Міністерство освіти і науки України

Національний університет водного господарства
та природокористування

Кафедра економічної кібернетики

06-11-53

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

та завдання до лабораторних робіт із навчальної дисципліни

„Стохастичні процеси та моделі в економіці”

для здобувачів вищої освіти другого (магістерського) рівня
за спеціальністю 051 «Економіка»
спеціалізація «Інформаційні технології в бізнесі»
денної і заочної форми навчання

Рекомендовано науково-методичною комісією
зі спеціальності 051 «Економіка»
Протокол № 17 від 2.10.2018 р.

Рівне – 2018

Методичні вказівки та завдання до лабораторних робіт із навчальної дисципліни «Стохастичні процеси та моделі в економіці» для здобувачів вищої освіти другого (магістерського) рівня за спеціальністю 051 «Економіка» спеціалізація «Інформаційні технології в бізнесі» денної і заочної форми навчання 06-11-53 / Грицюк П. М. – Рівне: НУВГП, 2018. – 25 с.

Упорядник: Грицюк П. М., д.е.н., професор, завідувач кафедри економічної кібернетики

Відповідальний за випуск: Грицюк П. М., завідувач кафедри економічної кібернетики

Зміст

Вступ

Дисципліна «Стохастичні процеси і моделі в економіці» є обов'язковою компонентою підготовки магістрів спеціальності «Економіка» за освітньо-професійною програмою «Інформаційні технології в бізнесі». Вивчення даної дисципліни формує у студентів здатність описувати економічні та соціальні процеси і явища на основі теоретичних та прикладних моделей, аналізувати і змістовно інтерпретувати отримані результати, здатність прогнозувати та моделювати стохастичні бізнес-процеси в економіці.

Економічні системи здебільшого перебувають в умовах невизначеності. Це означає, що нам невідомо, у якому стані буде система у майбутній момент часу. Така невизначеність завжди породжує ризик. Це може бути ризик недоотримання прибутку, ризик втрат, ризик невикористаних можливостей тощо. Для зменшення ступеня ризику та мінімізації можливих втрат здійснюють математичне моделювання економічних систем. Адекватна модель дозволяє передбачити поведінку системи, і, разом з тим, зменшити потенційні втрати та збільшити можливі прибутки.

Економічні системи ведуть себе випадковим (стохастичним) чином. Поведінку такої системи можна передбачити лише з певною ймовірністю на короткий проміжок часу. Тому для моделювання стохастичних систем використовують статистичні методи. До таких методів можна віднести методи моделювання часових рядів (модель тренду, модель циклічної компоненти), метод ланцюгів Маркова.

Важливий клас економічних систем становлять стаціонарні системи. Такі системи можна вивчати методами математичної статистики. Обов'язковим елементом ідентифікації стаціонарної економічної системи є ідентифікація закону розподілу показників, які характеризують дану систему. Знання закону розподілу дозволяє будувати комп'ютерні стохастичні моделі динаміки системи.

Стохастична (імовірнісна) модель - це модель, у якій використовується одна або більше випадкових величин для врахування невизначеності процесу, або модель, у якій вхідні дані будуть представлені відповідно до деякого статистичного розподілу. У стохастичній математичній моделі параметри, умови функціонування і характеристики стану об'єкта, що моделюється, представлені випадковими величинами і пов'язані стохастичними (випадковими) залежностями. Характеристики стану в такій моделі визначаються не однозначно, а через закони розподілу їх імовірностей. Таким чином моделюються стохастичні процеси в теорії масового обслуговування, в мережевому плануванні, управлінні та інших областях економічної діяльності.

Найбільш поширеними законами розподілу стаціонарних характеристик економічних систем є нормальний та показниковий. Нормальний закон описує розподіл значення ціни деякого товару в різних регіонах, розподіл виробничих витрат на виготовлення однакового виробу на різних підприємствах. Показниковий закон розподілу широко зустрічається в моделюванні систем масового обслуговування. Моделювання стаціонарних економічних процесів з використанням вказаних розподілів описано у більшості тем даних методичних вказівок.

Завданням вивчення дисципліни є оволодіння теоретичними знаннями та інструментарієм моделювання стохастичних економічних процесів; набуття вмінь постановки і самостійного розв’язання задач аналізу, моделювання та оптимізації управління такими системами з використанням отриманих моделей.

Методичні вказівки містять набір лабораторних робіт, виконання яких дозволить поглибити розуміння методів моделювання стохастичних процесів у економіці та краще освоїти методику моделювання економічних систем.

Тема 1. Перевірка гіпотези про нормальний розподіл вибірки

Завдання. Використовуючи вибірку, яка містить $N = 100$ значень, при рівні значимості $\alpha = 0.05$ перевірити гіпотезу про належність вибірки до генеральної сукупності з нормальним розподілом.

Критерій Пірсона

Нормальний розподіл (розподіл Ґауса) – розподіл ймовірностей випадкової величини, що характеризується густиною ймовірності

$$f(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \tag{1.1}$$

де μ – математичне сподівання, σ^2 — дисперсія випадкової величини. Параметр σ також відомий, як стандартне відхилення. Розподіл із значенням параметрів $\mu = 0$ та $\sigma^2 = 1$ називають стандартним нормальним розподілом. При оцінюванні вибірки математичне сподівання генеральної сукупності невідоме і, тому, замінимо його середнім вибірковим. Для перевірки гіпотези про нормальний розподіл вибірки використаємо критерій узгодження Пірсона. Алгоритм перевірки має наступний вигляд.

1. Розмістити задану вибірку x_t у діапазон *B6 : B105*. Розмістити нумерацію значень вибірки x_t у діапазон *A6 : A105*.

2. Використовуючи значення вибірки x_t обчислити наступні характеристики вибірки:

2.1. Мінімальне вибіркове значення $x_{\min}$ (*мин()*) – комірка *A4*;

2.2. Максимальне вибіркове значення $x_{\max}$ (*макс()*) – комірка *B4*;

2.3. Середнє вибіркове x_c (*срзнач()*) – комірка *C4*;

2.4. Середнє квадратичне відхилення σ_x (*стандотклон()*) – комірка *D4*;

2.5. Ширину інтервалу $Dx = (x_{\max} - x_{\min})/10$ (з точністю до десятих) – комірка *E4*.

Розмістити обчислені характеристики у вигляді наступної таблиці.

Xmin	*Xmax*	*Xc*	σ_x	*Dx*	*N*
-7.70	7.70	0.19	1.95	1.15	100

3. Представити вибірку у вигляді інтервального ряду. Для цього весь інтервал значень x_t ділимо на 10 інтервалів $[x_{i0}, x_{i1}]$, шириною Dx. Значення границь інтервалів розрахувати за формулами

$$x_{i0} = x_{\min} + Dx \cdot (i-1); \quad x_{i1} = x_{\min} + Dx \cdot i; \tag{1.2}$$

Для лівого краю першого інтервалу та правого краю останнього інтервалу використовують спеціальні формули. Значення лівого краю x_{10} першого інтервалу вибираємо за співвідношенням $x_{10} = [x_{\min} - \sigma]$. Значення правого краю x_{101} останнього інтервалу вибираємо за формулою $x_{101} = [x_{\max} + \sigma]$. Таке розширення крайніх інтервалів є необхідним для виконання умови $\sum p_i = 1$. У разі, якщо деякі інтервали містять менше трьох значень, їх необхідно об'єднати, виконавши перегрупування інтервального ряду.

4. Заповнити стовпці таблиці 1 (*діапазон E5 : M15*), використовуючи наступні функції: n_i - емпіричне значення частоти (кількість елементів вибірки, які попали в i-ий інтервал); $\Phi(x_{i)}$ - інтегральна функція нормального розподілу - *НОРМРАСП(* $x_i, x_c, \sigma, 1$ *)*; $p_i = \Phi_i - \Phi_{i-1}$ - імовірність попадання випадкової величини в і – ий інтервал; $m_i = p_i \cdot N$ - теоретичне значення частоти для i-го інтервалу. Конкретні формули розмістити в діапазон *F6 : M15*. Вони будуть мати наступний вигляд:

4.1. Стовпець **n**: = *ЧАСТОТА(*$B$6:$B$105;G6:G15*)*;
4.2. Стовпець **Ф0:** = *НОРМРАСП(F6; $C$4; $D$4; 1);*
4.3. Стовпець **Ф1:** = *НОРМРАСП(G6; $C$4; $D$4; 1);*
4.4. Стовпець **P**: = *J6 – I6;*
4.5. Стовпець **m**: = *K6*100;*
4.6. Стовпець **(n-m)^2/m:** = *(H6-L6)^2/L6*

5. Якщо деякі перші чи останні інтервали (стовпець n) містять менше ніж три значення, їх необхідно об’єднати і зробити перерахунок у вигляді нової таблиці, яка містить менше, ніж 10 рядків. У нашому випадку нова таблиця буде містити 8 рядків.
6. Обчислити суми для стовпців *G, J, K, L.*
7. Обчислити шукану статистику (критерій Пірсона) за формулою

$$Q^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{(n_i - m_i)^2}{m_i} . \tag{1.3}$$

Таблиця 1.1. Критерій узгодженості Пірсона

	X0	X1	N	Ф0	Ф1	P	m	(n-m)^2/m
1	-7.70	-4.60	1	0.000	0.007	0.007	1	0.179
2	-4.60	-3.45	2	0.007	0.030	0.023	2	0.040
3	-3.45	-2.30	6	0.030	0.098	0.068	7	0.100
4	-2.30	-1.15	12	0.098	0.242	0.144	14	0.391
5	-1.15	0.00	25	0.242	0.457	0.215	22	0.565
6	0.00	1.15	26	0.457	0.686	0.229	23	0.419
7	1.15	2.30	17	0.686	0.859	0.173	17	0.007
8	2.30	3.45	6	0.859	0.952	0.093	9	1.189
9	3.45	4.60	2	0.952	0.988	0.036	4	0.690
10	4.60	7.70	3	0.988	1.000	0.012	1	2.803
			100			**1.000**	**100**	**6.383**
	Q^2 =	**6.38**				**χ^2 =**	**14.07**	

Таблиця 1.2. Перерахунок на 8 інтервалів

	X0	X1	N	Ф0	Ф1	P	m	(n-m)^2/m
1	-7.70	-3.45	3	0.000	0.030	0.030	3	0.001
2	-3.45	-2.30	6	0.030	0.098	0.068	7	0.100
3	-2.30	-1.15	12	0.098	0.242	0.144	14	0.391
4	-1.15	0.00	25	0.242	0.457	0.215	22	0.565
5	0.00	1.15	26	0.457	0.686	0.229	23	0.419
6	1.15	2.30	17	0.686	0.859	0.173	17	0.007

7	2.30	3.45	6	0.859	0.952	0.093	9	1.189
8	3.45	7.70	5	0.952	1.000	0.048	5	0.013
			100			**1.000**	**100**	**2.683**
	Q^2 =	**2.68**				**χ^2 =**	**11.07**	

8. Визначаємо критичне значення параметра $\chi^2_{кр}(\alpha, k-3)$ (функція *ХИ2ОБР(α,k-3)*). Тут $k = 8-$ кількість інтервалів, $\alpha = 0.05$. У нашому випадку $\chi^2_{кр}(\alpha, k-3) = 11.07$. Якщо $Q^2 < \chi^2_{кр}$, гіпотеза про нормальний розподіл приймається (точніше кажучи, не відхиляється).

Висновок. У нашому випадку $Q^2 = 2.68 < \chi^2_{кр}(\alpha, k-3) = 11.07$. Отже, гіпотеза про нормальний розподіл вибірки не відхиляється (приймається).

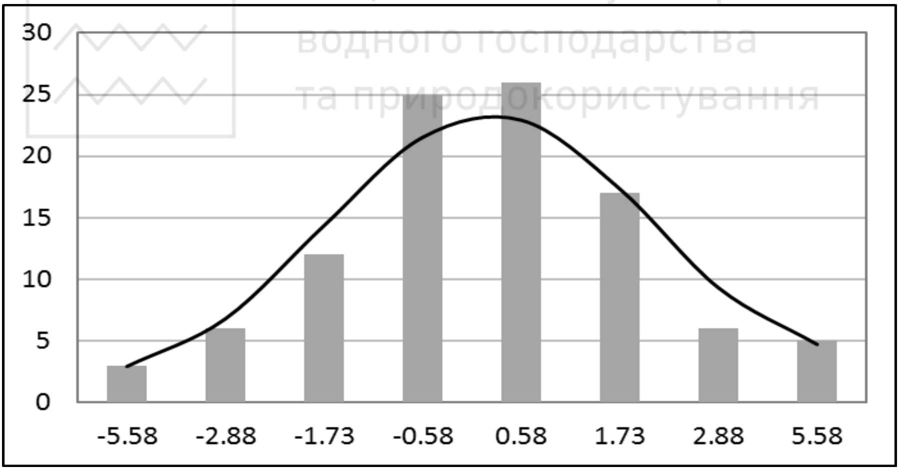


Рис. 1.1. Гістограма нормального розподілу. Сірі стовпці відповідають фактичним частотам, лінія – теоретичному розподілу.

Критерій Колмогорова-Смірнова

Критерій Колмогорова-Смірнова використовують при обсязі вибірки *n* >=20 для перевірки гіпотези про те, чи підкоряється випадкова величина деякому теоретичному закону розподілу (найчастіше нормальному). Оскільки параметри закону розподілу μ і σ зазвичай невідомі, використовують їх вибіркові оцінки. Критерій заснований на визначенні максимального відхилення накопиченої частості (емпірична функція розподілу) від очікуваної теоретичної функції нормального розподілу $F(\mu,\sigma)$ - функція НОРМРАСП().

Порядок виконання розрахунків.

1. На основі статистичних даних побудувати варіаційний ряд.

2. Визначити мінімальну та максимальну межу відповідного відхилення

$$D_n^+ = \max\left[\frac{i}{n} - F(x_i)\right], \quad 1 \le i \le n, \quad n = 100.$$

$$D_n^- = \max\left[F(x_i) - \frac{i-1}{n}\right], \quad 1 \le i \le n \ . \tag{1.4}$$

Тут $F(x_i)$ - значення теоретичної функції розподілу.

3. Вибирають максимальну з двох меж відхилення

$$D_n = \max\left[D_n^+, D_n^-\right]. \tag{1.5}$$

4. Розрахувати статистику критерію за формулою

$$\lambda = \frac{6nD_n + 1}{6\sqrt{n}}. \tag{1.6}$$

5. Розрахункове значення статистики порівняти з табличним

α	0,1	0,05	0,01
$\lambda_{табл}$	0,835	0,909	1,057

Якщо $\lambda_{розрах} \le \lambda_{табл}$, то розподіл вважається відповідним до теоретичного з функцією розподілу *F(x)* з відомими параметрами при вибраному рівні значущості α.

6. Для нашого випадку

$$D_n^+ = 0.072; D_n^- = 0.068; D_n = 0.072; \lambda = 0.733.$$

7. Оскільки $\lambda_{розрах} \le \lambda_{табл}$, то гіпотеза про нормальний розподіл не відхиляється (приймається).

Тема 2. Генерування випадкових послідовностей з рівномірним розподілом

Моделювання стаціонарних економічних процесів опирається на моделювання вибірки з відповідним законом розподілу. Початковим етапом моделювання вибірки із заданим розподілом є моделювання вибірки випадкових величин, рівномірно розподілених в інтервалі (0,1).

Хід виконання роботи

Завдання 1. Використовуючи алгоритм Неймана згенерувати випадкову, рівномірно розподілену у інтервалі [0; 1], послідовність кількістю 100 чисел.

Початкове число вибрати чотиризначним і непарним. Для перетворення числа у текстову форму використати функцію ТЕКСТ() (наприклад =ТЕКСТ(B2*B2;"0"). Для вирізання середніх цифр з отриманого числа використати функцію ПСТР(), наприклад =ПСТР(C2;2;4). У разі виродження послідовності (числа мають менше ніж 4 цифри) вибрати інше початкове число. Після завершення побудови зафіксувати послідовність шляхом копіювання та спеціальної вставки («значення»).

Завдання 2. Використовуючи лінійний конгруентний генератор $x_{i+1} \equiv (ax_i + c) \bmod m$ згенерувати випадкову, рівномірно розподілену у інтервалі [0; 1], послідовність кількістю 100 чисел.

Значення параметрів вибрати наступними m = 2^{32}, a = 69069, c = 5. Початкове число вибрати дев’ятизначним непарним. Зафіксувати отриману послідовність шляхом копіювання та спеціальної вставки.

Завдання 3. Використовуючи генератор випадкових чисел, вбудований у MS Excel (слчис()), згенерувати випадкову, рівномірно розподілену у інтервалі [0; 1], послідовність кількістю 100 чисел. Зафіксувати отриману послідовність шляхом копіювання.

Завдання 4. Використовуючи генератор випадкових чисел, вбудований у MatLab (rand), згенерувати випадкову, рівномірно розподілену у інтервалі [0; 1], послідовність кількістю 100 чисел. Зафіксувати отриману послідовність шляхом копіювання.

Завдання 5. Для кожної вибірки виконати перевірку відповідності до рівномірного розподілу шляхом перевірки критерію Пірсона. Розрахункова таблиця має вигляд табл. 2.1. Послідовність виконання розрахунків є наступною.

1. Розділити інтервал [0; 1] на 10 рівних проміжків.
2. Використовуючи результати різних методів генерації випадкових чисел, підрахувати кількість «попадань» у кожний з проміжків n_i. Для підрахунку використати функцію Ч*АСТОТА(*$B$6:$B$105;G6:G15*)*.
3. Побудувати графік функції щільності розподілу (стовпчикову діаграму) для даної вибірки. Стовпці діаграми будуть відображати кількість «попадань» випадкових чисел у відповідні проміжки (рис. 2.1).

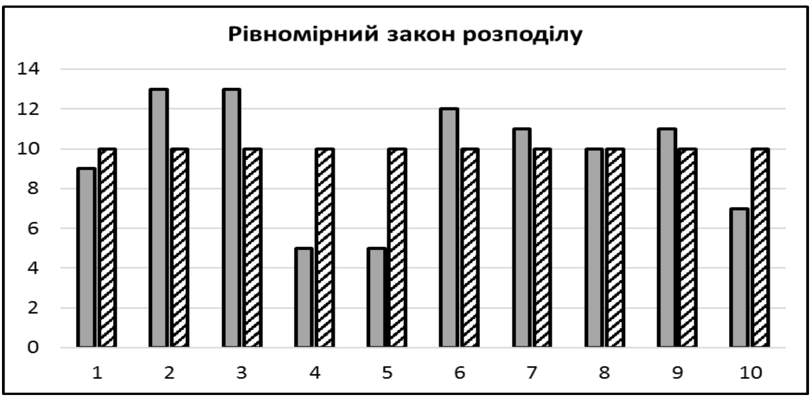


Рис. 2.1. Перевірка гіпотези про рівномірний закон розподілу

4. Підрахувати квадрат відхилення кількості випадкових чисел у кожному інтервалі n_i від середнього значення для кожного інтервалу $m = 10$. Визначити суму квадратів відхилень S.

5. Обчислити критерій узгодження Пірсона (табл. 2) за формулою

$$Q^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{(n_i - 10)^2}{10}. \tag{2.1}$$

6. Визначити критичне значення параметра $\chi^2_{кр}(\alpha, k-3)$ (функція *ХИ2ОБР(α,k-3)*). Тут $k = 10$ – кількість інтервалів, $\alpha = 0.05$. У нашому випадку $\chi^2_{кр}(\alpha, k-3) = 14.07$.

7. Зробити висновок, щодо відповідності досліджуваної вибірки до рівномірного закону розподілу. Якщо $Q^2 < \chi^2_{кр}$, гіпотеза про рівномірний розподіл приймається (точніше кажучи, не відхиляється). Якщо $Q^2 \geq \chi^2_{кр}$, гіпотеза про рівномірний розподіл відхиляється.

8. Побудувати автокореляційну функцію для випадкової рівномірної послідовності та зробіть висновок щодо відсутності автокореляцій. Для побудови автокореляційної функції можна використати функцію КОРРЕЛ(), або ж засоби пакета Statistica.

9. Зробити висновок щодо якості досліджуваної вибірки випадкових чисел.

10. Пункти 2 – 9 повторити для інших вибірок. Зробити висновок щодо найкращої вибірки.

Таблиця 2.1. Критерій узгодженості Пірсона

	X_0	X_1	*n*	*m*	*(n- m)^2/ m*
1	0	0.1	9	10	0.10
2	0.1	0.2	13	10	0.90
3	0.2	0.3	13	10	0.90
4	0.3	0.4	5	10	2.50
5	0.4	0.5	5	10	2.50

6	0.5	0.6	12	10	0.40
7	0.6	0.7	11	10	0.10
8	0.7	0.8	10	10	0.00
9	0.8	0.9	11	10	0.10
10	0.9	1	7	10	0.90
Сума			**100**	**100**	**8.40**

Тема 3. Генерування випадкових послідовностей з різними законами розподілу

Нормальний закон розподілу

Для генерування випадкової вибірки з нормальним законом розподілу використаємо алгоритм Бокса-Мюллера. Він має наступний вигляд.

1. Використовуючи генератор випадкових чисел, вбудований у MS Excel (функція *слчис()*), згенерувати дві випадкових, рівномірно розподілених у інтервалі [0; 1], послідовності r, q кількістю по 100 чисел. Зафіксувати отримані послідовності шляхом спеціального копіювання.
2. Використовуючи отримані вибірки та співвідношення

$$x = \sqrt{-2\ln r} \cdot \cos(2\pi q), \tag{3.1}$$

згенерувати вибірку випадкових чисел x, яка підлягає нормальному закону розподілу. Вибірку перевірити на відповідність нормальному закону розподілу за критерієм Пірсона, використовуючи алгоритм, описаний у Темі 1.

3. Обчислити статистику Пірсона (критерій узгодження Пірсона) за формулою

$$Q^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{(n_i - m_i)^2}{m_i}. \tag{3.2}$$

4. Визначити критичне значення параметра $\chi^2_{кр}(\alpha, k-3)$ (функція ХИ2ОБР(α,k-3)). Тут k – кількість інтервалів, $\alpha = 0.05$.

5. Зробити висновок, щодо відповідності досліджуваної вибірки до рівномірного закону розподілу. Якщо $Q^2 < \chi^2_{кр}$, гіпотеза про рівномірний розподіл приймається (точніше кажучи, не відхиляється). Якщо $Q^2 \geq \chi^2_{кр}$, гіпотеза про рівномірний розподіл відхиляється.

6. Побудувати графік (стовпчикова діаграма) для частот n і m.

7. Перевірити відповідність до нормального закону розподілу в пакеті Statistica. Для цього потрібно завантажити дані у таблицю і виконати наступні команди Statistics, Basic Statistics/Tables. У діалоговому вікні (рис. 3.1) включити прапорці Normal Expected Frequencies, Kolmogorov-Smirnov & Lilliefors test for normality, Shapiro-Wilk's W test. Після цього натиснути кнопку Histograms. Отримаємо зображення, представлене на рис. 3.2.

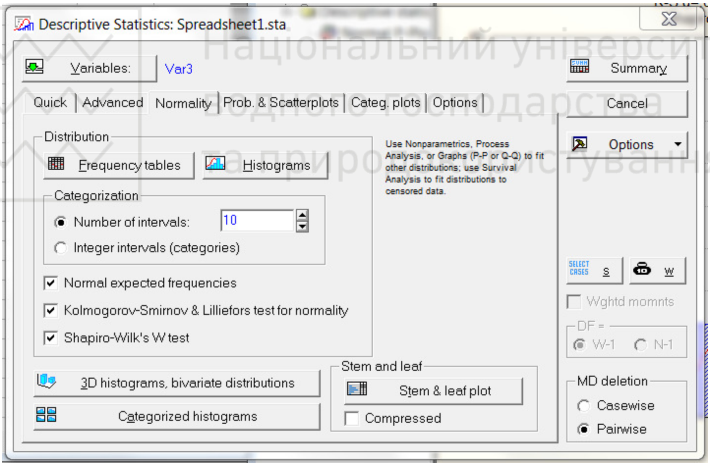


Рис. 3.1. Перевірка гіпотези про нормальний розподіл засобами пакета Statistica. Діалогове вікно

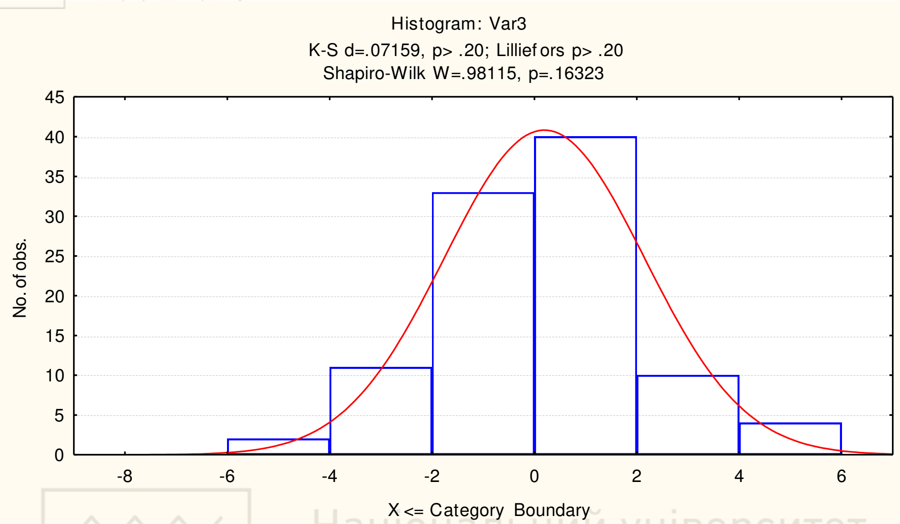


Рис. 3.2. Перевірка гіпотези про нормальний розподіл засобами пакета Statistica. Критерії Колмогорова-Смірнова та Шапіро-Уілка

У верхній частині рис. 3.2 міститься повідомлення d = 0.07159; p > 0,20; Lilliefors p > 0.20; Shapiro-Wilk W = 0.98115; p = 0.16323. Це означає, що у критерії Колмогорова-Смірнова максимальне відхилення $D_n = 0{,}07159$. Цьому відхиленню відповідає досягнутий рівень значущості p = 0,20. Таке ж саме значення значущості отримано при використанні, так званої, поправки Ліллієфорса. Значення статистики Шапіро-Уілка виявилося рівним 0.98115 з рівнем значущості p = 0,16. Оскільки всі рівні значущості перевищують поріг у 5%, ми маємо підстави прийняти гіпотезу про нормальний розподіл досліджуваної вибірки.

Суцільною лінією на графіку позначена теоретична крива нормального розподілу для даної вибірки. Функція щільності нормального розподілу має вигляд експоненти. Якщо прологарифмувати цю функцію, отримаємо лінійну функцію, графіком якої є пряма лінія. Цю властивість використовують у графічному методі перевірки належності вибірки до нормального розподілу.

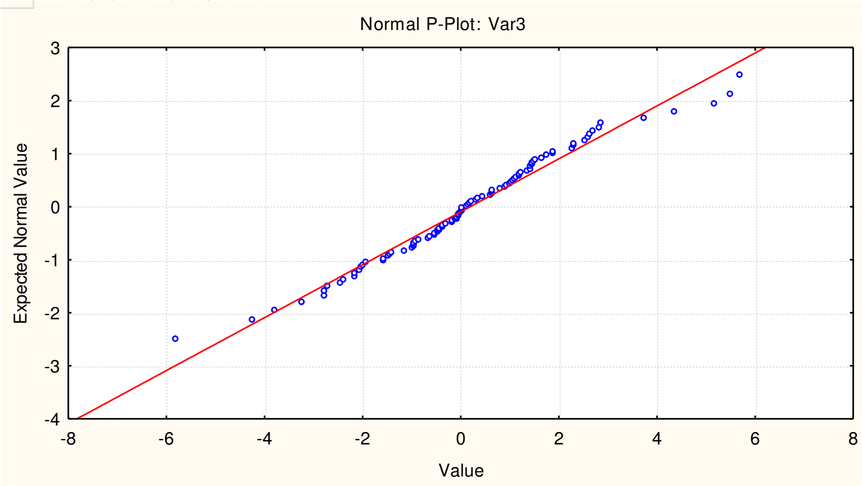


Рис. 3.3. Графічний метод перевірки відповідності до нормального розподілу

У пакеті Statistica виконаємо команди Statistics, Basic Statistics/Tables, Descriptive Statistics, Prob. & Scatterplots, Normal Probability Plot. В результаті отримаємо графік, представлений на рис. 3.3. Якщо значна кількість точок на хвостах графіка відхиляється від прямої лінії, це є свідченням відхилення від нормального закону розподілу. У нашому випадку відхилення незначні і гіпотеза про нормальний розподіл приймається.

Показниковий закон розподілу

1. Використовуючи генератор випадкових чисел, вбудований у MS Excel (функція *слчис()*), згенерувати 100 випадкових, рівномірно розподілених у інтервалі [0; 1], чисел. Зафіксувати отримані послідовності шляхом спеціального копіювання.
2. Використовуючи вибірку рівномірно розподілених чисел $r_i \in [0,1]$, та співвідношення

$$x_i = -\frac{1}{\lambda} \ln r_i \,, \tag{3.3}$$

($\lambda = 0.1$) побудувати вибірку випадкових чисел з показниковим розподілом.

3. Використовуючи описаний вище алгоритм, перевірити відповідність вибірки до показникового закону розподілу за критерієм Пірсона χ-квадрат. Для побудови інтегральної функції розподілу використати функцію

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}. \tag{11}$$

Весь інтервал значень x_t розділити на 10 інтервалів $\left(x_{i0}, x_{i1}\right]$. Значення границь інтервалів вибрати за зразком наступної таблиці.

x_0	0	10	15	20	25	30	35	40	45	50
x_1	10	15	20	25	30	35	40	45	50	65

4. Вибірку перевірити на відповідність до показникового закону розподілу за критерієм Пірсона, використовуючи алгоритм, описаний у Темі 1.

Тема 4. Моделювання випадкових процесів з різними законами розподілу

Задача 1. Автомобілі приїжджають на мийку з середнім інтервалом 10 хвилин. Тривалість мийки складає 20 хвилин. Автомобіль стоїть у черзі не більше 20 хвилин, інакше він залишає чергу. Використовуючи вибірку, побудовану за показниковим законом розподілу (тема 3), змоделювати потік автомобілів на протязі інтервалу від 8 00 години до 16 00 години (від 0 хвилини до 480 хвилини). Скласти графік обслуговування автомобілів. Скільки автомобілів залишились необслуженими?

Хід виконання роботи.

1. Використовуючи вибірку випадкових чисел, побудовану за показниковим законом розподілу (тема 3), змоделювати потік автомобілів. Вибірка буде моделювати інтервали часу між прибуттям

автомобілів на мийку у хвилинах. Всі елементи вибірки слід заокруглити до цілих.

2. Перше число з вибірки інтервалів задає час прибуття першого автомобіля на мийку у хвилинах. Мийка триває 20 хвилин Після цього автомобіль залишає мийку.
3. Використовуючи вибірку інтервалів, обрахуйте час прибуття на мийку кожного автомобіля у хвилинах. Для цього до часу прибуття попереднього автомобіля слід додати поточне число з вибірки інтервалів.
4. Розрахувати очікуваний час до початку миття автомобіля. Для цього до часу прибуття слід додати 20 хвилин і результат відняти від часу закінчення мийки автомобіля, який перебуває на обслуговуванні. Якщо мийка вільна – час очікування дорівнює нулю. Якщо час очікування перевищує 20 хвилин, автомобіль залишає мийку.
5. Заповнити технологічну таблицю обслуговування автомобілів (табл. 4.1), орієнтуючись на відлік часу у хвилинах (від 0 хвилин до 480 хвилин). Момент початку обслуговування останнього автомобіля не повинен перевищувати 460 хвилин.
6. Підрахувати кількість обслужених та кількість необслужених автомобілів. Визначити коефіцієнт ефективності роботи мийки – відношення обслужених авто до всіх авто, які приїжджали на мийку.

Таблиця 4.1. Протокол обслуговування автомобілів на станції мийки

	Приїзд	Очікування	Початок мийки	Кінець мийки	Необслужені
1	10	0	10	30	
2	22	8	30	50	
3	37	13	50	70	
4	49	21	70		1
5	73	0	73	93	
6	96	0	96	116	
	…	…	…	…	

Задача 2. В армійський підрозділ поступила партія взуття (50 пар), розміри якого розподілені так, як наведено у наступній таблиці.

38	39	40	41	42	43	44	45	46
2	4	4	9	11	8	6	4	2

Використовуючи вибірку випадкових чисел $\{y_i\}$, побудовану за нормальним законом розподілу, змоделювати розподіл розмірів стопи (50 солдатів). Скласти звіт про забезпечення солдат взуттям. Вказати незадоволені заявки (якого розміру і скільки пар не вистачає).

Хід виконання роботи.

1. Змоделювати розміри взуття, необхідного для солдатів. Для цього згенерувати вибірку 50 випадкових чисел y_i, які підлягають нормальному закону розподілу. Для побудови вибірки $\{y_i\}$ слід використати вибірку з стандартним нормальним розподілом $\{x_i\}$, сформовану у темі 3. Від стандартної нормальної випадкової величини x_i, можна легко перейти до величини y_i, розподіленої нормально з математичним сподіванням $\mu = 42$ та стандартним відхиленням $\sigma = 2$ за формулою

$$y_i = \mu + \sigma \cdot x_i \,. \tag{4.1}$$

Прийняти середнє вибіркове розміру стопи 42, стандартне відхилення - 2.0.

2. Заповнити звіт про забезпечення солдат взуттям. Вказати незадоволені заявки (якого розміру і скільки пар не вистачає). Представити звіт у вигляді таблиці, аналогічної до представленої нижче табл. 4.2.

Таблиця 4.2. Звіт про забезпечення солдат взуттям

Розмір	38	39	40	41	42	43	44	45	46
надано	2	4	4	9	11	8	6	4	2
необхідно	2	4	6	8	10	7	6	4	3
надлишок				1	1	1			
недостача			2						1

Задача 3. Магазин продає електричні дрилі. Для вивчення активності покупців була проаналізована статистика продажів за попередні сто робочих днів, яка представлена у наступній таблиці

К-сть проданих дрилів	0	1	2	3	4	5
К-сть днів	5	10	20	40	18	7

1. Як видно з таблиці, кількість проданих за день дрилів є випадковим числом, яке розподілене в інтервалі від 0 до 5. Для моделювання активності продажів можна використати функцію розподілу імовірності (щільність розподілу) продажів у вигляді співвідношення

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \textit{якщо } x \le 0.05; \\ 1, & \textit{якщо } 0.05 < x \le 0.15; \\ 2, & \textit{якщо } 0.15 < x \le 0.35; \\ 3, & \textit{якщо } 0.35 < x \le 0.75; \\ 4, & \textit{якщо } 0.75 < x \le 0.93; \\ 5, & \textit{якщо } 0.93 < x \le 1.00. \end{cases} \quad (4.2)$$

Тут x – випадкове число, рівномірно розподілене в інтервалі [0; 1].

2. Коли робиться замовлення, щоб відновити запаси електричних дрилів, його виконання відбувається із затримкою. Інтервал часу від замовлення до поставки є випадковим числом, розподіленим в інтервалі від 1 до 3 днів. Функція (4.3) відображає розподіл інтервалів затримки

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \textit{якщо } x \le 0.30; \\ 2, & \textit{якщо } 0.30 < x \le 0.80; \\ 3, & \textit{якщо } 0.80 < x \le 1.00. \end{cases} \quad (4.3)$$

Тут x – випадкове число, рівномірно розподілене в інтервалі [0; 1].

3. Замовлення робиться тоді, коли запас на складі не перевищує 5 одиниць. Величина партії замовлення становить 10 дрилів. Початковий обсяг запасу на складі - 10 дрилів.
4. За зразком табл. 4.3 заповнити таблицю, яка моделює процес торгівлі дрилями.

Таблиця 4.3. Відомість торгівлі дрилями

День	Поста-чання	Початковий запас	Випадкове число	Попит	Терміновий запас	Втрати продаж	Робити замовлення?	Випадкове число	Термін виконання
1	0	10	0.13	1	9	0	ні		
2	0	9	0.79	4	5	0	так	0.14	1
3	0	5	0.44	3	2	0	ні		
4	10	12	0.92	5	7	0	ні		
5	0	7	0.05	0	7	0	ні		
6	0	7	0.38	3	4	0	так	0.61	2
7	0	4	0.57	3	1	0	ні		
8	0	1	0.27	2	0	1	ні		
9	10	10	0.81	4	6	0	ні		
10	0	6	0.33	2	4	0	так	0.40	2
Середнє	0.2				4.5	0.1			

5. Розрахувати загальні щоденні витрати магазину та виконати економічний аналіз торгівлі за 10 днів за наступним зразком.

Аналіз результатів імітаційного експерименту: середній кінцевий запас = 45 одиниця / 10 днів = 4,5 одиниці; середнє число упущених продажів = 1 одиниця / 10 днів = 0,1 од/день; середнє число замовлень = 20 одиниць / 10 днів = 0.2 од/день.

Економічний аналіз.

При проведенні економічного аналізу будемо використовувати наступні дані щодо окремих компонент витрат.

Вартість замовлення на дрилі становить 100 грн.

Вартість одноденного збереження однієї дрилі на складі становить 50 грн. Втрати, пов'язані з одним втраченим продажем оцінюють у 800 грн.

Використовуючи наведені дані, розрахуємо середні щоденні витрати для цієї стратегії керування запасами.
Щоденні витрати на замовлення = (витрати на одне замовлення) * (середнє число замовлень у день) = 100 * 0,2 = 20;
щоденні витрати на збереження = (витрати на збереження однієї одиниці протягом дня) * (середня величина кінцевого запасу) = 50 * 4,5 = 225 грн;
щоденні упущені можливості = (прибуток від упущеного продажу) * (середнє число упущених продажів у день) = 800 * 0,1 = 80 грн.
Загальні щоденні витрати = витрати на замовлення + витрати на збереження + упущені продажі = 20 + 225 + 80 = 325 (грн).

Тема 5. Розрахунок площ та об'ємів методом Монте-Карло

Хід виконання розрахунків

Завдання 1. Використовуючи метод статистичних випробувань Монте-Карло, обчислити площу фігури (рис. 5.1), обмежену функцією $y = f(x)$, віссю OX та вертикальними прямими $x = 0, x = a$. Таку фігуру у математиці називають криволінійна трапеція.

1. Задати значення правої границі a, початкове значення лічильника $k = 0$, та вигляд функції $y = f(x)$, яка обмежує зверху криволінійну трапецію.

2. Визначити максимальне значення b функції $y = f(x)$ на відрізку $[0, a]$.
3. Розрахувати площу криволінійної трапеції S, використовуючи методи інтегрального числення (онлайн -калькулятор https://math24.biz).

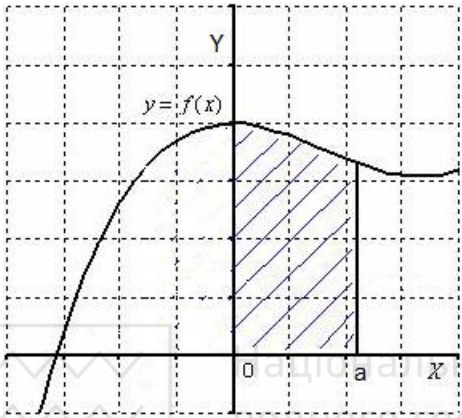


Рис. 5.1. Криволінійна трапеція

4. Використовуючи один з генераторів випадкових чисел (наприклад слчис() – Microsoft Excel), згенерувати два випадкових числа x, y.
5. Перевірити умову $b \cdot y < f(ax)$. Якщо умова виконується, обновити лічильник $k := k + 1$.
6. Пункт 4 повторити $N = 100$ разів. Після завершення генерації зафіксувати послідовність шляхом копіювання та спеціальної вставки (копіювати тільки значення).
7. Оцінити площу фігури за співвідношенням $S^* = ab \cdot k / N$.
8. Знайти похибку методу Монте-Карло за співвідношенням $\varepsilon = abs(S^* - S)/S$.
9. Пункти 6 – 8 повторити для $N = 500$ та $N = 1000$.
10. Зробити висновок про залежність похибки обчислення площі від кількості випробувань.

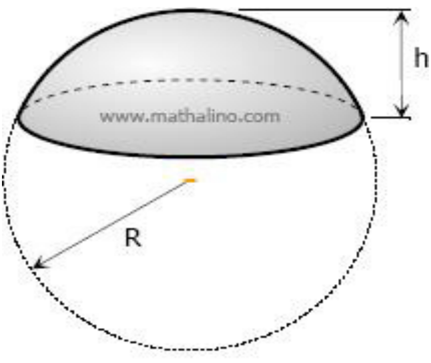
Таблиця 5.1. Таблиця функцій

Варіант	***F(x)***	***a***	**Варіант**	***F(x)***	***a***

1	$Sin(x)$	$\pi/2$	11	$\sqrt{1-x^2}$	1
2	$Cos(x)$	$\pi/2$	12	$\sqrt{1-x^2/2}$	1
3	$Sin(x)\cdot cos(x)$	$\pi/2$	13	$Sin(x)\cdot exp(x)$	$\pi/2$
4	$Sin^2(x)$	$\pi/2$	14	$cos(x)\ \cdot exp(x)$	$\pi/2$
5	$Cos^2(x)$	$\pi/2$	15	$1\text{-}\sqrt{x}$	1
6	$Tg(x)$	1	16	$1\text{-}tg(x)$	1
7	$Exp(x)$	1	17	$1\text{-}Sin(x)$	$\pi/2$
8	$exp(x)\text{-}1$	1	18	$1\text{-}Cos(x)$	$\pi/2$
9	$\sqrt{x}$	1	19	x^2	1
10	$\sqrt{1-x}$	1	20	$1\text{-}x^2$	1

Завдання 2. Використовуючи метод статистичних випробувань Монте-Карло, обчислити об'єм фігури, обмеженої верхньою частиною сфери радіуса $R=1$, з центром у точці $O(0{,}0{,}0)$ та горизонтальною площиною $Z=N/30$. Тут N - номер варіанта студента за журналом.

1. Визначити об'єм сферичного сегмента за співвідношенням $V=\pi Rh^2-\pi h^3/3$. Тут $h=R-Z$ - висота сегмента.
2. Задати значення лічильника $k=0$.



Spherical Segment Of One Base

3. Використовуючи один з генераторів випадкових чисел, згенерувати три випадкових числа x, y, z.
4. Перевірити виконання умов $z>Z$ та $x^2+y^2+z^2\le 1$. Якщо обидві умови виконуються одночасно, обновити лічильник $k:=k+1$.
5. Пункт 4 повторити $N=100$ разів. Після завершення

генерації зафіксувати послідовність шляхом копіювання та спеціальної вставки (копіювати тільки значення).

6. Оцінити об’єм фігури за співвідношенням $V^* = 4k / N$.
7. Знайти похибку методу Монте-Карло за співвідношенням $\varepsilon = abs(V^* - V)/V$.
8. Пункти 3 – 7 повторити для $N = 500$ та $N = 1000$.
9. Зробити висновок про залежність похибки обчислення об’єму від кількості випробувань.

Рекомендована література

1. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. Москва.: Высшая школа, 2001. 575 с.
2. Жученко А. І., Ярощук Л. Д. Оцінювання параметрів та перевірка статистичних гіпотез. Теорія та практика роботи з MathCAD, Matlab, MS Excel : навчальний посібник. Київ : НТУУ «КПІ», 2012. 154 с.
3. Жлуктенко В. І., Бегун А. В. Стохастичні моделі в економіці : монографія. Київ : КНЕУ, 2005. 352 с.
4. Зеленський К. Х., Ігнатенко В. М., Коц О. П. Комп’ютерні методи прикладної математики. Київ : Академперіодика, 2002. 480 с.

5. Кельтон В., Лоу А. Имитационное моделирование. Классика CS. 3-е изд. Санкт-Петербург : Питер; Киев : Издательская группа BHV, 2004. 847 с.
6. Коломієць С. В. Теорія випадкових процесів : навчальний посібник. Суми : ДВНЗ "УАБС НБУ", 2013. Ч. II. 103 с.
7. Кособуцький П. С. Статистичні та Монте-Карло алгоритми моделювання випадкових процесів у макро- і мікросистемах у MathCAD. Львів : Видавництво Львівської політехніки, 2014. 410 с.
8. Кушнер Г. Дж. Стохастична стійкість і керування. Москва : Мир, 1969. 200 с.
9. Михайлов Г. А., Войтишек А. В. Численное статистическое моделирование : учебное пособие для студентов вузов. Москва : Академия, 2006. 368 с.
10. Теплицький І. О. Елементи комп'ютерного моделювання : навчальний посібник. Кривий Ріг : КДПУ, 2010. 264 с.
11. Томашевський В. М., Жданова О. Г., Жолдаков О. О. Вирішення практичних завдань методами комп'ютерного моделювання : навчальний посібник. Київ : Корнійчук, 2001. 267 с.
12. Шеннон Р. Имитационное моделирование систем – искусство и наука. Москва : Мир, 1978. 420 с.