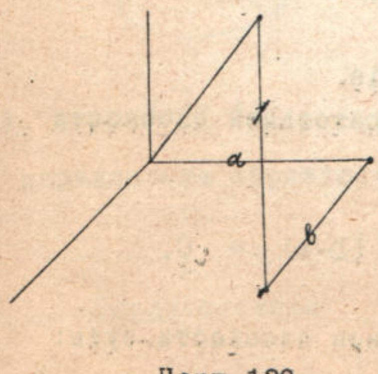
Исключая изъ уравненія (1) и (2) буквы x, y, z, найдемъ зависимость между α и β

$$\Phi(\alpha, \beta) = 0, \quad \text{гдѣ} \quad \alpha = \bar{X} - a\bar{Z}; \quad \beta = \bar{Y} - b\bar{Z},$$

т.е. зависимость

$$\Phi(\bar{X} - a\bar{Z},\ \bar{Y} - b\bar{Z}) = 0.$$

Это есть общее конечное уравненіе цилиндрической поверхности съ образующими, ||-ми направленію $(a, b, 1)$ (см. черт. 130). Здѣсь Φ означаетъ произвольную функцію, напримѣръ:



Черт. 130.

$$(\bar{X} - a\bar{Z})^2 + (\bar{Y} - b\bar{Z})^2 = 1,$$

$$(\bar{X} - a\bar{Z})(\bar{Y} - b\bar{Z}) = 1 \quad \text{и т.д.}$$

суть частные случаи уравненія

$$\Phi(\bar{X} - a\bar{Z},\ Y - b\bar{Z}) = 0.$$

Введя обозначенія

$$x - az = u ,$$

$$y - bz = v ,$$

получимъ:

$$\Phi(u, v) = 0;$$

взявъ частныя производныя отъ $\Phi(u,v) = 0$ по x и по y, получимъ:

$$\Phi'_u \left[1 - a\frac{\partial z}{\partial x}\right] + \Phi'_v \left[- b\frac{\partial z}{\partial x}\right] = 0$$

$$\Phi'_u \left[- a\frac{\partial z}{\partial y}\right] + \Phi'_v \left[1 - b\frac{\partial z}{\partial y}\right] = 0,$$

откуда находимъ:

$$\frac{1 - a\frac{\partial z}{\partial x}}{- a\frac{\partial z}{\partial y}} = \frac{- b\frac{\partial z}{\partial x}}{1 - b\frac{\partial z}{\partial y}};$$

написавъ, что произведеніе крайнихъ = произведенію среднихъ, получимъ:

$$1 - a\frac{\partial z}{\partial x} - b\frac{\partial z}{\partial y} + \cancel{ab\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}} = \cancel{ab\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}}$$

или

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = 1.$$

Итакъ для всѣхъ цилиндрическихъ поверхностей съ образующими, $\parallel (a, b, 1)$, выполнено слѣдующее дифференціальное уравненіе въ частныхъ производныхъ

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = 1.$$

Выяснимъ его геометрическое значеніе.

Въ § 19 мы нашли, что уравненіе касательной плоскости въ точкѣ (x, y, z) имѣетъ видъ:

$$(\xi - x)\frac{\partial z}{\partial x} + (\eta - y)\frac{\partial z}{\partial y} - (\zeta - z) = 0.$$

Коэффиціенты въ уравненіи касательной плоскости суть:

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}, \quad -1;$$

коэффиціенты въ уравненіи образующей - a, b, 1; поэтому уравненіе

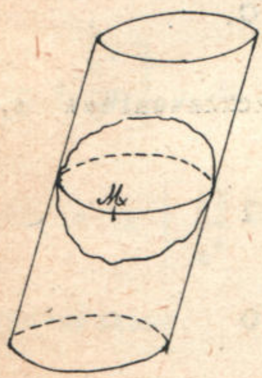
$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} - 1 = 0$$

представляетъ собою условіе ||'сти касательной плоскости и образующей, т.е., такъ какъ касательная плоскость имѣетъ съ образующей одну общую точку - точку касанія, оно показываетъ, что касательная плоскость къ цилиндрической поверхности содержитъ образующую, проходящую черезъ точку касанія.

Описанный цилиндръ.

Опредѣленіе. Цилиндромъ, описаннымъ около данной поверхности, называется такой цилиндръ, который въ каждой общей съ поверхностью точкѣ имѣетъ и общую касательную плоскость.

Задача. Найти уравненіе цилиндра съ образующими, ||'ми направленію (l, m, n), описаннаго около поверхности $\Phi(x, y, z) = 0$ (см. черт. 131).



Черт. 131.

Для всякой точки M, на линіи прикосновенія, касательна плоскость будетъ общею для данной поверхности и для цилиндра, и слѣдовательно, эта касательная плоскость содержитъ (на основаніи предыдущей теоремы) образующую цилиндра.

Выразимъ условіе, что касательная плоскость къ поверхности

$$(\bar{X}-x)\Phi'_x + (\bar{Y}-y)\Phi'_y + (\bar{Z}-z)\Phi'_z = 0$$

параллельна образующей; это условіе будетъ

$$l\Phi'_x + m\Phi'_y + n\Phi'_z = 0.$$

Тогда система:

$$\left| \begin{array}{l} \Phi(x, y, z) = 0 \\ l\Phi'_x + m\Phi'_y + n\Phi'_z = 0 \end{array} \right. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

будетъ изображать линію прикосновенія. Остается найти уравненіе цилиндра по данному направленію образующей (l, m, n) и данной направляющей (1); такимъ образомъ мы приходимъ къ задачѣ въ началѣ этого §-а.

Уравненіе искомаго цилиндра найдется исключеніемъ x, y и z изъ системы

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{\bar{X}-x}{l} = \dfrac{\bar{Y}-y}{m} = \dfrac{\bar{Z}-z}{n} \\[2ex] \Phi(x, y, z) = 0 \\[2ex] l\Phi'_x + m\Phi'_y + n\Phi'_z = 0. \end{array}\right.$$

Примѣръ. Найти уравненіе цилиндра съ образующими, ||'ными (l, m, n), описаннаго около эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Уравненіе линіи прикосновенія будетъ

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\[2ex] \dfrac{lx}{a^2} + \dfrac{my}{b^2} + \dfrac{nz}{c^2} = 0. \end{array}\right.$$

Уравненіе искомаго цилиндра получимъ исключеніемъ x, y, z изъ системы

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\[2ex] \dfrac{lx}{a^2} + \dfrac{my}{b^2} + \dfrac{nz}{c^2} = 0 \\[2ex] \dfrac{\bar{X}-x}{l} = \dfrac{\bar{Y}-y}{m} = \dfrac{\bar{Z}-z}{n} = \lambda. \end{array}\right.$$

Исключеніе x, y, z производимъ слѣдующимъ образомъ: умножая въ послѣднемъ равенствѣ члены первой дроби на $^l/_{a^2}$, второй на $^m/_{b^2}$ и третьей на $^n/_{c^2}$, имѣемъ:

$$\lambda = \frac{\frac{l\bar{X}}{a^2} - \frac{lx}{a^2}}{\frac{l^2}{a^2}} = \frac{\frac{m\bar{Y}}{b^2} - \frac{my}{b^2}}{\frac{m^2}{b^2}} = \frac{\frac{n\bar{Z}}{c^2} - \frac{nz}{c^2}}{\frac{n^2}{c^2}};$$

беря суммы предыдущихъ и послѣдующихъ членовъ, получаемъ:

$$\lambda = \frac{\left[\frac{l\bar{X}}{a^2} + \frac{m\bar{Y}}{b^2} + \frac{n\bar{Z}}{c^2}\right] - \left[\frac{lx}{a^2} + \frac{my}{b^2} + \frac{nz}{c^2}\right]}{\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{c^2}} = \frac{\frac{l\bar{X}}{a^2} + \frac{m\bar{Y}}{b^2} + \frac{n\bar{Z}}{c^2}}{\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{c^2}}$$

въ силу 2-го уравненія системы.

Далѣе имѣемъ:

$$\bar{X} - x = l\lambda; \quad x = \bar{X} - l\lambda$$

$$\bar{Y} - y = m\lambda; \quad y = \bar{Y} - m\lambda$$

$$\bar{Z} - z = n\lambda; \quad z = \bar{Z} - n\lambda.$$

Подставляя эти значенія x, y, z въ первое уравненіе системы, получимъ:

$$0 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = \frac{\bar{X}^2}{a^2} + \frac{\bar{Y}^2}{b^2} + \frac{\bar{Z}^2}{c^2} - 1 + \lambda^2\left[\frac{l^2}{a^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{c^2}\right] - 2\lambda\left[\frac{l\bar{X}}{a^2} + \frac{m\bar{Y}}{b^2} + \frac{n\bar{Z}}{c^2}\right] = \frac{\bar{X}^2}{a^2} + \frac{\bar{Y}^2}{b^2} + \frac{\bar{Z}^2}{c^2} - 1 +$$

$$+ \lambda\left[\frac{l\bar{X}}{a^2} + \frac{m\bar{Y}}{b^2} + \frac{n\bar{Z}}{c^2} - 2\left(\frac{l\bar{X}}{a^2} + \frac{m\bar{Y}}{b^2} + \frac{n\bar{Z}}{c^2}\right)\right]$$

или окончательно:

$$\frac{\bar{X}^2}{a^2} + \frac{\bar{Y}^2}{b^2} + \frac{\bar{Z}^2}{c^2} - 1 = \frac{\left[\frac{l\bar{X}}{a^2} + \frac{m\bar{Y}}{b^2} + \frac{n\bar{Z}}{c^2}\right]^2}{\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{c^2}}.$$

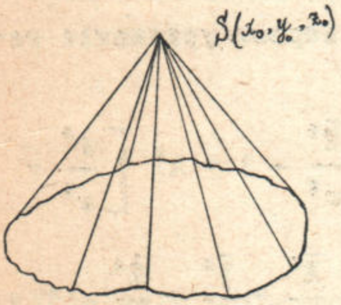
§ 21.

Коническія поверхности.

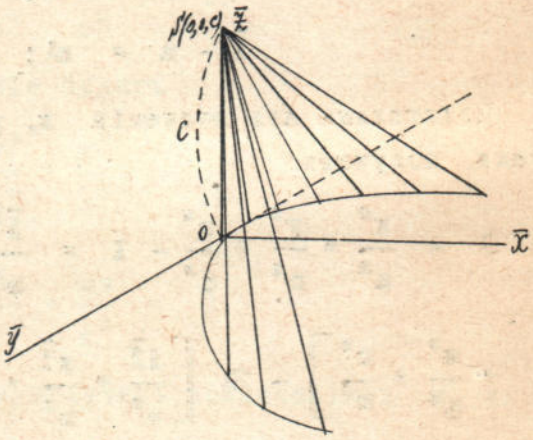
Опредѣленіе. Коническою поверхностью называется геометрическое мѣсто прямыхъ, которыя проходятъ черезъ данную точку (вершину конуса) и пересѣкаютъ данную кривую (направляющую) (см. черт. 132).

Задача. Составить уравненіе конической поверхности по данной вершинѣ $S(x_0, y_0, z_0)$ и данному уравненію направляющей:

$$\left| \begin{array}{l} f(x, y, z) = 0 \\ \varphi(x, y, z) = 0 \end{array} \right. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$



Черт. 132.



Черт. 133.

Написавъ уравненіе образующей конуса

$$\frac{\bar{X} - x_0}{x - x_0} = \frac{\bar{Y} - y_0}{y - y_0} = \frac{\bar{Z} - z_0}{z - z_0} \quad \ldots\ldots (2)$$

и исключивъ x, y, z изъ уравненій (1) и (2), получимъ уравненіе искомой конической поверхности

$$F(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}) = 0.$$

Примѣръ. По данной вершинѣ $(0, 0, c)$ и уравненію направляющей

$$\left| \begin{array}{l} y^2 = 2px \\ z = 0 \end{array} \right. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

составить уравненіе конической поверхности (см. черт. 133).

Составимъ уравненіе образующей; имѣемъ

$$\frac{\bar{X}}{x} = \frac{\bar{Y}}{y} = \frac{\bar{Z} - c}{z - c} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Исключаемъ теперь x, y, z изъ уравненій (1) и (2). Въ силу условія $z=0$ уравненіе (2) можно написать въ видѣ

$$\frac{\bar{X}}{x} = \frac{\bar{Y}}{y} = \frac{\bar{Z} - c}{-c};$$

отсюда находимъ

$$x = \frac{-c\bar{X}}{\bar{Z} - c}; \quad y = \frac{-c\bar{Y}}{\bar{Z} - c}.$$

Подставляя эти значенія x и y въ уравненіе $y^2 = 2px$, получимъ:

$$\frac{c^2\bar{Y}^2}{(\bar{Z}-c)^2} = -2pc\frac{\bar{X}}{\bar{Z} - c} \quad \text{или} \quad c\bar{Y}^2 + 2px(\bar{Z}-c) = 0.$$

Теорема. Касательная плоскость въ каждой точкѣ конической поверхности проходитъ черезъ вершину конуса.

Геометрически эта теорема очевидна изъ самаго опредѣленія касательной плоскости (см. разсужденіе, относящееся къ предыдущей теоремѣ). Приведемъ аналитическое доказательство.

Пусть

$$\left| \begin{array}{l} f(x, y, z) = 0 \\ \varphi(x, y, z) = 0 \end{array} \right. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

уравненія направляющей. Написавъ уравненіе образующей

$$\frac{\bar{X} - x_0}{x - x_0} = \frac{\bar{Y} - y_0}{y - y_0} = \frac{\bar{Z} - z_0}{z - z_0},$$

перепишемъ его въ видѣ

$$\bar{X} - x_0 = \alpha(\bar{Z}-z_0)$$

$$\bar{Y} - y_0 = \beta(\bar{Z}-z_0),$$

гдѣ α и β суть перемѣнныя величины, зависящія отъ вида направляющей.

Условіе, что всякая образующая пересѣкаетъ направляющую, выразится такъ:

$$\left.\begin{aligned} x - x_0 &= \alpha(z-z_0) \\ y - y_0 &= \beta(z-z_0) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ (2).$$

Исключая изъ (1) и (2) уравненій буквы x, y, z, получаемъ зависимость

$$\Phi(\alpha, \beta) = 0,$$

гдѣ Φ нѣкоторая функція, опредѣляемая только видомъ направляющей; но

$$\alpha = \frac{\bar{X} - x_0}{\bar{Z} - z_0}, \quad \beta = \frac{\bar{Y} - y_0}{\bar{Z} - z_0},$$

слѣдовательно имѣемъ

$$\Phi\left[\frac{\bar{X} - x_0}{\bar{Z} - z_0}, \frac{\bar{Y} - y_0}{\bar{Z} - z_0}\right] = 0$$

- это общее конечное уравненіе всѣхъ коническихъ поверхностей съ вершиною въ точкѣ (x_0, y_0, z_0); напримѣръ:

$$x^2 + y^2 = z^2$$

есть уравненіе конуса съ вершиною въ точкѣ (0,0,0) въ чемъ легко убѣдиться, представляя это уравненіе въ видѣ

$$\left[\frac{x}{z}\right]^2 + \left[\frac{y}{z}\right]^2 = 1.$$

Вообще всякое однородное уравненіе относительно $\bar{X}$, $\bar{Y}$, $\bar{Z}$ изображаетъ конусъ съ вершиною въ началѣ координатъ.

Напримѣръ

$$x^3 + y^3 = 3xyz;$$

раздѣливъ это уравненіе на z^3, получимъ

$$\left[\frac{x}{z}\right]^3 + \left[\frac{y}{z}\right]^3 = 3\frac{x}{z}\cdot\frac{y}{z}.$$

Введемъ обозначенія

$$u = \frac{\bar{X} - x_0}{\bar{Z} - z_0}, \quad v = \frac{\bar{Y} - y_0}{\bar{Z} - z_0};$$

тогда общее уравненіе коническихъ поверхностей представится въ видѣ

$$\Phi(u,\ v) = 0.$$

Возьмемъ отъ этого выраженія частную производную по $\overline{X}$:

$$\Phi'_u \left[\frac{1}{\overline{Z} - z_0} - \frac{\overline{X} - x_0}{(\overline{Z} - z_0)^2} \cdot \frac{\partial \overline{Z}}{\partial \overline{X}} \right] + \Phi'_v \left[- \frac{\overline{Y} - y_0}{(\overline{Z} - z_0)^2} \cdot \frac{\partial \overline{Z}}{\partial \overline{X}} \right] = 0.$$

Частная производная по $\overline{Y}$ будетъ равна

$$\Phi'_u \left[- \frac{\overline{X} - x_0}{(\overline{Z} - z_0)^2} \frac{\partial \overline{Z}}{\partial \overline{Y}} \right] + \Phi'_v \left[\frac{1}{\overline{Z} - z_0} - \frac{\overline{Y} - y_0}{(\overline{Z} - z_0)^2} \cdot \frac{\partial \overline{Z}}{\partial \overline{Y}} \right] = 0.$$

Изъ этихъ двухъ равенствъ вытекаетъ, что коэффиціенты при Φ'_u, Φ'_v должны быть пропорціональны. Умноживъ предварительно ихъ на $(\overline{Z} - z_0)^2$, имѣемъ

$$\frac{\overline{Z} - z_0 - (\overline{X} - x_0) \dfrac{\partial \overline{Z}}{\partial \overline{X}}}{- (\overline{X} - x_0) \dfrac{\partial \overline{Z}}{\partial \overline{Y}}} = \frac{- (\overline{Y} - y_0) \dfrac{\partial \overline{Z}}{\partial \overline{X}}}{\overline{Z} - z_0 - (\overline{Y} - y_0) \dfrac{\partial \overline{Z}}{\partial \overline{Y}}}.$$

Освобождаясь отъ знаменателей, уничтоживъ два одинаковыхъ члена въ лѣвой и правой части и сокращая затѣмъ уравненіе на $(\overline{Z} - z_0)$, получимъ:

$$\overline{Z} - z_0 - (\overline{Y} - y_0) \frac{\partial \overline{Z}}{\partial \overline{Y}} - (\overline{X} - x_0) \frac{\partial \overline{Z}}{\partial \overline{X}} = 0,$$

или

$$(\overline{X} - x_0) \frac{\partial \overline{Z}}{\partial \overline{X}} + (\overline{Y} - y_0) \frac{\partial \overline{Z}}{\partial \overline{Y}} = \overline{Z} - z_0$$

- это есть общее дифференціальное уравненіе съ частными производными, которому удовлетворяетъ $\overline{Z}$, какъ функція отъ $\overline{X}$ и $\overline{Y}$, взятая изъ уравненія любой конической поверхности съ вершиною въ точкѣ $(x_0, y_0\ z_0)$. Теперь уже легко будетъ доказать нашу теорему. Въ самомъ дѣлѣ, уравненіе касательной плоскости къ поверхности въ точкѣ $(\overline{X},\ \overline{Y},\ \overline{Z})$ будетъ

$$(\xi - \overline{X}) \frac{\partial \overline{Z}}{\partial \overline{X}} + (\eta - \overline{Y}) \frac{\partial \overline{Z}}{\partial \overline{Y}} = \zeta - \overline{Z}.$$

Подставляя сюда вмѣсто ξ, η, ζ координаты вершины конуса и умножая все уравненіе на - 1, получаемъ

$$(\bar{X}-x_0)\frac{\partial\bar{Z}}{\partial\bar{X}}+(\bar{Y}-y_0)\frac{\partial\bar{Z}}{\partial\bar{Y}}=\bar{Z}-z_0.$$

Это есть какъ разъ полученное выше общее дифф. уравненіе коническихъ поверхностей, слѣдовательно, оно выражаетъ, что точка S лежитъ въ касательной плоскости къ поверхности, т. е. всякая касательная плоскость проходитъ черезъ точку S.

Описанный конусъ.

Опредѣленіе. Конусомъ, описаннымъ около данной поверхности, называется такой конусъ, который въ каждой общей съ поверхностью точкѣ имѣетъ и общую касательную плоскость.

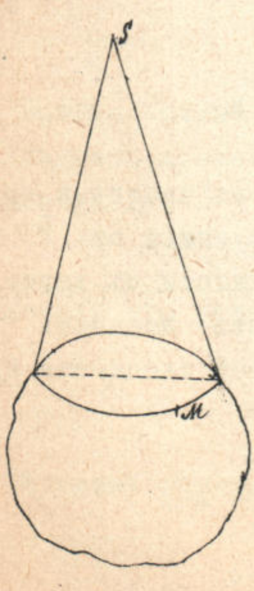
Задача. Найти уравненіе конуса, описаннаго около данной поверхности $\Phi(x,y,z)=0$ изъ точки $S(x_0,y_0,z_0)$ (см. черт. 134).

Для всѣхъ точекъ линіи прикосновенія касательная плоскость есть вмѣстѣ съ тѣмъ касательная плоскость къ конусу и какъ таковая (согласно предыдущей теоремѣ) проходитъ черезъ точку S.

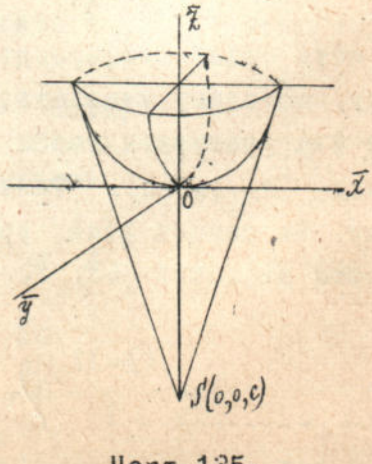
Уравненіе касательной плоскости въ точкѣ M будетъ

$$(\bar{X}-x)\Phi'_x+(\bar{Y}-y)\Phi'_y+(\bar{Z}-z)\Phi'_z=0.$$

Такъ какъ эта плоскость проходитъ черезъ точку $S(x_0,y_0,z_0)$, то координаты x_0, y_0, z_0 удовлетво-



Черт. 134.



Черт. 135.

ряютъ написанному уравненію; слѣдовательно, имѣемъ:

$$(x_0-x)\Phi'_x + (y_0-y)\Phi'_y + (z_0-z)\Phi'_z = 0.$$

Линія прикосновенія опредѣляется системою

$$\left.\begin{aligned} \Phi(x, y, z) &= 0 \\ (x_0-x)\Phi'_x + (y_0-y)\Phi'_y + (z_0-z)\Phi'_z &= 0 \end{aligned}\right\} \quad . \ . \ . \ . \ (1).$$

Поэтому согласно рѣшенію задачи въ началѣ этого §-а уравненіе искомаго описаннаго конуса получится исключеніемъ x, y, z изъ уравненій (1) и

$$\frac{\bar{X} - x_0}{x - x_0} = \frac{\bar{Y} - y_0}{y - y_0} = \frac{\bar{Z} - z_0}{z - z_0} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ (2).$$

Примѣръ. Найти уравненіе конуса, имѣющаго вершину въ точкѣ $S(0, 0, -c)$ и описаннаго около параболоида (см. черт. 135):

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z.$$

Найдемъ сначала линію прикосновенія. Она опредѣляется системой:

$$\left|\begin{aligned} &\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} - 2z = 0 \\ &(0-x)\frac{2x}{p} + (0-y)\frac{2y}{q} - 2(-c-z) = 0 \end{aligned}\right.$$

или

$$\left|\begin{aligned} &\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} - 2z = 0 \\ &\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = z + c\,; \end{aligned}\right.$$

отсюда имѣемъ:

$$z = c,$$

и потому система, опредѣляющая линію прикосновенія, можетъ быть написана въ видѣ:

$$\left|\begin{aligned} &\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2c \\ &z = c\,. \end{aligned}\right.$$

Присоединяя сюда уравненіе образующей искомаго конуса, получимъ систему

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{x^2}{p} + \dfrac{y^2}{q} = 2c \\ z = c \\ \dfrac{\overline{X}}{x} = \dfrac{\overline{Y}}{y} = \dfrac{\overline{Z}+c}{z+c}, \end{array}\right.$$

исключеніе изъ которой x, y, z дастъ намъ уравненіе искомаго конуса. Именно, изъ послѣднихъ 2-хъ уравненій находимъ

$$\frac{\overline{X}}{x} = \frac{\overline{Z}+c}{2c}; \quad \frac{\overline{Y}}{y} = \frac{\overline{Z}+c}{2c},$$

откуда

$$x = \frac{2c\overline{X}}{\overline{Z}+c}; \quad y = \frac{2c\overline{Y}}{\overline{Z}+c}.$$

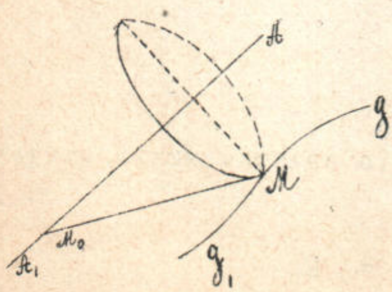
Подставляя найденные результаты въ уравненіе 1-ое, получимъ

$$\frac{2c\overline{X}^2}{p(\overline{Z}+c)^2} + \frac{2c\overline{Y}^2}{q(\overline{Z}+c)^2} = 1 \text{ или } \frac{\overline{X}^2}{p} + \frac{\overline{Y}^2}{q} = \frac{(\overline{Z}+c)^2}{2c}.$$

§ 22.

Поверхности вращенія.

Опредѣленіе. Поверхность вращенія есть общее мѣсто всѣхъ положеній образующей gg_1, которая вращается около оси AA_1 такъ, что каждая точка ея M описываетъ окружность, имѣющую центръ на AA_1 и лежащую въ плоскости, $\perp$ къ AA_1. Ту же поверхность вращенія можно разсматривать какъ общее мѣсто перемѣнной окружности, которая 1) имѣетъ центръ на AA_1, 2) лежитъ въ плоскости $\perp$ной къ AA_1 и 3) пересѣкаетъ gg_1 (см. черт. 136).



Черт. 136.

Задача. Найти уравненіе поверхности вращенія по данному уравненію оси AA_1:

$$\frac{\bar{X} - x_0}{l} = \frac{\bar{Y} - y_0}{m} = \frac{\bar{Z} - z_0}{n}$$

и по данному уравненію образующей gg_1

$$\left| \begin{array}{l} f(x, y, z) = 0 \\ \varphi(x, y, z) = 0 \end{array} \right. \quad \ldots\ldots\ldots (1).$$

Согласно опредѣленію искомую поверхность вращенія можно разсматривать, какъ общее мѣсто перемѣнной окружности, лежащей въ плоскости, $\perp$'ной къ оси вращенія, имѣющей центръ на этой оси и проходящей черезъ точку образующей. Такую окружность мы получимъ въ пересѣченіи плоскости, $\perp$'ной къ AA_1, и проведенной черезъ точку M, и шара, имѣющаго центръ въ точкѣ M_0, лежащей на оси AA_1, и радіусъ M_0M_1. Эта окружность опредѣляется системою:

$$\left| \begin{array}{l} l\bar{X} + m\bar{Y} + n\bar{Z} = \alpha \\ (\bar{X}-x_0)^2 + (\bar{Y}-y_0)^2 + (\bar{Z}-z_0)^2 = \beta, \end{array} \right.$$

гдѣ α и β перемѣнные параметры, зависящіе отъ вида образующей gg_1. Чтобы найти α и β, воспользуемся условіемъ, что окружность проходитъ черезъ точку $M(x, y, z)$. Тогда будемъ имѣть

$$\begin{array}{l} lx + my + nz = \alpha \\ (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = \beta \end{array} \quad \ldots (2).$$

Исключая буквы x, y, z изъ уравненій (1) и (2), мы получимъ зависимость между перемѣнными α и β:

$$\beta = F(\alpha);$$

вводя сюда выраженія α и β черезъ координаты точекъ поверхности вращенія $\bar{X}$, $\bar{Y}$, $\bar{Z}$, находимъ слѣдующее уравненіе:

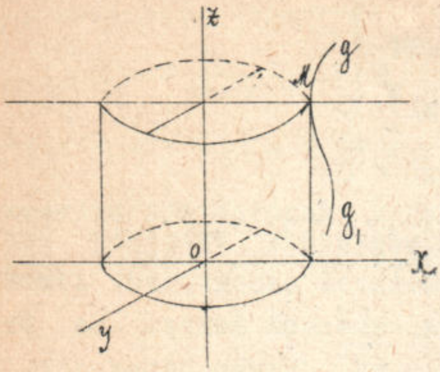
$$(\bar{X}-x_0)^2 + (\bar{Y}-y_0)^2 + (\bar{Z}-z_0)^2 = F(l\bar{X} + m\bar{Y} + n\bar{Z})$$

- это есть общее уравненіе всѣхъ поверхностей вращенія, у которыхъ ось

$$\frac{\bar{X} - x_0}{l} = \frac{\bar{Y} - y_0}{m} = \frac{\bar{Z} - z_0}{n}.$$

Замѣчаніе. Если линія AA_1 (ось вращенія) совпадаетъ съ осью $\bar{Z}$-овъ, то уравненіе перемѣнной окружности можно написать въ видѣ:

$$\begin{cases} \bar{Z} = h \\ \bar{X}^2 + \bar{Y}^2 = g, \end{cases}$$



Черт. 137.

гдѣ первое уравненіе есть уравненіе плоскости, проходящей черезъ точку M и перпендикулярной къ $O\bar{Z}$, а второе уравненіе цилиндра, проектирующаго окружность на плоскость $\bar{X}O\bar{Y}$ (см. черт. 137).

Въ этомъ случаѣ уравненіе поверхности вращенія находится такъ: исключаются x, y, z изъ системы

$$\begin{cases} z = h \\ x^2 + y^2 = g \\ f(x, y, z) = 0 \\ \varphi(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

Получается зависимость

$$h = F(g);$$

вводя выраженія h и g черезъ координаты искомой поверхности вращенія, имѣемъ

$$\bar{Z} = F(\bar{X}^2 + \bar{Y}^2)$$

- общее уравненіе всѣхъ поверхностей вращенія около оси $\bar{Z}$-овъ.

Примѣръ. Окружность

$$\begin{cases} (x-a)^2 + z^2 = R^2 \\ y = 0 \end{cases} \quad . \; . \; . \; (a > R)$$

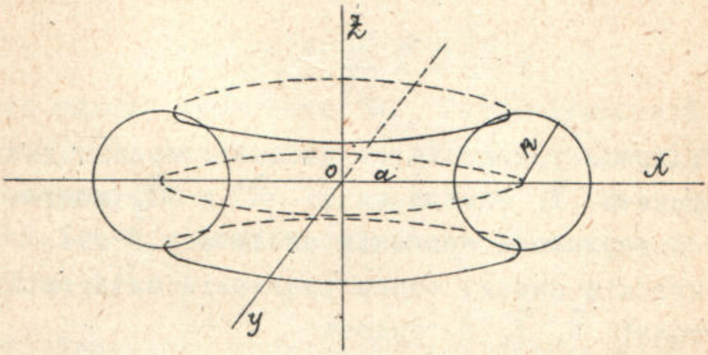
вращается вокругъ оси $O\bar{Z}$. Найти уравненіе поверхности вращенія (см. черт. 138).

Уравненіе перемѣнной окружности будетъ

$$\begin{cases} \bar{Z} = h \\ \bar{X}^2 + \bar{Y}^2 = g. \end{cases}$$

Исключая x, y, z изъ уравненій

$$\left| \begin{array}{l} z = h \\ x^2 + y^2 = g \\ (x-a)^2 + z^2 = R^2 \\ y = 0 , \end{array} \right.$$



Черт.138.

получаемъ зависимость между h и g:

$$(\sqrt{g} - a)^2 + h^2 = R^2$$

или

$$g + a^2 + h^2 - R^2 = 2a\sqrt{g}$$

$$(g + a^2 + h^2 - R^2)^2 = 4a^2 g.$$

Слѣдовательно, уравненіе поверхности кругового кольца будетъ

$$(\bar{X}^2 + \bar{Y}^2 + \bar{Z}^2 + a^2 - R^2)^2 = 4a^2(\bar{X}^2 + \bar{Y}^2).$$

Теорема. Нормаль въ каждой точкѣ поверхности вращенія лежитъ въ одной плоскости съ осью вращенія (т.е. пересѣкаетъ ее, или параллельна ей).

Доказательство. Не нарушая общности разсужденій, можно предположить, что ось вращенія есть ось $\bar{Z}$-овъ. Въ этомъ случаѣ уравненіе поверхности вращенія имѣетъ видъ

$$\bar{Z} = F(\bar{X}^2 + \bar{Y}^2).$$

Взявъ производныя отъ $\bar{Z}$ по $\bar{X}$ и по $\bar{Y}$, получимъ

$$\frac{\partial\bar{Z}}{\partial\bar{X}} = F'.\ 2\bar{X}$$

$$\frac{\partial\bar{Z}}{\partial\bar{Y}} = F'.\ 2\bar{Y}.$$

Умноживъ первое равенство на $\bar{Y}$, а второе на $\bar{X}$ и вычтя одно изъ другого, будемъ имѣть

$$\bar{Y}\frac{\partial\bar{Z}}{\partial\bar{X}} - \bar{X}\frac{\partial\bar{Z}}{\partial\bar{Y}} = 0$$

- дифференціальное уравненіе въ частныхъ производныхъ, которому удовлетворяетъ $\bar{Z}$, какъ функція $\bar{X}$ и $\bar{Y}$, взятыя изъ уравненія любой поверхности вращенія около оси $\bar{Z}$-овъ.

Геометрическій смыслъ этого уравненія слѣдующій. Уравненіе нормали въ точкѣ $\bar{X}$, $\bar{Y}$, $\bar{Z}$ будетъ

$$\frac{\xi - \bar{X}}{-\frac{\partial\bar{Z}}{\partial\bar{X}}} = \frac{\eta - \bar{Y}}{-\frac{\partial\bar{Z}}{\partial\bar{Y}}} = \frac{\zeta - \bar{Z}}{1};$$

такимъ образомъ нормаль лежитъ въ плоскости

$$\frac{\xi - \bar{X}}{\frac{\partial\bar{Z}}{\partial\bar{X}}} = \frac{\eta - \bar{Y}}{\frac{\partial\bar{Z}}{\partial\bar{Y}}} \quad \text{или} \quad \frac{\xi - \bar{X}}{\bar{X}} = \frac{\eta - \bar{Y}}{\bar{Y}},$$

такъ какъ, въ силу дифференціальнаго уравненія, должно быть

$$\frac{\frac{\partial\bar{Z}}{\partial\bar{X}}}{\bar{X}} = \frac{\frac{\partial\bar{Z}}{\partial\bar{Y}}}{\bar{Y}}.$$

Итакъ уравненіе плоскости, содержащей нормаль, можно переписать въ видѣ:

$$\frac{\xi - \bar{X}}{\bar{X}} = \frac{\eta - \bar{Y}}{\bar{Y}}, \quad \text{или} \quad \frac{\xi}{\bar{X}} = \frac{\eta}{\bar{Y}}.$$

Это - плоскость, проходящая черезъ ось $\bar{Z}$-овъ, т.е. черезъ ось вращенія. Слѣдовательно, нормаль лежитъ въ одной плоскости съ осью вращенія, т.е. или пересѣкаетъ ее или ей параллельна.

§ 23.

Огибающія поверхности.

Опредѣленіе 1. Пусть имѣется система поверхностей

$$f(x, y, z, \alpha) = 0,$$

зависящихъ отъ одного параметра α. *Характеристикой* поверхности $f(x,y,z,\alpha) = 0$ называется предѣльное положеніе линіи пересѣченія поверхности $f(x, y, z, \alpha) = 0$ и поверхности $f(x, y, z, \alpha+\Delta\alpha) = 0$, соотвѣтствующей безконечно близкому значенію параметра α.

Теорема 1. Уравненіе характеристики имѣетъ видъ:

$$\left| \begin{aligned} & f(x, y, z, \alpha) = 0 \\ & f'_\alpha(x, y, z, \alpha) = 0. \end{aligned} \right.$$

Въ самомъ дѣлѣ, по опредѣленію, мы должны искать пересѣченіе поверхностей

$$\left| \begin{aligned} & f(x, y, z, \alpha) = 0 \\ & f(x, y, z, \alpha+\Delta\alpha) = 0. \end{aligned} \right.$$

Преобразовавъ эту систему въ другую

$$f(x, y, z, \alpha) = 0$$

$$\frac{f(x, y, z, \alpha+\Delta\alpha) - f(x, y, z, \alpha)}{\Delta\alpha} = 0$$

эквивалентную прежней, мы получимъ въ предѣлѣ

$$\left| \begin{aligned} & f(x, y, z, \alpha) = 0 \\ & f'_\alpha(x, y, z, \alpha) = 0. \end{aligned} \right.$$

Опредѣленіе 2. Общее мѣсто всѣхъ характеристикъ называется *огибающей поверхностью* по отношенію къ поверхностямъ

$$f(x, y, z, \alpha) = 0,$$

которыя называются *огибаемыми*.

Теорема 2. Уравненіе огибающей поверхности получается исключеніемъ α изъ системы

$$\left|\begin{aligned} &f(x, y, z, \alpha) = 0 \\ &f'_\alpha(x, y, z, \alpha) = 0 \end{aligned}\right.$$

Дѣйствительно, въ уравненіи характеристики

$$\left|\begin{aligned} &f(x, y, z, \alpha) = 0 \\ &f'_\alpha(x, y, z, \alpha) = 0 \end{aligned}\right.$$

при перемѣнномъ α, буквы x, y, z представляютъ координаты точекъ огибающей поверхности и потому предыдущія два уравненія можно разсматривать какъ параметрическія уравненія огибающей поверхности, считая x, y, z функціями отъ α и z. Исключая α, мы дадимъ тому же уравненію огибающей поверхности другую форму:

$$F(x, y, z) = 0.$$

Теорема 3. Въ каждой точкѣ характеристики огибаемая и огибающая поверхности имѣютъ общую касательную плоскость.

Возьмемъ уравненіе $f(x,y,z,\alpha_0) = 0$, которое при постоянномъ α_0 опредѣляетъ огибаемую поверхность, соотвѣтствующую значенію $\alpha = \alpha_0$. Беремъ точку на ея характеристикѣ $M_0(x_0, y_0, z_0)$, такъ что должно быть тождественно

$$\left|\begin{aligned} &f(x_0, y_0, z_0, \alpha_0) = 0 \\ &f'_\alpha(x_0, y_0, z_0, \alpha_0) = 0 \end{aligned}\right. \quad \ldots\ldots (*)$$

Уравненіе касательной плоскости въ точкѣ M_0 къ огибаемой будетъ

$$(\bar{X}-x_0)p_0 + (\bar{Y}-y_0)q_0 = \bar{Z} - z_0,$$

гдѣ p_0 и q_0 - значенія частныхъ производныхъ

$$\frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{и} \quad \frac{\partial z}{\partial y}$$

изъ уравненія огибаемой поверхности, вычисленныя для точки M_0 Такимъ образомъ p_0 и q_0 находятся изъ уравненія

$$f'_x(x_0, y_0, z_0, \alpha_0)dx + f'_y(x_0, y_0, z_0, \alpha_0)dy +$$

$$+ f'_z(x_0, y_0, z_0, \alpha_0)dz = 0,$$

откуда

$$p_0 = -\frac{f'_x(x_0, y_0, z_0, \alpha_0)}{f'_z(x_0, y_0, z_0, \alpha_0)}.$$

$$q_0 = -\frac{f'_y(x_0, y_0, z_0, \alpha_0)}{f'_z(x_0, y_0, z_0, \alpha_0)}.$$

Уравненіе касательной плоскости въ точкѣ M_0 для огибающей будетъ

$$(\bar{X}-x_0)\bar{p}_0 + (\bar{Y}-y_0)\bar{q}_0 = \bar{Z} - z_0,$$

гдѣ $\bar{p}_0$ и $\bar{q}_0$ суть частныя производныя

$$\frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{и} \quad \frac{\partial z}{\partial y},$$

взятыя изъ уравненія огибающей поверхности для точки M_0. Уравненіе огибающей поверхности будетъ

$$\left| \begin{array}{l} f(x, y, z, \alpha) = 0 \\ f'_\alpha(x, y, z, \alpha) = 0 \end{array} \right. \qquad \text{при перемѣнномъ } \alpha.$$

Чтобы вычислить $\bar{p}_0$ и $\bar{q}_0$ поступаемъ слѣдующимъ образомъ: имѣемъ для точки M_0 изъ перваго уравненія огибающей:

$$f'_x(x_0, y_0, z_0, \alpha)dx + f'_y(x_0, y_0, z_0, \alpha)dy +$$
$$+ f'_z(x_0, y_0, z_0, \alpha)dz + f'_\alpha(x_0, y_0, z_0, \alpha)d\alpha = 0,$$

но такъ какъ послѣдній членъ этого равенства = 0, въ силу второго уравненія огибающей, то отсюда находимъ:

$$\bar{p}_0 = \frac{-f'_x(x_0, y_0, z_0, \alpha)}{f'_z(x_0, y_0, z_0, \alpha)}$$

$$\bar{q}_0 = \frac{-f'_y(x_0, y_0, z_0, \alpha)}{f'_z(x_0, y_0, z_0, \alpha)}.$$

Но легко доказать, что α въ послѣднемъ уравненіи должно быть = α_0. Въ самомъ дѣлѣ, M_0 лежитъ на огибающей поверхности; слѣдовательно:

$$| \ f(x_0, y_0, z_0, \alpha) = 0$$

$$| \; f'_\alpha(x_0,\ y_0,\ z_0,\ \alpha) = 0.$$

Сравнивая эту систему съ системою (*), заключаемъ, что одно изъ значенiй α есть

$$\alpha = \alpha_0,$$

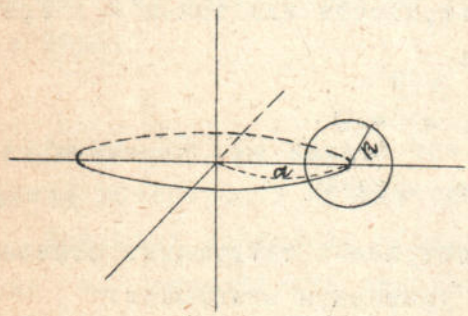
а потому

$$\bar{p}_0 = p_0; \qquad \bar{q}_0 = q_0,$$

- и теорема доказана.

Слѣдствiе. Если огибаемыя поверхности суть плоскости, то онѣ образуютъ систему касательныхъ плоскостей для огибающей поверхности; сама огибающая поверхность называется въ этомъ случаѣ *развертывающейся поверхностью*.

Примѣръ 1. Найти огибающую поверхность для шаровъ радiуса R, центры которыхъ лежатъ на данной окружности радiуса a (см. черт. 139).



Черт.139.

Обозначивъ координаты центра этого шара черезъ $(\alpha,\beta,0)$, мы можемъ написать уравненiе его поверхности въ видѣ:

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + z^2 = R^2$$

при условiи

$$\alpha^2 + \beta^2 = a^2.$$

Дифференцируя первое уравненiе по α, мы будемъ разсматривать β какъ функцiю отъ α.

Уравненiе огибающей поверхности получится исключенiемъ α и β изъ системы

$$\left|\begin{array}{l} (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + z^2 = R^2 \\[2ex] -2(x-\alpha) - 2(y-\beta)\dfrac{d\beta}{d\alpha} = 0 \\[2ex] \alpha^2 + \beta^2 = a^2. \end{array}\right.$$

Значенiе $\dfrac{d\beta}{d\alpha}$ найдемъ, дифференцируя послѣднее равенство:

$$\alpha.d\alpha + \beta.d\beta = 0,$$

откуда имѣемъ

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = -\frac{\alpha}{\beta}.$$

Тогда второе уравненіе системы обратится въ слѣдующее:

$$(x-\alpha) - \frac{\alpha}{\beta}(y-\beta) = 0,$$

что можно преобразовать еще такъ:

$$\frac{x-\alpha}{\alpha} = \frac{y-\beta}{\beta} \quad \text{или} \quad \frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta}.$$

Итакъ система, изъ которой нужно исключить α и β, будетъ

$$\left|\begin{array}{l} (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + z^2 = R^2 \\ \dfrac{x}{\alpha} = \dfrac{y}{\beta} \quad \dots\dots\dots\dots\dots (*) \\ \alpha^2 + \beta^2 = a^2 . \end{array}\right.$$

Положивъ

$$\lambda = \frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{a},$$

находимъ отсюда

$$1) \quad \frac{x}{\alpha} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{a} \quad \text{и} \quad \frac{x-\alpha}{\alpha} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}-a}{a};$$

$$2) \quad \frac{y}{\beta} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{a} \quad \text{и} \quad \frac{y-\beta}{\beta} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}-a}{a}.$$

Поэтому

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = \frac{(\sqrt{x^2+y^2}-a)^2}{a^2}(\alpha^2+\beta^2) =$$

$$= (\sqrt{x^2+y^2}-a)^2,$$

и далѣе, подставляя это выраженіе въ первое уравненіе нашей системы (*), имѣемъ:

$$(\sqrt{x^2+y^2}-a)^2 + z^2 - R^2 = 0$$

или

$$x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - R^2 = 2a\sqrt{x^2+y^2}.$$

Освобождаясь отъ корня, находимъ

$$(x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - R^2)^2 = 4a^2(x^2 + y^2).$$

Примѣръ 2. Найти поверхность, у которой касательныя плоскости отсѣкають отъ трегранного угла, образуемаго координатными плоскостями, тетраэдръ постояннаго объема V.

Уравненіе огибаемыхъ поверхностей будетъ

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

причемъ a, b, c связаны зависимостью

$$\frac{1}{6}\, abc = V \text{ (пост.)}$$

или

$$abc = 6V.$$

Принявъ изъ трехъ перемѣнныхъ a, b и c двѣ какія-нибудь, напр. a и b за независимыя перемѣнныя, будемъ считать c ихъ функціею. Тогда для нахожденія огибающей поверхности придется приравнять нулю частныя производныя по a и b считая c за ихъ функцію.

Частныя производныя по a и b отъ функціи

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

будутъ

$$\left|\begin{aligned} &-\frac{x}{a^2} - \frac{z}{c^2}\cdot\frac{dc}{da} = 0 \\ &-\frac{y}{b^2} - \frac{z}{c^2}\cdot\frac{dc}{db} = 0 \end{aligned}\right. \quad \ldots\ldots (*)$$

Съ другой стороны, прологарифмировавъ выраженіе $abc = 6V$:

$$\log a + \log b + \log c = \log 6V$$

и взявъ опять частныя производныя по a и b, получимъ:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{c}\frac{dc}{da} = 0; \qquad \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\frac{dc}{db} = 0,$$

откуда имѣемъ

$$\frac{dc}{da} = -\frac{c}{a}; \qquad \frac{dc}{db} = -\frac{c}{b}.$$

Подставляя эти результаты въ уравненія (*), найдемъ

$$-\frac{x}{a^2} + \frac{z}{ca} = 0; \quad -\frac{y}{b^2} + \frac{z}{cb} = 0,$$

или

$$\frac{x}{a} = \frac{z}{c}; \quad \frac{y}{b} = \frac{z}{c}.$$

Соединяя послѣднія два равенства, получимъ

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}.$$

Уравненіе искомой поверхности найдется исключеніемъ a, b, c изъ системы

$$\left|\begin{array}{l} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \\ abc = 6V \\ \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}. \end{array}\right.$$

Изъ перваго и послѣдняго равенства находимъ

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{1}{3}$$

слѣдовательно

$$a = 3x; \quad b = 3y; \quad c = 3z.$$

Тогда второе равенство даетъ

$$27xyz = 6V$$

или

$$xyz = {}^2/_9\, V.$$

Это и есть уравненіе искомой поверхности.

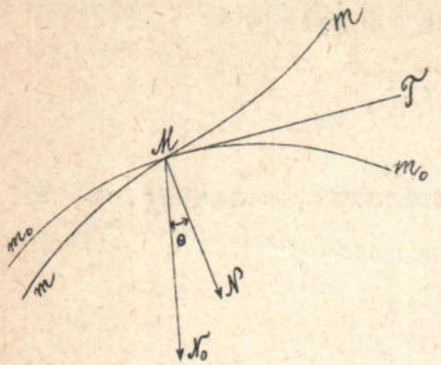
§ 24.

О кривизнѣ линій, начерченныхъ на поверхности. Теоремы Мёнье и Эйлера. Точки закругленія. Главные радіусы кривизны.

Разсмотримъ нѣкоторую поверхность

$$f(x, y, z) = 0,$$

возьмемъ на ней точку $M(x, y, z)$, построимъ въ ней нормаль къ поверхности MN_0 (см. черт. 140) и проведемъ какую-нибудь прямую MT перпендикулярную къ MN_0; прямая MT лежитъ въ касательной плоскости къ поверхности. Проведя черезъ прямыя MT и MN_0 плоскость, получимъ въ пересѣченіи съ данной поверхностью кривую m_0Mm_0 - такъ называемое нормальное сѣченіе поверхности; MT будетъ его касательной въ точкѣ M. Разсмотримъ кромѣ того еще нѣкоторую кривую mMm, проведенную по поверхности черезъ точку M и имѣющую своею касательною - прямую MT.



Черт. 140.

Пусть MN представляетъ главную нормаль этой кривой mMm; обозначимъ уголъ N_0MN между главной нормалью нашей кривой и нормалью къ поверхности черезъ θ; такъ какъ $MN_0 \perp MT$ и $MN \perp MT$, то N_0MN служитъ линейнымъ угломъ для двуграннаго угла N_0MTN, составленнаго нормальнымъ сѣченіемъ съ плоскостью кривизны нашей кривой. Назовемъ черезъ R_0 радіусъ кривизны нормальнаго сѣченія m_0Mm_0 въ точкѣ M и черезъ R радіусъ 1-ой кривизны кривой mMm въ точкѣ M. Между ними существуетъ соотношеніе:

$$R = R_0 \cos\theta,$$

открытое Meusnier. Займемся доказательствомъ теоремы Мёнье:

Теорема Мёнье: если на поверхности проведены черезъ одну и ту же точку нормальное сѣченіе и нѣкоторая кривая, причемъ въ этой точкѣ касательная у нихъ общая, то радіусъ кривизны кривой равенъ радіусу кривизны нормальнаго сѣченія, умноженному на косинусъ угла между плоскостью нормальнаго сѣченія и плоскостью кривизны кривой.

Для доказательства назовемъ черезъ α, β, γ углы касательной MT съ осями координатъ, черезъ ξ, η, ζ - углы съ осями главной нормали MN и черезъ $(N_0, \overline{X})$, $(N_0, \overline{Y})$, $(N_0, \overline{Z})$ - углы съ осями нормали къ поверхности MN_0. Тогда, по форм. зам. 2

§ 17, имѣемъ:

$$\cos\xi = \frac{d\cos\alpha}{dS}, \quad \cos\eta = R\frac{d\cos\beta}{dS}, \quad \cos\zeta = R\frac{d\cos\gamma}{dS},$$

по форм. въ концѣ § 19:

$$\cos(N_0, X) = \frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

$$\cos(N_0, Y) = \frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

$$\cos(N_0, Z) = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

причемъ двойной знакъ, подразумѣваемый при корнѣ, отвѣчаетъ 2 направленіямъ нормали къ поверхности. Такъ какъ θ есть уголъ между MN_0 и MN, то имѣемъ:

$$\cos\theta = \cos(N_0,X).\cos\xi + \cos(N_0,Y).\cos\eta + \cos(N_0,Z).\cos\zeta =$$

$$= \frac{R}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\left[-p\frac{d\cos\alpha}{dS} - q\frac{d\cos\beta}{dS} + \frac{d\cos\gamma}{dS}\right].$$

Но

$$dz = pdx + qdy,$$

откуда, послѣ дѣленія на dS, находимъ:

$$\cos\gamma = p.\cos\alpha + q.\cos\beta \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (*)$$

(такъ какъ $\cos\alpha = \frac{dx}{dS}$, $\cos\beta = \frac{dy}{dS}$, $\cos\gamma = \frac{dz}{dS}$, по §14).

Дифференцируя равенство (*), получаемъ:

$$d\cos\gamma = p.d\cos\alpha + q.d\cos\beta + \cos\alpha.dp + \cos\beta.dq,$$

и такъ какъ:

$$dp = r.dx + s.dy, \quad dq = s.dx + t.dy,$$

гдѣ

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

вычисляются изъ уравненія поверхности $f(x, y, z) = 0$, то

$$dCos\gamma - p.dCos\alpha - q.dCos\beta = Cos\alpha(r.dx + s.dy) +$$

$$+ Cos\beta\ (s.dx + t.dy),$$

откуда

$$\frac{dCos\gamma}{dS} - p\frac{dCos\alpha}{dS} - q\frac{dCos\beta}{dS} = Cos\alpha(r.Cos\alpha + s.Cos\beta) +$$

$$+ Cos\beta(s.Cos\alpha + t.Cos\beta) = r.Cos^2\alpha + 2s.Cos\alpha.Cos\beta + t.Cos^2\beta.$$

Итакъ:

$$Cos\theta = \frac{R}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}(r.Cos^2\alpha + 2s.Cos\alpha.Cos\beta + t.Cos^2\beta)$$

или

$$\frac{R}{Cos\theta} = \frac{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}{r.Cos^2\alpha + 2s.Cos\alpha.Cos\beta + t.Cos^2\beta}.$$

Положивъ здѣсь $\theta = 0$, найдемъ радіусъ R_o нормальнаго сѣченія

$$R_o = \frac{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}{r.Cos^2\alpha + 2s.Cos\alpha.Cos\beta + t.Cos^2\beta} \quad . . . (**)$$

въ видѣ функціи отъ координатъ точки M и направленія касательной MT, и тогда предыдущее равенство даетъ

$$\frac{R}{Cos\theta} = R_o, \quad R = R_o.Cos\theta,$$

что и требовалось доказать.

Теорема Мёнье показываетъ, что изъ всѣхъ кривыхъ, проведенныхъ по поверхности черезъ данную точку и имѣющихъ общую касательную, наибольшимъ радіусомъ кривизны обладаетъ нормальное сѣченіе. Посмотримъ теперь, какъ измѣняется въ данной точкѣ M поверхности величина радіуса кривизны нормальнаго сѣченія

$$R_o = \frac{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}{r.Cos^2\alpha + 2S.Cos\alpha.Cos\beta + t.Cos^2\beta}$$

въ зависимости отъ направленія касательной MT, опредѣляемаго углами α, β, γ. Нужно отмѣтить прежде всего, что, кромѣ общаго для всѣхъ направленій соотношенія

$$Cos^2\alpha + Cos^2\beta + Cos^2\gamma = 1,$$

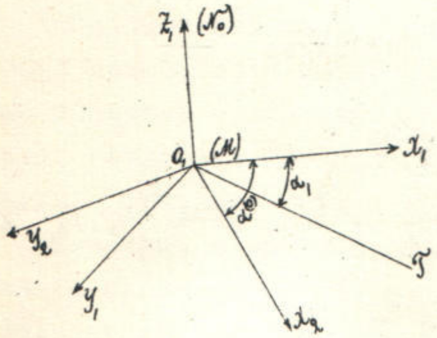
эти три косинуса связаны зависимостью (*)

$$\mathrm{Cos}\gamma = p.\mathrm{Cos}\alpha + q.\mathrm{Cos}\beta;$$

внося это значеніе $\mathrm{Cos}\gamma$ въ предыдущее уравненіе, получимъ:

$$\mathrm{Cos}^2\alpha(1+p^2) + 2pq.\mathrm{Cos}\alpha.\mathrm{Cos}\beta + \mathrm{Cos}^2\beta(1+q^2) = 1 \; . \; . \; (***) .$$

Упростимъ выраженіе R_0 перемѣной координатныхъ осей. Перенесемъ начало въ точку M (см. черт. 141) и направимъ ось Z_1-овъ по нормали MN_0 къ поверхности; плоскость $X_1Y_1Z_1$ будетъ совпадать съ касательной плоскостью, и оси O_1X_1, O_1Y_1 какъ нибудь будутъ расположены въ этой плоскости. Въ новой системѣ имѣемъ:



Черт. 141.

$$\mathrm{Cos}(N_0, X_1) = \frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = 0,$$

$$\mathrm{Cos}(N_0, Y_1) = \frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = 0,$$

такъ что p_1 и $q_1 = 0$; кромѣ того

$$\mathrm{Cos}\beta_1 = \mathrm{Sin}\alpha_1 .$$

Такимъ образомъ выраженіе радіуса кривизны нормальнаго сѣченія будетъ

$$R_0 = \frac{1}{r_1\mathrm{Cos}^2\alpha_1 + 2S_1\mathrm{Sin}\alpha_1\mathrm{Cos}\alpha_1 + t_1\mathrm{Sin}^2\alpha_1}$$

и

$$1/R_0 = r_1\mathrm{Cos}^2\alpha_1 + 2S_1\mathrm{Sin}\alpha_1\mathrm{Cos}\alpha_1 + t_1\mathrm{Sin}^2\alpha_1 .$$

Для изученія хода функціи $1/R_0$ составимъ производную

$$\frac{d(1/R_0)}{d\alpha_1} = -2r_1\mathrm{Cos}\alpha_1\mathrm{Sin}\alpha_1 + 2S_1(\mathrm{Cos}^2\alpha_1 - \mathrm{Sin}^2\alpha_1) +$$

$$+ 2t_1\mathrm{Sin}\alpha_1\mathrm{Cos}\alpha_1 = 2S_1\mathrm{Cos}\,2\alpha_1 - (r_1 - t_1)\mathrm{Sin}\,2\alpha_1 .$$

Приравнивая производную нулю, получаемъ:

$$\mathrm{tg}\,2\alpha_1 = \frac{2S_1}{r_1 - t_1} .$$

Мы исключимъ пока тотъ случай, когда оказывается одновременно $S_1 = 0$, $r_1 = t_1$, такъ какъ въ этомъ случаѣ

$$1/R_0 = r_1(\mathrm{Cos}^2\alpha_1 + \mathrm{Sin}^2\alpha_1) = r_1,$$

т.е. кривизна всѣхъ нормальныхъ сѣченій въ точкѣ М одна и та же, независимо отъ угла α_1; такія точки называются точками закругленія. Если исключить эти точки, то формула

$$\mathrm{tg}\ 2\alpha_1 = \frac{2S_1}{r_1 - t_1}$$

дастъ намъ два значенія α_1; именно, положивъ

$$\frac{2S_1}{r_1 - t_1} = \mathrm{tg}\ 2\alpha^{(o)}$$

(причемъ знач. $2\alpha^{(o)}$ содержится между $-\pi/_2$ и $+\pi/_2$), изъ равенства

$$\mathrm{tg}\ 2\alpha_1 = \mathrm{tg}\ 2\alpha^{(o)}$$

находимъ

$$2\alpha_1 = 2\alpha^{(o)} \quad \text{или} \quad 2\alpha_1 = \pi + 2\alpha^{(o)},$$

откуда

$$\alpha_1 = \alpha^{(o)} \quad \text{и} \quad \alpha_1 = \alpha^{(o)} + \pi/_2.$$

Итакъ первая производная

$$\frac{d(1/R_0)}{d\alpha_1}$$

обращается въ нуль при

$$\alpha_1 = \alpha^{(o)}, \quad \alpha^{(o)} + \pi/_2.$$

Обратимся ко второй производной:

$$\frac{d^2R_0^{-1}}{d\alpha_1^2} = -4S_1\mathrm{Cos}\ 2\alpha_1 - 2(r_1 - t_1)\mathrm{Cos}\ 2\alpha_1;$$

для одного изъ найденныхъ нами значеній $\alpha_1 = \alpha^{(o)}$ имѣемъ

$$\mathrm{Cos}\ 2\alpha_1 = \mathrm{Cos}\ 2\alpha^{(o)} = \frac{1}{\pm\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2 2\alpha_0}} = \frac{r_1 - t_1}{\pm\sqrt{4S_1^2 + (r_1 - t_1)^2}}$$

$$\mathrm{Sin}\ 2\alpha_1 = \mathrm{Sin}\ 2\alpha^{(o)} = \frac{2S_1}{\pm\sqrt{4S_1^2 + (r_1 - t_1)^2}}$$

$$\frac{d^2R_0^{-1}}{d\alpha_1^2} = \frac{2[4S_1^2 + (r_1-t_1)^2]}{\mp\sqrt{4S_1^2 + (r_1-t_1)^2}} = \mp\ 2\sqrt{4S_1^2 + (r_1-t_1)^2},$$

для другого значенія $2\alpha_1 = 2\alpha^{(o)} + \pi$ находимъ:

$$\operatorname{Cos} 2\alpha_1 = -\operatorname{Cos} 2\alpha^{(o)} \quad \text{и} \quad \operatorname{Sin} 2\alpha_1 = -\operatorname{Sin} 2\alpha^{(o)},$$

такъ что

$$\frac{d^2R_0^{-1}}{d\alpha_1^2} = \pm\ 2\sqrt{4S_1^2 + (r_1-t_1)^2}\ .$$

Итакъ при найденныхъ нами значеніяхъ α_1 : $\alpha^{(o)}$ и $\alpha^{(o)} + \pi/_2$ вторая производная имѣетъ значенія противоположныхъ знаковъ (она не равна нулю, такъ какъ случай $S_1 = 0$, $r_1 = t_1$ исключенъ), слѣдовательно, одному изъ этихъ значеній α_1 отвѣчаетъ maximum функціи $^1/R_0$ а другому minimum.

Повернемъ теперь оси O_1X_1, O_1Y_1 на уголъ $\alpha^{(o)}$ около начала, и примемъ ихъ новыя положенія за оси O_1X_2, O_1Y_2 новой координатной системы. Въ новой системѣ maximum'у и minimum'у кривизны $^1/R_0$ будутъ отвѣчать значенія угла касательной съ O_1X_2: α_2, которыя будутъ на $\alpha^{(o)}$ меньше значенія α_1, т.е.

$$\alpha_2 = 0 \ \text{ и } \ \pi/_2,$$

откуда

$$2\alpha_2 = 0,\ \pi, \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} 2\alpha_2 = 0;$$

но выше мы имѣли для этихъ значеній α_2

$$\operatorname{tg} 2\alpha_2 = \frac{2S_2}{r_2 - t_2},$$

слѣдовательно, въ новой системѣ должно быть

$$S_2 = 0.$$

Въ такомъ случаѣ выраженіе $^1/R_0$ принимаетъ еще болѣе простую форму:

$$\frac{1}{R_0} = r_2\operatorname{Cos}^2\alpha_2 + t_2\operatorname{Sin}^2\alpha_2\ ;$$

при $\alpha_2=0$ получаемъ $\frac{1}{R_0} = r_2 = \frac{1}{R_1}$ и при $\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$ получ. $\frac{1}{R_0} = t_2 = \frac{1}{R_2}$,

причемъ R_1 и R_2, какъ отвѣчающія значеніямъ $\alpha_2 = 0,\ \pi/_2$, представляютъ наибольшій и наименьшій (или наоборотъ) радіусы нормальныхъ сѣченій нашей поверхности въ ея точкѣ М и называются *главными радіусами кривизны* въ этой точкѣ. Вводя ихъ въ формулу для $^1/R_0$ окончательно находимъ формулу

$$\frac{1}{R_0} = \frac{1}{R_1}\,\text{Cos}^2\omega + \frac{1}{R_2}\,\text{Sin}^2\omega \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(****),$$

которая даетъ величину радіуса кривизны любого нормальнаго сѣченія R_0 въ зависимости отъ главныхъ радіусовъ кривизны R_1 и R_2 и угла ω, составляемаго плоскостью взятаго нормальнаго сѣченія съ плоскостью одного изъ главныхъ сѣченій.

Изъ этой формулы находимъ слѣдующія два свойства:

a) замѣна ω на $-\omega$ не мѣняетъ R_0

b) беря сумму кривизны для двухъ перпендикулярныхъ сѣченій (ω и $^\pi/_2 - \omega$):

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R_1}\,\text{Cos}^2\omega + \frac{1}{R_2}\,\text{Sin}^2\omega$$

$$\frac{1}{R''} = \frac{1}{R_1}\,\text{Sin}^2\omega + \frac{1}{R_2}\,\text{Cos}^2\omega$$

находимъ

$$\frac{1}{R'} + \frac{1}{R''} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\,.$$

Эти два свойства выражаются теоремою Эйлера:

Теорема Эйлера. Нормальныя сѣченія поверхности, одинаково наклоненныя къ главнымъ сѣченіямъ, имѣютъ одинаковую кривизну. Сумма величинъ кривизны двухъ взаимно перпендикулярныхъ нормальныхъ сѣченій есть величина постоянная для данной точки поверхности; она называется *среднею кривизною* поверхности въ этой точкѣ.

Обратимся теперь къ вопросу о *разысканіи точекъ закругленія поверхности.* Выше мы опредѣлили ихъ какъ такія точки поверхности, гдѣ R_0, опредѣляемое формулой (**), не зависитъ отъ величинъ $\text{Cos}\alpha = u$, $\text{Cos}\beta = v$.

Такимъ образомъ въ точкахъ закругленія функція

$$U(u, v) = \frac{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}{R_0} = ru^2 + 2Suv + tv^2$$

не должна зависѣть отъ значеній u и v, причемъ u и v

связаны между собою соотношенiемъ (***)

$$V(u, v) = (1+p^2)u^2 + 2pquv + (1+q^2)v^2 = 1.$$

Составимъ новую функцiю:

$$W(u, v) = U(u, v) - \lambda.V(u, v),$$

гдѣ λ неопредѣленная пока постоянная; такъ какъ $V = 1$, то при постоянномъ U функцiя $W = U - \lambda$ также будетъ постоянна, но, располагая по степенямъ u, имѣемъ

$$W = u^2[r-\lambda(1+p^2)] + 2uv[S-\lambda pq] + v^2[t - \lambda(1+q^2)];$$

выбирая λ такъ, чтобы коэффицiентъ при v^2 былъ равенъ нулю, мы получимъ такое выраженiе:

$$W = u^2[r - \lambda(1+p^2)] + 2uv[S - \lambda pq];$$

чтобы оно не зависѣло отъ u, оно должно быть тождественно 0, такъ какъ при $u = 0$ выходитъ $W = 0$; такимъ образомъ, коэффицiенты при u^2 и $2uv$ должны быть равны 0, и мы получимъ систему 3-хъ уравненiй:

$$\left|\begin{aligned} r &= \lambda(1+p^2) \\ S &= \lambda pq \\ t &= \lambda(1+q^2), \end{aligned}\right.$$

при выполненiи которой оказывается $W = 0$ при всѣхъ направленiяхъ касательной, слѣдовательно:

$$U = \lambda \quad \text{или} \quad \frac{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}{R_0} = \lambda.$$

Итакъ въ точкахъ закругленiя поверхности, если онѣ существуютъ, должно быть

$$\frac{r}{1 + p^2} = \frac{S}{p \cdot q} = \frac{t}{1 + q^2} \; (= \lambda) \; . \; . \; . \; . \; (*^V)$$

присоединяя сюда уравненiе самой поверхности, получимъ 3 уравненiя съ тремя неизвѣстными x, y, z, изъ которыхъ найдутся координаты всѣхъ точекъ закругленiя. Для каждой точки, вычисливъ λ, опредѣлимъ радiусъ кривизны по формулѣ

$$R_0 = \frac{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}{\lambda}.$$

Примѣръ. Найти точки закругленія поверхности

$$x^2 + 2y^2 = z.$$

Имѣемъ

$$p = 2x, \qquad q = 4y,$$

$$r = 2, \quad s = 0, \quad t = 4.$$

Предыдущая система ($*^{(v)}$) принимаетъ форму

$$\frac{2}{1 + 4x^2} = \frac{0}{8xy} = \frac{4}{1 + 16y^2}.$$

Среднее соотношеніе показываетъ, что $xy = 0$, откуда или $x = 0$ или $y = 0$. Если $x = 0$, то выходитъ

$$\frac{2}{1} = \frac{4}{1 + 16y^2},$$

откуда

$$1 + 16y^2 = 2, \quad 16y^2 = 1, \quad y = \pm {}^1/_4$$

и

$$z = x^2 + 2y^2 = {}^1/_8.$$

Итакъ, находимъ 2 точки закругленія $(0, \pm {}^1/_4, {}^1/_8)$; для нихъ

$$\lambda = 2, \quad p = 0, \quad q = \pm 1,$$

слѣдовательно

$$\sqrt{1 + p^2 + q^2} = \sqrt{2},$$

слѣдовательно

$$R_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Предположеніе $y = 0$ даетъ

$$\frac{2}{1 + 4x^2} = \frac{4}{1},$$

откуда

$$1 + 4x^2 = {}^1/_2, \quad 4x^2 = -{}^1/_2, \qquad x \text{ - мнимое.}$$

Замѣчаніе. Легко показать, что для поверхности шара

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

каждая точка есть точка закругленія.

Дѣйствительно, здѣсь

$$p = -\frac{x}{z}, \quad q = -\frac{y}{z}, \quad r = -\frac{a^2 - y^2}{z^3}, \quad s = -\frac{xy}{z^3},$$

$$t = -\frac{a^2 - x^2}{z^3}.$$

Далѣе

$$\frac{r}{1 + p^2} = -\frac{a^2 - y^2}{z^3} . \frac{z^2}{x^2 + z^2} = -\frac{a^2 - y^2}{z} . \frac{1}{a^2 - y^2} = -\frac{1}{z},$$

$$\frac{s}{pq} = -\frac{xy}{z^3} . \frac{z^2}{xy} = -\frac{1}{z},$$

$$\frac{t}{1 + q^2} = -\frac{a^2 - x^2}{z^3} . \frac{z^3}{y^2 + z^2} = -\frac{a^2 - x^2}{z} . \frac{1}{a^2 - x^2} = -\frac{1}{z},$$

слѣдовательно, во всѣхъ точкахъ поверхности шара условія (*V) для точекъ закругленія выполнены, причемъ

$$\lambda = -\frac{1}{z} = -\frac{\sqrt{1 + \frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2}}}{R_o} = -\frac{a}{zR_o},$$

откуда

$$R_o = a.$$

Обратимся, наконецъ, къ послѣднему вопросу - къ *вычисленію главныхъ радіусовъ кривизны въ данной точкѣ поверхности.* Такъ какъ главные радіусы кривизны представляютъ maximum и minimum выраженія R_o (**) въ данной точкѣ поверхности, то вопросъ приводится къ нахожденію maximum'а и minimum'а выраженія

$$U(u, v) = \frac{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}{R_o} = ru^2 + 2suv + tv^2$$

при соблюденіи условія

$$V(u, v) = (1+p^2)u^2 + 2pquv + (1+q^2)v^2 = 1.$$

По способу неопредѣленныхъ множителей мы должны искать абсолютный maximum и minimum выраженія

$$W = U - \lambda V = u^2[r - \lambda(1+p^2)] + 2uv[s-\lambda pq] + v^2[t-\lambda(1+q^2)].$$

Приравниваемъ нулю частныя производныя:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial W}{\partial u} = u[r-\lambda(1+p^2)] + v[s - \lambda pq] = 0$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial W}{\partial v} = u[s - \lambda pq] + v[t - \lambda(1+q^2)] = 0.$$

Умножая первое уравненіе на u, второе на v и складывая находимъ, что для значеній u и v, отвѣчающихъ maximum'у или minimum'у функціи U, должно быть

$$W = 0,$$

слѣдовательно

$$U = \lambda V = \lambda \quad (\text{такъ какъ } V = 1).$$

Итакъ, имѣя въ виду, что по общимъ нашимъ изслѣдованіямъ функція U должна имѣть maximum и minimum, мы можемъ заключить, что λ будетъ имѣть два значенія λ_1 и λ_2 и тогда

$$U_{\text{maximum}} = \lambda_1, \quad U_{\text{minimum}} = \lambda_2$$

$$\frac{1}{R_1} = \frac{\lambda_1}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \qquad \frac{1}{R_2} = \frac{\lambda_2}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

Остается найти числа λ_1 и λ_2.

Изъ уравненій

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial W}{\partial u} = 0, \quad \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial W}{\partial v} = 0$$

слѣдуетъ пропорціональность коэффиціентовъ при u и v, такъ какъ u и v одновременно не нули (иначе $V = 0$, а не 1).

Итакъ:

$$\frac{r - \lambda(1+p^2)}{s - \lambda pq} = \frac{s - \lambda pq}{t - \lambda(1+q^2)}$$

или

$$rt - s^2 - \lambda[r(1+q^2) - 2pqs + t(1+p^2)] + \lambda^2(1+p^2+q^2) = 0.$$

Изъ этого уравненія слѣдуетъ, что

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{r(1+q^2) - 2pqs + t(1+p^2)}{1+p^2+q^2}$$

$$\lambda_1\lambda_2 = \frac{rt - s^2}{1+p^2+q^2}$$

и отсюда два равенства

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} = \frac{r(1+q^2) - 2pqs + t(1+p^2)}{(1 + p^2 + q^2)^{3/2}}$$

$$\frac{1}{R_1 R_2} = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{1 + p^2 + q^2} = \frac{rt - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2},$$

опредѣляющія среднюю кривизну

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

и такъ называемую Гауссову кривизну

$$\frac{1}{R_1 R_2}$$

поверхности въ данной точкѣ. Зная эти двѣ величины, легко определить отдѣльно

$$\frac{1}{R_1} \quad \text{и} \quad \frac{1}{R_2}$$

какъ корни квадратнаго уравненія.

Что касается положенія главныхъ нормальныхъ сѣченій, то, найдя λ_1 и λ_2, мы можемъ изъ уравненія

$$u[r - \lambda_1(1+p^2)] + v[s - \lambda_1 pq] = 0$$

или

$$u[r - \lambda_2(1+p^2)] + v(s - \lambda_2 pq] = 0$$

найти отношеніе $\frac{u}{v}$ и, подставивъ его величину въ уравненіе

$$V(u, v) = (1+p^2)u^2 + 2pquv + (1+q^2)v^2 = 1,$$

найти значенія u и v, опредѣляющія углы α и β ($\cos\alpha = u$, $\cos\beta = v$); наконецъ, по формулѣ (***) найдется

$$\cos\gamma = pu + qv,$$

и положеніе касательныхъ главныхъ нормальныхъ сѣченій будетъ опредѣлено.

Примѣръ. Вычислить главные радіусы кривизны поверхности

$$3x^2 + 2y^2 + z^2 = 6$$

въ точкѣ $(1, 1, 1)$.

Имѣемъ

$$6x + 2zp = 0, \quad p = -3$$

$$4y + 2zq = 0, \quad q = -2$$

$$6 + 2p^2 + 2zr = 0, \quad r = -12$$

$$2qp + 2zs = 0, \quad s = -6$$

$$4 + 2q^2 + 2zt = 0, \quad t = -6$$

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{-12.5 + 2.3.2.6 - 6.10}{(1 + 9 + 4)^{3/2}} = \frac{-48}{14\sqrt{14}} = \frac{-24}{7\sqrt{14}}$$

$$\frac{1}{R_1 R_2} = \frac{12 \,.\, 6 - 6^2}{(1 + 9 + 4)^2} = \frac{36}{196} = \frac{9}{49}.$$

Такимъ образомъ

$$\frac{1}{R_1} \quad \text{и} \quad \frac{1}{R_2}$$

опредѣляются какъ корни квадратнаго уравненія

$$49\lambda^2 + 12\sqrt{14}\,\lambda + 9 = 0,$$

$$\frac{1}{R_1} = \frac{-6\sqrt{14} + 3\sqrt{7}}{49},$$

$$\frac{1}{R_2} - \frac{-6\sqrt{14} - 3\sqrt{7}}{49}.$$

Такъ какъ оба радіуса вышли отрицательными, то это показываетъ, что оба радіуса откладываются по нормали, для которой

$$\operatorname{Cos}(N_0, Z) = \frac{+1}{-\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

т.е. по внутренней нормали къ поверхности.

-------- " --------

ГЕОМЕТРИЧЕСКІЯ ПРИЛОЖЕНІЯ ИНТЕГРАЛЬНАГО ИСЧИСЛЕНІЯ.

ГЛАВА I.

ПРОСТЫЕ ИНТЕГРАЛЫ.

§ 1.

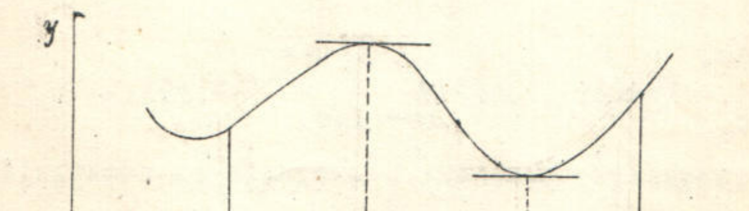
Выраженіе площади въ прямоугольныхъ координатахъ.

Если кривая задана уравненіемъ

$$y = f(x),$$

то площадь, ограниченная кривою, двумя ординатами $x = a$, $x = b$ и осью абсциссъ (см. черт. 142), будетъ равна

$$Q = \int_a^b f(x)dx$$

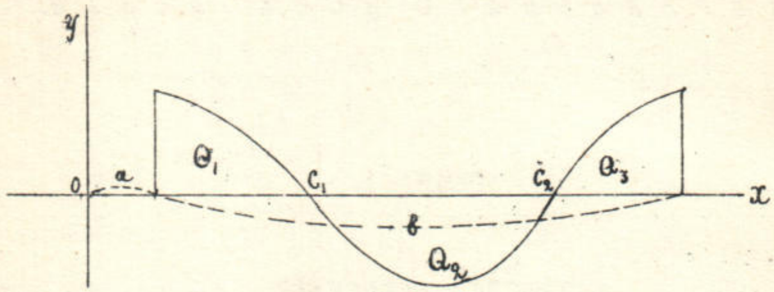


Черт. 142.

вообще лишь въ томъ случаѣ, если при $a \leq x \leq b$ функція $f(x)$, оставаясь непрерывной, сохраняетъ всегда положительный знакъ и имѣетъ конечное число maxima и minima.

Замѣчаніе. Если подъинтегральная функція мѣняетъ знакъ въ предѣлахъ интегрированія (см. черт. 143), то интегралъ

$$\int_a^b f(x)dx = Q_1 - Q_2 + Q_3,$$



Черт. 143.

гдѣ Q_1, Q_2, Q_3 означаетъ число квадратныхъ единицъ въ площадяхъ 1, 2 и 3-ей, т.е. интегралъ равенъ *алгебраической* суммѣ площадей, причемъ площади, расположенныя подъ осью X-овъ, считаются отрицательными. Дѣйствительно, въ нашемъ случаѣ весь интегралъ въ предѣлахъ отъ a до b можно разбить на три:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{c_1} f(x)dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)dx + \int_{c_2}^{b} f(x)dx,$$

гдѣ

$$\int_a^{c_1} f(x)dx = Q_1, \quad \int_{c_2}^{b} f(x)dx = Q_3,$$

а

$$\int_{c_1}^{c_2} f(x)dx = \underset{n=\infty}{\textit{Пред.}} \sum_{i=o}^{i=n-1} f(x_i)\Delta x_i = -Q_2,$$

такъ какъ элементы $f(x_i)\Delta x_i$, входящіе въ послѣдній интегралъ, отрицательны.

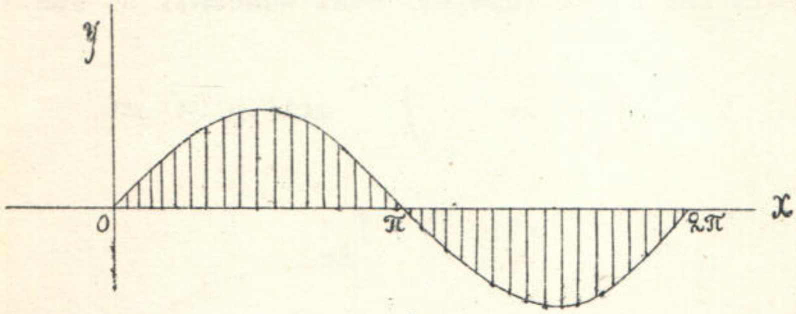
Примѣръ. Дана кривая (см. черт. 144): $y = \operatorname{Sin} x$.

Если мы возьмемъ интегралъ въ предѣлахъ отъ 0 до 2π, то получимъ

$$Q = \int_0^{2\pi} \sin x dx = \Big| - \cos x \Big|_0^{2\pi} = 0.$$

Это произошло отъ того, что $\sin x$ въ предѣлахъ $0 \leq x \leq 2\pi$ мѣняетъ знакъ. Число квадратныхъ единицъ заштрихованной площади будетъ

$$Q_1 = 2\int_0^{\pi} \sin x.dx = 2\Big|- \cos x\Big|_0^{\pi} = 4.$$

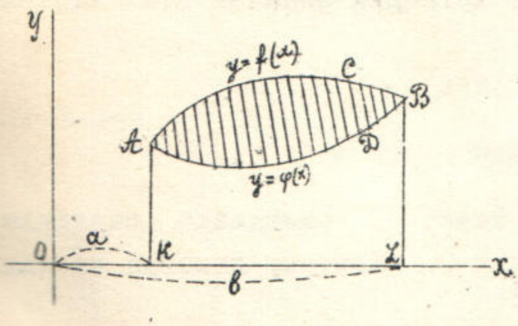


Черт. 144.

Замѣчаніе 2. Для нахожденія площади, заключенной между двумя пересѣкающимися кривыми (см. черт. 145):

$$f(x) = 0$$

$$\varphi(x) = 0,$$



Черт. 145.

нужно рѣшить сперва уравненіе

$$f(x) = \varphi(x).$$

Пусть a и b его корни ($a < b$); тогда искомая площадь

$$Q = \int_a^b [f(x) - \varphi(x)]dx.$$

Въ самомъ дѣлѣ

$$Q = \text{пл.}KACBL - \text{пл.}KADBL = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b \varphi(x)dx =$$

$$= \int_a^b [f(x) - \varphi(x)]dx.$$

Замѣчаніе 3. Если уравненіе кривой задано въ видѣ

$$\Big| x = \varphi(t)$$

$$\Big| \; y = \psi(t),$$

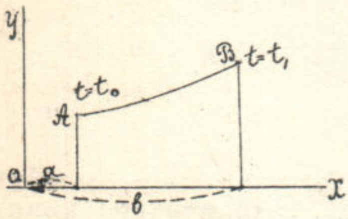
то площадь Q вычисляется слѣдующимъ образомъ

$$Q = \int_{t_0}^{t_1} \psi(t)\varphi'(t)dt,$$

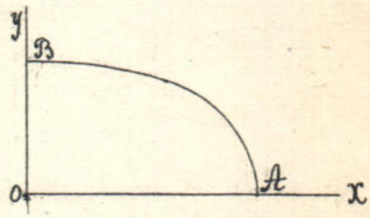
причемъ t_0 и t_1 суть значенія параметра, отвѣчающія точкамъ A и B кривой (см. черт. 146).

Это слѣдуетъ изъ общей формулы, если положить въ ней $x = \varphi(t)$:

$$Q = \int_a^b y.dx = \int_{t_0}^{t_1} \psi(t).\varphi'(t).dt.$$



Черт. 146.



Черт. 147.

Примѣръ 1. Вычислить площадь четверти эллипса (см. чертежъ 147):

$$x = a.\mathrm{Cos}\ t$$

$$y = b.\mathrm{Sin}\ t.$$

Установимъ сначала предѣлы. Точкѣ B отвѣчаетъ значеніе $t = \pi/_2$ точкѣ A отвѣчаетъ $t = 0$. Поэтому искомая площадь будетъ равна

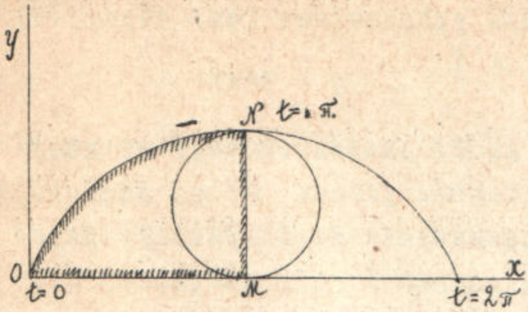
$$Q = -\int_{\pi/_2}^{0} b.\mathrm{Sin}\ t.a.\mathrm{Sin}\ t.dt = -ab\int_{\pi/_2}^{0} \mathrm{Sin}^2 t.dt =$$

$$= -ab\int_{\pi/_2}^{0} (^1/_2 - {}^1/_2\ \mathrm{Cos}\ 2t)dt = -ab\left[\frac{t}{2} - \frac{\mathrm{Sin}2t}{4}\right]_{\pi/_2}^{0} =$$

$$= -ab\left[-\,^{\pi}/_4\right] = \frac{\pi ab}{4}.$$

Площадь всего эллипса будетъ $= \pi ab$.

Примѣръ 2. Найти площадь ограниченную циклоидою (см. черт. 148):



Черт. 148.

$$x = a(t - \operatorname{Sin} t)$$

$$y = a(1 - \operatorname{Cos} t).$$

Вслѣдствіе симметричности фигуры относительно MN вычислимъ только половину всей площади:

$$Q = \int_0^{\pi} a(1-\operatorname{Cos} t)a(1-\operatorname{Cos} t)dt =$$

$$= a^2\int_0^{\pi} 4\operatorname{Sin}^4\frac{t}{2}\,dt = 4a^2\int_0^{\pi}\operatorname{Sin}^4\frac{t}{2}\,dt.$$

Положивъ здѣсь

$$t = 2u,$$

найдемъ

$$\operatorname{Sin}^4\frac{t}{2} = \operatorname{Sin}^4 u, \quad dt = 2du;$$

предѣлы интегрированія также перемѣнятся;

при $t = 0$ будетъ $u = 0$,

" $t = \pi$ " $u = \pi/_2$.

Итакъ

$$Q = 4a^2.2\int_0^{\pi/_2}\operatorname{Sin}^4 u.du.$$

Замѣтивъ, что

$$\int_0^{\pi/_2}\operatorname{Sin}^{2n}u.du = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots.2n}.\frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\pi/_2}\operatorname{Sin}^{2n+1}u.du = \frac{2.4.6\ldots2n}{3.5.7\ldots(2n+1)}$$ (см. стр.),

получимъ

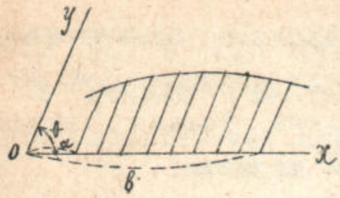
$$Q = 8a^2.\frac{1.3}{2.4}.\frac{\pi}{2} = \frac{3}{2}\pi a^2.$$

Площадь, ограниченная цѣлою вѣтвью,

$$= 3\pi a^2.$$

Замѣчаніе 4. Если кривая задана уравненіемъ (см. черт.149)

$$y = f(x)$$



Черт.149.

въ косоугольной системѣ съ координатнымъ угломъ θ, то площадь, ограниченная этой кривой, двумя ординатами и осью абсциссъ, имѣетъ слѣдующее выраженіе

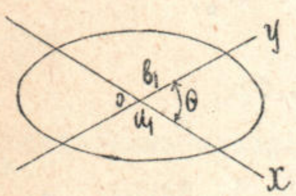
$$Q = \operatorname{Sin}\theta \int_a^b f(x)dx.$$

Въ самомъ дѣлѣ, площадь Q можно разбить линіями, параллельными оси OY на безконечно узкіе параллелограммы, площади которыхъ будутъ имѣть выраженіе

$$y.dx.\operatorname{Sin}\theta.$$

Суммируя эти параллелограммы и вынося $\operatorname{Sin}\theta$ за знакъ этой суммы, мы въ предѣлѣ получимъ написанное выше выраженіе.

Примѣръ. Докажемъ, что площадь сектора, выдѣленнаго двумя сопряженными діаметрами эллипса $= \frac{1}{4}$ площади эллипса (см. чертежъ 150).



Черт.150.

Уравненіе эллипса, отнесеннаго къ сопряженнымъ діаметрамъ, имѣетъ видъ

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1,$$

гдѣ a_1 и b_1 суть полудіаметры.

На основаніи замѣчанія 4-го площадь искомаго сектора

$$Q = \operatorname{Sin}\theta \int_0^a y.dx = \operatorname{Sin}\theta \frac{\pi.a_1b_1}{4} = \frac{\pi}{4} a_1b_1 \operatorname{Sin}\theta.$$

Но въ силу теоремы Аполлонія

$$a_1b_1\operatorname{Sin}\theta = ab$$

и потому

$$Q = \frac{\pi}{4}.ab.$$

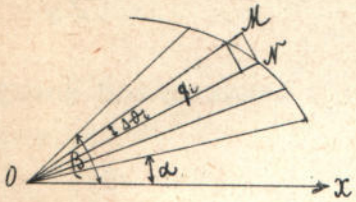
§ 2.

Выраженіе площади сектора въ полярныхъ координатахъ.

Положимъ, что кривая задана уравненіемъ

$$r = f(\theta)$$

въ полярныхъ координатахъ. Чтобы вычислить площадь, ограниченную этой кривой и радіусами векторами $\theta = \alpha$ $\theta = \beta$, разобьемъ всю площадь на элементарныя площадки, какъ указано на чертежѣ 151. Пусть значенія угла θ, отвѣчающія проведеннымъ радіусамъ векторамъ, будутъ



Черт. 151.

$$\theta_0 = \alpha,\ \theta_1,\ \theta_2 \ldots \theta_{n-1},\ \theta_n = \beta.$$

Введемъ обозначеніе

$$\Delta\theta_i = \theta_{i+1} - \theta_i.$$

Тогда искомая площадь

$$Q = \sum_{i=0}^{i=n-1} q_i,$$

гдѣ q_i означаетъ площадь сектора, выдѣленнаго радіусами векторами $\theta = \theta_i$ и $\theta = \theta_{i+1}$.

Пусть R_i и r_i обозначаютъ соотвѣтственно наибольшій и наименьшій изъ радіусовъ векторовъ, отвѣчающихъ значеніямъ θ внутри сектора q_i, т.е. при

$$\theta_i \leqq \theta \leqq \theta_{i+1}.$$

Построивъ круговые секторы этими радіусами, получимъ, очевидно, неравенство:

$$1/2\, r_i^2 \Delta\theta_i < q_i < 1/2\, R_i^2 \Delta\theta_i.$$

Изъ этого неравенства заключаемъ, что

$$q_i = 1/2\, \Delta\theta_i \left| f(\theta_i + \vartheta\Delta\theta_i) \right|^2,$$

гдѣ

$$0 < \vartheta < 1;$$

а въ силу непрерывности функціи $f(\theta)$ можемъ написать

$$q_i = \tfrac{1}{2}\,\Delta\theta_i\,[f(\theta_i)^2 + \varepsilon_i]\ ,$$

гдѣ ε_i безконечно малая при безконечно маломъ $\Delta\theta_i$.

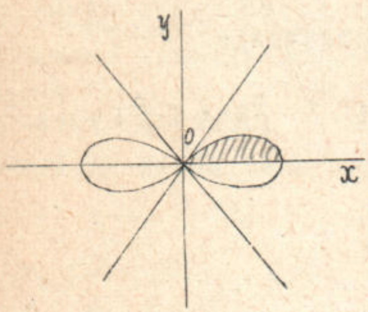
Отбрасывая при вычисленіи предѣла суммы элементарныхъ площадокъ безконечно малыя высшаго порядка, найдемъ

$$Q = \lim_{n=\infty} \sum_{i=0}^{n-1} q_i = \tfrac{1}{2} \lim_{n=\infty} \sum_{i=0}^{n-1} [f(\theta_i)^2 + \varepsilon_i].\Delta\theta_i =$$

$$= \tfrac{1}{2} \lim_{n=\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(\theta_i)^2\Delta\theta_i = \tfrac{1}{2}\int_\alpha^\beta f(\theta)^2 d\theta = \tfrac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2 d\theta.$$

Примѣръ 1. Найти площадь, ограниченную Лемнискатою Бернулли

$$r^2 = a^2 \operatorname{Cos} 2\theta.$$



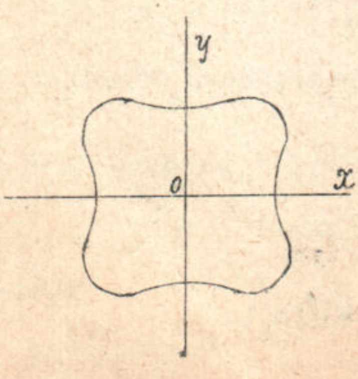
Черт. 152.

Такъ какъ $\operatorname{Cos} 2\theta$ остается $\geqq 0$ при

$$0 < 2\theta < \frac{\pi}{2},$$

то для $\tfrac{1}{4}$ искомой площади, заштрихованной на чертежѣ 152, предѣлы интегрированія по θ будутъ 0 и $\pi/_4$. Такимъ образомъ полная площадь:

$$Q = 4.\tfrac{1}{2}\int_0^{\pi/4} r^2 d\theta = 2a^2\int_0^{\pi/4} \operatorname{Cos}2\theta.d\theta = a^2(\operatorname{Sin}2\theta)_0^{\pi/4} = a^2$$



Черт. 153.

Примѣръ 2. Найти площадь, ограниченную кривою

$$x^4 + y^4 = a^2x^2 + b^2y^2.$$

Въ полярныхъ координатахъ (полагая $x = r.\operatorname{Cos}\theta$, $y = r.\operatorname{Sin}\theta$) находимъ, по сокращеніи на r^2, уравненіе

$$r^2 = \frac{a^2 \mathrm{Cos}^2\theta + b^2 \mathrm{Sin}^2\theta}{\mathrm{Sin}^4\theta + \mathrm{Cos}^4\theta}.$$

Полная площадь

$$Q = 4.\,{}^1/_2 \int_0^{\pi/2} \frac{a^2 \mathrm{Cos}^2\theta + b^2 \mathrm{Sin}^2\theta}{\mathrm{Sin}^4\theta + \mathrm{Cos}^4\theta}.\,d\theta$$

Полагая $\operatorname{tg}\theta = z$, имѣемъ $dz = \frac{d\theta}{\cos^2\theta}$

$$Q = 2\int_0^\infty \frac{a^2 + b^2z^2}{1 + z^4}.\,dz.$$

Интегралъ

$$\int_0^\infty \frac{z^2dz}{1+z^4} = \int_0^\infty \frac{{}^1/z^2.\,dz}{1 + {}^1/z^4}$$

подстановкой $z = {}^1/t$ приводится къ интегралу

$$\int_0^\infty \frac{-\,dt}{1+t^4} = -\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^4},$$

такъ что

$$Q = 2(a^2+b^2).\int_0^\infty \frac{dz}{1+z^4}.$$

Подстановкой $z = u^{1/4}$, $dz = {}^1/_4\, u^{-3/4}du$ находимъ

$$\int_0^\infty \frac{dz}{1+z^4} = {}^1/_4 \int_0^\infty \frac{u^{-3/4}\,du}{1+u}.$$

Но впослѣдствіи мы покажемъ, что

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}.\,dx}{1+x} = \frac{\pi}{\mathrm{Sin}\,p\pi}$$

при $0 < p < 1$; поэтому

$$\int_0^\infty \frac{u^{-3/4}.\,du}{1+u} = \frac{\pi}{\mathrm{Sin}(\pi/4)} = \pi\sqrt{2}$$

и окончательно

$$Q = 2(a^2+b^2).\,{}^1/_4\pi\sqrt{2} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}(a^2+b^2).$$

§ 3.

Выраженіе длины дуги.

Раньше мы имѣли дифференціалъ дуги плоской кривой. Вся же длина дуги въ прямоугольныхъ координатахъ будетъ равна

$$S = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2}\, dx\ ;$$

въ полярныхъ координатахъ -

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + \left|\frac{dr}{d\theta}\right|^2}\, d\theta.$$

Длина дуги кривой, заданной параметрическими уравненіями

$$\left|\begin{array}{l} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t), \end{array}\right.$$

будетъ равна

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt\ ;$$

для кривой въ пространствѣ, заданной уравненіями

$$x = \varphi(t)$$

$$y = \psi(t)$$

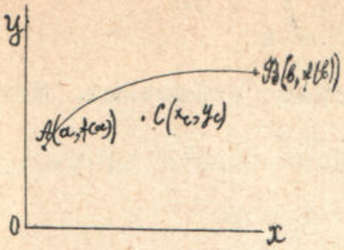
$$z = \omega(t)$$

длина дуги

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\omega'(t)]^2}.\ dt.$$

Отмѣтимъ еще формулы, опредѣляющія центръ тяжести матеріальной дуги (напр. проволочнаго каркаса) однороднаго строенія: координаты центра тяжести будутъ:

$$x_c = \frac{\int_a^b x.dS}{\int_a^b dS}\ , \qquad y_c = \frac{\int_a^b y.dS}{\int_a^b dS}\ .$$



Черт. 154.

Для вывода этихъ формулъ представимъ дугу AB какъ предѣлъ вписанной ломаной линіи. Пусть координаты вершинъ ея будутъ

$$A(x_0, y_0);\ x_1, y_1, \dots x_i, y_i;$$

$$x_{i+1}, y_{i+1}, \dots B(x_n, y_n).$$

Для хорды M_iM_{i+1}, соединяющей точки (x_i, y_i) и (x_{i+1}, y_{i+1}), координаты центра тяжести (ея середины) будутъ

$$\frac{x_i + x_{i+1}}{2} = x_i + {}^1/_2\, \Delta x_i ,$$

$$\frac{y_i + y_{i+1}}{2} = y_i + {}^1/_2\, \Delta y_i ,$$

гдѣ

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i ,$$

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i ;$$

масса же этой хорды при плотности k (k есть масса 1 длины кривой) будетъ

$$k \cdot \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} = k . \Delta x_i . \sqrt{1 + \left[\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right]^2} .$$

Произведеніе массы элемента на его разстояніе до нѣкоторой оси называется статическимъ моментомъ его относительно этой оси. Такимъ образомъ статическій моментъ безконечно малой хорды M_iM_{i+1} относительно оси Y-овъ будетъ

$$(x_i + {}^1/_2\, \Delta x_i) \ . \ k . \Delta x_i . \sqrt{1 + \left[\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right]^2} ,$$

а статическій моментъ всей вписанной линіи:

$$k . \sum_{i=0}^{n-1} (x_i + {}^1/_2\, \Delta x_i) . \left[\sqrt{1 + y_i'^2} + \varepsilon_i\right] . \Delta x_i ;$$

въ предѣлѣ при $n = \infty$, пренебрегая безконечно малыми высшаго порядка въ каждомъ слагаемомъ суммы, получимъ выраженіе статическаго момента дуги AB:

$$k \cdot \int_a^b x\sqrt{1 + y'^2)} \cdot dx = k \cdot \int_a^b x \cdot dS .$$

Центръ тяжести C опредѣляется именно условіемъ, чтобы, сосредоточивъ въ немъ массу всей дуги

$$k \cdot \int_a^b dS,$$

мы получили для него статическій моментъ $x_c \cdot k \int_a^b dS$, равный статическому моменту всей дуги.

Итакъ

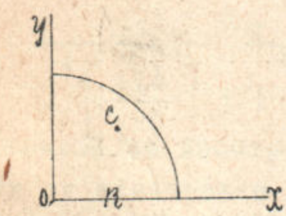
$$k \cdot \int_a^b x \cdot dS = x_c \cdot k \cdot \int_a^b dS,$$

откуда

$$x_c = \frac{\int_a^b x \cdot dS}{\int_a^b dS} .$$

Такъ же выводится y_c.

Примѣръ. Найти центръ тяжести дуги кругового квадранта.



Черт. 155.

Изъ уравненія

$$x^2 + y^2 = R^2$$

$\frac{x^2}{y^2} = \frac{R^2}{y^2} - 1$

находимъ

$$dy = -\frac{x}{y} dx,$$

$$dS = dx\sqrt{1 + \frac{x^2}{y^2}} = \frac{R \cdot dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} .$$

Отсюда

$$\int_0^R x \cdot dS = \int_0^R \frac{R \cdot x \cdot dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} = R\left[-\sqrt{R^2 - x^2}\right]_0^R = R^2,$$

$$\int_0^R dS = \int_0^R \frac{R dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} = R\left(\arcsin\frac{x}{R}\right)_0^R = \frac{\pi \cdot R}{2},$$

$$x_c = \frac{R^2}{{}^1/_2\, \pi R} = \frac{2 \cdot R}{\pi} .$$

По симметричности кривой $y_c = x_c$.

§ 4.

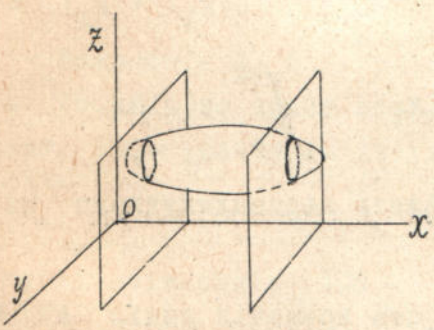
Выраженіе объема простымъ интеграломъ. Объемы тѣлъ вращенія. Теорема Гюльдена 1.

Теорема. Объемъ, выдѣленный изъ данной поверхности плоскостями $\overline{X} = a$ и $\overline{X} = b$ (если опредѣляютъ полный объемъ, ограниченный поверхностью, то плоскости $\overline{X} = a$ и $\overline{X} = b$ суть касательныя къ поверхности съ лѣвой и правой стороны) (см. чертежъ 156) имѣетъ слѣдующее выраженіе:

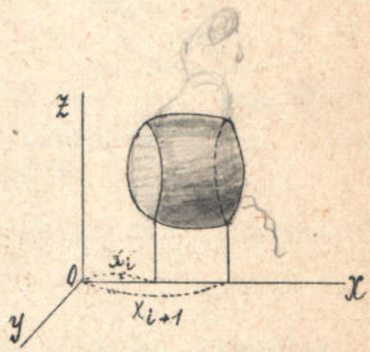
$$V = \int_a^b u(x)\,dx,$$

гдѣ $u(x)$ означаетъ площадь, полученную въ сѣченіи поверхности плоскостью

$$\overline{X} = x.$$



Черт. 156.



Черт. 157.

Доказательство. Проведемъ рядъ плоскостей || пл. YOZ и отсѣкающихъ на оси OX отрѣзки

$$x_0 = a,\ x_1,\ x_2,\ \dots\ x_i,\ x_{i+1},\ \dots\ x_{n-1},\ x_n = b.$$

Введя обозначеніе

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$$

и обозначивъ объемъ, выдѣляемый плоскостями $\overline{X} = x_i$ и $\overline{X} = x_{i+1}$ (см. черт. 157) черезъ V_i, будемъ имѣть

$$V = \sum_{i=0}^{n-1} V_i.$$

Пусть U_i и u_i означаютъ наибольшую и наименьшую изъ площадей параллельныхъ сѣченій $u(x)$ въ промежуткѣ

$$x_i \leq x \leq x_{i+1}.$$

Тогда имѣемъ очевидное неравенство:

$$u_i . \Delta x_i < V_i < U_i . \Delta x_i,$$

и потому можно написать

$$V_i = \Delta x_i . u(x_i + \vartheta \Delta x_i),$$

гдѣ

$$0 < \vartheta < 1.$$

По непрерывности функціи $u(x)$ будемъ имѣть

$$V_i = \Delta x_i . [\, u(x_i) + \varepsilon_i \,],$$

гдѣ ε_i безконечно малая. Поэтому

$$V = \underset{n=\infty}{\textit{Пред.}} \sum_{i=0}^{n-1} V_i = \underset{n=\infty}{\textit{Пред.}} \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i \, [u(x_i) + \varepsilon_i] =$$

$$= \underset{n=\infty}{\textit{Пред.}} \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i . u(x_i) = \int_a^b u(x) dx.$$

Замѣтимъ, что сѣченіе можно дѣлать перпендикулярно не оси OX, а осямъ OY или OZ.

Слѣдствіе. Объемъ, полученный отъ вращенія линіи AB (см. черт. 158), заданной уравненіемъ

$$y = f(x),$$

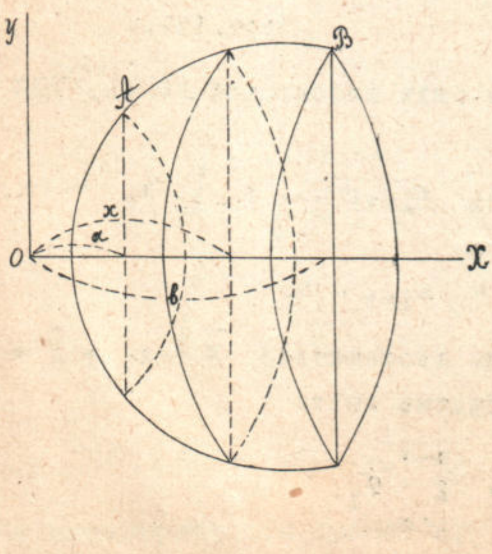
около оси OX, равенъ

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx.$$

Дѣйствительно, въ этомъ случаѣ площадь сѣченія есть площадь круга радіуса $y = f(x)$:

$$u(x) = \pi . f(x)^2$$

и потому



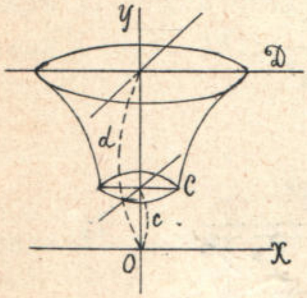
Черт. 158.

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx.$$

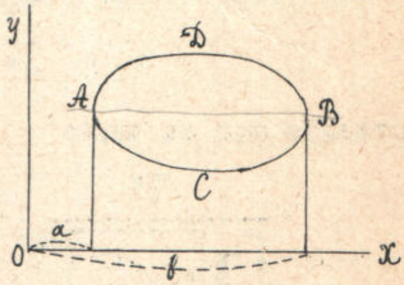
Замѣчаніе 1. Объемъ, полученный отъ вращенія линіи CD (см. чертежъ 159) около оси OY равенъ

$$V = \pi \int_c^d \varphi(y)^2 dy,$$

гдѣ $x = \varphi(y)$ есть уравненіе кривой.



Черт. 159.



Черт. 160.

Замѣчаніе 2. Если разсматривается вращеніе замкнутой фигуры ABCDA, то нужно поступать слѣдующимъ образомъ. Пусть (см. черт. 160) уравненіе линіи ACB будетъ

$$y = y_1 = f_1(x),$$

и уравненіе линіи ADB —

$$y = y_2 = f_2(x).$$

Тогда объемъ тѣла вращенія V можно представить разностью двухъ объемовъ:

$$V = \pi \int_a^b f_2(x)^2 dx - \pi \int_a^b f_1(x)^2 dx = \pi \int_a^b [f_2(x)^2 - f_1(x)^2] dx.$$

Примѣръ 1. Найти объемъ эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Вслѣдствіе симметричности этого тѣла мы можемъ ограничиться вычисленіемъ лишь той части его, которая лежитъ въ трегранномъ углѣ, образованномъ положительными направленіями осей. Тогда весь объемъ

$$V = 8\int_0^a u(x)dx ,$$

гдѣ $u(x)$ есть $1/4$ площади сѣченія поверхности

$$\frac{\bar{X}^2}{a^2} + \frac{\bar{Y}^2}{b^2} + \frac{\bar{Z}^2}{c^2} = 1$$

съ плоскостью $\bar{X} = x$.

Уравненіе линіи пересѣченія или, что то же, ея проекціи на плоскость YZ будетъ:

$$\frac{\bar{Y}^2}{b^2} + \frac{\bar{Z}^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} ;$$

представляя это въ видѣ:

$$\frac{\bar{Y}^2}{\left[b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\right]^2} + \frac{\bar{Z}^2}{\left[c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\right]^2} = 1,$$

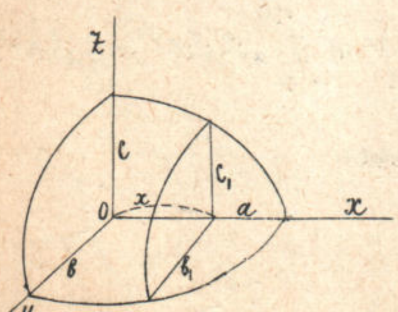
мы видимъ, что въ сѣченіи получится эллипсъ съ полуосями

$$b_1 = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

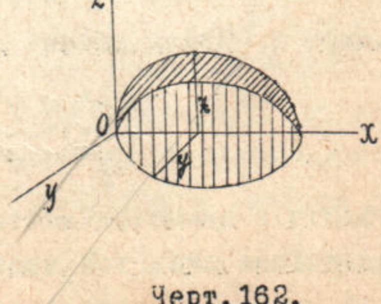
$$c_1 = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} .$$

Пользуясь ранѣе полученными результатами, находимъ:

$$u(x) = {}^1/_4\, \pi b_1 c_1 = {}^1/_4\, \pi bc \left[1 - \frac{x^2}{a^2}\right] ,$$



Черт. 161.



Черт. 162.

откуда

$$V = 8\,{}^1\!/_4\,\pi bc\int_0^a\left[1-\frac{x^2}{a^2}\right]dx = 2\pi bc\left[x-{}^1\!/_3\,\frac{x^3}{a^2}\right]_0^a =$$

$$= 2\pi bc(a-{}^1\!/_3\,a) = {}^4\!/_3\,\pi abc.$$

Если всѣ три полуоси равны

$$a = b = c$$

то получаемъ объема шара $= {}^4\!/_3\,\pi a^3$.

Примѣръ 2. Найти общій объемъ двухъ цилиндровъ, заданныхъ уравненіями (черт. 162):

$$(x-R)^2 + y^2 = R^2$$

$$(x-R)^2 + z^2 = R^2.$$

Перепишемъ данныя уравненія въ видѣ:

$$x^2 + y^2 - 2Rx = 0$$

$$x^2 + z^2 - 2Rx = 0.$$

Замѣчая, что весь объемъ состоитъ изъ 4-хъ равныхъ частей такихъ, какъ показано на чертежѣ, и что площадь сѣченія $\perp$ оси OX, есть площадь прямоугольника со сторонами y и z:

$$u(x) = yz = 2Rx - x^2,$$

находимъ

$$V = 4\int_0^{2R} u(x)dx = 4\int_0^{2R}(2Rx - x^2)dx =$$

$$= 4\left[Rx^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^{2R} = 4\left[4R^2(R - {}^2\!/_3R)\right] = {}^{16}\!/_3\,R^3.$$

Примѣръ 3. Опредѣлить объемъ вращенія циклоиды

$$x = a(t - \operatorname{Sin} t)$$

$$y = a(1 - \operatorname{Cos} t)$$

около оси OX.

Имѣемъ:

$$V = \pi\int_0^{2\pi a} y^2dx = \pi\int_0^{2\pi} a^3(1-\operatorname{Cos} t)^2(1-\operatorname{Cos} t)dt =$$

$$= 2\pi\int_0^{\pi} a^3(1-\operatorname{Cos} t)^3dt = 2\pi a^3\,8\int_0^{\pi}\operatorname{Sin}^6\frac{t}{2}\,dt.$$

Вводя новую перемѣнную:

$$t = 2u$$

$$dt = 2du,$$

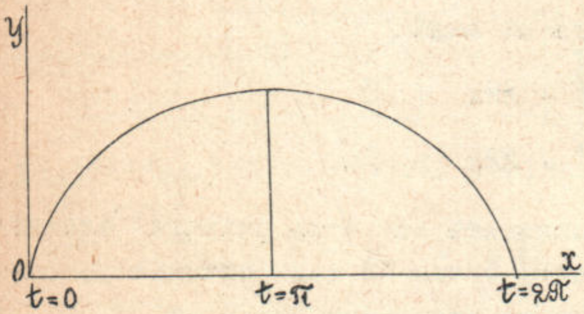
мы въ то же время должны измѣнить и предѣлы интегрированія и написать вмѣсто

$$0 \quad \text{и} \quad \pi \quad \text{при} \quad t$$

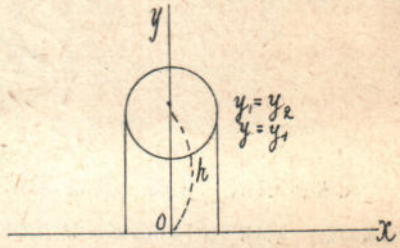
$$0 \quad \text{и} \quad \frac{\pi}{2} \quad \text{при} \quad u.$$

Тогда получимъ

$$V = 32\pi a^3 \int_0^{\pi/2} \operatorname{Sin}^6 u.du = 32\pi a^3 \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{\pi}{2} = 5\pi^2 a^3.$$



Черт. 163.



Черт. 164.

Примѣръ 4. Опредѣлить объемъ кольца, полученнаго отъ вращенія окружности

$$x^2 + (y-h)^2 = R^2$$

около оси OX (см. черт. 164).

Рѣшая уравненіе окружности относительно y, мы получаемъ два рѣшенія:

$$y - h = \pm\sqrt{R^2 - x^2},$$

$$y = h \pm \sqrt{R^2 - x^2};$$

одно рѣшеніе

$$y_1 = h - \sqrt{R^2 - x^2}$$

соотвѣтствуетъ нижней части окружности (см. черт. 164), а другое

$$y_2 = h + \sqrt{R^2 - x^2}$$

верхней. Такъ какъ данная окружность симметрична относительно оси OY, то весь объемъ мы получимъ, удвоивъ объемъ правой части кольца. Согласно замѣчанію 2 имѣемъ:

$$V = 2\pi \int_0^R (y_2^2 - y_1^2)dx = 2\pi \int_0^R 4h \sqrt{R^2 - x^2}\, dx =$$

$$= 8\pi h \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\, dx = 8\pi h \left[\tfrac{1}{2} R^2 \arcsin\left(\frac{x}{R}\right) + \right.$$

$$\left. + \tfrac{1}{2} x \sqrt{R^2 - x^2} \right]_0^R = 8\pi h . \frac{R^2}{2} \frac{\pi}{2} = 2\pi^2 R^2 h = \pi R^2 . 2\pi h .$$

Изъ послѣдняго выраженія видно, что объемъ кольца равенъ произведенію площади вращающагося круга на длину окружности, описываемой его центромъ тяжести около оси OX. Этотъ результатъ оказывается справедливымъ вообще для всѣхъ тѣлъ вращенія, какъ доказывается слѣдующей теоремой:

Теорема Гюльдена 1. Объемъ, полученный отъ вращенія плоской фигуры около данной прямой, лежащей въ ея плоскости, равенъ произведенію ея площади на длину окружности, описанной центромъ тяжести вращающейся фигуры.

Очевидно, что мы не нарушимъ общности разсужденій, принявъ за ось вращенія ось X-овъ.

Пусть данная фигура ограничена (см. черт. 165) сверху кривой линіей

$$y = f_2(x),$$

а снизу кривой

$$y = f_1(x).$$

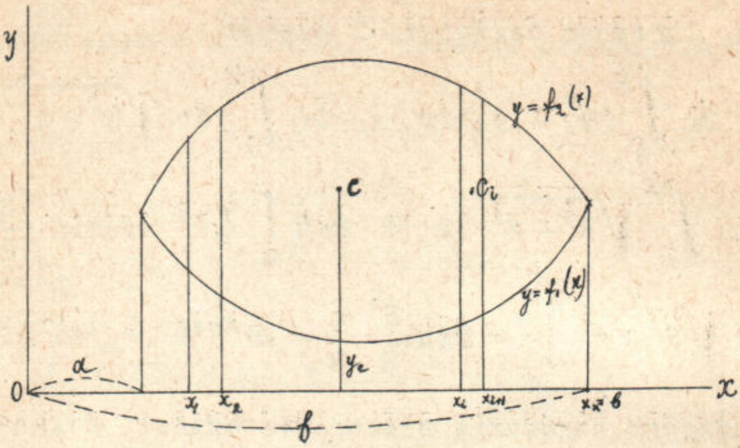
Нашу теорему мы докажемъ, исходя изъ слѣдующихъ соображеній:

Изъ механики извѣстно, что если дана система матеріальныхъ точекъ (см. черт. 166) M_1, M_2, M_3, массы которыхъ m_1, m_2, m_3, то центромъ тяжести всей системы называется такая точка, координаты которой удовлетворяютъ равенствамъ

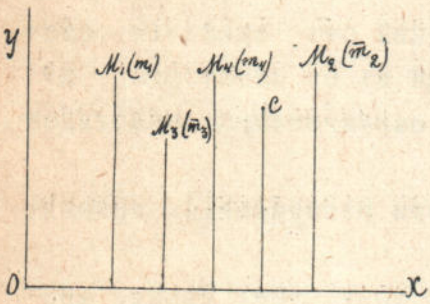
$$Mx_C = m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3$$

$$My_C = m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3,$$

означающимъ, что статическій моментъ общей массы M всѣхъ матеріальныхъ точекъ относительно любой оси равенъ суммѣ статическихъ моментовъ всѣхъ точекъ системы.



Черт. 165.



Черт. 166.

Согласно этому опредѣленію, назвавъ массу площадки, выдѣленной линіями $\overline{X} = x_i$ и $\overline{X} = x_{i+1}$, черезъ m_i и ординату ея центра тяжести черезъ $y_c^{(i)}$, мы получимъ ординату центра тяжести C всей фигуры, масса которой M, изъ условія:

$$y_c M = \text{Пред.}_{n=\infty} \sum_{i=0}^{n-1} m_i y_c^{(i)} .$$

Обозначивъ черезъ γ массу 1 кв. единицы фигуры, будемъ имѣть

$$M = Q\gamma,$$

гдѣ Q площадь всей фигуры, и

$$m_i = \gamma \left\{[f_2(x_i) - f_1(x_i)] + \varepsilon_i\right\} .\Delta x_i,$$

такъ какъ въ предѣлѣ площадка обращается въ прямую длины

$$f_2(x_i) - f_1(x_i).$$

Ордината же выдѣленной площадки безконечно мало отличается отъ ординаты середины ея лѣвой стороны, такъ что

$$y_c^{(i)} = \frac{f_2(x_i) + f_1(x_i)}{2} + \eta_i .$$

Составивъ теперь произведеніе

$$m_i y_c^{(i)} = \gamma . \left[\frac{f_2(x_i)^2 - f_1(x_i)^2}{2} + \zeta_i \right] . \Delta x_i$$

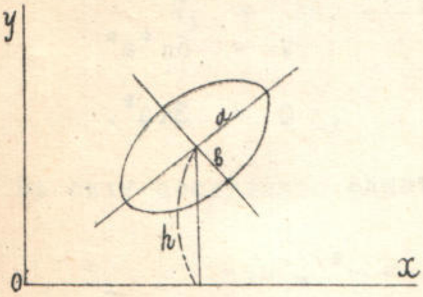
и просуммировавъ его отъ $i = 0$ до $i = n-1$, получимъ въ предѣлѣ

$$y_c . Q \gamma = {}^1/_2\, \gamma \int_a^b [f_2(x)^2 - f_1(x)^2] . dx ;$$

сокративъ на γ и умноживъ обѣ части равенства на 2π, получимъ

$$2\pi . y_c . Q = \pi \int_a^b [f_2(x)^2 - f_1(x)^2] dx = V .$$

Примѣръ 1. Эллипсъ съ полуосями a и b, какъ угодно расположенный относительно осей координатъ (лишь бы площадь его не пересѣкалась осью OX) вращается вокругъ оси OX; разстояніе центра его до оси $OX = h$. Найти объемъ тѣла вращенія (см. черт. 167).



Черт. 167.

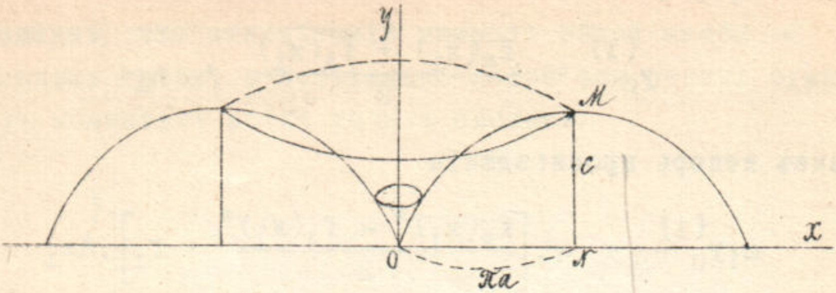
На основаніи теоремы Гюльдена имѣемъ

$$V = \pi ab . 2\pi . h .$$

Примѣръ 2. Циклоида (см. черт. 168) вращается около оси OY. Найти объемъ тѣла вращенія.

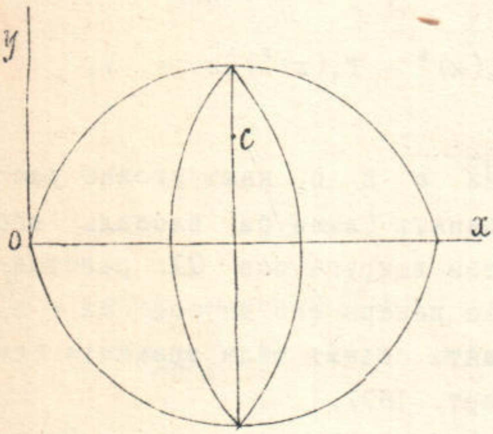
Центръ тяжести площади циклоиды очевидно лежитъ гдѣ-либо на прямой MN, отстоящей отъ OX на разстояніи $= \pi a$ (половина основанія циклоиды). Поэтому

$$V = 3\pi a^2 . 2\pi . \pi a = 6\pi^3 . a^3 .$$



Черт. 168.

Примѣръ 3. Найти координату y_c центра тяжести площади циклоиды (см. черт. 169), пользуясь теоремой Гюльдена.



Черт. 169.

По теоремѣ Гюльдена объемъ, полученный отъ вращенія циклоиды около оси OX, имѣетъ слѣдующее выраженіе:

$$V = 2\pi y_c . Q.$$

Но V и Q намъ извѣстны (см. прим. 3 въ началѣ §4 и примѣч. 2 §1); именно

$$V = 5\pi^2 a^3$$

$$Q = 3\pi a^2.$$

Отсюда

$$y_c = \frac{V}{2\pi Q} = \frac{5\pi^2 a^3}{6\pi^2 a^2} = {}^5/_6\ a.$$

§ 5.

Поверхность тѣла вращенія. Теорема Гюльдена II.

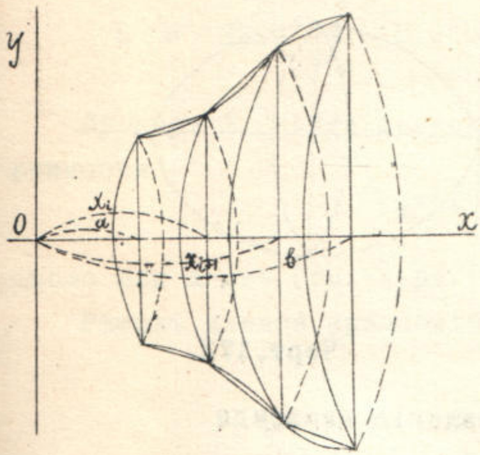
Опредѣленіе. Величиною поверхности вращенія называется предѣлъ поверхности, полученной отъ вращенія ломаной линіи, вписанной въ данную кривую

$$y = f(x),$$

при неограниченномъ увеличенiи ея сторонъ и уменьшенiи каждой до нуля.

Теорема. Величина поверхности вращенiя выражается опредѣленнымъ интеграломъ

$$S = 2\pi \int_a^b y.\sqrt{1+y'^2}\,dx = 2\pi \int_a^b y dS.$$



Черт. 170.

Доказательство. Пусть абсциссы вершинъ ломаной линiи будутъ

$$x_0 = a,\ x_1,\ x_2,\ \ldots\ldots$$

$$\ldots\ x_i,\ x_{i+1},\ \ldots\ldots\ x_n = b;$$

назовемъ

$$x_{i+1} - x_i = \Delta x_i.$$

Поверхность вращенiя прямой $M_i M_{i+1}$ есть боковая поверхность усѣченнаго конуса и потому равна

$$S_i = 2\pi.\frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}\sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2},$$

гдѣ

$$\Delta y_i = f(x_{i+1}) - f(x_i).$$

Въ силу послѣдняго равенства можемъ написать

$$S_i = 2\pi.\frac{2f(x_i) + \Delta y_i}{2}\Delta x_i\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} =$$

$$= 2\pi\left[f(x_i)\sqrt{1 + f'(x_i)^2} + \varepsilon_i\right].\Delta x_i.$$

Вся поверхность равна:

$$S = \underset{n=\infty}{\textit{Пред.}}\sum_{i=0}^{n-1} S_i = \underset{n=\infty}{\textit{Пред.}}\sum_{i=0}^{n-1} 2\pi\left[f(x_i)\sqrt{1+f'(x_i)^2} + \varepsilon_i\right]\Delta x_i =$$

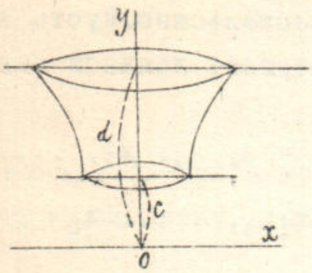
$$= 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx.$$

Замѣчанiе. Если вращенiе происходитъ около оси Y-овъ, и

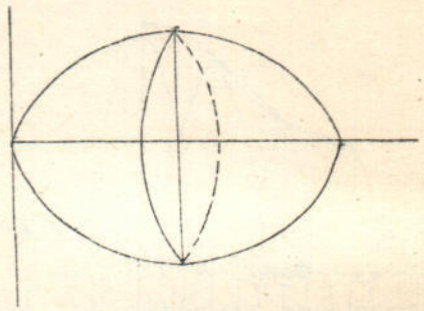
$$x = \varphi(y).$$

есть уравненіе данной кривой, то поверхность вращенія (чертежъ 171):

$$S = 2\pi \int_a^d x dS = 2\pi \int_c^d \varphi(y) \sqrt{1+\varphi'(y)^2}\, dy.$$



Черт. 171.



Черт. 172.

Примѣръ 1. Найти поверхность вращенія циклоиды

$$\left| \begin{aligned} x &= a(t - \operatorname{Sin} t) \\ y &= a(1 - \operatorname{Cos} t) \end{aligned} \right.$$

около оси OX (см. черт. 172).

Для искомой поверхности имѣемъ формулу

$$S = 2\pi \int_a^b y dS.$$

Составимъ

$$dS = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Дифференцируя x и y, получимъ:

$$dx = (1 - \operatorname{Cos} t)dt$$

$$dy = a.\operatorname{Sin} t.dt.$$

Далѣе

$$dx^2 + dy^2 = a^2 4\operatorname{Sin}^2 {}^t/_2 .dt^2$$

$$dS = 2a.\operatorname{Sin} {}^t/_2 .dt.$$

Для вычисленія S можно взять дважды интегралъ отъ 0 до π, вслѣдствіе симметричности циклоиды относительно средней линіи:

$$S = 2.2\pi \int_0^\pi a(1-\mathrm{Cos}t)2a.\mathrm{Sin}\,{}^t/_2.dt = 16\pi a^2 \int_0^\pi \mathrm{Sin}^3\,{}^t/_2.dt.$$

Положивъ

$$t = 2u \qquad dt = 2du$$

и измѣнивъ предѣлы съ 0 и π на 0 и $\pi/_2$, получимъ:

$$S = 32\pi a^2 \int_0^{\pi/_2} \mathrm{Sin}^3 u du = 32\pi a^2\, {}^2/_3 = {}^{64}/_3\, \pi a^2.$$

Примѣръ 2. Найти поверхность, образованную вращеніемъ окружности

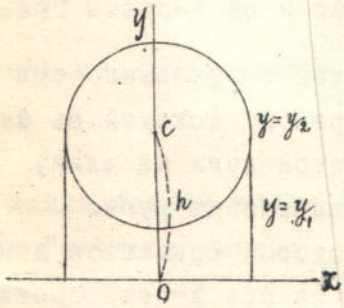
$$x^2 + (y-h)^2 = R^2$$

около оси X-овъ (см. черт. 173).

Рѣшивъ данное уравненіе относительно y, найдемъ два значенія для y:

$$y_1 = h - \sqrt{R^2 - x^2}$$

$$y_2 = h + \sqrt{R^2 - x^2}.$$



Черт. 173.

Полная поверхность будетъ равняться суммѣ двухъ поверхностей, образованныхъ верхнею и нижнею частями окружности, но, вслѣдствіе симметричности этой окружности относительно оси OY, можно ограничиться вычисленіемъ поверхности, лежащей по правую сторону оси OY и удвоить результатъ. Такимъ образомъ

$$S = 2.2\pi \int_0^R y_1 dS_1 + 2.2\pi \int_0^R y_2 dS_2 = 4\pi \left| \int_0^R y_1 dS_1 + \int_0^R y_2 dS_2 \right|.$$

Найдемъ выраженіе дифференціала дуги. Имѣемъ

$$dS^2 = dx^2 + dy^2$$

$$y = h \pm \sqrt{R^2 - x^2}$$

$$dy = \pm \frac{-x.dx}{\sqrt{R^2 - x^2}}.$$

При возведеніи въ квадратъ dy знаки $\pm$ дадутъ знакъ $+$

и, слѣдовательно, dS_1 и dS_2 называются равными. Итакъ

$$dx^2 + dy^2 = \left[1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}\right]dx^2 = \frac{R^2}{R^2 - x^2}\,dx^2;$$

$$dS = \frac{R.dx}{\sqrt{R^2 - x^2}};$$

$$S = 4\pi\int_0^R (y_1+y_2)dS = 8\pi h\int_0^R \frac{R.dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} =$$

$$= 8\pi hR\left[\arcsin\frac{x}{R}\right]_0^R = 4\pi^2 hR = 2\pi R.2\pi h.$$

Поверхность вращенія оказалась равной произведенію изъ длины вращающейся окружности на длину окружности, которую описываетъ центръ вращающейся окружности при вращеніи около оси OX. Этотъ результатъ есть частный случай 2-ой теоремы Гюльдена.

Теорема Гюльдена II. Поверхность, получаемая отъ вращенія дуги плоской кривой около данной прямой, лежащей въ ея плоскости, равняется произведенію длины этой дуги на длину окружности, описанной центромъ тяжести вращающейся дуги.

Принявъ данную прямую, около которой вращается данный отрѣзокъ кривой AB (см. черт. 174) за ось X-овъ, составимъ выраженіе статическаго момента этого отрѣзка относительно оси OX, для чего будемъ разсматривать кривую, какъ предѣлъ вписанной ломаной линіи. Имѣемъ:

$$\text{Дл. хорды } M_iM_{i+1} = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} = \Delta S_i.$$

По самому опредѣленію центра тяжести дуги имѣемъ:

$$y_c \cdot \gamma . S = \underset{n=\infty}{\text{Пред.}} \sum_{i=0}^{n-1} y_c^{(i)}\,\gamma.\Delta S_i,$$

гдѣ γ означаетъ массу единицы длины кривой, S - длину дуги AB, и $y_c^{(i)}$ - центръ тяжести хорды M_iM_{i+1}.

Такъ какъ

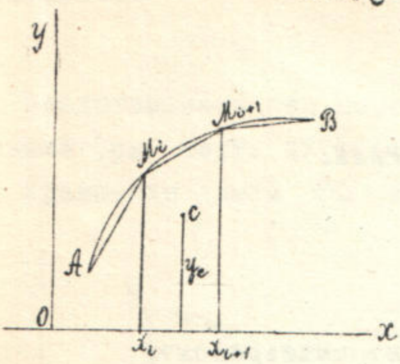
$$y_c^{(i)} = \frac{y_i + y_{i+1}}{2} = \frac{2y_i + \Delta y_i}{2},$$

то

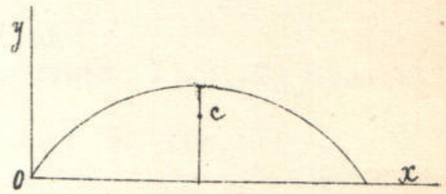
$$y_c \cdot \gamma . S = \text{Пред.}\,\Sigma\,\gamma\,\frac{2y_i + \Delta y_i}{2}\sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} = \gamma\int_a^b y dS.$$

Сокративъ на γ и умноживъ на 2π, получимъ

$$2\pi . y_c . S = 2\pi \int_a^b y dS = S_x .$$



Черт. 174.



Черт. 175.

Примѣръ. Опредѣлить центръ тяжести дуги циклоиды (см. черт. 175).

Зная, что поверхность вращенія циклоиды около оси OX

$$S_x = {}^{64}/_{3}\, \pi a^2$$

и что длина полной вѣтви циклоиды $S = 8a$, на основаніи 2-ой теоремы Гюльдена имѣемъ

$$y_c = \frac{S_x}{2\pi S} = \frac{{}^{64}/_{3}\, \pi a^2}{2\pi . 8a} = {}^{4}/_{3}\, a.$$

------- " -------

ГЛАВА II.

ДВУКРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ.

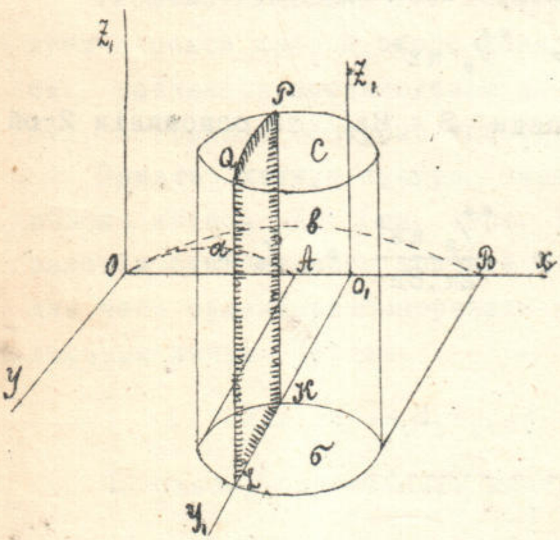
§ 1.

Выраженіе объема двукратнымъ интеграломъ.

Положимъ, что намъ задана поверхность (см. черт. 176)

$$\overline{Z} = f(\overline{X}, \overline{Y}),$$

и на ней нѣкоторымъ контуромъ C выдѣлена опредѣленная часть.



Черт. 176.

Пусть уравненіе проекціи σ контура C на плоскость $XO\overline{Y}$ будетъ

$$F(\overline{X}, \overline{Y}) = 0;$$

это будетъ вмѣстѣ съ тѣмъ и уравненіе самого проектирующаго цилиндра. Требуется опредѣлить объемъ, ограниченный сверху данной поверхностью, съ боковыхъ сторонъ цилиндромъ и снизу плоскостью $XO\overline{Y}$. Пусть плоскость заштрихованнаго сѣченія нашего объема плоскостью $\overline{X}=x$ будетъ $U(x)$, гдѣ $x = OO_1$. Тогда по § 4 главы I:

$$V = \int_a^b U(x)dx,$$

гдѣ

$$OA = a, \quad OB = b.$$

Для вычисленія объема намъ нужно знать площадь $U(x)$, какъ функцію x. Для этого разсуждаемъ слѣдующимъ образомъ. Линія

PQ опредѣляется, какъ пересѣченіе поверхности

$$\bar{Z} = f(\bar{X}, \bar{Y})$$

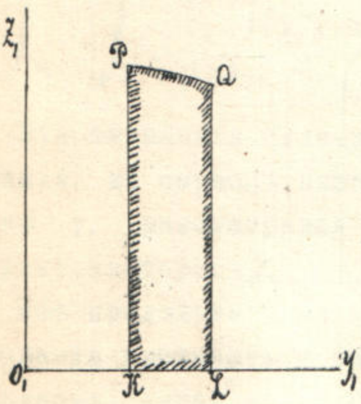
и плоскости

$$\bar{X} = x.$$

Представляемъ это пересѣченіе для ясности на отдѣльномъ чертежѣ (см. черт. 177).

Уравненіе линіи PQ въ плоскости сѣченія Y_1, O_1, Z_1 будетъ

$$\bar{Z} = f(x, \bar{Y})$$



Черт.177.

и поэтому площадь сѣченія

$$U(x) = \int_{\bar{Y}=O_1K}^{\bar{Y}=O_1L} f(x, \bar{Y})\,d\bar{Y},$$

гдѣ O_1K и O_1L суть значенія $\bar{Y}$, получаемыя изъ уравненія контура σ

$$F(\bar{X}, \bar{Y}) = 0$$

при $\bar{X} = x$; положимъ

$$\bar{Y}_1 = \varphi_1(x) = O_1K,$$

$$\bar{Y}_2 = \varphi_2(x) = O_1L;$$

тогда

$$U(x) = \int_{\bar{Y}=\varphi_1(x)}^{\bar{Y}=\varphi_2(x)} f(x, \bar{Y})\,d\bar{Y}$$

и

$$V = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, \bar{Y})\,d\bar{Y}\right] dx,$$

причемъ, при интегрированіи по y, x считается постояннымъ.

Если пересѣчемъ данное тѣло плоскостями $\parallel XOZ$ (см. черт. 178), то искомый объемъ будетъ равенъ

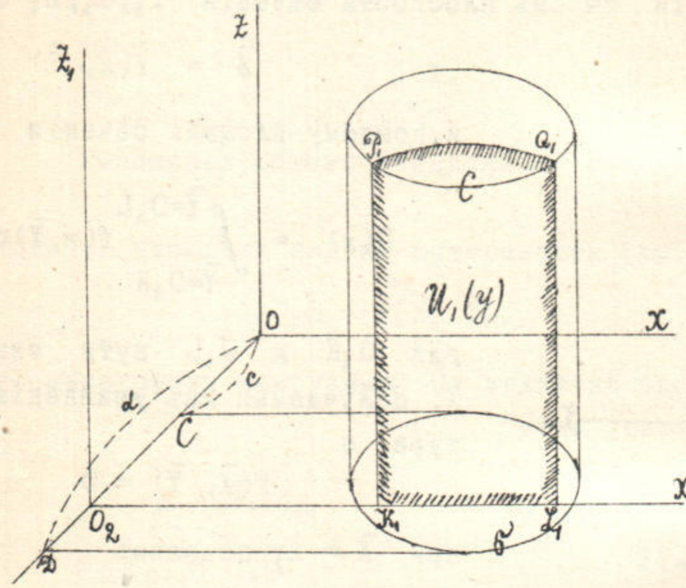
$$V = \int_c^d U_1(y)\,dy,$$

гдѣ $U_1(y)$ есть площадь сѣченія нашего объема плоскостью $\bar{Y}=y$, выраженная въ функціи отрѣзка $OO_2 = y$.

Уравненіе линіи P_1Q_1 получится, если въ уравненіи

$$\bar{Z} = f(\bar{X}, \bar{Y})$$

положить $\bar{Y} = y$, так что $\bar{Z} = f(\bar{X}, y)$ представляетъ уравненіе линіи P_1Q_1 въ плоскости сѣченія.



Черт. 178.

Тогда для площади $U_1(y)$ имѣемъ выраженіе:

$$U_1(y) = \int_{\bar{X}=O_2K_1}^{\bar{X}=O_2L_1} f(\bar{X}, y)\,d\bar{X},$$

гдѣ O_2K_1 и O_2L_1 суть значенія $\bar{X}$, которыя получаются изъ уравненія контура σ:

$$F(\bar{X}, \bar{Y}) = 0 \quad \text{при} \quad \bar{Y} = y.$$

Пусть

$$O_2K_1 = \psi_1(y)$$

$$O_2L_1 = \psi_2(y).$$

Подставляя эти предѣлы въ выраженіе интеграла $U_1(y)$, получимъ:

$$U_1(x) = \int_{x=\psi_1(y)}^{x=\psi_2(y)} f(x, y)\,dx.$$

Объемъ тѣла:

$$V = \int_c^d \left[\int_{x=\psi_1(y)}^{x=\psi_2(y)} f(x,y)dx\right]dy,$$

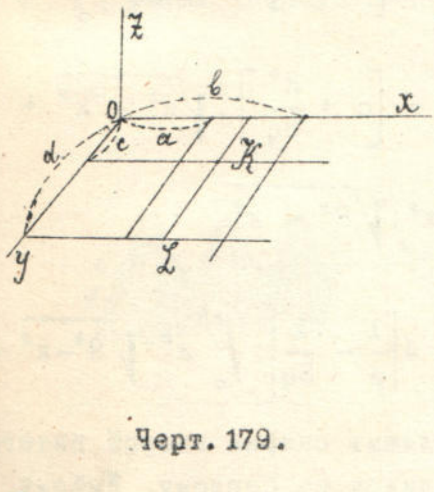
причемъ, при интегрированіи по x, y считается постояннымъ числомъ.

Итакъ, искомый объемъ V имѣетъ двоякое выраженіе

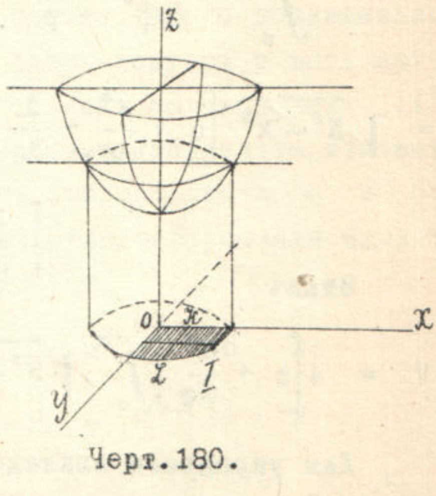
$$\int_a^b \left[\int_{y=\varphi_1(x)}^{y=\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right]dx \quad \text{и} \quad \int_c^d \left[\int_{x=\psi_1(y)}^{x=\psi_2(y)} f(x,y)dx\right]dy.$$

Эти выраженія отличаются другъ отъ друга порядкомъ интегрированія; въ первомъ выраженіи сперва интегрированіе производится по y, разсматривая x какъ постоянное, и потомъ по x, во второмъ наоборотъ.

Изъ предыдущаго видно, что вообще измѣненіе порядка интегрированія измѣняетъ и предѣлы интеграла по каждой буквѣ. Только въ одномъ случаѣ предѣлы не зависятъ отъ порядка интегрированія, когда контуръ σ прямоугольникъ со сторонами, параллельными осямъ координатъ (см. черт. 179).



Черт. 179.



Черт. 180.

Въ этомъ случаѣ

$$V = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)dy\right]dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx\right]dy.$$

Примѣръ 1. Вычислить объемъ, ограниченный параболоидомъ

$$z - c = \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q},$$

цилиндромъ

$$x^2 + y^2 = R^2$$

и плоскостью

$$z = 0.$$

Вслѣдствіе симметричности параболоида (см. черт. 180) относительно двухъ координатныхъ плоскостей мы можемъ ограничиться вычисленіемъ $\frac{1}{4}$ всего объема, лежащей въ I углѣ. Производя внутреннее интегрированіе по y, мы будемъ имѣть предѣлы интегрированія для y:

$$0 \text{ и } KL = \sqrt{R^2 - x^2};$$

предѣлы по x будутъ 0 и R.

Такимъ образомъ:

$$V = 4\int_0^R \left[\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \left(c + \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q}\right) dy\right] dx.$$

Выполнимъ сначала внутреннее интегрированіе, считая при этомъ x постояннымъ. Имѣемъ:

$$\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \left[c + \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q}\right] dy = \left[cy + \frac{x^2}{p}\, y + \frac{y^3}{3q}\right]_0^{\sqrt{R^2-x^2}} =$$

$$= \sqrt{R^2-x^2}\left[c + \frac{x^2}{p} + \frac{1}{3q}(R^2-x^2)\right] = \left[c + \frac{R^2}{3q}\right].\sqrt{R^2-x^2} +$$

$$+ \left[\frac{1}{p} - \frac{1}{3q}\right].x^2.\sqrt{R^2-x^2}.$$

Итакъ

$$V = 4\left[c + \frac{R^2}{3q}\right]\int_0^R \sqrt{R^2-x^2}\, dx + 4\left[\frac{1}{p} - \frac{1}{3q}\right]\int_0^R x^2\sqrt{R^2-x^2}\, dx.$$

Для упрощенія выкладокъ вычисляемъ сперва второй интегралъ, который, какъ увидимъ ниже, приводится къ первому. Имѣемъ, интегрируя по частямъ:

$$\int_0^R x^2\sqrt{R^2-x^2}\, dx = \int_0^R x.d\left[-\frac{1}{3}(R^2-x^2)^{3/2}\right] =$$

$$= \left[-\frac{x}{3}(R^2-x^2)^{3/2}\right]_0^R + \frac{1}{3}\int_0^R (R^2-x^2)^{3/2}\, dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^R R^2(R^2-x^2)^{1/2}\,dx - \frac{1}{3}\int_0^R x^2(R^2-x^2)^{1/2}\,dx,$$

откуда

$$\int_0^R x^2(R^2-x^2)dx = \frac{R^2}{4}\int_0^R \sqrt{R^2-x^2}\,dx.$$

Теперь

$$V = 4\left[c + \frac{R^2}{3q} + \frac{R^2}{4p} - \frac{R^2}{12q}\right]\int_0^R \sqrt{R^2-x^2}\,dx =$$

$$= 4\left[c + \frac{R^2}{4p} + \frac{R^2}{4q}\right]\frac{\pi R^2}{4} = \pi R^2\left[c + \frac{R^2}{4}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)\right].$$

Примѣръ 2. Поверхность

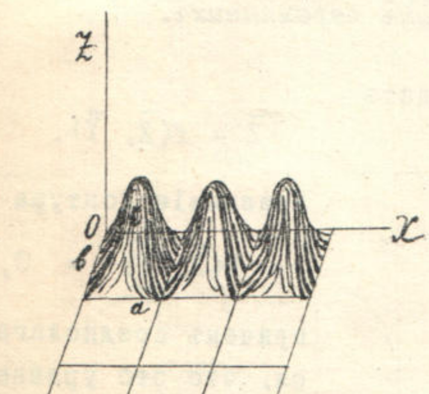
$$z = c.\mathrm{Sin}^2\left(\frac{\pi.x}{a}\right).\mathrm{Sin}^2\left(\frac{\pi.y}{b}\right)$$

образуетъ надъ плоскостью XOY безчисленное множество холмообразныхъ возвышенiй, опирающихся на прямоугольники, которые образуются прямыми

$$\bar{X} = ka, \qquad \bar{X} = (k+1)a,$$

$$\bar{Y} = lb, \qquad \bar{Y} = (l+1)b$$

(k и l цѣлыя числа). Найти объемъ одного такого возвышенiя.



Черт. 181:

Здѣсь контуръ σ есть прямоугольникъ со сторонами || ными осямъ координатъ, причемъ длины сторонъ равны a и b; предѣлы интегрированiя будутъ постоянны:

$$0 \text{ и } a \text{ по } x,$$

$$0 \text{ и } b \text{ по } y$$

(или ka и $(k+1)a$ по x, lb и $(l+1)b$ - по y). Искомый объемъ

$$V = c.\int_{x=0}^{a}\left[\int_{y=0}^{b}\mathrm{Sin}^2\left(\frac{\pi.y}{b}\right)dy\right]\mathrm{Sin}^2\left(\frac{\pi.x}{a}\right)dx.$$

Такъ какъ внутреннiй интегралъ по y - есть постоянное число, то можно его вынести за знакъ интеграла по x, и тогда V представится произведенiемъ двухъ простыхъ интеграловъ:

$$V = c.\int_0^a \sin^2\left(\frac{\pi . x}{a}\right)dx \, . \int_0^b \sin^2\left(\frac{\pi . y}{b}\right)dy.$$

Полагая $x = \frac{a}{\pi}.t$, имѣемъ:

$$\int_0^a \sin^2\left(\frac{\pi . x}{a}\right)dx = \frac{a}{\pi}\int_0^\pi \sin^2 t.dt =$$

$$= \frac{a}{\pi}\int_0^\pi \frac{1 - \cos 2t}{2}\, dt = \frac{a}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}\left(\sin 2t\right)_0^\pi\right] = \frac{a}{2}.$$

Точно такъ же

$$\int_0^b \sin^2\left(\frac{\pi . y}{b}\right)dy = \frac{b}{2},$$

и

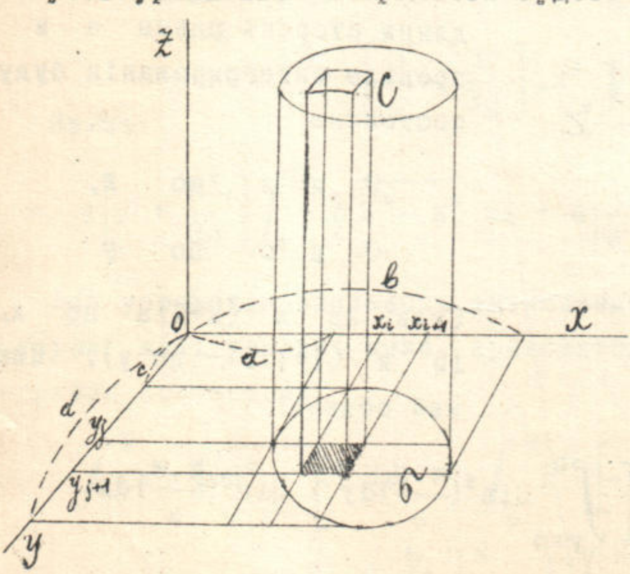
$$V = {}^1/_4\, abc.$$

§ 2.

Выраженiе площади и объема въ видѣ предѣла двойной суммы, зависящей отъ двухъ перемѣнныхъ.

Пусть уравненiе поверхности будетъ

$$\bar{Z} = f(\bar{X}, \bar{Y}).$$



Черт. 182.

Уравненiе контура σ :-

$$F(\bar{X}, \bar{Y}) = 0,$$

причемъ предполагается, что это уравненiе можетъ быть рѣшено относительно $\bar{Y}$, и $\bar{Y}$ имѣетъ два значенiя:

$$\bar{Y}_1 = \varphi_1(x),$$

$$\bar{Y}_2 = \varphi_2(x).$$

Положимъ для опредѣленности, что

$$\overline{Y}_1 < \overline{Y}_2.$$

Проводимъ рядъ плоскостей $\parallel$ OYZ:

$$\overline{X} = a,\ x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_i,\ x_{i+1},\ \ldots\ x_{n-1},\ x_n = b,$$

и другой рядъ плоскостей $\parallel$ OXZ:

$$\overline{Y} = c,\ y_1,\ y_2,\ \ldots\ y_j,\ y_{j+1},\ \ldots\ y_{m-1},\ y_m = d.$$

Назовемъ

$$x_{i+1} - x_i = \Delta x_i$$

$$y_{j+1} - y_j = \Delta y_j.$$

Тогда площадь заштрихованнаго прямоугольника будетъ

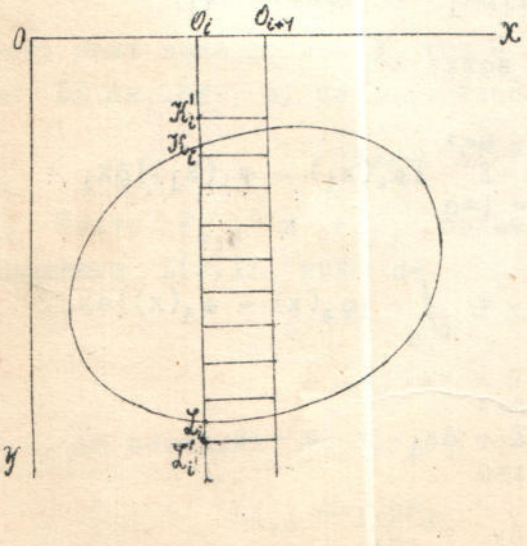
$$\Delta x_i . \Delta y_j .$$

Теорема. Площадь Q, ограниченная контуромъ σ и объемъ V, ограниченный данной поверхностью, цилиндромъ и плоскостью XOY, опредѣляются, какъ предѣлы слѣдующихъ суммъ:

$$Q = \mathop{\textit{Пред.}}_{\substack{n=\infty \\ m=\infty}} \sum_i \sum_j \Delta x_i . \Delta y_j$$

$$V = \mathop{\textit{Пред.}}_{\substack{n=\infty \\ m=\infty}} \sum_i \sum_j f(x_i,\ y_j) \Delta x_i . \Delta y_j ,$$

причемъ въ обѣихъ суммахъ суммированіе распространяется лишь на тѣ прямоугольники, которые хотя частью лежатъ внутри контура σ.



Черт. 183.

Доказательство. Обращаемся сперва къ суммѣ

$$\sum \sum \Delta x_i . \Delta y_j .$$

Будемъ суммировать элементарные прямоугольники, содержащіе общій множитель:

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i .$$

Вынося Δx_i, какъ постоянное, за знакъ второй суммы, получимъ:

$$\sum_i \sum_j \Delta x_i . \Delta y_i = \sum_i (\Delta x_i . \sum_j \Delta y_i).$$

Далѣе

$$\sum_j \Delta y_j$$

есть сумма высотъ прямоугольниковъ, лежащихъ внутри полосы, построенной на основаніи

$$\Delta x_i = O_i O_{i+1};$$

поэтому

$$\sum_j \Delta y_j = K_i' L_i' = K_i L_i + K_i' K_i + L_i L_i' = K_i L_i + 2\vartheta_i \Delta y,$$

гдѣ ϑ_i есть положительная правильная дробь, а Δy наибольшее изъ Δy_j.

Такъ какъ

$$O_i K_i = \varphi_1(x_i),$$
$$O_i L_i = \varphi_2(x_i),$$

то далѣе

$$\sum_j \Delta y_j = O_i L_i - O_i K_i + 2\vartheta_i \Delta y = \varphi_2(x_i) - \varphi_1(x_i) + 2\vartheta_i \Delta y.$$

Отсюда имѣемъ

$$\sum_i \sum_j \Delta x_i \Delta y_j = \sum \Delta x_i [\varphi_2(x_i) - \varphi_1(x_i) + 2\vartheta_i \Delta y] =$$

$$= \sum [\varphi_2(x_i) - \varphi_1(x_i)] \Delta x_i + 2\theta \Delta y \sum \Delta x_i,$$

гдѣ θ меньше наибольшаго изъ всѣхъ ϑ_i.

Итакъ

$$\underset{\substack{n=\infty \\ m=\infty}}{\text{Пред.}} \sum \sum \Delta x_i \Delta y_j = \underset{n=\infty}{\text{Пред.}} \sum_{i=0}^{n-1} [\varphi_2(x_i) - \varphi_1(x_i)] \Delta x_i +$$

$$+ \underset{\substack{n=\infty \\ m=\infty}}{\text{Пред.}} 2\theta \Delta y . \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i = \int_a^b [\varphi_2(x) - \varphi_1(x)] dx,$$

такъ какъ

$$\underset{n=\infty}{\text{Пред.}} \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i = b - a$$

$$\underset{m=\infty}{\text{Пред.}} \Delta y = 0,$$

и потому

$$\text{Пред.}_{n=\infty}\ 2\theta\,\Delta y.\sum_{i=0}^{n-1}\Delta x_i = 0.$$

Слѣдовательно:

$$\text{Пред.}\ \sum_i\sum_j \Delta x_i\,\Delta y_j = Q.$$

Обратимся къ доказательству второй части теоремы.

Обозначивъ объемъ призматическаго тѣла, построеннаго на площадкѣ $\Delta x_i.\Delta y_j$, черезъ $V_{i,j}$, докажемъ, что искомый объемъ

$$V = \text{Пред.}_{\substack{n=\infty\\ m=\infty}}\ \sum\sum V_{i,j}\,,$$

причемъ суммированіе распространяется лишь на тѣ элементы $\Delta x_i.\Delta y_j$, которые хотя частью лежатъ внутри контура σ. Въ самомъ дѣлѣ, разность

$$\sum\sum V_{i,j} - V < (\sum\sum\Delta x_i.\Delta y_j - Q)f_o,$$

гдѣ

$$(\sum\sum\Delta x_i.\Delta y_j - Q)$$

есть сумма площадей, выступающихъ за контуръ σ частей пограничныхъ элементовъ, а f_o есть наибольшее значеніе z для этихъ пограничныхъ элементовъ.

При переходѣ къ предѣлу имѣемъ

$$\text{Пред.}\ (\sum\sum\Delta x_i.\Delta y_j - Q) = 0$$

такъ какъ выше доказано, что Q является предѣломъ двойной суммы $\sum\sum\Delta x_i.\Delta y_j$, а, слѣдовательно

$$\text{Пред.}\ \sum\sum V_{i,j} = V.$$

Пусть $F_{i,j}$ и $f_{i,j}$ означаютъ наибольшее и наименьшее значеніе $f(x,y)$ при

$$x_i \leqq x \leqq x_{i+1}$$

$$y_j \leqq y \leqq y_{j+1}\,,$$

т.е. на площадкѣ $\Delta x_i.\Delta y_j$; тогда имѣемъ очевидное неравенство:

$$f_{i,j}.\Delta x_i.\Delta y_j < V_{i,j} < F_{i,j}.\Delta x_i.\Delta y_j.$$

Отсюда $V_{i,j}$ = произведенію $\Delta x_i . \Delta y_j$ на нѣкоторое среднее значеніе $f(x,y)$ на площадкѣ $\Delta x_i . \Delta y_j$, которое по непрерывности функціи $f(x,y)$ безконечно мало (на $\varepsilon_{i,j}$) отличается отъ значенія функціи $f(x_i, y_j)$, т.е.

$$V_{i,j} = \Delta x_i . \Delta y_j . [f(x_i, y_j) + \varepsilon_{i,j}],$$

а полный объемъ

$$V = \textit{Пред.} \sum\sum V_{i,j} =$$

$$= \textit{Пред.} \sum\sum f(x_i, y_j) \Delta x_i . \Delta y_j + \textit{Пред.} \sum\sum \varepsilon_{i,j} . \Delta x_i . \Delta y_j .$$

Пусть ε будетъ наибольшее изъ всѣхъ $\varepsilon_{i,j}$ по абсолютному значенію. Тогда

$$\left| \sum\sum \varepsilon_{i,j} . \Delta x_i . \Delta y_j \right| < \varepsilon . \sum\sum \Delta x_i . \Delta y_j ,$$

откуда

$$\textit{Пред.} \left| \sum\sum \varepsilon_{i,j} . \Delta x_i . \Delta y_j \right| \leqq \textit{Пред.} \varepsilon . \textit{Пред.} \sum\sum \Delta x_i . \Delta y_j =$$

$$= 0.Q = 0,$$

и

$$V = \textit{Пред.} \sum\sum f(x_i, y_j) . \Delta x_i . \Delta y_j .$$

Въ § 1 мы нашли выраженіе V въ видѣ двойного интеграла, разсматриваемаго какъ результатъ двухъ послѣдовательныхъ простыхъ интегрированій надъ функціей $f(x,y)dx\,dy$:

$$V = \iint f(x, y) dx\, dy$$

(предѣлы для краткости не выписаны); теперь мы нашли выраженіе V въ видѣ предѣла двойной суммы, такъ что мы можемъ написать равенство

$$\underset{\substack{n=\infty \\ m=\infty}}{\textit{Пред.}} \sum_i \sum_j f(x_i, y_j) \Delta x_i \Delta y_j = \iint f(x, y) dx\, dy,$$

которое даетъ новое опредѣленіе двойного интеграла - какъ предѣла двойной суммы, зависящей отъ двухъ перемѣнныхъ; это опредѣленіе аналогично опредѣленію простого интеграла какъ предѣла суммы:

$$\int_a^b f(x) dx = \underset{n=\infty}{\textit{Пред.}} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \Delta x_i .$$

Въ частности, при

$$f(x, y) = 1$$

получается представленіе площади двойнымъ интеграломъ:

$$Q = \iint dx\, dy = \underset{\substack{n=\infty \\ m=\infty}}{\text{Пред.}} \sum_i \sum_j \Delta x_i \Delta y_j.$$

§ 3.

Преобразованіе перемѣнной подъ знакомъ двойного интеграла. Выраженіе площади и объема въ криволинейныхъ координатахъ.

Въ § 2 мы дѣлили площадь Q на безконечно малые элементы прямыми, ||'ми осямъ координатъ, т.е. прямыми, уравненія которыхъ были

$$x = \textit{пост.}$$

$$y = \textit{пост.}$$

и тогда безконечно малые элементы имѣли форму прямоугольниковъ. Введемъ новыя координаты u и v, полагая

$$x = \varphi(u, v)$$

$$y = \psi(u, v),$$

причемъ предположимъ, что эти уравненія рѣшаются относительно u и v, т.е. что u и v возможно выразить въ функціи x и y; тогда, по заданнымъ x и y найдутся u и v и обратно, такъ что заданіе u и v опредѣлитъ положеніе точки на плоскости, почему мы и можемъ назвать u и v координатами точки. Будемъ дѣлить площадь Q на безконечно малые элементы кривыми, уравненія которыхъ

$$u = \textit{пост.}$$

$$v = \textit{пост.}$$

и которыя называются *координатными линіями* новой системы. Уравненія этихъ линій въ прямоугольныхъ координатахъ получаются такъ. Уравненіе линіи $u = u_0$ получается въ прямоугольныхъ координатахъ путемъ исключенія v изъ системы

$$\begin{cases} x = \varphi(u_0, v) \\ y = \psi(u_0, v), \end{cases}$$

что даетъ

$$\omega_1(x, y, u_0) = 0.$$

Уравненіе линіи $v = v_0$ получается путемъ исключенія u изъ системы

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v_0) \\ y = \psi(u, v_0), \end{cases}$$

что даетъ

$$\omega_2(x, y, v_0) = 0.$$

Примѣръ 1. Найти координатныя линіи полярной системы

$$\begin{cases} x = r.\cos\theta \\ y = r.\sin\theta. \end{cases}$$

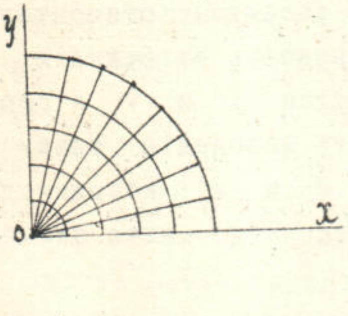
Уравненіе координатной линіи $r = r_0$ получимъ, исключая θ изъ системы:

$$\begin{cases} x = r_0\cos\theta \\ y = r_0\sin\theta, \end{cases}$$

что даетъ намъ

$$x^2 + y^2 = r_0^2,$$

т.е. окружность радіуса r_0 съ центромъ въ началѣ координатъ (см. черт. 184).



Черт. 184.

Координатная линія $\theta = \theta_0$ получится исключеніемъ r изъ системы

$$\begin{cases} x = r.\cos\theta_0 \\ y = r.\sin\theta_0; \end{cases}$$

это даетъ

$$y = x.\mathrm{tg}\,\theta_0$$

- прямая, проходящія через начало подъ угломъ θ_0 къ оси X-овъ; при $\theta = 0$ получается OX, при $\theta = \pi/2$ - OY.

Примѣръ 2. Дана система

$$\left| \begin{array}{l} x = a\rho.\mathrm{Cos}\,\varphi \\ y = b\rho.\mathrm{Sin}\,\varphi. \end{array} \right.$$

Найти координатныя линіи.

Полагая $\rho = \rho_o$ и исключая φ изъ системы

$$\left| \begin{array}{l} x = a\rho_o\mathrm{Cos}\,\varphi \\ y = b\rho_o\mathrm{Sin}\,\varphi, \end{array} \right.$$

получимъ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \rho_o^2 .$$

Это эллипсы съ центромъ въ началѣ координатъ и съ полуосями

$$a\rho_o \quad \text{и} \quad b\rho_o .$$

Полагая $\varphi = \varphi_o$, получимъ:

$$x = a\rho.\mathrm{Cos}\,\varphi_o$$

$$y = b\rho.\mathrm{Sin}\,\varphi_o,$$

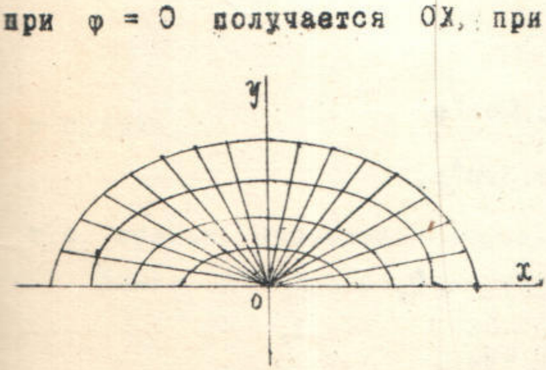
откуда находимъ

$$y = \frac{b}{a}\,\mathrm{tg}\,\varphi_o.x$$

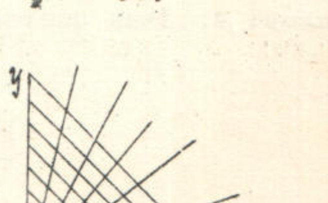
- это прямыя, проходящія черезъ начало и наклоненныя къ оси OX подъ угломъ α, для котораго

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{b}{a}\,\mathrm{tg}\,\varphi_o;$$

при $\varphi = 0$ получается OX, при $\varphi = \pi/_2$ - OY.



Черт. 185.



Черт. 186.

Примѣръ 3. Дана система:

$$\left| \begin{array}{l} x = a\rho.\mathrm{Cos}^2\varphi \\ y = b\rho.\mathrm{Sin}^2\varphi \end{array} \right.$$

Здѣсь линіи $\rho = \rho_0$ получаются исключеніемъ φ изъ системы

$$\left| \begin{aligned} x &= a\rho_0 \operatorname{Cos}^2\varphi \\ y &= b\rho_0 \operatorname{Sin}^2\varphi \end{aligned} \right.$$

и будутъ

$$\frac{x}{a\rho_0} + \frac{y}{b\rho_0} = 1,$$

т.е. прямыя, параллельныя между собою и отсѣкающія на осяхъ координатъ отрѣзки $a\rho_0$, $b\rho_0$.

Линіи $\varphi = \varphi_0$ получаются исключеніемъ ρ изъ системы

$$\left| \begin{aligned} x &= a\rho.\operatorname{Cos}^2\varphi_0 \\ y &= b\rho.\operatorname{Sin}^2\varphi_0 \end{aligned} \right.$$

и будутъ

$$y = \frac{b}{a} \operatorname{tg}^2\varphi_0.x,$$

т.е. лучи, выходящіе изъ начала и наклоненные къ OX подъ угломъ α, гдѣ

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a} \operatorname{tg}^2\varphi_0.$$

При $\varphi = 0$ получается OX, при $\varphi = {}^{\pi}/_{2}$ – OY.

Важно замѣтить, что считая $\rho > 0$, мы помощью этой системы можемъ изобразить только линіи, лежащія внутри угла между положительными направленіями координатныхъ осей, такъ какъ x и y выходятъ всегда $\geqq 0$.

Примѣръ 4. Дана система:

$$\left| \begin{aligned} x &= a\rho.\operatorname{Cos}^3\varphi \\ y &= b\rho.\operatorname{Sin}^3\varphi. \end{aligned} \right.$$

Здѣсь линіи $\rho = \rho_0$ будутъ

$$\left[\frac{x}{a\rho_0}\right]^{2/3} + \left[\frac{y}{b\rho_0}\right]^{2/3} = 1,$$

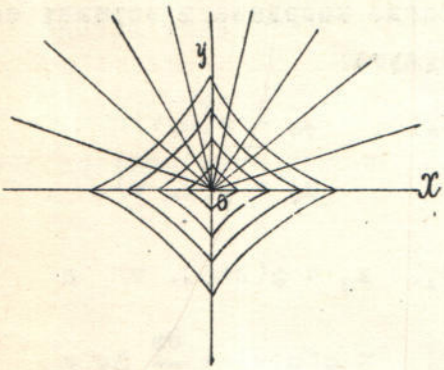
т.е. имѣютъ форму астроиды съ неравными полуосями: $a\rho_0$, $b\rho_0$; линіи $\varphi = \varphi_0$ будутъ лучи

$$y = \frac{b}{a} \operatorname{tg}^3\varphi_0.x,$$

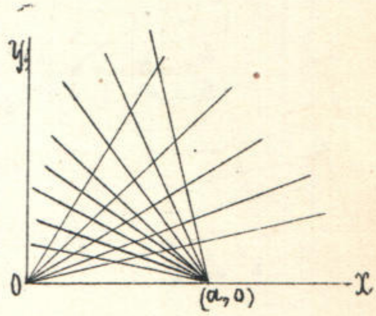
которые наклонены къ OX подъ угломъ

$$\alpha = \operatorname{arctg}\left[\frac{b}{a}\operatorname{tg}^3\varphi_0\right].$$

При $\varphi = 0$ выходитъ OX и при $\varphi = \pi/_2$ – OY.



Черт. 187.



Черт. 188.

Примѣръ 5. Дана система

$$\left|\begin{aligned} x &= \frac{a.u}{u+v} \\ y &= \frac{a}{u+v}. \end{aligned}\right.$$

Линіи $u = u_0$ получаются исключеніемъ v изъ системы

$$\left|\begin{aligned} x &= \frac{au_0}{u_0+v} \\ y &= \frac{a}{u_0+v} \end{aligned}\right.$$

и будутъ

$$x = y.u_0,$$

т.е. прямыя, проходящія черезъ начало.

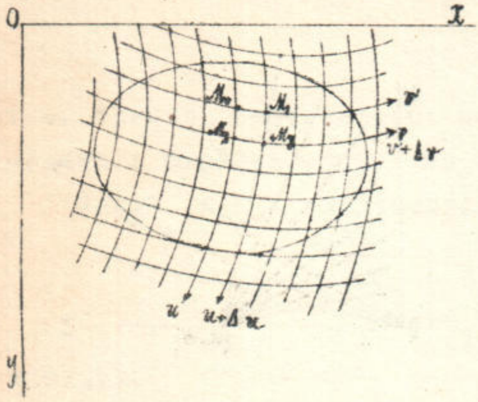
Линіи $v = v_0$ получаются исключеніемъ u изъ системы

$$\left|\begin{aligned} x &= \frac{au}{u+v_0} \\ y &= \frac{a}{u+v_0}, \end{aligned}\right.$$

и будутъ $a - x = v_0y$, т.е. прямыя, проходящія черезъ точку (a, 0).

1. Найдемъ выраженіе площади въ криволинейныхъ координатахъ. Для этого составляемъ выраженіе безконечно малой площадки $M_0M_1M_2M_3$ (см. черт. 189), образованной пересѣченіемъ координатныхъ линій

$$u,\ u+\Delta u,\ v,\ v+\Delta v.$$



Черт. 189.

Тогда координаты вершинъ ея будутъ:

$$M_0:\qquad x_0 = \varphi(u,v)$$

$$y_0 = \psi(u,v).$$

$$M_1:\quad x_1 = \varphi(u+\Delta u,\ v) \equiv \varphi(u,v) + \frac{\partial\varphi}{\partial u}\Delta u = x_0 + \frac{\partial\varphi}{\partial u}\Delta u$$

$$y_1 = \psi(u+\Delta u,\ v) \equiv \psi(u,v) + \frac{\partial\psi}{\partial u}\Delta u = y_0 + \frac{\partial\psi}{\partial u}\Delta u.$$

$$M_2:\quad x_2 = \varphi(u,\ v+\Delta v) \equiv \varphi(u,v) + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\Delta v = x_0 + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\Delta v$$

$$y_2 = \psi(u,\ v+\Delta v) \equiv \psi(u,v) + \frac{\partial\psi}{\partial v}\Delta v = y_0 + \frac{\partial\psi}{\partial v}\Delta v.$$

$$M_3:\quad x_3 = \varphi(u+\Delta u,\ v+\Delta v) \equiv \varphi(u,v) + \frac{\partial\varphi}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\Delta v = x_0 + \frac{\partial\varphi}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\Delta v$$

$$y_3 = \psi(u+\Delta u,\ v+\Delta v) \equiv \psi(u,v) + \frac{\partial\psi}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial\psi}{\partial v}\Delta v = y_0 + \frac{\partial\psi}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial\psi}{\partial v}\Delta v.$$

Здѣсь знакомъ $\equiv$ мы обозначимъ приближенныя равенства, такъ какъ при разложеніи въ рядъ мы ограничиваемся безконечно малыми 1-го порядка, отбрасывая безконечно малыя высшаго порядка. Соединивъ точки M_0, M_1, M_2, M_3 прямыми линіями, мы получимъ 4-хъ-угольникъ, который, какъ сейчасъ покажемъ, будетъ параллелограммъ; дѣйствительно, его противоположныя стороны равны и параллельны, напримѣръ:

$$M_0M_1 = \text{и} \parallel M_2M_3.$$

Въ самомъ дѣлѣ

$$\text{дл. } M_0M_1 = \sqrt{(x_1-x_0)^2 + (y_1-y_0)^2}\ ;$$

угловой коэффиціентъ прямой M_0M_1 равенъ

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}\ ;$$

$$\text{дл. } M_2M_3 = \sqrt{(x_3-x_2)^2 + (y_3-y_2)^2},$$

угловой коэффиціентъ прямой M_2M_3 равенъ

$$\frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}\ .$$

Но

$$x_1-x_0 = x_3-x_2 = \frac{\partial\varphi}{\partial u}\,\Delta u$$

$$y_1-y_0 = y_3-y_2 = \frac{\partial\psi}{\partial u}\,\Delta u,$$

слѣдовательно

$$\text{дл.}M_0M_1 = \text{дл.}M_2M_3 = \Delta u\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)^2}$$

и ихъ угловые коэффиціенты равны $\dfrac{\partial\psi}{\partial u} : \dfrac{\partial\varphi}{\partial u}$.

Площадь параллелограмма $M_0M_1M_2M_3$ = 2 площадямъ треугольника $M_0M_1M_2$, слѣдовательно, площадь

$$M_0M_1M_2M_3 = 2.\tfrac{1}{2}\left[(x_1-x_0)(y_2-y_0) - (y_1-y_0)(x_2-x_0)\right] =$$

$$= \left|\frac{\partial\varphi}{\partial u}\,\Delta u.\ \frac{\partial\psi}{\partial v}\,\Delta v - \frac{\partial\psi}{\partial u}\,\Delta u.\ \frac{\partial\varphi}{\partial v}\,\Delta v\right| =$$

$$= \left|\frac{\partial\varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial v} - \frac{\partial\psi}{\partial u}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right|\Delta u.\Delta v.$$

Площадь криволинейнаго элемента $M_0M_1M_2M_3$ будетъ отличаться на безконечно малую высшаго порядка, т.е. можетъ быть представлена въ видѣ:

$$\left\{ \left| J \right| + \varepsilon \right\} \Delta u . \Delta v,$$

гдѣ

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Выраженіе $|J|$ въ честь Якоби, который первый разсматривалъ такіе опредѣлители, называется *„якобіанъ"* или *„функціональный опредѣлитель"* криволинейной системы u и v.

Вся площадь Q внутри контура σ будетъ равна

$$Q = \textit{Пред.} \sum_u \sum_v \left\{ |J| + \varepsilon \right\} \Delta u . \Delta v =$$

$$\textit{Пред.} \sum \sum |J| \, \Delta u . \Delta v = \iint |J| \, du \, dv,$$

причемъ предѣлы интегрированія устанавливаются такъ: изъ уравненія контура σ:

$$\Phi(u, v) = 0$$

находимъ два значенія v въ функціи отъ u, это будутъ предѣлы интегрированія по v; предѣлы же интегрированія по u будутъ постоянными и опредѣлятся значеніями u для тѣхъ координатныхъ линій, которыя касаются контура σ.

Примѣръ 1. Опредѣлить $^1/_4$ площади круга радіуса R.

Введемъ координаты

$$x = r . \mathrm{Cos}\, \theta$$

$$y = r . \mathrm{Sin}\, \theta .$$

Тогда искомая площадь будетъ равна

$$Q = \iint |J| \, dr . d\theta ,$$

гдѣ

$$J = \frac{\partial x}{\partial r} . \frac{\partial y}{\partial \theta} - \frac{\partial x}{\partial \theta} . \frac{\partial y}{\partial r} = \mathrm{Cos}\, \theta . r . \mathrm{Cos}\, \theta + r . \mathrm{Sin}\, \theta . \mathrm{Sin}\, \theta = r .$$

При интегрированіи по r предѣлы будутъ (см. черт. 100) 0 и R; при интегрированіи по θ - 0 и $^\pi/_2$.

Итакъ

$$Q = \int_0^{\pi/2} \left[\int_0^R r dr\right] d\theta = \int_0^{\pi/2} \left[\tfrac{1}{2} r^2\right]_0^R =$$

$$= \tfrac{1}{2} R^2 \int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{\pi R^2}{4}.$$

Примръ 2. Опредѣлить площадь $\frac{1}{4}$ эллипса съ полуосями a и b.

Введя координаты

$$\left| \begin{array}{l} x = a\rho.\cos\varphi \\ y = b\rho.\sin\varphi, \end{array} \right.$$

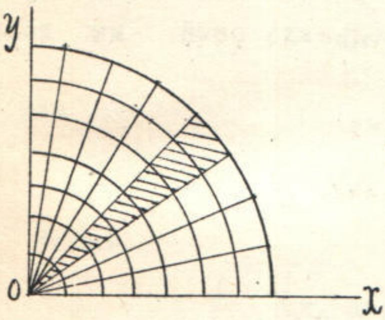
находимъ, что

$$Q = \iint |J|\, d\rho.d\varphi,$$

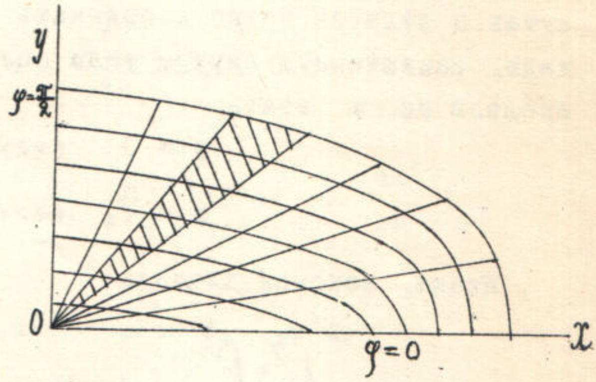
гдѣ

$$J = \frac{\partial x}{\partial\rho}\cdot\frac{\partial y}{\partial\varphi} - \frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial y}{\partial\rho} = a.\cos\varphi.b.\rho.\cos\varphi + a\rho.\sin\varphi.b.\sin\varphi =$$

$$= ab\rho.$$



Черт. 190.



Черт. 191.

Такъ какъ координатныя линіи (см. черт. 191) будутъ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \rho^2$$

$$y = \frac{b}{a}\,\mathrm{tg}\,\varphi.x,$$

то предѣлы интегрированія будутъ для ρ :- 0 и 1, для φ :- 0 и $\pi/2$. Слѣдовательно

$$Q = \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^1 ab\rho . d\rho\right) d\varphi = \int_0^{\pi/2} \left[ab\ {}^1/_2\rho^2\right]_0^1 d\varphi = {}^1/_2\ ab\,{}^{\pi}/_2 = \frac{\pi ab}{4}.$$

Примѣръ 3. Найти площадь, ограниченную кривою

$$\left[\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right]^2 = \frac{x^2}{h^2} + \frac{y^2}{k^2}.$$

Полагая

$$x = a\rho . \mathrm{Cos}\,\varphi$$

$$y = b\rho . \mathrm{Sin}\,\varphi$$

въ этомъ уравненіи, получаемъ:

$$\rho^4 = \rho^2 \left[\frac{a^2}{h^2} \mathrm{Cos}^2\varphi + \frac{b^2}{k^2} \mathrm{Sin}^2\varphi\right],$$

откуда

$$\rho = 0 \quad \text{и} \quad \rho^2 = \frac{a^2}{h^2} \mathrm{Cos}^2\varphi + \frac{b^2}{k^2} \mathrm{Sin}^2\varphi$$

- это будутъ предѣлы интегрированія по ρ.

Чтобы найти предѣлы по φ, замѣтимъ, что наша кривая замкнутая и дѣлится осями координатъ на 4 равныя части. Беря $^1/_4$ площади, заключенную внутри угла положительныхъ осей, мы должны предѣлы по φ взять

$$\varphi = 0 \quad \textit{(ось X-овъ)}$$

$$\varphi = {}^{\pi}/_2 \quad \textit{(ось У-овъ)}.$$

Итакъ, искомая площадь

$$Q = 4 \int_0^{\pi/2}\int_0^{\rho} ab\rho . d\rho . d\varphi = 4ab \int_0^{\pi/2} {}^1/_2\ \rho^2 d\varphi =$$

$$= 2ab \int_0^{\pi/2} \left[\frac{a^2}{h^2} \mathrm{Cos}^2\varphi + \frac{b^2}{k^2} \mathrm{Sin}^2\varphi\right] d\varphi = \frac{\pi ab}{2} \left[\frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{k^2}\right],$$

такъ какъ

$$\int_0^{\pi/2} \mathrm{Cos}^2\varphi . d\varphi = \int_0^{\pi/2} \mathrm{Sin}^2\varphi . d\varphi = \frac{\pi}{4}.$$

Примѣръ 4. Найти площадь, ограниченную кривою

$$\left[\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right]^2 = \frac{x^2}{h^2}-\frac{y^2}{k^2}.$$

Полагая

$$x = a\rho.\mathrm{Cos}\,\varphi$$

$$y = b\rho.\mathrm{Sin}\,\varphi,$$

получаемъ изъ предыдущаго уравненія

$$\rho^4 = \rho^2\left[\frac{a^2}{h^2}\mathrm{Cos}^2\varphi-\frac{b^2}{k^2}\mathrm{Sin}^2\varphi\right],$$

откуда

$$\rho = 0 \quad \text{и} \quad \rho^2 = \frac{a^2}{h^2}\mathrm{Cos}^2\varphi-\frac{b^2}{k^2}\mathrm{Sin}^2\varphi$$

Что пределы интегрированія по ρ

Что касается предѣловъ по φ, то замѣтимъ, что наша кривая замкнутая и дѣлится осями координатъ на 4 равныя части; предѣлы интегрированія по φ для $\frac{1}{4}$ площади будутъ:

$$\varphi = 0 \quad \text{и} \quad \varphi = \varphi_0 = \mathrm{arctg}\,(\frac{ak}{bh}),$$

такъ какъ $\rho^2 \geq 0$ при

$$\frac{a^2}{h^2}\mathrm{Cos}^2\varphi-\frac{b^2}{k^2}\mathrm{Sin}^2\varphi \geq 0,$$

откуда

$$\mathrm{tg}^2\varphi \leq \frac{a^2k^2}{b^2h^2}, \quad |\mathrm{tg}\,\varphi| \leq \frac{ak}{bh}.$$

Итакъ

$$Q = 4\int_0^{\varphi_0}\int_0^{\rho} ab\rho.d\rho.d\varphi = 2ab\int_0^{\varphi_0}\rho^2 d\varphi =$$

$$= 2ab\int_0^{\varphi_0}\left[\frac{a^2}{h^2}\mathrm{Cos}^2\varphi-\frac{b^2}{k^2}\mathrm{Sin}^2\varphi\right]d\varphi = 2ab\int_0^{\varphi_0}\left[\frac{a^2}{h^2}(1-\right.$$

$$\left.-\mathrm{Sin}^2\varphi)-\frac{b^2}{k^2}\mathrm{Sin}^2\varphi\right] = 2ab\left\{\frac{a^2}{h^2}\varphi_0 -\right.$$

$$\left.-\left[\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}\right]\int_0^{\varphi_0}\mathrm{Sin}^2\varphi.d\varphi\right\}.$$

Далѣе, полагая $\mathrm{tg}\,\varphi = u$, имѣемъ:

$$\int_0^{\varphi_0} \operatorname{Sin}^2\varphi . d\varphi = \int_0^{\frac{ak}{bh}} \frac{u^2 du}{(1+u^2)^2} = \left[u . \frac{-1}{2(1+u^2)}\right]_0^{\frac{ak}{bh}} +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^{\frac{ak}{bh}} \frac{du}{1+u^2} = -\frac{1}{2}\frac{abhk}{a^2k^2+b^2h^2} + \frac{1}{2}\varphi_0 .$$

Итакъ, искомая площадь

$$Q = 2ab\left\{\frac{abhk}{2(a^2k^2+b^2h^2)} . \left[\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{a^2}{h^2}-\frac{b^2}{k^2}\right]\varphi_0\right\} =$$

$$= ab\left\{\frac{ab}{hk} + \left[\frac{a^2}{h^2}-\frac{b^2}{k^2}\right] \operatorname{arctg}\left(\frac{ak}{bh}\right)\right\} .$$

Примѣръ 5. Найти площадь завитка кривой

$$\left[\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right]^4 = \frac{xy}{c^2} .$$

Полагая

$$x = a\rho . \operatorname{Cos}^2\varphi$$

$$y = b\rho . \operatorname{Sin}^2\varphi ,$$

находимъ уравненіе кривой въ новыхъ координатахъ:

$$\rho^4 = \frac{ab}{c^2}\rho^2 \operatorname{Sin}^2\varphi . \operatorname{Cos}^2\varphi ,$$

откуда

$$\rho = 0 \quad \text{и} \quad \rho = \frac{\sqrt{ab}}{c} \operatorname{Sin}\varphi . \operatorname{Cos}\varphi$$

таковы предѣлы интегрированія по ρ. Предѣлы по φ опредѣляются такъ: пучекъ касательныхъ въ началѣ координатъ для нашей кривой будетъ

$$xy = 0 ,$$

что даетъ

$$y = 0 \quad \text{и} \quad x = 0 ,$$

т.е. оси координатъ, которымъ отвѣчаетъ

$$\varphi = 0 \quad \text{и} \quad \varphi = \pi/2$$

это и будутъ предѣлы для площади завитка. Якобіанъ для нашей системы равенъ

$$\begin{vmatrix} a.\cos^2\varphi, & b.\sin^2\varphi \\ -2a\rho.\sin\varphi.\cos\varphi, & 2b\rho.\sin\varphi.\cos\varphi \end{vmatrix} = 2ab\rho.\sin\varphi.\cos\varphi,$$

такъ что искомая площадь

$$Q = 2ab\int_0^{\pi/2}\int_0^{\rho} \rho.\sin\varphi.\cos\varphi.d\varphi = ab\int_0^{\pi/2} \rho^2\sin\varphi.\cos\varphi.d\varphi =$$

$$= ab.\frac{ab}{c^2}\int_0^{\pi/2} \sin^3\varphi.\cos^3\varphi.d\varphi = \frac{a^2b^2}{c^2}\int_0^1 t^3(1-t^2)dt \ (\textit{при}$$

$$\sin\varphi = t) = \frac{a^2b^2}{c^2}\left[\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right] = \frac{a^2b^2}{12c^2}.$$

Примѣръ 6. Найти площадь, ограниченную кривою

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} = 1.$$

Полагая

$$x = a\rho.\cos^3\varphi$$

$$y = b\rho.\sin^3\varphi,$$

находимъ изъ уравненія кривой

$$\rho^{2/3} = 1, \quad \rho = 1;$$

предѣлы по ρ будутъ 0 (начало координатъ) и 1. По φ для $^1/_4$ площади предѣлы устанавливаются осями координатъ, т.е. будутъ $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi/_2$.

Якобіанъ системы равенъ

$$\begin{vmatrix} a.\cos^3\varphi, & b.\sin^3\varphi \\ -3a\rho.\cos^2\varphi.\sin\varphi, & 3b\rho.\sin^2\varphi.\cos\varphi \end{vmatrix} = 3ab\rho.\sin^2\varphi.\cos^2\varphi.$$

Искомая площадь

$$Q = 4\int_0^{\pi/2}\int_0^1 3ab\rho.\sin^2\varphi.\cos^2\varphi.d\varphi =$$

$$= 12ab \ . \ ^1/_2 \ . \int_0^{\pi/2} \sin^2\varphi.\cos^2\varphi.d\varphi =$$

$$= 6ab \int_0^{\pi/2} (\mathrm{Sin}^2\varphi - \mathrm{Sin}^4\varphi)\,d\varphi = 6ab\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{\pi}{2}\right] =$$

$$= 6ab\cdot\frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{4} = \frac{3}{8}\pi ab.$$

Примѣръ 7. Найти площадь, ограниченную 4 прямыми

$$y = x, \quad y = {}^1\!/_2 x, \quad y = a - x, \quad y = {}^1\!/_3 (a-x).$$

Беремъ систему

$$\left|\begin{aligned} x &= \frac{au}{u+v} \\ y &= \frac{a}{u+v}\,; \end{aligned}\right.$$

такъ какъ координатныя линіи ея были

$$x = yu_0$$

$$a - x = yv_0\,,$$

то наша площадь ограничена координатными линіями:

$$u = 1, \quad u = 2$$

$$v = 1, \quad v = 3;$$

это и будутъ предѣлы интегрированія по нашимъ перемѣннымъ. Вычисляемъ Якобіанъ:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{av}{(u+v)^2} & -\dfrac{a}{(u+v)^2} \\ -\dfrac{au}{(u+v)^2} & -\dfrac{a}{(u+v)^2} \end{vmatrix} = -\frac{a^2v + a^2u}{(u+v)^4} = \frac{-a^2}{(u+v)^3}\,,$$

отсюда

$$|J| = \frac{a^2}{(u+v)^3}$$

и площадь

$$Q = a^2\int_{u=1}^{2}\int_{v=1}^{3}\frac{du.dv}{(u+v)^3}\,.$$

Интегрируя по v, имѣемъ:

$$\int_1^3 \frac{dv}{(u+v)^3} = \left[-\frac{1}{2(u+v)^2}\right]_{v=1}^{v=3} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(u+1)^2} - \frac{1}{(u+3)^2}\right].$$

Интегрируя теперь по u, находимъ:

$$\int_1^2 \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(u+1)^2} - \frac{1}{(u+3)^2}\right]du = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{u+1} + \frac{1}{u+3}\right]_1^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{4}\right] = \frac{7}{120},$$

$$Q = \frac{7}{120}a^2.$$

Примѣръ 8. Найти площадь, ограниченную параболами

$$y^2 = ax, \quad y^2 = bx \quad (a > b > 0)$$

$$x^2 = hy, \quad x^2 = ky \quad (h > k > 0),$$

причемъ выбрать такъ систему координатъ, чтобы предѣлы интегрированій были постоянными.

Координатныя линіи одной системы должны быть

$$y^2 = ux,$$

другой системы

$$x^2 = vy.$$

Отсюда $xy = uv$ и, слѣдовательно:

$$x^3 = uv^2,$$

$$y^3 = u^2v,$$

т.е. координаты должны быть

$$x = u^{1/3}\, v^{2/3}, \quad y = u^{2/3}\, v^{1/3}.$$

Якобіанъ

$$J = \begin{vmatrix} \frac{1}{3}u^{-2/3}\, v^{2/3} & \frac{2}{3}u^{-1/3}\, v^{1/3} \\ \frac{2}{3}u^{1/3}\, v^{-1/3} & \frac{1}{3}u^{2/3}\, v^{-2/3} \end{vmatrix} = \frac{1}{9} - \frac{4}{9} = -\frac{1}{3},$$

откуда

$$|J| = {}^1/_3$$

и искомая площадь

$$Q = \int_{u=b}^{a}\int_{u=k}^{h} \frac{1}{3}\, du.dv = \frac{1}{3}(a-b)(h-k).$$

Аналитическій выводъ формулы $\iint dx.dy = \iint |J| du.dv.$

Дѣлая въ двойномъ интегралѣ $\iint dx\, dy$ первое интегрированіе по y, пишемъ:

$$\iint dx.dy = \int \left(\int dy\right) dx,$$

причемъ, при интегрированіи по y, x считается постояннымъ.

Полагая

$$x = \varphi(u, v)$$

$$y = \psi(u, v),$$

находимъ

$$dx = \frac{\partial\varphi}{\partial u} du + \frac{\partial\varphi}{\partial v} dv$$

$$dy = \frac{\partial\psi}{\partial u} du + \frac{\partial\psi}{\partial v} dv.$$

Но такъ какъ, при составленіи выраженія dy, мы должны считать x за постоянное число, то $dx = 0$, а потому имѣемъ:

$$dy = \frac{\partial\psi}{\partial u} du + \frac{\partial\psi}{\partial v} dv$$

при условіи

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u} du + \frac{\partial\varphi}{\partial v} dv = 0.$$

Отсюда

$$du = -\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial v}}{\frac{\partial\varphi}{\partial u}} dv;$$

$$dy = \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial v} - \frac{\partial\varphi}{\partial v}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial u}}{\frac{\partial\psi}{\partial u}} dv = \frac{J}{\frac{\partial\varphi}{\partial u}} dv;$$

если дифференціалы старыхъ и новыхъ координатъ считаются числами положительными, то здѣсь

$$J : \frac{\partial\varphi}{\partial u}$$

есть число положительное и можетъ быть замѣнено его численнымъ значеніемъ, и тогда

$$\iint dx\,dy = \int\left[\int\left|\frac{J}{\frac{\partial\varphi}{\partial u}}\right| dv\right]_{x,v} dx,$$

гдѣ указатель x, v означаетъ, что заключенные въ скобки члены должны быть выражены въ функціи x и v. Мѣняя порядокъ интегрированія, получимъ

$$\iint dx\,dy = \int\left[\int\left|\frac{J}{\frac{\partial\varphi}{\partial u}}\right| dx\right]_{x,v} dv\,;$$

но, при интегрированіи по x, мы должны v считать за постоянное и, слѣдовательно, $dv = 0$; тогда имѣемъ

$$dx = \frac{\partial\varphi}{\partial u}\,du$$

или, при $dx > 0$, $dy > 0$ можемъ написать

$$dx = \left|\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right| du,$$

и тогда

$$\iint dx\,dy = \int\left[\int\frac{|J|}{\left|\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right|}\cdot\left|\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right| du\right] dv = \iint |J|\,du\,dv.$$

II. *Выраженіе объема въ криволинейныхъ координатахъ.*

Геометрическій выводъ. Введя координаты

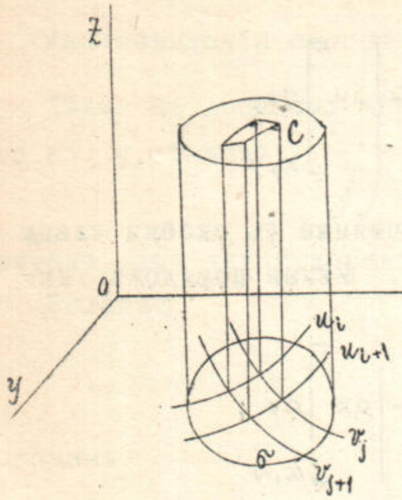
$$x = \varphi(u, v)$$

$$y = \psi(u, v),$$

мы получимъ уравненіе поверхности въ такомъ видѣ:

$$z = f(x,y) = f[\varphi(u,v), \psi(u,v)] = \omega(u,v).$$

Найдемъ теперь выраженіе объема $V_{i,j}$ элементарной призмы, построенной на площадкѣ, образованной координатными линіями u_i, u_{i+1}, v_j, v_{j+1} (см. черт. 192). Величина этой площадки съ точностью до безконечно малыхъ высшаго порядка равна



Черт. 192.

$$|J|du\, dv.$$

Поэтому мы можемъ написать, что элементарный объемъ $V_{i,j}$ заключенъ между двумя предѣлами

$$\textit{наим. зн.}\,\omega(u,v).|J|du dv < V_{i,j} <$$

$$< \textit{наиб. зн.}\,\omega(u,v).|J|du\, dv,$$

гдѣ наименьшее и наибольшее значенія $\omega(u,v)$ взято при

$$u_i \leqq u \leqq u_{i+1}$$

$$v_j \leqq v \leqq v_{j+1};$$

отсюда

$$V_{i,j} = \omega(u_i + \vartheta\Delta u_i, v_j + \vartheta_1\Delta v_j).|J|du\, dv = [\omega(u_i,v_j) +$$

$$+ \varepsilon_{i,j}].|J|du\, dv,$$

или

$$V_{i,j} = \omega(u_i, v_j).|J|du\, dv$$

съ точностью до безконечно малыхъ высшаго порядка. Весь же объемъ

$$V = \textit{Пред.}\sum_i\sum_j V_{i,j} = \textit{Пред.}\sum\sum\omega(u_i,v_j).|J|du\, dv =$$

$$= \iint \omega(u, v)|J|du\, dv.$$

Аналитическій выводъ.

Изъ § 2 мы знаемъ, что

$$V = \iint f(x,y)dx\, dy.$$

Положивъ

$$x = \varphi(u,\ v)$$

$$y = \psi(u,\ v),$$

преобразуемъ выраженіе объема слѣдующимъ образомъ. Имѣемъ

$$\iint f(x,y)\,dx\,dy = \int\Big[\int\limits_{x\ \textit{пост.}} f(x,y)\,dy\Big]dx =$$

$$= \iint\Big[\int \frac{|J|}{\left|\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right|} f(x,y)\,dv\Big]_{x,v} dx = \int\Big[\int \frac{|J|}{\left|\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right|} f(x,y)\,dx\Big]_{x,v} dv =$$

$$= \iint\Big[\int \frac{|J|}{\left|\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right|} f(x,y)\cdot\left|\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right| du\Big]_{u,v} dv = \iint \omega(u,v)\,.\,|J|\,du\,dv.$$

Примѣръ 1. Задача Viviani. Найти объемъ остающейся части шара

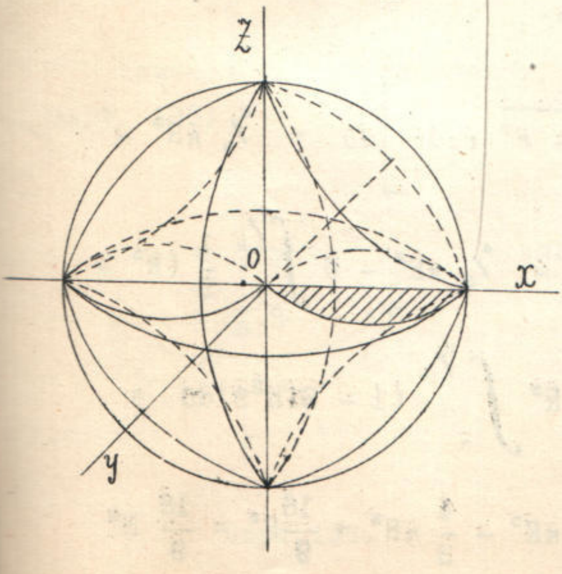
$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2,$$

если отнять тѣ части, которыя вырѣзаются цилиндрами (см. чертежъ 193)

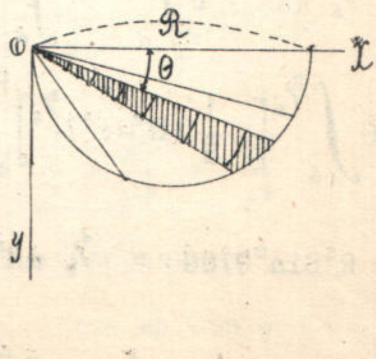
$$x^2 + y^2 \pm Rx = 0$$

или

$$\left[x \pm \frac{R}{2}\right]^2 + y^2 = \left[\frac{R}{2}\right]^2.$$



Черт. 193



Черт. 194.

Введемъ координаты

$$x = r.\cos\theta$$

$$y = r.\sin\theta\ ;$$

якобіанъ этой системы будетъ

$$|J| = r.$$

Искомый объемъ

$$V = {}^4/_3\,\pi R^3 - 8\iint\limits_{(\sigma)}\sqrt{R^2 - r^2}\ r.dr.d\theta,$$

причемъ интегрированіе распространяется по контуру σ, ограничивающему заштрихованнук площадь. Установимъ предѣлы интегрированія.

Изъ уравненія

$$x^2 + y^2 - Rx = 0$$

контура σ, полагая

$$x = r.\cos\theta$$

$$y = r.\sin\theta,$$

имѣемъ

$$r^2 = R.\cos\theta,$$

откуда

$$r = 0 \quad \text{и} \quad r = R.\cos\theta$$

- это предѣлы для r; уголъ θ мѣняется для заштрихованной площади отъ $\theta = 0$ до $\theta = {}^{\pi}/_2$.

Итакъ:

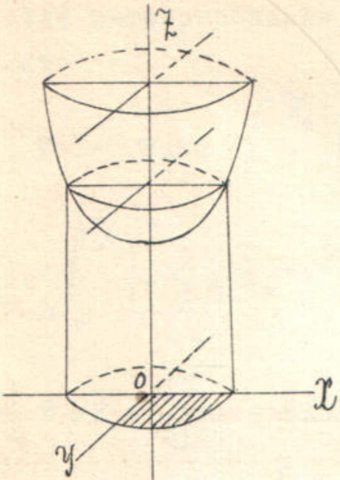
$$V = {}^4/_3\,\pi R^3 - 8\int_0^{\pi/2}\left[\int_0^{R.\cos\theta}\sqrt{R^2 - r^2}\ r.dr\right]d\theta = {}^4/_3\,\pi R^3 -$$

$$- 8\int_0^{\pi/2}\left[-\frac{1}{3}(R^2-r^2)^{3/2}\right]_0^{R.\cos\theta} d\theta = {}^4/_3\,\pi R^3 - 8\int_0^{\pi/2}\frac{1}{3}(R^3 -$$

$$- R^3\sin^3\theta)d\theta = {}^4/_3\,\pi R^3 - \frac{8}{3}R^3\int_0^{\pi/2}(1 - \sin^3\theta)d\theta =$$

$$= \frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{8}{3}R^3\left[\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right] = \frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi R^3 + \frac{16}{9}R^3 = \frac{16}{9}R^3$$

Примѣръ 2. Найти объемъ, заключенный между параболоидомъ



Черт. 195.

$$z - c = \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q}$$

и цилиндромъ

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Введя координаты

$$x = r \operatorname{Cos} \theta$$

$$y = r \operatorname{Sin} \theta$$

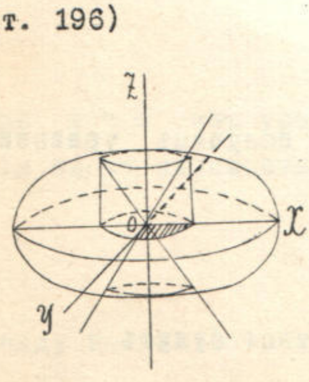
и замѣчая, что предѣлы интегрированія для заштрихованной площади будутъ: по θ - 0 и $\pi/2$, по r - 0 и R, находимъ

$$V = 4 \iint_{(\sigma)} \left[c + \frac{r^2 \operatorname{Cos}^2\theta}{p} + \frac{r^2 \operatorname{Sin}^2\theta}{q} \right] r dr d\theta = 4 \int_0^{\pi/2} \left[\int_0^R \left(c + \frac{r^2 \operatorname{Cos}^2\theta}{p} + \frac{r^2 \operatorname{Sin}^2\theta}{q}\right) r dr \right] d\theta =$$

$$= 4 \int_0^{\pi/2} \left[c \cdot \frac{1}{2} R^2 + \frac{\operatorname{Cos}^2\theta}{p} \cdot \frac{1}{4} R^4 + \frac{\operatorname{Sin}^2\theta}{q} \frac{1}{4} R^4 \right] d\theta =$$

$$= 4 \left[\frac{cR^2}{2} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{R^4}{4p} \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{R^4}{4q} \cdot \frac{\pi}{4} \right] = \pi R^2 \left[c + \frac{R^4}{4}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) \right].$$

Примѣръ 3. Найти объемъ, вырѣзанный изъ эллипсоида (см. черт. 196)



Черт. 196.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 2$$

конусомъ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}.$$

Введемъ координаты

$$x = a\rho \operatorname{Cos} \varphi$$

$$y = b\rho \operatorname{Sin} \varphi.$$

Якобіанъ этой системы

$$|J| = ab\rho.$$

Изъ уравненія эллипсоида находимъ

$$\frac{z^2}{c^2} = 2 - \rho^2$$

$$z = c\sqrt{2 - \rho^2};$$

изъ уравненія конуса

$$\frac{z^2}{c^2} = \rho^2$$

$$z = c\rho.$$

Поэтому искомый объемъ

$$V = 8 \iint_{(\sigma)} \left[c\sqrt{2 - \rho^2} - c\rho \right] ab\rho . d\rho . d\varphi$$

причемъ интегрированіе распространено по заштрихованной площади.

Чтобы найти уравненіе контура σ, который есть проекція на плоскость XOY линіи пересѣченія данныхъ поверхностей, рѣшимъ совмѣстно уравненія:

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 2 \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{z^2}{c^2}; \end{array} \right.$$

находимъ

$$2\frac{z^2}{c^2} = 2$$

$$z^2 = c^2.$$

Исключая z^2 изъ перваго уравненія, получимъ уравненіе контура σ:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Такъ какъ координатныя линіи новой системы будутъ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \rho^2$$

$$y = \frac{b}{a}\,tg\,\varphi . x,$$

то предѣлы интегрированія будутъ: по ρ - 0 и 1; по φ - 0 и $\frac{\pi}{2}$.

Итакъ:

$$V = 8abc \int_0^{\pi/2} \left[\int_0^1 \sqrt{2-\rho^2} - \rho \quad \rho . d\rho \right] d\rho =$$

$$= 8abc \int_0^{\pi/2} \left[-\frac{1}{3}(2-\rho^2)^{3/2} - \frac{1}{3}\rho^3 \right]_0^1 d\varphi = 8abc \int_0^{\pi/2} \left[-\frac{1}{3} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{3}\, 2\sqrt{2} - \frac{1}{3} \right] d\varphi = 8abc\, \frac{2}{3}(\sqrt{2} - 1) \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{8}{3}\pi abc(\sqrt{2} - 1).$$

Примѣръ 4. Найти объемъ, ограниченный поверхностью

$$\left| \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right|^2 + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

и тремя плоскостями координатъ

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

Полагая

$$x = a\rho . Cos^2\varphi$$

$$y = b\rho . Sin^2\varphi,$$

находимъ уравненіе поверхности

$$\frac{z^2}{c^2} = 1 - \rho^2$$

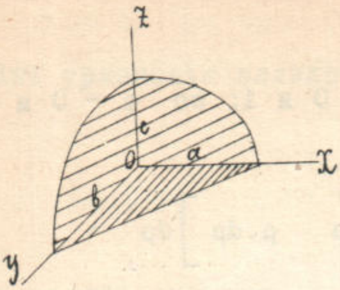
$$z = c\sqrt{1-\rho^2}.$$

При $z = 0$ изъ уравненія поверхности находимъ линію пересѣченія ея съ плоскостью XOY ; здѣсь это будетъ

$$\left[\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right]^2 = 1$$

или между положительными направленіями осей координатъ:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$



Черт. 197.

Отсюда слѣдуетъ, что площадь интегрированія есть прямоугольн. треугольникъ съ катетами a и b, слѣдовательно, предѣлы по ρ будутъ 0 и 1, по φ - 0 и $\pi/2$.

Якобіанъ системы равенъ

$$2ab\rho.\text{Sin}\varphi.\text{Cos}\varphi.$$

Искомый объемъ будетъ

$$V = 2ab\int_0^{\pi/2}\int_0^1 c\sqrt{1-\rho^2}\;\rho.\text{Sin}\varphi.\text{Cos}\varphi.d\rho.d\varphi =$$

$$= 2abc\int_0^{\pi/2}\left[-\frac{1}{3}(1-\rho^2)^{3/2}\right]_0^1 \text{Sin}\varphi.\text{Cos}\varphi.d\varphi =$$

$$= \frac{2}{3}abc\int_0^{\pi/2}\text{Sin}\varphi.\text{Cos}\varphi.d\varphi = \frac{2}{3}abc.\frac{1}{2} = \frac{1}{3}abc.$$

Примѣръ 5. Найти полный объемъ, ограниченный поверхностью:

$$\left[\frac{x}{a}\right]^{2/3} + \left[\frac{y}{b}\right]^{2/3} + \left[\frac{z}{c}\right]^{2/3} = 1.$$

Полагая

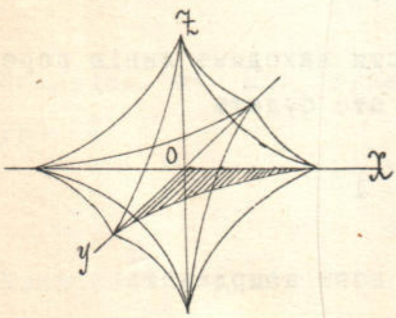
$$x = a\rho.\text{Cos}^3\varphi$$

$$y = b\rho.\text{Sin}^3\varphi,$$

находимъ изъ уравненія поверхности:

$$\left[\frac{z}{c}\right]^{2/3} = 1-\rho^{2/3},$$

$$z = c\left[1-\rho^{2/3}\right]^{3/2}.$$



Черт. 198.

Для $1/8$ искомаго объема, содержащейся между положительными направленіями координатныхъ осей, площадь интегрированія будетъ (на чертежѣ 198 заштрихована) $1/4$ площади кривой

$$\left[\frac{x}{a}\right]^{2/3} + \left[\frac{y}{b}\right]^{2/3} = 1$$

между осями OX и OY; отсюда слѣдуютъ предѣлы интегрированія: по ρ... 0 и 1, по φ... 0 и $\pi/_2$.

Якобіанъ равенъ

$$3ab\rho.\text{Sin}^2\varphi.\text{Cos}^2\varphi.$$

Итакъ, искомый объемъ:

$$V = 8\int_0^{\pi/_2}\int_0^1 c\left[1-\rho^{2/3}\right]^{3/2}.3ab\rho.\text{Sin}^2\varphi.\text{Cos}^2\varphi.d\rho.d\varphi =$$

$$= 24abc\int_0^{\pi/_2}\text{Sin}^2\varphi.\text{Cos}^2\varphi.d\varphi.\int_0^1\left[1-\rho^{2/3}\right]^{3/2}\rho.d\rho.$$

Но

$$\int_0^{\pi/_2}\text{Sin}^2\varphi.\text{Cos}^2\varphi.d\varphi = \int_0^{\pi/_2}(\text{Sin}^2\varphi - \text{Sin}^4\varphi)d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}.\frac{\pi}{2} - \frac{1.3}{2.4}.\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}.\frac{1}{4} = \frac{\pi}{16};$$

далѣе, полагая $\rho = \text{Sin}^3 t$, имѣемъ:

$$\int_0^1\left[1-\rho^{2/3}\right]^{3/2}\rho.d\rho = \int_0^{\pi/_2}\text{Cos}^3 t.\text{Sin}^3 t.3\text{Sin}^2 t.\text{Cos}t.dt =$$

$$= 3\int_0^{\pi/_2}\text{Sin}^5 t.\text{Cos}^4 t.dt = 3\int_0^1(1-u^2)^2 u^4 du$$

$$(\textit{при}\ \text{Cos}\ t = u) = 3\int_0^1(u^4 - 2u^6 + u^8)du =$$

$$= 3\left[\frac{1}{5} - \frac{2}{7} + \frac{1}{9}\right] = 3.\frac{63-90+35}{5.7.9} = \frac{8}{105}.$$

Итакъ:

$$V = 24abc.\frac{\pi}{16}.\frac{8}{105} = \frac{4}{35}\pi abc.$$

Двукратные интегралы употребляются также въ механикѣ при вычисленіи центра тяжести и момента инерціи плоскихъ фигуръ. Для координатъ центра тяжести имѣемъ формулы:

$$x_c = \frac{\iint x.dx.dy}{\iint dx.dy}$$

$$y_c = \frac{\iint y.dx.dy}{\iint dx.dy}.$$

Моментъ инерціи относительно осей X и Y равны:

$$I_x = \gamma \iint y^2 dx.dy$$

$$I_y = \gamma \iint x^2 dx.dy,$$

гдѣ γ означаетъ плотность квадратной единицы данной пластинки, и двойные интегралы распространяются по площади всей фигуры.

Примѣръ. Найти центръ тяжести $\frac{1}{4}$ площади эллипса и моментъ инерціи цѣлой эллиптической пластинки.

Введя координаты

$$x = a\rho.\mathrm{Cos}\,\varphi$$

$$y = b\rho.\mathrm{Sin}\,\varphi,$$

находимъ

$$x_c = \frac{\int_0^{\pi/2}\int_0^1 a\rho.\mathrm{Cos}\varphi.ab\rho.d\rho.d\varphi}{\frac{1}{4}\pi ab} = \frac{a^2b\frac{1}{3}.1}{\frac{1}{4}\pi ab} = \frac{4a}{3\pi}.$$

Подобнымъ же образомъ найдемъ

$$y_c = \frac{4b}{3\pi}.$$

Далѣе

$$I_x = 4\gamma\int_0^{\pi/2}\int_0^1 b^2\rho^2\mathrm{Sin}^2\varphi.ab\rho.d\rho.d\varphi =$$

$$= 4\gamma ab^3\frac{1}{4}.\frac{\pi}{4} = \pi ab\gamma.\frac{b^2}{4} = M\frac{b^2}{4};$$

$$I_y = M\frac{a^2}{4}.$$

Здѣсь M означаетъ массу всей пластинки.

§ 4.

Вычисленіе поверхностей.

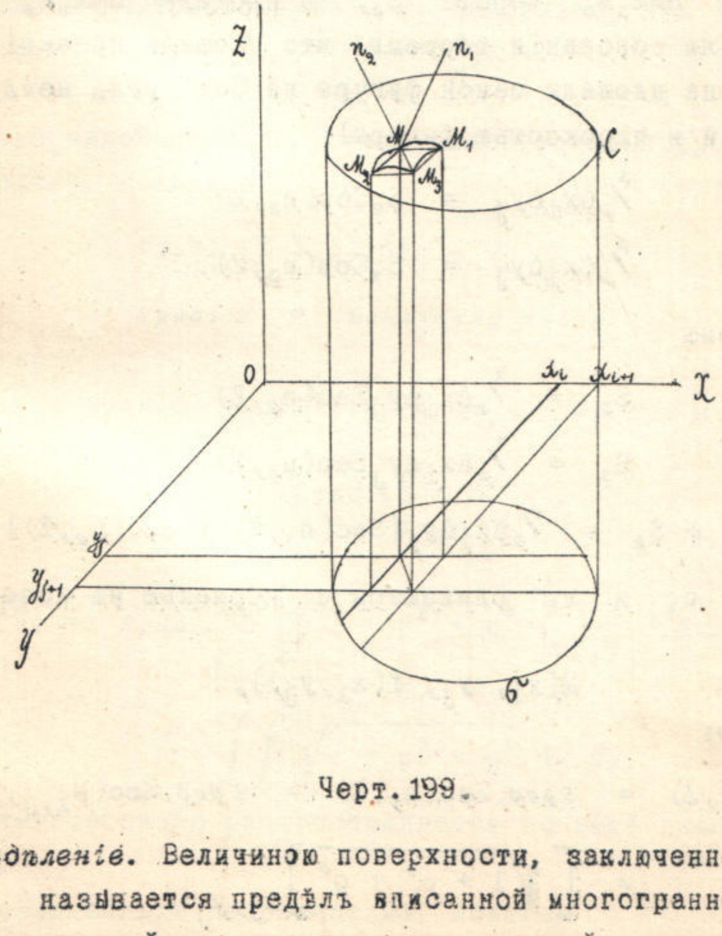
Пусть

$$\bar{Z} = f(\bar{X}, \bar{Y})$$

будетъ уравненіе поверхности, а

$$F(\bar{X}, \bar{Y}) = 0$$

- уравненіе цилиндра, вырѣзающаго изъ данной поверхности нѣкоторую часть, ограниченную контуромъ C (см. черт. 199).



Черт. 199.

Опредѣленіе. Величиною поверхности, заключенной внутри контура C, называется предѣлъ вписанной многогранной поверхности, составленной изъ треугольныхъ граней, причемъ вершины этихъ треугольниковъ лежатъ на данной поверхности, и вписанная многогранная поверхность ограничена ломаной линіей, вписанной въ контуръ C.

Предѣлъ ищется въ предположенiи, что всѣ грани уменьшаются до 0 и число ихъ безконечно растетъ.

Найдемъ сначала выраженiе элемента данной поверхности. Для этого проведемъ рядъ безконечно близкихъ плоскостей, $||$ныхъ координатнымъ плоскостямъ ZOX и ZOY, и изъ ряда этихъ плоскостей выдѣлимъ плоскости

$$\overline{X} = x_i, \qquad \overline{X} = x_{i+1}$$

$$\overline{Y} = y_j, \qquad \overline{Y} = y_{j+1}.$$

Эти плоскости, пересѣкаясь, образуютъ призму, которая въ сѣченiи съ данной поверхностью даетъ контуръ $MM_1M_2M_3$, ограниченный кривыми линiями. Соединимъ точки M, M_1, M_2, M_3 прямыми такъ, чтобы образовать 2Δ'ка MM_1M_3 и MM_2M_3, и проведемъ нормали n_1 и n_2 къ плоскостямъ этихъ треугольниковъ. Обозначивъ площадь ΔMM_1M_3 черезъ S_1, а площадь ΔMM_2M_3 черезъ S_2, находимъ (на основанiи теоремы, что площадь проекцiи плоской фигуры равна площади самой фигуры на Cos угла между плоскостью проекцiй и плоскостью фигуры):

$$\tfrac{1}{2}\Delta x_i \Delta y_j = S_2 \mathrm{Cos}(n_2, Z)$$

$$\tfrac{1}{2}\Delta x_i \Delta y_j = S_1 \mathrm{Cos}(n_1, Z).$$

Отсюда имѣемъ

$$S_2 = \tfrac{1}{2}\Delta x_i \Delta y_j \mathrm{Sec}(n_2, Z)$$

$$S_1 = \tfrac{1}{2}\Delta x_i \Delta y_j \mathrm{Sec}(n_1, Z).$$

$$S_1 + S_2 = \tfrac{1}{2}\Delta x_i \Delta y_j [\mathrm{Sec}(n_1, Z) + \mathrm{Sec}(n_2, Z)].$$

Въ предѣлѣ n_1 и n_2 сливаются съ нормалью къ поверхности въ точкѣ

$$M[x_i, y_j, f(x_i, y_j)],$$

и слѣдовательно:

$$\textit{Пред.}\,\mathrm{Sec}(n_1, Z) = \textit{Пред.}\,\mathrm{Sec}(n_2, Z) = \textit{Пред.}\,\mathrm{Sec}(N_{i,j}, Z) =$$

$$= \left[\sqrt{1 + p^2 + q^2}\right]_{x_i, y_j}.$$

Итакъ:

$$S_{i,j} = S_1 + S_2 = \tfrac{1}{2}\Delta x_i \Delta y_j \left[\left(\sqrt{1 + p^2 + q^2}\right)_{x_i, y_j} + 2\varepsilon_{i,j}\right] =$$

$$= \Delta x_i \Delta y_j \left[\left(\sqrt{1 + p^2 + q^2} \right)_{x_i, y_j} + \varepsilon_{i,j} \right];$$

вся же поверхность внутри контура С:

$$S = \text{Пред.} \sum_i \sum_j S_{i,j} ,$$

т.е. предѣлу двойной суммы, распространенной на всѣ прямоугольники $\Delta x_i \Delta y_j$, которые хотя частью лежатъ внутри контура σ.

Выступающія части пограничныхъ элементовъ въ предѣлѣ дадутъ сумму, равную нулю. Въ самомъ дѣлѣ, обозначивъ разность между искомой поверхностью и поверхностью вписаннаго многогранника черезъ δ, имѣемъ

$$\delta = \sum_i \sum_j S_{i,j} - S < \left[\sum_i \sum_j \Delta x \, \Delta y - Q \right] . P,$$

гдѣ Q площадь внутри контура, P наибольшее изъ значеній

$$\sqrt{1 + p^2 + q^2}$$

въ безконечно малой области, прилегающей къ контуру С. Переходя къ предѣлу, находимъ:

$$\text{Пред.} \left[\sum \sum \Delta x_i \Delta y_j - Q \right] = 0$$

$$\text{Пред. } P = \text{ конечному числу:}$$

слѣдовательно

$$\text{Пред.} \delta = \text{Пред.} \left[\sum \sum S_{i,j} - S \right] = 0$$

и окончательно

$$S = \text{Пред.} \sum_i \sum_j S_{i,j} ,$$

или иначе

$$S = \text{Пред.} \sum \sum \left[\sqrt{1 + p^2 + q^2} \right]_{x_i, y_j} . \Delta x_i \Delta y_j =$$

$$= \iint \sqrt{1 + p^2 + q^2} \, dx \, dy,$$

причемъ интегрированіе распространяется по всей площади внутри контура σ.

Въ криволинейныхъ координатахъ, полагая

$$\left| \begin{array}{l} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v), \end{array} \right.$$

имѣемъ

$$S = \iint_{(\sigma)} \left[\sqrt{1 + p^2 + q^2}\right]_{u,v} |J|\,du\,dv.$$

Въ § 19 Приложенія Дифференціальнаго Исчисленія мы видѣли, что для поверхности, изображаемой уравненіями

$$\left|\begin{array}{l} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \\ z = \omega(u, v) \end{array}\right.$$

оказывается

$$p = \frac{\omega'_u\,\psi'_v - \omega'_v\,\psi'_u}{\varphi'_u\,\psi'_v - \varphi'_v\,\psi'_u}$$

$$q = \frac{\varphi'_u\,\omega'_v - \varphi'_v\,\omega'_u}{\varphi'_u\,\psi'_v - \varphi'_v\,\psi'_u}.$$

Замѣчая, что въ знаменателѣ этихъ выраженій стоитъ Якобіанъ J, получаемъ

$$S = \iint_{(\sigma)} \sqrt{J^2 + (p.J)^2 + (q.J)^2}\,du\,dv =$$

$$= \iint_{(\sigma)} \sqrt{\left[\varphi'_u\psi'_v - \varphi'_v\psi'_u\right]^2 + \left[\omega'_u\psi'_v - \omega'_v\psi'_u\right]^2 + \left[\varphi'_u\omega'_v - \varphi'_v\omega'_u\right]^2}\,du dv.$$

Для болѣе удобнаго запоминанія, обозначивъ символически

$$D\left[\frac{l,\ m}{u,\ v}\right] = l'_u\,m'_v - l'_v\,m'_u\,,$$

можемъ написать

$$S = \iint_{\sigma} \sqrt{\left[D\left(\frac{\varphi,\psi}{u,v}\right)\right]^2 + \left[D\left(\frac{\omega,\psi}{u,v}\right)\right]^2 + \left[D\left(\frac{\varphi,\omega}{u,v}\right)\right]^2}\,du.dv,$$

гдѣ сочетанія ω,ψ и φ,ω выводятся изъ φ,ψ круговой перестановкой буквъ φ, ψ, ω.

Въ частности для полярной системы координатъ имѣемъ:

$$x = r.\mathrm{Cos}\,\theta, \qquad y = r.\mathrm{Sin}\,\theta,$$

$$x'_r = \mathrm{Cos}\,\theta\,, \qquad y'_r = \mathrm{Sin}\,\theta\,,$$

$$x'_\theta = -r.\mathrm{Sin}\,\theta, \quad y'_\theta = r.\mathrm{Cos}\,\theta.$$

Поэтому

$$D\left[\frac{x,\ y}{r,\ \theta}\right] = r$$

$$D\left[\frac{y,\ z}{r,\ \theta}\right] = \mathrm{Sin}\,\theta\frac{\partial z}{\partial\theta} - r.\mathrm{Cos}\,\theta\frac{\partial z}{\partial r}$$

$$D\left[\frac{z,\ x}{r,\ \theta}\right] = -r.\mathrm{Sin}\,\theta\frac{\partial z}{\partial r} - \mathrm{Cos}\,\theta\frac{\partial z}{\partial\theta}$$

и сумма квадратовъ всѣхъ трехъ выраженій равна

$$r^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial\theta}\right)^2 + r^2\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2.$$

Выраженіе поверхности въ полярныхъ координатахъ будетъ

$$S = \iint_{(\sigma)}\sqrt{r^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial\theta}\right)^2 + r^2\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2}\,dr\,d\theta.$$

Примѣръ 1. Задача Viviani для поверхности шара. Опредѣлить остающуюся часть поверхности шара радіуса R, если отнять отъ нея части, вырѣзаемыя цилиндрами

$$\left[x \pm \frac{R}{2}\right]^2 + y^2 = \left[\frac{R}{2}\right]^2.$$

Разсуждая такъ же, какъ въ примѣрѣ 1-мъ предыдущаго §-а, находимъ

$$S = 4\pi R^2 - 8\iint_{(\sigma)}\left[\sqrt{1 + p^2 + q^2}\right]r.dr.d\theta.$$

Опредѣлимъ p и q изъ уравненія поверхности шара:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Имѣемъ

$$x + zp = 0; \quad p = -\frac{x}{z}$$

$$y + zq = 0; \quad q = -\frac{y}{z};$$

отсюда

$$1 + p^2 + q^2 = 1 + \frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{z^2} =$$

$$= \frac{R^2}{R^2 - (x^2+y^2)} = \frac{R^2}{R^2 - r^2};$$

$$\sqrt{1 + p^2 + q^2} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - r^2}}.$$

Итакъ:

$$S = 4\pi R^2 - 8R\int_0^{\pi/2}\left[\int_0^{R.\cos\theta} \frac{r.\,dr}{\sqrt{R^2 - r^2}}\right]d\theta = 4\pi R^2 -$$

$$- 8R\int_0^{\pi/2}\left[-\sqrt{R^2 - r^2}\right]_0^{R.\cos\theta} d\theta = 4\pi R^2 - 8R\int_0^{\pi/2}(R - R\sin\theta)\,d\theta =$$

$$= 4\pi R^2 - 8R^2(\pi/2 - 1) = 8R^2.$$

Примѣръ 2. Опредѣлить часть поверхности параболоида

$$x^2 + y^2 = 2az,$$

вырѣзаемую цилиндромъ (черт. 200):

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Такъ какъ искомая поверхность параболоида раздѣляется координатными плоскостями на 4 симметричныя части, то всю поверхность можно представить въ видѣ

$$S = 4\int_0^{\pi/2}\int_0^R \left[\sqrt{1 + p^2 + q^2}\right]_{r,\theta} r.dr.d\theta.$$

Изъ уравненія параболоида имѣемъ

$$x = ap; \quad p = \frac{x}{a};$$

$$y = aq; \quad q = \frac{y}{a};$$

отсюда

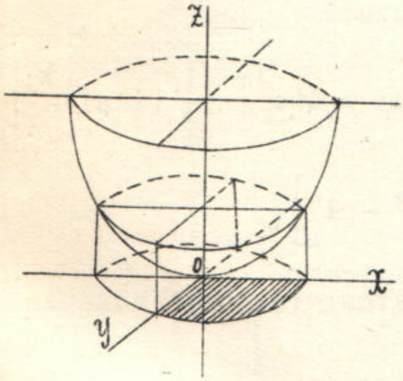
$$1 + p^2 + q^2 = \frac{x^2 + y^2 + a^2}{a^2} = \frac{r^2 + a^2}{a^2}$$

$$\sqrt{1+p^2+q^2} = \frac{\sqrt{r^2+a^2}}{a};$$

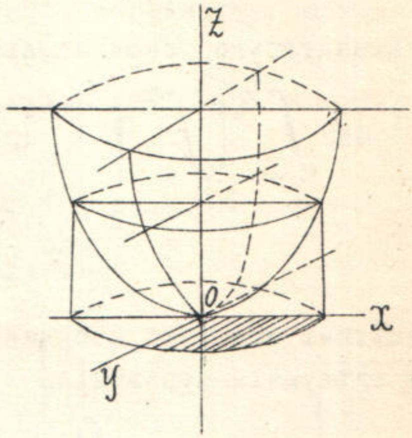
и потому

$$S = 4\int_0^{\pi/2}\left[\int_0^R \frac{\sqrt{a^2+r^2}}{a}\, r.dr\right]d\theta = 4\,\frac{\pi}{2}\,\frac{1}{a}\left[\frac{1}{3}\,(a^2+r^2)^{3/2}\right]_0^R =$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{\pi}{a}\left[(a^2+R^2)^{3/2} - a^3\right].$$



Черт.200.



Черт.201.

Примѣръ 3. Найти часть поверхности параболоида:

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 2z,$$

вырѣзаемую цилиндромъ (см. черт. 201):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = m^2.$$

Введя координаты

$$x = a\rho.\mathrm{Cos}\,\varphi$$

$$y = b\rho.\mathrm{Sin}\,\varphi$$

и припомнивъ, что якобіанъ этой системы

$$|J| = ab\rho,$$

имѣемъ

$$S = 4\iint_{(\sigma)}\left[\sqrt{1+p^2+q^2}\right]_{\rho,\varphi} ab\rho\, d\rho\, d\varphi.$$

Предѣлы интегрированія, очевидно, будутъ: по φ :- 0 и $\pi/_2$, по ρ :- 0 и m. Дифференцируя уравненіе данной поверхности, находимъ:

$$p = \frac{x}{a}\,; \quad q = \frac{y}{b}\,;$$

откуда

$$\left[\sqrt{1 + p^2 + q^2}\right]_{\rho,\varphi} = \left[\sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}\right]_{\rho,\varphi} = \sqrt{1 + \rho^2}$$

Слѣдовательно, окончательно находимъ:

$$S = 4ab\int_0^{\pi/_2}\left[\int_0^m \sqrt{1 + \rho^2}\ \rho.d\rho\right]d\varphi = 4ab\,\frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{3}\,(1+\rho^2)^{3/_2}\right]_0^m =$$

$$= \frac{2}{3}\,\pi ab\left[(1+m^2)^{3/_2} - 1\right].$$

Замѣтимъ еще, что координаты центра тяжести поверхности имѣютъ слѣдующія выраженія:

$$x_c = \frac{\iint \gamma x.\sqrt{1 + p^2 + q^2}\,dx.dy}{\iint \gamma.\sqrt{1 + p^2 + q^2}\,dx\,dy}$$

$$y_c = \frac{\iint \gamma y.\sqrt{1 + p^2 + q^2}\,dx.dy}{\iint \gamma\sqrt{1 + p^2 + q^2}\,dx.dy}$$

$$z_c = \frac{\iint \gamma z.\sqrt{1 + p^2 + q^2}\,dx.dy}{\iint \gamma\sqrt{1 + p^2 + q^2}\,dx.dy},$$

гдѣ γ означаетъ плотность.

Точно также моменты инерціи поверхности относительно осей координатъ вычисляются по формуламъ:

$$J_x = \iint \gamma(y^2 + z^2)\sqrt{1 + p^2 + q^2}\,dx.dy$$

$$J_y = \iint \gamma(z^2 + x^2)\sqrt{1 + p^2 + q^2}\,dx.dy$$

$$J_z = \iint \gamma(x^2 + y^2)\sqrt{1 + p^2 + q^2}\,dx.dy.$$

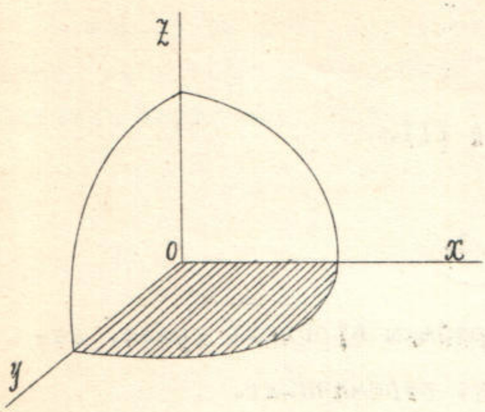
Примѣръ. Найти центръ тяжести $^1/_8$ поверхности шара

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2,$$

выдѣляемой тремя плоскостями координатъ.

Полагая

$$\begin{cases} x = r.\mathrm{Cos}\,\theta \\ y = r.\mathrm{Sin}\,\theta, \end{cases}$$



Черт. 202.

имѣемъ

$$z^2 = R^2 - r^2.$$

Дифференцируя уравненіе данной поверхности, находимъ

$$x + zp = 0; \quad p = -\frac{x}{z};$$

$$y + zq = 0; \quad q = -\frac{y}{z};$$

откуда

$$\sqrt{1 + p^2 + q^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2}} = \sqrt{\frac{R^2}{z^2}} = \frac{R}{z} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - r^2}}.$$

Считая γ постояннымъ, получимъ:

$$z_c = \frac{\int_0^{\pi/2}\int_0^R \gamma\sqrt{R^2-r^2}\,\frac{R}{\sqrt{R^2-r^2}}\,r.dr.d\theta}{\gamma\,.\,\frac{1}{2}\,\pi R^2} = \frac{\gamma.R.\frac{1}{2}R^2\,\frac{\pi}{2}}{\gamma.\frac{1}{2}\,\pi R^2} = \frac{R}{2}.$$

Подобнымъ же образомъ найдемъ

$$x_c = \frac{R}{2}$$

$$y_c = \frac{R}{2}.$$

ГЛАВА III.

§ 1.

Тройные интегралы, какъ предѣлы тройныхъ суммъ, зависящихъ отъ трехъ перемѣнныхъ.

Пусть

$$F(x,y,z) = 0$$

будетъ уравненіе нѣкоторой замкнутой поверхности. Уравненіе цилиндра, описаннаго около этой поверхности, съ образующими, ||'ми оси OZ, мы получимъ, исключая z изъ системы

$$\left| \begin{array}{l} F(x,y,z) = 0 \\ F'_z(x,y,z) = 0, \end{array} \right.$$

что даетъ

$$\Phi(x, y) = 0.$$

На плоскости XOY это будетъ уравненіе контура σ. Описанный цилиндръ, касаясь данной поверхности, дѣлитъ ее линіей прикосновенія C на верхнюю и нижнюю часть (черт. 203). Положимъ, что уравненіе верхней части будетъ

$$z = f_2(x, y),$$

нижней части:

$$z = f_1(x, y).$$

Тогда можно написать, что объемъ, ограниченный данной поверхностью есть разность двухъ объемовъ

$$V = \iint_{(\sigma)} f_2(x,y)\,dx.dy - \iint_{(\sigma)} f_1(x,y)\,dx.dy$$

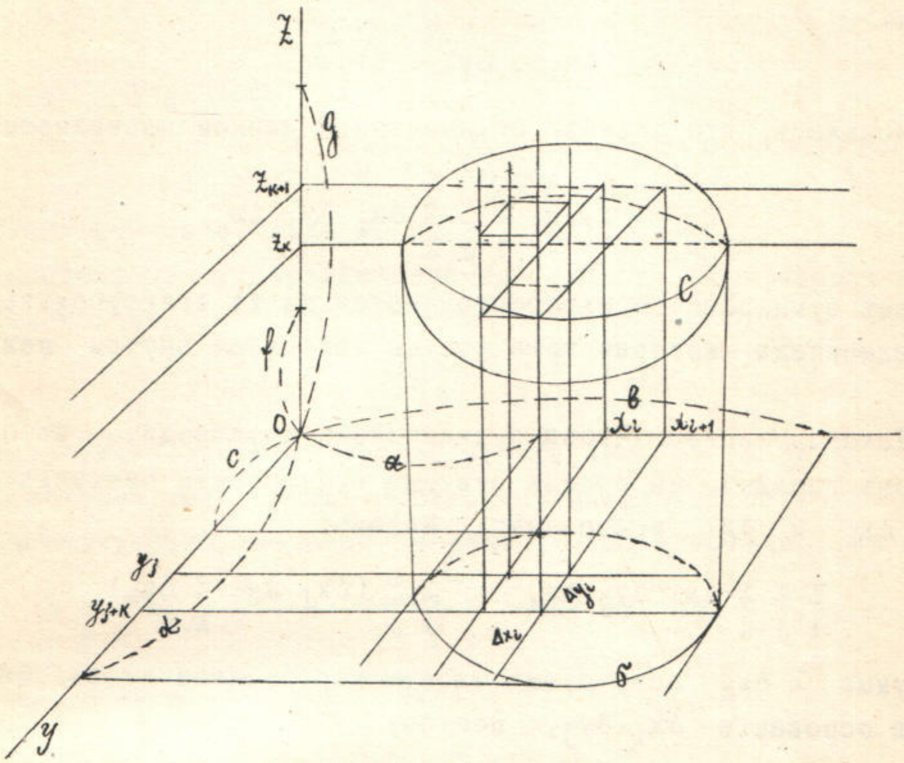
или

$$V = \iint_{(\sigma)} \left[\int_{z=f_1(x,y)}^{z=f_2(x,y)} dz \right] dx\,dy,$$

что даетъ намъ выраженіе объема въ видѣ тройного интеграла:

$$V = \iiint dx\, dy\, dz.$$

Къ такому же результату мы придемъ, разсматривая искомый объемъ, какъ предѣлъ тройной суммы безконечно малыхъ прямоугольныхъ параллелепипедовъ.



Черт. 203.

Проведемъ рядъ плоскостей, $\perp$'хъ OX:

$$\overline{X} = a(=x_0),\ x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_i,\ x_{i+1},\ \ldots\ x_{n-1},\ x_n = b$$

перпендикулярныхъ OY:

$$\overline{Y} = c(=y_0),\ y_1,\ y_2,\ \ldots\ y_j,\ y_{j+1},\ \ldots\ y_{m-1},\ y_m = d$$

перпендикулярныхъ OZ:

$$\overline{Z} = f(=z_0),\ z_1,\ z_2,\ \ldots\ z_k,\ z_{k+1},\ \ldots\ z_{p-1},\ z_p = g.$$

Обозначивъ:

$$x_{i+1} - x_i = \Delta x_i$$

$$y_{j+1} - y_j = \Delta y_j$$

$$z_{k+1} - z_k = \Delta z_k,$$

находимъ, что объемъ параллелепипеда, выдѣленнаго плоскостями

$$\overline{X} = x_i,\ x_{i+1}$$

$$\overline{Y} = y_j,\ y_{j+1}$$

$$\overline{Z} = z_k,\ z_{k+1}$$

равенъ

$$\Delta x_i \,.\, \Delta y_j \,.\, \Delta z_k.$$

Докажемъ, что объемъ, ограниченный данной поверхностью равенъ

$$V = \textit{Пред.} \sum_i \sum_j \sum_k \Delta x_i\, \Delta y_j\, \Delta z_k,$$

причемъ суммированіе распространяется на тѣ прямоугольные параллелепипеды, которые хотя частью находятся внутри поверхности.

Доказательство. Чтобы суммированіе производить въ опредѣленномъ порядкѣ, мы будемъ сначала суммировать элементы объема при Δx_i и Δy_j постоянныхъ. Имѣемъ:

$$\sum_i \sum_j \sum_k \Delta x_i\, \Delta y_j\, \Delta z_k = \sum_i \sum_j \left(\Delta x_i\, \Delta y_j \sum_k \Delta z_k\right),$$

но сумма $\sum \Delta z_k$ есть сумма высотъ параллелепипедовъ, имѣющихъ общее основаніе $\Delta x_i . \Delta y_j$, поэтому

$$\sum_k \Delta z_k = f_2(x_i,\ y_j) - f_1(x_i,\ y_j) + 2\vartheta \Delta z,$$

гдѣ

$$0 < \vartheta < 1$$

и Δz наибольшее изъ всѣхъ Δz_k.

Такимъ образомъ предѣлъ нашей тройной суммы

$$\textit{Пред.}\sum_i \sum_j \sum_k \Delta x_i\, \Delta y_j\, \Delta z_k = \textit{Пред.}\sum_i \sum_j \Delta x_i\, \Delta y_j . \,[f_2(x_i,\ y_j) -$$

$$- f_1(x_i,\ y_j) + 2\vartheta \Delta z] = \textit{Пред.} \sum_i \sum_j [f_2(x_i,\ y_j) -$$

$$- f_1(x_i, y_j)]\Delta x_i\, \Delta y_j + \textit{Пред.}\, 2\vartheta \Delta z . \textit{Пред.} \sum_i \sum_j \Delta x_i\, \Delta y_j =$$

$$= \iint_{(\sigma)} [f_2(x,\ y) - f_1(x,\ y)]\,dx\, dy + 0.Q = V,$$

что и требовалось доказать.

Такимъ образомъ трехкратные интегралы можно разсматривать не только какъ результатъ трехъ послѣдовательныхъ простыхъ интегрированій надъ функціей 3-хъ перемѣнныхъ, но и какъ предѣлъ тройной суммы безконечно большого числа малыхъ слагаемыхъ.

Помощью трехкратныхъ интеграловъ рѣшаются также слѣдующіе вопросы механики. Положимъ, что тѣло ограничено поверхностью

$$F(x, y, z) = 0;$$

плотность его есть функція точки

$$\mu = f(x, y, z).$$

Вычислить массу тѣла M.

Назовемъ массу параллелепипеда $\Delta x_i \, \Delta y_j \, \Delta z_k$ черезъ $m_{i,j,k}$ и докажемъ, что

$$M = \text{Пред.} \sum_i \sum_j \sum_k m_{i,j,k},$$

причемъ суммированіе распространяется лишь на тѣ параллелепипеды, которые хотя частью лежатъ внутри данной поверхности.

Дѣйствительно, называя черезъ V объемъ тѣла, имѣемъ:

$$\sum_i \sum_j \sum_k m_{i,j,k} - M < \Big(\sum_i \sum_j \sum_k \Delta x_i \, \Delta y_j \, \Delta z_k - V\Big)\mu_0,$$

гдѣ μ_0 есть наибольшее значеніе

$$\mu = f(x, y, z)$$

въ безконечно малой области, прилегающей къ поверхности.

Переходя къ предѣлу, получимъ

$$\text{Пред.}\Big(\sum_i \sum_j \sum_k m_{i,j,k} - M\Big) \leqq \Big(\sum_i \sum_j \sum_k \Delta x_i \, \Delta y_j \, \Delta z_k - V\Big).\mu_0 = \mu_0.0 = 0,$$

такъ какъ выше доказано, что

$$V = \text{Пред.} \sum_i \sum_j \sum_k \Delta x_i \, \Delta y_j \, \Delta z_k.$$

Отсюда

$$M = \text{Пред.} \sum_i \sum_j \sum_k m_{i,j,k}.$$

Назовемъ черезъ $M_{i,j,k}$ и $\mu_{i,j,k}$ наибольшее и наименьшее значеніе

$$\mu = f(x, y, z).$$

въ точкахъ параллелепипеда $\Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$; тогда будемъ имѣть очевидно неравенство

$$\mu_{i,j,k} . \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k < m_{i,j,k} < M_{i,j,k} . \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k .$$

Такъ какъ μ есть непрерывная функція, то можно положить:

$$m_{i,j,k} = \Delta x_i . \Delta y_j . \Delta z_k [f(x_i, y_j, z_k) + \varepsilon_{i,j,k}],$$

и тогда выйдетъ

$$M = \text{Пред.} \sum_i \sum_j \sum_k f(x_i, y_j, z_k) \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k ,$$

такъ какъ при вычисленіи предѣла суммы безконечно большого числа безконечно малыхъ слагаемыхъ, безконечно малыя высшаго порядка

$$\Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k . \varepsilon_{i,j,k}$$

могутъ быть отброшены безъ измѣненія величины предѣла.

Итакъ

$$M = \iiint_{(v)} f(x, y, z) dx\, dy\, dz.$$

Подобнымъ образомъ выводятся формулы для моментовъ инерціи тѣла относительно осей координатъ

$$I_x = \iiint_{(v)} (y^2 + z^2) \mu\, dx\, dy\, dz$$

$$I_y = \iiint_{(v)} (x^2 + z^2) \mu\, dx\, dy\, dz$$

$$I_z = \iiint_{(v)} (x^2 + y^2) \mu\, dx\, dy\, dz,$$

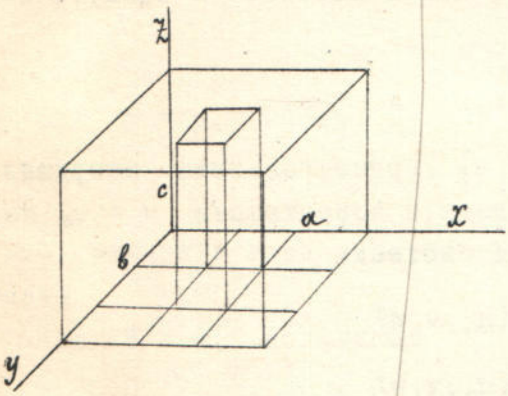
а также для координатъ центра тяжести тѣла

$$x_c = \frac{\iiint_{(v)} x . \mu\, dx\, dy\, dz}{\iiint_{(v)} \mu\, dx\, dy\, dz}$$

$$y_c = \frac{\iiint_{(v)} y . \mu\, dx\, dy\, dz}{\iiint_{(v)} \mu\, dx\, dy\, dz}$$

$$z_c = \frac{\iiint_{(v)} z.\mu\,dx\,dy\,dz}{\iiint_{(v)} \mu\,dx\,dy\,dz}$$

Примѣръ. Найти моментъ инерціи параллелепипеда съ ребрами a, b и c относительно оси Z-овъ (см. черт. 204).



Черт. 204.

Имѣемъ

$$I_z = \int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{b}\int_{z=0}^{c} \mu(x^2+y^2)\,dxdydz =$$

$$= \mu c\int_0^a\int_0^b (x^2+y^2)\,dx\,dy =$$

$$= \mu c\int_0^a \Big[x^2y + \tfrac{1}{3}y^3\Big]_0^b dx =$$

$$= \mu c\int_0^a (x^2b + \tfrac{1}{3}b^3)\,dx =$$

$$= \mu c\Big[\tfrac{1}{3}bx^3 + \tfrac{1}{3}b^3x\Big]_0^a = \frac{\mu\,abc}{3}(a^2+b^2) = \tfrac{1}{3}M(a^2+b^2),$$

гдѣ M - масса параллелепипеда.

§ 2.

Преобразованіе перемѣнной подъ знакомъ тройного интеграла. Выраженіе объема, массы, моментовъ инерціи и проч. въ криволинейныхъ координатахъ.

Положимъ, что намъ даны выраженія x, y, z въ функціи новыхъ координатъ u, v, w:

$$x = \varphi(u, v, w)$$

$$y = \psi(u, v, w)$$

$$z = \omega(u, v, w),$$

причемъ предполагается, что можно также обратно рѣшить эти уравненія относительно u, v, w. Тогда заданія u, v, w опредѣлятъ положеніе точки въ пространствѣ, и потому числа u, v, w могутъ быть названы координатами точки. Въ прямоугольной системѣ мы дѣлимъ объемъ на безконечно малые элементы плоскостями, ||'ми плоскостямъ координатъ.

$$x = \textit{пост.}; \quad y = \textit{пост.}; \quad z = \textit{пост.}$$

Въ новыхъ координатахъ вмѣсто этихъ плоскостей войдутъ *координатныя* поверхности.

$$u = u_0; \quad v = v_0; \quad w = w_0.$$

Уравненіе этихъ поверхностей въ прямоугольныхъ координатахъ получаются такъ: напр.: уравненіе поверхности $u = u_0$ получимъ исключеніемъ v и w изъ системы:

$$x = \varphi(u_0, v, w)$$

$$y = \psi(u_0, v, w)$$

$$z = \omega(u_0, v, w),$$

что даетъ уравненіе

$$\Phi(x, y, z, u_0) = 0 \quad \text{и т. д.}$$

Приведемъ нѣсколько примѣровъ.

Примѣръ 1. Цилиндрическія координаты:

$$\left| \begin{aligned} x &= r.\cos\theta \\ y &= r.\sin\theta \\ z &= z. \end{aligned} \right.$$

При $r = r_0$ находимъ изъ первыхъ двухъ уравненій

$$x^2 + y^2 = r_0^2$$

- уравненіе прямого кругового цилиндра, ось котораго - ось OZ и радіусъ r_0. Полагая $\theta = \theta_0$ и исключая r изъ тѣхъ же уравненій, находимъ

$$y = x.\operatorname{tg}\theta_0$$

- уравненіе плоскостей, проходящихъ черезъ ось OZ и образующихъ уголъ θ_0 съ плоскостью XOZ. Третья координатная поверхность будетъ

$$z = z_0$$

- плоскость, $\perp$ оси OZ (см. черт. 205). Видъ элемента объема см. на чертежѣ 205.

Примѣръ 2. Сферическія координаты:

$$\left| \begin{aligned} x &= \rho.\mathrm{Sin}\,\theta.\mathrm{Cos}\,\psi \\ y &= \rho.\mathrm{Sin}\,\theta.\mathrm{Sin}\,\psi \\ z &= \rho.\mathrm{Cos}\,\theta. \end{aligned} \right.$$

При $\rho = \rho_0$ имѣемъ

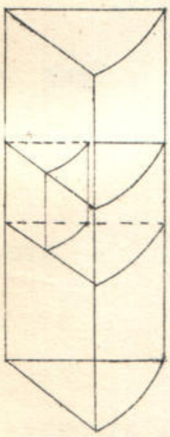
$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho_0^2$$

- это уравненіе шара радіуса ρ_0 съ центромъ въ началѣ координатъ.

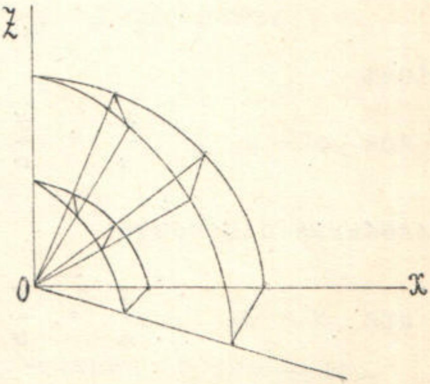
При $\theta = \theta_0$ получаемъ

$$x^2 + y^2 = z^2 tg^2\theta_0$$

- конусъ вращенія съ угломъ растворенія $2\theta_0$.



Черт. 205.



Черт. 206.

При $\psi = \psi_0$, исключая изъ первыхъ двухъ уравненій ρ и θ, находимъ

$$y = x.tg\,\psi_0$$

- плоскость, проходящая черезъ ось Z-овъ подъ угломъ ψ_0 къ плоскости XOZ. Пересѣченіе этихъ координатныхъ поверхностей образуютъ элементъ объема (см. на чертежѣ 206).

Примѣръ 3. Координатная система:

$$\left| \begin{array}{l} x = a\rho.\sin\theta.\cos\psi \\ y = b\rho.\sin\theta.\sin\psi \\ z = c\rho.\cos\theta. \end{array} \right.$$

Имѣемъ

$$\text{при } \rho = \rho_0 : \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \rho_0^2$$

- эллипсоиды,

$$\text{при } \theta = \theta_0 : \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}\,tg^2\theta_0$$

- конусы 2-го порядка,

$$\text{при } \psi = \psi_0 : \quad \frac{y}{b} = \frac{x}{a}\,tg\,\psi_0$$

- плоскости, проходящія черезъ ось OZ. Чертежъ подобенъ предыдущему.

Примѣръ 4.

$$\begin{array}{l} x = a\rho.\sin^2\theta.\cos^2\psi \\ y = b\rho.\sin^2\theta.\sin^2\psi \\ z = c\rho.\cos^2\theta\ . \end{array}$$

Имѣемъ

$$\text{при } \rho = \rho_0 : \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = \rho_0^2$$

- параллельныя плоскости;

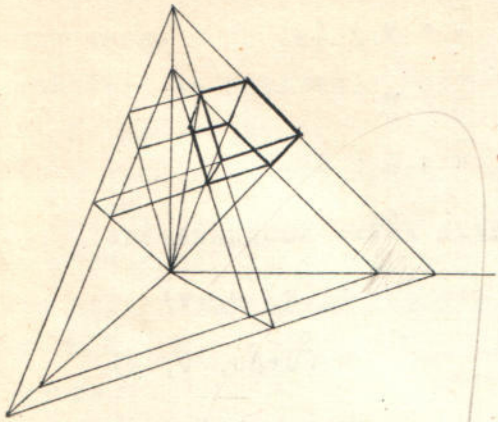
$$\text{при } \theta = \theta_0 : \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{z}{c}\,tg^2\theta_0$$

- плоскости, проходящія черезъ начало и параллельныя одной прямой

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$$

въ плоскости $z = 0$; при $\psi = \psi_0$ получаемъ

$$\frac{y}{b} = \frac{x}{a}\,tg^2\psi_o$$



Черт. 207.

- плоскости, проходящія через ось OZ. Элементъ объема см. на чертежѣ 207.

Примѣръ 5.

$$x = a\rho.Sin^3\theta.Cos^3\psi$$

$$y = b\rho.Sin^3\theta.Sin^3\psi$$

$$z = c\rho.Cos^3\theta\ .$$

Полагая $\rho = \rho_o$, находимъ одну координатную поверхность:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} + \left(\frac{z}{c}\right)^{2/3} = \rho^{2/3}$$

- замкнутая поверхность, форма которой указана на стр.410 прим. 5; при $\theta = \theta_o$ получаемъ

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} = \left(\frac{z}{c}\right)^{2/3} tg^2\theta_o$$

- конусы; при $\psi = \psi_o$, исключеніе ρ и θ даетъ

$$\frac{y}{b} = \frac{x}{a}\,tg^3\psi_o$$

- плоскости, проходящія через ось OZ.

Выраженіе объема въ криволинейныхъ координатахъ.

a) *Геометрическій выводъ.* Разсмотримъ элементъ объема, выдѣленный изъ даннаго тѣла 6 координатными поверхностями.

Пусть эти поверхности имѣютъ слѣдующія уравненія:

лѣвая грань $\bar{u} = u$

правая " $\bar{u} = u + \Delta u$

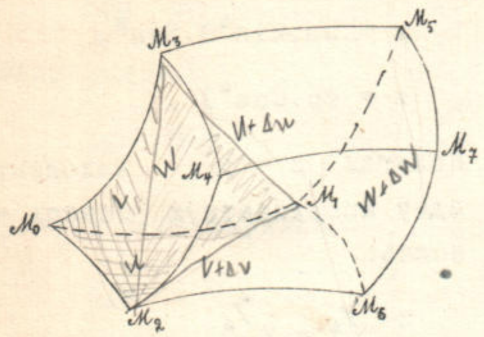
задняя грань $\bar{v} = v$

передняя " $\bar{v} = v + \Delta v$

нижняя " $\bar{w} = w$

верхняя " $\bar{w} = w + \Delta w.$

Точки пересѣченія граней будутъ имѣть координатами:



$M_0(u,\ w,\ v)$

$M_1(u+\Delta u,\ v,\ w)$

$M_2(u,\ v+\Delta v,\ w)$

$M_3(u,\ v,\ w+\Delta w)$

$M_4(u,\ v+\Delta v,\ w+\Delta w)$

$M_5(u+\Delta u,\ v,\ w+\Delta w)$

$M_6(u+\Delta u,\ v+\Delta v,\ w)$

$M_7(u+\Delta u,\ v+\Delta v,\ w+\Delta w).$

Черт. 208.

Декартовы координаты тѣхъ же точекъ будутъ:

$$x_0 = \varphi(u,\ v,\ w)$$

$$x_1 = \varphi(u+\Delta u,\ v,\ w) \equiv x_0 + \frac{\partial\varphi}{\partial u}\Delta u$$

$$x_2 \equiv x_0 + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\Delta v$$

$$x_3 \equiv x_0 + \frac{\partial\varphi}{\partial w}\Delta w$$

$$x_4 \equiv x_0 + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\Delta v + \frac{\partial\varphi}{\partial w}\Delta w$$

$$x_5 \equiv x_0 + \frac{\partial\varphi}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial\varphi}{\partial w}\Delta w$$

$$x_6 \equiv x_0 + \frac{\partial\varphi}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\Delta v$$

$$x_7 \equiv x_0 + \frac{\partial\varphi}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\Delta v + \frac{\partial\varphi}{\partial w}\Delta w.$$

Во всѣхъ этихъ равенствахъ въ правой части отброшены безконечно малыя 2-го порядка, что и выражено знакомъ $\equiv$.

Подобныя же выраженія получимъ для y и z, съ замѣной буквы φ на ψ и ω.

Если теперь вмѣсто кривыхъ провести прямыя между 8-ью точками M_0, M_1, ... M_7, то получится параллелепипедъ. Чтобы въ этомъ убѣдиться, докажемъ, что противоположныя грани будутъ равные параллелограммы, лежащіе въ $||$'ныхъ плоскостяхъ, напр., грани $M_0M_1M_5M_3$ и $M_2M_6M_7M_4$. Для этого достаточно показать, что ребра

$$M_0M_3 = \text{ и } \# \; M_2M_4$$

$$M_0M_1 = \text{ и } || \; M_2M_6.$$

Тогда углы $M_3M_0M_1$ и $M_4M_2M_6$, согласно извѣстной теоремѣ геометріи, будутъ равны и плоскости ихъ будутъ $||$'ны.

Но изъ выраженій координатъ вершинъ, выше данныхъ, находимъ:

$$x_3 - x_0 = x_4 - x_2 = \frac{\partial\varphi}{\partial w}\Delta w, \qquad x_1 - x_0 = x_6 - x_2 = \frac{\partial\varphi}{\partial u}\Delta u$$

$$y_3 - y_0 = y_4 - y_2 = \frac{\partial\psi}{\partial w}\Delta w, \qquad y_1 - y_0 = y_6 - y_2 = \frac{\partial\psi}{\partial u}\Delta u$$

$$z_3 - z_0 = z_4 - z_2 = \frac{\partial\omega}{\partial w}\Delta w, \qquad z_1 - z_0 = z_6 - x_2 = \frac{\partial\omega}{\partial u}\Delta u,$$

откуда слѣдуетъ, что

$$M_0M_3 = M_2M_4 = \sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial w}\right)^2}\,\Delta w$$

и

$$M_0M_1 = M_2M_6 = \sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial u}\right)^2}\,\Delta u\,;$$

параллельность же слѣдуетъ изъ пропорціональности составляющихъ.

Объемъ параллелепипеда равенъ 6 объемамъ тетраэдра $M_0M_1M_2M_3$; обозначивъ его черезъ dV, получимъ:

$$dV = 6.\frac{1}{6}\ \textit{числ. знач.} \begin{vmatrix} x_1-x_0, & y_1-y_0, & z_1-z_0 \\ x_2-x_0, & y_2-y_0, & z_2-z_0 \\ x_3-x_0, & y_3-y_0, & z_3-z_0 \end{vmatrix} =$$

$$= \text{ч. зн.} \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u}\Delta u, & \frac{\partial\psi}{\partial u}\Delta u, & \frac{\partial\omega}{\partial u}\Delta u \\ \frac{\partial\varphi}{\partial v}\Delta v, & \frac{\partial\psi}{\partial v}\Delta v, & \frac{\partial\omega}{\partial v}\Delta v \\ \frac{\partial\varphi}{\partial w}\Delta w, & \frac{\partial\psi}{\partial w}\Delta w, & \frac{\partial\omega}{\partial w}\Delta w \end{vmatrix} = \Delta u.\Delta v.\Delta w \, |J|,$$

гдѣ J есть якобіанъ данной системы координатъ

$$\left| \begin{aligned} x &= \varphi(u, v, w) \\ y &= \psi(u, v, w) \\ z &= \omega(u, v, w): \end{aligned} \right.$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u}, & \frac{\partial\psi}{\partial u}, & \frac{\partial\omega}{\partial u} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial v}, & \frac{\partial\psi}{\partial v}, & \frac{\partial\omega}{\partial v} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial w}, & \frac{\partial\psi}{\partial w}, & \frac{\partial\omega}{\partial w} \end{vmatrix}$$

Отсюда искомый объемъ

$$V = \iiint |J| \, du \, dv \, dw,$$

причемъ интегрированіе распространяется по всему объему V.

в) *Аналитическій выводъ*. Возьмемъ тройной интегралъ

$$V = \iiint dx \, dy \, dz$$

и введемъ новыя перемѣнныя, положивъ

$$\begin{aligned} x &= \varphi(u, v, w) \\ y &= \psi(u, v, w) \\ z &= \omega(u, v, w). \end{aligned}$$

Выполняя сначала интегрированіе по z, получимъ:

$$\iiint dx\,dy\,dz = \iint \left(\int dz\right) dx\,dy \; . \; . \; . \; . \; . \; (a),$$

причемъ, при интегрированіи по z, x и y считаются какъ постоянныя.

Послѣднее условіе намъ даетъ

$$dx = 0; \qquad dy = 0.$$

Написавъ выраженія dx, dy, dz въ функціи u, v, w, а именно:

$$dx = \frac{\partial\varphi}{\partial u}du + \frac{\partial\varphi}{\partial v}dv + \frac{\partial\varphi}{\partial w}dw = 0$$

$$dy = \frac{\partial\psi}{\partial u}du + \frac{\partial\psi}{\partial v}dv + \frac{\partial\psi}{\partial w}dw = 0 \; . \; . \; . \; . \; (*)$$

$$dz = \frac{\partial\omega}{\partial u}du + \frac{\partial\omega}{\partial v}dv + \frac{\partial\omega}{\partial w}dw;$$

опредѣлимъ изъ первыхъ двухъ уравненій du и dv и внесемъ ихъ въ выраженіе dz. Тогда получимъ

$$dz = F(u, v, w)dw.$$

Функцію F нетрудно найти. Для этого перепишемъ уравненія (*) въ видѣ

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}du + \frac{\partial\varphi}{\partial v}dv + \frac{\partial\varphi}{\partial w}dw = 0$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial u}du + \frac{\partial\psi}{\partial v}dv + \frac{\partial\psi}{\partial w}dw = 0$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial u}du + \frac{\partial\omega}{\partial v}dv + \left[\frac{\partial\omega}{\partial w} - \frac{dz}{dw}\right]dw = 0.$$

Это будетъ однородная линейная система относительно du, dv и dw.

Такъ какъ du, dv, dw не могутъ быть всѣ одновременно = 0, то опредѣлитель этой системы = 0, т.е.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial v} & \frac{\partial\varphi}{\partial w} + 0 \\ \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial v} & \frac{\partial\psi}{\partial w} + 0 \\ \frac{\partial\omega}{\partial u} & \frac{\partial\omega}{\partial v} & \frac{\partial\omega}{\partial w} - \frac{dz}{dw} \end{vmatrix} = 0.$$

Разложивъ его по элементамъ 3-го столбца, мы разобьемъ его на два опредѣлителя:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u}, & \frac{\partial\varphi}{\partial v}, & \frac{\partial\varphi}{\partial w} \\ \frac{\partial\psi}{\partial u}, & \frac{\partial\psi}{\partial v}, & \frac{\partial\psi}{\partial w} \\ \frac{\partial\omega}{\partial u}, & \frac{\partial\omega}{\partial v}, & \frac{\partial\omega}{\partial w} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u}, & \frac{\partial\varphi}{\partial v}, & 0 \\ \frac{\partial\psi}{\partial u}, & \frac{\partial\psi}{\partial v}, & 0 \\ \frac{\partial\omega}{\partial u}, & \frac{\partial\omega}{\partial v}, & -\frac{dz}{dw} \end{vmatrix} = 0,$$

что можно короче написать такъ:

$$J - \frac{dz}{dw} \cdot J_1 = 0.$$

Отсюда находимъ

$$dz = \frac{J}{J_1}\, dw,$$

гдѣ

$$J_1 = \frac{\partial\varphi}{\partial u} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial v} - \frac{\partial\varphi}{\partial v} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial u} .$$

Если мы будемъ считать дифференціалы всѣхъ перемѣнныхъ положительными, то можемъ положить

$$dz = \left| \frac{J}{J_1} \right| dw.$$

Подставивъ найденное выраженіе для dz въ равенство (a) и мѣняя затѣмъ порядокъ интегрированія, будемъ имѣть

$$\iiint dx\, dy\, dz = \iint \left[\int \left| \frac{J}{J_1} \right|_{x,y,w} dw \right] dx\, dy =$$

$$= \int \left[\iint \left| \frac{J}{J_1} \right|_{x,y,w} dx\, dy \right] dw,$$

гдѣ значки x, y, w означаютъ, что величина, стоящая въ скобкахъ, выражена въ функціи этихъ перемѣнныхъ.

Далѣе, когда выполняется двойное интегрированіе по x и y, буква w считается постоянной и $dw = 0$; поэтому получаемъ

$$dx = \frac{\partial\varphi}{\partial u} du + \frac{\partial\varphi}{\partial v} dv$$

$$dy = \frac{\partial\psi}{\partial u} du + \frac{\partial\psi}{\partial v} dv,$$

какъ будто бы x и y были функціями отъ 2 перемѣнныхъ u и v:

$$x = \varphi(u, v)$$

$$y = \psi(u, v).$$

По формулѣ преобразованія перемѣнныхъ въ двойномъ интегралѣ имѣемъ:

$$\iint \left|\frac{J}{J_1}\right|_{x,y,w} dx\, dy = \iint \left|\frac{J}{J_1}\right|_{u,v,w} |J_1|\, du\, dv =$$

$$= \iint |J|_{u,v,w}\, du\, dv\ .$$

Слѣдовательно, окончательно

$$\iiint dx\, dy\, dz = \iiint |J|\, du\, dv\, dw.$$

Рѣшимъ нѣсколько примѣровъ на преобразованіе координатъ.

1) *Цилиндрическія координаты:*

$$x = r.\mathrm{Cos}\,\theta$$

$$y = r.\mathrm{Sin}\,\theta$$

$$z = z\ .$$

Въ этомъ случаѣ имѣемъ:

$$J = \begin{vmatrix} \mathrm{Cos}\theta & -r.\mathrm{Sin}\theta & 0 \\ \mathrm{Sin}\theta & r.\mathrm{Cos}\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.\mathrm{Cos}^2\theta + r.\mathrm{Sin}^2\theta = r;$$

и элементъ объема будетъ

$$dx\, dy\, dz = r\, dr\, d\theta\, dz.$$

Положимъ, что дано уравненіе прямого кругового конуса (см.

черт. 209):

$$x^2 + y^2 = \left[\frac{R}{H}\right]^2 . z^2$$

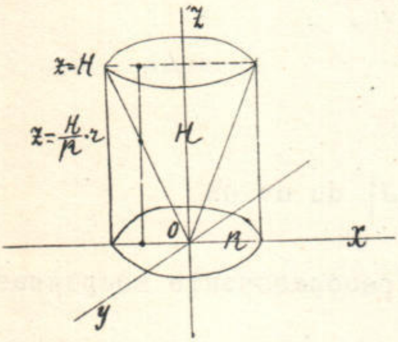
и нужно опредѣлить объемъ, ограниченный этой поверхностью и плоскостью $z = H$. Для любой точки на поверхности конуса

$$z = \frac{H}{R} . r;$$

поэтому

$$V = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{R}\int_{z=\frac{H}{R}r}^{H} r\,dr\,d\theta\,dz,$$

причемъ интегрированіе нужно выполнить сначала по z, такъ какъ предѣлы интеграла по этой перемѣнной зависятъ отъ другой перемѣнной r.



Черт. 209.

Итакъ:

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^{R} r(H - \frac{H}{R}r)dr\,d\theta =$$

$$= 2\pi\left[\frac{1}{2}r^2H - \frac{1}{3}\frac{H}{R}r^3\right]_0^R =$$

$$= 2\pi . \frac{1}{6}HR^2 = \frac{1}{3}\pi R^2.H.$$

2) *Сферическія координаты.*

$$x = \rho.\mathrm{Sin}\,\theta.\mathrm{Cos}\,\psi$$

$$y = \rho.\mathrm{Sin}\,\theta.\mathrm{Sin}\,\psi$$

$$z = \rho.\mathrm{Cos}\,\theta\ .$$

Якобіанъ данной системы будетъ:

$$J = \begin{vmatrix} \mathrm{Sin}\theta\ \mathrm{Cos}\psi & \rho\ \mathrm{Cos}\theta\ \mathrm{Cos}\psi & -\rho\ \mathrm{Sin}\theta\ \mathrm{Sin}\psi \\ \mathrm{Sin}\theta\ \mathrm{Sin}\psi & \rho\ \mathrm{Cos}\theta\ \mathrm{Sin}\psi & \rho\ \mathrm{Sin}\theta\ \mathrm{Cos}\psi \\ \mathrm{Cos}\theta & -\rho\ \mathrm{Sin}\theta & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \rho^2 \sin\theta \cos^2\theta \cos^2\psi + \rho^2 \sin^3\theta \sin^2\psi + \rho^2 \sin\theta \cos^2\theta \sin^2\psi +$$

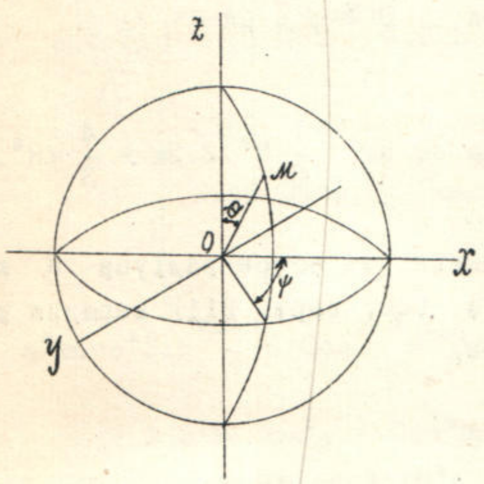
$$+ \rho^2 \sin^3\theta \cos^2\psi = \rho^2 \sin\theta.$$

Для объема шара (см. черт. 210) предѣлы интегрированія по θ будутъ 0 и π; а при

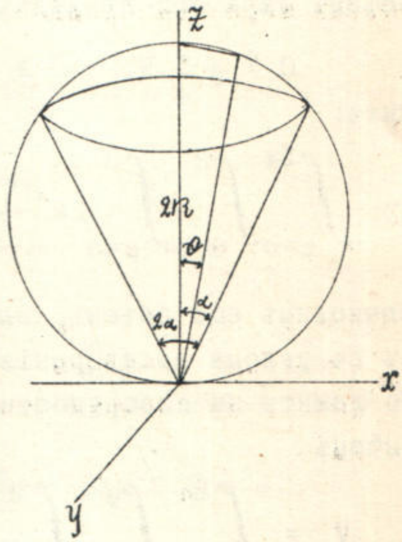
$$0 \leqq \theta \leqq \pi$$

$\sin\theta$ остается > 0; поэтому

$$|J| = \rho^2 \sin\theta.$$



Черт. 210.



Черт. 211.

Предѣлы интегрированія опредѣляются такъ:

при $\rho = 0$ выходитъ

$$x = y = z = 0$$

(начало), при $\rho = R$ - поверхность сферы радіуса R (см. §19 въ началѣ).

При $\theta = 0$ имѣемъ

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = \rho > 0$$

- положительная ось Z-овъ; при $\theta = \pi/2$ имѣемъ

$$x = \rho \cos\psi, \quad y = \rho \sin\psi, \quad z = 0$$

- плоскость XOY; при $\theta = \pi$ имѣемъ

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = -\rho < 0$$

- отрицательная ось Z-овъ.

При $\psi = 0$ выходитъ

$$x = \rho \, \mathrm{Sin}\theta > 0, \quad y = 0, \quad z = \rho \, \mathrm{Cos}\theta \gtrless 0$$

- правая половина плоскости XOZ; при $\psi = \pi/2$ выходитъ

$$x = 0, \quad y = \rho \, \mathrm{Sin}\theta > 0, \quad z = \rho \, \mathrm{Cos}\theta \gtrless 0$$

- передняя часть плоскости YOZ; при $\psi = \pi$ получимъ лѣвую часть плоскости XOZ, при $\psi = 3\pi/2$ - заднюю часть плоскости XOZ, при $\psi = 2\pi$ - снова правую часть плоскости XOZ.

Объемъ шара при предѣлахъ

$$0 \leqq \rho \leqq R, \quad 0 \leqq \theta \leqq \pi, \quad 0 \leqq \psi \leqq 2\pi$$

выходитъ:

$$V = \int_{\psi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\rho=0}^{R} \rho^2 \mathrm{Sin}\theta \, d\rho \, d\theta \, d\psi = \frac{1}{3} R^3.2.2\pi = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Вычислимъ еще объемъ, вырѣзанный изъ сферы радіуса R конусомъ съ угломъ растворенія $= 2\alpha$ (см. черт. 211), вершина котораго лежитъ на поверхности шара.

Имѣемъ

$$V = \int_{\psi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\alpha}\int_{\rho=0}^{2R.\mathrm{Cos}\theta} \rho^2 \mathrm{Sin}\theta \, d\rho \, d\theta \, d\psi =$$

$$= 2\pi\int_0^{\alpha} \mathrm{Sin}\theta \, d\theta \, \frac{1}{3} \left|\rho^3\right|_0^{2R.\mathrm{Cos}\theta} = 2\pi\int_0^{\alpha} \frac{8}{3} R^3 \mathrm{Cos}^3\theta \, \mathrm{Sin}\theta \, d\theta =$$

$$= \frac{16}{3}\pi R^3 \left[-\frac{\mathrm{Cos}^4\theta}{4}\right]_0^{\alpha} = \frac{4}{3}\pi R^3 (1 - \mathrm{Cos}^4\alpha).$$

Сферическія координаты получаются, какъ частный лучай слѣдующихъ координатъ:

$$x = a\rho \, \mathrm{Sin}^m\theta \, \mathrm{Cos}^m\psi$$

$$y = b\rho \, \mathrm{Sin}^m\theta \, \mathrm{Sin}^m\psi$$

$$z = c\rho \, \mathrm{Cos}^m\theta$$

при $a = b = c = m = 1$. Составимъ для этого общаго случая выраженіе якобіана:

$$J = \begin{vmatrix} a\mathrm{Sin}^m\theta\mathrm{Cos}^m\psi, & mа\rho\mathrm{Sin}^{m-1}\theta\mathrm{Cos}\theta\mathrm{Cos}^m\psi, & -ma\rho\mathrm{Sin}^m\theta\mathrm{Cos}^{m-1}\psi\mathrm{Sin}\psi \\ b\mathrm{Sin}^m\theta\mathrm{Sin}^m\psi, & mb\rho\mathrm{Sin}^{m-1}\theta\mathrm{Cos}\theta\mathrm{Sin}^m\psi, & +mb\rho\mathrm{Sin}^m\theta\mathrm{Sin}^{m-1}\psi\mathrm{Cos}\psi \\ c\ \mathrm{Cos}^m\theta, & -\ mc\rho\ \mathrm{Cos}^{m-1}\theta\ \mathrm{Sin}\theta, & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= a\ \mathrm{Sin}^{m-1}\theta\ \mathrm{Cos}^{m-1}\psi\ b\ \mathrm{Sin}^{m-1}\theta\ \mathrm{Sin}^{m-1}\psi\ c\ \mathrm{Cos}^{m-1}\theta\ \times$$

$$\times \begin{vmatrix} \mathrm{Sin}\theta\ \mathrm{Cos}\psi, & m\rho\ \mathrm{Cos}\theta\ \mathrm{Cos}\psi, & -m\rho\ \mathrm{Sin}\theta\ \mathrm{Sin}\psi \\ \mathrm{Sin}\theta\ \mathrm{Sin}\psi, & m\rho\ \mathrm{Cos}\theta\ \mathrm{Sin}\psi, & m\rho\ \mathrm{Sin}\theta\ \mathrm{Cos}\psi \\ \mathrm{Cos}\theta, & -\ m\rho\ \mathrm{Sin}\theta, & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= abc\ \mathrm{Sin}^{2m-2}\theta\ \mathrm{Cos}^{m-1}\theta\ \mathrm{Sin}^{m-1}\psi\ \mathrm{Cos}^{m-1}\psi\ m^2\rho^2\mathrm{Sin}\theta\ \times$$

$$\times \begin{vmatrix} \mathrm{Sin}\theta\ \mathrm{Cos}\psi, & \mathrm{Cos}\theta\ \mathrm{Cos}\psi, & -\ \mathrm{Sin}\psi \\ \mathrm{Sin}\theta\ \mathrm{Sin}\psi, & \mathrm{Cos}\theta\ \mathrm{Sin}\psi, & \mathrm{Cos}\psi \\ \mathrm{Cos}\theta, & -\ \mathrm{Sin}\theta, & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= m^2abc\rho^2\mathrm{Sin}^{2m-1}\theta\ \mathrm{Cos}^{m-1}\theta\ \mathrm{Sin}^{m-1}\psi\ \mathrm{Cos}^{m-1}\psi\ (\mathrm{Cos}^2\theta\ \mathrm{Cos}^2\psi\ +$$

$$+\ \mathrm{Sin}^2\theta\ \mathrm{Cos}^2\psi + \mathrm{Cos}^2\theta\ \mathrm{Sin}^2\psi + \mathrm{Sin}^2\theta\ \mathrm{Cos}^2\psi).$$

Итакъ, окончательно имѣемъ:

$$J = m^2abc\rho^2\mathrm{Sin}^{2m-1}\theta\ \mathrm{Cos}^{m-1}\theta\ \mathrm{Sin}^{m-1}\psi\ \mathrm{Cos}^{m-1}\psi.$$

3) Вычислить объемъ эллипсоида, введя координаты

$$x = a\rho\ \mathrm{Sin}\theta\ \mathrm{Cos}\psi$$

$$y = b\rho\ \mathrm{Sin}\theta\ \mathrm{Sin}\psi$$

$$z = c\rho\ \mathrm{Cos}\theta\ .$$

Здѣсь $m = 1$ и по предыдущей формулѣ

$$|J| = abc\rho^2\mathrm{Sin}\theta.$$

Численное значеніе J также равно

$$|J| = abc\rho^2\mathrm{Sin}\theta,$$

такъ какъ θ измѣняется въ предѣлахъ отъ 0 до π.

Предѣлы интегрированія легко установить тѣмъ же разсужденіемъ, какъ для шара. При $\rho = 0$ выходитъ

$$x = y = z = 0,$$

при $\rho = 1$ получается данный эллипсоидъ.

Отсюда видно, что ρ мѣняется въ предѣлахъ отъ 0 до 1. Предѣлы для θ будутъ 0 и π; дѣйствительно: при $\theta = 0$ имѣемъ

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = + c\rho$$

- ось Z-овъ положительная; при $\theta = \pi/2$ имѣемъ

$$z = 0$$

- плоскость XOY; при $\theta = \pi$:

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = - c\rho$$

- ось Z-овъ отрицательная.

Буква ψ измѣняется въ предѣлахъ отъ 0 до 2π; дѣйствительно, значенію $\psi = 0$ отвѣчаютъ значенія:

$$x = a\rho.\sin\theta > 0, \quad y = 0, \quad z = c\rho.\cos\theta \gtrless 0,$$

и мы имѣемъ плоскость XOZ - ея правую половину; при $\psi = \pi/2$ имѣемъ

$$x = 0, \quad y = b\rho.\sin\theta > 0, \quad z = c\rho.\cos\theta \gtrless 0$$

- плоскость YOZ - ея переднюю половину; при $\psi = \pi$ имѣемъ

$$x = a\rho.\sin\theta < 0, \quad y = 0, \quad z = c\rho.\cos\theta \gtrless 0$$

- плоскость XOZ - ея лѣвую половину и т. д., какъ въ случаѣ шара.

Итакъ, объемъ эллипсоида

$$V = \int_{\psi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\rho=0}^{1} abc\rho^2 \sin\theta \, d\rho \, d\theta \, d\psi =$$

$$= abc\,\frac{1}{3} \,.\, 2 \,.\, 2\pi = \frac{4}{3}\pi abc.$$

4) Возьмемъ систему координатъ при $m = 2$:

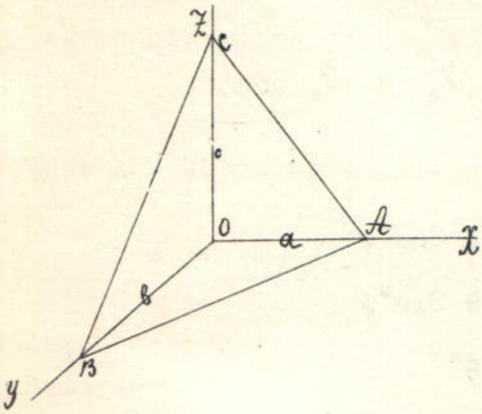
$$x = a\rho.\operatorname{Sin}^2\theta \operatorname{Cos}^2\psi$$

$$y = b\rho \operatorname{Sin}^2\theta \operatorname{Sin}^2\psi$$

$$z = c\rho \operatorname{Cos}^2\theta$$

и, введя эти координаты, вычислимъ объемъ тетраэдра, ограниченный координатными плоскостями и плоскостью

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$



Черт. 212.

Якобіанъ данной системы будетъ

$$J = 4abc\rho^2 \operatorname{Sin}^3\theta \operatorname{Cos}\theta \operatorname{Sin}\psi \operatorname{Cos}\psi.$$

При $\rho = 0$ получаемъ

$$x = y = z = 0,$$

при $\rho = 1$:- уравненіе плоскости

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

такъ что предѣлы для ρ будутъ 0 и 1.

Предѣлы для θ :- 0 и $\pi/_2$, такъ какъ при $\theta = 0$ выходитъ

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = c\rho,$$

т.е. положительная ось Z-овъ, а при $\theta = \pi/_2$ имѣемъ

$$x = a\rho \operatorname{Cos}^2\psi, \quad y = b\rho \operatorname{Sin}^2\psi, \quad z = 0$$

- плоскость XOY между положительными осями OX и OY.

Предѣлы для ψ будутъ 0 и $\pi/_2$, такъ какъ при $\psi = 0$ имѣемъ

$$x = a\rho \operatorname{Sin}^2\theta > 0, \quad y = 0, \quad z = c\rho \operatorname{Cos}^2\theta > 0,$$

т.е. плоскость XOZ между положительными осями, при $\psi = \pi/_2$ имѣемъ

$$x = 0, \quad y = b\rho \operatorname{Sin}^2\theta > 0, \quad z = c\rho \operatorname{Cos}^2\theta > 0$$

- плоскость YOZ между положительными осями.

Но при

$$0 \leqq \theta \leqq \pi/2$$

$$0 \leqq \psi \leqq \pi/2$$

будетъ

$$|J| = J$$

и потому

$$V = 4abc\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_0^1 \rho^2 \mathrm{Sin}^3\theta \,\mathrm{Cos}\theta \,\mathrm{Sin}\psi \,\mathrm{Cos}\psi \,d\rho \,d\theta \,d\psi =$$

$$= 4abc \,.\, 1/3 \,.\, 1/4 \,.\, 1/2 = 1/6 \,abc.$$

5) Возьмемъ еще систему

$$x = a\rho \,\mathrm{Sin}^3\theta \,\mathrm{Cos}^3\psi$$

$$y = b\rho \,\mathrm{Sin}^3\theta \,\mathrm{Sin}^3\psi$$

$$z = c\rho \,\mathrm{Cos}^3\theta$$

и воспользуемся ею для вычисленія объема, ограниченнаго поверхностью

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} + \left(\frac{z}{c}\right)^{2/3} = 1.$$

Разсуждая, какъ въ случаѣ эллипсоида, убѣдимся, что предѣлы интегрированія будутъ:

для ρ − 0 и 1

" θ − 0 и π

" ψ − 0 и 2π.

Такъ какъ въ этихъ предѣлахъ якобіанъ

$$J = 9abc\rho^2 \mathrm{Sin}^5\theta \,\mathrm{Cos}^2\theta \,\mathrm{Sin}^2\psi \,\mathrm{Cos}^2\psi$$

остается положительнымъ, то

$$|J| = J.$$

Отсюда

$$V = 9abc\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^1 \rho^2 \mathrm{Sin}^5\theta \,\mathrm{Cos}^2\theta \,\mathrm{Sin}^2\psi \,\mathrm{Cos}^2\psi \,d\rho \,d\theta \,d\psi =$$

$$= 9abc\,\frac{1}{3}\,.\,2\left[\frac{2.4}{3.5}-\frac{2.4.6}{3.5.7}\right].\,4\,.\left[\frac{1}{2}-\frac{1.3}{2.4}\right].\,\frac{\pi}{2} =$$

$$= \cancel{9}abc\,.\,\frac{1}{\cancel{3}}\,.\,\cancel{2}\,.\,\frac{\cancel{2}.4}{\cancel{3}.5}\,.\,\frac{1}{7}\,.\,\frac{\cancel{4}}{\cancel{2}}\,.\,\frac{1}{\cancel{4}}\,.\,\frac{\pi}{\cancel{2}} = \frac{4}{35}\,\pi abc.$$

Отмѣтимъ слѣдующія формулы для массы, моментовъ инерціи и координатъ центра тяжести въ криволинейныхъ координатахъ.

Считая плотность функціей отъ координатъ точки и полагая

$$\mu = F(u, v, w),$$

получимъ для массы выраженіе

$$M = \iiint_{(v)} F(u,v,w)\,.\,|J|\,du\,dv\,dw,$$

причемъ интегрированіе распространяется по всему объему V.

Полагая

$$x = \varphi(u, v, w)$$

$$y = \psi(u, v, w)$$

$$z = \omega(u, v, w),$$

находимъ для моментовъ инерціи относительно осей OX, OY, OZ формулы

$$I_x = \iiint_{(v)}\left[\psi^2(u,v,w) + \omega^2(u,v,w)\right]\mu\,|J|\,du\,dv\,dw$$

$$I_y = \iiint_{(v)}\left[\varphi^2(u,v,w) + \omega^2(u,v,w)\right]\mu\,|J|\,du\,dv\,dw$$

$$I_z = \iiint_{(v)}\left[\varphi^2(u,v,w) + \psi^2(u,v,w)\right]\mu\,|J|\,du\,dv\,dw.$$

Формулы для координатъ центра тяжести будутъ

$$x_c = \frac{\iiint \varphi(u,v,w)\,\mu\,|J|\,du\,dv\,dw}{\iiint \mu\,|J|\,du\,dv\,dw},$$

$$y_c = \frac{\iiint \psi(u,v,w)\,\mu\,|J|\,du\,dv\,dw}{\iiint \mu\,|J|\,du\,dv\,dw}$$

$$z_c = \frac{\iiint \omega(u,v,w)\mu\ |J|du\ dv\ dw}{\iiint \mu\ |J|du\ dv\ dw}.$$

§ 3.

Примѣры.

Примѣръ 1. Опредѣлить полный объемъ, ограниченный поверхностью

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^3 z.$$

Поверхность расположена вся надъ плоскостью XOY, такъ какъ $z > 0$, и дѣлится координатными плоскостями XOZ и YOZ на 4 симметричныя части; поэтому можно вычислить объемъ внутри угла между положительными направленіями осей и его учетверить.

Введя въ уравненіе поверхности сферическія координаты: $x = \rho\ \mathrm{Sin}\theta\ \mathrm{Cos}\psi, \ldots$, получимъ

$$\rho^4 = a^3 \rho\ \mathrm{Cos}\theta,$$

откуда

$$\rho = 0, \quad \rho^3 = a^3\ \mathrm{Cos}\theta.$$

Это и будутъ предѣлы по ρ:

$$\rho = 0 \text{ и } \rho = a\sqrt[3]{\mathrm{Cos}\theta}.$$

Предѣлы по θ будутъ 0 и $\pi/_2$, по ψ также 0 и $\pi/_2$ - для $1/_4$ нашего объема. Якобіанъ $\rho^2 \mathrm{Sin}\theta$.

Итакъ искомый объемъ

$$V = 4\int_0^{\rho}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} \rho^2 \mathrm{Sin}\theta\ d\rho\ d\theta\ d\psi =$$

$$= 4\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} \frac{1}{3}\ a^3 \mathrm{Cos}\theta\ .\ \mathrm{Sin}\theta\ d\theta\ d\psi =$$

$$= \frac{4}{3}\ a^3 . \int_0^{\pi/2} \mathrm{Sin}\theta\ \mathrm{Cos}\theta\ d\theta\ . \int_0^{\pi/2} d\psi =$$

$$= \frac{4}{3} a^3 . \frac{1}{2} . \frac{\pi}{2} = \frac{1}{3} \pi a^3 .$$

Примѣръ 2. Найти полный объемъ, ограниченный поверхностью

$$(x^2 + y^2)^2 + z^4 = a^3 z.$$

Объемъ состоитъ изъ 4 одинаковыхъ частей; для части, заключенной внутри угла положительныхъ направленій осей, предѣлы интегрированія по θ и по ψ будутъ 0 и $\pi/2$; предѣлы по ρ найдутся изъ даннаго уравненія и будутъ

$$\rho = 0 \quad \text{и} \quad \rho^3 = \frac{a^3 \operatorname{Cos}\theta}{\operatorname{Sin}^4\theta + \operatorname{Cos}^4\theta} .$$

Итакъ, искомый объемъ

$$V = 4 \int_0^\rho \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \rho^2 \operatorname{Sin}\theta \, d\rho \, d\theta \, d\psi =$$

$$= 4 . \frac{1}{3} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \frac{a^3 \operatorname{Sin}\theta \operatorname{Cos}\theta}{\operatorname{Sin}^4\theta + \operatorname{Cos}^4\theta} d\theta \, d\psi =$$

$$= \frac{4}{3} a^3 . \frac{\pi}{2} . \int_0^\infty \frac{t \, dt}{1 + t^4} \quad (\textit{полагая} \ \operatorname{tg} \theta = t)$$

$$= \frac{2}{3} \pi a^3 . \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{du}{1 + u^2} \quad (\textit{полагая} \ t^2 = u)$$

$$= \frac{1}{3} \pi a^3 . \frac{\pi}{2} = \frac{1}{6} \pi^2 a^3 .$$

Примѣръ 3. Найти объемъ, ограниченный поверхностью

$$\left[\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right]^3 = \frac{xyz}{h^3} .$$

Такъ какъ произведеніе xyz должно быть > 0, то ясно, что объемъ состоитъ изъ 4 одинаковыхъ частей, размѣщенныхъ въ тѣхъ углахъ, гдѣ координаты имѣютъ знаки

x	+	+	−	−
y	+	−	+	−
z	+	−	−	+

Полагая $x = a\rho\, \mathrm{Sin}\theta\, \mathrm{Cos}\psi$ и проч., получаемъ изъ уравненія поверхности

$$\rho^6 = \frac{abc}{h^3}\rho^3 \mathrm{Sin}^2\theta\, \mathrm{Cos}\theta\, \mathrm{Sin}\psi\, \mathrm{Cos}\psi,$$

откуда

$$\rho = 0 \quad \text{и} \quad \rho^3 = \frac{abc}{h^3} \mathrm{Sin}^2\theta\, \mathrm{Cos}\theta\, \mathrm{Sin}\psi\, \mathrm{Cos}\psi;$$

предѣлы по θ и ψ будутъ 0 и $\pi/_2$ для угла между положительными осями. Итакъ

$$V = 4 . \int_0^{\rho}\int_0^{\pi/_2}\int_0^{\pi/_2} abc\rho^2 \mathrm{Sin}\theta\, d\rho\, d\theta\, d\psi =$$

$$= 4abc . \frac{1}{3}\int_0^{\pi/_2}\int_0^{\pi/_2} \frac{abc}{h^3} \mathrm{Sin}^2\theta \mathrm{Cos}\theta \mathrm{Sin}\psi \mathrm{Cos}\psi . \mathrm{Sin}\theta d\theta d\psi =$$

$$= \frac{4}{3}\frac{(abc)^2}{h^3} . \int_0^{\pi/_2} \mathrm{Sin}^3\theta\, \mathrm{Cos}\theta\, d\theta . \int_0^{\pi/_2} \mathrm{Sin}\psi\, \mathrm{Cos}\psi\, d\psi =$$

$$= \frac{4}{3}\frac{(abc)^2}{h^3} . \frac{1}{4} . \frac{1}{2} = \frac{1}{6}\frac{(abc)^2}{h^3} .$$

Примѣръ 4. Найти объемъ, ограниченный поверхностью

$$\left[\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right]^6 = \frac{xyz}{h^3}$$

и заключенный внутри угла между положительными направленіями координатныхъ осей.

Вводя координаты

$$x = a\rho\, \mathrm{Sin}^2\theta\, \mathrm{Cos}^2\psi \quad \text{и проч.}$$

получимъ

$$\rho^6 = \frac{abc}{h^3}\rho^3\, \mathrm{Sin}^4\theta\, \mathrm{Cos}^2\theta\, \mathrm{Sin}^2\psi\, \mathrm{Cos}^2\psi,$$

откуда

$$\rho = 0 \quad \text{и} \quad \rho^3 = \frac{abc}{h^3} \operatorname{Sin}^4\theta \operatorname{Cos}^2\theta \operatorname{Sin}^2\psi \operatorname{Cos}^2\psi$$

- это предѣлы по ρ. Для θ и ψ - предѣлы 0 и $\pi/2$. Якобіанъ

$$J = 4abc\, \rho^2 \operatorname{Sin}^3\theta \operatorname{Cos}\theta \operatorname{Sin}\psi \operatorname{Cos}\psi.$$

Искомый объемъ:

$$V = 4abc \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\rho} \rho^2 \operatorname{Sin}^3\theta \operatorname{Cos}\theta \operatorname{Sin}\psi \operatorname{Cos}\psi \, d\rho\, d\theta\, d\psi =$$

$$= 4abc \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} \frac{1}{3}\cdot\frac{abc}{h^3} \operatorname{Sin}^4\theta \operatorname{Cos}^2\theta \operatorname{Sin}^2\psi \operatorname{Cos}^2\psi \times$$

$$\times \operatorname{Sin}^3\theta \operatorname{Cos}\theta \operatorname{Sin}\psi \operatorname{Cos}\psi \, d\theta\, d\psi =$$

$$= \frac{4}{3}\frac{(abc)^2}{h^3}\cdot \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} \operatorname{Sin}^7\theta \operatorname{Cos}^3\theta \operatorname{Sin}^3\psi \operatorname{Cos}^3\psi \, d\theta\, d\psi =$$

$$= \frac{4}{3}\cdot\frac{(abc)^2}{h^3}\cdot \int_0^{\pi/2} \operatorname{Sin}^7\theta(1-\operatorname{Sin}^2\theta)\, d\operatorname{Sin}\theta \int_0^{\pi/2} \operatorname{Sin}^3\psi(1-\operatorname{Sin}^2\psi)\, d\operatorname{Sin}\psi =$$

$$= \frac{4}{3}\cdot\frac{(abc)^2}{h^3}\cdot\left[\frac{1}{8}-\frac{1}{10}\right]\cdot\left[\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right] =$$

$$= \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{40}\cdot\frac{1}{12}\cdot\frac{(abc)^2}{h^3} = \frac{1}{360}\cdot\frac{(abc)^2}{h^3}.$$

Примѣръ 5. Найти моментъ инерціи прямого кругового конуса относительно его оси; радіусъ основанія конуса R, высота H, плотность γ - постоянна.

Введемъ цилиндрическія координаты. Тогда имѣемъ для квадрата разстоянія любой точки отъ оси OZ выраженіе:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Предѣлы интегрированія по z будутъ (см. черт. 213):

$$z = \frac{H}{R} r \quad \text{и} \quad H.$$

Слѣдовательно:

$$I_z = \int_0^{2\pi}\int_0^R\int_{z=\frac{H}{R}r}^{H} r^2\gamma r\, dr\, d\theta\, dz = 2\pi\gamma\int_0^R r^3 dr . H(1 - \frac{r}{R}) =$$

$$= 2\pi\gamma H\int_0^R (r^3 - \frac{r^4}{R})dr = 2\pi\gamma H\left[\frac{1}{4}R^4 - \frac{1}{5}R^4\right] =$$

$$= \frac{\pi\gamma H}{10} R^4 = \gamma . \frac{1}{3}\pi R^2 H . \frac{3}{10} R^2 = \frac{3}{10} MR^2,$$

гдѣ M - масса конуса.

Примѣръ 6. Найти моментъ инерціи шара относительно его діаметра. Уравненіе поверхности шара дано:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Введемъ сферическія координаты

$$x = \rho \operatorname{Sin}\theta \operatorname{Cos}\psi$$

$$y = \rho \operatorname{Sin}\theta \operatorname{Sin}\psi$$

$$z = \rho \operatorname{Cos}\theta.$$

Якобіанъ этой системы

$$|J| = \rho^2 \operatorname{Sin}\theta \quad \text{и} \quad x^2 + y^2 = \rho^2 \operatorname{Sin}^2\theta.$$

Считая плотность γ постоянной, находимъ:

$$I_z = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^R \rho^2 \operatorname{Sin}^2\theta . \gamma . \rho^2 \operatorname{Sin}\theta\, d\rho\, d\theta\, d\psi =$$

$$= \gamma . 2\pi . {}^1\!/_5\, R^5 . 2 . {}^2\!/_3 = \gamma . {}^4\!/_3\, \pi R^3 . {}^2\!/_5\, R^2 = {}^2\!/_5\, MR^2.$$

Примѣръ 7. Найти центръ тяжести ${}^1\!/_8$ объема эллипсоида:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

содержащейся внутри угла положительныхъ осей. Плотность γ -

постоянная.

Введемъ координаты

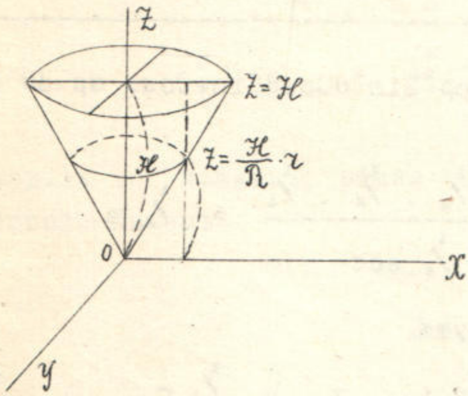
$$x = a\rho \operatorname{Sin}\theta \operatorname{Cos}\psi$$

$$y = b\rho \operatorname{Sin}\theta \operatorname{Sin}\psi$$

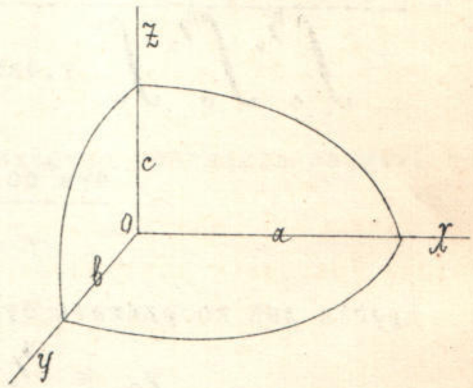
$$z = c\rho \operatorname{Cos}\theta\ .$$

Здѣсь

$$J = abc\rho^2 \operatorname{Sin}\theta\ .$$



Черт. 213.



Черт. 214.

Отсюда

$$x_C = \frac{\int_0^{\pi/2}\int_c^{\pi/2}\int_0^{1} a\rho \operatorname{Sin}\theta \operatorname{Cos}\psi . \gamma abc\rho^2 \operatorname{Sin}\theta\, d\rho\, d\theta\, d\psi}{\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_0^{1} \gamma abc\rho^2 \operatorname{Sin}\theta\, d\rho\, d\theta\, d\psi} =$$

$$= \frac{a^2bc\ \frac{1}{4}\ .\ \frac{1}{2}\ .\ \frac{\pi}{2}\ .\ 1}{\frac{1}{8}\ .\ \frac{4}{3}\ \pi abc} = \frac{3}{8}\ a.$$

Подобнымъ же образомъ найдемъ:

$$y_C = \frac{3}{8}\, b\ ;\quad z = \frac{3}{8}\, c.$$

Примѣръ 8. Найти центръ тяжести объема тетраэдра съ прямымъ трегранным угломъ и съ ребрами a, b, c, выходящими изъ вершины этого угла (см. черт. 215). Плотность γ постоянна.

Вводя координаты

$$x = a\rho \operatorname{Sin}^2\theta \operatorname{Cos}^2\psi$$

$$y = b\rho \operatorname{Sin}^2\theta \operatorname{Sin}^2\psi$$

$$z = c\rho \operatorname{Cos}^2\theta,$$

имѣемъ

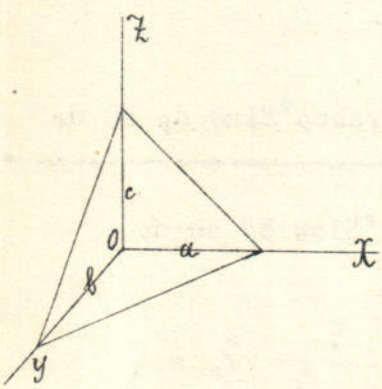
$$J = 4abc\rho^2 \operatorname{Sin}^3\theta \operatorname{Cos}\theta \operatorname{Sin}\psi \operatorname{Cos}\psi$$

$$x_c = \frac{\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_0^1 a\rho\operatorname{Sin}^2\theta\operatorname{Cos}^2\psi.\gamma.4abc\rho^2\operatorname{Sin}^3\theta\operatorname{Cos}\theta\operatorname{Sin}\psi\operatorname{Cos}\psi d\rho d\theta d\psi}{\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_0^1 \gamma.4abc\rho^2\operatorname{Sin}^3\theta\operatorname{Cos}\theta\operatorname{Sin}\psi\operatorname{Cos}\psi\, d\rho\, d\theta\, d\psi}$$

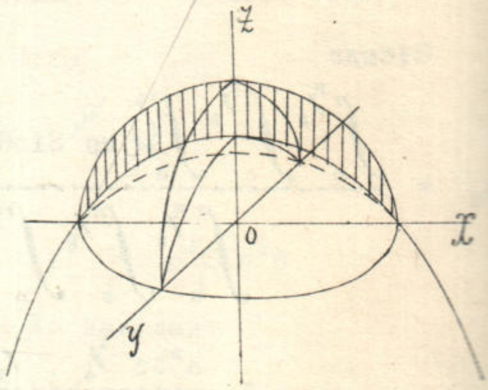
$$= \frac{4\gamma a^2bc\ {}^1/_4\ .\ {}^1/_8\ .\ {}^1/_4}{\gamma\ .\ {}^1/_8\ abc} = {}^1/_4\ a.$$

Другія двѣ координаты будутъ

$$y_c = {}^1/_4\ b\ ;\quad z_c = {}^1/_4\ c.$$



Черт. 215.



Черт. 216.

Примѣръ 9. Найти центръ тяжести объема, заключеннаго между поверхностями (см. черт. 216):

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

$$x^2 + y^2 = a(a-2z).$$

Плотность постоянна. Введемъ цилиндрическія координаты

$$x = r \operatorname{Cos}\theta$$

$$y = r\,\mathrm{Sin}\theta$$

$$z = z.$$

Опредѣлимъ предѣлы интегрированія по z.

Изъ 1-го уравненія находимъ:

$$z = \sqrt{a^2 - r^2}.$$

Второе же уравненіе даетъ

$$r^2 = a^2 - 2az,$$

$$z = \frac{a^2 - r^2}{2a}.$$

Предѣлы r найдемъ, рѣшая совмѣстно уравненія данныхъ поверхностей. Имѣемъ

$$a(a - 2z) + z^2 = a^2$$

$$z^2 - 2za = 0;$$

откуда

$$z = 0 \quad \text{и} \quad z = 2a.$$

Первое рѣшеніе даетъ вещественное значеніе для r

$$x^2 + y^2 = r^2 = a^2$$

$$r = a.$$

Другое рѣшеніе $z = 2a$ даетъ мнимое значеніе для r, а именно:

$$x^2 + y^2 = r^2 = -3a^2$$

и потому мы его отбросимъ.

Итакъ:

$$z_c = \frac{\int_0^{2\pi}\int_0^{a}\int_{\frac{a^2-r^2}{2a}}^{\sqrt{a^2-r^2}} z.\gamma.r\,dr\,d\theta\,dz}{\int_0^{2\pi}\int_0^{a}\int_{\frac{a^2-r^2}{2a}}^{\sqrt{a^2-r^2}} \gamma.r\,dr\,d\theta\,dz} =$$

$$= \frac{\gamma \cdot {}^{1}/_{2}\ 2\pi \int_0^a r\,dr \left[a^2 - r^2 - \dfrac{(a^2-r^2)^2}{4a^2} \right]}{\gamma \cdot 2\pi \int_0^a r\,dr \left[\sqrt{a^2 - r^2} - \dfrac{a^2 - r^2}{2a} \right]} .$$

Вычислимъ отдѣльно интегралы, входящіе въ выраженіе z_C:

$$\int_0^a \left[a^2 - r^2 - \frac{1}{4a^2} (a^4 - 2a^2r^2 + r^4) \right] r\,dr =$$

$$= \int_0^a \left[\frac{3}{4} a^2 - \frac{1}{2} r^2 - \frac{r^4}{4a^2} \right] r\,dr = \frac{3}{4} a^2 \frac{1}{2} a^2 - \frac{1}{2}\frac{1}{4} a^4 -$$

$$- \frac{1}{4}\frac{1}{6} a^4 = \frac{1}{4} a^4 ({}^{3}/_{2} - {}^{1}/_{2} - {}^{1}/_{6}) = \frac{5}{24} a^4 .$$

$$\int_0^a \left[r\sqrt{a^2 - r^2} - \frac{ar}{2} + \frac{r^3}{2a} \right] dr = \left[-\frac{1}{3}(a^2-r^2)^{3/2} - \frac{1}{4} ar^2 + \frac{1}{8}\frac{r^4}{a} \right]_0^a =$$

$$= \frac{1}{3} a^3 - \frac{1}{4} a^3 + \frac{1}{8} a^3 = \frac{5}{24} a^3 .$$

Подставляя найденные результаты въ выраженіе z_C, получимъ

$$z_C = \frac{1}{2} \frac{\gamma \cdot 2\pi \cdot {}^{5}/_{24}\, a^4}{\gamma \cdot 2\pi \cdot {}^{5}/_{24}\, a^3} = \frac{a}{2} .$$

Примѣръ 10. Опредѣлить массу тѣла, заключеннаго между эллипсоидомъ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

и конусомъ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} ,$$

предполагая слоистое строеніе этого тѣла, такъ что на поверхности каждаго эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \rho^2 ,$$

плотность

$$\mu = k\rho .$$

Введемъ координаты

$$x = a\rho \operatorname{Sin}\theta \operatorname{Cos}\psi$$

$$y = b\rho \operatorname{Sin}\theta \operatorname{Sin}\psi$$

$$z = c\rho \operatorname{Cos}\theta.$$

Координатныя линіи этой системы будутъ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \rho^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} \operatorname{tg}^2\theta.$$

Предѣлы ρ будутъ 0 и 1; а предѣлы θ :- 0 и $\pi/_2$, что отвѣчаетъ значеніямъ $\operatorname{tg}\theta$: 0 и 1. Итакъ, искомая масса

$$M = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^1 k\rho \,.\, abc\rho^2 \operatorname{Sin}\theta \, d\rho \, d\theta \, d\psi =$$

$$= 2\pi kabc \,.\, \frac{1}{4}\left[1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right] = \frac{1}{2}\pi kabc\left[1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right].$$

Иногда уравненія, связывающія прежнія координаты x, y, z съ новыми u, v, w задаются въ видѣ

$$u = F(x, y, z)$$

$$v = \Phi(x, y, z)$$

$$w = \Psi(x, y, z),$$

причемъ рѣшенія ихъ относительно x, y, z:

$$x = \varphi(u, v, w)$$

$$y = \psi(u, v, w)$$

$$z = \omega(u, v, w)$$

представляются весьма сложными. Тогда можно воспользоваться простою связью между двумя якобіанами:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}, \quad J_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix}$$

именно произведенiе ихъ

$$J.J_1 = 1.$$

На основанiи этой связи, вычисливъ по даннымъ уравненiямъ

$$u = F(x, y, z) \quad \text{и проч.}$$

опредѣлитель J_1, получаемъ J какъ $1 : J_1$.

Для доказательства формулы $J.J_1 = 1$, отмѣтимъ 9 соотношенiй между 18 производными, входящими въ J и J_1. Имѣемъ тождество:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz = \left[\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv + \frac{\partial x}{\partial w} dw\right]\frac{\partial u}{\partial x} +$$

$$+ \frac{\partial u}{\partial y}\left[\frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv + \frac{\partial y}{\partial w} dw\right] + \frac{\partial u}{\partial z}\left[\frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv + \frac{\partial z}{\partial w} dw\right].$$

Отбирая въ правой части члены съ du, dv, dw, приравниваемъ коэффицiентъ при du единицѣ, при dv и dw - нулю, т.к. эта сумма должна быть равна du, а перемѣнныя u, v, w - независимы другъ отъ друга. Такимъ образомъ находимъ:

$$(1) \ldots \quad \left|\begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u} = 1, \\[2ex] \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v} = 0, \\[2ex] \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial w} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial w} = 0. \end{array}\right.$$

Подобнымъ же способомъ составляя dv и dw, получимъ еще шесть зависимостей:

$$(2) \ldots \quad \left|\begin{array}{l} \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u} = 0, \\[2ex] \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v} = 1, \end{array}\right.$$

$$(2)\ .\ .\ .\quad \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial w}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial w}+\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial w}=0,$$

$$(3)\ .\ .\ .\quad \left|\begin{aligned}&\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}=0,\\&\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}=0,\\&\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial w}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial w}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial w}=1.\end{aligned}\right.$$

Рассмотримъ теперь линейную однородную систему:

$$(*)\ .\ .\ .\quad \left|\begin{aligned}&\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\lambda\right)\bar X+\frac{\partial v}{\partial x}\bar Y+\frac{\partial w}{\partial x}\bar Z=0\\&\frac{\partial u}{\partial y}\bar X+\left(\frac{\partial v}{\partial y}-\lambda\right)\bar Y+\frac{\partial w}{\partial y}\bar Z=0\\&\frac{\partial u}{\partial z}\bar X+\frac{\partial v}{\partial z}\bar Y+\left(\frac{\partial w}{\partial z}-\lambda\right)\bar Z=0.\end{aligned}\right.$$

Она допускаетъ относительно $\bar X,\ \bar Y,\ \bar Z$ рѣшенія, отличныя отъ $\bar X=\bar Y=\bar Z=0$, если λ имѣетъ одно изъ трехъ значеній, опредѣляемыхъ кубическимъ уравненіемъ:

$$(4)\ .\ .\ .\quad \begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x}-\lambda & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x}\\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y}-\lambda & \frac{\partial w}{\partial y}\\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z}-\lambda\end{vmatrix}=0$$

которое имѣетъ форму

$$-\lambda^3+P_1\lambda^2+P_2\lambda+P_3=0,$$

причемъ P_3 представляетъ значеніе лѣвой части при $\lambda=0$ и равно якобіану J_1 (перестановка строкъ и столбцовъ не мѣняетъ значенія опредѣлителя); отмѣтимъ, что произведеніе трехъ корней $\lambda'\lambda''\lambda'''$ этого уравненія равно P_3 или J_1:

$$\lambda'\lambda''\lambda'''=J_1.$$

Преобразуемъ теперь систему (*) въ другую, ей равносильную умноживъ уравненія этой системы на

$$\frac{\partial x}{\partial u}, \quad \frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial z}{\partial u}$$

и сложивъ, получимъ, на основаніи уравненій (1):

$$\left(1 - \lambda \frac{\partial x}{\partial u}\right)\bar{X} - \lambda \frac{\partial y}{\partial u}\bar{Y} - \lambda \frac{\partial z}{\partial u}\bar{Z} = 0;$$

умноживъ уравненія (*) на

$$\frac{\partial x}{\partial v}, \quad \frac{\partial y}{\partial v}, \quad \frac{\partial z}{\partial v}$$

и сложивъ, въ силу (2), получимъ:

$$-\lambda \frac{\partial x}{\partial v}\bar{X} + \left(1 - \lambda \frac{\partial y}{\partial v}\right)\bar{Y} - \lambda \frac{\partial z}{\partial v}\bar{Z} = 0;$$

умноживъ уравненія (*) на

$$\frac{\partial x}{\partial w}, \quad \frac{\partial y}{\partial w}, \quad \frac{\partial z}{\partial w}$$

и сложивъ, получимъ на основаніи форм. (3):

$$-\lambda \frac{\partial x}{\partial w}\bar{X} - \lambda \frac{\partial y}{\partial w}\bar{Y} + \left(1 - \lambda \frac{\partial z}{\partial w}\right)\bar{Z} = 0.$$

Итакъ, система (*) равносильна слѣдующей:

$$(*')\qquad \begin{aligned} &\left(1-\lambda \frac{\partial x}{\partial u}\right)\bar{X} - \lambda \frac{\partial y}{\partial u}\bar{Y} - \lambda \frac{\partial z}{\partial u}\bar{Z} = 0 \\ &-\lambda \frac{\partial x}{\partial v}\bar{X} + \left(1 - \lambda \frac{\partial y}{\partial v}\right)\bar{Y} - \lambda \frac{\partial z}{\partial v}\bar{Z} = 0 \\ &-\lambda \frac{\partial x}{\partial w}\bar{X} - \lambda \frac{\partial y}{\partial w}\bar{Y} + \left(1-\lambda \frac{\partial z}{\partial w}\right)\bar{Z} = 0, \end{aligned}$$

которая имѣетъ рѣшенія, отличныя отъ

$$\bar{X} = \bar{Y} = Z = 0,$$

при трехъ значеніяхъ λ, удовлетворяющихъ уравненію:

$$(5)\ \ldots \quad \begin{vmatrix} 1-\lambda\dfrac{\partial x}{\partial u} & -\lambda\dfrac{\partial y}{\partial u} & -\lambda\dfrac{\partial z}{\partial u} \\ -\lambda\dfrac{\partial x}{\partial v} & 1-\lambda\dfrac{\partial y}{\partial v} & -\lambda\dfrac{\partial z}{\partial v} \\ -\lambda\dfrac{\partial x}{\partial w} & -\lambda\dfrac{\partial y}{\partial w} & 1-\lambda\dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} = 0.$$

Въ этомъ уравненіи свободный членъ будетъ (при $\lambda = 0$):

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

а коэффиціентъ при λ^3 получится, если въ каждой строкѣ опредѣлителя вынести множитель λ (тогда впереди будетъ множитель λ^3) и положить въ новомъ опредѣлителѣ $1/\lambda = 0$, т.е. коэффиціентъ при λ^3 равенъ

$$\begin{vmatrix} -\dfrac{\partial x}{\partial u} & -\dfrac{\partial y}{\partial u} & -\dfrac{\partial z}{\partial u} \\ -\dfrac{\partial x}{\partial v} & -\dfrac{\partial y}{\partial v} & -\dfrac{\partial z}{\partial v} \\ -\dfrac{\partial x}{\partial w} & -\dfrac{\partial y}{\partial w} & -\dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} = -J.$$

Итакъ, уравненіе (5) имѣетъ форму:

$$-J\lambda^3 + Q_1\lambda^2 + Q_2\lambda + 1 = 0,$$

такъ что произведеніе его корней

$$\lambda'\lambda''\lambda''' = 1/J.$$

Но уравненія (4) и (5) должны приводить къ одинаковымъ значеніямъ λ, такъ какъ системы (*) и (*') равносильны, слѣдовательно

$$\lambda'\lambda''\lambda''' = J_1 = 1/J,$$

$$JJ_1 = 1.$$

Примѣръ. Найти объемъ параллелепипеда, ограниченнаго плоскостями:

$$ax + by + cz = h, \qquad ax + by + cz = h_1,$$

$$a^1x + b^1y + c^1z = k, \qquad a^1x + b^1y + c^1z = k_1,$$

$$a''x + b''y + c''z = l, \qquad a''x + b''y + c''z = l_1.$$

Введемъ новыя координаты:

$$u = ax + by + cz,$$

$$v = a'x + b'y + c'z,$$

$$w = a''x + b''y + c''z.$$

Тогда якобіанъ J_1 равенъ

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = \Delta,$$

а слѣдовательно якобіанъ J будетъ

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta}.$$

Въ новой системѣ искомый объемъ ограниченъ координатными поверхностями:

$$u = h, \qquad u = h_1,$$

$$v = k, \qquad v = k_1,$$

$$w = l, \qquad w = l_1,$$

слѣдовательно, онъ равенъ:

$$\int_h^{h_1}\int_k^{k_1}\int_l^{l_1} \frac{1}{\Delta}\, du\, dv\, dw = \frac{(h_1-h)(k_1-k)(l_1-l)}{\Delta}.$$

ИНТЕГРИРОВАНІЕ ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНЫХЪ УРАВНЕНІЙ.

§ 1.

Происхожденіе обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій путемъ исключенія постоянныхъ произвольныхъ.

Опредѣленіе: обыкновеннымъ дифференціальнымъ уравненіемъ n-го порядка называется уравненіе

$$F(x, y, y', y'', \dots y^{(n)}) = 0$$

между независимой перемѣнной x, ея неизвѣстной функціей y и производными ея до порядка n-го включительно. Проинтегрировать такое уравненіе, или рѣшить его - это значитъ найти выраженіе всѣхъ тѣхъ функцій отъ x, которыя будучи подставлены въ данное уравненіе, обращаютъ его въ тождество.

Выяснимъ происхожденіе обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій при такъ называемомъ исключеніи постоянныхъ произвольныхъ.

Пусть имѣется уравненіе

$$f(x, y, C_1, C_2, C_3, \dots C_n) = 0, \quad \dots \quad (1)$$

гдѣ x независимая перемѣнная, y функція отъ x, C_1, C_2, C_3, ... C_n - постоянныя произвольныя. Дифференцируя уравненіе (1), находимъ уравненіе:

$$f'_x + f'_y \cdot y' = 0 \quad \dots \dots \dots \quad (2)$$

или

$$f_1(x, y, y', C_1, C_2, \dots C_n) = 0.$$

Дифференцируя (2), находимъ уравненіе

$$f'_{1x} + f'_{1y}.y' + f'_{1y'}.y'' = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

или

$$f_2(x,\ y,\ y',\ y'',\ C_1,\ C_2,\ \ldots\ C_n) = 0.$$

Такимъ образомъ мы составимъ еще рядъ уравненій:

$$f_3(x,\ y,\ y',\ y'',\ y''',\ C_1,\ C_2,\ \ldots\ C_n) = 0 \; . \; . \; . \; . \; (4)$$

$$f_4(x,\ y,\ y',\ y'',\ y''',\ y^{IV},\ C_1,\ C_2,\ \ldots\ C_n) = 0 \; . \; . \; (5)$$

. . . .

$$f_{n-1}(x,y,y',y'',\ldots\ y^{(n-1)},\ C_1,C_2,\ldots\ C_n) = 0 \; . \; . \; . \; (n)$$

$$f_n(x,\ y,\ y',\ y'',\ \ldots\ y^{(n)},\ C_1,\ C_2,\ldots\ C_n) = 0 \; . \; . \; (n+1).$$

Постоянныя $C_1, C_2, \ldots C_n$ называются *независимыми*, если изъ уравненій отъ (1) до (n) возможно найти опредѣленныя значенія для $C_1, C_2, \ldots C_n$ въ видѣ функцій отъ $x, y, y', y'', \ldots$ $\ldots y^{(n)}$; подставляя эти значенія въ уравненіе (n+1)-ое, мы получимъ уравненіе вида

$$F(x,\ y,\ y',\ y'',\ \ldots\ y^{(n-1)},\ y^{(n)}) = 0 \; . \; . \; . \; . \; (*).$$

Это есть обыкновенное дифференціальное уравненіе порядка n-го, и уравненіе (1) называется его общимъ интеграломъ.

Если изъ уравненій (1) - (n+1) вывести значенія y, y', y'', $\ldots y^{(n)}$ черезъ x и $C_1, C_2, \ldots C_n$ и подставить ихъ въ уравненіе (*), то получится тождество

$$0 = 0,$$

такъ какъ не можетъ существовать зависимости

$$\Phi(x,\ C_1,\ C_2,\ \ldots\ C_n) = 0.$$

Такимъ образомъ общій интегралъ даетъ для y, какъ функціи отъ x, такое значеніе, которое служитъ рѣшеніемъ дифференціальнаго уравненія, т. к. будучи подставлено въ уравненіе, обращаетъ его въ тождество. Въ составъ общаго интеграла непремѣнно входятъ n постоянныхъ $C_1, C_2, \ldots C_n$ по числу единицъ порядка дифференціальнаго уравненія.

Эти постоянныя $C_1, C_2, \ldots C_n$, входящія въ общій интегралъ, должны быть независимы другъ отъ друга и ихъ можно опредѣлить такъ, чтобы при нѣкоторомъ $x = x_0$ функціи

$$y,\ y',\ y'',\ \dots\ y^{(n-1)}$$

получали заранѣе данныя значенія:

$$y_0,\ y_0',\ y_0'',\ \dots\ y_0^{(n-1)}.$$

Такія значенія $C_1, C_2, C_3, \dots C_n$ являются рѣшеніями слѣдующей системы:

$$f_1(x_0,\ y_0,\ C_1,\ C_2,\ \dots C_n) = 0$$

$$f_2(x_0,\ y_0,\ y_0',\ C_1,\ C_2,\ \dots C_n) = 0$$

$$f_3(x_0,\ y_0,\ y_0',\ y_0'',\ C_1,\ C_2,\ \dots C_n = 0$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$f_n(x_0,\ y_0,\ y_0',\ \dots\ y_0^{(n-1)},\ C_1,\ \dots C_n) = 0.$$

На основаніи предыдущаго можно сказать, что *общимъ интеграломъ* дифференціальнаго уравненія порядка n-го называется такое его рѣшеніе

$$f(x,\ y,\ C_1,\ C_2,\ \dots C_n) = 0,$$

которое содержитъ n независимыхъ постоянныхъ $C_1, C_2, C_3, \dots \dots C_n$, т.е. такихъ, которыя можно опредѣлить подъ условіемъ, чтобы

$$y,\ y',\ y'',\ \dots\ y^{(n-1)}$$

получали заранѣе заданныя значенія при $x = x_0$.

Примѣръ. Дана функція

$$y = C_1 \mathrm{Cos}x + C_2 \mathrm{Sin}x \ .\ .\ .\ .\ .\ (1).$$

Взявъ двѣ производныя этой функціи, найдемъ:

$$y' = -C_1 \mathrm{Sin}x + C_2 \mathrm{Cos}x \ .\ .\ .\ .\ (2)$$

$$y'' = -C_1 \mathrm{Cos}x - C_2 \mathrm{Sin}x \ .\ .\ .\ .\ (3).$$

Изъ уравненій (1) и (2) находимъ

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= y\,\mathrm{Cos}x - y'\mathrm{Sin}x \\ C_2 &= y\,\mathrm{Sin}x + y'\mathrm{Cos}x \end{aligned}\right\} \ .\ .\ .\ .\ (4).$$

Подставляя найденныя значенія C_1, C_2 въ (3) имѣемъ

$$y'' = -y\cos^2 x + y'\sin x\cos x - y\sin^2 x - y'\sin x\cos x$$

или

$$y'' + y = 0 \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (*).$$

Это есть дифференціальное уравненіе 2-го порядка, общій интегралъ котораго (1). Положимъ, что, при $x = 0$, y и y' получаютъ заранѣе заданныя значенія:

$$y = y_0, \quad y' = y_0' .$$

Тогда изъ уравненій (4) слѣдуетъ

$$y_0 = C_1, \quad y_0' = C_2$$

и общій интегралъ уравненія (*) будетъ

$$y = y_0\cos x + y_0'\sin x ,$$

причемъ найденная фукнція 1) удовлетворяетъ уравненію $y'' + y = 0$ и 2) y и ея производная y' при $x = 0$ принимаютъ заранѣе заданныя значенія: y_0 и y_0'.

Слѣдуетъ замѣтить, что не всегда изъ уравненій (1) - (n) можно найти опредѣленныя значенія для $C_1, C_2, C_3, \dots C_n$; въ этомъ случаѣ результатъ исключенія постоянныхъ C изъ системы (1) - (n+1) представитъ дифференціальное ур-іе порядка ниже n, и обыкновенно возможно бываетъ уменьшить число буквъ C, вводя такія обозначенія, чтобы новыя постоянныя были независимы другъ отъ друга.

Примѣръ. $y = C_1 e^{x+C_2}$.

Выписываемъ уравненія:

$$y = C_1 e^{x+C_2} \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (1)$$

$$y' = C_1 e^{x+C_2} \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (2)$$

$$y'' = C_1 e^{x+C_2} \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (3).$$

Результатъ исключенія будетъ

$$y' - y = 0, \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (*)$$

т.е. дифференціальное ур-іе 1-го порядка. Это произошло отъ того, что въ ур-іи (1) постоянныя произвольныя C_1 и C_2 можно замѣнить одной, положивъ $C_1 e^{C_2} = C$, тогда

$$y = Ce^x, \qquad y' = Ce^x$$

и результатъ исключенія

$$y' - y = 0$$

получится по схемѣ общаго случая.

Если разсматривать изложенное выше съ геометрической точки зрѣнія, то ур-іе (1) (общій интегралъ) представитъ систему кривыхъ, зависящихъ отъ n произвольныхъ параметровъ; дифференціальное уравненіе (*) изображаетъ общее геометрическое свойство всѣхъ этихъ кривыхъ (относительно касательныхъ, кривизны и т. п.) не зависящее отъ значеній параметровъ $C_1, C_2, \ldots C_n$.

Примѣръ. Имѣемъ уравненіе

$$(x - C_1)^2 + (y - C_2)^2 = C_3^2,$$

представляющее общее ур-іе окружностей радіуса C_3 съ центромъ въ точкѣ C_1, C_2. Дифференцируя его, находимъ

$$(x - C_1) + (y - C_2)y' = 0 \;. \;. \;. \;. \;. \;. \;. \;(2)$$

$$1 + y'^2 + (y - C_2)y'' = 0 \;. \;. \;. \;. \;. \;. \;. \;(3)$$

$$3y'y'' + (y - C_2)y''' = 0 \;. \;. \;. \;. \;. \;. \;(4).$$

Подставляя въ (4) найденное изъ (3) выраженіе

$$y - C_2 = -\frac{1 + y'^2}{y''},$$

получимъ

$$3y'y''^2 - (1 + y'^2)y''' = 0.$$

Припоминая, что радіусъ кривизны (см. стр. 157 наст. курса)

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}$$

и дифференцируя это выраженіе, получимъ

$$\frac{dR}{dx} = \frac{1}{y''^2}\left[y'' \cdot \tfrac{3}{2}(1 + y'^2)^{1/2} \cdot 2y'y'' - (1 + y'^2)^{3/2} \cdot y'''\right] =$$

$$\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''^2}\left[3y'y''^2-(1+y'^2)y'''\right].$$

Въ скобкахъ мы получили выраженіе (*), и, слѣдовательно, уравненіе (*) равносильно тому, что

$$\frac{dR}{dx} = 0,$$

т.е.

R *(радіусъ кривизны)* = *пост.*

Такимъ образомъ общимъ свойствомъ всѣхъ кривыхъ (1)(окружностей) является постоянство радіуса кривизны.

Кромѣ общаго интеграла, разсмотрѣннаго выше, упомянемъ о частныхъ и особенныхъ интегралахъ (рѣшеніяхъ).

Частнымъ интеграломъ называется всякій интегралъ, который выводится изъ общаго при заданіи постояннымъ частныхъ значеній (хотя бы и ∞).

Особеннымъ интеграломъ называется такое рѣшеніе, которое не заключается въ общемъ интегралѣ ни при какихъ значеніяхъ постоянныхъ. Для примѣра возьмемъ такое дифференціальное уравненіе:

$$y' - 2\sqrt{y} = 0.$$

Представимъ его въ видѣ

$$\frac{dy}{2\sqrt{y}} = dx;$$

имѣемъ

$$d\sqrt{y} = dx$$

$$d(\sqrt{y}-x) = 0$$

$$\sqrt{y} - x = C_1$$

$$\sqrt{y} = x + C_1.$$

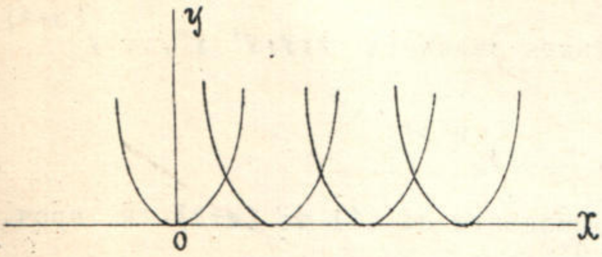
Отсюда находимъ общій интегралъ

$$y = (x+C_1)^2,$$

который представляетъ систему параболъ (см. черт. 217).

Но $y = 0$ также служитъ рѣшеніемъ, которое нужно считать *особенным*; оно даетъ, какъ легко видѣть огибающую системы кривыхъ:

$$y = (x+C_1)^2.$$



Черт. 217.

Замѣтимъ въ заключеніе, что задача интегрированія уравненія заключается въ нахожденіи общаго интеграла и всѣхъ особенныхъ рѣшеній уравненія, при этомъ задача считается рѣшенной, если неизвѣстная функція выражается въ квадратурахъ, т.е. черезъ неопредѣленные интегралы, причемъ безразлично, берется ли квадратура въ конечномъ видѣ или нѣтъ.

§ 2.

Интегрированіе уравненій помощью рядовъ.

Пусть дано уравненіе

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots y^{(n-1)}) \dots\dots (1).$$

Дифференцируя его нѣсколько разъ по x и замѣняя каждый разъ $y^{(n)}$ ея выраженіемъ (1), составимъ рядъ уравненій:

$$(2) \quad y^{(n+1)} = f'_x + f'_y . y' + f'_{y'} . y'' + \dots f'_{y^{(n-1)}} . y^{(n)} =$$

$$= f_1(x, y, y', y'', \dots y^{(n-1)}).$$

$$(3) \quad y^{(n+2)} = f_2(x, y, y', y'', \dots y^{(n-1)}) \quad \text{и т.д.}$$

$$(m+1) \quad y^{(n+m)} = f_m(x, y, y', y'', \dots y^{(n-1)}).$$

Поступая такимъ образомъ, мы можемъ всѣ производныя

$$y^{(n)},\ y^{(n+1)},\ y^{(n+2)},\ \dots$$

выразить въ функціи отъ

$$x,\ y,\ y',\ y'',\ \dots\ y^{(n-1)}.$$

Зададимъ теперь произвольныя значенія $x, y, y', y'', \dots y^{(n-1)}$ при $x = a$; пусть

$$y_a,\ y_a',\ y_a'',\ \dots\ y_a^{(n-1)}$$

будутъ эти значенія. Тогда уравненія съ (1) по (m+1) и проч. даютъ значенія $y^{(n)}, \dots y^{(n+m)}$ при $x = a$:

$$y_a^{(n)} = f(a,\ y_a,\ y_a',\ y_a'',\ \dots\ y_a^{(n-1)})$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$y_a^{(n+m)} = f_m(a,\ y_a,\ y_a',\ y_a'',\ \dots\ y_a^{(n+1)}) \quad \text{и т.д.}$$

Предполагая, что намъ удалось подмѣтить законъ составленія чиселъ

$$y_a^{(n)},\ y_a^{(n+1)},\ \dots \qquad (*)$$

черезъ данныя числа $y_a, y_a', \dots y_a^{(n-1)}$, и что всѣ эти числа (*) конечныя, мы можемъ представить неизвѣстную функцію y въ видѣ разложенія въ рядъ Тейлора по степенямъ разности $(x-a)$:

$$y = y_a + (x-a)y_a' + \frac{(x-a)^2}{1.\,2}y_a'' + \dots + \frac{(x-a)^n}{1.2\dots n}y_a^{(n)} +$$

$$+ \frac{(x-a)^{n+1}}{1.2\dots(n+1)}y_a^{(n+1)} + \dots \qquad (**).$$

Если этотъ рядъ оказывается абсолютно сходящимся въ нѣкоторомъ промежуткѣ значеній x, то его сумма y будетъ непрерывной функціей отъ $x, y_a, y_a', \dots y_a^{(n-1)}$:

$$y = F(x, y_a, y_a', y_a'', \dots y_a^{(n-1)}),$$

и, согласно нашему опредѣленію, есть общій интегралъ уравненія 1-го.

Главное затрудненіе этого способа заключается 1) въ томъ, что нужно подмѣтить законъ составленія чиселъ (*), и 2) въ вопросѣ о сходимости ряда (**).

Примѣръ. $y'' + ay = 0$.

Уравненіе (1) ... (m+1) будутъ:

$$(1) \qquad y'' = -a^2y$$

$$(2) \qquad y''' = -a^2y'$$

$$(3) \qquad y^{IV} = -a^2y'' = a^4y$$

$$(4) \qquad y^{V} = a^4y'$$

$$(5) \qquad y^{VI} = a^4y'' = -a^6y$$

$$(6) \qquad y^{VII} = -a^6y'$$

$$(7) \qquad y^{VIII} = -a^6y'' = a^8y \quad \text{и т.д.}$$

Законъ подмѣчается, а именно:

$$y^{2n} = (-1)^n a^{2n} y$$

$$y^{2n+1} = (-1)^n a^{2n} y'.$$

Пусть при $x = 0$

$$y = y_0; \quad y' = y_0';$$

тогда

$$y_0^{(2n)} = (-1)^n a^{2n} y_0$$

$$y_0^{(2n+1)} = (-1)^n a^{2n} y_0'.$$

Разложеніе въ рядъ Маклорена будетъ:

$$y = y_0 + xy_0' + \frac{x^2}{1.2} y_0'' + \frac{x^3}{1.2.3} y_0''' + \dots =$$

$$= y_0 \left[1 - \frac{a^2x^2}{1.2} + \frac{a^4x^4}{1.2.3.4} - \frac{a^6x^6}{1.2.3.4.5.6} + \dots \right] +$$

$$+ \frac{y_0'}{a} \left[ax - \frac{a^3x^3}{1.2.3} + \frac{a^5x^5}{1.2.3.4.5} \dots \right],$$

т.е.

$$y = y_0 \mathrm{Cos}\, ax + \frac{y_0}{a} \mathrm{Sin}\, ax.$$

Иногда прямо пробуютъ найти частныя рѣшенія даннаго дифференціальнаго уравненія въ видѣ ряда, расположеннаго по цѣлымъ возрастающимъ степенямъ $x - a$

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots$$

Примѣръ.

$$y'' + \frac{1}{x}y' + y = 0.$$

Будемъ искать частное рѣшеніе въ видѣ

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n + a_{n+1}x^{n+1} + \ldots$$

Для этого составимъ лѣвую часть даннаго уравненія. Имѣемъ

$$\frac{y'}{x} = \frac{a_1}{x} + 2a_2 + 3a_3x + \ldots + na_nx^{n-2} +$$

$$+ (n+1)a_{n+1}x^{n-1} + (n+2)a_{n+2}x^n + \ldots.$$

$$y'' = 2.1.a^2 + 3.2.a_3x + \ldots + n(n-1)a_nx^{n-2} +$$

$$+ (n+1)na_{n+1}x^{n-1} + (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \ldots.$$

Откуда

$$y'' + \frac{y'}{x} + y = \frac{a_1}{x} + (a_0 + 2^2a_2) + x(a_1+3^2a_3) +$$

$$+ x^2(a_2+4^2a_4) + \ldots + x^n\,[a_n + (n+2)^2a_{n+2}] + \ldots = 0.$$

Это уравненіе даетъ намъ условія для опредѣленія неизвѣстныхъ коэффиціентовъ:

$$a_1 = 0$$

$$a_0 + 2^2a_2 = 0; \qquad a_2 = -\,a_0\frac{1}{2^2}$$

$$a_1 + 3^2a_3 = 0; \qquad a_3 = 0$$

$$a_2 + 4^2a_4 = 0; \qquad a_4 = -\frac{a_3}{4^2} = a_0\frac{1}{2^2.4^2}$$

$$a_3 + 5^2a_5 = 0; \qquad a_5 = 0$$

$$a_4 + 6^2a_6 = 0; \qquad a_6 = -\frac{a^4}{4^2} = -\,a_0\frac{1}{2^2.4^2.6^2}$$

и т.д., вообще:

$$a_{2n+1} = 0$$

$$a_{2n} = (-1)^n a_0 \frac{1}{2^2.4^2.6^2\ldots(2n)^2},$$

причемъ a_0 произвольное число. Возьмемъ $a_0 = 1$. Тогда частное рѣшеніе предложеннаго уравненія представится въ видѣ

$$y = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2.4^2} - \frac{x^6}{2^2.4^2.6^2} + \ldots$$

причемъ рядъ будетъ сходящійся при всякомъ конечномъ x.

Эта функція

$$y = J_0(x)$$

называется *Бесселевой* или цилиндрической функціей нулевого порядка.

§ 3.

Классы уравненій 1-го порядка и 1-ой степени относительно y', которыя интегрируются въ квадратурахъ.

1-ый классъ. Уравненія, представляющія полный дифференціалъ.

Если дано уравненіе

$$Mdx + Ndy = 0,$$

гдѣ M и N - функціи отъ x и y, и оказывается

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x},$$

то, какъ извѣстно изъ предыдущаго (см. стр. 117), въ этомъ случаѣ

$$Mdx + Ndy = df(x, y).$$

Поэтому данное дифференціальное уравненіе переписывается въ видѣ

$$df(x, y) = 0,$$

и слѣдовательно

$$f(x, y) = C$$

будетъ общій интегралъ предложеннаго уравненія.

Примѣръ.

$$(x.\log y - x^2 + \cos y)y' + (x^3 + y.\log y - y - 2xy) = 0$$

Здѣсь первыя скобки отвѣчаютъ выраженію N, вторыя - M. Посмотримъ, удовлетворяется ли поставленное выше условіе для M и N:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = y \cdot \frac{1}{y} + \log y - 1 - 2x = \log y - 2x$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \log y - 2x.$$

Предложенное уравненіе - полный дифференціалъ. Рѣшаемъ его по общему способу:

$$f(x,y) = \int M(x,y)dx + \varphi(y) = {}^1/_4 x^4 + x(y.\log y - y) - x^2 y + \varphi(y),$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x.\log y - x^2 + \cos y = x.\log y - x^2 + \varphi'(y),$$

Имѣемъ

$$\varphi'(y) = \cos y$$

$$\varphi(y) = \sin y .$$

Слѣдовательно

$$f(x,y) = \frac{x^4}{4} - x^2 y + x(y.\log y - y) + \sin y + C.$$

Классъ 2-ой. Уравненія съ отдѣленными перемѣнными.

$$\bar{X}_1\bar{Y}_2dx + \bar{X}_2\bar{Y}_1dy = 0,$$

гдѣ $\bar{X}_1$, $\bar{X}_2$ - функціи только отъ x, а $\bar{Y}_1$, $\bar{Y}_2$ - функціи отъ y. Раздѣлимъ данное уравненіе

$$\bar{X}_1\bar{Y}_2dx + \bar{X}_2\bar{Y}_1dy = 0$$

на произведеніе $\bar{X}_2\bar{Y}_2$. Тогда получимъ уравненіе:

$$\frac{\overline{X}_1}{\overline{X}_2}\,dx + \frac{\overline{Y}_1}{\overline{Y}_2}\,dy = 0,$$

которое можно представить въ видѣ

$$d\left[\int \frac{\overline{X}_1}{\overline{X}_2}\,dx\right] + d\left[\int \frac{\overline{Y}_1}{\overline{Y}_2}\,dy\right] = 0,$$

или

$$d\left[\int \frac{\overline{X}_1}{\overline{X}_2}\,dx + \int \frac{\overline{Y}_1}{\overline{Y}_2}\,dy\right] = 0,$$

откуда:

$$\int \frac{\overline{X}_1}{\overline{X}_2}\,dx + \int \frac{\overline{Y}_1}{\overline{Y}_2}\,dy = C$$

- представляетъ общій интегралъ.

Примѣръ.

$$y^2(1+x)dx + x^2(1-y)dy = 0.$$

Перепишемъ уравненіе, отдѣливъ перемѣнныя:

$$\frac{1+x}{x^2}\,dx + \frac{1-y}{y^2}\,dy = 0.$$

Интегрируя, получимъ:

$$\int \frac{1+x}{x^2}\,dx + \int \frac{1-y}{y^2}\,dy = C$$

$$-\frac{1}{x} + \log x - \frac{1}{y} - \log y = C$$

$$\log\frac{x}{y} = C + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

или

$$\frac{x}{y} = A\,e^{1/x + 1/y},$$

если положить $C = \log A$.

Классъ 3-ій. Уравненія Эйлера:

$$(ay.dx + bx.dy) + x^m y^n (cy.dx + fx.dy) = 0$$

Раздѣлимъ все уравненіе на xy:

$$a\frac{dx}{x} + b\frac{dy}{y} + x^m y^n\left[c\frac{dx}{x} + f\frac{dy}{y}\right] = 0.$$

Полагая

$$x^a y^b = u, \quad x^c y^f = v,$$

найдемъ

$$\left.\begin{aligned} a.\log x + b.\log y &= \log u \\ c.\log x + f.\log y &= \log v \end{aligned}\right\} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (*)$$

Дифференцируя эти равенства, получимъ

$$a\frac{dx}{x} + b\frac{dy}{y} = \frac{du}{u}$$

$$c\frac{dx}{x} + f\frac{dy}{y} = \frac{dv}{v}.$$

Если въ системѣ (*) $af - bc$ не $= 0$, то рѣшая ее относительно $\log x$ и $\log y$, найдемъ

$$\log x = g.\log u + k.\log v$$

$$\log y = l.\log u + p.\log v,$$

гдѣ g, k, l, p - постоянныя; отсюда

$$x = u^g v^k$$

$$y = u^l v^p$$

и слѣдовательно

$$x^m y^n = u^q v^r,$$

гдѣ q и r новыя постоянныя. Теперь мы можемъ переписать данное уравненіе въ такомъ видѣ

$$\frac{du}{u} + u^q v^r \frac{dv}{v} = 0$$

или

$$\frac{du}{u^{q+1}} + v^{r-1}dv = 0.$$

Интегрируя, получимъ

$$-\frac{1}{qu^q} + \frac{1}{r}v^r = C.$$

Вводя сюда выраженія u и v черезъ x и y, получимъ общій интегралъ. Если же $af - bc = 0$, то

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{f} = \lambda,$$

откуда

$$a = c\lambda, \qquad b = f\lambda.$$

Тогда данное уравненіе представится въ видѣ

$$\lambda(cy.dx + fx.dy) + x^m y^n (cy.dx + fx.dy) = 0$$

или

$$(cy.dx + fx.dy)(\lambda + x^m y^n) = 0.$$

Имѣемъ два рѣшенія. Первое

$$cy.dx + fx.dy = 0 \quad \text{или} \quad c\frac{dx}{x} + f\frac{dy}{y} = 0$$

даетъ общій интегралъ

$$x^c y^f = C;$$

второе рѣшеніе

$$\lambda + x^m y^n = 0$$

будетъ частное, если

$$\frac{m}{c} = \frac{n}{f},$$

или особенное, если

$$mf - nc \gtrless 0.$$

Примѣръ.

$$2x.dy - 6y.dx + xy(x.dy - y.dx) = 0.$$

Раздѣливъ данное уравненіе на произведеніе xy, перепишемъ его въ такомъ видѣ

$$-6\frac{dx}{x} + 2\frac{dy}{y} + xy\left[-\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y}\right] = 0.$$

Полагая

$$x^{-6}y^2 = u, \qquad x^{-1}y = v,$$

и логарифмируя эти выраженія:

$$\left.\begin{aligned} -6\log x + 2\log y &= \log u \\ -\log x + \log y &= \log v, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (*),$$

путемъ дифференцированія найдемъ

$$-6\frac{dx}{x} + 2\frac{dy}{y} = \frac{du}{u},$$

$$-\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = \frac{dv}{v}.$$

Для составленія выраженія xy черезъ новыя перемѣнныя u и v имѣемъ изъ уравненій (*)

$$4\log x = 2\log v - \log u$$

$$4\log y = 6\log v - \log u,$$

откуда

$$x = u^{-1/4}v^{1/2}, \quad y = u^{-1/4}v^{3/2}.$$

Предложенное уравненіе получаетъ видъ

$$\frac{du}{u} + u^{-1/2}v^2\frac{dv}{v} = 0$$

или

$$\frac{du}{u^{1/2}} + v.dv = 0.$$

Интегрируя, получимъ:

$$2u^{1/2} + {}^1/_2 v^2 = C_1,$$

или

$$v^2 + 4\sqrt{u} = C \qquad (C = 2C_1),$$

$$\frac{y^2}{x^2} + \frac{4y}{x^3} = C,$$

и, наконецъ, общій интегралъ будетъ:

$$y^2x + 4y = Cx^3.$$

Классъ 4-ый. Однородныя уравненія:

$$\varphi(x, y)dx + \psi(x, y)dy = 0,$$

причемъ φ и ψ однородныя функціи одной и той же степени m.

По свойству однородныхъ функцій можно написать

$$\varphi(x, y) = x^m\psi(1, \frac{y}{x})$$

$$\psi(x,\ y) = x^m \psi(1,\ \frac{y}{x}).$$

Подставляя эти выраженія въ данное уравненіе и сокращая на x^m, получимъ

$$\varphi(1,\ \frac{y}{x})dx + \psi(1,\ \frac{y}{x})dy = 0$$

или

$$\Phi(\frac{y}{x})dx + \Psi(\frac{y}{x})dy = 0.$$

Замѣтимъ, что y' изъ однороднаго уравненія

$$y' = -\frac{\Phi(y/x)}{\Psi(y/x)},$$

т.е. представляетъ однородную функцію нулевой степени отъ x и y. Полагаемъ $y/x = z$ и слѣдовательно

$$y = xz; \qquad dy = z.dx + x.dz.$$

Тогда будемъ имѣть

$$\Phi(z)dx + \Psi(z)(z.dx + x.dz) = 0,$$

$$dx[\Phi(z) + z.\Psi(z)] + x.\Psi(z)dz = 0,$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{\Psi(z)dz}{\Phi(z) + z.\Psi(z)} = 0,$$

$$\log x + \int\frac{\Psi(z)}{\Phi(z) + z.\Psi(z)}dz = C.$$

Выполнивъ квадратуру и введя $z = y/x$, получимъ общій интегралъ.

Примѣръ.

$$x.dy + \sqrt{x^2 + y^2}\,dx = 0.$$

Здѣсь $m = 1$. Раздѣливъ все уравненіе на x, получимъ:

$$dy + \sqrt{1 + (y/x)^2}\,dx = 0.$$

Положивъ

$$y = xz; \quad dy = x.dz + z.dx,$$

найдемъ

$$x.dz + z.dx + \sqrt{1+z^2}\,dx = 0$$

$$dx(z + \sqrt{1+z^2}) + x.dz = 0$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}+z} = 0$$

$$\log x + \int(\sqrt{1+z^2} - z)dz = C$$

$$\log x + \frac{z}{2}\sqrt{1+z^2} + \frac{1}{2}\log(z+\sqrt{1+z^2}) - \frac{1}{2}z^2 = C$$

$$\log x + \frac{1}{2}\frac{y}{x}\sqrt{(y/x)^2+1} + \frac{1}{2}\log\frac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{x} - \frac{1}{2}(y/x)^2 = C$$

$$\frac{1}{2}\log x\left[y+\sqrt{x^2+y^2}\right] + \frac{1}{2}\frac{y}{x^2}\left[\sqrt{x^2+y^2}-y\right] = C$$

$$x\left[y+\sqrt{x^2+y^2}\right] = A\,e^{-\frac{y}{x^2}\left[\sqrt{x^2+y^2}-y\right]},$$

гдѣ

$$2C = \log A.$$

Классъ 5-ый. Уравненія, приводимыя къ однороднымъ:

$$y' = f\left[\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right].$$

Предложенное уравненіе легко приводится къ однородному подстановкой

$$\left|\begin{array}{l} x = u + \alpha \\ y = v + \beta \end{array}\right. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (**)$$

Тогда имѣемъ

$$ax + by + c = au + bv + (a\alpha + b\beta + c)$$

$$a_1x + b_1y + c_1 = a_1u + b_1v + (a_1\alpha + b_1\beta + c_1).$$

Опредѣлимъ α и β изъ того условія, чтобы послѣдніе члены обратились въ нуль:

$$a\alpha + b\beta + c = 0$$

$$a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0.$$

Если $ab_1 - a_1b$ не $= 0$, то α и β можно найти.. Изъ уравненія (**) находимъ

$$dx = du, \quad dy = dv$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{du}$$

и слѣдовательно дифференціальное уравненіе принимаетъ видъ:

$$\frac{dv}{du} = f\left[\frac{au + bv}{a_1u + b_1v}\right]$$

- мы получили однородное уравненіе. Проинтегрировавъ это уравненіе, вводимъ вмѣсто u и v ихъ значенія черезъ x и y:

$$u = x - \alpha, \quad v = y - \beta.$$

Если $ab_1 - a_1b = 0$, то

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \lambda \quad \text{и} \quad a = a_1\lambda, \quad b = b_1\lambda.$$

Полагаемъ

$$ax + by = z,$$

отсюда

$$a.dx + b.dy = dz,$$

$$a + by' = z',$$

$$y' = \frac{z' - a}{b},$$

$$a_1x + b_1y = \frac{1}{\lambda}(ax + by) = \frac{1}{\lambda} z.$$

Подставляя въ данное уравненіе, получимъ

$$\frac{z' - a}{b} = f\left[\frac{z + c}{\frac{1}{\lambda}z + c_1}\right] = \phi(z),$$

$$z' = a + b\varphi(z)$$

$$\frac{dz}{a + b\varphi(z)} = dx; \quad \int\frac{dz}{a + b\varphi(z)} = x + C.$$

Послѣ интегрированія положимъ

$$z = ax + by.$$

Примѣръ.

$$(x + y - 1)y' + 3y - x = 0.$$

Рѣшимъ это уравненіе относительно y':

$$y' = \frac{x - 3y}{x + y - 1}.$$

Положимъ

$$x = u + \alpha, \qquad y = v + \beta.$$

Тогда

$$x - 3y = u + \alpha - 3v - 3\beta = u - 3v + (\alpha - 3\beta)$$

$$x + y - 1 = u + v + (\alpha + \beta - 1).$$

Изъ уравненій

$$\alpha - 3\beta = 0$$

$$\alpha + \beta - 1 = 0$$

опредѣляемъ α и β:

$$\alpha = 3/4, \qquad \beta = 1/4$$

Итакъ мы привели данное уравненіе къ виду

$$y' = \frac{dv}{du} = \frac{u - 3v}{u + v} = \frac{1 - 3\frac{v}{u}}{1 + \frac{v}{u}},$$

т.е. классу 4-ому. Далѣе, полагаемъ $v = ut$; отсюда

$$\frac{dv}{du} = t + u\frac{dt}{du},$$

$$t + u\frac{dt}{du} = \frac{1 - 3t}{1 + t}.$$

$$u\frac{dt}{du} = \frac{1 - 3t}{1 + t} - t = \frac{1 - 4t - t^2}{1 + t}$$

$$\frac{(1+t)dt}{1 - 4t - t^2} = \frac{du}{u}$$

$$\int\frac{(t+1)dt}{t^2 + 4t - 1} = -\log u + C.$$

Выполнимъ теперь интегрированіе:

$$\int \frac{(t+2-1)dt}{(t+2)^2-5} = \frac{1}{2}\log(t^2+4t-1) - \frac{1}{2\sqrt{5}}\log\frac{t+2-\sqrt{5}}{t+2+\sqrt{5}} =$$

$$= \log \frac{\sqrt{v^2+4uv-u^2}}{u\left[\frac{v+(2-\sqrt{5})u}{v+(2+\sqrt{5})u}\right]^{1/2\sqrt{5}}}.$$

Общій интегралъ будетъ

$$\sqrt{v^2+4uv-u^2} = A\left[\frac{v+(2-\sqrt{5})u}{v+(2+\sqrt{5})u}\right]^{1/2\sqrt{5}}, \quad \log A = C.$$

Дѣлая подстановку

$$u = x - 3/4, \quad v = y - 1/4,$$

находимъ

$$v^2 + 4uv - u^2 = y^2 - 1/2 y + 1/16 + 4xy - x - 3y + 3/4 -$$

$$- x^2 + 3/2 x - 9/16 = y^2 + 4xy - x^2 + 1/2 x - 7/2 y + 1/4 .$$

Окончательно имѣемъ

$$y^2 + 4xy - x^2 + 1/2 x - 7/2 y + 1/4 =$$

$$= A\left[\frac{y - 1/4 + (2-\sqrt{5})(x - 3/4)}{y - 1/4 + (2+\sqrt{5})(x - 3/4)}\right]^{1/\sqrt{5}}$$

(A поставлено вмѣсто A^2).

Классъ 6-ой. Уравненія линейныя

$$y' + Py = Q,$$

гдѣ P и Q суть функціи одного x. $y' = v'u + u'v$

1) Способъ *Бернулли.* Положимъ $y = uv$. Взявъ производную и подставивъ въ данное уравненіе, получимъ

$$u'v + uv' + Puv = Q$$

$$v'u + v(u' + Pu) = Q.$$

Опредѣлимъ u изъ уравненія

$$u' + Pu = 0.$$

Отсюда

$$\frac{du}{dx} + Pu = 0, \quad \frac{du}{u} = -Pdx;$$

$$\log u = \int - Pdx; \quad u = e^{-\int Pdx}.$$

Теперь остается опредѣлить v изъ уравненія:

$$v'u = Q;$$

имѣемъ

$$\frac{dv}{dx} = \frac{Q}{u} = Q\,e^{\int Pdx}$$

$$v = C + \int Q\,e^{\int Pdx}dx.$$

Общій интегралъ будетъ равенъ

$$y = C\,e^{-\int Pdx} + e^{-\int Pdx}\int Q\,e^{\int Pdx}dx.$$

2) Способъ *Эйлера* или способъ множителя. Умножимъ уравненіе

$$y' + Py = Q \quad \text{на} \quad e^{\int Pdx}.$$

Тогда получимъ

$$y'e^{\int Pdx} + Py.e^{\int Pdx} = Q.e^{\int Pdx}.$$

Очевидно, что лѣвая часть представляетъ полный дифференціалъ функціи

$$y.e^{\int Pdx},$$

а потому все уравненіе можно переписать въ видѣ

$$\frac{d}{dx}\left[y.e^{\int Pdx}\right] = Q.e^{\int Pdx}.$$

Интегрируя, получимъ

$$y.e^{\int Pdx} = C + \int Q.e^{\int Pdx}dx$$

или

$$y = C.e^{-\int Pdx} + e^{-\int Pdx}\int Q.e^{\int Pdx}dx.$$

Примѣръ.

$$y' + \frac{2x}{x^2-1}y = \frac{\sqrt{x}}{x^2-1}.$$

Рѣшаемъ по способу Эйлера:

$$\int Pdx = \int\frac{2xdx}{x^2-1} = \log(x^2-1).$$

$$e^{\int Pdx} = x^2 - 1.$$

Умножая все уравненіе на этотъ множитель, получимъ

$$y'(x^2-1) + 2xy = \sqrt{x}$$

$$\frac{d}{dx}\left[y(x^2-1)\right] = \sqrt{x}$$

$$y(x^2-1) = C + \int\sqrt{x}\,dx = C + {}^2/_3\,x\sqrt{x}$$

и наконецъ

$$y = \frac{2}{3}\frac{x\sqrt{x}}{x^2-1} + \frac{C}{x^2-1}.$$

Классъ 7-ой. Уравненія *Бернулли* (приводящіяся къ линейнымъ):

$$y' + Py = Qy^n,$$

гдѣ P и Q - функціи отъ x.

Раздѣлимъ все уравненіе на y^n:

$$y'y^{-n} + Py^{-n+1} = Q.$$

Положивъ $y^{-n+1} = z$, дифференцированіемъ находимъ:

$$z' = -(n-1)y^{-n}y'.$$

Отсюда имѣемъ

$$\frac{z'}{-(n-1)} + Pz = Q,$$

т.е. приходимъ къ уравненію линейному.

Примѣръ.

$$y' + \frac{3y}{1+x} = y^2\log(1+x^2).$$

Дѣлимъ уравненіе на y^2:

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{y} \cdot \frac{3}{1+x} = \log(1+x^2).$$

Полагаемъ

$$\frac{1}{y} = z; \quad -\frac{y'}{y^2} = z'.$$

Отсюда

$$z' - z\frac{3}{1+x} = -\log(1+x^2).$$

Далѣе, по способу Эйлера находимъ:

$$e^{\int P dx} = e^{-3\int\frac{dx}{1+x}} = \frac{1}{(1+x)^3}$$

$$\frac{z'}{(1+x)^3} - \frac{3z}{(1+x)^4} = -\frac{\log(1+x^2)}{(1+x)^3}$$

$$\frac{d}{dz}\left[z\frac{1}{(1+x)^3}\right] = -\frac{\log(1+x^2)}{(1+x)^3}$$

$$\frac{1}{y} = z = C(1+x)^3 - (1+x)^3\int\frac{\log(1+x^2)dx}{(1+x)^3}.$$

Квадратура берется въ конечномъ видѣ.

Классъ 3-ой. Уравненія вида

$$f(x,y)dx + \varphi(x,y)dy = \psi(x,y)(xdy - ydx),$$

гдѣ f и φ однородныя функціи одной степени m, ψ - однородная функція другой степени n.

По свойству однородныхъ функцій имѣемъ

$$f(x,y) = x^m f(1, y/x) = x^m F(y/x)$$

$$\varphi(x,y) = x^m \varphi(1, y/x) = x^m \Phi(y/x)$$

$$\psi(x,y) = x^n \psi(1, y/x) = x^n \Psi(y/x).$$

Внеся въ уравненіе, сократимъ на x^m и положимъ $y/x = z$. Получимъ

$$F(z)dx + \Phi(z)dy = x^{n-m+2}\Psi(z)dz,$$

такъ какъ

$$xdy - ydx = x^2 . \frac{xdy - ydx}{x^2} = x^2 d(y/x).$$

Замѣняя

$$dy = xdz + zdx,$$

находимъ:

$$[F(z) + z.\Phi(z)]dx + x.\Phi(z)dz = x^{n-m+2}\,\Psi(z)dz$$

или

$$\frac{dx}{dz} + x.P(z) = x^{n-m+2}\,Q(z),$$

гдѣ

$$P(z) = \frac{\Phi(z)}{F(z) + z.\Phi(z)}, \quad Q(z) = \frac{\Psi(z)}{F(z) + z.\Phi(z)}.$$

Такимъ образомъ мы приходимъ къ уравненію Бернулли для x, какъ функціи отъ

$$z = y/x.$$

Примѣръ.

$$x^2 dx + y^2 dy = xdy - ydx.$$

Здѣсь $m = 2$, $n = 0$.

Дѣлая уравненіе на x^2 и полагая $y/x = z$, находимъ

$$dx + z^2(xdz + zdx) = dz,$$

$$(1+z^3)dx + z^2.xdz = dz,$$

$$\frac{dx}{dz} + \frac{z^2}{1+z^3}x = \frac{1}{1+z^3}.$$

Множитель Эйлера будетъ

$$e^{\int\frac{z^2dz}{1+z^3}} = e^{1/3\log(1+z^3)} = \sqrt[3]{1+z^3}.$$

Умножая уравненіе на этотъ множитель, имѣемъ

$$\frac{d}{dz}\left[\sqrt[3]{1+z^3}\,.\,x\right] = (1+z^3)^{-2/3},$$

$$\sqrt[3]{1+z^3}\,.\,x = C + \int(1+z^3)^{-2/3}dz,$$

$$x = \frac{C}{\sqrt[3]{1+z^3}} + \frac{1}{\sqrt[3]{1+z^3}} \int (1+z^3)^{-2/3}\, dz.$$

Квадратура не берется, такъ какъ двучленная ирраціональность не удовлетворяетъ условіямъ Бернулли.

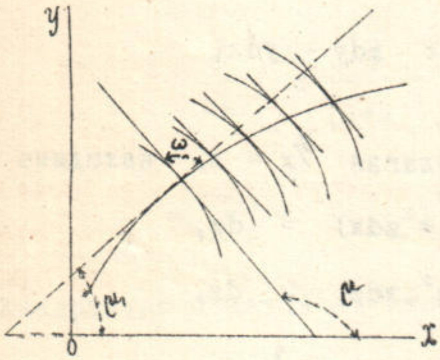
§ 4.

Задача объ изогональныхъ траекторіяхъ.

Дано уравненіе системы кривыхъ

$$f(\overline{X}, \overline{Y}, \alpha) = 0.$$

Требуется найти ур-іе кривой, касательныя къ которой составляли бы съ касательными къ даннымъ кривымъ въ точкахъ ихъ пересѣченія постоянный уголъ ω. Искомая линія называется - *изогональной траекторіей* для данной системы кривыхъ (см. черт. 218).



Черт. 218.

Если обозначить углы, составляемые касательными съ осью X-овъ черезъ μ_1 - для искомой кривой и μ - для данныхъ кривыхъ, то, очевидно, будемъ имѣть

$$\operatorname{tg}\omega = \operatorname{tg}(\mu - \mu_1) =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}\mu - \operatorname{tg}\mu_1}{1 + \operatorname{tg}\mu . \operatorname{tg}\mu_1}.$$

Но

$$\operatorname{tg}\mu_1 = y',$$

причемъ y опредѣляется, какъ функція отъ x изъ уравненія искомой кривой, а

$$\operatorname{tg}\mu = \overline{Y}'$$

находится изъ уравненія

$$f'_x(\bar{X}, \bar{Y}, \alpha) + f'_y(\bar{X}, \bar{Y}, \alpha).\bar{Y}' = 0$$

при

$$\bar{X} = x, \quad \bar{Y} = y,$$

откуда

$$\operatorname{tg}\mu = -\frac{f'_x(x, y, \alpha)}{f'_y(x, y, \alpha)}.$$

Подставляя въ выраженіе $\operatorname{tg}\omega$ найденныя значенія $\operatorname{tg}\mu$ и $\operatorname{tg}\mu_1$, получимъ:

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{y'.f'_y + f'_x}{y'.f'_x - f'_y}.$$

Рѣшая это уравненіе относительно y', найдемъ:

$$y' = \varphi(x,y,\alpha).$$

Исключая α изъ системы

$$\left|\begin{array}{l} y' = \varphi(x,y,\alpha) \\ f(x,y,\alpha) = 0, \end{array}\right.$$

получимъ дифференціальное уравненіе

$$F(x,y,y') = 0.$$

Его общій интегралъ и представляетъ уравненіе искомой траекторіи или, вѣрнѣе, системы траекторій. Для ортогональныхъ траекторій имѣемъ: $\omega = 90^0$ и y' опредѣляется изъ уравненія

$$1 - \frac{y'.f'_x(x,y,\alpha)}{f'_y(x,y,\alpha)} = 0,$$

представляющаго условіе перпендикулярности 2-хъ прямыхъ:

$$1 + \operatorname{tg}\mu.\operatorname{tg}\mu_1 = 0.$$

И въ этомъ случаѣ мы получимъ систему

$$\left|\begin{array}{l} y' = \varphi(x,y,\alpha) \\ f(x,y,\alpha) = 0. \end{array}\right.$$

Исключивъ α, найдемъ уравненіе

$$F(x, y, y') = 0$$

и затѣмъ его общій интегралъ

$$\Phi(x,\ y,\ C) = 0.$$

Примѣръ 1. Найти изогональную траекторію съ угломъ ω для прямыхъ

$$\overline{Y} = \alpha\overline{X}.$$

Для данныхъ прямыхъ имѣемъ при $\overline{X} = x$, $\overline{Y} = y$:

$$\overline{Y}' = \alpha = \frac{\overline{Y}}{\overline{X}} = \frac{y}{x}.$$

Для искомой кривой y' опредѣляется уравненіемъ:

$$\mathrm{tg}\omega = \frac{y' - y/x}{1 + y'.y/x},$$

откуда

$$\mathrm{tg}\omega + y'.y/x.\mathrm{tg}\omega = y' - y/x$$

$$\mathrm{tg}\omega + y/x = y'(1 - y/x.\mathrm{tg}\omega).$$

Полагая

$$y/x = z, \quad y = xz, \quad y' = z + xz',$$

найдемъ

$$\mathrm{tg}\omega + z = (z+xz')(1 - z.\mathrm{tg}\omega)$$

$$\mathrm{tg}\omega + z = z - z^2\mathrm{tg}\omega + xz'(1-z.\mathrm{tg}\omega)$$

$$\mathrm{tg}\omega(1 + z^2) = xz'(1 - z.\mathrm{tg}\omega)$$

$$\frac{\mathrm{Cotg}\omega(1 - z.\mathrm{tg}\omega)dz}{1 + z^2} = \frac{dx}{x}.$$

Интегрируя, получимъ

$$\mathrm{Cotg}\omega.\mathrm{arctg}z - \log\sqrt{1 + z^2} = \log x - \log A$$

$$\mathrm{Cotg}\omega.\mathrm{arctg}z = \log\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{A}.$$

Вводя полярныя координаты:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \mathrm{arctg}\ y/x,$$

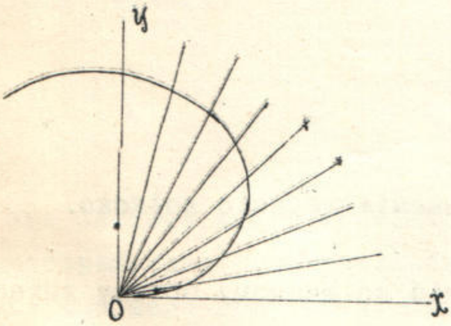
будемъ имѣть

$$\mathrm{Cotg}\omega \,.\, \theta = \log \frac{r}{A}$$

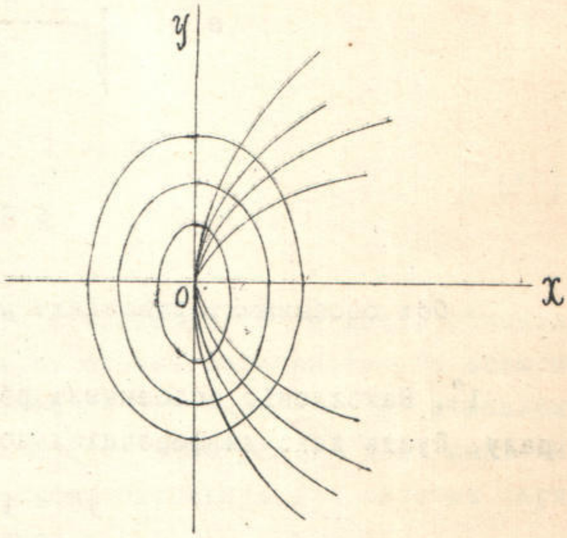
$$\frac{r}{A} = e^{\theta . \mathrm{Cotg}\omega}$$

$$r = A . e^{\theta . \mathrm{Cotg}\omega}$$

- это уравненіе логарифмической спирали (см. черт. 219).



Черт. 219.



Черт. 220.

Примѣръ 2. Найти ортогональныя траекторіи парабол:

$$\overline{Y}^2 = 2a\overline{X}.$$

Поступая, какъ въ предыдущемъ примѣрѣ, найдемъ

$$2\overline{Y} \,.\, \overline{Y}' = 2a$$

$$\overline{Y}' = \frac{a}{\overline{Y}} = \frac{\overline{Y}^2}{2\overline{X}.\overline{Y}} = \frac{\overline{Y}}{2\overline{X}},$$

и въ данной точкѣ (x, y)

$$\overline{Y}' = \frac{y}{2x}.$$

Для искомыхъ кривыхъ угловой коэффиціентъ y' связанъ уравненіемъ

$$1 + \frac{y.y'}{2x} = 0 \text{ или } 2xdx + ydy = 0.$$

Интегрируя, получимъ

$$x^2 + {}^1\!/_2\, y^2 = C^2.$$

Это эллипсы съ перемѣнными полуосями $b = C$, $a = \sqrt{2}\,.\,C$ и постояннымъ эксцентриситетомъ

$$e = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

§ 5.

Объ особенныхъ рѣшеніяхъ уравненія перваго порядка.

1°. Нахожденіе особенныхъ рѣшеній по данному общему интегралу. Пусть дано дифференціальное уравненіе

$$y' = f(x, y)$$

и

$$y = \varphi(x, C)$$

- его общій интегралъ, такъ что имѣемъ тождественно

$$\frac{\partial}{\partial x}\varphi(x, C) = f[x, \varphi(x,C)] \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(^*).$$

Чтобы найти особенныя рѣшенія, будемъ разсматривать въ выраженіи общаго интеграла $y = \varphi(x,C)$ - C, какъ функцію отъ x, которую подберемъ такъ, чтобы $y = \varphi(x,C)$ удовлетворяло дифференціальному уравненію $y' = f(x, y)$.

Такимъ образомъ должно быть:

$$\frac{\partial}{\partial x}\varphi(x,C) + \frac{\partial}{\partial C}\varphi(x,C)\frac{dC}{dx} = f[x, \varphi(x,C)]$$

и изъ сравненія съ $(^*)$ находимъ

$$\frac{\partial}{\partial x}\varphi(x, C)\frac{dC}{dx} = 0,$$

откуда

$$\text{или} \quad \frac{dC}{dx} = 0, \quad \text{или} \quad \frac{\partial}{\partial C}\varphi(x, C) = 0.$$

Если

$$\frac{dC}{dx} = 0,$$

то C постоянная, и мы возвращаемся къ общему интегралу. Если же

$$\frac{\partial}{\partial C}\varphi(x, C) = 0,$$

тогда имѣемъ

$$\left| \begin{aligned} & y = \varphi(x, C) \\ & \frac{\partial y}{\partial C} = 0\,; \end{aligned} \right. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (*')$$

эта система двухъ уравненій по исключеніи C и даетъ рѣшенія, которыя могутъ не заключаться въ общемъ интегралѣ. Во всякомъ случаѣ надо провѣрять: 1) будетъ ли это значеніе y рѣшеніемъ и 2) не заключается ли оно въ общемъ интегралѣ. Такъ какъ система (*') по исключеніи C даетъ огибающую для системы кривыхъ $y = \varphi(x,C)$, то получается:

Теорема. Особенныя рѣшенія представляютъ огибающія той системы кривыхъ, которыя изображаются общимъ интеграломъ.

Замѣчаніе. Если общій интегралъ представленъ въ видѣ

$$\Phi(x, y, C) = 0,$$

то имѣемъ

$$\frac{\partial\Phi}{\partial C} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dC} = 0,$$

откуда

$$\frac{dy}{dC} = -\frac{\frac{\partial\Phi}{\partial C}}{\frac{\partial\Phi}{\partial y}}\,;$$

такъ какъ равенство $\frac{\partial y}{\partial C} = 0$ въ системѣ (*') замѣняется теперь или равенствомъ

$$\frac{\partial\Phi}{\partial C} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{1}{\frac{\partial\Phi}{\partial y}} = 0,$$

то въ этомъ случаѣ C придется исключать изъ системы:

$$\left|\begin{array}{l} \Phi(x,\ y,\ C) = 0 \\[2mm] \dfrac{\partial\Phi}{\partial C} = 0 \end{array}\right.$$

или

$$\left|\begin{array}{l} \Phi(x,\ y,\ C) = 0 \\[2mm] \dfrac{1}{\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}} = 0 \end{array}\right.$$

Изъ обѣихъ системъ по исключеніи C могутъ получиться особенныя рѣшенія.

Примѣръ.

$$x + y.y' = \sqrt{x^2 + y^2 - a^2}.$$

Замѣтимъ, что это уравненіе можетъ быть представлено въ видѣ:

$$\frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2 - a^2}} = dx \quad \text{или} \quad d\sqrt{x^2 + y^2 - a^2} = dx,$$

откуда, интегрируя, получимъ

$$\sqrt{x^2 + y^2 - a^2} = x + C$$

или

$$x^2 + y^2 - a^2 = (x+C)^2, \quad y^2 - a^2 = C^2 + 2xC,$$

$$\Phi(x,y,C) = y^2 - 2xC - C^2 - a^2 = 0.$$

Для особенныхъ рѣшеній имѣемъ двѣ системы:

$$(1)\ \left|\begin{array}{l} \Phi = 0 \\[2mm] \dfrac{\partial\Phi}{\partial C} = 0 \end{array}\right. \qquad\qquad (2)\ \left|\begin{array}{l} \Phi = 0 \\[2mm] \dfrac{1}{\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}} = 0 \end{array}\right.$$

Первая система будетъ

$$y^2 - 2xC - C^2 - a^2 = 0$$

$$x + C = 0.$$

Исключая С, находимъ:

$$y^2 + 2x^2 - x^2 - a^2 = 0$$

или

$$y^2 + x^2 = a^2.$$

Общій интегралъ представляетъ *параболы*, особенное рѣшеніе *окружность*.

Вторая система ничего не даетъ.

2°. Нахожденіе особеннаго рѣшенія безъ помощи общаго интеграла.

Пусть дано уравненіе

$$f(x, y, p) = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1),$$

причемъ f цѣлая функція, зависящая отъ x, y, p, а $p = y'$.

Если мы считаемъ x и y заданными, то p получаетъ изъ уравненія (1) одно или нѣсколько различныхъ значеній, которыя представляютъ величины тангенсовъ угловъ, образуемыхъ съ осью X-овъ касательными въ точкѣ (x, y) ко всѣмъ кривымъ, удовлетворяющимъ уравненію (1). Мы знаемъ, что если общій интегралъ есть система нѣкоторыхъ кривыхъ, то особое рѣшеніе есть огибающая этихъ кривыхъ.

Возьмемъ точку $M(x,y)$ на огибающей. Такъ какъ въ этой точкѣ касательная къ огибающей совпадаетъ съ касательной къ одной изъ огибаемыхъ, то въ точкѣ M совпадаютъ по крайней мѣрѣ двѣ касательныя, а, слѣдовательно, по крайней мѣрѣ 2 значенія p, опредѣляемыя изъ уравненія (1), оказываются равными. Въ такомъ случаѣ уравненіе $f(x,y,p) = 0$ имѣютъ кратные корни p, и должно выполниться условіе:

$$\left| \begin{array}{l} f(x,y,p) = 0 \\[2mm] \dfrac{\partial f(x,y,p)}{\partial p} = 0. \end{array} \right.$$

Исключая отсюда p, мы находимъ уравненіе огибающей, т.е. особенное рѣшеніе. Отсюда слѣдуетъ:

Теорема. Исключеніе p изъ системы

$$\left| \begin{array}{l} f(x,y,p) = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial p} f(x,y,p) = 0 \end{array} \right.$$

даетъ зависимость между x и y, которая можетъ представить особенное рѣшеніе; но всегда слѣдуетъ провѣрить: 1) будетъ ли это рѣшеніе и 2) будетъ ли оно особенное.

Примѣръ.

$$(x + yy')^2 - (x^2 + y^2 + a^2) = 0.$$

Переписывая это уравненіе въ видѣ

$$(x + yp)^2 - (x^2 + y^2 - a^2) = 0 = f(x, y, p)$$

и дифференцируя по p, получимъ

$$\frac{\partial f}{\partial p} = 2(x + yp)y = 0.$$

Отсюда

$$x + yp = 0;$$

подставляя въ данное уравненіе, получимъ особенное рѣшеніе

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0.$$

§ 6.

Уравненіе 1-го порядка и высшихъ степеней относительно y'.

I классъ. Уравненія, не содержащія x: $f(y, p) = 0$, гдѣ p обозначаетъ y'.

Категорія 1-ая. Уравненія рѣшаются относительно p. Въ этомъ случаѣ уравненія приводятся къ виду

$$p = \varphi(y) \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dx} = \varphi(y),$$

откуда

$$\frac{dy}{\varphi(y)} = dx.$$

Беря квадратуру

$$\int \frac{dy}{\varphi(y)} = x + C,$$

получаемъ общій интегралъ

$$\Phi(x, y, C) = 0.$$

Примѣръ.

$$y'^2 - 3yy' + 2y^2 = 0.$$

Легко видѣть, что это уравненіе разлагается на множители

$$(y'-2y)(y'-y) = 0.$$

Имѣемъ 2 рѣшенія

$$y' = 2y; \quad y' = y;$$

каждое нужно разсматривать отдѣльно.

1) $y' = 2y$. Переписавъ его въ видѣ $\frac{dy}{y} = 2dx$ и беря квадратуру, получимъ:

$$\log y = 2x + \log C; \quad y = Ce^{2x}.$$

2) $y' = y$. Поступая, какъ указано выше, найдемъ

$$\frac{dy}{y} = dx; \quad \log y = x + \log C; \quad y = Ce^{x}.$$

C въ обоихъ случаяхъ одинаково, такъ какъ для уравненій перваго порядка можетъ быть только одна постоянная произвольная. Соединяя полученные результаты, мы получимъ общій интегралъ:

$$(y - Ce^{2x})(y - Ce^{x}) = 0.$$

Категорія 2-ая. Уравненія рѣшаются относительно y, т.е. приводятся къ виду:

$$y = \varphi(p).$$

Интегрированіе производится путемъ дифференцированія. Имѣемъ

$$dy = \varphi'(p)dp;$$

съ другой стороны

$$\frac{dy}{dx} = p; \quad dy = pdx.$$

Слѣдовательно

$$pdx = \varphi'(p)dp,$$

откуда

$$dx = \frac{\varphi'(p)dp}{p} \quad \text{и} \quad x + C = \int\frac{\varphi'(p)dp}{p}.$$

Уравненіе для искомыхъ кривыхъ получается въ параметрическомъ видѣ:

$$\left|\begin{array}{l} x + C = \int \frac{\varphi'(p)dp}{p} \\ y = \varphi(p). \end{array}\right.$$

Если p можно исключить, то получимъ общій интегралъ

$$\Phi(x, y, C) = 0.$$

Примѣръ. $y = y' + \text{Sin}y'$. Введя обозначеніе $y' = p$, напишемъ данное уравненіе въ видѣ

$$y = p + \text{Sin}p.$$

Дифференцируя, получимъ

$$dy = pdx = dp(1+\text{Cos}p)$$

или

$$dx = \frac{dp}{p}(1 + \text{Cos}p).$$

Беря квадратуру, будемъ имѣть

$$x + C = \log p + \int \frac{\text{Cos}\,p}{p}dp,$$

причемъ послѣдній интегралъ не берется въ конечномъ видѣ. Получаемъ параметрическое уравненіе искомыхъ кривыхъ:

$$x + C = \log p + \int \frac{\text{Cos}\,p}{p}dp; \quad y = p + \text{Sin}p.$$

Категорія 3-ья. Уравненія, представляющія 2 или 3 группы однородныхъ членовъ порядка m и $m+1$, если 2 группы, и порядка m, $m+1$, $m+2$, если 3 группы, т.е. уравненія вида

$$\underset{\text{пор.}m}{f(y,p)} + \underset{\text{пор.}m+1}{f_2(y,p)} = 0,$$

$$\underset{m}{f_1(y,p)} + \underset{m+1}{f_2(y,p)} + \underset{m+2}{f_3(y,p)} = 0.$$

Возьмемъ 2 группы. Раздѣливъ лѣвую часть уравненія на y^m, по свойству однородныхъ функцій можемъ написать

$$f_1(1, p/y) + yf_2(1, p/y) = 0.$$

Положивъ $p/y = t$, найдемъ

$$f_1(1, t) + yf_2(1, t) = 0,$$

откуда

$$y = \psi(t).$$

У насъ $p = yt$, т.е. $\frac{dy}{dx} = yt$; а потому

$$dx = \frac{dy}{yt} = \frac{\psi'(t)dt}{t \, . \, \psi(t)} .$$

Отсюда

$$x + C = \int \frac{\psi'(t)dt}{t \, . \, \psi(t)} .$$

Присоединяя сюда данное уравненіе $y = \psi(t)$, получимъ параметрическое уравненіе искомаго общаго интеграла; исключеніе t даетъ общій интегралъ въ видѣ

$$\omega(x, y, C) = 0.$$

Во второмъ случаѣ, т.е. въ случаѣ трехъ группъ, приходимъ къ квадратному уравненію относительно y, какъ функціи отъ t.

Примѣръ.

$$y'^3y^2 + y^6 + y'^6 = 0.$$

Здѣсь 2 группы: 5-го и 6-го измѣренія. Переписавъ уравненіе въ видѣ

$$y^5(y'/y)^3 + y^6 [1 + (y'/y)^6] = 0$$

и сокращая на y^5, положимъ $y'/y = t$; получимъ

$$t^3 + y(1 + t^6) = 0,$$

откуда

$$y = - \frac{t^3}{1 + t^6}$$

и

$$dy = -\frac{(1+t^6)3t^2dt - t^3.6t^5dt}{(1+t^6)^2} = -\frac{3t^2(1-t^6)dt}{(1+t^6)^2}.$$

Далѣе

$$\frac{dy}{dx} = y' = yt; \quad dx = \frac{dy}{yt}.$$

$$dx = -\frac{3t^2(t^6-1)}{(t^6+1)^2} \cdot \frac{1+t^6}{t^4}\,dt = -\frac{3(t^6-1)}{t^6+1} \cdot \frac{dt}{t^2}.$$

Наконецъ

$$x + C = -3\int\frac{t^6-1}{t^6+1}\frac{dt}{t^2} \quad \text{(квадратура берется).}$$

Если сюда присоединить уравненіе $y = \dfrac{t^3}{1+t^6}$, то получимъ параметрическое ур-іе искомыхъ кривыхъ.

II классъ. Уравненія, не содержащія y: $f(x,p) = 0$.

Категорія 1-ая. Уравненія рѣшаются относительно p: $p=\varphi(x)$.

$$p = \frac{dy}{dx} = \varphi(x),$$

откуда

$$dy = \varphi(x)dx \quad \text{и} \quad y + C = \int\varphi(x)dx$$

- общій интегралъ.

Примѣръ. $y'^2 - 2xy' = 0$. Въ нашихъ обозначеніяхъ это будетъ

$$p^2 - 2px = 0,$$

откуда получаемъ для p два рѣшенія: $p = 0$; $p = 2x$. Первое рѣшеніе даетъ намъ

$$\frac{dy}{dx} = 0, \quad y = C;$$

второе даетъ

$$\frac{dy}{dx} = 2x; \quad dy = 2xdx; \quad y = x^2 + C$$

или

$$y - x^2 - C = 0.$$

Общій интегралъ будетъ

$$(y - C)(y - x^2 - C) = 0;$$

C одинаково въ обоихъ случаяхъ согласно сдѣланному выше замѣчанію.

Категорія 2-ая. Уравненія рѣшаются относительно x: $x=\varphi(p)$.

Въ этомъ случаѣ нужно дифференцировать:

$$dx = \varphi'(p)dp,$$

откуда

$$dy = pdx = p.\varphi'(p)dp; \quad y + C = \int p.\varphi'(p)dp.$$

Исключая изъ этого уравненія и даннаго $x = \varphi(p)$ p, получимъ общій интегралъ

$$\Phi(x, y, C) = 0.$$

Примѣръ. $x = p + \log p$. Дифференцируя данное уравненіе, находимъ

$$dx = dp(1 + 1/p)$$

$$dy = pdx = (p+1)dp$$

$$y + C = 1/_2\, p^2 + p.$$

Исключеніе p изъ системы

$$\left|\begin{array}{l} y + C = 1/_2\, p^2 + p \\ x = p + \log p \end{array}\right.$$

даетъ общій интегралъ.

Категорія 3-ья. Уравненіе $f(x,p) = 0$ представляетъ въ лѣвой части 2 или 3 группы однородныхъ членовъ порядковъ m, $m+1$, или m, $m+1$, $m+2$.

Возьмемъ двѣ группы порядковъ m и $m+1$:

$$f_1(x,p) + f_2(x,p) = 0.$$

Въ силу извѣстнаго свойства однородныхъ функцій можемъ написать

$$x^m f_1(1, p/x) + x^{m+1} f_2(1, p/x) = 0.$$

Сокращая на x^m и вводя обозначеніе

$$p/x = t; \quad p = xt,$$

найдемъ значенiе x изъ уравненiя:

$$x = -\frac{f_1(1,t)}{f_2(1,t)} = \psi(t).$$

Но мы имѣемъ равенство

$$\frac{dy}{dx} = p = xt,$$

откуда

$$dy = xt.dx = t.\psi(t).\psi'(t)dt.$$

Беря квадратуру и исключая t изъ системы

$$\left| \begin{aligned} y + C &= \int t.\psi(t).\psi'(t)dt \\ x &= \psi(t), \end{aligned} \right.$$

найдемъ общiй интегралъ.

III классъ. Уравненiя, содержащiя x, y, p, т.е. имѣющiя видъ

$$f(x, y, p) = 0.$$

Категорiя 1-ая. Уравненiя рѣшаются относительно p.

Положимъ, что мы, рѣшая предложенное уравненiе относительно p, нашли для p рядъ значенiй

$$p_1 = \varphi_1(x,y)$$

$$p_2 = \varphi_2(x,y)$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$p_k = \varphi_k(x,y).$$

Если эти уравненiя интегрируются, т.е. подходятъ подъ одинъ изъ 8 классовъ § 3-го, то ихъ общiе интегралы будутъ:

$$y = \psi_1(x, C)$$

$$y = \psi_2(x, C)$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$y = \psi_k(x, C).$$

Тогда общій интегралъ предложеннаго уравненія представится въ видѣ

$$\prod_{j=1}^{j=k} [y - \psi_j(x,C)] = 0$$

где $\prod_{j=1}^{k}$ — знакъ произведенія k сомножителей вида

$$y - \psi_j(x, C) = 0.$$

Примѣръ. $y'^2 = y/x$. Рѣшая это уравненіе относительно y' находимъ два значенія

$$y' = \pm\sqrt{y/x}.$$

Отсюда

$$\frac{dy}{2\sqrt{y}} = \frac{dx}{2\sqrt{x}}; \quad \sqrt{y} = \pm\sqrt{x} + C.$$

Общій интегралъ будетъ

$$(\sqrt{y} - C - \sqrt{x})(\sqrt{y} - C + \sqrt{x}) = 0,$$

$$(\sqrt{y} - C)^2 - x = 0,$$

$$y - x + C^2 = 2C\sqrt{y}$$

или

$$4C^2y = (y - x + C^2)^2.$$

Категорія 2-ая. Уравненія рѣшаются относительно y, т.е. приводятся къ виду:

$$y = \varphi(x, \rho).$$

Вообще такое уравненіе интегрируется помощью дифференцированія, но навѣрное задача рѣшается только въ слѣдующихъ двухъ случаяхъ.

1-ый случай: $\varphi(x,\rho)$ есть линейная функція отъ x, т. е. y представляется въ видѣ:

$$y = x.\psi(\rho) + \omega(\rho).$$

Дифференцируя, получимъ

$$dy = \rho dx = \psi(\rho)dx + x.\psi'(\rho)d\rho + \omega'(\rho)d\rho$$

или

$$[\rho - \psi(\rho)]\,\frac{dx}{d\rho} = x.\psi'(\rho) + \omega'(\rho),$$

откуда

$$\frac{dx}{d\rho} = \frac{\psi'(\rho)}{\rho - \psi(\rho)}\,x + \frac{\omega'(\rho)}{\rho - \psi(\rho)},$$

т.е. линейное уравненіе (§ 3) для x, какъ функціи отъ p. Изъ этого уравненія находимъ

$$x = \Phi(\rho, C),$$

а исключая p изъ системы

$$\left|\begin{aligned} x &= \Phi(\rho, C) \\ y &= x.\psi(\rho) + \omega(\rho), \end{aligned}\right.$$

получимъ общій интегралъ.

Замѣчаніе. Если $\varphi(\rho) = \rho$, т.е. $y = \rho.x + \psi(\rho)$, то такое уравненіе извѣстно подъ именемъ уравненія Clérault. Рѣшимъ его въ качествѣ примѣра.

Примѣръ. $y = \rho x + \psi(\rho)$. Дифференцируемъ это уравненіе:

$$dy = \rho dx = \rho dx + x d\rho + \psi'(\rho) d\rho$$

или

$$0 = d\rho[x + \psi'(\rho)].$$

Приравнивая нулю первый изъ множителей, получимъ

$$d\rho = 0 \quad \text{и} \quad p = C,$$

откуда находимъ общій интегралъ

$$y = Cx + \psi(C);$$ Система кривых лин

если же положимъ $x + \psi'(\rho) = 0$, то по исключеніи p изъ системы

$$\left|\begin{aligned} x + \psi'(\rho) &= 0 \\ y &= \rho x + \psi(\rho), \end{aligned}\right.$$

получимъ особенное рѣшеніе. Замѣтимъ, что здѣсь оправдывается теорема о нахожденіи особенныхъ рѣшеній безъ помощи общаго интеграла, такъ какъ

$$x + \psi'(p) = \frac{d}{dp}\,[px + \psi(p) - y].$$

2-ой случай: $y = \varphi(x,p)$ есть однородная функція отъ x и p 2-ой степени:

$$y = \varphi(x,p) = x^2\varphi(1, p/x).$$

Положивъ $p/x = t$; $p = xt$, перепишемъ наше уравненіе въ видѣ

$$y = x^2\varphi(1,t) = x^2\psi(t).$$

Дифференцируя, находимъ:

$$dy = pdx = xt.dx = 2x.dx.\psi(t) + x^2\psi'(t)dt.$$

Сокращая на x, получимъ

$$tdx = 2\psi(t)dx + x.\psi'(t)dt,$$

или, отдѣляя перемѣнныя,

$$\frac{dx}{x} = \frac{\psi'(t)dt}{t - 2\psi(t)}.$$

Отсюда, беря квадратуру, найдемъ

$$\log x + C = \int \frac{\psi'(t)dt}{t - 2\psi(t)}.$$

Исключеніе t изъ этого уравненія и предложеннаго даетъ общій интегралъ.

Примѣръ. $y = x^2 + p^2$. Полагая $p/x = t$; $p = xt$, имѣемъ

$$y = x^2(1 + t^2)$$

$$dy = pdx = xt.dx = 2x.dx(1+t^2) + x^2 2t.dt.$$

Отсюда

$$tdx = 2(1+t^2)dx + 2xt.dt$$

$$dx(t-2-2t^2) = x.2t.dt$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{2t.dt}{t - 2 - 2t^2}$$

$$\log x + C = \int \frac{2t.dt}{t-2-2t^2} = -\log\sqrt{2t^2-t+2} - \frac{1}{\sqrt{15}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{4t-1}{\sqrt{15}}$$

Если изъ этого уравненія и даннаго $y = x^2(1+t^2)$ исключить t, то получимъ общій интегралъ.

Категорія 3-ья. Уравненія рѣшаются относительно x:

$$x = \varphi(y, p).$$

Задача приводится ко 2-ой категоріи, если положить

$$q = \frac{1}{p} = \frac{dx}{dy}.$$

Тогда

$$x = \varphi(y, {}^1\!/q) = \psi(y, q).$$

Отличіе отъ второй категоріи состоитъ въ томъ, что переставлены буквы x и y. Вообще задача рѣшается помощью дифференцированія:

$$dx = q\,dy = \frac{\partial\psi}{\partial y}\,dy + \frac{\partial\psi}{\partial q}\,dq\,;$$

навѣрное же рѣшеніе получается въ слѣдующихъ двухъ случаяхъ:

1-ый случай: x - линейная функція отъ y:

$$x = y.\varphi(q) + \psi(q),$$ Урав. Лагранжа и Клеро

например̂ъ

$$x = {}^y\!/y' - {}^1\!/y'^3.$$

Полагая ${}^1\!/y' = q$, получимъ $x = qy - q^3$. Далѣе задача рѣшается такъ же, какъ въ случаѣ 1-омъ категоріи 2-ой.

2-ой случай: x - однородная функція 2-ой степени отъ y и q:

$$x = \psi(y, q) = y^2\psi(1, {}^q\!/y).$$

Полагая ${}^q\!/y = t$ и дифференцируя, приходимъ къ уравненію съ отдѣленными перемѣнными. Напримѣръ:

$$x = y^2 + {}^1\!/y'^2.$$

Положивъ $q = {}^1\!/y'$, получимъ $x = y^2 + q^2$ и т. д.

Щербенко [illegible] $= x$

§ 7.

Уравненія высшаго порядка, интегрированіе которыхъ приводится къ квадратурамъ.

$= f(x, y, y', y'', \ldots y^{n})$
н пор.

Классъ I. Уравненія вида: $y^{(n)} = \varphi(x)$.

Изъ опредѣленія производной n-аго порядка имѣемъ

$$y^{(n)} = \frac{d\,y^{(n-1)}}{dx} = \varphi(x);$$

откуда:

$$d\,y^{(n-1)} = \varphi(x)dx$$

и

$$y^{(n-1)} = C_1 + \int\varphi(x)dx.$$

Далѣе поступаемъ подобнымъ же образомъ:

$$y^{(n-1)} = \frac{d\,y^{(n-2)}}{dx} = C_1 + \int\varphi(x)dx$$

$$y^{(n-2)} = C_2 + C_1x + \int\left[\int\varphi(x)dx\right]dx = C_2 + C_1x + \iint\varphi(x)dx^2$$

$$y^{(n-3)} = C_3 + C_2x + {}^1/_2\,C_1x^2 + \iiint\varphi(x)dx^3 \quad \text{и т.д.}$$

Итакъ, для отысканія y слѣдуетъ выполнить n-кратное интегрированіе функціи $\varphi(x)$ и результатъ сложить съ произвольной цѣлой функціей степени $(n-1)$-ой съ n произвольными коэффиціентами

$$y = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{k-1}}{1.2.3\ldots(k-1)}\,C_{n-k+1} + \iiint\ldots\int\varphi(x)dx^n.$$

Примѣръ. $y''' = \text{Sin}x$. Пользуясь общимъ методомъ для рѣшенія подобныхъ уравненій, находимъ:

$$y'' = C_1 + \int\text{Sin}x.dx = C_1 - \text{Cos}x$$

$$y' = C_2 + C_1x - \text{Sin}x$$

$$y = C_3 + C_2x + \frac{1}{2}C_1x^2 + \operatorname{Cos}x.$$

Классъ II. Уравненія вида $f(y^{(n)}, y^{(n-1)})$, рѣшающіяся относительно той или другой изъ производныхъ $y^{(n)}$ или $y^{(n-1)}$.

1-ый случай. Уравненія, рѣшающіяся относительно $y^{(n)}$:

$$y^{(n)} = \varphi(y^{(n-1)}).$$

Полагая $z = y^{(n-1)}$; $z' = y^{(n)}$, имѣемъ

$$z' = \varphi(z) \text{ или } \frac{dz}{\varphi(z)} = dx;$$

откуда

$$\int\frac{dz}{\varphi(z)} = x + C.$$

Если это уравненіе можно рѣшить относительно z, то z представится такъ: $z = \psi(x, C)$, т.е.

$$y^{(n-1)} = \varphi(x, C).$$

Мы пришли такимъ образомъ къ I классу. Интегрируя, получимъ

$$y = \omega(x, C_1, C_2, \dots C_n).$$

2-ой случай. Уравненія рѣшаются относительно $y^{(n-1)}$:

$$y^{(n-1)} = \varphi(y^{(n)}).$$

Полагая $y^{(n-1)} = z$; $y^{(n)} = z'$, будемъ имѣть

$$z = \varphi(z').$$

Дифференцируя это уравненіе, найдемъ

$$z'dx = \varphi'(z')dz'; \quad dx = \frac{\varphi'(z')}{z'}dz';$$

откуда

$$x + C_1 = \int\frac{\varphi'(z')}{z'}dz'.$$

По исключеніи z' изъ этого уравненія и даннаго $z = \varphi(z')$, получаемъ

$$z = \psi(x, C_1) \quad \text{или} \quad y^{(n-1)} = \psi(x, C_1),$$

т.е. опять приходимъ къ I классу и окончательно будемъ имѣть

$$y = \omega(x, C_1, C_2, \dots C_n).$$

Примѣръ. $y''' = \frac{1}{\alpha} y''$. Полагая $y''=z$; $y'''=z'$, имѣемъ

$$z' = \frac{1}{\alpha} z; \quad \frac{dz}{z} = \frac{dx}{\alpha}$$

$$\log z = \frac{x}{\alpha} + \log C_1 \quad \text{или} \quad z = C_1 e^{x/\alpha}.$$

Итакъ

$$y'' = C_1 e^{x/\alpha},$$

отсюда

$$y' = C_2 + C_1\alpha\, e^{x/\alpha}$$

$$y = C_3 + C_2 x + C_1\alpha^2 e^{x/\alpha} = C' e^{x/\alpha} + C_2 x + C_3.$$

Классъ III. Къ этому классу относятся уравненія вида

$$f(y^{(n)}, \ y^{(n-2)}),$$

если они рѣшаются относительно $y^{(n)}$ или $y^{(n-2)}$.

1-ый случай. Уравненія рѣшаются относительно $y^{(n)}$:

$$y^{(n)} = \varphi(y^{(n-2)}).$$

Положивъ $z = y^{(n-2)}$, находимъ $z'' = y^{(n)}$, такъ что

$$z'' = \varphi(z).$$

Но это уравненіе преобразуется такъ:

$$z'' = \frac{dz'}{dx} = \frac{dz'}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = z' \cdot \frac{dz'}{dz} = \varphi(z),$$

откуда

$$z' dz' = \varphi(z) dz$$

$$\tfrac{1}{2} z'^2 = \tfrac{1}{2} C + \int \varphi(z) dz.$$

Помножая на 2 и извлекая корень, получимъ

$$z' = \sqrt{C + 2\int\varphi(z)dz} = \frac{dz}{dx},$$

$$dx = \frac{dz}{\sqrt{C+2\int\varphi(z)dz}},$$

$$x + C_1 = \int\frac{dz}{\sqrt{C + 2\int\varphi(z)dz}}.$$

Если можно рѣшить это уравненіе относительно z, то найдемъ

$$z = \psi(x, C_1, C_2)$$

или

$$y^{(n-2)} = \psi(x, C_1, C_2).$$

Это уравненіе I класса и его рѣшеніе будетъ

$$y = \omega(x, C, C_1, \dots C_{n-2}).$$

2-ой случай. Уравненія рѣшаются относительно $y^{(n-2)}$:

$$y^{(n-2)} = \varphi(y^{(n)}).$$

Вводя обозначеніе $y^{(n-2)} = z$, $y^{(n)} = z''$, находимъ

$$z = \varphi(z'');$$

послѣ дифференцированія этого уравненія получимъ

$$dz = z'dx = \varphi'(z'')dz''.$$

Но въ силу такой зависимости:

$$z'' = \frac{dz'}{dx}; \quad dx = \frac{dz'}{z''},$$

написанное равенство можно переписать въ видѣ:

$$z' \cdot \frac{dz'}{z''} = \varphi'(z'')dz'',$$

откуда

$$z'dz' = z''\varphi'(z'')dz''.$$

Беря квадратуру, получимъ

$$\tfrac{1}{2}z'^2 = \tfrac{1}{2}C + \int z''\varphi'(z'')dz'',$$

$$z' = \sqrt{C + 2\int z''\varphi'(z'')dz''} = \frac{\varphi'(z'')dz''}{dx},$$

$$dx = \frac{\varphi'(z'')dz''}{\sqrt{C + 2\int z''\varphi'(z'')dz''}}.$$

Послѣ интегрированія этого уравненія мы получимъ два уравненія

$$x + C_1 = \int \frac{\varphi'(z'')dz''}{\sqrt{C + 2\int z''\varphi'(z'')dz''}}$$

$$z = \varphi(z''),$$

исключеніе изъ которыхъ z'' дастъ намъ зависимость:

$$z = \psi(x, C, C_1)$$

или

$$y^{(n-2)} = \psi(x, C, C_1).$$

Мы опять имѣемъ уравненіе, относящееся къ I классу, и его рѣшеніе будетъ

$$y = \omega(x, C, C_1, \ldots C_{n-1}).$$

Примѣръ къ 1-му случаю: $y'' + k^2y = 0$ или $y'' = -k^2y$.

Имѣемъ

$$\frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{dy'}{dy}.y' = -k^2y$$

$$y'dy' = -k^2y.dy$$

$$\tfrac{1}{2}y'^2 = \tfrac{1}{2}C - \tfrac{1}{2}k^2y^2$$

$$y' = \sqrt{C - k^2y^2}$$

$$\frac{dy}{\sqrt{C - k^2y^2}} = dx$$

Чтобы рѣшеніе было вещественнымъ, C должно быть > 0, т.е.

$$C = a^2.$$

Тогда:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{a^2 - k^2y^2}} = x + C_1$$

$$\arcsin(ky/a) = kx + C'$$

$$y = a/k \,\mathrm{Sin}(kx+C') = a/k \,\mathrm{Cos}C'\,\mathrm{Sin}kx +$$

$$+ a/k \,\mathrm{Sin}C'\,\mathrm{Cos}kx = D_1\mathrm{Sin}kx + D_2\mathrm{Cos}kx,$$

гдѣ

$$D_1 = a/k \,\mathrm{Cos}C'; \qquad D_2 = a/k \,\mathrm{Sin}C'.$$

Если положить, что при $x = 0$, $y = y_0$, $y' = y_0'$, то выходитъ $y_0 = D_2$, и такъ какъ

$$y' = kD_1\mathrm{Cos}kx - kD_2\mathrm{Sin}kx,$$

то

$$y_0 = + kD_1,$$

откуда

$$D_1 = + \frac{y_0'}{k};$$

слѣдовательно

$$y = y_0\mathrm{Cos}kx + y_0'/k \,\mathrm{Sin}kx.$$

§ 8.

Уравненія, допускающія пониженіе порядка.

I классъ. Уравненія, не содержащія y, y', y'', ... y^{k-1}, т.е. вида

$$f(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots y^{(n)}) = 0.$$

Въ этомъ случаѣ, полагая $y^{(k)} = z$, будемъ имѣть

$$y^{(k+1)} = z'; \quad y^{(k+2)} = z''; \dots \quad y^{(n)} = z^{(n-k)}$$

и

$$f(x, z, z', \dots z^{(n-k)}) = 0,$$

т.е. понизимъ порядокъ на k единицъ. Если это уравненіе интегрируются, то мы получимъ

$$z = F(x, C_1, C_2, \ldots C_{n-k})$$

или

$$y^{(k)} = F(x, C_1, C_2, \ldots C_{n-k})$$

- уравненіе, относящееся къ I классу § 7, откуда

$$y = \Phi(x, C_1, C_2, \ldots C_n).$$

Примѣръ. $(1 + x^2)y'' + (1 + y'^2) = 0.$

Полагаемъ: $y' = z$; $y'' = z'$. Имѣемъ

$$(1 + x^2)\frac{dz}{dx} + (1 + z^2) = 0$$

$$\frac{dz}{1 + z^2} + \frac{dx}{1 + x^2} = 0$$

$$\operatorname{arctg} z + \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} a$$

$$\operatorname{arctg} z = \operatorname{arctg} a - \operatorname{arctg} x.$$

Беря тангенсы обѣихъ частей равенства, найдемъ

$$z = \frac{a - x}{1 + ax} \quad \text{или} \quad dy = \frac{a - x}{1 + ax}\, dx$$

$$y = C + \int \frac{a - x}{1 + ax}\, dx = C - \frac{x}{a} + \frac{a^2 + 1}{a^2} \log(1 + ax).$$

II классъ. Уравненія, не содержащія x:

$$f(y, y', y'', \ldots y^{(n)}) = 0.$$

Принимаемъ y за независимую перемѣнную и $y' = z$ за ея неизвѣстную функцію. Тогда

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = z \cdot \frac{dz}{dy}$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{dy''}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = z\left[z\frac{d^2z}{dy^2} + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right] = z^2\frac{d^2z}{dy^2} + z\left(\frac{dz}{dy}\right)^2$$

и т. д.

Въ новой перемѣнной уравненіе будетъ $(n-1)$-го порядка:

$$F(y,\ z,\ z',\ z'',\ \ldots\ z^{(n-1)}) = 0.$$

Если это уравненіе интегрируется, то мы найдемъ

$$z = \Phi(y,\ C_1,\ C_2,\ \ldots\ C_{n-1})$$

и наконецъ

$$\int \frac{dy}{\Phi} = x + C_n.$$

Примѣръ. $1 + y'^2 = y.y''$. Здѣсь нужно положить $y'=z$; слѣдовательно, имѣемъ:

$$y'' = z\ .\ \frac{dz}{dy}\ ; \quad 1 + z^2 = yz\ .\ \frac{dz}{dy}\ .$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{zdz}{1+z^2}\ ; \quad \log y = \log\sqrt{1+z^2} - \log C$$

$$\sqrt{1+z^2} = Cy; \quad z = \sqrt{(Cy)^2 - 1}$$

или

$$\frac{Cdy}{\sqrt{(Cy)^2 - 1}} = Cdx,$$

откуда

$$\log\left[Cy + \sqrt{(Cy)^2 - 1}\right] = Cx + C_1$$

$$Cy + \sqrt{(Cy)^2 - 1} = e^{Cx+C_1}\ \ldots\ldots\ (*).$$

Для нахожденія y возьмемъ обратную величину этого выраженія:

$$\frac{1}{Cy + \sqrt{(Cy)^2 - 1}} = \frac{Cy - \sqrt{(Cy)^2 - 1}}{1} = e^{-(Cx+C_1)}\ \ldots\ (**).$$

Сложивъ почленно равенства (*) и (**), получимъ по раздѣленіи на 2C:

$$y = \frac{1}{2C}\left[e^{Cx+C_1} + e^{-(Cx+C_1)}\right]$$

или*)

$$Cy = Ch(Cx + C_1).$$

Полагая $-\frac{C_1}{C} = x_0$, $C = \frac{1}{a}$, получимъ общее уравненіе циной линіи:

$$y = aCh\left[\frac{x - x_0}{a}\right].$$

III классъ. Уравненія, однородныя относительно

$$y,\ y',\ y'',\ \dots\ y^{(n)}.$$

По свойству однородныхъ функцій мы можемъ представить данное уравненіе въ такомъ видѣ:

$$f(x,\ y,\ y',\ y'',\ \dots\ y^{(n)}) = y^k\ f\left(x, 1,\ \frac{y'}{y},\ \frac{y''}{y},\ \dots\ \frac{y^{(n)}}{y}\right) = 0,$$

гдѣ k степень однородности.

Положимъ теперь

$$y = e^{\int z dx}$$

Отсюда имѣемъ

$$y' = yz;\quad y'' = yz' + y'z = yz' + yz^2 = y(z' + z^2);$$

$$y''' = y'(z' + z^2) + y(z'' + 2zz') = y(z'' + 3zz' + z^3)\quad \text{и т. д.}$$

Эти равенства даютъ намъ отношенія:

$$\frac{y'}{y} = z;\quad \frac{y''}{y} = z' + z^2\quad \frac{y'''}{y} = z'' + 3zz' + z^3;$$

подставляя ихъ въ наше уравненіе, мы получимъ

$$F(x,\ z,\ z',\ \dots\ z^{(n-1)}) = 0$$

- уравненіе порядка на единицу ниже предложеннаго. Если это уравненіе интегрируется и

$$z = \Phi(x,\ C_1,\ C_2,\ \dots\ C_{n-1})$$

- его общій интегралъ, то

$$y = C_n\ e^{\int \Phi(x, C_1 . C_2,\ \dots\ C_{n-1}) dx}$$

Примѣръ. $yy'' - xy'^2 = 0$. Дѣлимъ это уравненіе на y^2:

$$\frac{y''}{y} - x\left(\frac{y'}{y}\right)^2 = 0$$

и полагаемъ

$$y = e^{\int z dx}.$$

Изъ предыдущаго имѣемъ $\frac{y'}{y} = z;$ $\frac{y''}{y} = z' + z^2$, и слѣдовательно уравненіе будетъ:

$$z' + z^2 - xz^2 = 0$$

$$\frac{dz}{dx} = (x-1)z^2; \quad \frac{dz}{z^2} = (x-1)dx$$

$$-1/z = 1/_2 x^2 - x - C_1; \quad z = \frac{1}{-1/_2 x^2 + x + C_1}$$

и далѣе

$$y = C_2 e^{\int \frac{dx}{-1/_2 x^2 + x + C_1}}$$

§ 9.

Общія свойства линейныхъ уравненій.

Опредѣленіе. Уравненіе вида:

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1} y' + p_n y = q \ . \ . \ . \ (1)$$

въ которомъ коэффиціентъ при $y^{(n)}$ есть 1, а остальные коэффиціенты $p_1, p_2, \dots p_n$, q суть функціи отъ x, называется *линейнымъ уравненіемъ съ послѣднимъ членомъ* (q).

Уравненіе вида

$$u^{(n)} + p_1 u^{(n-1)} + p_2 u^{(n-2)} + \dots + p_{n-1} u' + p_n u = 0 \ . \ . \ . \ (2)$$

будетъ называться *соотвѣтствующимъ* уравненіемъ безъ послѣдняго члена.

Теорема I. Если $u_1, u_2, \dots u_k$ представляютъ частныя рѣшенія уравненія (2), то и выраженіе

$$u = C_1 u_1 + C_2 u_2 + \dots + C_k u_k ,$$

гдѣ $C_1, C_2, \ldots C_k,$ постоянныя произвольныя, будетъ также рѣшеніемъ этого уравненія.

Доказательство. Обозначимъ через $F(u_j)$ результат подстановки частнаго рѣшенія u_j въ уравненіе (2). Тогда будемъ имѣть

$$F(u_1) = u_1^{(n)} + p_1 u_1^{(n-1)} + p_2 u_2^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1} u_1' + p_n u_1$$

$$F(C_1 u_1) = C_1 F(u_1)$$

$$F(C_1 u_1 + C_2 u_2) = F(C_1 u_1) + F(C_2 u_2) = C_1 F(u_1) + C_2 F(u_2);$$

и вообще

$$F(C_1 u_1 + C_2 u_2 + \ldots + C_k u_k) = \sum_{j=1}^{k} C_j\, F(u_j).$$

Если u_j есть частное рѣшеніе, то $F(u_j) = 0$, и потому

$$F(\Sigma\, C_j\, u_j) = 0;$$

слѣдовательно

$$u = \Sigma\, C_j\, u_j$$

есть частное рѣшеніе уравненія (2).

Опредѣленіе. Частныя рѣшенія $u_1, u_2, \ldots u_k$ называются *независимыми,* если между ними не существуетъ соотношеній вида

$$C_1 u_1 + C_2 u_2 + \ldots C_k u_k = 0,$$

гдѣ $C_1, C_2, \ldots C_k$ постоянныя, не равныя одновременно всѣ нулю.

Теорема II. Имѣя k независимыхъ частныхъ рѣшеній уравненія (2), можно понизить на k единицъ порядокъ ур-ій (1) и (2), причемъ новыя ур-ія будутъ также линейными и соотвѣтствующими.

Доказательство. Пусть мы имѣемъ k независимыхъ частныхъ рѣшенія уравненія (2): $u_1, u_2, u_3, \ldots u_k$. Положимъ въ уравненіи (1)

$$y = u_1 \int z dx.$$

Составляя производныя отъ y по x:

$$y' = u_1' \int z dx + u_1 z$$

$$y'' = u_1'' \int z dx + 2u_1' z + u_1 z'$$

. . . .

$$y^{(n)} = u_1^{(n)}\int zdx + \frac{n}{1} u_1^{(n-1)} z + \frac{n(n-1)}{1.2} u_1^{(n-2)} z' + \ldots + u_1 z^{(n-1)},$$

помножая затѣмъ $y, y', y'', \ldots y^{(n)}$ соотвѣтственно на p_n, $p_{n-1}, p_{n-2}, \ldots p_1, 1$ и складывая почленно, мы получимъ налѣво первую часть уравненія (1) или q, а направо линейную функцію отъ $z, z', \ldots z^{(n-1)}$:

$$q = \cancel{\int zdx.F(u_1)} + r_{n-1}z + r_{n-2}z' + \ldots + r_1 z^{(n-2)} + u_1 z^{(n-1)},$$

гдѣ $r_1, r_2, \ldots r_{n-1}$ нѣкоторыя функціи отъ x; при этомъ первый членъ мы зачеркиваемъ, такъ какъ u_1 есть рѣшеніе уравненія (2), и потому $F(u_1) = 0$. Раздѣливъ полученное выше уравненіе на u_1, окончательно найдемъ

$$z^{(n-1)} + s_1 z^{(n-2)} + s_2 z^{(n-3)} + \ldots + s_{n-1} z = \frac{q}{u_1} \quad . \ . \ . \ . \ (1').$$

Это есть линейное уравненіе порядка $(n-1)$-го. Полагая во (2) уравненіи

$$u = u_1 \int vdx,$$

получимъ подобнымъ же образомъ:

$$v^{(n-1)} + s_1 v^{(n-2)} + s_2 v^{(n-3)} + \ldots + s_{n-1} v = 0 \quad . \ . \ . \ . \ (2')$$

- это уравненіе $(n-1)$-го порядка, соотвѣтствующее для (1').

Для уравненія (2) намъ извѣстны $(k-1)$ независимыхъ частныхъ рѣшеній. Въ самомъ дѣлѣ, изъ равенства

$$u = u_1 . \int vdx \qquad \frac{u}{u_1} = \int vdx$$

слѣдуетъ

$$\left[\frac{u}{u_1}\right]' = v \qquad \left(\frac{u}{u_1}\right)' = v$$

и v будетъ рѣшеніемъ для (2'), если u есть какое-нибудь частное рѣшеніе уравненія (2); такихъ рѣшеній намъ извѣстно, кромѣ u, еще $(k-1)$, поэтому и для v мы будемъ имѣть $(k-1)$ рѣшеній:

$$v_1 = \left[\frac{u_2}{u_1}\right]'; \quad v_2 = \left[\frac{u_3}{u_1}\right]'; \quad \ldots \; v_{k-1} = \left[\frac{u_k}{u_1}\right]',$$

Покажемъ, что эти рѣшенія независимыя. Для этого предположимъ противное, т.е., что они связаны такой зависимостью

$$C_2 v_1 + C_3 v_2 + \ldots + C_k v_{k-1} = 0$$

или

$$C_2\left[\frac{u_2}{u_1}\right]' + C_3\left[\frac{u_3}{u_1}\right]' + \ldots + C\left[\frac{u_k}{u_1}\right]' = 0.$$

Проинтегрировавъ, найдемъ зависимость

$$C_1 + C_2\frac{u_2}{u_1} + C_3\frac{u_3}{u_1} + \ldots + C_k\frac{u_k}{u_1} = 0;$$

или, по умноженіи на u_1:

$$C_1 u_1 + C_2 u_2 + C_3 u_3 + \ldots + C u = 0,$$

что противорѣчитъ заданію, такъ какъ $u_1, u_2, u_3, \ldots u_k$ независимыя рѣшенія.

Итакъ, помощью одного частнаго рѣшенія $u = u_1$ уравненія (2) мы понизили порядокъ уравненій (1) и (2) на единицу и пришли къ соотвѣтствующимъ уравненіямъ порядка (n-1)-го (1') и (2'), причемъ для (2') извѣстны (k-1) независимыхъ частныхъ рѣшеній.

Полагая далѣе въ (1') и (2') уравненіяхъ

$$z = v_1\int \xi dx; \qquad v = v_1\int \omega dx,$$

найдемъ новыя уравненія

$$\xi^{(n-2)} + \ldots = \frac{q}{u_1 v_1} \;\ldots\ldots\ldots (1'')$$

$$\omega^{(n-2)} + \ldots = 0 \;\ldots\ldots\ldots (2'')$$

порядка (n-2)-го и соотвѣтствующія другъ другу, причемъ для (2") намъ извѣстны (k-2) независимыхъ частныхъ рѣшеній

$$\omega_1 = \left[\frac{v_2}{v_1}\right]'; \quad \omega_2 = \left[\frac{v_3}{v_1}\right]'; \quad \ldots \; \omega_{k-2} = \left[\frac{v_{k-1}}{v_1}\right]'$$

Повторяя предыдущее разсужденіе, мы понизимъ порядокъ уравненія еще на 1 и т.д. Отсюда заключаемъ, что, зная k незави -

симыхъ рѣшеній, порядокъ можно понизить на k единицъ.

Слѣдствіе. Если для линейнаго уравненія 2-го порядка:

$$y'' + p_1 y' + p_2 y = q \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (*)$$

извѣстно одно частное рѣшеніе соотвѣтственнаго уравненія безъ послѣдняго члена, то общій интегралъ этого уравненія (*) выражается въ квадратурахъ.

Пусть u_1 будетъ частнымъ рѣшеніемъ соотвѣтственнаго уравненія. Тогда, полагая въ уравненіи (*)

$$y = u_1 \int z dx,$$

найдемъ уравненіе 1-го порядка:

$$z' + r_1 z = q/u_1.$$

Такъ какъ z отсюда представляется въ квадратурахъ, то и y представляется въ квадратурахъ.

Примѣръ. Найти общій интегралъ уравненія

$$y'' - 2xy' + 2y = 1,$$

если извѣстно частное рѣшеніе соотвѣтственнаго уравненія безъ послѣдняго члена $u_1 = x$.

Положивъ

$$y = x \int z dx,$$

и составивъ производныя отъ y по x:

$$y' = \int z dx + xz$$

$$y'' = 2z + xz',$$

перепишемъ наше уравненіе въ видѣ

$$1 = -2x^2 z + 2z + xz'$$

или

$$z' + \frac{2}{x}(1-x^2)z = 1/x.$$

Рѣшаемъ это уравненіе по способу Эйлера, для чего находимъ

$$\int\left(\frac{2}{x} - 2x\right)dx = 2\log x - x^2$$

$$e^{\int\left(\frac{2}{x}-2x\right)dx} = x^2 e^{-x^2};$$

умноживъ теперь обѣ части уравненія на $x^2 e^{-x^2}$, получимъ

$$\frac{d}{dx}\left(z \,.\, x^2 e^{-x^2}\right) = x e^{-x^2}$$

$$z \,.\, x^2 e^{-x^2} = -\tfrac{1}{2} e^{-x^2} + C_1$$

$$z = C_1 \frac{e^{x^2}}{x^2} - \frac{1}{2x^2};$$

отсюда

$$y = C_2 x + x\left[\frac{1}{2x} + C_1 \int \frac{e^{x^2}}{x^2}\, dx\right]$$

$$y = \tfrac{1}{2} + C_2 x + C_1 x \int \frac{e^{x^2}}{x^2}\, dx$$

(квадратура не берется).

Теорема III. Если $u_1, u_2, \ldots u_n$ представляютъ n независимыхъ частныхъ рѣшеній уравненія (2) порядка n-го, то

$$u = C_1 u_1 + C_2 u_2 + \ldots + C_n u_n$$

будетъ его общимъ интеграломъ.

Доказательство. Эта теорема легко доказывается для случая $n = 1$, когда мы имѣемъ одно частное рѣшеніе $u = u_1$. Тогда

$$u' + p_1 u = 0$$

$$u_1' + p_1 u_1 = 0;$$

отсюда получимъ:

$$\frac{u'}{u} = \frac{u_1'}{u_1},$$

$$\log u = \log u_1 + \log C_1$$

$$u = C_1 u_1.$$

Употребляя способъ математической индукціи, мы докажемъ теорему для любого n. Въ самомъ дѣлѣ, пусть уравненіе n-го порядка имѣетъ n независимыхъ частныхъ рѣшеній $u_1, u_2, \ldots u_n$. Предполагая теорему доказанной для уравненія $(n-1)$-го порядка, положимъ въ данномъ уравненіи

$$u = u_1 \int v dx;$$

тогда получимъ для v уравненіе порядка $(n-1)$-го, для котораго теорема считается доказанной. Припоминая, что независимыя частныя рѣшенія уравненія для v будутъ:

$$v_1 = \left[\frac{u_2}{u_1}\right]'; \quad v_2 = \left[\frac{u_3}{u_1}\right]'; \quad \ldots \quad v_{n-1} = \left[\frac{u_n}{u_1}\right]',$$

и написавъ общій интегралъ его въ видѣ:

$$v = C_2 v_1 + C_3 v_2 + \ldots + C_n v_{n-1} =$$

$$= C_2 \left[\frac{u_2}{u_1}\right]' + C_3 \left[\frac{u_3}{u_1}\right]' + \ldots + C_n \left[\frac{u_n}{u_1}\right]',$$

послѣ интегрированія получимъ:

$$u = u_1 \left[C_1 + C_2 \frac{u_2}{u_1} + C_3 \frac{u_3}{u_1} + \ldots + C_n \frac{u_n}{u_1} \right] =$$

$$= C_1 u_1 + C_2 u_2 + C_2 u_2 + \ldots + C_n u_n,$$

такъ что теорема справедлива и для уравненія порядка n-го.

Теорема IV. Общій интегралъ уравненія (1) равенъ суммѣ частнаго рѣшенія уравненія (1) и общаго интеграла соотвѣтствующаго уравненія (2).

Доказательство. Пусть $\overline{Y}$ есть частное рѣшеніе уравненія (1), такъ что

$$F(\overline{Y}) = q;$$

введемъ вмѣсто y новую перемѣнную u, полагая

$$y = u + \overline{Y};$$

тогда имѣемъ

$$F(y) = F(u+\overline{Y}) = F(u) + F(\overline{Y}) = F(u) + q.$$

но такъ какъ должно быть $F(y) = q$, то выходитъ

$$F(u) = 0,$$

т.е. u есть общій интегралъ уравненія (2) и общій интегралъ уравненія (1)

$$y = \bar{Y} + u$$

составляется изъ суммы частнаго рѣшенія $\bar{Y}$ и общаго интеграла u, что и требовалось доказать.

Слѣдствіе. Если $u_1, u_2, \dots u_n$ независимыя рѣшенія уравненія (2) и $\bar{Y}$ частное рѣшеніе уравненія (1), то общій интегралъ уравненія (1) будетъ

$$y = \bar{Y} + C_1u_1 + C_2u_2 + \dots C_nu_n.$$

Теорема V. Частныя рѣшенія $\bar{Y}$ уравненія (1) могутъ быть найдены посредствомъ квадратуръ, если извѣстны n независимыхъ частныхъ рѣшеній соотвѣтствующаго уравненія (2).

1-ый способъ. Способъ послѣдовательнаго пониженія порядка уравненія (1).

На основаніи теоремы II, зная n независимыхъ частныхъ рѣшеній уравненія (2), мы можемъ понизить порядокъ уравненія (1) на n единицъ, и тогда, придя къ конечному уравненію, опредѣлимъ послѣднюю неизвѣстную; а такъ какъ послѣдовательныя новыя неизвѣстныя были связаны подстановкой:

$$y = u_1\int z dx$$

$$z = v_1\int \xi dx$$

$$\dots\dots\dots,$$

то восходя отъ послѣдней неизвѣстной къ y, мы должны взять только n квадратуръ.

Примѣръ. Дано уравненіе $y'' - y = x$. Составивъ соотвѣтственное уравненіе безъ послѣдняго члена $u''-u = 0$, мы видимъ, что его независимыя частныя рѣшенія будутъ

$$u_1 = e^x; \quad u_2 = e^{-x}$$

Зная это, положимъ

$$y = e^x\int z dx;$$

тогда найдемъ

$$y' = e^x\int z dx + e^x.z$$

$$y'' = e^x\int z dx + 2e^x z + e^x z'$$

Подставляя найденныя значенія y и y'' въ данное уравненіе, получимъ новое дифференціальное уравненіе 1-го порядка

$$x = e^x(z' + 2z)$$

или

$$z' + 2z = x e^{-x},$$

для котораго соотвѣтственное уравненіе будетъ

$$v' + 2v = 0.$$

Найдемъ частное рѣшеніе этого уравненія:

$$v = \left[\frac{u_2}{u_1}\right]' = -2e^{-2x}$$

или

$$v_1 = e^{-2x}.$$

Полагая теперь

$$z = e^{-2x}\int \xi dx$$

$$z' = -2e^{-2x}\int \xi dx + e^{-2x}\xi,$$

получимъ

$$x.e^{-x} = \xi.e^{-2x},$$

откуда

$$\xi = x.e^x.$$

Далѣе имѣемъ

$$z = e^{-2x}\int \xi dx = C_1e^{-2x} + e^{-2x}\int xe^x dx = C_1e^{-2x} + e^{-x}(x-1),$$

$$y = e^x\int z dx = C_2e^x + e^x.\left[-\tfrac{1}{2}C_1e^{-2x} + \int e^{-x}(x-1)dx\right] =$$

$$= C_2e^x - \tfrac{1}{2}C_1e^{-x} + e^x(-x.e^{-x}) = -x + C_1'e^{-x} + C_2e^x.$$

2-ой способъ. Способъ Лагранжа или способъ варіаціи постоянныхъ произвольныхъ.

Положимъ, что намъ извѣстны n независимыхъ частныхъ рѣшеній уравненія (2) $u_1, u_2, \dots u_n$, и требуется найти частное рѣшеніе уравненія (1) $\bar{Y}$. Мы знаемъ, что для уравненія (2) общій интегралъ

$$u = C_1u_1 + C_2u_2 + \ldots + C_nu_n,$$

гдѣ $C_1, C_2, \ldots C_n$ постоянныя произвольныя. Будемъ искать общій интегралъ уравненія (1) также въ видѣ

$$y = C_1u_1 + C_2u_2 + \ldots + C_nu_n,$$

гдѣ C означаютъ уже не постоянныя, а нѣкоторыя *функціи* отъ x. Эти n функціи удовлетворяютъ одному условію (1); $(n-1)$ условій въ нашемъ распоряженіи. Лагранжъ предложилъ такой выборъ этихъ $(n-1)$ условій, чтобы $y', y'', \ldots y^{(n-1)}$ сохраняли тѣ же выраженія, какъ при постоянныхъ $C_1, C_2, \ldots C_n$. Именно:

$$y' = \sum_{j=1}^{n} C_j u_j' + \sum_{j=1}^{n} C_j' u_j = \sum_{j=1}^{n} C_j u_j'$$

при условіи

$$\sum_{j=1}^{n} C_j' u_j = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

$$y'' = \sum_{j=1}^{n} C_j u_j'' + \sum_{j=1}^{n} C_j' u_j' = \sum_{j=1}^{n} C_j u_j''$$

при условіи

$$\sum_{j=1}^{n} C_j' u_j' = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

$$y''' = \sum_{j=1}^{n} C_j u_j''' + \sum_{j=1}^{n} C_j' u_j'' = \sum_{j=1}^{n} C_j u_j'''$$

при условіи

$$\sum_{j=1}^{n} C_j' u_j'' = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

. . . .

$$y^{(n-2)} = \sum_{j=1}^{n} C_j u_j^{(n-2)} + \sum_{j=1}^{n} C_j' u_j^{(n-3)} = \sum_{j=1}^{n} C_j u_j^{(n-2)}$$

при условіи

$$\sum_{j=1}^{n} C_j' u_j^{(n-3)} = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (n-2)$$

$$y^{(n-1)} = \sum_{j=1}^{n} C_j u_j^{(n-1)} + \sum_{j=1}^{n} C_j' u_j^{(n-2)} = \sum_{j=1}^{n} C_j u_j^{(n-1)}$$

при условіи

$$\sum_{j=1}^{n} C_j' u_j^{(n-2)} = 0 \ldots\ldots\ldots (n-1)$$

Мы имѣемъ $(n-1)$ условій для C_j'; (1) - $(n-1)$. Обратимся къ выводу n-го условія.

Выраженіе n-ой производной будетъ:

$$y^{(n)} = \sum_{j=1}^{n} C_j u_j^{(n)} + \sum_{j=1}^{n} C_j' u_j^{(n-1)}$$

Умноживъ $y^{(n)}$, $y^{(n-1)}$, ... y', y соотвѣтственно на 1, p_1, p_2, ... p_{n-1}, p_n и сложивъ, получимъ слѣдующее:

$$\begin{array}{c|l}
1 & y^{(n)} = \Sigma C_j u_j^{(n)} + \Sigma C_j' u_j^{(n-1)} \\
p_1 & y^{(n-1)} = \Sigma C_j u_j^{(n-1)} \\
\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
p_{n-1} & y' = \Sigma C_j u_j' \\
p_n & y = \Sigma C_j u_j \\
\hline
\end{array}$$

$$0 = \Sigma C_j' u_j^{(n-1)} + \Sigma C_j . F(u_j) = \Sigma C_j' u_j^{(n-1)},$$

такъ какъ u_j - рѣшеніе уравненія (2) и потому

$$F(u_j) = 0.$$

Итакъ мы имѣемъ n условій, которыя представляютъ систему n линейныхъ уравненій относительно n неизвѣстныхъ C_1', C_2', C_3', ... C_n':

$$\begin{gathered}
\Sigma C_j' u_j = 0 \\
\Sigma C_j' u_j' = 0 \\
\ldots\ldots\ldots \\
\Sigma C_j' u_j^{(n-2)} = 0
\end{gathered}$$

$$\Sigma\, C_j' u_j^{(n-1)} = q.$$

Рѣшая эти уравненія, находимъ:

$$C_1' = \varphi_1(x); \qquad C_1 = \int \varphi_1(x)dx + D_1$$

$$C_2' = \varphi_2(x); \qquad C_2 = \int \varphi_2(x)dx + D_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$C_n' = \varphi_n(x); \qquad C_n = \int \varphi_n(x)dx + D_n.$$

Слѣдовательно:

$$y = C_1u_1 + \ldots + C_nu_n = D_1u_1 + D_2u_2 + \ldots + D_nu_n +$$

$$+ \left[u_1\int\varphi_1(x)dx + u_2\int\varphi_2(x)dx + \ldots + u_n\int\varphi_n(x)dx\right],$$

гдѣ

$$u_1\int\varphi_1(x)dx + u_2\int\varphi_2(x)dx + \ldots + u_n\int\varphi_n(x)dx = \overline{Y}$$

есть частное рѣшеніе уравненія (1).

Примѣръ. $y'' + y = x$. Замѣчая, что независимыя частныя рѣшенія уравненія $u'' + u = 0$ будутъ

$$u_1 = \operatorname{Cos} x$$

$$u_2 = \operatorname{Sin} x,$$

и общій интегралъ его

$$u = C_1\operatorname{Cos} x + C_2\operatorname{Sin} x,$$

гдѣ C_1, C_2 постоянныя произвольныя, будемъ искать общій интегралъ даннаго уравненія въ видѣ

$$y = C_1\operatorname{Cos} x + C_2\operatorname{Sin} x,$$

гдѣ C_1, C_2 функціи отъ x.

Составляемъ производныя отъ y:

$$y' = (-C_1\operatorname{Sin} x + C_2\operatorname{Cos} x) + (C_1'\operatorname{Cos} x + C_2'\operatorname{Sin} x) = (-C_1\operatorname{Sin} x + C_2\operatorname{Cos} x)$$

при условіи

$$C_1'\operatorname{Cos} x + C_2'\operatorname{Sin} x = 0\,; \ldots\ldots\ldots (1)$$

$$y'' = (-C_1 \mathrm{Cos}x - C_2 \mathrm{Sin}x) + (-C_1' \mathrm{Sin}x + C_2' \mathrm{Cos}x).$$

Составляя $y'' + y = x$, получимъ

$$y'' + y = x = -C_1' \mathrm{Sin}x + C_2' \mathrm{Cos}x \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2).$$

Это даетъ намъ второе уравненіе для опредѣленія C_1' и C_2'. Изъ уравненій

$$C_1' \mathrm{Cos}x + C_2' \mathrm{Sin}x = 0$$

$$-C_1' \mathrm{Sin}x + C_2' \mathrm{Cos}x = x$$

находимъ

$$C_1' = -x.\mathrm{Sin}x$$

$$C_2' = x.\mathrm{Cos}x;$$

отсюда имѣемъ:

$$C_1 = \int -x.\mathrm{Sin}x.dx + D_1 = x.\mathrm{Cos}x - \mathrm{Sin}x + D_1$$

$$C_2 = \int x.\mathrm{Cos}x.dx + D_2 = x.\mathrm{Sin}x + \mathrm{Cos}x + D_2.$$

и слѣдовательно

$$y = D_1 \mathrm{Cos}x + D_2 \mathrm{Sin}x + \mathrm{Cos}x(x.\mathrm{Cos}x - \mathrm{Sin}x) + \mathrm{Sin}x(x.\mathrm{Sin}x + \mathrm{Cos}x)$$

$$y = D_1 \mathrm{Cos}x + D_2 \mathrm{Sin}x + x,$$

причемъ x есть частное рѣшеніе уравненія $y'' + y = x$, въ чемъ легко убѣдиться, сдѣлавъ подстановку.

§ 10.

Нахожденіе независимыхъ частныхъ рѣшеній $u_1, u_2, \dots u_n$ уравненія (2) въ случаѣ, когда коэффиціенты $p_1, p_2, \dots \dots p_n$ постоянны.

Будемъ въ этомъ случаѣ искать частныя рѣшенія ур-ія (2):

$$u^{(n)} + p_1 u^{(n-1)} + p_2 u^{(n-2)} + \dots + p_{n-1} u' + p_n u = 0$$

въ видѣ $u = e^{kx}$, гдѣ k неизвѣстная пока постоянная. Тогда, составивъ производныя

$$u' = k\,e^{kx}$$

$$u'' = k^2 e^{kx}$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$u^{(n)} = k^n e^{kx}$$

и обозначивъ результатъ подстановки e^{kx} вмѣсто u въ лѣвую часть уравненія (2) черезъ

$$F(e^{kx}),$$

будемъ имѣть:

$$F(e^{kx}) = e^{kx}.\varphi(k),$$

гдѣ

$$\varphi(k) = k^n + p_1 k^{n-1} + p_2 k^{n-2} + \ldots + p_{n-1} k + p_n.$$

Функція $\varphi(k)$ выводится изъ уравненія (2), если замѣнить каждую производную $u^{(i)}$ на k^i и u на 1. Ур-іе $\varphi(k) = 0$ называется *характеристическимъ уравненіемъ* для даннаго дифференціальнаго уравненія (2).

Если e^{kx} есть рѣшеніе уравненія (2), то должно быть

$$F(e^{kx}) = e^{kx}\varphi(k) = 0,$$

и такъ какъ e^{kx} не $= 0$, то $\varphi(k) = 0$.

Слѣдовательно k должно быть однимъ изъ корней характеристическаго уравненія.

При рѣшеніи уравненія $\varphi(k) = 0$ может представиться два случая.

1-ый случай. Уравненіе $\varphi(k) = 0$ имѣетъ *всѣ корни простые:*

$$k_1,\ k_2,\ k_3,\ \ldots\ k_n.$$

Въ этомъ случаѣ имѣемъ

$$F(e^{k_j x}) = e^{k_j x}\varphi(k_j) = 0$$

при $j = 1, 2, 3, \ldots n$, и

$$u_1 = e^{k_1 x};\quad u_2 = e^{k_2 x};\quad \ldots\quad u_n = e^{k_n x}$$

суть частныя рѣшенія уравненія (2).

Докажемъ, что эти частныя рѣшенія суть независимыя, т. е., что не можетъ представиться тождества вида:

$$C_1u_1 + C_2u_2 + \dots C_nu_n = 0.$$

Докажемъ сначала это для частныхъ случаевъ, а затѣмъ, пользуясь методомъ математической индукціи, и въ общемъ видѣ.

Частный случай: $n = 2$. Докажемъ, что

$$e^{k_1x} \quad \text{и} \quad e^{k_2x}$$

независимыя частныя рѣшенія, т.е. докажемъ, что равенство

$$a_1e^{k_1x} + a_2e^{k_2x} = 0,$$

гдѣ a_1, a_2 числа постоянныя, невозможно.

Дѣйствительно, по раздѣленіи предыдущаго равенства на $a_2e^{k_2x}$, получимъ

$$\frac{a_1}{a_2}\,e^{(k_1-k_2)x} = -1,$$

что невозможно, при k_1 не $= k_2$.

$n = 3$. Покажемъ, что

$$e^{k_1x}, \quad e^{k_2x}, \quad e^{k_3x}$$

- независимыя рѣшенія. Допустивъ существованіе равенства

$$a_1e^{k_1x} + a_2e^{k_2x} + a_3e^{k_3x} = 0,$$

мы получимъ слѣдствіемъ этого (послѣ дѣленія на e^{k_3x})

$$a_1e^{(k_1-k_3)x} + a_2e^{(k_2-k_3)x} + a_3 = 0.$$

Продифференцировавъ по x, найдемъ:

$$a_1(k_1-k_3)e^{(k_1-k_3)x} + a_2(k_2-k_3)e^{(k_2-k_3)x} = 0$$

или

$$b_1e^{l_1x} + b_2e^{l_2x} = 0,$$

т.е. придемъ къ случаю $n = 2$, невозможность котораго доказана, и т.д. Отсюда видимъ, что и въ общемъ случаѣ рѣшенія

$$e^{k_1x},\ e^{k_2x},\ \dots\ e^{k_nx}$$

оказываются независимыми, и согласно теоремѣ III § 9 общій интегралъ будетъ

$$u = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x} + C_3e^{k_3x} + \dots + C_ne^{k_nx}.$$

Примѣръ.

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0.$$

Составимъ характеристическое уравненіе:

$$k^3 - 6k^2 + 11k - 6 = 0.$$

Такъ какъ это уравненіе, очевидно, имѣетъ корень $k = 1$, то лѣвая часть дѣлится на $k - 1$; частное будетъ

$$k^2 - 5k + 6 = (k-2)(k-3).$$

Поэтому корни характеристическаго уравненія будутъ

$$k_1 = 1; \quad k_2 = 2; \quad k_3 = 3,$$

и общій интегралъ

$$y = C_1e^{x} + C_2e^{2x} + C_3e^{3x}.$$

Замѣчаніе. Если характеристическое уравненіе $\varphi(k) = 0$ имѣетъ комплексные сопряженные корни:

$$k_1 = \alpha + \beta i$$

$$k_2 = \alpha - \beta i,$$

то соотвѣтствующая часть общаго интеграла пишется въ видѣ

$$e^{\alpha x}(C'\mathrm{Cos}\beta x + C''\mathrm{Sin}\beta x).$$

Дѣйствительно, частныя рѣшенія, отвѣчающія этимъ корнямъ k_1 и k_2 представляются въ видѣ:

$$u_1 = e^{x(\alpha+\beta i)} = e^{\alpha x}(\mathrm{Cos}\beta x + i.\mathrm{Sin}\beta x)$$

$$u_2 = e^{x(\alpha-\beta i)} = e^{\alpha x}(\mathrm{Cos}\beta x - i.\mathrm{Sin}\beta x),$$

а частный интегралъ будетъ

$$C_1u_1 + C_2u_2 = e^{\alpha x}\left[\operatorname{Cos}\beta x.(C_1+C_2) + \operatorname{Sin}\beta x.(C_1 i - C_2 i)\right].$$

Введя новыя обозначенія: $C_1 + C_2 = C'$ и $C_1 i - C_2 i = C''$, получимъ въ окончательной формѣ:

$$u = e^{\alpha x}(C'\operatorname{Cos}\beta x + C''\operatorname{Sin}\beta x).$$

Примѣръ 1. $y'' + n^2y = 0$. Характеристическое ур-іе представляетъ собою квадратное уравненіе

$$k^2 + n^2 = 0,$$

имѣющее мнимые корни $k = \pm ni$. Здѣсь имѣемъ, согласно принятымъ нами обозначеніямъ, $\alpha = 0$, $\beta = n$, и слѣдовательно

$$y = C_1\operatorname{Cos}nx + C_2\operatorname{Sin}nx.$$

Примѣръ 2. $y^{IV} + n^4y = 0$. Характеристическое уравненіе

$$k^4 + n^4 = 0$$

распадается на два квадратныхъ:

$$(k^2 + kn\sqrt{2} + n^2)(k^2 - kn\sqrt{2} + n^2) = 0.$$

Уравненіе

$$k^2 + kn\sqrt{2} + n^2 = 0$$

имѣетъ корни

$$k = -\frac{n\sqrt{2}}{2} \pm \sqrt{{}^1/_2 n^2 - n^2} = -\frac{n\sqrt{2}}{2} \pm i\frac{n\sqrt{2}}{2}.$$

Корни же уравненія

$$k^2 - kn\sqrt{2} + n^2 = 0$$

будутъ

$$k = +\frac{n\sqrt{2}}{2} \pm i\frac{n\sqrt{2}}{2}.$$

Согласно нашимъ обозначеніямъ имѣемъ

$$\alpha_1 = -\frac{n\sqrt{2}}{2}; \quad \beta_1 = \frac{n\sqrt{2}}{2}$$

$$\alpha_2 = +\frac{n\sqrt{2}}{2}; \quad \beta_2 = \frac{n\sqrt{2}}{2}$$

и потому:

$$y = e^{-\frac{nx\sqrt{2}}{2}}\left[C_1 Cos\frac{nx\sqrt{2}}{2} + C_2 Sin\frac{nx\sqrt{2}}{2}\right] +$$

$$+ e^{\frac{nx\sqrt{2}}{2}}\left[C_3 Cos\frac{nx\sqrt{2}}{2} + C_4 \, Sin\frac{nx\sqrt{2}}{2}\right].$$

Переходимъ къ тому случаю, когда характеристическое уравненіе имѣетъ кратные корни.

2-ой случай. Характеристическое уравненіе имѣетъ l равныхъ корней

$$k_1 = k_2 = k_3 = \ldots = k_l$$

и корни

$$k_{l+1}, \quad k_{l+2}, \quad k_{l+3}, \ldots k_n,$$

отличные другъ отъ друга и отъ предыдущихъ. Тогда рѣшенія

$$e^{k_1x}, \quad e^{k_2x}, \quad e^{k_3x}, \ldots e^{k_lx}$$

совпадаютъ и не будутъ независимыми.

Теорема. Если характеристическое уравненіе $\varphi(k) = 0$ имѣетъ l-кратный корень $k = k_1$ и остальные корни $k_{l+1}, \ldots k_n$ простые, то общій интегралъ имѣетъ видъ:

$$u = e^{k_1x}(C_1 + C_2x + C_3x^2 + \ldots + C_l x^{l-1}) + C_{l+1}e^{k_{l+1}x} + \ldots$$

$$\ldots + C_n \, e^{k_nx}.$$

Дѣйствительно, докажемъ, что функціи

$$e^{k_1x}, \quad x.e^{k_1x}, \quad x^2e^{k_1x}, \ldots x^{l-1}e^{k_1x}$$

будутъ представлять въ этомъ случаѣ независимыя частныя рѣшенія уравненія (2). Для этой цѣли установимъ слѣдующее тождество:

$$F(e^{kx} . x^j) = e^{kx}\left[x^j\varphi(k) + \frac{j}{1}x^{j-1}\varphi'(k) + \right.$$

$$+ \frac{j(j-1)}{1.2} x^{j-2} \varphi''(k) + \ldots + \varphi^{(j)}(k) \Big].$$

Раньше было выведено, что

$$F(e^{kx}) = e^{kx} \varphi(k).$$

Взявъ отъ обѣихъ частей этого равенства j-ую производную по k, согласно формулѣ Лейбница, получимъ:

$$\frac{\partial^j}{\partial k^j} F(e^{kx}) = \frac{\partial^j}{\partial k^j} \left[e^{kx}.\varphi(k) \right] =$$

$$= x^j e^{kx}.\varphi(k) + \frac{j}{1} x^{j-1} e^{kx}.\varphi'(k) + \ldots + e^{kx}.\varphi^{(j)}(k) =$$

$$= e^{kx} \left[x^j \varphi(k) + \frac{j}{1} x^{j-1}.\varphi'(k) + \ldots + \varphi^{(j)}(k) \right],$$

т.е. правую часть нашего тождества. Съ другой стороны, замѣтивъ, что

$$F(e^{kx}) = \sum_{s=n}^{o} p_{n-s} \frac{\partial^s e^{kx}}{dx^s}$$

гдѣ $p_o = 1$, найдемъ:

$$\frac{\partial^j}{\partial k^j} F(e^{kx}) = \frac{\partial^j}{\partial k^j} \sum_{s=n}^{o} p_{n-s} \frac{\partial^s e^{kx}}{\partial x^s} = \sum_{s=n}^{o} p_{n-s} \frac{\partial^j}{\partial k^j} \left[\frac{\partial^s (e^{kx})}{\partial x^s} \right].$$

Подставляя порядокъ дифференцированія, получимъ

$$\frac{\partial^j}{\partial k^j} F(e^{kx}) = \sum_{s=n}^{o} p_{n-s} \frac{\partial^s}{\partial x^s} \left[\frac{\partial^j}{\partial k^j} (e^{kx}) \right] =$$

$$= \sum_{s=n}^{o} p_{n-s} \frac{\partial^s}{\partial x^s} (e^{kx}.x^j) = F(e^{kx}.x^j),$$

т.е. лѣвую часть тождества (*).

Слѣдовательно, тождество (*) доказано.

Такъ какъ k_1 есть l-кратный корень функціи $\varphi(k)$, то

$$\varphi(k_1) = \varphi'(k_1) = \varphi''(k_1) = \ldots = \varphi^{(l-1)}(k_1) = 0.$$

но $\varphi^{(l)}(k_1)$ не $= 0$. Поэтому должно быть

$$F(e^{k_1x}x^j) = e^{k_1x}.[x^j\varphi(k_1) + j.x^{j-1}\varphi'(k_1) + \ldots$$

$$\ldots + \varphi^{(j)}(k_1)] = 0$$

при $j = 0, 1, 2, 3, \ldots (l-1)$, т.е. функціи

$$u_1 = e^{k_1x}, \quad u_2 = e^{k_1x}x, \quad u_3 = e^{k_1x}x^2, \ldots u_l = e^{k_1x}x^{l-1}$$

будутъ представлять частныя рѣшенія уравненія (2). Эти рѣшенія очевидно независимыя другъ отъ друга, т.к. невозможно тождество

$$e^{k_1x}(a_1 + a_2x + a_3x^2 + \ldots + a\,x^{l-1}) = 0,$$

иначе, какъ при всѣхъ $a = 0$. Такимъ образомъ общій интегралъ и получаетъ форму:

$$u = e^{k_1x}(C_1 + C_2x + C_3x^2 + \ldots + C_lx^{l-1}) +$$

$$+ C_{l+1}e^{k_{l+1}x} + \ldots + C_ne^{k_nx},$$

что и требовалось доказать.

Примѣръ.

$$y^{IV} + 3y''' + 3y'' + y' = 0.$$

Характеристическое уравненіе будетъ:

$$k^4 + 3k^3 + 3k^2 + k = 0.$$

Представивъ его въ видѣ

$$k(k + 1)^3 = 0,$$

найдемъ сразу его корни

$$k_1 = k_2 = k_3 = -1; \quad k_4 = 0.$$

А потому общій интегралъ

$$y = e^{-x}\left[C_1 + C_2x + C_3x^2\right] + C_4.$$

Замѣчаніе. Если уравненіе $\varphi(k) = 0$ имѣетъ пару комплексныхъ корней

$$k = \alpha \pm \beta i$$

порядка кратности l, то соотвѣтствующая часть общаго интеграла имѣетъ форму

$$e^{\alpha x}[\mathrm{Cos}\beta x.(A_1 + A_2x + \ldots + A_l x^{l-1}) + \mathrm{Sin}\beta x(B_1 + \ldots + B_l x^{l-1})].$$

Дѣйствительно, на основаніи предыдущей теоремы въ этомъ случаѣ соотвѣтственная часть общаго интеграла представится въ видѣ

$$u = e^{(\alpha+\beta i)x}[C_1 + C_2x + C_3x^2 + \ldots + C_l x^{l-1}] +$$

$$+ e^{(\alpha-\beta i)x}[D_1 + D_2x + D_3x^2 + \ldots + D_l x^{l-1}] =$$

$$= e^{\alpha x}\Big\{\mathrm{Cos}\beta x[(C_1+D_1) + x(C_2+D_2) + \ldots + x^{l-1}(C_l+D_l)] +$$

$$+ \mathrm{Sin}\beta x[(iC_1-iD_1) + x(iC_2-iD_2) + \ldots + x^{l-1}(iC_l-iD_l)]\Big\}$$

или, полагая $C_j + D_j = A_j$, $iC_j - iD_j = B_j$, получимъ:

$$u = e^{\alpha x}[\mathrm{Cos}\beta x.(A_1 + A_2x + \ldots + A_l x^{l-1}) +$$

$$+ \mathrm{Sin}\beta x.(B_1 + B_2x + \ldots B_l x^{l-1})].$$

Примѣръ.

$$y^{IV} + 2y'' + y = 0.$$

Характеристическое уравненіе

$$k^4 + 2k^2 + 1 = 0$$

можно представить въ видѣ

$$(k^2 + 1)^2 = 0,$$

слѣдовательно, имѣемъ двукратный $(l = 2)$ корень

$$k = \pm i \quad (\alpha = 0; \ \beta = 1),$$

и общій интегралъ

$$y = \mathrm{Cos}x.(C_1 + C_2x) + \mathrm{Sin}x.(C_3 + C_4x).$$

§ 11.

Нахожденіе частныхъ рѣшеній уравненія съ послѣднимъ членомъ по способу неопредѣленныхъ коэффиціентовъ.

Положимъ, что въ уравненіи съ послѣднимъ членомъ

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1} y' + p_n y = q$$

послѣдній членъ q имѣетъ спеціальную форму

$$q = e^{\mu x} f(x),$$

$p_1, p_2 \ldots p_n$ и μ = постоянн.

гдѣ $f(x)$ - цѣлая функція степени $\bar{m}$-ой.

Будемъ искать частное рѣшеніе $\bar{Y}$ въ такой формѣ:

$$\bar{Y} = e^{\mu x} \psi(x),$$

гдѣ $\psi(x)$ - цѣлая функція съ неопредѣленными коэффиціентами неизвѣстной пока степени n-ой. Итакъ должно выходить

$$q = F(Y) = \underline{F[e^{\mu x} \psi(x)]},$$

причемъ $\psi(x)$ можно представить въ видѣ

$$\psi(x) = \sum_{j=n}^{0} a_{n-j} x^j .$$

Въ предыдущемъ параграфѣ мы имѣли тождество

$$F(e^{kx}.x^j) = e^{kx} \Big[x^j.\varphi(k) + \frac{j}{1} x^{j-1}.\varphi'(k) +$$

$$+ \frac{j(j-1)}{1.2} x^{j-2}.\varphi''(k) + \ldots + \varphi^{j}(k) \Big],$$

которое можно переписать въ видѣ

$$F(e^{kx}.x^j) = e^{kx} \Big[x^j.\varphi(k) + \frac{1}{1} (x^j)'\varphi'(k) +$$

$$+ \frac{1}{1.2} (x^j)''\varphi''(k) + \ldots + \frac{1}{1.2\ldots j} (x^j)^{(j)} \varphi^{j}(k) \Big],$$

такъ какъ

$$j.x^{j-1} = (x^j)', \quad j(j-1)x^{j-2} = (x^j)'', \ldots$$

$$\ldots 1.2.3 \ldots j = (x^j)^{(j)}$$

Замѣчая, что $(x^j)^{(k)} = 0$ при $k = j+1, \ldots n$ можно переписать предъидущее тождество въ видѣ

$$F(e^{kx}.x^j) = e^{kx}\Big[x^j\varphi(k) + \frac{1}{1}(x^j)'\varphi'(k) + \frac{1}{1.2}(x^j)''\varphi''(k) + $$

$$+ \frac{1}{1.2.3}(x^j)'''\varphi'''(k) + \ldots + \frac{1}{1.2\ldots n}(x^j)^{(n)}\varphi^{(n)}(k)\Big]$$

при

$$j \leqq n.$$

Такъ какъ

$$F(C.u) = C.F(u),$$

то имѣемъ

$$F(e^{kx}.a_{n-j}x^j) = e^{kx}\Big[(a_{n-j}x^j)\varphi(k) + \frac{1}{1}(a_{n-j}x^j)'\varphi'(k) + \ldots\Big],$$

и такъ какъ

$$F(C_1u_1 + \ldots + C_ku_k) = C_1F(u_1) + \ldots C_kF(u_k),$$

то находимъ

$$F(e^{kx}.\sum_{j=n}^{0} a_{n-j}x^j) = e^{kx}\Big[(\Sigma a_{n-j}x^j).\varphi(k) + $$

$$+ \frac{1}{1}(\Sigma a_{n-j}x^j)'\varphi'(k) + \ldots + \frac{1}{1.2\ldots n}(\Sigma a_{n-j}x^j)^{(n)}\varphi^{(n)}(k)\Big]$$

или, замѣняя $\Sigma a_{n-j}x^j$ на $\psi(x)$ и букву k на μ, окончательно получимъ:

$$F[e^{\mu x}\psi(x)] = e^{\mu x}\Big[\psi(x)\varphi(\mu) + \frac{1}{1}\psi'(x)\varphi'(\mu) + $$

$$+ \frac{1}{1.2}\psi''(x)\varphi''(\mu) + \ldots + \frac{1}{1.2\ldots n}\psi^{(n)}(x)\varphi^{(n)}(\mu)\Big].$$

Такимъ образомъ:

$$q = e^{\mu x}f(x) = e^{\mu x}\Big[\psi(x)\varphi(\mu) + \psi'(x)\frac{\varphi'(\mu)}{1} + $$

$$+ \psi''(x) \frac{\varphi''(\mu)}{1.2} + \ldots + \psi^{(n)}(x) \frac{\varphi^{(n)}(\mu)}{1.2\ldots3} \Big],$$

т.е. получается равенство

$$f(x) = \psi(x)\varphi(\mu) + \psi'(x) \frac{\varphi'(\mu)}{1} + \psi''(x) \frac{\varphi''(\mu)}{2} + \ldots$$

$$\ldots + \psi^{(n)}(x) \frac{\varphi^{(n)}(\mu)}{1.2\ldots n} \ldots\ldots\ldots\ldots (*).$$

Отсюда слѣдуетъ, что если $\varphi(\mu)$ не $= 0$, т.е. μ не служитъ корнемъ характеристическаго уравненія, то $\psi(x)$ той же степени, какъ и $f(x)$, и положивъ

$$\psi(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_{m-1}x + a_m,$$

можно найти изъ тождества (*) всѣ коэффиціенты

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_{m-1},\ a_m.$$

Если же

$$\varphi(\mu) = \varphi'(\mu) = \ldots = \varphi^{(l-1)}(\mu) = 0,$$

но $\varphi^{(l)}(\mu)$ не $= 0$, т.е. μ является корнемъ характеристическаго уравненія порядка l-го, тогда равенство (*) принимаетъ видъ:

$$f(x) = \psi^{(l)}(x) \frac{\varphi^{(l)}(\mu)}{1.2.3\ldots l} + \psi^{(l+1)}(x) \frac{\varphi^{(l+1)}(\mu)}{1.2.3\ldots(l+1)} + \ldots$$

$$\ldots + \psi^{(n)}(x) \frac{\varphi^{(n)}(\mu)}{1.2.3\ldots n}.$$

Отсюда заключаемъ, что $\psi^{(l)}(x)$ той же степени, какъ и $f(x)$, т.е. степени m-ой; слѣдовательно $\psi(x)$ будетъ степени $(m+l)$-ой и можетъ быть представлена въ видѣ

$$\psi(x) = x^l(a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_{m-1}x + a_m) +$$

$$a_{m+1}x^{l-1} + a_{m+2}x^{l-2} + \ldots + a_{m+l},$$

причемъ мы можемъ опредѣлить только коэффиціенты

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ a_m,$$

а остальные отъ a_{m+1} до a_{m+l} остаются совершенно произвольными, такъ какъ въ опредѣляющее уравненіе эти коэффиціенты вовсе не входятъ.

Причина того, что коэффиціенты $a_{m+1}, \ldots a_{m+l}$ неопредѣленны, состоитъ въ слѣдующемъ: общій интегралъ при существованіи l-кратнаго корня μ характер. уравненія имѣетъ видъ:

$$y = \bar{Y} + u = e^{\mu x} x^l (a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m) +$$

$$+ e^{\mu x}(a_{m+1} x^{l-1} + \ldots + a_{m+l}) + e^{\mu x}(C_1 x^{l-1} + \ldots + C_l) +$$

$$+ \text{ *остальные члены* } u.$$

Членъ

$$e^{\mu x}(a_{m+1} x^{l-1} + \ldots + a_{m+l}),$$

которые не могли быть определены, сливаются съ соотвѣтственной частью общаго интеграла

$$e^{\mu x}(C_1 x^{l-1} + \ldots + C_l).$$

Итакъ приходимъ къ теоремѣ:

Теорема I. Если $q = e^{\mu x} f(x)$, гдѣ $f(x)$:- цѣлая функція степени m-ой, то частное рѣшеніе нужно искать въ видѣ

$$\bar{Y} = e^{\mu x}(a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m) x^l$$

если μ есть корень характеристическаго уравненія порядка l-го.

Замѣчаніе. Если послѣдній членъ оказывается суммой нѣсколькихъ членовъ:

$$q = e^{\mu_1 x} f_1(x) + e^{\mu_2 x} f_2(x) + \ldots ,$$

то и частное рѣшеніе $\bar{Y}$ нужно искать въ видѣ суммы:

$$\bar{Y} = e^{\mu_1 x} \psi_1(x) + e^{\mu_2 x} \psi_2(x) + \ldots$$

Въ частности если:

$$q = \left| \begin{array}{ll} e^{\alpha x}.\cos\beta x.f(x) & \text{или} \\ e^{\alpha x}.\sin\beta x.f(x), & \end{array} \right.$$

гдѣ $f(x)$ цѣлая функція степени m-ой, то, такъ какъ

$$e^{\alpha x}.\cos\beta x.f(x) = \frac{1}{2} e^{\alpha x}(e^{\beta x i} + e^{-\beta x i}) f(x) =$$

$$= e^{(\alpha+\beta i)x} \cdot \frac{f(x)}{2} + e^{(\alpha-\beta i)x} \cdot \frac{f(x)}{2} ;$$

$$e^{\alpha x}.\mathrm{Sin}\beta x.f(x) = \frac{1}{2i} e^{\alpha x}(e^{\beta xi} - e^{-\beta xi})f(x) =$$

$$= e^{(\alpha+\beta i)x} \cdot \frac{f(x)}{2i} - e^{(\alpha-\beta i)x} \cdot \frac{f(x)}{2i} ,$$

нужно искать частное рѣшеніе для обоихъ случаевъ въ видѣ

$$\bar{Y} = e^{(\alpha+\beta i)x}\psi(x) + e^{(\alpha-\beta i)x}\cdot\psi_1(x) =$$

$$= e^{\alpha x}\Big[\mathrm{Cos}\beta x\,\{\psi(x) + \psi_1(x)\} + \mathrm{Sin}\beta x\,\{i\psi(x) - i\psi_1(x)\}\Big] =$$

$$= e^{\alpha x}\Big[\mathrm{Cos}\beta x.\omega(x) + \mathrm{Sin}\beta x.\omega_1(x)\Big],$$

причемъ

$$\omega(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m$$

$$\omega_1(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m,$$

если $\alpha \pm \beta i$ не служитъ корнемъ характеристическаго уравненія, или

$$\omega(x) = x^l(a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m)$$

$$\omega_1(x) = x^l(b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m),$$

если $\alpha \pm \beta i$ является корнемъ характеристическаго уравненія порядка l-го. Отмѣтимъ этотъ результатъ, какъ теорему II:

Теорема II. Если послѣдній членъ q въ линейномъ уравненіи съ постоянными коэффиціентами имѣетъ форму:

$$q = e^{\alpha x}.\mathrm{Cos}\beta x.f(x)$$

или

$$q = e^{\alpha x}.\mathrm{Sin}\beta x.f(x),$$

гдѣ $f(x)$ цѣлая функція степени m-ой, то въ обоихъ случаяхъ нужно брать частное рѣшеніе $\bar{Y}$ въ формѣ:

$$\bar{Y} = x^l e^{\alpha x}\Big[\mathrm{Cos}\beta x.\omega(x) + \mathrm{Sin}\beta x.\omega_1(x)\Big],$$

причемъ

$$\omega(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_m$$

$$\omega_1(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m,$$

и l есть порядокъ кратности корней $\alpha \pm \beta i$ характ. уравненія ($l = 0$, если $\alpha \pm \beta i$ не служитъ корнемъ характ. уравненія).

Примѣръ.

$$y'' - 4y = xe^{2x} - e^{-3x}.$$

Составивъ характеристическое уравненіе $k^2 - 4 = 0$, находимъ $k = \pm 2$. Слѣдовательно

$$u = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x}.$$

Здѣсь

$$q = xe^{2x} - e^{-3x};$$

μ въ первомъ членѣ равно 2 и служитъ корнемъ характеристическаго уравненія 1-го порядка, а во второмъ членѣ $\mu = -3$ не служитъ корнемъ характеристическаго уравненія. Согласно теоремѣ I настоящаго параграфа ищемъ частное рѣшеніе въ видѣ

$$\bar{Y} = e^{2x}x(\alpha x + \beta) + e^{-3x}.\gamma.$$

Составимъ производныя отъ $\bar{Y}$:

$$\bar{Y}' = e^{2x}(2\alpha x^2 + 2\beta x + 2\alpha x + \beta) - 3\gamma e^{-3x};$$

$$\bar{Y}'' = e^{2x}(4\alpha x^2 + 4\beta x + 4\alpha x + 2\beta + 4\alpha x + 2\beta + 2\alpha) + 9\gamma e^{-3x}.$$

Подставляя найденныя выраженія производныхъ въ данное уравненіе, получаемъ

$$\bar{Y}'' - 4\bar{Y} = e^{2x}(4\alpha x^2 + 4\beta x + 8\alpha x + 4\beta + 2\alpha - 4\alpha x^2 - 4\beta x) +$$

$$+ e^{-3x}(9\gamma - 4\gamma) = e^{2x}(8\alpha x + 4\beta + 2\alpha) + 5\gamma e^{-3x} = e^{2x}.x - e^{-3x}.$$

Изъ этого уравненія слѣдуетъ

$$8\alpha = 1; \quad 4\beta + 2\alpha = 0; \quad 5\gamma = -1$$

и далѣе

$$\alpha = 1/8; \quad \beta = -1/16; \quad \gamma = -1/5.$$

Частное рѣшеніе будетъ

$$\bar{Y} = e^{2x}\left(\tfrac{1}{8}x^2 - \tfrac{1}{16}x \right) - \tfrac{1}{5}e^{-3x},$$

а общій интегралъ

$$y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} + e^{2x}\left(\tfrac{1}{8}x^2 - \tfrac{1}{16}x\right) - \tfrac{1}{5}e^{-3x}.$$

Примѣръ 2.

$$y'' + y = x.\mathrm{Cos}x.$$

Соотвѣтственное уравненіе безъ послѣдняго члена будетъ

$$u'' + u = 0.$$

Характеристическое уравненіе $k^2 + 1 = 0$ даетъ два мнимыхъ сопряженныхъ корня $k = \pm i$, и, слѣдовательно,

$$u = C_1\mathrm{Cos}x + C_2\mathrm{Sin}x.$$

Здѣсь

$$q = e^{\alpha x}.\mathrm{Cos}\beta x.f(x),$$

причемъ

$$\alpha = 0, \quad \beta = 1, \quad f(x) = x;$$

$\alpha \pm \beta i = \pm i$ служитъ корнемъ 1-го порядка характеристическаго уравненія.

По теоремѣ II пишемъ частное рѣшеніе въ видѣ:

$$\bar{Y} = \mathrm{Cos}x.x(\alpha x+\beta) + \mathrm{Sin}x.x(\gamma x+\delta);$$

найдемъ

$$\bar{Y}'' = \mathrm{Cos}x(2\alpha x + \beta + \gamma x^2 + \delta x) + \mathrm{Sin}x(2\gamma x + \delta - \alpha x^2 - \beta x)$$

$$\bar{Y}'' = \mathrm{Cos}x(2\alpha + 2\gamma x + \delta + 2\gamma x + \delta - \alpha x^2 - \beta x) +$$
$$+ \mathrm{Sin}x(2\gamma - 2\alpha x - \beta - 2\alpha x - \beta - \gamma x^2 - \delta x).$$

Отсюда

$$\bar{Y}'' + \bar{Y} = \mathrm{Cos}x\left[4\gamma x + 2\alpha + 2\delta\right] + \mathrm{Sin}x\left[2\gamma - 2\beta - 4\alpha x\right] = x.\mathrm{Cos}x.$$

Для опредѣленія α, β, γ, δ имѣемъ уравненія

$$4\gamma = 1; \quad 2\alpha + 2\delta = 0; \quad -4\alpha = 0; \quad 2\gamma - 2\beta = 0,$$

которыя даютъ

$$\gamma = \tfrac{1}{4}; \quad \alpha = 0; \quad \delta = 0; \quad \beta = \tfrac{1}{4}.$$

Итакъ

$$\overline{Y} = \mathrm{Cos}x.\tfrac{1}{4}x + \mathrm{Sin}x.\tfrac{1}{4}x^2,$$

$$y = u + \overline{Y} = C_1\mathrm{Cos}x + C_2\mathrm{Sin}x + \tfrac{1}{4}x.\mathrm{Cos}x + \tfrac{1}{4}x^2.\mathrm{Sin}x.$$

Примѣняя способъ Лагранжа, мы получили бы тотъ же результатъ. Положимъ

$$y = C_1\mathrm{Cos}x + C_2\mathrm{Sin}x,$$

гдѣ C_1, C_2 считаемъ функціями отъ x. Поставивъ условія

$$C_1'\mathrm{Cos}x + C_2'\mathrm{Sin}x = 0$$

$$C_1' - \mathrm{Sin}x + C_2'\mathrm{Cos}x = x.\mathrm{Cos}x,$$

опредѣляемъ отсюда

$$C_1' = -\,x.\mathrm{Sin}x.\mathrm{Cos}x$$

$$C_2' = x.\mathrm{Cos}^2x.$$

Интегрируя, получимъ

$$C_1 = \tfrac{1}{2}x.\mathrm{Cos}^2x - \tfrac{1}{4}(\mathrm{Sin}x.\mathrm{Cos}x + x) + A_1$$

$$C_2 = \tfrac{1}{2}(x.\mathrm{Sin}x.\mathrm{Cos}x + \tfrac{1}{2}\mathrm{Cos}^2x + \tfrac{1}{2}x^2) + A_2$$

и окончательно: $y = A_1\mathrm{Cos}x + A_2\mathrm{Sin}x + \frac{1}{4}x.\mathrm{Cos}x + \frac{1}{4}x^2\mathrm{Sin}x.$

Примѣръ 3. $y^{IV} - y''' - y'' + y' = \tfrac{1}{2} + x.e^x + \mathrm{Sin}2x.$

Характеристическое уравненіе

$$k^4 - k^3 - k^2 + k = 0$$

разлагается на множители

$k^2-2k+1=0$
$k=$

$$k(k-1)^2(k+1) = 0,$$

откуда

$$k = 0, \qquad k = -1, \qquad k = 1$$

– двукратный корень. Общій интегралъ уравненія безъ послѣдняго члена

$$u = C_1 + C_2e^{-x} + e^x(C_3 + C_4x).$$

Частное рѣшеніе состоитъ изъ трехъ членовъ ($\mu = 0$, $\mu = +1$, $\mu = \pm 2i$):

$$\overline{Y} = ax + x^2.e^x(bx + c) + (m.\mathrm{Sin}2x + n.\mathrm{Cos}2x).$$

Общій интегралъ

$$y = \bar{Y} + u.$$

Примѣръ 4.

$$y^{IV} + 14y'' + 49y = \operatorname{Sin}(x.\sqrt{7}) + e^{-x}.\operatorname{Cos}x\sqrt{7}.$$

Характеристическое уравненіе

$$k^4 + 14k^2 + 49 = (k^2 + 7)^2 = 0$$

имѣетъ двукратный корень

$$k = \pm i\sqrt{7}.$$

Поэтому

$$u = \operatorname{Cos}x\sqrt{7}.(C_1 + C_2x) + \operatorname{Sin}x\sqrt{7}.(C_3 + C_4x).$$

Частное рѣшеніе $(\mu = \pm i\sqrt{7}$ и $\mu = -1 \pm i\sqrt{7})$

$$\bar{Y} = x^2(a.\operatorname{Cos}x\sqrt{7} + b.\operatorname{Sin}x\sqrt{7}) + e^{-x}(m.\operatorname{Cos}x\sqrt{7} + n.\operatorname{Sin}x\sqrt{7}).$$

Общій интегралъ

$$y = \bar{Y} + u.$$

§ 12.

Интегрированіе линейныхъ уравненій вида

$$(ax+b)^n y^{(n)} + p_1(ax+b)^{n-1} y^{(n-1)} + p_2(ax+b)^{n-2} y^{(n-2)} + \dots$$

$$\dots + p_{n-1}(ax+b)y' + p_n y = q,$$

гдѣ $p_1, p_2, \dots p_n$ *постоянныя числа, а* q *- функціи отъ* x.

1-ый способъ. Полагаемъ $ax + b = e^t$. Отсюда

$$a.dx = e^t dt \qquad t = lg(ax+b)$$

и слѣдовательно

$$\frac{dt}{dx} = a.e^{-t}.$$

Составимъ теперь выраженія производныхъ отъ y по x через производныя отъ y по t:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = a.e^{-t}\frac{dy}{dt},$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = ae^{-t} \cdot \frac{d}{dt}\left(ae^{-t} \cdot \frac{dy}{dt}\right) = a^2 e^{-2t}\left[\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right],$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{dy''}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = ae^{-t} \cdot \frac{d}{dt}\left\{a^2 e^{-2t}\left[\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right]\right\} =$$

$$= a^3 e^{-3t}\left[\frac{d^3y}{dt^3} - \frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\right] = a^3 e^{-3t}\left[\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\right]$$

и т. д.

$$y^{(n)} = a^n e^{-nt}\left[\frac{d^ny}{dt^n} \ldots\ldots\ldots\ldots\right].$$

Подставляя найденныя значенія производныхъ въ данное уравненіе и полагая $q(x) = Q(t)$, получимъ

$$\cancel{e^{nt}}\, a^n \cancel{e^{-nt}}\left[\frac{d^ny}{dt^n} \ldots\right] + p_1 \cancel{e^{(n-1)t}}\, a^{n-1} \cancel{e^{-(n-1)t}}\left[\frac{d^{(n-1)}y}{dt^{n-1}} \ldots\right] +$$

$$+ \ldots + p_{n-1}\cancel{e^{t}}\, a.\cancel{e^{-t}}\frac{dy}{dt} + p_n y = Q(t),$$

или, послѣ приведенія подобныхъ членовъ и дѣленія на a^n, получимъ

$$\frac{d^ny}{dt^n} + s_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \ldots + s_n y = \frac{1}{a^n}\varphi(t) \;.\;.\;.\;.\;.\; (*),$$

т.е. линейное уравненіе порядка n съ постоянными коэффиціентами, интегрированіе котораго было разсмотрѣно въ §§ 10 и 11.

Примѣръ.

$$x^2y'' + xy' + y = 1.$$

Дѣлая подстановку $x = e^t$, имѣемъ

$$y' = e^{-t}\frac{dy}{dt}$$

$$y'' = e^{-2t}\left[\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right].$$

Слѣдовательно, въ новой перемѣнной уравненіе получаетъ видъ

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} + \frac{dy}{dt} + y = 1$$

или

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = 1.$$

Интегрируя это уравненіе, получимъ

$$y = C_1 Cost + C_2 Sint + 1.$$

Имѣя равенство $e^t = x$, находимъ:

$$t = \log x \quad \text{и} \quad y = 1 + C_1 Cos(\log x) + C_2 Sin(\log x).$$

2-ой способъ. Такъ какъ для преобразованнаго уравненія (*), содержащаго производныя y по t, частныя рѣшенія уравненія безъ послѣдняго члена имѣютъ форму e^{kt}, то для первоначальнаго уравненія частныя рѣшенія имѣютъ форму

$$e^{kt} = (ax + b)^k.$$

Поэтому мы можемъ, не вводя новой перемѣнной независимой t, сразу искать частныя рѣшенія, положивъ въ уравненіи безъ последняго члена:

$$y = (ax + b)^k;$$

тогда мы найдемъ для k характеристическое уравненіе n-ой степени. Пусть всѣ n корней k будутъ различны: $k_1, k_2, k_3, \ldots k_n$. Тогда общій интегралъ будетъ

$$y = \bar{Y} + C_1(ax+b)^{k_1} + C_2(ax+b)^{k_2} + \ldots + C_n(ax+b)^{k_n}.$$

Если два какіе-нибудь корня будутъ комплексные сопряженные, т.е. если

$$k_1 = \alpha + \beta i$$

$$k_2 = \alpha - \beta i,$$

то нужно соотвѣтствующую часть общаго интеграла брать въ видѣ

$$(ax+b)^\alpha . \left\{ A_1 Cos[\beta.\log(ax+b)] + A_2 Sin[\beta.\log(ax+b)] \right\}.$$

Дѣйствительно,

$$(ax+b)^{\alpha+\beta i} = (ax+b)^{\alpha} e^{\beta i.\log(ax+b)} =$$

$$= (ax+b)^{\alpha} [\mathrm{Cos}\beta \log(ax+b) + i.\mathrm{Sin}\beta \log(ax+b)],$$

и такъ же

$$(ax+b)^{\alpha-\beta i} = (ax+b)^{\alpha} [\mathrm{Cos}\beta\log(ax+b) - i.\mathrm{Sin}\beta\log(ax+b))],$$

поэтому

$$C_1(ax+b)^{\alpha+\beta i} + C_2(ax+b)^{\alpha-\beta i} =$$

$$= (ax+b)^{\alpha} [A_1\mathrm{Cos}\beta\log(ax+b) + A_2\mathrm{Sin}\beta\log(ax+b)],$$

гдѣ

$$A_1 = C_1 + C_2$$

$$A_2 = C_1 i - C_2 i.$$

Если характеристическое уравненіе для k имѣетъ l кратный корень $k_1 = k_2 = k_3 = \ldots = k_l$, то соотвѣтствующая часть общаго интеграла будетъ

$$e^{k_1 t} [C_1 + C_2 t + C_3 t^2 + \ldots + C_l t^{l-1}] =$$

$$= (ax+b)^{k_1}[C_1 + C_2\log(ax+b) + C_3\log^2(ax+b) + \ldots + C_l\log^{l-1}(ax+b)],$$

такъ какъ имѣемъ

$$e^t = ax + b$$

$$t = \log(ax + b).$$

Если характеристическое уравненіе имѣетъ корень

$$k = \alpha \pm \beta i$$

порядка l-го, то соотвѣтствующая часть общаго интеграла будетъ

$$(ax+b)^{\alpha} \Big\{\mathrm{Cos}[\beta.\log(ax+b)] . [A_1 + C_2\log(ax+b) + \ldots$$

$$\ldots + A_l\log^{l-1}(ax+b)] + \mathrm{Sin}[\beta.\log(ax+b)] . [B_1 +$$

$$+ B_2\log(ax+b) + \ldots + B_l\log^{l-1}(ax+b)]\Big\}.$$

Примѣръ.

$$(x+1)^2 y'' + 3(x+1)y' + y = x.$$

Написавъ соотвѣтствующее уравненіе безъ послѣдняго члена

$$(x+1)^2y'' + 3(x+1)y' + y = 0,$$

ищемъ для него частныя рѣшенія въ видѣ

$$y = (x+1)^k.$$

Имѣемъ

$$y' = k(x+1)^{k-1}$$

$$y'' = k(k-1)(x+1)^{k-2}.$$

Подстановка значеній производныхъ въ данное уравненіе даетъ намъ характеристическое уравненіе для k:

$$(x+1)^k [k(k-1) + 3k + 1] = 0,$$

откуда

$$k^2 + 2k + 1 = 0$$

или

$$(k+1)^2 = 0,$$

такъ что $k = -1$ есть двукратный корень. Общій интегралъ будетъ

$$y = (x+1)^{-1} [C_1 + C_2\log(x+1)] + \bar{Y},$$

гдѣ $\bar{Y}$:- частное рѣшеніе уравненія съ послѣднимъ членомъ.

Для нахожденія частнаго рѣшенія $\bar{Y}$ замѣтимъ, что подстановка $x + 1 = e^t$ (по первому способу) привела бы насъ къ уравненію

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + y = e^t - 1 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (*)$$

такъ какъ характеристическое уравненіе для k имѣетъ видъ

$$k^2 + 2k + 1 = 0.$$

Теперь мы видимъ, что частное рѣшеніе $\bar{Y}$ будетъ вида (здѣсь $\mu = 1$ и $\mu = 0$):

$$\bar{Y} = a.e^t + b.$$

Подставляя въ уравненіе (*), находимъ:

$$4a.e^t + b = e^t - 1, \quad a = 1/4, \quad b = -1.$$

Такимъ образомъ

$$\bar{Y} = {}^1/_4 e^t - 1 = {}^1/_4 x - {}^3/_4.$$

Итакъ общій интегралъ будетъ

$$y = \frac{1}{x+1}[C_1 + C_2\log(x+1)] + {}^1/_4 x - {}^3/_4.$$

§ 13.

Интегрированіе системы обыкновенныхъ совокупныхъ дифференціальныхъ уравненій.

Пусть t независимая перемѣнная, а x, y, z неизвѣстныя ея функціи. Разсмотримъ систему обыкновенныхъ совокупныхъ дифференціальныхъ уравненій

$$\left|\begin{array}{l} f\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \ldots \frac{d^mx}{dt^m}, y, \frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}, \ldots \frac{d^ny}{dt^n}, z, \frac{dz}{dt}, \frac{d^2z}{dt^2}, \ldots \frac{d^pz}{dt^p}\right) = 0 \\ \varphi(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots) = 0 \\ \psi(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots) = 0, \end{array}\right.$$

причемъ число ея уравненій равно числу неизвѣстныхъ функцій, а высшій порядокъ производной x по t есть m, высшій порядокъ производной y по t есть n и z по t есть p.

Проинтегрировать эту систему значитъ найти для x, y, z выраженія въ функціи отъ t и постоянныхъ произвольныхъ (число которыхъ равно $m + n + p$).

Теорема I. Всякую систему обыкновенныхъ совокупныхъ дифференціальныхъ уравненій, въ которой число уравненій равно числу неизвѣстныхъ функцій, можно замѣнить такой новой системой, въ которую входятъ производныя отъ неизвѣстныхъ функцій *только 1-го порядка,* и число уравненій по прежнему равно числу неизвѣстныхъ функцій (до преобразованія было 3 неизвѣстныхъ функціи и 3 уравненія, а послѣ преобразованія войдутъ $m+n+p$ неизвѣстныхъ функцій и столько же уравненій).

Доказательство. Вводя обозначенія

$$(*)\quad \left|\begin{array}{l} \dfrac{dx}{dt} = x'; \quad \dfrac{dx'}{dt} = x''; \; \ldots.. \; \dfrac{dx^{(m-2)}}{dt} = x^{(m-1)} \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = y'; \quad \dfrac{dy'}{dt} = y''; \; \ldots.. \; \dfrac{dy^{(n-2)}}{dt} = y^{(n-1)} \\[2ex] \dfrac{dz}{dt} = z'; \quad \dfrac{dz'}{dt} = z''; \; \ldots.. \; \dfrac{dz^{(p-2)}}{dt} = z^{(p-1)} \end{array}\right.$$

въ силу которыхъ:

$$x^{(m)} = \frac{dx^{(m-1)}}{dt}; \quad y^{(n)} = \frac{dy^{(n-1)}}{dt}; \quad z^{(p)} = \frac{dz^{(p-1)}}{dt},$$

и присоединяя къ уравненіямъ (*) три данныя уравненія, переписанныя въ видѣ:

$$f(t, x, x', x'', \ldots x^{(m-1)}, \frac{dx^{(m-1)}}{dt}, y, y', y'', \ldots.$$
$$\ldots y^{(n-1)}, \frac{dy^{(n-1)}}{dt}, z, z', z'', \ldots z^{(p-1)}, \frac{dz^{(p-1)}}{dt}) = 0$$

$$\varphi(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots) = 0$$

$$\psi(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots) = 0,$$

мы будемъ имѣть $(m+n+p)$ уравненій съ такимъ же числомъ неизвѣстныхъ функцій:

$$x, x', x'', \ldots.. x^{(m-1)}$$

$$y, y', y'', \ldots.. y^{(n-1)}$$

$$z, z', z'', \ldots.. z^{(p-1)},$$

причемъ всѣ производныя, входящія въ наши преобразованныя уравненія, будутъ только перваго порядка.

Замѣчаніе. Когда заданная система преобразована въ новую систему $(m+n+p)$ уравненій съ производными отъ неизвѣстныхъ функцій только перваго порядка, то, рѣшивъ преобразованную систему относительно этихъ производныхъ, мы можемъ дать ей слѣдукцій видъ:

$$
(A) \quad \left|\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= f(t, x, y, z, u, \ldots\ldots) \\
\frac{dy}{dt} &= \varphi(t, x, y, z, u, \ldots\ldots) \\
\frac{dz}{dt} &= \psi(t, x, y, z, u, \ldots\ldots) \\
\frac{du}{dt} &= \omega(t, x, y, z, u, \ldots\ldots) \\
\end{aligned}\right.
$$

. . . .

Всѣ дальнѣйшія разсужденія мы будемъ вести въ предположеніи, что заданная система приведена уже къ системѣ (A), содержащей k уравненій и k неизвѣстныхъ функцій $x, y, z, u, \ldots$

Интегрированіе системы (A).

1-ый способъ - интегрированіе помощью безконечныхъ рядовъ. Пусть при $t = t_0$ значенія k неизвѣстныхъ функцій будутъ

$$x = x_0; \quad y = y_0; \quad z = z_0; \quad u = u_0; \ \ldots\ldots$$

Это будутъ k постоянныхъ произвольныхъ. Разложимъ x въ рядъ Тейлора, для чего находимъ выраженія всѣхъ производныхъ отъ x по t черезъ $t, x, y, z, u, \ldots$

Имѣемъ изъ системы (A):

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, y, z, u, \ldots.) \ . \ . \ . \ . \ . \ (1).$$

Взявъ производныя по t отъ обѣихъ частей равенства (1), получимъ

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt} + \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{du}{dt} + \ldots$$

Но производныя

$$\frac{dx}{dt}, \ \frac{dy}{dt}, \ \frac{dz}{dt}, \ \frac{du}{dt}, \ \ldots$$

намъ извѣстны въ функціи $t, x, y, z, u, \ldots$ изъ системы (A); вводя ихъ выраженія, имѣемъ:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} . f(x,y,z,u, \ldots t) + \frac{\partial f}{\partial y} . \varphi(t,x,y,z,u, \ldots) +$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial z} . \psi(t,x,y,z,u, \ldots) + \frac{\partial f}{\partial u} . \omega(t,x,y,z,u, \ldots) + \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots = f_1(t,x,y,z,u, \ldots).$$

Поступая такимъ образомъ, мы найдемъ:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f_1(t, x, y, z, u, \ldots) \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

$$\frac{d^3x}{dt^3} = f_2(t, x, y, z, u, \ldots) \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

$$\frac{d^4x}{dt^4} = f_3(t, x, y, z, u, \ldots) \; . \; . \; . \; . \; (4)$$

. . . .

$$\frac{d^nx}{dt^n} = f_{n-1}(t,x,y,z,u, \ldots\ldots) \; . \; . \; . \; . \; (n)$$

. . . .

Предположимъ, что законъ составленія функцій $f_1, f_2, \ldots f_{n-1}$ удалось подмѣтить. Тогда находимъ

изъ (1): $$\left[\frac{dx}{dt}\right]_{t=t_0} = f(t_0, x_0, y_0, z_0, u_0, \ldots)$$

изъ (2): $$\left[\frac{d^2x}{dt^2}\right]_{t=t_0} = f_1(t_0, x_0, y_0, z_0, u_0, \ldots)$$

изъ (3): $$\left[\frac{d^3x}{dt^3}\right]_{t=t_0} = f_2(t_0, x_0, y_0, z_0, u_0, \ldots)$$

и т. д.

Знаніе этихъ производныхъ дастъ возможность представить x въ видѣ ряда Тэйлора:

$$x = x_0 + \frac{t - t_0}{1} \cdot \left[\frac{dx}{dt}\right]_{t=t_0} + \frac{(t-t_0)^2}{1.2} \cdot \left[\frac{d^2x}{dt^2}\right]_{t=t_0} +$$

$$+ \frac{(t-t_0)^3}{1.2.3} \cdot \left[\frac{d^3x}{dt^3}\right]_{t=t_0} + \ldots ,$$

откуда

$$x = F(t, x_0, y_0, z_0, u_0, \ldots).$$

Когда найдено рѣшеніе для x, то рѣшенія для остальныхъ $(k-1)$ неизвѣстныхъ $y, z, u, \ldots$ найдутся, если взять $(k-1)$ уравненій (1), (2), (3), ... $(k-1)$ и рѣшить ихъ относительно $y, z, u, \ldots$, которыя выразятся черезъ

$$t,\ x,\ \frac{dx}{dt},\ \frac{d^2x}{dt^2}, \ldots \frac{d^{k-1}x}{dt^{k-1}}$$

и, слѣдовательно, послѣ замѣны x и его производныхъ ихъ выраженіями черезъ $t, x_0, y_0, z_0, u_0, \ldots$, будутъ извѣстными функціями отъ t и k постоянныхъ произвольныхъ $x_0, y_0, z_0, u_0, \ldots$

Затрудненія этого способа заключаются въ слѣдующемъ: 1) - въ необходимости подмѣтить законъ составленія коэффиціентовъ

$$\left[\frac{dx}{dt}\right]_{t=t_0},\quad \left[\frac{d^2x}{dt^2}\right]_{t=t_0} \ldots \text{ и пр.}$$

и 2) въ вопросѣ о сходимости ряда, изображающаго искомую функцію x.

2-ой способъ :- приведенія интегрированія системы (A) k уравненій съ k неизвѣстными функціями къ интегрированію одного обыкновеннаго уравненія порядка k-го.

Выпишемъ уравненіе (1)

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, y, z, u, \ldots) \ldots\ldots (1).$$

Продифференцировавъ его $(k-1)$ разъ по t и замѣняя при этомъ, какъ и раньше, производныя неизвѣстныхъ $y, z, u, \ldots$ по t ихъ значеніями изъ уравненій системы (A), получимъ:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f_1(t, x, y, z, u, \ldots) \ldots\ldots (2)$$

. . . .

$$\frac{d^k x}{dt^k} = f_{k-1}(t, x, y, z, u, \ldots) \; . \; . \; . \; . \; . \; (k).$$

Исключая отсюда (k-1) буквъ $y, z, u, \ldots$, найдемъ

$$F\left[t, x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \ldots \frac{d^k x}{dt^k}\right] = 0.$$

Если это уравненіе интегрируется, то мы имѣемъ

$$x = F(t, C_1, C_2, \ldots C_k).$$

Беря теперь (k-1) уравненій изъ числа (1), (2), ... (k) и рѣшивъ ихъ относительно $y, z, u, \ldots$ мы получимъ эти буквы въ функціи отъ

$$t, x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \ldots \frac{d^{k-1}x}{dt^{k-1}}$$

или, вводя найденное выраженіе x, получимъ

$$y = \Phi(t, C_1, C_2, C_3, \ldots C_k)$$

$$z = \Psi(t, C_1, C_2, C_3, \ldots C_k)$$

$$u = \Omega(t, C_1, C_2, C_3, \ldots C_k)$$

. . . .

причемъ число постоянныхъ равно числу уравненій системы (A).

Замѣчаніе I. Иногда оказывается возможнымъ исключить буквы $y, z, u, \ldots$ не изъ полной системы уравненій отъ (1) до (k), а изъ меньшаго числа ихъ

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y, z, u, \ldots t) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f_1(x, y, z, u, \ldots t) \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

. . . .

$$\frac{d^l(x)}{dt^l} = f_{l-1}(x, y, z, u, \ldots t) \; . \; . \; . \; . \; . \; (l),$$

гдѣ $l < k$. Результатъ исключенія будетъ вида

$$F\left[t, x, \frac{dx}{dt}, \dots \frac{d^l x}{dt^l}\right] = 0$$

- дифференціальное уравненіе порядка l-го, изъ котораго находимъ

$$x = F(t, C_1, C_2, \dots C_l).$$

Въ такомъ случаѣ, внося въ уравненія (1) - (l) найденныя значенія x и его производныхъ, можемъ опредѣлить (l-1) буквъ изъ числа y, z, u, ... [система уравненій (1) - (l) замѣняется системой уравненій (1) - (l-1) съ присоединеніемъ уравненія $x = F(t,C_1,C_2, \dots C_l)$] въ функціи отъ t, C_1, C_2, C_3, ... C_l и остальныхъ (k-l) буквъ изъ числа y, z, u, ...

Веря тѣ изъ уравненій системы (A), лѣвыя части которыхъ содержатъ послѣднія (k-l) буквъ и замѣняя остальныя (l-1) буквъ изъ числа y, z, u, ... и букву x найденными выше ихъ выраженіями, мы получимъ новую систему, аналогичную (A), но содержащую (k-l) уравненій.

Вообще интегрированіе системы (A) порядка k-го можетъ приводиться или къ интегрированію одного обыкновеннаго уравненія порядка k-го, или къ интегрированію нѣсколькихъ обыкновенныхъ уравненій порядка ниже k, но сумма ихъ порядковъ всегда равна k.

Замѣчаніе II. Если въ правыхъ частяхъ уравненій (A) содержатся линейныя функціи отъ независимыхъ x, y, z, u, ... , то обыкновенное уравненіе порядка k-го, къ интегрированію котораго приводится интегрированіе системы, будетъ также *линейнымъ*, притомъ съ постоянными коэффиціентами, если были постоянные коэффиціенты при x, y, z, u, ... въ уравненіяхъ системы (A).

Дѣйствительно, возьмемъ систему

$$(1)\quad \left|\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= p_1x + p_2y + p_3z + P \\ \frac{dy}{dt} &= q_1x + q_2y + q_3z + Q \\ \frac{dz}{dt} &= r_1x + r_2y + r_3z + R, \end{aligned}\right.$$

гдѣ p_i $(i = 1,2,3)$, P, q_i, Q, r_i, R - функціи отъ t.

Дифференцируя первое уравненіе по t, получимъ

$$(2)\quad \frac{d^2x}{dt^2} = p_1\frac{dx}{dt} + p_2\frac{dy}{dt} + p_3\frac{dz}{dt} + x\frac{dp_1}{dt} + y\frac{dp_2}{dt} + z\frac{dp_3}{dt} + \frac{dP}{dt} =$$

$$= x\left[p_1^2 + p_2q_1 + p_3r_1 + \frac{dp_1}{dt}\right] + y\left[p_1p_2 + p_2q_2 + p_3r_2 + \frac{dp_2}{dt}\right] +$$

$$+ z\left[p_1p_3 + p_2q_3 + p_3r_3 + \frac{dp_3}{dt}\right] + p_1P + p_2Q + p_3R + \frac{dP}{dt} =$$

$$= s_1x + s_2y + s_3z + S,$$

причемъ s_1, s_2, s_3, S - функціи отъ t, а если малыя буквы p, q, r были постоянны, то s_1, s_2, s_3 также постоянныя.

Точно также найдемъ

$$(3)\qquad \frac{d^3x}{dt^3} = u_1x + u_2y + u_3z + U,$$

причемъ u_1, u_2, u_3 - функціи отъ t, а если p, q, r были постоянны, то и u_1, u_2, u_3 будутъ постоянны.

Умножимъ теперь уравненія (1), (2) и (3) соотвѣтственно на λ_1, λ_2 и 1 и сложимъ ихъ:

$$\begin{array}{ll|ll}
(1) & & \dfrac{dx}{dt} = p_1x + p_2y + p_3z + P & \lambda_1 \\[2ex]
(2) & & \dfrac{d^2x}{dt^2} = s_1x + s_2y + s_3z + S & \lambda_2 \\[2ex]
(3) & & \dfrac{d^3x}{dt^3} = u_1x + u_2y + u_3z + U & 1.
\end{array}$$

Подберемъ λ_1 и λ_2 такъ, чтобы коэффиціенты при y и z были 0:

$$\lambda_1p_2 + \lambda_2s_2 + u_2 = 0$$

$$\lambda_1p_3 + \lambda_2s_3 + u_3 = 0.$$

Сложивъ всѣ три уравненія, получимъ тогда

$$\frac{d^3x}{dt^3} + \lambda_2\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda_1\frac{dx}{dt} = x(p_1\lambda_1 + s_1\lambda_2 + u_1) + (P\lambda_1 + S\lambda_2 + U)$$

- линейное уравненіе, коэффиціенты котораго $\lambda_2, \lambda_1, (p_1\lambda_1 + s_1\lambda_2 + u_1)$ будутъ постоянными, если таковыми были p, q, r.

Примѣръ. Дана система

$$(1)\quad \left|\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x - y \\ \frac{dy}{dt} &= x + z \\ \frac{dz}{dt} &= y - x. \end{aligned}\right.$$

Составляемъ

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} = x - y - x - z = - y - z \;.\;.\;.\; (2)$$

$$\frac{d^3x}{dt^3} = - \frac{dy}{dt} - \frac{dz}{dt} = - x - z - y + x = - y - z \;.\;.\; (3).$$

Исключая y и z изъ уравненій (2) и (3), находимъ

$$\frac{d^3x}{dt^3} - \frac{d^2x}{dt^2} = 0$$

или

$$x''' - x'' = 0.$$

Характеристическое уравненіе

$$k^3 - k^2 = 0$$

имѣетъ корни $k = 0$ (двукратный корень) и $k = 1$ (простой, а потому

$$x = C_1 + C_2 t + C_3 e^t.$$

Изъ (1) опредѣляемъ

$$y = x - \frac{dx}{dt} = C_1 + C_2 t + C_3 e^t - C_2 - C_3 e^t = (C_1 - C_2) + C_2 t,$$

а изъ (2)

$$z = - y - \frac{d^2x}{dt^2} = - (C_1 - C_2) - C_2 t - C_3 e^t.$$

§ 14.

Интегралы системы совокупныхъ дифференцiальныхъ уравненiй и ихъ свойства.

Опредѣленiе 1. Интегралы системы:

$$
(A)\quad
\left|
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= f_1(t, x, y, z, u, \ldots\ldots) \\
\frac{dy}{dt} &= f_2(t, x, y, z, u, \ldots\ldots) \\
\frac{dz}{dt} &= f_4(t, x, y, z, u, \ldots\ldots) \\
\frac{du}{dt} &= f_4(t, x, y, z, u, \ldots\ldots) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\right.
$$

образуются слѣдующимъ образомъ: положимъ, что какъ слѣдствiе уравненiй системы (A) намъ удалось составить уравненiе вида

$$d\varphi(t,x,y,z,u, \ldots) = 0,$$

изъ котораго слѣдуетъ

$$\varphi(t,x,y,z,u, \ldots) = C \quad \text{(постоянной)};$$

эта послѣдняя функцiя и называется интеграломъ системы (A).

Итакъ интеграломъ системы (A) называется такая функцiя

$$\varphi(t,x,y,z,u, \ldots) = C,$$

полный дифференцiалъ которой тождественно равенъ 0 на основанiи системы (A), т.е.

$$d\varphi = \left[\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt} + \frac{\partial\varphi}{\partial u}\cdot\frac{du}{dt} + \ldots\right]dt =$$

$$+\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial x} f_1(t,x,y,z,u, \ldots) + \frac{\partial\varphi}{\partial y} f_2(t,x,y,z,u, \ldots\ldots) +\right.$$

$$\left. + \frac{\partial\varphi}{\partial z} f_3(t,x,y,z,u,\ldots) + \frac{\partial\varphi}{\partial u} f_4(t,x,y,z,u,\ldots) + \ldots\ldots\right] = 0.$$

Замѣчаніе. Предполагается, что между функціями $t, x, y, z, u, \ldots$ не существуетъ зависимости вида

$$\vartheta(t, x, y, z, u, \ldots) = 0,$$

не содержащей постоянныхъ произвольныхъ, ибо иначе можно было бы опредѣлить, напримѣръ, x въ функціи отъ остальныхъ буквъ и, вводя это x въ уравненія системы (A), понизить порядокъ системы на единицу.

Теорема I. Если $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_k$ суть интегралы системы (A), то всякая произвольная функція отъ $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_k$

$$\Phi(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_k)$$

будетъ также интеграломъ системы.

Доказательство. Имѣемъ

$$d\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi_1} d\varphi_1 + \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi_2} d\varphi_2 + \ldots\ldots + \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi_k} d\varphi_k,$$

но

$$d\varphi_1 = d\varphi_2 = \ldots = d\varphi_k = 0$$

на основаніи уравненій (A), такъ какъ $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_k$ интегралы системы, слѣдовательно,

$$d\Phi = 0, \quad \Phi = C$$

на основаніи системы (A), т.е. Φ есть интегралъ системы.

Опредѣленіе 2. Интегралы $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_k$ называются зависимыми, если между ними существуетъ зависимость вида

$$\Phi(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_k) = 0,$$

въ которой буквы $t, x, y, z, u, \ldots$ не входятъ внѣ функцій $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_k$.

Напротивъ, интегралы называются *независимыми,* если между ними не существуетъ указаннаго уравненія.

Замѣчаніе. Не можетъ существовать зависимости вида

$$\Psi(t, \varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_k) = 0,$$

въ которую входитъ явно t и нѣсколько интеграловъ $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$

φ_k, так как должно быть

$$d\Psi = \frac{\partial\Psi}{\partial t}dt + \frac{\partial\Psi}{\partial\varphi_1}d\varphi_1 + \frac{\partial\Psi}{\partial\varphi_2}d\varphi_2 + \ldots + \frac{\partial\Psi}{\partial\varphi_k}d\varphi_k = 0;$$

отсюда, въ силу равенствъ

$$d\varphi_1 = d\varphi_2 = \ldots = d\varphi_k = 0,$$

слѣдуетъ

$$\frac{\partial\Psi}{dt} = 0,$$

слѣдовательно t явно входить не можетъ въ функцію Ψ.

Теорема 2. Число независимыхъ интеграловъ системы (A) n-го порядка равно n.

Докажемъ, что это число не можетъ быть $> n$. Допустимъ, что имѣется $(n+1)$ независимыхъ интеграловъ системы (A):

$$u_1 = \varphi_1(t, x, y, z, u, \ldots\ldots)$$

$$u_2 = \varphi_2(t, x, y, z, u, \ldots\ldots)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$u_n = \varphi_n(t, x, y, z, u, \ldots\ldots)$$

$$u_{n+1} = \varphi_{n+1}(t, x, y, z, u, \ldots)$$

Изъ первыхъ n уравненій можно опредѣлить буквы $x, y, z, u, \ldots$ въ функціи отъ $t, u_1, u_2, \ldots u_n$, такъ какъ при невозможности опредѣлить буквы $x, y, z, u, \ldots$ онѣ бы исключились и получилась бы зависимость между t и $u_1, u_2, \ldots u_n$, которая въ силу замѣчанія къ опредѣленію 2 приводится къ зависимости между $u_1, u_2, \ldots u_n$ и противорѣчитъ предположенію о ихъ независимости. Подставивъ ихъ въ $(n+1)$-ое уравненіе, получимъ

$$u_{n+1} = \Psi(t, u_1, u_2, \ldots u_n),$$

или, въ силу замѣчанія къ опредѣленію 2,

$$u_{n+1} = \Psi(u_1, u_2, \ldots u_n),$$

т.е. u_{n+1} есть зависимый интегралъ, и слѣдовательно, число независимыхъ интеграловъ не можетъ быть больше n.

Докажемъ, что число независимыхъ интеграловъ и не меньше n.

Предположимъ, что система (A) проинтегрирована, т.е. найдены выраженія всѣхъ неизвѣстныхъ функцій:

$$x = \omega_1(t, C_1, C_2, \ldots C_n)$$

$$y = \omega_2(t, C_1, C_2, \ldots C_n)$$

$$z = \omega_3(t, C_1, C_2, \ldots C_n)$$

$$u = \omega_4(t, C_1, C_2, \ldots C_n)$$

. . . .

Мы имѣемъ n уравненій. Опредѣливъ изъ нихъ $C_1, C_2, \ldots C_n$, получимъ

$$(*) \quad \left| \begin{array}{l} C_1 = \varphi_1(t, x, y, z, u, \ldots) \\ C_2 = \varphi_2(t, x, y, z, u, \ldots) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_n = \varphi_n(t, x, y, z, u, \ldots). \end{array} \right.$$

Не можетъ быть, чтобы $C_1, C_2, \ldots C_n$ не опредѣлились изъ этой системы, такъ какъ иначе эти буквы $C_1, C_2, \ldots C_n$ исключились бы и получилась бы зависимость

$$\vartheta(t, x, y, z, u, \ldots) = 0,$$

что невозможно въ силу замѣчанія къ опредѣленію I. Эти выраженія (*) и представляютъ n интеграловъ системы и притомъ *независимыхъ*, такъ какъ если бы существовала зависимость

$$\Phi(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n) = 0,$$

то была бы зависимость

$$\Phi(C_1, C_2, \ldots C_n) = 0,$$

которая невозможна, такъ какъ постоянныя $C_1, C_2, \ldots C_n$ независимы.

Функціи (*) $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ суть интегралы системы (A), такъ какъ

$$d\varphi_1 = \left[\frac{\partial\varphi_1}{\partial t} + \frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} + \ldots\right]dt = dC_1 = 0,$$

и это равенство должно обращаться въ тождество въ силу уравненій (A), такъ какъ иначе была бы зависимость

$$\vartheta(t, x, y, z, u, \ldots) = 0.$$

Слѣдствіе теоремы 2. При наличности n независимыхъ интеграловъ $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ системы (A) n-го порядка, всякій интегралъ этой системы можно представить въ видѣ

$$\varphi = \Phi(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n),$$

гдѣ Φ произвольная функція.

Дѣйствительно, при наличности n независимыхъ интеграловъ, всякій новый интегралъ долженъ быть ихъ функціей, по теоремѣ 2. Такимъ образомъ самое общее выраженіе для интеграла системы (A есть

$$\varphi = \Phi(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n),$$

гдѣ $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ суть n *независимыхъ* интеграловъ.

Теорема 3. Зная k независимыхъ интеграловъ системы (A) n-го порядка, можно понизить порядокъ системы на k единицъ; въ частности, зная n независимыхъ интеграловъ системы (A), мы имѣемъ полное рѣшеніе системы.

Пусть

$$\varphi_1(t, x, y, z, u, \ldots) = C_1$$

$$\varphi_2(t, x, y, z, u, \ldots) = C_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\varphi_k(t, x, y, z, u, \ldots) = C_k$$

будутъ k независимыхъ интеграловъ. Зная ихъ, можно k буквъ изъ числа $x, y, z, u, \ldots$ опредѣлить въ функціи отъ t, C_1, $C_2, \ldots C_k$ и остальныхъ $(n-k)$ буквъ изъ числа $x, y, z, u, \ldots$ Беря теперь тѣ $(n-k)$ уравненій системы (A), лѣвыя части которыхъ содержатъ производныя отъ этихъ послѣднихъ $(n-k)$ буквъ, вносимъ въ правыя части ихъ для k первыхъ буквъ ихъ выраженія, найденныя выше; тогда получимъ систему (A') порядка $(n-k)$, куда входятъ, кромѣ неизвѣстныхъ $(n-k)$ функцій, буквы t, C_1, $C_2, \ldots C_k$.

Если $k = n$ то всѣ буквы $x, y, z, u, \ldots$ опредѣляются въ функціи отъ t и постоянныхъ.

Примѣръ. Дана система:

$$
(A)\quad \left|\begin{array}{l}
\frac{dx}{dt} = y \\[2mm]
\frac{dy}{dt} = x \\[2mm]
\frac{dz}{dt} = x + y + z.
\end{array}\right.
$$

Умножая первое уравненіе на $2x$, а второе на $-2y$ и складывая, получимъ

$$2x\frac{dx}{dt} - 2y\frac{dy}{dt} = 0$$

или

$$\frac{d}{dt}(x^2 - y^2) = 0,$$

откуда

$$x^2 - y^2 = C_1 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1).$$

Сложимъ теперь первыя два уравненія; имѣемъ:

$$\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = x + y; \quad \frac{d(x+y)}{x+y} = dt;$$

$$d\log(x+y) = dt; \quad \log(x+y) = t + \log C_2$$

и, наконецъ,

$$x + y = C_2 e^t \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2).$$

Уравненія (1) и (2) даютъ два независимыхъ интеграла системы (A). Дѣлимъ (1) на (2):

$$x - y = \frac{C_1}{C_2} e^{-t}.$$

Присоединяя сюда (2) $x + y = C_2 e^t$, находимъ x и y. По внесеніи этихъ значеній x и y въ уравненіе (3) системы (A), получаемъ

$$\frac{dz}{dt} = z + C_2 e^t.$$

§ 15.

Интегрированіе уравненій въ частныхъ производныхъ первагo порядка, линейныхъ относительно производныхъ.

Дифференціальныя уравненія въ частныхъ производныхъ отличаются отъ обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій тѣмъ, что въ послѣднія входятъ неизвѣстныя функціи отъ одной независимой перемѣнной, а въ первыя - функціи нѣсколькихъ перемѣнныхъ, по которымъ берутся частныя производныя.

1-ый случай. Интегрированіе уравненій вида

$$\bar{X}_1 \frac{\partial v}{\partial x_1} + \bar{X}_2 \frac{\partial v}{\partial x_2} + \bar{X}_3 \frac{\partial v}{\partial x_3} + \ldots + \bar{X}_m \frac{\partial v}{\partial x_m} = 0 \; . \; . \; . \; (1),$$

гдѣ $x_1, x_2, x_3, \ldots x_m$ - независимыя перемѣнныя, v - неизвѣстная ихъ функція, а $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3, \ldots \bar{X}_m$ - данныя функціи только отъ $x_1, x_2, \ldots x_m$. Требуется найти самое общее выраженіе для функціи v (общій интегралъ уравненія).

Теорема. Всякое рѣшеніе уравненія (1) является интеграломъ системы совокупныхъ уравненій

$$\frac{dx_1}{\bar{X}_1} = \frac{dx_2}{\bar{X}_2} = \frac{dx_3}{\bar{X}_3} = \ldots = \frac{dx_m}{\bar{X}_m} \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

$(m-1)$-го порядка (одна изъ буквъ $x_1, x_2, x_3, \ldots x_m$ - независимая перемѣнная; остальныя $(m-1)$ - ея неизвѣстныя функціи); и обратно: всякій интегралъ системы (A) служитъ рѣшеніемъ уравненія (1).

Доказательство. Прямая теорема. Пусть

$$v = \varphi(x_1, x_2, \ldots x_m)$$

есть рѣшеніе уравненія (1), такъ что тождественно

$$\bar{X}_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \bar{X}_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \ldots + \bar{X}_m \frac{\partial \varphi}{\partial x_m} = 0.$$

Докажемъ, что $\varphi = C$ есть интегралъ системы (2), т.е. полный дифференціалъ его $d\varphi = 0$ на основаніи уравненій (2). Въ самомъ дѣлѣ, на основаніи уравненій (2)

$$\lambda = \frac{dx_1}{\bar{X}_1} = \frac{dx_2}{\bar{X}_2} = \ldots = \frac{dx_m}{\bar{X}_m}$$

имѣемъ

$$dx_1 = \lambda\bar{X}_1; \quad dx_2 = \lambda\bar{X}_2; \quad \ldots\ldots dx_m = \lambda\bar{X}_m.$$

отсюда

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial x_m}dx_m =$$

$$= \lambda.\left[\bar{X}_1\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + \bar{X}_2\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + \ldots + \bar{X}_m\frac{\partial\varphi}{\partial x_m}\right] = \lambda.0,$$

такъ какъ прямыя скобки равны нулю по заданію.

Обратная теорема. Дано, что $\varphi = C$ есть интегралъ системы (2), т.е. $d\varphi = 0$ на основаніи уравненій (2).

Но на основаніи тѣхъ же уравненій (2)

$$d\varphi = \lambda.\left|\bar{X}_1\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + \bar{X}_2\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + \ldots + \bar{X}_m\frac{\partial\varphi}{\partial x_m}\right|,$$

причемъ λ не $= 0$ (такъ какъ среди числителей отношеній (2) находится дифференціалъ и независимой перемѣнной - произвольное число); слѣдовательно:

$$\bar{X}_1\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + \bar{X}_2\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + \ldots + \bar{X}_m\frac{\partial\varphi}{\partial x_m} = 0,$$

т.е. $v = \varphi$ есть рѣшеніе уравненія (1).

Слѣдствіе. Общій интегралъ уравненія (1) совпадаетъ съ самымъ общимъ выраженіемъ интеграла системы (2), т.е. на основаніи слѣдствія теоремы 2 § 14, общій интегралъ уравненія (1) есть произвольная функція отъ $(m-1)$ независимыхъ интеграловъ системы (2):

$$v = \Phi(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{m-1}),$$

гдѣ $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{m-1}$ суть $(m-1)$ независимыхъ интеграловъ системы (2).

Примѣръ 1.

$$\bar{x}\frac{\partial v}{\partial x} + \bar{y}\frac{\partial v}{\partial y} + \bar{z}\frac{\partial v}{\partial z} = 0 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (1).$$

Согласно сказанному выше, составляемъ систему:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

и найдемъ два независимыхъ интеграла ея. Имѣемъ:

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}; \quad \log y = \log x + \log C_1; \quad y = C_1 x$$

или

$$\frac{y}{x} = C_1.$$

Далѣе

$$\frac{dz}{z} = \frac{dx}{x}; \quad \log z = \log x + \log C_2; \quad \frac{z}{x} = C_2$$

Итакъ, независимые интегралы системы (2) суть

$$\frac{y}{x} = C_1 \text{ и } \frac{z}{x} = C_2,$$

а потому общій интегралъ уравненія (1) будетъ

$$v = \Phi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right),$$

т.е. v есть однородная функція нулевой степени отъ x, y, z, напримѣръ:

$$v = \operatorname{Sin}\frac{y}{x} \cdot \operatorname{Cos}\frac{z}{x} \quad \text{или} \quad v = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{\sqrt{y^4 - z^4}} \quad \text{и т. д.}$$

Повѣрка:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \Phi'_u \cdot \frac{-y}{x^2} + \Phi'_v \cdot \frac{-z}{x^2}, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \Phi'_u \cdot \frac{1}{x},$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \Phi'_v \cdot \frac{1}{x} \quad \left(\text{гдѣ } u = \frac{y}{x}, \quad v = \frac{z}{x}\right),$$

$$x\frac{\partial v}{\partial x} + y\frac{\partial v}{\partial y} + z\frac{\partial v}{\partial z} = 0$$

тождественно при всякомъ Φ.

Примѣръ 2.

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Написавъ систему (2)

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x},$$

находимъ

$$2x.dx + 2y.dy = 0; \quad d(x^2 + y^2) = 0$$

$$x^2 + y^2 = C_1 \quad \text{или} \quad x^2 + y^2 = \varphi_1.$$

Слѣдовательно

$$z = \Phi(x^2 + y^2)$$

- это есть общій видъ уравненія поверхности вращенія вокругъ оси Z-овъ.

2-ой случай. Интегрированіе уравненія вида

$$\bar{X}_1\frac{\partial v}{\partial x_1} + \bar{X}_2\frac{\partial v}{\partial x_2} + \ldots + \bar{X}_m\frac{\partial v}{\partial x_m} = \bar{X} \quad \ldots\ldots (1'),$$

гдѣ $x_1, x_2, x_3, \ldots x_m$ независимыя перемѣнныя, v неизвѣстная ихъ функція, а $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \ldots \bar{X}_m, \bar{X}$ данныя функціи отъ буквъ $x_1, x_2, \ldots x_m$ и v.

Теорема. Общій интегралъ уравненія (1') можетъ быть опредѣленъ изъ уравненія

$$\Phi(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_m) = 0,$$

гдѣ Φ произвольная функція отъ m независимыхъ интеграловъ $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_m$ системы

$$\frac{dx_1}{\bar{X}_1} = \frac{dx_2}{\bar{X}_2} = \ldots = \frac{dx_m}{\bar{X}_m} = \frac{dv}{\bar{X}} \quad \ldots\ldots (2').$$

Дѣйствительно, предположимъ, что неизвѣстная функція v опредѣляется уравненіемъ вида:

$$w(x_1, x_2, \ldots x_m, v) = 0.$$

Беремъ отъ этого уравненія частную производную по x_1:

$$\frac{\partial w}{\partial x_1} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_1} = 0;$$

отсюда

$$\frac{\partial v}{\partial x_1} = - \frac{\frac{\partial w}{\partial x_1}}{\frac{\partial w}{\partial v}}.$$

Подобнымъ же образомъ найдемъ

$$\frac{\partial v}{\partial x_2} = - \frac{\frac{\partial w}{\partial x_2}}{\frac{\partial w}{\partial v}} \quad \text{и т. д.}$$

Внесемъ эти значенія въ ур-іе (1') и умножимъ его на $-\frac{\partial w}{\partial v}$; получимъ:

$$\bar{X}_1 \frac{\partial w}{\partial x_1} + \bar{X}_2 \frac{\partial w}{\partial x_2} + \ldots + \bar{X}_m \frac{\partial w}{\partial x_m} + \bar{X} \frac{\partial w}{\partial v} = 0.$$

Мы приходимъ къ уравненію случая 1-го; дѣйствительно, неизвѣстная функція будетъ w, и буквы, отъ которыхъ она зависитъ, т.е. $x_1, x_2, \ldots x_m, v$, входятъ въ коэффиціенты $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \ldots \bar{X}_m, \bar{X}$, но сама неизвѣстная функція въ эти коэффиціенты не входитъ.

Для интегрированія преобразованнаго уравненія, согласно случаю 1-му, нужно составить систему:

$$\frac{dx_1}{\bar{X}_1} = \frac{dx_2}{\bar{X}_2} = \ldots = \frac{dx_m}{\bar{X}_m} = \frac{dv}{\bar{X}}$$

порядка m-го; пусть $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_m$ будутъ независимые интегралы ея. Тогда самое общее рѣшеніе представится въ формѣ

$$w = \Phi(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_m),$$

гдѣ Φ - произвольная функція. Такъ какъ мы ищемъ рѣшеніе въ формѣ $w = C$, то получается уравненіе

$$\Phi(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_m) = 0,$$

изъ котораго опредѣляется v.

Замѣчаніе. Если только одинъ изъ интеграловъ $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$

φ_m содержитъ v, то, рѣшая уравненіе $\Phi = 0$ относительно этой буквы, положимъ φ_m, будемъ имѣть

$$\varphi_m = \Psi(\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_{m-1}),$$

откуда v опредѣлится, какъ функція отъ буквъ $x_1, x_2, \dots x_m$.

Примѣръ 1.

$$x\frac{\partial V}{\partial x} + y\frac{\partial V}{\partial y} + z\frac{\partial V}{\partial z} = 2(x^2 + y^2 + z^2).$$

Соотвѣтственная система (2') будетъ

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z} = \frac{dV}{2(x^2 + y^2 + z^2)}.$$

Найдемъ 3 независимыхъ интеграла ея. Изъ равенства $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$ имѣемъ

$$d\log x = d\log y,$$

$$\log x = \log y + \log C_1,$$

откуда

$x \sim y C$

$$\varphi_1 = \frac{x}{y} = C_1$$

- одинъ интегралъ. Беря пропорцію $\frac{dx}{x} = \frac{dz}{z}$, имѣемъ подобнымъ же образомъ

$$\varphi_2 = \frac{x}{z} = C_2$$

- второй интегралъ, независимый отъ φ_1, такъ какъ содержитъ новую букву z.

Для нахожденія 3-го интеграла составляемъ производное отношеніе изъ первыхъ трехъ отношеній системы съ такимъ разсчетомъ, чтобы въ знаменателѣ получилось $2(x^2 + y^2 + z^2)$, стоящее подъ dV. Имѣемъ:

$$\frac{dV}{2(x^2 + y^2 + z^2)} = \frac{2xdx}{2x^2} = \frac{2ydy}{2y^2} = \frac{2zdz}{2z^2} = \frac{2xdx + 2ydy + 2zdz}{2(x^2 + y^2 + z^2)},$$

откуда слѣдуетъ

$$dV = 2xdx + 2ydy + 2zdz, + d()$$

$$\varphi_3 = V - x^2 - y^2 - z^2 = C_3.$$

Это будетъ третій интегралъ, независящій отъ первыхъ двухъ, такъ какъ содержитъ новую букву V, не входящую въ φ_1 и φ_2.

Общій интегралъ предложеннаго уравненія будетъ:

$$\varphi_3 = \Phi(\varphi_1, \varphi_2),$$

$$V - x^2 - y^2 - z^2 = \Phi\left(\frac{x}{y}, \frac{x}{z}\right),$$

откуда

$$V = x^2 + y^2 + z^2 + \Phi\left(\frac{x}{y}, \frac{x}{z}\right).$$

Дѣлаемъ провѣрку (полагая $\frac{x}{y} = u$, $\frac{x}{z} = v$):

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial x} &= 2x + \Phi_u' \cdot \frac{1}{y} + \Phi_v' \cdot \frac{1}{z} \\
\frac{\partial V}{\partial y} &= 2y + \Phi_u' \cdot \frac{-x}{y^2} \\
\frac{\partial V}{\partial z} &= 2z + \Phi_v' \cdot \frac{-x}{z^2}
\end{aligned}\right| \begin{aligned} &x \\ &y \\ &z \end{aligned}$$

$$x\frac{\partial V}{\partial x} + y\frac{\partial V}{\partial y} + z\frac{\partial V}{\partial z} = 2(x^2+y^2+z^2) + \Phi_u' \cdot \left(\frac{x}{y} - \frac{x}{y}\right) + \Phi_v' \cdot \left(\frac{x}{z} - \frac{x}{z}\right),$$

т.е. наше уравненіе удовлетворяется выраженіемъ

$$V = x^2 + y^2 + z^2 + \Phi\left(\frac{x}{y}, \frac{x}{z}\right),$$

чтобы ни означала функція Φ.

Примѣръ 2.

$$x\frac{\partial V}{\partial x} - y\frac{\partial V}{\partial y} - z\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{2x}{z}.$$

Составляемъ систему

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-y} = \frac{dz}{-z} = \frac{z.dV}{2x}.$$

Имѣемъ

$$\frac{dx}{x} = -\frac{dy}{y}, \quad xdy + ydx = 0,$$

$$d(xy) = 0, \quad \varphi_1 = xy = C_1;$$

далѣе

$$\frac{dx}{x} = -\frac{dz}{z},$$

откуда

$$\varphi_2 = xz = C_2.$$

Для составленія 3-го интеграла здѣсь неудобно примѣнить способъ производныхъ отношеній, указанный въ примѣрѣ 1. Взявъ пропорцію

$$\frac{dx}{x} = \frac{z.dV}{2x},$$

находимъ

$$dV = \frac{2}{z} dx.$$

Воспользуемся найденными уже интегралами, чтобы выразить всю правую часть черезъ одну букву x. Беремъ $xz = C_2$, откуда

$$z = \frac{C_2}{x},$$

и получаемъ

$$dV = \frac{2x.dx}{C_2},$$

откуда

$$V - \frac{x^2}{C_2} = C_3;$$

вводя сюда снова $C_2 = xz$, находимъ третій интегралъ

$$\varphi_3 = V - \frac{x}{z} = C_3.$$

Общій интегралъ предложеннаго уравненія будетъ

$$\varphi_3 = \Phi(\varphi_1, \varphi_2)$$

или

$$V = {}^{x}/_{z} + \Phi(xy, xz).$$

Провѣрка:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{z} + \Phi'_u . y + \Phi'_v . z \qquad \Big| \; x$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \quad + \Phi'_u . x \qquad \Big| \; -y$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{x}{z^2} + \Phi'_V \cdot x \quad \Big| \; -z$$

$$x\frac{\partial V}{\partial x} - y\frac{\partial V}{\partial y} - z\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{2x}{z}.$$

Иногда требуется найти не общій интегралъ линейнаго уравненія съ частными производными 1-го порядка, а такое частное рѣшеніе его, которое удовлетворяло бы слѣдующему условію: при $x_m = a$ найденное рѣшеніе $v(x_1, x_2, \dots x_m)$ должно обращаться въ заранѣе данную функцію отъ буквъ $x_1, x_2, \dots x_{m-1}$, напримѣръ:

$$V = \omega(x_1, x_2, \dots x_{m-1}).$$

Для нахожденія такого рѣшенія проще всего поступить такъ: выписать m независимыхъ интеграловъ системы (2'), присоединить къ нимъ условныя уравненія:

$$x_m = a, \qquad V = \omega(x_1, x_2, \dots x_{m-1}),$$

и изъ полученной системы $(m+2)$ уравненій

$$\left|\begin{array}{l} \varphi_1(x_1, x_2, \dots x_m, V) = C_1 \\ \varphi_2(x_1, x_2, \dots x_m, V) = C_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varphi_m(x_1, x_2, \dots x_m, V) = C_m \\ x_m = a \\ V = \omega(x_1, x_2, \dots x_{m-1}) \end{array}\right.$$

исключить $(m+1)$ буквъ $x_1, x_2, \dots x_m, V$. Результатъ исключенія дастъ ту спеціальную зависимость между $C_1, C_2, \dots C_m$:

$$\Omega(C_1, C_2, \dots C_m) = 0,$$

которая должна существовать для выполненія заданныхъ условій. Вводя сюда вмѣсто $C_1, C_2, \dots C_m$ ихъ выраженія $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_m$, получимъ искомое частное рѣшеніе для V изъ уравненія

$$\Omega(\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_m) = 0.$$

Если такой вопросъ ставится для уравненія безъ послѣдняго члена (случай 1-ый)

$$\bar{X}_1 \frac{\partial V}{\partial x_1} + \bar{X}_2 \frac{\partial V}{\partial x_2} + \dots + \bar{X}_m \frac{\partial V}{\partial x_m} = 0,$$

то мы можемъ разсматривать это уравненіе какъ частный случай общаго уравненія съ послѣднимъ членомъ (случай 2-ой) при $\bar{X} = 0$ и написать систему не (2) съ $(m-1)$ уравненіями, а систему (2') съ m уравненіями

$$\frac{dx_1}{\bar{X}_1} = \frac{dx_2}{\bar{X}_2} = \dots = \frac{dx_m}{\bar{X}_m} = \frac{dV}{0},$$

откуда найдемъ всегда интегралъ $V = C_m$, и еще $(m-1)$ другихъ независимыхъ интеграловъ $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_{m-1}$. Дальше уже поступаемъ, какъ выше указано, т.е. изъ системы $(m+2)$ уравненій

$$\left|\begin{array}{l} \varphi_1 = C_1 \\ \varphi_2 = C_2 \\ \dots\dots \\ \varphi_{m-1} = C_{m-1} \\ V = C_m \\ x_m = a \\ V = \omega(x_1, x_2, \dots x_{m-1}) \end{array}\right.$$

исключаемъ $(m+1)$ буквъ $x_1, \dots x_m, V$ и получаемъ зависимость

$$C_m = (C_1, C_2, \dots C_{m-1}),$$

откуда получается желаемое частное рѣшеніе

$$V = (\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_{m-1}).$$

Примѣръ 1. Для уравненія

$$x\frac{\partial V}{\partial x} - y\frac{\partial V}{\partial y} - z\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{2x}{z},$$

разсмотрѣннаго выше, найти такое частное рѣшеніе, чтобы выходило при $z = 1$

$$V = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}.$$

Мы видѣли, что три независимыхъ интеграла для этого случая были

$$xy = C_1, \quad xz = C_2, \quad V - \frac{x}{z} = C_3.$$

Составляемъ систему

$$\left|\begin{array}{l} xy = C_1 \\ xz = C_2 \\ V - \dfrac{x}{y} = C_3 \\ z = 1 \\ V = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} \end{array}\right.$$

и исключаемъ изъ нея x, y, z, V.

Имѣемъ

$$z = 1, \quad x = C_2,$$

$$y = \frac{C_1}{C_2}, \quad V = \frac{1}{C_2^2} + \frac{C_2^2}{C_1^2},$$

и теперь, подставляя эти значенія въ уравненіе

$$V - \frac{x}{z} = C_3,$$

находимъ

$$\frac{1}{C_2^2} + \frac{C_2^2}{C_1^2} - C_2 = C_3.$$

Подставляя сюда

$$C_1 = xy, \quad C_2 = xz, \quad C_3 = V - \frac{x}{z},$$

получаемъ искомое частное рѣшеніе:

$$V - \frac{x}{z} = \frac{1}{x^2 z^2} + \frac{z^2}{y^2} - xz,$$

$$V = \frac{x}{z} + \frac{1}{x^2 z^2} + \frac{z^2}{y^2} - xz.$$

Дѣйствительно, при $z = 1$ отсюда выходитъ

$$V = x + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - x = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}.$$

Примѣръ 2. Найти такое рѣшеніе уравненія

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

чтобы при $x = a$ выходило

$$y^2 + z^2 = R^2.$$

Геометрически эта задача имѣетъ слѣдующее значеніе: найти такую поверхность вращенія около оси Z-овъ, которая проходитъ черезъ кривую:

$$x = a$$

$$y^2 + z^2 = R^2.$$

Здѣсь интегралы будутъ

$$x^2 + y^2 = C_1, \qquad z = C_2.$$

Составляемъ систему

$$\left|\begin{array}{l} x^2 + y^2 = C_1 \\ z = C_2 \\ x = a \\ y^2 + z^2 = R^2, \end{array}\right.$$

и исключаемъ буквы x, y, z.

Имѣемъ

$$x = a, \qquad y = \sqrt{C_1 - a^2}, \qquad z = C_2,$$

$$C_1 - a^2 + C_2^2 = R^2.$$

Отсюда

$$x^2 + y^2 - a^2 + z^2 = R^2.$$

Искомая поверхность есть сфера

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + R^2.$$

Р я д ы.

§ 1.

Опредѣленія и основныя теоремы.

Опредѣленіе 1. Безконечнымъ рядомъ называется безконечная послѣдовательность чиселъ, составляемыхъ по опредѣленному закону.

Рядъ опредѣляется обыкновенно заданіемъ *общаго члена* u_n въ видѣ функціи отъ n, напримѣръ, при

$$u_n = \frac{1}{n^{\alpha}}$$

имѣемъ рядъ

$$u_1 = 1; \quad u_2 = \frac{1}{2^{\alpha}}; \quad u_3 = \frac{1}{3^{\alpha}}; \quad \text{и т.д.}$$

или при

$$u_n = x^n . \operatorname{Sin} \frac{\pi . x}{\sqrt{n}}$$

$$u_1 = x . \operatorname{Sin} \frac{\pi . x}{\sqrt{1}}; \qquad u_2 = x^2 \operatorname{Sin} \frac{\pi . x}{\sqrt{2}} \quad \text{и т.д.}$$

Опредѣленіе 2. Рядъ называется *сходящимся*, если существуетъ предѣлъ суммы

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

при $n = \infty$.

Этотъ предѣлъ

$$\underset{n=\infty}{\text{Пред.}}\ S_n = S$$

называется *суммою ряда*, причемъ пишутъ

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

Опредѣленіе 3. Рядъ называется *расходящимся*, если не существуетъ опредѣленнаго предѣла для S_n при $n = \infty$.

Причина отсутствія опредѣленнаго предѣла можетъ быть двоякая: 1) предѣлъ S_n можетъ зависѣть отъ закона возрастанія n, напр. рядъ, въ которомъ

$$u_0 = 0; \qquad u_n = (-1)^n \quad \text{или} \quad n \geqq 1,$$

расходящійся, такъ какъ члены этого ряда будутъ

$$0, -1, +1, -1, +1, \ldots\ldots$$

и сумма

$$S_n = \left| \begin{array}{ll} 0, & \textit{если } n \textit{ четное} \\ -1, & \textit{если } n \textit{ нечетное.} \end{array} \right.$$

Поэтому

$$S = \underset{n=\infty}{\text{Пред.}}\ S_n = 0, \quad \textit{если } n \textit{ всегда четное}$$

$$S = \underset{n=\infty}{\text{Пред.}}\ S_n = -1, \quad \textit{если } n \textit{ всегда нечетное}$$

и слѣдовательно S зависитъ отъ закона возрастанія n.

2) Предѣлъ

$$\underset{n=\infty}{S_n} = \infty,$$

т.е. S_n растетъ вмѣстѣ съ n и можетъ превзойти любое большое число.

Примѣръ. Гармоническій рядъ съ общимъ членомъ $u_n = 1/n$:

$$1,\ 1/2,\ 1/3,\ 1/4,\ 1/5,\ 1/6,\ \ldots\ldots \text{ и т. д.}$$

расходящійся.

Въ самомъ дѣлѣ, положивъ $n = 2^k$, разсмотримъ сумму S_n, этого ряда, соединивъ члены въ группы слѣдующимъ образомъ

$$S_n = 1 + 1/2 + (1/3 + 1/4) + (1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8) +$$

$$+ \left(\tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{10} + \ldots + \tfrac{1}{16}\right) + \left(\tfrac{1}{17} + \ldots + \tfrac{1}{32}\right) + \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots + \left[\frac{1}{2^{k-1}+1} + \ldots\ldots + \frac{1}{2^k}\right].$$

Замѣнимъ теперь каждый членъ общихъ скобокъ послѣднимъ наименьшимъ членомъ $1/2^k$, отчего сумма этихъ членовъ сдѣлается меньше; такъ какъ число членовъ, стоящихъ въ общихъ скобкахъ, равно 2^{k-1}, то наша сумма будетъ равна послѣ замѣны

$$\frac{2^{k-1}}{2^k} = \frac{1}{2},$$

слѣдовательно, до замѣны эта сумма $> \tfrac{1}{2}$.

Замѣтивъ, что всѣ скобки получаются изъ общихъ скобокъ замѣною k на $2, 3, 4$ и т.д., мы можемъ написать

$$S_n > 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{8} + \frac{8}{16} + \ldots + \frac{2^{k-1}}{2^k} = 1 + \frac{k}{2}.$$

Отсюда видно, что при достаточно большомъ n сумма S_n можетъ быть сколь угодно большою, напр., чтобы S_n была > 1000, достаточно взять

$$1 + \frac{k}{2} > 1000$$

и слѣдовательно

$$k > 1998.$$

Положивъ $k = 2000$, найдемъ, что число членовъ ряда будетъ

$$n = 2^{2000}.$$

Логарифмируя, находимъ:

$$\lg n = 2000 . 0,30103 = 602,06,$$

т.е. число n содержитъ 603 цифры.

Основныя теоремы.

Если рядъ съ общимъ членомъ u_n сходящійся, то при достаточно большомъ n и при всѣхъ положительныхъ m можно сдѣлать

$$\left| S_{n+m} - S_n \right| < \varepsilon$$

гдѣ ε число сколь угодно малое; обратно, если это условіе выполнено, то рядъ сходящійся.

Доказательство. Прямая теорема. Такъ какъ данный рядъ сходящійся, то при достаточно большомъ n, при $n \geqq n_0$, члены ряда

$$S_n, \ S_{n+1}, \ S_{n+2}, \ \ldots \ S_{n+m}$$

имѣющаго предѣломъ S, будутъ сколь угодно мало отличаться отъ S. Отсюда имѣемъ при $n \geqq n_0$:

$$\left| S_n - S \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

а слѣдовательно и подавно

$$\left| S_{n+m} - S \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Такъ какъ разность $S_{n+m} - S_n$ можно представить въ видѣ

$$S_{n+m} - S_n = (S_{n+m} - S) - (S_n - S),$$

то, переходя къ абсолютнымъ значеніямъ, мы можемъ утверждать, что абсолютное значеніе разности $S_{n+m} - S_n$ *не больше* суммы абсолютныхъ значеній разностей $(S_{n+m} - S)$ и $(S_n - S)$, т.е.

$$\left| S_{n+m} - S_n \right| \leqq \left| S_{n+m} - S \right| + \left| S_n - S \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

Обратная теорема. Требуется доказать, что рядъ сходящійся, если, взявъ произвольное малое положительно число ε, мы можемъ подобрать n_0 такимъ образомъ, что при всѣхъ положительныхъ m будемъ имѣть

$$\left| S_{n_0+m} - S_{n_0} \right| < \varepsilon.$$

Доказательство. Имѣемъ по предположенію при всѣхъ $m > 0$

$$-\varepsilon < S_{n_0+m} - S_{n_0} < +\varepsilon.$$

Прибавивъ ко всѣмъ членамъ неравенства S_{n_0}, получимъ

$$S_{n_0} - \varepsilon < S_{n_0+m} < S_{n_0} + \varepsilon.$$

Такъ какъ это неравенство справедливо при всѣхъ положительныхъ m, то можно написать

$$S_{n_0} - \varepsilon \leqq \text{Пред.}\ S_{n_0+m} = S \leqq S_{n_0} + \varepsilon .$$

Отсюда видно, что

1° - S - число конечное,

2° - S, въ виду произвольности ε, можетъ быть вычислено съ любою степенью точности, такъ какъ для него намъ извѣстны два предѣла

$$\textit{высшій предѣлъ} \ - \ S_{n_0} + \varepsilon$$

$$\textit{низшій предѣлъ} \ - \ S_{n_0} - \varepsilon,$$

разность между которыми 2ε сколь угодно мала. Итакъ сумма S можетъ быть вычислена съ любою точностью, слѣдовательно она существуетъ, какъ опредѣленное число, и данный рядъ сходящійся.

Слѣдствіе. Замѣтивъ, что при $m = 1$

$$S_{n+m} - S_n = u_{n+1}$$

на основаніи предыдущей теоремы можно сказать, что необходимое (но недостаточное) условіе сходимости ряда заключается въ томъ, чтобы

$$|u_{n+1}| < \varepsilon \quad \text{при} \quad n \geqq n_0,$$

или чтобы

$$\text{Пред.}_{n=\infty}\ u_n = 0.$$

Что это условіе только необходимое, но недостаточное, видно изъ слѣдующаго примѣра. Гармоническій рядъ имѣетъ общій членъ

$$u_n = 1/n$$

и предѣлъ

$$u_{n=\infty} = 0,$$

но этотъ рядъ расходящійся.

Достаточнымъ условіемъ, согласно основной теоремѣ, является то, чтобы сумма *какого угодно* числа членовъ, начиная съ u_{n+1}, при n достаточно большомъ, могла быть сдѣлана сколь угодно малой, т.е. должно существовать неравенство

$$\left| u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+m} \right| < \varepsilon$$

при любомъ $m > 0$, или

$$\underset{\substack{n=\infty \\ m+n=\infty}}{\text{Пред.}} \left| u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+m} \right| = 0.$$

§ 2.

Ряды знакоперемѣнные.

Опредѣленіе. Знакоперемѣннымъ рядомъ называется рядъ вида

$$u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - \dots + (-1)^n u_n + \dots$$

въ которомъ числа $u_0, u_1, u_2, \dots u_n$ всѣ положительныя.

Теорема. Знакоперемѣнный рядъ оказывается сходящимся, если 1) члены его убываютъ по численной величинѣ, т.е.

$$u_{n-1} > u_n$$

и 2) если

$$\underset{n=\infty}{\text{Пред.}}\, u_n = 0.$$

Разсмотримъ разность

$$S_{n+m} - S_n = (-1)^{n+1} u_{n+1} + (-1)^{n+2} u_{n+2} + \dots + (-1)^{n+m} u_{n+m} =$$

$$= (-1)^{n+1} \cdot T_{n,m},$$

гдѣ

$$T_{n,m} = u_{n+1} - u_{n+2} + u_{n+3} - \dots + (-1)^{m-1} u_{n+m}.$$

Докажемъ 1), что T - число положительное. Имѣемъ при m четномъ:

$$T = (u_{n+1} - u_{n+2}) + (u_{n+3} - u_{n+4}) + \dots + (u_{n+m-1} - u_{n+m})$$

при m нечетномъ:

$$T = (u_{n+1} - u_{n+2}) + (u_{n+3} - u_{n+4}) + \dots$$

$$\dots + (u_{n+m-2} - u_{n+m-1}) + u_{n+m}.$$

Въ томъ и другомъ случаѣ T представляетъ собою сумму положительныхъ чиселъ въ силу условія, что

$$u_{n-1} > u_n,$$

и въ силу того, что всѣ члены > 0, а слѣдовательно и отдѣльно стоящій членъ

$$u_{n+m} > 0.$$

Итакъ, мы доказали, что $T > 0$.

2) Докажемъ теперь, что $T < u_{n+1}$; имѣемъ при m четномъ:

$$T = u_{n+1} - (u_{n+2} - u_{n+3}) - (u_{n+4} - u_{n+5}) - \ldots - u_{n+m}$$

при m нечетномъ:

$$T = u_{n+1} - (u_{n+2} - u_{n+3}) - \ldots - (u_{n+m-1} - u_{n+m}).$$

Такъ какъ изъ u_{n+1} вычитаются положительныя числа, то отсюда слѣдуетъ, что

$$T < u_{n+1}$$

и, соединяя оба неравенства: $0 < T < u_{n+1}$, можемъ написать

$$T = \vartheta . u_{n+1}, \quad \text{гдѣ} \quad 0 < \vartheta < 1.$$

Итакъ имѣемъ

$$S_{n+m} - S_n = (-1)^{n+1} . \vartheta . u_{n+1},$$

откуда

$$\underset{\substack{n=\infty \\ m>0}}{\text{Пред.}} \left| S_{n+m} - S_n \right| = \underset{n=\infty}{\text{Пред.}} \vartheta . u_{n+1} = 0$$

(по 2-му условію теоремы); согласно основной теоремѣ заключаемъ, что рядъ сходящійся.

Замѣчаніе. Изъ предыдущей теоремы имѣемъ

$$S_{n+m} = S_n + (-1)^{n+1} . \vartheta . u_{n+1}.$$

Оставляя n безъ перемѣны и увеличивая m безпредѣльно, находимъ

$$\underset{n+m=\infty}{\text{Пред.}} S_{n+m} = S = S_n + (-1)^{n+1} . \vartheta_1 . u_{n+1},$$

гдѣ опять

$$0 < \vartheta_1 < 1.$$

Отсюда слѣдуетъ, что если при вычисленіи суммы знакоперемѣннаго ряда мы принимаемъ за истинное значеніе ея сумму

$$S_n = u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \ldots + (-1)^n u_n,$$

то мы дѣлаемъ ошибку, равную

$$(-1)^{n+1} \cdot \vartheta_1 \cdot u_{n+1},$$

которая имѣетъ знакъ перваго отброшеннаго члена и по абсолютному значенію меньше его; напримѣръ, данъ рядъ:

$$\lg 2 = 1 - {}^1/_2 + {}^1/_3 - {}^1/_4 + {}^1/_5 - {}^1/_6 + \ldots$$

этотъ рядъ сходящійся, такъ какъ онъ знакоперемѣнный и 1) члены его убываютъ, 2)

$$\underset{n=\infty}{\textit{Пред.}}\ {}^1/n = 0.$$

Если принять

$$\lg 2 = 1 - {}^1/_2 + {}^1/_3 - {}^1/_4 + {}^1/_5 - {}^1/_6 + \ldots + {}^1/_{99},$$

то ошибка будетъ отрицательнаго знака, т.е. принимаемое значеніе больше истиннаго, и по абсолютному значенію ошибка $< {}^1/100$.

§ 3.

Ряды абсолютно и неабсолютно сходящіеся.

Опредѣленіе. Рядъ называется *абсолютно сходящимся,* если не только самъ онъ сходящійся, но и рядъ абсолютныхъ значеній его членовъ

$$|u_0|,\ |u_1|,\ |u_2|,\ |u_3|,\ \ldots\ |u_n|$$

- сходящійся.

Рядъ называется *неабсолютно сходящимся,* если самъ онъ сходящійся, но рядъ абсолютныхъ значеній его членовъ расходящійся.

Напримѣръ, рядъ, выводимый изъ разложенія

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots$$

при $x = -1$, абсолютно сходящійся, такъ какъ не только самъ онъ сходящійся:

$$1 - \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} - \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} - \ldots.$$

и имѣетъ суммою

$$e^{-1} = {}^{1}/e,$$

но и рядъ абсолютныхъ значеній

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \ldots.$$

сходящійся и имѣетъ суммою e.

Примѣромъ неабсолютно сходящагося ряда можетъ служить рядъ

$$1 - {}^{1}/_{2} + {}^{1}/_{3} - {}^{1}/_{4} + {}^{1}/_{5} - \ldots.$$

имѣющій суммою $\lg 2$, тогда какъ рядъ абсолютныхъ значеній его членовъ

$$1 + {}^{1}/_{2} + {}^{1}/_{3} + {}^{1}/_{4} + {}^{1}/_{5} + \ldots.$$

(гармоническій) есть расходящійся рядъ.

Замѣчаніе. Если всѣ члены ряда положительны (или вообще одного знака), то онъ можетъ быть или абсолютно сходящимся, или расходящимся. Если члены ряда разныхъ знаковъ, то онъ можетъ принадлежать къ одной изъ 3-хъ категорій, т.е. быть абсолютно сходящимся, или расходящимся или неабсолютно сходящимся.

§ 4.

Первый и второй признаки абсолютной сходимости ряда.

Теорема. Если рядъ v_n абсолютно сходящійся и при $n \geqq n_0$ оказывается

$$|u_n| \leqq |v_n|,$$

то и рядъ u_n будетъ абсолютно сходящимся.

Доказательство. По условію рядъ

$$|v_0|,\ |v_1|,\ |v_2|,\ |v_3|,\ \dots\ |v_n|$$

сходящійся. Тогда на основаніи теоремы имѣемъ

$$|v_{n+1}| + |v_{n+2}| + |v_{n+3}| + \dots + |v_{n+m}| < \varepsilon$$

при всякомъ положительномъ m и при $n \geqq n_0$.

Чтобы доказать, что рядъ

$$|u_0|,\ |u_1|,\ |u_2|,\ |u_3|,\ \dots\ |u_n|$$

сходящійся, нужно въ силу обратной основной теоремы доказать, что при $n \geqq n_0$ сумма

$$|u_{n+1}| + |u_{n+2}| + |u_{n+3}| + \dots + |u_{n+m}|$$

- сколь угодно мала.

Изъ условія

$$|u_n| \leqq |v_n|$$

ясно, что

$$|u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \dots + |u_{n+m}| \leqq$$

$$\leqq |v_{n+1}| + |v_{n+2}| + \dots + |v_{n+m}| < \varepsilon,$$

а потому рядъ u_n абсолютно сходящійся.

Слѣдствіе 1-ое. Если при $n \geqq n_0$ оказывается численное значеніе отношенія

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leqq K_1 < 1,$$

то рядъ u_n абсолютно сходящійся.

Доказательство. Пусть при $n \geqq n_0$

$$|u_{n+1}| \leqq K_1 . |u_n|;$$

отсюда слѣдуетъ:

$$|u_{n+2}| \leqq K_1 . |u_{n+1}| \leqq K_1^2 . |u_n|$$

$$|u_{n+3}| \leqq K_1 . |u_{n+2}| \leqq K_1^3 . |u_n|$$

. . . .

$$\left|u_{n+m}\right| \leqq K_1^m \cdot \left|u_n\right|.$$

Въ правой части мы имѣемъ рядъ:

$$u_n[1 + K_1 + K_1^2 + K_1^3 + \ldots + K_1^m]$$

съ общимъ членомъ $K_1^m u_n$. Здѣсь u_n - постоянный множитель, а въ скобкахъ сходящійся рядъ, ибо это геометрическая прогрессія съ знаменателемъ $K_1 < 1$. Оказывается такимъ образомъ, что общій членъ нашего ряда $|u_{n+m}|$ при $n \geqq n_0$ остается меньше общаго члена абсолютно сходящагося ряда. По предыдущей теоремѣ рядъ u_n абсолютно сходящійся.

1-ый признакъ абсолютной сходимости (признакъ д'Аламбера). Если предѣлъ отношенія

$$\underset{n=\infty}{\textit{Пред.}} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = K < 1,$$

то рядъ u_n абсолютно сходящійся. Въ самомъ дѣлѣ, при $n \geqq n_0$ мы будемъ имѣть

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leqq K + \varepsilon = K_1 < 1,$$

потому что, какъ бы ни было K близко къ 1, но такъ какъ оно постоянное число, то всегда возможно, распоряжаясь n_0, взять ε столь малымъ, чтобы и $K + \varepsilon$ было < 1. Въ силу предыдущаго слѣдствія, рядъ u_n абсолютно сходящійся.

Примѣръ 1. Изслѣдовать сходимость ряда

$$u_n = \frac{x^n}{1.2.3\ldots n} \quad \left|\frac{x}{n+1}\right| \ll u_{n+1}$$

Напишемъ $n+1$ членъ ряда и найдемъ отношеніе $\frac{u_{n+1}}{u_n}$:

$$u_{n+1} = u_n \frac{x}{n+1}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x}{n+1}.$$

Взявъ абсолютное значеніе этого соотношенія, найдемъ

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{|x|}{n+1} \quad \text{и} \quad \underset{n=\infty}{\textit{Пред.}} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = 0$$

$0 < K < 1$

$b = c$ $\quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = x\left(\frac{1}{n+1}\right) = xK$

при всякомъ заданномъ $|x|$. Здѣсь

$$K = 0 < 1$$

- рядъ u_n абсолютно сходящійся при всякомъ x.

Примѣръ 2. Данъ рядъ

$$u_n = \frac{x^n}{n}.$$

Имѣемъ:

$$u_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{x^n} = \frac{1}{1 + {}^1/n} x;$$

отсюда

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{|x|}{1 + {}^1/n}, \qquad \underset{n=\infty}{\textit{Пред.}} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = |x|.$$

При $|x| < 1$ - рядъ абсолютно сходящійся.

Слѣдствіе 2. Если при $n \geqq n_0$ оказывается

$$\sqrt[n]{|u_n|} \leqq K_1 < 1,$$

то рядъ u_n абсолютно сходящійся.

Возведя обѣ части неравенства въ n - степень, будемъ имѣть при $n \geqq n_0$

$$|u_n| \leqq K_1^n.$$

Рядъ $1, K_1, K_1^2, \ldots$ - геометрическая прогрессія со знаменателемъ $K_1 < 1$, и слѣдовательно этотъ рядъ сходящійся. По теоремѣ § 4 рядъ u_n также абсолютно сходящійся.

2-ой признакъ абсолютной сходимости. (признакъ Коши).

Если

$$\underset{n=\infty}{\textit{Пред.}} \sqrt[n]{|u_n|} = K < 1,$$

то рядъ u_n абсолютно сходящійся.

Для доказательства замѣтимъ, что при $n \geqq n_0$ должно быть

$$\sqrt[n]{|u_n|} \leqq K + \varepsilon = K_1 < 1,$$

так𝑏 как𝑏 при достаточно больших𝑏 n можно считать ε столь малым𝑏, что будет

$$K + \varepsilon = K_1 < 1,$$

как бы K ни было близко к𝑏 1.

В𝑏 силу слѣдствія 2-го ряд𝑏 u_n абсолютно сходящійся.

Примѣр𝑏. Найти, при каких𝑏 положительных𝑏 значеніях𝑏 x ряд𝑏

$$u_n = x^{n+1} \cdot e^{-nx}$$

оказывается сходящимся.

По 2-му признаку имѣем𝑏

$$\sqrt[n]{|u_n|} = \sqrt[n]{x^{n+1} \cdot e^{-nx}} = x^{1+1/n} \cdot e^{-x}$$

$$\underset{n=\infty}{\text{Пред.}} \sqrt[n]{|u_n|} = x \cdot e^{-x} = \frac{x}{e^x} < 1,$$

так𝑏 как𝑏 из𝑏 разложенія e^x:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots .$$

видно, что

$$e^x > x \quad \text{при} \quad x > 0.$$

Данный ряд𝑏 сходящійся при всяком𝑏 положительном𝑏 x.

§ 5.

Теорема Коши-Маклорена. Третій признак𝑏 абсолютной сходимости.

Теорема Коши-Маклорена. Если при $n \geqq n_0$ можно представить член𝑏 ряда положительных𝑏 убывающих чисел𝑏 (в𝑏 силу слѣдствія основной теоремы § 1 убываніе членов𝑏 есть необходимое условіе сходимости), как𝑏 частныя значенія нѣкоторой положительной убывающей функціи $F(x)$:

$$u_n = F(n),$$

то ряд𝑏 u_n оказывается абсолютно сходящимся, если интеграл𝑏

$$\int_{n_0}^{n_0+m} F(x)dx$$

имѣетъ конечный предѣлъ при $m = \infty$; напротивъ рядъ u_n оказывается расходящимся, если упомянутый интегралъ растетъ безпредѣльно вмѣстѣ съ m.

Доказательство. Опредѣленный интегралъ

$$\int_{n_0}^{n_0+1} F(x)dx = \textit{Пред.} \sum_{j=0}^{j=n-1} F(n_0+j.\Delta x)\Delta x,$$

гдѣ

$$\frac{(n_0+1) - n_0}{n} = \frac{1}{n} = \Delta x.$$

Такъ какъ $F(x)$ положительная убывающая функція, то всѣ слагаемыя суммы

$$F(n_0 + j.\Delta x)$$

будутъ больше, чѣмъ

$$F(n_0 + 1)$$

и меньше, чѣмъ

$$F(n_0).$$

Поэтому мы можемъ написать, что

$$F(n_0) . \Sigma\Delta x > \int_{n_0}^{n_0+1} F(x)dx > F(n_0+1) . \Sigma\Delta x,$$

причемъ

$$\Sigma\Delta x = 1.$$

Замѣтивъ, что по нашимъ обозначеніямъ

$$F(n_0) = u_{n_0}$$

$$F(n_0+1) = u_{n_0+1},$$

можемъ написать предыдущее неравенство въ видѣ

$$u_{n_0} > \int_{n_0}^{n_0+1} F(x)dx > u_{n_0+1}$$

Далѣе, подобнымъ же образомъ находимъ

$$u_{n_0+1} > \int_{n_0+1}^{n_0+2} F(x)dx > u_{n_0+2} \quad \text{и т. д.}$$

наконецъ, дойдемъ до

$$u_{n_0+m-1} > \int_{n_0+m-1}^{n_0+m} F(x)dx > u_{n_0+m}.$$

Сложивъ всѣ эти неравенства, получимъ

$$S_{n_0+m-1} - S_{n_0-1} > \int_{n_0}^{n_0+m} F(x)dx > S_{n_0+m} - S_{n_0}.$$

Если интегралъ

$$\int_{n_0}^{n_0+m} F(x)dx$$

имѣетъ конечный предѣлъ, то изъ предыдущаго находимъ

$$S_{n_0+m} - S_{n_0} < \int_{n_0}^{n_0+m} F(x)dx,$$

$$S_{n_0+m} < S_{n_0} + \int_{n_0}^{n_0+m} F(x)dx.$$

При $m = \infty$ имѣемъ

$$S \leqq S_{n_0} + \int_{n_0}^{\infty} F(x)dx.$$

Предѣлъ суммы ряда S существуетъ, такъ какъ перемѣнная S_{n_0+m}, возрастая съ увеличенiемъ числа членовъ, остается *меньше* конечнаго предѣла, и такимъ образомъ рядъ u_n :- абсолютно сходящiйся.

Если же

$$\int_{n_0}^{n_0+m} F(x)dx$$

растетъ безпредѣльно вмѣстѣ съ m, то беремъ неравенство

$$S_{n_0+m-1} > S_{n_0-1} + \int_{n_0}^{n_0+m} F(x)dx.$$

При $m = \infty$ имѣемъ

$$S \geqq S_{n_0-1} + \int_{n_0}^{\infty} F(x)dx,$$

такъ что

$$S = \infty$$

и рядъ оказывается расходящимся.

Примѣръ 1. Изслѣдуемъ сходимость ряда

$$u_n = \frac{1}{n^\mu}.$$

Положимъ

$$n_0 = 1.$$

Представивъ общій членъ ряда какъ функцію отъ n, найдемъ

$$u_n = F(n)$$

при

$$F(x) = \frac{1}{x^\mu}.$$

Имѣемъ:

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^\mu} = \begin{cases} \textit{при } \mu > 1: & \left[\dfrac{1}{-(\mu-1)\cdot x^{\mu-1}}\right]_1^\infty = 0 + \dfrac{1}{\mu-1} \quad \textit{(кон. число)} \\ \textit{при } \mu = 1: & \Big[\log x\Big]_1^\infty = \infty \\ \textit{при } \mu < 1: & \left[\dfrac{1}{-(\mu-1)\cdot x^{\mu-1}}\right]_1^\infty = \infty. \end{cases}$$

На основаніи теоремы Коши-Маклорена заключаемъ, что рядъ съ общимъ членомъ

$$u_n = \frac{1}{n^\mu}$$

будетъ абсолютно сходящійся при $\mu > 1$ и расходящійся при $\mu \leq 1$.

То же заключеніе приложимо къ ряду

$$u_n = \frac{1}{(n+a)^\mu},$$

гдѣ a постоянное число.

Примѣръ 2. Данъ общій членъ ряда

$$u_n = \frac{1}{n(\log n)^\mu}.$$

Такъ какъ этотъ общій членъ теряетъ смыслъ при $n_0 = 1$, то нужно положить $n_0 = 2$. Можно принять

$$u_n = F(n),$$

гдѣ

$$F(x) = \frac{1}{x(\log x)^{\mu}}.$$

Замѣчая, что

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\log x)^{\mu}} = \begin{cases} \textit{при } \mu > 1: \left[\dfrac{1}{-(\mu-1)(\log x)^{\mu-1}}\right]_2^{\infty} = \dfrac{1}{(\mu-1)(\log 2)^{\mu-1}} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \textit{(кон. число)} \\ \textit{при } \mu = 1: \left[\log.\log x\right]_2^{\infty} = \infty \\ \textit{при } \mu < 1: \left[-\dfrac{1}{(\mu-1)(\log x)^{\mu-1}}\right]_2^{\infty} = \infty, \end{cases}$$

заключаемъ, что рядъ абсолютно сходящійся при $\mu > 1$, расходящійся при $\mu \leqq 1$.

Третій признакъ сходимости. Если

$$\underset{n=\infty}{\textit{Пред.}} \left|u_n \,.\, n^{\mu}\right| = A,$$

нѣкоторому конечному числу, то при $\mu > 1$ рядъ u_n абсолютно сходящійся.

Доказательство. Имѣемъ при $n \geqq n_0$

$$\left|u_n \,.\, n^{\mu}\right| \leqq A + \varepsilon = A_1 \quad \text{и} \quad \left|u_n\right| < \frac{A_1}{n^{\mu}}$$

При $\mu > 1$ рядъ съ общимъ членомъ $\dfrac{A_1}{n^{\mu}}$ по примѣру 1-му оказывается сходящійся; слѣдовательно u_n будетъ также абсолютно сходящимся, согласно теоремѣ § 4.

Примѣръ 1. При какихъ значеніяхъ p рядъ съ общимъ членомъ

$$u_n = tg^p\left[\frac{\pi \,.\, x}{\sqrt{n}}\right]$$

будетъ сходящимся?

Замѣтивъ, что

$$\underset{\alpha=0}{\textit{Пред.}} \frac{tg\alpha}{\alpha} = 1,$$

представимъ общій членъ ряда въ такомъ видѣ

$$u_n = \left[\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi . x}{\sqrt{n}}}{\frac{\pi . x}{\sqrt{n}}}\right]^p . \left[\frac{\pi . x}{\sqrt{n}}\right]^p,$$

откуда

$$u_n . n^{p/2} = \left[\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\alpha}\right]^p . \left[\pi x\right]^p, \text{ гдѣ } \left[\alpha = \frac{\pi . x}{\sqrt{n}}\right].$$

Въ предѣлѣ имѣемъ

$$\underset{n=\infty}{\text{Пред.}}\, u_n . n^{p/2} = \left[\underset{\alpha=0}{\text{Пред.}}\, \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\alpha}\right]^p . (\pi x)^p = (\pi x)^p = A.$$

По третьему признаку, рядъ абсолютно сходящійся при условіи

$$\mu = \frac{p}{2} > 1,$$

откуда

$$p > 2.$$

Примѣръ 2. При какихъ значеніяхъ p рядъ

$$u_n = \log^p\left[1 + \frac{x}{\sqrt[3]{3n^2 - 1}}\right]$$

абсолютно сходящійся:

Замѣтивъ опять, что

$$\underset{\alpha=0}{\text{Пред.}}\, \frac{\log(1 + \alpha)}{\alpha} = \log e,$$

представимъ общій членъ ряда въ видѣ:

$$u_n = \left[\frac{\log\left\{1 + \frac{x}{\sqrt[3]{3n^2 - 1}}\right\}}{\frac{x}{\sqrt[3]{3n^2 - 1}}}\right]^p \left[\frac{x}{\sqrt[3]{3n^2 - 1}}\right]^p,$$

откуда

$$u_n . n^{2/3 p} = \left[\frac{\log(1+\alpha)}{\alpha}\right]^p . \frac{x^p}{\left(\sqrt[3]{3 - 1/n^2}\right)^p}, \left[\alpha = \frac{x}{\sqrt[3]{3n^2 - 1}}\right]$$

и далѣе

$$\underset{n=\infty}{\text{Пред.}} \left| u_n \cdot n^{2/3\rho} \right| = \log^\rho e \cdot \frac{x^\rho}{\sqrt[3]{3^\rho}} = A.$$

Для сходимости ряда должно быть выполнено условіе

$$\mu = \frac{2}{3}\rho > 1;$$

откуда

$$\rho > \frac{3}{2}.$$

Примѣръ 3. При какихъ значеніяхъ ρ рядъ съ общимъ членомъ

$$u_n = \left[a^{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}} - 1 \right]^\rho$$

будетъ абсолютно сходящимся.

Замѣтивъ, что

$$\underset{\alpha=0}{\text{Пред.}} \left| \frac{a^\alpha - 1}{\alpha} \right| = \log a,$$

представимъ u_n въ видѣ

$$u_n = \left[\frac{a^\alpha - 1}{\alpha} \right]^\rho \cdot \left[\frac{1}{\sqrt[3]{n}} \right]^\rho, \text{ гдѣ } \left[\alpha = \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \right],$$

откуда

$$u_n \cdot n^{\rho/3} = \left[\frac{a^\alpha - 1}{\alpha} \right]^\rho,$$

$$\text{Пред.} \left| u_n \cdot n^{\rho/3} \right| = \left| \log a \right|^\rho$$

Рядъ абсолютно сходящійся при

$$\rho/3 > 1, \quad \rho > 3.$$

Примѣръ 4. При какомъ соотношеніи между числами a и b рядъ

$$u_n = a.\mathrm{Sin}\frac{\pi}{n} + b.\log\left[\frac{n+1}{n}\right]^c$$

будетъ абсолютно сходящимся.

Разлагая $\operatorname{Sin} \pi/n$ и $\log(1 + 1/n)$

въ рядь по степенямъ $1/n$, имѣемъ

$$u_n = a\left[\frac{\pi}{n} - \frac{\pi^3}{3n^3} + \ldots\right] + b\left[\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} - \ldots\right].$$

Рядъ не можетъ быть сходящимся, если

$$(b + a\pi)\frac{1}{n}$$

не нуль, такъ какъ тогда

$$\text{Пред. } \left|n.u_n\right| = b + a\pi,$$

и рядъ будетъ расходящійся (см. § 7). Поэтому

$$\frac{b}{a} = -\pi,$$

и тогда

$$\text{Пред. } \left|u_n.n^2\right| = \left|\frac{b}{2}\right|,$$

рядъ абсолютно сходящійся.

Примѣръ 5. При какомъ соотношеніи между a и b рядъ

$$u_n = \sqrt{a + n^2} - \sqrt[3]{b + n + n^3}$$

абсолютно сходящійся.

Разлагая въ рядъ по степенямъ $1/n$, имѣемъ

$$u_n = n.\left[1 + \frac{a}{n^2}\right]^{1/2} - n.\left[1 + \frac{1}{n^2} + \frac{b}{n^3}\right]^{1/3} =$$

$$= n.\left[1 + \frac{a}{2n^2} - \frac{a^2}{3n^4} + \ldots - 1 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{b}{n^3}\right) - \ldots\right] =$$

$$= \frac{1}{n}\left[\frac{a}{2} - \frac{1}{3}\right] - \frac{b}{3n^2} + \ldots\ldots$$

Для сходимости ряда должно быть

$$a = 2/3,$$

и тогда при произвольномъ b будетъ

$$Пред. \left| u_n \cdot n^2 \right| = \left| \frac{b}{3} \right|,$$

рядъ абсолютно сходящійся.

§ 6.

Признакъ Гаусса для абсолютной сходимости ряда.

Теорема. Если при $n \geqq n_0$ оказывается

$$\left| \frac{u_n}{u_{n+1}} \right| > \left| \frac{v_n}{v_{n+1}} \right|,$$

и рядъ v_n абсолютно сходящійся, то и рядъ u_n абсолютно сходящійся.

Доказательство. По условію при $n \geqq n_0$ имѣемъ

$$\left| \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \right| < \left| \frac{u_n}{v_n} \right| = \alpha$$

$$\left| \frac{u_{n+2}}{v_{n+2}} \right| < \left| \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \right| < \alpha$$

$$\left| \frac{u_{n+3}}{v_{n+3}} \right| < \left| \frac{u_{n+2}}{v_{n+2}} \right| < \alpha \quad \text{и т. д.}$$

вообще

$$\left| \frac{u_{n+m}}{v_{n+m}} \right| < \alpha.$$

Изъ послѣдняго неравенства выходитъ

$$\left| u_{n+m} \right| < \alpha \left| v_{n+m} \right|.$$

Но рядъ v_{n+m} абсолютно сходящійся; слѣдовательно, по теоремѣ § 4 и рядъ u_n - абсолютно сходящійся.

Слѣдствіе. Если при $n \geqq n_0$ оказывается

$$n \left[\left| \frac{u_n}{u_{n+1}} \right| - 1 \right] \geqq k_1 > 1,$$

то рядъ u_n абсолютно сходящійся.

Доказательство. Изъ поставленнаго условія имѣемъ

$$\left|\frac{u_n}{u_{n+1}}\right| \geqq 1 + \frac{k_1}{n}.$$

Сравнимъ рядъ u_n съ рядомъ

$$v_n = \frac{1}{n^\mu},$$

который при $\mu > 1$ абсолютно сходящійся. Для этого ряда имѣемъ

$$\left|\frac{v_n}{v_{n+1}}\right| = \frac{(n+1)^\mu}{n^\mu} = (1 + {}^1/_n)^\mu = 1 + \frac{\mu + \delta^2}{n};$$

причемъ δ^2 означаетъ нѣкоторое положительное число (при $\mu > 1$), какъ легко убѣдиться, разлагая

$$(1 + {}^1/_n)^\mu$$

по биному Ньютона; при достаточно большихъ n можно сдѣлать δ^2 столь малымъ, чтобы μ оставалось > 1, но чтобы

$$\mu + \delta^2 < k_1,$$

какъ бы ни было k_1 близко къ 1. Тогда получимъ

$$\left|\frac{u_n}{u_{n+1}}\right| \geqq 1 + \frac{k_1}{n} > 1 + \frac{\mu + \delta^2}{n} = \left|\frac{v_n}{v_{n+1}}\right|.$$

По предыдущей теоремѣ рядъ u_n абсолютно сходящійся, такъ какъ рядъ v_n абсолютно сходящійся.

Признакъ Гаусса. Если

$$\underset{n=\infty}{\text{Пред.}} \left\{ n.\left[\left|\frac{u_n}{u_{n+1}}\right| - 1\right]\right\} = k > 1,$$

то рядъ абсолютно сходящійся.

Доказательство. При $n \geqq n_0$ имѣемъ

$$n.\left[\left|\frac{u_n}{u_{n+1}}\right| - 1\right] \geqq k - \varepsilon = k_1 > 1,$$

такъ какъ ε при n достаточно большомъ можно сдѣлать столь малымъ, чтобы разность $k - \varepsilon$ была больше 1, какъ бы k ни было близко къ 1; на основаніи предыдущаго слѣдствія заключаемъ, что рядъ u_n абсолютно сходящійся.

Примѣръ 1. При какихъ значеніяхъ p рядъ

$$u_n = \frac{p(p-1)\ldots(p-n+1)}{1.2.3\ldots\ldots n}\cdot\frac{1}{n+1}$$

абсолютно сходящійся?

Составивъ $(n+1)$-ый членъ ряда:

$$u_{n+1} = u_n\cdot\frac{p-n}{n+1}\cdot\frac{n+1}{n+2} = u_n\,\frac{p-n}{n+2},$$

найдемъ отношеніе

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{n+2}{p-n}.$$

Абсолютное значеніе этого отношенія будетъ

$$\left|\frac{u_n}{u_{n+1}}\right| = \frac{n+2}{n-p}.$$

Отсюда

$$\left[\left|\frac{u_n}{u_{n+1}}\right| - 1\right].n = \frac{n+2-n+p}{n-p}.n = (2+p)\,\frac{1}{1-p/n};$$

откуда

$$\underset{n=\infty}{\text{Пред.}}\left[\left|\frac{u_n}{u_{n+1}}\right| - 1\right].n = 2+p.$$

Для сходимости ряда необходимо, чтобы было

$$2+p > 1,\qquad p > -1.$$

Примѣръ 2. Гауссъ ввелъ въ разсмотрѣніе такъ называемый гипергеометрическій рядъ

$$1 + \frac{\alpha.\beta}{1.\gamma}\,x + \frac{\alpha(\alpha+1).\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma.(\gamma+1)}\,x^2 + \ldots\ldots +$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1).\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{1.2\ldots n.\gamma(\gamma+1)\ldots.(\gamma+n-1)}\,x^n + \ldots.,$$

который содержитъ въ себѣ, какъ частные случаи, большинство изъ наиболѣе извѣстныхъ разложеній (напр., при $\beta = \gamma$ получается разложенiе

$$\frac{1}{(1-x)^{\alpha}}$$

и т. п.).

Этотъ рядъ съ общимъ членомъ:

$$u_n = \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1).\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{1.2\ldots n.\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)}\,x^n$$

при $|x| < 1$ будетъ абсолютно сходящимся по признаку д'Аламбера, такъ какъ

$$u_{n+1} = u_n\,.\,\frac{(\alpha+n).(\beta+n)}{(1+n).(\gamma+n)}\,x$$

и

$$\mathit{Пред.}_{n=\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \mathit{Пред.}\,\frac{(1+{}^{\alpha}/_{n}).(1+{}^{\beta}/_{n})}{(1+{}^{\gamma}/_{n}).(1+{}^{1}/_{n})}\,.\,|x| = |x|.$$

При $|x| = 1$ примѣняемъ способъ Гаусса и составляемъ

$$n.\left[\left|\frac{u_n}{u_{n+1}}\right| - 1\right] = n.\left[\frac{(n+1).(n+\gamma)}{(n+\alpha).(n+\beta)} - 1\right] =$$

$$= n.\frac{n^2+n(\gamma+1)+\gamma-n^2-n(\alpha+\beta)-\alpha\beta}{(n+\alpha).(n+\beta)} = \frac{\gamma+1-\alpha-\beta+\frac{\gamma-\alpha\beta}{n}}{(1+{}^{\alpha}/_{n}).(1+{}^{\beta}/_{n})};$$

такъ какъ предѣлъ правой части при $n = \infty$ будетъ

$$\gamma+1-\alpha-\beta,$$

то условiе абсолютной сходимости заключается въ неравенствѣ

$$\gamma+1-\alpha-\beta > 0,$$

или

$$\gamma > \alpha+\beta.$$

§ 7.

Признаки расходимости рядовъ, составленныхъ изъ положительныхъ чиселъ.

Теорема. Если рядъ v_n съ положительными членами расходящiйся, и для другого ряда u_n при $n \geqq n_0$ оказывается

$$u_n \geqq v_n,$$

то и рядъ u_n расходящійся.

Доказательство. По условію теоремы при $n \geqq n_0$ и при всякомъ $m > 0$ выходитъ

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+m} \geqq v_{n+1} + v_{n+2} + \ldots + v_{n+m},$$

но такъ какъ рядъ v_n расходящійся, то сумма

$$v_{n+1} + \ldots + v_{n+m}$$

должна расти безпредѣльно вмѣстѣ съ m, слѣдовательно и сумма

$$u_{n+1} + \ldots + u_{n+m} = S_{n+m} - S_n$$

будетъ обладать тѣмъ же свойствомъ, и рядъ u_n будетъ расходящимся.

Признакъ 1. Если

$$\underset{n=\infty}{\text{Пред.}} \left[\frac{u_{n+1}}{u_n} \right] = l > 1,$$

то рядъ u_n расходящійся.

Доказательство. Имѣемъ при $n \geqq n_0$

$$u_{n+1} > l_1 . u_n$$

(гдѣ $l_1 = l - \varepsilon$ можно считать > 1, такъ какъ при достаточно большомъ n число ε сколь угодно мало),

$$u_{n+2} > l_1 . u_{n+1} > l_1^2 . u_n,$$

$$u_{n+3} > l_1^3 . u_n \quad \text{и т. д.}$$

вообще

$$u_{n+m} > l_1^m . u_n;$$

но рядъ

$$l_1^m . u_n$$

есть расходящійся, такъ какъ представляетъ геометрическую прогрессію съ знаменателемъ > 1; слѣдовательно и рядъ u_n расходящійся по теоремѣ этого §-а.

Признакъ 2. Если

$$\underset{n=\infty}{\text{Пред.}} \sqrt[n]{u_n} = l > 1,$$

то рядъ u_n расходящійся.

Въ самомъ дѣлѣ, при $n \geqq n_0$

$$u_n > l_1^n,$$

гдѣ $l_1 = l - \varepsilon$ и при достаточно большомъ n:

$$l_1 > 1;$$

слѣдовательно, рядъ u_n - расходящійся, по теоремѣ этого §-а.

Признакъ 3. Если

$$\underset{n=\infty}{\text{Пред.}} (u_n \,.\, n^\mu) = A,$$

числу конечному, и $\mu \leqq 1$, то рядъ u_n расходящійся.

Доказательство. При $n \geqq n_0$ можно считать

$$u_n . n^\mu \geqq A - \varepsilon = A_1,$$

и.

$$u_n > \frac{A_1}{n^\mu},$$

но рядъ съ общимъ членомъ

$$v_n = \frac{A_1}{n^\mu}$$

будетъ при $\mu \leqq 1$ расходящимся (§ 5, пр. 1), слѣдовательно, и рядъ $u_n \geqq v_n$ будетъ расходящимся.

Признакъ 4. Если

$$\underset{n=\infty}{\text{Пред.}} \left[n.\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) \right] = l < 1,$$

то рядъ u_n расходящійся.

Если

$$\underset{n=\infty}{\text{Пред.}} \left[n.\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) \right] = 1$$

и

$$\underset{n=\infty}{\text{Пред.}} \left\{ n.\left[n.\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) - 1 \right] \right\} = A$$

(A конечное число, неравное 0), то рядъ u_n расходящійся.

Предварительно докажемъ, что если при $n \geqq n_0$

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} < \frac{v_n}{v_{n+1}}$$

и рядъ v_n - расходящійся, то и рядъ u_n - расходящійся. Дѣйствительно, при $n \geqq n_0$

$$\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} > \frac{u_n}{v_n} = \alpha$$

$$\frac{u_{n+2}}{v_{n+2}} > \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} > \alpha$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{u_{n+m}}{v_{n+m}} > \frac{u_{n+m-1}}{v_{n+m-1}} > \alpha,$$

откуда

$$u_{n+m} > \alpha . v_{n+m},$$

и такъ какъ рядъ v_n расходящійся, то по теоремѣ въ началѣ §-а и рядъ u_n расходящійся.

Если намъ дано, что

$$\underset{n=\infty}{\textit{Пред.}} \left[n.\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) \right] = l < 1,$$

то при достаточно большомъ n $(n \geqq n_0)$ можно считать

$$n.\left[\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right] \leqq l + \varepsilon = l_1 < 1,$$

откуда

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} \leqq 1 + \frac{l_1}{n}.$$

Для ряда

$$v_n = \frac{1}{n^\mu}$$

(при $\mu < 1$) имѣемъ

$$\frac{v_n}{v_{n+1}} = \left[1 + {}^1\!/_n \right]^\mu = 1 + \frac{\mu}{n} + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2} . \frac{1}{n^2} + \dots ,$$

или

$$\frac{v_n}{v_{n+1}} = 1 + \frac{\mu - \delta^2}{n},$$

так как член

$$\frac{\mu(\mu-1)}{2n^2} < 0 \quad \text{при} \quad \mu < 1;$$

здѣсь число δ^2 положительно и сколь угодно малое при достаточно большихъ n. Выберемъ число μ такъ, чтобы

$$\mu < 1 \quad \text{и} \quad \mu - \delta^2 > 1_1;$$

тогда

$$\frac{v_n}{v_{n+1}} = 1 + \frac{\mu - \delta^2}{n} > 1 + \frac{1_1}{n} \geqq \frac{u_n}{u_{n+1}},$$

т. е.

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} < \frac{v_n}{v_{n+1}},$$

и такъ какъ рядъ v_n - расходящійся, то и рядъ u_n - расходящійся.

Если намъ дано, что:

$$\text{Пред. } n.\left[n.\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) - 1\right] = A,$$

то при достаточно большихъ n можно принять

$$n.\left[n.\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) - 1\right] \leqq A + \varepsilon = A_1,$$

откуда

$$n.\left[\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right] \leqq 1 + \frac{A_1}{n},$$

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} < 1 + \frac{1}{n} + \frac{A_1}{n^2}.$$

Составимъ теперь для ряда

$$v_n = \frac{1}{n - a} \quad (a > 0)$$

выраженіе

$$\frac{v_n}{v_{n+1}} = 1 + \frac{1}{n - a} = 1 + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1 - \frac{a}{n}} =$$

$$= 1 + \frac{1}{n}\left[1 + \frac{a}{n} + \frac{a^2}{n^2} + \ldots\right] = 1 + \frac{1}{n} + \frac{a + \delta^2}{n^2},$$

гдѣ δ^2 положительное число, которое при достаточно большихъ n можетъ быть сколь угодно малымъ. Выберемъ a такъ, чтобы

$$a + \delta^2 > A_1;$$

тогда

$$\frac{v_n}{v_{n+1}} > 1 + \frac{1}{n} + \frac{A_1}{n^2} \geq \frac{u_n}{u_{n+1}},$$

откуда

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} < \frac{v_n}{v_{n+1}},$$

слѣдовательно рядъ u_n - расходящійся, такъ какъ рядъ v_n расходящійся.

Примѣръ 1. Доказать, что рядъ

$$u_n = \frac{x^n}{n},$$

составленный изъ положительныхъ членовъ $(x>0)$, расходящійся при $x > 1$.

Составивъ по первому признаку отношеніе

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{x^n} = x\frac{n}{n+1},$$

получимъ условіе для расходимости ряда

$$\underset{n=\infty}{\textit{Пред.}} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = x > 1.$$

Примѣръ 2. Данъ рядъ

$$u_n = \frac{e^{nx}}{x^{n+1}}$$

при $x > 0$.

Доказать, что онъ расходящійся при всякомъ положительномъ x.

Имѣемъ по второму признаку

$$\sqrt[n]{u_n} = \frac{e^x}{x^{1+1/n}},$$

$$\underset{n=\infty}{Пред.} \sqrt[n]{u_n} = \frac{e^x}{x} > 1,$$

что видно изъ разложенія

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots.$$

Рядъ расходящійся.

Примѣръ 3. При какихъ значеніяхъ ρ рядъ

$$u_n = \operatorname{Sin}^{\rho}\left[\frac{\pi x}{\sqrt[3]{n}}\right]$$

расходящійся $(x > 0)$?

Замѣтивъ, что

$$\underset{\alpha=0}{Пред.} \left[\frac{\operatorname{Sin}\alpha}{\alpha}\right] = 1,$$

представимъ общій членъ ряда въ такомъ видѣ

$$u_n = \left[\frac{\operatorname{Sin}\alpha}{\alpha}\right]^{\rho} \cdot \left[\frac{\pi x}{\sqrt[3]{n}}\right]^{\rho},$$

откуда имѣемъ

$$u_n \cdot n^{\rho/3} = \left[\frac{\operatorname{Sin}\alpha}{\alpha}\right]^{\rho} \cdot (\pi x)^{\rho}$$

$$\underset{n=\infty}{Пред.} (u_n \cdot n^{\rho/3}) = (\pi x)^{\rho} = A.$$

Рядъ будетъ расходящійся при

$$\frac{\rho}{3} = \mu \leqq 1 \quad \text{или при} \quad \rho \leqq 3.$$

Примѣръ 4. Найти при какихъ значеніяхъ ρ рядъ:

$$u_n = \frac{|\rho(\rho-1)\ldots(\rho-n+1)|}{1.2.3\ldots n} \cdot \frac{1}{n+1}$$

расходящійся.

Имѣемъ:

$$\text{Пред. } n.\left[\left|\frac{u_n}{u_{n+1}}\right| - 1\right] = 2 + \rho.$$

При условіи

$$2 + \rho < 1 \quad \text{или} \quad \rho < -1$$

рядъ будетъ расходящимся.

§ 8.

Ряды, члены которыхъ суть функціи отъ x. *Равномѣрная сходимость рядовъ.*

Члены ряда могутъ быть функціями отъ x, напримѣръ:

$$u_0 = \varphi_0(x)$$

$$u_1 = \varphi_1(x)$$

$$\cdots\cdots$$

$$u_n = \varphi_n(x).$$

Сумму $(n+1)$ первыхъ членовъ такого ряда будемъ обозначать

$$\Phi_n(x) = \varphi_0(x) + \varphi_1(x) + \ldots + \varphi_n(x);$$

сумма остальныхъ членовъ ряда

$$\varphi_{n+1}(x) + \varphi_{n+2}(x) + \ldots = R_n(x)$$

называется *остаткомъ* ряда.

Если рядъ сходящійся и имѣетъ сумму $\Phi(x)$, то

$$\Phi(x) = \Phi_n(x) + R_n(x).$$

Опредѣленіе. Рядъ

$$u_n = \varphi_n(x)$$

называется равномѣрно сходящимся въ данномъ промежуткѣ

$$a \leqq x \leqq b,$$

если можно назначить такое число n_0, чтобы при всѣхъ значеніяхъ $n \geqq n_0$ было

$$\left|R_n(x)\right| < \varepsilon,$$

(гдѣ ε число сколь угодно малое), *каково бы ни было значеніе* x, удовлетворяющее неравенству

$$a \leqq x \leqq b.$$

Примѣръ. Положимъ, что рядъ состоитъ изъ такихъ членовъ

$$\varphi_0(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2},$$

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+2x^2}, \quad \text{и т. п.}$$

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{1+nx^2} - \frac{1}{1+(n+1)x^2}.$$

Сумма $(n+1)$ членовъ этого ряда

$$\Phi_n(x) = 1 - \frac{1}{1+(n+1)x^2}$$

и

$$\underset{n=\infty}{\text{Пред.}}\ \Phi_n(x) = 1 = \Phi(x) \text{ при } x \gtrless 0,$$

но сумма ряда

$$\Phi(x) = \Phi_n(x) + R_n(x);$$

откуда остатокъ ряда

$$R_n(x) = \frac{1}{1+(n+1)x^2}.$$

Если число

$$|x| \geqq a,$$

то

$$\left|R_n(x)\right| \leqq \frac{1}{1+(n+1)a^2}.$$

Чтобъ рядъ былъ равномѣрно сходящимся при $|x| \geqq a$ достаточно сдѣлать

$$\frac{1}{1+(n+1)a^2} < \varepsilon,$$

откуда

$$1/\varepsilon < 1 + (n+1)a^2;$$

$$n + 1 > \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon a^2};$$

$$n > \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon a^2} - 1 .$$

Можно принять

$$n_0 = \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon a^2};$$

тогда при $n \geqq n_0$ рядъ будетъ равномѣрно сходящимся при:

$$|x| \geqq a.$$

Изъ выраженія n_0 слѣдуетъ, что a не можетъ быть $= 0$. Итакъ изучаемый рядъ можетъ быть равномѣрно сходящимся только въ промежуткѣ значеній x, гдѣ не содержится $x = 0$. Такъ что въ промежуткѣ отъ $- 1$ до $+ 1$ онъ не будетъ *равномѣрно* сходящійся, но просто сходящимся онъ остается, такъ какъ

$$\Phi(x) = 1 \quad \text{при} \quad x \text{ не} = 0,$$

и отдѣльно

$$\text{при} \quad x = 0, \quad \Phi(0) = 0.$$

Теорема 1. Для того, чтобы составить рядъ $u_n = \varphi_n(x)$, равномѣрно сходящійся въ промежуткѣ

$$a \leqq x \leqq b,$$

достаточно выбрать функцію $\varphi_n(x)$ такъ, чтобы при

$$a \leqq x \leqq b$$

существовало неравенство

$$\left|\varphi_n(x)\right| \leqq \left|v_n\right|,$$

гдѣ v_n общій членъ абсолютно сходящагося ряда, составленнаго изъ постоянныхъ (не зависящихъ отъ x) чиселъ.

Доказательство. Пусть остатокъ ряда будетъ

$$R_n(x) = \varphi_{n+1}(x) + \varphi_{n+2}(x) + \ldots .$$

Взявъ абсолютныя значенія членовъ, получимъ

$$\left|R_n(x)\right| \leqq \left|\varphi_{n+1}(x)\right| + \left|\varphi_{n+2}(x)\right| + \ldots \leqq \left|v_{n+1}\right| +$$

$$+ \left|v_{n+2}\right| + \ldots = S_{\substack{n+m \\ m=\infty}} - S_n.$$

Такъ какъ рядъ съ общимъ членомъ v_n по условію сходящій-ся, то по теоремѣ § 1 при всякомъ $m > 0$ должно быть

$$S_{n+m} - S_n < \varepsilon.$$

Выходитъ, что *при всѣхъ* x въ промежуткѣ $a \leqq x \leqq b$, остатокъ

$$\left|R_n(x)\right| < S_{n+m} - S_n < \varepsilon,$$

и слѣдовательно, рядъ u_n равномѣрно сходящійся.

Примѣръ.

$$u_n = \frac{\operatorname{Sin}\left(\frac{\pi x}{n}\right)}{n^2}.$$

При всѣхъ x оказывается

$$\left|u_n\right| < \frac{1}{n^2} = v_n,$$

и такъ какъ рядъ v_n абсолютно сходящійся, то рядъ u_n равномѣрно сходящійся при всѣхъ x.

Слѣдствіе. Если рядъ, расположенный по цѣлымъ положительнымъ степенямъ перемѣнной x

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n.$$

оказывается абсолютно сходящимся при

$$|x| \leqq 1,$$

то онъ будетъ и равномѣрно сходящимся при

$$-1 \leqq x \leqq +1.$$

Доказательство. Общій членъ нашего ряда

$$u_n = a_n x^n,$$

и его абсолютное значеніе

$$\left|u_n\right| = \left|a_n\right|\left|x_n\right| \leqq \left|a_n\right| 1^n.$$

При всѣхъ

$$|x| \leqq 1$$

имѣемъ такимъ образомъ

$$\left|u_n\right| \leqq v_n,$$

гдѣ

$$v_n = \left|a_n\right| 1^n$$

и представляетъ рядъ, состоящій изъ положительныхъ чиселъ и по условію теоремы абсолютно сходящійся. По предыдущей теоремѣ, u_n будетъ равномѣрно сходящимся при

$$|x| \leqq 1.$$

Напримѣръ, ряды

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots.$$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \ldots.$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^6 + \ldots.$$

при $|x| < 1$ абсолютно, а, слѣдовательно, и равномѣрно сходящіеся.

Теорема 2. Если всѣ члены ряда

$$u_0 = \varphi_0(x), \quad u_1 = \varphi_1(x), \ \ldots \ u_n = \varphi_n(x), \ \ldots$$

оказываются непрерывными функціями отъ x при

$$a \leqq x \leqq b$$

и рядъ равномѣрно сходящійся въ этомъ промежуткѣ, то его сумма $\Phi(x)$ будетъ непрерывной функціей отъ x въ этомъ промежуткѣ.

Доказательство. Пусть

$$\Phi(x) = \Phi_n(x) + R_n(x)$$

при

$$a \leqq x \leqq b$$

и

$$\Phi(x+h) = \Phi_n(x+h) + R_n(x+h)$$

при

$$a \leqq x + h \leqq b.$$

Вычитая первое равенство изъ второго, получимъ

$$\Phi(x+h) - \Phi(x) = [\Phi_n(x+h) - \Phi_n(x)] + [R_n(x+h) - R_n(x)]$$

и далѣе, беря абсолютныя значенія,

$$|\Phi(x+h) - \Phi(x)| < |\Phi_n(x+h) - \Phi_n(x)| + |R_n(x+h)| + |R_n(x)|.$$

Выберемъ n столь большимъ, чтобы оба остатка ряда были $< \varepsilon/_3$:

$$|R_n(x)| < \varepsilon/_3 ;$$

и

$$|R_n(x+h)| < \varepsilon/_3$$

(что возможно въ силу равномѣрной сходимости ряда). Не измѣняя n, выберемъ h столь малымъ, чтобы численное значеніе

$$|\Phi_n(x+h) - \Phi_n(x)| < \varepsilon/_3,$$

что вполнѣ возможно, такъ какъ $\Phi_n(x)$, представляя сумму конечнаго числа непрерывныхъ функцій, сама есть непрерывная функція отъ x. Тогда оказывается $|\Phi(x+h) - \Phi(x)| < \varepsilon$, т.е. $\Phi(x)$ непрерывная функція отъ x.

§ 9.

Интегрированіе рядовъ.

Теорема. Если рядъ:

$$\varphi_0(x),\ \varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots\ldots\ \varphi_n(x)\ \ldots.$$

оказывается равномѣрно сходящимся при

$$a \leqq x \leqq b$$

и имѣетъ суммою $\Phi(x)$, то новый рядъ

$$\int_a^x \varphi_0(x)dx,\quad \int_a^x \varphi_1(x)dx,\ \ldots.\quad \int_a^x \varphi_n(x)dx,\ \ldots.$$

выведенный изъ прежняго почленнымъ интегрированіемъ, оказывается также равномѣрно сходящимся при

$$a \leq x \leq b,$$

(гдѣ x — верхній предѣлъ интеграла) и имѣетъ суммою

$$\int_a^x \Phi(x)dx.$$

Короче, рядъ можно почленно интегрировать, если онъ равномѣрно сходящійся.

Доказательство. По условію мы имѣемъ сумму равномѣрно сходящагося ряда въ промежуткѣ $a \leq x \leq b$:

$$\Phi(x) = \Phi_n(x) + R_n(x) = \sum_{n=0}^{n} \varphi_n(x) + R_n(x).$$

Взявъ интегралъ отъ обѣихъ частей равенства, получимъ:

$$\int_a^x \Phi(x)dx = \sum_{n=0}^{n} \int_a^x \varphi_n(x)dx + \int_a^x R_n(x)dx \quad . \; . \; . \; . \; (*).$$

Обозначимъ остатокъ новаго ряда

$$\rho_n(x) = \int_a^x R_n(x).$$

Такъ какъ при всѣхъ x въ промежуткѣ отъ a до b можно считать

$$|R_n(x)| < \varepsilon$$

для достаточно большого n, то абсолютное значеніе новаго остатка будетъ

$$|\rho_n(x)| = \left|\int_a^x R_n(x)dx\right| < \int_a^x |R_n(x)|dx < \int_a^x \varepsilon dx =$$

$$= \varepsilon \int_a^x dx = \varepsilon(x-a) < \varepsilon(b-a).$$

Итакъ, мы получили:

$$\left|\int_a^x R_n(x)dx\right| = |\rho_n(x)| < \varepsilon(b-a)$$

при всѣхъ x, удовлетворяющихъ условію

$$a \leqq x \leqq b,$$

а потому изъ равенства (*) заключаемъ, что рядъ съ общимъ членомъ

$$\int_a^x \varphi_n(x)\,dx$$

есть равномѣрно сходящiйся и имѣетъ суммою

$$\int_a^x \Phi(x)\,dx.$$

Слѣдствiе. Рядъ, расположенный по цѣлымъ положительнымъ степенямъ x:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots\ldots + a_nx^n + \ldots..$$

можно почленно интегрировать въ томъ промежуткѣ, гдѣ онъ *абсолютно* сходящiйся. Въ самомъ дѣлѣ, если рядъ абсолютно сходящiйся, то по слѣдствiю теоремы 1 §8 онъ и равномѣрно сходящiйся, а по теоремѣ § 9 его можно интегрировать.

Замѣчанiе. Если при $x = b$ рядъ $\varphi_n(x)$ перестаетъ быть равномѣрно сходящимся или даже дѣлается расходящимся, но новый рядъ

$$\int_a^b \varphi_n(x)\,dx$$

остается равномѣрно сходящимся, то сумма его равна

$$\int_a^b \Phi(x)\,dx,$$

Доказательство. Сумма ряда

$$\int_a^x \varphi_n(x)\,dx$$

равна

$$\int_a^x \Phi(x)\,dx$$

при значенiяхъ x, сколь угодно близкихъ къ b, а такъ какъ при $x = b$ этотъ рядъ остается равномѣрно сходящимся и, слѣдовательно (по теоремѣ 2 §8), сумма его есть непрерывная функцiя отъ x, то сумма при $x = b$ равна

$$\underset{x=b}{\text{Пред}} \int_a^x \Phi(x)\,dx = \int_a^b \Phi(x)\,dx.$$

Примѣръ 1. Данъ рядъ

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \ldots.$$

абсолютно сходящійся при $|x| < 1$.

Интегрируя его, находимъ

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x} = \log(1+x) = \int_0^x dx - \int_0^x x dx + \int_0^x x^2 dx +$$

$$+ \int_0^x x^4 dx - \ldots. = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \ldots.$$

При $x = +1$ первоначальный рядъ расходящійся, но новый рядъ остается равномѣрно сходящимся и при $x = 1$, такъ какъ его остатокъ, какъ остатокъ знакоперемѣннаго ряда, при $0 < x \leqq 1$, будетъ:

$$\left|R_n(x)\right| < \frac{x^{n+1}}{n+1} \leqq \frac{1}{n+1}$$

и въ предѣлѣ при $n = \infty$ равенъ 0.

Отсюда заключаемъ, что сумма новаго ряда равна $\log 2$ при $x = +1$, такъ что

$$\log 2 = 1 - 1/_2 + 1/_3 - 1/_4 + 1/_5 - 1/_6 + \ldots.$$

Примѣръ 2. Данъ рядъ

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \ldots.$$

Проинтегрируемъ его:

$$\int_0^x \frac{1}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x = \int_0^x dx - \int_0^x x^2 dx + \int_0^x x^4 dx - \ldots.$$

$$\ldots. = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots.$$

Этотъ рядъ сходящійся при $|x| < 1$.

Если $x = +1$, то первоначальный рядъ расходящійся, но рядъ для $\operatorname{arctg} x$ имѣетъ остатокъ при $0 < x \leqq 1$:

$$\left|R_n(x)\right| < \frac{x^{2n+3}}{2n+3} \leqq \frac{1}{2n+3},$$

слѣдовательно, рядъ для $\operatorname{arctg} x$ имѣетъ мѣсто и при $x = +1$, т.е.

$$\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots.$$

Примѣръ 3. Проинтегрируемъ слѣдующій рядъ

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^6 + \ldots.$$

Имѣемъ

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{x^7}{7} + \ldots.$$

рядъ сходящійся при $|x| < 1$.

§ 10.

Дифференцированіе рядовъ.

Теорема. Если рядъ

$$\varphi_0(x),\ \varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \varphi_3(x),\ \ldots\ \varphi_n(x)\ldots$$

оказывается сходящимся при $a \leqq x \leqq b$ и имѣетъ суммою $\Phi(x)$, то новый рядъ

$$\varphi_0'(x),\ \varphi_1'(x),\ \varphi_2'(x),\ \ldots\ \varphi_n'(x),\ \ldots,$$

выводимый изъ прежняго почленнымъ дифференцированіемъ, будетъ имѣть суммою

$$\Phi'(x),$$

если только этотъ *новый рядъ* равномѣрно сходящійся въ промежуткѣ (a, b).

Доказательство. Положимъ, что новый рядъ равномѣрно сходящійся въ промежуткѣ

$$a \leq x \leq b$$

и его сумма

$$\varphi_0'(x) + \varphi_1'(x) + \varphi_2'(x) + \ldots + \varphi_n'(x) + \ldots = \Psi(x);$$

по предыдущему §9 его можно интегрировать, такъ что

$$\int_a^x \varphi_0'(x)dx + \int_a^x \varphi_1'(x)dx + \ldots + \int_a^x \varphi_n'(x)dx + \ldots = \int_a^x \Psi(x)dx.$$

Выполняя интегрированіе въ лѣвой части, имѣемъ

$$[\varphi_0(x) - \varphi_0(a)] + [\varphi_1(x) - \varphi_1(a)] + \ldots + [\varphi_n(x) - \varphi_n(a)] +$$

$$+ \ldots = \int_a^x \Psi(x)dx,$$

что можно представить еще въ такомъ видѣ:

$$\Phi(x) - \Phi(a) = \int_a^x \Psi(x)dx,$$

такъ какъ по условію

$$\varphi_0(x) + \varphi_1(x) + \ldots = \Phi(x).$$

Отсюда дифференцированіемъ находимъ:

$$\Phi'(x) = \Psi(x),$$

т.е. сумма новаго ряда = производной отъ суммы первоначальнаго.

Слѣдствіе. Если рядъ, расположенный по цѣлымъ положительнымъ степенямъ x

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n + \ldots$$

оказывается абсолютно сходящимся при

$$-1 \leq x \leq +1$$

и имѣетъ суммою $\Phi(x)$, то рядъ, полученный послѣдовательнымъ дифференцированіемъ

$$a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + na_nx^{n-1} + \dots .$$

будетъ абсолютно сходящимся при

$$-1 < x < +1$$

(равенства исключены) и имѣетъ суммою функцію $\Phi'(x)$.

По условію рядъ съ общимъ членомъ $u_n = a_nx^n$ оказывается абсолютно сходящимся при

$$-1 \leqq x \leqq +1,$$

слѣдовательно, по признаку д'Аламбера, должно быть при $x = 1$

$$\text{Пред.} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \text{Пред.} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| . 1 = k \leqq 1,$$

откуда

$$\text{Пред.} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{k}{1} .$$

Обращаясь къ новому ряду съ общимъ членомъ

$$u_n = na_nx^{n-1},$$

и для него составляемъ отношеніе

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{(n+1)}{n} . \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| . |x| ;$$

отсюда

$$\text{Пред.} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \text{Пред.} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| . |x| = k . \frac{|x|}{1} .$$

Ясно, что при $|x| = 1$, когда предѣлъ k можетъ быть 1, сходимость ряда сомнительна, но при

$$|x| \leqq 1 - \varepsilon,$$

гдѣ ε сколь угодно малое число, произведеніе

$$k . \frac{1-\varepsilon}{1}$$

можно считать меньше 1, хотя бы $k = 1$, и потому, по признаку д'Аламбера, новый рядъ

$$u_n = na_n x^{n-1}$$

будетъ абсолютно сходящимся.

Примѣръ. Изъ ряда

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots,$$

абсолютно сходящагося при $|x| < 1$, почленнымъ дифференцированіемъ выводимъ новые ряды

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots + nx^{n-1} + \ldots$$

$$\frac{1.2}{(1-x)^3} = 2.1 + 3.2x + 4.3x^2 + \ldots + n(n-1)x^{n-2} + \ldots,$$

. . . .

также абсолютно сходящіеся при $|x| < 1$.

§ 11.

Дѣйствія надъ абсолютно сходящимися рядами.

Теорема 1. Сумма абсолютно сходящагося ряда не измѣняется при перемѣнѣ порядка его членовъ.

Доказательство. Пусть u_n абсолютно сходящійся рядъ и

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$$

сумма $(n+1)$ первыхъ его членовъ.

Составимъ новый рядъ, отличающійся отъ прежняго порядкомъ членовъ, и разсмотримъ сумму его первыхъ $p + 1$ членовъ

$$S'_p = u'_0 + u'_1 + u'_2 + \ldots + u'_p,$$

гдѣ $u'_0, u'_1, \ldots u'_p$ суть члены перваго ряда, но расположенные въ другомъ порядкѣ.

Пусть, кромѣ того,

$$S_{n+m} = u_0 + u_1 + \ldots + u_{n+m}$$

будетъ суммою $(n+m+1)$ членовъ перваго ряда.

Предположимъ p выбраннымъ такъ, что S_p' содержитъ *всѣ* члены u_k, коихъ значки $\leqq n$, но не содержитъ членовъ u_k, со значками $\geqq n+m$.

Если всѣ члены ряда u_k положительны, то имѣемъ очевидное неравенство

$$S_p' - S_n \leqq S_{n+m} - S_n.$$

Отсюда

$$\left[S_p' - S_n\right] \leqq \left[S_{n+m} - S_n\right] < \varepsilon,$$

такъ какъ рядъ u_n абсолютно сходящійся и вслѣдствіе основной теоремы § 1-го

$$\left|S_{n+m} - S_n\right| < \varepsilon.$$

Теперь имѣемъ

$$\underset{p=\infty}{\text{Пред.}}\ S_p' = \underset{n=\infty}{\text{Пред.}}\ S_n = S,$$

т.е. сумма не мѣняется отъ перестановки членовъ.

Если не всѣ члены ряда одного знака, то будемъ разсматривать рядъ $|u_n|$ и его сумму:

$$V_n = |u_0| + |u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n|.$$

Для этого ряда выше доказано, что

$$V_p' - V_n \leqq \varepsilon$$

(такъ какъ всѣ члены его положительны). Теперь имѣемъ слѣдующее неравенство

$$\left[S_p' - S_n\right] \leqq \sum_{j>n;\ j<n+m} |u_j| = V_p' - V_n \leqq \varepsilon,$$

откуда

$$\underset{p=\infty}{\text{Пред.}}\ S_p' = \underset{n=\infty}{\text{Пред.}}\ S_n = S$$

- сумма не измѣняется.

Замѣчаніе. Если рядъ не абсолютно сходящійся, то отъ измѣненія порядка его членовъ онъ не только можетъ измѣнить сумму, но даже изъ сходящагося можетъ сдѣлаться расходящимся.

Примѣръ. Положимъ, что первоначальный рядъ такой

$$1 - \frac{1}{2^\mu} + \frac{1}{3^\mu} - \frac{1}{4^\mu} + \frac{1}{5^\mu} - \frac{1}{6^\mu} + \ldots.$$

и сумма его n первыхъ членовъ S_n.

Составимъ новый рядъ

$$\left[1 + \frac{1}{3^\mu} - \frac{1}{2^\mu}\right] + \left[\frac{1}{5^\mu} + \frac{1}{7^\mu} - \frac{1}{4^\mu}\right] + \left[\frac{1}{9^\mu} + \frac{1}{11^\mu} - \frac{1}{6^\mu}\right] + \ldots$$

Обозначимъ сумму его p первыхъ членовъ черезъ S'_p. Эти суммы можно представить иначе, а именно, для перваго, группируя члены по два, имѣемъ

$$S_{2k} = \sum_{j=1}^{k} \left[\frac{1}{(2j-1)^\mu} - \frac{1}{(2j)^\mu}\right],$$

а для второго ряда, группируя члены по три, имѣемъ:

$$S'_{3k} = \sum_{j=1}^{k} \left[\frac{1}{(4j-3)^\mu} + \frac{1}{(4j-1)^\mu} - \frac{1}{(2j)^\mu}\right].$$

Составимъ разность между ними

$$S'_{3k} - S_{2k} = \frac{1}{(2k+1)^\mu} + \frac{1}{(2k+3)^\mu} + \ldots + \frac{1}{(4k-1)^\mu}.$$

Въ правой части k чиселъ, и легко видѣть, что:

$$\frac{k}{(4k-1)^\mu} < S'_{3k} - S_{2k} < \frac{k}{(2k+1)^\mu} \; . \; . \; . \; . \; . \; (*).$$

Отмѣтимъ три предположенія относительно μ.

1°. $\mu > 1$ - первый рядъ абсолютно сходящійся (§ 5). При $k = \infty$ имѣемъ изъ (*):

$$\underset{k=\infty}{\text{Пред.}} \left[\frac{1}{k^{\mu-1}\left(4-\frac{1}{k}\right)^\mu}\right] \leqq \underset{k=\infty}{\text{Пред.}}\, S'_{3k} - \underset{k=\infty}{\text{Пред.}}\, S_{2k} \leqq$$

$$\leqq \underset{k=\infty}{\text{Пред.}} \left[\frac{1}{k^{\mu-1}\left(2+\frac{1}{k}\right)^\mu}\right],$$

а такъ какъ при $\mu > 1$ крайніе члены неравенства обращаются въ 0 для $k = \infty$, то отсюда слѣдуетъ, что

$$S' = S,$$

т.е. сумма ряда не изменяется.

2°. $\mu < 1$ - первый рядъ не абсолютно сходящійся. Изъ (*) находимъ

$$S'_{3k} > S_{2k} + \frac{1}{k^{\mu-1}(4-\frac{1}{k})^{\mu}}$$

и при $k = \infty$

$$S' \geqq S + \infty,$$

откуда

$$S' = \infty,$$

т.е. новый рядъ оказывается уже расходящимся.

3°. $\mu = 1$. Для этого случая имѣемъ изъ (*) при $k = \infty$

$$1/4 \leqq S' - S \leqq 1/2.$$

Легко показать, что въ этомъ случаѣ $S' = 3/2 S$. Для этого соединимъ члены перваго ряда въ группы по четыре. Тогда сумму его S_{4k} можно будетъ представить въ такомъ видѣ:

$$S_{4k} = \sum_{j=1}^{k}\left[\frac{1}{4j-3} - \frac{1}{4j-2} + \frac{1}{4j-1} - \frac{1}{4j}\right].$$

Вычитая ее изъ суммы S'_{3k}, получимъ:

$$S'_{3k} - S_{4k} = \sum_{j=1}^{k}\left[\frac{1}{4j-3} + \frac{1}{4j-1} - \frac{1}{2j}\right] -$$

$$- \sum_{j=1}^{k}\left[\frac{1}{4j-3} - \frac{1}{4j-2} + \frac{1}{4j-1} - \frac{1}{4j}\right] = \sum_{j=1}^{k}\left[\frac{1}{4j-2} - \frac{1}{4j}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k}\left[\frac{1}{2j-1} - \frac{1}{2j}\right] = \frac{1}{2} S_{2k}.$$

Итакъ мы нашли, что

$$S'_{3k} = S_{4k} + 1/2\, S_{2k},$$

или въ предѣлѣ при $k = \infty$:

$$S' = S + 1/2\, S = 3/2\, S.$$

Написавъ теперь самые ряды при $\mu = 1$, будемъ имѣть

$$1 - {}^1/_2 + {}^1/_3 - {}^1/_4 + {}^1/_5 - {}^1/_6 + \ldots\ldots = \log 2,$$

$$1 + {}^1/_3 - {}^1/_2 + {}^1/_5 + {}^1/_7 - {}^1/_4 + {}^1/_9 + {}^1/_{11} - {}^1/_6 + \ldots = {}^3/_2 \log 2.$$

Теорема 2. Сложенiе рядовъ. Если ряды u_n и v_n абсолютно сходящiеся, то и новый рядъ

$$w_n = u_n + v_n$$

оказывается абсолютно сходящимся и имѣетъ суммою $S + S'$, гдѣ S и S' суммы рядовъ u_n и v_n.

Докажемъ, что рядъ w_n абсолютно сходящiйся. Положимъ, что суммы $(n+1)$ первыхъ членовъ:

$$
\begin{array}{lllll}
\textit{ряда} & u_n & \ldots\ldots & S_n & = u_0 + u_1 + \ldots\ldots + u_n \\
\text{"} & v_n & \ldots\ldots & S'_n & = v_0 + v_1 + \ldots\ldots + v_n \\
\text{"} & w_n & \ldots\ldots & S''_n & = w_0 + w_1 + \ldots\ldots + w_n,
\end{array}
$$

составимъ ряды изъ абсолютныхъ значенiй членовъ прежнихъ рядовъ $|u_n|$, $|v_n|$, $|w_n|$. Пусть суммы $(n+1)$ членовъ для этихъ рядовъ соотвѣтственно будутъ равны V_n, V'_n, V''_n. Очевидно, что мы имѣемъ неравенство

$$|w_n| \leqq |u_n| + |v_n|.$$

Отсюда слѣдуетъ

$$V''_n \leqq V_n + V'_n$$

(при суммированiи можно мѣнять порядокъ членовъ, такъ какъ ряды абсолютно сходящiеся). Переходя къ предѣлу, получимъ:

$$V'' \leqq V + V',$$

отсюда V'' - число конечное, слѣдовательно, рядъ $|w_n|$ сходящiйся.

Докажемъ, что $S'' = S + S'$. Напишемъ сумму n первыхъ членовъ рядъ w_n:

$$S''_n = S_n + S'_n;$$

и здѣсь порядокъ членовъ можно мѣнять вслѣдствiе абсолютной сходимости. Вычтя изъ обѣихъ частей равенства $S + S'$, получимъ

$$S''_n - (S+S') = (S_n - S) + (S'_n - S')$$

и далѣе

$$\left[S_n'' - (S+S')\right] \leq \left[S_n - S\right] + \left[S_n' - S'\right] < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Откуда слѣдуетъ

$$\textit{Пред. } S_n'' = S'' = S + S'.$$

Примѣръ. Разложить дробь

$$\frac{3 - x}{2 - x - x^2}$$

въ рядъ по цѣлымъ положительнымъ степенямъ x.

Разложивъ данную дробь на простѣйшія, находимъ

$$\frac{3 - x}{2-x-x^2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1 - x} + \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{2 + x}.$$

Полученныя дроби разложимъ въ ряды. Имѣемъ:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1 - x} = \frac{2}{3} (1 + x + x^2 + x^3 + \ldots .)$$

- абсолютно сходящійся рядъ при $|x| < 1$;

$$\frac{5}{3} \cdot \frac{1}{2 + x} = \frac{5}{6} \left[1 - \frac{x}{2} + (\frac{x}{2})^2 - (\frac{x}{2})^2 + \ldots .\right]$$

- абсолютно сходящійся рядъ при $|x| < 2$. Отсюда, на основаніи предыдущей теоремы, такъ какъ оба ряда оказываются абсолютно сходящимися при $|x| < 1$, находимъ:

$$\frac{3 - x}{2 - x - x^2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{4} x + \frac{7}{8} x^2 + \ldots . \quad \text{при } |x| < 1.$$

Общій членъ этого ряда будетъ:

$$u_n = x^n \left[\frac{2}{3} + \frac{5}{6} \cdot \frac{(-1)^n}{2^n} \right].$$

Теорема 3. Умноженіе рядовъ. Если ряды u_n и v_n оказываются абсолютно сходящимися и имѣютъ суммами S и S', то новый рядъ

$$w_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + u_2 v_{n-2} + \ldots + u_{n-1} v_1 + u_n v_0$$

также абсолютно сходящійся и имѣетъ суммою

$$S'' = S.S'.$$

Обозначимъ суммы $(n+1)$ первыхъ членовъ и суммы всего ряда такъ:

$$\begin{array}{llll} \textit{для ряда} & u_n: & S_n, & S \\ \text{"} \quad \text{"} & v_n: & S'_n, & S' \\ \text{"} \quad \text{"} & w_n: & S''_n, & S''. \end{array}$$

Для рядовъ, составленныхъ изъ абсолютныхъ значеній членовъ предъидущихъ рядовъ, введемъ подобныя же обозначенія:

$$\begin{array}{llll} \textit{для} & |u_n|: & V_n, & V \\ \text{"} & |v_n|: & V'_n, & V' \\ \text{"} & |w_n|: & V''_n, & V''; \end{array}$$

составимъ еще новый рядъ

$$\bar{w}_n = |u_0|.|v_n| + |u_1|.|v_{n-1}| + \ldots + |u_n|.|v_0|,$$

суммы котораго обозначимъ $\bar{V}''_n$ и $\bar{V}''$. Докажемъ, что рядъ w_n абсолютно сходящійся. Такъ какъ

$$|w_n| < \bar{w}_n,$$

то достаточно доказать, что рядъ $\bar{w}_n$ сходящійся. Сумма $(n+1)$ первыхъ членовъ этого ряда

$$\bar{V}''_n = \Sigma\, |u_i|.|v_j| \quad \text{при} \quad i \leqq n,\ j \leqq n,\ i+j \leqq n.$$

Составимъ теперь произведеніе

$$V_n \,.\, V'_n = \Sigma\, |u_i| \,.\, |v_j|$$

при условіяхъ

$$i \leqq n, \quad j \leqq n, \quad i + j \leqq 2n.$$

Вычитаніе даетъ

$$V_n.\bar{V}'_n - \bar{V}''_n = \Sigma\, \left|u_i\right| \,.\, \left|v_j\right| > 0$$

при

$$i \leqq n, \quad j \leqq n, \quad i + j > n.$$

Слѣдовательно

$$\bar{V}'' < V_n.V'_n$$

и въ предѣлѣ

$$\bar{V}'' \leqq V.V'.$$

Отсюда заключаемъ, что сумма $\bar{V}''$ конечная, и рядъ $\bar{w}_n$ сходящійся. Рядъ $|w_n|$ также сходящійся, а потому w_n - абсолютно сходящійся. Докажемъ теперь, что $S'' = S.S'$. Если всѣ члены ряда u_i и v_j положительны, то составляемъ:

1) $S_n.S_n' = \Sigma u_i v_j$ при $i \leqq n$, $j \leqq n$, $i+j \leqq 2n$

2) $S_n'' = \Sigma u_i v_j$ " $i \leqq n$, $j \leqq n$, $i+j \leqq n$

Отсюда

$$S_n . S_n' - S_n'' = \Sigma u_i v_j$$

при

$$i \leqq n, \; j \leqq n, \; i+j > n,$$

и такъ какъ всѣ $u_i v_j > 0$, то

$$S_n S_n' > S_n''.$$

Составимъ произведеніе 3) $S_m.S_m'$ при $m = \frac{n}{2}$ или $\frac{n-1}{2}$, смотря по тому, будетъ ли n четное или нечетное; имѣемъ

3) $S_m.S_m' = \Sigma u_i v_j$ при $i \leqq m$, $j \leqq m$, $i+j \leqq n$.

Вычитая это произведеніе изъ S_n'', получимъ

$$S_n'' - S_m.S_m' = \Sigma u_i v_j > 0$$

при

$$i \text{ или } j > m, \; i+j \leqq n$$

и такъ какъ всѣ $u_i v_j > 0$, то

$$S_n'' > S_m.S_m'.$$

Теперь имѣемъ:

$$S_m . S_m' < S_n'' < S_n . S_n'.$$

Въ предѣлѣ при $n = \infty$ и $m = \infty$ получимъ

$$S.S' \leqq S'' \leqq S.S'.$$

Откуда

$$S'' = S.S',$$

что и требовалось доказать.

Если члены u_i и v_j не всѣ одного знака, то изъ равенстна

$$S_n \cdot S'_n - S''_n = \Sigma u_i v_j \qquad (i \leqq n,\ j \leqq n,\ i+j > n)$$

находимъ

$$\left|S_n \cdot S'_n - S''_n\right| \leqq \Sigma \left|u_i\right| \cdot \left|v_j\right| \ (i \leqq n,\ j \leqq n,\ i+j > n) =$$

$$= V_n \cdot V'_n - \overline{V}''_n < \varepsilon,$$

такъ какъ для рядовъ съ положительными членами $|u_n|$ и $|v_n|$ доказано, что

$$\underset{n=\infty}{\textit{Пред.}} \overline{V}''_n = V \cdot V'.$$

Слѣдовательно

$$\underset{n=\infty}{\textit{Пред.}} S''_n = \underset{n=\infty}{\textit{Пред.}} (S_n \cdot S'_n)$$

и

$$S'' = S \cdot S'.$$

Слѣдствіе. Для рядовъ, расположенныхъ по цѣлымъ положительнымъ степенямъ x:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots .$$

$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n + \ldots .$$

перемноженіе производится такъ же, какъ перемноженіе многочленовъ, такъ какъ по предыдущей теоремѣ общій членъ ряда, полученнаго отъ перемноженія ихъ, будетъ:

$$w_n = a_0 \cdot b_n x^n + a_1 x \cdot b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} \cdot b_1 x +$$

$$+ a_n x^n \cdot b_0 = x^n (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0).$$

Если мы имѣемъ дробную функцію

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)},$$

причемъ числитель и знаменатель ея раскладываются въ ряды по цѣлымъ положительнымъ степенямъ x:

$$\varphi(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots.$$

$$\psi(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots,$$

то и частное ихъ $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ можно разложить въ рядъ по цѣлымъ положительнымъ степенямъ x. Положимъ

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n + \dots,$$

отсюда

$$\varphi(x) = \psi(x).(c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n + \dots).$$

Произведя въ правой части перемноженіе рядовъ и приравнивая затѣмъ коэффиціенты при одинаковыхъ степеняхъ x въ обѣихъ частяхъ равенства, получимъ рядъ уравненій:

$$a_0 = b_0c_0$$

$$a_1 = b_0c_1 + b_1c_0$$

$$a_2 = b_0c_2 + b_1c_1 + b_2c_0;$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$a_n = b_0c_n + b_1c_{n-1} + \dots + b_nc_0$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

изъ которыхъ коэффиціенты

$$c_0, c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$$

послѣдовательно могутъ быть опредѣлены.

Что касается до предѣловъ сходимости новаго ряда

$$c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots.$$

то они опредѣляются слѣдующимъ образомъ. Пусть рядъ

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$$

остается абсолютно сходящимся при $|x| \leqq l_1$, рядъ

$$b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots$$

остается абсолютно сходящимся при $|x| \leqq l_2$; пусть еще наименьшее численное значеніе x, при которомъ $\psi(x) = 0$, будетъ

$$|x|_0 = l_3.$$

Тогда, выбравъ наименьшее изъ трехъ чиселъ l_1, l_2, l_3 и назвавъ его l, будемъ имѣть при $-l < x < l$ рядъ

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots.$$

абсолютно сходящимся.

Добавимъ еще, что такъ какъ для цѣлыхъ рядовъ сохраняетъ силу правило умноженія многочленовъ, то и для дѣленія цѣлыхъ рядовъ

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots.$$

$$\psi(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots.$$

можно приложить правило дѣленія многочленовъ, расположенныхъ по возрастающимъ степенямъ x, и тогда частное даетъ намъ рядъ

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots,$$

но при такомъ способѣ мы не будемъ знать закона составленія коэффиціентовъ $c_0, c_1, c_2, \dots.$

Примѣръ. Разложить $\operatorname{tg}x$ по цѣлымъ положительнымъ степенямъ x.

Такъ какъ

$$\operatorname{tg}x = \frac{\operatorname{Sin}x}{\operatorname{Cos}x},$$

причемъ $\operatorname{Sin}x$ и $\operatorname{Cos}x$ раскладываются въ ряды, сходящіеся при всѣхъ x, и $\operatorname{Cos}x$ обращается въ нуль при $x = \pi/2$, то рядъ, получаемый для $\operatorname{tg}x$, будетъ сходящимся при

$$|x| < \pi/2.$$

Находимъ его дѣленіемъ:

$$\begin{array}{l|l}
\operatorname{Sin}x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \dots & 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \dots = \operatorname{Cos}x \\
\hline
\quad x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{24}x^5 \dots & x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 \dots \\
\hline
\end{array}$$

$$\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5 \ldots.$$

$$\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^5 \ldots.$$

$$\frac{2}{15}x^5 \ldots.$$

$$\frac{2}{15}x^5 \ldots.$$

Итакъ

$$tgx = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \ldots.$$

Если положить

$$tgx = c_1 x + c_3 x^3 + c_5 x^5 + \ldots.$$

(какъ нечетная функція tgx должно содержать только нечетныя степени x), то неопредѣленные коэффиціенты $c_1, c_3, c_5, \ldots$ будутъ опредѣляться изъ равенства

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots. + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1!} + \ldots. =$$

$$= \left[c_1 x + c_3 x^3 + c_5 x^5 + \ldots + c_{2n+1} x^{2n+1}\right] . \left[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots. \right.$$

$$\left. \ldots. + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} \ldots. \right].$$

Приравнивая коэффиціенты при $x, x^3, \ldots x^{2n+1}$, находимъ

$$1 = c_1$$

$$-\frac{1}{3!} = c_3 - c_1 . \frac{1}{2!}$$

$$\frac{1}{5!} = c_5 - c_3 \frac{1}{2!} + c_1 \frac{1}{4!}$$

. . . .

$$\frac{(-1)^n}{(2n+1)!} = c_{2n+1} - c_{2n-1}\frac{1}{2!} + \ldots + (-1)^n c_1 \frac{1}{2n!},$$

откуда послёдовательно можно найти $c_1, c_3, c_5, \ldots.$

ОПРЕДѢЛЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ.

§ 1.

Основная формула и нѣкоторыя ея слѣдствія.

Основною формулою опредѣленныхъ интеграловъ служитъ формула для вычисленія интеграла въ предѣлахъ отъ a до b:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

гдѣ $F(x)$ такая функція, для которой $F'(x) = f(x)$.

Слѣдствіе 1. Изъ основной формулы выводится формула

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx,$$

показывающая, что перестановка предѣловъ вызываетъ перемѣну знака.

Слѣдствіе 2. Сумма опредѣленныхъ интеграловъ

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx,$$

гдѣ бы ни лежало c.

§ 2.

Первая теорема о среднихъ величинахъ и ея слѣдствія.

Теорема Если функція $f(x$, непрерывна въ промежуткѣ

$$a \leqq x \leqq b,$$

$\varphi(x)$ конечна и знакопостоянна, то

$$\int_a^b f(x).\varphi(x)dx = f[a + \theta(b-a)].\int_a^b \varphi(x)dx,$$

гдѣ

$$0 < \theta < 1.$$

Доказательство. Положимъ, что M максимальное, а m минимальное значенiе функцiи $f(x)$ въ промежуткѣ (a, b), такъ что

$$m \leqq f(x) \leqq M;$$

функцiя $\varphi(x)$, по условiю, знакопостоянна; пусть она будетъ $\varphi(x) > 0$. Тогда, помноживъ всѣ три члена неравенства на $\varphi(x)$, получимъ

$$m\varphi(x) \leqq f(x)\varphi(x) \leqq M\varphi(x).$$

Предположимъ еще, что $a < b$. Тогда будемъ имѣть

$$\int_a^b m\varphi(x)dx \leqq \int_a^b f(x)\varphi(x)dx \leqq \int_a^b M\varphi(x)dx,$$

или, вынося m и M за знакъ интеграла, какъ постоянныя, получимъ:

$$m\int_a^b \varphi(x)dx \leqq \int_a^b f(x)\varphi(x)dx \leqq M\int_a^b \varphi(x)dx.$$

Можно положить

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = P\int_a^b \varphi(x)dx,$$

гдѣ

$$m < P < M,$$

а по непрерывности функцiи $f(x)$

$$P = f[a + \theta(b-a)], \quad \text{гдѣ} \quad 0 < \theta < 1.$$

Слѣдствiе 1. Если функцiя $f(x)$ непрерывна въ промежуткѣ $a \leqq x \leqq b$, то

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a).f[a+\theta(b-a)], \quad \text{гдѣ } 0 < \theta < 1.$$

Доказательство. Здѣсь мы имѣемъ частный случай предыдущей теоремы, когда $\varphi(x) = 1$, слѣдовательно:

$$\int_a^b f(x)dx = f[a+\theta(b-a)].\int_a^b dx = (b-a)f[a+\theta(b-a)].$$

Слѣдствіе 2. Если въ опредѣленномъ интегралѣ

$$F(x) = \int_a^x f(x)dx$$

функція $F(x)$ непрерывна въ предѣлахъ интегрированія, то производная отъ $F(x)$, какъ функціи верхняго предѣла, равна значенію подъинтегральной функціи для верхняго предѣла:

$$F'(x) = f(x);$$

подобнымъ образомъ, если въ опредѣленномъ интегралѣ

$$\Phi(x) = \int_x^b f(x)dx$$

функція $f(x)$ непрерывна въ предѣлахъ интегрированія, то производная по нижнему предѣлу

$$\Phi'(x) = -f(x),$$

т.е. значенію подъинтегральной функціи для нижняго предѣла съ обратимъ знакомъ.

Доказательство. Имѣемъ

$$F(x) = \int_a^x f(x)dx, \qquad F(x+h) = \int_a^{x+h} f(x)dx;$$

вычитая первое изъ второго, получимъ

$$F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(x)dx - \int_a^x f(x)dx = \int_x^{x+h} f(x)dx$$

въ силу слѣдствія 2 § 1, и далѣе

$$\int_x^{x+h} f(x)dx = h.f(x+\theta h)$$

по слѣдствію 1 § 2. Раздѣливъ обѣ части равенства на h, найдемъ

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x+\theta h)$$

$$\underset{h=0}{\textit{Пред.}} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \underset{h=0}{\textit{Пред.}} f(x+\theta h)$$

или

$$F'(x) = f(x),$$

по непрерывности функціи $f(x)$.

Для доказательства второй части слѣдствія имѣемъ на основаніи слѣдствія 1-го § 1:

$$\Phi(x) = -\int_b^x f(x)dx,$$

откуда въ силу доказаннаго выше

$$\Phi'(x) = -f(x).$$

§ 3.

Вторая теорема о среднихъ величинахъ.

Теорема. Если функція $\varphi(x)$ остается монотонной (т.е. все время возрастающей или все время убывающей) при

$$a \leqq x \leqq b,$$

и если функція $f(x)$ допускаетъ интегрированіе при $a \leqq x \leqq b$ въ томъ смыслѣ, что интегралъ

$$\int_a^x f(x)dx$$

представляетъ непрерывную функцію отъ x при всякомъ x между a и b), то имѣетъ мѣсто формула

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = \varphi(a)\int_a^\xi f(x)dx + \varphi(b)\int_\xi^b f(x)dx,$$

гдѣ

$$a < \xi < b.$$

Доказательство. Положимъ

$$\int_a^x f(x)dx = F(x),$$

такъ что

$$f(x) = F'(x)$$

и разсмотримъ интегралъ

$$\int_a^b F(x)\varphi'(x)dx,$$

въ которомъ $F(x)$ есть непрерывная, а $\varphi'(x)$ знакопостоянная функція отъ x.

Примѣняя къ нему 1-ую теорему о среднихъ величинахъ, имѣемъ:

$$\int_a^b F(x)\varphi'(x)dx = F(\xi).\int_a^b \varphi'(x)dx = F(\xi).[\varphi(b) - \varphi(a)],$$

гдѣ

$$a < \xi < b.$$

Интегрируя по частямъ, находимъ

$$\int_a^b F(x)\varphi'(x)dx = \Big[F(x).\varphi(x)\Big]_a^b - \int_a^b F'(x)\varphi(x)dx,$$

послѣ чего предыдущее равенство даетъ:

$$\int_a^b F'(x)\varphi(x)dx = \Big[F(x).\varphi(x)\Big]_a^b - F(\xi).\Big[\varphi(b) - \varphi(a)\Big] =$$

$$= F(b)\varphi(b) - F(a)\varphi(a) - F(\xi)\varphi(b) + F(\xi)\varphi(a) =$$

$$= \varphi(a).\Big[F(\xi) - F(a)\Big] + \varphi(b).\Big[F(b) - F(\xi)\Big],$$

но

$$F(\xi) - F(a) = \int_a^\xi f(x)dx \qquad (F(a) = 0),$$

$$F(b) - F(\xi) = \int_a^b f(x)dx - \int_a^{\xi} f(x)dx = \int_{\xi}^b f(x)dx,$$

$$F'(x) = f(x),$$

слѣдовательно получаемъ

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = \varphi(a).\int_a^{\xi} f(x)dx + \varphi(b).\int_{\xi}^b f(x)dx.$$

Замѣчаніе. Формула III продолжаетъ существовать и тогда, когда $f(x)$ имѣетъ въ промежуткѣ $a \leqq x \leqq b$ конечный разрывъ, или обращается въ безконечность, лишь бы интегралы

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx \quad \text{и} \quad \int_a^x f(x)dx,$$

гдѣ

$$a \leqq x \leqq b,$$

имѣли конечно опредѣленное значеніе. Точно также функція $\varphi(x)$ можетъ имѣть конечные разрывы въ промежуткѣ $a \leqq x \leqq b$ и въ частности, если такіе разрывы существуютъ при $x = a$ и при $x = b$, то формула III пишется въ видѣ

Черт. 231.

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = \varphi(a+0)\int_a^{\xi} f(x)dx + \varphi(b-0)\int_{\xi}^b f(x)dx.$$

§ 4.

Способъ подстановки и способъ интегрированія по частямъ въ опредѣленныхъ интегралахъ.

Теорема. Если при вычисленіи опредѣленнаго интеграла

$$\int_a^b f(x)dx$$

дѣлается подстановка $y = \varphi(x)$, $x = \psi(y)$, то формула

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f[\psi(y)]\psi'(y)dy$$

справедлива вообще лишь тогда, когда $y = \varphi(x)$ представляетъ монотонную и непрерывную функцію отъ x въ промежуткѣ

$$a \leqq x \leqq b.$$

Примѣръ 1. Вычислить

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{Sin}^2 x\, dx.$$

Дѣлая подстановку $y = \operatorname{Sin}x$, получимъ

$$x = \operatorname{arcSin}y,$$

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

Отсюда неопредѣленный интегралъ будетъ

$$\int \operatorname{Sin}^2 x\, dx = \int \frac{y^2 dy}{\sqrt{1 - y^2}};$$

это правильная формула. Если мы возьмемъ опредѣленный интегралъ въ предѣлахъ отъ 0 до 2π, то получимъ невѣрный результатъ

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{Sin}^2 x\, dx = \int_{\operatorname{Sin}0=0}^{\operatorname{Sin}2\pi=0} \frac{y^2 dy}{\sqrt{1 - y^2}} = 0,$$

между тѣмъ какъ $\int_0^{2\pi} \operatorname{Sin}^2 x\, dx$ очевидно число положительное.

Ошибка произошла отъ того, что функція $y = \operatorname{Sin}x$ не монотонна при $0 \leqq x \leqq 2\pi$. Именно въ промежуткѣ $0 < x < \pi/2$ она возрастаетъ отъ 0 до 1 и

$g'(x) = 1$
$g' = \sqrt{1-y^2}$

$$dx = \frac{dy}{+\sqrt{1 - y^2}},$$

такъ какъ $\sqrt{1 - y^2} = \operatorname{Cos}x > 0$; при $\pi/2 \leqq x \leqq 3\pi/2$ функція убываетъ и

$$dx = \frac{dy}{-\sqrt{1-y^2}},$$

такъ какъ $\cos x < 0$. Наконецъ, въ промежуткѣ $\frac{3\pi}{2} \leq x \leq 2\pi$ функція возрастаетъ отъ -1 до 0 и

$$dx = \frac{dy}{+\sqrt{1-y^2}},$$

такъ какъ $\cos x > 0$. Поэтому правильная формула будетъ

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 x\, dx = \int_0^{\pi/2} \sin^2 x\, dx + \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \sin^2 x\, dx + \int_{3\pi/2}^{2\pi} \sin^2 x dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{y^2 dy}{\sqrt{1-y^2}} - \int_1^{-1} \frac{y^2 dy}{\sqrt{1-y^2}} + \int_{-1}^0 \frac{y^2 dy}{\sqrt{1-y^2}} = 2\int_{-1}^{+1} \frac{y^2 dy}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Примѣръ 2. Вычислить

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{1+\cos^2 x}.$$

Положивъ

$$y = \operatorname{tg} x, \quad dy = \frac{dx}{\cos^2 x},$$

имѣемъ

$$\frac{dx}{1+\cos^2 x} = \frac{dy}{2+y^2},$$

откуда

$$\int \frac{dx}{1+\cos^2 x} = \int \frac{dy}{2+y^2}.$$

Въ неопредѣленныхъ интегралахъ эта формула правильная; но если мы возьмемъ

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{1+\cos^2 x},$$

то предѣлы для y будутъ:

$$y = \operatorname{tg} 0 = 0, \qquad y = \operatorname{tg}\pi = 0,$$

и получается невѣрная формула:

$$\int_0^\pi \frac{dx}{1+\cos^2 x} = \int_0^0 \frac{dy}{2+y^2} = 0,$$

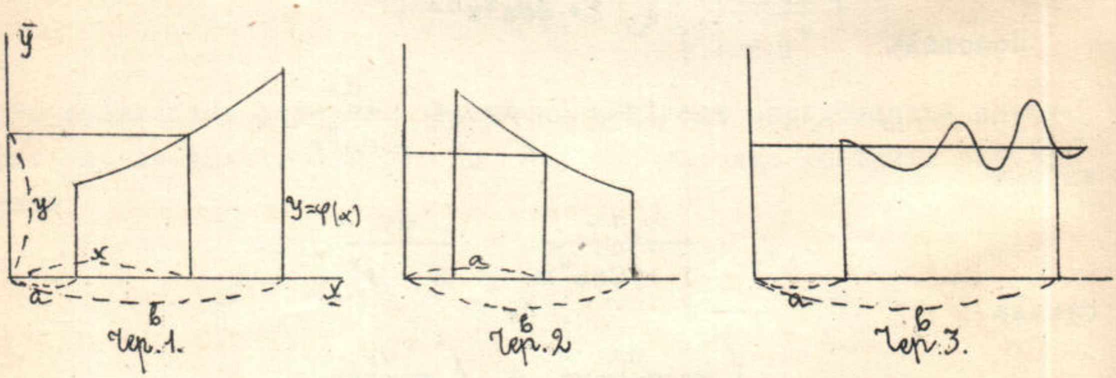
тогда какъ, очевидно, лѣвый интегралъ число положительное. Причина ошибки въ томъ, что въ промежуткѣ $0 \leqq x \leqq \pi$ функція $y = \operatorname{tg} x$ претерпѣваетъ разрывъ при $x = \pi/_2$. Правильная формула будетъ такая:

$$\int_0^\pi \frac{dx}{1+\cos^2 x} = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\cos^2 x} + \int_{\pi/2}^\pi \frac{dx}{1+\cos^2 x} = \int_0^\infty \frac{dy}{2+y^2} +$$

$$+ \int_{-\infty}^0 \frac{dy}{2+y^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \operatorname{arc}(\operatorname{tg} \frac{y}{\sqrt{2}}) \right|_0^\infty + \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \operatorname{arctg}(\frac{y}{\sqrt{2}}) \right|_{-\infty}^0 =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \pi/_2 + \pi/_2 \right| = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Для доказательства теоремы замѣтимъ, что вообще, если $y = \varphi(x)$ монотонная и непрерывная функція отъ x во всемъ промежуткѣ $a \leqq x \leqq b$, то $x = \psi(y)$ оказывается однозначной и непрерывной функціей отъ y (на чертежѣ 1 и 2 данному значенію y отвѣчаетъ одно значеніе x), и тогда можно прилагать формулу преобразованія перемѣнной сразу для всего интервала



Черт. 222.

(a, b); если же въ интервалѣ (a, b) $\varphi(x)$ имѣетъ maxima и minima или претерпѣваетъ разрывы, то x оказывается многозначной функціей отъ y (на черт. 3 данному y отвѣчаетъ нѣсколько значеній x), и тогда нужно предварительно разбить промежутокъ (a, b) на части такъ, чтобы въ каждой части функція $y = \varphi(x)$ была монотонна и непрерывна, и слѣдовательно $x = \psi(y)$

однозначна и непрерывна.

Выводъ формулы интегрированія помощью подстановки.

Имѣемъ

$$\int_a^b f(x)dx = \textit{Пред.}\Sigma\, f(x_i)\Delta x_i.$$

Положимъ $x = \psi(y)$, причемъ x должно быть однозначной и непрерывной функціей отъ y. Тогда будемъ имѣть

$$f(x) = f[\psi(y_i)],$$

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = \psi(y_{i+1}) - \psi(y_i)$$

и далѣе по формулѣ Лагранжа:

$$\Delta x_i = (y_{i+1}-y_i)\psi'[y+\theta(y_{i+1}-y_i)] = (y_{i+1}-y_i)[\psi'(y_i)+\varepsilon_i].$$

Обозначая

$$y_{i+1} - y_i = \Delta y_i$$

и подставляя въ выраженіе интеграла, какъ предѣла суммы, величину $\Delta y_i . \psi'(y_i)$, эквивалентную Δx_i, получимъ

$$\int_a^b f(x)dx = \textit{Пред.}\Sigma f[\psi(y_i)]\psi'(y_i)\Delta y_i = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f[\psi(y)]\psi'(y)dy.$$

Теорема. Интегралъ въ предѣлахъ отъ $-a$ до $+a$:

$$\int_{-a}^{+a} f(x)dx = \begin{cases} 0, & \textit{если } f(x) \textit{ нечетная функція;} \\ 2\int_0^a f(x)dx, & \textit{если } f(x) \textit{ четная функція.} \end{cases}$$

Доказательство. Имѣемъ:

$$\int_{-a}^{+a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_0^a f(x)dx,$$

но при $x = -y$ первое слагаемое обращается въ

$$-\int_{a}^{0} f(-y)dy = \int_0^a f(-y)dy = \int_0^a f(-x)dx$$

(здѣсь мы замѣняемъ y на x *не мѣняя предѣловъ*, а въ такомъ случаѣ букву x можно замѣнить на y, z, t и любую другую безъ перемѣны величины интеграла); такимъ образомъ

$$\int_{-a}^{+a} f(x)dx = \int_0^a [f(x)+f(-x)]dx = \begin{cases} 0 \quad \textit{при} \quad f(-x) = -f(x), \\ \textit{т. е. при} \quad f(x) \quad \textit{нечетной}; \\ 2\int_0^a f(x)dx \quad \textit{при} \quad f(-x) = \\ = f(x), \quad \textit{т. е. при} \ f(x) \ \textit{чет.} \end{cases}$$

Формула интегрированія по частямъ въ опредѣленныхъ интегралахъ.

Для опредѣленныхъ интеграловъ существуетъ также формула интегрированія по частямъ, аналогичная формулѣ

$$\int udv = uv - \int vdu$$

для неопредѣленныхъ интеграловъ. Она выводится слѣдующимъ образомъ. Имѣемъ

$$d(uv) = udv + vdu.$$

Интегрируя въ предѣлахъ отъ a до b, получимъ

$$\int_a^b d(uv) = \int_a^b udv + \int_a^b vdu,$$

или

$$\Big|uv\Big|_a^b = \int_a^b udv + \int_a^b vdu,$$

откуда

$$\int_a^b udv = \Big|uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu.$$

Примѣръ. Возьмемъ интегралъ

$$I_k = \int_0^{\pi/2} \mathrm{Sin}^k x\, dx$$

при k цѣломъ положительномъ и $\geqq 2$.

$$I_k = \int_0^{\pi/2} \mathrm{Sin}^k x\, dx = \int_0^{\pi/2} \mathrm{Sin}^{k-1} x . d(-\mathrm{Cos} x) =$$

$$= \left[\mathrm{Sin}^{k-1} x . -\mathrm{Cos} x\right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} (k-1) \mathrm{Sin}^{k-2} x . \mathrm{Cos}^2 x dx =$$

$$= (k-1) . \left[\int_0^{\pi/2} \mathrm{Sin}^{k-2} x\, dx - \int_0^{\pi/2} \mathrm{Sin}^k x\, dx \right] =$$

$$= (k-1)\, [I_{k-2} - I_k],$$

откуда

$$k\, I_k = (k-1) I_{k-2}$$

и

$$I_k = \frac{k-1}{k}\, I_{k-2}\ .$$

Это будетъ формула приведенія для интеграловъ

При k четномъ: $K = 2n$ находимъ послѣдовательно

$$I_{2n} = \frac{2n-1}{2n}\, I_{2n-2}$$

$$I_{2n-2} = \frac{2n-3}{2n-2}\, I_{2n-4}$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$I_4 = {}^3/_4\, I_2$$

$$I_2 = {}^1/_2\, I_0 = {}^1/_2 \int_0^{\pi/2} dx = {}^1/_2 . \frac{\pi}{2},$$

откуда, послѣ перемноженія:

$$I_{2n} = \frac{1.3.5 \ldots 2n-1}{2.4.6 \ldots 2n} . \frac{\pi}{2}\ .$$

При k нечетномъ: $k = 2n + 1$

$$I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1}\, I_{2n-1}$$

$$I_{2n-1} = \frac{2n-2}{2n-1} I_{2n-3}$$

$$\dots\dots\dots$$

$$I_5 = {}^4/_5\, I_3$$

$$I_3 = {}^2/_3\, I_1$$

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \operatorname{Sin} x\, dx = 1$$

и после перемноженія

$$I_{2n+1} = \frac{2.4.6\dots 2n}{3.5.7\dots 2n+1}.$$

Отмѣтимъ, что

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{Cos}^k x\, dx = \int_0^{\pi/2} \operatorname{Sin}^k x\, dx.$$

Дѣйствительно, полагая $x = \frac{\pi}{2} - y$, $dx = -dy$ и мѣняя предѣлы (при $x = 0$ будетъ $y = {}^{\pi}/_2$, при $x = {}^{\pi}/_2 \dots y = 0$), имѣемъ:

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{Cos}^k x\, dx = -\int_{\pi/2}^{0} \operatorname{Sin}^k y\, dy = \int_0^{\pi/2} \operatorname{Sin}^k y\, dy =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \operatorname{Sin}^k x\, dx.$$

Поэтому

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{Cos}^{2n} x\, dx = \frac{1.3\dots 2n-1}{2.4\dots 2n} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{Cos}^{2n+1} x\, dx = \frac{2.4\dots 2n}{3.5\dots 2n+1}.$$

при

§ 5.

Интегралы съ безконечными предѣлами.

Признакъ Коши конечности такихъ интеграловъ.

Опредѣленіе. Интеграломъ въ предѣлахъ отъ a до $+\infty$ называется предѣлъ интеграла въ предѣлахъ отъ a до b при $b = +\infty$:

$$\int_a^\infty f(x)dx = \text{Пред.}_{b=\infty}\int_a^b f(x)dx.$$

Подобнымъ же образомъ имѣемъ:

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \text{Пред.}_{a=-\infty}\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \text{Пред.}_{a=\infty}\int_{-a}^{+a} f(x)dx.$$

Примѣръ 1.

$$\int_0^\infty e^{-ax}dx = \text{Пред.}_{b=\infty}\int_0^b e^{-ax}dx = \left[\frac{e^{-ax}}{-a}\right]_0^b = \quad (a>0)$$

$$= \text{Пред.}_{b=\infty}\left(\frac{1}{a} - \frac{e^{-ab}}{a}\right) = \frac{1}{a}.$$

Примѣръ 2.

$$\int_0^\infty e^{-ax}\operatorname{Cos} bx\,dx = \text{Пред.}_{c=\infty}\int_0^c e^{-ax}\operatorname{Cos} bx\,dx = \quad (a>0)$$

$$= \text{Пред.}_{c=\infty}\left[e^{-ax}\cdot\frac{-a\operatorname{Cos} bx + b\operatorname{Sin} bx}{a^2+b^2}\right]_0^c = \frac{a}{a^2+b^2}.$$

Примѣръ 3.

$$\int_0^\infty e^{-ax}\operatorname{Sin} bx\,dx = \text{Пред.}_{c=\infty}\left[e^{-ax}\cdot\frac{-a\operatorname{Sin} bx - b\operatorname{Cos} bx}{a^2+b^2}\right]_0^c =$$

$$= \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

Въ тѣхъ случаяхъ, когда мы не можемъ найти неопредѣленный интегралъ, для рѣшенія вопроса о конечности опредѣленнаго интеграла служитъ слѣдующая теорема Cauchy.

Теорема. Если въ интегралѣ $\int_a^\infty f(x)dx$ можно представить $f(x)$ въ видѣ $f(x) = \frac{\varphi(x)}{x^\alpha}$, причемъ $\alpha > 1$, а $|\varphi(x)| \leqq A$ (число конечное) для всѣхъ достаточно большихъ x: $x \geqq x_0$, то интегралъ имѣетъ конечное значеніе.

Если же $\alpha \leqq 1$, $\varphi(x)$ при достаточно большихъ $x \geqq x_0$ сохраняетъ постоянный знакъ и остается численно $\geqq A_1$, то интегралъ не имѣетъ опредѣленнаго значенія ($=\infty$).

Доказательство. 1°. Случай $\alpha > 1$. Пусть при $x \geqq x_0$ — $f(x) = \frac{\varphi(x)}{x^\alpha}$, причемъ $|\varphi(x)| \leqq A$. Тогда, разбивъ интегралъ въ предѣлахъ отъ a до b на два интеграла съ предѣлами (a, x_0) и (x_0, b), получимъ $\int_a^b f(x)dx = \int_a^{x_0} f(x)dx + \int_{x_0}^b f(x)dx$, причемъ 1-ое слагаемое конечное и

$$\text{Пред.}_{b=\infty} \int_a^b f(x)dx = \int_a^{x_0} f(x)dx + \text{Пред.}_{b=\infty} \int_{x_0}^b f(x)dx \ldots (\times).$$

Въ силу поставленнаго выше условія имѣемъ:

$$\int_{x_0}^b f(x)dx = \int_{x_0}^b \frac{\varphi(x)}{x^\alpha} dx.$$

Переходя къ абсолютнымъ значеніямъ, найдемъ:

$$\left[\int_a^b f(x)dx\right] = \left[\int_{x_0}^b \frac{\varphi(x)}{x^\alpha} dx\right] \leqq \int_{x_0}^b \frac{|\varphi(x)|}{x^\alpha} dx \leqq A \int_{x_0}^b \frac{dx}{x^\alpha} =$$

$$= A\left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_{x_0}^b = A\,\frac{x_0^{-\alpha+1} - b^{-\alpha+1}}{\alpha - 1},$$

$$\text{Пред.}_{b=\infty}\left[\int_{x_0}^b f(x)dx\right] \leqq A.\,\text{Пред.}_{b=\infty} \frac{x_0^{-\alpha+1} - b^{-\alpha+1}}{\alpha - 1} = \frac{A.x_0^{-\alpha+1}}{\alpha - 1}.$$

Итакъ, изъ формулы (×) находимъ, что *Пред.* $\lim_{b=\infty}\int_a^b f(x)dx$ = конечному числу.

2°. Случай $\alpha \leqq 1$. Положимъ для опредѣленности $\varphi(x) > 0$ и при $x \geqq x_0$ $\varphi(x) \geqq A_1$. Тогда будемъ имѣть:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{x_0} f(x)dx + \int_{x_0}^b f(x)dx,$$

причемъ первый интегралъ конечное число. Далѣе

$$\int_{x_0}^b f(x)dx = \int_{x_0}^b \frac{\varphi(x)}{x^\alpha}dx \geqq A_1\int_{x_0}^b \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} A_1 \lg\dfrac{b}{x_0}, & \text{если } \alpha = 1 \\ A_1\dfrac{b^{1-\alpha}-x_0^{1-\alpha}}{1-\alpha}, & \text{если } \alpha<1. \end{cases}$$

Такъ какъ при $\alpha = 1$ и при $\alpha < 1$

$$\mathit{Пред.}_{b=\infty}\int_{x_0}^b f(x)dx = \infty, \text{ то и } \mathit{Пред.}_{b=\infty}\int_a^b f(x)dx = \infty.$$

Примѣръ 1. Доказать, что $\int_1^\infty e^{-x}x^{n-1}dx$ конечный при всякихъ n. Въ самомъ дѣлѣ, положимъ:

$$f(x) = \frac{e^{-x}x^{n+\alpha-1}}{x^\alpha} = \frac{\varphi(x)}{x^\alpha},$$

причемъ возьмемъ $\alpha>1$. Здѣсь $\varphi(x) = e^{-x}x^{n+\alpha-1}$ и *Пр.*$_{x=\infty}\varphi(x) =$ $= 0$ при всякомъ n; поэтому при достаточно большихъ x: $x \geqq x_0$ имѣемъ $|\varphi(x)| < A_1$ и на основанiи теоремы заключаемъ, что интегралъ конечный при всякихъ n.

Примѣръ 2. При какихъ значенiяхъ p интегралъ $\int_1^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x}dx$ конечный? Въ предложенномъ интегралѣ подъинтегральная функцiя

$$f(x) = \frac{x^{p-1}}{1+x} = \frac{x^{p-2}}{1+\frac{1}{x}} = \frac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^{2-p}} = \frac{\varphi(x)}{x^{2-p}}.$$

Функцiя $\varphi(x) = \dfrac{1}{1+\frac{1}{x}}$ при $x = \infty$ стремится къ предѣльному значенiю - единицѣ; при $x \geqq x_0$ $|\varphi(x)| \leqq 1$. Слѣдовательно, интеграль будеть имѣть конечное значеніе при $\alpha = 2 - \rho > 1$, т.е. при $\rho < 1$; напротивъ, онъ будетъ безконечнымъ при $2 - \rho = \alpha \leqq 1$, т.е. при $\rho \geqq 1$, такъ какъ функція $\varphi(x)$ все время остается положительной и численно $\geqq 1/2$.

§ 6.

Интегралы, въ которыхъ подъинтегральная функція обращается въ безконечность въ предѣлахъ интегрированія.

Опредѣленіе. Если $f(b) = \infty$, то $\int_a^b f(x)dx = \underset{\varepsilon=0}{\text{Пр.}} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$.
Если $f(a) = \infty$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \underset{\varepsilon=0}{\text{пред.}} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx.$$

Если $f(c) = \infty$, гдѣ $a < c < b$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \underset{\varepsilon=0}{\text{Пред.}} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \underset{\eta=0}{\text{Пред.}} \int_{c+\eta}^b f(x)dx,$$

причемъ предѣлы не должны зависѣть отъ закона убыванія ε и η.

Примѣръ 1.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \underset{\varepsilon=0}{\text{Пред.}} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \underset{\varepsilon=0}{\text{Пред.}} \Big[(\arcsin x)\Big]_0^{1-\varepsilon} =$$

$$= \underset{\varepsilon=0}{\text{Пред.}} \Big[\arcsin(1-\varepsilon)\Big] = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.$$

Примѣръ 2.

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x} = \underset{\varepsilon=0}{\text{Пред.}} \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \underset{\eta=0}{\text{Пред.}} \int_{\eta}^{+1} \frac{dx}{x} =$$

$$= \underset{\varepsilon=0,\eta=0}{\text{Пред.}} \left[\log \varepsilon + \log \frac{1}{\eta}\right] = \underset{\varepsilon=0,\eta=0}{\text{Пред.}} \left[\log \frac{\varepsilon}{\eta}\right].$$

Этотъ предѣлъ не имѣетъ опредѣленнаго значенія и зависитъ отъ закона убыванія ε и η, поэтому интегралъ $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x}$ не имѣетъ смысла. Для сужденія о конечности интеграла съ разрывомъ подъинтегральной функціи служитъ теорема Коши.

Теорема Коши. Если въ интегралѣ $\int_a^b f(x)dx$ оказывается $f(b) = \infty$ и при значеніяхъ x, удовлетворяющихъ неравенству $x_0 \leqq x \leqq b$, можно представить $f(x)$ въ видѣ $f(x) = \frac{\varphi(x)}{(b-x)^\alpha}$, причемъ $\alpha < 1$, а $\varphi(x)$ по численному значенію $|\varphi(x)| \leqq A$, гдѣ A нѣкоторое конечное число, то разсматриваемый интегралъ имѣетъ опредѣленное значеніе. Если же $\alpha \geqq 1$, а $\varphi(x)$ сохраняетъ постоянный знакъ и численно $\geqq A$, то интегралъ не имѣетъ смысла $(=\infty)$.

Доказательство. 1°. Пусть при $\alpha < 1$ для значеній x $x_0 \leqq x \leqq b$ функція $f(x)$ представляется въ видѣ $f(x) = \frac{\varphi(x)}{(b-x)^\alpha}$, причемъ $|\varphi(x)| \leqq A$. Тогда

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{x_0} f(x)dx + \underset{\varepsilon=0}{\text{Пред.}} \int_{x_0}^{b-\varepsilon} f(x)dx.$$

Первый интегралъ правой части конечный; для второго имѣемъ:

$$\underset{\varepsilon=0}{\text{Пред.}} \int_{x_0}^{b-\varepsilon} f(x)dx = \underset{\varepsilon=0}{\text{Пред.}} \int_{x_0}^{b-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{(b-x)^\alpha} dx$$

и

$$\underset{\varepsilon=0}{\text{Пред.}} \left[\int_{x_0}^{b-\varepsilon} f(x)dx\right] \leqq A.\underset{\varepsilon=0}{\text{Пред.}} \int_{x_0}^{b-\varepsilon} \frac{dx}{(b-x)^\alpha} =$$

$$= A.\underset{\varepsilon=0}{\text{Пред.}} \left[\frac{(b-x)^{-\alpha+1}}{\alpha - 1}\right]_{x_0}^{b-\varepsilon} = A.\underset{\varepsilon=0}{\text{Пред.}} \left[\frac{(b-x_0)^{-\alpha+1} - \varepsilon^{-\alpha+1}}{1-\alpha}\right] = A\,\frac{(b-x_0)^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

Такъ какъ послѣднее выраженіе имѣетъ конечное значеніе при $\alpha < 1$, то интегралъ $\int_a^b f(x)dx$ конечный.

2°. Пусть при $\alpha \geqq 1$ $f(x) = \frac{\varphi(x)}{(b-x)^\alpha}$, причемъ $\varphi(x) > 0$ и $\varphi(x) \geqq A_1$. Тогда имѣемъ:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{x_0} f(x)dx + \underset{\varepsilon=0}{\text{Пред}} \int_{x_0}^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

и

$$\underset{\varepsilon=0}{\text{Пред.}}\int_{x_0}^{b-\varepsilon} f(x)\,dx =$$

$$= \underset{\varepsilon=0}{\text{Пред.}}\int_{x_0}^{b-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{(b-x)^{\alpha}}\,dx > A_1 . \underset{\varepsilon=0}{\text{Пред.}}\int_{x_0}^{b-\varepsilon} \frac{dx}{(b-x)^{\alpha}} .$$

Если $\alpha = 1$, то

$$\underset{\varepsilon=0}{\text{Пред.}}\int_{x_0}^{b-\varepsilon} \frac{dx}{b-x} = \underset{\varepsilon=0}{\text{Пред.}} \log \frac{b-x_0}{\varepsilon} = \infty .$$

Если $\alpha > 1$, то

$$\underset{\varepsilon=0}{\text{Пред.}}\int_{x_0}^{b-\varepsilon} \frac{dx}{(b-x)^{\alpha}} = \underset{\varepsilon=0}{\text{Пред.}} \frac{\varepsilon^{-\alpha+1} - (b-x_0)^{-\alpha+1}}{\alpha - 1} = \infty .$$

Откуда

$$\int_a^b f(x)\,dx = \infty .$$

Примѣръ 1. При какихъ значеніяхъ $n < 1$ интегралъ

$$\int_0^1 e^{-x} x^{n-1}\,dx$$ имѣетъ смыслъ?

Полагая $x = 0$, имѣемъ при $n < 1$ $f(0) = \infty$. Замѣчая, что $\varphi(x) = e^{-x}$ имѣетъ конечное значеніе въ промежуткѣ $(0,1)$, представимъ $f(x)$ въ видѣ

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{x^{1-n}} .$$

По предыдущей теоремѣ предложенный интегралъ $\int_0^1 e^{-x} x^{n-1}\,dx$ имѣетъ смыслъ при $1 - n = \alpha < 1$, т.е. при всѣхъ $n > 0$. Сопоставляя этотъ результатъ съ примѣр. 1 §.5, заключаемъ, что

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^{n-1}\,dx$$ имѣетъ смыслъ при $n > 0$.

Примѣръ 2.

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx .$$

Имѣемъ при $p < 1$

$$f(0) = \infty.$$

Представляя $f(x)$ въ видѣ

$$f(x) = \frac{1}{1+x}\frac{1}{x^{1-p}},$$

такъ что

$$\varphi(x) = \frac{1}{1+x} \quad \text{и} \quad |\varphi(x)| \leqq 1,$$

находимъ условіе, при которомъ интегралъ имѣетъ смыслъ: $1-p = \alpha < 1$, откуда $p > 0$. Итакъ, предложенный интегралъ имѣетъ смыслъ при $p > 0$.

Сопоставляя этотъ результатъ съ прим. 2 §5, заключаемъ, что

$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx$ имѣетъ смыслъ при $0 < p < 1$.

Примѣръ 3.

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx.$$

При $p < 1$ подъинтегральная функція $f(x)$ обращается въ ∞ для $x = 0$, при $q < 1$ она обращается въ ∞ для $x = 1$.

При $x = 0$ представимъ $f(x)$ въ видѣ

$$f(x) = \frac{(1-x)^{q-1}}{x^{1-p}};$$

тогда

$$\varphi(x) = (1-x)^{q-1}$$

при $x = 0$ обращается въ 1, $\alpha = 1-p$, слѣдовательно, интегралъ конечный при $\alpha = 1-p < 1$, т.е. при $p > 0$. При $x = 1$ представимъ $f(x)$ въ видѣ

$$f(x) = \frac{x^{p-1}}{(1-x)^{1-q}},$$

причемъ $\varphi(x) = x^{p-1}$ остается конечной при $x = 1$ и $\alpha = 1-q$; для конечности интеграла должно быть $\alpha = 1-q < 1$, $q > 0$.

Итакъ интегралъ

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$$

имѣетъ смыслъ при $p > 0$, $q > 0$.

§ 7.

Дифференцированіе опредѣленнаго интеграла по параметру.

Теорема. Если въ интегралѣ

$$I(\alpha) = \int_a^b f(x,\alpha)dx,$$

гдѣ α параметръ, не зависящій отъ x, предѣлы a и b не зависятъ отъ α, то производная интеграла по параметру равна

$$\frac{\partial I}{\partial\alpha} = \int_a^b \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}\,dx,$$

при условіи, чтобы $\frac{\partial f}{\partial\alpha}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha^2}$ были конечными, непрерывными при разсматриваемомъ значеніи α и при всѣхъ x въ предѣлахъ отъ a до b.

Доказательство. Имѣемъ:

$$I(\alpha) = \int_a^b f(x,\alpha)dx$$

$$I(\alpha+\Delta\alpha) = \int_a^b f(x,\alpha+\Delta\alpha)dx,$$

откуда

$$I(\alpha+\Delta\alpha) - I(\alpha) = \int_a^b [f(x,\alpha+\Delta\alpha) - f(x,\alpha)]\,dx.$$

Разлагая приращеніе подъинтегральной функціи въ рядъ по степенямъ $\Delta\alpha$, получимъ:

$$I(\alpha+\Delta\alpha) - I(\alpha) = \int_a^b \left[\Delta\alpha\,\frac{\partial f}{\partial\alpha}(x,\alpha) + {}^1\!/_2\,\Delta\alpha^2\,\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} f(x,\alpha+\partial\Delta\alpha)\right]dx,$$

далѣе

$$\frac{I(\alpha+\Delta\alpha)-I(\alpha)}{\Delta\alpha}=\int_a^b \frac{\partial f}{\partial\alpha}(x,\alpha)dx+\tfrac{1}{2}\,\Delta\alpha\int_a^b\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}f(x,\alpha+\partial\Delta\alpha)dx.$$

При $\Delta\alpha = 0$ находимъ

$$\frac{\partial I}{\partial\alpha}=\int_a^b\frac{\partial f}{\partial\alpha}(x,\alpha)dx,$$

если только $\underset{\Delta\alpha=0}{\text{Пред.}}\int_a^b\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha^2}(x,\ \alpha+\partial\Delta\alpha)dx$ конечный.

Если a и b конечны, то этотъ предѣлъ равенъ

$$\int_a^b\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha^2}(x,\alpha)dx$$

и представляетъ конечное число по условію теоремы, ибо $\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha^2}$ предполагается конечной при всѣхъ x въ промежуткѣ $(a,\ b)$.

Замѣчаніе 1. Если предѣлы a и b безконечны, то для приложимости теоремы слѣдуетъ убѣдиться, что

$$\int_a^b\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha^2}(x,\alpha)dx$$

имѣетъ конечное значеніе.

Замѣчаніе 2. Если въ интегралѣ

$$I=\int_a^b f(x)dx$$

предѣлы a и b также зависятъ отъ α, то I представляетъ сложную функцію отъ α, поэтому полная производная будетъ

$$\frac{dI}{d\alpha}=\frac{\partial I}{\partial\alpha}+\frac{\partial I}{\partial b}\cdot\frac{db}{d\alpha}+\frac{\partial I}{\partial a}\cdot\frac{da}{d\alpha},$$

т.е. на основаніи настоящей теоремы и 2-го слѣдствія теоремы § 2 имѣемъ:

$$\frac{dI}{d\alpha}=\int_a^b\frac{\partial f(x,\ \alpha)}{\partial\alpha}dx+f(b,\alpha)\frac{db}{d\alpha}-f(a,\alpha)\frac{da}{d\alpha}.$$

Примѣръ 1. Возьмемъ интегралъ

$$\int_0^\infty e^{-ax}\, dx = \frac{1}{a}$$

при $a > 0$ (см. § 5). Дифференцируя его по параметру, находимъ:

$$\frac{d}{da}\int_0^\infty e^{-ax}\, dx = \int_0^\infty \frac{d}{da}(e^{-ax})\, dx = -\int_0^\infty e^{-ax}\, x dx =$$

$$= \frac{d}{da}\left(\frac{1}{a}\right) = -\frac{1}{a^2}.$$

Откуда

$$\int_0^\infty e^{-ax}\, x dx = \frac{1}{a^2}.$$

Дифференцируя еще разъ, получимъ:

$$\int_0^\infty e^{-ax}\, x^2\, dx = \frac{1.2}{a^3} \quad \text{и т. д.}$$

Результатъ n-кратнаго дифференцированія по параметру будетъ такой:

$$\int_0^\infty e^{-ax}\, x^n\, dx = \frac{1.2.3.\dots.n}{a^{n+1}}.$$

Согласно замѣчанію 1-ому нужно убѣдиться при выводѣ интеграла

$$\int_0^\infty e^{-ax}\, x\, dx$$

въ конечности интеграла

$$\int_0^\infty \frac{\partial^2 f}{\partial a^2}\, dx = \int_0^\infty e^{-ax}\, x^2\, dx,$$

но этотъ интегралъ имѣетъ конечное значеніе, согласно примѣчанію 1 § 6.

Примѣръ 2.

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+\alpha} = \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\alpha}\right)_0^\infty = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \cdot \frac{\pi}{2} \quad \text{при} \quad \alpha > 0.$$

Дифференцируя по α, имѣемъ:

$$\int_0^\infty -\frac{dx}{(x^2+\alpha)^2} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{-1}{2\alpha^{3/2}};$$

откуда

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+\alpha)^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\alpha^{3/2}}.$$

Дифференцируя еще разъ, имѣемъ:

$$\int_0^\infty -\frac{2dx}{(x^2+\alpha)^3} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{-3/2}{\alpha^{5/2}},$$

откуда

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+\alpha)^3} = \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\alpha^{5/2}}.$$

Общій результатъ будетъ

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+\alpha)^n} = \frac{1.3\ldots\ldots(2n-3)}{2.4\ldots\ldots(2n-2)}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\alpha^{\frac{2n-1}{2}}}.$$

Примѣръ 3. Данъ интегралъ

$$\int_0^1 x^{n-1}\,dx = \frac{1}{n} \qquad (n > 0).$$

Дифференцируя его m разъ по n, получимъ:

$$\int_0^1 x^{n-1}\log x\,dx = -\frac{1}{n^2}.$$

$$\int_0^1 x^{n-1}\log^2 x\,dx = +\frac{1.2}{n^3} \qquad \text{и т. д.}$$

$$\int_0^1 x^{n-1}\log^m x\,dx = (-1)^m\frac{1.2.3\ldots\ldots m}{n^{m+1}}.$$

Примѣръ 4. Найти

$$I(b) = \int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\,dx,$$

при $a > 0$ и $b > 0$. Дифференцируя этотъ интегралъ по b, имѣемъ:

$$\frac{dI}{db} = \int_0^\infty \frac{e^{-bx} x}{x} dx = \int_0^\infty e^{-bx} dx = \frac{1}{b} .$$

$$dI = \frac{db}{b} , \quad I(b) = \log b + c.$$

Для опредѣленія c подставимъ сюда a вмѣсто b, получимъ $I(a) = \log a + c$, и непосредственно находимъ $I(a) = 0$; откуда

$$c = -\log a, \quad \text{и} \quad I(b) = \log b - \log a = \log \frac{b}{a} .$$

Итакъ:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \log \frac{b}{a} .$$

Примѣръ 5. Найти

$$I(b) = \int_0^\infty e^{-ax^2} \operatorname{Cos} 2bx \, dx \quad (a > 0).$$

Дифференцируя по b, имѣемъ:

$$\frac{dI(b)}{db} = -\int_0^\infty e^{-ax^2} 2x \operatorname{Sin} 2bx \, dx.$$

Интегрируемъ по частямъ, полагая

$$u = \operatorname{Sin} 2bx, \quad dv = -e^{-ax^2} .2x \, dx,$$

$$du = 2b \operatorname{Cos} 2bx \, dx, \quad v = \frac{1}{a} e^{-ax^2}$$

находимъ:

$$\frac{dI(b)}{db} = \left(\frac{1}{a} e^{-ax^2} \operatorname{Sin} 2bx\right)_0^\infty - \frac{2b}{a}\int_0^\infty e^{-ax^2} \operatorname{Cos} 2bx \, dx,$$

или

$$\frac{dI(b)}{db} = -\frac{2b}{a} I(b).$$

Отсюда

$$\frac{dI(b)}{I(b)} = -\frac{2b \, db}{a} ,$$

$$\log I(b) = \log C - \frac{b^2}{a},$$

$$I(b) = C\,e^{-\frac{b^2}{a}}.$$

Для опредѣленія C положимъ $b = 0$. Имѣемъ, съ одной стороны

$$I(0) = C,$$

съ другой стороны -

$$I(0) = \int_0^\infty e^{-ax^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

(см. § 8, пр. 4), такъ что

$$C = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}},$$

и окончательно

$$\int_0^\infty e^{-ax^2}\,\mathrm{Cos}\,2bx\,dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\cdot e^{-\frac{b^2}{a}}.$$

Примѣръ 6. Найти

$$\int_0^\infty e^{-(ax^2 + \frac{b}{x^2})}\,dx, \quad a > 0, \quad b > 0.$$

Разсматривая интегралъ какъ функцію отъ b:

$$I(b) = \int_0^\infty e^{-ax^2 - \frac{b}{x^2}}\,dx,$$

дифференцируемъ по b:

$$\frac{dI(b)}{db} = \int_0^\infty e^{-ax^2 - \frac{b}{x^2}}\cdot\frac{-dx}{x^2}.$$

Введемъ новую перемѣнную y, полагая:

$$x\sqrt{a} = \frac{\sqrt{b}}{y}, \quad y\sqrt{a} = \frac{\sqrt{b}}{x}.$$

Имѣемъ:

$$dy = -\sqrt{\frac{b}{a}}\,\frac{dx}{x^2}, \quad ax^2 = \frac{b}{y^2}, \quad \frac{b}{x^2} = ay^2,$$

предѣлы по y будутъ: $y = \infty$ при $x = 0$, $y = 0$ при $x = \infty$. Итакъ:

$$\frac{dI(b)}{db} = \int_{\infty}^{0} e^{-\frac{b}{y^2} - ay^2} \sqrt{\frac{a}{b}}\, dy = -\sqrt{\frac{a}{b}}\, I(b),$$

откуда

$$\frac{dI(b)}{I(b)} = -\sqrt{a} \cdot \frac{db}{\sqrt{b}},$$

$$\log I(b) = \log C - 2\sqrt{ab}, \quad I(b) = C\, e^{-2\sqrt{ab}}.$$

При $b = 0$ имѣемъ

$$I(0) = C = \int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}},$$

и окончательно

$$I(b) = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-2\sqrt{ab}},$$

$$\int_0^{\infty} e^{-(ax^2 + \frac{b}{x^2})} dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-2\sqrt{ab}}.$$

§ 8.

Интегрированіе опредѣленнаго интеграла по параметру.

Теорема. Если функція $f(x,\alpha)$ остается непрерывной въ предѣлахъ интегрированія, то

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha}\left[\int_{x_0}^{x_1} f(x,\alpha)\,dx\right] d\alpha = \int_{x_0}^{x_1}\left[\int_{\alpha_0}^{\alpha} f(x,\alpha)\,d\alpha\right] dx,$$

т.е. можно перемѣнить порядокъ интегрированія безъ вліянія на результатъ; при этомъ предполагается, что предѣлы по **каждой** перемѣнной не зависятъ отъ другой перемѣнной.

Доказательство. Обозначимъ

$$F(\alpha) = \int_{\alpha_0}^{\alpha}\left[\int_{x_0}^{x_1} f(x,\alpha)\,dx\right] d\alpha;$$

$$\Phi(\alpha) = \int_{x_0}^{x_1} \left[\int_{\alpha_0}^{\alpha} f(x,\alpha)\,d\alpha\right] dx.$$

Беремъ производныя по α. Производная

$$\frac{dF}{d\alpha} = \int_{x_0}^{x_1} f(x,\alpha)\,dx,$$

какъ производная по верхнему предѣлу α (см. § 2).

Производная

$$\frac{d\Phi(\alpha)}{d\alpha} = \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\int_{\alpha_0}^{\alpha} f(x,\alpha)\,d\alpha\right)\right] dx,$$

какъ производная по параметру, и далѣе равна

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x,\alpha)\,dx,$$

такъ какъ

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\int_{\alpha_0}^{\alpha} f(x,\alpha)\,dx = f(x,\alpha),$$

какъ производная по верхнему предѣлу (α). Выходитъ, что

$$\frac{dF(\alpha)}{d\alpha} = \frac{d\Phi(\alpha)}{d\alpha};$$

отсюда

$$F(\alpha) = \Phi(\alpha) + C.$$

При $\alpha = \alpha_0$, непосредственно имѣемъ:

$$F(\alpha_0) = 0, \quad \Phi(\alpha_0) = 0.$$

Подставляя $\alpha = \alpha_0$ въ найденный нами результатъ, получимъ

$$F(\alpha_0) = \Phi(\alpha_0) + C,$$

откуда $C = 0$. Итакъ

$$F(\alpha) = \Phi(\alpha).$$

Примѣръ 1. Въ § 5 мы нашли

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} \operatorname{Sin} bx\,dx = \frac{b}{a^2+b^2}, \qquad a > 0.$$

Возьмемъ интегралъ по a отъ этого интеграла въ предѣлахъ отъ $a = 0$ до $a = \infty$. Имѣемъ:

$$\int_0^\infty da\left[\int_0^\infty e^{-ax} \operatorname{Sin} bx\, dx\right] = \int_0^\infty \frac{b\,da}{a^2+b^2} = \left[\operatorname{arctg} \frac{a}{b}\right]_{a=0}^{a=\infty} = \pm \frac{\pi}{2},$$

причемъ знакъ + берется при $b > 0$, − при $b < 0$. На основаніи теоремы объ интегрированіи по параметру мы можемъ написать

$$\pm \frac{\pi}{2} = \int_0^\infty da\left[\int_0^\infty e^{-ax} \operatorname{Sin} bx\, dx\right] = \int_0^\infty \operatorname{Sin} bx\left[\int_0^\infty e^{-ax} da\right] dx =$$

$$= \int_0^\infty \operatorname{Sin} bx \frac{1}{x}\, dx = \int_0^\infty \frac{\operatorname{Sin} bx}{x}\, dx.$$

Мы получили новый интегралъ

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{Sin} bx}{x}\, dx = \pm \frac{\pi}{2} \;\; \ldots\ldots\ldots (*),$$

причемъ + берется при $b > 0$, − берется при $b < 0$.

Примѣръ 2. Показать, что

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{Sin} mx \operatorname{Cos} nx}{x}\, dx = \begin{cases} \pi/2 & \textit{при}\ m > n \\ \pi/4 & \text{"}\ \ m = n \\ 0 & \text{"}\ \ m < n \end{cases} \qquad (m \textit{ и } n \textit{ полож.})$$

Пусть $a > b > 0$. На основаніи результатовъ прим. 1-го, имѣемъ (такъ какъ $a + b > 0$)

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{Sin}(a+b)x}{x}\, dx = +\frac{\pi}{2} =$$

$$= \int_0^\infty \frac{\operatorname{Sin} ax \operatorname{Cos} bx}{x}\, dx + \int_0^\infty \frac{\operatorname{Sin} bx \operatorname{Cos} ax}{x}\, dx;$$

точно также (въ силу $a - b > 0$)

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{Sin}(a-b)x}{x}\, dx = +\frac{\pi}{2} =$$

$$= \int_0^\infty \frac{\text{Sin } ax \text{ Cos } bx}{x} dx - \int_0^\infty \frac{\text{Sin } bx \text{ Cos } ax}{x} dx.$$

Складывая эти равенства и дѣля на 2, получимъ

$$\int_0^\infty \frac{\text{Sin } ax \text{ Cos } bx}{x} dx = \frac{\pi}{2};$$

вычитая и дѣля на 2, получимъ:

$$\int_0^\infty \frac{\text{Sin } bx \text{ Cos } ax}{x} dx = 0;$$

а при $a = b$, имѣемъ:

$$\int_0^\infty \frac{\text{Sin } ax \text{ Cos } ax}{x} dx = \tfrac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\text{Sin } 2ax}{x} dx = \frac{\pi}{4}.$$

Эти результаты и выражаются написанной ранѣе формулой.

Примѣръ 3. Доказать, что

$$\int_0^\infty \frac{\text{Cos } ax}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-a} \quad \text{(Лапласъ)}$$

при $a > 0$. Имѣемъ при $a > 0$

$$\int_0^\infty e^{-ax} \text{ Sin } bx \, dx = \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

Умноживъ это на $\frac{\text{Cos } b}{b} db$, проинтегрируемъ произведенiе по b въ предѣлахъ отъ 0 до ∞. Получимъ:

$$\int_0^\infty \frac{\text{Cos } b}{b} \left(\int_0^\infty e^{-ax} \text{ Sin } bx \, dx\right) db = \int_0^\infty \frac{\text{Cos } b \, db}{a^2 + b^2} =$$

$$= \int_0^\infty e^{-ax} \left(\int_0^\infty \frac{\text{Sin } bx \text{ Cos } b}{b} db\right) dx =$$

$$= \int_0^1 e^{-ax} \left(\int_0^\infty \frac{\text{Sin} bx \text{ Cos} b}{b} db\right) dx + \int_1^\infty e^{-ax} \left(\int_0^\infty \frac{\text{Sin} bx \text{Cos} b}{b} db\right) dx.$$

Въ первомъ интегралѣ x измѣняется отъ 0 до 1, а потому $bx < b$ и на основанiи результатовъ предыдущаго примѣра, имѣемъ

$$\int_0^\infty \frac{\sin bx \cos b}{b}\, db = 0,$$

а съ нимъ и весь первый интегралъ = 0. Для второго интеграла имѣемъ $bx > b$ и потому

$$\int_0^\infty \frac{\sin bx \cos b}{b}\, db = \frac{\pi}{2}.$$

Итакъ

$$\int_0^\infty \frac{\cos b\, db}{a^2+b^2} = \int_1^\infty e^{-ax}\frac{\pi}{2}\, dx = \frac{\pi}{2}\left(\frac{e^{-ax}}{-a}\right)_1^\infty = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{e^{-a}}{a}.$$

Полагая $b = ax$, $db = adx$, находимъ:

$$\int_0^\infty \frac{a\cos ax}{a^2(1+x^2)}\, dx = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{e^{-a}}{a},$$

откуда

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{2}\cdot e^{-a}.$$

Примѣръ 4. Доказать, что

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Полагаемъ $x = \alpha y$ (причемъ $\alpha > 0$); $dx = \alpha dy$. Имѣемъ:

$$I = \int_0^\infty e^{-\alpha^2 y^2}\, \alpha dy.$$

Умножимъ обѣ части равенства на $e^{-\alpha^2}\, d\alpha$ и проинтегрируемъ по α отъ 0 до ∞:

$$I.\int_0^\infty e^{-\alpha^2}\, d\alpha = \int_0^\infty e^{-\alpha^2}\left(\int_0^\infty e^{-\alpha^2 y^2}\, \alpha dy\right) d\alpha$$

$$I^2 = \int_0^\infty\left[\int_0^\infty e^{-\alpha^2(1+y^2)}\, \alpha d\alpha\right] dy = \int_0^\infty\left[\frac{e^{-\alpha^2(1+y^2)}}{-2(1+y^2)}\right]_{\alpha=0}^{\alpha=\infty} dy =$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dy}{1+y^2} = \tfrac{1}{2}(\operatorname{arctg} y)_0^\infty = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

Отсюда

$$I^2 = \frac{\pi}{4}; \quad I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Полагая $x = \sqrt{a}.y \ (a > 0)$, имѣемъ:

$$\int_0^\infty e^{-ay^2} . \sqrt{a}\, dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

откуда

$$\int_0^\infty e^{-ax^2} dx = {}^1\!/_2 \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

Дифференцируя послѣднее равенство n разъ по параметру a, получимъ:

$$\int_0^\infty e^{-ax^2} x^{2n} dx = \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2^n} . \frac{\pi}{2} . \frac{1}{a^{n+1/2}}.$$

§ 9.

Нахожденіе опредѣленныхъ интеграловъ помощью рядовъ.

Положимъ, что нужно найти $\int_a^b \Phi(x)dx$ и извѣстно, что

$$\Phi(x) = \varphi_0(x) + \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \ldots\ldots + \varphi_n(x) + \ldots\ldots,$$

гдѣ въ правой части рядъ равномѣрно сходящійся при $a \leq x \leq b$. Согласно теоремѣ объ интегрированіи рядовъ, имѣемъ:

$$\int_a^b \Phi(x)dx = \sum_{j=0}^{j=\infty} \int_a^b \varphi_j(x)dx = \sum_{j=0}^{\infty} u_j,$$

гдѣ

$$u_j = \int_a^b \varphi_j(x)dx;$$

если рядъ Σu_j имѣетъ суммою нѣкоторое число A, то искомый интегралъ

$$\int_a^b \Phi(x)dx = A.$$

Прежде чѣмъ перейти къ примѣрамъ, покажемъ справедливость слѣдующихъ разложеній. При $|a| < 1$ имѣютъ мѣсто формулы:

$$F_1 = \frac{1 - a \operatorname{Cos} bx}{1 - 2a \operatorname{Cos} bx + a^2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a^n \operatorname{Cos} nbx,$$

$$F_2 = \frac{a \operatorname{Sin} bx}{1 - 2a \operatorname{Cos} bx + a^2} = \sum_{n=1}^{\infty} a^n \operatorname{Sin} nbx,$$

$$F_3 = \frac{1 - a^2}{1 - 2a \operatorname{Cos} bx + a^2} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} a^n \operatorname{Cos} nbx.$$

Для этого разсмотримъ слѣдующее выраженіе:

$$F_1 + i F_2 = \frac{1 - a(\operatorname{Cos} bx - i \operatorname{Sin} bx)}{1 - 2a \operatorname{Cos} bx + a^2} = \frac{1 - ae^{-bxi}}{(1-ae^{-bxi})(1-ae^{+bxi})} =$$

$$= \frac{1}{1 - ae^{+bxi}} = 1 + ae^{bxi} + a^2e^{2bxi} + a^3e^{3bxi} + \ldots\ldots =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a^n e^{nbxi} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a^n(\operatorname{Cos} nbx + i \operatorname{Sin} nbx) =$$

$$= (1 + \sum_{n=1}^{\infty} a^n \operatorname{Cos} nbx) + i \sum_{n=1}^{\infty} a^n \operatorname{Sin} nbx.$$

Приравнивая вещественныя и мнимыя части, получимъ написанный результатъ для F_1 и F_2. Далѣе,

$$F_3 = 2F_1 - 1 = \frac{2 - 2a \operatorname{Cos} bx - 1 + 2a \operatorname{Cos} bx - a^2}{1 - 2a \operatorname{Cos} bx + a^2} =$$

$$= \frac{1 - a^2}{1-2a \operatorname{Cos} bx + a^2} = 2(1+\sum a^n \operatorname{Cos} nbx) - 1 = 1 + 2\sum a^n \operatorname{Cos} nbx.$$

Добавимъ, что при $|a| < 1$ эти ряды суть равномѣрно сходящіеся при всѣхъ x, такъ какъ общій членъ каждаго ряда $a^n \operatorname{Cos} nbx$ и $a \operatorname{Sin} nbx$ остается численно меньше $|a|^n$, послѣдній же рядъ при $a < 1$ абсолютно сходящійся (см. теор. 1, § 8).

Примѣръ 1. Найти

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{1 - a \operatorname{Cos} x}{1 - 2a \operatorname{Cos} x + a^2}\, dx \quad \text{при } |a| < 1.$$

Имѣемъ на основаніи выраженія F_1

$$I = \int_0^{\pi/2} (1 + \sum_{n=1}^{\infty} a^n \operatorname{Cos} nx)dx = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a^n \int_0^{\pi/2} \operatorname{Cos} nx\, dx.$$

Такъ какъ

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{Cos} nx\, dx = \left|\frac{\operatorname{Sin} nx}{n}\right|_0^{\pi/2} = \frac{\operatorname{Sin} n\,\pi/2}{n} = \begin{cases} 0 \textit{ при } n \textit{ четномъ} \\ \dfrac{(-1)^m}{2m+1} \textit{ при } n=2m+1, \end{cases}$$

то подставляя эти результатъ въ выраженіе I, получимъ:

$$I = \frac{\pi}{2} + \sum_{m=0}^{\infty} a^{2m+1} \frac{(-1)^m}{2m+1} =$$

$$= \frac{\pi}{2} + \left(\frac{a}{1} - \frac{a^3}{3} + \frac{a^5}{5} - \frac{a^7}{7} + \ldots\ldots\right) = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} a.$$

При $|a| > 1$, полагая $a = \frac{1}{a_1}$, гдѣ $|a_1| < 1$, получимъ:

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{a_1^2(1 - \frac{1}{a_1} \operatorname{Cos} x)}{a_1^2(1 - \frac{2}{a_1} \operatorname{Cos} x + \frac{1}{a_1^2})} dx = \int_0^{\pi/2} \frac{a_1^2 - a_1 \operatorname{Cos} x}{a_1^2 - 2a_1 \operatorname{Cos} x + 1} dx =$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{a_1^2 - 2a_1 \operatorname{Cos} x + 1 - (1 - a_1 \operatorname{Cos} x)}{a_1^2 - 2a_1 \operatorname{Cos} x + 1} dx =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \int_0^{\pi/2} \frac{1 - a_1 \operatorname{Cos} x}{1 - 2a_1 \operatorname{Cos} x + a_1^2} dx = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} a_1\right) =$$

$$= - \operatorname{arctg} \frac{1}{a} = - \operatorname{arccot} a = - \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} a\right) = \operatorname{arctg} a - \frac{\pi}{2}\ .$$

Результатъ:

$$I = \begin{cases} \pi/2 + \operatorname{arctg} a & \text{при } |a| < 1 \\ \operatorname{arctg} a - \pi/2 & \text{"}\ \ |a| > 1. \end{cases}$$

При $a = 1$ непосредственно находимъ:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos x}{2(1 - \cos x)}\, dx = \frac{\pi}{4}.$$

Примѣръ 2. Найдемъ

$$I = \int_0^\infty \frac{dx}{1 + x^2} \cdot \frac{1}{1 - 2a \cos bx + a^2} \qquad \text{при } b > 0.$$

Пользуясь выраженіемъ для F_3, находимъ при $|a| < 1$:

$$I = \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}\frac{1}{1-a^2}(1 + 2\sum_{n=1}^\infty a^n \cos bnx\, dx) = \frac{1}{1-a^2}\left[\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} +\right.$$

$$\left. + 2\sum_{n=1}^\infty a^n \int_0^\infty \frac{\cos bnx\, dx}{1+x^2}\right] = \frac{1}{1-a^2}\left[\frac{\pi}{2} + 2\Sigma\, a^n \cdot \frac{\pi}{2} e^{-nb}\right] =$$

$$= \frac{1}{1-a^2} \cdot \frac{\pi}{2}\left[1 + 2\sum_{n=1}^\infty a^n e^{-nb}\right] = \frac{1}{1-a^2} \cdot \frac{\pi}{2}\left[1 + 2\frac{ae^{-b}}{1 - ae^{-b}}\right].$$

Выполнивъ въ скобкахъ дѣйствіе сложенія, окончательно будемъ имѣть

$$I = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{1 - a^2} \cdot \frac{1 + ae^{-b}}{1 - ae^{-b}}.$$

При $|a| > 1$, поступая какъ въ примѣрѣ 1, найдемъ:

$$I = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{a^2 - 1} \cdot \frac{ae^b + 1}{ae^b - 1}.$$

Примѣръ 3.

$$I = \int_0^\pi \frac{\cos mx\, dx}{1 - 2a \cos x + a^2}, \qquad m \text{ - цѣлое полож.}$$

При $|a| < 1$, по формулѣ для F_3, имѣемъ:

$$I = \frac{1}{1 - a^2}\int_0^\pi \cos mx \left[1 + 2\sum_{n=1}^\infty a^n \cos nx\right] dx =$$

$$= \frac{1}{1 - a^2}\left[\int_0^\pi \cos mx\, dx + 2\sum_{n=1}^\infty a^n \int_0^\pi \cos mx \cos nx\, dx\right].$$

Но

$$\int_0^{\pi} \operatorname{Cos} mx\, dx = \left|\frac{\operatorname{Sin} mx}{m}\right|_0^{\pi} = 0,$$

$$\int_0^{\pi} \operatorname{Cos} mx \operatorname{Cos} nx\, dx = \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi} [\operatorname{Cos}(m+n)x + \operatorname{Cos}(m-n)x]\, dx =$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[\frac{\operatorname{Sin}(m+n)x}{m+n} + \frac{\operatorname{Sin}(m-n)x}{m-n}\right]_0^{\pi} = 0 \quad \text{при} \quad n \gtrless m,$$

и отдѣльно при $n = m$

$$\int_0^{\pi} \operatorname{Cos} mx \operatorname{Cos} nx\, dx = \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi} (1 + \operatorname{Cos} 2mx)dx = \frac{\pi}{2}.$$

Итакъ

$$I = \frac{1}{1-a^2} \cdot 2.a^m \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi . a^m}{1-a^2}.$$

При $|a| > 1$, полагая $a = \frac{1}{a_1}$, гдѣ $|a_1| < 1$, находимъ:

$$I = \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{Cos} mx\, dx}{1 - \frac{2}{a_1}\operatorname{Cos} x + \frac{1}{a_1^2}} = a_1^2 \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{Cos} mx\, dx}{1 - 2a_1 \operatorname{Cos} x + a_1^2} =$$

$$= a_1^2 \cdot \frac{\pi\, a_1^m}{1 - a_1^2} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\pi}{a^m\left(1 - \frac{1}{a^2}\right)} = \frac{\pi}{a^m(a^2-1)}.$$

Примѣръ 4.

$$I = \int_0^{\pi} \frac{x \operatorname{Sin} x\, dx}{1 - 2a \operatorname{Cos} x + a^2}.$$

По формулѣ для F_2 при $|a| < 1$, имѣемъ:

$$I = \frac{1}{a}\int_0^{\pi} x \sum_1^{\infty} a^n \operatorname{Sin} nx\, dx = \frac{1}{a}\sum_1^{\infty} a^n \int_0^{\pi} x \operatorname{Sin} nx\, dx.$$

Но

$$\int_0^{\pi} x \operatorname{Sin} nx\, dx = \left[x\frac{-\operatorname{Cos} nx}{n}\right]_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi} \operatorname{Cos} nx\, dx =$$

$$= -\frac{\pi}{n}\operatorname{Cos} n\pi = (-1)^{n-1}\frac{\pi}{n},$$

слѣдовательно:

$$I = \frac{\pi}{a} \sum_{1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{a^n}{n} = \frac{\pi}{a} \left(a - \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} - \frac{a^4}{4} + \ldots\right)$$

$$I = \frac{\pi}{a} \log(1+a).$$

При $|a| > 1$, полагая $a = \frac{1}{a_1}$, гдѣ $|a_1| < 1$, находимъ:

$$I = a_1^2 \cdot \frac{\pi}{a_1} \log(1+a_1) = \frac{\pi}{a} \log\left(1 + \frac{1}{a}\right).$$

§ 10.

Эйлеровы интегралы B *и* Г.

Подъ именемъ Эйлеровыхъ интеграловъ B (бэта) и Г (гамма) разумѣются слѣдующіе интегралы:

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1).$$

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-x} x^{p-1} dx \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2).$$

Мы видѣли въ § 6, прим. 3 и 1, что эти интегралы имѣютъ конечное значеніе: (1) при $p > 0$, $q > 0$, (2) - при $p > 0$.

Подстановкою

$$x = \frac{y}{1+y},$$

откуда

$$1 - x = \frac{1}{1+y}, \quad dx = \frac{dy}{(1+y)^2}$$

при новыхъ предѣлахъ $y = 0$ (при $x = 0$), $y = \infty$ (при $x = 1$), преобразуемъ интегралъ (1) къ новой формѣ

$$B(p,q) = \int_0^\infty \frac{y^{p-1} dy}{(1+y)^{p+q}} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3).$$

Докажемъ, что $B(p,q)$ слѣдующимъ образомъ выражается черезъ функціи Г:

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p).\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4).$$

Полагая въ формулѣ (2) $x = ay$ $(a > 0)$, находимъ $e^{-x} = e^{-ay}$, $x^{p-1}dx = a^p y^{p-1}dy$ при тѣхъ же предѣлахъ 0, ∞, такъ что

$$\Gamma(p) = a^p \int_0^\infty e^{-ay} y^{p-1} dy \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (5),$$

откуда

$$\frac{\Gamma(p)}{a^p} = \int_0^\infty e^{-ax} x^{p-1} dx.$$

Полагая въ этой формулѣ $a = 1 + y$ и мѣняя p на $p + q$, находимъ:

$$\frac{\Gamma(p+q)}{(1+y)^{p+q}} = \int_0^\infty e^{-(1+y)x} x^{p+q-1} dx.$$

Умножая обѣ части на $y^{p-1}dy$ и поинтегрируя по y отъ 0 до ∞, имѣемъ:

$$\Gamma(p+q) \int_0^\infty \frac{y^{p-1}dy}{(1+y)^{p+q}} = \int_0^\infty y^{p-1}dy \left(\int_0^\infty e^{-(1+y)x} x^{p+q-1} dx\right).$$

Принимая во вниманіе (3) и мѣняя въ правой части порядокъ интегрированія, находимъ:

$$\Gamma(p+q).B(p,q) = \int_0^\infty e^{-x} x^{p+q-1} dx \left(\int_0^\infty e^{-xy} y^{p-1} dy\right).$$

Но по (5)

$$\int_0^\infty e^{-xy} y^{p-1} dy = \frac{\Gamma(p)}{x^p},$$

слѣдовательно:

$$\Gamma(p+q).B(p,q) = \Gamma(p) \int_0^\infty e^{-x} x^{p+q-1} dx \, . \frac{1}{x^p} =$$

$$= \Gamma(p) \int_0^\infty e^{-x} x^{q-1} dx = \Gamma(p).\Gamma(q) \quad [\text{по } (2)],$$

откуда

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p).\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Такъ какъ на основанiи этой формулы вычисленiе функцiй B приводится къ вычисленiю функцiй Г, то займемся теперь свойствами функцiи Г.

Выполняя въ интегралѣ (2) интегрированiе по частямъ при $u = e^{-x}$, $dv = x^{p-1}dx$, имѣемъ:

$$\Gamma(p) = \left[e^{-x} . \frac{x^p}{p}\right]_0^\infty + \frac{1}{p}\int_0^\infty e^{-x} x^p \, dx,$$

или при $p > 0$ (такъ какъ тогда $x^p = 0$ при $x = 0$):

$$\Gamma(p) = \frac{1}{p}\,\Gamma(p+1),$$

откуда

$$\Gamma(p+1) = p\,\Gamma(p) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6).$$

Замѣняя здѣсь послѣдовательно p на $p+1$, $p+2$,... $p+n-1$, находимъ рядъ равенствъ:

$$\Gamma(p+2) = (p+1)\,\Gamma(p+1)$$

$$\Gamma(p+3) = (p+2)\,\Gamma(p+2)$$

$$. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$

$$\Gamma(p+n) = (p+n-1)\,\Gamma(p+n-1).$$

Перемножая эти равенства вмѣстѣ съ (6), получаемъ:

$$\Gamma(p+n) = p(p+1)(p+2)\ldots(p+n-1)\,\Gamma(p) \quad . \; . \; . \; . \quad (7).$$

Полагая здѣсь $p = 1$ и замѣчая, что

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}dx = 1,$$

находимъ значенiе функцiи $\Gamma(n+1)$ при цѣломъ значенiи аргумента:

$$\Gamma(n+1) = 1.2.3\ldots n \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8).$$

Формула (7) показываетъ вмѣстѣ съ тѣмъ, что значенiя функцiи $\Gamma(p+n)$ для аргумента $p + n$ больше 1 выражаются просто черезъ значенiя функцiи $\Gamma(p)$ для аргумента $p < 1$, такъ что при составленiи таблицы значенiй функцiи $\Gamma(p)$ можно ограничиться значенiями аргумента отъ 0 до 1. Но этотъ промежутокъ можно сузить еще вдвое - отъ 0 до $1/2$ - на основанiи формулы

$$\Gamma(p).\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi} \; . \; . \; . \; . \; . \; (9) \qquad \text{при} \quad 0 < p < 1.$$

Для вывода этой формулы замѣтимъ, что формула (4) при $q = 1 - p$ даетъ

$$\Gamma(p)\,\Gamma(1-p) = \Gamma(1).B(p,1-p) = B(p,1-p),$$

изъ формулы (3) слѣдуетъ:

$$B(p,1-p) = \int_0^\infty \frac{y^{p-1}\,dy}{1+y}$$

p+q = 1

дальше мы докажемъ, что послѣднiй интегралъ при $0 < p < 1$ равенъ $\dfrac{\pi}{\sin p\pi}$, и тогда формула (9) будетъ доказана.

Отмѣтимъ еще, что изъ (9), при $p = 1/2$, находимъ:

$$[\Gamma(1/2)]^2 = \pi,$$

откуда

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (10).$$

Обратимся теперь къ доказательству формулы

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}\,dx}{1+x} = \frac{\pi}{\sin p\pi} \qquad \text{при} \quad 0 < p < 1 \qquad \text{(Euler)}.$$

Для этой цѣли разсмотримъ интегралъ

$$\int \frac{2nz^{2m}\,dz}{1+z^{2n}},$$

гдѣ m и n числа цѣлыя положительныя и $m \leqq n-1$. Для вычисленiя интеграла разложимъ дробь $\dfrac{2nz^{2m}}{1+z^{2n}}$ на простѣйшiя. Такъ какъ знаменатель равенъ произведенiю:

$$z^{2n}+1 = \sum_{k=0}^{n-1} (z-e^{\alpha_k i})(z-e^{-\alpha_k i}),$$

гдѣ

$$\alpha_k = \frac{2k+1}{2n}\,\pi,$$

то разложенiе дроби имѣетъ видъ:

$$\frac{2n\,z^{2m}}{z^{2n}+1} = \sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{A_k}{z-e^{\alpha_k i}} + \frac{A'_k}{z-e^{-\alpha_k i}}\right] \ldots\ldots\ldots (*).$$

Чтобы получить A_k, умножимъ предыдущее равенство на $z-e^{\alpha_k i}$ и положимъ затѣмъ $z = e^{\alpha_k i}$. Тогда въ правой части останется только A_k, а въ лѣвой истинное значенiе неопредѣленности:

$$\left[\frac{2n\,z^{2m}(z-e^{\alpha_k i})}{z^{2n}+1}\right]_{z=e^{\alpha_k i}} = 2n\,e^{2m\alpha_k i}\cdot\left[\frac{1}{2n\,z^{2n-1}}\right]_{z=e^{\alpha_k i}} =$$

$$= 2n\,e^{2m\alpha_k i}\cdot\left[\frac{z}{2n\,z^{2n}}\right]_{z=e^{\alpha_k i}} = -\,e^{(2m+1)\alpha_k i},$$

такъ какъ $z^{2n} = -1$. Итакъ

$$A_k = -\,e^{(2m+1)\alpha_k i}$$

и замѣною i на $-i$,

$$A'_k = -\,e^{-(2m+1)\alpha_k i}.$$

Теперь формула (*) даетъ

$$\frac{2nz^{2m}}{1+z^{2n}} = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{z^2-2z\,\mathrm{Cos}\,\alpha_k+1}\left[(A_k+A'_k)\,z - (A_k e^{-\alpha_k i} + A'_k\,e^{\alpha_k i})\right]$$

$$= -\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2z\,\mathrm{Cos}(2m+1)\alpha_k - 2\,\mathrm{Cos}\,2m\,\alpha_k}{z^2-2z\,\mathrm{Cos}\,\alpha_k+1}.$$

Замѣняя здѣсь

$$\mathrm{Cos}\,2m\,\alpha_k = \mathrm{Cos}(2m+1)\alpha_k\,\mathrm{Cos}\,\alpha_k + \mathrm{Sin}\,(2m+1)\alpha_k\,\mathrm{Sin}\,\alpha_k,$$

находимъ:

$$\frac{2n\,z^{2m}}{1+z^{2n}} = -\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{Cos}(2m+1)\alpha_k\cdot\frac{2z-2\mathrm{Cos}\,\alpha_k}{z^2-2z\,\mathrm{Cos}\,\alpha_k+1} +$$

$$+\sum_{k=0}^{n-1} 2\mathrm{Sin}(2m+1)\alpha_k\cdot\frac{\mathrm{Sin}\,\alpha_k}{(z-\mathrm{Cos}\,\alpha_k)^2+\mathrm{Sin}^2\alpha_k}.$$

Теперь легко находимъ интегралъ

$$\int_{-R}^{+R}\frac{2nz^{2m}\,dz}{z^{2n}+1} = -\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{Cos}(2m+1)\alpha_k\cdot\left[\log(z^2-2z\,\mathrm{Cos}\,\alpha_k+1)\right]_{-R}^{+R} +$$

$$+\sum_{k=0}^{n-1} 2\mathrm{Sin}(2m+1)\alpha_k . \left[\mathrm{arctg}\,(\frac{z-\mathrm{Cos}\,\alpha_k}{\mathrm{Sin}\,\alpha_k})\right]_{-R}^{+R} .$$

Если мы станемъ R безпредѣльно увеличиватъ, то:

$$[\log(z^2 - 2z\,\mathrm{Cos}\,\alpha_k + 1)]_{-R}^{+R} =$$

$$= \log\left[\frac{R^2 - 2R\,\mathrm{Cos}\,\alpha_k + 1}{R^2 + 2R\,\mathrm{Cos}\,\alpha_k + 1}\right] = \log\left[\frac{1 - \frac{2}{R}\,\mathrm{Cos}\,\alpha_k + \frac{1}{R^2}}{1 + \frac{2}{R}\,\mathrm{Cos}\,\alpha_k + \frac{1}{R^2}}\right]$$

обратится въ нуль,

$$\left[\mathrm{arctg}(\frac{z-\mathrm{Cos}\,\alpha_k}{\mathrm{Sin}\,\alpha_k})\right]_{-R}^{+R} = \mathrm{arctg}(\frac{R-\mathrm{Cos}\,\alpha_k}{\mathrm{Sin}\,\alpha_k}) + \mathrm{arctg}(\frac{R+\mathrm{Cos}\,\alpha_k}{\mathrm{Sin}\,\alpha_k})$$

обратится въ $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$ (такъ какъ $\mathrm{Sin}\,\alpha_k = \mathrm{Sin}\,\frac{2k+1}{2n}\pi > 0$ при $k = 0, 1, \ldots n-1$), и мы получимъ:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2n\,z^{2m}\,dz}{z^{2n}+1} = 2\pi \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{Sin}(2m+1)\alpha_k \quad . \; . \; . \; . \; (*').$$

Положивъ $\frac{2m+1}{2n}\pi = \varphi$, будемъ имѣть:

$$(2m+1)\alpha_k = (2k+1)\varphi,$$

и

$$\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{Sin}(2m+1)\alpha_k = \mathrm{Sin}\,\varphi + \mathrm{Sin}\,3\varphi + \ldots + \mathrm{Sin}(2n-1)\varphi = S;$$

для вычисленія S, умноживъ обѣ части послѣдняго равенства на $2\mathrm{Sin}\,\varphi$, имѣемъ:

$$2\mathrm{Sin}\,\varphi . S = 2\mathrm{Sin}^2\varphi + 2\mathrm{Sin}\,\varphi\,\mathrm{Sin}\,3\varphi + \ldots + 2\mathrm{Sin}\,\varphi\,\mathrm{Sin}(2n-1)\varphi =$$

$$= (1 - \mathrm{Cos}\,2\rho) + (\mathrm{Cos}\,2\varphi - \mathrm{Cos}\,4\varphi) + \ldots + (\mathrm{Cos}\,\overline{2n-2}\varphi - \mathrm{Cos}2n\varphi) =$$

$$= 1 - \mathrm{Cos}\,2n\varphi = 1 - \mathrm{Cos}(2m+1)\pi = 2,$$

откуда

$$S = \frac{1}{\mathrm{Sin}\,\varphi} .$$

Теперь формула (*') даетъ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2n\, z^{2m}\, dz}{1 + z^{2n}} = \frac{2\pi}{\operatorname{Sin} \varphi}$$

или

$$\int_{0}^{\infty} \frac{2n\, z^{2m}\, dz}{1 + z^{2n}} = \frac{\pi}{\operatorname{Sin} \varphi} \quad \ldots\ldots\ldots (*').$$

Положивъ здѣсь $z^{2n} = x$, $z = x^{\frac{1}{2n}}$, имѣемъ $2n\, dz = x^{\frac{1}{2n} - 1}\, dx$, $z^{2m} = x^{\frac{2m}{2n}}$, при тѣхъ же предѣлахъ интегрированія; такимъ образомъ:

$$\int_{0}^{\infty} \frac{x^{\frac{2m+1}{2n} - 1}\, dx}{1 + x} = \frac{\pi}{\operatorname{Sin} \varphi};$$

положивъ

$$\frac{2m+1}{2n} = \rho, \quad \varphi = \rho\pi$$

имѣемъ

$$\int_{0}^{\infty} \frac{x^{\rho - 1}\, dx}{1 + x} = \frac{\pi}{\operatorname{Sin} \rho\pi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (*''),$$

причемъ, въ силу условія $m \leqq n - 1$, выходитъ

$$\rho = \frac{2m+1}{2n} \leqq \frac{2n-1}{2n} < 1$$

(кромѣ того $\rho > 0$).

Итакъ мы доказали намѣченную формулу (*''), но лишь для случая, когда ρ есть дробь вида

$$\rho = \frac{2m+1}{2n}.$$

Обобщимъ доказательство для случая любого дробнаго ρ между 0 и 1. Каково бы ни было ρ_0, между 0 и 1, взявъ нѣкоторое цѣлое число n и составивъ произведеніе $2n\rho_0$, мы найдемъ два послѣдовательныхъ нечетныхъ числа $2m-1$ и $2m+1$, между которыми будетъ содержаться $2n\rho_0$

$$2m-1 < 2n\rho_0 < 2m+1$$

(равенство исключается, такъ какъ иначе p было бы вида $\frac{2m+1}{2n}$, что уже выше разсмотрѣно), отсюда:

$$p_2 = \frac{2m-1}{2n} < p_0 < \frac{2m+1}{2n} = p_1.$$

Положивъ теперь

$$f(p) = \int_0^\infty \frac{x^{p-1}\,dx}{1+x}, \quad \varphi(p) = \frac{\pi}{\operatorname{Sin} p\pi},$$

мы имѣемъ равенство двухъ непрерывныхъ функцій отъ p:

$$f(p) = \varphi(p)$$

при $p = p_2$ и $p = p_1$; но такъ какъ при достаточно большомъ n разность

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{n}$$

можетъ быть сдѣлана сколь угодно малой, то эти функціи, какъ непрерывныя, должны быть равны и для всякаго промежуточнаго значенія p между p_1 и p_2, а слѣдовательно и для $p = p_0$:

$$f(p_0) = \varphi(p_0).$$

Этимъ доказана справедливость формулы (*"') для всякаго p между 0 и 1.

Примѣръ 1.

$$I = \int_0^\infty \frac{x^m\,dx}{1+x^n} \quad \text{при} \quad 0 < \frac{m+1}{n} < 1.$$

Полагая $x^n = z$, $x = z^{\frac{1}{n}}$, $dx = \frac{1}{n} z^{\frac{1}{n}-1} dz$, получаемъ:

$$\int_0^\infty \frac{x^m\,dx}{1+x^n} = \int_0^\infty \frac{1}{n} \cdot \frac{z^{\frac{m+1}{n}-1}\,dz}{1+z} = \frac{1}{n} \frac{\pi}{\operatorname{Sin}\left(\frac{m+1}{n}\pi\right)} \quad \dots\dots (11).$$

Примѣръ 2.

$$I = \int_0^\infty \frac{x^m\,dx}{(1+x^n)^k} \quad \textit{при} \quad 0 < \frac{m+1}{n} < 1, \ k \ \textit{цѣлом}.$$

Та же подстановка даетъ

$$I = \frac{1}{n}\int_0^\infty \frac{z^{\frac{m+1}{n}-1}}{(1+z)^k}\,dz = \frac{1}{n}\,B\left(\frac{m+1}{n},\ k-\frac{m+1}{n}\right)$$

[см. (3)].

$q = k - p = k - \frac{m+1}{n}$

Полагая $\frac{m+1}{n} = p$, имѣемъ:

$$I = \frac{1}{n}\,B(p,\ k-p) = \frac{1}{n}\,\frac{\Gamma(p)\,\Gamma(k-p)}{\Gamma(k)},$$

но по (8)

$$\Gamma(k) = 1.2.3\ldots(k-1),$$

по (7)

$$\Gamma(k-p) = (k-p-1)(k-p-2)\ldots(1-p)\,\Gamma(1-p)$$

при замѣнѣ n на $k-1$, и p на $1-p$), по (9)

$$\Gamma(p)\,\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}.$$

Окончательно

$$\int_0^\infty \frac{x^m\,dx}{(1+x^n)^k} = \frac{1}{n}\cdot\frac{(1-p)(2-p)\ldots(k-1-p)}{1.2.3\ldots(k-1)}\cdot\frac{\pi}{\sin p\pi}\ \ldots\ (12),$$

гдѣ

$$p = \frac{m+1}{n} < 1.$$

Въ частности имѣемъ, напримѣръ:

$$\int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{(1+x^4)^2} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{3\pi}{4}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{16}$$

$$\left(n = 4,\ k = 2,\ p = \frac{2+1}{4} = 3/4\right),$$

$$\int_0^\infty \frac{x\,dx}{(1+x^3)^3} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1/3\cdot 4/3}{1.2}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{2\pi}{3}} = \frac{4\pi\sqrt{3}}{81}$$

$$\left(n = 3,\ k = 3,\ p = \frac{1+1}{3} = 2/3\right).$$

Если бы намъ нужно было вычислить интегралъ

$$\int_0^\infty \frac{x^6\,dx}{(x^4+1)^2},$$

гдѣ

$$\frac{m+1}{n} = \frac{7}{4} > 1,$$

то сразу прилагать найденную нами формулу (12) нельзя. Тогда поступаемъ такъ: разлагаемъ x^6 по степенямъ x^4+1:

$$x^6 = x^2(x^4+1) - x^2;$$

тогда

$$\int_0^\infty \frac{x^6\,dx}{(1+x^4)^2} = \int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{1+x^4} - \int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{(1+x^4)^2} =$$

$$= \frac{1}{4}\,.\,\pi.\sqrt{2} - \frac{1}{16}\,\pi.\sqrt{2} = \frac{3\pi.\sqrt{2}}{16}.$$

Примѣръ 3. Найти интегралъ

$$\int_0^{\pi/2} \mathrm{Sin}^p\,x\,\mathrm{Cos}^q\,x\,dx$$

при $p+1 > 0$, $q+1 > 0$.

Полагая $\mathrm{Sin}\,x = y$, получаемъ:

$$\int_0^1 y^p(1-y^2)^{\frac{q-1}{2}}\,dy.$$

Новой подстановкой $y^2 = z$, $y = z^{\frac{1}{2}}$, $dy = {}^1/_2\,z^{-\frac{1}{2}}dz$ приводимъ къ виду

$${}^1/_2\int_0^1 z^{\frac{p-1}{2}}(1-z)^{\frac{q-1}{2}}\,dz = B\left(\frac{p+1}{2}, \frac{q+1}{2}\right)$$

и на основаніи формулы (4)

$$\int_0^{\pi/2} \mathrm{Sin}^p\,x\,\mathrm{Cos}^q\,x\,dx = {}^1/_2\,\frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+q}{2}+1\right)} \quad \ldots\ldots (13).$$

При $q = -p$, отсюда находимъ:

$$\int_0^{\pi/2} tg^p\, x\, dx = {}^1/_2\, \frac{\Gamma(\frac{1+p}{2})\Gamma(\frac{1-p}{2})}{\Gamma(1)},$$

но по (9)

$$\Gamma(\frac{1+p}{2})\Gamma(\frac{1-p}{2}) = \frac{\pi}{\operatorname{Sin}\frac{\pi}{2}(1-p)} = \frac{\pi}{\operatorname{Cos}\frac{\pi p}{2}},$$

так что окончательно

$$\int_0^{\pi/2} tg^p\, x\, dx = \frac{\pi}{2\operatorname{Cos}\frac{\pi p}{2}} \quad \ldots\ldots\ (14),$$

при $p+1>0$, и $1-p>0$, т.е. $-1<p<1$.

Примѣръ 4.

$$\int_0^1 x^m (1-x^n)^p\, dx$$

при $m+1>0$, $n>0$, $p+1>0$.

Подстановкой $x^n = y$, находимъ:

$q-1=p$

$$\frac{1}{n}\int_0^1 y^{\frac{m+1}{n}-1} (1-y)^p\, dy = \quad q=p+1$$

$$= \frac{1}{n} B\left[\frac{m+1}{n}, p+1\right] = \frac{1}{n}\cdot\frac{\Gamma(\frac{m+1}{n})\,\Gamma(p+1)}{\Gamma(\frac{m+1}{n}+p+1)}.$$

Примѣръ 5.

$$\int_0^\infty e^{-x^n}\cdot x^k\, dx$$

при $k+1>0$, $n>0$.

Полагая $x^n = y$, находимъ:

$$\frac{1}{n}\int_0^\infty e^{-y}\, y^{\frac{k+1}{n}-1}\, dy = \frac{1}{n}\,\Gamma(\frac{k+1}{n})$$

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКІЕ РЯДЫ (РЯДЫ ФУРЬЕ).

§ 1.

Изученіе интеграла Дирихле (Dirichlet).

Интеграломъ Дирихлэ называется

$$\underset{m=\infty}{\text{Пред.}} \int_a^b \frac{\operatorname{Sin} mz}{z} \varphi(z) dz = L,$$

причемъ предполагается, что

Разсмотримъ сначала частные случаи этого интеграла.

1°. Положимъ $\varphi(z) = 1$. Тогда имѣемъ:

$$L = \text{Пред.} \int_a^b \frac{\operatorname{Sin} mz}{z} dz.$$

Положивъ $mz = u$, что можно сдѣлать, такъ какъ функція mz монотонная, будемъ имѣть

$$m dz = du, \quad \frac{dz}{z} = \frac{du}{u}$$

и слѣдовательно

$$L = \text{Пред.} \int_{ma}^{mb} \frac{\operatorname{Sin} u}{u} du = \text{Пр.} \int_0^{mb} \frac{\operatorname{Sin} u}{u} du - \text{Пр.} \int_0^{ma} \frac{\operatorname{Sin} u}{u} du.$$

Но мы знаемъ (пр.1 § 8), что

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Sin} u}{u} du = \frac{\pi}{2}, \quad \int_0^{-\infty} \frac{\operatorname{Sin} u}{u} du = -\frac{\pi}{2}.$$

Пользуясь этими результатами, мы найдемъ, что если $0 < a < b$, то

$$L = \underset{m=\infty}{\text{Пред.}} \int_a^b \frac{\operatorname{Sin} mz}{z} dz = \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Sin} u}{u} du - \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Sin} u}{u} du = 0;$$

если $a < b < 0$, то

$$L = \underset{m=\infty}{\text{Пред.}} \int_a^b \frac{\operatorname{Sin} mz}{z} dz = \int_0^{-\infty} \frac{\operatorname{Sin} u}{u} du - \int_0^{-\infty} \frac{\operatorname{Sin} u}{u} du = 0;$$

если $a = 0$, $b > 0$, то

$$L = \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Sin} u}{u} du = \frac{\pi}{2};$$

если $a < 0$, $b = 0$, то

$$L = -\int_0^{-\infty} \frac{\operatorname{Sin} u}{u} du = \frac{\pi}{2}.$$

Вообще

$$L = \begin{cases} 0, & \textit{если } a \textit{ и } b \textit{ одного знака} \\ \dfrac{\pi}{2}, & \textit{если } a \textit{ или } b = 0, \textit{ причемъ по условію } a<b. \end{cases}$$

2°. $\varphi(z)$ - конечна и монотонна въ промежуткѣ $a \leq z \leq b$. Согласно второй теоремѣ о среднихъ величинахъ (§3 предыд. главы) имѣемъ

$$\int_a^b \frac{\operatorname{Sin} mz}{z} \varphi(z) dz = \varphi(a+0) \int_a^{\xi} \frac{\operatorname{Sin} mz}{z} dz + \varphi(b-0) \int_{\xi}^b \frac{\operatorname{Sin} mz}{z} dz,$$

гдѣ $a < \xi < b$. Перепишемъ это для удобства такъ

$$\int_a^b \frac{\operatorname{Sin} mz}{z} \varphi(z) dz = \varphi(a+0) I_1 + \varphi(b-0) I_2,$$

гдѣ

$$I_1 = \int_a^{\xi} \frac{\operatorname{Sin} mz}{z} dz, \quad I_2 = \int_{\xi}^b \frac{\operatorname{Sin} mz}{z} dz.$$

Если $0 < a < b$, то согласно 1°:

$$\underset{m=\infty}{\text{Пред.}} I_1 = 0; \quad \underset{m=\infty}{\text{Пред.}} I_2 = 0,$$

а слѣдовательно

$$L = \underset{m=\infty}{\textit{Пред.}} \int_a^b \frac{\operatorname{Sin} mz}{z} \varphi(z)\,dz = 0.$$

Если $a < b < 0$, то также согласно 1^o имѣемъ:

$$\underset{m=\infty}{\textit{Пред.}}\ I_1 = 0, \quad \underset{m=\infty}{\textit{Пред.}}\ I_2 = 0, \quad L = 0.$$

Если $a = 0$, $b > 0$, то:

$$\underset{m=\infty}{\textit{Пред.}}\ I_1 = \frac{\pi}{2}; \quad \underset{m=\infty}{\textit{Пред.}}\ I_2 = 0; \quad L = \frac{\pi}{2}\varphi(+0).$$

Если $a < 0$, $b = 0$, то

$$\underset{m=\infty}{\textit{Пред.}}\ I_1 = 0, \quad \underset{m=\infty}{\textit{Пред.}}\ I_2 = \frac{\pi}{2}, \quad L = \frac{\pi}{2}\varphi(-0).$$

Если $a < 0$, $b > 0$, то

$$\textit{Пред.} \int_a^b \frac{\operatorname{Sin} mz}{z} \varphi(z)\,dz = \textit{Пред.} \int_a^0 \frac{\operatorname{Sin} mz}{z} \varphi(z)\,dz +$$

$$+ \textit{Пред.} \int_0^b \frac{\operatorname{Sin} mz}{z} \varphi(z)\,dz = \frac{\pi}{2}\varphi(-0) + \frac{\pi}{2}\varphi(+0) = \frac{\pi}{2}[\varphi(-0) + \varphi(+0)].$$

Результатъ оказывается слѣдующій:

$$L = \begin{cases} 0, & \textit{если } a \textit{ и } b \textit{ одного знака} \\ \pi/_2\,\varphi(+0), & \textit{если } a = 0, \ b > 0 \\ \pi/_2\,\varphi(-0), & \textit{если } a < 0, \ b = 0 \\ \pi/_2\,[\varphi(-0) + \varphi(+0)], & \textit{если } a < 0, \ b > 0. \end{cases}$$

3^o. $\varphi(z)$ въ предѣлахъ отъ a до b не монотонная, но имѣетъ *конечное* число maxima и minima. Пусть $\varphi(z)$ достигаетъ maximum'а или minimum'а при значеніяхъ

$$z = c_1, c_2, c_3, \ldots . c_n.$$

Тогда, разбивъ промежутокъ отъ a до b на $(n+1)$ промежутковъ, въ предѣлахъ которыхъ $\varphi(z)$ остается уже монотонной, получимъ:

$$\int_a^b \frac{\sin mz}{z}\varphi(z)dz = \int_a^{c_1} + \int_{c_1}^{c_2} + \ldots + \int_{c_n}^{b} = \sum_{j=0}^{j=n} \int_{c_j}^{c_{j+1}}$$

причемъ мы считаемъ $a = c_0$, $b = c_{n+1}$. Примѣняя къ каждому промежутку результатъ 2° и написавъ, что

$$L = \text{Пред.}_{m=\infty} \int_a^b \frac{\sin mz}{z}\varphi(z)dz = \sum_{j=0}^{j=n} L_j,$$

гдѣ

$$L_j = \text{Пред.}_{m=\infty} \int_{c}^{c_{j+1}} \frac{\sin mz}{z}\varphi(z)dz,$$

заключаемъ, что если $0 < a < b$ или $a < b < 0$, то всѣ $L_j = 0$ и $L = 0$; если $a = 0$, $b > 0$, то

$$L_0 = \pi/_2\varphi(+0), \quad L_j = 0 \quad (j = 1, 2, 3, \ldots n)$$

и потому

$$L = \pi/_2\varphi(+0);$$

если $a < 0$, $b = 0$, то

$$L_n = \pi/_2\,\varphi(-0),$$

остальные

$$L_j = 0 \quad (j = 0,1,2,\ldots n-1) \quad \text{и} \quad L = \pi/_2\,\varphi(-0);$$

если $a < 0$, $b > 0$, то

$$L = \text{Пред.}\int_a^0 + \text{Пред.}\int_0^b = \frac{\pi}{2}\,[\varphi(-0) + \varphi(+0)].$$

Такимъ образомъ результатъ 2° не измѣнился.

4°. Предположимъ, что $\varphi(z)$ имѣетъ въ промежуткѣ $a \leqq z \leqq b$ *конечное* число такихъ точекъ, въ которыхъ $\varphi(z)$ обращается въ безконечность, но интегралъ

$$\int \varphi(z)dz,$$

распространенный на область каждой такой точки, имѣетъ конечное значеніе. Пусть такія точки будутъ при

$$z = d_1,\ d_2,\ d_3,\ \ldots\ d_n,$$

такъ что $\varphi(d_j) = \infty$, но $\int\varphi(z)dz$ имѣетъ смыслъ. Разобьемъ интегралъ между предѣлами a и b на нѣсколько интеграловъ слѣдующимъ образомъ:

$$(*) \int_a^b \frac{\operatorname{Sin} mz}{z}\varphi(z)dz = \int_a^{d_1-\varepsilon_1} + \int_{d_1-\varepsilon_1}^{d_1+\varepsilon_1'} + \int_{d_1+\varepsilon_1'}^{d_2-\varepsilon_2} + \int_{d_2-\varepsilon_2}^{d_2+\varepsilon_2'} + \ldots + \int_{d_n-\varepsilon_n}^{d_n+\varepsilon_n'} + \int_{d_n+\varepsilon_n'}^{b}$$

Замѣтимъ, что интегралы, стоящіе въ правой части, 1 - ый, 3-ій, ... и т. д. не содержатъ въ своихъ предѣлахъ безконечностей функціи $\varphi(z)$, и къ нимъ приложимы результаты $2^{o'}$. Поэтому можно написать:

$$\underset{m=\infty}{\textit{Пред.}} \int_a^b \frac{\operatorname{Sin} mz}{z}\varphi(z)dz = L + \underset{m=\infty}{\textit{Пред.}} \sum_{j=1}^{j=n} \int_{d_j-\varepsilon_j}^{d_j+\varepsilon_j'} .$$

Интегралъ, стоящій въ правой части подъ знакомъ суммы, разложимъ на два интеграла

$$\int_{d_j-\varepsilon_j}^{d_j+\varepsilon_j'} \frac{\operatorname{Sin} mz}{z}\varphi(z)dz = \int_{d_j-\varepsilon_j}^{d_j} + \int_{d_j}^{d_j+\varepsilon_j'} .$$

и разсмотримъ интегралъ

$$\int_{d_j-\varepsilon_j}^{d_j} \frac{\operatorname{Sin} mz}{z}\varphi(z)dz.$$

Разсужденія наши будемъ основывать на слѣдующемъ предположеніи: можно выбрать ε_j столь малымъ, чтобы въ промежуткѣ отъ $d_j-\varepsilon_j$ до d_j функція $\varphi(z)$ сохраняла постоянный знакъ. Тогда, примѣняя теорему I о среднихъ величинахъ, имѣемъ

$$\int_{d_j-\varepsilon_j}^{d_j} \frac{\operatorname{Sin} mz}{z}\varphi(z)dz = \frac{\operatorname{Sin} m\xi}{\xi}\int_{d_j-\varepsilon_j}^{d_j} \varphi(z)dz.$$

Замѣняя въ послѣднемъ равенствѣ $\operatorname{Sin} mz$ на 1 и ξ на $d_j - \varepsilon_j$, мы получимъ неравенство

$$\left|\int_{d_j-\varepsilon_j}^{d_j} \frac{\operatorname{Sin} mz}{z}\varphi(z)dz\right| < \frac{1}{d_j-\varepsilon_j}\left|\int_{d_j-\varepsilon_j}^{d_j} \varphi(z)dz\right| < \frac{\eta_j}{d_j - \varepsilon_j} ,$$

гдѣ η_j сколь угодно малое при достаточно маломъ ε_j, такъ какъ интегралъ

$$\int \varphi(z)dz$$

имѣетъ конечное значеніе при обращеніи $\varphi(z)$ въ ∞ для $z = d_j$. На основаніи предыдущихъ разсужденій сумма

$$\Sigma \int_{d_j-\varepsilon_j}^{d_j+\varepsilon'_j}$$

можетъ быть сдѣлана сколь угодно малою при достаточно малыхъ ε_j и ε'_j (такъ какъ число слагаемыхъ конечное).

Такъ какъ лѣвая часть нашего равенства (*) не зависитъ отъ ε_j, то и правая также не должна зависѣть отъ ε_j, а потому

$$\text{Пред.}\ \Sigma \int_{d_j-\varepsilon_j}^{d_j+\varepsilon'_j} = 0 \quad \text{при}\ \varepsilon_j = 0,\ \varepsilon'_j = 0,$$

и окончательно

$$\text{Пред.}_{m=\infty} \int_a^b \frac{\operatorname{Sin} mz}{z}\varphi(z)dz = L.$$

Результатъ случая 4° совпадаетъ съ 2° и 3° Отсюда

Теорема. Если при $a < z < b$, $\varphi(z)$ имѣетъ конечное число maxima и minima и конечное число такихъ точекъ, гдѣ $\varphi(z) = \infty$, но

$$\int \varphi(z)dz$$

имѣетъ смыслъ (короче, если $\varphi(z)$ удовлетворяетъ условіямъ Dirichlet), то

$$\text{Пред.}_{m=\infty} \frac{1}{\pi}\int_a^b \frac{\operatorname{Sin} mz}{z}\varphi(z)dz = L_1,$$

гдѣ

$$L_1 = \begin{cases} 0, & \text{если } a \text{ и } b \text{ одного знака} \\ \frac{1}{2}\varphi(+0), & \text{если } a = 0,\ b > 0 \\ \frac{1}{2}\varphi(-0), & \text{если } a < 0,\ b = 0 \\ \frac{1}{2}[\varphi(+0) + \varphi(-0)], & \text{если } a < 0,\ b > 0, \end{cases}$$

при этомъ $\varphi(-0)$ и $\varphi(+0)$ предполагаются конечными числами, равными или неравными.

§ 2.

Опредѣленіе коэффиціентовъ въ тригонометрическихъ рядахъ по способу Эйлера.

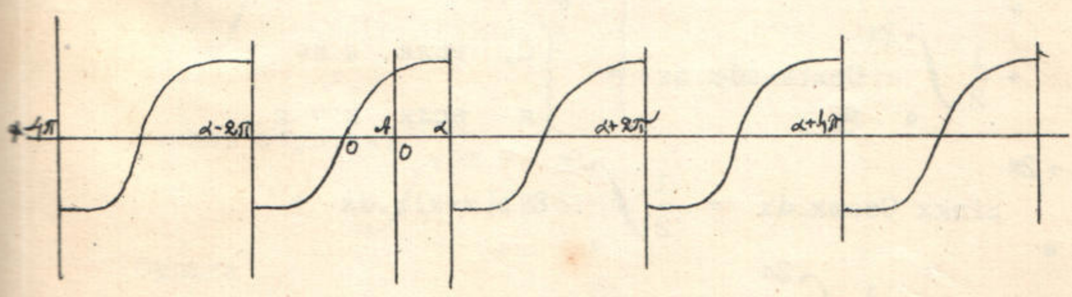
Подъ именемъ рядовъ Фурье разумѣются разложенія функціи $f(x)$ въ рядъ вида

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \operatorname{Cos} kx + b_k \operatorname{Sin} kx) \; . \; . \; . \; . \; (*).$$

Такъ какъ правая часть есть періодическая функція съ періодомъ 2π, то и лѣвая часть $f(x)$ должна быть періодической функціей, такъ что $f(x)$ *можно задать произвольно* только въ промежуткѣ $\alpha \leqq x \leqq \alpha+2\pi$, а для значеній $\gamma > \alpha+2\pi$ или $\gamma = \alpha + 2\pi + \gamma_0$ придется опредѣлить $f(x)$ такъ:

$$f(\gamma) = f(\alpha + 2\pi + \gamma_0) = f(\alpha+\gamma_0)$$

Функція $f(x)$, представляющая сумму тригонометрическаго ряда (*), графически будетъ представляться повтореніемъ безчисленное множество разъ одной и той же фигуры кривой $y = f(x)$ при $a \leqq x \leqq \alpha + 2\pi$.



Черт. 223.

Предположимъ для опредѣленности, что $f(x)$ задана въ промежуткѣ отъ $0 \leqq x \leqq 2\pi$, и предположимъ заранѣе возможность разложенія $f(x)$ въ рядъ Фурье и равномѣрную сходимость этого ряда (для того, чтобы можно было его почленно интегрировать). Тогда можно опредѣлить коэффиціенты a_0, a_k, b_k слѣдующимъ образомъ (Эйлеръ).

Для опредѣленія a_0 умножимъ обѣ части равенства (*) на dx и проинтегрируемъ въ предѣлахъ отъ 0 до 2π:

$$\int_0^{2\pi} f(x)dx = a_0 . 2\pi + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\int_0^{2\pi} \operatorname{Cos}kx\, dx + b_k\int_0^{2\pi} \operatorname{Sin}kx\, dx\right].$$

Послѣдняя сумма = 0, такъ какъ каждый интегралъ, входящій въ нее, равенъ 0. Отсюда

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx.$$

Для опредѣленія a_m умножимъ обѣ части равенства (*) на $\operatorname{Cos}mx\, dx$ и интегрируемъ въ тѣхъ же предѣлахъ отъ 0 до 2π:

$$\int_0^{2\pi} f(x)\operatorname{Cos}mx\, dx = a_0\int_0^{2\pi} \operatorname{Cos}mx\, dx +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\int_0^{2\pi} \operatorname{Cos}kx \operatorname{Cos}mx\, dx + b_k\int_0^{2\pi} \operatorname{Sin}kx \operatorname{Cos}mx\, dx\right].$$

Но

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{Cos}mx\, dx = 0;$$

остальные интегралы правой части распадаются каждый на два:

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{Cos}kx \operatorname{Cos}mx\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \operatorname{Cos}(k+m)x\, dx +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \operatorname{Cos}(k-m)x\, dx = \begin{cases} 0, & \text{если } k \text{ не } = m \\ \pi & \text{если } k = m, \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{Sin}kx \operatorname{Cos}mx\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \operatorname{Sin}(m+k)x.dx +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \operatorname{Sin}(k-m)x.dx = 0,$$

такъ какъ

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{Sin}(k\pm m)x.dx = 0$$

при всякихъ значеніяхъ k и m.

Итакъ для опредѣленія a_m имѣемъ равенство

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{Cos}\,mx\,dx = a_m.\pi,$$

откуда

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{Cos}\,mx\,dx.$$

Для нахожденія коэффиціента b_m нужно помножить обѣ части равенства (*) на $\mathrm{Sin}\,mx.dx$. Тогда, подобно предыдущему, найдёмъ

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{Sin}\,mx.dx = a_0.\int_0^{2\pi} \mathrm{Sin}\,mx.dx + \sum_{k=1}^{\infty}\Big[a_k\int_0^{2\pi}\mathrm{Cos}\,kx.\mathrm{Sin}\,xdx +$$

$$+ b_k\int_0^{2\pi}\mathrm{Sin}\,kx.\mathrm{Sin}\,mx.dx\Big] = \sum_{k=1}^{\infty}\Big[b_k\int_0^{2\pi}\mathrm{Sin}\,kx.\mathrm{Sin}\,mx.dx\Big],$$

такъ какъ

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{Sin}\,mx.dx = 0 \quad \text{и} \quad \int_0^{2\pi}\mathrm{Cos}\,kx.\mathrm{Sin}\,mx.dx = 0,$$

какъ мы видѣли выше.

Интегралъ же, стоящій при b_k:

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{Sin}\,kx.\mathrm{Sin}\,mx.dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{Cos}(k-m)x.dx - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{Cos}(k+m)x.dx =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{Cos}(k-m)x.dx = \begin{cases} 0, & \text{если } k \text{ не } = m \\ \pi, & \text{если } k = m \end{cases}$$

Такимъ образомъ

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{Sin}\,mx.dx = b_m.\pi.$$

Отсюда

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{Sin}\,mx.dx.$$

§ 3.

Доказательство того, что рядъ Фурье съ коэффиціентами, опредѣленными по способу, указанному въ § 2, имѣетъ сумму, изображаемую функціей f(x).

Теорема Dirichlet. Тригонометрическій рядъ

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \mathrm{Cos}kx + b_k \mathrm{Sin}kx),$$

гдѣ

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx$$

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{Cos}mx.dx$$

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{Sin}mx.dx,$$

имѣетъ суммой:

$$\frac{1}{2}[f(x-0) + f(x+0)]$$

въ точкѣ x, взятой между 0 и 2π, если въ этой точкѣ f(x) имѣетъ конечный разрывъ; просто f(x), если въ точкѣ x f(x) непрерывна; и, наконецъ,

$$\tfrac{1}{2}[f(+0)+f(2\pi-0)]$$

въ точкахъ $x = 0$, $x = 2\pi$.

Теорема предполагаетъ, что f(x) въ промежуткѣ $0 \leqq x \leqq 2\pi$ удовлетворяетъ условіямъ Dirichlet (см. теорему § 1).

Составимъ сумму (2n+1) первыхъ членовъ разложенія

$$S_{2n+1} = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \mathrm{Cos}kx + b_k \mathrm{Sin}kx) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)d\alpha + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)(\mathrm{Cos}kx.\mathrm{Cos}k\alpha+\mathrm{Sin}kx.\mathrm{Sin}k\alpha)d\alpha =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)d\alpha \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Cos} k(\alpha - x)\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)d\alpha . \frac{\operatorname{Sin}\frac{2n+1}{2}(\alpha - x)}{2\operatorname{Sin}\frac{\alpha - x}{2}} \quad *).$$

Положивъ теперь $\alpha - x = 2z$, откуда имѣемъ $d\alpha = 2dz$, и измѣнивъ соотвѣтственнымъ образомъ предѣлы, а именно написавъ

$$\textit{вмѣсто } \alpha = 0 \qquad z = -\frac{x}{2}$$

$$\text{"} \qquad \alpha = 2\pi \qquad z = \pi - \frac{x}{2},$$

получимъ

$$S_{2n+1} = \frac{1}{\pi}\int_{-x/2}^{\pi - x/2} \frac{\operatorname{Sin}(2n+1)z}{z}\varphi(z)dz,$$

гдѣ

$$\varphi(z) = \frac{z}{\operatorname{Sin} z} f(x + 2z) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (*').$$

Пусть сперва $0 < x < 2\pi$. Тогда имѣемъ

$$0 > -\frac{x}{2} > -\pi,$$

$$\pi > \pi - \frac{x}{2} > 0,$$

т.е. предѣлы интегрированія не достигаютъ значеній $-\pi$ и $+\pi$. Въ такомъ случаѣ

$$\varphi(z) = \frac{z}{\operatorname{Sin} z} f(x+2z)$$

выполняетъ условія Dirichlet, такъ какъ

$$f(x+2z) = f(\alpha)$$

по теоремѣ выполняетъ эти условія, а множитель $\frac{z}{\operatorname{Sin} z}$ при

---

*). *См. "ВЫСШАЯ АЛГЕБРА" А. А. Адамова, стр. 19.*

$$-\pi < z < +\pi$$

остается конечнымъ и кромѣ того имѣетъ конечное число maxima и minima.

По теоремѣ § 1 сумма изучаемаго тригонометрическаго ряда

$$S = \underset{n=\infty}{\text{Пред.}}\ S_{2n+1} = \underset{n=\infty}{\text{Пред.}}\ \frac{1}{\pi}\int_{-x/2}^{\pi-x/2} \frac{\operatorname{Sin} nz}{z}\,\varphi(z)\,dz =$$

$$= \frac{1}{2}\,[\varphi(-0) + \varphi(+0)],$$

(такъ какъ предѣлы $-x/2$ и $\pi - x/2$ противоположныхъ знаковъ).

Обращаясь теперь къ обозначенію (*'), находимъ

$$\varphi(-0) = f(x-0)$$

$$\varphi(+0) = f(x+0),$$

и слѣдовательно

$$S = 1/2\,[f(x-0) + f(x+0)]$$

или

$$S = f(x) \quad \text{если} \quad f(x-0) = f(x+0),$$

т.е. если $f(x)$ непрерывна. Отдѣльно разберемъ случаи $x = 0$, $x = 2\pi$.

При $x = 0$ имѣемъ:

$$S_{2n+1} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{Sin}(2n+1)z}{\operatorname{Sin} z}\,f(2z)\,dz =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{Sin}(2n+1)z}{\operatorname{Sin} z}\,f(2z)\,dz + \frac{1}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\operatorname{Sin}(2n+1)z}{\operatorname{Sin} z}\,f(2z)\,dz.$$

Положивъ въ послѣднемъ интегралѣ $z = \pi - z_1$, перепишемъ наше равенство такъ:

$$S_{2n+1} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{Sin}(2n+1)z}{\operatorname{Sin} z}\,f(2z)\,dz +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{Sin}(2n+1)z_1}{\operatorname{Sin} z_1}\,f(2\pi - 2z_1)\,dz_1.$$

Такъ какъ верхній предѣлъ $< \pi$, то по предыдущему изслѣдованію $\varphi(z)$ остается удовлетворяющей условіямъ Dirichlet, и потому

$$\underset{n=\infty}{Пред.}\, S_{2n+1} = S = \underset{m=\infty}{Пред.}\, \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{Sin}\, mz}{\mathrm{Sin}\, z} f(2z)dz +$$

$$+ Пред.\, \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{Sin}\, mz_1}{\mathrm{Sin}\, z_1} f(2\pi-2z_1)dz_1 = \frac{1}{2} f(+0) + \frac{1}{2} f(2\pi-0)$$

(по теоремѣ § 1, $L_1 = {}^1/_2\varphi(+0)$ при $a = 0$, $b > 0$).

При $x = 2\pi$ имѣемъ:

$$S_{2n+1} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \frac{\mathrm{Sin}(2n+1)z}{\mathrm{Sin}\, z} f(2\pi+2z)dz.$$

Отсюда, полагая $z = -z_1$, находимъ:

$$S_{2n+1} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{Sin}(2n+1)z_1}{\mathrm{Sin}\, z_1} f(2\pi-2z_1)dz_1.$$

Согласно случаю $x = 0$, замѣняя входящую туда функцію

$$f(2z) \quad на \quad f(2\pi-2z_1),$$

имѣемъ

$$S = Пред.\, S_{2n+1} = {}^1/_2\,[f(2\pi-0) + f(+0)].$$

Замѣчаніе I. Если $f(x)$ задана въ промежуткѣ $\alpha \leqq x \leqq \alpha+2\pi$ и удовлетворяетъ условіямъ Dirichlet, то тригонометрическій рядъ

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \mathrm{Cos}\, kx + b_k \mathrm{Sin}\, kx),$$

гдѣ

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x)dz$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{c}^{\alpha+2\pi} f(x)\mathrm{Cos}\, kx.dx$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x)\mathrm{Sin}\, kx.dx$$

имѣетъ суммой

$$\frac{1}{2}\,[f(x-0)+f(x+0)]$$

въ точкахъ конечнаго разрыва, $f(x)$ въ точкахъ непрерывности и

$$\frac{1}{2}\,[f(\alpha+0)+f(2\pi+\alpha-0)]$$

на границахъ промежутка при $x=\alpha$ и $x=\alpha+2\pi$.

Доказательство подобно предыдущему.

Замѣчаніе II. Пусть $f(x)$ задана въ промежуткѣ $a \leqq x \leqq b$ и удовлетворяетъ условіямъ Dirichlet. Введемъ новую перемѣнную

$$y = \frac{2\pi}{b-a}\,x.$$

Тогда при $x = a$, имѣемъ

$$y = \frac{2\pi}{b-a}\,a = \alpha;$$

при $x = b$, имѣемъ

$$y = \frac{2\pi}{b-a}\,b = \frac{2\pi}{b-a}\,(b-a+a) = 2\pi + \frac{2\pi}{b-a}\,a = 2\pi + \alpha$$

и слѣдовательно приходимъ къ замѣчанію I, когда функція

$$F(y) = f\left[\frac{b-a}{2\pi}\right]$$

задана въ промежуткѣ значеній y отъ α до $\alpha+2\pi$.

Согласно замѣчанію I, находимъ

$$f(x) = f\left[\frac{b-a}{2\pi}\right] = F(y) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \operatorname{Cos} ky + b_k \operatorname{Sin} ky),$$

гдѣ

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} F(y)\,dy$$

$$(*'')\qquad a_k = \frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} F(y) \operatorname{Cos} ky.dy$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} F(y) \operatorname{Sin} ky.dy.$$

Возстановляя x, имѣемъ:

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k.\mathrm{Cos}\,\frac{2\pi kx}{b-a} + b_k.\mathrm{Sin}\,\frac{2\pi kx}{b-a}\right].$$

Вводя новую перемѣнную въ интегралы (*"):

$$y = \frac{2\pi}{b-a}\,x,$$

будемъ имѣть

при $y = \alpha \ldots\ldots x = a$

" $y = \alpha + 2\pi \ldots\ldots x = b$

$$dy = \frac{2\pi}{b-a}\,dx$$

$$F(y) = f(x).$$

Отсюда получимъ новыя выраженія для коэффиціентовъ:

$$a_0 = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

(*"')
$$a_k = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x).\mathrm{Cos}\left[\frac{2\pi k}{b-a}\,x\right]dx$$

$$b_k = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x).\mathrm{Sin}\left[\frac{2\pi k}{b-a}\,x\right]dx.$$

Итакъ, если функція $f(x)$ задана въ промежуткѣ $a \leqq x \leqq b$, то она разлагается въ рядъ вида

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k.\mathrm{Cos}\left(\frac{2k\pi x}{b-a}\right) + b_k.\mathrm{Sin}\left(\frac{2k\pi x}{b-a}\right)\right],$$

причемъ коэффиціенты a_0, a_k, b_k опредѣляются формулами (*"').

§ 4.

Примѣры.

1°. Разложить въ рядъ Фурье функцію $f(x) = x/2$, заданную въ промежуткѣ $0 < x < 2\pi$.

Опредѣлимъ коэффиціенты ряда Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{x}{2}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{x}{2}\,\mathrm{Cos}kx.dx = 0$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{x}{2}\,\mathrm{Sin}kx.dx = -\frac{1}{k}.$$

Рядъ будетъ имѣть выраженіе

$$\frac{\pi}{2} - \frac{\mathrm{Sin}x}{1} - \frac{\mathrm{Sin}2x}{2} - \frac{\mathrm{Sin}3x}{3} - \ldots = S \;\ldots\ldots\; (1)$$

Его сумма $S = \frac{x}{2}$ въ промежуткѣ $0 < x < 2\pi$, и

$$S = \tfrac{1}{2}[0 + \pi] = \frac{\pi}{2}$$

при $x = 0$, $x = 2\pi$.

Итакъ, при $0 < x < 2\pi$ имѣемъ разложеніе

$$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\mathrm{Sin}x}{1} - \frac{\mathrm{Sin}2x}{2} - \frac{\mathrm{Sin}3x}{3} - \ldots$$

При $x = \frac{\pi}{2}$ получаемъ рядъ

$$1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \ldots = \frac{\pi}{4};$$

при $x = \frac{\pi}{4}$:

$$1 + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{11} - \tfrac{1}{13} - \tfrac{1}{15} + \ldots = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}.$$

Геометрически сумма ряда (1) представится въ видѣ разрывной линіи (черт.224).

Отдѣльно стоящія точки изображаютъ сумму ряда при

$$x = 2k\pi \quad (k = \ldots -1,\ 0,\ +1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

2° Разложить въ рядъ Фурье функцію $f(x) = x^2$, заданную въ промежуткѣ $-\pi \leqq x \leqq +\pi$.

Здѣсь $\alpha = -\pi$, $\alpha + 2\pi = +\pi$. Коэффиціенты ряда будутъ

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} x^2 dx = \frac{\pi^2}{3}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} x^2 \operatorname{Cos} kx . dx = (-1)^k \frac{4}{k^2}$$

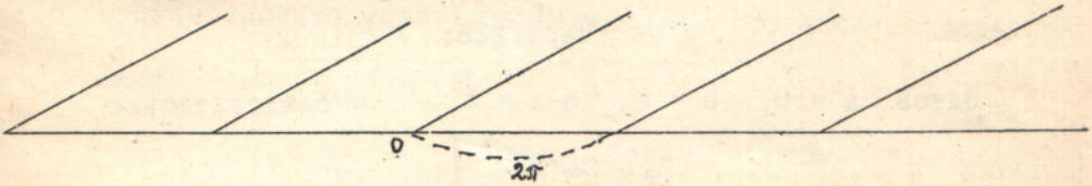
$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} x^2 \operatorname{Sin} kx . dx = 0.$$

При $-\pi \leqq x \leqq +\pi$ имѣемъ

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4.\left[\frac{\operatorname{Cos} x}{1^2} - \frac{\operatorname{Cos} 2x}{2^2} + \frac{\operatorname{Cos} 3x}{3^2} - \frac{\operatorname{Cos} 4x}{4^2} + \ldots\right] \quad . \ . \ (2).$$

Полагая $x = \pi$, получимъ:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}.$$



Черт.224.

При $x = 0$, имѣемъ:

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \ldots . = \frac{\pi^2}{12}.$$

При $x = \frac{\pi}{4}$, имѣемъ

$$1 - \frac{1}{3^2} - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots . = \frac{\pi^2\sqrt{2}}{16}.$$

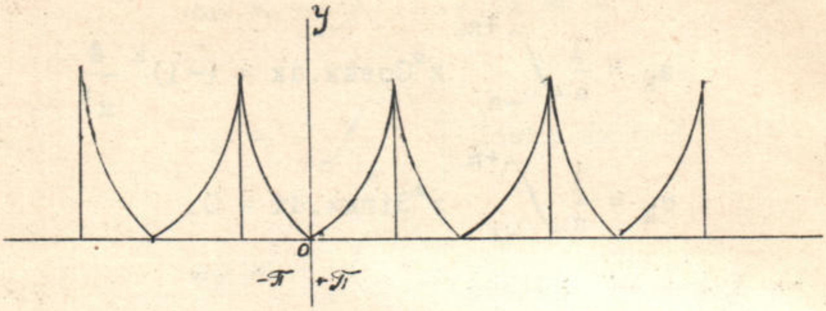
Геометрически сумму ряда (2) можно представить въ видѣ непрерывной линіи (черт.225).

3°. Разложить въ рядъ Фурье функцію $f(x)$, заданную слѣ -

дующимъ образомъ:

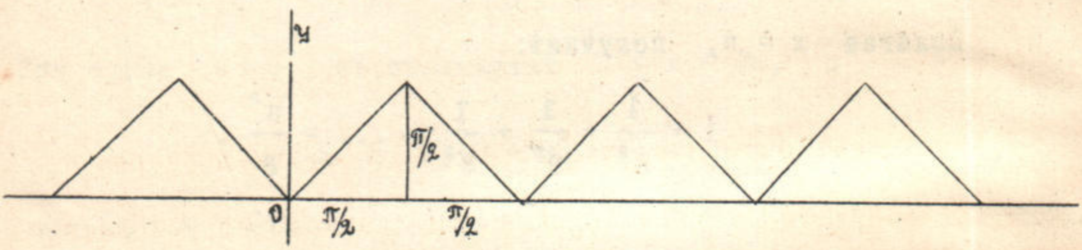
$$f(x) = x \qquad \textit{въ промежуткѣ} \quad 0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}.$$

$$f(x) = \pi - x \qquad " \qquad " \qquad \frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \pi.$$



Черт. 225.

На чертежѣ это представится такъ:



Черт. 226.

Здѣсь $a = 0$, $b = \pi$, $b-a = \pi$, и слѣдовательно

$$\frac{2k\pi x}{b-a} = 2kx.$$

По формуламъ замѣчанія (2) имѣемъ:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi/2} xdx + \int_{\pi/2}^{\pi} (\pi-x)dx\right] = \frac{\pi}{4}$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\pi/2} x.\mathrm{Cos}2k.dx + \int_{\pi/2}^{\pi} (\pi-x)\mathrm{Cos}2kx.dx\right] =$$

$$= \begin{cases} 0, & \textit{если } k \textit{ четное} \\ -\dfrac{2}{\pi k^2}, & " \ k \textit{ нечетное} \end{cases}$$

$$b_k = \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\pi/2} x.\mathrm{Sin}2kx.dx + \int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - x)\mathrm{Sin}2kx.dx\right] = 0.$$

Искомый рядъ будетъ:

$$(3)\ldots\ldots \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\left[\frac{\mathrm{Cos}x}{1^2} + \frac{\mathrm{Cos}3x}{3^2} + \frac{\mathrm{Cos}5x}{5^2} + \ldots\ldots\right] =$$

$$= \begin{cases} x, & \text{если } 0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2} \\ \pi - x, & \text{"} \quad \dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \pi. \end{cases}$$

§ 5.

Равномѣрная сходимость рядовъ Фурье.

Приведемъ безъ доказательства еще слѣдующую теорему:

Теорема. Рядъ Фурье оказывается равномѣрно сходящимся и можетъ быть почленно интегрируемъ въ томъ промежуткѣ, гдѣ $f(x)$, удовлетворяя прочимъ условіямъ Dirichlet, остается непрерывной.

Примѣръ. Имѣемъ рядъ (2)

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4.\left[\frac{\mathrm{Cos}x}{1^2} - \frac{\mathrm{Cos}2x}{2^2} + \frac{\mathrm{Cos}3x}{3^2} - \ldots\right]$$

для разложенія функціи

$$f(x) = x^2$$

въ промежуткѣ $-\pi < x < +\pi$.

Такъ какъ $f(x) = x^2$ удовлетворяетъ условіямъ теоремы, то, интегрируя данный рядъ отъ 0 до $x \leqq \pi$, получимъ:

$$\frac{x^3}{3} = \frac{\pi^2 x}{3} - 4.\left[\frac{\mathrm{Sin}x}{1^3} - \frac{\mathrm{Sin}2x}{2^3} + \frac{\mathrm{Sin}3x}{3^3} - \frac{\mathrm{Sin}4x}{4^3} + \ldots\right].$$

Отсюда можно составить сумму ряда:

$$\frac{\sin x}{1^3} - \frac{\sin 2x}{2^3} + \frac{\sin 3x}{3^3} - \frac{\sin 4x}{4^3} + \ldots = \frac{x}{12}(\pi^2 - x^2).$$

При $x = \frac{\pi}{2}$ получимъ:

$$1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - \ldots = \frac{\pi^3}{32}.$$

ИСЧИСЛЕНІЕ КОНЕЧНЫХЪ РАЗНОСТЕЙ.

§ 1.

Опредѣленіе и двѣ основныя формулы.

Опредѣленіе. Конечною разностью или просто разностью функціи $f(x)$ называется

$$f(x+h) - f(x) = \Delta f(x),$$

гдѣ h означаетъ число постоянное для даннаго вопроса. Разность отъ 1-ой разности называется второй разностью и обозначается

$$\Delta^2 f(x) = \Delta(\Delta f(x) = \Delta f(x+h) - \Delta f(x) =$$

$$= f(x+2h) - f(x+h)$$

$$- f(x+h) + f(x)$$

$$\Delta^2 f(x) = f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x).$$

Разность отъ второй разности называется 3-ьей разностью

$$\Delta^3 f(x) = \Delta[\Delta^2 f(x)] = \Delta^2 f(x+h) - \Delta^2 f(x) =$$

$$= f(x+3h) - 2f(x+2h) + f(x+h) -$$

$$- f(x+2h) + 2f(x+h) - f(x)$$

$$\Delta^3 f(x) = f(x+3h) - 3f(x+2h) + 3f(x+h) - f(x).$$

Вообще

$$\Delta^n f(x) = f(x+nh) - \frac{n}{1} f(x+\overline{n-1}\,h) + \frac{n(n-1)}{1.2} f(x+\overline{n-2}\,h) -$$

$$- \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} f(x+\overline{n-3}\,h) + \ldots + (-1)^n f(x) \; . \; . \; . \; . \; . \; (I).$$

Замѣтивъ очевидныя формулы:

$$\Delta a f(x) = a \Delta f(x),$$

$$\Delta[f_1(x) + f_2(x)] = \Delta f_1(x) + \Delta f_2(x),$$

на основанiи ихъ выведемъ формулу (II) для выраженія $f(x+nh)$ черезъ

$$f(x) \text{ и } \Delta f(x), \; \Delta^2 f(x), \; \ldots \; \Delta^n f(x).$$

Имѣемъ:

$$f(x+h) = f(x) + \Delta f(x)$$

$$f(x+2h) = f(x+h) + \Delta f(x+h) = \left. \begin{aligned} f(x) &+ \Delta f(x) \\ &+ \Delta f(x) + \Delta^2 f(x) \end{aligned} \right| =$$

$$= f(x) + 2\Delta f(x) + \Delta^2 f(x).$$

$$f(x+3h) = f(x+2h) + \Delta f(x+2h) = \left. \begin{aligned} f(x) &+ 2\Delta f(x) + \Delta^2 f(x) \\ &+ \Delta f(x) + 2\Delta^2 f(x) + \Delta^3 f(x) \end{aligned} \right| =$$

$$= f(x) + 3\Delta f(x) + 3\Delta^2 f(x) + \Delta^3 f(x).$$

Ясно, что въ общемъ случаѣ получимъ:

$$f(x+nh) = f(x) + \frac{n}{1} \Delta f(x) + \frac{n(n-1)}{1.2} \Delta^2 f(x) + \ldots + \Delta^n f(x). \; (II).$$

§ 4.

Разности простѣйшихъ функцій.

1°. $f(x) = (x-a)(x-a-h)(x-a-2h) \ldots\ldots (x-a-\overline{n-1}\,h)$.

Такое выраженіе называется *факторіаломъ*.

Составимъ разность этой функціи

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x) = \left| \begin{array}{l} (x+h-a)(x-a)(x-a-h) \ldots (x-a-\overline{n-2}h) \\ \quad - (x-a)(x-a-h)\ldots(x-a-\overline{n-2}\,h)(x-a-\overline{n-1}\,h) \end{array} \right| =$$

$$= (x-a)(x-a-h)\ldots.(x-a-\overline{n-2}\,h)[x+h-a-x+a+\overline{n-1}\,h] =$$

$$= nh(x-a)(x-a-h)\ldots\ldots(x-a-\overline{n-2}\,h).$$

Замѣчаніе. Разность цѣлой функціи удобнѣе всего составить, разложивъ цѣлую функцію предварительно на сумму факторіаловъ.

Примѣръ. Дана функція x^2. Если положить $h = 1$, то будемъ имѣть

$$x^2 = x(x-1) + x$$

$$\Delta x^2 = 2x + 1,$$

а при произвольномъ h

$$x^2 = x(x-h) + hx$$

$$\Delta x^2 = 2hx + h^2 .$$

Подобнымъ же образомъ:

$$x^3 = x(x-1)(x-2) + 3x(x-1) + x$$

$$\Delta x^3 = 3x(x-1) + 3.2x + 1, \quad \text{если } h = 1.$$

Разложеніе функціи на сумму факторіаловъ производится при помощи метода неопредѣленныхъ коэффиціентовъ; наприм., во второмъ случаѣ слѣдовало бы написать

$$x^3 = x(x-1)(x-2) + \alpha x(x-1) + \beta x.$$

Сравненіе коэффиціентовъ при различныхъ степеняхъ x даетъ

$$\alpha = 3, \quad \beta = 1.$$

2°.

$$f(x) = \frac{1}{(x-a)(x-a+h)(x-a+2h)\ldots.(x-a+\overline{n-1}h)}.$$

Имѣемъ

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x) =$$

$$= \frac{1}{(x-a+h)(x-a+2h)\ldots\ldots(x-a+nh)} -$$

$$- \frac{1}{(x-a)(x-a+h)(x-a+2h)\ldots\ldots(x-a+\overline{n-1}\,h)} =$$

$$= \frac{x-a-x+a-nh}{(x-a)(x-a+h)(x-a+2h)\ldots\ldots(x-a+nh)} =$$

$$= \frac{1}{(x-a)(x-a+h)(x-a+2h)\ldots\ldots(x-a+nh)}$$

Примѣръ.

$$\Delta \frac{1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{-3}{x(x+1)(x+2)(x+3)}.$$

Замѣчаніе. Разность дроби:

$$\frac{f(x)}{(x-a)(x-a+h)\ldots(x-a+\overline{n-1}\,h)}$$

удобнѣе всего составлять, разложивъ $f(x)$ на факторіалы, напримѣръ:

$$\frac{x^2-x+1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{7-4(x+2)+(x+1)(x+2)}{x(x+1)(x+2)} =$$

$$= \frac{7}{x(x+1)(x+2)} - \frac{4}{x(x+1)} + \frac{1}{x}.$$

3°. Пусть $f(x) = m^x$. Тогда

$$\Delta f(x) = m^{x+h} - m^x = m^x(m^h - 1).$$

4°. $f(x) = \operatorname{Sin} x$.

$$\Delta f(x) = \operatorname{Sin}(x+h) - \operatorname{Sin} x = 2\operatorname{Sin}\frac{h}{2}.\operatorname{Cos}(x+\frac{h}{2}).$$

Замѣняя x на $x-\frac{h}{2}$, найдемъ:

$$\Delta \operatorname{Sin}(x-\frac{h}{2}) = 2\operatorname{Sin}\frac{h}{2}.\operatorname{Cos} x.$$

5°. $f(x) = \operatorname{Cos} x$.

$$\Delta Cosx = Cos(x+h) - Cosx = -2Sin\frac{h}{2}.Sin(x+\frac{h}{2}).$$

Замѣняя опять x на $x-\frac{h}{2}$, найдемъ

$$\Delta Cos(x-\frac{h}{2}) = -2Sin\frac{h}{2}.Sinx.$$

§ 3.

Формула Ньютона для интегрированія черезъ равные промежутки. Случай одной перемѣнной.

Поставимъ задачу: найти цѣлую функцію степени n-ой (или ниже), которая при $x = a,\ a+h,\ a+2h,\ \ldots\ a+nh$ имѣетъ данныя значенія:

$$f(a),\ f(a+h),\ \ldots\ f(a+nh).$$

Представимъ искомую функцію въ видѣ суммы факторіаловъ:

$$f(x) = Q_0 + Q_1(x-a) + Q_2(x-a)(x-a-h) + Q_3(x-a)(x-a-h)(x-a-2h) +$$

$$+ \ldots + Q_n(x-a)(x-a-h)\ldots(x-a-\overline{n-1}\,h).$$

Составимъ разности:

$$\Delta f(x) = Q_1h + Q_2.2h(x-a) + Q_3.3h(x-a)(x-a-h) + \ldots$$

$$\ldots Q_n.nh(x-a)(x-a-h)\ldots(x-a-\overline{n-2}\,h)$$

$$\Delta^2 f(x) = Q_2.2h.h + Q_3.3h.2h(x-a) + \ldots + Q_n.nh(n-1)h(x-a)\ldots$$

$$\ldots(x-a-\overline{n-3}\,h).$$

$$\Delta^3 f(x) = +Q_3.3h.2h.h + \ldots + Q_n.nh.(n-1)h.(n-2)h.(x-a)\ldots$$

$$\ldots(x-a-\overline{n-4}\,h).$$

$$\Delta^{n-1}f(x) = +Q_{n-1}.(n-1)h.(n-2)h\ldots 2h.h + Q_n.nh.(n-1)h +$$

$$+(n-2)h\ldots 2h(x-a).$$

$$\Delta^n f(x) = + Q_n . nh.(n-1)h.(n-2)h \dots 2h.h.$$

Полагая теперь $x = a$, опредѣлимъ изъ этихъ формулъ всѣ неизвѣстные коэффиціенты:

$$Q_0 = f(a); \qquad Q_3 = \frac{\Delta^3 f(a)}{1.2.3.h^3}$$

$$Q_1 = \frac{\Delta f(a)}{h}; \qquad \dots\dots\dots$$

$$Q_2 = \frac{\Delta^2 f(a)}{1.2.h^2}; \qquad Q_n = \frac{\Delta^n f(a)}{1.2.3\dots nh^n}.$$

Входящія сюда разности

$$\Delta f(a), \ \Delta^2 f(a) \ \dots\dots \ \Delta^n f(a)$$

мы имѣемъ возможность вычислить по формулѣ (I) § 1.

Итакъ

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1} . \frac{\Delta f(a)}{1} + \frac{(x-a)(x-a-h)}{1.2} . \frac{\Delta^2 f(a)}{h^2} +$$

$$+ \frac{(x-a)(x-a-h)(x-a-2h)}{1.2.3} . \frac{\Delta^3 f(a)}{h^3} + \dots +$$

$$+ \frac{(x-a)(x-a-h)\dots(x-a-\overline{n-1}\,h)}{1.2.3\dots n} . \frac{\Delta^n f(a)}{h^n}.$$

Это и есть *формула Ньютона* для интерполированія черезъ равные промежутки. Она точна для всякой цѣлой функціи степени n-ой и ниже.

Пусть теперь ищется нѣкоторая неизвѣстная функція $F(x)$ по даннымъ $(n+1)$ значеніямъ, соотвѣтствующимъ

$$x = a, \ a+h, \ a+2h, \ \dots \ a+nh,$$

т.е. по даннымъ

$$F(a), \quad F(a+h), \ \dots\dots \ F(a+nh).$$

Если мы построимъ по формулѣ Ньютона цѣлую функцію $f(x)$ степени n-ой по частнымъ значеніямъ

$$f(a) = F(a); \quad f(a+h) = F(a+h); \ \dots \ f(a+nh) = F(a+nh),$$

то равенство

$$F(x) = f(x)$$

будетъ точнымъ лишь при $x = a,\ a+h,\ \dots\ a+nh$; при остальныхъ же значеніяхъ x равенство должно быть вида

$$F(x) = f(x) + R_n(x),$$

гдѣ $R_n(x)$ дополнительный членъ.

Такъ какъ $F(x) = f(x)$ при $x = a,\ a+h,\ \dots\ a+nh$, то

$$R_n(x) = 0$$

при этихъ значеніяхъ x; слѣдовательно, можно написать

$$R_n = \frac{(x-a)(x-a-h)(x-a-2h)\dots\dots(x-a-nh)}{1.2.3.\dots n(n+1)} \cdot k,$$

гдѣ k неизвѣстное пока число.

Введемъ функцію

$$\Phi(z) = F(z) - f(z) - R_n(z).$$

Эта функція

$$\Phi(z) = 0 \quad \text{при} \quad z = x,\ a,\ a+h,\ \dots\ a+nh\ .\ .\ (*).$$

Примѣнимъ къ ней теорему Ролля:

$\Phi(z)$ *имѣетъ* $n+2$ *корня* (*).

$\Phi'(z)$ " $n+1$ *корень и всѣ они заключаются между наибольшимъ и наименьшимъ изъ чиселъ* (*)

$\Phi''(z)$ " n *корней въ томъ же промежуткѣ*

$\Phi'''(z)$ " $n-1$ " " "

. . . .

$\Phi^{(n+1)}(z)$ " 1 *корень* " "

Но

$$\Phi^{(n+1)}(z) = F^{(n+1)}(z) + f^{(n+1)}(z) - k,$$

причемъ

$$f^{(n+1)}(z) = 0,$$

такъ какъ $f(z)$ функція n-ой степени.

Пусть корень функціи

$$\Phi^{(n+1)}(z)$$

есть ξ, такъ что

$$\Phi^{(n+1)}(\xi) = F^{(n+1)}(\xi) - k = 0.$$

Отсюда находимъ

$$k = F^{(n+1)}(\xi)$$

и

$$F(x) = F(a) + \frac{x-a}{1} \cdot \frac{\Delta F(a)}{h} + \frac{(x-a)(x-a-h)}{1.2} \frac{\Delta^2 F(a)}{h^2} + \dots +$$

$$+ \frac{(x-a)\dots(x-a-\overline{n-1}\,h)}{1.2.3\dots n} \cdot \frac{\Delta^n F(a)}{h^n} +$$

$$+ \frac{(x-a)(x-a-h)\dots(x-a-nh)}{1.2.3\dots(n+1)} \cdot F^{(n+1)}(\xi).$$

Эта формула называется формулой Ньютона съ дополнительнымъ членомъ.

§ 4.

Формула Ньютона для случая двухъ перемѣнныхъ.

Возьмемъ функцію 2-хъ перемѣнныхъ $f(x,y)$. Ея частная разность по x будетъ

$$\Delta_x f(x,y) = f(x+h,\ y) - f(x,y);$$

частная разность по y:

$$\Delta_y f(x,y) = f(x,\ y+k) - f(x,y).$$

Составимъ частныя разности второго порядка:

$$\Delta^2_{xx} f(x,y) = f(x+2h,\ y) - 2f(x+h,\ y) + f(x,y)$$

[см. ф. (I) § 1]

$$\Delta^2_{yy} f(x,y) = f(x,\ y+2k) - 2f(x,\ y+k) + f(x,y).$$

$$\Delta^2_{xy} f(x,y) = \Delta_y(\Delta_x f) = f(x+h,\ y+k) - f(x,\ y+k) -$$

$$- f(x+h,\ y) + f(x,y)$$

$$\Delta^2_{yx} f(x,y) = \Delta_x(\Delta_y f) = f(x+h,\ y+k) - f(x+h,\ y) -$$
$$- f(x,\ y+k) + f(x,y).$$

Сравнивая послѣднія два выраженія, заключаемъ, что

$$\Delta^2_{xy} = \Delta^2_{yx}.$$

Переходимъ къ частнымъ разностямъ 3-го порядка. Частныя разности

$$\Delta^3_{xxx} f(x,y), \quad \Delta^3_{yyy} f(x,y)$$

находятся по форм. (I) §1.

Далѣе имѣемъ

$$\Delta^3_{xxy} = f(x+2h,\ y+k) - 2f(x+h,\ y+k) + f(x,\ y+k) -$$
$$- f(x+2h,\ y) + 2f(x+h,\ y) - f(x,y).$$

Легко убѣдиться, что и для 3-ихъ разностей результатъ не зависитъ отъ порядка, т.е.

$$\Delta^3_{xxy} = \Delta^3_{xyx} = \Delta^3_{yxx}.$$

Также легко провѣрить, что для составленія разности

$$\Delta^{m+n}_{x^m y^m} f(x,y)$$

нужно имѣть $(m+1)(n+1)$ частныхъ значеній $f(x,y)$:

$$f(x+\mu h,\ y+\nu k), \quad \text{гдѣ} \quad \mu = 0,1,2,3,\ldots m, \quad \nu = 0,1,2,\ldots n.$$

Пусть для $f(x,y)$ заданы 9 частныхъ значеній:

$$f(a+2h,\ b+2k), \quad f(a+2h,\ b+k), \quad f(a+2h,\ b)$$
$$f(a+h,\ b+2k), \quad f(a+h,\ b+k), \quad f(a+h,\ b)$$
$$f(a,\ b+2k), \quad f(a,\ b+k), \quad f(a,\ b).$$

Разсматривая y, какъ параметръ, не зависящій отъ x по формулѣ Ньютона § 3 опредѣляемъ $f(x,y)$ по тремъ значеніямъ $f(a,y)$, $f(a+h,\ y)$, $f(a+2h,\ y)$:

$$f(x,y) = f(a,y) + \frac{x-a}{1}\,\frac{\Delta_x f(a,y)}{h} + \frac{(x-a)(x-a-h)}{1.2}\,\frac{\Delta^2_{xx} f(a,y)}{h^2}.$$

Функцію $f(a,y)$ опредѣляемъ тремя частными значеніями $f(a,b)$, $f(a,\ b+k)$, $f(a,\ b+2k)$ по той же формулѣ Ньютона для одной перемѣнной (§ 3):

$$f(a,y) = f(a,b) + \frac{y-b}{1}\,\frac{\Delta_y f(a,b)}{k} + \frac{(y-b)(y-b-k)}{1.2}\,\frac{\Delta^2_{yy} f(a,b)}{k^2},$$

причемъ

$$\Delta_y f(a,b) \quad \text{и} \quad \Delta^2_{yy} f(a,b)$$

могутъ быть выражены черезъ $f(a,b)$, $f(a,\ b+k)$, $f(a,\ b+2k)$.

Далѣе находимъ

$$\Delta_x f(a,y) = \Delta_x f(a,b) + \frac{y-b}{1}\cdot\frac{\Delta^2_{xy} f(a,b)}{k} + \frac{(y-b)(y-b-k)}{1.2}\cdot\frac{\Delta^3_{xyy} f(a,b)}{k^2}.$$

$$\Delta^2_{xx} f(a,y) = \Delta^2_{xx} f(a,b) + \frac{y-b}{1}\cdot\frac{\Delta^3_{xxy} f(a,b)}{k} + \frac{(y-b)(y-b-k)}{1.2}\cdot\frac{\Delta^4_{xxyy} f(a,b)}{k^2}.$$

Окончательно:

$$f(x,y) = f(a,b) + \frac{x-a}{1}\cdot\frac{\Delta_x f(a,b)}{h} + \frac{y-b}{1}\cdot\frac{\Delta_y f(a,b)}{k} + \frac{(x-a)(x-a-h)}{1.2}\,\frac{\Delta^2_{xx} f(a,b)}{h^2} + \frac{(x-a)(y-b)}{1.1}\cdot\frac{\Delta^2_{xy} f(a,b)}{h.k} +$$
$$+ \frac{(y-b)(y-b-k)}{1.2}\cdot\frac{\Delta^2_{yy} f(a,b)}{k^2} + \frac{(x-a)(x-a-h)}{1.2}\cdot\frac{y-b}{1}\cdot\frac{\Delta^3_{xxy} f(a,b)}{h^2.k} + \frac{x-a}{1}\cdot\frac{(y-b)(y-b-k)}{1.2}\cdot\frac{\Delta^3_{xyy} f(a,b)}{h.k^2} +$$
$$+ \frac{(x-a)(x-a-h)}{1.2}\cdot\frac{(y-b)(y-b-k)}{1.2}\,\frac{\Delta^4_{xxyy} f(a,b)}{h^2.k^2};$$

всѣ разности, которыя сюда входятъ, по 9 даннымъ значеніямъ могутъ быть опредѣлены.

Эта формула является точной для цѣлой функціи степени второй относительно x и 2-ой относительно y, такъ какъ подобная функція содержитъ 9 членовъ [столько, сколько ихъ въ произведении $(\alpha x^2+\beta x+\gamma)(\alpha_1 y^2+\beta_1 y+\gamma_1)$] и, слѣдовательно, вполнѣ опредѣляется 9-ью частными значеніями.

Замѣчаніе. Если бы, кромѣ заданій 9 значеній, были заданы еще 3:

$$f(a+3h,\ b+2k), \quad f(a+3h,\ b+k), \quad f(a+3h,\ b),$$

то нетрудно убѣдиться, что въ предыдущей формулѣ прибавились бы члены:

$$\frac{(x-a)(x-a-h)(x-a-2h)}{1.2.3}\cdot\left[\frac{\Delta^3_{xxx}f(a,b)}{h^3}+\right.$$

$$\left.+\frac{y-b}{1}\cdot\frac{\Delta^4_{xxxy}f(a,b)}{h^3.k}+\frac{(y-b)(y-b-k)}{1.2}\cdot\frac{\Delta^5_{xxxyy}f(a,b)}{h^3.k^2}\right],$$

такъ какъ тогда пришлось бы написать:

$$f(x,y)=f(a,y)+\frac{x-a}{1}\cdot\frac{\Delta_x f(a,y)}{h}+\frac{(x-a)(x-a-h)}{1.2}\cdot\frac{\Delta^2_{xx}f(a,y)}{h^2}+$$

$$+\frac{(x-a)(x-a-h)(x-a-2h)}{1.2.3}\cdot\frac{\Delta^3_{xxx}f(a,y)}{h^3},$$

гдѣ

$$f(a,y)=f(a,b)+\frac{y-b}{1}\cdot\frac{\Delta_y f(a,b)}{k}+\frac{(y-b)(y-b-k)}{1.2}\cdot\frac{\Delta^2_{yy}f(a,b)}{k^2},$$

и эта формула была бы точна для цѣлой функціи степени 3-ей относительно x и 2-ой относительно y.

§ 5.

Неопредѣленныя суммы.

Опредѣленіе. Если

$$\Delta F(x)=f(x),$$

то $F(x)$ называется *неопредѣленной суммой* или просто суммой для $f(x)$:

$$\Sigma\, f(x)=F(x).$$

Теорема. Данной функціи $f(x)$ отвѣчаетъ безчисленное множество суммъ $F(x)$, которыя всѣ отличаются другъ отъ друга прибавкой періодической функціи отъ x съ періодомъ h.

Дѣйствительно, пусть $\Sigma f(x) = F(x)$, гдѣ $F(x)$ - одна изъ извѣстныхъ намъ суммъ, и $\Sigma f(x) = F_1(x)$, гдѣ $F_1(x)$ - всякая иная возможная сумма. Эти суммы должны удовлетворять условію

$$\Delta F(x) = f(x)$$

$$\Delta F_1(x) = f(x).$$

Вычитая одно равенство изъ другого, получимъ:

$$\Delta F_1(x) - \Delta F(x) = 0$$

или

$$\Delta[F_1(x) - F(x)] = 0.$$

Если положить

$$F_1(x) - \Delta F(x) = \psi(x),$$

то

$$\Delta\psi(x) = 0$$

или

$$\psi(x+h) - \psi(x) = 0,$$

откуда слѣдуетъ

$$\psi(x+h) = \psi(x),$$

т.е. $\psi(x)$ есть періодическая функція съ періодомъ h.

Итакъ

$$F_1(x) = F(x) + \psi(x)$$

или

$$\Sigma f(x) = F(x) + \psi(x),$$

что и требовалось доказать.

Слѣдствіе. Если мы будемъ давать x лишь такія значенія, которыя отличаются другъ отъ друга на кратныя h:

$$x = a,\ a+h,\ a+2h,\ a+3h,\ \dots$$

или

$$a-h,\ a-2h,\ a-3h,\ \dots,$$

то $\psi(x)$ для всѣхъ этихъ значеній имѣетъ одну величину:

$$\psi(x) = \psi(a) = C,$$

и тогда предъидущая формула принимаетъ видъ

$$\Sigma f(x) = F(x) + C,$$

причемъ $\Delta F(x) = f(x)$.

Здѣсь можно замѣтить полную аналогію съ формулой интегральнаго исчисленія:

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

гдѣ

$$dF(x) = f(x)dx.$$

Теорема. Дѣйствія Δ и Σ суть обратныя другъ другу, т.е., произведенныя послѣдовательно надъ нѣкоторой функціей, они возстановляютъ первоначальное значеніе функціи (если не считать прибавки постоянной).

Дѣйствительно, пусть

$$\Delta F(x) = f(x) \quad \text{и} \quad \Sigma f(x) = F(x) + C.$$

Тогда имѣемъ

$$\Delta\Sigma f(x) = \Delta[F(x) + C] = \Delta F(x) = f(x),$$

$$\Sigma\Delta F(x) = \Sigma f(x) = F(x) + C.$$

§ 6.

Суммы простѣйшихъ функцій.

1°. Сумма

$$\Sigma\, af(x) = a\Sigma\, f(x),$$

гдѣ a постоянная.

Дѣйствительно, имѣемъ очевидное равенство

$$\Delta\, aF(x) = a\Delta\, F(x) = af(x).$$

Беря теперь неопредѣленныя суммы, получимъ

$$\Sigma\, af(x) = \Sigma\Delta\, aF(x) = aF(x) = a\Sigma\, f(x)$$

(постоянная содержится въ самомъ знакѣ неопредѣленной суммы).

2°.

$$\Sigma[f_1(x) - f_2(x)] = \Sigma f_1(x) + \Sigma f_2(x).$$

Доказательство подобно предыдущему. Имѣемъ

$$\Delta F_1(x) = f_1(x); \quad \Sigma f_1(x) = F_1(x) + C$$

$$\Delta F_2(x) = f_2(x); \quad \Sigma f_2(x) = F_2(x) + C$$

и прилагаемъ формулу

$$\Delta[F_1(x) + F_2(x)] = \Delta F_1(x) + \Delta F_2(x) = f_1(x) + f_2(x).$$

Отсюда, беря суммы:

$$\Sigma [f_1(x) + f_2(x)] = \Sigma \Delta[F_1(x) + F_2(x)] =$$

$$= F_1(x) + F_2(x) = \Sigma f_1(x) + \Sigma f_2(x).$$

3°. Найдемъ

$$\Sigma (x-a)(x-a-h)\ldots\ldots(x-a-\overline{n-1}\,h).$$

Для этого воспользуемся формулой § 2:

$$\Delta(x-a)(x-a-h)\ldots(x-a-\overline{n-1}\,h) = nh(x-a)(x-a-h)\ldots(x-a-\overline{n-2}\,h);$$

отсюда

$$nh\,\Sigma(x-a)(x-a-h)\ldots\ldots(x-a-\overline{n-2}\,h)$$

$$= (x-a)(x-a-h)\ldots\ldots(x-a-\overline{n-1}\,h).$$

Мѣняя n на $n+1$, получимъ

$$\Sigma(x-a)(x-a-h)\ldots(x-a-\overline{n-1}\,h) = \frac{(x-a)(x-a-h)\ldots(x-a-nh)}{(n+1)h}$$

Замѣтимъ аналогію съ формулой

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$$

Замѣчаніе. Суммы отъ цѣлыхъ функцій удобнѣе всего находить, предварительно разложивъ функцію на сумму факторіаловъ.

Для примѣра найдемъ Σx^2 и Σx^3. Имѣемъ:

$$a)\quad x^2 = x(x-1) + x \quad [h = 1]$$

$$\Sigma x^2 = \Sigma x(x-1) + \Sigma x = \frac{x(x-1)(x-2)}{3} + \frac{x(x-1)}{2} =$$

$$= \frac{x(x-1)}{6}\,[2x - 4 + 3] = \frac{x(x-1)(2x-1)}{6}.$$

β) $\quad x^3 = x(x-1)(x-2) + 3x(x-1) + x$

$$\Sigma x^3 = \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{4} + \frac{3x(x-1)(x-2)}{3} + \frac{x(x-1)}{2} =$$

$$= \frac{x(x-1)}{4}\,[x^2 - 5x + 6 + 4x - 8 + 2] = \left[\frac{x(x-1)}{2}\right]^2.$$

4°. Пользуясь формулой § 2

$$\Delta \frac{1}{(x-a)(x-a+h)\ldots(x-a+\overline{n-1}\,h)} = \frac{-\,nh}{(x-a)(x-a+h)\ldots(x-a+nh)},$$

выводимъ

$$-nh\Sigma \frac{1}{(x-a)(x-a+h)\ldots(x-a+nh)} = \frac{1}{(x-a)(x-a+h)\ldots(x-a+\overline{n-1}\,h)},$$

и мѣняя въ послѣдней n на $n-1$, получимъ

$$\Sigma \frac{1}{(x-a)(x-a+h)\ldots(x-a+\overline{n-1}\,h)} =$$

$$= -\frac{1}{(n-1)\,h(x-a)(x-a+h)\ldots(x-a+\overline{n-2}\,h)}$$

(аналогія съ формулой $\int \frac{dx}{x^n} = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$).

Выведенная формула не имѣетъ мѣста при $n = 1$, и сумма $\Sigma \frac{1}{x-a}$ есть особая трансцендентная функція.

5°. Изъ формулы $\Delta m^x = m^x(m^h - 1)$ находимъ

$$(m^h - 1)\,\Sigma m^x = m^x;$$

отсюда

$$\Sigma m^x = \frac{m^x}{m^h - 1}.$$

6°. Изъ формулы $\Delta \mathrm{Sin}(x - \frac{h}{2}) = 2\mathrm{Sin}\,\frac{h}{2}\,\mathrm{Cos}x$ находимъ

$$\Sigma \operatorname{Cos}x = \frac{\operatorname{Sin}(x - h/2)}{2\operatorname{Sin} h/2}.$$

7°. Изъ формулы $\Delta \operatorname{Cos}(x - h/2) = -2\operatorname{Sin} h/2 \operatorname{Sin}x$ находимъ

$$\Sigma \operatorname{Sin}x = -\frac{\operatorname{Cos}(x - h/2)}{2\operatorname{Sin} h/2}.$$

§ 7.

Опредѣленныя суммы.

Опредѣленіе. Опредѣленной суммой называется сумма вида

$$f(a) + f(a+h) + \ldots + f(a + \overline{n-1}\, h) = \sum_{a}^{a+nh} f(x)$$

[слѣдуетъ отмѣтить особенность обозначенія: верхній предѣлъ $a+nh$ на h больше послѣдняго аргумента функціи $f(x)$].

Теорема. Опредѣленная сумма

$$\sum_{a}^{a+nh} f(x) = F(a+nh) - F(a),$$

гдѣ $F(x)$ обозначаетъ неопредѣленную сумму отъ $f(x)$:

$$F(x) = \Sigma f(x).$$

Доказательство. По опредѣленію имѣемъ $F(x) = \Sigma f(x)$; отсюда $\Delta F(x) = f(x)$. Выпишемъ теперь значенія $f(x)$ для $x = a$, $a+h$, ... $a + \overline{n-1}\, h$:

$$f(a) = F(a+h) - F(a)$$

$$f(a+h) = F(a+2h) - F(a+h)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f(a + \overline{n-1}\, h) = F(a+nh) - F(a + \overline{n-1}\, h).$$

Сложивъ почленно эти равенства, найдемъ

$$\int \sum_{a}^{a+nh} f(x) = F(a+nh) - F(a),$$

что и требовалось доказать [аналогія съ формулой

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

гдѣ $dF(x) = f(x)dx$].

Примѣръ 1. Арифметическая прогрессія:

$$a + (a+h) + (a+2h) + \dots (a + \overline{n-1}\, h) = \sum_{a}^{a+nh} x =$$

$$= \left[\frac{x(x-h)}{2h}\right]_a^{a+nh} = \frac{(a+nh)(a+\overline{n-1}\,h) - a(a-h)}{2h} = \frac{a+a+\overline{n-1}\,h}{2}\, n.$$

Примѣръ 2.

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 = \sum_{1}^{n} x^2 =$$

$$= \left[\frac{(x-1)x(2x-1)}{6}\right]_1^n = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \qquad (\text{см. } n^\circ\ 3\ \S\ 6).$$

Примѣръ 3.

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + (n-1)^3 = \sum_{1}^{n} x^3 = \left[\left(\frac{x(x-1)}{2}\right)^2\right]_0^n =$$

$$= \left[\frac{n(n-1)}{2}\right]^2 = (1 + 2 + 3 + \dots + \overline{n-1})^2 \quad (\text{см. } n^\circ 3\ \S 6).$$

Примѣръ 4.

$$1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \dots + (n-2)(n-1)n =$$

$$= \sum_{3}^{n+1} x(x-1)(x-2) = \left[\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{4}\right]_3^{n+1} =$$

$$= \frac{(n-2)(n-1)n(n+1)}{4} \qquad (\text{здѣсь } h = 1).$$

Примѣръ 5.

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \ldots = \sum_1^\infty \frac{1}{x(x+1)} =$$

$$= \left[-\frac{1}{x} \right]_1^\infty = 1.$$

Примѣръ 6.

$$\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \frac{1}{7.9} + \ldots = \sum_1^\infty \frac{1}{x(x+2)} =$$

$$= \left[-\frac{1}{2x} \right]_1^\infty = \frac{1}{2}.$$

Примѣръ 7.

$$\frac{1}{1.4.7} + \frac{1}{2.5.8} + \frac{1}{3.6.9} + \frac{1}{4.7.10} + \frac{1}{5.8.11} + \ldots =$$

$$= \sum_1^\infty \frac{1}{x(x+3)(x+6)} + \sum_2^\infty \frac{1}{x(x+3)(x+6)} + \sum_3^\infty \frac{1}{x(x+3)(x+6)} =$$

$$= \left[-\frac{1}{x(x+3).6} \right]_1^\infty + \left[-\frac{1}{x(x+3).6} \right]_1^\infty + \left[-\frac{1}{x(x+3).6} \right]_1^\infty =$$

$$= \frac{1}{6} \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{10} + \frac{1}{18} \right] = \frac{1}{12} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} \right] =$$

$$= \frac{1}{12} . \frac{45 + 18 + 10}{95} = \frac{73}{1080}.$$

Примѣръ 8.

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} = \sum_0^n q^x = \left[\frac{q^x}{q-1} \right]_0^n = \frac{q^n - 1}{q-1}.$$

Примѣръ 9.

$$1 + \mathrm{Cos}h + \mathrm{Cos}2h + \mathrm{Cos}3h + \ldots + \mathrm{Cos}\,\overline{n-1}\,h =$$

$$= \sum_0^{nh} \mathrm{Cos}x = \left[\frac{\mathrm{Sin}(x - h/_2)}{2\mathrm{Sin}\, h/_2} \right]_0^{nh} =$$

$$= \frac{\mathrm{Sin}(n - 1/_2)h + \mathrm{Sin}\, h/_2}{2\mathrm{Sin}\, h/_2} = \frac{\mathrm{Sin}\, \frac{2n-1}{2}\, h}{2\mathrm{Sin}\, h/_2} + \frac{1}{2},$$

или

$$= \frac{1}{2} + \mathrm{Cos}\,h + \mathrm{Cos}\,2h + \ldots + \mathrm{Cos}(n-1)h = \frac{\mathrm{Sin}\,\frac{2n-1}{2}h}{2\,\mathrm{Sin}\,\frac{h}{2}}.$$

Примѣръ 10.

$$\mathrm{Sin}\,h + \mathrm{Sin}\,2h + \ldots + \mathrm{Sin}\,\overline{n-1}\,h = \sum_{0}^{nh} \mathrm{Sin}\,x =$$

$$= \left[\frac{-\mathrm{Cos}(x - \frac{h}{2})}{2\,\mathrm{Sin}\,\frac{h}{2}}\right]_0^{nh} = \frac{\mathrm{Cos}\,\frac{h}{2} - \mathrm{Cos}(n - \frac{1}{2})h}{2\,\mathrm{Sin}\,\frac{h}{2}} =$$

$$= \frac{\mathrm{Sin}\,\frac{nh}{2} \cdot \mathrm{Sin}\,\frac{(n-1)h}{2}}{\mathrm{Sin}\,\frac{h}{2}}.$$

§ 8.

Формула Эйлера (Маклорена) для выраженія суммъ черезъ интегралы.

Если мы имѣемъ нѣкоторую цѣлую функцію $F(x)$ степени $(m+1)$, то ея разность $\Delta F(x)$ можно разложить въ рядъ по формулѣ Тейлора:

$$\Delta F(x) = F(x+h) - F(x) = hF'(x) + \frac{h^2}{1.2}F''(x) +$$

$$+ \frac{h^3}{1.2.3}F'''(x) + \ldots + \frac{h^{m+1}}{1.2.3\ldots(m+1)}F^{(m+1)}(x).$$

Пусть $f(x)$ цѣлая функція степени n-ой. Полагая въ предыдущемъ разложеніи послѣдовательно

$$F(x) = \frac{1}{h}\int_a^x f(x)dx, \quad f(x), \quad hf'(x), \quad \ldots \quad h^{n-1}f^{(n-1)}(x)$$

и соотвѣтственно

$$m = n, \qquad n-1, \quad n-2, \quad \ldots \qquad 0,$$

найдемъ такой рядъ формулъ:

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(x)dx = f(x) + \frac{h}{1.2} f'(x) + \frac{h^2}{1.2.3} f''(x) + \frac{h^3}{1.2.3.4} f'''(x) + \ldots + \frac{h^n}{1.2\ldots(n+1)} f^{(n)}(x) \quad \Big| \; 1$$

$$\Delta f(x) = hf'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) + \frac{h^3}{1.2.3} f'''(x) + \ldots\ldots + \frac{h^n}{1.2\ldots n} f^{(n)}(x) \quad \Big| \; A_1$$

$$h\Delta f'(x) = h^2 f''(x) + \frac{h^2}{1.2} f'''(x) + \ldots\ldots + \frac{h^n}{1.2\ldots(n-1)} f^{(n)}(x) \quad \Big| \; A_2$$

$$h^2\Delta f''(x) = h^3 f'''(x) + \ldots\ldots + \frac{h^n}{1.2\ldots(n-2)} f^{(n)}(x) \quad \Big| \; A_3$$

. . . .

$$h^{n-2}\Delta f^{(n-2)}(x) = \ldots\ldots + \frac{h^n}{1.2} \,.\, f^{(n)}(x) \quad \Big| \; A_{n-1}$$

$$h^{n-1}\Delta f^{(n-1)}(x) = h^n \,.\, f^{(n)}(x) \quad \Big| \; A_n.$$

Помножимъ эти выраженія соотвѣтственно на 1, A_1, A_2, ... A_n и сложимъ. Тогда получимъ:

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(x)dx + A_1\Delta f(x) + A_2 h\Delta f'(x) + A_3 h^2\Delta f''(x) + \ldots\ldots + A_{n-1}h^{n-2}\Delta f^{(n-2)}(x) + A_n h^{n-1}\Delta f^{(n-1)}(x) = f(x) + hf'(x)\left[\frac{1}{1.2} + A_1\right] + h^2 f''(x)\left[\frac{1}{1.2.3} + \frac{A_1}{1.2} + A_2\right] + h^3 f'''(x)\left[\frac{1}{1.2.3.4} + \frac{A_1}{1.2.3} + \frac{A_2}{1.2} + A_3\right] + \ldots + h^n f^{(n)}(x)\left[\frac{1}{1.2.3\ldots(n+1)} + \right.$$

$$+ \frac{A_1}{1.2\ldots n} + \frac{A_2}{1.2.3\ldots(n-1)} + \ldots\ldots + \frac{A_{n-1}}{1.2} + A_n \Bigg].$$

Опредѣлимъ постоянныя такъ, чтобы всѣ скобки обращались въ нуль:

$$\frac{1}{1.2} + A_1 = 0; \qquad \text{отсюда} \qquad A_1 = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{1.2.3} + \frac{A_1}{1.2} + A_2 = 0; \qquad " \qquad A_2 = +\frac{1}{12}$$

$$\frac{1}{1.2.3.4} + \frac{A_1}{1.2.3} + \frac{A_2}{1.2} + A_3 = 0 \qquad " \qquad A_3 = 0$$

$$\frac{1}{1.2.3.4.5} + \frac{A_1}{1.2.3.4} + \frac{A_2}{1.2.3} + \frac{A_3}{1.2} + A_4 = 0 \qquad " \qquad A_4 = -\frac{1}{720}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad " \qquad A_5 = 0$$

$$\frac{1}{1.2\ldots(n+1)} + \frac{A_1}{1.2\ldots n} + \ldots + A_n = 0 \qquad " \qquad \text{и т. д.}$$

Доказано, что всѣ

$$A_{2k+1} = 0 \quad (k > 0);$$

$$A_{2k} \text{ имѣютъ знакъ } (-1)^{k-1}.$$

При такомъ выборѣ постоянныхъ оказывается

$$f(x) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(x)dx + A_1\Delta f(x) + A_2 h\Delta f'(x) +$$

$$+ A_3 h^2\Delta f''(x) + \ldots\ldots + A_n h^{n-1}\Delta f^{(n-1)}(x).$$

Возьмемъ отъ обѣихъ частей равенства опредѣленныя суммы въ предѣлахъ отъ a до $b = a+mh$ (x принимаетъ значенія a, $a+h$, ... $b-h$):

$$\sum_a^b f(x) = \frac{1}{h}\int_a^b f(x)dx + A_1[f(b) - f(a)] + A_2 h[f'(b)-f'(a)] +$$

$$+ A_3 h^2[f''(b) - f''(a)] + \ldots + A_n h^{n-1}[f^{(n-1)}(b) - f^{(n-1)}(a)].$$

Это есть *формула Эйлера*, которая выражаетъ сумму черезъ интегралъ. Эта формула вѣрна для цѣлой функціи степени n и ниже. Если же она примѣняется къ иной функціи, то нужно прибавить въ правой части ея дополнительный членъ, который, какъ доказывается, при $n = 2k-1$ имѣетъ видъ

$$R_{2k} = n^{2k} A_{2k} \sum_a^b f^{(2k)}(x+\theta n).$$

Если $f^{(2k)}(x)$ и $f^{(2k+2)}(x)$ сохранятъ одинъ и тотъ же знакъ при $a \leqq x \leqq b$, то при положительномъ знакѣ этихъ ф-ій

R_{2k} имѣетъ знакъ A_{2k} или $(-1)^{k-1}$.

Подобнымъ образомъ дополнительный членъ R_{2k+2} имѣетъ знакъ

A_{2k+2} или $(-1)^k$,

такъ что R_{2k} и R_{2k+2} противоположныхъ знаковъ.

Но

$$R_{2k} = A_{2k}n^{2k-1}[f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)] + R_{2k+2},$$

отсюда

$$R_{2k} - A_{2k}\, n^{2k-1}[f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)] = R_{2k+2};$$

такъ какъ R_{2k} и R_{2k+2} разныхъ знаковъ, вычитаемое число должно быть одного знака съ уменьшаемымъ и численно больше его, поэтому можно написать

$$R_{2k} = \theta . A_{2k}\, n^{2k-1}[f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)],$$

гдѣ $0 < \theta < 1$.

Итакъ, при условіи, что $f^{(2k)}(x)$ и $f^{(2k+2)}(x)$ сохраняютъ одинаковый знакъ при $a \leqq x \leqq b$, формула Эйлера принимаетъ видъ:

$$\sum_a^b f(x) = \frac{1}{n}\int_a^b f(x)dx + A_1[f(b) - f(a)] + A_2 n[f'(b)-f'(a)] +$$

$$+ A_3 n^2[f''(b) - f''(a)] + \ldots + A_{2k-2}\, n^{2k-3}[f^{(2k-3)}(b) -$$

$$- f^{(2k-3)}(a)] + A_{2k-1}\, n^{2k-2}[f^{(2k-2)}(b) - f^{(2k-2)}(a)] +$$

$$+ \theta . A_{2k}\, n^{2k-1}[f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)].$$

Примѣръ I. Вычислить съ точностью до $\frac{1}{10^5}$ сумму

$$\frac{1}{100}+\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+\frac{1}{103}+\ldots.+\frac{1}{999}=\sum_{100}^{1000}\frac{1}{x}.$$

Здѣсь

$$h=1; \qquad a=100; \qquad b=1000$$

$$f(x)=\frac{1}{x}; \quad f'(x)=-\frac{1}{x^2}; \quad f''(x)=+\frac{2}{x^3}$$

и т.д. Функціи $f(x)$ и $f''(x)$ сохраняютъ знакъ + при

$$a \leqq x \leqq b.$$

Слѣдовательно, можно взять формулу Эйлера, причемъ дополнительный членъ будетъ содержать A_2. Имѣемъ

$$\sum_{100}^{1000}\frac{1}{x}=\int_{100}^{1000}\frac{dx}{x}-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1000}-\frac{1}{100}\right]+\theta.\frac{1}{12}\left[-\frac{1}{(1000)^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{(100)^2}\right]=\log 10+0{,}0045-\frac{\theta}{12}\,0{,}011.0{,}009=$$

$$=\ 2{,}30259+0{,}0045-\theta\,.\,0{,}000009.$$

Итакъ

$$\sum_{100}^{1000}\frac{1}{x}=2{,}30709 \text{ съ точностью до } \frac{1}{10^5}.$$

Примѣръ II. Вычислить съ точностью до $\frac{1}{10^5}$ сумму

$$1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{5^3}+\ldots.=S.$$

Перепишемъ эту сумму въ такомъ видѣ

$$S\ =\ 1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\sum_{5}^{\infty}\frac{1}{x^3}.$$

Имѣемъ

$$a=5; \quad b=\infty; \quad h=1; \quad f(x)=\frac{1}{x^3}; \quad f'(x)=-\frac{3}{x^4};$$

$$f''(x) = \frac{12}{x^5}\ ; \quad f'''(x) = -\frac{60}{x^6}\ ; \quad f^{IV}(x) = \frac{360}{x^7} \text{ и т. д.}$$

Мы замѣчаемъ, что производныя $f''(x)$ и $f^{IV}(x)$ имѣютъ одинаковые знаки. Слѣдовательно, можно примѣнить формулу Эйлера съ дополнительнымъ членомъ $\theta . A_4 h^3 [f'''(b) - f'''(a)]$:

$$\sum_5^\infty \frac{1}{x^3} = \int_5^\infty \frac{dx}{x^3} - \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{5^3}\right] + \frac{1}{12}\left[+\frac{3}{5^4}\right] - \frac{\theta}{720}\left[\frac{60}{5^6}\right] =$$

$$= +\frac{1}{2.5^2} + \frac{1}{2.5^3} + \frac{1}{4.5^4} - \frac{\theta}{12.5^6} = 0{,}0244 - \frac{\theta}{187500}\ ;$$

$$\sum_5^\infty \frac{1}{x^3} = 0{,}0244 \quad \text{съ точностью до } \frac{1}{10^5}\ .$$

Отсюда, вычисляя $\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3}$, непосредственно имѣемъ

$$S = 1 + 0{,}125 + 0{,}037037 + 0{,}015625 + 0{,}0244 = 1{,}17766 +$$

$$+ 0{,}02440 = 1{,}20206 \quad \text{съ точностью до } \frac{1}{10^5}\ .$$

-------- --------

Проф. А. А. Адамовъ ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА