МАТЕРІАЛИ

МІЖНАРОДНОЇ
НАУКОВО-ПРАКТИЧНОЇ КОНФЕРЕНЦІЇ

"ДНІ НАУКИ '2005"

15-27 квітня 2005 року

Том 36
ТЕХНІКА

Дніпропетровськ
Наука і освіта
2005

Матеріали Міжнародної науково-практичної конференції "Дні науки '2005". Том 36. Техніка. - Дніпропетровськ: Наука і освіта, 2005. - 82 с.

ISBN 966-7191-86-9

У збірнику містяться матеріали Міжнародної науково-практичної конференції "Дні науки '2005" з техніки.
Для студентів, аспірантів та викладачів.

ISBN 966-7191-86-9

К.т.н. Рудик А.В., к.т.н. Дрючин О.О., Семенов А.О.
Вінницький національний технічний університет

ВПЛИВ ЗМІНИ КОЕФІЦІЄНТА ПІДСИЛЕННЯ НА КОРЕНІ ЗАМКНЕНИХ СИСТЕМ, СИНТЕЗОВАНИХ НА ОСНОВІ ПРИНЦИПУ РОЗДІЛЕННЯ

Розглянемо лінійну динамічну систему з одномірним входом та багатомірним виходом або одномірним виходом та багатомірним входом, яку можна описати за допомогою рівняння стану

$$\dot{x} = Ax + Bu + \nu, \tag{1}$$

та рівняння спостережень

$$y = Cx + w,$$

де ν та w є шумами. В системі з одномірним входом та багатомірним виходом В є вектором-стовпцем, а в системі з одномірним виходом та багатомірним входом С є вектором-рядком. Таким чином, або В, або С, або обидві ці матриці є векторами.

Будемо вважати, що похибка реалізації компенсатора системи приводить до зміни коефіцієнта підсилення, тобто дійсний вхід керування описується як

$$u = (1+\sigma)\hat{u},$$

де $\hat{u}$ є вхідним сигналом, що визначається компенсатором при його точному узгодженні з об'єктом.

Тому задача полягає в знаходженні характеристичного поліному замкненої системи $\Delta(s)$. У відповідності з принципом розділення ідеальний вхідний сигнал керування $u \times \hat{u}$ визначається співвідношенням

$$\hat{u} = -G\hat{x}, \tag{2}$$

де G – матриця підсилення, вибрана згідно визначеного алгоритму; $\hat{x}$ – стан спостерігача, що визначається рівнянням

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + B\hat{u} + K(y - C\hat{x}) = (A - BG - KC)\hat{x} + Ky. \tag{3}$$

Передаточна функція компенсатора, що зв'язує ідеальний вхід керування $\hat{u}$ і вимірюваний вихід y та відповідає співвідношенням (2) та (3), має вигляд

$$\hat{H}(s) = \frac{GK}{sI - A + BG + KC}, \tag{4}$$

де $\hat{U}(s) = -\hat{H}(s)Y(s)$.

Будемо вважати, що компенсатор, який описується рівняннями (2) та (3) або (4), реалізується з точністю до постійного множника, тобто $U(s) = -H(s)Y(s)$, де $H(s) = (1+\sigma)\hat{H}(s)$.

Розглянемо спочатку одномірні за виходом та багатомірні за входом системи. В них множник $1+\sigma$ зв'язаний з спостереженням одномірного виходу. В зв'язку з цим рівняння замкненої системи в частотній області при відкиданні членів, що описують шумові процеси, має вигляд:

$$sx = Ax + Bu; \tag{5}$$

$$s\hat{x} = A\hat{x} + Bu + K(y - C\hat{x}), \tag{6}$$

де

$$u = -G\hat{x}; \tag{7}$$

$$y = (1+\sigma)Cx. \tag{8}$$

Підставляючи рівняння (7) та (8) у (5) та (6), отримаємо:

$$sx = Ax - BG\hat{x}; \tag{9}$$

$$s\hat{x} = A\hat{x} - BG\hat{x} + K[(1+\sigma)Cx - C\hat{x}]. \tag{10}$$

Віднявши від рівняння (9) співвідношення (10), отримаємо

$$s(x-\hat{x}) = (A-KC)(x-\hat{x}) - \sigma KCx \;\rightarrow\; se = (A-KC)e - \sigma KCx. \tag{11}$$

В результаті рівняння (9) перепишемо в такому вигляді:

$$sx = (A-BG)x + BGe. \tag{12}$$

З співвідношень (11) та (12) виходить рівняння для характеристичного поліному замкненої системи:

$$\Delta(s) = \begin{vmatrix} sI - A + KC & \sigma KC \\ -BG & sI - A + BG \end{vmatrix} = 0.$$

Очевидно, що при $\sigma = 0$ $\Delta(s) = \Delta_K(s)\Delta_G(s)$, де внаслідок принципу розділення характеристичний поліном спостерігача $\Delta_K(s)$ визначається виразом

$$\Delta_K(s) = |sI - A + KC| = |sI - A_K|,$$

а характеристичний поліном замкненої системи зі зворотним зв'язком за всіма станами $\Delta_G(s)$ має вигляд

$$\Delta_G(s) = |sI - A + BG| = |sI - A_G|.$$

При $\sigma = 0$ можна записати

$$\Delta(s) = |M_0 + \sigma F| = |M_0|\,|I + \sigma M_0^{-1}F|, \tag{13}$$

де

$$M_0 = \begin{bmatrix} sI - A_K & 0 \\ -BG & sI - A_G \end{bmatrix}; \quad F = \begin{bmatrix} 0 & KC \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad |M_0| = \Delta_K(s)\Delta_G(s).$$

У відповідності з теоремою Келі – Гамільтона для будь-якої матриці P

$$\begin{gathered} |I + \sigma P| = 1 + \sigma a_1 + \sigma^2 a_2 + \ldots + \sigma^k a_k; \\ a_1 = \operatorname{tr} P; \quad a_2 = \operatorname{tr}_2 P; \quad \ldots \quad a_k = \operatorname{tr}_k P = |P|, \end{gathered} \tag{14}$$

де $\operatorname{tr}_i P$ означає суму всіх головних мінорів порядку i матриці P. Покладемо, що $P = M_0^{-1}F$. Тому що C є вектором-рядком, то P має одиничний ранг, і тільки a_1 з коефіцієнтів співвідношення (14) є ненульовим. Оскільки

$$M_0^{-1}F = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{KC}{sI - A_K} \\ 0 & \dfrac{BGKC}{(sI - A_G)(sI - A_K)} \end{bmatrix},$$

то

$$a_1 = \operatorname{tr} M_0^{-1} F = \operatorname{tr} \frac{BGKC}{(sI - A_G)(sI - A_K)}.$$

В результаті співвідношення (13) зводиться до виразу

$$\Delta(s) = \Delta_K(s)\Delta_G(s)[1 + \sigma Q(s)], \tag{15}$$

де

$$Q(s) = \operatorname{tr} \frac{BGKC}{(sI - A_G)(sI - A_K)}. \tag{16}$$

При розгляді систем з одномірним входом та багатомірним виходом множник $1+\sigma$ зв'язаний з входом. Тому замість рівнянь (5) та (6) отримаємо:

$$sx = Ax - (1+\sigma)BG\hat{x};$$

$$s\hat{x} = A\hat{x} - BG\hat{x} + KC(x - \hat{x}),$$

або

$$se = (A - KC)e - \sigma BG\hat{x};$$

$$s\hat{x} = (A - BG)\hat{x} + KCe.$$

З використанням останніх співвідношень можна отримати характеристичне рівняння

$$\Delta(s) = \begin{vmatrix} sI - A + KC & \sigma BG \\ -KC & sI - A + BG \end{vmatrix} = 0.$$

Представивши $\Delta(s)$ в формі

$$\Delta(s) = |M_1|\,|I + \sigma M_1^{-1}E|,$$

де

$$M_1 = \begin{bmatrix} sI - A_K & 0 \\ -BG & sI - A_G \end{bmatrix}; \qquad E = \begin{bmatrix} 0 & \sigma BG \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

можна для $Q(s)$ отримати співвідношення (16).

Розглянутий підхід легко узагальнюється для випадку, коли параметр σ не є постійним, а являє собою передаточну функцію одномірною за входом та виходом лінійної стаціонарної системи. Поширення отриманого результату на дискретні системи не викликає жодних ускладнень.

Співвідношення типу (15) можна отримати і для керування з використанням спостерігача редуційованого порядку. Для цього розглянемо процес (1) при зміні коефіцієнта підсилення в станах спостереження типу (8). Покладемо, що неспостережені стани утворюють вектор $\xi = Tx$, де

$$\det \begin{bmatrix} C \\ \cdots \\ T \end{bmatrix} \neq 0.$$

Оскільки вектор ξ недосяжний для вимірювань, то керування, що визначається спостереженнями, буде мати вигляд

$$\hat{u} = -G_y y - G_\xi \hat{\xi}, \tag{17}$$

де $\hat{\xi}$ є неспостереженими станами, що відтворюються спостерігачем редуційованого порядку, тобто

$$\hat{\xi} = D\hat{\xi} + H\hat{u} + Ky. \qquad (18)$$

Вимоги до параметрів D, H та K зводяться до того, що параметр D має бути стійким, тобто:

$$DT - TA + KC = 0; \qquad H = TB. \qquad (19)$$

Введення похибки $e = \hat{\xi} - \xi$ та використання рівнянь (1), (8) та (17) ÷ (19) дозволяє отримати рівняння динаміки похибки та стану:

$$\begin{aligned} \dot{e} &= De + \sigma KCx; \\ \dot{x} &= \left(A_G - \sigma BG_y C\right)x - BG_\xi e, \end{aligned} \qquad (20)$$

де $A_G = A - BG$.

Характеристичне рівняння системи (20) буде мати вигляд

$$\Delta(s) = \det\begin{bmatrix} sI - D & -\sigma KC \\ BG_\xi & sI - A_G + \sigma BG_y C \end{bmatrix} = 0.$$

З останнього співвідношення виходить, що

$$\Delta(s) = \det\left[M_0(s) + \sigma F\right] = \det M_0(s) \det\left(I + \sigma M_0^{-1}(s) F\right) = 0,$$

де

$$M_0(s) = \begin{bmatrix} sI - D & 0 \\ BG_\xi & sI - A_G \end{bmatrix}; \qquad F = \begin{bmatrix} 0 & -KC \\ 0 & BG_y C \end{bmatrix}.$$

Можна показати, що і в цьому випадку $\Delta(s)$ визначається співвідношенням (15), при цьому:

$$\Delta_G(s) = \det(sI - A_G);$$

$$\Delta_K(s) = \det(sI - D);$$

$$Q(s) = tr\left[M_0^{-1}(s) F\right] = tr\left[\frac{BG_\xi KC}{(sI - A_G)(sI - D)} + \frac{BG_y C}{sI - A_G}\right].$$

Таким чином, в роботі отримано характеристичні рівняння замкнених систем, синтезованих на основі принципу розділення, з одномірним входом та багатомірним виходом і багатомірним входом та одномірним виходом, на основі яких проаналізовано вплив зміни коефіцієнта підсилення на корені цих характеристичних рівнянь.