



**УДК 691.328 (004.2)**

**РОЗРАХУНОК СКЛАДІВ ФІБРОБЕТОНІВ ЗА КРИТЕРІЄМ  
МІНІМАЛЬНОЇ ВАРТОСТІ**

**DESIGN OF FIBER REINFORCED CONCRETE COMPOSITION BASED  
ON THE MINIMAL COST CRITERION**

**Бордюженко О.М., к.т.н., доцент, ORCID: 0000-0003-3686-5121, Дворкін Л.Й., д.т.н., професор, ORCID: 0000-0001-8759-6318, Ковальчук Т.В., аспірант (Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне)**

**Bordiuzhenko O., candidate of technical sciences, associate professor, ORCID: 0000-0003-3686-5121, Dvorkin L., doctor of technical sciences, professor, ORCID: 0000-0001-8759-6318, Kovalchuk T., postgraduate (National University of Water and Environmental Engineering, Rivne)**

**Наведено методу і приклад вирішення задачі знаходження оптимального складу фібробетону із заданими показниками якості при мінімальній сумарній його вартості з використанням експериментально-статистичних моделей.**

**When designing concrete structures, the main criterion for their optimization are usually the minimum cost of cement or the minimum possible cost of concrete. For ordinary concrete, these criterion usually coincide. In both cases it is mandatory to provide a complex of normalized properties of concrete. Modern concrete is a multi-component system, the cost of which individual components can approach or exceed the cost of cement. These concrete can include fiber reinforced concrete. They differ in the presence of three components (cement, fibers and plasticizer), whose contents can vary in a wide range and have a major impact on the total cost of fiber reinforced concrete. The problem of finding the optimal composition of concrete with specified indicators of quality at the lowest total cost of it is quite important for the construction industry. This article provides an example method and solve this problem using experimental and statistical models compressive and flexural strength of steel fiber reinforced concrete at different ages and models superplasticizer required to provide specified performance concrete and concrete mixtures. The calculation method of fiber reinforced concrete composition design takes into account the specific characteristics of the studied materials and relatively easy to optimize the composition by specific**

**criterion, such as minimum cost criterion. Also, the advantages of the method include the possibility of setting random limitations, which allows simultaneously to provide a significant number of quality indicators, which may be neither big nor less than the set value.**

**Ключові слова:**

Фібробетон, склад, розрахунок, міцність, вартість, модель.  
Fiber reinforced concrete, composition, design, strength, cost, model.

**Вступ.** При проектуванні складів бетону основними критеріями їх оптимізації зазвичай виступають мінімальна витрата цементу або мінімально можлива вартість бетону. Для звичайних бетонів ці критерії зазвичай співпадають. В обох випадках обов'язковим є забезпечення комплексу нормованих властивостей бетонної суміші та бетону.

Сучасні бетони є багатокомпонентними системами, вартість окремих компонентів яких може наблизитись або перевищувати вартість цементу. До таких бетонів можна віднести фібробетони. Вони відрізняється наявністю трьох компонентів (цементу, фібри та добавки пластифікатора), вміст яких може змінюватись в широкому діапазоні і які чинять основний вплив на сумарну вартість фібробетону.

**Аналіз останніх досліджень.** Загальні підходи до проектування фібробетонних сумішей ґрунтуються на виборі складових та визначення їх вмісту, що дозволяє отримувати фібробетони з необхідними властивостями [1]. Найчастіше задаються легкоукладальністю, міцністю та показниками, що визначають довговічність.

Метод проектування складу самоущільнюваного сталефібробетону був запропонований в роботі [2]. Оптимізація складу реалізовувалась виходячи із умови забезпечення максимальної щільності упаковки зерен заповнювача. Вміст компонентів суміші визначався за результатами визначення її реологічних властивостей.

Запропонований також метод проектування фібробетонних сумішей, що забезпечує досягнення щільної цементної матриці з використанням модифікованої моделі упаковки частинок [3]. Було відзначено, що використання такої моделі дозволяє отримувати фібробетон із високими показниками міцності на стиск та розтяг при згині.

Метод оптимізації складу сталефібробетону, що враховує вплив конкретних факторів складу, властивостей в'язучого та заповнювачів та легкоукладальності бетонної суміші був описаний в роботі [4]. Основна увага була приділена використанню експериментально-статистичних моделей, що використовувались для проектування сталефібробетону із заданими властивостями.



На практиці задача мінімізації вартості фібробетону при застосуванні традиційного підходу до проектування складу суттєво ускладнюється. Для її вирішення доцільно застосовувати методи математичного програмування [5-6].

**Постановка мети і задач досліджень.** Постановка задачі знаходження оптимального складу фібробетону із заданими показниками якості можна сформулювати наступним чином: знайти значення факторів складу фібробетону  $x_1 \dots x_n$  що дозволяють мінімізувати вартість фібробетону:

$$V_{\text{ФБ}} = V_{\text{ц}} \cdot Ц + V_{\text{Д}} \cdot Д + V_{\text{Ф}} \cdot \Phi \rightarrow \min \tag{1}$$

за умови забезпечення необхідних показників якості

$$П_1 \geq f(x_1, x_2, \dots, x_n); \tag{2}$$

$$П_2 \geq f(x_1, x_2, \dots, x_n);$$

.....

$$П_m \geq f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\text{при } x_1 \dots x_n \in [a \dots b], \tag{3}$$

де  $V_{\text{ц}}$ ,  $V_{\text{Д}}$ ,  $V_{\text{Ф}}$  – відповідно вартість цементу, добавки модифікатора (суперпластифікатора, активної мінеральної добавки тощо) та фібри, у.о./кг;  $Ц$ ,  $Д$ ,  $\Phi$  – відповідно витрата цементу, добавки модифікатора та фібри, кг/м<sup>3</sup> фібробетону;  $П_1 \dots П_m$  – задані показники якості фібробетону;  $x_1 \dots x_n$  – фактори складу;  $a$ ,  $b$  – обмеження на можливі значення факторів.

**Методика досліджень.** Для визначення параметрів складів сталеві фібробетону реалізовано серію експериментів, алгоритмізованих відповідно до трьохфакторного плану експерименту другого порядку (типу В<sub>3</sub>) [7] за умов планування, наведених в табл. 1. Як вихідні компоненти бетонної суміші використовували цемент ПЦ-І М500 ПАТ «Волинь-цемент», заповнювач у вигляді фракціонованої суміші з кварцового піску (0,16...2 мм) та гранітного щебеню (2...5 мм) у співвідношенні 0,45/0,55. В бетонні суміші вводили суперпластифікатор полікарбоксилатного типу Melflux 2651f в кількостях, що забезпечувало рухомість суміші в межах 15...18 см. Використовували хвилясту фібру із низьковуглецевої сталі типу Fibax Ф1 60/1 (довжина 60,0 ± 6,0 мм, діаметр 1,0 ± 0,1 мм) [8].

Таблиця 1

Умови планування експерименту

№	Фактори		Рівні варіювання			Інтервал
	Код	Натуральний вид	-1	0	+1	
1	X <sub>1</sub>	Витрата цементу, кг/м <sup>3</sup> (Ц)	450	500	550	50
2	X <sub>2</sub>	В/Ц	0,3	0,35	0,4	0,05
3	X <sub>3</sub>	Витрата фібри, кг/м <sup>3</sup> (Ф)	80	100	120	20

**Результати досліджень.** Результати експериментів наведені в табл. 2.

Після проведення обробки і статистичного аналізу експериментальних даних отримані математичні моделі міцності на стиск та на розтяг при згині у віці 28 діб стандартних бетонних кубів, у вигляді поліноміальних рівнянь



регресії (4-5). Адекватність отриманих моделей підтверджена відповідними критеріями Фішера.

Моделі міцності, представлені в кодованому вигляді, МПа:

- при стиску:

$$f_{cm}^{28} = 78,9 + 4,8 \cdot X_1 - 13,8 \cdot X_2 + 0,4 \cdot X_3 - 1,53 \cdot X_1^2 - 0,43 \cdot X_2^2 - X_3^2 - 0,5 \cdot X_1 \cdot X_2 \quad (4)$$

- на розтяг при згині:

$$f_{c.tf}^{28} = 17,2 + 0,59 \cdot X_1 - 2,08 \cdot X_2 + 2,5 \cdot X_3 + 0,36 \cdot X_1^2 + 0,38 \cdot X_2^2 - 4,01 X_3^2 - 0,98 \cdot X_1 \cdot X_2 - 0,14 \cdot X_1 \cdot X_3 \quad (5)$$

№	Кодовані значення факторів			Витрати компонентів, кг/м <sup>3</sup>				В/Ц	СП, %	f <sub>cm</sub> <sup>28</sup> , МПа	f <sub>c.tf</sub> <sup>28</sup> , МПа
	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>3</sub>	Ц	З	В	Ф				
1	1	1	1	550	1627	220	120	0,4	0,2	67,2	13,84
2	1	1	-1	550	1627	220	80	0,4	0,1	66,6	9,08
3	1	-1	1	550	1776	165	120	0,3	1,1	96	19,92
4	1	-1	-1	550	1776	165	80	0,3	0,8	95,2	15,23
5	-1	1	1	450	1822	180	120	0,4	0,4	57,3	14,9
6	-1	1	-1	450	1822	180	80	0,4	0,2	56,9	9,59
7	-1	-1	1	450	1944	135	120	0,3	1,3	83,9	17,06
8	-1	-1	-1	450	1944	135	80	0,3	1	83,3	11,82
9	1	0	0	550	1702	193	100	0,35	0,45	79,7	18,13
10	-1	0	0	450	1883	158	100	0,35	0,27	75,8	16,95
11	0	1	0	500	1724	200	100	0,4	0,3	65,3	15,49
12	0	-1	0	500	1860	150	100	0,3	0,5	92,4	19,64
13	0	0	1	500	1792	175	120	0,35	0,3	79	15,67
14	0	0	-1	500	1792	175	80	0,35	0,1	77,5	10,67
15	0	0	0	500	1792	175	100	0,35	0,2	78,3	17,05
16	0	0	0	500	1792	175	100	0,35	0,2	78,1	17,17
17	0	0	0	500	1792	175	100	0,35	0,2	77,9	17,25

Умовні позначення: Ц – цемент, З – заповнювач, В – вода, Ф – фібра, СП – суперпластифікатор Melflux 2651f, f<sub>cm</sub><sup>28</sup> – міцність при стиску у віці 28 дб; f<sub>c.tf</sub><sup>28</sup> – міцність на розтяг при згині у віці 28 дб.

Для визначення витрат суперпластифікатора Melflux 2651f отримана наступна математична модель, % від маси цементу:

$$СП = 0,29 + 0,095 \cdot X_1 - 0,35 \cdot X_2 + 0,11 \cdot X_3 - 0,05 \cdot X_1^2 + 0,23 \cdot X_2^2 + 0,03 \cdot X_3^2 - 0,04 \cdot X_2 \cdot X_3 \quad (6)$$

Переведення значень параметрів складу фібробетонної бетонної суміші в кодований вигляд проводиться за наступними залежностями:

$$x_1 = \frac{Ц - 500}{50}; \quad x_2 = \frac{В / Ц - 0,35}{0,05}; \quad x_3 = \frac{Ф - 100}{20} \quad (7)$$

Отримані поліноміальні моделі (4-6) дозволяють вирішувати ряд практичних задач. За В.А.Вознесенським [6] відомі 10 типів задач, що

можуть бути розв'язані індивідуально чи спільно на основі таких моделей. Це інтерполяційні, екстраполяційні, задачі досягнення мінімального чи максимального значення вихідного параметру та ін.

Задачі мінімізації ресурсів та управління при фіксованому вихідному параметрі можуть вирішуватись номографічним способом. Задача управління полягає у визначенні таких комбінацій факторів, що забезпечують задані показники вихідного параметру. Для цього з отриманого рівняння регресії (наприклад, міцності на розтяг при згині 2) вибирають один з факторів. В результаті розв'язку рівняння регресії відносно цього фактора, визначаємо необхідні його значення, що забезпечує при зміні інших факторів задане значення вихідного параметра. На рис. 1 наведена номограма для визначення витрати цементу при заданій міцності фібробетону на розтяг при згині.

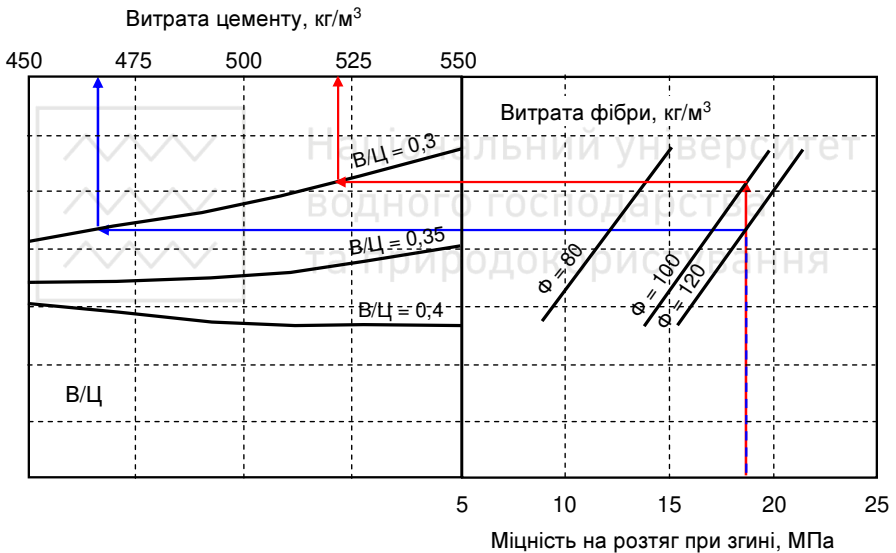


Рис. 1. Номограма міцності дрібнозернистого сталефібробетону на розтяг при згині у віці 28 діб

Для фібробетонів, як вже зазначалось раніше, крім цементу на вартість суттєво впливає витрата фібри. Для прикладу, на рис. 1 розглянутий випадок, коли необхідну міцність на розтяг при згині 18 МПа можна досягнути при одному й тому ж  $V/C=0,3$ , але при різних витратах фібри (100 і 120 кг) та цементу (468 та 522 кг). Якщо ще врахувати необхідність окремого визначення витрати суперпластифікатора, який впливає як на властивості бетону, так і на його вартість, а також можливість забезпечення іншого

показника якості (наприклад, міцності при стиску), то стає зрозумілим, що задачу оптимізації складу фібробетону розв'язати номографічним способом практично неможливо.

Для того, щоб розрахувати оптимальний для даного прикладу склад фібробетону, необхідно розв'язати задачу математичного програмування з наступною постановкою: *знайти такий склад фібробетонної суміші, який би дозволяв забезпечити необхідну міцність при стиску та розтягу при згині у віці 28 днів при мінімальній сумарній вартості в межах допустимих значень факторів.*

Найбільш раціональним способом вирішення такої задачі є використання програмного середовища Microsoft Excel, зокрема його додаток "Пошук рішення". Ця надбудова призначена для пошуку рішення рівнянь та задач оптимізації.

Послідовність розрахунку наступна. Підставляємо у моделі (4) і (5) значення міцностей, що повинні забезпечуватись, а у вираз (1) – значення вартості компонентів фібробетону. У виразі 3 встановлюємо обмеження значень факторів (в кодованих значеннях від -1 до 1). Далі програма перебирає різні комбінації факторів забезпечуючи не менше заданих значення міцностей за виразами (4) та (5) мінімізуючи при цьому функцію (1). Для встановлення вартості фібробетону під час ітерацій паралельно визначається необхідний вміст суперпластифікатора за виразом (6) при знайдених проміжних значеннях факторів  $x_1...x_3$ .

Результатом таких ітерацій є визначення оптимальних значень факторів складу: витрати цементу, фібри, В/Ц та суперпластифікатора. Витрати води можна розрахувати по знайденому В/Ц та витраті цементу:

$$B = Ц \cdot V / Ц. \quad (8)$$

Значення витрати дрібного заповнювача знаходимо за методом абсолютних об'ємів:

$$3 = \left( 1000 - \left( \frac{Ц}{\rho_c} + \frac{\Phi}{\rho_\phi} + \frac{B}{\rho_a} \right) \right) \cdot \rho_z, \quad (9)$$

де  $\rho_c$ ,  $\rho_\phi$ ,  $\rho_a$ , та  $\rho_z$  – відповідно дійсні густини цементу, фібри, води та заповнювача.

**Приклад розрахунку.** Необхідно визначити склад дрібнозернистого фібробетону з міцністю у віці 28 днів при стиску 70 МПа та міцністю на розтяг при згині 15 МПа із рухомістю суміші 15 см використовуючи експериментально-статистичні моделі (4-6). Приймаємо вартості основних компонентів фібробетону наступними, у.о./кг:  $V_{ц} = 3$ ;  $V_\phi = 50$ ;  $V_{СП} = 260$ .

Матеріали: портландцемент М500, дрібний заповнювач з модулем крупності  $M_k = 3,5$  середньої якості та дійсною густиною  $\rho_z = 2,65$  кг/л. Передбачається використання суперпластифікатора Melflux 2651 f.

1. Підставляючи значення міцності при стиску та згині у вирази (4) та (5), отримаємо функції обмежень (2) задачі:



$$78,9+4,8 \cdot X_1-13,8 \cdot X_2+0,4 \cdot X_3-1,53 \cdot X_1^2-0,43 \cdot X_2^2-X_3^2-0,5 \cdot X_1 \cdot X_2+0,05 \cdot X_1 \cdot X_3-0,05 \cdot X_2 \cdot X_3 \geq 70;$$

$$17,2+0,59 \cdot X_1-2,08 \cdot X_2+2,5 \cdot X_3+0,36 \cdot X_1^2+0,38 \cdot X_2^2-4,01 X_3^2-0,98 \cdot X_1 \cdot X_2-0,14 \cdot X_1 \cdot X_3+0,02 \cdot X_2 \cdot X_3 \geq 15.$$

2. У вираз (1) підставляємо значення вартості компонентів фібробетону, а також задаємо обмеження значень факторів: від -1 до 1 (в кодованому вигляді).

3. За допомогою програмного додатку "Пошук рішення" знаходимо значення факторів, що задовольняють обмеження задачі і мінімізують загальну вартість фібробетону:

$$x_1 = -0,039; x_2 = 0,13; x_3 = -0,446.$$

При таких значеннях факторів за виразами (4-5)  $f_{c,tf}^{28} = 15$  МПа, що відповідає необхідному значенню міцності на розтяг при згині, а  $f_{cm}^{28} = 76,6$  МПа, що є більшим необхідного значення міцності при стиску.

4. Значення факторів в натуральному вигляді визначаємо за виразами (7):

$$\text{Ц} = 50 \cdot x_1 + 500 = 50 \cdot (-0,026) + 500 = 498,1 \text{ кг/м}^3;$$

$$\text{В/Ц} = 0,05 \cdot x_2 + 0,35 = 0,05 \cdot 0,13 + 0,35 = 0,356;$$

$$\text{Ф} = 20 \cdot x_3 + 100 = 20 \cdot (-0,446) + 100 = 91,1 \text{ кг/м}^3.$$

5. Витрата суперпластифікатора за виразом (6):

- у % від маси цементу:

$$\text{СП} = 0,29+0,095 \cdot X_1-0,35 \cdot X_2+0,11 \cdot X_3-0,05 \cdot X_1^2+0,23 \cdot X_2^2+0,03 \cdot X_3^2-0,04 \cdot X_2 \cdot X_3 = 0,21\%;$$

$$\text{- за масою: СП} = \text{СП} \cdot \text{Ц} / 100 = 0,21 \cdot 498,1 / 100 = 1,046 \text{ кг/м}^3.$$

6. Значення мінімально можливої вартості 1 м<sup>3</sup> фібробетону без врахування вартості заповнювача та води (знаходиться під час ітерацій в програмному додатку "Пошук рішення", вираз (1)):

$$\text{В}_{\text{ФБ}} = 3 \cdot 498,1 + 260 \cdot 1,045 + 50 \cdot 91,1 = 6319,3 \text{ у.о.}$$

7. Витрата води за виразом (8):  $\text{В} = 498,1 \cdot 0,356 = 177,5$  л.

8. Витрата дрібного заповнювача за виразом (9):

$$\text{З} = \left( 1000 - \left( \frac{498,1}{3,1} + \frac{91,1}{7,85} + \frac{177,5}{1} \right) \right) \cdot 2,65 = 1723 \text{ кг}$$

Остаточний склад фібробетонної суміші, кг/м<sup>3</sup>:

$$\text{Ц} = 498; \text{В} = 178; \text{З} = 1723; \text{Ф} = 91; \text{СП} = 1,05.$$

На етапі формулювання задачі визначення складу фібробетону необхідно коректно задаватись бажаними значеннями міцностей при стиску та розтяг при згині. Очевидно, що ці значення повинні знаходитись в межах мінімально та максимально можливого значення вихідного параметру, оскільки саме в цих межах поліноміальна модель адекватно описує досліджувану властивість. Такі значення можна досить легко знайти використовуючи вже згаданий програмний додаток "Пошук рішення". Так для розглянутого прикладу 1 граничні значення міцностей в межах області варіювання факторів будуть наступними:

$f_{cm}^{28}(\min) = 58,2$  МПа;  $f_{cm}^{28}(\max) = 96,1$  МПа;  $f_{c.tf}^{28}(\min) = 8,93$  МПа;  
 $f_{c.tf}^{28}(\max) = 21,93$  МПа.

Можливим є також деякий вихід за граничні межі вихідних параметрів. В цьому випадку, поряд із задачею оптимізації вирішується також екстраполяційна задача, що дозволяє приймати значення факторів поза межами області варіювання (наприклад,  $x_1 \dots x_3 = 1,1; 1,2; 1,3$ ). Однак необхідно мати на увазі, що екстраполяція може бути пов'язана з певними помилками і ці помилки стають більш відчутними, чим далі вихід за межі області варіювання. Екстраполяція можлива, якщо за результатами досліджень не виникає сумнівів, що за межами області варіювання факторів характер функції залишається без змін.

**Висновки.** Запропонований метод розрахунку складу фібробетону дозволяє враховувати конкретні особливості досліджуваних матеріалів і досить легко оптимізувати склад за заданим критерієм, наприклад критерієм мінімальної вартості. Також до переваг методу варто віднести можливість задавання довільної кількості обмежень (2), що дозволяє одночасно забезпечувати значну кількість показників якості, які можуть бути як не більшими, так і не меншими заданого значення.

1. M. Beddar, L. Belgaraâ and T. Ayadat, "Optimizing of Steel Fiber Reinforced Concrete Mix Design", IJE Transactions B: Applications, 17 (1), 41 – 50, 2004.
2. A. Basheerudeen and S. Anandan, "Simplified Mix Design Procedures for Steel Fibre Reinforced Self Compacting Concrete", Engineering Journal, 19 (1), 21-36, 2015.
3. R. Yu, P. Spiesz and H.J.H. Brouwers, "Mix design and properties assessment of Ultra-High Performance Fibre Reinforced Concrete (UHPRFC)", Cement and Concrete Research, 56, 29–39, 2014.
4. L.Dvorkin, O.Dvorkin, V.Zhitkovsky, Y.Ribakov. A method for optimal design of steel fiber reinforced concrete composition. Materials & Design. –Volume 32, Issue 6, 3254-3262, 2011.
5. Dvorkin L., Dvorkin O., Ribakov Y. Multi-Parametric Concrete Compositions Design. Nova Science Publishers, New York, 2013. – 223 p.
6. Вознесенский В.А. Численные методы решения строительно-технологических задач на ЭВМ. – К.: Вища шк., 1989. – 328 с.  
Voznesenskiy V.A. Chislennyye metody resheniya stroitel'no-tekhnologicheskikh zadach na EVM. – K.: Vishcha shk., 1989. – 328 p.
7. Дворкін Л.Й. Розв'язування будівельно-технологічних задач методами математичного планування експерименту. – Рівне: НУВГП, 2011. –174 с.  
Dvorkin L.Y. Rozv'yazuvannya budivel'no-tekhnologichnykh zadach metodamy matematychnoho planuvannya eksperymentu. – Rivne: NUVHP, 2011. –174 p.
8. Дворкін Л.Й. Високоміцні швидкотверднучі бетони та фібробетони / Л.Й.Дворкін, С.М.Бабич, В.В.Житковський, О.М.Бордюженко та ін. // Рівне.: НУВГП, 2017. – 331 с.  
Dvorkin L.Y. Vysokomitsni shvydkotverdnuchi betony ta fibrobetony / L.Y.Dvorkin, YE.M.Babych, V.V.Zhytkovs'kyu, O.M.Bordyuzhenko ta in. // Rivne.: NUVHP, 2017. – 331 p.