Студенческое Издательское Общество
при Императорскомъ Московскомъ Техническомъ Училищѣ.

ГИДРАВЛИКА.

А. И. Астровъ,
инженеръ-механикъ, адъюнктъ-профессоръ Императорскаго Московскаго Техническаго Училища.

223 фигуры въ текстѣ и чертежи въ [illegible] таблицахъ.

Цѣна 5 руб.

МОСКВА.
1911.

16 26

Студенческое Издательское Общество
при Императорскомъ Московскомъ Техническомъ Училищѣ.

ГИДРАВЛИКА.

А. И. Астровъ,

инженеръ-механикъ, адъюнктъ-профессоръ Императорскаго Московскаго Техническаго Училища.

223 фигуры въ текстѣ и чертежи на IX таблицахъ.

МОСКВА.
1911.

Изданіемъ завѣдывали студенты:

В. Н. Литковъ, А. Н. Малиновскій, А. В. Назимовъ и М. И. Фелинскій.

Типо-литографія Т-ва И. Н. КУШНЕРЕВЪ и К°. Пименовская ул., соб. д.

МОСКВА—1911.

ПРЕДИСЛОВІЕ.

Въ основномъ своемъ содержаніи настоящій курсъ гидравлики представляетъ сводъ лекцій, читаемыхъ авторомъ по этому предмету въ Императорскомъ Московскомъ Техническомъ Училищѣ—школѣ съ опредѣленно выраженнымъ машиностроительнымъ характеромъ. Этимъ уже опредѣлилось въ значительной мѣрѣ содержаніе этой книги: въ нее не вошелъ рядъ вопросовъ, имѣющихъ значеніе преимущественно для строителей, какъ-то: опредѣленіе величины мостовыхъ отверстій, движеніе воды въ размываемомъ руслѣ, движеніе подпочвенныхъ водъ, волнообразное движеніе и т. д. Этимъ же должно быть объяснено отсутствіе въ этой книгѣ цѣлаго важнаго отдѣла гидравлики о взаимодѣйствіи потока жидкости и твердаго тѣла. Дѣло въ томъ, что, по условіямъ преподаванія въ Училищѣ, удобно отнести весь этотъ отдѣлъ къ читаемому авторомъ же курсу водяныхъ двигателей, для котораго этотъ отдѣлъ является основнымъ положеніемъ при развитіи такъ называемой теоріи этихъ машинъ.

Въ то же время среди вопросовъ гидравлики, трактуемыхъ на лекціяхъ, могутъ быть выдѣлены такіе, которые являются основными, и такіе, которые разсматриваются въ качествѣ поясняющаго дополненія, въ качествѣ нѣкотораго развитія основныхъ положеній. Умѣстные на лекціяхъ, гдѣ ихъ подборъ можетъ мѣняться годъ отъ году, такіе вопросы могли бы и не входить въ составъ учебника, если считать, что учебникъ долженъ содержать исключительно основныя положенія предмета, поясненныя ограниченнымъ числомъ примѣровъ.

Не желая однако при изданіи настоящей книги ограничиваться узкими рамками учебника, авторъ, наоборотъ, считалъ полезнымъ ввести въ нее разсмотрѣніе нѣкоторыхъ вопросовъ практической гидравлики, преимущественно изъ области машиностроенія, которые лежатъ за предѣлами общепринятыхъ программъ, но могутъ встрѣтиться въ практикѣ инженера-машиностроителя. Сюда относятся, напримѣръ, водоструйные приборы, гидравлическій ударъ въ водопроводныхъ трубахъ и нѣкоторыя другія задачи. Такимъ расширеніемъ программы книги авторъ надѣется придать ей характеръ не только учебника, но и болѣе широкаго руководства по гидравликѣ въ ограниченной выше области. По той же причинѣ авторъ считалъ необходимымъ приводить ссылки на литературу.

Для того чтобы, сообразно съ двоякой задачей курса, выдѣлить наиболѣе существенное для первоначальнаго изученія, въ книгѣ приняты два шрифта: основной матеріалъ—около двухъ третей общаго числа страницъ—набранъ крупнымъ шрифтомъ; болѣе мелкій сохраненъ для подробностей, спеціальныхъ вопросовъ, опытныхъ данныхъ и т. п.

Въ числѣ подробностей, кромѣ охарактеризованныхъ выше дополнительныхъ вопросовъ, помѣщены начальныя положенія гидродинамики. За послѣдніе годы все болѣе выдвигается вѣроятность того, что въ близкомъ будущемъ общепринятая теорія гидравлическихъ машинъ будетъ опираться на уравненія гидродинамики. На этотъ путь вступили многіе иностранные и русскіе авторы основной и журнальной литературы, трактующіе о водяныхъ турбинахъ и турбинныхъ насосахъ. Для того, чтобы дать возможность войти въ кругъ этихъ пріемовъ разсмотрѣнія, авторъ счелъ необходимымъ удѣлить гидродинамикѣ больше мѣста, нежели это обыкновенно дѣлается въ курсахъ гидравлики. Однако приводимыя свѣдѣнія по гидродинамикѣ не идутъ далѣе основныхъ положеній и понятій и двухъ примѣровъ плоскихъ теченій, важныхъ для вышеуказанной цѣли и въ то же время не требующихъ болѣе глубокихъ знаній анализа.

Многія статьи гидравлики сопровождаются нерѣдко тяжеловѣсными и утомительными выкладками. Въ то же время очень часто приходится наблюдать, что изъ-за этихъ вычисленій начинающіе перестаютъ замѣчать основной ходъ мысли въ развиваемыхъ положеніяхъ, иногда какъ бы не замѣчаютъ всю постановку задачи, сдѣланныя въ началѣ упрощающія допущенія и т. п. и, наоборотъ, готовы видѣть суть дѣла въ интегрированіяхъ, преобразованіяхъ и прочихъ чисто служебныхъ операціяхъ. Чтобы съ самаго начала въ возможной мѣрѣ воспрепятствовать этому ошибочному и даже, можно сказать, пагубному представленію, цѣлый рядъ такихъ операцій вынесенъ, въ качествѣ подробностей, въ мелкій шрифтъ; ибо, съ другой стороны, было нежелательно ни прибѣгать къ новымъ предположеніямъ, въ видахъ упрощенія выкладокъ, ни приводить эти выкладки въ сильно сокращенномъ видѣ.

Всякая прикладная наука неизбѣжно опирается на болѣе или менѣе обширный экспериментальный матеріалъ. Въ гидравликѣ эти данныя являются не столько матеріаломъ для обобщеній, сколько вводятся силою вещей какъ необходимыя поправки къ слишкомъ далекимъ отъ дѣйствительности предположеніямъ. Такимъ образомъ знаніе гидравлики неизбѣжно слагается изъ двухъ частей—изъ знанія основныхъ схемъ, число которыхъ довольно ограничено, и изъ умѣнія исправлять ихъ или, говоря общѣе, примѣнять къ даннымъ частнымъ случаямъ; послѣднее сводится въ значительной мѣрѣ къ умѣнію пользоваться данными опыта. По этимъ соображеніямъ въ настоящемъ курсѣ удѣлено много мѣста, конечно, главнымъ образомъ среди мелкаго шрифта, своду эмпирическихъ данныхъ. При этомъ были употреблены всѣ старанія къ провѣркѣ приводимыхъ данныхъ: разыскивались оригинальныя изданія, сличались между собою разные источники, нѣкоторыя таблицы, напримѣръ 39, пересчитывались заново. Для облегченія пользованія многія данныя приведены въ формѣ таблицъ. Въ концѣ книги приложены также двѣ числовыя таблицы величинъ, часто встрѣчающихся при вычисленіяхъ и не всегда приводимыхъ въ общеупотребительныхъ справочникахъ.

Отчасти для той же цѣли ознакомленія съ опытнымъ матеріаломъ, а главнымъ образомъ ради облегченія усвоенія основныхъ схемъ, въ курсѣ помѣщено 85 задачъ въ качествѣ матеріала для упражненій, независимо отъ нѣсколькихъ числовыхъ примѣровъ, приводимыхъ въ текстѣ. Для значительнаго большинства задачъ приведены отвѣты, для того чтобы дать упражняющемуся увѣренность въ правильности принятаго имъ способа рѣшенія задачи. Въ этихъ случаяхъ почти всегда указываются также тѣ эмпирическіе коэффиціенты, которые были приняты при рѣшеніи. Кромѣ того, въ очень большомъ числѣ случаевъ приведенъ и весь процессъ рѣшенія задачи; это дѣлалось особенно въ тѣхъ случаяхъ, когда въ текстѣ не было прямыхъ указаній на способъ рѣшенія такихъ вопросовъ. Сюда, напр., относятся задачи на опредѣленіе времени затопленія сосудовъ разной формы, задачи на водопроводную сѣть, задачи на трубу, питаемую съ двухъ концовъ и т. д.

Наконецъ, нѣсколько словъ о внѣшности изданія. Въ силу крайняго недостатка свободнаго времени у автора, печатаніе этой книги растянулось болѣе чѣмъ на два года. Этимъ объясняется нѣкоторая непослѣдовательность въ расположеніи матеріала, наличность ряда «дополненій» и т. п. Изданіе начато Студенческой Издательской Комиссіей и закончено возникшимъ въ замѣну Комиссіи Студенческимъ Издательскимъ Обществомъ. Длительностью изданія и происшедшими при этомъ измѣненіями въ составѣ непосредственныхъ исполнителей нужно объяснить такіе, напримѣръ, недочеты, какъ разный стиль рисунковъ, ошибочная ихъ номерація и т. п. Длинный списокъ опечатокъ, отнюдь не украшая изданія, все же, надо надѣяться, сдѣлаетъ его годнымъ для пользованія, особенно если принять во вниманіе, что громадное большинство исправленій не носитъ характера существенныхъ погрѣшностей. Авторъ съ благодарностью отмѣчаетъ здѣсь, что оба названныя выше учрежденія не останавливались передъ затратами для приданія всему изданію желательной четкости и вообще хорошей внѣшности.

Средства для начала изданія были даны Учебнымъ Комитетомъ Училища, за что авторъ считаетъ пріятной обязанностью выразить ему здѣсь свою глубокую признательность.

Ад.-проф. **Ал. Астровъ.**

Москва,
2 ноября 1910 г.

Прежде чѣмъ пользоваться этой книгой, необходимо сдѣлать въ ней слѣдующія исправленія.

Страница:	*Строка:*	*Напечатано:*	*Должно быть:*
7	11 снизу	$+X\varrho\cdot\frac{1}{6}dx\,dy\,dx=$	$+X\varrho\cdot\frac{1}{6}dx\,dy\,dz=$
11	11 сверху	...извѣстно, силы,...	...извѣстно, центральныя силы,...
14	8 снизу	распространенія	распредѣленія
18	18 „	13.560.0,760	13560.0,760
„	14 „	поправкамина	поправками на
22	15 „	плоскостями параллельными	плоскостями, параллельными
26	21 „	па раболоидъ	параболоидъ
29	8 сверху	Полное давленіе	О давленіи
34	14 снизу	$g\sin\alpha$	$\gamma\sin\alpha$
„	12 „	**A'F'B'N'**	**AMB**
35	20 сверху	(2),	(20),
39	1 „	до давленія	до избыточнаго давленія
„	12 снизу	**BC**	**AC**
41	Фиг. 27	Размѣръ „90“ нужно считать отъ оси вращенія клапана до его центра.	
42	13 сверху	съ концомъ	съ верхнимъ концомъ
43	5 „	діаметронъ 60 *mm*;	діаметромъ 0,6 *mtr*;
„	7 „	2×2	1×2
„	14 снизу	въ точкѣ —	въ точкѣ **B** —
48	11 „	$\frac{\partial(\varrho u)}{\partial y}$	$\frac{\partial(\varrho v)}{\partial y}$
50	1 „	$\eta=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u-\partial w}{\partial z\quad\partial x}\right);$	$\eta=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right);$
51	14 сверху	матеріальной системы	матеріальной деформируемой системы
52	22 „	обуславливаютъ	обусловливаютъ
„	1 снизу	Нужно добавить: Уравненіе неразрывности обращается въ случаѣ такого движенія въ уравненіе Лапласа: $$\frac{1}{\varrho}\left(\frac{d\varrho}{dt}\right)+\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right)=0$$	
54	1 сверху	изъ нихъ;	изъ нихъ,
59	8 снизу	удѣльнымъ вѣсомъ	вѣсомъ единицы объема,
„	6 „	$+\frac{k}{k-1}\left(\frac{p_0}{\gamma}-\frac{p}{\gamma}\right)=$	$+\frac{k}{k-1}\left(\frac{p_0}{\gamma_0}-\frac{p}{\gamma}\right)=$
61	12 сверху	этого параграфа	предыдущаго параграфа

Страница:	*Строка:*	*Напечатано:*	*Должно быть:*
62	6 сверху	принята и за	принята за
„	12 „	$\frac{1}{\varrho}\left(\frac{dp}{dt}\right)+$	$\frac{1}{\varrho}\left(\frac{d\varrho}{dt}\right)+$
64	7 „	$\frac{d}{dt}\xi-$	$\frac{d\xi}{dt}-$
65	17 снизу	съ ними обращаются	съ ними по уравненіямъ (f) обращаются
„	6 „	разсмотримъ случай	разсмотримъ одинъ случай
67	3 „	$\frac{\partial\varphi}{\partial z}=2Kz.$	$\frac{\partial\varphi}{\partial z}=-2Kz.$
68	21 сверху	$=\frac{p_0-p}{\gamma}+const=$	$=const-\frac{p}{\gamma}=$
„	22 „	*давленія* тоже...	*давленія*, для которыхъ величина P не мѣняется, тоже...
69	1 „	*minimum*'а	*maximum*'а
72	12 „	добавить ссылку на (уравненія (3) на стр. 46).	
73	2 „	фиг. 37	фиг. 36
„	13 снизу	$(r+dz)$	$(r+dr)$
„	3 „	производныя отдѣльныхъ	производныя по t отъ отдѣльныхъ
75	7 „	$w=\frac{\partial F}{\partial z}=4Kr;$	$w=\frac{\partial F}{\partial z}=4Kz;$
78	1 сверху	словами, обычное	словами — обычное
„	13 „	$\frac{p}{\gamma}=\frac{2g}{16K^2}\Big[\ldots$	$\frac{p}{\gamma}=\frac{16K^2}{2g}\Big[\ldots$
„	19 снизу	прямой	прямымъ
80	14 „	$-\frac{\omega^2 r_0^2}{2g\,r^2}=$	$-\frac{\omega^2 r_0^4}{2g\,r^2}=$
81	15 сверху	mouvements	mouvement
„	18 „	Mécanique. Physique.	Mécanique physique.
84	5 снизу	стр.),	стр. 9),
85	10 „	дастъ запасъ	дастъ приращеніе запаса
„	8 „	на что этотъ запасъ уходитъ	за счетъ чего этотъ запасъ создается
„	4 „	первая часть траты запаса	первая работа, создающая часть запаса
86	19 и 18 „	на развитіе которой уходитъ слѣдующая	которая создаетъ слѣдующую
„	16 и 15 „	такъ какъ на преодолѣніе давленій на боковыя поверхности струи работы не требуется,	такъ какъ давленія на боковыхъ поверхностяхъ струи работы не даютъ,
88	9 сверху	Добавить: Геометрическое мѣсто точекъ N называется пьезометрической линіей.	
89	16 снизу	Всю строчку замѣнить такъ: Поэтому ур-іе (16) даетъ:	
91	10 сверху	(фиг. 38)	(фиг. 42)
92	8 „	(фиг. 36)	(фиг. 43)
„	19 „	силъ	тѣлъ
95	13 „	(фиг. 39)	(фиг. 46)
96	Фиг. 48	Центръ окружности радіуса r нужно отмѣтить буквой O', а не O	
97	1 сверху	M, есть	M есть
„	7 „	$=\frac{\omega^2}{g}(r_2^2-r_1^2)=$	$=\frac{\omega^2}{2g}(r_2^2-r_1^2)$
100	13 снизу	Schaw	Shaw

Страница:	*Строка:*	*Напечатано:*	*Должно быть:*
108	6 сверху	стѣнкѣ, только	стѣнкѣ только
112	2 „	Послѣдній членъ ур-ія (13''') долженъ быть: $-\int_{H_1}^{H_2} z^{3/2}\,dz\Big]\ldots$	
„	5 снизу	на 1 *mm*.	на 1 *mm* въ секунду.
122	7 „	Бидону,	Бидоне,
125	5 и 6 „	Въ крайнемъ правомъ столбцѣ таблицы звѣздочку нужно поставить строчкой выше, соотвѣтственно напору 1,6 *mtr*.	
126	27 сверху	таблицы II отъ	таблицы III отъ
„	4 снизу	0,667	0,676
133	2 сверху	на ударъ при входѣ	на ударъ и при входѣ
135	1 снизу	$\mu=0{,}5$, — наблюдается	$\mu=0{,}5$: наблюдается
137	5 „	$=\frac{1}{1+\zeta_1}=$	$=\frac{1}{\sqrt{1+\zeta_1}}=$
140	6 сверху	7°,5	5°,7
141	10 „	хорошіе	худшіе
146	Въ таблицѣ 17	добавить 6-й вертикальный столбецъ, расположивъ въ нисходящемъ порядкѣ слѣдующее: $\zeta=\frac{1}{\varphi^2}-1;\quad 0{,}05;\quad 0{,}49;\quad 0{,}075;\quad 0{,}04;\quad 4{,}29.$	
148	14 снизу	есть скорость	есть какъ бы скорость
161	11 „	$=\mu\sqrt{2g}\left(h+\alpha\frac{v_0^2}{2h}\right)^{3/2},\ldots$	$=\mu\sqrt{2g}\left(h+\alpha\frac{v_0^2}{2g}\right)^{3/2},\ldots$
163	13 сверху	таблицѣ III	таблицѣ IX
164	Соотвѣтственно	$h=0{,}16$ *mtr* въ графѣ μ нужно читать	0,4246, а не 0,4646
„	„	$h=0{,}46$ *mtr* и $H-h=1{,}50$ „ „	0,425 „ „ 0,435
166	27 снизу	0,1890	1,1890
173	18 „	(фиг. 89)	(фиг. 86)
175	Въ таблицѣ 22	ссылку на фиг. 95 нужно замѣнить 4 раза ссылкой на фиг. 98.	
182	3 снизу	$\left(0{,}05-\frac{0{,}3}{0{,}2}\right)^2$	$\left(0{,}05-\frac{0{,}3}{1{,}2}\right)^2$
183	9 сверху	$h_1 : p''=0{,}8$,	$h : p''=0{,}8$,
„	16 „	DuBuat	Du Buat
„	12 снизу	стѣнкѣ μ_2	стѣнкѣ подъ уровень μ_2
„	10 „	$+0{,}62.2.0{,}5\sqrt{2g.0{,}15}=$	$+0{,}62.2.0{,}25\sqrt{2g.0{,}15}=$
186	4-й вертикальный	столбецъ 0,472	0,474
„	„ „	„ 0,445	0,438
„	6-й „	„ 0,495	0,501
„	„ „	„ 0,502	0,507
„	7-й „	„ 0,508	0,503
187	18 снизу	0,470	0,446
188	11 сверху	0,401	0,400
„	12 снизу	0,415	0,410
190	1 сверху	рѣкѣ.	рѣки.
„	5 снизу	соотвѣственно	соотвѣтственно
193	17 сверху	сѣченій	сѣченія
199	14 снизу	$t'=$	$t_0'=$
204	10 „	этотъ	данный
„	Фиг. 118	Размѣръ z_1 отсчитывается отъ уровня A_1B_1 *до оси трубы.*	
206—207	Табл. IV	Клэркъ	Кларкъ
209	5 сверху	слогъ „дви-" нужно уничтожить.	

Страница:	*Строка:*	*Напечатано:*	*Должно быть:*
216	10 снизу	то, что...	то, что называется потеряннымъ напоромъ и что...
218	3 сверху	Dubuat	Du Buat
221	16 сверху	по Зонне	по Зонне для новыхъ трубъ
222	6 снизу	Добавить: Работа Рейнольдса напечатана: Papers on mechanical and physical subjects. By Osborne Reynolds. Cambridge, 1901, Vol. II, page 51 и слѣд.	
„	4 „	мемуаръ	мемуары
223	9 сверху	$k=0{,}005813$	$k=0{,}005816$
224	7 „	$+0{,}0336\ t+$	$+0{,}0337\ t+$
„	18—20 „	Вмѣсто приведенныхъ по Блэну значеній показателя n, нужно принять слѣдующія его значенія, приводимыя самимъ Рейнольдсомъ (см. его Papers, Vol. II, page 104): для свинцовыхъ и стеклянныхъ трубъ . . . $n=1{,}79$ „ асфальтированныхъ трубъ . . . . $n=1{,}82$ „ новыхъ чугунныхъ трубъ . . . . $n=1{,}88$ „ вычищенныхъ трубъ . . . . $n=1{,}91$ „ загрязненныхъ трубъ . . . . $n=2{,}00$	
226	5 снизу	не только и даже	не только, и даже
229	9 сверху	$=0{,}00639+$	$=0{,}00636+$
„	10 „	для $d=21$ *mm*	для $d=26$ *mm*
„	20 снизу	температурѣ коэффиціенты	температурѣ (15—20 °C) коэффиціенты
„	14 „	20 *mm*	200 *mm*
„	„ „	при значительной длинѣ.	при значительной длинѣ до 2000 *mtr*.
234	18 сверху	поверхней	по верхней
235	15 „	Dubuat	Du Buat
236	12 „	треніе, къ длинѣ...	треніе во всей трубѣ, къ длинѣ...
238	1 снизу	ueber	über
240	7 „	$(\pi d-ie)h=0{,}87\ f$	$(\pi d-ie)h\geqq 0{,}87\ f$
242	2 „	„h', гдѣ“ совсѣмъ вычеркнуть.	
245	10 и 11 сверху	ζ_r'	ζ_e'
„	11 снизу	кольцо	колѣно
„	5 „	v_1'	v_1
248	2 сверху	отъ горизонта до	отъ горизонта въ сосудѣ до
„	Фиг. 143	$\frac{p}{\gamma}-b$	$\frac{p_2}{\gamma}-b$
249	11 сверху	$+\Sigma\zeta_r\frac{4L}{D}\Big\}$	$+\Sigma\zeta+\zeta_r\frac{4L}{D}\Big\}$
„	15 „	$=\mu_{несов.\ сж.}\cdot f v_1.$	$=\mu_{несов.\ сж.}\cdot f\sqrt{2g\left(\frac{p_2}{\gamma}-b\right)}.$
„	5 снизу	aud	and
250	9 „	5,030	6,030
251	28 „	8,200	8,100
252	5 сверху	0,1499	0,1388
„	15 „	2,902	3,902
253	16 снизу	0,00888	0,00688
„	11 „	0,9393	0,3993
255	10 сверху	67,33	67,35
257	10 „	0,06464	0,06465
„	11 „	0,08388	0,08389

Страница:	*Строка:*	*Напечатано:*	*Должно быть:*
257	21 снизу	197,5	197,8
261	12 „	0,00461	0,00468
„	11 „	0,00473	0,00461
„	„ „	$+7{,}15$	$+9{,}33$
269	14 сверху	$+\zeta\frac{4(L-L_s)}{D}$	$+\zeta_r\frac{4(L-L_s)}{D}$
272	9 „	(34),	(34)′,
274	9 „	...діаметра.	...діаметра, образующихъ одинъ непрерывный трубопроводъ.
285	14 снизу	давленія	давленіе
289	10 „	гидростатическаго	гидравлическаго
309	8 „	0,64 опредѣляются	0,64, опредѣляются
314	19 „	0,48 *mtr³/sec.*	0,481 *mtr³/sec.*
322	1 сверху	5,54 *mm.*	5,54 *mtr.*
326	1 „	что когда *B* закрыто то,	что, когда *B* закрыто, то
327	18 снизу	$\ldots\frac{\pi.0{,}025}{4}\ldots$	$\ldots\frac{\pi.0{,}025^2}{4}\ldots$
„	16 „	$\frac{0{,}4084}{0{,}7854}$	$\frac{0{,}0484}{0{,}7854}$
329	19 „	$y=\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\frac{z^2}{2b}.$	$y=\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\frac{z^2}{6b}.$
„	18 „	$z_2=b\sqrt{\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\left(1-\frac{1}{n}\right)}.$	$b=z_2\sqrt{\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\frac{n}{3(n-2)}}.$

„ Двѣ послѣднія строчки нужно читать такъ:

„имѣемъ: $y=\frac{z}{3}\left(tg\alpha-\frac{\gamma_2}{\gamma_1+\gamma_2}2\,ctg\,2\alpha\right)$. — Чтобы высота z_2 была любая, нужно удовлетворить условію

$$sin\alpha>\sqrt{\frac{n\gamma_2}{(\gamma_1+\gamma_2)(n-3)+2n\gamma_2}}.$$

При $n=3$, что обычно требуется въ инженерной практикѣ, получаемъ $sin\alpha>\sqrt{\frac{1}{2}}$, т.-е. $\alpha>45^0$, совершенно независимо отъ матеріала стѣнки и вѣса жидкости“.

330	4 сверху	выполненный	выполненной

„ Весь *отвѣтъ* нужно читать такъ:

1 погонный метръ первой стѣнки вѣситъ $\sqrt{\gamma_1\gamma_2}\,a^2=\sqrt{1{,}5}\,a^2\,tn=$ $=1{,}225\;a^2\,tn$; то же для второй стѣнки вѣситъ $0{,}5\sqrt{\gamma_1\gamma_2}\,a^2=$ $=0{,}6125\,a^2\,tn$; при третьей конструкціи вѣсъ погоннаго метра $=$ $=0{,}5\;\gamma_1\,a^2=0{,}5\sqrt{\frac{\gamma_1}{\gamma_2}}\cdot\sqrt{\gamma_1\gamma_2}\,a^2=0{,}6125\sqrt{\gamma_1\gamma_2}\;a^2=0{,}75\;a^2\,tn.$

333	8 снизу	0,054.	0,055‰.
338	4 „	25	29
„	3 „	29	25
341	10 сверху	$B=\alpha,$	$B=2g\alpha,$
343	2 снизу	*Td*	*T*
346	строка $R=1{,}40$:	76,3	76,6
350 и 351	Табл. VIII.	На чертежѣ изотахей по Базену, въ лѣвой его части на нижней горизонтали нужно переставить мѣстами буквы *f* и *e*.	
„	„	На 6-й строкѣ снизу напечатано: 10191 *mtr* вмѣсто 10191 *mtr²*.	
351	3 сверху	сажени.	сажени въ секунду.

Страница:	*Строка:*	*Напечатано:*	*Должно быть:*
356	12 снизу	Передъ словомъ „Легко" вставить: Изъ построенія видно, что длина откоса BD равна OD, т.-е. половинѣ ширины свободной поверхности. Такъ какъ далѣе $OF = h_0$, и уголъ откоса извѣстенъ, то этимъ удобно воспользоваться для построенія профиля, исходя изъ треугольника OFD и засѣкая на продолженномъ катетѣ DF точку B радіусомъ $DB = DO$.	
359	12 „	крупнаго	круглаго
361	10 „	Dubuat	Du Buat
371	3 „	Каріолису	Коріолису.
381	12 сверху	0,75	0,57
392	6 и 5 снизу	направленіе всѣхъ...	направленіе импульсовъ всѣхъ...
403	15 и 16 сверху	достаточно измѣрить точно лишь одно живое сѣченіе	достаточно произвести всѣ измѣренія скоростей и всѣ промѣры глубинъ лишь въ одномъ живомъ сѣченіи
407	6 снизу	зубцамии	зубцами и
411	17 сверху	лабораторія	лабораторіи
415	Между 9 и 10 строками сверху вставить слова: „за отмѣтку свободной поверхности"		
421	2 сверху	воздухъ	воздухъ,
42	3 „	водоизмѣненія	водоизмѣщенія
„	14 снизу	.... иллюстраціи	а въ видѣ иллюстраціи
„	1 „	что изъ	что въ этомъ случаѣ изъ
431	17 сверху	ординаты	ординатъ
432	21 „	той точки,	т.-е. та точка,
438	3 „	mtr/sec	mtr/sec^2

ОГЛАВЛЕНІЕ.

ГЛАВА II.

ГЛАВА III.

ГЛАВА IV.

Содержанiе таблицъ чертежей.

ВВЕДЕНІЕ.

Отдѣлы теоретической механики, изучающіе вопросы о равновѣсіи и движеніи жидкостей, называются **гидростатикой** и **гидродинамикой**. Въ обоихъ отдѣлахъ, подобно тому, какъ и вообще въ теоретической механикѣ, основываясь на нѣсколькихъ положеніяхъ и гипотезахъ болѣе умозрительнаго, нежели опытнаго характера, логически выводятъ рядъ теоремъ и слѣдствій, при чемъ къ опыту если и обращаются, то какъ къ средству провѣрки. Не говоря уже о томъ, что основныя гипотезы не совпадаютъ строго съ дѣйствительностью, большинство явленій, съ которыми приходится имѣть дѣло практику, настолько сложны и запутаны цѣлымъ рядомъ привходящихъ факторовъ, что до сихъ поръ не поддаются еще чисто умозрительному изученію. Такимъ образомъ возникаетъ другая наука,—**прикладная механика**. Широко пользуясь экспериментальнымъ методомъ, эта наука обыкновенно бываетъ принуждена отказаться отъ точнаго математическаго анализа явленій; напротивъ, сложныя явленія изучаются на опытѣ; законы, которымъ подчиняются эти явленія и которые подмѣчаютъ при этомъ, стараются выразить аналитически, заботясь не только о томъ, чтобы формула возможно полно выражала явленіе, но также чтобы она была удобна для пользованія. Но положенія теоретической механики не теряютъ своего значенія для прикладной механики: безъ нихъ часто не удалось бы разобраться въ явленіяхъ, классифицировать ихъ и подобрать наиболѣе подходящее выраженіе для эмпирической формулы. Такимъ образомъ прикладная механика, въ частности гидравлика, широко пользуясь экспериментальнымъ методомъ, въ то же время опирается на теоретическіе выводы. Поэтому необходимой главой курса гидравлики будетъ изложеніе, хотя бы въ краткихъ чертахъ, основъ гидростатики и гидродинамики.

Жидкостью называютъ тѣло, обладающее въ высокой степени подвижностью частицъ. Если твердое тѣло деформируется только путемъ затраты большого количества работы, то, наоборотъ, деформація жидкаго тѣла происходитъ очень легко, настолько, что только въ очень небольшихъ количествахъ вѣсомая капельная жидкость имѣетъ свою опредѣленную форму (капля—сфероидъ); въ сколько-нибудь большихъ количествахъ она подъ вліяніемъ собственнаго вѣса принимаетъ форму сосуда, ее содержащаго.

Трудно провести границу между жидкимъ и твердымъ тѣломъ. Не только при различныхъ условіяхъ температуры, но также и давленій, одно и то же тѣло является то жидкимъ, то твердымъ. Въ первомъ случаѣ переходъ изъ одного состоянія въ другое совершается путемъ затраты или отдачи извѣстнаго количества тепла. Во второмъ случаѣ явленіе еще не вполнѣ изслѣдовано: интересные опыты Треска́ надъ свинцомъ, мѣдью и др. металлами и опыты Кика надъ каменной солью, мраморомъ и т. п. показали, что при извѣстныхъ давленіяхъ (для каменной соли, напримѣръ, 36 *at*) твердыя тѣла становятся жидкообразными, принимаютъ форму сосуда, вытекаютъ изъ отверстій, передаютъ давленіе по всѣмъ направленіямъ и т. п. Однако при обыкновенныхъ условіяхъ указанная характеристика жидкостей достаточно точна: если коэффиціентъ крѣпости желѣза на разрывъ равенъ 36—40 kgr/mm^2, то для разрыва воды (Heinemann) достаточно напряженіе только въ 3,6 kgr/mtr^2, т.-е. крѣпость воды на разрывъ болѣе, чѣмъ въ 10^7 разъ, меньше, нежели для желѣза.

Такая малая связь между частицами жидкости даетъ поводъ теоретической механикѣ разсматривать жидкость, какъ обладающую абсолютной подвижностью частицъ безъ всякаго видимаго сцѣпленія и тренія. Гидравлика называетъ такую жидкость совершенной и для примѣненія теоретическихъ выводовъ механики къ дѣйствительнымъ жидкостямъ исправляетъ ихъ эмпирически.

Различаютъ капельныя и газообразныя совершенныя жидкости. Первыя характеризуются полной несжимаемостью и, слѣдовательно, отсутствіемъ упругости; вторыя, напротивъ, слѣдуютъ законамъ Маріотта и Гей-Люссака и стремятся всегда расшириться. И тутъ дѣйствительность расходится съ механикой: капельныя жидкости сжимаемы, хотя и весьма мало; наприм., вода при 0^0 C подъ давленіемъ въ 1 *at* сжимается на 1/20˙000 первоначальнаго объема; совершеннаго газа тоже нѣтъ ни одного.

Мы будемъ изучать исключительно капельныя жидкости, и если будемъ касаться иногда газообразныхъ, то только въ нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ; именно, чаще всего будемъ предполагать температуру газовъ неизмѣняемой, такъ какъ изученіе условій равновѣсія и движенія газовъ вообще есть предметъ термодинамики.

Наиболѣе важнымъ для техники представителемъ капельныхъ жидкостей является вода (H_2O). Ея ничтожная крѣпость на разрывъ (3,6 kgr/mtr^2) была уже указана выше; была также отмѣчена ея малая сжимаемость: при 0^0 C напряженіе въ 1 kgr/cm^2 вызываетъ уменьшеніе первоначальнаго объема на 1/20˙000. Коэффиціентъ расширенія при нагрѣваніи нѣсколько болѣе: максимумъ плотности наблюдается при 4^0 C, при чемъ 1 литръ (1 dcm^3) вѣситъ 1 *kgr*; при 0^0 C вода имѣетъ ту же плотность, что и при 8^0 C, а именно 1 *kgr* занимаетъ объемъ 1,00172 литра; при 100^0 C объемъ одного килограмма воды равенъ 1,043 литра, такъ что коэффиціентъ кубическаго расширенія воды равенъ 0,00043. Въ виду того, что въ техникѣ приходится имѣть дѣло чаще всего съ водою обыкновенной температуры и не подъ слишкомъ большимъ давленіемъ, безъ большой погрѣшности можно признать воду тѣломъ постоянной плотности и считать при всѣхъ условіяхъ вѣсъ 1 литра воды равнымъ 1 *kgr*, а слѣд., вѣсъ ея въ объемѣ одного кубическаго метра равнымъ 1000 *kgr*.

Представителемъ упругихъ жидкостей будемъ считать воздухъ, представляющій собою смѣсь элементарныхъ газовъ,—азота (N) 76%, кислорода (O) 23% и аргона (Arg) 1% по вѣсу; кромѣ того, воздухъ содержитъ всегда нѣкоторое количество углекислоты (CO_2) и водяныхъ паровъ (H_2O). Это одинъ изъ газовъ, весьма близкихъ къ совершеннымъ, т.-е. при обычныхъ условіяхъ температуры и давленія подчиняется закону Маріотта и Гей-Люссака, который, какъ извѣстно, пишется такъ:

$$p\bar{v} = RT,$$

гдѣ p есть давленіе, отнесенное къ единицѣ площади, $\bar{v}$—удѣльный объемъ, т.-е. объемъ единицы вѣса, T есть температура, отсчитываемая отъ абсолютнаго нуля, т.-е.

$$T = 273^\circ + t,$$

гдѣ t есть температура въ градусахъ Цельсія; наконецъ, R есть постоянное, зависящее отъ природы газа. Такъ, для чистаго сухого воздуха, по Реньо, $R = 29{,}269$; при среднихъ условіяхъ, т.-е. при t, близкомъ къ 15° C, и при 60% влажности, Zeuner даетъ значеніе $R = 29{,}375$, а потому для обыкновеннаго атмосфернаго воздуха:

$$p\bar{v} = 8490.$$

Такъ какъ среднюю величину атмосфернаго давленія принято считать равною 1,0333 kgr/cm^2 или 10333 kgr/mtr^2, то отсюда слѣдуетъ, что подъ этимъ давленіемъ 1 kgr обыкновеннаго атмосфернаго воздуха занимаетъ объемъ 0,8187 mtr^3, а потому, обратно, *1 mtr^3 обыкновеннаго атмосфернаго воздуха подъ среднимъ атмосфернымъ давленіемъ вѣситъ 1,2214 kgr.*

Въ послѣдующемъ принято выражать вѣса въ килограммахъ, а длины—въ метрахъ *). Поэтому давленія, отнесенныя къ единицѣ площади,—эту величину мы будемъ всегда обозначать буквой p,—будутъ выражаться въ kgr/mtr^2. Кромѣ того, всегда будемъ обозначать:

буквой g — ускореніе силы тяжести; для нашихъ широтъ можно считать $g = 9{,}81$ mtr/sec^2;

» ϱ — плотность, т.-е. массу тѣла въ объемѣ 1 mtr^3;

» γ — вѣсъ тѣла въ объемѣ 1 mtr^3 **);

» $\bar{v}$ — удѣльный объемъ, т.-е. объемъ (въ mtr^3) 1 килограмма.

Въ силу самаго смысла этихъ обозначеній заключаемъ, что для однородныхъ тѣлъ вѣсъ ихъ получаемъ, умножая ихъ объемъ на соотвѣтствующее γ; ихъ массу находимъ, какъ произведеніе изъ ихъ объема и соотвѣтствующей плотности ϱ. Такъ какъ, сверхъ того, вѣсъ тѣла равенъ его

*) Объемы мы будемъ выражать въ mtr^3, хотя часто удобно принимать за единицу объемовъ 1 литръ $= 1$ $dcm^3 = 0{,}001$ mtr^3. Въ Россіи въ практикѣ водоснабженій часто за единицу объемовъ принимаютъ 1 ведро $= 12{,}299$ литровъ; легко видѣть, что вѣсъ 1 ведра воды $= 12{,}299$ $kgr = 29{,}979$ фунтовъ, т.-е. почти 30 фунтовъ.

**) Согласно вышеприведеннымъ даннымъ, для воды $\gamma = 1000$ kgr/mtr^3, а для атмосфернаго воздуха подъ атмосфернымъ давленіемъ $\gamma = 1{,}2214$ kgr/mtr^3.

массѣ, умноженной на ускореніе тяжести, то легко устанавливается слѣдующее соотношеніе:

$$\gamma = \varrho g$$

или

$$\varrho = \frac{\gamma}{g}.$$

Такъ какъ величины $\bar{v}$ и γ по смыслу являются взаимно-обратными, то:

$$\bar{v} = \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\varrho g}.$$

Само собою разумѣется, что эти послѣднія соотношенія имѣютъ мѣсто и для тѣлъ неоднородныхъ, при чемъ значенія всѣхъ величинъ p, ϱ, γ и $\bar{v}$ должны быть отнесены къ весьма малымъ элементамъ площади, объема и вѣса.

Желающимъ болѣе подробно ознакомиться съ гидравликой рекомендуются, кромѣ монографій по отдѣльнымъ вопросамъ, упомянутыхъ въ курсѣ, слѣдующія специальныя книги:

А. Саткевичъ. Гидромеханика. 1-я часть курса гидравлики Николаевской Инженерной Академіи. Спб. 1904 г.

И. А. Евневичъ. Курсъ гидравлики (для студентовъ СПб. Технологическаго Института). Спб. 1891 г. Преимущественно гидродинамика.

Д. С. Зерновъ. Гидравлика и теорія турбинъ (лекціи, читанныя въ Императорскомъ Техническомъ Училищѣ). Москва. 1897 г. Распродано.

Ф. Максименко. Гидравлика (для студентовъ Института инженеровъ путей сообщенія). Распродано.

Ив. Тиме. Курсъ гидравлики (для студентовъ Горнаго Института). Спб. 1891—94 г. Распродано.

G. Zeuner. Vorlesungen über Theorie der Turbinen. Bd. 1. Leipzig. 1899. Переводъ инж.-мех. В. Малѣева. Спб. 1904 г.

F. Grashof. Theoretische Maschinenlehre. Bd. 1. Leipzig. 1875.

Оба послѣднія сочиненія содержатъ преимущественно теоретическую часть. По живости и простотѣ изложенія сочиненіе Zeuner'а положительно образцово; программа его значительно отличается отъ принятой въ настоящемъ курсѣ. Работа Грасгофа исключительно теоретическая; весьма полезна при изученіи гидродинамики.

M. Rühlmann. Hydromechanik oder die technische Mechanik flüssiger Körper. Hannover. 1879. Обширный курсъ съ массою таблицъ, практическихъ примѣровъ и указаній литературы. Къ сожалѣнію, нѣсколько устарѣлъ.

Julius Weisbach. Lehrbuch der theoretischen Mechanik. I. Teil. Abschnitte 6—7. Braunschweig. 1863. Наиболѣе развитъ отдѣлъ объ истеченіи черезъ отверстія.

Haton de la Goupillière. Cours de machines. Hydraulique. Tome 1. Paris. 1886. Своеобразное изложеніе. Указанія по литературѣ.

Bresse. Cours de mécanique appliquée. 2-me partie. Hydraulique. Paris. 1868. Очень подробно разработаны отдѣлы о движеніи въ трубахъ и каналахъ.

Flamant. Mécanique appliquée. 2-me partie. Hydraulique. Paris. 1891. Обширный курсъ, составленный по болѣе широкой программѣ, нежели упомянутые до сихъ поръ.

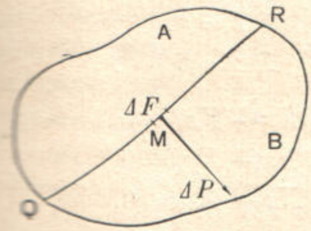
ГЛАВА I.

Гидростатика и гидродинамика въ примѣненіи къ гидравликѣ.

§ 1. Гидростатическое давленіе.

Изъ самаго опредѣленія совершенной жидкости вытекаетъ слѣдствіе: *если жидкое тѣло находится въ равновѣсіи, то внѣшнія силы, дѣйствующія на частицы поверхности, его ограничивающей, направлены по внутреннимъ нормалямъ къ этимъ поверхностямъ;* иначе не можетъ быть, такъ какъ всякая другая сила или о т о р в а л а бы или с д в и н у л а бы эти поверхностныя частицы, т.-е. нарушила бы равновѣсіе.

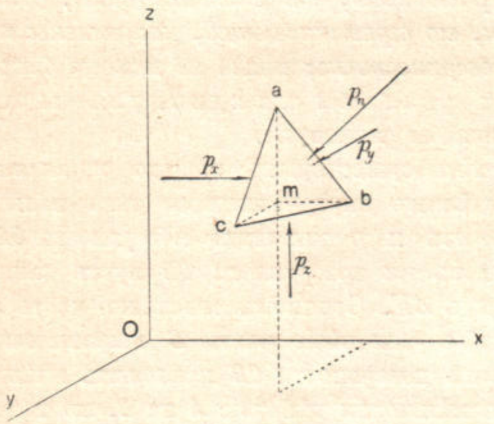
Точно также и внутри жидкаго тѣла существуютъ *только отталкивающія силы.* Въ самомъ дѣлѣ, выдѣлимъ внутри жидкаго тѣла малый элементъ M (фиг. 1) и проведемъ черезъ него мысленно поверхность QR; элементъ этотъ на поверхности QR пусть занимаетъ площадь ΔF. Отнимемъ мысленно часть A отъ B. Чтобы равновѣсіе части B сохранилось, нужно по всей поверхности QR приложить внѣшнія силы, замѣняющія дѣйствіе A на B, въ томъ числѣ и на элементъ ΔF. Но такъ какъ QR есть поверхность, ограничивающая жидкое тѣло, то внѣшняя сила ΔP, приходящаяся на этотъ элементъ, можетъ дѣйствовать только нормально въ M къ поверхности QR и быть направленной внутрь части B, т.-е. на этомъ элементѣ часть A отталкиваетъ часть B. Какъ бы мы ни проводили поверхности QR и гдѣ бы на нихъ ни брали элементъ M, это разсужденіе приложимо вездѣ. Слѣдовательно, *во всей массѣ жидкаго тѣла существуютъ только отталкивающія усилія,—давленія, распространяющіяся по всѣмъ направленіямъ.*



Фиг. 1.

Предѣлъ отношенія $\frac{\Delta P}{\Delta F}$, при уменьшеніи ΔP и ΔF до нуля, т.е., $\frac{dP}{dF}$, называется *гидростатическимъ давленіемъ* въ данной точкѣ и обозначается буквой p. Ясно, что давленіе это является результатомъ воздѣйствія на данную частицу всей окружающей жидкости. По измѣренію, въ качествѣ д а в л е н і я, о т н е с е н н а г о къ е д и н и ц ѣ п л о щ а д и, эта величина тождественна съ разсматриваемымъ въ сопротивленіи матеріаловъ *напряженіемъ*. Поэтому предыдущія положенія можно выразить такъ: внутри (и на поверхности) жидкости могутъ быть только напряженія сжатія; напряженій разрыва и срѣза жидкость не выдерживаетъ. Если условиться считать положительнымъ направленіе сжимающей силы, то сила растягивающая должна быть признана отрицательной. Поэтому можно далѣе сказать, что внутри жидкаго тѣла величина p всегда положительна, и если при изслѣдованіи какого-нибудь вопроса значеніе p выходитъ отрицательнымъ, то это необходимо считать за признакъ разрыва въ этомъ мѣстѣ жидкаго тѣла.

Далѣе, можно показать, что величина этого давленія не зависитъ отъ положенія элемента поверхности, проводимой черезъ разсматриваемую частицу; другими словами, что *величина гидростатическаго давленія во всякой точкѣ жидкаго тѣла по всѣмъ направленіямъ одинакова*. Въ жидкомъ тѣлѣ, находящемся въ равновѣсіи, обратимъ вниманіе на частицу m (фиг. 2), данную координатами x, y, z. Вообразимъ при ней безконечно малый тетраэдръ $mabc$, съ ребрами dx, dy, dz, параллельными соотвѣтствующимъ осямъ координатъ. Частицу m расположимъ въ вершинѣ тетраэдра. Напишемъ условія равновѣсія этого тетраэдра:



Фиг. 2.

$$\Sigma X = 0,$$
$$\Sigma Y = 0,$$
$$\Sigma Z = 0,$$

$$\Sigma(Zy - Yz) = 0,$$
$$\Sigma(Yx - Xy) = 0,$$
$$\Sigma(Xz - Zx) = 0,$$

гдѣ X, Y, Z суть проекціи на оси координатъ внѣшнихъ силъ, дѣйствующихъ на тѣло; внѣшнія же силы таковы:

1) Давленія отъ окружающей массы жидкости на поверхности, ограничивающія элементъ. Эти давленія перпендикулярны къ каждой элементарной площади mab, mac, mbc и abc и, кромѣ того, могутъ считаться постоянными для каждой изъ нихъ; такъ какъ сама площадь mab (или всякая другая) безконечно мала, то давленія въ различныхъ ея точкахъ могутъ отличаться другъ отъ друга только на безконечно малую величину, которая въ выраженіи всей равнодѣйствующей на грань mab будетъ уже безконечно малой высшаго порядка, исчезающей передъ прочими безконечно малыми ур-ія. Итакъ, назовемъ нормальныя давленія на единицу площади элемента въ mac, mab, mbc и abc соотвѣтственно черезъ

$$p_x,\ p_y,\ p_z,\ p_n;$$

площади этихъ элементовъ соотвѣтственно выразятся такъ:

$$\frac{1}{2}dy\,dz,\quad \frac{1}{2}dz\,dx,\quad \frac{1}{2}dx\,dy,\quad dF,$$

такъ что силы давленій на эти площадки напишутся такъ:

$$p_x\cdot\frac{1}{2}dy\,dz,\quad p_y\cdot\frac{1}{2}dz\,dx,\quad p_z\cdot\frac{1}{2}dx\,dy,\quad p_n . dF.$$

2) Вторая категорія внѣшнихъ силъ—это такъ называемыя массовыя силы, т.-е. силы, пропорціональныя массѣ разсматриваемаго элемента (напр., сила тяжести). При условіи однородности, жидкости, т.-е. если жидкость такова, что ея плотность ϱ (масса единицы объема) или постоянна, или измѣняется отъ точки до точки непрерывно, безъ скачковъ,—пропорціональность массѣ равносильна пропорціональности объему. Если проекціи на оси координатъ такой объемной силы, отнесенной къ единицѣ массы,—другими словами,—проекціи ускоренія такой силы, назвать черезъ X, Y, Z, то, въ виду того, что объемъ нашего тетраэдра выражается черезъ $\frac{1}{6}\,dx\,dy\,dz$, проекціи полной силы будутъ:

$$X\varrho\cdot\frac{1}{6}\,dx\,dy\,dz,\qquad Y\varrho\cdot\frac{1}{6}\,dx\,dy\,dz,\qquad Z\varrho\cdot\frac{1}{6}\,dx\,dy\,dz.$$

Назовемъ черезъ n направленіе нормали къ грани abc. Тогда уравненіе проекцій силъ на ось x-овъ, принимая во вниманіе направленіе давленій, напишется такъ:

$$p_x\cdot\frac{1}{2}\,dy\,dz - p_n\,dF\cos(n,x) + X\varrho\cdot\frac{1}{6}\,dx\,dy\,dz = 0.$$

Замѣняемъ $dF\cos(n,x)$ равной ему величиной $\frac{1}{2}\,dy\,dz$; дѣля все уравненіе на $\frac{1}{2}\,dy\,dz$, получаемъ:

$$p_x - p_n + X\varrho\cdot\frac{1}{3}\,dx = 0,$$

или, съ приближеніемъ dx къ нулю,

$$p_x = p_n.$$

Точно также получимъ:

$$p_x = p_y = p_z = p_n.$$

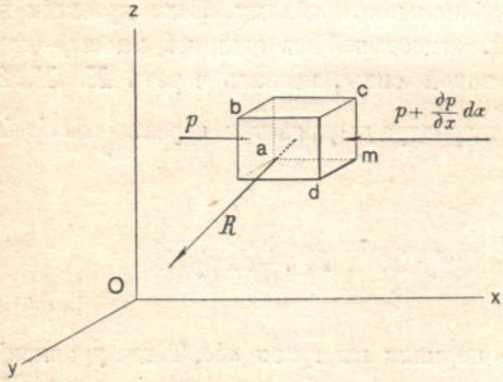
Уравненій моментовъ можно и не писать,—они удовлетворяются сами собою, такъ какъ начало координатъ мы могли бы выбрать въ m, т.-е. положить $x = y = z = 0$; въ то же время весь тетраэдръ мы свели бы къ точкѣ.

Итакъ, *гидростатическое давленіе въ данной точкѣ жидкости есть величина вполнѣ опредѣленная,* одинаковая для всѣхъ направленій, какія можно провести черезъ данную точку. Такъ какъ мы разсматриваемъ жидкость въ состояніи равновѣсія, то давленіе p въ какой-либо точкѣ ея не можетъ зависѣть отъ времени, и, слѣдовательно, p есть функція только координатъ.

§ 2. Основное уравненіе гидростатики.

Выразимъ величину гидростатическаго давленія p въ функціи координатъ x, y, z, ставя одно только условіе, чтобы эта функція была непрерывной.

Вообразимъ въ жидкомъ тѣлѣ (фиг. 3), отнесенномъ къ прямоугольнымъ осямъ **x**, **y**, **z**, прямоугольный параллелепипедъ **abcd**, съ безконечно малыми ребрами dx, dy, dz, соотвѣтственно параллельными осямъ координатъ; координаты вершины **a** назовемъ черезъ x, y, z. Напишемъ условія равновѣсія этого выдѣленнаго объема жидкости.



Фиг. 13.

Внѣшнія силы таковы:

1) Гидростатическое давленіе. Пусть въ точкѣ **a** оно равно p. Въ ур-іе проекцій силъ войдетъ съ плюсомъ давленіе по всей площадкѣ **ab** и съ минусомъ давленіе по всей площадкѣ **cd**. Ясно, что эти двѣ элементарныя силы разнятся между собою лишь постольку, поскольку измѣнилось гидростатическое давленіе съ перемѣной координаты x. При этомъ, въ силу непрерывности измѣненія давленія, можно утверждать, что для выраженія полной безконечно малой разности этихъ двухъ силъ достаточно взять разницу гидростатическихъ давленій въ двухъ любыхъ точкахъ, лежащихъ на одной и той же линіи, параллельной оси x—овъ, напр., въ точкахъ **a** и **m**, ибо безконечно малыя разности давленій въ точкахъ **a** и **m** и въ точкахъ **b** и **n** отличаются между собой только на безконечно малыя величины высшаго порядка. Въ силу этого упомянутую разность силъ по гранямъ **ab** и **cd** можно выразить черезъ

$$-\frac{\partial p}{\partial x}\,dx\,dy\,dz,$$

такъ какъ давленіе въ точкѣ **m** по давленію p въ точкѣ **a** должно быть выражено черезъ

$$p+\frac{\partial p}{\partial x}\,dx.$$

2) Объемная сила R, приложенная въ центрѣ тяжести параллелепипеда и отнесенная къ единицѣ массы, пусть даетъ по оси x-овъ слагающую X; тогда вся ея проекція на ось x-овъ есть

$$X\varrho\, dx\, dy\, dz.$$

Больше силъ нѣтъ. Слѣдовательно, для равновѣсія нужно выполненіе условія:

$$-\frac{\partial p}{\partial x}\, dx\, dy\, dz + X\varrho\, dx\, dy\, dz = 0.$$

Относя это ур-іе къ единицѣ объема, т.-е. дѣля его на $dx\, dy\, dz$, получаемъ:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \varrho X$$

Подобнымъ же образомъ получимъ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial y} &= \varrho Y \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= \varrho Z \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Умножая эти уравненія соотвѣтственно на dx, dy, dz, складывая и замѣчая, что сумма $\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz$ есть полный дифференціалъ dp, такъ какъ p можетъ зависѣть только отъ x, y и z, получимъ:

$$\varrho(X\,dx + Y dy + Z\,dz) = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz = dp \quad \ldots\ldots (2)$$

Три остальныя уравненія равновѣсія нечего и писать,—они тождественно удовлетворяются, ибо всѣ силы пересѣкаются въ центрѣ тяжести выдѣленнаго объема, и вращенія быть не можетъ.

Для капельной жидкости $\varrho = const$; поэтому уравненіе (2) можно написать такъ:

$$d\left(\frac{p}{\varrho}\right) = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2')$$

Для совершенной газообразной жидкости, при условіи $T = const$, имѣемъ:

$$p\bar{v} = const = B$$

или

$$p = \frac{B}{\bar{v}} = B\gamma = Bg\varrho,$$

или

$$\varrho = kp,$$

гдѣ $k=\frac{1}{Bg}$ есть постоянный для каждаго газа коэффиціентъ; поэтому уравненіе (2) перепишется такъ:

$$\frac{dp}{kp}=d\left(\frac{Lp}{k}\right)=X\,dx+Y\,dy+Z\,dz \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2'')$$

Какъ въ ур. (2′), такъ и въ ур. (2″) имѣемъ въ первыхъ частяхъ полные дифференціалы. Слѣдовательно, для равновѣсія жидкости, находящейся подъ дѣйствіемъ силы R со слагающими X, Y, Z, и вторыя части должны быть также полными дифференціалами; а для этого нужно, чтобы силы X, Y, Z удовлетворяли условіямъ:

$$\frac{\partial X}{\partial y}=\frac{\partial Y}{\partial x}, \qquad \frac{\partial Y}{\partial z}=\frac{\partial Z}{\partial y}, \qquad \frac{\partial Z}{\partial x}=\frac{\partial X}{\partial z}.$$

Разъ условія эти соблюдены, то вторыя части уравненій (2′) и (2″) интегрируются, и можно найти нѣкоторую функцію $U=f(x, y, z)$, удовлетворяющую дифференціальному уравненію:

$$dU=X\,dx+Y\,dy+Z\,dz \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

Эта функція U называется *силовой функціей* или *потенціаломъ*. Слѣдовательно, равновѣсіе жидкости возможно только въ томъ случаѣ, когда силы, на нее дѣйствующія, имѣютъ потенціалъ; и будетъ ли равновѣсіе или нѣтъ, будетъ зависѣть отъ того, удовлетворяется ли численно уравненіе (2).

По уравненію (3) очевидно, что:

$$X=\frac{\partial U}{\partial x}, \qquad Y=\frac{\partial U}{\partial y}, \qquad Z=\frac{\partial U}{\partial z},$$

т.-е. слагающія внѣшней силы по осямъ координатъ равны соотвѣтственнымъ частнымъ производнымъ силовой функціи. Также очевидно, что написанныя выше условія существованія силовой функціи сводятся къ основнымъ положеніямъ диф-наго исчисленія:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right), \text{ и т. д.}$$

Послѣ интеграціи уравненіе (2) даетъ:

$$p=\int \varrho\,(X\,dx+Y\,dy+Z\,dz)=U_1(x, y, z)+C,$$

причемъ эта новая функція U_1 связана съ силовой функціей простымъ соотношеніемъ, которое легко получить, интегрируя уравненія (2') и (2''), а именно:

для капельной жидкости

$$U_1 = \varrho U,$$

для тѣлъ газообразныхъ

$$U_1 = e^{kU},$$

гдѣ e есть основаніе натуральныхъ логариѳмовъ.

Итакъ, для равновѣсія жидкости должно быть удовлетворено уравненіе (2), т.-е. силы, дѣйствующія на жидкость, должны имѣть силовую функцію. Какъ извѣстно, центральные силы, представляющіяся функціями однѣхъ только координатъ, имѣютъ потенціалъ, а потому подъ дѣйствіемъ такихъ силъ равновѣсіе жидкости возможно всегда.

§ 3. Поверхности уровня.

Въ аналитической механикѣ указывается, что называется этимъ именемъ и каковы свойства этихъ поверхностей. Повторимъ это вкратцѣ.

Изъ ур-ій (2) и (3) находимъ, что

$$\frac{dp}{\varrho} = dU,$$

или, послѣ интегрированія,

$$\int \frac{dp}{\varrho} = U + C,$$

гдѣ C есть произвольное постоянное. Если будемъ мѣнять координаты такъ, чтобы первая часть уравненія сохраняла то или другое, но для даннаго случая постоянное, значеніе, то, въ виду того, что $U = f(x, y, z)$, получимъ въ результатѣ уравненіе

$$U = const,$$

или

$$f(x, y, z) = const,$$

представляющее ур-іе семейства поверхностей, которыя и называются поверхностями уровня. Итакъ,

поверхностями уровня называются такія поверхности, уравненія которыхъ имѣютъ видъ силовой функціи, иначе,—координаты которыхъ обращаютъ силовую функцію въ постоянную величину.

Въ примѣненіи къ жидкому тѣлу *поверхности уровня суть поверхности постояннаго гидростатическаго давленія,* въ чемъ легко убѣдиться, такъ какъ если $\int \frac{dp}{\varrho} = const$, то $\frac{dp}{\varrho} = 0$, а это равносильно какъ для капельныхъ, такъ и для газообразныхъ жидкостей, положенію $p = const$ (уравненія (2′) и (2″) предыдущаго параграфа).

Дифференцированіе уравненія $U = const$ даетъ $dU = 0$; слѣдовательно, дифференціальное уравненіе поверхности уровня, по уравненію (3), есть

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0.$$

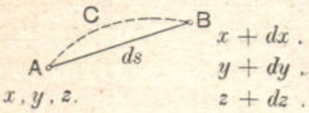
Физическое значеніе поверхности уровня слѣдующее. Свободная поверхность, т.-е. поверхность, не прикасающаяся къ стѣнкамъ сосуда, вообще подвержена постоянному давленію, напримѣръ, атмосферному, а потому свободная поверхность жидкости есть, въ то же время, одна изъ поверхностей уровня. Далѣе, изъ самаго опредѣленія поверхности уровня слѣдуетъ, что это есть не только поверхность постояннаго давленія, но и постоянной плотности. Поэтому, если мы имѣемъ нѣсколько несмѣшивающихся жидкостей разныхъ плотностей, то онѣ при равновѣсіи могутъ расположиться только такъ, что раздѣляющія ихъ поверхности будутъ поверхностями уровня; подходя къ этой поверхности разъ со стороны одной, а другой разъ—со стороны другой жидкости, найдемъ въ уравненіи этой поверхности двѣ разныя постоянныя величины.

Механическое значеніе поверхностей уровня слѣдующее:

1) Равнодѣйствующая R внѣшнихъ объемныхъ силъ X, Y, Z въ любой точкѣ поверхности уровня *нормальна* къ ней и направлена въ сторону *большаго* значенія силовой функціи.

2) Двѣ поверхности разныхъ гидростатическихъ давленій (или, что все равно, разныхъ потенціаловъ) *не пересѣкаются*.

Доказывается это такъ. Пусть ds есть разстояніе двухъ безконечно близкихъ точекъ жидкости *A* и *B* (фиг. 4); координаты одной пусть будутъ (x, y, z), а другой $(x + dx,\ y + dy,\ z + dz)$. Можемъ написать:



Фиг. 4.

$$dx = ds\,.\,cos\,(ds, x);$$
$$dy = ds\,.\,cos\,(ds, y);$$
$$dz = ds\,.\,cos\,(ds, z).$$

Для силъ X, Y, Z и ихъ равнодѣйствующей R можно написать

$$X = R\ cos\,(R, x);$$
$$Y = R\ cos\,(R, y);$$
$$Z = R\ cos\,(R, z).$$

Тогда уравненіе (2) напишется такъ:

$$dp = \varrho R\,.\,ds\,\{cos\,(ds, x)\,cos\,(R, x) + cos\,(ds, y)\,cos\,(R, y) + cos\,(ds, z)\,cos\,(R, z)\}$$

$$dp = \varrho R . ds \cos(R, ds) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Пусть обѣ точки *A* и *B* принадлежатъ одной поверхности уровня; тогда имѣемъ:

$$p = const;$$

$$dp = 0;$$

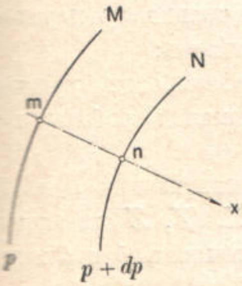
и, слѣдовательно, такъ какъ ни ϱ, ни R, ни ds не равны нулю, то

$$\cos(R, ds) = 0$$

или

$$\angle(R, ds) = 90^{0} \text{ или } 270^{0} \text{ и т. д.},$$

т.-е. внѣшняя сила R перпендикулярна любому перемѣщенію ds въ предѣлахъ поверхности уровня, т.-е. перпендикулярна къ самой поверхности.



Фиг. 5.

Пусть *M* есть поверхность уровня давленія p (фиг. 5), а весьма близкая къ ней поверхность *N* пусть имѣетъ давленіе $(p + dp)$.

Въ какой-нибудь частицѣ *m* первой поверхности внѣшняя сила направлена по нормали *mn*, но въ какую сторону? Примемъ за положительное направленіе оси x-овъ направленіе *mn* въ сторону поверхности большаго давленія.

Такъ какъ R направлено по нормали, то уравненіе (4) получитъ видъ:

$$dp = \pm \varrho R \, dx.$$

Таково измѣненіе давленія при переходѣ отъ *m* къ *n*. Такъ какъ здѣсь dp принято однозначнымъ съ dx, а ϱ само по себѣ знака не имѣетъ, то передъ R надо поставить плюсъ, т.-е. оно направлено въ сторону бо́льшаго гидростатическаго давленія. Поэтому, если имѣемъ двѣ не смѣшивающіяся жидкости разныхъ плотностей, то онѣ располагаются при равновѣсіи такъ, что плотность возрастаетъ въ направленіи дѣйствія силы, т.-е. болѣе тяжелая жидкость располагается ниже болѣе легкой.

Наконецъ, изъ выраженія (4) имѣемъ:

$$ds = \frac{dp}{\varrho R \cos(R, ds)}.$$

Минимумъ этого выраженія имѣетъ мѣсто, когда $\cos(R, ds) = 1$; тогда

$$ds = \frac{dp}{\varrho R}.$$

При переходѣ отъ одной поверхности уровня къ другой всегда имѣемъ $dp \neq 0$; такъ какъ R и ϱ вообще имѣютъ конечную величину, то ds не можетъ быть равно нулю. Но ds, при $\cos(R, ds) = 1$, и есть нормальное разстояніе двухъ поверхностей уровня, которое, такимъ образомъ, никогда въ нуль не обращается, а, слѣдовательно, двѣ поверхности уровня никогда не пересѣкаются.

Скажемъ еще нѣсколько словъ о значеніи потенціала. Будемъ разсматривать на фиг. 4 длину AB не какъ разстояніе между двумя точками жидкости, а какъ какое-нибудь перемѣщеніе жидкой точки, находящейся при этомъ подъ вліяніемъ силъ X, Y, Z, изъ положенія A (x, y, z) въ положеніе $B(x + dx,\ y + dy,\ z + dz)$. Тогда трехчленъ $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$, который, по смыслу уравненія (3), есть dU (приращеніе силовой функціи), подобно предыдущему дастъ:

$$dU = R\,ds \,.\, \cos(R, ds) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Вторая часть равенства есть, очевидно, работа силы R на пути ds; по этому уравненію слѣдуетъ, что она равна приращенію потенціала.

Такъ какъ числовое значеніе потенціала мѣняется только съ переходомъ отъ одной поверхности уровня къ другой, то заключаемъ:

1) пока перемѣщеніе частицы происходитъ въ поверхности уровня ($dU = 0$), силы, соотвѣтствующія этому потенціалу, никакой работы не даютъ, такъ какъ въ этомъ случаѣ $\cos(R, ds) = 0$;

2) какъ бы ни происходило перемѣщеніе жидкой частицы изъ A въ B (по AB, по ACB или какъ нибудь иначе), работа силъ X, Y, Z на этомъ пути равна разности значеній ихъ силовой функціи въ точкахъ A и B и не зависитъ отъ вида пути.

Итакъ, приращеніе потенціала силы есть работа, которую эта сила могла бы развить, если бы точка съ массой, равной единицѣ, получила бы весьма малое перемѣщеніе. Самый же потенціалъ есть нѣкоторый запасъ работы, могущій быть израсходованнымъ; величина этого запаса остается неопредѣленной, такъ какъ интегрированіе уравненія (2) или (4) вводитъ произвольное постоянное; но всякому перемѣщенію отъ одной поверхности уровня къ другой (внутри однородной среды) соотвѣтствуетъ вполнѣ опредѣленное измѣненіе этого запаса работы, такъ какъ это равносильно интегрированію ур-ія (2) внутри опредѣленныхъ предѣловъ *).

§ 4. Видъ поверхностей уровня и законъ распространенія давленій въ частныхъ случаяхъ равновѣсія жидкости.

Займемся опредѣленіемъ вида поверхностей уровня въ слѣдующихъ частныхъ случаяхъ.

*) Хорошее представленіе о силовой функціи можно получить изъ курсовъ математической физики. См., напр., Шиллеръ. Теорія потенціальной функціи и обозрѣніе ея приложенія къ вопросамъ физики. Кіевъ, 1885 г. Также Г. Сусловъ. Теорія потенціала и гидродинамика. Кіевъ, 1904 г.

1. Тяжелая жидкость. Пусть оси x и y горизонтальны, а ось z направлена вертикально вверхъ; тогда въ уравненіи (2) (стр. 10) нужно положить:

$$X = 0;\ Y = 0;\ Z = -g\text{*)}.$$

Поэтому дифференціальное уравненіе поверхностей уровня напишется такъ:

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = dU = -g\,dz = 0.$$

Интегрированіе его даетъ уравненіе семейства поверхностей уровня:

$$U = -gz + C = const.$$

Это есть уравненіе плоскостей, параллельныхъ плоскости xy. Итакъ, *поверхности уровня тяжелой покоящейся жидкости*,—безъ различія, капельной или упругой,— *суть горизонтальныя плоскости.* Свободная поверхность капельной жидкости, слѣдовательно, тоже горизонтальна. Законъ распредѣленія давленій получимъ, интегрируя уравненіе (2). Сначала разсмотримъ случай капельной жидкости, когда $\varrho = const$.

Изъ ур. (2) и (3) имѣемъ:

$$dp = \varrho\,dU = -\varrho g\,dz = -\gamma\,dz,$$

откуда

$$p + \gamma z = H'. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Произвольное постоянное H', введенное интеграціей, опредѣляется по начальнымъ даннымъ: пусть при $z = z_0$ дано $p = p_0$. Тогда, дѣля ур-іе (6) на γ и называя постоянное $\frac{H'}{\gamma}$ черезъ H, имѣемъ:

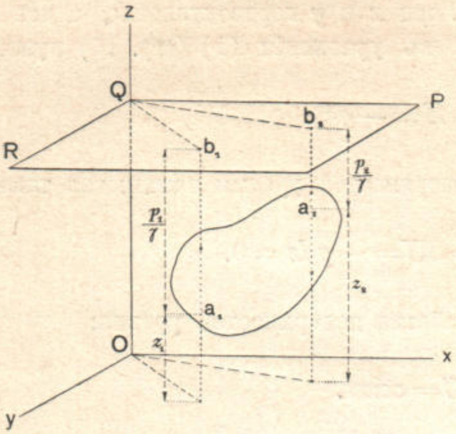
$$\frac{p}{\gamma} + z = \frac{p_0}{\gamma} + z_0 = H = const \quad \ldots\ldots\ldots (7)$$

Величина $\frac{p}{\gamma}$ имѣетъ измѣреніе $\frac{kgr}{mtr^2} \cdot \frac{mtr^3}{kgr} = mtr$, т.-е. это есть длина; ее называютъ *высотою, соотвѣтствующей давленію.*

Ур-іе (7) представляетъ собою законъ измѣненія гидростатическаго давленія въ жидкости, покоющейся подъ вліяніемъ силы тяжести, и можетъ быть прочтено такъ:

Сумма высоты жидкой точки надъ принятымъ горизонтомъ и высоты, соотвѣтствующей давленію, есть величина постоянная, равная H; такъ что (фиг. 6), если въ жидкомъ тѣлѣ будемъ брать двѣ частицы a_1 и a_2 и къ ихъ координатамъ z будемъ прибавлять соотвѣтствен-

*) Силы X, Y и Z суть проекціи внѣшней силы, отнесенной къ единицѣ массы, т.-е. проекціи ускоренія, сообщаемаго тѣлу, а потому для тяжелой жидкости $Z = -g$ (ускореніе силы тяжести).



Фиг. 6.

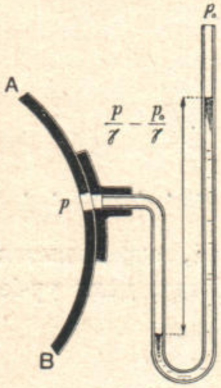
ныя высоты $\frac{p}{\gamma}$, то концы b_1 и b_2 этихъ суммарныхъ отрѣзковъ всѣ будутъ лежать въ одной горизонтальной плоскости PQR. Эта плоскость называется *плоскостью напора*. При равновѣсіи ни одна частица тяжелой жидкости не можетъ быть выше ея (такъ какъ иначе p стало бы отрицательнымъ, т.-е. перешло бы въ растяженіе).

Уравненіе (7) можемъ написать такъ:

$$p - p_0 = \gamma\,(z_0 - z),$$

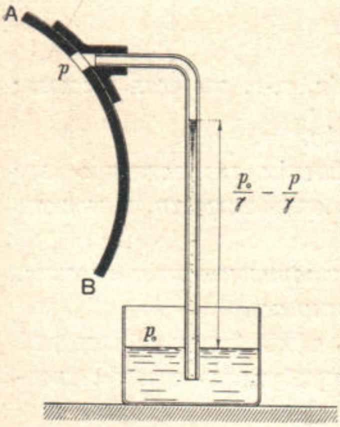
т.-е.

Разность давленій въ двухъ точкахъ равна вѣсу столба жидкости съ основаніемъ, равнымъ единицѣ площади, и съ высотою, равной вертикальному разстоянію этихъ точекъ.



Фиг. 7.

На этомъ основано устройство всѣхъ тѣхъ приборовъ, — манометровъ, вакуметровъ, барометровъ и т. д., которыми измѣряется давленіе въ какой-нибудь средѣ помощью вѣса неподвижнаго столба жидкости. Эти приборы, называемые также *пьезометрами,* устраиваются, вообще, такъ, что среда, въ которой измѣряется давленіе, сообщается помощью трубки съ средою, давленіе которой извѣстно, но притомъ такъ, что эта трубка остается наполненной жидкостью, для которой вѣсъ единицы объема извѣстенъ. Должны быть приняты мѣры къ тому, чтобы эта жидкость была неподвижна. Тогда, по послѣднему ур-ію, достаточно знать вертикальное разстояніе между тѣми точками этого жидкаго столба, которыми онъ соприкасается съ той и другой средами, чтобы найти разность ихъ давленій, такъ какъ эта разность пропорціональна указанной высотѣ, а коэф-тъ пропорціональности,—вѣсъ единицы объема жидкости, т.-е. γ,—извѣстенъ.



Фиг. 8.

На фиг. 7 и 8 представлены двѣ обычныя формы пьезометровъ. Въ стѣнкѣ AB сосуда, наполненнаго средою, находящеюся подъ давленіемъ p, укрѣплена стеклянная трубка. На фиг. 7 она имѣетъ форму буквы U; ея вѣтви располагаются, для удобства отсчетовъ, вертикально. Если давленіе p въ сосудѣ больше, нежели въ средѣ, гдѣ давленіе равно p_0, то уровни жидкости располагаются, какъ показано на чертежѣ, и разстояніе между ними даетъ непосредственно разность высотъ, соотвѣтствующихъ въ жидкости, наполняющей трубку, давленіямъ p и p_0. Самую разность давленій находимъ, умножая эту высоту на γ. Очевидно, что какъ высота, такъ и объемъ, принятый за единицу, должны быть выражены въ соотвѣтствующихъ другъ другу мѣрахъ, т.-е., если, напр., высота измѣрена въ метрахъ, то γ должно быть взято, какъ вѣсъ 1 куб. метра; разность давленій получится въ тѣхъ же вѣсовыхъ единицахъ, отнесенныхъ къ 1 квадр. метру.

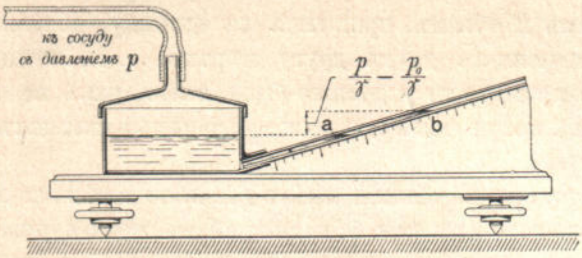
Если p_0 больше, чѣмъ p, то, при нежеланіи имѣть длинную колѣнчатую трубку, можно устроить приборъ по схемѣ фиг. 8: поднятый въ этомъ *обратномъ пьезометрѣ* или вакуметрѣ столбъ жидкости опять пропорціоналенъ разности давленій $p - p_0$, но на этотъ разъ отрицательной.

Имѣя въ виду такой пріемъ измѣренія разности давленій, въ техническомъ языкѣ часто употребляютъ сокращенное выраженіе: «давленіе во столько то сантиметровъ ртути или миллиметровъ воды» и т. д. Смыслъ такого обозначенія величины давленія ясенъ. Упоминаемъ здѣсь о немъ только для того, чтобы подчеркнуть, что оно будетъ опредѣленно только тогда, когда будетъ указана та жидкость, высотою которой измѣряется это давленіе. Такъ, разность давленій въ 1 kgr/cm^2 или въ 10000 kgr/mtr^2, т.-е. та разность давленій, которая въ техникѣ часто называется *одной атмосферой*, уравновѣшивается столбомъ воды высотою въ $(z - z_0) = \left(\frac{p}{\gamma} - \frac{p_0}{\gamma}\right) = \frac{10000}{1000}\, mtr = \mathbf{10\ mtr}$. Если ту же разность давленій уравновѣшивать столбомъ ртути, удѣльный вѣсъ которой при 0° C равенъ 13,59, т.-е. вѣсъ куб. метра которой при 0° C есть 13590 kgr, то для этого потребуется столбъ въ $\frac{10000}{13590}\, mtr$ или въ 0,7358 mtr. Поэтому понятно, что компактность такихъ приборовъ зависитъ отъ рода употребляемыхъ жидкостей.

Точность показаній такихъ приборовъ находится также въ зависимости отъ рода жидкости. Поэтому небольшія разности давленій (давленія въ воздухопроводахъ къ вагранкамъ, горнамъ и т. п.) измѣряютъ обыкновенно столбомъ воды; для большихъ разностей давленій употребляютъ ртуть*). Для очень малыхъ разностей давленій, напр., тѣхъ, которыя достаточны для горѣнія при тягѣ дымовою трубою, употребляютъ алкоголь (при 15° C его $\gamma = 793\, kgr/mtr^3$) и, кромѣ того, располагаютъ трубку пьезометра не вертикально, а съ очень малымъ наклономъ къ горизонту (фиг. 9), такъ какъ при этомъ даже очень небольшому измѣненію $\frac{p - p_0}{\gamma}$ вертикальной высоты столба будетъ соотвѣтствовать замѣтное и легко отсчитываемое пере-

*) При употребленіи такихъ приборовъ необходимо принимать во вниманіе вліяніе температуры, особенно при такихъ сильно расширяющихся при нагрѣваніи тѣлахъ, какъ ртуть. Кромѣ того, нужно всякій разъ обращать вниманіе на положеніе нуля той шкалы, которая употребляется для измѣренія высоты столба жидкости. Останавливаться на всѣхъ деталяхъ этихъ приборовъ мы здѣсь, однако, не будемъ и отсылаемъ интересующихся къ курсамъ физики.

мѣщенiе *ab* уровня вдоль трубки. Такой приборъ примѣняется Krell'емъ въ его анализаторѣ*) продуктовъ горѣнiя въ топкахъ паровыхъ котловъ.



Фиг. 9.

До сихъ поръ мы говорили про среду съ извѣстнымъ давленiемъ p_0. Такою средою обыкновенно считаютъ атмосферный воздухъ, если только измѣренiе производится не слишкомъ высоко надъ уровнемъ моря и, вообще, при обыкновенномъ среднемъ состоянiи атмосферы. Само собою понятно, что и атмосферное давленiе можетъ быть измѣрено вѣсомъ столба жидкости, съ одной стороны соприкасающагося съ атмосфернымъ воздухомъ, а съ другой—оканчивающагося въ безвоздушномъ пространствѣ,—вѣрнѣе въ такъ называемой Торричеллiевой пустотѣ. Для этихъ измѣренiй употребляются общеизвѣстные барометры, по существу ничѣмъ не отличающiеся отъ пьезометровъ.

Для жидкости **внутри** барометра ур-iе (7) попрежнему имѣетъ мѣсто, при чемъ давленiе p**) въ Торричеллiевой пустотѣ настолько мало, если температура окружающей среды не высока, что имъ можно пренебречь и сказать, что барометрическое давленiе

$$p_0 = \gamma (z - z_0),$$

гдѣ $(z - z_0)$ есть высота столба жидкости въ барометрѣ. Въ среднемъ это давленiе соотвѣтствуетъ столбу **ртути** въ 0,760 *mtr* или **воды** въ 10,33 *mtr*; слѣдоват., оно равно 13.590 . 0,760 $kgr/mtr^2 = 10330\ kgr/mtr^2 = 1{,}033\ kgr/cm^2$, т.-е. весьма близко къ упомянутой выше «**технической атмосферѣ**». Само собою разумѣется, что когда рѣчь идетъ о точныхъ наблюденiяхъ, то недостаточно наблюдать высоты въ пьезометрахъ: необходимо отмѣчать также барометрическое давленiе, со всѣми предосторожностями и поправками на температуру помѣщенiя, какъ объ этомъ подробно трактуется въ курсахъ физики.

Вернемся теперь къ ур-iю (7). Раньше мы направляли ось z—овъ кверху. Если направить ее внизъ, то измѣнится только знакъ въ уравненiи (6), и мы получимъ:

$$dp = \gamma\, dz.$$

Слѣдовательно:

$$p = \gamma z + H'.$$

Пусть плоскость *xy* выбрана на свободной поверхности, гдѣ задано давленiе p_0; тогда при $z = 0$ уравненiе дастъ

$$H' = p_0,$$

---

*) Имѣется въ лабораторiи И. Т. У.

**) Оно опредѣляется упругостью насыщенныхъ паровъ жидкости, заключенной въ барометрѣ, при температурѣ окружающей среды.

а потому:

$$p = \gamma z + p_0 \quad \dots\dots\dots\dots\dots (8)$$

Отсюда видно, что *если на свободной поверхности приложено внѣшнее давленіе* p_0, *то въ покоящейся жидкости оно цѣликомъ передается во всѣ стороны.* Это есть принципъ *Паскаля*, нашедшій себѣ широкое примѣненіе въ техникѣ послѣ того, какъ Брама́ изобрѣлъ кожаныя манжеты (гидравлическій прессъ, гидравлическіе вѣсы, аккумуляторы и т. п.).

Ур-іе (8) разъясняетъ также, почему однородная жидкость, налитая въ двухъ сообщающихся сосудахъ, располагается въ нихъ такъ, что высоты стоянія въ обѣихъ вѣтвяхъ одинаковы; почему жидкости разныхъ плотностей располагаются въ сообщающихся сосудахъ такъ, что высоты стоянія ихъ надъ плоскостью раздѣла обратно пропорціональны плотностямъ и т. д.

Законъ распредѣленія давленій въ покоящейся **упругой** жидкости получимъ такъ. Имѣемъ:

$$dp = \varrho\, dU.$$

Для случая, когда оси x и y горизонтальны, а ось z направлена вертикально внизъ, мы уже имѣли

$$dU = g\, dz,$$

слѣдовательно,

$$dp = g\varrho\, dz.$$

Кромѣ того, при постоянной температурѣ, на основаніи закона Маріотта, мы получили въ § 2 ур-іе (2″). Связывая его съ вышенаписаннымъ и интегрируя, получимъ:

$$Lp = kgz + const$$

или

$$L\frac{p}{p_0} = kg\,(z - z_0),$$

гдѣ p_0 есть давленіе въ точкѣ, находящейся на разстояніи z_0 отъ плоскости сравненія. Этимъ ур-іемъ, надлежащимъ образомъ видоизмѣненнымъ, чтобы считаться съ возможными перемѣнами температуры, пользуются при барометрическомъ нивеллированіи, т.-е. при опредѣленіи высоты z данной мѣстности по измѣренному въ ней давленію атмосферы p. (Подробности см., напр., въ курсѣ гидравлики Евневича).

2. **Всѣ точки невѣсомой, неподвижной и несжимаемой жидкости притягиваются къ одному, неподвижному же центру по закону, выражающемуся нѣкоторой функціей разстоянія между точкой и центромъ притяженія.**

Начало координатъ возьмемъ въ центрѣ притяженія. Беремъ точку съ координатами (x, y, z); разстояніе ея отъ центра назовемъ черезъ r. Сила притяженія, отнесенная къ единицѣ массы, т.-е. ускореніе этого притяженія, пусть выражается черезъ $f(r)$. Тогда имѣемъ:

$$X = f(r) \cdot \frac{x}{r},$$

$$Y = f(r) \cdot \frac{y}{r},$$

$$Z = f(r) \cdot \frac{z}{r},$$

такъ какъ отношенія $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$, $\frac{z}{r}$ суть косинусы угловъ между векторомъ r и соотвѣтственными осями.

Дифференціальное уравненіе для поверхности уровня будетъ имѣть видъ:

$$\frac{f(r)}{r}(x\,dx + y\,dy + z\,dz) = 0.$$

Отношеніе $\frac{f(r)}{r}$ въ этомъ уравненіи можно сократить, такъ какъ оно хотя и перемѣнно, но для всякаго конечнаго значенія r имѣетъ конечную величину. Поэтому поверхность уровня опредѣлится уравненіемъ

$$x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0$$

или

$$x^2 + y^2 + z^2 = C.$$

Это есть уравненіе шара; слѣдовательно, при такихъ силахъ поверхности уровня суть концентрическія сферы съ центрами въ центрѣ притяженія.

3. Сосудъ, содержащій тяжелую жидкость, равномѣрно вращается вокругъ какой-либо оси.

Это есть собственно случай движенія. Но по принципу д'Аламбера всякое движеніе можно разсматривать какъ случай покоя, если только прибавить къ внѣшнимъ силамъ всѣ силы инерціи. Такъ мы и поступимъ. Въ общемъ случаѣ нужно вводить слѣдующія силы инерціи:

a) силу инерціи въ переносномъ движеніи,

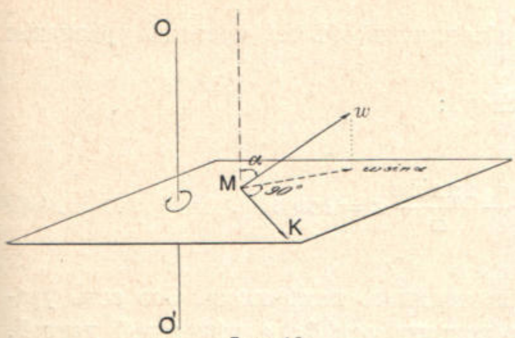
b) силу инерціи, соотвѣтствующую поворотному ускоренію, и

c) силу инерціи въ относительномъ движеніи.

Такъ какъ мы разсматриваемъ случай равномѣрнаго вращенія, то сила инерціи движенія влеченія (вращеніе сосуда) есть центробѣжная, и ея ускореніе въ какой-нибудь точкѣ есть $\omega^2 r$, гдѣ ω есть угловая скорость вращенія, а r — разстояніе разсматриваемой точки отъ оси вращенія.

Сила инерціи поворотнаго ускоренія обращается въ нашемъ случаѣ относительнаго покоя въ нуль. Въ самомъ дѣлѣ, поворотное ускореніе $\overline{k}$ выражается по теоремѣ Коріолиса такъ:

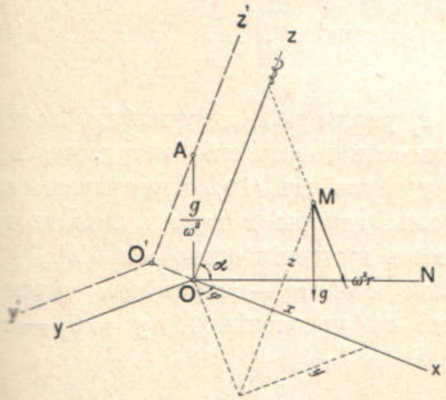
$$\overline{k} = 2\omega\, w \sin a.$$



Фиг. 10.

Здѣсь ω есть мгновенная угловая скорость вращенія около мгновенной оси **OO'** *) (фиг. 10); направленіе вращенія примемъ по часовой стрѣлкѣ если смотрѣть по оси **OO'** сверху внизъ; w есть скорость относительнаго движенія, α— ея уголъ съ осью вращенія. Слѣдовательно, $w\ sin\alpha$ есть проекція относительной скорости на плоскость, перпендикулярную къ оси вращенія. Поворотное ускореніе по величинѣ равно этой проекціи, умноженной на двойную угловую скорость вращенія. Направленіе его (**MK**) получимъ, если эту проекцію повернемъ въ плоскости, перпендикулярной къ оси вращенія, на 90^0 въ сторону вращенія.

Такъ какъ въ нашемъ случаѣ относительнаго перемѣщенія нѣтъ, т.-е. $w = 0$, то и $\overline{k} = 0$. По той же причинѣ сила инерціи въ относительномъ движеніи также равна нулю.



Фиг. 11.

Итакъ, пусть жидкость вращается въ сосудѣ около оси **z** (фиг. 11), составляющей съ горизонтомъ **ON** уголъ α и лежащей въ вертикальной плоскости чертежа; ось **x**—овъ расположимъ также въ плоскости чертежа; ось **y**—овъ тогда будетъ горизонтальна (перпендикулярна къ плоскости чертежа). Какая нибудь частица **M** подвержена дѣйствію вертикальной силы тяжести, съ ускореніемъ g, и центробѣжной силы, съ ускореніемъ $\omega^2 r$,—послѣдняя, конечно, перпендикулярна къ оси вращенія **Oz**. Эти двѣ силы даютъ проекціи по осямъ координатъ:

$$X = g\ cos\alpha + \omega^2 r\ cos\varphi = g\ cos\alpha + \omega^2 x;$$
$$Y = \omega^2 r\ sin\varphi = \omega^2 y;$$
$$Z = -g\ sin\alpha.$$

Дифференціальное уравненіе поверхностей уровня будетъ имѣть видъ:

$$(\omega^2 x + g\ cos\alpha)\,dx + \omega^2 y\,dy - g\ sin\alpha\,dz = dU = 0 \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

Послѣ интегрированія получимъ:

$$\frac{\omega^2 x^2}{2} + g\ cos\alpha\, x + \frac{\omega^2 y^2}{2} - g\ sin\alpha\, z = const.$$

*) Такъ какъ въ нашемъ случаѣ движеніе влеченія есть вращеніе, то *OO'* есть не мгновенная, а неподвижная ось вращенія сосуда.

Дѣля все уравненіе на $\frac{\omega^2}{2}$ и прибавляя къ обѣимъ частямъ уравненія постоянную величину $\frac{g^2 \cos^2\alpha}{\omega^4}$, получаемъ:

$$\left(x + \frac{g}{\omega^2}\cos\alpha\right)^2 + y^2 - \frac{2g\sin\alpha}{\omega^2} z = const. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

причемъ, конечно, числовое значеніе постояннаго измѣнилось. Это есть уравненіе параболоида вращенія, но не вокругъ оси Oz, а нѣкоторой другой, положеніе которой можно опредѣлить такъ:

Отложимъ по вертикали OA отрѣзокъ $OA = \frac{g}{\omega^2}$ *). Черезъ точку A проводимъ линію $O'z' \parallel Oz$ до пересѣченія съ продолженной осью Ox. Очевидно, что отрѣзокъ $OO' = \frac{g}{\omega^2}\cos\alpha$. Если перенести начало координатъ въ O', то уравненіе (10) приметъ видъ:

$$x_1^2 + y_1^2 - \frac{2g\sin\alpha}{\omega^2} z_1 = const \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Если въ этомъ уравненіи положить z_1 равнымъ какому нибудь постоянному, то получимъ уравненіе круга, отнесеннаго къ его центру, что показываетъ, что поверхность, выражаемая уравненіемъ (10), пересѣкается съ плоскостями, параллельными xy, по кругамъ, центры которыхъ лежатъ на оси $O'z'$; слѣдовательно, это есть поверхность вращенія около оси $O'z'$.

Если взять какое-либо меридіональное сѣченіе,—напримѣръ, сѣченіе плоскостью xz', для чего нужно положить въ уравненіи (11) $y_1 = 0$, — то получимъ:

$$x_1^2 = \frac{2g\sin\alpha}{\omega^2} z_1 + const.$$

Это есть уравненіе параболы, отнесенной къ оси; параметръ ея, очевидно, есть $O'A = \frac{g\sin\alpha}{\omega^2}$.

Итакъ, когда тяжелая несжимаемая жидкость вращается равномѣрно вокругъ какой-нибудь оси, то

поверхности уровня суть параболоиды вращенія съ параметромъ $\frac{g\sin\alpha}{\omega^2}$*; ось этихъ параболоидовъ параллельна оси вращенія и получается, если ось вращенія перемѣстить по вертикали на величину* $\frac{g}{\omega^2}$.

---

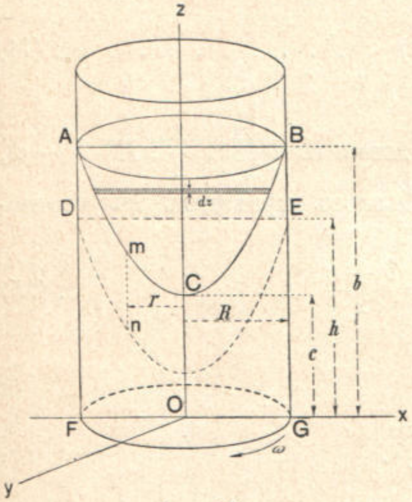
*) Легко видѣть, что величина $\frac{g}{\omega^2}$, равная ускоренію, дѣленному на квадратъ угловой скорости, есть нѣкоторая длина.

Разсмотримъ слѣдующіе частные случаи:

а) Ось вращенія вертикальна, т.-е. уголъ $\alpha = 90^\circ$. Уравненіе (11) приметъ видъ:

$$x^2 + y^2 - \frac{2g}{\omega^2} z = const. \qquad (12)$$

Параметръ параболы меридіаннаго сѣченія будетъ равенъ $\frac{g}{\omega^2}$, а разстояніе OO' между осью вращенія сосуда и осью параболоида, равное $\frac{g}{\omega^2} \cos\alpha$, обращается въ нуль, т.-е. оси совпадаютъ. Свободная поверхность, какъ одна изъ поверхностей уровня, опредѣлится изъ уравненія (12), если при извѣстныхъ начальныхъ данныхъ можно опредѣлить числовую величину постояннаго. Такъ, напр., зададимъ себѣ сосудъ,— для простоты круглый цилиндръ радіуса R,—вращающійся около своей геометрической оси Oz (фиг. 12). Пусть дано, что въ покоющемся сосудѣ жидкость стоитъ на уровнѣ DE, на высотѣ h. Вращеніе происходитъ по стрѣлкѣ съ постоянной угловой скоростью ω. Свободная поверхность даетъ въ сѣченіи съ плоскостью xz параболу ACB, уравненіе которой изъ (12), при $y = 0$, есть



Фиг. 12.

$$x^2 = \frac{2gz}{\omega^2} + const.$$

Назовемъ координату вершины C черезъ c. Ей соотвѣтствуетъ координата $x = 0$. Изъ послѣдняго уравненія имѣемъ, слѣдовательно:

$$const = -\frac{2g}{\omega^2} c\,.$$

Итакъ, уравненіе параболы свободной поверхности есть

$$x^2 = \frac{2g}{\omega^2}(z - c) \qquad (13)$$

Чтобы выразить неизвѣстное c въ функціи радіуса сосуда R, высоты h и скорости ω, напишемъ выраженіе того, что объемъ жидкости въ сосудѣ при вращеніи не измѣнился, т.-е. что

объемъ $ACBGFA$ = объему $ABGF$ — объемъ ACB = объему $DEGF$.

Назовемъ черезъ b ту высоту, до которой жидкость поднимается у стѣнокъ сосуда. Тогда это условіе выразится такъ:

$$\pi R^2 h = \pi R^2 b - \text{объемъ } ACB.$$

Выражаемъ объемъ параболоида ACB по уравненію параболы; онъ равенъ:

$$\int_c^b \pi x^2 dz = \frac{2\pi g}{\omega^2}\int_c^b (z-c)\,dz = \frac{2\pi g}{\omega^2}\left\{\frac{b^2}{2} - \frac{c^2}{2} - bc + c^2\right\} = \frac{\pi g}{\omega^2}(b-c)^2.$$

Примѣняя ур-іе (13) къ точкѣ B, получаемъ, очевидно,

$$R^2 = \frac{2g}{\omega^2}(b-c) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

Поэтому объемъ параболоида ACB можно представить черезъ $\frac{1}{2}\pi R^2(b-c)$, послѣ чего написанное выше соотношеніе объемовъ приведетъ къ соотношенію:

$$h = b - \frac{1}{2}(b-c) = \frac{b+c}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

Наконецъ, изъ ур-ій (14) и (15) находимъ:

$$c = h - \frac{1}{2}\frac{\omega^2 R^2}{2g}.$$

Итакъ, съ угловою скоростью мѣняется и параметръ параболъ поверхностей уровня, $\frac{g}{\omega^2}$, и координата вершины свободной поверхности, c.

Законъ распредѣленія давленій въ этомъ случаѣ получимъ, интегрируя ур-іе

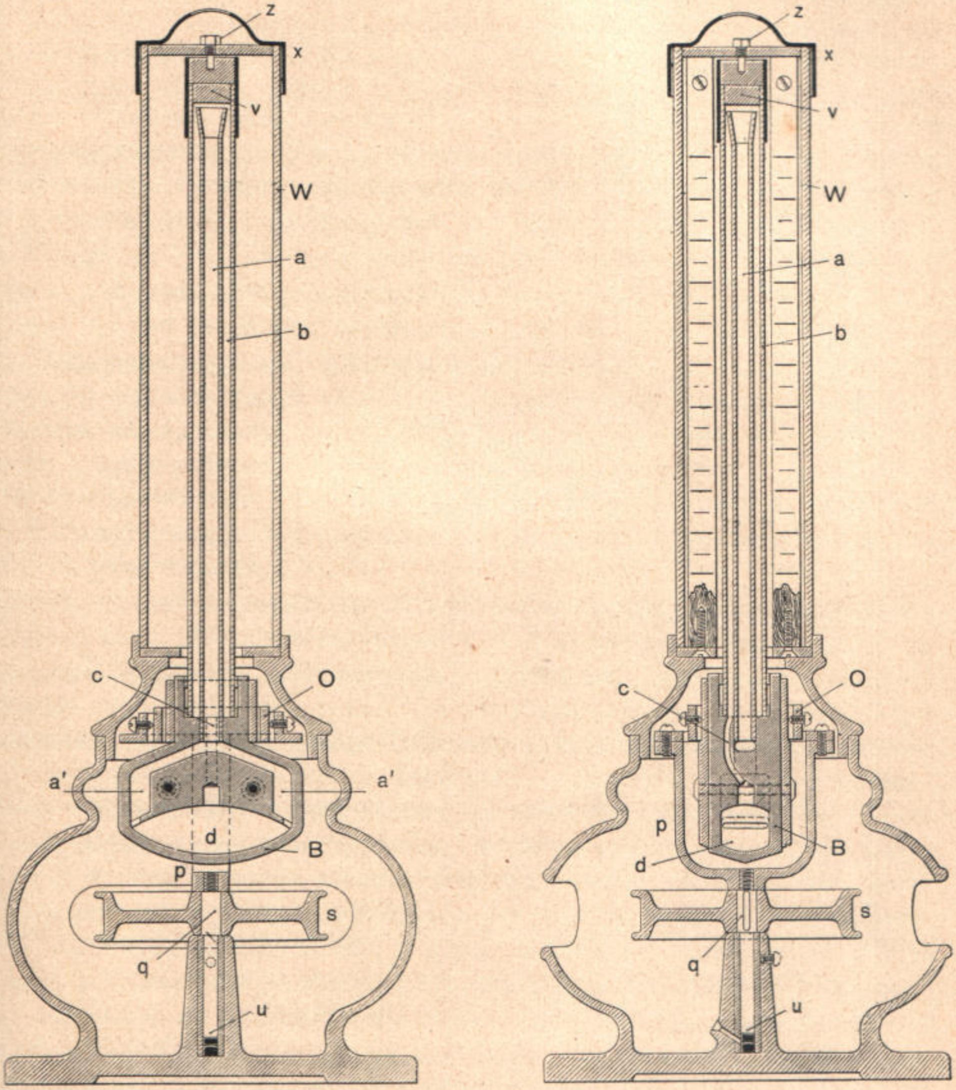
$$\frac{1}{\varrho}dp = \omega^2 x\,dx + \omega^2 y\,dy - g\,dz,$$

которое получается изъ (9), по замѣнѣ въ немъ dU равной ему величиной $\frac{1}{\varrho}dp$ и при углѣ $\alpha = 90^0$. Получаемъ

$$\frac{p}{\varrho} = \frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2) - gz + const.$$

Постоянное опредѣлимъ изъ условія, что на свободной поверхности имѣется извѣстное давленіе p_0. Если текущія координаты свободной поверхности обозначить черезъ x_0, y_0 и z_0, а координату ея вершины, по преды-

Таблица I.



Двухжидкостный тахометръ,

исполняемый фирмой

Rheinische Tachometerbau-Gesellschaft въ Кельнѣ.

дущему, черезъ c, то, подобно ур-ію (12), получимъ ур-іе свободной поверхности въ такомъ видѣ

$$x_0^2 + y_0^2 = \frac{2g}{\omega^2}(z_0 - c),$$

а законъ распредѣленія давленій найдемъ по уравненію:

$$\frac{p - p_0}{\gamma} = \frac{\omega^2}{2g}(x^2 + y^2 - x_0^2 - y_0^2) - (z - z_0),$$

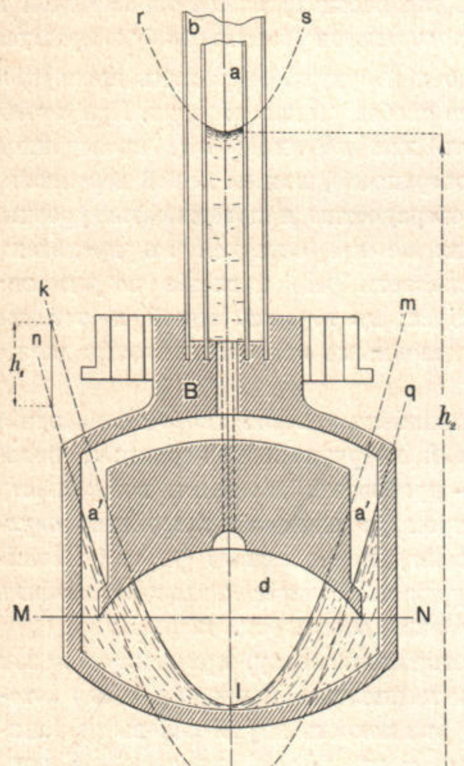
при чемъ координаты x_0, y_0 и z_0 связаны вышенаписаннымъ ур-іемъ свободной поверхности. Отсюда ясно, что пока мы разсматриваемъ точки одной и той же вертикальной цилиндрической поверхности какого нибудь радіуса $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$, то давленія по ней будутъ возрастать пропорціонально ихъ вертикальному разстоянію до свободной поверхности. При этомъ очевидно, что эти разстоянія можно брать или по линіи mn, проведенной черезъ данную точку m до свободной поверхности, или по любой вертикали, но какъ ея отрѣзокъ между свободной поверхностью и поверхностью уровня, проходящей черезъ данную точку m. Если же мы остаемся въ предѣлахъ горизонтальной плоскости, то ур-іе показываетъ, что давленіе возрастаетъ въ ней пропорціонально к в а д р а т у радіуса; въ точкахъ одной и той же горизонтальной плоскости и одинаково удаленныхъ отъ оси вращенія давленіе будетъ одно и то же.

Тѣмъ обстоятельствомъ, что съ измѣненіемъ угловой скорости вращенія измѣняется видъ свободной поверхности и координата ея вершины, пользуются для устройства *тахометровъ*, — приборовъ, дающихъ возможность опредѣлять число оборотовъ вала. Для примѣра опишемъ устройство *двухжидкостнаго тахометра* (Bifluid-Tachometer), исполняемаго фирмой Rheinische Tachometerbau-Gesellschaft во Фрейбургѣ въ Баваріи (нѣмецкій патентъ № 114323). Онъ устроенъ слѣдующимъ образомъ (см. отд. табл. I):

Внутренняя стеклянная трубка a, открытая сверху, примыкаетъ внизу къ сосуду B (изъ твердаго каучука или целлюлоида), нижняя часть котораго расширена и имѣетъ полость d; эта полость двумя боковыми каналами a' соединена съ внутреннею трубкою a; кромѣ того, въ сосудѣ B есть еще каналъ c, мало отклоняющійся отъ оси сосуда и соединяющій верхнюю часть полости d съ промежуткомъ между трубкою a и охватывающею ее трубкою b. Верхній конецъ трубки b, свободно покрывающій трубку a, герметически закрытъ металлической пробкой v. Сосудъ B, помощью кардановскаго подвѣса O, соединенъ съ обоймой p, которая приводится во вращеніе шкивомъ s черезъ валикъ q, пята u котораго помѣщена въ металлической станинѣ; на этой станинѣ укрѣплена третья толстѣнная стеклянная трубка W, внутри которой помѣщены двѣ двухстороннія шкалы съ дѣленіями. Наконецъ, на трубкѣ W вверху надѣтъ колпачокъ x, въ которомъ укрѣпленъ штифтъ z, ограничивающій размахи системы трубокъ a и b.

Въ полость d наливается до уровня боковыхъ отверстій, соединяющихъ ее съ каналами a', жидкость съ большимъ удѣльнымъ вѣсомъ (ртуть), а выше ея, вплоть до начала трубки *b*, легкая жидкость, не смѣшивающаяся съ первой и, по возможности, мало расширяющаяся при нагрѣваніи. Само собою разумѣется, что въ покоющемся приборѣ уровень жидкости въ трубкахъ *a* и *b* стоитъ на одной высотѣ, такъ какъ обѣ эти трубки вверху свободно сообщаются между собою; по этой же причинѣ на свободной поверхности жидкости въ обѣихъ трубкахъ всегда имѣется одно и то же давленіе.

Послѣ того, какъ сосудъ приведенъ во вращеніе, поверхность раздѣла обѣихъ жидкостей, первоначально плоская, обращается въ поверхность параболоида вращенія. При этомъ часть ртути вытѣсняется въ боковые каналы *a'*, выгоняя оттуда легкую жидкость въ центральную трубку; въ силу этого вмѣстимость полости *d*, за вычетомъ пространства, занятаго ртутью, увеличивается, и сюда стекаетъ легкая жидкость изъ кольцевой трубки *b*. Очевидно, что, въ виду этого, давленія на поверхностяхъ соприкосновенія обѣихъ жидкостей въ каналахъ *a'* и въ полости *d* перестаютъ быть одинаковыми, а слѣдовательно, обѣ жидкости соприкасаются между собою по двумъ разнымъ поверхностямъ уровня, т.-е. по двумъ разнымъ параболоидамъ, какъ показано на фиг. 13, гдѣ *klm* есть поверхность соприкосновенія обѣихъ жидкостей въ полости *d*, *npq* — такая же поверхность въ каналахъ *a'*, *rs* — параболоидъ свободной поверхности въ центральной трубкѣ *a*; свободная поверхность въ трубкѣ *b*, обнаруживающаяся въ боковомъ обходномъ каналѣ, на чертежѣ не показана, — ее легко вообразить гдѣ-нибудь выше параболоида *klm*, но ниже параболоида *rs*.



Фиг. 13.

Само собою разумѣется, что всѣ эти параболоиды имѣютъ одинъ и тотъ же параметръ, т.-е. тождественны между собою и различаются только положеніями ихъ вершинъ на оси вращенія сосуда. Легко, далѣе, убѣдиться, что вертикальное разстояніе h_1 между одноименными точками параболоидовъ *klm* и *npq* относится къ таковому же разстоянію h_2 между параболоидами *rs* и *npq*, но уменьшенному на вертикальное разстояніе между параболоидомъ свободной поверхности въ трубкѣ *b* и параболоидомъ *klm*, — какъ удѣльные вѣса обѣихъ жидкостей. Наконецъ, очевидно, положеніе поверхности *rs* мѣняется съ числомъ оборотовъ, т.-е. съ видоизмѣненіемъ параболоидовъ *klm*, *npq* и т. д. Благодаря этому, съ приведеніемъ прибора во вращеніе, жидкость быстро поднимается въ его центральной трубкѣ, отчего отсчеты производятся легко. Если бы въ приборѣ была одна только жидкость, то, несмотря на его форму, при его вращеніи во внутренней трубкѣ она стала бы опускаться и поднималась бы въ наружной; одновременно пострадали бы какъ точность отсчета, такъ и чувствительность прибора.

Приборъ тарируется сообщеніемъ ему опредѣленной угловой скорости и нанесеніемъ на шкалахъ соотвѣтствующихъ положеній поверхности rs; если передаточное число отъ вала машины къ валику тахометра сохраняется одно и то же, то на шкалахъ можно прямо записывать числа оборотовъ вала машины. Понятно, что при употребленіи прибора это передаточное число должно точно соблюдаться. Имѣя въ виду, что съ перемѣной передаточнаго числа одни и тѣ же числа оборотовъ тахометра соотвѣтствуютъ новымъ числамъ оборотовъ вала машины, удобнѣе всего шкалы одной стороны прибора градуировать на одно передаточное число, а шкалы другой стороны—на другое; благодаря этому одинъ и тотъ же приборъ можетъ служить для измѣренія чиселъ оборотовъ въ очень широкихъ предѣлахъ. Такъ, напр., въ приборѣ, принадлежащемъ гидравлической лабораторіи И. Т. У., по одной сторонѣ шкалы читаемъ числа оборотовъ отъ 180 до 440, а по другой—отъ 360 до 880.

Изъ предыдущаго описанія слѣдуетъ, что для точности отсчетовъ совершенно необходимо, чтобы количества обѣихъ жидкостей съ теченіемъ времени не мѣнялись и чтобы положеніе поверхности раздѣла MN оставалось постояннымъ. Этому можетъ помѣшать всякая деформація сосуда подъ вліяніемъ случайныхъ обстоятельствъ или подъ вліяніемъ измѣненія температуры. Равнымъ образомъ, измѣненія объемовъ той и другой жидкости подъ вліяніемъ температуры тоже отражаются на точности показаній тахометра. Впрочемъ, это имѣетъ мѣсто и для всѣхъ вообще центробѣжныхъ тахометровъ. Чувствительности этого прибора мѣшаетъ развѣ только инерція жидкости (и то при измѣреніи перемѣнныхъ чиселъ оборотовъ), такъ какъ треніе жидкости о стѣнки прибора вообще мало и, конечно, гораздо меньше тренія въ органахъ центробѣжнаго тахометра. Въ смыслѣ удобства отсчетовъ эта конструкція не оставляетъ желать ничего лучшаго.

b) Ось вращенія горизонтальна. Эта задача впервые рѣшена Poncelet въ 1832 г. Положивъ въ уравненіи (10) $\alpha = 0$, получимъ:

$$\left(x + \frac{g}{\omega^2}\right)^2 + y^2 = const. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (16)$$

Это есть цилиндрическая поверхность съ осью $O'z'$, параллельной оси Oz, т.-е. оси вращенія сосуда (фиг. 14). Чтобы получить положеніе оси этого цилиндра, надо, по предыдущему, поднять по вертикали на величину $\frac{g}{\omega^2}$ самую ось вращенія сосуда. Переходимъ къ новой системѣ координатъ (x_1, y_1, z_1), полагая

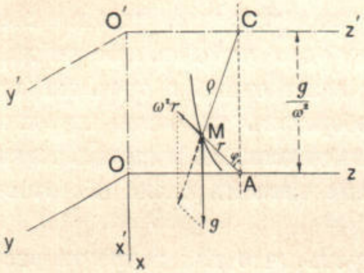
$$x = x_1 - \frac{g}{\omega^2},$$

$$y = y_1.$$

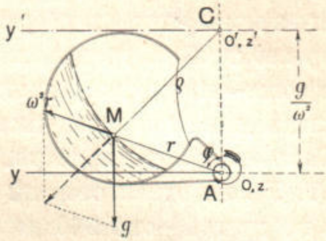
Въ новыхъ координатахъ ур-іе (16) напишется такъ:

$$x_1^2 + y_1^2 = const. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (16')$$

Это есть круглый цилиндръ съ осью $O'z'$, которая отстоитъ отъ оси вращенія сосуда по вертикали на высоту $\frac{g}{\omega^2}$ и лежитъ съ ней въ одной вертикальной плоскости. Такой случай имѣемъ, напр., въ водяномъ наливномъ колесѣ, гдѣ порція воды, попавъ въ ковшъ, вмѣстѣ съ нимъ вращается около горизонтальной оси колеса.



Фиг. 14.



Фиг. 15.

Слѣдуетъ отмѣтить существенное различіе между этими двумя случаями вращенія. Въ первомъ геометрическая ось свободной поверхности и ось вращенія сосуда совпадаютъ. Поэтому форма поверхности за одинъ оборотъ не измѣняется; на ея измѣненіе оказываетъ вліяніе только ω; но пока $\omega = const$, форма поверхности неизмѣнна.

Не то имѣетъ мѣсто во второмъ случаѣ: здѣсь ось свободной поверхности и ось вращенія не совпадаютъ. Слѣдовательно, радіусъ цилиндрической свободной поверхности все время измѣняется, что видно изъ той же фиг. 15; по мѣрѣ того, какъ точка M, лежащая на свободной поверхности, поднимается вмѣстѣ съ сосудомъ, радіусъ ϱ поверхности уменьшается; его величина при углѣ поворота φ выражается формулой:

$$\varrho^2 = r^2 + \left(\frac{g}{\omega^2}\right)^2 - \frac{2rg}{\omega^2} \cos\varphi.$$

Слѣдовательно, если ϱ измѣняется одновременно съ φ, то измѣняется за одинъ оборотъ и видъ свободной поверхности, а потому жидкость въ ковшѣ не остается въ покоѣ относительно него даже при $\omega = const$. Изъ этого нужно заключить, что, въ сущности, наше уравненіе (9) несправедливо, такъ какъ при его выводѣ мы считали $w = 0$ (относительный покой). Однако, для цѣлей практики можно довольствоваться и этимъ выводомъ, такъ какъ, вообще, скорость w не велика и во время полнаго оборота, если ковшъ выполненъ въ видѣ закрытаго со всѣхъ сторонъ сосуда, мѣняетъ и знакъ и величину, потому что относительное движеніе въ этомъ случаѣ есть движеніе колебательное.

Замѣтимъ еще, что въ числахъ этотъ случай рѣшается очень сложно: все сводится къ опредѣленію числовой величины постояннаго въ уравненіяхъ (16) и (16′). Пріемъ остается тотъ же самый, который примѣненъ выше,— нужно сравнить объемъ жидкости въ сосудѣ при отсутствіи вращенія и при вращеніи. Здѣсь то и лежитъ вся трудность: форма ковша вообще сложна, и развѣ только графически можно болѣе или менѣе просто найти его вмѣстимость при разныхъ расположеніяхъ свободной поверхности.

§ 5. Полное давленіе жидкости на стѣнку.

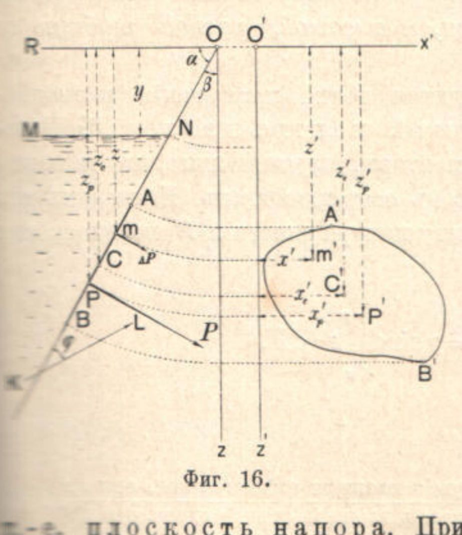
Когда мы разсматривали равновѣсіе тяжелой несжимаемой жидкости, то пришли къ заключенію, что давленіе p въ какой-нибудь ея точкѣ выражается формулой (8):

$$p = \gamma z + p_0,$$

гдѣ p_0 есть давленіе въ горизонтальной плоскости сравненія, а z — вертикальное разстояніе разсматриваемой точки до той же плоскости. Изъ этого выраженія видно, что давленіе p возрастаетъ пропорціонально глубинѣ и равно суммѣ 1) вѣса столба жидкости съ площадью поперечнаго сѣченія, равной единицѣ, и высотой, равной глубинѣ, считая отъ плоскости сравненія, и 2) давленія въ плоскости сравненія.

Удобно принимать плоскость сравненія на свободной поверхности,— тогда p_0 представитъ собою давленіе на свободную поверхность; въ открытомъ сосудѣ p_0 равно давленію атмосферы.

Очевидно, что законъ измѣненія давленія сохраняетъ свою силу и тамъ, гдѣ жидкость соприкасается со стѣнками сосуда. Тутъ надо помнить, что оно во всякомъ элементѣ ограничивающей поверхности перпендикулярно къ нему.



Фиг. 16.

Опредѣлимъ прежде всего величину полнаго нормальнаго давленія на плоскую стѣнку.

Пусть ***BAO*** есть стѣнка, омываемая водою, нефтью или иною жидкостью, стоящей на горизонтѣ ***MN*** (фиг. 16). Стѣнка эта плоска, перпендикулярна къ плоскости чертежа и образуетъ съ горизонтомъ уголъ α. Пусть въ ней выдѣленъ нѣкоторый контуръ ***AB***. Отложимъ по вертикали высоту $y = \frac{p_0}{\gamma}$, гдѣ γ есть вѣсъ единицы объема жидкости. Проводимъ на этой высотѣ параллельно ***MN*** плоскость ***RO***, т. е. плоскость напора. Принявъ ее за плоскость сравненія, получимъ, что $p = \gamma z$. Въ плоскости стѣнки возьмемъ систему осей такую:

одна изъ осей, Ox, пусть идетъ въ пересѣченіи плоскости стѣнки съ плоскостью напора, другая пусть будетъ къ ней перпендикулярна и лежитъ въ плоскости BAO.

Повернемъ стѣнку BAO около оси Ox на уголъ $\beta = 90^0 - \alpha$ и затѣмъ совмѣстимъ ее съ плоскостью чертежа. Контуръ AB представится тогда въ натуральную величину въ видѣ нѣкоторой плоской фигуры $A'B'$. Пусть ея площадь будетъ равна F. Система нашихъ осей расположится въ $O'x'$ и $O'z'$. На какой-нибудь элементъ m' стѣнки, съ площадью dF и съ координатами x' и z', дѣйствуетъ сила dP, связанная съ давленіемъ p и площадью dF уравненіемъ:

$$dP = p\,dF = \gamma z\,dF.$$

Изъ построенія совмѣщенія видно, что

$$z = z' \sin\alpha,$$

такъ что можемъ еще написать, что

$$dP = \gamma z' \sin\alpha\,dF.$$

Суммируя такія выраженія элементарныхъ силъ для всей площади $AB = F$, получимъ полное нормальное усиліе:

$$P = \int_0^F \gamma z\,dF = \int_0^F \gamma z' \sin\alpha\,dF = \gamma \sin\alpha \int_0^F z'\,dF = \gamma \sin\alpha\, z'_c F = \gamma z_c F \quad . \; . \; . \; (17)$$

гдѣ z'_c есть координата центра тяжести C' въ плоскости стѣнки, а z_c — его вертикальное разстояніе до плоскости напора. Отсюда видно, что

полное давленіе на плоскую стѣнку равно вѣсу столба жидкости съ основаніемъ, равнымъ площади стѣнки, и высотой, равной глубинѣ ея центра тяжести.

Спрашивается теперь, гдѣ же находится точка приложенія равнодѣйствующей всѣхъ давленій,—такъ называемый центръ давленій? Положеніе его можно найти изъ уравненія моментовъ, выражающаго, что моментъ равнодѣйствующей равенъ суммѣ моментовъ составляющихъ. Напишемъ его для оси $O'x'$, называя черезъ z'_p координату центра давленія P' въ плоскости стѣнки. Имѣемъ:

$$P z'_p = \int_0^F \gamma z\,dF \,.\, z' = \gamma \sin\alpha \int_0^F z'^2\,dF,$$

такъ что

$$z'_p = \frac{\int_0^F z'^2\,dF}{\int_0^F z'\,dF} = \frac{J_x}{F z'_c} = \frac{\text{*моментъ инерціи* площади стѣнки относ. оси } O'x'}{\text{*статич. моментъ* площади стѣнки относ. оси } O'x'}.$$

Но

$$J_x = J_0 + F z'^2_c,$$

гдѣ J_0 есть моментъ инерціи площади стѣнки относительно оси, проходящей черезъ центръ тяжести стѣнки. Слѣдовательно:

$$z'_p = z'_c + \frac{J_0}{F z'_c} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

Такъ какъ второй членъ имѣетъ одинъ знакъ съ z'_c, то заключаемъ, что *центръ давленій всегда ниже центра тяжести* стѣнки.

Напишемъ уравненіе моментовъ относительно оси $O'z'$. Имѣемъ:

$$P x'_p = \int_c^F \gamma z' \sin\alpha \, dF . x',$$

откуда затѣмъ

$$x'_p = \frac{\int_0^F z' x' \, dF}{\int_0^F z' \, dF}.$$

Когда стѣнка имѣетъ ось симметріи въ вертикальной плоскости, то, какъ это легко видѣть, центръ давленія лежитъ на ней. Беря ее за ось $O'z'$, находимъ, что каждому данному значенію z' будутъ отвѣчать два значенія x',—одно съ плюсомъ, другое съ минусомъ; въ суммѣ, очевидно, получимъ:

$$\int_0^F z' x' \, dF = 0,$$

такъ что

$$x'_p = 0.$$

Если бы рѣчь шла не о нормальномъ давленіи на стѣнку, а о давленіи по какому-нибудь опредѣленному направленію, напр., по направленію KL, образующему уголъ φ со стѣнкой, то мы нашли бы, что

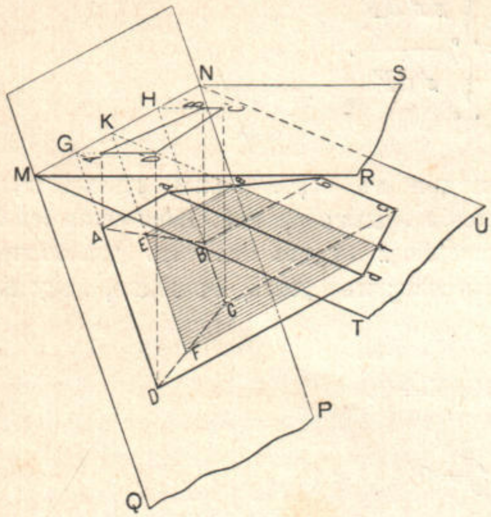
$$P_n = P \sin\varphi = \gamma F z_c \sin\varphi = \gamma z_c . F \sin\varphi,$$

т.-е.

давленіе на плоскую стѣнку по какому-нибудь направленію равно вѣсу столба жидкости, высота котораго равна разстоянію центра тяжести площади стѣнки до плоскости напора, а основаніе равно проекціи площади стѣнки на плоскость, перпендикулярную къ разсматриваемому направленію.

Примѣненіе ур-ій (17) и (18) затрудненій, вообще, не представляетъ. Однако часто графическая передача механическихъ положеній, лежащихъ въ основѣ ур-ій (17) и (18), быстрѣе приводитъ къ рѣшенію, нежели вычисленія по этимъ ур-іямъ. Поэтому остановимся нѣсколько на этомъ.

Пусть **MNPQ** (фиг. 17) есть стѣнка, въ которой выдѣленъ нѣкоторый контуръ, напр., трапеція **ABCD**; пусть **RMNS** есть свободная поверхность жидкости, омывающей эту стѣнку, при чемъ контуръ $A_1B_1C_1D_1$ представляетъ проекцію нашего контура **ABCD** на эту плоскость. Изъ всѣхъ точекъ контура **ABCD** возставимъ перпендикуляры **Aa**, **Bb**,.. къ плоскости стѣнки **PN**, и на какомъ-нибудь изъ нихъ отложимъ длину $Cc = CC_1$, т.-е. равную соотвѣтственному вертикальному разстоянію точки **C** до свободной поверхности. Черезъ эту точку **c** и линію **MN** проведемъ плоскость **TMNU**, на которой выдѣлится такимъ образомъ контуръ **abcd**; очевидно, что $Aa = AA_1$, $Bb = BB_1$, и т. д. Непараллельно усѣченная призма **ABCDdabc** представляетъ по величинѣ и по положенію полное давленіе на стѣнку **ABCD**, если вообразить эту призму наполненной жидкостью; это ясно изъ того, что на каждомъ элементѣ dF площади, взятой внутри нашего контура, тяготѣетъ вѣсъ элементарнаго столба жидкости съ высотою z, равной вертикальному разстоянію этого элемента до свободной поверхности. Поэтому подсчетъ вѣса жидкости въ объемѣ такой призмы равноцѣненъ подсчету ур-ія (17), а находя центръ тяжести такой призмы и проектируя его на плоскость стѣнки, мы, очевидно, продѣлаемъ операцію, равноцѣнную подсчету ур-ія (18).



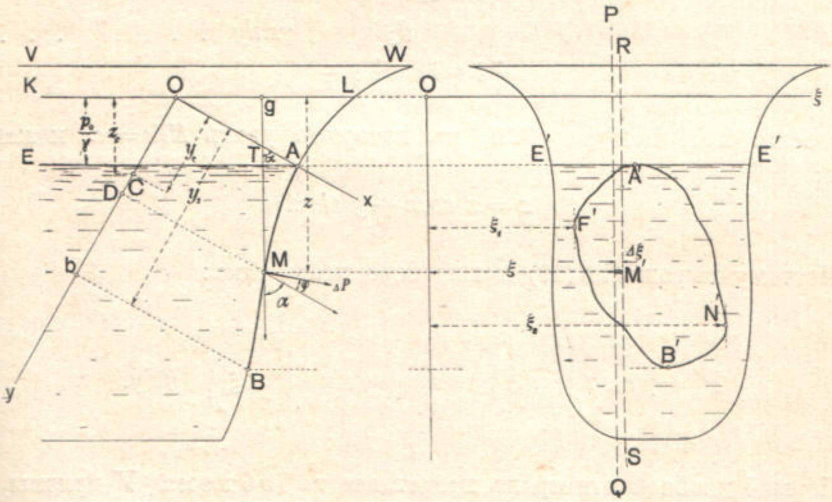
Фиг. 17.

Эти двѣ послѣднія операціи удобно произвести такимъ образомъ. Вообразимъ безконечно тонкій вертикальный слой **FEef**, выдѣленный внутри этой призмы вертикальной плоскостью **FKf**. Ясно, что заштрихованная площадь представляетъ истинное положеніе нагрузки на линію **EF**. Поэтому, проектируя центръ тяжести трапеціи **FEef** на ея высоту **EF**, найдемъ центръ давленія на этотъ элементъ площади **EF**. Дальнѣйшее нахожденіе центра давленія на всю площадь **ABCD** можетъ быть сдѣлано по правиламъ графостатики,— нахожденіемъ величины и положенія равнодѣйствующей ряда параллельныхъ силъ, имѣющихъ данныя точки приложенія. Все дѣло значительно упрощается, когда выдѣленный контуръ имѣетъ сторону, совпадающую со свободной поверхностью, т.-е. съ линіей **MN**. Если, напр., мы имѣемъ контуръ въ видѣ прямоугольника со сторонами a и b, при чемъ сторона a совпадаетъ съ линій **MN**, то это графическое построеніе позволяетъ сразу заключить, что центръ давленія на такую стѣнку отстоитъ отъ **MN** въ разстояніи, равномъ $^2/_3 b$, ибо таково расположеніе центра тяжести любого тр-ка **FKf**. Само собою разумѣется, что ур-іе (18) дастъ тотъ же результатъ, а именно:

$$z'_p = \frac{b}{2} + \frac{ab^3 \cdot 2}{12 \cdot ab \cdot b} = \frac{2}{3} b.$$

Если стѣнка кривая, то вопросъ объ опредѣленіи давленія на нее по данному направленію рѣшается такъ (фиг. 18):

Пусть данъ какой нибудь сосудъ **VWAB**; на стѣнкѣ его вообразимъ произвольный контуръ **A'F'B'N'**; требуется опредѣлить давленіе по данному направленію жидкости, налитой въ этомъ сосудѣ до уровня **AE — A'E'**, на часть поверхности стѣнки, заключающуюся внутри этого контура. Давленіе на свободную поверхность есть p_o, такъ что плоскость **KL**, параллельная **AE** и отстоящая отъ нея на высоту $\frac{p_o}{\gamma}$, представитъ собою плоскость напора.



Фиг. 18.

Черезъ данное направленіе вообразимъ вертикальную плоскость **Oxy**. Лѣвая половина фиг. 18 представлена въ плоскости, параллельной этой вертикальной плоскости, такъ что **Ox** есть заданное направленіе; сама эта фигура представляетъ сѣченіе сосуда плоскостью **PQ** ‖ **Oxy**. Правая половина чертежа есть проекція сосуда на вертикальную плоскость, перпендикулярную къ плоскости **Oxy**. Примемъ слѣдующую систему осей координатъ: ось x-овъ проведемъ черезъ точку **A** параллельно данному направленію, до пересѣченія въ **O** съ плоскостью напора; ось y-овъ беремъ въ одной вертикальной плоскости съ **Ox**; понятно, что третья ось, **O**ξ, будетъ горизонтальна и лежитъ въ плоскости напора **KL**. Пусть, наконецъ, заданное направленіе **Ox** образуетъ съ направленіемъ тяжести **gM** уголъ α.

Въ каждомъ элементѣ **M**, занимающемъ по контуру **AB** длину ds и простирающемуся отъ плоскости **PQ** до смежной плоскости **RS** на длину ds', считая по самой стѣнкѣ, приходится нормальное давленіе dP, образующее съ разсматриваемымъ направленіемъ уголъ φ; понятно, что его проекцію на направленіе **Ox** можно выразить такъ:

$$dP_x = dP\, cos\varphi = \gamma z\, ds\, ds'\, cos\varphi,$$

гдѣ z есть вертикальное разстояніе элемента **M** до плоскости напора. Понятно, что $ds\, ds'\, cos\varphi$ есть проекція этого кривого элемента поверхности на плоскость ξ**Oy**, такъ какъ φ есть уголъ между нормалью къ элементу и нормалью къ этой плоскости; поэтому можемъ написать, что

$$dP_x = \gamma z\ dy\ d\xi.$$

Суммируя эти элементарныя давленія для всей площади **A'F'B'N'**, получимъ полное давленіе по оси x-овъ:

$$P_x = \int_{\xi=\xi_1}^{\xi=\xi_2} d\xi \int_{y=0}^{y=y_2} \gamma z\, dy \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

Изъ разсмотрѣнія контура **gODM**, въ которомъ уголъ **MTx** $= \alpha$, можемъ написать:

$$z = x\ cos\alpha + y\ sin\alpha.$$

Поэтому выраженіе (19) можно переписать такъ:

$$P_x = \gamma\, cos\alpha \int_{\xi_1}^{\xi_2} d\xi \int_0^{y_2} x\, dy + g\, sin\alpha \int_{\xi_1}^{\xi_2} d\xi \int_0^{y_2} y\, dy.$$

Первый двойной интегралъ представляетъ объемъ V призмы, образуемой стѣнкой **A'F'B'N'**, плоскостью проекціи ξ**Oy** и проектирующими поверхностями; второй двойной интегралъ представляетъ собою статическій моментъ проекціи всей стѣнки относительно оси **O**ξ; а эта величина равна площади F этой проекціи, умноженной на координату y_c ея центра тяжести **C**. Такимъ образомъ послѣднее уравненіе перепишется такъ:

$$P_x = \gamma\, V\, cos\alpha + \gamma\, F\, y_c\, sin\alpha.$$

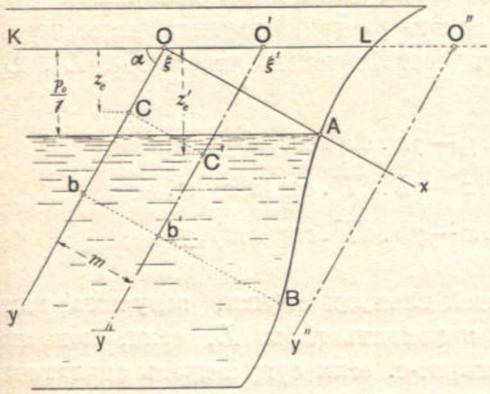
Замѣчая, наконецъ, что $y_c\, sin\alpha$ можно замѣнить черезъ z_c, т.-е. напоромъ въ центрѣ тяжести проекціи стѣнки, получимъ окончательно:

$$P_x = \gamma\, z_c F + \gamma\ V\ cos\alpha, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

т.-е.

давленіе на кривую стѣнку по заданному направленію равно давленію на проекцію этой стѣнки на плоскость, перпендикулярную къ этому на-

правленію, плюсъ проекція на заданное направленіе вѣса объема призмы между стѣнкой, проектирующими поверхностями и плоскостью проекцій, считая, что весь этотъ объемъ заполненъ жидкостью.



Фиг. 19.

Нѣкоторая условность въ выборѣ плоскости $O\xi y$ есть только кажущаяся. Въ самомъ дѣлѣ, пусть вмѣсто плоскости $O\xi y$ (фиг. 19), построенной по предыдущему, мы выбрали какую-нибудь другую плоскость $O'\xi'y'$, параллельную первой, на разстояніи m отъ нея. Понятно, что сама проекція F стѣнки на ту и другую плоскость останется одна и та же, и центры тяжести C и C' этихъ проекцій будутъ лежать на прямой $CC' \parallel Ox$, такъ что ихъ разстоянія до плоскости напора z_c и z'_c связаны соотношеніемъ:

$$z_c = z'_c - m\cos\alpha.$$

Подставляя это въ уравненіе (2_a), получимъ:

$$P_x = \gamma z'_c F + \gamma(V - mF)\cos\alpha = \gamma z'_c F + \gamma V'\cos\alpha$$

гдѣ V' есть объемъ между стѣнкой и новой плоскостью проекцій. Такъ какъ съ измѣненіемъ системы координатъ мы, конечно, не мѣняемъ числового значенія величины P_x, а въ результатѣ получаемъ выраженіе одного и того же вида, то заключаемъ, что выборъ плоскости $O\xi y$ совершенно произволенъ. При этомъ, конечно, нужно имѣть въ виду только слѣдующее обстоятельство: если плоскость проекцій лежитъ гдѣ нибудь въ $O'y'$, то въ ур-іи (20) второй членъ долженъ быть взятъ съ плюсомъ; если же плоскость проекцій взята гдѣ нибудь въ $O''y''$, т.-е. по другую сторону стѣнки, то, очевидно, второй членъ долженъ быть взятъ съ минусомъ. Это легко прослѣдить, повторяя выводъ ур-ія (20) въ предположеніи такого расположенія плоскостей проекціи и замѣтивъ, что въ этомъ случаѣ сама стѣнка будетъ лежать не въ томъ квадрантѣ осей координатъ, который отмѣченъ положительными x и y, а въ томъ, который соотвѣтствуетъ положительнымъ y-амъ и отрицательнымъ x-амъ.

Если въ случаѣ кривой стѣнки ищется полное давленіе, то вопросъ очень осложняется: приходится суммировать элементарныя расходящіяся силы. Такія силы, какъ извѣстно, приводятся, вообще говоря, къ одной силѣ и парѣ силъ. Путь остается тотъ же, а именно:

Выбираемъ какую-нибудь систему осей $Oxyz$ и

а) суммируемъ выраженія проекцій силъ, дѣйствующихъ на элементъ площади стѣнки dF:

$$dP_x = \gamma h \, . \, dF \, . \cos(n, x)$$
$$dP_y = \gamma h \, . \, dF \, . \cos(n, y)$$
$$dP_z = \gamma h \, . \, dF \, . \cos(n, z),$$

гдѣ n есть направленіе нормали къ каждому элементу стѣнки, а h есть перемѣнное для каждаго элемента вертикальное разстояніе его до плоскости напора;

b) суммируемъ затѣмъ выраженія моментовъ элементарныхъ силъ относительно каждой оси. Называя моментъ равнодѣйствующей пары черезъ L, а его проекціи на оси координатъ соотвѣтственно черезъ L_x, L_y, L_z, можемъ написать:

$$dL_x = \gamma h \,.\, dF \,.\, \cos(n, z) \,.\, y - \gamma h \,.\, dF \,.\, \cos(n, y) \,.\, z,$$
$$dL_y = \gamma h \,.\, dF \,.\, \cos(n, x) \,.\, z - \gamma h \,.\, dF \,.\, \cos(n, z) \,.\, x,$$
$$dL_z = \gamma h \,.\, dF \,.\, \cos(n, y) \,.\, x - \gamma h \,.\, dF \,.\, \cos(n, x) \,.\, y.$$

Суммируя эти 6 выраженій по всей площади стѣнки, получимъ какъ величину равнодѣйствующей P, такъ и моментъ пары L, если, конечно, поверхность стѣнки задана уравненіемъ, т.-е. если существуетъ аналитическое выраженіе зависимости между координатами точекъ поверхности и углами, которые образуетъ нормаль въ каждой точкѣ этой поверхности съ осями координатъ.

Замѣтимъ, что во всѣхъ случаяхъ мы вводили плоскость напора. Если на свободной поверхности и внѣ стѣнки давленіе одно и то же, напр., p_0, то этого дѣлать не слѣдуетъ, такъ какъ стѣнка въ этомъ случаѣ будетъ испытывать давленіе, соотвѣтствующее высотѣ $\frac{p_0}{\gamma}$, съ обѣихъ сторонъ. Вмѣсто плоскости напора нужно вводить тогда свободную поверхность жидкости.

Съ вопросомъ объ опредѣленіи давленія на стѣнку приходится часто сталкиваться, напр., при расчетѣ гидравлическихъ затворовъ, плотинъ, дамбъ, при опредѣленіи усилій и расчетѣ передачъ въ воротахъ и другихъ механизмахъ, служащихъ для подъема щитовъ, для открыванія шлюзовыхъ воротъ и т. п.

Само собою разумѣется, что если стѣнка не можетъ оказать такого же сопротивленія, каково на нее давленіе, то она сдвинется. Другое дѣло, если стѣнка замкнутая, т.-е. когда имѣемъ дѣло съ сосудомъ. Тогда стѣнка должна быть только прочна, чтобы не разрушиться,—о движеніи же ея въ горизонтальномъ направленіи не можетъ быть рѣчи. Въ самомъ дѣлѣ, для опредѣленія давленія въ горизонтальномъ направленіи на сосудъ, наполненный жидкостью, разсѣчемъ его мысленно вертикальною плоскостью на двѣ половины; эту плоскость примемъ за плоскость проекцій и примѣнимъ уравненіе (20) этого параграфа. Понятно, что въ этомъ случаѣ нужно положить $\alpha = 90^\circ$. Далѣе, и та, и другая половина дадутъ во всякомъ случаѣ одну и ту же величину проекціи площади F при одной и той же координатѣ z_c. Такимъ образомъ давленія на обѣ половины будутъ между собою равны, но, очевидно, прямо противоположны по знаку; слѣдовательно, они взаимно уравновѣсятся.

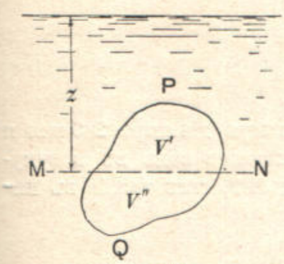
Если ищется вертикальное давленіе на сосудъ, то, разсѣкая попрежнему сосудъ на двѣ части какой нибудь горизонтальной плоскостью, составимъ отдѣльно выраженія давленій на нижнюю часть внизъ и на верхнюю вверхъ; при этомъ свободную поверхность слѣдуетъ разсматривать какъ стѣнку, ибо если на ней атмосфера давитъ на воду, то и обратно,— вода давитъ на атмосферу, какъ на всякую другую стѣнку. Кромѣ того, при составленіи давленія на нижнюю часть нужно положить $\alpha = 0$, при разсмотрѣніи верхней нужно считать $\alpha = 180^0$. Вычитая вторую величину изъ первой, найдемъ, что первые члены уравненія (20) дадутъ двѣ равныя и противоположныя по знаку величины; вторые же члены дадутъ просто γV, т.-е. вѣсъ жидкости въ сосудѣ.

Если рѣчь идетъ о давленіи на плоское горизонтальное дно, то, принимая его за плоскость проекцій, найдемъ, что объемъ V призмы между дномъ и этой плоскостью равенъ нулю, и давленіе на него есть $\gamma F z_c$, гдѣ F есть площадь дна, а z_c — глубина жидкости въ сосудѣ, т.-е. получимъ положеніе, которое носитъ названіе гидростатическаго парадокса:

давленіе на дно сосуда не зависитъ отъ формы сосуда.

Примѣнимъ еще уравненіе (20) этого параграфа къ опредѣленію давленія жидкости на погруженное въ нее тѣло.

Понятно, что давленіе по горизонтали равно нулю, совершенно такъ же, какъ и для сосуда, наполненнаго жидкостью.



Фиг. 20.

Для опредѣленія давленія по вертикали употребимъ тотъ же пріемъ (фиг. 20): разсѣчемъ погруженное въ жидкость тѣло горизонтальной плоскостью **MN** на двѣ части и назовемъ объемъ верхней части черезъ V', а нижней — черезъ V''. Выразимъ давленіе на верхнюю часть сверху внизъ по ур-ію (20), принимая плоскость **MN** за плоскость проекцій и замѣчая, что она лежитъ внѣ стѣнки **MPN**. Получаемъ для него выраженіе:

$$F\gamma z - \gamma V',$$

причемъ уголъ $\alpha = 0$, а буквой F обозначена площадь проекціи стѣнки **MPN**.

Далѣе, давленіе на стѣнку **MQN** снизу вверхъ получимъ, подобно предыдущему; оно равно

$$F\gamma z + \gamma V'.$$

Здѣсь, въ силу разсматриваемаго направленія, въ ур-іи (20) нужно положить $\alpha = 180^0$ и, кромѣ того, поставить передъ послѣднимъ членомъ минусъ, такъ какъ плоскость проекцій лежитъ внѣ стѣнки; въ итогѣ передъ послѣднимъ членомъ станетъ $+$. Вычитая второе выраженіе изъ перваго,—такъ какъ они даютъ силы, разно направленныя,—получимъ полное воздѣйствіе жидкости на погруженное въ нее тѣло, оцѣниваемое выраженіемъ

$$-\gamma(V' + V'').$$

Знакъ минусъ показываетъ, что это давленіе противоположно направленію силы тяжести.

Подобное же разсужденіе можетъ быть примѣнено, если плоскость проекцій принять на свободной поверхности и спроектировать на нее поверхность тѣла; придется выразить отдѣльно давленія на тѣ части поверхности тѣла, которыя лежатъ выше и ниже линіи соприкосновенія проектирующаго цилиндра съ поверхностью тѣла. Результатъ получится тотъ же.

Такъ получается извѣстный принципъ Архимеда:

давленіе жидкости на вполнѣ погруженное въ нее тѣло равно вѣсу жидкости въ объемѣ тѣла и направлено снизу вверхъ.

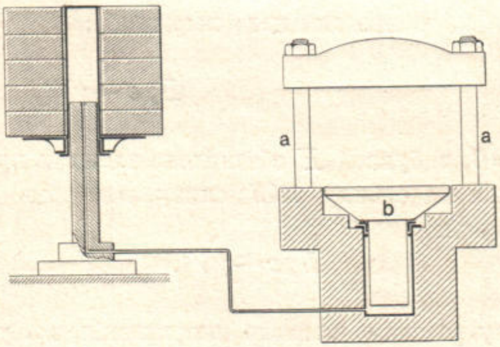
Путемъ подобныхъ же разсужденій легко распространить этотъ принципъ и на плавающія тѣла.

Заканчивая этимъ отдѣлъ гидростатики, отмѣтимъ, что, во избѣжаніе увеличенія размѣровъ курса, мы не касаемся нѣкоторыхъ важныхъ вопросовъ, имѣющихъ преимущественно спеціальный интересъ. Сюда относятся вопросы о барометрическомъ нивеллированіи и объ устойчивости равновѣсія плавающихъ тѣлъ. Отсылаемъ интересующихся къ названнымъ выше курсамъ, особенно Евневича и Grashof'а.

Послѣдній вопросъ, въ примѣненіи къ судостроенію, подробно трактуется въ соотвѣтствующихъ курсахъ, напр., въ сочиненіи Pollard et Dudebout, Théorie du navire и др.

Задачи.

1. Имѣется аккумуляторъ (фиг. 21), скалка котораго имѣетъ діаметръ 200 *mm* и нагружена грузомъ въ 15000 *kgr*. Подъ какимъ давленіемъ находится вода въ аккумуляторѣ при его равномѣрномъ спускѣ и при равномѣрномъ подъемѣ, если треніе въ на-

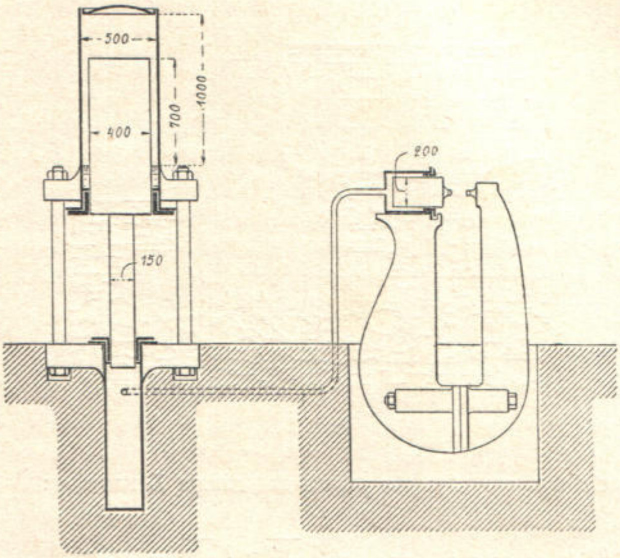


Фиг. 21.

бивкѣ сальника въ обоихъ случаяхъ имѣетъ одну и ту же величину и равно *F kgr*? Какое усиліе воспринимается болтами *a* гидравлическаго пресса, если его скалка имѣетъ діаметръ 800 *mm*? Вѣсъ стола *b* равенъ *G kgr*.

2. Въ дифференціальномъ аккумуляторѣ діаметръ верхней части скалки равенъ 400 *mm*, діаметръ нижней части—150 *mm*. Скалка стоитъ въ положеніи, указанномъ на

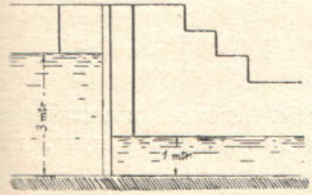
фиг. 22. Въ верхней части воздушнымъ насосомъ нагнетенъ воздухъ до давленія 30 *at*. Нижній цилиндръ соединенъ трубою съ цилиндромъ гидравлической клепальной машины, скалка котораго имѣетъ 200 *mm* въ діаметрѣ. Опредѣлить, какое усиліе можетъ



Фиг. 22.

развить клепальная машина сейчасъ и каково оно будетъ, если, послѣ нѣсколькихъ ходовъ, безъ подкачиванія воды и воздуха, скалка аккумулятора опустится на 500 *mm*.— Верхнюю крышку аккумулятора считать плоской; треніемъ въ сальникахъ пренебрегать.

Отв. Во второмъ случаѣ 42300 *kgr*.



Фиг. 23.

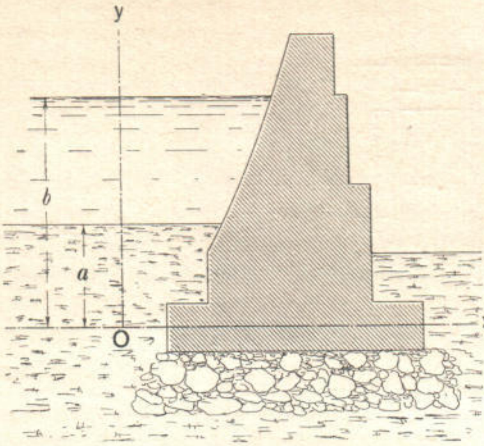
3. Въ шлюзовой камерѣ, запертой воротами (фиг. 23), горизонты воды располагаются, какъ указано на чертежѣ. Опредѣлить по величинѣ и направленію полное давленіе на оси **B** и **C** вращенія воротъ, считая, что ворота соприкасаются между собою по вертикальной прямой **A**. Найти, съ какою силою одно полотнище прижато къ другому по этому ребру **A**.

Отв. Давленіе въ осяхъ вращенія ∞ 9200 *kgr*; оно образуетъ съ направленіемъ **BC** уголъ, равный $arc\cos\frac{1,5}{1,6}\cdot$ Давленіе по ребру **A** ∞ 9200 *kgr*.

4. На вертикальной плоской стѣнкѣ выдѣлена часть въ видѣ круга діаметромъ d; центръ круга лежитъ на глубинѣ d отъ свободной поверхности. Показать, что центръ давленія на эту круглую часть стѣнки лежитъ на глубинѣ $^{17}/_{16}$ діаметра круга и что давленіе на этотъ кругъ въ 1,5 раза больше вѣса воды въ объемѣ шара, діаметръ котораго равенъ діаметру круга.

5. Опредѣлить величину и направленіе полнаго давленія на плотину (фиг. 24), стѣнка которой ограничена параболой; уравненіе ея относительно осей **xOy** есть: $x^2 = 4y$. Вершина **O** параболы лежитъ на 9 *mtr* (b) ниже горизонта воды въ прудѣ; дно пруда

(горизонтальное) лежитъ на 4 *mtr* (a) надъ вершиною параболы; ось параболы вертикальна. Разсмотрѣть плотину длиною въ 1 *mtr*.



Фиг. 24.

Отв. Проекціи полнаго давленія равны для длины L плотины:

$$X = L\gamma \frac{(b-a)^2}{2} = 12500\,L\,kgr;\; Y = L\gamma \frac{\sqrt{2pb} - \sqrt{2pa}}{3}(2b - \sqrt{ab} - a) = 5333\,L\,kgr,$$

гдѣ p есть параметръ параболы. Координаты x_0 и y_0 точки пересѣченія равнодѣйствующей съ параболой опредѣлятся изъ ур-ій:

$$y_0 X - x_0 Y = L\gamma \frac{(b-a)^2}{6}(b + 2a - 3p)$$

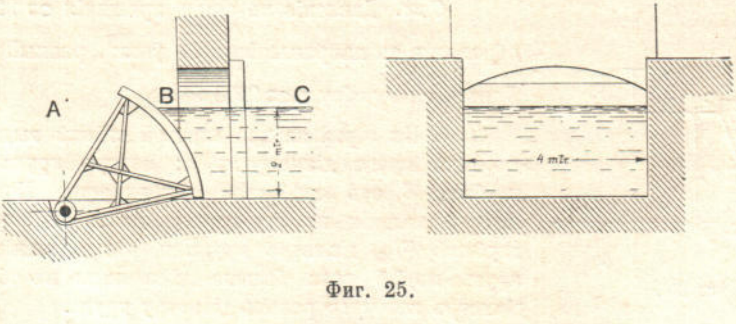
и

$$4y_0 = x_0^2,$$

откуда

$$x_0 = 4{,}78\ mtr,\ y_0 = 5{,}71\ mtr.$$

6. Входъ въ турбинную камеру *A* (фиг. 25) загражденъ щитомъ, вращающимся около горизонтальной оси. Радіусъ щита $= 3$ *mtr*. Найти положеніе оси щита, при



Фиг. 25.

которомъ давленіе воды не открываетъ щита, но и не прижимаетъ его ко дну канала. Вѣсомъ щита пренебречь. Найти полное давленіе на ось щита, если она погружена подъ горизонтомъ *BC* на 2,25 *mtr*.

Отв. Принимая во вниманіе, что

$$\int \frac{y\,dy}{\sqrt{r^2-y^2}} = -\sqrt{r^2-y^2} + C,$$

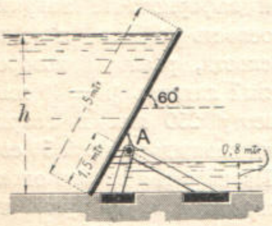
$$\int \frac{y^2\,dy}{\sqrt{r^2-y^2}} = \int r^2 \frac{dy}{\sqrt{r^2-y^2}} - \int \frac{(r^2-y^2)\,dy}{\sqrt{r^2-y^2}},$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{r^2-y^2}} = arc\,sin\,\frac{y}{r} + C,$$

$$\int \sqrt{r^2-y^2}\,\,dy = \frac{y}{2}\sqrt{r^2-y^2} + \frac{r^2}{2}\,arc\,sin\,\frac{y}{r} + C,$$

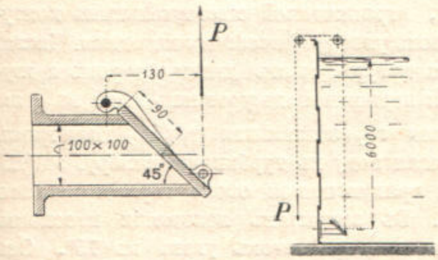
находимъ, что горизонтальная проекція полнаго давленія равна 8000 *kgr*, а вертикальная 2650 *kgr*.

7. Плоскій прямоугольный щитъ плотины Шануана (фиг. 26) можетъ вращаться около горизонтальной оси *A*, положенной на неподвижныхъ козлахъ. Закрытый щитъ образуетъ съ горизонтомъ уголъ въ 60^0; длина щита равна 5 *mtr*; ось вращенія отстоитъ отъ дна на 1,5 *mtr*, считая по щиту. Въ отводящемъ каналѣ вода стоитъ на глубинѣ 0,8 *mtr* надъ горизонтальнымъ нижнимъ ребромъ щита. Найти ту глубину h пруда, начиная съ которой, въ случаѣ повышенія уровня въ прудѣ, щитъ долженъ опрокинуться давленіемъ воды?



Фиг. 26.

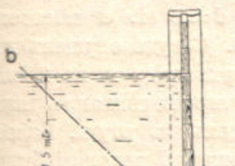
Отв. Задача приводитъ къ рѣшенію кубическаго уравненія $h^3 - 3{,}9\,h^2 + 1{,}984 = 0$. Рѣшая его по формуламъ Кардана, находимъ одинъ положительный корень $h_1 = 3{,}756$ *mtr*. Два другіе корня, какъ отрицательные, не соотвѣтствуютъ вопросу.



Фиг. 27.

8. Въ нефтяномъ резервуарѣ, на глубинѣ 6 *mtr* отъ поверхности, поставленъ клапанъ (фиг. 27). Найти усиліе P, необходимое для подъема клапана. Удѣльный вѣсъ нефтяныхъ остатковъ = 0,93.

9. Въ условіяхъ предыдущаго случая опредѣлить толщину желѣзныхъ листовъ, изъ которыхъ долженъ быть склепанъ резервуаръ, если вся его высота = 6,4 *mtr*, ширина листовъ (между центрами швовъ) = 0,8 *mtr* и діаметръ резервуара = 10 *mtr*. Считать резервуаръ наполненнымъ до верхняго края. Имѣются листы, толщины которыхъ измѣняются черезъ каждую $^1/_{16}$ долю дюйма. Допускаемое напряженіе разрыва въ цѣломъ листѣ = 5 *kgr/mm²*.



Фиг. 28.

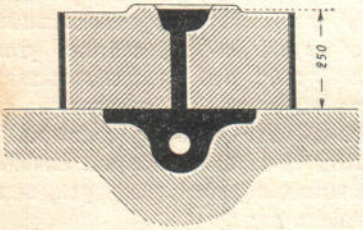
10. Опредѣлить усиліе, необходимое для подъема шлюзового щита (фиг. 28), предъ которымъ вода стоитъ на высотѣ = = 1,5 *mtr*. Разстояніе между сваями, направляющими щитъ, равно 2,5 *mtr*. Концы досокъ окованы желѣзомъ; на сваѣ положена желѣзная планка. Вѣсомъ щита пренебречь. Полагая, что щитъ составленъ изъ горизонтальныхъ досокъ шириною въ 250 *mm*, найти ихъ необходимую толщину внизу и вверху щита.

11. Въ условіяхъ предыдущей задачи измѣнить положеніе щита, предполагая, что онъ наклоненъ по линіи *ab* (фиг. 28), образуя съ горизонтомъ уголъ 45^0. Вѣсомъ щита пренебречь. Найти усиліе, необходимое для открыванія щита.

12. Металлическій шлюзовой щитъ долженъ имѣть размѣры 10 *mtr* ширины и 8 *mtr* высоты. Съ одной его стороны вода стоитъ въ уровень съ верхней кромкой, съ другой— воды совсѣмъ нѣтъ. Предполагается составить остовъ щита изъ 10 одинаковыхъ фермъ. Найти ихъ расположеніе изъ того условія, чтобы всѣ фермы были одинаково нагружены,— для чего нужно разбить весь щитъ на части равнаго давленія и помѣстить фермы въ центрахъ давленія каждой такой части.

Отв. Давленіе на каждую ферму = 32000 *kgr*. Линіи раздѣла частей равнаго сопротивленія послѣдовательно отстоятъ отъ верхней кромки щита на 2,530; 3,580; 4,380; 5,060; 5,650; 6,195; 6,690; 7,155 и 7,590 *mtr*. Фермы должны послѣдовательно находиться въ разстояніяхъ отъ верхней кромки 1,69; 3,09; 4,00; 4,75; 5,38; 5,95; 6,46; 6,93; 7,39 и 7,81 *mtr*.

13. Доказать, что если на омываемой водою части высоты щита описать, какъ на діаметрѣ, окружность, раздѣлить діаметръ на n равныхъ частей, изъ точекъ дѣленія возставить перпендикуляры до пересѣченія съ окружностью и эти точки соединить съ концомъ діаметра, то полученныя n хордъ даютъ разстоянія отъ верхней кромки щита до линій, дѣлящихъ щитъ на части равнаго давленія.



Фиг. 29.

14. Расплавленнымъ чугуномъ наливается опока (фиг. 29), въ которой заформованъ, наприм., подшипникъ такъ, что плоскость разъема взята въ его нижней опорной плоскости, размѣры которой суть 150×400 *mm*. Круглый литникъ ($d = 40$ *mm*) наполненъ чугуномъ на высоту 250 *mm* и сверху расширенъ въ ямку, средняя площадь которой 50 cm^2 и средняя глубина 50 *mm*. Пренебрегая вѣсомъ опоки и земли въ ней, опредѣлить, какой грузъ нужно на нее [положить, чтобы ее не подняло. Внутренній стержень (глиняный) имѣетъ $d = 50$ *mm*, а $l = 150$ *mm*. Найти напряженіе изгиба въ немъ. Уд. вѣсъ расплавленнаго чугуна = 7; уд. вѣсъ глины = 2.

Отв. Около 123 *kgr*; если длина знаковъ 40 *mm*, то искомое напряженіе = 69 *kgr*/cm^2.

Фиг. 30.

15. Разыскать центръ давленія на часть вертикальной стѣнки, ограниченной многоугольнымъ контуромъ (фиг. 30), пользуясь графическими методами. Числа, поставленныя на фигурѣ, даютъ длины сторонъ и глубины погруженія вершинъ подъ уровнемъ воды въ *mm*.

16. Круглая горизонтальная труба, діаметромъ 1,5 *mtr*, подающая воду въ турбинную камеру, закрывается щитомъ, вращающимся около горизонтальнаго діаметра трубы. Въ закрытомъ положеніи плоскость щита образуетъ съ горизонтомъ уголъ въ 75^0. Ось трубы лежитъ на 4 *mtr* ниже горизонта въ подводящемъ каналѣ. Опредѣлить, какой моментъ нужно приложить къ оси щита, чтобы его открыть, если за щитомъ давленіе атмосферное?

Отв. Около 267 *kgr.mtr*.

17. Къ плоскому дну цилиндрическаго сосуда, діаметромъ $d = 5$ *cm* и высотою 10 *cm*, прикрѣплена трубка, открытая на своемъ нижнемъ концѣ. Сосудъ опущенъ въ ртуть такъ, что его верхняя кромка выступаетъ надъ свободною поверхностью ея на 2 *cm*. Послѣ этого на сосудъ навертывается герметическая крышка и его поднимаютъ изъ ртути, оставляя трубку вертикальной и погруженной нижнимъ концомъ въ ртуть. Какое вертикальное перемѣщеніе нужно дать сосуду, чтобы высота поднятой колонны была 30 *cm*? Высота барометрическаго давленія во время опыта равна 76 *cm*.

Отв. 33,3 *cm*.

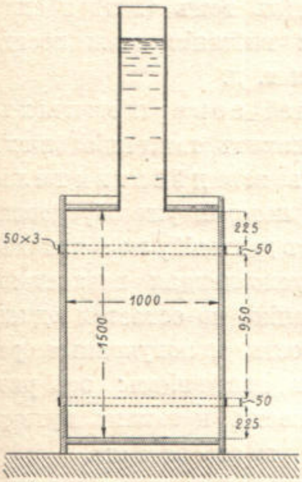
18. Въ условіяхъ предыдущей задачи добавить, что подъемъ сосуда и трубки дѣлается помощью невѣсомой нити, перекинутой черезъ блокъ, и гири. Найти необходимый

вѣсъ гири для удержанія въ равновѣсіи системы въ вышеуказанномъ положеніи, пренебрегая вѣсомъ сосуда и трубки и считая, что діаметръ трубки $= 2$ *cm*.

Отв. 2,34 *kgr*.

19. Въ герметически замкнутомъ резервуарѣ, поставленномъ на опорахъ, сдѣлано въ днѣ круглое отверстіе, діаметромъ 60 *mm*; къ этому отверстію примыкаетъ вертикальная труба того же діаметра, опущенная нижнимъ концомъ въ воду. Размѣры резервуара— площадь основанія 2×2 *mtr*, высота 3 *mtr*. Нижнее дно резервуара стоитъ на высотѣ 5 *mtr* надъ уровнемъ воды, куда опущена труба. Весь резервуаръ сплошь залитъ водою. Опредѣлить давленіе на опоры и найти, какъ оно измѣнится, если отнять трубу и закрыть отверстіе крышкой, оставляя резервуаръ заполненнымъ водою сплошь. Вѣсомъ резервуара, крышки и трубы пренебречь.

Отв. Въ первомъ случаѣ давленіе на опоры равно 7414 *kgr*, во второмъ оно на 1414 *kgr* меньше.



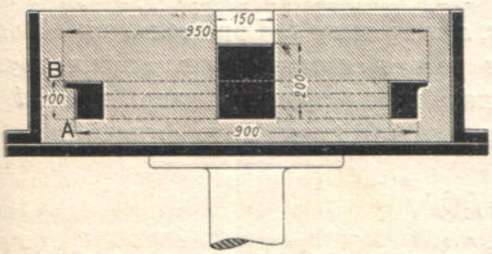
Фиг. 31.

20. Деревянная цилиндрическая бочка стянута двумя желѣзными обручами. Размѣры бочки, обручей и ихъ расположеніе указаны на чертежѣ (фиг. 31). Въ верхнее дно вставлена труба. До какой высоты въ трубѣ можно наполнить эту систему водою, чтобы напряженіе матеріала въ нижнемъ обручѣ не превосходило 6 kgr/mm^2.

Отв. На 2,775 *mtr* надъ нижнимъ дномъ бочки.

21. Найти толщину деревянныхъ досокъ бочки предыдущей задачи изъ условія, чтобы въ опасномъ сѣченіи напряженіе не превосходило 0,8 kgr/mm^2 и чтобы наполненіе бочки соотвѣтствовало условіямъ предыдущей задачи?

Отв. 38 *mm*.



Фиг. 32.

22. Опока (фиг. 32), въ которой залитъ бандажъ, приводится во вращеніе со скоростью 250 оборотовъ въ 1 мин. Найти давленіе, подъ которымъ находится расплавленный чугунъ, уд. вѣса 7, въ точкахъ **A** и **B**. Литникъ — круглый цилиндръ на оси опоки.

Отв. Въ точкѣ **A** давленіе больше атмосфернаго на 5,09 *at*; въ точкѣ — на 5,6 *at*.

23. Цилиндрическій сосудъ, съ радіусомъ $= 2$ *cm* и высотою $= 10$ *cm*, наполненъ до половины водою. Съ какимъ предѣльнымъ числомъ оборотовъ его можно вращать около его вертикальной геометрической оси, чтобы вода изъ него не выливалась?

Отв. Около 475 оборотовъ.

§ 6. Уравненія движенія совершенной жидкости.

Приступая къ постановкѣ задачи гидродинамики, замѣтимъ, что, по принципу Д'Аламбера, всякое движеніе можно разсматривать какъ равновѣсіе, если къ внѣшнимъ дѣятельнымъ силамъ прибавить всѣ силы инерціи.

Вообразивъ движущуюся жидкую массу остановленной въ какой-нибудь моментъ времени, мы, повторивъ все сказанное о гидростатическомъ давленіи, придемъ къ заключенію, что и въ движущейся совершенной жидкости во всякой точкѣ ея существуетъ давленіе, называемое гидродинамическимъ, которое для всякаго момента времени имѣетъ въ каждой точкѣ вполнѣ опредѣленную величину, не зависящую отъ направленія, въ которомъ оно разсматривается. Проводя поверхность черезъ всѣ точки, подверженныя въ данный моментъ одному и тому же давленію, получимъ мгновенную поверхность постояннаго давленія, или, по аналогіи съ гидростатикой,—*мгновенную поверхность уровня*. Свойства этихъ поверхностей тѣ же, что и въ случаѣ покоя: ихъ уравненія получимъ, приравнивая потенціальныя функціи внѣшнихъ силъ (въ томъ числѣ и силъ инерціи) той или иной постоянной величинѣ; эти внѣшнія силы всегда нормальны къ мгновеннымъ поверхностямъ уровня и т. д.

Замѣтимъ, что это справедливо для жидкостей совершенныхъ, не способныхъ ни выдерживать, ни оказывать никакихъ тангенціальныхъ напряженій или разрывающихъ усилій. Между тѣмъ всѣ дѣйствительныя жидкости обладаютъ нѣкоторою вязкостью, которая уже обусловливаетъ возможность появленія не только нормальныхъ давленій, но и какихъ-нибудь напряженій вообще. Такъ какъ сила, обусловленная вязкостью, вообще неизвѣстна ни по величинѣ, ни по направленію, то остается одинъ путь: разсмотрѣть движеніе совершенной жидкости и полученные результаты сравнить съ дѣйствительно наблюдаемымъ движеніемъ; всѣ различія должны быть отнесены за счетъ вліянія вязкости, и такимъ путемъ можно будетъ составить себѣ представленіе о томъ, что это за сила.

Въ движущейся жидкости насъ могутъ, вообще, интересовать слѣдующія величины: скорость каждой точки жидкости во всякій данный моментъ времени, плотность ея и давленіе. Эти величины вообще измѣняются какъ въ пространствѣ, такъ и во времени, т.-е. представляютъ собою функціи четырехъ перемѣнныхъ,—координатъ x, y, z и времени t. При этомъ, въ самомъ общемъ случаѣ, всѣ эти перемѣнныя нельзя считать независящими другъ отъ друга, — за независимое перемѣнное можно принять, напр., время t, и тогда остальныя перемѣнныя представятся нѣкоторыми его функціями:

$$\left.\begin{aligned} x &= f_1(t) \\ y &= f_2(t) \\ z &= f_3(t) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Это будутъ уравненія траекторій отдѣльныхъ жидкихъ точекъ, если положить, что первыя производныя по времени отъ функцій f представляютъ собою компоненты u, v и w отъ скорости V по осямъ координатъ, т.-е., если положить, что существуютъ соотношенія:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d(f_1)}{dt} &= \frac{dx}{dt} = u \\ \frac{d(f_2)}{dt} &= \frac{dy}{dt} = v \\ \frac{d(f_3)}{dt} &= \frac{dz}{dt} = w \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Такимъ образомъ, принявъ подобную зависимость, мы получимъ уравненія, связывающія всѣ величины такъ, что мы будемъ имѣть возможность слѣдить за движеніемъ каждой отдѣльной частицы. Принимая, далѣе, постояннымъ t, мы изъ тѣхъ же уравненій сможемъ опредѣлить обстоятельства движенія въ каждой точкѣ пространства, занятаго жидкостью въ данный моментъ времени. Наконецъ, принимая постоянными координаты x, y и z, т.-е. сосредоточивъ вниманіе на опредѣленной точкѣ пространства, мы будемъ имѣть возможность выяснить на основаніи этихъ же уравненій, какими скоростями, давленіями и пр. будутъ обладать разныя частицы жидкости, попадающія въ разные моменты времени въ эту точку пространства, т.-е. получимъ вполнѣ общее рѣшеніе задачи о движеніи жидкости.

Замѣтимъ, что, устанавливая для жидкостей зависимость, выражаемую уравненіями (1), мы не ставимъ никакихъ ограниченій относительно вида функцій, входящихъ въ составъ этихъ уравненій, кромѣ лишь того, что все это функціи непрерывныя, — самый же видъ этихъ функцій остается неизвѣстнымъ. Отмѣтимъ, однако, что разъ существованіе такой зависимости установлено, то величины p, ϱ, u, v и w являются функціями отъ функцій, а потому полная производная, напримѣръ, давленія p по времени напишется такъ (полныя производныя, въ отличіе отъ частныхъ, будемъ заключать въ скобки):

$$\left(\frac{dp}{dt}\right)=\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{\partial p}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial p}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{\partial p}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt}$$

или, на основаніи равенствъ (2):

$$\left(\frac{dp}{dt}\right)=\frac{\partial p}{\partial t}+u\frac{\partial p}{\partial x}+v\frac{\partial p}{\partial y}+w\frac{\partial p}{\partial z}.$$

Теперь перейдемъ къ составленію уравненій движенія жидкости, находящейся подъ дѣйствіемъ объемной силы (т.-е. силы, пропорціональной массѣ), проекціи которой по осямъ координатъ, отнесенныя къ единицѣ массы, обозначимъ черезъ X, Y, Z. Воспользуемся выведенными выше уравненіями равновѣсія жидкости подъ вліяніемъ такихъ силъ (см. ур. (1) стр. 9):

$$\frac{\partial p}{\partial x}=\varrho X,$$

$$\frac{\partial p}{\partial y}=\varrho Y,$$

$$\frac{\partial p}{\partial z}=\varrho Z,$$

причемъ, сообразно съ требованіями вопроса, по принципу д'Аламбера, добавимъ сюда еще силы инерціи, приходящіяся на единицу массы,—иными словами, ускоренія по соотвѣтственнымъ осямъ координатъ, взятыя съ обратными знаками. Какъ извѣстно, ускореніе есть полная производная скорости по времени, т.-е. для оси x-овъ это есть $\left(\frac{du}{dt}\right)$, для оси y-овъ $\left(\frac{dv}{dt}\right)$, для оси z-овъ $\left(\frac{dw}{dt}\right)$. Такимъ образомъ условія динамическаго равновѣсія жидкой частицы, имѣющей координаты x, y, z, или, что то же, *уравненія движенія жидкости*, напишутся такъ:

$$\frac{\partial p}{\partial x}=\varrho\left[X-\left(\frac{du}{dt}\right)\right],$$

$$\frac{\partial p}{\partial y}=\varrho\left[Y-\left(\frac{dv}{dt}\right)\right],$$

$$\frac{\partial p}{\partial z}=\varrho\left[Z-\left(\frac{dw}{dt}\right)\right].$$

Дѣля всѣ эти уравненія на ϱ, внося составленныя на основаніи сказаннаго выше выраженія полныхъ производныхъ $\left(\frac{du}{dt}\right)$, $\left(\frac{dv}{dt}\right)$ и $\left(\frac{dw}{dt}\right)$, и соотвѣтственно группируя члены, получаемъ:

$$\left.\begin{aligned}
X-\frac{1}{\varrho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}&=\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z},\\
Y-\frac{1}{\varrho}\cdot\frac{\partial p}{\partial y}&=\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z},\\
Z-\frac{1}{\varrho}\cdot\frac{\partial p}{\partial z}&=\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z},
\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ (3)$$

Эти три уравненія были даны Эйлеромъ въ 1755 году въ Трудахъ Берлинской Академіи Наукъ и Литературы и извѣстны въ наукѣ подъ его именемъ, въ отличіе отъ другого вида этихъ уравненій, даннаго позднѣе Лагранжемъ.

Если внѣшнія силы X, Y, Z даны, то уравненія (3) представятъ собою систему трехъ уравненій съ пятью неизвѣстными ϱ, p, u, v и w, такъ что для полнаго рѣшенія поставленнаго вопроса мы должны составить еще два самостоятельныхъ уравненія. Первое изъ нихъ получимъ изъ разсмотрѣнія характернаго свойства данной жидкости, и если имѣемъ дѣло съ капельной, несжимаемой жидкостью, то это свойство выразится уравненіемъ:

$$\varrho=const.\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ (4')$$

Если же данная жидкость газообразна, то плотность ея измѣняется вмѣстѣ съ давленіемъ, причемъ законъ этого измѣненія зависитъ отъ того, сообщается (или отнимается) жидкости тепло или нѣтъ, и если да, то какимъ образомъ. Мы ограничимся случаемъ постоянной температуры,—здѣсь зависимость между удѣльнымъ объемомъ $\overline{v} = \frac{1}{g\varrho}$ и давленіемъ p выражается закономъ Маріотта:

$$p\overline{v} = \frac{p}{g\varrho} = const. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4'')$$

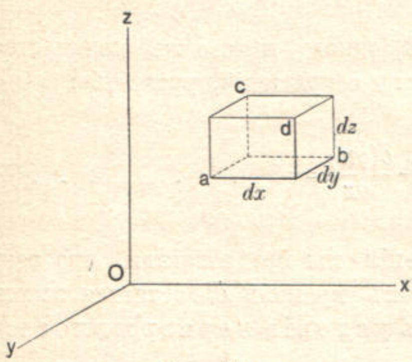
Если бы процессъ движенія газообразной жидкости протекалъ адіабатически, т.-е., хотя и при перемѣнной температурѣ, но безъ отнятія или сообщенія ей тепла откуда бы то ни было, то, какъ это извѣстно изъ термодинамики, удѣльный объемъ $\overline{v}$ измѣнялся бы съ давленіемъ p по закону

$$p\overline{v}^k = const = p\left(\frac{1}{g\varrho}\right)^k \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4''')$$

гдѣ k для воздуха при обыкновенныхъ условіяхъ имѣетъ значеніе 1,41.

Итакъ, въ дополненіе системы (3) мы имѣемъ возможность ввести одно изъ ур-ій: (4′), (4″) или (4‴), характеризующее свойство жидкости или процесса,—это будетъ четвертое недостающее уравненіе.

Послѣднее недостающее уравненіе, пятое, получимъ, вводя еще одно ограничивающее условіе, а именно,—*условіе неразрывности жидкости*, т.-е. будемъ разсматривать только такія движенія ея, при которыхъ внутри жидкости не образуется пространствъ, ею незаполненныхъ. Это условіе аналитически выразится такъ:



Фиг. 33.

Вообразимъ элементарный, неподвижный въ пространствѣ, параллелепипедъ ***abcd***, съ ребрами dx, dy, dz, соотвѣтственно параллельными осямъ координатъ (фиг. 33). Пусть черезъ него протекаетъ разсматриваемая жидкость, причемъ въ моментъ времени t и въ точкѣ ***a*** скорости жидкости по осямъ координатъ пусть будутъ u, v и w, а плотность ϱ. Въ промежутокъ времени dt черезъ грань ***ac*** внутрь параллелепипеда войдетъ масса жидкости, равная

$$\varrho\, dy\, dz\, u\, dt,$$

(мы пренебрегаемъ безконечно малыми высшаго порядка). Черезъ грань ***bd***, гдѣ скорость и плотность другія, за то же время уйдетъ масса жидкости:

$$\left[\varrho u + \frac{\partial(\varrho u)}{\partial x} dx\right] dy\, dz\, dt.$$

Прибыль массы жидкости за время dt по направленію оси x-овъ есть разность этихъ двухъ количествъ, т.-е.

$$-\frac{\partial(\varrho u)}{\partial x}\,dx\,dy\,dz\,dt.$$

Написавъ подобныя же выраженія прибыли черезъ грани ***cb*** и ***ad***, а также черезъ грани ***ab*** и ***cd***, и сложивъ ихъ, получимъ полную прибыль массы за время dt въ этомъ неизмѣнившемся за этотъ промежутокъ времени объемѣ пространства:

$$-dx\,dy\,dz\,dt\left[\frac{\partial(\varrho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\varrho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\varrho w)}{\partial z}\right]\quad\ldots\ldots\quad(\mathbf{A})$$

Ту же прибыль можно выразить иначе: въ моментъ t масса заключенной въ объемѣ ***abcd*** жидкости была равна $\varrho\,dx\,dy\,dz$; черезъ промежутокъ времени dt она измѣнилась на $\frac{\partial(\varrho\,dx\,dy\,dz)}{\partial t}dt$. Но такъ какъ это измѣненіе массы произошло не за счетъ измѣненія объема, а только за счетъ измѣненія плотности, то произведеніе $dx\,dy\,dz$, какъ постоянное (объемъ разсматриваемаго элемента), можно вынести изъ подъ знака дифференціала, послѣ чего вышенаписанное измѣненіе массы за время dt, т.-е прибыль массы за время dt, выразится черезъ

$$dx\,dy\,dz\,dt\frac{\partial\varrho}{\partial t}\,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(\mathbf{B})$$

Сравнивая теперь выраженія (A) и (B) одного и того же количества жидкости, находимъ, послѣ соотвѣтствующихъ сокращеній, уравненіе:

$$\frac{\partial\varrho}{\partial t}+\frac{\partial(\varrho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\varrho u)}{\partial y}+\frac{\partial(\varrho w)}{\partial z}=0\quad\ldots\ldots\ldots\quad(\mathbf{5})$$

Такъ какъ при выводѣ этого уравненія мы предполагали, что весь объемъ параллелепипеда за весь промежутокъ времени dt остается заполненнымъ жидкостью, то это уравненіе и есть условіе неразрывности; оно, какъ и ур-ія (3), дано также Эйлеромъ.

Напишемъ его, раскрывая производныя произведеній. Получаемъ:

$$\frac{\partial\varrho}{\partial t}+u\frac{\partial\varrho}{\partial x}+v\frac{\partial\varrho}{\partial y}+w\frac{\partial\varrho}{\partial z}+\varrho\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=0\ ^{*)}\quad\ldots\quad(\mathbf{5'})$$

---

*) По поводу этого уравненія сдѣлаемъ слѣдующее замѣчаніе. Первые четыре его члена представляютъ полную производную $\left(\frac{d\varrho}{dt}\right)$ плотности по времени, т.-е. характеризуютъ измѣненіе плотности въ единицу времени. Если какое-нибудь тѣло занимаетъ все время нѣкоторый объемъ пространства сплошь, не оставляя въ немъ пустоты, то, понятно, всякое измѣ-

Для капельной жидкости имѣемъ

$$\varrho = const,$$

а потому для нея условіе неразрывности выражается уравненіемъ:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (5'')$$

неніе плотности, чѣмъ бы оно ни было вызвано,—растяженіемъ, давленіемъ, нагрѣваніемъ и т. д.,—можетъ произойти только за счетъ соотвѣтствующаго измѣненія удѣльнаго объема. Это соотвѣтствіе и устанавливается послѣднимъ уравненіемъ. Перепишемъ его такъ:

$$\frac{\left(\frac{d\varrho}{dt}\right)}{\varrho}=-\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right) \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (C)$$

Первая часть этого ур-ія есть относительное измѣненіе плотности; вторая часть, слѣдовательно, представляетъ относительное измѣненіе удѣльнаго объема, т.-е. то, что называется „коэффиціентомъ кубическаго расширенія (или сжатія)". Слѣдовательно, это уравненіе представляетъ собою формулировку положенія, что относительное увеличеніе плотности равно относительному уменьшенію удѣльнаго объема. Обозначая коэффиціентъ кубическаго расширенія буквой Θ, получаемъ соотношеніе

$$\Theta=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}.$$

Разсматривая механическій смыслъ выраженія

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z},$$

легко притти къ заключенію, что это, дѣйствительно, есть не что иное, какъ коэффиціентъ кубическаго расширенія. Въ самомъ дѣлѣ, выяснимъ смыслъ выраженія $\frac{\partial u}{\partial x}$. Пусть въ данный моментъ двѣ точки деформируемой системы находятся на линіи, параллельной оси x-овъ, на разстояніи dx между собою. Въ этотъ моментъ ихъ скорости по оси x-овъ отличаются между собою только потому, что координаты x этихъ точекъ имѣютъ разныя значенія. Поэтому скорость второй точки $(u+du)$ можетъ быть выражена по скорости u первой точки такъ:

$$u+du=u+\frac{\partial u}{\partial x}dx.$$

Двигаясь съ разными скоростями, эти точки стремятся разойтись (или сблизиться), удлиняя (или сжимая) частицы, заключающіяся между ними (если нѣтъ разрыва), въ единицу времени на $\frac{\partial u}{\partial x}dx$. А такъ какъ длина этихъ частицъ была въ началѣ dx, то относительная вытяжка, т.-е. коэф-тъ линейнаго расширенія, и выразится черезъ $\frac{\partial u}{\partial x}$. Далѣе, принимая во вниманіе незначительность этой величины, можно сказать, что сумма относительныхъ линейныхъ вытяжекъ по всѣмъ тремъ осямъ есть относительное измѣненіе объема, т.-е. коэф-тъ кубическаго расширенія.

Для капельной жидкости, т.-е. при $\varrho = const$, условіе (5) сводится къ $\Theta = 0$, т.-е. къ дифференціальному выраженію постоянства удѣльнаго объема или ея несжимаемости.

Въ газообразныхъ тѣлахъ ϱ есть, вообще, функція давленія p [(см. уравненія (4″) и (4‴)]; напримѣръ, при постоянной температурѣ плотность ϱ прямо пропорціональна давленію p, а потому $d\varrho$ также пропорціонально dp; слѣдовательно, замѣчая, что первые четыре члена уравненія (5′) представляютъ собою полную производную ϱ по t, можемъ переписать его такъ:

$$\left(\frac{d\varrho}{dt}\right)+\varrho\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=0,$$

Можно еще отмѣтить, что мысль, выраженная уравненіями (C) и (5), въ конечной формѣ выражается уравненіемъ

$$\bar{v}=\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{\varrho g}$$

или

$$\bar{v}\varrho=\frac{1}{g}=const.$$

вслѣдствіе чего эти ур-ія и могутъ быть получены изъ послѣдняго выраженія дифференцированіемъ его по времени.

Указавъ смыслъ выраженій $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ и $\frac{\partial w}{\partial z}$, умѣстно напомнить выраженіе скорости, приводимое въ курсахъ аналитической механики. Разсмотримъ въ движущейся и деформируемой системѣ двѣ смежныя точки, координаты которыхъ отличаются на весьма малыя величины dx, dy, dz. Проекціи по осямъ скорости первой точки, съ координатами x, y, z, назовемъ черезъ u, v, w; для второй точки проекціи ея скорости u', v' и w' въ тотъ же моментъ времени будутъ отличаться отъ u, v и w только вслѣдствіе иного положенія второй точки въ пространствѣ по сравненію съ первой, а потому могутъ быть выражены такъ:

$$u'=u+\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz,$$
$$v'=v+\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy+\frac{\partial v}{\partial z}dz,$$
$$w'=w+\frac{\partial w}{\partial x}dx+\frac{\partial w}{\partial y}dy+\frac{\partial w}{\partial z}dz.$$

Прибавивъ и вычтя во второй части перваго изъ этихъ уравненій по $\frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial x}dy$ и по $\frac{1}{2}\frac{\partial w}{\partial x}dz$ и сдѣлавъ аналогичныя преобразованія съ другими двумя уравненіями, получимъ извѣстныя Эйлеровы выраженія скоростей:

$$\left.\begin{aligned}u'&=u+\frac{\partial u}{\partial x}dx+(n\,dy+m\,dz)+(\eta\,dz-\zeta\,dy),\\ v'&=v+\frac{\partial v}{\partial y}dy+(l\,dz+n\,dx)+(\zeta\,dx-\xi\,dz),\\ w'&=w+\frac{\partial w}{\partial z}dz+(m\,dx+l\,dy)+(\xi\,dy-\eta\,dx),\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\ (D)$$

гдѣ буквами l, m, n, ξ, η, ζ обозначены:

$$l=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right);\quad m=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right);\quad n=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right);$$
$$\xi=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right);\quad \eta=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right);\quad \zeta=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

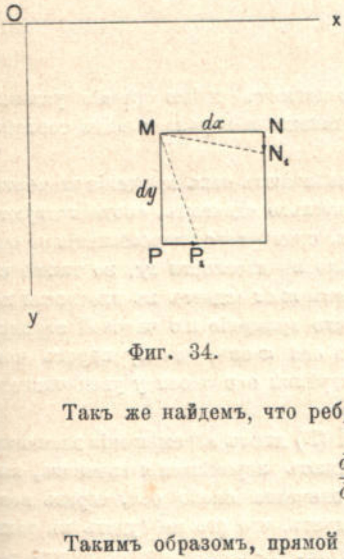
что для газовъ при постоянной температурѣ перепишется такъ:

$$\left(\frac{dp}{dt}\right)+p\left(\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}\right)=0\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (5''')$$

Уравненія ($5''$) и ($5'''$) представляютъ собою послѣднія, недостававшія намъ для опредѣленности системы (3), уравненія. Такимъ образомъ, какъ для жидкости, такъ и для газа мы имѣемъ возможность написать систему пяти

Если умножить обѣ части ур-ій (D) на dt, то они могутъ быть прочтены затѣмъ такъ: весьма малыя перемѣщенія по осямъ координатъ какой-либо точки системы съ кординатами ($x+dx$, $y+dy$, $z+dz$) состоятъ: 1) изъ общаго поступательнаго перемѣщенія всей системы, соотвѣтствующаго скоростямъ u, v, w данной точки съ координатами (x, y, z)— первые члены ур-ій (D); 2) изъ удлиненій вдоль по осямъ координатъ, ибо, какъ только что было показано, таково значеніе вторыхъ членовъ тѣхъ же ур-ій. Разсмотримъ значеніе двухъ послѣднихъ членовъ каждаго изъ этихъ ур-ій, остановивъ вниманіе на послѣднемъ изъ нихъ.

При точкѣ **M** жидкости или, вообще, нѣкоторой матеріальной системы вообразимъ безконечно малый прямоугольный параллелепипедъ съ ребрами, соотвѣтственно параллельными осямъ координатъ (фиг. 34). Пусть онъ проектируется на плоскость xOy въ видѣ прямоугольника **NMP**; стороны его **MN** и **MP** обозначимъ черезъ dx и dy. Скорость точки **P** въ направленіи оси x-овъ отличается отъ такой же скорости точки **M** на величину $\frac{du}{dy}\,dy$ Относя всѣ перемѣщенія къ единицѣ времени, найдемъ, что вслѣдствіе этой разницы въ скоростяхъ ребро **MP** займетъ по истеченіи этой единицы времени нѣкоторое новое положеніе MP_1, при чемъ, вслѣдствіе малости перемѣщеній, можно считать:



Фиг. 34.

$$\frac{du}{dy}=tg\ PMP_1=\text{углу } PMP_1.$$

Такъ же найдемъ, что ребро **MN** займетъ положеніе MN_1, при чемъ

$$\frac{dv}{dx}=tg\ NMN_1=\text{углу } NMN_1.$$

Такимъ образомъ, прямой уголъ **NMP** перекосится и перейдетъ въ уголъ N_1MP_1, измѣнившись на уголъ (PMP_1+NMN_1), т.-е. на

$$\frac{du}{dy}+\frac{dv}{dx}=2n.$$

Это и есть то, что называется *деформаціей сдвига.* Совершенно аналогично найдемъ, что $2m$ есть сдвигъ въ плоскости xz, и $2l$ есть сдвигъ въ плоскости yz.

Однако тѣ же перемѣщенія PP_1 и NN_1 относительно точки **M** имѣютъ и другое значеніе; а именно, на перемѣщеніе PP_1 можно смотрѣть, какъ на *поворотъ* точки **P** около центра **M** на уголъ $\frac{du}{dy}$; такъ какъ это вращеніе направлено противъ часовой стрѣлки, то мы его отмѣтимъ знакомъ минусъ. Равнымъ образомъ перемѣщеніе NN_1 можно принять за вращеніе точки **N** около того же центра **M** на уголъ $\frac{dv}{dx}$, но уже по часовой стрѣлкѣ. Средній уголъ повоуравненій, вполнѣ опредѣленную,—изъ нихъ могутъ быть опредѣлены всѣ нужныя намъ пять неизвѣстныхъ. Въ эти уравненія входятъ частныя производныя неизвѣстныхъ функцій; слѣдовательно, чтобы сдѣлать вопросъ вполнѣ опредѣленнымъ, нужно послѣ интегрированія найти эти функціи, а также тѣ постоянныя, которыя войдутъ вслѣдствіе интегрированія. Значенія этихъ функцій найдемъ изъ того требованія, чтобы найденныя общія интегральныя выраженія для u, v, w, p и ϱ удовлетворяли нѣкоторымъ условіямъ на границахъ жидкой массы и, кромѣ того, начальнымъ обстоятельствамъ движенія.

Такъ, пусть жидкость ограничена стѣнкой, уравненіе которой есть $f(x, y, z)=0$. Если стѣнка неподвижна, то жидкость не должна покидать стѣнки; для этого нужно, чтобы частица, находившаяся на стѣнкѣ во время t, оставалась на ней и во время $(t+\Delta t)$, т.-е., нужно, чтобы направленія скоростей этой частицы были касательны къ стѣнкѣ. Если u_s, v_s и w_s суть

рота всего элемента въ единицу времени, или, стало быть, угловая скорость вращенія элемента около оси, проходящей черезъ него параллельно оси z-овъ, выразится, такимъ образомъ, черезъ

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\zeta.$$

Точно такъ же убѣдимся, что выраженія ξ и η представляютъ собою среднія угловыя скорости вращенія элемента около осей, черезъ него проходящихъ и параллельныхъ соотвѣтственно другимъ осямъ координатъ.

Такимъ образомъ, если перемѣщенія PP_1 и NN_1 обуславливаютъ какъ вращеніе элемента, такъ и его сдвигъ, то перемѣщенія, обусловленныя исключительно сдвигомъ, соотвѣтствуютъ не полному углу перекоса, а лишь его половинѣ. Такъ какъ, кромѣ того, перемѣщенія по оси x-овъ получаются благодаря деформаціи и вращенію не только въ плоскости xy, но также въ плоскости xz, то въ ур-іяхъ (D) и фигурируютъ поэтому члены $m\,dz$ (сдвигъ въ плоскости xz) и поворотъ $\eta\,dz$ въ той же плоскости. Наконецъ, понятно, что вращеніе по часовой стрѣлкѣ въ плоскости xy уменьшаетъ положительное перемѣщеніе по оси x-овъ, почему передъ членомъ dy и стоитъ знакъ минусъ; вращеніе же по часовой стрѣлкѣ около оси y увеличиваетъ это перемѣщеніе, что отмѣчено въ ур-іи знакомъ плюсъ.

Такимъ образомъ убѣждаемся, что третьи члены ур-ій (D) даютъ перемѣщенія элемента, вызванныя его *перекашиваніемъ*, а четвертые члены опредѣляютъ перемѣщенія элемента, вызванныя *вращеніемъ* его самого около себя. Такое вращеніе элемента около оси, черезъ него проходящей, называютъ *вихремъ*. Изъ опредѣленія вихря слѣдуетъ, что его не будетъ въ томъ случаѣ, если его скорости, т.-е. величины ξ, η, ζ равны нулю, т.-е. если существуютъ соотношенія

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y};\ \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial w}{\partial x};\ \frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial z}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ (E)$$

Такъ какъ скорости u, v, w суть функціи координатъ, то соотношенія (E) можно разсматривать, какъ условія существованія нѣкоторой функціи φ координатъ, для которой должно быть:

$$u=\frac{\partial\varphi}{\partial x};\ v=\frac{\partial\varphi}{\partial y};\ w=\frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

По аналогіи съ потенціальною функціей силъ эта функція φ называется *потенціаломъ скоростей*. Условія ея существованія опредѣляются ур-іями (E), а потому можно сказать, что *невихревое движеніе есть* въ то же время *движеніе съ потенціаломъ скоростей.*

компоненты скорости такой частицы, то сама скорость V_s будетъ направлена по касательной къ поверхности $f(x, y, z) = 0$ тогда, когда будетъ соблюдено условіе:

$$\frac{\partial f}{\partial x} u_s + \frac{\partial f}{\partial y} v_s + \frac{\partial f}{\partial z} w_s = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(F)}$$

Если бы стѣнка двигалась, то ея уравненіе имѣло бы видъ:

$$f(x, y, z, t) = 0$$

и тогда условіе касанія (F) изобразилось бы такъ:

$$\frac{\partial f}{\partial x} u_s + \frac{\partial f}{\partial y} v_s + \frac{\partial f}{\partial z} w_s + \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \text{ *)} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(G)}$$

Далѣе, на свободной поверхности всегда дается величина внѣшняго давленія, и затѣмъ должны быть удовлетворены начальныя условія. Изъ этихъ условій и опредѣлятся произвольныя постоянныя интегрированія.

До настоящаго времени дифференціальныя уравненія (3) и (5) въ общемъ видѣ не объинтегрированы; рѣшеніе получено только для ограничен-

---

*) Составъ выраженія (F) станетъ понятенъ, если вспомнить, что уголъ между нормалью N къ поверхности $f(x, y, z) = 0$ и осью x-овъ выражается такъ:

$$\cos(N,x) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{A},$$

гдѣ черезъ A обозначенъ радикалъ, стоящій въ знаменателѣ. Подобныя же выраженія напишутся для $\cos(N, y)$ и для $\cos(N, z)$.

Далѣе, такъ какъ

$$u_s = V_s \cos(V_s, x); \quad v_s = V_s \cos(V_s, y): \quad w_s = V_s \cos(V_s, z),$$

то условіе (D) приводится къ уравненію:

$$V_s A \left\{\cos(N,x)\cos(V_s,x) + \cos(N,y)\cos(V_s,y) + \cos(N,z)\cos(V_s,z)\right\} = V_s A \cos(V_s,N) = 0 \ \ldots \text{(H)}$$

А такъ какъ радикалъ A, вообще, отличенъ отъ нуля, скорость V_s тоже, то ур-іе (H) сводится къ условію $\cos(V_s, N) = 0$, т.-е. къ тому, что проекція скорости V_s на нормаль къ поверхности стѣнки равна нулю, т.-е. что скорость V_s, дѣйствительно, касательна къ стѣнкѣ.

Что касается ур-ія (G), то послѣдній членъ его характеризуетъ то обстоятельство, что при движущейся стѣнкѣ полная абсолютная скорость частицы вообще не касается стѣнки; къ ней касательна лишь относительная скорость частицы. Само выраженіе проще всего получить такъ. Всякое весьма малое перемѣщеніе (dx, dy, dz), происходящее въ предѣлахъ движущейся поверхности $f(x, y, z, t)$ за время dt должно удовлетворять ур-ію

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial t} dt = 0,$$

какъ дифференціалу постоянной величины. Если внести сюда перемѣщенія жидкой частицы, положивъ $dx = u_s\,dt$ и т. д., то и получимъ ур-іе (G). Для неподвижной стѣнки $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$, и ур-іе (G) обращается въ ур-іе (F).

наго числа частныхъ случаевъ, и мы остановимся теперь на томъ изъ нихъ; который имѣетъ для практики наибольшее значенie, а именно,—на случаѣ установившагося движенiя подъ влiянieмъ силъ, имѣющихъ потенцiальную функцiю.

. . . .

§ 7. Интегрированie общихъ уравненiй движенiя жидкости. Установившееся движенie.

Установившимся (permanent), въ отличie отъ перемѣннаго (varié), называютъ такое движенie, при которомъ, независимо отъ времени, въ любой точкѣ пространства всякая движущаяся частица, попадая въ эту точку, прiобрѣтаетъ всегда однѣ и тѣ же скорость, плотность и давленie, иначе говоря, при такомъ движенiи всякой точкѣ пространства присущи свои опредѣленныя величины v, ϱ и p, неизмѣняющiяся во времени и обязательныя для всякой частицы, въ эту точку приходящей.

Согласно съ этимъ опредѣленieмъ установившееся движенie можно представить себѣ такъ. Обратимъ вниманie на какую-нибудь частицу жидкости, занимающую положенie M въ пространствѣ, гдѣ она въ данный моментъ имѣетъ скорость V. Черезъ время dt она перейдетъ въ точку пространства M', гдѣ получитъ скорость V', можетъ быть, отличную отъ V, а на ея мѣсто въ M придетъ новая частица, которая получитъ первую скорость V; еще черезъ dt времени первая частица займетъ новое положенie M'' и получитъ новую скорость V''; вторая же частица придетъ именно въ M' и получитъ скорость V', а на мѣсто ея въ M придетъ третья частица и т. д. Такова картина установившагося движенiя. Какъ видно, въ жидкомъ тѣлѣ вырисовываются нѣкоторыя траекторiи, со временемъ не мѣняющiяся, — это такъ называемыя *линiи токовъ*, по которымъ частицы бѣгутъ одна за другой по неизмѣнному закону.

Понятно, что въ установившемся движенiи скорости, давленiя и проч. со временемъ мѣняются, но только по стольку, по скольку отъ перемѣны времени мѣняются координаты точки; непосредственно же отъ времени ни одно изъ обстоятельствъ движенiя не зависитъ. Поэтому установившееся движенie аналитически характеризуется тѣмъ, что частныя производныя скорости, давленiя и плотности по времени равны нулю, т.-е.

$$\frac{\partial p}{\partial t}=0,\quad \frac{\partial u}{\partial t}=0,\quad \frac{\partial v}{\partial t}=0,\quad \frac{\partial w}{\partial t}=0,\quad \frac{\partial \varrho}{\partial t}=0,$$

и уравненiя движенiя (3) получаютъ видъ:

$$\left.\begin{aligned} X-\frac{1}{\varrho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}&=u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z};\\ Y-\frac{1}{\varrho}\cdot\frac{\partial p}{\partial y}&=u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z};\\ Z-\frac{1}{\varrho}\cdot\frac{\partial p}{\partial z}&=u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}.\end{aligned}\right\}\quad \ldots\ldots (6)$$

Интегрируются эти уравненія слѣдующимъ образомъ. Множимъ первое изъ уравненій (6) на dx, второе на dy, третье на dz и складываемъ; находимъ:

$$X\,dx+Y\,dy+Z\,dz-\frac{1}{\varrho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}dx+\frac{\partial p}{\partial y}dy+\frac{\partial p}{\partial z}dz\right)=u\frac{\partial u}{\partial x}dx+v\frac{\partial u}{\partial y}dx+w\frac{\partial u}{\partial z}dx+$$
$$+u\frac{\partial v}{\partial x}dy+v\frac{\partial v}{\partial y}dy+w\frac{\partial v}{\partial z}dy+$$
$$+u\frac{\partial w}{\partial x}dz+v\frac{\partial w}{\partial y}dz+w\frac{\partial w}{\partial z}dz.$$

Первые три члена лѣвой части полученнаго уравненія представляютъ полный дифференціалъ dU силовой функціи внѣшнихъ дѣйствующихъ силъ; слѣдующіе три члена, заключенные въ скобки, представляютъ полный дифференціалъ dp гидродинамическаго давленія; зависимость величины $\frac{1}{\varrho}$ отъ удѣльнаго объема $\overline{v}$ представляется, какъ мы не разъ имѣли, въ видѣ условія $\frac{1}{\varrho}=g\overline{v}$, такъ что лѣвая часть ур-ія представится теперь въ видѣ:

$$dU-g\overline{v}\,dp.$$

Далѣе, первые три члена второй части уравненія, на основаніи уравненій (2) предыдущаго параграфа, можно представить такъ:

$$u\frac{\partial u}{\partial x}dx+v\frac{\partial u}{\partial y}u\,dt+w\frac{\partial u}{\partial z}u\,dt=u\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz\right)=u\,du\,.\;.\;(\mathrm{A})$$

Подобнымъ же образомъ видоизмѣнимъ остальныя группы членовъ этого уравненія, послѣ чего получимъ:

$$dU-g\overline{v}\,dp=u\,du+v\,dv+w\,dw=\frac{1}{2}d(u^2+v^2+w^2)=d\,\frac{V^2}{2},$$

такъ какъ скорость V по ея компонентамъ выражается такъ:

$$V^2=u^2+v^2+w^2.$$

Итакъ, мы получили дифференціальное уравненіе:

$$dU-g\overline{v}\,dp-d\frac{V^2}{2}=0.$$

Интегрируя его, находимъ:

$$U-g\int\overline{v}\,dp-\frac{V^2}{2}=const\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(\mathrm{B})$$

Значенiе постоянаго получимъ, если для начальнаго положенiя частицы будутъ даны значенiе силовой функцiи U_0, скорость V_0, давленiе p_0 и удѣльный объемъ $\bar{v}_0$; тогда получимъ:

$$U_0 - g\left|\int \bar{v}\,dp\right|_{V_0,\,p_0} - \frac{V_0^2}{2} = const,$$

послѣ чего ур. (B) перепишется такъ:

$$U - U_0 - g\int_{p_0}^{p} \bar{v}\,dp - \frac{1}{2}(V^2 - V_0^2) = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (C)$$

Пусть внѣшняя сила есть тяжесть. Мы видѣли уже, что силовая функцiя для тяжести имѣетъ видъ

$$U = -gz + const,$$

если ось z-овъ направлена вертикально вверхъ. Слѣдовательно, для жидкости, движущейся подъ дѣйствiемъ силы тяжести, уравненiе (C) приметъ видъ:

$$g(z_0 - z) - g\int_{p_0}^{p} \bar{v}\,dp = \frac{1}{2}(V^2 - V_0^2) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (7)$$

Наконецъ, такъ какъ удѣльный объемъ $\bar{v}$ и давленiе p, вообще, связаны между собою нѣкоторой зависимостью, то, на основанiи правила интегрированiя по частямъ, можно написать:

$$\int_{p_0}^{p} \bar{v}\,dp = p\bar{v} - p_0\bar{v}_0 - \int_{\bar{v}_0}^{\bar{v}} p\,d\bar{v}.$$

Послѣ этого, раздѣливъ ур. (7) на g, перепишемъ его такъ:

$$(z_0 - z) + (p_0\bar{v}_0 - p\bar{v}) + \int_{\bar{v}_0}^{\bar{v}} p\,d\bar{v} = \frac{1}{2g}\left(V^2 - V_0^2\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; (8)$$

Обратимъ вниманiе, какъ получено это ур-iе. Уравненiя (6) представляются уравненiями проекцiй всѣхъ силъ на оси координатъ, причемъ силы отнесены къ единицѣ м а с с ы. Умножая ихъ на соотвѣтствующiя перемѣщенiя частицы dx, dy, dz и складывая, мы получаемъ, очевидно, работы этихъ силъ на весьма маломъ перемѣщенiи, по прежнему отнесенныя къ единицѣ массы. Наконецъ, интегрируя ихъ и дѣля на ускоренiе тяжести, мы получаемъ уравненiе работъ на нѣкоторомъ конечномъ перемѣщенiи, отнесенное къ единицѣ в ѣ с а жидкости.

Первый членъ (въ скобкахъ) уравненiя (8) представляетъ работу тяжести каждаго килограмма, опускающагося съ высоты z_0 до высоты z; во второй части ур-ія имѣемъ приращеніе живой силы каждаго килограмма при этомъ перемѣщеніи, если начальная скорость V_0 обратилась въ V.

Пока мы разсматриваемъ свободное неизмѣняемое твердое тѣло, перемѣщающееся подъ дѣйствіемъ тяжести, то, какъ извѣстно, принимаемъ, что эти двѣ величины между собою равны: работа паденія равна приращенію живой силы. Это мы можемъ получить и изъ уравненія (8), такъ какъ для случая твердаго тѣла въ немъ нужно положить

$$\bar{v} = \bar{v}_0 = \frac{1}{\gamma} = const,$$

такъ что

$$d\bar{v} = 0;$$

равнымъ образомъ для твердаго тѣла $p = p_0$, такъ какъ для твердаго тѣла величина p есть напряженіе, испытываемое тѣломъ и при постоянствѣ силы не мѣняющееся. Для жидкости дѣло обстоитъ нѣсколько иначе.

Когда мы имѣемъ капельное жидкое тѣло, то для него имѣемъ, какъ характеристику его несжимаемости, условіе

$$\bar{v} = \bar{v}_0 = \frac{1}{\gamma},$$

такъ что

$$d\bar{v} = 0,$$

а потому уравненіе (8) для *капельнаго жидкаго* тѣла принимаетъ видъ:

$$(z_0 - z) + \frac{p_0 - p}{\gamma} = \frac{1}{2g}(V^2 - V_0^2) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (9)$$

Это уравненіе, какъ общее уравненіе работъ, можно прочитать такъ: измѣненіе запаса кинетической энергіи (живой силы) равно измѣненію запаса потенціальной энергіи, причемъ эта послѣдняя состоитъ изъ работы силы тяжести и изъ работы гидродинамическихъ давленій, такъ какъ понятно, что $\frac{p}{\gamma}$ есть работа давленія, отнесенная къ одному килограмму. Въ самомъ дѣлѣ, пусть мы имѣемъ струйку, площадь безконечно малаго поперечнаго сѣченія которой въ данномъ мѣстѣ, взятаго перпендикулярно къ скорости, обозначимъ черезъ df; скорость жидкости въ этомъ мѣстѣ обозначимъ черезъ V. За время dt черезъ такое сѣченіе, при условіи установившагося движенія, пройдетъ, очевидно, $\gamma . df . Vdt$ *kgr* жидкости. Если давленіе на единицу площади въ этомъ сѣченіи есть p, то на всю площадь df оно даетъ усиліе $p\,df$; такъ какъ частица за время dt подъ такимъ давленіемъ проходитъ путь Vdt, то работа давленія во взятомъ сѣченіи есть $p\,df\,Vdt$. Относя эту работу къ 1 *kgr* протекающей жидкости, получимъ работу давленія $\frac{p}{\gamma}$. Выше (стр. 15) было уже указано, что $\frac{p}{\gamma}$ представляется линейной величиной и называется высотой, соотвѣтствующей давленію,—въ данномъ случаѣ, гидродинамическому. Назовемъ ее пьезометрическою высотою. Принявъ это, можемъ прочитать ур. (9) такъ: *на данномъ перемѣщеніи приращеніе живой силы въ каждомъ килограммѣ капельной жидкости, движущейся подъ вліяніемъ тяжести въ установившемся движеніи, равно суммѣ работы тяжести на этомъ перемѣщеніи и работы гидродинамическихъ давленій,—послѣдняя равна разности пьезометрическихъ высотъ въ началѣ и въ концѣ разсматриваемаго перемѣщенія.*

Пусть, наконецъ, мы имѣемъ газообразную, упругую жидкость. Уравненія (7) и (8) справедливы и для нея, и ихъ можно прочитать такъ: приращеніе живой силы равно работѣ тяжести плюсъ работа давленій, но только эта послѣдняя зависитъ здѣсь не отъ однихъ начальныхъ и конечныхъ значеній давленія и удѣльнаго объема, а также и отъ того закона, по которому происходитъ измѣненіе второго съ измѣненіемъ перваго, что видно изъ присутствія въ уравненіи (8) члена подъ знакомъ интеграла; законъ же измѣненія давленія упругой жидкости вмѣстѣ съ измѣненіемъ удѣльнаго объема находится въ непосредственной зависимости отъ свойствъ самаго газа и отъ количества и способа сообщенія ему (или отнятія отъ него) тепла. По первому принципу термодинамики безконечно малое количество тепла dQ, сообщаемое 1 kgr упругой жидкости, обращается на измѣненіе внутренней энергіи U *) (измѣненіе колебательнаго движенія частицъ около ихъ положенія равновѣсія и измѣненіе положенія центровъ тяжести ихъ) и на преодолѣніе внѣшняго давленія p при измѣненіи удѣльнаго объема на $d\overline{v}$, такъ что:

$$dQ = A(dU + p\,d\overline{v}),$$

гдѣ $A = \frac{1}{424}$ есть термическій эквивалентъ работы, т.-е. количество калорій, эквивалентное одному килограммометру. Поэтому уравненіе (8) можно написать такъ:

$$(z_0 - z) + (p_0\overline{v}_0 - p\overline{v}) + \frac{Q}{A} = \frac{1}{2g}\left(V^2 - V_0{}^2\right) + \int dU,$$

т.-е. сумма приращенія живой силы на данномъ перемѣщеніи и измѣненія запаса внутренней энергіи равна суммѣ работы тяжести, измѣненія пьезометрической высоты и работы, эквивалентной сообщенному количеству тепла на этомъ перемѣщеніи.

Термодинамика изучаетъ, какимъ образомъ для разныхъ газовъ измѣняется запасъ внутренней энергіи въ зависимости отъ способа сообщенія имъ тепла. Ограничиваясь здѣсь указаніемъ, что наше уравненіе (8) имѣетъ, какъ видимъ, совершенно общее значеніе, воспользуемся непосредственно результатами, добытыми тормодинамикой и уже упомянутыми нами, а именно, возьмемъ уравненія (4″) и (4‴) § 6.

---

*) Это обозначеніе не слѣдуетъ смѣшивать съ обозначеніемъ потенціала внѣшнихъ силъ.

При изотермическомъ процессѣ имѣемъ для воздуха

$$p\bar{v} = const = k.$$

Отсюда имѣемъ, во-первыхъ,

$$p_0\bar{v}_0 = p\bar{v},$$

а во-вторыхъ,

$$p\,d\bar{v} + \bar{v}\,dp = 0$$

или

$$p\,d\bar{v} = -k\frac{dp}{p} = -k\,dLp.$$

Поэтому уравненіе (8) напишется въ этомъ случаѣ такъ:

$$(z_0 - z) + k\,L\frac{p_0}{p} = \frac{1}{2g}\left(V^2 - V_0^2\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (10)$$

Если имѣемъ адіабатическій *) процессъ, т.-е. если во время движенія газа тепло ему не сообщается и не отнимается, то для воздуха

$$p\bar{v}^k = p_0\bar{v}_0^k = const.$$

Имѣя въ виду эту зависимость, получаемъ, очевидно,

$$p\,d\bar{v} = -\frac{\bar{v}\,dp}{k} = -\frac{p_0^{\frac{1}{k}}\bar{v}_0}{k}\,p^{-\frac{1}{k}}\,dp.$$

Послѣ этого интегралъ въ ур-іи (8) можетъ быть представленъ такъ:

$$\int_{\bar{v}_0}^{\bar{v}} p\,dv = \frac{p_0^{\frac{1}{k}}\bar{v}_0}{k}\int_p^{p_0} p^{-\frac{1}{k}}\,dp = \frac{1}{k-1}\left(p_0\bar{v}_0 - p\bar{v}\right)$$

и теперь ур-іе (8), съ замѣной удѣльнаго объема удѣльнымъ вѣсомъ, напишется окончательно такъ:

$$(z_0 - z) + \frac{k}{k-1}\left(\frac{p_0}{\gamma} - \frac{p}{\gamma}\right) = \frac{1}{2g}\left(V^2 - V_0^2\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (11)$$

---

*) Всякое движеніе сопровождается треніемъ; работа тренія обращается въ тепло, которое отчасти сообщается движущемуся газу. Слѣд., адіабатическій процессъ возможенъ тогда, когда движущійся газъ отдаетъ наружу какъ разъ столько тепла и въ такомъ же порядкѣ, сколько и какъ онъ воспринялъ отъ развитой работы тренія; сверхъ этого тепло не отнимается и не сообщается.

Уравненіе (9) для капельныхъ жидкостей есть основное уравненіе гидравлики. Напомнимъ, что оно выведено въ предположеніи того, что жидкость совершенная и что ея движеніе установившееся; слѣдуетъ также обратить вниманіе на то, что это ур-іе представляетъ законъ измѣненія давленія и скорости для частицъ, бѣгущихъ *по линіи тока*, такъ какъ, при умноженіи уравненій (6) на dx, dy, dz, мы, очевидно, разумѣли подъ этими dx, dy, dz не какія-нибудь произвольныя перемѣщенія, а какъ разъ тѣ перемѣщенія, которыя испытываетъ сама частица, такъ какъ въ противномъ случаѣ мы не имѣли бы права дѣлать тѣ преобразованія, которыя были нами произведены, подобно, напр., строкѣ (A) этого параграфа.

Наконецъ, по той же причинѣ нужно считать, что постоянное въ уравненіи (B) имѣетъ, вообще, разныя значенія для разныхъ линій тока, почему уравненіе (9), примѣнимое для каждой отдѣльной линіи, ко всей массѣ жидкости не примѣнимо.

Въ началѣ этого параграфа было указано, что при установившемся движеніи линіи тока совпадаютъ съ траекторіями частицъ. Вообще же *линіей тока* называется *кривая, проведенная черезъ рядъ жидкихъ точекъ касательно къ направленіямъ ихъ скоростей*. Понятно, что если движеніе неустановившееся, то линіи тока отличаются отъ траекторій, потому что онѣ сами съ теченіемъ времени измѣняются. Уравненія линій тока можно найти, выражая аналитически ту мысль, что проекціи dx, dy, dz любого перемѣщенія ds по линіи тока за данный промежутокъ времени dt равны проекціямъ $u\,dt$, $v\,dt$, $w\,dt$ перемѣщенія жидкой частицы, лежащей на линіи тока въ этотъ моментъ; слѣдовательно, эти уравненія нужно написать такъ:

$$\frac{dx}{u}=\frac{dy}{v}=\frac{dz}{w} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(a)}$$

Величины u, v, w представляются вообще функціями координатъ и времени, но въ этихъ уравненіяхъ онѣ должны быть внесены примѣнительно къ данному моменту.

Пусть разсматриваемое движеніе жидкости таково, что существуетъ потенціалъ скоростей. Какъ было указано въ одномъ изъ примѣчаній предыдущаго параграфа, для этого нужно, чтобы не было вращенія, т.-е. чтобы удовлетворялись условія:

$$\left.\begin{aligned} 2\xi&=\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}=0\\ 2\eta&=\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}=0\\ 2\zeta&=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(b)}$$

Это равносильно существованію функціи $\varphi(x, y, z, t)$ такой, чтобы

$$u=\frac{\partial\varphi}{\partial x};\quad v=\frac{\partial\varphi}{\partial y};\quad w=\frac{\partial\varphi}{\partial z} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(c)}$$

По аналогіи съ поверхностями уровня, можно вообразить себѣ для каждаго даннаго момента времени систему поверхностей $\varphi = const$, для всѣхъ точекъ которой значеніе потенціала скоростей оставалось бы однимъ и тѣмъ же. Это такъ называемыя *эквипотенціальныя поверхности*. Не трудно видѣть, что *линіи тока къ этимъ поверхностямъ* *нормальны.* Въ самомъ дѣлѣ *cos*-ы угловъ, образуемыхъ полною скоростью $\sqrt{u^2+v^2+w^2}$ частицы (т.-е. касательной къ линіи тока) съ осями координатъ суть $\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}, \ldots$ и т. д. *Cos*-ы же угловъ нормали къ поверхности $\varphi = const$ съ осями координатъ суть $\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2}}, \ldots$ и т. д. Составляя выраженіе *cos*-а угла между касательной къ линіи тока и этой нормалью, найдемъ на основаніи ур-ій (c), что онъ равенъ единицѣ, т.-е. что линіи тока нормальны къ поверхностямъ постояннаго потенціала скоростей, т.-е. что жидкость течетъ нормально къ этимъ поверхностямъ; поэтому расходъ жидкости за время dt можетъ быть вычисляемъ умноженіемъ площади элемента этой поверхности на соотвѣтствующую скорость и на dt. Нужно только помнить, что какъ сами линіи тока, такъ и эти поверхности съ теченіемъ времени видоизмѣняются.

Если движеніе жидкости таково, что существуетъ потенціалъ скоростей, то уравненія (3) этого параграфа могутъ быть проинтегрированы въ общемъ видѣ, если, кромѣ того, какъ и для установившагося движенія, внѣшнія силы имѣютъ потенціалъ, а плотность ϱ есть функція только давленія p. Въ самомъ дѣлѣ, принимая во вниманіе, что, на основаніи ур-ія (c), можно написать:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right), \ldots \text{ и т. д.}$$

ур-іямъ (3) можно дать видъ:

$$\frac{\partial U}{\partial x}-\frac{1}{\varrho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial x}+w\frac{\partial w}{\partial x},$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}-\frac{1}{\varrho}\cdot\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)+u\frac{\partial u}{\partial y}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial y},$$

$$\frac{\partial U}{\partial z}-\frac{1}{\varrho}\cdot\frac{\partial p}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)+u\frac{\partial u}{\partial z}+v\frac{\partial v}{\partial z}+w\frac{\partial w}{\partial z},$$

гдѣ U есть силовая функція. Обозначая далѣе полную скорость частицы черезъ V, такъ что

$$V^2=u^2+v^2+w^2,$$

можемъ переписать полученныя ур-ія такъ:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[U-\int\frac{dp}{\varrho}-\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\frac{1}{2}V^2\right]=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[U-\int\frac{dp}{\varrho}-\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\frac{1}{2}V^2\right]=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[U-\int\frac{dp}{\varrho}-\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\frac{1}{2}V^2\right]=0.$$

Отсюда видно, что выраженіе, стоящее въ скобкахъ, не зависитъ отъ координатъ и можетъ представить собою функцію одного лишь времени t; поэтому, умножая эти ур-ія на dx, dy, dz, складывая и интегрируя, получимъ въ общемъ видѣ выраженіе въ скобкахъ, какъ нѣкоторую функцію времени $\Phi(t)$; такъ что имѣемъ:

$$U-\int\frac{dp}{\varrho}-\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\frac{1}{2}V^2=\Phi(t)+C \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(d)}$$

Само собою разумѣется, что эта функція $\Phi(t)$, зависящая только отъ времени, можетъ быть включена въ составъ производной $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$, т.-е. можно положить, что

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \Phi(t) = \frac{\partial \varphi_1}{\partial t},$$

ибо если двѣ функціи координатъ и времени (у насъ функціи φ и φ_1) отличаются другъ отъ друга только на функцію одного времени, и одна изъ нихъ удовлетворяетъ условіямъ (a) и (b), то другая также можетъ быть принята и за потенціалъ скоростей, такъ какъ частныя производныя этихъ функцій по координатамъ между собою равны; поэтому вмѣсто уравненія (d) можно написать ур-іе:

$$U - \int \frac{dp}{\varrho} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} - \frac{1}{2} V^2 = C \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (d')$$

Второе уравненіе, — уравненіе неразрывности, — въ этомъ случаѣ напишется такъ:

$$\frac{1}{\varrho}\left(\frac{dp}{dt}\right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (e)$$

Потенціальная функція φ (или φ_1) должна, конечно, удовлетворять этому уравненію, а равно и граничнымъ условіямъ.

Наконецъ, третье уравненіе остается, какъ и ранѣе, въ видѣ характеристики или жидкости, или разсматриваемаго движенія; въ общемъ случаѣ его можно написать въ видѣ:

$$\varrho = f(p);$$

въ частности, для капельной жидкости, $\varrho = const$.

Движеніе жидкости съ потенціаломъ скоростей замѣчательно тѣмъ, что въ уравненіяхъ (d) или (d′) *постоянное C имѣетъ одно и то же значеніе не только на линіи тока*, какъ это имѣетъ мѣсто при установившемся движеніи, *но и для всей разсматриваемой массы жидкости.* Особенно интересенъ случай, когда это движеніе въ то же время есть движеніе установившееся. Тогда ур-іе (d′) обращается въ уравненіе (B) этого параграфа (стр. 55), при чемъ произвольное постоянное сохраняетъ одно и то же значеніе для всей массы жидкости. Легко видѣть, что разбираемый въ слѣдующемъ параграфѣ случай установившагося движенія съ сохраненіемъ плоскаго вида сѣченій относится именно къ этой категоріи, если, конечно, отказаться отъ его криволинейности и считать его прямолинейнымъ, напр., параллельнымъ оси x-овъ. Тогда нужно будетъ положить $v = 0$; $w = 0$. Потенціальная функція вида

$$\varphi = Kx^n + const$$

этому случаю движенія удовлетворяетъ, ибо она дастъ

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = Knx^{n-1},$$

такъ что ур-ія (b) тождественно удовлетворяются. Поэтому для такого движенія потенціалъ скоростей существуетъ. Эквипотенціальныя поверхности $\varphi = const$ являются здѣсь, конечно, плоскостями, перпендикулярными къ оси движенія. Линіи тока этой оси параллельны. Ур-іе неразрывности для капельной жидкости даетъ здѣсь условіе

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0,$$

что возможно только при $n = 1$, т.-е. если скорость постоянна не только въ разныхъ точкахъ одной и той же поверхности $\varphi = const$, но и во всей массѣ жидкости. Такимъ образомъ прямолинейное установившееся движенiе капельной жидкости можно себѣ представить только равномѣрнымъ и тогда оно не отличается отъ такого же движенiя твердаго неизмѣняемаго тѣла. Отсюда видно, насколько, въ сущности, неправильно то общепринятое распространительное толкованiе уравненiя Д. Бернулли, которое приводится въ слѣдующемъ параграфѣ.

Если данное прямолинейное движенiе есть движенiе неустановившееся, то потенцiальная функцiя вида

$$\varphi = \psi(t) \,.\, x + const$$

этому случаю удовлетворяетъ, въ чемъ легко убѣдиться подобно предыдущему. И тутъ нужно представить себѣ, что скорость, измѣняющаяся со временемъ, мѣняется одновременно для всѣхъ точекъ движущейся такъ жидкости, такъ что и тутъ движенiе жидкаго тѣла не отличается отъ прямолинейнаго движенiя неизмѣняемаго твердаго тѣла.

Ниже мы дадимъ еще примѣры движенiя съ потенцiаломъ скоростей, а пока замѣтимъ, что *если въ какой-нибудь моментъ для данной массы совершенной жидкости такой потенцiалъ существуетъ, то онъ сохраняется и во все время движенiя этой массы жидкости*. Другими словами, движущуюся совершенную жидкость нельзя привести въ вихревое движенiе, если оно сначала было невихревымъ, и наоборотъ, вихревое движенiе совершенной жидкости нельзя перевести въ невихревое; при этомъ предполагается, что внѣшнiя силы имѣютъ потенцiалъ и что плотность зависитъ только отъ давленiя.

Въ самомъ дѣлѣ, въ послѣднемъ случаѣ на первыя части уравненiй (3) § 6 можно смотрѣть, какъ на частныя производныя отъ силовой функцiи U и нѣкоторой функцiи P, опредѣляемой изъ условiя:

$$P = \int \frac{1}{\varrho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz\right) = \int \frac{dp}{\varrho}.$$

Такимъ образомъ уравненiя (3) можно будетъ переписать такъ:

$$\frac{\partial}{\partial x}(U - P) = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z},$$
$$\frac{\partial}{\partial y}(U - P) = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z},$$
$$\frac{\partial}{\partial z}(U - P) = \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}.$$

Возьмемъ отъ послѣдняго уравненiя производную по y, а отъ второго уравненiя— по z и вычтемъ вторую изъ первой. Группируя соотвѣтствующимъ образомъ члены, имѣя въ виду выраженiя (b) мгновенныхъ угловыхъ скоростей вращенiя, на этотъ разъ, вообще, не равныхъ нулю, и, наконецъ, принимая во вниманiе, что порядокъ дифференцированiя не влiяетъ на результатъ его,—напр., $\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)$,—получаемъ:

$$\frac{\partial}{\partial t}2\xi + u\frac{\partial}{\partial x}2\xi + v\frac{\partial}{\partial y}2\xi + w\frac{\partial}{\partial z}2\xi = \left(\frac{d}{dt}2\xi\right) =$$
$$= \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial x} - \left(\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right) + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Два послѣднiе члены, равные и противоположные по знаку, прибавлены для возможности надлежащей группировки. Вынося надлежащiе множители за скобки у первыхъ членовъ отъ начала и отъ конца, у вторыхъ членовъ отъ начала и конца и у тѣхъ членовъ, которые заключены въ скобки, сличая далѣе остающіеся въ скобкахъ члены съ обозначеніями (b) и сокращая все уравненіе на 2, получимъ:

$$\frac{d\xi}{dt} = \eta \frac{\partial u}{\partial y} + \zeta \frac{\partial u}{\partial z} - \xi \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right).$$

Но на основаніи уравненія неразрывности (5) имѣемъ:

$$\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\varrho}\frac{d\varrho}{dt} - \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Вслѣдствіе этого предыдущее уравненіе даетъ:

$$\frac{d}{dt}\xi - \frac{1}{\varrho}\frac{d\varrho}{dt} = \xi\frac{\partial u}{\partial x} + \eta\frac{\partial u}{\partial y} + \zeta\frac{\partial u}{\partial z}.$$

Наконецъ, дѣля всѣ члены уравненія на ϱ и замѣчая, что въ лѣвой части мы находимъ тогда полную производную по времени отъ отношенія $\frac{\xi}{\varrho}$, переписываемъ окончательно это уравненіе, а равно по аналогіи и два другія, такъ:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{\xi}{\varrho}\right) &= \frac{\xi}{\varrho}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\eta}{\varrho}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\zeta}{\varrho}\frac{\partial u}{\partial z}\\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\eta}{\varrho}\right) &= \frac{\xi}{\varrho}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\eta}{\varrho}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\zeta}{\varrho}\frac{\partial v}{\partial z}\\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\zeta}{\varrho}\right) &= \frac{\xi}{\varrho}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\eta}{\varrho}\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\zeta}{\varrho}\frac{\partial w}{\partial z}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (f$$

Эти уравненія даны въ 1858 году Гельмгольтцемъ (Hermann von Helmholtz. Два изслѣдованія по гидродинамикѣ. Переводъ подъ редакціей и съ примѣчаніями проф. С. А. Чаплыгина. Москва, 1902 г.). Они показываютъ, что полныя производныя по времени отъ отношеній $\frac{\xi}{\varrho}$, $\frac{\eta}{\varrho}$, $\frac{\zeta}{\varrho}$, — для несжимаемой жидкости эти производныя представляютъ полныя угловыя ускоренія частицы, такъ какъ всѣ уравненія (f) могутъ быть просто умножены на постоянное ϱ, которое исчезнетъ изъ уравненій, — представляются линейными функціями этихъ самыхъ отношеній, при чемъ всѣ коэффиціенты зависятъ отъ времени. Взявши вторыя производныя отъ этихъ уравненій, получимъ:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\xi}{\varrho}\right) &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{d}{dt}\left(\frac{\xi}{\varrho}\right) + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{d}{dt}\left(\frac{\eta}{\varrho}\right) + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{d}{dt}\left(\frac{\zeta}{\varrho}\right) +\\
&+ \frac{\xi}{\varrho}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t\,\partial x} + u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + v\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x} + w\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial x}\right] +\\
&+ \frac{\eta}{\varrho}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t\,\partial y} + u\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + v\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + w\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial y}\right] +\\
&+ \frac{\zeta}{\varrho}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t\,\partial z} + u\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z} + v\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z} + w\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right]
\end{aligned}$$

и два другія аналогичныя уравненія. Исключая изъ нихъ помощью уравненій (f) выраженія первыхъ производныхъ по времени отношеній $\frac{\xi}{\varrho}$, $\frac{\eta}{\varrho}$, $\frac{\zeta}{\varrho}$, получимъ выраженія вида:

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\xi}{\varrho}\right)=a_1\frac{\xi}{\varrho}+b_1\frac{\eta}{\varrho}+c_1\frac{\zeta}{\varrho},$$
$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\eta}{\varrho}\right)=a_2\frac{\xi}{\varrho}+b_2\frac{\eta}{\varrho}+c_2\frac{\zeta}{\varrho},$$
$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\zeta}{\varrho}\right)=a_3\frac{\xi}{\varrho}+b_3\frac{\eta}{\varrho}+c_3\frac{\zeta}{\varrho},$$

гдѣ величины $a_1, a_2, \ldots c_2, c_3$, являются зависящими отъ времени, а не отъ величинъ ξ, η, ζ, а именно:

$$a_1=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right),$$
$$b_1=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right),$$
$$c_1=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right),$$
$$a_2=\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right),$$
$$b_2=\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right),$$
$$c_2=\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right),$$
$$a_3=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right),$$
$$b_3=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right),$$
$$c_3=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z}+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2+\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right).$$

Ясно, что и всѣ производныя высшаго порядка имѣютъ такой же видъ, съ дальнѣйшимъ лишь усложненіемъ состава коэффиціентовъ a, b, c, но съ сохраненіемъ ихъ независимости отъ ξ, η, ζ. Отсюда можно заключить, что если при движеніи жидкой частицы есть моментъ, когда угловыя скорости ξ_o, η_o, ζ_o обращаются одновременно въ нуль, а вмѣстѣ съ ними обращаются въ нуль какъ всѣ угловыя ускоренія, такъ и всѣ ихъ производныя по времени, то и въ слѣдующій моментъ угловыя скорости этой частицы останутся равными нулю. Другими словами, если нѣкоторая часть жидкости движется такъ, что въ нѣкоторый моментъ ея частицы не имѣютъ вращательнаго движенія, то онѣ не имѣютъ его никогда, ни до, ни послѣ этого момента. Равнымъ образомъ, имѣющійся вихрь уничтожиться не можетъ. Точно также, если въ движеніе начинаетъ приходить совершенная жидкость п о к о ю щ а я с я, то она во вращеніе не придетъ, вихря не будетъ,— наоборотъ, будетъ существовать потенціалъ скоростей. Напомнимъ, что всѣ эти положенія справедливы для *совершенной* жидкости, не могущей выдерживать, ни оказывать тангенціальныхъ усилій, если притомъ она находится подъ вліяніемъ силъ, имѣющихъ потенціалъ, а ея плотность есть функція давленія.

Въ качествѣ примѣра разсмотримъ случай *установившагося плоскаго невихревого теченія* неограниченной массы жидкости. Пусть теченіе происходитъ подъ дѣйствіемъ силы тяжести параллельно плоскости zx. Ясно, что вмѣсто теченія всей массы въ пространствѣ можно разсматривать лишь теченіе въ плоскости zx, т.-е. лишь въ двухъ измѣреніяхъ. Пусть по пути теченія расположена горизонтальная неограниченная плоскость, по которой и должно совершаться теченіе. Начало координатъ примемъ въ этой плоскости, ось z-овъ направимъ вертикально вверхъ; тогда ось x-овъ будетъ совпадать съ данной плоскостью. Уравненія движенія (3), очевидно, примутъ видъ:

$$\left.\begin{aligned} -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x} &= u\frac{\partial u}{\partial x} + w\frac{\partial u}{\partial z} \\ -g - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z} &= u\frac{\partial w}{\partial x} + w\frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Уравненіе неразрывности для несжимаемой жидкости, т.-е. имѣющей $\varrho = const$ будетъ:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Такъ какъ движеніе плоское, то отсутствіе вихрей обусловливается уравненіемъ

$$\eta = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) = 0.$$

Уравненіе линій тока будетъ одно:

$$\frac{dx}{u} = \frac{dz}{w},$$

или

$$u\,dz - w\,dx = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

При существованіи функціи $\psi(x, z)$, удовлетворяющей условіямъ:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

лѣвая часть уравненія (3) представитъ собою полный дифференціалъ.

Уравненіе (2) неразрывности, показывающее, что вторыя производныя этой функціи ψ, взятыя сначала по z, потомъ по x, и наоборотъ, между собою равны, позволяетъ утверждать, что такая функція дѣйствительно существуетъ. Будучи приравнена постоянной величинѣ, какъ того требуетъ уравненіе (3), она представляетъ въ конечномъ видѣ уравненіе линій тока, или, въ нашемъ случаѣ, уравненіе траекторій отдѣльнихъ частицъ.

Наконецъ, потенціальная функція скорости, т.-е. $\varphi(x, z)$, должна быть такова, чтобы на основаніи уравненія неразрывности удовлетворялось уравненіе:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Ясно, что производныя этой функціи связаны съ производными функціи ψ соотношеніями:

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial z};$$

$$w = \frac{\partial\varphi}{\partial z} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

Наконецъ, функція φ должна быть такова, чтобы при $z = 0$ скорость. $w = \frac{\partial\psi}{\partial z}$ обращалась тоже въ нуль, такъ какъ частицы жидкости, лежащія на нашей горизонтальной плоскости, могутъ двигаться только горизонтально.

Простѣйшая функція φ, удовлетворяющая этимъ условіямъ, есть

$$\varphi = Kx^2 - Kz^2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

Въ самомъ дѣлѣ, дифференцированіемъ находимъ, что

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = 2K$$

и

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = -2K,$$

такъ что уравненіе (5) тождественно удовлетворяется. Кромѣ того,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = -2Kz,$$

что при $z = 0$ даетъ $w = 0$, какъ это и требовалось.

Кривыя постояннаго потенціала скоростей имѣютъ уравненіе

$$\varphi = const,$$

что въ нашемъ случаѣ, въ виду (6), даетъ:

$$x^2 - z^2 = A^2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

гдѣ A есть нѣкоторая постоянная величина, измѣняющаяся отъ одной эквипотенціальной кривой до другой. По уравненію видно, что эти кривыя представляютъ собою *равносторонняя гиперболы*, отнесенныя къ центру и главнымъ осямъ.

Кривыя токовъ получимъ, внося изъ (6) значенія скоростей u и w въ уравненіе (3) и интегрируя его; такимъ путемъ получаемъ:

$$2Kx\,dz + 2Kz\,dx = 0;$$

откуда

$$\frac{dx}{x} + \frac{dz}{z} = 0,$$

что, послѣ интеграціи, даетъ:

$$lg\,x + lg\,z = lg\,(x\,.\,z) = const,$$

или окончательно:

$$xz = B^2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

Это тоже *равносторонняя гиперболы*, но для нихъ наши оси координатъ являются асимптотами. Легко убѣдиться, что системы кривыхъ (7) и (8) ортогональны, т.-е. касательныя къ нимъ въ точкахъ ихъ пересѣченій взаимно перпендикулярны.

Значенія скоростей найдемъ по (6) изъ выраженій:

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{\partial\varphi}{\partial x} = 2Kx, \\ w &= \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 2Kz. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

Такимъ образомъ полная скорость частицы V выражается черезъ:

$$V^2 = u^2 + w^2 = 4K^2(x^2 + z^2) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (10)$$

Наконецъ, для нахожденія давленія въ любой точкѣ движущейся жидкости имѣемъ уравненія (1), которыя, послѣ умноженія ихъ соотвѣтственно на dx, dz, сложенія и интегрированія, дадутъ обычнымъ порядкомъ:

$$\frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + z = const = \frac{V_0^2}{2g} + \frac{p_0}{\gamma} + z_0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

Какъ было сказано выше, здѣсь, вслѣдствіе установившагося движенія и при наличности потенціала скоростей, значеніе постояннаго одно и то же для всѣхъ линій тока и можетъ быть опредѣлено, если извѣстны скорость, давленіе и координата какой-нибудь одной жидкой точки.

Для болѣе яснаго представленія всего движенія, кромѣ кривыхъ вида струекъ, опредѣляемыхъ уравненіемъ (8), и кривыхъ, къ нимъ нормальныхъ (уравненіе 7), можно соединить кривыми жидкія точки, имѣющія одно и то же значеніе полной скорости; по уравненію (10) видно, что всѣ такія точки лежатъ на *окружностяхъ* съ центромъ въ началѣ координатъ.

Что касается отдѣльныхъ слагающихъ полной скорости, то по уравненіямъ (9) видно, что всѣ точки, лежащія на одной вертикальной прямой (или плоскости, перпендикулярной къ оси x), имѣютъ одну и ту же горизонтальную слагающую скорости; всѣ точки жидкости, лежащія въ одной горизонтальной плоскости, имѣютъ одинаковую для всѣхъ нихъ вертикальную слагающую скорости.

Кривыя, соединяющія жидкія точки, находящіяся подъ однимъ и тѣмъ же давленіемъ, получимъ изъ уравненія (11), внося въ него значеніе V изъ (10):

$$\frac{2K^2}{g}(x^2 + z^2) + z = \frac{p_0 - p}{\gamma} + const = P \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

Отсюда видно, что *кривыя постояннаго давленія* тоже *представляются окружностями*, центръ которыхъ лежитъ на отрицательной части оси z на разстояніи $\frac{g}{4K^2}$ отъ начала координатъ, въ чемъ легко убѣдиться, относя уравненіе (12) къ системѣ координатъ $z'Ox$, положивъ

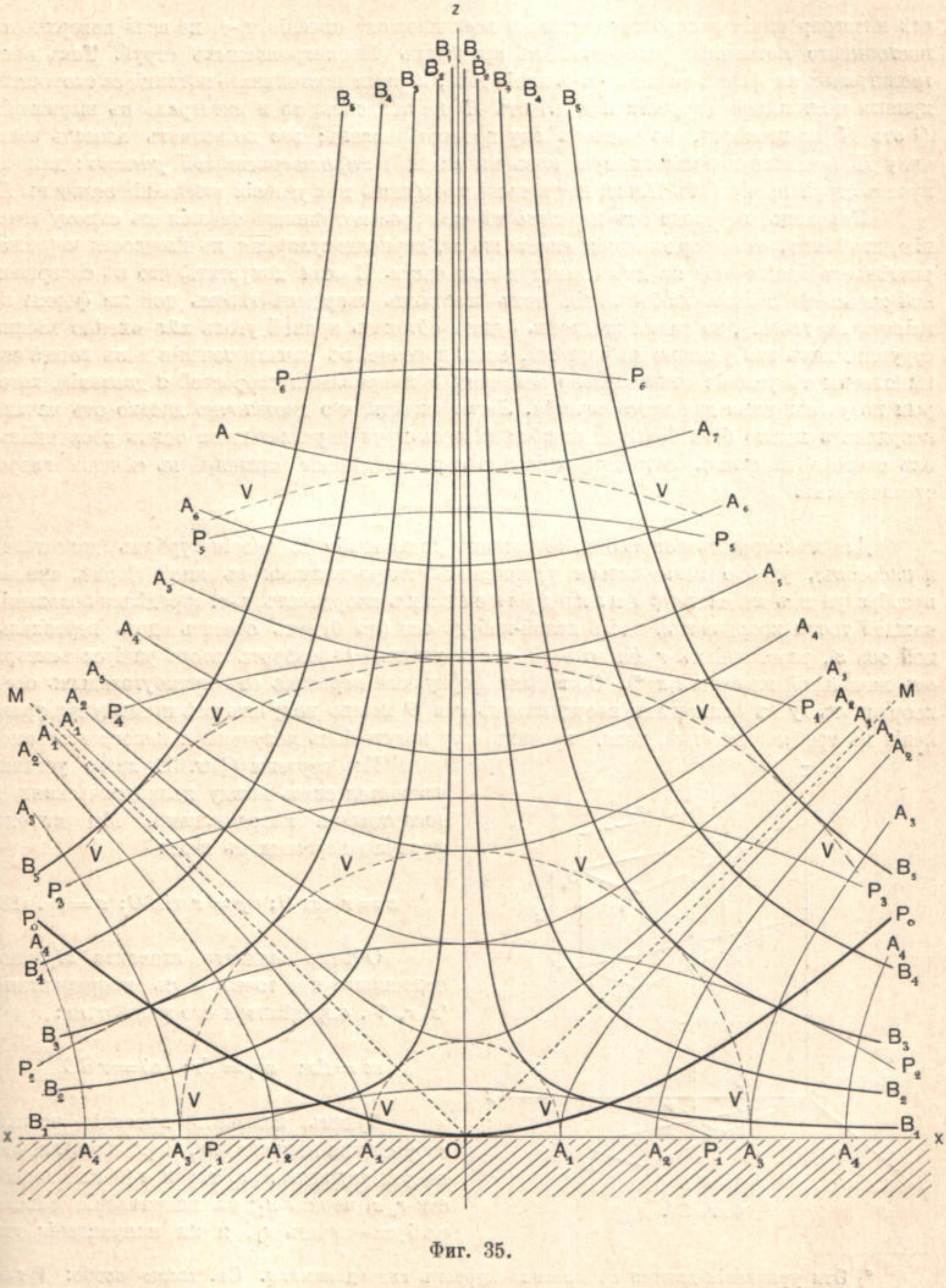
$$z' = z + \frac{g}{4K^2}.$$

Между прочимъ замѣтимъ, что постоянныя A, B, P являются *линейными* величинами, а постоянное K имѣетъ *минусъ первое* измѣреніе относительно времени.

На фиг. 35 это теченіе и представлено. Кривыя *BB* представляютъ собою линіи тока; кривыя *AA*—кривыя постояннаго потенціала скоростей; окружности *VV* (съ центромъ *O*) соединяютъ точки кривыхъ тока, имѣющія одно и то же значеніе скорости. Наконецъ, окружности *PP* (ихъ центръ лежитъ за предѣлами чертежа) соединяютъ точки съ одною и тою же величиной гидродинамическаго давленія. Уже изъ того обстоятельства, что равностороннія гиперболы *BB* линій тока въ области асимптотъ *OM* располагаются значительно шире и съ возрастаніемъ той или другой координаты все тѣснѣе приближаются одна къ другой, можно заключить—принимая во вниманіе, что жидкость течетъ безъ разрывовъ—, что, начинаясь у оси z овъ, теченіе идетъ со все убывающей скоростью, которая затѣмъ, за областью асимптотъ, начинаетъ возрастать. Дѣйствительно, каждая изъ окружностей *VV* засѣкаетъ на линіяхъ тока по двѣ точки, имѣющихъ, слѣдовательно, одно и то же значеніе скорости. Минимумъ скорости имѣетъ, очевидно, мѣсто въ точкахъ касанія кривыхъ тока съ окружностями равныхъ скоростей; по свойству равносторонней гиперболы всѣ эти точки касанія лежатъ на асимптотахъ *OM*. Это обстоятельство, конечно, можетъ быть также показано отысканіемъ *minimum*'а V по уравненію (10).

Кривыя *PP* равнаго давленія также пересѣкаютъ линіи тока въ двухъ точкахъ, что указываетъ на наличность такихъ точекъ на линіяхъ тока, гдѣ давленіе имѣетъ максимальное значеніе; этими точками являются точки касанія окружностей *P* съ гиперболами *B*;

на чертежѣ онѣ соединены общею кривою P_0OP_0. Изысканіе *minimum*'а p по уравненіямъ (11) и (10) показываетъ, что эта кривая есть также равносторонняя гипербола, проходящая черезъ начало координатъ O и имѣющая центръ на оси z-овъ на половинѣ разстоянія между началомъ координатъ и центромъ окружностей PP.



Фиг. 35.

Наконецъ, отмѣтимъ, что, воображая вокругъ каждой изъ линій тока весьма малый элементъ площади df, взятый нормально къ ней, можно вычислить расходъ по каждой линіи тока изъ уравненія

$$dQ = df \,.\, V,$$

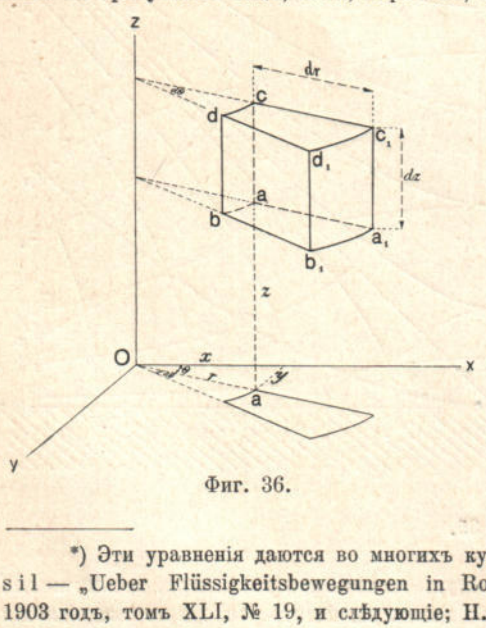
а расходъ въ конечной части теченія, т.-е. по цѣлому пучку линій тока, или, точнѣе, расходъ пучка элементарныхъ струекъ вычислится по формулѣ:

$$Q = \int df \,.\, V = 2K \int \sqrt{x^2 + z^2}\, df,$$

гдѣ интегрированіе распространяется по всей площади сѣченія, т.-е. по всей поверхности постояннаго потенціала скоростей въ предѣлахъ разсматриваемыхъ струй. Такъ какъ геометрическая форма теченія (т.-е. линіи тока, кривыя постояннаго потенціала скоростей, кривыя постоянной скорости и т. д.) отъ K не зависитъ, то и интегралъ въ выраженіи Q отъ K не зависитъ, но расходъ ему пропорціоналенъ; это позволяетъ назвать величину K (величину именованную, какъ мы видѣли) *характеристикой расхода*: данный пучекъ струй пропуститъ больше или меньше воды лишь при условіи измѣненія величины K.

Наконецъ, переходя отъ плоскаго сѣченія разсмотрѣннаго теченія къ самому теченію, замѣтимъ, что координатная плоскость zy, перпендикулярная къ плоскости чертежа, раздѣляетъ все теченіе на двѣ симметричныя части. И если допустить, что въ совершенной жидкости замѣна любой линіи тока жесткимъ твердымъ тѣломъ той же формы не вліяетъ на теченіе, то такая жидкость будетъ обтекать прямой уголъ $z0x$ именно такими струями, какъ это указано на чертежѣ, если, конечно, въ началѣ теченія и въ концѣ его выполнены тѣ условія относительно величины и направленія скоростей и давленій, которыя получены нами для этого теченія. Легко видѣть, что достаточно далеко отъ начала координатъ можно безъ большой ошибки считать струи параллельными осямъ координатъ, ихъ сѣченія плоскими, скорости равными, а распредѣленіе давленій въ сѣченіи гидростатическимъ.

Для нѣкоторыхъ вопросовъ, имѣющихъ приложеніе въ теоріи турбинъ (двигателей и насосовъ), удобно пользоваться уравненіями гидродинамики въ иной формѣ, именно преобразуя ихъ къ системѣ цилиндрическихъ координатъ, т.-е. опредѣляя положеніе каждой точки координатой вдоль какой-нибудь оси (мы будемъ считать вдоль вертикальной оси z), разстояніемъ r ея до этой оси и угломъ Θ поворота этого радіуса вектора отъ начальной плоскости zx *). Обычными формулами перехода отъ прямоугольныхъ осей координатъ xy къ полярнымъ координатамъ r и Θ можно получить всѣ предыдущія уравненія въ требуемомъ видѣ, хотя, впрочемъ, они могутъ быть получены и непосредственно.



Фиг. 36.

Изъ чертежа (фиг. 36) легко устанавливается связь между цилиндрическими и декартовыми координатами. Мы имѣемъ формулы перехода въ видѣ:

$$x = r \cos \Theta; \quad y = r \sin \Theta; \quad z = z \,. \quad (13)$$

Объемъ жидкаго элемента ad_1, построеннаго при точкѣ a съ координатами (z, r, Θ), опредѣлится его размѣрами:

$$ac = dz; \quad aa_1 = dr; \quad ab = r\, d\Theta.$$

Будемъ называть проекціи полной скорости на направленіе, перпендикулярное къ радіусу вектору r_a точки a (и къ плоскости $r_a z$) черезъ u_1; на направленіе самого радіуса—черезъ v_1, и на направленіе оси

---

*) Эти уравненія даются во многихъ курсахъ гидродинамики. См. также особо: Prasil — „Ueber Flüssigkeitsbewegungen in Rotationshohlräumen" въ Schweiz. Bauzeitung за 1903 годъ, томъ XLI, № 19, и слѣдующіе; H. Lorenz — „Neue Theorie und Berechnung der Kreiselräder", 1906 годъ; А. Миловичъ — „Опытъ теоріи всасывающей трубы" въ Бюллетеняхъ Политехническаго О-ва за 1907 годъ, № 1.

z-овъ черезъ w; ясно, что здѣсь только одно w не отличается, вообще, отъ того w, которое мы имѣли въ предыдущихъ обозначеніяхъ. По смыслу этихъ величинъ слѣдуетъ, что:

$$u_1 = r\,\frac{d\Theta}{dt}\,;\quad v_1 = \frac{dr}{dt}\,;\quad w = \frac{dz}{dt}\,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

Величина $\frac{d\Theta}{dt}$ есть мгновенная угловая скорость вращенія частицы около оси z-овъ.

Далѣе, проекціи скоростей по декартовымъ осямъ координатъ (x, y, z) можно теперь выразить такъ:

$$u = \frac{dx}{dt} = \frac{dr}{dt}\cos\Theta - r\sin\Theta\,\frac{d\Theta}{dt} = v_1\cos\Theta - u_1\sin\Theta,$$

$$v = \frac{dy}{dt} = \frac{dr}{dt}\sin\Theta + r\cos\Theta\,\frac{d\Theta}{dt} = v_1\sin\Theta + u_1\cos\Theta,$$

а входящія въ уравненія движенія проекціи полнаго ускоренія по осямъ координатъ представятся такъ:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{du}{dt} &= \left(\frac{dv_1}{dt} - u_1\frac{d\Theta}{dt}\right)\cos\Theta - \left(v_1\frac{d\Theta}{dt} + \frac{du_1}{dt}\right)\sin\Theta = \\
&= \left(\frac{dv_1}{dt} - \frac{u_1^2}{r}\right)\cos\Theta - \left(\frac{du_1}{dt} + \frac{u_1v_1}{r}\right)\sin\Theta; \\
\frac{dv}{dt} &= \left(\frac{dv_1}{dt} - u_1\frac{d\Theta}{dt}\right)\sin\Theta + \left(v_1\frac{d\Theta}{dt} + \frac{du_1}{dt}\right)\cos\Theta = \\
&= \left(\frac{dv_1}{dt} - \frac{u_1^2}{r}\right)\sin\Theta + \left(\frac{du_1}{dt} + \frac{u_1v_1}{r}\right)\cos\Theta\,.
\end{aligned}\right\}\ldots\ldots \quad (15)$$

Отсюда, между прочимъ, видно, что при полярныхъ координатахъ для нахожденія полнаго ускоренія не достаточно брать полныя производныя скоростей u_1, v_1, по времени, но нужно принять еще во вниманіе центробѣжное ускореніе $\frac{u_1^2}{r}$ и ускореніе $\frac{u_1v_1}{r}$, такъ какъ с а м и н а п р а в л е н і я (u_1, v_1) не представляются постоянными.

Далѣе мы имѣемъ:

$$r^2 = x^2 + y^2,$$

а поэтому, имѣя въ виду (13), находимъ:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = \cos\Theta\,;$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} = \sin\Theta\,.$$

Точно также:

$$tg\,\Theta = \frac{y}{x}\,;$$

почему:

$$\frac{\partial\Theta}{\partial x} = -\frac{y\cos^2\Theta}{x^2} = -\frac{\sin\Theta}{r}\,,$$

$$\frac{\partial\Theta}{\partial y} = \frac{\cos^2\Theta}{x} = \frac{\cos\Theta}{r}\,.$$

Такъ какъ перемѣнныя x и y мы замѣняемъ перемѣнными r, Θ, то можемъ писать, принимая во вниманіе только что полученныя выраженія:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\partial p}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial p}{\partial \Theta}\cdot\frac{\partial \Theta}{\partial x}=\frac{\partial p}{\partial r}\cos\Theta-\frac{1}{r}\,\frac{\partial p}{\partial \Theta}\sin\Theta\,,\\ \frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\partial p}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial p}{\partial \Theta}\cdot\frac{\partial \Theta}{\partial y}=\frac{\partial p}{\partial r}\sin\Theta+\frac{1}{r}\,\frac{\partial p}{\partial \Theta}\cos\Theta\,.\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots(16)$$

Наконецъ, если вмѣсто проекцій внѣшней силы X, Y, Z внести обозначенія проекцій той же силы U, R, Z, соотвѣтственно по направленію, перпендикулярному къ радіусу (U), по радіусу (R) и по оси z-овъ (Z), то связь между этими проекціями устанавливается въ видѣ:

$$\left.\begin{aligned}X&=R\cos\Theta-U\sin\Theta\,,\\ Y&=R\sin\Theta+U\cos\Theta\,,\\ Z&=Z\,.\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(17)$$

Послѣ этого первыя два Эйлеровы уравненія гидродинамики, принимая во вниманіе уравненія (15), (16), (17) и соотвѣтственно собирая члены могутъ быть переписаны такъ:

$$\left(R-\frac{1}{\varrho}\,\frac{\partial p}{\partial r}-\frac{dv_1}{dt}+\frac{u_1^2}{r}\right)\cos\Theta=\left(U-\frac{1}{\varrho}\,\frac{\partial p}{\partial \Theta}-\frac{du_1}{dt}-\frac{u_1v_1}{r}\right)\sin\Theta.$$
$$\left(R-\frac{1}{\varrho}\,\frac{\partial p}{\partial r}-\frac{dv_1}{dt}+\frac{u_1^2}{r}\right)\sin\Theta=-\left(U-\frac{1}{\varrho}\,\frac{\partial p}{\partial \Theta}-\frac{du_1}{dt}-\frac{u_1v_1}{r}\right)\cos\Theta.$$

Умножимъ первое уравненіе на $\sin\Theta$, второе на $\cos\Theta$, и вычтемъ второе изъ перваго; потомъ умножимъ первое уравненіе на $\cos\Theta$, второе на $\sin\Theta$, и сложимъ. Присоединяя третье, неизмѣненное, Эйлерово уравненіе и опуская при скоростяхъ подстрочные указатели, какъ ненужные, получимъ ур-ія движенія:

$$\left.\begin{aligned}U-\frac{1}{\varrho}\,\frac{\partial p}{\partial \Theta}&=\frac{du}{dt}+\frac{uv}{r}\,,\\ R-\frac{1}{\varrho}\,\frac{\partial p}{\partial r}&=\frac{dv}{dt}-\frac{u^2}{r}\,,\\ Z-\frac{1}{\varrho}\,\frac{\partial p}{\partial z}&=\frac{dw}{dt}.\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(18)$$

Отсюда видно, что общій составъ уравненій остается тотъ же самый; во вторыхъ частяхъ прибавляются вышеотмѣченныя центробѣжное ускореніе $\frac{u^2}{r}$ и ускореніе $\frac{uv}{r}$. Само собою разумѣется, что и здѣсь полныя производныя $\frac{du}{dt}$, ... должны быть развернуты такъ:

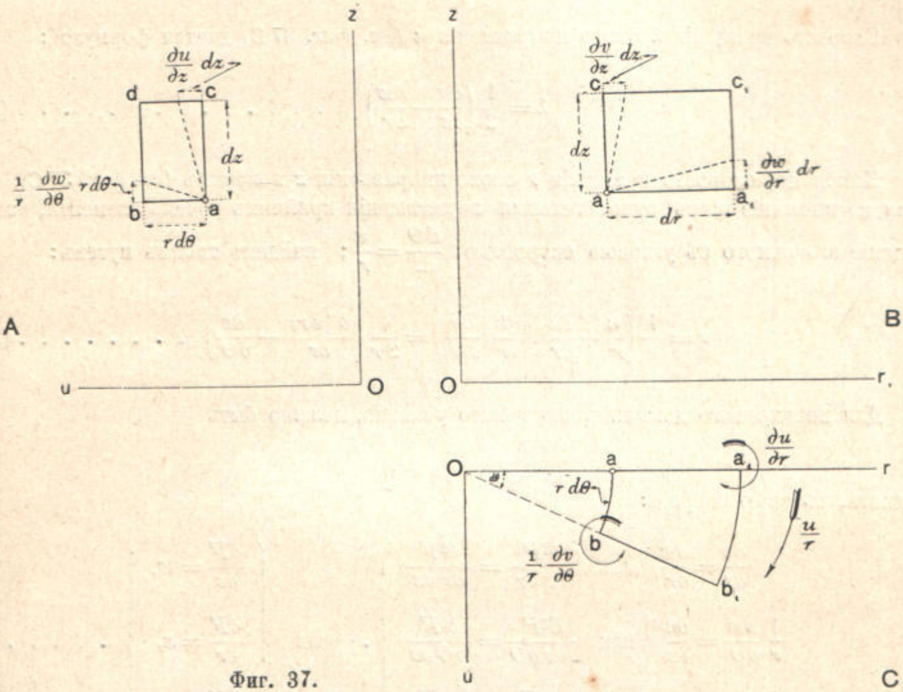
$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial \Theta}\,\frac{d\Theta}{dt}+\frac{\partial u}{\partial r}\,\frac{dr}{dt}+\frac{\partial u}{\partial z}\,\frac{dz}{dt}=\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{u}{r}\,\frac{\partial u}{\partial \Theta}+v\,\frac{\partial u}{\partial r}+w\,\frac{\partial u}{\partial z};$$

также:

$$\frac{dp}{dt}=\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{u}{r}\,\frac{\partial p}{\partial \Theta}+v\,\frac{\partial p}{\partial r}+w\,\frac{\partial p}{\partial z}\quad\text{и т. д.}$$

Уравненіе неразрывности можетъ быть преобразовано подобно предыдущему. Получить его можно непосредственно, подобно тому, какъ оно было получено для декартовыхъ координатъ, полагая для простоты, что мы имѣемъ дѣло съ несжимаемой жидкостью. Прибыль массы внутри выдѣленнаго элементарнаго объема (см. фиг. 37) вслѣдствіе теченія черезъ грань $a\,c\,c_1 a_1$ и грань $b\,d\,d_1 b_1$ можно выразить черезъ:

$$\varrho\, dr \,.\, dz \left[u - \left(u + \frac{\partial u}{\partial \Theta}\, d\Theta\right)\right] = -\,\varrho \frac{\partial u}{\partial \Theta}\, dr\, dz\, d\Theta.$$



Фиг. 37.

Та же величина, благодаря теченію въ радіальномъ направленіи, выражается черезъ:

$$\varrho\, r\, d\Theta\, dz\, v - \varrho\,(r + dz)\, d\Theta\, dz \left(v + \frac{\partial v}{\partial r}\, dr\right) = -\,\varrho \left(r \frac{\partial v}{\partial r} + v\right) dr\, dz\, d\Theta,$$

если пренебречь безконечно малымъ высшаго порядка. Наконецъ, прибыль массы, благодаря теченію вдоль оси z-овъ, попрежнему остается равной:

$$-\,\varrho\, r\, d\Theta\, dr\, \frac{\partial w}{\partial z}\, dz.$$

Съ другой стороны, прибыль массы во всемъ неизмѣнившемся объемѣ, при несжимаемой жидкости, очевидно, равна нулю. Поэтому, складывая эти три члена и сокращая уравненіе на $\varrho\, r\, dr\, dz\, d\Theta$, получимъ уравненіе неразрывности:

$$\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial u}{\partial \Theta} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(19)}$$

Уравненія (18) и (19) и представляютъ то, что требовалось получить. Признакомъ существованія установившагося движенія останется, попрежнему, то, что всѣ частныя производныя отдѣльныхъ величинъ обращаются въ нули. Признакомъ отсутствія вихревого движенія или, что все равно, существованія потенціала скоростей, является обращеніе въ нуль мгновенныхъ угловыхъ скоростей вращенія около выбранныхъ осей координатъ.

Составимъ ихъ выраженія, пользуясь уже даннымъ въ примѣчаніи предыдущаго параграфа геометрическимъ составомъ величинъ ξ, η, ζ. На фиг. 37 **A** представлена проекція цилиндрической грани ***acdb*** нашего элемента. По ней видно, что средняя угловая скорость вращенія около радіуса вектора r нашей частицы есть:

$$\mu = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\,\frac{\partial w}{\partial \Theta} - \frac{\partial u}{\partial z}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (20')$$

Скорость вращенія λ около направленія u (см. фиг. 37 **B**) дается формулой:

$$\lambda = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial r}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (20'')$$

Наконецъ, скорость вращенія ν около направленія z получимъ (см. фиг. 37 **C**), принимая во вниманіе какъ относительныя перемѣщенія крайнихъ точекъ элемента, такъ и вращеніе его самого съ угловою скоростью $\frac{d\Theta}{dt} = \frac{u}{r}$; найдемъ такимъ путемъ:

$$\nu = \frac{1}{2}\left(\frac{u}{r} + \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r}\,\frac{\partial v}{\partial \Theta}\right) = \frac{1}{2r}\left(\frac{\partial (ur)}{\partial r} - \frac{\partial v}{\partial \Theta}\right) \quad \ldots\ldots\ldots (20''')$$

Для невихревого движенія, какъ было указано, должно быть

$$\lambda = \mu = \nu = 0,$$

что даетъ, въ свою очередь:

$$\left.\begin{array}{lll} \dfrac{\partial v}{\partial z} = \dfrac{\partial w}{\partial r} & \text{или} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial z\,\partial r} = \dfrac{\partial^2 F}{\partial r\,\partial z} \\[2ex] \dfrac{1}{r}\,\dfrac{\partial w}{\partial \Theta} = \dfrac{\partial u}{\partial z}\,{}^{1)} & \text{или} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial z\,\partial \Theta} = \dfrac{\partial^2 F}{\partial \Theta\,\partial z} \\[2ex] \dfrac{\partial (ur)}{\partial z} = \dfrac{\partial v}{\partial \Theta} & \text{или} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial r\,\partial \Theta} = \dfrac{\partial^2 F}{\partial \Theta\,\partial r} \end{array}\right\},\quad \text{если} \quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial F}{\partial z} = w, \\[2ex] \dfrac{\partial F}{\partial r} = v, \\[2ex] \dfrac{\partial F}{\partial \Theta} = ru. \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (21)$$

Эта функція F координатъ, такъ же какъ введенная нами ранѣе функція φ, и есть потенціалъ скоростей; отсутствіе вихря, какъ видно, вполнѣ обусловливаетъ ея существованіе и обратно. При ея наличности уравненіе неразрывности можетъ быть написано такъ:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 F}{\partial \Theta^2} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (22)$$

Потенціальная функція должна удовлетворять этому уравненію.

Примѣнимъ эти уравненія къ разсмотрѣнію *установившагося теченія, вполнѣ симметричнаго относительно оси* z, которую вообразимъ вертикальной; жидкость будемъ считать тяжелой и притомъ совершенной. Пусть теченіе встрѣчаетъ на своемъ пути неподвижную горизонтальную плоскость. Полная симметрія теченія относительно оси z требуетъ, чтобы мы положили скорость u и всѣ ея производныя равными нулю; также придется считать, что всѣ обстоятельства движенія для точекъ, лежащихъ на одной и той же окружности, имѣющей центръ на оси теченія и лежащей въ горизонтальной плоскости, одинаковы между собою. И здѣсь, слѣдовательно, задача изъ пространственной обра-

---

1) Такъ какъ r и z являются перемѣнными, другъ отъ друга независимыми, то

$$r\,\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial (ur)}{\partial z}.$$

щается въ задачу на плоскости. Разница отъ предыдущаго случая заключается въ томъ, что тамъ изученное плоское теченіе повторяется въ параллельныхъ плоскостяхъ; здѣсь же оно повторяется въ радіальныхъ плоскостяхъ, каждая изъ которыхъ является меридіональнымъ сѣченіемъ теченія. Итакъ, мы должны положить:

$$u=0;\ \frac{\partial w}{\partial \Theta}=0;\ \frac{\partial v}{\partial \Theta}=0;\ \frac{\partial p}{\partial \Theta}=0;\ \frac{d\Theta}{dt}=0;\ \frac{\partial w}{\partial t}=0;\ \frac{\partial v}{\partial t}=0;\ \frac{\partial p}{\partial t}=0.$$

Поэтому:

$$\frac{du}{dt}=0,$$

$$\frac{dv}{dt}=v\frac{\partial v}{\partial r}+w\frac{\partial v}{\partial z},$$

$$\frac{dw}{dt}=v\frac{\partial w}{\partial r}+w\frac{\partial w}{\partial z}.$$

Изъ трехъ уравненій (18) останутся, такимъ образомъ, два послѣднія:

$$\left.\begin{aligned} -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial r}&=v\frac{\partial v}{\partial r}+w\frac{\partial v}{\partial z} \\ -g-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z}&=v\frac{\partial w}{\partial r}+w\frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned}\right\}\ \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

Уравненіе неразрывности будетъ имѣть видъ:

$$\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{v}{r}=0\ \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (24)$$

Наконецъ, угловыя скорости μ и ν тождественно обращаются въ нуль (ур-ія 20′ и 20″), такъ что, для того, чтобы не было вихря, необходимо имѣть:

$$2\lambda=\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial r}=0.$$

Этому условію удовлетворяетъ функція

$$F=2Kz^2-Kr^2,$$

гдѣ

$$K=const\ \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

Въ самомъ дѣлѣ:

$$\left.\begin{aligned} v&=\frac{\partial F}{\partial r}=-2Kr; & \frac{\partial^2 F}{\partial r\,\partial z}&=0; & \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}&=-2K, \\ w&=\frac{\partial F}{\partial z}=4Kr; & \frac{\partial^2 F}{\partial z\,\partial r}&=0; & \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}&=4K. \end{aligned}\right\}\ \ldots\ldots \quad (26)$$

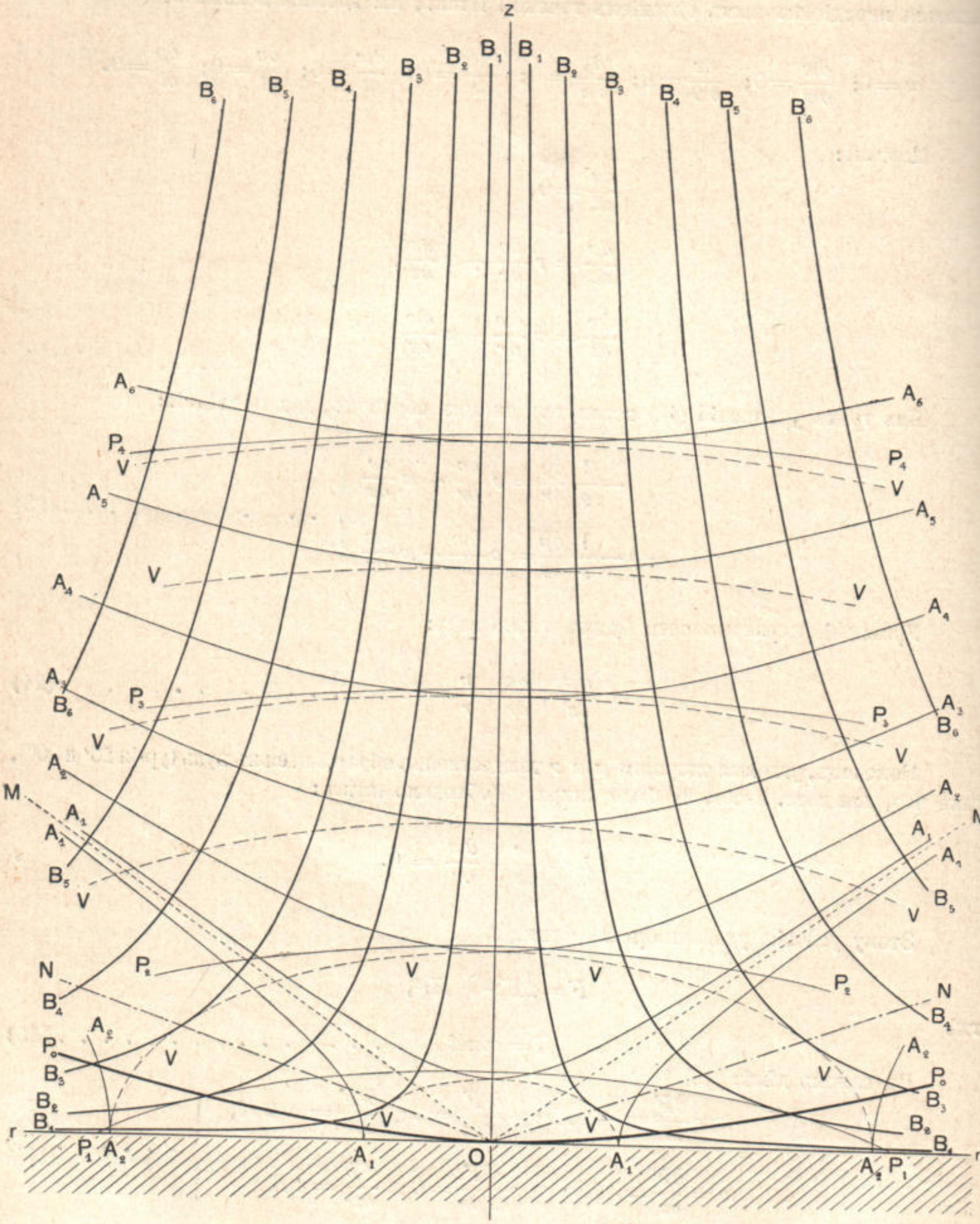
Поэтому уравненіе неразрывности (24) или соотвѣтственно упрощенное уравненіе (22) дадутъ:

$$4K-2K-2K=0.$$

Разсуждая совершенно аналогично съ предыдущимъ, найдемъ, что кривыя постояннаго потенціала скоростей опредѣляются уравненіемъ:

$$2Kz^2-Kr^2=A^2\ \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (27)$$

и являются гиперболами, отнесенными къ главнымъ осямъ; ихъ ассимптоты ***OM*** образуютъ съ осью z уголъ, тангенсъ котораго равенъ $\sqrt{2}$ (см. линiи ***AA*** на фиг. 38).



Фиг. 38.

Линiи тока, подобно уравненiю (3), найдемъ, интегрируя уравненiе:

$$-2\,Kr\,dz - 4\,Kz\,dr = 0\,;$$

откуда:

$$\frac{2\,dr}{r} + \frac{dz}{z} = 0\,;$$

затѣмъ

$$2\,lg\,r + lg\,z = const,$$

и окончательно:

$$r^2 z = B^3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (28)$$

Это уравненіе показываетъ, что если вообразить не плоское только сѣченіе нашего теченія, а все теченіе, и въ немъ выдѣлить поверхность вращенія, описанную какой-нибудь одной линіей тока, то эта поверхность обладаетъ тѣмъ свойствомъ, что объемы цилиндровъ, имѣющихъ въ качествѣ своихъ радіусовъ и высотъ координаты любой точки этой кривой тока, остаются между собою равными (въ ранѣе разсмотрѣнномъ теченіи тоже можетъ быть сказано про объемы призмъ, надлежаще построенныхъ, или про площади прямоугольниковъ въ плоскомъ сѣченіи теченія).

По уравненію (28) ясно также, что ось z, а также всѣ оси r во всѣхъ меридіональныхъ плоскостяхъ являются асимптотами для кривыхъ тока (см. кривыя BB).

Полная скорость V найдется по уравненіямъ (26):

$$V^2 = 4\,K^2 r^2 + 16\,K^2 z^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (29)$$

Слѣдовательно, кривыя постоянной полной скорости суть эллипсы, отнесенные къ главнымъ осямъ; ихъ полуоси относятся, какъ $2:1$; болѣе короткая ось совпадаетъ съ осью z-овъ (кривыя V).

Эти кривыя пересѣкаютъ линіи тока въ двухъ точкахъ; слѣдовательно, точки касанія этихъ двухъ кривыхъ даютъ точки на линіяхъ тока, гдѣ вода на нихъ имѣетъ минимальную скорость. Геометрическое мѣсто точекъ minimum'а скорости найдемъ такъ.

Изъ уравненій (29) и (28) имѣемъ:

$$V = \sqrt{\frac{4\,K^2 B^3}{z} + 16\,K^2 z^2}\,,$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = 2\,K\,\frac{8\,z - \dfrac{B^3}{z^2}}{2\sqrt{\dfrac{B^3}{z} + 4\,z^2}} = 0;$$

отсюда:

$$8\,z_0 - \frac{B^3}{z_0^2} = 0;$$

такъ что:

$$z_0 = 0{,}5\,B$$

и по (28)

$$r_0 = \sqrt{2}\,B.$$

Поэтому

$$\frac{z_0}{r_0} = const,$$

а слѣдовательно, точки всѣхъ линій тока, имѣющія наименьшую скорость, лежатъ на одной прямой, образующей съ осью r уголъ, тангенсъ котораго $= \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$. (См. прямыя ON.)

Наконецъ, уравненія (23) послѣ обычнаго интегрированія дадутъ:

$$-g\,dz - \frac{1}{\varrho}\,dp = d\,\frac{w^2}{2} + d\,\frac{v^2}{2}$$

или

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2\,g} = const \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (30)$$

другими словами, обычное уравненіе Д. Бернулли, какъ оно, конечно, и должно быть для установившагося теченія.

Кривыя, соединяющія точки постояннаго давленія, получимъ изъ этого уравненія, совмѣщая его съ (29). Ясно, что это тоже эллипсы, но центры ихъ уже не совпадаютъ съ началомъ координатъ, а лежатъ ниже его на оси z на величину $-\frac{g}{16K^2}$, что заключаемъ по уравненію:

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{4K^2r^2 + 16K^2z^2}{2g} = const$$

или

$$z^2 + \frac{r^2}{4} + \frac{2g}{16K^2}z + \frac{g}{16K^2} = const. \text{ (См. кривыя } PP).$$

Наконецъ, внося въ первое изъ этихъ уравненій уравненіе кривыхъ тока и отыскивая геометрическое мѣсто точекъ (z_1, r_1) съ наибольшимъ давленіемъ, найдемъ:

$$\frac{p}{\gamma} = const - z - \frac{4K^2r^2 + 16K^2z^2}{2g};$$

$$\frac{p}{\gamma} = \frac{2g}{16K^2}\left[const - \left(\frac{2g}{16K^2}z + \frac{B^3}{4z} + z^2\right)\right];$$

$$\frac{2g}{16K^2} - \frac{B^3}{4z_1^2} + 2z_1 = 0;$$

$$\frac{2g}{16K^2} - \frac{r_1^2}{4z_1} + 2z_1 = 0$$

или

$$z_1^2 - \frac{r_1^2}{8} + \frac{g}{16K^2}z_1 = 0.$$

Это есть гипербола, отнесенная къ вершинѣ и дѣйствительной оси (ибо при $z_1 = 0$ имѣемъ $r_1 = 0$). Ея центръ лежитъ ниже начала координатъ на величину $\left(-\frac{g}{32K^2}\right)$, т.-е. вдвое ближе центра эллипсовъ равнаго давленія, въ чемъ легко убѣдиться соотвѣтствующимъ преобразованіемъ этого уравненія. (Смотри кривую P_0P_0.) Ось z совпадаетъ съ дѣйствительной осью этой гиперболы. Асимптоты этой гиперболы параллельны прямой наименьшей скорости.

Въ этомъ теченіи, какъ и въ предыдущемъ, расходъ, проходящій по весьма тонкой струйкѣ, воображенной вокругъ каждой линіи тока, зависитъ только отъ значенія постояннаго K въ потенціальной функціи скоростей. Размѣры величинъ A, B, K остаются тѣ же самые, что и въ предыдущемъ случаѣ.—Наконецъ, если допустить, что замѣна любой линіи тока жесткой нитью не вліяетъ на теченіе окружающей совершенной жидкости, то помощью этого теченія можно построить расширяющуюся трубу, какъ тѣло вращенія, и ожидать, что по ней теченіе будетъ происходить согласно изученному, если, конечно, условія скоростей и давленій, какъ въ началѣ, такъ и въ концѣ трубы, будутъ выполнены тѣ самыя, которыя требуются въ этомъ теченіи. Легко видѣть, что при достаточно большомъ z скорости очень близки къ параллельности и равенству, а законъ распредѣленія давленій—къ гидростатическому.

Остановимся еще на случаѣ чистаго вращенія тяжелой жидкости,— конечно, совершенной,—около вертикальной оси. Будемъ также считать движеніе установившимся. Въ этомъ случаѣ мы должны положить $v = w = 0$, а также считать нулями всѣ ихъ производныя. Уравненіе (19) показываетъ тогда, что скорость u не зависитъ отъ координаты Θ, т.-е. что по каждой окружности, плоскость которой перпендикулярна къ оси z, а центръ лежитъ на этой оси, — другими словами, во всѣхъ точкахъ параллельнаго круга,—скорость u постоянна. Условія существованія потенціала скоростей дадутъ:

$$\mu = 0 = \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial z},$$

$$\nu = 0 = \frac{1}{2r}\frac{\partial (ur)}{\partial r}.$$

Первое изъ нихъ показываетъ, что вышесказанное относительно величины u справедливо не только для параллельнаго круга, но и для поверхности цилиндра, на каждомъ такомъ кругѣ построеннаго. Второе уравненіе даетъ послѣ интегрированія:

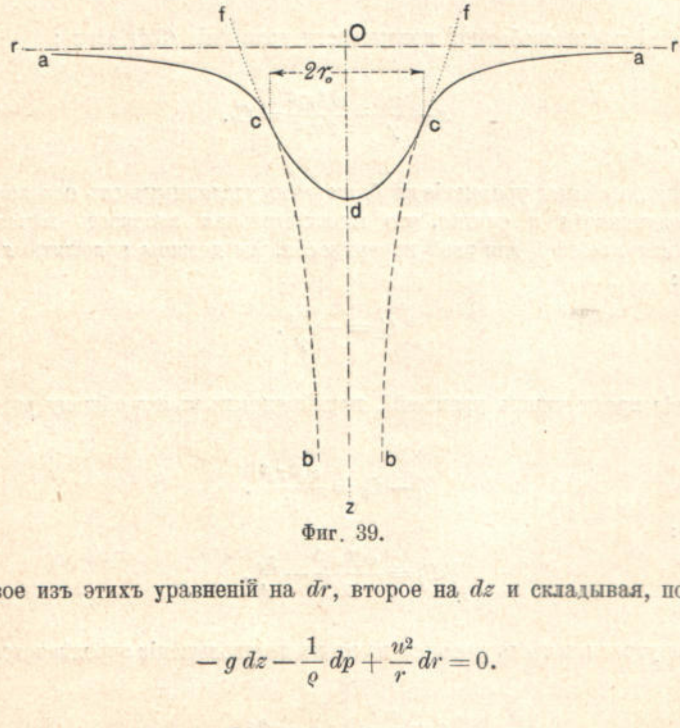
$$u\,r = \omega\,r^2 = N = const \quad \dots\dots\dots\dots\dots (31)$$

т.-е. что угловая скорость вращенія ω частицъ каждой такой цилиндрической поверхности обратно пропорціональна квадрату его радіуса. Ясно, что на оси угловая скорость достигаетъ при этомъ безконечности, такъ что слагающая вихря ν на оси не обращается въ нуль. Слѣдовательно, для этихъ точекъ жидкости потенціала скорости уже нѣтъ: ось вращенія представляетъ то, что называется **вихревымъ шнуромъ**.

Уравненія (18) дадутъ въ нашемъ случаѣ:

$$-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{u^2}{r},$$

$$-g - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z} = 0.$$



Фиг. 39.

Умножая первое изъ этихъ уравненій на dr, второе на dz и складывая, получаемъ:

$$-g\,dz - \frac{1}{\varrho}\,dp + \frac{u^2}{r}\,dr = 0.$$

Принимая во вниманіе уравненіе (31), находимъ:

$$-g\,dz - \frac{1}{\varrho}\,dp + \frac{N^2}{r^3}\,dr = 0.$$

Интеграція его даетъ:

$$-gz-\frac{p}{\varrho}-\frac{N^2}{2\,r^2}=const \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (32)$$

или

$$z+\frac{p}{\gamma}+\frac{u^2}{2g}=const \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (32')$$

Опять таки законъ распредѣленія давленій въ такой жидкости дается уравненіемъ Д. Бернулли. Изъ него видно, что на оси вращенія, гдѣ по (31) $u=\infty$, давленіе достигаетъ тоже безконечности, но отрицательной, т.-е. жидкость разорвется, и на оси ея не будетъ. На свободной поверхности нужно считать давленіе постояннымъ; поэтому если въ уравненіи (32′) положить $p=const$, то оно дастъ кривую меридіональнаго сѣченія свободной поверхности; изъ него видно, что ось вращенія представляется асимптотой этой кривой, т.-е. что поверхность такой жидкости будетъ представлять чистую форму воронки (см. кривую acb на фиг. 39).

Допустимъ, что такъ или иначе мы принудимъ нѣкоторую часть жидкости, заключенную въ цилиндрѣ небольшого радіуса r_0, вращаться съ постоянной угловой скоростью ω_0. Тогда внутри этого цилиндра мы получимъ для свободной поверхности форму параболоида вращенія $fcdcf$, какъ мы это видѣли въ гидростатикѣ, а для прочей части свободная поверхность опредѣлится уравненіемъ (32′), при чемъ обѣ поверхности между собою соприкасаются на окружности cc радіуса r. Считая, что ось z-овъ направлена *внизъ*, получимъ, очевидно, что уравненіе для внутренней части свободной поверхности есть:

$$z-\frac{p_0}{\gamma}+\frac{\omega_0{}^2 r^2}{2\,g}=C_1.$$

Для прочей части свободной поверхности уравненіе (32′) даетъ:

$$z-\frac{p_0}{\gamma}-\frac{\omega_0{}^2 r_0{}^2}{2gr^2}=C_2.$$

Примѣняя послѣднее уравненіе къ безконечно удаленнымъ отъ оси вращенія точкамъ свободной поверхности и считая, что горизонтальная плоскость начала координатъ является ассимптотической для этой поверхности, мы должны положить $z=0$ и $r=\infty$; слѣдовательно:

$$C_2=-\frac{p_0}{\gamma}.$$

Вычитаніе предыдущихъ уравненій, примѣненныхъ къ ихъ общему радіусу r_0, дастъ:

$$C_1-C_2=\frac{\omega_0{}^2\,r_0{}^2}{g}.$$

Поэтому:

$$C_1=\frac{\omega_0{}^2\,r_0{}^2}{g}-\frac{p_0}{\gamma}.$$

Итакъ, внутренняя часть воронки въ этомъ предположеніи опредѣляется уравненіемъ:

$$z=\frac{\omega_0{}^2}{2g}\,(2\,r_0{}^2-r^2),$$

а наружная:

$$z=\frac{\omega_0{}^2\,r_0{}^4}{2g\,r^2}.$$

Такое принужденное вращеніе можно получить, вращая въ цилиндрическомъ сосудѣ твердый цилиндрическій стержень радіуса r_0, проходящій черезъ дно и почти достигающій свободной поверхности: при достаточно быстромъ и долгомъ его вращеніи вся жидкость начинаетъ вращаться, обнаруживая на свободной поверхности воронку. Фиг. 39 построена въ предположеніи $2\,r_0 = 20$ *mm*, $n = 424$ въ минуту, такъ что при вычисленіяхъ въ сантиметрахъ $\frac{\omega_0^2}{2g} = 1$.

Этимъ закончимъ этотъ краткій сводъ свѣдѣній по гидродинамикѣ, отсылая интересующихся къ курсамъ:

Н. Е. Жуковскій. Кинематика жидкаго тѣла. Москва, 1876.

Н. Е. Жуковскій. Лекціи по гидродинамикѣ.

H. Lamb. Hydrodynamiks. 1906 г. Есть хорошій нѣмецкій переводъ S. Friedel'я подъ названіемъ Lehrbuch der Hydrodynamik. Leipzig und Berlin, 1907 г.

W. Wien. Lehrbuch der Hydrodynamik. Leipzig, 1900.

Гораздо проще по изложенію, но менѣе обширно разработано:

P. Appel. Traité de mécanique rationnelle. T. 3. Equilibre et mouvements des milieux continus. Paris, 1903.

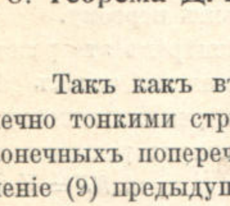
Самыя основныя понятія въ ясномъ изложеніи можно найти въ сочиненіи:

H. Bouasse. Cours de physique. Première partie: Mécaniqne, Physique.

См. также указанные выше въ текстѣ источники.

§ 8. Теорема Д. Бернулли для совершенныхъ и для дѣйствительныхъ жидкостей.

Такъ какъ въ дѣйствительности приходится имѣть дѣло не съ безконечно тонкими струйками, какими представляются линіи тока, а со струями конечныхъ поперечныхъ размѣровъ, то весьма важно распространить уравненіе (9) предыдущаго параграфа и на эти случаи. Это будетъ возможно тогда, когда мы сдѣлаемъ еще одно новое предположеніе относительно характера движенія, а именно,—изъ всѣхъ видовъ установившагося движенія неразрывной совершенной жидкости мы будемъ разсматривать только одинъ,— *движеніе съ сохраненіемъ плоскаго вида сѣченій струи*, разумѣя подъ сѣченіемъ струи поверхность, проведенную въ жидкости такъ, что скорость каждой точки, лежащей на этой поверхности, къ ней нормальна; понятно, что сѣченіе должно быть перпендикулярно къ поверхностямъ стѣнокъ, ограничивающихъ струю, такъ какъ скорости жидкости касательны къ поверхностямъ стѣнокъ. Характеръ такого движенія можно пояснить такъ:



Фиг. 40.

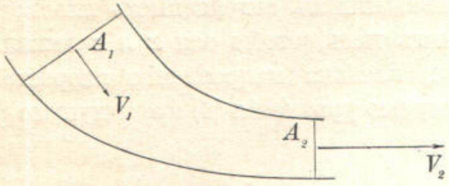
Вообразимъ какую-нибудь линію тока MN въ установившемся движеніи (фиг. 40); въ произвольной ея точкѣ M проведемъ плоскость, нормальную къ ней, и въ этой плоскости начертимъ какой-нибудь контуръ, ограничивающій безконечно малую площадь df. Внутри этого контура мы застаемъ въ данный моментъ рядъ частицъ M', M''..., скорости которыхъ могутъ отличаться отъ скорости V точки M только на безконечно малую величину, какъ скорости безконечно близкихъ точекъ, такъ что ихъ можно обозначить вообще черезъ $(V + dV)$, гдѣ dV можетъ быть и положительно, и отрицательно. Что касается направленія этихъ скоростей, то онѣ, вообще, могутъ быть не параллельны скорости частицы M, но во всякомъ случаѣ уголъ между ними можетъ быть только безконечно малымъ, такъ что для простоты разсужденій вполнѣ возможно допустить, что въ начальный моментъ эти скорости между собою параллельны. Итакъ, плоскій элементъ $M'M''$ представляетъ собою сѣченіе струйки, и скорости всѣхъ точекъ этого сѣченія перпендикулярны къ его плоскости.

Черезъ безконечно малый промежутокъ времени dt частица M пройдетъ путь $MN = V\,dt$; частицы M', M'' и т. д., пройдя за то же время пути $M'N', M''N'', \ldots$, длины коихъ можно, вообще, представить въ видѣ $(V + dV)\,dt$, расположатся на нѣкоторой поверхности, очевидно, касательной въ N къ плоскости, которая проведена въ N нормально къ скорости этой точки. Очевидно, что отрѣзки линій тока $N'N_1$, $N''N_2, \ldots$ между касательной плоскостью N и поверхностью $N'N'' \ldots$ представляются безконечно малыми высшаго порядка $(dV\,dt)$ по сравненію съ путемъ $MN = V\,dt$, такъ что мы въ правѣ ими пренебречь и считать, что всѣ точки сѣченія $M'M''$ попали въ плоское сѣченіе N одновременно съ точкой M; отсюда, съ точностью до безконечно-малыхъ перваго порядка, можно заключить, что, если въ начальный моментъ скорости въ какомъ-нибудь сѣченіи элементарной струйки были параллельны между собою, то и въ слѣдующій моментъ скорости частицъ, занимающихъ сѣченіе, этому моменту соотвѣтствующее, остаются параллельными между собою,—сѣченіе остается плоскимъ, хотя, можетъ быть, и не параллельнымъ первому.

Понятно, что къ струѣ конечныхъ поперечныхъ размѣровъ это разсужденіе вообще не примѣнимо, такъ какъ скорости отдѣльныхъ точекъ сѣченія такой струи могутъ отличаться другъ отъ друга уже на конечную величину ΔV, и безконечно малые пути MN, $M'N', \ldots$ могутъ различаться между собою на величины $\Delta V\,dt$ того же порядка, что и путь $MN = V\,dt$, такъ что этими разностями пренебрегать уже будетъ невозможно: сѣченіе, бывшее первоначально плоскимъ, въ слѣдующій моментъ можетъ оказаться ограниченнымъ какою-либо кривою поверхностью.

Если же движеніе таково, что отдѣльныя точки первоначальнаго сѣченія оживлены скоростями не только параллельными, но и равными, то, конечно, и въ слѣдующій моментъ сѣченіе конечныхъ размѣровъ сохранитъ свой видъ, т.-е. останется плоскимъ, и, конечно, будетъ параллельно первому. Въ дальнѣйшемъ мы будемъ предполагать именно такое движеніе, называя его движеніемъ съ сохраненіемъ плоскаго вида сѣченій; иногда это ограниченіе разбираемыхъ видовъ движенія называютъ *условіемъ параллельности слоевъ* или *параллельности струекъ*, что понятно изъ предыдущихъ замѣчаній.

При соблюденіи этого условія очень просто выражается условіе неразрывности жидкости. Если мы имѣемъ струю жидкости, движущейся установившимся движеніемъ, то, прежде всего, количество жидкости (масса ея, а если считать ускореніе тяжести постояннымъ, то и вѣсъ ея), проходящей черезъ данное сѣченіе, съ теченіемъ времени не мѣняется, въ силу того, что движеніе установившееся; въ то же время оно неизмѣнно для всѣхъ сѣченій вслѣдствіе неразрывности, такъ какъ сколько жидкости входитъ въ данный объемъ пространства, столько же должно изъ него и выходить. Если струя (фиг. 41) въ одномъ мѣстѣ имѣетъ сѣченіе A_1 и скорость V_1, то въ единицу времени черезъ это сѣченіе протечетъ $A_1 V_1 \gamma_1$ kgr жидкости, гдѣ γ_1—вѣсъ единицы объема. Если въ другомъ сѣченіи, съ площадью A_2, скорость каждой точки есть V_2, то, при вѣсѣ единицы объема γ_2, черезъ это сѣченіе за то же время пройдетъ $A_2 V_2 \gamma_2$ kgr. Условіе неразрывности выражается здѣсь, такимъ образомъ, уравненіемъ:



Фиг. 41.

$$A_1 V_1 \gamma_1 = A_2 V_2 \gamma_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

Если остановиться на разсмотрѣніи капельныхъ жидкостей, то, въ силу ихъ несжимаемости, имѣемъ $\gamma_1 = \gamma_2$, а слѣдовательно, уравненіе неразрывности можно писать уже не между массами или вѣсами, а просто между объемами протекающей жидкости,—ур-іе (12) обращается въ этомъ случаѣ въ уравненіе расхода:

$$Q = A_1 V_1 = A_2 V_2 = const. \quad \ldots\ldots\ldots (13)$$

Понятно, что если бы въ отдѣльныхъ точкахъ сѣченія скорости были разныя, то и условіе неразрывности нужно было бы написать въ общемъ случаѣ въ видѣ:

$$\Sigma(V_1 \gamma_1 . \Delta A_1) = \Sigma(V_2 \gamma_2 . \Delta A_2),$$

гдѣ V и γ съ соотвѣтствующими значками представляютъ скорость и вѣсъ единицы объема въ каждомъ элементѣ сѣченія. Для капельной жидкости и тутъ $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$. Слѣдовательно, чтобы получить количество протекающей жидкости, при отсутствіи параллельности струй, нужно знать, какъ измѣняются скорости въ разныхъ точкахъ сѣченій, тогда какъ при сохраненіи плоскаго вида сѣченій достаточно знать только площадь сѣченія и скорость какой-нибудь одной его точки.

Кромѣ того, при такомъ движеніи законъ распредѣленія гидродинамическаго давленія въ разныхъ точкахъ сѣченія становится вполнѣ опредѣленнымъ.

Въ самомъ дѣлѣ, говоря о сѣченіи струи, т.-е. о поверхности постояннаго потенціала скоростей, мы говоримъ о невихревомъ движеніи. А въ такомъ движеніи, и вдобавокъ установившемся, какъ было показано въ предыдущемъ параграфѣ, величина гидродинамическаго давленія въ разныхъ точкахъ пространства, занятаго теченіемъ, измѣняется, вообще, съ положеніемъ частицы въ пространствѣ и вмѣстѣ со скоростью ея перемѣщенія. Если же скорости ряда точекъ между собою равны, что мы и имѣемъ для всѣхъ точекъ одного и того же сѣченія при разсматриваемомъ движеніи, то давленія въ нихъ отличаются другъ отъ друга только въ зависимости отъ ихъ относительнаго положенія, совершенно подобно тому, какъ это мы имѣли въ гидростатикѣ.

Къ тому же выводу мы придемъ, написавъ дифференціальныя уравненія движенія примѣнительно къ данному случаю. Пусть мы имѣемъ сѣченіе струи, движущейся въ установившемся движеніи съ сохраненіемъ плоскаго вида сѣченій. Оси координатъ расположимъ такъ, чтобы оси x и z лежали въ плоскости сѣченія, а ось y была параллельна направленію скоростей въ этомъ сѣченіи. Примѣняя къ этому случаю уравненія (6) предыдущаго §, мы должны въ нихъ положить:

$$u=0; \qquad v=V; \qquad w=0;$$

мы должны считать, что и всѣ производныя скоростей u и w также равны нулю, такъ какъ, по условію движенія, искривленія траекторій нѣтъ. Такимъ образомъ, получимъ ур-ія:

$$X-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}=0,$$

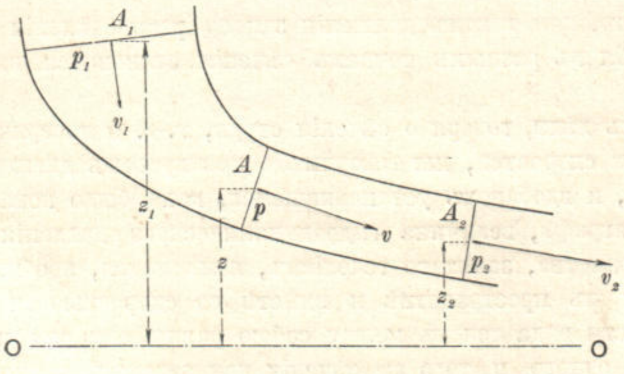
$$Y-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y}=V\frac{\partial V}{\partial y},$$

$$Z-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z}=0.$$

Такъ какъ теперь насъ интересуетъ вопросъ объ измѣненіи гидродинамическихъ давленій только въ предѣлахъ даннаго сѣченія, т.-е. по оси x и z, то умножаемъ первое уравненіе на dx, третье—на dz и складываемъ; получаемъ:

$$X\,dx+Z\,dz=\frac{1}{\varrho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\,dx+\frac{\partial p}{\partial z}\,dz\right).$$

Въ этомъ уравненіи не трудно усмотрѣть ур-іе гидростатики (см. ур. (2) стр.   ), а потому, пока мы не выходимъ изъ предѣловъ сѣченія, мы въ правѣ примѣнять къ нему всѣ положенія о гидростатическомъ давленіи; напр., можемъ утверждать, что давленіе въ одной его точкѣ превы-



Фиг. 42.

шаетъ давленіе въ другой на величину вѣса столба жидкости съ основаніемъ, равнымъ единицѣ, и высотою, равною вертикальному разстоянію между ними и т. п. Это свойство весьма важно, и впослѣдствіи намъ придется имъ воспользоваться. Во избѣжаніе недоразумѣній отмѣтимъ, что при параллельности струй гидродинамическое давленіе въ каждомъ сѣченіи распредѣляется, какъ гидростатическое, но это не значитъ, что оно равно гидростатическому давленію.

Пусть дана струя (фиг. 42); движеніе ея—установившееся; параллельность слоевъ соблюдается. Строго говоря, какъ это видно изъ предыдущихъ разсужденій, условіе параллельности можетъ быть вполнѣ соблюдено только въ призматической струѣ; но если струя искривлена такъ, что уголъ между двумя близкими ея сѣченіями не великъ, а площади сѣченій измѣняются тоже только постепенно, то, съ достаточной для практики точностью, можно допустить, что скорости въ каждомъ сѣченіи между собою равны и параллельны. Вертикальныя разстоянія центровъ тяжести сѣченій A_1 и A_2 надъ нѣкоторымъ принятымъ горизонтомъ **00** назовемъ черезъ z_1 и z_2, скорости въ этихъ сѣченіяхъ—соотвѣтственно черезъ v_1 и v_2, а давленія въ центрахъ тяжести ихъ—черезъ p_1 и p_2. Ограничимся случаемъ капельной жидкости, условіе неразрывности которой уже получено нами выше въ видѣ уравненія (13). Примѣнимъ къ этому случаю теорему живыхъ силъ.

Пусть жидкость протекаетъ черезъ сѣченіе A_1 со скоростью v_1, а черезъ сѣченіе A_2 со скоростью v_2. Очевидно, что черезъ A_1 въ единицу времени пройдетъ масса жидкости

$$\frac{A_1 v_1 \gamma}{g} = \frac{Q\gamma}{g};$$

эта же масса, также въ единицу времени, пройдетъ черезъ нѣкоторое время черезъ сѣченіе A_2 со скоростью v_2. Ясно, что на пути A_1A_2 эта масса пріобрѣтетъ запасъ живой силы, равный

$$\frac{Q\gamma}{g} \cdot \frac{v_2^2 - v_1^2}{2},$$

что на каждый kgr вѣса жидкости дастъ запасъ живой силы въ количествѣ

$$\frac{v_2^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (A)$$

Подсчитаемъ, на что этотъ запасъ уходитъ. Прежде всего, при этомъ перемѣщеніи центръ тяжести массы опустился съ высоты z_1 до высоты z_2; слѣдовательно, каждый килограммъ жидкой массы совершилъ работу

$$z_1 - z_2, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (B)$$

—это будетъ первая часть траты запаса (A).

Затѣмъ, въ центрѣ тяжести сѣченія A_1 отъ окружающей массы имѣется гидродинамическое давленіе p_1, направленное п о д в и ж е н і ю струи; такъ какъ давленіе въ такомъ сѣченіи распредѣлено гидростатически, то на всю площадь A_1 приходится сила $p_1 A_1$; точно также на сѣченіе A_2 дѣйствуетъ сила $p_2 A_2$, направленная противъ движенія жидкости. Первая сила развиваетъ въ единицу времени положительную работу $p_1 A_1 v_1$, вторая развиваетъ отрицательную работу $(-p_2 A_2 v_2)$. Относя оба запаса работы къ одному kgr протекающей жидкости, т.-е. дѣля выраженія ихъ,—первое на $\gamma A_1 v_1$, а второе, что то же, на $\gamma A_2 v_2$,—получимъ работу первой силы $\left(+\frac{p_1}{\gamma}\right)$ и второй $\left(-\frac{p_2}{\gamma}\right)$. Замѣтимъ, что, проходя отъ сѣченія A_1 до какого-нибудь сѣченія A, масса жидкости воспринимаетъ работу первой силы и преодолѣваетъ работу второй; въ слѣдующую единицу времени она уже будетъ подъ положительнымъ вліяніемъ того же давленія, которое было отрицательно въ предшествовавшій моментъ, и т. д.,—всѣ промежуточныя гидродинамическія давленія, при суммированіи ихъ работъ на всемъ пути отъ A_1 до A_2, войдутъ попремѣнно съ положительными и отрицательными знаками при одинаковой каждый разъ абсолютной величинѣ, такъ какъ движеніе предположено установившимся. Слѣдовательно, при этомъ суммированіи работы всѣхъ промежуточныхъ давленій сократятся, и у насъ останутся только положительная работа начальнаго и отрицательная конечнаго давленій; сумма ихъ, равная на каждый kgr жидкости

$$\frac{p_1}{\gamma}-\frac{p_2}{\gamma}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (C)$$

и будетъ представлять собою работу гидродинамическихъ давленій, на развитіе которой уходитъ слѣдующая часть запаса (A).

Легко видѣть, что этими двумя тратами (B) и (C) весь запасъ (A) будетъ исчерпанъ, такъ какъ на преодолѣніе давленій на боковыя поверхности струи работы не требуется, ибо они нормальны къ перемѣщенію; кромѣ того, жидкость предположена совершенной, такъ что работы внутреннихъ сопротивленій, за ихъ отсутствіемъ, не будетъ.

Принимая все это во вниманіе, можемъ на основаніи теоремы живыхъ силъ написать:

$$\frac{v_2^2}{2g}-\frac{v_1^2}{2g}=z_1-z_2+\frac{p_1}{\gamma}-\frac{p_2}{\gamma} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

Это уравненіе, данное Даніиломъ Бернулли, тождественно съ уравненіемъ (9) предыдущаго параграфа. Вмѣстѣ съ уравненіемъ расхода (13) оно вполнѣ рѣшаетъ вопросъ *объ установившемся движеніи совершенной жидкости подъ дѣйствіемъ тяжести, при условіи, что сѣченія струи сохраняютъ свой плоскій видъ*.

Въ виду того, что выборъ сѣченій A_1 и A_2 произволенъ, мы можемъ уравненіе Д. Бернулли переписать вообще такъ:

$$\frac{v_1^2}{2g}+\frac{p_1}{\gamma}+z_1=\frac{v_2^2}{2g}+\frac{p_2}{\gamma}+z_2=\frac{v^2}{2g}+\frac{p}{\gamma}+z=const=C\,.\ . \quad (15)$$

Отсюда слѣдуетъ: *сумма такъ построенныхъ трехъ членовъ для каждаго сѣченія есть величина постоянная для всей струи.* Такъ какъ каждый изъ членовъ представляетъ работу 1 kgr жидкости, то постоянную C можно разсматривать, какъ запасъ энергіи въ каждомъ kgr жидкости: гдѣ бы эта жидкость ни находилась, общій запасъ энергіи ея не измѣняется, хотя онъ и составляется изъ суммы трехъ перемѣнныхъ величинъ.

Разсматривая составъ членовъ ур-ія (15), видимъ, что членъ $\frac{v^2}{2g}$ характеризуетъ собою запасъ живой силы или такъ называемой кинетической энергіи. Сумма двухъ другихъ членовъ, $\left(\frac{p}{\gamma}+z\right)$, представляетъ собою запасъ потенціальной энергіи, при чемъ z представляетъ вліяніе положенія массы въ пространствѣ, а членъ $\frac{p}{\gamma}$ — вліяніе положенія относительно окружающей среды. Абсолютная величина C остается неопредѣленной, такъ какъ выборъ положенія плоскости сравненія **00** произволенъ. Но это не можетъ вліять на опредѣленность рѣшенія разныхъ вопросовъ, такъ какъ пользоваться этимъ уравненіемъ приходится примѣняя его всегда къ двумъ сѣченіямъ, для одного изъ которыхъ обстоятельства движенія извѣстны.

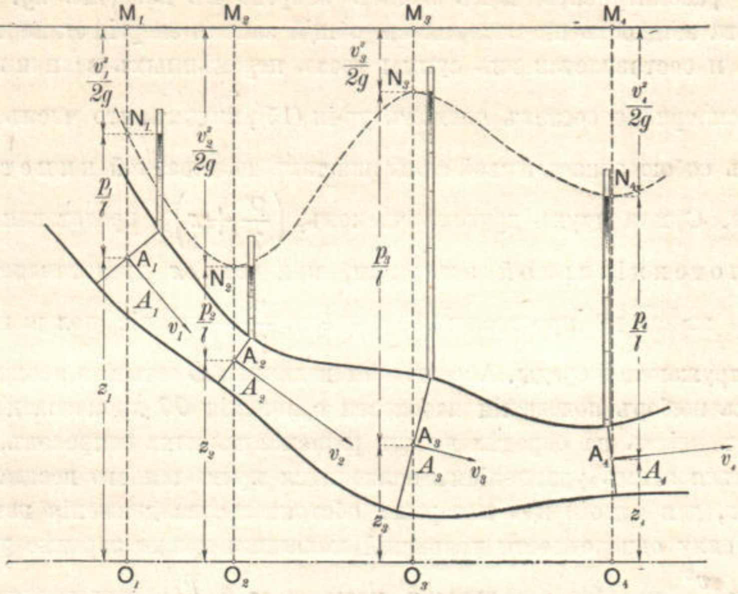
Въ силу однородности уравненій механики можно заранѣе утверждать, что членъ $\frac{v^2}{2g}$, подобно остальнымъ членамъ z и $\frac{p}{\gamma}$, представляетъ собою также нѣкоторую высоту. И на самомъ дѣлѣ, скорость v измѣряется въ $\frac{mtr}{sec}$, ускореніе g измѣряется въ $\frac{mtr}{sec^2}$; слѣдовательно, членъ $\frac{v^2}{2g}$ измѣряется въ $\frac{mtr^2}{sec^2}:\frac{mtr}{sec^2}=mtr$. Въ виду этого этотъ членъ называютъ *высотой, соотвѣтствующей скорости*, или *скоростнымъ напоромъ*.

Съ этой, геометрической, точки зрѣнія уравненіе (15) показываетъ, что сумма трехъ высотъ: нивеллирной z, пьезометрической $\frac{p}{\gamma}$ и скоростного напора $\frac{v^2}{2g}$, есть величина, постоянная для всѣхъ сѣченій струи. Поэтому, если на линіяхъ O_1M_1, O_2M_2,... (фиг. 43), проведенныхъ вертикально черезъ центры тяжести сѣченій A_1, A_2,..., отложимъ отрѣзки $A_1N_1=\frac{p_1}{\gamma}$, $A_2N_2=\frac{p_2}{\gamma}$,...., а затѣмъ, далѣе вверхъ отрѣзки $N_1M_1=\frac{v_1^{\,2}}{2g}$, $N_2M_2=\frac{v_2^{\,2}}{2g}$,..., то точки M_1, M_2,... окажутся лежащими на одной горизонтальной прямой, или,—въ пространствѣ,—въ одной горизонтальной *плоскости напора*. Собственно *напоромъ* называютъ обыкновенно разность запасовъ потенціальной энергіи, т.-е. разность высотъ

$$\left(z_1+\frac{p_1}{\gamma}\right)-\left(z_2+\frac{p_2}{\gamma}\right).$$

Пьезометрическую высоту легко получить въ дѣйствительности, если въ стѣнкѣ сосуда, въ которомъ движется жидкость, сдѣлать отверстіе и вставить въ него открытую съ обоихъ концовъ трубку, называемую *пьезо-*

метромъ. Вообразимъ, что верхній ея конецъ достигаетъ безвоздушнаго пространства, такъ что внѣшнее давленіе на этомъ концѣ равно нулю; очевидно, что вода въ ней будетъ подниматься до тѣхъ поръ, пока вѣсъ



Фиг. 43.

поднявшейся колонны не уравновѣситъ собою давленія жидкости на стѣнку трубы у основанія пьезометра,—иными словами, она поднимется на высоту $\frac{p}{\gamma}$. Замѣтимъ, что если p есть давленіе не у стѣнки, а въ центрѣ тяжести сѣченія, къ которому принадлежитъ мѣсто установки пьезометра, то высоту $\frac{p}{\gamma}$ нужно искать отъ уровня воды въ пьезометрѣ не до стѣнки, а до центра тяжести сѣченія, что и показано на фиг. 43 *).

*) Само собою понятно, что дѣйствительная высота стоянія воды въ трубкѣ будетъ показывать давленіе въ трубѣ только въ томъ случаѣ, если постановка трубки ничего въ теченіи жидкости не нарушила и не измѣнила. Для этого нужно, чтобы отверстіе въ стѣнкѣ было очень мало и чтобы края трубки не входили внутрь трубы. Кромѣ того, безвоздушнаго пространства достигнуть, конечно, нельзя. Употребляя запаянныя сверху трубки, можно достигнуть Торичелліевой пустоты; но при этомъ вода въ трубкахъ испаряется, и уровень воды въ пьезометрѣ остается подверженъ давленію паровъ, упругость которыхъ опредѣляется каждый разъ температурою окружающей среды. При небольшихъ давленіяхъ можно брать трубки, открытыя въ атмосферу; легко видѣть, что вода въ нихъ поднимается не на всю высоту $\frac{p}{\gamma}$, а на $\left(\frac{p}{\gamma}-b\right)$, гдѣ b есть барометрическое давленіе, выраженное высотою столба той же жидкости.

Очевидно, что, по существу, пьезометры ничѣмъ не отличаются отъ описанныхъ выше приборовъ для измѣренія гидростатическаго давленія.

Очевидно, что то, что мы назвали напоромъ, т.-е. разность $\left(z_1+\frac{p_1}{\gamma}\right)-\left(z+\frac{p}{\gamma}\right)$, есть разность высотъ стоянія уровня въ пьезометрахъ, хотя бы они употреблялись открытыми, лишь бы на уровняхъ обоихъ пьезометровъ внѣшнія давленія были одинаковы.

Геометрическимъ представленіемъ ур-ія (15) очень удобно пользоваться во многихъ случаяхъ. Такъ, напримѣръ, если мы имѣемъ цилиндрическую трубу, то по ур-ію (13) заключаемъ, что, въ силу постоянства ея діаметра, скорость во всѣхъ сѣченіяхъ остается одна и та же, а потому пьезометрическая линія должна быть горизонтальной прямой, совершенно независимо отъ расположенія оси трубы. Если же, вдобавокъ, это послѣднее извѣстно, а, кромѣ того, извѣстна и величина давленія въ одномъ изъ сѣченій, то тѣмъ самымъ вполнѣ опредѣляются давленія во всѣхъ остальныхъ сѣченіяхъ.

Подобными же соображеніями убѣждаемся, что въ конической трубѣ, расширяющейся по теченію, пьезометрическая линія по теченію поднимается кверху; и, слѣд., если широкое устье такой расширяющейся трубы, положенной притомъ горизонтально, выпускаетъ воду въ атмосферу, то во всѣхъ сѣченіяхъ трубы, выше по теченію лежащихъ, давленіе меньше атмосфернаго. Наоборотъ, въ конической трубѣ, суживающейся по теченію и имѣющей горизонтальную ось, давленіе непрерывно падаетъ.

Напишемъ, далѣе, ур-іе (15) въ такомъ видѣ:

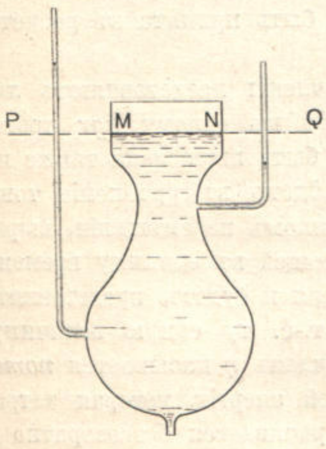
$$\frac{p}{\gamma}=\frac{p_1}{\gamma}+(z_1-z)+\frac{v_1{}^2-v^2}{2g}\quad\ldots\ldots\ldots\ (16)$$

Если бы движенія не было, то гидростатическое давленіе p_s въ конечномъ сѣченіи A, съ координатой z, опредѣлялось бы по давленію p_1 въ начальномъ сѣченіи A_1, съ координатою z_1, изъ уравненія:

$$\frac{p_s}{\gamma}=\frac{p_1}{\gamma}+(z_1-z),$$

въ виду чего ур. (16) переписалось бы такъ:

$$\frac{p}{\gamma}=\frac{p_s}{\gamma}+\frac{v_1{}^2-v^2}{2g}.$$



Фиг. 44.

Отсюда видно, что въ одномъ и томъ же сѣченіи A гидродинамическое давленіе p можетъ быть и меньше, и больше гидростатическаго p_s, смотря по тому, больше ли v, чѣмъ v_1, или меньше,—иначе, A меньше A_1 или больше. Слѣдовательно, отношеніе сѣченій имѣетъ большое вліяніе на величину гидродинамическаго давленія.

Такимъ образомъ, въ сосудѣ, въ которомъ свободная поверхность поддерживается на уровнѣ ***MN*** и который имѣетъ форму, указанную на фиг. 44, пьезометрическія высоты расположатся въ разныхъ мѣстахъ приблизительно такъ, какъ показано на чертежѣ, если вода въ немъ движется, т.-е. въ узкомъ сѣченіи она будетъ ниже, въ широкомъ—выше, чѣмъ свободная поверхность въ сосудѣ; если же вода остановится, то всѣ пьезометры укажутъ одну и ту же высоту стоянія воды по линіи **PMNQ**.

Съ этой точки зрѣнія можно получить предѣльную величину возможнаго суженія.

Въ самомъ дѣлѣ, $p < p_s$ тамъ, гдѣ $v > v_1$, т.-е. гдѣ $A < A_1$.

Но, во всякомъ случаѣ, во избѣжаніе разрыва колонны жидкости, p должно быть больше нуля, т.-е. должно быть соблюдено условіе:

$$v^2 - v_1{}^2 \leqslant 2g\frac{p_s}{\gamma}.$$

А такъ какъ по ур-ію (13)

$$v = \frac{A_1}{A}v_1,$$

то необходимо, чтобы соблюдалось соотношеніе:

$$\left(\frac{A_1}{A}\right)^2 \leqslant 1 + \frac{2g}{v_1{}^2}\left[\frac{p_1}{\gamma} + (z_1 - z)\right].$$

Если $\left(\frac{A_1}{A}\right)^2$ сдѣлано больше этого предѣльнаго значенія, то въ узкомъ сѣченіи давленіе должно перейти въ растяженіе, произойдетъ разрывъ колонны жидкости, и наши уравненія будутъ непримѣнимы, да и все явленіе будетъ происходить иначе: или труба будетъ захлебываться, подобно тому, какъ захлебывается сосудъ съ узкимъ горломъ, опрокинутый горломъ внизъ, или же движущаяся жидкость перестанетъ заполнять всѣ сѣченія.

Наконецъ, отмѣтимъ, что уравненіе (15) получено въ предположеніи *совершенной* жидкости. Въ дѣйствительности всегда есть налицо нѣкоторыя сопротивленія движенію, обусловливаемыя частью вязкостью жидкости, частью внѣшними обстоятельствами движенія. Если силу этихъ сопротивленій спроектируемъ на перемѣщеніе и умножимъ на само перемѣщеніе, то получимъ работу сопротивленій, которая должна быть принята въ расчетъ при составленіи уравненія живыхъ силъ.

Такъ какъ въ уравненіи Д. Бернулли всѣ члены представляютъ линейныя величины, а именно, работы, отнесенныя къ одному *kgr* протекающей жидкости, то и работа вязкости должна быть вычислена также на каждый *kgr* движущейся жидкости и поэтому войдетъ въ уравненіе тоже въ видѣ высоты. Если работу этихъ силъ на данномъ перемѣщеніи, выраженную въ *kgr mtr*, раздѣлимъ на вѣсъ протекающей въ единицу времени жидкости, то получимъ нѣкоторую длину η, которая и будетъ представлять работу этихъ силъ, отнесенную къ одному *kgr*, т.-е. ту самую величину, которую надо внести въ ур-іе Бернулли. Этотъ членъ η называется *потеряннымъ напоромъ*, ибо, конечно, та часть полной энергіи, которая затрачена на преодолѣніе сопротивленій движенію, затрачивается безвозвратно и для дальнѣйшаго движенія является потерянной. Въ этомъ заключается существенная разница между этимъ членомъ и остальными членами ур-ія

Д. Бернулли: въ то время какъ потенціальная энергія $\left(\frac{p}{\gamma}+z\right)$ можетъ переходить въ кинетическую $\left(\frac{v^2}{2g}\right)$ и обратно, а давленіе измѣняется за счетъ положенія, и все это происходитъ притомъ безъ всякаго измѣненія полнаго запаса энергіи, членъ η опредѣляетъ собою *непрерывную убыль* запаса энергіи при переходѣ отъ одного сѣченія къ другому въ направленіи теченія жидкости.

Итакъ, если движеніе струи мы разсматриваемъ между сѣченіемъ A_1, гдѣ полный запасъ энергіи выражается суммою

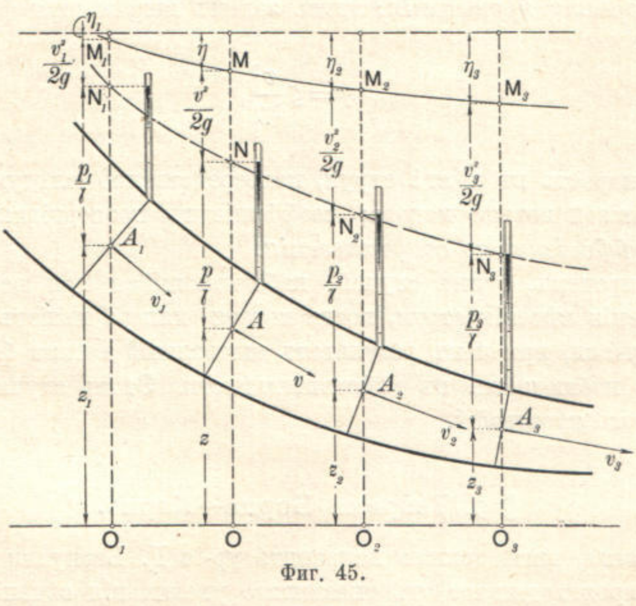
$$\frac{v_1{}^2}{2g}+\frac{p_1}{\gamma}+z_1,$$

и сѣченіемъ A (фиг. 38), гдѣ скорость, давленіе и координата ц. т. суть v, p и z, а работа сопротивленій на пути отъ A_1 до A, отнесенная къ 1 kgr, есть η, то ур-іе Д. Бернулли для движенія между этими двумя сѣченіями напишется такъ:

$$\frac{v_1{}^2}{2g}+\frac{p_1}{\gamma}+z_1=\frac{v^2}{2g}+\frac{p}{\gamma}+z+\eta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (17)$$

Это и есть ур-іе Д. Бернулли для *несовершенныхъ* жидкостей.

Оно указываетъ, что для дѣйствительныхъ жидкостей геометрическое мѣсто концовъ высотъ $\left(z+\frac{p}{\gamma}+\frac{v^2}{2g}\right)$ есть не плоскость, а нѣкоторая поверхность $M_1MM_2\ldots$, опускающаяся по движенію все ниже и ниже (фиг. 45).



Фиг. 45.

Если скорость начальнаго сѣченія извѣстна,—другими словами, если заданъ расходъ,—то, въ силу того, что величина скорости во всякомъ дальнѣйшемъ сѣченіи вполнѣ опредѣляется расходомъ и сѣченіемъ струи, упомянутыя потери напора цѣликомъ отражаются на уменьшеніи пьезометрической высоты: пьезометрическая линія опускается по теченію все ниже и ниже по сравненію съ тѣмъ, что наблюдалось бы, если бы потерь напора не было.

Для уясненія смысла члена η полезно обратить вниманіе также на слѣдующее обстоятельство. Когда дано ур-іе Д. Бернулли для совершенной жидкости, въ формѣ ур-ія (15) или графически,—въ формѣ чертежа (см. фиг. 36), то по ур-ію или чертежу о направленіи теченія жидкости судить невозможно. Когда же дано ур-іе движенія несовершенной жидкости, то тѣмъ самымъ вполнѣ опредѣляется и направленіе движенія, такъ какъ свободный запасъ энергіи въ одномъ сѣченіи можетъ быть меньше, чѣмъ въ другомъ, только въ томъ случаѣ, если первое лежитъ по теченію дальше отъ начала движенія, чѣмъ второе.

Вычисленіе потеряннаго напора было бы возможно, если бы была извѣстна природа силъ, вызывающихъ гидравлическія сопротивленія, т.-е. если бы было извѣстно, отъ чего и какъ зависитъ сила тренія жидкихъ частицъ, скользящихъ одна по другой (вязкость) или по твердой стѣнкѣ (внѣшнее треніе). Къ сожалѣнію, въ этомъ отношеніи наши свѣдѣнія такъ же скудны, какъ и въ вопросѣ о треніи твердыхъ силъ. Поэтому необходимо итти эмпирическимъ путемъ; при этомъ, для практическихъ цѣлей важно знать, главнымъ образомъ, не силу сопротивленій, а потерю напора, ими обусловливаемую. Задача прикладной гидравлики состоитъ, между прочимъ, въ изученіи способовъ оцѣнки потерянныхъ напоровъ въ зависимости отъ разныхъ обстоятельствъ движенія. Оставляя этотъ вопросъ до соотвѣтствующихъ главъ курса, отмѣтимъ уже теперь, что гидравлика принимаетъ, какъ общій экспериментальный фактъ, что *потери напора пропорціональны квадрату скорости протеканія;* этотъ законъ выражается формулой

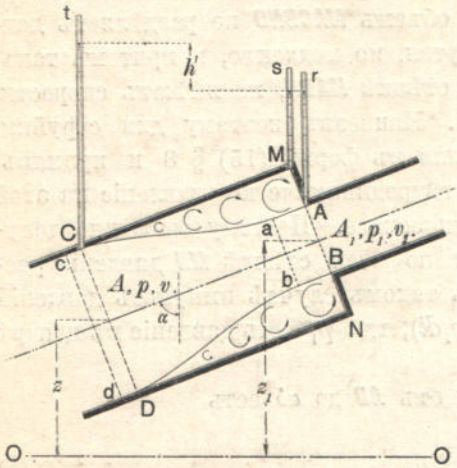
$$\eta = \zeta \frac{v^2}{2g},$$

гдѣ v есть скорость въ мѣстѣ струи, непосредственно слѣдующемъ за причиной, вызвавшей потерю напора; коэффиціентъ пропорціональности ζ называется *коэффиціентомъ сопротивленія*.

Есть, впрочемъ, одинъ случай, наблюдающійся при всякомъ внезапномъ увеличеніи сѣченія струи, когда потеря напора можетъ быть вычислена теоретически, при чемъ результатъ вычисленій весьма близко сходится съ тѣмъ, что наблюдается въ дѣйствительности. Этотъ случай разсмотрѣнъ въ слѣдующемъ параграфѣ.

§ 9. Теорема Бордá—Карно.

Опредѣлимъ, какъ должно исправить ур-іе Д. Бернулли въ случаѣ сопротивленія, происходящаго отъ внезапнаго увеличенія сѣченія струи. Такъ какъ съ измѣненіемъ сѣченія мѣняется и скорость, то этотъ случай можно назвать также случаемъ внезапнаго уменьшенія скорости, т.-е. случаемъ *удара.* Поправка эта введена Беланже, профессоромъ École des ponts et chaussées, хотя на необходимость ея указалъ еще въ XVIII столѣтіи Карно (1753—1823 гг.), а еще раньше Бордá (1733—1799 гг.).



Фиг. 46.

Пусть струя **AB** (фиг. 46) внезапно должна измѣнить свое сѣченіе изъ $AB = A_1$ въ $MN = CD = A$. Въ дѣйствительности жидкость такъ не потечетъ: полное сѣченіе она займетъ только на нѣкоторомъ разстояніи отъ **AB**,—гдѣ-нибудь въ **CD**; кольцевое же пространство **BND—AMC** будетъ заполнено мертвой водой, не участвующей въ общемъ движеніи струи. Эта вода, однако, не остается въ покоѣ: подъ вліяніемъ тренія о струю она приходитъ въ вихревое движеніе, хотя и очень медленное, на что, конечно, тратится извѣстная работа. Отсюда понятно, что ни въ одномъ изъ сѣченій между **AB** и **CD** нельзя признавать движеніе совершающимся съ сохраненіемъ плоскаго вида сѣченій; безъ большой погрѣшности это допустимо лишь для сѣченій **AB** и **CD**. Сдѣлавъ это предположеніе, заключаемъ, что въ **AB** и **CD** давленіе распредѣляется по законамъ гидростатики.

Движеніе принимаемъ установившимся. Уравненіе неразрывности напишется въ формѣ

$$Q = A_1 v_1 = Av.$$

Мы будемъ разсматривать не одну какую-либо струю, а всю массу **MNDCM**, и къ безконечно малому перемѣщенію ея изъ положенія **MABNDCM** въ положеніе **MAabBNdcM** примѣнимъ теорему о проекціяхъ количествъ движенія: проекція приращенія количествъ движенія на какое-либо направленіе равна суммѣ импульсовъ дѣйствующихъ силъ по тому же направленію.

Приращеніе количествъ движенія напишется такъ: за время dt масса **MACBND**, находящаяся все время въ вихревомъ движеніи, не получитъ никакого приращенія количествъ движенія, ибо всѣ скорости въ силу установившагося теченія не измѣняются. То же самое справедливо для массы **abDCa**; остается масса **ABba**, какъ бы перемѣстившаяся въ **CDdc** и равная $\frac{\gamma A_1 v_1 \, dt}{g}$ или, что то же, $\frac{\gamma A v \, dt}{g}$. Приращеніе ея количества движенія выразится черезъ

$$\frac{\gamma A v \, dt}{g}(v - v_1) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (a)$$

Теперь составимъ выраженія импульсовъ силъ, здѣсь работающихъ,— сначала для гидродинамическаго давленія.

Импульсъ давленій, въ сѣченіи **CD**, на основаніи сдѣланнаго допущенія о видѣ движенія, выразится черезъ $(-Ap\,dt)$.

Импульсъ давленій на плоскости **MN** выразимъ, сдѣлавъ новое допущеніе. Мы уже сказали, что кольцевой объемъ **MACBND** не раздѣляетъ движенія струи; его частицы хотя и движутся, но медленно, и притомъ такъ, что частицы, прилегающія къ кольцевой стѣнкѣ **MABN**, не имѣютъ скорости, нормальной къ стѣнкѣ (пустоты нѣтъ). Написавъ поэтому для струйки, идущей по стѣнкѣ, уравненіе Д. Бернулли въ формѣ (15) § 8 и принявъ, что скорости вообще малы, видимъ, что гидродинамическое давленіе на этой стѣнкѣ мало отличается отъ гидростатическаго. Поэтому возможно допустить, что не только на части **AB**, но и по всей стѣнкѣ **MN** давленіе распредѣлено по закону гидростатики. А въ такомъ случаѣ импульсъ давленій на всю площадь A будетъ равенъ $(+Ap_1 dt)$, гдѣ p_1 есть давленіе въ центрѣ тяжести площади **MN**.

Итакъ, импульсъ давленій на пути отъ **AB** до **ab** есть

$$(Ap_1 - Ap)\,dt \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (\mathrm{b})$$

Для силы тяжести проекція импульсовъ на ось движенія, составляющую съ вертикалью уголъ α, выражается черезъ:

$$\gamma A.\mathbf{MC}.dt\,\cos\alpha = \gamma A(z_1 - z)\,dt, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (\mathrm{c})$$

такъ какъ очевидно, что

$$\mathbf{MC}\,\cos\alpha = z_1 - z.$$

Выраженія (a), (b) и (c) даютъ намъ возможность написать ур-іе количествъ движенія:

$$\frac{\gamma A v\,dt}{g}(v - v_1) = Ap_1\,dt - Ap\,dt + \gamma A(z_1 - z)\,dt.$$

Дѣля все уравненіе на $\gamma A\,dt$, получимъ:

$$\frac{v(v - v_1)}{g} = \frac{p_1}{\gamma} - \frac{p}{\gamma} + z_1 - z \quad \ldots \ldots \ldots \quad (\mathrm{d})$$

Очевидно, что

$$v(v - v_1) = \frac{v^2 - v_1^2}{2} + \frac{(v_1 - v)^2}{2},$$

а потому (d) перепишется такъ:

$$\frac{v^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g} + \frac{(v_1 - v)^2}{2g} = \frac{p_1}{\gamma} + z_1 - \frac{p}{\gamma} - z$$

или

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + z + \frac{(v_1 - v)^2}{2g} \quad \ldots \ldots \quad (18)$$

Сравнивая это уравненіе съ ур-іемъ Д. Бернулли (17) (стр. 91), видимъ, что добавочный членъ $\frac{(v_1-v)^2}{2g}$ есть какъ разъ то, что мы назвали потеряннымъ напоромъ η_s, отмѣчая подстрочнымъ указателемъ $(_s)$ то обстоятельство, что имѣемъ дѣло съ потерей напора на ударъ. Итакъ:

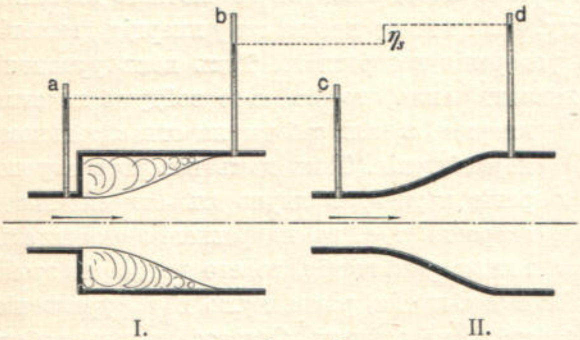
$$\eta_s = \frac{(v_1-v)^2}{2g},$$

т.-е. *при внезапномъ увеличеніи сѣченія*, иначе говоря,—*при ударѣ*,—*потеря напора равна напору, соотвѣтствующему потерянной скорости*. Это положеніе называется *теоремой Карно* (или *Борда́*).

При ударѣ всегда наблюдается повышеніе пьезометрическаго уровня. Въ самомъ дѣлѣ, изъ ур-ія (18) имѣемъ:

$$\frac{p}{\gamma}+z-\left(\frac{p_1}{\gamma}+z_1\right)=\frac{v_1^2}{2g}-\frac{v^2}{2g}-\frac{(v_1-v)^2}{2g} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (18')$$

Пока $v_1 > v$,—а это есть условіе существованія удара,—вторая часть ур-ія (18′) положительна, а потому уровень въ пьезометрѣ *t* (фиг. 39) всегда выше, нежели въ пьезометрѣ *r* *).



Фиг. 47.

Если сравнить двѣ трубы одинаковыхъ размѣровъ и пропускающихъ одно и то же количество воды (фиг. 47), но отличающихся тѣмъ, что въ трубѣ I сѣченіе ея измѣняется внезапно, а въ трубѣ II—плавно, то, при одинаковыхъ высотахъ пьезометровъ *a* и *c*, пьезометръ *d* обнаружитъ наличность бо́льшаго гидродинамическаго давленія въ расширенной части трубы II, нежели пьезометръ въ расширенной части трубы I; разность уровней, очевидно, равна потерѣ на ударъ, т.-е. η_s. Легко видѣть, что жидкость трубы I послѣ удара несетъ въ себѣ уже меньшій запасъ энергіи, нежели въ трубѣ II, а потому способна преодолѣть меньшее сопротивленіе подняться на меньшую высоту,—словомъ, совершить меньшую работу, пройдя внезапное измѣненіе сѣченія. Наоборотъ, если бы требовалось и въ томъ, и въ другомъ случаѣ имѣть за расширеніемъ одинаковые запасы энергіи, то въ трубѣ I въ сѣченіи *a* нужно было бы имѣть бо́льшее давленіе, нежели въ соотвѣтствующемъ мѣстѣ трубы II,

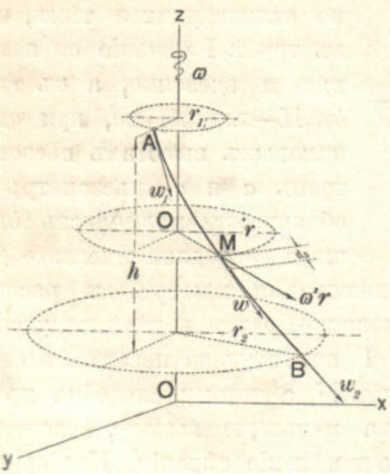
*) Онъ выше уровня и въ пьезометрѣ *s*, ибо допущеніе гидростатическаго распредѣленія давленій въ плоскости *MN* равносильно допущенію стоянія воды въ пьезометрахъ *r* и *s* на одномъ уровнѣ.

т.-е. съ самаго начала воду нужно было бы прогонять подъ бóльшимъ давленіемъ, что на практикѣ достигается усиленной работой машинъ, перемѣщающихъ воду по трубѣ, или болѣе высокимъ положеніемъ резервуара, питающаго трубу, и т. п.

Таково значеніе потеряннаго напора, независимо отъ причины, его вызывающей. По отношенію къ разсматриваемому случаю отмѣтимъ, что здѣсь потеря напора состоитъ въ потерѣ живой силы; эта потеря отражается на струѣ объясненнымъ выше образомъ, а кромѣ того, она отражается, конечно, и на самомъ водопроводѣ: потерянная живая сила расходуется частью на приведеніе во вращательное движеніе частицъ въ пространствѣ **AMC**, частью на нагрѣваніе всего, что находится въ этомъ мѣстѣ перехода. Вращательное движеніе, конечно, вызываетъ размываніе стѣнокъ **CM**, **ND**, **MN**, если онѣ вообще способны къ такому изнашиванію; образованіе омутовъ за плотинами слѣдуетъ приписать именно наличности энергичнаго удара.

§ 10. Уравненіе Д. Бернулли для относительнаго движенія, въ случаѣ, если движеніе влеченія есть равномѣрное вращеніе около неподвижной оси.

Примѣнимъ уравненіе Д. Бернулли къ случаю относительнаго движенія струи. Извѣстно, что всѣ теоремы, выводимыя для абсолютнаго движенія, приложимы и къ относительному, если только ввести силу инерціи движенія влеченія и силу инерціи отъ ускоренія поворотнаго. Такъ какъ уравненіе Д. Бернулли есть уравненіе живыхъ силъ, то въ него войдутъ не силы инерціи, а ихъ работы на относительномъ перемѣщеніи. Такъ какъ поворотное ускореніе перпендикулярно къ относительной скорости, т.-е. къ направленію относительнаго перемѣщенія, то его работа на этомъ перемѣщеніи равна нулю и въ уравненіе, слѣд., не войдетъ. Остается только работа силы инерціи переноснаго движенія. Разсмотримъ лишь *случай равномѣрнаго вращенія струи около неподвижной оси.* Ускореніе силы инерціи переноснаго движенія есть тогда центробѣжное. Предположимъ сначала, что ось вращенія вертикальна.



Фиг. 48.

Пусть мы имѣемъ струю **AB** (фиг. 48), вращающуюся около вертикальной оси **Oz** съ постоянною угловою скоростью ω. Работу центробѣжной силы на перемѣщеніи отъ **A** до **B** получимъ такъ: въ какой-нибудь частицѣ **M**, описывающей въ данный моментъ окружность радіуса **O'M** $= r$, центробѣжное ускореніе равно $\omega^2 r$; если вѣсъ частицы есть 1, то ея масса есть $\frac{1}{g}$; значитъ, центробѣжная сила этой частицы *M*, есть $\frac{\omega^2 r}{g}$. За время dt частица *M* проходитъ путь ds, образующій, вообще, нѣкоторый уголъ съ радіусомъ *O'M*, по которому направлена центробѣжная сила. Поэтому работа ея на этомъ перемѣщеніи есть:

$$\frac{1}{g}\omega^2 r\, ds\, cos(r,ds) = \frac{1}{g}\omega^2 r\, dr.$$

На всемъ перемѣщеніи отъ *A* до *B* центробѣжная сила совершаетъ работу:

$$\frac{\omega^2}{g}\int_{r_1}^{r_2} r\, dr = \frac{\omega^2}{g}(r_2{}^2 - r_1{}^2) = \frac{u_2{}^2}{2g} - \frac{u_1{}^2}{2g},$$

гдѣ u_1 и u_2 суть скорости влеченія точекъ *A* и *B*. Работа этой силы должна быть прибавлена къ работѣ внѣшнихъ силъ, входящихъ въ уравненіе Д. Бернулли (ур-іе (9) въ § 7), а потому можемъ написать, замѣняя абсолютныя скорости v относительными w:

$$\frac{w_2{}^2}{2g} - \frac{w_1{}^2}{2g} = \frac{p_1}{\gamma} + z_1 - \left(\frac{p_2}{\gamma} + z_2\right) + \frac{u_2{}^2}{2g} - \frac{u_1{}^2}{2g},$$

или, окончательно:

$$\frac{w_1{}^2}{2g} - \frac{u_1{}^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{w_2{}^2}{2g} - \frac{u_2{}^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 = const \quad . \; . \; . \; . \; \textbf{(19)}$$

Отсюда видно, что напоръ, соотвѣтствующій скорости влеченія, вычитается изъ соотвѣтствующаго трехчлена.

Замѣтимъ, что положеніе оси вращенія не безразлично, такъ какъ только при вертикальной оси высота $z_1 - z_2 = h$ остается одна и та же, гдѣ бы мы ни застали струю *AB*. Для всякаго другого положенія оси вращенія эта высота періодически мѣняется съ каждымъ оборотомъ. Но если мы имѣемъ дѣло не съ одной струйкой, а съ непрерывнымъ рядомъ струй, образующихъ полное колесо, то для всей массы воды, протекающей черезъ такое колесо съ наклонною осью, ур-іе (19) можетъ быть примѣнено безъ всякихъ дальнѣйшихъ оговорокъ, при чемъ координаты z_1 и z_2 слѣдуетъ брать, какъ координаты центровъ окружностей впуска въ колесо и выпуска изъ него.

Равнымъ образомъ, если вращеніе не равномѣрно, то ускореніе движенія влеченія состоитъ уже не только изъ центростремительнаго $\frac{u^2}{r}$, но и изъ тангенціальнаго $\frac{du}{dt}$, которое дастъ новую силу инерціи $\left(-\frac{1}{g}\cdot\frac{du}{dt}\right)$, направленную по перпендикуляру къ радiусу въ плоскости вращенiя. Работа этой силы, вообще, не равна нулю, а потому уравненiе (19) въ этомъ случаѣ должно быть дополнено членами, представляющими работу этой силы на всемъ пути отъ A до B, отнесенную, конечно, къ единицѣ вѣса жидкости.

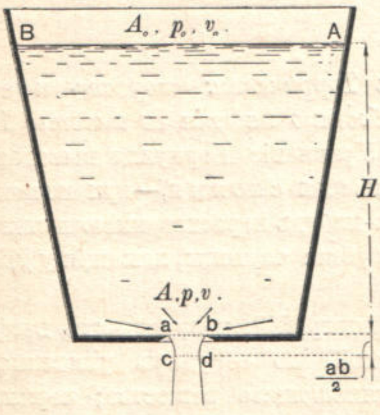
Слѣдуетъ также отмѣтить, что, въ примѣненiи къ дѣйствительнымъ жидкостямъ, ур-iе (19) должно быть исправлено на потери напора, которыя въ этомъ случаѣ, конечно, пропорцiональны квадрату относительной скорости.

ГЛАВА II.

Истеченіе жидкости изъ отверстій.

§ 11. Истеченіе изъ отверстія въ тонкой стѣнкѣ.

Начнемъ съ простѣйшаго случая истеченія изъ отверстія въ тонкой стѣнкѣ горизонтальнаго дна сосуда; заранѣе отмѣтимъ, что полученные результаты можно примѣнять и къ случаю отверстія въ боковой стѣнкѣ, если только вертикальный размѣръ отверстія настолько малъ по сравненію съ разстояніемъ отъ его центра тяжести до свободной поверхности, что безъ большой ошибки можно считать всѣ точки сѣченія отверстія находящимися на одной и той же глубинѣ подъ свободной поверхностью, и, притомъ, именно на глубинѣ центра тяжести отверстія.



Фиг. 49.

Мы будемъ все время говорить объ установившемся движеніи, т.-е. будемъ предполагать, что отъ времени не зависитъ ни одно изъ обстоятельствъ движенія, такъ что разстояніе H (напоръ) (фиг. 49) отъ отверстія до свободной поверхности постоянно *).

Назовемъ площадь сѣченія сосуда на свободной поверхности черезъ A_0, скорость воды въ этомъ сѣченіи черезъ v_0 и давленіе на свободной поверхности черезъ p_0. Тѣ же величины въ отверстіи будемъ называть тѣми же буквами, но безъ значковъ. Примѣняя къ теченію отъ **AB** до **ab** уравненіе Д. Бернулли и принимая за плоскость сравненія плоскость отверстія **ab**, имѣемъ уравненіе:

$$\frac{v^2}{2g}+\frac{p}{\gamma}+0=\frac{v_0^2}{2g}+\frac{p_0}{\gamma}+H \quad \ldots\ldots\ldots\ (1)$$

---

*) Это выполняется или въ томъ случаѣ, если площадь **AB** огромна по сравненію съ площадью *ab*, такъ что вытеканіе жидкости изъ сосуда не вызываетъ въ немъ замѣтнаго пониженія уровня, или съ помощью сосуда Маріотта или приборомъ Прони. Наконецъ, можно предположить наличность постояннаго притока въ сосудъ въ количествѣ, равномъ расходу изъ него.

Уравненіе неразрывности пишется въ формѣ:

$$Q = A_0 v_0 = Av \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad (2)$$

Въ виду (2) ур-ію (1) можно дать видъ:

$$\frac{v^2}{2g}\left[1-\left(\frac{A}{A_0}\right)^2\right] = H + \frac{p_0 - p}{\gamma},$$

откуда

$$v = \sqrt{\frac{2g\left(H + \frac{p_0 - p}{\gamma}\right)}{1-\left(\frac{A}{A_0}\right)^2}} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (3)$$

Въ тѣхъ случаяхъ, когда A_0 гораздо больше A,—напримѣръ, при $\frac{A_0}{A} \geqq 20$, можно безъ значительной ошибки пренебречь въ знаменателѣ дробью $\left(\frac{A}{A_0}\right)^2$,— во взятомъ примѣрѣ она $\leqq 0{,}0025$.

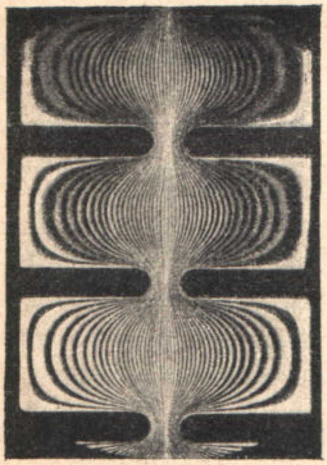
Допустимъ затѣмъ, что истеченіе происходитъ въ атмосферу, и, слѣдовательно, давленіе p въ отверстіи равно давленію въ окружающей средѣ p_0. Отмѣчая для этого случая скорость черезъ v', получимъ изъ ур. (3):

$$v' = \sqrt{2gH}.$$

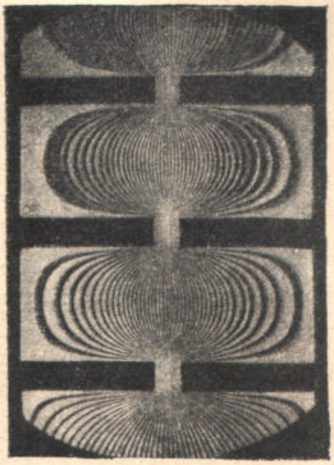
Это есть данная въ 1643 году *формула Торричелли: скорость истеченія подъ напоромъ H равна скорости свободнаго паденія съ высоты H.*

Но такъ мы дѣлаемъ грубую ошибку. Уравненіе Бернулли выведено въ предположеніи движенія параллельными слоями,—при истеченіи же этого нѣтъ. Если воду замутить какою-нибудь нерастворимою пылью, то ясно будетъ видно, какъ располагаются струйки: частицы, лежащія у дна, также принимаютъ участіе въ истеченіи.

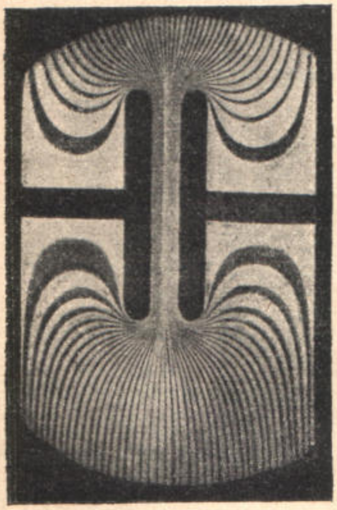
На таблицѣ II представлены копіи съ фотографій, полученныхъ проф. Шоу (Hele-Schaw); въ глицеринъ, протекающій по сосудамъ указанной формы, онъ впускалъ тонкія струи подкрашивающаго вещества; черныя линіи фигуръ соотвѣтствуютъ какъ разъ этимъ окрашеннымъ струямъ. Толщина черныхъ полосокъ позволяетъ судить объ относительной величинѣ скорости каждой струйки: ясно, что скорость тамъ больше, гдѣ струйки тоньше. Изъ этихъ фигуръ отчетливо видно, что *вся* масса жидкости передъ отверстіемъ устремляется въ него, хотя средняя колонна движется быстрѣе; замѣтно также вліяніе не только формы дна сосуда (фиг. A и C), но и то, скруглены кромки отверстія (фиг. A) или нѣтъ (фиг. B): въ этомъ послѣднемъ случаѣ углы ближайшаго уширенія гораздо менѣе принимаютъ участіе въ общемъ движеніи жидкости, нежели въ предыдущемъ; наконецъ, изъ фигуръ ясно, что внутри отверстія струйки имѣютъ, вообще, различныя скорости. Хотя вода и гораздо менѣе вязка, нежели глицеринъ, однако,



Фиг. A.



Фиг. B.



Фиг. C.

Окрашенныя струи глицерина
по опытамъ Hele-Shaw.

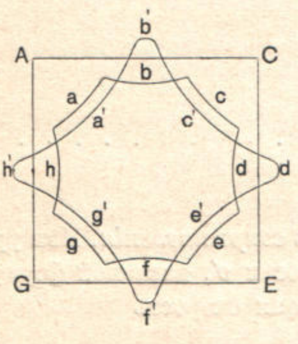
См. его первую работу въ Engineering, vol. LXIV за 1897, II полугодіе, стр. 90.

Вторая работа, откуда взяты эти фигуры, подъ заглавіемъ „Surface Resistance of Water and Stream—Line Motion" напечатано въ томъ же журналѣ за 1898 годъ, I полугодіе, стр. 444, 477, 511.

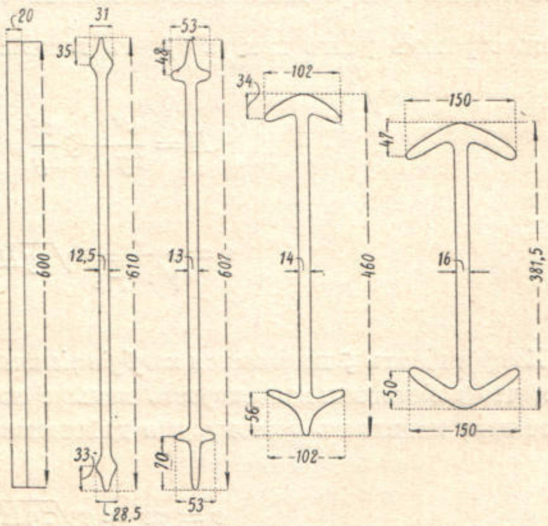
Третья работа его, подъ названіемъ „Further experiments on the Character of Fluid-Motion" см. тамъ же, за 1899 годъ, I полугодіе, стр. 28.

подобныя же явленія происходятъ и въ ней, такъ что въ сѣченіи ab и передъ нимъ скорости въ отдѣльныхъ точкахъ отнюдь не параллельны между собою, а это вызываетъ *сжатіе струи* на нѣкоторомъ разстояніи отъ ab: гдѣ-нибудь въ cd (приблизительно на разстояніи $\frac{ab}{2}$) струя получаетъ наибольшее сжатіе, т.-е. площадь ея сѣченія наименьшая; это сѣченіе называется *сжатымъ*, и въ немъ можно считать скорости параллельными. Но параллельность слоевъ, при которой только и примѣнимы для конечной струи уравненія (1) и (2), обусловливаются не только параллельностью скоростей, но и ихъ равенствомъ, чего въ дѣйствительности нѣтъ; появленіе такъ называемаго *біенія* струи можетъ служить достаточнымъ тому доказательствомъ *). Изъ теоретическихъ изслѣдованій объ истеченіи слѣдуетъ, что скорости въ отдѣльныхъ точкахъ отверстія нельзя считать равными. Но такъ какъ такія изслѣдованія, при всей ихъ сложности, даютъ возможность найти скорость на поверхности струи и количество вытекающей жидкости, не вполнѣ согласныя съ тѣмъ, что наблюдается въ дѣйствительности, да и то лишь для нѣкоторыхъ частныхъ случаевъ, то не остается ничего

*) Біеніемъ струи называется непрерывное измѣненіе вида и величины сѣченія вдоль струи. На фиг. 50 представлены два поперечныхъ профиля струи, вытекающей изъ квадратнаго отверстія $ACEG$; профиль $abcdefgh$ взятъ на разстояніи 150 *mm*, а профиль $a'b'c'd'e'f'g'h'$— на разстояніи 300 *mm* отъ отверстія; площадь послѣдняго профиля наименьшая (наблюденіе Poncelet и Lesbros). Bidone нашелъ въ сжатомъ сѣченіи струи, вытекающей изъ отверстія съ формою правильнаго пятиугольника, пятиконечную звѣзду. На фиг. 51 даны четыре про-



Фиг. 50.



Фиг. 51.

филя струи въ разстояніяхъ 100, 300, 700 и 1000 *mm* отъ отверстія, имѣвшаго форму узкой щели размѣрами въ 600×20 *mm*. На дальнѣйшемъ протяженіи струи ея сѣченіе не остается постояннымъ ни по формѣ, ни по площади: оно видоизмѣняется и притомъ такъ, что, напр., при квадратномъ отверстіи фиг. 50 дуговое четырехугольное сѣченіе $b'd'f'h'$ снова сплющивается подобно формѣ $ab\ldots gh$, снова возстановляется, но уже въ положеніи такомъ, что его вершины обращены къ вершинамъ отверстія, снова сплющивается и т. д.

лучшаго, какъ пользоваться формулой Торричелли, исправляя ее эмпирически на основанiи слѣдующихъ соображенiй.

Разъ есть сжатое сѣченiе, то истеченiе происходитъ уже не черезъ всю площадь A отверстiя, а черезъ это сжатое сѣченiе, площадью a, гдѣ скорости параллельны. Полагаемъ, что

$$a = \alpha . A \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

гдѣ α есть нѣкоторая дробь, меньшая единицы. Величина α называется *коэффицiентомъ сжатiя*.

Далѣе, по причинѣ несовершенства жидкости, непараллельность и неравенство скоростей для отдѣльныхъ струекъ, сопровождаемое ихъ относительнымъ скольженiемъ, вызываетъ потерю работы (напора) на преодолѣнiе сопротивленiй, вызванныхъ этимъ скольженiемъ какъ внутри струи, такъ и у кромки отверстiя, такъ что полный напоръ H *) идетъ не только на сообщенiе каждому килограмму дѣйствительной живой силы $\frac{v^2}{2g}$, имѣющей мѣсто въ сжатомъ сѣченiи, но и на преодолѣнiе работы сопротивленiй. Какъ уже было сказано, всѣ потери напора (работы сопротивленiй, отнесенныя къ одному килограмму) считаются въ гидравликѣ, на основанiи наблюденiй, пропорцiональными второй степени скорости. Поэтому полагаемъ, что въ данномъ случаѣ работа сопротивленiй, выраженная въ доляхъ дѣйствительнаго скоростнаго напора, можетъ быть выражена черезъ $\zeta \frac{v^2}{2g}$. Такимъ образомъ учетъ напора будетъ таковъ:

$$H = \frac{v^2}{2g} + \zeta \frac{v^2}{2g},$$

откуда

$$v = \frac{1}{\sqrt{1+\zeta}} \sqrt{2gH} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Коэффицiентъ ζ называется *коэффицiентомъ сопротивленiя*. Изъ ур. (5) видно, что дѣйствительная скорость меньше скорости v', даваемой формулой Торричелли; напишемъ поэтому, что дѣйствительная скорость

$$v = \varphi v' = \varphi \sqrt{2gH} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

---

*) Если истеченiе происходитъ въ среду, давленiе которой отличается отъ давленiя на свободной поверхности, то, согласно съ уравненiемъ (3) и съ обозначенiями фиг. 49, полнымъ напоромъ будетъ сумма: $H + \frac{p_0 - p}{\gamma}$. Кромѣ того, строго говоря, разстоянiе H слѣдовало бы измѣрять отъ уровня въ сосудѣ до сжатаго сѣченiя. При небольшихъ отверстiяхъ обыкновенно достаточно считать H такъ, какъ указано на фиг. 49.

гдѣ φ меньше единицы и называется *коэффиціентомъ скорости.* Очевидно, что коэффиціенты φ и ζ связаны уравненіемъ

$$\varphi = \sqrt{\frac{1}{1+\zeta}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

Наконецъ, такъ какъ изслѣдованіе поставлено на эмпирическую почву, то допустимъ, вопреки дѣйствительности, что въ сжатомъ сѣченіи скорости равны; тогда истинный расходъ Q черезъ отверстіе площадью A подъ напоромъ H выразится такъ:

$$Q = va = \alpha\varphi A\sqrt{2gH} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

Мы могли бы поступить еще и такъ: написать, что произведеніе площади отверстія на скорость, по формулѣ Торричелли, есть величина Q_1, бо́льшая истиннаго расхода Q, и сразу ввести поправочный *коэффиціентъ расхода* μ, написавъ:

$$Q = Q_1\mu = \mu A\sqrt{2gH} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

Изъ сравненія формулъ (9) и (8) получаемъ

$$\mu = \alpha\varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

Помощью этого выраженія можно контролировать результаты опытовъ надъ истеченіемъ.

Всѣ введенные коэффиціенты должны быть опредѣлены изъ опытовъ, изъ ряда коихъ и выяснилось, что *для круглыхъ отверстій въ тонкой стѣнкѣ* въ среднемъ:

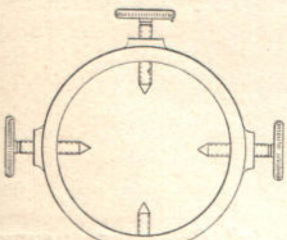
$$\varphi = 0{,}97,$$

$$\alpha = 0{,}64,$$

и, слѣдовательно,

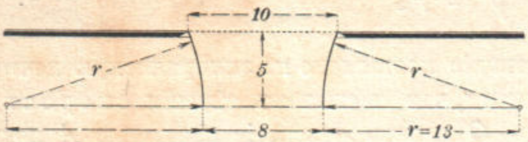
$$\mu = 0{,}62.$$

На опытѣ легче всего опредѣляется коэффиціентъ расхода μ, такъ какъ нужно только собрать всю воду, вытекшую за опредѣленный промежутокъ времени, измѣрить ее, напр., калиброваннымъ сосудомъ или взвѣшиваніемъ, полученный объемъ раздѣлить на число секундъ продолжительности опыта и результатъ подставить вмѣсто Q въ уравненіе (9); площадь отверстія A, а равно и постоянная во время опыта высота напора H, могутъ быть точно измѣрены.



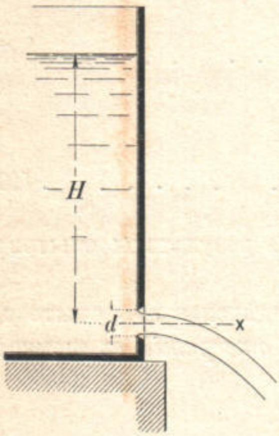
Фиг. 52.

Коэффиціентъ сжатія α найти уже труднѣе. Дѣлается это напр. съ помощью кольца съ заостренными установительными винтами (фиг. 52). Кольцо устанавливается такъ, чтобы оно охватывало струю, и винты подводятся до соприкосновенія съ нею. Такимъ приборомъ можно изслѣдовать профиль струи и найти мѣсто наибольшаго сжатія. Помощью подобнаго же прибора были установлены профили струи при отверстіяхъ не круглой формы (фиг.50 и 51).



Фиг. 53.

Для круглыхъ отверстій можно пользоваться построеніемъ Bossut (фиг. 53), въ которомъ размѣры сжатой струи выражены по діаметру отверстія, принятому равнымъ 10. Это построеніе годится, если отношеніе площади отверстія A къ площади свободной поверхности A_0, т.-е $\frac{A}{A_0}$, примѣрно, меньше $\frac{1}{20}$.



Фиг. 54.

Коэффиціентъ скорости φ изъ опытовъ надъ истеченіемъ черезъ отверстіе въ днѣ сосуда непосредственно не опредѣляется. Онъ можетъ быть опредѣленъ изъ наблюденій надъ истеченіемъ черезъ отверстія въ боковой тонкой стѣнкѣ (фиг. 54), если только H гораздо больше вертикальнаго размѣра отверстія, такъ чтобы можно было считать напоръ постояннымъ для всѣхъ точекъ сѣченія отверстія. При такихъ условіяхъ коэффиціентъ скорости можно опредѣлить опытомъ, устанавливая траекторію вытекающей струи. Разсматривая струю, какъ систему матеріальныхъ точекъ, имѣющихъ начальную скорость v, образующую съ горизонтомъ уголъ α, и находящихся подъ дѣйствіемъ тяжести, заключаемъ, что ихъ траекторія есть парабола, выражающаяся ур-іями:

$$x = v\, cos\alpha . t;$$

$$y = \left(v\, sin\alpha + \frac{gt}{2}\right) t.$$

Отсюда

$$y = x\, tg\alpha + \frac{g}{2v^2 cos^2\alpha} x^2,$$

и далѣе

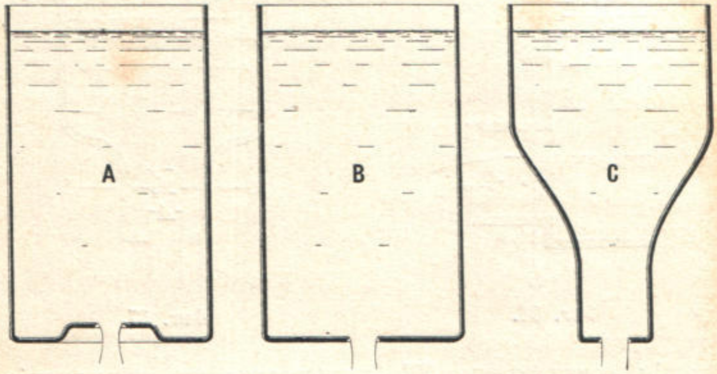
$$v = \frac{x}{cos\alpha} \sqrt{\frac{g}{2(y - x\, tg\alpha)}}.$$

Измѣряя для двухъ точекъ струи координаты (x', y'), (x'', y''), можно исключить отсюда уголъ α и найти значеніе дѣйствительной скорости v; сравнивъ его съ количествомъ $\sqrt{2gH}$, найдемъ φ.

Относительно значеній μ, α и φ, на основаніи существующихъ опытныхъ данныхъ, можно прійти къ слѣдующимъ заключеніямъ *):

При отверстіяхъ въ тонкой стѣнкѣ:

1. Коэффиціентъ сжатія α, а съ нимъ и расхода μ, зависитъ отъ формы стѣнки (фиг. 55). Такъ, для сосуда *A* наблюдается наибольшее сжатіе и наименьшій коэффиціентъ расхода $\mu = 0{,}5$. Для сосуда *B* съ отверстіемъ въ плоской стѣнкѣ (нормальный случай) сжатіе, какъ выше приведено,



Фиг. 55.

довольно большое ($\alpha = 0{,}64$) и коэффиціентъ расхода невеликъ ($\mu = 0{,}62$). Для сосуда *C*, постепенно суживающагося къ отверстію и тѣмъ самымъ подготовляющаго отдѣльныя струйки къ прохожденію черезъ него, можно при извѣстномъ очертаніи получить очень малое сжатіе (α почти равно 1) и очень высокій коэффиціентъ расхода (до $\mu = 0{,}97 - 0{,}98$). Нужно замѣтить, что такимъ путемъ мы ставимъ истеченіе въ условія истеченія черезъ насадки, о чемъ будетъ рѣчь ниже.

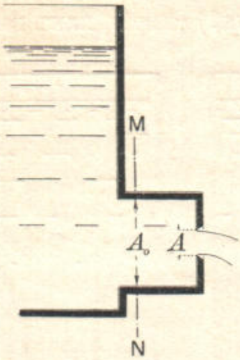
2. При длинныхъ и узкихъ отверстіяхъ μ больше, чѣмъ при отверстіяхъ правильной формы. При малыхъ отверстіяхъ μ больше, чѣмъ при большихъ.

3. Связь μ съ напоромъ такова: чѣмъ меньше напоръ, тѣмъ меньше сжатіе, т.-е. тѣмъ ближе къ единицѣ коэффиціентъ сжатія, и, слѣдовательно, тѣмъ больше коэффиціентъ μ. Наоборотъ, коэффиціентъ скорости тѣмъ меньше, чѣмъ меньше напоръ,—это обстоятельство вліяетъ на μ обратно; въ концѣ концовъ коэффиціентъ расхода при малыхъ напорахъ больше, чѣмъ при большихъ.

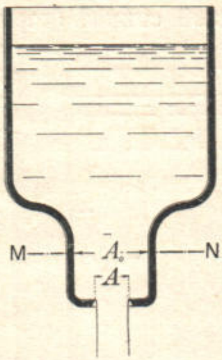
4. Наконецъ, величина отверстія по сравненію съ сѣченіемъ сосуда тоже оказываетъ вліяніе на значеніе μ; чѣмъ это отношеніе, $\frac{A}{A_0}$, меньше, тѣмъ меньше коэффиціентъ расхода. Вейсбахъ (Julius Weisbach) ввелъ терминъ *несовершенное сжатіе* (unvollkommene Contraction) для случая,

*) Сводъ экспериментальныхъ данныхъ относительно истеченія черезъ отверстія см. ниже, въ § 14.

когда $\frac{A}{A_0}$ не очень мало; при этомъ подъ A_0 нужно разумѣть не величину площади сосуда на свободной поверхности, а площадь той его призматической части, за которой по направленію къ отверстію уже нѣтъ суженій или расширеній; такъ, напр., въ случаѣ фиг. 56 и 57 подъ A_0 нужно



Фиг. 56.



Фиг. 57.

разумѣть сѣченія сосудовъ по ***MN***. Оказывается, что присутствіе незадолго до отверстія замѣтной скорости существенно вліяетъ на коэффиціентъ расхода путемъ уменьшенія сжатія,—коэффиціентъ μ увеличивается. Вліяніе этого обстоятельства подробно разсмотрѣно Вейсбахомъ, который далъ для этихъ случаевъ таблицы поправокъ, приведенныя ниже въ параграфѣ 14; изъ нихъ видно, что если $\frac{A}{A_0}=\frac{1}{20}$, то коэффиціентъ расхода только на 0,7% больше, чѣмъ при совершенномъ сжатіи ($\frac{A_0}{A}$ очень велико); если же $\frac{A}{A_0}=0{,}5$, то коэффиціентъ расхода увеличивается на 13,5%; при $\frac{A}{A_0}=0{,}7$, — на 26% и т. д.

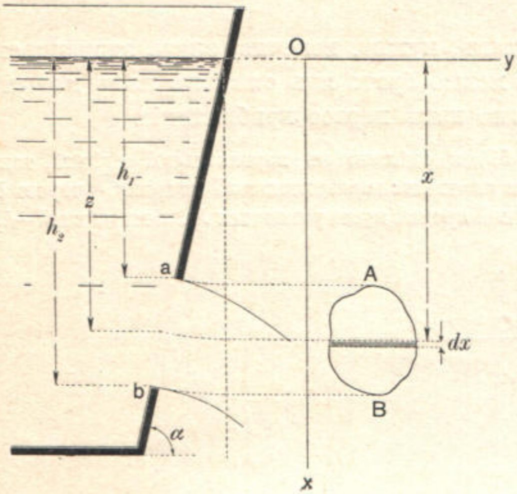
5. Присутствіе замѣтной скорости на свободной поверхности можетъ быть оцѣнено соотвѣтствующимъ увеличеніемъ напора, вносимаго въ формулу Торричелли: скорость въ отверстіи можно получить вмѣсто уравненія (3) изъ уравненія (1) такъ:

$$v=\sqrt{2gH+\frac{2g}{\gamma}(p_0-p)+v_0^2},$$

но такъ какъ v_0, вообще, неизвѣстно, то удобнѣе и этотъ случай разсматривать, какъ случай несовершеннаго сжатія.

§ 12. Истеченіе изъ большихъ отверстій.

До сихъ поръ мы разсматривали такіе случаи истеченія, когда безъ большой погрѣшности можно было считать давленіе по всему сѣченію одинаковымъ. Теперь пусть отверстіе имѣетъ большую высоту по сравненію съ напоромъ и, слѣдовательно, напоры въ разныхъ его точкахъ существенно между собою различны. На фиг. 58 представленъ случай большого отверстія **ab** въ плоской стѣнкѣ, наклоненной подъ угломъ α къ горизонту, при чемъ представлено также положеніе стѣнки и отверстія **AB** въ совмѣщеніи ихъ съ плоскостью чертежа. Изъ чертежа видно, что напоръ въ какой-нибудь точкѣ отверстія равенъ $x \sin\alpha$, гдѣ x есть координата этой точки относительно осей **Oxy** въ плоскости стѣнки (ось **Oy** есть линія пересѣченія свободной поверхности со стѣнкой). Выдѣлимъ въ отверстіи **AB** безконечно узкій элементъ съ шириною y и толщиною dx; напоръ въ этомъ элементарномъ отверстіи назовемъ z; такъ какъ



Фиг. 58.

$$z = x \sin\alpha,$$

то

$$dx = \frac{dz}{\sin\alpha}.$$

Если бы все отверстіе состояло изъ одного такого элемента, то, на основаніи предыдущаго, можно было бы выразить скорость вытеканія v и расходъ ΔQ формулами:

$$v = \sqrt{2gz},$$

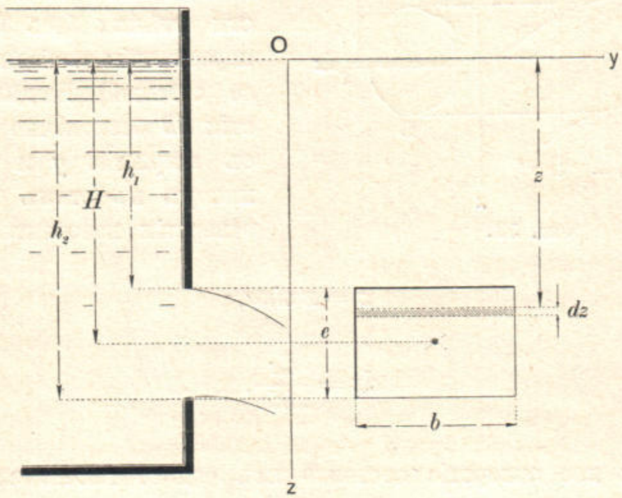
$$\Delta Q = \mu y \, dx \sqrt{2gz} = \mu y \frac{dz}{\sin\alpha} \sqrt{2gz} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (11)$$

Предположимъ, что черезъ каждый подобный элементъ площади отверстія истеченіе происходитъ независимо отъ прочихъ элементовъ отверстія; тогда расходъ черезъ все отверстіе получимъ, суммируя для всего отверстія выраженія вида (11). Подобное допущеніе, очевидно, неправильно; согласно съ нимъ мы должны были бы признать, что струйка, вытекающая въ точкѣ **a** подъ небольшимъ напоромъ (слѣдовательно, описывающая круто падающую параболу), не стѣсняетъ истеченія черезъ точку **b**, откуда струйка вытекаетъ подъ большимъ напоромъ по пологой параболѣ. Тѣмъ не менѣе, несмотря на всю неправильность этого допущенія, его все-таки дѣлаютъ, съ тѣмъ, однако, ограниченіемъ, что введенный въ выраженіе (11) и выносимый при интегрированіи за знакъ интеграла, какъ постоянное, коэффиціентъ расхода μ не считаютъ равнымъ коэффиціенту расхода малыхъ отверстій, а опредѣляютъ изъ спеціальныхъ опытовъ. Итакъ, полный расходъ Q пишутъ такъ:

$$Q = \int_{h_1}^{h_2} \mu y \frac{dz}{\sin\alpha} \sqrt{2gz} = \frac{\mu\sqrt{2g}}{\sin\alpha} \int_{h_1}^{h_2} y\sqrt{z}\, dz \quad \ldots\ldots \quad (12)$$

Чтобы вычислить этотъ интегралъ, нужно, конечно, знать зависимость y отъ z. Значеніе коэффиціента μ можно брать изъ опытовъ надъ малыми отверстіями въ тонкой стѣнкѣ, только какъ первое приближеніе.

I. *Отверстіе прямоугольное* (фиг. 59) и сдѣлано въ вертикальной стѣнкѣ, такъ что $\alpha = 90^0$ и $\sin\alpha = 1$. Размѣры отверстія назовемъ: горизонтальный (ширину)—черезъ b, вертикальный—черезъ e. Напоръ въ верхней кромкѣ пусть равняется h_1, а въ нижней—h_2;



Фиг. 59.

напоръ въ центрѣ тяжести отверстія назовемъ черезъ H. Примѣняя сюда общее уравненіе (12), мы должны положить въ немъ

$$y = b = const,$$

а потому

$$Q = \mu\sqrt{2g}\, b \int_{h_1}^{h_2} \sqrt{z}\, dz = \frac{2}{3}\mu b\sqrt{2g}\left(h_2^{3/2} - h_1^{3/2}\right) \quad \ldots\ldots \quad (13)$$

Вычисленіе удобнѣе вести по высотѣ e отверстія и по напору H въ его центрѣ тяжести. Изъ чертежа видно, что

$$h_2 = H + \frac{e}{2};$$

$$h_1 = H - \frac{e}{2}.$$

Слѣдовательно,

$$Q = \frac{2}{3}\mu b\sqrt{2g}\, H^{3/2}\left[\left(1 + \frac{e}{2H}\right)^{3/2} - \left(1 - \frac{e}{2H}\right)^{3/2}\right].$$

Разложимъ обѣ степени по биному Ньютона

$$\left(1+a\right)^m=1+ma+\frac{m(m-1)}{1.2}a^2+\ldots\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-k)}{1.2\ldots\ldots(k+1)}a^{k+1}+\ldots$$

ограничиваясь притомъ только третьими степенями дроби $\frac{e}{2H}$, которая при h_1, отличномъ отъ нуля, всегда меньше единицы. Имѣемъ такимъ образомъ:

$$\left(1+\frac{e}{2H}\right)^{3/2}=1+\frac{3}{2}\cdot\frac{e}{2H}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{e^2}{4H^2}-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2.3}\cdot\frac{e^3}{8H^3}+\ldots$$

$$\left(1-\frac{e}{2H}\right)^{3/2}=1-\frac{3}{2}\cdot\frac{e}{2H}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{e^2}{4H^2}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2.3}\cdot\frac{e^3}{8H^3}+\ldots$$

Поэтому

$$\left(1+\frac{e}{2H}\right)^{3/2}-\left(1-\frac{e}{2H}\right)^{3/2}=\frac{3}{2}\left(\frac{e}{H}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2.3}\cdot\frac{e^3}{8H^3}\right)=\frac{3}{2}\,\frac{e}{H}\left(1-\frac{1}{96}\,\frac{e^2}{H^2}\right)$$

Слѣдовательно:

$$Q=\mu\,be\left(1-\frac{1}{96}\,\frac{e^2}{H^2}\right)\sqrt{2gH}\,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13')$$

Для удобства вычисленій пишутъ обыкновенно:

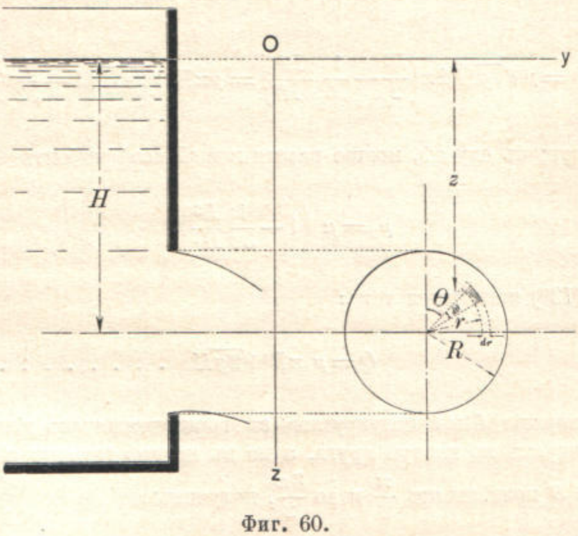
$$Q=\mu_0\,be\sqrt{2gH}\,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

при чемъ подъ μ_0 подразумѣваютъ величину

$$\mu_0=\mu\left(1-\frac{1}{96}\,\frac{e^2}{H^2}\right);$$

величину μ_0 можно брать и изъ соотвѣтственныхъ опытовъ.

Понятно, что при надлежащемъ значеніи μ_0 формула (14) примѣнима къ отверстіямъ, имѣющимъ форму параллелограмма съ одною горизонтальною стороною.



Фиг. 60.

II. *Отверстіе круглое* радіуса R (фиг. 60). Удобнѣе всего для составленія выраженія dQ взять элементъ площади, заключенной между двумя безконечно близкими концентрическими окружностями радіусовъ r и $(r+dr)$ и двумя смежными радіусами, составляющими между собою уголъ $d\Theta$, гдѣ черезъ Θ обозначенъ уголъ между направленіемъ оси Oz и радіусомъ r. Площадь его выразится черезъ $r.d\Theta.dr$. Разстояніе этого элемента отъ уровня воды нужно принять равнымъ

$$z = H - r\cos\Theta,$$

гдѣ H есть напоръ въ центрѣ O отверстія.

Скорость струйки, вытекающей черезъ этотъ элементъ, по теоремѣ Д. Бернулли, есть

$$v_1 = \sqrt{2g(H - r\cos\Theta)};$$

поэтому расходъ черезъ все сѣченіе можно выразить двойнымъ интеграломъ, вводя опытный коэффиціентъ истеченія μ:

$$Q = \int_0^{2\pi}\int_0^R \mu.r\ d\Theta\ dr.v_1 = \mu\int_0^{2\pi} d\Theta \int_0^R r\,dr\sqrt{2g(H - r\cos\Theta)}.$$

Это выраженіе напишемъ такъ:

$$Q = \mu\sqrt{2gH}\int_0^{2\pi} d\Theta \int_0^R r\,dr\left(1 - \frac{r}{H}\cos\Theta\right)^{1/2}$$

или, разлагая въ рядъ и откидывая члены съ степенями $\frac{r}{H}$ выше второй, такъ какъ во всякомъ случаѣ $r < H$, получаемъ:

$$Q = \mu\sqrt{2gH}\int_0^{2\pi} d\Theta \int_0^R r\,dr\left(1 - \frac{1}{2}\frac{r}{H}\cos\Theta - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\frac{r^2}{H^2}\cos^2\Theta + \ldots.\right)$$

Интегрируя сначала по r, а потомъ по Θ, и, замѣняя $\cos^2\Theta$ черезъ $\frac{1+\cos 2\Theta}{2}$, находимъ:

$$Q = \mu\sqrt{2gH}\ 2\pi\left(\frac{R^2}{2} - \frac{1}{16}\ \frac{R^4}{4H^2}\right) = \mu\pi R^2\sqrt{2gH}\left(1 - \frac{1}{32}\ \frac{R^2}{H^2}\right) \quad \ldots\ldots (13'')$$

Какъ и въ предыдущемъ случаѣ, можно ввести новый коэффиціентъ

$$\mu_0 = \mu\left(1 - \frac{1}{32}\ \frac{R^2}{H^2}\right).$$

Тогда выраженіе (13″) напишется такъ:

$$Q = \mu_0\pi R^2\sqrt{2gH} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (14')$$

Если бы отверстіе было полукруглое съ горизонтальнымъ діаметромъ, то, считая попрежнему H напоромъ въ центрѣ круга, а не въ центрѣ тяжести сѣченія, и внося при интегрированіи по Θ предѣлы отъ $\frac{\pi}{2}$ и до $\frac{3\pi}{2}$, получимъ:

$$Q = \mu\sqrt{2gH}\left(\frac{\pi R^2}{2} + \frac{R^3}{3H} - \frac{1}{8}\ \frac{R^4}{4H^2}\ \frac{\pi}{2}\right),$$

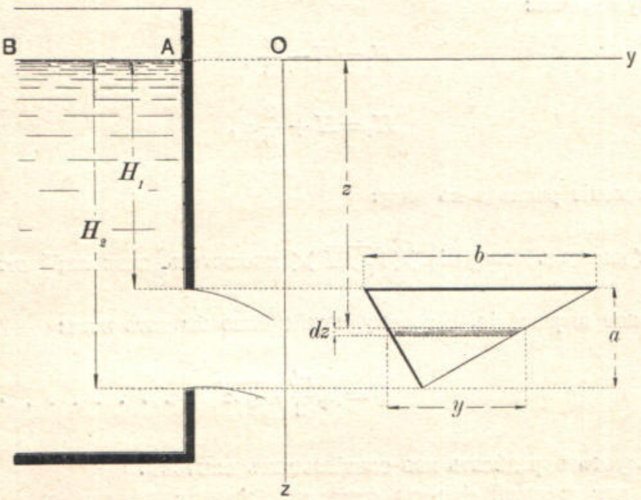
что можно представить такъ:

$$Q = \mu_0 \frac{\pi R^2}{2} \sqrt{2gH},$$

полагая

$$\mu_0 = \mu \left(1 + \frac{R}{3\pi H} - \frac{1}{32}\frac{R^2}{H^2}\right).$$

III. *Отверстіе треугольное* (фиг. 61) съ высотою a и основаніемъ b. Пусть основаніе горизонтально и погружено подъ уровнемъ воды **AB** на глубину H_1, а вершина—на



Фиг. 61.

глубину H_2. Возьмемъ элементъ отверстія въ видѣ безконечно узкой горизонтальной полоски шириною dz, на глубинѣ z подъ уровнемъ, и обозначимъ длину полоски черезъ y. Тогда площадь этого элемента будетъ

$$dA = y\,dz,$$

а скорость истеченія на этой глубинѣ

$$v = \sqrt{2gz}.$$

Но изъ подобія треугольниковъ имѣемъ

$$\frac{y}{b} = \frac{H_2 - z}{a},$$

откуда

$$y = \frac{b}{a}(H_2 - z),$$

такъ что

$$dA = \frac{b}{a}\left(H_2 - z\right) dz.$$

Расходъ жидкости равенъ

$$Q = \int_0^A \mu\, v\, dA = \int_{H_1}^{H_2} \mu \sqrt{2gz}\; \frac{b}{a}\left(H_2 - z\right) dz$$

или, считая μ для всѣхъ элементовъ сѣченія одинаковымъ:

$$Q=\mu\frac{b}{a}\sqrt{2g}\left[H_2\int_{H_1}^{H_2}z^{1/2}\,dz-\int_{H_1}^{H_2}z^{3/2}\,dz\right] \quad \ldots \ldots \ldots \quad (13''')$$

или:

$$Q=\mu\frac{b}{a}\sqrt{2g}\left[\frac{4}{15}H_2^{5/2}-\frac{2}{15}H_1^{3/2}(5H_2-3H_1)\right].$$

Понятно, что и тутъ можно выразить напоры H_1 и H_2 по напору H въ центрѣ тяжести и высотѣ a треугольника:

$$H_1=H-\frac{a}{3},$$

$$H_2=H+\frac{2}{3}a,$$

и привести выраженіе расхода къ виду:

$$Q=\mu\times\text{площадь отверстія}\times\sqrt{2gH}\times\text{множитель, зависящій отъ } a \text{ и } H.$$

Получится сложное выраженіе, которому можно было бы дать видъ:

$$Q=\mu_0\frac{ab}{2}\sqrt{2gH} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (14'')$$

при чемъ μ_0 слѣдуетъ опредѣлять изъ спеціальныхъ опытовъ.

Вообще, для всякой формы отверстія можно всегда писать уравненія, по формѣ подобныя ур-ію (14):

$$Q=\mu_0 A\sqrt{2gH},$$

гдѣ A будетъ обозначать площадь отверстія, H—напоръ въ центрѣ тяжести отверстія; что касается коэффиціента расхода μ_0, то его надо брать изъ опытовъ съ такою же формой сѣченія. Какъ первое приближеніе, можно брать μ по опытамъ съ малымъ отверстіемъ въ тонкой стѣнкѣ и находить Q по уравненіямъ, подобнымъ выраженіямъ (13′), (13″) и т. д.

Этотъ случай истеченія, одинъ изъ наиболѣе важныхъ въ практикѣ, былъ обстоятельно изслѣдованъ знаменитымъ *Poncelet* (1788—1868 г.) вмѣстѣ съ *Lesbros*, въ періодъ отъ 1827 до 1829 года, въ городѣ Мецѣ, по порученію французскаго военнаго министерства, и, затѣмъ, однимъ Lesbros въ 1829—1834 гг. Число опытовъ, произведенныхъ однимъ Lesbros, превышало 2000. Водоемы, которыми располагали эти ученые въ качествѣ сосудовъ, обладали огромною свободною площадью: одинъ имѣлъ 25.000 mtr^2, а второй—15.000 mtr^2, такъ что при расходѣ въ $1\frac{1}{2}$ mtr^3/sec уровень второго сосуда опускался только на 1 mm. Слѣдовательно, постоянство напора въ этихъ опытахъ было соблюдено вполнѣ достаточно. Всѣ измѣренія производились весьма тщательно; изучались, главнымъ образомъ, явленія истеченія изъ большихъ отверстій въ тонкой стѣнкѣ. Отверстія были прямоугольныя, двухъ типовъ: въ одномъ рядѣ опытовъ горизонтальный размѣръ b составлялъ 20 *cm*, въ другомъ—60 *cm*; высота въ 1-мъ случаѣ измѣнялась отъ 1 до 20 *cm*, а напоръ отъ очень маленькихъ до 1,7 *mtr* (коэффиціенты доведены въ таблицахъ до 3 *mtr* напора уже путемъ экстраполяціи). Вычисленія дѣлались по формулѣ:

$$Q = \mu_0 b\,(H - h)\sqrt{2g\,\frac{H+h}{2}}\,,$$

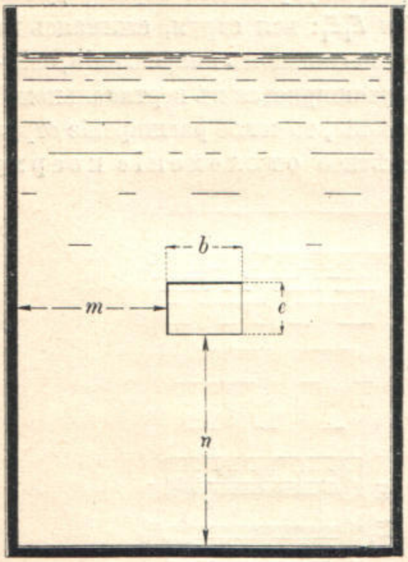
гдѣ H есть напоръ въ нижней кромкѣ отверстія, а h—въ верхней.

Въ таблицахъ, приведенныхъ ниже (см. § 14), дается именно напоръ h, т.-е. напоръ надъ верхнимъ ребромъ отверстія, при чемъ онъ измѣрялся не въ плоскости отверстія, а на нѣкоторомъ разстояніи отъ нея, такъ какъ свободная поверхность передъ самымъ отверстіемъ замѣтно понижается. Какъ легко видѣть, эта формула есть та самая, которую мы имѣли въ этомъ параграфѣ подъ № 14. Изъ опытовъ можно заключить, что μ вообще измѣняется и съ напоромъ, и съ высотою отверстія:

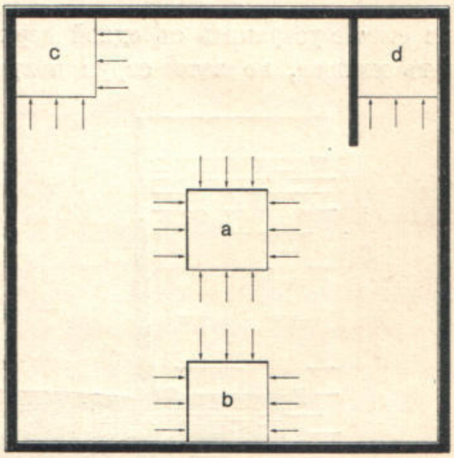
1) Чѣмъ больше напоръ, тѣмъ меньше μ; при этомъ, съ увеличеніемъ напора μ приближается къ значенію 0,60, пока отверстіе мало; при большихъ отверстіяхъ μ сначала увеличивается, а потомъ уменьшается, вмѣстѣ съ увеличеніемъ напора, и приближается къ тому же предѣлу. Это вполнѣ согласуется съ тѣмъ, что отмѣчено въ пунктѣ 3 § 11.

2) На μ вліяетъ наименьшій размѣръ сѣченія e (чѣмъ онъ меньше, тѣмъ μ больше) до тѣхъ поръ, пока $b \leqq 20\ e$.

3) Чѣмъ меньше площадь отверстія и чѣмъ оно уже, тѣмъ больше μ.



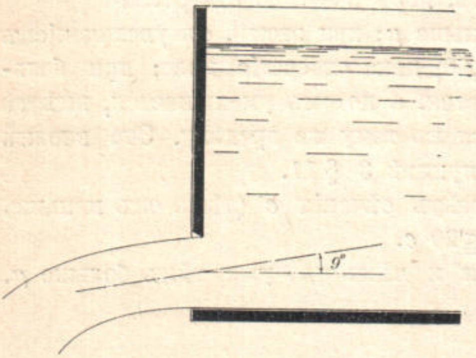
Фиг. 62.



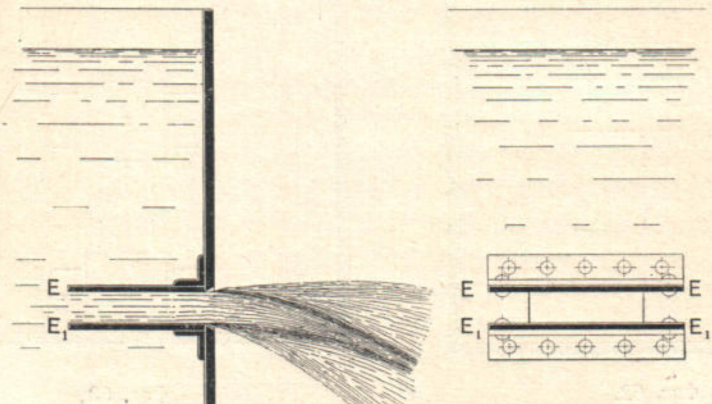
Фиг. 63.

Ко всѣмъ этимъ опытамъ Вейсбахъ вводитъ поправку на случай несовершеннаго сжатія (см. также § 14).

Во всѣхъ этихъ опытахъ высота нижней кромки отверстія надъ дномъ, а равно разстояніе вертикальныхъ кромокъ отъ боковыхъ стѣнокъ сосуда превышали длину соотвѣтствующаго ребра въ 2,7 и болѣе разъ, т.-е. размѣръ m былъ болѣе 2,7 e и размѣръ $n > 2{,}7\,b$ (фиг. 62). Какъ только этотъ предѣлъ съ какой-либо стороны не соблюденъ, замѣчается увеличеніе расхода. Это легко объясняется тѣмъ, что въ такомъ случаѣ сжатіе, хотя бы съ одной стороны, парализуется. Такъ, на фиг. 63 представлено дно сосуда съ четырьмя отверстіями: къ отверстію *a* вода притекаетъ со всѣхъ четырехъ сторонъ,—струя по всему периметру сжимается одинаково. Къ отверстію *b* вода можетъ притекать только съ 3-хъ сторонъ, а со стороны, прикасающейся къ стѣнкѣ сосуда, сжатіе устранено. Въ отверстіи *c* сжатія нѣтъ по двумъ сторонамъ, а въ *d* оно есть только съ одной стороны. Такіе случаи постановки отверстій около стѣнокъ или со струенаправляющими (не длинными) перегородками, какъ въ *d*, сопровождаются такъ называемымъ *неполнымъ сжатіемъ* *) (partielle contraction). То же замѣчается, если отверстіе сдѣлано у самаго дна. При этомъ всегда замѣчается при неполномъ сжатіи, во-первыхъ, отклоненіе струи около 9°) отъ нормали къ плоскости отверстія въ сторону того мѣста гдѣ сжатіе устранено (фиг. 64); во-вторыхъ, струя сильно растекается въ стороны, какъ это видно на фиг. 65, представляющей прямоугольное отверстіе, въ которомъ сжатіе устранено двумя внутренними перегородками EE и E_1E_1: вся струя, сжимаясь въ горизонтальномъ направленіи, сильно расширяется въ вертикальномъ. Если сжатіе устранить съ одной верхней стороны, то такое расширеніе струи будетъ меньше, но зато струя получитъ замѣтное отклоненіе кверху

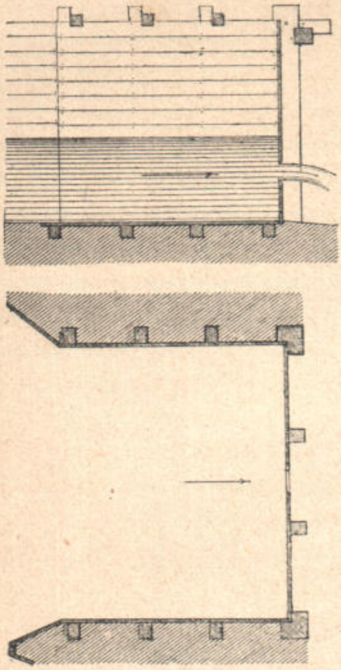


Фиг. 64.

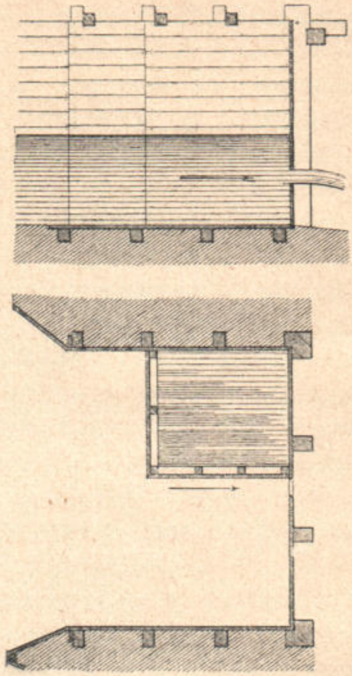


Фиг. 65.

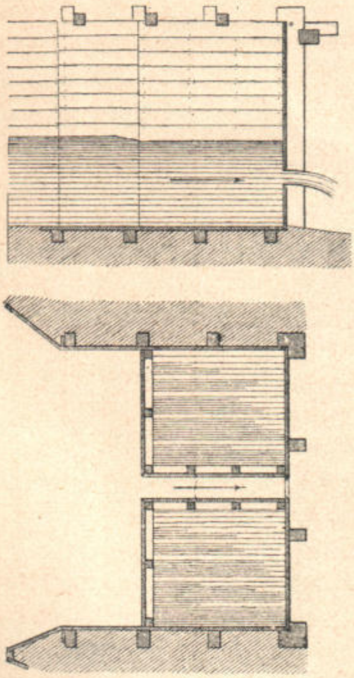
*) Не смѣшивать съ *несовершеннымъ сжатіемъ*.



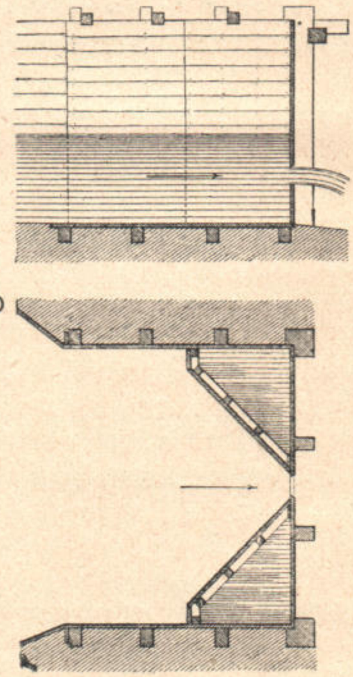
Фиг. A



Фиг. B

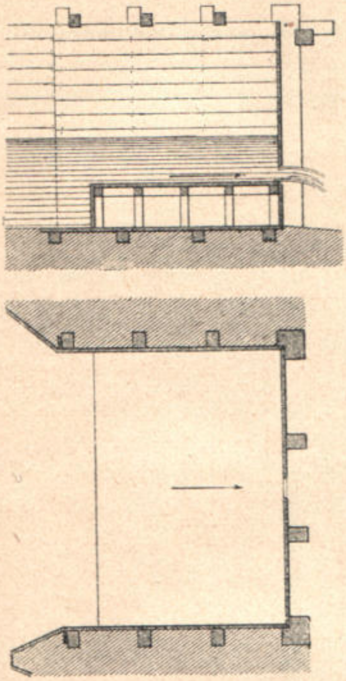


Фиг. C

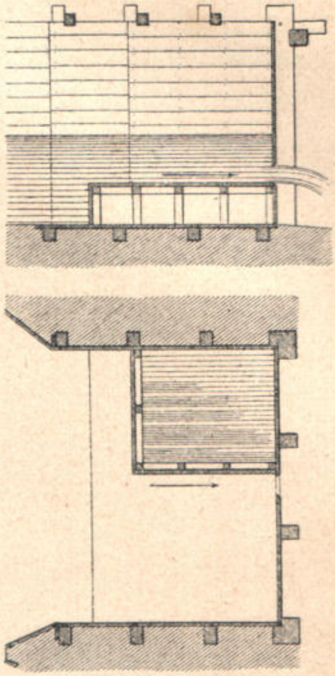


Фиг. D

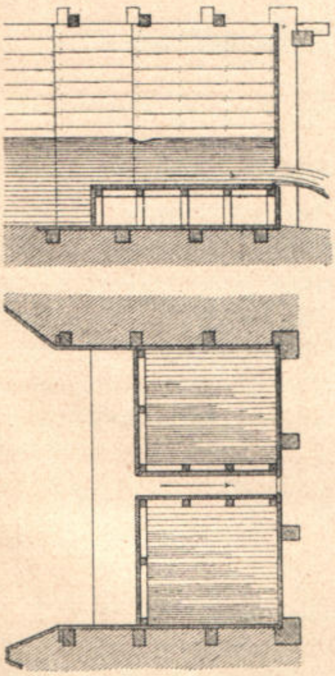
Таблица III.



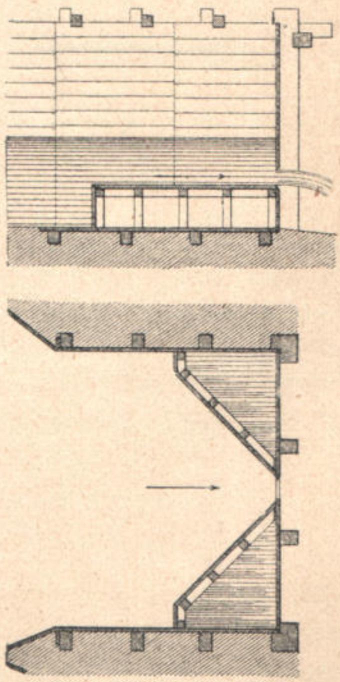
Фиг. E



Фиг. F



Фиг. G



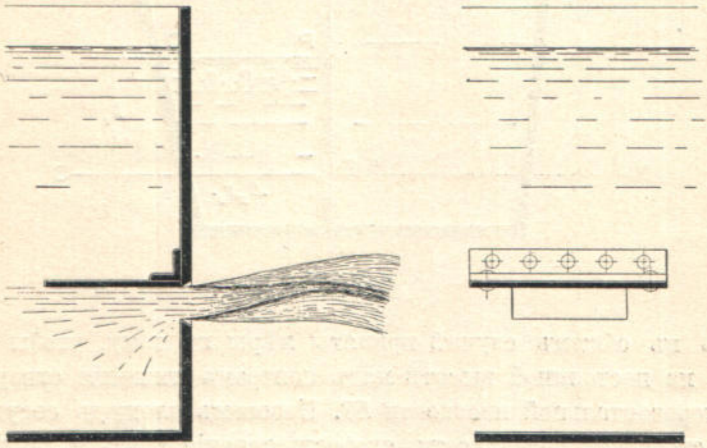
Фиг. H

(фиг. 66). При неполномъ сжатіи расходъ нѣсколько больше, чѣмъ при полномъ, но подобное растеканіе струи заставляетъ его избѣгать.

Изученіемъ этого явленія занимались Bidone, Michelotti, Lesbros и Weisbach. На основаніи данныхъ послѣдняго можно принять, что при прямоугольныхъ отверстіяхъ размѣромъ 0,2 *mtr* × 0,1 *mtr* и болѣе:

$$\mu_{\text{неполное}} = (1 + 0{,}157\, n)\,\mu,$$

гдѣ n есть отношеніе длины сторонъ, на которыхъ сжатіе устранено, къ полному периметру отверстія.



Фиг. 66.

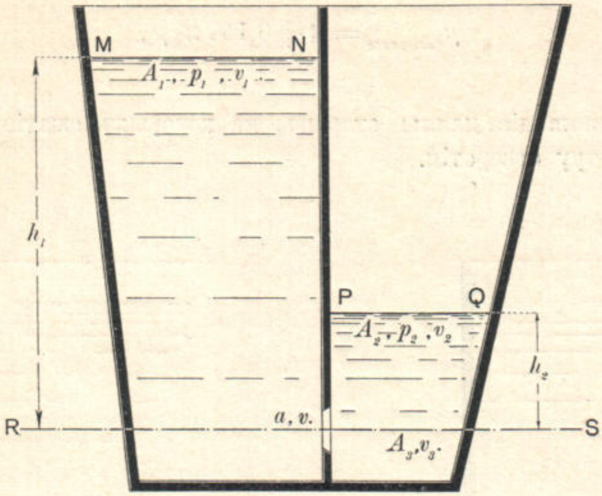
Lesbros наблюдалъ неполное сжатіе въ такихъ условіяхъ (см. табл. III): въ ***A*** сжатіе полное; въ такомъ же отверстіи ***B*** сжатіе устранено съ одной стороны вертикальной перегородкой; въ ***C*** такихъ перегородокъ двѣ; въ случаѣ ***D*** онѣ, оставаясь вертикальными, наклонены къ плоскости стѣнки подъ угломъ въ 45°. Далѣе тѣ же отверстія снабжены еще горизонтальной перегородкою (***E***, ***F***, ***G***, ***H***). Ширина отверстій вездѣ была равна 20 *cm*, а перегородки не доходили до кромки отверстія на 2 *cm*. По уменьшающейся величинѣ коэффиціента расхода μ всѣ случаи можно расположить въ такомъ порядкѣ:

$$\mu_{max},\ G,\ H,\ F,\ C,\ E,\ D,\ B,\ A,\ \mu_{min}.$$

Опыты Lesbros не вполнѣ сходятся съ вышеприведенной формулой Weisbach'а. Случай ***G*** часто встрѣчается въ практикѣ, когда, напримѣръ, шлюзовое отверстіе имѣетъ ширину подводящаго канала и доходитъ до его дна.

§ 13. Истеченіе подъ уровень.

Разсмотримъ теперь истеченіе подъ уровень безъ различія того обстоятельства, гдѣ сдѣлано отверстіе, въ днѣ или стѣнкѣ, и какого оно размѣра. Напримѣръ, пусть оно сдѣлано въ стѣнкѣ (фиг. 67).



Фиг. 67.

Пусть въ общемъ случаѣ приняты мѣры къ тому, чтобы оба уровня оставались на постоянной высотѣ надъ центромъ тяжести отверстія, лежащимъ въ горизонтальной плоскости ***RS***. Назовемъ площадь сосуда въ плоскости ***MN*** свободной поверхности, скорость теченія здѣсь и давленіе черезъ A_1, v_1, p_1; тѣ же величины для свободной поверхности ***PQ*** назовемъ соотвѣтственно черезъ A_2, v_2, p_2; сѣченіе отверстія и скорость въ немъ a и v; наконецъ, сѣченіе праваго сосуда въ плоскости ***RS***—черезъ A_3, а скорость въ немъ—черезъ v_3. Предусматривая заранѣе, что и здѣсь возможно сжатіе и уменьшеніе скорости, введемъ коэффиціентъ расхода μ, написавъ ур-іе неразрывности жидкости:

$$Q = A_1 v_1 = A_2 v_2 = A_3 v_3 = \mu a v.$$

Напишемъ уравненіе Д. Бернулли для движенія жидкости отъ уровня ***MN*** до уровня ***PQ***, принимая ***RS*** за плоскость сравненія и имѣя въ виду, что вытекающая изъ отверстія струя должна сразу двигаться далѣе со скоростью v_3, т.-е., вводя въ уравненіе потерю напора на ударъ при измѣненіи скорости изъ v въ v_3:

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + h_1 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + h_2 + \frac{(v - v_3)^2}{2g}.$$

Ни въ это ур-іе, ни въ ур-ія расхода не входитъ ни одна величина, опредѣляющая положеніе отверстія подъ тѣмъ или другимъ уровнемъ.

А поэтому можно утверждать, что ни это положенiе, ни относительная величина напора по сравненiю съ размѣрами отверстiя роли не играютъ.

Если допустимъ, что

$$p_1 = p_2 = \text{атмосферному давленiю } p,$$

если, далѣе, въ этомъ уравненiи всѣ скорости выразимъ по v, на основанiи уравненiя расхода, то получимъ:

$$h_1 - h_2 = \frac{v^2}{2g}\left[\left(1-\frac{\mu a}{A_3}\right)^2 + \left(\frac{\mu a}{A_2}\right)^2 - \left(\frac{\mu a}{A_1}\right)^2\right],$$

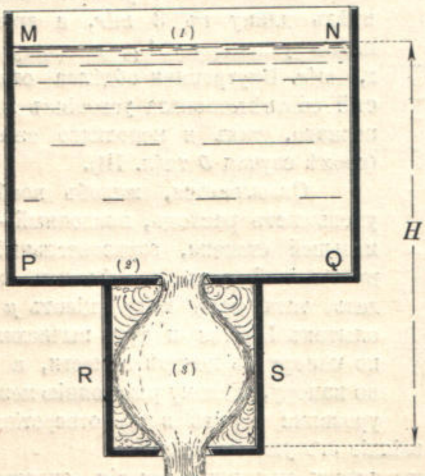
откуда

$$v = \sqrt{\frac{2g(h_1-h_2)}{\left(\frac{\mu a}{A_2}\right)^2 - \left(\frac{\mu a}{A_1}\right)^2 + \left(1-\frac{\mu a}{A_3}\right)^2}}.$$

Если сжатiе совершенно, т.-е., если всѣ отношенiя $\frac{a}{A_1}, \frac{a}{A_2}, \frac{a}{A_3}$, очень малы, то съ достаточной точностью можно написать:

$$\left.\begin{aligned} v &= \sqrt{2g(h_1-h_2)} \\ Q &= \mu a\sqrt{2g(h_1-h_2)} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (15)$$

По Вейсбаху коэффицiентъ μ въ этомъ случаѣ на $1^1/_3\%$ меньше, чѣмъ въ предыдущемъ случаѣ вытеканiя въ атмосферу, а по Hamilton Smith'у коэффицiентъ расхода при истеченiи подъ уровень меньше, нежели въ случаѣ истеченiя въ атмосферу, только при малыхъ напорахъ и малыхъ отверстiяхъ: при отверстiяхъ больше $0{,}3 \times 0{,}3$ *mtr*, а также при напорахъ свыше 3 *mtr*, разница уже ничтожна.



Фиг. 68.

Если сжатiе несовершенное (отношенiя $\frac{a}{A_1}, \frac{a}{A_2}$ и $\frac{a}{A_3}$ велики), то скорость и расходъ все-таки опредѣляются по уравненiю (15), но для μ здѣсь берутся разныя значенiя, смотря по степени несовершенства сжатiя, на основанiи таблицъ Вейсбаха. Какъ видно, *въ случаѣ истеченiя подъ уровень скорость зависитъ только отъ высоты $h_1 - h_2$ стоянiя одного уровня надъ другимъ*.

Подобно тому, какъ мы внесли потерю на ударъ въ этомъ случаѣ, необходимо вносить ее и во всѣхъ тѣхъ случаяхъ, гдѣ можно ожидать ее, т.-е. гдѣ существуетъ внезапное измѣненiе сѣченія. Подобный случай мы имѣемъ, напримѣръ, въ сосудѣ вида фиг. 68. Всѣ величины, относящіяся къ сѣченію **MN**, будемъ отмѣчать значками $(_1)$, къ сѣченію **PQ** — значками $(_2)$, къ сѣченію **RS** — значками $(_3)$, а для нижняго отверстія будемъ ставить буквы безъ значковъ. Коэффиціентъ расхода въ сѣченіи **PQ** назовемъ черезъ μ_2, а въ нижнемъ отверстіи—черезъ μ. Какъ уже сказано, изъ опытовъ Вейсбаха слѣдуетъ, что

$$\mu_2 = 0{,}986\,\mu.$$

Понятно, что уравненіе Д. Бернулли слѣдуетъ здѣсь написать такъ

$$\frac{v_1{}^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + H = \frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + \frac{(v_2 - v_3)^2}{2g},$$

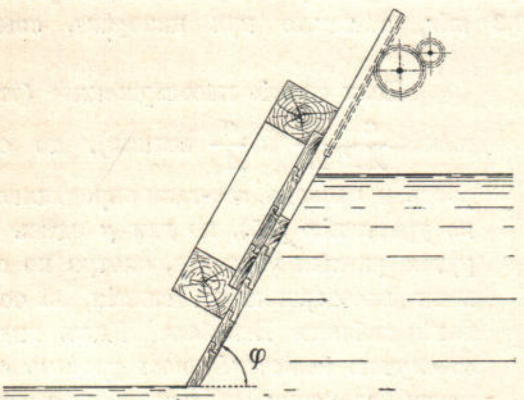
а уравненіе расхода:

$$Q = A_1 v_1 = \mu_2 A_2 v_2 = A_3 v_3 = \mu A v.$$

На основаніи обѣихъ строкъ получаемъ:

$$v = \sqrt{\frac{2g\left(H + \frac{p_1 - p}{\gamma}\right)}{1 - \left(\frac{\mu A}{A_1}\right)^2 + \mu^2 A^2 \left(\frac{1}{\mu_2 A_2} - \frac{1}{A_3}\right)^2}}.$$

Въ связи съ истеченіемъ подъ уровень стоитъ случай, когда къ отверстію приставляютъ желобъ, такъ что вытекающая струя падаетъ не свободно, а принуждена двигаться по желобу. Этотъ вопросъ освѣщенъ опытами того же Lesbros. Отверстія у него были шириною въ 0,2 *mtr* и высотою отъ 0,1 до 0,2 *mtr*. Ширина желоба была тоже 0,2 *mtr*, т.-е. была какъ разъ равна ширинѣ отверстія. Двѣ серіи его опытовъ отличались устройствомъ желоба: одинъ былъ горизонтальный и имѣлъ длину въ 3 *mtr*, а другой имѣлъ уклонъ въ $^1/_{10}$ и длину въ 2,5 *mtr*. Внутренняя обдѣлка отверстій соотвѣтствовала условіямъ какъ полнаго, такъ и неполнаго сжатія (кромѣ случая **D** табл. III).



Фиг. 69.

Оказывается, желобъ вообще уменьшаетъ расходъ, наклонный—въ меньшей степени, горизонтальный—въ большей (какъ и слѣдовало ожидать, такъ какъ коэффиціентъ μ въ опытахъ Lesbros и тутъ вычислялся по напору въ центрѣ тяжести, а не по напору, равному разстоянію между уровнями передъ и за отверстіемъ, какъ бы слѣдовало). При уклонѣ желоба въ $^1/_{23}$ вліяніе его уже незамѣтно.

Здѣсь умѣстно упомянуть еще, какъ характеристику неполнаго сжатія, стоящаго въ связи съ присутствіемъ желоба, о той формѣ шлюзовыхъ отверстій, которая очень распространена при подливныхъ водяныхъ колесахъ,—о наклонныхъ шлюзахъ (фиг. 69).

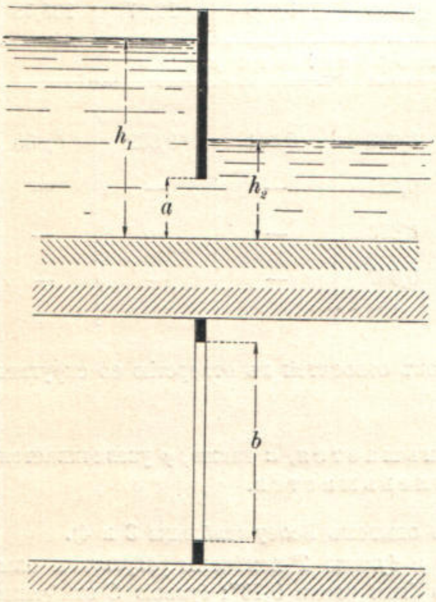
Они удобны не только для установки подъ ними колеса, но и даютъ большой расходъ. Poncelet ставилъ ихъ подъ своими колесами и нашелъ:

при $\varphi = 45^0$ . . . . $\mu = 0{,}80$,

„ $\varphi = 63^0\,20'$ . . . . $\mu = 0{,}74$.

Къ сожалѣнію, размѣры отверстій, для которыхъ онъ даетъ эти значенія μ, неизвѣстны.

При $\varphi = 90^0$, сжатіи съ 4-хъ сторонъ и горизонтальномъ желобѣ Lesbros нашелъ $\mu = 0{,}63$ при размѣрахъ $b = 0{,}2$ *mtr*, $e = 0{,}05$ *mtr*; эта величина значительно меньше данныхъ Poncelet и объясняется наклономъ стѣнки.



Фиг. 70.

Къ сожалѣнію, опыты Lesbros, распространявшіеся на довольно большіе напоры, касались только малыхъ отверстій (20×20 *cm*). Bornemann, наоборотъ, имѣлъ довольно большія отверстія (фиг. 70), но зато малые напоры. Именно, онъ сдѣлалъ 63 опыта (Civilingenieur, 1880—81), въ которыхъ:

h_1 измѣнялось отъ 0,049 *mtr* до 0,415 *mtr*,

h_2 „ „ 0,042 „ „ 0,264 „ ,

b было трехъ размѣровъ: 0,52, 0,78 и 1,0 *mtr*,

Q измѣнялось отъ 48 *lt* до 135 *lt*.

Онъ пишетъ:

$$Q = \mu a b \sqrt{2g(h_1 - h_2)}\,;$$

при этомъ μ можно вычислить при подобныхъ условіяхъ изъ формулы:

$$\mu = 0{,}43479 + 0{,}2566 \sqrt{\frac{a}{h_1 + \frac{a}{2}}} + 0{,}03121 \frac{1}{h_2 + \frac{a}{2}} \sqrt{\frac{1}{b}}\,.$$

§ 14. Результаты опытовъ надъ истеченіемъ изъ отверстій.

I. Малыя отверстія въ тонкой стѣнкѣ; напоръ по всей площади постояненъ.

a) *Отверстіе въ горизонтальномъ днѣ* (табл. 1).

Таблица 1. Опыты Bossut.

Напоръ 11′ 8″ 10‴ старой парижской системы *).

Діаметръ круга или сторона квадрата въ линіяхъ.	μ	α	$\varphi = \frac{\mu}{\alpha}$
Кругъ 12	0,6164	0,666	0,926
„ 24	0,6179	0,659	0,937
Квадратъ 12	0,6157	0,666	0,924
Среднія значенія:	0,616	$0{,}666 \left(= \frac{2}{3}\right)$	0,925

*) 1 старый парижскій футъ $= 12'' = 144''' = 0{,}324839$ *mtr* ~ 325 *mm*.

По Michelotti, при бо́льшихъ отверстіяхъ ($d = 6''$) $\mu = 0{,}618$, а при $d = 3''$ коэффиціентъ $\mu = 0{,}611$; при малыхъ напорахъ μ увеличивается соотвѣтственно до 0,619 и до 0,612, т.-е. весьма мало.

b) *Отверстіе въ стѣнкѣ сосуда* (см. табл. 2).

Таблица 2 (составлена по Вейсбаху).

Діаметры круглыхъ отверстій въ *mm*	При напорахъ въ *mtr*:						
	0,02	0,101	0,250	0,600	0,909	13,57	103,58
	получены коэффиціенты μ:						
10	0,711	0,665	0,637	0,628	0,641	0,632	0,600
20	—	—	0,629	0,621	—	—	—
30	—	—	0,622	0,614	—	—	—
40	—	—	0,614	0,607	—	—	—

Значенія 1, 2, 4, 5 и 7 вертикальныхъ строкъ относятся къ отверстію со скругленными кромками.

Въ среднемъ $\mu = 0{,}62$; $\varphi = 0{,}97$; $\alpha = 0{,}64$.

С ъ у в е л и ч е н і е м ъ н а п о р а μ у м е н ь ш а е т с я, α также, φ увеличивается.

С ъ у в е л и ч е н і е м ъ о т в е р с т і я μ у м е н ь ш а е т с я.

c) *Отверстія въ боковой стѣнкѣ* по опытамъ Bovey (таблицы 3 и 4).

Въ этихъ двухъ таблицахъ коэффиціентовъ μ буквою T помѣчены результаты опытовъ надъ отверстіемъ, толщина стѣнки котораго была равна $0{,}16''$; буквою S отмѣчены, наоборотъ, случаи т о н к о й стѣнки съ о с т р ы м и кромками.

Таблица 3.

Площадь каждаго изъ отверстій $= 0{,}197$ кв. дм.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Напоръ въ футахъ.	Круглое.		Квадратное съ вертикальными:			Прямоугольное				
			сторонами.		діагоналями.	$h = 2b$		$h = \frac{b}{2}$	$h = 4b$	$h = \frac{1}{4}b$
	T	S	S	T	S	T	S	S	S	S
1	0,624	0,618	0,623	0,628	0,623	0,635	0,640	0,641	0,658	0,659
2	0,616	0,611	0,613	0,621	0,619	0,626	0,633	0,632	0,646	0,646
4	0,610	0,607	0,606	0,617	0,614	0,619	0,629	0,629	0,637	0,637
10	0,606	0,604	0,602	0,610	0,611	0,612	0,624	0,623	0,630	0,629
20	0,604	0,601	0,600	0,610	0,609	0,602	0,620	0,620	0,622	0,622

Таблица 4.

Площадь каждаго изъ отверстій $=0{,}0625$ кв. дм.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
Напоръ въ футахъ.	Круглое		Квадратное съ верт. стор.		Прямоугольное. $h=2b$		Прямоугольное. $h=4b$	
	T	S	T	S	T	S	T	S
1	0,678	0,620	0,643	0,627	0,662	0,640	0,688	0,671
2	0,618	0,613	0,631	0,621	0,643	0,629	0,655	0,657
4	0,610	0,605	0,620	0,615	0,631	0,620	0,642	0,643
10	0,604	0,600	0,613	0,608	0,621	0,613	0,629	0,629
20	0,601	0,597	0,607	0,604	0,618	0,608	0,621	0,622

Отсюда слѣдуетъ:

1) Съ увеличеніемъ напора расходъ уменьшается; при малыхъ напорахъ это замѣчается рѣзче.

2) Въ толстой (T) стѣнкѣ расходъ нѣсколько больше, чѣмъ въ тонкой (S), что опять таки рѣзче видно при малыхъ напорахъ; при очень малыхъ напорахъ и очень узкомъ отверстіи (первыя цифры столбцовъ 8 и 9 таблицы 4) наблюдается даже обратное.

3) Изъ сравненія графъ 8 и 9, 10 и 11 таблицы 3 видимъ, что расходъ не зависитъ отъ расположенія прямоугольнаго отверстія, т.-е. большій или меньшій размѣръ играетъ роль высоты h сѣченія.

4) Съ увеличеніемъ отверстія при большихъ напорахъ расходъ увеличивается, при малыхъ и среднихъ напорахъ уменьшается,—результатъ, согласный съ опытами Вейсбаха.

5) Чѣмъ щелеобразнѣе отверстіе при той же площади, тѣмъ больше расходъ.

d) *Несовершенное сжатіе* имѣетъ мѣсто, когда передъ отверстіемъ съ площадью A имѣетъ мѣсто замѣтная скорость, т.-е. когда площадь A_0 сосуда передъ отверстіемъ не очень велика. Если отношеніе $\frac{A}{A_0}=n$, то коэффиціентъ расхода μ_n по коэф-ту μ_0 (совершенное сжатіе) выражается Вейсбахомъ такъ:

для круглыхъ отверстій:

$$\mu_n=\mu_0\left\{1+0{,}04564\,(14{,}821^n-1)\right\}=\mu_0\,(1+l),$$

для прямоугольныхъ:

$$\mu_n=\mu_0\left\{1+0{,}076\,(9^n-1)\right\}=\mu_0\,(1+l_1).$$

Значенія μ_0 надо брать по вышеприведеннымъ даннымъ, напр., по табл. 2; значенія же l и l_1 подсчитаны для разныхъ n въ слѣдующей таблицѣ (5):

Таблица 5.

n	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00
l	0,007	0,014	0,023	0,034	0,045	0,059	0,075	0,092	0,112	0,134	0,161	0,189	0,260	0,351	0,471	0,631
l_1	0,009	0,019	0,030	0,042	0,056	0,071	0,088	0,107	0,128	0,152	0,178	0,208	0,278	0,365	0,473	0,608

Эти формулы (а слѣдовательно, и таблица) справедливы для сосуда вида фиг. 57, т.-е. когда отверстіе концентрично съ плоской стѣнкой площадью A_0, надъ которой возвышаются призматически остальныя стѣнки сосуда безъ всякихъ рѣзкихъ измѣненій сѣченія. Для случая фиг. 56 Вейсбахъ нашелъ, что истинный коэффиціентъ μ_n можно опредѣлять по коэффиціенту μ_0 при совершенномъ сжатіи такъ:

$$\mu_n = \mu_0 (1 + 0{,}102n + 0{,}067n^2 + 0{,}046n^3) = \mu_0 (1 + l_2).$$

Здѣсь n имѣетъ то же значеніе, что и выше. По этой формулѣ подсчитанъ рядъ значеній l_2 при разныхъ n (см. табл. 6):

Таблица 6.

n	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,00
l_2	0,013	0,027	0,043	0,060	0,080	0,102	0,127	0,152	0,181	0,227

Меньшее, чѣмъ въ предыдущемъ случаѣ, увеличеніе коэф-та расхода объясняется тѣмъ, что при входѣ въ трубку ***MN*** имѣетъ мѣсто сжатіе.

e) *Неполное сжатіе.*

Когда сжатіе устранено по длинѣ n периметра отверстія, а этотъ послѣдній имѣетъ длину p, то, по Бидону, коэф-тъ расхода будетъ

$$\text{для прямоугольныхъ отверстій} \ldots\ldots \mu_n = \mu_0 \left(1 + 0{,}152 \frac{n}{p}\right),$$

$$\text{для круглыхъ отверстій} \ldots\ldots\ldots\ldots \mu_n = \mu_0 \left(1 + 0{,}128 \frac{n}{p}\right);$$

μ_0 есть коэффиціентъ расхода для даннаго случая при полномъ сжатіи $\left(\frac{n}{p} = 0\right)$. Эти выраженія тѣмъ точнѣе, чѣмъ меньше $\frac{n}{p}$. По Вейсбаху, въ случаѣ прямоугольныхъ большихъ отверстій нужно брать:

$$\mu_n = \mu_0 \left(1 + 0{,}157 \frac{n}{p}\right).$$

II. Большія отверстія.

а) Коэффиціенты расходовъ μ, въ *квадратныхъ* отверстіяхъ въ вертикальной тонкой стѣнкѣ, по Hamilton Smith'у („Hydraulics", New-York, 1886, p. 58), приведены въ таблицѣ 7.

Таблица 7 *).

Напоръ въ центрѣ отверстія въ *mtr*.	При сторонѣ квадрата въ *mtr*.					
	0,0061	0,0152	0,0304	0,061	0,182	0,304
0,122	—	0,637	0,621	—	—	—
0,152	—	0,633	0,619	0,605	0,597	—
0,182	0,660	0,630	0,617	0,605	0,598	—
0,213	0,656	0,628	0,616	0,605	0,599	0,596
0,243	0,652	0,625	0,615	0,605	0,600	0,597
0,274	0,650	0,623	0,614	0,605	0,601	0,598
0,304	0,648	0,622	0,613	0,605	0,601	0,599
0,426	0,642	0,618	0,610	0,605	0,602	0,601
0,608	0,637	0,615	0,608	0,605	**0,604**	0,602
0,912	0,632	0,612	0,607	0,605	**0,604**	**0,603**
1,216	0,628	0,610	0,606	0,605	0,603	0,602
1,824	0,623	0,609	0,605	0,604	0,603	0,602
2,432	0,619	0,608	0,605	0,604	0,603	0,602
3,040	0,616	0,606	0,604	0,603	0,602	0,601
6,080	0,606	0,603	0,602	0,602	0,601	0,600
30,400	0,599	0,598	0,598	0,598	0,598	0,598

Эта таблица подтверждаетъ первыми четырьмя столбцами предыдущіе выводы объ измѣненіи коэффиціента расхода съ напоромъ и величиною отверстія, пока оно мало. При бо́льшихъ отверстіяхъ съ увеличеніемъ напора расходъ сначала увеличивается, а потомъ уменьшается. При очень большихъ напорахъ ($\backsim$30 *mtr*) коэф-тъ расхода, повидимому, не зависитъ отъ величины отверстія и приближается къ постоянной величинѣ $\backsim$ 0,598.

*) При пересчетѣ таблицы Смита было принято, что 1' = 0,304 *mtr*. Въ этой и послѣдующихъ таблицахъ жирнымъ шрифтомъ отмѣчены наибольшія значенія коэффиціента расхода.

b) Коэффиціенты расхода черезъ *круглыя* отверстія въ вертикальной тонкой стѣнкѣ (по Hamilton Smith'y, „Hydraulics", стр. 59) (см. табл. 8):

Таблица 8 *).

Напоръ въ центрѣ отверстія въ *mtr.*	При діаметрахъ въ *mtr.*					
	0,0061	0,0152	0,0304	0,0608	0,182	0,304
0,122	—	0,631	0,618	—	—	—
0,152	—	0,627	0,615	0,600	0,592	—
0,182	0,655	0,624	0,613	0,601	0,593	—
0,213	0,651	0,622	0,611	**0,601**	0,594	0,590
0,243	0,648	0,620	0,610	**0,601**	0,594	0,591
0,274	0,646	0,618	0,609	0,601	0,595	0,591
0,304	0,644	0,617	0,608	0,600	0,595	0,591
0,426	0,638	0,613	0,605	0,600	0,596	0,593
0,608	0,632	0,610	0,604	0,599	0,597	0,595
0,912	0,627	0,606	0,603	0,599	**0,598**	**0,597**
1,216	0,623	0,605	0,602	0,599	0,597	0,596
1,824	0,618	0,604	0,600	0,598	0,597	0,596
2,432	0,614	0,603	0,600	0,598	0,596	0,596
3,040	0,611	0,601	0,598	0,597	0,596	0,595
6,080	0,601	0,598	0,596	0,596	0,596	0,594
30,400	0,593	0,592	0,592	0,592	0,592	0,592

Въ этомъ случаѣ коэффиціенты всѣ нѣсколько ниже, чѣмъ для квадратныхъ отверстій, что хорошо согласуется съ вышеприведенными опытами Bovey (таблицы 3 и 4). Замѣчанія, сдѣланныя по поводу таблицы 2, остаются въ силѣ и здѣсь. При очень большихъ напорахъ для круглыхъ отверстій $\mu \backsim 0,591$.

c) Коэффиціенты расхода черезъ *прямоугольныя* отверстія (b — горизонтальный, h — вертикальный размѣры отверстія) въ тонкой вертикальной стѣнкѣ (по опытамъ Poncelet и Lesbros) (см. табл. 9); звѣздочкой отмѣчены здѣсь числа, начиная съ которыхъ значенія μ получены экстраполированіемъ.

*) При пересчетѣ было принято, что $1' = 0,304$ *mtr.*

Таблица 9.

Напоръ H_1 измѣрялся на нѣкоторомъ разстояніи отъ отверстія, гдѣ можно было принять свободную поверхность за горизонтальную плоскость.

Напоръ H_1 въ *mtr* надъ верхнимъ ребромъ отверстія.	Размѣръ $b = 0{,}200$ *mtr*.						Разм. b=0,6 *mtr*.	
	Размѣръ h въ *mtr*.						Разм. h въ *mtr*.	
	0,01	0,02	0,03	0,05	0,10	0,20	0,02	0,20
0,010	0,701	0,660	0,630	0,607	—	—	0,644	—
0,015	0,697	0,660	0,632	0,612	0,593	—	0,644	—
0,02	0,694	0,659	0,634	0,615	0,596	0,572	0,643	—
0,03	0,688	0,659	0,638	0,620	0,600	0,578	0,642	0,593
0,04	0,683	0,658	0,640	0,623	0,603	0,582	0,642	0,595
0,05	0,679	0,658	**0,640**	0,625	0,605	0,585	0,641	0,597
0,06	0,676	0,657	0,640	0,627	0,607	0,587	0,641	0,599
0,07	0,673	0,656	0,639	0,628	0,609	0,588	0,640	0,600
0,08	0,670	0,656	0,638	0,629	0,610	0,589	0,640	0,601
0,09	0,668	0,655	0,637	0,629	0,610	0,591	0,639	0,601
0,10	0,666	0,654	0,637	0,630	0,611	0,592	0,639	0,602
0,12	0,663	0,653	0,636	0,630	0,612	0,593	0,638	0,603
0,14	0,660	0,651	0,635	0,630	0,613	0,595	0,637	0,603
0,16	0,658	0,650	0,634	**0,631**	0,614	0,596	0,637	0,604
0,18	0,657	0,649	0,634	0,630	0,615	0,597	0,636	0,605
0,20	0,655	0,648	0,633	0,630	0,615	0,598	0,635	0,605
0,25	0,653	0,646	0,632	0,630	0,616	0,599	0,634	0,606
0,3	0,650	0,644	0,632	0,629	0,616	0,600	0,633	0,607
0,4	0,647	0,642	0,631	0,628	0,617	0,602	0,631	0,607
0,5	0,644	0,640	0,630	0,628	**0,617**	0,603	0,630	**0,607**
0,6	0,642	0,638	0,630	0,627	0,617	0,604	0,629	0,607
0,7	0,640	0,637	0,629	0,627	0,616	0,604	0,628	0,607
0,8	0,637	0,636	0,629	0,627	0,616	0,605	0,628	0,606
0,9	0,635	0,634	0,628	0,626	0,615	**0,605**	0,627	0,606
1,0	0,632	0,633	0,628	0,626	0,615	0,605	0,626	0,605
1,1	0,629	0,631	0,627	0,625	0,614	0,604	0,626	0,604
1,2	0,626	0,628	0,626	0,624	0,614	0,604	0,625	0,604
1,3	0,622	0,625	0,624	0,622	0,613	0,603	0,624	0,603
1,4	0,618	0,622	0,622	0,621	0,612	0,603	0,624	0,603
1,5	0,615*	0,619*	0,620*	0,620	0,611	0,602	0,623	0,602
1,6	0,613	0,617	0,618	0,618	0,611	0,602	0,623	0,602
1,7	0,612	0,615	0,616	0,617	0,610*	0,602*	0,622	0,602*
1,8	0,612	0,614	0,615	0,615*	0,609	0,601	0,621*	0,602
1,9	0,611	0,612	0,613	0,614	0,608	0,601	0,621	0,602
2,0	0,611	0,612	0,612	0,613	0,607	0,601	0,620	0,602
3,0	0,609	0,610	0,608	0,606	0,603	0,601	0,615	0,601

Изъ этой таблицы слѣдуетъ:

1) Для малыхъ отверстій, при чемъ главную роль играетъ наименьшій размѣръ сѣченія, съ увеличеніемъ напора расходъ убываетъ.

2) Для отверстій съ наименьшимъ размѣромъ $h > 30$ *mm* коэффиціентъ расхода сначала возрастаетъ, а потомъ убываетъ вмѣстѣ съ увеличеніемъ напора, съ замѣтнымъ стремленіемъ къ числамъ, даннымъ Smith'омъ для квадратныхъ отверстій.

3) Вообще, бо́льшей площади отверстія соотвѣтствуетъ меньшій коэффиціентъ расхода.

4) Чѣмъ больше ширина отверстія, тѣмъ менѣе вліяетъ напоръ на величину коэффиціента расхода.

Опредѣленный только въ нѣкоторыхъ случаяхъ коэффиціентъ скорости φ и здѣсь сохраняетъ приблизительно свою величину: $\varphi = 0{,}98$.

d) *Несовершенное сжатіе.*

Вообще остаются въ силѣ поправки Вейсбаха, приведенныя въ п. I, d этого §. Въ частности для отверстій Poncelet, поставленныхъ въ водопроводномъ ларѣ, Weisbach даетъ еще слѣдующее выраженіе коэф-та расхода, когда отношеніе n площади отверстія A къ площади сѣченія ларя A_0 $\left(\frac{A}{A_0} = n\right)$ не превосходитъ 0,5:

$$\mu_n = \mu_0 (1 + 0{,}641 n^2) = \beta \mu_0 ,$$

гдѣ μ_0 есть коэф-тъ изъ опытовъ Poncelet и Lesbros.

Таблица 10 даетъ величины коэффиціента β для разныхъ n:

Таблица 10.

n	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
β	1,002	1,006	1,014	1,026	1,040	1,058	1,079	1,103	1,130	1,160

e) *Неполное сжатіе.*

Lesbros производилъ опыты съ истеченіемъ въ воздухъ изъ квадратнаго отверстія 20 *cm* $\times$ 20 *cm*, при чемъ передъ отверстіемъ устанавливались перегородки по типамъ фигуръ таблицы II отъ ***A*** до ***H***. Результаты опытовъ приведены ниже, въ табл. 11:

Таблица 11.

Значенія μ въ формулѣ $Q = \mu b e \sqrt{2g\left(H_1 + \frac{e}{2}\right)}$; напоръ измѣрялся, какъ въ таблицѣ 9.

Отверстія устроены по типамъ таблицы III. Размѣръ $e = 0{,}2$ *mtr*.

Напоръ H_1 въ верхн. кромкѣ отверстія въ *mtr*.	***A***	***B***	***C***	***D***	***E***	***F***	***G***	***H***
0,02	0,572	0,587	—	0,589	0,599	—	—	—
0,05	0,585	0,593	0,631	0,595	0,608	0,622	—	0,636
0,10	0,592	0,600	0,631	0,601	0,615	0,628	—	0,639
0,20	0,598	0,606	**0,632**	0,607	0,621	0,633	**0,708**	0,643
0,50	0,603	0,610	0,631	0,611	0,623	0,636	0,680	**0,644**
1,00	**0,605**	**0,611**	0,628	**0,612**	**0,624**	**0,637**	0,667	0,642
1,50	0,602	0,611	0,627	0,611	0,624	0,637	0,672	0,641
2,00	0,601	0,610	0,626	0,611	0,619	0,636	0,668	0,640
3,00	0,601	0,609	0,624	0,610	0,614	0,634	0,665	0,638

Таблица 11 даетъ нѣсколько меньшіе коэффиціенты расхода, нежели формула Вейсбаха, приведенная выше (см. I, е):

$$\mu_n = \mu_0 \left(1 + 0{,}157 \frac{n}{p}\right).$$

Слѣдующая таблица (см. табл. 12) даетъ, по Lesbros, понятіе о вліяніи частичнаго затопленія отверстія вслѣдствіе приставленнаго къ нему желоба; поперечные размѣры желоба равны размѣрамъ отверстія (20 *cm* × 20 *cm*); длина его = 3 *mtr*; положенъ онъ горизонтально (отмѣченныя звѣздочкой колонны относятся къ наклонному желобу длиною въ $2^1/_2$ *mtr* при уклонѣ $^1/_{10}$).

Таблица 12.

Коэф-ты μ въ формулѣ $Q = \mu b e \sqrt{2g\left(H_1 + \frac{e}{2}\right)}$ при отверстіяхъ, устроенныхъ по табл. III; размѣръ e былъ равенъ 0,2 *mtr*.

Напоръ H_1 въ верхней кромкѣ отверстія въ *mtr*.	*A*	*B*	*C*	*E*	*E**	*F*	*F**	*G*	*G**	*H*
0,02	0,480	0,489	0,496	0,480	0,527	—	—	—	—	0,488
0,05	0,511	0,517	0,531	0,510	0,553	0,509	0,546	0,528	—	0,520
0,10	0,542	0,545	0,563	0,538	0,574	0,534	0,569	0,560	0,593	0,552
0,20	0,574	0,576	0,591	0,566	0,592	0,562	0,589	0,589	0,617	0,582
0,50	0,599	0,602	0,621	0,592	0,607	0,591	0,608	0,591	0,632	0,613
1,00	0,601	0,609	**0,628**	0,600	0,610	0,601	0,615	0,601	0,638	0,623
1,50	0,601	0,610	0,627	0,602	**0,610**	0,604	0,617	0,604	0,641	**0,624**
2,00	**0,601**	**0,610**	0,626	**0,602**	0,609	**0,604**	**0,617**	**0,604**	**0,642**	0,624
3,00	0,601	0,609	0,624	0,601	0,608	0,602	0,616	0,602	0,641	0,622

Вліяніе желоба при большихъ напорахъ почти не чувствительно, кромѣ случаевъ ***E***, ***F***, ***G*** и ***H***; наклонный желобъ уменьшаетъ коэффиціентъ расхода въ меньшей степени, нежели горизонтальный.

Lesbros бралъ нѣсколько типовъ наклонныхъ желобовъ, при отверстіяхъ 200 *mm* × × 200 *mm*, устроенныхъ по типу ***G***, и нашелъ, что соотвѣтствующій коэффиціентъ расхода μ' получается по коэффиціенту μ изъ таблицы 11, если положить

$$\mu' = \frac{\mu}{1 + \delta}.$$

Значенія δ для разныхъ напоровъ приведены въ таблицѣ 13.

Таблица 13.

Желобъ.		При напорѣ H_1 въ *mtr* въ верхней кромкѣ отверстія.	Значенія δ
Длина въ *mtr*.	Наклонъ къ гориз.		
3	$^1/_{20}$	0,11 1,00	0,214 0,054
3	$^1/_{15}$	0,11	0,207
1,24	$^1/_{5,24}$	0,11 1,52	0,116 0,006
0,74	$^1/_{2,9}$	0,11 1,17	0,057 0,000
0,15	$^1/_{2,9}$	0,11	0,000
2,25	гориз.	0,11	0,134

Вліяніе толщины стѣнки, напора и неполноты сжатія можно видѣть изъ приводимой ниже таблицы 14 опытовъ Graeff'a, произведенныхъ имъ на притокѣ Луары Furens: напоры измѣнялись до 40 *mtr*; отверстія были или чистыя (истеченіе въ воздухъ) или въ короткій желобъ. Въ томъ и другомъ случаѣ:

подъ ***A*** разумѣется отверстіе въ тонкой стѣнкѣ;
„ ***B*** — отверстіе безъ сжатія на вертикальныхъ сторонахъ (ширина отверстія равна ширинѣ подводящаго канала); нижняя и верхняя кромки тонкія;
„ ***C*** — безъ сжатія внизу (отверстіе доходитъ до дна); прочія три кромки тонкія.
„ ***D*** — только верхняя кромка тонкая; отверстіе доходитъ до дна канала и имѣетъ его ширину;
„ ***E*** — отверстіе въ стѣнкѣ толщиною въ 40—50 *mm*, съ сжатіемъ со всѣхъ сторонъ.
„ ***F*** — отверстіе, подобное ***C***, но въ толстой стѣнкѣ;
„ ***G*** — отверстіе, подобное ***D***, но въ толстой стѣнкѣ.

Результаты опытовъ разбиты на 2 главныя группы: къ одной отнесены отверстія съ малой высотой e, къ другой—съ большей. Напоры H_1 измѣрялись надъ верхней кромкой отверстія (не въ центрѣ тяжести).

Таблица 14

коэффиціентовъ расхода μ въ формулѣ $Q = \mu b e \sqrt{2g\left(H_1 + \frac{e}{2}\right)}$.

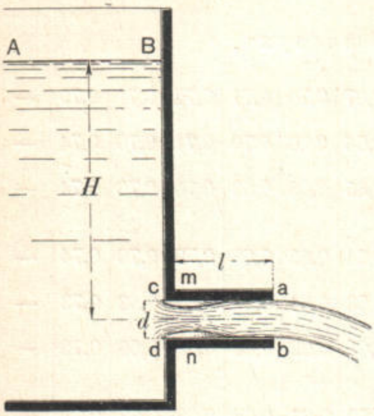
Значенія $\frac{H_1}{e}$ \ Типъ устройства отверстія.	2 Большія отверстія ($e > 30$ mm)							Малыя отверстія ($e < 30$ mm)						
	A	B	C	D	E	F	G	A	B	C	D	E	F	G
	1. Истеченіе въ воздухъ.													
1	0,61	0,65	0,67	0,70	0,65	0,68	—	0,67	0,70	0,71	0,72	0,71	0,75	—
5	0,62	0,64	0,67	0,69	0,67	0,70	—	0,66	0,66	0,70	0,71	0,70	0,74	—
10	**0,62**	0,63	0,67	0,69	**0,68**	**0,71**	—	0,65	0,65	0,69	0,70	0,70	0,74	—
20	0,61	0,63	0,66	0,68	0,68	0,71	—	0,64	0,65	0,69	0,70	0,70	0,74	—
40	0,61	0,62	0,66	0,68	0,68	0,70	—	0,63	0,64	0,69	0,69	0,69	0,73	—
100	0,60	0,60	0,66	0,68	0,66	0,69	—	0,61	0,63	0,68	0,68	0,69	0,72	—
400	0,60	0,60	0,65	0,67	0,66	0,68	—	0,60	0,63	0,68	0,68	0,68	0,71	—
1000 и выше.	0,60	0,60	0,65	0,67	0,66	0,68	—	0,60	0,62	0,67	0,67	0,68	0,71	—
	2. Истеченіе въ короткій желобъ.													
1	0,57	0,64	0,60	0,60	0,62	0,65	—	0,65	0,67	0,67	0,69	0,68	0,70	—
5	0,61	0,64	0,62	0,64	0,63	0,66	—	0,64	0,66	0,67	0,68	0,67	0,71	—
10	0,61	0,63	0,63	0,65	0,64	0,67	—	0,64	0,65	0,67	0,68	0,67	**0,71**	—
20	**0,61**	0,63	**0,63**	**0,65**	**0,65**	**0,67**	—	0,63	0,64	0,66	0,68	0,67	0,70	—
40	0,61	0,62	0,63	0,65	0,64	0,66	—	0,62	0,63	0,66	0,67	0,66	0,70	—
100	0,60	0,60	0,62	0,64	0,63	0,65	0,84	0,61	0,62	0,65	0,67	0,66	0,69	0,86
400	0,60	0,60	0,62	0,63	0,63	0,64	0,81	0,60	0,61	0,65	0,66	0,65	0,68	0,84
1000 и выше.	0,60	0,60	0,62	0,63	0,63	0,64	0,80	0,60	0,61	0,64	0,66	0,65	0,67	0,81

Какъ видно изъ таблицы, результаты Graeff'а не вполнѣ сходны съ данными Lesbros; общее же положеніе, — уменьшеніе коэффиціента μ съ увеличеніемъ напора и увеличеніемъ отверстія, — видно отчетливо. При очень большихъ напорахъ и большихъ отверстіяхъ, почти во всѣхъ случаяхъ, коэффиціентъ расхода μ стремится къ постоянному значенію, близкому къ тому, которое даютъ Smith, Lesbros и другіе, т.-е. около 0,6.

§ 15. Истеченіе черезъ отверстія съ насадками.

До сихъ поръ мы разсматривали истеченіе жидкости черезъ отверстія въ тонкой стѣнкѣ. Теперь разсмотримъ случаи отверстій въ толстой стѣнкѣ. Разница между этими двумя случаями выступаетъ наиболѣе отчетливо въ случаяхъ отверстій съ насадками,—короткими придатками, коническими и цилиндрическими, плотно приставленными къ отверстію. Разсмотримъ слѣдующіе типы насадковъ:

1) *Насадокъ Вентури*,—короткій внѣшній цилиндрическій насадокъ (фиг. 71). На основаніи опытовъ Venturi, Eytelwein'a, Weisbach'a и др. оказывается, что при такомъ насадкѣ *сжатія нѣтъ* ($\alpha = 1$); зато, если изъ отверстія въ тонкой стѣнкѣ струя выходитъ прозрачная, какъ кристаллъ, то здѣсь она выходитъ сравнительно мутной, что показываетъ, что отдѣльныя струйки ея идутъ по совершенно неодинаковымъ траекторіямъ и что правильность ихъ движенія нарушена здѣсь какими-то посторонними причинами, дѣйствующими въ насадкѣ. При одинаковыхъ условіяхъ струя изъ насадка летитъ не такъ далеко, какъ изъ отверстія безъ насадка. Коэффиціентъ расхода μ оказывается равнымъ 0,82 (въ тонкой стѣнкѣ $\mu = 0{,}62$). Описанныя явленія наблюдаются



Фиг. 71.

при условіи, что длина l насадка не больше трехъ, но и не меньше двухъ діаметровъ отверстія. Если сѣченіе отверстія есть f, а напоръ въ центрѣ тяжести H, то для расхода черезъ насадокъ имѣемъ формулу:

$$Q = 0{,}82 f \sqrt{2gH}.$$

При тѣхъ же условіяхъ черезъ отверстіе въ тонкой стѣнкѣ выливается количество воды:

$$Q_1 = 0{,}62 f \sqrt{2gH}.$$

Слѣдовательно,

$$Q : Q_1 = 0{,}82 : 0{,}62 \backsim 1{,}3,$$

т.-е. *насадокъ увеличиваетъ расходъ почти на 30 %*.

Такъ какъ при этомъ насадкѣ

$$\alpha = 1,$$

то

$$\varphi = \mu = 0{,}82,$$

а скорость v истеченія черезъ насадокъ:

$$v = 0{,}82 \sqrt{2gH};$$

при отверстіи же въ тонкой стѣнкѣ скорость v_1 есть

$$v_1 = 0{,}975\sqrt{2gH}.$$

Вычисляя напоръ, соотвѣтствующій скорости v, получаемъ:

$$h_v = \frac{v^2}{2g} = 0{,}82^2 H \backsim \frac{2}{3} H,$$

т.-е. цѣлая треть напора истрачена на преодолѣніе сопротивленія при прохожденіи черезъ насадокъ.

При тонкой же стѣнкѣ напоръ h_{v_1} опредѣляется величиной

$$h_{v_1} = \frac{v_1^{\,2}}{2g} = 0{,}975^2 H = 0{,}951 H,$$

т.-е. на сопротивленіе потрачено только 5% напора. Слѣдовательно, потеря напора при насадкѣ больше, чѣмъ при тонкой стѣнкѣ, въ

$$\frac{0{,}33}{0{,}05} = \mathbf{6{,}6} \text{ разъ}.$$

Сообразно съ этимъ коэффиціентъ сопротивленія при протеканіи черезъ насадокъ опредѣлится черезъ:

$$\zeta = \frac{1}{\varphi^2} - 1 = 0{,}486 \backsim \mathbf{0{,}5}\,,$$

тогда какъ въ тонкой стѣнкѣ онъ примѣрно въ десять разъ меньше.

При выходѣ изъ отверстія вода обладаетъ живою силой, которая, вообще, измѣряется произведеніемъ $\frac{Q\gamma}{g} \cdot \frac{v^2}{2}$. Назовемъ эту величину черезъ A. Подсчитывая ее для обоихъ взятыхъ нами случаевъ, находимъ при насадкѣ:

$$A_{\text{нас.}} = \gamma \frac{0{,}82 f\sqrt{2gH}}{g} \cdot \frac{0{,}82^2 . 2gH}{2} = 0{,}82^3 \gamma f H\sqrt{2gH} = 0{,}551\, \gamma f H\sqrt{2gH}\,;$$

при такомъ же отверстіи въ тонкой стѣнкѣ имѣемъ

$$A_{\text{тонк. ст.}} = \gamma \frac{0{,}62 f\sqrt{2gH}}{g} \cdot \frac{0{,}975^2 . 2gH}{2} = 0{,}59 \gamma f H\sqrt{2gH}\,,$$

т.-е., несмотря на значительное уменьшеніе расхода, струя изъ отверстія въ тонкой стѣнкѣ выноситъ большій запасъ живой силы, нежели при насадкѣ. Имѣемъ затѣмъ:

$$\frac{A_{\text{нас.}}}{A_{\text{тонк. ст.}}} = \frac{0{,}551}{0{,}590} = 0{,}934.$$

Какъ видно, насадокъ даетъ общую потерю живой силы почти на 7% большую, а потому, если, напр., черезъ данное отверстіе вода подводится къ двигателю для утилизаціи ея живой силы, то насадка Вентури употреблять не слѣдуетъ.

Этотъ насадокъ имѣетъ, однако, и теоретическій интересъ, такъ какъ даетъ возможность, на основаніи нѣкоторыхъ допущеній, объяснить элементарнымъ путемъ все явленіе истеченія черезъ него.

Причина отсутствія сжатія понятна: къ отверстію *ab* отдѣльныя струйки подходятъ всѣ въ одномъ направленіи, обусловливаемомъ стѣнками насадка, а потому нѣтъ основанія для новаго измѣненія направленія струекъ.

Большая потеря напора можетъ быть объяснена слѣдующими соображеніями. При входѣ въ насадокъ струя въ сѣченіи *cd* должна сжаться, такъ какъ въ этомъ мѣстѣ, несомнѣнно, должно быть измѣненіе направленія для отдѣльныхъ струекъ. Гдѣ-либо въ *mn* имѣется наиболѣе сжатое сѣченіе; пройдя его, струя снова расширяется и заполняетъ всю трубку. Для того, чтобы имѣть возможность примѣнить уравненіе Д. Бернулли, допустимъ, что дальнѣйшее теченіе происходитъ параллельными струями. Измѣненіе сѣченія изъ *mn* въ *ab* довольно внезапно, а потому здѣсь имѣетъ мѣсто ударъ, вызывающій потерю напора въ количествѣ $\frac{(v_1-v)^2}{2g}$, гдѣ v_1 есть скорость въ сжатомъ сѣченіи *mn*, а v—скорость въ насадкѣ тамъ, гдѣ струя уже заполнила его. Допустимъ, что сжатіе въ *mn* происходитъ такъ же, какъ оно происходитъ при истеченіи изъ отверстій въ тонкой стѣнкѣ. Тогда мы можемъ написать уравненіе расхода для сѣченія *ab* (площадь его есть a,—та же, что и въ *cd*) такъ:

$$Q=av;$$

для сѣченія же *mn*, по предыдущему, мы должны написать:

$$Q=\alpha a v_1,$$

гдѣ α можно принять равнымъ 0,64, какъ для отверстій въ тонкой стѣнкѣ. Поэтому

$$v_1=\frac{1}{\alpha}v,$$

и, слѣдовательно, потерянный на ударъ напоръ есть

$$\frac{v^2}{2g}\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)^2.$$

Этотъ запасъ работы расходуется на приведеніе въ вихревое движеніе и нѣкоторое нагрѣваніе массы воды, заключающейся между сжатою струею и стѣнками насадка, равно какъ и на возмущенія внутри самой струи.

Но это еще не единственный источникъ потери: очевидно, что при прохожденіи черезъ сѣченіе *cd* часть напора тратится на преодолѣніе сопротивленія у кромки; эту потерю для отверстій въ тонкой стѣнкѣ мы оцѣнили величиной $\zeta\frac{v_1^2}{2g}$, гдѣ $\zeta=0{,}06$. Кромѣ того, есть еще треніе о стѣнки насадка. Но эта послѣдняя потеря очень мала, такъ какъ насадокъ, вообще, имѣетъ небольшую длину; поэтому будемъ имѣть въ виду только потерю на ударъ при входѣ въ насадокъ и напишемъ уравненіе Д. Бернулли для движенія отъ уровня ***AB***, гдѣ скорость $=0$, до сѣченія ***ab***, гдѣ предположимъ наличность давленія p'_0, отличнаго отъ давленія p_0, имѣющагося въ ***AB***. Находимъ:

$$H+\frac{p_0}{\gamma}=\frac{p'_0}{\gamma}+\frac{v^2}{2g}+\frac{(v_1-v)^2}{2g}+\zeta\frac{v_1^{\,2}}{2g} \quad \ldots\ldots \text{(A)}$$

Такъ какъ

$$Q=av=\alpha a v_1,$$

то изъ (A), послѣ преобразованій, получаемъ:

$$v=\sqrt{\frac{1}{1+\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)^2+\frac{\zeta}{\alpha^2}}}\cdot\sqrt{2g\left(H+\frac{p_0}{\gamma}-\frac{p'_0}{\gamma}\right)} \quad \ldots\ldots \text{(16)}$$

Если истеченіе происходитъ въ атмосферу, т.-е. если $p_0=p'_0$, и если, далѣе, предположить, что коэффиціенты α и ζ имѣютъ здѣсь тѣ же значенія, что и при истеченіи черезъ отверстія въ тонкой стѣнкѣ, т.-е. $\alpha=0{,}64$ и $\zeta=0{,}06$, то по уравненію (16) получимъ:

$$v=\sqrt{\frac{1}{1+\left(\frac{1}{0{,}64}-1\right)^2+\frac{0{,}06}{0{,}64^2}}}\cdot\sqrt{2gH}=0{,}827\sqrt{2gH},$$

т.-е. величину, меньше, чѣмъ на 1%, отличающуюся отъ дѣйствительно наблюдаемой скорости

$$v=0{,}82\sqrt{2gH}.$$

Такая малая разница между результатомъ опыта и тѣмъ, что мы получили на основаніи теоретическихъ соображеній, вполнѣ объясняется пренебреженіемъ упомянутой выше потери на треніе въ насадкѣ, а потому можно сказать, что вся картина истеченія истолковывается нами правильно.

Опредѣлимъ давленіе p_1 около сжатаго сѣченія, для чего напишемъ уравненіе Д. Бернулли для движенія отъ ***AB*** до ***mn***:

$$\frac{p_0}{\gamma}+H=\frac{p_1}{\gamma}+\frac{v_1^{\,2}}{2g}(1+\zeta).$$

Замѣнимъ здѣсь v_1 черезъ $\dfrac{v}{\alpha}$, при чемъ v возьмемъ по ур-ію (16), а вмѣсто перваго радикала введемъ дѣйствительно наблюдаемый коэффиціентъ расхода μ_2; получимъ:

$$\frac{p_0}{\gamma}+H=\frac{p_1}{\gamma}+\frac{\mu_2^{\,2}(1+\zeta)}{\alpha^2}\left[H+\frac{p_0}{\gamma}-\frac{p'_0}{\gamma}\right] \quad \ldots\ldots \text{(B)}$$

Такъ какъ

$$1+\zeta=\frac{1}{\varphi^2}$$

и

$$\alpha\varphi=\mu,$$

т.-е. коэффиціенту расхода въ тонкой стѣнкѣ, то, внося въ ур-іе (B) μ^2 вмѣсто $\frac{\alpha^2}{1+\zeta}$ и дѣлая нѣкоторыя преобразованія, легко получимъ:

$$\frac{p_1}{\gamma}=\frac{p'_0}{\gamma}-\left[\left(\frac{\mu_2}{\mu}\right)^2-1\right]\left(H+\frac{p_0}{\gamma}-\frac{p'_0}{\gamma}\right) \quad \ldots\ldots (17)$$

Такъ какъ $\mu_2=0{,}82$, а $\mu=0{,}62$, то мы, во всякомъ случаѣ, будемъ имѣть

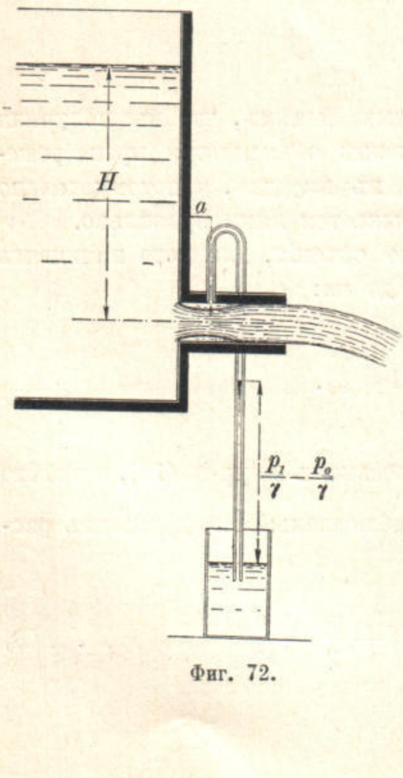
$$p_1<p'_0,$$

т.-е. что въ насадкѣ имѣется разрѣженіе по сравненію со средою, куда происходитъ истеченіе, потому что, конечно, для возможности движенія жидкости изъ сосуда въ окружающую среду необходимо имѣть

$$H+\frac{p_0}{\gamma}>\frac{p'_0}{\gamma}.$$

Этого и слѣдовало ожидать, такъ какъ $v_1>v$. Если истеченіе происходитъ въ атмосферу, т.-е. если $p_0=p'_0$, то уравненіе (17) переходитъ въ ур-іе:

$$\frac{p_1}{\gamma}-\frac{p_0}{\gamma}=-\left(\frac{0{,}82^2}{0{,}62^2}-1\right)H=-0{,}74\,H\backsim {}^3\!/_4 H.$$



Фиг. 72.

Если поэтому въ насадкѣ около сжатаго сѣченія сдѣлать отверстіе и вставить въ него обратный пьезометръ (т.-е. загнутую книзу трубку, опущенную въ сосудъ съ водою) (фиг. 72), то въ немъ вода должна подняться на высоту, равную почти $^3/_4$ напора въ центрѣ тяжести отверстія насадка. Въ одномъ изъ опытовъ Вентури было: $H=0{,}88$ *mtr*, $d=0{,}0406$ *mtr* и разстояніе $a=0{,}018$ *mtr*. Вода поднялась въ трубкѣ на высоту $0{,}65$ *mtr*. Отношеніе $\frac{0{,}65}{0{,}88}=0{,}748$, что вполнѣ согласно съ полученнымъ нами результатомъ и тѣмъ самымъ подтверждаетъ допустимость принятыхъ значеній μ и μ_2.

Наоборотъ, если около сжатаго сѣченія сдѣлать въ стѣнкѣ насадка отверстія и оставить ихъ открытыми, то разрѣженіе образоваться уже не сможетъ, и истеченіе будетъ происходить такъ, какъ если бы насадка не было совсѣмъ.

Наконецъ, можно сказать, что описываемыя явленія при истеченіи черезъ насадокъ Вентури могутъ существовать только до тѣхъ поръ, пока напоръ H не превосходитъ опредѣленнаго предѣла. Для совершенной жидкости гидродинамическое давленіе, во всякомъ случаѣ, должно быть больше нуля:

$$p_1 > 0,$$

или, по уравненію (17),

$$\frac{p'_0}{\gamma} - \left[\left(\frac{\mu_2}{\mu}\right)^2 - 1\right]\left[H + \frac{p_0}{\gamma} - \frac{p'_0}{\gamma}\right] > 0.$$

Рѣшая это неравенство относительно H, получимъ:

$$H + \frac{p_0}{\gamma} < \frac{p'_0}{\gamma} + \frac{p'_0}{\gamma\left[\left(\frac{\mu_2}{\mu}\right)^2 - 1\right]},$$

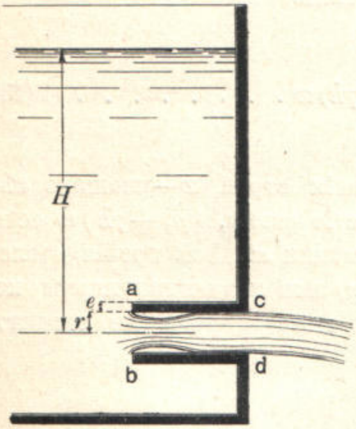
т.-е.

$$H + \frac{p_0}{\gamma} < \frac{p'_0}{\gamma} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{\mu}{\mu_2}\right)^2}.$$

Внося сюда $\mu = 0{,}62$, $\mu_2 = 0{,}82$, получимъ:

$$H + \frac{p_0}{\gamma} < \frac{p'_0}{\gamma} \cdot \left[\frac{1}{1 - 0{,}578}\right] = 2{,}37\,\frac{p'_0}{\gamma}.$$

Въ частномъ случаѣ истеченія въ атмосферу нужно положить



Фиг. 73.

$$\frac{p_0}{\gamma} = \frac{p'_0}{\gamma} = 10{,}33\ mtr,$$

а потому

$$H < 1{,}37\,.\,10{,}33\ mtr$$

или

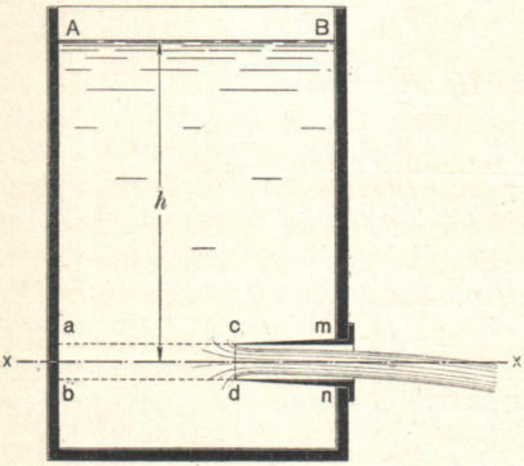
$$H < 14{,}15\ mtr.$$

При бо́льшемъ напорѣ истеченіе черезъ насадокъ будетъ уже отличаться отъ описаннаго: вода его не заполнитъ и будетъ протекать по нему со свободною поверхностью, и для возстановленія явленія насадка придется его удлинить.

2) *Насадокъ Борда* (фиг. 73),—короткій внутренній цилиндрическій насадокъ. Если опытъ вести такъ, что закрыть сначала ab, и при этомъ стѣнка насадка очень тонка, то, по Bidone'у, $\mu = 0{,}5$,—наблюдается очень

большое сжатіе. Если стѣнка толста ($e > 0{,}4\ r$), то $\mu = 0{,}61$, т.-е. дѣло происходитъ такъ, какъ если бы имѣлось отверстіе въ тонкой стѣнкѣ. Если закрыть ***cd*** и дождаться, пока изъ трубы выйдетъ воздухъ, то въ первомъ случаѣ (очень тонкая стѣнка) $\mu = 0{,}71$, а во второмъ $\mu = 0{,}81$ (какъ въ насадкѣ Вентури). Однако Вейсбахъ не получилъ въ первомъ случаѣ такого малаго коэффиціента расхода; по его даннымъ нужно считать въ первомъ случаѣ $\mu = 0{,}54$.

Этотъ насадокъ интересенъ не столько своимъ практическимъ значеніемъ, сколько тѣмъ, что величину коэф-та сжатія въ немъ можно получить теоретическимъ путемъ, а именно:



Фиг. 74.

Мы знаемъ, что гидродинамическое давленіе въ любой точкѣ жидкости отличается отъ гидростатическаго въ зависимости отъ величины скорости этой точки. Понятно, что чѣмъ дальше отъ отверстія мы будемъ брать точки жидкости, тѣмъ меньшія скорости мы будемъ въ нихъ встрѣчать и тѣмъ давленіе въ нихъ будетъ ближе къ гидростатическому. Слѣдовательно, если длина насадка Борда достаточно велика, напр., если $l \backsim 2{,}5\, d$, то по вертикальной стѣнкѣ ***mB*** (фиг. 74), равно какъ и по всей противолежащей стѣнкѣ, давленіе можно считать гидростатическимъ. Поэтому для массы ***ABmcdbaA*** уравненіе проекцій количествъ движенія на горизонтальную ось ***xx*** напишется такъ:

$$\frac{\gamma \omega_1 v}{g} \cdot v = -p_0 \omega + (p_0 + \gamma h)\, \omega \quad \ldots \ldots \ldots \quad (18)$$

Здѣсь ω_1 есть площадь наименьшаго сѣченія струи, ω — площадь сѣченія насадка ***cd***, $p_0 \omega$ есть давленіе на отверстіе извнѣ, $(p_0 + \gamma h)\, \omega$ есть давленіе на противолежащую отверстію часть стѣнки ***ab***. Всѣ прочія давленія или взаимно уравновѣшиваются (по ***Aa*** и ***Bm***) или перпендикулярны къ оси ***xx*** (въ ***AB***, ***bd***, ***dn***, ***cm***). Вертикальная сила тяжести тоже не входитъ въ уравненіе, такъ какъ ось ***xx*** горизонтальна.

Полагая

$$v = \varphi \sqrt{2gh},$$

гдѣ φ можно считать попрежнему $= 0{,}975$, получаемъ соотношеніе:

$$\varphi^2 \gamma h . 2\omega_1 = \gamma h \omega,$$

откуда

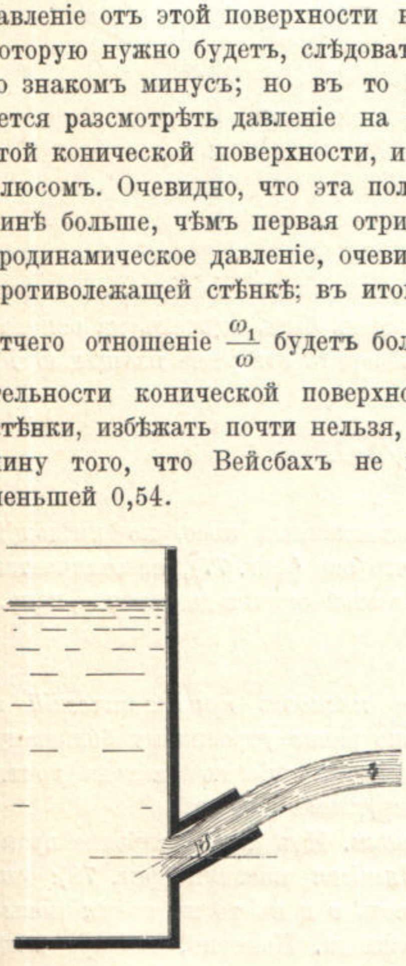
$$\frac{\omega_1}{\omega} = \frac{1}{2\varphi^2} = \alpha.$$

Слѣдовательно,

$$\mu = \alpha\varphi = \frac{1}{2\varphi} = 0{,}513,$$

что довольно близко подтверждается опытомъ.

Легко убѣдиться, что уравненіе (18) справедливо только въ томъ случаѣ, если толщина стѣнки въ c и d очень мала и если поверхность $cmdn$ цилиндрична, а не представляетъ конуса, такъ какъ въ послѣднемъ случаѣ давленіе отъ этой поверхности на воду даетъ проекцію противъ движенія, которую нужно будетъ, слѣдовательно, внести во вторую часть ур-ія (18) со знакомъ минусъ; но въ то же время на противоположной стѣнкѣ придется разсмотрѣть давленіе на кольцевой части, представляющей проекцію этой конической поверхности, и это давленіе войдетъ въ уравненіе (18) съ плюсомъ. Очевидно, что эта положительная величина по абсолютной величинѣ больше, чѣмъ первая отрицательная, такъ какъ вблизи отверстія гидродинамическое давленіе, очевидно, въ нашемъ случаѣ меньше, чѣмъ на противолежащей стѣнкѣ; въ итогѣ вторая часть уравненія (18) увеличится, отчего отношеніе $\frac{\omega_1}{\omega}$ будетъ больше, чѣмъ 0,513. Такъ какъ въ дѣйствительности конической поверхности насадка, при условіи очень тонкой стѣнки, избѣжать почти нельзя, то въ этомъ именно и нужно искать причину того, что Вейсбахъ не получилъ съ насадками Борда величины, меньшей 0,54.



Фиг. 75.

3) Тотъ же цилиндрическій *насадокъ Вентури* (фиг. 75) можетъ быть поставленъ под угломъ δ къ нормали, проведенной къ вертикальной стѣнкѣ; онъ даетъ меньшій расходъ, чѣмъ насадокъ Вентури. Сжатія опять нѣтъ, т.-е. $\alpha = 1$. Выше мы видѣли, что коэффиціентъ скорости φ, а потому въ нашемъ случаѣ и μ, равное φ, могутъ быть выражены по коэффиціенту сопротивленія ζ_1 такъ:

$$\varphi = \frac{1}{1+\zeta_1} = \mu.$$

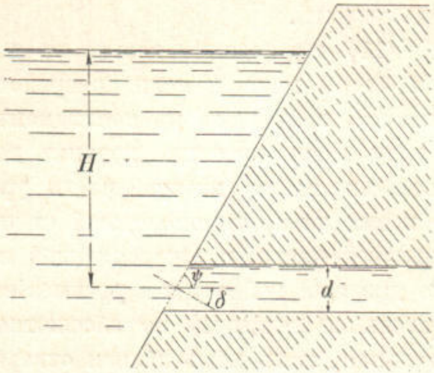
По Вейсбаху въ этомъ случаѣ:

$$\zeta_1 = 0{,}505 + 0{,}303\, sin\,\delta + 0{,}226\, sin^2\delta \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\mathbf{19})$$

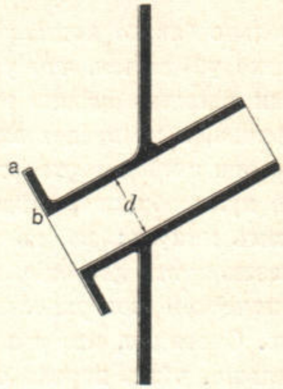
Такой случай имѣетъ мѣсто, напр., въ плотинахъ (фиг. 76): если уголъ откоса есть ψ, а труба горизонтальна, то $\delta = 90^0 - \psi$, и на сопротивленіе при входѣ пойдетъ, по уравненію (19), часть скоростнаго напора ζ_1, оцѣниваемая выраженіемъ:

$$\zeta_1 = 0{,}505 + 0{,}303 \cos\psi + 0{,}226 \cos^2\psi \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (20)$$

Этой формулой оцѣнено только сопротивленіе входа и потери на длинѣ насадка около трехъ діаметровъ трубы; прочая часть трубы вноситъ еще



Фиг. 76.



Фиг. 77.

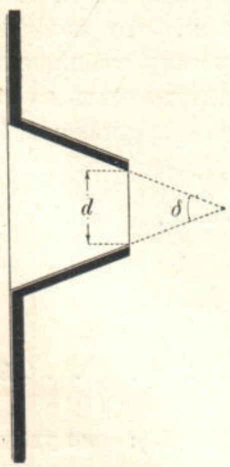
сопротивленія, коэффиціентъ ζ_2 которыхъ можетъ быть оцѣненъ на основаніи данныхъ III главы. Въ итогѣ расходъ черезъ отверстіе площадью F, подъ напоромъ H, будетъ:

$$Q = \frac{1}{\sqrt{1 + \zeta_1 + \zeta_2}} F\sqrt{2gH}.$$

Само собою понятно, что насадокъ, поставленный косо, но имѣющій плоскую торцевую стѣнку, нормальную къ его оси (фиг. 77), не отличается отъ насадка Вентури, коль скоро протяженіе этой стѣнки достаточно, напр., если $ab > \frac{d}{2}$.

4) Наконецъ, если *насадокъ призматическій* и его длина приблизительно равна утроенному бо̀льшему измѣренію отверстія, то коэффиціентъ расхода почти такой же, какъ и при кругломъ насадкѣ.

5) *Коническіе насадки*. Изъ нихъ наиболѣе практичны коническіе *сходящіеся* насадки (фиг. 78): они мало уменьшаютъ скорость v и въ то же время повышаютъ коэффиціентъ расхода. Понятно, что при углѣ сходимости $\delta = 0$ коническій насадокъ обращается въ насадокъ Вентури, а при $\delta = 180^\circ$ — въ отверстіе въ тонкой стѣнкѣ.



Фиг. 78.

Лучшее изслѣдованіе коническихъ насадковъ произвели d'Aubuisson и Castel. По опытамъ ихъ оказалось, что наибольшее μ соотвѣтствуетъ углу сходимости конуса въ $13^\circ 24'$; коэф-тъ φ непрерывно возрастаетъ съ увеличеніемъ δ. Между прочимъ, такіе насадки употребляются въ пожарныхъ брандспойтахъ: тамъ дѣлаютъ $\delta = 5^0$, соотвѣтственно чему $\varphi = 0,92$.

Названные авторы, изслѣдуя насадки въ 15 *mm* діаметромъ и въ 40 *mm* длиною, при постоянномъ напорѣ въ 3 *mtr*, пришли къ слѣдующимъ даннымъ (см. табл. 15):

Таблица 15.

δ	0°00′	3°10′	5°26′	7°52′	10°20′	12°04′	13°24′	14°28′	19°28′	23°00′	40°20′	48°50′
μ	0,829	0,895	0,924	0,930	0,938	0,942	**0,946**	0,941	0,924	0,914	0,870	0,847
φ	0,829	0,894	0,919	0,932	0,951	0,955	0,963	0,966	0,970	0,974	0,980	0,984

Lespinasse нашелъ для сходящихся пирамидальныхъ насадковъ, употребляющихся при водяныхъ колесахъ, $\mu = 0,976$ и даже 0,987.

Результаты, полученные Вейсбахомъ для подобныхъ насадковъ, не вполнѣ сходятся съ данными Кастеля. Его насадки имѣли діаметръ 50 *mm*, а напоры измѣнялись отъ 300 *mm* до 3 *mtr*. При этомъ онъ сравнивалъ не только внѣшніе, но и внутренніе коническіе насадки (фиг. 79), получая такимъ образомъ всевозможные насадки отъ Борда до Вентури. Изъ фигуры видно, что́ названо угломъ δ, который равенъ нулю для насадка Вентури, 90° для отверстія въ тонкой стѣнкѣ и т. д.

Фиг. 79.

Слѣдуетъ обратить вниманіе на то обстоятельство, что въ насадкѣ типа ***D*** края стѣнки умышленно хорошо скруглялись, въ чемъ и лежитъ главная причина несогласія данныхъ Вейсбаха съ данными д'Обюиссона и Кастеля. Точно также, насадокъ ***E*** есть не чистый насадокъ Вентури: скругленныя кромки дѣлаютъ невозможнымъ образованіе сжатаго сѣченія внутри насадка. Результаты наблюденій Вейсбаха выражены Цейнеромъ слѣдующей формулой, дающей коэффиціентъ расхода μ_δ для всякаго угла δ по коэффиціенту μ для отверстія въ тонкой стѣнкѣ:

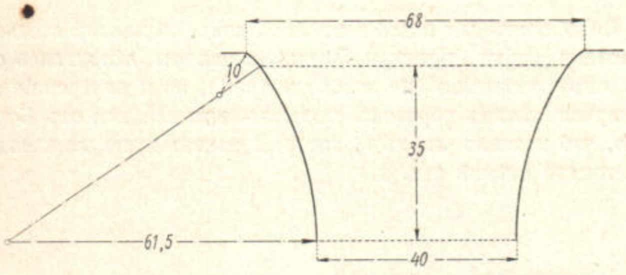
$$\mu_\delta = \mu\,[1 + 0{,}33214\,cos^3\delta + 0{,}16672\,cos^4\delta].$$

Цейнеръ принимаетъ тутъ $\mu = 0{,}6385$ *).

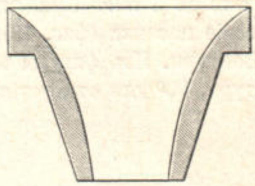
Опыты Вейсбаха дали слѣдующія величины коэффиціента μ_δ:

δ	180°	157°,5	135°	112°,5	90°	67°,5	45°	22°,5	11°,2	7°,5	0°
μ_δ	0,541	0,546	0,577	0,606	0,632	0,684	0,753	0,882	0,924	0,949	0,966

6) Къ сходящимся коническимъ насадкамъ можно отнести и *насадки, очерченные по профилю сжатой струи* (эти насадки даютъ наибольшіе коэффиціенты расходовъ). Одно построеніе (Bossut) было приведено выше



Фиг. 80.



Фиг. 81.

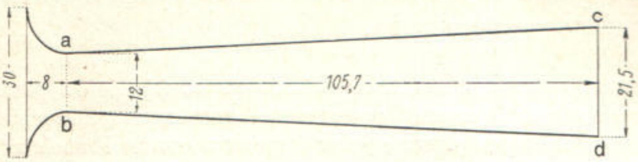
(см. фиг. 53, стр. 104). На фиг. 80 данъ профиль насадка Вейсбаха, съ которымъ онъ получилъ въ среднемъ $\mu = \varphi = 0{,}97$. На фигурѣ размѣры поставлены въ *mm*. На фиг. 81 представленъ другой насадокъ Вейсбаха съ діаметромъ 10 *mm*; этотъ насадокъ при разныхъ напорахъ далъ слѣдующія значенія для $\mu = \varphi$:

Напоръ h въ *mtr.*	0,02	0,5	3,5	17	103
φ	0,959	0,967	0,975	0,994	0,994

Слѣдуетъ сравнить первый насадокъ Francis'а, описанный въ слѣдующемъ пунктѣ.

*) См. Civilingenieur, Bd. 2. 1856, S. 53.

7) Съ *коническими расходящимися насадками* дѣлали опыты Эйтельвейнъ, Вентури и другіе. На фиг. 82 представленъ профиль одного изъ



Фиг. 82.

насадковъ Эйтельвейна, давшій наилучшіе результаты *) и имѣвшій уголъ при вершинѣ около 5^0. Если ур-іе расхода отнести къ сѣченію *ab*, то коэффиціентъ расхода $\mu = 1{,}5526$, т.-е. въ $\frac{1{,}55}{0{,}62} = 2{,}5$ раза больше, чѣмъ въ случаѣ тонкой стѣнки, и въ $\frac{1{,}55}{0{,}82} = 1{,}9$ разъ болѣе, чѣмъ въ насадкѣ Вентури; если же ур-іе расхода отнести къ выпускному отверстію *cd*, то, по опытамъ Эйтельвейна, $\mu = 0{,}483$, т.-е. выходитъ меньше, нежели при соотвѣтственномъ отверстіи въ тонкой стѣнкѣ. Прочіе типы расходящихся насадковъ и у Вентури, и у Эйтельвейна дали хорошіе результаты.

Изъ разсмотрѣнія коэффиціентовъ расхода въ первомъ и второмъ случаѣ видимъ, что коэффиціентъ сопротивленія, вносимаго всѣмъ насадкомъ и отнесеннаго къ скоростному напору, имѣющемуся въ концѣ насадка, очень великъ, а именно, онъ достигаетъ значенія:

$$\zeta = \frac{1}{\varphi^2} - 1 = \frac{1}{\mu^2} - 1 = \frac{1}{0{,}483^2} - 1 = \mathbf{3{,}3},$$

такъ что изъ всего напора H на образованіе скорости въ концѣ насадка расходуется только $\frac{H}{1+\zeta} = 0{,}233\,H$; остальная же часть напора затрачивается на преодолѣніе сопротивленій. Съ другой стороны, коэффиціентъ расхода, отнесеннаго къ узкому сѣченію насадка, равенъ 1,5526, т.-е. расходъ на $55{,}26^0/_0$ больше того, что дало бы ур-іе Торричелли. Это значитъ, что скорость теченія въ узкомъ мѣстѣ насадка больше той, которая соотвѣтствуетъ напору. А это, въ свою очередь, показываетъ, что давленіе здѣсь меньше атмосфернаго, что легко обнаруживается пьезометромъ.

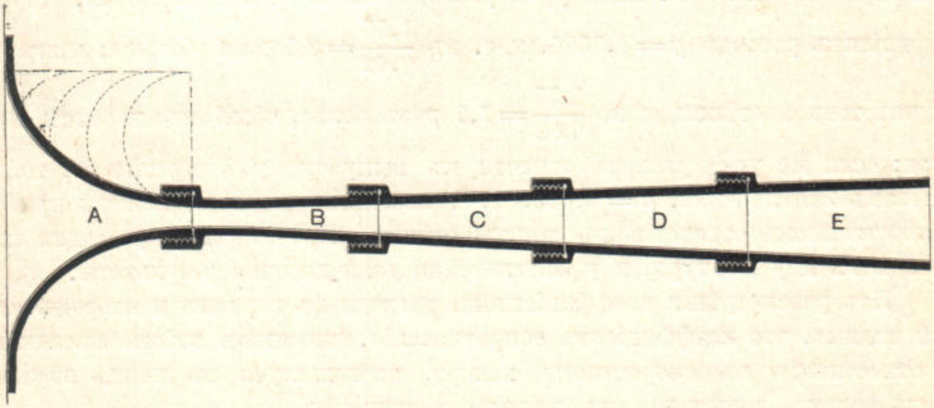
Итакъ, если мы имѣемъ данный напоръ и данное отверстіе, то очень легко значительно повысить водопропускную способность этого отверстія, приставляя къ нему расходящійся насадокъ. Съ другой стороны, каждый килограммъ протекшей черезъ такой насадокъ

*) На фигурѣ размѣры указаны въ прусскихъ линіяхъ.

воды будетъ уносить въ видѣ живой силы только небольшую часть полной энергіи (напора), затраченной на его перемѣщеніе, т.-е. будетъ обладать малой работоспособностью, а слѣд., будетъ мало размывать дальнѣйшее русло. Въ этихъ двухъ обстоятельствахъ и заключается практическая важность расходящихся насадковъ.

Нужно замѣтить, что существенное вліяніе на коэффиціентъ расхода оказываетъ длина насадка, что, конечно, вполнѣ естественно, такъ какъ увеличеніе длины вноситъ новыя сопротивленія. Въ этомъ отношеніи поучительны опыты Francis'а *); они особенно имѣютъ цѣну для опредѣленія сопротивленія, вносимаго коническими всасывающими трубами турбинъ.

Насадокъ Francis'а свинчивался изъ 5 частей: *A*, *B*, *C*, *D* и *E* (фиг. 83). Часть *A* очерчена по циклоидѣ для возможно полнаго устраненія сжатія при входѣ; часть *B*



Фиг. 83.

имѣетъ криволинейный переходъ, образованный дугою круга радіусомъ въ 22′,69, и часть усѣченнаго конуса; части *C*, *D* и *E* представляютъ продолженіе того же конуса. Всѣ части чугунныя, внутри шлифованныя наждакомъ. Послѣдовательно діаметры были слѣдующіе:

въ стыкѣ	*A — B*	діаметръ	= 0′,1018 ,
„ „	*B — C*	„	= 0′,1454 ,
„ „	*C — D*	„	= 0′,2339 ,
„ „	*D — E*	„	= 0′,3209 ,
въ концѣ части	*E*	„	= 0′,4085.

Такъ какъ длина каждой части около 1′, то уголъ конуса при вершинѣ былъ около 5°.

Истеченіе происходило подъ уровень (въ отличіе отъ всѣхъ вышеприведенныхъ данныхъ) въ условіяхъ совершеннаго сжатія, т.-е. безъ замѣтной скорости передъ насадкомъ. Для сравненія Francis наблюдалъ въ тѣхъ же условіяхъ истеченіе изъ отверстія въ тонкой стѣнкѣ, при діаметрѣ въ 0′,1017. Результаты помѣщены въ нижеприведенной таблицѣ 16.

---

*) См. J. Francis. Lowell hydraulic experiments. 1871. Стр. 209—221.

Таблица 16.

Типъ насадка.	Напоръ въ футахъ.	Коэф-тъ расхода, отнесенный къ узкому сѣченію насадка.	Коэф-тъ расхода, отнесенный къ конечному сѣченію насадка.
A	0,53	0,927	
	0,78	0,935	
	0,96	0,928	
	1,23	0,933	
	1,40	0,937	
	1,52	0,944	
A,B	0,20	1,481	0,726
	0,30	1,513	0,742
	0,40	1,538	0,754
	0,56	1,576	0,773
	0,67	1,587	0,778
	0,85	1,592	0,780
	1,46	1,595	0,782
A,B,C	0,10	1,893	0,359
	0,21	2,030	0,385
	0,31	2,068	0,392
	0,50	2,118	0,401
	0,71	2,153	0,408
	1,10	**2,164**	0,410
	1,31	2,123	0,402
A,B,C,D	0,13	2,080	0,209
	0,27	2,252	0,227
	0,44	2,260	0,227
	0,63	2,303	0,232
	0,92	2,378	0,239
	1,18	**2,431**	0,245
	1,36	2,427	0,244
A,B,C,D,E	0,11	2,055	0,128
	0,21	2,168	0,135
	0,31	2,262	0,141
	0,42	2,307	0,143
	0,64	2,302	0,143
	0,96	2,314	0,144
	1,29	**2,393**	0,149
	1,36	2,326	0,144
	1,42	2,261	0,140
Тонкая стѣнка; истеченіе подъ уровень.	1,02	0,5915	
	1,32	0,5918	
	1,49	0,5922	

Изъ данныхъ этой таблицы видно, что въ первыхъ двухъ случаяхъ коэффиціентъ расхода съ напоромъ возрастаетъ, а въ остальныхъ онъ достигаетъ maximum'а и съ дальнѣйшимъ повышеніемъ напора начинаетъ падать. Длина конуса, а тѣмъ самымъ и отношеніе выпускного сѣченія къ узкому, имѣютъ большое вліяніе на величину коэффиціента расхода: чѣмъ *длиннѣе* насадокъ при одинаковомъ углѣ конуса, тѣмъ *сильнѣе* его *всасывающее* дѣйствіе, но въ то же время тѣмъ *больше потеря* напора, имъ причиняемая. Такіе насадки поэтому вполнѣ цѣлесообразны тамъ, гдѣ при данномъ напорѣ и расходѣ требуется возможно *малое сѣченіе* отверстія.

Кромѣ того, такая обдѣлка выпускного отверстія можетъ представлять существенную выгоду въ слѣдующемъ случаѣ. Для ясности предположимъ условія фрэнсисовскаго наблюденія группы ***ABCDE*** при напорѣ 1′,36. Въ этомъ случаѣ насадокъ пропускалъ въ 1 секунду 0,17736 куб. фут. воды, такъ что скорость въ узкомъ мѣстѣ его была 21′,7621, въ устьѣ же насадка она была 1′,3515. Чтобы заставить воду проходить съ такой скоростью, потребовался напоръ въ 1′,36. Теперь посмотримъ, какой напоръ потребовался бы для того, чтобы прогонять воду съ такими же скоростями въ случаѣ, если бы къ стѣнкѣ сосуда была приставлена только часть ***A***, а части ***B***, ***C***, ***D*** и ***E*** были замѣнены цилиндрическою трубою такого же діаметра, какъ широкій конецъ части ***E***. Въ этомъ случаѣ пришлось бы:

1) Преодолѣть сопротивленіе въ насадкѣ ***A***; изъ таблицы Francis'а видно, что для такихъ скоростей въ этомъ случаѣ можно считать $\varphi = 0,95$; слѣдовательно,

$$\zeta = \frac{1}{\varphi^2} - 1 = 0,11;$$

такъ какъ требуется имѣть скорость $v = 21,7621$, то на это сопротивленіе уйдетъ напоръ

$$\zeta \frac{v^2}{2g} = 0,11 \cdot \frac{21,7621^2}{2 . 32,1618} \infty 0',81 \text{ *)}.$$

2) Далѣе будетъ имѣть мѣсто потеря на ударъ при переходѣ отъ скорости $v = 21',7621$ къ скорости $v_1 = 1',3515$; на это потратится напоръ

$$\frac{(v - v_1)^2}{2g} = \frac{20,4106^2}{64,3236} = 6',48.$$

3) Будутъ сопротивленія и въ самой трубѣ; но ихъ оставимъ въ сторонѣ, такъ какъ при небольшой длинѣ трубы они невелики, и, кромѣ того, вопроса о сопротивленіи въ трубахъ мы еще пока не разсматривали.

4) Наконецъ, на созданіе самой скорости $v_1 = 1',3515$ нуженъ напоръ $\frac{v_1^2}{2g} = 0',03$.

Итакъ, на все потребуется затрата напора

$$0',81 + 6',48 + 0',03 = 7',32,$$

т.-е. почти въ 5,5 разъ больше, чѣмъ въ предыдущемъ случаѣ. Отсюда видно, что во всѣхъ случаяхъ, когда скорость въ узкомъ отверстіи такъ или иначе опредѣляется заранѣе, всегда выгодно перевести ее, помощью плавно расходящагося насадка, на меньшую и затѣмъ уже выпускать воду съ исчезающей величиной скорости. Съ этими условіями какъ разъ придется встрѣтиться въ турбинахъ.

Числа таблицы 16-й позволяютъ, кромѣ того, указать, какъ распредѣляются потери напора по отдѣльнымъ частямъ каждаго такого насадка. Разсмотримъ, напримѣръ, насадокъ ***ABCDE***. При напорѣ 0′,42, коэффиціентъ расхода для послѣдняго сѣченія ***e*** части ***E***, который мы будемъ называть μ_e, по таблицѣ $= 0,143$. Поэтому заключаемъ, что на всѣ сопротивленія насадка затрачивается напоръ, въ $\left(\frac{1}{\mu_e^2} - 1\right)$ разъ превосходящій конечный скоростной напоръ; внося числа, находимъ, что вся потеря напора равна $\left(\frac{1}{0,143^2} - 1\right)\frac{v_e^2}{2g} = 48\frac{v_e^2}{2g}$. При этомъ расходъ черезъ насадокъ по его сѣченію и напору вычисляется въ 0,0977 куб. футъ. Выдѣлимъ изъ этой потери ту ея часть, которая приходится на часть ***AB***, и ту часть, которая вызвана конусомъ ***CDE***. Для этой цѣли разыскиваемъ то значеніе коэф-та расхода μ_b, которое наблюдалось въ насадкѣ ***AB***, при условіи тѣхъ же самыхъ скоростей, т.-е. того же самаго расхода, какъ и въ данномъ случаѣ. Путемъ нѣсколькихъ пробъ находимъ, что при напорѣ 0′,85 насадокъ ***AB*** пропускалъ расходъ 0,0961 куб. футъ, такъ что скорости этого эксперимента весьма близки къ скоростямъ нашего случая, а потому

*) Ускореніе тяжести $g = 9,81$ *mtr* $= 32',1618$.

говоримъ, что если для насадка *AB* при этихъ скоростяхъ коэф-тъ расхода по таблицѣ $\mu_b = 0{,}7804$, что соотвѣтствуетъ коэф-ту сопротивленія на всемъ пути *AB*:

$$\zeta_b = \frac{1}{\mu_b^2} - 1 = \frac{1}{0{,}7804^2} = 0{,}645,$$

то и въ нашемъ случаѣ потеря напора на пути *AB* выражается такъ:

$$\zeta_b \frac{v_e^2}{2g} = 0{,}645 \frac{v_b^2}{2g}.$$

Зная далѣе діаметры сѣченій *b* и *e* (см. выше), заключаемъ, что

$$v_b : v_e = 0{,}4085^2 : 0{,}1454^2 = 7{,}88.$$

Послѣ этого потеря напора на пути *AB* при нашей скорости вычислится такъ:

$$0{,}645 \frac{v_b^2}{2g} = 0{,}645 . 7{,}88^2 \frac{v_e^2}{2g} = 40 \frac{v_e^2}{2g}.$$

Вычитая ее изъ полной потери напора, находимъ, что собственно конусъ *CE* вноситъ не очень большую потерю,—всего въ $8 \frac{v_e^2}{2g}$; главная же потеря вызвана частью *AB* насадка. Продѣлавъ эти вычисленія для нѣсколькихъ напоровъ, замѣтимъ, что числовой коэф-тъ сопротивленія всякій разъ не очень отличается отъ 8 для конуса *CDE*, мало отличается отъ 2,5 для конуса *CD* и, наконецъ, близокъ къ 1 для конуса *C*. Такое измѣненіе этого коэффиціента слѣдуетъ приписать, главнымъ образомъ, различнымъ значеніямъ скоростныхъ напоровъ, къ которымъ отнесены потери, и отчасти различному вліянію тренія въ этихъ частяхъ.

Въ заключеніе приводимъ по Rühlmann'у (съ нѣкоторыми исправленіями) сводную таблицу № 17 полученныхъ въ этомъ параграфѣ результатовъ. Предпослѣдній столбецъ даетъ величину напора, соотвѣтствующаго выходной скорости $\frac{v^2}{2g}$. Если бы воздухъ не оказывалъ сопротивленія, то это была бы высота подъема струи, бьющей вверхъ. Послѣдній столбецъ даетъ величины $\frac{Q\gamma}{g} \cdot \frac{v^2}{2}$, т.-е. полные запасы живой силы, уносимые всей струей. Если черезъ данное отверстіе вода подводится къ двигателю, то желательно, конечно, имѣть эту величину возможно большой. Буквой A обозначено произведеніе $\gamma F H \sqrt{2gH}$, т.-е. тотъ запасъ работы, который струя унесла бы съ собой, если бы при прохожденіи подъ напоромъ H черезъ отверстіе площадью F она не встрѣчала никакихъ сопротивленій и не испытывала сжатія.

Изъ этой таблицы видно, что, если желательно имѣть высоко бьющую струю, нужно или ставить насадокъ, очерченный по профилю сжатой струи, или брать просто отверстіе въ тонкой стѣнкѣ, или, наконецъ, коническій сходящійся насадокъ съ угломъ δ около 13°.

Если рѣчь идетъ о сбереженіи полнаго запаса живой силы струи, то наиболѣе цѣлесообразенъ насадокъ, очерченный по формѣ сжатой струи, а затѣмъ коническій сходящійся насадокъ; прочіе типы отверстій даютъ большія потери.

Таблица 17.

Типъ отверстія.	φ	μ	$\frac{v^2}{2g} = \varphi^2 H$	$\frac{Q\gamma}{g} \cdot \frac{v^2}{2} = \mu\varphi^2\gamma FH\sqrt{2gH} = \mu\varphi^2 A.$
Тонкая стѣнка.	0,975	0,620	0,951 H	0,590 A
Насадокъ Вентури.	0,820	0,820	0,672 H	0,551 A
Коническій сходящійся насадокъ $\delta = 13^0 24'$.	0,963	0,946	0,927 H	0,877 A
Насадокъ по формѣ сжатой струи.	0,980	0,980	0,960 H	0,941 A
Насадокъ Эйтельвейна.	0,483	0,483	0,233 H	0,113 A

Наконецъ, если рѣчь идетъ, наоборотъ, о возможно полномъ погашеніи живой силы струи еще внутри насадка, во избѣжаніе, напр., размывовъ дальнѣйшаго русла, то наилучшимъ является расходящійся насадокъ. Поэтому трубы, выводящія воду изъ-подъ желѣзнодорожныхъ насыпей, оканчиваются расходящимися по теченію откосными крыльями.

Въ нѣкоторыхъ случаяхъ ставится требованіе, чтобы черезъ данное отверстіе могло проходить возможно малое количество жидкости. Вышеприведенная таблица значеніями коэф-товъ μ даетъ отвѣтъ на вопросъ, какая конструкція отверстія наиболѣе пригодна въ этомъ случаѣ.

Фиг. 84.

Однако, есть возможность понизить значеніе μ почти до любой малой величины, конструируя все отверстіе такъ, чтобы оно состояло изъ ряда чередующихся другъ за другомъ насадковъ. Такъ, напр., на фиг. 84 изображены приставленные къ сосуду n насадковъ Вентури, раздѣленныхъ между собою (n—1) уширеніями. Допустимъ, что эти уширенія настолько велики, что, вступая въ нихъ, струя всякій разъ теряетъ на ударъ весь запасъ пріобрѣтенной ранѣе живой силы; кромѣ того, пусть діаметры всѣхъ насадковъ равны между собою. Тогда ур-іе Д. Бернулли для движенія по такому сложному насадку будетъ, очевидно, таково:

$$H = n(1+\zeta)\frac{v^2}{2g},$$

гдѣ ζ есть коэффиціентъ сопротивленія, вносимаго каждымъ отдѣльнымъ насадкомъ. Послѣ этого расходъ черезъ весь насадокъ съ діаметромъ d выразится такъ:

$$Q = \frac{\pi d^2}{4} v = \frac{\pi d^2}{4} \frac{\sqrt{2gH}}{\sqrt{n(1+\zeta)}}.$$

Такимъ образомъ, коэф-тъ расхода насадка, вообще равный $\frac{1}{\sqrt{1+\zeta}}$, уменьшается при такомъ расположеніи въ $\sqrt{n}$ разъ. Въ этомъ заключается идея *лабиринтовыхъ сальниковъ:* вмѣсто набивки во втулкѣ сальника располагаютъ рядъ проточекъ, вносящихъ послѣдовательно чередующіяся уширенія и суженія вытекающей струи: этимъ создается настолько большая потеря напора, что утечка въ сальникѣ значительно уменьшается, хотя, конечно, никогда не можетъ быть доведена до нуля.

Замѣтимъ, наконецъ, что всѣ числовыя данныя, приведенныя въ § 11—15, относятся къ водѣ. Несомнѣнно, что значенія всѣхъ коэф-товъ измѣняются въ зависимости отъ степени вязкости той или иной жидкости. При этомъ, очевидно, зависимость эта такова, что съ увеличеніемъ вязкости коэф-ты скорости и расхода должны уменьшаться. Поэтому иногда степень вязкости характеризуютъ именно коэф-томъ μ. Такъ принято, напр., поступать на заводахъ, приготовляющихъ смазочныя масла, керосинъ и т. п. При этомъ пользуются приборами, такъ называемыми *вискозиметрами*, основанными на опредѣленіи времени протеканія опредѣленнаго объема вещества черезъ опредѣленное, неизмѣнное отверстіе, при опредѣленныхъ напорѣ и температурѣ.

§ 16. Истеченіе черезъ водосливы.

Очень часто встрѣчается особый типъ отверстій,—такъ называемые водосливы,—для которыхъ характерно то, что не весь периметръ струи образованъ твердыми стѣнками: всякое отверстіе въ боковой стѣнкѣ сосуда становится водосливомъ, если уровень воды въ сосудѣ стоитъ не настолько высоко, чтобы вытекающая струя касалась верхней кромки отверстія. Обыкновенно водосливныя отверстія имѣютъ форму прямоугольника или трапеціи. Въ прямоугольныхъ отверстіяхъ нижняя кромка обыкновенно горизонтальна и называется *порогомъ* водослива. Будемъ называть водосливъ *совершеннымъ*, если порогъ лежитъ выше уровня воды въ отводящемъ каналѣ; въ противномъ случаѣ водосливъ называютъ *несовершеннымъ*. Мы будемъ разсматривать исключительно прямоугольные водосливы и сначала остановимся только на случаѣ совершеннаго водослива.

Громадное большинство авторовъ разсматриваютъ водосливъ, какъ предѣльный случай прямоугольнаго отверстія, для котораго мы получили въ § 12 (стр. 108) ур-іе расхода (13) въ такомъ видѣ:

$$Q = {}^2/_3\, \mu b \sqrt{2g} \left(h_2^{3/2} - h_1^{3/2}\right),$$

гдѣ b есть горизонтальный размѣръ отверстія, а h_2 и h_1—напоры въ нижней и верхней кромкахъ отверстія. Полагая для водослива $h_1 = 0$, такъ какъ самой кромки нѣтъ, и $h_2 = h$, получимъ отсюда:

$$Q = {}^2/_3\, \mu b h \sqrt{2gh}.$$

Такъ какъ коэффиціентъ μ слѣдуетъ опредѣлять изъ соотвѣтствующихъ опытовъ, то пишутъ просто

$$Q = \mu b h \sqrt{2gh} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

вводя коэффиціентъ ${}^2/_3$ въ составъ новаго коэф-та μ.

По смыслу формулы слѣдуетъ, что коэффиціентомъ μ стараются исправить погрѣшность выраженія $bh\sqrt{2gh}$, въ которомъ bh есть какъ бы площадь отверстія, а $\sqrt{2gh}$ есть скорость, предполагаемая одинаковой для всѣхъ частицъ, проходящихъ черезъ это отверстіе. Понятно, что такой видъ уравненія является крайней натяжкой. Кромѣ того, очевидно, что здѣсь возможно несовершенное сжатіе, т.-е. въ сосудѣ, прудѣ, каналѣ и т. п. передъ водосливомъ можетъ быть столь большая скорость v_0, что соотвѣтствующій ей напоръ $\frac{v_0^2}{2g}$ является существенной прибавкой къ напору h, такъ что, исходя изъ выраженія расхода въ прямоугольномъ отверстіи подъ напорами h_2, h_1 и скоростнымъ напоромъ $\frac{v_0^2}{2g}$, можно было бы написать, что при этихъ условіяхъ пройдетъ количество воды:

$$Q = {}^2/_3\, \mu b \sqrt{2g} \left[\left(h_2 + \frac{v_0^2}{2g}\right)^{3/2} - \left(h_1 + \frac{v_0^2}{2g}\right)^{3/2}\right].$$

Полагая опять для водослива $h_1 = 0$, $h_2 = h$, имѣемъ:

$$Q = \mu b \sqrt{2g} \left[\left(h + \frac{v_0^2}{2g}\right)^{3/2} - \left(\frac{v_0^2}{2g}\right)^{3/2}\right].$$

Но и тутъ предпочитаютъ сохранить видъ уравненія (1), исправляя новую неточность соотвѣтственнымъ измѣненіемъ μ.

Несомнѣнно, далѣе, что и тутъ можетъ быть явленіе, аналогичное неполному сжатію; очевидно, не безразлично, въ толстой или тонкой стѣнкѣ сдѣлано отверстіе. Наконецъ, не безъ вліянія должно быть и то обстоятельство, сдѣлано ли отверстіе въ вертикальной стѣнкѣ или наклонной. Всѣ эти обстоятельства болѣе или менѣе подробно изслѣдованы очень многими экспериментаторами; тѣмъ не менѣе несовершенство уравненія (1) приводитъ къ тому, что вычисленія по нему даютъ только весьма приблизительныя рѣшенія. Правда, такова судьба всѣхъ эмпирическихъ формулъ, но все же весьма важно имѣть теоретически обоснованную величину вліянія отдѣльныхъ факторовъ на коэффиціентъ μ, если уже нельзя получить уравненія, точно выражающаго явленіе.

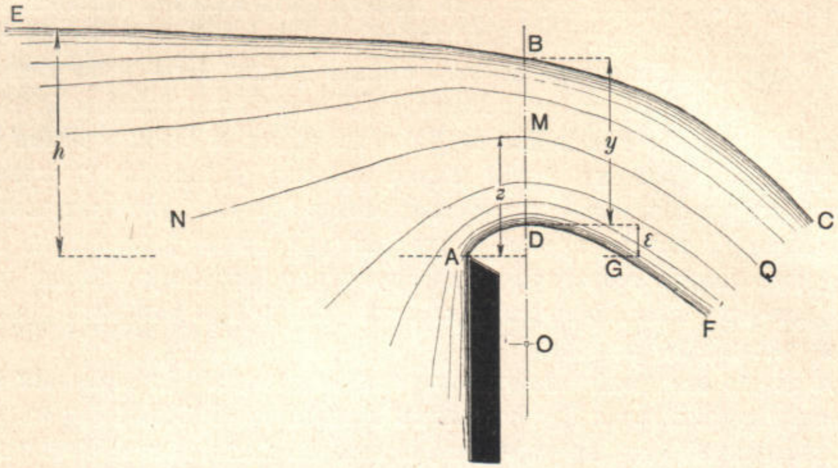
Въ этомъ отношеніи шагомъ впередъ является теорія истеченія черезъ водосливы, предложенная французскимъ математикомъ Boussinesq въ 1886 г. и опубликованная имъ въ рядѣ мемуаровъ въ Comptes rendus Парижской Академіи Наукъ за 1887—1889 гг. Обширность и нѣкоторая сложность этой теоріи не позволяютъ привести ее здѣсь цѣликомъ; поэтому мы остановимся только на простѣйшемъ случаѣ, разсматриваемомъ Boussinesq, — именно, на случаѣ *совершеннаго водослива, сдѣланнаго въ вертикальной тонкой стѣнкѣ при наличности совершеннаго, хотя и неполнаго, сжатія*.

Совершенство сжатія обусловливается тѣмъ, что передъ порогомъ глубина канала очень велика, такъ что въ каналѣ нѣтъ никакой замѣтной скорости, а его неполнота вызывается тѣмъ, что водосливъ протянутъ во всю ширину подводящаго канала, такъ что сжатія съ боковъ нѣтъ. Кромѣ того, будемъ считать, что каналъ очень широкъ,—настолько, что вліяніемъ боковыхъ стѣнокъ можно пренебречь и разсматривать не весь водосливъ, а только единицу его ширины. Давно установленъ тотъ фактъ, что горизонтальная свободная поверхность въ подводящемъ каналѣ, по мѣрѣ приближенія къ порогу A, понижается, представляя кривой профиль EBC (фиг. 85). Напоръ h надъ порогомъ слѣдуетъ поэтому измѣрять на довольно большомъ разстояніи BE отъ порога, напр., не менѣе 1,5 *mtr* *). Это пониженіе уровня можно разсматривать, какъ сжатіе струи. Несомнѣнно, сжатіе должно существовать также и внизу, такъ что частица, шедшая сначала по стѣнкѣ, покидая ее въ A, сначала подымается кверху, до D, а затѣмъ уже падаетъ. Наличность такого сжатія была подмѣчена давно, но значеніе ему придалъ только Boussinesq, а обстоятельныя опредѣленія его сдѣлалъ Bazin по настоянію перваго. Такимъ образомъ, мы видимъ, что при напорѣ h надъ порогомъ истеченіе происходитъ какъ бы черезъ отверстіе высотою $BD = y$.

Теорія Boussinesq построена на слѣдующихъ четырехъ предположеніяхъ:

1) Жидкость считается совершенной, т.-е. не претерпѣвающей потерь напора при своемъ движеніи, такъ что для какой-нибудь элементарной струйки NMQ уравненіе установившагося движенія отъ N, гдѣ скорость незамѣтна, т.-е. равна нулю, а давленіе не отличается отъ гидростатическаго,

*) Bazin — одинъ изъ наиболѣе извѣстныхъ экспериментаторовъ послѣдняго времени въ области истеченій черезъ водосливы, измѣрялъ напоръ въ разстояніи 5 *mtr* отъ порога.



Фиг. 85.

т.-е. зависитъ исключительно отъ глубины погруженія частицы подъ свободной поверхностью, до **M** въ сжатомъ сѣченіи **BD** должно быть написано такъ:

$$h = \frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + z \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

гдѣ v, p и z относятся къ точкѣ **M**, и притомъ, p представляетъ не само гидродинамическое давленіе въ точкѣ **M**, а только его *избытокъ* надъ атмосфернымъ давленіемъ.

2) Примѣняется постулатъ, высказанный Bélanger и называемый *принципомъ наибольшаго расхода*. Пояснимъ его слѣдующимъ образомъ. Вообразимъ рядъ открытыхъ желобовъ, совершенно одинаковыхъ какъ по формѣ и размѣрамъ, такъ и по расположенію относительно одной и той же горизонтальной плоскости. Если черезъ каждый изъ этихъ желобовъ мы будемъ пропускать въ установившемся движеніи разные расходы жидкости, то, несомнѣнно, свободныя поверхности въ каждомъ изъ желобовъ расположатся различно; при этомъ, чѣмъ большій расходъ проходитъ черезъ желобъ, тѣмъ, очевидно, выше расположится свободная поверхность потока по всей его длинѣ; нельзя вообразить, чтобы расходъ въ немъ увеличился, безъ повышенія свободной поверхности въ желобѣ. Поэтому можно сказать, что *при данномъ расположеніи свободной поверхности желобъ пропускаетъ въ установившемся движеніи наибольшій возможный расходъ*, и, наоборотъ, *при данномъ расходѣ свободная поверхность установившагося потока располагается возможно низко*.

Въ примѣненіи къ водосливу этотъ постулатъ приводитъ къ слѣдующему уравненію. Вообразимъ сначала, что уровень за водосливомъ стоитъ на той же высотѣ надъ порогомъ, что и до него. Будемъ опускать этотъ уровень: черезъ порогъ переливается нѣкоторое количество воды, при чемъ горизонтъ въ **B** понижается, отчасти вызывая пониженіе горизонта и въ **E**; при этомъ, въ силу того, что сѣченіе **E** взято тамъ, гдѣ скорости нѣтъ, пониженіе уровня здѣсь ничтожно мало по сравненію съ пониженіемъ въ точкѣ **B**; кромѣ того, измѣняется положеніе точки **D**, притомъ такъ, что толщина струи уменьшается. Чѣмъ дальше опускается горизонтъ за порогомъ, тѣмъ меньше, до извѣстнаго предѣла, это пониженіе сказывается на уменьшеніи толщины струи. Наконецъ, пусть за порогомъ уровень опустился такъ низко, что его дальнѣйшее пониженіе перестаетъ уже вліять на истеченіе. Это послѣднее опусканіе вызываетъ послѣднее уменьшеніе $(-dy)$ толщины струи, которое все-таки несравненно ощутительнѣе, нежели соотвѣтствующее послѣднее измѣненіе $(-dh)$ высоты h точки **E**. Такимъ образомъ, за все время пониженія уровня за порогомъ можно считать dh очень малымъ по сравненію съ dy, а въ послѣдній моментъ нужно положить

$$\frac{dh}{dy}=0.$$

Съ другой стороны, расходъ Q, очевидно, является функціей напора h и толщины струи y, т.-е.

$$Q=F(h,y).$$

При этомъ оба перемѣнныя h и y тоже связаны между собою функціональной зависимостью. По принципу наибольшаго расхода необходимо, очевидно, имѣть для Q_{max} уравненіе

$$\frac{dQ}{dy}=0;$$

а такъ какъ Q есть функція двухъ перемѣнныхъ, то

$$\frac{dQ}{dy}=\frac{\partial Q}{\partial h}\cdot\frac{dh}{dy}+\frac{\partial Q}{\partial y}=0 \quad \dots\dots\dots\dots \quad \text{(A)}$$

Но мы уже видѣли, что $\frac{dh}{dy}=0$; слѣдовательно, должно быть удовлетворено ур-іе

$$\frac{\partial Q}{\partial y}=0.$$

Итакъ, если мы выразимъ Q въ функціи напора h и толщины струи y, возьмемъ отъ этого выраженія частную производную по y и приравняемъ ее нулю, то получимъ ур-іе, являющееся слѣдствіемъ названнаго постулата, такъ какъ условіе (A) основано на немъ.

3) Третье допущеніе состоитъ въ томъ, что сжатое сѣченіе **BD** принимается плоскимъ и вертикальнымъ; другими словами, допускается, что всѣ частицы, проходя черезъ вертикаль **BD**, имѣютъ горизонтальныя, хотя и не-

равныя скорости; траекторіи отдѣльныхъ струекъ, вообще кривыя, согласно этому, имѣютъ одну общую вертикальную нормаль **BDO**. Очевидно, что это допущеніе произвольно, и, напр., для струйки **EBC** совершенно невѣрно, но повидимому, въ немъ нѣтъ существеннаго отступленія отъ дѣйствительности.

4) Кромѣ того, Boussinesq предполагаетъ, что отдѣльныя струйки имѣютъ не только общую нормаль, но и общій центръ кривизны для элементовъ, лежащихъ на линіи **BD**. Это допущеніе тоже произвольно, но тѣмъ не менѣе не представляетъ ничего невѣроятнаго и въ то же время есть простѣйшее, которое только можно вообразить. Называя радіусъ кривизны струйки **ADF** для точки **D** черезъ $R_0 = OD$, можемъ выразить радіусъ кривизны R струйки **NMQ** для точки **M** ур-іемъ:

$$R = R_0 - \varepsilon + z.$$

Двумя послѣдними допущеніями мы обусловливаемъ опредѣленный законъ распредѣленія давленій въ сѣченіи **BD**. Въ самомъ дѣлѣ, напишемъ общее уравненіе движенія жидкости по оси z—овъ:

$$\frac{1}{\varrho} \cdot \frac{dp}{dz} = Z - \left(\frac{dw}{dt}\right).$$

Здѣсь Z есть проекція внѣшнихъ силъ на вертикаль. Для воды $Z = -g$, если ось z-овъ направлена вверхъ; $\left(\frac{dw}{dt}\right)$ представляетъ проекцію полнаго ускоренія на ось z-овъ. Такъ какъ, по предположенію, радіусъ кривизны всѣхъ траекторій для сѣченія **BD** вертикаленъ, то проекція полнаго ускоренія на ось z-овъ равна его проекціи на радіусъ кривизны, т.-е. равна центростремительному ускоренію:

$$\left(\frac{dw}{dt}\right) = -\frac{v^2}{R}.$$

Поэтому

$$\frac{1}{\varrho} \cdot \frac{dp}{dz} = -g + \frac{v^2}{R_0 + z - \varepsilon} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (3)$$

Дифференцируя по z уравненіе (2), имѣемъ

$$\frac{1}{\varrho} \cdot \frac{dp}{dz} = -g - v\frac{dv}{dz}.$$

Сравнивая два послѣднія выраженія, находимъ:

$$\frac{v}{R_0 + z - \varepsilon} = -\frac{dv}{dz}.$$

Раздѣляя перемѣнныя, получаемъ:

$$\frac{dz}{R_0 + z - \varepsilon} + \frac{dv}{v} = 0.$$

Интегрируя послѣднее уравненіе, получимъ, очевидно:

$$v(R_0 + z - \varepsilon) = const. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Это ур-іе представляетъ законъ измѣненія скорости съ измѣненіемъ координаты z сѣченія BD. Соединяя его съ ур-іемъ (2), легко получить законъ измѣненія давленія въ этомъ сѣченіи.

Примѣнимъ это уравненіе къ струйкѣ EBC, полагая

$$v = v_1$$

и

$$z = \varepsilon + y;$$

получимъ:

$$v_1(R_0 + y) = v\,(R_0 + z - \varepsilon).$$

Уравненіе (2) для той же струйки, при $p = 0$, даетъ:

$$v_1 = \sqrt{2g(h - \varepsilon - y)}.$$

Слѣдовательно,

$$v(R_0 + z - \varepsilon) = (R_0 + y)\sqrt{2g\,(h - \varepsilon - y)} \quad \ldots\ldots \quad (B)$$

Далѣе, примѣнимъ тѣ же два уравненія къ струйкѣ ADF, для чего придется положить:

$$z = \varepsilon \quad , \quad v = v_0.$$

Что же касается до избытка давленія p, то онъ, вообще, можетъ отличаться отъ нуля, такъ какъ при разсматриваемомъ нами случаѣ истеченія безъ бокового сжатія, если не обезпечить доступа воздуха подъ струю, то тамъ можетъ образоваться разрѣженіе; въ нѣкоторыхъ, впрочемъ, случаяхъ, какъ увидимъ, здѣсь имѣется давленіе и больше атмосфернаго. Поэтому положимъ, что въ D есть нѣкоторое избыточное давленіе p_0, которое выразимъ въ доляхъ напора $(h - \varepsilon)$ надъ точкой D такъ:

$$p_0 = -n\gamma\,(h - \varepsilon).$$

Коэффиціентъ n можетъ быть самъ по себѣ и положителенъ, и отрицателенъ. Если n отрицательно, то p_0 есть въ полномъ смыслѣ и з б ы т о к ъ д а в л е н і я, отклоняющій струю кверху. Если $n = 0$, то и $p_0 = 0$, т.-е. давленіе подъ струей равно атмосферному, что соотвѣтствуетъ такъ называемой *свободной струѣ* (nappe libre). Наконецъ, если n положительно, то подъ струею получается разрѣженіе, и атмосферное давленіе прижимаетъ струю книзу въ большей или меньшей степени, смотря по величинѣ разрѣженія.

Итакъ, уравненія (2) и (4) дадутъ въ этомъ случаѣ:

$$v(R_0+z-\varepsilon)=R_0\sqrt{2g(h-\varepsilon)(1+n)} \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

Соединяя это уравненіе съ ур. (B), получаемъ:

$$(R_0+y)\sqrt{h-\varepsilon-y}=R_0\sqrt{(h-\varepsilon)(1+n)} \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

Обозначимъ для краткости:

$$\sqrt{\frac{h-\varepsilon-y}{(h-\varepsilon)(1+n)}}=\frac{R_0}{R_0+y}=k \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Эти послѣднія соотношенія преобразуются въ слѣдующія:

$$\left.\begin{aligned} \frac{y}{h-\varepsilon}&=1-k^2(1+n), \\ \frac{R_0}{y}&=\frac{k}{1-k}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

По смыслу обозначенія (7) k есть абсолютное число, т.-е. для насъ оно положительно ($k>0$). Кромѣ того, изъ второго ур-ія (8) видно, что k во всякомъ случаѣ меньше единицы, такъ какъ отрицательное R_0 значило бы, что вся струя загибается кверху, чего, конечно, быть не можетъ. Далѣе, какъ было упомянуто, всегда

$$y+\varepsilon<h,$$

слѣдовательно,

$$y<h-\varepsilon,$$

а потому имѣемъ

$$0<1-k^2(1+n)<1.$$

Такимъ образомъ, получаемъ для k слѣдующія предѣльныя значенія:

$$\left.\begin{aligned} 1&>k^2(1+n)>0, \\ 1&>k>0. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Опредѣлить величину ε вообще не представляется возможнымъ; поэтому Boussinesq вноситъ новое, пятое, предположеніе, основанное на результатахъ наблюденій Bazin'a, а именно, онъ считаетъ, что отношеніе $\frac{\varepsilon}{h}$ есть постоянная величина.

Такъ какъ h есть всегда данная величина, то, при данномъ n, уравненія (5) и (8) даютъ возможность опредѣлить сначала y, потомъ R_0, затѣмъ для любой точки M скорость v, а по ней изъ (2) давленіе p,—все это въ зависимости отъ неизвѣстной пока величины y, т.-е. отъ новаго перемѣннаго k, введеннаго обозначеніемъ (7). Очевидно поэтому, что и расходъ q черезъ единицу ширины водослива ($Q = qb$) можно выразить также въ функціи k.

Понятно, что вообще:

$$q = \int_{\varepsilon}^{\varepsilon+y} v\,dz.$$

Вносяя сюда v по уравненію (5), при чемъ, конечно h, ε, R_0 и n отъ z не зависятъ, получимъ:

$$q = R_0\sqrt{2g(h-\varepsilon)(1+n)}\int_{\varepsilon}^{\varepsilon+y}\frac{dz}{R_0+z-\varepsilon} = R_0\sqrt{2g(h-\varepsilon)(1+n)}.\ L_n\frac{R_0+y}{R_0}.$$

Выражая R_0 и y по k, а $(h-\varepsilon)$ по ур-іямъ (7) и (8), находимъ:

$$q = \sqrt{2g(h-\varepsilon)(1+n)}\cdot\frac{k}{1-k}(h-\varepsilon)\Big[1-k^2(1+n)\Big]L_n\frac{1}{k}.$$

Послѣ простыхъ преобразованій это даетъ:

$$\left.\begin{aligned} q &= f(k)\left(1-\frac{\varepsilon}{h}\right)^{3/2} h\sqrt{2gh}, \\ &\text{гдѣ для краткости письма обозначено:} \\ f(k) &= \left[k\sqrt{1+n}-(k\sqrt{1+n})^3\right]\frac{L_n k}{k-1} \end{aligned}\right\}\quad \ldots\ldots \textbf{(10)}$$

Полезно отмѣтить, что, если положить

$$f(k)\left(1-\frac{\varepsilon}{h}\right)^{3/2} = \mu,$$

то это выраженіе расхода является тождественнымъ съ уравненіемъ (1).

Изъ неравенствъ (9) видно, что какъ само k, такъ и $k^2(1+n)$ суть положительныя правильныя дроби; слѣдовательно, величина $f(k)$ во всякомъ случаѣ положительна. Однако, при $k=1$ и при $k=0$, т.-е. при предѣльныхъ возможныхъ значеніяхъ k, $f(k)$ получаетъ неопредѣленныя значенія $\frac{0}{0}$ и $\{(0-0).(-\infty)\}$. Въ то же время при $k\sqrt{1+n}=0$, а также при $k\sqrt{1+n}=1$, имѣемъ $f(k)=0$; а такъ какъ при промежуточныхъ значеніяхъ k это количество, какъ мы замѣтили, всегда положительно, то, слѣдовательно, $f(k)$ имѣетъ нѣкоторый maximum.

На основаніи постулата Bélanger—Boussinesq заключаемъ, что q будетъ имѣть то именно значеніе, которое соотвѣтствуетъ максимуму $f(k)$. На основаніи предыдущаго слѣдовало бы, собственно, дифференцировать q по y; но такъ какъ мы считаемъ h независимымъ, $\frac{\varepsilon}{h}=const$, а n даннымъ, то какъ q, такъ и k являются явными функціями одного y, а потому дифференцированіе по y можно замѣнить дифференцированіемъ по k *). Легко также видѣть, что

$$\frac{\partial q}{\partial k}=\frac{\partial f(k)}{\partial k}\cdot C,$$

гдѣ C есть $const$, равное $\left(1-\frac{\varepsilon}{h}\right)^{3/2}h\sqrt{2gh}$. Поэтому условіе $\frac{\partial q}{\partial k}=0$ сводится къ условію $\frac{\partial f(k)}{\partial k}=0$.

Составляемъ, на основаніи второй строки (10), ур-іе $\frac{\partial}{\partial k}f(k)=0$; имѣемъ:

$$\frac{L_nk}{k-1}\left\{\sqrt{1+n}-3k^2(\sqrt{1+n})^3\right\}+\frac{(k-1)-k\,L_nk}{(k-1)^2}\left\{\sqrt{1+n}-k^2(\sqrt{1+n})^3\right\}=0.$$

Сокращая на $\sqrt{1+n}$, приводя къ одному знаменателю и собирая въ правую часть члены съ общимъ множителемъ $k^2(1+n)$, получаемъ:

$$(k-1)L_nk+(k-1)-kL_nk=k^2(1+n)\left\{3(k-1)L_nk+(k-1)-kL_nk\right\}.$$

Дѣлая приведеніе въ обѣихъ частяхъ равенства и дѣля все уравненіе на L_nk, получаемъ:

$$\frac{k-1}{L_nk}-1=k^2(1+n)\left\{\frac{k-1}{L_nk}+2(k-1)-1\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Наконецъ, рѣшая это ур-іе, но не относительно k, а относительно $k^2(1+n)$, находимъ:

$$\left.\begin{aligned} k^2(1+n)&=\frac{1}{1+\varphi(k)} \\ \text{гдѣ обозначено:}\qquad \frac{2}{\varphi(k)}&=\frac{1}{L_nk}+\frac{1}{1-k} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

---

*) Строго говоря, эта замѣна возможна, если полученную производную умножимъ еще на $\frac{dk}{dy}$. Но такъ какъ мы имѣемъ въ виду приравнять все нулю, то, очевидно, $\frac{dk}{dy}$ при этомъ сократится, и у насъ останется только $\frac{\partial q}{\partial k}=0$ вмѣсто $\frac{\partial q}{\partial y}=0$.

Итакъ, составляя ур-iе $\frac{\partial}{\partial k} f(k) = 0$ на основанiи ур-iя (10), мы находимъ соотношенiе (11) или (12) между k и n, которое вполнѣ опредѣляетъ величину k, т.-е. дѣлаетъ вопросъ объ истеченiи черезъ водосливъ, при данныхъ напорѣ и давленiи подъ струею, вполнѣ рѣшеннымъ, въ предположенiи лишь, что $\frac{\varepsilon}{h} = const.$

Рѣшенiе уравненiя (12) не составитъ затрудненiя, если опредѣлять изъ него не k для всякаго заданнаго n, а, наоборотъ, находить то n, которое соотвѣтствуетъ всѣмъ возможнымъ величинамъ k, относительно котораго мы уже знаемъ, что $1 > k > 0$. Въ таблицѣ 18 приведены какъ нѣкоторые корни ур-iя (12), такъ и соотвѣтствующiя имъ значенiя нѣкоторыхъ величинъ, характеризующихъ истеченiе.

Таблица 18.

k	n	$\frac{y}{h-\varepsilon}$	$\frac{R_0}{h-\varepsilon}$	$f(k)$
0	$+\infty$	0,6667	0	$+\infty$
0,1	24,2800	0,7472	0,0830	0,9612
0,2	4,9790	0,7608	0,1902	0,7486
0,3	1,5575	0,7698	0,3299	0,6352
0,4	0,3961	0,7766	0,5177	0,5605
0,46854	0	0,7806	0,6881	0,5216
0,5	—0,1283	0,7821	0,7821	0,5061
0,6	—0,4074	0,7867	1,1800	0,4640
0,7	—0,5726	0,7906	1,8450	0,4301
0,8	—0,6783	0,7941	3,1760	0,4020
0,9	—0,7494	0,7971	7,1740	0,3783
1,0	—0,8000	0,8000	$+\infty$	0,3578

Требуютъ поясненiя рѣшенiя этихъ уравненiй въ случаѣ $n = 0$ и въ случаѣ $k = 1$. Если $n = 0$, то удобно находить соотвѣтственное k не изъ ур-iя (12), а изъ (11). Изъ него въ этомъ случаѣ получаемъ:

$$\frac{k-1}{L_n k} - 1 = k^2 \left\{ \frac{k-1}{L_n k} + 2(k-1) - 1 \right\}.$$

Отсюда

$$\frac{k-1}{L_n k} - 1 = 2k^2 \frac{k-1}{1-k^2} = -\frac{2k^2}{1+k}$$

или

$$\frac{k-1}{L_n k} = \frac{1+k-2k^2}{1+k} = \frac{(1-k)(1+2k)}{1+k} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

Замѣчая, что

$$L_n k = -L_n \frac{1}{k},$$

получимъ:

$$L_n \frac{1}{k} = \frac{1+k}{1+2k} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(C)}$$

Наконецъ, разлагая $L_n \frac{1}{k}$ въ рядъ, получимъ уравненіе, содержащее k въ цѣлыхъ степеняхъ. Рѣшая его, Boussinesq находитъ $k = 0{,}46\,854$. Что это дѣйствительно есть корень уравненія, убѣждаемся непосредственной подстановкой въ ур-іе (C). Находимъ:

$$\frac{1+k}{1+2k} = \frac{1{,}46\,854}{1{,}93\,708} = 0{,}7581.$$

$$L_n \frac{1}{k} = L_n 2{,}135 = L_n 213{,}5 - L_n 100 = 5{,}3637 - 4{,}6052 = 0{,}7585.$$

Равенство (C) удовлетворяется съ вполнѣ достаточной точностью.

Для нахожденія $f(k)$ удобно предварительно преобразовать ея выраженіе (10) при помощи уравненія (13). Такъ какъ въ нашемъ случаѣ $n = 0$, то, очевидно,

$$f(k) = \frac{k(1-k^2)(1+k)}{(1-k)(1+2k)} = \frac{k(1+k)^2}{1+2k} = 0{,}5216.$$

Рѣшеніе уравненій (12) при $k = 1$ дѣлается такъ: очевидно, въ этомъ случаѣ мы имѣемъ

$$\frac{2}{\varphi(k)} = -\frac{1}{0} + \frac{1}{0}.$$

Чтобы раскрыть эту неопредѣленность, поступаемъ по общему правилу, беря производныя отъ числителя и знаменателя:

$$\frac{2}{\varphi(k)} = \frac{\frac{\partial}{\partial k}(1-k+L_n k)}{\frac{\partial}{\partial k}\left[(1-k)L_n k\right]} = \left\{\frac{-1+\frac{1}{k}}{-L_n k + \frac{1-k}{k}}\right\}_{k=1} = \frac{0}{0+0}.$$

Продолжая раскрывать неопредѣленность, беремъ вторыя производныя; получаемъ:

$$\frac{2}{\varphi(k)} = \frac{\frac{\partial}{\partial k}(-k+1)}{\frac{\partial}{\partial k}(1-k-kL_n k)} = \left\{\frac{-1}{-1-L_n k-\frac{k}{k}}\right\}_{k=1} = \frac{1}{2}.$$

Слѣдовательно,

$$\left\{\varphi(k)\right\}_{k=1} = 4,$$

и потому, по уравненію (12),

$$1+n = \frac{1}{5}$$

или

$$n = -0{,}8.$$

Подобнымъ же образомъ раскроемъ неопредѣленность значенія $f(k)$ въ уравненіи (10) при $k = 1$.

Требуетъ также нѣкотораго поясненія случай $k=0$, которому по ур-іямъ (12) соотвѣтствуетъ $n=+\infty$. Положительныя значенія n, какъ мы видѣли, соотвѣтствуютъ разрѣженію подъ струей, которое, будучи измѣряемо высотою водяного столба, не можетъ, очевидно, быть больше 10,33 *mtr*,—иначе получился бы разрывъ; слѣдовательно, величина n должна удовлетворять условію:

$$-n\gamma(h-\varepsilon) \geqq -10{,}33\,\gamma$$

или

$$n \leqq \frac{10{,}33}{h-\varepsilon}.$$

Отсюда видно, что $n=+\infty$ только въ томъ случаѣ, когда

$$h-\varepsilon = h\left(1-\frac{\varepsilon}{h}\right)=0;$$

въ нашемъ предположеніи, что $\frac{\varepsilon}{h}=const$, это возможно только при $h=0$; а въ этомъ случаѣ истеченія нѣтъ. Значитъ, случай $k=0$ является только предѣльнымъ и реальнаго значенія не имѣетъ.

Итакъ, уравненіе (12) или таблица (18) даютъ возможность исключить величину k изъ уравненій (10), послѣ чего расходъ q будетъ зависѣть отъ отношенія $\frac{\varepsilon}{h}$, отъ давленія подъ струею n и отъ напора h. Такъ какъ, согласно съ Boussinesq, мы условились считать $\frac{\varepsilon}{h}=const$, то расходъ черезъ водосливъ становится вполнѣ извѣстенъ, если извѣстны n и h, совершенно независимо отъ всякихъ эмпирическихъ коэффиціентовъ (кромѣ отношенія $\frac{\varepsilon}{h}$). Измѣреніе величины n можно замѣнить измѣреніемъ, напримѣръ, высоты h' точки *B* надъ порогомъ *A*, при чемъ большой ошибки не будетъ, если принять *B* на одной вертикали съ *A*. Эта величина h', очевидно, есть то, что мы назвали $(y+\varepsilon)$; вычитая изъ нея величину $\frac{\varepsilon}{h}.h$, гдѣ напоръ h также дается измѣреніемъ, получимъ толщину струи, послѣ чего находимъ отношеніе $\frac{y}{h-\varepsilon}$ и по таблицѣ беремъ соотвѣтствующее значеніе $f(k)$; по нему находимъ и расходъ q.

Понятно, что когда доступъ воздуха подъ струю обезпеченъ, т.-е. когда извѣстно заранѣе, что $n=0$, то этого второго измѣренія дѣлать не нужно; нужно только знать напоръ h, и тогда расходъ Q черезъ вертикальный совершенный водосливъ шириною b, безъ сжатія съ боковъ, будетъ выражаться формулой:

$$Q=q\,b=0{,}5216\left(1-\frac{\varepsilon}{h}\right)^{3/2} bh\sqrt{2gh} \quad \ldots\ldots\ldots (14)$$

Что касается величины отношенія $\frac{\varepsilon}{h}$, то Boussinesq считаетъ ее постоянной на основаніи слѣдующихъ наблюденій Bazin'a *):

*) См. Annales des ponts et chaussées, 1890, 1 sém., page 66.

Bazin опредѣлялъ профили струй какъ **EBC**, такъ и **ADF**; доступъ воздуха подъ струю былъ обезпеченъ, такъ что $n=0$; водосливъ былъ шириною въ $2\,mtr$; высота порога надъ дномъ канала была $1{,}13\,mtr$, т.-е. настолько велика, что скорость въ каналѣ была незамѣтна (совершенное сжатіе); сжатія съ боковъ не было. Приводимъ въ таб. 19 полученныя имъ величины ε для разныхъ напоровъ h.

Таблица 19.

h въ $mtr.$	0,152	0,200	0,252	0,268	0,300	0,318	0,345	0,400	0,449
ε въ $mm.$	16,4	22,3	28,2	29,2	33,9	36,0	41,3	46,0	50,0
$\frac{\varepsilon}{h}$	0,108	0,1115	0,112	0,109	0,113	0,113	0,120	0,115	0,100

Изъ таблицы видно, что, дѣйствительно, отношеніе $\frac{\varepsilon}{h}$ при разныхъ h (и при $n=0$) сохраняетъ почти постоянную величину. Чтобы считаться съ тѣмъ, что, все таки, въ каналѣ была нѣкоторая скорость, вызывавшая не вполнѣ совершенное сжатіе, примемъ для $\frac{\varepsilon}{h}$ не его среднюю величину, а нѣсколько большую,—именно, будемъ считать $\frac{\varepsilon}{h}=0{,}12$. Тогда

$$\left(1-\frac{\varepsilon}{h}\right)^{3/2}=0{,}88^{3/2}=0{,}825,$$

а потому по ур-ію (14) для $n=0$ получимъ:

$$Q=0{,}5216\,.\,0{,}825\,bh\sqrt{2gh}=0{,}43\,032\;bh\sqrt{2gh}.$$

Непосредственныя измѣренія, указанныя ниже въ § 17, привели Bazin'а къ заключенію, что при $n=0$ и при очень большой глубинѣ передъ порогомъ, для напоровъ, измѣняющихся отъ 0,05 до 0,5 mtr, числовой коэффиціентъ въ этой формулѣ долженъ измѣняться отъ 0,448 до 0,412, т.-е. въ въ среднемъ равенъ 0,430, что очень хорошо сходится съ теоретической величиной Boussinesq *).

*) Нѣкоторое разногласіе результатовъ теоріи и наблюденій получится въ величинѣ отношенія $\frac{y}{h}=\frac{y}{h-\varepsilon}\left(1-\frac{\varepsilon}{h}\right)$, которое для $n=0$ по Boussinesq равно $0{,}7806\,.\,0{,}88=0{,}6869$. Наблюденія Bazin'а дали въ среднемъ $\frac{y}{h}=0{,}668$, т.-е. на 3% меньше. Поэтому въ 1889 г. (см. Comptes rendus, 1889, томъ CIX, второе полугодіе, стр. 514) Boussinesq опубликовалъ новый мемуаръ, гдѣ, отказываясь отъ предположенія $\frac{\varepsilon}{h}=const$, онъ вводитъ предположеніе

§ 17. Практическія данныя объ истеченіи черезъ водосливы.

Основнымъ матеріаломъ по этому вопросу служили ранѣе опыты Lesbros; далѣе большое значеніе имѣли опыты Francis'а (въ 50-хъ годахъ); позднѣе появились обширные опыты Fteley и Stearns'а. Въ періодъ времени отъ 1886 по 1895 г. извѣстный французскій гидравликъ Bazin произвелъ длинный рядъ наблюденій надъ водосливами въ 2 *mtr* длиной, — наблюденій весьма разнообразныхъ и обстоятельныхъ. Результаты наблюденій со всѣми подробностями публиковались въ журналѣ Annales des ponts et chaussées по мѣрѣ хода работъ; въ 1898 году Bazin издалъ главные результаты своихъ наблюденій въ книгѣ „Expériences nouvelles sur l'écoulement en déversoir". Обширную экспериментальную работу по этому вопросу опубликовалъ въ „Журналѣ о-ва нѣмецкихъ инженеровъ" за 1890 годъ (стр. 1285 и слѣд.) ганноверскій профессоръ Frese. Заслуживаетъ упоминанія также работа извѣстнаго турбиннаго заводчика W. Hansen, помѣщенная въ томъ же журналѣ за 1892 годъ (стр. 1057 и слѣд.). Данныя Bazin'а лягутъ въ основу нижеслѣдующаго изложенія; иногда придется дѣлать сближенія съ данными другихъ авторовъ.

A) Начнемъ съ случая *свободнаго изліянія въ атмосферу* ($n=0$). Расходъ опредѣляется по уравненію (1); коэффиціентъ μ зависитъ отъ очень многихъ обстоятельствъ. Одно изъ важнѣйшихъ—это бо́льшая или меньшая степень совершенства сжатія; далѣе, имѣетъ вліяніе положеніе стѣнки водослива и бо́льшая или меньшая толщина его кромки; важно, наконецъ, присутствіе или отсутствіе бокового сжатія. Разсмотримъ эти случаи по порядку.

1) *Вертикальный водосливъ съ тонкой стѣнкой безъ сжатія съ боковъ.* Несовершенное сжатіе наблюдается при замѣтной скорости передъ порогомъ; это есть то, съ чѣмъ почти всегда приходится и необходимо считаться. Обыкновенно разсуждаютъ такъ: если передъ водосливомъ вода обладаетъ нѣкоторой средней скоростью *) v_0, то истеченіе происходитъ не только подъ напоромъ h, но еще подъ добавочнымъ напоромъ, пропорціональнымъ напору $\frac{v_0^2}{2g}$,— обозначимъ его черезъ $\alpha\frac{v_0^2}{2g}$; поэтому, если въ первое изъ ур-ій (10) вмѣсто h подставимъ $h+\alpha\frac{v_0^2}{2g}$, то получимъ такимъ образомъ выраженіе расхода черезъ единицу ширины водослива въ формѣ:

$$q=\mu\left(h+\alpha\frac{v_0^2}{2g}\right)\sqrt{2g\left(h+\alpha\frac{v_0^2}{2g}\right)}=\mu\sqrt{2g}\left(h+\alpha\frac{v_0^2}{2h}\right)^{3/2}, \quad . \; . \; . \quad (15)$$

гдѣ

$$\mu=\left(1-\frac{2g\varepsilon}{2gh+\alpha v_0^2}\right)^{3/2}\left[k\sqrt{1+n}-(k\sqrt{1+n})^3\right]\frac{L_n k}{k-1}\,.$$

$\frac{\varepsilon}{\varepsilon+y}=const$. Пользуясь этимъ соотношеніемъ и ур-іемъ (8), онъ выражаетъ величину $\left(1-\frac{\varepsilon}{h}\right)^{3/2}$ въ функціи k и относитъ ее къ перемѣнной величинѣ $f(k)$ въ ур-іяхъ (10). Диф-ніе по k этой новой величины $f(k)$ даетъ, конечно, новое ур-іе (12), связывающее k съ n. Рѣшая его путемъ послѣдовательныхъ приближеній и считая $\frac{\varepsilon}{\varepsilon+y}=0{,}14$, Boussinesq получаетъ для случая $n=0$:

$$\frac{y}{h}=0{,}668,$$

$$Q=0{,}435\ bh\sqrt{2gh},$$

что очень хорошо сходится съ данными Bazin'а.

*) См. главу IV „Движеніе воды въ каналахъ".

Въ мемуарѣ отъ 17 и 24 сентября 1888 года (см. Comptes rendus, томъ CVII) Boussinesq даетъ составъ коэффиціента α и его зависимость отъ k и n. Мы ограничимся изложеніемъ результатовъ, полученныхъ Bazin'омъ въ его многочисленныхъ опытахъ *).

Представимъ уравненіе (15) въ такомъ видѣ:

$$q = \mu h \sqrt{2gh} \left(1 + \alpha \frac{v_0^2}{2gh}\right)^{3/2}.$$

Такъ какъ $\frac{v_0^2}{2gh}$ есть всегда небольшая правильная дробь, то, разлагая степень въ рядъ и ограничиваясь только однимъ членомъ, содержащимъ первую степень этой дроби, можемъ написать

$$q = \mu h \sqrt{2gh} \left(1 + \frac{3}{2} \alpha \frac{v_0^2}{2gh}\right).$$

Если полная глубина передъ каналомъ (тамъ же, гдѣ измѣряется напоръ h) есть H, то, очевидно,

$$v_0 = \frac{q}{H},$$

а потому можно положить:

$$\frac{v_0^2}{2gh} = \frac{q^2}{2ghH^2} = M^2 \left(\frac{h}{H}\right)^2.$$

По смыслу введеннаго обозначенія слѣдуетъ, что подъ буквой M мы подразумѣваемъ:

$$M = \frac{q}{h\sqrt{2gh}} = \mu \left[1 + \frac{3}{2} \alpha \frac{v_0^2}{2gh}\right]$$

или, замѣняя скорость v_0 черезъ вышеприведенное ея выраженіе:

$$M = \mu \left[1 + \frac{3}{2} \alpha M^2 \left(\frac{h}{H}\right)^2\right].$$

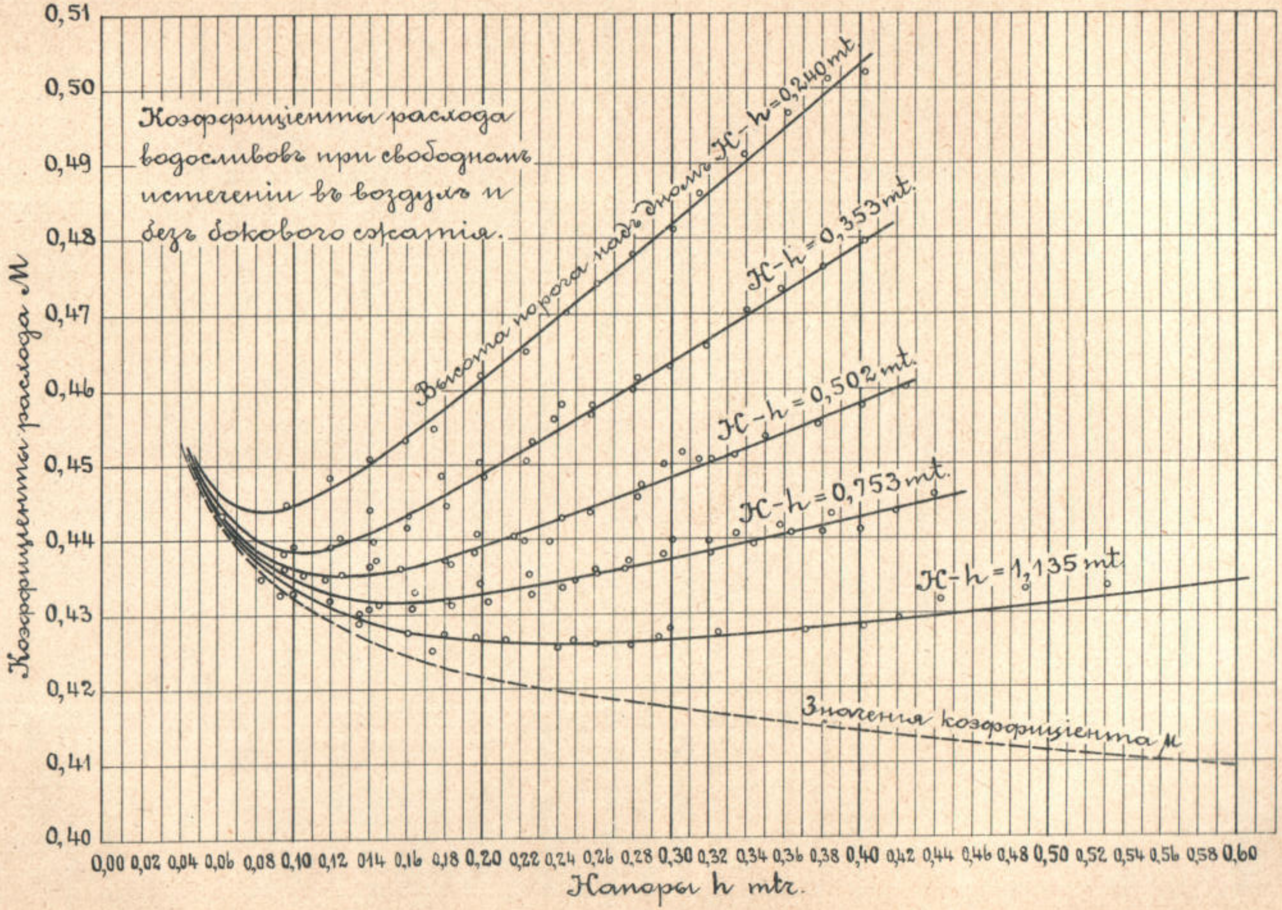
Обозначая далѣе одной буквой K эмпирическій коэффиціентъ $\frac{3}{2}\alpha M^2$, входящій въ послѣднюю часть равенства, находимъ, что расходъ опредѣляется ур-іемъ

$$q = Mh\sqrt{2gh},$$

гдѣ

$$M = \mu \left[1 + K \left(\frac{h}{H}\right)^2\right]. \qquad \ldots\ldots\ldots\ (16)$$

*) См. Annales des ponts et chaussées, 1882, 2[e] sém., page 417.



См. ур.-ія 16 и 17 и табл. 20.

Величина M является, слѣдовательно, коэффиціентомъ расхода при несовершенномъ сжатіи; μ есть тоже коэффиціентъ расхода при H очень большомъ по сравненію съ h, т.-е. при совершенномъ сжатіи.

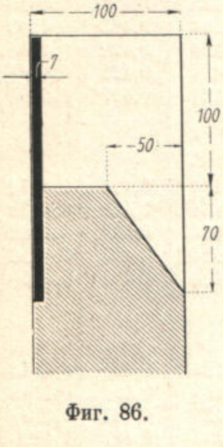
На основаніи своихъ опытовъ, Bazin даетъ для α значеніе $^5/_3$, а для K величину 0,55, причемъ, слѣдовательно,

$$M = \mu \left\{ 1 + 0{,}55 \frac{h^2}{H^2} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Самая величина μ опредѣлилась изъ сравненія наблюденій надъ водосливами разной глубины (подробнѣе см. послѣднюю упомянутую статью Bazin'а); изъ этихъ данныхъ Bazin вывелъ формулу:

$$\mu = 0{,}405 + \frac{0{,}003}{h} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

По формулѣ (17) подсчитана нижеприводимая таблица 20. Указанныя въ ней значенія μ не вполнѣ соотвѣтствуютъ формулѣ (18).



Фиг. 86.

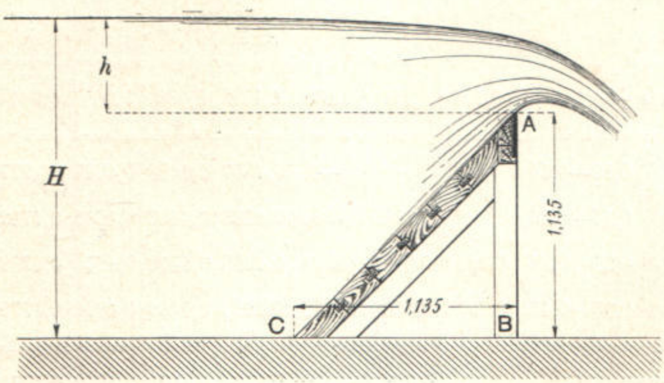
На отдѣльной таблицѣ III данныя этой таблицы представлены графически въ примѣненіи къ пяти водосливамъ, испытаннымъ Bazin'омъ. Точки представляютъ величины M, полученныя наблюденіемъ. Какъ видно, пока напоръ малъ, т.-е. пока расходъ, а слѣдовательно, и скорость, въ подводящемъ каналѣ малы, всѣ коэффиціенты уменьшаются съ увеличеніемъ напора, подобно случаю отверстій. Съ увеличеніемъ напора и, слѣдовательно, скорости подхода, послѣдняя сильно вліяетъ, и коэффиціентъ расхода растетъ тѣмъ быстрѣе, чѣмъ меньше высота $(H - h)$ водослива. Коэффиціентъ μ, наоборотъ, непрерывно убываетъ, такъ какъ онъ предполагаетъ полное отсутствіе скорости подхода. Изъ таблицы видно также, что кривыя очень хорошо передаютъ результаты наблюденій, — ошибки, вообще, не достигаютъ 1%, такъ что уравненіями (17) и (18) пользоваться, вообще, можно. Профиль водосливовъ Bazin'а указанъ на фиг. 86.

2) Очень часто условіе вертикальности стѣнки не бываетъ соблюдено,—*стѣнка водослива можетъ быть наклонена по теченію* (фиг. 87) или *противъ теченія* (фиг. 88). Само собою понятно, что здѣсь нельзя ожидать, чтобы отношеніе $\frac{\varepsilon}{h}$ сохраняло ту же величину, какъ для вертикальнаго водослива; напротивъ того, на фиг. 87 должно ожидать меньшаго $\frac{\varepsilon}{h}$, а на фиг. 88—бóльшаго $\frac{\varepsilon}{h}$, нежели въ случаѣ фиг. 85. Что касается до величины этого отношенія, то теорія Boussinesq отвѣта на этотъ вопросъ не даетъ. Зато, согласно съ нею, оба случая фиг. 87 и 88, кромѣ величины $\frac{\varepsilon}{h}$, ничѣмъ существенно не отличаются отъ случая фиг. 85. На это указалъ Bazin, обстоятельно изучившій рядъ водосливовъ типа фиг. 88, у которыхъ отношеніе $\frac{AB}{BC}$ было или $\frac{1}{1}$, или $\frac{3}{2}$, или $\frac{3}{1}$, а также

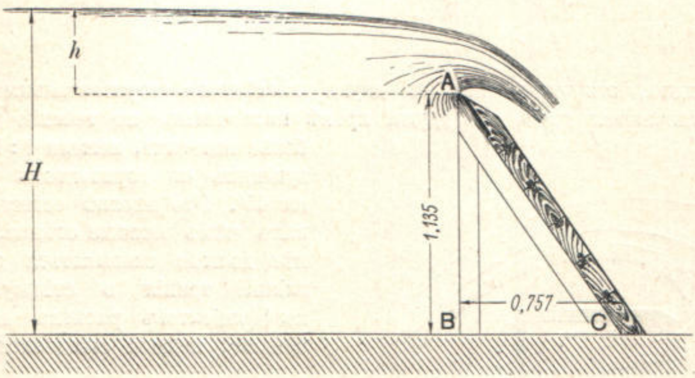
Таблица 20.

Напоръ h въ mtr.	Значенія коэф-товъ M въ ур-іи (17) при высотѣ порога надъ дномъ канала $(H-h)$ въ mtr.									μ при H очень большомъ.
	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,80	1,00	1,50	2,00	
0,05	0,458	0,453	0,451	0,450	0,449	0,449	0,449	0,448	0,448	0,4481
0,06	0,456	0,450	0,447	0,445	0,445	0,444	0,443	0,443	0,443	0,4427
0,07	0,455	0,448	0,445	0,443	0,442	0,441	0,440	0,440	0,439	0,4391
0,08	0,456	0,447	0,443	0,441	0,440	0,438	0,438	0,437	0,437	0,4363
0,09	0,457	0,447	0,442	0,440	0,438	0,436	0,436	0,435	0,434	0,4340
0,10	0,459	0,447	0,442	0,439	0,437	0,435	0,434	0,433	0,433	0,4322
0,12	0,462	0,448	0,442	0,438	0,436	0,433	0,432	0,430	0,430	0,4291
0,14	0,466	0,450	0,443	0,438	0,435	0,432	0,430	0,428	0,428	0,4267
0,16	0,471	0,453	0,444	0,438	0,435	0,431	0,429	0,427	0,426	0,4646
0,18	0,475	0,456	0,445	0,439	0,435	0,431	0,428	0,426	0,425	0,4229
0,20	0,480	0,459	0,447	0,440	0,436	0,431	0,428	0,425	0,423	0,4215
0,22	0,484	0,462	0,449	0,442	0,437	0,431	0,428	0,424	0,423	0,4203
0,24	0,488	0,465	0,452	0,444	0,438	0,432	0,428	0,424	0,422	0,4194
0,26	0,492	0,468	0,455	0,446	0,440	0,432	0,429	0,424	0,422	0,4187
0,28	0,496	0,472	0,457	0,448	0,441	0,433	0,429	0,424	0,422	0,4181
0,30	0,500	0,475	0,460	0,450	0,443	0,434	0,430	0,424	0,421	0,4174
0,32	0,504	0,478	0,462	0,452	0,444	0,436	0,430	0,424	0,421	0,4168
0,34	0,507	0,481	0,464	0,454	0,446	0,437	0,431	0,424	0,421	0,4162
0,36	0,510	0,483	0,467	0,456	0,448	0,438	0,432	0,424	0,421	0,4156
0,38	0,513	0,486	0,469	0,458	0,449	0,439	0,432	0,424	0,421	0,4150
0,40	0,516	0,489	0,472	0,459	0,451	0,440	0,433	0,424	0,421	0,4144
0,42	—	0,491	0,474	0,461	0,452	0,441	0,434	0,425	0,421	0,4139
0,44	—	0,494	0,476	0,463	0,454	0,442	0,435	0,425	0,421	0,4134
0,46	—	0,496	0,478	0,465	0,456	0,443	0,435	0,435	0,421	0,4128
0,48	—	0,498	0,480	0,467	0,457	0,444	0,436	0,425	0,421	0,4122
0,50	—	0,500	0,482	0,468	0,459	0,445	0,437	0,426	0,421	0,4118
0,52	—	0,502	0,484	0,470	0,460	0,446	0,438	0,426	0,421	0,4113
0,54	—	0,504	0,485	0,472	0,461	0,447	0,439	0,426	0,421	0,4108
0,56	—	0,506	0,487	0,473	0,463	0,449	0,439	0,427	0,421	0,4103
0,58	—	0,508	0,489	0,475	0,464	0,450	0,440	0,427	0,421	0,4099
0,60	—	0,510	0,491	0,476	0,466	0,451	0,441	0,428	0,421	0,4095
0,62	—	—	0,492	0,478	0,467	0,452	0,442	0,428	0,422	0,4091
0,64	—	—	0,494	0,480	0,469	0,453	0,443	0,429	0,422	0,4087
0,66	—	—	0,495	0,481	0,470	0,454	0,444	0,429	0,422	0,4084
0,68	—	—	0,497	0,483	0,471	0,455	0,445	0,430	0,422	0,4080
0,70	—	—	0,498	0,484	0,473	0,456	0,446	0,430	0,423	0,4077

рядъ водосливовъ по типу фиг. 87, гдѣ отношеніе $\frac{AB}{BC}$ было соотвѣтственно равно $\frac{3}{1}, \frac{3}{2}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}$ и $\frac{1}{4}$.



Фиг. 87.



Фиг. 88.

Эти наблюденія подтвердятъ теорію Boussinesq, если наблюденные расходы будутъ пропорціональны наблюденнымъ значеніямъ $\left(1 - \frac{\varepsilon}{h}\right)^{3/2}$, согласно уравненію (14). Въ таблицѣ 21 приведены округленные результаты наблюденій Bazin'а *) надъ водосливомъ глубиною въ 1,13 *mtr* ($AB = 1{,}13$ *mtr*), причемъ для сравненія приведены отношенія коэффиціентовъ расхода въ наклонныхъ водосливахъ къ коэффиціенту расхода въ вертикальномъ водосливѣ, и рядомъ же приведены соотвѣтствующія отношенія величинъ $\left(1 - \frac{\varepsilon}{h}\right)^{3/2}$.

---

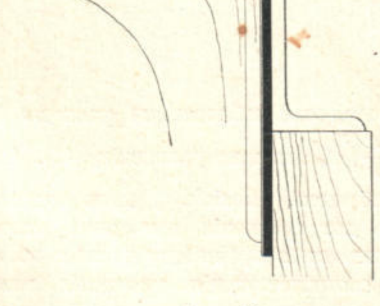
*) См. Annales des ponts et chaussées, 1890, 1 sém., p. 33 et 46.

Таблица 21.

Водосливъ съ глубиною порога надъ дномъ подводящаго канала $= 1{,}13$ *mtr*.

		Наклонъ противъ теченія.			Вертикальный.	Наклонъ по теченію.				
		1 : 1	3 : 2	3 : 1		3 : 1	3 : 2	1 : 1	1 : 2	1 : 4
Отношенія $\frac{\varepsilon}{h}$.		0,159	0,150	0,136	0,112	0,089	0,061	0,041	0,012	0,003
Значеніе *M* при напорѣ въ *mtr*.	0,10—0,15	—	—	—	0,4307	0,4488	0,4668	0,4777	0,4896	0,4692
	0,15—0,25	—	0,3989	0,4066	0,4266	0,4456	0,4636	0,4762	0,4844	0,4719
	0,25 – 0,35	0,3941	0,3986	0,4098	0,4266	0,4469	0,4650	0,4768	0,4850	0,4728
	0,35—0,45	0,3976	0,4005	0,4136	0,4286	0,4488	0,4656	0,4775	0,4883	0,4744
Среднее значеніе *M*.		0,3958	0,3993	0,4100	0,4281	0,4475	0,4652	0,4771	0,4868	0,4721
Отношенія *M*.		0,9250	0,9330	0,9580	1,0000	1,0450	1,0870	1,1150	1,1370	1,1030
Отношенія величинъ $\left(1-\frac{\varepsilon}{h}\right)^{3/2}$		0,9210	0,9370	0,9590	1,0000	1,0390	1,0870	1,1220	1,1730	0,1890

Какъ видно, эти отношенія въ двухъ послѣднихъ горизонтальныхъ строкахъ весьма мало отличаются другъ отъ друга, кромѣ наклонныхъ по теченію водосливовъ, болѣе пологихъ, нежели 1 : 1, т.-е. образующихъ съ горизонтомъ уголъ меньше 45^0. Это вполнѣ естественно, такъ какъ чѣмъ положе стѣнка, тѣмъ сильнѣе должно сказываться замедляющее вліяніе тренія о стѣнку: отношеніе коэффиціентовъ расхода должно быть меньше, нежели ожидаемое въ зависимости отъ величины $\frac{\varepsilon}{h}$, что и видно по таблицѣ 21.



Фиг. 89.

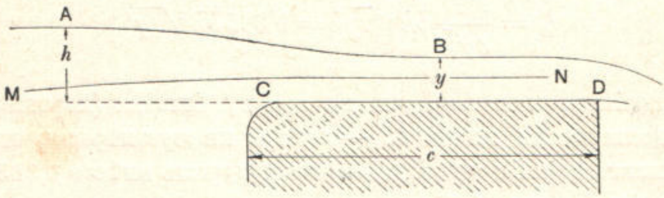
При такихъ водосливахъ выбираютъ ***M*** по таблицѣ 20 или уравненію (17) и исправляютъ согласно предпослѣдней горизонтальной строкѣ таблицы 21.

Предѣльнымъ случаемъ наклона противъ теченія можно считать случай, указанный на фиг. 89, гдѣ къ вертикальной стѣнкѣ ***AB*** пришита тонкая и узкая (150 *mm*) желѣзная доска, образующая передъ водосливомъ нѣчто подобное насадку Борда.

Примѣняя сюда ур-іе количествъ движенія, причемъ распредѣленіе скоростей въ сжатомъ сѣченіи принимается по ур-ію (4), совершенно подобно тому, какъ это было сдѣлано для насадка Борда, Boussinesq находитъ, что въ этомъ случаѣ отношеніе $\frac{\varepsilon}{h}$ должно имѣть значеніе 0,2 *). Bazin для этого случая нашелъ $\frac{\varepsilon}{h}=0{,}188$, что довольно близко къ результату Boussinesq. Здѣсь, какъ и въ насадкѣ Борда, дѣйствительное сжатіе нѣсколько меньше теоретическаго.

3) Если случай фиг. 89 можно разсматривать, какъ предѣльный случай фигуры 88, то *водосливъ съ толстой стѣнкой* (фиг. 90) можно считать предѣльнымъ случаемъ фигуры 87. Уравненія (10) примѣнимы и тутъ **); но отъ нихъ нельзя ожидать большой точности, такъ какъ становится замѣтнымъ треніе о толстую стѣнку; Bélanger получилъ тотъ же результатъ, къ которому придемъ, примѣняя къ этому случаю уравненія (10), но гораздо болѣе простымъ путемъ, а именно:

Въ какомъ-нибудь сѣченіи ***B*** (фиг. 90) надъ стѣнкою ***CD*** можно считать, что всѣ струйки движутся прямолинейно и параллельно, если только



Фиг. 90.

стѣнка ***CD*** достаточно толста, чтобы направить струйки и, кромѣ того, если передъ ***C*** она скруглена такъ, что струйка, вступающая въ ***C***, не испытываетъ сжатія. Если въ сѣченіи ***B*** струйки прямолинейны и параллельны, то давленія въ немъ распредѣляются по закону гидростатики; то же можно сказать и о всякомъ другомъ сѣченіи ***A***, взятомъ достаточно далеко передъ порогомъ, чтобы считать въ немъ скорость равною нулю. Тогда для какой-нибудь струйки ***MN*** можно написать уравненіе Д. Бернулли въ предѣлахъ отъ ***A*** до ***B*** въ видѣ:

$$h=y+\frac{v^2}{2g}, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad \text{(E)}$$

гдѣ y есть глубина сѣченія ***B***, а v есть скорость струйки. Отсюда видно, что скорости всѣхъ струекъ одинаковы, какъ при истеченіи подъ уровень подъ напоромъ $h-y$. Это справедливо, конечно, постольку, поскольку треніе о стѣнки не вліяетъ на движеніе жидкости. Опредѣляя изъ (E) ско-

*) См. Comptes rendus, 1887, томъ CV, второе полугодіе, стр. 697.

**) Ibid., стр. 632.

рость v и подсчитывая расходъ Q, найдемъ, что, при ширинѣ водослива b, черезъ него перельется количество жидкости:

$$Q = byv = by\sqrt{2g(h-y)}.$$

Для опредѣленія высоты y примѣнимъ принципъ наибольшаго расхода, — т.-е. составляемъ производную $\frac{\partial Q}{\partial y}$ и приравниваемъ ее нулю; находимъ:

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = b\sqrt{2g}\left\{\sqrt{h-y} - \frac{y}{2\sqrt{h-y}}\right\} = 0.$$

Отсюда находимъ

$$2h - 2y = y$$

или

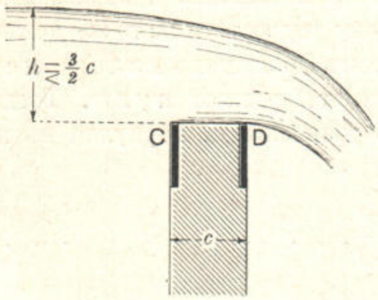
$$y = \frac{2}{3}h.$$

Послѣ этого:

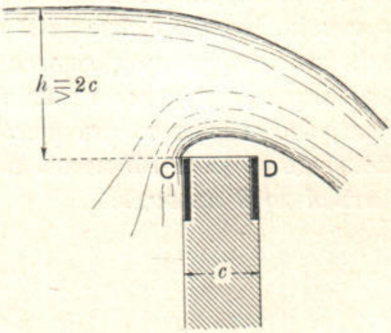
$$Q = \frac{2}{3\sqrt{3}}\, bh\sqrt{2gh} = 0{,}385\, bh\sqrt{2gh}.$$

При условіяхъ, положенныхъ въ основу вывода (хорошее скругленіе кромки C и достаточная длина CD, — хотя и не чрезмѣрная, чтобы не особенно увеличивать вліянія тренія), Lesbros получилъ вмѣсто 0,385 только 0,35, а Bazin—немного больше, 0,373.

Болѣе обстоятельное изслѣдованіе водосливовъ съ толстымъ порогомъ было предпринято въ 1877 г. американцами Fteley и Stearns'омъ, а еще позднѣе Bazin'омъ *). Въ опытахъ этого послѣдняго размѣръ c (толщина стѣнки) измѣнялся отъ 100 до 200 *mm*. Оказалось, что, пока напоръ h не



Фиг. 91.



Фиг. 92.

превосходитъ приблизительно $^3/_2\ c$, струя плотно прилегаетъ къ площадкѣ CD (фиг. 91); если же напоръ h превосходитъ $2c$, то струя ни въ какомъ случаѣ къ стѣнкѣ CD не прилегаетъ (см. фиг. 92), и истеченіе происходитъ, какъ черезъ тонкую стѣнку. Это можно объяснить тѣмъ, что при условіяхъ

*) См. Annales des ponts et chaussées, 1806, 2 sém., p. 645.

фиг. 85 длина **AG** имѣетъ среднюю величину $^2/_3\, h$, подобно тому, какъ въ среднемъ $\varepsilon = 0{,}12\, h$. Слѣдовательно, пока $c > {^2/_3}\, h$ или $h < {^3/_2}\, c$, струя ударяется о стѣнку, увлекаетъ воздухъ, заключенный между нею и стѣнкою, и какъ бы прилипаетъ къ стѣнкѣ. Если $h > 2c$, то струя за стѣнку уже не задѣваетъ, и истеченіе отъ размѣра c не зависитъ. При измѣненіяхъ напора между указанными предѣлами, смотря по степени свободы доступа воздуха подъ струю, она или прилипаетъ къ стѣнкѣ или отстаетъ отъ нея; форма фиг. 92 устойчивѣе; такъ, напр., плывущее тѣло вызываетъ переходъ отъ формы фиг. 91 къ формѣ фиг. 92.

Поэтому, когда $h > 2c$, то явленіе можно разсматривать, какъ явленіе съ тонкой стѣнкой.

Когда $h < 2c$, Bazin предлагаетъ выбрать изъ таблицы (20) или по уравненіямъ (17) и (18) коэффиціентъ расхода M или μ, смотря по высотѣ водослива, для тонкой стѣнки и по нему найти коэффиціентъ расхода m для толстой стѣнки по слѣдующей формулѣ, весьма близко выражающей результаты его опытовъ:

$$m = M\left(0{,}70 + 0{,}185\,\frac{h}{c}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (19)$$

Изъ этой формулы получаемъ, что:

при $\frac{h}{c} = 0{,}5$ отношеніе $\frac{m}{M} = 0{,}79$,
„ „ $= 1{,}0$ „ „ $= 0{,}88$,
„ „ $= 1{,}5$ „ „ $= 0{,}98$,
„ „ $= 2{,}0$ „ „ $= 1{,}07$, } или $= 1$, если получается теченіе по фиг. 92, т.-е. если струя отстаетъ отъ площади **CD**.
„ $\frac{h}{c} > 2{,}0$ „ „ $= 1{,}00$.

Отсюда видно, какъ сильно вліяетъ толщина стѣнки. Формула (19) примѣнима для толщинъ c до 250 *mm*. Въ этихъ предѣлахъ она очень близко передаетъ результаты, полученные Fteley и Stearns'омъ. Съ меньшей точностью она приложима и къ болѣе широкимъ порогамъ, и тутъ можетъ оказаться ошибка уже до 3%.

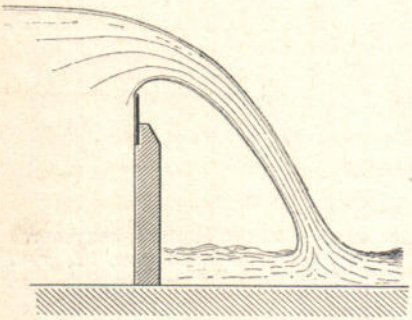
При толстыхъ порогахъ существенное вліяніе оказываетъ *наличность закругленія передней его кромки*. По Fteley и Stearns'у, закругленіе сказывается на ходѣ явленія такъ, какъ если бы вмѣсто напора h былъ на дѣлѣ напоръ $(h + 0{,}7R)$, гдѣ черезъ R обозначенъ радіусъ закругленія; другими словами, коэффиціентъ расхода въ такомъ случаѣ нужно увеличить въ отношеніи $\left(1 + 0{,}7\,\frac{R}{h}\right)^{3/2}$, что почти равно $\left(1 + \frac{R}{h}\right)$. Закругляя переднюю кромку водослива радіусомъ въ 100 *mm*, Bazin нашелъ, что, при толщинѣ водослива c въ 0,8 *mtr* расходъ увеличивался на 12% по сравненію съ тѣмъ же водосливомъ безъ закругленія; если же c было равно 2 *mtr*, то увеличеніе расхода достигало 14%.

4) Наконецъ, можетъ оказаться и боковое сжатіе, когда *водосливъ занимаетъ только часть ширины канала*. Въ этомъ случаѣ Francis рекомендуетъ поступать такъ: по его наблюденіямъ *) боковое сжатіе какъ бы уменьшаетъ ширину водослива b на одну десятую напора h, такъ что если сжатіе имѣетъ мѣсто съ обоихъ концовъ водослива, то при опре-

*) См. его работу „Lowell hydraulic experiments". New-York, 1871, p. 133.

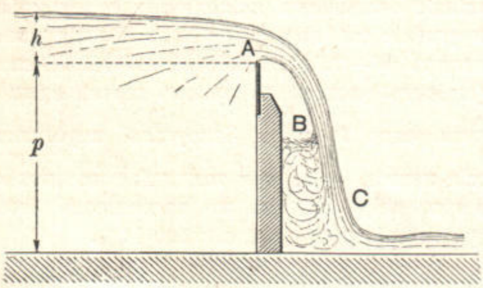
дѣленіи Q слѣдуетъ брать не всю ширину b водослива, а только $(b - 0{,}2\ h)$. Онъ отмѣчаетъ, что это справедливо только въ томъ случаѣ, если $h < \frac{b}{3}$ и если скорость передъ водосливомъ не велика.

В) До сихъ поръ мы говорили о случаѣ $n = 0$, т.-е. о свободномъ истеченіи, для осуществленія чего необходимо обезпечить доступъ воздуха подъ струю. Весьма часто этого не дѣлаютъ, оставляя ширину отводящаго канала равною ширинѣ водослива, который въ свою очередь имѣетъ ширину подводящаго канала. Въ такомъ случаѣ между струей и стѣнками водослива образуется совершенно замкнутое пространство, въ которомъ устанавливается нѣкоторое опредѣленное давленіе, отличное отъ атмосфернаго, и n уже не равно нулю. Величина этого давленія зависитъ отъ слѣдующихъ обстоятельствъ.



Фиг. 93.

Представимъ себѣ сначала струю съ обезпеченнымъ подъ нее доступомъ воздуха (фиг. 93). Это достигается, наприм., тѣмъ, что ширина канала, куда вода выливается, дѣлается больше ширины водослива; если же обѣ ширины одинаковы, то того же можно достигнуть, ставя по бокамъ воздушные колодцы и соединяя ихъ щелями съ пространствомъ подъ струею. Въ нѣкоторый моментъ закроемъ эти щели и тѣмъ самымъ прекратимъ сообщеніе этого пространства съ атмосферою, замыкая въ немъ нѣкоторое количество воздуха. Понятно, что вода постепенно увлекаетъ съ собою часть этого воздуха, отчего подъ струею получается разрѣженіе. Увлеканіе воздуха будетъ происходить тѣмъ энергичнѣе, разрѣженіе будетъ тѣмъ больше, и, на-конецъ, n будетъ получать тѣмъ большее положительное значеніе, чѣмъ больше скорость на нижней поверхности струи, т.-е. чѣмъ больше напоръ h и чѣмъ меньше глубина канала передъ порогомъ. Если, при этомъ, порогъ водослива поднять достаточно высоко надъ уровнемъ воды



Фиг. 94.

въ отводящемъ каналѣ, т.-е. если водосливъ *совершенный*, то, благодаря разрѣженію, струя будетъ подсасывать подъ себя воду изъ отводящаго канала (фиг. 94). Если же водосливъ *несовершенный*, т.-е. если уровень за порогомъ стоитъ выше него, то подъ порогомъ можно ждать уже избыточнаго надъ атмосферою давленія, и n можетъ получить отрицательное значеніе, зависящее отъ глубины погруженія порога подъ уровень въ отводящемъ каналѣ.

Въ одной замѣткѣ (см. Comptes rendus, 1889 г., томъ CIX, page 541) Boussinesq опредѣляетъ то предѣльное значеніе возвышенія порога надъ дномъ отводящаго канала для каждаго даннаго расхода, начиная съ котораго водосливъ становится несовершеннымъ; но это опредѣленіе сопряжено съ довольно большими трудностями, и, кромѣ того, тутъ уже нельзя безъ замѣтной ошибки пренебречь треніемъ жидкости. Поэтому, оставляя въ сторонѣ вопросъ о теоретическомъ опредѣленіи величины давленія подъ струею, скажемъ нѣсколько словъ о томъ, какъ происходитъ явленіе, основываясь на работахъ того же Bazin'a, помѣщенныхъ въ Annales des ponts et chaussées за 1891 г. (2-е полугодіе, стр. 445) и 1894 г. (1-е полугодіе, стр. 249).

Наблюдая истеченіе на водосливѣ въ тонкой стѣнкѣ, у котораго высота порога надъ дномъ канала была $p = 0{,}75\ mtr$, а профиль былъ какъ на фиг. 86, при послѣдовательномъ, притомъ, увеличеніи напора, онъ отмѣтилъ слѣдующее (доступа воздуха подъ струю нѣтъ):

1) *Малые напоры*,—не болѣе $0{,}235\ mtr$. Подъ струей удерживается нѣкоторое количество разрѣженнаго воздуха; вслѣдствіе этого замѣчается нѣкоторое отжатіе струи къ стѣнкѣ водослива и подсасываніе воды изъ отводящаго канала (фиг. 94). По мѣрѣ увеличенія напора и отжатіе и подъемъ воды все увеличиваются; увеличивается также и коэффиціентъ расхода. Если при свободной струѣ коэффиціентъ расхода есть μ, а въ этомъ случаѣ m, то при очень малыхъ напорахъ наблюдается

$$m = \mu,$$

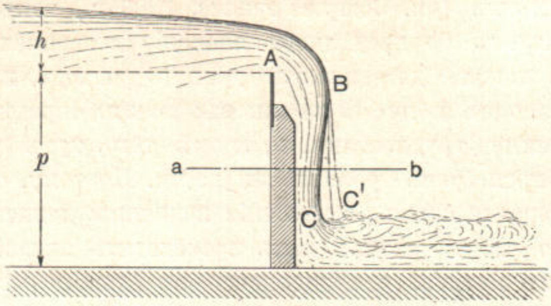
а при напорахъ около $0{,}235\ mtr$ получалось

$$m = 1{,}08\ \mu.$$

Такую струю Bazin называетъ *отжатой* (nappe déprimée). Она прозрачна и ея поверхность совершенно гладкая.

2) *Средніе напоры*,—отъ 0,210 до $0{,}295\ mtr$. Съ приближеніемъ напора къ $0{,}235\ mtr$, весь воздухъ изъ пространства AB быстро увлекается, и струя внезапно какъ бы притягивается къ стѣнкѣ; подошва C струи отходитъ назадъ, такъ что въ B (фиг. 95) можно провести къ струѣ вертикальную касательную, не задѣвающую струи. Поверхность струи не гладкая, а имѣетъ какъ бы рядъ складокъ, которыя имѣютъ профиль или BC или BC' (пунктиромъ). На фиг. 96 представлено горизонтальное сѣченіе переливающейся струи. Такую струю Bazin назвалъ *прилипающей* (nappe adhérente). Какъ только прилипаніе произошло, то столь же внезапно измѣняется и коэффиціентъ расхода изъ $m = 1{,}08\,\mu$ для предыдущаго случая въ $m = 1{,}28\,\mu$,—онъ увеличивается, какъ видимъ, почти на 20%; это увеличеніе расхода отра-

жается непосредственно на томъ, что уровень въ подводящемъ каналѣ внезапно опускается: доведенный до высоты 0,235 *mtr*, напоръ h падаетъ



Фиг. 95.

до 0,210 *mtr* и удерживается на этой высотѣ, пока не измѣнимъ расхода. Если же черезъ каналъ начать пропускать больше воды, то напоръ h начинаетъ расти, но струя остается прилипшей, а отношеніе коэффиціентовъ расхода $\frac{m}{\mu}$ не измѣняется, сохраняя значеніе 1,28. Если ввести подъ струю порцію воздуха, то она быстро увлекается прочь, такъ что эта форма струи сейчасъ же возстанавливается. Такъ продолжается до тѣхъ поръ, пока напоръ h не достигнетъ величины 0,295 *mtr*.

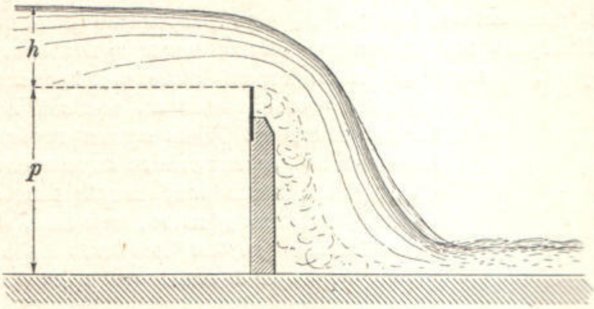
Фиг. 96.

Нужно замѣтить, что прилипающая струя получалась у Bazin'а довольно устойчивой только потому, что толщина брусковъ, образующихъ стѣнку водослива, была значительна (фиг. 86); при меньшихъ толщинахъ, для того, чтобы вызвать прилипаніе струи, необходимо очень осторожно увеличивать расходъ, безъ всякихъ толчковъ,—въ противномъ случаѣ отжатая струя переходитъ сразу въ слѣдующую.

3) *Большіе напоры*—свыше 0,310 *mtr*. Когда h достигнетъ величины 0,295 *mtr*, то происходитъ новая внезапная перемѣна явленія: струя удлиняется, а подъ нею оказывается заключенной вода (фиг. 97). Поверхность струи (внизу) попрежнему бороздчатая. И это превращеніе сопровождается внезапнымъ измѣненіемъ коэффиціента расхода: онъ уменьшается до $m = 1{,}19\,\mu$ (вмѣсто $1{,}28\,\mu$), что вызываетъ внезапное повышеніе напора h отъ 0,295 *mtr* до 0,310 *mtr*. При дальнѣйшемъ возрастаніи напора коэффиціентъ расхода уменьшается, достигая при $h = 0{,}40$ *mtr* величины $m = 1{,}12\,\mu$.

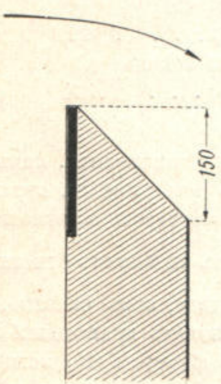
Такую струю Bazin называетъ *снизу затопленной* (nappe noyée en dessous). Это наиболѣе часто встрѣчающаяся форма струи. Она очень устойчива.

При послѣдовательномъ уменьшеніи расхода получаемъ тѣ же явленія чередующимися въ томъ же порядкѣ, съ тою разницею, что прилипающая струя, какъ болѣе устойчивая, при указанной толщинѣ стѣнки сохраняется и при очень малыхъ напорахъ, замѣняя отжатую. Кромѣ того, слѣдуетъ отмѣтить, что предѣльные напоры, указанные тутъ для перехода одной



Фиг. 97.

струи въ другую, не всегда строго соблюдаются: при напорахъ около 0,3 *mtr* можно получить или форму струи по фиг. 95 или по фиг. 97, безъ ясно видимой причины: можетъ быть тутъ имѣетъ значеніе какое-нибудь случайное измѣненіе расхода, напр., подъ вліяніемъ вѣтра.



Фиг. 98.

Кромѣ того, форма порога, выполненная въ видѣ тонкой стѣнки, образованной желѣзнымъ листомъ, пришитымъ къ деревяннымъ брускамъ (фиг. 89) или же такъ, какъ показано на фиг. 98, со скосомъ задней грани подъ угломъ въ 45°, — затѣмъ толщина порога и т. д.,—всѣ эти детали имѣютъ свое значеніе. Если, напр., форму порога фиг. 89 поставить задомъ напередъ, то, вообще, не устанавливается никакого опредѣленнаго вида струи: она то прилипаетъ, то отрывается, переходя къ формѣ фиг. 94 или фиг. 95, смотря по напору; при этомъ уровень въ подводящемъ каналѣ непрерывно колеблется.

Наконецъ, когда порогъ стоитъ на разной высотѣ надъ дномъ въ отводящемъ каналѣ, то измѣняются и напоры, при которыхъ происходитъ перемѣна вида струи. При такой сложности явленія нельзя, конечно, получить точнаго совпаденія теоріи Boussinesq съ наблюденіями; тѣмъ не менѣе наблюденія Bazin'a даютъ коэффиціенты расхода только на 3—4% меньшіе нежели вычисленія по ур-іямъ (10) и (12).

Изслѣдованія Bazin'а приводятъ къ слѣдующимъ результатамъ:

Будемъ предполагать, что имѣется водосливъ въ тонкой стѣнкѣ.

В, 1) *Прилипающая* струя (фиг. 95). Коэф-тъ расхода въ этомъ случаѣ опредѣляется по коэф-ту μ для свободной струи, взятому въ табл. 20 *), такимъ образомъ:

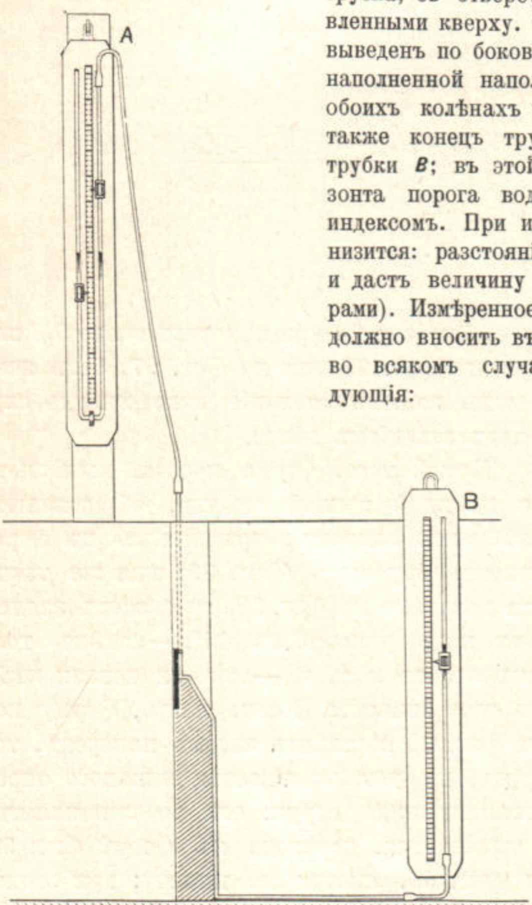
$$m = \mu \left(1{,}07 - \beta \frac{P_0}{h}\right) \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (20)$$

Тутъ h есть, попрежнему, напоръ, P_0 есть разрѣженіе подъ струею, выраженное столбомъ воды. Измѣрить это разрѣженіе можно помощью прибора, изображеннаго на фиг. 99: вдоль порога, на нѣсколько миллиметровъ ниже его, прокладывается свинцовая трубка, съ отверстіями въ боковой поверхности, направленными кверху. Одинъ конецъ трубки закрытъ, другой— выведенъ по боковой стѣнкѣ къ манометрической трубкѣ *A*, наполненной наполовину водой; разность горизонтовъ въ обоихъ колѣнахъ укажетъ, очевидно, искомое P_0. Можно также конецъ трубки соединить съ низомъ стеклянной трубки *B*; въ этой послѣдней вода наливается до горизонта порога водослива, и это положеніе отмѣчается индексомъ. При истеченіи уровень воды въ трубкѣ *B* понизится: разстояніе отъ индекса до уровня въ трубкѣ и дастъ величину P_0 (Базенъ пользовался обоими приборами). Измѣренное такъ давленіе P_0, какъ разрѣженіе, должно вносить въ ур-іе (20) со знакомъ минусъ, отчего, во всякомъ случаѣ, $m > \mu$. Значенія коэф-та β слѣдующія:

	При толщинѣ брусьевъ 100 *mm*	150 *mm*
Тонкая стѣнка (фиг. 86) . . .	0,122	0,133
Скошенная стѣнка (фиг. 95) . . .	0,104	0,123

Такія обстоятельства, какъ глубина передъ водосливомъ, отражаются на m только черезъ μ; отношеніе же $\frac{m}{\mu}$ зависитъ только отъ отношенія $\frac{P_0}{h}$. Это послѣднее, какъ сказано, лучше получать путемъ прямого наблюденія.

Вмѣсто формулы (20) можно пользоваться таблицей 22 (см. стр. 175), дающей отношенія $\frac{m}{\mu}$, гдѣ m попрежнему есть коэф-тъ расхода въ аналогичныхъ условіяхъ, но при свободной струѣ (табл. 20 или ур-іе 17).



Фиг. 99.

*) Само собою разумѣется, что коэф-тъ расхода долженъ быть взятъ, принимая въ вниманіе глубину передъ водосливомъ, т.-е. въ табл. 20 нужно выбирать значенія M.

Таблица 22

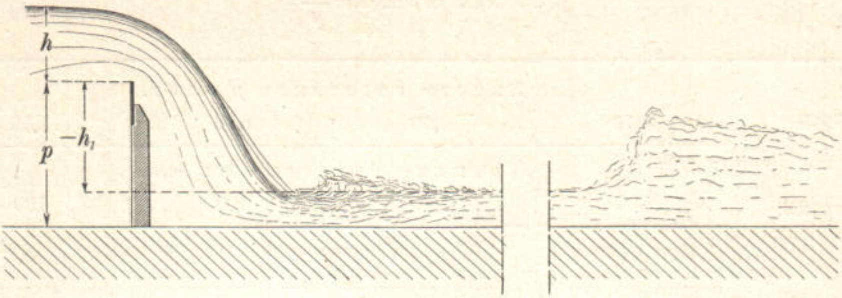
значеній отношенія $\frac{m}{\mu}$.

Напоры въ метрахъ:	Высота водослива p въ *mtr.*							
	0,75		0,50		0,35		1,13	
	Толщина брусковъ въ *mm.*							
	100		100		100		150	
	Кромка							
отъ до	острая ф. 86	скошен. *) ф. 95	острая ф. 86	скошен. *) ф. 95	острая ф. 86	скошен. *) ф. 95	острая ф. 86	скошен. *) ф. 95
	1	2	3	4	5	6	7	8
0,050—0,075	1,191	1,039	1,215	1,089	1,210	1,097	1,202	1,104
0,075—0,100	1,207	1,092	1,210	1,126	1,218	1,156		
0,100—0,125	1,217	1,129	1,212	1,153	1,229	1,181	1,208	1,127
0,125—0,150	1,244	1,171	1,246	1,199	1,240	1,201		
0,150—0,175	1,254	1,220	1,256	1,214	1,245	1,223	1,224	1,163
0,175—0,200	1,277	1,243	1,260	1,247	—	1,226		
0,200—0,225	1,284	1,257	1,269	1,267	—	—	1,245	1,209
0,225—0,250	1,286	1,276	—	—	—	—		
0,250—0,275	1,283	1,297	—	—	—	—	1,253	1,249
0,275—0,300	1,281	1,296	—	—	—	—		
0,300—0,350	—	—	—	—	—	—	1,282	1,294
0,350—0,400	—	—	—	—	—	—	1,297	1,308
0,400—0,450	—	—	—	—	—	—	1,293	1,311

Какъ видно изъ этой таблицы, наибольшій напоръ, при которомъ наблюдается прилипающая струя, зависитъ отъ глубины p канала, въ которомъ установленъ водосливъ. Имѣетъ вліяніе и толщина брусковъ, и форма кромки. Однако для острой кромки отношеніе $\frac{m}{\mu}$ измѣняется во всѣхъ случаяхъ въ предѣлахъ отъ 1,2 до 1,3; для скошенной кромки это отношеніе измѣняется въ болѣе широкихъ предѣлахъ,—отъ 1,1 до 1,3. Во всякомъ случаѣ, прилипающая струя пропускаетъ значительно (отъ 10 до 30%) бо́льшее количество воды, нежели свободная.

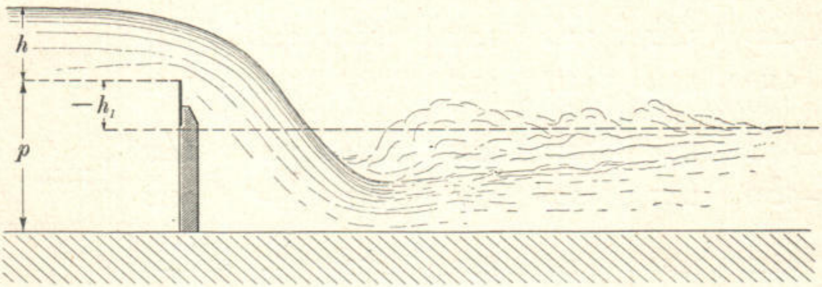
*) Подъ $\angle 45^0$.

B, 2) *Струя подтопленная снизу.* Здѣсь нужно различать два случая. Первый указанъ на фиг. 97, а также на фиг. 100: теченіе въ отводящемъ каналѣ нисколько не



Фиг. 100.

вліяетъ на истеченіе въ водосливѣ; если въ каналѣ и имѣется скачокъ *), то не у самой подошвы водослива. Другой случай подтопленной струи будетъ, когда скачокъ появляется въ непосредственной близости отъ струи (фиг. 101), но такъ, что горизонтъ воды



Фиг. 101.

въ отводящемъ каналѣ все-таки лежитъ еще ниже порога (высота h_1 отрицательна) Остановимся сначала на первомъ случаѣ.

Въ этомъ случаѣ Базенъ даетъ ур-ія (значенія буквъ m и μ прежнія):

болѣе точно:

$$m = \mu \left[0{,}845 + 0{,}176 \frac{p}{h} - 0{,}016 \frac{p^2}{h^2} \right]; \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (21)$$

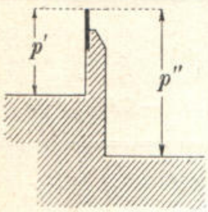
менѣе точно:

$$m = \mu \left[0{,}878 + 0{,}128 \frac{p}{h} \right] \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (22)$$

Второе ур-іе даетъ результатъ, отличающійся отъ перваго меньше, чѣмъ на 1%, пока отношеніе $\frac{p}{h}$ лежитъ въ предѣлахъ отъ 0,6 до 2,4. Оба ур-ія имѣютъ мѣсто только пока $h \geqq 0{,}4\,p$; при меньшихъ напорахъ, сравнительно съ глубиною, наблюдается или отжатая, или прилипающая струя. Если $h = 0{,}4\,p$, то по ур-ію (21) получается $m = 1{,}19\,\mu$, и это наибольшее, что даетъ такая форма; всякое увеличеніе напора сверхъ этого уменьшаетъ отношеніе $\frac{m}{\mu}$; напр., при $h = 2\,p$ (а это уже рѣдкій случай), ур-іе даетъ $m = 0{,}93\,\mu$.

*) О томъ, что́ называется скачкомъ воды и когда онъ образуется, см. въ главѣ IV,— Движеніе воды въ открытыхъ каналахъ.

Нужно замѣтить, что, если порогъ водослива стоитъ надъ дномъ приводящаго и отводящаго каналовъ на разной высотѣ (см., напр., фиг. 102), то въ ур-іяхъ (21) и (22) нужно вмѣсто p поставить высоту p'' надъ дномъ въ отводящемъ каналѣ, а значеніе μ, опредѣляемое по ур-ію (17) или табл. 20, брать соотвѣтственно глубинѣ p' въ верховой сторонѣ водослива. Форма профиля водослива, лишь бы онъ былъ въ тонкой стѣнкѣ, не имѣетъ значенія.



Фиг. 102.

Наконецъ, во многихъ случаяхъ удовлетворительный результатъ (съ точностью не меньшей, чѣмъ 3%, и то при малыхъ p) даетъ опредѣленіе коэффиціента расхода непосредственно изъ ур-ія

$$m = 0{,}470 + 0{,}0075 \left(\frac{p}{h}\right)^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (23)$$

Отмѣтимъ также, что невозможно рѣшить заранѣе, какая форма струи установится во всякомъ данномъ частномъ случаѣ; поэтому ур-ія (20—23) хороши для подсчета какихъ-нибудь извѣстныхъ данныхъ водосливовъ, когда видно, какова именно струя. При проектированіи новыхъ водосливовъ нужно итти путемъ пробъ, начиная съ ур-ій (21—23), дающихъ меньшія значенія для m, чѣмъ ур-іе (20) *).

В, 3) *Подтопленная снизу струя съ покрывающимъ ее скачкомъ* (фиг. 101). Коэффиціентъ расхода зависитъ отъ отношеній h и h_1 къ p. Примѣнительно къ этому случаю Базенъ даетъ слѣдующія ур-ія:

$$m = \mu \left[1{,}06 - 0{,}16 \left(\frac{h_1}{p} + 0{,}05\right) \frac{p}{h} - 0{,}02 \left(\frac{h_1}{p} + 0{,}05\right)^2 \left(\frac{p}{h}\right)^2 \right] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (24)$$

или съ достаточной точностью:

$$m = \mu \left[1{,}05 - 0{,}15 \frac{h_1}{h} \right] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (25)$$

Въ оба ур-ія количество h_1, какъ отрицательное, нужно вносить со знакомъ минусъ, такъ что вообще $m > \mu$. Важно указать предѣлы примѣнимости этихъ ур-ій.

Необходимо должно быть соблюдено условіе, чтобы

$$h + h_1 < 0{,}75\, p'';$$

здѣсь буква h_1 даетъ только абсолютную величину разстоянія отъ порога до уровня въ отводящемъ каналѣ **). Если полное разстояніе отъ верхняго до нижняго уровня больше указаннаго предѣла, то скачокъ оттѣсняется, и мы имѣемъ случай B, 2. Кромѣ того, если пре-

---

*) Базенъ даетъ также выраженія для m въ зависимости отъ давленія P_0 подъ струею:

болѣе точно: $$m = \mu \left[1{,}01 - 0{,}245 \frac{P_0}{h} \left(1 + \frac{1}{5} \frac{P_0}{h}\right) \right],$$

менѣе точно: $$m = \mu \left[1{,}01 - 0{,}22 \frac{P_0}{h} \right].$$

Онъ даетъ также:

$$\frac{P_0}{h} = 0{,}60 - 0{,}58 \frac{p}{h}.$$

Совмѣщеніе этихъ уравненій и даетъ приведенныя выше ур-ія (21) и (22).

**) Смыслъ буквы p'' см. на фиг. 102.

Таблица 23

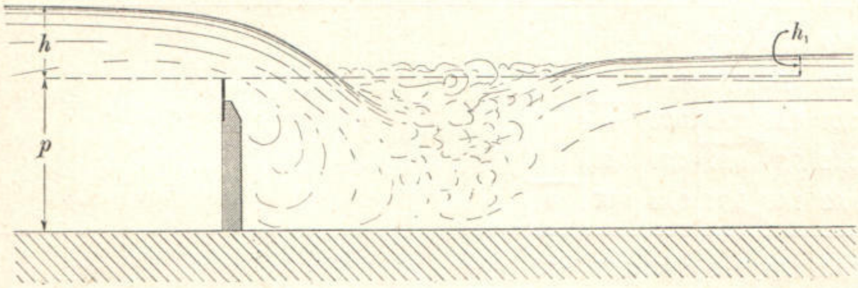
значеній отношенія $\frac{m}{\mu}$.

При $\frac{h}{p'}=$	При $\frac{h_1}{p''}=$								
	— 0,40	— 0,35	— 0,30	— 0,25	— 0,20	— 0,15	— 0,10	— 0,05	0
0,15	—	—	—	—	—	—	—	1,06	1,01
0,20	—	—	—	—	—	—	1,10	1,06	1,02
0,25	—	—	—	—	1,15	1,12	1,09	1,06	1,03
0,30	—	—	—	1,16	1,14	1,11	1,09	1,06	1,03
0,35	—	1,18	1,16	1,14	1,13	1,10	1,08	1,06	1,04
0,40	1,19	1,17	1,15	1,14	1,12	1,10	1,08	1,06	1,04
0,45	1,16	—	1,14	1,13	1,11	1,10	1,08	1,06	1,04
0,50	1,13	—	—	1,12	1,11	1,09	1,08	1,06	1,04
0,55	1,11	—	—	—	—	1,09	1,08	1,06	1,05
0,60	1,09	—	—	—	—	—	1,07	1,06	1,05
0,65	1,08	—	—	—	—	—	—	1,06	1,05
0,70	1,06	—	—	—	—	—	—	—	1,05
0,75	1,05	—	—	—	—	—	—	—	—
0,80	1,04								
0,85	1,03								
0,90	1,02								
0,95	1,01								
1,00	1,01								
1,05	1,00								
1,10	0,99								
1,15	0,99								
1.20	0,98								
1,25	0,98								
1,30	0,97								
1,35	0,97								
1,40	0,96								
1,45	0,96								
1,50	0,96								

дыдущее неравенство удовлетворено, т.-е. если полная высота паденія струи недостаточна для того, чтобы оттѣснить скачокъ, необходимо все-таки, чтобы часть h_1 этого полнаго напора была достаточно мала,—именно, чтобы абсолютная величина h_1 была меньше $0{,}383\,p''$; иначе струя все-таки будетъ падать въ отводящій каналъ, который на струю не окажетъ вліянія; получится струя отжатая или прилипающая, такъ какъ, очевидно, напоръ h при этомъ будетъ меньше $0{,}4\,p''$. Само собою понятно, что эти ур-ія предполагаютъ также только незатопленный водосливъ, т.-е. предполагаютъ, что $h_1 < 0$.

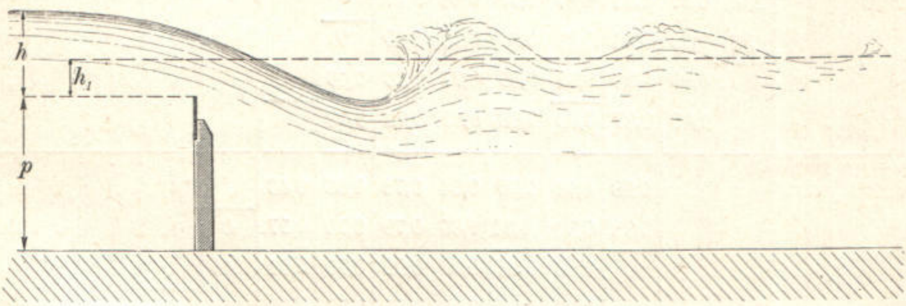
Въ таблицѣ 23 (см. выше) совмѣщены результаты примѣненія ур-ій (21—25); изъ нея явствуетъ, когда нужно прибѣгать къ какой формулѣ: лѣвый вертикальный столбецъ вычисленъ по ур-ію (21); часть, ограниченная жирной линіей, высчитана по ур-ію (24).

C) Наконецъ, перейдемъ къ разсмотрѣнію *затопленныхъ водосливовъ*, т.-е. такихъ, въ которыхъ h_1 положительно. Здѣсь также можетъ оказаться два случая. Сначала наблюдается *подтопленная снизу* струя (фиг. 103),



Фиг. 103.

въ общемъ напоминающая видъ фиг. 101. Но по мѣрѣ увеличенія высоты h_1, или, что то же, по мѣрѣ уменьшенія свободнаго напора $h-h_1$, эта форма внезапно обращается въ *волнистую* (фиг. 104). Этотъ переходъ совершается



Фиг. 104.

въ предѣлахъ между $h-h_1 =$ отъ $0{,}2\,p''$ до $0{,}3\,p''$ *). Внѣшній видъ совершенно различный: при скачкѣ наблюдается мѣстное безпорядочное волненіе, тогда какъ при волнистой струѣ (nappe ondulée) поверхность покрыта широкими правильными волнами.

---

*) Значками $''$ отмѣчаемъ, что важна тутъ высота порога надъ дномъ низового канала.

Таблица 24

значеній отношенія $\frac{m}{\mu}$.

При $\frac{h}{p''}=$	При $\frac{h_1}{p''}=$ +0,05	+0,1	+0,2	+0,3	+0,4	+0,5	+0,6	+0,7	+0,8	+0,9	+1,0	+1,1	+1,2	+1,3	+1,4	+1,5
0,10	0,81	0														
0,15	0,90	0,76														
0,20	0,94	0,86	0													
0,25	0,97	0,91,	0,65													
0,30	0,99	0,94	0,77	0												
0,35	1,00	0,96	0,84	0,59												
0,40	1,01	0,98	0,89	0,71	0											
0,45	1,02	0,99	0,91	0,79	0,55											
0,50	1,02	1,00	0,93	0,84	0,67	0										
0,55	1,03	1,01	0,95	0,87	0,75	0,53										
0,60	1,03	1,01	0,96	0,90	0,80	0,64	0									
0,65	1,03	1,02	0,98	0,92	0,84	0,72	0,51									
0,70	1,04	1,02	0,98	0,94	0,87	0,77	0,62	0								
0,75	1,04	1,03	0,99	0,95	0,89	0,81	0,70	0,49								
0,80		1,03	1,00	0,96	0,92	0,84	0,75	0,60	0							
0,85			1,01	0,97	0,93	0,87	0,79	0,68	0,47							
0,90			1,01	0,98	0,94	0,89	0,82	0,73	0,59	0						
0,95				0,99	0,96	0,91	0,85	0,77	0,66	0,46						
1,00				1,00	0,97	0,93	0,88	0,81	0,72	0,58	0					
1,05					0,98	0,94	0,90	0,84	0,76	0,65	0,46					
1,10					0,98	0,95	0,91	0,86	0,79	0,70	0,57	0				
1,15						0,96	0,93	0,88	0,82	0,75	0,64	0,45				
1,20						0,97	0,94	0,90	0,85	0,78	0,69	0,56	0			
1,25							0,95	0,91	0,87	0,81	0,74	0,63	0,44			
1,30							0,96	0,92	0,89	0,84	0,77	0,69	0,55	0		
1,35								0,94	0,90	0,86	0,80	0,73	0,62	0,44		
1,40								0,95	0,91	0,88	0,83	0,77	0,68	0,55	0	
1,45									0,92	0,89	0,85	0,80	0,72	0,62	0,43	
1,50									0,94	0,90	0,86	0,82	0,76	0,67	0,54	0

Оба эти случая передаются слѣдующими двумя уравненіями Базена:

$$m = \mu \left\{ 1{,}06 + \frac{1}{4}\frac{h_1}{p} - \left[0{,}008 + \frac{1}{3}\frac{h_1}{p} + \frac{1}{3}\left(\frac{h_1}{p}\right)^2 \right] \frac{p}{h} \right\} \quad \ldots\ldots\ldots (26)$$

$$m = \mu \,.\, 1{,}08 \left(1 + \frac{1}{6}\frac{h_1}{p}\right) \sqrt[3]{\frac{h-h_1}{h}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (27)$$

Въ обоихъ уравненіяхъ h_1 положительно. Первымъ нужно пользоваться, если

$$\frac{p''}{h} < 0{,}4 \left(1 + 0{,}3\,\frac{p''}{h_1}\right)^2.$$

Пользоваться вторымъ умѣстно, если, наоборотъ:

$$\frac{p''}{h} > 0{,}4 \left(1 + 0{,}3\,\frac{p''}{h_1}\right)^2.$$

Съ помощью обоихъ этихъ уравненій подсчитана таблица 24, представляющая собою наиболѣе полную таблицу коэффиціентовъ расходовъ для несовершенныхъ, затопленныхъ водосливовъ. (См. табл. на стр. 180).

Однако, вмѣсто этихъ двухъ формулъ Базенъ считаетъ возможнымъ пользоваться одной общей:

$$m = \mu \,.\, 1{,}05 \left(1 + \frac{1}{5}\frac{h_1}{p}\right) \sqrt[3]{\frac{z}{h_1 + z}}\,, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (28)$$

гдѣ подъ буквой z онъ обозначаетъ разстояніе между обоими горизонтами, т.-е. $z = h - h_1$. Дѣля числителя и знаменателя подъ радикаломъ на p, онъ, далѣе, представляетъ уравненіе (28) въ формѣ:

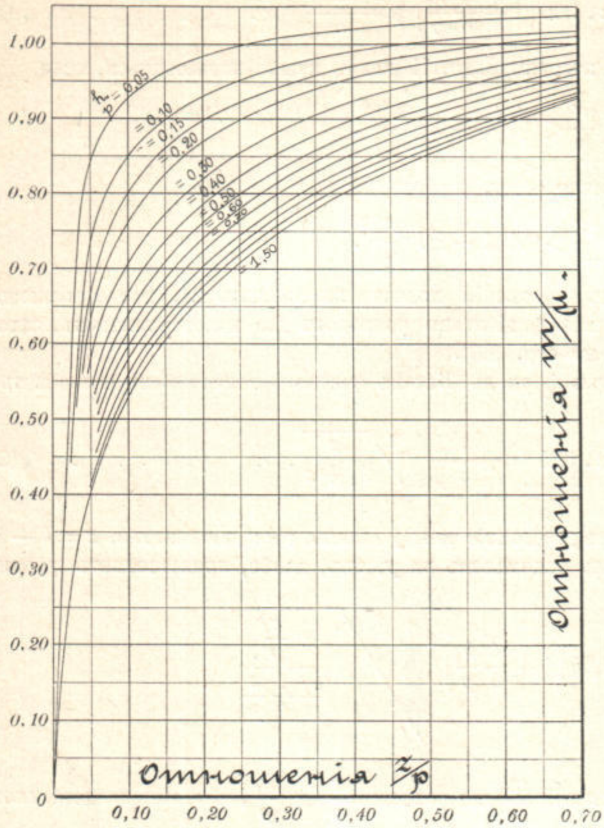
$$\frac{m}{\mu} = 1{,}05 \left(1 + \frac{1}{5}\frac{h_1}{p}\right) \sqrt[3]{\frac{\frac{z}{p}}{\frac{h_1}{p} + \frac{z}{p}}}$$

и затѣмъ приводитъ таблицу отношеній $\frac{m}{\mu}$ для разныхъ $\frac{z}{p}$ и $\frac{h_1}{p}$, а также представляетъ это уравненіе графически въ видѣ серіи кривыхъ, гдѣ абсциссы даютъ значенія $\frac{z}{p} = \frac{h-h_1}{p}$, а ординаты даютъ значенія $\frac{m}{\mu}$ (фиг. 105). У каждой кривой надписано соотвѣтствующее значеніе $\frac{h_1}{p}$. Наконецъ, нужно имѣть въ виду, что, какъ въ случаѣ **В, 3**, такъ и здѣсь, коль скоро высота $z = h - h_1$ превосходитъ $0{,}7\ p''$, то скачокъ оттѣсняется отъ подошвы струи; отношеніе $\frac{m}{\mu}$ нужно брать тогда по слѣдующей таблицѣ 25:

Таблица 25.

При $\frac{h_1}{p} =$	0	0,05	0,10	0,15	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60
$\frac{m}{\mu} =$	1,06	1,05	1,04	1,03	1,02	1,00	0,99	0,98	0,97
При $\frac{h_1}{p} =$	0,70	0,80	0,90	1,00	1,10	1,20	1,30	1,40	1,50
$\frac{m}{\mu} =$	0,96	0,95	0,95	0,94	0,94	0,93	0,93	0,92	0,92

Самое опредѣленіе расхода дѣлается по общему уравненію (1) въ § 16: значеніе μ выбирается въ зависимости отъ соотношенія между h и p' по таблицѣ 20 или по уравненію (17) и исправляется коэффиціентомъ, взятымъ изъ таблицы 24. Что касается до хода измѣненія давленія подъ струею, то отсылаемъ интересующихся къ упомянутымъ работамъ Базена.



Фиг. 105.

Для поясненія разберемъ слѣдующій примѣръ. Пусть на каналѣ шириною въ 2 *mtr* поставленъ вертикальный водосливъ въ тонкой стѣнкѣ, перегораживающій каналъ во всю его ширину, такъ что доступа воздуха подъ струю нѣтъ; пусть разстояніе порога водослива до дна подводящаго канала $p' = 0{,}8$ *mtr*, а напоръ надъ порогомъ $h = 0{,}4$ *mtr*. По таблицѣ 20 коэффиціентъ расхода при свободномъ истеченіи въ воздухъ былъ бы въ этомъ случаѣ $\mu = 0{,}44$. Будемъ дѣлать разныя предположенія относительно отводящаго канала.

a) Пусть отъ порога до дна этого канала разстояніе $p'' = 0{,}5$ *mtr*; пусть также уровень воды въ каналѣ стоитъ ниже порога на 0,3 *mtr*, такъ что $h_1 = -0{,}3$ *mtr*. Такъ какъ величина $0{,}4\ p'' = 0{,}2$ *mtr*, что меньше напора, то беремъ ур-іе (21), которое дастъ:

$$m = 0{,}44\left[0{,}845 + 0{,}176\,\frac{0{,}5}{0{,}4} - 0{,}016\left(\frac{0{,}5}{0{,}4}\right)^2\right] = 0{,}44\,.\,1{,}04 = 0{,}458.$$

Тотъ же множитель 1,04 мы находимъ въ первомъ вертикальномъ столбцѣ таблицы 23.

b) Въ отличіе отъ предыдущаго случая допустимъ, что дно отводящаго канала лежитъ на 1,2 *mtr* ниже порога. Такъ какъ при этомъ находимъ, что $h < 0{,}4\ p''$ и, кромѣ того, $h + h_1 (= 0{,}7\ mtr)$ меньше, чѣмъ $0{,}75\ p'' (= 0{,}9\ mtr)$, то необходимо пользоваться уравненіемъ (24) или правой частью таблицы 23:

$$m = 0{,}44\left[1{,}06 - 0{,}16\left(0{,}05 - \frac{0{,}3}{1{,}2}\right)\frac{1{,}2}{0{,}4} - 0{,}02\left(0{,}05 - \frac{0{,}3}{0{,}2}\right)^2\left(\frac{1{,}2}{0{,}4}\right)^2\right] = 0{,}44\,.\,1{,}15 = 0{,}506.$$

c) Допустимъ далѣе, что въ данныхъ перваго случая измѣнена высота h_1: уровень воды за порогомъ стоитъ на высотѣ 0,1 *mtr* надъ нимъ. Тогда имѣемъ $p'' : h = 0{,}5 : 0{,}4 = 1{,}25$.

Съ другой стороны $0,4\left(1+0,3\frac{p''}{h_1}\right)^2=2,5$. Поэтому нужно пользоваться уравненіемъ (26), которое дастъ:

$$m=0,44\left\{1,06+\frac{0,1}{4.0,5}-\left[0,008+\frac{0,1}{3.0,5}+\frac{1}{3}\left(\frac{0,1}{0,5}\right)^2\right]\frac{0,5}{0,4}\right\}=0,44\left\{1,11-1,25\ .\ 0,088\right\}=0,44.$$

То же самое видимъ по таблицѣ 24 соотвѣтственно величинамъ $h:p''=0,8$, а также $h_1:p''=0,2$.

d) Наконецъ, пусть при прежнихъ условіяхъ $h_1=0,25\,mtr$. Тогда $0,4\left(1+0,3\frac{0,5}{0,25}\right)^2=$ $=1,025$. Эта величина меньше, чѣмъ $p'':h=1,25$. Слѣдовательно, по ур-ію (27) находимъ:

$$m=0,44.1,08\left(1+\frac{0,25}{6.0,5}\right)\sqrt[3]{\frac{0,15}{0,4}}=0,44.0,844=0,372.$$

Таблица 24, при $h_1:p''=0,5$ и при $h_1:p''=0,8$, даетъ то же самое.

Во всѣхъ четырехъ случаяхъ расходъ долженъ быть опредѣленъ по одному и тому же уравненію:

$$Q=m\ .\ 2\ .\ 0,4\sqrt{2g.0,4}.$$

Внося найденныя значенія коэффиціента расхода m, получимъ:

$Q_a=1,025\ mtr^3/sec.$ $\qquad$ $Q_c=0,985\ mtr^3/sec.$

$Q_b=1,132\ mtr^3/sec.$ $\qquad$ $Q_d=0,835\ mtr^3/sec.$

По старинной формулѣ Dubuat можно опредѣлять расходъ въ несовершенномъ водосливѣ такъ:

$$Q=\mu_1 b(h-h_1)\sqrt{2g(h-h_1)}+\mu_2 bh_1\sqrt{2g(h-h_1)}.$$

Изъ этой формулы слѣдуетъ, что расходъ разсматривается состоящимъ изъ двухъ частей: изъ чистаго расхода водослива при напорѣ $(h-h_1)$ и изъ расхода при вытеканіи подъ уровень черезъ отверстіе $b\times h_1$ подъ напоромъ $(h-h_1)$. Редтенбахеръ давалъ для такого водослива $\mu_1=0,57$, а для отверстія въ тонкой стѣнкѣ $\mu_2=0,62$. Примѣняя это ур-іе къ нашему случаю d, найдемъ:

$$Q=0,57.2.0,15\sqrt{2g.0,15}+0,62.2.0,5\sqrt{2g.0,15}=0,828\ mtr^3/sec,$$

что близко къ найденному выше. Для данныхъ случая c это уравненіе даетъ $Q=1,13\,mtr^3/sec$, что уже существенно отличается отъ опредѣленнаго выше расхода $Q_c=0,985\,mtr^3/sec$.

D) Остается прослѣдить вліяніе формы порога, когда *несвободная струя переливается черезъ водосливъ въ толстой стѣнкѣ*. Остановимся сначала на формѣ порога, подобной фиг. 91 и 92.

1) Отжатая струя при порогѣ по фиг. 91 и 92. Коэффиціенты расхода въ общемъ мало отличаются отъ того, что даетъ уравненіе (19).

Струя, подтопленная снизу, получается въ томъ случаѣ, если имѣется налицо отставаніе отъ порога, подобное фиг. 92. Въ такомъ случаѣ умѣстно пользоваться уравненіемъ (21), какъ для тонкой стѣнки; если струя еще не отстала, то, попрежнему, имѣетъ силу уравненіе (19). Предѣльный случай, когда обѣ формулы даютъ одинаковый результатъ, близкій къ истинному, есть тотъ, когда напоръ h достигаетъ величины:

$$h_0 = \frac{c}{2}\left(1 + \sqrt{3\ \frac{p''}{c}}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (29)$$

Если $h < h_0$, то нужно брать уравненіе (19); при этомъ полученное изъ уравненія значеніе коэф-та расхода слѣдуетъ увеличить процента на 2—4. Если $h > h_0$, то нужно брать уравненіе (21). При этомъ, чѣмъ больше h по сравненію съ h_0, тѣмъ больше разница между результатами вычисленій по ур-ію (21) и истиннымъ значеніемъ коэф-та расхода, который всегда больше вычисляемаго. Эта разница достигаетъ цѣлыхъ 8%, когда $h = h_0 + 0{,}8\ c$. Съ дальнѣйшимъ увеличеніемъ h уравненіе (21) даетъ результаты, все болѣе и болѣе точные.

Если, сверхъ того, скачокъ покрываетъ струю, то и здѣсь имѣютъ мѣсто уравненія или (19) (при малыхъ напорахъ) или (25) (при бо́льшихъ напорахъ); предѣльное значеніе напора есть:

$$h'_0 = 0{,}95\ c\left(1 + \sqrt{1 - 0{,}9\frac{h_1}{c}}\right).$$

При этомъ уравненіе (19) даетъ больше, чѣмъ нужно, а уравненіе (25), наоборотъ, меньше, чѣмъ нужно; въ первомъ случаѣ разница достигаетъ 4%, а во второмъ—до 8%.

Наконецъ, если водосливъ несовершенный (затопленный), то съ такою же степенью приближенія слѣдуетъ пользоваться уравненіями (19) или (28), смотря по тому, отстаетъ струя отъ порога или нѣтъ. Усмотрѣть это, какъ и въ предыдущемъ случаѣ, очень трудно. Въ упомянутой книгѣ Базена на страницахъ 108—109 приведена таблица, въ которой указаны для 7 расходовъ (отъ 0,061 mtr^3/sec до 0,480 mtr^3/sec) тѣ напоры h, которые оказались необходимыми, чтобы черезъ данный водосливъ пропустить данный расходъ при разныхъ значеніяхъ высоты h_1 стоянія воды въ отводящемъ каналѣ надъ порогомъ. Ограничиваемся этой ссылкой, такъ какъ разсматриваемый случай еще рѣже, чѣмъ предыдущіе, нуждается въ точномъ подсчетѣ.

2) Наконецъ, Базенъ изслѣдовалъ рядъ водосливовъ, въ которыхъ порогъ имѣлъ разнообразныя формы: передняя (обращенная къ приводящему каналу) и задняя (обращенная къ отводящему каналу) стѣнки были различно наклонены; онѣ пересѣкались или по прямой, образуя острую кромку (фиг. 106 и 107), или эта кромка была замѣнена горизонтальною площадкою бо́льшаго или меньшаго протяженія (фиг. 108), или, наконецъ, углы, образуемые этою гранью съ обѣими первыми плоскостями, были скруглены (фиг. 109); наконецъ, были опыты съ водосливами криволинейныхъ профилей. Изъ его наблюденій можно вывести слѣдующее:

Уклонъ передней стѣнки вліяетъ на величину сжатія: чѣмъ ближе положеніе этой плоскости къ горизонту, тѣмъ меньше сжатіе и тѣмъ больше коэффиціентъ расхода; но, начиная съ извѣстной величины уклона, начинаетъ сильно сказываться замедляющее вліяніе тренія о стѣнку, и дальнѣйшее уменьшеніе наклона влечетъ уменьшеніе коэффиціента расхода.

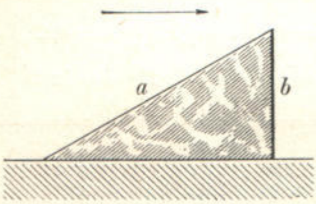
Уклонъ задней стѣнки существенно сказывается въ томъ, что, чѣмъ положе этотъ уклонъ, тѣмъ менѣе возможно образованіе снизу подтопленной струи; чаще имѣется струя, отжатая книзу, соотвѣтственно чему коэффиціентъ расхода уменьшается съ приближеніемъ уклона къ горизонту. Очевидно, тутъ сказывается также замедляющее вліяніе стѣнки.

Чѣмъ шире горизонтальная часть, тѣмъ меньше шансовъ для отставанія струи,—она остается прилипающей, и коэффиціентъ расхода уменьшается съ увеличеніемъ толщины δ.

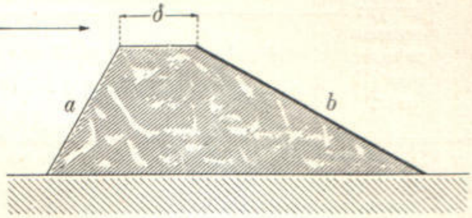
Увеличеніе радіусовъ закругленія также увеличиваетъ коэффиціентъ расхода, но до извѣстныхъ предѣловъ; дальнѣйшее его увеличеніе уменьшаетъ расходъ, увеличивая треніе.

Криволинейные профили даютъ вообще наибольшие расходы.

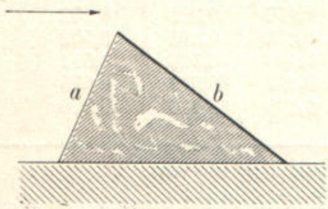
Обобщающихъ выводовъ изъ своихъ наблюденій Базенъ не сдѣлалъ, такъ какъ при многообразіи отдѣльныхъ факторовъ число его наблюденій, абсолютно очень большое,



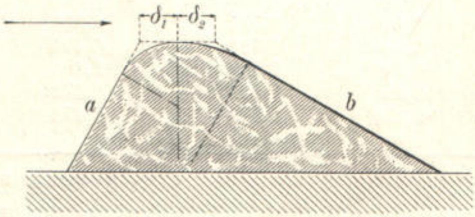
Фиг. 106.



Фиг. 108.



Фиг. 107.



Фиг. 109.

было все-таки недостаточно. Отсылая интересующихся къ оригинальной работѣ Базена (Annales des ponts et chaussées, 1898, 2 trimestre, pp. 151—264), привожу въ качествѣ иллюстраціи небольшое извлеченіе изъ его наблюденій. Въ таблицѣ 26 (см. ниже) подъ буквами a и b разумѣются отношенія вертикальной проекціи грани къ горизонтальной; a всегда относится къ передней грани, b—къ задней; значенія буквъ δ, δ_1, и δ_2 см. на фиг. 108 и 109; въ горизонтальныхъ строкахъ видно вліяніе уклоновъ граней, въ вертикальныхъ столбцахъ—вліяніе длины порога δ и радіусовъ закругленія. Для сравненія тутъ же приведены соотвѣтствующіе коэффиціенты расходовъ для тонкой стѣнки и для свободной струи. Во всѣхъ наблюденіяхъ высота порога надъ дномъ была $p = 0{,}5$ *mtr*, кромѣ нѣкоторыхъ, отмѣченныхъ въ таблицѣ.

Кромѣ отмѣченныхъ выше обстоятельствъ, изъ этой таблицы можно заключить, что въ водосливахъ, имѣющихъ размѣръ $\delta > 0$, а также уклонъ задней стѣнки положе, нежели $b = 1:1$, съ увеличеніемъ напора коэффиціентъ расхода замѣтно приближается къ нѣкоторой постоянной; это видно изъ того, что съ увеличеніемъ напора коэффиціенты расхода измѣняются все медленнѣе и медленнѣе. Во всѣхъ предыдущихъ случаяхъ этого нельзя было отмѣтить, такъ какъ возрастаніе съ напоромъ скорости подхода все время вліяетъ на увеличеніе коэффиціента расхода. Очевидно, что это исключеніе нужно объяснить треніемъ о наклонную заднюю стѣнку и о широкій порогъ водослива.

Въ разсматриваемыхъ случаяхъ сложныхъ профилей водосливовъ, опять-таки при условіи, что уклонъ задней стѣнки меньше 1 : 1, водосливъ становится несовершеннымъ не тогда, когда горизонтъ въ отводящемъ каналѣ стоитъ выше порога ($h_1 > 0$): изъ наблюденій Базена слѣдуетъ, что такіе водосливы становятся несовершенными только тогда, когда $h_1 > \frac{1}{2}\,h$; до этого предѣла, хотя бы подпоръ h_1 и былъ, но скачокъ оттѣсняется прочь, и истеченіе происходитъ, какъ если бы h_1 было равно нулю или даже было отрицательно; подпоръ, не выходящій изъ указанныхъ предѣловъ, на истеченіе не вліяетъ.

Таблица 26

значенiй коэффицiента расхода μ.

Напоръ h въ $mtr.$	Свободная струя; тонкая стѣнка; $p = 0,5$ $mtr.$	Толщина порога $\delta = 0$. Глубина водослива $p' = p'' = 0,5$ $mtr.$					
		$a = 1:2$ $b = \infty$	$a = \infty$ $b = 3:1$	$a = 3:1$ $b = 1:2$	$a = 1:1$ $b = 1:2$	$a = 1:2$ $b = 1:2$	$a = 1:2$ $b = 1:5$
0,10	0,439	0,502	0,433	0,460	0,478	0,484	0,456
0,15	0,438	0,520	0,444	0,465	0,476	0,483	0,454
		Отжатая струя обращается въ затопленную: при $h = 0,16$ $mtr.$	при $h = 0,2$ $mtr.$				
0,20	0,440	0,524	0,500	0,476	0,488	0,492	0,458
0,25	0,445	0,524	0,494	0,475	0,495	0,502	0,462
0,30	0,450	0,520	0,485	0,485	0,506	0,511	0,468
0,35	0,455	0,520	0,472	0,487	0,512	0,515	0,472
0,40	0,459	0,516	0,472	0,490	0,516	0,520	0,475

Напоръ h въ $mtr.$	Свободная струя; тонкая стѣнка; $p = 0,5$ $mtr.$	Толщина порога $\delta = 100$ $mm.$ Глубина водослива $p' = p'' = 0,5$ $mtr.$					
		$a = 1:2$ $b = \infty$	$a = \infty$ $b = 3:1$	$a = \infty$ $b = 1:2$	$a = 1:1$ $b = 1:2$	$a = 1:2$ $b = 1:2$	$a = 1:2$ $b = 1:5$
0,10	0,439	0,410	0,382	0,380	0,401	0,418	0,396
			Отжатая струя переходитъ въ прилипающую при $h = 0,125$ $mtr.$				
0,15	0,438	0,440	0,445	0,410	0,431	0,442	0,416
		Отжатая струя переходитъ въ затопленную при $h = 0,18$ $mtr.$					
0,20	0,440	0,470	0,477	0,439	0,455	0,460	0,423
			Струя становится затопленною при $h = 0,25$ $mtr.$				
0,25	0,445	0,487	0,508	0,459	0,477	0,476	0,440
0,30	0,450	0,497	0,521	0,478	0,494	0,490	0,446
0,40	0,459	0,508	0,481	0,478	0,521	0,508	0,462
			При $h = 0,35$ mtr струя отстаетъ отъ порога, оставаясь затопленной.			при $h = 0,358$ $mtr.$	

Продолженіе таблицы 26.

Значенія коэффиціента расхода μ.

Напоръ h въ $mtr.$	Свободная струя; тонкая стѣнка; $p = 0{,}5$ $mtr.$	$\delta = 200$ $mm.$ $p = 0{,}5$ $mtr.$ $a = 1:2.$ $b = \infty.$	Свободная струя; тонкая стѣнка; $p = 0{,}75$ $mtr.$	$a = 3:1$ $b = 1:2$ $\delta = 200$ $mm.$ $p = 0{,}75$ $mtr.$	$\delta = 200$ $mm.$ $p = 0{,}5$ $mtr.$ $a = 1:1$ $b = 1:2$	$a = 1:2$ $b = 1:2$	$a = 1:2$ $b = 1:5$
0,10	0,439	0,390	0,435	0,330	0,386	0,392	0,386
0,15	0,438	0,410	0,432	0,360	0,399	0,406	0,399
		Отжатая струя обращается въ затопленную при $h = 0{,}18$ $mtr.$					
0,20	0,440	0,426	0,432	0,385	0,416	0,422	0,409
0,30	0,450	0,461	0,436	0,426	0,458	0,455	0,431
0,40	0,459	0,483	0,443	0,455	0,485	0,481	0,450

		Свободная струя; тонкая стѣнка; $p = 0{,}75$ $mtr.$	$\delta = 400$ $mm.$ $p = 0{,}75$ $mtr.$ $a = 2:1$ $b = 1:2$	$a = 2:1$ $b = 1:4$	Фиг. 109. $p = 0{,}5$ $mtr.$ $a = 5:1$ $b = 1:3$ Меньшіе радіусы $\delta_1 = \delta_2 = 100$ $mm.$	Бóльшіе радіусы $\delta_1 = \delta_2 = 200$ $mm.$	$a = 5:1$ $b = 1:5$ Меньшіе радіусы $\delta_1 = \delta_2 = 100$ $mm.$
0,10	0,439	0,435	0,339	0,345	0,416	0,399	0,399
0,20	0,440	0,432	0,355	0,357	0,440	0,419	0,421
0,30	0,450	0,436	0,380	0,375	0,473	0,440	0,444
0,40	0,459	0,443	0,403	0,393	0,496	0,462	0,464
0,45	0,464	0,470	0,414	0,397	—	0,472	—

E) Всѣ наблюденія Базена относятся къ водосливамъ въ 2 mtr шириною безъ бокового сжатія. Для полноты приводимъ таблицу 27 значеній коэффиціентовъ расхода μ въ формулѣ $Q = \mu b h \sqrt{2gh}$, гдѣ b есть длина порога, а h—напоръ надъ порогомъ. Эта таблица можетъ замѣнить собою таблицу 20 и годна для тѣхъ же условій, а именно: *сжатіе совершенное,* такъ что скорость передъ водосливомъ ничтожна; водосливъ сдѣланъ въ *вертикальной тонкой стѣнкѣ;* доступъ воздуха подъ струю обезпеченъ вполнѣ; сжатіе струи снизу полное. Таблица предусматриваетъ также вліяніе на μ бокового сжатія и напора (измѣреннаго достаточно далеко отъ порога). Полное боковое сжатіе имѣетъ мѣсто, если боковыя стѣнки канала подходятъ къ вертикальнымъ кромкамъ водослива не ближе какъ на $2h$, и во всякомъ случаѣ не менѣе, чѣмъ на 300 mm; въ противномъ случаѣ является уже не совсѣмъ полное сжатіе съ этой стороны, и коэффиціентъ расхода слѣдуетъ оцѣнивать, какъ среднее между полнымъ и неполнымъ сжатіемъ; ближайшая къ порогу точка дна подводящаго канала должна отстоять отъ кромки порога по крайней мѣрѣ на $3h$ и не менѣе, чѣмъ на 300 mm.

Таблица 27

значеній коэффиціента μ въ формулѣ:

$$Q = \mu b h \sqrt{2gh}.$$

I. Сжатіе снизу и съ боковъ.

Напоръ h въ футахъ.	Длина b порога въ футахъ.									
	0,66	1	2	3	4	5	7	10	15	19
0,10	0,421	0,426	0,431	0,435	0,435	0,436	0,436	0,437	0,437	0,437
0,15	0,413	0,417	0,423	0,425	0,426	0,427	0,427	0,427	0,428	0,428
0,20	0,407	0,412	0,417	0,420	0,421	0,421	0,421	0,422	0,423	0,423
0,25	0,403	0,408	0,414	0,416	0,417	0,417	0,418	0,419	0,419	0,419
0,30	0,401	0,405	0,411	0,413	0,414	0,414	0,415	0,416	0,416	0,417
0,40	0,397	0,401	0,406	0,409	0,409	0,410	0,411	0,412	0,413	0,413
0,50	0,393	0,397	0,403	0,405	0,407	0,407	0,409	0,410	0,411	0,411
0,60	0,391	0,395	0,401	0,403	0,405	0,405	0,407	0,409	0,409	0,410
0,70	0,390	0,393	0,399	0,402	0,403	0,404	0,406	0,408	0,409	0,409
0,80	—	—	0,397	0,400	0,401	0,403	0,405	0,407	0,408	0,409
0,90	—	—	0,395	0,399	0,400	0,402	0,404	0,406	0,407	0,408
1,0	—	—	0,393	0,397	0,399	0,401	0,403	0,405	0,407	0,407
1,1	—	—	0,391	0,395	0,397	0,399	0,402	0,404	0,406	0,407
1,2	—	—	0,390	0,394	0,396	0,398	0,401	0,403	0,405	0,407
1,3	—	—	0,388	0,393	0,395	0,397	0,399	0,403	0,405	0,406
1,4	—	—	0,387	0,391	0,393	0,396	0,398	0,401	0,404	0,406
1,5	—	—	—	0,390	0,393	0,395	0,397	0,401	0,403	0,405
1,6	—	—	—	0,388	0,391	0,394	0,397	0,400	0,403	0,405
1,7	—	—	—	—	—	—	0,396	0,399	0,402	0,404
2,0	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

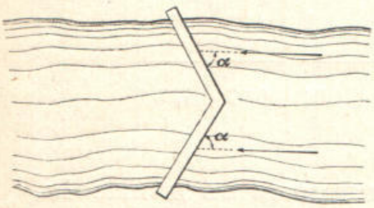
II. Сжатіе только снизу.

Напоръ h въ футахъ.	При $b = \infty$	Длина b порога въ футахъ.								
		19	15	10	7	5	4	3	2	0,66
0,10	0,437	0,438	0,438	0,439	0,439	0,439	—	—	—	0,450
0,15	0,429	0,429	0,429	0,429	0,430	0,430	0,431	0,433	0,434	0,441
0,20	0,423	0,423	0,424	0,425	0,425	0,425	0,427	0,428	0,430	0,437
0,25	0,419	0,420	0,421	0,421	0,422	0,423	0,424	0,425	0,427	0,435
0,30	0,417	0,417	0,418	0,419	0,419	0,421	0,422	0,424	0,426	0,434
0,40	0,413	0,414	0,415	0,415	0,417	0,419	0,420	0,422	0,424	0,433
0,50	0,411	0,413	0,413	0,414	0,416	0,418	0,420	0,422	0,425	0,433
0,60	0,411	0,412	0,413	0,413	0,415	0,418	0,420	0,423	0,425	0,434
0,70	0,415	0,412	0,413	0,413	0,416	0,419	0,421	0,423	0,427	0,435
0,80	0,409	0,412	0,413	0,414	0,417	0,419	0,422	0,425	0,429	0,437
0,90	0,409	0,413	0,413	0,415	0,418	0,420	0,423	0,426	0,430	—
1,0	0,409	0,413	0,414	0,416	0,419	0,422	0,425	0,427	0,432	—
1,1	0,409	0,413	0,415	0,417	0,420	0,423	0,426	0,429	—	—
1,2	0,409	0,414	0,415	0,417	0,421	0,424	0,427	0,431	—	—
1,3	0,409	0,414	0,416	0,419	0,422	0,425	0,429	0,432	—	—
1,4	0,409	0,415	0,417	0,419	0,423	0,427	0,429	—	—	—
1,5	0,409	0,415	0,417	0,420	0,424	0,427	0,431	—	—	—
1,6	0,409	0,415	0,417	0,421	0,425	0,428	0,431	—	—	—
1,7	0,409	0,416	0,418	0,421	0,425	—	—	—	—	—
2,0	0,409	—	—	—	—	—	—	—	—	—

Эта таблица (пересчитанная нами такъ, чтобы пользоваться вышеприведенной простой, обычной формулой расхода) составлена H. Smith'омъ на основанiи опытовъ Lesbros, Fteley, Stearns'a, Francis'a, своихъ собственныхъ и другихъ.

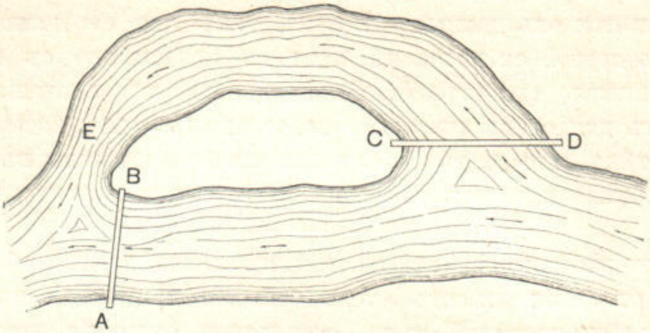
Въ своей второй части (сжатiе только снизу) она довольно значительно отклоняется отъ данныхъ Базена, такъ что ее можно рекомендовать только въ первой ея половинѣ, притомъ непремѣнно съ соблюденiемъ выше отмѣченныхъ ограниченiй. Замѣчательно, что значенiя μ, которыя H. Smith даетъ для очень широкаго водослива ($b = \infty$), весьма близко совпадаютъ съ тѣмъ, что даетъ Базенъ для своего водослива въ 2 *mtr* ширины, но освобожденнаго отъ всякаго влiянiя скорости подхода.

Въ заключенiе этого параграфа отмѣтимъ еще слѣдующее обстоятельство. Водосливныя отверстiя имѣютъ очень большое примѣненiе въ плотинахъ. Перегораживая рѣку плотиной, въ ней оставляютъ отверстiе, достаточное для пропуска не только обычнаго расхода рѣки, но также и того количества воды, которое идетъ въ рѣкѣ во время паводковъ и половодiй. Это послѣднее количество можетъ быть опредѣлено только съ большей или меньшей вѣроятностью. Поэтому плотину всегда снабжаютъ запаснымъ водоспускомъ, который и устраивается обыкновенно въ видѣ водослива, порогъ котораго закладывается выше обычнаго уровня, но такъ, чтобы въ случаѣ паводка черезъ него переливалось все то количество воды, которое не успѣваетъ пройти черезъ главный водоспускъ; такимъ образомъ уничтожается опасность черезчуръ высокаго подъема воды передъ плотиной. Нерѣдко и главный водоспускъ имѣетъ форму водослива. Понятно, что если



Фиг. 110.

остановиться на опредѣленномъ положенiи порога и въ то же время поставить требованiе, чтобы вода не поднималась выше опредѣленнаго предѣла,— другими словами, если поставлены предѣлы для напора, подъ которымъ происходитъ истеченiе черезъ водосливъ,—то для того, чтобы увеличить его водопропускную способность, остается только одно,—увеличить его длину; а это приводитъ къ тому, что нерѣдко длина водослива должна быть больше, чѣмъ вся ширина рѣки. Въ такомъ случаѣ водосливъ ставятъ не перпендикулярно къ руслу рѣки, а по какой-нибудь,—иногда ломаной, иногда просто наклонной, иногда даже кривой,—линiи. Такъ въ городахъ, гдѣ предѣлы колебанiя уровня передъ плотиной стараются держать въ особенно узкихъ рамкахъ, нерѣдко можно встрѣтить плотину, перегораживающую рѣку наискось или по ломаной линiи (фиг. 110). Когда имѣется запасный водоотводный каналъ, то такой запасный водосливъ ставятъ даже параллельно теченiю рѣки (фиг. 111): *AB* есть здѣсь главная плотина, *CD* — запасной водосливъ, отдающiй избытокъ воды въ водоотводный каналъ *DE*. Если бы вода передъ плотиной была въ покоѣ, то такое расположенiе водослива ничѣмъ не отличалось бы отъ обычнаго положенiя, — перпендикулярно къ руслу рѣкѣ. Но такъ какъ передъ плотиной скорость всегда есть и притомъ она имѣетъ общее направленіе русла, то понятно, что чѣмъ больше уголъ между направленіемъ водослива и направленіемъ русла отличается отъ прямого, тѣмъ больше будетъ стѣснено истеченіе, такъ какъ, подходя къ водо-



Фиг. 111.

сливу, вода должна еще измѣнить свое направленіе. Въ виду этого рекомендуется при подсчетѣ расхода черезъ такой водосливъ вводить еще поправочный коэффиціентъ, который можно брать изъ слѣдующей таблицы, въ зависимости отъ угла α (фиг. 110):

α	0^0	15^0	30^0	45^0	60^0	90^0
Поправ. коэф-тъ.	0,80	0,86	0,91	0,94	0,96	1,00

§ 18. Истеченіе изъ сосудовъ, находящихся въ движеніи.

Здѣсь мы ограничимся исключительно тѣмъ случаемъ, когда, во-первыхъ, свободная поверхность поддерживается въ неизмѣнномъ относительно сосуда положеніи, и, во-вторыхъ, сѣченіе сосуда A по сравненію въ площадью отверстія a такъ велико, что можно предположить, что внутри сосуда жидкость относительнаго перемѣщенія не имѣетъ. Тогда, какъ мы видѣли, пренебрегая сопротивленіями, можно писать, что

$$v = \sqrt{2gh},$$

или, если p_0 есть атмосферное давленіе на свободной поверхности, а p— давленіе въ отверстіи со стороны окружающей среды, то изъ соотвѣственно написаннаго ур-ія Д. Бернулли получаемъ:

$$v = \sqrt{2g\left[\left(h + \frac{p_0}{\gamma} - \frac{p_0}{\gamma}\right) - \left(\frac{p}{\gamma} - \frac{p_0}{\gamma}\right)\right]} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (F)$$

Легко видѣть, что напоръ, подъ которымъ при этихъ условіяхъ происходитъ истеченіе $\left(\frac{a}{A} \text{ очень мало}\right)$, есть разность высотъ *гидростатиче-*

скихъ давленій въ центрѣ тяжести отверстія $\left(h+\frac{p_0}{\gamma}\right)$ и на свободной поверхности $\left(\frac{p_0}{\gamma}\right)$ *), уменьшенная на разность давленій на свободной поверхности и передъ отверстіемъ. Изъ гидростатики извѣстно, что разность гидростатическихъ давленій, вообще, равна плотности жидкости, умноженной на разность значеній силовой функціи:

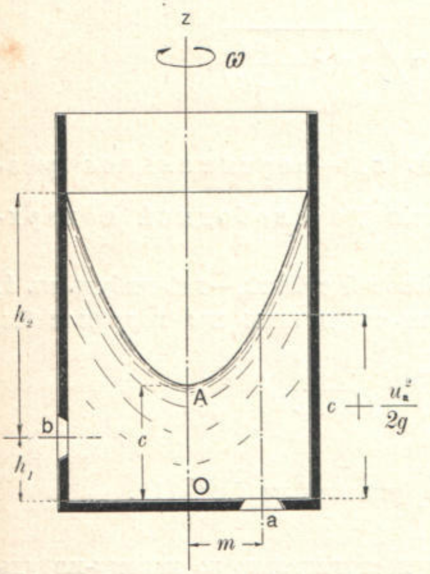
$$dp=\varrho\, dU$$

или, въ конечной формѣ:

$$\Delta p=\varrho\,(U_1-U_0).$$

Поэтому ур-іе (F) можно переписать такъ:

$$v=\sqrt{2g\left[\frac{\varrho}{\gamma}\left(U_1-U_0\right)-\left(\frac{p}{\gamma}-\frac{p_0}{\gamma}\right)\right]} \quad \ldots\ldots (1)$$



Фиг. 112.

Очевидно, что, если давленія вокругъ всего сосуда одинаковы, что мы и будемъ предполагать, то послѣдній членъ просто исчезаетъ, и ур-іе (1) перепишется такъ:

$$v=\sqrt{2g\frac{\varrho}{\gamma}(U_1-U_0)} \quad \ldots (1')$$

Разсмотримъ слѣдующіе два случая:

1) Сосудъ вращается съ постоянной угловой скоростью ω около вертикальной оси (фиг. 112). Припомнимъ, что поверхности уровня въ этомъ случаѣ суть параболоиды вращенія, а силовая функція U выражается такъ:

$$U=\int(X\,dx+Y\,dy+Z\,dz)=\int(\omega^2x\,dx+\omega^2y\,dy-g\,dz)=$$
$$=\frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2)-gz+C.$$

---

*) Если бы $\frac{a}{A}$ не было мало, то, прибавляя къ этой разности еще высоту, соотвѣтствующую скорости на свободной поверхности $\frac{v_0^2}{2g}$, мы перешли бы къ гидродинамическому давленію.

Пусть отверстіе сдѣлано на днѣ сосуда, въ a, при чемъ координаты его центра тяжести таковы:

$$x = m,\ y = n,\ z = 0.$$

Значеніе силовой функціи для поверхности уровня, проходящей черезъ эту точку, будетъ, слѣдовательно, таково:

$$U_1 = \frac{\omega^2}{2}(m^2 + n^2) + C = \frac{\omega^2 r^2}{2} + C = \frac{u_a^2}{2} + C,$$

гдѣ u_a есть линейная скорость вращенія точки a. Для какой-нибудь точки свободной поверхности,—напримѣръ, для вершины A параболоида ($x = 0$ $y = 0$, $z = c$) *), — имѣемъ значеніе силовой функціи:

$$U_0 = C - gc.$$

Поэтому скорость вытеканія w_a (относительная, а не абсолютная), по ур. ($1'$) выразится такъ:

$$w_a = \sqrt{2g\frac{\varrho}{\gamma}\left(\frac{u_a^2}{2} + gc\right)} = \sqrt{2g\left(c + \frac{u_a^2}{2g}\right)}.$$

Легко убѣдиться, что $\left(c + \frac{u_a^2}{2g}\right)$ есть z_a, — вертикальное разстояніе центра тяжести a отверстія до свободной поверхности.

Если бы отверстіе было сдѣлано въ боковой стѣнкѣ,—гдѣ-нибудь въ b, на высотѣ h_1 надъ дномъ,—то точно такимъ же путемъ мы получили бы, что

$$w_b = \sqrt{2g\left(c - h_1 + \frac{u_b^2}{2g}\right)} = \sqrt{2gh_2},$$

при чемъ геометрическое значеніе буквы h_2 указано на фиг. 112.

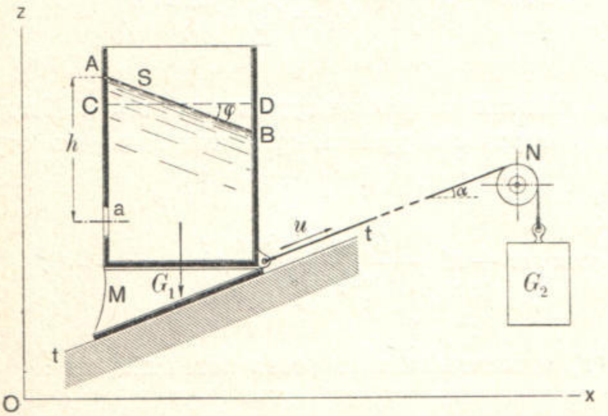
2) Сосудъ движется прямолинейно и поступательно по какому-нибудь направленію tt, образующему уголъ α съ горизонтальною осью Ox (фиг. 113). Осуществляется это, напримѣръ, при помощи башмака M, скользящаго по наклонной плоскости tt (допустимъ, безъ тренія), и нити, перекинутой черезъ блокъ N (тоже работающій безъ тренія) и несущей грузъ G_2. Вѣсъ сосуда съ водой назовемъ черезъ G_1. Пусть приняты мѣры къ тому, чтобы этотъ вѣсъ G_1, постоянно уменьшающійся вслѣдствіе вытеканія воды, не измѣнялся, путемъ пополненія надлежащаго количества воды. При этихъ условіяхъ движущаяся масса выразится черезъ $\frac{G_1 + G_2}{g}$; движущей же

*) Объ опредѣленіи положенія вершины параболоида свободной поверхности см. въ Гидростатикѣ § 3.

силой является $G_2 - G_1 sin\alpha$; движеніе происходитъ по стрѣлкѣ; при обратномъ направленіи движенія движущая сила выразится черезъ $G_1 sin\alpha - G_2$. Поэтому ускореніе силы инерціи въ движеніи влеченія выражается черезъ

$$-\frac{du}{dt} = -g\,\frac{G_2 - G_1 sin\alpha}{G_1 + G_2}$$

и направлено по линіи tt въ сторону, обратную скорости u, если движеніе ускоренное, т.-е. если $G_2 > G_1 sin\alpha$.



Фиг. 113.

Составимъ для этого случая уравненіе поверхностей уровня. Такъ какъ всѣ дѣйствующія силы въ этомъ случаѣ параллельны плоскости xz, то вмѣсто всего сосуда можно разсматривать только его сѣченіе плоскостью xz, а потому дифференціальное уравненіе кривой сѣченій поверхностей уровня плоскостью xz будетъ имѣть видъ:

$$dU = X\,dx + Z\,dz = 0.$$

Въ нашемъ случаѣ очевидно:

$$X = -\frac{du}{dt} cos\alpha = -g\,\frac{G_2 - G_1 sin\alpha}{G_1 + G_2} cos\alpha,$$

$$Z = -g - g\,\frac{G_2 - G_1 sin\alpha}{G_1 + G_2} sin\alpha = -g\left(1 + \frac{G_2 - G_1 sin\alpha}{G_1 + G_2} sin\alpha\right).$$

Внося эти значенія въ ур-іе поверхностей уровня и интегрируя, получаемъ выраженіе силовой функціи въ такомъ видѣ:

$$U = -g\,\frac{G_2 - G_1 sin\alpha}{G_1 + G_2} cos\alpha . x - g\left(1 + \frac{G_2 - G_1 sin\alpha}{G_1 + G_2} sin\alpha\right) z + C \quad . \; . (2)$$

Приравнивая его любой постоянной величинѣ, благодаря чему изъ выраженія (2) получаемъ ур-іе поверхностей уровня, видимъ, что это есть уравненіе прямой, образующей съ горизонтомъ уголъ φ, tg котораго есть:

$$tg\varphi = \frac{(G_2 - G_1 sin\alpha) cos\alpha}{(G_1 + G_2) + (G_2 - G_1 sin\alpha) sin\alpha} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . (3)$$

Разъ искомая кривая есть прямая линія, то поверхности уровня будутъ плоскости.

Очевидно, что линія **AB** свободной поверхности пересѣкаетъ линію **CD** (свободную поверхность при покоѣ) на оси симметріи сосуда, если онъ только таковую имѣетъ.

Значеніе силовой функціи для какой-нибудь точки **S** на свободной поверхности, съ координатами $x = m$, $z = n$, по уравненію (2) таково:

$$U_0 = -g\left\{\frac{G_2 - G_1 sin\alpha}{G_1 + G_2} cos\alpha \, . \, m + n + \frac{G_2 - G_1 sin\alpha}{G_1 + G_2} sin\alpha \, . \, n\right\} + C.$$

Пусть координаты центра тяжести отверстія *a* суть $x = m'$, $z = n'$. Тогда значеніе силовой функціи для поверхности уровня, проходящей черезъ эту точку, есть:

$$U_1 = -g\left\{\frac{G_2 - G_1 sin\alpha}{G_1 + G_2} cos\alpha \, . \, m' + n' + \frac{G_2 - G_1 sin\alpha}{G_1 + G_2} sin\alpha \, . \, n'\right\} + C.$$

Поэтому по уравненію (1′) относительная скорость истеченія есть:

$$w = \sqrt{2g\frac{\varrho}{\gamma}\left\{\frac{G_2 - G_1 sin\alpha}{G_1 + G_2}(m - m')cos\alpha + (n - n') + \frac{G_2 - G_1 sin\alpha}{G_1 + G_2}(n - n')sin\alpha\right\}g} . \quad (G)$$

Замѣтимъ, что $\frac{\varrho}{\gamma} = \frac{1}{g}$. Далѣе, если точку **S** возьмемъ на одной вертикали съ центромъ тяжести отверстія, то будемъ имѣть $m = m'$; величина же $(n - n')$, которую мы обозначимъ черезъ h, представитъ собою въ такомъ случаѣ вертикальное разстояніе отъ центра тяжести до свободной поверхности. И въ такомъ случаѣ уравненіе (G) переписалось бы такъ:

$$w = \sqrt{2gh\left(1 + \frac{G_2 - G_1 sin\alpha}{G_1 + G_2} sin\alpha\right)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

Въ частности пусть $\alpha = 90^0$, т.-е. пусть сосудъ движется по вертикали. Легко видѣть, что тогда $\varphi = 0$ (уравненіе 3), т.-е. поверхности уровня суть горизонтальныя плоскости; слѣдовательно, здѣсь безразлично, по какой вертикали измѣрять высоту h. Скорость истеченія въ этомъ случаѣ будетъ такова:

$$w = \sqrt{2gh\left(1 + \frac{G_2 - G_1}{G_1 + G_2}\right)} = \sqrt{2gh\frac{2G_2}{G_1 + G_2}} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

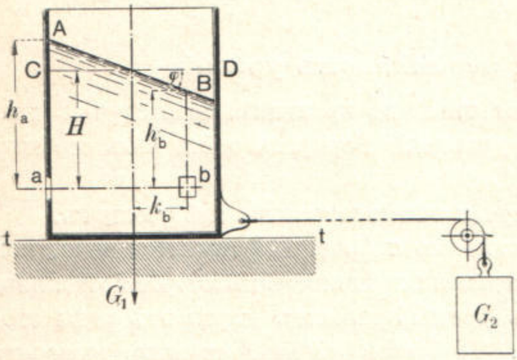
Если бы движеніе было обратное, т.-е. книзу, то ускореніе $\frac{du}{dt}$ имѣло бы другой знакъ, и мы получили бы:

$$w = \sqrt{2gh\frac{2G_1}{G_1+G_2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Равнымъ образомъ, если бы движеніе было не ускореннымъ, какъ мы считали до сихъ поръ, а замедленнымъ, то пришлось бы это отмѣтить новой перемѣной знака производной $\frac{du}{dt}$, и уравненіе (5) давало бы скорость истеченія при замедленномъ паденіи сосуда, а уравненіе (6)—при замедленномъ подъемѣ его.

Если движеніе происходитъ въ горизонтальной плоскости (фиг. 114), то $\alpha = 0$, и для отверстія *a* уравненіе (4) даетъ:

$$w_a = \sqrt{2gh_a}.$$



Фиг. 114.

Для отверстія *b*, хотя бы оно лежало на одной горизонтали съ отверстіемъ *a*, скорость будетъ другая:

$$w_b = \sqrt{2gh_b}.$$

По уравненію (3) видно, что плоскости уровня образуютъ съ горизонтомъ уголъ φ, tg котораго будетъ:

$$tg\varphi = \frac{G_2}{G_1+G_2}.$$

Если въ покоющемся сосудѣ вода была налита до высоты H надъ обоими отверстіями *a* и *b* и если разстояніе ихъ отъ оси сосуда, считая по направленію перемѣщенія, есть k, то очевидно, что

$$h_b = H - k_b tg\varphi = H - k_b\frac{G_2}{G_1+G_2};$$

точно также

$$h_a = H + k_a\frac{G_2}{G_1+G_2},$$

или, вообще,

$$h = H \mp k\frac{G_2}{G_1+G_2}.$$

Если бы не было движенія сосуда, то изъ обоихъ отверстій жидкость выливалась бы съ одинаковой скоростью v, соотвѣтствующей напору H; при движеніи же сосуда скорости истеченія будутъ больше или меньше v, смотря по тому, въ какую сторону отъ оси отнесено отверстіе.

Замѣтимъ, что мы опредѣляли только относительную скорость вытеканія. Абсолютную скорость получимъ, сложивъ найденную относительную скорость со скоростью влеченія по правилу параллелограмма. Что касается до величины расхода, то, понятно,

$$Q = \mu a w,$$

гдѣ a есть площадь отверстія.

Наконецъ, отмѣтимъ, что въ случаѣ поступательнаго движенія, разъ оно равномѣрно, имѣемъ

$$\frac{du}{dt} = 0,$$

а слѣдовательно, и истеченіе изъ движущагося такъ сосуда происходитъ совершенно такъ же, какъ если бы движенія сосуда не было.

§ 19. Истеченіе при перемѣнномъ уровнѣ.

Этотъ случай, довольно обыкновенный въ практикѣ, есть случай движенія неустановившагося; поэтому уравненіе Бернулли здѣсь безъ особыхъ ограниченій непримѣнимо.

Задача изслѣдованія такого случая заключается въ слѣдующемъ.

Въ сосудѣ съ отверстіемъ площадью a (фиг. 115) имѣется вода, при чемъ, вообще, въ сосудъ въ единицу времени притекаетъ нѣкоторое постоянное количество q mtr^3. Въ какой-нибудь данный моментъ горизонтъ воды стоитъ на высотѣ h_1 надъ отверстіемъ. Требуется узнать, сколько вытечетъ изъ сосуда воды за время t, или, наоборотъ, за какой промежутокъ времени горизонтъ займетъ новое положеніе на высотѣ h_2 надъ отверстіемъ. Пусть за данный промежутокъ времени dt черезъ отверстіе вытекаетъ количество воды dQ mtr^3. За то же время притокъ равенъ $q\,dt$ mtr^3. Можетъ оказаться, что $dQ = q\,dt$; тогда свободная поверхность своего положенія измѣнять не будетъ. Можетъ, затѣмъ, оказаться, что $dQ > q\,dt$; тогда свободная поверхность понижается, но вмѣстѣ съ тѣмъ, конечно уменьшается и расходъ, до тѣхъ поръ, пока расходъ и притокъ не сравняются: съ этого момента установится истеченіе подъ постояннымъ напоромъ. Наконецъ, можетъ оказаться, что $dQ < q\,dt$. Тогда свободная поверхность повышается, а вмѣстѣ съ тѣмъ постепенно растетъ и dQ, при томъ опять до совпаденія притока съ расходомъ, когда движеніе станетъ установившимся. Но можетъ ли дѣйствительно наступить такой моментъ, это мы сейчасъ увидимъ.

Фиг. 115.

Если въ теченіе короткаго промежутка времени горизонтъ въ сосудѣ измѣняетъ свое положеніе на конечную величину, то за безконечно малый промежутокъ времени dt, въ началѣ котораго онъ стоялъ на высотѣ z, онъ измѣняется на безконечно малую величину, исчезающую передъ конечной величиной z. Поэтому для всякаго даннаго момента можно считать z постояннымъ и за безконечно малое время dt можно считать движеніе установившимся. Примѣняя къ этому промежутку уравненіе Д. Бернулли, получимъ, что за время dt изъ отверстія выльется объемъ жидкости

$$dQ = \mu a \sqrt{2gz}\, dt.$$

Понятно, что расходъ изъ сосуда за нѣкоторый промежутокъ времени равенъ притоку плюсъ убыль, или равенъ притоку безъ увеличенія объема жидкости въ сосудѣ,—конечно, за тотъ же промежутокъ времени. Соотношеніе это въ обоихъ случаяхъ передается уравненіемъ:

$$dt \,.\, \mu a \sqrt{2gz} = q\, dt - A\, dz \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, (1)$$

Здѣсь $q\,dt$ есть притокъ за время dt, а A есть площадь сосуда, занимаемая въ данный моментъ свободной поверхностью ***MN***.

Въ случаѣ $q < \mu a \sqrt{2gz}$ нужно считать dz отрицательнымъ (на чертежѣ его нужно откладывать внизъ, тогда какъ самое z считается отъ отверстія вверхъ); въ случаѣ $q > \mu a \sqrt{2gz}$ все произведеніе $A\,dz$ (положительное), по смыслу сказаннаго, должно быть вычтено изъ $q\,dt$. Въ обоихъ случаяхъ изъ уравненія (1) имѣемъ:

$$dt = \frac{-A\, dz}{\mu a \sqrt{2gz} - q} \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, (2)$$

Разберемъ теперь нѣсколько частныхъ случаевъ.

1) Пусть сосудъ призматическій, т.-е. $A = const$, и пусть притокъ тоже постояненъ: $q = const$. Пусть требуется найти время t пониженія уровня отъ высоты h_1 до h_2. Тогда имѣемъ по ур-ію (2):

$$t = \int_{h_1}^{h_2} - \frac{A\, dz}{\mu a \sqrt{2gz} - q} = \frac{A}{\mu a \sqrt{2g}} \int_{h_2}^{h_1} \frac{dz}{\sqrt{z} - \sqrt{k}}, \, . \, . \, . \, . \, . \, (3)$$

гдѣ для краткости письма положено

$$\sqrt{k} = \frac{q}{\mu a \sqrt{2g}}.$$

Легко видѣть, что величина k представляетъ собою тотъ постоянный напоръ, подъ которымъ черезъ отверстіе площадью a выльется въ единицу времени расходъ, равный притоку q. Другими словами, k есть высота того наинизшаго горизонта, къ которому асимптотически стремится уровень въ сосудѣ, если $q\,dt < dQ$, и, наоборотъ, наивысшаго, если $q\,dt > dQ$. Что это дѣйствительно такъ, мы сейчасъ убѣдимся изъ разсмотрѣнія ур-ій. Для краткости письма назовемъ въ ур-іи (3) коэффиціентъ передъ знакомъ интеграла буквою B, такъ что:

$$t = B\int_{h_2}^{h_1} \frac{dz}{\sqrt{z}-\sqrt{k}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3')$$

Производимъ замѣну перемѣнныхъ, полагая

$$\sqrt{z}-\sqrt{k}=y;$$

тогда

$$\frac{dz}{2\sqrt{z}}=dy,$$

откуда

$$dz = 2\,dy\,(y+\sqrt{k})\,.$$

Внося это значеніе dz въ уравненіе (3′), имѣемъ, соотвѣтственно мѣняя предѣлы интеграціи:

$$t = B\int_{y_2}^{y_1} \frac{2\,dy\,(y+\sqrt{k})}{y} = 2B\int_{y_2}^{y_1}\left(1+\frac{\sqrt{k}}{y}\right)dy =$$

$$= 2B\left[\sqrt{h_1}-\sqrt{h_2}+\sqrt{k}\,L_n\,\frac{\sqrt{h_1}-\sqrt{k}}{\sqrt{h_2}-\sqrt{k}}\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Чтобы пользоваться этимъ уравненіемъ, нужно прежде всего сравнить заданныя величины h_1 и h_2 съ высотою k. Необходимо, чтобы или обѣ высоты h_1 и h_2 были больше k (притокъ меньше расхода, горизонтъ понижается), или же чтобы обѣ были меньше k (горизонтъ повышается). Если же величина k заключается между величинами h_1 и h_2, то въ уравненіи (4) придется брать натуральный логариѳмъ отрицательнаго числа, — величину несуществующую. Невозможность рѣшенія коренится въ этомъ случаѣ не въ неправильности уравненія, а въ несообразности данныхъ задачи, ибо понятно, что если мы вливаемъ все время въ сосудъ постоянное количество q, меньшее, нежели въ данный моментъ изъ него выливается, то, конечно, никогда не настанетъ момента, когда изъ сосуда будетъ выливаться меньше, чѣмъ вливается; чтобы получить такое соотношеніе, мы должны перейти черезъ моментъ равенства притока съ расходомъ, т.-е. черезъ положеніе горизонта въ сосудѣ, когда $h_2 = k$ (ибо тогда $dQ = q\,dt$). Если же въ уравненіе (4) внести это послѣднее значеніе h_2, то получимъ $t = \infty$, что и подтверждаетъ сказанное.

Полагаемъ далѣе, что притока нѣтъ, т.-е. что $q=0$; тогда $k=0$, и мы получаемъ, что время пониженія уровня съ высоты h_1 на уровень h_2, безъ притока извнѣ, есть:

$$t=\frac{2A}{\mu a\sqrt{2g}}(\sqrt{h_1}-\sqrt{h_2}) \quad \dots\dots\dots\dots (5)$$

Очевидно, это имѣетъ смыслъ только для пониженія уровня. За этотъ промежутокъ времени выливается объемъ воды $A(h_1-h_2)$. При постоянномъ напорѣ h_1 онъ вылился бы за время:

$$t'=\frac{A(h_1-h_2)}{\mu a\sqrt{2gh_1}}=\frac{A}{\mu a\sqrt{2g}}\left(\sqrt{h_1}-\frac{h_2}{\sqrt{h_1}}\right) \quad \dots\dots\dots (6)$$

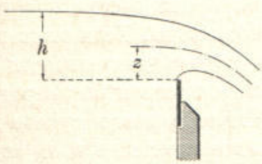
Если бы требовалось найти время опорожненія сосуда, то нужно было бы положить въ обоихъ послѣднихъ ур-іяхъ $h_2=0$, и тогда при перемѣнномъ напорѣ время опорожненія есть:

$$t_0=\frac{2A}{\mu a\sqrt{2g}}\sqrt{h_1}\,, \quad \dots\dots\dots\dots (7)$$

а при постоянномъ напорѣ этотъ же объемъ воды выльется за время:

$$t'=\frac{A}{\mu a\sqrt{2g}}\sqrt{h_1}=\frac{t_0}{2}\,,$$

т.-е. вдвое скорѣе. Такъ какъ при опорожненіи неминуемо образуется воронка, то при провѣркѣ на опытѣ уравненіе (5) даетъ величины, болѣе близкія къ наблюдаемымъ, нежели ур-іе (7).



Фиг. 116.

2) Если бы отверстіе было водосливное (фиг. 116), то, подобно предыдущему, мы могли бы написать:

$$dQ=\mu bz\sqrt{2gz}\,.\,dt\,,$$

гдѣ b есть ширина водослива. Съ другой стороны, если притока нѣтъ, то

$$dQ=-A\,dz\,,$$

гдѣ A есть площадь свободной поверхности того водоема, откуда происходитъ истеченіе. Сравнивая эти выраженія, находимъ:

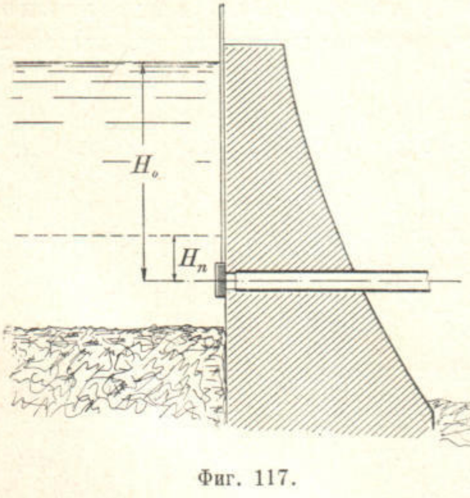
$$dt=\frac{-A}{\mu b\sqrt{2g}}\,z^{-3/2}dz \quad \dots\dots\dots\dots (H)$$

Допустимъ, что $A = const$; равнымъ образомъ, пусть μ тоже не мѣняется съ напоромъ (хотя, какъ мы видѣли, это несправедливо); наконецъ, пусть водосливъ прямоугольный, т.-е. $b = const$ (въ противномъ случаѣ нужно было бы выразить всѣ перемѣнныя величины A, μ и b въ функціи z). Интегрируемъ выраженіе (H) въ предѣлахъ отъ $z = h$ до $z = 0$, т.-е. опредѣлимъ время прекращенія истеченія черезъ водосливъ, когда нѣтъ притока:

$$T = \frac{-A}{\mu b\sqrt{2g}}\int_h^0 z^{-3/2}dz = \frac{A}{\mu b\sqrt{2g}}\int_0^h z^{-3/2}dz = \frac{2A}{\mu b\sqrt{2g}}\left(\frac{1}{\sqrt{0}} - \frac{1}{\sqrt{h}}\right) = \infty.$$

Въ этомъ рѣшеніи нѣтъ ничего парадоксальнаго, потому что, хотя въ дѣйствительности моментъ прекращенія истеченія рано или поздно наступаетъ, но момента, когда горизонтъ спускается до порога, не наступаетъ никогда,—всегда выше уровня порога остается слой воды толщиною въ нѣсколько миллиметровъ, удерживаемый въ равновѣсіи силами капиллярности (несовершенство жидкости). Поэтому при опредѣленіи времени прекращенія истеченія слѣдуетъ считать нижнимъ предѣломъ перемѣннаго z не нуль, а какую-нибудь небольшую величину, напр., 0,005 *mtr*. Отмѣтимъ, что полученный результатъ не можетъ все-таки дать величины, вполнѣ согласной съ наблюденіемъ, такъ какъ μ при очень малыхъ напорахъ постояннымъ считать нельзя.

3) Когда сосудъ не призматическій, то, чтобы взять интегралъ ур-ія (3), нужно знать зависимость между A и z. Если сосудъ имѣетъ правильную форму,—напримѣръ, если это пирамида, какое-нибудь тѣло вращенія и т. п.,—то установить эту зависимость нетрудно. Остановимся подробнѣе на случаѣ сосудовъ неправильной формы, каковы, наприм., всѣ заводскіе пруды (фиг. 117), которые часто устраиваютъ для того, чтобы въ сухое время года спускать въ рѣку черезъ плотину тѣ избытки воды, которые накапливались въ прудѣ въ болѣе обильные водою періоды года. Такіе пруды устраиваютъ какъ для цѣлей судоходства, такъ и для утилизаціи энергій; въ этомъ послѣднемъ случаѣ особенно важно знать, на сколько времени хватитъ даннаго водоема во время засухи при нормальномъ расходѣ воды. Если окажется, что это время короче длительности засухи, то можетъ оказаться болѣе раціональнымъ въ теченіе всего сухого періода работать одновременно и съ водяными и съ запасными паровыми двигателями, уменьшивъ, слѣдовательно, необходимый расходъ воды, нежели быть принужденнымъ на нѣкоторое время сократить производительность завода за недостаткомъ воды или же ставить запасные паровые двигатели, равносильные съ водяными, работающими полной силой.



Фиг. 117.

Возможны слѣдующіе два случая: 1) детальной нивеллировкой пруда опредѣлены его горизонтальные разрѣзы, и 2)—этого нѣтъ.

1) Допустимъ сначала, что притока нѣтъ: $q=0$. Пусть въ началѣ этого періода имѣется надъ центромъ тяжести отверстія напоръ H_o, а H_n есть самый низкій горизонтъ, при которомъ еще возможна работа водяныхъ двигателей. Раздѣлимъ высоту H_o-H_n на *четное* число n равныхъ частей. Допустимъ далѣе, что, пока горизонтъ опускается на высоту $\frac{H_o-H_n}{n}$, истеченіе происходитъ подъ постояннымъ напоромъ; чѣмъ мельче эти дѣленія, тѣмъ это допущеніе точнѣе. Для выраженія періода времени пониженія горизонта съ высоты H_o до высоты H_n возьмемъ полученное выше уравненіе (2), положивъ въ немъ $q=0$; имѣемъ:

$$dt=\frac{-A\,dz}{\mu a\sqrt{2gz}};$$

интегрируя въ предѣлахъ (H_o, H_n), получаемъ:

$$t=\int_{H_0}^{H_n}\frac{-A\,dz}{\mu a\sqrt{2gz}}=\int_{H_n}^{H_0}\frac{A\,dz}{\mu a\sqrt{2gz}}=\frac{1}{\mu a\sqrt{2g}}\int_{H_n}^{H_0}\frac{A\,dz}{\sqrt{z}}\,\ldots\ldots\ldots (K)$$

Въ виду невозможности установить функціональную зависимость между A и z, замѣнимъ интегрированіе суммированіемъ по формулѣ Симпсона. Имѣемъ поэтому взамѣнъ интегральнаго уравненія (K) слѣдующее:

$$t=\frac{1}{\mu a\sqrt{2g}}\sum_{H_n}^{H_0}\frac{A}{\sqrt{z}}\,dz.$$

Такъ какъ для разныхъ z величины A по существующему плану пруда съ горизонталями извѣстны, то можно взять рядъ отдѣльныхъ значеній $\frac{A}{\sqrt{z}}$, соотвѣтственно принятымъ ступенямъ $\frac{H_o-H_n}{n}$, и разсматривать ихъ, какъ ординаты y нѣкоторой кривой съ абсциссами z. По правилу Симпсона площадь такой кривой, т.-е. сумма $\sum_{z=b}^{z=a} y\,dz$, приближенно выражается вообще такъ:

$$\sum_{z=b}^{z=a} y\,dz=\frac{b-a}{3n}\{y_o+y_n+4(y_1+y_3+\ldots\ldots+y_{n-1})+2(y_2+y_4+\ldots\ldots+y_{n-2})\},$$

гдѣ b и a суть начальныя и конечныя значенія абсциссы z, а n — число дѣленій отрѣзка ($b-a$).

Въ нашемъ случаѣ получимъ:

$$t=\frac{H_o-H_n}{3n\mu a\sqrt{2g}}\left\{\frac{A_o}{\sqrt{H_o}}+\frac{A_n}{\sqrt{H_n}}+4\left(\frac{A_1}{\sqrt{H_1}}+\ldots\ldots+\frac{A_{n-1}}{\sqrt{H_{n-1}}}\right)+2\left(\frac{A_2}{\sqrt{H_2}}+\ldots\ldots+\frac{A_{n-2}}{\sqrt{H_{n-2}}}\right)\right\}\ldots (8)$$

А расходъ воды за все это время, или, стало быть, располагаемый запасъ воды въ прудѣ или, какъ говорятъ, рабочій объемъ пруда, очевидно, равенъ:

$$V=\Sigma\,\frac{H_o-H_n}{n}\,A=$$

$$=\frac{H_o-H_n}{3n}\{A_o+A_n+4(A_1+A_3+\ldots\ldots+A_{n-1})+2(A_2+A_4+\ldots\ldots+A_{n-2})\}\,.\,.\,(9)$$

По формулѣ (8) получаемъ періодъ времени, на который хватитъ пруда, если все время отверстіе a будетъ открыто цѣликомъ, а по формулѣ (9) находимъ весь располагаемый запасъ воды въ немъ. Если длительность засухи, по показаніямъ старожиловъ и по наблюденіямъ, есть T, то расходъ въ единицу времени можетъ быть допущенъ въ количествѣ $\frac{V}{T}$. Однако можетъ оказаться желательнымъ расходовать не одинаковые объемы воды, а одинаковые з а п а с ы р а б о т ы. Запасъ же работы въ каждомъ слоѣ площадью A, имѣющемъ толщину Δz и стоящемъ на высотѣ z надъ центромъ тяжести отверстія, есть, очевидно,

$$\Delta L = \gamma A z \, \Delta z \, .$$

Во всемъ прудѣ, отъ $z = H_0$ до $z = H_n$, запасъ работы достигаетъ величины:

$$L = \Sigma(\gamma A z \, \Delta z) =$$

$$= \frac{\gamma(H_0 - H_n)}{3n} \left\{ A_0 H_0 + A_n H_n + 4\,(A_1 H_1 + A_3 H_3 + \ldots\ldots) + 2\,(A_2 H_2 + A_4 H_4 + \ldots\ldots) \right\} . \quad (10)$$

Въ каждую единицу времени за весь періодъ засухи можно расходовать только $\frac{L}{T}$ *kgr mtr*. Недостающая работа должна быть дополняема запасными паровыми двигателями. Является теперь вопросъ, какое пониженіе горизонта можно допустить въ каждую единицу времени, чтобы за этотъ промежутокъ времени выпустить изъ пруда запасъ работы $\frac{L}{T}$? Условіе это будетъ соблюдено, если для каждаго z вышенаписанная величина ΔL будетъ имѣть постоянное значеніе $\frac{L}{T}$; вопросъ такимъ образомъ сводится къ рѣшенію относительно Δz ряда уравненій вида:

$$\gamma A z \, \Delta z = \frac{L}{T} .$$

Отсюда видно, что въ каждую единицу времени, въ которыхъ выражено T (секунда, часъ и т. д.), пока z находится въ предѣлахъ отъ H_0 до H_1, т.-е. въ среднемъ имѣетъ значеніе $\frac{H_0 + H_1}{2}$, а площадь A имѣетъ среднее значеніе $\frac{A_0 + A_1}{2}$, можно допускать пониженіе горизонта:

$$\Delta z_1 = \frac{L}{T} \, \frac{4}{\gamma(A_0 + A_1)\,(H_0 + H_1)} .$$

Поступая такимъ образомъ, найдемъ допустимыя пониженія горизонта въ любую заданную единицу времени. Далѣе, зная эти величины, легко найти величины промежутковъ времени, въ продолженіе которыхъ можно оставлять пониженіе постояннымъ; эти промежутки времени будутъ послѣдовательно таковы:

$$\Delta_1 T = \frac{H_0 - H_1}{\Delta z_1} \, , \quad \Delta_2 T = \frac{H_1 - H_2}{\Delta z_2} \, , \text{ и т. д.}$$

или, внося вмѣсто Δz ихъ значенія:

$$\Delta_1 T = \frac{\gamma(H_0^2 - H_1^2)\,(A_0 + A_1)}{4L} T ; \quad \Delta_2 T = \frac{\gamma(H_1^2 - H_2^2)\,(A_1 + A_2)}{4L} T ; \text{ и т. д.}$$

Наконецъ, зная эти промежутки времени, можно установить для каждаго изъ нихъ опредѣленную величину открытія отверстія a, такъ какъ, конечно, этимъ-то мы и измѣняемъ количество протекающей воды.

2) Теперь пусть размѣры пруда неизвѣстны, а дѣлать его нивеллировку возможнымъ не представляется. Пусть H_0 есть первоначальный напоръ, H_n—конечный, а z какой-нибудь промежуточный напоръ въ центрѣ тяжести отверстія, отводящаго воду къ машинамъ; площадь отверстія, попрежнему назовемъ черезъ a. Независимо отъ того, есть притокъ или нѣтъ, можемъ писать, что за время dt расходъ dQ выражается такъ:

$$dQ = \mu a \sqrt{2gz}.dt$$

за время t расходъ Q выразится, слѣд., ур-іемъ:

$$Q = \mu a \sqrt{2g} \int_{H_0}^{H_n} \sqrt{z}\, dt \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

Въ виду того, что функціональной зависимости между z и t у насъ не имѣется, интегрированіе придется замѣнить суммированіемъ по правилу Симпсона. Необходимыя для этого данныя получаемъ слѣдующимъ образомъ:

Въ такое время года, когда притокъ воды довольно значителенъ, спускаемъ воду до тѣхъ поръ, пока не достигнемъ напора H_n; замѣчаемъ потребовавшійся для этого промежутокъ времени T; при этомъ каждыя 5—10 минутъ отмѣчаемъ соотвѣтствующіе напоры H_0, H_1, H_2, ... и т. д., съ такимъ расчетомъ, чтобы получить четное число n промежутковъ, — для этого, очевидно, нужно произвести нечетное число отсчетовъ. Уравненіе (11) дастъ намъ такимъ образомъ:

$$Q = \mu a \sqrt{2g}\, \frac{T}{3n}\left[\sqrt{H_0} + \sqrt{H_n} + 4(\sqrt{H_1} + \sqrt{H_3} + \ldots + \sqrt{H_{n-1}}) + 2(\sqrt{H_2} + \sqrt{H_4} + \ldots \sqrt{H_{n-2}})\right]. \; (12)$$

Какъ только уровень спустился до заранѣе намѣченной величины H_n (или близкой къ ней,—обыкновенно H_n есть тотъ напоръ, при которомъ еще могутъ работать заводскіе двигатели), отверстіе закрываютъ и наблюдаютъ теперь время T_1, требующееся для того, чтобы вода поднялась до первоначальнаго горизонта H_0; при этомъ опять слѣдуетъ отмѣчать тѣ промежутки времени t_n, $t_{n-1}, \ldots, t_2, t_1$, за которые горизонтъ поднимается послѣдовательно отъ H_n до H_{n-1}, отъ H_{n-1} до $H_{n-2}\ldots$ и т. д. и, наконецъ, отъ H_1 до H_0; эти величины могутъ быть или тѣ самыя, которыя были отмѣчены въ періодѣ спусканія воды, или же могутъ быть взяты такъ, чтобы соблюдалось условіе:

$$H_{n-1} - H_n = H_{n-2} - H_{n-1} = \ldots = H_0 - H_1 = \frac{H_0 - H_n}{n}.$$

Имѣя эти данныя, можно свести вопросъ къ предыдущему, а именно такимъ образомъ: если рабочій объемъ пруда есть V, а притокъ (постоянный) есть q, то очевидно:

$$V = qT_1.$$

Далѣе, очевидно, что за время спуска T вылился какъ объемъ V, такъ и все притекшее за это время количество жидкости qT, такъ что

$$Q = V + qT = q(T + T_1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (L)$$

Вычисливъ Q по уравненію (12), найдемъ изъ (L) величину q, такъ какъ T и T_1 даны наблюденіемъ.

Далѣе, если за время t_1 вода поднялась отъ уровня H_1 до уровня H_0, то, называя среднюю для этихъ высотъ площадь свободной поверхности черезъ A_1, можемъ написать:

$$(H_0 - H_1)\, A_1 = q\, t_1.$$

Отсюда найдемъ A_1, а подобно этому найдемъ и прочія среднія сѣченія пруда: $A_2, A_3, \ldots, A_n$. Зная же площади A, мы сводимъ вопросъ такимъ образомъ къ предыдущему случаю.

Рабочій объемъ пруда V опредѣляется тоже просто. Мы видѣли, что $V = qT_1$; а такъ какъ q мы уже нашли:

$$q = \frac{Q}{T + T_1},$$

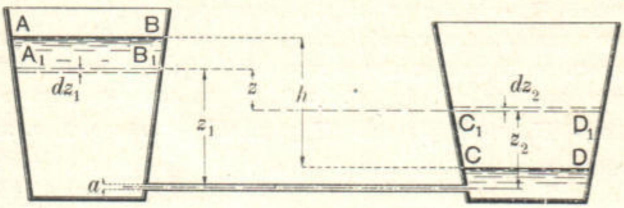
то легко найдемъ и V:

$$V = Q\,\frac{T_1}{T + T_1}.$$

Замѣтимъ, что такія наблюденія можно дѣлать только въ томъ случаѣ, если налицо есть порядочный притокъ воды, ибо иначе періодъ T_1 (періодъ наполненія пруда), при сколько-нибудь большихъ его размѣрахъ, можетъ оказаться слишкомъ длиннымъ, такъ что не только успѣетъ измѣниться q, но даже можетъ случиться, что заводъ останется безъ пруда. Это обстоятельство дѣлаетъ указанный пріемъ не всегда примѣнимымъ, хотя проф. Тиме не разъ имъ пользовался (см., напр., его „Изслѣдованіе рѣки Ижоры" въ „Горномъ Журналѣ" за 1883 годъ, октябрь, стр. 75—82)*).

§ 20. Истеченіе при перемѣнномъ напорѣ подъ перемѣнный уровень.

Пусть въ двухъ сосудахъ (фиг. 118), соединенныхъ трубою сѣченія a, въ какой-нибудь моментъ горизонты стоятъ на уровняхъ **AB** и **CD**; вертикальное разстояніе между ними пусть равно h. Требуется найти



Фиг. 118.

промежутокъ времени, по прошествіи котораго горизонты станутъ въ разстояніи z между собою. Величины поперечныхъ сѣченій, могущія, вообще говоря, быть перемѣнными (какъ это и изображено на чертежѣ), будемъ обозначать черезъ A_1 и A_2.

Пусть въ этотъ моментъ горизонты стоятъ въ **A_1B_1** и **C_1D_1**; вертикальное разстояніе между ними z выражается разностью $z_1 - z_2$. Въ продолженіе

*) Прудъ Колпинскаго завода, изслѣдованный проф. Тиме указаннымъ путемъ, какъ оказалось, имѣлъ поверхность $A_0 = 21$ милліон. кв. футъ (около $1^3/_4$ кв. версты); слой толщиною въ $1''$ соотвѣтствуетъ объему свыше 2 мил. куб. футъ; рабочій объемъ пруда опредѣленъ $V = 49$ мил. куб. фут. Понятно, какія затрудненія представляетъ нивеллировка дна такого пруда. И это еще не самый большой прудъ. Воткинскій заводъ на Уралѣ имѣетъ нѣсколько прудовъ; самый большой изъ нихъ имѣетъ $A_0 = 200$ мил. кв. футъ, т.-е. около $16^1/_3$ кв. верстъ; слой въ $1''$ представляетъ объемъ 16,7 мил. куб. футъ; рабочій объемъ пруда $V = 1625$ мил. куб. футъ или около 45,5 милліоновъ mtr^3. За послѣдніе годы исполняется много

безконечно малаго промежутка времени dt этотъ напоръ можно считать постояннымъ, а потому можно принять, что за это время изъ одного сосуда въ другой перельется количество воды:

$$dQ = \mu a \sqrt{2gz} \,.\, dt.$$

При этомъ въ коффиціентѣ расхода μ, при отсутствіи сжатія равномъ $\frac{1}{\sqrt{1+\zeta}}$, нужно, конечно, оцѣнить вліяніе сопротивленія, вносимаго отверстіемъ, а также того сопротивленія, которое вносится трубою, если она достаточно длинна; о послѣднемъ сопротивленіи см. слѣдующую главу.

Уровень перваго сосуда за это время понизится на $(-dz_1)$ (минусъ потому, что ось z-овъ считаемъ положительной вверхъ), а во второмъ повысится на $(+dz_2)$; очевидно, что убыль въ одномъ сосудѣ равняется прибыли въ другомъ, равняясь въ то же время перетекшему объему жидкости, т.-е.

$$dQ = -A_1\, dz_1 = A_2\, dz_2,$$

откуда

$$dz_2 = -\frac{A_1}{A_2} dz_1 \,.$$

Такъ какъ

$$z = z_1 - z_2 \,,$$

то

$$dz = dz_1 - dz_2 = dz_1 \left(1 + \frac{A_1}{A_2}\right),$$

откуда

$$dz_1 = \frac{A_2}{A_1 + A_2} dz,$$

а потому

$$dQ = -A_1\, dz_1 = -\frac{A_1 A_2}{A_1 + A_2}\, dz = \mu a \sqrt{2gz} \,.\, dt;$$

отсюда

$$dt = -\frac{A_1 A_2}{A_1 + A_2} \cdot \frac{1}{\mu a \sqrt{2g}} \cdot \frac{dz}{\sqrt{z}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(M)}$$

такихъ огромныхъ прудовъ, для цѣлей водоснабженія, для регулированія расхода и созданія напора при утилизаціи энергіи, для цѣлей орошенія,—наконецъ, для цѣлей судоходства. Такъ напримѣръ, одинъ изъ самыхъ большихъ прудовъ Франціи на р. Yonne въ Settons имѣетъ объемъ въ 22 мил. mtr^3 и назначенъ для судоходства; прудъ въ Алжирѣ на р. Habra вмѣщаетъ 30 милліоновъ mtr^3. Одинъ изъ самыхъ большихъ прудовъ Германіи построенъ проф. Intze въ 1900 г. въ Urftthal'ѣ на р. Эйфель (притокъ р. Рура) для утилизаціи энергіи и защиты отъ наводненій и вмѣщаетъ 45,5 мил. mtr^3, т.-е. равенъ Воткинскому пруду. Изъ американскихъ прудовъ упомянемъ Новую плотину на р. Croton (New Croton) для водоснабженія города Нью-Іорка; вмѣстимость пруда = 121 мил. mtr^3, при чемъ рабочій объемъ его = 100 мил. mtr^3. Для водоснабженія г. Санъ-Франциско построенъ въ 1887—90 годахъ прудъ вмѣстимостью около 110 мил. mtr^3, съ поверхностью около 10 kmt^2. Нѣсколько прудовъ въ 140—156 мил. mtr^3 построено въ Индіи, главнымъ образомъ для цѣлей орошенія (на р. Mutha, напр, полный

Если оба сосуда призматическіе, т.-е. если A_1 и A_2 неизмѣнны, то искомый промежутокъ времени t пониженія разстоянія уровней отъ h до z получимъ, интегрируя (M) въ предѣлахъ отъ h до z:

$$t = \int_h^z \left(-\frac{A_1 A_2}{A_1 + A_2}\right) \cdot \frac{1}{\mu a \sqrt{2g}} \cdot \frac{dz}{\sqrt{z}} = \frac{A_1 A_2}{A_1 + A_2} \cdot \frac{1}{\mu a \sqrt{2g}} \int_z^h \frac{dz}{\sqrt{z}},$$

и окончательно

$$t = \frac{2 A_1 A_2}{A_1 + A_2} \cdot \frac{1}{\mu a \sqrt{2g}} (\sqrt{h} - \sqrt{z}) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (13)$$

Промежутокъ времени T, за который уровни сравняются, получимъ, интегрируя въ предѣлахъ отъ h до 0, такъ что изъ (13), полагая $z = 0$, находимъ:

$$T = \frac{2 A_1 A_2}{A_1 + A_2} \cdot \frac{1}{\mu a \sqrt{2g}} \sqrt{h} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (14)$$

Если одинъ изъ сосудовъ, напримѣръ, A_1, очень великъ по сравненію съ другимъ, такъ что можно принять, что $A_1 = \infty$, то время T' наполненія второго сосуда (очевидно, до высоты h) опредѣлится ур-іемъ:

$$T' = \frac{2 A_2}{\mu a \sqrt{2g}} \sqrt{h} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (15)$$

Если же $A_2 = \infty$, то время T'' опорожненія первой камеры будетъ:

$$T'' = \frac{2 A_1}{\mu a \sqrt{2g}} \sqrt{h} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (16)$$

Выраженіе (5) въ § 19, а также послѣднія ур-ія (14)—(16) находятъ себѣ примѣненіе при опредѣленіи времени наполненія и опорожненія шлю-

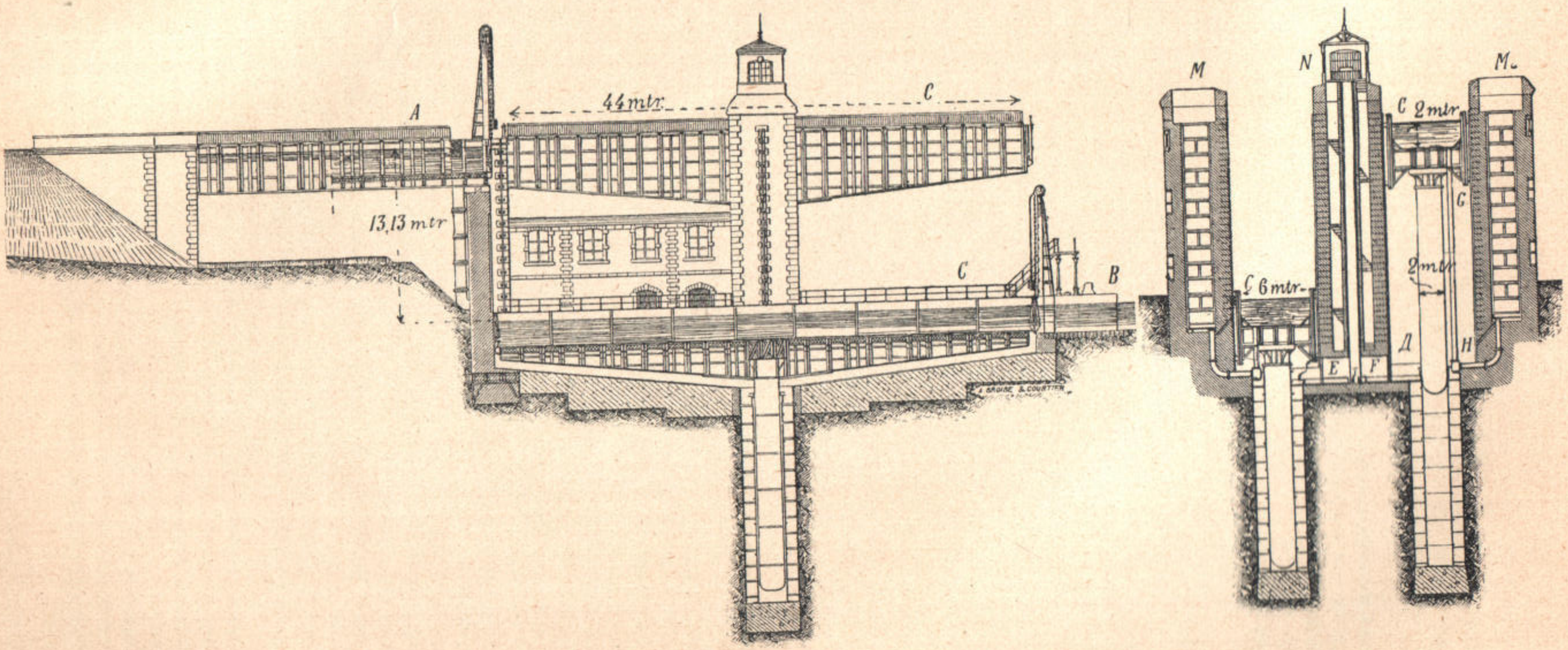
---

объемъ пруда въ 146 мил. mtr^3, рабочій же объемъ его равенъ лишь 90 мил. mtr^3, при поверхности пруда въ 14 kmt^2; на р. Theluand прудъ вмѣщаетъ 156 мил. mtr^3 и т. д.). Наконецъ, самый большой прудъ отстроенъ въ началѣ нынѣшняго столѣтія (1898—1902 гг.) на р. Нилѣ, близъ г. Ассуана, для цѣлей орошенія по преимуществу. Здѣсь плотина имѣетъ 1950 *mtr* длины и подпруживаетъ объемъ воды до 1065 мил. mtr^3. См. по этому поводу:

P. Ziegler: Der Thalsperrenbau. Berlin 1900. Также Intze: Die geschichtliche Entwicklung der Talsperren. Berlin 1906. О нильской плотинѣ см. въ Minutes of proceedings of the Institution of civil Engineers, Vol. CLII, Juni 1903 годъ; также въ „Инженерномъ Дѣлѣ“ за 1904 годъ, № 1.

Въ настоящее время строится самый большой прудъ Европы на р. Möhne (притокъ р. Рура) между городами Сёстъ и Арнсбергъ; вмѣстимость пруда будетъ 130 мил. mtr^3; онъ затопитъ поверхность въ 10,16 кв. километровъ (около 930 десятинъ). Его каменная плотина будетъ имѣть длину по гребню въ 632 *mtr*, высоту въ 40 *mtr*. Объемъ каменной кладки плотины равенъ 290 тысячъ mtr^3. Постройка пруда и всѣхъ принадлежностей обойдется до 20 милліоновъ марокъ. См. Z. d. V. d. I. за 1909 г., стр. 117.

Таблица IV.



Гидравлическій подъемникъ для судовъ на каналѣ Neufossé близъ Fontinettes въ Бельгіи.
Система инженеровъ Эдвина Клэрка и Дьюера изъ Андертона.

зовыхъ камеръ; при ихъ помощи рѣшается также и обратная задача: по заданному времени наполненія и опорожненія камеръ по этимъ формуламъ можно найти необходимыя для этого площади отверстій.

Всѣ соображенія, которыя приводятся при разрѣшеніи задачи о времени наполненія и опорожненія шлюзовыхъ камеръ, настолько просты, что разобрать ихъ не трудно; нужно только различать при этомъ два періода: истеченіе подъ уровень,—тогда нужно брать выраженія (14) и (15),—и истеченіе въ воздухъ (уравненіе 5 въ § 19), если уровни перемѣнные. Если же уровни постоянные, то нужно писать обычныя выраженія расхода по даннымъ предыдущихъ параграфовъ этой главы. Подробный разборъ рѣшенія задачи можно найти въ курсахъ Зернова, Максименко, Rühlmann'a, Weisbach'a и др.

Когда рѣка мелководна, то можно ее сдѣлать судоходною, перегородивъ ее рядомъ плотинъ, расчитанныхъ такъ, чтобы на каждомъ участкѣ между плотинами глубина была вездѣ достаточна для пропусковъ судовъ. Для того, чтобы можно было пропускать суда и черезъ плотину, около нея устраиваютъ шлюзовую камеру, которую можно по произволу соединять то съ водою передъ плотиною, то съ водою за плотиною, или, какъ говорятъ, съ верхнимъ или нижнимъ бьефомъ: если требуется пропускать судно, идущее вверхъ по рѣкѣ, то шлюзовую камеру соединяютъ сначала съ нижней водой и впускаютъ въ нее судно; уединивъ затѣмъ эту камеру отъ нижней воды, соединяютъ ее съ верхней водой; когда горизонты воды въ рѣкѣ и камерѣ сравняются, судно выпускаютъ. Если разность уровней передъ и за плотиною не велика (не болѣе 4 *mtr*), то довольствуются одной камерой (простой шлюзъ); если же разность уровней больше 4 *mtr*, то, во избѣжаніе слишкомъ глубокихъ камеръ, слишкомъ тяжелыхъ воротъ, а главное, слишкомъ большихъ потерь воды при каждомъ проходѣ судна, ставятъ двѣ и болѣе камеръ, одна за другой,—получается такимъ образомъ сложный шлюзъ. Далѣе, шлюзы ставятся для обхода пороговъ, водопадовъ, для того, чтобы сдѣлать судоходными горныя рѣки и т. д.

Впрочемъ, при очень большихъ разностяхъ уровней (13 *mtr* и болѣе) иногда ставятъ не сложные шлюзы, а рядъ гидравлическихъ, а въ Америкѣ также и пневматическихъ подъемниковъ, съ помощью которыхъ и переносятъ суда до 600 *tn* водоизмѣщенія съ одного горизонта на другой. Въ общихъ чертахъ это дѣлается такъ (табл. IV):

Неподвижная шлюзовая камера замѣнена подвижнымъ клепанымъ резервуаромъ ***C***, имѣющимъ на концахъ герметически закрывающіяся ворота. Такія же герметическія ворота поставлены въ концѣ приводящаго канала ***A*** и отводящаго ***B***. Резервуаръ ***C*** поддерживается сильной скалкой ***D***, входящей въ гидравлическій цилиндръ, и движется между двумя направляющими стѣнками ***M*** и ***N***. Такихъ резервуаровъ два, при чемъ оба гидравлическіе цилиндра сообщаются между собою трубой ***E***, на которой поставленъ клапанъ ***F***. Оба резервуара совершенно одинаковы и наполняются водою на одинаковую высоту, а потому они взаимно уравновѣшиваются, и достаточно небольшой разницы въ нагруженіи одного изъ нихъ, чтобы вся система пришла въ движеніе. Понятно, что этой разницы въ вѣсѣ отъ тѣлъ, плавающихъ въ резервуарахъ, получить нельзя, ибо когда въ одинъ изъ нихъ входитъ судно, то оно, очевидно, вытѣсняетъ изъ резервуара въ соотвѣтствующій каналъ какъ разъ такое количество воды, сколько оно вѣситъ само, не вызывая при этомъ повышенія уровня воды въ резервуарѣ. Понятно далѣе, что, разъ указанная разница такъ или иначе получена, вся система будетъ двигаться равномѣрно-ускоренно, и, чтобы избѣжать удара въ концѣ хода, на трубѣ ***E*** и ставятъ клапанъ ***F***, которымъ можно регулировать скорость перемѣщенія воды изъ одного гидравлическаго цилиндра въ другой, а слѣдовательно, и скорость движенія всей системы.

Очевидно, что по мѣрѣ того, какъ одинъ резервуаръ погружается своею скалкою въ гидравлическій цилиндръ, онъ теряетъ въ вѣсѣ, а въ то же время поднимающійся сосудъ становится настолько же тяжелѣе, а потому движеніе вообще было бы невозможно. Для устраненія этого обстоятельства или прибѣгаютъ къ помощи насосовъ, перегоняющихъ воду изъ одного цилиндра въ другой, или же въ стѣнкахъ ***M, M*** выкладываютъ резервуары, воспроизводящіе форму скалки, и соединяютъ ихъ шарнирными трубами ***GH*** съ сосудами ***C***; устраиваютъ все такъ, что по мѣрѣ опусканія ящика въ него переливается какъ разъ такой объемъ воды, сколько скалка вытѣсняетъ изъ цилиндра, а потому вѣсъ этой части системы измѣняться не будетъ. На другой сторонѣ, наоборотъ, изъ ящика будетъ выливаться въ резервуаръ *M* столько воды, что это облегченіе какъ разъ будетъ равно увеличенію вѣса отъ выхода скалки изъ цилиндра.

Идея такихъ устройствъ принадлежитъ англичанамъ Edwin Clark и Duer (изъ Андертона), которые исполнили такіе шлюзы на Weawer'скомъ каналѣ въ 1883 году. Выгода подобныхъ устройствъ двоякая: во-первыхъ, перемѣщеніе судна на большую высоту достигается гораздо быстрѣе, нежели это возможно съ устройствомъ сложнаго шлюза; а во-вторыхъ, въ шлюзахъ съ каждымъ проходомъ судна пропускается большой объемъ воды, равный площади шлюза, умноженной на разность горизонтовъ передъ и за нимъ безъ объема, вытѣсненнаго судномъ. Здѣсь же, кромѣ утечки въ неплотностяхъ, теряется только объемъ воды, вытѣсняемой скалкою (при устройствѣ компенсирующихъ резервуаровъ въ стѣнахъ *M*) *).

Чтобы избѣжать такихъ отвѣтственныхъ деталей, какъ громадныя скалки и соотвѣтствующіе цилиндры, въ самое послѣднее время перешли къ употребленію поплавковъ: вся камера, подобная *C*, ставится на нѣсколько поплавковъ, входящихъ каждый въ свой колодезь; такимъ путемъ весь громадный вѣсъ судна, камеры и воды въ ней разгружается и является возможнымъ помощью винтового механизма поднимать или опускать камеру.

Такъ устроены шлюзы въ Dortmund'ѣ. См. Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, 1896, статья Gerdau объ этомъ каналѣ, а также тотъ же журналъ за 1903 годъ, стр. 1017.

За послѣднее время при большихъ разностяхъ горизонтовъ вмѣсто шлюзовъ все большее примѣненіе получаютъ наклонныя плоскости, по которымъ на тележкахъ особаго устройства поднимаются и спускаются клепаные резервуары вмѣстѣ съ впущенными въ нихъ судами. Такое устройство примѣнено на Дунаѣ для обхода Желѣзныхъ Воротъ. На выставкѣ 1900 года въ Парижѣ былъ цѣлый рядъ проектовъ (въ чертежахъ и моделяхъ), преимущественно французскихъ, посвященныхъ разработкѣ этой идеи.

Относящіеся къ главѣ II числовые примѣры и задачи помѣщены въ концѣ главы III.

---

*) Подробный чертежъ подобной установки см. Ernst, „Die Hebezeuge“, изданіе I.

ГЛАВА III.

Движеніе воды въ трубахъ.

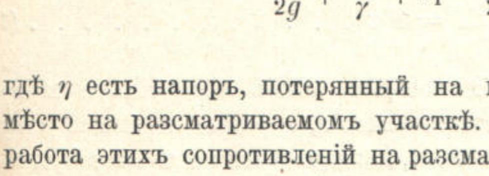
§ 21. Средняя скорость. Треніе въ жидкостяхъ.

Для несовершенной жидкости, движущейся въ установившемся движеніи съ сохраненіемъ плоскаго вида сѣченій, мы получили уравненіе дви-движенія (Д. Бернулли) въ такомъ видѣ:

$$\frac{v_1^{\,2}}{2g}+\frac{p_1}{\gamma}+z_1=\frac{v_2^{\,2}}{2g}+\frac{p_2}{\gamma}+z_2+\eta,$$

гдѣ η есть напоръ, потерянный на преодолѣніе сопротивленій, имѣющихъ мѣсто на разсматриваемомъ участкѣ. По общему смыслу уравненія η есть работа этихъ сопротивленій на разсматриваемомъ пути, отнесенная къ одному килограмму протекающей жидкости. Причины, порождающія сопротивленіе при движеніи жидкостей, коренятся въ ихъ основныхъ свойствахъ—неупругости и такъ назыв. несовершенствѣ, т.-е. вязкости, иными словами, способности воспринимать и оказывать нѣкоторыя тангенціальныя напряженія. Это послѣднее обстоятельство, называемое также *треніемъ* жидкостей, и надлежитъ теперь ближайшимъ образомъ разсмотрѣть.

Скорости, входящія въ ур-іе Д. Бернулли, предполагающее движеніе параллельными слоями, по самому смыслу этого предположенія во всѣхъ точкахъ сѣченія должны имѣть одну и ту же величину. Легко видѣть, что ближайшимъ слѣдствіемъ несовершенства жидкости является то обстоятельство, что въ дѣйствительности этого равенства скоростей быть не можетъ. Жидкость вязка; двигаясь по стѣнкѣ, ея частицы замедляютъ свое движеніе вслѣдствіе тренія о стѣнку. Назовемъ черезъ v_0 ту скорость, съ которой въ какомъ-нибудь

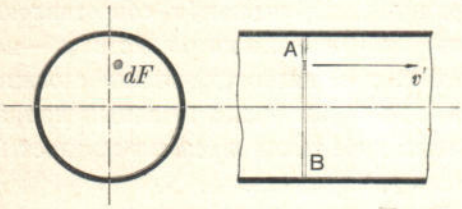


Фиг. 119.

данномъ сѣченіи жидкость скользитъ по стѣнкѣ трубы (фиг. 119). Гдѣ-нибудь въ другой точкѣ того же сѣченія это замедляющее дѣйствіе стѣнки отсутствуетъ, такъ что частица, находящаяся здѣсь подъ вліяніемъ тѣхъ же движущихъ силъ, что и первая, кромѣ тренія о стѣнку, можетъ двигаться съ бо́льшей скоростью v; является, такимъ образомъ, скольженіе одной частицы по другой, при чемъ это относительное движеніе сопровождается тоже треніемъ, т.-е. нѣкоторымъ замедленіемъ. Это треніе частицъ жидкости другъ о друга называется *внутреннимъ*, треніе же о стѣнку—*внѣшнимъ* *). Такимъ образомъ, скорости въ разныхъ точкахъ сѣченія различны,—слѣдовательно, параллельность сѣченій не соблюдается, и чтобы сдѣлать уравненіе Д. Бернулли примѣнимымъ и къ этому случаю, будемъ разсматривать не дѣйствительное движеніе жидкости, а иное—воображаемое, удовлетворяющее условію параллельности слоевъ; именно, допустимъ, что всѣ частицы во всякомъ данномъ сѣченіи движутся съ одной, общей *средней* скоростью v, при чемъ подъ этимъ терминомъ будемъ разумѣть такую *общую для всѣхъ точекъ сѣченія скорость, при которой черезъ данное сѣченіе проходитъ то же самое количество воды, что и въ дѣйствительномъ движеніи.* Если, слѣдовательно, площадь сѣченія трубы есть F, средняя скорость v, а въ каждомъ элементѣ площади dF имѣется въ дѣйствительности своя скорость v', измѣняющаяся въ зависимости отъ положенія элемента въ площади F, то указанное опредѣленіе средней скорости выразится уравненіемъ:

$$Q = \Sigma v' dF = Fv \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

Такая замѣна истиннаго движенія воображаемымъ произвольна и ведетъ къ ошибкамъ. Именно, количество движенія, а равно и живая сила слоя, движущагося какъ въ дѣйствительности, т.-е. съ разными скоростями въ разныхъ точкахъ сѣченія, больше, нежели тѣ же величины для слоя, движущагося со средней скоростью. Въ самомъ дѣлѣ, пусть дана труба какого-нибудь сѣченія съ площадью F (фиг. 120). Разсмотримъ безконечно тонкій слой **AB** жидкости. Черезъ все сѣченіе трубы въ единицу времени проходитъ количество жидкости Q [см. ур. (1)]. За время dt пройдетъ количество:



Фиг. 120.

$$dQ = Fv\,dt,$$

которое и можно принять за объемъ слоя **AB**. Живая сила массы этого объема при движеніи со среднею скоростью есть:

$$\frac{\gamma F v\,dt}{g} \cdot \frac{v^2}{2} = \frac{\gamma\,dt}{2g} Fv^3 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

---

*) Съ вліяніемъ тренія жидкости, преимущественно внутренняго, мы уже имѣли дѣло, когда говорили о сопротивленіяхъ и потеряхъ напора при истеченіи черезъ отверстія.

Въ дѣйствительности же въ каждомъ элементѣ сѣченія dF имѣется своя скорость v', и черезъ него проходитъ за то же время dt объемъ воды:

$$dq = dF\, v'\, dt.$$

Живая сила массы этого объема есть:

$$\frac{\gamma\, dF\, v'\, dt}{g} \cdot \frac{v'^2}{2} = \frac{\gamma\, dt}{2g}\, dF\, v'^3.$$

Поэтому живая сила всего слоя въ дѣйствительности такова:

$$\Sigma \frac{\gamma\, dt}{2g}\, dF\, v'^3 = \frac{\gamma\, dt}{2g}\, \Sigma\, dF\, v'^3 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Сравнимъ количества Fv^3 и $\Sigma\, dF\, v'^3$. Истинная скорость v', вообще, отличается отъ средней v; она можетъ быть больше и меньше ея, а потому положимъ вообще, что

$$v' = v + w, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

гдѣ v есть постоянная средняя скорость, а w—перемѣнная величина, могущая быть положительной, нулемъ или отрицательной. Внося это выраженіе v' въ (3), получимъ, что истинная живая сила слоя пропорціональна количеству

$$\Sigma\, dF\, v'^3 = \Sigma\, dF\, (v + w)^3 = \Sigma v^3\, dF + 3\Sigma v^2 w\, dF + 3\Sigma v w^2\, dF + \Sigma w^3 dF \quad . \ (5)$$

Очевидно, что

$$\Sigma v^3\, dF = v^3\, \Sigma\, dF = Fv^3.$$

Далѣе, по ур-ію (1) имѣемъ, внося въ него выраженіе (4):

$$Q = Fv = \Sigma\, (v + w)\, dF = \Sigma v\, dF + \Sigma w\, dF = Fv + \Sigma w\, dF.$$

Отсюда очевидно, что

$$\Sigma w\, dF = 0,$$

а потому въ выраженіи (5) членъ $3\Sigma v^2 w\, dF$ обращается въ нуль.

Наконецъ, два послѣдніе члена выраженія (5) напишемъ такъ:

$$3\Sigma v w^2\, dF + \Sigma w^3\, dF = \Sigma\, (3v + w)\, w^2\, dF = \Sigma\, (2v + v')\, w^2\, dF.$$

Эта величина существенно положительна, такъ какъ единственная величина, могущая быть отрицательной, — величина w,—входитъ въ нее въ квадратѣ. Такимъ образомъ, выраженіе (5) можетъ быть переписано такъ:

$$\Sigma v'^3\, dF = Fv^3 + \Sigma\, (2v + v')\, w^2\, dF.$$

А отсюда слѣдуетъ, что всегда

$$\Sigma v'^3 dF > Fv^3,$$

т.-е. что въ дѣйствительности живая сила слоя больше, нежели живая сила того же слоя, движущагося со среднею скоростью. Поэтому можно положить

$$\Sigma v'^3 dF = \alpha Fv^3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

гдѣ α есть коэффиціентъ, бóльшій единицы, зависящій отъ того, сколь велика разница между средней и истинною скоростями въ разныхъ точкахъ сѣченія. Обыкновенно w есть весьма малая часть v, для нѣкоторыхъ точекъ сѣченія обращающаяся даже въ нуль, такъ что коэффиціентъ α мало отличается отъ единицы. Въ одномъ изъ своихъ опытовъ Базенъ опредѣлялъ скорости въ разныхъ точкахъ сѣченія и нашелъ $\alpha = 1{,}038$ (стѣнки очень гладкія); въ другомъ случаѣ онъ нашелъ $\alpha = 1{,}122$ (стѣнки очень шероховатыя). Согласно съ этимъ иногда считаютъ $\alpha = \frac{10}{9} = 1{,}111$; но этой цифрѣ нельзя придавать какого-нибудь положительнаго значенія,—α, по существу, величина не постоянная для всѣхъ возможныхъ случаевъ и измѣняется въ зависимости отъ степени шероховатости стѣнокъ, отъ вида сѣченія трубы, отъ вида оси трубы (прямая или кривая), отъ свойствъ самой жидкости и т. д. Чаще считаютъ α равнымъ единицѣ, что при очень гладкихъ стѣнкахъ ведетъ къ очень небольшимъ ошибкамъ, какъ это видно по приведеннымъ результатамъ опытовъ Базена.

Что касается количества движенія, то легко убѣдиться, что для слоя, движущагося со среднею скоростью, оно пропорціонально Fv^2, а при дѣйствительномъ движеніи оно пропорціонально:

$$\Sigma v'^2 dF = \Sigma\, dF\,(v + w)^2 = Fv^2 + \Sigma w^2 dF,$$

т.-е. во второмъ случаѣ оно тоже больше, чѣмъ въ первомъ.

Часто отношеніе

$$\frac{\Sigma w^2 dF}{Fv^2} = \beta$$

считаютъ равнымъ нулю; но если коэффиціентомъ β не пренебрегать, то, соотвѣтственно $\alpha = \frac{10}{9}$, его можно считать равнымъ:

$$\beta = \frac{\Sigma w^2 dF}{Fv^2} = 0{,}037.$$

Итакъ, истинная живая сила слоя по средней скорости можетъ быть выражена такъ:

$$\frac{\gamma\, dt}{2g} F\alpha v^3.$$

Относя это количество къ 1 kgr, т.-е. дѣля на $\gamma F v\,dt$, получимъ $\alpha\frac{v^2}{2g}$, а потому уравненіе Д. Бернулли приметъ видъ:

$$\alpha\frac{v_1^{\,2}}{2g}+\frac{p_1}{\gamma}+z_1=\alpha\frac{v_2^{\,2}}{2g}+\frac{p_2}{\gamma}+z_2+\eta.$$

Истинное количество движенія по средней скорости можно выразить такъ:

$$\frac{\gamma\,dt}{g}Fv^2(1+\beta),$$

или, относя къ 1 kgr, т.-е. дѣля на $\gamma F v\,dt$:

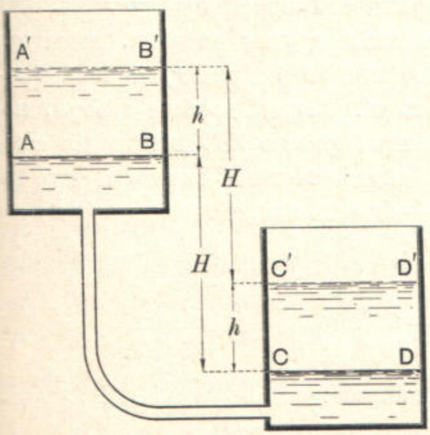
$$\frac{v}{g}(1+\beta).$$

Въ дальнѣйшемъ мы будемъ считать

$$\alpha=1,\ \beta=0.$$

Что касается величины силъ внѣшняго и внутренняго тренія, то вотъ основанія, по которымъ имъ даютъ нижеприводимыя выраженія.

1) *Треніе въ жидкостяхъ не зависитъ отъ давленія.* Соединяютъ трубою два сосуда (фиг. 121), въ которыхъ жидкость налита до уровней **AB** и **CD**, и замѣчаютъ количество воды Q, которое переливается изъ одного сосуда въ другой въ 1 *sec.* Затѣмъ повышаютъ уровни въ обоихъ сосудахъ на одинаковую высоту, такъ что вертикальное разстояніе отъ **A'B'** до **C'D** остается то же самое H, что отъ **AB** до **CD**. Оказывается, что въ 1 секунду переливается и тутъ то же самое количество Q воды, что и въ первомъ случаѣ, хотя давленіе въ трубѣ и измѣнилось. А это показываетъ, что скорость въ трубѣ не измѣнилась, а слѣдовательно, не измѣнилось и треніе.



Фиг. 121.

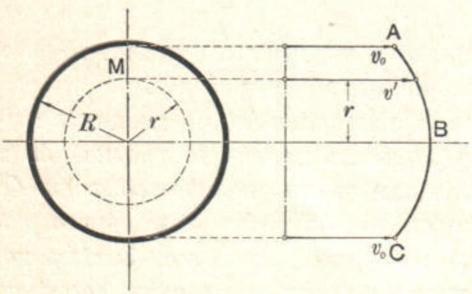
2) *Треніе внѣшнее.* Можно считать установленнымъ эмпирическимъ фактомъ, что: a) эта сила находится въ прямой зависимости отъ величины поверхности соприкосновенія жидкости со стѣнкой, такъ какъ твердая стѣнка является первоисточникомъ торможенія; b) зависитъ (тоже въ прямомъ отношеніи) отъ количества жидкихъ частицъ, соприкасающихся въ

единицу времени со стѣнкой, а потому ближайшимъ образомъ зависитъ отъ плотности жидкости ϱ и отъ скорости на поверхности v_0; *c*) кромѣ того, независимо отъ числа частицъ, чѣмъ скорѣе частица идетъ по стѣнкѣ, тѣмъ больше должно на ней отражаться замедляющее дѣйствіе стѣнки,— слѣдовательно, сила тренія еще разъ зависитъ отъ скорости v_0.

Итакъ, если имѣемъ струю, сплошь наполняющую трубу съ площадью сѣченія F, периметромъ O, длиною ds и скоростью на поверхности v, то, считая зависимость прямой пропорціональностью, получимъ, что *сила тренія* можетъ быть выражена черезъ $B\varrho\, O\, ds\, v_0{}^2$, гдѣ B есть коэффиціентъ пропорціональности. Для удобства величину ϱ замѣняютъ пропорціональной ей γ; тогда сила внѣшняго тренія выражается черезъ $B\gamma O\, ds\, v^2$. Относя ее къ единицѣ массы жидкости, заключенной въ объемѣ струи, т.-е. дѣля ее на $\varrho F ds$, получаемъ ускореніе этой силы тренія:

$$B\frac{\gamma}{\varrho}\frac{O}{F}v_0{}^2 = Bg\frac{O}{F}v_0{}^2.$$

3) Что касается до *внутренняго тренія*, то естественно считать его прямо пропорціональнымъ относительной скорости отдѣльныхъ частицъ,—одной относительно другой. Величину этой относительной скорости можно получить такъ. Пусть имѣемъ круглую трубу радіуса R (фиг. 122). У стѣнки жидкость идетъ со скоростью v_0; какая-нибудь частица **M** на разстояніи r отъ центра (а въ силу полной симметричности сѣченія допустимъ, что и всякая другая частица, лежащая на цилиндрѣ радіуса r) имѣетъ скорость v'. Можно, вообще говоря, построить кривую **ABC** измѣненія скорости съ разстояніемъ отъ оси трубы. Для двухъ частицъ одного и того же сѣченія, взятыхъ на разстояніяхъ r и $(r+\Delta r)$ отъ оси, относительная ихъ скорость есть разность ихъ скоростей



Фиг. 122.

$$(v'+\Delta v') - v' = \Delta v'.$$

И въ предѣлѣ, при $\Delta r = 0$, получимъ соотношеніе:

$$dv' = \frac{\partial v'}{\partial r}dr.$$

Это и есть относительная скорость въ точкѣ **M**; слѣдовательно, сила внутренняго тренія прямо пропорціональна производной $\frac{dv'}{dr}$.

Это было бы справедливо, если бы все движеніе струи можно было уподобить движенію безконечно тонкихъ цилиндровъ, входящихъ одинъ въ другой и перегоняющихъ другъ друга. Въ дѣйствительности же стѣнки неровны: ударившись о какую-нибудь такую неровность стѣнки, частица жидкости, какъ не безусловно неупругая, отражается отъ нея, ударяется о сосѣднія, отражается отъ нихъ и т. д. Кромѣ того, тангенціальная сила тренія возникаетъ на поверхности частицъ, а не въ ихъ центрахъ тяжести, отчего онѣ понуждаются къ вращенію. Вслѣдствіе этихъ причинъ жидкость внутри трубы приходитъ въ неправильное на первый взглядъ, вихревое движеніе: въ каждую точку, взятую внутри трубы, приходятъ разныя частицы, оживленныя скоростями, различными какъ по величинѣ, такъ и по направленію. Но не трудно себѣ представить, что, при установившемся характерѣ общаго поступательнаго движенія, эти измѣненія скорости частицъ, приходящихъ въ одну и ту же точку пространства, должны происходить въ нѣкоторой закономѣрной послѣдовательности, такъ какъ причины, вызывающія эти измѣненія, со временемъ не измѣняются; при этомъ послѣдовательность эта должна быть періодической, такъ что съ теченіемъ времени во всякой точкѣ повторяются всѣ тѣ явленія, которыя происходили въ ней раньше. Поэтому, вмѣсто мгновенной скорости, имѣющей мѣсто въ данный моментъ въ данной точкѣ, можно разсматривать среднюю за весь періодъ скорость, или, какъ говоритъ Буссинэ, *мѣстную среднюю скорость* (vitesse moyenne locale). Упомянутая выше скорость v' и есть такая мѣстная скорость для частицъ, взятыхъ на разстояніи r отъ центра.

Понятно, что вихревое движеніе получитъ тѣмъ большее развитіе, чѣмъ больше неровности стѣнки, или, вообще, чѣмъ сильнѣе стѣнка задерживаетъ воду, и, кромѣ того, чѣмъ съ большею скоростью v_0 вода натекаетъ на эти шероховатости. Поэтому силу внутренняго тренія нужно поставить въ зависимость отъ нѣкотораго коэффиціента, характеризующаго состояніе стѣнокъ и, кромѣ того, ее слѣдуетъ считать зависящей, скажемъ—прямо пропорціонально, отъ скорости v_0 у стѣнки.

Кромѣ того, эта сила должна зависѣть отъ разстоянія $(R-r)$ разсматриваемой точки M отъ поверхности стѣнки: чѣмъ это разстояніе больше, тѣмъ сильнѣе сказывается это вихревое движеніе, ибо тѣмъ меньшая масса (цилиндры меньшаго радіуса) принимаетъ въ немъ участіе; такъ что если R есть радіусъ трубы, а r — разстояніе отъ центра до разсматриваемой частицы M, для которой высчитывается сила внутренняго тренія, то ее можно считать пропорціональной $\frac{R}{r}$.

Наконецъ, чѣмъ больше площадь сѣченія струи по сравненію съ источникомъ потери,—ея периметромъ, тѣмъ дальше распространяется вихревое движеніе, тѣмъ больше живой силы уйдетъ на это движеніе, тѣмъ больше эта потеря,—или же можно сказать,—тѣмъ больше сила внутренняго тренія; т.-е. ее можно считать пропорціональной отношенію $\frac{F}{O}$.

Все это даетъ Буссинэ основаніе писать, что с и л а в н у т р е н н я г о тренія въ круглой цилиндрической трубѣ радіуса R, подсчитанная для цилиндрической поверхности радіуса r, можетъ быть выражена такъ:

$$\varrho g A \frac{\pi R^2}{2\pi R} \frac{R}{r} v_0 \frac{\partial v'}{\partial r},$$

гдѣ A есть коэффиціентъ пропорціональности, зависящій отъ состоянія стѣнокъ и свойствъ жидкости.

Въ виду сложности выкладокъ съ двойнымъ треніемъ и въ виду удобства имѣть дѣло съ средней скоростью, а не съ неизвѣстной вообще скоростью v_0 у стѣнки, въ гидравликѣ не различаютъ внѣшняго и внутренняго тренія, а принимаютъ только *общее сопротивленіе тренія,* при чемъ для него ставятъ такія положенія:

1) оно не зависитъ отъ давленія;

2) прямо пропорціонально поверхности соприкосновенія;

3) зависитъ отъ средней скорости, и

4) прямо пропорціонально вѣсу единицы объема жидкости (вѣрнѣе было бы,—плотности).

На основаніи этихъ законовъ тренія жидкостей пишутъ, что сила тренія R для струи, идущей по трубѣ длиною L, съ площадью сѣченія F, съ периметромъ сѣченія O, со средней скоростью v, есть:

$$R = \gamma \, O \, L f(v),$$

гдѣ въ функцію $f(v)$ включенъ и коэффиціентъ пропорціональности.

Работа этой силы въ единицу времени есть Rv; а относя ее къ одному kgr, т.-е. дѣля на $Fv\gamma$, получаемъ то, что въ уравненіи Бернулли было отмѣчено членомъ η, поскольку онъ зависитъ отъ тренія; чтобы отмѣтить, что это есть работа тренія, будемъ отмѣчать это подстрочнымъ указателемъ r (Reibung). Итакъ:

$$\eta_r = \frac{\gamma \, O \, L f(v) \, . \, v}{\gamma F v} = \frac{O}{F} L f(v) \quad \dots\dots\dots\dots \quad (7)$$

Отношеніе $\dfrac{F}{O}$ называется *среднимъ гидравлическимъ радіусомъ сѣченія.* Для круглой трубы онъ выражается черезъ:

$$\frac{F}{O} = \frac{\pi D^2}{4\pi D} = \frac{D}{4}.$$

Для прямоугольной трубы со сторонами a и b:

$$\frac{F}{O} = \frac{ab}{2(a+b)}.$$

Величина $\frac{O}{F}L$ есть абсолютное число, а η_r, по смыслу уравненія Д. Бернулли, должно быть выражено въ линейныхъ единицахъ, а потому множитель $f(v)$ долженъ быть тоже линейнымъ. Удобно его представить такъ:

$$f(v) = \zeta_r \frac{v^2}{2g},$$

гдѣ ζ_r называется *коэффиціентомъ общаго сопротивленія тренія*.

Итакъ, для круглой трубы потерянный напоръ отъ тренія есть:

$$\eta_r = \frac{O}{F} L f(v) = \frac{4L}{D} \zeta_r \frac{v^2}{2g} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Задача опытныхъ изслѣдованій состоитъ въ опредѣленіи вида функціи $f(v)$ или,—что все равно,—коэффиціента ζ_r.

На основаніи соображеній, подобныхъ тому, что было сказано выше о внѣшнемъ и внутреннемъ треніи, Prony пишетъ *):

$$f(v) = av + bv^2,$$

такъ что, по Prony:

$$\zeta_r = 2g\left(\frac{a}{v} + b\right).$$

Первымъ членомъ онъ характеризуетъ треніе внутреннее, а вторымъ—треніе внѣшнее. Коэффиціенты a и b онъ даетъ постоянными для всякихъ круглыхъ трубъ, а именно: $a = 0{,}0000173$; $b = 0{,}000348$; такъ что $2ga = 0{,}000339$; $2gb = 0{,}0068$. Этой формулой пользуются иногда и до сихъ поръ.

Нѣкоторые авторы, желая облегчить вычисленія, считаютъ $a = 0$ и пишутъ:

$$f(v) = b'v^2,$$

такъ что

$$\zeta_r = 2gb'.$$

При этомъ обыкновенно даютъ для b' величину постоянную для всякихъ круглыхъ трубъ, не считаясь, стало быть, съ состояніемъ стѣнокъ. Такъ поступалъ еще Шези (Chezy) въ 1775 году.

Saint-Venant (его формула мало употребительна) пишетъ уравненіе (8) такъ **):

$$\eta_r = 0{,}0002956 \frac{4L}{D} v^{\frac{12}{7}}.$$

Большимъ распространеніемъ (у насъ, въ Германіи и Англіи) пользуется формула *Вейсбаха,* полученная имъ на основаніи бóльшаго числа

*) См. De Prony: Recherches physico-mathématiques sur la théorie du mouvement des eaux courantes. Paris, 1804.

**) См. его работу въ Annales des mines, 4-e série, tome XX, p. 185. Также отдѣльной книгой—Formules et tables nouvelles etc. Paris, 1851.

опытовъ, чѣмъ сколькими пользовались авторы вышеприведенныхъ формулъ *). По Вейсбаху, пересчитавшему результаты 52 наблюденій Couplet, Bossut, Dubuat, Gueymard и 11 своихъ собственныхъ, нужно считать:

$$f(v) = \left(\alpha + \frac{\beta}{\sqrt{v}}\right)\frac{v^2}{2g},$$

гдѣ $\alpha = 0{,}0036$, $\beta = 0{,}0023678$; такъ что въ ур-іе (8) нужно вносить выраженіе:

$$\zeta_r = 0{,}0036 + \frac{0{,}0023678}{\sqrt{v}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Какъ видно, самый коэффиціентъ сопротивленія измѣняется для разныхъ среднихъ скоростей (съ увеличеніемъ скорости уменьшается). Для удобства Вейсбахомъ составлена нижеслѣдующая таблица значеній ζ'_r для разныхъ v:

Таблица 28 **).

Значенія коэффиціента ζ'_r въ формулѣ $\eta_r = \zeta'_r \frac{L}{D} \frac{v^2}{2g}$ (по Вейсбаху).

v въ mtr/sec	Десятыя доли метра.									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	—	0,0443	0,0356	0,0317	0,0294	0,0278	0,0266	0,0257	0,0250	0,0244
1	0,0239	0,0234	0,0230	0,0227	0,0224	0,0221	0,0219	0,0217	0,0215	0,0213
2	0,0211	0,0209	0,0208	0,0206	0,0205	0,0204	0,0203	0,0202	0,0201	0,0200
3	0,0199	0,0198	0,0197	0,0196	0,0195	0,0195	0,0194	0,0193	0,0193	0,0192
4	0,0191	0,0191	0,0190	0,0190	0,0189	0,0189	0,0188	0,0188	0,0187	0,0187

*) См. J. Weisbach: Die Experimental-Hydraulik. Freiberg, 1855; стр. 96. Еще раньше эти результаты были опубликованы въ I томѣ его извѣстнаго, многократно переизданнаго, сочиненія—Die Ingenieur- und Maschinen-Mechanik. 1-е изданіе появилось въ 1845 году въ Braunschweig'ѣ. Очень удобно для пользованія обработана формула Вейсбаха въ книгѣ F. Schlotthauer: Ueber Wasserkraft- und Wasserversorgnungsanlagen. München, 1906. См. таблицы на стр. 178—181.

**) При пользованіи этой таблицей необходимо имѣть въ виду, что потерянный на треніе напоръ Вейсбахъ выражалъ такъ:

$$\eta_r = \zeta_r \frac{L}{D} \frac{v^2}{2g},$$

т.-е. множитель 4, явно выступающій въ уравненіи (8), у него заключенъ въ самомъ коэффиціентѣ ζ'_r. Таблица Вейсбаха даетъ именно значенія ζ'_r, такъ что, если пользоваться нашимъ уравненіемъ (8), то необходимо табличныя значенія дѣлить на 4.

Наиболѣе употребительна у насъ и во Франціи формула *Дарси,* полученная имъ на основаніи обширныхъ, очень тщательныхъ наблюденій на водопроводѣ въ Chaillot, близъ Парижа. Трубы были отъ 0,0122 *mtr* до 0,5 *mtr* въ діаметрѣ, притомъ изъ разныхъ матеріаловъ; скорость измѣнялась отъ 0,16 до 5 *mtr* въ секунду.

На основаніи своихъ опытовъ Дарси пришелъ къ заключенію, что матеріалъ трубъ (у него были чугунныя, свинцовыя, стеклянныя и асфальтированныя трубы) почти не оказываетъ вліянія на величину тренія. Зато очень важна степень чистоты трубы: новыя или только что вычищенныя трубы даютъ вдвое меньшее треніе, нежели трубы загрязненныя, покрытыя осадками. Кромѣ того, треніе, по Дарси, измѣняется съ радіусомъ трубы. Называя діаметръ трубы черезъ D, ея радіусъ (геометрическій, а не средній гидравлическій) R, длину L, среднюю скорость v и потерю напора на треніе черезъ η_r, Дарси пишетъ *):

$$Ri = b_1 v^2,$$

гдѣ i есть потеря на треніе на каждую единицу длины трубы, т.-е.

$$i = \frac{\eta_r}{L},$$

Поэтому выраженіе Дарси можно переписать такъ:

$$R\frac{\eta_r}{L} = 2gb_1\frac{v^2}{2g}$$

или

$$\eta_r = 2gb_1\frac{L}{R}\frac{v^2}{2g}.$$

Наконецъ, приведя эти выраженія къ виду уравненія (8) и имѣя въ виду, что $R = \frac{D}{2}$, получимъ по Дарси:

$$\eta_r = 2g\frac{b_1}{2}\frac{4L}{D}\frac{v^2}{2g}.$$

Слѣдовательно, нашъ коэффиціентъ сопротивленія ζ_r по Дарси выражается такъ:

$$\zeta_r = 2g\frac{b_1}{2}.$$

Для новыхъ (или только что вычищенныхъ) чугунныхъ трубъ Дарси даетъ:

$$b_1 = 0{,}000507 + \frac{0{,}00000647}{R} = 0{,}000507 + \frac{0{,}00001294}{D}.$$

*) См. Henri Darcy: Recherches expérimentales relatives au mouvement de l'eau dans les tuyaux. Paris, 1875; p. 90 et 228. Первое изданіе вышло въ 1856 году.

Слѣдовательно, для *новыхъ* трубъ:

$$\zeta_r = 0{,}00497 + \frac{0{,}0001268}{D} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Для старыхъ чугунныхъ трубъ Дарси совѣтуетъ удвоить коэффиціентъ b_1, а слѣдовательно, и ζ_r. Итакъ, для *старыхъ* трубъ:

$$\zeta_r = 0{,}00994 + \frac{0{,}000254}{D} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Такъ какъ очистка трубъ рѣдко производится регулярно, то лучше пользоваться послѣднимъ выраженіемъ. Для старыхъ трубъ средняго размѣра съ D около 0,11 *mtr* (4—5 дюймовъ) можно пользоваться болѣе простымъ выраженіемъ Бресса:

$$\eta_r = 0{,}01 \frac{4L}{D} \frac{v^2}{2g}.$$

Если трубы чугунныя асфальтированныя и поддерживаются всегда чистыми, то числовое значеніе коэффиціента ζ_r, опредѣленное, какъ для новыхъ трубъ, слѣдуетъ уменьшить еще на 30%.

Формулы Дарси хороши только при скоростяхъ не меньше 0,2 *mtr/sec*; при меньшихъ скоростяхъ онѣ даютъ слишкомъ малыя потери напора. Равнымъ образомъ онѣ справедливы для діаметровъ не болѣе 0,5 *mtr*, хотя напримѣръ, Брессъ распространяетъ ихъ на діаметры и до 1,2 *mtr*. Наконецъ, опыты *Ибена* *) на гамбургскомъ водопроводѣ позволяютъ послѣднему утверждать, что при малыхъ діаметрахъ, меньше 0,15 *mtr*, дѣйствительная потеря напора нѣсколько больше, нежели вычисляемая по формулѣ Дарси, хотя въ общемъ эти опыты только подтвердили пригодность этой формулы.

До послѣдняго времени не оставлены попытки изысканія болѣе общей или болѣе точно согласующейся съ опытами формулы. Изъ работъ, полагающихъ зависимость коэффиціента сопротивленія только отъ размѣровъ трубы, упомянемъ двѣ слѣдующія.

Кристенъ **) опредѣляетъ среднюю скорость изъ уравненія

$$v = m \sqrt{\frac{D\eta_r}{2L}} \sqrt[8]{\frac{D}{2}}.$$

Отсюда потерянный напоръ опредѣляется такъ:

$$\eta_r = \frac{g\sqrt[4]{2}}{m^2\sqrt[4]{D}} \frac{4L}{D} \frac{v^2}{2g}.$$

*) См. Iben: Druckhöhenverlust in geschlossenen eisernen Rohrleitungen. Hamburg, 1880.

**) См. T. Christen: Das Gesetz der Translation des Wassers etc. Leipzig, 1903, стр. 140 и 149. Полезно сравнить уравненіе Кристена съ ниже приводимымъ уравненіемъ (13).

Сравнивая это выраженіе съ уравненіемъ (8) находимъ, что Кристенъ даетъ для коэффиціента сопротивленія зависимость:

$$\zeta_r = \frac{g\sqrt[4]{2}}{m^2\sqrt[4]{D}}.$$

Вносимъ сюда, какъ предлагаетъ Кристенъ, для трубъ изъ строганыхъ досокъ, для свѣже асфальтированныхъ трубъ и т. п. степени шероховатости, значеніе $m = 50$; тогда получимъ:

$$\zeta_r = \frac{0{,}00467}{\sqrt[4]{D}}.$$

Для большихъ діаметровъ,—свыше 1 *mtr*,—эта формула даетъ, повидимому, сильно пониженныя потери напора.

Наконецъ, совсѣмъ недавно проф. *Зонне* *) предложилъ опредѣлять коэффиціентъ сопротивленія изъ формулы:

$$\zeta_r = 0{,}00427 + \frac{0{,}00059\sqrt{D} + 0{,}00015}{D}.$$

Если въ уравненіи (8) вычислять потерю на 100 *mtr* длины трубы и соединить всѣ постоянные множители и коэффиціенты сопротивленія въ одну букву, то можно писать

$$\eta_{100} = \mu\frac{v^2}{D},$$

при чемъ по Зонне

$$\mu = \frac{200\,\zeta_r}{g} = 0{,}087 + \frac{0{,}012\sqrt{D} + 0{,}003}{D}.$$

Однако, совершенно неправильно считать, что ζ_r не измѣняется со скоростью; всѣ наблюденія, произведенныя до Дарси, затѣмъ его собственныя и всѣ позднѣйшія показали, что въ одной и той же трубѣ при разныхъ скоростяхъ коэффиціентъ ζ_r измѣняется,—увеличивается съ уменьшеніемъ скорости. Правда, на практикѣ скорости въ трубахъ въ широкихъ размѣрахъ не измѣняются. Тѣмъ не менѣе формула Дарси не вполнѣ справедлива, равно какъ несправедлива и формула Вейсбаха. Это указываетъ, что въ уравненіи (7) неправильно считать величину $f(v)$ пропорціональной второй степени отъ v: за ζ_r сохраняется еще нѣкоторая зависимость отъ v; кромѣ того, зависимость ζ_r отъ D указываетъ также на то, что въ уравненіи (8) потеря напора η_r не просто обратно пропорціональна первой степени D.

На основаніи этихъ соображеній еще *Эйтельвейнъ* въ началѣ прошлаго столѣтія предлагалъ считать η_r пропорціональнымъ дробнымъ степенямъ D и v; того же взгляда держался *Saint-Venant*, что видно изъ его вышеприведенной формулы; позднѣе профессоръ *Lampe* **), проф. *Unwin* и другіе предлагали подобную же зависимость. Такъ по Lampe:

$$\eta_r = 0{,}0007555\,L\,\frac{v^{1,802}}{D^{1,25}}.$$

---

*) См. Ed. Sonne: Grundlagen für die Berechnung der Wasserleitungen. Zeit. des Ver. deutscher Ingenieure, 1907, стр. 1615.

**) См. Civilingenieur, 1873, Untersuchungen über die Bewegung des Wassers in Röhren, S. 82.

Числовой коэффиціентъ 0,0007555 данъ для гладкихъ (чистыхъ) трубъ и измѣняется только со степенью шероховатости. По Unwin'у:

$$\eta_r = aL\,\frac{v^n}{D^{3-n}}.$$

Числовой коэффиціентъ a измѣняется въ зависимости отъ степени шероховатости и отъ температуры *), а показатель n зависитъ только отъ степени шероховатости и для чугунныхъ трубъ измѣняется отъ 1,79 до 2.

Наконецъ, *Flamant* **) даетъ формулу:

$$\eta_r = aL\,\frac{v^{1,75}}{D^{1,25}}.$$

Эта формула получается изъ формулы Unwin'a, если считать въ этой послѣдней $n = 1,75$; она очень мало отличается также отъ формулы Lampe, гдѣ показатель степени при v есть 1,802 вмѣсто 1,75. Коэффиціентъ a зависитъ только отъ степени шероховатости. Flamant оцѣниваетъ $a = 0,00092$ для не особенно сильно загрязненныхъ трубъ (загрязненіе только измѣнило состояніе стѣнокъ, а не дошло еще до замѣтнаго уменьшенія сѣченія трубы).

Къ этой категоріи экспериментальныхъ данныхъ относятся очень интересныя и своеобразныя изслѣдованія профессора *Osborne Reynolds*'а ***). Однако, прежде чѣмъ останавливаться на этихъ данныхъ, необходимо упомянуть о работахъ врача *Poiseuille*'я ****), имѣющихъ большое научное значеніе. Изслѣдуя явленія кровообращенія, Пуазейль занялся вопросомъ о движеніи жидкости по капиллярнымъ трубкамъ,—въ частности, дистиллированной воды,—при чемъ изучилъ экспериментально, какъ измѣняется расходъ вмѣстѣ съ напоромъ, длиною трубки, ея діаметромъ и температурой. Въ его опытахъ напоры доходили до 8 атмосферъ, діаметры измѣнялись отъ 0,03 до 0,14 *mm*, температуры колебались отъ 0 до 45° С.; длины трубокъ были абсолютно не велики,—обыкновенно 100 *mm* и меньше. Его наблюденія хорошо передаются слѣдующей формулой, данной имъ самимъ:

$$Q = 1836,724\left[1 + 0,0337\,t + 0,000221\,t^2\right]\frac{hd^4}{l}.$$

*) Вліяніе температуры предусматривается также формулами Hagen'а и Poiseuille. См. Grashof: Theoretische Maschinenlehre, 1875, Bd. 1, S. 484.

**) См. его книгу: Hydraulique, Paris, 1891 г., стр. 150 и слѣдующія. Числовыя таблицы V, VI и VII, приложенныя въ концѣ этой книги, очень облегчаютъ пользованіе формулой Фламана.

***) Оригинальная работа Рейнольдса помѣщена въ Philosophical Transactions of the Royal Society of London за 1883 годъ подъ заглавіемъ: An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous. См. также вышеупомянутую работу Кристена, стр. 23 и слѣд. Здѣсь цитируемъ по Blaine: Hydraulic Machinery, London, 1897, стр. 43—46; также по H. Robinson: Hydraulic Power and Hydraulic Machinery, London, 1904, стр. 15—27.

****) См. Comptes rendus, томъ XI (іюль—декабрь 1840 г.), стр. 961 и 1041, и томъ XII (январь—іюнь 1841 г.), стр. 112, мемуаръ Пуазейля подъ заглавіемъ: Recherches expérimentales sur le mouvement des liquides dans les tubes de très petits diamètres. Въ указываемыхъ здѣсь мемуарахъ даны отчеты наблюденій съ дистиллированной водой. Въ позднѣйшихъ работахъ, помѣщенныхъ тоже въ Comptes rendus, Пуазейль изучилъ и нѣкоторыя другія жидкости.

Здѣсь Q даетъ расходъ въ 1 секунду въ миллиграммахъ, т.-е. въ кубич. миллиметрахъ, t—температура въ градусахъ Цельсія, d и l—діаметръ и длина трубки въ миллиметрахъ, h—напоръ, выраженный въ миллиметрахъ *ртутнаго* столба. Переходя къ измѣренію потеряннаго напора высотою *водяного* столба и выражая расходъ по скорости v (mm/sec) и площади сѣченія, получимъ:

$$h = \frac{k}{P} \frac{l}{d^2} v,$$

гдѣ

$$k = 0{,}005813,$$
$$P = 1 + 0{,}0337\, t + 0{,}000221\, t^2.$$

Отсюда видно, что въ волосныхъ трубкахъ потеря напора пропорціональна первой степени скорости и обратно пропорціональна второй степени діаметра, въ противоположность тому, что дается уравненіемъ (8). Въ инженерной практикѣ этимъ закономъ Пуазейля приходится пользоваться при разсмотрѣніи явленія движенія подпочвенныхъ водъ, явленія фильтраціи и т. п.

Возвращаемся къ опытамъ Рейнольдса. Онъ приставлялъ къ сосуду стеклянную трубу съ хорошо скругленными кромками, чтобы избѣжать сжатія при входѣ; вмѣстѣ съ вытекающею водою онъ впускалъ въ трубу помощью пипетки тонкую струйку, подкрашенную анилиновою краскою. Оказалось, что при малыхъ скоростяхъ эта подкрашенная струйка была отчетливо видна по всей длинѣ трубки: она не смѣшивалась съ остальными струями, отчего можно думать, что при этихъ скоростяхъ жидкость движется по трубѣ параллельными струйками (direct motion), болѣе или менѣе напоминая движеніе цилиндровъ одного въ другомъ. Но, начиная съ нѣкоторой скорости, которую Рейнольдсъ называетъ критической, уже вблизи входа подкрашенная струйка размывается на все сѣченіе трубы. Освѣщая трубу электрической искрой, Рейнольдсъ ясно видѣлъ вихри этой окрашенной струйки; это послѣднее обстоятельство, подтверждая точку зрѣнія, отмѣченную выше, когда мы говорили о внутреннемъ треніи, заставляетъ утверждать, что въ обычныхъ случаяхъ движеніе воды въ прямой трубѣ можетъ быть названо прямолинейнымъ только въ смыслѣ общаго поступательнаго переноса всей массы жидкости; движенія же отдѣльныхъ частицъ очень далеки отъ прямолинейности съ постоянной скоростью: послѣдняя должна мѣняться по крайней мѣрѣ по направленію. Величина критической скорости зависитъ отъ температуры жидкости (съ повышеніемъ температуры уменьшается) и отъ діаметра трубы: она тѣмъ ниже, чѣмъ больше діаметръ. Это послѣднее обстоятельство косвенно подтверждаетъ наши соображенія о величинѣ внутренняго тренія,—мы приняли его пропорціональнымъ діаметру; по Рейнольдсу внутреннее треніе появляется тѣмъ раньше, чѣмъ больше діаметръ. Свои наблюденія Рейнольдсъ передаетъ уравненіемъ:

$$\eta_r = \frac{B^n P^{2-n}}{A} \cdot \frac{L}{D^{3-n}} v^n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Здѣсь L, D и v суть соотвѣтственно длина и діаметръ трубы и скорость (средняя) теченія. Показатель степени n мѣняется для скоростей меньшихъ и большихъ, нежели критическая, а также зависитъ отъ степени шероховатости. Коэффиціенты A и B—постоянныя числа; P—функція температуры, установленная опытами *Пуазейля*. Если всѣ величины выражены въ *mtr*, то

$$A = 67{,}7.10^6 = 67700000;\quad B = 396;\quad P = \frac{1}{1 + 0{,}0336\,t + 0{,}000221\,t^2},$$

гдѣ t есть температура въ градусахъ Цельсія.

Если скорость v меньше критической (v_c), то показатель $n = 1$, и тогда: *потеря напора пропорціональна первой степени скорости*, зависитъ отъ температуры (уменьшается съ ея возрастаніемъ), и сильно зависитъ отъ діаметра трубы. Такимъ образомъ, для скоростей меньшихъ, нежели критическая, Рейнольдсъ нашелъ въ трубахъ обыкновенныхъ размѣровъ тотъ же законъ Пуазейля, который установленъ для трубокъ волосныхъ.

Если же средняя скорость въ трубѣ больше критической, то, по Рейнольдсу, въ ур-іи (12) нужно считать показатель n зависящимъ отъ степени шероховатости:

въ наиболѣе гладкихъ трубахъ . . . . $n = 1{,}7$,
въ чистыхъ свинцовыхъ трубахъ . . . . $n = 1{,}722$,
въ загрязненныхъ трубахъ . . . . $n = 2$,

Въ этомъ послѣднемъ случаѣ уравненіе Рейнольдса получаетъ видъ:

$$\eta_r = \frac{B^2}{A}\,\frac{L}{D}\,v^2,$$

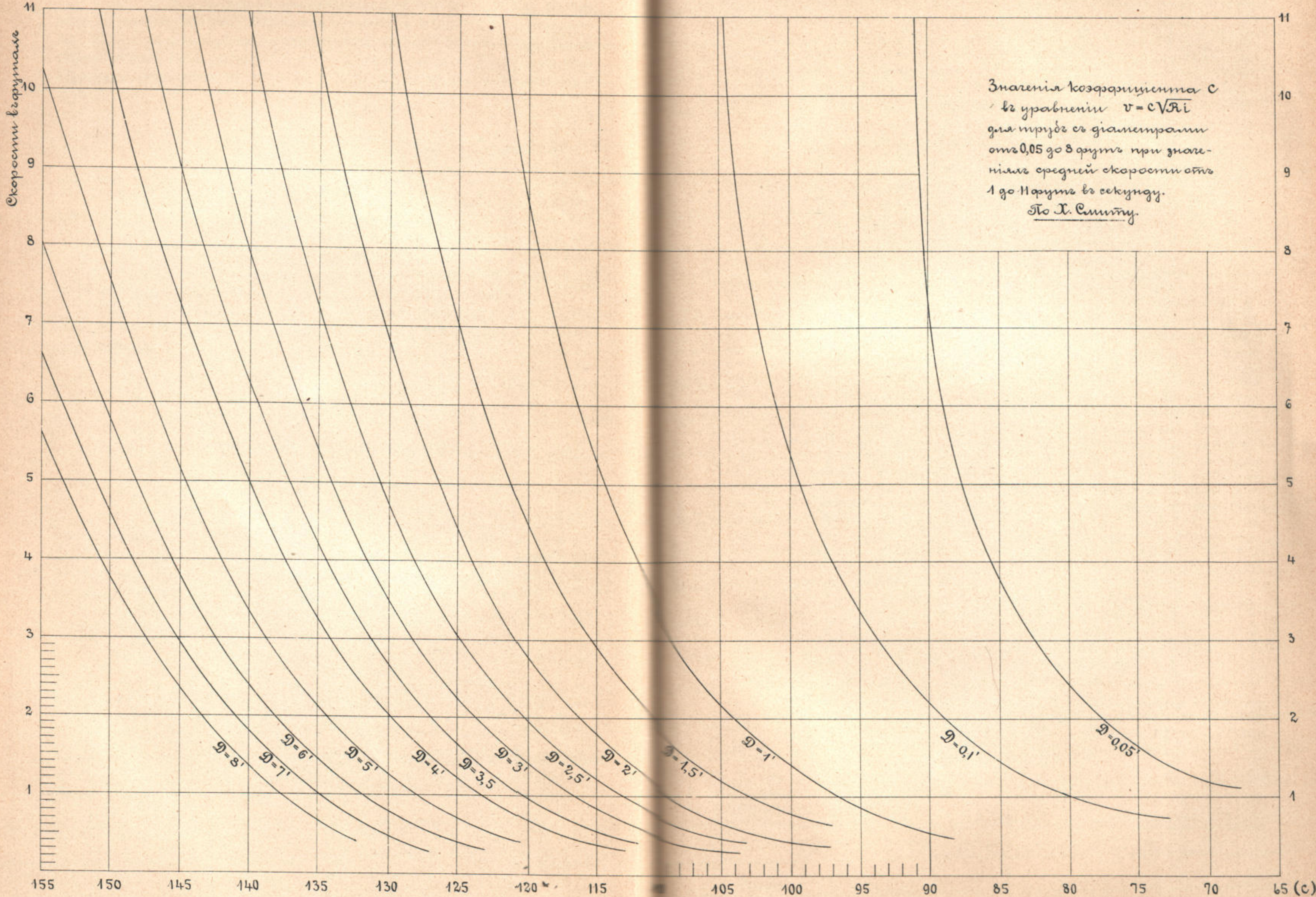
т.-е. совершенно аналогично нашему ур-ію (8); такимъ образомъ, Рейнольдсъ не признаетъ въ грязныхъ трубахъ зависимости коэф-та сопротивленія ни отъ скорости (Вейсбахъ), ни отъ діаметра (Дарси); зависимость отъ температуры также исчезаетъ.

Что касается до величины критической скорости v_c, то Рейнольдсъ опредѣляетъ ее такъ:

$$v_c = \frac{1}{278}\,\frac{P}{D}.$$

Это вообще очень маленькая величина; такъ, если $t = 20^0$, а $D = 0{,}1$ *mtr*, то $P = \frac{1}{1{,}7604}$ и $v_c = 0{,}0204$ *mtr/sec*. Такимъ образомъ, вообще приходится имѣть дѣло съ показателемъ n отъ 1,7 до 2. Если предположить очень загрязненную трубу ($n = 2$) и скорость $v > v_c$, то при вышеприведенныхъ значеніяхъ A и B получимъ:

$$\eta_r = 0{,}0023\,\frac{L}{D}\,v^2 = 0{,}01375\,\frac{4L}{D}\,\frac{v^2}{2g}.$$


Значенія коэффиціента C
въ уравненіи $v = C\sqrt{Ri}$
для трубъ съ діаметрами
отъ 0,05 до 8 футъ при значеніяхъ средней скорости отъ
1 до 11 футъ въ секунду.
По Х. Смиту.
Скорости въ футахъ
D = 8'
D = 7'
D = 6'
D = 5'
D = 4'
D = 3,5
D = 3'
D = 2,5'
D = 2'
D = 1,5'
D = 1'
D = 0,1'
D = 0,05'
155
150
145
140
135
130
125
120
115
105
100
95
90
85
80
75
70
65 (C)
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11

Таб. V

Такая величина ζ_r соотвѣтствовала бы по Дарси [ур-іе (11)] старой трубѣ въ 67 mm діаметромъ и значительно превосходитъ коэф-тъ Бресса.

Нѣкоторые новѣйшіе авторы предпочитаютъ все-таки сохранять форму ур-ія (8), какъ болѣе простую, сопровождая ее таблицами значеній коэф-та ζ_r для разныхъ діаметровъ, скоростей и степеней шероховатости, вполнѣ основательно замѣчая, что пользованіе формулами, подобными формулѣ Lampe или Flamant, практически возможно только при помощи таблицъ. Къ такимъ авторамъ относятся Hamilton Smith, Fanning *) и другіе.

Первый пишетъ:

$$v = c\sqrt{\frac{D}{4}\frac{\eta_r}{L}} \quad \text{. . . . . (13) **)}$$

что непосредственно даетъ ур-іе (8), если положить

$$c = \sqrt{\frac{2g}{\zeta_r}}.$$

Значенія коэф-та c выбраны имъ послѣ того, какъ онъ представилъ графически результаты всѣхъ наиболѣе достовѣрныхъ и точныхъ данныхъ, начиная съ Couplet и кончая многочисленными своими. Откладывая по оси абсциссъ скорости (въ футахъ), а по оси ординатъ значенія c, онъ получилъ рядъ точекъ. Соединяя тѣ изъ нихъ, которыя соотвѣтствуютъ одному и тому же діаметру трубы, онъ получаетъ рядъ кривыхъ, дающихъ для разныхъ D измѣненія c вмѣстѣ съ v. На табл. V представленъ его графикъ съ указаніемъ масштаба, при чемъ D измѣняется отъ 0,05 фута до 8 футъ. Этотъ графикъ относится къ круглымъ, слабо загрязненнымъ трубамъ, не имѣющимъ крутыхъ перегибовъ (почти прямымъ). Нижеслѣдующая таблица 29 даетъ значенія c въ формулѣ (13) при тѣхъ же ограничивающихъ условіяхъ. Всѣ величины выражены въ футахъ.

Fanning сохраняетъ вполнѣ видъ ур-ія (8) и даетъ значенія коэф-та ζ_r (онъ обозначаетъ его буквой m) для діаметровъ, измѣняющихся отъ $1/2''$ до $96''$ (отъ 12 mm до 2,42 mtr) и для скоростей отъ $0,1'$ въ секунду (30,5 mm/sec) до $20'$ (6,1 mtr/sec). Эту обширную таблицу см. въ названномъ выше сочиненіи Фаннинга на стр. 242—246. Тамъ же на стр. 259—263 приведена таблица значеній v для разныхъ D и разныхъ отношеній $\eta_r : L$. Наконецъ, на стр. 268—269 d дана таблица значеній коэф-товъ c въ ур-іи (13). Отмѣтимъ, что числа этихъ таблицъ даютъ значенія ζ_r и c для чистыхъ трубъ; для слабо загрязненныхъ и совсѣмъ старыхъ трубъ онъ совѣтуетъ брать бо́льшія значенія ζ_r, смотря по діаметру: чѣмъ больше діаметръ, тѣмъ меньше разница въ коэф-тахъ (см. тамъ же стр. 248 и 269). Ниже мы приведемъ таблицу въ болѣе удобной для пользованія формѣ, вычисленную нами на основаніи данныхъ Фаннинга.

Наконецъ укажемъ формулу, предложенную проф. *Ф. Максименко*:

$$v = \sqrt{\frac{1}{ak\left[\frac{1}{\sqrt[4]{R}} + \frac{b(k-3)^2}{v}\right]}}\sqrt{R\frac{\eta_r}{L}}.$$

Здѣсь R есть средній гидравлическій радіусъ трубы; величины выражены въ футахъ и тогда коэффиціенты: $a = 0,00004$; $b = 0,35$. Коэффиціентъ шероховатости $k = 1$ для новыхъ асфальтированныхъ трубъ. Для большихъ трубъ ($3'$ и больше) и малыхъ скоростей (меньше $1\frac{1}{2}'$) это ур-іе даетъ нѣсколько пониженныя значенія скорости.

---

*) См. „Hydraulics" by Hamilton Smith, London (New-York, 1886), p. 271. Также „A practical treatise of hydraulic and water-supply engineering" by S. T. Fanning, New-York, 1902, pages 242—246, 268—268 d, 495—497, 528 и 529.

**) Въ слѣдующей главѣ мы встрѣтимся съ совершенно аналогичной формулой, извѣстной подъ названіемъ формулы Шези.

Таблица 29

значеній c въ формулѣ (13) (по Hamilton Smith'y).

Скорости v фут/sec	При діаметрахъ въ футахъ.												
	0,05	0,10	1	1,5	2	2,5	3	3.5	4	5	6	7	8
1	—	80,0	96,1	102,8	108,8	112,7	116,7	120,2	123,0	127,8	131,8	134,8	137,5
2	77,8	88,9	104,0	110,9	116,2	120,3	123,8	127,0	129,9	134,3	138,0	141,0	143,3
3	82,4	93,7	108,7	115,6	120,8	124,8	128,3	131,4	134,2	138,6	142,3	145,4	147,6
4	85,6	97,0	112,0	118,9	124,0	128,1	131,5	134,6	137,4	141,9	145,5	148,6	151,0
5	87,6	99,3	114,4	121,3	126,5	130,6	134,1	137,1	140,0	144,7	148,1	151,2	153,6
6	89,1	101,0	116,3	123,2	128,6	132,6	136,3	139,4	142,3	146,9	150,5	153,5	—
7	90,0	102,4	118,0	125,0	130,4	134,6	138,2	141,5	144,5	149,0	152,7	—	—
8	90,6	103,3	119,3	126,4	132,0	136,3	140,0	143,3	146,3	151,0	154,9	—	—
9	90,7	104,0	120,4	127,7	133,3	137,7	141,6	145,0	148,1	152,8	156,7	—	—
10	90,8	104,5	121,4	128,8	134,5	139,0	142,9	146,4	149,7	154,6	—	—	—
11	90,9	104,7	122,0	129,7	135,6	140,2	144,2	147,7	151,0	—	—	—	—
12	91,0	104,8	122,5	130,4	136,1	141,1	145,2	148,8	152,2	—	—	—	—
13	91,0	105,0	122,9	131,0	137,1	141,9	146,1	149,8	153,2	—	—	—	—
14	91,0	105,0	123,2	131,5	137,6	142,5	146,7	150,5	154,0	—	—	—	—
15	91,0	105,0	123,6	131,8	138,0	142,9	147,2	151,1	154,6	—	—	—	—

Необходимо уяснить себѣ, что слѣдуетъ понимать подъ терминомъ «загрязненіе трубы». Какъ данныя Дарси, такъ и данныя Фаннинга имѣютъ въ виду осадки, покрывающіе стѣнки трубы, но отнюдь не въ такой степени, чтобы вызвать уменьшеніе свободнаго сѣченія трубы; если осадковъ такъ много, что они загромождаютъ трубу, и если въ то же время черезъ такую суженную трубу прогоняется одно и то же количество воды, то потеря напора въ этомъ случаѣ отличается отъ потери въ чистой трубѣ не только и даже не столько изъ-за измѣненія ζ_r, сколько изъ-за увеличенія скорости. Такъ, напримѣръ, въ чистой трубѣ при $D = 0{,}1$ *mtr* и $Q = 0{,}007854$ *mtr³/sec*, т.-е. при $v = 1$ *mtr/sec*, по Дарси, на каждые 1000 *mtr* длины теряется на треніе напоръ:

$$\eta_r' = \left(0{,}00497 + \frac{0{,}0001268}{0{,}1}\right)\frac{4.1000}{0{,}1}\cdot\frac{1}{2g} = \mathbf{12{,}73}\ mtr.$$

Въ грязныхъ трубахъ, но безъ уменьшенія діаметра, она, по Дарси, вдвое больше, т.-е.

$$\eta_r'' = \mathbf{25{,}46}\ mtr.$$

Наконецъ, если предположить, что осадки достигли толщины въ 5 mm, то окажется: $D = 0{,}09\ mtr$, $v = 1{,}235\ mtr/sec$ и, соотвѣтственно этому:

$$\eta_r''' = \left(0{,}00994 + \frac{0{,}000254}{0{,}09}\right)\frac{4.1000}{0{,}09}\cdot\frac{1{,}235^2}{2g} = \mathbf{43{,}5}\ mtr = 1{,}71\,\eta_r'' = 3{,}42\,\eta_r'.$$

Подобнымъ же образомъ, если предположить, что осадки достигли толщины въ 10 mm, то получимъ

$$\eta_r^{\mathrm{IV}} \backsim \mathbf{81}\ mtr \backsim 3{,}2\,\eta_r'' = 6{,}4\,\eta_r'.$$

Отсюда видно, насколько опасно допускать большое загрязненіе трубъ; не говоря о томъ, что при этомъ сильно возрастаетъ стоимость перекачки, самыя трубы могутъ оказаться непрочными и будутъ лопаться: въ нашемъ примѣрѣ въ первомъ случаѣ давленіе въ ихъ началѣ только нѣсколько превосходитъ 1 атмосферу, тогда какъ въ послѣднемъ оно достигаетъ почти **8** атмосферъ на каждый километръ длины трубы.

Всѣ приведенныя экспериментальныя данныя относятся къ водѣ и получены почти исключительно изъ наблюденій надъ городскими водопроводами. Для другихъ жидкостей, которыя въ практикѣ раздаютъ по трубамъ, напр., нефть, керосинъ и т. п., приведемъ слѣдующія данныя *).

Обозначаемъ черезъ Q' минутный расходъ жидкости въ куб. фут., черезъ d_1 діаметръ трубы въ дюймахъ, черезъ h напоръ, затраченный на треніе (наше η_r) въ футахъ и черезъ l длину трубы въ футахъ. Умноживъ обѣ части ур-ія (13) на выраженіе площади сѣченія трубы, получимъ, конечно, выраженіе секунднаго расхода. Переходя отъ метрической системы къ футамъ и отъ секунднаго расхода къ минутному и собирая въ одну букву m всѣ числовые коэф-ты, получимъ:

$$Q' = \mathrm{m}\sqrt{\frac{d_1^5 . h}{l}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(14)}$$

гдѣ по Шухову для керосина уд. вѣса 0,820 нужно считать . . . . . $\mathrm{m} = 5$
„ „ „ „ нефти уд. вѣса отъ 0,867 до 0,871 . . . . $\mathrm{m} = 4$.

Для нефтяныхъ остатковъ m рѣзко измѣняется съ ихъ температурой. Въ предѣлахъ отъ -5^0 до $+50^0$ C. Шуховъ предлагаетъ зависимость:

$$\mathrm{m} = 0{,}6 + 0{,}06\ t.$$

Тутъ t выражено въ градусахъ Цельсія и считается отрицательнымъ, если температура ниже нуля.

---

*) Заимствуемъ ихъ изъ работы инж.-механика В. Г. Шухова—„Трубопроводы и ихъ примѣненіе къ нефтяной промышленности". Москва, 1895 г., изданіе Политехническаго О-ва.

Перепишемъ уравненіе (14) для секунднаго расхода $Q = \frac{Q'}{60}$ и для діаметра d, выраженнаго въ футахъ ($d_1 = 12\,d$); получаемъ:

$$Q = \frac{\mathrm{m}}{60}\sqrt{12^5}\sqrt{\frac{d^5h}{l}} = \frac{\mathrm{m}}{60}\,12^2\sqrt{12}\,\frac{4}{\pi}\cdot\frac{\pi d^2}{4}\sqrt{\frac{dh}{l}}.$$

Отсюда:

$$\frac{Q}{\pi d^2 : 4} = v = \frac{\mathrm{m}.12^2\sqrt{12}.4}{\pi.60}\sqrt{\frac{dh}{l}}.$$

Возводя въ квадратъ и дѣля обѣ части ур-ія на $2g$, получимъ:

$$\frac{v^2}{2g} = \frac{12^5.16\,\mathrm{m}^2}{\pi^2.3600.2g}\cdot\frac{dh}{4l}\cdot 4 = \frac{12^4.64\,\mathrm{m}^2}{\pi^2.300.2g}\cdot\frac{dh}{4l}.$$

Отсюда, наконецъ,

$$h = \eta_r = \frac{4l}{d}\cdot\frac{\pi^2.300.2g}{12^4.64\,\mathrm{m}^2}\cdot\frac{v^2}{2g}.$$

Сравнивая это выраженіе съ ур-іемъ (8), видимъ, что коэф-тъ сопротивленія тренія ζ_r по шуховскому m выражается такъ:

$$\zeta_r = \frac{\pi^2.300.2g}{12^4.64\,\mathrm{m}^2}.$$

Вносся значеніе g въ футахъ ($g = 32{,}2'$), получимъ:

$$\zeta_r = \frac{0{,}1437}{\mathrm{m}^2}.$$

Для керосина $\mathrm{m} = 5$; слѣдовательно, $\zeta_r = 0{,}00575$.
Для нефти $\mathrm{m} = 4$; слѣд., $\zeta_r = 0{,}009$.
Для нефтяныхъ остатковъ, гдѣ $\mathrm{m} = 0{,}6 + 0{,}06\,t = 6\,(0{,}1 + 0{,}01\,t)$, имѣемъ:

$$\zeta_r = \frac{0{,}1437}{36\,(0{,}1 + 0{,}01\,t)^2} = \frac{0{,}004}{0{,}1 + 0{,}002\,t + 0{,}0001\,t^2}.$$

Отсюда видно, что, съ увеличеніемъ t, ζ_r довольно быстро уменьшается: напр., при $t = 0$, $\zeta_r = 0{,}04$, а при $t = 10^0$ ζ_r уже равно 0,03.

По вопросу о сопротивленіи движенію разсматриваемыхъ здѣсь жидкостей имѣется только немного данныхъ. Надъ керосиномъ (уд. в. 0,822 при $t = 14^0$ С.) проф. Мерчингъ произвелъ рядъ наблюденій въ трубахъ съ діаметрами 21, 26 и 45 *mm*. *) Средняя скорость теченія измѣнялась въ предѣлахъ отъ 0,5 до 1,7 *mtr/sec*. Потерю напора на треніе онъ выражаетъ, согласно съ Прони, слѣдующимъ образомъ:

$$\eta_r = \frac{L}{d}\left(a + \frac{b}{v}\right)v^2.$$

---

*) См. Проф. Г. Мерчингъ—„О движеніи жидкостей: воды, нефти и керосина въ трубахъ". Журналъ М-ва путей сообщенія, 1889 г., кн. 47, Отдѣлъ мостовыхъ и др. искусственныхъ сооруженій, стр. 297.

Для испытаннаго керосина коэффиціенты a и b имѣли слѣдующія значенія, расположенныя соотвѣтственно вышеуказаннымъ діаметрамъ трубъ:

$$a = 0{,}001294 \;.\;.\;.\;.\; 0{,}000791 \;.\;.\;.\;.\; 0{,}000405.$$
$$b = 0{,}000502 \;.\;.\;.\;.\; 0{,}000513 \;.\;.\;.\;.\; 0{,}000768.$$

Сравнивая предыдущее выраженіе потери напора съ обычнымъ ур-іемъ (8), находимъ для коэффиціента сопротивленія тренія ζ_r выраженіе:

$$\zeta_r = 0{,}5g\left(a + \frac{b}{v}\right).$$

Изъ опытовъ Мерчинга слѣдуетъ, что:

$$\text{для } d = 21\ mm \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; \zeta_r = 0{,}00639 + \frac{0{,}000246}{v},$$
$$\text{для } d = 21\ mm \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; \zeta_r = 0{,}00388 + \frac{0{,}000252}{v},$$
$$\text{для } d = 45\ mm \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; \zeta_r = 0{,}00199 + \frac{0{,}000377}{v}.$$

Отсюда видно, что для керосина коэффиціентъ сопротивленія ζ_r, а вмѣстѣ съ нимъ и Шуховскій $\mathbf{m}$, слѣдуетъ считать измѣняющимся какъ со скоростью, такъ и съ діаметромъ, какъ это имѣетъ мѣсто для воды.

Наконецъ, въ послѣдніе годы появилась работа инженера Л. Эрбицано *), по которой слѣдуетъ, что при обыкновенной температурѣ коэффиціенты сопротивленія ζ_r для ур-ія (8) можно считать равными:

для бензина и керосина . . . . $\zeta_r = 0{,}0039$,
для сырой нефти . . . . $\zeta_r = 0{,}0157$,
для нефтяныхъ остатковъ . . . $\zeta_r = 0{,}0314$.

Эти данныя заслуживаютъ вниманія потому, что они получены на трубахъ отъ 50 до 20 mm діаметромъ при значительной длинѣ. Сравнивая ихъ съ данными Шухова, находимъ близкое сходство ихъ по отношенію къ нефтянымъ остаткамъ при обычной температурѣ; по отношенію къ нефти они много выше данныхъ Шухова, а по отношенію къ керосину наоборотъ. Данныя Эрбицано относятся къ румынской нефти.

§ 22. Особыя сопротивленія.

Кромѣ тренія, всегда имѣющагося налицо, въ трубахъ можетъ встрѣтиться еще рядъ другихъ сопротивленій, на преодолѣніе которыхъ также необходима затрата нѣкотораго запаса работы. Эту потерю напора вообще оцѣниваютъ въ ур-іи Д. Бернулли членомъ $\zeta\frac{v^2}{2g}$, гдѣ v есть скорость за тѣмъ мѣстомъ, которое вызываетъ потерю, а ζ есть коэф-тъ этихъ, такъ называемыхъ, особыхъ сопротивленій, которыя появляются въ цѣломъ рядѣ случаевъ, ниже перечисляемыхъ:

*) См. Труды Бакинскаго отдѣленія И. Р. Т. О. за 1908 г., № 5. Цитируемъ по Журналу М-ва путей сообщенія, 1908 г., кн. 9, стр. 155.

1) Всегда имѣется *сопротивленіе при входѣ въ трубу*, совершенно аналогичное сопротивленію, вносимому насадкомъ, приставленнымъ къ отверстію. Чаще всего труба бываетъ цилиндрической и примыкаетъ къ сосуду подъ какимъ-нибудь угломъ, такъ что сопротивленіе при входѣ въ трубу есть сопротивленіе наклоннаго цилиндрическаго насадка, для котораго въ § 15 (форм. 19, стр. 137) мы имѣли по Вейсбаху:

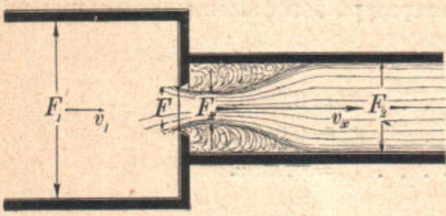
$$\zeta = 0{,}505 + 0{,}303\ sin\delta + 0{,}226\ sin^2\delta,\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (19)$$

гдѣ δ есть уголъ между осью трубы и нормалью къ стѣнкѣ.

Если труба подводится къ сосуду какъ-нибудь иначе, то коэффиціентъ ζ удобно опредѣлять по коэф-ту скорости φ, величину котораго слѣдуетъ брать изъ опытовъ надъ истеченіемъ изъ отверстій, устроенныхъ такъ, какъ примыкаетъ къ сосуду труба. Связь между ζ и φ мы уже указали раньше:

$$\zeta = \frac{1}{\varphi^2} - 1.$$

Такъ, напримѣръ, если труба, примыкая къ сосуду, хорошо скруглена, воспроизводя форму сжатой струи, то, какъ извѣстно, $\varphi = 0{,}975$, а слѣдовательно, $\zeta = 0{,}05$. Если такого скругленія кромокъ нѣтъ и если, сверхъ того, труба нормальна къ стѣнкѣ сосуда, то изъ уравненія (19) находимъ $\zeta = 0{,}5$, какъ въ обыкновенномъ насадкѣ Вентури.



Фиг. 123.

2) Всякое *внезапное измѣненіе сѣченія трубы* вызываетъ потерю напора. Въ общемъ случаѣ представимъ себѣ, что круглая труба сѣченія F_1 переходитъ въ круглую же трубу сѣченія F_2 черезъ діафрагму, въ которой сдѣлано круглое отверстіе площадью F (фиг. 123). Потеря напора состоитъ въ этомъ случаѣ изъ сопротивленія при проходѣ черезъ отверстіе, которое обозначимъ черезъ $\zeta_1 \frac{v_x^2}{2g}$. Если въ діафрагмѣ кромки острыя, то $\varphi = 0{,}97$ и $\zeta_1 = 0{,}063$.

Кромѣ того, есть потеря на ударъ, равная $\frac{(v_x - v_2)^2}{2g}$.

Ур-іе расхода пишется такъ:

$$Q = F_1 v_1 = F_x v_x = \alpha F v_x = F_2 v_2.$$

Принимая это во вниманіе, можемъ, такимъ образомъ, учесть полную потерю напора вслѣдствіе такого сопротивленія формулой:

$$\eta = \zeta_1 \frac{v_x^2}{2g} + \frac{(v_x - v_2)^2}{2g} = \zeta \frac{v_2^2}{2g} = \left\{ \zeta_1 \left(\frac{F_2}{\alpha F} \right)^2 + \left(\frac{F_2}{\alpha F} - 1 \right)^2 \right\} \frac{v_2^2}{2g}.$$

Слѣдовательно, коэф-тъ сопротивленія выражается здѣсь такъ:

$$\zeta = \zeta_1 \left(\frac{F_2}{\alpha F}\right)^2 + \left(\frac{F_2}{\alpha F} - 1\right)^2 \dots \dots \dots \quad (15)$$

(Нужно помнить, что величина α зависитъ отъ степени совершенства сжатія, т.-е. отъ отношенія $F:F_1$).

Такая потеря напора отразится тѣмъ, что если пьезометръ въ первой трубѣ имѣлъ высоту $a_1 = \frac{p_1}{\gamma} - b$, гдѣ b есть высота барометрическаго давленія, то пьезометръ во второй трубѣ, при условіи горизонтальности трубы, на нѣкоторомъ разстояніи отъ діафрагмы будетъ имѣть меньшую высоту $a_2 = \frac{p_2}{\gamma} - b$, опредѣляемую изъ соотношенія:

$$a_1 - a_2 = \frac{v_2^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g} + \zeta \frac{v_2^2}{2g} = (1+\zeta)\frac{v_2^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g}.$$

Пьезометръ, вставленный непосредственно за діафрагмой, будетъ имѣть высоту a_x, опредѣляемую формулой:

$$a_2 - a_x = 2\left(\frac{F_2}{\alpha F} - 1\right)\frac{v_2^2}{2g}.$$

Въ справедливости написанныхъ выраженій легко убѣдиться путемъ соотвѣтственнаго примѣненія ур-ія Д. Бернулли.

Понятно, что во всякомъ случаѣ $a_x < a_2$, т.-е. что вблизи діафрагмы давленіе меньше, чѣмъ за нею, подобно тому, что всегда имѣетъ мѣсто при ударѣ.

Въ случаѣ совершеннаго сжатія ($F_1 > 20\,F$) Вейсбахъ даетъ слѣдующія значенія коэф-та ζ въ ур-іи (15) (см. табл. 30).

Таблица 30 (къ ур-ію 15).

$\frac{F}{F_2}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
ζ	231,7	50,99	19,78	9,612	5,256	3,077	1,876	1,169	0,734	0,480

Въ случаѣ несовершеннаго сжатія ($F_1 < 20\,F$) Вейсбахъ не даетъ непосредственнаго коэф-та ζ, а даетъ значенія коэф-товъ μ въ зависимости отъ отношенія $\frac{F}{F_1}$. Чтобы перейти отъ нашего ур-ія (15), содержащаго коэф-тъ сжатія α, къ ур-ію Вейсбаха, содержащему коэф-тъ расхода μ, замѣтимъ, что:

$$\zeta_1 = \frac{1}{\varphi^2} - 1,$$

затѣмъ

$$\mu = \alpha\varphi,$$

т.-е.

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{\varphi}{\mu}.$$

Поэтому ур-іе (15) переписывается иначе такъ:

$$\zeta = \left(\frac{1}{\varphi^2} - 1\right)\frac{\varphi^2}{\mu^2}\left(\frac{F_2}{F}\right)^2 + \left(\frac{\varphi}{\mu}\,\frac{F_2}{F} - 1\right)^2 = \left(\frac{F_2}{\mu F}\right)^2 - 2\frac{\varphi}{\mu}\,\frac{F_2}{F} + 1.$$

Такъ какъ φ, вообще, мало отличается отъ единицы, то, положивъ $\varphi = 1$, получимъ окончательную формулу Вейсбаха для коэф-та сопротивленія при діафрагмѣ въ случаѣ несовершеннаго сжатія:

$$\zeta = \left(\frac{F_2}{\mu F} - 1\right)^2 \quad \text{. . . . . (16)}$$

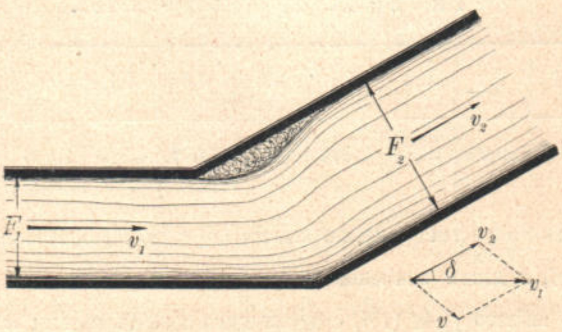
Непосредственныя наблюденія привели Вейсбаха къ слѣдующимъ значеніямъ μ при разныхъ отношеніяхъ $F:F_1$ (табл. 31).

Таблица 31.

При $\frac{F}{F_1}=$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\mu=$	0,624	0,632	0,643	0,659	0,681	0,712	0,755	0,813	0,892	1,000
Если $F_2=F_1$, то $\zeta=$	225,9	47,77	17,51	7,801	3,753	1,796	0,797	0,290	0,060	0,000

Третья строка этой таблицы даетъ значенія ζ, если $F_1 = F_2$, т.-е. если діафрагма поставлена на трубѣ постояннаго діаметра. Послѣдній вертикальный столбецъ даетъ коэф-ты расхода и сопротивленія, когда $F = F_1$, т.-е. когда нѣтъ діафрагмы, а есть только внезапное сжатіе трубы; при этомъ, если $F_2 = F_1$, то нѣтъ и суженія, а потому $\zeta = 0$.

3) Всякое *внезапное измѣненіе направленія скорости* сопряжено съ потерею напора. Оно можетъ сопровождаться измѣненіемъ величины сѣче-



Фиг. 124.

нія. Такъ пусть горизонтальная труба (фиг. 124), образуя колѣно, сразу мѣняетъ свое направленіе, при чемъ до колѣна сѣченіе ея есть F_1, а за колѣномъ оно переходитъ въ F_2, и, кромѣ того, $F_2 > F_1$. Пусть уголъ между осями обѣихъ вѣтвей есть δ. По ур-iю расхода

$$Q = F_1 v_1 = F_2 v_2;$$

если извѣстна скорость v_1, то извѣстна и скорость v_2. Отложимъ по направленiю оси первой вѣтви скорость v_1, а по направленiю второй—скорость v_2. Замыкая параллелограммъ скоростей, видимъ, что вслѣдствiе дѣйствiя колѣна утрачена слагающая скорость v. Слѣдовательно, потеря напора η есть высота, соотвѣтствующая слагающей, т.-е.

$$\eta = \frac{v^2}{2g} \cdot$$

Изъ параллелограмма скоростей видно, что

$$v^2 = v_1{}^2 + v_2{}^2 - 2 v_1 v_2 \cos\delta.$$

Такъ какъ

$$\cos\delta = 1 - 2\sin^2\frac{\delta}{2},$$

то можемъ написать:

$$\eta = \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g} + \frac{4 v_1 v_2 \sin^2\frac{\delta}{2}}{2g} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(17)}$$

Замѣтимъ, что первый членъ представляетъ собою потерю напора въ случаѣ, если бы при прямой оси трубы было внезапное уменьшенiе скорости $(v_1 - v_2)$. Выражая скорость v_1 по v_2, получаемъ:

$$\eta = \zeta \frac{v_2{}^2}{2g} = \left\{ \left(\frac{F_2}{F_1} - 1 \right)^2 + 4 \frac{F_2}{F_1} \sin^2\frac{\delta}{2} \right\} \frac{v_2{}^2}{2g}.$$

Чаще всего встрѣчается случай $F_1 = F_2$, т.-е. случай измѣненiя только направленiя скорости. Тогда по послѣднему ур-iю

$$\zeta = 4\sin^2\frac{\delta}{2}.$$

Такъ разсматриваетъ этотъ случай Zeuner. Однако, наблюдая влiянiе угла колѣна на круглой трубѣ въ 30 *mm* дiаметромъ, Вейсбахъ пришелъ къ заключенiю, что нужно считать

$$\zeta = 0{,}9457 \sin^2\frac{\delta}{2} + 2{,}047 \sin^4\frac{\delta}{2}.$$

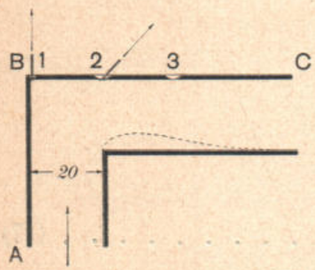
При разныхъ углахъ δ эта формула даетъ слѣдующія величины ζ (табл. 32):

Таблица 32.

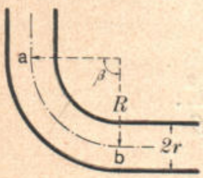
δ	20°	40°	60°	80°	90°	100°	110°	120°	130°	140°
ζ	0,046	0,139	0,364	0,740	0,985	1,260	1,556	1,861	2,158	2,431

Ур-іе Zeuner'а даетъ для $\delta = 90^0$ величину $\zeta = 2$, тогда какъ по Вейсбаху ζ достигаетъ здѣсь значенія только 0,985. Такимъ образомъ, разсужденія Zeuner'а на дѣлѣ не оправдываются; однако и формула Вейсбаха не вполнѣ удовлетворительна. Послѣдній указываетъ на это самъ, упоминая, что на круглой трубѣ въ 10 *mm* діаметромъ при $\delta = 90^0$ онъ получилъ $\zeta = 1{,}536$, т.-е. гораздо больше, чѣмъ на трубѣ въ 30 *mm*. Такимъ образомъ, увеличеніе діаметра сильно уменьшаетъ коэффиціентъ сопротивленія. Въ соотвѣтствіи съ этимъ при большихъ трубахъ при $\delta = 90^0$ Flamant предлагаетъ считать $\zeta = 0{,}25$.

Отмѣтимъ, что въ колѣнахъ несомнѣнно существуетъ сжатіе струи (фиг. 124), которая по инерціи отстаетъ отъ рѣзко отогнутой стѣнки колѣна. Это сжатіе и сопутствующее ему разрѣженіе наглядно доказываются наблюденіемъ Caligny *) (фиг. 125); на вертикальной трубкѣ *AB* въ 20 *mm* діаметромъ поставлено горизонтальное колѣно *BC*, въ стѣнкѣ котораго поверхней образующей сдѣланы отверстія 1, 2, 3; первое—у самой вершины колѣна, два другія въ разстояніи соотвѣтственно одного и двухъ діаметровъ трубки отъ перваго. Вода протекала снизу вверхъ по стрѣлкѣ. Уголъ α былъ равенъ 90°. Изъ отверстія 1 струйка вылетала по вертикали, изъ отверстія 2 вытекала наклонная (около 45°) струйка, а изъ отверстія 3 не вытекало ничего. Изъ этого слѣдуетъ, что давленіе въ отверстіи 3 меньше, чѣмъ въ двухъ первыхъ, а это, при горизонтальности трубки, можетъ произойти только тогда, если скорость здѣсь больше, чѣмъ въ сѣченіяхъ трубы близъ отверстій 1 и 2; но такъ какъ діаметръ трубки постояненъ, то увеличеніе скорости въ этомъ мѣстѣ можетъ быть объяснено только сжатіемъ струи.



Фиг. 125.



Фиг. 126.

4) Когда колѣно скруглено (фиг. 126), то потеря напора, попрежнему, выражается членомъ $\eta = \zeta \frac{v^2}{2g}$, но коэф-тъ здѣсь меньше, чѣмъ

*) См. „Recherches théoriques et expérimentales sur les oscillations de l'eau", par A. de Caligny, page 246 du 1-er tome. При повтореніи этихъ наблюденій въ гидравлической лабораторіи И. М. Т. У. выяснилось, что область наименьшаго давленія, т.-е. наибольшаго сжатія струи, лежитъ приблизительно въ разстояніи двухъ діаметровъ трубы отъ вершины колѣна. Съ увеличеніемъ расхода мѣсто наибольшаго сжатія переносится далѣе отъ вершины по теченію. Отклоненіе направленія струйки отъ нормали къ стѣнкѣ объясняется инерціей движущейся воды, сохраняющей направленіе той скорости, которую она имѣла еще въ трубѣ;

въ предыдущемъ случаѣ. Источникомъ потери и здѣсь можетъ являться сжатіе струи, образующееся подъ вліяніемъ инерціи; не безъ вліянія и то, что, при несомнѣнно криволинейномъ движеніи частицъ, давленія въ струйкахъ, идущихъ по внѣшней части закругленія, благодаря центробѣжной слагающей полнаго ускоренія, должны быть больше, чѣмъ соотвѣтственныя давленія частицъ, идущихъ по внутренней части закругленіи. Въ силу этого скорости внутреннихъ частицъ должны быть больше скоростей внѣшнихъ частицъ; другими словами, распредѣленіе скоростей для отдѣльныхъ точекъ не то, которое имѣетъ мѣсто до закругленія и за нимъ. Такое измѣненіе распредѣленія скоростей и давленій, конечно, не можетъ не вызвать въ усиленномъ видѣ того нарушенія движенія параллельными струями, которое констатировано Рейнольдсомъ, а вмѣстѣ съ тѣмъ должно сопровождаться потерей энергіи.

Матеріаломъ для оцѣнки величины ζ служатъ здѣсь, главнымъ образомъ, опыты Dubuat и, отчасти, опыты Вейсбаха. Послѣдній, на основаніи подсчета тѣхъ и другихъ, даетъ, при круглой трубѣ діаметромъ $2r$ и при закругленіи оси трубы радіусомъ R, формулу (18) и таблицу 33:

$$\zeta = 0{,}131 + 1{,}847 \left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{7}{2}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (18)$$

Таблица 33.

$\frac{r}{R}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
ζ	0,131	0,138	0,158	0,206	0,294	0,440	0,661	0,977	1,408	1,978

Для трубы прямоугольнаго сѣченія, съ размѣромъ b въ плоскости закругленія, онъ даетъ формулу (19) и таблицу 34:

$$\zeta = 0{,}124 + 3{,}104 \left(\frac{b}{2R}\right)^{\frac{7}{2}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (19)$$

Таблица 34.

$\frac{b}{2R}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
ζ	0,124	0,135	0,180	0,250	0,398	0,643	1,015	1,546	2,271	3,228

Оба эти выраженія пригодны для угла закругленія $\beta = 90^0$; при иномъ углѣ β, измѣряемомъ между старымъ и новымъ направленіями, слѣдуетъ эти значенія ζ умножить на отношеніе $\frac{\beta^0}{90^0}$.

это отклоненіе видно тѣмъ отчетливѣе, чѣмъ тоньше стѣнка отверстія; оно очень велико при тщательно раззенкованныхъ отверстіяхъ и почти отсутствуетъ, если отверстіе въ 2 *mm* просто просверлено въ трехмиллиметровой стѣнкѣ колѣна.

Saint-Venant, пересчитывавшій опыты Dubuat, пришелъ къ заключенію, что потерянный напоръ для круглой трубы выражается въ этомъ случаѣ такъ:

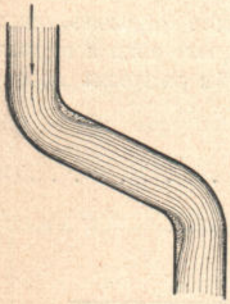
$$\eta = 0{,}096\,\frac{L}{R}\sqrt{\frac{2r}{R}}\cdot\frac{v^2}{2g}$$

или

$$\zeta = 0{,}096\,\frac{L}{R}\sqrt{\frac{2r}{R}},$$

гдѣ, попрежнему, $2r$ есть діаметръ круглой трубы, R—радіусъ закругленія оси трубы, а L есть длина закругленія ab, считая по оси закругленія. Понятно, что:

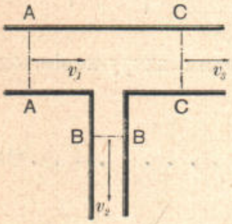
$$L:R = \frac{\pi\beta^0}{180^0}.$$



Фиг. 127.

Отмѣтимъ, что въ обоихъ случаяхъ оцѣнивается только вліяніе искривленія; кромѣ этого имѣетъ мѣсто потеря напора на треніе. Поэтому, при оцѣнкѣ потери напора на треніе, къ длинѣ ея прямыхъ частей присчитываются длины осей закругленій.

Въ случаѣ, если два колѣна составлены такъ, что труба образуетъ перегибъ, то нѣкоторое сжатіе струи, утрированно показанное на фиг. 127, появляется два раза, а потому коэф-тъ сопротивленія слѣдуетъ брать какъ сумму коэф-товъ сопротивленій обоихъ колѣнъ.



Фиг. 128.

5) При *отвѣтвленіяхъ* также имѣютъ мѣсто потери напора. На основаніи данныхъ, приводимыхъ D'Aubuisson'омъ *), ихъ приходится оцѣнивать такъ. Для тѣхъ струй, которыя входятъ въ отвѣтвленіе (фиг. 128), потеря напора равна *двойному скоростному напору внутри отвѣтвленія*. Такимъ образомъ ур-іе Д. Бернулли для этихъ струй между сѣченіемъ ***AA*** (значки $_1$) и сѣченіемъ ***BB*** (значки $_2$) должно быть написано такъ:

$$\frac{p_1}{\gamma}+\frac{v_1^{\,2}}{2g}=\frac{p_2}{\gamma}+\frac{v_2^{\,2}}{2g}+2\,\frac{v_2^{\,2}}{2g},$$

если, конечно, считать, что центры обоихъ сѣченій лежатъ въ одной горизонтальной плоскости. При этомъ предполагается, что отвѣтвленіе образуетъ прямой уголъ съ главною трубою и имѣетъ меньшій діаметръ, чѣмъ сама труба.

На протяженіи самой трубы, между сѣченіемъ ***AA*** и сѣченіемъ ***CC*** (значки $_3$) потеря напора такова, что давленіе p_3 не отличается отъ давле-

---

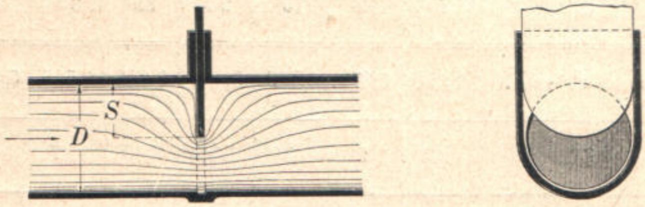
*) См. „Traité d'Hydraulique" par J. F. D'Aubuisson de Voisins. Paris, 1840, стр. 256—258. Также „Corso di Idraulica" профессора U. Masoni. Napoli, 1900, стр. 305.

нія p_1, хотя для этихъ струй на этомъ пути освобождается значительный скоростной напоръ $\frac{v_1^2 - v_3^2}{2g}$; это и есть потеря напора.

6) Наконецъ, всякая *задвижка, кранъ, клапанъ* и т. п. вносятъ извѣстныя сопротивленія, а слѣдовательно, и потери напора.

Вейсбахъ даетъ слѣдующія таблицы значеній коэффиціентовъ сопротивленія въ этихъ случаяхъ, относящіяся къ *круглымъ* трубамъ:

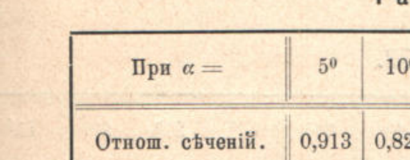
а) При *задвижкѣ* (фиг. 129) коэф-тъ сопротивленія зависитъ отъ отношенія $S:D$ (табл. 35).



Фиг. 129.

Таблица 35.

$S:D$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{7}{8}$
Отнош. сѣченій.	1,000	0,948	0,856	0,740	0,609	0,466	0,315	0,159
ζ	0,00	0,07	0,26	0,81	2,06	5,52	17,0	97,8

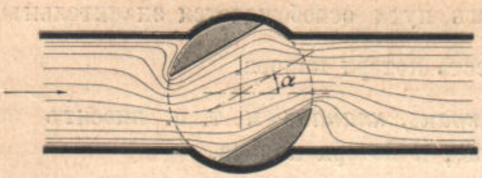


Фиг. 130.

b) При *поворотномъ* (горловомъ) *клапанѣ* (фиг. 130) коэф-тъ сопротивленія зависитъ отъ угла α (табл. 36).

Таблица 36.

При $\alpha =$	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	
Отнош. сѣченій.	0,913	0,826	0,741	0,658	0,577	0,500	0,426	
$\zeta =$	0,24	0,52	0,90	1,54	2,51	3,91	6,22	
При $\alpha =$	40°	45°	50°	55°	60°	65°	70°	90°
Отнош. сѣченій.	0,357	0,293	0,234	0,181	0,134	0,094	0,060	0
$\zeta =$	10,8	18,7	32,6	58,8	118	256	751	∞



Фиг. 131.

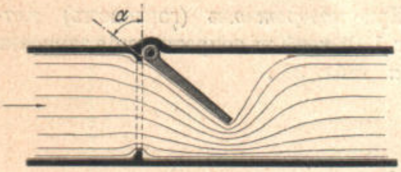
c) При *кранахъ* (фиг. 131) коэф-тъ сопротивленія быстро возрастаетъ съ увеличеніемъ угла α, какъ это видно изъ таблицы 37.

Таблица 37.

α	5^0	10^0	15^0	20^0	25^0	30^0	35^0
Относ. сѣченій.	0,926	0,850	0,772	0,692	0,613	0,535	0,458
ζ	0,05	0,29	0,75	1,56	3,10	5,47	9,68
α	40^0	45^0	50^0	55^0	60^0	65^0	$82^1/_3{}^0$
Относ. сѣченій.	0,385	0,315	0,250	0,190	0,137	0,091	0
ζ	17,3	31,2	52,6	106	206	486	∞

Напримѣръ, при $v = 1$ *mtr/sec*, т.-е. при $\frac{v^2}{2g} = 0{,}05$ *mtr*, для проталкиванія воды черезъ кранъ при $\alpha = 65^0$ нуженъ напоръ:

$$h = \zeta \frac{v^2}{2g} = 486 . 0{,}05 = \mathbf{24{,}3} \text{ mtr}.$$



Фиг. 132.

d) Для *шарнирнаго клапана* (фиг. 132) коэф-тъ сопротивленія возрастаетъ съ уменьшеніемъ угла α (табл. 38).

Таблица 38.

α	70^0	65^0	60^0	55^0	50^0	45^0	40^0	35^0	30^0	25^0	20^0	15^0
ζ	1,7	2,3	3,2	4,6	6,6	9,5	14	20	30	42	62	90

Замѣтимъ, что числовыя данныя пунктовъ a, b, c и d получены изъ опытовъ надъ трубою съ діаметромъ въ 4 *cm*. Кромѣ того, всѣ приведенные коэф-ты относятся къ **водѣ**.

Кромѣ этихъ данныхъ Вейсбаха, имѣются еще наблюденія Баха (1884 г.) надъ сопротивленіемъ тарельчатыхъ насосныхъ клапановъ *). Приводимъ результаты этихъ наблюденій, условившись въ слѣдующихъ обозначеніяхъ:

*) C. Bach, Versuche ueber Ventilbelastung und Ventilwiderstand.

P—нагрузка (въ kgr) на клапанъ, необходимая для того, чтобы удержать свободный клапанъ въ равновѣсіи въ протекающей вокругъ него струѣ воды;

d—внутренній діаметръ сѣдла;

$f=\frac{\pi d^2}{4}$—площадь сѣченія сѣдла;

v—скорость (средняя) воды въ сѣдлѣ;

h—высота подъема клапана;

i—число направляющихъ реберъ;

c—ширина этихъ реберъ, считая по окружности сѣдла діаметра d;

b—радіальный размѣръ замыкающей поверхности;

ζ—коэф-тъ сопротивленія клапана, такъ что потеря напора, вносимая клапаномъ на каждый kgr протекающей жидкости, есть $\zeta\frac{v^2}{2g}$.

Всѣ размѣры выражены въ mtr.

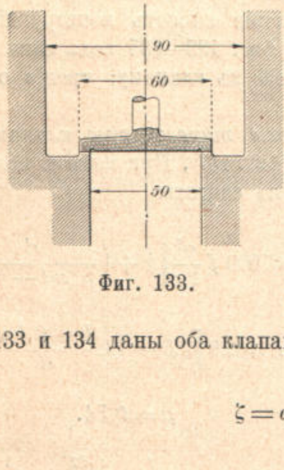
е) *Плоскій тарельчатый клапанъ съ верхнимъ направленіемъ* (фиг. 133). Пока высота подъема h и ширина опорной поверхности b находится въ предѣлахъ отъ $0{,}1\,d$ до $0{,}25\,d$, можно положить, что

$$P=1000\,f\,\frac{v^2}{2g}\left[k+\left(\frac{d}{4\mu h}\right)^2\right],$$

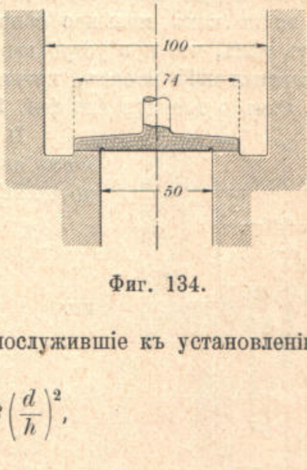
гдѣ

$$k=2{,}5+19\,\frac{b-0{,}1\,d}{d},$$

$\mu=0{,}60$, если b велико (ближе къ $0{,}25\,d$),
$\mu=0{,}62$, „ b мало („ „ $0{,}1\,d$).



Фиг. 133.



Фиг. 134.

На фиг. 133 и 134 даны оба клапана, послужившіе къ установленію этой формулы. Далѣе:

$$\zeta=\alpha+\beta\left(\frac{d}{h}\right)^2,$$

при чемъ

$$\alpha=0{,}55+4\,\frac{b-0{,}1\,d}{d},$$

$\beta=0{,}15$ при малыхъ b,
$\beta=0{,}16$ „ большихъ b.

Если высота подъема h меньше $0{,}1\,d$ или больше $0{,}25\,d$, то можно считать:

$$P=1000\,f\,\frac{v^2}{2g}\left[k+\left(\frac{d}{4\mu(a_1+h)}\right)^2\right],$$

$$\zeta=\alpha+\beta\left(\frac{d}{a_2+h}\right)^2,$$

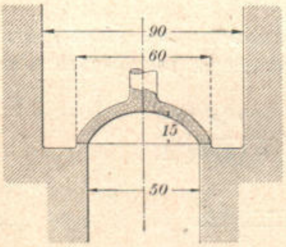
гдѣ для клапана фиг. 133 получено:

$$a_1 = 0{,}0008\ mtr;\quad k = 1{,}85;\quad \mu = 0{,}52;$$
$$a_2 = 0{,}0005\ mtr;\quad \alpha = 0{,}30;\quad \beta = 0{,}18.$$

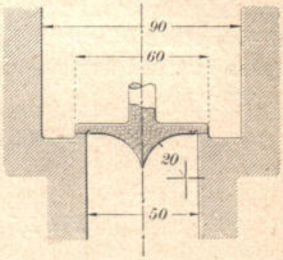
Для клапана фиг. 134 получено:

$$a_1 = 0{,}0016\ mtr;\quad k = 3{,}4;\quad \mu = 0{,}435;$$
$$a_3 = 0{,}0005\ mtr;\quad \alpha = 0{,}7;\quad \beta = 0{,}19.$$

При этомъ слѣдуетъ отмѣтить, что видоизмѣненіе конструкціи клапана по фиг. 135 и по фиг. 136 вноситъ мало измѣненія въ величинѣ сопротивленія; однако замѣтно, что изъ этихъ трехъ конструкцій наибольшее сопротивленіе представляетъ клапанъ фиг. 136

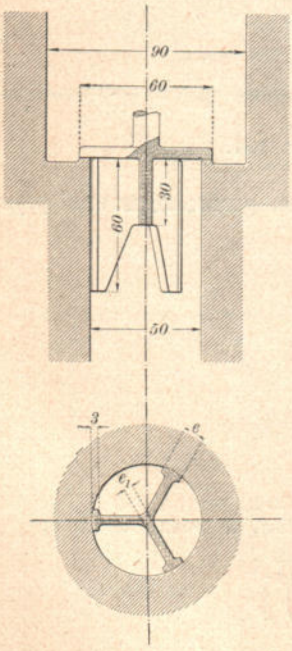


Фиг. 135.



Фиг. 136.

съ направляющимъ струю носкомъ; конструкціи фиг. 133 является средней по величинѣ сопротивленія, тогда какъ меньшее сопротивленіе вноситъ конструкція фиг. 135. Это можно объяснить тѣмъ, что при устройствѣ по фиг. 133—135 вода сама образуетъ мертвый жидкій направляющій носокъ, прилегающій къ клапану; треніе о такую жидкую стѣнку меньше, чѣмъ о твердую (на фиг. 136).



Фиг. 137.

f) *Плоскіе тарельчатые клапаны съ направленіемъ снизу* (фиг. 137). При высотѣ подъема отъ 0,125 d до 0,25 d можно считать:

$$P = 1000\, f\, \frac{v^2}{2g}\left[k + \left(\frac{d}{\mu\,(\pi d - ie)\,h}\right)^2\right],$$

гдѣ

$$k = 0{,}9\left[2{,}5 + 19\,\frac{b - 0{,}1\,d}{d}\right],$$

$$\mu = 0{,}54.$$

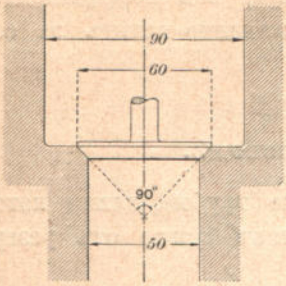
Далѣе

$$\zeta = \alpha + \beta\left(\frac{d^2}{(\pi d - ie)\,h}\right)^2.$$

Тутъ слѣдуетъ брать $\alpha = 1{,}8$ отъ значеній α въ предыдущемъ случаѣ и $\beta = 1{,}7$, если направляющія ребра сужаютъ цилиндрическую поверхность не болѣе, какъ на 13% т.-е. если $(\pi d - ie)h = 0{,}87f$. Если это суженіе достигаетъ 20%, т.-е. если $(\pi d - ie)h = 0{,}8\,f$, то слѣдуетъ брать $\alpha = 2{,}6$ отъ значенія α предыдущаго случая, а $\beta = 1{,}75$.

Такіе клапаны даютъ гораздо большее сопротивленіе, чѣмъ клапаны съ однимъ верхнимъ направленіемъ.

g) *Тарельчатый плоскій клапанъ съ конической замыкающей поверхностью* (фиг. 138). Если $h = 0{,}1\,d$ до $0{,}15\,d$ и, кромѣ того, $b = 0{,}1\,d$, то:



Фиг. 138.

$$P = 1000\,f\,\frac{v^2}{2g}\left[k + \left(\frac{d}{4\mu h}\right)^2\right],$$

гдѣ

$$k = -1{,}05;\quad \mu = 0{,}89.$$

Здѣсь

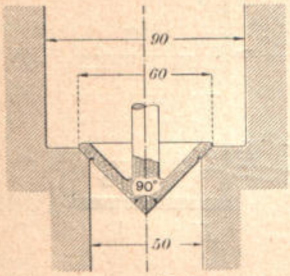
$$\zeta = \alpha + \beta\left(\frac{d}{h}\right) + \gamma\left(\frac{d}{h}\right)^2,$$

при чемъ

$$\alpha = 2{,}6;\quad \beta = -0{,}8;\quad \gamma = 0{,}14.$$

Здѣсь сопротивленіе значительно меньше, чѣмъ въ случаѣ (f).

h) *Если весь клапанъ имѣетъ форму конуса* (фиг. 139), то



Фиг. 139.

$$P = 1000\,f\,\frac{v^2}{2g}\left[k + \left(\frac{d}{4\mu h}\right)^2\right],$$

гдѣ

$$k = 0{,}38;\quad \mu = 0{,}68.$$

Затѣмъ

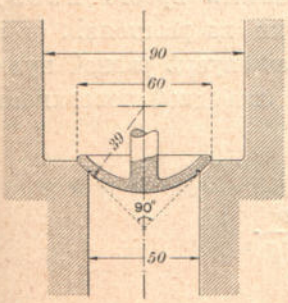
$$\zeta = \alpha + \beta\left(\frac{d}{h}\right)^2,$$

гдѣ

$$\alpha = 0{,}6;\quad \beta = 0{,}15.$$

Такая форма клапана сильно увеличиваетъ его сопротивленіе.

k) Наконецъ, если *клапанъ ограниченъ снизу шаровой поверхностью* (фиг. 140), то при высотѣ подъема $h = 0{,}1\,d$ до $0{,}25\,d$ имѣетъ мѣсто соотношеніе:



Фиг. 140.

$$P = 1000\,f\,\frac{v^2}{2g}\left[k + \left(\frac{d}{4\mu h}\right)^2\right].$$

гдѣ

$$k = 0{,}96;\quad \mu = 1{,}15.$$

Здѣсь

$$\zeta = \alpha + \beta\left(\frac{d}{h}\right) + \gamma\left(\frac{d}{h}\right)^2.$$

при чемъ

$$\alpha = 2{,}7;\quad \beta = -0{,}8;\quad \gamma = 0{,}14.$$

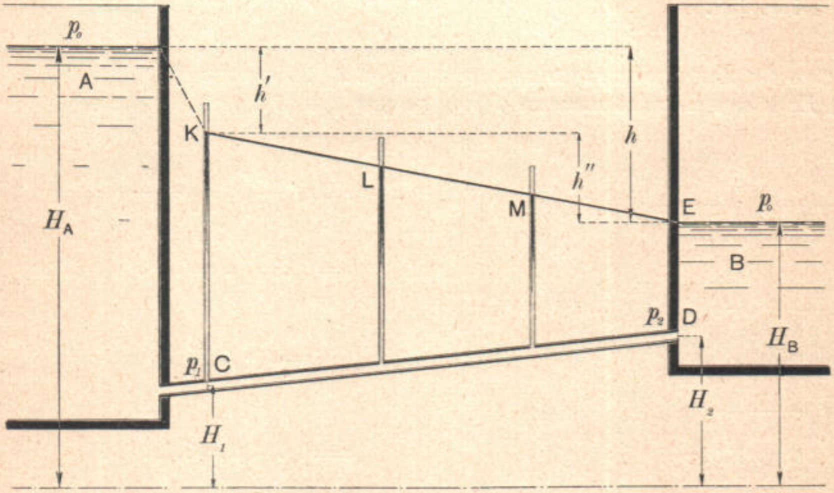
Во всѣхъ этихъ случаяхъ клапанная коробка была устроена такъ, что вода, пройдя клапанъ, не отклонялась въ сторону, а продолжала итти по вертикальному направленію.

По формуламъ Баха можно опредѣлить ζ, только зная h; а эта величина можетъ быть найдена изъ выраженія нагрузки P, которая осуществляется или пружиной, или часто вѣсомъ самаго клапана (конечно, въ водѣ, а не въ воздухѣ).

Какъ общее заключенiе изъ этого и предыдущаго параграфовъ выводимъ, что *всѣ* безъ исключенiя *потери напора* въ трубахъ *признаются въ гидравликѣ пропорцiональными квадрату скорости;* всѣ коэффицiенты относятся къ скоростямъ, имѣющимъ мѣсто непосредственно вслѣдъ за сопротивленiемъ.

§ 23. Задача о простомъ водопроводѣ.

Пусть даны два резервуара A и B, соединенные трубою, длина которой есть L (фиг. 141). Возьмемъ сѣченiе C трубы такъ близко отъ резер-



Фиг. 141.

вуара A, чтобы часть трубы до C можно было считать просто насадкомъ (т.-е. сѣченiе C должно отстоять отъ стѣнки на разстоянiи около 2,5 дiаметровъ трубы). Тогда, считая скорость въ резервуарѣ равной нулю, мы напишемъ ур-iе Д. Бернулли для движенiя отъ свободной поверхности въ резервуарѣ до сѣченiя C такъ:

$$H_A + \frac{p_0}{\gamma} = \frac{v^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + H_1 + \zeta_e \frac{v^2}{2g}.$$

Здѣсь v есть скорость въ трубѣ, а ζ_e есть коэф-тъ сопротивленiя при входѣ въ трубу (см. § 22, 1). Отсюда понятно, что если въ C поставить пьезометръ, открытый въ воздухъ, то вода поднимется въ немъ только до точки K, лежащей ниже горизонта воды въ сосудѣ на нѣкоторую высоту h', гдѣ

$$h' = H_A - \left(H_1 + \frac{p_1 - p_0}{\gamma}\right) = (1 + \zeta_e)\frac{v^2}{2g} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (20)$$

т.-е. на высоту напора, которая затрачена на сообщеніе водѣ скорости v и на преодолѣніе сопротивленія при входѣ.

Далѣе вода течетъ по трубѣ до резервуара **B**, преодолѣвая на этомъ пути общее сопротивленіе тренія

$$\eta_r = \zeta_r \frac{4L}{D} \cdot \frac{v^2}{2g}$$

и всѣ могущія встрѣтиться особыя сопротивленія, которыя мы суммарно обозначимъ черезъ

$$\eta = \Sigma \zeta \frac{v^2}{2g} \cdot$$

Слѣдовательно, ур-іе Д. Бернулли для движенія отъ **C** до **D** (мѣсто входа въ резервуаръ **B**) будетъ писаться такъ:

$$H_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} = H_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} + \zeta_r \frac{4L}{D} \cdot \frac{v^2}{2g} + \Sigma \zeta \frac{v^2}{2g} \quad . \; . \; . \; (21)$$

Въ обѣихъ частяхъ уравненія мы пишемъ одно и то же v, предполагая трубу цилиндрической и постояннаго, притомъ, діаметра. Изъ ур. (21) имѣемъ:

$$H_1 + \frac{p_1}{\gamma} - \left(H_2 + \frac{p_2}{\gamma}\right) = \zeta_r \frac{4L}{D} \cdot \frac{v^2}{2g} + \Sigma \zeta \frac{v^2}{2g} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (21')$$

Легко видѣть, что члены, стоящіе въ лѣвой части этого ур-ія, представляютъ разность высотъ стоянія воды въ пьезометрахъ точекъ **C** и **D**. Далѣе, изъ уравненія Д. Бернулли, написаннаго для движенія отъ конца трубы въ **D** до уровня въ сосудѣ **B** легко убѣдиться, что если скорость движенія воды въ резервуарѣ **B** мала настолько, что ее можно считать нулемъ по сравненію со скоростью въ трубѣ **CD**, то самый резервуаръ **B** можно считать за пьезометръ для точки **D**. Принимая все это во вниманіе, заключаемъ, что члены, стоящіе въ лѣвой части уравненія (21′), представляютъ собою вертикальное разстояніе h'' между уровнемъ воды въ пьезометрѣ **C** и уровнемъ въ резервуарѣ **B**. Имѣемъ такимъ образомъ:

$$h'' = \zeta_r \frac{4L}{D} \cdot \frac{v^2}{2g} + \Sigma \zeta \frac{v^2}{2g} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (22)$$

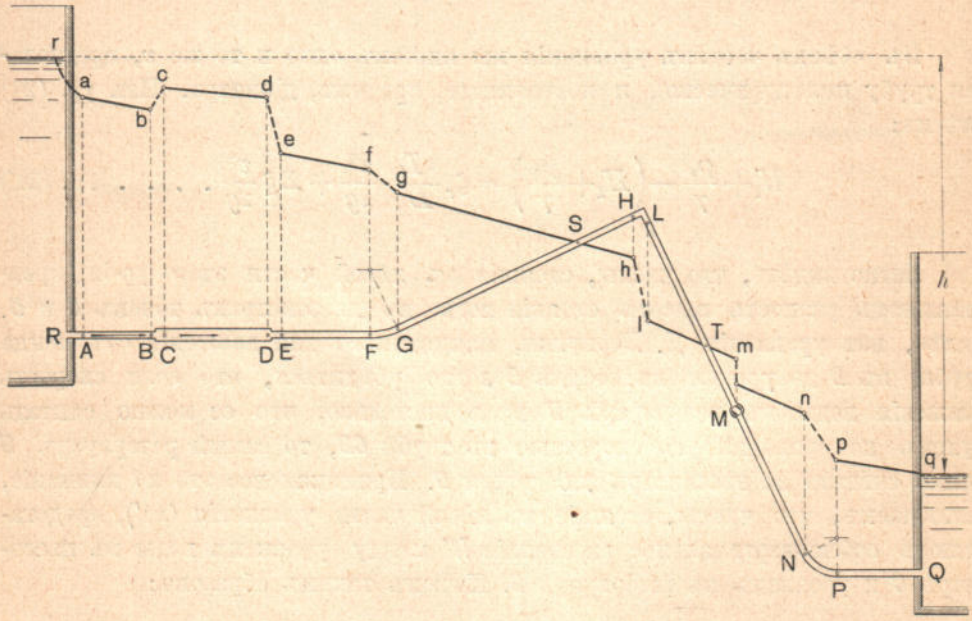
Итакъ, *въ цилиндрической трубѣ сумма потерянныхъ на сопротивленіе напоровъ представляетъ паденіе уровня въ пьезометрѣ.*

Если въ трубѣ нѣтъ внезапныхъ измѣненій сѣченія, если на ней нѣтъ ни клапановъ, ни крановъ, если всѣ изгибы сдѣланы помощью пологихъ закругленій и т. д.,— словомъ, если членъ $\Sigma \zeta \frac{v^2}{2g}$, оцѣнивающій эти особыя сопротивленія, настолько малъ, что имъ можно, вообще, пренебречь, то ур-іе (22) дастъ:

$$h'' = \zeta_r \frac{4L}{D} \cdot \frac{v^2}{2g} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (23)$$

Отсюда видно, что *въ прямой цилиндрической трубѣ паденіе высоты пьезометра h'' прямо пропорціонально длинѣ трубы*, а потому, если труба прямая, то достаточно знать высоту пьезометра въ какихъ-нибудь двухъ точкахъ **L** и **M**, чтобы имѣть возможность опредѣлить ее во всякой другой точкѣ трубы; вода въ пьезометрахъ будетъ подыматься вездѣ до прямой **KE**. Эта прямая, какъ уже было сказано, называется *напорной* или *пьезометрической линіей*.

Въ случаѣ, если особыя сопротивленія вносятъ потери напора, не исчезающія по величинѣ передъ потерею на треніе, то каждое такое сопротивленіе вноситъ мѣстное, болѣе или менѣе внезапное пониженіе напорной линіи. Такъ, напримѣръ, пусть фиг. 142 представляетъ схему



Фиг. 142.

водопровода, составленнаго изъ трубъ трехъ разныхъ діаметровъ: d_1 отъ **A** до **B**, d_2 отъ **C** до **D**, d_3 отъ **E** до **Q**; пусть на этой трубѣ имѣются, кромѣ того, закругленія разныхъ радіусовъ (**FG** и **NP**), колѣно **HL** и не вполнѣ открытый кранъ **M**. Ясно, что скорости въ соотвѣтствующихъ вѣтвяхъ, по ур-ію расхода, должны удовлетворять соотношенію

$$v_1 d_1^2 = v_2 d_2^2 = v_3 d_3^2.$$

Примѣняя соотвѣтствующимъ образомъ ур-iя Д. Бернулли, легко находимъ, что если въ точкахъ A, B,.. N, P поставимъ открытые пьезометры, то окажется, что:

точка a лежитъ ниже уровня r на $(1+\zeta_e)\frac{v_1^2}{2g}$,

точка b лежитъ ниже точки a на $\zeta'_r \frac{4L_1}{d_1}\frac{v_1^2}{2g}$,

точка c лежитъ выше точки b на $\frac{v_2(v_1-v_2)}{g}$,

и, при этомъ, во всякомъ случаѣ точка c лежитъ ниже горизонта r воды въ резервуарѣ;

точка d лежитъ ниже точки c на $\zeta''_r \frac{4L_2}{d_2}\frac{v_2^2}{2g}$,

точка e » » » d на $(1+\zeta_r')\frac{v_3^2}{2g}-\frac{v_2^2}{2g}$.

При этомъ коэффиціентъ сопротивленія входа ζ_r' долженъ быть оцѣненъ, принимая во вниманіе несовершенство сжатія. Сама точка e можетъ оказаться и выше, и ниже точки b. Если допустимъ, что $d_1=d_3$, какъ это принято на чертежѣ, и, значитъ, $v_1=v_3$, то точка e во всякомъ случаѣ будетъ лежать ниже точки b.

Точка f лежитъ ниже точки e на $\zeta_r''' \frac{4L'_3}{d_3}\frac{v_3^2}{2g}$,

гдѣ L_3' есть разстояніе, считая по трубѣ отъ E до начала закругленія F, а точка E лежитъ не далѣе 3 діаметровъ отъ начала этой вѣтви трубы.

Подобнымъ же образомъ легко прослѣдить дальнѣйшія превышенія отдѣльныхъ точекъ пьезометрическихъ линій надъ другими. Отмѣтимъ только, что по чертежу трубы сразу, напр., видно, что закругленіе FG вноситъ меньшее паденіе пьезометрическаго уровня, нежели закругленіе NP, такъ какъ это послѣднее образуетъ бо̀льшій уголъ и имѣетъ меньшій радіусъ закругленія; кольцо HL (прямой уголъ) вноситъ еще большее паденіе уровня отъ h до l, нежели закругленіе NP.

Далѣе, если допустимъ, что ось трубы отъ A до F есть горизонтальная прямая, то пьезометрическая линія ab будетъ падать круче, нежели пьезометрическая линія cd, ибо въ этомъ случаѣ уклонъ первой линіи къ горизонту есть $\zeta_r' \frac{4}{d_1}\frac{v_1^2}{2g}$, а для второй линіи уклонъ есть $\zeta_r'' \frac{4}{d_2}\frac{v_2^2}{2g}$; а такъ какъ $d_2>d_1$, то $v_2<v_1'$, а также, по Дарси, $\zeta_r''<\zeta_r'$, т.-е. второй уклонъ значительно меньше перваго. Если опять допустимъ, что $d_3=d_1$, то очевидно, что пьезометрическая линія ef параллельна линіи ab.

Что же касается линіи gh, то она падаетъ круче, образуя съ горизонтомъ бо̀льшій уголъ, нежели прямая ef, ибо понятно, что уголъ съ горизонтомъ есть паденіе напора на единицу не длины самой трубы, а *длины ея горизонтальной проекціи.* По той же причинѣ заключаемъ, что вѣтви lm и mn, между собою параллельныя, падаютъ круче вѣтви gh, потому что сама труба LN стоитъ круче трубы GH.

Такимъ образомъ, пьезометрическая линія легко строится по точкамъ, при чемъ неопредѣленнымъ остается ея характеръ въ области каждаго мѣстнаго сопротивленія; эта неопредѣленность обыкновенно не имѣетъ практическаго значенія, почему на фиг. 142 части ra, bc,..., np пьезометрической линіи и замѣнены произвольными пунктирными линіями, а для крана M какъ бы предположено, что вся потеря напора вносится одной только его точкой. При большихъ длинахъ трубъ этотъ послѣдній пріемъ наиболѣе удобенъ въ примѣненіи ко всѣмъ мѣстнымъ сопротивленіямъ.

Важное значеніе построенія пьезометрической линіи заключается въ томъ, что, построивъ ее, мы сразу видимъ, каково давленіе въ любой точкѣ трубы; кромѣ того, тѣмъ самымъ отмѣчаемъ, гдѣ оно меньше атмосфернаго (часть трубы между точками S и T) и гдѣ поэтому возникаетъ вопросъ объ абсолютной величинѣ давленія, такъ какъ, по основному свойству жидкости, абсолютное давленіе всегда должно быть больше нуля,—иначе колонна жидкости разрывается. Этотъ послѣдній вопросъ разрѣшается съ помощью пьезометрической линіи весьма просто: для невозможности разрыва необходимо, чтобы вертикальный отрѣзокъ, заключенный между пьезометрической линіей и верхней точкой любого сѣченія трубы, взятаго въ тѣхъ ея участкахъ, гдѣ пьезометрическая линія опускается ниже трубы, былъ въ масштабѣ чертежа меньше высоты, соотвѣтствущей барометрическому давленію, т.-е. въ среднемъ меньше 10,33 *mtr.*

Наконецъ, назовемъ вертикальное разстояніе между уровнями въ обоихъ сосудахъ черезъ h, допустимъ, что скорости въ нихъ ничтожно малы,—практически равны нулю,—и напишемъ ур-іе Д. Бернулли для движенія отъ уровня r до уровня q, предполагая, конечно, что барометрическое давленіе въ обоихъ сосудахъ одно и то же. Принимая во вниманіе, что при входѣ изъ трубы PQ въ резервуаръ потеря напора на ударъ равна $\frac{v_3^2}{2g}$, получимъ:

$$h = \zeta_e \frac{v_1^2}{2g} + \zeta_r' \frac{4L_1}{d_1} \frac{v_1^2}{2g} + \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g} + \zeta_r'' \frac{4L_2}{d_2} \frac{v_2^2}{2g} +$$

$$+ \left[\zeta_e' + \Sigma\zeta + \zeta_r''' \frac{4L_3}{d_3} + 1\right] \frac{v_3^2}{2g} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (24)$$

гдѣ $\Sigma\zeta$ обозначаетъ сумму коэффиціентовъ всѣхъ особыхъ сопротивленій на трубѣ EQ. Легко видѣть, что всѣ скорости могутъ быть замѣнены какой-нибудь одной по ур-ію расхода.

Съ помощью ур-ія (24) легко отвѣтить на вопросъ, что и какъ измѣнится въ трубѣ, если, напр., нѣсколько припереть кранъ M? Ясно, что отъ этого увеличится коэф-тъ сопротивленія въ выраженіи $\Sigma\zeta$ (см. табл. 37 предыдущаго §), а потому, по ур-ію (24), скорость уменьшится. Слѣдов., расходъ уменьшится, что, конечно, ясно помимо всякихъ ур-ій. Пьезометрическая же линія измѣнится слѣдующимъ образомъ: въ точкѣ m ея ступень увеличится; часть ея выше крана вся приподымется, а часть ниже крана опустится,—конечно, кромѣ самой конечной точки q; соотношенія между уклонами отдѣльныхъ частей останутся тѣ же, но всѣ уклоны уменьшатся; въ итогѣ пьезометрическая линія вся нѣсколько выравняется и выпрямится, съ болѣе рѣзкой ступенью у крана.

Для простоты дальнѣйшаго изложенія вернемся къ случаю трубы одного и того же діаметра по схемѣ фиг. 141. Ур-іе (24) придется переписать для этого случая, очевидно, такъ:

$$h = H_A - H_B = \left[1 + \zeta_e + \Sigma\zeta + \zeta_r \frac{4L}{D}\right]\frac{v^2}{2g} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (25)$$

что легко также получить изъ (20) и (22), складывая ихъ и замѣчая по чертежу, что

$$h' + h'' = h.$$

Ур-іе (25) даетъ такимъ образомъ связь между вертикальнымъ разстояніемъ между уровнями двухъ сосудовъ, сообщенныхъ трубою, скоростью и всѣми потерями напора; оно является основнымъ для расчета водопроводовъ.

Очень часто, при достаточно длинной трубѣ, величина $(1 + \zeta_e + \Sigma\zeta)$ оказывается настолько малой по сравненію съ членомъ $\zeta_r \frac{4L}{D}$, что ее можно прямо отбрасывать, и тогда ур-іе (25) обращается въ ур-іе (23), гдѣ вмѣсто h'' нужно будетъ поставить h.

Полезно вглядѣться въ ур-ія (21) и (25). Изъ послѣдняго слѣдуетъ, что если данъ располагаемый напоръ h и дана труба, т.-е. детально извѣстна конструкція ея, то для v получается вполнѣ опредѣленная величина,—по такой трубѣ можетъ пройти только одинъ опредѣленный расходъ; бóльшій расходъ, т.-е. бóльшая скорость, могутъ быть созданы только помощью бóльшаго напора, т.-е. путемъ или повышенія уровня A, или пониженія уровня B. Въ обоихъ случаяхъ напорная линія падаетъ въ трубѣ быстрѣе, нежели то было до увеличенія расхода, ибо, какъ видно изъ (21), при заданномъ расположеніи трубы (при заданныхъ H_1 и H_2) всѣ сопротивленія преодолѣваются за счетъ той части напора, которая остается въ трубѣ подъ видомъ избытка давленія $\left(\frac{p_1}{\gamma} - \frac{p_2}{\gamma}\right)$: чѣмъ больше потери, тѣмъ быстрѣе падаетъ давленіе въ трубѣ. Такимъ образомъ, если помощью работы насосовъ или какъ-нибудь иначе горизонтъ въ первомъ резервуарѣ поддерживается на постоянной высотѣ H_A, то при разныхъ расходахъ въ другомъ резервуарѣ устанавливается всякій разъ тоже опредѣленный уровень H_B,— тѣмъ ниже, чѣмъ больше расходъ. Ясно, что вмѣстѣ съ этимъ пьезометрическая линія на всемъ протяженіи тоже видоизмѣняется.

Ур-іе (25) имѣетъ силу, очевидно, и въ томъ случаѣ, если резервуаръ B фактически отсутствуетъ. Если при этомъ труба открыта полнымъ сѣченіемъ, то $p_2 = p_0$, и изъ ур-ія (25) слѣдуетъ, что все вертикальное разстояніе отъ горизонта до устья трубы идетъ на сообщеніе водѣ живой силы и на работу сопротивленій: въ концѣ трубы не окажется никакого избытка давленія. Если труба оканчивается мундштукомъ или вообще отверстіемъ, меньшимъ самой трубы, то этимъ вносится особое сопротивленіе, которое нужно не забыть внести въ сумму $\Sigma\zeta$,—ур-іе же сохраняетъ старый видъ: въ немъ попрежнему $p_2 = p_0$, но это значитъ только, что атмосферное давленіе имѣетъ мѣсто въ самомъ отверстіи; въ трубѣ же, непосредственно передъ отверстіемъ, во всякомъ случаѣ остается нѣкоторый свободный избытокъ давленія, затрачиваемый на повышеніе скорости до того ея значенія, которое она имѣетъ въ мундштукѣ, и на связанную съ этимъ потерю напора.

Ур-ія (25) или (23) служатъ для расчета простыхъ водопроводовъ. При этомъ можетъ представиться два рода вопросовъ:

1) *Труба существуетъ*,—слѣдовательно, даны L и D, а также всѣ обстоятельства движенія по трубѣ (особыя сопротивленія). Требуется пропустить черезъ нее $Q\ mtr^3/sec$ воды; каковъ долженъ быть для этого напоръ $H_A - H_B$?

Прежде всего имѣемъ для скорости v:

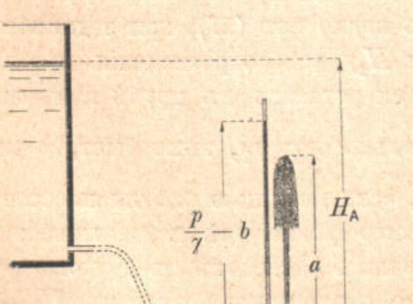
$$v = \frac{Q}{\frac{\pi D^2}{4}}.$$

Далѣе, оцѣниваемъ особыя сопротивленія, т.-е. находимъ $(\zeta_e + \Sigma\zeta)$. Затѣмъ беремъ по Дарси:

$$\zeta_r = a + \frac{b}{D},$$

или по Вейсбаху:

$$\zeta_r = \alpha + \frac{\beta}{\sqrt{v}};$$



Фиг. 143.

и теперь получаемъ возможность при помощи ур. (25) найти требуемый напоръ. При большомъ L и маломъ v можно, съ достаточной степенью точности, пользоваться просто ур-іемъ (23).

Вопросъ можетъ быть нѣсколько видоизмѣненъ тѣмъ, что конецъ трубы D (фиг. 141) не примыкаетъ къ другому резервуару, а имѣетъ отверстіе, черезъ которое должна вытекать струя съ условіемъ возможности подняться на нѣкоторую данную высоту a (фиг. 143). Если отвлечься отъ сопротивленія воздуха и если скорость вытеканія изъ отверстія есть v_1, то высота подъема струи, равная скоростному напору, будетъ:

$$a=\frac{v_1^{\,2}}{2g}.$$

Отсюда узнаемъ v_1. Далѣе, чтобы эта скорость была развита, передъ отверстіемъ должно быть такое давленіе $\frac{p_2}{\gamma}$ (въ пьезометрѣ вода поднимается на высоту $\frac{p_2}{\gamma}-b$, гдѣ b есть высота барометрическаго давленія), чтобы, по законамъ истеченія, удовлетворялось уравненіе:

$$v_1=\varphi\sqrt{2g\left(\frac{p_2}{\gamma}-b\right)}.$$

Отсюда найдемъ необходимое $\frac{p_2}{\gamma}$. Наконецъ, необходимый напоръ H_A въ началѣ трубы, считая его надъ горизонтомъ MN, будетъ:

$$H_A=\left(\frac{p_2}{\gamma}-b\right)+\frac{v^2}{2g}\left\{1+\zeta_e+\Sigma\,\zeta_r\frac{4L}{D}\right\},$$

гдѣ v есть скорость въ трубѣ. Очевидно, что если f есть заданная площадь отверстія, а F есть сѣченіе трубы, то соотношеніе между v_1 и v, а также ихъ связь съ расходомъ даются ур-іемъ:

$$Q=Fv=\mu_{\text{несов. сж.}}\cdot f\,v_1.$$

Расходъ получаетъ такимъ образомъ вполнѣ опредѣленное значеніе.

Никакого затрудненія не представитъ вопросъ, если онъ поставленъ такъ: даны L и D, а также располагаемый напоръ h; требуется опредѣлить расходъ Q, который при этихъ условіяхъ можетъ быть пропущенъ трубою. Такъ какъ v неизвѣстно, то формулой Вейсбаха (стр. 248) пользоваться здѣсь неудобно,—лучше брать ζ_r по Дарси. Затѣмъ по ур-ію (25) или (23) непосредственно находимъ v, а по нему и Q.

Большое облегченіе при рѣшеніи этихъ вопросовъ приноситъ ниже помѣщаемая таблица 39.

Въ этой таблицѣ для трубъ разныхъ діаметровъ отъ 13 *mm* ($^1/_2{}''$) до 2,5 *mtr* (1-й столбецъ) и для разныхъ скоростей отъ 0,05 до 4 *mtr/sec* (2-й столбецъ) подсчитаны секундные расходы въ литрахъ (3-й столбецъ) и потерянные на треніе напоры на длинѣ трубы въ 100 *mtr* (5-й столбецъ). При этомъ значенія коэффиціентовъ сопротивленій ζ_r (4-й столбецъ) мы взяли по даннымъ Фаннинга (см. уже упомянутое сочиненіе его «Hydraulic aud Water-Supply Engineering», изданіе 15-е отъ 1902 года). Значеніе 6-го столбца таблицы выяснится ниже. Пользованіе таблицей настолько просто, что не требуетъ поясненій. Она особенно полезна, если длина трубы такъ велика, что суммой $(1+\zeta_e+\Sigma\zeta)$ можно, по сравненію съ $\zeta_r\frac{4L}{D}$, пренебречь.

Таблица 39 (по Фаннингу)

для расчета водопроводныхъ трубъ.

D mtr.	v mtr/sec.	Q litr/sec.	ζ_r	Потеря напора въ mtr на 100 mtr длины трубы.	$\frac{Q^2}{i}$
0,013	0,05	0,006637	0,01164	0,04564	0,000000097
$\left(\frac{1}{2}''\right)$	0,10	0,01327	0,01095	0,1717	
	0,15	0,01991	0,01045	0,3687	
	0,20	0,02655	0,01020	0,6398	
	0,25	0,03318	0,00978	0,9586	
	0,30	0,03982	0,00953	1,345	
	0,40	0,05309	0,00908	2,278	
	0,50	0,06637	0,00876	3,434	
	0,60	0,07964	0,00850	4,799	
	0,70	0,09291	0,00829	6,370	
	0,80	0,1062	0,00808	8,110	
	0,90	0,1195	0,00792	10,06	
	1,00	0,1327	0,00778	12.20	
	1,25	0,1659	0,00745	18,23	
	1,50	0,1991	0,00718	25,34	
	1,75	0,2323	0,00695	33,38	
	2,00	0,2655	0,00676	42,41	
	2,50	0,3318	0,00648	63,51	
	3,00	0,3982	0,00627	88,50	
	3,50	0,4646	0,00611	117,4	
	4,00	0,5309	0,00601	150,8	0,000000187
0,025	0,05	0,02454	0,01116	0,0,0227	0,00000265
	0,10	0,04909	0,01058	0,0863	
	0,15	0,07363	0,00998	0,1835	
	0,20	0,09818	0,00948	0,2394	
	0,25	0,1227	0,00907	0,4623	
	0,30	0,1473	0,00885	0,6499	
	0,40	0,1964	0,00848	1,107	
	0,50	0,2454	0,00820	1,672	
	0,60	0,2945	0,00796	2,337	
	0,70	0,3436	0,00780	3,117	
	0,80	0,3927	0,00763	3,982	
	0,90	0,4418	0,00751	4,960	
	1,00	0,4909	0,00739	5,030	
	1,25	0,6136	0,00710	9,047	
	1,50	0,7363	0,00688	12,63	
	1,75	0,8590	0,00671	16,76	
	2,00	0,9818	0,00657	21,44	
	2,50	1,227	0,00631	32,17	
	3,00	1,473	0,00614	45,09	
	3,50	1,718	0,00602	60,14	
	4,00	1,964	0,00593	77,37	0,00000498

Таблица 39 (продолженіе).

D mtr.	*v mtr/sec.*	*Q litr/sec.*	ζ_r	Потеря напора въ *mtr* на 100 *mtr* длины трубы.	$\frac{Q^2}{i}$
0,038	0,05	0,05671	0,01091	0,01463	0,0000220
(1½″)	0,10	0,1134	0,01020	0,05472	
	0,15	0,1701	0,00960	0,1159	
	0,20	0,2268	0,00915	0,1964	
	0,25	0,2835	0,00881	0,2954	
	0,30	0,3402	0,00857	0,4138	
	0,40	0,4537	0,00821	0,7048	
	0,50	0,5671	0,00798	1,070	
	0,60	0,6805	0,00776	1,499	
	0,70	0,7939	0,00759	1,995	
	0,80	0,9073	0,00742	2,548	
	0,90	1,021	0,00729	3,168	
	1,00	1,134	0,00717	3,847	
	1,25	1,418	0,00692	5,801	
	1,50	1,701	0,00671	8,200	
	1,75	1,985	0,00655	10,76	
	2,00	2,263	0,00641	13,76	
	2,50	2,835	0,00619	20,76	
	3,00	3,402	0,00602	29,07	
	3,50	3,969	0,00591	38,84	
	4,00	4,537	0,00583	50,05	0,00004046
0,05	0,05	0,09818	0,01050	0,0107	0,0000901
	0,10	0,1964	0,00970	0,0386	
	0,15	0,2945	0,00913	0,0838	
	0,20	0,3927	0,00880	0,1506	
	0,25	0,4909	0,00849	0,2164	
	0,30	0,5891	0,00828	0,3038	
	0,40	0,7854	0,00794	0,5180	
	0,50	0,9818	0,00773	0,7878	
	0,60	1,178	0,00754	1,107	
	0,70	1,375	0,00738	1,475	
	0,80	1,571	0,00722	1,884	
	0,90	1,767	0,00712	2,351	
	1,00	1,964	0,00702	2,862	
	1,25	2,454	0,00677	4,313	
	1,50	2,945	0,00660	6,056	
	1,75	3,436	0,00643	8,030	
	2,00	3,927	0,00630	10,78	
	2,50	4,909	0,00609	15,52	
	3,00	5,891	0,00595	21,83	
	3,50	6,872	0,00584	29,17	
	4,00	7,854	0,00577	37,64	0,000164

Таблица 39 (продолженіе).

D mtr.	*v mtr/sec.*	*Q litr/sec.*	ζ_r	Потеря напора въ *mtr* на 100 *mtr* длины трубы.	$\frac{Q^2}{i}$
0,075	0,05	0,2209	0,01025	0,006966	0,000700
	0,10	0,4418	0,00941	0,02558	
	0,15	0,6627	0,00888	0,05431	
	0,20	0,8836	0,00847	0,09210	
	0,25	1,105	0,00817	0,1499	
	0,30	1,325	0,00794	0,1943	
	0,40	1,767	0,00760	0,3305	
	0,50	2,209	0,00738	0,5015	
	0,60	2,651	0,00722	0,7065	
	0,70	3,093	0,00708	0,9430	
	0,80	3,534	0,00695	1,209	
	0,90	3,976	0,00686	1,511	
	1,00	4,418	0,00676	1,838	
	1,25	5,522	0,00655	2,782	
	1,50	6,627	0,00638	2,902	
	1,75	7,731	0,00624	5,195	
	2,00	8,836	0,00613	6,665	
	2,50	11,05	0,00593	10,08	
	3,00	13,25	0,00582	14,24	
	3,50	15,46	0,00571	19,01	
	4,00	17,67	0,00566	24,62	0,00127
0,100	0,05	0,3927	0,00974	0,004964	0,00311
	0,10	0,7854	0,00900	0,01835	
	0,15	1,178	0,00853	0,03913	
	0,20	1,571	0,00818	0,06671	
	0,25	1,964	0,00787	0,1003	
	0,30	2,356	0,00767	0,1407	
	0,40	3,142	0,00736	0,2401	
	0,50	3,927	0,00715	0,3644	
	0,60	4,712	0,00699	0,5130	
	0,70	5,498	0,00685	0,6843	
	0,80	6,283	0,00673	0,8781	
	0,90	7,069	0,00664	1,096	
	1,00	7,854	0,00655	1,335	
	1,25	9,818	0,00636	2,026	
	1,50	11,78	0,00620	2,844	
	1,75	13,74	0,00607	3,790	
	2,00	15,71	0,00596	4,860	
	2,50	19,64	0,00578	7,365	
	3,00	23,56	0,00567	10,40	
	3,50	27,49	0,00560	13,99	
	4,00	31,42	0,00555	18,10	0,00545

Таблица 39 (продолженіе).

D mtr.	*v mtr/sec.*	*Q litr/sec.*	ζ_r	Потеря напора въ *mtr* на 100 *mtr* длины трубы.	$\frac{Q^2}{i}$
0,150	0,05	0,8836	0,00892	0,003031	0,0258
	0,10	1,767	0,00835	0,01135	
	0,15	2,651	0,00799	0,02443	
	0,20	3,534	0,00766	0,04164	
	0,25	4,418	0,00746	0,06337	
	0,30	5,301	0,00725	0,08868	
	0,40	7,069	0,00697	0,1516	
	0,50	8,836	0,00676	0,2297	
	0,60	10,60	0,00662	0,3239	
	0,70	12,37	0,00650	0,4329	
	0,80	14,14	0,00639	0,5558	
	0,90	15,90	0,00631	0,6947	
	1,00	17,67	0,00624	0,8481	
	1,25	22,09	0,00606	1,287	
	1,50	26,51	0,00593	1,813	
	1,75	30,93	0,00581	2,418	
	2,00	35,34	0,00572	3,110	
	2,50	44,18	0,00558	4,740	
	3,00	53,01	0,00548	6,703	
	3,50	61,85	0,00542	9,024	
	4,00	70,69	0,00537	11,68	0,0428
0,200	0,05	1,571	0,00816	0,002080	0,1187
	0,10	3,142	0,00768	0,007829	
	0,15	4,712	0,00742	0,01702	
	0,20	6.283	0,00719	0,02932	
	0,25	7,854	0,00700	0,04460	
	0,30	9,425	0,00888	0,06312	
	0,40	12,57	0,00663	0,1081	
	0,50	15,71	0,00646	0,1646	
	0,60	18,85	0,00633	0,2323	
	0,70	21,99	0,00622	0,3107	
	0,80	25,13	0,00612	0,9393	
	0,90	28,27	0,00605	0,4995	
	1,00	31,42	0,00598	0,6096	
	1,25	39,27	0,00582	0,9270	
	1,50	47,12	0,00570	1,307	
	1,75	54,98	0,00559	1,745	
	2,00	62,83	0,00552	2,251	
	2,50	78,54	0,00539	3,434	
	3,00	94,25	0,00532	4,881	
	3,50	110,0	0,00527	6,581	
	4,00	125,7	0,00522	8,514	0,1856

Таблица 39 (продолженіе).

D *mtr.*	v *mtr/sec.*	Q *litr/sec.*	ζ_r	Потеря напора въ *mtr* на 100 *mtr* длины трубы.	$\frac{Q^2}{i}$
0,25	0,05	2,454	0,00779	0,001588	0,3792
	0,10	4,909	0,00736	0,006002	
	0,15	7,363	0,00709	0,01301	
	0,20	9,818	0,00686	0,02238	
	0,25	12,27	0,00667	0,03400	
	0,30	14,73	0,00656	0,04815	
	0,40	19,64	0,00633	0,08259	
	0,50	24,54	0,00617	0,1258	
	0,60	29,45	0,00606	0,1779	
	0,70	34,36	0,00596	0,2382	
	0,80	39,27	0,00587	0,3064	
	0,90	44,18	0,00581	0,3838	
	1,00	49,09	0,00576	0,4697	
	1,25	61,36	0,00562	0,7161	
	1,50	73,63	0,00552	1,013	
	1,75	85,90	0,00543	1,356	
	2,00	98,18	0,00536	1,748	
	2,50	122,7	0,00524	2,671	
	3,00	147,3	0,00517	3,795	
	3,50	171,8	0,00512	5,115	
	4,00	196,4	0,00507	6,615	0,5826
0,300	0,05	3,534	0.00737	0,001252	0,9975
	0,10	7,069	0,00694	0,004716	
	0,15	10,60	0,00672	0,01028	
	0,20	14,14	0,00655	0,01780	
	0,25	17,67	0,00638	0,02710	
	0,30	21,21	0,00628	0,03841	
	0,40	28,27	0,00607	0,06600	
	0,50	35,34	0,00593	0,1007	
	0,60	42,41	0,00583	0,1426	
	0,70	49,48	0,00574	0,1911	
	0,80	56,55	0,00566	0,2462	
	0,90	63,62	0,00560	0,3083	
	1,00	70,69	0,00556	0,3778	
	1,25	88,36	0,00543	0,5766	
	1,50	106,03	0,00534	0,8165	
	1,75	123,7	0,00526	1,095	
	2,00	141,4	0,00520	1,414	
	2,50	176,7	0,00511	2,170	
	3,00	212,1	0,00504	3,083	
	3,50	247,4	0,00498	4,146	
	4,00	282,7	0,00495	5,382	1,485

Таблица 39 (продолженіе).

D mtr.	*v mtr/sec.*	*Q litr/sec.*	ζ_r	Потеря напора въ *mtr* на 100 *mtr* длины трубы.	$\frac{Q^2}{i}$
0,35	0,05	4,811	0,00709	0,001032	2,246
	0,10	9,621	0,00666	0,003879	
	0,15	14,43	0,00642	0,008414	
	0,20	19,24	0,00625	0,01456	
	0,25	24,05	0,00612	0,02228	
	0,30	28,86	0,00603	0,03161	
	0,40	38,49	0,00586	0,05462	
	0,50	48,11	0,00573	0,08344	
	0,60	57,73	0,00564	0,1246	
	0,70	67,33	0,00556	0,1587	
	0,80	76,97	0,00548	0,2043	
	0,90	89,59	0,00542	0,2557	
	1,00	96,21	0,00538	0,3134	
	1,25	120,3	0,00526	0,4787	
	1,50	144,3	0,00518	0,6789	
	1,75	168,4	0,00511	0,9116	
	2,00	192,4	0,00506	1,179	
	2,50	240,5	0,00498	1,813	
	3,00	288,6	0,00492	2,579	
	3,50	336,7	0,00487	3,475	
	4,00	384,8	0,00483	4,502	3,289
0,4	0,05	6,283	0,00679	0,0008652	4,564
	0,10	12,57	0,00636	0,003242	
	0,15	18,85	0,00611	0,007007	
	0,20	25,13	0,00598	0,01219	
	0,25	31,42	0,00587	0,01870	
	0,30	37,70	0,00580	0,02661	
	0,40	50,27	0,00566	0,04616	
	0,50	62,83	0,00555	0,07072	
	0,60	75,40	0,00546	0,1002	
	0,70	87,97	0,00538	0,1344	
	0,80	100,5	0,00531	0,1732	
	0,90	113,1	0,00526	0,2172	
	1,00	125,7	0,00522	0,2661	
	1,25	157,1	0,00511	0,4070	
	1.50	188,5	0,00504	0,5780	
	1,75	219,9	0,00498	0,7773	
	2,00	251,3	0,00493	1,005	
	2,50	314,2	0,00485	1,545	
	3,00	377,0	0,00481	2,206	
	3,50	439,8	0,00477	2,978	
	4,00	502,7	0,00473	3,857	6,552

Таблица 39 (продолженіе).

D mtr.	*v mtr/sec.*	*Q litr/sec.*	ζ_r	Потеря напора въ *mtr* на 100 *mtr* длины трубы.	$\frac{Q^2}{i}$
0.500	0,05	9,818	0,00629	0,0006412	15,03
	0.10	19,64	0,00595	0,002426	
	0,15	29,45	0,00574	0,005266	
	0,20	39,27	0,00559	0,009117	
	0,25	49,09	0,00547	0,01394	
	0,30	58.91	0,00540	0,01982	
	0,40	78,54	0,00528	0,03445	
	0,50	98,18	0,00519	0,05291	
	0,60	117,8	0,00512	0,07516	
	0,70	137,4	0,00505	0,1009	
	0,80	157,1	0,00500	0,1305	
	0,90	176,7	0,00496	0,1638	
	1,00	196,4	0,00492	0,2006	
	1,25	245,4	0,00484	0,3084	
	1,50	294,5	0,00479	0,4395	
	1,75	343.6	0,00474	0,5319	
	2,00	392,7	0,00470	0,7666	
	2,50	490.9	0,00464	1,183	
	3,00	589.0	0,00460	1,688	
	3,50	687,2	0,00456	2.278	
	4,00	785,4	0,00453	2,955	20,87
0,600	0.05	14,14	0,00595	0,0005054	39,56
	0,10	28,27	0,00547	0,001859	
	0,15	42.41	0,00530	0,004052	
	0,20	56,55	0,00520	0,007068	
	0,25	70,69	0,00511	0,01085	
	0,30	84.82	0,00506	0,01547	
	0,40	113,1	0,00496	0,02697	
	0,50	141,4	0,00487	0,04137	
	0,60	169,6	0,00482	0,05896	
	0,70	197,9	0,00477	0,07942	
	0,80	226,2	0,00472	0,1026	
	0,90	254,5	0,00468	0,1288	
	1,00	282,7	0,00466	0,1588	
	1,25	353,4	0,00460	0,2442	
	1,50	424.1	0,00455	0,3479	
	1,75	494,8	0,00452	0,4704	
	2,00	565,5	0,00449	0,6103	
	2,50	706,9	0,00443	0,9408	
	3,00	848,2	0,00439	1.343	
	3,50	989,6	0,00436	1,815	
	4,00	1131	0,00434	2,359	54,22

Таблица 39 (продолженіе).

D mtr.	*v mtr/sec.*	*Q litr/sec.*	ζ_r	Потеря напора въ *mtr* на 100 *mtr* длины трубы.	$\frac{Q^2}{i}$
0,700	0,05	19,24	0,00549	0,0003997	92,61
	0,10	38,49	0,00516	0,001503	
	0,15	57,73	0,00501	0,003283	
	0,20	76,97	0,00493	0,005743	
	0,25	96,21	0,00485	0,008828	
	0,30	115,5	0,00479	0,01256	
	0,40	153,9	0,00470	0,02190	
	0,50	192,4	0,00463	0,03371	
	0,60	230,9	0,00457	0,04792	
	0,70	269,4	0,00453	0,06464	
	0,80	307,9	0,00450	0,08388	
	0,90	346,4	0,00448	0,1057	
	1,00	384,8	0,00445	0,1296	
	1,25	481,1	0,00441	0,2007	
	1,50	577,3	0,00436	0,2857	
	1,75	673,5	0,00434	0,3871	
	2,00	769,7	0,00431	0,5021	
	2,50	962,1	0,00427	0,7773	
	3,00	1155	0,00423	1,109	
	3,50	1347	0,00420	1,498	
	4,00	1539	0,00418	1,948	121,6
	0,05	25,13	0,00502	0,0003198	197,5
0,800	0,10	50,27	0,00485	0,001236	
	0,15	75,40	0,00473	0,002712	
	0,20	100,5	0,00464	0,004730	
	0,25	125,7	0,00458	0,007295	
	0,30	150,8	0,00453	0,01039	
	0,40	201,1	0,00446	0,01819	
	0,50	251,3	0,00441	0,02810	
	0,60	301,6	0,00437	0,04009	
	0,70	351,9	0,00434	0,05419	
	0,80	402,1	0,00431	0,07030	
	0,90	452,4	0,00429	0,08856	
	1,00	502,7	0,00427	0,1088	
	1,25	628,3	0,00423	0,1684	
	1,50	754,0	0,00419	0,2403	
	1,75	879,6	0,00417	0,3254	
	2,00	1005	0,00415	0,4230	
	2,50	1257	0,00411	0,6546	
	3,00	1508	0,00407	0,9335	
	3,50	1759	0,00404	1,261	
	4,00	2011	0,00402	1,639	246,7

Таблица 39 (продолженіе).

D mtr.	*v mtr/sec.*	*Q litr/sec.*	ζ_r	Потеря напора въ *mtr* на 100 *mtr* длины трубы.	$\frac{Q^2}{i}$
0,900	0,15	95,43	0,00444	0,002263	402,4
	0,20	127,2	0,00438	0,003969	
	0,25	159,0	0,00432	0,006116	
	0,30	190,9	0,00428	0,008726	
	0,40	254,5	0,00422	0,01530	
	0,50	318,1	0,00419	0,02373	
	0,75	477,1	0,00413	0,05662	
	1,00	636,2	0,00409	0,09265	
	1,25	795,2	0,00406	0,1437	
	1,50	954,3	0,00403	0,2054	
	2,00	1272	0,00399	0,3615	
	2,50	1590	0,00395	0,5592	
	3,00	1909	0,00391	0,7971	
	3,50	2227	0,00388	1,077	
	4,00	2545	0,00386	1,399	462,9
1,000	0,15	117,8	0,00421	0,001931	718,6
	0,20	157,1	0,00416	0,003392	
	0,25	196,4	0,00412	0,005250	
	0,30	235,6	0,00408	0,007486	
	0,40	314,2	0,00404	0,01318	
	0,50	392,7	0,00401	0,02044	
	0,75	589,0	0,00395	0,04530	
	1,00	785,4	0,00392	0,07992	
	1,25	981,7	0,00389	0,1239	
	1,50	1178	0,00386	0,1771	
	2,00	1571	0,00384	0,3132	
	2,50	1963	0,00381	0,4855	
	3,00	2356	0,00378	0,6936	
	3,50	2749	0,00376	0,9365	
	4,00	3142	0,00374	1,220	809,0
1,200	0,15	169,6	0,00383	0,001464	1964
	0,20	226,2	0,00380	0,002582	
	0,25	282,7	0,00378	0,004014	
	0,30	339,3	0,00375	0,005734	
	0,40	452,4	0,00372	0,01011	
	0,50	565,5	0,00370	0,01572	
	0,75	848,2	0,00366	0,03498	
	1,00	1131	0,00363	0,06167	
	1,25	1414	0,00362	0,09610	
	1,50	1696	0,00360	0,1376	
	2,00	2262	0,00358	0,2433	
	2,50	2827	0,00355	0,3770	
	3,00	3393	0,00352	0,5382	
	3,50	3958	0,00350	0,7284	
	4,00	4524	0,00349	0,9487	2156

Таблица 39 (продолженіе) *).

D *mtr.*	v *mtr/sec.*	Q *litr/sec.*	ζ_r	Потеря напора въ *mtr* на 100 *mtr* длины трубы.	$\frac{Q^2}{i}$
1,500	0,15	265,1	0,00342	0,001046	6713
	0,25	441,8	0,00339	0,002880	
	0,50	883,6	0,00334	0,01135	
	0,75	1325	0,00332	0,02538	
	1,00	1767	0,00330	0,04485	
	1,50	2651	0,00327	0,1000	
	2,00	3534	0,00325	0,1767	
	3,00	5301	0,00321	0,3926	
	4,00	7069	0,00318	0,6915	7226
1,800	0,15	381,7	0,00314	0,0008002	18210
	0,25	636,2	0,00311	0,002202	
	0,50	1272	0,00306	0,008665	
	0,75	1909	0,00303	0,01930	
	1,00	2545	0,00300	0,03398	
	1,50	3817	0,00297	0,07569	
	2,00	5089	0,00295	0,1337	
	3,00	7634	0,00293	0,2987	
	4,00	10179	0,00293	0,5310	19512
2,400	0,15	678,6	0,00272	0,0005199	88574
	0,25	1131	0,00269	0,001428	
	0,50	2262	0,00265	0,005628	
	0,75	3393	0,00264	0,01262	
	1,00	4524	0,00263	0,02234	
	1,50	6786	0,00262	0,05008	
	2,00	9048	0,00261	0,08874	
	3,00	13572	0,00260	0,1988	
	4,00	18096	0,00259	0,3520	93030

Для сравненія этихъ данныхъ съ приведенными выше въ § 21, приводимъ слѣдующую сравнительную таблицу, въ которой подсчитаны для нѣсколькихъ діаметровъ и нѣ-

*) При вычисленіи послѣдняго вертикальнаго столбца $\left(\frac{Q^2}{i}\right)$ во всей таблицѣ 39 расходъ Q былъ выраженъ не въ литрахъ, а въ *кубическихъ метрахъ*.

скольких скоростей потери напора на 100 *mtr* длины трубы по нормамъ Вейсбаха, Дарси, Фламана, Кристена, Зонне и Фаннинга. При этомъ Вейсбахъ не характеризуетъ степени загрязненія, но несомнѣнно имѣетъ въ виду высокую степень шероховатости; данныя Фламана относятся къ загрязненнымъ трубамъ, но безъ стѣсненія ихъ сѣченія; данныя прочихъ авторовъ относятся къ чистымъ трубамъ.

	Діаметръ 0,1 *mtr.*			Діаметръ 0,25 *mtr.*		
	$v = 0{,}1$ *mtr/sec.*	$v = 1{,}0$	$v = 2$	$v = 0{,}1$	$v = 1{,}0$	$v = 2$
Вейсбахъ	0,0226	1,22	4,3	0,0091	0,49	1,72
Дарси	0,0127	1,27	5,1	0,0045	0,45	1,79
Фламанъ	0,029	1,63	5,5	0,0091	0,52	1,74
Кристенъ	0,0129	1,70	5,2	0,0054	0,54	2,18
Зонне	0,0133	1,33	5,3	0,0049	0,49	1,97
Фаннингъ	0,0184	1,34	4,9	0,0060	0,47	1,75
	Діаметръ 0,5 *mtr.*			**Діаметръ 0,8 *mtr.***		
	$v = 0{,}1$	$v = 1{,}0$	$v = 2{,}0$	$v = 0{,}2$	$v = 1{,}0$	$v = 2{,}0$
Вейсбахъ	0,0045	0,24	0,86	0,0091	0,153	0,54
Дарси	0,0021	0,21	0,85	0,0052	0,131	0,52
Фламанъ	0,0039	0,22	0,74	0,0072	0,121	0,41
Кристенъ	0,0023	0,22	0,91	0,0050	0,125	0,50
Зонне	0,0022	0,22	0,88	0,0052	0,130	0,52
Фаннингъ	0,0024	0,20	0,77	0,0047	0,109	0,42
	Діаметръ 1 *mtr.*			**Діаметръ 1,2 *mtr.***		
	$v = 0{,}2$	$v = 1{,}0$	$v = 2{,}0$	$v = 0{,}2$	$v = 1{,}0$	$v = 2{,}0$
Вейсбахъ	0,0073	0,122	0,43	0,0061	0,102	0,36
Дарси	0,0041	0,104	0,42	0,0034	0,086	0,34
Фламанъ	0,0055	0,092	0,31	0,0023	0,039	0,129
Кристенъ	0,0037	0,095	0,37	0,0032	0,081	0,323
Зонне	0,0041	0,102	0,41	0,0033	0,083	0,334
Фаннингъ	0,0034	0,080	0,31	0,0026	0,062	0,243

Отсюда видно, что вообще по Фаннингу вычисляются нѣсколько меньшія потери напора, нежели по прочимъ авторамъ (кромѣ Фламана). Это особенно замѣтно по сравненію съ Дарси, данныя котораго, наоборотъ, ниже данныхъ Фаннинга только въ малыхъ трубахъ и при малыхъ скоростяхъ. Потери напора по Фламану, особенно при среднихъ діаметрахъ (0,5 до 1 *mtr*), довольно близки къ даннымъ Фаннинга, и вообще отличаются отъ данныхъ Дарси въ бо́льшей степени, нежели данныя Фаннинга.—Наоборотъ, если сравнить данныя Фаннинга съ нормами другого американскаго авторитета, H. Smith'a (см. табл. № 29), то окажется, что при большихъ діаметрахъ и большихъ скоростяхъ послѣдній даетъ еще меньшія потери напора, чѣмъ Фаннингъ, что видно изъ слѣдующей таблички, въ которой сравниваются нѣсколько значеній коэф-товъ ζ_r Фаннинга съ соотвѣтствующимъ коэф-томъ, вычисленнымъ по коэф-ту c Smith'a: $\zeta_r = \frac{2g}{c^2} = \frac{64,4}{c^2}$.

При D въ футахъ.	При v въ футахъ въ сек.	Значенія ζ_r		Разница въ %% значенія ζ_r по Фаннингу.
		по Fanning'у.	по Smith'у.	
1	1′	0,00626	0,00697	— 11,4
	2′	0,00582	0,00598	— 2,75
	3′	0,00560	0,00542	+ 3,22
	4′	0,00544	0,00513	+ 5,7
	8′	0,00512	0,00452	+ 11,7
2′	1′	0,00505	0,00542	— 7,35
	2′	0,00482	0,00479	+ 0,62
	3′	0,00461	0,00440	+ 6,00
	4′	0,00473	0,00418	+ 7,15
	8′	0,00444	0,00370	+ 16,7

Такимъ образомъ, данныя Фаннинга являются болѣе или менѣе средними среди разныхъ рекомендуемыхъ нормъ. Въ силу этого мы на нихъ и остановились при вычисленіи таблицы 39.

Слѣдуетъ имѣть въ виду, что коэффиціенты таблицы 39 Фаннингъ считаетъ относящимися къ **чистымъ** трубамъ, съ малою степенью шероховатости. Если является необходимость считаться съ возможностью нѣкотораго загрязненія, то онъ рекомендуетъ увеличивать табличныя значенія коэффиціента ζ_r, а слѣдовательно, и потерянный напоръ, на слѣдующее число процентовъ (см. табл. 40).

Таблица 40:

При діаметрахъ въ *mtr*	0,1	0,15	0,3	0,6	0,9	1,2
% увеличенія ζ_r . . .	45	40	33	29	27	25

При болѣе сильномъ загрязненіи цѣлесообразно довести увеличеніе коэффиціента сопротивленія даже до 100%.

При оцѣнкѣ вліянія загрязненія слѣдуетъ имѣть въ виду сказанное по этому поводу на стр. 227. Легко усмотрѣть, что одинаковая степень загрязненія, т.-е. одинаковая толщина осадковъ въ трубѣ малаго діаметра вызываетъ относительно бо́льшую потерю напора, нежели въ трубѣ большого діаметра; съ этимъ нужно считаться, если оцѣнка загрязненія дѣлается только въ смыслѣ измѣненія коэффиціента тренія.

2) *Труба строится.* Даны Q и L; кромѣ того, обыкновенно можно выяснить величину располагаемаго напора h, т.-е. тотъ напоръ, который по мѣстнымъ условіямъ можно затратить на преодолѣніе сопротивленій и на сообщеніе водѣ скорости. Требуется по этимъ даннымъ найти D и v.

Прежде всего, имѣемъ соотношеніе:

$$Q = \frac{\pi D^2}{4} \cdot v,$$

откуда

$$v^2 = \frac{16 Q^2}{\pi^2 D^4}.$$

Введя это въ ур-іе (25), получимъ:

$$h = \left(1 + \zeta_e + \Sigma\zeta + \zeta r\,\frac{4L}{D}\right)\frac{16\,Q^2}{2\pi^2 g\,D^4} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (26)$$

При предварительномъ расчетѣ суммой $(1 + \zeta_e + \Sigma\zeta)$ пренебрегаютъ, что при большихъ длинахъ трубы L приводитъ только къ небольшимъ погрѣшностямъ. Тогда ур-іе (26) переходитъ въ ур-іе

$$h = \frac{64}{2g\pi^2}\,\zeta_r\,\frac{Q^2 L}{D^5} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (27)$$

Отсюда:

$$D = \sqrt[5]{\frac{64}{2g\pi^2}\,\zeta_r} \cdot \sqrt[5]{\frac{Q^2}{i}}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (27')$$

гдѣ буквой i обозначено отношеніе $\frac{h}{L}$, т.-е. паденіе высоты пьезометра на каждый погонный *mtr* трубы.

Обратимъ вниманіе на то, что ур-іе (27) мы уже имѣли раньше на стр. 227 подъ № 14 въ § 21. Опредѣлимъ изъ него расходъ, внося обозначеніе $i = h : L$. Находимъ:

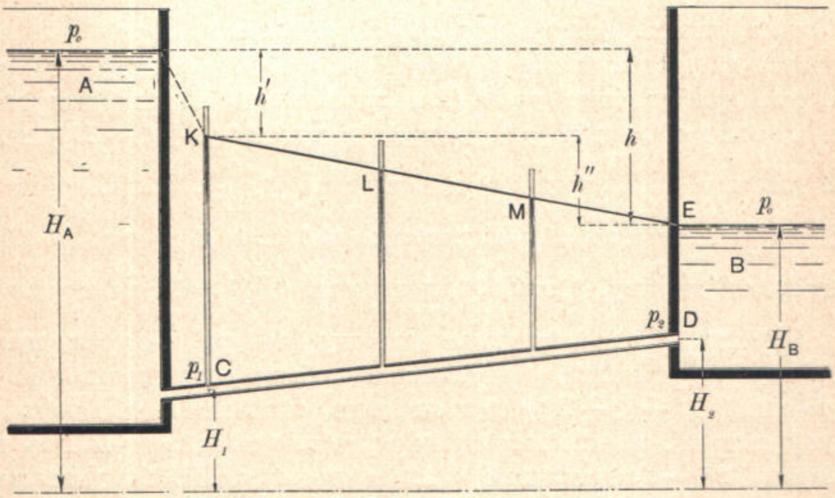
$$Q = \sqrt{\frac{2g\,\pi^2}{64\,\zeta_r} D^5} \cdot \sqrt{i}.$$

Если отказаться отъ зависимости коэффиціента ζ_r отъ скорости (Дарси, Кристенъ, Зонне и др.), то весь первый радикалъ въ этомъ уравненіи для каждаго діаметра имѣетъ вполнѣ опредѣленное значеніе, высчитываемое заранѣе. Обозначивъ его буквой **k**, имѣемъ:

$$Q = \mathbf{k}\sqrt{i}.$$

Этотъ коэффиціентъ **k** инженеръ-механикъ *К. М. Игнатовъ* *) называетъ характеристикой пропускной способности трубы. Легко видѣть, что эта характеристика есть не что иное, какъ квадратный корень изъ чиселъ 6-го столбца таблицы 39 **); ея значеніе не утрачивается также и въ этомъ случаѣ, когда она мѣняется вмѣстѣ со скоростью, какъ это видно по таблицѣ 39.

Въ водопроводной практикѣ трубы часто прокладываются лишь съ малымъ отклоненіемъ отъ горизонтальнаго положенія; тогда практически



Фиг. 141.

безразлично, считать ли длину L по оси трубы или по пьезометрической линіи, или даже по горизонтальному направленію, а слѣдов., величина i практически не отличается отъ *sin* угла наклона напорной линіи *KE* къ горизонту (фиг. 141). Такъ какъ ζ_r само по себѣ есть величина перемѣнная

*) См. его таблицы подъ заглавіемъ „Изъ практики проектированія инженерныхъ сооруженій“. Москва, 1908 г.

**) При вычисленіи этого столбца расходъ былъ выраженъ въ кубическихъ метрахъ, а не въ литрахъ.

(по Вейсбаху оно измѣняется вмѣстѣ со скоростью v, по Дарси—съ діаметромъ D), то непосредственно (изъ 27′) найти D нельзя. Приходится идти по способу послѣдовательныхъ приближеній, а именно, нужно задаться какой-нибудь величиною ζ_r, найти соотвѣтствующее ему D; по нему исправить заданное ζ_r, снова опредѣлить D. Если полученная такимъ образомъ величина D мало отличается отъ опредѣленной въ первый разъ, то можно этимъ и ограничиться; въ противномъ случаѣ слѣдуетъ исправить ζ_r, и т. д. Въ виду того, что на практикѣ употребительны трубы только нѣкоторыхъ діаметровъ (см. таблицы, разрабатываемыя и издаваемыя Водопроводными Съѣздами), многократныхъ пересчетовъ величины D дѣлать не приходится.

При этихъ вычисленіяхъ большую помощь оказываетъ 6-й столбецъ вышеприведенной таблицы 39. Вычисляя по заданнымъ Q, h и L величину $\frac{LQ^2}{h} = \frac{Q^2}{i}$, имѣемъ возможность прямо подыскать по таблицѣ подходящій діаметръ. Такъ, напр., пусть секундный расходъ $Q = 280$ литровъ; это количество воды должно пройти по трубѣ 5 километровъ, а имѣющіеся насосы могутъ развить давленіе только въ двѣ атмосферы. Тогда находимъ $i = \frac{2.10}{5000} = 0{,}004$; такъ что $\frac{Q^2}{i} = \frac{0{,}0784}{0{,}004} = 19{,}6$. По таблицѣ видимъ, что труба въ 0,5 *mtr* въ діаметрѣ пропуститъ этотъ расходъ при скорости въ $1{,}5 \cdot \frac{208}{294{,}5} = 1{,}42$ *mtr* въ секунду, при чемъ двухъ атмосферъ вполнѣ достаточно, такъ какъ необходимъ собственно только напоръ $0{,}004395 \cdot \frac{1{,}42^2}{1{,}5^2} = 0{,}004$ *mtr* на каждые сто метровъ длины трубы.

Когда выясненъ діаметръ трубы, слѣдуетъ его провѣрить уже по точной формулѣ (26), оцѣнивая всѣ потери напора; это особенно необходимо дѣлать, если приближенное ур-іе (27) примѣнялось для предварительнаго расчета к о р о т к о й трубы, для которой величина $(1 + \zeta_e + \Sigma\zeta)$ представляется далеко не исчезающей передъ членомъ $\zeta_r \frac{4L}{D}$. Такъ, напримѣръ, если мы имѣемъ дѣло съ трубою діаметромъ въ 0,1 *mtr* и длиною въ 100 *mtr*, то, считая, по Фаннингу, $\zeta_r \backsim 0{,}007$, получаемъ $\zeta_r \frac{4L}{D} = 28$; между тѣмъ, если считать сопротивленіе при входѣ по насадку Вентури, т.-е. если положить $\zeta_e \backsim 0{,}5$, и даже допустить, что никакихъ особыхъ сопротивленій на трубѣ нѣтъ, то членъ $(1 + \zeta_r + \Sigma\zeta)$ по вычисленіи оказывается равнымъ 1,5,— величиной, которой, вообще говоря, не представляется возможнымъ пренебречь передъ 28, — на величинѣ расхода это отразилось бы уменьшеніемъ его въ отношеніи $\sqrt{\frac{28}{29{,}5}} = \frac{5{,}3}{5{,}44}$, т.-е. почти на 3%. При бóльшихъ діаметрахъ и при болѣе короткихъ трубахъ это обстоятельство выдѣляется еще болѣе рѣзко. Въ такихъ случаяхъ бываетъ, наоборотъ, цѣлесообразнѣе при предварительномъ расчетѣ пренебречь потерей напора на треніе (см. задачу № 33 въ концѣ этой главы), т.-е. положить въ ур-іи (26) $\zeta_r = 0$, а иногда также и $\Sigma\zeta = 0$, и опредѣлять діаметръ уже изъ ур-ія:

$$h = (1 + \zeta_e) \frac{16 Q^2}{2g \pi^2 D^4}.$$

Легко видѣть, что это ур-іе не отличается отъ обычнаго ур-ія расхода черезъ насадокъ: въ главѣ II мы видѣли, что существуетъ соотношеніе

$$1+\zeta_e=\frac{1}{\mu^2},$$

коль скоро при выходѣ изъ насадка нѣтъ сжатія струи.

Иногда при расчетѣ трубъ удобно задаваться скоростью. Руководствомъ можетъ служить слѣдующая таблица максимальныхъ скоростей, допускаемыхъ американскими строителями, въ трубахъ разныхъ діаметровъ.

Діаметры въ дюймахъ.	4	6	8	10	12	14	16	18	20	24	27	30	36
Максим. скорость въ футахъ.	3,1	3,9	4,5	5,0	5,5	5,8	6,0	6,2	6,5	6,7	6,9	7,0	7,2

Фламанъ рекомендуетъ еще болѣе низкія значенія для максимальныхъ скоростей, назначая ее для трубъ діаметромъ въ 0,25; 0,50; 1,00 *mtr* соотвѣтственно въ 1; 1,4; 2 *mtr/sec*. Обыкновенно этихъ скоростей не достигаютъ. Равнымъ образомъ не берутъ и слишкомъ малыхъ скоростей (въ 1 футъ и меньше), такъ какъ въ этомъ случаѣ изъ воды легко осаждаются взмученныя въ ней вещества и засоряютъ трубы.

Необходимо замѣтить, что эти данныя взяты изъ практики городскихъ водоснабженій, въ которыхъ чаще всего приходится проводить умѣренныя количества воды и перекачивать ихъ обыкновенно за счетъ оплачиваемой деньгами тепловой энергіи. Совсѣмъ другія нормы выработаны практикой турбинныхъ водопроводовъ, ведущихъ воду, въ цѣляхъ утилизаціи ея энергіи, иногда въ очень большихъ количествахъ и всегда только за счетъ нѣкотораго пониженія общаго коэффиціента полезнаго дѣйствія установки; при этомъ легко видѣть, что съ повышеніемъ располагаемаго напора,—а онъ можетъ достигать нѣсколькихъ сотъ метровъ—это пониженіе коэффиціента полезнаго дѣйствія установки, вслѣдствіе потерь въ трубопроводѣ, дѣлается менѣе ощутительнымъ. Въ такихъ водопроводахъ скорости въ 2 и болѣе *mtr* встрѣчаются очень часто, даже при длинныхъ трубопроводахъ и малыхъ діаметрахъ, такъ какъ существенно важно уменьшить начальную стоимость сооруженія (см. въ концѣ этой главы задачу № 68). Въ слѣдующей таблицѣ приведены нѣкоторые примѣры такихъ трубопроводовъ. Кромѣ размѣровъ трубъ, въ ней приведены также теряемые въ нихъ напоры, выраженные въ *mtr*, а также въ % отъ располагаемаго напора; при этомъ подсчетѣ коэффиціентъ сопротивленія тренія былъ оцѣненъ по ур-ію Кристена (см. стр. 221).

Названіе установокъ.	Внутренній діаметръ въ mtr.	Длина трубы въ mtr.	Расходъ въ mtr^3/sec.	Скорость въ mtr/sec.	Располагаемый напоръ въ mtr.	Потеря напора въ mtr.	Потеря напора въ $^0/_0$ отъ располагаемаго.
Vouvry около Роны, близъ ея впаденія въ Женевское озеро . .	0,325	1300	0,173	2,36	920	28,2	3,06
Jajce на р. Пливѣ . .	1,600	236	6,00	3,00	75	1,13	1,5
St.-Maurice на Ронѣ .	2,700	470	15,88	2,78	36	1,00	2,8
Champ на р. Дракѣ близъ Гренобля . . .	3,300	4700	17,00	1,98	35	3,91	11,2
Ontario Power C⁰ на Ніагарѣ	5,500	1850	118,75	5,00	56	5,22	9,35

Изъ этой таблицы видно, съ какими большими потерями мирятся, когда имѣютъ дѣло съ большими разстояніями и съ большими расходами.

Сдѣлаемъ еще слѣдующее замѣчаніе. Исключая изъ выраженія потеряннаго напора скорость помощью уравненія расхода, мы получаемъ ур-іе 27:

$$\eta_r = \frac{32}{\pi^2 g} \zeta_r \frac{lQ^2}{D^5}.$$

Сравнимъ съ помощью этого выраженія потери напора въ двухъ трубахъ, изъ которыхъ одна пропускаетъ расходъ Q, а другая—одну m'ую его часть при условіи одинаковой средней скорости въ обѣихъ трубахъ. Ясно, что если въ первой трубѣ расходъ и діаметръ назовемъ Q и D и потерю напора опредѣлимъ по выше приведенному выраженію, то для другой трубы расходъ будетъ $\frac{Q}{m}$, діаметръ — $\frac{D}{\sqrt{m}}$, а потеря напора вычислится:

$$\eta_r' = \frac{32}{\pi^2 g} \zeta_r \frac{l\left(\frac{Q}{m}\right)^2}{\left(\frac{D}{\sqrt{m}}\right)^5} = \frac{32}{\pi^2 g} \zeta_r \frac{lQ^2}{D^5} \sqrt{m}.$$

Если даже пренебречь тѣмъ, что коэффиціентъ сопротивленія возрастаетъ съ уменьшеніемъ діаметра, все-таки видно, что потеря напора въ малой трубѣ при указанныхъ выше условіяхъ въ $\sqrt{m}$ разъ больше, чѣмъ въ большой. Такъ какъ съ другой стороны стоимость трубы и ея укладки считается прямо пропорціональной діаметру трубы, то оказывается выгоднымъ данный расходъ проводить черезъ одну трубу, а не дробить его на нѣсколько меньшихъ трубъ. Этого правила всегда и придерживаются за исключеніемъ тѣхъ случаевъ, встрѣчающихся опять въ практикѣ турбинныхъ водопроводовъ, когда проводимый расходъ слишкомъ великъ (вся установка Ontario Power C⁰ на Ніагарѣ будетъ заключать 3 такихъ трубы, какъ упомянутая въ послѣдней таблицѣ), когда большое значеніе придается надежности сооруженія (на станціяхъ Jajce и St.-Maurice проложены по 2 трубы, какъ упоминаемыя въ таблицѣ) и, наконецъ, когда затрудненія съ монтажемъ требуютъ уменьшенія діаметра трубъ.

§ 24. О давленіи внутри водопроводной трубы. Сифонъ. Водоструйный насосъ для выкачиванія воздуха.

Всѣ вычисленія предыдущаго параграфа предполагаютъ, что труба во всякомъ ея мѣстѣ работаетъ полнымъ сѣченіемъ, т.-е. что жидкость не разрывается нигдѣ. Признакомъ этого, какъ извѣстно, служитъ то обстоятельство, что величина гидродинамическаго давленія вездѣ остается положительной, или, если говорить не о полномъ давленіи, а объ его избыткѣ надъ атмосфернымъ, то этотъ избытокъ, могущій быть и отрицательнымъ, нигдѣ однако не долженъ быть меньше минусъ 10,33 *mtr*. Поэтому результаты предыдущихъ подсчетовъ только тогда могутъ быть признаны правильными, если это условіе относительно давленія выполнено. Изъ этого слѣдуетъ, что при рѣшеніи практическихъ задачъ необходимо всегда давать себѣ отчетъ, каково давленіе въ разныхъ мѣстахъ трубы,— другими словами, необходимо всегда строить пьезометрическую напорную линію.

Особое вниманіе нужно обращать на тѣ точки трубы, гдѣ заранѣе можно предполагать наличность пониженнаго давленія. Къ такимъ точкамъ относятся, во-первыхъ, всѣ тѣ, гдѣ скорость движенія повышается, т.-е. всѣ сжатыя сѣченія; при внезапныхъ расширеніяхъ и суженіяхъ сѣченія мы всегда находимъ эти мѣстныя сжатія; даже безъ наличности сжатія, при плавномъ измѣненіи сѣченія, въ узкомъ мѣстѣ давленіе неизбѣжно понижается, какъ мы это видѣли на примѣрѣ коническихъ расходящихся насадковъ. Далѣе, къ такимъ опаснымъ точкамъ нужно отнести вершины всѣхъ поднимающихся по теченію вѣтвей трубы: здѣсь давленіе уменьшается за счетъ увеличенія высоты точки надъ плоскостью сравненія. Наконецъ, вершины всѣхъ болѣе или менѣе длинныхъ и сравнительно круто опускающихся внизъ по теченію частей трубы, въ силу своего возвышеннаго положенія, также представляютъ опасность разрыва жидкости. Въ предыдущемъ § было уже указано, что построеніе пьезометрической линіи помогаетъ разыскать всѣ эти опасныя точки. Для дальнѣйшаго уясненія дѣла остановимся на разсмотрѣніи одного примѣра—*сифона*.

Сифономъ называется труба, проложенная такъ, что нѣкоторою частью она лежитъ выше уровня воды въ питающемъ резервуарѣ (фиг. 144). Для движенія воды отъ перваго сосуда до входа во второй мы имѣли ур-іе (25) въ § 23. Для краткости письма будемъ считать, что сопротивленіе входа ζ_e включено подъ знакомъ $\Sigma\zeta$, такъ что вмѣсто ур-ія (25) напишемъ ур-іе

$$H_1 - H_2 = h = \frac{v^2}{2g}\left(1 + \Sigma\zeta + 4\,\frac{L}{D}\,\zeta_r\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (28)$$

Въ какомъ-нибудь сѣченіи ***MN***, на разстояніи L_x отъ начала трубы (считая по длинѣ трубы) и на высотѣ x отъ плоскости сравненія ***QR***, имѣемъ:

$$H_1 + \frac{p_0}{\gamma} = x + \frac{p_s}{\gamma} + \frac{v^2}{2g}\left(1 + \Sigma'\zeta + \zeta_r\,\frac{4L_x}{D}\right).$$

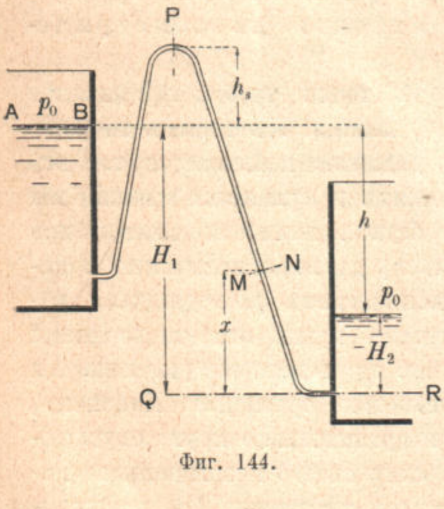
На пути отъ ***AB*** до ***MN*** особыя сопротивленія могутъ быть иныя, нежели на всей трубѣ,—поэтому мы и обозначили ихъ черезъ $\Sigma'\zeta$.

Изъ написаннаго ур-ія имѣемъ:

$$\frac{p_s}{\gamma} = H_1 - x + \frac{p_0}{\gamma} - \frac{v^2}{2g}\left(1 + \Sigma'\zeta + \zeta_r\,\frac{4L_x}{D}\right),$$

или, замѣняя v по ур-ію (28):

$$\frac{p_s}{\gamma} = H_1 - x + \frac{p_0}{\gamma} - \frac{1 + \Sigma'\zeta + 4\,\frac{L_x}{D}\,\zeta_r}{1 + \Sigma\zeta + 4\,\frac{L}{D}\,\zeta_r}\,h\,.$$



Фиг. 144.

Такъ какъ p_s должно быть всегда больше нуля, то это ур-іе сводится къ неравенству:

$$x - H_1 < \frac{p_0}{\gamma} - \frac{1 + \Sigma'\zeta + 4\,\frac{L_x}{D}\,\zeta_r}{1 + \Sigma\zeta + 4\,\frac{L}{D}\,\zeta_r}\,h\,. \quad (29)$$

Величинами $(1 + \Sigma'\zeta)$ и $(1 + \Sigma\zeta)$, по сравненію съ потерями на треніе, по ихъ малости обыкновенно бываетъ возможно пренебречь. Откидывая ихъ, дадимъ неравенству (29) видъ:

$$x - H_1 < \frac{p_0}{\gamma} - \frac{L_x}{L}\,h\,.$$

Особенно важенъ случай, когда x есть высота наивысшей точки сифона ***P***. Пусть $x_s - H_1$ есть h_s,—это будетъ высота наиболѣе возвышеннаго сѣченія сифона ***P*** надъ уровнемъ верхняго резервуара ***AB***. Замѣтивъ, что для средняго атмосфернаго давленія $\frac{p_0}{\gamma} = 10{,}33\ mtr$ и обозначивъ соотвѣтствующую длину L_x трубы черезъ L_s, найдемъ, что допустимая высота сифона опредѣляется соотношеніемъ:

$$h_s \leqq 10{,}33 - \frac{L_s}{L} h, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (30)$$

т.-е. высота сифона надъ уровнемъ питающаго резервуара не только меньше высоты барометрическаго давленія, но еще зависитъ отъ располагаемаго напора (уменьшается съ его увеличеніемъ), отъ положенія высшей точки по длинѣ трубы (уменьшается съ увеличеніемъ L_s) и отъ длины самой трубы.

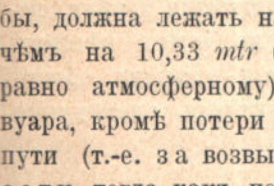
То же самое легко получить, если итти съ другой стороны, т.-е. если разсмотрѣть движеніе отъ наивысшаго сѣченія P до уровня во второмъ сосудѣ, принимая плоскость сравненія въ уровнѣ второго резервуара. Имѣемъ въ этомъ случаѣ:

$$\frac{p_s}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} + h_s + h = \frac{p_0}{\gamma} + \left[\Sigma''\zeta + \zeta\,\frac{4(L - L_s)}{D}\right]\frac{v^2}{2g} + \frac{(v-0)^2}{2g}.$$

Послѣднимъ членомъ оцѣнена отдѣльно потеря на ударъ при входѣ во второй сосудъ, скорость въ которомъ предполагаемъ равной нулю. Составляя теперь неравенство $\frac{p_s}{\gamma} > 0$, находимъ:

$$h_s + h < \frac{p_0}{\gamma} + \left[\Sigma''\zeta + \zeta_r\,\frac{4(L - L_s)}{D}\right]\frac{v^2}{2g}, \quad \ldots\ldots \quad (31)$$

т.-е. наиболѣе возвышенная точка сифона, или, вообще, всякая точка трубы, должна лежать надъ горизонтомъ въ пріемномъ резервуарѣ менѣе, чѣмъ на 10,33 mtr (если въ этомъ резервуарѣ давленіе на поверхности равно атмосферному) *плюсъ* всѣ потери на пути отъ этой точки до резервуара, кромѣ потери при входѣ въ него. Отсюда видно, что потери на этомъ пути (т.-е. за возвышенной точкой) увеличиваютъ допустимую высоту, тогда какъ потери на пути до возвышенной точки уменьшаютъ ея возможную высоту (см. неравенство 29).



Фиг. 145.

Съ этой точки зрѣнія далеко не безразлично, какъ труба примыкаетъ ко второму резервуару,— такъ ли, какъ на фигурѣ 144, или, напр., какъ на фиг. 145, гдѣ все осталось по-старому, кромѣ того, что труба продолжена далеко внутрь резервуара; въ этомъ послѣднемъ случаѣ повышаются потери напора на участкѣ за сифономъ, и если сифонъ, не снабженный этимъ добавкомъ, не подавалъ воды, то можетъ получиться, что, будучи имъ снабженъ, при достаточной, конечно, длинѣ прибавка, онъ окажется въ состояніи работать. Легко видѣть, что при наличности прибавка скорость v, какъ это видно изъ ур-ія (28), окажется меньшей, нежели безъ него; въ этомъ въ сущности, и заключается вся разница.

Подставляя въ неравенство (31) значеніе $\frac{v^2}{2g}$, опредѣленное изъ ур-ія (28), и дѣлая въ результатѣ подстановки вышеупомянутыя упрощающія предположенія, получаемъ:

$$h_s + h < \frac{p_0}{\gamma} + \frac{L - L_s}{L} h \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(32)}$$

Не трудно убѣдиться, что это выраженіе тождественно съ выраженіемъ (30), такъ же, какъ (31) тождественно съ (29); однако выраженія (31) и (32) показываютъ съ бóльшей очевидностью, нежели выраженія (29) и (30), что хотя бы разсматриваемая точка лежала и ниже уровня ***AB*** въ верхнемъ сосудѣ (h_s отрицательно), тѣмъ не менѣе въ ней можетъ оказаться опасное разрѣженіе. Такой именно случай представляетъ всякая вертикальная труба: при любомъ знакѣ при h_s, лишь только $h + h_s$ положительно, необходимо прибѣгать къ провѣркѣ. Съ подобнымъ случаемъ намъ придется встрѣтиться въ курсѣ турбинъ.

Мы видѣли изъ предыдущаго §, что при всякомъ измѣненіи сѣченія, трубы появляется соотвѣтствующее измѣненіе въ пьезометрической линіи, т.-е. въ давленіи внутри трубы. Этимъ обстоятельствомъ пользуются во многихъ случахъ и съ разными цѣлями. Укажемъ слѣдующіе два примѣра:

Упомянемъ, прежде всего, о *водомѣрѣ Вентури*, имѣющемъ широкое примѣненіе въ Америкѣ и постепенно распространяющемся также въ Россіи. Устройство его крайне просто: въ трубопроводъ вставляется постепенно и плавно сужающаяся коноидальная труба, которая затѣмъ такъ же плавно расширяется до первоначальнаго діаметра. Въ самомъ узкомъ и въ самомъ широкомъ мѣстахъ прибора устанавливаются пьезометрическія трубки, помощью которыхъ можно наблюдать разность давленій въ этихъ мѣстахъ. Читая эту разность въ каждый данный моментъ и зная площади обоихъ сѣченій, легко вычислить расходъ на основаніи слѣдующихъ очевидныхъ уравненій:

$$Q = F_1 v_1 = F_2 v_2 ,$$

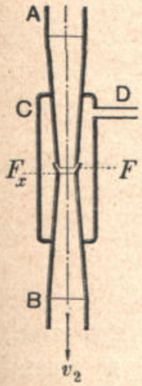
$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + \zeta \frac{v_2^2}{2g}.$$

Если въ данный моментъ наблюдена разность давленій $\frac{p_2}{\gamma} - \frac{p_1}{\gamma} = h$, при $F_2 > F_1$, а кромѣ того если постоянный коэффиціентъ сопротивленія ζ извѣстенъ, послѣ, напр., опытнаго его опредѣленія, то легко вычисляемъ:

$$Q = F_1 \sqrt{\frac{2gh}{1 - \left(\frac{F_1}{F_2}\right)^2 (1 + \zeta)}}.$$

Приборъ устроенъ такъ, что разности уровней h въ обоихъ пьезометрахъ автоматически и непрерывно записываются на бумажной лентѣ, разграфленной такъ, что на ней можно читать не самую разность уровней h, а прямо соотвѣтствующій ей расходъ. На лентѣ такимъ образомъ записываются круглыя сутки всѣ секундные расходы.

Затѣмъ укажемъ, что тѣмъ обстоятельствомъ, что съ повышеніемъ скорости уменьшается давленіе, пользуются для полученія *искусственнаго разрѣженія.* На трубѣ *A* (фиг. 146) дѣлаютъ мѣстное суженіе; вслѣдъ за нимъ располагаютъ постепенно расширяющуюся трубу *B*. Щель между обѣими трубками окружена кожухомъ *C*, который можно соединять трубкою *D* съ сосудомъ, откуда нужно выкачать воздухъ.



Фиг. 146.

Назовемъ черезъ v_1, p_1, F_1 соотвѣтственно скорость, давленіе и сѣченіе струи въ трубѣ *A* до суженія; тѣ же величины въ узкой части трубы *A* назовемъ тѣми же буквами безъ значковъ; въ узкой части трубы *B* введемъ значки $_x$, и въ широкой части трубы *B*—значки $_2$. Для движенія отъ сѣченія F_1 до сѣченія F имѣетъ мѣсто ур-іе:

$$\frac{v_1^2}{2g}+\frac{p_1}{\gamma}+h=\frac{v^2}{2g}+\frac{p}{\gamma}+\zeta_1\frac{v^2}{2g}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

гдѣ буква h обозначаетъ вертикальное разстояніе отъ сѣченія *A* до сѣченія F, а послѣднимъ членомъ оцѣнивается потеря напора при прохожденіи черезъ быстро сужающуюся часть.

При переходѣ отъ сѣченія F къ сѣченію F_x,— въ предположеніи, что течетъ только вода (изъ *C* ничего не поступаетъ) и что щель настолько узка, что струя переходитъ, какъ если бы щели совсѣмъ не было,—имѣемъ ур-іе:

$$\frac{v^2}{2g}+\frac{p}{\gamma}=\frac{v_x^2}{2g}+\frac{p_x}{\gamma}+\frac{(v-v_x)^2}{2g}.$$

Наконецъ, для движенія отъ сѣченія F_x до сѣченія F_2 имѣемъ:

$$\frac{v_x^2}{2g}+\frac{p_x}{\gamma}+(h_2-h)=\frac{v_2^2}{2g}+\frac{p_2}{\gamma}+\zeta_2\frac{v_2^2}{2g}.$$

Здѣсь буква h_2 обозначаетъ вертикальное разстояніе отъ сѣченія *A* до сѣченія *B*.

Складывая эти три ур-ія, получаемъ:

$$\frac{p_1}{\gamma}-\frac{p_2}{\gamma}+h_2=\frac{v_2^2}{2g}-\frac{v_1^2}{2g}+\frac{(v-v_x)^2}{2g}+\zeta_1\frac{v^2}{2g}+\zeta_2\frac{v_2^2}{2g} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

Кромѣ того, при вышеуказанныхъ предположеніяхъ имѣютъ мѣсто слѣдующія ур-ія расхода:

$$Q=F_1v_1=Fv=F_xv_x=F_2v_2.$$

Пользуясь ими, преобразовываемъ ур-іе (34) въ ур-іе:

$$\frac{v_2^2}{2g}=\frac{\frac{p_1}{\gamma}-\frac{p_2}{\gamma}+h_2}{1-\left(\frac{F_2}{F_1}\right)^2+\left(\frac{F_2}{F}-\frac{F_2}{F_x}\right)^2+\zeta_1\left(\frac{F_2}{F}\right)^2+\zeta_2}\quad\ldots\ldots(34')$$

Далѣе опредѣляемъ давленіе p изъ ур-ія (33), выражая въ немъ всѣ скорости черезъ v_2 помощью тѣхъ же ур-ій расхода:

$$\frac{p}{\gamma}=\frac{p_1}{\gamma}+h-\frac{v_2^2}{2g}\left[(1+\zeta_1)\left(\frac{F_2}{F}\right)^2-\left(\frac{F_2}{F_1}\right)^2\right]\quad\ldots\ldots(33')$$

Если нужно, чтобы въ C была пустота, то необходимо имѣть $\frac{p}{\gamma}\leqq 0$, или, стало-быть, по (33'):

$$\frac{v_2^2}{2g}>\frac{\frac{p_1}{\gamma}+h}{(1+\zeta_1)\left(\frac{F_2}{F}\right)^2-\left(\frac{F_2}{F_1}\right)^2}.$$

Сравнивая это выраженіе съ выраженіемъ (34), заключаемъ, что для того, чтобы приборъ выполнялъ свое назначеніе, между его размѣрами и давленіями p_1 и p_2 должно быть слѣдующее соотношеніе:

$$\frac{\frac{p_1}{\gamma}+h}{\frac{p_1}{\gamma}-\frac{p_2}{\gamma}+h_2}\leqq\frac{(1+\zeta_1)\left(\frac{F_2}{F}\right)^2-\left(\frac{F_2}{F_1}\right)^2}{(1+\zeta_1)\left(\frac{F_2}{F}\right)^2-\left(\frac{F_2}{F_1}\right)^2+(1+\zeta_2)-\frac{F_2}{F_x}\left[2\frac{F_2}{F}-\frac{F_2}{F_x}\right]}.$$

Вычитая въ обѣихъ частяхъ неравенства числитель изъ знаменателя, отчего знакъ неравенства не измѣнится, и мѣняя знакъ въ знаменателѣ, отчего знакъ неравенства перемѣнится, получимъ:

$$\frac{\frac{p_1}{\gamma}+h}{\frac{p_2}{\gamma}+h-h_2}\geqq\frac{(1+\zeta_1)\left(\frac{F_2}{F}\right)^2-\left(\frac{F_2}{F_1}\right)^2}{\frac{F_2}{F_x}\left(2\frac{F_2}{F}-\frac{F_2}{F_x}\right)-(1+\zeta_2)}\quad\ldots\ldots(\mathbf{35})$$

Если неравенство (35) удовлетворено, то, дѣйствительно, струя не только не будетъ имѣть возможности заполнять пространство C, но, напротивъ того, будетъ энергично высасывать какъ изъ него, такъ и изъ связанныхъ съ нимъ пространствъ, всякую жидкость, первоначально ихъ заполнявшую. Если такою жидкостью является воздухъ, то, въ силу его весьма малаго удѣльнаго вѣса по сравненію съ водою, всѣ эти разсужденія могутъ быть примѣнены непосредственно. Если же такой высасываемой жидкостью является вода, то это разсмотрѣніе, при которомъ мы считали, что сѣченія F_x и F_2 заполнены только водою, идущею изъ трубы *A*, не примѣнимо. При воздухѣ давленіе p въ *C* опредѣляется изъ ур-ія (33) достаточно точно, конечно, къ тому времени, когда наступаетъ установившееся состояніе, т.-е. когда воздухъ перестанетъ уноситься изъ *C*.

На этомъ явленіи основывается устройство водоструйныхъ насосовъ для полученія безвоздушныхъ пространствъ, употребляемыхъ во всѣхъ химическихъ и физическихъ лабораторіяхъ. Обыкновенно въ такихъ случаяхъ давленіе p_2 есть атмосферное давленіе, а давленіе p_1 — давленіе въ водопроводѣ, достигающее нѣсколькихъ атмосферъ. Приборъ бываетъ вообще маленькихъ размѣровъ, почему въ неравенствѣ (35) вполнѣ возможно пренебречь высотами h и h_2. Кромѣ того, сѣченіе F_1 водопроводной трубы часто настолько велико передъ всѣми прочими сѣченіями прибора, что отношеніемъ $\frac{F_2}{F_1}$ тоже безъ большой ошибки можно пренебречь; это можно сдѣлать съ достаточной надежностью особенно въ томъ случаѣ, если неравенствомъ (35) пользоваться для опредѣленія необходимаго минимальнаго давленія p_1. Выраженіе (35) перепишется теперь такъ:

$$\frac{p_1}{p_2} > \frac{(1+\zeta_1)\left(\frac{F_2}{F}\right)^2}{\frac{F_2}{F_x}\left(2\frac{F_2}{F}-\frac{F_2}{F_x}\right)-(1+\zeta_2)} \quad \ldots\ldots\ldots (35')$$

Такъ, напр., если діаметры сѣченій F, F_x и F_2 соотвѣтственно равны 2, 4 и 8 mm, а коэф-ты $\zeta_1 = \zeta_2 = 0{,}1$, то неравенство (35′) даетъ:

$$\frac{p_1}{p_2} > \frac{1{,}1\,.\,4^4}{2^2(2\,.\,4^2-2^2)-1{,}1} = \frac{281{,}6}{110{,}9} = 2{,}54\,,$$

т.-е. достаточно имѣть въ водопроводѣ не менѣе 2,54 at давленія, чтобы этимъ приборомъ производить безвоздушное пространство. Внося $p_1 = 2{,}54\ p_2$ въ ур-іе (34′), считая попрежнему $\frac{F_2}{F_1} = 0$, а также полагая $\frac{p_2}{\gamma} = 10\ mtr$, найдемъ при вышеуказанныхъ діаметрахъ сѣченій F, F_x и F_2, что:

$$\frac{v_2^2}{2g} = 0{,}09\ mtr,\ \text{такъ что}\ v_2 = 1{,}33\ mtr/sec,$$

$$\frac{v_x^2}{2g} = 2^4\frac{v_2^2}{2g} = 1{,}44\ mtr,\ \text{такъ что}\ v_x = 5{,}32\ mtr/sec,$$

$$\frac{v^2}{2g} = 4^4\frac{v_2^2}{2g} = 23{,}04\ mtr,\ \text{такъ что}\ v = 21{,}28\ mtr/sec.$$

Далѣе, изъ соотвѣтствующихъ, написанныхъ выше, ур-ій Д. Бернулли получимъ, полагая въ нихъ $h = h_2 = 0$, а также $v_1 = 0$:

$$\text{давленіе } \frac{p_x}{\gamma} = 0{,}09 + 10{,}00 + 0{,}009 - 1{,}44 \backsim 8{,}66 \ mtr,$$

$$\text{давленіе } \frac{p}{\gamma} = 25{,}40 - 23{,}04 - 2{,}30 = 0{,}06 \ mtr.$$

Итакъ, въ сѣченіи F_x давленіе будетъ ниже атмосфернаго, а въ сосудѣ **C** (давленіе p) можно ждать почти полнаго разрѣженія. При этомъ расходъ рабочей воды будетъ $v_2 F_2 = 13{,}3 . 0{,}005 = 0{,}0665 \ ltr/sec.$

§ 25. Правило Dupuit.

Нерѣдко водопроводная линія составляется изъ трубъ разнаго діаметра. Потеря напора, вызываемая такою трубою, должна быть оцѣнена, какъ сумма потерь, вызванныхъ каждой частью постояннаго діаметра. Вычисленія облегчаются, если такую составную трубу замѣнить трубой постояннаго діаметра, эквивалентной первой. Двѣ трубы называются эквивалентными, если онѣ, при одинаковомъ расходѣ въ обѣихъ, вызываютъ одинаковыя потери напора.

Пусть данная труба составлена изъ частей длиною $L_1, L_2, \ldots L_n$, и соотвѣтственныхъ діаметровъ $D_1, D_2, \ldots, D_n$. Вся труба, пропуская въ секунду $Q \ mtr^3$, вызываетъ потерю напора на треніе:

$$h = \frac{4L_1}{D_1} \zeta_r' \frac{v_1^2}{2g} + \frac{4L_2}{D_2} \zeta_r'' \frac{v_2^2}{2g} + \ldots + \frac{4L_n}{D_n} \zeta_r^{(n)} \frac{v_n^2}{2g} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{4L_k}{D_k} \zeta_r^{(k)} \frac{v_k^2}{2g}.$$

При этомъ

$$Q = \frac{\pi D_1^2}{4} v_1 = \frac{\pi D_2^2}{4} v_2 = \ldots . = \frac{\pi D_n^2}{4} v_n.$$

Поэтому

$$h = \zeta_r' \cdot \frac{4L_1}{D_1^5} \cdot \frac{16 Q^2}{\pi^2 . 2g} + \zeta_r'' \frac{4L_2}{D_2^5} \cdot \frac{16 Q^2}{\pi^2 . 2g} + \ldots . + \zeta_r^{(n)} \cdot \frac{4L_n}{D_n^5} \cdot \frac{16 Q^2}{\pi^2 . 2g} = \frac{64 Q^2}{\pi^2 . 2g} \sum_{k=1}^{k=n} \zeta_r^{(k)} \frac{L_k}{D_k^5}.$$

Для эквивалентной трубы постояннаго діаметра D, длиною L, та же потеря h, при томъ же расходѣ Q, можетъ быть выражена такъ:

$$h = \frac{64 Q^2}{\pi^2 . 2g} \zeta_r \frac{L}{D^5}.$$

Условіе эквивалентности получимъ, сравнивъ два послѣднія выраженія:

$$\sum_{k=1}^{k=n} \zeta_r^{(k)} \frac{L_k}{D_k^5} = \zeta_r \frac{L}{D^5}.$$

Въ такомъ соотношеніи должна быть длина и діаметръ эквивалентной трубы съ длинами и діаметрами составныхъ частей данной трубы. Это ур-іе и представляетъ то, что называется *„правиломъ Dupuit“*. Какъ первое приближеніе, можно положить:

$$\zeta_r' = \zeta_r'' = \ldots . . = \zeta_r^{(n)} = \zeta_r .$$

Тогда, задаваясь діаметромъ D эквивалентной трубы, находимъ ея длину L:

$$L=\left(\frac{D}{D_1}\right)^5 L_1+\left(\frac{D}{D_2}\right)^5 L_2+\ldots\ldots.$$

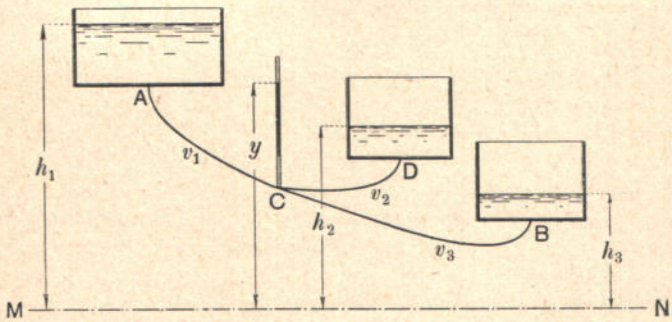
Или, задаваясь длиною L,—напримѣръ, считая, что эквивалентная труба имѣетъ длину данной трубы, т.-е., полагая $L=L_1+L_2+\ldots\ldots+L_n=\sum L_k$,—найдемъ ея діаметръ D:

$$D=\sqrt[5]{\frac{\sum L_k}{\sum \frac{L_k}{D_k^5}}}.$$

Выяснивъ такимъ образомъ длину и діаметръ эквивалентной трубы, мы можемъ вмѣсто дѣйствительной трубы имѣть въ виду затѣмъ только эту эквивалентную. Правило *Dupuit* можетъ быть съ выгодою примѣнено только въ томъ случаѣ, когда данная труба настолько длинна, что скоростнымъ напоромъ, равно какъ напорами, идущими на особыя сопротивленія *), можно пренебречь передъ сопротивленіемъ тренія.

§ 26. Сложный водопроводъ.

Всякая труба, имѣющая точки развѣтвленія, называется **сложнымъ водопроводомъ**. Въ водопроводной сѣти можетъ быть нѣсколько точекъ развѣтвленія. Разсмотримъ одну изъ нихъ (фиг. 147), въ которой отъ трубы AB взята вѣтвь CD. Въ концахъ



Фиг. 147.

трубъ A, B и D имѣются нѣкоторыя гидродинамическія давленія, которыя поднимаютъ воду въ пьезометрахъ, вставленныхъ въ этихъ концахъ. Вмѣсто пьезометровъ вообразимъ сосуды, къ которымъ эти трубы пусть и примыкаютъ; понятно, что горизонтъ воды въ сосудѣ вполнѣ опредѣляетъ величину гидродинамическаго давленія. Назовемъ высоты стоянія этихъ горизонтовъ надъ общею горизонтальною плоскостью сравненія MN черезъ h_1, h_2, h_3, при чемъ, согласно чертежу, пусть $h_1>h_2>h_3$. Если въ точкѣ C вставить пьезометръ, то и въ немъ вода также поднимется; пусть она здѣсь поднимается до нѣкоторой высоты y надъ тѣмъ же горизонтомъ MN. Смотря по тому, какова высота y, движеніе воды въ сѣти ABD будетъ разное: если $h_1>y>h_2>h_3$, то резервуаръ A питаетъ оба резервуара D и B; если же $h_1>h_2>y>h_3$, то оба резервуара A и D подаютъ воду въ сосудъ B.

*) Въ трубѣ перемѣннаго діаметра всегда есть сопротивленія при переходѣ изъ одного діаметра въ другой.

Задача можетъ быть поставлена двояко: во-первыхъ, могутъ быть даны діаметры d_1, d_2, d_3 и длины l_1, l_2, l_3 трубъ ***AC***, ***CD*** и ***CB***; равнымъ образомъ задаются высоты h_1, h_2, h_3; требуется отыскать расходы Q_1, Q_2, Q_3, въ каждой трубѣ, равно какъ и направленіе теченія въ трубѣ ***CD***; во-вторыхъ, могутъ быть заданы длины трубъ и высоты h_1, h_2, h_3, и требуется найти размѣры по заданнымъ расходамъ.

I) Предположимъ сначала, что имѣетъ мѣсто соотношеніе:

$$h_1 > y > h_2 > h_3.$$

Тогда очевидно:

$$Q_1 = Q_2 + Q_3$$

или

$$d_1^2 v_1 = d_2^2 v_2 + d_3^2 v_3 \, , \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (36)$$

гдѣ v_1, v_2, v_3 суть неизвѣстныя пока скорости въ вѣтвяхъ ***AC***, ***CD***, ***CB***.

Предполагая, что трубы длинныя, такъ что скоростной напоръ и вліяніе особыхъ сопротивленій исчезаютъ передъ величиною потеряннаго на треніе напора, можно написать ур-ія потерь напора:

для вѣтви ***AC***: $h_1 - y = \zeta_1 \dfrac{4\,l_1}{d_1} \dfrac{v_1^2}{2g}$

" " ***CD***: $y - h_2 = \zeta_2 \dfrac{4\,l_2}{d_2} \dfrac{v_2^2}{2g}$

" " ***CB***: $y - h_3 = \zeta_3 \dfrac{4\,l_3}{d_3} \dfrac{v_3^2}{2g}$

$$\left.\begin{aligned} h_1 - y &= \zeta_1 \frac{4\,l_1}{d_1} \frac{v_1^2}{2g} \\ y - h_2 &= \zeta_2 \frac{4\,l_2}{d_2} \frac{v_2^2}{2g} \\ y - h_3 &= \zeta_3 \frac{4\,l_3}{d_3} \frac{v_3^2}{2g} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (37)$$

Если же имѣетъ мѣсто соотношеніе

$$h_1 > h_2 > y > h_3,$$

то такія же четыре ур-ія напишемъ такъ:

$$Q_1 + Q_2 = Q_3$$

или

$$d_1^2 v_1 + d_2^2 v_2 = d_3^2 v_3 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (38)$$

Затѣмъ:

для вѣтви ***AC***: $h_1 - y = \zeta_1 \dfrac{4\,l_1}{d_1} \dfrac{v_1^2}{2g}$

" " ***DC***: $h_2 - y = \zeta_2 \dfrac{4\,l_2}{d_2} \dfrac{v_2^2}{2g}$

" " ***CB***: $y - h_3 = \zeta_3 \dfrac{4\,l_3}{d_3} \dfrac{v_3^2}{2g}$

$$\left.\begin{aligned} h_1 - y &= \zeta_1 \frac{4\,l_1}{d_1} \frac{v_1^2}{2g} \\ h_2 - y &= \zeta_2 \frac{4\,l_2}{d_2} \frac{v_2^2}{2g} \\ y - h_3 &= \zeta_3 \frac{4\,l_3}{d_3} \frac{v_3^2}{2g} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (39)$$

Въ обоихъ случаяхъ задача оказывается вполнѣ опредѣленной, такъ какъ для нахожденія четырехъ неизвѣстныхъ y, v_1, v_2 и v_3 имѣемъ также четыре ур-ія. Но заранѣе неизвѣстно, какою изъ этихъ системъ ур-ій нужно пользоваться. Слѣдующее разсмотрѣніе даетъ отвѣтъ и на этотъ вопросъ.

Замѣнимъ всѣ эти три трубы трубами одного и того же діаметра D, соотвѣтственно измѣняя ихъ длины до L_1, L_2 и L_3. Эти длины опредѣлимъ по правилу *Dupuit* (см. § 25) въ формѣ:

$$L_1 = \left(\frac{D}{d_1}\right)^5 l_1; \; L_2 = \left(\frac{D}{d_2}\right)^5 l_2; \; L_3 = \left(\frac{D}{d_3}\right)^5 l_3.$$

Соотвѣтственно измѣнившіяся скорости назовемъ черезъ v', v'', v'''. Система ур-ій (36) и (37) представится тогда такъ:

$$v' = v'' + v''' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (36')$$

$$\left.\begin{aligned} h_1 - y &= \zeta\,\frac{4L_1}{D}\,\frac{v'^2}{2g} \\ y - h_2 &= \zeta\,\frac{4L_2}{D}\,\frac{v''^2}{2g} \\ y - h_3 &= \zeta\,\frac{4L_3}{D}\,\frac{v'''^2}{2g} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (37')$$

Тутъ, по Дарси, всѣ ζ одинаковы. Опредѣляя изъ (37′) скорости v и внося ихъ въ (36′), получимъ соотношеніе:

$$\sqrt{\frac{2gD}{4\zeta}}\cdot\sqrt{\frac{h_1-y}{L_1}} = \sqrt{\frac{2gD}{4\zeta}}\left\{\sqrt{\frac{y-h_2}{L_2}}+\sqrt{\frac{y-h_3}{L_3}}\right\},$$

откуда

$$\sqrt{\frac{h_1-y}{L_1}} = \sqrt{\frac{y-h_2}{L_2}}+\sqrt{\frac{y-h_3}{L_3}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (40)$$

Если это ур-іе имѣетъ положительный корень α, то этотъ корень долженъ, очевидно, заключаться между h_1 и h_2, т.-е. должно существовать соотношеніе

$$h_1 > \alpha > h_2.$$

Если теперь мы дадимъ y-ку значеніе, большее корня α (но меньшее, понятно, чѣмъ h_1), то послѣ подстановки его въ ур-іе (40) лѣвая часть окажется меньше правой; если же дать значеніе меньшее α (но большее h_2), то лѣвая часть будетъ больше правой. Замѣтивъ это, дадимъ y-ку наименьшую возможную для него величину, т.-е. положимъ

$$y = h_2.$$

Тогда, если вообще ур-іе (40) имѣетъ мѣсто, т.-е. если направленіе теченія таково, какъ это предположено ур-іями (36) и (36′), то ур-іе (40) должно свестись къ неравенству:

$$\sqrt{\frac{h_1-h_2}{L_1}} > \sqrt{\frac{h_2-h_3}{L_3}}$$

или

$$\frac{h_1-h_2}{h_2-h_3} > \frac{L_1}{L_3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (41)$$

Обратно заключаемъ: если между заданными величинами существуетъ соотношеніе (41), то теченіе таково, какое предположено ур-іями (36) и (36′). Слѣдовательно, въ этомъ случаѣ нужно пользоваться системой ур-ій (36′) и (37′).

Легко убѣдиться, что если между данными величинами существуетъ неравенство обратнаго знака, то нужно пользоваться системой ур-ій (38) и (39), которая сводится къ ур-іямъ:

$$v' + v'' = v''' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (38')$$

$$\left.\begin{aligned} h_1 - y &= \zeta \frac{4L_1}{D} \frac{v'^2}{2g} \\ h_2 - y &= \zeta \frac{4L_2}{D} \frac{v''^2}{2g} \\ y - h_3 &= \zeta \frac{4L_3}{D} \frac{v'''^2}{2g} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (39')$$

Дѣйствительно, послѣ исключенія попрежнему скоростей v, получаемъ ур-іе:

$$\sqrt{\frac{h_1 - y}{L_1}} + \sqrt{\frac{h_2 - y}{L_2}} = \sqrt{\frac{y - h_3}{L_3}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (40')$$

Путемъ разсужденій, аналогичныхъ прежнимъ, убѣждаемся, что максимальное значеніе для y есть h_2; оно обращаетъ это ур-іе въ неравенство:

$$\frac{h_1 - h_2}{h_2 - h_3} < \frac{L_1}{L_3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (41')$$

Эти чисто аналитическіе признаки, по которымъ нужно выбирать или систему уравненій (36′) и (37′) или систему (38′) и (39′), имѣютъ вполнѣ реальное значеніе, которое нетрудно выяснить. Прежде всего предположеніе $y = h_2$ равносильно предположенію, что по трубѣ **CD** вода совсѣмъ не течетъ. Это видно изъ вторыхъ строкъ уравненій (37′) и (39′), дающихъ для этого случая $v'' = 0$; это видно также изъ графическаго представленія пьезометрической линіи: если на трубѣ **CD** нѣтъ паденія высоты пьезометра ($h_2 = y$), если на ней нѣтъ потери напора, значитъ нѣтъ и теченія. Если при этомъ предположеніи оказывается далѣе, что паденія пьезометрической линіи на единицу длины въ трубѣ **AC** $\left(\frac{h_1 - h_2}{L_1}\right)$ и въ трубѣ **CB** $\left(\frac{h_2 - h_3}{L_3}\right)$ между собою не равны, то это значитъ, что при этомъ предположеніи въ этихъ трубахъ, при условіи одинаковаго діаметра, скорости, а слѣд., и расходы тоже не равны, чего въ дѣйствительности, конечно, не можетъ быть. Смотря по знаку неравенства получающихся паденій на единицу длины (а расходы пропорціональны квадратнымъ корнямъ изъ этихъ паденій), легко заключить, каково будетъ, при данныхъ задачи, направленіе теченія въ трубѣ **CD**.—Замѣтимъ еще, что если бы не было сдѣлано приведенія всѣхъ трубъ къ одному діаметру по правилу Dupuit, то совершенно такъ же можно было бы разрѣшить вопросъ, сравнивая между собою не паденія на единицу длины въ трубахъ **AC** и **CB**, а непосредственно расходы въ нихъ подъ напорами, по прежнему, $h_1 - h_2$ для трубы **AC**, и $h_2 - h_3$ для трубы **CB**.

Когда такимъ образомъ рѣшенъ вопросъ о выборѣ той или другой системы ур-ій, остается рѣшить одно изъ ур-ій (40) или (40′). Проще всего рѣшать ихъ путемъ послѣдовательныхъ подстановокъ. Пусть, напр., имѣетъ мѣсто ур-іе (40). Даемъ y-ку какое-нибудь значеніе, большее h_2, но меньшее h_1, и вносимъ его въ ур-іе (40); знакъ $>$ или $<$, который придется поставить между двумя частями ур-ій (40) послѣ этой подстановки, покажетъ, мало или велико взятое значеніе. Можно указать еще болѣе близкіе предѣлы, между которыми заключается корень α, а именно:

Если бы трубы *CD* не было, то въ точкѣ *C* пьезометръ далъ бы высоту y', которую легко найти такимъ путемъ: труба *ACB* представляетъ простой водопроводъ, въ которомъ паденіе пьезометрической высоты пропорціонально длинѣ трубы. Слѣдовательно:

$$\frac{h_1-y'}{L_1}=\frac{h_1-h_3}{L_1+L_3},$$

откуда

$$y'=h_1-\frac{L_1}{L_1+L_3}(h_1-h_3) \quad \text{. . . . . (42)}$$

Подобнымъ же образомъ найдемъ ту высоту пьезометра y'', которая установилась бы въ *C*, если бы не было сосуда *B*:

$$y''=h_1-\frac{L_1}{L_1+L_2}(h_1-h_2) \quad \text{. . . . . (43)}$$

Одно изъ этихъ значеній будетъ больше другого; пусть, напримѣръ, $y'>y''$. Можно показать, что корень α ур-ія (40) меньше y''. Въ самомъ дѣлѣ, внеся значеніе y'' въ первую половину ур-ія (40), получимъ величину

$$\sqrt{\frac{h_1-h_2}{L_1+L_2}}.$$

Дѣлая ту же подстановку во второй половинѣ, получимъ послѣ простыхъ преобразованій:

$$\sqrt{\frac{h_1-h_2}{L_1+L_2}}+\sqrt{\frac{(L_1+L_2)(h_1-h_3)-L_1(h_1-h_2)}{(L_1+L_2)L_3}}.$$

Очевидно, что первое выраженіе меньше второго; дѣлая же $y=h_2$, мы получали неравенство обратнаго знака [см. неравенство (41)]. Изъ этого заключаемъ, что корень α ур-ія (40) заключается между h_2 и наименьшимъ изъ значеній y' и y'', опредѣляемыхъ ур-іями (42) и (43). Совершенно подобнымъ образомъ получимъ для ур-ія (40'), что его корень β меньше h_2, но больше наибольшаго изъ значеній y' и y''', опредѣляемыхъ ур-іями (42) и слѣдующимъ (44):

$$y'''=h_2-\frac{L_2}{L_2+L_3}(h_2-h_3) \quad \text{. . . . . (44)}$$

И эти аналитическіе признаки имѣютъ вполнѣ реальный смыслъ. Предположеніе объ отсутствіи резервуаровъ *B* или *D* равносильно допущенію, что на трубахъ *CD* или *CB* соотвѣтственно заперты краны; при этомъ пьезометрическая высота въ трубѣ, напр., *CD* отъ точки *C* и вплоть до запертаго крана, очевидно, одна и та же и равна y, а на пути отъ крана до резервуара она тоже одна и та же во всѣхъ точкахъ и равна h_2. Пусть $y'<y''$, оставаясь все-таки больше, чѣмъ h_2. Если теперь открыть кранъ на трубѣ *CD*, то вода потечетъ по ней отъ *C* къ *D*, благодаря чему неизбѣжно понизится давленіе въ точкѣ *C*, такъ какъ ясно, что расходъ въ трубѣ *AC* возрастетъ. А это и значитъ, что корень α уравненія (40) меньше наименьшаго изъ значеній y' и y''.

Если въ сѣти имѣется не одна точка развѣтвленія, а m, въ которыхъ сходится n трубъ, можемъ написать:

для каждой точки развѣтвленія ур-іе расхода, подобно (36) или (38), а всего	m ур-ій
для каждой вѣтви ур-іе паденія высоты пьезометра, подобно (37) или (39), а всего	n ур-ій
Итого получимъ . .	$(m+n)$ ур-ій.

Неизвѣстными же являются n скоростей и m пьезометрическихъ высотъ; остальныя величины (діаметры, длины и пьезометрическія высоты въ концахъ каждой вѣтви) попрежнему считаемъ данными. Система ур-ій оказывается вполнѣ опредѣленной и можетъ быть, слѣдовательно, разрѣшена, хотя и не безъ чисто вычислительныхъ затрудненій.

II) Даны длины трубъ, высоты h_1, h_2 и h_3, а также расходы Q_1, Q_2 и Q_3; требуется опредѣлить діаметры и пьезометрическую высоту y. Вопросъ становится неопредѣленнымъ, такъ какъ ур-ія (36) и (38) обращаются въ соотношенія между заданными величинами, и для опредѣленія четырехъ неизвѣстныхъ остаются только три ур-ія (37) или (39). Можно составить недостающее четвертое ур-іе, какъ условіе наименьшей стоимости эксплоатаціи трубъ. Для этого нужно выразить стоимость постройки трубы, которая обыкновенно можетъ быть принята пропорціональной діаметру трубы. Ежегодный расходъ, зависящій отъ этой стоимости сооруженія, опредѣляется процентами на затраченный капиталъ, на погашеніе, на фондъ возобновленія, на ремонтъ и т. д. Другая составная часть годового расхода состоитъ изъ стоимости энергіи, затрачиваемой на перекачку; эта послѣдняя пропорціональна потерянному напору, т.-е. разности, въ которую войдетъ y. Послѣднюю величину можно исключить изъ выраженія стоимости эксплоатаціи при помощи ур-ій, подобныхъ (37) или (39). Наконецъ, взявъ производную отъ выраженія стоимости эксплоатаціи по діаметру, получимъ новое ур-іе, связывающее расходы и діаметры, и вопросъ становится опредѣленнымъ *). Однако практически важна наименьшая стоимость эксплоатаціи всего водопроводнаго сооруженія, а не одной его составной части—трубопровода. Поэтому слѣдуетъ принять во вниманіе при такихъ подсчетахъ и стоимость водоподъемныхъ зданій, ихъ оборудованія машинами, стоимость персонала и т. п., и вопросъ чрезвычайно осложняется. Въ серьезныхъ случаяхъ составляютъ нѣсколько проектовъ водопроводовъ и для каждаго изъ нихъ выводятъ стоимость сооруженія и его эксплоатаціи. При составленіи же проекта имѣютъ въ виду рядъ условій, предписываемыхъ контрактомъ; однимъ изъ главнѣйшихъ обыкновенно является требованіе, чтобы нигдѣ въ водопроводной линіи давленіе не падало ниже опредѣленной нормы: напр., ставится условіе, чтобы во всякой точкѣ водопровода вода могла подняться на высоту четырехъэтажнаго дома. Критическими точками, для которыхъ это условіе должно быть провѣряемо, являются всѣ точки развѣтвленія, а также тѣ точки водопроводной линіи, которыя по своему положенію являются возвышенными.

Здѣсь не мѣсто выяснять всѣ условія, которыя нужно имѣть въ виду при проектированіи водоснабженія, а также тѣ мѣры, которыми достигается соблюденіе предписанныхъ требованій,—это задача курса водоснабженія; отмѣтимъ только, что надлежащимъ выборомъ діаметра всегда можно достигнуть того, чтобы высота пьезометра нигдѣ не опускалась ниже предписанной нормы. Въ самомъ дѣлѣ, мы имѣемъ выраженіе паденія высоты пьезометра въ видѣ:

$$h-y=\zeta\frac{4l}{d}\ \frac{v^2}{2g}=\zeta\frac{64}{\pi^2}\ \frac{l}{2g}\ \frac{Q^2}{d^5}.$$

Ясно, что надлежащимъ увеличеніемъ d, при заданныхъ Q и l, всегда можно получить любое малое паденіе $(h-y)$ высоты пьезометра.

Въ заключеніе этого параграфа замѣтимъ, что разсмотрѣнная схема съ небольшими измѣненіями примѣнима къ ряду другихъ случаевъ, напр., если бы на трубѣ AD въ точкѣ C было сдѣлано просто отверстіе, діаметромъ d_3, вмѣсто трубы съ резервуаромъ B. При этомъ, конечно, должна быть задана координата h_c центра тяжести отверстія C. Вообще говоря, можетъ оказаться, что h_c и больше, и меньше, чѣмъ h_2. Въ первомъ случаѣ не возникаетъ вопроса о направленіи теченія въ трубахъ: черезъ отверстіе C выливается

*) Совершенно подобными соображеніями можно установить наивыгоднѣйшій діаметръ трубопровода, ведущаго воду въ видахъ утилизаціи ея энергіи. Тутъ только не будетъ расхода на энергію, затрачиваемую на перекачку, но будетъ убытокъ отъ невозможности продать ту энергію, которая тратится въ трубопроводѣ. Ясно, что тутъ разницы никакой нѣтъ.

часть того расхода, которая течетъ по трубѣ *AC*; остальная течетъ дальше въ резервуаръ *D*. Но если $h_c < h_2$, то кромѣ такого направленія теченія возможно также, что оба резервуара питаютъ отверстіе. Рѣшеніе ведется вполнѣ согласно вышеуказанному; необходимо только вмѣсто третьихъ строкъ въ уравненіяхъ (37) и (39) написать:

$$y - h_c = (1 + \zeta)\, \frac{v_c^2}{2g},$$

а въ послѣднихъ членахъ уравненій неразрывности (36) и (38) нужно внести коэффиціентъ расхода μ. Числовыя значенія коэффиціентовъ ζ и μ надо брать соотвѣтственно устройству отверстій. Примѣненіе правила Dupuit хотя и возможно, но большого упрощенія не вноситъ.—Во избѣжаніе недоразумѣній отмѣтимъ еще разъ, что въ такъ написанныхъ уравненіяхъ (36) и (38) *скоростной напоръ въ трубѣ приравненъ нулю*. Поэтому, рѣшивъ вопросъ, слѣдуетъ убѣдиться въ величинѣ сдѣланной ошибки и, въ случаѣ надобности, исправить ее, внеся скоростной напоръ въ соотвѣтствующія части уравненій (36) и (38).

§ 27. Непрерывная раздача.

Разсмотримъ случай непрерывной раздачи по трубѣ постояннаго діаметра D. Очевидно, здѣсь мы имѣемъ дѣло съ неравномѣрнымъ движеніемъ; въ то же время такую трубу можно разсматривать, какъ случай сложнаго водопровода съ безконечно большимъ числомъ точекъ отвѣтвленій. Разсуждаемъ здѣсь слѣдующимъ образомъ:

На всякомъ элементѣ трубы длиною ds потеря напора dh можетъ быть представлена такъ:

$$dh = \frac{4\, ds}{D}\, \zeta_r\, \frac{v^2}{2g}.$$

Пусть труба имѣетъ длину l и расходъ въ ея началѣ Q. Предполагая, что раздача по длинѣ трубы происходитъ равномѣрно, такъ что на единицѣ длины отдается $\frac{Q}{l} = q$ mtr^3, получимъ, что черезъ какое-нибудь сѣченіе, отстоящее отъ начала на разстояніи s, протекаетъ количество жидкости, равное $ql - qs = q\,(l - s)$, такъ какъ на длинѣ s отдано qs куб. метровъ воды; поэтому скорость въ этомъ сѣченіи

$$v = \frac{q(l-s)}{\frac{\pi D^2}{4}}.$$

Слѣдовательно, потеря напора dh на длинѣ ds смежнаго съ этимъ сѣченіемъ элемента трубы будетъ:

$$dh = \frac{4\, ds}{D^5}\, \zeta_r\, \frac{q^2 (l-s)^2\, 16}{2g\,\pi^2} = \frac{64\, \zeta_r\, q^2}{2g\,\pi^2}\, \frac{(l-s)^2}{D^5}\, ds = \frac{A}{D^5}\, (l-s)^2\, ds,$$

гдѣ буквою A для сокращенія обозначенъ постоянный коэф-тъ:

$$A = \frac{64\, \zeta_r\, q^2}{2g\,\pi^2}.$$

Вся потеря напора h на длинѣ l трубы опредѣляется ур-іемъ:

$$h = \frac{A}{D^5}\int_0^l (l-s)^2 ds = \frac{A}{D^5}\left\{ l^3 - l^3 + \frac{l^3}{3} \right\} = \frac{1}{3} \cdot \frac{Al^3}{D^5}.$$

Если бы раздача воды была только въ концѣ трубы, то потеря напора h' опредѣлялась бы

$$h' = \frac{4\,l}{D}\,\zeta_r\,\frac{16\,q^2 l^2}{2g D^4 \pi^2} = A\,\frac{l^3}{D^5} = 3h\,,$$

т.-е. при равномѣрной раздачѣ воды потеря напора оказывается втрое меньшей, нежели при раздачѣ того же расхода въ концѣ трубы. Такъ какъ необходимый напоръ обыкновенно создается искусственно при помощи насосовъ или путемъ надлежаще высокаго расположенія питающаго резервуара, то, конечно, желательно имѣть его возможно малымъ, и съ этой точки зрѣнія выгодно примѣнять равномѣрную отдачу. Но равномѣрная раздача воды въ такой формѣ, какъ это предположено выше, неосуществима практически, ибо отдача воды можетъ быть осуществлена только помощью отвѣтвленій, поставленныхъ въ отдѣльныхъ точкахъ магистрали. Какъ бы то ни было, во всякомъ случаѣ выгодно возможно болѣе увеличивать въ трубѣ число пунктовъ, отдающихъ воду,—потеря напора будетъ меньшая.

Обратно, оставляя ту же потерю, можно, примѣняя непрерывную раздачу воды, пропустить черезъ ту же трубу большее количество воды, а именно, называя $\frac{A}{q^2}$ черезъ B и помня, что $ql = Q$, при равномѣрной раздачѣ имѣемъ:

$$h = \frac{1}{3}\,A\,\frac{l^3}{D^5} = \frac{1}{3}\,Bq^2 l^2\,\frac{l}{D^5} = \frac{B}{3}\,Q^2\,\frac{l}{D^5};$$

при отдачѣ въ концѣ въ количествѣ Q_1 mtr имѣемъ:

$$h' = \frac{64\,\zeta_r}{2g\,\pi^2}\,Q_1{}^2\,\frac{l}{D^5} = BQ_1{}^2\,\frac{l}{D^5}.$$

При условіи одинаковой потери напора имѣемъ:

$$Q_1{}^2 = \frac{1}{3}\,Q^2$$

или

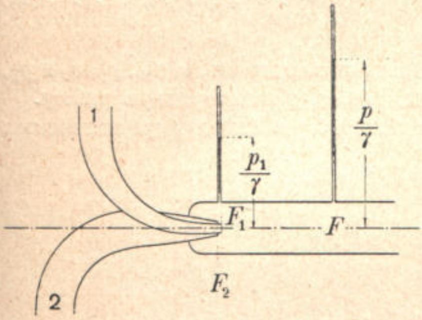
$$\frac{Q}{Q_1} = \sqrt{3} = 1{,}73.$$

Итакъ, при равномѣрной отдачѣ воды черезъ одну и ту же трубу, при одинаковой потерѣ напора, можно пропустить черезъ начальное сѣченіе трубы объемъ воды, въ 1,73 раза большій, нежели при отдачѣ въ концѣ.

§ 28. Водоструйные приборы.

Въ нѣкоторомъ отношенiи къ сложному водопроводу стоятъ водоструйные приборы, представляющiе собою тоже подобiе точекъ развѣтвленiя; разница только въ томъ, что въ сложномъ водопроводѣ движенiе опредѣляется исключительно соотношенiями между пьезометрическими давленiями и потерями напора въ отдѣльныхъ вѣтвяхъ; здѣсь же движенiе въ одной изъ вѣтвей производится за счетъ части энергiи движенiя въ другой вѣтви *). Разсмотримъ сначала, что происходитъ въ такомъ насосѣ, состоящемъ (фиг. 148), въ общемъ, изъ двухъ трубъ (1) и (2), оканчивающихся двумя концентрическими соплами, которыя затѣмъ переходятъ въ одну общую трубу; сѣченiе внутренняго сопла назовемъ черезъ F_1, наружнаго—черезъ F_2, сѣченiе общей трубы—черезъ F; соотвѣтственныя скорости пусть будутъ v_1, v_2 и v (послѣдняя взята тамъ, гдѣ обѣ струи уже смѣшались и идутъ съ общею среднею скоростью). Давленiе въ плоскости обоихъ сопелъ назовемъ черезъ p_1, а тамъ, гдѣ скорость есть v,—черезъ p. Предполагая, что приборъ перекачиваетъ воду, мы должны, очевидно, считать γ во всѣхъ мѣстахъ насоса постояннымъ. Предположимъ, что оси всѣхъ трехъ частей прибора лежатъ на одной горизонтали.

Внутреннее сопло подаетъ $F_1 v_1 \gamma$ *kgr* воды въ секунду; идя со скоростью v_1 и находясь подъ давленiемъ p_1, это количество воды приноситъ съ собою запасъ работы:



Фиг. 148.

$$F_1 v_1 \gamma \frac{v_1^2}{2g} + F_1 v_1 p_1.$$

Вторая струя приноситъ запасъ работы

$$F_2 v_2 \gamma \frac{v_2^2}{2g} + F_2 v_2 p_1.$$

Изъ трубы уносится запасъ работы

$$F v \gamma \frac{v^2}{2g} + F v p.$$

Наконецъ, первые $F_1 v_1 \gamma$ *kgr*, измѣнивъ внезапно скорость изъ v_1 на v, преодолѣли при этомъ сопротивленiе удара, на что затрачена ими работа:

$$F_1 v_1 \gamma \frac{(v_1 - v)^2}{2g}.$$

Подобнымъ же образомъ, вторая струя затратила при внезапномъ измѣненiи скорости энергiю въ количествѣ

$$F_2 v_2 \gamma \frac{(v_2 - v)^2}{2g}.$$

По закону сохраненiя энергiи слѣдуетъ, что запасъ принесенной работы равенъ суммѣ унесенной и потерянной работъ; поэтому можемъ написать:

$$F_1 v_1 \gamma \frac{v_1^2}{2g} + F_2 v_2 \gamma \frac{v_2^2}{2g} + F_1 v_1 p_1 + F_2 v_2 p_1 =$$
$$= F v \gamma \frac{v^2}{2g} + F v p + F_1 v_1 \gamma \frac{(v_1 - v)^2}{2g} + F_2 v_2 \gamma \frac{(v_2 - v)^2}{2g} \quad \ldots \ldots \ldots (45)$$

*) Въ § 24 былъ разсмотрѣнъ водоструйный насосъ для выкачиванiя воздуха; здѣсь мы будемъ имѣть въ виду, что насосъ употребляется для перекачиванiя воды.

Очевидно также, что при разсматриваемомъ направленіи теченія можемъ написать:

$$F_1 v_1 + F_2 v_2 = Fv \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (46)$$

Имѣя это въ виду, получимъ изъ (45):

$$Fv\,\frac{p-p_1}{\gamma} = F_1 v_1 \frac{2v_1 v - v^2}{2g} + F_2 v_2 \frac{2v_2 v - v^2}{2g} - (F_1 v_1 + F_2 v_2)\frac{v^2}{2g},$$

или, послѣ приведенія:

$$\frac{p-p_1}{\gamma} = \frac{v}{g}\left[\frac{F_1 v_1^2 + F_2 v_2^2}{F_1 v_1 + F_2 v_2} - v\right], \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (47)\,^{*})$$

что можно переписать такъ:

$$\frac{p-p_1}{\gamma} = \frac{1}{g}\left[\frac{F_1}{F} v_1^2 + \frac{F_2}{F} v_2^2 - v^2\right] \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (47')$$

Наконецъ, энергія, потерянная обѣими струями при прохожденіи черезъ приборъ, оцѣнивается величиной

$$L_B = F_1 v_1 \gamma \frac{(v_1 - v)^2}{2g} + F_2 v_2 \gamma \frac{(v_2 - v)^2}{2g} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (48)$$

Ур-ія (46), (47) и (48) даютъ возможность опредѣлить по заданнымъ, напр., v_1, v_2 и p_1, а также по размѣрамъ прибора, остальныя величины, т.-е. v, p и потерянную работу.

Легко выразить и коэффиціентъ полезнаго дѣйствія прибора. Если движущей является центральная струя, то затраченная работа равна:

$$L = F_1 v_1 \gamma \frac{v_1^2 - v^2}{2g} + F_1 v_1 (p_1 - p),$$

а полезная работа равна:

$$L_n = F_2 v_2 \gamma \frac{v^2 - v_2^2}{2g} + F_2 v_2 (p - p_1).$$

Слѣдоват., коэф-тъ полезнаго дѣйствія (мы его подробно не выписываемъ):

$$\eta = \frac{L_n}{L}.$$

Перейдемъ теперь къ болѣе конкретному случаю (фиг. 149). Изъ резервуара *A* вода подается по трубѣ къ центральному соплу и далѣе черезъ трубу проходитъ въ резервуаръ *D*; все протеканіе происходитъ подъ напоромъ h_2. Кромѣ того, насосъ сосетъ воду изъ резервуара *B* и гонитъ ее въ тотъ же резервуаръ *D*; при этомъ жидкость подымается на высоту $h_1 - h_2$. Оставимъ старыя обозначенія для площадей, скоростей и давленій. Сопротивленія въ трубѣ *AC*, подводящей рабочую воду, состоятъ изъ общихъ и особыхъ сопротивленій; если труба дана, т.-е., если даны ея длина и сѣченіе, а также площадь сопла F_1, то, въ силу того, что всѣ потери напора пропорціональны квадрату скорости, легко выразить эти потери и отнести ихъ къ скорости v_1 въ соплѣ, внося по ур-ію расхода соотношенія между скоростью v_1 и тѣми скоростями, которыя входятъ въ выраженія отдѣльныхъ потерь напора. Тогда во всякомъ случаѣ получимъ, что потеря

---

*) Если концентрическихъ сопелъ, оканчивающихся въ одной плоскости, имѣется не два, а болѣе, то, по аналогіи съ предыдущимъ, ур-іе (47) можно написать такъ:

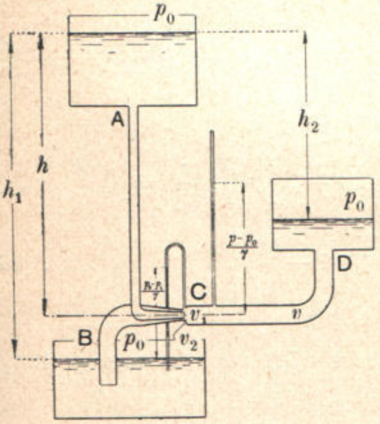
$$\frac{p-p_1}{\gamma} = \frac{v}{g}\left[\frac{\Sigma F_k v_k^2}{\Sigma F_k v_k} - v\right].$$

напора можетъ быть выражена, какъ $\zeta_1 \frac{v_1^2}{2g}$, гдѣ, конечно, коэффиціентъ ζ_1 есть нѣкоторый производный коэф-тъ, ни въ какихъ таблицахъ не находящійся. Подобнымъ же образомъ потерю напора во всасывающей трубѣ, отнесенную къ скорости v_2, назовемъ черезъ $\zeta_2 \frac{v_2^2}{2g}$, а потерю въ нагнетательной трубѣ *CD*, которую мы полагаемъ цилиндрической съ сѣченіемъ F, обозначимъ черезъ $\zeta \frac{v^2}{2g}$. Ур-ія Д. Бернулли для отдѣльныхъ вѣтвей будутъ:

для *AC*:
$$\frac{p_0}{\gamma} + h = \frac{p_1}{\gamma} + (1 + \zeta_1) \frac{v_1^2}{2g} \quad \ldots \ldots (49)$$

для *BC*:
$$\frac{p_0}{\gamma} - (h_1 - h) = \frac{p_1}{\gamma} + (1 + \zeta_2) \frac{v_2^2}{2g} \quad \ldots \ldots (50)$$

для *CD*:
$$\frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} - (h - h_2) = \frac{p_0}{\gamma} + \zeta \frac{v^2}{2g} + \frac{v^2}{2g} \quad \ldots \ldots (51')$$



Фиг. 149.

Послѣдній членъ въ послѣднемъ ур-іи имѣетъ значеніе потери напора на ударъ при переходѣ изъ трубы *CD* въ резервуаръ *D*, гдѣ скорость предположена исчезающе малой; если бы резервуара *D* не было, то этотъ членъ выражалъ бы уносимую изъ трубы живую силу на каждый kgr воды.

Кромѣ того, для самого насоса мы имѣемъ ур-іе (47′), по которому

$$\frac{p}{\gamma} - \frac{p_1}{\gamma} = \frac{1}{g}\left[\frac{F_1}{F} v_1^2 + \frac{F_2}{F} v_2^2 - v^2\right].$$

Исключая помощью этого ур-ія давленія p изъ ур-ія (51′), получимъ окончательно для этой вѣтви *CD*, послѣ приведенія:

$$\frac{p_1}{\gamma} - (h - h_2) = \frac{p_0}{\gamma} + (2 + \zeta) \frac{v^2}{2g} - \frac{2F_1}{F} \frac{v_1^2}{2g} - \frac{2F_2}{F} \frac{v_2^2}{2g} \quad \ldots \ldots (51)$$

Присоединяя къ ур-іямъ (49), (50) и (51) еще ур-іе расхода (46), получимъ для опредѣленія неизвѣстныхъ скоростей v_1, v_2, v и давленія p_1 четыре ур-ія, — вопросъ, такимъ образомъ, можно считать рѣшеннымъ. Именно, вносимъ въ ур-іе (51) значеніе v, опредѣленное изъ ур-ія расхода. Собирая надлежащимъ образомъ члены, получимъ:

$$\frac{p_0}{\gamma} - \frac{p_1}{\gamma} + h - h_2 =$$
$$= \left[2\frac{F_1}{F} - (2+\zeta)\left(\frac{F_1}{F}\right)^2\right]\frac{v_1^2}{2g} + \left[2\frac{F_2}{F} - (2+\zeta)\left(\frac{F_2}{F}\right)^2\right]\frac{v_2^2}{2g} - 2(2+\zeta)\frac{F_1}{F}\,\frac{F_2}{F}\,\frac{v_1 v_2}{2g}.$$

Дѣлимъ уравненіе на $\frac{v_1^2}{2g}$ и располагаемъ его правую часть по нисходящимъ степенямъ отношенія $\frac{v_2}{v_1}$; получаемъ:

$$\frac{2g}{v_1^2}\left[\frac{p_0}{\gamma} - \frac{p_1}{\gamma} + h - h_2\right] =$$
$$= \left[2\frac{F_2}{F} - (2+\zeta)\left(\frac{F_2}{F}\right)^2\right]\left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2 - 2(2+\zeta)\frac{F_1}{F}\,\frac{F_2}{F}\left(\frac{v_2}{v_1}\right) + \left[2\frac{F_1}{F} - (2+\zeta)\left(\frac{F_1}{F}\right)^2\right] \quad \ldots (D)$$

Первую часть этого ур-ія преобразуемъ помощью ур-ій (49) и (50). Пользуясь ур-іемъ (49), можемъ написать:

$$\frac{2g}{v_1^2}\left[\frac{p_0}{\gamma}-\frac{p_1}{\gamma}+h-h_2\right]=\frac{2g}{v_1^2}\left[(1+\zeta_1)\frac{v_1^2}{2g}-h_2\right]=(1+\zeta_1)-\frac{2g}{v_1^2}h_2 \quad \ldots\ldots (E)$$

Далѣе, вычитая (50) изъ (49), находимъ:

$$\frac{v_1^2}{2g}=\frac{h_1}{(1+\zeta_1)-(1+\zeta_2)\left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2} \quad \ldots\ldots\ldots (52)$$

Поэтому выраженіе (E), т.-е. первая часть ур-ія (D), преобразуется далѣе въ:

$$(1+\zeta_1)-\frac{h_2}{h_1}\left[(1+\zeta_1)-(1+\zeta_2)\left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2\right]=\left(1-\frac{h_2}{h_1}\right)(1+\zeta_1)+(1+\zeta_2)\frac{h_2}{h_1}\left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2 \ldots (F)$$

Замѣняя теперь этимъ выраженіемъ (F) первую часть ур-ія (D) и собирая члены съ $\left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2$, получаемъ ур-іе:

$$\left[(1+\zeta_2)\frac{h_2}{h_1}+(2+\zeta)\left(\frac{F_2}{F}\right)^2-2\frac{F_2}{F}\right]\left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2+2(2+\zeta)\frac{F_1}{F}\,\frac{F_2}{F}\left(\frac{v_2}{v_1}\right)=$$

$$=2\frac{F_1}{F}-(2+\zeta)\left(\frac{F_1}{F}\right)^2-(1+\zeta_1)\left(1-\frac{h_2}{h_1}\right) \quad \ldots\ldots\ldots (53)$$

Отсюда можемъ найти отношеніе $\frac{v_2}{v_1}$, а по нему, при помощи (52), опредѣлимъ скорость v_1; дальнѣйшее рѣшеніе совершенно просто.

Опредѣливъ такимъ образомъ всѣ скорости и давленія, остается выразить коэффиціентъ полезнаго дѣйствія прибора. Работа, затраченная въ единицу времени, есть, очевидно, $F_1 v_1 \gamma h_2$; полезная же есть $F_2 v_2 \gamma (h_1 - h_2)$, поэтому

$$\eta=\left(\frac{h_1}{h_2}-1\right)\frac{F_2}{F_1}\cdot\frac{v_2}{v_1} \quad \ldots\ldots\ldots (54)$$

По поводу этихъ ур-ій слѣдуетъ отмѣтить, что ни въ одно изъ нихъ (46, 52, 53 и 54), служащихъ для опредѣленія скоростей и коэф-та полезнаго дѣйствія, высота h, опредѣляющая расположеніе прибора, не входитъ; другими словами, насосъ можетъ служить, какъ всасывающій (эжекторъ) и какъ нагнетательный, или какъ то и другое вмѣстѣ. При этомъ, если коэф-тъ полезнаго дѣйствія прибора и мѣняется, то только потому, что при разныхъ положеніяхъ насоса мѣняются коэф-ты ζ_1, ζ_2 и ζ. Можно, между прочимъ, указать, что увеличеніе высоты h, т.-е. уменьшеніе всасыванія, несомнѣнно удлиняетъ подводящую трубу и укорачиваетъ всасывающую; поэтому съ увеличеніемъ h несомнѣнно увеличивается ζ_1 и уменьшается ζ_2; изъ того, что первый коэф-тъ входитъ въ постоянный членъ ур-ія (53), а второй—въ коэф-тъ при второй степени отношенія $\left(\frac{v_2}{v_1}\right)$, можно заключить, что уменьшеніе всасыванія дастъ для даннаго насоса бо̀льшія отношенія $\left(\frac{v_2}{v_1}\right)$, т.-е. бо̀льшіе коэф-ты полезнаго дѣйствія. Но, помимо этого, изъ (52) видно, что чѣмъ больше ζ_2 и меньше ζ_1, тѣмъ хуже, ибо тѣмъ меньшія отношенія необходимы для $\left(\frac{v_2}{v_1}\right)$, чтобы для работы насоса не получить черезчуръ большихъ скоростей v_1; ур-іе (52) кладетъ даже опредѣленный предѣлъ для $\left(\frac{v_2}{v_1}\right)$,—именно, должно быть:

$$\frac{v_2}{v_1} < \frac{1+\zeta_1}{1+\zeta_2}\,; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (G)$$

При несоблюденіи этого условія скорость v_1 становится мнимой, т.-е. неосуществимой. Здѣсь видимъ новое указаніе на неудобство большихъ высотъ всасыванія и даже большихъ длинъ всасывающихъ трубъ. Кромѣ этого, очевидно, все-таки, что высота h, вообще, не безразлична: отъ нея зависитъ давленіе p_1 (ур-іе 51), которое, конечно, отнюдь не должно падать ниже нуля,—иначе движеніе воды во всасывающей трубѣ прекратится, и насосъ не будетъ работать.

Далѣе, очевидно, что приборъ тогда является насосомъ, когда по ур-ію (53) можно получить одинъ положительный корень; ибо въ противномъ случаѣ окажется, что или сосудъ **A** питаетъ оба сосуда **B** и **D**, или же, при нулевомъ значеніи $\frac{v_2}{v_1}$, вода просто течетъ изъ **A** въ **D**, а труба **BC** не подаетъ ни капли воды. Приведя ур-іе (53) къ нормальному виду $ax^2+bx+c=0$, т.-е. положивъ:

$$a=(1+\zeta_2)\frac{h_2}{h_1}+(2+\zeta)\left(\frac{F_2}{F}\right)^2-2\frac{F_2}{F},$$

$$b=2(2+\zeta)\frac{F_1}{F}\frac{F_2}{F},$$

$$c=(1+\zeta_1)\left(1-\frac{h_2}{h_1}\right)+(2+\zeta)\left(\frac{F_1}{F}\right)^2-2\frac{F_1}{F},$$

видимъ, что такъ какъ коэффиціентъ b, по существу, положителенъ, то положительные корни возможны, если одновременно существуютъ слѣдующіе знаки при коэф-тахъ:

$$\left.\begin{array}{l}\text{если } a<0\\ \text{„}\quad c<0\end{array}\right\}, \text{ то ур-іе имѣетъ 2 положительныхъ корня;}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{„}\quad a<0\\ \text{„}\quad c>0\end{array}\right\}, \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{1 положительный корень;}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{„}\quad a>0\\ \text{„}\quad c<0\end{array}\right\}, \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{1 положительный корень.}$$

Итакъ, при отрицательномъ a,—другими словами, если

$$\frac{h_2}{h_1} < \frac{\left[2-(2+\zeta)\frac{F_2}{F}\right]\frac{F_2}{F}}{1+\zeta_2},$$

то ур-іе (53), во всякомъ случаѣ, имѣетъ рѣшеніе, соотвѣтствующее вопросу, если притомъ оно удовлетворяетъ условію (G), полученному нами изъ ур-ія (52). При этомъ для $\frac{h_2}{h_1}$ указывается высшій предѣлъ; чѣмъ онъ самъ по себѣ ниже, тѣмъ лучше, ибо тѣмъ больше η.

Наоборотъ, если a положительно, т.-е.

$$\frac{h_2}{h_1} > \frac{\left[2-(2+\zeta)\frac{F_2}{F}\right]\frac{F_2}{F}}{1+\zeta_2}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (55)$$

то необходимо имѣть c отрицательнымъ, т.-е. необходимо, чтобы:

$$1-\frac{h_2}{h_1} < \frac{\left[2-(2+\zeta)\frac{F_1}{F}\right]\frac{F_1}{F}}{1+\zeta_1},$$

иначе:

$$\frac{h_2}{h_1} > 1-\frac{\left[2-(2+\zeta)\frac{F_1}{F}\right]\frac{F_1}{F}}{1+\zeta_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (56)$$

Неравенства (55) и (56) даютъ въ этомъ случаѣ низшій предѣлъ для отношенія $\frac{h_2}{h_1}$, чѣмъ отчасти уже опредѣляется максимальная возможная высота подъема воды $h_1 - h_2$, а слѣд., и максимальная величина коэф-та полезнаго дѣйствія. Именно такое соотношеніе данныхъ величинъ и имѣетъ обыкновенно мѣсто.

Вообще полезное дѣйствіе такихъ насосовъ не велико; главная потеря есть та энергія L_B [ур-іе (48)], которая пропадаетъ внутри самого насоса и превращается въ теплоту. Уменьшить отчасти эту потерю можно, ставя на пути соединившихся струй коническій расходящійся насадокъ.

Здѣсь умѣстно отмѣтить, что изложенная теорія такихъ приборовъ, данная въ существенныхъ чертахъ Zeuner'омъ, примѣнима не только къ случаю воды *). Она пригодна и для двухъ упругихъ жидкостей, коль скоро есть возможность считать, что γ до смѣшенія и послѣ него сохраняетъ одно и то же значеніе; если, напр., разсматривать вмѣсто воды воздухъ, то вышенаписанныя ур-ія передадутъ явленіе достаточно точно, если движущая струя воздуха вытекаетъ не подъ очень большимъ давленіемъ, такъ, чтобы можно было пренебречь измѣненіями γ, а равно и тепловымъ обмѣномъ, при этомъ происходящимъ. Подобный же случай примѣнимости этихъ ур-ій мы имѣемъ въ паровозномъ конусѣ, гдѣ плотности мятаго пара и горячихъ продуктовъ горѣнія близки между собою и, кромѣ того, входятъ и выходятъ изъ прибора при мало измѣняющихся давленіяхъ. Наоборотъ, къ инжектору, гдѣ смѣшиваются паръ и вода, эта теорія совсѣмъ не примѣнима. Интересно отмѣтить, что то, что въ водоструйномъ насосѣ является чистой и даже главной потерей,—потеря работы на ударъ и обращеніе ея въ теплоту,—въ инжекторѣ, питающемъ котелъ, является уже не потерей; нагрѣваніе питательной воды для котла есть полезный, попутно достигаемый результатъ при работѣ инжектора. Наоборотъ, если инжекторъ употребляется, какъ, вообще, средство для перекачки жидкости, напр., если бы имъ пользовались въ качествѣ пожарнаго насоса, то упомянутое нагрѣваніе воды опять утрачиваетъ характеръ полезности, и такое примѣненіе инжектора не можетъ быть экономично (хотя иногда, въ силу удобства и компактности, инжекторами пользуются и для этой цѣли, напр., при тушеніи пожаровъ на желѣзнодорожныхъ станціяхъ помощью паровозовъ и т. п.).

---

*) Освѣщая вопросъ, эта теорія, къ сожалѣнію, не примѣнима для практическаго проектированія такихъ приборовъ. Нѣкоторыя данныя по этому вопросу можно найти въ статьѣ *И. Тиме* въ „Горномъ Журналѣ“ за 1892, № 2.

§ 29. О гидравлическомъ ударѣ въ водопроводныхъ трубахъ.

При расчетѣ водопроводовъ, кромѣ необходимыхъ діаметровъ трубъ, нужно опредѣлять еще толщину ихъ стѣнокъ. Воздѣйствія, которымъ можетъ подвергнуться водопроводная труба во время своей службы и которыя нужно имѣть въ виду при опредѣленіи ея прочныхъ размѣровъ, очень разнообразны. Прежде всего обращаетъ на себя вниманіе опредѣленіе толщины стѣнки изъ расчета на разрывъ тѣмъ наибольшимъ внутреннимъ гидростатическимъ давленіемъ, которое имѣетъ мѣсто въ наиболѣе низкой точкѣ водопроводной сѣти и которое мы представляемъ себѣ одинаковымъ во всѣхъ точкахъ периметра трубы, пренебрегая вліяніемъ ея діаметра, если труба горизонтальна или близка къ этому положенію; расчетное, «пробное» давленіе, которымъ обыкновенно испытывается при пріемкѣ каждая труба, принимается на условленную величину, напр., около 5 *atm*, больше этого гидростатическаго давленія. Далѣе, металлическія трубы водопроводовъ, болѣе или менѣе глубоко закапываемыя для предохраненія отъ замерзанія, нерѣдко могутъ подвергаться изгибающимъ воздѣйствіямъ, если при тѣхъ или иныхъ строительныхъ работахъ подъ городскими улицами, или благодаря размывающему дѣйствію утечки черезъ неплотности самой трубы, она окажется опирающейся своими концами на грунтъ и поддерживающей не только свой вѣсъ и вѣсъ заключенной въ ней жидкости, но также и нѣкоторую нагрузку въ видѣ слоя вышележащей земли, проѣзжающей повозки и т. п. Въ трубахъ очень большого діаметра и притомъ подвергнутыхъ не очень большому внутреннему давленію, ошибочно считать давленіе равномѣрнымъ; напротивъ, при небольшомъ уклонѣ оси трубы совершенно явно выступаетъ изгибающій моментъ въ плоскостяхъ перпендикулярныхъ къ оси трубы, сплющивающій круглое сѣченіе. Въ этомъ смыслѣ можетъ оказаться опаснымъ періодъ наполненія водою, особенно для трубъ желѣзобетонныхъ, достигающихъ огромныхъ діаметровъ свыше 3 *mtr*. И т. д... Отсылая интересующихся къ указываемымъ ниже источникамъ *), отмѣтимъ еще одно обстоятельство, играющее роль въ этомъ вопросѣ. Водопроводная сѣть всегда снабжается задвижками, кранами и т. п. затворами, которые позволяютъ болѣе или менѣе быстро прекращать истеченіе. Если запираніе происходитъ быстро,— будемъ говорить, моментально,—то это сводится къ внезапной остановкѣ всей колонны воды, которая двигалась въ трубѣ; живая сила этой массы погашается внезапно, отчего, конечно, давленіе въ трубѣ сильно повышается. Въ этомъ и состоитъ явленіе гидростатическаго удара, остававшееся мало

---

*) К. М. Игнатовъ. „Толщина стѣнокъ чугунныхъ трубъ“ и „Надежность и наивыгоднѣйшіе размѣры чугунныхъ трубопроводовъ“. Обѣ статьи отпечатаны „на правахъ рукописи“ въ видѣ докладовъ Моск. Гор. Управѣ въ 1903 г. и войдутъ въ составъ большой издающейся работы этого автора—„Изъ практики проектированія инженерныхъ сооруженій“.— Th. Forchheimer: Zur Festigkeit weiter Rohre въ журналѣ „Zeitschr. d. österr. Ing. u. Arch.-Vereines“, 1904, №№ 9 и 10. См. также Handbuch der Ingenieurwissenschaften, часть третья съ общимъ заглавіемъ Der Wasserbau; нужныя свѣдѣнія помѣщены въ 13 томѣ этой части, носящемъ заглавіе Ausbau von Wasserkräften, написанномъ инж. Th. Koehn. стр. 889 и слѣд. Leipzig, 1908.

изслѣдованнымъ до 1897 года, когда проф. Императорскаго Московскаго Техническаго Училища Н. Е. Жуковскій разсмотрѣлъ этотъ вопросъ теоретически и провѣрилъ свои выводы на рядѣ наблюденій, произведенныхъ на Алексѣевской водокачкѣ московскаго водопровода. До тѣхъ поръ было извѣстно только, что нельзя ставить на водопроводныя линіи быстро запирающихся затворовъ, и если конструкторы при расчетѣ толщины стѣнки и оцѣнивали увеличеніе давленія отъ удара, то только по чутью: такъ, напр., Fanning *) считаетъ, что ударъ вызываетъ увеличеніе не больше, какъ въ 100 фунт. на 1 кв. дм., т.-е. около 7 атм., и это добавочное давленіе онъ кладетъ въ основу расчета толщины стѣнки, которую ему еще приходится увеличивать, чтобы подогнать полученный результатъ къ исполняемымъ размѣрамъ. Мы увидимъ ниже, что ударъ можетъ вызвать и дѣйствительно вызываетъ повышеніе давленія гораздо большее, нежели это полагаетъ Fanning. Кромѣ того, вопросъ о гидравлическомъ ударѣ пріобрѣлъ за послѣдніе годы большое практическое значеніе, благодаря турбиннымъ установкамъ съ ихъ длинными и дорогими трубопроводами и быстро закрывающими автоматическими регуляторами числа оборотовъ турбинъ. Ясно, что крайне важно защитить трубопроводъ отъ вреднаго дѣйствія ударнаго повышенія давленія и тѣмъ сдѣлать работу всей гидроэлектрической станціи достаточно надежной. Кромѣ того, весь ходъ измѣненія давленія въ трубѣ не можетъ не отражаться на вытеканіи воды изъ него, а тѣмъ самымъ и на условіяхъ работы и регулированія турбинъ. И для этой цѣли,—изученія условій соблюденія желаемой степени равномѣрности хода двигателей, важно знать, какъ протекаетъ само явленіе гидравлическаго удара въ трубѣ. Здѣсь мы приводимъ только возможно короткое извлеченіе изъ работы Жуковскаго, отсылая интересующихся къ «Бюллетенямъ Политехническаго Общества», 1899 г., № 5 **).

---

*) См. *S. T. Fanning*, „A practical treatise on hydraulic and water-supply engineering“, 15 edition, 1902, p. 450 и 453.

**) Съ тѣхъ поръ въ журналѣ „Revue de mécanique“ появились двѣ работы, посвященныя тому же вопросу: одна принадлежитъ проф. Рато (A. Rateau) и напечатана въ майскомъ номерѣ этого журнала за 1900 годъ; она составляетъ одну изъ послѣднихъ главъ его работы „Les turbo-machines“, помѣщенной въ рядѣ номеровъ этого же журнала и появившейся въ 1900 году отдѣльной книжкой подъ заглавіемъ „Traité des turbo-machines“. Другая принадлежитъ Альеви (M. L. Allievi). Она носитъ названіе „Théorie générale du mouvement varié de l'eau dans les tuyaux de conduite“ и напечатана въ 1904 году въ томъ же журналѣ въ январской (стр. 10—22) и мартовской (стр. 244—259) книжкахъ. Впервые эта работа появилась, въ нѣсколько иномъ видѣ, еще въ декабрѣ 1901 года въ „Annali della Società degli Ingegneri ed architetti italiani“. Первый авторъ не принимаетъ во вниманіе деформацій стѣнокъ трубы; второй авторъ считаетъ трубу растяжимой, а воду сжимаемой, что вполнѣ соотвѣтствуетъ разсмотрѣнію Н. Е. Жуковскаго; вслѣдствіе этого и основные результаты, полученные Альеви, тождественны съ выводами Н. Е. Однако Альеви даетъ всему вопросу иное развитіе, интересуясь преимущественно тѣми случаями, когда закрытіе трубопровода происходитъ не очень быстро, что имѣетъ мѣсто въ практикѣ турбинныхъ водопроводовъ. Нужно отмѣтить также работу вѣнскаго проф. Будау (A. Budau, Druckschwankungen in Turbinenzuleitungsrohren, въ журналѣ „Zeitschr. d. österr. Ing.-u. Arch.-Vereines“, 1905, № 29—31). Послѣдній считаетъ воду несжимаемой. Его работа интересна цѣлымъ рядомъ практическихъ указаній.—См. также вышеупомянутое сочиненіе Th. Kochn'a: Ausbau

Пусть мы имѣемъ горизонтальную трубу, длиною l, радіуса R_0, по которой жидкость протекаетъ со скоростью v отъ конца B къ концу A, изъ котораго она и выливается. Пусть въ какой-нибудь моментъ конецъ A закрывается. Тогда вся живая сила массы воды, находившейся въ этотъ моментъ въ трубѣ, равная $\gamma_0 \pi R_0{}^2 l \frac{v^2}{2g}$, погашается. Здѣсь γ_0 есть вѣсъ 1 mtr^3 воды до удара; вмѣсто $\frac{\gamma_0}{g}$ введемъ плотность ϱ_0 до удара, такъ что уничтоженная живая сила выразится

$$\varrho_0 \pi R_0{}^2 l \frac{v^2}{2} \dots \dots \dots \dots \quad (57)$$

Эта живая сила тратится на работу деформаціи стѣнокъ трубы и на сжатіе самой воды, упругостью которой, хотя и малой, пренебречь все-таки нельзя.

Деформація стѣнокъ состоитъ какъ въ вытягиваніи оси трубы, такъ и въ увеличеніи ея діаметра. Легко, однако, видѣть, что работа деформаціи состоитъ, главнымъ образомъ, изъ работы удлиненія периметра трубы, и въ гораздо меньшей степени изъ работы вытягиванія трубы въ длину. Поэтому мы примемъ во вниманіе только эту первую деформацію.

Съ момента начала закрытія задвижки давленіе внутри возрастаетъ, при чемъ, если сначала, до повышенія давленія, внутренній діаметръ былъ $2R_0$, то потомъ, когда избыточное давленіе достигло нѣкоторой величины P, внутренній діаметръ сдѣлался равнымъ $2R$; подъ P, такимъ образомъ, мы будемъ подразумѣвать не полное давленіе внутри трубы, а только величину его измѣненія, вызваннаго ударомъ. Легко видѣть, что въ указанный моментъ вся внутренняя поверхность трубы оказывается подверженной силѣ $2\pi RlP$; эта сила вызываетъ дальнѣйшее измѣненіе радіуса трубы, къ этому времени измѣнившемуся уже на величину $(R-R_0)$. Слѣдовательно, сила $2\pi RlP$, суммирующаяся изъ ряда элементарныхъ силъ, направленныхъ по радіусамъ, приложенныхъ по всей поверхности трубы и перемѣщающихъ свои точки приложенія, — каждая на величину $d[R-R_0]$ и тоже въ радіальномъ направленіи, — эта суммарная сила совершаетъ работу $2\pi RlP.d(R-R_0)$. Вслѣдствіе малой измѣняемости радіуса ошибки не будетъ, если вмѣсто R въ множителѣ передъ скобками мы поставимъ начальный радіусъ R_0, такъ какъ это сводится къ отбрасыванію въ выраженіи элементарной работы безконечно малаго второго порядка. Имѣя выраженіе работы за элементъ времени dt, можемъ выразить теперь работу, ушедшую на деформированіе трубы отъ начальнаго значенія радіуса R_0 до нѣкотораго R, интеграломъ

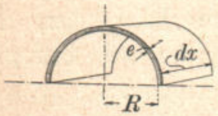
$$\int_{R_0}^{R} 2\pi R_0 l P \,.\, d(R-R_0).$$

---

von Wasserkräften, стр. 897 и слѣд. Нельзя не отмѣтить, что ни одна изъ названныхъ работъ не охватываетъ вопроса такъ широко, и, что особенно важно, не опирается на экспериментальную провѣрку, какъ это сдѣлано Н. Е. Жуковскимъ, работа котораго, повидимому, осталась неизвѣстной этимъ авторамъ.

Выразимъ здѣсь R черезъ P, для чего воспользуемся закономъ Гука, по которому деформаціи пропорціональны напряженіямъ. Очевидно, что если кольцо расширилось отъ діаметра $2R_0$ до діаметра $2R$, то относительное удлиненіе его периметра равно $\frac{R-R_0}{R}$; напряженіе же матеріала, соотвѣтствующее этому удлиненію, равно $E\frac{R-R_0}{R}$, гдѣ E есть модуль упругости матеріала трубы. Разсматривая полукольцевой элементъ трубы (фиг. 151) длиною dx, видимъ, что это напряженіе распредѣлено по площади $2e\,dx$, гдѣ e есть толщина стѣнки трубы. Слѣдовательно, сила сопротивленія разрыву трубы по діаметральной плоскости есть $2e\,dx\,.\,E\frac{R-R_0}{R_0}$. Сила же, стремящаяся произвести этотъ разрывъ, есть $2R\,.\,P\,.\,dx$. Для равновѣсія необходимо, чтобы

$$2e\,dx\,.\,E\frac{R-R_0}{R_0}=2R\,.\,P\,.\,dx.$$



Фиг. 151.

Отсюда получаемъ

$$P=\frac{e\,.\,E}{R_0R}\cdot(R-R_0).$$

Опять, въ силу малой измѣняемости радіуса, въ знаменателѣ вмѣсто R подставимъ R_0. Получаемъ:

$$P=\frac{eE}{R_0^{\,2}}(R-R_0).$$

Дифференцируя полученный результатъ, находимъ:

$$d(R-R_0)=\frac{R_0^{\,2}}{eE}\,dP.$$

Вносимъ это значеніе дифференціала $d(R-R_0)$ въ выраженіе работы деформаціи трубы и, въ виду происшедшей замѣны перемѣннаго, соотвѣтственно мѣняемъ предѣлы интеграціи; замѣчая, что при $R=R_0$ имѣемъ $P=0$ и что текущему значенію R соотвѣтствуетъ текущее значеніе P, находимъ

$$\int_{R_0}^{R}2\pi R_0\,l\,P\,.\,d(R-R_0)=\int_0^P 2\pi R_0\,l\,P\,.\frac{R_0^{\,2}}{eE}\,.\,dP,$$

что послѣ интеграціи даетъ

$$\frac{\pi R_0^{\,3}l}{eE}P^2\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(58)$$

Такова работа, затраченная на деформированіе трубы.

Работу, затраченную на сжатіе воды, можно подсчитать такъ. Если какое-нибудь сжимаемое тѣло, въ количествѣ 1 kgr, удѣльнаго объема v_0 *), подвергается внѣшнему давленію (на единицу площади) P, вслѣдствіе чего его удѣльный объемъ измѣняется, уменьшаясь, до v, то элементарная работа этого давленія, какъ извѣстно, равна $P\,dv$ или также $P\,d(v-v_0)$, такъ какъ $dv = d(v-v_0)$, ибо $v_0 = const$, въ качествѣ заданной начальной величины. Если же сжатію подвержены не 1 kgr, а нѣсколько,—въ нашемъ случаѣ $\frac{\pi R_0^2 l}{v_0}$ kgr воды, то вся работа сжатія, при измѣненіи удѣльнаго объема на $d(v-v_0)$, выразится черезъ

$$\frac{\pi R_0^2 l}{v_0} P \,.\, d(v-v_0) = \pi R_0^2 l P \,.\, d\frac{v-v_0}{v_0},$$

а, слѣд., за все время, пока удѣльный объемъ мѣняется отъ v_0 до v, работа сжатія выразится интеграломъ

$$\int_{v_0}^{v} \pi R_0^2 l P \,.\, d\frac{v-v_0}{v_0}.$$

Чтобы выразить перемѣнное v черезъ P, воспользуемся и тутъ закономъ Гука, по которому напряженіе матеріала равно произведенію изъ его модуля упругости и его относительной деформаціи. Въ нашемъ случаѣ напряженіе сжатія воды, очевидно, есть P. Ея абсолютное формоизмѣненіе (для 1 kgr) есть $(v-v_0)$, такъ что относительная деформація равна $\frac{v-v_0}{v_0}$. Если модуль упругости воды назовемъ буквой K, то имѣемъ

$$P = K\frac{v-v_0}{v_0}.$$

Дифференцируемъ это выраженіе, считая модуль упругости K постояннымъ; находимъ:

$$d\frac{v-v_0}{v_0} = \frac{1}{K}\,dP.$$

Вносимъ это соотношеніе въ выраженіе работы сжатія воды, мѣняемъ соотвѣтственно предѣлы, исходя изъ того, что начальному значенію удѣльнаго объема v_0 соотвѣтствуетъ повышеніе давленія $P=0$, и интегрируемъ это выраженіе. Получаемъ:

$$\int_{v_0}^{v} \pi R_0^2 l P \,.\, d\frac{v-v_0}{v_0} = \int_0^P \pi R_0^2 l P \,.\, \frac{1}{K}\,dP = \frac{\pi R_0^2 l}{2K} P^2 \quad . \; . \; . \; (59)$$

---

*) Обозначая одной и тою же буквой v скорость и удѣльный объемъ, полагаемъ, что не вызовемъ этимъ никакого недоумѣнія, ибо въ предѣлахъ этого § удѣльный объемъ фигурируетъ, лишь кончая уравненіемъ 59, и въ эти выраженія скорость не входитъ.

Такова работа, затраченная на деформированіе воды. Согласно сказанному, сумма выраженій (59) и (58) должна быть равна выраженію (57), т.-е. должно имѣть мѣсто равенство:

$$\pi R_0^2 l \varrho_0 \frac{v^2}{2} = \frac{\pi R_0^3}{eE} l P^2 + \frac{\pi R_0^2 l}{2K} P^2.$$

Производя сокращенія, умножая обѣ части на ϱ_0 и опредѣляя P, получимъ

$$P = v\varrho_0 \frac{1}{\sqrt{\frac{2\varrho_0 R_0}{eE} + \frac{\varrho_0}{K}}} = \frac{v\gamma_0 \lambda}{g}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (60)$$

гдѣ обозначено:

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{\frac{2\varrho_0 R_0}{eE} + \frac{\varrho_0}{K}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (61)$$

Ур-іе (60) говоритъ намъ, что *увеличеніе давленія на единицу площади не зависитъ отъ длины трубы, пропорціонально уничтожаемой скорости, вѣсу единицы объема, а также нѣкоторой величинѣ* λ, *зависящей* [см. выр. (61)] *отъ матеріала и размѣровъ трубы и отъ упругости жидкости.*

Опредѣляя изъ ур. (60) λ, получаемъ:

$$\lambda = \frac{P}{\gamma_0} \cdot \frac{g}{v}.$$

Какъ извѣстно, размѣръ величины $\frac{P}{\gamma_0}$ есть mtr, g измѣряется въ $\frac{mtr}{sec^2}$, а v — въ $\frac{mtr}{sec}$. Въ силу однородности механическихъ уравненій заключаемъ, что размѣръ величины λ есть: $mtr \cdot \frac{mtr}{sec^2} \cdot \frac{sec}{mtr} = \frac{mtr}{sec}$. Значитъ, *величина* λ *есть нѣкоторая скорость.*

Обратимъ вниманіе на составъ выраженія λ. Если матеріалъ трубы не упругъ, т.-е., если никакое напряженіе не можетъ его деформировать, такъ что его $E = \infty$, или, еще проще, если трубы вовсе нѣтъ, т.-е. если $R_0 = 0$, то величина λ обращается въ

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{K}{\varrho_0}} = \sqrt{\frac{Kg}{\gamma_0}},$$

а это есть извѣстное выраженіе скорости распространенія звуковыхъ колебаній въ средѣ плотности ϱ_0, т.-е. въ нашемъ случаѣ, въ водѣ. Какъ извѣстно, эта скорость есть:

$$\lambda_1 = 1435\ mtr/sec = 673\ саж/сек.$$

Если, далѣе, обозначимъ:

$$\lambda_2 = \sqrt{\frac{eE}{2\varrho_0 R_0}} \ldots{}^{*}),$$

то ур-іе (61) приметъ видъ:

$$\lambda = \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{1}{\lambda_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{\lambda_2}\right)^2}} = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}} = \frac{\lambda_1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2}} \quad . \quad . \quad . \quad (62)$$

Количество $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$, какъ отношеніе двухъ одноименныхъ величинъ, есть число абсолютное; а въ такомъ случаѣ ур-іе (62) показываетъ, что λ *есть скорость распространенія по трубѣ и жидкой колоннѣ упругихъ колебательныхъ движеній*, аналогичныхъ звуковымъ. Это обстоятельство заставляетъ принять, что *при гидравлическомъ ударѣ въ трубѣ возникаютъ нѣкоторыя упругія колебательныя движенія, какъ матеріала трубы, такъ и жидкости, ее заполняющей*. Эти колебанія распространяются по всей длинѣ трубы со скоростью λ, а характеръ ихъ подлежитъ дальнѣйшему выясненію.

Однако сначала приведемъ два численныхъ примѣра, которые позволятъ судить о величинѣ ударнаго повышенія давленія и о вліяніи его на прочность трубы.

Возьмемъ трубу большого діаметра отъ турбиннаго водопровода Jajce (см. таблицу въ концѣ § 23). Здѣсь $2R_0 = 1{,}6$ *mtr*; труба склепана изъ стальныхъ листовъ толщиною $e = 0{,}012$ *mtr*. Гидростатическій напоръ достигаетъ почти 80 *mtr*, такъ что напряженіе матеріала достигаетъ

$$k_z = \frac{8.160}{2.1{,}2} = 533 \ kgr/cm^2.$$

Далѣе, считая для стали $E = 22000.10^6$ kgr/mtr^2, вычисляемъ

$$\lambda_2 = \sqrt{\frac{0{,}012.22000.10^6.9{,}81}{1000.1{,}6}} = 1270 \ mtr/sec.$$

Поэтому, считая $\lambda_1 = 1435$ *mtr/sec*, находимъ изъ (62):

$$\lambda = \frac{1435}{\sqrt{1 + \left(\frac{1435}{1270}\right)^2}} = 950 \ mtr/sec.$$

---

*) *Résal* указалъ, что λ_2 есть скорость распространенія колебательныхъ движеній по упругой трубѣ, наполненной несжимаемой жидкостью; если въ (61) положить $K = \infty$, какъ характеристику несжимаемости, то и получимъ λ_2.

Далѣе, если вся колонна воды, двигавшаяся до этого момента со скоростью $v=3$ mtr/sec, останавливается достаточно быстро, то по форм. (60) получаемъ соотвѣтствующее повышеніе давленія

$$P=\frac{3.1000.950}{9,81}=290000\ kgr/mtr^2=29\ kgr/cm^2.$$

Это вызываетъ дополнительное напряженіе матеріала въ $533\frac{29}{8}=$ $=1930$ kgr/cm^2, такъ что полное напряженіе листовъ въ цѣломъ мѣстѣ достигаетъ $533+1930=2463$ kgr/cm^2, что съ лишнимъ въ $4^1/_2$ раза превосходитъ, такъ сказать, статическое напряженіе матеріала. По этому водопроводу вода подается къ 4 турбинамъ. Если бы была сразу заперта одна турбина, а не всѣ четыре, какъ это было предположено выше, то повышеніе давленія было бы лишь $\frac{29}{4}=7,25$ kgr/cm^2, такъ какъ оно пропорціонально погашенной скорости.

Въ качествѣ другого примѣра возьмемъ водопроводъ Vouvry, тоже для турбинной установки (см. послѣднюю таблицу въ § 23). Здѣсь внутренній діаметръ стальной заварной трубы $2R_0=0,325$ mtr; толщина стѣнки въ наиболѣе низкихъ мѣстахъ водопровода $e=0,018$ mtr; скорость воды въ трубѣ $v=2,36$ mtr/sec; гидростатическое давленіе достигаетъ 950 mtr или 95 kgr/cm^2 *). Поэтому напряженіе матеріала трубы вычисляется:

$$k_z=\frac{95.32,5}{2.1,8}=855\ kgr/cm^2.$$

Далѣе вычисляемъ

$$\lambda_2=\sqrt{\frac{0,018.22000.10^6.9,81}{0,325.1000}}=3460\ mtr/sec,$$

$$\lambda=\frac{1435}{\sqrt{1+\left(\frac{1435}{3460}\right)^2}}=1325\ mtr/sec.$$

Сравнивая эти значенія съ предыдущимъ примѣромъ, усматриваемъ большое вліяніе размѣровъ трубы на обѣ скорости. Наконецъ, ударное повышеніе давленія

$$P=\frac{2,36.1000.1325}{9,81}=318000\ kgr/mtr^2\backsim 32\ kgr/cm^2.$$

*) До сихъ поръ это самый большой естественный напоръ, утилизированный въ одной ступени. Онъ представляетъ среднее вертикальное разстояніе отъ уровня озера Lac de Tanay до Роны, недалеко отъ впаденія ея въ Женевское озеро. Существуетъ проектъ утилизаціи напора въ 1026 mtr, тоже въ Швейцаріи, недалеко отъ Campocologno, на ручьѣ Cavagliasco. См. J. Epper—„Die Wasserkraftverhältnisse im Puschlav". Bern, 1907. Это изслѣдованіе было предпринято инженеромъ Эпперомъ по порученію общины Puschlav и акціонернаго общества электрической станціи Brusio, въ видахъ усиленія послѣдней.

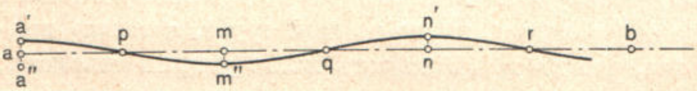
Достаточно большое абсолютно, это повышеніе давленія все-таки не очень велико по сравненію съ исключительно большимъ гидростатическимъ напоромъ этого водопровода; напряженіе матеріала въ трубѣ при ударѣ будетъ

$$k_z' = 855\left(1 + \frac{32}{95}\right) = 1140\ kgr/cm^2.$$

Изъ этихъ примѣровъ видно, какъ значительны, а также какъ опасны могутъ быть гидравлическіе удары. Кромѣ того, въ нижеприводимыхъ числовыхъ данныхъ указывается, что *для небольшихъ чугунныхъ трубъ ударное давленіе достигаетъ 4 атмосферъ на каждый футъ потерянной скорости.* Это правило приблизительно соблюдается и для стальной трубы второго примѣра, что обнаруживается простымъ подсчетомъ: скорость $v = 2{,}36\ mtr/sec = 7{,}737$ *фут/сек*, такъ что повышеніе давленія на 1 футъ скорости $= 32 : 7{,}737 = 4{,}136\ kgr/cm^2$. Наоборотъ, первый примѣръ даетъ для этой величины лишь $2{,}948\ kgr/cm^2$, что обусловливается большимъ діаметромъ трубы.

Обращаясь къ дальнѣйшему разсмотрѣнію явленія удара, напомнимъ, что называется скоростью распространенія колебательнаго движенія.

Если мы имѣемъ рядъ точекъ a, p, m,... b (фиг. 152), связанныхъ



Фиг. 152.

въ одну упругую нить, и дадимъ одной изъ нихъ, напр., точкѣ a, толчокъ перпендикулярно къ направленію нити, то эта точка начнетъ качаться около a, какъ около центра качанія, занимая послѣдовательно всѣ положенія отъ a до a', потомъ назадъ черезъ a до a'' и обратно до a, затѣмъ снова приходитъ въ a' и т. д. Въ то же время всѣ точки прямой ab начинаютъ послѣдовательно воспроизводить движеніе точки a, такъ что въ какой-нибудь данный моментъ точки прямой amn занимаютъ въ пространствѣ положенія $a'\,m''\,n'$. Линія $a'\,m''\,n'$ называется в о л н о ю. Скоростью распространенія волны называется то разстояніе ab, на которое нужно отнести точку b отъ источника колебанія, чтобы она начала колебаться по прошествіи одной секунды послѣ сообщенія толчка точкѣ a,—или, иначе, можно сказать, что *скоростью волны называется то разстояніе отъ источника, вызвавшаго волну, на которомъ черезъ 1 секунду воспроизводятся всѣ тѣ состоянія, которыя секундой раньше имѣли мѣсто въ началѣ нити.* Въ нашемъ случаѣ λ удобнѣе всего истолковать именно въ этомъ смыслѣ: это есть скорость распространенія вдоль по трубѣ,—отъ задвижки къ началу трубы (мѣсту отвѣтвленія отъ магистрали),—всѣхъ тѣхъ состояній, которыя вызываются закрытіемъ задвижки,—въ частности, давленія, сжатія воды, растяженія стѣнокъ трубы и т. д.

Остановимся на вопросѣ, какимъ образомъ должно происходить измѣненіе давленія при задвижкѣ, предположивъ, что магистраль настолько велика, что всѣ измѣненія, происходящія въ трубѣ, на ней не отражаются, такъ что при концѣ **B** трубы давленіе все время равно давленію въ магистрали; другими словами, для нея P_B (какъ избытокъ давленія, вызванный ударомъ) все время равно нулю.

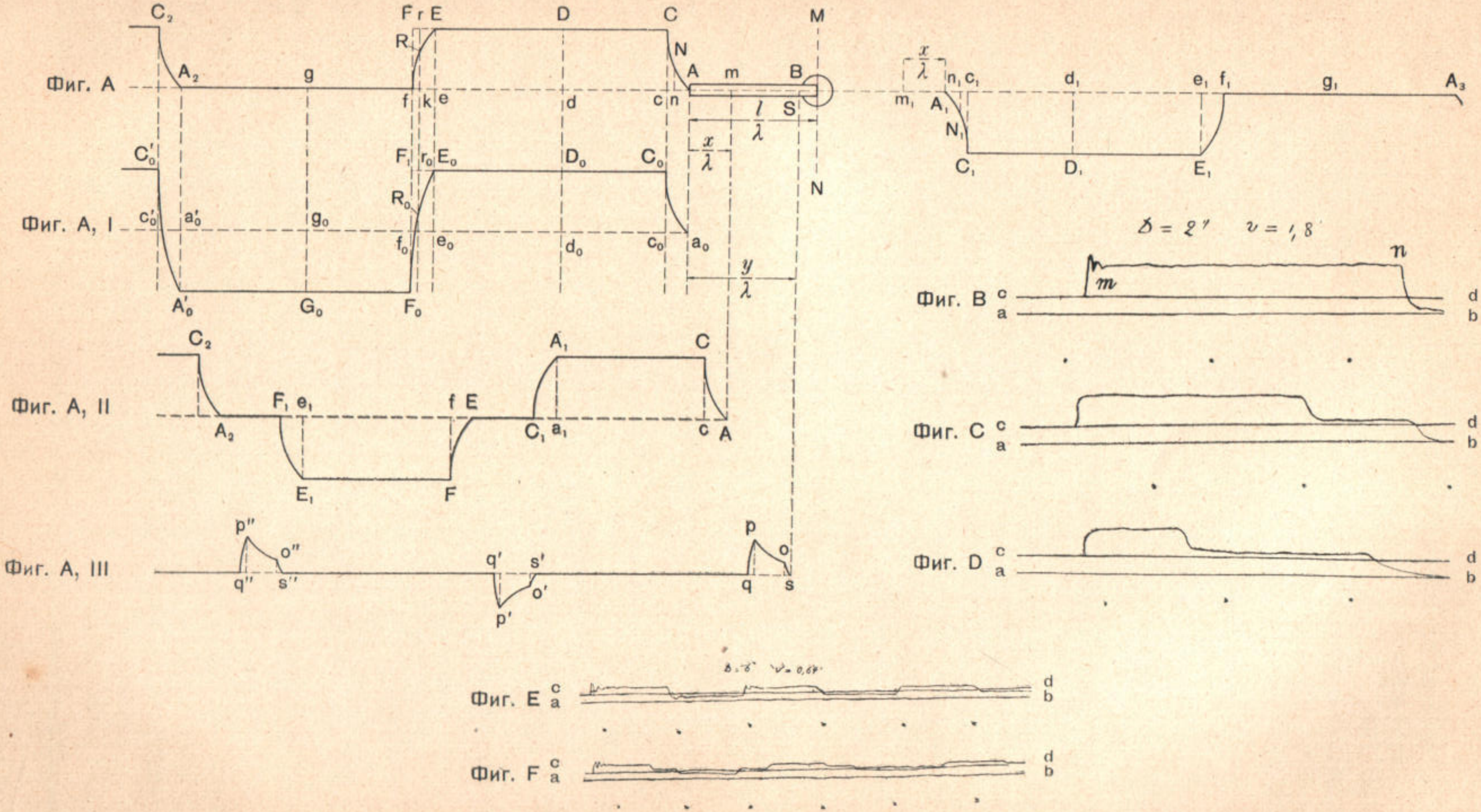
Пусть отрѣзокъ **AB** (фиг. **A**, табл. VI) изображаетъ нашу трубу, **B**—магистраль, **A**—задвижку. Длину трубы мы обозначили черезъ l; отрѣзокъ же **AB** отложимъ равнымъ величинѣ $\frac{l}{\lambda}$, взявши соотвѣтствующій масштабъ; такимъ образомъ этотъ отрѣзокъ изображаетъ *время пробѣга ударной волной всей трубы* l. Приступимъ теперь къ построенію діаграммы давленій, которымъ подвергается точка **A**, при чемъ за ось абсциссъ примемъ ось трубы **AB** и будемъ откладывать на ней времена (влѣво отъ **A**), а на ординатахъ будемъ откладывать соотвѣтствующія повышенія давленія. Діаграмму начнемъ строить, начиная съ точки **A**.

Задвижка закрывается не моментально, а въ теченіе нѣкотораго промежутка времени, который на нашемъ чертежѣ пусть изображается отрѣзкомъ **Ac**. Пока задвижка закрывается, давленіе въ этой точкѣ постепенно повышается, подымаясь по закону, изображаемому нѣкоторой кривой **AC**, при чемъ къ моменту закрытія оно достигаетъ величины (P), опредѣляемой ур-іемъ (60) и изображаемой на чертежѣ ординатой **cC**. Къ этому моменту вода остановилась, но не по всей трубѣ, а только при одной точкѣ **A**. Мы приняли, что въ трубѣ имѣютъ мѣсто упругія колебанія; слѣд., надо принять, что всѣ послѣдовательныя состоянія точки **A** передаются дальше по трубѣ со скоростью λ. Значитъ, въ точкѣ **B** вода начнетъ останавливаться тогда, когда съ момента начала закрытія задвижки пройдетъ время $\frac{l}{\lambda} = AB$. Въ продолженіе всего этого времени нѣтъ причинъ, которыя могли бы измѣнять давленіе въ точкѣ **A**; поэтому въ теченіе времени $cd = AB - Ac$ давленіе при **A** будетъ оставаться постояннымъ, и эта часть діаграммы изобразится прямой **CD**, параллельной **Ad**; точка **D** будетъ лежать при этомъ на ординатѣ точки **d**, гдѣ $Ad = AB$.

Прежде чѣмъ говорить, что дѣлается дальше въ точкѣ **A**, обратимся къ началу трубы у магистрали. Мы сказали, что черезъ время $AB = \frac{l}{\lambda}$ всѣ состоянія точки **A** повторяются въ **B**, что можно представить себѣ, вообразивъ, что діаграмма **ACD** подвигается слѣва направо со скоростью λ. Слѣдовательно, черезъ промежутокъ времени **AB** въ точкѣ **B** должно было бы начаться увеличеніе давленія. Но мы сказали также, что въ **B** все время $P_B = 0$,—иными словами, существуетъ причина, которая послѣдовательно погашаетъ въ точкѣ **B** всѣ тѣ измѣненія состоянія воды и трубы, которыя приносятся туда діаграммой **ACD**.

Вообразимъ, что къ точкѣ **B** изъ пространства, справа налѣво, надвигается новая волна состояній, вызывающая въ **B** такія же состоянія, какія вызываются первой волной, но въ прямо противоположномъ смыслѣ. Эту

Таблица VI.



новую (лѣвую волну давленій, въ отличіе отъ первой, правой) волну или діаграмму давленій построимъ такъ: фигуру $BACD$ перегнемъ около вертикальной линіи MN на 180^0, и затѣмъ еще разъ повернемъ ее около линіи ABf_1 въ положеніе $BA_1C_1D_1$. Представимъ себѣ теперь, что какъ только мы начали закрывать задвижку, т.-е., какъ только діаграмма ACD побѣжала вправо со скоростью λ, сейчасъ же діаграмма $A_1C_1D_1$ побѣжала съ тою же скоростью влѣво. Черезъ время $A_1B_1 = \frac{l}{\lambda}$ точки A и A_1 сойдутся въ B; затѣмъ, еще черезъ промежутокъ времени Ac сойдутся въ B точки C и C_1, т.-е. въ этотъ моментъ въ B сложатся равныя и противоположныя давленія $(+Cc)+(-c_1C_1)$, такъ что давленіе P_B останется и въ этотъ моментъ равнымъ нулю. Изъ самаго способа построенія кривой A_1C_1 по кривой AC видно, что и во всякій другой промежуточный моментъ постоянно складываются два равныхъ и противоположныхъ давленія, напр. $(+nN)+(-n_1N_1)$, такъ что и для этого момента P_B остается равнымъ нулю. То же самое происходитъ за все время $cd = c_1d_1$.

Признавъ, такимъ образомъ, для объясненія постоянства давленія у B, гдѣ все время $P_B = 0$, наличность двухъ волнъ,—правой и лѣвой,—зарождающихся одновременно съ началомъ закрытія задвижки, одной—въ A (у задвижки), другой—въ пространствѣ въ A_1, такъ что $AB = A_1B$, мы должны, конечно, допустить, что обѣ волны распространяются затѣмъ по всей трубѣ AB. Понятно, что точка A трубы находится подъ вліяніемъ одной правой волны до тѣхъ поръ, пока въ нее не прибѣжитъ лѣвая волна; для этого лѣвой волнѣ потребуется пройти путь A_1BA, на что потребуется время $AA_1 = \frac{2l}{\lambda}$. За все это время, пока лѣвая волна бѣжитъ отъ B до A, въ A не появляется никакихъ причинъ для измѣненія имѣющагося тамъ давленія P; поэтому для слѣдующаго за Ad промежутка времени $de = Ad$ давленіе у точки A будетъ оставаться равнымъ P; соотвѣтственная часть діаграммы изобразится отрѣзкомъ DE, составляющимъ продолженіе CD, при чемъ $de = Ad = BA$.

Такимъ образомъ, мы построили діаграмму правой волны $ACDE$, изображающую измѣненіе давленій въ точкѣ A за время $\frac{2l}{\lambda}$. Эта діаграмма сейчасъ же даетъ намъ возможность получить діаграмму лѣвой волны за тотъ же промежутокъ времени $\frac{2l}{\lambda}$, для чего ее нужно лишь перевернуть въ положеніе $A_1C_1D_1E_1$. Итакъ, за время $\frac{2l}{\lambda}$ съ момента начала закрыванія задвижки діаграмма правой волны есть $ACDE$, а лѣвой... $A_1C_1D_1E_1$.

Далѣе, отмѣтивъ уже однажды аналогію разсматриваемаго явленія съ колебаніями упругой нити (по отношенію къ λ, да еще и потому, что при выводѣ ур-ія (60) мы два раза пользовались выраженіемъ упругихъ деформацій по напряженіямъ), мы должны провести аналогію и дальше, сказавъ, что діаграмма волны должна быть построена подобно тому, какъ вообще составляются діаграммы упругихъ волнъ. Тамъ мы видѣли (см. фиг. 152), что волна имѣетъ профиль $a'm''n'$..., при чемъ каждая половина волны совершенно симметрична съ своей смежной половиной: профиль $qn'r$ полученъ опрокидываніемъ профиля $pm''q$ и сдвигомъ его на величину pq въ направленіи распространенія волны, такъ что квадрантъ pmm'' тождественъ съ квадрантомъ $qn'n$ и квадрантъ $mm''q$ одинаковъ съ $nn'r$.

Такъ же должна быть построена и діаграмма нашей волны. Считая, что $ACDd$ есть первый квадрантъ, а $DdeE$—второй, опрокидываемъ весь профиль $ACDE$ около горизонтальной оси и сдвигаемъ его влѣво на Ae, такъ что онъ займетъ положеніе $EfgA_2$. Контуръ $ACDEfgA_2$ и представляетъ собою, такимъ образомъ, полную правую волну, которая затѣмъ, конечно, повторяется въ A_2C_2 и дальше неопредѣленное число разъ. Такимъ же образомъ дополняемъ лѣвую волну $A_1C_1D_1E_1f_1g_1A_3$ и т. д.

Имѣя, такимъ, образомъ полныя волны и зная, что онѣ одновременно начинаютъ бѣжать,—одна отъ A вправо, другая отъ A_1 влѣво, обѣ со скоростью λ,—и при встрѣчѣ складываются, мы можемъ построить полную діаграмму измѣненій давленій въ любой точкѣ трубы. Начнемъ съ задвижки A.

Мы уже получили діаграмму давленій въ этой точкѣ для всего того промежутка времени $\frac{2l}{\lambda}$, пока она находилась подъ исключительнымъ вліяніемъ правой волны. Переносимъ эту часть діаграммы, для удобства дальнѣйшихъ построеній, ниже, въ A, I, табл. VI. Получаемъ контуръ $a_0C_0D_0E_0$, тождественный съ $ACDE$.

Мы остановились на разсмотрѣніи явленія какъ разъ въ тотъ моментъ, когда правая волна подошла къ точкѣ A своей вершиной E, а лѣвая—начальной точкой A_1. Съ этого момента въ A начинаютъ складываться обѣ волны, принося одновременно пониженія давленія. Пусть какой-нибудь точкѣ k промежутка ef соотвѣтствуетъ точка n_1 промежутка A_1c_1, т.-е. $ek=A_1n_1$. Правая волна приноситъ въ точку A въ моментъ k пониженіе давленія, выражающееся отрѣзкомъ rR; лѣвая въ тотъ же моментъ принесетъ пониженіе n_1N_1; въ суммѣ получится пониженіе давленія на $-(rR+n_1N_1)$, изображаемое на суммарной діаграммѣ отрѣзкомъ r_0R_0. По построенію кривыхъ A_1C_1 и Ef, ясно, что отрѣзки rR и n_1N_1, удовлетворяющіе условію $ke=rE=A_1n_1$, между собою равны, такъ что $rR+n_1N_1=r_0R_0=2rR$.

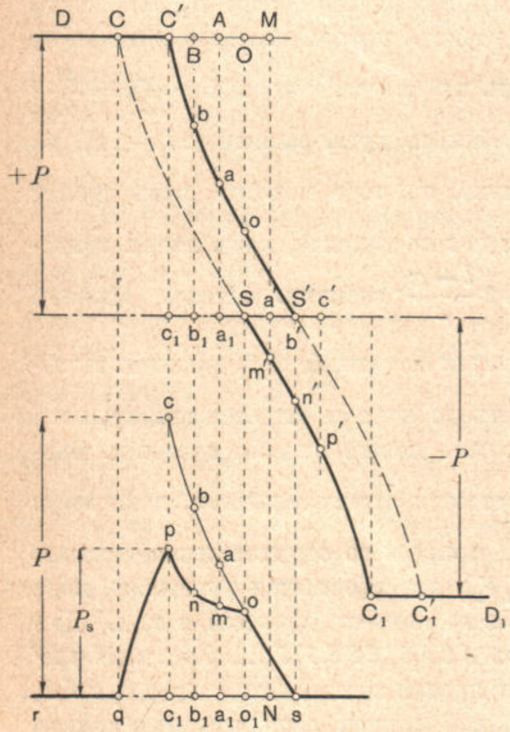
Когда, наконецъ, въ точку A приходятъ точки f и c_1, то съ первой приходитъ пониженіе $(-Ff)$, а со второй—также пониженіе $(-c_1C_1)$, равное $(-fF)$; въ суммѣ получимъ пониженіе F_1F_0, заканчивающее собою суммарную кривую $E_0R_0F_0$. Точкамъ E_0 и F_0 этой кривой соотвѣтствуетъ отрѣзокъ абциссы $e_0f_0=ef=Ac=$ времени закрытія задвижки, и за это время давленіе мѣняется отъ $+P=e_0E_0$ до $-P=f_0F_0$.

Далѣе, правая волна будетъ приносить $P_{пр}=0$, а лѣвая—состояніе $P_{лѣв}=-P$. Соотвѣтствующая часть суммарной діаграммы выразится отрѣзкомъ $F_0G_0A_0'$, параллельнымъ оси a_0a_0'; точка A_0' его будетъ соотвѣтствовать тому моменту, когда въ A придетъ точка A_2 правой волны и точка E_1 лѣвой. Дальше обѣ волны приносятъ повышеніе давленія, которое произойдетъ отъ $-P=a_0'A_0'$ до $+P=c_0'C_0'$, опять-таки за время $a_0'c_0'=a_0c_0=$ времени затвора. Словомъ, діаграмма давленій въ точкѣ A будетъ имѣть видъ $a_0 C_0 E_0 F_0 A_0' C_0' \dots$ При этомъ *длина діаграммы отъ начала подъема давленія до начала его паденія* (и наоборотъ,—отъ начала паденія до начала подъема, такъ какъ $a_0 e_0 = e_0 a_0'$) *равна двойному времени пробѣга ударной волной всей трубы* $\left(a_0 e_0 = \frac{2l}{\lambda}\right)$.

Для какой-нибудь промежуточной точки трубы m, взятой на разстояніи x отъ задвижки, такъ что правая волна добѣгаетъ до нея черезъ промежутокъ времени $Am = \frac{x}{\lambda}$, діаграмма давленій построится такъ (см. A, II): сначала приходитъ правая волна, измѣняя давленіе по ACA_1; исключительное дѣйствіе этой волны продолжается до тѣхъ поръ, пока не прибѣжитъ въ ту же точку m лѣвая волна. Когда точка A правой волны пришла въ m, пусть точка A_1 лѣвой волны приходитъ въ m_1, такъ что $A_1 m_1 = Am = \frac{x}{\lambda}$; лѣвой волнѣ отъ m_1 до m остается пробѣжать путь, равный $(2l - 2x)$, на что уйдетъ время $2\frac{l-x}{\lambda}$. Слѣдовательно, съ того момента, какъ правая волна принесла въ m поднятіе давленія, и до того момента, какъ лѣвая принесетъ туда же паденіе давленія, протечетъ $2\frac{l-x}{\lambda}$ времени. Итакъ, дѣлаемъ $Aa_1 = 2\frac{l-x}{\lambda} = 2\,Bm$. Съ точки A_1 начинается пониженіе $A_1 C_1$ давленія, вызываемое лѣвою волною; давленіе P падаетъ до нуля и остается такимъ, пока правая волна своею точкою E не принесетъ новаго паденія давленія. Очевидно, время $a_1 E = 2\frac{x}{\lambda}$. Давленіе P остается отрицательнымъ, пока въ m не прибѣжитъ точка E_1 лѣвой волны, послѣ чего отрицательное давленіе начнетъ возрастать до нуля (вѣтвь $E_1 F_1$), далѣе остается нулевымъ, пока точка A_2 правой волны не принесетъ новаго подъема давленій и т. д. Діаграмма давленій въ точкѣ m имѣетъ видъ $A\,C\,A_1 C_1\,E\,F\,E_1 F_1\,A_2 \dots$ Вѣтви AC и EF тождественны съ одноименными вѣтвями правой волны, вѣтви же $A_1 C_1$ и $E_1 F_1$ тождественны съ такими же вѣтвями лѣвой волны, если ихъ переложить около вертикальной линіи на 180^0. Далѣе длины $Ac = a_1 C_1 = Ef = e_1 F_1 =$ времени затвора, длины же Aa_1 и Ee_1, т.-е. *длины діаграммы отъ начала увеличенія давленія до начала уменьшенія его, равны двойному времени пробѣга ударной волной пути отъ данной точки до магистрали* $\left(2\frac{l-x}{\lambda}\right)$.

Наконецъ, для какой-нибудь точки S, взятой настолько близко отъ магистрали, что лѣвая волна прибѣгаетъ къ ней раньше, нежели правая успѣла принести н а и б о л ь ш е е давленіе, діаграмма давленій получаетъ видъ (A, III) зигзагообразной линіи $sopqs'o'p'q's'' \dots$

Построеніе одной вѣтви такой линіи, $sopq$, сдѣлано на фиг. 153 въ болѣе крупномъ масштабѣ, при чемъ для симметріи чертежа предположено, что точка S трубы отстоитъ отъ ея начала такъ, что время пробѣга этого разстоянія OM ударною волною равно $^1/_3$ времени полнаго подъема давленія OC (ось чертежа MN проведена черезъ начало трубы). Въ верхней части чертежа расположены пунктиромъ вѣтви SC подъема давленій правой волны и $S'C_1'$ паденія давленій лѣвой волны, въ тотъ моментъ, когда правая волна уже дошла до разсматриваемой точки S трубы; такимъ образомъ, разстояніе $SS' = 2OM = 2\frac{l-y}{\lambda}$, гдѣ y есть разстояніе точки S отъ задвижки. За время SS' давленія въ точкѣ S измѣняются по закону, изображаемому кривой SC. Къ концу этого промежутка времени волны расположатся такъ: правая займетъ положеніе $S'C'D$, а лѣвая — SC_1D_1. Строимъ внизу кривую $soabc$, равную кривой $S'C'$ и расположенную подъ нею такъ, что точки s и S', равно какъ c и C', лежатъ соотвѣтственно на однѣхъ вертикаляхъ. Давленіе въ точкѣ S сначала возрастаетъ по кривой so (воспроизводящей кривую $S'C'$) вплоть до точки o, которая опредѣляется моментомъ вступленія въ точку S лѣвой волны $S'C_1'$ и соотвѣтствующимъ ударнымъ давленіемъ $So = o_1o$; съ этого момента, въ виду того, что лѣвая волна приноситъ съ собою пониженіе давленія, теченіе кривой $soab$ измѣняетъ свой характеръ и опредѣляется суммированіемъ эффектовъ обѣихъ волнъ. Обѣ кривыя SC въ этотъ моментъ занимаютъ положенія $S'C'$ и SC_1D_1. Послѣ этого, черезъ промежутокъ времени Sa_1, принятый на чертежѣ для удобства равнымъ отрѣзку Sa', правая волна принесетъ повышеніе давленія a_1a (см. верхнюю и нижнюю діаграммы), а лѣвая волна принесетъ пониженіе



Фиг. 153.

давленія $a'm'$ (см. верхнюю діаграмму, гдѣ сдѣлано $Sa' = Sa_1$). Поэтому откладываемъ на нижней діаграммѣ по той же ординатѣ a_1a_1 отрѣзокъ $am = a'm'$ и получаемъ для этого момента времени точку m діаграммы и соотвѣтствующее повышеніе давленія a_1m. Подобнымъ же образомъ строимъ слѣдующую точку n діаграммы: откладываемъ одинаковыя времена $o_1b_1 = Sb_1 = Sb'$ (на чертежѣ принято $a_1b_1 = Sa_1$, почему точка b' совпадаетъ съ точкой S' верхней діаграммы); далѣе отрѣзокъ $b'n'$ переносимъ на ординату b_1b_1 отъ точки b нижней діаграммы, такъ что $bn = b'n'$. И такъ далѣе, до наибольшаго повышенія давленія c_1p, наступающаго тогда, когда правая волна принесетъ въ данную точку свое полное ударное давленіе $+P$, уменьшаемое соотвѣтствующимъ пониженіемъ давленія лѣвой волны $c'p'$ (при чемъ, конечно,

$o_1c_1 = Sc_1 = Sc'$ и также $cp = c'p'$). Дальше правая волна будетъ все время приносить полное давленіе $+P$; лѣвая же волна будетъ вызывать все большее и большее паденіе, которое, какъ это легко сообразить, будетъ протекать по кривой pq,—обращенной кривой $p'C_1$ лѣвой волны. Далѣе на протяженіи, считая отъ точки o_1, равномъ $2\frac{y}{\lambda}$, кривая будетъ изображаться прямой нулевого давленія qr, послѣ чего начнется пониженіе давленія, совершенно одинаковое съ тѣмъ, какъ оно повышалось. Такъ опредѣлится часть волны $sopqs'$,—дальнѣйшія части будутъ протекать симметрично съ этой. Очевидно, что наибольшее давленіе такой волны P_s будетъ меньше ударнаго P, и тѣмъ меньше, чѣмъ ближе точка S находится къ магистрали. Въ самомъ началѣ трубы давленіе P все время остается равнымъ нулю, такъ что давленіе въ трубѣ равно здѣсь давленію въ магистрали.

Итакъ, наличность двухъ волнъ, правой и лѣвой, вполнѣ объясняетъ тотъ фактъ, что большое избыточное давленіе у задвижки не вызываетъ, все-таки, никакого измѣненія давленія у магистрали. Съ другой стороны, она обусловливаетъ три характерныхъ вида діаграммъ давленій въ разныхъ точкахъ трубы. Поставивъ индикаторъ на трубѣ, въ которой путемъ быстраго запиранія задвижки произведенъ ударъ, и вращая барабанъ индикатора достаточно быстро, можно снять діаграммы давленій и сравнить ихъ съ получаемыми теоретически.

Но, прежде чѣмъ говорить объ экспериментальной провѣркѣ сдѣланныхъ выводовъ, отвѣтимъ на вопросъ: остается ли вода въ трубѣ послѣ удара неподвижной? Разсматривая какое-нибудь сѣченіе трубы, мы видимъ, что какъ въ немъ самомъ, такъ и по обѣ стороны отъ него давленія измѣняются: пока по обѣ стороны отъ разсматриваемаго сѣченія давленія одинаковы, вода въ немъ можетъ оставаться въ покоѣ; но какъ только съ одной стороны давленіе измѣняется, такъ сейчасъ же жидкость въ этомъ сѣченіи устремляется въ сторону меньшаго давленія съ нѣкоторой скоростью. Для опредѣленія ея формула Торичелли, очевидно, не примѣнима, такъ какъ здѣсь имѣетъ мѣсто движеніе не установившееся, а колебательное, и вопросъ можно рѣшить помощью того соображенія, что если погашеніе скорости вызываетъ увеличеніе давленія на P по ур-ію (60), то, наоборотъ, паденіе давленія на величину P вызываетъ появленіе скорости, опредѣляемой тѣмъ же ур-іемъ (60).

Итакъ, въ смыслѣ движенія воды въ трубѣ, для какой-нибудь точки m трубы картина явленія такова (діаграмма A, II, табл. VI). Пусть задвижка закрывается. Несмотря на это, въ точкѣ m сохраняется полная скорость v до тѣхъ поръ, пока къ точкѣ m не подойдетъ правая волна. Какъ только въ m давленіе начнетъ расти (по AC), скорость постепенно уменьшается до нуля, и вода останавливается къ тому моменту, какъ въ m приходитъ точка C діаграммы, ибо съ этого момента давленія по обѣ стороны сѣченія m сравниваются. Вода остается въ покоѣ до тѣхъ поръ, пока лѣвая волна не принесетъ разрѣженія: какъ только начнется паденіе давленія по A_1C_1, въ m появится скорость, направленная въ противоположную сторону, т.-е. отъ задвижки къ магистрали, при чемъ она все возрастаетъ до величины $-v=-\frac{P}{\varrho_0\lambda}$. Когда избытокъ давленія въ m упадетъ до нуля (прямая C_1E), давленія съ обѣихъ сторонъ сравняются, и теченіе въ m по направленію къ магистрали будетъ происходить съ постоянной скоростью v *). Далѣе правою волною приносится новое разрѣженіе, при чемъ со стороны задвижки давленіе будетъ меньше: на скорости воды въ m это отразится тѣмъ, что она будетъ постепенно падать до нуля вслѣдствіе, такъ сказать, торможенія, приносимаго разрѣженіемъ отъ задвижки. Вода въ m остановится тогда, когда въ нее придетъ точка F діаграммы. За все время fe_1 вода въ m неподвижна; въ это же время разрѣженіе передается до магистрали, и какъ только оно дойдетъ до нея, сейчасъ же большее давленіе магистрали погонитъ воду къ задвижкѣ. Въ m эта скорость по направленію къ задвижкѣ будетъ возрастать, пока давленіе будетъ расти по E_1F_1; достигнетъ своей наибольшей величины $+v=\frac{P}{\varrho_0\lambda}$, будетъ ее сохранять при $P=0$ по F_1A_2, а потомъ снова будетъ погашаться, когда давленіе начнетъ расти по A_2C_2.

Легко убѣдиться, что при задвижкѣ, съ тѣхъ поръ, какъ она окончательно закрыта, скорость все время равна нулю. Въ любомъ мѣстѣ трубы вода сначала останавливается, потомъ отбрасывается къ магистрали, остается въ покоѣ, отбрасывается къ задвижкѣ, остается въ покоѣ, опять бѣжитъ къ магистрали и т. д. Въ самомъ отвѣтвленіи отъ магистрали вода бѣжитъ то въ одну, то въ другую сторону.

Такимъ образомъ, все явленіе идетъ такъ: постепенно останавливается вода во всей трубѣ, растягивая ее и сжимаясь сама. Постепенно эти состоянія охватываютъ всю трубу, передаваясь отъ слоя къ слою со скоростью λ. По прошествіи времени $\frac{l}{\lambda}$ мы застаемъ растянутую трубу, наполненную сжатой и остановленной водою. При свободномъ сообщеніи съ магистралью, гдѣ господствуетъ первоначальное давленіе, вода въ трубѣ, понятно, не можетъ остаться въ равновѣсіи и начинаетъ вытекать изъ трубы въ магистраль; давленіе въ трубѣ сравнивается съ давленіемъ въ магистрали, т.-е. становится первоначальнымъ, а стѣнка трубы возстановляетъ первоначальную форму. Постепенно, отъ слоя къ слою, эти состоянія передаются со скоростью λ назадъ къ задвижкѣ. Черезъ время $\frac{l}{\lambda}$ слой, стоявшій у задвижки, начинаетъ испытывать стремленіе отойти отъ нея и образуетъ разрѣженіе, благодаря чему сейчасъ же останавливается, а стѣнка трубы деформируется, сжимаясь по сравненію съ первоначальнымъ состояніемъ. Эти состоянія опять черезъ время $\frac{l}{\lambda}$ достигнутъ до магистрали, давленіе которой заставитъ воду хлынуть изъ магистрали въ трубу; при этомъ

---

*) Это теченіе поддерживается тѣмъ, что вся труба между точкой m и задвижкой постепенно съ паденіемъ давленія съуживается и возстанавливаетъ свою форму, а наполняющая ее вода расширяется, откуда и появляется расходъ, поддерживающій въ точкѣ m эту скорость.

по трубѣ, по направленію къ задвижкѣ, будутъ распространяться состоянія, имѣвшія въ ней мѣсто до удара. Достигнувъ закрытой задвижки, они вызовутъ новый ударъ, и весь циклъ явленій начнетъ повторяться. Если на явленіе гидравлическаго удара посмотрѣть именно такимъ образомъ, то станетъ ясно, откуда берется эта, на первый взглядъ фантастическая, лѣвая волна: все дѣло заключается въ отмѣченной выше невозможности сохраненія въ равновѣсіи всѣхъ состояній воды и стѣнки трубы, когда вся остановленная и сжатая колонна воды находится въ непосредственномъ сообщеніи съ достаточно большой магистралью постояннаго давленія, въ невозможности водѣ отойти отъ задвижки, не оставляя за собою пустоты и т. д. Сами же волны, и правая и лѣвая, только удобны для облегченія представленія о періодическихъ измѣненіяхъ давленія въ трубѣ.

Экспериментальная провѣрка приведенной теоріи удара въ трубахъ состояла въ слѣдующемъ: 1) опредѣлялись наибольшіе избытки давленія въ трубѣ и сравнивались съ числами, даваемыми ур-іемъ (60); 2) непосредственно измѣрялась скорость λ распространенія ударной волны; выполнялось это путемъ измѣренія времени, протекающаго отъ начала подъема давленія въ одной точкѣ трубы до начала подъема давленія въ другой, отстоящей отъ первой на опредѣленномъ разстояніи L; это время сравнивалось съ вычисленнымъ временемъ $\frac{L}{\lambda}$, гдѣ λ опредѣлялось по ур-ію (61); 3) наконецъ, въ-третьихъ, снимались ударныя діаграммы въ различныхъ точкахъ трубы.

Наблюденія производились надъ чугунными трубами, діаметромъ въ 2″, 4″, 6″ и 24″, при чемъ толщина стѣнокъ ихъ была принята соотвѣтственно въ $\frac{10''}{32}$, $\frac{11''}{32}$, $\frac{13''}{32}$ и $\frac{22''}{32}$ *), такъ что отношеніе $\sqrt{\frac{e}{2R_0}}$, входящее въ выраженіе λ_2, было соотвѣтственно равно:

$$\frac{1}{8}\sqrt{10};\quad \frac{1}{8}\sqrt{\frac{11}{2}};\quad \frac{1}{8}\sqrt{\frac{13}{3}};\quad \frac{1}{8}\sqrt{\frac{11}{12}}.$$

Вычислимъ сначала λ_2 для трубы въ 2″, выражая ее въ *mtr/sec*; очевидно, что отъ λ_2 при $2R_0 = 2''$ можно перейти къ λ_2 во всякой другой трубѣ, умножая первую величину на отношеніе значенія $\left[\sqrt{\frac{e}{2R_0}}\right]_{\text{при какомъ-нибудь } d}$ къ $\left[\sqrt{\frac{e}{2R_0}}\right]_{\text{при } d = 2''}$.

---

*) Эти размѣры были взяты изъ таблицъ размѣровъ трубъ, предписанныхъ Московскимъ Водопроводнымъ Съѣздомъ, а не обмѣромъ; естественно, что дѣйствительныя толщины отличались отъ этихъ величинъ, что, хотя и очень мало, все-таки могло вызвать нѣкоторое кажущееся несогласіе теоріи съ опытомъ.

Для чугуна $E \backsim 1\,000\,000$ kgr/cm^2 или 10^{10} kgr/mtr^2, $g = 9{,}8$ mtr/sec^2; $\gamma = 1000$ kg/mtr^3; слѣдовательно

$$\lambda_2 = \sqrt{\frac{e}{2R_0}} \cdot \sqrt{\frac{Eg}{\gamma}} = \frac{1}{8}\sqrt{10} \cdot \sqrt{\frac{10^{10}.\,9{,}8}{10^3}} =$$

$$= \frac{10^4}{8}\sqrt{9{,}8} = 3913 \; mtr/sec = 1834 \; саж/сек.$$

Такова величина λ_2 для трубы діаметромъ въ 2″. Умножая эту величину соотвѣтственно на $\sqrt{\frac{11}{20}}, \sqrt{\frac{13}{30}}, \sqrt{\frac{11}{120}}$, получимъ скорости λ_2 для трубы въ 4″, 6″ и 24″.

Скорость λ_1 принята нами (см. стр. 294) въ 673 *саж/сек.* Вычисляя теперь λ по ур-ію (62), находимъ:

$2R_0$ въ дюйм.	e въ дюйм.	$\sqrt{\frac{e}{2R_0}}$	λ_2 въ саж/сек.	λ въ саж/сек.	$P:v$ въ *atm.*
2″	$\frac{10}{32}$	$\frac{1}{8}\sqrt{10}$	1834	632	4,066
4″	$\frac{11}{32}$	$\frac{1}{8}\sqrt{\frac{11}{2}}$	1360	604	3,886
6″	$\frac{13}{32}$	$\frac{1}{8}\sqrt{\frac{13}{3}}$	1207	588	3,783
24″	$\frac{22}{32}$	$\frac{1}{8}\sqrt{\frac{11}{12}}$	555	428	2,754

Какъ видно, для первыхъ трехъ трубъ скорость λ измѣняется сравнительно мало.

Далѣе, если уравненіе (60) отнести къ единицѣ скорости, т.-е. раздѣлить его на число, представляющее отношеніе величины скорости къ единицѣ мѣры, то результатъ, который можно выразить, съ одной стороны, просто членомъ $\frac{P}{v}$, а съ другой $\frac{\lambda\gamma}{g}$, будетъ представлять увеличеніе давленія на каждую единицу потерянной скорости; если v, g и λ выразить въ футахъ, а γ въ фунтахъ для 1 куб. фута, то $\frac{\lambda\gamma}{g}$ будетъ выражено въ фунтахъ на квадратный футъ для каждаго фута потерянной скорости. Такъ какъ рѣчь идетъ о водѣ и такъ какъ столбъ воды въ 34 фута уравновѣшиваетъ одну атмосферу, развивая давленіе $34 \,.\, \gamma$ фунтовъ на 1 кв. футъ, то мы находимъ, что $\frac{\lambda\gamma}{34\,\gamma g}$ представляетъ увеличеніе давленія, выраженное въ атмосферахъ, на каждый футъ потерянной скорости. Такъ какъ

$g = 32$ *фут/сек*^{2}, а скорость волны въ футахъ равна 7λ, гдѣ λ взято изъ вышеприведенной таблицы и выражено въ саженяхъ, то величина $\frac{7\lambda}{34.32} = \frac{7\lambda}{1088}$ и даетъ увеличенiе давленiя въ атмосферахъ на каждый футъ потерянной скорости. Эти величины подсчитаны въ послѣднемъ столбцѣ таблицы. Для трехъ первыхъ трубъ можно, слѣдовательно, считать, что *на каждый футъ скорости давленiе поднимается, въ среднемъ, на 4 атмосферы.*

1) Первая серiя опытовъ не дала полнаго согласiя между вычисленными величинами P и наблюденными,—главнымъ образомъ, по причинѣ непригодности употреблявшихся при этомъ манометровъ Бурдона съ максимальной стрѣлкой: инерцiя частей прибора откидывала стрѣлку дальше, чѣмъ нужно, такъ что показанiя манометровъ всѣ больше вычисленнаго P; но эти наблюденiя достаточно подтверждаютъ то, что величина P имѣетъ одну и ту же величину по всей трубѣ (кромѣ частей, ближайшихъ къ магистрали).

2) Непосредственныя измѣренiя λ дали хорошiе результаты для трубы въ 4″, на которой, въ среднемъ, оказалось, что длину въ 100 саж. волна пробѣгаетъ въ 0,165 секунды, чему соотвѣтствуетъ скорость $\lambda = \frac{100}{0{,}165} =$ $= 606$ *саж/сек*, что очень близко къ табличной величинѣ. Малые промежутки времени измѣрялись здѣсь помощью хронографа съ камертономъ, отбивавшимъ сотыя доли секунды.

3) Наконецъ, въ разныхъ мѣстахъ трубы снимались индикаторныя дiаграммы. Чтобы ихъ координировать, на каждой изъ нихъ наносились прямая атмосфернаго давленiя (для чего индикаторъ соединялся съ атмосферою) и прямая гидростатическаго давленiя (индикаторъ соединялся съ трубою, изъ которой еще не начиналось истеченiе). Зная масштабъ пружинъ индикатора и имѣя эти линiи (хотя достаточно было бы и одной изъ нихъ), можно по дiаграммамъ измѣрять давленiя. Чтобы координировать абсциссы дiаграммы, на ней особымъ карандашомъ наносились отмѣтки полусекундъ, которыя отбивалъ полусекундный маятникъ, всякiй разъ замыкающiй токъ и прижимающiй на одинъ моментъ карандашъ къ дiаграммѣ. Скорость v, имѣвшая мѣсто въ трубѣ до удара, опредѣлялась взвѣшиванiемъ вытекшей за извѣстный промежутокъ времени воды.

Ограничимся только слѣдующимъ примѣромъ дiаграммъ (копiя съ фотографiй, снятыхъ съ дѣйствительныхъ дiаграммъ).

На фиг. **B**, **C** и **D**, табл. VI представлены дiаграммы, снятыя съ трубы въ 2″ (ея длина была 356,3 саж.) при скорости истеченiя въ 1,8′; дiаграмма фиг. **B** снята у самой задвижки; дiаграмма фиг. **C** снята на разстоянiи отъ задвижки, равномъ $^1/_3$ всей длины, а фиг. **D** получена съ точки трубы, взятой на разстоянiи отъ задвижки, равномъ $^2/_3$ всей длины трубы. Во всѣхъ трехъ фигурахъ линiя ***ab*** есть линiя атмосфернаго давленiя, линiя ***cd*** есть линiя гидростатическаго давленiя. Точки подъ линiями ***ab*** суть отмѣтки полусекундъ. Изображены только первыя половины дiаграммъ. На фиг. **E** и **F** даны дiаграммы для трубы въ 6″ въ дiаметрѣ, снятыя—первая у задвижки, вторая—между задвижкой и магистралью.

Прежде всего бросается въ глаза сходство этихъ діаграммъ по внѣшнему виду съ фиг. **A**. Далѣе, горизонтальныя длины отъ начала подъема давленія до начала его паденія на первыхъ трехъ діаграммахъ относятся какъ $3:2:1$, какъ и слѣдовало ожидать на основаніи изложенной выше теоріи. Повышеніе давленія или, какъ говоритъ проф. Жуковскій, «ударное давленіе» по діаграммамъ вездѣ достигало 7 *atm.*, что хорошо согласуется съ вышеприведеннымъ подсчетомъ, который для этого случая даетъ $4{,}066.1{,}8 = 7{,}32$ *atm.* То обстоятельство, что на фиг. **C** и **D** горизонтальныя части нулевого P лежатъ выше прямой гидростатическаго давленія, слѣдуетъ объяснить тѣмъ, что ударъ отражался и на магистрали, повышая въ ней давленіе. Наконецъ, горизонтальная длина отъ m до n на фиг. **B** представляетъ время пробѣга ударною волною всей трубы туда и назадъ, т.-е. ея двойной длины. Тщательный обмѣръ діаграммъ далъ для трубы въ 6″ скорость $\lambda = 586$ *саж/сек* (вмѣсто теоретическихъ 588), для трубы въ 4″.... $\lambda = 600$ *саж/сек* (вмѣсто 604) и для трубы въ 2″ λ получилось 625 *саж/сек* (вмѣсто 632). Въ виду трудности обмѣра эти результаты нужно считать безусловно подтверждающими теорію.

Здѣсь мы намѣтили только сущность теоріи гидравлическаго удара, опуская ея развитіе и примѣненіе къ ряду практическихъ вопросовъ. Въ выше упомянутомъ источникѣ можно найти выясненіе вліянія на все явленіе мѣстныхъ уширеній въ трубѣ (водяныхъ колпаковъ), воздушныхъ колпаковъ, отверстій на трубѣ, черезъ которыя утекаетъ вода, отвѣтвленій отъ трубы, изъ которыхъ вода не выливается (тупики) и т. п. Замѣчательно то обстоятельство, что всѣ теоретическія соображенія подтвердились наблюденіями и, наоборотъ, всѣ частичныя особенности наблюденій получили теоретическое объясненіе. Отсылая интересующихся къ упомянутому источнику, укажемъ слѣдующіе, практически интересные результаты.

1. Если считать, что по мѣрѣ закрыванія затвора на трубѣ количество изливающейся жидкости уменьшается пропорціонально времени, то можно подсчитать то минимальное время t *sec*, которое необходимо для полнаго закрыванія трубы при условіи, чтобы фактическое ударное давленіе было въ m разъ меньше того, которое соотвѣтствуетъ погашаемой скорости и вычисляется по ур-ію (60). Даваемую проф. Жуковскимъ формулу можно представить такъ:

$$t = m\frac{2l}{\lambda}.$$

Здѣсь t—искомое время; m—вышеуказанное отношеніе, выбираемое сообразно обстоятельствамъ; $\frac{2l}{\lambda}$—время пробѣга ударною волною двойной трубы.

2. Объемъ воздуха U_0 воздушнаго колпака при давленіи p_0, достаточный для того, чтобы ударное повышеніе давленія P было очень мало, можно вычислять по формуламъ:

$$U_0 = k\frac{\pi d^2}{4}\,v\,\frac{2l}{\lambda}\,\frac{p_1{}^2}{p_0 P}.$$

Значеніе буквъ U_0, p_0 и P только что указано. Остальныя буквы имѣютъ слѣдующія значенія:

$k = 1,41$ есть отношеніе теплоемкости воздуха при постоянномъ давленіи къ его теплоемкости при постоянномъ объемѣ;

d — діаметръ трубы, въ которой погашается скорость v;

λ — скорость ударной волны въ трубѣ, на которой ставится колпакъ;

l — наименьшее изъ разстояній отъ колпака до задвижки или до магистрали или, вообще, до точки постояннаго давленія;

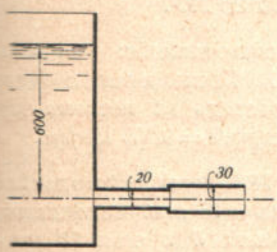
p_1 — то давленіе, которое имѣетъ мѣсто въ колпакѣ при теченіи воды по трубѣ со скоростью v.

Для пользованія формулой нужно давать для P достаточно малыя значенія, напр., 1 — 1,5 kgr/cm^2. Важно, чтобы количество воздуха въ колпакѣ пополнялось, въ случаѣ его убыли.

3. Видъ ударной діаграммы, снятой съ трубы, позволяетъ судить о мѣстѣ скопленія воздуха на трубѣ и также о мѣстѣ утечки воды изъ трубы. Если бы не необходимость для съемки такой діаграммы воспроизведенія всего явленія удара въ трубѣ, то этимъ обстоятельствомъ можно бы воспользоваться для построенія прибора, который давалъ бы возможность отыскивать мѣсто утечки; сопряженная съ откапываніемъ трубы, эта операція иногда бываетъ мѣшкотна и дорога.

Задачи къ главамъ II и III *).

24. Къ сосуду (фиг. 154) приставлена трубка двухъ діаметровъ, безъ всякаго скругленія кромокъ; трубка горизонтальна и настолько длинна, что наружную трубку можно считать заполненной сплошь; но тренія о стѣнки вводить не слѣдуетъ, такъ какъ длина трубки не настолько значительна. Опредѣлить расходъ при размѣрахъ, указанныхъ на фигурѣ, построить пьезометрическую линію и найти предѣльное значеніе напора, при которомъ широкій подтрубокъ перестаетъ быть заполненнымъ.



Фиг. 154.

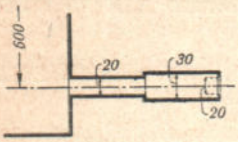
Отв. Считая, что сжатія при выходѣ изъ насадка нѣтъ, и оцѣнивая коэф-тъ сопротивленія при входѣ въ первый подтрубокъ черезъ 0,5, опредѣлимъ $Q = 1,075$ *litr/sec*. Скорости въ концѣ послѣдняго подтрубка, въ концѣ перваго подтрубка и въ сжатомъ сѣченіи перваго подтрубка, при коэф-тѣ внутренняго сжатія = 0,64 опредѣляются соотвѣтственно: 1,52 *mtr*, 3,42 *mtr* и 5,35 *mtr* въ секунду. Давленіе въ сжатомъ сѣченіи узкаго на-

---

*) Въ концѣ этого списка задачъ прибавлено нѣсколько дополнительныхъ задачъ на вопросы гидростатики. Большинство рѣшеній приведено послѣ вычисленій по счетной линейкѣ, т.-е. съ доступной для нея точностью лишь въ третьемъ знакѣ. Во избѣжаніе недоразумѣній относительно употребленныхъ значеній коэффиціентовъ сопротивленія, въ большинствѣ рѣшеній указаны или принятыя значенія коэффиціентовъ или названія соотвѣтствующихъ эмпирическихъ данныхъ.

садка на 0,95 *mtr* ниже высоты атмосфернаго давленія, а передъ входомъ въ широкій насадокъ—на 0,295 *mtr*, если коэф-тъ сопротивленія до сжатаго сѣченія считать равнымъ 0,06. Это давленіе обратится въ нуль при напорѣ въ 6,6 *mtr*.

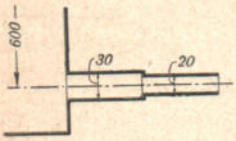
25. Найти расходъ и построить пьезометрическую линію для подтрубка, изображеннаго на фиг. 155, пренебрегая треніемъ и считая напоръ надъ горизонтальною осью его равнымъ 600 *mm*.



Фиг. 155.

Отв. Считая коэф-тъ несовершеннаго сжатія, въ соотвѣтствіи съ таблицами Вейсбаха $= 1{,}112\ \alpha$, гдѣ α есть коэф-тъ совершеннаго сжатія въ тонкой стѣнкѣ, равный 0,64, а также считая коэф-тъ сопротивленія при проходѣ черезъ первый насадокъ $= 0{,}5$, а тотъ же коэф-тъ при выходѣ изъ отверстія $= 0{,}06$, найдемъ скорость въ отверстіи (въ сжатомъ сѣченіи) $= 2{,}83$ *mtr*, во второмъ подтрубкѣ—0,891 *mtr*, въ первомъ подтрубкѣ—2,01 *mtr* и въ сжатомъ сѣченіи этого подтрубка 3,15 *mtr* въ секунду. Сообразно съ этимъ расходъ равенъ 0,63 *litr/sec*. Давленіе въ сжатомъ сѣченіи насадка больше высоты атмосфернаго давленія на 0,07 *mtr*; давленіе передъ отверстіемъ больше атмосфернаго на 0,393 *mtr*.

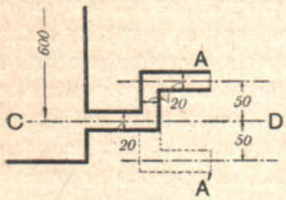
26. Рѣшить вопросы предыдущей задачи для насадка по фиг. 156, если напоръ надъ горизонтальной осью насадка по прежнему $= 600$ *mm*?



Фиг. 156.

Отв. Коэф-ты сопротивленій и сжатія считаемъ, какъ въ предыдущей задачѣ; сжатіе при входѣ въ широкій насадокъ считаемъ одинаковымъ со сжатіемъ при отверстіяхъ въ тонкой стѣнкѣ. Тогда скорость въ концѣ насадка $= 2{,}93$ *mtr/sec*; расходъ $Q = 0{,}92$ *litr/sec*. Давленіе передъ входомъ въ малый подтрубокъ на 0,475 *mtr* больше атмосфернаго; давленіе въ сжатомъ сѣченіи малаго подтрубка на 0,356 *mtr* ниже высоты атмосфернаго давленія.

27. Къ сосуду приставлена трубка, составленная изъ колѣнъ (фиг. 157). При напорѣ въ 600 *mm* надъ центромъ тяжести отверстія въ стѣнкѣ найти расходъ черезъ сѣченіе A, пренебрегая треніемъ. Тотъ же вопросъ рѣшить, предполагая, что колѣно A занимаетъ положеніе A', указанное пунктиромъ, повернувшись около горизонтальной оси CD на 180^0.



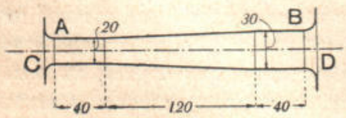
Фиг. 157.

Отв. Считаемъ коэф-ты сопротивленія: при входѣ $= 0{,}5$; на колѣно въ $90^0 = 1$. Пренебрегая прочими сопротивленіями, опредѣляемъ расходъ въ первомъ случаѣ $= 0{,}551$ *litr/sec*, во второмъ случаѣ $= 0{,}603$ *litr/sec*.

28. Какъ измѣнятся расходъ въ обоихъ случаяхъ задачи № 27, если вмѣсто колѣнъ поставить закругленія, при чемъ радіусъ закругленія оси сдѣлать $= 25$ *mm*? Если сдѣлать его $= 50$ *mm*? Въ обоихъ случаяхъ разстояніе между осью части A и осью CD неизмѣнно $= 50$ *mm*. Треніе попрежнему въ расчетъ не вводить.

Отв. При радіусѣ закругленія оси въ 25 *mm* коэф-тъ сопротивленія въ колѣнѣ $= 0{,}206$, почему расходы будутъ 0,745 и 0,81 *litr/sec*. При радіусѣ закругленія оси въ 50 *mm* коэф-тъ сопротивленія колѣна будетъ 0,092, почему расходы будутъ 0,795 и 0,865 *litr/sec*.

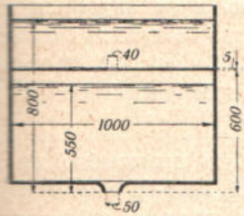
29. Имѣется подтрубокъ (фиг. 158), состоящій изъ двухъ цилиндрическихъ частей и одной конической. Его можно приставить къ сосуду или концомъ A при помощи фланца C, очерченнаго по формѣ сжатой струи, или концомъ B при помощи такого же фланца D. Въ первомъ случаѣ имѣются, слѣд., части C—AB (D выкинуто), а во второмъ D—BA (C выкинуто). Сравнить расходы въ обоихъ слу-



Фиг. 158.

чаяхъ, считая, что напоръ въ сосудѣ $=800$ *mm*, и пренебрегая всѣми потерями напора. Выяснить соотвѣтственно давленія въ частяхъ *A* и *B*.

Отв. При изліяніи черезъ *B* расходъ $=2{,}8$ *litr/sec*; давленіе въ *A* меньше высоты атмосфернаго давленія на $\frac{65}{16}$ напора, т.-е на 3,25 *mtr*. При изліяніи черезъ *A* расходъ $=$ $=1{,}245$ *litr/sec*; давленіе въ *B* превосходитъ высоту атмосфернаго давленія на $\frac{65}{81}$ напора, т.-е. на 0,642 *mtr*.



Фиг. 159.

30. Имѣется сосудъ съ перегородкой, въ которой сдѣлано круглое отверстіе въ тонкой стѣнкѣ (фиг. 159); размѣры указаны на рисункѣ въ *mm*. Сравнить расходы въ томъ случаѣ, когда напоръ $=800$ *mm* и когда онъ $=550$ *mm*. Въ обоихъ случаяхъ считать напоръ постояннымъ.

Отв. Считая въ нижнемъ отверстіи коэф. скорости $=0{,}98$, а въ верхнемъ отверстіи считая коэф-тъ расхода$=0{,}986.0{,}62=$ $=0{,}605$ и коэф-тъ сжатія въ немъ же $=0{,}986.0{,}64=0{,}63$, найдемъ въ первомъ случаѣ $Q=2{,}8$ *litr/sec*, а во второмъ случаѣ $Q=6{,}4$ *litr/sec*.

31. Въ днѣ горизонтальнаго цилиндрическаго сосуда, діаметромъ 300 *mm*, сдѣлано отверстіе, очерченное по формѣ сжатой струи. Діаметръ отверстія $=20$ *mm*, и оно расположено по оси цилиндра. Въ цилиндрѣ помѣщенъ поршень (безъ тренія), нагруженный горизонтальной силой въ 150 *kgr*. Предполагая, что при движеніи поршня эта сила сохраняетъ свою постоянную величину, и что давленіе во всѣхъ точкахъ дна цилиндра одно и то же, опредѣлить: съ какою скоростью долженъ двигаться этотъ поршень, для того, чтобы движеніе воды было установившееся? Считая, что ось цилиндра лежитъ на разстояніи 1 *mtr* отъ полу, найти, гдѣ струя упадетъ на полъ, если пренебречь сопротивленіемъ воздуха.

Отв. Движеніе поршня должно происходить со скоростью 28,2 *mm/sec*, если коэффиціентъ скорости въ отверстіи $=0{,}98$. Струя упадетъ на полъ въ разстояніи 2,86 *mtr* отъ проекціи отверстія на плоскость пола.

32. Если въ ур-іи (3) § 11 (стр. 100) положить $A=A_0$, то ур-іе даетъ: $v=\infty=v_0$. Что это значитъ?

Отв. Это значитъ, что совершенная жидкость, вступившая въ трубу съ какой-нибудь начальной скоростью и опускающаяся съ уровня $H+\frac{p_0}{\gamma}$ на уровень $\frac{p}{\gamma}$, не можетъ двигаться равномѣрно и заполнять трубу иначе, какъ при безконечно большой начальной скорости. Если же начальная скорость имѣетъ конечное значеніе, то паденіе совершенной жидкости съ высшаго уровня на низшій будетъ сопровождаться ускореніемъ ея движенія, какъ и всякаго свободнаго тѣла, и она не будетъ въ состояніи заполнять трубу.

33. Шлюзовая камера (фиг. 160) имѣетъ форму прямоугольнаго ящика шириною въ 5 *mtr* и длиною 60 *mtr*, и поставлена для перехода съ горизонта *A* на горизонтъ *B*, лежащій на 4 *mtr* ниже перваго. Въ стѣнкахъ имѣются отверстія, центры тяжести которыхъ лежатъ на 2 *mtr* ниже горизонтовъ *A* и *B*. Каково должно быть отверстіе *C*, чтобы шлюзъ наполнялся въ 10 *min*, если считать, что отверстіе открывается моментально и что, пока горизонтъ въ камерѣ поднимается до уровня центра тяжести отверстія, истеченіе происходитъ въ атмосферу, при дальнѣйшемъ же подъемѣ истеченіе происходитъ подъ уровень. Если далѣе, закрывъ *C*, открыть отверстіе *D* (одинаковое съ *C*), то во сколько времени камера опорожнится?

Фиг. 160.

Отв. Если въ *C* выполнить отверстіе изъ двухъ квадратныхъ оконъ и считать коэф-тъ расхода $= 0{,}6$, то достаточно стороны квадрата въ 0,632 *mtr*. Опорожненіе камеры при двухъ такихъ отверстіяхъ въ *D* произойдетъ за 566 *sec* = 9,43 *min*.

34. Въ днѣ цилиндрическаго вертикальнаго воздушнаго колпака съ плоскими днищами, діаметромъ 0,8 *mtr*, сдѣлано отверстіе для спуска воды діаметромъ 50 *mm*. Вода въ колпакѣ стоитъ такъ, что ея уровень дѣлитъ его образующую въ отношеніи 1 : 3. Къ отверстію приставлена труба діаметромъ 50 *mm*, длиною 3 *mtr*, оканчивающаяся краномъ и, далѣе, отросткомъ той же трубы въ 0,5 *mtr* длиною. Труба расположена такъ, что центръ тяжести ея выпускного отверстія лежитъ въ плоскости нижняго дна. Давленіе воздуха = 150 фунтовъ по манометру. Во сколько времени уровень воды опустится до середины образующей, если допустить, что температура и количество воздуха въ колпакѣ не мѣняется? Высота колпака = 2 *mtr*; кранъ повернутъ на 20°. Во сколько времени произойдетъ такое же пониженіе горизонта въ колпакѣ при свободномъ сообщеніи воздушнаго пространства съ атмосферою?

Отв. Называя черезъ p давленіе въ колпакѣ при какомъ-нибудь положеніи h надъ отверстіемъ въ днѣ, считая коэф-тъ сопротивленія при входѣ $= 0{,}48$, коэф-тъ сопротивленія тренія $\zeta_r = 0{,}007$ (по Фаннингу) и беря коэф-тъ сопротивленія крана по таблицамъ, найдемъ, что при установившемся движеніи скорость въ концѣ трубы можно найти по ур-ію: $5\,v^2 = 2g\left(h + \frac{p}{\gamma}\right)$. Возможныя колѣна въ расчетъ не приняты. Выражая для всякаго h давленіе p вѣсомъ столба жидкости, наполняющей колпакъ, находимъ: давленіе 150 *lbs* по манометру равно 105500 kgr/mtr^2; поэтому $p = \frac{105500 . 0{,}5}{2 - h}$ kgr/mtr^2. Слѣд., скорость опредѣлится изъ ур-ія:

$$5\,v^2 = 2g\left(h + \frac{105{,}5 . 0{,}5}{2 - h}\right).$$

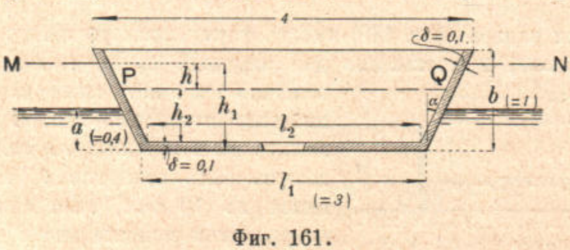
Поэтому время пониженія горизонта съ высоты $h = 1{,}5$ *mtr* до высоты $h = 1$ *mtr* опредѣлится:

$$t_{sec} = \frac{0{,}8^2}{0{,}05^2}\sqrt{\frac{5}{2g}}\int_1^{1{,}5}\frac{dh}{\sqrt{h + \frac{52{,}75}{2 - h}}}.$$

Рѣшая интегралъ по Симпсону, найдемъ, при дѣленіи разности предѣловъ на 10 равныхъ частей, $t = 7{,}6$ секундъ. Для послѣдняго вопроса задачи находимъ

$$t = \frac{0{,}8^2}{0{,}05^2}\sqrt{\frac{5}{2g}}\,2\left(\sqrt{1{,}5} - \sqrt{1}\right) = 58 \text{ секундъ}.$$

35. Понтонъ, длиною $L_1 = 12$ *mtr*, имѣетъ постоянное поперечное сѣченіе, какъ на фигурѣ 161; его внутренняя длина $L_2 = 11{,}8$ *mtr*. Онъ плаваетъ такъ, что его дно погружено подъ воду на 0,4 *mtr*. Въ днѣ его сдѣлано отверстіе. Предполагая, что оно



Фиг. 161.

можетъ быть открыто моментально, найти, какова должна быть его площадь, чтобы понтонъ могъ быть затопленъ въ 10 минутъ? Коэф-тъ расхода считать = 0,6; толщина всѣхъ стѣнокъ понтона $\delta = 0{,}1$ *mtr*.

Отв. Въ нѣкоторый моментъ, когда понтонъ ушелъ на глубину h_1 до плоскости MN и внутрь его натекла вода на глубину h_2 до плоскости PQ, по закону Архимеда имѣемъ:

$$\frac{L_1}{L_2}\left[l_1(h_1-a)+tg\,\alpha\,(h_1{}^2-a^2)\right]=l_2h_2+tg\,\alpha\,h_2{}^2.$$

Въ это время за періодъ dt перетекаетъ количество воды:

$$L_1(l_1+2h_1\,tg\,\alpha)\,dh_1=\mu F\sqrt{2gh}\,dt.$$

Напоръ h въ это время есть: $h=h_1-\delta-h_2$. Выражая h и h_2 по напору h_1, получимъ для опредѣленія площади отверстія F ур-іе:

$$\frac{T.\mu.F.\sqrt{2g}}{L_1}=\int_a^b\frac{(l_1+2tg\,\alpha.h_1)\,dh_1}{\sqrt{h_1+\frac{l_2}{2tg\,\alpha}-\delta-\sqrt{\frac{L_1}{L_2}}\cdot\sqrt{\frac{l_2{}^2.L_2}{4tg^2\alpha.L_1}-\frac{l_1+a\,tg\,\alpha}{tg\,\alpha}a+\frac{l_1}{tg\,\alpha}h_1+h_1{}^2}}}.$$

Здѣсь T есть заданное время въ секундахъ; уголъ α есть уголъ между вертикалью и боковой стѣнкой понтона; $\delta=0{,}1$ толщина его стѣнки. Значенія буквъ a и b видно изъ чертежа; ширина по дну внутри понтона $l_2=l_1-2\delta\,tg\,\frac{90^0-\alpha}{2}$. Внося числовыя значенія и раскрывая интегралъ по правилу Симпсона, для чего дѣлимъ разность $(b-a)$ на 6 равныхъ частей, находимъ необходимую площадь отверстія $F=0{,}0342$ mtr^2.

Если бы, по условіямъ задачи, можно было считать толщину стѣнки $\delta=0$, то пришлось бы положить также: $l_2=l_1$ и $L_2=L_1$, такъ что вышенаписанное ур-іе приняло бы видъ:

$$\frac{T\mu F\sqrt{2g}}{L_1}=\int_a^b\frac{2tg\,\alpha\left(h_1+\frac{l_1}{2tg\,\alpha}\right)dh_1}{\sqrt{h_1+\frac{l_1}{2tg\,\alpha}-\sqrt{\left(h_1+\frac{l_1}{2tg\,\alpha}\right)^2-\frac{l_1+a\,tg\,\alpha}{tg\,\alpha}\,a}}}.$$

Для краткости письма положимъ

$$\frac{l_1+a\,tg\,\alpha}{tg\,\alpha}\,a=c$$

и дѣлаемъ замѣну:

$$h_1+\frac{l_1}{2\,tg\,\alpha}-\sqrt{\left(h_1+\frac{l_1}{2\,tg\,\alpha}\right)^2-c}=y^2,\quad\ldots\ldots\ldots\ldots(a)$$

откуда, съ другой стороны,

$$h_1+\frac{l_1}{2\,tg\,\alpha}+\sqrt{\left(h_1+\frac{l_1}{2\,tg\,\alpha}\right)^2-c}=\frac{c}{y^2}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots(b)$$

въ справедливости чего убѣждаемся, перемножая оба ур-ія (a) и (b). Складывая ихъ, находимъ:

$$h_1+\frac{l_1}{2\,tg\,\alpha}=\frac{1}{2}\left(y^2+\frac{c}{y^2}\right)=\frac{y^2}{2}\left(1+\frac{c}{y^4}\right).$$

Откуда

$$dh_1=y\,dy-\frac{c\,y\,dy}{y^4}=y\,dy\left(1-\frac{c}{y^4}\right).$$

Предыдущій интегралъ приводится поэтому къ интегралу:

$$\int_a^b \frac{2\,tg\,\alpha\; y^2\left(1-\frac{c^2}{y^8}\right) y\,dy}{2\,y} = \int_a^b tg\,\alpha\left[y^2\,dy - \frac{c^2}{y^6}\,dy\right] =$$

$$= \Bigg|_a^b tg\,\alpha\left[\frac{\left(h_1+\frac{l_1}{2\,tg\,\alpha}-\sqrt{\left(h_1+\frac{l_1}{2\,tg\,\alpha}\right)^2-c}\right)^{3/2}}{3} + \frac{c^2}{5\left(h_1+\frac{l_1}{2\,tg\,\alpha}-\sqrt{\left(h_1+\frac{l_1}{2\,tg\,\alpha}\right)^2-c}\right)^{5/2}}\right].$$

Вставляя предѣлы и числовыя величины, находимъ $F = 0{,}0301$ *mtr*².

36. Понтонъ имѣетъ форму прямоугольнаго параллелепипеда, при чемъ основаніе его снаружи имѣетъ размѣры 3,5 *mtr* $\times$ 12 *mtr*, внутри 3,3 *mtr* $\times$ 11,8 *mtr*, при толщинѣ боковыхъ стѣнокъ $\delta = 0{,}1$ *mtr*. Высота его снаружи $b = 1$ *mtr*, внутри 0,9 *mtr*, при толщинѣ дна $\delta = 0{,}1$ *mtr*. Понтонъ нагруженъ такъ, что сидитъ въ водѣ на глубинѣ $a = 0{,}4$ *mtr*. Опредѣлить площадь F отверстія въ днѣ понтона, необходимую для его затопленія въ 10 минутъ.

Отв. Называя черезъ B_1 и B_2 площади внѣшняго и внутренняго основаній параллелепипеда и называя буквой T заданное время затопленія въ секундахъ, получаемъ для опредѣленія искомой площади F ур-іе:

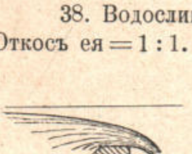
$$\frac{T.\mu F\sqrt{2g}}{B_1} = \frac{2B_2}{B_1-B_2}\left\{\sqrt{\frac{B_1}{B_2}a-\delta-\left(\frac{B_1}{B_2}-1\right)a} - \sqrt{\frac{B_1}{B_2}a-\delta-\left(\frac{B_1}{B_2}-1\right)b}\right\}.$$

Вставляя всѣ данныя и рѣшая его, находимъ $F = 0{,}0302$ *mtr*². Если бы толщину дна и боковыхъ стѣнокъ можно было считать $= 0$, то перетеканіе до затопленія происходило бы подъ постояннымъ напоромъ $= a$, такъ что $F = 0{,}025$ *mtr*².

37. Для опредѣленія расхода въ каналѣ, шириною 1,5 *mtr*, съ вертикальными стѣнками, въ немъ во всю его ширину поставлена вертикальная поперечная стѣнка съ острою кромкою и со свободнымъ доступомъ воздуха подъ струю. Когда горизонтъ предъ водосливомъ установился, оказалось, что вода стояла надъ дномъ канала на высотѣ 1,3 *mtr*, а высота порога надъ дномъ была сдѣлана 0,995 *mtr*. Каковъ расходъ?

Отв. Вычисляя по ур-іямъ (17) и (18) Базена, опредѣляемъ $Q = 0{,}48$ *mtr*³/*sec*. Вычисляя по таблицѣ 27 H. Smith'а, опредѣлимъ $Q = 0{,}474$ *mtr*³/*sec*.

38. Водосливная плотина (фиг. 162) поставлена перпендикулярно къ руслу рѣки. Откосъ ея $= 1:1$. Расходъ достигаетъ 12 *mtr*³. Какой длины долженъ быть водосливъ, чтобы горизонтъ не подымался выше 0,4 *mtr* надъ порогомъ, ширина котораго $= 300$ *mm*.



Фиг. 162.

Отв. Считая глубину въ рѣкѣ неопредѣленно большой, сообразно съ этимъ беря μ по табл. 20, принимая во вниманіе вліяніе откоса по табл. 21, оцѣнивая вліяніе толщины стѣнки по ур-ію (19), пренебрегая боковымъ сжатіемъ и предполагая свободный доступъ воздуха подъ струю, находимъ необходимую длину порога въ 24,3 *mtr*.

39. Какого размѣра должна быть круглая чугунная труба, положенная подъ насыпью желѣзной дороги, для того, чтобы пропускать расходъ въ 2 *mtr*³, не вызывая передъ насыпью повышенія болѣе, какъ на 1,5 *mtr* надъ центромъ трубы? Труба уложена съ уклономъ 1 : 100, имѣетъ длину въ 15 *mtr*, ея входъ снабженъ откосными крыльями, передняя стѣнка которыхъ имѣетъ уклонъ 100 : 1.

Отв. Допустимъ сначала, что весь напоръ расходуется на треніе въ трубѣ; тогда $i = (1{,}5 + 0{,}01.15):15 = 0{,}11$; слѣд. $Q^2 : i = 36{,}36\ldots$ По таблицѣ Фаннинга (№ 39) видно, что труба потребовалась бы отъ 0,5 до 0,6 *mtr* діаметромъ. Допустимъ, наоборотъ, что треніемъ можно пренебречь; считая коэф-тъ сопротивленія при входѣ, благодаря указанному въ условіяхъ задачи расположенію откосныхъ крыльевъ, $\zeta_e = 0{,}5$, найдемъ, что діаметръ трубы долженъ быть ∞ 0,76 *mtr*. Наконецъ, полагаемъ трубу въ 0,8 *mtr*; оцѣниваемъ по Фаннингу $\zeta_r = 0{,}0041$ и находимъ окончательно, что эта труба можетъ пропустить

расходъ $$Q = \frac{\pi D^2}{4}\sqrt{\frac{2g.1{,}65}{1 + 0{,}5 + \frac{4.15}{0{,}8}\cdot 0{,}0041}} = 2{,}125 \ mtr^3/sec$$

40. Подъ полотномъ ж. д. уложена труба, сначала цилиндрическая, діаметромъ 400 *mm* и длиною 10 *mtr*; далѣе цилиндръ переходитъ въ конусъ длиною 5 *mtr* съ угломъ между образующими при вершинѣ въ 20^0, обращенный широкимъ концомъ къ выходу. Труба горизонтальная; надъ центромъ ея при входѣ вода стоитъ на 1,5 *mtr*. Каковъ расходъ? При входѣ устье трубы срѣзано откосною плоскостью насыпи полотна, откосъ которой $= 1:1{,}5$. Какъ измѣнился бы расходъ, если бы на всю длину въ 15 *mtr* труба сохраняла постоянный діаметръ въ 0,4 *mtr*?

Отв. По Вейсбаху, коэф-тъ сопротивленія при входѣ $= 0{,}9$. Для цилиндрической части трубы, по Фаннингу, $\zeta_r = 0{,}0051$. Выпускной діаметръ трубы $= 0{,}4\,(1 + tg\ 10^0) = 0{,}470$ *mtr*. Имѣя въ виду оцѣнить потерю напора въ расходящейся части трубы, какъ потерю напора на треніе, по средней живой силѣ, находимъ, что эта средняя живая сила соотвѣтствуетъ діаметру 0,440 *mtr*. Для опредѣленія скорости v въ концѣ трубы имѣемъ ур-іе:

$$2g.1{,}5 = v^2\left[1 + \left(0{,}9 + 0{,}0051\,\frac{4.10}{0{,}4}\right)\left(\frac{0{,}47}{0{,}40}\right)^4 + 0{,}0051\,\frac{4.5}{0{,}44}\left(\frac{0{,}47}{0{,}44}\right)^4\right].$$

Отсюда $v = 2{,}72$ *mtr/sec*, а слѣд. $Q = \frac{\pi.0{,}47^2}{4} v = 0{,}472$ *mtr³/sec*. Если бы труба была цилиндрическая, діаметромъ 0,4 *mtr*, то мы получили бы: $v = 3{,}5$ *mtr/sec*, но $Q = 0{,}44$ *mtr³/sec*, т.-е. расходъ, меньшій почти на 7,5%.

41. Исходя изъ таблицы коэф-товъ расхода для насадка Фрэнсиса (см. стр. 142), можно ли опредѣлить потери напора въ отдѣльности для его частей *A*, *B*, *C* и т. д., и какъ это сдѣлать?

Отв. Въ виду довольно значительной разницы коэф-товъ расхода въ одномъ и томъ же насадкѣ съ перемѣной напора, для выясненія коэф-товъ сопротивленія на отдѣльныхъ участкахъ насадковъ слѣдуетъ сравнивать разные насадки при условіи постоянства скорости въ отдѣльныхъ соотвѣтственныхъ сѣченіяхъ. Такъ, напр., насадокъ *ABCDE* при напорѣ 0,42′ пропускаетъ количество воды почти такое же, что и насадокъ *AB* при напорѣ 0,85′. Въ этомъ послѣднемъ случаѣ коэф. сопр. ζ_B, отнесенный къ скорости въ сѣченіи *B*, есть: $\zeta_B = \frac{1}{0{,}78^2} - 1 = 0{,}645$. Называя черезъ v_E скорость въ концѣ насадка *A...E*, называя черезъ ζ_{BE} коэф-тъ сопротивленія для его участка *BCDE*, отнесенный къ скорости v_E, имѣемъ ур-іе:

$$H = \zeta_B\,\frac{v_B^2}{2g} + (1 + \zeta_{BE})\,\frac{v_E^2}{2g}.$$

При этомъ, напримѣръ, обмѣромъ чертежа, находимъ отношеніе площадей сѣченій *B* и *E* какъ 7,88; слѣд., квадраты скоростей относятся какъ 1 : 62. Послѣ этого, такъ какъ насадокъ *A...E* даетъ полный коэф-тъ расхода $\mu = 0{,}143$ при напорѣ 0,42′, то получаемъ изъ предыдущаго ур-ія:

$$\frac{1}{0{,}143^2} = 0{,}645.62 + 1 + \zeta_{BE}.$$

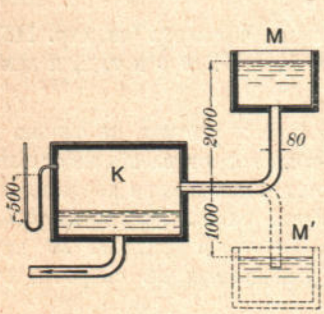
Отсюда, при данномъ напорѣ 0,42′, на пути отъ *B* до *E* коэф-тъ сопротивленія былъ $\zeta_{BE} = 8$.

Подобнымъ же образомъ найдемъ:

При напорѣ 0,64′ . . . . $\zeta_{BE} = 8{,}4$;
„ „ 0,11′ . . . . $\zeta_{BE} = 7{,}5$;
„ „ 0,63′ въ насадкѣ *A...D* . . $\zeta_{BD} = 2{,}7$;
„ „ 0,18′ „ . . $\zeta_{BD} = 2{,}4$; соотвѣтственно $\mu = 0{,}215$.
„ „ 0,71′ „ *A...C* . . $\zeta_{BC} = 0{,}72$;
„ „ 0,10′ „ . . $\zeta_{BC} = 0{,}5$ и т. д.

42. Какое давленіе долженъ развивать питательный насосъ въ своемъ воздушномъ колпакѣ для того, чтобы поддерживать неизмѣннымъ уровень воды въ котлѣ при слѣдующихъ условіяхъ. Длина питательной трубы $= 25$ *mtr*, ея діаметръ $= 50$ *mm*. На ней стоятъ 8 колѣнъ на 90° и одинъ тарельчатый клапанъ съ плоской тарелкой и нижними направляющими. Котелъ имѣетъ 100 *mtr*² поверхности нагрѣва и испаряетъ съ каждаго *mtr*² по 18 *kgr* пара въ часъ. Питаніе вводится въ паровое пространство; давленіе въ котлѣ 12 *atm* по манометру; отверстіе питательной трубы лежитъ на 4 *mtr* выше уровня воды въ воздушномъ колпакѣ насоса. Питаніе, равно какъ и испареніе происходятъ непрерывно и равномѣрно.

Отв. Секундный расходъ холодной воды опредѣляется въ 0,5 *litr/sec*; скорость воды почти 0,25 *mtr/sec*. Считаемъ: коэф-тъ сопротивленія при входѣ $\zeta_e = 0{,}5$; коэф-тъ сопротивленія клапана $\zeta_{кл.} = 7{,}1$, соотвѣтственно 20% суженія; коэф-тъ сопротивленія каждаго колѣна на 90° $\zeta = 1$; коэф-тъ сопротивленія тренія, по Дарси, $\zeta_r = 0{,}0075$. Напоръ на гидродинамическія потери опредѣляется по этимъ даннымъ въ $31{,}6 \dfrac{v^2}{2g} = 0{,}101$ *mtr*. Слѣдовательно, давленіе въ колпакѣ насоса достаточно въ 12,501 *kgr/cm*², если считать, что 1 *atm* равна 1 *kgr/cm*².



Фиг. 16

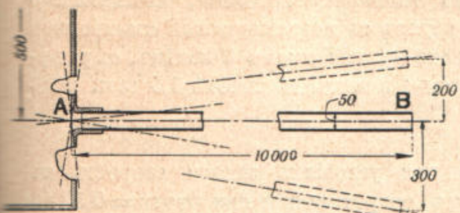
43. Изъ холодильника *K* паровой машины (фиг. 163 смѣсь пара и воды непрерывно выкачивается насосомъ, такъ что въ открытой манометрической трубкѣ ртуть стоитъ такъ, какъ это показано на рисункѣ. Конденсаторъ соединенъ съ резервуаромъ *M* трубою въ 80 *mm* въ діаметрѣ, длиною 8 *mtr*; на пути имѣются 5 поворотовъ на 90° (радіусъ закругленія оси $= 100$ *mm*). Сколько воды выливается изъ *M* въ *K*? Сколько воды будетъ подаваться въ *K*, если резервуаръ *M* займетъ положеніе *M′*? Удѣльный вѣсъ ртути $= 13{,}6$.

Отв. Считая коэф-ты сопротивленій при входѣ $\zeta_e = 0{,}5$, тренія (по Дарси) $\zeta_r = 0{,}013$ и въ закругленіи (по Вейсбаху) $\zeta = 0{,}2$, найдемъ въ первомъ случаѣ $Q = 23{,}7$ *litr/sec*, во второмъ случаѣ $Q = 19{,}2$ *litr/sec*.

44. Имѣются 2 простыхъ водопровода, одинаковыхъ какъ по длинѣ и діаметру трубъ, такъ и по относительному расположенію горизонтовъ въ сообщаемыхъ этими трубами сосудахъ. Разница только въ томъ, что въ одномъ случаѣ течетъ ртуть, въ другомъ вода. Считая, что всѣ коэф-ты сопротивленій въ обѣихъ жидкостяхъ одинаковы, отмѣтить, какая будетъ разница въ обстоятельствахъ движенія въ обоихъ случаяхъ: расходѣ, пьезометрической линіи, давленіи въ трубѣ и т. д.

Отв. Давленіе въ каждой точкѣ трубы, проводящей ртуть, будетъ въ 13,6 разъ больше соотвѣтствующихъ давленій въ трубѣ, проводящей воду. Расходъ ртути по вѣсу будетъ въ 13,6 разъ больше расхода воды; расходы по объему будутъ одинаковы, равно какъ и прочія обстоятельства движенія.

45. Къ сосуду (фиг. 164) приставлена прямая круглая труба діаметромъ 50 *mm* и длиною 10 *mtr*. Она соединена съ сосудомъ такъ (напр., помощью кожанаго мѣшка), что ей можно давать любые уклоны, однако такъ, что точка *A* не измѣняетъ своего положенія. Опредѣлить расходъ и пьезометрическую линію, когда труба горизонтальна. Что измѣнится, если конецъ *B* поднять кверху на 200 *mm*? Если его опустить на 300 *mm*? Какъ нужно поставить трубу, чтобы по всей ея длинѣ давленіе было равно атмосферному? Входъ *A* очерченъ по формѣ сжатой струи.



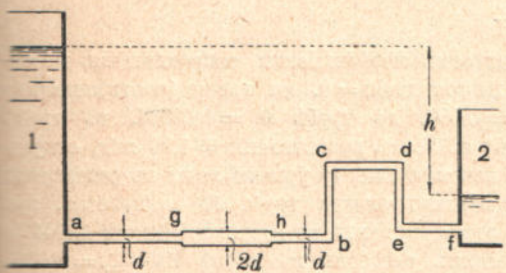
Фиг. 164.

Отв. 1) При горизонтальной трубѣ расходъ $= 1{,}71$ *litr/sec*; давленіе въ началѣ трубы на 0,46 *mtr* выше атмосфернаго. 2) При поднятой кверху трубѣ расходъ $= 1{,}32$ *litr/sec*; давленіе выше атмосферы на 0,476 *mtr*. 3) При наклоненной книзу трубѣ расходъ $= 2{,}16$ *litr/sec*; давленіе выше атмосфернаго на 0,435 *mtr*. 4) Конецъ *B* нужно опустить на 5,71 *mtr*.—Во всѣхъ случаяхъ было допущено, что коэф-тъ сопротивленія при входѣ $= 0{,}05$ и коэф-тъ тренія, по Дарси, $\zeta_r = 0{,}015$.

46. Рѣшить задачу № 45, предполагая, что при входѣ *A* кромки образуютъ со стѣнкою прямой уголъ.

Отв. Чтобы по всей длинѣ трубы давленіе оставалось атмосфернымъ, нужно конецъ *B* опустить на 4 *mtr*. При этомъ въ сжатомъ сѣченіи, если коэф-тъ сжатія $= 0{,}64$, давленіе будетъ на 0,36 *mtr* ниже атмосфернаго.

47. Построить пьезометрическую линію въ трубѣ (фиг. 165), исполненной по рисунку. Всѣ участки *ag*, *gh*, *hb*, *cd*, *ef* горизонтальны, участки *bc* и *de* вертикальны. Длина $gh < ag$.—Что измѣнится, если на длинѣ *ag* сдѣлать трубу $2d$, а на длинѣ *gh* положить трубу діаметромъ d?



Фиг. 165.

Отв. Построеніе пьезометрической линіи происходитъ по общимъ правиламъ, путемъ опредѣленія ея характерныхъ точекъ. При перемѣнѣ, указанной во второмъ вопросѣ задачи, пьезометрическая линія существенно измѣнится, такъ какъ расходъ возрастетъ.

48. Въ мѣстности *A* имѣется источникъ, дающій 3,5 милліона ведеръ въ сутки. Отмѣтка уровня воды $= 275$ саженъ. Эту воду нужно подавать въ городъ *B*. Проектная отмѣтка центра трубы при входѣ въ *B* есть 290 саж. Въ этомъ мѣстѣ труба соединена съ напорнымъ резервуаромъ, горизонтъ въ которомъ лежитъ на 15 саж. выше оси трубы. На пути отъ *A* до *B* труба прямая. Сколько придется жечь угля подъ паровыми котлами насосной станціи въ *A* и какова должна быть ихъ поверхность нагрѣва, если труба будетъ имѣть 800 *mm* въ діаметрѣ? Разстояніе отъ *A* до *B* по прямой линіи $= 20$ *kmt*; коэф-тъ полезнаго дѣйствія насосовъ $= 0{,}80$; механическій коэф-тъ полезнаго дѣйствія паровой машины $= 0{,}9$; на индикаторную силу расходъ пара въ часъ 7 *kgr*. Котлы даютъ 7 *kgr* пару на 1 *kgr* угля и даютъ 18 *kgr* пару на 1 mtr^2 поверхности нагрѣва.

Отв. Если коэф-тъ тренія $\zeta_r = 0{,}0045$ (Фаннингъ), то нужно жечь угля въ часъ [illegible] *kgr*, а поверхность нагрѣва должна быть 313 mtr^2.

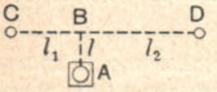
49. Какова должна быть труба при условіяхъ предыдущей задачи, если имѣется возможность развивать насосами въ *A* давленіе, не превосходящее 7,5 *atm* по манометру?

Отв. 895 *mm*, если манометрическую атмосферу считать $= 1\ kgr/cm^2$ и если $\zeta_r = 0{,}004$ (Фаннингъ).

50. Какъ нужно поставить резервуаръ на горизонтальной станціонной площадкѣ при условіи, чтобы онъ могъ наполнить 1 тендеръ товарнаго паровоза, вмѣщающаго 12 *tn* воды въ 15 мин.? Труба, соединяющая резервуаръ съ гидравлической станціонной колонной имѣетъ $d = 5''$, длину $l = 120$ саж. По длинѣ на ней стоятъ 6 колѣнъ, съ радіусомъ закругленій въ 6″. Устье гидравлической колонны лежитъ на высотѣ 1,5 саж. надъ станціонной площадкой.

Отв. Считая $5'' = 125$ *mm*, находимъ, что при условіяхъ задачи скорость въ трубѣ дожна быть 1,09 *mtr/sec*. Если коэффиціентъ сопротивленія при входѣ $= 0{,}5$, на закругленіе $= 0{,}2$ и на треніе (двойное интерполированіе по таблицѣ 39) $= 0{,}0063$, то уровень воды въ резервуарѣ долженъ стоять не ниже какъ на 6,5 *mtr* надъ станціонной площадкой. Если имѣть въ виду только треніе, то эта высота опредѣлится 6,32 *mtr*.

51. Рѣшить предыдущую задачу въ предположеніи, что резервуаръ *A* (фиг. 166) долженъ питать одновременно 2 колонны *C* и *D* и наполнять 2 тендера товарныхъ паровозовъ по 12 *tn* каждый, при чемъ труба *AB* имѣетъ $d = 6''$ и $l = 20$ саж.; трубы же *CB* и *BD* имѣютъ $d = 5''$, а длины ихъ таковы: $l_1 = 40$ саж.; $l_2 = 100$ саж. На вѣтви *AB* имѣется одно закругленіе ($R = 8''$), на вѣтви *BC* — 5 закругленій и на вѣтви *BD* тоже 5 закругленій, какъ въ задачѣ № 50. Требуется, чтобы ближайшій къ резервуару тендеръ наполнился въ 10 минутъ. Найти нужное положеніе резервуара *A*, а также время наполненія другого тендера.



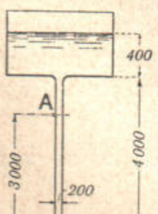
Фиг. 166.

Отв. Какъ въ предыдущей задачѣ, считаемъ коэффиціенты сопротивленія: въ колѣнахъ $= 0{,}2$, при входѣ $= 0{,}5$, въ точкѣ развѣтвленія $= 0$, на треніе (соотвѣтственно скоростямъ, по Фаннингу) въ трубѣ $CB = 0{,}006$, въ трубѣ $DB = 0{,}00636$, въ трубѣ $AB = 0{,}00577$. Находимъ необходимое давленіе въ точкѣ развѣтвленія $= 5{,}56$ *mtr*, секундный расходъ по трубѣ *AB* — 32,76 *litr/sec*, а искомую высоту уровня воды въ резервуарѣ надъ площадкой $= 7$ *mtr*. Послѣ наполненія перваго тендера труба *BC* запирается, при чемъ колонна *D* подаетъ недостающія въ этотъ моментъ во второмъ тендерѣ 4,344 *tn* воды въ 4 *min* 44 *sec*; соотвѣтственно скоростямъ считаемъ въ трубѣ *AB* — $\zeta_r = 0{,}0063$ а въ трубѣ *BD* — $\zeta_r = 0{,}0062$.

52. Имѣется труба перемѣннаго поперечнаго сѣченія, сквозь которую проходитъ расходъ въ 150 *litr/sec*. Въ данномъ мѣстѣ діаметръ трубы $= 200$ *mm*. Въ другомъ же мѣстѣ, центръ котораго лежитъ на 10 *mtr* ниже перваго, діаметръ равенъ 100 *mm*. Найти, какое минимальное давленіе необходимо въ первомъ мѣстѣ, чтобы считать второе заполненнымъ водою. Треніе и, вообще, сопротивленія въ расчетъ не вводить.

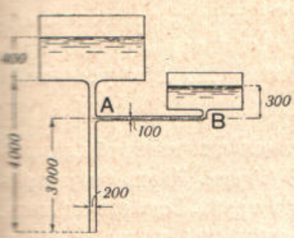
Отв. 0,72 атмосфернаго давленія.

53. Къ резервуару (фиг. 167) приставлена вертикальная труба діаметромъ 200 *mm*. Горизонтъ въ резервуарѣ постояненъ. Входъ въ трубу хорошо скругленъ, такъ что сжатія при входѣ нѣтъ. Опредѣлить расходъ, если труба открыта въ атмосферу. Въ *A* сдѣлано отверстіе для пьезометра. Какой пьезометръ нужно поставить, и какъ въ немъ расположатся уровни?



Фиг. 167.

Отв. 238 *litr/sec*. Въ обратномъ пьезометрѣ вода подымется на 2,02 *mtr* надъ уровнемъ въ сосудѣ, куда опущенъ пьезометръ. Въ самомъ верху трубы аналогичное повышеніе достигнетъ величины 2,68 *mtr*.



Фиг. 168.

54. Къ сосуду (фиг. 168) приставлена вертикальная труба, какъ въ задачѣ № 53, но въ *A* приставлена труба, идущая къ резервуару *B*, горизонтъ котораго лежитъ на 300 *mm* выше *A*. Труба *AB* имѣетъ $d = 100$ *mm* и $l = 2$ *mtr*. Какъ потечетъ вода въ этомъ случаѣ?

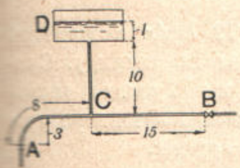
Отв. Пользуясь коэф-тами Дарси для новыхъ трубъ и пренебрегая колѣнами, опредѣляемъ высоту абсолютнаго давленія въ точкѣ развѣтвленія въ 8,56 *mtr*, такъ что расходы будутъ: изъ верхняго резервуара 229 *litr/sec*, изъ другого резервуара—40 *litr/sec*.

55. Сохраняя данныя задачи № 54, найти, какъ потечетъ вода, если горизонтъ въ *B* стоитъ ниже точки *A* на 500 *mm*.

Отв. При той же оцѣнкѣ сопротивленій, что и въ задачѣ № 54, найдемъ давленіе въ точкѣ развѣтвленія около 8,45 *mtr*, при чемъ изъ верхняго резервуара будетъ вытекать около 230 *litr/sec*, а изъ нижняго—32 *litr/sec*.

56. Какъ нужно поставить резервуаръ *B* (задача № 54), чтобы ни въ него, ни изъ него вода не двигалась?

Отв. содержится въ отвѣтѣ на задачу № 53.

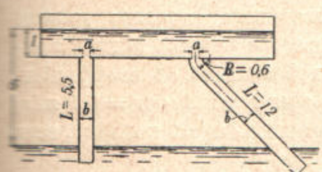


Фиг. 169.

57. Вертикальная труба (фиг. 169) развѣтвляется на 2 трубы того же діаметра. Въ *A* кранъ открытъ на 60°, въ *B* онъ открытъ вполнѣ. Діаметръ трубъ = 75 *mm*. Какъ течетъ вода? Входъ въ трубу хорошо скругленъ; сопротивленія колѣнъ не вводить.

Отв. Въ точкѣ развѣтвленія высота давленія больше атмосфернаго на 1,3 *mtr*. Черезъ кранъ *A* выливается 6,98 *litr/sec*; черезъ кранъ *B* выливается 3,06 *litr/sec*.

58. Два горизонта (фиг. 170) сообщаются замкнутымъ водопроводомъ одного и того же діаметра, но въ одномъ случаѣ труба прямая, а въ другомъ—наклонная, съ изгибомъ на 45° и радіусомъ закругленія $R = 600$ *mm*. Площадь сѣченія $a = 700$ cm^2, діаметръ сѣченія $b = 600$ *mm*. Длины трубопроводовъ въ *mtr* указаны на чертежѣ. Отмѣтить всѣ разницы въ обстоятельствахъ движенія въ обоихъ трубопроводахъ.



Фиг. 170.

Отв. Если коэф-ты сопротивленія имѣютъ значенія: при входѣ, относя его къ скорости въ сжатомъ сѣченіи,—0,05, на треніе (по Дарси)—0,00518, на искривленіе—0,15, внутренняго сжатія—0,64, то въ случаѣ вертикальной трубы: расходъ = 550 *litr/sec*, скорость въ трубѣ = 1,945 *mtr/sec*, скорость въ сжатомъ сѣченіи = 12,25 *mtr/sec*, абсолютное давленіе въ сжатомъ сѣченіи = 0,33 *atm*; потери работы слагаются изъ: при прохожденіи черезъ верхнее отверстіе 210 *kgr mtr*; на треніе 20 *kgr mtr*; уносится въ отводящее пространство и тамъ теряется на ударъ 106 *kgr mtr*; теряется на ударъ въ трубѣ 2980 *kgr mtr*. Въ случаѣ наклонной трубы тѣ же величины даютъ: расходъ 545 *litr/sec*; скорость въ трубѣ 1,93 *mtr/sec*; скорость въ сжатомъ сѣченіи 12,15 *mtr/sec*; абсолютное давленіе въ сжатомъ сѣченіи 0,34 *atm*. Потери работы: при прохожденіи черезъ верхнее отверстіе 205 *kgr mtr*; на треніе—42,5 *kgr mtr*; на искривленіе 15,5 *kgr mtr*; уносится въ отводящее пространство 103 *kgr mtr*; теряется на ударъ въ трубѣ 2900 *kgr mtr*.

59. Разность уровней въ двухъ прудахъ = 20 *mtr*. Они соединены трубою, общая длина которой = 3 *kmt*. Наиболѣе возвышенная точка трубы лежитъ на 7 *mtr* выше горизонта верхняго пруда въ разстояніи отъ него 2 *kmt*, считая по трубѣ. Если труба

имѣетъ діаметръ 200 *mm*, то сколько воды она пропускаетъ? Въ какомъ разстояніи отъ верхняго пруда нужно расположить наиболѣе возвышенную точку трубы (7 *mtr* надъ горизонтомъ верхняго пруда), чтобы теченіе по трубѣ было невозможно при увеличеніи этого разстоянія и устанавливалось при его уменьшеніи?

Отв. $Q = 0$. Движеніе можетъ установиться, если возвышенная точка трубы лежитъ не далѣе, какъ на 495 *mtr* отъ верхняго пруда; тогда $Q = 33{,}8$ *litr/sec*. Этотъ результатъ соотвѣтствуетъ коэф-ту тренія $\zeta_r = 0{,}0056$, по Дарси, для новыхъ трубъ. Если его оцѣнить, какъ для старыхъ трубъ, то условіе возможности движенія останется то же самое, а расходъ будетъ $= 24$ *litr/sec*. По таблицѣ 39 расходъ нѣсколько больше 32 *litr/sec*, такъ какъ потеря напора на 100 *mtr* длины задана 0,667 *mtr*.

60. Вертикальный нагнетательный трубопроводъ шахтной водоотливной машины имѣетъ діаметръ 0,25 *mtr*; глубина шахты $= 500$ *mtr*; расходъ воды $= 180$ *mtr*^{3} въ часъ. Считая, что вся потеря напора на треніе вызвана треніемъ воды объ стѣнку трубы, найти величину той, разгружающей опоры трубопровода, силы, которую развиваетъ протекающая по трубѣ вода.

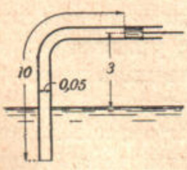
Отв. Секундный расходъ равенъ 50 *litr*. Потеря напора (находимъ интерполированіемъ по таблицѣ 39 на стр. 250 и сл.) равна 2,44 *mtr*. Вся секундная работа тренія равна $50 . 2{,}44 = 122$ *kgr mtr*. При скорости въ 1,018 *mtr/sec* эта работа можетъ быть развита силою въ 119,5 *kgr*. Это и есть искомая разгружающая сила тренія.

61. Трубопроводъ городского водоснабженія имѣетъ длину 12 *kmtr* и діаметръ 0,9 *mtr*. При нормальной работѣ онъ долженъ подавать 1,5 *mtr*^{3} воды въ секунду. Считая, что вся работа тренія идетъ на нагрѣваніе протекающей воды и что инымъ тепловымъ воздѣйствіямъ вода на всемъ пути не подвергается, найти повышеніе температуры воды въ концѣ водопровода. Механическій эквивалентъ тепла $= 424$ *kgr mtr*.

Отв. По Кристену (см. стр. 221) коэффиціентъ сопротивленія $\zeta_r = 0{,}0048$. Такъ какъ средняя скорость вычисляется въ 2,3585 *mtr/sec*, то потеря напора опредѣляется въ 72,7 *mtr* столба воды (по Фаннингу, интерполированіемъ по таблицѣ 39 нашли бы эту потерю напора въ 60,5 *mtr*). Такъ какъ это и есть число *kgr mtr* работы тренія, поглощаемой каждымъ *kgr* воды, то, слѣд., на каждый *kgr* протекающей воды приходится $\frac{72{,}7}{424} = 0{,}172$ калорій или столько же градусовъ Ц. повышенія температуры.

62. Горизонтальный насосъ забираетъ воду изъ всасывающаго колодца; уровень воды въ послѣднемъ стоитъ на 4 *mtr* ниже уровня воды во всасывающемъ колпакѣ насоса. Длина всасывающей трубы 8 *mtr*; на ней стоятъ: пятовой клапанъ съ коэффиціентомъ сопротивленія $\zeta = 2$ и три колѣна на 90^0 съ радіусомъ закругленія оси $= 0{,}1$ *mtr*; діаметръ трубы $= 0{,}08$ *mtr*. Какое давленіе должно быть во всасывающемъ колпакѣ, если секундная подача его равна 15 *litr/sec*?

Отв. На 6,72 *mtr* ниже барометрическаго, если, по Фаннингу, оцѣнить $\zeta_r = 0{,}0058$.



Фиг. 171.

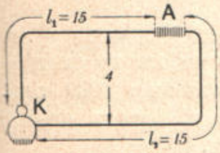
63. Съ какою силою нужно тащить поршень (фиг. 171) слѣва направо, чтобы онъ двигался равномѣрно со скоростью 0,8 *mtr/sec*? Діаметръ трубы $= 0{,}05$ *mtr*, діаметръ поршня равенъ: 1) 0,05 *mtr* и 2) 0,10 *mtr*. Коэффиціентъ сопротивленія при входѣ въ трубу $= 2$; правая сторона поршня подвержена атмосферному давленію; вся всасывающая труба заполнена водою.

Отв. 1) 6,3 *kgr* при коэффиціентѣ тренія $\zeta_r = 0{,}0072$. 2) 47,6 *kgr* при коэффиціентѣ тренія $\zeta_r = 0{,}0058$.

64. Въ случаѣ предыдущей задачи найти давленіе сзади поршня и силу, къ нему приложенную, изъ условія, что оба поршня должны выходить изъ состоянія покоя равномѣрно ускореннымъ движеніемъ съ ускореніемъ $k = 3$ *mtr/sec*^{2}. Найти также, при ка-

комъ ускоренiи поршня вода не будетъ въ состоянiи за нимъ слѣдовать и отъ него отстанетъ?

Отв. Пренебрегая тренiемъ поршня и воды и считая высоту барометрическаго давленiя равной 10,33 *mtr*, находимъ въ *первомъ* случаѣ: силу, могущую сообщить колоннѣ воды заданное ускоренiе $= 6$ *kgr*; давленiе въ цилиндрѣ за поршнемъ $= 4{,}27$ *mtr* столба воды; силу на поршнѣ $= 11{,}9$ *kgr*; вода начнетъ отставать отъ поршня, если ему сообщить ускоренiе 7,19 *mtr/sec*², для чего потребовалась бы сила на поршнѣ въ 20,28 *kgr*.— Во *второмъ* случаѣ ускорительная сила для колонны воды нужна въ 24 *kgr*; колонна воды не можетъ слѣдовать за поршнемъ съ такимъ ускоренiемъ, такъ какъ давленiе за поршнемъ должно бы было упасть на 15,23 *mtr* ниже барометрическаго. Наибольшее возможное въ этомъ случаѣ ускоренiе поршня есть 1,7975 *mtr/sec*², для чего нужна сила на поршнѣ въ 81,13 *kgr*.

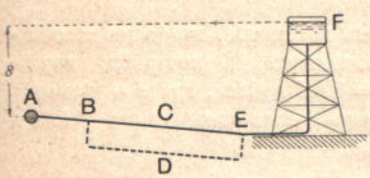


Фиг. 172.

65. Найти дiаметръ трубъ водяного отопленiя по слѣдующимъ даннымъ. Калориферы *A* должны отдавать 36000 калорiй въ часъ. Температура притекающей къ калориферу воды $= 90^0$ Ц., температура утекающей отъ него воды $= 70^0$. Длины трубъ между котломъ *K* и батареей *A*, а также вертикальныя разстоянiя даны на фиг. 172 въ метрахъ. Удѣльный вѣсъ воды при $70^0 = 0{,}9779$, а при $90^0 = 0{,}9655$.

Отв. Секундный расходъ воды нуженъ въ 0,5 *litr/sec*; располагаемый напоръ $= h \dfrac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_0} = 0{,}0496$ *mtr*. Поэтому $q^2 : i = 0{,}00015$. По таблицѣ 39 видно, что нужна труба немного больше 50 *mm* въ дiаметрѣ. Принимая $d = 60$ *mm* и оцѣнивая по Фаннингу $\zeta_r = 0{,}009$, опредѣлимъ достаточный напоръ въ 0,029 *mtr*, такъ что нужный дiаметръ лежитъ между 50 и 60 *mm*.

66. Имѣется (фиг. 173) труба, отводящая воду отъ магистрали *A*, давленiе въ которой равно 3 *atm* избыточнымъ, къ резервуару *F*, уровень въ которомъ стоитъ на 8 *mtr* выше точки отвѣтвленiя отъ магистрали. Дiаметръ трубы $= 0{,}2$ *mtr*. Длины отдѣльныхъ ея частей таковы: длина $AB = l_1 = 200$ *mtr*; длина $BCE = l_2 = 500$ *mtr*; длина $EF = l_4 = 300$ *mtr*. Въ другомъ случаѣ на участкѣ *BE* положили рядомъ вторую трубу *BDE*, дiаметромъ тоже 0,2 *mtr*, но длиною $l_3 = 800$ *mtr*. Въ третьемъ случаѣ весь участокъ *BE* замѣненъ одною трубой въ 0,25 *mtr* дiаметромъ и длиною 500 *mtr*. Сравнить расходъ во всѣхъ трехъ случаяхъ.



Фиг. 173.

Отв. 1) Вычисляя потерю напора на 100 *mtr* длины, по таблицѣ 39 находимъ, что расходъ больше 55, но меньше 63 *litr/sec*, приближаясь ко второй величинѣ. Пропорцiональнымъ интерполированiемъ опредѣляемъ его въ 62 *litr/sec*.

2) Для трубъ *AB* и *EF* примемъ $\zeta_r = 0{,}0053$, а для трубъ *BCE* и *BDE* примемъ $\zeta_r = 0{,}0057$ (табл. 39); буквами y_1 и y_2 назовемъ высоты пьезометрическихъ уровней въ точкахъ *B* и *E*; буквами v_1, v_2, v_3 называемъ скорости въ трубахъ *AB* и *EF*, *BCE*, *BDE*. Имѣемъ систему уравненiй:

$$30 - y_1 = \frac{v_1^2}{2g}\, 0{,}0053\, \frac{4.200}{0{,}2}$$

$$y_1 - y_2 = \frac{v_2^2}{2g}\, 0{,}0057\, \frac{4.500}{0{,}2} = \frac{v_3^2}{2g}\, 0{,}0057\, \frac{4.800}{0{,}2}$$

$$y_2 - 8 = \frac{v_1^2}{2g}\, 0{,}0053\, \frac{4.300}{0{,}2}$$

$$v_1 = v_2 + v_3$$

Отсюда находимъ $y_1 - y_2 = 5{,}54\ mm$. Послѣ этого по таблицѣ 39 видимъ, что труба **BCE** пропускаетъ около 43,01 *litr/sec*, а труба **BDE**—около 33,47 *litr/sec*; всего же изъ магистрали **A** берется около 76,48 *litr/sec*. Провѣряемъ результатъ изъ того соображенія, что напоръ $22 - 5{,}54 = 16{,}46\ mtr$ нуженъ для теченія воды по трубамъ **AB** и **EF**, общею длиною въ 500 *mtr*: по таблицѣ 39, если потеря напора на 100 *mtr* длины равна $\frac{16{,}46}{5} = 3{,}292\ mtr$, то расходъ равенъ 76,632 *litr/sec*, что очень близко къ полученному выше результату. Неточность въ оцѣнкѣ коэффиціентовъ ζ_r не велика и во всякомъ случаѣ можетъ быть исправлена вторымъ пересчетомъ.

3) По правилу Dupuit труба, діаметромъ 250 *mm* и длиною 500 *mtr*, эквивалентна трубѣ діаметромъ 200 *mm* и длиною 164 *mtr*. Такимъ образомъ въ расчетъ войдетъ труба **AF** постояннаго діаметра 0,2 *mtr* при общей длинѣ въ $200 + 164 + 300 = 664\ mtr$. При напорѣ въ 22 *mtr* она пропуститъ (по табл. 39) около 75 *litr/sec*. Такимъ образомъ конструкціи 2 и 3 почти равноцѣнны по даваемому расходу.

67. Сравнить потери напора и затрачиваемыя на перекачку работы въ слѣдующихъ двухъ случаяхъ. Нужно провести расходъ 200 *litr/sec* на разстояніе 1000 *mtr*. Въ обоихъ случаяхъ допускаютъ среднюю скорость въ 1 *mtr/sec*, но въ одномъ случаѣ ставятъ одну трубу на весь расходъ, а въ другомъ—двѣ одинаковыхъ.

Отв. Довольно близко удовлетворяютъ заданной средней скорости одна труба въ 500 *mm* и двѣ трубы по 350 *mm*. По таблицѣ 39 далѣе видно, что при скорости въ 1 *mtr* первая труба потребуетъ потери напора $= 10\ \frac{2{,}006.200^2}{196{,}4^2} = 20{,}7\ mtr$, а вторая — $10\frac{3{,}134.100^2}{96{,}21^2} = 33{,}8\ mtr$. Затрачиваемыя на перекачку работы относятся какъ $33{,}8 : 20{,}7 = 1{,}63 : 1$.

68. Для городского водоснабженія нужно подавать 15000 mtr^3 въ сутки на разстояніе 5000 *mtr*, работая насосами только 15 часовъ въ сутки. Труба лежитъ горизонтально. Найти діаметръ трубы изъ условія наименьшей стоимости ея эксплоатаціи, которая слагается:

а) Изъ отчисленій $^0/_0{}^0/_0$ на затраченный капиталъ, на погашеніе, въ фондъ возобновленія, на ремонтъ и т. д.—всего 8% съ капитала, затраченнаго на постройку трубопровода. Стоимость укладки 1 погоннаго метра трубы $= 50\ d$ рублей, гдѣ d — діаметръ трубы въ метрахъ. б) Изъ расходовъ на энергію, при чемъ 1 сило-часъ стоитъ 1,5 копейки, а коэффиціентъ полезнаго дѣйствія насосовъ $= 0{,}65$.

Отв. Насосы должны развивать работу $\frac{1000.0{,}277}{75.0{,}65}\,\zeta_r\,\frac{0{,}277^2.64.5000}{\pi^2.2g.d^5}$ лошадиныхъ силъ. Поэтому работа перекачки будетъ стоить рублей въ годъ:

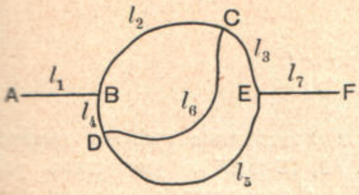
$$A_1 = \frac{1000.0{,}277^3.\ \zeta_r.\ 64.5000.0{,}015.15.365}{75.0{,}65.\pi^2.2g.d^5}.$$

Сооруженіе будетъ стоить $A_2 = 0{,}08.5000.50\ d$ рублей въ годъ. Стоимость эксплоатаціи $A = A_1 + A_2$ рублей. Рѣшая уравненіе $\frac{\partial A}{\partial d} = 0$, найдемъ $d = 0{,}645\ mtr$, если считать $\zeta_r = 0{,}005$. Практически пришлось бы выполнить ближайшій рыночный размѣръ.

69. Имѣемъ участокъ водопроводной сѣти, состоящій изъ 4-хъ трубъ (фиг. 174). Пьезометръ, поставленный въ **A**, имѣетъ уровень воды на высотѣ $a = 25\ mtr$ надъ тѣмъ горизонтомъ, надъ которымъ пьезометръ въ **F** показываетъ высоту $f = 18\ mtr$. Кромѣ того, дано, что

труба	**AB**	имѣетъ	діаметръ	$d_1 = 0{,}15\ mtr$	и	длину	$l_1 = 200\ mtr$	
„	**BCE**	„	„	$d_2 = 0{,}18$	„	„	$l_2 = 400$	„
„	**BDE**	„	„	$d_3 = 0{,}15$	„	„	$l_3 = 300$	„
„	**EF**	„	„	$d_4 = 0{,}15$	„	„	$l_4 = 200$	„

Найти расходъ въ каждой изъ этихъ трубъ.—Какъ измѣнятся расходы, если на трубѣ **BDE** взять точку **D**, въ разстояніи 50 *mtr* отъ **B**, и соединить ее трубою, въ 0,10 *mtr* діаметромъ и длиною 50 *mtr*, съ точкою **C** трубы **BCE**, взявъ эту точку въ разстояніи 100 *mtr* отъ **E**?—Гдѣ по трубѣ **BCE** нужно помѣстить точку **C**, чтобы вода въ трубѣ **DC** не текла ни въ ту, ни въ другую сторону?



Фиг. 174.

Отв. Первый вопросъ. Система уравненій аналогична той, которая указана въ задачѣ № 66/2, при чемъ трубу **BCE** слѣдуетъ замѣнить по правилу Dupuit трубою съ діаметромъ 0,15 *mtr* и въ 161 *mtr* длины. Какъ первое приближеніе считаемъ во всѣхъ трубахъ коэффиціенты ζ_r между собою равными. Тогда высота, соотвѣтствующая разности давленій въ точкахъ **B** и **E**, вычисляется въ 0,83 *mtr*. По таблицѣ 39 находимъ:

для трубы	**AB**	потеря напора на 100 *mtr*	$= 1{,}54$ *mtr*;	поэтому расходъ	$= 24{,}2$ *litr/sec*,
„	**BCE**	„ „ „ „ „	$= 0{,}516$ „	„ „	$= 13{,}54$ „ ,
„	**BDE**	„ „ „ „ „	$= 0{,}277$ „	„ „	$= 9{,}7$ „ .

Эти результаты уже довольно близко вяжутся между собою (24,2 литра съ одной стороны и $13{,}54 + 9{,}7 = 23{,}24$ литра—съ другой) и во всякомъ случаѣ позволяютъ надежно взять надлежащія значенія для ζ_r, а именно:

для трубъ **AB** и **EF** считаемъ $\zeta_r = 0{,}0060$,
„ „ **BCE** „ $\zeta_r = 0{,}0064$,
„ „ **BDE** „ $\zeta_r = 0{,}0067$.

Послѣ этого по тѣмъ же уравненіямъ вычисляемъ разницу давленій въ точкахъ **B** и **E** $= 0{,}9$ *mtr* столба воды, такъ что потери напора на 100 *mtr* длины соотвѣтственно равны 1,525; 0,56; 0,3 *mtr*. Интерполированіемъ по таблицѣ 39 найдемъ расходы съ одной стороны 24,09 *litr/sec*, съ другой стороны 14,19 и 10,16, т.-е. въ суммѣ 24,35 *litr/sec*. На такой ошибкѣ (около 1%) можно остановить приближеніе.

Второй вопросъ. Приводимъ по правилу Dupuit всѣ трубы къ одному діаметру въ 0,150 *mtr*. Буквами l, q и v обозначаемъ длины трубъ, расходы и скорости въ нихъ съ подстрочными указателями въ порядкѣ прилагаемой схемы (фиг. 174); такими же значками отмѣчаемъ коэффиціенты сопротивленія тренія. Давленія въ каждой точкѣ трубы обозначимъ одноименной съ нею малой буквой алфавита. Имѣемъ:

$$l_1 = l_7 = 200 \; mtr \qquad\qquad l_4 = 50 \; mtr$$

$$l_2 = 300\left(\frac{150}{180}\right)^5 = 120{,}75 \; mtr \qquad\qquad l_5 = 250 \; mtr$$

$$l_3 = 100\left(\frac{150}{180}\right)^5 = 40{,}25 \; mtr \qquad\qquad l_6 = 50\left(\frac{150}{100}\right)^5 = 378 \; mtr.$$

При рѣшеніи предыдущей задачи выяснены всѣ обстоятельства движенія воды, пока труба **DC** заперта, а именно, мы нашли:

$$q_1 = q_7 = 24{,}09 \; litr/sec; \qquad v_1 = v_7 = 1{,}365 \; mtr/sec \qquad \zeta_1 = \zeta_7 = 0{,}0060$$
$$q_2 = q_3 = 14{,}19 \; litr/sec; \qquad v_2 = v_3 = 0{,}8 \; mtr/sec \qquad \zeta_2 = \zeta_3 = 0{,}0064$$
$$q_4 = q_5 = 10{,}16 \; litr/sec; \qquad v_4 = v_5 = 0{,}572 \; mtr/sec \qquad \zeta_4 = \zeta_5 = 0{,}0067$$

Сообразно съ этимъ и съ длинами трубъ, давленія въ разныхъ точкахъ системы, при запертой трубѣ **DC**, опредѣляются въ *mtr* столба воды:

$$a = 25; \qquad b = 21{,}95; \qquad c = 21{,}275$$
$$f = 18; \qquad e = 21{,}05; \qquad d = 21{,}800.$$

Ясно, что, отпирая трубу **DC**, мы пустимъ воду отъ **D** къ **C** вслѣдствіе избытка давленія $d - c = 0{,}525$ *mtr* и тѣмъ увеличимъ расходъ трубъ **AB**, **BD**, **CE** и **EF** и уменьшимъ расходъ трубъ **BC** и **DE**. Сообразно съ этимъ давленія b и d понизятся, а давленія c и e повысятся, и притомъ такъ, что разность $d - c$ уменьшится, а разность $b - d$ увеличится. Для рѣшенія имѣемъ систему 10 уравненій съ 10 неизвѣстными.

$$25 - b = \zeta_1 \frac{v_1^2}{2g} \frac{4l_1}{d} \qquad d - c = \zeta_6 \frac{v_6^2}{2g} \frac{4l_6}{d}$$

$$b - c = \zeta_2 \frac{v_2^2}{2g} \frac{4l_2}{d} \qquad e - 18 = \zeta_1 \frac{v_1^2}{2g} \frac{4l_7}{d}$$

$$c - e = \zeta_3 \frac{v_3^2}{2g} \frac{4l_3}{d} \qquad v_1 = v_4 + v_2$$

$$b - d = \zeta_4 \frac{v_4^2}{2g} \frac{4l_4}{d} \qquad v_4 = v_5 + v_6$$

$$d - e = \zeta_5 \frac{v_5^2}{2g} \frac{4l_5}{d} \qquad v_3 = v_2 + v_6$$

Разыскиваемъ корни путемъ послѣдовательныхъ приближеній, задаваясь разностью $b - e$ и давленіемъ d. При этихъ условіяхъ значенія ζ всякій разъ съ большою точностью беремъ по таблицѣ 39, ибо потеря напора на 100 *mtr* длины всякій разъ оказывается извѣстной.

Для начала, сообразно съ вышесказаннымъ, задаемся $b - e = 0{,}8$ *mtr*. Такъ какъ задано $l_1 = l_7$, то опредѣляемъ $b = 21{,}9$; $e = 21{,}1$ и вычисляемъ $v_1 = 1{,}377$ *mtr/sec*. Задаемся $d = 21{,}65$, такъ что $b - d = 0{,}25$, противъ прежнихъ 0,15. Вычисляемъ (или беремъ интерполированіемъ по табл. 39) $v_4 = 0{,}751$ *mtr/sec*; $v_5 = 0{,}488$ *mtr/sec*. Послѣ этого $v_6 = v_4 - v_5 = 0{,}263$ *mtr/sec*. Сообразно съ этимъ вычисляемъ $d - c = 0{,}264$ *mtr*, такъ что $c = 21{,}386$ *mtr*. Наконецъ опредѣляемъ $v_2 = 0{,}694$ *mtr/sec* и $v_3 = 0{,}91$ *mtr/sec*. Составляемъ разность $v_3 - v_2$. Оказывается, что она, вмѣсто того, чтобы быть равной v_6, меньше чѣмъ v_6. Заключаемъ, что оба давленія d и c нужно повысить (чтобы уменьшить v_6 и увеличить разность $v_3 - v_2$). Кромѣ того составляемъ суммы $v_2 + v_4$, а также $v_3 + v_5$. Оказывается онѣ обѣ больше чѣмъ v_1, съ которой онѣ должны равняться. Заключаемъ, что разность $b - e$ задана слишкомъ большою: нужно увеличить расходъ въ трубахъ **AB** и **EF** (скорость v_1) и уменьшить его въ системѣ **BE** (суммы $v_2 + v_4$ и $v_3 + v_5$). Кромѣ того, такъ какъ оказывается, что $v_3 + v_5 < v_2 + v_4$, то еще разъ подтверждается заключеніе, что давленія d и c нужно задать бо́льшими.

Если задать $b - e = 0{,}75$, то такимъ же порядкомъ вычислимъ $v_1 = 1{,}381$ *mtr/sec*. Задаемъ также $d = 21{,}65$, уменьшая разность $b - d$ по сравненію съ предыдущимъ случаемъ; находимъ:

$$v_4 = 0{,}716; \quad v_5 = 0{,}476; \quad \text{такъ что} \quad v_6 = v_4 - v_5 = 0{,}24.$$

Далѣе $d - c = 0{,}221$, такъ что $c = 21{,}429$. Затѣмъ:

$$v_2 = 0{,}645; \quad v_3 = 0{,}94.$$

Разность $v_3 - v_2$ на этотъ разъ $> v_6$; стало быть давленія въ d и c оцѣнены выше нужнаго. Сумма же $v_2 + v_4$ меньше v_1, а сумма $v_3 + v_5$ больше чѣмъ v_1, при чемъ сумма

$v_2 + v_3 + v_4 + v_5 > 2v_1$. Отсюда заключаемъ, что разность $b - e$ все еще оцѣнена высоко, но числовыя величины послѣдняго неравенства (2,777 и 2,762) показываютъ, что ошибка уже очень невелика. Кромѣ того, разность $b - d$ нужно увеличить.

Задаемъ $b - e = 0{,}746$ *mtr*, такъ что $b = 21{,}873$ *mtr* и $e = 21{,}127$ *mtr*; вычисляемъ скорость $v_1 = 1{,}381$ *mtr/sec*. Задаемъ $d = 21{,}645$ *mtr*, такъ что $b - d = 0{,}228$ *mtr* вмѣсто 0,225 послѣдняго случая. Послѣ этого:

$$v_4 = 0{,}721; \quad v_5 = 0{,}473;$$

такъ что

$$v_6 = v_4 - v_5 = 0{,}248 \ mtr/sec.$$

Далѣе $d - c = 0{,}235$ *mtr*, такъ что $c = 21{,}410$ *mtr*. Затѣмъ вычисляемъ: $v_2 = 0{,}656$ *mtr/sec*; $v_3 = 0{,}902$ *mtr/sec*. Разность $v_3 - v_2 = 0{,}246$, что меньше, чѣмъ на $1^0/_0$, отличается отъ v_6. Равнымъ образомъ суммы ($v_2 + v_4 = 1{,}377$; также $v_3 + v_5 = 1{,}375$) очень близки другъ къ другу и меньше, чѣмъ на $0{,}5^0/_0$ отличаются отъ скорости v_1. На этомъ, конечно, можно остановить изысканіе корней уравненій. Если бы его продолжать, то пришлось бы увеличить разность $b - e$, сохраняя значеніе разности $b - d$.

Такимъ образомъ прибавокъ трубы ***DC*** мало повысилъ расходъ трубъ ***AB*** и ***EF*** (24,4 литра вмѣсто 24,09), но существенно повліялъ на его распредѣленіе по отдѣльнымъ вѣтвямъ:

вѣтвь	***BD***	пропускаетъ	12,74	литровъ	вмѣсто	10,16
„	***CE***	„	15,94	„	„	14,19
„	***BC***	„	11,59	„	„	14,19
„	***DE***	„	0,84	„	„	10,16

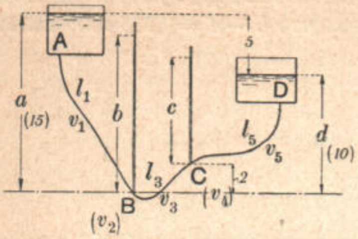
Третій вопросъ. Чтобы вода не текла по трубѣ ***DC*** ни въ ту, ни въ другую сторону, нужно, чтобы отрѣзки ***BC*** и ***CE*** были прямо пропорціональны отрѣзкамъ ***BD*** и ***DE***. Конечно, и это заключеніе, какъ и все рѣшеніе задачи, предполагаетъ возможность пренебреженія всѣми особыми сопротивленіями.

70. Труба, діаметромъ 0,2 *mtr* и длиною 500 *mtr*, соединяетъ два резервуара съ разностью высотъ стоянія въ нихъ воды 5 *mtr*. На этой трубѣ, въ разстояніи 200 *mtr* отъ нижняго резервуара и на 8 *mtr* ниже уровня воды въ немъ, сдѣлано круглое отверстіе (въ тонкой стѣнкѣ) въ 0,05 *mtr* въ діаметрѣ. Выяснить теченіе воды въ этой системѣ.

Отв. Пока отверстіе закрыто, по трубѣ перетекаетъ, какъ видно по таблицѣ 39, больше 40 *litr/sec*. При этомъ надъ отверстіемъ давленіе достигаетъ 10 *mtr* сверхъ атмосфернаго. Подъ такимъ напоромъ изъ отверстія могло бы вытечь лишь 16,4 *litr/sec*, если на основаніи данныхъ табл. 8 (стр. 124) и табл. 6 (стр. 122) считать для отверстія $\mu = 0{,}6$. Ясно, что верхній резервуаръ подаетъ воду въ отверстіе и остатокъ расхода течетъ дальше въ нижній резервуаръ. Путемъ пробъ оцѣниваемъ давленіе надъ отверстіемъ 9,2 *mtr* сверхъ атмосфернаго. При этомъ изъ верхняго резервуара вытекаетъ 47,04 *litr/sec*, въ нижній подается 31,14 *litr/sec* (обѣ величины найдены интерполяціей на табл. 39), а изъ отверстія выливается 15,8 *litr/sec*. Въ суммѣ это составляетъ 46,94, что очень мало отличается отъ только что опредѣленнаго расхода изъ верхняго резервуара.

71. Предположить, что на трубѣ предыдущей задачи прибавлено второе отверстіе, тоже въ 0,05 *mtr* діаметромъ, въ разстояніи 200 *mtr* отъ верхняго резервуара, считая вдоль трубы, и на 15 *mtr* ниже уровня въ немъ. Какъ течетъ вода въ этомъ случаѣ?

Отв. Представляемъ, для ясности, данныя задачи схематическимъ чертежомъ (фиг. 175); буквами b и c обозначаемъ высоты неизвѣстныхъ давленій въ точкахъ ***B*** и ***C***, въ которыхъ сдѣланы отверстія. Буквами l и v съ нечетными значками называемъ длины участковъ трубы и скорости въ нихъ; буквою v съ четными значками называемъ скорости въ отверстіяхъ *B* и *C*. Рѣшеніе задачи № 67 показало, что когда *B* закрыто то, высота $c = 9{,}2$ *mtr*. Легко подсчитать, что при этомъ $a - b = 2{,}53$ *mtr*, такъ что $b = 12{,}47$ *mtr*. Подъ такимъ давленіемъ изъ отверстія *B* можетъ вылиться, если считать коэффиціентъ расхода 0,6, только 18,4 *litr/sec*, т.-е. значительно меньше того, что протекало по трубѣ *CD*. Въ дѣйствительности же давленіе въ *B* непремѣнно уменьшится, расходъ по трубѣ *AB* увеличится, а въ отверстіи *B* уменьшится. Эти соображенія заставляютъ считать вѣроятнымъ, что расхода Q въ трубѣ *AB* достаточно, чтобы покрыть расходы Q_2 и Q_4 въ обоихъ отверстіяхъ и чтобы остатокъ его Q_5 переливался въ резервуаръ *D*. Окончательно утверждаемъ, что теченіе будетъ именно таково на основаніи слѣдующихъ соображеній.



Фиг. 175.

Предположимъ, что по трубѣ *CD* совсѣмъ нѣтъ теченія. Это значитъ, что

$$c = d - 2 = 8 \ mtr.$$

При этомъ черезъ отверстіе *C* выливается

$$Q_4 = 0{,}00196 . 0{,}6 \sqrt{19{,}6 . 8} . 1000 = 14{,}7 \ litr/sec.$$

Такой расходъ, протекая по трубѣ *BC*, потребуетъ потери напора (находимъ интерполяціей по табл. 39)

$$b - (c + 2) = 0{,}108 + 0{,}0565 \frac{2{,}134}{3{,}142} = 0{,}146 \ mtr.$$

Поэтому давленіе $b = 10{,}146$ *mtr*, а потеря напора $a - b = 4{,}854$ *mtr*. Подъ такимъ давленіемъ b черезъ отверстіе *B* можетъ вытечь около 16,6 *litr/sec*, такъ что труба *AB* должна бы подать расходъ $16{,}6 + 14{,}7 = 31{,}3$ *litr/sec*; между тѣмъ при опредѣленной выше потерѣ напора въ 4,854 *mtr* она можетъ пропустить (по таблицѣ 39) больше 62,8 *litr/sec*, что и подтверждаетъ правильность указаннаго утвержденія.

Имѣя далѣе въ виду, что давленія $b < 12{,}47$ *mtr* и $c < 9{,}2$ *mtr*, т.-е. что оба они меньше тѣхъ давленій, которыя соотвѣтствуютъ закрытому отверстію *B*, приступаемъ къ рѣшенію путемъ послѣдовательныхъ приближеній слѣдующей системы 7 уравненій.

$$Q_1 = \frac{\pi 0{,}2^2}{4} \sqrt{\frac{(a - b) 2g . 0{,}2}{\zeta_r 4 . 200}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (1)$$

$$Q_2 = 0{,}6 \frac{\pi 0{,}05^2}{4} \sqrt{2g b} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (2)$$

$$Q_3 = \frac{\pi 0{,}2^2}{4} \sqrt{\frac{(b - 2 - c) 2g . 0{,}2}{\zeta_r 4 . 100}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (3)$$

$$Q_4 = 0{,}6 \frac{\pi 0{,}05^2}{4} \sqrt{2g c} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (4)$$

$$Q_5 = \frac{\pi 0{,}2^2}{4} \sqrt{\frac{(c + 2 - d) 2g . 0{,}2}{\zeta_r 4 . 200}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (5)$$

$$Q_1 = Q_2 + Q_3 = Q_2 + Q_4 + Q_5 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (6 \text{ и } 7)$$

Производимъ всѣ вычисленія расходовъ въ литрахъ и при рѣшеніи 1, 3 и 5 уравненій интерполируемъ данныя таблицы 39.

Предполагаемъ $b = 11{,}5$ *mtr*. Тогда потеря напора на 100 *mtr* трубы *AB* опредѣляется въ 1,75 *mtr*. Таблица 39 даетъ тогда $Q_1 = 55{,}058$ *litr/sec*. Уравненіе (2) даетъ $Q_2 = 17{,}65$ *litr/sec*, такъ что $Q_3 = 37{,}408$ *litr/sec*. Таблица 39 даетъ соотвѣтственно этому участку ($l_2 = 100$ *mtr*) $b-(c+2)=0{,}8526$ *mtr*, такъ что $c=8{,}6474$ *mtr*. Послѣ этого уравненіе (4) даетъ $Q_4=15{,}3$ *litr/sec*, такъ что $Q_5=22{,}108$ *litr/sec*, а потеря напора на 100 *mtr* трубы **CD** равна $100\,\dfrac{c-8}{200}=0{,}3237$ *mtr*. Такой потерѣ соотвѣтствуетъ по таблицѣ 39 расходъ 22,451 *litr/sec*, т.-е. нѣсколько большій того, который мы только что получили. Заключаемъ, что оба давленія b и c въ дѣйствительности ниже, чѣмъ это оказались при этомъ предположеніи.

Предполагаемъ послѣ этого $b=11{,}48$ *mtr*, и, проведя вычисленія тѣмъ же порядкомъ, находимъ для истинныхъ значеній всѣхъ неизвѣстныхъ слѣдующіе достаточно узкіе предѣлы:

$$
\begin{aligned}
11{,}48 &< b < 11{,}5\ mtr,\\
55{,}211 &> Q_1 > 55{,}058\ litr/sec,\\
17{,}64 &< Q_2 < 17{,}65\ litr/sec,\\
37{,}571 &> Q_3 > 37{,}408\ litr/sec,\\
8{,}622 &< c < 8{,}647\ mtr,\\
15{,}29 &< Q_4 < 15{,}3\ litr/sec,\\
22{,}281 &> Q_5 > 22{,}108\ litr/sec.
\end{aligned}
$$

Въ этихъ строкахъ всѣ лѣвыя числа соотвѣтствуютъ предположенію $b=11{,}48$ *mtr*, наоборотъ правому столбцу соотвѣтствуетъ значеніе $b=11{,}5$ *mtr*.

72. Рѣшить задачу № 71 при слѣдующихъ данныхъ (см. схему, приведенную при рѣшеніи этой задачи). Труба **ABCD** имѣетъ діаметръ 0,1 *mtr*. Отверстіе **B** имѣетъ діаметръ 0,05 *mtr* и находится на 7 *mtr* ниже уровня въ резервуарѣ **A**. Отверстіе **C** имѣетъ 0,025 *mtr* въ діаметрѣ и лежитъ на 10 *mtr* ниже уровня въ томъ же резервуарѣ. Длины участковъ трубы таковы: $l_1=150$ *mtr*; $l_3=300$ *mtr*; $l_5=50$ *mtr*. Вертикальное разстояніе между уровнями въ обоихъ резервуарахъ равно 4 *mtr*.

Отв. На основаніи табл. 8 (стр. 124) и табл. 6 (стр. 122) считаемъ коэффиціентъ расхода въ отверстіи **B** равнымъ 0,61, а въ отверстіи **C** — 0,6. Допустимъ, для выясненія направленія теченія въ отдѣльныхъ участкахъ трубы, что труба **CD** не подаетъ воды ни въ ту, ни въ другую сторону, такъ что давленіе $c=6$ *mtr*. При этомъ условіи черезъ отверстіе **C** можетъ вылиться расходъ $Q_4=0{,}6\,\dfrac{\pi.0{,}025}{4}\sqrt{2g.6}.1000=3{,}19$ *litr/sec*. Чтобы такой расходъ прошелъ по трубѣ **BC**, необходима потеря напора (на основаніи таблицы 39) $b+3-c=3\left\{0{,}2401+0{,}1243\,\dfrac{0{,}4084}{0{,}7854}\right\}=0{,}739$ *mtr*, такъ что давленіе $b=3{,}739$ *mtr*. Подъ такимъ давленіемъ черезъ отверстіе **B** можетъ вылиться расходъ

$$Q_2=0{,}61\,\frac{\pi 0{,}05^2}{4}\sqrt{2g.3{,}739}.1000=10{,}2\ litr/sec.$$

Такимъ образомъ труба **AB** была бы должна пропустить расходъ $Q_1=3{,}19+10{,}2=$ $=13{,}39$ *litr/sec*, для чего по таблицѣ 39 необходима потеря напора $a-b=1{,}5\left\{3{,}790-\right.$ $\left.-0{,}946\,\dfrac{0{,}354}{1{,}963}\right\}=5{,}43$ *mtr*, тогда какъ остается располагаемой лишь высота $7-3{,}739=$ $=3{,}261$ *mtr*. Ясно, что давленіе въ **C** должно быть *ниже* предположеннаго, такъ что по трубѣ **CD** вода будетъ течь отъ **D** къ **C**. Нужно выяснить направленіе теченія на участкѣ **BC**, ибо направленіе теченія на участкѣ **AB**, конечно, не вызываетъ сомнѣнія. Для этого допустимъ, что по всей трубѣ **BCD** нѣтъ теченія, такъ что $b+3=c=6$*mtr*. При этомъ условіи труба **AB** можетъ пропустить расходъ (по таблицѣ 39) въ 11,357 *litr/sec*, тогда какъ черезъ отверстіе **B** можетъ выливаться лишь 9,13 *litr/sec*. Ясно, что давленіе b должно быть выше предположеннаго. Отсюда слѣдуетъ, что отверстіе **C** будетъ питаться обоими резервуарами, и, кромѣ того, что давленіе b должно быть больше 3 *mtr*, а давленіе c должно быть меньше 6 *mtr*, т.-е. тѣхъ значеній давленій, при которыхъ вода въ трубѣ **BCD** неподвижна.

Написавши надлежащимъ образомъ систему уравненій получаемъ слѣдующіе предѣлы, внутри которыхъ содержатся всѣ неизвѣстныя:

$$
\begin{aligned}
3{,}18 &> b > 3{,}17 \; mtr,\\
11{,}07 &< Q_1 < 11{,}08 \; litr/sec,\\
9{,}458 &> Q_2 > 9{,}43 \quad ,,\\
1{,}612 &< Q_3 < 1{,}65 \quad ,,\\
5{,}969 &> c > 5{,}95 \; mtr\\
3{,}183 &> Q_4 > 3{,}18 \; litr/sec\\
1{,}571 &> Q_5 > 1{,}53 \quad ,,
\end{aligned}
$$

73. Ту же задачу № 71 рѣшить при слѣдующихъ данныхъ (см. схему, приведенную при рѣшеніи этой задачи). Труба *ABCD* имѣетъ діаметръ 0,1 *mtr*. Разстояніе между уровнями въ сосудахъ равно 4 *mtr*. Отверстіе *B* имѣетъ діаметръ 0,05 *mtr* и находится на 7 *mtr* ниже уровня въ резервуарѣ *A*. Отверстіе *C* имѣетъ діаметръ 0,025 *mtr* и лежитъ на 10 *mtr* ниже того же уровня. Длины участковъ трубъ таковы: $l_1 = 300$ *mtr*; $l_3 = 150$ *mtr*; $l_5 = 50$ *mtr*. (Ср. эти данныя съ задачей № 72.)

Отв. Согласно даннымъ задачи № 72, считаемъ коэффиціентъ расхода въ отверстіи *B* равнымъ 0,61, а въ отверстіи *C*—0,6. Для выясненія направленія теченія въ трубахъ допустимъ, что въ трубѣ *BCD* нѣтъ никакого теченія, т.-е. что давленіе $b = 7 - 4 = 3$ *mtr*. Въ такомъ случаѣ отверстіе *B* должно было бы выпускать

$$Q_2 = 1000 . 0{,}61 \, \frac{\pi . 0{,}05^2}{4} \sqrt{19{,}6 . 3} = 9{,}13 \; litr/sec,$$

тогда какъ труба *AB*, при располагаемомъ напорѣ по 1,333 *mtr* на каждую сотню метровъ длины трубы (см. таблицу 39), могла бы пропустить лишь 7,854 *litr/sec*. Ясно, что отверстіе *B* будетъ питаться обоими резервуарами, а отверстіе *C* будетъ получать воду только изъ резервуара *D*.

Подобно предыдущему, сближеніемъ предѣловъ корней получимъ слѣдующія неравенства:

$$
\begin{aligned}
2{,}78 &< b < 2{,}79\\
8{,}059 &> Q_1 > 8{,}047\\
8{,}84 &< Q_2 < 8{,}86\\
0{,}781 &< Q_3 < 0{,}813\\
5{,}808 &< c < 5{,}82\\
3{,}14 &< Q_4 < 3{,}15\\
3{,}921 &< Q_5 < 3{,}963
\end{aligned}
$$

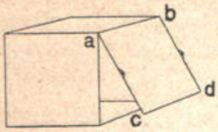
Дополнительныя задачи по гидростатикѣ.

74. Въ цилиндрѣ плотно вставленъ поршень такъ, что разстояніе отъ дна цилиндра до поршня = 20 *cm*. Поршень былъ свободно вставленъ при атмосферномъ давленіи; показаніе барометра было 74 *cm*. Цилиндръ опустили затѣмъ въ море на глубину 40,256 *mtr*, при чемъ барометръ стоялъ на 70 *cm*. Какое разстояніе будетъ между дномъ цилиндра и поршнемъ, если пренебречь треніемъ поршня о стѣнки, если считать температуру воды и воздуха одинаковыми и если уд. вѣсъ морской воды принять въ 1,02?

Отв. Почти 4 *cm* (3,98 *cm*).

75. Пароходъ сидитъ въ морской водѣ на 0,05 *mtr* мельче, чѣмъ въ прѣсной. При погрузкѣ 50 *tn* угля посадка парохода въ морѣ увеличивается на 0,025 *mtr*. Показать, что водоизмѣщеніе парохода равно 5000 *tn*, если удѣльный вѣсъ морской воды = 1,02, а прѣсной—1,00.

76. Одна изъ стѣнокъ кубическаго ящика (фиг. 176) исполнена откидною, такъ что въ одномъ случаѣ она можетъ вращаться около горизонтальной стороны ab, въ другомъ же—около стороны cd. Посерединѣ сторонъ ac и bd сдѣланы ушки, къ которымъ прикрѣплены нити, обвязывающія весь ящикъ въ горизонтальной плоскости. Ящикъ наполненъ до краевъ водою. Показать, что натяженіе каждой нити вблизи ушка въ первомъ случаѣ равно $1/3$ вѣса воды въ ящикѣ, а во второмъ—$1/6$ того же вѣса.



Фиг. 176.

77. Подпорная стѣнка имѣетъ поперечное сѣченіе въ формѣ прямоугольника, горизонтальный размѣръ котораго равенъ b mtr. Стѣнка представляетъ одну изъ вертикальныхъ стѣнъ резервуара, наполненнаго до краевъ водою. Если коэффиціентъ тренія для матеріала стѣнки есть f, вѣсъ 1 mtr^3 этого матеріала γ_1, а вѣсъ 1 mtr^3 жидкости γ_2, то какова возможная высота z_1 стѣнки, опредѣляемая изъ условія отсутствія сдвига стѣнки по ея горизонтальному шву? Показать, что „линія давленія" въ горизонтальныхъ швахъ есть парабола. (Линіей давленія называется мѣсто точекъ пересѣченія горизонтальнаго шва съ равнодѣйствующей всѣхъ внѣшнихъ силъ, дѣйствующихъ на часть стѣнки, лежащую выше этого шва.) При какой высотѣ z_2 стѣнки линія давленія пересѣкаетъ шовъ не ближе къ краю, какъ на $\frac{1}{n}$ часть толщины стѣнки?

Отв. $z_1 = 2f\frac{\gamma_1}{\gamma_2}b$ mtr, при чемъ размѣръ z вообще отсчитывается отъ верхняго края стѣнки книзу. Буквой y назовемъ разстояніе отъ вертикальной линіи, проведенной черезъ середину сѣченія стѣнки, до точки пересѣченія линіи давленія съ горизонтальнымъ швомъ. Линія давленія есть парабола, потому что $y = \frac{\gamma_2}{\gamma_1}\frac{z^2}{2b}$. Наконецъ искомое $z_2 = b\sqrt{\frac{\gamma_1}{\gamma^2}\left(1-\frac{1}{n}\right)}$.

78. Вопросы предыдущей задачи примѣнить къ поперечному сѣченію стѣнки имѣющему форму прямоугольнаго треугольника съ вертикальнымъ катетомъ, обращеннымъ къ жидкости, и съ угломъ α при вершинѣ. Показать, что линія давленія въ этомъ случаѣ не парабола, а прямая, проходящая черезъ вершину сѣченія.

Отв. Высота z_1 можетъ быть любая, лишь бы удовлетворялось условіе $f > \frac{\gamma_2}{\gamma_1} ctg\,\alpha$. Въ противномъ случаѣ нѣтъ вообще высоты z, удовлетворяющей условію отсутствія сдвига.— Буквой y называемъ горизонтальное разстояніе отъ вертикальнаго катета сѣченія стѣнки до точки пересѣченія линіи давленія съ горизонтальнымъ катетомъ. Линія давленія есть прямая, такъ какъ $y = \frac{z}{3}\left(tg\,\alpha + \frac{\gamma_2}{\gamma_1} ctg\,\alpha\right)$.— Высота z_2 можетъ быть любая, лишь бы $tg\,\alpha > \sqrt{\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\frac{n}{2n-3}}$.

79. Рѣшить предыдущую задачу, предполагая, что къ жидкости обращена наклонная поверхность стѣнки, или въ поперечномъ сѣченіи—гипотенуза треугольника.

Отв. Условіе отсутствія сдвига болѣе благопріятно, чѣмъ въ предыдущемъ случаѣ; его не будетъ при всякомъ z_1, лишь бы удовлетворялось условіе $f > \frac{\gamma_2}{\gamma_1+\gamma_2} ctg\,\alpha$.— Линія давленія есть прямая. При томъ же значеніи буквы y, какъ и въ предыдущей задачѣ, имѣемъ: $y = \frac{z}{3}\left(tg\,\alpha - \frac{\gamma_2}{\gamma_1+\gamma_2} ctg\,\alpha\right)$.— Чтобы высота z_2 была любая, нужно удовлетворить условію $tg\,\alpha > \sqrt{\frac{\gamma_2}{\gamma_1+\gamma_2}\frac{n}{n-3}}$.

80. Подпорная стѣнка должна быть высотою *a mtr*. Линія давленія должна пересѣкать ея нижнее основаніе, раздѣляя его въ отношеніи $1:2$ съ тѣмъ, чтобы не было въ горизонтальныхъ швахъ напряженія разрыва. Считая $\gamma_1 = 1500$ и $\gamma_2 = 1000$ (см. обозначенія задачи № 77), сравнить вѣса 1 погоннаго метра кладки, выполненный по конструкціи задачъ № 77, 78 и 79.

Отв. 1 погонный метръ первой стѣнки вѣситъ $1,5\ a^2\ tn$, второй стѣнки $0,8165 . 1,5\ a^2\ tn$; третьей конструкціей вообще нельзя удовлетворить поставленному условію: вѣсъ ея получается равнымъ ∞.

ГЛАВА IV.

Движеніе воды въ каналахъ.

§ 30. Уравненіе равномѣрнаго теченія въ каналахъ.

Изученіе законовъ движенія воды въ рѣкахъ и каналахъ составляетъ одинъ изъ важныхъ вопросовъ практической гидравлики, такъ какъ оно необходимо для правильной постановки плотинъ, для расчета отверстій мостовъ, для производства работъ по урегулированію теченія рѣкъ въ цѣляхъ судоходства и другихъ, для осушенія болотъ, для оросительныхъ работъ и т. д. Къ сожалѣнію, это—одинъ изъ наиболѣе слабыхъ отдѣловъ гидравлики. Что касается до каналовъ,—искусственныхъ открытыхъ водоводовъ съ русломъ болѣе или менѣе правильнымъ, т.-е. прямолинейнымъ, съ постояннымъ уклономъ дна, съ правильнымъ поперечнымъ профилемъ, безъ рѣзкихъ поворотовъ, съ русломъ неразмываемымъ, болѣе или менѣе плотнымъ и чистымъ,—то въ каналахъ можно, въ большей или меньшей степени, довольствоваться простыми теоретическими представленіями и предположеніями и извлекать изъ нихъ полезные для практики результаты. Въ рѣкахъ же, потокахъ естественныхъ, а потому безусловно не удовлетворяющихъ ни одному изъ названныхъ выше условій, обстоятельства движенія крайне осложняются; достаточно указать, напр., что рѣки съ неразмываемымъ русломъ и не несущія съ собою наносовъ представляютъ рѣдкое исключеніе; прямолинейныхъ участковъ на рѣкахъ вообще не бываетъ и т. п. Понятно, что примѣненіе гипотезы параллельныхъ струй, мало дающее для объясненія явленія теченій въ каналахъ, совершенно ничего не объясняетъ въ потокахъ естественныхъ. Попытка Буссинека *) построить теорію теченія въ открытыхъ руслахъ на иныхъ началахъ достаточно сложна, чтобы приводить ее въ этомъ краткомъ курсѣ гидравлики, предназначенномъ при томъ не для строителей. Въ силу этого мы принуждены ограничиться изложеніемъ важнѣйшихъ фактовъ о движеніи воды въ каналахъ, и если иногда и будемъ говорить о рѣкахъ, то будемъ надѣлять ихъ свойствами, имъ неприсущими, приближая представленіе о рѣкѣ къ представленію о каналѣ.

---

*) M. I. Boussinesq. „Essai sur la théorie des eaux courantes". Въ полномъ видѣ появилась въ 1872 году среди „Mémoires présentés par divers savants à l'académie des sciences de l'Institut national de France". На русскомъ языкѣ эта работа сокращенно изложена проф. Д. Бобылевымъ подъ заглавіемъ „Очеркъ теоріи водяныхъ теченій, выра-

Выяснимъ сначала термины, съ которыми придется имѣть дѣло.

Продольнымъ профилемъ канала называется линія **MN** (фиг. 177) пересѣченія свободной поверхности съ вертикальной плоскостью **PQ**, содержащей направленіе теченія. Иногда различаютъ продольный профиль свободной поверхности отъ продольнаго профиля дна,—линіи **RS**, которую обыкновенно считаютъ прямой.

Поперечнымъ профилемъ называются линіи **DACBE** (та же фиг. 177) пересѣченія канала съ плоскостью, перпендикулярною къ направленію теченія, хотя обыкновенно плоскость эту считаютъ вертикальной (напр., **MR**, **NS**). Часть **ACB** этого профиля, находящаяся подъ водою, называется *смачиваемымъ* (также *подводнымъ*) *периметромъ*. Его длину будемъ обозначать буквой O.

Фиг. 177.

Площадь **ABC**, занятая водою, называется *живымъ сѣченіемъ* канала. Мы будемъ называть его буквою F. Отношеніе $\frac{F}{O} = R$ называется *среднимъ гидравлическимъ* (или просто *среднимъ*) *радіусомъ сѣченія*.

Вертикальное превышеніе h двухъ точекъ **M** и **N** продольнаго профиля называется *паденіемъ канала на длинѣ* L, равной разстоянію между точками **M** и **N**, считая его по свободной поверхности. Отношеніе $\frac{h}{L} = \sin i \backsim i$ называется *паденіемъ* (на единицу длины), также *уклономъ* канала. Обыкновенно уголъ i такъ малъ, что $\sin$ его можно считать равнымъ углу. Въ силу малости этого угла является безразличнымъ, считать ли длину L по свободной поверхности, или въ горизонтальной плоскости (тогда $\frac{h}{L} = tg\, i$), или, даже, по дну канала. Впрочемъ, иногда бываетъ важно различить паденіе свободной поверхности отъ паденія дна канала. Паденіе выражаютъ обыкновенно въ промиляхъ ($^1/_{1000}$), обозначая его знакомъ $^0/_{00}$; за единицу длины принимаютъ километръ. Въ естественныхъ рѣкахъ паденіе въ 1 и болѣе промили встрѣчается только въ верховьяхъ рѣкъ, въ стремнинахъ и порогахъ, а также въ горныхъ потокахъ. Низовыя части рѣкъ, а также всѣ равнинныя рѣки имѣютъ обыкновенно паденія, меньшія $1^0/_{00}$. Само собою разумѣется, что на всемъ протяженіи рѣки паденіе не остается постояннымъ, но, болѣе или менѣе значительно,

ботанной Буссинекомъ". Спб. 1898. Еще болѣе кратко изложены основныя положенія этой теоріи инженеромъ В. Вислоцкимъ въ статьѣ „О неудовлетворительности гидравлическихъ формулъ, принятыхъ нынѣ для расчета отверстій малыхъ мостиковъ... и т. д." См. Журналъ Министерства Путей Сообщенія, кн. 3, 4 и 5, 1901 г.

мѣняется. Въ искусственныхъ каналахъ паденіе выбирается въ зависимости отъ назначенія канала. Такъ, въ *судоходныхъ* каналахъ избѣгаютъ дѣлать паденія больше 0,2‰, чтобы не увеличивать усилія, необходимаго для движенія судовъ противъ теченія. Въ *оросительныхъ* каналахъ, распредѣляющихъ воду по участку, паденіе дѣлаютъ обычно не болѣе 0,05 ‰; въ каналахъ же, подводящихъ воду для цѣлей орошенія, паденіе достигаетъ 0,25 и болѣе промили. Въ каналахъ, *отводящихъ воду для цѣлей утилизаціи ея энергіи*, паденіе обыкновенно не болѣе 0,4—0,6‰; однако, при значительныхъ количествахъ воды, и, особенно, при большихъ располагаемыхъ напорахъ, встрѣчаются, и въ послѣднее время довольно часто, паденія въ 0,75, 1, 1,5 и даже, какъ исключеніе, въ 7‰.

Въ качествѣ примѣровъ укажемъ нѣкоторыя данныя, относящіяся къ русскимъ и европейскимъ рѣкамъ *).

Р. Москва, между Бабьегородской плотиной и Москворѣцкимъ мостомъ, въ межень имѣетъ паденіе 0,6‰; при томъ же стояніи воды, на всемъ теченіи въ предѣлахъ города, ея среднее паденіе равно 0,19‰.

Среднее паденіе *Днѣпра*, на всей его длинѣ въ 2117 верстъ, равно 0,11‰. На участкѣ отъ Кіева до Екатеринослава (481 вер.) оно равно 0,071‰; среднее паденіе его на порожистомъ участкѣ отъ Екатеринослава до Александровска (96 верстъ) равно 0,31‰; наконецъ, среднее паденіе самого большого и крутого его порога Ненасытецъ (длиною 408 саж.) достигаетъ 5,5‰.

Среднее паденіе на рѣкѣ *Днѣстрѣ* измѣняется слѣдующимъ образомъ: отъ австрійской границы до г. Могилева-Волынскаго (185 вер.) оно равно 0,3‰; далѣе до мѣстечка Выхватинецъ (205 вер.) оно уменьшается до 0,18‰; далѣе до Бендеръ (190 вер.) оно равно лишь 0,09‰, и, наконецъ, далѣе до устья (195 вер.) оно падаетъ до 0,026‰. При этомъ, на участкѣ отъ Могилева до Выхватинецъ, на многочисленныхъ перекатахъ, среднее паденіе въ межень равно 0,45‰, а въ плесахъ—лишь 0,09‰.

Среднее паденіе рѣки *Мсты*, на всемъ ея протяженіи въ 412 в., равно 0,31‰; на Боровичскихъ порогахъ, длиною въ 22 версты, среднее паденіе составляетъ 2,7‰.

Паденіе на р. *Невѣ* на протяженіи 54 верстъ отъ Ладожскаго озера до Рожковской пристани по нивеллировкѣ 1904—1905 годовъ составляло всего 2,5 саж., или въ среднемъ 0,093‰.

Для рѣки *Волхова*, имѣющей длину въ 185 верстъ, разница уровней озеръ Ильмень и Ладожское въ 6,86 саж. даетъ среднее паденіе 0,074‰; эта разность уровней въ значительной мѣрѣ сосредоточена на Ладожскихъ порогахъ, имѣющихъ длину 10 верстъ и паденіе 4,43 саж., такъ что средній уклонъ этихъ пороговъ = 0,885‰, а средній уклонъ остального теченія = 0,028‰.

На *Западной Двинѣ* встрѣчаются мѣстные уклоны на большихъ протяженіяхъ въ 5 и болѣе верстъ въ 1,581‰ и въ 0,974‰; таковы паденія на порогахъ близъ Крейцбурга. Средній уклонъ несравненно меньше.

На *Сѣверной Двинѣ*, около Архангельска, т.-е. уже близъ устья, наоборотъ, замѣрены уклоны въ 0,001‰ и даже меньше того: на 1065—1085 верстахъ своего теченія эта рѣка имѣла около 1880 года уклонъ 0,0004‰.

Средній уклонъ р. *Камы* отъ с. Дедюхина до р. Чусовой, на длинѣ въ 210 верстъ составляетъ 0,063‰; на дальнѣйшемъ протяженіи до Волги средній уклонъ равенъ 0,054.

На *Терекѣ*, отъ ст. Казбекъ до ст. Ларсъ ($14\frac{1}{2}$ верстъ), разность уровней достигаетъ 286 саж., что даетъ $i = 39{,}5$‰. Отъ ст. Ларсъ до Владикавказа (41 вер.) разность уровней равна 188 саж., такъ что $i = 9{,}15$‰.

---

*) Эти свѣдѣнія для русскихъ рѣкъ заимствуемъ главнымъ образомъ въ изданіяхъ М-ва Путей Сообщенія, въ такъ называемыхъ „Отчетахъ описныхъ партій“. Эти партіи начали работать въ 70-хъ годахъ прошлаго столѣтія. Ихъ работы продолжаются и изданія выходятъ въ свѣтъ и до сихъ поръ.

Оба истока *Рейна* до своего сліянія имѣютъ среднее паденіе около 24 ‰. Отъ этого мѣста до Боденскаго озера оно равно 1,93 ‰. Далѣе у Базеля $i = 1$ ‰; у Страсбурга $i = 0{,}59$ ‰; около Шпейера оно падаетъ до 0,08 ‰. Затѣмъ, отъ Майнца до Кёльна паденіе измѣняется въ предѣлахъ отъ 0,5 до 0,125 ‰; подъ Кёльномъ $i = 0{,}2$ ‰. Наконецъ, въ нижней части Рейна въ среднемъ $i = 0{,}0835$ ‰.

На рѣкѣ *Эльбѣ* теченіе въ австрійскихъ предѣлахъ происходитъ при среднемъ $i = 3{,}125$ ‰. Около Дрездена $i = 0{,}25$ ‰, около Магдебурга $i = 0{,}2$ ‰; въ нижнемъ теченіи $i = 0{,}11$ ‰.

На нижнемъ теченіи р. *Вислы*, въ предѣлахъ Пруссіи, среднее паденіе равно 0,175 ‰.

Среднее паденіе на всемъ протяженіи *Дуная* въ 2780 *kmtr* равно 0,36 ‰.

Среднее паденіе на всемъ протяженіи р. *По* въ 672 *kmtr* равно 2,9 ‰, при чемъ въ верховьяхъ $i = 34{,}5$ ‰, въ среднемъ теченіи $i = 2{,}86$ ‰, и, наконецъ, въ низовыхъ частяхъ среднее $i = 0{,}2$ ‰. Подобнымъ же образомъ:

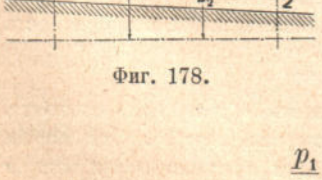
Рѣки.	Среднее паденіе въ ‰			
	верхнее теченіе.	среднее теченіе.	нижнее теченіе.	на всей длинѣ.
Тибръ	5,56	3,68	0,61	2,97
Тичино	48,72	2,54	1,96	9,27
Минчіо	65,12	16,00	0,79	1,7

Чтобы имѣть возможность примѣнять здѣсь уравненіе Д. Бернулли, подобно тому, какъ и въ трубахъ, считаютъ, что жидкость течетъ въ каналѣ параллельными струйками съ одною, общею для всѣхъ точекъ сѣченія, *среднею скоростью* v, которая опредѣляется по расходу Q или по дѣйствительной скорости u, въ каждомъ элементѣ Δf живого сѣченія, формулой:

$$v = \frac{Q}{F} = \frac{\Sigma \Delta f \, . \, u}{F} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (1)$$

Ошибки, связанныя съ введеніемъ средней скорости, очевидно, остаются тѣ же самыя, какія были указаны въ главѣ III.

Начнемъ съ разсмотрѣнія равномѣрнаго установившагося движенія въ каналѣ, т.-е. такого движенія, для котораго скорость каждой точки, а, слѣдовательно, и средняя скорость, не зависитъ ни отъ времени, ни отъ пространства, а есть величина постоянная. Изъ уравненія неразрывности $Q = Fv$ видно, что въ этомъ случаѣ живыя сѣченія вездѣ между собою равны. Примѣняя ур-іе Д. Бернулли для движенія отъ сѣченія *M* до сѣченія *N* (фиг. 178), получимъ:



Фиг. 178.

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} + z_2 + \eta \quad \ldots \ldots \ldots (2)$$

Понятно, что при предположенной параллельности струй давленія въ центрахъ тяжести сѣченій можно выразить черезъ:

$$\frac{p_1}{\gamma} = x_1 + b,$$
$$\frac{p_2}{\gamma} = x_2 + b,$$

гдѣ b есть высота, соотвѣтствующая атмосферному давленію.

Вносся въ ур-іе (2) эти значенія p_1 и p_2, получаемъ:

$$\eta = x_1 + b + z_1 - x_2 - b - z_2 = (x_1 + z_1) - (x_2 + z_2) = h \quad \dots \quad (3)$$

т.-е. все паденіе h, весь располагаемый напоръ тратится въ этомъ случаѣ на преодолѣніе вредныхъ сопротивленій (η), главнымъ образомъ, на преодолѣніе тренія о стѣнку, подобно тому, какъ въ трубѣ постояннаго діаметра. Этого конечно, и слѣдовало ожидать, такъ какъ при равномѣрномъ движеніи работа движущей силы всегда равна работѣ сопротивленій.

Законы тренія въ жидкости были уже нами разсмотрѣны; мы приняли, что сила тренія прямо пропорціональна поверхности соприкосновенія жидкости со стѣнкой и зависитъ отъ скорости, а потому работа тренія на длинѣ потока L, отнесенная къ 1 kgr протекающей воды, выражается такъ:

$$\eta = h = \frac{\gamma \,.\, O \,.\, L \,.\, f(v) \,.\, v}{\gamma \,.\, F \,.\, v} = \frac{O}{F} L \,.\, f(v).$$

Группируя члены иначе, пишемъ:

$$\frac{h}{L} \cdot \frac{F}{O} = i\,R = f(v).$$

Такъ какъ, по экспериментальнымъ даннымъ, зависимость силы тренія отъ скорости очень близка къ пропорціональности второй степени скорости и такъ какъ по смыслу ур-ія функція $f(v)$ должна быть линейной величиной, то удобно представить ее въ видѣ:

$$i\,R = f(v) = B\,\frac{v^2}{2g}, \quad \dots\dots\dots \quad (4)$$

гдѣ B есть нѣкоторый числовой коэффиціентъ, который нужно опредѣлить изъ опыта. Опредѣляя v изъ (4), находимъ, что

$$v = c\sqrt{Ri}, \quad \dots\dots\dots \quad (5)$$

гдѣ c есть нѣкоторый коэффиціентъ, опредѣляемый изъ условія:

$$c = \sqrt{\frac{2g}{B}}.$$

Уравненіе (5), дающее связь между паденіемъ, среднимъ радіусомъ и средней скоростью при равномѣрномъ движеніи, можно назвать *уравненіемъ равномѣрнаго теченія въ каналахъ*. Оно называется также формулой *Шези*, такъ какъ этотъ авторъ первый предложилъ ее, еще въ 1755 году. Въ формулѣ (5) легко узнаемъ ур-іе (13) § 21 предыдущей главы.

Прежде чѣмъ излагать болѣе точныя свѣдѣнія о значеніяхъ коэф-товъ B и c въ формулѣ Шези, отмѣтимъ, что для *рѣкъ съ спокойнымъ теченіемъ* и съ довольно большимъ среднимъ гидравлическимъ радіусомъ ($R \backsim 3$ *mtr*) можно принять для коэф-та c, какъ первое приближеніе, значеніе, предложенное италіанскимъ инженеромъ *Тадини*: $c = 50$. При малыхъ среднихъ радіусахъ ($R \backsim 1$ *mtr*) и также при покойномъ теченіи, лучше уменьшить c до 40 и меньше; наоборотъ, для большихъ рѣкъ ($R \backsim 10$ *mtr*) надо увеличивать c до 56. Такъ, на рукавахъ Рейна въ Голландіи получено $c = 50$; на Дунаѣ подъ Вѣной опредѣлилось $c = 45$; на Миссури c доходитъ до 57. На Волгѣ наблюденія Самарской и Дубовской гидрометрическихъ станцій *) (въ 1884—1890 годахъ) давали разныя значенія c, чаще всего въ предѣлахъ 52—54. Здѣсь приходилось имѣть дѣло съ живыми сѣченіями отъ 6 до 20 тысячъ квадратныхъ метровъ, съ ширинами рѣкъ отъ 1000 до 2500 *mtr*, со средними радіусами отъ 5 до 9 *mtr* и съ очень малыми уклонами, выражающимися 3-мя—4-мя сотыми долями промили. На Волховѣ находили также c отъ 46 до 54. Для быстрыхъ потоковъ въ каменистомъ ложѣ, съ большимъ паденіемъ, а также въ сильно заросшихъ потокахъ, значеніе c измѣняется въ предѣлахъ отъ 40 до 30. Такъ, на Рейнѣ подъ Базелемъ найдено $c = 41$; на Рейнѣ въ предѣлахъ Швейцаріи (до Боденскаго озера) $c = 38$; на притокахъ верхней Луары $c = 36$; на р. Аа, при среднемъ радіусѣ $R = 0{,}594$ *mtr*, нашли $c = 31{,}5$; наконецъ, на плохо содержимыхъ небольшихъ мельничныхъ подводящихъ каналахъ находили c даже до 19.

Приводимъ далѣе результаты болѣе точныхъ изслѣдованій. Многочисленныя наблюденія французскихъ инженеровъ *Дарси* (*Darcy*) и *Базена* (*Bazin*), произведенныя ими на оросительныхъ каналахъ въ Бургундіи, привели Базена къ выводу, что формула Дарси, данная имъ для трубъ (см. ур-іе 10 въ § 21), пригодна и для каналовъ. Именно, для коэф-та B въ ур-іяхъ (4) и (5) Базенъ даетъ выраженіе:

$$B = 2g\left(\alpha + \frac{\beta}{R}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

такъ что коэф-тъ c въ формулѣ Шези выражается при формулѣ Базена такъ:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\alpha + \frac{\beta}{R}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6')$$

Главныя наблюденія, лежащія въ основѣ этой формулы, относятся къ каналу 2 *mtr* шириною и въ 1 *mtr* глубиною, при паденіяхъ, измѣняющихся

*) См. изданные Министерствомъ Путей Сообщенія подъ редакціей Н. Коломійцева „Результаты наблюденій“ этихъ двухъ станцій, Самарской—въ 1899 году и Дубовской—1902 году.

въ предѣлахъ отъ 1 до 9‰. Существенный фактъ, впервые установленный этими наблюденіями *), кромѣ предыдущей формулы, заключается въ томъ, что коэф-ты α и β зависятъ отъ матеріала, изъ котораго выполнены стѣнки и дно канала, при чемъ большое вліяніе оказываетъ *степень шероховатости* стѣнокъ. Базенъ различаетъ четыре категоріи стѣнокъ; швейцарскіе инженеры Гангилье и Куттеръ, на основаніи наблюденій надъ швейцарскими рѣками, добавили еще пятую категорію наибольшей шероховатости. Значенія коэф-товъ α и β для разныхъ категорій приведены въ слѣдующей таблицѣ 41:

Таблица 41 **)

къ формулѣ Базена (6).

№	Характеръ стѣнки.	α	β
1	*Очень гладкія стѣнки* (строганыя доски, цементная штукатурка)	0,00015	0,0000045
2	*Гладкія стѣнки* (нестроганыя доски, кирпичная кладка, кладка изъ тесанаго камня)	0,00019	0,0000133
3	*Негладкія стѣнки* (бутовая кладка)	0,00024	0,00006
4	*Земляныя стѣнки*	0,00028	0,00035
5	*Каменистое русло*	0,0004	0,0007

Вычисленныя сообразно съ этимъ значенія коэф-та c въ формулѣ Шези приведены въ таблицѣ 42.

Таблица 42.

Значенія коэф-та c по Базену.

Среднiй радiусъ R въ *mtr*	№№ категорій по таблицѣ 41.				
	1	2	3	4	5
0,05	65	47	26	—	—
0,10	72	56	35	16	12
0,15	75	60	40	20	15
0,20	76	62	43	22	17
0,25	77	64	46	24	19
0,30	78	65	48	26	20
0,35	78	66	49	28	21
0,40	79	67	51	29	22
0,50	79	68	53	32	24
0,60	80	69	54	34	25

*) Работа Базена, одобренная французской Академіей Наукъ, появилась въ 1865 году подъ заглавіемъ: „Recherches hydrauliques, entreprises par M. H. Darcy, continuées par M. H. Bazin".

**) При опредѣленіи отверстій для желѣзнодорожныхъ мостовъ на нашихъ дорогахъ приняты коэффиціенты $\alpha = 0{,}0005974$ и $\beta = 0{,}00035$. См. по этому поводу мою замѣтку „Новыя уравненія Базена" въ Бюллетеняхъ Политехническаго Общества за 1900 годъ № 4. Оказывается, что эти коэф-ты, избыточно надежные для отверстій со среднимъ радіусомъ больше 1,2 *mtr*, уже недостаточно надежны для меньшихъ радіусовъ, приводя къ большимъ скоростямъ, нежели наблюдавшіяся въ соотвѣтствующихъ условіяхъ.

Таблица 42 (продолженіе).

Значенія коэф-та c по Базену.

Средній радіусъ R въ *mtr*	№№ категорій по таблицѣ 41.				
	1	2	3	4	5
0,70	80	69	55	36	27
0,80	80	70	56	37	28
1,00	80	70	58	40	30
1,50	81	71	60	44	34
2,00	81	71	61	47	37
2,50	81	72	61	49	39
3,00	81	72	62	50	40
4,00	81	72	63	52	42
5,00	81	72	63	54	43
10,00	81	72	64	56	46

Изъ этой таблицы видно, какое существенное значеніе имѣетъ степень шероховатости. Напримѣръ при $R = 0{,}5$ *mtr* коэф-тъ c измѣняется отъ 79 до 24.

Вторая очень распространенная формула дана въ 1869 году уже упомянутыми инженерами *Ganguillet* и *Kutter*.

Они сочли нужнымъ поставить коэффиціентъ c въ уравненіи (5) въ зависимость не только отъ R и отъ степени шероховатости, но и отъ паденія i; именно, формулу Шези они дополняютъ ур-іемъ:

$$c = \frac{\alpha + \frac{\beta}{i} + \frac{1}{n}}{1 + \left(\alpha + \frac{\beta}{i}\right)\frac{n}{\sqrt{R}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Коэффиціентамъ α и β они даютъ постоянныя значенія, именно $\alpha = 23$, $\beta = 0{,}00155$; коэффиціенту же n, характеризующему степень шероховатости, даютъ одно изъ слѣдующихъ значеній:

№	Характеръ стѣнки.	n	$\frac{1}{n}$
1	*Очень гладкія* стѣнки каналовъ (строганыя доски, цементная штукатурка)	0,010	100
2	*Гладкія* стѣнки каналовъ (тесовая кладка, кирпичъ, нестроганыя доски и т. п.)	0,013	77
3	*Негладкія* стѣнки (бутовая кладка)	0,017	58
4	*Очень грубая бутовая кладка*	0,020	50
5	Рѣки и каналы съ *земляными* стѣнками	0,025	40
6	Тоже съ *булыжникомъ* или *водорослями*	0,030	33
7	Тоже съ *неправильными* стѣнками и въ *плохомъ* состояніи .	0,035	25
8	Тоже въ *очень плохомъ* состояніи	0,040	29

Пользованіе формулами Гангилье и Куттера облегчается таблицей 43, дающей значенія c для разныхъ n, i и R.

Таблица 43 (*Ganguillet et Kutter*).

Значенія коэф-та c въ формулѣ $v = c\sqrt{Ri}$.

Значенія коэф-та n	Средній радіусъ R въ *mtr*	Уклоны i въ промиляхъ.						
		0,025	0,05	0,1	0,2	0,4	1,0	10
0,010	0,05	38	44	51	54	56	57	58
	0,10	49	56	61	65	68	70	71
	0,20	63	70	74	77	78	79	80
	0,30	72	77	81	84	85	86	86
	0,50	83	86	88	90	91	91	91
Очень гладкія стѣнки.	1,00	100	100	100	100	100	100	100
	2,00	115	111	109	107	106	105	105
	3,00	124	117	113	111	110	109	108
	5,00	134	123	118	115	113	112	111
	15,00	151	135	125	121	118	117	116
0,013	0,05	28	31	35	38	40	41	42
	0,10	36	40	44	47	49	50	51
	0,20	46	50	53	56	58	59	59
	0,30	53	57	60	63	64	64	65
	0,50	62	65	67	69	69	70	70
Гладкія стѣнки.	1,00	77	77	77	77	77	77	77
	2,00	90	87	85	84	83	82	82
	3,00	99	94	89	88	87	86	85
	5,00	108	100	93	91	90	89	88
	15,00	125	114	102	98	96	94	92
0,017	0,05	19	22	24	26	28	29	29
	0,10	25	29	32	34	35	36	36
	0,20	34	37	39	41	42	42	43
	0,30	40	43	45	46	47	47	48
Шероховатыя стѣнки.	0,50	47	49	50	51	51	52	52
	1,00	58	58	58	58	58	58	58
	2,00	71	69	67	66	65	64	64
	3,00	78	74	71	70	69	68	68
	5,00	87	79	75	73	72	71	70
	15,00	105	90	83	79	77	76	75
0,020	0,05	15	18	20	21	23	23	24
	0,10	21	23	25	28	29	29	30
	0,20	28	30	32	34	35	36	36
	0,30	33	35	37	38	39	40	40
	0,50	40	41	42	43	43	44	44
Болѣе шероховатыя стѣнки.	1,00	50	50	50	50	50	50	50
	2,00	61	59	57	56	56	55	55
	3,00	69	64	61	59	59	58	58
	5,00	76	70	66	63	62	61	61
	15,00	94	81	74	70	68	67	66

Таблица 43 (*Ganguillet et Kutter*).

Значенія коэф-та c въ формулѣ $v = c\sqrt{Ri}$.

(*Продолженіе*).

Значенія коэф-та n	Средній радіусъ R въ *mtr*	Уклоны i въ промиляхъ. 0,025	0,05	0,1	0,2	0,4	1,0	10
0,025	0,05	12	13	15	16	17	18	18
	0,10	17	18	19	20	21	22	22
	0,20	22	23	24	25	26	27	27
	0,30	26	28	29	30	30	31	31
	0,50	31	32	33	34	34	35	35
Земляныя стѣнки.	1,00	40	40	40	40	40	40	40
	2,00	50	48	47	46	45	45	45
	3,00	56	53	51	49	48	48	47
	5,00	64	59	54	53	52	51	50
	15,00	81	71	63	59	57	56	55
0,030	0,05	10	11	12	13	13	14	14
	0,10	13	14	15	16	17	18	18
	0,20	18	19	19	20	21	22	22
	0,30	21	22	23	24	24	25	25
	0,50	25	26	27	27	28	29	29
Каменистое русло.	1,00	33	33	33	33	33	33	33
	2,00	42	41	40	40	39	38	38
	3,00	48	45	43	42	42	41	41
	5,00	56	51	47	45	44	43	43
	15,00	72	62	55	52	51	49	48
0,035	0,05	8	9	9	10	10	11	11
	0,10	11	12	12	13	13	14	14
	0,20	15	16	16	17	17	18	18
	0,30	18	19	19	20	20	21	21
	0,50	22	23	23	23	24	24	24
Неправильныя стѣнки.	1,00	29	29	29	29	29	29	29
	2,00	36	35	34	34	33	33	33
	3,00	42	40	38	37	36	36	36
	5,00	49	45	43	42	41	40	39
	15,00	65	56	51	47	45	44	43
0,040	0,05	6	7	7	8	8	9	9
	0,10	9	10	11	11	12	12	12
	0,20	13	14	14	15	15	16	16
	0,30	15	16	17	18	18	18	18
Очень неправильныя стѣнки.	0,50	19	19	20	20	21	21	21
	1,00	25	25	25	25	25	25	25
	2,00	32	31	31	30	30	29	29
	3,00	37	35	34	33	33	32	32
	5,00	44	41	39	38	37	36	35
	15,00	59	52	46	43	42	41	40

Нельзя сказать, чтобы обѣ эти формулы не оставляли желать лучшаго. По отношенію къ формулѣ Базена (6) можно поставить слѣдующія возраженія: 1) для разныхъ степеней шероховатости коэффиціентъ B измѣняется вслѣдствіе измѣненія коэффиціентовъ α и β; но эти послѣдніе измѣняются не одинаково и, повидимому, совершенно произвольно: переходя отъ 1-й категоріи къ 5-й, мы видимъ, что α увеличивается въ $0{,}00040:0{,}00015=2{,}66$ раза, тогда какъ β увеличивается въ $0{,}0007000:0{,}0000045=155$ разъ. 2) При очень большихъ среднихъ радіусахъ R, когда, казалось бы, состояніе стѣнки должно вліять мало, коэффиціентъ B стремится къ разнымъ значеніямъ (при $R=\infty$ имѣемъ $B=\alpha$, которое измѣняется со степенью шероховатости).

Формулѣ (7) Ganguillet и Kutter'a слѣдуетъ поставить слѣдующія возраженія; предварительно, однако, ради удобства выводовъ, напишемъ ее въ иной формѣ. Обозначимъ въ уравненіи (7) буквою K сумму членовъ

$$K=\alpha+\frac{\beta}{i};$$

очевидно, съ увеличеніемъ уклона величина K уменьшается. Тогда уравненіе (7) принимаетъ видъ:

$$c=\frac{K+\dfrac{1}{n}}{1+\dfrac{Kn}{\sqrt{R}}}.$$

Отсюда получаемъ:

$$\frac{1}{nc}=\frac{1+\dfrac{Kn}{\sqrt{R}}}{1+Kn}$$

и окончательно

$$\frac{1}{nc}-1=\frac{1}{1+\dfrac{1}{Kn}}\left(\frac{1}{\sqrt{R}}-1\right)\ldots\ldots\ldots\ldots (7')$$

Отсюда видно, что 1) съ увеличеніемъ R коэффиціентъ c стремится къ разнымъ значеніямъ (при $R=\infty$ получимъ $c=\frac{1}{n}+K$) въ зависимости отъ степени шероховатости, 2) при $R<1$ *mtr* вторая часть положительна, а такъ какъ съ увеличеніемъ i величина K уменьшается, то уменьшается и вся вторая часть, оставаясь положительной; это вызоветъ увеличеніе c. Наоборотъ, увеличеніе i, при $R>1$ *mtr*, вызоветъ уменьшеніе абсолютной величины отрицательной второй части, отчего c уменьшается. Наконецъ, при $R=1$ *mtr*, величина c перестаетъ зависѣть отъ уклона. Эту зависимость удобно также прослѣдить по таблицѣ 43. Это показываетъ, что вліяніе уклона на величину c оцѣнено, по крайней мѣрѣ, странно.

Въ 1897 году Базенъ предложилъ новую формулу, въ которой онъ стремится устранить эти недостатки, сохраняя за формулой возможно простой видъ. Именно, коэф-тъ c въ формулѣ Шези онъ опредѣляетъ ур-іемъ:

$$\frac{1}{c}=0{,}0115\left(1+\frac{\gamma}{\sqrt{R}}\right)\ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

Со степенью шероховатости здѣсь мѣняется только одинъ коэффиціентъ γ, уклонъ же признается вовсе не вліяющимъ на величину c. При увеличеніи R коэффиціентъ c стремится къ значенію $c = 87$ независимо отъ степени шероховатости. Значенія коэффиціента γ слѣдующія:

№	Характеръ стѣнки.	Значенія γ
1	Гладкая цементная штукатурка, строганыя доски и т. п.,—вообще, *очень гладкія стѣнки*	0,06
2	Нестроганыя доски, кладка изъ тесанаго камня, изъ кирпича и т. п.,—вообще, *гладкія стѣнки*	0,16
3	*Бутовая кладка*	0,46
4	*Промежуточная категорія*: стѣнки въ очень плотномъ и чисто содержимомъ земляномъ грунтѣ; стѣнки, вымощенныя мелкимъ булыжникомъ; стѣнки, болѣе или менѣе чисто высѣчены въ скалѣ и т. п. . .	0,85
5	*Земляныя стѣнки* въ обычномъ состояніи, мало заросшія, вымощены некрупнымъ булыжникомъ и т. п.	1,30
6	Стѣнки, *оказывающія особенно сильное сопротивленіе* (обильныя водоросли, крупная галька, плохая кладка, скалистое дно и т. п.) . .	1,75

При составленіи этой формулы Базенъ пользовался болѣе обширнымъ экспериментальнымъ матеріаломъ, нежели Гангилье и Куттеръ: онъ пользовался 430 наблюденіями, изъ которыхъ болѣе половины (260) были сдѣланы послѣ 1870 года въ разныхъ мѣстахъ земного шара надъ каналами и рѣками.

Формулу Базена (8), равно какъ и формулу Гангилье и Куттера, удобно представить графически, если за независимое перемѣнное x принять въ обѣихъ формулахъ величину $\frac{1}{\sqrt{R}}$, а за зависимое перемѣнное y принять величину $\frac{1}{c}$. Тогда уравненіе Базена будетъ имѣть видъ:

$$y = 0{,}0115\,(1 + \gamma x) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (8')$$

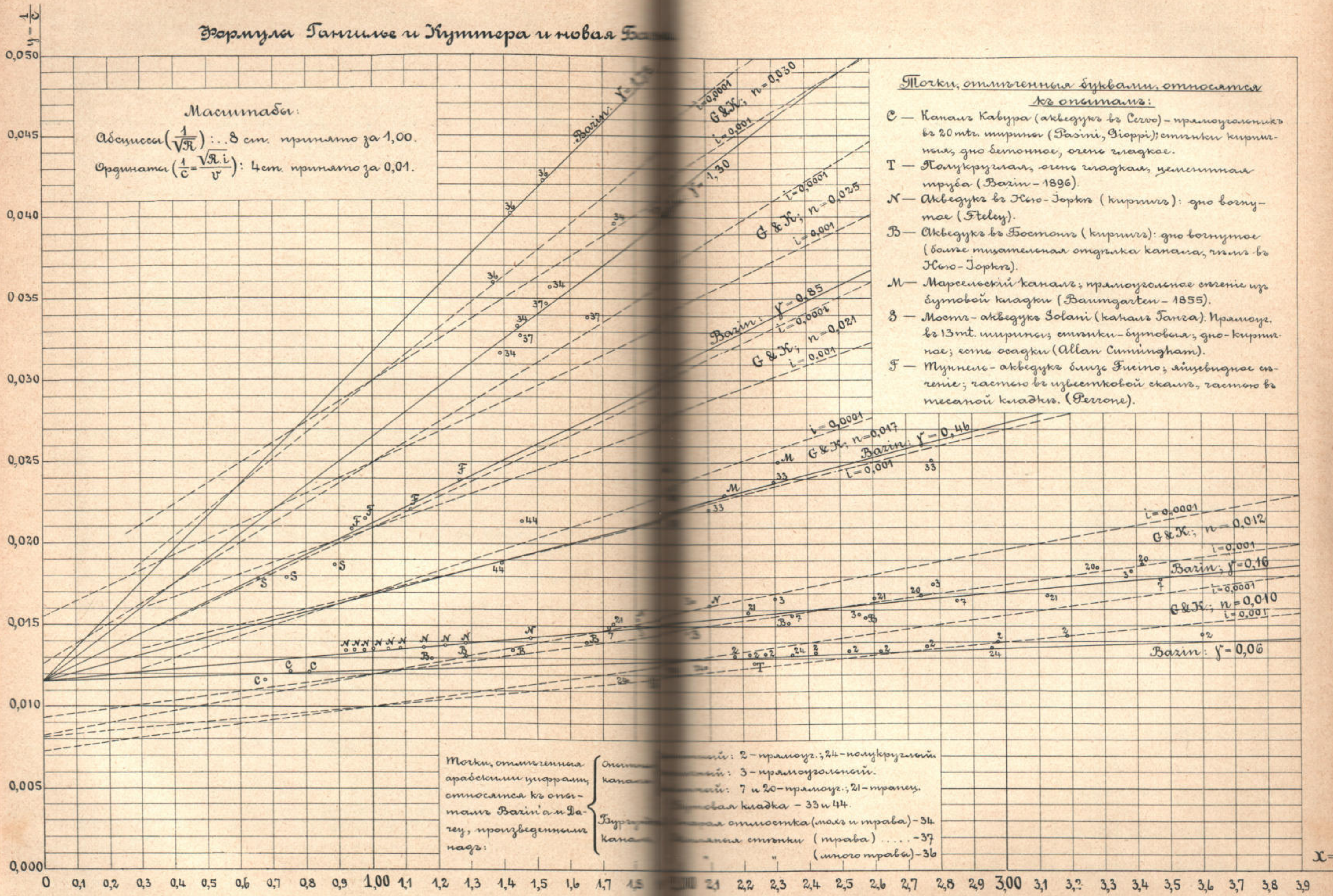
а уравненіе Гангилье и Куттера:

$$y = n + \frac{Kn^2}{1 + Kn}(x - 1) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (7'')$$

Очевидно, что уравненіе (8′) есть ур-іе пучка прямыхъ, пересѣкающихся въ одной точкѣ (назовемъ ее центромъ пучка) и различно наклоненныхъ къ оси x-овъ, въ зависимости отъ величины γ; уголъ наклона ихъ φ опредѣляется ур-іемъ:

$$tg\varphi = 0{,}0115\;\gamma.$$

Формула Гангилье и Куттера и новая Ба



VII.

Центръ этого пучка лежитъ въ точкѣ $x_0 = 0$; $y_0 = 0,0115$ (см. табл. VII).

Ур-іе (7″) для каждаго отдѣльнаго значенія n также представляетъ собою ур-іе пучка прямыхъ (уклонъ отдѣльныхъ прямыхъ зависитъ здѣсь отъ множителя K); центръ каждаго пучка находится въ точкѣ ($x_0 = 1$; $y_0 = n$). Очевидно, что центры всѣхъ пучковъ расположены на одной и той же ординатѣ ($x_0 = 1$), но значенія ординатъ этихъ центровъ различны въ зависимости отъ разныхъ степеней шероховатости. На табл. VII изъ этихъ пучковъ для каждаго n нанесены пунктирными линіями только прямыя, соотвѣтствующія значеніямъ $i = 1^0/_{00}$ и $i = 0,1^0/_{00}$. Каждый такой пучокъ отмѣченъ на чертежѣ буквами **G & K**. Легко, конечно, провести прямую, соотвѣтствующую всякому другому значенію n и i.

Одного взгляда на чертежъ достаточно, чтобы видѣть, что обѣ формулы даютъ разныя значенія c. Разница меньше всего для третьей категоріи Базена. Эта прямая почти цѣликомъ лежитъ внутри пучка **G & K**, соотвѣтствующаго $n = 0,017$.

Для сравненія съ экспериментальными данными на таблицѣ нанесено нѣсколько точекъ, представляющихъ своею абсциссою величину $\frac{1}{\sqrt{R}}$, а ординатой—величину $\frac{1}{c} = \frac{\sqrt{Ri}}{v}$, полученныя изъ опыта. Нельзя, конечно, ожидать, чтобы такія точки лежали какъ разъ на соотвѣтствующихъ прямыхъ Базена, такъ какъ γ для всякой прямой есть величина вполнѣ опредѣленная, тогда какъ степень шероховатости даже въ одномъ и томъ же каналѣ измѣняется со временемъ (осадки, водоросли) и сильно зависитъ отъ качества работы. Хорошимъ тому примѣромъ могутъ служить акведуки Бостона и Нью-Іорка, имѣющіе почти одинаковые размѣры, выполненные по проекту одного и того же инженера и испытанные тоже однимъ и тѣмъ же лицомъ. Точки перваго (**B**) лежатъ н и ж е прямой $\gamma = 0,16$, а точки второго (**N**) нѣсколько в ы ш е ея. Испытатель объясняетъ это только тѣмъ, что въ Бостонѣ швы кладки канала были тщательно расшиты, тогда какъ въ Нью-Іоркѣ даже не были смыты потоки раствора: поверхностной промывкой помощью щетки онъ получилъ въ Нью-Іоркѣ увеличеніе расхода на $2^0/_0$.

Если въ каналахъ такъ велико вліяніе состоянія стѣнокъ изъ твердыхъ строительныхъ матеріаловъ, то тѣмъ болѣе легко понять причину того, почему точки 34, 36, 37 уже такъ рѣзко отступаютъ отъ прямыхъ Базена. Вообще, можно сказать, что никакая формула не можетъ дать точнаго результата, такъ какъ, конечно, разнообразіе состояній безконечно. Мы получили бы особенно большое разногласіе формулы съ дѣйствительностью, если бы нанесли на таблицу наблюденія надъ рѣками: часть таблицы, заключенная между абсциссами 0,2 и 1,0 и ординатами 0,015 и 0,025, покрылась бы совершенно безпорядочной массой точекъ, не подходящихъ ни къ прямымъ Базена, ни къ прямымъ **G & K**.

Не безъ вліянія на величину c остается и видъ профиля, что особенно ясно въ точкахъ 24 и Td, которыя относятся къ полукруглымъ сѣченіямъ: почти всѣ онѣ лежатъ ниже прямой Базена, такъ что можно думать, что круглый профиль менѣе стѣсняетъ истеченіе, чѣмъ всякій другой. Для полукруглыхъ каналовъ съ очень гладкими стѣнками можно пользоваться конечно также таблицей H. Smith'а, приведенной въ главѣ о трубахъ, его графикомъ табл. V, формулой Кристена и вообще данными о сопротивленіи тренія въ трубахъ.

Приведенной графической таблицей Базена (табл. VII) можно пользоваться на ряду съ нижеприводимой числовой таблицей 44, вычисленной по формулѣ (8). (См. табл. 44 на стр. 345—346.)

Въ заключеніе этого параграфа отмѣтимъ еще разъ, что ни величина γ въ формулѣ Базена, ни величина n въ формулѣ Ganguillet и Kutter'а не представляются опредѣленными вполнѣ; во всякомъ частномъ случаѣ ихъ нужно оцѣнивать съ большей или меньшей степенью вѣроятности въ зависимости отъ мѣстныхъ условій.

§ 31. Распредѣленіе скоростей въ сѣченіи канала.

Знать среднюю скорость потока, вообще, весьма важно. При малыхъ потокахъ ее можно опредѣлить непосредственнымъ измѣреніемъ расхода, напр., помощью водослива, и живого сѣченія. При большихъ потокахъ можно измѣрять живое сѣченіе и скорости въ отдѣльныхъ его точкахъ помощью особыхъ приборовъ, о которыхъ будетъ сказано ниже; это составляетъ весьма кропотливую и дорогую работу. Поэтому желательно имѣть простую связь между среднею скоростью и какою-нибудь скоростью, которую удобно измѣрить, или, вообще говоря, желательно знать, какъ распредѣляются скорости по сѣченію.

Вообще естественно предположить, что съ наибольшею скоростью должна итти струйка на поверхности воды надъ наиболѣе глубокимъ мѣстомъ, такъ какъ такая струйка наименѣе испытываетъ замедляющее дѣйствіе стѣнокъ. Между тѣмъ въ дѣйствительности этого не наблюдается: изъ массы наблюденій только очень немногія подтверждаютъ это предположеніе; и, наоборотъ, максимальную скорость U_{max} находили обыкновенно у струйки, идущей на нѣкоторой глубинѣ подъ свободной поверхностью (приблизительно на $^1/_3$ глубины). Несомнѣнно, что въ этомъ явленіи треніе о воздухъ, могущее оказывать извѣстное вліяніе, играетъ лишь второстепенную роль, ибо въ противномъ случаѣ при вѣтрѣ, дующемъ по теченію со скоростью, хотя бы равною скорости движенія воды, наибольшая скорость U_{max} должна бы наблюдаться на поверхности, а между тѣмъ этого нѣтъ даже и при большихъ скоростяхъ вѣтра. Правильнѣе всего это обстоятельство приписать отсутствію твердой направляющей стѣнки, вслѣдствіе чего живое сѣченіе не сохраняетъ постоянной величины и вида, и такимъ образомъ представляется полная возможность развиться разнымъ случайнымъ неправильнымъ теченіямъ; на нихъ тратится, конечно, извѣстный запасъ живой силы, отчего скорость поступательнаго движенія замедляется.

Вопросомъ о распредѣленіи скоростей больше всего занимался Базенъ; заключенія, къ которымъ онъ пришелъ, подтверждаются изслѣдованіями ряда другихъ наблюдателей, изъ которыхъ особенно надо отмѣтить, въ виду вы-

Таблица 44.

Значенія коэф-та $c = \frac{v}{\sqrt{Ri}}$ въ новой формулѣ Базена (8).

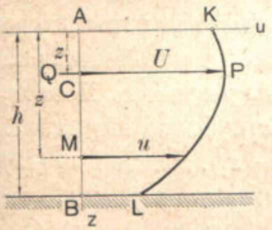
Средній радіусъ *R* въ *mtr*	При γ равномъ					
	0,06	0,16	0,46	0,85	1,30	1,75
0,05	68,5	50,7	28,4	18,1	12,8	9,9
0,06	69,8	52,6	30,2	19,4	13,8	10,7
0,07	70,9	54,2	31,7	20,6	14,7	11,4
0,08	71,8	55,6	33,1	21,7	15,5	12,1
0,09	72,5	56,7	34,4	22,7	16,3	12,7
0,10	73,1	57,7	35,5	23,6	17,0	13,3
0,11	73,6	58,7	36,5	24,4	17,7	13,9
0,12	74,1	59,5	37,4	25,2	18,3	14,4
0,13	74,6	60,2	38,2	25,9	18,9	14,9
0,14	75,0	60,9	39,0	26,7	19,4	15,3
0,15	75,3	61,5	39,7	27,2	19,9	15,8
0,16	75,6	62,1	40,5	27,8	20,4	16,2
0,17	75,9	62,7	41,2	28,4	20,9	16,6
0,18	76,2	63,2	41,8	29,0	21,4	17,0
0,19	76,5	63,6	42,4	29,5	21,8	17,3
0,20	76,7	64,1	42,9	30,0	22,3	17,7
0,21	76,9	64,5	43,5	30,5	22,7	18,1
0,22	77,1	64,9	44,0	30,9	23,1	18,4
0,23	77,3	65,2	44,4	31,4	23,4	18,7
0,24	77,5	65,5	44,8	31,8	23,8	19,0
0,25	77,6	65,9	45,3	32,2	24,2	19,3
0,26	77,8	66,2	45,7	32,6	24,5	19,6
0,27	78,0	66,5	46,1	33,0	24,8	19,9
0,28	78,1	66,8	46,5	33,4	25,2	20,2
0,29	78,3	67,0	46,9	33,7	25,5	20,5
0,30	78,4	67,3	47,3	34,1	25,8	20,7
0,31	78,5	67,6	47,6	34,3	26,1	21,0
0,32	78,6	67,8	47,9	34,7	26,4	21,2
0,33	78,8	68,0	48,2	35,1	26,7	21,5
0,34	78,9	68,2	48,5	35,4	26,9	21,7
0,35	79,0	68,4	48,8	35,7	27,2	22,0
0,36	79,1	68,6	49,2	36,0	27,5	22,2
0,37	79,2	68,8	49,5	36,3	27,7	22,4
0,38	79,2	69,0	49,8	36,6	28,0	22,7
0,39	79,3	69,2	50,1	36,8	28,2	22,9
0,40	79,4	69,4	50,4	37,1	28,5	23,1
0,41	79,5	69,6	50,6	37,4	28,7	23,3
0,42	79,6	69,7	50,9	37,6	28,9	23,5
0,43	79,7	69,9	51,1	37,9	29,2	23,7
0,44	79,7	70,1	51,4	38,1	29,4	23,9
0,45	79,8	70,2	51,6	38,4	29,6	24,1
0,46	79,9	70,4	51,8	38,6	29,8	24,3
0,47	80,0	70,5	52,0	38,8	30,0	24,5
0,48	80,0	70,6	52,3	39,1	30,2	24,7
0,49	80,1	70,8	52,5	39,3	30,4	24,8

Таблица 44 *(продолженіе).*

Средній радіусъ R въ *mtr*	При γ равномъ					
	0,06	0,16	0,46	0,85	1,30	1,75
0,50	80,2	70,9	52,7	39,5	30,6	25,0
0,55	80,4	71,5	53,7	40,5	31,6	25,9
0,60	80,7	72,1	54,6	41,4	32,5	26,7
0,65	80,9	72,6	55,4	42,3	33,3	27,4
0,70	81,1	73,0	56,1	43,1	34,1	28,1
0,75	81,3	73,4	56,8	43,9	34,8	28,8
0,80	81,5	73,8	57,4	44,6	35,5	29,4
0,85	81,7	74,1	58,0	45,2	36,1	30,0
0,90	81,8	74,4	58,6	45,9	36,7	30,6
0,95	81,9	74,7	59,1	46,5	37,3	31,1
1,00	82,0	75,0	59,6	47,0	37,8	31,6
1,10	82,2	75,4	60,5	48,0	38,8	32,6
1,20	82,4	75,9	61,3	48,9	39,7	33,5
1,30	82,6	76,3	62,0	49,8	40,6	34,3
1,40	82,8	76,3	62,6	50,6	41,4	35,1
1,50	82,9	76,9	63,2	51,3	42,2	35,8
1,60	83,0	77,2	63,8	52,0	42,9	36,5
1,70	83,1	77,5	64,3	52,6	43,6	37,1
1,80	83,2	77,7	64,8	53,2	44,2	37,7
1,90	83,3	77,9	65,2	53,8	44,8	38,3
2,00	83,4	78,1	65,6	54,3	45,3	38,9
2,20	83,6	78,5	66,4	55,3	46,4	39,9
2,40	83,7	78,8	67,1	56,2	47,3	40,8
2,60	83,8	79,1	67,7	57,0	48,1	41,7
2,80	83,9	79,4	68,2	57,7	48,9	42,5
3,00	84,0	79,6	68,7	58,3	49,7	43,3
3,20	84,1	79,8	69,2	58,9	50,4	44,0
3,40	84,2	80,0	69,6	59,5	51,0	44,6
3,60	84,3	80,2	70,0	60,1	51,6	45,2
3,80	84,4	80,4	70,4	60,6	52,2	45,8
4,00	84,4	80,5	70,7	61,0	52,7	46,4
4,50	84,6	80,9	71,5	62,1	53,9	47,6
5,00	84,7	81,2	72,1	63,0	55,0	48,8
5,50	84,8	81,4	72,7	63,8	56,0	49,8
6,00	84,9	81,6	73,2	64,6	56,8	50,7
6,50	85,0	81,8	73,7	65,2	57,6	51,6
7,00	85,0	82,0	74,1	65,8	58,3	52,3
7,50	85,1	82,2	74,5	66,4	58,9	53,0
8,00	85,2	82,3	74,8	66,9	59,5	53,7
8,50	85,2	82,4	75,1	67,4	60,1	54,3
9,00	85,3	82,6	75,4	67,8	60,7	54,9
9,50	85,3	82,7	75,7	68,2	61,2	55,6
10,00	85,3	82,8	75,9	68,5	61,6	56,0
11,00	85,4	83,0	76,4	69,2	62,5	57,0
12,00	85,5	83,1	76,8	69,9	63,3	57,8
13,00	85,5	83,3	77,1	70,4	63,9	58,6
14,00	85,6	83,4	77,4	70,9	64,5	59,3
15,00	85,6	83,5	77,7	71,3	65,1	59,9
16,00	85,7	83,6	78,0	71,7	65,6	60,5
17,00	85,7	83,7	78,3	72,1	66,1	61,1
18,00	85,7	83,8	78,5	72,5	66,6	61,6
19,00	85,8	83,9	78,7	72,8	67,0	62,1
20,00	85,8	84,0	78,8	73,0	67,3	62,5

дающихся размѣровъ изслѣдованныхъ ими потоковъ, *Humphrey* и *Abbot* (Миссисипи) и *Allan Cunningham* (каналъ Ганга шириною въ 43 *mtr* при R до 2,85 *mtr*), и мы изложимъ теперь главнѣйшіе результаты наблюденій Базена и *Cunningham*'а.

Остановимся сперва на случаѣ широкаго канала съ прямоугольнымъ сѣченіемъ, при чемъ предположимъ, что ширина его b во много разъ больше глубины h. Законъ распредѣленія скорости по вертикали **AB** въ такомъ каналѣ можетъ быть, по Базену, представленъ нѣкоторой параболой **KL** (фиг. 179), при чемъ скорость u въ какой-нибудь точкѣ **M** на глубинѣ z отъ свободной поверхности выражается уравненіемъ:



Фиг. 179.

$$u = U - \varphi (z - z_1)^2 \dots\dots \quad (9)$$

Тутъ U есть максимальная скорость, принадлежащая частицѣ **C**, идущей на глубинѣ z_1. Уравненіе (9) есть уравненіе параболы съ осью **PQ**, параллельной свободной поверхности и лежащей на разстояніи $z = z_1$ отъ нея. Дифференцируя по z, получаемъ:

$$-\frac{\partial u}{\partial z} = 2\varphi (z - z_1) \dots\dots \quad (10)$$

На основаніи опытовъ Базена, можно принять:

$$\varphi = \frac{k}{R^2}\sqrt{Ri}, \dots\dots \quad (11)$$

гдѣ k есть величина постоянная, равная, по Базену, 20. Если каналъ очень широкъ (размѣръ b великъ) по сравненію съ глубиною h, то въ выраженіи средняго радіуса $R = \dfrac{bh}{b + 2h}$ можно въ знаменателѣ пренебречь величиной h передъ b; тогда получимъ приблизительно $R \backsim h$, и въ этомъ случаѣ выраженіе (11) принимаетъ видъ:

$$\varphi = \frac{k}{h^2}\sqrt{hi} \dots\dots \quad (12)$$

Теперь формула Базена (9) принимаетъ видъ:

$$u = U - \frac{k}{h^2}\sqrt{hi}(z - z_1)^2 \dots\dots \quad (9')$$

Вообразимъ въ очень широкомъ каналѣ параллелепипедъ съ длиною (по теченію), равною единицѣ, и шириною (горизонтально поперекъ теченія), также равною единицѣ; высота же его, по глубинѣ, пусть заключается между двумя горизонтальными плоскостями: одна изъ нихъ пусть лежитъ на глубинѣ наибольшей скорости z_1, а другая—на какой-нибудь глубинѣ z. Легко подсчитать, что при этихъ данныхъ слагающая по движенію отъ вѣса этого параллелепипеда есть $\gamma i (z - z_1)$, и эта сила будетъ единственной движущей силой для взятаго жидкаго элемента. Подсчитаемъ теперь силы сопротивленій, состоящія только изъ внутреннихъ треній, которыя могутъ проявить свое дѣйствіе на граняхъ, ограничивающихъ элементъ. Очевидно, что тренія на вертикальныхъ боковыхъ граняхъ и на верхней грани—нѣтъ, ибо, если сѣченіе очень широко, то относительнаго перемѣщенія въ этихъ граняхъ нѣтъ; оно имѣется только на нижней грани; величина же его опредѣлится на основаніи того соображенія, что разъ движеніе въ каналѣ происходитъ равномѣрно, то между силами движущими и силами сопротивленія (въ данномъ случаѣ, силою тренія) должно существовать равенство. Поэтому сила тренія количественно выражается черезъ $\gamma i (z - z_1)$. Этому выраженію можно дать другой видъ, подставивъ сюда значеніе $(z - z_1)$, взятое изъ (10), и значеніе φ, взятое изъ (12). Послѣ этихъ подстановокъ найдемъ, что сила внутренняго тренія, приходящаяся на единицу площади соприкосновенія, равна:

$$\gamma i (z - z_1) = -\frac{\gamma}{2k} h \sqrt{hi} \frac{du}{dz}.$$

При установившемся равномѣрномъ движеніи мы имѣемъ формулу Шези:

$$v = c\sqrt{Ri} \backsim c\sqrt{hi};$$

въ такомъ случаѣ предыдущее выраженіе принимаетъ видъ:

$$-\frac{\gamma}{2ck} hv \frac{du}{dz} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (13)$$

Таково выраженіе силы внутренняго тренія въ очень широкомъ прямоугольномъ каналѣ, отнесенной къ единицѣ площади соприкосновенія.

Съ другой стороны, если къ такому сѣченію (очень широкому прямоугольнику) примѣнить тѣ же соображенія, которыя были приведены на стр. 215 по поводу выраженія силы внутренняго тренія въ круглой трубѣ, то нужно признать, что: 1) она пропорціональна относительной скорости $\frac{du}{dz}$, 2)—скорости у дна u_0, 3)—среднему радіусу или, въ нашемъ случаѣ, глубинѣ h, 4) такъ какъ замедляющимъ дѣйствіемъ боковыхъ стѣнокъ мы пренебрегаемъ, то множителя, подобнаго $\frac{R}{r}$ (вліяніе того, что толчки отъ стѣнки передаются все меньшимъ слоямъ) здѣсь не будетъ (всѣ слои предполагаются одинаковыми). Такимъ образомъ, сила внутренняго тренія можетъ быть выражена также черезъ:

$$Ahu_0 \frac{du}{dz}.$$

Сравнивая это выраженіе съ выраженіемъ (13), видимъ, что если положить $A = -\frac{\gamma}{2ck}$, то оба выраженія по внѣшнему виду будутъ тождественны, съ тою лишь разницей, что вмѣсто скорости u_0 у дна въ выраженіи (13) стоитъ средняя скорость по вертикали v. Изъ этого можно заключить, что ур-iя Базена (9) и (11) имѣютъ за собой и нѣкоторое теоретическое обоснованіе.

Перепишемъ формулу Базена (9′) такъ:

$$u = U - \frac{k}{h^2}\sqrt{hi}(z - z_1)^2 = U - k\sqrt{hi}\left(\frac{z}{h} - \frac{z_1}{h}\right)^2 = U - M(\xi - \xi_1)^2, \ . \ . \ . \ (9'')$$

гдѣ коэффиціентъ M, равный $k\sqrt{hi}$, есть, вообще, нѣкоторая скорость съ коэффиціентомъ c, равнымъ k (это заключаемъ изъ сравненія выраженія $k\sqrt{hi}$ съ правой частью ур-iя $v = c\sqrt{Ri} \backsim c\sqrt{hi}$), а $\xi = \frac{z}{h}$ и $\xi_1 = \frac{z_1}{h}$ суть относительныя глубины струекъ, текущихъ со скоростью u (которой соотвѣтствуетъ ξ) и съ наибольшей скоростью U (ей соотвѣтствуетъ ξ_1).

Очевидно, что средняя скорость по вертикали (а также и для всего сѣченія, если оно очень широко) выразится такъ:

$$v = \int_0^1 u\,d\xi = U - M\left[\frac{1}{3}\xi^3 - \xi_1\xi^2 + \xi_1{}^2\xi\right]_0^1 = U - M\left(\frac{1}{3} - \xi_1 + \xi_1{}^2\right) \text{*)}.$$

Исключая изъ этого ур-iя и ур-iя (9″) величину U, найдемъ выраженіе скорости u любой точки по средней скорости v:

$$u = v + M\left(\frac{1}{3} - \xi_1 + \xi_1{}^2\right) - M(\xi^2 - 2\xi\xi_1 + \xi_1{}^2) = v + M\left[\frac{1}{3} - \xi_1(1 - 2\xi) - \xi^2\right].$$

Положимъ $\xi = \frac{3}{5}$; тогда скорость $u_{3/5}$, взятая на глубинѣ $^3/_5\,h$ отъ свободной поверхности, выражается по средней скорости такъ:

$$u_{3/5} = v + M\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\xi_1 - \frac{9}{25}\right) = v - \frac{1}{5}M\left(\frac{2}{15} - \xi_1\right).$$

Относительно величины ξ_1, можно, вообще, на основаніи многихъ наблюденій, сказать, что она не больше $\frac{1}{3}$, часто меньше, т.-е. наибольшая скорость въ очень широкихъ прямоугольныхъ каналахъ лежитъ примѣрно на одной трети глубины, считая отъ поверхности. Поэтому, считая $\xi_1 = \frac{1}{3}$,

*) Это интегрированіе правильно постольку, поскольку для разныхъ вертикалей можно считать $k = const$. Допустимо это только при очень широкихъ каналахъ.

найдемъ, что скорость на $\frac{3}{5}$ глубины, $u_{3/5}$, отличается отъ средней скорости v не больше, какъ на

$$-\frac{1}{5}\left(\frac{2}{15}-\frac{5}{15}\right)M=+\frac{M}{25}.$$

Такимъ образомъ, получаемъ, что $u_{3/5}$ лишь немногимъ больше v. Поэтому, съ достаточной для практики точностью, можно считать, что въ сѣченіяхъ, очень широкихъ сравнительно съ глубиною, скорость на глубинѣ $^3/_5$ или 0,6 отъ свободной поверхности есть средняя. Cunningham, на основаніи своихъ наблюденій, для этой же глубины даетъ цифру $^5/_8$ или 0,625. Вообще, по Cunningham'у, средняя скорость v на вертикали выражается такъ:

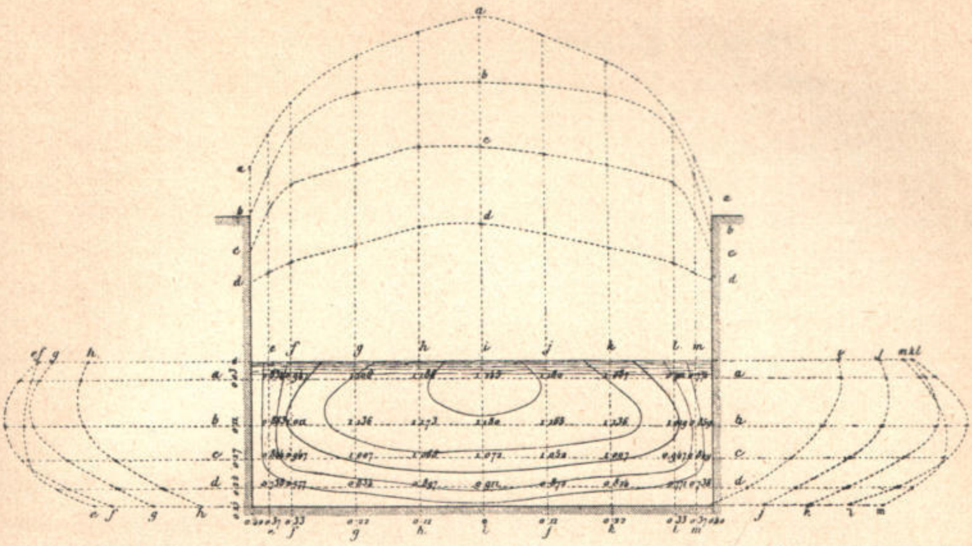
$$v=\frac{1}{4}(v_0+3v_{2/3})=\frac{1}{6}(v_0+4v_{1/2}+v_1)\ .\ \ .\ \ .\text{ и т. д.},$$

гдѣ v_0 есть скорость на поверхности, v_1—скорость у дна, $v_{1/2}$—скорость на серединѣ глубины и т. д.

Въ очень широкомъ прямоугольномъ каналѣ скорости на одной вертикали можно считать не отличающимися отъ соотвѣтствующихъ скоростей на всякой другой вертикали, взятой не слишкомъ близко къ боковой стѣнкѣ. Что же касается до каналовъ обыкновенныхъ размѣровъ, то картина измѣняется: распредѣленіе и величины скоростей на разныхъ вертикаляхъ различны, и возникаетъ вопросъ, какъ распредѣлены скорости вдоль по горизонтальнымъ линіямъ сѣченія.

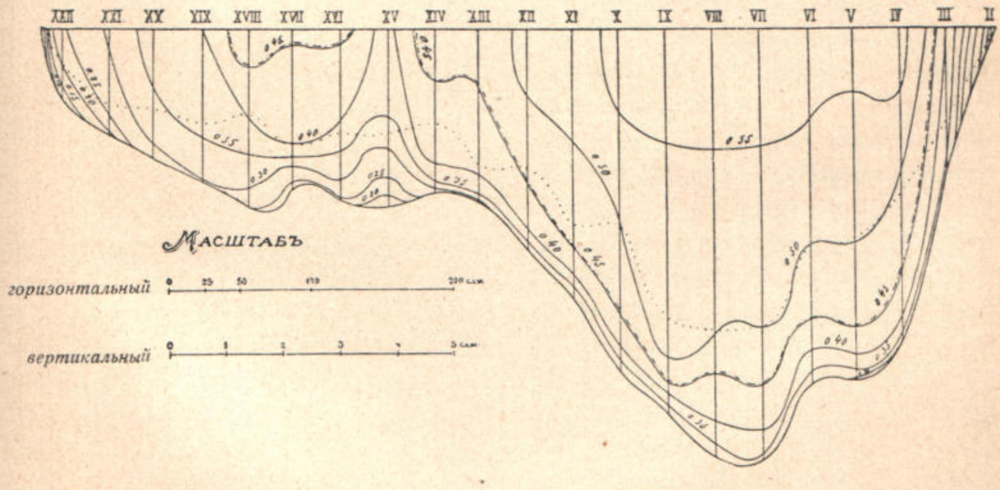
На табл. VIII представлено сѣченіе прямоугольнаго канала, изслѣдованнаго Базеномъ. Живое сѣченіе канала имѣло $0{,}8\times 0{,}25$ *mtr*. Кривыя ***aaa***, . . . , ***ddd*** представляютъ измѣненіе скоростей соотвѣтственно по горизонтальнымъ прямымъ ***aa***, . . . , ***dd***, взятымъ на разныхъ глубинахъ; онѣ построены такъ, что для кривой ***aaa*** осью абсциссъ служитъ горизонталь ***aa***; для кривой ***bbb***—горизонталь ***bb*** и т. д. Кривыя ***ee***, ***ff***, ... , ***mm*** представляютъ измѣненіе скоростей по вертикалямъ ***e***, ***f***, . . . , ***m***, при чемъ эти самыя вертикали служатъ осями для соотвѣтствующихъ кривыхъ. Сплошными линіями внутри профиля представлены кривыя, соединяющія точки, идущія съ одинаковыми скоростями; это такъ называемыя изотахеи или изодромы. Оказывается, что кривыя скоростей по горизонтали обращены всегда выпуклостью по теченію. Максимумъ скорости лежитъ около середины русла, минимумъ—у береговъ. По мѣрѣ приближенія къ берегамъ уменьшеніе скорости идетъ сначала медленно, потомъ быстро. На глубокихъ горизонталяхъ (***dd***) это сказывается менѣе рѣзко, чѣмъ вблизи поверхности. Форму этихъ кривыхъ распредѣленія скоростей по горизонтали часто уподобляютъ параболамъ, оси которыхъ совпадаютъ съ направленіемъ теченія и лежатъ посерединѣ ширины канала.

Въ качествѣ примѣра распредѣленія скорости въ сѣченіи рѣки приводимъ на табл. VIII изотахеи, полученныя на Самарской гидрометриче-



Изотахеи въ каналѣ прямоугольнаго сѣченія по наблюденіямъ Базена 17 марта 1858 года.

См. Recherches hydrauliques, entreprises par M. Darcy, cotinuées par M. Bazin. Paris, 1865, стр. 178 и таблица XVIII.



Живое сѣченіе Волги на Самарской гидрометрической станціи по опредѣленію 25 іюня 1888 года.

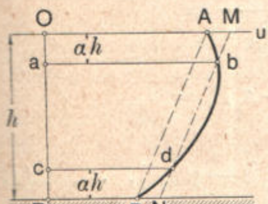
Отмѣтка уровня воды надъ уровнемъ Балтійскаго моря 9,28 саж.
Мѣстный уклонъ $i = 0.000043$.
Площадь живого сѣченія $F = 2240$ кв. саж. $= 10191$ *mtr*
Среднiй гидравлическiй радiусъ $R = 3{,}65$ саж. $= 7{,}775$ *mtr*
Наибольшая скорость въ сѣченiи $V\max = 0{,}556$ саж./сек. $= 1{,}184$ *mtr/sec.*
Средняя скорость въ сѣченiи $V = 0{,}451$ саж./сек. $= 0{,}960$ *mtr/sec.*
Расходъ $Q = 1009{,}9$ куб. саж./сек. $= 9800$ *mtr* ³*/sec.*

Коэффицiентъ $c = \dfrac{V}{\sqrt{Ri}} = \dfrac{0{,}960}{\sqrt{7{,}775 . 0{,}000043}} = 52{,}3.$

ской станціи для расхода № 4, опредѣленнаго 25 іюня 1888 г.*). Скорости измѣрялись на 21 вертикали. Изотахеи проведены черезъ каждыя 0,05 сажени. Точечнымъ пунктиромъ соединены точки, гдѣ наблюдались среднія скорости для каждой отдѣльной вертикали. Пунктиромъ (черта съ точкой) обозначено геометрическое мѣсто точекъ съ скоростью, равной средней скорости всего сѣченія. По чертежу видно, что мѣстный переломъ линіи дна примѣрно по серединѣ сѣченія вызвалъ какъ бы образованіе двухъ независимыхъ сѣченій, съ мѣстными значеніями наибольшихъ скоростей. При профиляхъ такого характера это наблюдается не рѣдко, особенно при малой глубинѣ одной изъ частей профиля.

Если русло неправильное, то всякое мѣстное возвышеніе дна сказывается мѣстной вогнутостью на кривой скоростей, и, наоборотъ, углубленіе въ днѣ даетъ мѣстную выпуклость на этой кривой. Это нарушеніе плавности теченія кривой становится тѣмъ рѣзче, чѣмъ меньше общая глубина живого сѣченія. Поэтому уравненія (9) и (11) можно примѣнить къ средней скорости всего сѣченія только тогда, когда каналъ очень широкъ; для каналовъ же обыкновенныхъ размѣровъ и тѣмъ болѣе для естественныхъ потоковъ, съ совершенно неправильнымъ русломъ, приведенныя формулы являются лишь грубо приблизительными **).

Если допустить, что въ прямоугольномъ каналѣ законъ распредѣленія скоростей по вертикали представляется ур-іемъ (9) и что по горизонтали скорости измѣняются также по закону параболы, то можно поставить себѣ вопросъ, въ какихъ точкахъ живого сѣченія канала должны быть измѣрены скорости теченія съ тѣмъ, чтобы среднее ариѳметическое изъ этихъ измѣреній дало значеніе именно средней скорости всего сѣченія?



Фиг. 180.

Рѣшимъ этотъ вопросъ сначала для весьма узкой вертикальной полосы, выдѣленной изъ живого сѣченія вдоль какой-нибудь его вертикали **OP** (фиг. 180). Кривая скорости пусть представляется въ данномъ случаѣ кривой **AB** и ур-іемъ (9). Если ширина полосы есть Δb, то расходъ черезъ этотъ элементъ можно представить такъ:

$$\Delta Q = \Delta b \int_0^h u\,dz = \Delta b \int_0^h [U - \varphi(z - z_1)^2]\,dz =$$

$$= \Delta b \,.\, h \left[U - \varphi z_1{}^2 + 2\varphi z_1 \frac{h}{2} - \varphi \frac{h^2}{3} \right] \ldots \ldots \ldots (A)$$

*) Заимствуемъ чертежъ изъ „Результатовъ наблюденій гидрометрическихъ станцій. Рѣка Волга. Самарская станція“. Издано подъ редакціей Коломійцева. Москва, 1899 г.

**) Необходимо добавить, что всѣ приведенныя данныя относятся къ *открытымъ* русламъ и совершенно не примѣнимы къ каналамъ съ ледянымъ покровомъ. При послѣднемъ условіи каналъ обращается изъ открытаго русла въ трубу съ разной степенью шероховатости разныхъ частей ея периметра. Распредѣленіе скорости видоизмѣняется и осложняется не только этимъ обстоятельствомъ, но также явленіями *доннаго льда*, называемаго на Западной Двинѣ *жужгой*, на Невѣ—*шорохомъ* и т. д., т.-е. отдѣльными заледенѣлыми частицами, При этомъ ясно, что выраженіе $\int_0^h u\,dz$ есть площадь, ограниченная дугой параболы $AbdB$ и прямыми OA, OP и PB. Какъ извѣстно, такая площадь равна площади трапеціи $OMNP$, сторона которой MN параллельна хордѣ AB, а разстояніе AM равно двумъ третямъ наибольшей стрѣлки разсматриваемой дуги, взятой въ направленіи оси u. Пусть эта прямая MN пересѣкаетъ параболу въ точкахъ d и b; при этомъ отрѣзки оси ординатъ cP и aO, по свойству параболы, между собою равны; поэтому средняя линія трапеціи равна полусуммѣ абсциссъ ab и cd, такъ что площадь $OABP$ параболы можетъ быть представлена формулой:

$$S = h\,\frac{ab + cd}{2}.$$

Если назовемъ $Oa = cP = \alpha h$, то соотвѣтствующія абсциссы по ур-ію (9) выразятся такъ:

$$ab = U - \varphi\,(\alpha h - z_1)^2,$$
$$cd = U - \varphi\,(h - \alpha h - z_1)^2.$$

Слѣдовательно, элементарный расходъ можно выразить формулой:

$$\Delta Q = \Delta b \int_0^h u\,dz = \Delta b \,.\, S_{OABP} = \Delta b \,.\, h\,\frac{ab + cd}{2} =$$

$$= \Delta b \cdot \frac{h}{2}\,[2U - \varphi\,(\alpha h - z_1)^2 - \varphi\,(h - \alpha h - z_1)^2] =$$

$$= \Delta b \,.\, h\,[U - 0{,}5\,\varphi\, h^2 - \varphi\,\alpha^2 h^2 + \varphi\,\alpha\, h^2 + \varphi\, z_1 h - \varphi\, z_1^2] \,.\;.\;.\;.\; (B)$$

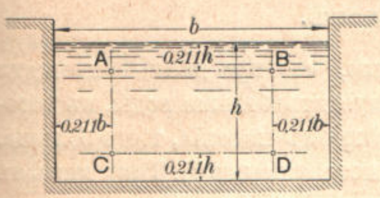
Сравнивая выраженія (A) и (B) и производя всѣ сокращенія, получаемъ ур-іе:

$$\alpha^2 - \alpha + \frac{1}{6} = 0 \,.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (C)$$

иногда образующими большія скопленія, которыя текутъ вмѣстѣ съ водою, но, конечно, далеко не такъ же, какъ она. Эти явленія еще мало изслѣдованы. См. по этому поводу въ журналѣ „Zeitschrift für Bauwesen“ за 1897 г. статью Jasmund—Die Veränderung der Geschwindigkeiten im Querschnitt eines Stromes, insbesondere bei Behinderung an der Oberfläche und bei Eisstand, стр. 607. Вопросу доннаго льда посвященъ X выпускъ издаваемыхъ Министерствомъ Путей Сообщенія „Матеріаловъ для описанія русскихъ рѣкъ“, содержащій работу В. Лохтина: Ледяной наносъ и зимніе заторы на р. Невѣ. С.-Петербургъ, 1906 г. Тому же вопросу посвящена книга G. Lüscher'a—Das Grundeis. Aarau, 1906 годъ. Распредѣленіе скоростей въ рѣкѣ, покрытой ледянымъ покровомъ, внимательно изслѣдовалось въ 1907—1909 годахъ инженеромъ С. Максимовымъ на Крейцбургской гидрометрической станціи на Западной Двинѣ. Эти наблюденія еще не опубликованы.

То обстоятельство, что въ составъ коэффиціентовъ этого ур-ія не входятъ ни параметръ параболы, ни ея постоянное, зависитъ отъ выше упомянутаго расположенія точекъ b и d на параболѣ. Рѣшая ур-іе (C), находимъ его корни: $\alpha_1 = 0{,}211$ и $\alpha_2 = 0{,}789$. Такъ какъ сумма этихъ корней равна 1, то, оказывается, безразлично, отсчитывать ли разстоянія $0{,}211\,h$ и $0{,}789\,h$ отъ свободной поверхности внизъ, или отъ дна вверхъ: опредѣлятся однѣ и тѣ же абсциссы параболы ab и cd. Итакъ, средняя скорость на вертикали можетъ быть опредѣлена, какъ среднее ариѳметическое изъ скоростей, измѣренныхъ—одна на разстояніи $0{,}211\,h$ подъ свободной поверхностью, а другая—на томъ же разстояніи надъ дномъ.

Разсуждая такимъ же образомъ относительно горизонтальныхъ слоевъ, найдемъ, очевидно, что средняя скорость по горизонтали, если законъ измѣненія скорости можетъ быть представленъ параболой, можетъ быть приравнена среднему ариѳметическому изъ двухъ скоростей, взятыхъ отъ каждаго берега на разстояніи 0,211 полной длины этой горизонтали.



Фиг. 181.

Наконецъ, распространяя эти разсужденія на все живое сѣченіе прямоугольнаго канала, найдемъ, что его средняя скорость можетъ быть найдена, какъ среднее ариѳметическое изъ четырехъ измѣреній скоростей, сдѣланныхъ въ точкахъ A, B, C и D, которыя расположены въ сѣченіи, какъ указано на фигурѣ 181. Это обстоятельство было указано проф. *Teichmann*'омъ въ 1883 году.

Приводимъ старинную формулу *Прони* (эмпирическую, конечно), связывающую среднюю скорость сѣченія v съ максимальной скоростью на средней вертикали U и со скоростью у дна u_1 (тоже на средней вертикали). Эта формула такова:

$$v = \frac{U + u_1}{2}.$$

Слѣдующая формула того же Прони связываетъ среднюю скорость v съ максимальной U:

$$v = U\frac{2{,}37 + U}{3{,}15 + U}.$$

Наконецъ, еще проще выраженія:

$$v = 0{,}8\,U;$$

$$u_1 = 0{,}75\ v = 0{,}6\ U.$$

Эти послѣднія 4 формулы даютъ только приблизительное соотношеніе между скоростями и могутъ быть употребляемы безъ риска большой ошибки только при не слишкомъ узкихъ каналахъ и при теченіи, достаточно покойномъ.

По *Вагнеру* среднюю скорость всего сѣченія v по наибольшей скорости въ сѣченіи U можно опредѣлить изъ уравненія:

$$v = 0{,}705\,U + 0{,}001\,U^2.$$

Эта формула соотвѣтствуетъ наблюденіямъ на Везерѣ, Эльбѣ, Рейнѣ и т. д. *).

*) См. von W a g n e r, Hydrologische Untersuchungen. Braunschweig, 1881.

Наконецъ, нужно замѣтить, что въ каждой точкѣ сѣченія рѣки скорость или, вѣрнѣе, ея слагающая по теченію (эта слагающая и опредѣляется гидрометрическими приборами), все время измѣняется, то увеличиваясь, то уменьшаясь, колеблясь съ нѣкоторой періодической правильностью около средней величины. Такими же періодическими колебаніями по величинѣ и по направленію обладаютъ и другія слагающія скорости, лежащія въ плоскости сѣченія потока. Ни величина этого колебанія, ни причины, его вызывающія, до сихъ поръ еще недостаточно изслѣдованы, — констатировано только явленіе, которое называется *пульсаціей* потока. Въ немъ можно видѣть подтвержденіе того, что было сказано по поводу внутренняго тренія жидкости: движеніе жидкости въ трубѣ, а тѣмъ болѣе въ открытомъ каналѣ, нельзя уподоблять движенію твердыхъ призмъ, обгоняющихъ другъ друга: неизбѣжно закручиваніе, отсюда вихри, а отсюда періодическія измѣненія скорости.

§ 32. Замѣчанія о выборѣ профиля, скорости и паденія въ каналахъ. Расчетъ каналовъ.

Изъ уравненій $Q = F . v$ и $v = c\sqrt{Ri}$ видно, что при данной площади живого сѣченія F тотъ каналъ способенъ пропустить больше воды, въ которомъ больше скорость v; а эта скорость, при данномъ паденіи, тѣмъ больше, чѣмъ больше среднiй радіусъ R, если считать c постояннымъ *). Такъ какъ съ увеличеніемъ F, очевидно, увеличивается и стоимость сооруженія, то является вопросъ объ опредѣленіи наивыгоднѣйшаго профиля канала, т.-е. такого профиля, въ которомъ $R = \frac{F}{O}$ имѣетъ наибольшее значеніе при данномъ F; очевидно, что для этого смачиваемый периметръ O долженъ имѣть наименьшее значеніе. Отысканіе такихъ профилей составляетъ извѣстную въ варіаціонномъ исчисленіи задачу объ изопериметрахъ. Тамъ доказывается, что изъ всѣхъ многоугольниковъ съ одинаковыми площадями, при данномъ числѣ сторонъ, правильные многоугольники имѣютъ наименьшіе периметры, а изъ всѣхъ правильныхъ многоугольниковъ тѣ имѣютъ меньшій периметръ, число сторонъ которыхъ больше. Поэтому кругъ обладаетъ наименьшимъ возможнымъ периметромъ при данной площади.

Фиг. 182.

Примѣняя этотъ результатъ къ каналамъ, заключаемъ, что, вообще, наивыгоднѣйшій профиль канала есть полуокружность (фиг. 182), такъ какъ

*) На основаніи данныхъ § 30 видно, однако, что само c увеличивается со среднимъ радіусомъ сѣченія, такъ что увеличеніе R вызываетъ увеличеніе скорости какъ непосредственно, такъ и черезъ коэффиціентъ c.

очевидно, что если, вообще, R_{max} (среднiй радiусъ) есть отношенiе площади круга къ длинѣ окружности, то величина R_{max} не измѣнится, если возьмемъ половину круга и полуокружность. Если горизонтъ воды въ каналѣ не совпадаетъ съ горизонтальнымъ дiаметромъ, то выгодность профиля теряется. Напомнимъ, что для полукруглаго канала среднiй радiусъ $R = \frac{r}{2}$, т.-е., что среднiй радiусъ равенъ половинѣ наибольшей глубины канала.

Подобнымъ же образомъ заключаемъ, что изъ всѣхъ четырехугольныхъ профилей, которые представляются обыкновенно равнобокими трапецiями, наивыгоднѣйшiй профиль есть половина правильнаго шестиугольника,—слѣдовательно, съ угломъ наклона боковъ къ горизонту въ 60^0; менѣе выгоднымъ является прямоугольникъ, какъ половина квадрата, т.-е. съ шириною, равной двойной глубинѣ; но онъ, въ свою очередь, выгоднѣе всякой другой прямоугольной фигуры. Легко убѣдиться, что и въ этихъ двухъ случаяхъ среднiй радiусъ сѣченiя равенъ половинѣ глубины канала (если, конечно, уровень воды совпадаетъ съ горизонтальнымъ дiаметромъ описаннаго круга).

Понятно, что только въ рѣдкихъ, особо твердыхъ грунтахъ можно примѣнять одинъ изъ этихъ трехъ профилей, не употребляя особыхъ укрѣпленiй. Въ обыкновенныхъ же случаяхъ эти профили возможны только при устройствѣ деревянной, каменной, бетонной и, вообще, искусственной одежды береговъ и дна; при этомъ нерѣдко въ профиляхъ въ видѣ половины шестиугольника нижнюю горизонтальную грань дѣлаютъ не плоской, а кривою, обращая ее выпуклостью внизъ. Если же хотятъ обойтись безъ укрѣпленiя береговъ, то необходимо, чтобы боковыя грани канала были наклонены не круче естественнаго откоса даннаго грунта, такъ какъ иначе она будетъ осыпаться, независимо отъ размыванiя его водою. Поэтому чаще всего профиль каналовъ выполняется въ видѣ трапецiи. Въ твердыхъ грунтахъ допускаютъ поэтому для боковыхъ граней полуторный откосъ *), въ песчаныхъ и, вообще, рыхлыхъ грунтахъ—двойной и т. д. Такимъ образомъ, при выборѣ размѣровъ трапецiи, какъ профиля, откосъ боковыхъ стѣнокъ, который мы будемъ обозначать буквою m, является заданной величиною, въ зависимости отъ рода грунта. Для того, чтобы при этомъ условiи опредѣлить наивыгоднѣйшiй профиль, соотвѣтствующiй данной площади F, нужно еще установить соотношенiе между двумя его измѣренiями, выражая аналитически условiе полученiя наибольшаго средняго радiуса R сѣченiя или, что то же, наименьшаго смачиваемаго периметра O. Для равнобокой трапецiи (фиг. 183) всего проще установить это соотношенiе между шириною по дну b и глубиною h. Имѣемъ, очевидно:

$$F = \frac{2b + 2\,CD}{2} h = (b + mh)\,h;$$

$$O = b + 2\,BD = b + 2h\sqrt{1 + m^2}.$$

*) Откосомъ называется ctg угла наклона грани къ горизонту, т.-е. отношенiе $\frac{BE}{DE}$ на фиг. 183. Между прочимъ замѣтимъ, что, на основанiи понятныхъ соображенiй, этотъ уголъ, даже при укрѣпленiи береговъ, не дѣлается въ 60^0, а берутъ половинный откосъ, что соотвѣтствуетъ углу $arc\,ctg\,\frac{1}{2} = 63^0\,26'$.

Исключая отсюда b, находимъ:

$$O = \frac{F}{h} + h\,[2\sqrt{1+m^2} - m].$$

Такъ какъ m и F заданы*), то O_{min} получимъ при томъ h_0, которое удовлетворяетъ уравненію:

$$\frac{\partial O}{\partial h} = 0.$$

Имѣемъ:

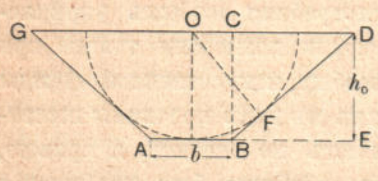
$$\frac{\partial O}{\partial h} = -\frac{F}{h_0^2} + 2\sqrt{1+m^2} - m = 0,$$

такъ что

$$h_0^2 = \frac{F}{2\sqrt{1+m^2} - m} = \frac{(b + mh_0)\,h_0}{2\sqrt{1+m^2} - m} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (14)$$

Отсюда

$$\frac{b}{2} = h_0\,(\sqrt{1+m^2} - m) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (15)$$



Фиг. 183.

Это уравненіе указываетъ намъ самый способъ построенія искомой величины $\frac{b}{2}$: если изъ $BD = h_0\sqrt{1+m^2}$ вычесть DF, сдѣлавъ его равнымъ $CD = BE = mh_0$, то отрѣзокъ BF и будетъ равенъ $\frac{b}{2}$. Все рѣшеніе вопроса можно выполнить такъ: по уравненію (14) вычисляемъ h_0 по даннымъ F и m; радіусомъ $OF = h_0$ описываемъ затѣмъ полуокружность и проводимъ къ ней горизонтальную касательную AB, а также касательную DB, такъ, чтобы $\frac{DC}{BC} = m$; точка касанія F и опредѣлитъ искомый отрѣзокъ BF. Легко подсчитать величину средняго гидравлическаго радіуса; онъ равенъ:

$$R_0 = \frac{h_0^2[2\sqrt{1+m^2} - m]}{2h_0[\sqrt{1+m^2} - m] + 2\,h_0\sqrt{1+m^2}} = \frac{h_0}{2} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (16)$$

т.-е. и здѣсь онъ равенъ половинѣ глубины.

---

*) Если бы m было произвольно, то наивыгоднѣйшій откосъ m_0 мы получили бы, рѣшая уравненіе $\frac{\partial O}{\partial m} = 0$. Это даетъ:

$$(1 + m_0^2)^{-\frac{1}{2}} 2m_0 - 1 = 0,$$

откуда

$$m_0 = \sqrt{\frac{1}{3}}.$$

Замѣчая, что $arc\,ctg\sqrt{\frac{1}{3}} = 60^0$, видимъ, что это обстоятельство, въ связи съ рѣшеніемъ уравненія $\frac{\partial O}{\partial h} = 0$, подтверждаетъ наше предыдущее заключеніе о выгодности профиля, какъ половины правильнаго шестиугольника.

Было уже подчеркнуто, что наивыгоднѣйшій профиль тогда останется таковымъ, когда онъ наполненъ водою какъ разъ до требуемой глубины. При всѣхъ иныхъ наполненіяхъ, и бóльшихъ, и меньшихъ, выгодность его утрачивается. Возникаетъ такимъ образомъ вопросъ о томъ, какъ мѣняются скорость и расходъ въ каналѣ даннаго профиля при разныхъ его наполненіяхъ, при условіи, конечно, одинаковаго уклона. Съ помощью данныхъ § 31 этотъ вопросъ разрѣшается просто для простыхъ профилей. Для болѣе сложныхъ профилей подсчеты затрудняются. Вообще если по оси ординатъ откладывать глубины профиля, а по оси абциссъ—соотвѣтствующіе расходы, то получаемая кривая даетъ отвѣтъ на вопросъ объ измѣненіи расхода съ глубиною. Эти кривыя расхода, имѣющія очень важное практическое значеніе для естественныхъ потоковъ, въ общемъ сначала быстро повышаются, а затѣмъ замедляются въ этомъ повышеніи, приближаясь къ пропорціональному увеличенію расхода съ увеличеніемъ глубины. Этотъ ходъ измѣненія часто уподоблялся параболическому закону, хотя есть рядъ эмпирическихъ формулъ и другого типа.

Изъ употребительныхъ эмпирическихъ зависимостей упомянемъ для примѣра слѣдующія. Есть формулы типа

$$Q = kF\sqrt{Ri}.$$

Въ нихъ легко узнать уравненіе Тадини. Буквой F обозначена площадь живого сѣченія, буквой R—средній гидравлическій радіусъ, буквой i—уклонъ; наконецъ, k—эмпирическій коэффиціентъ.

Употребляются также формулы вида

$$Q = k_1 h^{3/2},$$

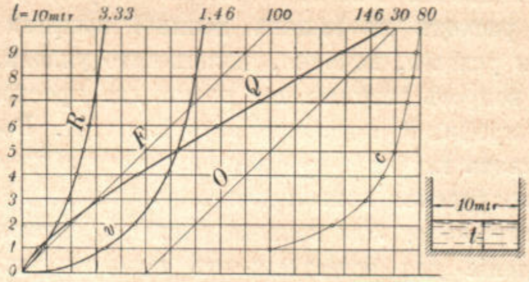
$$Q = k_2 (h + c)^{3/2},$$

$$Q = k_3 h^{3/2} + k_4 h^{n/2},$$

$$Q = a + bh + ch^2 + \partial h^3.$$

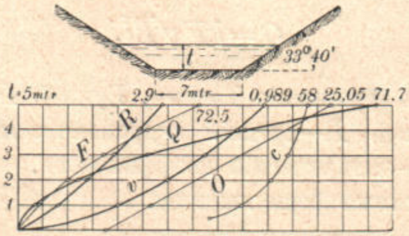
Здѣсь буквами k_1, k_2, k_3, k_4, a, b, c и ∂ обозначены постоянные коэффиціенты, различные для каждой рѣки и для каждаго ея мѣста; h—средняя глубина профиля. Показателю n (въ предпослѣднемъ уравненіи) даютъ значеніе отъ 2,5 до 5.

Для правильныхъ профилей кривая расхода легко подсчитывается. Такъ на фигурахъ 184, 185 и 186 представленъ въ видѣ кривыхъ ходъ измѣненія съ увеличеніемъ глубины слѣдующихъ величинъ: смачиваемаго периметра (кривая O), площади живого сѣченія (кривая F), средняго гидравлическаго радіуса (кривая R), коэф-та c въ формулѣ Тадини на основаніи таблицы Базена (№ 44), средней скорости (кривая v) и, наконецъ, расхода. Профили были взяты: для фиг. 184 прямоугольный съ постоянной шириной 10 *mtr*, степень шероховатости—по 2-й категоріи; для фиг. 185—трапеція съ шириною по дну въ 7 *mtr* и полуторнымъ откосомъ боковыхъ граней; степень шероховатости—по 1-й категоріи; на фиг. 186 предположена круглая бетонная труба со степенью шероховатости по 1-й категоріи; діаметръ трубы взятъ въ 2 *mtr*. Во всѣхъ трехъ случаяхъ уклонъ былъ принятъ въ 0,1 $^0/_{00}$. Изъ фигуръ 184 и 185 видно, что съ увеличеніемъ глу-



Фиг. 184.

бины расходъ растетъ безпредѣльно и видъ кривой расхода вполнѣ подходитъ подъ выше указанную характеристику. При прямоугольномъ профилѣ, уже начиная съ глубины, равной половинѣ ширины, расходъ становится почти пропорціоналенъ глубинѣ, — такъ мало измѣняется скорость.



Фиг. 185.

Въ кругломъ каналѣ обнаруживается наполненіе съ наибольшей скоростью (при центральномъ углѣ $2\varphi \backsim 257^1/_2{}^0$) и другое наполненіе наибольшаго расхода (при центральномъ углѣ 2φ около 308^0). Эти два наполненія можно найти изъ слѣдующихъ, легко получаемыхъ, уравненій, въ которыхъ буквой r названъ радіусъ круглаго сѣченія канала:

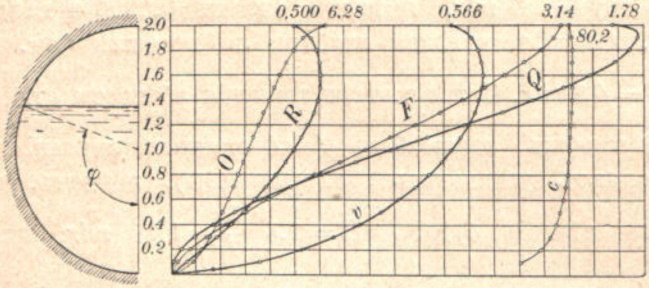
$$O = 2\varphi r,$$

$$F = \frac{r^2}{2}(2\varphi - \sin 2\varphi),$$

$$R = \frac{r}{2}\left(1 - \frac{\sin 2\varphi}{2\varphi}\right),$$

$$Q = c\sqrt{\left(\frac{r}{2}\right)^3 2i\,\frac{(2\varphi - \sin 2\varphi)^3}{\varphi}}.$$

Ясно, что для нахожденія Q_{max} надо рѣшить ур-іе $\frac{\partial Q}{\partial \varphi} = 0$, а для разысканія R_{max} надо рѣшить ур-іе $\frac{\partial R}{\partial \varphi} = 0$. Такимъ путемъ получены приведенныя выше значенія угла 2φ. Слѣдуетъ уяснить себѣ отсутствіе противорѣчія въ томъ, что наивыгоднѣйшимъ профилемъ является кругъ, но въ то же время круглая труба съ даннымъ уклономъ пропускаетъ наибольшій расходъ при неполномъ наполненіи. Дѣло въ томъ, что съ перемѣной наполненія мѣняется живое сѣченіе; сравненіе же выгодности предполагаетъ одинаковую площадь сѣченія. Для нашего круглаго канала наибольшій расходъ оказался около 1,88 mtr^3/sec при площади живого сѣченія 3,082 mtr^2. Если такую площадь выполнить въ видѣ полукруга, то его діаметръ оказался бы равнымъ около 2,8 mtr, средній гидравлическій радіусъ $R = 0,7$ mtr, такъ что $c = 81,1$, а потому $Q = 2,09$ mtr^3/sec, т.-е. еще того больше.— Обратимъ также вниманіе на то, что при полномъ заполненіи круглаго канала онъ обращается въ трубу. По фиг. 186 слѣдуетъ, что труба даетъ меньше



Фиг. 186.

воды, чѣмъ каналъ, *при условіи одинаковаго уклона свободной поверхности или пьезометрической линіи.* Само собою понятно, что труба можетъ дать и гораздо большій расходъ, если увеличить начальное давленіе, не мѣняя конечнаго, т.-е. если пропускать черезъ нее воду подъ бо̀льшимъ напоромъ. Для этого не нужно, конечно, мѣнять положенія самой трубы. Между тѣмъ для увеличенія расхода въ каналѣ, пришлось бы переложить его съ тѣмъ, чтобы увеличить поверхностный уклонъ.

Полезно обратить вниманіе на то, что кривымъ фиг. 186 можно придавать болѣе общее значеніе. Именно, хотя онѣ построены для трубы діаметромъ въ 2 mtr, однако ясно, что любая абсцисса кривой R будетъ давать значеніе средняго гидравлическаго радіуса любого крупнаго сѣченія при соотвѣтствующемъ наполненіи канала, если эту абсциссу умножить на отношеніе діаметра даннаго канала къ 2. Также абсциссы кривой F дадутъ площади живыхъ сѣченій, послѣ умноженія ихъ на отношеніе квадрата даннаго діаметра къ 4. Если, съ нѣкоторой погрѣшностью, правда не очень большой, допустить, что значенія c не мѣняются, то кривая v дастъ значенія скоростей, если ихъ умножить на отношенія $\sqrt{\frac{D}{2} \cdot \frac{i}{0,1}}$, гдѣ D и i суть діаметръ и уклонъ данной трубы. Наконецъ, при томъ же условіи кривая Q будетъ давать всѣ расходы, если ея абсциссы умножить на отношенія $\left(\frac{D}{2}\right)^{5/2} \cdot \left(\frac{i}{0,1}\right)^{1/2}$. Само собою понятно, что это же замѣчаніе справедливо и для всѣхъ профилей, которыя геометрически подобны профилямъ фигуръ 184 и 185 и имѣютъ стѣнки тѣхъ же степеней шероховатости, что и послѣдніе. Въ обоихъ случаяхъ необходимо разыскать то наполненіе t канала фигуръ 184 или 185, которое обращало бы ихъ въ фигуры, подобныя заданному живому сѣченію, и прочитать значенія абсциссъ всѣхъ кривыхъ, соотвѣтствующихъ этому наполненію t; эти абсциссы придется умножать на такія же отношенія, какія были указаны для круглаго сѣченія, только роль отношенія діаметра къ 2 всякій разъ будетъ играть отношеніе размѣровъ ширины по дну для даннаго профиля и для того, который взятъ въ основу фигуръ 184 и 185. Съ этой точки зрѣнія можно назвать кривыя фигуръ 184—186 *характеристиками* геометрической формы поперечныхъ профилей каналовъ и ими удобно пользоваться при рѣшеніи практическихъ вопросовъ. Такъ, напримѣръ, разсмотримъ трапецоидальный профиль съ откосомъ $33°40'$ и шириною по дну въ 5 *mtr*, имѣющій уклонъ 0,0005 и наполненный на глубину 3 *mtr*. Соотвѣтствующая глубина на профилѣ фиг. 185 опредѣляется въ $3\ \frac{7}{5} = 4{,}2$ *mtr*. Читая соотвѣтствующія абсциссы отдѣльныхъ кривыхъ въ надлежащихъ масштабахъ (надписанныя значенія конечныхъ абсциссъ позволяютъ установить эти масштабы), найдемъ, что средній радіусъ нашего сѣченія будетъ $R = 2{,}5\ \frac{5}{7} = 1{,}78$ *mtr*; живое сѣченіе $F = 55\left(\frac{5}{7}\right)^2 = 28{,}5\ mtr^2$. Считая c неизмѣннымъ, найдемъ далѣе среднюю скорость въ сѣченіи $v = 0{,}9\left(\frac{5}{7}\cdot\frac{5}{1}\right)^{1/2} = 1{,}7$ *mtr/sec*; и, наконецъ, расходъ $Q = 50{,}5\left(\frac{5}{7}\right)^{5/2}\left(\frac{5}{1}\right)^{1/2} = 48{,}5\ mtr^3/sec$. Конечно, не трудно принять во вниманіе и измѣненіе коэффиціента c въ соотвѣтствіи съ R по таблицѣ 44. Въ нашемъ случаѣ оказывается $c = 53$ вмѣсто указаннаго $c = 57$ для данной глубины на фигурѣ 185; поэтому окончательно скорость $v = 1{,}7\ \frac{53}{57} = 1{,}58$ *mtr/sec*, а расходъ $Q = 48{,}5\ \frac{53}{57} = 45{,}1\ mtr^3/sec$. Эти же результаты мы получили бы, если бы производили непосредственныя вычисленія живого сѣченія, скорости и т. д.

Подобно тому, какъ было показано для трапеціи, можно отыскивать наивыгоднѣйшее соотношеніе между отдѣльными элементами всякаго другого профиля (овальнаго, яйцевиднаго и т. д.). Впрочемъ, далеко не всегда можно остановиться на наивыгоднѣйшей (съ точки зрѣнія величины R) комбинаціи размѣровъ. Такъ, напримѣръ, въ судоходныхъ каналахъ нерѣдко предписывается ширина для одновременнаго пропуска опредѣленнаго числа судовъ данныхъ размѣровъ; въ этомъ случаѣ предписывается также минимальная глубина въ зависимости отъ осадки судовъ. Для выгодности профиля остается выбрать откосъ боковыхъ граней, который, какъ мы видѣли, желательно приближать къ $60°$, если то позволяютъ качества грунта.

Далѣе, часто, не задаваясь опредѣленной шириною, назначаютъ нѣкоторую максимальную глубину канала, принимая во вниманіе, что земляныя работы при значительной глубинѣ удорожаются; далѣе, содержаніе канала въ порядкѣ, очистка отъ водорослей и т. п. при большой глубинѣ становится затруднительнымъ; наконецъ, если каналъ проложенъ въ водопроницаемомъ грунтѣ, то при большой глубинѣ потеря отъ просачиванія будетъ значительна; очень часто этимъ соображеніемъ пренебречь нельзя.

Иногда приходится отступать отъ выгоднаго соотношенія между элементами профиля, даже если, вообще, не ставится никакихъ ограниченій относительно ширины и глубины. На дѣлѣ можетъ оказаться такое соотношеніе между цѣнами за отчужденіе земли подъ каналъ и цѣнами производства земляныхъ работъ, что окажется болѣе выгоднымъ примѣнить «невыгодный профиль», т.-е. увеличить необходимое живое сѣченіе F, а, слѣдовательно, и количество земляныхъ работъ, но зато уменьшить ширину канала, а вмѣстѣ съ ней и величину отчуждаемой площади, если цѣны за послѣднюю очень высоки.

Наконецъ, когда каналъ питается изъ резервуара, горизонтъ въ которомъ очень перемѣнчивъ,—напр., изъ заводскаго пруда съ небольшимъ притокомъ во время засухи,—то для функціонированія канала въ теченіе круглаго года необходимо, конечно, чтобы дно его было ниже, нежели горизонтъ воды въ прудѣ во время засухи; такой каналъ при большой водѣ, конечно, уже не будетъ имѣть «выгоднаго профиля». Таковы большинство уральскихъ ларей,—деревянныхъ, а иногда чугунныхъ, прямоугольныхъ каналовъ, нерѣдко закрытыхъ сверху, помощью которыхъ вода подводится изъ пруда къ гидравлическимъ машинамъ.—Вообще при перемѣнныхъ и не очень большихъ расходахъ, какъ это имѣетъ мѣсто въ практикѣ городскихъ канализацій, удобно употреблять яйцевидныя поперечныя сѣченія каналовъ, такъ какъ ихъ можно выбрать съ тѣмъ расчетомъ, чтобы при разныхъ степеняхъ наполненія ихъ выгодность была приблизительно одинакова. Правила построенія такихъ профилей можно найти въ любомъ курсѣ канализаціи *).

Часто при расчетѣ каналовъ удобно опредѣлять площадь живого сѣченія канала F при помощи величины средней скорости. Эта послѣдняя не можетъ быть выбрана совершенно произвольно. Она не должна бы быть меньше 0,2 *mtr/sec*, особенно, если вода несетъ много твердыхъ взмученныхъ веществъ, такъ какъ при меньшей скорости эти вещества осаждаются и загрязняютъ русло. Съ другой стороны, скорость у стѣнокъ не должна превосходить нѣкоторой величины, чтобы вода не размывала береговъ. Въ слѣдующей таблицѣ, въ графѣ u_1, указано нѣсколько предѣльныхъ максимальныхъ скоростей у дна для разныхъ грунтовъ, на основаніи наблюденій *Dubuat* и др. (см. Poncelet, Cours de mécanique appliquée aux machines). Въ той же таблицѣ, въ графѣ v, даны соотвѣтствующія предѣльныя значенія средней скорости въ сѣченіи.

Глинистый грунтъ (гончарная глина) . .	$u_1 \leqq 0{,}08$ *mtr/sec*	$v \leqq 0{,}12$ *mtr/sec*
Очень мелкій песокъ (не крупнѣе анисов. зерна)	„ 0,10 „	„ 0,16 „
Суглинокъ	„ 0,15 „	„ 0,24 „

*) См. по этому поводу также К. Игнатовъ: „Изъ практики проектированія инженерныхъ сооруженій“, таблицы 1—8, 11—13 и 16—18. Здѣсь приведены въ удобной для пользованія формѣ расчетныя таблицы, годныя для канализаціонныхъ открытыхъ водоводовъ.

Мелкій песокъ (не крупнѣе горошины) .	$u_1 \leqq 0{,}19$ *mtr/sec*	$v \leqq 0{,}30$ *mtr/sec*
Крупный „	„ 0,20 „	„ 0,32 „
Очень крупный песокъ (до величины боба); илистый крупный песокъ	„ 0,325 „	„ 0,50 „
Округленная галька діаметр. до 0,027 *mtr*.	„ 0,625 „	„ 0,90 „
Кремнистый грунтъ; размѣръ галекъ до куринаго яйца	„ 0,975 „	„ 1,30 „
Крупные камни; сланцевыя породы . .	„ 1,50 „	„ 1,80 „
Твердыя сланцевыя породы	„ 1,80 „	„ 2,30 „
Твердыя скалы	до 3,00 *) „	„ 3,50 „

Если проектируется новый каналъ, то обыкновенно задаются скоростью. Площадь F, вычисленную по ней и по расходу Q, нужно увеличивать въ слѣдующихъ случаяхъ. Если природа стѣнокъ такова, что на ней легко развиваются водоросли, то это можетъ оказать слѣдующее вліяніе: если водоросли мягкія и стелются по дну, то онѣ только уменьшаютъ живое сѣченіе, а потому, смотря по вѣроятному развитію водорослей, частотѣ очистки и т. д., A. Picard совѣтуетъ увеличивать размѣры живого сѣченія во всѣ стороны приблизительно на 0,1 *mtr*. Твердыя водоросли, напротивъ, не столько уменьшаютъ живое сѣченіе, сколько увеличиваютъ смачиваемый периметръ; съ ними слѣдуетъ считаться не только соотвѣтствующимъ уменьшеніемъ коэф-та c въ формулѣ $v = c\sqrt{Ri}$, но и соотвѣтствующимъ уменьшеніемъ R, что сводится, опять-таки, къ необходимости увеличить F противъ вычисленнаго. Обыкновенно приходится увеличивать размѣры канала болѣе, чѣмъ на 0,1 *mtr* во всѣ стороны. Далѣе, въ зимнее время поверхность открытаго канала покрывается льдомъ, и каналъ обращается въ трубу. Если въ то же время расходъ измѣняться не долженъ, то нужно высчитывать размѣры живого сѣченія именно въ этомъ послѣднемъ предположеніи. Замѣтимъ, что если въ каналѣ движеніе воды не прекращается никогда, то полное его промерзаніе невозможно. Но при періодическихъ остановкахъ, напр., въ каналахъ, ведущихъ воду къ заводскимъ гидравлическимъ машинамъ, во время праздничныхъ остановокъ двигателей, промерзаніе возможно: при 25° мороза за двое сутокъ на стѣнкахъ желѣзной трубы, въ которой вода была остановлена, образовался, по словамъ Тиме, слой льда до 25 *mm* толщиною. Поэтому необходимо или водопроводныя трубы закапывать въ землю на глубину до 3 арш. и больше, смотря по мѣстной глубинѣ промерзанія, или, какъ это совѣтуетъ Тиме, никогда не останавливать движенія воды въ ларяхъ.

Какъ мы видѣли выше, уклонъ i свободной поверхности въ каналахъ есть, собственно, та величина, благодаря которой вода приходитъ въ немъ въ движеніе, такъ что это есть одинъ изъ важнѣйшихъ элементовъ въ каналѣ: имъ опредѣляется скорость, а слѣдовательно, и расходъ. Паденіе i опредѣляется разностью горизонтовъ H воды въ мѣстахъ, соединяемыхъ каналомъ, и разстояніемъ L между ними. Если соединяемыя мѣста представляются резервуарами (озера, пруды и т. п.), то величина H неизмѣнно

*) Въ каналѣ, отводящемъ воду изъ-подъ ніагарскихъ турбинъ, допущена исключительно большая скорость до 27′ въ секунду, т.-е. до 8,25 *mtr/sec*. Стѣнки канала облицованы глазурованнымъ кирпичемъ. Ему данъ уклонъ въ 7‰.

задана, и паденіе i можно уменьшить, только увеличивая L; но увеличить i сверхъ того, которое получится про проведеніи канала по кратчайшему разстоянію, совершенно невозможно. Если же каналомъ вода отводится изъ рѣки къ машинамъ и отъ нихъ опять въ ту же рѣку, то, раздвигая вдоль по рѣкѣ точки ея соединенія съ каналомъ, одновременно увеличиваемъ H и L, такъ что можетъ оказаться, что увеличеніе длины повлечетъ за собою и увеличеніе паденія. Иногда при очень извилистомъ теченіи рѣки такое раздвиганіе точекъ соединенія канала съ рѣкою влечетъ не только увеличеніе H, но и уменьшеніе L. Это особенно выгодно, когда каналъ назначается для подвода воды къ двигателямъ: тогда увеличеніе H тождественно, какъ увидимъ въ курсѣ водяныхъ турбинъ, съ увеличеніемъ располагаемаго запаса работы; въ этомъ случаѣ паденіе i въ каналѣ желательно дѣлать сколь возможно малымъ, чтобы израсходовать на проведеніе воды къ машинамъ наименьшую часть H.

Такъ какъ i непосредственно связано съ v, то его величина тоже непроизвольна, и предѣлъ для i легко найти по предѣламъ для v, зная размѣры канала. Обыкновенно невыгодно давать каналу уклонъ, отличающійся отъ общаго уклона мѣстности въ направленіи канала, чтобы не увеличивать земляныхъ работъ необходимостью насыпей и выемокъ и не удорожать сооруженія устройствомъ акведуковъ или туннелей, хотя, конечно, въ гористой мѣстности ихъ избѣжать иногда и нельзя. Кромѣ вышеуказанныхъ соображеній относительно величины v, замѣтимъ здѣсь, что паденіе i, а слѣдовательно, и величина v, опредѣляются отчасти назначеніемъ канала: оросительные распредѣлительные каналы ведутся всегда съ гораздо меньшими уклонами, нежели судоходные, а для этихъ послѣднихъ уклоны даются меньше, нежели для фабричныхъ, такъ какъ цѣль ихъ отдать воду почвѣ, тогда какъ для вторыхъ и третьихъ такая отдача есть потеря. Нѣкоторыя значенія употребительныхъ въ практикѣ уклоновъ приведены выше въ § 30.

Не входимъ въ дальнѣйшія подробности по этому поводу, такъ какъ это вышло бы изъ рамокъ нашего курса. Интересующимся рекомендуемъ обратиться къ курсамъ рѣчного судоходства (напр., курсъ проф. *Зброжека*) и, вообще, гидротехническихъ работъ. Напр., *П. Флиннъ*, Ирригаціонные каналы и относящіяся къ нимъ сооруженія, Спб., 1898 г.; также *Handbuch der Ingenieurwissenschaften*, часть III (Der Wasserbau), рядъ спеціальныхъ томовъ, посвященныхъ всѣмъ видамъ гидротехническихъ работъ, какъ-то: о городской канализаціи, о судоходныхъ каналахъ, оросительныхъ и осушительныхъ работахъ и т. д. Также см.: *Lechalas*, Hydraulique fluviale. Его же L'encyclopédie agricole et horticole. *Salvador*, Hydraulique agricole и др.).

Что касается расчета каналовъ, то разсмотримъ отдѣльно случаи каналовъ строящагося и существующаго.

Въ первомъ случаѣ дано Q, а также можно считать заданнымъ или среднюю скорость v или паденіе i. Если задано v, то непосредственно находимъ живое сѣченіе $F=\frac{Q}{v}$; задаемся конфигураціей профиля (полукругъ, трапеція съ опредѣленнымъ откосомъ m и т. д.); опредѣляемъ глубину и средній радіусъ или по формуламъ (14) и (15) этого §, или на основаніи приведенныхъ выше соображеній. Оцѣниваемъ далѣе величину c по одной изъ формулъ Базена, а не по Ganguillet et Kutter'y, такъ какъ паденіе не извѣстно. Наконецъ, по ур-ію $v = c\sqrt{Ri}$ находимъ необходимое i. Это i относится къ свободной поверхности. Но при равномѣрномъ теченіи и при постоянномъ профилѣ уклонъ свободной поверхности, какъ мы видѣли, одинаковъ съ уклономъ дна.

Если задано i, то рѣшеніе нѣсколько усложняется. Предположимъ, что обстоятельства позволяютъ примѣнить выгодный профиль при данномъ откосѣ m. Тогда, на основаніи ур-ій (14) и (16) этого §, имѣемъ:

$$h = \sqrt{\frac{F}{2\sqrt{1+m^2}-m}} = 2R.$$

Кромѣ того, ур-іе равномѣрнаго теченія дастъ:

$$v = c\sqrt{Ri} = \frac{Q}{F}.$$

Поэтому находимъ:

$$R^5 = \frac{Q^2}{16c^2 i[2\sqrt{1+m^2}-m]^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (17)$$

Величины c точно намѣтить нельзя, такъ какъ R неизвѣстно. Приходится задаться ею на основаніи соображеній § 30, затѣмъ вычислить R, по нему на основаніи таблицъ опредѣлить c, внести въ ур-іе (17), еще разъ пересчитать R и т. д., продолжая эти подсчеты до тѣхъ поръ, пока исправляемая всякій разъ величина c будетъ мало отличаться отъ примѣненной въ послѣдній разъ. Обыкновенно достаточно двухъ-трехъ пересчетовъ. Зная R, находимъ глубину канала h, по ней изъ ур-ія (15) найдемъ b, затѣмъ F, и, наконецъ, v.

Замѣтимъ, что въ обоихъ этихъ случаяхъ, если длина канала есть L, то разность горизонтовъ H въ сообщаемыхъ каналомъ водоемахъ должна быть больше, нежели iL; а именно, она опредѣляется изъ ур-ія:

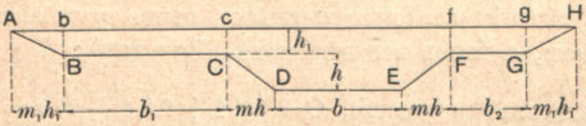
$$H = iL + (\alpha + \zeta)\frac{v^2}{2g}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (18)$$

гдѣ $\alpha\dfrac{v^2}{2g}$ есть напоръ, ушедшій на сообщеніе водѣ средней скорости v (величина α,—см. § 21,—можетъ быть принята равной 1,1; очень часто ее считаютъ равной 1), а $\zeta\dfrac{v^2}{2g}$ оцѣниваетъ имѣющееся всегда налицо сопротивленіе при входѣ въ каналъ (въ этомъ случаѣ $\zeta = 0{,}06$), а также и могущія быть особыя сопротивленія въ родѣ, напр., сороудерживающихъ рѣшетокъ, не вполнѣ открытыхъ щитовъ, изломовъ и искривленій оси канала и т. п. Только при большихъ L можно пренебречь послѣднимъ членомъ ур-ія (18); въ фабричныхъ же каналахъ, часто не длинныхъ, послѣдній членъ можетъ имѣть сравнительно большую величину. Къ сожалѣнію, вопросъ объ особыхъ сопротивленіяхъ въ каналахъ еще совершенно не изслѣдованъ.

Во второмъ случаѣ, когда каналъ существуетъ, всегда дано паденіе i, а также можетъ быть дано живое сѣченіе,—искомымъ является расходъ. Вопросъ рѣшается очень просто; однако рѣшеніе будетъ только вѣроятнымъ, и на немъ настаивать нельзя, въ виду нѣкоторой неопредѣленности въ выборѣ величины c (см. § 30).

Вопросъ можетъ быть поставленъ и такъ: какова будетъ глубина въ каналѣ при данныхъ паденіи дна и конфигураціи профиля (т.-е., напр., для трапеціи даны ширина по дну и откосъ) въ предположеніи равномѣрнаго теченія, если черезъ каналъ пройдетъ расходъ Q? Въ этомъ случаѣ можно пользоваться ур-іемъ (17) или подобнымъ ему, при какомъ-нибудь другомъ профилѣ, употребляя способъ послѣдовательныхъ приближеній, такъ какъ величиною c приходится сначала задаваться.

Сдѣлаемъ еще слѣдующее замѣчаніе, касающееся такъ называемыхъ составныхъ профилей. Почти всегда приходится имѣть дѣло съ сильно перемѣнными расходами въ рѣкахъ, при чемъ очень часто и низкія, и высокія воды текутъ по одному и тому же руслу, безъ особаго протока для высокихъ водъ. Такое положеніе бываетъ не только для рѣкъ въ ихъ естественномъ состояніи, но и сохраняется при возведеніи исправительныхъ сооруженій. При этомъ выходитъ, что во второмъ случаѣ достаточно точно, а въ первомъ—съ извѣстнымъ приближеніемъ можно считать, что все сѣченіе состоитъ изъ двухъ трапецій (фиг. 187) $CDEF$ и $ABGH$. Если при доста-



Фиг. 187.

точно большой площади $CDEF$ глубина h_1 не очень велика, то было бы ошибочно опредѣлять площадь живого сѣченія для всего профиля, находить средній гидравлическій радіусъ и т. д., такъ какъ это было бы равносильно допущенію, что повышенное треніе неглубокихъ участковъ BC и FG вліяетъ на замедленіе теченія въ глубокихъ частяхъ $cCDEFf$. Такое предположеніе было бы въ противорѣчіи съ дѣйствительными явленіями; ближе къ истинѣ предположеніе, что на участкахъ AbB, $bBCc$, $cCDEFf$ и т. д. воды текутъ, не вліяя другъ на друга. Наоборотъ, если площадь $CDEF$ представляется лишь незначительнымъ придаткомъ на всемъ сѣченіи, то правильнѣе считать все сѣченіе, среднюю степень шероховатости, средній радіусъ и т. д. Для иллюстраціи дадимъ слѣдующій примѣръ.

Пусть русло меженнихъ водъ имѣетъ размѣръ $b = 50$ mtr, глубину $h = 4$ mtr и откосъ $m = 1{,}5$. Пусть въ разливъ допускается подъемъ воды на высоту $h_1 = 2$ mtr надъ долиной; откосъ $m_1 = 2$; пусть имѣемъ для оцѣнки степени шероховатости земляныя стѣнки по 5-й категоріи Базена, такъ что $\gamma = 1{,}3$; пусть, наконецъ, уклонъ $i = 0{,}0001$, а расходъ во время разлива равенъ 800 mtr^3. Найдемъ необходимую ширину $b_1 + b_2$. Располагаемъ вычисленія слѣдующимъ образомъ.

Для участковъ ***ABb*** и ***gGH***:

смачиваемый периметръ $O = 2 \,.\, 2\sqrt{5} = 8{,}94$ mtr;
живое сѣченіе $F = 2 \,.\, 2 \,.\, 2 = 8$ mtr^2;
средній радіусъ $R = 0{,}895$ mtr, такъ что (по таблицѣ 44) $c = 36{,}7$;
средняя скорость $v = 36{,}7\sqrt{0{,}895 \,.\, 0{,}0001} = 0{,}347$ mtr/sec;
расходъ $Q_1 = 2{,}776$ mtr^3/sec.

Для участка ***cCDEFf***:

смачиваемый периметръ $O = 50 + 2 \,.\, 4\sqrt{3{,}25} = 64{,}4$ mtr;
живое сѣченіе $F = 50 \,.\, 6 + 2 \,.\, 1{,}5 \,.\, 4 \,.\, 4 = 348$ mtr^2;
средній радіусъ $R = 5{,}4$ mtr, такъ что (по таблицѣ 44) $c = 55{,}8$;
средняя скорость $v = 55{,}8\sqrt{5{,}4 \,.\, 0{,}0001} = 1{,}297$ mtr/sec.
расходъ $Q = 451$ mtr^3/sec.

Для остальной части сѣченія остается расходъ 800—453,8=346,2 mtr^3/sec. Такъ какъ средній радіусъ здѣсь есть $R = 2$ mtr, а коэффиціентъ $c = 45{,}3$, то вычисляемъ скорость $v = 0{,}64$ mtr/sec. Слѣдовательно необходимое живое сѣченіе есть 540 mtr^2, а потому необходима ширина $b_1 + b_2 = 270$ mtr.

Полная ширина сѣченія ***AH*** $= 340$ mtr.

Для сравненія просчитаемъ, какой расходъ можно было бы опредѣлить для этого сѣченія съ опредѣленными выше размѣрами, если его не разбивать на части, а взять все цѣликомъ. Находимъ:

смачиваемый периметръ $O = 8{,}94 + 64{,}4 + 270 \backsim 343{,}5$ mtr;
живое сѣченіе $F = 8 + 348 + 540 = 896$ mtr^2;
средній радіусъ $R = 2{,}61$ mtr, такъ что $c = 48{,}1$;
средняя скорость $v = 48{,}1\sqrt{2{,}61 \,.\, 0{,}0001} = 0{,}776$ mtr/sec;
наконецъ расходъ $Q = 696$ mtr^3/sec.

Оказывается, при такомъ способѣ подсчета расходъ опредѣляется на 13% меньшій. Можно отмѣтить какъ общее положеніе, что вычисленіе расхода такимъ порядкомъ въ отдѣльныхъ частяхъ сѣченія и дальнѣйшее суммированіе этихъ частныхъ расходовъ даютъ бо̀льшіе расходы на данное сѣченіе, чѣмъ вычисленіе сразу на все сѣченіе. При профиляхъ, подобныхъ вышеприведенному такое разбиваніе профиля на части вполнѣ законно, и особенно это умѣстно тогда, когда степени шероховатости дна въ разныхъ мѣстахъ различны; напр., такъ было бы, если бы часть ***CDEF***, какъ наиболѣе глубокая и съ наиболѣе быстрымъ теченіемъ, была вымощена или укрѣплена какъ-либо, а остальныя части дна и береговъ оставались въ ихъ естественномъ состояніи.

§ 33. Неравномѣрное установившееся движеніе въ каналахъ и рѣкахъ. Дифференціальное ур-іе профиля неравномѣрнаго теченія.

Признакомъ неравномѣрнаго теченія является перемѣнное значеніе средней скорости. Съ другой стороны при установившемся движеніи расходъ долженъ оставаться постояннымъ. Поэтому ур-іе неразрывности, примѣненное къ разнымъ сѣченіямъ, приводитъ къ ряду равенствъ:

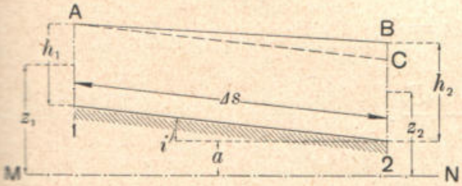
$$Q = F_1 v_1 = F_2 v_2 = \; . \; . \; . \; . = Fv = const.$$

Отсюда видно, что при неравномѣрномъ, но установившемся движеніи живыя сѣченія, по существу, должны быть перемѣнны. Далѣе, легко убѣдиться, что если мы станемъ примѣнять ур-іе Д. Бернулли для такого движенія между двумя сѣченіями, то получимъ, что вся располагаемая работа для движенія каждаго килограмма, т.-е. вертикальное разстояніе между свободными поверхностями этихъ сѣченій, будетъ расходоваться не только на преодолѣніе работы тренія на этомъ пути, что мы имѣли въ случаѣ равномѣрнаго движенія, но также на приращеніе, положительное или отрицательное, живой силы на томъ же пути. При этомъ нужно отмѣтить, что, въ силу перемѣннаго значенія какъ средней скорости, такъ и живого сѣченія, а слѣд., и средняго гидравлическаго радіуса, оцѣнка работы тренія на каждый килограммъ протекающей жидкости сопряжена съ затрудненіями, тѣмъ болѣе, что, строго говоря, нельзя утверждать, чтобы извѣстное выраженіе потери напора на треніе при равномѣрномъ движеніи могло быть примѣняемо къ движенію неравномѣрному.

Между тѣмъ неравномѣрное теченіе въ естественныхъ и искусственныхъ потокахъ встрѣчается очень часто: всякое обстоятельство, вызывающее измѣненіе величины живого сѣченія, ведетъ къ неравномѣрности теченія. Поэтому разсмотрѣніе поставленнаго вопроса является настоятельно необходимымъ, и мы вкратцѣ изложимъ основныя положенія его теоріи.

Попрежнему ограничимся случаемъ установившагося движенія, когда каналъ пропускаетъ опредѣленный постоянный расходъ Q. При заданной конфигураціи профиля величину живого сѣченія F всегда можно выразить черезъ его средній радіусъ; такимъ образомъ, ур-іе расхода и ур-іе равномѣрнаго теченія, связывающія величины Q, F, v, R, i, вмѣстѣ съ выраженіемъ F по R, даютъ одно ур-іе, связывающее Q, R и i; полагая Q даннымъ, видимъ, что, для сохраненія равномѣрности теченія, при всякомъ измѣненіи R должно измѣняться соотвѣтствующимъ образомъ i, и наоборотъ, въ случаѣ измѣненія i должно измѣняться R. Если въ дѣйствительности такія перемѣны не происходятъ, или если онѣ происходятъ, но не въ надлежащей степени, то равномѣрность теченія нарушается. При этомъ понятно, что всякое мѣстное измѣненіе одного изъ факторовъ (R или i) одинаково вліяетъ на теченіе какъ выше даннаго мѣста, такъ и ниже его. Такъ, напр., если русло рѣки стѣснено какимъ-нибудь препятствіемъ (плотиной, порогомъ, устоями моста и т. п.), то очевидно, что для того, чтобы черезъ это уменьшенное сѣченіе прошелъ тотъ же расходъ Q, нужно, чтобы вода пріобрѣла нѣкоторую бóльшую скорость, а для этого необходимъ нѣкоторый добавочный напоръ, который и образуется благодаря тому, что передъ препятствіемъ уровень воды нѣсколько поднимается. Поднятіе уровня, въ свою очередь, вызываетъ увеличеніе живого сѣченія передъ препятствіемъ; слѣдовательно, для того, чтобы расходъ Q прошелъ надъ препятствіемъ, движеніе передъ нимъ по необходимости должно быть замедленное. Съ другой стороны, ниже препятствія должно произойти новое замедленіе, т.-е. новое уменьшеніе той скорости, которая потребовалась для преодолѣнія препятствія. Совершенно такъ же вліяютъ обстоятельства, не требующія образованія большой скорости, а сами создающія ее, напр., уступъ въ днѣ (водопадъ, водосливъ), увеличеніе уклона дна въ связи съ возможностью увеличенія уклона свободной поверхности и т. п.; напр., уступъ въ днѣ вызываетъ ускоренное теченіе передъ нимъ и можетъ вызвать замедленное теченіе ниже его. При этомъ нельзя утверждать, что вліяніе каждаго такого обстоятельства распространяется, вообще, только на близлежащія части канала: какъ мы увидимъ ниже, оно сказывается въ нѣкоторыхъ случаяхъ и на очень далекихъ разстояніяхъ. Поэтому, вообще, можно сказать, что на каждомъ данномъ участкѣ, не представляющемъ ни одного изъ такихъ обстоятельствъ, движеніе тѣмъ не менѣе можетъ быть неравномѣрнымъ, такъ какъ подобныя обстоятельства могутъ оказаться или ниже его, или выше.

Въ настоящемъ параграфѣ мы займемся изслѣдованіемъ вопроса о томъ, какое теченіе,—замедленное, равномѣрное или ускоренное, устанавливается въ данномъ участкѣ потока подъ вліяніемъ причинъ, выше или ниже этого участка лежащихъ, а также вопроса о томъ, какова будетъ при этомъ форма продольнаго профиля потока. Вопросъ этотъ представляется весьма сложнымъ, если изслѣдованіе вести со всею желательною строгостью и общностью, но онъ значительно упрощается, если разсматривать идеальный каналъ, обладающій слѣдующими свойствами. Онъ совершенно *прямолинейный. Дно его плоское, съ постояннымъ положительнымъ уклономъ*, т.-е. такимъ, при которомъ дно понижается по теченію. *Поперечный профиль* такого канала предположимъ *прямоугольнымъ съ постоянной шириною* l; при этомъ допустимъ, что эта *ширина такъ велика*, что она всегда гораздо больше глубины, которую будемъ называть h; при такомъ предположеніи въ выраженіи средняго гидравлическаго радіуса $R = \frac{lh}{l + 2h}$ можно въ знаменателѣ пренебречь величиной $2h$ передъ l и считать, что средній радіусъ $R \backsim h$. Далѣе, такъ какъ для *установившагося теченія* $Q = const$ и, съ другой стороны, такъ какъ мы условились считать ширину l постоянной, то вмѣсто полнаго канала будемъ разсматривать только единицу его ширины, называя черезъ q расходъ, пропускаемый этой частью канала; очевидно, что тогда $Q = ql$. Допустимъ еще, что движеніе таково, что ур-іе Д. Бернулли можетъ быть примѣняемо; это сводится къ допущенію того, что *отдѣльныя струйки мало уклоняются отъ параллельности;* невѣрность этого допущенія будемъ исправлять, какъ это было указано въ § 21, коэф-томъ α, помня однако, что это возможно только до нѣкотораго предѣла: при рѣзкомъ нарушеніи параллельности струй ур-іе Д. Бернулли совершенно не можетъ быть примѣнено. Наконецъ, предположимъ, что напоръ, *потерянный на треніе, выражается точно такъ же при перемѣнномъ движеніи, какъ и при равномѣрномъ*. Это послѣднее допущеніе совершенно произвольно, хотя приводитъ къ результатамъ, приблизительно правильнымъ.



Фиг. 188.

Итакъ разсмотримъ часть Δs длины такого канала, заключенную между двумя весьма близкими сѣченіями **A 1** и **B 2** (фиг. 188). Примѣняя къ этой части канала ур-іе Д. Бернулли, получимъ, согласно съ обозначеніями, указанными на фигурѣ (**MN** есть плоскость сравненія):

$$\alpha\frac{v_1^{\,2}}{2g}+\frac{p_1}{\gamma}+z_1=\alpha\frac{v_2^{\,2}}{2g}+\frac{p_2}{\gamma}+z_2+\Delta\eta.$$

Подъ $\Delta\eta$ здѣсь подразумѣвается напоръ, затраченный на треніе на пути Δs. Далѣе, обозначивъ уклонъ дна черезъ i и предположивъ движеніе съ параллельными струями, имѣемъ слѣдующія два соотношенія:

$$\frac{p_1}{\gamma}+z_1=z_1+\frac{1}{2}h_1+\frac{p_0}{\gamma}=a+i\Delta s+h_1+\frac{p_0}{\gamma},$$

$$\frac{p_2}{\gamma}+z_2=a+h_2+\frac{p_0}{\gamma}.$$

На основаніи этихъ соотношеній предыдущее ур-іе переписывается такъ:

$$-\alpha\left(\frac{v_2^{\,2}}{2g}-\frac{v_1^{\,2}}{2g}\right)=h_2-h_1-i\Delta s+\Delta\eta \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (19)$$

Для члена $\Delta\eta$, на основаніи сдѣланныхъ допущеній, напишемъ:

$$\Delta\eta=\frac{B}{2g}\cdot\frac{\Delta s}{R}\cdot v^2=b\,\frac{\Delta s}{h}\,v^2,$$

гдѣ буквою b для сокращенія обозначена величина $\frac{B}{2g}=\frac{1}{c^2}$. Внося это выраженіе въ ур-іе (19) и замѣняя имѣющіяся въ немъ двѣ разности знакомъ Δ, получаемъ:

$$-\alpha\Delta\frac{v^2}{2g}=\Delta h-i\Delta s+b\,\frac{\Delta s}{h}\,v^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (20)$$

Сближая сѣченія **A 1** и **B 2** безконечно близко другъ къ другу, т.-е. переходя отъ конечныхъ разностей къ дифференціаламъ, получаемъ:

$$-\frac{\alpha}{g}\,v\,dv=dh-i\,ds+b\,\frac{ds}{h}\,v^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (21)$$

Дифференцируя ур-іе расхода

$$q = vh = const$$

получаемъ:

$$v\,dh + h\,dv = 0,$$

откуда:

$$dv = -\frac{q\,dh}{h^2}.$$

Исключая теперь изъ (21) v и dv при помощи послѣднихъ соотношеній, находимъ:

$$\frac{\alpha}{g}\frac{q^2}{h^3}dh = dh - i\,ds + b\frac{q^2}{h^3}ds \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (22)$$

Удобно исключить отсюда расходъ q черезъ слѣдующія величины. Обозначимъ черезъ H ту *глубину*, при которой черезъ единицу ширины канала проходитъ расходъ *q при равномѣрномъ теченіи*; такъ какъ и въ этомъ случаѣ средній радіусъ, по условію, можно положить равнымъ H, то на основаніи ур-ія равномѣрнаго теченія $v_0 = c\sqrt{Hi}$ или $bv_0{}^2 = Hi$, а также на основаніи ур-ія расхода $q = v_0 H$, получаемъ:

$$bq^2 = H^3 i \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (23)$$

Такимъ образомъ, *глубина равномѣрнаго теченія* H является величиной вполнѣ опредѣленной. Что же касается входящей въ это ур-іе величины b, то, строго говоря, она не равна величинѣ b предыдущаго ур-ія, но и не можетъ сильно отъ нея отличаться, если мы будемъ разсматривать часть канала, въ которой h не особенно отличается отъ H. Поэтому, для простоты вычисленій допустимъ, что эти оба b тождественны, а, слѣдовательно, и постоянны. Внося изъ послѣдняго ур-ія величину q^2 въ ур-іе (22), получимъ, послѣ соотвѣтственной перестановки членовъ и сокращенія:

$$i\,ds - dh = \frac{H^3}{h^3}\left(i\,ds - \frac{\alpha i}{bg}\,dh\right) \quad \ldots\ldots\ldots (24)$$

Ур-іе это связываетъ постоянныя H, α, i, b и g съ двумя перемѣнными s и h, входящими въ видѣ дифференціаловъ. Такимъ образомъ, оно представляетъ собою дифференціальное ур-іе профиля неравномѣрнаго теченія; при помощи его координата h этого профиля опредѣляется въ функціи разстоянія s. Изслѣдованіе ур-ія (24) и дастъ отвѣтъ на поставленный выше вопросъ о характерѣ теченія на данномъ участкѣ потока.

Прежде всего выдѣлимъ вліяніе уклона i, который, конечно, можетъ быть различенъ. Разсмотримъ три случая, въ зависимости отъ величины уклона, дающаго множителю $\frac{\alpha i}{bg}$ значеніе $I)\ \frac{\alpha i}{bg} = 1$; $II)\ \frac{\alpha i}{bg} < 1$; $III)\ \frac{\alpha i}{bg} > 1$.

Принимаемъ среднія значенія: $b = \frac{1}{50^2} = 0{,}0004$; $g = 9{,}81\ mtr/sec^2$; для α при прямоугольномъ каналѣ положимъ по Буссинеку $\alpha = 1{,}085$ *). Тогда находимъ, что первому случаю соотвѣтствуетъ уклонъ $i_0 = 0{,}0036$ или $3{,}6^0/_{00}$; во второмъ случаѣ онъ меньше этой величины, въ третьемъ—больше.

Случай I.

$$\frac{\alpha i_0}{bg} = 1\,;\quad i_0 = 0{,}0036\,.$$

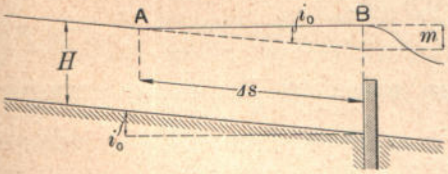
Ур-іе (24) въ этихъ условіяхъ принимаетъ видъ:

$$i_0\,ds - dh = \frac{H^3}{h^3}(i_0\,ds - dh) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

Это ур-іе удовлетворяется, во-первыхъ, при $h = H$, т.-е. когда потокъ течетъ равномѣрно. Понятно, что тогда $dh = 0$, и, слѣдовательно, профиль свободной поверхности есть прямая, параллельная дну, такъ какъ глубина h постоянна.

Во-вторыхъ, оно удовлетворяется при всякомъ h, если $i_0\,ds = dh$, такъ что $\frac{dh}{ds} = i_0$. Изъ чертежа 188 видно, что съ малой погрѣшностью можно принять $\frac{dh}{ds} \backsim \sin \boldsymbol{BAC}$; а такъ какъ уклонъ i_0 вообще не великъ, то sin угла можно замѣнить угломъ и написать, что ур-іе (25) удовлетворяется также при $\angle \boldsymbol{BAC} = i_0$. Это показываетъ, что профиль **AB** горизонталенъ. Итакъ:

а) если уклонъ дна таковъ, что $\frac{\alpha i_0}{bg} = 1$, и если гдѣ-нибудь въ потокѣ глубина h больше H, то профиль свободной поверхности есть горизонтальная прямая **AB** (фиг. 189). Если надъ плотиной въ точкѣ **B** глубина потока превышаетъ глубину равномѣрнаго теченія на величину $\Delta h = m$, то изъ ур-ія $i_0 \Delta s = \Delta h$, получимъ, что длина Δs потока, на которой профиль остается горизонтальнымъ, считая по дну, есть



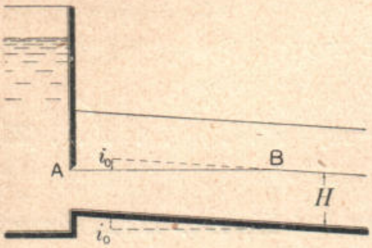
Фиг. 189.

$$\Delta s = \frac{m}{i_0}\,.$$

*) Собственно говоря, значеніе 1,085 *Boussinesq* даетъ (ур-ія (70), (80 bis) и (85) на стр. 86—92 его работы *Essai sur la théorie des eaux courantes*) не для той величины, которую мы назвали черезъ α; или, еще точнѣе, онъ доказываетъ, что ту поправку, которую мы дѣлаемъ коэф-томъ α, нужно дѣлать иначе, и на основаніи еще другихъ соображеній, кромѣ приведеннаго у насъ по Каріолису. Тѣмъ не менѣе цѣль его коэф-та 1,085 и нашего α одна и та же,—считаться съ непараллельностью струи, происходящей отъ шероховатости стѣнки. Поэтому мы считаемъ возможнымъ примѣнить тутъ коэф-тъ *Boussinesq*'а.

Поднявшись по рѣкѣ вверхъ на этотъ путь Δs, мы придемъ въ точку **A**, гдѣ глубина $h = H$, и, слѣдовательно, выше этой точки движенiе равномѣрное.

b) Можно себѣ представить случай, когда въ какомъ-нибудь мѣстѣ потока глубина h меньше H, глубины равномѣрнаго теченiя. Это значитъ, что въ этомъ мѣстѣ дѣйствительная скорость теченiя больше, нежели скорость равномѣрнаго теченiя. Такой случай мы имѣемъ, напримѣръ, на фиг. 190, когда въ желобъ или каналъ, поставленный подъ уклономъ $i_0 = 0{,}0036$, вода выливается изъ отверстiя A подъ такимъ напоромъ, что скорость v' въ **A** больше, нежели скорость равномѣрнаго движенiя того же количества жидкости въ желобѣ. Слѣдовательно, и здѣсь, тотчасъ по выходѣ изъ отверстiя, свободная поверхность будетъ сначала горизонтальна на протяженiи отъ **A** до **B**, гдѣ глубина h сравняется съ H; ниже этого мѣста можетъ установиться равномѣрное теченiе.



Фиг. 190.

Подобный же случай встрѣчаемъ за водопадомъ, въ которомъ вода прiобрѣтаетъ скорость бо́льшую, нежели скорость равномѣрнаго теченiя; встрѣчаемъ и при переливанiи воды черезъ плотину и т. д.

Замѣтимъ, что b зависитъ отъ средняго гидравлическаго радiуса или, въ нашемъ случаѣ, отъ глубины, а потому величина $i_0 = 3{,}6‰$ есть только средняя: съ увеличенiемъ глубины это значенiе i_0 уменьшается, такъ какъ, по предыдущему, увеличенiе средняго радiуса уменьшаетъ коэф-тъ b. Не безъ влiянiя остается, конечно, и степень шероховатости.

Случай II.

$$\frac{ai}{bg} < 1; \quad i < 0{,}0036.$$

Это есть случай каналовъ съ слабымъ паденiемъ. Введемъ обозначенiе:

$$\frac{ai}{bg} H^3 = H_1^3,$$

такъ что

$$H_1 = H \sqrt[3]{\frac{ai}{bg}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (26)$$

Понятно, что H_1 есть тоже нѣкоторая глубина,—мы назовемъ ее *критической*. Въ нашемъ случаѣ $H_1 < H$. Ур-iе (24) переписывается теперь такъ:

$$i\,ds - dh = \frac{H^3}{h^3} i\,ds - \frac{H_1^3}{h^3} dh;$$

отсюда

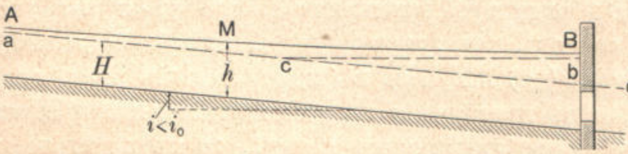
$$i\,ds = \frac{h^3 - H_1^3}{h^3 - H^3} dh \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (27)$$

При положительномъ ds, смотря по знаку дроби во второй части, dh будетъ или положительно, или отрицательно. Согласно тому, какъ мы перешли отъ ур-ія (19) къ ур-ію (20), мы должны считать ds положительнымъ по направленію теченія, а dh положительнымъ, если оно обозначаетъ увеличеніе глубины. При такомъ условіи, вмѣстѣ съ увеличеніемъ ds, т.-е. спускаясь по теченію, мы будемъ замѣчать или увеличеніе глубины, или ея уменьшеніе, смотря по знаку дроби во второй части ур-ія (27). Дробь эта положительна, пока $h > H$ (и, слѣдовательно, больше H_1) или пока $h < H_1$ (а, слѣдовательно, меньше H). Она отрицательна при $H_1 < h < H$. Разсмотримъ всѣ эти три случая.

Случай II, 1:

$$h > H.$$

Допустимъ, что имѣется препятствіе — напримѣръ, плотина,—удерживающее глубину h на какомъ-нибудь мѣстѣ **M** потока (фиг. 191) большею,



Фиг. 191.

чѣмъ глубина равномѣрнаго теченія H. Въ данномъ случаѣ при $ds > 0$ dh также > 0; слѣдовательно, глубина по теченію, т.-е. съ приближеніемъ къ плотинѣ, возрастаетъ. Вмѣстѣ съ увеличеніемъ глубины h, дробь $\frac{h^3 - H_1^3}{h^3 - H^3}$ уменьшается, оставаясь все-таки > 1. Сообразно съ этимъ, величина $\frac{dh}{ds}$, т.-е. тангенсъ угла между касательной къ профилю и направленіемъ s, т.-е. направленіемъ **ad**, по ур-ію (27) все время остается $< i$, и лишь въ предѣлѣ, при $h = \infty$, т.-е. въ безконечно удаленной точкѣ профиля разсматриваемая дробь обращается въ 1, а $\frac{dh}{ds}$ дѣлается равнымъ i. Другими словами, *на всемъ профилѣ совсѣмъ нѣтъ горизонтальныхъ элементовъ*,—даже надъ плотиной: профиль имѣетъ горизонтальную линію **cb** только асимптотой.

Съ другой стороны, для точки, въ которой было бы $h = H$, т.-е. въ которой теченіе равномѣрно, мы получимъ по ур-ію (27), что $i\,ds = \infty$. Поэтому при $\frac{ai}{bg} < 1$ профиль подпруженной воды коснется профиля равномѣрнаго движенія только безконечно далеко, т.-е. не коснется никогда. Это станетъ яснѣе, если мы пойдемъ вверхъ по рѣкѣ, т.-е. считая ds отрицательнымъ. При разсматриваемомъ значеніи дроби въ правой части ур-ія (27), dh также отрицательно; но по мѣрѣ того, какъ h приближается къ H, дробь $\frac{h^3 - H_1^3}{h^3 - H^3}$ все увеличивается, а потому весьма малымъ dh будутъ отвѣчать все бóльшія и бóльшія ds, и, наконецъ, въ предѣлѣ, послѣднему безконечно малому уменьшенію глубины соотвѣтствуетъ безконечно большое перемѣщеніе вверхъ по каналу. Поэтому глубина h никогда не сравняется съ H, и, слѣдовательно, мы имѣемъ, идя вверхъ по рѣкѣ, асимптотическое приближеніе къ равномѣрному движенію: линія **ad** равномѣрнаго теченія есть вторая асимптота профиля подпруженной воды.

Итакъ, при $\frac{ai}{bg} < 1$ и при $h > H$ (плотина) выше плотины *движеніе,* строго говоря, *равномѣрнымъ быть не можетъ.*

Съ помощью ур-ія (27), переписаннаго въ разностной формѣ такъ:

$$i \Delta s = \frac{h^3 - H_1{}^3}{h^3 - H^3} \Delta h,$$

можно построить профиль **AB** по точкамъ, вычисляя Δs для каждаго даннаго h и Δh. Въ виду приближенности самаго ур-ія мы укажемъ другой, болѣе простой способъ, хотя, можетъ быть, еще болѣе далекій отъ истины. Но если само ур-іе (27) получено въ предположеніи ряда ограничительныхъ условій, которыя въ примѣненіи къ дѣйствительнымъ рѣкамъ представляютъ только грубое приближеніе къ истинѣ, то въ практическихъ примѣненіяхъ нѣтъ надобности гнаться за точными способами построенія этого ур-ія, тѣмъ болѣе, что въ рѣкѣ, при постоянномъ волненіи, едва ли стоитъ придавать значеніе измѣненію горизонта въ нѣсколько миллиметровъ. Итакъ, допустимъ, во-первыхъ, что профиль **DB** (фиг. 192) равномѣрнаго движенія

Фиг. 192.

и горизонтальная линія **CA** надъ плотиною суть не асимптоты, а касательныя къ дѣйствительному профилю **DA**. Во-вторыхъ, допустимъ, что кривая **AD** есть дуга круга или дуга параболы съ вертикальной осью, проходящей надъ плотиной. Если это дуга круга, то, очевидно, отрѣзки касательныхъ **DC** и **CA** между собою равны; если же это дуга параболы съ вершиною въ **A** и осью **AM**, то должно имѣть мѣсто соотношеніе **DC** = **CB**. *Flamant* утверждаетъ, что всѣ наблюденія согласны въ томъ, что подпруда перестаетъ быть замѣтной на разстояніи **DB** отъ плотины, вдвое большемъ того, до котораго достигъ бы горизонтъ воды, если бы онъ былъ горизонталенъ (длина **CB**). Это заставляетъ думать, что кривая **DA**, построенная какъ парабола, представляетъ профиль подпруженной воды съ достаточной для практики точностью. Что же касается самыхъ линій **DB** и **CA**, то положеніе **DB**, какъ параллельной дну, вполнѣ опредѣляется глубиною равномѣрнаго теченія H. Положеніе же CA легко находится по даннымъ главы II изъ условій протеканія черезъ плотину расхода, имѣющаго черезъ нее переливаться, и размѣровъ отверстій, сдѣланныхъ въ ней. При этомъ, если плотина водосливная, то по ур-ію расхода въ водосливѣ находимъ необходимую высоту стоянія воды надъ порогомъ водослива, при чемъ положеніе послѣдняго должно быть извѣстно. Если плотина водопропускная, т.-е. имѣетъ отверстіе, черезъ которое вода выливается подъ напоромъ, то ур-іе расхода дастъ высоту стоянія воды надъ центромъ тяжести отверстія, положеніе и размѣры котораго опять-таки должны быть извѣстны; при истеченіи подъ уровень найдемъ высоту стоянія воды надъ уровнемъ ея за плотиной и т. д. Само собою разумѣется, что при этомъ необходимо надлежащимъ образомъ какъ писать ур-іе расхода, такъ и выбирать числовое значеніе коэф-та расхода. Часто, наоборотъ, особыя соображенія заранѣе обусловливаютъ наивысшій возможный подъемъ воды передъ плотиной, а тѣмъ самымъ опредѣляется наивысшее возможное положеніе точки A и прямой CA; вышеупомянутыя ур-ія расхода служатъ тогда для опредѣленія необходимыхъ площадей для отверстій, необходимой длины водослива и т. д.

Въ виду того, что разсматриваемый случай для нашихъ рѣкъ со слабымъ паденіемъ является самымъ важнымъ, остановимся на интегрированіи ур-ія (27), съ цѣлью полученія въ конечной формѣ кривой профиля подпруженной воды. Для этого переписываемъ это уравненіе такъ:

$$i\,ds = \left[1 - 1 + \frac{h^3 - \frac{\alpha i}{bg} H^3}{h^3 - H^3}\right] dh = \left[1 + \frac{1 - \frac{\alpha i}{bg}}{\frac{h^3}{H^3} - 1}\right] dh \;.\;.\;. \quad \textbf{(28)}$$

Производимъ замѣну перемѣннаго, полагая

$$\frac{h}{H} = z; \quad \text{поэтому} \quad dh = H\,dz.$$

Уравненіе (28) принимаетъ видъ:

$$i\,ds = H\left[1 + \frac{1 - \frac{\alpha i}{bg}}{z^3 - 1}\right] dz \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad \textbf{(29)}$$

Въ виду того, что количество $\left(1 - \frac{\alpha i}{bg}\right)$ есть величина постоянная, все сводится къ интеграціи выраженія $\frac{dz}{z^3 - 1}$. Поэтому подсчитаемъ этотъ интегралъ

$$\int \frac{dz}{z^3 - 1}.$$

Разлагая дробь $\frac{1}{z^3 - 1}$ на элементарныя, получаемъ:

$$\frac{1}{z^3 - 1} = \frac{1}{(z-1)(z^2+z+1)} = \frac{(z^2+z+1) - (z-1)(z+2)}{3(z-1)(z^2+z+1)} = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{z-1} - \frac{z+2}{z^2+z+1}\right].$$

Далѣе:

$$\frac{z+2}{z^2+z+1}=\frac{z+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}{\left(z+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=\frac{z+\frac{1}{2}}{\left(z+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}+\frac{\frac{3}{2}\cdot 4}{(2z+1)^2+3}=$$

$$=\frac{z+\frac{1}{2}}{\left(z+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}+\sqrt{3}\,\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{2z+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}.$$

Такъ что:

$$\frac{1}{z^3-1}=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{z-1}-\frac{z+\frac{1}{2}}{\left(z+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}-\sqrt{3}\,\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{2z+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\right].$$

Интегралъ каждаго изъ этихъ членовъ берется просто:

$$\int\frac{dz}{z-1}=ln\,(z-1)+C_1,$$

$$\int\frac{\left(z+\frac{1}{2}\right)dz}{\left(z+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}\int\frac{d\left[\left(z+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]}{\left(z+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}\,ln\left[\left(z+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]+C_2,$$

$$\int\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}dz}{\left(\frac{2z+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}=\int\frac{d\left(\frac{2z+1}{\sqrt{3}}\right)}{\left(\frac{2z+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}=arc\,tg\left(\frac{2z+1}{\sqrt{3}}\right)+C_3.$$

Слѣдовательно:

$$\int\frac{dz}{z^3-1}=\frac{1}{3}\,ln\,(z-1)-\frac{1}{6}\,ln\left[\left(z+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]-\frac{\sqrt{3}}{3}\,arc\,tg\left(\frac{2z+1}{\sqrt{3}}\right)+C=$$

$$=\frac{1}{6}\,ln\,\frac{(z-1)^2}{z^2+z+1}-\frac{1}{\sqrt{3}}\,arc\,tg\left(\frac{2z+1}{\sqrt{3}}\right)+C.$$

Итакъ ур-іе (29) послѣ интегрированія даетъ:

$$is=H\left\{z+\left(1-\frac{ai}{bg}\right)\left[\frac{1}{6}\,ln\,\frac{(z-1)^2}{z^2+z+1}-\frac{1}{\sqrt{3}}\,arc\,tg\left(\frac{2z+1}{\sqrt{3}}\right)+C\right]\right\},$$

гдѣ подъ знакомъ произвольнаго постояннаго C собраны всѣ постоянныя, введенныя интегрированіемъ.

Положимъ теперь:

$$C=C_1+\frac{1}{\sqrt{3}}\,\frac{\pi}{2}.$$

Тогда предыдущее ур-іе профиля въ интегральной формѣ перепишется такъ:

$$is=H\left\{z+\left(1-\frac{ai}{bg}\right)\left[\frac{1}{6}\,ln\,\frac{(z-1)^2}{z^2+z+1}-\frac{1}{\sqrt{3}}\left\{arc\,tg\left(\frac{2z+1}{\sqrt{3}}\right)-\frac{\pi}{2}\right\}+C_1\right]\right\}$$

Для краткости письма введемъ обозначеніе:

$$\frac{1}{6}\, ln\, \frac{(z-1)^2}{z^2+z+1} - \frac{1}{\sqrt{3}}\left[arc\, tg\left(\frac{2z+1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{\pi}{2}\right] = -\,\psi(z).$$

Очевидно, что функцію $\psi(z)$ *можно вычислять для всякаго* даннаго z при помощи ур-ія:

$$\psi(z) = \frac{1}{6}\, ln\, \frac{z^2+z+1}{(z-1)^2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\frac{\pi}{2} - arc\, tg\left(\frac{2z+1}{\sqrt{3}}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{6}\, ln\, \frac{z^2+z+1}{(z-1)^2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\, arc\, cotg\left(\frac{2z+1}{\sqrt{3}}\right).$$

И теперь ур-іе профиля перепишется такъ:

$$is = H\left\{z + \left(1 - \frac{\alpha i}{bg}\right)[-\psi(z) + C_1]\right\} = Hz - H\left(1 - \frac{\alpha i}{bg}\right)[\psi(z) - C_1]\,.$$

Для опредѣленія постояннаго интеграціи C_1 положимъ, что длинѣ s_0 соотвѣтствуетъ значеніе перемѣннаго z, равное z_0; тогда получаемъ:

$$i s_0 = H z_0 - H\left(1 - \frac{\alpha i}{bg}\right)[\psi(z_0) - C_1].$$

Исключая теперь C_1, найдемъ, очевидно:

$$i(s - s_0) = H(z - z_0) - H\left(1 - \frac{\alpha i}{bg}\right)[\psi(z) - \psi(z_0)] \quad . \;.\; .\; .\; (30)$$

По этому ур-ію, данному Брессомъ *), легко рѣшается вопросъ о томъ, на какомъ разстояніи $(s - s_0)$ внизъ по теченію отъ даннаго мѣста, гдѣ глубина есть h_0 $\left(z_0 = \frac{h_0}{H}\right)$, находится то мѣсто, гдѣ глубина будетъ h $\left(z = \frac{h}{H}\right)$. Рѣшеніе облегчается съ помощью составленной Брессомъ таблицы значеній функціи $\psi(z)$ для разныхъ z (см. таблица 45). Понятно, что если вторая часть ур-ія (30) будетъ отрицательна $\left(\text{а при } \frac{\alpha i}{bg} < 1 \text{ это возможно только, если задано } h < h_0\right)$, то это значитъ, что искомое мѣсто лежитъ отъ даннаго не внизъ по теченію, а вверхъ. Обратный вопросъ,— нахожденіе глубины на данномъ разстояніи,— рѣшается путемъ послѣдовательныхъ подстановокъ.

---

*) См. M. Bresse. Cours de mécanique appliquée.—II partie. Hydraulique. Paris, 1860.

Таблица 45 (Бресса).

Значенія $\psi(z)$ въ ур-іи (30) (§ 34).

z	$\psi(z)$	Разности.	z	$\psi(z)$	Разности.
0,00	— 0,6046	0,0100	0,50	— 0,0878	0,0115
0,01	— 0,5946	0,0100	0,51	— 0,0763	0,0116
0,02	— 0,5846	0,0100	0,52	— 0,0647	0,0117
0,03	— 0,5746	0,0100	0,53	— 0,0530	0,0118
0,04	— 0,5646	0,0100	0,54	— 0,0412	0,0119
0,05	— 0,5546	0,0100	0,55	— 0,0293	0,0121
0,06	— 0,5446	0,0100	0,56	— 0,0172	0,0122
0,07	— 0,5346	0,0100	0,57	— 0,0050	0,0124
0,08	— 0,5246	0,0100	0,58	+ 0,0074	0,0125
0,09	— 0,5146	0,0100	0,59	0,0199	0,0126
0,10	— 0,5046	0,0100	0,60	0,0325	0,0129
0,11	— 0,4946	0,0101	0,61	0,0454	0,0130
0,12	— 0,4845	0,0100	0,62	0,0584	0,0132
0,13	— 0,4745	0,0100	0,63	0,0716	0,0135
0,14	— 0,4645	0,0100	0,64	0,0851	0,0136
0,15	— 0,4545	0,0101	0,65	0,0987	0,0140
0,16	— 0,4444	0,0100	0,66	0,1127	0,0141
0,17	— 0,4344	0,0101	0,67	0,1268	0,0145
0,18	— 0,4243	0,0100	0,68	0,1413	0,0147
0,19	— 0,4143	0,0101	0,69	0,1560	0,0151
0,20	— 0,4042	0,0101	0,700	0,1711	0,0076
0,21	— 0,3941	0,0101	0,705	0,1787	0,0077
0,22	— 0,3840	0,0101	0,710	0,1864	0,0079
0,23	— 0,3739	0,0101	0,715	0,1943	0,0079
0,24	— 0,3638	0,0102	0,720	0,2022	0,0080
0,25	— 0,3536	0,0102	0,725	0,2102	0,0082
0,26	— 0,3434	0,0101	0,730	0,2184	0,0082
0,27	— 0,3333	0,0103	0,735	0,2266	0,0084
0,28	— 0,3230	0,0102	0,740	0,2350	0,0084
0,29	— 0,3128	0,0103	0,745	0,2434	0,0086
0,30	— 0,3025	0,0102	0,750	0,2520	0,0087
0,31	— 0,2923	0,0104	0,755	0,2607	0,0089
0,32	— 0,2819	0,0103	0,760	0,2696	0,0089
0,33	— 0,2716	0,0104	0,765	0,2785	0,0092
0,34	— 0,2612	0,0104	0,770	0,2877	0,0093
0,35	— 0,2508	0,0105	0,775	0,2970	0,0094
0,36	— 0,2403	0,0105	0,780	0,3064	0,0096
0,37	— 0,2298	0,0106	0,785	0,3160	0,0098
0,38	— 0,2192	0,0106	0,790	0,3258	0,0099
0,39	— 0,2086	0,0106	0,795	0,3357	0,0102
0,40	— 0,1980	0,0108	0,800	0,3459	0,0103
0,41	— 0,1872	0,0107	0,805	0,3562	0,0106
0,42	— 0,1765	0,0109	0,810	0,3668	0,0108
0,43	— 0,1656	0,0109	0,815	0,3776	0,0110
0,44	— 0,1547	0,0109	0,820	0,3886	0,0112
0,45	— 0,1438	0,0111	0,825	0,3998	0,0116
0,46	— 0,1327	0,0111	0,830	0,4114	0,0118
0,47	— 0,1216	0,0112	0,835	0,4232	0,0121
0,48	— 0,1104	0,0113	0,840	0,4353	0,0125
0,49	— 0,0991	0,0113	0,845	0,4478	0,0127

Таблица 45 (Бресса).

(Продолженіе.)

z	$\psi(z)$	Разности.	z	$\psi(z)$	Разности.
0,850	0,4605	0,0132	0,960	0,9402	0,0178
0,855	0,4737	0,0135	0,962	0,9580	0,0187
0,860	0,4872	0,0140	0,964	0,9767	0,0198
0,865	0,5012	0,0144	0,966	0,9965	0,0209
0,870	0,5156	0,0149	0,968	1,0174	0,0222
0,875	0,5305	0,0154	0,970	1,0396	0,0116
0,880	0,5459	0,0160	0,971	1,0512	0,0120
0,885	0,5619	0,0166	0,972	1,0632	0,0125
0,890	0,5785	0,0173	0,973	1,0757	0,0129
0,895	0,5958	0,0180	0,974	1,0886	0,0134
0,900	0,6138	0,0075	0,975	1,1020	0,0140
0,902	0,6213	0,0076	0,976	1,1160	0,0145
0,904	0,6289	0,0077	0,977	1,1305	0,0152
0,906	0,6366	0,0079	0,978	1,1457	0,0158
0,908	0,6445	0,0080	0,979	1,1615	0,0166
0,910	0,6525	0,0082	0,980	1,1781	0,0174
0,912	0,6607	0,0084	0,981	1,1955	0,0184
0,914	0,6691	0,0085	0,982	1,2139	0,0194
0,916	0,6776	0,0088	0,983	1,2333	0,0205
0,918	0,6864	0,0089	0,984	1,2538	0,0219
0,920	0,6953	0,0092	0,985	1,2757	0,0233
0,922	0,7045	0,0093	0,986	1,2990	0,0251
0,924	0,7138	0,0096	0,987	1,3241	0,0270
0,926	0,7234	0,0098	0,988	1,3511	0,0293
0,928	0,7332	0,0101	0,989	1,3804	0,0321
0,930	0,7433	0,0104	0,990	1,4125	0,0355
0,932	0,7537	0,0106	0,991	1,4480	0,0396
0,934	0,7643	0,0110	0,992	1,4876	0,0448
0,936	0,7753	0,0113	0,993	1,5324	0,0517
0,938	0,7866	0,0116	0,994	1,5841	0,0611
0,940	0,7982	0,0120	0,995	1,6452	0,0748
0,942	0,8102	0,0124	0,996	1,7200	0,0962
0,944	0,8226	0,0128	0,997	1,8162	0,1355
0,946	0,8354	0,0133	0,998	1,9517	0,2314
0,948	0,8487	0,0137	0,999	2,1831	∞
0,950	0,8624	0,0143	1,000	∞	
0,952	0,8767	0,0149			
0,954	0,8916	0,0155			
0,956	0,9071	0,0162			
0,958	0,9233	0,0169			

$1:z$	z	$\psi(z)$	Разности.	$1:z$	z	$\psi(z)$	Разности.
1,000	1,0000	∞	$-\infty$	0,995	1,0050	1,6469	$-0,0608$
0,999	1,0010	2,1834	$-0,2311$	0,994	1,0060	1,5861	$-0,0513$
0,998	1,0020	1,9523	$-0,1351$	0,993	1,0070	1,5348	$-0,0446$
0,997	1,0030	1,8172	$-0,0959$	0,992	1,0081	1,4902	$-0,0392$
0,996	1,0040	1,7213	$-0,0744$	0,991	1,0091	1,4510	$-0,0351$

Таблица 45 (Бресса).

(*Продолженіе.*)

1 : z	z	ψ (z)	Разности.	1 : z	z	ψ (z)	Разности.
0,990	1,0101	1,4159	— 0,0318	0,910	1,0989	0,6839	— 0,0073
0,989	1,0111	1,3841	— 0,0290	0,908	1,1013	0,6766	— 0,0071
0,988	1,0121	1,3551	— 0,0267	0,906	1,1038	0,6695	— 0,0070
0,987	1,0132	1,3284	— 0,0247	0,904	1,1062	0,6625	— 0,0069
0,986	1,0142	1,3037	— 0,0230	0,902	1,1086	0,6556	— 0,0067
0,985	1,0152	1,2807	— 0,0215	0,900	1,1111	0,6489	— 0,0162
0,984	1,0163	1,2592	— 0,0202	0,895	1,1173	0,6327	— 0,0154
0,983	1,0173	1,2390	— 0,0191	0,890	1,1236	0,6173	— 0,0148
0,982	1,0183	1,2199	— 0,0180	0,885	1,1299	0,6025	— 0,0141
0,981	1,0194	1,2019	— 0,0171	0,880	1,1364	0,5884	— 0,0135
0,980	1,0204	1,1848	— 0,0162	0,875	1,1429	0,5749	— 0,0130
0,979	1,0215	1,1686	— 0,0155	0,870	1,1494	0,5619	— 0,0125
0,978	1,0225	1,1531	— 0,0148	0,865	1,1561	0,5494	— 0,0120
0,977	1,0235	1,1383	— 0,0142	0,860	1,1628	0,5374	— 0,0116
0,976	1,0246	1,1241	— 0,0136	0,855	1,1696	0,5258	— 0,0112
0,975	1,0256	1,1105	— 0,0131	0,850	1,1765	0,5146	— 0,0109
0,974	1,0267	1,0974	— 0,0126	0,845	1,1834	0,5037	— 0,0105
0,973	1,0277	1,0848	— 0,0121	0,840	1,1905	0,4932	— 0,0101
0,972	1,0288	1,0727	— 0,0117	0,835	1,1976	0,4831	— 0,0098
0,971	1,0299	1,0610	— 0,0113	0,830	1,2048	0,4733	— 0,0096
0,970	1,0309	1,0497	— 0,0215	0,825	1,2121	0,4637	— 0,0093
0,968	1,0331	1,0282	— 0,0202	0,820	1,2195	0,4544	— 0,0090
0,966	1,0352	1,0080	— 0,0190	0,815	1,2270	0,4454	— 0,0087
0,964	1,0373	0,9890	— 0,0181	0,810	1,2346	0,4367	— 0,0086
0,962	1,0395	0,9709	— 0,0170	0,805	1,2422	0,4281	— 0,0083
0,960	1,0417	0,9539	— 0,0163	0,800	1,2500	0,4198	— 0,0081
0,958	1,0438	0,9376	— 0,0155	0,795	1,2579	0,4117	— 0,0078
0,956	1,0460	0,9221	— 0,0148	0,790	1,2658	0,4039	— 0,0077
0,954	1,0482	0,9073	— 0,0142	0,785	1,2739	0,3962	— 0,0076
0,952	1,0504	0,8931	— 0,0136	0,780	1,2821	0,3886	— 0,0073
0,950	1,0526	0,8795	— 0,0130	0,775	1,2903	0,3813	— 0,0072
0,948	1,0549	0,8665	— 0,0126	0,770	1,2987	0,3741	— 0,0070
0,946	1,0571	0,8539	— 0,0121	0,765	1,3072	0,3671	— 0,0068
0,944	1,0593	0,8418	— 0,0117	0,760	1,3158	0,3603	— 0,0067
0,942	1,0616	0,8301	— 0,0113	0,755	1,3245	0,3536	— 0,0066
0,940	1,0638	0,8188	— 0,0109	0,750	1,3333	0,3470	— 0,0064
0,938	1,0661	0,8079	— 0,0106	0,745	1,3423	0,3406	— 0,0063
0,936	1,0684	0,7973	— 0,0102	0,740	1,3514	0,3343	— 0,0061
0,934	1,0707	0,7871	— 0,0099	0,735	1,3605	0,3282	— 0,0061
0,932	1,0730	0,7772	— 0,0097	0,730	1,3699	0,3221	— 0,0059
0,930	1,0753	0,7675	— 0,0094	0,725	1,3793	0,3162	— 0,0058
0,928	1,0776	0,7581	— 0,0091	0,720	1,3889	0,3104	— 0,0057
0,926	1,0799	0,7490	— 0,0089	0,715	1,3986	0,3047	— 0,0056
0,924	1,0823	0,7401	— 0,0086	0,710	1,4085	0,2991	— 0,0054
0,922	1,0846	0,7315	— 0,0084	0,705	1,4184	0,2937	— 0,0054
0,920	1,0870	0,7231	— 0,0082	0,70	1,4286	0,2883	— 0,0105
0,918	1,0893	0,7149	— 0,0080	0,69	1,4493	0,2778	— 0,0101
0,916	1,0917	0,7069	— 0,0079	0,68	1,4706	0,2677	— 0,0097
0,914	1,0941	0,6990	— 0,0076	0,67	1,4925	0,2580	— 0,0094
0,912	1,0965	0,6914	— 0,0075	0,66	1,5152	0,2486	— 0,0091

Таблица 45 (Бресса).

(*Продолженіе.*)

$1:z$	z	$\psi(z)$	Разности.	$1:z$	z	$\psi(z)$	Разности.
0,65	1,5385	0,2395	— 0,0089	0,30	3,3333	0,0455	— 0,0030
0,64	1,5625	0,2306	— 0,0085	0,29	3,4483	0,0425	— 0,0030
0,63	1,5873	0,2221	— 0,0083	0,28	3,5714	0,0395	— 0,0028
0,62	1,6129	0,2138	— 0,0080	0,27	3,7037	0,0367	— 0,0027
0,61	1,6393	0,2058	— 0,0078	0,26	3,8462	0,0340	— 0,0026
0,60	1,6667	0,1980	— 0,0075	0,25	4,0000	0,0314	— 0,0024
0,59	1,6949	0,1905	— 0,0073	0,24	4,1667	0,0290	— 0,0024
0,58	1,7241	0,1832	— 0,0071	0,23	4,3478	0,0266	— 0,0023
0,75	1,7544	0,1761	— 0,0069	0,22	4,5455	0,0243	— 0,0022
0,56	1,7857	0,1692	— 0,0067	0,21	4,7619	0,0221	— 0,0020
0,55	1,8182	0,1625	— 0,0065	0,20	5,0000	0,0201	— 0,0020
0,54	1,8519	0,1560	— 0,0063	0,19	5,2632	0,0181	— 0,0019
0,53	1,8868	0,1497	— 0,0062	0,18	5,5556	0,0162	— 0,0017
0,52	1,9231	0,1435	— 0,0059	0,17	5,8824	0,0145	— 0,0017
0,51	1,9608	0,1376	— 0,0058	0,16	6,2500	0,0128	— 0,0015
0,50	2,0000	0,1318	— 0,0056	0,15	6,6667	0,0113	— 0,0015
0,49	2,0408	0,1262	— 0,0055	0,14	7,1429	0,0098	— 0,0013
0,48	2,0833	0,1207	— 0,0053	0,13	7,6923	0,0085	— 0,0013
0,47	2,1277	0,1154	— 0,0052	0,12	8,3333	0,0072	— 0,0011
0,46	2,1739	0,1102	— 0,0050	0,11	9,0909	0,0061	— 0,0011
0,45	2,2222	0,1052	— 0,0049	0,10	10,0000	0,0050	— 0,0009
0,44	2,2727	0,1003	— 0,0048	0,09	11,1111	0,0041	— 0,0009
0,43	2,3256	0,0955	— 0,0046	0,08	12,5000	0,0032	— 0,0007
0,42	2,3810	0,0909	— 0,0044	0,07	14,2857	0,0025	— 0,0007
0,41	2,4390	0,0865	— 0,0044	0,06	16,6667	0,0018	— 0,0005
0,40	2,5000	0,0821	— 0,0042	0,05	20,0000	0,0013	— 0,0005
0,39	2,5641	0,0779	— 0,0041	0,04	25,0000	0,0008	— 0,0003
0,38	2,6316	0,0738	— 0,0039	0,03	33,3333	0,0005	— 0,0003
0,37	2,7027	0,0699	— 0,0039	0,02	50,0000	0,0002	— 0,0001
0,36	2,7778	0,0660	— 0,0037	0,01	100,0000	0,0001	— 0,0001
0,35	2,8571	0,0623	— 0,0036	0,00	∞	0,0000	—
0,34	2,9412	0,0587	— 0,0034				
0,33	3,0303	0,0553	— 0,0034				
0,32	3,1250	0,0519	— 0,0033				
0,31	3,2258	0,0486	— 0,0031				

Однако для нашего случая $\left(\frac{\alpha i}{bg} < 1\right)$ небезполезно обратиться къ другому, болѣе простому рѣшенію вопроса. Само по себѣ ур-іе (30) Бресса является только приблизительнымъ рѣшеніемъ, такъ какъ оно выведено въ предположеніи постояннаго уклона дна, постояннаго прямоугольнаго профиля и т. д. Поэтому въ виду того, что тутъ мы ограничиваемся случаемъ $\frac{\alpha i}{bg} < 1$, а также $h > H$, т.-е. случаемъ, когда дробь $\frac{h}{H}$ больше единицы, положимъ въ ур-іи (28) $\frac{\alpha i}{bg} = 0$. Это тѣмъ болѣе возможно, чѣмъ меньше i и чѣмъ меньше глубина $H = R$ (наши рѣки). Тогда ур-іе (28) переходитъ въ ур-іе:

$$i\,ds = \left(1 + \frac{H^3}{h^3 - H^3}\right) dh \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (31)$$

Обозначимъ h черезъ $H+y$ (фиг. 193); тогда, $dh=dy$, и ур-iе (31) принимаетъ видъ:

$$i\,ds=\left(1+\frac{H^3}{3H^2y+3Hy^2+y^3}\right)dy.$$

Производя указанное тутъ дѣленiе одночлена на многочленъ, получаемъ:

$$i\,ds=H\left(\frac{1}{3y}+\frac{2}{3H}+\frac{2y}{9H^2}-\frac{y^2}{9H^3}+\ldots.\right)dy.$$

Это ур-iе интегрируется просто. По отношенiю къ предѣламъ интегрированiя замѣтимъ, что мы считаемъ s положительнымъ въ направленiи теченiя. Слѣдовательно, точка **O**, отъ которой отсчитываются разстоянiя s, лежитъ гдѣ-нибудь вверхъ отъ пло-

Фиг. 193.

тины **C**,—допустимъ, на разстоянiи L отъ нея. Если мы желаемъ получить ур-iе профиля подпруженной воды для участка канала отъ **AA** до **BB**, то предѣлами для соотвѣтствующихъ частей этого ур-iя будутъ: нижнимъ s_0 и y_0 (сѣченiе **AA**), а верхнимъ s и y (сѣченiе **BB**). Само ур-iе будетъ имѣть видъ:

$$\frac{i\,(s-s_0)}{H}=\frac{1}{3}\,ln\left(\frac{y}{y_0}\right)+\frac{2}{3}\,\frac{y-y_0}{H}+\frac{2}{9.2}\,\frac{y^2-y_0^2}{H^2}-\frac{1}{9.3}\,\frac{y^3-y_0^3}{H^3}+\ldots..$$

Обыкновенно разности глубинъ y и y_0 настолько невелики по сравненiю съ H, что можно, какъ первое приближенiе, пренебречь членами, начиная со второй степени отношенiй $\frac{y}{H}$ и $\frac{y_0}{H}$, тѣмъ болѣе, что въ ур-iе входятъ только разности степеней этихъ отношенiй, и притомъ съ дробными множителями и съ перемѣнными знаками. Поэтому можемъ написать просто:

$$i\,(s-s_0)=\frac{H}{3}\,ln\,\frac{y}{y_0}+\frac{2}{3}(y-y_0)\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(32)$$

Это рѣшенiе предложилъ Дюпюи.

Обыкновенно бываетъ удобно отсчитывать разстоянiе не внизъ по теченiю отъ этой неопредѣленной точки **O**, а вверхъ отъ плотины; поэтому внесемъ въ это ур-iе вмѣсто s_0 равную ему величину $(L-x_0)$, а вмѣсто s величину $(L-x)$; тогда получимъ:

$$i\,(x_0-x)=\frac{H}{3}\,ln\left(\frac{y}{y_0}\right)+\frac{2}{3}(y-y_0)\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(33)$$

Полагая $x=0$, мы должны вмѣсто y внести величину отрѣзка **CD**, которую легко опредѣлить, зная H и высоту **EF** плотины, такъ какъ величина отрѣзка **CF**, какъ было объяснено выше, опредѣляется условiями истеченiя черезъ отверстiе въ плотинѣ (или переливанiя черезъ плотину) всего расхода въ каналѣ, если, конечно, изъ образовавшагося передъ плотиною пруда не отводится мимо нея нѣкоторое количество воды съ тою или другою цѣлью.

Съ помощью ур-ія (33) удобно находить то разстояніе, на которомъ происходитъ заданное измѣненіе глубины y_0. Обратный вопросъ,—нахожденіе y_0 для всякаго заданнаго x_0,—слѣдуетъ рѣшать путемъ послѣдовательныхъ приближеній.

Ур-іе (33) указываетъ, подобно предыдущему, что равномѣрное теченіе выше плотины невозможно, ибо, опредѣляя изъ него x_0 для $y_0 = 0$, найдемъ $x_0 = \infty$. То же слѣдуетъ и изъ ур-ія (30) Бресса: глубина $h = H$ будетъ на такомъ s, которое получится при $z = 1$; а по таблицѣ Бресса видно, что $\psi(1) = \infty$; слѣдоват., $i(s - s_0) = -\infty$. Такимъ образомъ, для того, чтобы помощью этихъ ур-ій находить приближенно то мѣсто канала, гдѣ подпруда уже незамѣтна, нужно полагать y_0 равнымъ не нулю, а какой-нибудь малой величинѣ, напр., 0,01 *mtr*.

Интересно отмѣтить здѣсь, что ур-ія (32) и (33) даютъ рѣшенія, весьма близкія къ рѣшеніямъ точнаго ур-ія (30) Бресса. Такъ, напр., пусть $i = 0{,}0002$; $H = 4$ *mtr*; глубина у плотины пусть будетъ 6 *mtr*. Требуется найти, на какомъ разстояніи отъ плотины находится то мѣсто, гдѣ глубина равна 5 *mtr*.

Для ур-ія Бресса имѣемъ $z_0 = \frac{6}{4} = 1{,}5$; $z = \frac{5}{4} = 1{,}25$. По таблицѣ 45 находимъ помощью интерполированія:

$$\psi(1{,}5) = 0{,}2580 - 0{,}0094 \times \frac{75}{227} = 0{,}2549;$$
$$\psi(1{,}25) = 0{,}4198.$$

Считая

$$b = \frac{1}{c^2} = \frac{1}{2500},$$

получимъ:

$$\frac{\alpha i}{bg} = \frac{1{,}085 . 0{,}0002 . 2500}{9{,}81} = 0{,}0553.$$

Послѣ этого ур-іе (30) дастъ:

$$0{,}0002(s - s_0) = 4(1{,}25 - 1{,}5) - 4(1 - 0{,}0553)(0{,}4198 - 0{,}2549).$$

Слѣдовательно:

$$s - s_0 = -\frac{1{,}623}{0{,}0002} = -8115 \ mtr.$$

Теперь возьмемъ ур-іе (33) Дюпюи. Здѣсь нужно положить: $H = 4$ *mtr*; $y = 2$ *mtr* $y_0 = 1$ *mtr*. По таблицамъ натуральныхъ логариѳмовъ находимъ $ln\, 2 = 0{,}6931$. Поэтому:

$$i(x - x_0) = \frac{4}{3} \cdot 0{,}6931 + \frac{2}{3} \cdot 1 = 1{,}59;$$

$$x - x_0 = 7950 \ mtr.$$

Какъ видно, разница обоихъ рѣшеній не особенно велика, — она составляетъ $\frac{165}{8115} \cdot 100\,\%$, т.-е. около 2%.

Нужно помнить, что ур-ія (32) и (33) справедливы только, пока $y < H$ и пока i такъ мало, что $\frac{\alpha i}{bg}$ гораздо меньше единицы.

Если каналъ не такъ широкъ, чтобы можно было считать $R = h$, то при составленіи ур-ія (20) надо положить $R = \frac{lh}{l + 2h}$. Интегрированіе полученнаго тогда ур-ія очень усложняется, хотя, все-таки, доведеніе его до конца возможно. Получается крайне сложная формула. Вводя нѣкоторыя упрощенія, Flamant приходитъ къ формулѣ, составленной по типу ур-ія (33):

$$\left.\begin{aligned} & i\,(s-s_0)=\frac{m}{n}\,H\,ln\,\frac{y}{y_0}+\left(1-\frac{7}{9}\,\frac{m}{n}\right)(y-y_0), \\ \text{гдѣ} \quad & \\ & \frac{m}{n}=\frac{l\left(1-\frac{\alpha i}{bg}\right)+2H}{3l+4H}\,. \end{aligned}\right\} \qquad (34)$$

При $\frac{m}{n}=\frac{2}{5}$, — а это будетъ при $l\infty 2H$, — если уклонъ очень малъ, получимъ:

$$i\,(s-s_0)=\frac{2}{5}\,H\,ln\,\frac{y}{y_0}+\frac{31}{45}(y-y_0) \qquad (35)$$

Изъ ур-ій (33) и (35) видно, во-первыхъ, что въ узкомъ каналѣ, при прочихъ равныхъ условіяхъ, подпруда распространяется дальше, чѣмъ въ очень широкомъ $\left(\frac{2}{5}>\frac{1}{3}\text{ и }\frac{31}{45}>\frac{2}{3}\right)$; во-вторыхъ, можно вывести слѣдующія заключенія (конечно, только приближенно):

a) Разстояніе между двумя сѣченіями съ данной разностью глубинъ обратно пропорціонально паденію дна.

b) Разность глубинъ въ двухъ точкахъ зависитъ отъ i и отъ s одновременно, т.-е. она зависитъ отъ абсолютнаго превышенія одной точки дна надъ другой.

c) Разстояніе между двумя сѣченіями съ данной разностью глубинъ измѣняется въ томъ же смыслѣ, какъ и H,—глубина незапруженной рѣки. Слѣдовательно, если поднять на одинаковую высоту воду въ двухъ каналахъ съ одинаковымъ уклономъ, но разныхъ глубинъ, то длина подпруды въ нихъ будетъ разная: она будетъ больше для болѣе глубокаго канала. Этимъ же объясняется, почему въ половодье подпруда ощущается дальше отъ плотины, чѣмъ въ мелководье.

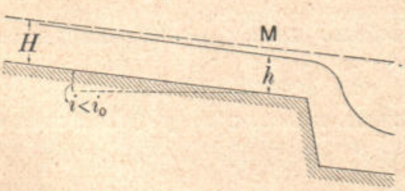
d) Вообще, глубина потока увеличиваетъ длину подпруды, а паденіе уменьшаетъ.

Случай II, 2: $H_1<h<H$, при чемъ $\frac{\alpha i}{bg}$ остается <1, а $H_1<H$.

Пусть въ какомъ-нибудь мѣстѣ канала **M** (фиг. 194) по какой-нибудь причинѣ поддерживается глубина h, меньшая чѣмъ H, но все-таки бо́льшая, чѣмъ H_1; тогда изъ ур-ія профиля

$$i\,ds=\frac{h^3-H_1{}^3}{h^3-H^3}\,dh \qquad (27)$$

видно, что, при ds положительномъ, dh должно быть отрицательно, такъ какъ вся дробь отрицательна. Поэтому, если отъ точки **M** пойдемъ вверхъ по рѣкѣ (отрицательныя ds), то будемъ замѣчать, что глубина растетъ,—какъ разъ обратно предыдущему случаю, вслѣдствіе чего этотъ случай можно назвать отрицательной подпрудой. Легко видѣть, что и здѣсь линія профиля равномѣрнаго теченія есть асимптота для дѣйствительнаго профиля. Ур-іе профиля въ интегральной формѣ остается, конечно, то же самое.



Фиг. 194.

Понятно, что такое постепенное уменьшеніе глубины, а слѣд. увеличеніе скорости противъ равномѣрнаго теченія не можетъ быть вызвано никакимъ обстоятельствомъ, лежащимъ выше разсматриваемаго участка: оно обусловливается причиной, лежащей ниже его. Такой случай представляется, напр., передъ водопадомъ или передъ тѣмъ мѣстомъ, гдѣ отнимается отъ рѣки большое количество воды (хотя бы насосомъ или каналомъ), такъ какъ и то и другое вызываетъ мѣстное пониженіе уровня, влекущее за собою, въ свою очередь, отрицательную подпруду по *всему* потоку выше причины, вызвавшей это пониженіе уровня.

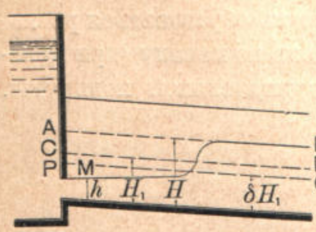
Замѣтимъ, что незадолго до причины, вызвавшей это явленіе, наши ур-ія перестаютъ имѣть мѣсто. Въ самомъ дѣлѣ, по мѣрѣ уменьшенія h и приближенія его къ H_1, дробь во второй части ур-ія стремится къ нулю, и въ предѣлѣ, при $h = H_1$, получаемъ, что весьма малому перемѣщенію Δs соотвѣтствуетъ безконечно большое пониженіе Δh, т.-е. свободная поверхность становится вертикальной. Это есть то, что называется *скачкомъ пониженія* (ressaut d'abaissement). Но при этомъ, очевидно, кривизна и непараллельность струй столь велика, что ур-іе Д. Бернулли, а слѣдовательно, и наше ур-іе, непримѣнимы.

Это предѣльное значеніе глубины $h = H_1$ можетъ встрѣтиться при водопадѣ; если же отрицательная подпруда вызвана, напр., внезапно увеличивающимся уклономъ дна и если новая глубина H' равномѣрнаго теченія при этомъ новомъ уклонѣ больше, нежели предшествовавшая критическая глубина H_1, то скачка не будетъ; если же $H' < H_1$, то вертикальная или почти вертикальная часть свободной поверхности появится опять.

Случай II, 3:

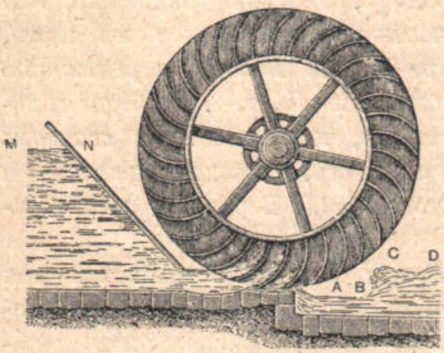
$$h < H_1 < H.$$

Пусть, наконецъ, въ какой-нибудь точкѣ M дѣйствительная глубина h (фиг. 195) меньше глубины равномѣрнаго теченія H и меньше критической глубины H_1. По ур-ію (27) видно, что, спускаясь по рѣкѣ, будемъ находить все болѣе глубокія мѣста,—глубина h приближается къ критической H_1. При этомъ h быстро возрастаетъ съ разстояніемъ, такъ какъ дробь $\frac{h^3 - H_1^3}{h^3 - H^3}$ стремится къ нулю; наконецъ, когда h дѣлается равнымъ критической глубинѣ H_1, получаемъ $\frac{dh}{ds} = \infty$. Это значитъ, что касательная къ профилю здѣсь вертикальна. Явленіе это называется *скачкомъ* или *прыжкомъ* воды («ressaut» у французовъ и «Sprung» у нѣмцевъ). Въ отличіе отъ предыдущаго его иногда называютъ скачкомъ повышенія. Въ слѣдующемъ параграфѣ будетъ показано, какъ опредѣлить высоту скачка воды, т.-е. глубину за скачкомъ. Ур-іемъ профиля для этой цѣли пользоваться нельзя по выше объясненной причинѣ (явно и рѣзко нарушенная параллельность струй).



Фиг. 195.

Такой характеръ теченія,—сначала постепенное, а потомъ внезапное повышеніе уровня, т.-е. погашеніе скорости,—можетъ быть вызванъ, конечно, только тѣми причинами, которыя создаютъ съ самаго начала большую скорость и, слѣдовательно, лежатъ выше разсматриваемаго участка. Поэтому такое явленіе будетъ наблюдаться въ такомъ каналѣ, въ который вода изливается изъ канала болѣе узкаго; или въ каналѣ, въ который вода выливается изъ сосуда, подобно фигурѣ 195, или въ который вода переливается черезъ водосливъ, какъ мы это видѣли въ § 17 (фиг. 100—104). Подобнымъ же образомъ вода можетъ покидать водяное колесо (фиг. 196) съ такою скоростью v_2, которая превышаетъ скорость равномѣрнаго теченія въ отводящемъ каналѣ, устраиваемомъ обыкновенно съ небольшимъ паденіемъ: за колесомъ тогда образуется скачокъ, и притомъ тѣмъ дальше отъ колеса, чѣмъ больше v_2 и чѣмъ меньше глубина за скачкомъ; внѣшній видъ явленія таковъ, какъ будто колесо находится въ нишѣ ***AB***, углубленной въ свободной поверхности ***CD***. Въ этомъ случаѣ скачокъ представляетъ прямую выгоду, такъ какъ располагаемымъ для двигателя напоромъ является разстояніе отъ уровня ***MN*** до ***CD***, а утилизируется разстояніе отъ ***MN*** до ***AB***.



Фиг. 196.

Вообще скачокъ повышенія въ открытыхъ каналахъ есть явленіе, вполнѣ аналогичное удару при увеличеніи сѣченія трубы: здѣсь такъ же, какъ и тамъ, погашается нѣкоторый запасъ живой силы; часть его тратится на подъемъ жидкости на высоту скачка, а часть теряется на приведеніе жидкости въ сильное волненіе. На нѣкоторомъ разстояніи отъ скачка,—тамъ, гдѣ это волненіе уже улеглось,—т.-е. когда энергія вихревого и волнообразнаго движенія обратится въ теплоту, тамъ можетъ образоваться равномѣрное теченіе; но для этого необходимо, чтобы внизъ по каналу (при неизмѣнномъ уклонѣ) не было ни положительной, ни отрицательной подпруды.

Случай III.

$$\frac{ai}{bg} > 1; \quad i > 0{,}0036.$$

Обратимся, наконецъ, къ случаю рѣкъ съ большимъ паденіемъ, когда $i > 3{,}6\text{‰}$ или, правильнѣе, $\frac{ai}{bg} > 1$. Очевидно, здѣсь $H_1 > H$. Ур-іе кривой профиля остается старое:

$$i\,ds = \frac{h^3 - H_1^{\,3}}{h^3 - H^3}\,dh \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (27)$$

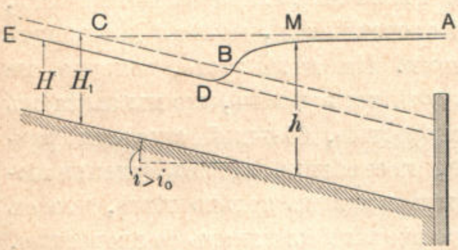
Въ зависимости отъ соотношенія между величинами h, H и H_1 разсмотримъ отдѣльно слѣдующіе три частные случая:

Случай III, 1.

Пусть какая-нибудь причина (плотина, порогъ и т. д.) поддерживаетъ въ какой-нибудь точкѣ **M** (фиг. 197) глубину $h > H_1$, а слѣдовательно, бо́льшую также, чѣмъ H:

$$h > H_1 > H.$$

Тогда внизъ по каналу отъ этой точки глубина будетъ все увеличиваться, такъ какъ дробь положительна; при этомъ дробь стремится къ единицѣ, т.-е. $\frac{dh}{ds}$ стремится къ i; слѣдовательно, профиль асимптотически приближается къ горизонтальной прямой **AC**, положеніе которой опредѣляется аналогично тому, какъ опредѣляется прямая **AC** на фиг. 192. Вверхъ отъ точки **M** глубина h, очевидно, уменьшается, и притомъ довольно быстро, такъ какъ дробь приближается къ нулю. При $h = H_1$ имѣемъ $\frac{dh}{ds} = \frac{i}{0} = \infty$,— въ этой точкѣ касательная къ профилю вертикальна; слѣдовательно, здѣсь имѣется *скачокъ*. Въ мѣстѣ скачка и вблизи отъ него наше ур-іе непримѣнимо. Выше скачка глубина можетъ быть какая угодно: она можетъ быть, напр., равна H, т.-е. теченіе тамъ можетъ быть равномѣрнымъ. Скачокъ получается подъ вліяніемъ причины, ниже его лежащей.



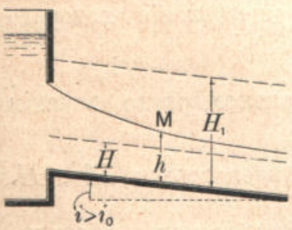
Фиг. 197.

Случай III, 2.

Пусть гдѣ-нибудь въ точкѣ **M** (фиг. 198) дѣйствительная глубина h меньше критической, но больше глубины равномѣрнаго теченія:

$$H_1 > h > H.$$

Тогда ниже этого мѣста глубина все убываетъ, такъ какъ дробный коэффиціентъ правой части ур-ія (27) отрицателенъ. Профиль асимптотически приближается къ линіи равномѣрнаго теченія, никогда ея не достигая. Вверхъ отъ **M** глубина растетъ,—слѣдовательно, профиль представляетъ кривую, обращенную своею выпуклостью внизъ. Наконецъ, когда h дѣлается равнымъ H_1, то опять $\frac{dh}{ds} = \infty$, оставаясь отрицательнымъ; слѣдовательно, касательная здѣсь вертикальна, но здѣсь получается то, что мы назвали *скачкомъ пониженія;* вблизи отъ него общее ур-іе профиля, конечно, непримѣнимо. Причина явленія скачка лежитъ выше участка, къ которому принадлежитъ точка **M**. Такой скачокъ можетъ быть осуществленъ, напримѣръ,

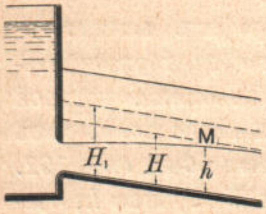


Фиг. 198.

въ круто поставленномъ желобѣ, въ который вода выливается подъ не очень большимъ напоромъ (фиг. 198), такъ что скорость истеченія меньше скорости равномѣрнаго теченія, соотвѣтствующей уклону желоба. Подобное же явленіе можетъ наблюдаться за невысокимъ водопадомъ и т. п.

Случай III, 3.

Пусть гдѣ-нибудь въ **M** (фиг. 199) глубина $h < H < H_1$. Внизъ отсюда глубина растетъ, стремясь достигнуть H, но никогда ее не достигая,— равномѣрное движеніе, слѣд., невозможно. Выше отъ **M** глубина все падаетъ, и профиль, говоря теоретически, можетъ достигнуть пересѣченія съ дномъ. На дѣлѣ этого, конечно, не будетъ, такъ какъ уже тотъ фактъ, что мы застаемъ воду идущей со скоростью, бо́льшей скорости равномѣрнаго теченія, постепенно затѣмъ уменьшающейся, можетъ быть вызванъ только тѣмъ, что съ самаго начала вода входила въ каналъ со скоростью, большей скорости равномѣрнаго теченія. Слѣдовательно, профиль будетъ обнаруживать постепенное уменьшеніе глубины вверхъ вплоть до самой причины, вызвавшей эту большую скорость, а здѣсь, конечно, глубина равной нулю быть не можетъ.



Фиг. 199.

Резюмируя все сказанное, приходимъ къ заключенію, что въ очень широкихъ каналахъ прямоугольнаго сѣченія равномѣрное теченіе можетъ образоваться только въ рѣдкихъ случаяхъ, при наличности надлежащихъ условій при входѣ въ каналъ и при выходѣ изъ него; въ естественныхъ потокахъ, въ силу того, что ихъ ложе не призматическое, равномѣрное теченіе, строго говоря, невозможно.

Въ частности, плотина на такомъ каналѣ и, приближенно, на рѣкахъ производитъ слѣдующія явленія:

1) Паденіе канала таково, что $\frac{ai}{bg} = 1$, т.-е. $i_0 = 3{,}6\,{}^0/_{00}$. Ширина рѣки равна l, а расходъ въ ней—Q. По предыдущему, глубина равномѣрнаго теченія $H = \sqrt[3]{\frac{bQ^2}{i_0 l^2}}$. Передъ плотиною (фиг. 189) профиль рѣки есть горизонтальная прямая **AB**; еще выше (часть **CA**) рѣка течетъ равномѣрно. Конечно, это не болѣе, какъ предѣльный случай, осуществленіе котораго едва ли можно найти въ дѣйствительности.

2) Паденіе $i < i_0$, т.-е. $\frac{ai}{bg} < 1$. Глубина равномѣрнаго теченія $H = \sqrt[3]{\frac{bQ^2}{il^2}}$; критическая глубина $H_1 = \sqrt[3]{\frac{ai}{bg}}\,H$. Слѣдовательно, $H_1 < H$. Передъ плотиною профиль (фиг. 191) есть кривая **AB**, обращенная выпуклостью книзу. По ур-ію профиля слѣдуетъ, что равномѣрное движеніе выше плотины вообще невозможно. Приближенно же, и для практики достаточно точно, можно считать, что на разстояніи отъ плотины $ab = 2\,cb$ движеніе уже равномѣрно.

3) Паденіе $i > i_0$, т.-е. $\frac{\alpha i}{bg} > 1$; критическая глубина H_1 больше глубины равномѣрнаго теченія H (фиг. 197). Достаточно высокая плотина вызываетъ профиль *BA*,—кривую, обращенную выпуклостью кверху. Около *DB* имѣетъ мѣсто скачокъ; выше, въ *ED*, рѣка течетъ равномѣрно, если еще выше нѣтъ никакихъ причинъ, увеличивающихъ скорость на этомъ пути. Разстояніе скачка отъ плотины зависитъ, конечно, отъ высоты плотины.

Въ 1851 г. Saint-Venant *) предложилъ различать двѣ категоріи потоковъ: тѣ, для которыхъ $\frac{\alpha i}{bg} < 1$, онъ называетъ просто rivières; а тѣ, для которыхъ $\frac{\alpha i}{bg} > 1$, онъ назвалъ torrents (или cours d'eaux torrentueux). По-русски эти термины можно передать такъ: первую категорію составляютъ «рѣки съ покойнымъ теченіемъ», вторую—«рѣки съ бурнымъ теченіемъ». Такимъ образомъ, по этой классификаціи должно признать бурнымъ и тотъ участокъ *BA* передъ плотиною (фиг. 197), гдѣ скорость теченія, вообще очень малая, измѣняется медленно, такъ какъ профиль асимптотически приближается къ горизонтали *AC*, и, наоборотъ, нужно считать покойнымъ теченіе передъ скачкомъ (фиг. 195) при большой и быстро измѣняющейся скорости,—единственно изъ-за того, что въ первомъ случаѣ уклонъ дна великъ, а во второмъ—онъ малъ, между тѣмъ какъ самъ характеръ теченія противоположенъ тому представленію, которое связывается съ выраженіемъ «покойное» или «бурное» теченіе.

Boussinesq тоже различаетъ двѣ категоріи потоковъ **) или, вѣрнѣе, два характера теченія, съ такими же названіями, но въ основу классификаціи кладетъ не величину уклона, а величину скорости на данномъ участкѣ потока: если скорость теченія меньше нѣкоторой опредѣленной, «критической», скорости v_1, то онъ называетъ теченіе покойнымъ, если же она больше критической величины, то—бурнымъ. Величину v_1 онъ опредѣляетъ слѣдующимъ образомъ. Критическую глубину H_1 мы опредѣлили выше уравненіемъ (26). Соединяя его съ уравненіемъ (23), находимъ:

$$H_1 = \sqrt[3]{\frac{\alpha i}{bg}} \cdot \sqrt[3]{\frac{bq^2}{i}} = \sqrt[3]{\frac{\alpha q^2}{g}}.$$

Кромѣ того, всегда можно написать, что

$$q = v_1 H_1,$$

если отвлечься отъ спеціальнаго смысла глубины H_1, при которой свободная поверхность образуетъ скачокъ; другими словами, v_1 есть нѣкоторая

*) См. Annales des mines, t. XX, p. 320. „Formules et tables nouvelles pour la solution des problèmes relatifs aux eaux courantes“.

**) См. его „Essai sur la théorie des eaux courantes“, p. 133, 144, 151, 154. Saint-Venant самъ призналъ преимущество классификаціи Boussinesq'a.

фиктивная величина. Внося подъ радикалъ это выраженіе q, а также считая $\alpha = 1{,}085$, легко получимъ:

$$v_1 = \sqrt{\frac{1}{\alpha}} \sqrt{2g\frac{H_1}{2}} = 0{,}96 \sqrt{2g\frac{H_1}{2}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (36)$$

т.-е. *критическая скорость* Boussinesq'а *равна скорости истеченія изъ отверстія въ тонкой стѣнкѣ подъ напоромъ, равнымъ половинѣ критической глубины,* если коэффиціентъ скорости φ считать равнымъ 0,96.

Понятно, что если дѣйствительная глубина $h > H_1$, то тамъ устанавливается дѣйствительная скорость $v < v_1$, такъ какъ $q = vh = v_1 H_1$. Напишемъ поэтому два очевидныхъ неравенства:

$$v < v_1;$$

$$\sqrt{\frac{1}{\alpha}} \cdot \sqrt{2g\frac{H_1}{2}} < \sqrt{\frac{1}{\alpha}} \cdot \sqrt{2g\frac{h}{2}}.$$

Такъ какъ первое неравенство есть, по Буссинеку, признакъ покойнаго теченія, то, соединяя его со вторымъ неравенствомъ помощью ур-ія (36), получимъ для покойныхъ теченій, очевидно:

$$v < \sqrt{\frac{1}{\alpha}} \cdot \sqrt{2g\frac{h}{2}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (37)$$

Подобнымъ же образомъ, признакомъ бурныхъ теченій будетъ служить соотношеніе:

$$v > \sqrt{\frac{1}{\alpha}} \cdot \sqrt{2g\frac{h}{2}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (38)$$

Изъ предыдущаго видно, что крутыя паденія ($i > i_0$) чаще ведутъ къ бурному теченію; покойное теченіе можетъ образоваться только незадолго до плотины. Наоборотъ, пологіе уклоны ($i < i_0$) чаще влекутъ покойное теченіе, проявляя бурный характеръ только въ случаѣ скачка повышенія (II, 3). Случай равномѣрнаго теченія при $i = i_0 = 3{,}6\permil$ замѣчателенъ тѣмъ, что онъ по этой классификаціи стоитъ на границѣ между обоими предыдущими, такъ какъ при немъ $h = H = H_1$, потому что $\frac{\alpha i}{bg} = 1$ и, слѣдовательно, скорость v въ этомъ случаѣ какъ разъ равна критической и выражается такъ:

$$v = \sqrt{\frac{1}{\alpha}} \cdot \sqrt{2g\frac{h}{2}}.$$

Замѣтимъ еще разъ, что коэффиціентъ b непостояненъ даже при одинаковой степени шероховатости русла: онъ уменьшается съ увеличеніемъ глубины (собственно, средняго радіуса). Поэтому полученное предѣльное значеніе i_0, обращающее дробь $\frac{ai}{bg}$ въ единицу, есть только средняя величина. Такъ какъ $i_0 = \frac{bg}{a}$, то заключаемъ, что для болѣе глубокихъ рѣкъ достаточно меньшаго паденія, чтобы сдѣлать ихъ бурными по классификаціи Сенъ-Венана, да и по классификаціи Буссинека тоже, такъ какъ, различаясь принціально, какъ мы сейчасъ видѣли, обѣ эти системы приводятъ практически къ сходственнымъ результатамъ.

Нѣсколько разъ было отмѣчено, что ур-іе (27), изслѣдованіе котораго дало намъ всѣ приведенные выше результаты, не передаетъ явленія во всѣхъ тѣхъ случаяхъ, гдѣ параллельность струй замѣтно нарушается. Въ той работѣ Буссинека, о которой уже не разъ упоминалось *), кривизна струй принимается во вниманіе. Благодаря этому изслѣдованіе вида поверхности неравномѣрно бѣгущаго потока можетъ быть проведено значительно дальше. Между прочимъ Буссинекъ распространяетъ его на мѣста нарушенія равномѣрнаго теченія, независимо отъ причины, производящей это нарушеніе. И онъ доказываетъ (см. стр. 196—206; у Бобылева—стр. 96—99), что въ покойныхъ рѣкахъ нарушеніе теченія и переходъ его отъ одного характера къ другому совершается рядомъ волнъ одинаковой длины, но постепенно уменьшающейся амплитуды, т.-е. распространяется далеко; наоборотъ, въ потокахъ бурныхъ этотъ переходъ совершается сразу, скачкомъ, и остается, поэтому, какъ бы сосредоточеннымъ въ одномъ мѣстѣ. Эти выводы можно сблизить съ тѣмъ, напр., что пароходъ на озерѣ оставляетъ за собою далеко разбѣгающуюся волну; на покойной рѣкѣ эти волны также распространяются очень далеко; наоборотъ, въ стремительномъ потокѣ онѣ быстро затухаютъ. Также то сильное волненіе, которое вызываютъ въ быстромъ потокѣ, напр., быки моста, распространяется сравнительно очень недалеко.—Изслѣдованія Буссинека касаются также вопроса о вліяніи неровностей дна на видъ поверхности (см. стр. 223—232; у Бобылева—стр. 100—109). Оказывается, наиболѣе рѣзко отражаются на поверхности неровности дна въ потокахъ стремительныхъ, но съ уклономъ близкимъ къ предѣльному; съ дальнѣйшимъ увеличеніемъ уклона неровности дна ощущаются на поверхности менѣе замѣтно: отношеніе высоты поверхностной волны къ высотѣ неровностей дна приближается въ предѣлѣ къ величинѣ, очень мало отличающейся отъ 1. Наоборотъ, съ уменьшеніемъ уклона это отношеніе быстро уменьшается и въ предѣлѣ обращается въ 0, когда средній уклонъ приближается къ 0.

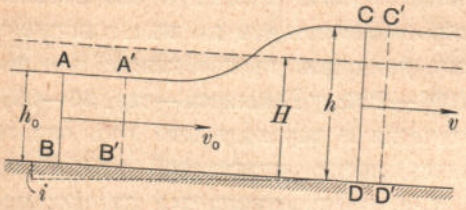
---

*) См. его „Essai sur la théorie des eaux courantes“. См. также краткое изложеніе этого трактата на русскомъ языкѣ, сдѣланное проф. Д. Бобылевымъ подъ заглавіемъ „Очеркъ теоріи водяныхъ теченій, выработанной Буссинекомъ“. Спб., 1898 г.

§ 34. О скачкѣ воды.

Въ предыдущемъ параграфѣ было уже указано, что́ называется скачкомъ и при какихъ условіяхъ онъ образуется. Мы видѣли, что скачокъ появляется всякій разъ, какъ глубина приближается къ величинѣ $H_1 = H\sqrt[3]{\frac{ai}{bg}}$, гдѣ выраженіе подъ радикаломъ должно быть отличнымъ отъ нуля. Если дѣйствительная глубина h потока приближается къ H_1, увеличиваясь (для наблюдателя, перемѣщающагося по теченію), то въ этомъ случаѣ имѣетъ мѣсто с к а ч о к ъ п о в ы ш е н і я (собственно скачокъ); въ противномъ случаѣ получается с к а ч о к ъ п о н и ж е н і я. Теперь мы займемся опредѣленіемъ высоты скачка и потери напора при скачкѣ.

Допустимъ, что передъ скачкомъ въ сѣченіи ***AB*** (фиг. 200) струи идутъ еще такъ, что ихъ можно считать сохраняющими свою параллельность. Среднюю скорость въ этомъ сѣченіи назовемъ черезъ v_0, а глубину—черезъ h_0. Подобнымъ же образомъ беремъ за скачкомъ нѣкоторое сѣченіе ***CD***, гдѣ можно считать, что струи возстановили уже свою параллельность и идутъ со средней скоростью v при глубинѣ h. Оба сѣченія возьмемъ перпендикулярно къ ихъ скоростямъ, а не вертикально, хотя, вслѣдствіе малости уклона дна, это почти безразлично. Къ выдѣленной такимъ образомъ массѣ воды ***ABDC*** примѣнимъ теорему количествъ движенія для безконечно малаго перемѣщенія въ положеніе ***A'B'D'C'***, предполагая движеніе установившимся. Проекція приращенія количества движенія на направленія скоростей v_0 и v за безконечно малый промежутокъ времени dt, очевидно, равна, въ силу установившагося движенія, разности количествъ движенія слоя ***CD'*** и слоя ***AB'***, потому что объемъ ***A'B'CD*** наполненъ въ оба разсматриваемые моменты, правда, разными частицами, но съ одинаковою массою и съ одинаковыми скоростями. Такимъ образомъ нужное намъ приращеніе проекціи количества движенія можетъ быть выражено такъ:



Фиг. 200.

$$(1+\beta)\frac{Q\gamma}{g}(v-v_0)\,dt,$$

гдѣ β есть коэф-тъ, исправляющій неточность, происходящую отъ замѣны истиннаго движенія съ разными скоростями движеніемъ со средней скоростью.

Эта величина должна равняться суммѣ проекцій на то же направленіе всѣхъ внѣшнихъ силъ. Внѣшнія силы на этомъ перемѣщеніи слѣдующія.

Во-первыхъ, тяжесть; ее, однако, можно считать перпендикулярной къ перемѣщенію взятой нами массы, такъ какъ уклонъ дна есть, вообще, величина незначительная; поэтому проекціей ея импульса на направленіе скоростей можно, безъ большой ошибки, пренебречь.

Во-вторыхъ, имѣется сила тренія, импульсъ которой, очевидно, направленъ противъ движенія и, слѣдовательно, войдетъ во вторую часть уравненія со знакомъ минусъ. Такъ какъ весь участокъ **BD**, вообще, невеликъ, то внѣшнее треніе, несомнѣнно, будетъ очень незначительнымъ, и имъ можно пренебречь, отчасти компенсируя этимъ пренебреженіе положительнаго импульса тяжести. Но нельзя сказать того же о внутреннемъ треніи, такъ какъ при той неправильности струй, которая имѣетъ мѣсто въ скачкѣ, есть полная возможность для образованія сильныхъ вихрей. Однако, вмѣсто того, чтобы оцѣнивать отрицательный импульсъ внутренняго тренія, мы можемъ соотвѣтственно увеличить первую часть уравненія, т.-е. вмѣсто вышенаписанной величины приращенія количества движенія взять нѣсколько бо́льшую. Вычисленія Буссинека, которыхъ приводить здѣсь не будемъ, показываютъ, что это вообще (не только въ случаѣ скачка) возможно сдѣлать, если вмѣсто коэф-та $(1+\beta)$ принять коэф-тъ $(1+\beta+3{,}85\,\beta)$, т.-е. $(1+4{,}85\,\beta)$. Обозначимъ этотъ новый коэф-тъ черезъ α', и теперь первая часть составляемаго нами ур-ія количествъ движенія приметъ видъ:

$$\frac{\alpha' Q\gamma}{g}(v-v_0)\,dt.$$

Въ-третьихъ, наконецъ, въ сѣченіяхъ **AB** и **CD** имѣются гидродинамическія давленія, импульсъ которыхъ по направленію движенія, въ силу допущенной въ этихъ сѣченіяхъ параллельности струй, выразится черезъ:

$$\frac{h_0}{2}\gamma F_0\,dt-\frac{h}{2}\gamma F\,dt,$$

гдѣ F_0 и F суть площади живыхъ сѣченій **AB** и **CD**.

Полное ур-іе количествъ движенія будетъ, такимъ образомъ, имѣть видъ:

$$\frac{\alpha' Q\gamma}{g}(v-v_0)\,dt=\frac{1}{2}(h_0F_0-hF)\gamma\,dt\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,\mathbf{(39)}$$

Полагая, что поперечный профиль потока есть прямоугольникъ съ шириною l, имѣемъ, очевидно:

$$Q=F_0v_0=lh_0v_0=Fv=lhv,$$

въ виду чего ур-іе (39) принимаетъ видъ:

$$\frac{2\alpha'}{g}v_0{}^2h_0\left(\frac{h_0}{h}-1\right)=h_0{}^2-h^2.$$

Сокращая на (h_0-h), такъ какъ рѣшеніе $h=h_0$, очевидно, не относится къ разсматривамому вопросу, получимъ ур-іе:

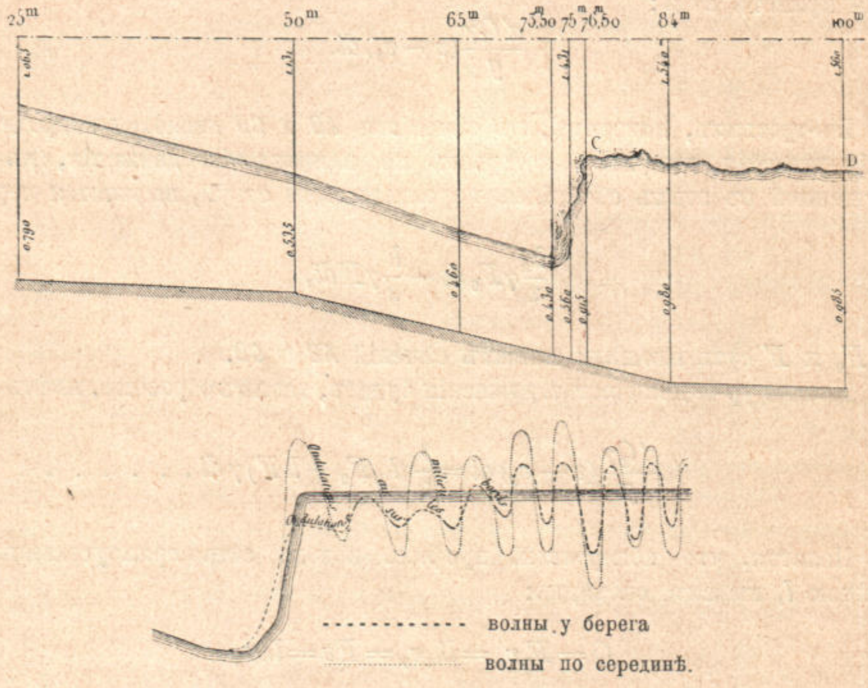
$$h^2+h_0h-2\alpha'\frac{v_0{}^2}{g}h_0=0.$$

Отсюда находимъ, что глубина за скачкомъ, т.-е. тамъ, гдѣ параллельность струи уже возстановилась, выражается такъ (отрицательный корень отбрасываемъ, какъ тоже не отвѣчающій условіямъ вопроса):

$$h = -\frac{h_0}{2} + \sqrt{\frac{h_0^2}{4} + 2\alpha' \frac{v_0^2}{g} h_0} \quad \ldots \ldots \ldots \quad \mathbf{(40)}$$

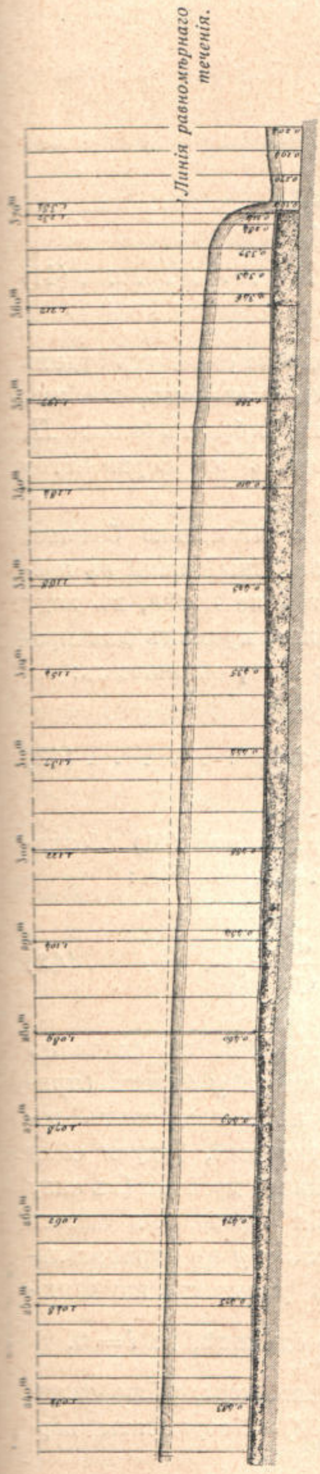
Что касается коэф-та α' или, вѣрнѣе, β, то Буссинекъ даетъ для него среднюю величину $\beta = 0{,}023$; тогда $\alpha' = 1{,}11$. Это почти то же самое числовое значеніе, которое было дано для коэф-та α, введеннаго въ § 33.

Провѣрить ур-іе (40) на опытѣ довольно затруднительно, такъ какъ поверхность воды за скачкомъ весьма неспокойна. Наблюденія надъ скачками производили Bidone, Baumgarten, Darcy, Bazin и другіе. На фиг. 201 представленъ скачокъ, наблюдавшійся Баумгартеномъ на Крапонскомъ каналѣ. Какъ видно по отмѣткамъ фигуры, высота скачка $(h - h_0)$ достигала



Фиг. 201.

здѣсь величины $0{,}915 - 0{,}430 = 0{,}485$ *mtr*. Вычисленія по формулѣ (40) даютъ въ этомъ случаѣ $h = 0{,}94$ *mtr*. Ошибка въ 0,025 *mtr* (=0,94—0,915) не можетъ быть названа особенно большою, особенно если принять въ соображеніе сильныя волны, покрывающія поверхность *CD* за скачкомъ; на нижней части фиг. 201 пунктирная линія представляетъ профиль волны въ серединѣ, а пунктиръ съ точкою — у береговъ. Вся высота скачка (почти 0,5 *mtr*) получается на длинѣ $76{,}50 - 73{,}50 = 3{,}00$ *mtr*.



Фиг. 202.

Для скачковъ пониженія, примѣръ одного изъ которыхъ приведенъ на фиг. 202 на основаніи одного изъ наблюденій Базена, формула (40) непригодна, такъ какъ величина уступа, не входящая въ уравненіе, очевидно, имѣетъ преимущественное значеніе *).

Когда паденіе велико и критическая глубина H_1 больше глубины H равномѣрнаго теченія, то, очевидно, $h > H$. Если же паденіе мало, то $H_1 < H$, и, такъ какъ вообще для образованія скачка повышенія начальная глубина h_0 должна быть меньше критической, то можетъ возникнуть вопросъ, будетъ ли h больше или меньше H.

Назовемъ скорость равномѣрнаго теченія при томъ же расходѣ, а слѣдовательно, при глубинѣ H, черезъ v'; по предыдущему, $v' = c\sqrt{Hi}$, если ширина l канала очень велика по сравненію съ H. Какъ и въ § 33, назовемъ c^2 черезъ $\frac{1}{b}$. Ур-іе расхода можемъ написать въ видѣ:

$$Q = v_0 l h_0 = v' l H = \sqrt{\frac{1}{b}}\sqrt{Hi}\,.\,lH.$$

Отсюда:

$$v_0{}^2 = \frac{H^3 i}{b h_0{}^2}.$$

Поэтому ур-іе (40) можно переписать такъ:

$$h = -\frac{h_0}{2} + \sqrt{\frac{h_0{}^2}{4} + 2\frac{\alpha' i}{bg}\frac{H^3}{h_0}} =$$

$$= H\left[\sqrt{2\frac{\alpha' i}{bg}\frac{H}{h_0} + \left(\frac{h_0}{2H}\right)^2} - \frac{h_0}{2H}\right].$$

*) Случай фиг. 202 Буссинекъ даже называетъ не скачкомъ пониженія, а водопадомъ, говоря, что, такъ какъ вообще мы разсматриваемъ участки потоковъ, гдѣ уклонъ дна постояненъ, или, по крайней мѣрѣ, измѣняется очень постепенно, то такіе случаи, какъ фиг. 202, гдѣ элементы съ $\frac{dh}{ds} = \infty$ находятся въ области внезапнаго измѣненія уклона дна, не должны входить въ наше разсмотрѣніе. Съ этой точки зрѣнія скачокъ пониженія есть явленіе трудно осуществимое и, во всякомъ случаѣ, представляющее черты, существенно отличныя отъ скачка повышенія. Подробнѣе объ этомъ см. въ упомянутомъ сочиненіи Буссинека, примѣчанія на стр. 135 и 150.

Отсюда видно, что глубина h за скачкомъ будетъ больше глубины равномѣрнаго теченія H при удовлетвореніи неравенства:

$$\sqrt{2\frac{\alpha' i}{bg}\frac{H}{h_0}+\left(\frac{h_0}{2H}\right)^2}-\frac{h_0}{2H}>1;$$

отсюда:

$$2\frac{\alpha' i}{bg}\frac{H}{h_0}+\left(\frac{h_0}{2H}\right)^2>1+\left(\frac{h_0}{2H}\right)^2+\frac{h_0}{H}$$

$$\left(\frac{h_0}{H}\right)^2+\frac{h_0}{H}-\frac{2\alpha' i}{bg}<0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \textbf{(41)}$$

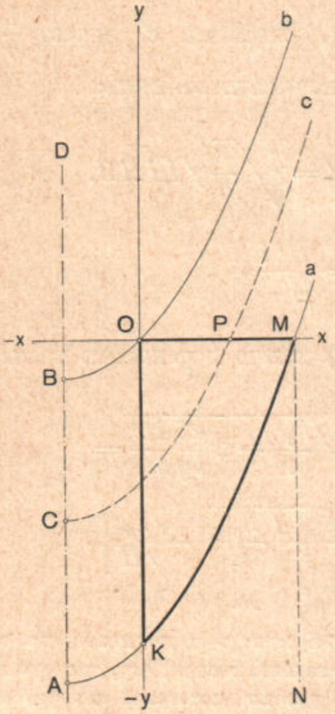
Если неравенство (41) удовлетворяется, то глубина за скачкомъ будетъ больше глубины равномѣрнаго теченія. Пока $i>0{,}0036$, скачокъ, вообще, возможенъ, какъ уже сказано, только въ томъ смыслѣ, что h будетъ больше H, такъ что намъ остается разсмотрѣть, къ чему приводитъ это неравенство при уклонахъ дна $i<0{,}0036$.

Хотя коэффиціентъ α' нѣсколько больше, чѣмъ коэффиціентъ α, введенный нами въ предыдущемъ параграфѣ, тѣмъ не менѣе, въ виду малой разницы между ними, примемъ для простоты, что $\alpha'=\alpha$; кромѣ того, обозначимъ:

$$\frac{h_0}{H}=x, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \textbf{(42)}$$

а всю первую часть неравенства (41) обозначимъ одною буквою y, т.-е. положимъ:

$$x^2+x-2\frac{\alpha i}{bg}=y \quad . \; . \; . \; . \; . \quad \textbf{(43)}$$



Фиг. 203.

Такимъ образомъ, глубина за скачкомъ будетъ больше H тогда, когда y будетъ отрицательно. Слѣдовательно, намъ предстоитъ розыскать тѣ значенія x, которыя, будучи сами правильными положительными дробями (въ силу обозначенія (42) и условія образованія скачка $h_0<H$), обращаютъ функцію y въ отрицательную величину при всѣхъ уклонахъ, измѣняющихся въ предѣлахъ отъ i_0, при которомъ $\frac{\alpha i}{bg}$ равно единицѣ, до $i=0$.

Нетрудно видѣть, что ур. (43) есть уравненіе параболы, расположенной такъ, что ось ея ***AD*** параллельна оси ***y*** (фиг. 203). Координаты вершины (x_0, y_0) найдемъ изъ уравненія:

$$\frac{dy}{dx}=2x_0+1=0.$$

Отсюда

$$x_0 = -\frac{1}{2},$$

а изъ ур-ія (43)

$$y_0 = -\frac{1}{4} - 2\frac{ai}{bg}.$$

Отсюда видимъ, что положеніе оси параболы отъ уклона не зависитъ: вершина параболы всегда приходится на линіи *AD* (ибо $x_0 = const$). Положеніе же вершины на этой прямой уже зависитъ отъ уклона: съ увеличеніемъ i она опускается. Въ разсматриваемыхъ предѣлахъ измѣненія i ордината вершины, y_0, измѣняется отъ $(-2^1/_4)$ (точка *A*) до $(-^1/_4)$ (точка *B*). Нетрудно убѣдиться, что параметръ параболы также не зависитъ отъ уклона и есть величина постоянная, равная $^1/_2$. Слѣдовательно, измѣненіе уклона заставляетъ всю параболу перемѣщаться вдоль своей оси параллельно самой себѣ, при чемъ она занимаетъ положенія отъ *Aa* до *Bb*.

Обѣ крайнія параболы пересѣкаютъ ось *x* въ точкахъ, координаты которыхъ опредѣлимъ, полагая въ ур-іи (43) $y = 0$ и подставляя соотвѣтственныя значенія дроби $\frac{ai}{bg}$.

Для крайней параболы *Aa*, для которой $\frac{ai}{bg} = 1$, находимъ изъ (43), что $y = 0$ при $x = 1$ (отрицательнаго корня не разсматриваемъ, такъ какъ онъ не относится къ вопросу). Такъ какъ далѣе, какъ уже было сказано, x можетъ быть только правильной положительной дробью, а y должно быть < 0, то нашему разсмотрѣнію подлежатъ только тѣ дуги параболъ (43), которыя проходятъ между отрицательной осью *y*, положительной *x* и прямою *MN*, т.-е. лежатъ внутри площади *KOM*, при чемъ точка *M* принадлежитъ крайней параболѣ *Aa*. Слѣдовательно, при какомъ-нибудь i, для котораго $1 > \frac{ai}{bg} > 0$, когда ур-іе (43) представляетъ, напр., параболу *Cc*, скачокъ будетъ выше H, если x меньше отрѣзка $OP = x_0$. Находимъ длину этого отрѣзка x_0, для чего въ ур-іи (43) полагаемъ $y = 0$:

$$x_0 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 2\frac{ai}{bg}}.$$

Далѣе, мы знаемъ, что скачокъ получается, вообще, тогда, когда h_0 не только менѣе H, но и менѣе критической глубины $H_1 = H\sqrt[3]{\frac{ai}{bg}}$. Въ виду этого обозначенію (42) можно дать видъ:

$$x = \frac{h_0}{H_1}\sqrt[3]{\frac{ai}{bg}},$$

гдѣ $\frac{h_0}{H_1}$ есть правильная дробь. Неравенство (41) будетъ удовлетворено, если $x < x_0$, т.-е. если:

$$\frac{h_0}{H_1}\sqrt[3]{\frac{ai}{bg}} < -\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+2\frac{ai}{bg}}.$$

Отсюда находимъ, что глубина за скачкомъ будетъ больше глубины равномѣрнаго теченія, если будетъ удовлетворяться условіе:

$$\frac{h_0}{H_1} < \frac{-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+2\frac{ai}{bg}}}{\sqrt[3]{\frac{ai}{bg}}}.$$

Легко видѣть, что отношеніе въ правой половинѣ неравенства, при всѣхъ разсматриваемыхъ значеніяхъ уклона $\left(0 < \frac{ai}{bg} < 1\right)$, само измѣняется въ предѣлахъ отъ 1, при $\frac{ai}{bg} = 1$, до 0, при $\frac{ai}{bg} = 0$; получающаяся въ послѣднемъ случаѣ неопредѣленность раскрывается по общимъ правиламъ анализа. Оставаясь въ этихъ предѣлахъ непрерывнымъ и не имѣя здѣсь ни максимума, ни минимума, это выраженіе, вообще, представляется въ разсматриваемыхъ предѣлахъ *правильной дробью*. Называя эту дробь буквой δ, заключаемъ, что глубина h за скачкомъ будетъ больше глубины H равномѣрнаго теченія, если передъ скачкомъ не только соблюдено условіе $h_0 < H_1$ согласно § 33, но и выполнено требованіе:

$$h_0 < \delta H_1, \qquad \qquad (44)$$

гдѣ

$$1 > \delta > 0.$$

Итакъ, на фиг. 195, представляющей случай скачка при малыхъ уклонахъ, можно провести третью линію PQ, параллельную дну, на разстояніи отъ него равномъ δH_1. Если въ M глубина меньше этой величины, то скачокъ подымается выше AB, что и представлено на фигурѣ. Если же въ каналѣ нѣтъ точки съ глубиною ниже линіи PQ, а есть только точки между PQ и CD, то скачокъ прямой AB достигнуть не можетъ. То же самое положеніе можно выразить иначе, имѣя въ виду, что глубина въ каналѣ опредѣляется расходомъ и скоростью: если вода поступаетъ въ каналъ, обладая достаточнымъ запасомъ живой силы ($h_0 < \delta H_1$), то она въ состояніи подняться выше прямой AB; если же этотъ запасъ недостаточенъ ($H > h_0 > \delta H_1$), то до этой высоты она подняться не сможетъ.

Сообразно съ этимъ долженъ, конечно, видоизмѣняться и внѣшній видъ скачка: въ первомъ случаѣ, придерживаясь схемы (фиг. 195), имѣется [illegible]ный скачокъ, оттѣсненный отъ отверстія на нѣкоторое разстояніе, тѣмъ большее, чѣмъ больше скорость вытеканія, такъ какъ, конечно, глубина можетъ возрасти до H_1 только на протяженіи нѣкотораго конечнаго пути. Если вода можетъ подпрыгнуть выше линіи **AB**, то поверхность за скачкомъ покрывается волнами (фиг. 201). Во второмъ случаѣ собственно скачокъ, какъ внезапное повышеніе горизонта, будетъ отсутствовать, такъ какъ, согласно § 33, уровень воды можетъ устойчиво удержаться между прямыми **AB** (равномѣрнаго теченія) и **CD** (критической) только на участкѣ передъ скачкомъ пониженія. Если этого нѣтъ, т.-е. если мы имѣемъ достаточно длинный каналъ, то вода своимъ уровнемъ, опредѣляемымъ условіями дальнѣйшаго теченія по каналу, напр., уровнемъ равномѣрнаго теченія **AB**, подойдетъ къ сосуду вплотную, такъ что истеченіе будетъ происходить подъ уровень, конечно, сильно волнуя всю массу жидкости. Подобный случай при водосливѣ представленъ на фиг. 104.

Сдѣлаемъ еще одно замѣчаніе. При скачкѣ на маломъ паденіи дна нѣтъ, повидимому, причины волновать поверхность за скачкомъ только въ исключительномъ случаѣ $h_0 = \delta H_1$, когда глубина за скачкомъ сразу дѣлается точно равной глубинѣ равномѣрнаго теченія; вообще же это волненіе неизбѣжно, такъ какъ только случайно можетъ оказаться причина, способная удержать воду на вычисленной глубинѣ; безъ такой причины вода неизбѣжно упадетъ на меньшую глубину, опять подымется и т. д., т.-е. поверхность скачка покроется волнами. При скачкѣ на крутыхъ паденіяхъ, наоборотъ, совсѣмъ нѣтъ, повидимому, причины къ такому волненію: пройдя его, вода должна плавно подниматься по кривой **BA** (фиг. 197). Это соображеніе вполнѣ подтверждается и точными изысканіями Буссинека *), а также и опытомъ: въ послѣднемъ случаѣ, т.-е. при крутомъ паденіи, скачокъ **DB** представляетъ почти отвѣсную стѣнку, покрытую пѣной, которая увлекается, конечно, и на поверхность **BA**, но эта послѣдняя никогда не представляетъ той бурно волнующейся и покрытой широкими волнами поверхности, которая всегда наблюдается въ скачкахъ при малыхъ паденіяхъ.

Мы уже упоминали, что скачокъ сопровождается потерей живой силы, подобно тому, какъ происходитъ потеря напора при внезапномъ расширеніи трубы. Опредѣлимъ величину этой потери.

Передъ скачкомъ въ **AB** (фиг. 200) вода несетъ въ каждомъ килограммѣ запасъ живой силы, который можно оцѣнить, какъ мы видѣли, количествомъ $\frac{\alpha' v_0^2}{2g}$. За скачкомъ въ **CD** вода поднимается на высоту $h - h_0$, которую можно опредѣлить по ур-ію (40), и, кромѣ того, несетъ запасъ живой силы $\frac{\alpha' v^2}{2g}$. Разность этихъ двухъ величинъ и есть чистая потеря, происходящая отъ скачка, такъ какъ вліяніе внѣшняго тренія ничтожно,

*) Однако выведенное нами соотношеніе (44) не встрѣчается ни въ курсахъ Гидравлики другихъ авторовъ, ни въ изслѣдованіяхъ Boussinesq'a.

по сравнительной малости длины *BD*, вліяніе же внутренняго тренія уже оцѣнено въ коэф-тѣ α'. Итакъ, потеря напора опредѣляется такъ:

$$\eta = \frac{\alpha'}{2g}(v_0^2 - v^2) - (h - h_0).$$

Собственно говоря, величину $(h - h_0)$ слѣдовало бы умножить на $\cos i$, такъ какъ мы брали глубину не вертикально, а перпендикулярно дну. Но такъ какъ даже и при крутомъ паденіи, напр., въ 0,005, наклонъ дна не превосходитъ $20'$, то *cos* столь малаго угла можно считать равнымъ единицѣ. По той же причинѣ это ур-іе предполагаетъ, что точки *B* и *D* лежатъ на одной горизонтальной линіи. Наконецъ, членъ $(h - h_0)$ представляетъ приращеніе въ каждомъ килограммѣ воды работы вѣса и работы гидродинамическаго давленія на перемѣщеніи отъ *AB* до *CD*, въ предположеніи параллельности струй въ этихъ крайнихъ сѣченіяхъ.

Разлагая разность квадратовъ на два множителя и имѣя въ виду ур-іе (39), получимъ:

$$\eta = \frac{\alpha'}{2g}\left(\frac{Q}{lh_0} + \frac{Q}{lh}\right) \cdot \frac{g}{2\alpha' Q}(h^2 l - h_0^2 l) - (h - h_0) =$$

$$= \frac{1}{4}\frac{(h^2 - h_0^2)(h + h_0)}{h_0 h} - (h - h_0).$$

Отсюда, помощью простыхъ преобразованій, получимъ окончательно:

$$\eta = \frac{(h - h_0)^3}{4hh_0}.$$

Впервые обратилъ вниманіе на эту потерю и вычислилъ ее Bélanger. Пользуясь ур-іемъ расхода, ту же самую потерю напора можно представить еще такъ:

$$\eta = \frac{Q(v_0 - v)^3}{4lv^2 v_0^2}.$$

Какъ видно, величина этой потери отличается отъ величины потери напора, вычисленной по принципу Борда-Карно.

Здѣсь необходимо сдѣлать оговорки для двухъ замѣчаній, сдѣланныхъ выше. Въ § 33 по поводу фиг. 196 мы сказали, что скачокъ представляетъ прямую выгоду. Это вѣрно до тѣхъ поръ, пока большая величина скорости v_2 входа въ каналъ естественно получается вслѣдствіе требованій конструкціи двигателя, для котораго, вообще, какъ увидимъ позднѣе, малая величина v_2 есть одно изъ существенныхъ условій выгодности работы. Если же для полученія достаточно большой величины v_2, въ видахъ получить скачокъ, пришлось бы построить двигатель съ невыгодною для него величиною v_2, то это была бы двойная потеря,—и на двигателѣ, и на томъ, что изъ напора $\frac{v_2^2}{2g}$ часть его оказалась бы безвозвратно потерянной, какъ мы это только что видѣли, и не была бы утилизирована даже для отведенія воды отъ двигателя.

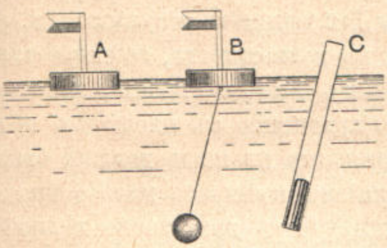
Во-вторыхъ, въ этомъ параграфѣ мы указали, что при крутомъ паденіи дна ($i > i_0$) «нѣтъ, повидимому, причины» для образованія волнующейся поверхности. Причина, несомнѣнно, есть,—это только что вычисленная потеря напора при скачкѣ. Но она одинаково есть и при малыхъ уклонахъ, при которыхъ есть, сверхъ того, другая причина, вызывающая волненіе, указанная выше; въ итогѣ въ этомъ второмъ случаѣ волненіе гораздо значительнѣе, чѣмъ въ первомъ.

§ 35. Гидрометрическіе приборы.

Если извѣстны площадь живого сѣченія потока F и средняя скорость v, то секундный расходъ опредѣляется произведеніемъ Fv. Площадь живого сѣченія, опредѣляется тщательнымъ промѣромъ. Для опредѣленія же скорости служатъ гидрометрическіе приборы.

Опишемъ нѣкоторые наиболѣе употребительные типы.

Поплавки (фиг. 204) устраиваются или въ видѣ легкаго тѣла *A* *), доски или шара, окрашеннаго въ яркій цвѣтъ или снабженнаго какимъ-нибудь знакомъ, чтобы его было хорошо видно (простой поплавокъ), или въ видѣ легкаго тѣла *B* съ подвѣшеннымъ грузомъ (двойной поплавокъ), или же въ видѣ полаго шеста *C*, наполненнаго внизу тяжелымъ тѣломъ, наприм., свинцомъ.



Фиг. 204.

При измѣреніяхъ нужно выбирать участокъ рѣки возможно прямолинейный, съ ровнымъ дномъ; теченіе на этомъ участкѣ должно быть возможно равномѣрнымъ. Измѣренія слѣдуетъ производить въ тихую погоду. Длина участка должна быть возможно велика, не менѣе 50 *mtr*, а лучше брать больше 100 *mtr*. Перпендикулярно къ теченію рѣки провѣшиваютъ двѣ линіи; разстояніе между ними вымѣряютъ со всею возможною точностью. У начальной и конечной линіи располагаются два наблюдателя со свѣренными часами, отмѣчающіе моменты прохожденія поплавка черезъ эти линіи. Чѣмъ короче длина участка, служащаго для измѣренія скорости теченія, и чѣмъ больше эта послѣдняя, тѣмъ точнѣе должно производить измѣреніе времени. Вообще секундная стрѣлка на часахъ необходима, а еще лучше употреблять секундомѣры, пускаемые въ ходъ одновременно со спускомъ поплавка и останавливаемые у каждой предѣльной линіи въ моменты прохожденія черезъ нее поплавка; искомое время дается разностью показаній обоихъ секундомѣровъ, которую можно взять изъ сличенія записей обоихъ наблюдателей. Поплавокъ слѣдуетъ спускать на воду метровъ на 25

*) Часто употребляютъ закупоренную бутылку, отчасти наполненную пескомъ.

выше первой линіи, чтобы онъ, подойдя къ ней, успѣлъ уже пріобрѣсти скорость теченія. Необходимо наблюдать, сохраняетъ ли поплавокъ свое положеніе по ширинѣ канала, т.-е. идетъ ли онъ все время въ одномъ и томъ же направленіи, въ которомъ было вымѣрено разстояніе. Полезно поэтому по провѣшеннымъ линіямъ протянуть шнуры съ отмѣтками, дѣлящими ширину рѣки на равныя части. При измѣреніи скорости посерединѣ рѣки поплавокъ слѣдуетъ спускать тоже по серединѣ, и третій наблюдатель, находящійся въ лодкѣ ниже второй линіи, долженъ замѣтить, прошелъ ли поплавокъ посерединѣ и вторую линію. Если желаютъ мѣрить скорость не на серединѣ, то поплавокъ нужно спускать нѣсколько ближе къ берегу, нежели та линія, на которой желаютъ найти скорость, такъ какъ поплавокъ всегда нѣсколько сбивается въ сторону большей скорости, т.-е. къ серединѣ. Наблюдатель въ лодкѣ долженъ возможно точно отмѣтить то мѣсто ширины, гдѣ поплавокъ прошелъ вторую линію. Зная время прохожденія и пройденный путь, легко найти скорость, считая движеніе равномѣрнымъ.

Простой поплавокъ даетъ скорость на поверхности. Очевидно, онъ долженъ быть возможно легокъ, чтобы его собственный вѣсъ давалъ возможно малую слагающую по теченію. Поэтому ихъ дѣлаютъ часто полыми.

Если поплавкомъ обнаружена скорость v, то среднюю скорость v_m во всей вертикальной плоскости, въ которой онъ двигался, можно считать равной $0{,}8\,v$, если дно неровное и рѣка не широка; если же дно очень ровно и рѣка широка, то можно считать v_m равной $0{,}9\,v$. Обыкновенно считаютъ $v_m = 0{,}84 - 0{,}85\ v$ (сравни послѣднія 4 формулы въ § 31) *).

Двойные поплавки употребляются для измѣренія скорости на глубинѣ. Это очень простой, но несовершенный приборъ. Для точности результата, т.-е. если желаютъ, чтобы весь приборъ двигался, по возможности, со скоростью нижняго шара, нужно, очевидно, чтобы площадь живого сѣченія, занятая нижнимъ шаромъ, была достаточно велика по сравненію съ площадью прочихъ частей (нити и поплавка); въ то же время эта площадь должна быть возможно мала, чтобы находиться подъ вліяніемъ возможно малаго числа струй. Удѣльный вѣсъ нижняго тѣла долженъ быть достаточно великъ, чтобы быстро погрузиться, не успѣвая пріобрѣсти бо̀льшую скорость среднихъ струй, и чтобы не очень качаться отъ неизбѣжныхъ при его погруженіи вихревыхъ движеній вокругъ него. Съ другой стороны, онъ долженъ быть легокъ, такъ какъ иначе вѣсъ его будетъ его гнать равномѣрно ускоренно. Верхнее тѣло должно быть возможно мало, чтобы не вліять на скорость всей системы, но объемъ его долженъ быть достаточенъ, чтобы поддерживать нижнее тяжелое тѣло. Наконецъ, нить должна быть возможно тонка, чтобы не вліять на результатъ, но достаточно прочна, чтобы выдержать вѣсъ нижняго тѣла на воздухѣ. Самыя тонкія нити при большихъ глубинахъ все-таки вліяютъ на результатъ. Такимъ противорѣчивымъ условіямъ, конечно, удовлетворить нельзя.

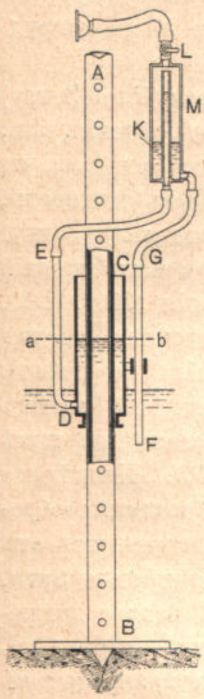
Гидрометрическіе шесты двигаются подъ вліяніемъ многихъ струй,— слѣдовательно, идутъ съ нѣкоторой средней скоростью. Чтобы палка шла со скоростью, средней для всей вертикали, длина погруженной ея части должна быть около $0{,}92 - 0{,}94$ глубины рѣки на этой вертикали. Если рѣка

*) Примѣчаніе см. на стр. 417.

очень широка, то скорость v, опредѣленную такой палкой посерединѣ рѣки, можно считать за среднюю скорость во всемъ сѣченіи. Если рѣка узка, дно ровное, а сѣченіе имѣетъ форму, приближающуюся къ сегменту круга или къ трапеціи, то эту скорость v нужно умножить на коэф-тъ, меньшій единицы, чтобы получить величину, близкую къ средней скорости всего сѣченія.

При всѣхъ этихъ измѣреніяхъ, конечно, важно, чтобы они происходили при одинаковыхъ условіяхъ погоды и стоянія воды. Живое сѣченіе нужно измѣрить въ нѣсколькихъ мѣстахъ по длинѣ выбраннаго участка, чтобы убѣдиться, что движеніе на немъ близко къ равномѣрному, и взять среднее изъ полученныхъ измѣреній.

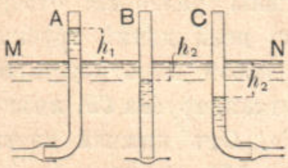
Съ помощью *гидрометрической трубы Франка* (Frank), исполняемой фирмою Falter & Sohn въ Мюнхенѣ, измѣряется средняя скорость на всей вертикали живого сѣченія, такъ что при употребленіи этого прибора достаточно измѣрить точно лишь одно живое сѣченіе. Схема устройства этого прибора состоитъ въ слѣдующемъ (фиг. 205). Трубка ***AB***, открытая сверху, въ нижнемъ концѣ снабжена тарельчатымъ башмакомъ ***B***, снабженнымъ остріемъ; съ помощью этого башмака она упирается въ дно и, съ примѣненіемъ соотвѣтствующихъ мѣръ, устанавливается вертикально. Вдоль одной изъ образующихъ трубы, на близкомъ другъ отъ друга разстояніи (около 25 *mm*), насверлены маленькія отверстія (діаметромъ около 2 *mm*) по всей длинѣ трубки. Вдоль трубки можетъ быть на любой высотѣ установлена наружная, сравнительно короткая, трубка ***CD***, имѣющая въ ***D*** герметическое соединеніе. Отъ нижней части этой трубки ***CD*** отвѣтвляется трубка ***DEK***. Съ другой стороны, вдоль ***CD***, укрѣплена трубка ***GF***; ея конецъ ***F***, спущенный нѣсколько ниже ***D***, имѣетъ недлинные прорѣзы вдоль четырехъ взаимно перпендикулярныхъ образующихъ. Наконецъ, на трубку ***AB*** внизу надѣвается руль, не указанный на чертежѣ, позволяющій поставить трубку такъ, чтобы ея отверстія расположились какъ разъ противъ теченія. При измѣреніяхъ трубка ***CD*** закрѣпляется такъ, чтобы конецъ ***D*** былъ опущенъ въ воду на 8—10 *cm*. Натекающая на трубку ***AB*** вода подымаетъ въ ней, а слѣдовательно, въ ***CD*** и въ ***DE***, уровень воды до какой-нибудь линіи ***ab***, лежащей выше уровня воды въ рѣкѣ. Такъ какъ этотъ подъемъ вызванъ вліяніемъ скорости цѣлаго ряда точекъ по вертикали, то можно считать, что онъ вызванъ средней скоростью (теоретически это, конечно, невѣрно). Въ трубкѣ же ***FG***, благодаря ея четыремъ прорѣзамъ, уровень довольно близко совпадаетъ съ горизонтомъ въ рѣкѣ. Такимъ образомъ, о величинѣ средней скорости можно судить по разстоянію уровней въ трубкахъ ***DE*** и ***FG***. Для удобства отсчетовъ трубки соединены съ манометромъ ***M*** такъ, что отъ конца ***E*** идетъ каучуковая трубка къ внутренней стеклянной трубкѣ ***K***, а



Фиг. 205.

отъ конца **G**—къ наружной стеклянной трубкѣ **M**. Въ верхней оправѣ трубки **M** поставленъ кранъ **L**, отъ котораго далѣе идетъ каучуковая трубка; помощью мундштука ртомъ, а при большой высотѣ прибора особымъ насосомъ, можно присосать въ манометръ воду какъ изъ **DE**, такъ и изъ **GF**, а такъ какъ въ манометрѣ обѣ трубки вверху сообщаются, то въ немъ мы увидимъ ту же самую разность уровней, которая была въ **DE** и въ **GF**. Эта разность уровней читается на аллюминіевомъ поплавкѣ (запаянная съ обоихъ концовъ трубка; на чертежѣ не показана), плавающемъ внутри трубки **K**. На немъ нуль нанесенъ въ верхнемъ концѣ соотвѣтственно его глубинѣ погруженія при плаваніи; присасываніе дѣлается до тѣхъ поръ, пока поплавокъ не всплыветъ. Отсчетъ дѣлается, конечно, при закрытомъ кранѣ **L**. На поплавкѣ нанесены дѣленія, дающія сразу среднюю скорость въ предѣлахъ отъ 0,1 до 2,2 *mtr/sec*. Остроумный по идеѣ, этотъ приборъ мало распространенъ вслѣдствіе затрудненій при его калибровкѣ; кромѣ того, уровни въ трубкахъ **K** и **M** обычно довольно сильно колеблются, что очень затрудняетъ отсчеты.

Гидрометрическія трубки Пито, видоизмѣненныя *Дарси* (Pitot-Darcy) употребляются для измѣренія скорости въ любой точкѣ живого сѣченія, или, точнѣе,—скорости довольно тонкаго пучка струекъ. Идея ихъ основана на слѣдующемъ явленіи, подмѣченномъ впервые Пито: если въ жидкость, текущую со скоростью v, опустить открытую съ обоихъ концовъ и согнутую въ видѣ буквы Г трубку, при чемъ нижній конецъ повернутъ противъ теченія (фиг. 206, трубка **A**), то вода въ ней поднимется выше уровня **MN** въ потокѣ. Если трубка не имѣетъ загнутаго конца (**B**) или если загнутый конецъ повернутъ по теченію (**C**), то уровень въ нихъ будетъ стоять ниже уровня **MN**. Примѣрное объясненіе этому можно найти въ такихъ соображеніяхъ: въ трубкѣ **A**, струйки, подходя къ отверстію, отклоняются отъ своего теченія (какъ это показываютъ стрѣлки), описывая кривые пути, обращенные къ отверстію своею выпуклостью. Между тѣмъ всякое движеніе по кривой сопряжено съ появленіемъ центробѣжной силы, которая направлена въ сторону, противоположную положенію радіуса кривизны; въ этомъ случаѣ она направлена къ отверстію и вгоняетъ туда воду, поддерживая ее на нѣкоторой высотѣ h_1 надъ уровнемъ **MN**. Въ трубкахъ же **B** и **C** пути, описываемые частицами, обращены къ отверстію своею вогнутою стороною, центробѣжная сила направлена отъ отверстія, уменьшаетъ передъ нимъ давленіе и понижаетъ уровень въ трубкахъ на высоту h_2; понятно, что въ трубкѣ **C** пониженіе нѣсколько болѣе ощутительно, чѣмъ въ **B**, такъ какъ отверстіе подвержено всасывающему дѣйствію бóльшаго числа струекъ.



Фиг. 206.

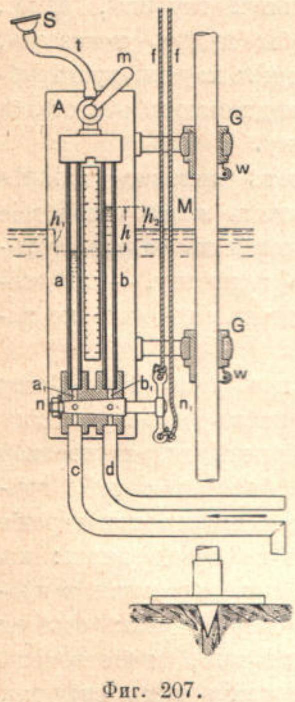
Естественно считать повышеніе h_1 и пониженіе h_2 пропорціональными скоростному напору $\frac{v^2}{2g}$, такъ какъ центростремительное ускореніе пропорціонально квадрату скорости на траекторіи. Поэтому пишутъ:

$$h_1 = \zeta' \frac{v^2}{2g}; \qquad h_2 = \zeta'' \frac{v^2}{2g},$$

гдѣ коэф-ты ζ' и ζ'' опредѣляются опытомъ: въ стоячей водѣ ведутъ трубки съ опредѣленной скоростью и замѣчаютъ высоты h_2 и h_1. По написаннымъ соотношеніямъ можно опредѣлить ζ' и ζ''. Наблюденіе надо повторить при различныхъ скоростяхъ и для ζ' и ζ'' взять среднія изъ полученныхъ значеній. Если отверстія въ трубкахъ велики, то уровень въ нихъ сильно колеблется, что затрудняетъ отсчетъ высотъ h_1 и h_2. Этимъ отверстіямъ Дарси далъ поэтому діаметры только въ 1,5 *mm*.

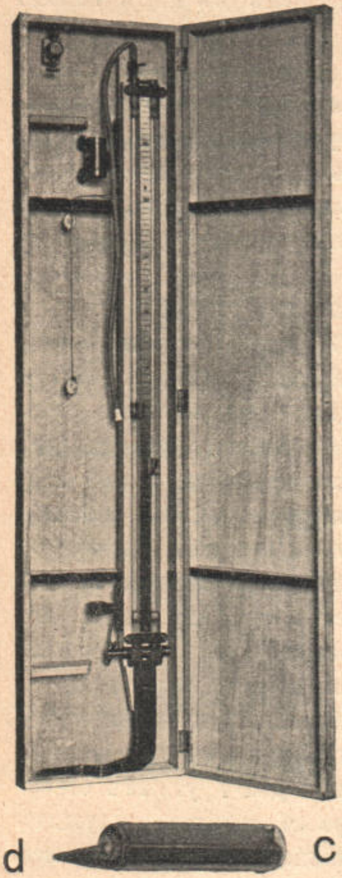
Такія трубки съ цѣлью опредѣленія скорости были примѣнены впервые *Pitot*, но его приборъ состоялъ изъ одной трубки; существенный его недостатокъ представляла трудность отсчета, такъ какъ его нужно производить, не вынимая трубки изъ воды, между тѣмъ какъ уровень колеблется и снаружи трубки, и внутри ея, да и самая высота подъема при малыхъ скоростяхъ слишкомъ незначительна.

Приборъ *Дарси* состоитъ изъ двухъ стеклянныхъ трубокъ a и b (см. схему на фиг. 207), діаметромъ 15—20 *mm*. Вверху эти трубки соединяются общею металлической оправою, снабженною краномъ m, служащимъ для сообщенія или разобщенія трубокъ a и b съ атмосферою. Отъ крана m идетъ каучуковая трубка t, оканчивающаяся костянымъ мундштукомъ S. Въ нижней части обѣ трубки заключены также въ общую оправу съ двумя цилиндрическими каналами a_1 и b_1, составляющими продолженія трубокъ a и b; каждый каналъ затѣмъ продолжается въ металлическую трубку, при чемъ конецъ трубки d загнутъ впередъ противъ теченія, конецъ же трубки c сдѣланъ перпендикулярнымъ къ направленію теченія. Кранъ nn_1, имѣющій два круглыхъ отверстія одинаковаго діаметра съ трубками, служитъ для одновременнаго замыканія трубокъ a и b. Весь приборъ прикрѣпляется къ деревянной доскѣ A, въ которой сдѣланы соотвѣтственныя углубленія для помѣщенія трубокъ и оправъ. Доска поддерживается помощью шеста M, около котораго она можетъ вращаться на втулкахъ G, G; послѣднія можно закрѣпить въ любомъ мѣстѣ шеста посредствомъ винтовъ w. Нижній конецъ шеста заостренъ и снабженъ башмакомъ, а чтобы шестъ не углублялся въ дно потока, служитъ металлическій дискъ. Чтобы нарушенія въ струяхъ, которыя вносятся шестомъ, не отражались на показаніяхъ прибора, дѣлаютъ такъ, что оба конца c и d въ ихъ надлежащемъ относительномъ расположеніи выступали впереди шеста, предварительно обогнувъ его.



Фиг. 207.

Для измѣренія скорости на извѣстной малой глубинѣ приборъ погружаютъ въ воду съ открытымъ краномъ m; при этомъ доска A теченіемъ рѣки устанавливается въ такое положеніе, что колѣно трубки d обращается противъ теченія; если кранъ nn_1 открытъ, то вода въ трубкѣ ac будетъ стоять ниже уровня воды въ потокѣ на нѣкоторую величину h_1, а въ трубкѣ *bd* выше уровня воды въ потокѣ на величину h_2. Закрывъ помощью шнурковъ *f*,*f* кранъ nn_1, вынимаютъ приборъ изъ воды; разность уровней въ обѣихъ трубкахъ $h = h_1 + h_2$ сохранится и можетъ быть прочтена со всей возможной точностью.



Фиг. 208.

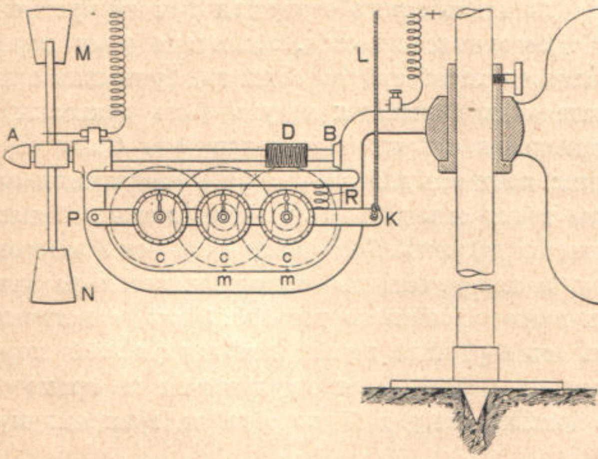
При измѣреніи скорости на большой глубинѣ, помощью мундштука *S* вдуваютъ ртомъ воздухъ въ верхнюю часть трубокъ и такимъ образомъ понижаютъ горизонтъ воды внутри трубокъ одновременно на одну и ту же величину, такъ что разность горизонтовъ при этомъ не измѣнится; закрывъ сначала верхній кранъ *m*, а потомъ нижній nn_1, вынимаютъ приборъ изъ воды для отсчета. Наоборотъ, при измѣреніи скорости на незначительной глубинѣ, напр., у берега, для того, чтобы видѣть показанія, высасываютъ воздухъ черезъ каучуковую трубку и такимъ образомъ поднимаютъ оба столба на одну и ту же величину.

Волосность не имѣетъ никакого вліянія на точность показаній, такъ какъ вслѣдствіе волосности вода поднимается въ обѣихъ трубкахъ на одну и ту же величину, — слѣдовательно, разность горизонтовъ отъ этого не измѣняется.

Описанная схема приборовъ Pitot-Darcy соотвѣтствуетъ французскимъ конструкціямъ (Salleron, Paris). Въ кабинетѣ гидравлической лабораторіи И. Т. У. имѣется такой приборъ, съ измѣненіемъ, внесеннымъ инженеромъ *Ritter*'омъ и состоящимъ въ слѣдующемъ: къ трубкѣ *c* припаяна еще горизонтальная тонкостѣнная трубка, діаметромъ 10 *mm* и длиною около 80 *mm*; ось ея параллельна горизонтальной части *d*. Это сдѣлано для того, чтобы конецъ пьезометрической трубки не нарушалъ правильнаго теченія тѣхъ струекъ, давленіе въ которыхъ она должна измѣрять; вслѣдствіе этого уровень въ трубкѣ *c* не опускается ниже уровня въ потокѣ, а какъ разъ съ нимъ совпадаетъ. На фиг. 208 представлена фотографія этого прибора; на ней ясно виденъ отгибъ трубокъ, для того чтобы обогнуть шестъ; отдѣльно представлена деталь концовъ трубокъ *c* и *d*.—Существуютъ также нѣмецкія конструкціи такихъ приборовъ, напр., фирмы Amsler Laffon въ Schaffhausen'ѣ; конструктивно онѣ существенно отличаются отъ вышеописанной, не требуя, наприм., выниманія прибора изъ воды для отсчета, что, конечно, весьма удобно; но принципъ устройства остается тотъ же самый. Эти приборы мало пригодны при малыхъ скоростяхъ теченія и для измѣреній на большихъ глубинахъ; обыкновенно ихъ употребляютъ при глубинахъ не болѣе 2 *mtr*.

Слѣдуетъ отмѣтить, что есть полная возможность употреблять приборы, построенные по этому принципу, также для опредѣленія скоростей въ разныхъ точкахъ сѣченія трубъ. Само собою понятно, что для этой цѣли приборъ долженъ получить гораздо болѣе миніатюрные размѣры. Въ настоящее время они примѣняются въ гидравлической лабораторіи И. Т. У. и даютъ вполнѣ удовлетворительные результаты, подобно тому, какъ это было установлено и американскими инженерами.

Устройство *вертушки* (мельницы) *Woltmann*'а первоначальной конструкціи видно изъ схематическаго чертежа (фиг. 209). ***AB*** есть ось, на концѣ ***A*** которой укрѣплены два (или болѣе) наклонныхъ крыла ***MN***. Вслѣдствіе теченія воды крылья и ось приходятъ во вращеніе, и по числу оборотовъ оси за извѣстное время можно судить о скорости теченія. Счетъ оборотовъ ведется десятичнымъ счетчикомъ, состоящимъ изъ червяка ***D*** и трехъ зубчатыхъ колесъ (***C***,***C***,***C***,), для которыхъ передаточное число есть 10*). Колеса счетчика имѣютъ свои опоры въ рычагѣ ***PK***, вращающемся въ шарнирѣ ***P***. Пружина ***R*** постоянно отжимаетъ рычагъ внизъ и стремится вывести счетчикъ изъ зацѣпленія съ червякомъ. Натягивая шнуръ ***L***, привязанный къ свободному концу рычага, наблюдатель можетъ привести счетчикъ въ зацѣпленіе и начать счетъ оборотовъ. По истеченіи опредѣленнаго промежутка времени наблюдатель отпускаетъ шнурокъ, пружина выводитъ счетчикъ изъ зацѣпленія, и счетъ оборотовъ прекращается. Чтобы при выниманіи прибора изъ воды счетчикъ не могъ случайно повернуться, на обоймицѣ, въ которой вращается ось, имѣются два штифта ***m***, которые при расцѣпленіи счетчика входятъ во впадины между зубцами и закрѣпляютъ положенія колесъ.



Фиг. 209.

Приборъ такого же устройства, но болѣе деликатный и чувствительный, можетъ употребляться какъ анемометръ, т.-е. для опредѣленія скорости движенія воздуха или вообще какого-нибудь газа.

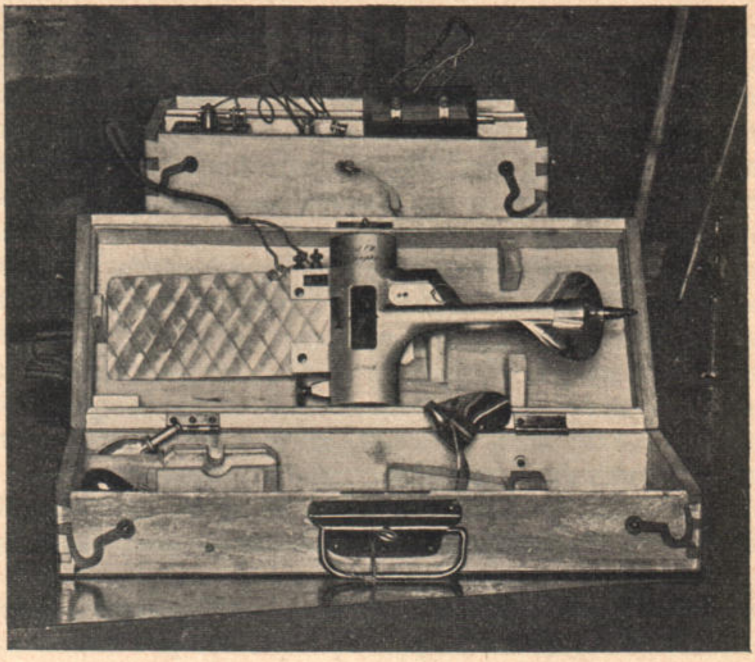
---

*) На схематической фигурѣ 209 это передаточное число не соблюдено.

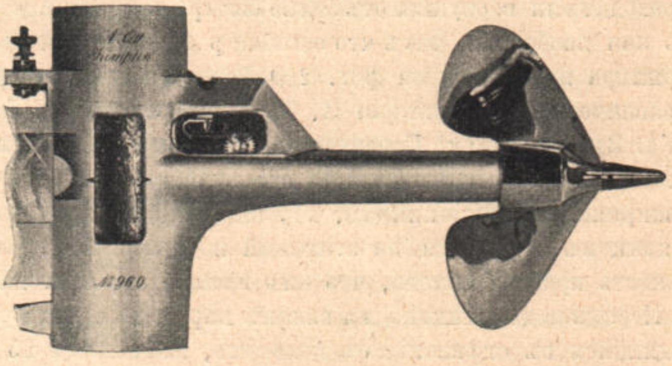
Слабую сторону этой первоначальной конструкціи вертушки представляетъ устройство счетчика. Во-первыхъ, онъ легко засаривается; во-вторыхъ, на точности показаній отражается инерція его частей, такъ какъ въ промежутокъ времени наблюденія включается весь періодъ пуска въ ходъ счетчика; въ-третьихъ, и главнымъ образомъ, затруднительна необходимость для всякаго отсчета вынимать приборъ изъ воды; это очень сильно замедляетъ всю операцію опредѣленія скоростей на данной вертикали, которая и безъ того довольно кропотлива, если число точекъ опредѣленія велико. Поэтому фирмой J. Amsler-Laffon въ Schaffhausen'ѣ давно примѣненъ къ вертушкѣ Вольтмана электрическій счетчикъ. Схема его устройства видна на той же фиг. 209, гдѣ токъ изъ батареи (теперь употребляются сухіе элементы; раньше употребляли токъ отъ спирали Румкорфа) подводится къ металлической оправѣ по одному электроду; а другой электродъ, выступая изъ оправы, въ которой онъ изолированъ, можетъ давать электрическій контактъ съ каждой, или съ одной изъ спицъ вертушки при ея вращеніи. Такимъ образомъ токъ періодически замыкается, благодаря чему передъ наблюдателемъ можетъ появляться какой-нибудь сигналъ, зрительный или слуховой, или эти послѣдовательныя замыканія могутъ быть записаны на лентѣ, равномѣрно перемѣщающейся отъ часового механизма. Само собою понятно, что это только схема: контактъ для замыканія тока долженъ быть надежно обезпеченъ; въ то же время онъ долженъ вносить лишь небольшое сопротивленіе и по возможности долженъ быть защищенъ отъ засоренія и даже отъ воды. Въ разныхъ конструкціяхъ это выполняется различно вплоть, напр., до постановки всего контактнаго устройства въ герметически закрытой коробкѣ, при чемъ ось вертушки не входитъ внутрь этой коробки, и подвижныя части контактовъ приводятся во вращеніе не прямо отъ оси, а благодаря магниту, помѣщенному внѣ коробки и вращающемуся вмѣстѣ съ осью вертушки.

Кромѣ счетчика и его сигнализаціи, вертушки различаются формою крыльевъ. Вмѣсто плоскихъ и косо поставленныхъ лопатокъ, употреблявшихся первоначально, ихъ исполняютъ въ видѣ винтовыхъ поверхностей, постояннаго шага, связанныхъ съ втулкой спицами или продолжающихся вплоть до втулки. Послѣдняя форма введена въ употребленіе австрійскимъ профессоромъ *Harlacher*'омъ, для того чтобы сдѣлать вертушку возможно мало чувствительной къ засоренію водорослями, травою и т. п.—Отмѣтимъ также, что на схемѣ фиг. 209 указанъ руль, удерживающій весь приборъ въ плоскости, опредѣляемой направленіемъ теченія. При этомъ предполагается, что вертушка виситъ на проволочномъ троссѣ, направляемая вертикальнымъ шестомъ, около котораго она можетъ свободно вращаться. Это расположеніе годится при измѣреніи скорости безъ отношенія къ ея направленію. Когда рѣчь идетъ объ измѣреніи расхода, т.-е. объ измѣреніи не самой скорости, а ея слагающей, нормальной къ живому сѣченію, правильнѣе не позволять вертушкѣ вращаться около штанги, такъ или иначе закрѣпляя на ней втулку станины вертушки. Для этой цѣли могутъ служить— штанга и втулка овальнаго или призматическаго сѣченія; можно также закрѣплять вертушку на штангѣ нажимнымъ винтомъ: тогда вертушка не можетъ скользить вдоль по штангѣ, но вмѣстѣ съ нею опускается на ту или другую глубину. Въ *обоихъ случаяхъ руль служитъ не для направленія*, а для уравновѣшенія прибора.—Для предохраненія крыльевъ вертушки и ея тонкой оси отъ поломокъ при случайныхъ ударахъ о твердыя тѣла дна потока, французскій инженеръ *Ritter* предложилъ ставить вокругъ крыльевъ вертушки оправу (короткую, неподвижную круглую цилиндрическую трубку, какъ бы футляръ); при этомъ устройствѣ вертушка даетъ именно лишь слагающую скорости въ томъ направленіи, въ которомъ расположена ея ось.—Наконецъ, есть вертушки, которыя употребляются для измѣренія сразу средней скорости на вертикали (вертушка Гайоша—*Hajós*); это достигается тѣмъ, что вертушку медленно двигаютъ вдоль по вертикали вверхъ и внизъ, напр., со скоростью 0,1—0,2 *mtr/sec*; въ то же время каждый оборотъ колеса вертушки записывается на лентѣ пишущаго прибора, подобнаго телеграфному; на этой лентѣ, кромѣ того, отмѣчаются—пробѣгъ вертушки по вертикали и полусекунды. При чтеніи и обработкѣ этой ленты можно найти значеніе скорости для каждой точки, а также—вычислить среднюю скорость. Останавливая такой приборъ на какой-нибудь точкѣ, удобно вести наблюденія надъ явленіемъ пульсаціи, т.-е. надъ колебаніями скорости въ одной и той же точкѣ сѣченія около нѣкотораго средняго значенія. Процедура измѣренія скорости на вертикали помощью вертушки Гайоша протекаетъ скорѣе, нежели при употребленіи вертушекъ обычнаго типа; зато кабинетная работа подсчета удлиняется; кромѣ того, въ опредѣленіе скорости вносится погрѣшность вслѣдствіе инерціи прибора, который всякій разъ идетъ со своею скоростью, не вполнѣ соотвѣтствующей скорости движенія частицъ воды, окружающихъ приборъ во всякій данный моментъ; къ счастію, скорость прибора временами больше, временами меньше нужной скорости, смотря по тому, переходитъ ли вертушка отъ болѣе быстро текущихъ струй къ болѣе медленнымъ или наоборотъ, такъ что ошибки располагаются въ обѣ стороны.

Для примѣра приводимъ на фиг. 210 фотографію вертушки, принадлежащей гидравлической лабораторіи И. Т. У. и построенной фирмой А. Ott въ Kempten'ѣ. Здѣсь крылья, Гарлахеровской формы, для легкости сдѣланы изъ аллюминія; они навинчиваются на стальной валикъ, который впереди лежитъ на шариковомъ подшипникѣ, хорошо защищенномъ отъ засоренія, а заднимъ концомъ опирается на агатовый подпятникъ. Благодаря этому чувствительность прибора такова, что онъ вращается, если на него просто дуть ртомъ. Передъ подпятникомъ на валикѣ нарѣзанъ однооборотный винтъ, всегда находящійся въ сцѣпленіи съ колесомъ, имѣющимъ 25 зубцовъ. Ось этого колеса лежитъ на остріяхъ, для уменьшенія тренія, и находится всегда въ контактѣ съ однимъ электрическимъ проводомъ. На боковой плоскости этого колеса ввернутъ маленькій штифтъ (см. фиг. 211), который вращается вмѣстѣ съ колесомъ и въ теченіе нѣкоторой части оборота остается въ соприкосновеніи съ маленькой гибкой пружинкой, соединенной съ другимъ проводомъ; все то время, пока штифтъ касается пружинки, токъ замкнутъ, вслѣдствіе чего звонитъ звонокъ. Измѣряя по секундомѣру промежутки времени, протекающіе между моментами прекращенія звонка, находимъ время 1 оборота колеса или 25 оборотовъ оси вертушки. На обѣихъ фигурахъ ясно видны мѣста прикрѣпленія проводовъ къ батареѣ и звонку, овальная форма втулки, нажимной винтъ, которымъ она прикрѣпляется къ штангѣ, а также



Фиг. 210.



Фиг. 211.

прорѣзъ во втулкѣ съ мѣткой, помощью которой можно измѣрить разстояніе отъ оси вертушки до конца штанги; это нужно для установленія вертушки на желаемую глубину или для опредѣленія, на какой глубинѣ она стоитъ. Изъ фотографіи усматривается стремленіе конструктора (фирма A. Ott по указаніямъ главнаго инженера Швейцарскаго гидрометрическаго бюро Эппера—J. Epper) придать всему прибору формы, возможно мало нарушающія теченіе отдѣльныхъ струй потока.

Для того чтобы перейти отъ наблюденій за числами оборотовъ вертушки къ скорости потока, нужно предварительно тарировать ее, подобно тому, какъ это было указано для трубокъ Пито, т.-е. двигать вертушку съ извѣстною скоростью въ стоячей водѣ и замѣчать какъ эту скорость, такъ и числа оборотовъ вертушки въ единицу времени, или, какъ это бываетъ удобно для вычисленій—времена, необходимыя для того, чтобы вертушка сдѣлала то или другое число оборотовъ (обыкновенно отъ звонка до звонка). Пренебрегая той разницей, которая существуетъ въ распредѣленіи струй, натекающихъ на вертушку съ неподвижной осью, и струй, образующихся вокругъ вертушки вслѣдствіе ея движенія въ стоячей водѣ, можно будетъ послѣ такой тарировки дѣлать заключенія о скорости струй, заставившихъ вертушку дать то или иное число оборотовъ въ единицу времени. Имѣются спеціальныя учрежденія, которыя занимаются тарированіемъ такихъ приборовъ, напр., въ Петербургѣ—гидравлическая лабораторія при министерствѣ путей сообщенія; тамъ же—въ лабораторіи для опредѣленія сопротивленія движенію моделей судовъ. Большою извѣстностью пользуются мюнхенская и берлинская лабораторія при политехникумахъ.

Если v есть скорость теченія, или движенія оси вертушки, а n—число оборотовъ крыльевъ (обыкновенно въ *1 секунду*), то связь между этими двумя величинами близка къ пропорціональности, такъ что можно писать:

$$v = a + bn.$$

Однако въ дѣйствительности нѣтъ полной пропорціональности между v и n; истинная связь между ними ближе передается ур-іемъ:

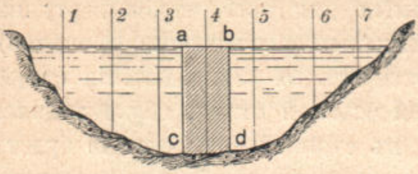
$$v = cn + \sqrt{dn^2 + e}.$$

Эту послѣднюю формулу примѣняетъ мюнхенская лабораторія. Въ первой формулѣ величина a, а во второй—величина $\sqrt{e}$ представляютъ ту скорость, которой соотвѣтствуетъ $n = 0$, т.-е. которой приборъ не чувствуетъ. Конечно, она должна быть возможно мала. Въ приборахъ фирмы A. Ott она достигаетъ 0,035 *mtr/sec*, какъ это, напримѣръ, имѣетъ мѣсто для колеса № 1 вертушки гидравлической лабораторіи Техническаго Училища.

Эпперъ, на своей Бернской станціи для тарированія вертушекъ придерживается первой формулы, какъ болѣе простой; но для согласованія наблюденій съ формулой онъ даетъ каждой вертушкѣ 2 серіи коэффиціентовъ a и b: одна годится для скоростей малыхъ, другая—для большихъ; конечно, указывается также та предѣльная скорость, которая разграничиваетъ примѣненіе этихъ двухъ уравненій *).

*) Здѣсь не мѣсто останавливаться на интересныхъ соображеніяхъ, которыя привели Эппера, а за нимъ и другихъ, къ такому представленію. Упоминаю о немъ лишь для того, чтобы указать, что по этому вопросу есть разныя мнѣнія. Вообще, по предмету гидрометріи, а въ частности по конструкціямъ, тарированію и методамъ употребленія вертушекъ,

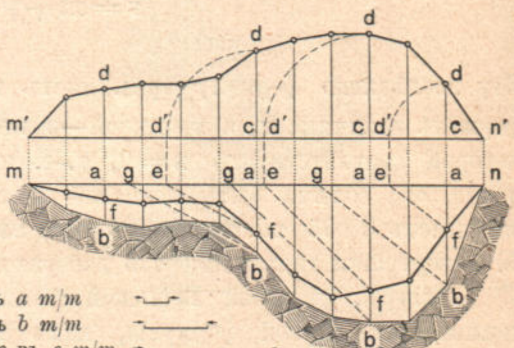
Когда опредѣленіе скоростей служитъ для измѣренія расхода, то въ живомъ сѣченіи намѣчаютъ рядъ вертикалей 1, 2, 3... (фиг. 212); на каждой изъ нихъ въ нѣсколькихъ точкахъ опредѣляютъ скорости и по нимъ находятъ среднія скорости v_1, v_2, v_3,... для каждой вертикали. Это опредѣленіе средней скорости лучше всего дѣлать такъ: нужно построить кривую скоростей, откладывая ихъ отъ одной и той же вертикали. Измѣривъ площадь этой кривой и раздѣливъ на глубину вертикали, получимъ среднюю скорость. Только съ ошибкой можно считать среднюю скорость на вертикали какъ среднее ариѳметическое отдѣльныхъ опредѣленій скорости въ разныхъ точкахъ этой вертикали. Зная далѣе разстояніе между вертикалями и ихъ глубину, легко сосчитать площадь $abcd = \Delta f$, для которой среднюю скорость принимаютъ равною средней скорости v_m на соотвѣтственной вертикали. Взявъ для всего сѣченія сумму $\Sigma \Delta f . v_m$, опредѣлимъ такимъ образомъ расходъ.



Фиг. 212.

Вмѣсто такого суммированія расходовъ въ отдѣльныхъ элементахъ живого сѣченія, заключенныхъ между смежными вертикальными линіями можно представить себѣ все живое сѣченіе раздѣленнымъ на элементы вертикальными и горизонтальными линіями, выбранными въ соотвѣтствіи съ тѣми точками, въ которыхъ опредѣлены скорости. Послѣ этого придется сложить всѣ произведенія отдѣльныхъ элементарныхъ площадей на соотвѣтствующія скорости.

Удобно построеніе *Harlacher*'a, дающее графически величину расхода. Вычерчиваемъ (фиг. 213) живое сѣченіе **mbbbn**; для общности допустимъ, что въ горизонтальномъ направленіи 1 *mtr* представленъ *a mm*, а въ вертикальномъ—*b mm*. Проводимъ въ этомъ живомъ сѣченіи тѣ вертикали **ab**, **ab**, **ab**, въ которыхъ опредѣлены среднія скорости v_m. Продолжаемъ ихъ кверху и отъ



Масштабъ горизонталей 1 *mtr* въ *a m/m*
„ вертикалей 1 *mtr* въ *b m/m*
„ для скоростей 1 *mtr/sec* въ *c m/m*

Фиг. 213.

какой-нибудь прямой **m'n'**, параллельной **mn**, откладываемъ на соотвѣтственныхъ вертикаляхъ среднія скорости $v_m = cd$ въ новомъ масштабѣ, принимая *c mm* за 1 *mtr/sec*. Получаемъ кривую скоростей **m'dddn'**. Переносимъ

существуетъ цѣлая литература. Кромѣ такихъ энциклопедическихъ изданій, какъ отдѣлъ Der Wasserbau въ Handbuch der Ingenieurwissenschaften, укажемъ: *Н. Тяпкинъ*—„Приборы для опредѣленія скоростей и расходовъ воды въ открытыхъ руслахъ". Москва, 1901 г. *W. Müller*—Hydrometrie. Hannover, 1903. Также *Schweizerische Bauzeitung*, второе полугодіе 1906 года—

скорости cd въ cd' и въ ae. Отъ точекъ a въ ту же сторону откладываемъ $ag = c$, т.-е. той длинѣ, которая была принята за скорость въ 1 mtr/sec, и соединяемъ точки g съ точками b профиля сѣченія. Проведя далѣе линіи ef параллельно bg, получаемъ рядъ точекъ f, которыя соединяемъ непрерывной кривой $mfffn$. По построенію легко видѣть, что $af = ab \frac{ae}{ag}$, или если отдѣльнымъ отрѣзкамъ придавать значеніе не только длинъ, но и изображаемымъ ими величинъ, то

$$af = \frac{hv}{1} = hv,$$

гдѣ h есть глубина ab. Принимая линію mn за ось x-овъ и называя ширину mn черезъ l, получимъ, что площадь F кривой $mfffnm$ выражается черезъ

$$F = \int_0^l hv\,dx.$$

Эту площадь удобно измѣрить планиметромъ. Съ другой стороны расходъ Q, очевидно, равенъ:

$$Q = \int_0^l hv\,dx = F.$$

Отсюда видно, что площадь кривой $mfffnm$ представляетъ собою расходъ Q, при чемъ, конечно, каждая изъ входящихъ въ выраженіе F величинъ (h, l, v) должна быть взята въ соотвѣтствующемъ масштабѣ. Если, какъ выше сказано, буквами a, b и c обозначены тѣ числа миллиметровъ, которыя приняты за единицу соотвѣтствующихъ изображаемыхъ величинъ, и если буквой F обозначимъ то число квадратныхъ миллиметровъ, которое мы получимъ послѣ обмѣра планиметромъ площади кривой $mfffnm$, то расходъ въ кубическихъ метрахъ въ секунду найдемъ такъ:

$$Q = \frac{F}{abc}\, mtr^3/sec.$$

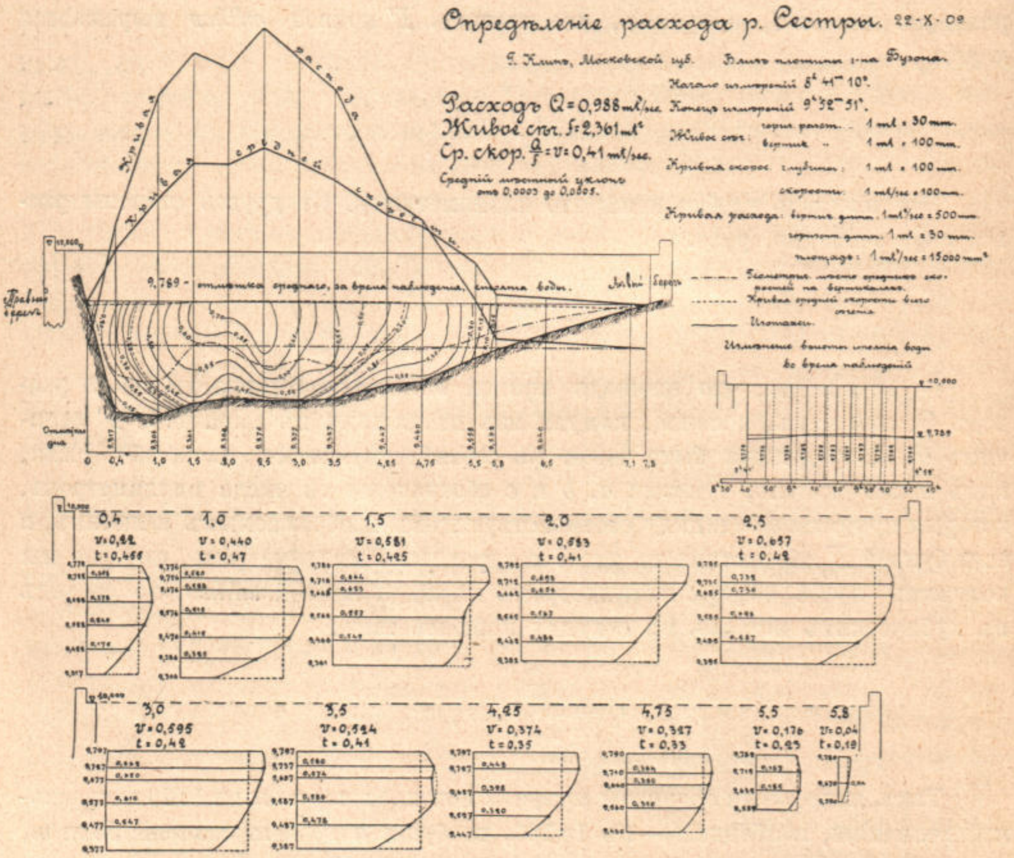
Такъ, напр., если ординаты профиля потока вычерчены въ 1 : 20 натуральной величины, а абсциссы—въ 1 : 100, то буква a имѣетъ значеніе 50 m/m,

---

рядъ статей о вертушкахъ фирмы A. Ott на Миланской выставкѣ. Особенно интересна работа *J. Epper*—Die Entwicklung der Hydrometrie in der Schweiz. Bern, 1907. Здѣсь на стр. 41—68 и многочисленныхъ таблицахъ не только описаны современные инструменты и пріемы работы, практикуемые Швейцарскимъ гидрометрическимъ бюро, но также подробно указана новѣйшая литература этого и смежныхъ вопросовъ. Кромѣ того, нерѣдко встрѣчаются статьи о вертушкахъ въ журналѣ „Annales des ponts et chaussées“ (напр., за 1885 годъ, стр. 1058, за 1898 годъ, 3-й триместръ, стр. 287). Также см. разные годы отчетовъ „Water Suppley and Irrigation Papers of the United States Geological Survey, напр., 1891, 1901, 1904. Также Proceedings of the American Society of civil engineers, наприм., за 1909 годъ, августъ, стр. 542 и т. д.

а буква b—10 m/m; кромѣ того, пусть скорости отложены въ масштабѣ 1 mtr/sec въ 25 m/m. При этихъ условіяхъ 1 mm^2 діаграммы живого сѣченія имѣетъ значеніе $\frac{1}{50 \cdot 10}$ mtr^2, а 1 mm діаграммы скоростей имѣетъ значеніе $\frac{1}{25}$ mtr/sec. Поэтому 1 mm^2 діаграммы $mf\ldots m$ равенъ $\frac{1}{50 \cdot 10 \cdot 25} = \frac{1}{12500}$ mtr^3/sec.

Въ качествѣ примѣра на фиг. 214 приведены результаты обмѣра расхода на р. Сестрѣ близъ г. Клина, Московской губерніи; этотъ обмѣръ былъ исполненъ 22 октября 1909 года студентами Училища. На таблицѣ приве-



Фиг. 214.

дено живое сѣченіе съ надписанными отмѣтками дна, при чемъ условная отмѣтка 10,000 отнесена къ той мѣткѣ, отъ которой отмѣривалась всякій разъ высота уровня въ рѣкѣ. Тутъ же нанесена кривая средней скорости и кривая произведеній изъ средней скорости на соотвѣтствующія глубины профиля. Эти произведенія не строились, какъ въ пріемѣ Гарлахера, а вычислялись. Ясно, что площадь этой кривой представляетъ расходъ всего сѣченія, а потому она названа кривой расхода. Въ живомъ сѣченіи нанесены изотахси черезъ каждые 0,05 *mtr/sec*; далѣе соединены точки, идущія со средней скоростью всего сѣченія, и наконецъ соединены точки, идущія со средней скоростью каждой вертикали. Въ теченіе измѣренія уровень въ рѣкѣ колебался. На отдѣльной фигурѣ представлены колебанія уровня во времени: наблюденія начались въ $8^h\,41^m$ утра при отмѣткѣ уровня 9,772 и кончились въ $9^h\,52^m$ утра при отмѣткѣ уровня 9,780. Планиметромъ была опредѣлена средняя за все время наблюденій отмѣтка уровня 9,789 и она принята при опредѣленіи площади живого сѣченія и расхода. Вертикали, на которыхъ производилось измѣреніе скоростей, занумерованы отъ праваго берега къ лѣвому такъ, что номеръ вертикали даетъ ея разстояніе отъ урѣза воды на правомъ берегу. Для каждой вертикали приведены кривыя скоростей, какъ онѣ опредѣлились измѣреніемъ вертушкою фирмы A. Ott. Надъ каждой кривой скоростей надписаны: номеръ вертикали, вычисленная средняя скорость v, наблюденная глубина профиля t (не отнесенная къ среднему стоянію уровня); кромѣ того, слѣва записаны отмѣтки уровня воды, дна и всѣхъ положеній оси вертушки при измѣреніяхъ; для каждаго такого положенія записаны наблюденныя скорости. Скорости у дна и на поверхности намѣчались на основаніи общаго хода кривой; при этомъ въ нѣкоторыхъ случаяхъ, какъ, напр., на вертикали 3,5, случайная неправильность вида кривой не принималась во вниманіе при продолженіи кривой скорости до свободной поверхности. Площадь каждой кривой скорости обмѣрялась планиметромъ, дѣлилась на глубину вертикали и такимъ путемъ

Рѣка .... Инструментъ ....

Мѣсто измѣренія .... дня .... 19 ...... г.

Время начала отсчетовъ.	№ вертикали.	Глубина погруженія оси вертушки.	Отсчеты черезъ 25 оборотовъ оси вертушки. Показанія секундомѣра и разности Δt показаній.					Сумма Δt.	Число разностей Δt.	Средняя разность Δt.	Среднее число оборотовъ въ 1^s.	Скорость v.	Примѣчанія и эскизы.
1	2	3	4					5	6	7	8	9	10
$9^h\,27^m$	3,5	118	48″	28^m 2″	16″	29	43	69	5	13,8		0,478	
			14	14	13	14							
			43	57									
			14										
		108	57	29^m 8′	20	32	43	57	5	11,4		0,580	
			11	12	12	11							
			43	54									
			11										

находилась средняя скорость: на всѣхъ кривыхъ эта средняя скорость нанесена какъ пунктирная линія, дающая прямоугольникъ, равновеликій по площади съ данной кривой.—Площади живого сѣченія и кривой расхода обмѣрены планиметромъ.

При измѣреніяхъ скоростей удобно пользоваться журналомъ слѣдующаго вида. (См. на стр. 415).

Требуютъ поясненія записи въ слѣдующія графы. Въ столбцѣ 3 записывается глубина погруженія оси вертушки. При разныхъ конструкціяхъ прибора необходимо изобрѣсти тотъ или другой пріемъ отсчета этой величины, возможно простой, чтобы избѣжать ошибокъ. Когда употребляется вертушка, прочно прикрѣпляемая къ штангѣ, то удобно нанести предварительно на штангѣ дѣленія, нуль которыхъ стоялъ бы на томъ ея концѣ, который будетъ на днѣ. Разстояніе отъ оси вертушки до этого нуля, т.-е. до конца штанги, замѣчается до начала опыта и записывается, въ случаѣ нужды съ эскизомъ, въ графѣ 10. Затѣмъ штанга вставляется въ штативъ, укрѣпленный на мосткахъ или на лодкѣ, и опускается сначала такъ, чтобы коснуться ею поверхности воды. При этомъ замѣчается показаніе на штангѣ, читаемое у какой-нибудь опредѣленной мѣтки штатива; это показаніе записывается также въ графу 10. Затѣмъ штанга опускается на дно и снова читается ея показаніе противъ той же мѣтки штатива. Разность показаній даетъ глубину профиля, заносимую въ видѣ эскиза въ ту же графу 10. Показаніе штанги, прочитанное по ней, когда она была опущена до дна, записываетсявъ графу 3 непосредственно, или послѣ того какъ изъ него вычтено разстояніе отъ оси вертушки до конца штанги. Далѣе въ эту графу будутъ записываться такія же показанія штанги при всякомъ иномъ, болѣе высокомъ ея положеніи. Удобно имѣть на штангѣ сквозныя сверленія, напр., черезъ каждые 5 *cm*, а въ штативѣ два упора, разстояніе между которыми должно быть равно цѣлому числу пятковъ сантиметровъ минусъ толщина шпильки, которую можно вставить въ отверстія штанги. Тогда, имѣя двѣ шпильки, удобно будетъ вынимать штангу изъ воды всякій разъ на заранѣе намѣченное цѣлое число пятковъ сантиметровъ. Именно сначала штанга виситъ на шпилькѣ, вставленной въ одно изъ отверстій. Заранѣе вставлена въ штангу и другая шпилька ниже нижняго упора штатива на желаемую длину. Когда нужно поднимать штангу, по сигналу быстро вытаскиваютъ ее кверху, пока нижняя шпилька не ударится въ нижній упоръ штатива и не остановитъ вертушку въ желаемой точкѣ. Послѣ этого верхнюю шпильку переставляютъ вплотную къ верхнему упору; штанга тогда виситъ на этой шпилькѣ, ее можно выпустить изъ рукъ и переставить нижнюю шпильку въ новое отверстіе на желаемой глубинѣ. Эти манипуляціи очень просты, даютъ точное положеніе оси вертушки (хотя и не любое) и не стѣсняютъ наблюдателя, который свободно записываетъ или диктуетъ для записи въ журналъ показанія штанги. Эта манера работы принадлежитъ Эпперу; имѣются въ продажѣ очень удобные штативы, приспособленные для этого пріема; очень не трудно сдѣлать ихъ и своими средствами.

Въ графу 4 прежде всего нужно занести, черезъ сколько оборотовъ оси вертушки будутъ производиться отсчеты временъ. Далѣе, когда штанга опущена до дна и всѣ записи сдѣланы, а секундомѣръ пущенъ въ ходъ, замѣчаютъ по часамъ часы и минуты начала счета (графа 1), а секунды по секундомѣру пріурочиваютъ къ концу звонка и заносятъ надъ пунктирной чертой въ графѣ 4 въ первую клѣтку; во вторую клѣтку заносится показаніе секундомѣра (если нужно, то и минуты) съ концомъ второго звонка и тутъ же записываютъ подъ чертой, раздѣляющей обѣ клѣтки, разность обоихъ показаній. Запись продолжаютъ нѣкоторое время, пока не сложится убѣжденіе, что показанія однородны (на примѣрѣ выписаны 6 отсчетовъ или 5 разностей, какъ онѣ были взяты при измѣреніи расхода р. Сестры). Когда число отсчетовъ признано достаточнымъ, то по сигналу, совпадающему съ концомъ звонка, вытаскиваютъ штангу кверху на заранѣе намѣченную глубину, какъ было выше объяснено; это дѣлается настолько быстро, что счетъ секундъ не прерывается, какъ это видно по записямъ выше приведеннаго образца журнала. Заносимыя по ходу дѣла разности временъ Δt покажутъ тутъ же, въ какой мѣрѣ этотъ промежутокъ времени подлежитъ учету, или, можетъ быть, лучше имъ пренебречь. Числа графъ 6—9 вычисляются въ кабинетѣ. Графа 8 введена на тотъ случай, если бы для вертушки имѣлась заранѣе подсчитанная кривая или таблица скоростей теченія въ функціи чиселъ оборотовъ въ секунду. Но возможно, конечно, имѣть ту же кривую съ независимымъ перемѣннымъ въ видѣ длительности (въ секундахъ) 25 оборотовъ (графа 7).

Само собою понятно, что какъ процессъ работы, такъ и форма записей могутъ быть и иные. Описанные тутъ пріемы приняты гидравлической лабораторіей Техническаго Училища и въ существенныхъ чертахъ отвѣчаютъ пріемамъ швейцарскаго и французскаго гидрометрическихъ бюро.

Одну изъ главныхъ трудностей при обмѣрѣ расхода составляетъ операція установки штанги на желаемой вертикали, если рѣка широка и глубока: приходится производить измѣренія съ лодокъ; легко представить себѣ всѣ возникающія при этомъ трудности. По этому поводу отсылаемъ къ указанной выше литературѣ.

Примѣчаніе къ стр. 402.

Помощью поплавка опредѣляется *наибольшая* скорость на поверхности потока V_0. Средняя скорость *всего* сѣченія $V_{ср}$ составляетъ только часть этой наибольшей скорости, и притомъ тѣмъ меньшую, чѣмъ меньше средній радіусъ сѣченія и чѣмъ шероховатѣе стѣнки, другими словами, чѣмъ сильнѣе дѣйствіе внутренняго тренія. При этихъ подсчетахъ можно пользоваться слѣдующими коэффиціентами перехода, рекомендуемыми извѣстнымъ турбиностроительнымъ заводомъ Бриглебъ и Хансенъ въ Гота (Briegleb, Hansen & C°; Gotha), а также проф. Тиме (послѣдній столбецъ таблицы) въ зависимости отъ средняго гидравлическаго радіуса сѣченія R.

Средній гидравл. радіусъ R mtr.	Отношенія $\frac{V_{ср}}{V_0}$.				
	Заводъ Бриглебъ, Хансенъ и К°.				Проф. Тиме.
	Строганыя доски, цем. штукатурка.	Тесаный камень, кирпичъ, нестроганыя доски.	Бутовая кладка.	Земляныя стѣнки.	
0,1	0,879	0,839	0,747	0,564	0,54
0,2	0,886	0,858	0,792	0,644	0,61
0,3	0,890	0,865	0,812	0,686	0,65
0,4	0,891	0,868	0,822	0,711	0,68
0,5	0,893	0,871	0,830	0,730	0,70
0,6	0,894	0,873	0,835	0,745	—
0,7	0,894	0,874	0,838	0,755	0,72
0,8	0,894	0,874	0,841	0,763	—
0,9	0,895	0,875	0,843	0,771	—
1,0	0,895	0,876	0,845	0,777	0,74
1,2	0,895	0,876	0,847	0,787	—
1,4	0,895	0,877	0,850	0,794	—
1,5	—	—	—	—	0,76
2,0	—	—	—	—	0,77
3,0	—	—	—	—	0,78
4,0	—	—	—	—	0,79
6,0	—	—	—	—	0,80

Данныя Тиме, повидимому, надежнѣе. По крайней мѣрѣ въ одномъ случаѣ песчанаго русла мы нашли это отношеніе $= 0,63$, при $R = 0,335$ *mtr*, и 0,58, при $R = 0,29$ *mtr*, т.-е. еще меньше, чѣмъ даетъ проф. Тиме. Само собою понятно, что отъ этихъ опредѣленій нельзя ждать точности.

Задачи къ главѣ IV.

81. Опредѣлить расходъ въ каналѣ трапецоидальнаго сѣченія, шириною по дну 1,2 *mtr*, съ откосомъ 1 : 1. Дно и откосы одѣты мостовой; ширина по урѣзу воды $= 2$ *mtr*; уклонъ равенъ $2^0/_{00}$.

Отв. Глубина канала 0,4 *mtr*. Живое сѣченіе 0,64 *mtr*². Средній гидравлическій радіусъ 0,275 *mtr*. По таблицѣ 44 при $\gamma = 0,85$ находимъ $c = 33,2$. Поэтому $v = 0,779$ *mtr/sec*, а слѣдовательно, $Q =$ почти 0,5 *mtr³/sec*. По таблицѣ 43 Ganguillet & Kutter при $n = 0,020$ находимъ $c = 39$, такъ что $v = 0,915$ *mtr/sec* и $Q = 0,585$ *mtr³/sec*. Наконецъ по табл. 42, соотвѣтственно 3-й категоріи, мы имѣли бы: $c = 47$, такъ что $v = 1,1$ *mtr/sec* и $Q = 0,704$ *mtr³/sec*.

Отсюда видно, какая разница въ результатахъ получается при примѣненіи тѣхъ или другихъ нормъ. Какъ указано въ текстѣ, Базенъ счелъ нужнымъ ввести категорію 4, промежуточную, для своей новой формулы. Поэтому, а также по соображеніямъ, указаннымъ въ текстѣ, рѣшеніе по таблицѣ 42 въ нашемъ случаѣ должно быть забраковано, и вѣроятный расходъ долженъ быть оцѣненъ между 0,5 и 0,6 *mtr³/sec*, въ зависимости, очевидно, отъ большей или меньшей тщательности выполненія мостовой.

82. Съ какимъ уклономъ нужно положить деревянный прямоугольный ларь изъ строганыхъ досокъ съ наивыгоднѣйшимъ профилемъ, чтобы онъ при равномѣрномъ движеніи пропускалъ 2 *mtr³/sec* при ширинѣ по дну въ 1 *mtr*?

Отв. Для наивыгоднѣйшаго профиля глубина должна быть равна 0,5 *mtr*; живое сѣченіе 0,5 *mtr²*; средній гидравлическій радіусъ 0,25 *mtr*; скорость 4 *mtr/sec*. По таблицѣ 44 при $\gamma=0{,}06$ имѣемъ $c=77{,}6$, а слѣдовательно, $i=10^2/_3{}^0/_{00}$. По таблицѣ 43, при $n=0{,}010$, должно быть c около 84, такъ что достаточно $i=9{,}1^0/_{00}$; по формулѣ 7 этой главы находимъ $c=84$, такъ что второго пересчета по таблицѣ 43 не требуется. И на этомъ примѣрѣ, какъ и въ предыдущей задачѣ, видимъ въ данныхъ Bazin'а бóльшую надежность, нежели въ данныхъ G. & K.

83. Какой высоты нужно дѣлать вертикальныя боковыя стѣнки въ деревянномъ ларѣ изъ строганыхъ досокъ, пропускающемъ 2 *mtr³/sec*, лежащемъ съ уклономъ въ $5^0/_{00}$, при ширинѣ по дну въ 1 *mtr*, если въ концевой стѣнкѣ сдѣлано отверстіе высотою 500 *mm* и шириною въ 800 *mm*, нижняя кромка котораго лежитъ на 300 *mm* выше дна ларя? Каковъ будетъ профиль передъ стѣнкой?

Отв. Находимъ сначала глубину равномѣрнаго теченія H въ такомъ ларѣ. Называя ширину ларя буквой l, получаемъ ур-іе:

$$c\sqrt{\frac{lHi}{l+2H}}=\frac{Q}{lH}.$$

Относя ларь къ первой категоріи шероховатости ($\gamma=0{,}06$), по таблицѣ 44 оцѣниваемъ $c=80$. Внося числовыя значенія, приводимъ предыдущее ур-іе къ виду:

$$H^3-0{,}25\,H-0{,}125=0.$$

Единственный дѣйствительный корень этого ур-ія по формуламъ Кардана получается равнымъ:

$$H=\sqrt[3]{\frac{0{,}125}{2}+\sqrt{\left(\frac{0{,}125}{2}\right)^2-\left(\frac{0{,}25}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{\frac{0{,}125}{2}-\sqrt{\left(\frac{0{,}125}{2}\right)^2-\left(\frac{0{,}25}{3}\right)^3}}=0{,}66\ mtr.$$

Соотвѣтственно этому

$$R=\frac{1.0{,}66}{1+2.0{,}66}=0{,}285\ mtr.$$

По таблицѣ 44 этому соотвѣтствовало бы $c=78{,}3$. Но по таблицѣ 43 при данномъ уклонѣ $c>80$. Поэтому считаемъ, что $c=80$ достаточно точно въ нашемъ случаѣ, тѣмъ болѣе, что въ нижнихъ участкахъ канала глубина, а съ нею и средній гидравлическій радіусъ, будутъ больше.

Далѣе опредѣляемъ напоръ въ центрѣ тяжести отверстія, необходимый для пропуска даннаго расхода, считая изліяніе въ воздухъ. По числовой таблицѣ 9 Понселе (см. стр. 125) оцѣниваемъ коэф-тъ расхода $\mu_0=0{,}6$. Такъ какъ сжатіе, несомнѣнно, неполное, то по формулѣ Вейсбаха (см. стр. 122) находимъ коэф-тъ расхода:

$$\mu=\mu_0\left(1+0{,}157\frac{n}{p}\right)=0{,}6\left(1+0{,}157\frac{1{,}8}{2{,}6}\right)=0{,}665.$$

Поэтому напоръ въ центрѣ тяжести отверстія вычисляется $=2{,}88$ *mtr*. Итакъ, глубина h_0 стоянія воды надъ дномъ канала будетъ $h_0=2{,}88+0{,}25+0{,}3=3{,}43$ *mtr*. Стѣнки должны быть сдѣланы выше, нежели 3,43 *mtr*.

Отвѣтъ на второй вопросъ получаемъ такъ. Вычисляя величину $\frac{\alpha i}{bg} = \frac{\alpha i c^2}{g} =$ $= \frac{1{,}085 . 0{,}005 . 6400}{9{,}81} = 3{,}54$, видимъ, что передъ плотиною будетъ скачокъ повышенія. Приблизительное его мѣстонахожденіе вычисляемъ по ур-ію (30) главы IV съ помощью таблицы 45, находя изъ него разстояніе $(s - s_0)$ отъ плотины до элемента профиля съ вертикальной касательной. Критическая глубина H_1 опредѣляется такъ:

$$H_1 = \sqrt[3]{3{,}54 . 0{,}66} = 1{,}005 \; mtr.$$

Поэтому

$$z = \frac{1{,}005}{0{,}66} = 1{,}52$$

и, соотвѣтственно, пропорціональнымъ интерполированіемъ по табл. 45, находимъ

$$\psi(z) = 0{,}2467.$$

Также

$$z_0 = \frac{3{,}43}{0{,}66} = 5{,}20;$$

затѣмъ получаемъ:

$$\psi(z_0) = 0{,}0201 - \frac{0{,}0020 . 20}{26{,}3} = 0{,}0186.$$

Поэтому:

$$0{,}005\,(s - s_0) = (1{,}52 - 5{,}20) - 0{,}66\,(1 - 3{,}54)\,(0{,}2467 - 0{,}0186) = -3{,}68 + 0{,}382 = -3{,}298,$$

откуда

$$s - s_0 = -660 \; mtr.$$

84. Расходъ въ рѣкѣ достигаетъ 10 *mtr*³/*sec*. Уклонъ ея дна $= 0{,}1^0/_{00}$. Сѣченіе приблизительно прямоугольное при ширинѣ $= 20$ *mtr*. На ней поставлена плотина съ водосливомъ такъ, что порогъ водослива лежитъ на 1,5 *mtr* выше горизонта незапруженной рѣки. Водосливъ имѣетъ вертикальную стѣнку; порогъ его составленъ изъ брусковъ толщиною 150 *mm*, расположенныхъ между 7 бетонными быками съ разстояніемъ между ними по 2 *mtr*, такъ что общая длина порога водослива $= 12$ *mtr*. На какомъ разстояніи вверхъ отъ плотины подпруда не будетъ превосходить 50 *mm*?

Отв. Опредѣленіе глубины равномѣрнаго теченія можно было бы сдѣлать какъ въ задачѣ 83. Но, имѣя въ виду довольно значительную ширину рѣки, допустимъ предварительно, что средній гидравлическій радіусъ, при равномѣрномъ теченіи, не отличается отъ глубины, т.-е. пишемъ:

$$\frac{Q^2}{c^2 l^2} = H^3 i.$$

Оцѣнивая, по Тадини, $c = 50$, внося далѣе $Q = 10$, $l = 20$, $i = 0{,}0001$, вычисляемъ $H = 1$ *mtr*. При этой глубинѣ средній радіусъ $R = \frac{20}{22} = 0{,}91$ *mtr*. Сохраняя значеніе $c = 50$, вычисляемъ $v = 50\sqrt{0{,}91 . 0{,}0001} = 0{,}48$ *mtr*/*sec*.

Сообразно съ этимъ живое сѣченіе должно быть $F = \frac{10}{0{,}48} = 20{,}8$ *mtr*²; глубина равномѣрнаго теченія $H = 1{,}04$ *mtr*; средній радіусъ $R = 0{,}94$. Вторичная провѣрка даетъ всѣ величины съ ничтожной разницей, а именно:

$$v = 50\sqrt{0{,}94 . 0{,}0001} = 0{,}485 \; mtr/sec; \quad F = \frac{10}{0{,}485} = 20{,}6 \; mtr^2;$$

$$H = 1{,}03 \; mtr; \quad R = 0{,}94 \; mtr.$$

Высота порога водослива надъ дномъ равна, слѣдовательно, по даннымъ задачи, $1{,}5 + 1{,}03 = 2{,}53$ *mtr*. Предполагая наличность бокового сжатія и изліяніе въ воздухъ выбираемъ по таблицѣ 27 (стр. 188) значеніе коэф-та расхода черезъ водосливъ, при длинѣ порога въ 7′, для предварительнаго расчета, $\mu = 0{,}4$. По ур-iю расхода черезъ водосливъ находимъ, что надъ его порогомъ необходимъ напоръ 0,605 *mtr*. Отсюда видно, что толщина порога можетъ быть признана не имѣющей вліянія на истеченіе и что коэф-тъ расхода, можетъ быть, слѣдовало бы уменьшить на 1%. Пренебрегая этой поправкой, считаемъ глубину рѣки передъ плотиной $h_0 = 2{,}53 + 0{,}605 = 3{,}135$ *mtr*.

Вычисляемъ далѣе $\dfrac{\alpha i}{bg} = \dfrac{\alpha i c^2}{g} = 0{,}0276$; поэтому утверждаемъ, что имѣемъ дѣло съ обыкновенной кривой подпруды.

Нахожденіе разстоянія отъ плотины до профиля съ глубиною въ 1,08 *mtr* выполнится, слѣдовательно, такъ:

$$z_0 = \frac{3{,}135}{1{,}03} = 3{,}03; \quad \psi(z_0) = 0{,}0553.$$

$$z = \frac{1{,}08}{1{,}03} = 1{,}05; \quad \psi(z) = 0{,}8931 + \frac{0{,}0142.4}{22} = 0{,}8957.$$

Поэтому:

$$i(s - s_0) = 1{,}08 - 3{,}135 - 1{,}03\,(1 - 0{,}0276)\,(0{,}8957 - 0{,}0553),$$

такъ что

$$s - s_0 = -28{,}95 \; kmtr.$$

Профиль съ глубиною въ 1,23 *mtr*, т.-е. съ подпрудой въ 200 *mm*, будетъ отстоять отъ плотины на разстояніи:

$$z = \frac{1{,}23}{1{,}03} = 1{,}195; \quad \psi(z) = 0{,}4932 - \frac{0{,}0101.45}{71} = 0{,}4868.$$

$$i(s - s_0) = 1{,}23 - 3{,}135 - 1{,}03.0{,}9724\,(0{,}4868 - 0{,}0553)$$

41

$$s - s_0 = -23{,}365 \; kmtr.$$

Производя въ послѣднемъ случаѣ вычисленія по ур-iю (34) главы IV (стр. 384), находимъ:

$$y_0 = 3{,}135 - 1{,}03 = 2{,}105; \quad ln\; 2{,}105 = ln\; 210{,}5 - ln\; 100 = 0{,}70063$$
$$y = 1{,}23 - 1{,}03 = 0{,}2; \quad ln\; 0{,}2 = ln\; 2 - ln\; 10 = -1{,}60944$$
$$\frac{m}{n} = \frac{20\,(1 - 0{,}0276) + 2.1{,}03}{3.20 + 4.1{,}03} = 0{,}335.$$

Поэтому

$$i(s - s_0) = 0{,}335.1{,}03\,(-1{,}60944 - 0{,}70063) + (0{,}2 - 2{,}105)\left(1 - \frac{7}{9}.0{,}335\right).$$

Отсюда

$$s - s_0 = -22{,}100 \; kmtr,$$

т.-е. почти на 6% меньше, нежели по ур-iю Бресса.

85. Разность уровней въ двухъ прудахъ = 2 *mtr*; разстояніе между ними, считая по каналу, = 4 *kmtr*. Въ верхній прудъ, во время паводковъ, притекаетъ до 5 mtr^3 воды въ 1 секунду. Требуется поставить при входѣ въ каналъ шлюзовое отверстіе (истеченіе подъ напоромъ), а каналъ—выполнить съ земляными стѣнками съ откосомъ 1 : 1,5 такъ, чтобы горизонтъ въ верхнемъ прудѣ поднимался не выше, какъ на 0,2 *mtr*, чтобы глубина воды въ каналѣ была не болѣе 1 *mtr*, шлюзовое отверстіе было расположено своею нижнею кромкою на уровнѣ дна канала, а скорость въ каналѣ была = 0,5 *mtr/sec*.

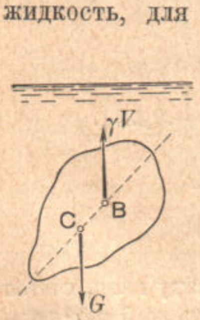
Отв. Живое сѣченіе канала должно быть $F = 10$ *mtr*². При заданной глубинѣ и откосѣ ширина по дну вычисляется $l = \frac{F}{H} - 1{,}5\ H = 8{,}5$ *mtr*. Средній гидравлическій радіусъ $R = 0{,}825$ *mtr*. Соотвѣтственно $\gamma = 1{,}3$ по таблицѣ 44 находимъ $c = 35{,}8$, а отсюда вычисляемъ $i = 0{,}000237$. Поэтому уровень въ каналѣ будетъ стоять въ его началѣ на 1,05 *mtr* ниже уровня воды въ прудѣ при этомъ расходѣ, а при допущенномъ повышеніи уровня въ прудѣ напоръ для шлюзового отверстія будетъ $= 1{,}25$ *mtr*. Считая, что это отверстіе расположено во всю ширину дна канала, пренебрегая возможными стѣсненіями, благодаря стойкамъ шлюзовъ, и оцѣнивая коэф-тъ расхода при истеченіи подъ уровень=0,6, находимъ необходимую площадь отверстія въ 1,68 *mtr*², а слѣдов., его вертикальный размѣръ 0,198, т.-е. почти 0,2 *mtr*. Допуская, что при неполномъ сжатіи толщина вытекающей струи можетъ достигнуть $0{,}64 . 0{,}2 = 0{,}128$ *mtr*, выяснимъ, правильно ли наше допущеніе объ истеченіи подъ уровень. Вычисляемъ $\frac{\alpha i}{bg} = \frac{\alpha i c^2}{g} = 0{,}0335$; поэтому критическая глубина въ каналѣ $H_1 = 0{,}322$ *mtr*. Дробь δ вычисляется въ $\delta = 0{,}175$, а слѣдовательно, глубина $\delta H_1 = 0{,}057$ *mtr*. Отсюда видно, что наше предположеніе объ истеченіи подъ уровень правильно. Ясно, что ожидаемая въ отверстіи скорость,—около 3 *mtr/sec*, — настолько велика, что дно и стѣнки канала въ его началѣ должны быть прочно укрѣплены и защищены отъ размыва.

Дополненіе къ § 5, стр. 38.

Объ устойчивости равновѣсія плавающихъ тѣлъ.

Изъ такъ называемаго закона Архимеда слѣдуетъ, что на покоющееся тѣло, вполнѣ или отчасти погруженное въ покоющуюся тяжелую жидкость, послѣдняя оказываетъ воздѣйствіе, направленное по вертикали снизу вверхъ и равное вѣсу вытѣсненнаго объема жидкости. Какъ равнодѣйствующую вѣсовъ отдѣльныхъ элементарныхъ вытѣсненныхъ объемовъ, эту силу, конечно, нужно считать приложенной въ центрѣ тяжести вытѣсненнаго объема; эту точку будемъ называть центромъ водоизмѣщенія.

Пусть тѣло вѣсомъ G, съ объемомъ V, вполнѣ погружено въ жидкость, для которой вѣсъ единицы объема равенъ γ (подводная лодка, мина Уайтхеда, дирижабль, аэростатъ и т. п.). Тогда на тѣло дѣйствуютъ слѣдующія силы (фиг. 215): въ центрѣ тяжести *C* самого тѣла—его вѣсъ G, а въ центрѣ видоизмѣщенія *B*—реакція γV. Ясно, что тѣло будетъ всплывать, или будетъ тонуть, смотря по тому, будетъ ли $G < \gamma V$, или, наоборотъ, $G > \gamma V$. Оно можетъ оставаться въ равновѣсіи только при условіи $G = \gamma V$; при этомъ, если тѣло и жидкость неизмѣняемы, т.-е. если γ и V сохраняютъ свое значеніе независимо отъ величины окружающаго давленія, то равновѣсіе тѣла возможно при всякой глубинѣ его погруженія, если только оно имѣло мѣсто на какой-нибудь глубинѣ.



Фиг. 215.

Однако условіе $G = \gamma V$, необходимое для равновѣсія, еще недостаточно;

изъ фиг. 215 видно, что для равновѣсія необходимо также, чтобы линія *CB* проходящая черезъ центръ тяжести тѣла и черезъ центръ водоизмѣщенія, т.-е. такъ называемая ось плаванія, была вертикальна: только при этомъ условіи на тѣло не будетъ дѣйствовать опрокидывающая пара. При соблюденіи этого условія равновѣсіе будетъ устойчивымъ, безразличнымъ или неустойчивымъ въ зависимости отъ того, будетъ ли центръ тяжести, тѣла *C* ниже центра водоизмѣщенія *B*, совпадаютъ ли эти двѣ точки, или, наконецъ, точка *C* окажется выше точки *B*.

Если погруженное въ жидкость тѣло однородно, при чемъ вѣсъ единицы его объема есть γ_1, то его вѣсъ G можно выразить по объему V, написавъ $G = \gamma_1 V$. По предыдущему такое тѣло, погруженное въ жидкость, будетъ въ равновѣсіи, если

$$G = \gamma_1 V = \gamma V;$$

или если

$$\triangle = \frac{\gamma_1}{\gamma} = 1,$$

т.-е. если удѣльный вѣсъ $\triangle$ тѣла равенъ единицѣ. Понятно, что равновѣсіе въ жидкости *такого* (однороднаго) тѣла можетъ быть только безразличнымъ.

Если тѣло плаваетъ, т.-е. находится въ равновѣсіи, не будучи вполнѣ погружено въ жидкость, то объемъ всего тѣла V_1 и объемъ V, вытѣсненный имъ въ жидкости, между собою не равны; а для возможности равновѣсія попрежнему имѣетъ мѣсто условіе:

$$G = \gamma V,$$

или въ случаѣ однороднаго тѣла

$$G = \gamma_1 V_1 = \gamma V \,^{*}).$$

Линія, по которой пересѣкается свободная поверхность жидкости съ поверхностью тѣла, называется ватерлиніей; квадратное содержаніе плоской фигуры, очерченной ватерлиніей, называется площадью ватерлиніи, а сѣченіе тѣла, содержащее ватерлинію, называется плоскостью плаванія.

Если вблизи ватерлиніи можно считать поверхность корпуса судна цилиндрической, и если площадь ватерлиніи содержитъ A *mtr*², то всякая дополнительная нагрузка (или разгрузка) судна въ P *tn* вызоветъ увеличе-

---

*) Если не пренебрегать вѣсомъ вытѣсненнаго воздуха, для котораго вѣсъ единицы объема назовемъ γ_2, то, конечно, вмѣсто этихъ равенствъ надо писать:

$$G = \gamma V + \gamma_2 (V_1 - V).$$

Послѣдній членъ обыкновенно настолько малъ, что имъ безъ ошибки пренебрегаютъ.

ніе (или уменьшеніе) глубины погруженія судна на h mtr, опредѣляемыхъ изъ соотношенія

$$1000\,P = \gamma h A.$$

Для прѣсной воды нужно считать $\gamma = 1000$ kgr/mtr^3, а для морской можно положить въ среднемъ $\gamma = 1025$ kgr/mtr^3. Ясно, что въ прѣсной водѣ судно сидитъ глубже, чѣмъ въ морской, и что, имѣя нѣкоторую высоту бортовъ (такъ наз. фрибордъ), оно можетъ съ ихъ помощью поднять въ прѣсной водѣ меньшій дополнительный грузъ P, чѣмъ въ морской. Изъ послѣдней формулы слѣдуетъ, что число тоннъ, которое можетъ взять судно дополнительно на каждый сантиметръ погруженія въ морской водѣ, или величина $t = \dfrac{P}{100\,h}$ равна 0,01025 A.

Если назвать буквой L длину судна въ предѣлахъ ватерлиніи, а буквой B его ширину (наибольшую по ватерлиніи), то можно написать:

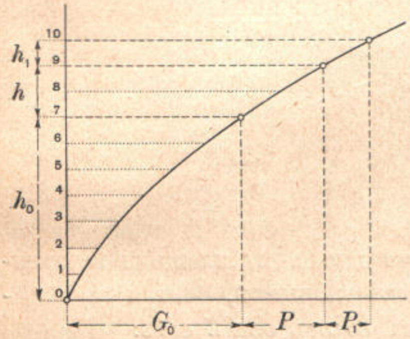
$$A = \alpha BL.$$

Коэффиціентъ α можно назвать коэффиціентомъ полноты (а также—коэффиціентомъ заостренія—coefficient of fineness). Такимъ образомъ для морской воды

$$t = 0{,}01025\,\alpha BL.$$

Для судовъ наиболѣе заостренныхъ (миноносцы, малые крейсеры) .	$\alpha \backsim 0{,}65$
„ „ узкихъ (крейсеры, канонерки, баркасы)	0,70
„ „ обыкновенныхъ (громадное большинство судовъ морскихъ и рѣчныхъ, для разныхъ водоизмѣщеній и скоростей) .	0,75
Для судовъ тупыхъ (большіе грузовые пароходы умѣренной скорости, малые пассажирскіе и грузовые пароходы, тихоходные, буксирные, колесные рѣчные пароходы, грузовыя парусныя судна)	0,82—0,88
Для понтоновъ, шаландъ и т. п.	до 1,00

Изъ предыдущаго ясно, что съ увеличеніемъ нагрузки увеличивается осадка судна. Только въ рѣдкихъ случаяхъ, напр., въ понтонахъ, шаландахъ и т. п. суднахъ, имѣющихъ форму прямоугольнаго параллелепипеда, площадь ватерлиніи A оказывается постоянной при измѣненіи осадки судна. Въ громадномъ же большинствѣ случаевъ этого нѣтъ и тогда должны быть подсчитаны объемы, вытѣсняемые судномъ при разныхъ глубинахъ погруженія. Эти подсчеты дѣлаются приближенно, для чего выработано много методовъ, состоящихъ въ примѣненіи правила Симпсона, въ примѣненіи разныхъ пріемовъ графическаго интегрированія, построенія интегральныхъ кривыхъ, планиметрированія и т. д. Кромѣ подсчета вытѣсняемыхъ объемовъ при разныхъ ватерлиніяхъ, необходимо опредѣлять всѣ соотвѣтствующія положенія центровъ водоизмѣщенія. Въ серьезныхъ случаяхъ эти подсчеты дѣлаютъ, начиная съ нулевой ватерлиніи, т.-е. той, когда корпусъ судна только касается воды, и до грузовой ватерлиніи,—т.-е. той, которая соотвѣтствуетъ посадкѣ судна при полной расчетной его нагрузкѣ. Всю глубину посадки дѣлятъ, напримѣръ, на 10 равныхъ частей и вычисленія проводятъ для этихъ 10 ватерлиній. Имѣя въ виду возможность перегрузки, подсчеты проводятъ еще далѣе, предполагая, что плоскость плаванія передвинется параллельно самой себѣ вверхъ по корпусу судна еще на 1 или даже 2 слоя такой же высоты, каковы были слои до грузовой ватерлиніи. Результаты подсчетовъ заносятся на такъ называемую **кривую водоизмѣщенія** судна, представляющую важную для него характеристику (фиг. 216). По оси ординатъ откладываютъ глубину посадки, начиная отъ нулевой ватерлиніи, т.-е. съ самой низкой точки киля *), а по оси абсциссъ—соотвѣтствующія водоизмѣщенія. По такой кривой удобно, напримѣръ, видѣть, что корпусъ судна, вѣсящій $G_0\,tn$, сидитъ на глубинѣ $h_0\,mtr$; грузъ $P\,tn$ увеличитъ осадку на $h\,mtr$, при чемъ высота фриборда $h_1\,mtr$ представляетъ запасное водоизмѣщеніе въ $P_1\,tn$. Также откладывая по оси абсциссъ равные отрѣзки, напр., по 50 tn, прочтемъ по кривой соотвѣтствующую скалу измѣненія глубины посадки и т. д.



Фиг. 216.

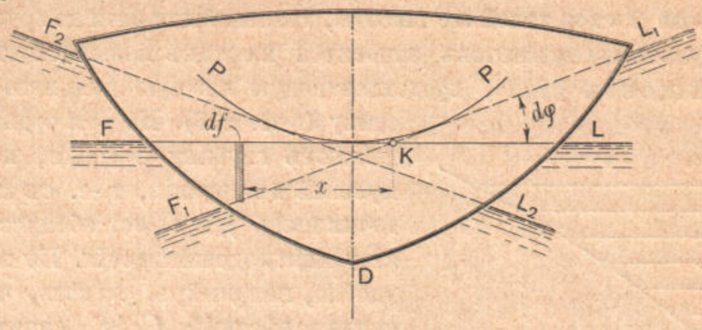
Для равновѣсія плавающаго тѣла такъ же, какъ для погруженнаго, необходимо, кромѣ вышеуказаннаго равенства, соблюденіе того условія, чтобы ось плаванія была вертикальна. Пусть дано плавающее тѣло (фиг. 217). Можно себѣ представить рядъ плоскостей FL, F_1L_1, $F_2L_2 \ldots$, которыя всѣ отсѣкаютъ отъ тѣла одинаковые объемы FDL, $F_1DL_1 \ldots$, а, слѣдовательно, всѣ удовлетворяютъ закону Архимеда; тѣмъ не менѣе не всѣ онѣ могли бы быть плоскостями плаванія. Выяснимъ это.

Внутри тѣла вообразимъ поверхность PP, огибающую всѣ эти плоскости FL; это такъ называемая **поверхность плоскостей плаванія**; плоскости плаванія къ ней касательны. Можно доказать, что двѣ смежныя плоскости плаванія пересѣкаются по прямой, проходящей черезъ центры тяжести соотвѣтствующихъ площадей ватерлиній.

Въ самомъ дѣлѣ пусть FL и F_1L_1 двѣ смежныя плоскости плаванія, образующія между собою весьма малый уголъ $d\varphi$. Для простоты чертежа на фиг. 217 положеніе тѣла представлено неизмѣннымъ и проведены разныя относительныя положенія плоскостей плаванія. Пусть эти плоскости пересѣкаются по прямой, перпендикулярной къ плоскости чертежа и изображенной на немъ точкою K. Не трудно убѣдиться, что объемы клиньевъ FKF_1 и

*) При правильномъ размѣщеніи нагрузки киль судна не параллеленъ плоскости плаванія: у кормы онъ глубже, у носа—менѣе погруженъ въ воду. Отсюда терминъ „грузовая ватерлинія *съ диффферентомъ*" (flottaison en charge et en différence; Konstructions-Wasserlinie mit Trimm; термину „диффферентъ корабля" соотвѣтствуетъ англійское „the trimm of a ship"). Понятно, что, какъ съ измѣненіемъ нагрузки мѣняется положеніе ватерлиніи, такъ съ измѣненіемъ ея расположенія, или при нагруженіи продольнымъ вѣтромъ, мѣняется также и диффферентъ. Это вызываетъ необходимость подсчетовъ относительно продольной плоскости судна аналогичныхъ тѣмъ, которые будутъ намѣчены ниже для поперечныхъ плоскостей.

LKL_1 между собою равны: ибо при обоихъ положеніяхъ плоскостей FL и F_1L_1 вѣсъ тѣла, а, слѣдовательно, и его водоизмѣщеніе не мѣнялись. Выразимъ



Фиг. 217.

это аналитически. Назовемъ df элементарную площадку площади ватерлиніи FK; ея разстояніе до общаго ребра K обоихъ клиньевъ, считая въ плоскости FK, назовемъ x. Тогда объемъ клина влѣво отъ оси K есть:

$$-\int_{FK} df.x.d\varphi,$$

при чемъ интегралъ распространенъ на всю лѣвую сторону площади ватерлиніи; уголъ $d\varphi$ стоитъ вмѣсто $tg\, d\varphi$ въ силу своей малости, а знакъ — показываетъ, что x отсчитывается влѣво, или, что сводится къ тому же, что объемъ клина FK уменьшилъ водоизмѣщеніе. Подобнымъ же образомъ, при аналогичныхъ обозначеніяхъ получимъ объемъ праваго клина

$$\int_{KL} df_1.x_1.d\varphi,$$

гдѣ интегрированіе распространено на всю правую часть площади ватерлиніи KL. Сравнивая оба выраженія, находимъ по сокращеніи на $d\varphi$:

$$-\int_{FK} x\, df = \int_{KL} x_1\, df_1.$$

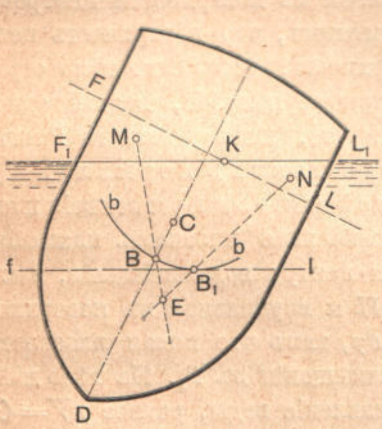
Въ этомъ уравненіи не трудно усмотрѣть равенство статическихъ моментовъ двухъ частей площади ватерлиніи относительно линіи K, раздѣляющей эти двѣ части; изъ равенства обоихъ моментовъ заключаемъ, что ось K проходитъ черезъ центръ тяжести всей площади, что и доказываетъ упомянутую теорему, принадлежащую Эйлеру (1749 годъ; работа Scientia Navalis).

Послѣ этого легко прійти къ заключенію, что точка касанія плоскости плаванія съ поверхностью плоскостей плаванія и центръ тяжести площади ватерлиніи совпадаютъ между собою. Ибо эта точка касанія есть предѣлъ положенія всевозможныхъ точекъ K на плоскости FL при всевозможныхъ положеніяхъ плоскости F_1L_1, лишь бы уголъ $d\varphi = FKL$ оставался безконечно малымъ. При всѣхъ этихъ положеніяхъ точка K лежитъ всегда на прямыхъ, проходящихъ черезъ центръ тяжести площади ватерлиніи FL; въ предѣлѣ точка K обращается въ точку касанія и совмѣщается съ центромъ тяжести площади ватерлиніи.

Замѣтимъ еще, что въ частномъ случаѣ, когда борта судна представляютъ вертикальную цилиндрическую поверхность, то всѣ плоскости F_1L_1, въ какую бы сторону мы ни откладывали уголъ $d\varphi$, пересѣкутся въ одной точкѣ K, совпадающей съ центромъ тяжести площади ватерлиніи состоянія равновѣсія. Слѣдовательно, поверхность PP обращается въ этомъ случаѣ въ точку.

Кромѣ поверхности плоскостей плаванія въ плавающемъ тѣлѣ различимъ поверхность центровъ водоизмѣщенія, т.-е. геометрическое мѣсто центровъ водоизмѣщенія B, мѣняющихъ въ тѣлѣ свое расположеніе съ перемѣной положенія плоскостей плаванія FL въ F_1L_1 и т. д. Эти двѣ поверхности связаны между собою интересною зависимостью; именно, можно показать, что плоскость, касательная къ поверхности центровъ водоизмѣщенія въ какой-нибудь точкѣ, параллельна соотвѣтствующей плоскости плаванія.

Пусть на фиг. 218 имѣемъ сѣченіе плавающаго тѣла, съ центромъ тяжести въ C. FL есть одна изъ плоскостей плаванія и соотвѣтствующее положеніе центра водоизмѣщенія есть B. Въ данный моментъ пусть плоскость плаванія есть F_1L_1, а центръ водоизмѣщенія лежитъ въ B_1, на поверхности центровъ водоизмѣщенія bb. Подобно предыдущему утверждаемъ, что объемы клиньевъ FKF_1 и LKL_1 между собою равны. Пусть ихъ центры тяжести лежатъ въ M и въ N. Центръ тяжести общей для обоихъ положеній части водоизмѣщенія F_1KLD пусть лежитъ въ точкѣ E.



Фиг. 218.

Сейчасъ же видно, что въ точкѣ B приложена равнодѣйствующая вѣсовъ, сосредоточенныхъ въ E и M. Равнымъ образомъ въ B_1 приложена равнодѣйствующая параллельныхъ силъ, дѣйствующихъ въ E и N. Поэтому утверждаемъ, что точки M, B и E лежатъ на одной прямой; равнымъ образомъ на прямой линіи лежатъ точки N, B_1 и E. Послѣ этого на основаніи правила о сложеніи параллельныхъ силъ и указаннаго выше равенства объемовъ, пишемъ два равенства:

$$\frac{MB}{BE}=\frac{\text{объемъ } F_1KLD}{\text{объемъ } F_1KF}.$$

$$\frac{NB_1}{B_1E}=\frac{\text{объемъ } F_1KLD}{\text{объемъ } L_1KL}=\frac{\text{объемъ } F_1KLD}{\text{объемъ } F_1KF}.$$

Поэтому

$$\frac{MB}{BE}=\frac{NB_1}{B_1E},$$

или стало быть

$$BB_1 \parallel MN.$$

Въ предѣлѣ, при безконечно маломъ углѣ отклоненія FKF_1, получимъ, что прямая MN совпадаетъ съ плоскостью плаванія F_1L_1, а хорда BB_1 совпадаетъ съ касательной fl къ поверхности центровъ водоизмѣненія въ точкѣ B_1. По доказанному—эти двѣ линіи между собою параллельны. То же самое можетъ быть доказано и при какомъ-нибудь другомъ отклоненіи, не въ плоскости чертежа; такимъ образомъ, вообще—плоскость, касательная къ поверхности центровъ водоизмѣщенія, проведенная въ центрѣ водоизмѣщенія, параллельна плоскости плаванія, соотвѣтствующей этому центру водоизмѣщенія, что и требовалось показать. Эта теорема доказана Дюпеномъ *).

Отсюда вытекаетъ, во-первыхъ, что такая касательная плоскость горизонтальна, и, во-вторыхъ, что *нормаль, возстановленная къ поверхности центровъ водоизмѣщенія въ центрѣ водоизмѣщенія, при равновѣсіи вертикальна, представляетъ собою ось плаванія, поэтому проходитъ черезъ центръ тяжести тѣла и въ то же время перпендикулярна къ плоскости плаванія.*

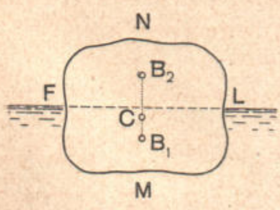
Другими словами плавающее тѣло можетъ имѣть столько положеній равновѣсія, а, слѣдовательно, и столько плоскостей плаванія, сколько можно провести черезъ центръ тяжести тѣла C нормалей къ поверхности центровъ водоизмѣщенія. Не входя въ подробности, отмѣтимъ, что поверхность центровъ водоизмѣщенія всегда замкнутая поверхность, если само тѣло ограничено замкнутою поверхностью (судно, покрытое палубой, всякій однородный или пустотѣлый поплавокъ и т. п.), и что, какъ показалъ Ришъ, всегда можно провести четное число такихъ нормалей **).

Перейдемъ къ выясненію условій устойчивости равновѣсія плавающихъ тѣлъ. Пусть (фиг. 220) FL есть начальная плоскость плаванія, C—центръ тяжести тѣла, B—соотвѣтствующій центръ водоизмѣщенія, такъ что BC—ось плаванія, перпендикулярная къ FL и нормальная къ поверхности BB_1. Пусть тѣло отклонилось на уголъ $d\varphi$, такъ что новая плоскость плаванія лежитъ въ F_1L_1, новый центръ водоизмѣщенія въ B_1. На тѣло дѣйствуютъ: его вѣсъ G, приложенный въ C, и давленіе воды, равное $\gamma V = G$, приложенное въ B_1 и направленное снизу вверхъ. Другими словами, на тѣло

---

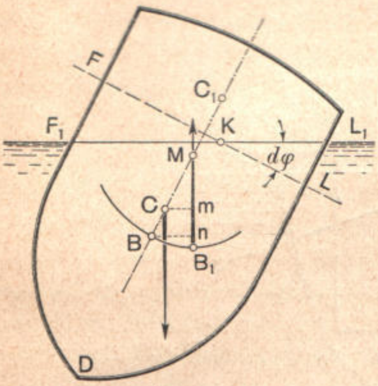
*) Charles Dupin — Applications de Géométrie et de Mécanique à la Marine. Paris, 1822.

**) См. F. Reech въ Journal de l'Ecole Polytechnique, за 1858 г. Не для доказательства, иллюстраціи, вообразимъ (фиг. 219) замкнутый однородный поплавокъ съ плоскостью плаванія FL и центромъ тяжести C. Центръ водоизмѣщенія пусть лежитъ въ B_1. При равновѣсіи линія CB_1 вертикальна. У поплавка отсѣчена верхняя часть FNL; пусть его удѣльный вѣсъ относительно жидкости равенъ 0,5; другими словами, пусть объемы FML и FNL между собою равны. Пусть далѣе центръ тяжести этой верхней части лежитъ въ B_2, такъ что эта точка стала бы центромъ водоизмѣщенія, если бы тѣло опрокинулось на 180°, а плоскость плаванія осталась бы та же самая. Для равновѣсія и въ этомъ случаѣ линія CB_2 должна быть вертикальна. Но при условіи однородности поплавка на точку C можно смотрѣть какъ на точку приложенія равнодѣйствующей двухъ параллельныхъ силъ, приложенныхъ въ B_1 и въ B_2; а поэтому эти 3 точки лежатъ на одной прямой. Это показываетъ, что изъ C можно провести двѣ нормали къ поверхности центровъ водоизмѣщенія.



Фиг. 219.

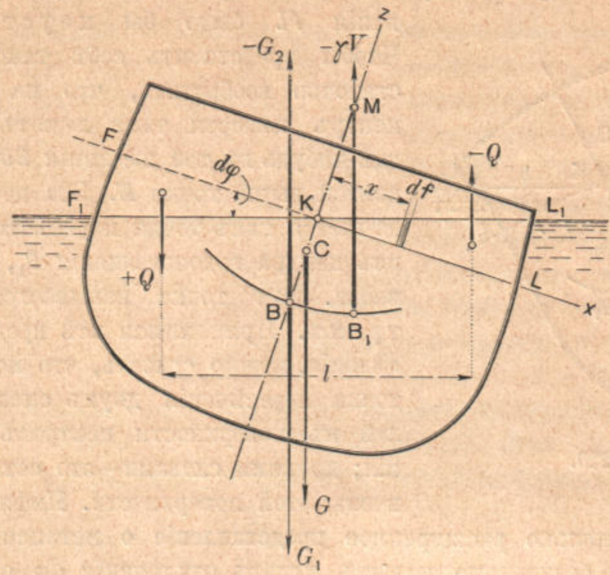
дѣйствуетъ пара силъ; при расположеніи, указанномъ на фигурѣ, эта пара стремится вернуть тѣло въ первоначальное положеніе, почему его нужно признать положеніемъ устойчиваго равновѣсія. Если бы пара, наоборотъ, стремилась опрокинуть тѣло, то положеніе равновѣсія съ плоскостью плаванія *FL* было бы неустойчивымъ. Чтобы представить себѣ такой случай, достаточно вообразить, что на чертежѣ 220 центръ тяжести тѣла лежитъ не въ *C*, а гдѣ-нибудь на той же линіи *BC*—въ точкѣ C_1, взятой выше точки *M*. Эта послѣдняя опредѣляется какъ точка пересѣченія вертикали, изъ центра водоизмѣщенія B_1, съ осью плаванія. Эта точка называется метацентромъ. Припоминая всѣ предыдущія опредѣленія, можно сказать, что метацентръ есть точка пересѣченія двухъ смежныхъ нормалей къ поверхности центровъ водоизмѣщенія; другими словами—это есть центръ кривизны этой поверхности. Имѣя въ виду это послѣднее, нѣсколько расширенное представленіе о метацентрѣ, скажемъ, что только при безконечно малыхъ углахъ отклоненія $d\varphi$ онъ лежитъ на оси плаванія; вообще же онъ болѣе или менѣе съ нея смѣщается и геометрическое мѣсто метацентровъ представляетъ нѣкоторую поверхность, которую можно разсматривать какъ развертку для поверхности центровъ водоизмѣщенія.



Фиг. 220.

Величину момента той пары, которая нужна для удержанія тѣла въ положеніи, отклоненномъ отъ состоянія устойчиваго равновѣсія, естественно принять за мѣру устойчивости. При данномъ водоизмѣщеніи γV этотъ моментъ пропорціоналенъ плечу *Cm*, или плечу $(Bn - a \sin d\varphi)$ или, наконецъ, плечу $(BM - a) \sin d\varphi$, при чемъ буквой a обозначена вполнѣ опредѣленная для каждой данной нагрузки судна длина *BC*. Такимъ образомъ, за мѣру устойчивости можно принять длину *BM*, т.-е. разстояніе отъ центра водоизмѣщенія до метацентра, считая по оси плаванія; эта длина называется высотою метацентра. (При конечномъ углѣ отклоненія, когда метацентръ вообще не лежитъ на оси плаванія, ту же роль играетъ разстояніе отъ центра водоизмѣщенія до точки пересѣченія оси плаванія съ нормалью къ поверхности центровъ водоизмѣщенія; эту точку называютъ ложнымъ метацентромъ.) Вычислимъ длину *BM*.

Сохраняя всѣ прежнія буквенныя обозначенія, отмѣтимъ на фиг. 221, что можно вообразить приложенными въ *B* двѣ равныя и противоположныя силы G_1 и $-G_2$, по величинѣ равныя G. Поэтому можно считать, что на тѣло дѣйствуютъ: опрокидывающая пара $(G, -G_2)$ въ точкахъ *C* и *B*; возстанавливающая пара $(-\gamma V, G_1)$ въ точкахъ B_1 и *B*. Кромѣ того, приложимъ мысленно въ центрахъ тяжести клиньевъ FKF_1 и L_1KL силы $+Q$ и $-Q$, равныя вѣсу воды въ объемѣ этихъ клиньевъ;—первая изъ нихъ представляетъ тотъ какъ бы добавокъ нагрузки на судно, который получился изъ-за того, что водоизмѣщеніе съ этой стороны оси плаванія уменьшилось на вѣсъ воды въ объемѣ клина FKF_1; а вторая сила $(-Q)$ представляетъ то уменьшеніе нагрузки на судно, которое вызвано погруженіемъ



Фиг. 221.

въ воду клина L_1KL. Легко видѣть, что силы $-G_2$, $+Q$ и $-Q$ вмѣстѣ даютъ по величинѣ и по положенію силу $-\gamma V$, приложенную въ B_1; въ самомъ дѣлѣ по величинѣ $-G_2$ и $-\gamma V$ между собою равны; а первоначальная точка приложенія реакціи воды перемѣстилась изъ B въ B_1 именно потому, что появились силы $+Q$ и $-Q$. Поэтому возстанавливающій моментъ пары $(-\gamma V,\ G_1)$ долженъ равняться моменту пары $(+Q,\ -Q)$, а слѣдовательно можно написать:

$$Q.l = \gamma V.BM \sin d\varphi.$$

Выразимъ Q какъ вѣсъ воды въ объемѣ клина FKF_1 (или LKL_1). Обозначая, какъ это уже было одинъ разъ, черезъ df элементъ площади плоскости плаванія, взятой въ разстояніи x отъ оси опрокидыванія тѣла (точка K), можемъ написать, не дѣлая различія въ знакѣ для каждаго изъ клиньевъ:

$$Q = \int \gamma df.x.tg\, d\varphi,$$

при чемъ интегрированіе распространяется на всю лѣвую (или правую) сторону площади ватерлиніи. Далѣе по правиламъ статики можно утверждать, что вмѣсто момента Ql можно взять сумму моментовъ силъ Q и $(-Q)$ относительно оси, проходящей черезъ точку K; а вмѣсто каждаго изъ моментовъ силъ Q можно взять сумму моментовъ относительно той же оси всѣхъ составляющихъ. Слѣдовательно, вмѣсто момента Ql можно взять моментъ:

$$\int \gamma df.x.tg\, d\varphi.x = \gamma.tg\, d\varphi \int df.x^2,$$

гдѣ интегрированіе распространяется на *всю* площадь ватерлиніи. Въ этомъ интегралѣ узнаемъ моментъ инерціи J площади ватерлиніи, взятый относительно оси качанія судна, т.-е. линіи, проходящей черезъ центръ тяжести площади ватерлиніи. Послѣ этого:

$$BM = \frac{\gamma J\, tg\, d\varphi}{\gamma V \sin d\varphi} = \frac{J}{V},$$

такъ какъ по малости угла качанія его синусъ и тангенсъ надо считать равными между собою.

При конечномъ углѣ отклоненія φ, и если при томъ борта судна параллельны оси плаванія, послѣднее выраженіе сохраняетъ силу, но съ тою разницей, что tg и sin нельзя считать равными, такъ что его нужно исправить, раздѣливъ правую часть на $\cos\varphi$; подъ буквой J попрежнему надо подразумѣвать моментъ инерціи площади ватерлиніи относительно той оси, около которой предположено угловое отклоненіе судна. Откладывая по оси абсциссъ эти углы отклоненія, а по оси ординаты соотвѣтствующіе отрѣзки **BM**, получаемъ такъ называемую кривую статической устойчивости. Очевидно, площадь такой кривой пропорціональна работѣ, произведенной внѣшнимъ моментомъ для полученія даннаго отклоненія судна.

Изъ только что найденнаго выраженія высоты метацентра **BM** видно, что она зависитъ отъ формы судна. Какъ было уже указано, для оцѣнки степени устойчивости важно также разстояніе **BC** (фиг. 220), которое мы назвали буквой a; ясно, что эта величина зависитъ отъ нагруженія судна. Даже если общій его вѣсъ не мѣняется, но мѣняется только расположеніе на немъ нагрузокъ, положеніе центра тяжести вообще измѣняется, а, слѣдовательно, измѣняется длина a. Въ этомъ отношеніи нужно различать вліяніе перемѣщеній твердыхъ или жидкихъ грузовъ. Кромѣ того, грузъ можетъ перемѣщаться въ предѣлахъ судна по вертикали или по какому-нибудь горизонтальному направленію.

Если грузъ P перемѣщается по вертикали на высоту h, то центръ тяжести всего судна, вѣсъ котораго есть G, подымется на $h\frac{P}{G}$, что легко усмотрѣть изъ уравненія статическихъ моментовъ. На эту величину увеличится плечо a, а, слѣдовательно, уменьшится устойчивость судна. Рядомъ съ этимъ отмѣтимъ, что не только при перемѣщеніи груза по вертикали, но и при простомъ его подвѣшиваніи на вертикальной нити длиною h, напр. на кранѣ, происходитъ такая же точно потеря въ устойчивости, такъ какъ въ такомъ случаѣ сила P приложена къ судну не тамъ, гдѣ находится центръ тяжести груза, а тамъ, гдѣ укрѣплена гибкая нить. Это особенно станетъ ясно, если представить себѣ, что судно съ подвѣшеннымъ грузомъ получило какое-нибудь отклоненіе. Эта потеря устойчивости наступаетъ сейчасъ же, какъ только грузъ приподнятъ съ мѣста; съ дальнѣйшимъ перемѣщеніемъ груза она не мѣняется.

Если грузъ перемѣщается по горизонтальной плоскости, то и тутъ нужно различать два случая. Допустимъ для простоты представленій, что судно имѣетъ борта вблизи ватерлиніи въ видѣ цилиндрическихъ поверхностей, стоящихъ вертикально при положеніи устойчиваго равновѣсія. Площадь ватерлиніи имѣетъ свой центръ тяжести, и мы видѣли, что двѣ смежныя плоскости плаванія могутъ пересѣкаться не иначе, какъ по прямой, проходящей черезъ эту точку. Моментъ инерціи площади ватерлиніи, опредѣляющій высоту метацентра, т.-е. мѣру устойчивости судна, берется именно относительно этой прямой пересѣченія двухъ плоскостей плаванія. Какъ у всякой плоской фигуры, выдѣлимъ въ плоскости ватерлиніи направленія главныхъ осей инерціи, дающія наибольшій и наименьшій моменты инерціи этой плоской фигуры. Если судно имѣетъ одну плоскость симметріи, что обычно имѣетъ мѣсто, то одна изъ главныхъ осей инерціи, обыкновенно продольная для судна, лежитъ въ этой плоскости симметріи. Допустимъ, что центръ тяжести судна сначала лежитъ въ этой плоскости. Въ ней же содержится ось плаванія; на послѣдней находятся—центръ водоизмѣщенія, центръ тяжести судна и центръ тяжести площади ватерлиніи—той точки, въ которую обратилась для этого случая вся поверхность плоскостей водоизмѣщенія.

Теперь представимъ себѣ, что изъ центра тяжести судна мы переносимъ нѣкоторый грузъ P на горизонтальную длину l, оставляя его въ вертикальной плоскости, проходящей черезъ одну изъ главныхъ осей инерціи площади ватерлиніи. Очевидно новый центръ тяжести тѣла останется въ этой же плоскости; равновѣсіе нарушится тѣмъ, что появится пара, вращающая судно около оси, перпендикулярной къ плоскости перемѣщенія груза P. Судно повернется на уголъ φ, появится новая плоскость плаванія и новый центръ водоизмѣщенія, который останется въ той же вертикальной плоскости. Такимъ образомъ разысканіе новаго положенія устойчиваго равновѣсія судна сводится къ задачѣ на плоскости, разрѣшаемой изъ условія, чтобы моментъ Pl, который достаточно приложить къ судну, чтобы вернуть его центръ тяжести въ первоначальное положеніе, равнялся моменту устойчивости судна, т.-е.

$$Pl = \gamma J \, tg \varphi,$$

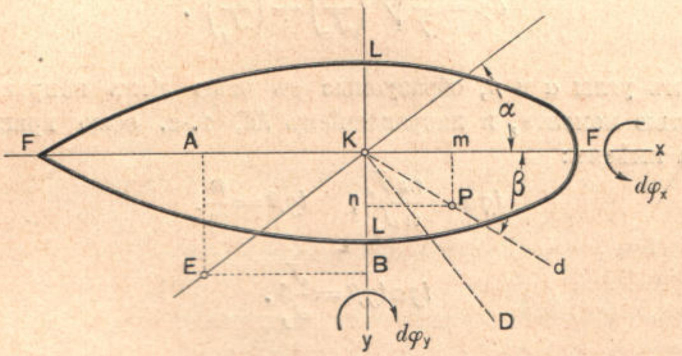
что легко получить, сличая первое и четвертое уравненія, написанныя выше при вычисленіи высоты метацентра, и принимая во вниманіе конечное значеніе угла φ. Если бы уголъ качанія былъ весьма малъ, то можно бы писать:

$$Pl = \gamma J \, d\varphi.$$

Ясно, что моментъ инерціи J ватерлиніи берется относительно другой ея главной оси инерціи, той самой, по которой пересѣклись новая и прежняя плоскости плаванія, и перпендикулярно къ которой перемѣстился грузъ P.

Допустимъ теперь, что грузъ P перемѣстился горизонтально изъ центра тяжести судна на длину l въ какомъ-нибудь направленіи. Несомнѣнно, что новое положеніе центра тяжести судна будетъ лежать на этомъ же направленіи, останется на той же глубинѣ отъ плоскости плаванія, какъ и ранѣе; измѣнятся только его координаты въ плоскости ватерлиніи.

Пусть кривая $FLFL$ (фиг. 222) есть ватерлинія той плоскости плаванія, когда имѣетъ мѣсто устойчивое равновѣсіе, т.-е. когда линія, соединяющая центръ водоизмѣщенія и центръ тяжести тѣла, вертикальна и, слѣдовательно, перпендикулярна къ плоскости чертежа, пересѣкаясь съ ней въ точкѣ K.



Фиг. 222.

Пусть судно имѣетъ плоскость симметріи, въ нашемъ случаѣ продольную FF; тогда, какъ ужъ было объяснено, въ этой же точкѣ K лежитъ центръ тяжести фигуры $FLFL$, а линія FF представляетъ одну изъ главныхъ осей инерціи этой фигуры. Другая ея главная ось инерціи перпендикулярна къ оси FF и проходитъ черезъ точку K. Первую ось примемъ за ось x'овъ, вторую—за ось y'овъ. Пусть грузъ P перемѣстился въ плоскости Kd, такъ что проектируется на чертежѣ въ точку P, въ разстояніи l отъ первоначальнаго положенія K. Моментъ Pl, конечно, вызываетъ вращеніе судна около нѣкоторой оси. Для ея опредѣленія разложимъ моментъ Pl на два, разлагая его плечо l на плечи m и n соотвѣтственно по осямъ Kx и Ky.

Моментъ Pm вращаетъ судно около главной оси инерціи Ky на уголъ $d\varphi_y$, опредѣляемый по предыдущему изъ уравненія:

$$Pm = \gamma J_y \, d\varphi_y.$$

Тутъ J_y моментъ инерціи фигуры $FLFL$ относительно оси Ky, а вращеніе $d\varphi_y$ направлено по часовой стрѣлкѣ, если смотрѣть противъ оси y'овъ.

Такъ же точно моментъ Pn вызоветъ поворотъ $d\varphi_x$ около главной оси инерціи Kx, относительно которой фигура $FLFL$ имѣетъ моментъ инерціи J_x:

$$Pn = \gamma J_x \, d\varphi_x.$$

Это вращеніе направлено противъ часовой стрѣлки, если смотрѣть противъ оси Kx. Для нахожденія итожнаго вращенія, сложимъ эти два составляющія поворота, откладывая по направленіямъ соотвѣтствующихъ осей векторы, пропорціональные угламъ поворота, т.-е. дѣлаемъ:

$$KA = d\varphi_x,$$

$$KB = d\varphi_y.$$

Послѣ этого видно, что судно повернется около оси KE, т.-е. въ плоскости KD, перпенрикулярной къ оси KE, на уголъ:

$$d\varphi = \frac{P}{\gamma}\sqrt{\left(\frac{n}{J_x}\right)^2 + \left(\frac{m}{J_y}\right)^2}.$$

Отмѣтимъ углы α и β, образуемые съ осью x'овъ направленіемъ KP, т.-е. плоскостью момента, и направленіемъ KE, т.-е. осью вращенія тѣла. Изъ чертежа имѣемъ:

$$tg\alpha = \frac{mJ_x}{nJ_y}; \quad tg\beta = \frac{n}{m}.$$

Отсюда

$$tg\alpha\, tg\beta = \frac{J_x}{J_y}.$$

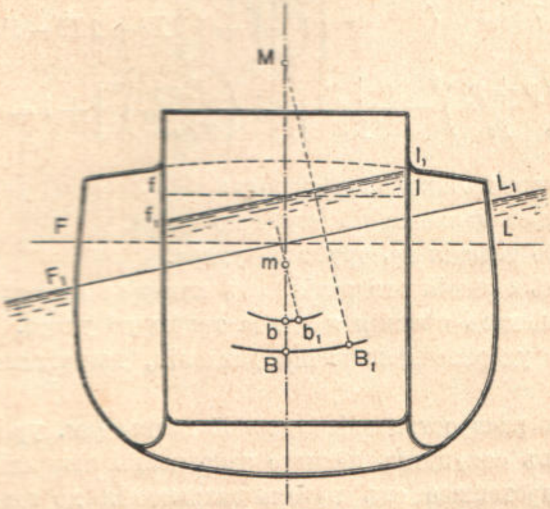
Если теперь вообразимъ построеннымъ на осяхъ Kx и Ky эллипсъ инерціи площади ватерлиніи, т.-е. если по оси Kx отложимъ длину $\sqrt{\frac{1}{J_x}}$, а по оси Ky—длину $\sqrt{\frac{1}{J_y}}$, и эти длины примемъ за полуоси эллипса, то направленія KP и KE, образующія вышеуказанные углы, будутъ направленіями двухъ *сопряженныхъ діаметровъ* этого эллипса *). Такимъ образомъ, какое-нибудь горизонтальное перемѣщеніе груза заставляетъ судно качнуться около оси, представляющей діаметръ эллипса инерціи площади ватерлиніи, сопряженный съ направленіемъ, содержащимъ старое и новое положенія центра тяжести судна.

Во избѣжаніе недоразумѣній отмѣтимъ, что мы все время говоримъ объ оси качанія судна, лежащей въ плоскости плаванія. Это очевидно не вѣрно: ось, около которой тѣло будетъ поворачиваться, проходитъ черезъ его центръ тяжести и расположена параллельно указанной выше оси KE. Такимъ образомъ, говоря о качаніи судна около оси, лежащей въ плоскости плаванія, мы замѣнили надлежащее вращеніе другимъ, отличающимся отъ перваго только на поступательное движеніе; притомъ это поступательное движеніе перпендикулярно къ плоскости, содержащей обѣ разсматриваемыя оси, т.-е. направлено по горизонтали. Отсюда видно, что эта замѣна отнюдь не вліяетъ на правильность опредѣленія положенія осей.

Предположимъ далѣе (фиг. 223), что судно имѣетъ балластъ или грузъ, въ видѣ жидкости (наливныя суда, запасы жидкаго топлива, водяной бал-

*) Какъ извѣстно, произведеніе тангенсовъ угловъ, образуемыхъ двумя сопряженными діаметрами эллипса съ его большою осью, равно отношенію квадратовъ его полуосей.

ластъ и т. п.). Пусть при нормальномъ положеніи судна плоскость плаванія есть FL и центръ водоизмѣщенія B. Въ то же время во внутреннемъ резервуарѣ жидкость налита до уровня fl и ея центръ тяжести пусть лежитъ въ b. Послѣ отклоненія на небольшой уголъ плоскость плаванія будетъ F_1L_1, центръ водоизмѣщенія B_1, уровень въ резервуарѣ f_1l_1 и центръ тяжести жидкости въ немъ перемѣстится въ b_1. Если бы нагрузка резервуара была неудобоподвижная, то метацентръ былъ бы въ M и мѣрой устойчивости служила бы длина BM. Изъ чертежа ясно видно, что вслѣдствіе жидкаго груза и перемѣщенія его центра тяжести моментъ возстанавливающей пары *уменьшился* на произведеніе изъ вѣса жидкости въ резервуарѣ, плеча bm и *sin* угла наклона оси плаванія.



Фиг. 223.

Вообще это уменьшеніе устойчивости, вызываемое жидкой нагрузкой, нужно имѣть въ виду при оцѣнкѣ эффекта заливанія судна и его трюмовъ волною; по той же причинѣ запасы жидкаго топлива лучше размѣщать въ отдѣльныхъ небольшихъ помѣщеніяхъ, расходуя его послѣдовательно изъ отдѣльныхъ помѣщеній; ибо если помѣщеніе вполнѣ заполнено жидкимъ грузомъ, то его центръ тяжести не имѣетъ свободы перемѣщеній, а потому при этомъ условіи жидкій грузъ не отличается отъ твердаго.

Сыпучія тѣла, какъ-то: зерновой хлѣбъ, артиллерійскіе снаряды и т. п. ведутъ себя какъ жидкости, если уголъ наклона судна превышаетъ уголъ ихъ естественнаго откоса, и потому обладаютъ тѣми же опасными свойствами. Эти потери устойчивости въ наливныхъ судахъ, хотя бы и раздѣленныхъ водонепроницаемыми переборками, могутъ вызвать въ періоды ихъ наливанія и опорожненія опасный кренъ и даже опрокидываніе, а потому эти процессы должны быть заранѣе прослѣжены на основаніи конструкціи судна, и сообразно съ этимъ долженъ быть установленъ порядокъ этихъ операцій.

Дополненіе къ § 29, стр. 308.

При разсмотрѣніи явленія гидравлическаго удара мы предполагали настолько быстрое закрываніе задвижки, что ударная волна, отразившись отъ магистрали, возвращается къ задвижкѣ, когда она уже вполнѣ закрыта. Однако часто можетъ оказаться, что или время закрыванія задвижки T настолько велико, или труба настолько коротка, что отраженная волна застанетъ задвижку еще не закрытой. Въ указанномъ на стр. 290 сочиненіи итальянскій инженеръ Альеви даетъ слѣдующія ур-ія, по которымъ можно вычислять въ такихъ случаяхъ повышеніе давленія въ трубѣ:

$$\left(\frac{p+p_0}{\gamma}\right)^2-2\,\frac{p+p_0}{\gamma}\cdot\left\{\frac{P+p_0}{\gamma}+\frac{\lambda^2}{g}\,\frac{(T-t)^2}{\left[\left(\frac{F}{f_0}\right)^2-1\right]T^2+2Tt-t^2}\right\}+\left(\frac{P+p_0}{\gamma}\right)^2=0;$$

$$\left(\frac{p+p_0}{p_0}\right)^2-\frac{p+p_0}{p_0}\left[2+\left(\frac{Lv\gamma}{gp_0T}\right)^2\right]+1=0.$$

Въ этихъ уравненіяхъ обозначаютъ:

p_0 — начальное давленіе въ трубѣ до удара.

v — скорость теченія въ трубѣ до удара.

f_0 — площадь сѣченія отверстія, изъ котораго вытекала вода до удара.

F и L — площадь сѣченія и длина трубы до удара.

P — полное ударное повышеніе давленія, вычисляемое по ур-ію (60) на стр. 294.

λ — скорость распространенія ударной волны (см. ур-іе 61 на стр. 294).

T — время въ секундахъ полнаго закрыванія отверстія f_0.

t — время, протекшее отъ начала закрыванія до того момента, когда имѣетъ мѣсто повышеніе давленія p.

p — искомое повышеніе давленія сверхъ начальнаго p_0.

Пользуясь первымъ уравненіемъ, нужно вносить въ него $t=\frac{2L}{\lambda}$; такимъ образомъ опредѣлится повышеніе давленія къ тому моменту, когда ударная волна вернется, отразившись отъ магистрали.

Второе уравненіе даетъ повышеніе давленія въ одинъ изъ слѣдующихъ моментовъ, подъ вліяніемъ отраженной волны. Расчетнымъ повышеніемъ давленія нужно считать наибольшее изъ этихъ обоихъ опредѣленій.

По Альеви время T_1 закрыванія задвижки должно быть

$$T_1>\frac{Lv\gamma}{gp_1}\sqrt{\frac{p_1+p_0}{p_0}},$$

чтобы не вызвать повышенія давленія большаго, чѣмъ заданная величина p_1 kgr/mtr. (См. стр. 23, 27, 28, 66 и 72 названнаго выше сочиненія Альеви.)

Таблица
значеній скоростныхъ напоровъ $\frac{v^2}{2g}$ въ *mtr*.

Ускореніе тяжести принято: $g = 9{,}81$ *mtr/sec*^{2}, такъ что $g^2 = 96{,}2361$; $\sqrt{2g} = 4{,}429447$.

v	$\frac{v^2}{2g}$	v	$\frac{v^2}{2g}$	v	$\frac{v^2}{2g}$	v	$\frac{v^2}{2g}$
1,05	0,05619	3,30	0,5550	5,55	1,570	7,80	3,101
1,10	0,06167	3,35	0,5720	5,60	1,598	7,85	3,141
1,15	0,06741	3,40	0,5892	5,65	1,627	7,90	3,181
1,20	0,07339	3,45	0,6067	5,70	1,656	7,95	3,221
1,25	0,07964	3,50	0,6244	5,75	1,685	8,00	3,262
1,30	0,08614	3,55	0,6423	5,80	1,715	8,05	3,303
1,35	0,09289	3,60	0,6605	5,85	1,744	8,10	3,344
1,40	0,09990	3,65	0,6790	5,90	1,774	8,15	3,385
1,45	0,1072	3,70	0,6978	5,95	1,804	8,20	3,427
1,50	0,1147	3,75	0,7167	6,00	1,835	8,25	3,469
1,55	0,1225	3,80	0,7360	6,05	1,866	8,30	3,511
1,60	0,1305	3,85	0,7555	6,10	1,897	8,35	3,554
1,65	0,1388	3,90	0,7752	6,15	1,928	8,40	3,596
1,70	0,1473	3,95	0,7952	6,20	1,959	8,45	3,639
1,75	0,1561	4,00	0,8155	6,25	1,991	8,50	3,682
1,80	0,1651	4,05	0,8360	6,30	2,023	8,55	3,726
1,85	0,1744	4,10	0,8568	6,35	2,055	8,60	3,770
1,90	0,1840	4,15	0,8778	6,40	2,088	8,65	3,814
1,95	0,1938	4,20	0,8991	6,45	2,120	8,70	3,858
2,00	0,2039	4,25	0,9206	6,50	2,153	8,75	3,902
2,05	0,2142	4,30	0,9424	6,55	2,187	8,80	3,947
2,10	0,2248	4,35	0,9644	6,60	2,220	8,85	3,992
2,15	0,2356	4,40	0,9867	6,65	2,254	8,90	4,032
2,20	0,2467	4,45	1,009	6,70	2,288	8,95	4,083
2,25	0,2580	4,50	1,032	6,75	2,322	9,00	4,128
2,30	0,2696	4,55	1,055	6,80	2,357	9,05	4,174
2,35	0,2815	4,60	1,078	6,85	2,392	9,10	4,221
2,40	0,2936	4,65	1,102	6,90	2,427	9,15	4,267
2,45	0,3059	4,70	1,126	6,95	2,462	9,20	4,314
2,50	0,3186	4,75	1,150	7,00	2,497	9,25	4,361
2,55	0,3314	4,80	1,174	7,05	2,533	9,30	4,408
2,60	0,3445	4,85	1,199	7,10	2,569	9,35	4,456
2.65	0,3579	4,90	1,224	7,15	2,606	9,40	4,504
2,70	0,3716	4,95	1,249	7,20	2,642	9,45	4,552
2,75	0,3854	5,00	1,274	7,25	2,679	9,50	4,600
2,80	0,3996	5,05	1,300	7,30	2,716	9,55	4,648
2.85	0,4140	5,10	1,326	7,35	2,753	9,60	4,699
2,90	0,4286	5,15	1,352	7,40	2,791	9.65	4,746
2,95	0,4436	5,20	1,378	7,45	2,829	9,70	4,796
3,00	0,4587	5,25	1,405	7,50	2,867	9,75	4,845
3,05	0,4741	5,30	1,432	7,55	2,905	9,80	4,895
3,10	0,4898	5,35	1,459	7,60	2,944	9,85	4,945
3,15	0,5057	5,40	1,486	7,65	2,983	9,90	4,995
3,20	0,5219	5,45	1,514	7,70	3,022	9,95	5,046
3,25	0,5383	5,50	1,542	7,75	3,061	10,00	5,097

Таблица

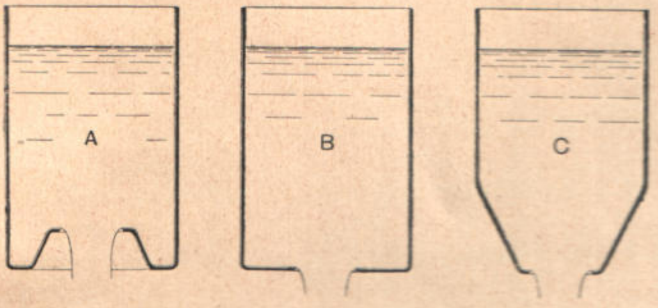
значеній скоростей свободнаго паденія $\sqrt{2gh}$ въ mtr/sec.

Ускореніе тяжести принято $g = 9{,}81$ mtr/sec, такъ что $\sqrt{2g} = 4{,}429447$.

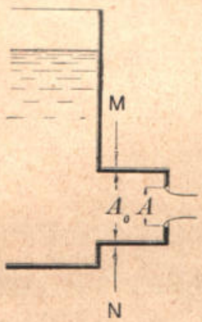
h	$\sqrt{2gh}$	h	$\sqrt{2gh}$	h	$\sqrt{2gh}$	h	$\sqrt{2gh}$	h	$\sqrt{2gh}$
0,5	3,132	20,5	20,06	40,5	28,19	60,5	34,45	80,5	39,75
1,0	4,429	21,0	20,30	41,0	28,36	61,0	34,59	81,0	39,87
1,5	5,426	21,5	20,54	41,5	28,54	61,5	34,74	81,5	39,99
2,0	6,263	22,0	20,78	42,0	28,71	62,0	34,88	82,0	40,11
2,5	7,003	22,5	21,01	42,5	28,88	62,5	35,02	82,5	40,23
3,0	7,672	23,0	21,24	43,0	29,05	63,0	35,16	83,0	40,35
3,5	8,286	23,5	21,47	43,5	29,22	63,5	35,30	83,5	40,48
4,0	8,859	24,0	21,70	44,0	29,38	64,0	35,44	84,0	40,60
4,5	9,395	24,5	21,93	44,5	29,55	64,5	35,57	84,5	40,72
5,0	9,904	25,0	22,15	45,0	29,71	65,0	35,71	85,0	40,84
5,5	10,39	25,5	22,37	45,5	29,88	65,5	35,85	85,5	40,96
6,0	10,85	26,0	22,59	46,0	30,04	66,0	35,98	86,0	41,08
6,5	11,30	26,5	22,81	46,5	30,21	66,5	36,12	86,5	41,20
7,0	11,72	27,0	23,02	47,0	30,37	67,0	36,26	87,0	41,32
7,5	12,13	27,5	23,23	47,5	30,53	67,5	36,40	87,5	41,44
8,0	12,53	28,0	23,44	48,0	30,69	68,0	36,53	88,0	41,55
8,5	12,91	28,5	23,65	48,5	30,85	68,5	36,66	88,5	41,67
9,0	13,29	29,0	23,85	49,0	31,01	69,0	36,79	89,0	41,79
9,5	13,65	29,5	24,05	49,5	31,17	69,5	36,93	89,5	41,91
10,0	14,01	30,0	24,26	50,0	31,32	70,0	37,06	90,0	42,02
10,5	14,35	30,5	24,46	50,5	31,48	70,5	37,19	90,5	42,14
11,0	14,69	31,0	24,66	51,0	31,63	71,0	37,32	91,0	42,25
11,5	15,02	31,5	24,86	51,5	31,79	71,5	37,46	91,5	42,37
12,0	15,34	32,0	25,06	52,0	31,94	72,0	37,59	92,0	42,49
12,5	15,56	32,5	25,25	52,5	32,10	72,5	37,72	92,5	42,60
13,0	15,97	33,0	25,45	53,0	32,25	73,0	37,85	93,0	42,72
13,5	16,28	33,5	25,64	53,5	32,40	73,5	37,98	93,5	42,83
14,0	16,58	34,0	25,83	54,0	32,55	74,0	38,10	94,0	42,95
14,5	16,87	34,5	26,02	54,5	32,70	74,5	38,23	94,5	43,06
15,0	17,16	35,0	26,21	55,0	32,85	75,0	38,36	95,0	43,17
15,5	17,44	35,5	26,40	55,5	33,00	75,5	38,49	95,5	43,29
16,0	17,72	36,0	26,58	56,0	33,15	76,0	38,62	96,0	43,40
16,5	17,99	36,5	26,76	56,5	33,30	76,5	38,75	96,5	43,52
17,0	18,26	37,0	26,94	57,0	33,44	77,0	38,87	97,0	43,63
17,5	18,53	37,5	27,12	57,5	33,59	77,5	39,00	97,5	43,74
18,0	18,79	38,0	27,30	58,0	33,73	78,0	39,12	98,0	43,85
18,5	19,05	38,5	27,48	58,5	33,88	78,5	39,25	98,5	43,96
19,0	19,31	39,0	27,66	59,0	34,02	79,0	39,37	99,0	44,07
19,5	19,56	39,5	27,84	59,5	34,16	79,5	39,50	99,5	44,18
20,0	19,81	40,0	28,01	60,0	34,31	80,0	39,62	100,0	44,29

Указатель предметовъ и именъ.

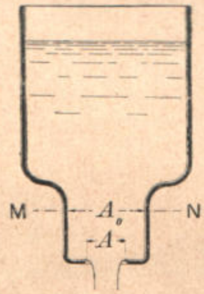
Фиг. 55 на стр. 105, фиг. 56 и 57 на стр. 106 и фиг. 58 на стр. 107, какъ ошибочныя, нужно замѣнить слѣдующими.



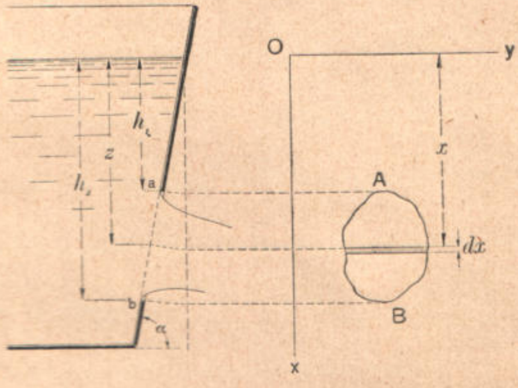
Фиг. 55.



Фиг. 56.

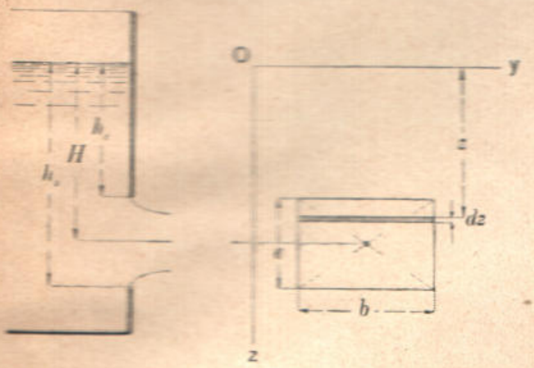


Фиг. 57.

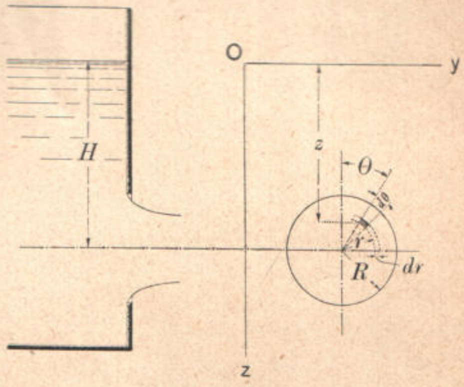


Фиг. 58.

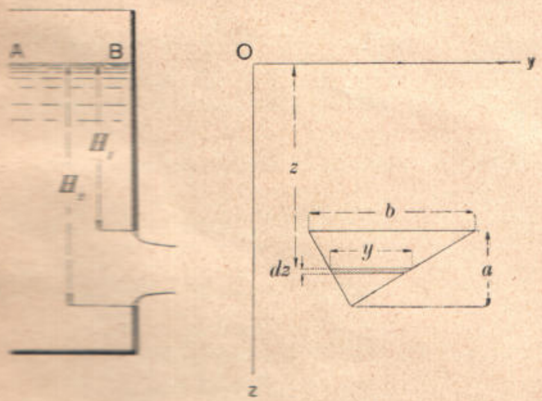
Фиг. 59 на стр. 108, фиг. 60 на стр. 109, фиг. 61 на стр. 111 и фиг. 64 на стр. 114, какъ ошибочныя, нужно замѣнить слѣдующими.



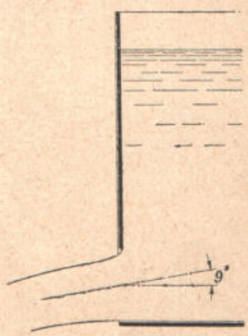
Фиг. 59.



Фиг. 60.



Фиг. 61.



Фиг. 64.