Д. П. Рузскій.

ГИДРАВЛИКА

ЛЕКЦІИ, ЧИТАННЫЯ
КІЕВСКОМЪ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОМЪ
Императора Александра II
ИНСТИТУТѢ
въ 1900—1901 году.

ИЗДАНІЕ СТУДЕНТА
Г. К. Таценко.

Кіевъ.
ографія М. М. Фиха, Б.-Васильковская, д. № 10.
1901.

Д. П. Рузскій

Гидравлика.

ЛЕКЦІИ, ЧИТАННЫЯ
ВЪ КІЕВСКОМЪ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОМЪ
Императора Александра II
ИНСТИТУТѢ
ВЪ 1900—1901 ГОДУ.

ИЗДАНІЕ СТУДЕНТА
Г. К. Таценко.

Кіевъ.
Типографія Петра Барскаго. Крещатикъ, собст. домъ № 40
1900.

Печат, съ разрѣш. г. Директора Кіевск. Политехн. Инстит. В. Л. Кирпичева.

Вступленіе.

Предметомъ настоящаго курса будетъ служить тотъ отдѣлъ прикладной механики, который именуется гидравликой.

Предметъ гидравлики составляетъ изслѣдованіе обстоятельствъ равновѣсія и движенія жидкихъ тѣлъ.

Жидкими называются такія тѣла, которыя могутъ течь.

Подъ это опредѣленіе подходятъ всевозможныя жидкости какъ очень вязкія, напр. смолы и масла, такъ и очень подвижныя, напр., жидкости газообразныя.

Разсматривая существенныя свойства различныхъ жидкостей, послѣднія можно разбить на два класса: на жидкости капельныя и жидкости газообразныя.

Капельныя жидкости несжимаемы, или, вѣрнѣе, настолько мало сжимаемы, что этимъ сжатіемъ можно пренебречь. Такъ напримѣръ, вода, которая является однимъ изъ представителей капельныхъ жидкостей, при увеличеніи давленія на одну атмосферу измѣняетъ свой объемъ на 0,000046.

Жидкости газообразныя, напротивъ того, сжимаемы неограниченно, при чемъ ихъ упругость возрастаетъ съ уменьшеніемъ объема.

При изслѣдованіи обстоятельствъ равновѣсія и движенія капельныхъ жидкостей предполагаютъ, что относительныя перемѣщенія частицъ ихъ не сопровождаются треніемъ; иначе сказать, предполагаютъ, что между частицами не развивается сопротивленіе скольженію, вслѣдствіе чего капельныя жидкости принимаютъ точную форму того сосуда, въ которомъ онѣ заключены. Такія жидкости называются *совершенными.*

Какъ мы увидимъ ниже, вода, которой мы и будемъ главнымъ образомъ заниматься, очень близко подходитъ къ такой идеальной жидкости.

Что касается до жидкостей болѣе вязкихъ, чѣмъ вода, то и имъ можно приписывать тѣ же свойства, если относительныя перемѣщенія ихъ частицъ очень медленны. Однако же при точныхъ изслѣдованіяхъ треніе между частицами этого рода жидкостей слѣдуетъ принимать во вниманіе.

При изслѣдованіи обстоятельствъ равновѣсія и движенія жидкостей газообразныхъ также предполагается, что при относительномъ движеніи частицъ этихъ жидкостей совершенно отсутствуютъ всякія сопротивленія; кромѣ того допускаютъ, что эти жидкости слѣдуютъ закону Маріотта и Гей-Люссака.

Въ дальнѣйшемъ изложеніи мы будемъ придерживаться такого плана:

1) равновѣсіе жидкостей (гидростатика);

2) движеніе жидкостей (гидродинамика):

   а) капельныхъ совершенныхъ и вязкихъ,

   в) газообразныхъ.

Прежде всего условимся разъ навсегда въ слѣдующихъ обозначеніяхъ:

V—объемъ жидкости,

v—удѣльный объемъ жидкости (объемъ единицы вѣса),

G—вѣсъ жидкости,

M—масса жидкости,

Δ—вѣсъ единицы объема (1 куб. метра),

ρ—плотность (масса единицы объема).

Между этими величинами существуютъ слѣдующія соотношенія:

$$G = V.\Delta = \frac{V}{v} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

$$M = V.\rho \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

$$\Delta = \rho.g \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

$$v.\Delta = 1 \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

$$G = M.g \quad \ldots\ldots\ldots (5),$$

гдѣ g—ускореніе тяжести, которое для среднихъ широтъ можетъ быть принято равнымъ 9,81 метр. въ секунду.

Такъ какъ въ дальнѣйшемъ мы будемъ заниматься главнымъ образомъ водой и воздухомъ, то установимъ разъ навсегда всѣ величины для этихъ жидкостей.

Для воды:	Δ=1000	клгр.	при	4°C
	„ 930	„	„	0°
	„ 999,72	„	„	10°
	„ 995,73	„	„	30°
	„ 957	„	„	100°.

Отсюда и видно, что при обыкновенныхъ температурахъ можно безъ большой погрѣшности считать:

$$\Delta = 1000 \text{ клгр.}$$

Для воздуха сухого и чистаго

$$\Delta = 1{,}293 \text{ клгр.}$$

при давленіи 1 атм. и при 0°C.; при этомъ Δ зависитъ отъ давленія и температуры. Эта зависимость прямо вытекаетъ изъ закона Маріотта и Гей-Люссака:

$$pv = R\ (273 + t)$$

или

$$pv = RT,$$

гдѣ $T=273+t^0 C$, p—давленіе на единицу поверхности (въ клгр. на 1 кв. метръ) и R—постоянная, равная для сухого и чистаго воздуха 29,272.

На основаніи этого:

$$\frac{1}{v}=\Delta=\frac{p}{RT}$$

Слѣдуетъ однако замѣтить, что когда дѣло идетъ объ атмосферномъ воздухѣ, который всегда содержитъ влагу, надо принимать это во вниманіе. Кромѣ того, такъ какъ устройство (напр., трубопроводовъ для воздуха) дѣлается разъ навсегда, а температура и давленіе атмосфернаго воздуха постоянно измѣняется, то при разсчетахъ приходится брать нѣкоторыя среднія значенія ихъ.

Профессоръ г. Цейнеръ рекомендуетъ поэтому въ обыкновенныхъ случаяхъ практики принимать:

$$pv=8460,$$

давленіе атмф=10333 клгр. на 1 кв. метръ.

Соотвѣтсвенно этому среднее значеніе v будетъ:

$$v=0,8187$$

и

$$\Delta=\frac{1}{v}=1,2214 \text{ клгр.}$$

Отдѣлъ I.

Гидростатика.

§ 1.

Основныя положенія.

Равновѣсіе какъ капельныхъ жидкостей, такъ и газовъ выражается одними и тѣми же ур—іями, которыя выводятся на основаніи слѣдующаго положенія:

давленія смежныхъ частицъ жидкости другъ на друга нормальны къ поверхности ихъ раздѣла.

Это положеніе является простымъ слѣдствіемъ допущенія совершенной подвижности частицъ жидкости. Дѣйствительно, если бы давленіе одной частицы жидкости на другую не было нормально къ поверхности ихъ раздѣла, то оно могло бы быть разложено на двѣ слагающихъ: одну нормальную и другую тангенціальную; эта вторая слагающая, не встрѣчая сопротивленія тренія, перемѣстила бы одну часть жидкости относительно другой, что нарушило бы равновѣсіе.

Вообразимъ внутри жидкости (чер. 1) нѣкоторую площадку σ Всѣ давленія на эту площадку сводятся къ силѣ P, нормальной къ этой площадкѣ. Взявъ отношеніе силы P къ площадкѣ σ, мы получимъ величину $\frac{P}{\sigma}$, которая представляетъ собою среднее давленіе на единицу площади площадки (это давленіе будетъ среднее, а не истинное, потому что давленіе въ общемъ случаѣ не одинаково во всѣхъ точкахъ площадки). Предѣлъ же этого отношенія, когда σ будетъ безконечно убывать, представитъ собою давленіе на единицу поверхности въ данномъ мѣстѣ жидкой массы. Это давленіе называется *гидростатическимъ давленіемъ*, если жидкость находится въ равновѣсіи.

Такимъ образомъ,

$$\text{гидр.д авл.} = lim \frac{P}{\sigma}$$

Это давленіе различно въ различныхъ точкахъ находящейся въ равновѣсіи жидкой массы и есть непрерывная функція координатъ точки жидкости.

Покажемъ далѣе, что

гидростатическое давленіе въ данной точкѣ не зависитъ отъ направленія площадки, т. е. отъ угловъ, которые дѣлаетъ съ осями координатъ нормаль къ площадкѣ.

Пусть мы имѣемъ жидкость, находящуюся въ равновѣсіи. Вообразимъ въ этой жидкости безконечно-тонкій цилиндръ имѣющій основаніемъ нѣкоторую площадку $d\sigma$ (чер. 2). Сдѣлаемъ нормальное сѣченіе ds этого цилиндра и вообразимъ, что вся масса AB отвердѣла. Такъ какъ эта масса находилась въ равновѣсіи, то она будетъ находиться въ равновѣсіи также и въ твердомъ сосостояніи подъ дѣйствіемъ тѣхъ же силъ; слѣдовательно, она должна удовлетворять условіямъ равновѣсія твердаго тѣла.

Эти условія состоятъ въ слѣдующемъ: сумма проекцій всѣхъ силъ на каждую ось должна быть нулемъ и сумма моментовъ всѣхъ силъ по отношенію ко всякой оси должна равняться нулю.

Составимъ сумму силъ, дѣйствующихъ по оси OX, которую беремъ параллельно образующей цилиндра. Въ A дѣйствуетъ нормальная сила давленія $p_0 ds$, параллельная оси OX, въ сторону OX (p_0—гидрост. давленіе въ A); въ B дѣйствуетъ сила давленія $pd\sigma$, которая по оси OX даетъ составляющую—$pd\sigma cos\alpha$, гдѣ α уголъ между OX и внѣшней нормалью къ площадкѣ $d\sigma$; боковыя давленія на стѣнки цилиндра составляющей по оси OX не дадутъ, такъ какъ они нормальны къ этой оси.

Надо принять еще во вниманіе силу, дѣйствующую на массу цилиндра AB. Пусть на каждую единицу массы дѣйствуютъ по осямъ силы X, Y и Z.

Разобьемъ нашъ цилиндръ AB на безконечно малые цилиндры съ основаніемъ ds и высотой dx; объемъ каждаго цилиндра есть $dx.\ ds$, его масса—$\rho.dx.ds$, и сила, дѣйствующая на массу этого цилиндра по оси OX есть $X\rho dsdx$. Вся же сила, дѣйствующая на массу этого цилиндра по оси OX, выразится интеграломъ:

$$\int_{x_0}^{x} X\rho dxds.$$

Такимъ образомъ на основаніи условій равновѣсія имѣемъ:

$$p_0 ds - pd\sigma cos\alpha + \int_{x_0}^{x} X\rho dsdx = o.$$

Замѣтимъ, что

$$ds = d\sigma cos\alpha$$

и что это есть величина постоянная, такъ что ее можно вынести изъ подъ знака интеграла; въ такомъ случаѣ получимъ:

$$p = p_0 + \int_{x_0}^{x} X\rho dx.$$

Это ур—іе и показываетъ, что давленіе на площадку $d\sigma$ не зависитъ отъ угла α, т. е. отъ направленія площадки. Кромѣ того изъ этого соотношенія легко усмотрѣть, что гидростатическое давленіе при передвиженіи параллельно оси OX измѣняется непрерывно, ибо $\int_{x_0}^{x} X\rho dx$ измѣняется непрерывно съ возрастаніемъ верхняго предѣла.

§ 2.

Уравненія равновѣсія.

Пусть имѣемъ нѣкоторую массу жидкости, находящуюся въ равновѣсіи подъ дѣйствіемъ внѣшнихъ силъ. Вообразимъ въ этой массѣ безконечно малый параллелепипедъ (чер. 3), стороны котораго dx, dy и dz параллельны осямъ координатъ; предположимъ, что онъ отвердѣлъ и будемъ разсматривать условія его равновѣсія. Такъ какъ отвердѣвъ онъ будетъ продолжать быть въ равновѣсіи подъ дѣйствіемъ тѣхъ же силъ, то дѣйствующія силы должны удовлетворять условіямъ равновѣсія твердаго тѣла. Посмотримъ, какія силы дѣйствуютъ по осямъ.

Внѣшняя сила, дѣйствующая на массу этого параллелепипеда, даетъ по осямъ составляющія:

$$X.\ \rho.\ dx.\ dy.\ dz,$$

$$Y.\ \rho.\ dx.\ dy.\ dz,$$

$$Z.\ \rho.\ dx.\ dy.\ dz,$$

гдѣ X, Y и Z—составляющія по осямъ силы, дѣйствующей на единицу массы.

Далѣе, по оси OX дѣйствуютъ гидростатическія давленія на грани параллелепипеда, параллельныя плоскости ZY Для опредѣленія этихъ давленій обозначимъ гидростатическое давленіе въ центрѣ параллелепипеда черезъ p; давленіе это мѣняется для каждой точки при переходѣ отъ центра.

Если мы перейдемъ отъ центра въ положительную сторону оси OX на разстояніе $\frac{dx}{2}$, т. е. къ передней грани, то давленіе p измѣнится въ:

$$p+\frac{dp}{dx}\frac{dx}{2};$$

для задней площадки давленіе будетъ:

$$p-\frac{dp}{dx}\frac{dx}{2}$$

Сила давленія на переднюю площадку по оси OX будетъ:

$$-\left(p+\frac{dp}{dx}\frac{dx}{2}\right)dy.dz,$$

такъ какъ эта сила направлена отъ X къ O; сила же давленія на заднюю площадку—

$$+\left(p-\frac{dp}{dx}\frac{dx}{2}\right)dy.dz.$$

Такимъ образомъ мы нашли всѣ силы, дѣйствующія по оси OX; чтобы имѣло мѣсто равновѣсіе, необходимо, чтобы сумма ихъ была нулемъ, т. е.

$$-\left(p+\frac{dp}{dx}\frac{dx}{2}\right)dy.dz+\left(p-\frac{dp}{dx}\frac{dx}{2}\right)dy.dz+X\rho.dx.dy.dz.=0.$$

Откуда по сокращеніи находимъ:

$$\frac{dp}{dx}=X\rho$$

Таким же образомъ найдемъ:

$$\frac{dp}{dy}=Y\rho$$

и

$$\frac{dp}{dz}=Z\rho$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{dp}{dx}&=X\rho\\ \frac{dp}{dy}&=Y\rho\\ \frac{dp}{dz}&=Z\rho\end{aligned}\right\}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(1)$$

Полученныя ур—ія суть основныя ур—ія гидростатики, представляющія собою условія равновѣсія жидкостей. Они показываютъ, какая существуетъ связь между силами, давленіемъ и плотностью. Въ томъ случаѣ, если жидкость имѣетъ свободную поверхность, для равновѣсія, кромѣ ур—ій (1), необходимо, чтобы гидростатическое давленіе на этой поверхности было равно внѣшнему нормальному давленію. Что касается до гидростатическихъ давленій на стѣнки сосуда, то каковы бы они не были, они всегда будутъ уравновѣшиваться сопротивленіями стѣнокъ.

При выводѣ формулъ (1) мы воспользовались только тремя условіями равновѣсія твердаго тѣла, именно, что сумма проекцій дѣйствующихъ силъ на каждую ось есть нуль; тремя же остальными условіями, что сумма моментовъ силъ относительно каждой оси есть нуль, мы не пользовались.

Не трудно доказать, что эти условія обращаются въ тождества. Дѣйствительно, внѣшнюю силу мы можемъ считать приложенной въ центрѣ тяжести параллелепипеда, а давленіе на каждую грань—въ центрѣ тяжести грани. Всѣ силы, слѣдовательно, при продолженіи пересѣкутся въ одной точкѣ и равнодѣйствующей пары не дадутъ.

§ 3.

Поверхность уровня.

Если мы умножимъ ур—ія (1) соотвѣтственно на dx, dy и dz и сложимъ ихъ, то получимъ:

$$dp = \rho(Xdx + Ydy + Zdz) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

,2)

Такъ какъ dp есть полный дифференціалъ отъ p, то должна необходимо существовать такая функція координатъ U, которая должна удовлетворять соотношеніямъ:

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\rho X,$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}=\rho Y,$$

и

$$\frac{\partial U}{\partial z}=\rho Z,$$

Если наша жидкость однородна, т. е. для если всей массы ея $\rho=const$, что имѣетъ мѣсто въ случаѣ жидкости капельной, то мы получимъ:

$$X=\frac{\partial U}{\partial x} \qquad \partial x$$

$$Y=\frac{\partial U}{\partial y} \qquad \partial y \qquad \partial U = X\partial x + Y\partial y + Z$$

и

$$Z=\frac{\partial U}{\partial z} \qquad \partial z$$

Какъ извѣстно, функція U, удовлетворяющая такимъ условіямъ, будетъ ничто иное, какъ силовая функція. Отсюда и слѣдуетъ. что

капельныя жидкости могутъ быть въ равновѣсіи только подъ дѣйствіемъ силъ, имѣющихъ силовую функцію.

для капельных жидкостей

На основаніи предыдущаго мы имѣемъ:

$$Xdx+Ydy+Zdz=dU.$$

Ур—іе (2) представится при этомъ въ такомъ видѣ:

$$dp=\rho.dU.$$

Отсюда по интеграціи находимъ:

$$p=\rho U+c \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3),$$

гдѣ *c* есть нѣкоторое произвольное постоянное количество.

Полученное ур—іе (3) даетъ искомое выраженіе *p* черезъ внѣшнія силы.

Давая *U* постоянныя значенія, мы получимъ рядъ поверхностей уровня; но при $U=const$, ур—іе (3) даетъ и для *p* постоянное количество. Отсюда слѣдуетъ, что поверхность уровня для капельныхъ жидкостей есть въ то же время и поверхность равнаго давленія.

Рѣшая ур—іе (3) относительно *U*, получимъ:

$$U=\frac{p-c}{\rho}$$

Если свободная поверхность находится подъ постояннымъ давленіемъ $p=p_0$, то

$$U_0=\frac{p_0-c}{\rho}$$

Мы видимъ, что при этомъ для *U* получается опредѣленное постоянное значеніе, слѣдовательно, свободная поверхность есть одна изъ поверхностей уровня.

Если двѣ капельныя жидкости различныхъ плотностей соприкасаются между собою по какой-нибудь поверхности, то эта поверхность должна быть поверхностью уровня и равнаго давленія для той и другой жидкости. Въ самомъ дѣлѣ, пусть двѣ жидкости плотности которыхъ суть ρ и ρ', соприкасаются по поверхности *AB* (чер. 4). Давленіе на всякій элементъ съ той и другой стороны поверхности должно быть одинаково, чтобы имѣло мѣсто равновѣсіе.

Пусть для какого-нибудь элемента этой поверхности давленіе для первой жидкости есть:

$$p=\rho U+c$$

и для другой

$$p'=\rho' U'+c'.$$

Такъ какъ величина потенціальной функціи для даннаго элемента зависитъ только отъ его положенія, то:

$$U=U'.$$

$\rho=\rho'$

На основаніи этого:

$$\rho U+c=\rho' U+c',$$

откуда

$$(\rho-\rho')U=c'-c.$$

Какой бы элементъ мы ни взяли, мы пришли бы къ такому же соотношенію.

Такъ какъ

$$\rho-\rho'=const$$

и

$$c'-c=const,$$

то отсюда явствуетъ, что для всей поверхности AB—

$$U=const.,$$

т. е. эта поверхность есть поверхность равнаго потенціала.

Если мы имѣемъ жидкость газообразную, то мы будемъ имѣть:

$$v=\frac{RT}{p}$$

или

$$\frac{1}{v}=\Delta=\rho.g=\frac{p}{RT},$$

откуда

$$\rho=kp,$$

гдѣ k есть постоянная величина при постоянной температурѣ.

Имѣя это въ виду, изъ ур—ія (2) получимъ:

$$\frac{dp}{kp}=Xdx+Ydy+Zdz,$$

$dp=\rho(Xdx+$

$\rho=kp$

$\frac{dp}{kp}=Xdx+$

откуда:

$$\frac{1}{k}d(lgp)=Xdx+Ydy+Zdz$$

Такъ какъ первая часть этого выраженія есть полный дифференціалъ, то и вторая часть должна быть полнымъ дифференціаломъ.

Это условіе, какъ было показано, ведетъ къ тому, что дѣйствующія силы необходимо должны имѣть силовую функцію. Слѣдовательно, все сказанное для капельной жидкости, имѣетъ мѣсто и для газовъ. Нужно только прибавить, что поверхность уровня, будучи поверхностью равнаго давленія, есть также поверхность равной плотности, ибо при постоянномъ p—

$$\rho=kp=const.$$

§ 4.

Равновѣсіе капельной жидкости подъ дѣйствіемъ силъ тяжести.

Пусть капельная жидкость, помѣщенная въ сосудъ (чер. 5) находится въ равновѣсіи подъ дѣйствіемъ силъ тяжести.

Возьмемъ начало координатъ въ какой-либо точкѣ O свободной поверхности и направимъ ось OZ вертикально внизъ по направленію силы тяжести, а оси OX и OY расположимъ как-нибудь въ горизонтальной плоскости, проходящей черезъ O.

Сила тяжести, отнесенная къ единицѣ массы дастъ по осямъ составляющія:

$$X=o,$$

$$Y=o,$$

и

$$Z=g.$$

Ур—іе (2) при этомъ приметъ такой видъ:

$$dp=g.\rho.\,dz,$$

которое по интеграціи даетъ:

$$p=g\rho\,z+C=\Delta\,z+C.$$

Постоянное C опредѣлимъ по слѣдующимъ даннымъ. Пусть на свободной поверхности, гдѣ $z=o$, дѣйствуетъ атмосферное давленіе p_0; тогда

$$p_0=C,$$

и, слѣдовательно,

$$p=p_0+\Delta z\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (1)$$

Легко видѣть, что свободная поверхность есть плоскость. Дѣйствительно, на свободной поверхности

$$p=p_0,$$

такъ что для нея изъ ур—ія (1) имѣемъ:

$$z=o,$$

а это ур—іе плоскости XY, которая выбрана нами горизонтально.

Всѣ плоскости, параллельныя свободной поверхности, т. е. всѣ горизонтальныя плоскости, данныя ур—іемъ:

$$p_0+\Delta z=const.$$

будутъ поверхности уровня и поверхности равнаго давленія.

Изъ ур—iя (1) мы видимъ, что

давленiе на элементъ площади равно атмосферному давленiю плюсъ вѣсъ столба жидкости, имѣющаго основанiемъ этотъ элементъ, а высотою его разстоянiе до свободной поверхности.

На основанiи предыдущаго будетъ понятно, что если мы въ одинъ и тотъ же сосудъ нальемъ нѣсколько жидкостей различной плотности, то поверхности ихъ соприкосновенiя будутъ горизонтальныя плоскости.

§ 5.

Гидростатическiй парадоксъ.

Положимъ, что мы имѣемъ три сосуда a, b и c (чер. 6), стоящихъ на одной и той же горизонтальной плоскости и наполненныхъ до одной и той же высоты h одной и той же тяжелой жидкостью.

Давленiе на единицу площади дна съ внутренней стороны во всѣхъ трехъ сосудахъ одно и то же, именно

$$\Delta h + p_0,$$

а внѣшнее давленiе на единицу площади будетъ равно атмосферному давленiю, т. е. p_o. Такимъ образомъ равнодѣйствующее давленiе на единицу площади дна будетъ Δh.

Если мы обозначимъ вообще площадь дна какого-либо изъ сосудовъ черезъ ω и вѣсъ жидкости, заключенной въ немъ черезъ P, то давленiе этой жидкости на дно сосуда будетъ

$$\omega h \Delta,$$

$$\text{при чемъ} \begin{cases} \text{для сосуда } a \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \omega h \Delta < P, \\ \quad " \quad " \quad b \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \omega h \Delta = P, \\ \quad " \quad " \quad c \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \omega h \Delta > P. \end{cases}$$

§ 6.

Равновѣсіе разнородныхъ жидкостей въ сообщающихся сосудахъ.

Положимъ, что имѣемъ два сообщающихся сосуда (чер. 7), въ которые налиты двѣ разнородныхъ жидкости. Одна изъ жидкостей, именно жидкость большей плотности, будетъ находиться въ обоихъ сосудахъ и занимать положеніе ABB', а другая—займетъ положеніе $A'B'$. Положимъ, что на поверхность дѣйствуетъ атмосферное давленіе. Обѣ жидкости будутъ соприкасаться по горизонтальной плоскости BB', такъ какъ поверхность соприкосновенія должна быть поверхностью уровня. Называя разстоянія свободной поверхности той и другой жидкости отъ плоскости $\mathrm{BB'}$ черезъ h и h', для давленій на поверхности раздѣла будемъ имѣть:

со стороны одной жидкости . . . . $p=p_0+\Delta h$

„ другой „ . . . . $p'=p_0+\Delta' h'$.

Но такъ какъ поверх. раздѣла есть поверхность равнаго давленія, то отсюда легко найти, что

$$\frac{h}{h'}=\frac{\Delta'}{\Delta},$$

т. е.

въ сообщающихся сосудахъ разнородныя жидкости располагаются такъ, что ихъ высоты надъ поверхностью раздѣла обратно пропорціональны плотностямъ.

§ 7.

Равновѣсіе капельной жидкости во вращающихся сосудахъ.

1-й случай.

Сосудъ вращается равномѣрно съ угловой скоростью ω около постоянной вертикальной оси.

Извѣстно, что для изслѣдованія относительнаго равновѣсія нужно къ дѣйствующимъ силамъ прибавить силу инерціи, соотвѣтствующую ускоренію переноснаго движенія.

Переносное движеніе въ нашемъ случаѣ есть равномѣрное вращеніе около вертикальной оси; ускореніе этого движенія будетъ состоять, слѣдовательно, только изъ ускоренія центростремительнаго, направленнаго перпендикулярно къ оси вращенія.

Возьмемъ начало координатъ гдѣ-нибудь въ точкѣ O (чер. 8) на оси вращенія и направимъ ось OZ по этой оси вверхъ, а оси OX и OY расположимъ въ горизонтальной плоскости. Возьмемъ гдѣ-нибудь въ жидкости частицу m, координаты которой обозначимъ черезъ x, y, z и разстояніе ея отъ оси вращенія—черезъ r.

На эту частицу дѣйствуютъ слѣдующія силы:

1) сила тяжести$=mg$ (если m есть масса частицы) и

2) сила инерціи, соотвѣтствующая центростремительному ускоренію,$=m\omega^2r$.

Таким образомъ легко усмотрѣть, что

$\frac{\omega^2 r^2}{2}$

$$X=\omega^2r.cos\varphi,$$

$$Y=\omega.^2r.sin\varphi$$

и

$$Z=-g,$$

гдѣ φ—уголъ между r и осью OX.

Но

$$r.cos\varphi=x$$

и

$$r.sin\varphi=y,$$

такъ что

$$X=\omega^2 x,$$

$$Y=\omega^2 y$$

и

$$Z=-g.$$

Отсюда, пользуясь ур—іемъ (2), найдемъ:

$$dp=\rho(\omega^2 xdx+\omega^2 y\, dy)-\rho gdz.$$

Такъ какъ поверхность уровня есть въ то же время и поверхность равнаго давленія, то ея дифференціальное ур—іе напишется такъ:

$$\omega^2(xdx+ydy)-gdz=o.$$

Интегрируя это ур—іе, получимъ:

$$\omega^2\frac{x^2+y^2}{2}-gz=c\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(1)$$

Для опредѣленія произвольнаго постояннаго c, приложимъ это ур—іе къ какой-нибудь опредѣленной точкѣ. Предположимъ, напримѣръ, что поверхность уровня, проходящая черезъ выбранную точку m, пересѣкаетъ ось вращенія OZ въ точкѣ A, лежащей на разстояніи z_0 отъ начала координатъ.

Для этой точки имѣемъ:

$$x=o,$$

$$y=o$$

и

$$z=z_0.$$

. ч. изъ ур—ія (1) найдемъ:

$$-gz_0=c$$

и, слѣдовательно, это ур—іе принимаетъ видъ:

$$\frac{\omega^2(x^2+y^2)}{2}-g(z-z_0)=o$$

или

$$x^2+y^2=\frac{2g}{\omega^2}(z-z_0) \quad . \;\; . \;\; . \quad (2)$$

Чтобы упростить это ур—іе, перенесемъ начало координатъ въ точку *A*, оставляя направленіе осей безъ измѣненія.

Обозначая новыя оси координатъ черезъ AX', AY' и AZ', мы найдемъ:

$$x'=x$$

$$y'=y$$

и

$$z'=z-z_0,$$

т. ч. ур—іе (2) послѣ преобразованія къ новымъ осямъ, приметъ видъ:

$$x'^2+y'^2=2\frac{g}{\omega^2}z'.$$

Таково будетъ ур—іе поверхности уровня въ данномъ случаѣ.

Чтобы изслѣдовать эту поверхность, дадимъ z' постоянное значеніе; тогда мы получимъ ур—іе окружности съ центромъ на оси *OZ*. Отсюда видимъ, что въ пересѣченіи поверхности уровня съ горизонтальными плоскостями получаются окружности; слѣдовательно, поверхность уровня есть поверхность вращенія около оси OZ

Чтобы найти ур—іе меридіана этой поверхности, положимъ напр. x' равнымъ нулю; тогда получимъ

$$y'^2=2\frac{g}{\omega^2}z' \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

Не трудно видѣть, что это есть уравненіе параболы. Эта парабола имѣетъ параметръ $\frac{g}{\omega^2}$ и расположена по оси AZ'. Поверхность уровня, слѣдовательно, есть параболоидъ вращенія около оси OZ.

Свободная поверхность жидкости, какъ одна изъ поверхностей уровня, есть также параболоидъ вращенія. Съ возрастаніемъ ω параметръ $\frac{g}{\omega^2}$ уменьшается и пароболоидъ удлиняется.

2-й случай.

Сосудъ вращается равномѣрно съ угловой скоростью ω около горизонтальной оси.

Возьмемъ горизонтальную ось вращенія за ось OY; ось OX расположимъ въ одной съ ней горизонтальной плоскости, и ось OZ направимъ вертикально вверхъ (черт. 9).

Выберемъ какую-нибудь частицу m внутри жидкости въ плоскости XZ на разстояніи $Om=r$ отъ оси вращенія. Координаты этой частицы суть:

$$x,\ o \text{ и } z.$$

На эту частицу дѣйствуютъ слѣдующія силы:

1) сила тяжести$=mg$, по направленію противоположному оси OZ и

2) центробѣжная сила$=m\omega^2r$ по направленію r.

Суммы составляющихъ этихъ силъ по осямъ, отнесенныя къ единицѣ массы, будутъ:

и теории от
указаниям

$$X = \omega^2 r . cos\alpha = \omega^2 x,$$

$$Y = o$$

и

$$Z = -g + \omega^2 r . sin\alpha = -g + \omega^2 z,$$

гдѣ α—уголъ между OX и r.

Такимъ образомъ дифференціальное ур—іе поверхности уровня напишется такъ:

$$\omega^2(xdx + zdz) - gdz = o,$$

откуда по интеграціи имѣемъ:

$$\frac{\omega^2(x^2+z^2)}{2} - gz = c \quad . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

Пусть поверхность уровня, проходящая черезъ точку m, пересѣкаетъ ось OZ въ точкѣ A; для этой точки

$$x = o,$$

$$y = o$$

и

$$z = -z_0,$$

т. ч. изъ ур—ія (1) имѣемъ:

$$\frac{\omega^2 z_0{}^2}{2} + gz_0 = c \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

Вычитая (2) ур—іе изъ ур—ія (1), найдемъ:

$$x^2+z^2-z_0{}^2=2\frac{g}{\omega^2}(z+z_0) \quad . \; . \; . \quad (3)$$

Для упрощенія этого ур—ія перенесемъ начало координатъ въ точку C, координаты которой суть:

$$x=o,$$

$$y=o$$

и

$$z=\frac{g}{\omega^2}.$$

Формулы преобразованія къ новымъ координатамъ будутъ:

$$x=x',$$

$$y=y'$$

и

$$z=z'+\frac{g}{\omega^2}.$$

Въ такомъ случаѣ ур—іе (3) преобразуется въ слѣдующее:

$$x'^2+z'^2+\cancel{2z'\frac{g}{\omega^2}}+\cancel{\frac{g^2}{\omega^4}}-z^2{}_0=\cancel{2\frac{g}{\omega^2}z'}+\cancel{2\frac{g^2}{\omega^4}}+2\frac{g}{\omega^2}z_0,$$

откуда по сокращеніи найдемъ:

$$x'^2+z'^2=\frac{g^2}{\omega^4}+2\frac{g}{\omega^2}z_0+z_0{}^2=\left(\frac{g}{\omega^2}+z_0\right)^2 \quad . \; . \; . \quad (4)$$

Это ур—іе показываетъ, что поверхность уровня есть круглый цилиндръ, радіусъ основанія котораго$=\frac{g}{\omega^2}+z_0$, съ осью, параллельной оси вращенія OY и лежащей отъ нея на разстояніи $\frac{g}{\omega^2}$.

Свободная поверхность, какъ одна изъ поверхностей уровня, есть также круглый цилиндръ.

§ 8.

Равновѣсіе газообразныхъ жидкостей подъ дѣйствіемъ силы тяжести.

при постоян

Мы вывели выше такое соотношеніе для газообразныхъ жидкостей:

$$\frac{1}{k}dlg(p)=Xdx+Ydy+Zdz \quad . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

Направляя ось OZ вертикально вверхъ и располагая оси OX и OY въ горизонтальной плоскости, найдемъ:

$$X=o,$$

$$Y=o$$

и

$$Z=-g.$$

Такимъ образомъ изъ ур—ія (1) получимъ:

$$\frac{1}{k}dlg(p)=-gdz \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (2)$$

Такъ какъ для поверхности уровня

$$dp=0,$$

$p = const$

$lg\,p = con$

$\partial(lg\,p) = 0$

то изъ ур—ія (2) получимъ:

$$dz=o$$

и

$$z=const. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

Отсюда слѣдуетъ, что поверхности уровня суть горизонтальныя плоскости.

§ 9.

Давленіе тяжелой жидкости на стѣнки сосуда.

Будемъ разсматривать давленіе на плоскую стѣнку AB (черт. 10), наклоненную къ горизонту подъ какимъ-либо угломъ α. Давленіе жидкости на глубинѣ h подъ свободной поверхностью N будетъ:

$$p'=p_0+\Delta h,$$

гдѣ p_0—давленіе атмосферы.

Но такъ какъ на ту же стѣнку снаружи дѣйствуетъ атмосферное давленіе, то равнодѣйствующее давленіе на единицу площади элемента, лежащаго на глубинѣ h подъ свободной поверхностью, будетъ:

$$p=p'-p_0=p_0+\Delta h-p_0=\Delta h \quad . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Если площадь этого элемента обозначимъ черезъ df, то найдемъ, что полное давленіе на этотъ элементъ, направленное по нормали къ нему, будетъ:

$$dP=p.df=\Delta h\, df \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Чтобы найти равнодѣйствующее давленіе на всю стѣнку AB, надо, очевидно, взять сумму элементарныхъ давленій, такъ какъ всѣ эти давленія параллельны между собою. Такимъ образомъ имѣемъ:

$$P=\Delta\iint h.df,$$

гдѣ интегрированіе распространяется на всю поверхность стѣнки

Если предположимъ, что центръ тяжести стѣнки AB лежитъ подъ свободной поверхностью на глубинѣ H, и площадь стѣнки AB обозначимъ черезъ F, то найдемъ, что:

$$\Delta\iint h.df=\Delta F.H\; .\; .\; .\; .\; .\; .\; .\; (3)$$

Такимъ образомъ видимъ, что
равнодѣйствующее давленіе на плоскую стѣнку выражается вѣсомъ столба жидкости, имѣющимъ основаніемъ площадь стѣнки и высотой разстояніе центра тяжести этой стѣнки отъ свободной поверхности жидкости.

Найдемъ теперь точку приложенія этого равнодѣйствующаго давленія; эту точку принято называть *центромъ давленія*.

Совмѣстимъ стѣнку съ плоскостью

Спроектируемъ стѣнку на плоскость чертежа. Примемъ линію пересѣченія свободной поверхности жидкости съ плоскостью стѣнки за ось OY и ось OX расположимъ въ плоскости стѣнки.

Чтобы найти координаты x_0 и y_0 центра давленія, сравнимъ моменты равнодѣйствующаго давленія и моменты элементарныхъ давленій по отношенію къ осямъ координатъ.

Такимъ образомъ получимъ:

по отн. оси OY . . . . . $Px_0=\iint p.df.x$,

по отн. оси OX . . . . . $Py_0=\iint p.df.y$.

Замѣчая, что

$$p=\Delta h = \Delta x \sin\alpha$$

и

$$h=x.\sin\alpha,$$

получимъ:

$$Px_0=\Delta\iint h.x.df=\Delta\sin\alpha\iint df.x^2$$

и

$$Py_0=\Delta\iint h.y.df=\Delta\sin\alpha\iint df.xy.$$

Откуда:

$$x_0=\frac{\Delta\sin\alpha\iint df x^2}{P}$$

и

$$y_0=\frac{\Delta\sin\alpha\iint df.xy}{P}$$

Но мы нашли выше, что

$$P=F.H.\Delta; = \Delta\sin\alpha F\bar{x}$$

$H = \bar{x}$

если же мы обозначимъ координаты центра тяжести C черезъ $\bar{x}$ и $\bar{y}$, то найдемъ:

$p = F\bar{x}\sin\alpha$

$x_0 = \frac{\Delta\sin\alpha\int}{F\bar{x}\sin\alpha}$

$$x_0=\frac{\iint df x^2}{F\bar{x}}$$

и

$$y_0=\frac{\iint df.xy}{F\bar{x}},$$

ибо

$$H=\bar{x}\sin\alpha.$$

Не трудно видѣть, что

$\int dfx^2 = I_y$ есть моментъ инерціи стѣнки относительно оси OY и $F\overline{x}$ — ея статическій моментъ M_y относительно той же оси.

Такимъ образомъ

$$x_0 = \frac{J_y}{M_y}$$

и

$$y_0 = \frac{\iint dfxy}{M_y}$$

Если стѣнка симметрична по отношенію къ оси OX, то тогда:

$$y_\circ = \iint df.xy = o,$$

т. е. въ такомъ случаѣ центръ давленія будетъ лежать на оси, X—овъ.

Обозначая моментъ инерціи стѣнки AB относительно оси проходящей черезъ центръ ея тяжести C и параллельной оси OY черезъ J_0, найдемъ:

$$J_y = J_0 + F\overline{x}^2,$$

т. ч.

$$x_0 = \frac{J_y}{M_y} = \frac{J_0}{F\overline{x}} + \frac{F\overline{x}^2}{F\overline{x}} = \overline{x} + \frac{J_0}{F\overline{x}} \quad . \ . \ (4)$$

Отсюда видно, что центръ давленія лежитъ всегда ниже центра тяжести на длину $= \frac{J_0}{F\overline{x}}$.

Для примѣра опредѣлимъ центръ давленія на прямоугольной вертикальной стѣнкѣ AB (чер. 11), высотой l и шириной$=1$.

Понятно, что для такой стѣнки

$$\overline{x}=\frac{l}{2},$$

$$J_{\circ}=\frac{1.l^3}{12}$$

и

$$F=l.1,$$

т. ч. на основанія ур—ія (4) имѣемъ:

$$x_0=\frac{l}{2}+\frac{2l^3}{12l^2}=\frac{l}{2}+\frac{l}{6}={}^2/_3\, l.$$

§ 10.

Законъ Архимеда.

Разсмотримъ тяжелое тѣло C, погруженное въ жидкость капельную и однородную, свободная поверхность которой есть NN, и опредѣлимъ полное давленіе жидкости на это тѣло, его направленіе и точку приложенія (чер. 12).

Если p есть давленіе на единицу поверхности какого-нибудь элемента на поверхности тѣла, то давленіе на весь элементъ будетъ $p.df$. Если мы будемъ проектировать эти давленія на какую-нибудь горизонтальную линію, то ихъ проекціи будутъ попарно равны и противоположно направлены, такъ что сумма ихъ будетъ равна нулю.

Изъ этого слѣдуетъ, что равнодѣйствующее давленіе будетъ направлено по вертикальному направленію. Чтобы найти его, намъ нужно, слѣдовательно, найти сумму проекцій элементарныхъ давленій на какую-нибудь вертикальную прямую.

Обозначимъ уголъ между внутренней нормалью къ поверхности какого-нибудь элемента и этой прямой черезъ α; тогда сумма проекцій давленій на всю поверхность тѣла по вертикальному направленію будетъ:

$$P=\iint p.\,df.\cos\alpha,$$

гдѣ интеграція должна быть распространена на всю поверхность тѣла.

Если обозначимъ глубину погруженія даннаго элемента черезъ h, то найдемъ:

$$p=\Delta h+p_0,$$

гдѣ p_0 есть давленіе атмосферы.

Такимъ образомъ имѣемъ:

$$P=\Delta\iint h.\,df.\cos\alpha+p_0\iint df.\cos\alpha \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Вообразимъ, что мы провели вертикальный, охватывающій наше тѣло цилиндръ, который будетъ соприкасаться съ тѣломъ по кривой abc; проекціи элементарныхъ давленій на вертикальное направленіе, приложенныхъ ниже этой линіи, будутъ, понятно, направлены снизу вверхъ, и мы будемъ считать ихъ положительными. Вслѣдствіе этого, элементарныя давленія, приложенныя выше линіи abc, мы должны считать отрицательными, такъ какъ ихъ проекціи на вертикаль будутъ направлены сверху внизъ.

Выдѣлимъ теперь въ нашемъ тѣлѣ какую-нибудь вертикальную призму съ основаніями df и df' и положимъ, что погруженіе df равняется h и погруженіе df' равняется h'; будемъ проектировать давленія на основанія этой призмы на вертикальное на-

направленіе, и составимъ ихъ сумму, которую обозначимъ черезъ dP'. Принимая во вниманіе направленія этихъ давленій, получимъ:

$dP = $ [illegible]

$$dP' = \Delta h' \, df' \cos\alpha' - \Delta h \, df \cos\alpha + p_0 \, df' \cos\alpha' - p_0 \, df \cos\alpha.$$

Но не трудно видѣть, что:

$$df \cos\alpha = df' \cos\alpha' = d\sigma$$

гдѣ $d\sigma$ есть площадь нормальнаго сѣченія призмы, т. ч.:

объем

$$dP' = \Delta (h' - h) \, d\sigma;$$

а это есть вѣсъ воды въ объемѣ, равномъ объему призмы.

Разбивая все наше тѣло на безконечно большое число безконечно тонкихъ призмъ и примѣняя къ каждой изъ нихъ подобное же разсужденіе, найдемъ, что въ выраженіи (1) второй интегралъ $= 0$, а первый $= \Delta V$, гдѣ V есть объемъ нашего тѣла, т. е.,

$$P = \iint p \, df \cos\alpha = \Delta V \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Такъ какъ Δ и V положительны, то, слѣдовательно, P направлено ~~сверху внизъ~~. снизу вверхъ

Формула (2) и есть ничто иное, какъ законъ Архимеда.

Этотъ законъ выражается такъ:

давленіе жидкости на погруженное въ нее тѣло направлено по вертикальному направленію вверхъ и равно вѣсу жидкости въ объемѣ, который занимаетъ разсматриваемое тѣло.

Точка приложенія этого давленія есть центръ тяжести вытѣсненнаго объема жидкости, такъ какъ составляющія его пропорціональны объемамъ вертикальныхъ призмъ, изъ которыхъ составлено тѣло.

Обозначимъ черезъ G вѣсъ тѣла, черезъ Δ' вѣсъ единицы его объема и черезъ V его объемъ. Давленіе жидкости на него будетъ:

$$P = \Delta V. \qquad \rho = \Delta' v$$

Для равновѣсія тѣла въ жидкости необходимо, чтобы

$$P = G$$

или

$$V\Delta = V\Delta',$$

т. е.

$$\Delta = \Delta'.$$

Если

$$P < G,$$

для чего необходимо, чтобы

$$\Delta' \text{ было } > \Delta,$$

то тѣло тонетъ.

Если

$$P > G,$$

что имѣетъ мѣсто при

$$\Delta' < \Delta,$$

то тѣло поднимается вверхъ и всплываетъ надъ поверхностью жидкости. Предположимъ, что при этомъ въ жидкость будетъ погружена часть V' его объема; тогда:

$$P = \Delta V' = \Delta' V = G,$$

откуда

$$V' = \frac{\Delta'}{\Delta} V.$$

Слѣдовательно:
объемъ погруженной части плавающаго тѣла составляетъ долю всего объема, равную удѣльному вѣсу тѣла относительно данной жидкости.

§ 11.

Равновѣсіе погруженнаго тѣла.

Если $\Delta = \Delta'$, то тѣло будетъ находиться въ равновѣсіи во всякомъ мѣстѣ жидкой массы, если только оно будетъ однородно, ибо въ этомъ случаѣ центръ тяжести тѣла и центръ тяжести вытѣсненнаго объема, который принято называть *центромъ водоизмѣщенія*, будутъ лежать въ одной точкѣ. Въ противномъ случаѣ вѣсъ тѣла G и давленіе жидкости P образуютъ пару, которая будетъ поворачивать тѣло до тѣхъ поръ, пока центръ тяжести тѣла и центръ водоизмѣщенія ни расположатся на одной вертикальной прямой. Понятно, что если при этомъ центръ тяжести будетъ ниже центра водоизмѣщенія, то равновѣсіе будетъ устойчивое; если будетъ имѣть мѣсто обратное, то равновѣсіе будетъ неустойчивое.

§ 12.

Равновѣсіе плавающихъ тѣлъ.

Нѣсколько иначе опредѣляются условія равновѣсія плавающаго тѣла. Такъ какъ этотъ случай представляетъ практическій интересъ, то мы и разсмотримъ его подробнѣе.

Мы видѣли, что если вѣсъ плавающаго тѣла есть G, объемъ его V и объемъ погруженной части V', то давленіе жидкости

$$P = \Delta V' = G \cdot \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (1)$$

направлено вверхъ и приложено въ центрѣ тяжести объема V'.

Такимъ образомъ на тѣло будутъ дѣйствовать двѣ силы равныя, направленныя одна вверхъ, а другая внизъ и приложенныя: одна въ центрѣ тяжести тѣла, а другая въ центрѣ тяжести объема V' (въ центрѣ водоизмѣщенія). Понятно, что и въ данномъ случаѣ тѣло будетъ въ равновѣсіи только тогда, когда обѣ эти точки расположатся на одной вертикали; но для устойчиваго равновѣсія *не необходимо*, какъ увидимъ дальше, чтобы центръ тяжести лежалъ ниже центра водоизмѣщенія. Будемъ называть *плоскостью сѣченій* ту плоскость, которая отсѣкаетъ отъ тѣла данный объемъ V'; когда плокость сѣченія будетъ перпендикулярна къ линіи, соединяющей центръ тяжести съ центромъ водоизмѣщенія, то будемъ называть ее *плоскостью плаванія*, ибо только такая плоскость можетъ, какъ это ясно изъ предыдущаго, соотвѣтствовать положенію равновѣсія. При этомъ понятно, что плоскость плаванія совпадаетъ со свободной поверхностью жидкости.

Если мы будемъ перемѣщать плоскость сѣченія, отсѣкая отъ тѣла постоянные объемы V', тогда эта плоскость будетъ огибать нѣкоторую поверхность, которую мы будемъ называть *поверхностью сѣченія*. При этомъ перемѣщеніи плоскости сѣченія, центры водоизмѣщеній постоянныхъ объемовъ будутъ перемѣщаться по нѣкоторой поверхности, которую можно назвать *поверхностью центровъ*

Не разбирая общаго случая, перейдемъ къ случаю равновѣсія плавающихъ призмъ и цилиндровъ, что будетъ совершенно достаточнымъ для нашихъ цѣлей, полагая, что образующія ихъ горизонтальны и плотность ихъ равномѣрна.

Пусть имѣемъ какую-нибудь призму, когруженную въ жидкость такъ, что плоскость плаванія пересѣкаетъ призму по ея образующимъ (чер. 13) MM и NN. Центръ тяжести этой призмы, вслѣдствіе ея однородности, лежитъ въ центрѣ тяжести O ея средняго нормальнаго къ образующимъ сѣченія ABC. Каждая изъ плоскостей сѣченія отсѣкаетъ отъ призмы постоянный объемъ $l\omega$, гдѣ l есть длина призмы, а ω—площадь $A'BC'$, отсѣченная отъ площади ABC.

Такъ какъ l есть постоянная величина, то условіе, чтобы

$$l\omega = const.$$

$l\omega = l\omega' = --$

сводится къ тому, чтобы и

$\omega = \omega' =$ cn

$$\omega = const.$$

Въ центрѣ тяжести O' этой отсѣченной площадки находится центръ водоизмѣщенія отсѣченнаго объема, вслѣдствіе симметричности обѣихъ частей призмы относительно средняго сѣченія ABC; далѣе прямая, соединяющая O и O', должна быть перпендикулярна къ линіи плаванія $A'C'$.

Такимъ образомъ разсматривая плавающую призму, мы можемъ разсматривать плаваніе ея нормальнаго сѣченія и говорить о прямой сѣченія и плаванія, линіяхъ сѣченія и линіяхъ центровъ вмѣсто того, чтобы говорить о поверхностяхъ.

Докажемъ три теоремы, которыя принадлежатъ Дюпену.

1-ая теорема.

Линія сѣченія касается прямой сѣченія въ ея срединѣ.

Вообразимъ плавающую площадь $ABCD$ (чер. 14), которая пересѣкается прямой сѣченія AD такъ, что эта послѣдняя отсѣкаетъ отъ нея площадь ADB.

Вообразимъ теперь другую прямую сѣченію $A'D'$, наклоненную къ первой подъ безконечно малымъ угломъ—$d\varphi$. Эта послѣдняя пересѣкается съ первой въ точкѣ O, и отсѣкаетъ площадь $(A'BD')=$площ. (ABD).

Такъ какъ часть $A'BD$ есть общая для обѣихъ площадей, то:

$$\text{пл.}\,(OAA')=\text{пл.}\,(ODD')\ .\ .\ .\ .\ .\ (2)$$

Чтобы найти величины этихъ площадей, проведемъ изъ O дугу dD окружности радіусомъ OD до пересѣченія съ OD' и дугу Ad' радіусомъ OA до пересѣченія съ продолженіемъ OA'; тогда легко видѣть, что:

$$\text{пл.}\,(ODD')=\text{пл.}\,(ODd)+\text{пл.}\,(DD'd)=\frac{OD.^2d\varphi}{2}+\frac{dD'.OD.}{2}$$

и

$$\text{пл.}\,(OAA')=\text{пл.}\,(OAd')-\text{пл.}\,(AA'd')=\frac{OA.^2d\varphi}{2}-\frac{d'A.OA.d\varphi}{2}$$

Такъ какъ вторые члены вторыхъ частей этихъ выраженій суть величины безконечно малыя второго порядка и ими, слѣдовательно, можно пренебречь, то на основаніи ур—ія (2), найдемъ

$$OA = OD.$$

Но линія сѣченія, какъ мы сказали выше, есть огибающая прямой сѣченія, то, слѣдовательно, точка, въ которой пересѣкаются двѣ безконечно близкія прямыя сѣченія и есть точка ихъ касанія съ линіей сѣченія. Этимъ наше положеніе и доказывается.

2-я теорема.

Касательная къ кривой центровъ параллельна къ соотвѣтствующей прямой сѣченія

Пусть имѣемъ плавающую площадь (чер. 15); MN есть прямая сѣченія и O центръ водоизмѣщенія.

Наклоняя площадь въ смежное положеніе, получимъ новую прямую сѣченія $M'N'$ и новый центръ водоизмѣщенія O'.

Какъ мы только что видѣли,

$$\text{пл.}\,(CMM') = \text{пл.}\,(NCN')$$

Пусть центръ тяжести одной площади находится въ A и другой въ A'. Если мы соединимъ точки A' и O' прямой, то можемъ утверждать, что на этой прямой находится центръ тяжести K площади $Mp\,N'$. Такъ какъ центръ тяжести всей площади дѣлитъ разстояніе между центрами тяжести ея частей на части обратно пропорціональныя площадямъ этихъ частей, то мы можемъ написать:

$$\frac{KO'}{A'O'} = \frac{\text{пл.}\,M'CM}{\text{пл.}\,MpN'}$$

Соединяя точки A и O, изъ подобной же пропорціи найдемъ положеніе точки К на прямой $A'O'$, т. е.

$$\frac{KO}{AO}=\frac{\text{пл.}\,NCN'}{\text{пл.}\,MpN'}$$

Сравнивая эти двѣ пропорціи, найдемъ:

$$\frac{KO}{AO}=\frac{KO'}{A'O}$$

Откуда видно, что прямая OO', соединяющая точки O и O', параллельна прямой AA'.

Въ предѣлѣ, при убываніи угла $\Delta\varphi$ до нуля, AA' совпадаетъ съ прямой ~~плаванія и~~ сѣченія OO' съ касательной къ кривой центровъ, такъ какъ она будетъ проходить черезъ двѣ безконечно близкія точки этой кривой.

3-я теорема.

Чтобы найти всѣ положенія равновѣсія плавающей площади, нужно изъ центра тяжести ея провести нормали къ линіи центровъ и провести соотвѣтствующія этимъ нормалямъ линіи сѣченія; полученныя прямыя и будутъ прямыя плаванія данной площади.

Пусть O (чер. 16) есть центръ тяжести плавающей площади, C—линія центровъ и S—линія сѣченія. Проведемъ изъ O нормали къ линіи центровъ. Пусть одна изъ этихъ нормалей есть OA. Если мы проведемъ прямую XX, перпендикулярную къ этой нормали, черезъ точку пересѣченія m ея съ линіей сѣченія, то на основаніи второй теоремы Дюпена можемъ утверждать, что прямая XX будетъ касательная къ линіи сѣченій въ точкѣ m, слѣдовательно, она есть линія сѣченія; въ то же время эта линія сѣченія будетъ одна изъ линій плаванія, такъ какъ она нормальна къ прямой, соединяющей центръ тяжести площади съ центромъ водоизмѣщенія.

Такимъ образомъ, зная линіи центровъ, можно опредѣлить всѣ положенія, въ которыхъ призма можетъ плавать. Остается теперь рѣшить вопросъ, какія изъ этихъ положеній соотвѣтствуетъ устойчивому равновѣсію и какія неустойчивому.

Понятно, во-первыхъ, что если центръ тяжести тѣла лежитъ ниже центра водоизмѣщенія, то равновѣсіе будетъ устойчиво. Но надо замѣтить, какъ это мы увидимъ ниже, что это условіе *достаточное*, но *не необходимое*.

Чтобы показать это, разсмотримъ тотъ случай равновѣсія, когда центръ тяжести O лежитъ выше центра водоизмѣщенія C (чер. 17).

Пусть AB есть прямая плаванія. Выведемъ площадь изъ ея положенія равновѣсія, отклонивъ ее отъ этого положенія на нѣкоторый уголъ по направленію стрѣлки l. Пусть этому новому положенію соотвѣтствуетъ прямая сѣченія $A'B'$.

(Вмѣсто того чтобы вращать площадь по стрѣлкѣ l, мы для удобства изображенія можемъ вообразить, что жидкость повернута въ обратную сторону). Отмѣтимъ центръ тяжести C' отсѣченной части площади въ этомъ новомъ положеніи и проведемъ черезъ C' прямую, перпендикулярную къ $A'B'$. Эта прямая, пересѣчетъ прямую CO въ нѣкоторой точкѣ M, которая можетъ быть либо выше, либо ниже центра тяжести. Эта точка называется *метацентромъ*.

Легко усмотрѣть, что метацентръ представляетъ изъ себя центръ кривизны линіи центровъ. Въ самомъ дѣлѣ, по 2-й теоремѣ Дюпена касательныя къ линіи центровъ въ точкахъ C и C' параллельны соотвѣтствующимъ прямымъ сѣченія AB и $A'B'$, слѣдовательно прямыя CO и $C'O'$ суть двѣ безконечно близкія нормали къ линіи центровъ и точки ихъ пересѣченія—центръ кривизны по отношенію къ точкѣ C.

Если метацентръ лежитъ выше центра тяжести, какъ это имѣетъ мѣсто на (чер. 17), то является пара, которая стремится повернуть плавающую площадь въ первоначальное положеніе,—это будетъ устойчивое равновѣсіе.

Если же имѣетъ мѣсто обратное, т. е. метацентръ лежитъ ниже центра тяжести, то получится пара, которая стремится увеличить отклоненіе отъ положенія равновѣсія,—это будетъ положеніе равновѣсія неустойчивое.

Такимъ образомъ, вопросъ объ опредѣленіи устойчивости равновѣсія плавающей призмы сводится къ построенію центровъ кривизны въ тѣхъ точкахъ кривой центровъ, нормали въ которыхъ проходятъ черезъ центръ тяжести тѣла.

Но тотъ же вопросъ можетъ быть рѣшенъ и другимъ болѣе простымъ способомъ.

Пусть нормальное сѣченіе призмы имѣетъ видъ, указанный на чер. (18, а). Обозначимъ площадь сѣченія погруженной части его черезъ Ω и длину призмы черезъ l.

Полное давленіе на призму снизу вверхъ будетъ:

$$P=\Omega.l.\Delta \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Это давленіе будетъ приложено въ центрѣ водоизмѣщенія O.

Пусть положеніе, изображенное на этомъ чертежѣ, представляетъ одно изъ положеній равновѣсія. NN—поверхность жидкости, aa, длину которой обозначимъ черезъ b,—плоскость плаванія

Отклонимъ призму изъ положенія равновѣсія (a) на безконечно малый уголъ $d\varphi$ въ положеніе (b); при этомъ центръ водоизмѣщенія перемѣстится въ O', одна часть призмы выступитъ изъ воды и другая погрузится. Понятно, что объемы этихъ частей равны между собою. Допустимъ далѣе, что вертикаль, проведенная черезъ O', пересѣчетъ продолженіе прямой Og, гдѣ g—центръ тяжести призмы въ точкѣ M, которая и будетъ метацентромъ.

Такъ какъ въ нашемъ случаѣ точка M лежитъ выше точки g, то равновѣсіе будетъ устойчивое. Сила тяжести G, приложенная въ g, и давленіе P, образуютъ пару, которая стремится возвратить призму въ первоначальное положеніе; плечо этой пары равно gH, то-есть перпендикуляру изъ g на $O'M$. Моментъ этой пары, который принято называть *моментомъ устойчивости*, будетъ:

$$M=P.gH=Pu\sin d\varphi=\Omega l.\Delta.u\sin d\varphi,$$

гдѣ u обозначаетъ длину gM.

Такъ какъ можно положить, что

$$\sin d\varphi=d\varphi,$$

то:

$$M=\Omega.l.\Delta.ud\varphi \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

Если мы будемъ считать u положительнымъ, когда M выше g и отрицательнымъ въ обратномъ случаѣ, то

при $u>0$ и $M>0$ . . . . равновѣсіе устойчивое,
„ $u=0$ и $M=0$ . . . . „ безразличное,
„ $u<0$ и $M<0$ . . . . „ неустойчивое.

Отсюда видно, что для рѣшенія вопроса о видѣ равновѣсія намъ надо знать только величину u. Чтобы опредѣлить ее, представимъ силу P немного иначе и потому временно, въ отличіе отъ P, обозначимъ ее черезъ P'.

Замѣтимъ, что положеніе b отличается отъ a тѣмъ, что заштрихованная лѣвая, выступившая изъ воды часть призмы, стала какъ бы тяжелѣе на нѣкоторую величину p, а правая, погрузившаяся въ жидкость,—легче на ту же величину p, т. к. объемы этихъ частей равны. Силу P', такимъ образовъ можно разсматривать какъ равнодѣйствующую прежней силы P, приложенной въ точкѣ O. Разъ это такъ, то:

наиг р+р

$$P' = P + p - p = P.$$

и ея моментъ равенъ суммѣ моментовъ силы P и пары $(p, -p)$.

Найдемъ величину момента пары. Площадь треугольника, представляющаго сѣченіе выступившей или погруженной части будетъ:

$$\omega = \frac{1}{2}\frac{b^2}{4}d\varphi,$$

и потому:

$$p = \overset{\omega}{\left(\frac{1}{2}\frac{b^2}{4}d\varphi\right)} l.\Delta = \frac{1}{8}b^2 l.\Delta\, d\varphi \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

Точка приложенія этой силы есть центръ тяжести треугольника, лежащій отъ основанія на разстояніи, равномъ $^1/_3$ высоты.

Такимъ образомъ плечо пары есть:

$$x = {}^2/_3 b$$

и ея моментъ, на основаніи ур—ія (4) будетъ:

$$m = p.{}^2/_3 b = \frac{lb^3}{12}\,\Delta.d\varphi \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

Моментъ же равнодѣйствующей относительно точки O есть:

$$P'.Ok = P.Ok = \frac{\Delta\, lb^3}{12}.d\varphi \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

Если обозначимъ длину Og черезъ c, то найдемъ, что

$$Ok = (c + u)\, d\varphi$$

т. ч., принявъ во вниманіе ур—ія (1) и (6), найдемъ:

$$\Omega.l.\Delta(u+c).d\varphi=\frac{b^3l}{12}.\Delta.d\varphi,$$

откуда:

$$u=\frac{l.b^3}{12.\Omega.l}-c.$$

Но $\frac{l.b^3}{12}$ есть моментъ инерціи J площади горизонтальнаго сѣченія призмы или площади плаванія относительно продольной, т. е. перпендикулярной къ плоскости чертежа оси S, а Ωl—объемъ V погруженной части призмы, т. ч.

$$u=\frac{J}{V}-c$$

Условимся считать c положительнымъ, когда центръ тяжести лежитъ выше центра водоизмѣщенія; тогда

при $c<0$ $u=\frac{J}{V}+c$ . . . . . равновѣсіе всегда устойчивое;

если же $c>o$, то

при $c<\frac{J}{V}$ $u>o$ . . . . равновѣсіе устойчивое,

при $c=\frac{J}{V}$ $u=o$ . . . . „ безразличное,

при $c>\frac{J}{V}$ $u<o$ . . . . „ неустойчивое.

§ 13.

Устойчивость судовъ.

Вопросъ объ опредѣленіи положеній, въ которыхъ можетъ плавать тѣло произвольной формы рѣшается такъ же, какъ и для тѣлъ призматическихъ, стоитъ только во всѣхъ высказанныхъ положеніяхъ „прямая линія“ замѣнить „плоскостью“ и „кривая“—„поверхностью“.

Что касается вопроса объ устойчивости тѣлъ произвольной формы, то его можно рѣшить, примѣняя тѣ же простыя соображенія, которыми мы пользовались въ предыдущемъ случаѣ.

Для примѣра разсмотримъ устойчивость судна. Положимъ, что *abdc* (чер. 19) есть то вертикальное сѣченіе судна, въ которомъ находится и центръ его тяжести g, и центръ водоизмѣщенія O. Понятно, что обѣ эти точки при равновѣсіи должны находиться въ одной вертикальной плоскости и лежать на одной вертикали, ибо въ противномъ случаѣ получится пара, которая будетъ вращать судно. Устойчивость равновѣсія опять и въ данномъ случаѣ опредѣлится положеніемъ метацентра M. Найдемъ положеніе этой точки на прямой, проходящей черезъ O и g.

Плоскость плаванія судна очерчивается обыкновенно двумя симметричными около оси XX' расположенными кривыми $XmX_{\prime}$ и XnX'. Контуръ $XmX'n$ принято называть *ватеръ-линіей*.

Будемъ сначала разсматривать устойчивость судна при вращеніи около оси XX которая на вертикальную плоскость проектируется въ точку S (поперечная устойчивость). Какъ и въ предыдущемъ случаѣ, мы можемъ разсматривать силу P', приложенную въ новомъ центрѣ водоизмѣщенія O', какъ разнодѣйствующую силъ

$$P' = P,\ p \text{ и } -p, = P$$

гдѣ p и $-p$ суть водоизмѣщенія клинообразныхъ кусковъ aSa' и bSb'. Поэтому моментъ силы $P'=P$ относнтельно точки O будетъ равенъ моменту пары $(p,-p)$.

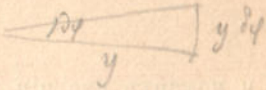
Сохраняя прежнія обозначенія, мы найдемъ, что

$$M(P')=P(u+c)d\varphi= V.\Delta.(u+c)d\varphi \;.\;.\;.\;.\;.\;(1)$$

Оцѣнимъ теперь моментъ пары $(p,-p)$. Проведемъ двѣ безконечно близкія вертикальныя плоскости mn и $m'n'$, перпендикулярныя къ оси XX'. Обозначимъ пару, соотвѣтствующую клинообразнымъ кускамъ, заключеннымъ между двумя этими плбскостями черезъ $(dp,-dp)$; тогда по предыдущему найдемъ,—что моментъ этой пары будетъ:

$$\frac{2}{3}y^3\Delta.d\varphi.dx,$$

$(y^2\partial\varphi)\partial x\,\Delta.\,\frac{2}{3}$



гдѣ $y=m_0n=m'_0n'$, т. что:

$$M(p,-p),=\frac{2}{3}\Delta.d\varphi\int_0^l y^3dx \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(2)$$

$\Delta\frac{y^2\partial\varphi}{2}$

если l=длина оси XX'.

Сравнивая (1) съ (2), получимъ:

$$V(u+c)=\frac{2}{3}\int_0^l y^3\,dx \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(3)$$

Но не трудно показать, что вторая часть этого выраженія есть моментъ инерціи J ватеръ-линіи относительно оси XX'. Дѣйствительно, выдѣлимъ между линіями mn и $m'n'$ элементъ длиною

dz и обозначимъ его разстояніе отъ XX' черезъ z; тогда его моментъ инерціи по отношенію къ оси XX' будетъ:

$$dx.dz.z^2$$

На основаніи этого, моментъ инерціи площади $m_\circ nn'm_\circ'$ будетъ равенъ

$$dx\int_{z=o}^{z=y} z^2dz=\frac{y^3}{3}dx.$$

Отсюда легко видѣть, что моментъ инерціи площади $mnn'm'$ есть:

$$^2/_3\ y^3dx$$

и моментъ инерціи площади всей ватеръ-линіи

$$J={}^2/_3\int_0^l y^3dx.$$

Такимъ образомъ принимая во вниманіе ур—іе (3), найдемъ:

$$u=\frac{J}{V}-c\ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ (4)$$

Подобнымъ же образомъ можно опредѣлить и устойчивость продольную, только въ этомъ случаѣ надо брать моментъ инерціи относительно поперечной оси, проходящей черезъ центръ тяжести ватеръ-линіи.

Отдѣлъ II.

Гидродинамика капельныхъ жидкостей.

Глава первая.

Уравненія движенія.

§ 14.

Общія уравненія гидродинамики.

Задачу о движеніи жидкости можно, пользуясь принципомъ Д' Аламбера, свести къ задачѣ о равновѣсіи, если къ дѣйствующимъ силамъ прибавить силы инерціи. Если какая-нибудь матеріальная точка движется такъ, что ея полное ускореніе будетъ j то ея сила инерціи есть—mj; если же мы отнесемъ эту силу къ единицѣ массы, то она будетъ равна—j, а ея проекціи по осямъ координатъ: $-j_x$, $-j_y$ и $-j_z$.

Въ Гидростатикѣ мы получили слѣдующія соотношенія:

$$\frac{\partial p}{\partial x}=\rho X$$

$$\frac{\partial p}{\partial y}=\rho Y$$

$$\frac{\partial p}{\partial z}=\rho Z.$$

гдѣ *p*—гидростатическое давленіе

Чтобы получить ур—ія движенія, надо въ этихъ ур—іяхъ къ дѣйствующимъ силамъ прибавить силы инерціи. Такимъ образомъ получимъ:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial x}&=\rho(X-j_x)\\ \frac{\partial p}{\partial y}&=\rho(Y-j_y)\\ \frac{\partial p}{\partial z}&=\rho(Z-j_z)\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

гдѣ *p*—будетъ давленіемъ гидродинамическимъ. Умножая ур—ія (1) соотвѣтственно на dx, dy и dz и складывая ихъ, получимъ:

$$dp=\rho\left\{(X-j_x)dx+(Y-j_y)dy+(Z-j_z)dz\right\} \quad . \; . \; . \; . \; (2)$$

Таково основное ур—іе гидродинамики. Оно даетъ намъ дифференціалъ давленія въ любой точкѣ движущейся жидкой массы. Если мы проинтегрируемъ это выраженіе, то найдемъ и самое давленіе.

Но интеграція этого выраженія возможна лишь въ самыхъ простѣйшихъ случаяхъ; разсмотримъ нѣкоторые изъ нихъ:

1-й случай.

Движеніе всякой частицы прямолинейное и равномѣрное.

Въ такомъ случаѣ и $j=0$, и его составляющія по осямъ координатъ, слѣдовательно, также равны нулю; въ такомъ случаѣ ур—іе (2) даетъ:

$$dp=\rho(Xdx+Ydy+Zdz)\ .\ .\ .\ .\ \ (1)$$

Откуда и видно, что въ данномъ случаѣ гидродинамическое давленіе во всей массѣ жидкости слѣдуетъ законамъ давленія гидростатическаго.

2-й случай.

Если

движеніе, каково бы оно ни было, очень медленно, такъ что силы инерціи оказываются незначительны по сравненію съ внѣшними силами,

тогда опять таки можно положить, что $j=o$, и мы опять приходимъ къ заключенію, что гидродинамическое давленіе будетъ во всей массѣ движущейся жидкости слѣдовать законамъ гидростатики.

3-й случай.

Предположимъ, что

частицы жидкости принимаютъ ускоренія точно равныя и по величинѣ и по направленію ускореніямъ, производимымъ внѣшними силами;

тогда мы имѣемъ:

$$X=j_x;$$

$$Y=j_y;$$

$$Z=j_z;$$

и изъ ур—ія (2) получимъ:

$$dp=0$$

или

$$p=const \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

Это имѣетъ мѣсто, напримѣръ, въ томъ случаѣ, когда струя жидкости, выйдя черезъ отверстіе въ вертикальной стѣнкѣ сосуда (черт. 20), будетъ описывать параболу, видъ которой опредѣлится скоростью, которою обладаетъ струйка въ отверстіи.

Если мы расположимъ ось OZ вертикально внизъ и оси OX и OY—въ горизонтальной плоскости, то найдемъ:

$$Z=j=g,$$

$$X=Y=0 = j_x = j_y$$

4-й случай.

Положимъ, что

въ нѣкоторой части** ab* (черт. 21) ***движущейся жидкости всѣ частицы будутъ обладать прямолинейнымъ (но не равномѣрнымъ) движеніемъ и ихъ скорости будутъ параллельны между собою.

Если мы разсмотримъ гдѣ-нибудь на этомъ протяженіи ab сѣченіе плоскостью, нормальною къ направленію движенія и отнесемъ точки этого сѣченія къ тремъ прямоугольнымъ осямъ координатъ, двѣ изъ которыхъ (OY и OZ) помѣстимъ въ самой сѣкущей плоскости, то найдемъ, что для всѣхъ точекъ этой плоскости

$$dx=0$$

и, т. к. j параллельна оси OX,

$$j_y=j_z=0.$$

Въ такомъ случаѣ ур—іе (2) даетъ:

$$dp=\rho(Ydy+Zdz)$$

Отсюда и видимъ, что въ плоскости ZY давленія будутъ слѣдовать законамъ гидростатики.

Кромѣ разобранныхъ случаевъ общее ур—іе интегрируется легко еще въ случаѣ, такъ называемаго, установившагося движенія. Результатомъ этого интегрированія является извѣстная теорема Даніила Бернулли. Но для нашихъ цѣлей будетъ гораздо удобнѣе вывести эту теорему непосредственно, не пользуясь общими дифференціальными ур—іями движенія.

§ 15.

Теорема Д. Бернулли.

Установившимся движеніемъ называется такое движеніе жидкости, при которомъ во всякой точкѣ пространства, заполненнаго жидкой массой, существуетъ опредѣленная по величинѣ и направленію скорость; эту скорость пріобрѣтаетъ всякая частица жидкости, какъ только она приходитъ въ данную точку пространства.

Положимъ, что тяжелая капельная жидкость движется по какой-нибудь трубѣ (черт. 22) произвольной формы, но лишь такой, что переходъ отъ сѣченія къ сѣченію совершается плавно. Относительно этого движенія сдѣлаемъ слѣдующія допущенія:

1) движеніе будетъ установившееся;

2) скорости отдѣльныхъ частицъ во всякомъ нормальномъ къ оси трубы сѣченіи параллельны и равны между собою и направлены по нормали къ сѣченію (т. е. по оси).

На основаніи этого послѣдняго допущенія, мы должны принять, что давленія во всякомъ такомъ сѣченіи слѣдуютъ законамъ гидростатики, такъ что полное давленіе на каждое сѣченіе равно давленію въ центрѣ тяжести, умноженному на площадь сѣченія.

Сдѣлаемъ два такихъ нормальныхъ сѣченія: AB и ab и введемъ слѣдующія обозначенія:

пустъ площадь сѣченія AB будетъ ω_1,
„ „ „ ab „ ω_2,
давленіе въ центрѣ тяжести G сѣченія AB обозначимъ черезъ p_1,
„ „ „ „ g „ ab „ „ p_2,
скорость въ первомъ сѣченіи обозначимъ черезъ v_1,
„ во второмъ „ „ „ v_2;
и наконецъ,
высоту центра тяжести G перваго сѣченія надъ какой-нибудь горизонтальной плоскостью MM обозначимъ черезъ z_1 и высоту центра тяжести g второго сѣченія надъ той же горизонтальной плоскостью черезъ z_2.

Въ силу того, что данное движеніе есть движеніе установившееся и капельная жидкость можетъ считаться точно несжимаемой, объемъ Q жидкости, который протекаетъ черезъ сѣченіе AB въ одну секунду, равенъ объему, протекающему въ то же время черезъ сѣченіе ab, т. ч.

$$Q=\omega_1 v_1=\omega_2 v_2 \quad . \; . \; . \; . \,(1)$$

Пусть въ теченіе безконечно малаго времени dt объемъ жидкости $ABab$ перемѣстится въ положеніе $A^1B^1a^1b^1$. Примѣнимъ къ этому перемѣщенію теорему живыхъ силъ, по которой работа внѣшнихъ силъ на данномъ пути равна приращенію жовой силы всѣхъ точекъ системы.

На нашу систему дѣйствуютъ слѣдующія силы:

1) сила тяжести,

2) давленіе въ сѣченіи AB въ сторону движенія,

3) давленіе въ сѣченіи ab въ сторону, обратную движенію.

Вычислимъ работу всѣхъ этихъ силъ при заданномъ перемѣщеніи разсматриваемаго объема жидкости.

Работа тяжести объема $ABab$=вѣсу этого объема, умноженному на вертикальное перемѣщеніе его центра тяжести. Но такъ какъ два послѣдовательныхъ положенія нашего объема: $ABab$ и $A^1B^1a^1b^1$ имѣютъ общую часть A^1B^1ab, то работа силы тяжести будетъ такова, какъ будто бы объемъ ABA^1B^1 перемѣстился прямо въ положеніе aba^1b^1.

Объемъ части ABA^1B^1=объему части $aba^1b^1=Qdt=\omega_1 v_1 dt=\omega_2 v_2 dt$; вѣсъ этого объема$=\omega_1 v_1 dt.\Delta$, и его работа при такомъ перемѣщеніи$=\omega_1 v_1 dt.\Delta(z_1-z_2)$.

Не трудно далѣе видѣть, что работа полнаго давленія на площадь сѣченія AB равняется

$$p_1\omega_1 v_1 dt,$$

а работа полнаго давленія на площадь сѣченія ab равняется

$$p_2\omega_2 v_2 dt.$$

Вычислимъ теперь приращеніе живой силы. Легко видѣть, что приращеніе живой силы объема A^1B^1ab равно 0, ибо наше движеніе, по предположенію, есть движеніе установившееся, т. ч. скорости всѣхъ точекъ этого объема при заданномъ перемѣщеніи сохранили прежнюю величину.

Такимъ образомъ приращеніе живой силы равняется разности:

$$\text{жив. силѣ об.}\,(aba^1b^1) - \text{жив. сила об.}\,(ABA^1B^1).$$

Легко видѣть, что:

$$\text{жив. сил. об.}\,(aba^1b^1) = \frac{\omega_2 v_2 dt.\Delta}{g} \cdot \frac{v_2^2}{2}$$

и

$$\text{жив. сила объема}\,(ABA^1B^1) = \frac{\omega_1 v_1 dt.\Delta}{g} \cdot \frac{v_1^2}{2}.$$

Теперь мы имѣемъ всѣ данныя для составленія уравненія живыхъ силъ. Оно напишется слѣдующимъ образомъ:

$$\frac{\omega_2 v_2.dt.\Delta}{g} \cdot \frac{v_2^2}{2} - \frac{\omega_1 v_1 dt.\Delta}{g} \cdot \frac{v_1^2}{2} = \omega_1 v_1 \Delta\,.\,dt(z_1 - z_2) + p_1 \omega_1 v_1 dt - $$

$$- p_2 \omega_2 v_2 dt.$$

Сокращая все это уравненіе на $\omega_1 v_1 dt = \omega_2 v_2 dt$ и раздѣляя на Δ, получимъ:

$$\frac{v_2^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g} = z_1 - z_2 + \frac{p_1}{\Delta} - \frac{p_2}{\Delta}$$

или, перенося всѣ величины съ одинаковымъ знакомъ въ одну часть,

$$\frac{v_2^{\;2}}{2g}+z_2+\frac{p_2}{\Delta}=\frac{v_1^{\;2}}{2g}+z_1+\frac{p_1}{\Delta}=const\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;(2)$$

Это и есть уравненiе Д. Бернулли. Всѣ выводы Гидравлики проистекаютъ почти исключительно изъ этой теоремы съ присоединенiемъ къ ней условiя несжимаемости, которое выражается уравненiемъ (1).

Выяснимъ смыслъ этого уравненiя. Для этого напишемъ его въ такомъ видѣ:

$$\left(\frac{p_1}{\Delta}+z_1\right)-\left(\frac{p_2}{\Delta}+z_2\right)=\frac{v_2^{\;2}}{2g}-\frac{v_1^{\;2}}{2g}.$$

Величины

$$\frac{v_2^{\;2}}{2g}\quad \text{и}\quad \frac{v_1^{\;2}}{2g}$$

суть высоты, соотвѣтствующiя скоростямъ, ибо тяжелая частица, брошенная вверхъ со скоростью v_1 (или v_2) достигаетъ высоты $\frac{v_1^{\;2}}{2g}$ или $\left(\frac{v_2^{\;2}}{2g}\right)$.

Если на чер. 22 отложимъ отъ ц. т. G сѣченiя AB вверхъ высоту $\frac{p_1}{\Delta}$(это есть высота, соотвѣтствующая давленiю, ибо $p_1=\Delta h_1$) и отъ центра тяжести g сѣченiя ab вверхъ высоту $\frac{p_2}{\Delta}$, то получимъ двѣ точки m и n, разность высотъ которыхъ надъ горизонтомъ будетъ:

$$h = \frac{v_2^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g}.$$

Ясно, что если въ центрахъ тяжести сѣченія AB и ab помѣстить открытые концы барометрическихъ трубокъ, то жидкость подъ вліяніемъ гидродинамическаго давленія поднимется въ нихъ до высотъ:

$$h_1 = \frac{p_1}{\Delta}$$

и

$$h_2 = \frac{p_2}{\Delta}$$

Если же мы помѣстимъ такимъ образомъ открытыя съ обѣихъ сторонъ трубки—*пьезометры*, то жидкость поднимется въ нихъ только на высоту:

$p_1 = \Delta h_1 +$

$p_1 - p_0 = \Delta h$

$$h'_1 = \frac{p_1}{\Delta} - \frac{p_0}{\Delta}$$

$h_1 = \frac{p_1}{\Delta} -$

и

$$h'_2 = \frac{p_2}{\Delta} - \frac{p_0}{\Delta},$$

гдѣ p_0—давленіе атмосферы.

Высоты h_1' и h_2'—называются *пьезометрическими высотами.* Понятно, что разность пьезометрическихъ высотъ будетъ равна разности барометрическихъ.

Если же мы будемъ писать ур-іе Бернулли въ формѣ (2), то его можно выразить словами такъ:

въ массѣ жидкости, движущейся установившимся движеніемъ, сумма трехъ высотъ во всякомъ сѣченіи: 1) высоты, соотвѣтствующей скорости, 2) высоты, соотвѣтствующей давленію и 3) высоты центра тяжести этого сѣченія надъ произвольнымъ горизонтомъ— есть величина постоянная.

Замѣчаніе.

Если по даннымъ задачи мы получимъ столь большое значеніе для скорости v_2 (положимъ даны ω_1, v_1 и ω_2) при малой величинѣ ω_2, то въ ур-іи (2)

$$\frac{{v_2}^2}{2g}+z_2>\frac{v_1}{2g}+\frac{p_1}{\Delta}+z_1$$

и для $\frac{p_2}{\Delta}$ получится отрицательное значеніе. Этотъ результатъ несовмѣстимъ со строеніемъ жидкости, ибо это значило бы, что давленіе направлено по внѣшней нормали къ частицѣ жидкости, а такое давленіе будетъ ее разрывать.

Отсюда и видно, что въ каждомъ данномъ случаѣ движенія существуетъ такой предѣлъ для скорости, котораго нельзя достигнуть.

Этотъ предѣлъ получается при $\frac{p_2}{\Delta}=0$ —минимально мыслимая величина давленія; при этомъ v_2 опредѣл. изъ соотношенія

$$\frac{{v_2}^2}{2g}+z_2=\frac{{r_1}^2}{2g}+\frac{p_1}{\Delta}+z_1$$

Но даже и такого предѣла нельзя достигнуть, т. к. давленіе никогда не можетъ равняться нулю, ибо по мѣрѣ уменьшенія давленія, изъ жидкости начинаютъ выдѣляться воздухъ и паръ, которые нарушатъ непрерывность жидкости. Въ такомъ случаѣ предполагаемое нами движеніе не можетъ осуществиться, и теорема

Д. Бернулли перестаетъ имѣть мѣсто. Въ виду этого предѣломъ давленія нужно считать то давленіе пара данной жидкости, которое онъ имѣетъ при температурѣ окружающей среды.

Но мы всегда на трубѣ, по которой движется жидкость, можемъ выполнить настолько съуженную часть (чер. 23), чтобы въ узкомъ сѣченіи ab давленіе было меньше атмосфернаго.

Если мы въ стѣнкѣ трубы въ этомъ мѣстѣ сдѣлаемъ отверстіе m, то вода не будетъ вытекать изъ него; напротивъ того въ это отверстіе будетъ всасываться воздухъ. Въ этомъ и состоитъ идея всѣхъ струйныхъ насосовъ, гдѣ всегда имѣются два конуса, обращенныхъ другъ къ другу вершинами.

§ 16.

Теорема Бернулли для относительнаго движенія.

Мы разсмотримъ только тотъ случай относительнаго движенія, когда переносное движеніе сводится къ вращенію около постоянной оси съ постоянной угловой скоростью.

Пусть труба AB (чер. 24) вращается съ постоянной угловой скоростью Ω около нѣкоторой оси OZ. Намъ нужно составить ур—іе Бернулли, или иначе уравненіе живыхъ силъ для (даннаго относительнаго) движенія жидкости вдоль трубы AB.

Извѣстно, что относительное движеніе можно разсматривать какъ абсолютное, если къ дѣйствующимъ силамъ прибавить силы инерціи:

1) соотвѣтствующую ускоренію влеченія (въ дан. случ. центрострем. ускорен.) и

2)—поворотному ускоренію.

Такъ какъ послѣднее всегда перпендикулярно къ плоскости, проходящей черезъ линію, параллельную оси вращенія, и направле къ относительной скорости, то, слѣдовательно, работа ея при перемѣщеніи частицъ жидкости по направленію относительной скорости=нулю.

Слѣдовательно, къ работѣ силы тяжести и давленія намъ надо въ данномъ случаѣ прибавить только работу центробѣжной силы.

Сохраняя всѣ прежнія обозначенія, назовемъ радіусъ окружности, описываемой точкой A черезъ r_1 и точкой B—черезъ r_2; въ такомъ случаѣ скорости этихъ точекъ по окружностямъ будутъ:

точки A . . . . $\omega_1 = \Omega r_1$
" B . . . . $\omega_2 = \Omega r_2$

Вычислимъ теперь работу этой силы для всей струи при безконечно маломъ перемѣщеніи въ теченіе времени dt.

Вообразимъ въ точкѣ m безконечно малую массу воды dM и вычислимъ работу центробѣжной силы при перемѣщеніи этой массы въ точку m' на безконечно малую дугу $ds = mm'$.

Если обозначимъ разстояніе точки m отъ оси черезъ ρ, то найдемъ, что работа центробѣжной силы будетъ:

$v = \omega = \Omega \xi$

$$dh = dM.\Omega^2 \rho ds.cos(\rho, ds).$$

$dh = dM \cdot \frac{v^2}{\xi} =$

Но легко видѣть, что

т. к.

$$ds.cos(\rho, ds) = d\rho,$$

$\delta\xi = \delta s \cos$

такъ что

$$dh = dM\Omega^2 \rho d\rho \quad . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

Безконечно малую массу dM можно разсматривать какъ массу, протекающую въ безконечно малое время, поэтому:

$$dM = \frac{\Delta Q . dt}{g} = \frac{\omega_1 v_1 \Delta}{g} dt,$$

гдѣ ω_1 и v_1—площадь трубки въ A и скорость жидкости въ томъ же мѣстѣ трубы.

Такимъ образомъ, принявъ это во вниманіе, найдемъ изъ ур—ія (1):

$$dh = \frac{\omega_1 v_1 \Delta}{g} . dt . \Omega^2 \rho . d\rho \quad . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Такова работа для безконечно малой массы, находящейся въ точкѣ m за безконечно малое время; чтобы найти работу центробѣжной силы для всей массы жидкости за то же время, заключенной въ трубѣ AB, намъ надо выраженіе (2) проинтегрировать, распространяя интеграцію на всю длину AB; такимъ образомъ имѣемъ:

$$h = \frac{\omega_1 v_1 \Delta}{g} dt \Omega^2 \int_{r_1}^{r_2} \rho d\rho = \Big/_{r_1}^{r_2} \frac{\omega_1 v_1 \Delta}{g} dt \frac{\Omega^2 \rho^2}{2} =$$

$$= \omega_1 v_1 \Delta . dt \left(\frac{\omega_2^{\,2}}{2g} - \frac{\omega_1^{\,2}}{2g} \right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

Мы выносимъ dt за знакъ интеграла, ибо относимъ эту работу къ безконечно малому времени.

Эту работу намъ надо внести въ сумму работъ со знакомъ плюсъ, ибо она положительна, т. ч. получимъ:

$$\frac{\omega_2 v_2 dt.\Delta}{g}\frac{v_2^2}{2}-\frac{\cancel{\omega_1 v_1 dt\Delta}}{g}.\frac{v_1^2}{2}=\cancel{\omega_1 v_1 \Delta\, dt}\,(z_1-z_2)+p_1\underset{\Delta}{\cancel{\omega_1 v_1 dt}}-$$

$$-p_2\underset{\Delta}{\cancel{\omega_2 v_2 dt}}+\cancel{\omega_1 v_1 dt\Delta}\left(\frac{\omega_2^2}{2g}-\frac{\omega_1^2}{2g}\right).$$

Сокращая все это уравненіе на

$$\omega_1 v_1 dt.\Delta=\omega_2 v_2 dt.\Delta,$$

получимъ:

$$\frac{v_2^2}{2g}+z_2+\frac{p_2}{\Delta}-\frac{\omega_2^2}{2g}=\frac{v_1^2}{2g}+z_1+\frac{p_1}{\Delta}-\frac{\omega_1^2}{2g}=const \quad . \; . \; . \; . \quad (4).$$

Отсюда видно, что полученное нами ур—іе отличается отъ ур—ія Д. Бернулли для абсолютнаго движенія только тѣмъ, что изъ обѣихъ частей его приходится вычитать высоты, соотвѣтствующія скоростямъ вращательнаго движенія.

Разсмотримъ два частныхъ случая:

1-й случай.

Ось трубы находится въ горизонтальной плоскости и вращается около вертикальной оси.

Для этого случая въ ур—іи (4) мы должны положить:

$$z_1=z_2,$$

т. ч. получимъ:

$$\frac{v_2^2}{2g}+\frac{p_2}{\Delta}-\frac{\omega_2^2}{2g}=\frac{v_1^2}{2g}+\frac{p_1}{\Delta}-\frac{\omega_1^2}{2g} \quad . \; . \; . \; . \quad (5)$$

2-й случай.

Ось трубы находится на поверхности круглаго вертикальнаго цилиндра, вращающагося около своей оси.

Въ этомъ случаѣ

$$\omega'_1 = \omega'_2$$

и ур—іе (4) принимаетъ видъ обыкновеннаго ур—ія Д. Бернулли.

§ 17.

Законъ измѣненія давленій при быстромъ измѣненіи сѣченія трубы.

Этотъ вопросъ представляется очень важнымъ для техники, но строгое рѣшеніе его при современномъ состояніи гидромеханики не представляется возможнымъ. Однако же приблизительное рѣшеніе возможно, и вычисленія по полученнымъ формуламъ показываютъ довольно близкое совпаденіе результатовъ съ опытными данными.

Положимъ, что труба *N*, по которой течетъ капельная жидкость, сообщается съ широкимъ цилиндрическимъ сосудомъ *A* (чер. 25), площадь нормальнаго сѣченія котораго много больше площади отверстія *ab*.

Допустимъ, что жидкость движется установившимся движеніемъ и что въ сѣченіи *ab* всѣ струйки параллельны между собою. Послѣ прохожденія черезъ это сѣченіе частицы жидкости начинаютъ разбрасываться въ разныя стороны и образуютъ въ сѣченіи *EF* и далѣе около стѣнокъ сосуда *A* водовороты. Допускаютъ, что движенія частицъ жидкости внутри этихъ водоворотовъ на-

[illegible] медленны, что ускореніями этихъ давленій можно пренебречь и считать, что въ сѣченіи EF давленія слѣдуютъ законамъ гидростатики.

Но на нѣкоторомъ разстояніи отъ ab, гдѣ-нибудь въ сѣченіи CD, движеніе жидкости приходитъ въ порядокъ и совершается струйками, параллельными оси сосуда A. Отсюда мы опять должны допустить, что въ сѣченіи CD давленія слѣдуютъ законамъ гидростатики. Пусть ω есть площадь сѣченія ab и g его центръ тяжести, который лежитъ надъ нѣкоторымъ горизонтомъ XX на высотѣ z. Обозначимъ далѣе высоту центра тяжести G сѣченія CD надъ тѣмъ же горизонтомъ черезъ Z и площадь этого сѣченія—черезъ Ω. Центръ тяжести сѣченія EF лежитъ очевидно, въ точкѣ g', гдѣ это сѣченіе пересѣкаетъ прямая, параллельная образующей цилиндра A и проходящая черезъ G. Обозначимъ высоту g' надъ горизонтомъ XX черезъ z'. Назовемъ черезъ p и v давленіе и скорость въ сѣченіи ab и черезъ P и V давленіе и скорость въ сѣченіи CD, и, наконецъ, черезъ Q—секундный расходъ, т. ч.

$$Q = \omega . v . = \Omega V \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

Давленіе p' въ центрѣ тяжести сѣченія EF, такъ какъ давленія въ этомъ сѣченіи слѣдуютъ законамъ гидростатики, будетъ:

$$p' = p - \Delta h,$$

гдѣ h есть разность высотъ g' и g надъ горизонтомъ XX, т. е.

$$h = z' - z.$$

Разберемъ теперь, какія силы дѣйствуютъ на массу жидкости, заключенную между сѣченіями ab и CD.

На первомъ мѣстѣ отмѣтимъ вѣсъ этой жидкости, который равенъ:

$$\Delta.\Omega g'G.$$

Затѣмъ нужно принять во вниманіе давленіе на EF, которое равно $p'\Omega$ и направлено въ сторону движенія, и давленіе на CD, которое равно $P\Omega$ и направлено въ сторону обратную движенію.

Примѣнимъ къ разсматриваемой массѣ теорему измѣненія количествъ движенія за безконечно малое время dt, взявъ за ось проекціи направленіе $g'G$ или, иными словами, направленіе скоростей v и V.

Допустимъ, что за это время частицы, которыя были въ CD, перемѣстятся въ $C'D'$ и частицы, которыя были въ ab, займутъ какое-нибудь положеніе $a'b'$. Такъ какъ по нашему предположенію движеніе установившееся, то количество движенія въ объемѣ $a'b'CD$ остается безъ перемѣны и намъ надо принять только разность количествъ движенія равныхъ объемовъ $CDC'D'$ и $aba'b'$.

Очевидно, что эта разность выразится такъ:

$$\frac{\Delta.Q.dt}{g}(V-v).$$

Въ такомъ случаѣ имѣемъ:

$$\frac{\Delta.\,Q.dt}{g}(V-v)=p'\Omega dt-P\Omega dt+\Delta.\Omega g'G\cos\alpha.dt,$$

гдѣ α уголъ между $g'G$ и вертикальнымъ направленіемъ.

Но

$$Q = \Omega V$$

и

$$g'G\cos\alpha = h + z - Z, \quad = z' - Z = h + z - Z$$

такъ что имѣемъ:

$$\frac{\Delta.\Omega\, Vdt}{g}(V - v) = \underset{\Delta}{p'}\Omega \cdot dt - \underset{\Delta}{P}\Omega dt + \Delta.\Omega(h + z - Z)dt$$

Сокращая все ур—іе на $\Delta\Omega dt$, получимъ:

$$\frac{p'}{\Delta} = \frac{p}{\Delta}$$

$$\frac{V(V-v)}{g} = \frac{p'}{\Delta} - \frac{P}{\Delta} + h + z - Z = \frac{p}{\Delta} - \frac{P}{\Delta} + z - Z \quad . \; . \; (2)$$

$$\frac{p}{\Delta} - h$$

Сравнимъ это ур—іе съ ур—іемъ Д. Бернулли, которое мы могли бы написать, если-бы не было быстраго измѣненія сѣченія.

Прибавимъ къ обѣимъ частямъ ур—ія (2) разность: сумму

$$\frac{V^2}{2g} - \frac{v^2}{2g};$$

$$\frac{v^2}{2g} \quad \frac{V^2}{2g} \quad \frac{2v(v-}{2g}$$

тогда получимъ:

$$\frac{V^2}{2g} - \frac{v^2}{2g} + \frac{2V(V-v)}{2g} = \frac{p}{\Delta} - \frac{P}{\Delta} + z - Z + \frac{V^2}{2g} - \frac{v^2}{2g},$$

$$v^2 \quad (v-v)^2 \quad p + z + v^2$$

откуда:

$$\frac{p}{\Delta}+\frac{v^2}{2g}+z=\frac{P}{\Delta}+Z+\cancel{\frac{V^2}{2g}}-\cancel{\frac{V^2}{2g}}+\frac{v^2}{2g}+\frac{2V^2}{2g}-\frac{2Vv}{2g},$$

или

$$\frac{\cancel{P}}{\Delta}+\frac{v^2}{2g}+z=\frac{P}{\Delta}+Z+\frac{\overset{V^2}{v^2}}{2g}+\frac{(v-V)^2}{2g}\quad .\ .\ .\ (3)$$

Сравнивая это ур—іе съ ур—мъ Д. Бернулли, видимъ, что оно отличается послѣднимъ членомъ второй части, который представляетъ изъ себя высоту, соотвѣтствующую потерянной скорости при прохожденіи отъ сѣченія ab къ сѣченію CD. Отсюда и видно, что

быстрое расширеніе трубы сопровождается потерей живой силы, равной живой силѣ потерянной скорости.

Эта теорема принадлежитъ Борда, но ее часто приписываютъ также Беланже и Карно.

Замѣтимъ, что ур—іе (3) примѣнимо только къ такому сѣченію сосуда A, гдѣ жидкость уже движется параллельными струйками и вихри исчезаютъ. Такъ какъ положеніе перваго такого сѣченія CD опредѣлить трудно, то надо при примѣненіяхъ ур—ія (3) быть осторожнымъ.

Кромѣ того нужно замѣтить, что выведенное ур—іе примѣнимо только въ случаѣ быстраго расширенія, но не быстраго сжатія. При этомъ происходитъ также нѣкоторая потеря энергіи, какъ мы увидимъ ниже, если только труба продолжается за этимъ сжатымъ сѣченіемъ; но если широкая труба заканчивается просто небольшимъ отверстіемъ, черезъ которое жидкость вытекаетъ наружу, то причинъ для потери напора не оказывается.

Глава вторая.

Истеченіе жидкости изъ отверстій.

§ 18.

Истеченіе жидкости изъ малаго отверстія въ тонкой стѣнкѣ.

Мы будемъ разсматривать сначала истеченіе жидкости черезъ отверстіе произвольной величины на горизонтальномъ днѣ сосуда или черезъ малое отверстіе въ боковой стѣнкѣ сосуда, ибо въ томъ и другомъ случаѣ высота уровня свободной поверхности надъ всякимъ элементомъ площади отверстія есть величина постоянная. При этомъ мы будемъ также предполагать, что отверстіе это сдѣлано въ тонкой стѣнкѣ.

Отверстіемъ въ тонкой стѣнкѣ принято называть такое отверстіе, толщина стѣнокъ котораго менѣе половины наименьшаго изъ его измѣреній. Какъ показываютъ наблюденія, черезъ такое отверстіе жидкость течетъ такъ, какъ будто бы отверстіе было геометрической поверхностью. Такое отверстіе можно получить срѣзываніемъ краевъ его такъ, какъ показано на чертежѣ 26-мъ.

Предположимъ, что какой-нибудь сосудъ A наполненъ жидкостью до уровня NN, который поддерживается на постоянной высотѣ новымъ притокомъ жидкости, въ то время какъ жидкость вытекаетъ черезъ отверстіе cd.

Опытъ показываетъ, что вскорѣ по открытіи отверстія движеніе становится установившимся и сѣченіе струи, которая вытекаетъ изъ сосуда, по мѣрѣ удаленія отъ отверстія, уменьшается, пока въ довольно маломъ разстояніи отъ него ни достигаетъ наименьшей величины; это явленіе называется *сжатіемъ*. Причина такого явленія заключается въ томъ, что жидкость подходитъ къ сѣченію со всѣхъ сторонъ и потому струйки, которыя текли параллельно стѣнкамъ, не могутъ сразу принять направленія перпендикулярнаго къ ней; вслѣдствіе этого, проходя черезъ отверстіе, эти струйки оказываютъ на сосѣднія, вслѣдствіе центробѣжной силы, добавочное давленіе, т. ч. давленіе въ сѣченіи cd будетъ больше, чѣмъ въ сѣченіи ab, скорость меньше и потому площадь $cd >$ площади ab.

Такое объясненіе подтверждается тѣмъ фактомъ, что если мы дадимъ сосуду форму, обезпечивающую струйкамъ постоянное измѣненіе направленія по мѣрѣ приближенія къ отверстію (чер. 27), то сжатіе будетъ меньше; въ обратномъ случаѣ, сжатіе будетъ больше (чер. 28).

Если мы допустимъ, что въ сѣченіи ab скорости всѣхъ частицъ равны и параллельны между собой, то мы должны допустить, что всѣ эти частицы будутъ описывать одинаковыя параболы, которыя онѣ описывали бы, если бы были изолированы; а отсюда слѣдуетъ, что давленія въ каждой точкѣ сѣченія ab можно считать равными между собой и равными, понятно, давленію внѣшней среды.

Примѣнимъ къ сѣченіямъ NN и ab теорему Д. Бернулли. Мы въ правѣ сдѣлать это, ибо въ этихъ сѣченіяхъ струйки движутся параллельно между собою, и кромѣ того движеніе во всемъ объемѣ сосуда есть установившееся.

Обозначимъ скорость, давленіе и высоту центра тяжести сѣченія NN черезъ v_1 p_1 и z_1, а тѣ же величины для сѣченія *ab* соотвѣтственно черезъ v, p и z. Тогда имѣемъ:

$$\frac{v^2}{2g}+\frac{p}{\Delta}+z=\frac{{v_1}^2}{2g}+\frac{p_1}{\Delta}+z_1.$$

Отсюда найдемъ:

$$v=\sqrt{{v_1}^2+2g\left(\frac{p_1}{\Delta}-\frac{p}{\Delta}\right)+2gh}\quad\ldots\ldots\ (1),$$

гдѣ h равняется глубинѣ погруженія центра тяжести отверстія *cp* подъ уровнемъ NN:

$$h=z_1-z.$$

Кромѣ того, обозначая площадь сѣченія NN черезъ ω_1 и сѣченія *ab* черезъ ω, по условію несжимаемости имѣемъ:

$$\omega_1 v_1=\omega.v.$$

Если ω_1 очень велико по сравненію съ ω и, слѣдовательно, v_1 настолько мала по сравненію съ v, что ей можно пренебречь, то изъ форм. (1) получимъ:

$$v=\sqrt{2g\left(\frac{p_1}{\Delta}-\frac{p}{\Delta}\right)+2gh}\quad\ldots\ldots\ldots\ (2)$$

Если мы предположимъ, что поверхность жидкости NN находится подъ атмосфернымъ давленіемъ и что струя вытекаетъ въ атмосферу, то мы должны положить

$$p=p_1$$

и тогда найдемъ:

$$v=\sqrt{2gh} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Слѣдовательно,

скорость истеченія будетъ такова, какъ будто бы жидкость свободно падала съ высоты свободной поверхности.

Это извѣстная теорема Торичелли, которую онъ открылъ опытнымъ путемъ; при этомъ онъ нашелъ, что

$$v=(0{,}97-0{,}98)\sqrt{2gh}.$$

Такая разница между теоретической и опытной величиной v объясняется нѣкоторыми потерями энергіи на треніе.

Справедливость той же формулы (3) можно провѣрить слѣдующимъ образомъ.

Въ вертикальной стѣнкѣ сосуда дѣлается маленькое отверстіе, чтобы струйку можно было считать за линію. Выйдя изъ отверстія, струйка будетъ описывать параболу. Уравненіе этой параболы найдется такимъ образомъ

Возьмемъ начало прямоугольныхъ осей координатъ въ срединѣ отверстія, ось OX направимъ горизонтально отъ стѣнки сосуда и ось OY—вертикально внизъ. Возьмемъ на параболѣ какую-ничрезъ точку *n*; если обозначимъ время, нужное для прохожденія пути *on* черезъ t и скорость истеченія черезъ v, то найдемъ что абсцисса этой точки

$$x=om=vt$$

и ордината

$$y=\overset{mh}{\cancel{mh}}=\frac{g}{2}t^2.$$

Исключая отсюда t, найдемъ ур—іе параболы:

$$y=\frac{g}{2}\frac{x^2}{v^2},$$

откуда

$$v=\sqrt{2g\frac{x^2}{4y}}$$

Итакъ, если мы для какой-нибудь точки *n* опредѣлимъ ординату и абсциссу, что легко сдѣлать при помощи дощечки P съ отверстіемъ (чер. 29), которая устанавливается горизонтально и такъ, чтобы струйка протекала черезъ отверстіе, то можно найти v.

Такого рода опыты продѣлывались; оказывается, что отношеніе $\frac{x^2}{4y}$ всегда близко къ h, т. ч.

$$v=\varphi\sqrt{2gh},$$

где

$$\varphi = 0{,}97 - 0{,}98.$$

Этотъ коэффиціентъ принято называвать *коэффиціентомъ скорости.*

Чтобы опредѣлить расходъ Q жидкости черезъ сѣченіе, надо составить произведеніе v на площадь сжатаго сѣченія $\omega_\circ$, т. ч.

$$Q = v.\omega_\circ = \omega_\circ \varphi \sqrt{2gh}.$$

Обыкновенно же расходъ выражаютъ черезъ площадь самого отверстія ω~~$_\circ$~~; такъ какъ $\omega > \omega_\circ$, то можно написать, что

$$\omega_\circ = \alpha\omega,$$

гдѣ

$$\alpha < 1.$$

Этотъ коэф. называютъ *коэф. сжатія.*

Такимъ образомъ:

$$Q = \alpha.\varphi.\omega \sqrt{2gh} = \mu.\omega \sqrt{2gh},$$

при чемъ μ называется *коэф. расхода.*

Опытнымъ путемъ найдено, что для отверстія въ тонкой стѣнкѣ, если при этомъ стѣнка сосуда около отверстія плоская и жидкость можетъ протекать по отверстію со всѣхъ сторонъ, то коэф. сжатія α почти постояненъ для всѣхъ возможныхъ случаевъ и равенъ 0,64; при этомъ

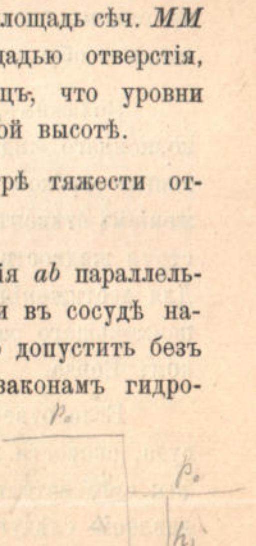
$$\mu=\varphi.\alpha=0,62.$$

Положимъ, что отверстіе сдѣлано въ стѣнкѣ, раздѣляющей два сосуда A и B, наполненныя жидкостью до уровня MM и NN, разность между которыми равняется h_0 (чер. 30).

Примѣнимъ къ данному случаю выведенное нами уравненіе (1) въ предположеніи, что на поверхности жидкостей въ обоихъ сосудахъ дѣйствуетъ атмосферное давленіе, т. е. что площадь сѣч. MM сосуда настолько велика по сравненію съ площадью отверстія, что скоростью v_1 можно пренебрегать и, наконецъ, что уровни въ обоихъ сосудахъ поддерживаются на постоянной высотѣ.

Опредѣлимъ прежде всего давленіе въ центрѣ тяжести отверстія ab со стороны жидкости сосуда B.

Такъ какъ жидкость вытекаетъ изъ отверстія ab параллельными струйками и такъ какъ вся масса жидкости въ сосудѣ находится въ очень медленномъ движеніи, то можно допустить безъ большой погрѣшности, что давленія слѣдуютъ законамъ гидростатики, т. е.



$$p=\Delta h_1+p_1$$

Такимъ образомъ фор. (1) намъ дастъ:

$$v=\sqrt{2g(-h_1)+2gh}=\sqrt{2g(h-h_1)}=\sqrt{2gh_o},$$

$\frac{p}{\Delta}$

$\frac{p_0}{\Delta}$

=

т. е.

скорость истеченія жидкости въ ту же жидкость соотвѣтствуе разности уровней въ обоихъ сосудахъ.

Отсюда слѣдуетъ, что скорость истеченія не зависитъ от глубины погруженія отверстія подъ уровнемъ жидкости въ с судѣ *A*.

§ 19.

Насадокъ Борда.

Коэфф. сжатія оказывается возможнымъ опредѣлить толь въ одномъ частномъ случаѣ на основаніи простыхъ теоретич скихъ соображеній.

Положимъ, что въ вертикальной стѣнкѣ сосуда *A* (чер. 31), н полненнаго жидкостью до уровня *NN*, сдѣлано отверстіе, образ ванное коническою трубкой съ горизонтальною осью. которая служитъ продо женіемъ внутрь стѣнокъ отверстія; форма и длина этой трубки таковы, ч струя жидкости, вытекающая изъ него, не касается его стѣнок Для достиженія этого условія длина трубки не должна быть бол наименьшаго размѣра отверстія. Такая трубочка называется насад комъ Борда.

Если отверстіе насадка мало по сравненію съ сѣченіемъ с суда, скорости жидкости вдоль стѣнокъ сосуда будутъ очень м лы; слѣдовательно, можно допустить, что на стѣнкахъ сосу давленія слѣдуютъ законамъ гидростатики. Обозначимъ площа отверстія $a'b'$ насадка черезъ ω и положимъ для простоты, ч давленіе на уровень *NN* есть давленіе атмосферное и что жи кость вытекаетъ въ атмосферу.

Давленія жидкости на вертикальныя стѣнки попарно равн и противоположны, такъ что взаимно уравновѣшиваются; неура

Неуравновѣшеннымъ остается только давленіе на часть *cd*, противоположную отверстію, величина котораго:

ω, p

$$F = \omega (\Delta h + p_\circ)$$

гдѣ p_0 — давленіе атмосферы.

Если бы мы поставили сосудъ на катки, то это давленіе стало бы перемѣщать сосудъ въ сторону обратную направленію истеченія.

Примѣнимъ теорему количествъ движенія, взявъ за ось проекцій горизонтальную ось, проходящую черезъ центръ тяжести отверстія *a'b'*.

При опредѣленіи импульса силъ, нужно будетъ принять во вниманіе только давленіе на *cd* въ сторону движенія и давленіе на *a'b'* атмосферы въ сторону обратную. Такъ какъ площадь *cd* равняется пл. *a'b'*, то импульсъ силъ будетъ:

$p\omega dt + p_\circ \omega dt =$

$$\omega(\Delta h + p_\circ)dt - \omega p_\circ . dt = \omega \Delta h dt$$

Такъ какъ движеніе въ сосудѣ медленно, то при опредѣленіи приращенія количествъ движенія, надо принять во вниманіе только количество движения ~~безконечно~~ малаго объема, получившаго за время *dt* приращеніе скорости отъ *0* до v_1, гдѣ v_1 — скорость струи въ сѣченіи *ab*.

Если обозначимъ секундный расходъ черезъ *Q*, то найдемъ, что прир. колич. движ. за время *dt* будетъ:

$$\frac{Q\Delta}{g} dtv\cdot = \frac{\Delta \omega_\circ v^2}{g} dt = \Delta \omega h dt$$

$\frac{\Delta Q}{g}$

$h =$

$= 2$

Т. образомъ имѣемъ:

$=\frac{1}{2}\omega h$

$$\omega h = \frac{Q}{g} v.$$

Если обозначимъ площадь сѣченія ab черезъ $\omega_\circ$, то найдемъ:

$$Q = \omega_\circ . v,$$

$$\omega h = \frac{\omega_\circ v^2}{g} \cdot$$

Такъ какъ по предыдущему

$$v^2 = 2gh,$$

$\omega h = \frac{\omega_0 2\cancel{g}h}{\cancel{g}}$

то отсюда и найдемъ:

$$\omega = 2\omega_0,$$

$\omega_0 = \frac{1}{2}\omega = 0,5\,\omega =$

т. е. коэффиціентъ сжатія въ данномъ случаѣ будетъ:

$$\alpha = 0,5$$

Этотъ результатъ былъ подтвержденъ эмпирически Борда.

Замѣтимъ, что предыдущія разсужденія не могутъ быть примѣнены къ отверстіямъ безъ входящихъ насадковъ, ибо тогда скорость вдоль стѣнки, въ которой сдѣлано отверстіе, возрастаетъ по мѣрѣ приближенія къ отверстію, т. ч. и давленія на этихъ стѣнкахъ будутъ меньше больше гидростатическихъ. На противоположной же стѣнкѣ давленія, вслѣдствіе медленности движенія вдоль этой стѣнки, будутъ слѣдовать законамъ гидростатики. Въ виду этого вообще сила F, дающая импульсъ, будетъ болѣе $\omega\Delta h$, т. ч.

$$\omega h < \frac{Q}{g}\, v < \frac{\omega_0 v^2}{g} < 2\omega_0 h,$$

откуда

$$\omega_0 > \frac{\omega}{2},$$

что и подтверждается опытами.

§ 20.

Насадокъ Вентури.

Насадокъ Вентури представляетъ изъ себя ничто иное, какъ короткую цилиндрическую трубку, продолжающую отверстіе тѣхъ же поперечныхъ размѣровъ. Изслѣдованіе истеченія жидкости черезъ такой насадокъ представляетъ тотъ интересъ. что при этомъ мы должны будемъ примѣнить всѣ полученныя нами положенія и затѣмъ сравнить результаты теоретическаго изслѣдованія съ опытными данными.

Если мы получимъ близкое совпаденіе, то можемъ считать всѣ теоретическіе выводы достаточно точными и пригодными для рѣшенія задачъ, которыя ставятся въ гидравликѣ.

Мы будемъ сначала разсматривать случай болѣе общій, чѣмъ насадокъ Вентури.

Положимъ, что жидкость изъ сосуда N, свободный уровень AB котораго (чер. 32) поддерживается на постоянной высотѣ, вытекаетъ въ отверстіе $a'b'$ въ горизонтальномъ днѣ въ другой сосудъ N', изъ котораго затѣмъ въ отверстіе ab вытекаетъ наружу

Сдѣлаемъ слѣдующія обозначенія.

Обозначимъ давленіе въ сѣченіи AB черезъ P; въ $a'b'$—p'; въ $A'B'$—P', и въ ab черезъ p. Скорости въ тѣхъ же сѣченіяхъ назовемъ соотвѣтственно черезъ V, v', V' и v; и площади ихъ— Ω, ω'. Ω' и ω.

Напишемъ ур—іе Д. Бернулли съ поправкой Борда для сѣченій AB и ab; имѣемъ:

$$\frac{P}{\Delta}+H+\frac{V^2}{2g}=\frac{p}{\Delta}+\frac{v^2}{2g}+\frac{(v'-V')^2}{2g}\ .\ .\ .\ (1)$$

По условію неразрывности жидкости найдемъ:

$$Q=\Omega V=\mu'\omega' v'=\Omega' V'=\mu\omega v\ .\ .\ .\ (2),$$

гдѣ μ и μ' коэффиціенты расхода для сѣченій ab и $a'b'$.

Выражая при помощи ур—ій (2) всѣ скорости черезъ v и внося полученныя выраженія въ ур-іе (1) получимъ:

$$\frac{P}{\Delta}+H-\frac{p}{\Delta}=\frac{v^2}{2g}\left\{1-\frac{\mu^2\omega^2}{\Omega^2}+\left(\frac{\mu\omega}{\mu'\omega'}-\frac{\mu\omega}{\Omega'}\right)^2\right\}.$$

отсюда

$$v=\sqrt{\frac{2g\left(\frac{P}{\Delta}+H-\frac{p}{\Delta}\right)}{1-\frac{\mu^2\omega^2}{\Omega^2}+\mu^2\omega^2\left(\frac{1}{\mu'\omega'}-\frac{1}{\Omega'}\right)^2}}\,.\quad .\ (3)$$

и

$$Q=\mu\omega v.$$

Формула (3) значительно упрощается въ слѣдующихъ случаяхъ:

1) Если AB находится подъ давленіемъ атмосферы и жидкость вытекаетъ въ атмосферу,

то

$$P=p$$

и

$$v=\sqrt{\frac{2gH}{1-\frac{\mu^2\omega^2}{\Omega^2}+\mu^2\omega^2\left(\frac{1}{\mu'\omega'}-\frac{1}{\Omega'}\right)^2}}$$

2) Если кромѣ того $\omega'=\Omega'$ (чер. 33),

то

$$v=\sqrt{\frac{2gH}{1-\frac{\mu^2\omega^2}{\Omega^2}+\frac{\mu^2\omega^2}{\Omega'^2}\left(\frac{1}{\mu'}-1\right)^2}}$$

3) Наконецъ если $\omega = \omega' = \Omega'$ (чер. 34), ***т. е. сосудъ оканчивается открытой трубой,***

то, принимая во вниманіе, что въ данномъ случаѣ вслѣдствіе отсутствія сжатія въ сѣченіи *ab* мы должны положить

$$\mu = 1.$$

найдемъ:

$$v = \sqrt{\frac{2gH}{1 - \frac{\omega^2}{\Omega^2} + \left(\frac{1}{\mu'} - 1\right)^2}}$$

Если кромѣ того отношеніе $\frac{\omega}{\Omega} < \frac{1}{10}$, то отношеніемъ $\frac{\omega^2}{\Omega^2}$ можно пренебречь; тогда имѣемъ:

$$v = \sqrt{\frac{2gH}{1 + \left(\frac{1}{\mu'} - 1\right)^2}} \quad . \; . \; . \; (4).$$

Къ такому же результату мы придемъ и въ томъ случаѣ, если при малой площади сѣченія трубки помѣстимъ ее на вертикальной стѣнкѣ (чер. 35).

Такимъ то образомъ и получается насадокъ Вентури. При этомъ только длина трубки *l*, если отверстіе круглое съ діаметромъ *d*, должна удовлетворять слѣд. условію:

$$2d < l < 3d,$$

что при $l < 2d$, жидкость не успѣетъ расшириться и занять все сѣченіе, а при $l > 3d$—станутъ уже чувствительны потери отъ тренія.

Если мы положимъ въ ур—іи (4) $\mu' = 0,62$, то получимъ:

$$v = \sqrt{\frac{2gH}{1+\left(\frac{1}{0,62}-1\right)^2}} = 0,85\sqrt{2gH} \; . \; . \; . (5)$$

и

$$Q = 0,85.\omega\sqrt{2gH} \quad . \; . \; (6).$$

Опытнымъ же путемъ найдено, что

$$Q = 0,82.\omega\sqrt{2gH} \; . \quad . \; . \; (6')$$

Разница между двумя коэффиціентами обусловливается главнымъ образомъ потерями на треніе о стѣнки насадка, которыхъ мы не принимали при теоретическомъ рѣшеніи вопроса.

Принявъ это во вниманіе, мы можемъ утверждать, что теоретическіе выводы вполнѣ согласуются съ дѣйствительностью.

То же самое тотъ же опытъ подтверждаетъ еще и другимъ образомъ.

Обозначимъ давленіе атмосферы черезъ p_a, давленіе и скорость въ сжатомъ сѣченіи cd черезъ p' и v' и примѣнимъ теорему Д. Бернулли къ сѣченіямъ AB и cd, пренебрегая скоростью въ первомъ; тогда получимъ:

$$\frac{p_a}{\Delta}+H=\frac{v'^2}{2g}+\frac{p'}{\Delta},$$

откуда

$$\frac{p_a-p'}{\Delta}=\frac{v'^2}{2g}-H.$$

Если мы обозначимъ площадь сѣченія cd черезъ ω', то по предыдущему

$$Q=\omega'v'=0,85\sqrt{2gH}.\,\omega,$$

откуда

$$v'=\frac{0,85.\omega\sqrt{2g\,H}}{\omega'}.=\frac{0,85\sqrt{2gH}}{0,64}\frac{\omega}{\omega}$$

Но

$$\omega'=\alpha\omega=0,64.\omega,$$

т. ч.

$$\frac{v'^2}{2g}=\left(\frac{0,85}{0,64}\right)^2H=1,75\text{П}$$

и

$$\frac{p_a-p'}{\Delta}=0,75H \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

Этотъ результатъ точно совпадаетъ съ результатомъ опыта Вентури. Онъ провелъ въ насадокъ въ мѣстѣ, близкомъ къ сжатому сѣченію *cd*, трубку, нижній конецъ которой погрузилъ въ сосудъ (чер. 35), наполненный той же жидкостью. Въ его опытѣ

$$H=0,88 \text{ мтр.}$$

и жидкость поднялась въ трубѣ надъ уровнемъ въ нижнемъ сосудѣ на высоту

$$h=0,65 \; mtr., \quad = \frac{p_a-p'}{\Delta} = 0,75 H$$

$$0,75 = \frac{h}{H} = \frac{0,65}{0,88}$$

при этомъ:

$$\frac{0,65}{0,88}=0,741.$$

Что касается до предѣла, котораго нельзя переходить при такомъ опытѣ, то мы его найдемъ, полагая въ ур—іи (2) 7

$$p'=0;$$

тогда найдемъ:

$$H=\frac{p_a}{\Delta . 0,75}=\frac{10,33}{0,75}=13,77 \; mtr.$$

Замѣтимъ, что, хотя черезъ насадокъ Вентури расходъ больше, чѣмъ черезъ отверстіе того же діаметра въ тонкой стѣнкѣ, истеченіе при этомъ сопровождается значительной потерей энергіи.

Эту потерю мы опредѣлимъ изъ формулы (5), принявъ въ ней опытный коэффиціентъ 0,82; возвышая обѣ части этого ур—ія въ квадратъ и раздѣляя на $2g$, найдемъ:

$$\frac{v^2}{2g}=(0,82)^2H=0,67H,$$

такъ, что потеря напора достигаетъ 33%.

§ 21.

Коническіе насадки.

Если бы придали насадку *a* (чер. 36) форму сжатой струи, то, понятно, получили бы коэффиціентъ расхода черезъ такой насадокъ равнымъ коэффиціенту скорости, ибо здѣсь нѣтъ причинъ для сжатія. И дѣйствительно, это подтверждается опытами Вейсбаха и Микеллоти.

По Вейсбаху въ этомъ случаѣ

$$\mu=0,965—0,97,$$

а по Микеллоти

$$\mu=0,983.$$

Если мы, вмѣсто того чтобы выполнять точно насадокъ въ формѣ сжатой струи, придадимъ ему видъ сходящагося конуса (чер. 87), то, очевидно, должны приблизительно при нѣкоторомъ опредѣленномъ углѣ δ при вершинѣ получить тѣ же результаты, что и въ предыдущемъ случаѣ.

Изъ опытовъ Д'Обюиссона и Кастеля выяснилось, что

$$\text{при } \delta=13^\circ 24' \;.\;.\;.\;.\; \mu=0{,}946;$$

при углахъ большихъ, когда насадокъ приближался къ отверстію въ тонкой стѣнкѣ, и при углахъ меньшихъ, когда коническій насадокъ приближался къ насадку Вентури, коэффиціентъ расхода получаетъ меньшія значенія.

Интересно также вліяніе на расходъ насадка расходящагося.

чер таб XXIII

Устроимъ насадокъ слѣдующимъ образомъ. Отверстіе $A'B'$ въ стѣнкѣ продолжимъ насадкомъ $A'B'b'a'$, имѣющимъ форму сжатой струи, выходящей свободно изъ отверстія въ вертикальной стѣнкѣ. Къ этому насадку присоединимъ другой, постепенно расходящійся насадокъ $a'b'ba$. Такъ какъ здѣсь нѣтъ причинъ для потери скорости и сжатія, то, обозначая площадь сѣченія отверстія ab черезъ ω, найдемъ:

$$Q=\omega v=\omega\sqrt{2gH} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (1)$$

Отсюда на первый взглядъ кажется, что, увеличивая ω, можно увеличить расходъ до безконечности. Но это не такъ. Во первыхъ, формула наша вѣрна до тѣхъ поръ, пока величина отверстія ab настолько мала, что для всякаго элемента площади можно считать H постояннымъ, во-вторыхъ, расширяя насадокъ, мы должны его удлинять, что повлечетъ за собою потерю скорости на треніе, и, въ-третьихъ, что является самымъ существеннымъ, предѣлъ уширенія опредѣляется давленіемъ въ сѣченіи $a'b'$.

Обозначимъ площадь этого сѣченія черезъ ω', скорость въ немъ черезъ v', давленіе—p' и давленіе атмосферы черезъ p_a. Примѣняя къ сѣченіямъ AB и $a'b'$ теорему Д.Бернулли, найдемъ:

$$\frac{v'^2}{2g}+\frac{p'}{\Delta}=H+\frac{p_a}{\Delta},$$

откуда

$$v'=\sqrt{2g\left(H+\frac{p_a}{\Delta}-\frac{p'}{\Delta}\right)}.$$

Т. к. p' не можетъ быть менше нуля, то предѣльное значеніе для скорости будетъ:

$$v'=\sqrt{2g\left(H+\frac{p_a}{\Delta}\right)}.$$

Но

$$Q=\omega'v'=\omega v,$$

откуда наибольшее значеніе v есть:

$$v=\frac{\omega'}{\omega}v'=\frac{\omega'}{\omega}\sqrt{2gH+\left(\frac{p_a}{\Delta}\right)}$$

и наибольшее значеніе для расхода:

$$Q=\omega'\sqrt{2g\left(H+\frac{p_a}{\Delta}\right)}.$$

Но и такого предѣла, какъ это мы видѣли раньше, достигнуть нельзя.

Наибольшее значеніе для ω при этомъ данномъ ω' будетъ:

$$\omega=\frac{\omega' v'}{v}=\omega'\frac{\sqrt{2g\left(H+\frac{p_a}{\Delta}\right)}}{\sqrt{2gH}}$$

Положимъ, что мы придали ω значеніе, не выходящее изъ указаннаго предѣла, но все таки такое, что

$$\omega>\omega'.$$

Примѣнимъ къ этимъ двумъ сѣченіямъ ур—іе Д.Бернулли; получимъ:

$$\frac{v'^2}{2g}+\frac{p'}{\Delta}=\frac{v^2}{2g}+\frac{p_a}{\Delta},$$

откуда, принимая во вниманіе, что

$$Q=\omega v=\omega' v'$$

и

$$\frac{v^2}{2g}=H,$$

найдемъ:

$$\frac{p'}{\Delta}=\frac{p_a}{\Delta}+\frac{v^2}{2g}\left(1-\frac{v'^2}{v^2}\right)=\frac{p_a}{\Delta}-H\left(\frac{\omega^2}{\omega'^2}-1\right),$$

т. ч.

$$\frac{p'}{\Delta}<\frac{p_a}{\Delta}$$

и

$$p'<p_a,$$

т. е. p' всегда меньше атмосфернаго; въ виду этого понятно, что коническій насадокъ долженъ обладать способностью всасывать воздухъ.

§ 22.

Истеченіе при перемѣнномъ уровнѣ въ воздухъ.

До сихъ поръ мы предполагали, что уровень AB (чер. 38) поддерживается на постоянной высотѣ надъ отверстіемъ.

Будемъ теперь предполагать, что это условіе не выполняется и, что въ сосудъ притекаетъ ежесекундно объемъ жидкости q, неравный объему, вытекающему въ то же время изъ отверстія ab, т. ч. уровень въ сосудѣ можетъ или повышаться, или понижаться.

Пусть въ началѣ уровень занималъ положеніе AB на высотѣ h надъ отверстіемъ ab и въ данный моментъ, по прошествіи времени t послѣ начала наблюденія, находится въ $A'B'$ на высотѣ z надъ отверстіемъ. Такъ какъ мы выводили теорему Д. Бернулли для безконечно малаго перемѣщенія во время dt и такъ какъ можно считать, что въ безконечно малый промежутокъ времени всѣ обстоятельства движенія остаются неизмѣнными, то по предыдущему найдемъ, что скорость истеченія въ данный моментъ времени будетъ:

$$v = \sqrt{2gz} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Если площадь отверстія назовемъ черезъ ω_0 и коэффиціентъ расхода черезъ μ, то найдемъ, что за время dt изъ сосуда выльется количество жидкости:

$$dQ = \mu . \omega_0 \sqrt{2gz\,dt} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Въ то же самое время въ сосудъ вольется количество жидкости:

$$q.dt,$$

такъ что прибыль жидкости въ сосудѣ выразится разностью

$$qdt - \mu\omega_0 \sqrt{2gz\,dt} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

Съ другой стороны, если назовемъ площадь сосуда на уровнѣ $A'B'$ черезъ ω, то прибыль жидкости можно выразить такъ:

$$\omega . dz \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

Сравнивая выраженіе (3) и (4), найдемъ:

$$\omega dz = q dt - \mu\omega_0 \sqrt{2gz}\, dt \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

Изъ этого ур—ія и можно найти время, въ теченіе котораго уровень жидкости въ сосудѣ перемѣстится изъ одного положенія въ другое.

Дѣйствительно, изъ ур—ія (5) легко найти:

$$dt = \frac{\omega}{q - \mu\omega_0 \sqrt{2gz}} dz,$$

откуда

$$t = \int_{z_1}^{z_2} \frac{\omega dz}{q - \mu\omega_0 \sqrt{2gz}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

Очевидно, что для интегрированія этого выраженія надо выразить ω въ зависимости отъ z.

Разсмотримъ нѣсколько примѣровъ.

1-й примѣръ.

Сосудъ цилиндрическій, т. ч. $\omega = const$.

Въ такомъ случаѣ ур—іе (6) даетъ:

$$t = \frac{\omega}{\mu\omega_0 \sqrt{2g}} \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{\left(\frac{q}{\mu\omega_0 \sqrt{2g}} - \sqrt{z}\right)}.$$

Положимъ для сокращенія письма

$$\frac{\omega}{\mu\omega_0\sqrt{2g}}=A$$

и

$$\frac{q}{\mu\omega_0\sqrt{2g}}=\sqrt{k};$$

тогда получимъ:

$$t=A\int_{z_1}^{z_2}\frac{dz}{\sqrt{k}-\sqrt{z}}.$$

Введемъ новое перемѣнное, полагая

$$\sqrt{k}-\sqrt{z}=y.$$

Отсюда:

$$dy=-\frac{dz}{2\sqrt{z}}$$

и

$$dz=-2(\sqrt{k}-y)dy.$$

Поэтому

$$t=-A\int_{y_1}^{y_2}\frac{2dy(\sqrt{k}-y)}{y}=-2A\left\{\sqrt{k}\int_{y_1}^{y_2}\frac{dy}{y}-\int_{y_1}^{y_2}dy\right\}=$$

$$= \Big/_{y_1}^{y_2} -2A\left\{\sqrt{k}\, lgy - y\right\}$$

или, подставляя вмѣсто y его выраженіе черезъ z, найдемъ:

$$t = \Big/_{z_1}^{z_2} -2A\left\{\sqrt{k}.lg(\sqrt{k}-\sqrt{z})-(\sqrt{k}-\sqrt{z})\right\}.$$

$-(\cancel{\sqrt{k}} - \sqrt{z} - \cancel{\sqrt{k}} + \sqrt{h}$

Полагая

$$z_1 = h$$

и

$$z_2 = z,$$

имѣемъ:

$$t = -2A\left\{\sqrt{k}\, lg\, \frac{\sqrt{k}-\sqrt{z}}{\sqrt{k}-\sqrt{h}} + (\sqrt{z}-\sqrt{h})\right\},$$

или:

$$t = 2A\left\{\sqrt{h} - \sqrt{z} - \sqrt{k}\, lg \frac{\sqrt{k}-\sqrt{z}}{\sqrt{k}-\sqrt{h}}\right\}$$

Чтобы получить окончательное выраженіе, надо подставить значеніе A и k.

Въ частномъ случаѣ, когда

$$q=0$$

и, слѣдовательно,

$$k=0,$$

найдемъ:

$$t=2A\left\{\sqrt{h}-\sqrt{z}\right\}=\frac{2\omega}{\mu\omega_0\sqrt{2g}}(\sqrt{h}-\sqrt{z})\ .\ .\ (1)$$

Чтобы опредѣлить время полнаго опорожненія сосуда, надо положить

$$z=0;$$

тогда получимъ:

$$T=\frac{2\omega}{\mu\omega_0\sqrt{2g}}\sqrt{h}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (2)$$

Ур—ія (1) и (2) можно провѣрить на опытѣ. Оказывается что форм. (1) даетъ результаты болѣе близкіе къ дѣйствительности чѣмъ форм. (2), ибо передъ концомъ истеченія надъ отверстіемъ образуется воронка, т. ч. условія истеченія будутъ совсѣмъ не таковы, какъ мы предполагали при выводѣ нашихъ формулъ.

Сравнимъ время T съ временемъ, потребнымъ для вытеканія того же количества жидкости при постоянномъ уровнѣ, стоящемъ на высотѣ h надъ отверстіемъ, равной начальной высотѣ перемѣннаго уровня.

За время T изъ сосуда при перемѣнномъ уровнѣ вытекъ объемъ жидкости$=\omega h$. Если уровень стоитъ на постоянной высотѣ, то тотъ же объемъ жидкости вытечетъ въ теченіе времени T_1, которое легко опредѣляется изъ слѣдующихъ соображеній.

За единицу времени вытекаетъ:

$$\mu\omega_0 \sqrt{2gh},$$

т. ч. объемъ ωh вытечетъ за время

$$T_1 = \frac{\omega h}{\mu\omega_0 \sqrt{2gh}} = \frac{\omega}{\mu\omega_0 \sqrt{2g}} \sqrt{h} \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Сравнивая формулу (2) съ формулой (3), найдемъ:

$$T = 2T_1,$$

т. е.

время опорожненія призматическаго сосуда вдвое болѣе времени истеченія того же количества жидкости при постоянномъ уровнѣ.

2-й примѣръ.

Коническій или пирамидальный сосудъ (чер. 39).

Пусть въ данный моментъ времени свободная поверхность находится на уровнѣ $A'B'$ на высотѣ z надъ отверстіемъ ab и въ начальный моментъ иа уровнѣ AB, на высотѣ h надъ тѣмъ же отверстіемъ. По предыдущему имѣемъ:

$$t=\int_h^z \frac{\omega dz}{q-\mu\omega_0\sqrt{2gz}}.$$

Положимъ, что

$$q=0$$

и что разстояніе вершины конуса (или пирамиды) отъ плоскости дна CD есть c.

Въ такомъ случаѣ, обозначая площадь дна черезъ ω_1, можемъ написать:

$$\frac{\omega}{\omega_1}=\frac{(c+z)^2}{c^2}$$

и

$$\omega=\frac{(c+z)^2\omega_1}{c^2}.$$

Такимъ образомъ

$$t=-\int_h^z \frac{(c+z)^2\omega_1}{c^2\mu\omega_0\sqrt{2gz}}dz=\frac{\omega_1}{\omega_0 c^2\mu\sqrt{2g}}\int_z^h (c+z)^2 z^{-1/2}dz,$$

или

$$t=\frac{\omega_1}{\omega_0 c^2\mu\sqrt{2g}}\int_z^h \left\{c^2z^{-1/2}+2cz^{1/2}+z^{3/2}\right\}dz,$$

откуда

$$t=\frac{\omega_1}{\omega_0 c^2\mu\sqrt{2g}}\Big/_{z}^{h}\left\{2c^2z^{1/2}+\frac{4}{3}cz^{3/2}+\frac{2}{5}z^{5/2}\right\}.$$

Если обозначимъ черезъ Ω площадь сѣченія AB, то найдемъ

$$\frac{\Omega}{\omega_1}=\frac{(c+h)^2}{c^2},$$

откуда

$$\frac{1}{c^2}=\frac{\Omega}{\omega_1(c+h)^2},$$

т. ч.

$$t=\frac{\Omega}{\omega_0(c+h)^2\mu\sqrt{2g}}\Big/_{z}^{h}\left\{2\,c^2\,z^{1/2}+\frac{4}{3}cz^{3/2}+\frac{2}{5}z^{5/2}\right\}.$$

Предположимъ, что отверстіе находится такъ близко отъ вершины, что величину c можно приблизительно положить равной нулю.

Вычислимъ въ этомъ предположеніи время нужное для опорожненія сосуда. Тогда получимъ:

$$T=\frac{\Omega}{\omega_0\mu\sqrt{2g}\,h^2}\frac{2}{5}h^2\sqrt{h}=\frac{2}{5}\,\frac{\Omega h}{\omega_0\mu\sqrt{2gh}}\;.\;.\;.\;(1)$$

Количество жидкости, которое вытекло изъ сосуда есть

$$\frac{\Omega h}{3},$$

при постоянной высотѣ свободной поверхности надъ отверстіемъ равной h, тоже количество вытекало бы за время:

$$T_1 = \frac{\Omega h}{3\omega_0 \mu \sqrt{2gh}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Сравнивая T_1 съ T, найдемъ:

$$\frac{T}{T_1} = \frac{6}{5} = \frac{2}{5} : \frac{1}{3}$$

и

$$T = \frac{\overset{6}{5}}{\underset{5}{6}} T_1 = 1{,}2\, T_1$$

3-й примѣръ.

Сосудъ неправильной формы (чер. 40).

Если сосудъ такой формы, что нельзя выразить аналитической зависимости между площадями его горизонтальныхъ сѣченій и высотами этихъ сѣченій надъ плоскостью отверстія, то интегрированіе можно произвести приблизительно па правилу Симпсона.

По предыдущему время пониженія уровня отъ высоты h_0 до h_n безъ притока жидкости ($q = 0$) выразится такъ:

$$t = \int_{h^n}^{h_0} \frac{\omega dz}{\mu\,\omega_0 \sqrt{2gz}} = \frac{1}{\mu\omega_0 \sqrt{2g}} \int_{h_n}^{h} \frac{\omega}{\sqrt{z}} dz$$

$\int_{h_n}^{h_0}$

Положимъ, что уровню h_0 соотвѣтствуетъ площадь Ω_0

" " " h_1 . . . . Ω_1

" " " h_n . . . . Ω_n

Тогда по правилу Симпсона

$$t = \frac{1}{\mu\omega_0 \sqrt{2g}} \frac{h_0 - h_n}{3n} \left\{ \frac{\Omega_0}{\sqrt{h_0}} + \frac{\Omega_n}{\sqrt{h_n}} + 4\left(\frac{\Omega_1}{\sqrt{h_1}} + \frac{\Omega_3}{\sqrt{h_3}} + \frac{\Omega_{n-1}}{\sqrt{h_{n-_1}}} \right) \right.$$

$$\left. + 2\left(\frac{\Omega_2}{\sqrt{h_2}} + \frac{\Omega_4}{\sqrt{h_4}} + \;.\;.\; + \frac{\Omega_{n-2}}{\sqrt{h_{n-2}}} \right) \right\}$$

При этомъ n должно быть четное число и разности

$$h_0 - h_1.$$

$$h_1 - h_2 \text{ и т. д.}$$

равны между собой.

§ 23.

Истеченіе при переменномъ уровнѣ въ жидкость.

Пусть жидкость перетекаетъ изъ сосуда *M* въ сосудъ N (фиг. 41) черезъ отверстіе *ab*, площадь сѣченія котораго обозначимъ черезъ ω_0. Предположимъ, что оба сосуда призматическіе съ площадями сѣченія Ω_1 и Ω_2.

Пусть въ моментъ начала счета разность высотъ уровней *AA* и *BB* въ сосудахъ будетъ *h* и его время $t—z$. Вслѣдъ за этимъ моментомъ въ безконечно малый промежутокъ времени *dt* изъ перваго сосуда во второй перетечетъ количество жидкости

$$dQ=\mu\omega_0\sqrt{2gz}.dt \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (1)$$

Этотъ объемъ можно выразить еще слѣдующимъ образомъ

$$dQ=-\Omega_1 dz_1=+\Omega_2 dz_2 \;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (2)$$

Откуда мы найдемъ:

$$dz_2=-\frac{\Omega_1}{\Omega_2}dz_1 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (3)$$

Понятно кромѣ того, что измѣненіе разности уровней равняется пониженію положенію уровня въ сосудѣ *M*, сложенному въ повышеніемъ уровня въ сосудѣ N т. е.

$$dz = dz_1 - dz_2 = dz_1\left(1 + \frac{\Omega_1}{\Omega_2}\right) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4)$$

Сравнивая между собою выраженія (1) и (2) и принимая вниманіе ур—іе (4), найдемъ:

$$dQ = \mu\omega_0 \sqrt{2gz}\, dt = -\Omega_1 dz_1 = -\frac{\Omega_1 dz}{1 + \frac{\Omega_1}{\Omega_2}} = -\frac{\Omega_1 \Omega_2}{\Omega_1 + \Omega_2} dz \; . \; . \; (5$$

Отсюда

$$dt = -\frac{\Omega_1 \Omega_2}{\Omega_1 + \Omega_2} . \frac{1}{\mu\omega_0 \sqrt{2g}} \frac{dz}{\sqrt{z}}$$

и

$$t = -\frac{\Omega_1 \Omega_2}{\Omega_1 + \Omega_2} \frac{1}{\mu\omega_0 \sqrt{2g}} \int_h^z z^{-1/2}\, dz = \frac{2\Omega_1\, \Omega_2}{\mu\omega_0 \sqrt{2g}} \left(\frac{\sqrt{h} - \sqrt{z}}{\Omega_1 + \Omega_2}\right) . . (6$$

Эта формула опредѣляетъ время, въ теченіе котораг разность уровней измѣнится отъ h до z.

Если положимъ, что

$$\Omega_1 = \infty,$$

т. е. что сосудъ *M* безконечно великъ по сравненію съ сосудом *N*, то изъ форм. (6) получимъ:

$$t=\frac{2\Omega_2}{\mu\omega_0\sqrt{2g}}(\sqrt{h}-\sqrt{z}) \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

Эта формула даетъ время наполненія сосуда N до уровня, который лежитъ ниже уровня сосуда *M* на высоту *z*.

Если, наоборотъ, размѣры сосуда N весьма значительны по сравненію съ размѣрами сосудъ *M*, то можво положить

$$\Omega_2=\infty \, .$$

Въ такомъ случаѣ получимъ:

$$t=\frac{2\Omega_1}{\mu\omega_0\sqrt{2g}}(\sqrt{h}-\sqrt{z}) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

Если требуется опредѣлить время, въ теченіе котораго уровни въ сосудахъ сравниваются, надо во всѣхъ предыдущпхъ формулахъ положить

$$z=0.$$

Тогда будетъ видно, что время, нужное для сравненія уровней вдвое болѣе времени истеченія того же объема при постоянной разности уровней.

§ 24.

Истеченіе изъ отверстій конечныхъ размѣровъ въ боковой стѣнкѣ сосуда.

До сихъ поръ мы разсматривали тѣ случаи истеченія изъ отверстій въ боковыхъ стѣнкахъ сосуда, когда вертикальные размѣры этихъ отверстій были настолько малы сравнительно съ напоромъ, что можно было безъ большой погрѣшности считать напоръ постояннымъ для всей площади отверстія.

Перейдемъ теперь къ изслѣдованію истеченія изъ такихъ отверстій въ боковой стѣнкѣ сосуда, вертикальными размѣрами которыхъ по сравненію съ напоромъ пренебрегать нельзя.

Положимъ, имѣемъ такое отверстіе *ab* въ плоской стѣнкѣ *AB* сосуда *M*, наклоненной къ горизонту подъ угломъ φ. (чер. 42).

Допустимъ, что уровень *AA* поддерживается на постоянной высотѣ и что истеченіе происходитъ въ воздухъ.

Обозначимъ глубину погруженія *b* черезъ h_1, глубину погруженія *a*—черезъ h_2, напоръ въ центрѣ тяжести *O* отверстія—черезъ *H*, и напоръ ~~подъ~~ надъ какимъ-нибудь элементомъ *c* отверстія черезъ *z*.

Совмѣстимъ стѣнку *AB* съ вертикальной плоскостью, вращая около линіи пересѣченія ея съ уровнемъ *AA* и отнесемъ отверстіе къ прямоугольной системѣ координатъ съ началомъ въ *O'* (ц. тяж.), при чемъ ось *O'Y'* направимъ горизонтально, а ось *O'X'*—вертикально.

Разсмотримъ истеченіе черезъ безконечно тонкую щель *cc'* взятую во всю ширину отверстія.

Если соотвѣтствующую этой щели абсциссу назовемъ черезъ x, то понятно, что

$$z = H + x\sin\varphi \quad . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

т. ч. для всѣхъ струекъ щели cc' скорость будетъ:

K

$\left(\frac{v_0^2}{2g}\right) + \frac{p_0}{\delta} + z$

$$v = \sqrt{2gz}.$$

$v = \sqrt{2g(z+K)}$

$\frac{v^2}{2g} =$

Обозначая ширину щели черезъ η, найдемъ, что ея площадь будетъ равна

$$\omega = \eta dx$$

$v = \sqrt{2gz}$

и расходъ черезъ нее

$dQ = \omega v$

$$dQ = \eta dx \sqrt{2gz} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

Но изъ соотношенія (2) легко найдемъ, что

$dz = \sin\varphi\, dx$

$$dx = \frac{dz}{\sin\varphi}$$

т. ч.

$$dQ = \frac{\eta dz}{\sin\varphi} \sqrt{2gz} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

и для всего отверстія, исправляя окончательную формулу опытнымъ коэффиціентомъ, найдемъ:

$$Q=\frac{\mu}{sin\varphi}\int_{h_1}^{h_2}\eta\sqrt{2gz}\,dz\ .\quad .\ .\ .\ .\ (4)$$

Чтобы найти значеніе интеграла, надо выразить η въ зависимости отъ z.

Разсмотримъ нѣсколько примѣровъ.

1-й примѣръ.

Прямоугольное отверстіе (чер. 42) ***въ вертикальной стѣнкѣ.***

Полагая $\eta=b$ и $\varphi=\frac{\pi}{2}$, по фор. (4) найдемъ:

$sin\varphi=1$

$$Q=\mu b\sqrt{2g}\int_{h_1}^{h_2}\sqrt{z}\,dz=\frac{2}{3}\,\mu b\,\sqrt{2g}\left\{h_2^{\,^3/_2}-h_1^{\,^3/_2}\right\}\quad .\ .\ .\ (5)$$

Выразимъ h_1 и h_2 черезъ H; если обозначимъ высоту отверстія черезъ e, то найдемъ:

$$h_1 = H - \frac{e}{2}$$

и

$$h_2 = H + \frac{e}{2}$$

Подставляя эти выраженія въ формулу (5), получимъ:

$$Q = \frac{2}{3}\mu b \sqrt{2g}\left\{\left(H + \frac{e}{2}\right)^{3/2} - \left(H - \frac{e}{2}\right)^{3/2}\right\} =$$

$$= \frac{2}{3}\mu b \sqrt{2g}\, H^{3/2}\left\{\left(1 + \frac{e}{2H}\right)^{3/2} - \left(1 - \frac{e}{2H}\right)^{3/2}\right\}$$

Если $e < 2H$, то мы можемъ выраженіе въ скобкахъ разложить по сторокѣ Ньютона; тогда получимъ:

$\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$

$$\left\{1 + \frac{3}{2}\frac{e}{2H} + \frac{3}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{e^2}{4H^2} - \frac{3}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{6}\frac{e^3}{8H^3} + \ldots\ldots -\right.$$

± ±

$$\left. -1 + \frac{3}{2}\frac{e}{2H} - \frac{3}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{e^2}{4H^2} - \frac{3}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{6}\frac{e^3}{8H^3}\right\} =$$

$$= \left\{\frac{3}{2}\frac{e}{H} - \frac{3}{2}\frac{1}{96}\frac{e^3}{H^3} + \ldots\ldots\right\}$$

Такимъ образомъ

$$Q=\mu\left(1-\frac{1}{96}\frac{e^2}{H^2}\right)b.e\sqrt{2gH}=\mu_1 b.e\sqrt{2gH} \quad . (6)$$

гдѣ

$$\mu_1=\mu\left(1-\frac{1}{96}\frac{e^2}{H^2}\right)$$

Величины коэффицiентовъ μ_1 для различныхъ отношенiй $\frac{e}{H}$ были опредѣлены изъ многочисленныхъ опытовъ Poncelet и Lesbros.

2-й примѣръ.

Круглое отверстiе радiуса R въ вертикальной стѣнкѣ (чер. 43).

Удобнѣе всего за элементъ поверхности въ данномъ случаѣ взять площадку, образованную двумя безконечно близкими окружностями радiусовъ ρ и $\rho+d\rho$. и 2 безк. близк. радиусами Если обозначимъ напоръ въ центрѣ окружности черезъ H, то напоръ въ центрѣ тяжести разсматриваемаго элемента будетъ:

$$z=H-\rho\cos\varphi$$

Скорость протекающей черезъ этотъ элементъ струи будетъ:

$$v=\sqrt{2g\,(H-\rho\cos\varphi)} = \sqrt{2gz}$$

и расходъ

$$d\,Q=\rho.d\varphi.d\rho\sqrt{2g(H-\rho\cos\varphi)}$$

Для всего отверстія, исправляя формулу опытнымъ коэффиціентомъ, найдемъ:

$$Q=\mu\int_{o}^{2\pi}\int_{o}^{R}\rho.d\rho.d\varphi\;\sqrt{2g(H-\rho\cos\varphi)}$$

Перепишемъ это выраженіе такъ:

$$Q=\mu\sqrt{2gH}\int_{o}^{2\pi}\int_{o}^{R}\rho.d\rho.d\varphi\left(1-\frac{\rho}{H}\cos\varphi\right)^{1/2}$$

Разлагая выраженіе въ скобкахъ по строкѣ Ньютона и пренебрегая степенями отношенія $\left(\frac{\rho}{H}\right)$ выше 2-хъ, получимъ:

$$Q=\mu\sqrt{2gH}\int_{o}^{2\pi}\int_{o}^{R}\rho.\,d\rho.d\varphi\left(1-\frac{1}{2}\,\frac{\rho}{H}\cos\varphi-\frac{1}{8}\,\frac{\rho^2}{H^2}\cos^2\varphi\right)$$

Интегрируемъ сначала по φ, замѣняя

$$\cos^2\varphi \quad \text{черезъ} \quad \frac{1+\cos 2\varphi}{2};$$

тогда получимъ:

$$Q=\mu\sqrt{2gH}\int_0^R \rho d\rho \int_0^{2\pi}\left(1-\frac{1}{2}\frac{\rho}{H}\cos\varphi-\frac{1}{8}\frac{\rho^2}{H^2}\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)d\varphi=$$

$$=\mu\sqrt{2gH}\int_0^R \rho d\rho\left(2\pi-\frac{1}{16}\frac{\rho^2}{H^2}2\pi\right)$$

$$\Big|_0^R \frac{\rho^2}{2} \quad \frac{2\pi R^2}{2} \quad \frac{\rho^4}{4}$$

Интегрируя теперь по ρ, найдемъ:

$$Q=\mu\sqrt{2gH}\left\{\pi R^2-\frac{1}{64}\frac{R^4}{H^2}2\pi\right\}=\mu\pi R^2\sqrt{2gH}\left(1-\frac{1}{32}\frac{R^2}{H^2}\right)$$

Полагая

$$\mu\cancel{=}\left(1-\frac{1}{32}\frac{R^2}{H^2}\right)=\mu_1,$$

окончательно найдемъ:

$$Q = \mu_1 \pi R^2 \sqrt{2gH}$$

$$Q = \mu_1 \omega \sqrt{2gH}$$

Отсюда и видимъ, что и въ данномъ случаѣ можно полагать, что напоръ для всего сѣченія постоянный и равенъ напору въ центрѣ, но только надо принимать во вниманіе, что μ_1 не остается постояннымъ при различныхъ отношеніяхъ $\frac{R}{H}$.

Многочисленные опыты съ круглыми отверстіями для опредѣленія значеній μ_1 при различныхъ отношеніяхъ $\frac{R}{H}$ были произведены Weisbach'омъ.

Замѣчаніе.

При предыдущихъ выводахъ мы пренебрегали скоростью жидкости въ сосудѣ. Но если эта скорость v_0 не такъ мала, то тогда скорость истеченія выразится такъ:

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gz} = \sqrt{}$$

$$v = \sqrt{2g\left(z + \frac{v_0^2}{2g}\right)} = \sqrt{2g(z+k)},$$

гдѣ

$$k = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Отсюда мы видимъ, что вліяніе скорости v_0 таково, какъ будто бы напоръ увеличился на высоту k, поэтому, чтобы принять вліяніе скорости во всѣхъ выведенныхъ формулахъ, надо къ высотамъ стоянія уровня прибавить всюду k.

Такъ напримѣръ, для прямоугольнаго отверстія вмѣсто формулы (5) мы имѣли бы

$$Q = \frac{2}{3}\mu b\sqrt{2}g\left\{\left(h_1+k\right)^{3/2}-\left(h_2+k\right)^{3/2}\right\}.$$

$$Q = \frac{2}{3}\mu\sqrt{2g}\left\{\left(h_2+k\right)^{3/2}-\left(h_1+k\right)^{3/2}\right.$$

Въ случаѣ истеченія въ жидкость, размѣры сѣченій не имѣютъ никакого значенія, ибо скорость истеченія зависитъ только отъ разности уровней въ двухъ сосудахъ.

§ 25.

Водосливы.

Водосливомъ называется отверстіе преимущественно прямоугольное въ верхней части стѣнки, не имѣющее, слѣдовательно, верхняго ребра (чер. 44).

Разсмотримъ сначала водосливъ въ толстой стѣнкѣ A (чер. 45), который можно назвать иначе порогомъ.

Положимъ, что резервуаръ R постоянно наполненъ жидкостью до уровня NN' и что жидкость, приходящая въ этотъ резервуаръ, переливается черезъ порогъ A и затѣмъ свободно падаетъ; при этомъ порогъ имѣетъ такую толщину, что, начиная съ сѣченія *ab*, жидкость течетъ горизонтально и параллельными струйками.

На основаніи этого предположенія достаточно точнаго для цѣлей практики, мы должны принять, что въ сѣченіи *ab* давленія слѣдуютъ законамъ гидростатики.

Разсмотримъ часть потока, заключенную между сѣченіемъ *ab* и сѣченіемъ *mn*, взятомъ на такомъ разстояніи, гдѣ поверхность жидкости еще горизонтальна, т. к. по мѣрѣ приближенія къ порогу, поверхность искривляется. Будемъ считать, что въ этомъ сѣченіи скорость очень мала.

Называя скорость какой нибудь струйки въ сѣченіи *ab* черезъ v, найдемъ, что эта скорость

$$v=\sqrt{2gz} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

будетъ одна и та же для всякой струйки этого сѣченія, такъ какъ здѣсь имѣетъ мѣсто истеченіе подъ воду.

Называя черезъ L ширину водослива, найдемъ, что расходъ будетъ:

$\omega = L(H-z)$ $\quad Q=\mu.\omega.v$

$$Q=\mu L(H-z)\sqrt{2gz} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

$Q=\mu(H-z)\sqrt{z}$

Изъ этого выраженія видно, что

$\frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{H}{2}z^{-\frac{1}{2}}-$

$$Q=0$$

[illegible]

$Hz^{-\frac{1}{2}}=3z$

при $z=0$ и при $z=H$.

$\frac{H^2}{z}=9z$

Слѣдовательно, между этими значеніями существуетъ такое значеніе для z, которое обращаетъ Q въ maximum. Опытъ показываетъ, что при указанныхъ выше условіяхъ z приблизительно и получаетъ такую величину. Чтобы найти ее, положимъ

$$\frac{dQ}{dz}=\mu L\left(\frac{1}{2}H\underset{z^{-1/2}}{Z^{-1/2}}-\sqrt{z}-\frac{1}{2}\sqrt{z}\right)\sqrt{2g}=0,$$

откуда

$$3z^{1/2}=Hz^{-1/2};$$

$$z=\frac{1}{3}H.$$

Такимъ образомъ фор. (2) приметъ видъ:

$$Q=\mu L.\frac{2}{3}H\sqrt{2g\frac{H}{3}}=\mu.\ 0{,}385.\ L.\ H\sqrt{2gH},$$

при $\mu = 0{,}90$

Разсмотримъ теперь водосливъ въ тонкой стѣнкѣ (чер. 46). Предыдущія разсужденія къ такому водосливу не приложимы. Чтобы найти расходъ черезъ такой водосливъ, надо просто приложить здѣсь формулу расхода черезъ прямоугольное отверстіе, полагая

$$h_1=0$$

и

$$h_2=H.$$

Тогда получимъ, обозначая ширину водослива черезъ L,

$$Q=\,^2/_3\mu LH\sqrt{2gH}=\mu_1\, LH\sqrt{2gH}$$

Величины коэфф. μ_1 были для различныхъ значенiй H опредѣлены Poncelet и Lesbros. Въ среднемъ можно принять

$$\mu_1=0,4.$$

Тотъ водосливъ, который мы только что разсматривали, называется *совершеннымъ*. Если порогъ лежитъ ниже уровня нижнихъ водъ, (чер. 47) то водосливъ называется *несовершеннымъ*.

По Dubuat расходъ въ этомъ случаѣ можетъ быть опредѣленъ, какъ будто бы имѣется совершенный водосливъ съ напоромъ $H-\eta$ и погруженное въ жидкость отверстiе высотою η.

Тогда

расходъ черезъ водосливъ Ab равенъ

$$\frac{2}{3}\,\mu L\,(H-\eta)\,\sqrt{2g(H-\eta)}\,,$$

расходъ черезъ отверстiе ab равенъ

$$\mu_2 L.\eta\sqrt{2g\,(H-\eta)}.$$

Полный расходъ

$$Q={}^2/_3\mu L(H-\eta)\sqrt{2g\,(H-\eta)}+\mu_2 L\eta\sqrt{2g\,(H-\eta)}$$

При выводѣ предыдущихъ формулъ мы предполагали, что скорость до водослива очень мала, т. ч. мы ею и пренебрегали.

Если же въ дѣйствительности она не очень мала, то къ напорамъ надо прибавить высоту, соотвѣтствующую этой скорости.

Положимъ, что скорость есть v_0 и

$$h_0=\frac{{v_0}^2}{2g}$$

Тогда не трудно будетъ найти, что въ этомъ случаѣ для водослива съ толстой стѣнкой будемъ имѣть:

$$Q=\mu.0,385L.(H+h_0)\sqrt{2g(H+h_0)}$$

Для совершеннаго водослива въ тонкой стѣнкѣ

$$Q = {}^2/_3\mu L\sqrt{2g}\left\{\left(H+h_0\right)^{3/2} - h_0^{3/2}\right\}$$

Для несовершеннаго водослива

$$Q = {}^2/_3\mu L\sqrt{2g}\left\{\left(H-\eta+h_0\right)^{3/2} - h_0^{3/2}\right\} + \mu_2 L\eta\sqrt{2g\left(H-\eta+h_0\right)}.$$

§ 26.

Протеканіе воды черезъ шлюзныя камеры.

Шлюзами называютъ сооруженія, при помощи которыхъ судно съ одного уровня переводится на другой.

Если рѣка мелка, то, чтобы поднять уровень воды, ее запруживаютъ въ нѣсколькихъ мѣстахъ, вслѣдствіе чего и является надобность въ сооруженіи, при помощи котораго можно было бы переводить судно съ одного уровня на другой.

Если разность уровней у плотины не велика, то устраиваютъ простой шлюзъ (чер. 48); въ противномъ случаѣ является необходимость въ устройствѣ двойного шлюза (чер. 49).

Простой шлюзъ состоитъ изъ камеры K, которая при посредствѣ двухъ воротъ можетъ быть сообщена съ верхней водой *MM* и нижней *NN*. Кромѣ того въ каждой изъ стѣнокъ камеры имѣются прямоугольныя отверстія 1 и 2 (чер. 48), шлюзы, которые могутъ быть, въ случаѣ надобности, закрыты передвигающимся въ вертикальномъ направленіи щитами.

Переводъ судна съ верхняго уровня на нижній совершается въ слѣдующемъ порядкѣ. Ворота въ стѣнкѣ *п* и шлюзъ 2 закрываютъ и открываютъ шлюзъ 1; вода перетекаетъ черезъ это отверстіе и наполняетъ камеру К до уровня верхнихъ водъ. Какъ только вода въ камерѣ К поднимется до уровня *MM*, ворота въ стѣнкѣ *т* открываютъ и судно вводятъ въ камеру. Затѣмъ ворота въ стѣнкѣ *т* и шлюзъ 1 закрываютъ и открываютъ шлюзъ 2; тогда вода переливается изъ камеры К въ нижнюю воду. Когда уровень въ камерѣ К опустится до уровня NN, открываютъ ворота въ стѣнкѣ *п* и судно выводятъ.

Не трудно будетъ понять какимъ образомъ производится обратное перемѣщеніе судна.

Двойной шлюзъ отличается отъ простого тѣмъ, что онъ имѣетъ двѣ камеры К и $К_1$ и трое воротъ въ стѣнкахъ *т*, *р* и *п*, каждая изъ которыхъ сообщается шлюзомъ 1, 2 и 3.

Въ этомъ случаѣ переводъ судна съ верхняго уровня на нижній совершается въ слѣдующемъ порядкѣ.

Открываютъ шлюзъ 1; когда камера $К_1$ наполнится до уровня *MM*, открываютъ ворота въ стѣнкѣ *т* и вводятъ судно въ камеру $К_1$. Ворота въ стѣнкѣ *т* и шлюзъ 1 закрываютъ и открываютъ шлюзъ 2; тогда вода изъ камеры $К_1$ переливается въ камеру $К_2$. Какъ только уровни воды въ камерахъ сравняются, открываютъ ворота въ стѣнкѣ *р* и шлюзъ 2 и открываютъ шлюзъ 3, вода изъ камеры $К_2$ выливается, и уровень въ ней понижается до уровня нижней воды NN. Теперь остается только открыть ворота въ стѣнкѣ *п* и вывести судно наружу.

При устройствѣ шлюзъ весьма важнымъ вопросомъ является вопросъ о ихъ пропускной способности, которая, очевидно, въ значительной мѣрѣ зависитъ отъ времени накопленія и опорожненія камеръ. Этотъ вопросъ мы можемъ разрѣшить на основаніи выведенныхъ раньше формулъ.

Опредѣлимъ сначала время наполненія и опорожненія камеры К въ простомъ шлюзѣ. Тутъ мы встрѣчаемся съ тѣмъ случаемъ, когда площадь сѣченія одного изъ сосудовъ можно считать равной безконечности по сравненію съ площадью другой (участка рѣки и камеры).

Наполненіе камеры К при открытомъ шлюзѣ 1 и закрытыхъ прочихъ отверстіяхъ (ворота и шлюзъ 2) можно раздѣлить на три періода.

Первый періодъ продолжается до тѣхъ поръ, пока въ камерѣ вода ни достигнетъ нижняго ребра отверстія, т. е. пока вода ни поднимется на высоту

$$h_2 - \frac{e}{2},$$

гдѣ

e — высота отверстія, а

h_2 — высота центра тяжести отверстія надъ уровнемъ нижнихъ водъ,

ибо, понятно, вода въ камерѣ К передъ открытіемъ шлюза 1 должна стоять на этомъ уровнѣ; этотъ періодъ представляетъ случай истеченія въ воздухъ при постоянномъ напорѣ h_1.

Затѣмъ вода будетъ подниматься выше нижняго ребра отверстія и раздѣлять отверстіе на двѣ части съ высотами

$$e - x$$

и

$$x;$$

черезъ первую часть истеченіе происходитъ подъ воду, черезъ вторую въ воздухъ. При этомъ напоръ надъ центромъ тяжести верхней части будетъ:

$$h_1 - \frac{e}{2} + \frac{x}{2}$$

и напоръ для нижней:

$$h_1 - \frac{e}{2} + x;$$

гдѣ x измѣняется отъ

$$x = e$$

до

$$x = 0.$$

когда вода достигнетъ верхняго ребра отверстія.

Въ этотъ моментъ второй періодъ заканчивается и начинается третій періодъ, представляющій истеченіе подъ перемѣннымъ уровнемъ, при чемъ разность уровней мѣняется отъ

$$h_1 - \frac{e}{2}$$

до

$$0.$$

Что касается до вычисленія временъ, соотвѣтствующихъ двумъ первымъ ~~періодамъ~~, и третьему периоду то здѣсь не встрѣчается никакихъ затрудненій, напротивъ того, подсчетъ времени ~~третьяго~~ второго періода представляетъ нѣкоторую сложность. Такъ какъ въ концѣ концовъ придется всѣ результаты исправлять опытными коэффиціентами, то задачу упрощаютъ, разсматривая только два періода.

1) Вода поднимается до центра тяжести сѣченія отверстія на высоту h_2, при чемъ считаютъ, что истеченіе происходитъ подъ постояннымъ напоромъ h_1 въ воздухъ. За этотъ періодъ въ камеру К вольется объемъ воды

$$\Omega h_2,$$

гдѣ Ω — площадь сѣченія камеры.

Секундный же расходъ, если обозначимъ черезъ ω площадь отверстія, будетъ

$$\mu\omega\sqrt{2gh_1};$$

слѣдовательно, продолжительность перваго періода есть:

$$t_1 = \frac{\Omega h_2}{\mu\omega\sqrt{2gh_1}}.$$

2) Вода поднимается отъ центра тяжести сѣченія отверстія до уровня верхнихъ водъ; этотъ періодъ разсматриваютъ какъ случай перетеканія изъ резервуара съ постояннымъ уровнемъ въ сосудъ съ перемѣннымъ уровнемъ при допущеніи, что разность высотъ измѣняется отъ

h_1

до

$0.$

Продолжительность этого періода выразится на основані предыдущаго такъ:

$$t_2 = \frac{2\Omega}{\mu\omega\sqrt{2g}}\sqrt{h_1}. = \frac{2\Omega h_1}{\mu\omega\sqrt{2gh_1}}$$

Поэтому время наполненія камеры K будетъ:

$$T = t_1 + t_2 = \frac{\Omega(h_2 + 2h_1)}{\mu\omega\sqrt{2gh_1}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

При опредѣленіи времени, въ теченіе котораго уровень вод въ камерѣ K понизится до уровня нижнихъ водъ, могутъ встрѣтиться два случая въ зависимости отъ расположенія шлюза 2 относительно горизонта нижнихъ водъ NN.

1-й случай.

Отверстіе всегда погружено въ воду (чер. 50, а).

Это будетъ случай истеченія изъ сосуда съ перемѣннымъ уровнемъ въ сосудъ съ постояннымъ уровнемъ. На основаніи пр дыдущаго время опорожненія камеры выразится такъ:

$$T_1 = \frac{2\Omega}{\mu\omega_1\sqrt{2g}}\sqrt{h} = \frac{2\Omega}{\mu\omega_1\sqrt{2g}}\sqrt{h_1 + h_2} \quad . \quad . \; . \; (2),$$

гдѣ ω_1—площадь отверстія 2.

2-й случай.

Отверстіе только частью погружено въ нижнюю воду (черт. 50,b).

Тутъ нужно различать два періода: первый продолжается пока вода въ камерѣ не опустится до верхняго ребра отверстія, при чемъ истеченіе на части e_2 происходитъ въ воздухъ и на части e_1-e_2—подъ воду подъ перемѣннымъ напоромъ; во второмъ періодѣ, когда вода въ камерѣ понизится ниже верхняго ребра отверстія, мы будемъ имѣть случай несовершеннаго водослива съ перемѣннымъ напоромъ.

Но нѣтъ основанія процессъ истеченія выражать такой формулой, ибо ее все равно придется исправлять опытнымъ коэффиціентомъ. Въ виду этого соображенія задачу упрощаютъ слѣдующимъ образомъ. Выше было показано, что время опорожненія призматическаго сосуда вдвое болѣе времени истеченія того же объема жидкости подъ постояннымъ уровнемъ. Изъ камеры К долженъ вытечь объемъ воды

$$Q = \Omega h.$$

На части e_2 отверстія истеченіе происходитъ подъ напоромъ

$$h-\frac{e_2}{2},$$

слѣдовательно, секундный расходъ черезъ эту часть будетъ:

$$\mu.be_2\sqrt{2g\left(h-\frac{e_2}{2}\right)},$$

гдѣ b—ширина отверстія.

На части $(e_1—e_2)$ скорость истеченія будет :

$$\sqrt{2gh},$$

а секундный расходъ:

$$\mu b(e_1-e_2)\sqrt{2gh}.$$

Поэтому объемъ Ωh при постоянномъ уровнѣ вытекалъ во время

$$t=\frac{\Omega h}{\mu be_2\sqrt{2g\left(h-\frac{e_2}{2}\right)}+\mu b(e_1-e_2)\sqrt{2gh}}$$

и при перемѣнномъ:

$$T_3=\frac{2\Omega\, h}{\mu be_2\sqrt{2g\left(h-\frac{e_2}{2}\right)}+\mu b(e_1-e_2)\sqrt{2gh}}\quad . \; . \quad (3)$$

Въ случаѣ двойнаго шлюза наполненіе первой камеры и опорожненіе второй не отличаются отъ наполненія и опорожненія камеры простого шлюза; поэтому намъ нужно только опредѣлить время перетеканія изъ камеры K_1 въ камеру K_2.

Въ данномъ случаѣ мы опять для упрощенія вопроса будемъ замѣнять отверстіе его центромъ тяжести и потому разобьемъ перетеканіе на два періода.

1). Вода въ камерѣ K_2 поднимается до центра тяжести отверстія 2 на высоту h_3 и соотвѣтственно падаетъ въ камерѣ K_1 съ высоты h_2 до высоты x на уровень LL.

Это будетъ случай истеченія въ воздухъ подъ перемѣннымъ уровнемъ; поэтому, называя площадь сѣченія камеры K_1 черезъ Ω_1 получимъ продолжительность этого періода

$$t_1 = \frac{2\Omega_1}{\mu\omega\sqrt{2g}}\left(\sqrt{h_2} - \sqrt{x}\right).$$

почему не переч

Высоту x можно выразить черезъ h_2 и h_3 и площади сѣченія камеръ Ω_1 и Ω_2, если сравнить объемъ, вылившійся изъ камеры K_1 съ объемомъ, влившимся въ камеру K_2. Такимъ образомъ имѣемъ:

$$\Omega_1(h_2 - x) = \Omega_2 h_3,$$

откуда

$$x = \frac{\Omega_1 h_2 - \Omega_2 h_3}{\Omega_1},$$

такъ что

$$t=\frac{2\Omega_1}{\mu\omega\sqrt{2g}}\left(\sqrt{h_2}-\sqrt{\frac{\Omega_1 h_2-\Omega_2 h_3}{\Omega_1}}\right)=$$

$$=\frac{2\sqrt{\Omega_1}}{\mu\omega\sqrt{2g}}\left(\sqrt{\Omega_1 h_2}-\sqrt{\Omega_1 h_2-\Omega_2 h_3}\right)$$

2). Вода продолжаетъ переливаться изъ камеры K_1 въ камер K_2, при чемъ разность уровней измѣняется отъ

x

до

0;

это будетъ случай истеченія подъ воду при перемѣнныхъ уро няхъ въ обоихъ сосудахъ.

По предыдущему:

$$t_2=\frac{2\Omega_1\,\Omega_2}{\Omega_1+\Omega_2}\cdot\frac{1}{\mu\omega\sqrt{2g}}\sqrt{x}=\frac{2\Omega_1\,\Omega_2}{\Omega_1+\Omega_2}\cdot\frac{1}{\mu\omega\sqrt{2g}}\sqrt{\frac{\Omega_1 h_2-\Omega_2 h_3}{\Omega_1}}$$

Полное время, въ теченіе котораго уровни въ обѣихъ ка мерахъ сравняются, будетъ:

$$t_1 = t_1 + t_2 = \frac{2\sqrt{\Omega_1}}{\mu\omega\sqrt{2g}} \left\{ \sqrt{\Omega_1 h_2} - \frac{\Omega_1}{\Omega_1 + \Omega_2} \sqrt{\Omega_1 h_2 - \Omega_2 h_3} \right\} \quad . \quad . \ (4)$$

Вычислимъ теперь высоту h'_1, на которую понизится окончательно уровень въ камерѣ K_1.

Очевидно:

$$\Omega_1 h_1' = \Omega_2 (h_2 + h_3 - h_1'),$$

откуда

$$h_1' = \frac{\Omega_2 (h_2 + h_3)}{\Omega_1 + \Omega_2}$$

Если h_1' окажется меньше h_1, то тогда при вычисленіи времени наполненія камеры K_1 придется принять во вниманіе только второй періодъ.

Коэффиціенты μ во всѣхъ этихъ формулахъ можно брать изъ таблицы Poncelet для прямоугольныхъ отверстій. Лучше же полагать

$$\mu = 0{,}6,$$

т. е. нѣсколько меньше истинной величины, чтобы сознательно дѣлать нѣкоторую ошибку въ худшую сторону.

§ 27.

Разсчетъ отверстія трубы.

Теченіе воды черезъ каменную трубу (чер. 51) подобно т ченію черезъ водосливъ въ толстой стѣнкѣ. На чертежѣ *MM* представляетъ продольный разрѣзъ естественнаго дна потока д устройства насыпи и NN_0NN_1—продольный профиль потока посл устройства трубы.

Обозначимъ черезъ

H . . . . глубину потока,

v . . . . его скорость,

V . . . . скорость теченія въ трубѣ,

z . . . . паденіе,

b . . . . ширину или отверстіе трубы

Хотя дно ложка криволинейно, но кривизна его настолько мала, что можно разсматривать сѣченіе трубы, какъ прямоугольникъ.

Мы вывели слѣдующую формулу для такого водослива:

$$Q = \mu .0385.b(H+h_0)\sqrt{2g(H+h_0)} \quad . \; . \; . \; (1),$$

гдѣ

h_0—высота, соотвѣтствующая скорости v,

т. е.

$$h_0 = \frac{v^2}{2g};$$

при этомъ допускалось, что

$$z = \text{прибл. } \frac{H + h_0}{3}$$

и

$$V = \sqrt{2g\left(\frac{H+h_0}{3}\right)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Преобразуемъ формулу (1) слѣдующимъ образомъ. Умножимъ и раздѣлимъ вторую часть на

$$2g$$

и

$$3\sqrt{3};$$

тогда найдемъ:

$$Q = \frac{\mu.0{,}385.b.V^3.3\sqrt{3}}{2g},$$

откуда

$$b = \frac{2g\,Q}{\mu.0{,}385.V^3 3\sqrt{3}}$$

Если выразить $2g$ въ футахъ, то можно написать:

$$b = \frac{35{,}4.Q}{V^3} \text{ фут. . . . . . } (3)$$

при этомъ принимается

μ прибл. $=0{,}90$.

Въ этой формулѣ намъ неизвѣстно только b, такъ что его и можно было бы отсюда вычислить. Но дѣло въ томъ, что скорость въ трубѣ не должна превосходить

16 фут. = 2, 285 саж.

Поэтому разсчетъ ведется въ такомъ порядкѣ.

Подставляютъ вмѣсто V

2, 285 саж.

рах. Q также долженъ быть выраженъ при этомъ въ куб. саж.) и опредѣляютъ b; затѣмъ b округляютъ въ большую сторону и подсчитываютъ по нему V.

Послѣ этого изъ формулы 2 мы можемъ найти H; получимъ:

$$H=(0{,}04658\,V^2-h_0)\text{ фут. . . . . (4)}$$

Если это H не разнится значительно отъ дѣйствительности, то разсчетъ можно считать поконченнымъ.

Если H изъ форм. (4) получится значительно больше истиннаго, тогда, слѣдовательно, подсчетъ можно начинать съ формулы (2), ибо тогда мы получимъ скорость меньше предѣльной.

Впрочемъ можно довольствоваться и полученными результатами, если допустить, что передъ трубой образовался подъемъ воды, или подпоръ, какъ принято говорить.

Если же H изъ форм. (4) получится значительно меньше дѣйствительнаго, то въ такомъ случаѣ придется расширять русло, или отказаться отъ трубы и замѣнить ее другимъ сооруженіемъ.

Разъ V и b установлены, надо подсчитать высоту слоя воды въ трубѣ. Эта высота η по предыдущему равна

$$\frac{2}{3}\,(H+h_0).$$

Изъ форм. (2) найдемъ:

$$\frac{V^2}{g}=\frac{2}{3}(H+h_0)=\eta.$$

Но часто ее считаютъ

$$\text{прибл.} = \frac{2}{3}H_0;$$

тогда

$$\eta=\left(0{,}03105\,V^2-\frac{2}{3}h_0\right)\text{фут.}$$

Высота устоевъ h (чер. 51) должна быть не менѣе η.

§ 28.

Разсчетъ отверстія моста.

Пусть глубина рѣки, гдѣ строится мостъ, есть a. Такъ какъ сѣченіе рѣки не прямоугольное, то a надо считать высотой прямоугольника, равновеликаго площади сѣченія рѣки. Обыкновенно ширина настолько бываетъ больше глубины, что такая замѣна не поведетъ къ большой неточности.

Обозначимъ среднюю скорость теченія черезъ v (о томъ, что надо разумѣть подъ средней скоростью, мы будемъ говорить дальше).

Такъ какъ мостъ значительно стѣсняетъ сѣченіе рѣки, то средняя скорость подъ мостомъ v_0 будетъ всегда больше v. Наблюденія показываютъ однако, что за мостомъ, ниже по теченію и подъ мостомъ не образуется никакого измѣненія въ глубинѣ, такъ что и послѣ постройки моста, глубина рѣки остается та же самая. Но если при той же глубинѣ скорость подъ мостомъ будетъ больше нормальной, то естественно предположить, что она возрастаетъ насчетъ поднятія воды передъ мостомъ, т. е. что передъ мостомъ образуется подпоръ высотою h. Слѣдовательно, получается то, что изображено на чертежѣ (чер. 52).

Величину подпора мы получимъ по теоремѣ Д. Бернулли, примѣняя ее къ сѣченіямъ cd и ef, при чемъ будемъ приблизительно допускать, что въ сѣченіи cd скорость будетъ равна v, такъ какъ въ большинствѣ случаевъ подпоръ не бываетъ значителенъ.

Такимъ образомъ, считая дно на этомъ протяженіи горизонтальнымъ, мы найдемъ:

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\Delta} + z = \frac{{v_0}^2}{2g} + \frac{p_0}{\Delta} + z_0.$$

Но

$p = p_a + \Delta h$, гдѣ $h =$

$$p = p_a + \overset{h}{\left(\frac{cd}{2}\right)} \Delta$$

и

$$p_0 = p_a + \frac{ef}{2} \Delta,$$

гдѣ

p_a—давленіе атмосферы,

а

$$z = \frac{cd}{2} \quad \text{и} \quad z_0 = \frac{ef}{2}.$$

Совершая подстановку, получимъ:

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{p_a}{\Delta} + cd = \frac{{v_0}^2}{2g} + \frac{p_a}{\Delta} + ef,$$

откуда

$$cd - ef = h = \frac{{v_0}^2}{2g} - \frac{v^2}{2g}.$$

Величину скорости v_0 выбираютъ, соображаясь, во-первыхъ, съ грунтомъ, такъ какъ скорость не должна быть настолько велика, чтобы вода могла подмывать устои и быки, и, во-вторыхъ, съ условіемъ пользованія рѣкой. Если рѣка судоходна, то при большой скорости ни одно судно не будетъ въ состояніи подняться подъ мостомъ.

Разъ величина подпора h установлена и разъ извѣстна высота h_0, соотвѣствующая скорости v, то отверстіе моста подсчитать уже легко.

Считаютъ, что данный случай подходитъ къ случаю несовершеннаго водослива; тогда, обозначая расходъ черезъ Q, найдемъ:

$$Q = \sqrt{2g}.\,\mu \left\{ \frac{2}{3}\left[\left(h+h_0\right)^{3/2} - h_0^{3/2} \right] + a\left(h+h_0\right)^{1/2} \right\} l,$$

откуда

$$l = \frac{Q}{\mu\sqrt{2g}\left\{ \frac{2}{3}\left[\left(h+h_0\right)^{3/2} - h_0^{3/2} \right] + a\left(h+h_0\right)^{1/2} \right\}} \quad . \; . \; . \; (1),$$

гдѣ принимаютъ

$$\mu = 0{,}95,$$

если устои и быки срѣзаны остріемъ противъ теченія, и

$$\mu = 0{,}85,$$

если они не заострены;

въ среднемъ можно принять

$$\mu=0,90.$$

Если имѣется нѣсколько пролетовъ, то l должно обозначать сумму ширинъ всѣхъ пролетовъ. Но можно также, задавшись пролетомъ, опредѣлить по форм. (1) число ихъ.

Надо замѣтить, что сравненіе даннаго случая съ несовершеннымъ водосливомъ представляется мало основательнымъ; поэтому часто подсчитываютъ пролетъ моста слѣдующимъ образомъ.

Выше мы нашли, что

$$v_0=\sqrt{2g(h+h_0)};$$

скорость
подъ мостомъ

поэтому, обозначая разстояніе между устоями черезъ l, найдемъ:

$$Q=\mu al\sqrt{2g\,(h+h_0)}\ ,$$

откуда

$$l=\frac{Q}{\mu.a\left[2g\,(h+h_0)\right]^{1/2}}$$

Здѣсь также въ среднемъ можно принимать

$$\mu = 0,90.$$

§ 29.

Нѣкоторыя замѣчанія по поводу сжатія струи.

Мы говорили, что когда струя воды вытекаетъ изъ отверстія, то она сжимается, при чемъ сжатіе достигаетъ наибольшей величины на нѣкоторомъ разстояніи отъ отверстія. Вѣроятная причина сжатія заключается въ томъ, что струйки притекаютъ къ отверстію по всевозможнымъ направленіямъ, а затѣмъ должны измѣнить свое направленіе въ направленіе нормальное къ отверстію, вслѣдствіе чего внѣшнія струйки реагируютъ на внутреннія, давленіе внутри струи будетъ больше атмосфернаго и скорость внутреннихъ струекъ будетъ меньше

$$\sqrt{2gh}.$$

По мѣрѣ же выпрямленія струекъ давленіе падаетъ, скорость внутреннихъ струекъ увеличивается и онѣ утоняются.

Если поэтому мы какимъ-нибудь образомъ воспрепятствуемъ свободному притеканію жидкости къ отверстію, то мы должны получить меньшее сжатіе. Это предположеніе оправдалось на опытѣ.

Воспрепятствовать свободному притеканію жидкости къ отверстію мы можемъ двумя различными способами.

Первый случай мы будемъ имѣть, когда будемъ охватывать отверстіе въ тонкой стѣнкѣ другими стѣнками въ направленіи струи съ одной или нѣсколькихъ сторонъ.

Пусть въ днѣ сосуда сдѣланы 4 одинаковыхъ отверсті (a, b, c и d). Тогда понятно, въ отверстіи a сжатіе будетъ полное со всѣхъ черырехъ сторонъ, въ отверстіи b сжатіе будетъ только съ трехъ сторонъ, въ отверстіи c—съ двухъ и наконецъ, въ отверстіи d—съ одной (чер. 53).

Если сжатіе устранено такимъ способомъ на части периметра отверстія, его называютъ *неполнымъ сжатіемъ*.

Понятно, что при этомъ повышается и коэфф. расхода для того же отверстія. Если обозначимъ черезъ n отношеніе той части периметра отверстія, на которой устранено сжатіе, къ полному периметру, то по опытамъ Weisbach'а и Bidoue'а, коэфф. расхода μ_n при неполномъ сжатіи находится въ слѣдующемъ отношеніи къ коэфф. расхода μ при полномъ сжатіи для того же отверстія и при тѣхъ же условіяхъ:

$$\mu_n=\mu(1+0,145\ n.)$$

Здѣсь кстати будетъ замѣтить, что неполное сжатіе при нѣкоторыхъ условіяхъ сопровождается отклоненіемъ всей струи

Если, напримѣръ, отверстіе сдѣлано въ боковой стѣнкѣ сосуда и доходитъ до дна (чер. 54), то сжатіе устраняется съ нижней стороны; при этомъ оказывается, что въ моментъ выхода струи изъ отверстія ея направленіе будетъ не горизонтальное, а наклонное къ горизонту внизъ подъ угломъ, приблизительно равнымъ 9^0.

Если устранимъ сжатіе съ двухъ смежныхъ сторонъ, то струя отклоняется еще болѣе, если же устранимъ сжатіе съ двухъ противоположныхъ сторонъ, то не будемъ наблюдать никакого отклоненія.

Сжатіе будетъ также значительно уменьшено, если площадь отверстія *ab* (чер. 55) не будетъ очень мала по отношенію къ площади сѣченія самого сосуда. Въ такомъ случаѣ крайнія струйки не будутъ успѣвать принимать направленіе стѣнокъ *ca* и *db* и, слѣдовательно, будутъ притекать къ отверстію подъ довольно значительнымъ угломъ. На основаніи изложенныхъ выше соображеній можно прійти къ заключенію, что сжатіе въ данномъ случаѣ будетъ меньше, чѣмъ если бы протяженіе стѣнокъ *ca* и *bd* было значительнѣе.

Сжатіе въ этомъ случаѣ называется ***несовершеннымъ***.

Коэфф. расхода μ_n, понятно, въ случаѣ несовершеннаго сжатія для того же отверстія и при прочихъ равныхъ условіяхъ будетъ больше, чѣмъ тотъ же коэфф. μ при полномъ сжатіи.

На основаніи своихъ опытовъ Weisbach установилъ слѣдующую зависимость между этими двумя коэффиціентами:

$$\mu_n = (1+l)\mu,$$

гдѣ l обозначаетъ слѣдующее:

если отношеніе площади отверстія къ площади сѣченія сосуда обозначимъ черезъ n, то

для прямоугольнаго отверстія

$$l = 0,076(9^n - 1),$$

для круглаго

$$l = 0,4564(14,821^n - 1).$$

Глава третья.

Движеніе воды въ трубахъ, каналахъ и рѣкахъ.

§ 30.

Сопротивленія движенію.

Разсматривая различныя теченія жидкости, мы до сихъ поръ совершенно не обращали вниманія на тѣ сопротивленія, которыя жидкость встрѣчаетъ при своемъ движеніи.

Какъ мы видѣли, полученные результаты теоретическихъ изслѣдованій не очень далеко отклонялись отъ данныхъ опыта. Это можно объяснить главнымъ образомъ тѣмъ, что мы примѣняли, во-первыхъ, эти выводы къ жидкостямъ близкимъ къ совершеннымъ (вода) и, во-вторыхъ, въ разсмотрѣнныхъ теченіяхъ нигдѣ жидкость не приходитъ на болѣе или менѣе значительномъ протяженіи въ соприкосновеніе со стѣнками.

Если мы будемъ разсматривать какое-нибудь теченіе жидкости вязкой, при которомъ къ тому же она приходитъ въ соприкосновеніе на значительномъ протяженіи съ твердыми стѣнками, то должны будемъ необходимо принять во вниманіе сопротивленіе, которое обусловливается твердыми стѣнками; въ противномъ случаѣ мы получили бы результаты, не согласующіеся съ тѣмъ, что имѣетъ мѣсто въ дѣйствительности.

Относительно сопротивленія, которое обусловливается вязкостью жидкости, дѣлаютъ такое допущеніе:

если два слоя жидкости движутся одинъ относительно другого, то между ними развивается треніе, которое пропорціонально относительной скорости и поверхности соприкосновенія слоевъ.

Слѣдовательно, обозначая относительную скорость черезъ dv и поверхность соприкосновенія черезъ s,

найдемъ, что сила тренія F будетъ:

$$F = c.s.\,dv,$$

гдѣ

c — коэффиціентъ, зависящій отъ свойствъ жидкости.

Скорость v каждаго слоя можно считать функціей разстоянія отъ нѣкотораго неподвижнаго слоя. Если мы обозначимъ это разстояніе черезъ x, то найдемъ что

$v = f(x)$

$\partial v = \frac{\partial f}{\partial x}\partial x = \frac{\partial v}{\partial x}\partial x$

$$dv = \frac{dv}{dx}\,dx$$

и

$$F=c.s.\ \frac{dv}{dx}.\ dx=\eta\ s.\frac{dv}{dx}$$

гдѣ

$$\eta=c.dx.$$

Разсмотримъ въ этихъ предположеніяхъ движеніе жидкости по горизонтальной капиллярной трубкѣ подъ дѣйствіемъ только разности давленій на двухъ ея концахъ.

Въ виду капиллярности трубки можно допустить, что всѣ струйки движутся параллельно оси. Далѣе, по предположенію Навье, жидкость въ такой трубкѣ раздѣляется на концентрическіе слои, каждый изъ которыхъ движется съ постоянной скоростью, перемѣнной отъ слоя къ слою и убывающей отъ центра къ периферіи; при этомъ вліяніе стѣнокъ трубки сказывается тѣмъ что скорость слоя, непосредственно прилегающаго къ нимъ, равна нулю. Если это такъ, то каждый слой подверженъ тренію съ двухъ сторонъ, при чемъ съ внутренней стороны треніе стремится увеличить скорость, а съ наружной уменьшить. Если движеніе слоя равномѣрное, то между треніемъ и давленіемъ должно существовать равновѣсіе.

Разсмотримъ элементъ трубки dl и въ немъ слой толщиной $d\rho$ съ внутреннимъ радіусомъ ρ.

Если обозначимъ давленіе на концѣ A через

$$p.$$

то должны будемъ давленіе на концѣ *B* обозначить черезъ

$p = f(l)$ $p =$

$p + \partial p \ldots = p + \frac{\partial p}{\partial l}$

$$p + \frac{dp}{dl}\,dl,$$

ибо производная отъ *p* по *l* отрицательна, а мы интересуемся только абсолютной величиной давленія.

Если, далѣе, обозначимъ относительную скорость нашего слоя по отношенію къ внутреннему черезъ

$$dv,$$

то должны будемъ обозначить относительную скорость слоя, наружнаго по отношенію къ разсматриваемому, черезъ

$\partial v + \partial(\partial v) =$

$$dv + dv^{2},$$

т. е. предположить, что это вторая скорость будетъ больше первой, ибо соотвѣтствующая сила тренія должна уравновѣшивать и давленіе и силу тренія на внутреннемъ слоѣ.

Такимъ образомъ на нашъ слой будутъ дѣйствовать слѣдующія силы:

1) сила ускоряющая—давленіе, равная

$$2\pi\rho d\rho\left(p-p-\frac{dp}{dl}dl\right)=-2\pi\rho\frac{dp}{dl}dld\rho$$

2) сила ускоряющая—тренiе съ внутренней стороны, равная

$$-\eta 2\pi\rho . dl\frac{dv}{d\rho}$$

$T=\eta\, 2\varsigma\frac{\partial v}{\partial\varsigma}$

(Мы имѣемъ знакъ—потому, что производная $\frac{dv}{d\rho}$ будетъ имѣть такой знакъ, а намъ интересно знать абсолютную величину силы).

3) сила замедляющая—тренiе на внѣшней поверхности, равная

$$+\eta . 2\pi(\rho+d\rho)dl\left(\frac{dv}{d\rho}+\frac{d^2v}{d\rho^2}d\rho\right).$$

$\frac{\partial\left(\frac{\partial v}{\partial\varsigma}\right)}{\partial\varsigma}$

Сумма всѣхъ этихъ силъ должна быть равна нулю, т. ч.

$$2\pi\rho\frac{dp}{dl}dld\rho=\eta . 2\pi\left\{(\rho+d\rho)dl\left(\frac{dv}{d\rho}+\frac{d^2v}{d\rho^2}d\rho\right)-\rho dl\frac{dv}{d\rho}\right\};$$

отсюда по приведенiи и сокращенiи найдемъ:

$$\eta .\left\{\rho\frac{d^2v}{d\rho^2}+\frac{dv}{d\rho}+\frac{d^2v}{d\rho^2}d\rho\right\}=\rho\frac{dp}{dl}.$$

или, пренебрегая безконечно малой величиной

$$\frac{d^2v}{d\rho^2}\,d\rho$$

по сравненію съ величинами кенечными, найдемъ:

$$\frac{dp}{dl}=\eta\left(\frac{d^2v}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\,\frac{dv}{d\rho}\right)\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\quad(1)$$

Такъ какъ движеніе равномѣрное, то вторая и первая производныя отъ v по ρ не зависятъ отъ l и p. Отсюда слѣдуетъ, что p есть линейная функція отъ l, т. е.

$$p=al+b$$

Пусть

при $l=0$ . . . . $p=p_0$,
„ $l=L$ . . . . $p=p_1$;

тогда имѣемъ:

$$p_0=b$$

и

$$a=\frac{p_1-p_0}{L}=-\frac{p_0-p_1}{L}=-\frac{P}{L}\cancel{l},$$

гдѣ

$$P=p_0-p_1,$$

такъ что

$$p=-\frac{P}{L}l+p_0 \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (2)$$

Отсюда, взявъ производную по l, получимъ:

$$\frac{dp}{dl}=-\frac{P}{L}$$

Подставляя это выраженіе въ ур—іе (1), найдемъ:

$$-\frac{P}{L}\frac{\rho}{\eta}=\frac{dv}{d\rho}+\rho\frac{d^2v}{d\rho^2} \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (3)$$

Умножая обѣ части этого ур—ія на $d\rho$, найдемъ:

$$-\frac{P}{L}\frac{\rho}{\eta}d\rho=d\rho\,\frac{dv}{d\rho}+\rho.d\rho\,\frac{d^2v}{d\rho^2}=d\left(\rho\,\frac{dv}{d\rho}\right),$$

откуда по интеграціи получимъ:

$$\rho \frac{dv}{d\rho} = \beta - \frac{P}{2L} \frac{\rho^2}{\eta}.$$

Т. к. $\frac{dv}{d\rho}$ всюду имѣетъ конечное значеніе, то

при $\rho=0$ и $\beta=0$.

Такимъ образомъ имѣемъ:

$$\frac{dv}{d\rho} = -\frac{P}{2L} \frac{\rho}{\eta}$$

Умножая обѣ части послѣдняго ур—ія на $d\rho$ и интегрируя, получимъ:

$$v = \alpha - \frac{P}{4\eta . L} \rho^2$$

Если мы положимъ $\rho=r$, то найдемъ скорость слоя у стѣнки; такъ какъ по предположенію она равна нулю, то отсюда

$$\alpha = \frac{P}{4\eta} \frac{r^2}{\rho}$$

и

$$v = \frac{P}{4\eta L}(r^2 - \rho^2) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4)$$

Отсюда видно, что скорость во всякомъ нормальномъ сѣченіи измѣняется по закону параболы.

Найдемъ теперь расходъ жидкости.

Расходъ одного слоя равенъ

$$2\pi\rho . d\rho . \frac{P}{4\eta L}(r^2 - \rho^2),$$

поэтому расходъ черезъ все сѣченіе будетъ:

$$\frac{2r^4}{4} - \frac{r^4}{4}$$

$$Q = \frac{2\pi P}{4\eta L}\int_o^r \rho(r^2 - \rho^2)d\rho = \frac{\pi P}{8\eta L} r^4,$$

или, обозначая черезъ *d* діаметръ трубки, найдемъ:

$$Q = \frac{\pi P}{128\eta L} d^4 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (5)$$

Пуазейль опытнымъ путемъ нашелъ, что расходъ черезъ волосную трубку выражается такъ:

$$Q{=}k.\frac{P}{L}d^4 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

Мы видѣли, что формулы (5) и (6) совершенно тождественны, чѣмъ и подтверждается справедливость сдѣланныхъ допущеній. Нужно замѣтить, что та же самая формула (5) оказывается справедливой для трубокъ наклонныхъ и вертикальныхъ; отсюда слѣдуетъ, что при движеніи въ капиллярной трубкѣ сила тяжести оказывается совершенно ничтожной по сравненію съ другими силами.

Оказывается, что вода, поставленная въ такія условія, проявляетъ значительную вязкость. Такъ Пуазейль нашелъ, что для воды

$$Q = 183{,}783\,\frac{P}{L}D^4$$

$k = 183{,}783$

гдѣ D и L выражены въ метрахъ а P въ $kl.$ на 1 кв. метръ.

Сравнивая эту форм. съ формулой (5), найдемъ, что

$$\eta{=}0{,}0001336$$

Разсмотримъ теперь движеніе въ полукругломъ открытомъ каналѣ, наклоненномъ къ горизонту подъ угломъ α, дѣлая тѣ же допущенія, что и въ предыдущемъ случаѣ.

Такъ какъ мы допускаемъ, что всѣ слои движутся || оси, то должны считать вмѣстѣ съ тѣмъ, что давленіе въ любомъ нормальномъ сѣченіи слѣдуетъ законамъ гидростатики. Очевидно, поэтому, что сумма всѣхъ давленій на сѣченіе какого либо сло въ любомъ мѣстѣ открытаго канала будетъ величиной постоянно Вслѣдствіе этого въ данномъ случаѣ движеніе будетъ обусловли ваться только силой тяжести и силами тренія.

Составляющія силы тяжести по оси для слоя толщиной $d\rho$, съ внутреннимъ радіусамъ ρ и длиной dl будетъ:

v

$$\Delta.\pi.\rho.d\rho.dl\sin\alpha$$

Слѣдовательно, по предыдущему мы будемъ имѣть слѣдую щее равенство:

$$-\eta.\cancel{\pi}\left\{(\rho+d\rho)\cancel{dl}\left(\frac{dv}{d\rho}+\frac{d^2v}{d\rho^2}d\rho\right)-\rho\cancel{dl}\frac{dv}{d\rho}\right\}=\cancel{\pi}.\rho\Delta.d\rho.\cancel{dl}.\sin\alpha.$$

откуда по сокращеніи и приведеніи найдемъ:

$$\left(\rho\frac{d^2v}{d\rho^2}+\frac{dv}{d\rho}\right)=\frac{-\Delta\sin\alpha.\rho}{\eta}\quad.\ .\ .\ .\ .\ (1)$$

Умножая все ур—іе (1) на $d\rho$, получимъ:

$$\frac{-\Delta\sin\alpha\rho.d\rho}{\eta}=\left(\rho\frac{d^2v}{d\rho^2}d\rho+\frac{dv}{d\rho}d\rho\right)=d\left(\rho\frac{dv}{d\rho}\right)$$

Интегрируя это ур—іе, найдемъ:

$$-\frac{\Delta.sin\alpha\rho^2}{2\eta}=\rho\frac{dv}{d\rho}+\alpha.$$

Если положимъ

$$\rho=0,$$

найдемъ, что

$$\alpha=0,$$

ч. имѣемъ:

$$-\frac{\Delta.sin\alpha\rho}{2\eta}=\frac{dv}{d\rho}$$

Умножая обѣ части этого ур—ія на $d\rho$ и интегрируя, найдемъ

$$-\frac{\Delta.sin\alpha.\rho^2}{4\eta}=v+\beta$$

Полагая

$$\left|\begin{array}{l} v=0 \\ \rho=r, \end{array}\right.$$

найдемъ, что

$$\beta = -\frac{\Delta sin\alpha . r^2}{4\eta},$$

т. к. по предположенію скорость слоя у стѣнки есть нулъ.

Такимъ образомъ имѣемъ:

$$v = \frac{\Delta . sin\alpha}{4\eta}(r^2 - \rho^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Примѣнимъ эту формулу къ движенію воды въ каналѣ радіуса въ 1 метръ при

$$sin\alpha = 0{,}0001.$$

Припоминая, что для воды

$$\eta = 0{,}0001336,$$

найдемъ, что скорость центральной струйки будетъ:

$$v_0 = \frac{1000.0{,}0001}{4.0{,}0001336} = 187{,}2 \text{ mtr.}$$

Такова, слѣдовательно, должна быть скорость центральной струйки для того, чтобы треніе внутреннее и внѣшнее могло уровновѣситься съ силою тяжести. Если бы мы произвели непосредственныя измѣренія этой скорости при помощи простого полавка, то нашли бы, что при данныхъ размѣрахъ канала и данномъ уклонѣ скорость средней струйки значительно меньше полученной. Такое несогласіе теоріи съ опытомъ показываетъ, что при конечныхъ размѣрахъ сѣченія русла, по которому движется вода, вліяніе стѣнокъ проявляется совершенно не такъ, какъ въ капиллярныхъ трубкахъ. Надо предположить, что частицы воды, ударяясь о малѣйшіе выступы шероховатой стѣнки, измѣняютъ значительно направленіе своего движенія, переходятъ, образуя вихри, въ массу жидкости и нарушаютъ правильность движенія другихъ частицъ. Вслѣдствіе быстрыхъ и частыхъ измѣненій въ направленіяхъ своего движенія, частицы жидкости соударяются между собою, на что затрачивается значительное количество энергіи, далеко превосходящее сопротивленіе отъ сцѣпленія. Но надо замѣтить, что по мѣрѣ уменьшенія размѣровъ поперечнаго сѣченія русла, это сопротивленіе уменьшается и обращается въ нуль въ волосныхъ трубкахъ, не позволяющихъ частицамъ уклоняться отъ движенія, параллельнаго стѣнкамъ.

Слѣдовательно, сопротивленіе, возникающее при движеніи воды въ трубахъ, каналахъ и рѣкахъ нужно приписывать не сцѣпленію или вязкости, а скорѣе малой величинѣ вязкости и чрезвычайной удобоподвижности частицъ воды. Такой взглядъ на причину возникновенія сопротивленій при движеніи воды въ руслѣ значительныхъ размѣровъ былъ впервые высказанъ Бусинескомъ и подтверждается нѣкоторыми прямымы опытами, о которыхъ будемъ говорить дальше.

§ 31.

Движеніе воды въ трубахъ.

Если мы будемъ придерживаться воззрѣній Бусинеска на характеръ движенія воды въ трубахъ, до должны совершенно отказаться отъ всякой попытки опредѣлить путемъ теоретическихъ соображеній дѣйствительное движеніе каждой частицы жидкости, отдѣльно взятой, такъ какъ это движеніе зависитъ отъ множества случайныхъ обстоятельствъ.

Но оказывается возможнымъ дѣйствительное и очень сложное движеніе воды въ трубахъ замѣнить нѣкоторымъ воображаемымъ, среднимъ, въ предположеніи, что всѣ частицы движутся параллельно оси съ одинаковой средней скоростью, которая опредѣляется отношеніемъ расхода къ площади поперечнаго сѣченія трубы. Многочисленныя примѣненія на такихъ допущеніяхъ посторонних̆ формулъ въ различныхъ случаяхъ практики показываютъ. что эти формулы приводятъ къ довольно точнымъ результатамъ.

Изслѣдую обстоятельства такого воображаемаго движенія, мы будемъ пользоваться ур—іемъ Д. Бернулли, но только исправленнаго введеніемъ члена, зависящаго отъ сопротивленія.

Такъ какъ сопротивленіе производитъ отрицательную работу, то эта работа должна быть введена въ сумму работъ внѣшнихъ силъ со знакокъ (—). Мы видѣли, что ур—іе Бернулли представляетъ сумму высотъ, поэтому и работу сопротиленія мы должны отнести къ 1 *klgr.* воды, выражая такимъ образомъ эту высоту, падая съ которой 1 *klgr.* воды производитъ ту же работу, что и работа сопротивленій.

Если мы обозначимъ высоту сопротивленія черезъ η, то должны будемъ написать ур—іе Д. Бернулли въ такомъ видѣ:

$$\frac{p_1}{\Delta} + \frac{{v_1}^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\Delta} + \frac{{v_2}^2}{2g} + z_2 + \eta$$

гдѣ p_1, v_1 и z_1, суть давленіе, скорость и высота центра тяжести начальнаго сѣченія *AA* (чер. 56) надъ принятымъ горизонтомъ, p_2, v_2 и z_2—тѣ же величины для сѣченія BB и, наконецъ, η высота гидравлическаго сопротивленія на протяженіи того же участка.

Кромѣ того сопротивленія, о которомъ мы говорили выше, намъ придется принимать во вниманіе еще особыя сопротивленія, зависящія отъ специальнаго измѣненія величины и направленія скорости. Какъ увидимъ дальше, высоту η можно будетъ всегда представить въ видѣ доли высоты, соотвѣтствующей скорости послѣдняго сѣченія, т. е. въ видѣ:

$$\eta = \zeta \frac{v_2^2}{2g}$$

Разсмотримъ сначала, какимъ образомъ опредѣляется первое сопротивленіе; при чемъ мы для простоты будемъ называть его просто треніемъ.

Изъ многочисленныхъ опытовъ выяснилось, что треніе

1) не зависитъ отъ давленія,

2) прямо пропорціонально поверхности соприкосновенія и

3) есть нѣкоторая функція скорости.

Такимъ образомъ для части трубы цилиндрической или призматической, съ периметромъ O и длиной L (чер. 57), сила тренія выразится такъ:

$$\rho = O.L\varphi(v).$$

Работа этого тренія за безконечно малый промежутокъ времени dt будетъ:

$$R = \varphi(v).O.L.v.dt.$$

Если назовемъ площадь сѣченія трубы черезъ Ω, то за безконечно малое время dt черезъ трубу протечетъ вѣсъ жидкости, равный

$$\Delta Q vt$$

$$\Delta.\Omega.v.dt,$$

поэтому высота тренія будетъ:

$$\eta = \frac{O.L.\cancel{v}.\cancel{dt}.\varphi(v)}{\Delta\Omega.\cancel{v}.\cancel{dt}} = \frac{O.L.}{\Omega}\ \frac{\varphi(v)}{\Delta}$$

Если труба круглая съ діаметромъ d, то

$$O = \pi d$$

и

$$\Omega = \frac{\pi d^2}{4},$$

т. ч.

$$\eta = \frac{4}{D} L \frac{\varphi(v)}{\Delta}$$

и высота i тренія на единицу длины:

$$i = \frac{\eta}{L} = \frac{4}{D}\,\frac{\varphi(v)}{\Delta}$$

Выраженіе $\frac{\varphi(v)}{\Delta}$ опредѣлено опытнымъ путемъ.

Прони первый, на основаніи нѣкоторыхъ соображеній, высказанныхъ Куломбомъ, предложилъ слѣдующее выраженіе:

$$\frac{\varphi(v)}{\Delta} = av + bv^2,$$

въ которомъ коэф. a и b онъ считалъ постоянными для данной жидкости, не зависящими ни отъ скорости движенія, ни отъ діаметра трубы, ни отъ свойствъ поверхности стѣнокъ.

Для воды, на основаніи опытовъ Босею, Куйле и Дюбуа, Прони даетъ слѣдующія значенія для коэф. a и b:

$$a = 0{,}0000137$$

и

$$b = 0{,}000348,$$

при чемъ за единицу длины надо брать 1 метр.

Для тѣхъ же коэффиціентовъ Д' Обюиссонъ даетъ:

$$a=0,0000188$$

и

$$b=0,000343.$$

Для облегченія при разсчетахъ, когда скорость v не особенно мала, Дюпюи предложилъ принимать

$$a=0$$

и

$$b=0,0003855.$$

Дарси при устройствѣ имъ водопровода въ г. Дижонѣ произвелъ до 200 весьма тщательныхъ опытовъ надъ движеніемъ воды въ трубахъ разнаго діаметра и разнаго матеріала. При помощи этихъ опытовъ Дарси убѣдился, что треніе воды въ трубахъ зависитъ отъ свойствъ матеріала, изъ котораго сдѣлана труба. Такъ напримѣръ, для трубъ деревянныхъ потеря отъ тренія была въ два раза больше, чѣмъ для трубъ металическихъ. Но при этомъ оказывается, что различіе матеріала совершенно сглаживается по мѣрѣ засоренія трубъ разнаго рода осадками, причемъ для трубъ металическихъ треніе получается въ два раза болѣе.

На основаніи своихъ опытовъ Дарси пришелъ къ тому заключенію, что для трубъ, бывшихъ долгое время въ употребленіи безъ различія въ матеріалѣ, изъ котораго онѣ сдѣланы

$$\frac{\varphi(v)}{\Delta}=av+bv^2$$

при этомъ

$$a=0,000032+\frac{0,000000015}{D^2}$$

и

$$b=0,000443+\frac{0,0000124}{D},$$

гдѣ D—діаметръ трубы въ метрахъ.

Для трубъ, бывшихъ въ употребленіи, при средней скорости движенія воды въ нихъ не меньше 0,10 метр., Дарси даетъ:

$$a=0$$

и

α $\frac{\beta}{\Delta}$

$$b=0,000507+\frac{0,00001294}{D}$$

$b=(\alpha+\frac{\beta}{D}$

При меньшихъ же скоростяхъ нельзя полагать

$$\frac{\varphi(v)}{\Delta}=bv^2$$

ибо, какъ явствуетъ изъ данныхъ Прони, отношенiе

$$\frac{av}{bv^2}=\frac{1}{20v}$$

т. ч., наприм., при $v=0,05$

$$av=av^2.$$

Но такъ какъ въ обыкновенныхъ случаяхъ практики скорость рѣдко бываетъ меньше 0,15 mtr, то въ такихъ случаяхъ и можно пользоваться формулой Дарси, какъ болѣе простой.

Въ случаяхъ, когда не требуется большой точности, можно брать

$$a=0$$

и

$$b=0,000625.$$

Въ настоящее время и принято въ обыкновенныхъ случаяхъ практики пользоваться формулами Дарси.

Слѣдуетъ упомянуть еще о новѣйшихъ опытахъ съ цѣлью опредѣленія зависимости тренія отъ скорости. Наиболѣе тщательные опыты въ этомъ направленіи принадлежатъ проф. Осборну Рейнольдсу. Онъ заставлялъ течь воду черезъ стеклянную трубку съ различными скоростями. Трубка была длиной около $4^1/_2$ фут. и снабжена на концѣ воронкой (чер. 58).

Вода текла въ трубку изъ резервуара, въ которомъ можно было мѣнять уровень, чтобы заставлять воду течь съ различными скоростями. При помощи пипетки въ трубку вводилась постоянно струйка анилиновой краски.

Производя наблюденія надъ этой струйкой, проф. Рейнольдсъ нашелъ, что пока скорость не превышала извѣстной величины, краска располагалась въ трубкѣ прямолинейной лентой (a), но какъ только скорость переходила извѣстный предѣлъ, цвѣтная лента оказывалась размытой (b), при чемъ, при изслѣдованіи размытой части въ темной комнатѣ помощью электрической искры, онъ нашелъ, что размытыя части представляли изъ себя вихри (c). При этомъ оказалось, что пока скорость не превышала предѣльной, сопротивленіе было пропорціонально скорости, а при болѣе высокихъ значеніяхъ скорости оно было пропорціонально почти квадрату скорости.

Ту предѣльную скорость, при которой происходитъ измѣненіе въ теченіи и въ законѣ сопротивленія, проф. Рейнольдсъ назвалъ *критической*.

Эти изслѣдованія показали, что предположеніе Бусинеска относительно способа теченія воды оправдываются, только здѣсь кромѣ поперечныхъ размѣровъ трубки имѣетъ также значеніе и скорость.

Изъ опытовъ Рейнольдса обнаружилось также, что величина критической скорости зависитъ и отъ температуры: она уменьшается съ возрастаніемъ температуры.

Кромѣ этого проф. Рейнольдсъ производилъ опыты и съ другого рода трубами и нашелъ возможнымъ результаты ихъ выразить такой формулой:

$$i = \frac{\eta}{L} = \frac{B^n . P^{2-n} . D^{n-3} . v^n}{A},$$

гдѣ

D — діаметръ трубы въ метрахъ,

i — сопротивленіе на длину одного метра,

$A = 67{,}7.10^6$,

$B = 396$ и

$P = \frac{1}{1 + 0{,}0336t + 0{,}000221t^2}$,

при чемъ t есть температура въ градусахъ Цельсія.

Критическую скорость можно опредѣлить по формулѣ:

$$v_c = \frac{1}{278} . \frac{P}{D}$$

Показатель $n=1$ до критической скорости; послѣ нея онъ равенъ 1,7 для гладкихъ трубъ и 2—для трубъ шероховатыхъ.

Когда $n=2$, то можно полагать

$$P=1,$$

такъ что

$$i = \frac{396^2.v^2}{67,7.10^6 D} = 0,002317\,\frac{v^2}{D}.$$

Слѣдуетъ упомянуть, что Вейсбахъ предлагалъ такое выраженіе:

$$\frac{\varphi\ (v)}{\Delta} = \frac{\lambda}{8g}\,v^2,$$

гдѣ

$$\lambda = 0,01439 + \frac{0,009471}{\sqrt{v}}$$

Этой формулой также иногда пользуются при вычисленіяхъ. Но въ большинствѣ случаевъ на практикѣ пользуются формулой Дарси.

Если предложимъ, что труба имѣетъ по всей длинѣ постоянный діаметръ, то въ силу несжимаемости жидкости средняя скорость будетъ сохранять постоянное значеніе по всей длинѣ трубы. Для такого случая ур—іе Д. Бернулли приметъ слѣдующій видъ:

$$\frac{p_1}{\Delta} + z_1 = \frac{p_2}{\Delta} + z_2 + \eta \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ (1),$$

гдѣ

$$\eta = i.L = \frac{4L}{D}.\ 0,000625.v^2 = \frac{L}{D}.\ 0,0025v^2,$$

если не требуется особенная точность; въ противномъ случаѣ мы имѣли бы:

$$\eta = \frac{4L}{D}\left(\alpha + \frac{\beta}{D}\right) . v^2 .$$

гдѣ

$$\alpha = 0{,}000507$$

и

$$\beta = 0{,}00001294$$

Кромѣ того по условію несжимаемости имѣемъ·

$$Q = \frac{\pi . D^2}{4} . v \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

При помощи ур—ій (1) и (2) и рѣшаются всѣ вопросы, относящіеся къ указанному случаю.

Кромѣ сопротивленія отъ тренія, намъ нужно принимать во вниманіе и другія сопротивленія, зависящія отъ измѣненія величины и направленія скорости.

Разсмотримъ слѣдующіе случаи особаго сопротивленія.

1) ***случай внезапнаго расширенія трубы*** (чер. 59).

Потерю въ данномъ случаѣ мы можемъ вычислить по теоремѣ Борда, по которой потерянный напоръ равняется напору потерянной скорости. Если поэтому мы обозначимъ черезъ

v — скорость въ трубѣ A,
ω — площадь ея поперечнаго сѣченія,

v_1 — скорость въ трубѣ B,

ω_1 — площадь ея поперечнаго сѣченія,

то найдемъ:

$$\eta=\frac{(v-v_1)^2}{2g};$$

но такъ какъ

$$\omega v=\omega_1 v_1,$$

то

$$\eta=\frac{v^2}{2g}\left(1-\frac{v_1}{v}\right)^2=\frac{v^2}{2g}\left(1-\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2=\zeta\frac{v^2}{2g}.$$

2) Подобная же причина возникновенія сопротивленія имѣетъ мѣсто въ томъ случаѣ, когда

жидкость переходитъ въ трубѣ черезъ діафрагму mn, въ которой имѣется отверстіе ab (чер. 60).

Діафрагмой мы схематически можемъ обозначить кранъ, клапанъ или задвижку, открытые только отчасти. При протеканіи черезъ отверстіе ab струя сжимается до размѣровъ cd, а затѣмъ расширяется и заполняетъ всю трубу.

Высоту потеряннаго напора можно опредѣлить по теор. Борда. Называя черезъ

v — скорость въ трубѣ,

Ω — площадь ея поперечнаго сѣченія,

v_0 — скорость въ сжатомъ сѣченіи cd,

ω — площадь отверстія,

будемъ имѣть:

$$\eta=\frac{(v_0-v)^2}{2g}=\frac{v^2}{2g}\left(\frac{v_0}{v}-1\right)^2.$$

Если обозначимъ коэффиціентъ сжатія черезъ α, величина котораго зависитъ отъ отношенія:

$$\frac{\omega}{\Omega},$$

отъ положенія отверстія относительно стѣнокъ и т. п. то найдемъ, что

$$Q=\alpha.\,\omega\, v_0=\Omega.\, v.$$

Такимъ образомъ

$$\eta=\frac{v^2}{2g}\left(\frac{\Omega}{\alpha\omega}-1\right)^2=\zeta\,\frac{v^2}{2g}.$$

3) *Вліяніе колѣнъ* (чер. 61).

Когда вода должна быстро измѣнять свое направленіе, то благодаря центробѣжной силѣ она отжимается къ наружной стѣнкѣ, т. ч. за колѣномъ получается сжатое сѣченіе. Если колѣно длинное, то вода снова заполняетъ все сѣченіе. При этомъ, понятно, происходитъ то же, что при быстромъ измѣненіи сѣченія.

Такого рода случай былъ изслѣдованъ Weisbach'омъ. Онъ нашелъ, что

$$\zeta=0,9457 sin^2\delta+2,047 sin^4\delta,$$

$$\eta=\zeta\frac{v^2}{2g}$$

гдѣ δ—половина угла между направленіями колѣнъ.

4) ***Вліяніе закругленій*** (чер. 62).

При прохожденіи воды черезъ закругленіе наблюдаются тѣ же явленія, что и въ предыдущемъ случаѣ. При этомъ

$$\eta=\zeta\left(\frac{\delta^{\circ}}{90^{0}}\right)\frac{v^2}{2g},$$

гдѣ

$$\zeta=0,131+1,848\left(\frac{a}{r}\right)^{7/2}$$

Въ этой формулѣ δ обозначаетъ уголъ между направленіями трубы до и послѣ колѣна, r—радіусъ закругленія и a—радіусъ трубы.

§ 32.

Простой водопроводъ съ постояннымъ діаметромъ и постояннымъ расходомъ.

Примѣнимъ выведенныя формулы къ изслѣдованію движенія воды въ водопроводной сѣти, начиная съ самаго простого случая и переходя постепенно къ случаямъ болѣе сложнымъ.

Самый простой случай будетъ состоять въ слѣдующемъ:

Даны два резервуара A и B (чер. 63), сообщающіеся между собою при помощи трубы ab, длиною L и съ постояннымъ діаметромъ D. Задача будетъ состоять въ опредѣленіи расхода и давленія въ каждомъ мѣстѣ трубы.

Чтобы не писать сложныхъ формулъ, будемъ сразу предполагать, что скорость движенія воды въ резервуарахъ настолько мала, что высотами, соотвѣтствующими этимъ скоростямъ, мы будемъ пренебрегать.

Воспользуемся ур—іями Д. Бернулли. Примѣняя его къ теченію воды отъ верхняго уровня въ резервуарѣ A до к.—н. сѣченія c, найдемъ:

$\frac{p}{\Delta}+\frac{v^2}{2g}+\eta$

$$\frac{p_a}{\Delta}=\frac{v^2}{2g}+\frac{p}{\Delta}-z+\eta \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

гдѣ p_a —давленіе атмосферы, v—средняя скорость въ трубѣ, p—давленіе въ сѣченіи c, z—разность высотъ верхняго уровня резервуара A и цент. тяжести сѣченія c и, наконецъ, η—высота потеряннаго напора.

Примѣняя то же ур—іе къ теченію воды отъ верхняго уровня въ резервуарѣ A до верхняго уровня въ резервуарѣ B, получимъ:

$$\frac{p_a}{\Delta}=\frac{p_a}{\Delta}-H+\eta_0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2),$$

гдѣ H есть разность высотъ уровней и η_0—высота потеряннаго на этомъ пути напора. При этомъ мы будемъ предполагать, что H есть величина постоянная и что уровни въ обоихъ резервуарахъ поддерживаются на постоянной высотѣ.

Далѣе, обозначая площадь сѣченія трубы черезъ ω, мы будемъ имѣть:

$$\omega . v = \frac{\pi D^2}{4} \cancel{v} = Q \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

Вычислимъ теперь высоты η и η_0. Эти высоты будутъ заключать въ себѣ кромѣ высоты, соотвѣтствующей тренію, также высоты, соотвѣтствующія другимъ сопротивленіямъ, какъ то: изгибамъ, расширеніямъ и т. п.

Первое сопротивленіе такого рода будетъ имѣть мѣсто, какъ это мы видѣли при изслѣдованін теченія черезъ насадокъ Вентури, при входѣ въ трубу, вслѣдствіе сжатія и слѣдующаго за нимъ расширенія. Чтобы избѣжать этой потери, слѣдуетъ всегда присоединять трубу къ резервуару при помощи конуса, имѣющаго при вершинѣ уголъ въ 13°24′. Но если это и не сдѣлано, то происходящее отсюда сопротивленіе будетъ оказывать замѣтное вліяніе на движеніе только въ томъ случаѣ, если труба *ab* имѣетъ незначительную длину, ибо въ противномъ случаѣ сопротивленіе отъ тренія значительно превосходитъ всѣ прочія, могущія имѣть мѣсто сопротивленія, такъ, что ими можно пренебречь. Такъ какъ водопроводныя трубы имѣютъ обыкновенно значительную длину, то мы и будемъ въ дальнѣйшемъ дѣлать такое допущеніе.

Замѣтимъ, однако же, что всѣ такія сопротивленія, не имѣя значенія для общаго движенія, могутъ оказывать значительное вліяніе на ходъ измѣненія давленія въ участкѣ трубы, смежномъ съ мѣстомъ, гдѣ они проявляются.

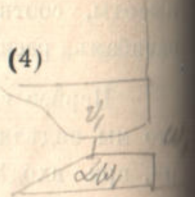
При вычисленіи η_0 слѣдуетъ принять во вниманіе то обстоятельство, что при входѣ въ нижній резервуаръ теряется весь напоръ, соотвѣтствующій скорости v. Такъ какъ обыкновенно скорость въ водопроводной трубѣ не превышаетъ одного метра, то этимъ напоромъ можно пренебречь. Но если въ концѣ трубы находится кранъ и если этотъ кранъ будетъ не совсѣмъ открытъ, то потеря можетъ быть уже довольно значительна, т. ч. придется ее прннять во вниманіе.

Итакъ, обозначая

длину трубы ac черезъ l,
длину всей трубы „ L,
площадь отверстія крана черезъ ω_1,

найдемъ:

$$\eta = \left(\alpha + \frac{\beta}{D}\right)\frac{4l}{D} \cdot v^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$



и

$$\eta_0 = \eta_1 + \eta_2 = \left(\alpha + \frac{\beta}{D}\right)\frac{4l}{D} v^2 + \frac{v^2}{2g}\left(\frac{\omega}{\alpha\omega_1}\right)^2 \quad . \; . \; . \quad (5),$$

ибо

$$\eta_2 = \frac{{v_1}^2}{2g},$$

$\omega v = \alpha\omega_1 v_1 =$

гдѣ v_1—скорость въ сжатомъ сѣченіи; а такъ какъ по условію несжимаемости мы имѣемъ, что

$$v . \omega = v_1 \alpha \omega_1,$$

то

$$v_1 = v \frac{\omega}{\alpha\omega_1}.$$

$\frac{v_1^2}{2g} = \frac{v^2}{2g}\left(\frac{\omega}{\alpha\omega_1}\right)^2$

Изъ ур—ія (3) мы имѣемъ:

$$v^2 = \frac{Q^2 16}{\pi^2 d^4}$$

Подставляя это выраженіе въ ур—ія (4) и (5), получимъ:

$$\eta = \left(\alpha + \frac{\beta}{D}\right)\left(\frac{8}{\pi}\right)^2 l \frac{Q^2}{D^5} = \frac{lQ^2}{\gamma D^5} \; . \; . \; . \; . \; (6),$$

гдѣ, для сокращенія письма, полагаемъ:

$$\left(\alpha + \frac{\beta}{D}\right)\left(\frac{8}{\pi}\right)^2 = \frac{1}{\gamma}$$

$\omega^2 = \frac{\pi d^4}{16}$

и

$$\eta_0 = \frac{LQ^2}{\gamma D^5} + \frac{\overset{Q^2}{v^2}}{2g}\left(\frac{\omega}{\alpha\omega_1}\right)^2 = \frac{LQ^2}{\gamma D^5} + \frac{Q^2}{2g}\left(\frac{1}{\alpha\omega_1}\right)^2 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (7)$$

Подставляя теперь выраженія (6) и (7) въ ур—ія (1) и (2) найдемъ:

$$\frac{p_a}{\Delta} = \frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\Delta} - z + \frac{lQ^2}{\gamma D^5} \; . \; . \; . \; . \; . \; (8)$$

и

$$H = \frac{LQ^2}{\gamma D^5} + \frac{Q^2}{2g}\left(\frac{1}{\alpha\omega_1}\right)^2 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (9)$$

$= Q^2\Big(\frac{l}{\gamma D^5}$

При помощи этихъ двухъ уравненій мы и можемъ разрѣшить интересующіе насъ вопросы.

Изъ ур—ія (9) мы найдемъ расходъ, а затѣмъ по ур—ію (8) давленіе въ любомъ сѣченіи трубы.

Такимъ образомъ имѣемъ:

$$Q=\sqrt{\frac{H}{\frac{L}{\gamma D^5}+\frac{1}{2g(\alpha\omega_1)^2}}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (10)$$

и

$$\frac{p}{\Delta}=\frac{p_a}{\Delta}+z-\frac{Q^2}{2g\omega^2}-\frac{lQ^2}{\gamma D^5} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (11)$$

Изъ этихъ уравненій видимъ, что чѣмъ меньше ω_1 тѣм меньше будетъ расходъ и тѣмъ выше будетъ давленіе *p*.

Представимъ форм. (10) въ такомъ видѣ:

Умн. на $2g(\alpha\omega_1)^2$

$$Q=\alpha\omega_1\sqrt{\frac{2gH}{1+\frac{2g\alpha^2.\omega_1{}^2 L}{\gamma D^5}}}$$

и положимъ, что труба *ab* доставляетъ воду не въ резервуаръ, а выпускаетъ струю въ атмосферу. Обозначимъ скорость, съ которой вытекаетъ вода, черезъ *c*; тогда

$$Q=\alpha\omega_1 c \qquad c=\frac{Q}{\alpha\omega_1}=$$

и

$$c=\sqrt{\frac{2gH}{1+2g\alpha^2\omega_1{}^2\frac{L}{\gamma D^5}}}.$$

Если оконечность трубы направлена вверхъ, вода будетъ образовать фонтанъ. Высота, на которую будетъ бить вода, опредѣлится изъ соотношенія:

$$h=\frac{c^2}{2g},$$

такъ что

$$h=\frac{H}{1+2g\alpha^2\omega_1{}^2\frac{L}{\gamma D^5}}.$$

Въ дѣйствительности однако высота фонтана будетъ меньше найденной, вслѣдствіе сопротивленія воздуха и удара падающихъ внизъ частицъ.

Если дѣйствительную высоту назовемъ черезъ y, то на основаніи опытовъ Маріотта будемъ имѣть:

$$h=y+0{,}01y^2.$$

Перейдемъ теперь къ изслѣдованію измѣненія давленія вдоль оси трубы, предполагая, что кранъ на концѣ трубы открытъ совершенно. Такъ какъ высота $\frac{v^2}{2g}$ бываетъ обыкновенно очень незначительна, то для простоты мы можемъ ей пренебречь. При такихъ предположеніяхъ форм. (8) и (9) перепишутся такъ:

$$\frac{p_a}{\Delta}=\frac{p}{\Delta}-z+\frac{lQ^2}{\gamma D^5}\quad .\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(12)$$

и

$$H=\frac{LQ^2}{\gamma D^5}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(13)$$

Найдемъ изъ ур—ія (12) $\frac{p}{\Delta}$, замѣняя въ немъ $\frac{Q^2}{\gamma D^5}$ на основаніи ур—ія (13) черезъ $\frac{H}{L}$; тогда получимъ:

$$\frac{p}{\Delta}=\frac{p_a}{\Delta}+z-H\frac{l}{L} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (14)$$

Такова будетъ высота, соотвѣтствующая дѣйствительному давленію. Что касается до пьезометрической высоты, то она выразится такъ:

$$\frac{p-p_a}{\Delta}=z-H\frac{l}{L} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (15)$$

Чтобы сдѣлать результаты болѣе наглядными, будемъ сбѣ высоты откладывать по вертикальной прямой, проведенной изъ центра тяжести сѣченія *c*.

Чтобы выполнить такое построеніе, проведемъ горизонтальную плоскость *NN*, отстоящую отъ уровня воды въ резервуарѣ *A* на высоту $\frac{p_a}{\Delta}$ (10,33 м), гор. плоскость *MM*, служащую продолженіемъ плоскости верхняго уровня резервуара *A*, и проведемъ черезъ *c* вертикаль. Тогда, очевидно,

$$ef=\frac{p_a}{\Delta}$$

и

$$fc=z.$$

Затѣмъ по данной длинѣ *l* находимъ величину высоты $H\frac{l}{L}$ и откладываемъ эту высоту одинъ разъ отъ точки *e* внизъ, пусть это будетъ *en*, и другой разъ отъ *f*, пусть это будетъ *fm*; тогда очевидно,

$$cn = \frac{p}{\Delta} = fc + ef - en = z +$$

и

$$cm = \frac{p - p_a}{\Delta}$$

Сдѣлавъ указанное построеніе для каждаго сѣченія трубы, мы получимъ два ряда точекъ m и n. Соединяя эти точки, получимъ двѣ кривыя:

1) кривую пьезометрич. высотъ,
2) кривую давленій.

Такъ какъ для перваго сѣченія трубы

$$l = 0 \quad \text{и} \quad z = aM,$$

то, слѣдовательно, началомъ кривыхъ будутъ служить точки M и N.

Для послѣдняго сѣченія (b)

$$l = L \quad \text{и} \quad z = H + Mb_1,$$

т. ч. концомъ кривыхъ будутъ служить точки M_1 и N_1, ибо для этого сѣченія на основаніи форм. (14) и (15) имѣемъ:

$$\frac{p}{\Delta} = \frac{p_a}{\Delta} + bM_1 + H - H = bM_1 + \frac{p_a}{\Delta}$$

и

$$\frac{p - p_a}{\Delta} = bM_1 + H - H = bM_1.$$

Изъ предыдущаго построенія видно, что разстояніе точекъ m и n отъ горизонт. плоскости MM не зависитъ отъ величины z. Дѣйствительно:

$$fn=H\cdot\frac{l}{L}-\frac{p_a}{\Delta}$$

и

$$fm=H\frac{l}{L}.$$

Такимъ образомъ, подымая ~~присоединяя~~ или опуская какую нибудь часть трубы, мы не измѣнимъ расположенія точекъ m и n относительно плоскости MM, т. ч. при опусканіи какой-либо части трубы давленіе въ ней будетъ возрастать, а при подниманіи падать.

Предположимъ теперь, что ось трубы лежитъ въ вертикальной плоскости, проходящей черезъ центры сѣченій a и b и что длина L настолько велика по сравненію съ вертикальными разстояніями отъ плоскости MM, что вмѣсто длинъ трубы и ея частей можно брать ихъ проэкціи на горизонтальное направленіе, т. е. принимать

$$l=Mf$$

и

$$L=MM_2.$$

Въ такомъ случаѣ обѣ кривыя обращаются въ паралл. прямыя NN_1 и MM_1 наклоненныя къ горизонту подъ угломъ, тангенсъ котораго равенъ $\frac{H}{L}$ или $\frac{Q^2}{\gamma D^5}$.

Не трудно видѣть, что еслибы кранъ былъ не вполнѣ открытъ, то при тѣхъ же предположеніяхъ, кривыя давленій и пьезометрическихъ высотъ были бы также прямыя, но только наклоненныя къ горизонт. плоскости подъ меньшимъ угломъ, т. к. Q было бы меньше.

Изъ ур—ія (8), пренебрегая въ немъ высотой $\frac{v^2}{2g}$, найдемъ:

$H\frac{l}{2}$

$$\frac{p}{\Delta}=\frac{p_a}{\Delta}+z-\frac{lQ^2}{\gamma D^5} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (16)$$

Отсюда для сѣченія a, полагая

$$l=0,$$

найдемъ:

$$\frac{p}{\Delta}=\frac{p_a}{\Delta}+aM$$

и

$$\frac{p-p_a}{\Delta}=aM,$$

т. е. и въ этомъ случаѣ линіи давленія и пьезометрическихъ высотъ будутъ проходить черезъ точки M и N.

Чтобы найти давленіе въ сѣченіи b непосредственно передъ краномъ мы должны въ ур—іи (16) положить

$$z=H+M_1b \quad \text{и} \quad l=L;$$

тогда

$$\frac{p}{\Delta}=\frac{p_a}{\Delta}+H+M_1b-\frac{L\,Q^2}{\gamma D^5}.$$

за работу

Принимая же во вниманіе ур—іе (9), получимъ:

$$\frac{p}{\Delta}=\frac{p_a}{\Delta}+H+M_1b-H+\frac{Q^2}{2g}\left(\frac{1}{\alpha\omega_1}\right)^2$$

H·

или

$$\frac{p}{\Delta}=\frac{p_a}{\Delta}+Mb_1+\frac{Q^2}{2g}\left(\frac{1}{\alpha\omega_1}\right)^2,$$

откуда и видно, что кривая давленія будетъ въ такомъ случаѣ проходить черезъ нѣкоторую точку N_1', лежащую выше N_1 на высоту

$$N_1N_1'=\frac{Q_{\cancel{2}}^{2}}{2g}\left(\frac{1}{\alpha\omega_1}\right)^2.$$

Такимъ образомъ, разъ мы начнемъ закрывать кранъ, прямыя MM_1 и NN_1 будутъ подниматься, вращаясь около точекъ M и N.

Опредѣленіе линіи пьзометрическихъ высотъ весьма важно, ибо ея положеніе объясняетъ многія явленія, замѣчаемыя въ водопроводныхъ трубахъ.

Если бы труба имѣла видъ $ABCD$ (чер. 64), а линія пьзометр. высотъ была бы прямая MM_1, то въ части трубы BCD, лежащей выше этой прямой, пьезометр. высота была бы отрицательна и, слѣдовательно, давленіе ниже атмосфернаго. Вслѣдствіе этого кранъ, поставленный на этой части, не давалъ бы воды. Если бы мы въ концѣ трубы поставили кранъ, то, прикрывая его, могли бы повернуть линію пьзометрич. высотъ въ положеніе MM_1'; въ такомъ случаѣ часть BCD начала бы давать воду.

Нужно замѣтить, что при устройствѣ водопроводовъ слѣдуетъ стараться, чтобы ни одна часть его не лежала выше прямой пьезометрическихъ высотъ, ибо въ противномъ случаѣ въ такомъ мѣстѣ будетъ скопляться выдѣляющійся изъ воды воздухъ, который можетъ совершенно перервать движеніе. Но если уже такой части избѣжать нельзя, то придется для удаленія воздуха ставить въ этомъ мѣстѣ воздушный насосъ.

Если бы какая нибудь часть трубы лежала выше линіи давленія, то движеніе стало бы совершенно невозможнымъ, ибо давленіе въ такой части стало бы отрицательнымъ.

Такого рода случай очень легко можно получить при движеніи воды по сифону (чер. 65).

Обозначимъ высоту центра сѣченія наивысшей части сифона надъ уровнемъ воды въ верхнемъ резервуарѣ черезъ h, всю длину трубы ab черезъ L и длину части ac—черезъ l.

Тогда по предыдущему имѣемъ:

$$\frac{p}{\Delta} = \frac{p_a}{\Delta} - h - H\frac{l}{L},$$

гдѣ черезъ p обозначено давленіе въ сѣченіи c.

Такъ какъ наименьшее значеніе для p есть нуль, то отсюда найдемъ:

$$h = \frac{p_a}{\Delta} - H\frac{l}{L},$$

т. е., если бы даже не было совершенно вредныхъ сопротивленій, h ни въ какомъ случаѣ не могло бы быть больше

$$\frac{p_a}{\Delta} = 10,\ 33\ \text{м}.$$

§ 33.

Параллельный водопроводъ.

Положимъ, что два резервуара A и B (чер. 66), постоянная разность уровней которыхъ есть H, соединены между собою нѣсколькими трубами: a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3, и т. д. съ діаметрами d_1, d_2, d_3, ... и длинами l_1, l_2, l_3 . . . .

Обозначимъ расходъ черезъ первую трубу черезъ q_1, черезъ вторую черезъ q_2, черезъ третью q_3 и т. д. и общій расходъ черезъ Q. Тогда понятно,

$$Q=q_1+q_2+q_3+ \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$

Разсмотримъ теченіе по которой—нибудь изъ этихъ трубъ, напр., по a_1b_1.

Примѣняя ур—іе Бернулли къ теченію отъ верхняго уровня резервуара A до верхняго уровня резервуара B, получимъ:

$$\frac{p_0}{\Delta}+H=\frac{p_0}{\Delta}+\eta,$$

или

$$H=\eta \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1),$$

гдѣ η—потерянный напоръ на всемъ протяженіи.

Пренебрегая всѣми сопротивленіями кромѣ тренія, по формулѣ Дарси мы имѣемъ:

$$\eta = \left(\alpha + \frac{\beta}{d_1} \right) l_1 v_1{}^2 \frac{4}{d_1} \quad \ldots\ldots (2),$$

гдѣ v_1 обозначаетъ скорость въ разсматриваемой трубѣ.

По условію несжимаемости:

$$q_1 = \frac{\pi d_1^2}{4} v_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Опредѣляя отсюда v_1 по q и подставляя въ ур—іе (2), найдемъ:

$$\eta = \left(\alpha + \frac{\beta}{d_1} \right) l_1 \frac{q_1{}^2 \cdot 64}{\pi^2 \, d_1{}^5} = \frac{q_1{}^2}{\gamma} \frac{l_1}{d_1{}^5} \quad \ldots\ldots (4),$$

гдѣ

$$\frac{1}{\gamma} = \left(\alpha + \frac{\beta}{d_1} \right) \frac{64}{\pi^2} = \text{въ среднемъ } \frac{1}{(15,\,7)^2} = \text{прибл. } \frac{1}{16^{\,2}}$$

Принимая во вниманіе соотношеніе (4), изъ ур—ія (1) найдемъ:

$$H = \frac{q_1{}^2 \, l_1}{\gamma \, d_1{}^5} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Примѣняя подобныя же разсужденія къ другимъ трубамъ, мы получимъ:

$$H = \frac{q_1{}^2\ l_1}{\gamma\ d_1{}^5} = \frac{q_2{}^2\ l_2}{\gamma\ d_2{}^5} = \frac{q_3{}^2\ l_3}{\gamma\ d_3{}^5} = \ldots\ldots$$

Опредѣляя изъ этихъ соотношеній расходы и складывая ихъ, найдемъ:

$$Q = \sqrt{\gamma H}\left\{\sqrt{\frac{d_1{}^5}{l_1}} + \sqrt{\frac{d_2{}^5}{l_2}} + \sqrt{\frac{d_3{}^5}{l_3}} + \ldots\ldots\right\} =$$

$$= \sqrt{\gamma H}\ \Sigma \sqrt{\frac{d^5}{l}} \ldots\ldots\ldots \text{(6)}.$$

Если обозначимъ черезъ λ и δ длину и діаметръ такой трубы, которая при той же потерѣ на треніе пропускаетъ въ секунду объемъ воды Q, то на основаніи соотношенія (6) будемъ имѣть:

$$Q = \sqrt{\gamma H} \sqrt{\frac{\delta^5}{\lambda}} \ldots\ldots\ldots \text{(7)}$$

Сравнимъ между собою вторыя части двухъ послѣднихъ уравненій:

$$\sqrt{\frac{\delta^5}{\lambda}} = \Sigma \sqrt{\frac{d^5}{l}} \ldots\ldots\ldots \text{(8)}$$

Если мы сдѣлаемъ естественное допущеніе, что

$\lambda=l_1=l_2=l_3=$ . . . . $\sqrt{\frac{\delta^5}{\lambda}}=\frac{\Sigma\sqrt{d^5}}{\sqrt{\lambda}}$

то соотношенiе (8) намъ даетъ:

$$\sqrt{\delta^5}=\Sigma\sqrt{d^5}.$$

Если же наконецъ допустимъ, что нашъ параллельный водопроводъ состоитъ изъ *n* одинаковыхъ трубъ, то будемъ имѣть:

$$\sqrt{\delta^5}=n\sqrt{d^5} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (9)$$

$\delta^5=n^2d^5 \mid \delta=n^{2/5}d$

При помощи послѣдняго соотношенiя легко убѣдиться, что замѣна простого водопровода нѣсколькими параллельными невыгодна въ экономическомъ отношенiи.

Опытъ показываетъ, что стоимость трубы съ укладкою ея можетъ быть выражена формулой:

$$K=(k_0+kd).l,$$

гдѣ k_0 и k суть постоянныя количества.

На основанiи этого стоимость простого водопровода выразится такъ:

$$K=(k_0+k\delta)\;\lambda$$

и стоимость параллельнаго будетъ:

$$K' = n\ (k_0 + kd)\ \lambda$$ Діам. разм

Возьмемъ отношеніе второго къ первому:

$$\frac{K'}{K} = \frac{n\ (k_1 + kd)}{(k_0 + k\delta)}$$

На основаніи соотношенія (9) имѣемъ:

$$\delta = dn^{2/5},$$

такъ что

$$\frac{K'}{K} = \frac{n\ (k_0 + kd)}{(k_0 + kdn^{2/5})} = \frac{n\ (k_0 + kd)}{n^{2/5}\left(\frac{k_0}{n^{2/5}} + kd\right)} = n^{3/5} A.$$

Такъ какъ

$$n > 1,$$

то

$$n^{3/5} > 1$$

и

$$A > 1,$$

такъ что

$$\frac{K'}{K} > 1.$$

§ 34.

Простой водопроводъ съ постояннымъ расходомъ и перемѣннымъ діаметромъ.

Пусть два резервуара A и B (чер. 67), постоянная разность уровней которыхъ есть H, соединены между собою трубой ab, діаметръ которой постепенно убываетъ отъ a къ b.

Найдемъ расходъ и измѣненіе пьезометрической высоты вдоль сей трубы. При этомъ мы будемъ, какъ и въ предыдущихъ случаяхъ, пренебрегать высотами, соотвѣтствующими скоростямъ въ резервуарахъ и всѣми вредными сопротивленіями, за исключеніемъ тренія.

Чтобы получить общее уравненіе, при помощи котораго можно будетъ разрѣшить поставленные вопросы, примѣнимъ ур—іе Д. Бернулли къ теченію воды отъ уровня резервуара A до к.-и сѣченія c.

Обозначимъ черезъ v и p скорость и давленіе въ этомъ сѣченіи и черезъ z вертикальное разстояніе центра его отъ уровня воды въ резервуарѣ A; тогда будемъ имѣть:

$$\frac{p_0}{\Delta}+z=\frac{p}{\Delta}+\frac{v^2}{2g}+\eta,$$

или, пренебрегая высотой $\frac{v^2}{2g}$, почему?

$$\frac{p}{\Delta}=\frac{p_0}{\Delta}+z-\eta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Вычислимъ теперь высоту η По предыдущему, для элемента трубы dl будемъ имѣть:

$$d\eta=\frac{Q^2\ dl}{\gamma\ d^5},$$

т. ч., если обозначимъ длину части трубы ac черезъ l, найдемъ:

$$\eta = Q^2 \int_0^l \frac{\partial l}{\gamma d^5} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Подставляя это выраженіе въ ур—іе (1), получимъ:

$$\frac{p}{\Delta} = \frac{p_0}{\Delta} + z - Q_2 \int_0^l \frac{\partial l}{\gamma d^5} \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Хотя γ зависитъ отъ d, но такъ какъ величина его мѣняетс незначительно съ измѣненіемъ діаметра трубы. то для теоретич скихъ соображеній можно считать γ постояннымъ и равнымъ пр близительно $(15,7)^2$.

Пользуясь надлежащимъ образомъ ур—іемъ (3), можно ра рѣшить всѣ вопросы, относящіеся къ данному случаю. Но, понят но. для этого нужно только задать зависимость между d и l.

Положимъ для примѣра, что труба ab представляетъ усѣчен ный конусъ, при чемъ діаметръ измѣняется отъ d_0 (при a) до d_1 (при b). Тогда зависимостъ между d и l выразится слѣдующим сбразомъ (чер. 68):

$$\frac{ef}{ab} = \frac{L-l}{L}$$

Но

$$ef = \frac{d - d_1}{2}$$

и

$$ab=\frac{d_0-d_1}{2},$$

такъ что

$$\frac{d-d_1}{d_0-d_1}=\frac{\mathrm{L}-l}{\mathrm{L}}$$

Вычитая первую и вторую часть изъ единицы, получимъ:

$$\frac{d_0-d}{d_0-d_1}=\frac{l}{\mathrm{L}},$$

откуда

$$d=d_0-(d_0-d_1)\frac{l}{\mathrm{L}},$$

$$\partial d=-(d_0-d_1)\frac{\partial l}{\mathrm{L}}$$

и

$$\partial l=-\frac{\mathrm{L}\,\partial d}{(d_0-d_1)}$$

Подставляя это выраженіе для ∂l въ ур—іе (3), получимъ:

$$\frac{p}{\Delta}=\frac{p_0}{\Delta}+z+\frac{Q^2\ \mathrm{L}}{\gamma(d_0-d_1)}\int\limits_{do}^{d}\frac{\partial d}{d^5}$$

и по интеграціи

$$\frac{p}{\Delta}=\frac{p_0}{\Delta}+z-\frac{Q^2\ \mathrm{L}}{4\gamma\,(d_0-d_1)}\left(\frac{1}{d^4}-\frac{1}{d_0{}^4}\right)\quad .\ .\ .\ .\ (4)$$

Отсюда пьезометрическая высота ζ выразится такъ:

$$\zeta = \frac{p-p_0}{\Delta} = z - \frac{Q^2 L}{4\gamma(d_0-d_1)}\left(\frac{1}{d^4} - \frac{1}{d_0{}^4}\right) \quad . \quad . \quad (\delta)$$

$= \eta$

Чтобы построить пьезометрическую высоту ζ, проведем через центръ сѣченія c вертикаль cf до пересѣченія съ горизонтальной плоскостью MM_2, служащей продолженіемъ плоскости уровня воды въ резервуарѣ A, и отложимъ отъ f длину η равную (чер. 67)

$$fm = \frac{Q^2 L}{4\gamma(d_0-d_1)}\left(\frac{1}{d^4} - \frac{1}{d_0{}^4}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha)$$

Тогда

$$cm = cf - fm = \zeta \; = z - \eta = \frac{p-p_0}{\Delta}$$

Если мы построимъ цѣлый рядъ точекъ и соединимъ их непрерывной кривой, то получимъ кривую пьезом. высотъ MmM_1

Чтобы получить уравненіе этой кривой при допущеніи, что вся ось трубы лежитъ въ вертик. плоскости и что длины е частей можно считать равными ихъ горизонт. проэкціямъ, надо въ ур—іе (α) вмѣсто d подставить:

$$d = d_0 - (d_0 - d_1)\frac{l}{\mathrm{L}}$$

Отмѣтимъ нѣкоторыя точки этой кривой. Для сѣченія a мы должны положить

$$z = aM$$

$l = 0$

и

$$d=d_0,$$

ч. изъ ур--ія (5) получимъ:

$$\zeta=aM$$

е. кривая пьезом. высотъ будетъ проходить черезъ точку M

Для сѣченія b—

$$z=H+bM_1 \qquad l=L$$

и

$$d=d_1,$$

такъ что

$$\zeta=H+b\,M_1-\frac{Q_2\ L}{4\gamma\,(d_0-d_1)}\Big(\frac{1}{{d_1}^4}-\frac{1}{{d_0}^4}\Big)\ .\ .\ .\ .\ .\ (6)$$

Примѣняя ур—іе (4) къ теченію воды отъ верхняго уровня резервуара A до верхняго уровня резервуара B, получимъ:

$$\zeta=H=\frac{Q^2\ L}{4\gamma\,(d_0-d_1)}\Big(\frac{1}{{d_1}^4}-\frac{1}{{d_0}^4}\Big).$$

Принявъ это во вниманіе, изъ ур—ія (6) найдемъ:

$$\zeta=bM_1,$$

е. кривая пьезом. высотъ проходитъ черезъ точку M_1.

Положимъ теперь, что водопроводъ составленъ изъ ряда трубъ съ постоянными и неравными діаметрами: d_1, d_2, d_3 и т. д. и длинами: l_1, l_2, l_3 . . . . .

Пренебрегая опять всѣми сопротивленіями кромѣ трені по предыдущему будемъ имѣть:

$$H = \frac{Q^2}{\gamma} \Sigma \frac{l}{d^5} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad . \; (7),$$

гдѣ γ мы считаемъ равнымъ средней величинѣ (15, 7).[2]

Пусть теперь требуется замѣнить данный водопроводъ одн трубой длины L съ такимъ діаметромъ D, чтобы расходъ бы тотъ же.

Для такой трубы будемъ имѣть:

$$H = \frac{Q^2}{\gamma} \frac{L}{D^5} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (8)$$

Сравнивая ур—ія (7) и (8) и сокращая на $\frac{Q^2}{\gamma}$, будемъ имѣть

$$\frac{L}{D^5} = \Sigma \frac{l}{d^5} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9)$$

Это соотношеніе носитъ названіе *правила Дюпюи.*

Положимъ, что водопроводъ состоитъ только изъ двух трубъ: одной длиною

$$l_1 = 0{,}9\, l$$

d_1

и другой длиною

$$l_2 = 0{,}1\, l,$$

$d_2 = 0{,}2 d_1$

при чемъ діаметръ второй—

$$d_2 = 0,2\ d_1,$$

$$\frac{L}{0,2^5 d_1^5} = 9$$

гдѣ d_1—діаметръ первой трубы.

Тогда по правилу Дюпюи имѣемъ:

$L = 0,00032$

$$\frac{L}{D^5} = \frac{0,9l}{d_1^{\ 5}} + \frac{0,1l}{(0,2)^5 d_1^{\ 5}} = \frac{l}{d_1^{\ 5}}\left(0,9 + \frac{0.1}{0,00032}\right) = 313,4\frac{l}{d_1^{\ 5}}$$

Положимъ, что діаметръ эквивалентной трубы

$$D = d_2; = 0,2\,d_1$$

$$L = D^5\ 313,4\frac{l}{d_1^{\ 5}} =$$

найдемъ ея длину; тогда

$$L = 313,4(0,2)^5 l = 0,000288l = 1,00288l_2.$$

$$\frac{0,100288}{0,1}$$

т. е.

т.к. l –

$$L = \text{прибл. } l_2.$$

Изъ этого примѣра видно, что если въ водопроводѣ имѣется одна, хотя бы очень небольшая, труба, діаметръ которой значительно меньше діаметра остальныхъ, то потеря напора, а, слѣдовательно, и расходъ зависитъ почти исключительно отъ этой части. Желая увеличить расходъ, надо, очевидно, увеличить только діаметръ этой части.

§ 35.

Простой водопроводъ съ постояннымъ діаметромъ и перемѣннымъ расходомъ.

Условія задачи—тѣ же, что и въ предыдущихъ случаяхъ, только предполагается, что кромѣ расхода P на концѣ b, суще-

ствуетъ расходованіе на пути, и при томъ такое, что на кажд
единицѣ длины въ единицу времени расходуется объемъ воды q

Если обозначимъ (чер. 69) длину трубы ab черезъ L, то п
условію будемъ имѣть, что полный расходъ на пути есть

$$Q=Lq,$$

т. е.

$$q=\frac{Q}{L}$$

Напишемъ ур—іе Бернулли для сѣченія c.

Обозначимъ вертикальное растояніе центра его отъ уровн
въ резервуарѣ A черезъ z, давленіе въ немъ черезъ p и скорост
—черезъ v.

Тогда имѣемъ:

$$\frac{p_0}{\Delta}+z=\frac{p}{\Delta}+\frac{v^2}{2g}+\eta \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1),$$

гдѣ η—напоръ, потерянный на треніе (остальными сопротивл
ніями мы будемъ пренебрегать).

Найдемъ теперь выраженіе для η.

Расходъ черезъ сѣченіе c будетъ слагаться изъ постояннаг
расхода P и той части перемѣннаго, которая должна израсходо
ваться на пути cb. Такъ какъ длина этой части есть

$$L-l,$$

то черезъ сѣченіе c, слѣдовательно, протекаетъ часть перемѣнна
го расхода, равная

$$q(L-l) = \quad Q\frac{L-l}{L}.$$

Такимъ образомъ полный расходъ черезъ сѣченіе c будетъ:

$$p=P+\frac{L--l}{L}Q \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \qquad (2)$$

Потеря на треніе на элементѣ dl, слѣдующимъ за c, есть:

$$d\eta=\frac{p^2\,dl}{\gamma d^5}$$

и

$$\eta=\frac{1}{\gamma d^5}\int\limits_{l-o}^{l} p^2\ dl \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \qquad (3)$$

Такъ что изъ ур—ія (1), пренебрегая высотой $\frac{v^2}{2g}$, получимъ:

$$\frac{p-p_0}{\Delta}=\zeta=z-\eta=z-\frac{1}{\gamma d^5}\int\limits_{o}^{l} p^2\,dl \quad . \ . \ . \ . \ . \qquad (4)$$

Изъ ур-ія (2) находимъ:

$$dp=-\frac{Q}{L}\,dl$$

и

$$dl=-\frac{L}{Q}\ dp$$

Подставляя это выраженіе для dl въ ур—іе (3), получимъ:

$$\zeta=z+\frac{L}{Q\,\gamma\,d^5}\int\limits_{P+Q}^{\cancel{P}p} p^2dp$$

и, интегрируя,

$$\zeta = z + \frac{L}{3Q\gamma d^5}\left\{\left(P + \frac{L-l}{L}Q\right)^3 - \left(P+Q\right)^3\right\}$$

или

$$\zeta = z - \frac{L}{3Q\gamma d^5}\left\{\left(P+Q\right)^3 - \left(P + \frac{L-l}{L}Q\right)^3\right\} \quad . \ . \ (5)$$

Чтобы найти кривую пьезометрическихъ высотъ, надо также какъ и въ предыдущихъ случаяхъ, откладывать величины

$$\eta = \frac{L}{3\gamma Q d^5}\left\{\left(P+Q\right)^3 - \left(P + \frac{L-l}{L}Q\right)^3\right\} \quad . \ . \ (6)$$

$= 0$

отъ плоскости MM_2.

Не трудно найти, что для начала трубы

$$\eta = 0$$

и для конца трубы, если только труба вполнѣ открыта,

$-\frac{L}{3Q\gamma d^5}\left[(P+Q)^3 - P^3\right]$

$$\eta = H$$

т. е. кривая пьезометрическихъ высотъ проходитъ черезъ точки M и M_1.

Если ось трубы лежитъ въ вертикальной плоскости, проходящей черезъ центры сѣченій a и b, и если допустить, что длины частей трубы можно считать равными ихъ проекціямъ на горизонтальную плоскость, то ур—іе (6) представитъ ур—іе кривой пьезометрическихъ высотъ, отнесенное къ прямоугольнымъ осямъ $MM_2\eta$, имѣющимъ начало въ точкѣ M.

Уравненіе такого вида представляетъ, такъ называемую кубическую параболу. Чтобы найти вершину ея, надо положить

$$\frac{d\eta}{dl}=0$$

Тогда найдемъ:

$$P+\frac{L-l}{L}Q=0,$$

$\frac{PL+(L-l)Q}{Q}=0$

$L-l=\mp\frac{PL}{Q}$

$l=L+\frac{P}{}$

откуда абсцисса вершины

$$\underset{l\,=}{MN_1}=L+\frac{PL}{Q}>MM_2$$

и ея ордината

$$\eta=NN_1=\frac{L(P+Q)^3}{3Q\gamma d^5}$$

Если бы P было равно нулю, то $\eta=H$

$$H=\frac{L\ Q^3}{3Q\gamma d^5}=\frac{L\ Q^2}{3\gamma\ d^5}=\frac{1}{3}\cdot\frac{Q^2L}{\gamma D^5}\ \ .\ .\ .\ (7)$$

Отсюда видно, что если весь расходъ тратится на пути, потеря отъ тренія будетъ въ три раза меньше, чѣмъ при томъ же расходѣ на оконечности. Положимъ, что діаметръ трубы, расходующей на оконечности объемъ Q при той же разности уровней H, есть D; тогда [illegible] такого вида случаи в [illegible]

$$\frac{lQ^2}{\gamma D^5}=\frac{1}{3}\,\frac{Q^2\,l}{\gamma d^5},$$

$D^5=3d^5$

$D=\sqrt[5]{3}\,d$

откуда

$$\frac{D}{d}=\sqrt[5]{3}=1{,}25,$$

т. е. въ случаѣ равномѣрной раздачи діаметръ трубы въ 1, 25 d раза меньше.

Изъ формулы (6), примѣняя ее къ уровню резервуар
найдемъ:

$$H=\frac{L}{3\gamma Q d^5}\left\{\left(P+Q\right)^3-P^3\right\}=\frac{P^2L}{\gamma\, d^5}+\frac{Q^2L}{3\gamma d^5}+$$

$$+\frac{\left(\sqrt{PQ}\right)^2L}{\gamma d^5}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(8)$$

Если положимъ, что

$$Q=0,$$

то

$$H=\frac{P^2L}{\gamma d^5},$$

что мы находили уже раньше.

Въ общемъ же случаѣ, какъ показываетъ ур—іе (8), теря щійся на треніе напоръ можно считать состоящимъ изъ трех напоровъ:

1) напора, сотвѣтствующаго равномѣрному расходу на око нечности.

2) напора, соотвѣтствующаго равномѣрному расходу на пути,

3) напора, который терялся бы, если бы на оконечност существовалъ расходъ $\sqrt{PQ}$, равный среднему геометрическом P и Q.

Формула (8) нѣсколько сложна и потому неудобна для под счетовъ. Дадимъ этой формулѣ болѣе простой видъ.

Если бы водопроводъ того же діаметра, какъ и данный, при той же разности уровней H расходовалъ воду только н оконечности, то расходъ R можно бы было опредѣлить по соот ношенію:

$$H = \frac{R^2 L}{\gamma d^5} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (9)$$

Сравнивая соотношенія (8) и (9) и сокращая ихъ на общаго множителя $\frac{\mathrm{L}}{\gamma d^5}$, найдемъ:

$$\mathrm{R}^2 = P^2 + P\mathrm{Q} + \frac{Q^2}{3},$$

откуда

$$\mathrm{R}^2 = \left(P + \frac{Q}{\sqrt{3}} \right)^2 - \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{3}} \, P\,\mathrm{Q}$$

и

$$\mathrm{R}^2 = \left(P + 0{,}5\ Q \right)^2 + \frac{Q^2}{12},$$

(9)

т. е.

$$P + 0{,}57735\ Q > \mathrm{R} > P + 0{,}5\ Q.$$

Слѣдовательно, безъ большой погрѣшности можно считать

$$R = P + 0{,}57\,Q$$

и искать діаметръ d по даннымъ P, Q, L и H изъ формулы

$$H = \frac{(P + 0{,}57Q^{2})^{2}\,\mathrm{L}}{\gamma d^5},$$

которая показываетъ, что общая потеря на треніе будетъ такова, какъ будто бы на концѣ существовалъ расходъ:

$$P + 0{,}57Q,$$

Но замѣтимъ, что для промежуточныхъ сѣченій это ра ство не будетъ имѣть мѣста.

Всѣ приблизительныя формулы, которыя мы выводили, им ютъ приложеніе исключительно для составленія предварит ныхъ разсчетовъ водопровода. Такъ напр., разсмотрѣнный зд случай по своимъ условіямъ близко подходитъ къ случаю улич трубы. Всякая изъ этихъ трубъ передаетъ часть своего рас слѣдующей трубѣ и часть отдаетъ многочисленнымъ труб отводящимъ воду въ дома. Понятно, что непрерывнаго расходов въ буквальномъ значеніи этого слова не имѣется, но такое до щеніе приводитъ къ удобнымъ формуламъ, которыми можно успѣхомъ пользоваться для предварительныхъ соображеній.

Замѣтимъ кромѣ того, что высоты уровней воды въ ре вуарахъ надъ центрами конечныхъ сѣченій a и b можно въ общ случаѣ разсматривать, какъ соотвѣтствующія этимъ сѣченія заданныя пьезометрическія высоты.

§ 36.

Простой водопроводъ съ перемѣннымъ расходом и перемѣннымъ діаметромъ.

Часто бываетъ, это будетъ случай главныхъ водопроводн линій, что расходъ на пути сосредоточенъ въ нѣсколькихъ пун тахъ, значительно отстоящихъ одинъ отъ другого. Въ таком случаѣ послѣ отвѣтвленія діаметръ трубы уменьшается и перехо ное звено дѣлается коническимъ (чер. 70). Отводящія тру 1, 2, 3 . . . . . . ставятся обыкновенно непосредственно пере коническими звеньями

Если мы будемъ примѣнять ур—іе Бернулли къ теченію воды отъ уровня, верхняго резервуара до уровня нижняго, то получимъ по предыдущему:

$$H=\frac{q_1{}^2\,l_1}{\gamma d_1{}^5}+\frac{q_2{}^2\,\lambda_1}{4\gamma(d_1-d_2)}\left(\frac{1}{d_2{}^4}-\frac{1}{d_1{}^4}\right)+\frac{q_2{}^2\,l_2}{\gamma d_2{}^5}+$$

$$+\frac{q_3{}^2\,\lambda_2}{4\gamma(d_2-d_3)}\left(\frac{1}{d_3{}^4}-\frac{1}{d_2{}^4}\right)+\frac{q_3{}^2\,l_3}{\gamma d_3{}^5}+$$

$$\frac{q_4\,\lambda_3}{4\gamma(d_3-d_4)}\left(\frac{1}{d_4{}^4}-\frac{1}{d_3{}^4}\right)+\frac{q_4{}^2\,l_4}{\gamma d_4{}^5}+\ldots\ldots$$

Такъ какъ данными обыкновенно являются расходы и пьезометрическія высоты cm_1, cm_2, gm_3 и т. д. то мы можемъ писать:

для первой трубы:

[illegible]

$$m_1m_1'=\frac{q_1{}^2l_1}{\gamma d_1^5},$$

откуда и можемъ опредѣлить $d_1{}^5$;

для 1-го конуса ~~въ первой трубѣ~~: и второй трубы

$$m_2m_2'-m_1m_1'=\frac{\lambda_1 q_2{}^2}{4\gamma(d_1-d_2)}\left(\frac{1}{d_2{}^4}-\frac{1}{d_1{}^4}\right)\pm\frac{q_2{}^2l_2}{\gamma d_2{}^5},\quad (?)$$

откуда по найденному раньше d_1 опредѣлимъ d_2 и т. д.

Разъ діаметры всѣхъ трубъ опредѣлены, можно, пользуясь выведенными выше формулами, построить прямую пьезометрическихъ высотъ $M\ m_1n_1m_2n_2\ldots\ldots\ldots$

§ 37.

Водопроводъ, соединяющій три резервуара.

Пусть A B и C будутъ три резервуара (чер. 71), сообщающіеся между собой трубами ad, cd, и db. Пусть

h будетъ разность уровней резервуаровъ A и C,

h_1 — разность уровней резервуаровъ A и B,

l, l_1 и l_2 — длины трубъ ad, bd и cd,

q, q_1 и q_2— объемы протекающей по нимъ въ одну секунду воды и, наконецъ,

d, d_1 и d_2 — ихъ діаметры.

Понятно, что верхній резервуаръ A можетъ только снабжать водою остальные резервуары, а нижній C—только получать воду отъ двухъ верхнихъ; что же касается до средняго резервуара B, то онъ можетъ быть и снабжающимъ и расходующимъ въ зависимости отъ пьезометрической высоты въ точкѣ развѣтвленія d.

Положимъ, что пьезометрическая высота въ точкѣ d есть dm; при этомъ отрѣзокъ $em=y$, продолженіе прямой, представляющей пьезометрическую высоту, между концами ея и горизонтальной плоскостью MM, которая служитъ продолженіемъ уровня резервуара, A выражаетъ петерю напора на протяженіи трубы ad.

Если точка m лежитъ выше уровня резервуара B, то этотъ резервуаръ, понятно, будетъ получать воду, если же точка лежитъ ниже уровня резервуара B, то онъ будетъ снабжать водою резервуаръ C. Допустимъ сначала, что мы имѣемъ первый случай, т. е. что точка m лежитъ выше уровня резервуара B; тогда во—первыхъ, мы будемъ имѣть:

$$q=q_1+q_2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

и затѣмъ для потерь напоровъ въ частяхъ *ad*, *bd* и *cd* получимъ:

$$y = \frac{q^2 l}{\gamma d^5} \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad (2)$$

$$h_1 - y = \frac{{q_1}^2 l_1}{\gamma {d_1}^5} \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad (3)$$

$$h - y = \frac{{q_2}^2 l_2}{\gamma {d_2}^5} \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad (4)$$

Для второго случая найдемъ:

$$q_2 = q + q_1 \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad (1')$$

$$y = \frac{q^2 l}{\gamma d^5} \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad (2')$$

$$y - h_1 = \frac{{q_1}^2 l_1}{\gamma {d_1}^5} \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad (3')$$

$$h - y = \frac{{q_2}^2 l_2}{\gamma {d_2}^5} \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad (4')$$

Задача въ томъ и другомъ случаѣ вполнѣ опредѣленная, т. к. для опредѣленія 4-хъ неизвѣстныхъ q, q_1 q_2 и y имѣемъ четыре уравненія.

Но прежде всего надо рѣшить вопросъ, который изъ группъ ур—ій мы должны пользоваться, т. е. какой случай мы имѣемъ.

Для рѣшенія этого полагаемъ:

$$y = h_1$$

и опредѣляемъ q и q_2. Если окажется, что $q > q_2$, то изъ резервуара *A* вытекаетъ воды больше, чѣмъ притекаетъ въ *C*, слѣдовательно, это будетъ первый случай, и мы должны примѣнить I группу ур—ій; если же $q < q_2$, то имѣетъ мѣсто второй случай. Замѣтимъ, что высоты уровней воды въ резервуарахъ надъ сѣч. *a*, *b* и *c* могутъ изображать изъ себя заданныя пьезометрич. высоты въ этихъ сѣченіяхъ. Такой случай можетъ имѣть мѣсто въ водопроводной сѣти кольцевой системы, которая устраиваетс такъ, что ко всякой трубѣ вода можетъ подходить съ двухъ сторонъ и потому можетъ оказаться интереснымъ разрѣшить вопросъ, въ какомъ направленіи движется въ нэй вода при какихъ-нибудь опредѣленныхъ условіяхъ

Тотъ же самый случай имѣемъ во всякомъ развѣтвленіи обыкновеннаго водопровода; но только при этомъ направленіе движенія въ каждой трубѣ извѣстно. Обыкновенно одна труба питаетъ двѣ, т. ч. придется пользоваться первой группой изъ написанныхъ выше уравненій. Такимъ образомъ при помощи этихъ ур—ій и можно рѣшить, какое количество воды протекаетъ по каждому изъ отвѣтвленій существующаго водопровода.

Если же мы разрѣшаемъ ту же задачу для водопровода строющагося, то данными являются расходы и пьезометрическія высоты, а искомыми діаметры трубъ.

При этомъ мы будемъ имѣть только три ур—ія, т. к, ур—іе (1) обращается въ тождество.

§ 38.

Труба, питающаяся съ двухъ концовъ.

Разсматривая водопроводъ съ постояннымъ діаметромъ и перемѣннымъ расходомъ, состоящимъ изъ расхода P на оконечности и равномѣрнаго расхода Q на протяженіи всей трубы, мы нашли, что если бы расходъ на пути прекратился, то та же самая труба при тѣхъ же условіяхъ давала бы расходъ на оконечности R, который опредѣляется изъ слѣдующаго соотношенія:

$$R^2 = P^2 + PQ + \frac{Q^2}{3}$$

$\pm\sqrt{\frac{Q^2}{4} - \frac{Q^2}{3} + R^2} =$

$\sqrt{3R^2 - Q^2}$

Разрѣшая это ур—іе относительно P, получимъ:

$$P=-0,5Q+\sqrt{R^2-\frac{Q^2}{12}} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

$= -0,5Q +$

Это ур—іе показываетъ, что пока

$$Q<R\sqrt{3},$$

$\sqrt{3}$

расходъ P на оконечности существуетъ; если же

$0,5Q = \sqrt{}$

$$Q=R\sqrt{3},$$

$\frac{Q^2}{4} =$

то P обращается въ нуль т. е. въ этомъ случаѣ существуетъ только расходъ на пути; если наконецъ

$$Q>R\sqrt{3},$$

то P становится отрицательнымъ.

Въ такомъ случаѣ, слѣдовательно, нижній резервуаръ обращается въ снабжающій, такъ что часть трубы ac, длиною l_1, будетъ питаться изъ резервуара A и часть трубы bc длиною l_2, изъ резервуара B. Точку c называютъ *точкой раздѣла* питанія

Пусть высота уровня резервуара A надъ точкой e есть

$$ce=z$$

и пьезометрическая высота въ этой точкѣ—em, т. ч.

$$me=h=z-em.$$

Обозначимъ количество расходуемой воды въ секунду на единицѣ длины трубы через q и полную длину трубы через L. Тогда мы, во-первыхъ, имѣемъ:

$$L=l_1+l_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

и, во вторыхъ, по предыдущему при расходѣ на пу

$$h=\frac{(ql_1)^2 l_1}{3\gamma d^5}=\frac{q^2}{3\gamma d^5}l_1^{\,3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

и

$$h-H=\frac{q^2}{3\gamma d^5}l_2^{\,3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Положимъ, что мы разсматриваемъ нѣкоторую трубу въ существующемъ водопроводѣ. Въ такомъ случаѣ мы должны считать данными d и q, а искомыми l_1, l_2 и h. Мы имѣемъ три ур—ія съ тремя неизвѣстными, потому, слѣдовательно, задача является вполнѣ опредѣленной.

Этотъ случай будетъ соотвѣтствовать уличной трубѣ, примыкающей къ двумъ главнымъ водопроводнымъ линіямъ, при чемъ высоты уровней въ резервуарахъ надъ крайними сѣченіями a и b можно разсматривать какъ пьезометр. высоты въ этихъ двухъ линіяхъ въ мѣстахъ примыканія къ нимъ уличной трубы. При обыкновенныхъ условіяхъ вода будетъ течь по такой трубѣ въ опредѣленномъ направленіи, но въ случаѣ экстреннаго расхода вода можетъ притекать въ трубу съ двухъ сторонъ. Экстренный расходъ можетъ быть намѣченъ предварительно; почему и можетъ оказаться важнымъ провѣрить, какова будетъ въ этомъ случаѣ наименьшая пьезометрическая высота и найти мѣсто трубы, которому она будетъ соотвѣтствовать. Очевидно, что это и будетъ точка раздѣла c, которой будетъ соотвѣтствовать наименьшая пьезометрическая высота, равная

$$cm=z-h.$$

Такъ какъ z есть величина извѣстная, то для опредѣленія cm достаточно найти h.

Чтобы рѣшить поставленные вопросы, воспользуемся уравненіями (1), (2) и (3).

Исключимъ изъ ур—ій (2) и (3) h; тогда получимъ:

$$H=\frac{q^2}{3\gamma d^5}(l_1{}^3-l_2{}^3) \quad . \; . \qquad . \; . \; . \; . \; . \; (4)$$

Теперь при помощи ур—ія (1) исключимъ изъ ур—ія (4 l_2 черезъ L и l_1; будемъ имѣть:

$$H=\frac{q^2}{3\gamma d^5}(2l^3{}_1-3Ll^2{}_1+3L^2l_1-L^3) \quad . \; . \quad (5)$$

Изъ этого ур—ія можно опредѣлить l_1, а затѣмъ изъ ур—ія (2) найдемъ и h.

Ур—іе (5) кубическое, но численное, т. ч. истинную величину l_1 можно найти попытками. Легко сразу замѣтить, что $l_1 > l_2$ что видно изъ ур—ія (4), такъ что

$$l_1 > \frac{L}{2}$$

Поэтому сразу уже можно задаться величиной l_1, удовлетвор. ур. (5).

Найдемъ теперь кривую пьезометрическихъ высотъ для части ac, считая h извѣстнымъ. При этомъ, такъ же какъ и въ предыдущихъ случаяхъ, мы будемъ считать длины трубы равными ихъ горизонтальнымъ проекціямъ, предполагая кромѣ того, что ось трубы лежитъ въ вертикальной плоскости. Если мы возьмемъ за начало координатъ точку M, то, какъ мы видѣли, искомая кривая будетъ представлять зависимость между потерянными напорами и ~~η~~ l.

Вычислимъ, поэтому, потерянный напоръ для какой нибудь точки d, предполагая, что длина трубы $ad=l$.

Если полный расходъ по всей длинѣ трубы есть

$$ql_1=s_0, \quad \Big| \; q=\frac{s_0}{l_1}$$

то черезъ сѣченія l d будетъ протекать количество

$$s=q(l_1-l)=s_0\,\frac{l_1-l}{l_1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (6)$$

и потеря напора на послѣдующемъ элементѣ dl будетъ:

$$d\eta=\frac{s^2dl}{\gamma d^5}$$

и

$$\eta=\frac{1}{\gamma d^5}\int\limits_o^l s^2dl \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (7)$$

Изъ соотношенія (6) имѣемъ:

$$ds=-s_0\,\frac{dl}{l_1}$$

и

$$dl=-\frac{l_1}{s_0}\,ds.$$

Подставляя это выраженіе подъ знакъ интеграла, получимъ

$$\eta = -\frac{l_1}{\gamma d^5\, s_0}\int_{s_0}^{s} s^2 ds = -\frac{l_1}{3\gamma d^5 s_0}\left\{\left(s_0\frac{l_1-l}{l_1}\right)^3 - s_0{}^3\right\} =$$

$$= \frac{l_1\, s_0{}^2}{3\gamma\, d^5}\left\{1-\left(\frac{l_1-l}{l_1}\right)^3\right\}$$

Это есть кубическая порабола, которая будетъ проходить очевидно, черезъ точку M, ибо при $l=0$, $\eta=0$.

Найдемъ ея вершину. Съ этой цѣлью положимъ

$$\frac{d\eta}{dl}=0$$

Отсюда найдемъ:

$$\frac{l_1-l_0}{l_1}=0,$$

или

$$l_0=l_1$$

и ордината ея

$$\eta_0=\frac{l_1\ s_0{}^2}{3\gamma\ d^5}=h,$$

что явствуетъ изъ ур—iя (2). Слѣдовательно верш. параболы лежитъ въ точкѣ m. Къ тому же результату придемъ и для трубы bc.

Явленiе подобнаго же рода можетъ возникнуть и при другихъ обстоятельствахъ.

Очень часто, напримѣръ, устраиваютъ водопроводы съ двумя баками. Во время наибольшаго расхода, т. е. въ теченіи дня, нижній резервуаръ является снабжающимъ; когда же расходованіе на пути уменьшается, второй резервуаръ получаетъ воду отъ перваго и накапливаетъ ее, чтобъ стать опять снабжающимъ.

Въ этомъ случаѣ данными задачи, какъ и вообще при проектированіи водопроводовъ, являются пьезометрическая высота въ точкѣ раздѣла, или иначе сказать, h и расходъ, а искомымъ діаметръ d.

Для рѣшенія задачи мы можемъ воспользоваться тремя ур—іями (1), (2) и (3).

Раздѣляя ур—іе (2) на ур—іе (3), получимъ:

$$\frac{l_1}{l_2}=\sqrt[3]{\frac{h}{h-H}}.$$

Это соотоошеніе вмѣстѣ съ ур—іемъ (1) даетъ возможность опредѣлить l_1 и l_2.

Извлекая корни кубическіе изъ обѣихъ частей ур—ій (2) и (3) и складывая ихъ, найдемъ:

$$L=l_1+l_2=\sqrt[3]{\frac{3\gamma d^5}{q^2}}\left(\sqrt[3]{h}+\sqrt[3]{h-H}\right)\ .$$

откуда легко найдемъ діаметръ; именно: где Q = q

$$d^5=\frac{q^2}{3\gamma}\frac{L^3}{\left(\sqrt[3]{h}+\sqrt[3]{h-H}\right)^3}=\frac{Q^2}{3\gamma}\frac{L^3}{\left(\sqrt[3]{h}+\sqrt[3]{h-H}\right)^3}\,..(8)$$

Устройствомъ водопровода съ двумя резервуарами можно во многихъ случаяхъ значительно сберечь капиталъ.

§ 39.

Равномѣрное движеніе воды въ рѣкахъ и каналахъ.

Въ гидравликѣ рѣкой называютъ всякій естественный, а каналомъ открытый искусственный водопроводъ. Такъ какъ размѣры поперечныхъ сѣченій и рѣкъ и каналовъ значительны, то нѣтъ основаній считать ихъ за одну струю, всѣ частицы которой обладаютъ одинаковыми и параллельными скоростями. Въ дѣйствительности, какъ обнаружили многочисленныя наблюденія, скорости различныхъ струекъ сильно разнятся между собою. Но тѣмъ не менѣе однако при современномъ состояніи гидромеханики не представляется еще возможнымъ прослѣдить движеніе отдѣльныхъ частицъ, поэтому вмѣсто этого приходится разсматривать не дѣйствительное, а фиктивное движеніе. Это фиктивное движеніе строится совершенно такъ же, какъ и фиктивное движеніе въ трубахъ, т. е. предполагается, что всѣ частицы движутся со скоростями равными и параллельными оси рѣки или канала, при чемъ эта скорость опредѣляется по соотношенію

$$v = \frac{Q}{\Omega},$$

гдѣ Q—секундный расходъ, а Ω—площадь нормальнаго къ оси сѣченія. Какъ показываетъ практика, результаты такого допущенія не ведутъ къ значительной погрѣшности; но все-таки никогда не нужно забывать, что дѣйствительное движеніе будетъ совершенно иное, такъ какъ это обстоятельство часто приходится принимать во вниманіе.

Равномѣрное движеніе относится главнымъ обра къ искуственнымъ каналамъ, обладающимъ на всемъ и на значительномъ протяженіи постояннымъ уклономъ и п стояннымъ имѣющимъ въ большинствѣ случаевъ прави ную геометрическую форму, сѣченіемъ.

Въ рѣкахъ же точно равномѣрное движеніе мож имѣть мѣсто только на протяженіи нѣкотораго небольш участка. Если теченіе равномѣрное, т. е. $v=const.$ и расхо во всякомъ сѣченіи въ силу несжимаемости жидкости е величина постоянная, то и $\Omega=const.$

Положимъ, что мы имѣемъ продольное сѣченіе АВС длиною l, которую отсчитываемъ по горизонтальному напр ленію, съ постояннымъ уклономъ дна AD къ горизонту равны i (черт. 72). Такъ какъ при равномѣрномъ теченіи Ω пос янно, то при одинаковой формѣ сѣченій канала и глуби его всюду постоянна. Отсюда же слѣдуетъ, что свобод поверхность воды будетъ наклонена къ горизонту подъ тѣм же угломъ i.

Примѣнимъ къ теченію воды по разсматриваемо участку канала ур. Д. Бернулли, вводя въ него членъ, висящій отъ сопротивленій, характеръ которыхъ мы вы нили раньше.

Обозначая всѣ величины, входящія въ это уравне по отношенію къ сѣченію AB значкомъ 1 и тѣ же величи для сѣченія CD значкомъ 2, найдемъ:

$$\cancel{\frac{v_1^2}{2g}} + \cancel{\frac{p_1}{\Delta}} + z_1 = \cancel{\frac{v_2^2}{2g}} + \cancel{\frac{p_2}{\Delta}} + z_2 + \eta \quad . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

Такъ какъ по условію движеніе равномѣрное и гл бина канала, слѣдовательно, постоянна, то имѣемъ:

$$v_1 = v_2 \text{ и } p_1 = p_2$$

Кромѣ того, если мы проведемъ через точку B горизонталь BN до пересѣченія съ вертикалью DC, то найдемъ, что

$$z_1 - z_2 = CN = h.$$

Такимъ образомъ ур......іе (2) намъ дастъ

$$h = \eta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

т. е. паденіе цѣликомъ затрачивается на преодолѣніе вредныхъ сопротивленій.

Остается дать выраженіе высотѣ η потеряннаго напора.

Многочисленные опыты показали, что работа вредныхъ сопротивленій, какъ и при движеніи воды по трубамъ, пропорціональна поверхности соприкосновенія и есть нѣкоторая функція скорости.

Обозначая периметръ сѣченія канала, по которому проходитъ соприкосновеніе съ водой, или, какъ говорятъ, *смоченный периметръ*, через O, найдемъ, что работа сопротивленія на протяженіи разсматриваемаго участка есть:

сила $= O. l. \varphi$

$$R = O.\ l.\ \varphi(v).v$$

При этомъ, вслѣдствіе малой разницы, мы считаемъ $AD = l$. Чтобы получить высоту сопротивленія, надо отнести работу R къ 1 $kgr.$ протекающей въ 1 сек. воды. Такимъ образомъ

$\Omega v \Delta = P$ полный вѣсъ

$$\eta=\frac{0.l.\varphi(v).v}{\Omega.\ v.\ \Delta}=\frac{O}{\Omega}.l\ \frac{\varphi(v)}{\Delta}$$

Потеря высоты на единицѣ длины есть:

$$\frac{\eta}{l}=\frac{h}{l}=\frac{0}{\Omega}.\ \frac{\varphi(v)}{\Delta}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (4)$$

$$i=\frac{1}{r}\ \frac{\varphi(v)}{\Delta}.$$

Легко видѣть (черт. 73). что

$$\frac{h}{l}=tgi=i,$$

Такъ какъ уголъ *i* очень малъ. Величину *i* называютъ *паденіемъ* или *уклономъ* и выражаютъ въ тысячных долях длины. Если, напр., l=1,5⁰/₀₀ (промили), то это значитъ, что h=1,5 *mtv*. на длинѣ l=1000 *mtv*. Отношеніе $\frac{\Omega}{O}=$ принято называть *среднимъ радіусомъ* сѣченія.

Такимъ образомъ ур-іе (4) даетъ:

$$ri=\frac{\varphi(v)}{\Delta}\ \ldots\ldots\ldots\ (5)$$

Многочисленныя наблюденія показали, что $\frac{\varphi(v)}{\Delta}$ имѣетъ такое выраженіе:

$$\frac{\varphi(v)}{\Delta}=av+bv^2$$

Для коэф. a и b Прони даетъ:

$$a,=0{,}000044 \text{ и } b=0{,}000309.$$

Дарси и Базенъ нашли возможнымъ положить:

$$\frac{\varphi(v)}{\Delta}=bv^2 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (7)$$

Имѣя въ виду этого соотношеніе, можемъ представить ф. (5) въ такомъ видѣ

$$ri=bv^2,$$

или

$$v=\frac{1}{\sqrt{b}}\sqrt{ri}=c\sqrt{ri} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (8),$$

гдѣ $c=\frac{1}{\sqrt{b}}$

При этомъ Bazin полагалъ

$$b=\alpha+\frac{\beta}{r},$$

гдѣ α и β постоянные коэффиціенты, а r средній радіусъ.

Для коэфф. α и β даются слѣдующія значенія:

1) Стѣнки канала очень гладкія (цементн. штукатурка, строган. доски и т. п.) $\alpha=0{,}00015$; $\beta=0{,}0000045$

2) Гладкія стѣнки (кладка изъ тесанныхъ камней, кладка кирпич., деревян. доски) . . . . $\alpha=0{,}00019$; $\beta=0{,}0000133$

3) Стѣнки изъ бутовой кладки . $\alpha=0{,}00024$; $\beta=0{,}00006$.

4) Земляныя стѣнки . . . . $\alpha=0{,}00028$; $\beta=0{,}00035$.

5) Каменное русло . . . . $\alpha=0{,}0004$; $\beta=0{,}0007$.

Bazin давалъ коэфф. с. и другое выраженіе, которое, кажется, ближе соотвѣтствуетъ дѣйствительности,

Это выраженіе таково:

$$c=0{,}0115\left(1+\frac{7}{\sqrt{r}}\right)$$

Швейцарскіе инженеры Ganguillet et Kutter выражаютъ c такой формулой:

$$c=\frac{23+\frac{0{,}00115}{i}+\frac{1}{n}}{i+\left(23+\frac{0{,}00115}{i}\right)\frac{n}{\sqrt{r}}}$$

Постоянное количество n называютъ степенью шероховатости.

Въ двухъ послѣднихъ формулахъ надо принимать для коэфф. слѣдующія численныя значенія:

1) Очень гладкія стѣнки . . . . $\gamma=0{,}06$; $n=0{,}010$
2) Гладкія стѣнки . . . . $\gamma=0{,}16$; $n=0{,}012$
3) Стѣнки изъ бутовой кладки . . . . . . $\gamma=0{,}46$; $n=0{,}017$
4) Стѣнки земляныя, но твердыя и правильныя; грубая бутовая кладка . . . . . . $\gamma=0{,}85$; $n=0{,}020$
5) Земляныя стѣнки . . . . $\gamma=1{,}30$; $n=0{,}025$
6) Особенно шероховатыя стѣнки (крупная галька, водоросли) . . . . $\gamma=1{,}75$; $n=0{,}030$

Слѣдуетъ упомянуть еще о формулѣ американскихъ инженеровъ Гумфрейса и Аббота. На основаніи своихъ опытовъ на рѣкѣ Миссисипи, они даютъ такую эмпирическую формулу для равномѣрнаго движенія воды въ рѣкахъ:

$$v=\left[\sqrt{0{,}0025\,b+\sqrt{68{,}72r\sqrt{i}-0{,}05b}}\right]^2 mtr.,$$

$$v=0{,}0025b+\sqrt{64{,}72r\sqrt{i}-0{,}05b}\ mtr$$

въ которой

$$r=\frac{\Omega}{O+L} \quad \text{и} \quad b=\frac{0{,}933}{\sqrt{h}+0{,}457},$$

при чемъ Ω, O, L и h обозначаютъ площадь сѣченія, периметръ сѣченія, ширину и глубину рѣки.

Въ формулѣ этой члены, содержащіе коэффиціентъ b, имѣютъ слабое вліяніе на окончательные выводы,—поэтому вмѣсто этой формулы можно пользоваться слѣдующей болѣе простой:

$$v=8{,}28972\sqrt{\frac{\Omega}{O+L}}\cdot\left(\cdot i\right)^{1/4} mtr.$$

Съ точки зрѣнія приложеній представляется интер реснымъ знать, хотя бы приблизительно, соотношенія, кото рыя связываютъ среднюю скорость и скорость частиц непосредственно прилегающихъ къ стѣнкамъ со скоростям нѣкоторыхъ опредѣленныхъ струекъ, которыя можно непо средственно наблюдать. Таковой скоростью, которую пред ставляется очень удобно измѣрять, является наибольшая скорость на поверхности, скорость стрежня. Что же касает ся до скорости на днѣ, то этой то скоростью и опреде ляется главнымъ образомъ средняя скорость искусственныхъ каналовъ, такъ какъ она должна быть такова, чтобы дно не размывалось.

Обозначимъ скорость стрежня черезъ v_0 и скорость у дна черезъ w.

По Прони между этими скоростями и средней ско ростью V существуютъ слѣдующія соотношенія:

$$v = v_0 \frac{v_0 + 2{,}372}{v_0 + 3{,}153}$$

$$w = 2\,v - v_0$$

Эти формулы были выведены имъ на основаніи мно гочисленныхъ опытовъ Dubuat.

По Bazin'у:

$$v_0 = v + 14\sqrt{ri},$$

$$w = v - 6\sqrt{ri}.$$

Скорость у дна не должна превосходить слѣдующихъ значеній:

1) Плотный песокъ	w=0,9 *mtr.*
2) Плотный глинистый грунтъ	w=1,5 *mtr.*
3) Каменистый грунтъ; дно укрѣплено одиночной мостовой	w=2,100 *mtr.*
4) Скалистый; дно укрѣплено двойной мостовой	w=3, *mtr.*
5) Лотокъ изъ каменной кладки	w=4,25 *mtr.*
6) Деревянный лотокъ	w=6,00 *mtr*

Всѣ эти формулы можно считать болѣе или менѣе приложимыми къ искусственнымъ каналамъ.

Что же касается до рѣкъ, то, строго говоря, всѣ эти формулы справедливы только для тѣхъ рѣкъ, на которыхъ производились опыты, давшіе матеріалъ для построенія формулъ. Дѣйствительно, какъ показываетъ опытъ, каждая рѣка представляетъ такую массу особенностей, что требуетъ особаго спеціальнаго изслѣдованія, которое и можетъ дать матеріалъ для составленія формулы движенія воды именно только въ данной рѣкѣ.

Такой то формулой и можно уже будетъ съ успѣхомъ пользоваться для рѣшенія различнаго рода могущихъ возникнуть вопросовъ.

Примѣнимъ выведенныя формулы къ рѣшенію нѣкоторыхъ вопросовъ. При этомъ мы будемъ пользоваться первой формулой Bazin' а, какъ самой простой и въ то же время одной изъ самыхъ надежныхъ.

Эта формула, какъ мы видѣли, пишется такъ:

$$ri=\left(\alpha+\frac{\beta}{r}\right)v^2 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (9)$$

Къ этой формулѣ при рѣшеніи различнаго рода задачъ слѣдуетъ присоединить соотношенія:

$$Q = \Omega\, v \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (10)$$

$$r = \frac{\Omega}{O} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (11)$$

1-ая задача.

Даны форма и размѣры поперечнаго сѣченія и секундный расходъ Q, требуется опредѣлить уклонъ.

Такъ какъ данными являются Ω, O и Q, то по формулѣ (10) найдемъ:

$$v = \frac{Q}{\Omega},$$

а по формулѣ (11)

$$r = \frac{\Omega}{O} \text{ и, слѣдоватеьно, } b = \alpha + \frac{\beta}{r}.$$

Тогда изъ ур—ія (9) имѣемъ:

$$i = \frac{b.v^2}{r}$$

а) Каналъ прямоугольный (черт. 74), *съ шириной l и высотой h.*

Для такого канала имѣемъ:

$$\Omega=lh;\quad O=l+2h;\quad r=\frac{lh}{l+2h}\ \text{и}\ v=\frac{Q}{lh}$$

Такимъ образомъ:

$$\cancel{b}=\alpha+\frac{\beta(l+2h)}{lh}$$

и

$$i=\frac{\left\{\alpha+\frac{\beta(l+2h)}{lh}\right\}.\frac{Q^2}{l^2h^2}}{lh}(l+2h)\,,$$

откуда:

$$i=\frac{\left\{\alpha lh+\beta(l+2h)\right\}Q^2}{l^4\ h^4}(l+2h)\quad .$$

в) Сѣченіе трапецоидальное (черт. 75): *ширина дна* $=l$, *глубина* $=h$ *и уголъ наклона боковыхъ сторонъ къ горизонту* $=\alpha$.

Тогда, какъ легко видѣть,

$$cd=l+2dd'=l+\frac{2h}{tg\alpha},$$

такъ что

$$\Omega=\frac{l+l+\frac{2h}{tg\alpha}}{2}\cdot h=\left(l+\frac{h}{tg\alpha}\right)h.$$

Легко видѣть также, что

$$ac=bd=\frac{h}{sin\alpha},$$

такъ что

$$O=\overset{l}{h}+bd+ac=l+\frac{2h}{sin\alpha}$$

Пользуясь этими выраженіями, мы легко найдемъ по ур—іямъ (10) и (11) r и v, а слѣдовательно и β; затѣмъ изъ ур—ія (9) найдемъ уже i.

c) Сѣченіе полукруглое діаметра d (черт. 76).

Въ этомъ случаѣ:

$$\Omega=\frac{\pi d^2}{8};\quad O=\frac{\pi d}{2}\quad \text{и}\quad r=\frac{Q}{O}=\frac{d}{4},$$

такъ что

$$b=\alpha+\frac{4\beta}{d},\quad v=\frac{8}{\pi}\frac{Q}{d^2}$$

Подставляя всѣ эти выраженія въ ур—іе (9), найдемъ,

$$i=\frac{bv^2}{r}=\frac{\left(\alpha+\frac{4\beta}{d}\right)64Q^2.4}{\pi^2d^4.d},$$

откуда

$$i=\frac{(\alpha d+4\beta)\ 256Q^2}{\pi^2\ d^6}$$

2-ая задача.

По даннымъ формѣ, размѣрамъ поперечнаго сѣченія канала и уклону i опредѣлить Q.

Данными, слѣдовательно, являются Ω, O и i.

Изъ ур—ія (11) опредѣляемъ

$$r=\frac{\Omega}{O}$$

и, слѣдовательно, затѣмъ

$$b=\alpha+\frac{\beta}{r}.$$

Тогда изъ ур—ія (9) легко найдемъ:

$$v=\sqrt{\frac{ri}{\alpha+\frac{\beta}{r}}}$$

и, наконецъ, изъ ур—ія (10)

$$Q=\Omega . v=\Omega\sqrt{\frac{ri}{\alpha+\frac{\beta}{r}}}$$

3-ья задача.

Данъ секундный расходъ, форма и размѣры русла и уклонъ i; требуется найти положеніе свободной поверхности.

Подставимъ выраженіе для r изъ ур—ія (11) и выраженіе для v изъ ур—ія (10) въ ур—іе (9), тогда получимъ:

$$\frac{\Omega}{O}\, i=\left(\alpha+\frac{\beta\, O}{\Omega}\right)\frac{Q^2}{\Omega^2},$$

откуда

$$i=\frac{O.Q}{\Omega^3}\left(\alpha+\frac{\beta.O}{\Omega}\right) \;.\;.\;.\;.\;.\;\text{(a)}$$

Это послѣднее ур—іе содержитъ два неизвѣстныхъ: Ω и O, зависящихъ одно отъ другого и отъ положенія свободной поверхности. Если сѣченіе русла неправильной формы, то задачу можно рѣшать попытками, задаваясь уровнемъ воды и, слѣдовательно, величинами Ω и O. Если эти величины, будучи подставлены въ ур—іе (а), обращаютъ его въ тождество, то задача будетъ рѣшена.

Если же сѣченіе имѣетъ правильную геометрическую форму, то ур—іе (а) содержитъ только одно неизвѣстное.

a) Сѣченіе прямоугольное; тогда

$$\Omega=lh \quad \text{и} \quad Q=l+2h.$$

Подставляя эти выраженія въ ур—іе (a), получимъ ур—іе 4-ой степени относительно неизвѣстнаго h, которое и можетъ быть найдено попытками.

b) Сѣченіе трапецоидальное. Въ этомъ случаѣ, какъ мы видѣли раньше,

$$\Omega= l+\frac{h}{tg\alpha} \quad \text{и} \quad Q=l+\frac{2h}{sin\alpha}$$

Подставляя эти выраженія въ ур—іе (a), опять получимъ ур—іе 4-ой степени относительно неизвѣстнаго h.

4-ая задача.

Данъ секундный расходъ Q, средняя скорость v и форма канала; требуется опредѣлить отношеніе между размѣрами сѣченія такъ, чтобы паденіе было наименьшее.

a) Сѣченіе прямоугольное.

Изъ ур—ія (9) находимъ:

$$i=\left(\alpha+\frac{\beta}{r}\right)\frac{v^2}{r}$$

Если обозначимъ ширину канала черезъ l и глубину слоя воды черезъ h, то найдемъ

$$O=l+2h,$$

т. ч. по ур—iю (11)

$$r=\frac{\Omega}{l+2h}$$

Такимъ образомъ:

$$i=\left(\alpha+\frac{\beta(l+2h)}{\Omega}\right).\ \frac{(l+2h)v^2}{\Omega}$$

Такъ какъ Q и v намъ заданы, то, что видно изъ ур—iя (10), $\Omega=lh$ есть также величина опредѣленная. Отсюда и видно, что *minimum'у* i соотвѣтствуетъ *minimum* O.

Мы видимъ, что O зависитъ отъ двухъ перемѣнныхъ: h и l; но одно изъ этихъ перемѣнныхъ можетъ быть исключено черезъ данную величину Ω.

Такимъ образомъ имѣемъ:

$$O=l+2h=l+\frac{2hl}{l}=l+\frac{2\Omega}{l}.$$

Чтобы получить значенiе l, обращающее O въ *minimum*, приравняемъ $\frac{dO}{dl}$ нулю; тогда получимъ:

$$\frac{dO}{d\,l}=1-\frac{2\Omega}{l^2}=0,$$

откуда

$$l^2=2\Omega \quad = 2lh$$

$l=2h$

или

$$l^2-2lh=0=l(l-2h)=0.$$

Отсюда

$$l=2h,$$

т. е. ширина должна быть въ два раза больше глубины; прямоугольникъ будетъ половиной квадрата.

b) Сѣченіе трапецоидальное.

Въ этомъ случаѣ кромѣ Q и v дается еще и уголъ α (черт. 75).

1) Стѣнки мощенныя . . . . $\alpha=63^0\ 26'$
2) Твердый грунтъ . . . . $\alpha=45^0$
3) Рыхлый грунтъ . . . . $\alpha=26^0\ 30'$

Легко видѣть, что

$$\Omega=\left(l+\frac{h}{tg\alpha}\right).h \quad \text{и} \quad O=l+\frac{2h}{sn\,\alpha},$$

такъ что изъ ур—ія (9)

$$i=\frac{\left(l+\dfrac{2h}{sn\alpha}\right)v^2}{\Omega}\left\{\alpha+\frac{\beta\left(l+\dfrac{2h}{sn\alpha}\right)}{\Omega}\right\}$$

Такъ какъ при данныхъ Q и v величина Ω являет вполнѣ опредѣленной, то отсюда и видно, что наименьшем значенію i соотвѣтствуетъ наименьшее значеніе O.

O зависитъ отъ двухъ перемѣнныхъ, одно изъ которыхъ, положимъ l, можетъ быть исключено черезъ Ω.

Изъ соотношенія

$$\Omega = lh + \frac{h^2}{tg\alpha}$$

находимъ

$$l = \frac{\Omega - \frac{h^2}{tg\alpha}}{h} = \frac{\Omega}{h} - \frac{h}{tg\alpha}$$

такъ что

$$O = \frac{\Omega}{h} - \frac{h}{tg\alpha} + \frac{2h}{sn\alpha}$$

Беремъ первую производную по h и приравниваемъ е нулю; тогда получимъ:

$$-\frac{\Omega}{h^2} - \frac{1}{tg\alpha} + \frac{2}{sn\alpha} = 0.$$

Подставляя сюда вмѣсто Ω его значеніе, найдемъ:

$$-\frac{l}{h} - \frac{1}{tg\alpha} - \frac{1}{tg\alpha} + \frac{2}{sn\alpha} = 0,$$

откуда

$$l=\left(\frac{2}{sn\alpha}-\frac{2}{tg\alpha}\right)h$$

или

$$l=\frac{2h}{sn\alpha}\left\{1-cos\alpha\right\}\ldots\ldots\ldots\quad(a)$$

Размѣры сѣченія, удовлетворяющіе соотношенію (а), можно получить графически.

Напишемъ ур. (а) такимъ образомъ

$$\frac{l}{2}+h.ctg\alpha=\frac{h}{sn\alpha}$$

Изъ чертежа (77) видно, что

$$\frac{l}{2}=oe,\ h.ctg\alpha=ec$$

и

$$\frac{h}{sn\alpha}=ac,$$

т. ч. это соотношеніе намъ дастъ:

$$oe+ec=ac$$

или

$$oc=ac\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(b)$$

Такъ какъ площадь треугольника *aco* можно выразить двояко:

$$\Delta = \frac{1}{2}\,\cancel{ae}.\,of = \frac{1}{2}\,\cancel{oc}.\,ae,$$

то на основанiи равенства (b) находимъ:

$$of = ae = h,$$

другими словами, всѣ три стороны трапецiи касательны къ окружности радiуса *h*.

Поэтому вопросъ рѣшается такъ: по даннымъ Ω и α вычисляется *h* изъ соотношенiя

$$\Omega = \frac{2h^2}{\sin \alpha}\left(1 - \frac{\cos \alpha}{2}\right)$$

(9)

$$\Omega = lh = \frac{2h^2}{sn\alpha}\left(1 - cos\alpha\right) = \frac{2h^2.\cancel{2}\,sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cancel{2}sn\frac{\alpha}{2}cos\frac{\alpha}{2}} = 2h^2.tg\frac{\alpha}{2}$$

$$h^2 = \frac{\Omega}{2\,tg\frac{\alpha}{2}} \quad \Bigg| \quad h = \sqrt{\frac{\Omega}{2\,tg\frac{\alpha}{2}}}$$

Затѣмъ этимъ радiусомъ изъ произвольнаго центра описывается полуокружность; остается теперь только провести двѣ касательныя *ca* и *db*, наклоненныя къ произвольно выбранному дiаметру подъ угломъ α; третья касательная, параллельная выбранному дiаметру, представитъ основанiе трапецiи.

Сѣченiе большой ширины и малой глубины.

До сихъ поръ мы разрѣшали разнаго рода задачи по отношенiю къ каналамъ, имѣющимъ правильную форму. Рѣшенiе всѣхъ задачъ по отношенiю къ каналамъ неправильной формы является болѣе сложнымъ. Но при нѣкоторыхъ соотношенiяхъ между главнѣйшими размѣрами сѣченiя, задачу можно значительно упростить. Такъ напримѣръ, если ширина сѣченiя *l* значительно больше средней глубины *h*, то *r* можно полагать просто$=h$. Дѣйствительно, положимъ, что сѣченіе рѣки таково, какъ указано на черт. (78). Это сѣченіе можно замѣнить равновеликой трапеціей и тогда найдемъ:

$$\Omega=\left(l+\frac{h}{tg\alpha}\right)h \quad \text{и} \quad O=l+\frac{2h}{sn\alpha},$$

откуда

$$r=\frac{\Omega}{O}=\frac{\left(l+\frac{h}{lg\alpha}\right)h}{l+\frac{2h}{sn\alpha}}=\frac{\left(1+\frac{h}{l.tg\alpha}\right)h}{1+\frac{2h}{l.sn\alpha}}=\propto h,$$

если положимъ $\frac{h}{l}=0$.

Обратимъ вниманіе на слѣдующій случай.

Часто рѣка представляется въ поперечномъ сѣченіи въ слѣдующемъ видѣ (чер. 79). Такой же видъ будетъ имѣть сѣченіе разлившагося канала.

Здѣсь средняя глубина одной части (*abefg*) много больше средней глубины другой (*bedc*). Если бы мы стали подсчитывать расходъ черезъ все сѣченіе сразу, то получили бы результатъ много ниже дѣйствительнаго. Въ самомъ дѣлѣ, часть *cbed*, имѣя по сравненію съ частью *abefg* относительно значительный периметръ и малую площадь, будетъ представлять несравненно больше сопротивленія движенію воды. Разсматривая все сѣченіе въ совокупности, мы тѣмъ самымъ значительно уменьшимъ количество воды въ части Ω_1 и только незначительно увеличимъ въ части Ω_2. На основаніи этого въ такихъ случаяхъ надо разсматривать оба сѣченія отдѣльно.

Въ общемъ случаѣ при вычисленіи площади неправильныхъ сѣченій слѣдуетъ пользоваться формулой Симпсона.

§ 40.

Неравномѣрное установившееся движеніе воды въ рѣкахъ и каналахъ.

Неравномѣрное движеніе въ рѣкахъ и каналахъ буде иметь мѣсто въ томъ случаѣ, если, во-первыхъ, измѣняетс 1) форма и размѣры поперечнаго сѣченія, или, во-вторых 2) уклонъ дна.

Изученіе такого движенія при современномъ состояні гидравлики оказывается возможнымъ только въ томъ случаѣ, если потокъ не представляетъ быстрыхъ измѣненій в величинѣ поперечныхъ сѣченій, въ направленіяхъ и уклон При такихъ условіяхъ можно считать, что уровень воды въ каждомъ поперечномъ сѣченіи представляется горизонтальной прямой. При послѣдующихъ изслѣдованіяхъ м будемъ также предполагать параллелизмъ слоевъ и допускать, что во всякомъ сѣченіи всѣ струйки движутся съ одной и той же средней скоростью

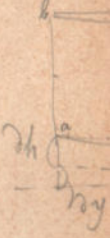
$$v=\frac{Q}{\Omega},$$

гдѣ Q—секундный расходъ и Ω—площадь поперечнаго сѣченія.

При сдѣланныхъ выше допущеніяхъ, мы можемъ считать, что давленіе въ каждомъ поперечномъ сѣченіи слѣдуетъ законамъ гидростатики.

Пусть черт. (80) представляетъ профиль потока на безконечно малой длинѣ ds между сѣченіями ab и cd. Пусть Ω и v площадь и скорость сѣченія ab, а $\Omega+d\Omega$ и $v+dv$ тѣ же самыя величины для сѣченія cd.

Приращенія $d\Omega$ и dv могутъ быть и положительны и отрицательны, но всегда понятно, различнаго знака, ибо вслѣдствіе несжимаемости жидкости мы имѣемъ:



$$Q=\Omega v=const,$$

откуда

$$dQ=\Omega dv+vd\Omega=0,$$

или

$$\frac{v^2}{2g}+\left(\frac{\xi_a}{\Delta}+\frac{ab}{2}\right)\cdot\frac{d}{2}$$

$$\Omega dv=-vd\Omega \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (1)$$

Такъ какъ Ω и v положительны, то отсюда и слѣдуетъ, что $d\Omega$ и dv имѣютъ всегда обратные знаки.

$$\frac{v^2}{2g}$$

Если мы обозначимъ разность высотъ уровней обоихъ сѣченій по сравненію съ произвольно выбраннымъ горизонтомъ черезъ dy, то по теоремѣ Д. Бернулли найдемъ:

$$\frac{v^2}{2g}$$

$$dy=\frac{(v+dv)^2-v^2}{2g}+\frac{O}{\Omega}.\, bv^2ds,$$

$$\eta=\frac{ol}{\Omega}\left(\frac{\psi(v^2)}{\Delta}\right)=\frac{O\,\partial s}{\Omega}\, bv^2$$

или

$$dy=\frac{vdv}{g}+\frac{O}{\Omega}bv^2ds, \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (2)$$

Это и будетъ дифференціальное уравненіе неравномѣрнаго движенія. Чтобы проинтегрировать его, нужно выразить, понятно, O, Ω и v въ функціи s.

Мы увидимъ ниже, что оказывается возможнымъ проинтегрировать это уравненіе для потока большой и посто-

янной ширины, но малой глубины. Въ общемъ же случ
приходится довольствоваться приблизительнымъ интегри
рованіемъ.

Если мы проинтегрируемъ выраженіе (2), то получим

$$y=\int_{v_0}^{v_1}\frac{vdv}{2g}+\int_{s_0}^{s_1}\frac{0}{\Omega}\,bv^2ds\ .\ .\ .\ .\ .\ (3),$$

гдѣ s_0 и s_1 разстоянія двухъ сѣченій, между которыми м
распространяемъ интеграцію, отъ нѣкотораго сѣченія, кото
рое мы разсматриваемъ какъ начальное: v_0 и v_1 суть сред
нія скорости въ этихъ сѣченіяхъ.

Ур—іе (3) можно переписать такъ:

$$y=\frac{v_1^2}{2g}-\frac{v_0^2}{2g}+\int_{s_0}^{s_1}\frac{0}{\Omega}bv^2ds.$$

Такъ какъ

$v_1=\frac{Q}{\Omega_1}$

$$Q=\Omega_0v_0=\Omega_1v_1=\Omega v,$$

то полученное уравненіе легко преобразуется въ слѣдующее:

$v=\frac{Q}{\Omega}$

$$y=\frac{Q^2}{2g}\left\{\frac{1}{\Omega_1{}^2}-\frac{1}{\Omega_0{}^2}\right\}+Q^2\int_{s_0}^{s_1}\frac{0}{\Omega^3}\,bds\ .\ .\ .\ .\ (4)$$

Вотъ этимъ ур-іемъ мы и можемъ воспользоваться для рѣшенія нѣсколькихъ вопросовъ.

Такъ какъ отношеніе $\frac{O}{\Omega^3}$ и b, которое также зависитъ отъ отношенія $\frac{O}{\Omega}$, различны для различныхъ сѣченій, то для того, чтобы получить величину интеграла, стоящаго во второй части ур—ія (4), надо разстояніе между двумя данными сѣченіями раздѣлить на четное число равныхъ частей, вычислить для каждаго полученнаго сѣченія $\frac{O}{\Omega^3}$ и b, а затѣмъ и вычислить интегралъ, пользуясь способомъ Симпсона.

Покажемъ, въ какомъ порядкѣ слѣдуетъ рѣшать нѣкоторые изъ вопросовъ.

1-ая задача.

Извѣстенъ расходъ воды Q, форма и размѣры поперечныхъ профилей; требуется найти паденіе.

Эта задача рѣшается непосредственно по ур—ію (4). Но надо замѣтить, что гораздо проще ту же задачу можно разрѣшить непосредственнымъ нивеллированіемъ. Для этого стоитъ только укрѣпить на днѣ въ разсматриваемыхъ сѣченіяхъ колья такъ, чтобы ихъ вершины совпадали со свободной поверхностью воды въ данныхъ сѣченіяхъ. Тогда на эти колья и можно ставить рейку.

2-я задача.

Опредѣлить Q, когда извѣстны всѣ остальныя величины.

Эта задача разрѣшается также непосредственно по ур—ію (4). Но опять таки къ такому рѣшенію слѣдуетъ прибѣгать только тогда, когда нѣтъ возможности опредѣлить расходъ непосредственнымъ измѣреніемъ.

О способахъ измѣренія расхода непосредственно будемъ говорить ниже.

3-я задача.

Извѣстенъ расходъ воды, форма русла, т. е. продольный профиль дна и размѣры поперечныхъ сѣченій въ нѣсколькихъ мѣстахъ и глубина воды въ одномъ изъ крайнихъ сѣченій; требуется построить по точкамъ продольный профиль воды.

Пусть *bdfhl* (черт. 81)—продольный профиль дна. Предположимъ, что намъ извѣстны форма и размѣръ поперечныхъ сѣченій въ пунктахъ *b*, *d*, *f*, *h* и *l*, глубина *kl* и расходъ *Q*; требуется опредѣлить профиль свободной поверхности или, иначе, разстоянія y_n, y_{n-1} . . . . . y_0 отдѣльныхъ точекъ этого профиля *k*, *g*, *l*, *c* и *a* отъ нѣкотораго произвольно взятаго горизонта *mn*. Эту задачу приходится разрѣшать при опредѣленіи профиля подпруженной рѣки. Вопросъ этотъ представляетъ большую важность, такъ какъ связанъ съ имущественными отношеніями. Если мы сумѣемъ опредѣлить профиль подпруженной воды, то узнаемъ, затопимъ ли нашей запрудой чужія земли, или нѣтъ.

Для рѣшенія этой задачи перепишемъ ур—іе (4) въ такомъ видѣ:

$$y_n - y_{n-1} = \frac{Q^2}{2g}\left\{\frac{1}{\Omega^2_n} - \frac{1}{\Omega^2_{n-1}}\right\} + Q^2\int\limits_{s_{n-1}}^{s_n}\frac{O}{\Omega^3}\,b.ds \; . \; . \; . \; . \; (5)$$

Длину *s* надо отсчитывать отъ какого-нибудь общаго начала.

Чтобы получить значеніе интеграла будемъ предполагать, что на всемъ протяженіи участка *hl* всѣ величины, входящія подъ знакъ интеграла, сохраняютъ постоянную величину, равную средней ариѳметической изъ крайнихъ значеній. Такимъ образомъ:

$$\frac{O}{\Omega^3} = \frac{1}{2}\left\{\frac{O_n}{\Omega^3_n} + \frac{O_{n-1}}{\Omega^3_{n-1}}\right\}$$

и

$$b = \frac{1}{2}\left(b_{n-1} + b_n\right)$$

Тогда, обозначая разность $s_n - s_{n-1}$ черезъ $\Delta\ s$, найдемъ:

$$y_n - y_{n-1} = \frac{Q^2}{2g}\left\{\frac{1}{\Omega^2_n} - \frac{1}{\Omega^2_{n-1}}\right\} + \frac{Q^2 b}{2}\left\{\frac{O_n}{\Omega^3_n} + \frac{O_{n-1}}{\Omega^3_{n-1}}\right\}\Delta\ s$$

Такъ какъ въ этомъ ур—іи являются неизвѣстными y_{n-1}, O_{n-1}, Ω_{n-1}, то его возможно рѣшать только по способу постепеннаго приближенія.

Профиль подпруженной воды можно приблизительно считать горизонтальнымъ, поэтому для перваго приближенія положимъ:

$$y_n = y_{n-1}.$$

при уклон. горизонт. русла

Зная y_{n-1}, мы можемъ опредѣлить Ω_{n-1}, O_{n-1} и b_{n-1} и подсчислить первое приближеніе разности $y_n - y_{n-1}$, т. е. найти болѣе близкое значеніе y_{n-1}.

По этому новому значенію y_{n-1} опредѣляемъ новыя значенія Ω_{n-1}, O_{n-1}, и b_{n-1}, а затѣмъ и новое значеніе y_{n-1}.

Такого рода подсчетъ слѣдуетъ вести до тѣхъ поръ, пок двѣ послѣдовательныя разности $y_n - y_{n-1}$ не будутъ ра ниться между собой на величину очень малую по сравн нiю съ самой разностью.

Опредѣливъ y_{n-1}, можемъ подобнымъ-же образомъ опр дѣлить y_{n-2} и т. д.

Въ большинствѣ случаевъ, однако, приходится рѣшат задачу въ обратномъ порядкѣ. Обыкновенно при опредѣленiи высоты плотины требуется, чтобы вода въ нѣкоторомъ опредѣленномъ сѣченiи не превосходила опредѣленной высоты, чтобы не потопить чужой земли, зданiя, или не поднять уровня нижнихъ водъ у стоящей выше плотины.

Пусть, напримѣръ, требуется, чтобы высота въ сѣченiи b лежала послѣ постановки плотины ниже горизонта сравненiя *mn* на опредѣленную величину y_0. Задача, слѣдовательно, будетъ состоять въ опредѣленiи y_n по данному y_0. Очевидно, что для рѣшенiя этой задачи надо начать опредѣленiе продольнаго профиля поверхности съ уравненiя:

$$y_1 - y_0 = \frac{Q^2}{2g}\left[\frac{1}{\Omega_1{}^2} + \frac{1}{\Omega^2_0}\right] + \frac{Q^2b}{2}\left[\frac{O_0}{\Omega^3_0} + \frac{O_1}{\Omega^3_1}\right]\triangle s.$$

Порядокъ рѣшенiя этого уравненiя будетъ таковъ-же, какъ и въ предыдущемъ случаѣ.

Опредѣливъ y_n, мы и можемъ рѣшить, на какую высоту мы можемъ запрудой поднять уровень въ данномъ мѣстѣ l.

Случай рѣки постоянной ширины и незначительной по сравненію съ шириной глубины. Дифференціальное уравненіе профиля поверхности и его изслѣдованіе.

Вернемся опять къ чер. (80) и выведенному нами дифференціальному уравненію движенія:

l

$$dy=\frac{v.dv}{g}+\frac{O}{\Omega}b.v.ds\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

Пусть уклонъ дна на протяженіи безконечно малаго разсматриваемаго участка будетъ i; проведемъ черезъ точку b прямую bn, параллельную дну, и горизонталь bm; пусть далѣе l есть постоянная ширина потока, h средняя глубина (глубина равновеликаго прямоугольника) въ сѣченіи ab и $h+dh$ его глубина въ сѣченіи cd.

Изъ чертежа видно, что

$$dk=dy \quad \text{и} \quad fd=dh,$$

такъ что изъ прямоугольнаго треугольника bkf найдемъ:

$$kf=dy+dh=ds.\ tgi$$

или, такъ какъ i очень малый уголъ, то

$$dy+dh=i.ds\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

Далѣе, по условію несжимаемости мы имѣемъ:

$$Q=\Omega.v=const\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

Откуда, дифференцируя, легко найдемъ:

$$\Omega.dv=-v.d\Omega$$

или

$$dv=-\frac{v}{\Omega}d\Omega\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

∂v

$$\partial v=-\frac{v}{\Omega}l\,dh$$

Такъ какъ $\Omega=lh$, а по нашему предположенію $l=const$, то

$$d\Omega=l.dh\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

Принимая во вниманіе всѣ полученныя выраженія, изъ ур—ія (1) получимъ:

$$\partial y=i\partial s-\partial h=-\frac{v^2l\partial h}{g\Omega}+\frac{O}{\Omega}bv^2\partial s$$

$$i.ds=-\frac{v^2ldh}{g\Omega}+\frac{O}{\Omega}bv^2ds+dh,$$

откуда

$$ds=\frac{1-\dfrac{v.^2l}{g.\Omega}}{i-\dfrac{O}{\Omega}b.v^2}dh$$

Это уравненіе и послужитъ намъ для рѣшенія всѣхъ вопросовъ, относящихся къ данному случаю.

Отсюда мы находимъ:

$$\frac{dh}{ds}=\frac{i-\frac{O}{\Omega}bv^2}{1-\frac{v^2l}{g\Omega}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Такъ какъ мы должны отсчитывать s по направленію дна, а h по перпендикуляру къ нему, то это отношеніе есть ничто иное, какъ тангенсъ угла касательной къ профилю поверхности съ прямой bn // $ab.$, т. е. $tg\varphi$.

Если мы теперь допустимъ, что h мало по сравненію съ l, то найдемъ: предполагая сечение прямоуг

$$\frac{O}{\Omega}=\frac{l+2h}{lh}=\frac{1+\frac{2h}{l}}{h}=\infty\frac{1}{h}$$

Кромѣ того, для сокращенія письма, введемъ обозначеніе:

$$v=\frac{Q}{lh}=\frac{q}{h}\cdot$$ на единицу длины

гдѣ q будетъ представлять средній расходъ на единицѣ ширины канала (на 1 mtr).

Въ такомъ случаѣ ур—іе (2) принимаетъ такой видъ:

$$\frac{dh}{ds}=\frac{i-\frac{bq^2}{h^3}}{1-\frac{q^2}{gh^3}} \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

Изъ ур—ія (2) мы имѣемъ:

$$\frac{dy}{ds}=i-\frac{dh}{ds}\dots\dots\dots\dots\dots(8')$$

такъ что

$$\frac{dy}{ds}=i-\frac{i-\frac{bq^2}{h^3}}{1-\frac{q^2}{gh^3}}=\frac{\frac{q^2}{h^3}\left(b-\frac{i}{g}\right)}{1-\frac{q^2}{gh^3}}=\frac{b-\frac{i}{g}}{\frac{h^3}{q^2}-\frac{1}{g}}\dots(9)$$

Такъ какъ *bk*=∞*bf*, то это выраженіе даетъ намъ тангенсъ угла касательной къ профилю съ горизонтомъ, т. е. *tg* (i—φ).

Изъ ур—ія (8) видно, что для того, чтобы *dh* было равно нулю, необходимо:

$$i=\frac{bq^2}{h^3}$$

$$\frac{h^3}{q^2}=\frac{b}{i}-\frac{1}{g}$$

Это будетъ случай равномѣрнаго движенія. Пусть *h*, опредѣленное изъ этого соотношенія, будетъ *H*; тогда:

$$H^3=\frac{bq^2}{i}$$

Для того чтобы $\frac{dh}{ds}=\infty$, необходимо $1-\frac{q^2}{gh^3}=0$.

Обозначимъ соотвѣтственное значеніе h черезъ H_1, такъ что

$1 = \frac{q^2}{gh^3}$

$$H_1{}^3 = \frac{q^2}{g}$$

При этомъ, понятно, свободная поверхность будетъ нормальна ко дну. Этотъ результатъ противорѣчитъ сдѣланному допущенію параллельности струекъ дну и показываетъ, что въ этомъ случаѣ выведенное ур—іе перестаетъ имѣть мѣсто и поэтому этотъ случай требуетъ спеціальнаго изученія.

Составимъ разность

$$H^3 - H_1{}^3 = \frac{bq^2}{i} - \frac{q^2}{g} = \frac{q^2}{i}\left(b - \frac{i}{g}\right)$$

Отсюда видно, что

$bg > i$

$$\text{при} \quad b > \frac{i}{g} \ldots\ldots\ldots H > H_1$$

$$b = \frac{i}{g} \ldots\ldots\ldots H = H_1$$

$$b < \frac{i}{g} \ldots\ldots\ldots H < H_1.$$

Во второмъ случаѣ, какъ это видно изъ ур—ія (9), $\frac{dy}{ds} = 0$, т. е. продольный профиль воды будетъ горизонтальная прямая, если только i постоянная величина на нѣкоторомъ протяженіи (такой случай и можетъ представиться, напримѣръ, при запруживаніи рѣки съ постояннымъ уклономъ дна).

Если при этомъ $h=H$ или $h=H_1$, то получимъ:

$$\frac{dy}{ds}=\frac{0}{0}.$$

Но эта неопредѣленность только кажущаяся. Дѣйствительно, изъ ур—ія (8) имѣемъ:

$$dh\ \left(1-\frac{q^2}{gh^3}\right)=ds\ \left(i-\frac{bq^2}{h^3}\right)$$

или

$$dh\ (gh^3-q^2)=g.ds\ (ih^3-bq^2)$$

Полагая $b=\frac{i}{g}$, найдемъ:

$$dh\ \left(gh^3-q^2\right)=gds\left(ih^3-\frac{iq^2}{g}\right)=ids\ \left(gh^3-q^2\right)$$

о черт.

т. е. при этомъ, независимо отъ значенія h,

$$\frac{dh}{ds}=i \quad \text{и тогда изъ ур—ія } (8') \quad \frac{dy}{ds}=0.$$

Слѣдовательно, профиль будетъ горизонтальная прямая.

Будемъ теперь изслѣдовать изгибъ продольнаго профиля воды по отношенію къ дну на протяженіи какого-нибудь участка, имѣющаго постоянный уклонъ дна. Для этой цѣли возьмемъ ур — іе (8) и преобразуемъ его такимъ образомъ:

$$\frac{dh}{ds}=\frac{i-\frac{ibq^2}{ih^3}}{1-\frac{q^2}{gh^3}}=\frac{i-\frac{iH^3}{h^3}}{1-\frac{H_1^3}{h^3}}=i\,\frac{h^3-H^3}{h^3-H_1{}^3}\dots\dots\dots(10)$$

Найдемъ вторую производную:

$$\frac{d^2h}{ds^2}=i\,\frac{[(h^3-H_1{}^3)\ 3h^2-(h^3-H^3)\ 3h^2]}{[h^3-H_1{}^3]^2}=\frac{3h^2i\ (H^3-H_1{}^3)}{(h^3-H_1{}^3)^2}\dots\dots(11)$$

Вторая часть этого ур — ія положительна или отрицательна въ зависимости отъ знака разности $H^3-H_1{}^3$, ибо знаменатель всегда положителенъ.

Мы видѣли что $H>H_1$ если $b>\frac{i}{g}$. Среднее значеніе b есть 0,0004, откуда и видно, что

если $i<0{,}0004.\ 9{,}81=0{,}0039=\backsim 4$‰, то $H>H_1$,

если $i>$ 4‰, то $H<H_1$ и

если, наконецъ, $i=$4‰, то $H=H_1$.

Разсмотримъ сначала тотъ случай, когда $H>H_1$.

Отложимъ отъ дна по перпендикуляру отрѣзокъ $ob=H_1$ и отрѣзокъ $oc=H$, а затѣмъ проведемъ черезъ точки c и b прямыя bx и cx', параллельныя дну.

Если глубина воды h меньше H_1, то мы будемъ имѣть à fortiori, что $h<H$. Въ такомъ случаѣ изъ ур—ій (11) и (12) видно, что

$H>H_1$

$H>h<H_1$

$$\frac{dh}{ds} > 0 \quad \text{и} \quad \frac{d^2h}{ds^2} > 0$$

т. е. кривая профиля s_1 будетъ обращена выпуклостью вни

Если $H > h > H_1$, то $\frac{dh}{ds} < 0$ и $\frac{d^2h}{ds^2} > 0$, кривая профиля

будетъ обращена выпуклостію вверхъ. Если $h > H > H_1$, кри профиля s_1 будетъ обращена выпуклостью внизъ.

Если $H_1 > H$ (чер. 83), то при $h < H < H_1$

всегда

$$\frac{dh}{ds} > 0, \qquad \frac{d^2h}{ds^2} < 0$$

и, слѣдовательно, кривая профиля s, будетъ обращена вы пуклостью вверхъ.

Если $H_1 > h > H$, то кривая профиля s_1 будетъ обращен выпуклостью внизъ.

$\frac{dh}{ds} < 0 \quad \frac{d^2h}{ds^2} < 0$

Если, наконецъ, $H_1 > H > h$, то кривыя профиля s_3 будет обращена выпуклостью вверхъ.

$\frac{dh}{ds} > 0 \quad \frac{d^2h}{ds^2} < 0$

§ 41.

Прыжекъ воды.

Изслѣдуемъ теперь явленіе, называемое „прыжкомъ воды“.

Изъ ур—ія (2) видно, что когда

$1-\frac{q^2}{gh^3}=0$

$\frac{\partial h}{\partial s}=\operatorname{tg}\varphi=\infty \mid \varphi=$

$$1-\frac{v^2l}{g\Omega}=0,$$

то продольная поверхность потока дѣлается нормальной по дну. Такого рода явленіе и называютъ прыжкомъ воды.

Такъ какъ при выводѣ ур—ія (7) мы предполагали, что струйки движутся параллельно дну, то это уравненіе не можетъ служить для изслѣдованія явленія прыжка. Въ этомъ случаѣ слѣдуетъ обратиться къ непосредственному изслѣдованію явленія, разсматривая очень короткую часть потока, которая заключаетъ въ себѣ прыжокъ, чтобы можно было пренебречь паденіемъ на этой части, но въ то же время такого протяженія, чтобъ можно было предположить выше и ниже прыжка два сѣченія, черезъ которыя вода протекаетъ параллельными струйками.

Пусть A и A_1 (чер. 84) будутъ два такихъ сѣченія, между которыми происходитъ прыжокъ, т. е. быстрое поднятіе воды. Обозначимъ черезъ Ω площадь сѣченія A, черезъ v среднюю скорость въ этомъ сѣченіи и черезъ y разстояніе центра тяжести этого сѣченія отъ поверхности; тѣ же величины для сѣченія A_1 обозначимъ черезъ v_1, Ω_1 и y_1. Примѣнимъ къ части потока AA_1 теорему количествъ движенія. При этомъ понятно, мы не должны вводить въ разсмотрѣніе внутреннихъ силъ, ибо сумма импульсовъ этихъ силъ=0. Такимъ образомъ мы должны будемъ разсмотрѣть только внѣшнія силы: 1) давленіе атмосферы, 2) силу тяжести и 3) гидродинамическія давленія въ сѣченіяхъ A и A_1

Будемъ брать за ось проекцій направленіе, параллельное продольному профилю дна. Такъ какъ мы условились пренебрегать паденіемъ, то должны считать направленіе силы тяжести перпендикулярнымъ ко дну и, слѣдовательно, ея импульсъ по выбранному направленію равнымъ нулю.

Въ концѣ безконечно малаго времени Δt частицы, котор
были въ сѣченіи A, будутъ, положимъ, въ сѣченіи a и ч
стицы изъ сѣченія A_1 перейдутъ въ сѣченіе a_1; такъ как
предполагаемъ движеніе установившееся, то при вычисле
приращенія количествъ движенія за этотъ промежутокъ пр
мени всей массы, находящейся между сеченіями A и A
намъ не нужно будетъ разсматривать общую массу $A_1 a$

Легко видѣть, что въ такомъ случаѣ приращеніе ко
личествъ движенія выразится такъ: за время Δt

$$\frac{\Delta\Omega_1 v_1}{g} v_1\Delta t - \frac{\Delta\Omega v}{g} v\Delta t$$

Составимъ теперь импульсъ силъ. Давленіе въ цент
тяжести сѣченія A будетъ:

$$p_0 + \Delta y,$$

гдѣ p_0—давленіе атмосферы; поэтому импульсъ полнаго да
ленія въ этомъ сѣченіи по горизонтальному направлені
есть:

$$(\Omega p_0 + \Omega\Delta y)\Delta t.$$

Если за положительное направленіе мы примемъ на
правленіе теченія, то этотъ импульсъ должны считать по
ложительнымъ.

Такимъ же образомъ легко найдемъ, что импульсъ давленія въ сѣченіи A_1 будетъ:

$$-(\Omega_1 p_0 + \Omega_1 \Delta y_1)\Delta t.$$

Кромѣ того надо принять во вниманіе импульсъ атмосфернаго давленія на часть AA_1; который, понятно, будетъ:

$$(\Omega_1 - \Omega)p_0 \Delta t.$$

Такимъ образомъ имѣемъ:

$$\frac{\Delta\Omega_1 v_1}{g} v_1 \Delta t - \frac{\Delta\Omega v}{g} v.\Delta t = \Delta\Omega.y.\Delta t + \cancel{\Omega p_0 \Delta t} + \cancel{\Omega_1 p_0 \Delta t} - \cancel{\Omega p_0 \Delta t} - \cancel{\Omega_1 p_0 \Delta t} - \Omega_1 y_1 \Delta.\Delta t$$

приращ. кол. движ.

= сумме импульс. всех внеш. сил

Или, по сокращеніи на $\Delta.\Delta t$ и приведеніи,

$$\frac{\Omega_1 v_1^2}{g} - \frac{\Omega v^2}{g} = \Omega y - \Omega_1 y_1 \quad \ldots\ldots.(1)$$

Такъ какъ

$$\Omega v = v_1 \Omega_1,$$

$$v_1 = \frac{\Omega v}{\Omega_1}$$

$$-\frac{\cancel{\Omega_1}\Omega^2 v^2}{\Omega_1^2 g} + \frac{\Omega v^2}{g}$$

то мы можемъ переписать ур—іе (1) такъ:

$$\frac{v^2}{g}\left(1 - \frac{\Omega}{\Omega_1}\right) = \frac{\Omega_1}{\Omega} y_1 - y \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

$$\frac{v^2}{g}\left[1 - \frac{\Omega}{\Omega_1}\right]$$

или

$$\frac{v_1^2}{g}\left(1 - \frac{\Omega_1}{\Omega}\right) = \frac{\Omega}{\Omega_1} y - y_1 \ldots\ldots.(3)$$

Если русло имѣетъ форму прямоугольника съ пос янной шириной l и перемѣнной глубиной h, то

$l = const$

$$\Omega = lh,\quad \Omega_1 = lh_1,\quad y = \frac{h}{2} \text{ и } y_1 = \frac{h_1}{2}$$

и ур—іе (2) приметъ видъ:

$$\frac{v^2}{g}\left(1-\frac{h}{h_1}\right)=\frac{h_1}{h}\,\frac{h_1}{2}-\frac{h}{2}, = \frac{h_1^2}{2h}-\frac{h}{2}$$

откуда

$$\frac{v^2}{gh_1}\left(h_1-h\right)=\frac{h_1^2-h^2}{2h}$$

или

$$\frac{v^2}{gh_1}=\frac{h_1+h}{2h}\dots\dots\dots\dots\dots(4)$$

$$\frac{2v^2}{gh_1} = h_1$$

$$\frac{^2 + hh_1}{4h}$$

$$\frac{^2 + hh_1 + 4h^2}{4h}$$

Такимъ же образомъ изъ ур—ія (3) найдемъ:

$$\frac{v_1^2}{hg}=\frac{h_1+h}{2h_1}\dots\dots\dots\dots\dots\dots(5)$$

Изъ ур—ія (4) имѣемъ:

$$h_1^2+hh_1-\frac{2v^2h}{g}=0,$$

откуда

$$h_1=-\frac{h}{2}+\sqrt{\frac{h^2}{4}+\frac{2v^2h}{g}}\dots\dots(6)$$

(во второй части беремъ знакъ $+$, ибо $h_1 > o$)

Такимъ же образомъ изъ ур—ія (5) найдемъ:

$$h = -\frac{h_1}{2} + \sqrt{\frac{h_1^2}{4} + \frac{2v_1^2 h_1}{g}} \ldots\ldots.(7)$$

$< h_1$

$\sqrt{} < \frac{3h_1}{2}$

$\frac{h_1^2}{4} + \frac{2v^2 h_1}{g}$

$\frac{2v^2 h_1}{g} <$

h_1

т. к. $h_1 > h$, то изъ ур—ія (6) имѣемъ:

$$-\frac{h}{2} + \sqrt{\frac{h^2}{4} + \frac{2v^2 h}{g}} > h$$

или

$$\sqrt{\frac{h^2}{4} + \frac{2v^2 h}{g}} > \frac{3h}{2}$$

такъ что

$$\frac{h^2}{4} + \frac{2v^2 h}{g} > \frac{9h^2}{4}$$

$\frac{2v^2 h}{g} > 2h^2$

$\frac{v^2}{g} > h$

и

$$h < \frac{v^2}{g}$$

или

$$h - \frac{v^2}{g} < 0, \quad \text{откуда} \quad 1 - \frac{v^2}{gh} \cdot \frac{l}{l} < 0$$

такъ что

$$1 - \frac{v^2 l}{g\Omega} < 0.$$

Такимъ же образомъ изъ соотношенія (7) найдемъ:

$$1-\frac{v_1^2 l}{g\Omega_1}>0.$$

Это показываетъ, что при переходѣ отъ сѣченія А к сѣченію А₁ выраженіе $\left(1-\frac{v^2 l}{g\,\Omega}\right)$ переходитъ черезъ 0. В томъ сѣченіи, гдѣ это выраженіе обращается въ ноль, и имѣетъ мѣсто прижекъ. $\frac{\partial y}{\partial s}=\infty$

Высота прыжка h_0 опредѣлится изъ уравненія (6).

Дѣйствительно, легко видѣть, что

$$h_0=h_1-h=\sqrt{\frac{h^2}{4}+\frac{2v^2g}{h}}-{}^3/_2\,h$$

Зная высоты h_1 и h, мы можемъ вычислить потерю на пора, которою сопровождается прыжекъ.

Обозначая эту потерю черезъ ζ и примѣняя ур—іе Д Бернулли къ теченію воды отъ сѣченія А до сѣченія А мы легко найдемъ:

$$\frac{v^2}{2g}-\frac{v_1^2}{2g}=h_1+\zeta-h,$$

откуда

$$\zeta=\frac{v^2}{2g}+h-\left(\frac{v_1^2}{2g}+h_1\right)$$

Изъ ур—ій (4) и (5) легко найти, что

$$\frac{v^2}{2g}+h=\frac{h_1^2+hh_1+4h^2}{4h}$$

и

$$\frac{v_1^2}{2g}+h_1=\frac{h^2+hh_1+4h_1^2}{4h_1};$$

такъ что

$$\zeta=\frac{h_1^2+hh_1+4h^2}{4h}-\frac{h^2+hh_1+4h_1^2}{4h_1}=$$

$$=\frac{h_1^3+hh_1^2+4h^2h_1-h^3-h^2h_1-4h_1^2h}{4hh_1}=\frac{h_1^3-3h_1^2h+3h^2h_1-h_1^3}{4hh_1}=$$

$$=\frac{(h_1-h)^3}{4hh_1}.$$

Все вышеизложенное даетъ намъ нѣкоторое приблизительное представленіе о томъ, что происходитъ на поверхности рѣки въ случаѣ неравномѣрнаго движенія. Неравномѣрное движеніе при нашихъ предположеніяхъ (постоянной ширинѣ) можетъ имѣть мѣсто только при перемѣнномъ уклонѣ, если рѣка не запружена, или при постоянномъ уклонѣ, если рѣка запружена.

§ 42.

Уравненіе профиля подпруженной воды.

Вотъ въ такомъ предположеніи найдемъ ур—іе профиля подпруженной воды. Такъ какъ рѣка на значительномъ протяженіи имѣетъ почти постоянную ширину и т. к. перемѣнный уклонъ можно замѣнить нѣкоторымъ среднимъ, то п лученнымъ ур—іемъ и можно будетъ пользоваться д опредѣленія профиля подпруженной воды, хотя бы для пе воначальныхъ соображеній. Но, понятно, что мы получи приблизительно вѣрные результаты только тогда, когда п слѣ постановки плотины рѣка нигдѣ не будетъ выход изъ береговъ, иначе условіе постоянства ширины само с бою нарушится.

Положимъ, что ab (чер. 85) профиль дна и cd профил свободной поверхности до постановки плотины.

Глубина воды до запруживанія была понятно, всюду постоянна и равнялась той величинѣ, которую мы обозначили черезъ H. Такъ какъ плотина поднимаетъ воду, то, слѣдовательно, h будетъ всегда $> H$.

Допустимъ, что въ пунктѣ b мы хотимъ поставить плотину и поднять воду до высоты $bk=h_0$.

Для того, чтобы получить уравненіе профиля, надо проинтегрировать уравненіе:

$$\frac{dh}{ds}=i\frac{h^3-H^{3}}{h^3-H_1{}^3}$$

Такъ какъ разстоянія удобнѣе отсчитывать отъ плотины вверхъ, то мы должны будемъ s замѣнить въ этомъ выраженіи черезъ $-s$; тогда получимъ:

$$\frac{dh}{ds}=-i\frac{h^3-H^3}{h^3-H_1{}^3}\dots\dots\dots\dots(1)$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial s^2}=\frac{3h^2 i(H_1^3-H^3)}{(h^3-H_1^3)^2}$$

Чтобы подогнать результатъ къ таблицамъ, составленнымъ Брессомъ для построенія профиля, представимъ ур—іе (1) въ такомъ видѣ:

$$i.ds=-\frac{\frac{h^3}{H^3}-\frac{H_1^{\overset{3}{2}}}{H^3}}{\frac{h^3}{H^3}-1}dh$$

Положимъ

$$\frac{H_1{}^3}{H^3}=a^3 \quad \text{и} \quad \frac{h}{H}=u,$$

dh = H du

тогда

$$\frac{i.ds}{H}=-\frac{u^3-a^3}{u^3-1}\, du \ldots\ldots(2)$$

$$\int_0^s \frac{i ds}{H} = -\int_{h/H=u}^{\frac{h}{H}=u_0}$$

Теперь и будемъ интегрировать это ур—іе, распространяя интеграцію отъ плотины ($s=O$) до $K-N$ сѣченія ($s=s$), чему соотвѣтствуютъ предѣлы

какой-нибудь

$$u_0=\frac{h_0}{H} \quad \text{и} \quad u=\frac{h}{H}$$

Такимъ образомъ:

$$\frac{is}{H}=-\int_{u_0}^{u}\frac{u^3-a^3}{u^3-1}du$$

$$\begin{array}{l|l} u^3-a^3 & u^3-1 \\ \hline -u^3\mp 1 & 1 + \\ \hline 1-a^3 & \end{array}$$

Интегралъ во второй части можно представить въ такомъ видѣ:

$$\frac{is}{H} = -\int_{u_0}^{u} du - (1-a^3)\int_{u_0}^{u} \frac{du}{u^3-1}$$

или

$$\frac{is}{H} = u_0 - u - (1-a^3)\int_{u_0}^{u} \frac{du}{u^3-1} \dots\dots\dots\dots (2)$$

Интегралъ ур—ія (2) можно взять приблизительно, ра лагая подынтегральную функцію въ рядъ:

$$-\int_{u_0}^{u} \left(u^3-1\right)^{-1.} du = -\int_{u_0}^{u} \left[u^{-3} + u^{-6} + u^{-9} + \dots\dots\right] du$$

$u^{3(n-1)} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} u^{3(n-2)} + \dots$

$n = -1$ получимъ

-9

$u + \dots$

$$= \left[\frac{1}{2u^2} + \frac{1}{5u^5} + \frac{1}{8u^8} + \dots\right]_{u_0}^{u}$$

$d\left(\frac{u}{2}\right)$

$-2u$

$d\left(\frac{1}{2u}\right)$

Положимъ

$$\left[\frac{1}{2u^2} + \frac{1}{5u^5} + \dots\dots\right] = \Psi(u),$$

тогда

$$\underbrace{\frac{is}{H} = u_0 - u + (1-a^3)\left\{\Psi(u) - \Psi(u_0)\right\}}_{\text{Это есть уравнение профиля}} \dots\dots (3)$$

Для облегченія вычисленій Брессомъ составлены таблицы, въ которыхъ даны для данныхъ значеній u значені $\frac{1}{u}$ и $\Psi(u)$.

Разсмотримъ рядъ:

$$\Psi\ (u) = \frac{1}{2u^2} + \frac{1}{5u^5} + \frac{1}{8u^8} + \frac{1}{11u^{11}} + \dots\dots$$

$n =$

Общій членъ этого ряда будетъ:

$$U_n = \frac{1}{(3n-1)\,u^{3n-1}}$$

$U_{n+1} = \frac{1}{(3n+2)}$

Извѣстно, что если

$$\underset{n=\infty}{\text{пред.}} \frac{U_{n+1}}{U_n} < 1,$$

то рядъ будетъ сходящійся.

Въ нашемъ случаѣ это отношеніе равно:

$$\underset{n=\infty}{\text{пред.}} \frac{\left(3n-1\right)\,u^{3n-1}}{\left(3n+2\right)\,u^{3n+2}} = \frac{\left(3-\frac{1}{n}\right)}{\left(3+\frac{2}{n}\right)\,u^3} = \frac{1}{u^3}$$

Отсюда видно, что при $u > 1$, рядъ будетъ сходящійся;

если же $u = \frac{h}{H} = 1$, то $\Psi\ (u)$ обращается въ сумму:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{8}+\frac{1}{11}+\frac{1}{14}+\ldots\ldots$$

Общій членъ этого ряда есть:

$$U_n=\frac{1}{3n-1}$$

Необходимое условіе сходимости

$$\text{пред.}\Big[n.\,U_n\Big]_{n=\infty}=0$$

не удовлетворяется, ибо

$$\text{пред.}\Big[\frac{n}{3n-1}\Big]_{n=\infty}=\frac{1}{3},$$

слѣдовательно, рядъ будетъ расходящійся, т. ч.

при $u=1$ . . . . . . $\Psi(u)=\infty$.

Разсмотримъ, пользуясь сдѣланными выводами, нѣсколько частныхъ случаевъ.

1. Пусть $i<4^0/_{00}$; тогда $H>H_1$ и профиль, какъ мы видѣли раньше, будетъ представлять изъ себя вогнутую кривую kl (чер. 85), которая будетъ ассимптотически приближаться къ прямой cd. Дѣйствительно, мы видѣли, что

$$\text{при } u=\frac{h}{H}=1,\ \Psi\ (u)=\infty;$$

такъ какъ при этомъ $a=\frac{H_1}{H}<1$, то изъ ур—ія (3) видно, что при такихъ условіяхъ s обращается въ безконечность. Понятно, слѣдовательно, что кривая kl пойдетъ выше горизонтали kk_1.

2. Пусть $i=4^0/_{00}$; тогда $H=H_1$, $a=1$ и ур—іе профиля приметъ видъ:

$$\frac{is}{H}=u_0-u=\frac{h_0}{H}-\frac{h}{H} \text{ или } is=h_0-h,$$

$h_0 = is + h$

т. е. профиль будетъ горизонтальная прямая.

3. Пусть $i>4^0/_{00}$ и $h_0<H_1$, (чер. 85), тогда $H_1>H$ и $a=\frac{H_1}{H}>1$ Какъ мы знаемъ, въ этомъ случаѣ профиль будетъ ~~вогнутая~~ выпуклая кривая, при этомъ глубина будетъ возрастать по мѣрѣ удаленія отъ плотины, ибо, что видно изъ ур—нія (1) $\frac{dh}{ds}$ остается положительной, пока $h<H_1$. Но когда $h=H_1$ какъ только уровень поднимется до прямой ef, онъ долженъ прыжкомъ перейти ниже этой линіи. Если разносить H_1-H не превосходитъ высоты прыжка, соотвѣтствующей даннымъ условіямъ, то можно считать, что профиль переходитъ въ прямую cm. Въ обычныхъ случаяхъ и можно дѣлать такое предположеніе, ибо паденія не достигаютъ значительной величины, т. ч. разность между H_1 и H не бываетъ особенно велика. Замѣтимъ къ тому же, что наши ур—ія относятся только къ случаю небольшихъ паденій, т. к. мы и исходимъ изъ такого предположенія

4. Пусть $i>4\ ^0/_{00}$ и $h>H_1$ (чер. 85); тогда $H_1>H$ и $a=\frac{H_1}{H}>1$. Въ этомъ случаѣ профиль представится ~~вогнутой~~ выпуклой кривой, а затѣмъ прыжкомъ перейдетъ къ прямой ca, т. е. къ нормальному профилю. Мѣсто прыжка можетъ быть опредѣлено его высотой.

§ 42.

Плотины.

Мы видѣли какимъ образомъ опредѣляется высота подпруженной воды. Посмотримъ теперь какимъ образомъ опредѣляется высота самой плотины. Для этого ознакомимся сначала съ общимъ устройствомъ, служащимъ для сосредоточенія паденія воды около того мѣста, гдѣ стоитъ двигатель.

Двигатель и фабричное зданіе въ настоящее время рѣдко ставятся на самой плотинѣ, т. к. въ такомъ случаѣ пришлось бы устраивать солидныя и дорого стоющія основанія. Если бы фабричное зданіе было отодвинуто отъ рѣки, а двигатель былъ поставленъ у самой плотины, то пришлось бы устраивать дорого стоющую и во многихъ отношеніяхъ неудобную передачу отъ двигателя къ фабрикѣ. Поэтому въ настоящее время для концентрированія паденія въ мѣстѣ, удобномъ для постановки фабричнаго зданія, пользуются каналами *AC* и *CB* (чер. 86), изъ которыхъ первый называется проводящимъ, а второй отводящимъ. Какъ видимъ, первый каналъ беретъ воду выше плотины и подводитъ ее къ двигателю; здѣсь и сосредоточивается все паденіе. Падая, вода проходитъ черезъ двигатель и приводитъ его въ движеніе. Выйдя изъ двигателя, вода по каналу *CB* возвращается въ рѣку. Если разность уровней въ *A* и *B* есть *H*, то въ пунктѣ *C* можно сосредоточить все паденіе за исключеніемъ того, которое тратится на преодолѣніе вредныхъ сопротивленій въ проводящемъ и отводящемъ каналахъ, для чего оба должны имѣть нѣкоторый уклонъ. Если черезъ каналъ отводится вся вода, расходуемая рѣкой, то высота плотины должна быть, понятно, равна или больше глубины подпруженной воды въ данномъ мѣстѣ. Если же каналъ беретъ только часть воды, расходуемой рѣкой, то тогда приходится принимать мѣры, чтобы пропускать остальную часть черезъ плотину.

Въ этомъ отношенiи плотины можно раздѣлить на *водопропускныя* и *водосливныя*.

Высота водопропускныхъ плотинъ равна или больше высоты подпруженной воды, при чемъ для пропуска воды въ нижней части плотины устраиваютъ шлюзы, т. е. просто прямоугольныя отверстiя, которыя можно закрывать щитами, перемѣщающимися въ вертикальномъ направленiи. Величина этихъ отверстiй можетъ быть подсчитана по общимъ правиламъ, которыя относятся къ разсчету прямоугольныхъ отверстiй. Высота водосливныхъ плотинъ, напротивъ того, всегда меньше высоты подпруженной воды, такъ что избытокъ воды переливается черезъ верхнее ребро плотины, образуя водосливъ.

Покажемъ, какимъ образомъ подсчитывается высота такого рода плотинъ. Водосливной плотины

Пусть полный расходъ воды въ рѣкѣ равенъ Q, и въ каналъ отводится объемъ q; тогда черезъ плотину будетъ сливаться количество воды:

$$Q_0 = Q - q.$$

Допустимъ далѣе, что высота подпруженной воды у плотины надъ нормальнымъ уровнемъ будетъ h.

Такъ какъ такими плотинами пользуются только тогда, когда не требуется большого поднятiя воды, то можно допустить, что ширина рѣки l и до плотины и послѣ плотины есть величина постоянная и равная ширинѣ незапруженной рѣки. По предыдущему обозначимъ черезъ H среднюю глубину рѣки до устройства плотины; послѣ устройства плотины глубина воды передъ плотиной увеличивается ~~повышается~~, а за плотиной уменьшается ~~понижается~~, т. к. по этой части до соединенiя съ отводящимъ каналомъ протекаетъ количество воды $Q_0 < Q$. Пусть глубина этой части будетъ H_0.

Если v и r суть скорость и среднiй радiусъ поперечнаго сѣченiя рѣки до устройства плотины, и v_0 и r_0—тѣ же величины для участка за плотиной послѣ ея устройства, то, считая паденiе i выше и ниже плотины постояннымъ, найдемъ:

$$v=c\sqrt{ri}, \qquad v_0=c_0\sqrt{r_0 i}.$$

Будемъ считать, что $c=c_0$, т. к. эти величины разнятся между собой на незначительную величину.

По предыдущему можемъ положить:

$$\frac{Q}{\Omega}=\frac{l-2h}{lh}$$

$$r=H \quad \text{и} \quad r_0=H_0$$

Кромѣ того имѣемъ:

$$\frac{1}{r}=\frac{Q}{\Omega}=\frac{1}{h}$$

$$Q=Hlv \quad \text{и} \quad Q_0=H_0lv_0,$$

откуда

$$r=H$$

$$\frac{Q_0}{Q}=\frac{H_0}{H}\frac{v_0}{v}=\frac{H_0\sqrt{r_0i}}{H\sqrt{ri}}=\frac{H_0\sqrt{H_0}}{H\sqrt{H}}$$

или

$$\frac{Q_0}{Q}=\frac{H_0\sqrt{H_0}}{H\sqrt{H}}=\left(\frac{H_0}{H}\right)^{3/2}$$

и

$$\frac{H_0}{H}=\left(\frac{Q_0}{Q}\right)^{2/3}$$

Отсюда и можно опредѣлить H_0.

Перейдемъ теперь къ опредѣленію высоты плотины T, или что то же, къ опредѣленію разстоянія вершины плотины отъ уровня подпруженной воды.

Данными задачи мы будемъ считать: H, h и H_0. Здѣсь могутъ быть два случая. 1) высота плотины $T > H_0$ (чер. 87)—плотина будетъ образовать совершенный водосливъ, почему и называется *плотиной совершенной*; 2) высота плотины $T < H_0$ (чер. 88)—плотина образуетъ несовершенный водосливъ и называется *несовершенной*.

Поэтому прежде всего надо рѣшить вопросъ, съ которымъ случаемъ мы имѣемъ дѣло.

Предположимъ для этого, что $T = H_0$; тогда черезъ такую плотину должно переливаться количество воды

$$Q_1 = \frac{2}{3} \mu l \sqrt{2g} \left\{ \left(H + h - H_0 + k\right)^{3/2} - k^{3/2} \right\},$$

гдѣ

$$k = \frac{u^2}{2g} \quad \text{и} \quad u = \frac{Q_0}{l(H+h)}$$

$Q_0 = Q u =$

Коэффиц. $^2/_3\ \mu$ по Реджeнбахеру можно принять$=0{,}57$. Если u мало, то можно полагать $k=0$. Если мы отсюда получимъ такое значеніе для Q_1, что

$$Q_1 > Q_0,$$

то плотина должна быть *совершенная*; если же $Q_1 < Q_0$, то плотина должна быть *несовершенной*.

Въ первомъ случаѣ для опредѣленія x, надо пользоваться формулой совершеннаго водослива:

$$Q_0 = {}^2/_3 \mu_1 l \sqrt{2g} \left\{ \left(x + k\right)^{3/2} - k^{3/2} \right\}$$

Во второмъ же случаѣ—формулой несовершеннаго водослива:

$$Q_0={}^2/_3\,\mu_1 l\sqrt{2g}\left\{\left(h+H-H_0+k\right)^{3/2}-k^{3/2}\right\}+$$

$$+\mu_2 l\sqrt{2g}\,(H_0-T)\,\sqrt{H_0-T+k},$$

$$\text{гдѣ}\ {}^2/_3\,\mu_1=0{,}57 \quad \text{и} \quad \mu_2=0{,}62$$

Если *u* мало, то надо полагать $k=0$.

§ 44.

Опредѣленіе расхода и средней скорости.

Когда расходъ не особенно великъ, его можно опредѣлить непосредственнымъ измѣреніемъ. Разсмотримъ нѣсколько самыхъ употребительныхъ и простыхъ способовъ непосредственнаго измѣренія расхода.

1. Опредѣленіе расхода при помощи шлюза (чер. 89 *a* и *b*).

Для этого способа измѣренія воду нужно направить въ прямоугольный каналъ, который имѣетъ на концѣ шлюзъ.

Щитъ шлюза передвигаютъ внизъ и вверхъ до тѣхъ поръ, пока количество притекающей къ шлюзу воды ни будетъ равно количеству, черезъ него протекающему. О наступленіи такого равновѣсія можно судить потому, что съ этого момента уровень воды передъ шлюзомъ не будетъ ни опускаться, ни подниматься.

Тогда, измѣривъ величины *h*, *a* и *b*, мы можемъ для опредѣленія расхода воспользоваться формулой истеченія черезъ прямоугольное отверстіе.

Для облегченія вычисленій Meisner составилъ таблицу. При этомъ онъ дѣлалъ подсчетъ въ томъ предположеніи, что ширина отверстія немного меньше ширины канала. Если же ширина отверстія равна ширинѣ канала, то табличныя величины надо увеличить на 9%.

2. *Опредѣленіе расхода при помощи водослива съ боковымъ сжатіемъ* (чер. 90) *a* и *b*.

На приводящемъ или отводящемъ воду отъ двигателя каналѣ, перпендикулярно къ направленію движенія, ставятъ щитъ изъ толстыхъ досокъ. Въ срединѣ этого щита дѣлаютъ прямоугольный вырѣзъ, какъ показано на чертежѣ. Ширина вырѣза должна быть приблизительно равна $^1/_2$ ширины канала. Всѣ канты, какъ горизонтальныхъ реберъ отверстія, такъ и вертикальныхъ, должны быть заострены такимъ образомъ, чтобы вода проходила сначала черезъ острый край.

Высота нижняго ребра отверстія должна быть выбрана такъ, чтобъ не только вся вода могла пройти черезъ образовавшійся водосливъ, но чтобы это ребро лежало выше нижней воды на высоту, равную приблизительно h (чер. 90,*a*) и ни въ какомъ случаѣ не меньшую 150 $^{m}/_{m}$.

Понятно, что если при этомъ вода будетъ выступать изъ береговъ канала, надо ставить боковыя продольныя огражденія. При этомъ, если желательно получить точные результаты, надо заботиться о томъ, чтобы деревянныя стѣнки нигдѣ воды не пропускали.

Высота h, разстояніе между уровнемъ воды передъ водосливомъ и нижнимъ кантомъ отверстія, измѣряется при помощи ватерпаса a, какъ указано на чертежѣ. Когда ватерпасъ установленъ горизонтально, измѣряютъ высоту f, но только на разстояніи отъ водослива, не меньшемъ 1 метра, и высоту c. Очевидно, что

$$h=c-f.$$

Зная h, можно опредѣлить расходъ по формулѣ:

$$Q = {}^2/_3 \mu b h \sqrt{2gh},$$

гдѣ ${}^2/_3\ \mu = 0{,}4$.

Наблюденіе надо начинать тогда, когда движеніе совершенно установится.

3. *Опредѣленіе расхода при помощи водослива безъ бокового сжатія.*

Для болѣе точнаго измѣренія Meisner предлагаетъ еще слѣдующее устройство (чер. 91). Всю воду надо направить черезъ прямоугольный каналъ съ деревянными стѣнками и въ этомъ каналѣ построить водосливъ во всю его ширину, съ соблюденіемъ въ остальномъ тѣхъ же правилъ, что и въ предыдущемъ случаѣ. Чтобы быть вполнѣ увѣреннымъ, что вода вытекаетъ на воздухъ, слѣдуетъ въ стѣнкѣ канала около самаго водослива просверлить дыру въ 50—80 ${}^{m}/_{m}$. Высота h измѣряется въ этомъ случаѣ такъ же, какъ и въ предыдущемъ. Затѣмъ расходъ можно вычислить по формулѣ:

$$Q = {}^2/_3\ \mu\ b h \sqrt{2gh},$$

гдѣ ${}^2/_3\ \mu$ надо положить равнымъ 0,443.

Для обоихъ этихъ случаевъ Meisner вычислилъ таблицы, по которымъ и можно найти расходъ при данномъ h.

4. *Измѣреніе расхода черезъ посредство измѣренія скорости.*

Когда представляется затруднительнымъ опредѣлить расходъ по одному изъ указанныхъ выше способовъ, то опредѣляютъ расходъ по измѣренной площади поперечнаго сѣченія и средней скорости, пользуясь формулой:

$$Q = \Omega v.$$

Болѣе точно можно опредѣлить Q слѣдующимъ образомъ. Предположимъ, что abc есть поперечное сѣченіе потока, расходъ котораго мы хотимъ опредѣлить. Для этой цѣли разбиваемъ это сѣченіе на небольшія части и измѣряемъ скорость въ центрѣ тяжести этихъ площадокъ. Если обозначимъ площадь какой-либо изъ этихъ частей черезъ f и скорость въ ея центрѣ тяжести черезъ u, то найдемъ:

$$Q=\Sigma fu.$$

Мы видимъ, слѣдовательно, что оба эти способа приводятся къ измѣренію скоростей, потому и остановимся на описаніи способовъ опредѣленія среднихъ и дѣйствительныхъ скоростей.

§ 44.

Поплавки.

Простѣйшій способъ измѣренія скорости заключается въ опредѣленіи времени, въ теченіе котораго поплавокъ проплываетъ данное протяженіе. Такъ какъ поплавокъ кромѣ движенія вмѣстѣ съ водой имѣетъ еще собственное движеніе, вслѣдствіе того, что онъ находится на наклонной плоскости, то надо стараться, чтобы это движеніе по возможности было совершенно незначительно.

Ускореніе этого движенія зависитъ отъ слагающей силы тяжести по направленію поверхности и сопротивленія воды движенію. Если, поэтому, поплавокъ будетъ имѣть малый вѣсъ при большой поверхности, то собственное движеніе его будетъ незначительно, ибо сопротивленіе воды пропорціонально площади нормальнаго къ направленію движенія сѣченія, и имъ можно будетъ пренеберечь. Въ виду этого самымъ лучшимъ матеріаломъ для изготовленія поплавка является пробка. Чтобы поплавокъ былъ замѣтенъ, его снабжаютъ краснымъ флажкомъ, который долженъ вращаться н оси, чтобы поплавокъ не испытывалъ сопротивленія отъ во духа. Наблюденіе производится такъ. Пускаютъ поплавок на стрешень (струйка на поверхности, обладающая наибол шей скоростью) и выжидаютъ, когда его движеніе устано вится; для этого надо, чтобы поплавокъ прошелъ 15—20 m Затѣмъ наблюдаютъ время прохожденія поплавка мимо двух станцій, разстояніе *d* между которыми должно быть точн измѣрено. Такого рода наблюденія производятъ нѣскольк разъ. Если въ теченіе *t* секундъ сдѣлано *n* наблюденій, т средняя скорость v_0 на стрешнѣ опредѣлится по формулѣ:

$$v_0 = \frac{n.d}{t}.$$

Зная скорость стрешня, можно по формуламъ, приведеннымъ выше, опредѣлить среднюю скорость потока.

Чтобы при помощи поплавка опредѣлить скорость н нѣкоторой опредѣленной глубинѣ, къ обыкновенному поплавку привѣшиваютъ полый металлическій шаръ (чер. 92). Скорость движенія такого поплавка зависитъ главнымъ образомъ отъ скорости шара, слѣдовательно, помощью его и можно измѣрять скорость на желаемой глубинѣ.

Если мы составимъ поплавокъ изъ нѣсколькихъ пустоцѣлыхъ металличечкихъ шариковъ, помѣщенныхъ на различной глубинѣ, то такой поплавокъ будетъ двигаться со средней скоростью въ данномъ мѣстѣ поперечнаго сѣченія. Опредѣляя такимъ образомъ среднюю скорость въ нѣсколькихъ, распредѣленныхъ по ширинѣ равномѣрно, мѣстахъ, можемъ опредѣлить среднюю скорость потока, какъ среднюю ариѳмстическую изъ этихъ скоростей. Но при этомъ необходимо смѣрять среднюю скорость у обоихъ береговъ, какъ можно ближе къ нимъ. Вмѣсто пустотѣлыхъ металлическихъ шариковъ Meisner рекомендуетъ брать просто куски древеснаго корня. Среднюю скорость въ данномъ пунктѣ по ширинѣ можно измѣрять при помощи пустотѣлой палки, свинченной изъ нѣсколькихъ частей (чер 92); насыпая въ палку дробь, можно заставить ее погрузиться на желаемую глубину

Длина погруженной части палки, какъ показали опыты полковника Allan Cunningham'а, должна быть равна 0,9 глубины, для того чтобы скорость ея передвиженія равнялась средней скорости.

§ 45.

Рѣчной маятникъ Castelli.

При помощи рѣчного маятника Castelli можно опредѣлять скорость на желаемой глубинѣ.

Онъ состоитъ изъ раздѣльнаго квадранта (черт. 93), въ центрѣ котораго подвѣшенъ на ниткѣ металлическій или слоновой кости шаръ.

Для измѣренія скорости шаръ погружается въ воду на желаемую глубину и въ то-же время верхняя сторона квадранта устанавливается горизонтально помощью уровня *ab*. Подъ дѣйствіемъ давленія текущей воды щарикъ отклоняется отъ вертикальнаго положенія на нѣкоторый уголъ и будетъ находиться въ равновѣсіи подъ дѣйствіемъ своей тяжести и давленія воды. Понятно, что равнодѣйствующая должна быть направлена по направленію нити.

Такимъ образомъ:

$$P.=Q.tg\mu$$

Предполагая, что давленіе воды пропорціонально квадрату скорости, найдемъ:

$$P=cv^2=Q.tg\varphi,$$

откуда

$$v=\alpha\sqrt{tg\varphi}$$

Отсюда видимъ, что скорость будетъ пропорціональ квадратному корню изъ тангенса угла отклоненія. Для удоб ства отсчитыванія на дугѣ квадранта могутъ быть отмѣчен квадр. корни изъ тангенсовъ угловъ.

Для опредѣленія постояннаго α двигаютъ маятникъ въ спокойной водѣ съ опредѣленной скоростью v' и замѣчают отклоненіе φ'; тогда

$$v=\alpha\sqrt{tg\varphi'} \quad \text{и} \quad \alpha=\frac{v'}{\sqrt{tg\varphi'}}$$

Понятно, что надежное значеніе для α можетъ быт установлено только изъ многочисленныхъ опытовъ. Строго говоря, такой способъ опредѣленія α не вполнѣ точенъ, ибо давленіе движущейся съ нѣкоторой скоростью воды на погруженное въ нее тѣло всегда, какъ показываютъ наблюденія, больше опротивленія, которое оказываетъ вода на движущееся въ ней съ той же скоростью тѣло.

7

§ 46.

Вѣсы Brunings'a.

Устройство этого прибора основано также на томъ допущеніи, что давленіе движущейся воды пропорціонально квадрату скорости.

Приборъ состоитъ изъ стержня *AC* (чер. 94), на одномъ концѣ котораго укрѣпляется пластинка *F*, а на другомъ концѣ крючекъ. Къ этому крючку привязывается шнурокъ, обходящій блокъ D и прикрѣпленный въ E къ одному концу коромысла вѣсовъ; на другомъ концѣ коромысла имѣется передвижная гиря Q. Стержень AC легко скользитъ въ муфтѣ B, которая въ свою очередь можетъ передвигаться и устанавливаться въ любомъ мѣстѣ шеста, погруженнаго въ дно и служащаго опорой всему прибору.

Подъ дѣйствіемъ давленія на пластинку F, стержень AC, скользя въ муфтѣ B, тянетъ шнурокъ и отклоняетъ коромысло вѣсовъ отъ положенія равновѣсія. Наблюдатель, перемѣщая гирьку Q, приводитъ коромысло въ горизонтальное положеніе и отмѣчаетъ плечо груза x. Понятно, что при этомъ должно имѣть мѣсто слѣдующее равенство:

$$Qx=Pa.$$

Но такъ какъ

$$P=cv^2,$$

то

$$Qx=acv^2 \qquad \text{и} \qquad v=\sqrt{\frac{Q}{ca}}\sqrt{x}=\alpha\sqrt{x},$$

т. е. скорость пропорціональна квадратному корню изъ плеча груза Q. Для удобства на плечѣ рычага и отмѣчаютъ величины этого корня. Постоянное α опредѣляется такъ же, какъ и въ предыдущемъ случаѣ.

§ 47.

Трубка Пито.

Трубка Пито представляетъ изъ себя загнтую подъ прямымъ угломъ (чер. 95) и открытую съ обѣихъ сторонъ стеклянную трубку BA, при чемъ конецъ B имѣетъ капиллярное отверстіе. Если погрузить тонкій конецъ B въ воду и поставить трубку отверстіемъ противъ теченія, то вод въ трубкѣ поднимается на нѣкоторую высоту h надъ уровнемъ воды, которая и будетъ зависѣть отъ скорости на той глубинѣ, на которой находится нижнее отверстіе трубки.

Если обозначить площадь отверстія при B черезъ f, то давленіе на это сѣченіе со стороны воды, находящейся въ трубкѣ, будетъ:

$$\Delta f.\,(z+h),$$

а со стороны воды, движущейся въ рѣкѣ:

$$\Delta fz+\zeta.\,\Delta f\frac{v^2}{2g},$$

гдѣ ζ—нѣкоторый коэффиціентъ.

Такъ какъ жидкость въ трубкѣ находится въ равновѣсіи, то

$$\Delta f(z+h)=\Delta fz+\zeta\Delta f\,\frac{v^2}{2g},$$

откуда

$$h=\zeta\frac{v^2}{2g}$$

$$v^2=\frac{1}{\zeta}2gh$$

$$v=\frac{1}{\sqrt{\zeta}}\sqrt{2gh}=$$

По опытамъ Dubuat $\zeta=1{,}15$.

Такимъ образомъ найдемъ:

$$\dot{v}=\frac{1}{\zeta}\sqrt{2gh}=\alpha\sqrt{2gh}$$

Коэффиціентъ α опредѣляется подобно предыдущему. Здѣсь отмѣтимъ еще интересный фактъ, которымъ мы воспользуемся въ дальнѣйшемъ. Если трубку поварачивать около оси вертикальнаго колѣна, то поднятіе h мѣняется и даже становится иногда отрицательнымъ.

Опыты Berthan'а дали слѣдующіе результаты для различныхъ угловъ, образуемыхъ осью горизонтальнаго колѣна съ направленіемъ обратнымъ теченію:

При углѣ =0°	повышеніе воды	$= +h$
45°		$= 0$
90°		$= -1{,}5h$
180°		$= -0{,}5h$

Такое отрицательное поднятіе показываетъ, что въ такомъ случаѣ около конца трубки имѣетъ мѣсто разрѣженіе. Такое разрѣженіе, выраженное высотой опусканія воды въ трубкѣ, называютъ *недавленіемъ*.

Изъ предыдущей таблицы видимъ, что недавленіе достигаетъ наибольшей величины, когда ось горизонтальнаго колѣна перепендикулярна къ направленію теченія.

§ 48.

Трубка Darcy и Baumgarten'а.

Darcy и Baumgarten значительно усовершенствовали трубку Пито. Ихъ приборъ состоитъ изъ двухъ стеклянныхъ трубокъ a и b (черт. 94) діаметромъ 15 — 20 m/m Вверху эти трубки соединяются общей металлической оправой 0, снабженной краномъ m, служащимъ для сообщенія или разобщенія трубки съ атмосферой. Отъ крана m идетъ каучковая трубка t, оканчивающаяся костянымъ мундштукомъ s. Внизу трубки также заключаются въ общую оправу съ двумя цилиндрическими каналами a' и b', служащими продолженіемъ трубокъ. Каждый изъ этихъ каналовъ продолжается въ металлическую трубку, причемъ трубка b d загнута подъ прямымъ угломъ, а трубка c прямая. Кранъ *nn'* имѣющій два круглыхъ отверстія одинаковаго діаметра съ трубками, служитъ для одновременнаго замыканія ихъ. Весь приборъ прикрѣпляется къ доскѣ *A*, которая снабжена вертикальной шкалой *l* съ дѣленіями для отсчета высотъ воды въ обѣихъ трубкахъ. Доска двумя втулками *g* можетъ скользить по шесту *M*, на которомъ она можетъ быть установлена въ любомъ положеніи. Нижній конецъ шеста заостренъ и снабженъ заостреннымъ-чугуннымъ башмакомъ; чтобы воспрепятствовать углубленію шеста въ дно русла, башмакъ снабжаютъ круглымъ дискомъ. Для измѣренія скорости приборъ погружаютъ въ воду на желаемую глубину, открывъ кранъ *m;* при этомъ горизонтальное колѣно трубки *ad* должно быть направлено противъ теченія. Если кранъ *nn'* открытъ, то вода въ трубкѣ *bc*, вслѣдствіе недавленія будетъ стоять ниже поверхности воды въ потокѣ на нѣкоторую высоту h_1, а въ трубкѣ *ad*—выше на нѣкоторую высоту h_2. Какъ только наступитъ равновѣсіе, кранъ *nn'* закрываютъ при помощи снурковъ *ff*, а затѣмъ приборъ вынимаютъ и отсчитываютъ высоту $h=h_1+h_2$.

Такъ какъ и давленіе и недавленіе пропорціональны квадрату скорости то

$$h_1=\zeta'\frac{v^2}{2g} \qquad \text{и} \qquad h_2=\zeta''\frac{v^2}{2g},$$

$h=\frac{v^2}{2g}$

откуда

$$v^2=\sqrt{\frac{2gh}{\zeta'+\zeta'}}=\alpha\sqrt{2gh}$$

Величину коэффиціента α опредѣляютъ опытнымъ путемъ и пишутъ на приборѣ.

Обыкновенно $\alpha=0{,}988—0{,}998$.

При измѣреніи скорости на большой глубинѣ вода стремится заполнить обѣ трубки и подняться выше оправы 0.

Въ этомъ случаѣ помощью мундштука *s* вдуваютъ ртомъ въ верхнюю часть трубокъ воздухъ и такимъ образомъ понижаютъ горизонтъ воды въ обѣихъ трубкахъ на одну и ту же высоту, не измѣняя разности между ними. Послѣ вдуванія кранъ *m*, долженъ быть тотчасъ же закрытъ.

Наоборотъ при измѣреніи скорости на незначительной глубинѣ, напримѣръ у берега, когда вода въ трубкѣ *bc* можетъ не пройти крана *nn'*, воздухъ при помощи мундштука *s* высасываютъ изъ трубки, вслѣдствіе чего вода поднимается въ обѣихъ трубкахъ на одну и ту же величину.

Преимущество этого прибора по сравненію съ простой трубкой Пито заключается въ слѣдующемъ: 1) онъ можетъ служить для измѣренія скоростей на различной глубинѣ, 2) неудобство отсчитыванія вслѣдствіе колебанія поверхности воды въ трубкѣ совершенно устранено, 3) волосность не имѣетъ вліянія на точность показанія, т. к. вслѣдствіе этого обстоятельства вода поднимается въ обѣихъ трубкахъ на одну и ту же величину, 4) вслѣдствіе одновременнаго отсчитыванія высоты давленія и недавленія, приборъ болѣе чувствителенъ.

§ 49. 50

Вертушки Woltmann'a и Amsler'a.

Схема этого прибора изображена на черт. 97. *AB* есть ось, на концѣ *A* которой укрѣплены два крыла (или больше) *M* и *N*, наклоненныя къ плоскости вращенія подъ нѣкоторымъ угломъ. Вслѣдствіе теченія воды крылья и ось приходятъ во вращеніе и по числу оборотовъ оси за извѣстное время можно опредѣлить скорость теченія. Счетъ числа оборотовъ ведется десятичнымъ счетчикомъ, состоящимъ изъ

3-хъ большихъ зубчатыхъ колесъ (C) и 2-хъ меньшихъ (C_1), при чемъ ихъ передаточныя числа=10. Первое колесо счетчика сцѣпляется съ безконечнымъ винтомъ, нарѣзаннымъ на оси AB. Колеса счетчика имѣютъ опоры въ рычагѣ, вращающемся въ P на шарнирѣ. Пружинка k постоянно стремится отодвинуть рычагъ внизъ и вывести, слѣдовательно, счетчикъ изъ зацѣпленія съ червякомъ. Натягивая шнурокъ L, привязанный къ свободному концу рычага, наблюдатель можетъ привести счетчикъ въ зацѣпленіе и начать счетъ оборотовъ. По истеченіи нѣкотораго опредѣленнаго промежутка времени, наблюдатель опускаетъ шнурокъ, пружина выводитъ счетчики изъ зацѣпленія и счетъ оборотовъ прекращается.

Первое колесо счетчика считаетъ единицы оборотовъ, второе—десятки и третье—сотни.

Чтобы при выниманіи прибора изъ воды счетчикъ не могъ повернуться самъ собою, на обойницѣ, въ которой вращается ось, имѣются два штифта m, которые при расцѣпленіи счетчика входятъ между зубцами и закрѣпляютъ положеніе колесъ. Весь приборъ можетъ быть установленъ въ любомъ мѣстѣ шеста M, но съ сохраненіемъ вращенія, т. ч. при помощи крыла D онъ самъ собою устанавливается надлежащимъ образомъ.

Подобный же приборъ можетъ быть употребленъ для опредѣленія скорости движенія газовъ (анемометръ), но, конечно, онъ долженъ быть сдѣланъ гораздо чувствительнѣй. Слабую сторону этого прибора представляетъ счетчикъ, т. к. находясь въ водѣ, онъ часто засаривается и задерживаетъ вращеніе.

Поэтому Amsler устроилъ счетчикъ электрическій. Одинъ изъ электродовъ спирали Румкорфа соединяется съ мѣдной оправой вертушки, гдѣ-нибудь въ пунктѣ 0, а другой, изолированный отъ обоймицъ, 81 проходитъ черезъ нее и выступаетъ такъ, что задѣваетъ за спицу крыла, при чемъ токъ замыкается и на лентѣ телеграфнаго аппарата, введеннаго въ цѣпь, каждое прохожденіе спицы отмѣчается точкой. При такомъ способѣ можно сосчитать не только число оборотовъ, но даже замѣтить ихъ сравнительную продолжительность: оказывается, что она не постоянна, а періодически мѣняется. Это, до сихъ поръ не изслѣдованное явленіе, называется *пульсаціей* рѣки.

Многочисленные опыты показали, что зависимость между скоростью теченія и числомъ оборотовъ вертушки можетъ быть выражена соотношеніемъ:

$$v = a + bn,$$

гдѣ v—скорость, n—число оборотовъ, а a и b—постоянныя прибора.

Эти постоянныя опредѣляются совершенно такимъ же способомъ, какъ и постоянныя другихъ приборовъ. Относительно постояннаго a замѣтимъ слѣдующее.

Если мы положимъ $n=0$, то найдемъ:

$$v = a.$$

Слѣдовательно, a есть такая скорость, при которой вертушка еще не вращается, поэтому a можетъ служить мѣрой нечувствительности и называется *коэффиціентомъ нечувствительности*.

Надо, конечно, позаботиться объ его уменьшеніи. Величина a зависитъ главнымъ образомъ отъ величины тренія въ сочлененіяхъ; если, поэтому, приборъ устроенъ деликатно, то можно принимать:

$$v = bn.$$

§ 51.

Реакція жидкости.

Реакціей называютъ давленіе, производимое движущеюся жидкостью на твердое тѣло, которое она встрѣчаетъ на своемъ пути.

I. Реакція струи на неподвижный каналъ.

Вообразимъ, что жидкость протекаетъ по каналу bc (чер. 98, a), ось котораго представляетъ изъ себя кривую двоякой кривизны. Отнесемъ этотъ каналъ къ системѣ прямоугольныхъ осей (OX, OY, и OZ) и допустимъ, что скорость w_1, съ которой жидкость ~~протекаетъ по~~ каналу, образуетъ съ осями углы:

притекаетъ къ

$$\angle\ (w_1, X) = \alpha_1$$

$$\angle\ (w_1, Y) = \beta_1$$

$$\angle\ (w_1, Z) = \gamma_1\,,$$

скорость w_2 при выходѣ жидкости изъ канала, имѣющая, очевидно, направленіе касательной къ послѣднему элементу оси, образуетъ съ осями углы:

$$\angle\ (w_2, X) = \alpha_2$$

$$\angle\ (w_2, Y) = \beta_2$$

$$\angle\ (w_2, Z) = \gamma_2\,,$$

и скорость w_2 въ какомъ-нибудь пунктѣ a оси, имѣющая также направленіе соотвѣтствующей касательной, составляетъ съ тѣми же осями углы:

$$\angle\,(w_p, X) = \alpha$$
$$\angle\,(w_p, Y) = \beta$$
$$\angle\,(w_p, Z) = \gamma.$$

Если мы вообразимъ въ пунктѣ *a* безконечно малую массу жидкости dm, и обозначимъ слагающія по осямъ равнодѣйствующей силъ, на нее дѣйствующихъ, черезъ dX, dY, dZ, то будемъ имѣть:

$$dX = dm\,\frac{d\,(w\ \cos\alpha)}{dt}$$

$$dY = dm\,\frac{d\,(w\ \cos\beta)}{dt}$$

$$dZ = dm\,\frac{d\,(w\ \cos\gamma)}{dt}$$

$dX = dm\,\partial v$

$\partial v_x = \partial\,(m$

Допустимъ теперь, что жидкость течетъ установившимся теченіемъ, при чемъ въ единицу времени протекаетъ масса *M*.

Въ такомъ случаѣ безконечно малую массу мы можемъ представить какъ массу, протекающую въ безконечно малое время dt, т. ч.

$$dm = M dt$$

Такимъ образомъ, предыдущія равенства могутъ быть переписаны такъ:

$$dX = M\,dt\,\frac{d\,(w\ \cos\alpha)}{dt} = Md\,(w\ \cos\alpha)$$
$$dY = \text{„}\quad\text{„}\quad\text{„}\quad\text{„}\quad = Md\,(w\ \cos\beta)$$
$$dZ = \text{„}\quad\text{„}\quad\text{„}\quad\text{„}\quad = Md\,(w\ \cos\gamma)$$

Разсмотримъ теперь, изъ какихъ отдѣльныхъ силъ состоятъ результирующія dX, dY и dZ.

Во-первыхъ мы должны здѣсь отмѣтить реакцію стѣнокъ. Если ef (чер. 98, b) изображаетъ нормальное сѣченіе канала въ пунктѣ a, то легко видѣть, что масса dm будетъ испытывать реакцію отъ всякаго элемента, соотвѣтствующаго элементу контура.

Въ общемъ случаѣ мы получимъ равнодѣйствующую силу и равнодѣйствующую пару; эта то пара и будетъ имѣть слѣдствіемъ вращательное движеніе, которое наблюдалъ Рейнольдсъ. Но такъ какъ мы разсматриваемъ всегда нѣкоторое фиктивное поступательное движеніе, то эту пару мы разсматривать не будемъ, а примемъ во вниманіе только равнодѣйствующую всѣхъ силъ реакціи dN.

Допустимъ дальше, что оси координатъ выбраны такъ, что направленіе силы тяжести составляетъ съ осями углы: δ_1, δ_2 и δ_3; тогда по осямъ на разсматриваемую безконечно-малую массу dm будутъ дѣйствовать слагающія: силы

тяжести

по оси OX . . . . $dm\ g\cos\delta_1$

по оси OY . . . . $dm\ g\cos\delta_2$

по оси OZ . . . . $dm\ g\cos\delta_3$

Положимъ, наконецъ, что на массу dm въ сторону движенія дѣйствуетъ давленіе $p\sigma$, гдѣ σ площадь сѣченія канала въ пунктѣ a, и въ сторону обратную движенію — давленіе $(p+dp)$ $(\sigma+d\sigma)$. Такъ какъ направленіе давленія въ данномъ пунктѣ совпадаетъ съ направленіемъ касательной къ оси, то, проектируя эти давленія на ось OX, мы найдемъ:

$$p\sigma\cos\alpha-(p+dp)\ (\sigma+d\sigma)\cos(\alpha+d\alpha)=$$

$$=p\sigma\cos\alpha-p\sigma\cos\alpha+p\sigma\sin\alpha d\alpha-dp\sigma\cos\alpha+dp\sigma\sin\alpha\, d\alpha-pd\sigma\cos\alpha+$$

$$+pd\sigma\, sn\alpha\, d\alpha=p\sigma\sin\alpha d\alpha-dp\sigma\cos\alpha-pd\sigma\cos\alpha=-d\ (p\sigma\cos\alpha).$$

Итакъ

$$dX = dN_x + gdm\ \cos \delta_1 - d(p\sigma \cos \alpha) = Md(w \cos \alpha),$$

откуда

$$dN_x = Md(w \cos \alpha) - gdm \cos \delta_1 + d(p\sigma \cos \alpha).$$

Интегрируя это ур-іе и распространяя интеграцію на всю длину канала, получимъ:

$$N_x = M\ (w_2 \cos \alpha_2 - w_1 \cos \alpha_1) - gm \cos \delta_1 + p_2\, \sigma_2 \cos \alpha_2 - p_1\, \sigma_1 \cos \alpha'_1$$

гдѣ m—масса жидкости, содержимая каналомъ и α'_1—направленіе касательной къ первому элементу оси канала съ осями координатъ.

Такимъ же образомъ найдемъ

$$N_y = M(w_2 \cos \beta_2 - w_1 \cos \beta_1) - gm \cos \delta_2 + p_2\, \sigma_2 \cos \beta_2 - p_1\, \sigma_1 \cos \beta'_1;$$

$$N_z = M(w_2 \cos \gamma_2 - w_1 \cos \gamma_1) - gm \cos \delta_3 + p_2\, \sigma_2 \cos \gamma_2 - p_1\, \sigma_1 \cos \gamma'_1.$$

Эти выраженія, слѣдовательно, представляютъ проекціи по осямъ равнодѣйствующей реакцій канала на жидкость. Очевидно, что проекціи давленія жидкости на каналъ равны соотвѣтственно N_x, N_y и N_z, но направлены въ противоположную сторону.

Замѣтимъ здѣсь, что полученныя уравненія справедливы не только по отношенію къ жидкостямъ несжимаемымъ, но также по отношенію къ жидкостямъ газообразнымъ, ибо мы предполагали, что черезъ каждое сѣченіе канала протекаетъ въ одно и то же время одна и та же масса, а не одинъ и тотъ же объемъ, а это, какъ увидимъ дальше, имѣетъ мѣсто и при движеніи жидкостей сжимаемыхъ. Но теперь мы будемъ говорить только о жидкостяхъ капельныхъ.

Обратимъ вниманіе еще на то, что выведенныя ур-ія имѣютъ мѣсто при всякомъ движеніи воды въ каналѣ, независимо отъ того, какая вода будетъ встрѣчать тамъ сопротивленія, ибо понятно, что величина этихъ сопротивленій тотчасъ же отразится на величинѣ скорости w_2, величину которой мы всегда можемъ опредѣлить при помощи ур-ій Д. Бернулли, если, конечно, заданы всѣ прочія величины.

Если скорость w_1 не совпадаетъ съ направленіемъ касательной къ первому элементу оси, какъ мы и предположили ради общности, то тогда при составленіи ур-ія Бернулли нужно вводить только ея составляющую по направленію касательной, въ томъ предположеніи, что нормальная составляющая будетъ при встрѣчѣ жидкости со стѣнкой совершенно потеряна. Такое предположеніе имѣетъ, понятно, только характеръ нѣкотораго приближенія, и, вѣроятно, справедливо лишь тогда, когда нормальная составляющая составляетъ незначительную долю всей скорости.

Приложимъ выведенныя ур-ія къ нѣсколькимъ примѣрамъ.

Примѣръ 1.

по горизонт. направлени

Опредѣлить реакцію жидкости на сосудъ, изъ котораго она вытекаетъ въ отверстіе въ вертикальной стѣнкѣ (чер. 99).

малого размера

горизонтальн

Изъ условія задачи видно, что реакція по всѣмъ направленіямъ, кромѣ горизонтальнаго, перпендикулярнаго къ площади отверстія, =0.

Если мы предположимъ, что уровень воды въ сосудѣ стоитъ неизмѣнно на высотѣ h надъ центромъ тяжести отверстія, то вода будетъ вытекать изъ сосуда со скоростью

[illegible]

$$v = \sqrt{2gh}$$

Такимъ образомъ давленіе на сосудъ по указанному направленію и въ сторону обратную истеченію будетъ:

$$N=\frac{\alpha\omega\triangle\sqrt{2gh}}{g}\sqrt{2gh}+\alpha\omega p_0=\alpha\omega 2h\triangle+\alpha\omega p_0$$

гдѣ α—коэф. сжатія и ω—площадь отверстія, p_0—дав. атмосферы. Подъ вліяніемъ этого давленія сосудъ стремится перемѣщаться въ сторону обратную истеченію. Если бы мы пожелали найти то усиліе R, которое мы должны бы были приложить къ сосуду въ обратномъ направленіи, чтобы воспрепятствовать перемѣщенію, то мы должны принять во вниманіе еще и внѣшнія давленія. Если на сосудъ дѣйствуетъ снаружи атмосферное давленіе, то, слѣдовательно, всѣ элементарныя давленія уравновѣшиваются, за исключеніемъ давленія на элементъ противолежащій отверстію, имѣющій площадь сжатаго сѣченія. Т. обр.

$$R=N-\alpha\omega p_0=\alpha\omega 2h\triangle.$$

Отсюда мы видимъ, что R въ два раза больше соотвѣтствуюшаго гидростатическаго давленія.

Примѣръ 2.

Пусть имѣемъ три одинаковыя стѣнки AB, CD ***и*** EF (черт. 100), ***образующія два одинаковые канала съ прямоугольнымъ сѣченіемъ, черезъ которое течетъ жидкость при одинаковыхъ условіяхъ; требуется опредѣлить давленіе на среднюю стѣнку по горизонтальному и вертикальному направленіямъ.***

Проведемъ черезъ точки E, D и B нормальныя сѣченія каналовъ ED', DE' и BC'. Очевидно, что давленіе на часть стѣнки CC' со стороны жидкости въ I каналѣ = давленію на

EE' со стороны жидкости во II каналѣ, слѣдовательно, давленіе на *CC'* и *D'D* въ суммѣ равно давленію на каналъ II между сѣченіями *a* и *b*. Это давленіе по предыдущему даетъ слаг. по осямъ:

$$N_x = M\,(w_2 \cos\alpha_2 - w_1 \cos\alpha_1) + p_2\,\sigma_2 \cos\alpha_2 - p_1\,\sigma_1 \cos\alpha_1$$

$$N_z = M\,(w_1 \sin\alpha_1 - w_2 \sin\alpha_2) + gm + p_1\,\sigma_1 \sin\alpha_1 - p_2\,\sigma_2 \sin\alpha_2$$

Теперь намъ остается найти давленіе на часть стѣнки *CD'* со стороны жидкости въ каналѣ II и на *C'D*—со стороны жидкости въ каналѣ I.

Для простоты мы допустимъ, что вдоль *CD'* и *DC'* давленія и скорости остаются постоянными и равными соотвѣтственно давленіямъ и скоростямъ въ сѣченіяхъ *a* и *b*.

Въ такомъ случаѣ очевидно, что давленіе на *CD'* по направленію $OX = -p_1\sigma_1 \cos\alpha_1$, давленіе на *C'D* по тому же направленію$=p_2\sigma_2 \cos\alpha_2$ и давленіе на всю стѣнку *CD* по горизонтальному направленію будетъ:

$$R_x = N_x + p_1\,\sigma_1 \cos\alpha_1 - p_2\,\sigma_2 \cos\alpha_2 = M\,(w_2 \cos\alpha_2 - w_1 \cos\alpha_1)$$

Давленіе на *CD'* внизъ, если обозначимъ ширину канала черезъ *l*, будетъ:

$$CC_1\,lp_1 = p_1(CEl - \sigma_1 \sin\alpha_1) = p_1 CEl - p_1\,\sigma_1 \sin\alpha_1$$

Такимъ же образомъ найдемъ, что давленіе на *C'D* вверхъ будетъ:

$$p_2\,DFl - p_2\,\sigma_2 \sin\alpha_2$$

и, слѣдовательно:

$$R_z = N_z + p_1\,CEl - p_1\,\sigma_1 \sin\alpha_1 - p_2\,DFl + p_2\,\sigma_2 \sin\alpha_2 =$$

$$= M\,(w_1 \sin\alpha_1 + w_2 \sin\alpha_2) + p_1\,CEl - p_2\,DFl \;+ gm$$

До сихъ поръ мы разсматривали силу реакціи и нашли ея проложеніе на оси. Найдемъ теперь моментъ реакціи по отношенію какой-нибудь оси, положимъ, оси X-овъ.

Определение $M_{реакц}$

Вообразимъ опять (чер. 101), что жидкость протекаетъ по каналу двоякой кривизны и будемъ разсматривать, придерживаясь прежняго обозначенія, моментъ всѣхъ силъ, дѣйствующихъ на безконечно-малую массу dm, находящуюся въ пунктѣ a.

Извѣстно, что

$$d\mu_x = ydZ - zdY$$

По предыдущему

$$dZ = dm \frac{d(w\cos\gamma)}{dt} = dm \frac{dw_z}{dt}$$

$$dY = dm \frac{d\ (w\cos\beta)}{dt} = dm \frac{dw_y}{dt}$$

Т. ч.

$$d\mu_x = dm \left\{ \frac{dw_z}{dt}\, y - \frac{dw_y}{dt}\ z \right\}$$

Легко видѣть, что

$$\frac{d(w_z y)}{dt} = \frac{dw_z}{dt}\ y + w_z \frac{dy}{dt} = \frac{dw_z}{dt}\, y + w_z w_y,$$

$$\frac{d\ (w_y z)}{dt} = \frac{dw_y}{dt}\, z + w_y \frac{dz}{dt} = \frac{dw_y}{dt}\, z + w_z w_y$$

На основаніи этого выраженіе для момента можетъ быть переписано такъ:

$$d\mu_x = dm\left\{\frac{d(w_z y)}{dt} - \frac{d(w_y z)}{dt}\right\} = M\left\{d(w_z y) - d(w_y z)\right\},$$

$Md\{w_z y - w_y z\}$

если мы положимъ $dm = Mdt$, гдѣ M—масса жидкости, протекающая въ единицу времени.

Спроектируемъ w на плоскость ZY и обозначимъ уголъ между проекціей w и осью OY черезъ φ; тогда:

$$w_y = w \sin\alpha \cos\varphi \qquad z$$

$$w_z = w \sin\alpha \sin\varphi \qquad y$$

$$d\mu_x = Md\left\{w \sin\alpha\,(y \sin\varphi - z \cos\varphi)\right\}$$

Продолжимъ направленіе проекціи скорости и опустимъ на это направленіе перпендикуляръ $ol = \rho$ изъ начала координатъ; тогда, какъ видно изъ чертежа,

$$np = y\,tg\varphi;\quad op = z - y\,tg\varphi,\ \text{и}\ \rho = ol = op\cos\varphi = z\cos\varphi - y\sin\varphi$$

Слѣдовательно

$$\int d\mu_x = -\int Md\,(w \sin\alpha\rho)\,.$$

$$\mu_x = M(w_1 \sin\alpha_1\,\rho_1 - w_2 \sin\alpha_2\,\rho_2)$$

Но

$$\mu_x = M_x\ N\ (\text{реакція}) + M_x\ \text{сил. тяж.} + M_x\ \text{давл.}$$

Элементарный моментъ относительно оси X силы тяжести будетъ равенъ

$$dmg\,(\cos\delta_3 y - \cos\delta_2 z)$$

∫yd

и

$$M_x \text{ с.тж.} = g\left\{\cos\delta_3 \int y\,dm - \cos\delta_2 \int z\,dm\right\} =$$
$$= mg\left\{\cos\delta_3\, y_0 - \cos\delta_2\, z_0\right\},$$

гдѣ y_0 и z_0—координаты центра тяжести объема жидкости, находящейся въ трубѣ.

Спроектируемъ направленіе силы тяжести на плоскость ZY и обозначимъ уголъ, составленный этими направленіями съ осью У-овъ черезъ θ; тогда

$$y_0 \cos\delta_3 = y_0 \sin\delta_1 \sin\theta,$$
$$z_0 \cos\delta_2 = z_0 \sin\delta_1 \cos\theta,$$

т. ч.

$$M_x \text{ с. тж.} = mg\sin\delta_1 \left\{ y_0 \sin\alpha - z_0 \cos\alpha \right\} = - mg\sin\delta_1\, \rho_0,$$

гдѣ ρ_0—длина перпендикуляра, опущеннаго изъ начала координатъ 0 на направленіе проекціи силы тяжести на ось ZY.

Совершенно такимъ же образомъ найдемъ:

$$dM_x \text{ давл.} = d\,(p\sigma\cos\gamma)\,y - d\,(p\sigma\cos\beta)\,z =$$
$$= d\left\{p\sigma\sin\alpha\,(\sin\varphi y - \cos\varphi z)\right\} = -d\,(p\sigma\sin\alpha\rho)$$
$$\text{и } M_x \text{ давл.} = p_1\sigma_1\sin\alpha'_1\rho_1 - p_2\sigma_2\sin\alpha_2\rho_2$$

Такимъ образомъ окончательно найдемъ:

$$M_x N = M\,(w_1\sin\alpha_1\rho_1 - w_2\sin\alpha_2\rho_2) + mg\sin\delta_1\,\rho_1 + (p_2\sigma_2\sin\alpha_2\rho_2 -$$
$$- p_1\sigma_1\sin\alpha'_1\rho_1\,)$$

Совершенно подобныя же выраженія получимъ для M_y и M_z.

Моментъ давленія жидкости будетъ имѣть ту же величину, но обратное направленіе.

Пользуясь выведенными выраженіями для давленія жидкости на неподвижный каналъ и момента этого давленія, мы можемъ опредѣлить работу жидкости въ томъ случаѣ, если каналъ какъ нибудь перемѣщается. Но такъ какъ эти выраженія довольно сложны, то гораздо проще эту работу опредѣлять инымъ, болѣе простымъ способомъ, который основанъ на сравненіи энергіи, приносимой жидкостью къ каналу и уносимой ею при выходѣ изъ канала; разность между тѣмъ и другимъ запасомъ энергіи, за вычетомъ вредныхъ потерь, имѣющихъ мѣсто при протеканіи по каналу, и представитъ искомую работу. Понятно, что если энергія жидкости убываетъ, жидкость движетъ каналъ, если ея энергія прибываетъ, —каналъ движетъ жидкость.

Для поясненія этого метода разсмотримъ нѣсколько простыхъ примѣровъ, имѣющихъ нѣкоторое общее значеніе.

Примѣръ 1.

Изъ трубы (чер. 102) ***вытекаетъ со скоростью*** v ***струя воды и ударяетъ въ стѣнку*** aa, ***поставленную къ ней перпендикулярно; подъ вліяніемъ этого удара стѣнка начинаетъ отступать, допустимъ, въ направленіи истеченія струи со скоростью*** u. ***Вычислимъ, какую работу отдаетъ вода въ этомъ случаѣ стѣнкѣ.***

Мы говорили раньше, что слагающая скорости по направленію нормали къ стѣнкѣ совершенно исчезаетъ вслѣдствіе удара. Но такое допущеніе носитъ характеръ приближенія и будетъ, можетъ быть, близко къ истинѣ въ томъ случаѣ, если эта слагающая составитъ незначительную часть всей скорости.

Если бы мы сдѣлали такое же допущеніе и въ разсматриваемомъ случаѣ, то должны были бы придти къ заключенію, что теченіе воды у стѣнки прекращается. Въ дѣйствительности же, конечно, вода должна оставлять стѣнку съ нѣкоторою скоростью; поэтому надо допустить, что у стѣнки образуется мертвое пространство въ видѣ конуса *ehg*, по которому вода и движется, какъ по стѣнкѣ.

При такомъ допущеніи будетъ вполнѣ естестественно предполагать, что конусъ *ehg* будетъ распредѣлять струю равномѣрно по всей стѣнкѣ.

Далѣе намъ нужно сдѣлать к.-ниб. предположеніе о направленіи относительной скорости, съ которою вода оставляетъ стѣнку. Самое простое, казалось бы, предположить то, что эта скорость направлена параллельно стѣнкѣ. Но, какъ показываютъ болѣе точныя изслѣдованія теченія воды въ разсматриваемомъ случаѣ, такое допущеніе будетъ справедливо только тогда, когда отношеніе площади нормальнаго сѣченія струи (f) къ площади самой стѣнки (F) есть величина безконечно—малая. Понятно, что при практическихъ примѣненіяхъ это условіе выполнено, если отношеніе $\frac{f}{F}$ будетъ достаточно мало.

Кромѣ того оказывается, что то же самое будетъ имѣть мѣсто еще и въ томъ случаѣ, если труба или отверстіе, изъ котораго вытекаетъ струя, будетъ находиться на очень маломъ разстояніи отъ стѣнки. Если ни одно изъ этихъ двухъ условій не выполнено, то струяначнетъ расширяться, не доходя до стѣнки (чер. 103), и будетъ имѣть при оставленіи стѣнки скорость, составляющую со стѣнкой нѣкоторый уголъ.

Итакъ допустимъ, что хотя одно изъ упомянутыхъ выше условій выполнено, такъ что вода оставляетъ стѣнку съ относительною скоростью, направленной пораллельно стѣнкѣ.

Въ такомъ предположеніи будемъ искать работу, которую отдаетъ стѣнкѣ каждый килогр. воды, предполагая, что всѣ струйки въ среднемъ движутся такъ, какъ струйка, лежащая въ горизонтальной плоскости, т. е., иными словами, будемъ пренебрегать вліяніемъ силы тяжести, ибо въ среднемъ это вліяніе сведется къ нулю.

Каждый килогр. воды, вытекая изъ трубы, несетъ количество энергіи равное $\frac{v^2}{2g}$.

Если стѣнка движется со скоростью u, то вода догоняетъ ее со скоростью $(v-u)$. Ударяясь о стѣнку, вода затѣмъ будетъ растекаться по ней и оставлять ее съ той же относительной скоростью (вредными сопротивленіями мы пренебрегаемъ), имѣя такимъ образомъ абсолютную скорость w_1, которая является геометрической суммой $(v-u)$ и u.

Изъ треугольника abc имѣемъ:

$$w^2=(v-u)^2+u^2$$

Слѣдовательно, послѣ встрѣчи со стѣнкой каждый килогр. воды будетъ обладать энергіей

$$\frac{w^2}{2g}=\frac{(v-u)^2+u^2}{2g},$$

т. е. его работа будетъ:

$$L=\frac{v^2}{2g}-\frac{(v-u)^2+u^2}{2g}=\cancel{u}\frac{u(v-u)}{\cancel{2}g}=\frac{u(v-u)}{g}$$

Вычислимъ теперь коэфф. полезнаго дѣйствія, предполагая, что мы уже не можемъ воспользоваться той энергіей, которую уноситъ отъ стѣнки вода, т. е. будемъ считать полную энергію ~~силу~~ $\frac{w^2}{2g}$ потерянной.

Мы знаемъ, что коэфф. полезнаго дѣйствія есть отношеніе работы полученной къ работѣ затраченной, т. ч. въ данномъ случаѣ:

$\frac{u(v-u)}{v}$

$$\eta=\frac{L}{\frac{v^2}{2g}}=\frac{2u\,(v-u)}{v^2}$$

Найдемъ теперь наибольшее, возможное при данныхъ условіяхъ, значеніе η. Для этого, какъ извѣстно, надо положить

$$\frac{d\eta}{du}=0$$

$f(u) = u(v$

$\frac{d\eta}{du} =$

Тогда найдемъ

$$2\,(v-u)-2u=0,$$

$v = 2u$

откуда

$$u=\frac{v}{2} \text{ и } \eta=0,5$$

Отсюда мы видимъ, что при такомъ способѣ утилизаціи живой силы, т. е. при ударномъ дѣйствіи, оказывается возможнымъ использовать только половину располагаемой энергіи. На основаніи этого легко видѣть, что пріемникъ, изображенный (на чер. 103) является нераціональнымъ.

Примѣръ 2-й.

Положимъ, что струя воды, вытекая изъ трубы A (черт. 104) ***встрѣчаетъ стѣнку*** b, ***имѣющую видъ греческой буквы*** ω; ***при этомъ струйка ударяется объ остріе*** n, ***а затѣмъ растекается, разрѣзаясь этимъ остріемъ, по крыльямъ лопатки.***

Если мы опять обозначимъ скорость, съ которой вода вытекаетъ изъ трубы черезъ v и скорость поступательнаго движенія стѣнки черезъ u, то найдемъ, что вода будетъ догонять стѣнку и течь къ ней съ относительной скоростью $(v-u)$. Чтобы найти относительную скорость, которую имѣетъ вода, оставляя стѣнку, надо построить параллелограммъ на u и на $(v-u)$, при чемъ послѣдняя должна быть направлена но касательной къ послѣднему элементу стѣнки. Если обозначимъ уголъ между этой касательной и направленіемъ скорости v и u черезъ β, то изъ треугольника abc найдетъ:

$\beta=0$

$$w^2=(v-u)^2+u^2-2u(v-u)\cos\beta.$$

$\cos\beta=1$

Понятно, что чѣмъ скорость w меньше, тѣмъ лучше, ибо вода будетъ уносить меньше энергіи, слѣдовательно, что легко видѣть, надо по возможности уменьшать уголъ β.

$w^2=v^2-2vu+\cancel{u^2}+\cancel{u^2}-2uv+\cancel{2u^2}=v^2-4uv+$

Наименьшее значеніе угла β есть нуль; поэтому для достиженія наибольшаго коэф. полезнаго дѣйствія, надо устроить лопатку M такъ, чтобы касательная къ послѣднему элементу лопатки были параллельна направленію скорости u. Полагая $\beta=0$, найдемъ: $w=v-2u$

Если мы хотимъ использовать всю энергію, которую несетъ каждый килогр. воды, вытекая изъ трубы, то должны сдѣлать $w=0$ или $u=\frac{v}{2}$

Въ этомъ случаѣ, коэфф. полезнаго дѣйствія теоретически=единицѣ, слѣдовательно, двитатель, устроенный на такомъ принципѣ, можетъ считаться совершеннымъ. Такая идея и осуществляется въ колесѣ Пельтона, которое представляетъ изъ себя круглый ободъ, по окружности котораго сажаются чашки, имѣющія въ разрѣзѣ видъ лопатки M.

Примѣръ 3-й.

Вычислимъ работу, которую нужно затратить для подъема воды въ тендеръ.

Устройство, служащее для подъема воды въ тендеръ, заключается въ слѣдующемъ (чер. 105). Между рельсами помѣщается мелкій желобъ A, который наполняется водой; въ въ этотъ желобъ съ паровоза опускается конецъ трубы B, направленный отверстіемъ въ сторону движенія, при чемъ другой ея конецъ открывается обыкновенно въ вертикальномъ направленіи въ тендеръ C.

Если скорость поѣзда$=u$, то вода получаетъ ту же скорость относительно трубы, такъ что можетъ подняться въ ней на высоту

$$ho=(1+\zeta)\frac{u^2}{2g}$$

гдѣ $\zeta\frac{u^2}{2g}$ представляетъ напоръ, затраченный на преодолѣніе вредныхъ сопротивленій.

Допустимъ, что сѣченія трубы разсчитаны такъ, что вода дѣйствительно входитъ въ трубу со скоростью u, при этомъ между сѣченіями должно существовать слѣдующее соотношеніе.

Пусть высота подъема въ среднемъ равна h и скорость истеченія изъ трубы v; тогда, пренебрегая вредными сопротивленіями и нѣкоторымъ избыткомъ давленія на нижнее отверстіе, найдемъ:

$$\frac{v^2}{2g}+h=\frac{u^2}{2g}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(\alpha)\qquad v^2=u^2-2gh$$

несжимаемости

По условію же ~~сжатія~~ имѣемъ

$$\omega u=\omega_1 v$$

гдѣ ω—площадь нижняго и ω_1—верхняго отверстія.

Изъ этихъ двухъ уравненій легко найдемъ:

$$\omega u=\omega_1\sqrt{u^2-2\,gh}$$

Работа, которую приходится затрачивать для подъема 1 kgr. воды, выразится приращеніемъ его энергіи, которая равна высотѣ, соотвѣтствующей скорости w, сложенной съ высотой поднятія, т. е.

$$L=\frac{w^2}{2g}+h=\frac{u^2+v^2}{2g}+h \qquad \frac{u^2+u^2}{2g}$$

или, на основаніи ур-ія (α),

$$L=\frac{u^2}{g}$$

Полезная же работа выразится, очевидно, такъ:

$$L_u=\frac{u^2}{2g}+h,$$

ибо энергія, соотвѣтствующая скорости v, теряется безполезно.

Такимъ образомъ

$$\eta=\frac{L_u}{L}=0{,}5+\frac{gh}{u^2}$$

Полагая $u=30$ *mtr* и $h=2$ *mtr*, найдемъ:

$$\eta=0{,}5+\frac{9{,}81.2}{900}=0{,}523.$$

§ 52.

Давленіе безконечно большого потока на твердое тѣло.

Мы до сихъ поръ разсматривали давленіе струи конечныхъ размѣровъ на твердое тѣло. Вопросъ, какъ мы видѣли, могъ быть разрѣшенъ сравнительно просто при предположеніи, что всѣ частицы въ предѣлахъ струи движутся съ одинаковыми по величинѣ и направленію скоростями. Если же безконечный потокъ встрѣчаетъ твердое тѣло конечныхъ размѣровъ, то такое допущеніе не соотвѣтствовало бы дѣйствительности.

Положимъ, что мы погружаемъ въ безконечный потокъ плоскую стѣнку *ab* перпендикулярно къ направленію скорости потока. При этомъ, понятно, существовавшее до погруженія стѣнки въ данномъ мѣстѣ прямолинейное движеніе буетъ нарушено, ибо жидкость будетъ стремиться обтекать стѣнку со всѣхъ сторонъ. Всего больше, конечно, искривлена струйка, встрѣчающая средину стѣнки; струйки, прилегающія къ средней, будутъ искривлены уже нѣсколько меньше; слѣдующія за этими струйки будутъ искривлены еще меньше и т. д., и, наконецъ, на нѣкоторомъ разстояніи отъ стѣнки искривленіе совершенно не будетъ имѣть мѣста, т. ч. струйки за этимъ предѣломъ будутъ течь въ томъ же направленіи, въ которомъ текли и раньше. Если бы мы и здѣсь для опредѣленія реакціи жидкости на стѣнку пожелали воспользоваться выведенной нами раньше формулой, то должны бы были выдѣлить всѣ реагирующія на стѣнку струйки, вычислить массу несомой каждой изъ нихъ воды въ единицу времени, найти соотвѣтствующее каждой изъ нихъ измѣненіе скорости и затѣмъ просуммировать всѣ давленія этихъ отдѣльныхъ струекъ. Какъ видимъ, задача является очень сложной.

Однако эта задача была рѣшена, хотя и не въ этомъ порядкѣ, теоретическимъ путемъ Кирхгофомъ. Онъ пришелъ къ тому результату, что давленіе на плоскую, перпендикулярную къ теченію, стѣнку есть:

$$R = \zeta . \triangle F \frac{v^2}{2g},$$

гдѣ F—площадь стѣнки и v—скорость потока

Эта формула была подтверждена опытнымъ путемъ, причемъ для ζ найдено значенiе:

$$\zeta=1{,}85.$$

Но это только одна изъ немногихъ разрѣшенныхъ теоретически задачъ. Въ общемъ же видѣ вопросъ еще не разрѣшенъ.

Однако добыты уже нѣкоторые результаты, которые позволяютъ судить о сравнительной величинѣ давленiя въ различныхъ случаяхъ.

Такъ, напримѣръ, въ теоретической гидромеханикѣ доказывается, что если жидкость обтекаетъ тѣло такъ, что постоянно прилегаетъ къ нему, то давленiе будетъ зависѣть только отъ тренiя о боковую поверхность (это тренiе можетъ быть вычислено по формулѣ Фрида). Это и понятно. Дѣйствительно, разъ струйки, протекая по тѣлу, не измѣняютъ своихъ скоростей ни по величинѣ, ни по направленiю, то онѣ не оказываютъ на тѣло никакого давленiя.

Если же струйки, обтекая тѣло, не будутъ прилегать къ нему по всей поверхности, что имѣетъ мѣсто, напримѣръ, въ случаѣ плоской стѣнки, поставленной перпендикулярно къ теченiю (чер. 107), то тогда между внутренними струйками ac и bd съ задней стороны, какъ показываютъ наблюденiя, образуется разряженное пространство.

Это обстоятельство еще усложняетъ рѣшенiе вопроса. Въ такомъ случаѣ общее давленiе будетъ слагаться изъ избытка давленiя на переднюю сторону, изъ *недавленiя* на заднюю и изъ тренiя. Отсюда становится яснымъ, какова должна быть форма тѣла, что бы давленiе было возможно меньше. Во-первыхъ, понятно, что чѣмъ острѣе будетъ передняя часть, тѣмъ меньше будутъ струйки, обтекая ее, отклоняться отъ своего первоначальнаго направленія и тѣмъ меньше, слѣдовательно, будетъ на нее давленіе.

Далѣе, чѣмъ острѣе будетъ задняя часть, тѣмъ больше будутъ прилегать къ ней обтекающія ее струйки и тѣмъ меньше будетъ недавленіе.

Если мы возьмемъ тѣло, имѣющее форму очень удлиненной и заостренной призмы (чер. 108) и помѣстимъ его такъ, чтобы его ось 00 имѣла направленіе теченія, то можемъ быть увѣрены, что давленіе на такое тѣло будетъ зависѣть только отъ тренія.

При этомъ надо замѣтить, что заостреніе задней части имѣетъ не меньшій, если только не большій эффектъ на уменьшеніе сопротивленія.

§ 53.

Сопротивленіе безконечной покоющейся массы на движущееся въ ней тѣло.

Этотъ вопросъ, также какъ и предыдущій, не получилъ еще общаго разрѣшенія.

Въ теоретической гидромеханикѣ доказывается, что въ томъ случаѣ, когда тѣло во все время движенія облекается жидкостью со всѣхъ сторонъ, то эффектъ сопротивленія жидкости будетъ таковъ, какъ будто бы масса тѣла увеличилась на нѣкоторую величину.

Но такъ какъ масса имѣетъ значеніе только при ускоренномъ движеніи, то при равномѣрномъ движеніи сопротивленіе будетъ$=0$, если не принимать во вниманіе тренія.

Но совершенно иное должно получиться въ томъ случаѣ, когда жидкость не облекаетъ тѣло. Здѣсь въ сущности получаются тѣ же явленія, что и въ предыдущемъ случаѣ и, слѣдовательно,—тѣ же причины сопротивленія.

Дѣйствительно, мы видѣли, напримѣръ, выше, что при вычисленіи реакціи воды на движущееся поступательно тѣло —безразлично, берется ли измѣненіе абсолютной или относительной скорости. Такимъ образомъ можно вообразить, что тѣло находится въ покоѣ, а жидкость течетъ на него со скоростью, равной скорости его поступательнаго движенія.

Однако оказывается, что въ этомъ случаѣ при всѣхъ прочихъ равныхъ условіяхъ, давленіе всегда будетъ нѣсколько меньше, чѣмъ въ первомъ.

Такъ, напримѣръ, въ случаѣ плоской стѣнки, движущейся по направленію перпендикулярному къ ея поверхности, давленіе можетъ быть, какъ показываютъ опыты, выражено формулой:

$$R = \zeta_1 \triangle .. F \frac{v^2}{2g},$$

гдѣ $\zeta_1 = 1{,}43$.

Этотъ вопросъ имѣетъ мѣсто, главнымъ образомъ, при вычисленіи сопротивленія воды, которое она оказываетъ движущимся судамъ.

Въ связи съ этимъ вопросомъ сдѣлаемъ одно замѣчаніе, которое подтвер~~дится~~ждается практикой.

Если судно сидитъ мелко, но въ то же время имѣетъ значительную ширину, что имѣетъ мѣсто въ обыкновенныхъ рѣчныхъ судахъ, то, т. к. вода стремится обтекать его не только съ боковъ, но и снизу,—въ смыслѣ уменьшенія сопротивленія гораздо выгоднѣе направить воду подъ дно, чѣмъ заставлять воды ее обтекать судно съ боковъ, ибо въ первомъ случаѣ ей придется въ среднемъ меньше измѣнять свое направленіе. Поэтому надо стараться не столько о заостреніи носа и кормы въ планѣ, сколько о полученіи отлогихъ батоксовъ.

Батоксами называются линіи, которыя получаются отъ пересѣченія корпуса судна съ вертикальными плоскостями, параллельными средней плоскости 00 (чер. 109).

Глава четвертая.

Движеніе жидкостей газообразныхъ.

§ 54.

Уравненіе установившагося движенія.

Мы будемъ разсматривать только установившееся движеніе газообразныхъ жидкостей.

Всѣ обстоятельства, сопровождающія такое движеніе, изслѣдуются при помощи уравненія, аналогичнаго ур—ію Д. Бернулли.

Какъ мы видѣли, это послѣднее есть ничто иное, какъ теорема живыхъ силъ, примѣненная къ установившемуся движенію капельныхъ жидкостей.

Въ примѣненіи къ движенію жидкостей газообразныхъ, теорема живыхъ силъ можетъ быть выражена такъ:

приращеніе кинетической энергіи движущагося газа за нѣкоторый промежутокъ времени равно суммѣ всѣхъ работъ, совершаемыхъ за тотъ же промежутокъ времени внѣшними силами.

При этомъ въ сумму работъ внѣшнихъ силъ должно включить и то тепло, которое сообщается движущемуся газу, такъ какъ теплота эквивалентна работѣ, а при составленіи приращенія кинетической энергіи нужно брать не только внѣшнюю кинетическую энергію (живую силу), но также и внутреннюю энергію, которая какъ извѣстно, можетъ обращаться въ работу.

Пусть по нѣкоторой трубѣ M_0M (чер. 110) перемѣннаго сѣченія протекаетъ газъ, при чемъ извнѣ этому газу сообщается во все время дииженія одинаковымъ образомъ теплота.

Допустимъ, что движеніе установилось, т. ч. во всякомъ мѣстѣ трубы состояніе и скорость газа остаются неизмѣнными.

При дальнѣйшихъ разсужденіяхъ мы будемъ допускать, что допускали и при изслѣдованіи установившагося движенія капельныхъ жидкостей: въ каждомъ перпендикулярномъ къ оси трубы сѣченіи всѣ струйки движутся съ равными и параллельными оси скоростями. Такое допущеніе ведетъ къ слѣдствію, что давленіе въ каждомъ такомъ сѣченіи слѣдуетъ законамъ гидростатики.

Возьмемъ два сѣченія AB и CD, перпендикулярныя къ оси M_0M. Обозначимъ площадь сѣченія AB черезъ F_0, скорость въ этомъ сѣченіи черезъ w_0, величины, характеризующія состояніе газа въ этомъ сѣченіи, т. е. давленіе и удѣльный объемъ,—черезъ p_0 и v_0 и, наконецъ, внутреннюю энергію—черезъ U_0.

Тѣ же величины въ сѣченіи CD обозначимъ черезъ F, w, p, v и U.

Такъ какъ по нашему предположенію газъ обладаетъ въ трубѣ установившимся движеніемъ, то, слѣдовательно, черезъ каждое сѣченіе въ одно и то же время (1 секунду) протекаетъ одна и та же масса, или одинъ и тотъ же вѣсъ газа.

Черезъ сѣченіе AB въ одну секунду протекаетъ объемъ $F_0 w_0$; вѣсъ этого объема будетъ:

$$G = \frac{F_0 w_0}{v_0}$$

Тотъ же самый вѣсъ газа протекаетъ въ то же время и черезъ сѣченіе CD, т. ч.

$$G = \frac{F_0 w_0}{v_0} = \frac{Fw}{v} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

Разсмотримъ движеніе объема $ABCD$ за безконечно-малый промежутокъ времени dt, въ концѣ котораго разсматриваемый объемъ будемъ занимать положеніе $A'B'C'D'$, и примѣнимъ къ этому перемѣщенію обобщенную теорему живыхъ силъ.

Вычислимъ приращеніе кинетической энергіи внѣшней и внутренней при этомъ перемѣщеніи, т. е. разность этой энергіи газа въ объемахъ $A'B'C'D'$ и $ABCD$.

Такъ какъ движеніе—установившееся, то энергія газа въ общемъ объемѣ $A'B'CD$ остается неизмѣнной; слѣдовательно, приращеніе энергіи равно ея разности въ объемахъ $CC'DD'$ и $ABA'B'$.

Кинетическая энергія газа, находящагося въ сѣченіи AB, по отношенію къ одному kgr. есть:

$$\left(U_0 + A \frac{w_0^2}{2g}\right) \text{ калоріи.;}$$

въ объемѣ же $ABA'B = F_0 w_0 dt$ заключается вѣсъ $\frac{F_0 w_0 dt}{v_0}$,

т. ч. запасъ кинет. энергіи въ этомъ объемѣ будетъ:

$$\left(U_0+A\,\frac{w_0^2}{2g}\right)\frac{F_0\,w_0\,dt}{v_0}$$

Такимъ же образомъ найдемъ. что запасъ кинет. энергіи въ объемѣ *CDC'D'* будетъ:

$$\left(U+A\,\frac{w^2}{2g}\right)\frac{Fw.dt}{v}$$

Принимая во вниманіе ур-іе (1), найдемъ, что приращеніе кинет. энергіи объема *ABCD* за время *dt* будетъ:

$$\frac{Fwdt}{v}\left\{\left(U+A\,\frac{w^2}{2g}\right)-\left(U_0+A\,\frac{w_0^{\ 2}}{2g}\right)\right\}$$

Составимъ теперь сумму работъ внѣшнихъ силъ.

Работа тяжести выразится произведеніемъ вѣса объема *ABCD*, на пониженіе центра тяжести при перемѣщеніи въ положеніе *C'D'CD*. Но такъ какъ вѣсъ объема *A'B'CD* и положеніе его центра тяжести остаются неизмѣнными, то работа тяжести будетъ:

$$A\,\frac{Fwdt}{v}h,$$

гдѣ *h* есть разность высотъ центровъ тяжести сѣченія *AB* и *CD* надъ какимъ-нибудь горизонтомъ.

Работа давленія въ сѣченіи *AB* положительна и равна

$A\,P\,w_0\,dt = A\,p_0\,F_0\,w_0\,dt$

$$A\,p_0\,F_0\,w_0\,dt.$$

сила $p_0\,F$

перемещени

работы

а в котор

Работа давленія въ сѣченіи *CD* отрицательна и равна

$$-Ap.\ F.\ w.\ dt.$$

Кромѣ того нужно принять во вниманіе ту теплоту, которая при этомъ перемѣщеніи отнимается или сообщается разсматриваемой массѣ газа въ объемѣ *ABCD*.

Положимъ, что одному *kgr.* газа при его перемѣщеніи отъ *AB* до *CD* сообщается извнѣ *Q* кал. (если теплота отнимается, то надо считать *Q* отрицательнымъ).

Но при разсматриваемомъ перемѣщеніи дѣло происходитъ такъ, какъ будто вѣсъ $\frac{Fw}{v} dt$ прямо перемѣщается изъ положенія $ABA'B'$ въ положеніе $CDC'D'$, поэтому всей разсматриваемой массѣ газа при ея безконечно маломъ перемѣщеніи сообщается количество тепла, равное

$$\triangle Q = \frac{Fw}{v} dt\ Q.$$

Эта теплота должна быть включена въ сумму работъ внѣшнихъ силъ.

Примемъ теперь во вниманіе и работу вредныхъ сопротивленій, т. е., главнымъ образомъ, работу тренія.

Пусть отрицательная работа тренія по отношенію къ одному *kgr.* газа при его перемѣщеніи отъ AB до CD будетъ:

$$A.\ B.\ kal.$$

[illegible]
работа въ котор. 1 kgr газа
[illegible] сопр.
[illegible] энергии

Тогда по отношенію къ вѣсу $\frac{Fw}{v} dt$ эта работа будетъ:

$$A. \triangle B = A.\ B.\ \frac{Fw}{v} dt$$

Эта работа вся обращается въ теплоту. А если это такъ, то мы должны будемъ ввести предыдущее выраженіе два раза въ сумму работъ внѣшнихъ силъ и при томъ одинъ разъ со знакомъ —, а другой разъ со знакомъ +, т. ч. оба эти члена сократятся. Такимъ образомъ обобщенная теорема живыхъ силъ напишется такъ:

$$\frac{Fw}{v} dt \left\{ U + A.\ \frac{w^2}{2g} - \left(U_0 + A \frac{w_0^2}{2g}, \right\} = A \frac{Fw}{v} h.\ dt + A p_0\ F_0\ w_0\ dt - \right.$$

$$- Ap.\ Fw.\ dt + \frac{Fw}{v} Q\ dt$$

Раздѣляя все это ур—іе на $\frac{Fw}{v} dt$, получимъ:

$$U + A\frac{w^2}{2g} - \left(U_0 + A.\frac{w_0^2}{2g} \right) = Ah + Ap_0 v_0 - Apv + Q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Въ приложеніи гораздо удобнѣе пользоваться дифференц. формой:

$$dU + Ad\left(\frac{w^2}{2g}\right) = Adh - Ad(pv) + dQ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Здѣсь dQ есть количество теплоты, сообщаемое одному *kgr.* газа на протяженіи одного элемента трубы.

Кромѣ ур—ія (3) всегда будетъ справедливо ур—іе, выражающее первый принципъ термодинамики:

$$dQ' = dU + Apdv,$$

гдѣ подъ dQ' надо разумѣть сумму:

$$dQ' = dQ + A.\, dB,$$

т. ч.

$$dQ + AdB = dU + Apdv \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Складывая это ур—іе съ ур—іемъ (3), найдемъ:

$$d\left(\frac{w^2}{2g}\right) = dh - vdp - dB \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

Высоту dB, выражающую потерю энергіи на 1 *kgr.* газа на протяженіи одного элемента трубы, можно выразить по аналогіи съ потерей на треніе при движеніи воды формулой (для трубы съ круглымъ сѣченіемъ):

$$dB = 4\, b.\, \frac{dx}{D} w^2, = \frac{4l}{D} b v^2$$

гдѣ D—діаметръ трубы и dx—длинна ея элемента.

Для рѣшенія вопросовъ о движеніи газовъ мы можемъ пользоваться ур.—(1) и любыми двумя ур—іями изъ трехъ

(3, 4 и 5). Такимъ образомъ мы имѣемъ только три ур—ія, между тѣмъ какъ неизвѣстныхъ имѣемъ пять: p, v, U, w и температура t.

Два недостающія ур—ія суть: характеристическое ур—іе

$$pv=R\ (t^0+273)\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (6).$$

и

$$dU=C_v.dT=\frac{A}{k\text{-}1}d(pv)\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (7),$$

$\frac{(k-1)C_v}{k}$

гдѣ C_v—теплоемкость при постоянномъ объемѣ.

Въ тѣхъ случаяхъ, когда давленіе и температура газа при движеніи измѣняются мало и колеблются около нѣкотораго средняго значенія, можно v считать постояннымъ и равнымъ средней величинѣ.

При такомъ допущеніи, замѣчая, что

$$v=\frac{1}{\triangle}=const.$$

изъ ур—ія (5) по интеграціи найдемъ:

$$\frac{w_0{}^2}{2g}+\frac{p_0}{\triangle}+h=\frac{w^2}{2g}+\frac{p}{\triangle}+B.$$

А это есть ур—іе Д. Бернулли.

§ 55.

Истеченіе газа изъ отверстія.

Пусть имѣемъ сосудъ A, наполненный газомъ подъ давленіемъ p_0, которое остается постояннымъ во все время истеченія черезъ отверстіе ab (чер. 111).

Обозначимъ площадь отверстія черезъ F, давленіе окружающей среды черезъ p' и давленіе въ отверстіи черезъ p. Это послѣднее, какъ мы увидимъ ниже, можетъ разниться отъ p'.

Принимая, что движеніе установилось, опредѣлимъ скорость истеченія и вѣсъ вытекающаго въ одну секунду газа.

Для этого намъ прежде всего слѣдуетъ сдѣлать какую-нибудь гипотезу относительно Q.

Такъ какъ истеченіе происходитъ быстро, то окружающая среда не будетъ успѣвать сообщать газу замѣтнаго количества теплоты и потому самое естественное предположеніе будетъ, что $Q=0$.

Вторая, менѣе вѣроятная, гипотеза заключается въ предположеніи, что при истеченіи $t=const$.

Разсмотримъ оба эти случаи отдѣльно.

1-й случай. $Q=0$. адіабатич. измѣненіе газа

Въ виду того, что вредныя сопротивленія на короткомъ пути, на которомъ газъ соприкасается со стѣнками сосуда, ничтожны, можемъ положить

$$B=0.$$

$dU+Ad\left(\frac{w^2}{2g}\right)=Adh-A$

$dQ+AdW=dU+$

Кромѣ того, такъ какъ работа силы тяжести не можетъ быть велика, ибо газъ протекаетъ къ отверстію и снизу и сверху, то будемъ полагать и $h=0$.

При такихъ допущеніяхъ ур-ія (3 и 4 § 54) намъ дадутъ:

$$dU+Ap\,dv=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$dU+Ad\,\frac{w^2}{2g}=-Ad\,(pv) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2$$

Замѣтивъ, что

$$dU=\frac{A}{k-1}\,d\,(pv),$$

изъ ур-ія (1) получимъ:

$$\frac{1}{k-1}\left\{pdv+vdp\right\}+p\,dv=0,$$

или

$$kp\,dv+vdp=0.$$

Раздѣляя перемѣнныя, получимъ:

$$k\frac{dv}{v}+\frac{dp}{p}=0.$$

$k\,lg\,v + lg\,p = 0$

Интеграція этого ур-ія даетъ:

$$lg\,v^{k}+lgp=lgC,$$

$lg(v^{k}p) = lg\,C$

$v^{k}p = C$

$-v_{0}^{k}p_{0} = -C$

откуда

$$pv^{k} \pm p_0 v_0^{k} = const \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

$v^{k}p \pm v_{0}^{k}p_{0}$

Отсюда видимъ, что процессъ истеченія есть адіабатный процессъ.

Принимая во вниманіе опять выраженіе для dU, изъ ур-ія (2) найдемъ:

$$\frac{1}{k-1}\,d(pv)+d\left(\frac{w^2}{2g}\right)=-\,d(pv)$$

$-k\,d(pv) + d\,pv$

или

$$d\left(\frac{w^2}{2g}\right)=-\frac{k}{k-1}\,d\,(pv)$$

Отсюда по интеграціи имѣемъ:

$$\frac{w^2}{2g}=\frac{k}{k-1}(p_o\,v_o-pv)=\frac{k}{k-1}R\,(T_o-T)\quad\ldots\ldots (4)$$

$pv = R(T+273)$

$p_0v_0 - pv = R(T_0 - T)$

Изъ этого ур-ія мы можемъ при помощи ур-ія (3) исключить v черезъ v_0. Тогда будемъ имѣть:

$$\frac{w^2}{2g} = \frac{k}{k-1} p_0 v_0 \left(1 - \frac{pv}{p_0 v_0}\right) = \frac{k}{k-1} \left\{ 1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}} \right\} p_0 v_0$$

Отсюда

$$w = \sqrt{\frac{k}{k-1} p_0 v_0 \left\{ 1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}} \right\} 2g} \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

Чтобы принять во вниманіе вредныя сопротивленія можемъ написать, что дѣйствительная скорость

$$w_e = \varphi w = \varphi \sqrt{\frac{k}{k-1} p_0 v_0 \left\{ 1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}} \right\} 2g} \quad \ldots\ldots\ldots (5'),$$

гдѣ φ—коэффиціентъ скорости.

При опредѣленіи вѣса вытекающаго въ одну секунду газа, надо принять во вниманіе сжатіе струи; если обозначимъ коэффиціентъ сжатія черезъ α, то найдемъ:

$$G = \frac{\alpha F \overset{\varphi w}{w_e}}{v} = \alpha \varphi F \sqrt{\frac{k}{k-1} 2g \frac{p_0 v_0}{v^2} \left\{ 1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}} \right\}}$$

Но такъ какъ на основаніи ур—ія (3) имѣемъ, что

$$v^2 = \left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{2}{k}} v_0{}^2,$$

$v^k = \frac{p_0 v_0}{p}$

$v^2 = \left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{2}{k}}$

то, обозначая произведеніе $\alpha . \varphi$ черезъ μ (коэф. расхода), найдемъ:

$$G = \mu F \sqrt{\frac{k}{k-1} 2g \frac{p_0 v_0}{v_0{}^2} \left\{ \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{2}{k}} - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{k+1}{k}} \right\}} \quad \ldots\ldots\ldots (6)$$

Формулы (5 и 6) и рѣшаютъ поставленные вопросы.

Изслѣдуемъ теперь эти формулы.

Примемъ, что давленіе газа въ отверстіи одинаково съ давленіемъ въ окружающей средѣ, т. е. положимъ, что

$$p=p'$$

Если при этомъ $p'=p_0$, то мы получимъ:

$$w_0=0 \text{ и } G=0,$$

что можно было предвидѣть.

Вообразимъ теперь, что вытеканіе происходитъ въ абсолютную пустоту, т. е. положимъ, что

$$p=p'=0.$$

Тогда

$$w_e=\varphi\sqrt{\frac{k}{k-1}p_0v_0 2g} \quad \text{и} \quad G=0$$

Этотъ результатъ, очевидно, не имѣетъ смысла; слѣдовательно, наше предположеніе, что въ данномъ случаѣ $p=p'$, невѣрно.

Fliegner опредѣлилъ давленіе струи воздуха въ отверстіи опытнымъ путемъ и нашелъ, что p не всегда равно p' и съ возрастаніемъ отношенія $\frac{p_0}{p_{\cancel{1}}'}$ приближается къ наименьшему значенію:

$$p=0{,}5767\ p_0$$

Меньше этой величины давленіе въ отверстіи быть не можетъ, какъ бы мало ни было p'.

Покажемъ, что выведенныя нами формулы приводятъ къ тому же результату.

Если формула (6) при предположеніи, что $p=p'$, даетъ $\varphi=0$ при двухъ значеніяхъ p:

$$p=0 \quad \text{и} \quad p=p_0,$$

то, слѣдовательно, при нѣкоторомъ промежуточномъ значеніи $p=p_1$, величина G достигаетъ наибольшаго значенія.

Чтобы найти p_1, приравняемъ первую производную отъ G къ p нулю.

Такъ какъ подкоренная величина въ безконечность обратиться не можетъ, то мы придемъ къ условію:

$$\frac{d}{dp}\left\{\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{2}{k}}-\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{k+1}{k}}\right\}=0,$$

или

$$\frac{2}{k}\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{2-k}{k}}-\frac{k+1}{k}\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{1}{k}}=0,$$

$$\frac{2}{k}\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{2-k}{k}} =$$

$$2^{k}\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{2-k} = (k$$

откуда

$$z=\frac{p_1}{p_0}=\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

$$2^{k}\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{1-k} = ($$

Полагая $k=1{,}41$, найдемъ:

$$z=\frac{p_1}{p_0}=0{,}5266.$$

$$\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{(1-k)} =$$

Подставляя выраженіе (7) въ формулу (6), найдемъ

$$G max=\mu F=\sqrt{2g\frac{k}{k-1}\frac{p_0}{v_0}\left\{\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{2}{k-1}}-\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{k-1}}\right\}}=$$

$$z=$$

$$k+1 \quad 2 - K-1$$

$$=\mu F\sqrt{2g\frac{k}{k+1}\frac{p_0}{v_0}\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{2}{k-1}}\left\{1-\left(\frac{2}{k+1}\right)\right\}}=$$

$$=\mu F\sqrt{2g\frac{k}{k-1}\frac{p_0}{v_0}\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{2}{k-1}}\frac{k-1}{k+1}}=$$

$$=\mu F\sqrt{2g\frac{k}{k+1}\frac{p_0}{v_0}\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{2}{k-1}}}=$$

$$=\mu F p_0\sqrt{2g\frac{k}{k+1}\frac{1}{RT_0}\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{2}{k-1}}}\quad .\ .\ .\ .\ (8)$$

Для воздуха. полагая $R=29{,}3$, найдемъ:

$$Gmax=0{,}3972\ \mu F\frac{p_0}{\sqrt{T_0}}$$

Итакъ формула (6), опредѣляющая вѣсъ вытекающаго воздуха, приводитъ къ слѣдующимъ результатамъ, если принять, что $p=p'$.

При $p=p_0$, $G=0$. $p=p_0=p_1$

Если p' уменьшается и отношеніе $\frac{p_0}{p'}$, слѣдовательно, увеличивается,—вѣсъ вытекающаго воздуха увеличивается. Такъ будетъ продолжаться до тѣхъ поръ, пока p' не станетъ равнымъ 0,5266 p_0, когда G достигнетъ наибольшаго значенія.

Все это время, что можно съ большой вѣроятностью допустить,

$$p=p'.$$

Пусть теперь давленіе во внѣшней средѣ продолжаетъ уменьшаться такъ, что

$\frac{p'}{p_0} =$

$$\frac{p'}{p_0} \angle 0{,}5266$$

При этомъ по формулѣ (6) мы получили бы постепенно уменьшающійся вѣсъ G, если бы и теперь допустили, что $p=p'$. Но мы видѣли, что такое допущеніе приводитъ къ явно несообразному результату, слѣдовательно, здѣсь нельзя уже допускать, что $p=p'$.

Напротивъ того слѣдуетъ принять, что, какъ бы дальше ни уменьшалось давленіе во внѣшней средѣ, давленіе въ отверстіи остается одно и то же, равное $p_1=0{,}5266\ p_0$.

Такой ходъ явленій, какъ мы уже сказали, находитъ себѣ подтвержденіе въ опытахъ Fliegner'а.

Итакъ при пользованіи формулой (6) всегда нужно помнить, что въ ней p обозначаетъ давленіе въ отверстіи, которое до тѣхъ только поръ равно наружному p', пока $p' > 0{,}5266\ p_0$. Если же $p' < 0{,}5266\ p_0$, то давленіе въ отверстіи надо всегда принимать равнымъ $0{,}5266\ p_0$, т. ч. G будетъ оставаться затѣмъ постоянно ровнымъ $G\ max$.

Справедливость этого результата была подтверждена также опытами S. Venant, Wantzel и Zeúner'а. Всѣ эти экспериментаторы пришли къ заключенію, что при постепенномъ уменьшеніи отношенія $\frac{p'}{p_0}$, вѣсъ вытекающаго газа сначала возрастаетъ, а затѣмъ, послѣ того какъ это отношеніе достигнетъ извѣстной величины, остается почти безъ измѣненія.

Итакъ мы видѣли, что положеніе $Q=0$ приводитъ къ результатамъ, потверждаемымъ опытными данными.

При разсчетахъ по формулѣ (6) слѣдуетъ брать слѣдующія значенія для коэф. μ:

отверстіе въ тонкой стѣнкѣ . . . . . $\mu=0,65$
короткій цилиндрическій насадокъ . . . . „ $=0,85$
слабо коническій насадокъ (уголъ
при вершинѣ около 12°) . . . . „ $=0,95$

Въ томъ случаѣ, когда отношеніе $\frac{p}{p_0}$ мало разнится отъ единицы, формула (5) и (6) могутъ быть значительно упрощены.

Положимъ, что

$$\frac{p}{p_0}=1-\delta,$$

гдѣ δ—очень малая величина;

тогда

$$1-\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}}=1-(1-\delta)^{\frac{k-1}{k}}=1-\left(1-\frac{k-1}{k}\delta\right)=\frac{k-1}{k}\delta.$$

Подставляя это выраженіе въ формулу (5′), найдемъ:

$$w_e=\varphi\sqrt{2g\,p_0\,v_0\,\delta}$$

Замѣняя δ черезъ $1-\frac{p}{p_0}$, получимъ:

$$w_e=\varphi\sqrt{2g\,(p_0-p)\,v_0} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (9)$$

Замѣтимъ, что то же выраженіе для w_e получимъ изъ обыкновенной формулы Д. Бернулли, считая, что $v = v_0 = \text{const}$.

Такимъ образомъ найдемъ, что

$$G = \frac{\mu F}{v} \sqrt{2g(p_0 - p)\, v_0} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (10)$$

2-ой случай. ***t=const.***

Если разность между p и p_0 мала, то можно предположить процессъ измѣненія состоянія газа при его истеченіи изотермическимъ.

Въ пользу такой гипотезы говоритъ то обстоятельство, [illegible] что газъ при вытеканіи трется о края стѣнки и поглощаетъ нѣкоторую теплоту, которая при маломъ расширеніи можетъ оказаться достаточной для поддержанія его температуры постоянной.

Опредѣлимъ w и G, исходя изъ предположенія, что t или, что то—же, $T = const$.

На основаніи ур—ія (6 § 54). мы имѣемъ:

$$p_0 \, v_0 = pv = RT = const \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (11).$$

Воспользуемся ур—іемъ (5 § 54), полагая въ немъ $dB = 0$. Эту неточность мы должны будемъ исправить потомъ опытнымъ коэффиціентомъ.

Такимъ образомъ мы имѣемъ:

$$d\left(\frac{w^2}{2g}\right) = -\, v dp \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (12).$$

$v = \frac{p_0 v_0}{p}$ | $d\left(\frac{w^2}{2g}\right) = -p_0 v_0 \frac{dp}{p}$

или, принимая во вниманіе ур—іе (11), найдемъ:

$$d\left(\frac{w^2}{2g}\right) = -p_0 v_0 \frac{dp}{p},$$

откуда

$$\frac{w^2}{2g} = -p_0 v_0 \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{p} = p_0 v_0 \, lg\left(\frac{p_0}{p}\right)$$

т. ч.

$$w_e = \varphi \sqrt{2g . p_0 v_0 \, lg\left(\frac{p_0}{p}\right)} = \varphi \sqrt{2gRT\cancel{G}lg\left(\frac{p_0}{p}\right)} \ldots \text{(13)}.$$

$$\text{и} \quad G = \frac{\mu F}{v}\sqrt{2g\, p_0 v_0 . \, lg\left(\frac{p_0}{p}\right)} =$$

$$= \mu F \sqrt{2g \frac{p\cancel{v}}{v^2} lg\left(\frac{p_0}{p}\right)} = \mu F \sqrt{2g \frac{p}{v} \, lg\left(\frac{p_0}{p}\right)} =$$

$$= \mu F \sqrt{2g \frac{p^2}{RT} \, lg\left(\frac{p_0}{p}\right)} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(14)}.$$

§ 56.

Движеніе газа по трубѣ.

При изслѣдованіи движенія газа по трубѣ, если только труба имѣетъ значительную длину, слѣдуетъ принять во вниманіе вредныя сопротивленія.

Выпишемъ здѣсь для удобства всѣ формулы, которыми мы будемъ пользоваться при дальнѣйшемъ изложеніи.

$$G = \frac{Fw}{v} = const. \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

$$dQ + AdB = dU + Apdv \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

$$d\left(\frac{w^2}{2g}\right) = dh - vdp - dB \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

$$dB = 4\, b\, \frac{dx}{D} w^2 \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

$$pv = R\,(t + 273) \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

$$dU = \frac{A}{k\text{-}1}\, d\,(pv) \quad \ldots\ldots\ldots (6)$$

Сдѣлаемъ слѣдующія предположенія:

1) труба горизонтальна, т. е. $dh = 0$ (если бы труба и не была горизонтальна, а немного наклонна, то и въ такомъ случаѣ работой силы тяжести можно было бы пренебречь);

2) теплота не теряется во внѣшнее пространство т. е. $dQ = 0$

Послѣднее допущеніе будетъ вполнѣ правдоподобно когда труба окружена дурнымъ проводникомъ (зарыта въ землю).

При такихъ допущеніяхъ изъ ур—ія (2) мы будемъ имѣть:

$$dB = \frac{dU}{A} + pdv,$$

или, принявъ во вниманіе ур—іе (6),

$$dB = \frac{1}{k\text{-}1}\, d\,(pv) + pdv,$$

а такъ какъ по формулѣ (5)

$$d\,(pv) = Rdt,$$

то

$$dB = 4\,b\,\frac{dx}{D}w^2 = \frac{Rdt}{k\text{-}1} + pdv \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \;(7)$$

Подставимъ послѣднее выраженіе для dB въ ур—іе (3), полагая въ немъ $dh=0$; тогда найдемъ:

$$d\left(\frac{w^2}{2g}\right) = -\,vdp - pdv - \frac{Rdt}{k\text{-}1}$$

Отсюда

$Rdt\left(1+\frac{1}{k-1}\right.$

$$d\,\left(\frac{w^2}{2g}\right) + d\,(pv) + \frac{Rdt}{k\text{-}1} = 0.$$

Замѣчая, что $d\,(pv) = Rdt$, получимъ:

$$d\left(\frac{w^2}{2g}\right) + \frac{k.\ Rdt}{k\text{-}1} = 0 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \;(8)$$

откуда, по интеграціи, найдемъ:

$$\frac{w^2 - w_0{}^2}{2g} + \frac{kR\,(t - t_0)}{k\text{-}1} = 0 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \;(9)$$

Изъ ур—ія (1) имѣемъ:

$Gdv = Fdw$

$$dv = \frac{Fdw}{G}.$$

Сопоставляя ур-ія (1) и (5), легко найдемъ:

$$p = \frac{R.\ (t+273)}{v} = \frac{R.\ (t+273)}{w}.\ \frac{G}{F}.$$

Такимъ образомъ:

$$pdv = R\,(273+t)\,\frac{dw}{w}$$

Подставимъ это выраженіе для pdv въ ур—іе (2):

$$4b\frac{dx}{D}w^2 = \frac{Rdt}{k-1} \overset{+pv}{\mp} R\,(273+t)\,\frac{dw}{w} \quad . \; . \; . \quad . \; . \quad (10).$$

Исключая изъ этого ур—ія съ помощью ур—ія (8 и 9) t и dt, получимъ:

$$4b\,\frac{dx}{D}w^2 = -\frac{wdw}{kg} + \left\{ R\,(273+t_0) + \frac{w_0{}^2 - w^2}{2g}\,\frac{k-1}{k} \right\}\frac{dw}{w}$$

Все это ур—іе раздѣлимъ на w^2; тогда найдемъ:

$$4b\,\frac{dx}{D} = \left\{ R(273+t_0) + \frac{k-1}{k}.\,\frac{w_0{}^2}{2g} \right\}\frac{dw}{w^3} - \frac{k+1}{2g\,k}\,\frac{dw}{w.}$$

Интегрируя это ур—іе, получимъ:

$$4b\,\frac{x}{D} = \left\{ R\,(273+t_0) + \frac{k-1}{k}\,\frac{w_0{}^2}{2g} \right\}\left(\frac{1}{w_0{}^2} - \frac{1}{w^2}\right)\frac{1}{2} - \frac{k+1}{2k\,g}\,lg\,\frac{w}{w_0}$$

Умножимъ теперь все это ур—іе на $4g$ и, кромѣ того, умножимъ и раздѣлимъ первый членъ 2-й части на $w_0{}^2$; тогда получимъ:

$$16\,gb\,\frac{x}{D} = \left\{ R\,(237+t_0)\,\frac{2g}{w_0{}^2} + \frac{k-1}{k} \right\}\left\{ 1 - \left(\frac{w_0}{w}\right)^2 \right\} \mp \frac{k+1}{k}\,lg\,\left(\frac{w_0{}^2}{w}\right)^2$$

Положимъ для сокращенія

$$\left(1 - \frac{w_0{}^2}{w^2} \right) = E$$

и, слѣдовательно:

$$\frac{w_0{}^2}{w^2} = 1 - E \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (11);$$

тогда

$$16gb\frac{x}{D}=\left\{R(273+t_0)\frac{2g}{w_0^2}+\frac{k-1}{k}\right\}.\ E+\ \frac{k+1}{k}lg(1-E).\ (12)$$

Въ этой формулѣ при практическихъ примѣненіяхъ рекомендуется брать

$$b=0,00048,$$

хотя изъ многочисленныхъ опытовъ найдено, что въ среднемъ

$$b=0,00032.$$

Посмотримъ, къ какимъ результатамъ приводятъ выведенныя формулы при обыкновенныхъ, часто встрѣчающихся на практикѣ значеніяхъ перемѣнныхъ.

Положимъ, что намъ даны: w_0, t_0, $\frac{x}{D}$, p_0 (или v_0).

Ходъ рѣшенія задачи въ этомъ случаѣ долженъ быть таковъ.

Изъ ур—ія (13) опредѣляемъ E, при чемъ приходится находить E попытками. Обыкновенно величина E даже при весьма большихъ отношеніяхъ $\frac{x}{D}$ бываетъ очень мала, т. ч. для перваго приближенія можно положить во второмъ членѣ второй части $E=0$, а затѣмъ, при помощи повторныхъ подсчетовъ можно найти значеніе E близкое къ истинному.

Когда E найдено, то по ур—ію (11), которое можно переписать въ видѣ:

$$w=w_0\sqrt{\frac{1}{1-E}},$$

найдемъ w.

Затѣмъ, изъ ур-iя (1) найдемъ:

$$\frac{v}{v_0} = \frac{w}{w_0} = \sqrt{\frac{1}{1-E}}$$

откуда

$$v = v_0 \sqrt{\frac{1}{1-E}}$$

Далѣе изъ ур-iя (9) имѣемъ:

$$t = t_0 - \frac{k-1}{R\,k}\,\frac{w^2 - w_0^2}{2g} = t_0 - \frac{0{,}41}{R.1{,}41{,}2g}\left\{\frac{w^2}{w_0^2} - 1\right\} w_0^2 = t_0 -$$

$$- \frac{0{,}41}{R.1{,}41.2g}\,\frac{E}{1-E}\,w_0^2$$

и, наконецъ, изъ ур-iя (5) найдемъ:

$$p = \frac{\mathrm{R}\,(273+t)}{v}$$

1-ый примѣръ.

Сухой воздухъ движется въ трубѣ, длина которой въ 5000 разъ болѣе дiаметра, при чемъ скорость въ началѣ трубы равна 10 метрамъ и температура 10°С.; требуется найти температуру въ концѣ трубы и отношенiе $\frac{p}{p_0}$, гдѣ p_0—давленiе въ началѣ трубы и p—давленiе въ концѣ ея.

Въ такомъ случаѣ мы должны положить:

$$\frac{x}{D} = 5000;\ w_0 = 10 mtr;\ t_0 = 10^\circ,\ R = 29{,}272 \text{ и } b = 0{,}00048.$$

Тогда форм. (12) намъ дастъ:

$$16.9{,}81.0{,}00048.5000 = \left\{29{,}272.283.\frac{19{,}61}{100} + 0{,}29\right\} E + 1{,}709\, lg(1-E).$$

или

$$375=1625,495\ E+1,709\ lg\ (1-E).$$

Отсюда послѣдовательнымъ приближеніемъ найдемъ, что

$$E=0,231$$

(при этомъ 2 часть=375,04).

На основаніи этого

$$w=10\sqrt{\frac{1}{0,769}}=11,403$$

$$t=10-0,0005063\frac{231}{769}.100=9,9848^{\circ}C.$$

$$\frac{v_0}{v}=\sqrt{1-\ E}=0,88.$$

и

$$\frac{p}{p_0}=\frac{v_0}{v}.\ \frac{273+t}{273+t_0}=0,88\frac{282,9848}{283}=0,88,$$

откуда

$$\frac{p_0-p}{p}=0,14.$$

$\frac{p_0}{p}=\frac{1}{0,88}$

$\frac{p-p}{p}=\frac{0,12}{0,88}=0,14$

2-ой примѣръ.

$$\frac{x}{D}=3000,\quad w_0=5\ mtr,\ t=10^{\circ}.$$

Формула (12) даетъ:

$$225=6481E+1,709\ lg\ (1-E)$$

Отсюда послѣдовательнымъ приближенімъ найдемъ:

$$E=0,035.$$

Такимъ образомъ:

$$w=w_0\sqrt{\frac{1}{1-0,035}}+5,18\ mtr.$$

$$t=10°-0{,}0005063\ \frac{35}{965}.\ 25=0{,}99955°C.$$

и

$$\frac{p}{p_0}=\frac{v_0\ 282{,}99}{v.\ 283}=\frac{5}{5{,}18}.\ 0{,}999=0{,}96.$$

Изъ разсмотрѣнныхъ примѣровъ видно, что 1) скорость газа увеличивается отъ начала къ оконечности, 2) давленіе падаетъ и 3) температура остается почти постоянной.

Въ виду этого послѣдняго обстоятельства, которое жожно объяснить только тѣмъ, что теплота, развивающаяся отъ тренія, достаточна, чтобы поддержать температуру постоянной, допускаютъ часто для упрощенія задачи, что состояніе газа при движеніи въ изолированной трубѣ измѣняется по изотермѣ.

Кромѣ того слѣдуетъ обратить вниманіе на то, что при малой разности давленія на концахъ скорость является уже очень значительной; наоборотъ, при малой скорости пониженіе давленія оказывается очень незначительнымъ.

Выведенными формулами можно пользоваться для разсчета воздухопроводовъ и проводовъ для свѣтильнаго газа.

Однако же, въ виду сложности этихъ формулъ, чаще въ обыкновенныхъ случаяхъ практики при небольшой разности давленій на концахъ для разсчета газопроводовъ пользуются обыкновенной формулой Д. Бернулли, считая газъ несжимаемымъ и пренебрегая работой силы тяжести.

При такихъ допущеніяхъ по теоремѣ Д. Бернулли мы получимъ:

$$\frac{p_0}{\Delta}-\frac{p}{\Delta}=4\ b\ \frac{x}{D}\ w^2, = \partial B$$

гдѣ для $\triangle$ надо принимать нѣкоторое среднеезначеніе

Отсюда мы найдемъ:

$$z = p_0 - p = 4b \frac{x}{D} w^2 \triangle$$

Но такъ какъ

$$\frac{\pi D^2}{4}. \ w = Q,$$

$$w = \frac{4Q}{\pi D^2}$$

$$w^2 = \frac{4^2 Q^2}{\pi^2 D^4}$$

гдѣ Q—секундный расходъ, то

$$z = 4b \frac{x}{D^5} \frac{Q^2}{\pi^2} \triangle$$

По опытамъ Ридлера и Гутермута для воздуха можно принять

$$\frac{4b}{\pi^2} = \frac{864}{10^6},$$

т. ч.

$$z = p_0 - p = \frac{864}{10^6} \frac{Q^2 x \triangle}{d^5}$$

Если выразимъ z въ атмосферахъ, т. е. въ *kgr.* на 1 кв. сент. то получимъ:

$p = 100^2$ кв. сант

$$z \ atm = \frac{z}{100^2} = \frac{864}{10^{10}} \frac{Q^2 x \triangle}{D^5}.$$

Для $\triangle$ нужно принимать среднее значеніе вѣса 1 куб. метра въ трубопроводѣ.

При разсчетѣ трубопроводовъ для свѣтильнаго газа обыкновенно давленіе измѣряютъ въ $^m/_m$ водяного столба, расходъ въ куб. метрахъ въ часъ и діаметръ трубы въ $^m/_m$.

Не трудно найти, что $1^m/_m$ водяного столба соотвѣтствуетъ давленію одного *kgr.* на 1 кв. метръ, такъ что это обстоятельство не внесетъ никакого измѣненія въ формулы.

Положимъ, что газъ течетъ по трубѣ (чер. 112) въ направленіи паденія, величину котораго обозначимъ черезъ h.; тогда по теоремѣ Д. Бернулли имѣемъ:

$$\frac{p_1}{\triangle}-\frac{p_2}{\triangle}+h=4b\,\frac{x.1000^5}{\pi^2 D^5}\left(\frac{Q^2}{3600^2}\right)\triangle=\frac{4b\,10^{15}}{10^7\,1{,}296}\,\frac{xQ^2}{\pi^2 D^5}$$

$$z\,{}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{m}}\text{ вод. столба}=\frac{4b.\,10^8}{\pi^2}\,\frac{xQ^2}{D^5}\,\frac{1}{1{,}296}\,\triangle-h\triangle$$

$\pi^2=10$

Обозначимъ удѣльный вѣсъ свѣтильнаго газа по отношенію къ воздуху черезъ δ; тогда $\triangle=1{,}293\,\delta$ и

$$z=4\,b\,10^7\,\frac{xQ^2}{D}\,\delta-h\,\triangle$$

Въ среднемъ принимаютъ:

$$4\,b.10^7=225500,\quad \delta=0{,}4,\quad \triangle=0{,}5\ kgr.$$

и

$$\triangle h=0{,}5h\,\frac{kgr}{mtr^2}=0{,}5\,h\ {}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{m}}\text{ вод. ст.},$$

т. ч.

$$z=225500\,\frac{xQ^2}{D^5}\,0{,}4-0{,}5h.$$

Расходъ черезъ шлюзъ (черт. 89, стр. 262).

Напоръ h mm.	Расходъ Q на 1 mtr ширины.	Напоръ h mm.	Расходъ Q на 1 mtr ширины.	Напоръ h mm.	Расходъ Q на 1 mtr ширины.	Напоръ h mm.	Расходъ Q на 1 mtr ширины.	Напоръ h mm.	Расходъ Q на 1 mtr ширины.
220	1390	380	1838	775	2624	1200	3266	1625	3801
225	1415	390	1863	800	2666	1225	3300	1650	3829
230	1429	400	1886	825	2708	1250	3333	1675	3859
240	1461	425	1944	850	2749	1275	3367	1700	3887
250	1491	450	2000	875	2789	1300	3400	1725	3916
260	1521	475	2055	900	2828	1325	3432	1750	3944
270	1549	500	2108	925	2867	1350	3464	1775	3973
280	1578	525	2160	950	2906	1375	3497	1800	4000
290	1605	550	2211	975	2944	1400	3528	1825	4028
300	1633	575	2261	1000	2981	1425	3559	1850	4056
310	1661	600	2309	1025	3018	1450	3590	1875	4083
320	1687	625	2357	1050	3055	1475	3621	1900	4110
330	1713	650	2404	1075	3092	1500	3652	1925	4137
340	1738	675	2450	1100	3127	1525	3682	1950	4164
350	1764	700	2495	1125	3163	1550	3712	1975	4190
360	1789	725	2535	1150	3198	1575	3741	2000	4217
370	1814	750	2583	1175	3232	1600	3771		

Расходъ черезъ водосливъ съ боковымъ сжатіемъ (черт. 90, стр. 263).

Напоръ h mm.	Расходъ Q на 1 mtr. ширины.	Напоръ h mm.	Расходъ Q на 1 mtr. ширины	Напоръ h mm.	Расходъ Q на 1 mtr. ширины.	Напоръ h mm.	Расходъ Q на 1 mtr. ширины.	Напоръ h mm.	Расходъ Q на 1 mtr ширины.
10	2,01	44	17,8	78	41,0	130	86,8	230	200
12	2,63	46	19,0	80	42,5	135	91,6	240	213
14	3,30	48	20,2	82	44,1	140	96,8	250	226
16	4,03	50	21,4	84	45,6	145	102	260	240
18	4,78	52	22,7	86	47,3	150	107	270	253
20	5,59	54	23,9	88	48,8	155	112	280	268
22	6,43	56	25,2	90	50,5	160	118	290	281
24	7,31	58	26,6	92	5,22	165	123	300	296
26	8,21	60	27,9	94	53,9	170	129	310	311
28	6,15	62	29,3	96	55,5	175	134	320	326
30	10,1	64	30,7	98	57,2	180	140	330	341
32	11,1	66	32,1	100	59,0	185	145	340	357
34	12,2	68	33,5	105	63,3	190	151	350	373
36	13,3	70	35,0	110	67,9	195	157	360	389
38	14,3	72	36,5	115	72,4	200	163	370	405
40	15,5	74	37,9	120	77,2	210	175	380	422
42	16,6	76	39,5	125	81,8	220	187	390	439
								400	456

Расходъ черезъ водосливъ безъ бокового сжатія (черт. 91, стр. 264).

Напоръ h mm.	Расходъ Q на 1 mtr. ширины.	Напоръ h mm.	Расходъ Q на 1 mtr. ширины.	Напоръ h mm.	Расходъ Q на 1 mtr. ширины.	Напоръ h mm.	Расходъ Q на 1 mtr. ширины.	Напоръ h mm.	Расходъ Q на 1 mtr. ширины.
						255	246		
50	20,3	84	44,7	145	103	260	254		
						265	261		
52	21,5	86	46,4	150	108	270	269		
						275	277		
54	22,8	88	48,0	155	114	280	285		
						285	293		
56	24,1	90	49,7	160	119	290	301		
						295	310		
58	25,4	92	51,4	165	125	300	318		
60	26,8	94	53,1	170	131	310	335		
62	28,2	96	54,8	175	137	320	353		
64	29,6	98	56,5	180	143	330	371		
66	31,0	100	58,3	185	149	340	389		
68	32,4	105	62,8	190	156	350	408		
70	33,9	110	67,4	195	162	360	427		
72	35,4	115	72,1	200	168	370	446		
				205	175				
74	36,9	120	76,9	210	182	380	466		
				215	188				
76	38,4	125	81,8	220	195	390	486		
				225	202				
78	40,0	130	86,9	230	209	400	507		
				235	216				
80	41,6	135	92,0	240	224				
				245	231				
82	43,1	140	97,3	250	238				

Оглавленіе.

Отдѣлъ I.

Гидростатика.

Отдѣлъ II.

Динамика капельныхъ жидкостей.

ГЛАВА ПЕРВАЯ.

Уравненія движенія.

ГЛАВА ВТОРАЯ.

Истеченіе жидкости изъ отверстій.

ГЛАВА ТРЕТЬЯ.

Движенiе воды въ трубахъ каналахъ и рѣкахъ.

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ.

Движеніе жидкостей газообразныхъ.