



Національний університет
водного господарства та природокористування

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ,
МОЛОДЕЖИ И СПОРТА УКРАИНЫ

**НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ВОДНОГО ХОЗЯЙСТВА
И ПРИРОДОИСПОЛЬЗОВАНИЯ**

**МЕХАНИКО - ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ**

Профессор Э.А. Сухарев

**ОСНОВЫ ДИНАМИКИ
ПОДЪЕМНО - ТРАНСПОРТНЫХ
И ДОРОЖНО - СТРОИТЕЛЬНЫХ МАШИН**

Учебное пособие для студентов, обучающихся по
направлению «Машиностроение» по специальности
«Подъемно-транспортные, строительные,
дорожные, мелиоративные машины и оборудование»

Ровно - 2012



УДК 531.3:621.86:69.002.5

С 91

Сухарев Э.А.

- С 91. Основы динамики подъемно-транспортных и дорожно-строительных машин
Учебное пособие. - Ровно: НУВХП, 2012, - 191 с.

В учебном пособии рассматриваются общие теоретические вопросы динамики машин, динамические процессы в отдельных типах машин, а также способы виброзащиты машинистов-операторов

Для студентов механических специальностей, аспирантов и инженеров-механиков, связанных с разработкой и эксплуатацией динамических систем.

УДК 531.3:621.86:69.002.5
Сухарев Э.А., 2012



ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящем пособии рассматриваются общие теоретические вопросы динамики машин, а также динамические процессы в конкретных типах машин, перечень которых указан на титульном листе.

На основе единого методического подхода анализируются причины вибрационных возбуждений в машинах, способы снижения и подавления таких возбуждений; излагаются методы расчета некоторых специальных машин вибрационного принципа действия; систематизируются эргономические и конструктивные требования по защите рабочего места машиниста-оператора от воздействия вибрации.

Понятие «вибрация» имеет распространение преимущественно в инженерной терминологии и соответствующей технической литературе. Вибрацией принято называть механические колебания с малыми перемещениями при частоте колебаний более 0,8 Гц. В научной литературе оперируют более общим понятием «колебание», которое фактически поглощает понятие «вибрация». Поэтому при изложении теоретических вопросов мы будем использовать первое понятие, а при рассмотрении отдельных динамических задач – второе.

В курсе «Динамика машин» обычно выделяют три аспекта. Первый из них включает основные методы динамического расчета машин. Широко распространенные в инженерной практике кинетостатические методы расчета, изучаемые в курсе «Теория механизмов и машин», не позволяют достаточно точно учитывать реальные условия функционирования технических объектов, т.к. в качестве исходной гипотезы принимается абсолютная жесткость конструктивных элементов. Однако оптимальные эксплуатационные свойства, безотказность и долговечность технических объектов могут быть гарантированы только в том случае, если при проектировании принимаются во внимание возникающие в них динамические процессы и связанные с ними упругие и демпфирующие*) свойства конструктивных элементов.

Таким образом, динамический расчет является необходимой частью общего расчета любой машины. Он включает определение динамических нагрузок, амплитуд и частот колебаний, условий возникновения резонансных состояний у различных конструктивных элементов,

*) демпфирующий (нем.) – уменьшающий (гасящий) механические колебания которые подвергаются вибрационному возбуждению. Эти показатели в обязательном порядке учитываются при проведении заключительного



Вторым аспектом динамики машин является обоснование параметров вынужденных колебаний при различных вибрационных технологиях (перемещение штучных и сыпучих грузов, разрушение грунтов, погружение свай, уплотнение дорожных покрытий и т.п.).

Наконец, третий аспект заключается в разработке способов виброзащиты машинистов-операторов в соответствии с эргономическими требованиями и санитарными нормами допустимых показателей вибрационной нагрузки.

В пособие включены материалы, собранные из различных источников: монографий, периодических изданий, справочной и технической литературы и др.

Чтобы облегчить познавательный процесс, наибольшее число приведенных моделей динамических систем машин являются упрощенными. Часть из них доведена до полного решения, другие только до расчетных уравнений. Несколько моделей представлены без упрощений в полном объеме и в нелинейной постановке, чтобы дать возможность студентам воочию оценить сложность реального динамического расчета на уровне конструкторского бюро.

Все рассматриваемые модели динамических систем относятся к механизмам и рабочим органам машин. Динамика металлоконструкций машин (ферм, рам, стержней, пластин, оболочек) базируется на матричных методах, волновых уравнениях и других специальных разделах высшей математики, которые в учебных курсах не изучаются. Поэтому такие динамические задачи в пособие не включены.

При выборе стиля изложения основное внимание было обращено на сущность рассматриваемых явлений и процессов, а не на математическую строгость учебного материала. Это связано с тем, что главная цель пособия состоит в том, чтобы излагаемые научные вопросы были доступны и понятны широкому кругу студентов, аспирантов, инженеров-механиков.

Автор выражает глубокую признательность проф. д.т.н. С.В.Кравцу и проф. к.т.н. В.Ф.Ткачуку за ценные замечания по рукописи книги.



1. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Под динамической системой будем понимать упругую механическую систему, имеющую возможность совершать колебательное движение. Такие системы могут быть дискретные и континуальные.

Дискретные системы представляются в виде сосредоточенных масс, соединенных упругими звеньями (рис.1.1, а).

Континуальные системы представляются в виде элементов с распределенной массой (рис.1.1, б).



Рис. 1.1. Основные типы динамических систем:

а – дискретная; б – континуальная

На рис.1.1, а показана простейшая динамическая система с одним материальным объектом массой m , который связан пружинами с неподвижными опорами и совершает вертикальные колебания под действием переменной силы P .

На рис.1.1, б приведена континуальная динамическая система в виде упругой балки с погонной массой $m(x)$, установленной на неподвижных опорах и совершающей сложные колебания под действием переменных сил P и Q .

Каждая динамическая система характеризуется числом степеней свободы, под которым понимают число независимых координат, однозначно определяющих состояние системы в любой фиксированный момент времени.

На рис.1.1, а система имеет одну степень свободы, а на рис.1.1, б – бесконечное число степеней свободы.

В дальнейшем будем рассматривать только дискретные динамические системы с одной, двумя или несколькими массами. В общем слу-



чае в конструкциях таких систем присутствуют два типа связей – упругие и демпфирующие (рис.1.2).

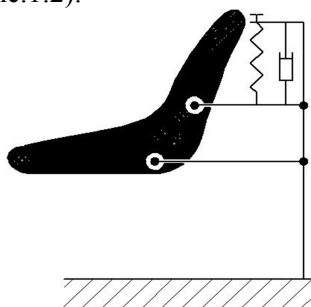


Рис. 1.2. Конструктивная схема динамической системы сиденья экскаваторщика

На приведенной схеме сиденье имеет параллелограммную подвеску и виброзащиту, включающую упругую связь (пружину) и демпфирующую связь (гидроцилиндр).

Упругие связи стремятся вернуть деформированную динамическую систему в положение устойчивого равновесия. Именно они и обуславливают ее колебательные движения.

Демпфирующие связи препятствуют развитию колебательных процессов и гасят их.

Основным свойством упругих связей является жесткость, под которой подразумевают соотношение между нагрузкой и вызываемой ею деформацией. Именно благодаря жесткости возникают так называемые восстанавливающие силы, которые играют решающую роль в функционировании динамических систем.

Демпфирующие связи порождают диссипативные силы, которые рассеивают механическую энергию в динамических системах, превращая ее в тепло.

Если в динамической системе можно пренебречь диссипативными силами, то ее называют консервативной. В такой идеализированной системе отсутствуют силы трения и механическая энергия сохраняется неизменной.

Если же в динамической системе механическая энергия убывает в результате ее рассеивания, и в ней возникают затухающие колебания, то ее называют диссипативной.

По другой классификации динамические системы подразделяются на линейные и нелинейные.

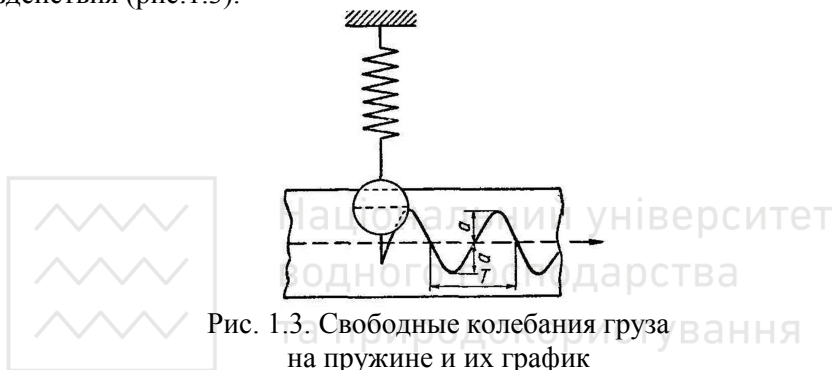


Если в динамической системе при колебательном движении восстанавливающие силы упругих связей пропорциональны ее перемещению, а диссипативные силы демпфирующих связей пропорциональны скорости перемещения системы, то такая система называется линейной. В противном случае динамическая система является нелинейной.

В этой классификации объективно раскрывается физическая сущность динамических систем.

Существует несколько видов колебаний динамических систем.

1. Свободные колебания, которые вызываются начальным отклонением динамической системы и протекают без дальнейшего внешнего воздействия (рис.1.3).



2. Вынужденные колебания, которые вызываются и поддерживаются переменной во времени внешней силой (рис.1.1, а).

3. Автоколебания, обусловленные трением. Например, горизонтальные колебания подпружиненного груза P , лежащего на быстро движущейся ленте (рис.1.4).

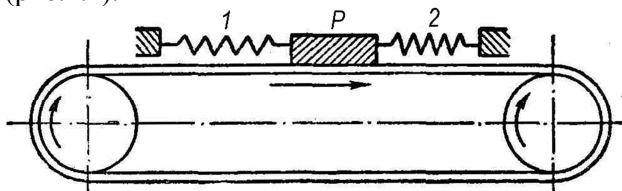


Рис. 1.4. Фрикционные автоколебания

4. Параметрически возбуждаемые колебания вследствие периодического изменения параметров динамической системы. Например, колебания стержня при изменении его жесткости в результате периодического изменения длины консольной части (рис1.5).

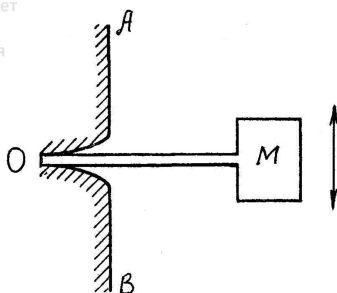


Рис. 1.5. Параметрические колебания консольного стержня

Для описания движения динамической системы в общем случае вводится обобщенная координата q (или несколько координат), которая при колебательном процессе поочередно возрастает и убывает во времени. Закон изменения функции $q(t)$ зависит от характера процессов, происходящих в динамической системе. Обычно эти процессы подразделяются на установившиеся и переходные.

Установившиеся процессы реализуются в виде стационарных колебаний или состояний равновесия.

Стационарными называют колебания происходящие около постоянного среднего значения обобщенной координаты (рис.1.6, а). Частным случаем таких колебаний являются периодические колебания, при которых однотипные состояния динамической системы повторяются через равные отрезки времени T , называемые периодом колебаний (рис.1.6, б).

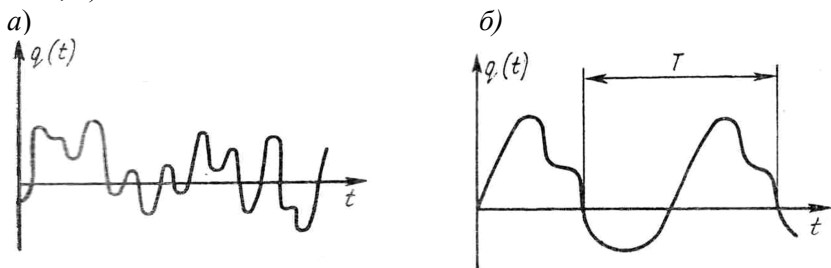


Рис. 1.6. Стационарные колебания:
а – произвольные; б – периодические

Переходные процессы динамических систем реализуются в виде нестационарных колебаний, которые подразделяются на затухающие и нарастающие (рис.1.7).

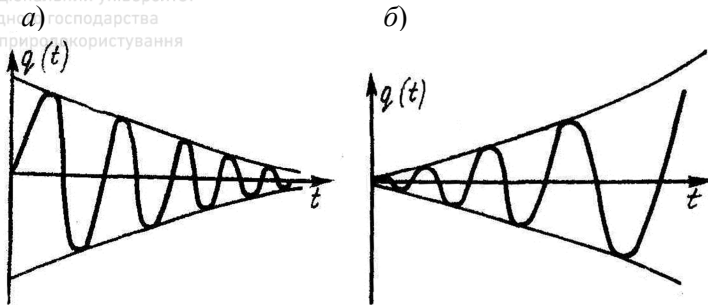


Рис. 1.7. Нестационарные колебания:
а – затухающие; б – нарастающие

Затухающие колебания (рис.1.7, а) характеризуются убыванием с течением времени амплитуд колебаний.

Для нарастающих колебаний (рис.1.7, б), наоборот, характерно увеличение амплитуд колебаний во времени.

При динамических расчетах машин обычно рассматриваются периодические колебания (вибрации). Они удовлетворяют условию:

$$q(t) = q(t + mT), \quad (1.1)$$

где: m – любое целое число; T – период колебаний, с.

Величина, обратная периоду, называется технической частотой колебаний:

$$f = \frac{1}{T}. \quad (1.2)$$

Она измеряется количеством колебаний в одну секунду и имеет размерность в герцах (Гц).

Простейшим видом периодических колебаний являются гармонические колебания, при которых обобщенная координата прямо пропорциональна косинусу (или синусу) от аргумента, линейно зависящего от времени:

$$q(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi), \quad (1.3)$$

где A – амплитуда колебаний; ω – круговая (угловая) частота колебаний; $(\omega t + \varphi)$ – фаза колебаний; φ – начальная фаза колебаний, которая характеризует значение $q(t)$ при $t = 0$.

Круговая частота представляет собой число единиц дуги (т.е. радиан), пройденных точкой по окружности в единицу времени. Иначе – круговая частота есть число периодов в 2π единиц времени:

$$\omega = 2\pi \cdot \dot{O}. \quad (1.4)$$



Она измеряется в с^{-1} .

Техническая частота f и круговая частота ω связаны между собой соотношением

$$f = \frac{\omega}{2\pi}. \quad (1.5)$$

В таком случае зависимость (1.3) можно записать таким образом

$$q(t) = A \cdot \cos(2\pi f t + \varphi). \quad (1.6)$$

Заметим, что если в зависимостях (1.3) и (1.6) вместо косинуса принимается синус, то в этом случае будет другая начальная фаза α , причем

$$\alpha = \varphi + \pi/2. \quad (1.7)$$

В дальнейшем, если не оговорено, круговую частоту будем называть термином «частота».

Более сложным видом стационарных колебаний являются полигармонические колебания, которые могут быть представлены в виде суммы двух или более простых гармонических колебаний типа (1.3) с разными частотами:

$$q(t) = \sum_{K=1}^n A_K \cos(\omega_K t + \varphi_K). \quad (1.8)$$

Если отношение частот в (1.8), например, ω_1/ω_2 при $n=2$, есть рациональное число, то колебательный процесс является периодическим; в противном случае результирующие колебания непериодичны.

Полигармонические колебания могут быть представлены в виде ряда Фурье:

$$q(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cos k\omega t + \sum_{k=1}^n b_k \sin k\omega t. \quad (1.9)$$

Это разложение соответствует представлению сложных периодических колебаний в виде суммы простых гармонических колебаний с частотами, кратными основной частоте $\omega = 2\pi/\dot{O}$. Компоненты движения с этой частотой, которые характеризуются коэффициентами a_1 и b_1 , называют первой гармоникой. Компоненты движения с частотами $k\omega$, где $k > 1$, называют высшими гармониками.

Совокупности частот, амплитуд и фаз гармонических составляющих, расположенных в порядке их возрастания, называют соответственно частотным, амплитудным, фазовым спектрами данного периодического процесса.



Определение указанных спектров заданной периодической функции $q(t)$ называется спектральным анализом. Необходимые для такого анализа коэффициенты Фурье можно найти из следующих соотношений:

$$\begin{aligned}a_k &= \frac{2}{T} \int_0^T q(t) \cos k\omega t \, dt; \\b_k &= \frac{2}{T} \int_0^T q(t) \sin k\omega t \, dt. \\(k &= 1, 2, \dots)\end{aligned}\tag{1.10}$$

Для оценки характеристик динамических систем в инженерной практике широко используются математические методы. Однако даже при современном уровне развития механики машин и вычислительной техники полное описание всех аспектов динамического поведения элементов машины и происходящих в ней динамических процессов не представляется возможным. Поэтому при динамических расчетах идут по пути разумной идеализации реального объекта, заменяя его некоторой упрощенной схемой, по которой составляется математическая модель функционирования динамической системы.

В общем случае математическая модель динамической системы представляет собой абстрагированное изображение технического объекта (или его составных частей) в виде комплекса математических зависимостей и логических соотношений. Применяемый математический аппарат должен удачно «вписываться» в моделируемый объект и достоверно отражать специфику его особенностей.

Оценка качества математической модели и полученных при ее решении результатов называется верификацией. В процессе верификации устанавливается достоверность модели, т.е. адекватность. Это очень ответственная процедура. Основной путь оценки адекватности – это проведение тестовых (контрольных) исследований на лабораторных установках. При этом сравниваются результаты расчетов по математической модели с результатами опытов на физическом объекте.

Математические модели динамических систем отличаются одна от другой по назначению, структуре, способу получения. Поэтому они классифицируются по целому ряду признаков.

По признаку предсказуемости модели делятся на вероятностные и детерминированные; по реакции на входные возмущения – на линейные и нелинейные; по способу получения – на аналитические, стохастические и эмпирические.

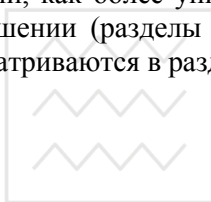


При разработке аналитических моделей исходят из основных физических законов, а также из материальных и энергетических балансовых соотношений. В общем случае такие модели могут представлять собой дифференциальные или интегральные уравнения или их системы.

Математическое описание стохастических моделей основано на методах теории случайных процессов, корреляционном и спектральном анализах.

Эмпирические модели базируются на экспериментальных статистических данных и регрессионном анализе. По сравнению с аналитическими эти модели более точные в окрестностях той точки пространства переменных, в которой проводились измерения, но менее точны вдали от этой точки. Преимуществом этих моделей является упрощенная структура; основной недостаток состоит в том, что они не отражают физических свойств динамических систем.

В настоящем пособии в основном используются аналитические модели, как более универсальные и более строгие в математическом отношении (разделы 2 – 7). Особенности стохастических моделей рассматриваются в разделе 8, а эмпирических – в разделе 9.





2. АНАЛИТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

2.1. Приведение динамических систем к эквивалентной расчетной схеме

Первым этапом формирования аналитических моделей динамических систем является составление полноценной расчетной схемы.

Расчетная схема представляет собой графическое изображение абстрагированной структуры реальной динамической системы, где символически отображены конструктивные и кинематические связи между ее отдельными элементами; показаны так называемые точки и оси приведения, в которых искусственно концентрируются массовые, силовые, упругие и диссипативные параметры системы, а также размещена система отсчета.

Таким образом, расчетная схема фактически является идеализированной приведенной динамической системой, наделенной только теми свойствами реальной системы, которые существенны для решения поставленной задачи; свойства, имеющие второстепенное значение, не учитываются. Самое главное, приведенная динамическая система обладает таким же энергетическим запасом, как и реальный объект, т.е. она эквивалентна ему по энергетическим показателям.

При необходимости можно принять в расчетной схеме более сложную идеализированную динамическую систему, построенную для того же самого реального объекта.

Любая расчетная схема должна быть предельно ясной и объективной, пригодной для эффективного использования методов математического анализа.

Принципиальный тип любой расчетной схемы динамической системы зависит от того, какими абстрактными свойствами – сплошностью или дискретностью – наделяется моделируемая система.

Если в расчетной схеме учитывается свойство сплошности (континуальности), то при такой схематизации в конструктивных элементах динамической системы предполагается непрерывная распределенность масс. При этом число степеней свободы системы оказывается бесконечно большим, что сильно усложняет математическое моделирование. Подобные модели используют лишь в ограниченном числе случаев, когда конструктивные элементы имеют наиболее простые геометриче-



ские формы (например, стержни постоянного поперечного сечения, пластинки постоянной толщины и др.).

И хотя большинство реальных динамических систем относится к распределенному виду, в соответствующих расчетных схемах обычно используют дискретную идеализацию, когда система представляется в виде эквивалентного объекта с сосредоточенными приведенными массами. К этим массам приложены приведенные внешние сосредоточенные силы или моменты сил, а между собой массы соединены безинерционными упругими и диссипативными связями с приведенными характеристиками. Такой подход позволяет использовать при моделировании динамических систем хорошо разработанный аппарат обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.

Если представлять в расчетной схеме идеализированную динамическую систему многомассовой, например, с n сосредоточенными массами, то соответствующая математическая модель будет включать n дифференциальных уравнений. Их решение также представляет значительные трудности. Поэтому на практике в расчетных схемах динамические системы принимают одно-, двух и реже трехмассовыми. Это позволяет уменьшить число степеней свободы и значительно упростить составление математических моделей и их решение.

Несмотря на значительное упрощение в этом случае структуры реальной динамической системы, в итоге получают довольно точный результат. Это объясняется тем, что для определения основных характеристик динамической системы достаточно учесть относительно небольшое число исходных параметров.

Точки приведения, в которых концентрируются определяющие параметры динамической системы, обычно выбирают в местах расположения максимальных по величине масс. Через эти точки проходят и оси приведения.

Теоретические основы приведения параметров реальной динамической системы к эквивалентной расчетной схеме базируются на том, что энергетические показатели у них должны быть идентичными.

Приведение масс и моментов инерции осуществляется на основе равенства кинетических энергий элементов реальной динамической системы и расчетной схемы; приведение жесткостей упругих связей – на равенстве потенциальных энергий; приведение сил и моментов сил – на равенстве мощностей; приведение характеристик демпфирующих связей – на равенстве работ, затрачиваемых на трение.



Рассмотрим приведение силовых и инерционных параметров в плоских динамических системах.

Положим, что силы и моменты сил, действующие на динамическую систему, нужно привести к звену приведения AB (рис.2.1).

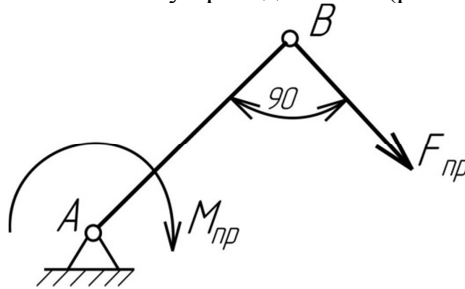


Рис. 2.1. Схема звена приведения

Используем равенство

$$N_{\text{пр}} = \sum_{i=1}^k N_i ,$$

где $N_{\text{пр}}$ – мощность, развиваемая приведенной силой или приведенным моментом сил, N_i – мощности, развиваемые силами и моментами сил, приложенными к i -му звену динамической системы и подлежащими приведению; k – число звеньев.

Мощность $N_{\text{пр}}$ может быть представлена так

$$N_{\text{пр}} = F_{\text{пр}} v_B = M_{\text{пр}} \cdot \omega ,$$

где $F_{\text{пр}}$ – величина приведенной к точке B силы; v_B – скорость точки B ; $M_{\text{пр}}$ – величина приведенного к оси, проходящей через точку A , момента сил; ω – угловая скорость звена приведения.

Окончательные выражения для $F_{\text{пр}}$ и $M_{\text{пр}}$ примут такой вид:

$$F_{\text{пр}} = \frac{\sum_{i=1}^k N_i}{v_B} = \sum_{i=1}^k F_i \frac{v_i \cos \alpha_i}{v_B} + \sum_{i=1}^k M_i \frac{\omega_i}{v_B} ; \quad (2.1)$$

$$M_{\text{пр}} = \frac{\sum_{i=1}^k N_i}{\omega} = \sum_{i=1}^k F_i \frac{v_i \cos \alpha_i}{\omega} + \sum_{i=1}^k M_i \frac{\omega_i}{\omega} , \quad (2.2)$$

где F_i и M_i – сила и момент сил, приложенные к i -му звену; v_i – скорость точки приложения силы F_i ; ω_i – угловая скорость i -го звена; α_i – угол, образованный силой F_i и вектором скорости v_i .



Из уравнений (2.1) и (2.2) следует, что если для каждого положения динамической системы известны приложенные к ее звеньям силы и моменты сил, то приведенная сила $F_{\text{ПР}}$ и приведенный момент $M_{\text{ПР}}$ будут зависеть только от отношения скоростей. Эти отношения могут быть выражены через соответствующие отрезки плана скоростей.

Для приведения инерционных параметров (масс и моментов инерции) к звену приведения AB (рис.2.1) используется равенство

$$T_{\text{ПР}} = \sum_{i=1}^k T_i ,$$

где $T_{\text{ПР}}$ – кинематическая энергия приведенной к точке B массы $m_{\text{ПР}}$ или приведенного к звену AB момента инерции $I_{\text{ПР}}$; T_i – кинетическая энергия i -го звена.

Величина $T_{\text{ПР}}$ может быть представлена так:

$$T_{\text{ПР}} = \frac{m_{\text{ПР}} v_B^2}{2} = \frac{I_{\text{ПР}} \cdot \omega^2}{2} .$$

Кинетическая энергия i -го звена равна

$$T_i = \frac{m_i v_{si}^2}{2} + \frac{I_{si} \cdot \omega_i^2}{2} ,$$

где m_i – масса i -го звена; I_{si} – момент инерции i -го звена относительно оси, проходящей через центр масс звена S перпендикулярно плоскости движения; v_{si} – модуль скорости центра масс звена; ω_i – модуль угловой скорости i -го звена.

Тогда окончательные выражения для $m_{\text{ПР}}$ и $I_{\text{ПР}}$ примут вид:


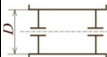
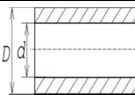
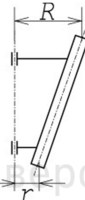
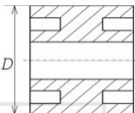
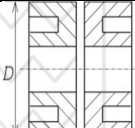
$$m_{\text{ПР}} = \frac{2 \sum_{i=1}^k T_i}{v_B^2} = \sum_{i=1}^k m_i \left(\frac{v_{si}}{v_B} \right)^2 + \sum_{i=1}^k I_{si} \left(\frac{\omega_i}{v_B} \right)^2 ; \quad (2.3)$$

$$I_{\text{ПР}} = \frac{2 \sum_{i=1}^k T_i}{\omega^2} = \sum_{i=1}^k m_i \left(\frac{v_{si}}{\omega} \right)^2 + \sum_{i=1}^k I_{si} \left(\frac{\omega_i}{\omega} \right)^2 . \quad (2.4)$$

Моменты инерции некоторых тел вращения приведены в табл.2.1.



Таблица 2.1.

Наименование тел вращения	Эскиз	Формула для определения момента инерции массы в кгм ²	Наименование тел вращения	Эскиз	Формула для определения момента инерции массы в кгм ²
Цилиндр сплошной		$I = \frac{MD^2}{8}$	Барабаны		$I = \frac{MD^2}{6}$
Цилиндр пустотелый		$I = \frac{M}{8}(D^2 + d^2)$	Стержни, различным образом расположенные относительно оси вращения		$I = \frac{M}{3}(R^2 + Rr + r^2)$
Шкивы, блоки, зубчатые колеса		$I = \frac{MD^2}{7}$			
Муфты всех конструкций		$I = \frac{MD^2}{9}$			
<u>Примечание:</u> Размеры D , d , R и r принимать в м; массу M – в кг.					

Упругие связи на расчетных схемах изображаются в виде пружин сжатия. Их количественной характеристикой является коэффициент жесткости $c^*)$.

Приведение жесткостей рассмотрим для двух принципиально различных простейших динамических систем: с последовательным и параллельным соединением упругих элементов (рис.2.2).

Будем исходить из того, что потенциальная энергия $\Pi_{\text{пр}}$ приведенной упругой системы с коэффициентом жесткости $c_{\text{пр}}$ должна равняться сумме потенциальных энергий Π_1 и Π_2 упругих элементов с коэффициентами жесткости c_1 и c_2 :

$$\Pi_{\text{пр}} = \Pi_1 + \Pi_2,$$

*) При динамических расчетах часто коэффициент жесткости называют просто жесткостью.

$$\frac{\tilde{n}_{\text{ПР}} \cdot \Delta_{\text{ПР}}^2}{2} = \frac{\tilde{n}_1 \cdot \Delta_1^2}{2} + \frac{\tilde{n}_2 \cdot \Delta_2^2}{2},$$

где $\Delta_{\text{ПР}}$, Δ_1 и Δ_2 – статические удлинения упругих связей под действием силы P .

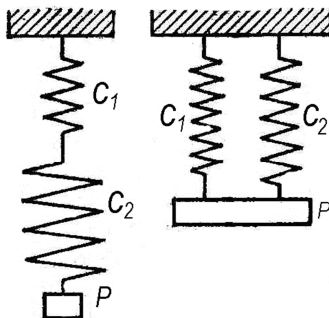


Рис. 2.2. Динамические системы: а – с последовательным; б – с параллельным соединением упругих элементов

Рассмотрим первый случай – с последовательным соединением упругих элементов (рис.2.2, а). Имеем:

$$\Delta_{\text{ПР1}} = \frac{D}{\tilde{n}_{\text{ПР1}}}; \quad \Delta_{11} = \frac{D}{\tilde{n}_1}; \quad \Delta_{21} = \frac{D}{\tilde{n}_2}.$$

Подставляя эти значения в уравнение потенциальных энергий, получим после ряда сокращений расчетное соотношение

$$\frac{1}{\tilde{n}_{\text{ПР1}}} = \frac{1}{\tilde{n}_1} + \frac{1}{\tilde{n}_2}, \quad (2.5)$$

или

$$\tilde{n}_{\text{ПР1}} = \frac{\tilde{n}_1 \cdot \tilde{n}_2}{\tilde{n}_1 + \tilde{n}_2}.$$

Для случая, когда упругие элементы соединены параллельно (рис.2.2, б), принимаем

$$\Delta_{\text{ПР2}} = \Delta_{12} = \Delta_{22}.$$

Подставляя эти значения в уравнение для потенциальных энергий, получим второе расчетное соотношение

$$c_{\text{ПР2}} = c_1 + c_2. \quad (2.6)$$

Рассмотрим особый случай, когда приложение силы P нагружает один упругий элемент и разгружает другой, деформируя их на одну и ту же величину (рис.2.3).

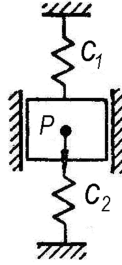


Рис. 2.3. Схема динамической системы с предварительным натяжением упругих связей

Такая схема соответствует параллельному соединению упругих элементов – формула (2.6).

В динамических системах приводных устройств машин многочисленные упругие связи соединяются последовательно в длинную цепь. В таком случае приведенный коэффициент жесткости находится по формуле:

$$\frac{1}{\tilde{n}_{\text{ПР}}} = \frac{1}{\tilde{n}_1} + \frac{1}{\tilde{n}_2} + \dots + \frac{1}{\tilde{n}_k} \quad (2.7)$$

Для удобства расчета цепных динамических систем вместо коэффициентов жесткости c используют обратную величину e , которая называется коэффициентом податливости ($e = c^{-1}$). Тогда выражение (2.7) примет такой вид

$$\dot{a}_{\text{ПР}} = \sum_{i=1}^k e_i \quad (2.8)$$

Варьируя соотношениями (2.5) – (2.8), можно найти приведенную жесткость для самых различных схем соединения упругих связей в динамических системах.

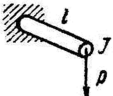
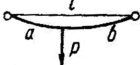


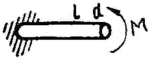
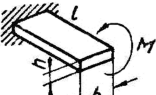
Например, при параллельно-последовательном соединении, когда два параллельно соединенных упругих элемента с коэффициентами жесткости c_1 и c_2 стыкуются последовательно с одним упругим элементом с коэффициентом жесткости c_3 , имеем

$$\tilde{n}_{\text{ПР}} = \frac{(\tilde{n}_1 + \tilde{n}_2) \tilde{n}_3}{\tilde{n}_1 + \tilde{n}_2 + \tilde{n}_3}, \quad \text{или} \quad \dot{a}_{\text{ПР}} = \frac{\dot{a}_1 \cdot \dot{a}_2}{\dot{a}_1 + \dot{a}_2} + \dot{a}_3.$$



Что касается непосредственно коэффициентов жесткости, то они могут быть линейные (отношение силы к линейной деформации) и угловые (отношение момента силы к угловой деформации). В первом случае размерность коэффициента жесткости Н/м, во втором – Н·м/радиан. Значения коэффициентов жесткости для типовых упругих элементов приведены в табл.2.2.

Таблица 2.2

Наименование элементов	Схемы	Выражения для определения «с»
Консоль постоянного сечения при изгибе		$\frac{3EJ}{\ell^3}$
Балка, шарнирно опертая при изгибе		$\frac{3EJ\ell}{a^2b^2}$
Балка, защемления по концам при изгибе		$\frac{3EJ\ell^3}{a^3b^3}$
Цилиндрическая винтовая пружина с круглым поперечным сечением витков (k – число витков)		$\frac{Gd^4}{64kR^3}$
Сплошной вал круглого сечения при кручении		$\frac{\pi d^4 G}{32\ell}$
Прямоугольный стержень при кручении		$\frac{\eta G h b^3}{\ell}$
Величина η зависит от отношения h/b :		
$h/b = 1,0 \quad 1,5 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 6 \quad 8 \quad 10 \quad \infty$		
$\eta = 0,140 \quad 0,196 \quad 0,229 \quad 0,263 \quad 0,281 \quad 0,299 \quad 0,307 \quad 0,312 \quad 0,333$		

Примечание: EJ – жесткость стержня или балки на изгиб; G – модуль упругости материала на сдвиг.

Демпфирующие связи в динамических системах существуют только совместно с упругими связями. Если будут отсутствовать упругие связи, то такая система уже не будет динамической.

На расчетных схемах демпфирующие связи часто называют катарактами и изображают в виде условного поршня, движущегося в цилиндре с вязкой жидкостью (рис.2.4). Их количественной характеристикой яв-



ляется коэффициент демпфирования h с размерностью c^{-1} .

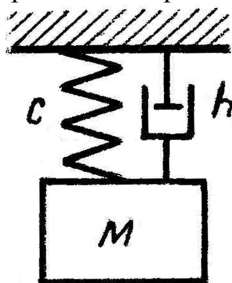


Рис. 2.4. Схема взаимодействия упругих и демпфирующих связей

При последовательном и параллельном соединении демпфирующих элементов с коэффициентами демпфирования h_1, h_2, \dots, h_k приведенные коэффициенты демпфирования $h_{\text{пр}}$ определяются по формулам аналогичным для приведенных коэффициентов жесткостей $c_{\text{пр}}$:

$$\frac{1}{h_{\text{пр}}} = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \dots + \frac{1}{h_k}; \quad h_{\text{пр}} = \sum_{i=1}^k h_i. \quad (2.9)$$

При сложной комбинации упругих и демпфирующих связей в динамических системах при определении $c_{\text{пр}}$ и $h_{\text{пр}}$ приходится учитывать баланс энергии, рассеянной за время одного периода колебаний. В таком случае в выражения для $c_{\text{пр}}$ и $h_{\text{пр}}$ могут входить как упругие и диссипативные характеристики, так и частота колебательного процесса. Соответствующая методика расчета приведенных значений рассматривается в работе М.Л.Орликова.

Коэффициенты демпфирования конструктивных элементов динамических систем определяются экспериментальным путем по соответствующим логарифмическим декрементам δ и частотам затухающих колебаний ω_1 :

$$h = \frac{\delta \cdot \omega_1}{2\pi}, \quad (2.10)$$

где $\delta = \ln \frac{A_k}{A_{k+1}}$, A_k и A_{k+1} – две последующие амплитуды затухающих колебаний.

Измерения проводятся по осциллограмме колебаний (рис.2.5)

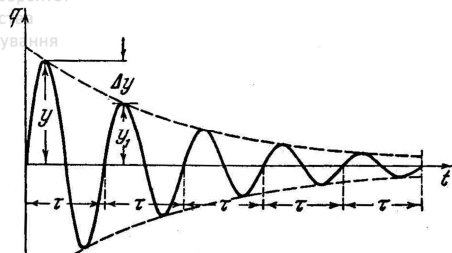


Рис. 2.5. Осциллограмма колебаний

Период колебаний между двумя последовательными амплитудами y и y_1 считается постоянным и равным τ .

Пусть $y - y_1 = \Delta y$.

$$\text{Тогда } \delta = \ln \frac{y}{y_1} = \ln \frac{y}{y - \Delta y} = \ln \left[1 + \frac{\Delta y}{y} + \left(\frac{\Delta y}{y} \right)^2 + \dots \right] \approx \frac{\Delta y}{y}.$$

Рассмотрим наиболее распространенные расчетные схемы динамических систем, совершающих прямолинейные и крутильные колебания. Такими обычно являются так называемые «эталонные» расчетные схемы, дальнейшее упрощение которых путем приведения невозможно. Их использование позволяет значительно облегчить динамические расчеты машин.

«Эталонная» расчетная схема, к которой можно теоретически привести любую динамическую систему, совершающую прямолинейные колебания, приведена на рис.2.6.

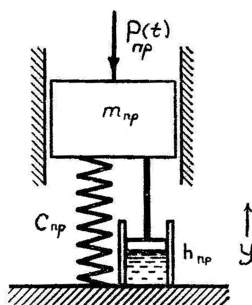


Рис. 2.6. Одномассовая «эталонная» расчетная схема

Рассматриваемая «эталонная» схема включает приведенную массу $m_{пр}$, упругую связь с приведенным коэффициентом жесткости $c_{пр}$ и демпфирующую связь с приведенным коэффициентом демпфирования $h_{пр}$. На массу действует приведенная внешняя сила $P_{пр}(t)$.



Если «эталонная» схема не обеспечивает заданного уровня точности вычислений, то используют двух- или трехмассовые расчетные схемы.

Покажем, как приводятся упругие и демпфирующие связи некоторых реальных динамических систем, показанных на рис.2.7, к одномассовой «эталонной» схеме. Возмущающие силы, действующие на приводимые системы, принимаем гармоническими.

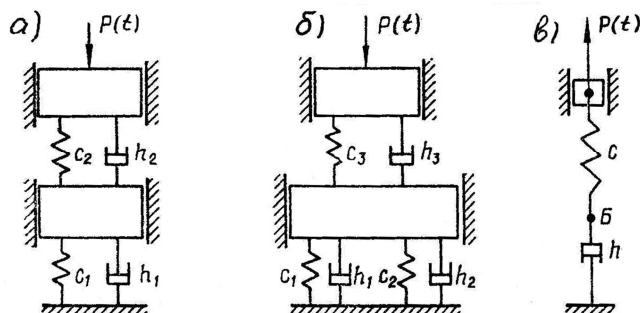


Рис. 2.7. Схемы соединения упругих и демпфирующих связей в исходных динамических системах

Ниже приведены только конечные соотношения для $c_{\text{ПР}}$ и $h_{\text{ПР}}$; промежуточные вычисления опускаем.

Для системы на рис.2.7, а

$$c_{\text{ПР}} = c_1 c_2 / (c_1 + c_2);$$

$$h_{\text{ПР}} = h_1 (c_{\text{ПР}} / c_1)^2 + h_2 (c_{\text{ПР}} / c_2)^2.$$

Для системы на рис.2.7, б

$$\tilde{n}_{\text{ПР}} = \frac{\tilde{n}_3 (\tilde{n}_1 + \tilde{n}_2)}{\tilde{n}_1 + \tilde{n}_2 + \tilde{n}_3};$$

$$h_{\text{ПР}} = (h_1 + h_2) \left(\frac{\tilde{n}_3}{\tilde{n}_1 + \tilde{n}_2 + \tilde{n}_3} \right)^2 + h_3 \left(\frac{\tilde{n}_1 + \tilde{n}_2}{\tilde{n}_1 + \tilde{n}_2 + \tilde{n}_3} \right)^2.$$

Для системы на рис.2.7, в

$$c_{\text{ПР}} = \frac{h^2 k^2 c}{c^2 + k^2 h^2}; \quad h_{\text{ПР}} = \frac{c^2 \cdot h}{c^2 + k^2 h^2},$$

где k – частота возмущающей силы.

«Эталонная» расчетная схема, к которой теоретически можно привести любую динамическую систему, подверженную крутильным колебаниям, представлена на рис.2.8.

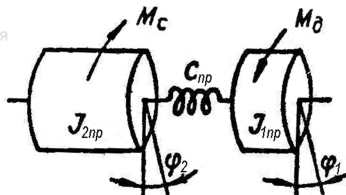


Рис. 2.8. Двухмассовая «эталонная» расчетная схема

«Эталонная» схема включает два жестких тела с приведенными моментами инерции I_{1np} и I_{2np} , соединенных между собой упругими элементами с приведенной угловой жесткостью c_{np} . Демпфирование не учитывается, т.к. в этом случае его влияние на динамические показатели незначительно. Нагрузка создается двумя крутящими парами – приведенным движущим моментом M_d и приведенным моментом сопротивления M_c .

На расчетной схеме угловые координаты тел обозначены через φ_1 и φ_2 . Угловая деформация упругого элемента равна $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$; она часто принимается за обобщенную координату.

При инженерных динамических расчетах используют различные изображения двухмассовой «эталонной» расчетной схемы (рис.2.9).

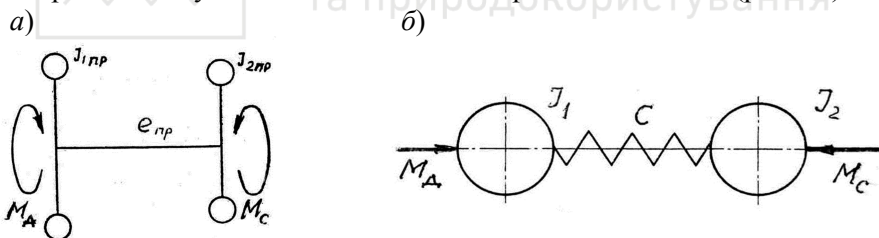


Рис. 2.9. Варианты изображения двухмассовой «эталонной» расчетной схемы

В частном случае, когда один конец крутильной динамической системы жестко зашпелен, она может быть изображена в виде одномассовой расчетной схемы (рис.2.10).

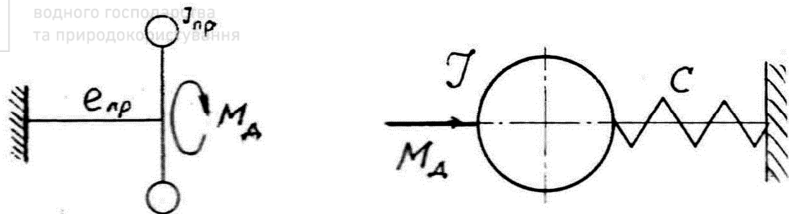


Рис. 2.10. Варианты изображения одномассовой расчетной схемы крутильной динамической системы

Более подробно приведение крутильных динамических систем к «эталонной» расчетной схеме рассматривается в 3-м разделе пособия.

Пример 2.1.

Задана динамическая система, показанная на рис.2.11, а. Она представляет собой шарнирно закрепленный жесткий стержень длиной ℓ , подвешенный в точке $x = \ell_1$ к пружине с коэффициентом жесткости c . Распределенная масса стержня, приходящаяся на единицу длины, равна m_0 .

Необходимо привести параметры динамической системы к точке $x = \ell$.

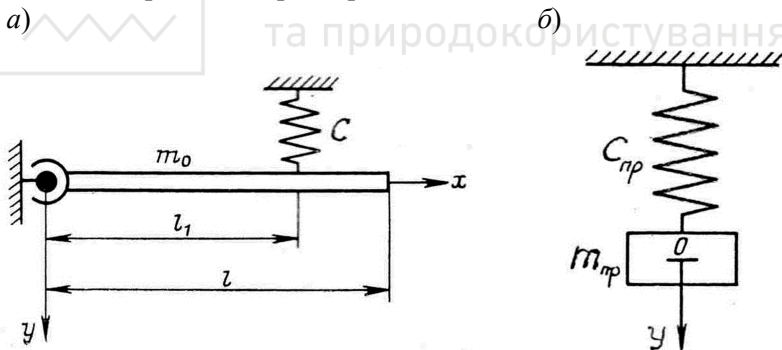


Рис. 2.11. Исходная динамическая система (а) и ее расчетная схема (б)

Решение. Перемещение точки $x = \ell$ характеризуется дополнительной координатой w (вертикальным смещением).

Для приведения массы составим выражение кинетической энергии динамической системы через координату w и приравняем ее кинетической энергии искомой приведенной массы $m_{пр}$, помещенной в точке $x = \ell$.



Форма колебаний динамической системы (т.е. закон взаимного перемещения всех ее точек) выражается следующей зависимостью:

$$y = \frac{x}{\ell} w.$$

Кинетическая энергия системы:

$$T_c = \int_0^{\ell} \frac{m_0 \cdot \dot{y}^2}{2} dx = \frac{m_0}{2} \int_0^{\ell} \left(\frac{x}{\ell} \dot{w} \right)^2 dx.$$

Кинетическая энергия приведенной массы:

$$T_{\text{пр}} = \frac{m_{\text{пр}}}{2} \dot{w}^2.$$

Полагая $T_c = T_{\text{пр}}$, получим

$$m_{\text{пр}} = m_0 \int_0^{\ell} \left(\frac{x}{\ell} \right)^2 dx = \frac{m_0 \ell}{3}.$$

Для приведения жесткости заданной динамической системы к точке $x = \ell$ составим выражение для ее потенциальной энергии через w и приравняем к потенциальной энергии приведенной упругой системы с массой $m_{\text{пр}}$ и жесткостью $c_{\text{пр}}$.

Имеем для заданной системы

$$\ddot{I}_{\tilde{N}} = \frac{\tilde{n}}{2} \left(\frac{\ell_1}{\ell} w \right)^2,$$

для приведенной системы

$$\ddot{I}_{\text{пр}} = \frac{1}{2} c_{\text{пр}} \cdot w^2.$$

Приравняв оба выражения, получим

$$c_{\text{пр}} = c \left(\frac{\ell_1}{\ell} \right)^2.$$

Приведенная расчетная схема динамической системы показана на рис.2.11, б.



2.2. Научные основы формирования аналитических моделей динамических систем

Структура и свойства динамической модели, представленные на расчетной схеме в идеализированном, упрощенном виде, в аналитической модели преобразуются в определенную систему уравнений связи. При этом вся совокупность используемых параметров представляется в абстрактных терминах, все качественные зависимости между ними переводятся в функциональные или иные соотношения, устанавливаются граничные и начальные условия.

Математическая строгость аналитической модели связана с качеством идеализации динамической системы на расчетной схеме. На практике такая идеализация осуществляется различными путями:

- переходом от распределенных параметров к сосредоточенным;
- сокращением числа независимых переменных;
- снижением размерности динамической системы от трехмерной к двумерной и одномерной;
- заменой переменных константами;
- изменением принимаемых ограничений.

В аналитических моделях нахождение соотношений между исследуемыми параметрами происходит на основе ряда теоретических представлений о механизме процессов, протекающих в объекте – оригинале. Поскольку такие модели описывают поведение реальных объектов на уровне базовых технических принципов, они достоверны для широкого диапазона их использования.

При формировании аналитических моделей динамических систем исходят из фундаментальных положений динамики несвободной материальной системы.

Рассмотрим такую систему из N материальных точек с массами m_1, m_2, \dots, m_N . Ограничения, накладываемые на координаты или скорости этих точек, называют связями.

Положим, что на систему действуют внешние силы F_i ($i = 1, 2, \dots, N$), материальные точки получают ускорения w_i , а связи, наложенные на систему, допускают перемещение всех ее точек в направлении некоторой оси OX . Тогда фундаментальное уравнение динамики материальной системы при поступательном движении запишется таким образом:



$$\sum_{i=1}^N F_{i\delta} = \sum_{i=1}^N m_i \frac{dx_i^2}{dt^2} = \sum_{i=1}^N m_i \ddot{x}_i, \quad (2.11)$$

где \ddot{x}_i – ускорение i -ой точки с массой m_i в направлении оси OX .

Аналогично записываются уравнения относительно осей OY и OZ . Частным случаем уравнения (2.11) является второй закон Ньютона для одной материальной точки

Другое фундаментальное уравнение динамики вращательного движения твердого тела имеет такой вид:

$$M_Z = I_Z \frac{d^2\varphi}{dt^2} = I_Z \cdot \ddot{\varphi}, \quad (2.12)$$

где M_Z – момент сил, действующих на тело, относительно неподвижной оси вращения OZ ; I_Z – момент инерции тела относительно данной оси; φ – угловое перемещение тела; $\ddot{\varphi}$ – угловое ускорение тела.

Для составления уравнений движения деформируемых несвободных материальных систем используются два способа – принцип Даламбера и уравнения Лагранжа 2-го рода.

Принцип Даламбера представляется в виде такого уравнения

$$\sum_{i=1}^N [(m_i \ddot{x}_i - F_{ix}) \delta x_i + (m_i \ddot{y}_i - F_{iy}) \delta y_i + (m_i \ddot{z}_i - F_{iz}) \delta z_i] = 0. \quad (2.13)$$

где $\ddot{x}_i, \ddot{y}_i, \ddot{z}_i$ – проекции ускорения w_i i -ой массы на оси декартовой системы координат; F_{ix}, F_{iy}, F_{iz} – проекции равнодействующей внешних сил и реакций связей, приложенных к i -ой массе; $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ – проекции произвольного перемещения i -ой массы.

Согласно уравнению (2.13) сумма работ всех внешних и внутренних сил, приложенных к материальной системе, и сил инерции на произвольном возможном перемещении равна нулю. Число уравнений Даламбера равно числу сосредоточенных масс, входящих в систему.

Для применения принципа Даламбера необходимо знать значения и направления всех сил, действующих на систему, всех ускорений масс системы, а также значение и направление реакций связей. Во многих случаях затруднительно определить значения и направления ускорений и реакций связей. Поэтому принцип Даламбера удобен не для всех динамических задач.

Наиболее универсальным рабочим аппаратом для составления уравнений движения являются уравнения Лагранжа. Они базируются на



равенство кинетической и потенциальной энергий материальной системы; в качестве переменных принимаются обобщенные координаты.

Уравнения Лагранжа имеют такой вид:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \left(\frac{\partial T}{\partial q} \right) + \left(\frac{\partial \dot{I}}{\partial q} \right) = Q, \quad (2.14)$$

где T и \dot{I} – соответственно кинетическая и потенциальная энергии материальной системы; q и \dot{q} – обобщенные координаты перемещения и скорости; Q – обобщенная сила.

Общее число уравнений Лагранжа равно числу обобщенных координат, а число последних равно числу степеней свободы материальной системы.

Во всех случаях через обобщенные координаты должны однозначно выражаться обыкновенные (декартовы) координаты всех точек системы.

Обобщенными силами называется система сил или моментов сил, действующих в направлениях обобщенных координат. Эти силы могут зависеть от времени, координат, скоростей. Например, упругие силы, силы тяжести, силы трения, силы смешанного характера.

Размерность обобщенной силы может быть различной в зависимости от выбора обобщенной координаты. Например, для обобщенной координаты, имеющей размер длины, соответствующая ей обобщенная сила имеет размерность силы, а для обобщенной координаты, выраженной в радианах, – размерность момента сил.

Кинетическая энергия T является мерой механического движения материальной системы.

При поступательном движении системы с приведенной массой $m_{\text{пр}}$ кинетическая энергия выражается таким образом:

$$T = \frac{1}{2} m_{\text{пр}} \cdot \dot{q}^2, \quad (2.15)$$

где \dot{q} – обобщенная линейная скорость.

При вращательном движении системы с приведенным к выбранной оси вращения моментом инерции $I_{\text{пр}}$ имеем

$$T = \frac{1}{2} I_{\text{пр}} \cdot \dot{q}^2, \quad (2.16)$$

где \dot{q} – обобщенная угловая скорость.

Потенциальная энергия материальной системы представляет собой накопленную деформацию ее упругих связей:



$$\Pi = \frac{1}{2} \tilde{n}_{\text{ГПР}} \cdot q^2, \quad (2.17)$$

где $c_{\text{ГПР}}$ – приведенная жесткость упругих связей; q – обобщенное перемещение системы.

Процесс перехода потенциальной энергии в кинетическую энергию движущихся масс и обратный процесс всегда сопровождаются возникновением колебаний в любой деформируемой материальной системе.

Рассмотренные выше общие теоретические положения динамики материальных систем в дальнейшем используются для решения конкретных динамических задач.

2.3. Модели одномассовых динамических систем и их решение

Модели дискретных динамических систем чаще всего формируются по схеме Лагранжа (реже по схеме Даламбера). В обоих случаях используется хорошо разработанный математический аппарат дифференциальных уравнений. Как правило, это обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка. Коэффициенты таких уравнений представляют собой основные характеристики моделируемых динамических систем, что дает большую наглядность при анализе получаемых результатов.

Модели одномассовых динамических систем являются самыми распространенными и наиболее простыми. Их формируют в виде так называемой второй задачи динамики, когда по заданным силовым и массовым параметрам, упругим и демпфирующим связям определяются кинематические характеристики динамических систем.

Структура одномассовой модели и ее решение зависят от типа исследуемой динамической системы – линейной или нелинейной, консервативной или диссипативной. Каждая из таких моделей имеет свои специфические особенности и условия использования.

2.3.1. Модели линейных автономных динамических систем

Автономной динамической системой называют такую систему, которая после внешнего возбуждения предоставлена самой себе и совершает свободные колебания.

**2.3.1.1. Консервативные системы**

Рассмотрим простейшую консервативную динамическую систему, состоящую из массы m , закрепленной на пружине с линейной жесткостью c (табл.2.2). Расчетная схема представлена на рис.2.12.

Если в начальный момент отклонить систему на величину a и предоставить самой себе, то возникнут свободные продольные колебания с постоянной амплитудой, равной a .

Для формирования аналитической модели динамической системы воспользуемся схемой Лагранжа и примем в качестве обобщенной координаты вертикальное перемещение y .

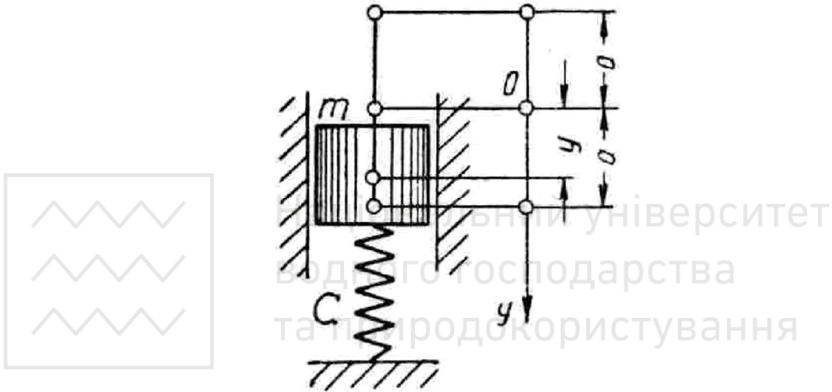


Рис. 2.12. Расчетная схема консервативной динамической системы, совершающей продольные колебания

Найдем по соотношения (2.15) и (2.17) кинетическую и потенциальную энергии системы:

$$\dot{O} = \frac{1}{2} \dot{o}^2 ; \quad \tilde{I} = \frac{1}{2} \tilde{n} \dot{o}^2 .$$

Подставив эти значения в уравнение Лагранжа (2.14), после дифференцирования получим расчетное уравнение аналитической модели:

$$\dot{o} \ddot{o} + \tilde{n} \dot{o} = 0 , \quad (2.18)$$

Разделив это уравнение на m , будем иметь линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$\ddot{o} + \omega^2 \dot{o} = 0 , \quad (2.19)$$

где $\omega = \sqrt{\tilde{n}/\dot{o}}$ – собственная частота продольных колебаний системы.

Характеристическое уравнение имеет вид



$$r^2 + \omega^2 = 0. \quad (2.20)$$

Корни этого уравнения чисто мнимые: $r_{1,2} = \pm i\omega$. В таком случае решение уравнения (2.19) запишется следующим образом

$$y = C_1 \cdot \cos \omega t + C_2 \cdot \sin \omega t. \quad (2.21)$$

Для полного выяснения закона движения динамической системы нужно определить постоянные C_1 и C_2 . Это требует учета начальных условий, т.е. тех конкретных обстоятельств, при которых возникает колебательный процесс. Для определения постоянных нужно указать начальное смещение системы y_0 и начальную скорость движения v_0 .

Принимаем такие начальные условия:

$$\text{при } t = 0 \quad y_0 = a, \quad \dot{y}_0 = v_0.$$

Из соотношения (2.21) находим $C_1 = a$. Продифференцировав по времени уравнение (2.21), получим общее выражение для скорости

$$\dot{y} = -C_1 \cdot \omega \cdot \sin \omega t + C_2 \cdot \omega \cdot \cos \omega t. \quad (2.22)$$

Полагая $t = 0$, $\dot{y} = v_0$, $C_1 = a$, будем иметь $C_2 = v_0/\omega$.

Следовательно, закон свободных затухающих колебаний динамической системы примет вид

$$y = a \cdot \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \cdot \sin \omega t. \quad (2.23)$$

Теперь рассмотрим другую простейшую консервативную динамическую систему в виде консольно закрепленного невесомого вала диаметром d и длиной ℓ , на свободном конце которого находится диск с моментом инерции I . При отклонении системы на некоторый угол φ она начинает совершать свободные крутильные колебания.

Расчетная схема представлена на рис.2.13.

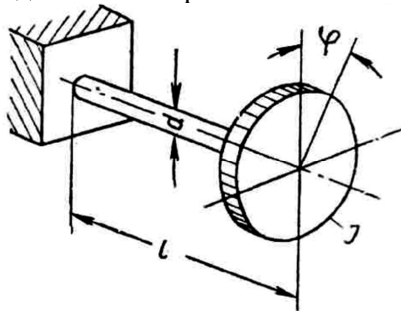


Рис. 2.13. Расчетная схема консервативной динамической системы, совершающей крутильные колебания



Для формирования аналитической модели динамической системы используем схему Лагранжа и примем в качестве обобщенной координаты угол поворота диска φ .

Будем иметь
$$\dot{O} = \frac{1}{2} I \cdot \dot{\varphi}^2 ; \quad \ddot{I} = \frac{1}{2} \ddot{n}_1 \varphi^2 ,$$

где c_1 – угловая жесткость вала, определяемая по табл.2.2.

Расчетное уравнение запишется таким образом:

$$I\ddot{\varphi} + c_1\varphi = 0. \quad (2.24)$$

Это уравнение аналогично уравнению (2.18). Его решение примет вид:

$$\varphi = C_1 \cdot \cos \omega_1 t + C_2 \cdot \sin \omega_1 t , \quad (2.25)$$

где $\omega_1 = \sqrt{\ddot{n}_1 / I}$ – собственная частота крутильных колебаний системы.

Принимаем такие начальные условия:

при $t = 0$ $\varphi_0 = \theta ; \quad \dot{\varphi}_0 = 0$.

В этом случае имеем такой закон свободных незатухающих колебаний динамической системы

$$\varphi = \theta \cdot \cos \omega_1 t . \quad (2.26)$$

2.3.1.2. Диссипативные системы

При формировании аналитических моделей диссипативных динамических систем в расчетных уравнениях обязательно учитывается внешнее неупругое сопротивление (вязкое и сухое трение, гидравлическое сопротивление).

Диссипативная сила при вязком трении пропорциональна обобщенной скорости:

$$F_{\dot{A}} = -b \cdot \dot{q} , \quad (2.27)$$

где b приведенный коэффициент вязкости $(\frac{\dot{I} \cdot \ddot{n}}{\dot{i}})$.

Знак (–) показывает, что мы имеем силу сопротивления.

При сухом трении диссипативная сила является постоянной по величине на всем интервале движения. Она направлена противоположно скорости:

$$F_{\dot{A}} = \pm \hat{E} . \quad (2.28)$$

Знак (+) принимается в тех интервалах движения, в которых скорость положительная, а знак (–) – для интервалов с отрицательной скоростью.



При гидравлическом сопротивлении диссипативная сила пропорциональна квадрату обобщенной скорости:

$$F_{\dot{A}} = \pm k \cdot \dot{q}^2, \quad (2.29)$$

где k – коэффициент пропорциональности.

Правило знаков такое же, как и в предыдущем случае.

Рассмотрим простейшую одномассовую диссипативную динамическую систему с упругими и демпфирующими связями (рис.2.14).

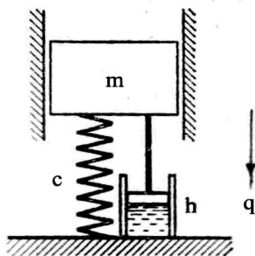


Рис. 2.14. Расчетная схема диссипативной динамической системы, совершающей продольные колебания

Следуя классической теории линейных колебаний, будем считать, что диссипативная сила пропорциональна обобщенной скорости и определяется по формуле (2.27). Хотя такое допущение не всегда оправдывается в действительности, тем не менее разработанные на его основе методы динамических расчетов имеют большое практическое значение. Дело в том, что при таком допущении мы остаемся в пределах линейной теории, а это позволяет значительно упростить математическое описание динамических систем без существенного искажения окончательных результатов.

Для формирования аналитической модели рассматриваемой динамической системы используем схему Лагранжа. Обобщенную координату обозначим через q . При этом будем полагать, что в уравнении (2.14) обобщенная сила Q равна диссипативной силе $F_{\dot{q}}$:

$$Q = -b\dot{q}.$$

Расчетное уравнение примет такой вид:

$$m\ddot{q} + b\dot{q} + cq = 0. \quad (2.30)$$

После преобразований будем иметь «стандартное» линейное уравнение свободных колебаний при наличии затухания:



$$\ddot{q} + 2h\dot{q} + \omega^2 q = 0, \quad (2.31)$$

где $\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}$ – собственная частота колебаний соответствующей консервативной системы;

$h = \frac{b}{2m}$ – коэффициент демпфирования.

Решение уравнения (2.31) будем искать в таком виде:

$$q(t) = e^{st}.$$

Подставив это выражение в уравнение (2.31), получим следующее характеристическое уравнение:

$$S^2 + 2hS + \omega^2 = 0,$$

откуда для случая «малого» сопротивления, когда $\omega > h$, имеем:

$$S = -h \pm i\sqrt{\omega^2 - h^2}; i = \sqrt{-1}.$$

Корни S_1 и S_2 являются комплексно-сопряженными. Следовательно, общий интеграл уравнения (2.31) представляется таким выражением:

$$q(t) = e^{-ht} (C_1 \cdot \cos \omega_1 t + C_2 \cdot \sin \omega_1 t), \quad (2.32)$$

где $\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - h^2}$ – частота затухающих колебаний.

Примем такие начальные условия:

$$\text{при } t = 0 \quad q(0) = q_0; \quad \dot{q}(0) = \dot{q}_0.$$

Тогда

$$C_1 = q_0; \quad \tilde{N}_2 = (\dot{q}_0 + hq_0)/\omega_1.$$

Окончательно закон свободных затухающих колебаний рассматриваемой динамической системы запишется таким образом:

$$q(t) = e^{-ht} \left(q_0 \cdot \cos \omega_1 t + \frac{\dot{q}_0 + hq_0}{\omega_1} \cdot \sin \omega_1 t \right). \quad (2.33)$$

Амплитуды колебаний убывают с каждым полупериодом по закону геометрической прогрессии, знаменатель которой

$$\eta = \frac{A_k}{A_{k+1}} = e^{\frac{h\tau}{2}}, \quad (2.34)$$

где A_k и A_{k+1} – две последующие амплитуды затухающих колебаний;

$$\tau = 2\pi / \omega_1 \approx \frac{2\pi}{\omega} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{h}{\omega} \right)^2 \right] - \text{период затухающих колебаний,}$$

условно принимаемый за постоянную величину.



Логарифмируя равенство (2.34), получим двойную формулу для логарифмического декремента затуханий:

$$\delta = \ln \frac{A_k}{A_{k+1}} = \frac{h\tau}{2}. \quad (2.35)$$

Преобразуем вторую формулу:

$$\delta = \frac{h\tau}{2} = \frac{\pi h}{\omega_1} = \frac{\pi h}{\sqrt{\omega^2 - h^2}},$$

откуда находим

$$h^2 = \omega^2 \frac{(\delta/\pi)^2}{1 + (\delta/\pi)^2}.$$

Подставим это значение в выражение для ω_1 :

$$\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - h^2} = \frac{\omega}{\sqrt{1 + (\delta/\pi)^2}}. \quad (2.36)$$

Из формулы (2.36) следует очень важный вывод. Оказывается, что даже при значительном затухании колебаний частота ω_1 мало отличается от частоты ω . Поэтому при вычислении коэффициентов демпфирования h по формуле (2.10) вместо частоты ω_1 допустимо использовать собственную частоту колебаний ω соответствующей консервативной системы.

В заключение следует отметить, что в случае «большого» неупругого сопротивления, когда $\omega < h$, колебательный процесс динамической системы переходит в аperiodический. При этом с возрастанием t система быстро возвращается в состояние равновесия.

Пример 2.2. По экспериментальной виброграмме свободных колебаний диссипативной динамической системы с одной степенью свободы установлено, что за один цикл амплитуда уменьшается на 40%. Оценить влияние внутреннего вязкого трения на частоту затухающих колебаний.

Решение. Используя двойную формулу (2.35), сначала определим величину логарифмического декремента затуханий

$$\delta = \ln \left| \frac{A_k}{A_{k+1}} \right| = \ln \frac{1}{1 - 0,4} = 0,511,$$

а затем коэффициент демпфирования

$$h = \delta/\tau,$$

где $\tau = 2\pi/\sqrt{\omega^2 - h^2}$ – период затухающих колебаний; ω – собствен-



В результате получаем

$$h = \frac{0,511}{2\pi} \sqrt{\omega^2 - h^2}.$$

Решая это уравнение, находим, что

$$h^2 = 0,00661\omega^2.$$

Следовательно, частота затухающих колебаний будет равна

$$\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - h^2} = 0,997 \omega,$$

т.е. ω_1 отличается от ω на 0,3%.

Из этого можно сделать вывод, что даже при большом коэффициенте демпфирования диссипативная сила незначительно влияет на частоту колебаний.

2.3.2. Модели линейных динамических систем при внешнем гармоническом возбуждении

Динамические системы машин в большинстве случаев подвергаются внешнему гармоническому возбуждению, в результате чего системы испытывают вынужденные колебания. Внешнее возбуждение может быть двух видов – силовое и кинематическое.

В первом случае на динамическую систему непосредственно действуют внешняя гармоническая сила, во втором – каким-либо точкам системы извне сообщается принудительное гармоническое движение.

2.3.2.1. Консервативные системы

Рассмотрим простейшую консервативную динамическую систему (рис.2.15), на которую действует внешняя гармоническая сила $Q = Q_0 \cdot \cos kt$ (k – частота возмущающей силы).

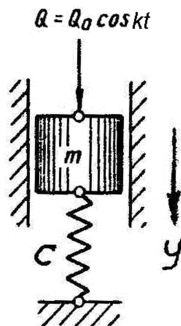


Рис. 2.15. Расчетная схема консервативной динамической системы с внешним силовым возбуждением



Для формирования аналитической модели динамической системы воспользуемся схемой Лагранжа и примем в качестве обобщенной координаты вертикальное перемещение y . Полагаем, что в уравнении Лагранжа (2.14) обобщенная сила равна возмущающей силе.

Расчетное уравнение примет вид:

$$m\ddot{y} + cy = Q_0 \cdot \cos kt. \quad (2.37)$$

После преобразований получим

$$\ddot{y} + \omega^2 y = p \cdot \cos kt, \quad (2.38)$$

где ω – собственная частота колебаний системы; $p = Q_0/m$.

Решение уравнения (2.38) складывается из общего решения однородного уравнения (2.19) и частного решения, учитывающего наличие правой части.

Частное решение принимаем в виде

$$y = C_3 \cdot \cos kt.$$

Подставляя это значение в уравнение (2.38), найдем значение C_3 :

$$\tilde{N}_3 = \frac{p}{\omega^2 - k^2}.$$

Тогда общее решение уравнения (2.38) запишется так:

$$y = C_1 \cdot \cos \omega t + C_2 \cdot \sin \omega t + \frac{p \cdot \cos kt}{\omega^2 - k^2}. \quad (2.39)$$

Примем такие начальные условия:

$$\text{при } t = 0 \quad y = y_0; \quad \dot{y} = v_0.$$

Найдем значения коэффициентов C_1 и C_2 :

$$\tilde{N}_1 = y_0 - \frac{p}{\omega^2 - k^2}; \quad C_2 = \frac{v_0}{\omega}.$$

Окончательно имеем

$$y = y_0 \cdot \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \cdot \sin \omega t - \frac{p \cdot \cos \omega t}{\omega^2 - k^2} + \frac{p \cdot \cos kt}{\omega^2 - k^2}. \quad (2.40)$$

Первые два слагаемые в правой части уравнения (2.40) соответствуют свободным колебаниям динамической системы с собственной частотой ω при отсутствии возмущающей силы. Третье слагаемое – это гармоническое колебание, происходящее с собственной частотой ω , но с амплитудой, зависящей от возмущающей силы. Все эти три слагаемые постепенно затухают в результате неучтенного при составлении расчетного уравнения действия сил внутреннего трения.



Четвертое слагаемое представляет собой чисто вынужденные колебания одномассовой системы с амплитудой

$$A_B = \frac{Q_0}{m |\omega^2 - k^2|}. \quad (2.41)$$

Таким образом, вынужденные колебания консервативной динамической системы происходят с частотой возмущающей силы и не зависят от начальных условий. Поэтому для изменения амплитуда A_B при заданной возмущающей силе необходимы существенные изменения конструкции системы, ее жесткости, распределения масс.

Кинематические параметры динамической системы при вынужденных колебаниях зависят от соотношения частот ω и k .

Если $k > \omega$, то знак отклонения y будет совпадать со знаком силы Q , т.е. они будут находиться в одной фазе; при $k < \omega$ – в противоположных фазах.

Если $k = \omega$, то вынужденные колебания будут происходить с бесконечно возрастающими амплитудами. Совпадение частоты возмущающей силы с собственной частотой динамической системы и возникающие при этом явления называются резонансом.

В реальных системах амплитуды колебаний при резонансе всегда ограничены, т.к. консервативные системы являются лишь их идеализацией.

Введем понятие статической деформации динамической системы. Ее численное значение $y_{ст}$ определяется по формуле

$$y_{ст} = Q_0 / c,$$

где Q_0 – амплитудное значение возмущающей силы; c – коэффициент жесткости системы.

Отношение амплитуды вынужденных колебаний A_B к статической деформации $y_{ст}$ называется коэффициентом динамического усилия (коэффициентом динамичности) по перемещениям:

$$\beta = \frac{A_B}{y_{ст}} = \frac{c}{m(\omega^2 - k^2)} = \frac{\omega^2}{\omega^2 - k^2} = \frac{1}{1 - \left(\frac{k}{\omega}\right)^2}. \quad (2.42)$$

Зависимость $\beta = f\left(\frac{k}{\omega}\right)$ представлена на рис.2.16.

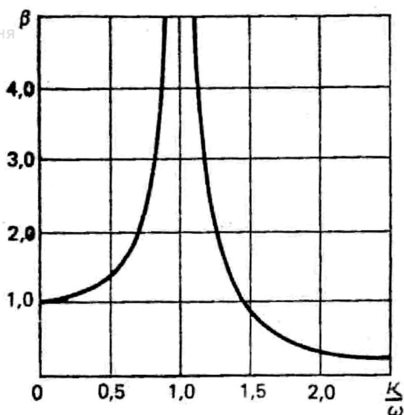


Рис. 2.16. График изменения коэффициента динамичности в зависимости от частотного отношения

При инженерных динамических расчетах принято считать, что частота собственных колебаний ω в до- и зарезонансных режимах должна отличаться от частоты вынужденных колебаний k не менее, чем на 30%.

Теперь рассмотрим консервативную систему с внешним кинематическим возбуждением (рис.2.17).

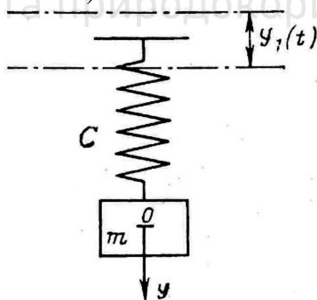


Рис. 2.17. Расчетная схема консервативной динамической системы с внешним кинематическим возбуждением

На расчетной схеме неподвижной системой координат является ось OY . Колебание точки закрепления упругой связи (кинематическое возбуждение) описывается зависимостью

$$y_1 = b \cdot \sin \lambda t, \quad (2.43)$$

где b – амплитуда колебания; λ – его частота.

Удлинение упругой связи равно $(y - y_1)$, а упругая реакция составит $c(y - y_1)$.



На основании общего уравнения динамики (2.11) получим расчетное уравнение аналитической модели

$$-c(y - y_1) = m \ddot{o},$$

которое после преобразований примет такой окончательный вид:

$$m\ddot{y} + cy = c \cdot y_1(t) = c \cdot b \cdot \sin \lambda t. \quad (2.44)$$

Заметим, что с помощью уравнения (2.44) можно описать колебания груза массой m при неподвижной точке закрепления упругой связи и при возмущающей силе, равной $Q = c \cdot b \cdot \sin \lambda t$. Значит, уравнение (2.44) является аналогом уравнения (2.37).

Таким образом, при внешнем кинематическом возбуждении динамической системы для составления расчетного уравнения аналитической модели необходимо в качестве обобщенной силы вводить эквивалентную возмущающую силу, равную произведению кинематического возбуждения y_1 на коэффициент жесткости c упругой связи.

Пример 2.3. Для консервативной динамической системы, представленной на рис.2.18, составить по схеме Лагранжа аналитическую модель и с ее помощью определить амплитуду вынужденных колебаний.

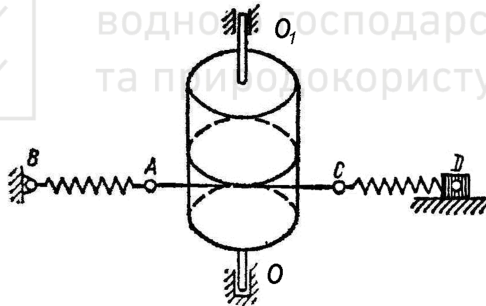


Рис. 2.18. Расчетная схема к Примеру 2.3.

Система состоит из однородного цилиндра радиусом r и массой m , который вращается вокруг вертикальной оси OO_1 гибким тросом. Концы троса связаны с концами A и C горизонтальных пружин AB и CD , имеющих одинаковую жесткость, равную c_1 . Конец B пружины AB закреплен неподвижно, а конец D пружины CD связан с ползуном, совершающим прямолинейное движение по закону $S = b \cdot \sin \lambda t$. В начальный момент пружины находятся в недеформированном состоянии, а цилиндр – в покое. Сопротивлением пренебречь.

Решение. Мы имеем консервативную динамическую систему с внешним кинематическим возбуждением. За обобщенную координату



примем угловое смещение цилиндра φ .

Вычислим кинетическую энергию цилиндра

$$T = \frac{1}{2} I \cdot \dot{\varphi}^2.$$

По табл.2.1 находим выражение для момента инерции цилиндра

$$I = \frac{m r^2}{2}.$$

Тогда

$$T = \frac{m r^2 \dot{\varphi}^2}{4}.$$

Потенциальная энергия пружин определяется по формуле

$$\Pi = \frac{c_1 \cdot \Delta_1^2}{2} + \frac{c_1 \cdot \Delta_2^2}{2} = \frac{c_1}{2} (\Delta_1^2 + \Delta_2^2),$$

где Δ_1 и Δ_2 – приращения длин пружин AB и CD по сравнению с их недеформируемым состоянием.

Для малых колебаний можно принять

$$\Delta_1 \cong r\varphi; \quad \Delta_2 \cong S - r\varphi = b \cdot \sin \lambda t - r\varphi.$$

Тогда

$$\Pi = \frac{c_1}{2} [r^2 \varphi^2 + (b \cdot \sin \lambda t - r\varphi)^2].$$

Подставляя значения T и Π в уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} + \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = 0,$$

после преобразований получим расчетное уравнение аналитической модели:

$$\frac{m r \ddot{\varphi}}{2} + 2c_1 \cdot r \cdot \varphi = c_1 \cdot b \cdot \sin \lambda t.$$

Введем обозначения

$$\frac{4c_1}{m} = \omega^2; \quad \frac{2c_1 \cdot b}{m r} = q.$$

Получим уравнение колебаний цилиндра

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = q \cdot \sin \lambda t.$$

Учитывая соотношение (2.41), найдем выражение для амплитуды вынужденных колебаний цилиндра



$$A_B = \frac{q}{\omega^2 - \lambda^2} = \frac{2c_1 b}{r(4c_1 - m\lambda^2)}.$$

2.3.2.2. Диссипативные системы

Рассмотрим простейшую диссипативную систему, представленную на рис.2.19, на которую действует гармоническая возмущающая сила $Q = Q_0 \cdot \cos kt$.

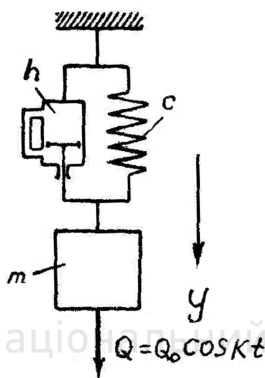


Рис. 2.19. Расчетная схема диссипативной динамической системы с внешним силовым возбуждением

Используя схему Лагранжа, получим такое преобразованное расчетное уравнение аналитической модели:

$$\ddot{y} + 2h\dot{y} + \omega^2 y = \frac{Q_0 \cos kt}{m}. \quad (2.45)$$

Интеграл этого уравнения состоит из двух частей: интеграла соответствующего однородного уравнения (2.31) и частного интеграла уравнения (2.45). Так как нас интересует установившийся процесс, когда свободные колебания затухают, то ограничимся второй частью, которая может быть записана в виде

$$y = A_B^* \cdot \cos(kt + \varphi), \quad (2.46)$$

где A_B^* – амплитуда вынужденных колебаний; φ – начальная фаза колебаний.

Найдем производные

$$\dot{y} = -A_B^* \cdot k \cdot \sin(kt + \varphi);$$

После подстановки этих значений в уравнение (2.45) получим такое выражение:



$$-A_B^* \cdot k^2 \cdot \cos(kt + \varphi) - 2A_B^* h \cdot k \cdot \sin(kt + \varphi) + A_B^* \cdot \omega^2 \cdot \cos(kt + \varphi) - \frac{Q_0}{m} \cos kt = 0.$$

Дальнейшие преобразования очень громоздкие, поэтому рассмотрим только общую схему.

В первую очередь, косинусы и синусы суммы углов выражаются через косинусы и синусы слагаемых углов. Затем коэффициенты при $\cos kt$ и $\sin kt$ собираются в отдельные скобки. Каждое выражение в скобках порознь приравнивается нулю. Из этих двух уравнений определяют неизвестные величины A_B^* и $\operatorname{tg} \varphi$:

$$A_B^* = \frac{Q_0}{m\sqrt{(\omega^2 - k^2)^2 + 4h^2 k^2}}; \quad (2.47)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2hk}{\omega^2 - k^2}. \quad (2.48)$$

Подставляя значения A_B^* и $\operatorname{tg} \varphi$ в соотношение (2.46), получим уравнение незатухающих стационарных колебаний динамической системы, происходящих с частотой возмущающей силы.

Исследуем, как изменяется амплитуда A_B^* с изменением частоты возмущающей силы.

Максимум амплитуды A_B^* соответствует минимуму знаменателя в выражении (2.47), т.е. минимуму функции

$$f(k) = (\omega^2 - k^2)^2 + 4h^2 k^2.$$

Исследование функции $f(k)$ на экстремум показало, что она принимает минимальное значение при т.н. критической частоте

$$k_{\text{кр}} = \sqrt{\omega^2 - 2h^2}. \quad (2.49)$$

В этом случае амплитуда A_B^* достигает максимального значения

$$A_{B\text{max}}^* = \frac{Q_0}{2mh\sqrt{\omega^2 - k^2}}. \quad (2.50)$$

Найдем коэффициент динамичности по перемещениям

$$\beta^* = A_B^* / y_{CT}.$$

Полагая, что



$$y_{cr} = \frac{Q_0}{c} = \frac{Q_0}{m\omega^2},$$

будем иметь

$$\beta^* = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{k^2}{\omega^2}\right)^2 + \frac{4h^2 k^2}{\omega^4}}}. \quad (2.51)$$

Зависимость $\beta^* = f\left(\frac{k}{\omega}\right)$ представлена на рис.2.20.

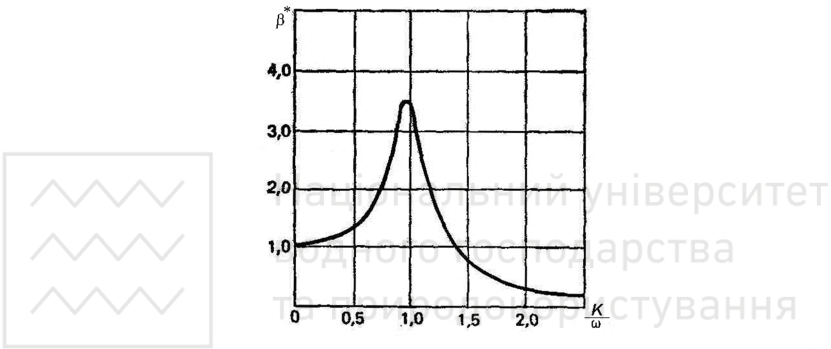


Рис. 2.20. График изменения коэффициента динамичности β^* в зависимости от частотного отношения ($2h/\omega = 0,28$)

Качественный анализ зависимостей (2.50) и (2.51) показывает, что при резонансном режиме в диссипативной динамической системе максимальная амплитуда имеет конечную величину. При этом максимум коэффициента динамичности несколько смещен от абсциссы $k/\omega = 1$. Однако это смещение мало и можно приближенно определять β_{\max}^* , подставляя в формулу (2.51) $k = \omega$. Тогда $\beta_{\max}^* = \omega/2h$, т.е. максимальное значение β_{\max}^* обратно пропорционально коэффициенту демпфирования.

2.3.3. Модели нелинейных динамических систем

В настоящем разделе рассматриваются наиболее простые модели нелинейных консервативных динамических систем. Особенностью таких моделей является наличие в них так называемой упругой характеристики, которая представляет собой нелинейную восстанавливающую силу.

2.3.3.1. Консервативные автономные системы



Расчетное уравнение аналитической модели автономной динамической системы имеет такой вид:

$$m\ddot{y} + f(y) = 0, \quad (2.52)$$

где $f(y)$ – упругая характеристика.

Для решения уравнения (2.52) осуществим его прямое интегрирование.

Выполним следующее преобразование:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dy} \frac{dy}{dt} = \frac{dv}{dy} v.$$

Тогда получим

$$mv \frac{dv}{dy} + f(y) = 0.$$

Разделяя переменные, находим

$$m v dv = -f(y) dy.$$

Взяв квадратуры от обеих частей, будем иметь:

$$m \int v dv = - \int f(y) dy + C_1,$$

или

$$\frac{mv^2}{2} = - \int f(y) dy + C_1.$$

Преобразуем последнее выражение к виду

$$v = \frac{dy}{dt} = \sqrt{-\frac{2}{m} \int f(y) dy + C_1},$$

откуда

$$y = \int \sqrt{-\frac{2}{m} \int f(y) dy + C_1} dt + C_2. \quad (2.53)$$

Постоянные C_1 и C_2 определяются из начальных условий.

Как видно из вычислений, нахождение интеграла уравнения (2.52) значительно сложнее, чем в линейных динамических системах.

2.3.3.2. Консервативные системы при внешнем гармоническом возбуждении

В этом случае расчетное уравнение аналитической модели имеет такой вид

$$m\ddot{y} + f(y) = Q_0 \cdot \sin kt. \quad (2.54)$$

Для решения уравнений типа (2.54) используются прямые методы



Релея, Ритца, Бубнова – Галеркина и др.

Воспользуемся методом Бубнова – Галеркина. Решение ищется в виде линейной комбинации некоторых заданных дважды дифференцируемых функций $U_1(t), \dots, U_n(t)$:

$$y(t) = a_1 U_1(t) + a_2 U_2(t) + \dots + a_n U_n(t). \quad (2.55)$$

Функции $U_i(t)$ должны удовлетворять однородным граничным условиям $y(0) = 0$; $y(T) = 0$, где $T = 2\pi / k$ – период колебаний гармонической возмущающей силы.

Величины a_i являются неизвестными параметрами.

Подставим выражение (2.55) в уравнение (2.54) и найдем разность между его левой и правой частями, которая называется невязкой. Невязка является функцией переменной t и имеет вид

$$R(t, a_1, a_2, \dots, a_n) = m\ddot{y} + f(y) - Q_0 \cdot \sin kt. \quad (2.56)$$

Коэффициенты a_1, a_2, \dots, a_n необходимо подбирать так, чтобы невязка была минимальной. Для этого функция R должна быть ортогональна на интервале $[0, T]$ к каждой из функций $U_i(t)$.

Требование ортогональности имеет вид

$$\int_0^T R(t, a_1, a_2, \dots, a_n) U_i(t) dt = 0. \quad (2.57)$$

В результате получаем систему n алгебраических уравнений для нахождения коэффициентов a_i .

Пример 2.4. Для динамической системы (рис.2.21), включающей груз массой m , закрепленный на нелинейном упругом элементе (конической пружине), составить аналитическую модель и определить амплитуду вынужденных колебаний при воздействии на систему гармонической возмущающей силы $Q = Q_0 \cdot \sin kt$. Вязким трением пренебречь. Упругая характеристика пружины имеет вид

$$f(x) = cx + c_1 x^3$$

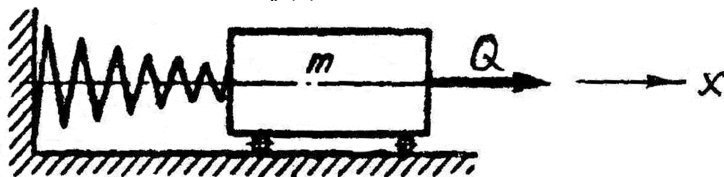


Рис. 2.21. Расчетная схема к Примеру 2.4

Исходные данные для расчетов: $Q_0 = 20$ Н; $m = 10$ кг; $k = 10$ с⁻¹ ;



$$c = 1,5 \text{ кН/м}; c_1 = 1000 \text{ кН/м}^3.$$

Решение. Расчетное уравнение аналитической модели имеет вид

$$m\ddot{x} + cx + c_1x^3 = Q_0 \cdot \sin kt.$$

Воспользуемся методом Бубнова – Галеркина. Решение ищем в соответствии с соотношением (2.55):

$$x_1 = x_0 \cdot \sin kt.$$

Найдем невязку

$$R(t, x_0) = m\ddot{x}_1 + cx_1 + c_1x_1^3 - Q_0 \cdot \sin kt.$$

Запишем условие ортогональности

$$\int_0^{\frac{2\pi}{k}} [m\ddot{x}_1 + cx_1 + c_1x_1^3 - Q_0 \cdot \sin kt] x_1 dt = 0.$$

После интегрирования имеем

$$\frac{3}{4}c_1x_0^3 + (c - mk^2)x_0 - Q_0 = 0.$$

Корни кубического уравнения находим графически (рис.2.22), построив графики функций

$$\eta_1 = \frac{3}{4}c_1x_0^3; \quad \eta_2 = Q_0 - (c - mk^2)x_0$$

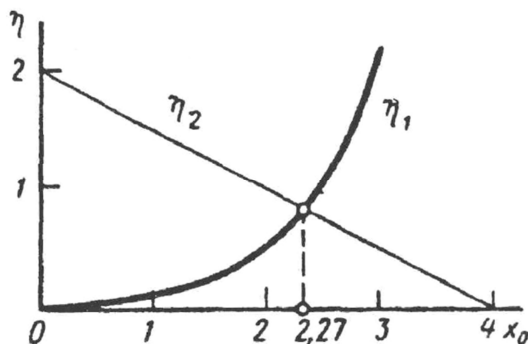


Рис. 2.22. Графическое решение кубического уравнения

Точка пересечения графиков η_1 и η_2 позволяет получить значение действительного корня, равного $x_0 = 2,27$ см.

2.4. Модели линейных многомассовых динамических



При формировании аналитических моделей многомассовых динамических систем следует учитывать два принципиальных отличия от одномассовых систем.

Во-первых, при составлении расчетных уравнений таких моделей применение схемы Лагранжа связано с большим объемом вычислительных операций. Для этих целей обычно используются или схема Даламбера, или уравнение динамики материальной системы.

Во-вторых, при решении расчетных уравнений в большинстве случаев не определяют общий закон движения динамической системы, а ограничиваются нахождением только собственных частот колебаний и исследованием резонансных режимов. При такой постановке задачи вязкое трение можно не учитывать, т.к. оно оказывает незначительное влияние на величину частот колебаний. Следовательно, вместо реальных диссипативных динамических систем можно использовать их идеализацию в виде консервативных динамических систем, что значительно облегчает проведение динамических расчетов.

В настоящем разделе рассматриваются модели линейных двухмассовых динамических систем. Формирование и решение аналогичных моделей многомассовых систем практически ничем от них не отличается. При этом лишь в разы увеличивается объем и сложность вычислений.

2.4.1. Двухмассовые автономные консервативные системы

Рассмотрим автономную консервативную динамическую систему в виде невесомой балки с двумя сосредоточенными массами (рис.2.23, а) и найдем ее собственные частоты и перемещения.

Для формирования аналитической модели используем схему Даламбера.

Из курса строительной механики машин известно, что для невесомой упругой балки, находящейся под действием n сил P_1, P_2, \dots, P_n , приложенных в сечениях x_1, x_2, \dots, x_n , прогиб под силой P_k определяется таким образом

$$y_k = \sum_{i=1}^n \delta_{ki} P_i \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (2.58)$$

где δ_{ki} – коэффициент влияния, равный прогибу балки в сечении с абсциссой x_k под действием единичной силы, приложенной в точке x_i , причем $\delta_{ki} = \delta_{ik}$.

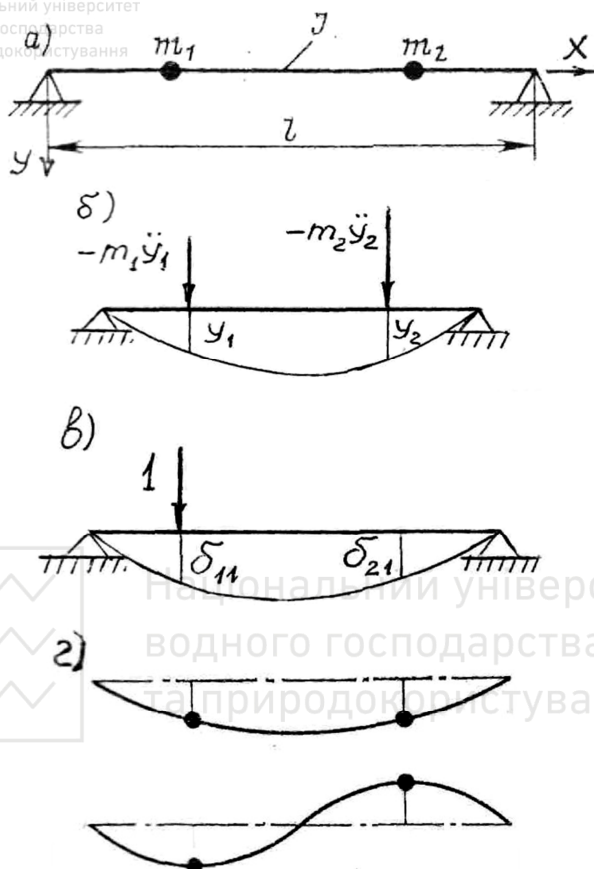


Рис. 2.23. Расчетная схема автономной консервативной системы балочного вида

Используем соотношение (2.58) для принятой расчетной схемы и вместо сил P_i в соответствии с принципом Даламбера приложим к массам m_1 и m_2 силы инерции $P_1 = -m_1 \ddot{y}_1$ и $P_2 = -m_2 \ddot{y}_2$ (рис.2.23, б).

В результате получим два расчетных уравнения аналитической модели, которые описывают свободные колебания динамической системы:

$$\begin{aligned} y_1 + m_1 \ddot{y}_1 \delta_{11} + m_2 \ddot{y}_2 \delta_{12} &= 0; \\ y_2 + m_1 \ddot{y}_1 \delta_{21} + m_2 \ddot{y}_2 \delta_{22} &= 0, \end{aligned} \quad (2.59)$$

где δ_{11} – прогиб балки в точке присоединения массы m_1 от действия статической единичной силы, приложенной в той же точке; $\delta_{12} = \delta_{21}$ – прогиб балки в точке присоединения массы m_1 от действия статической

единичной силы, приложенной в точке присоединения массы m_2 , равный прогибу балки в точке присоединения массы m_2 от действия такой же силы, приложенной в точке присоединения массы m_1 ; δ_{22} – прогиб балки в точке присоединения массы m_2 от действия статической единичной силы, приложенной в той же точке.

Схема определения коэффициентов влияния показана на рис.2.23, в. Решение уравнений (2.59) ищем в виде

$$\begin{aligned} y_1 &= A_1 \cdot \sin(\omega t + \varphi); \\ y_2 &= A_2 \cdot \sin(\omega t + \varphi). \end{aligned} \quad (2.60)$$

Подставляя выражения (2.60) в уравнения (2.59) и полагая $\delta_{12} = \delta_{21}$, получим следующие однородные алгебраические уравнения:

$$\begin{cases} (1 - m_1 \delta_{11} \omega^2) A_1 - m_2 \delta_{12} \omega^2 A_2 = 0 \\ -m_1 \delta_{12} \omega^2 A_1 + (1 - m_2 \delta_{22} \omega^2) A_2 = 0 \end{cases} \quad (2.61)$$

Так как динамическая система находится в движении, то неизвестные амплитуды A_1 и A_2 не должны равняться нулю. Для этого необходимо и достаточно, чтобы определитель уравнений (2.61) был равен нулю:

$$\begin{vmatrix} 1 - m_1 \delta_{11} \omega^2 & -m_2 \delta_{12} \omega^2 \\ -m_1 \delta_{12} \omega^2 & 1 - m_2 \delta_{22} \omega^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Если развернуть определитель, то получим уравнение собственных частот:

$$m_1 m_2 (\delta_{11} \delta_{22} - \delta_{12}^2) \omega^4 - (m_1 \delta_{11} + m_2 \delta_{22}) \omega^2 + 1 = 0, \quad (2.62)$$

откуда

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\frac{(m_1 \delta_{11} + m_2 \delta_{22}) \mp \sqrt{(m_1 \delta_{11} + m_2 \delta_{22})^2 - 4 m_1 m_2 (\delta_{11} \delta_{22} - \delta_{12}^2)}}{2 m_1 m_2 (\delta_{11} \delta_{22} - \delta_{12}^2)}}. \quad (2.63)$$

Каждой частоте ω_1 и ω_2 соответствует своя форма колебаний динамической системы (рис.2.23, г).

Чтобы найти общее решение уравнений (2.59), введем в рассмотрение коэффициент формы, равный отношению амплитуды A_2 к амплитуде A_1 при соответствующих частотах:

$$\alpha_{2j} = \frac{A_{2j}}{A_{1j}}, \quad (2.64)$$

где j – номер частоты ($j = 1, 2$).

Из первого уравнения системы (2.61) находим



$$\alpha_{2j} = \frac{1 - m_1 \delta_{11} \omega_j^2}{m_2 \delta_{12} \omega_j^2} \quad (j = 1, 2).$$

Тогда общее решение примет вид:

$$\begin{aligned} y_1 &= A_{11} \cdot \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A_{12} \cdot \sin(\omega_2 t + \varphi_2); \\ y_2 &= A_{11} \cdot \alpha_{21} \cdot \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A_{12} \cdot \alpha_{22} \cdot \sin(\omega_2 t + \varphi_2). \end{aligned} \quad (2.65)$$

Четыре произвольных постоянных A_{11} , A_{12} , φ_1 и φ_2 определяются из начальных условий, например, перемещений и скоростей масс при $t = 0$.

Теперь рассмотрим принципиально иную цепную двухмассовую консервативную динамическую систему (рис.2.24)

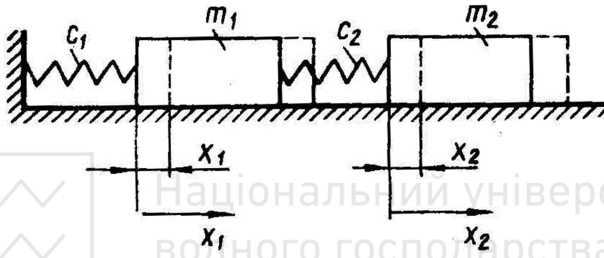


Рис. 2.24. Расчетная схема автономной консервативной системы цепного вида

Расчетная схема включает две массы m_1 и m_2 , соединенных между собой пружиной с коэффициентом жесткости c_2 . Кроме того, масса m_1 соединена с неподвижной стенкой пружиной с коэффициентом жесткости c_1 . Идеальная направляющая плоскость допускает только поступательное прямолинейное движение инерционных элементов.

При свободных колебаниях на первую массу действует сила натяжения первой пружины $-c_1 x_1$ и сила натяжения второй пружины $c_2(x_2 - x_1)$. На вторую массу действует только сила натяжения второй пружины $-c_2(x_2 - x_1)$.

На основании уравнения динамики материальной системы получим такие расчетные уравнения аналитической модели:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + c_1 x_1 - c_2(x_2 - x_1) &= 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 + c_2(x_2 - x_1) &= 0 \end{aligned} \quad (2.66)$$

Решение уравнений ищем в виде

$$x_1 = A_1 \sin(\omega t + \varphi); \quad x_2 = A_2 \sin(\omega t + \varphi).$$



После подстановки значений x_1 и x_2 в (2.66) и сокращения на $\sin(\omega t + \varphi)$ приходим к двум алгебраическим уравнениям:

$$\begin{aligned}(\tilde{n}_1 + \tilde{n}_2 - m_1 \omega^2) A_1 - c_2 A_2 &= 0 \\ -\tilde{n}_2 A_1 + (\tilde{n}_2 - m_2 \omega^2) A_2 &= 0.\end{aligned}\quad (2.67)$$

Так как $A_1 \neq 0$ и $A_2 \neq 0$, то определитель уравнений (2.67) должен быть равен нулю:

$$\begin{vmatrix} \tilde{n}_1 + c_2 - m_1 \omega^2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 - m_2 \omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

Развернув определитель, находим из биквадратного уравнения значения собственных частот динамической системы:

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\frac{c_1 + c_2}{2m_1} + \frac{c_2}{2m_2} \mp \sqrt{\left(\frac{c_1 + c_2}{2m_1} + \frac{c_2}{2m_2}\right)^2 - \frac{c_1 c_2}{m_1 m_2}}}. \quad (2.68)$$

По соотношению (2.64) определим коэффициенты формы:

$$\begin{aligned}\alpha_{21} &= (c_1 + c_2 - m_1 \omega_1^2) / c_2; \\ \alpha_{22} &= c_2 / (c_2 - m_2 \omega_2^2).\end{aligned}$$

Общее решение получим в виде:

$$\begin{aligned}x_1 &= A_{11} \cdot \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A_{12} \cdot \sin(\omega_2 t + \varphi_2); \\ x_2 &= A_{11} \cdot \alpha_{21} \cdot \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A_{12} \cdot \alpha_{22} \cdot \sin(\omega_2 t + \varphi_2).\end{aligned}\quad (2.69)$$

Неизвестные значения амплитуд и начальных фаз определяются из начальных условий.

Следует заметить, что общие решения (2.65) и (2.69) имеют только теоретическое значение, т.к. при динамических расчетах не используются.

2.4.2. Двухмассовые консервативные системы с внешним гармоническим возбуждением

Исследуем классическую консервативную динамическую систему цепного вида, на которую действует гармоническая сила (рис.2.25)

Рассматриваемая система широко используется в технике для динамического гашения колебаний.

Основная масса m_1 , установленная на упругом элементе с коэффициентом жесткости c_1 , подвергается вынужденным колебаниям, которые вызываются гармонической возбуждающей силой $P = P_0 \cdot \sin k t$.

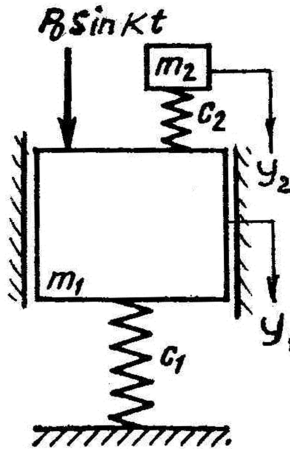


Рис. 2.25. Расчетная схема консервативной системы цепного вида с внешним силовым возмущением

Для гашения колебаний массы m_1 к ней с помощью упругой связи с коэффициентом жесткости c_2 крепится простейший виброгаситель (антивибратор) массой m_2 .

Исследуем условия эффективного гашения колебаний.

Составим расчетные уравнения динамической модели по той же схеме, которая использовалась при формировании уравнений (2.66):

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{y}_1 + c_1 y_1 - c_2 (y_2 - y_1) &= P_0 \cdot \sin kt \\ m_2 \ddot{y}_2 + c_2 (y_2 - y_1) &= 0. \end{aligned} \quad (2.70)$$

Установившиеся вынужденные колебания с частотой возмущающей силы описываются решением

$$y_1 = A_1 \cdot \sin kt; \quad y_2 = A_2 \cdot \sin kt.$$

Подставляя это решение в (2.70), получаем два уравнения с двумя неизвестными амплитудами A_1 и A_2 :

$$\begin{aligned} (\tilde{n}_1 + \tilde{n}_2 - m_1 k^2) A_1 - c_2 A_2 &= P_0 \\ -\tilde{n}_2 A_1 + (\tilde{n}_2 - m_2 k^2) A_2 &= 0. \end{aligned} \quad (2.71)$$

Отсюда

$$A_1 = \frac{P_0}{\Delta} (\tilde{n}_2 - m_2 k^2); \quad A_2 = \frac{P_0}{\Delta} c_2, \quad (2.72)$$

где $\Delta = (c_1 + c_2 - m_1 k^2)(c_2 - m_2 k^2) - c_2^2$.



Если параметры антивибратора подобрать так, что

$$c_2 - m_2 k^2 = 0,$$

то получим $A_1 = 0$. Это значит, что при собственной частоте антивибратора, равной частоте возмущающей силы, масса m_1 не будет колебаться.

Частоту возмущающей силы

$$k = \sqrt{\frac{c_2}{m_2}} \quad (2.73)$$

называют антирезонансной.

Для гашения крутильных колебаний в двухмассовой консервативной системе с приведенными моментами инерции I_1 , I_2 и приведенным коэффициентом жесткости $c_{\text{пр}}$ аналогично устанавливается дополнительный груз с моментом инерции I_{Γ} на отдельном валу с коэффициентом жесткости c_{Γ} (рис.2.26).

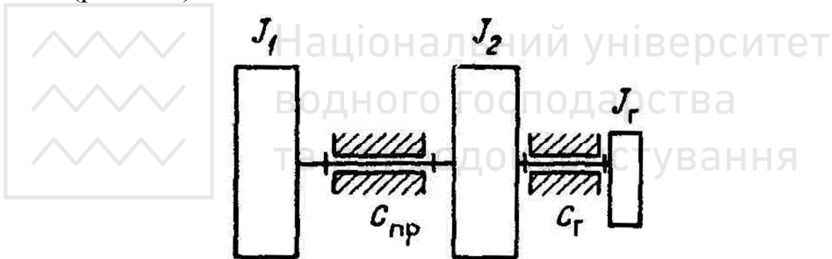


Рис. 2.26. Расчетная схема антивибратора для гашения крутильных колебаний

Величины I_{Γ} и c_{Γ} обычно подбираются по известной априори частоте возбуждающей силы k по условию

$$\sqrt{\frac{\tilde{n}_{\Gamma}}{I_{\Gamma}}} = k. \quad (2.74)$$

Виброгашение по рассмотренному принципу эффективно только для одной фиксированной частоты возмущающей силы. Даже сравнительно небольшое отступление от частоты, определяемой соотношениями (2.73) и (2.74), может привести к увеличению амплитуд колебаний.

2.4.3. Определение основной частоты колебаний многомассовых динамических систем

При анализе многомассовых динамических систем в первую очередь вычисляют самую низкую (и самую опасную из-за возможности возникновения резонансного режима) собственную частоту колебаний. Эту частоту называют основной. Обычно для этих целей используют метод Донкерлея. Суть метода состоит в следующем.

Положим, что в некоторой точке i динамической системы балочного вида находится сосредоточенная масса m_i (рис.2.27, а).

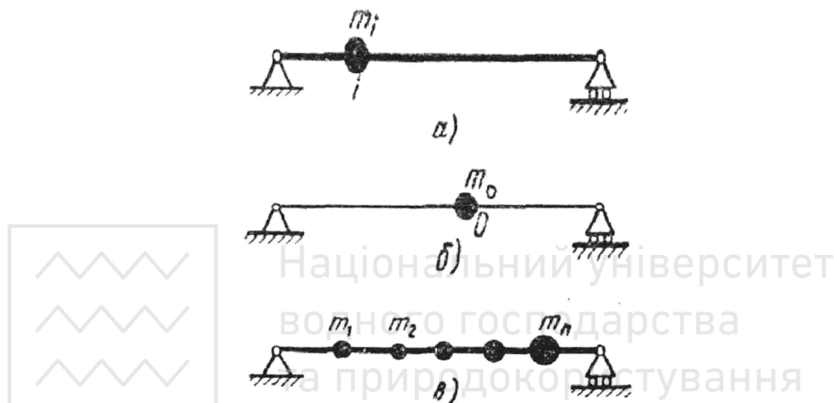


Рис. 2.27. Расчетная схема для определения основной частоты колебаний

Собственная частота такой одномассовой системы равна

$$\omega_i = \sqrt{\frac{c_i}{m_i}}, \quad (2.75)$$

где c_i – линейная жесткость системы.

В некоторой другой точке 0 , избранной за точку приведения (рис.2.27, б), поместим массу m_0 с таким расчетом, чтобы собственная частота новой системы

$$\omega = \sqrt{\frac{c_0}{m_0}} \quad (c_0 - \text{приведенная жесткость}) \quad (2.76)$$

оказалась равной частоте ω_i .

Приравняв соотношения (2.75) и (2.76), найдем приведенную массу



$$m_0 = \frac{c_0}{c_i} m_i. \quad (2.77)$$

Таким образом, перенос массы m_i в точку 0 не вызывает изменения частоты, если приводимую массу умножить на коэффициент приведения $\frac{c_0}{c_i}$.

Распространим этот прием на случай, когда динамическая система содержит несколько масс m_1, m_2, \dots, m_n (рис.2.27, в). Приведение каждой из этих масс должно выполняться с соответствующим коэффициентом, как это видно из формулы (2.77).

Общая приведенная масса составит

$$m_0 = \frac{c_0}{c_1} m_1 + \frac{c_0}{c_2} m_2 + \dots + \frac{c_0}{c_n} m_n. \quad (2.78)$$

Разделив обе части равенства (2.78) на c_0 и учитывая, что $\frac{m_0}{c_0} = \frac{1}{\omega^2}$, получим приближенную формулу Донкерлея для определения основной частоты колебаний приведенной системы:

$$\frac{1}{\omega^2} = \frac{1}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_2^2} + \dots + \frac{1}{\omega_n^2}. \quad (2.79)$$

Эта формула, будучи весьма простой, в большинстве случаев дает достаточную точность.

Таким образом, для определения собственной частоты ω многомассовой динамической системы необходимо лишь предварительно вычислить т.н. «элементарные» частоты $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$, каждая из которых относится к «частной» системе с одной степенью свободы. При этом не требуется выбирать и фиксировать точку приведения.

Формула (2.79) всегда дает несколько заниженное значение для частоты ω ; это можно считать положительным моментом.

В заключение приведем две теоремы, доказанные Р.Граммелем:

1. Собственные частоты многомассовой балочной динамической системы имеют верхнюю границу ω_{max} , равную удвоенной наибольшей «элементарной» частоте $(\omega_i)_{max}$, т.е. $\omega_{max} = 2(\omega_i)_{max}$.
2. Если к многомассовой балочной динамической системе добавить новую массу, ближайшую к одной из опор, то самая низкая (основная) частота колебаний ω_{min} уменьшится, а самая высокая частота ω_{max} увеличится.



$$\ddot{y} = -A_B^* \cdot k^2 \cdot \cos(kt + \varphi).$$

3. ДИНАМИКА ТРАНСМИССИЙ МАШИН

3.1. Особенности формирования расчетной схемы

Трансмиссии машин представляют собой различные передаточные устройства от двигателя к исполнительному механизму. Они включают упругие элементы (валы, соединительные муфты, зубчатые зацепления, цепные и ременные передачи и др.), моментами инерции которых при расчетах обычно пренебрегают, а также дискретные массы (маховики, шкивы, роторы, ходовые колеса и др.).

Диссипативные связи ввиду их малого влияния на динамические характеристики трансмиссий учитываются только в особых случаях.

Рассмотрим цепную динамическую систему трансмиссии, состоящую из n масс с моментами инерции I_1, I_2, \dots, I_n , передаточными отношениями i_1, i_2, \dots, i_{n-1} , коэффициентами жесткости на кручение упругих элементов c_1, c_2, \dots, c_{n-1} , (рис.3.1.). На эту систему действуют внешние крутящие моменты M_1, M_2, \dots, M_n . Массы зубчатых колес и силы трения в кинематических парах не учитываем.

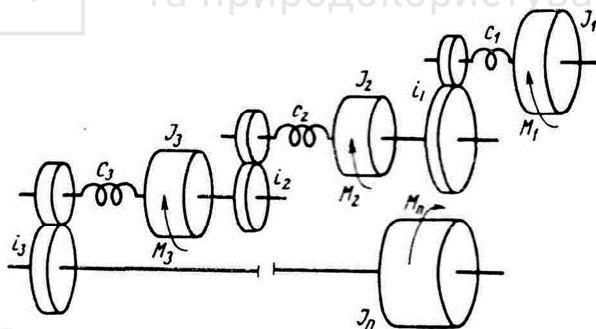


Рис. 3.1. Динамическая система трансмиссии

В качестве расчетной схемы примем «эталонную» двухмассовую схему, представленную на рис.2.8.

Приведение внешних сил, моментов инерции и жесткостей динамической системы будем осуществлять к крайним массам – 1-й и n -ой. Причем n -ю массу оставляем неизменной, а все остальные характеристики приводим к 1-й массе.



Для внешних нагрузок получим:

$$\begin{aligned} M_{\text{ГПР}} &= M_1 + M_2 \cdot i_1 + M_3 \cdot i_1 \cdot i_2 + \dots + M_{n-1} \cdot i_1 \cdot i_2 \dots i_{n-2}; \\ M_{2\text{ГПР}} &= M_n. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Для моментов инерции имеем:

$$\begin{aligned} I_{\text{ГПР}} &= I_1 + I_2 \cdot i_1^2 + I_3 \cdot i_1^2 \cdot i_2^2 + \dots + I_{n-1} \cdot i_1^2 \cdot i_2^2 \dots i_{n-2}^2; \\ I_{2\text{ГПР}} &= I_n. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Будем считать, что внешние нагрузки воспринимаются крайними массами. Поэтому для определения приведенной жесткости динамической системы достаточно использовать первую массу, на которую действует крутящий момент M_1 .

Для упрощения расчетов прямые передаточные отношения между упругими элементами и звеном приведения будем обозначать через u , опуская промежуточные преобразования (например, $u_1 = i_1$; $u_2 = i_1 \cdot i_2$; $u_{n-1} = i_1 i_2, \dots i_{n-1}$).

Под действием момента сил M_1 деформация первого упругого элемента будет равна $\varphi_1 = \frac{\dot{I}_1}{\tilde{n}_1}$. На второе упругое звено будет действовать момент $M_1 u_1$, и его собственная деформация выразится так: $\varphi_2 = \frac{\dot{I}_1 \cdot u_1}{\tilde{n}_2}$. Если эту деформацию привести к первому звену, полу-

чим $\varphi_{21} = \frac{\dot{I}_1 \cdot u_1^2}{\tilde{n}_2}$. Аналогично для третьего упругого звена

$$\varphi_3 = \frac{\dot{I}_1 \cdot u_2}{\tilde{n}_3} \text{ и } \varphi_{31} = \frac{\dot{I}_1 \cdot u_2^2}{\tilde{n}_3} \text{ и т.д.}$$

Полная деформация кинематической цепи, приведенная к первому звену, равна

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_{21} + \varphi_{31} + \dots + \varphi_{n1},$$

или

$$\varphi = \frac{\dot{I}_1}{\tilde{n}_1} + \frac{\dot{I}_1 u_1^2}{\tilde{n}_2} + \frac{\dot{I}_1 u_2^2}{\tilde{n}_3} + \dots + \frac{\dot{I}_1 u_{n-1}^2}{\tilde{n}_n}.$$

Приведенная жесткость определится таким образом:



$$c_{\text{пр}} = \frac{M_1}{\varphi} = \frac{1}{\frac{1}{\tilde{n}_1} + \frac{u_1^2}{\tilde{n}_2} + \frac{u_2^2}{\tilde{n}_3} + \dots + \frac{u_{n-1}^2}{\tilde{n}_n}}. \quad (3.3)$$

Если перейти на коэффициенты податливости, то

$$e_{\text{пр}} = e_1 + u_1^2 e_2 + u_2^2 e_3 + \dots + u_{n-1}^2 e_n. \quad (3.4)$$

В результате операций приведения получим следующую упрощенную расчетную схему, показанную на рис.3.2.

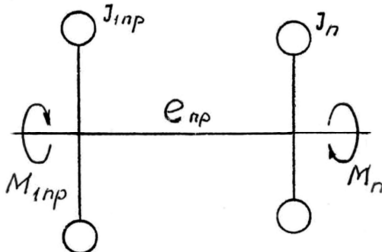


Рис. 3.2. Расчетная схема динамической системы трансмиссии

Приведение параметров зубчатых зацеплений в расчетных схемах трансмиссий обычно осуществляется таким образом.

Допустим, что между двумя массами с моментами инерции I_1 и I_2 и упругими элементами (валами) с коэффициентами жесткости на кручение c_1 и c_2 расположено зубчатое зацепление с передаточным отношением i_{12} (рис.3.3, а).

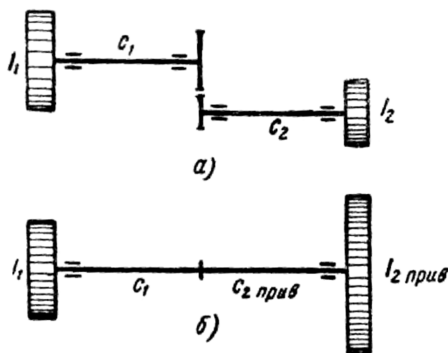


Рис. 3.3. Приведение зубчатых зацеплений:
а – реальная кинематическая схема; б – расчетная схема



На основании условия неизменности максимальных значений кинетической и потенциальной энергий в кинематической и расчетной схемах последняя может быть представлена без зубчатых колес (рис.3.3, б). При этом момент инерции I_2 и жесткость прилегающего упругого элемента c_2 следует увеличить в i_{12}^2 раза:

$$\begin{aligned} I_{2\text{ПР}} &= i_{12}^2 I_2 ; \\ c_{2\text{ПР}} &= i_{12}^2 \cdot c_2 . \end{aligned} \quad (3.5)$$

3.2. Типовые технологические нагрузки трансмиссий

При проведении динамических расчетов трансмиссий необходимо знать закон изменения внешнего сопротивления, действующего на исполнительный орган машины. Такое сопротивление обычно задается в виде вращающего момента в функции от времени $M_c(t)$.

Типичные режимы наброса технологической нагрузки представлены на рис.3.4.

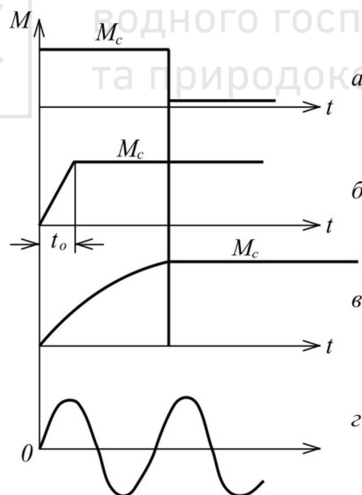


Рис. 3.4. Графики нарастания технологических нагрузок:
а – мгновенное нагружение; б – прямолинейный закон;
в – экспоненциальный закон; г – гармоничный закон

Рассмотренные режимы нагружения трансмиссий описываются такими аналитическими зависимостями:



$$M_c(t) = M_c = \text{const} ;$$

- прямолинейный закон

$$M_c(t) = M_c \frac{t}{t_0} \quad \text{при } 0 \leq t \leq t_0 ;$$

- экспоненциальный закон

$$M_c(t) = M_c \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{A}\right) \right] \quad \text{при } 0 \leq t < \infty ;$$

- гармонический закон

$$M_c(t) = M_c \cdot \sin kt \quad \text{при } 0 \leq t \leq t_0 = \pi / 2k .$$

Параметры t_0, A, k характеризуют интенсивность нарастания нагрузки.

Наброс нагрузки представляет собой режим перегрузки определенной интенсивности, который в ряде случаев может привести к перенапряжению звеньев рабочей машины. Как правило, наибольшие нагрузки возникают при мгновенном набросе нагрузки.

Перегрузки той или иной интенсивности возникают также при сбросе нагрузки. Графики их сброса аналогичны рассмотренным выше.



3.3. Оценка динамических нагрузок

Максимальное напряженное состояние в динамических системах трансмиссий наблюдается во время переходных процессов при стопорении исполнительных органов, пуске и торможении машин, когда происходит значительное изменение кинематических параметров (например, угловой скорости) и возникают угловые деформации конструктивных элементов. Продолжительность переходного процесса зависит от величин моментов инерции ведущих и ведомых масс, движущего момента M и момента сопротивления M_c .

Переходные процесс в машинах в принципе являются желательными, т.к. при них происходит целенаправленное нарушение баланса между приходом и расходом энергии, в результате чего динамические нагрузки оказываются значительно ниже, чем при импульсных и ударных процессах.

В общем случае при запуске машины в работу можно выделить два характерных переходных процесса в динамических системах трансмиссий: 1. разгон системы от начала движения ведущих масс двигателя до



начала движения ведомых масс; 2. движение всей системы до установившегося колебательного процесса.

Рассмотрим динамику нагружения трансмиссий для указанных случаев. Соответствующие двухмассовые расчетные схемы представлены на рис.3.5.

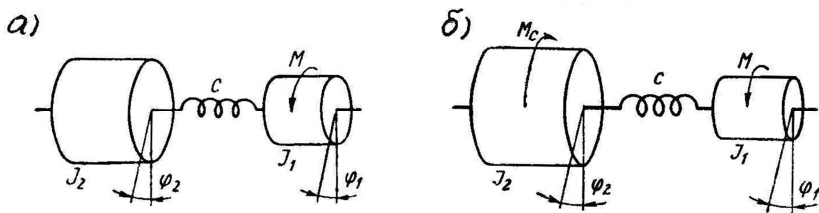


Рис. 3.5. Расчетные схемы динамических систем трансмиссии:
а – при запуске машины; б – при нормальном режиме эксплуатации

Принятые обозначения: I_1 и I_2 – приведенные моменты инерции ведущей и ведомой масс; c – приведенный коэффициент жесткости на кручение упругого звена; M – движущий момент, создаваемый двигателем; M_c – момент статического сопротивления; φ_1 и φ_2 – угловые координаты масс.

Используем схему Лагранжа и для первой расчетной схемы (рис.3.5, а) получим такое уравнение движения:

$$I_1 \cdot \ddot{\varphi}_1 + c \varphi_1 = M. \quad (3.6)$$

Общее решение имеет вид

$$\varphi_1 = A \cdot \sin \omega_1 t + B \cdot \cos \omega_1 t + \frac{M}{c},$$

где $\omega_1 = \sqrt{c / I_1}$ – собственная частота колебаний ведущей массы.

Принимаем начальные условия:

$$\text{при } t = 0 \quad \varphi_1 = 0; \quad \dot{\varphi}_1 = 0.$$

Тогда окончательно получим

$$\varphi_1 = \frac{\dot{I}}{\ddot{n}} (1 - \cos \omega_1 t). \quad (3.7)$$

Скорость деформации упругого звена

$$\dot{\varphi}_1 = \frac{\dot{I}}{\ddot{n}} \omega_1 \cdot \sin \omega_1 t.$$

Конец первого переходного процесса характеризуется равенством момента упругих сил системы и момента внешнего сопротивления:



$$\varphi_1 - c = M_c, \text{ или } M(1 - \cos \omega_1 \tau) = M_c, \quad (3.8)$$

где τ – время начала движения всей системы.

Из (3.8) находим

$$\tau = \sqrt{\frac{I_1}{c}} \arccos \frac{M - M_c}{M}.$$

В таком случае

$$\begin{aligned} (\dot{\varphi}_1)_{t=\tau} &= \frac{M}{c} \sqrt{\frac{c}{I_1}} \sin \left[\arccos \frac{M - M_c}{M} \right] = \\ &= \frac{M}{c} \sqrt{\frac{c}{I_1}} \sin \left[\arcsin \sqrt{1 - \left(\frac{M - M_c}{M} \right)^2} \right] = \\ &= \frac{M}{c} \sqrt{\frac{c}{I_1}} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{M - M_c}{M} \right)^2} = \sqrt{\frac{M_c(2M - M_c)}{I_1 c}}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Исследуем второй этап движения динамической системы (рис.3.5, б), когда происходит ее нагружение после разгона. Используем схему Лагранжа и найдем кинетическую и потенциальную энергии системы:

$$T = \frac{I_1}{2} \dot{\varphi}_1^2 + \frac{I_2}{2} \dot{\varphi}_2^2; \quad \Pi = \frac{(\varphi_1 - \varphi_2)^2}{2}.$$

Внешними нагрузками являются M и M_c .

Получим систему расчетных уравнений:

$$\begin{aligned} I_1 \cdot \ddot{\varphi}_1 + (\varphi_1 - \varphi_2)c &= M \\ I_2 \cdot \ddot{\varphi}_2 - (\varphi_1 - \varphi_2)c &= -M_c. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Обозначим деформацию упругого звена через $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ и сведем уравнения (3.10) к одному расчетному уравнению. Для этого первое уравнение системы (3.10) умножим на I_2 , а второе на I_1 и вычтем из первого второе. После преобразований получим:

$$\ddot{\varphi} + \frac{\tilde{n}(I_1 + I_2)}{I_1 \cdot I_2} \varphi = \frac{MI_2 + M_c I_1}{I_1 \cdot I_2}. \quad (3.11)$$

Общее решение находим в виде:

$$\varphi = A \cdot \sin \omega_2 t + B \cdot \cos \omega_2 t + \frac{MI_2 + M_c I_1}{c(I_1 + I_2)},$$



где $\omega_2 = \sqrt{\frac{\tilde{n}(I_1 + I_2)}{I_1 \cdot I_2}}$ – собственная частота колебаний двухмассовой системы.

Примем такие начальные условия:

$$\text{при } t = 0 \quad \varphi = \frac{M_c}{c}; \quad \dot{\varphi} = (\dot{\varphi}_1)_{t=\tau} = \sqrt{\frac{M_c(2M - M_c)}{c I_1}}.$$

Окончательно получаем:

$$\begin{aligned} \varphi = & \frac{1}{\tilde{n}} \sqrt{\frac{M_c(2M - M_c) I_2}{I_1 + I_2}} \sin \omega_2 t - \\ & - \frac{(M - M_c) I_2}{c(I_1 + I_2)} \cos \omega_2 t + \frac{M I_2 + M_c I_1}{c(I_1 + I_2)}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Общий закон изменения нагрузки имеет вид

$$M = \varphi \cdot c. \quad (3.13)$$

Для определения M_{\max} дифференцируем выражение (3.13) по времени, приравняв нулю, находим выражение для $\operatorname{tg} \omega_2 t$, соответствующего M_{\max} , наконец, после ряда преобразований получаем искомое выражение:

$$\begin{aligned} M_{\max} = & \frac{(M - M_c) I_2}{I_1 + I_2} + \\ & + \sqrt{\frac{I_2}{I_1 + I_2} \left[M_c(2M - M_c) + \frac{(M - M_c)^2 I_2}{I_1 + I_2} \right]} + M_c. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Эта формула и ее модификации получены рядом ученых. Динамическая составляющая равенства (3.14) зависит от отношений $\frac{I_2}{I_1 + I_2}$ и $\frac{M}{M_c}$

и колеблется в широких пределах (от $0,2 M_c$ до $2 M_c$ и более).

Для снижения динамических нагрузок в трансмиссиях машин обычно идут по пути увеличения момента инерции вращающихся масс двигателя I_1 за счет установки дополнительных маховиков.

Другим путем снижения динамических нагрузок на втором этапе является линейное изменение движущего момента, например, в функции



$$M = M_c \frac{\varphi_2}{\varphi_c}, \quad (3.15)$$

где φ_c – угол, соответствующий установившейся статической нагрузке M_c . Расчетная схема для этого случая представлена на рис.3.6.

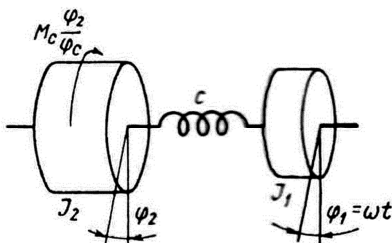


Рис. 3.6. Расчетная схема динамической системы трансмиссии при линейном изменении движущего усилия в функции угла поворота

Полагаем, что скорость вращения вала двигателя после разгона сохраняется постоянной. Тогда расчетные уравнения примут такой вид:

$$\begin{aligned} I_1 \cdot \ddot{\varphi}_1 &= 0 \\ I_2 \cdot \ddot{\varphi}_2 - (\varphi_1 - \varphi_2)c &= -M_c \frac{\varphi_2}{\varphi_c}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Из первого уравнения получаем $\varphi_1 = \omega t$, где ω – установившаяся угловая скорость вращения ведущей массы.

Подставим значение φ_1 во второе уравнение и преобразуем его:

$$\ddot{\varphi}_2 + \frac{\tilde{n} + \frac{M_c}{\varphi_c}}{I_2} \varphi_2 = \frac{\omega c}{I_2} t. \quad (3.17)$$

Найдем общее решение уравнения (3.17):

$$\varphi_2 = A \cdot \sin \sqrt{\frac{c \cdot \varphi_c + M_c}{I_2 \cdot \varphi_c}} t + B \cdot \cos \sqrt{\frac{c \cdot \varphi_c + M_c}{I_2 \cdot \varphi_c}} t + \frac{\omega \cdot \varphi_c \cdot c}{c \cdot \varphi_c + M_c} t. \quad (3.18)$$

Примем такие начальные условия:

при $t = 0$ $\varphi_2 = 0$; $\dot{\varphi}_2 = \omega$.



Тогда, учитывая, что $B = 0$, имеем:

$$\varphi_2 = \frac{\omega M_c}{c \varphi_c + M_c} \sqrt{\frac{I_2 \cdot \varphi_c}{c \cdot \varphi_c + M_c}} \sin \sqrt{\frac{c \cdot \varphi_c + M_c}{I_2 \cdot \varphi_c}} t + \frac{\omega \cdot \varphi_c \cdot c \cdot t}{c \cdot \varphi_c + M_c}. \quad (3.19)$$

Нагрузка в упругом звене составляет: $M_{12} = (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot c = \varphi \cdot c$ (рис.3.7).

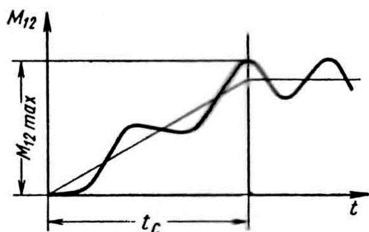


Рис. 3.7. График функции $M_{12} = f(t)$ при линейном изменении движущего усилия

Максимальное значение нагрузки M_{12} достигается при $t = t_c$, где t_c – время, соответствующее условию $\varphi_2 = \varphi_c$:

$$M_{12 \max} = \varphi_{\max} \cdot c = \frac{\omega M_c}{\varphi_c} \sqrt{\frac{I_2 \cdot \varphi_c}{c \cdot \varphi_c + M_c}} + M_c. \quad (3.20)$$

Иногда процесс нагружения трансмиссии (после разгона динамической системы) происходит по линейному закону в функции времени (рис.3.8).

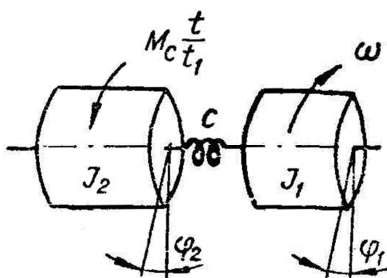


Рис. 3.8. Расчетная схема динамической системы трансмиссии при линейном изменении движущего усилия в функции времени

Максимальная нагрузка на упругое звено в этом случае определяется из выражения



$$M_{12\max} = M_c \left(\frac{2}{t_c} \sqrt{\frac{I_2}{c}} + 1 \right), \quad (3.21)$$

где t_c – время, соответствующее окончанию нарастания нагрузки.

Пример 3.1. Исследовать процесс нагружения трансмиссионного вала приводного механизма, представленного на рис.3.9.

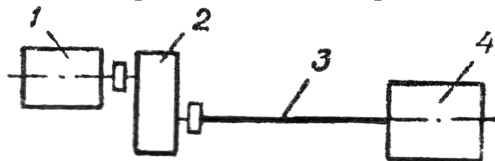


Рис. 3.9. Схема приводного механизма: 1 – двигатель;
2 – редуктор; 3 – трансмиссионный вал;
4 – исполнительный элемент

Исходные данные: пусковой момент двигателя $M = 50 \text{ Н}\cdot\text{м}$; момент статического сопротивления ведомого элемента $M_c = 400 \text{ Н}\cdot\text{м}$; передаточное число редуктора $i = 20$; коэффициент полезного действия редуктора $\eta = 0,8$.

Решение. Исследуем влияние моментов инерции ведущей и ведомой масс на величину максимальной нагрузки трансмиссионного вала при запуске механизма в работу.

Произведем приведение моментов сил к трансмиссионному валу:

- приведенный момент двигателя будет равен
- приведенный статический момент не изменяется

$$M_{1\text{пр}} = M \cdot i \cdot \eta = 800 \text{ Н}\cdot\text{м};$$

$$M_{2\text{пр}} = M_c.$$

Допустим, что приведенные моменты инерции ведущей I_1 и ведомой I_2 масс изменяются в диапазонах:

$$I_1 = 2000 \cdots 6000 \text{ кг}\cdot\text{м}^2;$$

$$I_2 = 4000 \cdots 12000 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$$

Для определения максимального значения крутящего момента M_{\max} в трансмиссионном валу воспользуемся соотношением (3.14) и определим, как изменяются функции $M_{\max} = f(I_2)$ при $I_1 = 4000 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ и $M_{\max} = f(I_2)$ при $I_2 = 8000 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$.

Результаты расчетов представлены на рис.3.10.

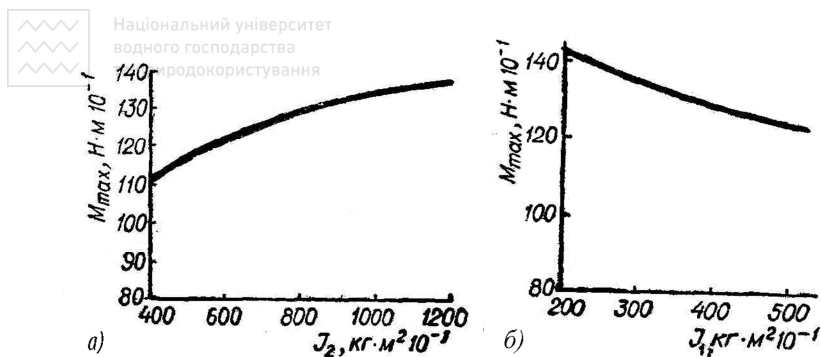


Рис. 3.10. Графики функций: а – $M_{\max} = f(J_2)$; б – $M_{\max} = f(J_1)$

Из полученных графиков следует, что с увеличением J_2 пусковая нагрузка трансмиссионного вала растет, а с увеличением J_1 – падает. Это подтверждает целесообразность увеличения при соответствующих условиях маховых масс двигателя.

3.4. Критические состояния валов трансмиссий

Если расстояние между опорами вала трансмиссии значительно больше его диаметра, то при его вращении наблюдаются изгибные колебания. Амплитуды таких колебаний зависят от угловой скорости вращения и при определенных критических значениях возрастают настолько сильно, что могут вызвать поломку вала. При этом критическое состояние не может быть устранено даже самой тщательной балансировкой.

Рассмотрим вал на двух жестких опорах с диском посередине, который вращается с угловой скоростью ω (рис.3.11). Масса диска равна m ; массой вала пренебрегаем.

Предположим, что вал получил некоторое отклонение и центр тяжести диска стал двигаться по окружности радиуса y . При этом на диск действуют центробежная сила Q_{δ} и сила упругости F :

$$\begin{aligned} Q_{\delta} &= \omega^2 m y; \\ F &= \frac{1}{e} y, \end{aligned} \quad (3.22)$$

где e – коэффициент податливости, т.е. прогиб среднего сечения вала

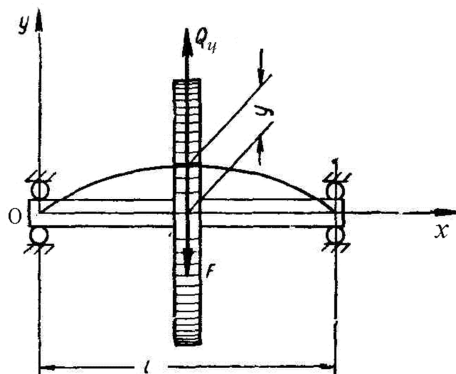


Рис. 3.11. Расчетная схема для определения критического состояния трансмиссионного вала

Если $Q_{ц} < F$, то после отклонения вал снова вернется в первоначальное устойчивое прямолинейное положение.

В момент равновесия, когда $Q_{ц} = F$, прогибы могут безгранично возрастать. Такое состояние называется критическим. Соответствующая угловая скорость ω_k также называется критической. Она определяется по формуле

$$\omega_k = \frac{1}{\sqrt{e \cdot m}}. \quad (3.23)$$

Критическую угловую скорость вращения вала можно рассматривать как собственную частоту колебаний динамической системы «вал – диск», а состояние вала при $\omega = \omega_k$ считать резонансным.

Вал, работающий при $\omega < \omega_k$, принято называть жестким, а при $\omega > \omega_k$ – гибким.

Для рабочих режимов не рекомендуется использовать зону изменения угловой скорости, равной $0,7 \omega_k < \omega < 1,3 \omega_k$.

Во всех случаях желательно работать с жесткими трансмиссионными валами.

Работа вала с одним диском при $\omega > \omega_k$ возможна, но она требует специальных демпфирующих опор для прохождения через критические



обороты и успокоения вибрации в закритической области.

Если на трансмиссионном валу имеется несколько дискретных масс, то динамическая система имеет несколько степеней свободы, и тогда должно быть несколько критических (резонансных) угловых скоростей. Наименьшая из этих скоростей называется первой резонансной.

Во многих случаях при определении критических состояний трансмиссионного вала учитывают упругость опор (рис.3.12).

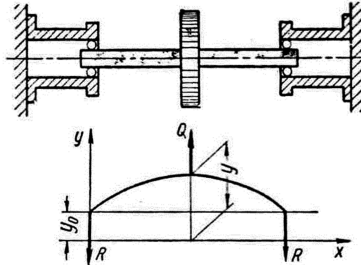


Рис. 3.12. Конструктивная и расчетная схемы трансмиссионного вала на упругих опорах

Предположим, что опоры обладают одинаковой жесткостью. Центр тяжести диска перемещается по окружности радиуса y , а центры опор – по окружности радиуса y_0 . Обозначим через e_0 – коэффициент податливости опор (м/Н). В таком случае

$$y_0 = e_0 \cdot R, \quad (3.24)$$

где R – реакции опор.

В критическом состоянии система центробежных сил Q_k и сил упругости F_k находятся в равновесном состоянии независимо от масштаба отклонения, т.е. $Q_k = F_k$.

Имеем

$$Q_k = \omega_{ky}^2 \cdot m \cdot y; \quad (3.25)$$

$$F_k = \frac{1}{e} (y - y_0), \quad (3.26)$$

где ω_{ky} – критическая угловая скорость при наличии упругих опор.

Так как $R = \frac{1}{2} F_k$, то из (3.24) с учетом (3.26) находим

$$y_0 = \frac{e_0}{2e + e_0} y. \quad (3.27)$$



Тогда

$$F_k = \frac{1}{e} \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{2} \frac{e_0}{e}} \right). \quad (3.28)$$

Из соотношения $Q_k = F_k$ получаем

$$\omega_{ky} = \frac{1}{\sqrt{e \cdot m}} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{2} \frac{e_0}{e}}} = \omega_k \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{2} \frac{e_0}{e}}}, \quad (3.29)$$

где ω_k – критическая угловая скорость для жестких опор.

Одни и те же опоры можно рассматривать как жесткие или как податливые в зависимости от назначения трансмиссионного вала. В реальных конструкциях податливость опор составляет $e_0 = (5 \dots 20) \cdot 10^{-3}$ м/Н. Податливость подшипников качения для валов диаметром 60...80 мм $e_0 = (1 \dots 3) \cdot 10^{-3}$ м/Н.



4. ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ПОДЪЕМНО-ТРАНСПОРТНЫХ МАШИН

4.1. Оценка динамических нагрузок в грузозахватных устройствах кранов

При нормальной эксплуатации башенных, стреловых, мостовых и др. кранов наибольшие динамические нагрузки возникают в грузозахватных устройствах при подъеме и торможении груза. Различают два варианта подъема груз: «с веса» и «с подхватом».

В первом варианте предполагается, что груз уже приподнят и статическая нагрузка, действующая на грузозахватное устройство, равна весу груза Q_{Γ} . Динамическая нагрузка $P_{\text{д}}$ возникает при разгоне груза вверх и при торможении опускающегося груза при включении тормоза.

Во втором варианте нагружения предполагается, что груз лежит на каком-либо основании, канаты провисают и, следовательно, в этот момент нагрузка на грузозахватное устройство равна нулю. Динамическая нагрузка возникает в период, когда к подъемному канату, движущемуся с номинальной скоростью, мгновенно прикладывается нагрузка от веса груза.

Рассмотрим оба варианта.

4.1.1. Определение динамических нагрузок при подъеме груза «с веса»

На рис. 4.1. приведены расчетные схемы динамических систем стрелового и мостового кранов при подъеме груза «с веса».

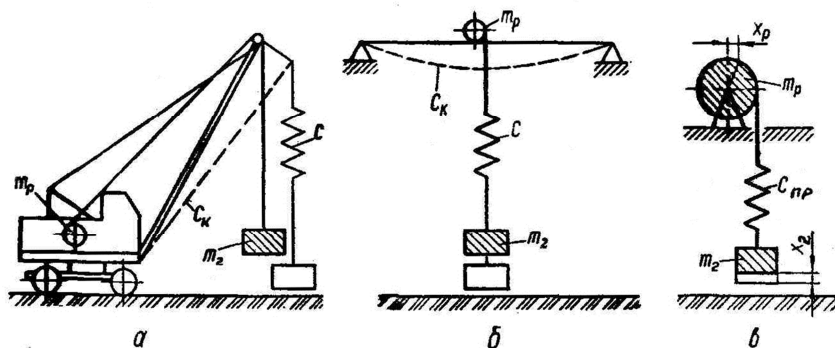


Рис. 4.1. Расчетные схемы динамических систем кранов при подъеме груза «с веса»: а, б – соответственно для стрелового и мостового кранов; в – общая расчетная схема



Обозначим через c_k – коэффициент жесткости конструкции крана, а через c – коэффициент жесткости канатов. Найдем приведенную жесткость

$$\tilde{n}_{i\partial} = \frac{\tilde{n}_{\dot{E}} \cdot \tilde{n}}{\tilde{n}_{\dot{E}} + \tilde{n}}. \quad (4.1)$$

На общей расчетной схеме имеются две приведенные массы, отнесенные к ободу барабана: m_p – масса ротора двигателя и массы элементов механизма подъема; m_Γ – масса груза, пропорциональная квадрату отношения числа ветвей грузового полиспаста, навиваемых на барабан, к общему числу ветвей, на которых висит груз. Указанные массы соединены упругой связью с коэффициентом жесткости $c_{пр}$.

Перемещения массы m_p обозначим через x_p , а массы m_Γ – через x_Γ .

Для составления уравнений движения используем схему Лагранжа. Найдем кинетическую и потенциальную энергии двухмассовой динамической системы:

$$\begin{aligned} \dot{O} &= (\dot{o}_D / 2) \delta_D^2 + (\dot{o}_A / 2) \delta_A^2; \\ \dot{I} &= \tilde{n}_{iD} [(\dot{o}_D - \dot{o}_A)^2 / 2]. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Для массы m_p движущей силой являются вес груза Q_Γ и избыточная сила двигателя $P_{изб.}$, которую считаем постоянной; для массы m_Γ – вес груза Q_Γ , действующий в том же направлении, что и сила инерции груза при подъеме.

Расчетные уравнения движения при разгоне груза вверх имеют вид:

$$\begin{aligned} \dot{o}_p \cdot \ddot{o}_p + \tilde{n}_{пр} (\ddot{o}_p - \ddot{o}_\Gamma) &= Q_\Gamma + D_{\dot{e}\dot{c}\dot{a}}; \\ \dot{o}_\Gamma \cdot \ddot{o}_\Gamma - \tilde{n}_{пр} (\ddot{o}_p - \ddot{o}_\Gamma) &= -Q_\Gamma. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Найдя из первого уравнения \ddot{x}_p , а из второго – \ddot{x}_Γ , вычтя из первого выражения второе и положив, что $x = x_p - x_\Gamma$, получим линейное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\ddot{o} + \tilde{n}_{пр} \cdot q \ddot{o} = Q_\Gamma \cdot q + \frac{D_{\dot{e}\dot{c}\dot{a}}}{\dot{o}_p}, \quad (4.4)$$

где $q = \frac{m_p + m_\Gamma}{m_p \cdot m_\Gamma}$.

Уравнение (4.4) аналогично модели (2.38). Его решение ищем в виде (2.39). При нулевых начальных условиях оно имеет такое выражение:



$$\tilde{\delta} = \frac{Q_{\Gamma} \cdot q}{\omega^2} + \frac{D_{\text{эсá}}}{\dot{\delta}_p \cdot \omega^2} (1 - \cos \omega t), \quad (4.5)$$

где $\omega = \sqrt{c_{\text{ПР}} q}$ – собственная частота колебаний динамической системы.

Окончательно находим

$$\tilde{\delta} = \frac{Q_{\Gamma}}{\tilde{n}_{\text{ПР}}} + \frac{D_{\text{эсá}}}{\tilde{n}_{\text{ПР}} \cdot \dot{\delta}_p \cdot q} (1 - \cos \sqrt{c_{\text{ПР}} q} t). \quad (4.6)$$

Выражение для x_{max} при $\tilde{n} \cos \sqrt{c_{\text{ПР}} q} t = -1$ принимает вид

$$\tilde{\delta}_{\text{max}} = \frac{Q_{\Gamma}}{\tilde{n}_{\text{ПР}}} + \frac{2D_{\text{эсá}}}{\tilde{n}_{\text{ПР}} \cdot \dot{\delta}_p \cdot q}. \quad (4.7)$$

Тогда максимальное динамическое усилие в упругом звене составит

$$P_{\text{д max}} = c_{\text{ПР}} x_{\text{max}} = Q_{\Gamma} + \frac{2D_{\text{эсá}}}{\dot{\delta}_p \cdot q}. \quad (4.8)$$

Так как избыточное усилие $P_{\text{изб}} = \varphi Q_{\Gamma}$, где φ – коэффициент пропорциональности, то расчетная зависимость для $P_{\text{д max}}$ запишется таким образом

$$D_{\text{д max}} = Q_{\Gamma} \{1 + 2\varphi [m_{\Gamma} / (m_{\Gamma} + m_p)]\}. \quad (4.9)$$

Найдем коэффициент динамичности

$$\beta = D_{\text{д max}} / Q_{\Gamma} = 1 + 2\varphi [m_{\Gamma} / (m_{\Gamma} + m_p)]. \quad (4.10)$$

При торможении опускающегося груза $P_{\text{д max}}$ определяют по формуле (4.8), но под $P_{\text{изб}}$ понимают разность между тормозным усилием, приведенным к грузу, и весом груза.

Так как момент, создаваемый тормозом, обычно меньше максимального момента, создаваемого двигателем, динамическое усилие при торможении опускающегося груза не превышает динамического усилия при подъеме груза «с веса».

Пример 4.1. Определить коэффициент динамичности грузозахватного устройства, подвешенного на четырех ветвях каната, при подъеме груза массой $M = 10$ т (весом $Q_{\Gamma} = 98,1$ кН) «с веса» со скоростью $v_{\Gamma} = 30$ м/мин. Вес грузозахватного устройства составляет 5% от веса груза. Диаметр барабана $D_{\text{б}} = 500$ мм; кратность одинарного полиспаста $u_{\text{П}} = 4$.

Частота вращения ротора двигателя $n_{\text{д}} = 572$ мин⁻¹; его момент инерции $I_{\text{р}} = 5,25$ кг·м².



Решение. Определим натяжение ветви каната, навиваемой на барабан при КПД $\eta = 0,95$:

$$S_B = 1,05 Q_T / (4 \eta) = 1,05 \cdot 98100 / (4 \cdot 0,95) \cong 27000 \text{ Н.}$$

Необходимая скорость каната составляет

$$v_k = v_r \cdot u_n = 30 \cdot 4 = 120 \text{ м/мин,}$$

частота вращения барабана

$$n_B = v_k / (\pi \cdot D_B) = 120 / (3,14 \cdot 0,5) = 76,5 \text{ мин}^{-1}.$$

Тогда мощность двигателя при КПД $\eta_D = 0,9$ будет равна

$$N = S_B \cdot v_k / \eta_D = 60 \text{ кВт.}$$

Найдем передаточное число механизма

$$u_M = n_D / n_B = 572 / 76,5 = 7,5$$

и вычислим момент инерции ротора двигателя и других вращающихся частей механизма, учитываемых коэффициентом 1,25, приведенных к валу барабана:

$$I_M = 1,25 I_p \cdot u_M^2 = 1,25 \cdot 5,25 \cdot 7,5^2 = 370 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Затем определим массу m_p , приведенную к периферии барабана радиусом $R_B = 0,25 \text{ м}$:

$$m_p = I_M / R_A^2 = 370 / 0,25^2 = 5900 \text{ кг,}$$

а также массу груза m_T :

$$m_T = M / u_n^2 = 10000 / 4^2 = 625 \text{ кг.}$$

Наконец, найдем коэффициент динамичности при $\varphi = 1,8$:

$$\beta = 1 + 2\varphi [\partial_r / (\partial_r + \partial_p)] = 1 + 2 \cdot 1,8 \cdot 0,096 \approx 1,35.$$

При увеличении скорости подъема β резко возрастает.

4.1.2. Определение динамических нагрузок при подъеме груза «с подхватом»

При нагружении по рассматриваемому варианту кран моделируется одномассовой динамической системой (рис.4.2). При этом пренебрегают жесткостью канатов и учитывают только упругость конструкции крана (коэффициент жесткости c_k), а массы крана m_k и груза m_T рассматривают как одну массу $m = m_k + m_T$

При принятом допущении можно считать, что подъем груза осуществляется следующим образом.

На первом этапе, после включения двигателя, происходит выбор слабины каната, на втором – возникает упругая деформация всех элементов конструкции. Второй этап продолжается до тех пор, пока усилие на грузозахватное устройство, возрастая от нуля, не станет равным

весу груза. Лишь после этого, на третьем этапе, начинается подъем груза с постоянной скоростью v .

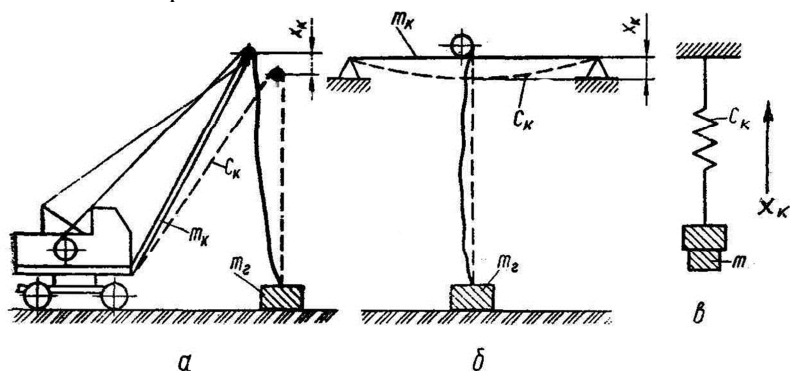


Рис. 4.2. Расчетные схемы динамических систем кранов при подъеме груза «с подхватом»: а, б – соответственно для стрелового и мостового кранов; в – общая расчетная схема

Для общей расчетной схемы (рис.4.2, в) уравнение движения имеет вид:

$$\partial \ddot{\delta}_e + \tilde{n}_e \dot{\delta}_e = Q, \quad (4.11)$$

где $Q = m g$.

Решение уравнения представляется следующим выражением:

$$\delta_e = A \cdot \sin \omega t + B \cdot \cos \omega t + \frac{Q}{c_e}, \quad (4.12)$$

где $\omega = \sqrt{\tilde{n}_e / \partial}$ – собственная частота колебаний динамической системы.

Принимаем такие начальные условия: при $t = 0$; $\delta_e = v$; $Q = 0$.

Окончательно находим

$$\delta_e = \frac{v}{\omega} \sin \omega t + Q / c_e. \quad (4.13)$$

Динамическая нагрузка, действующая на грузозахватное устройство, будет равна

$$D_A = \partial \ddot{\delta}_e = -\partial v \omega \sin \omega t. \quad (4.14)$$

Ее максимальное значение при $\sin \omega t = -1$:

$$P_{Д \max} = m v \omega. \quad (4.15)$$



Полная нагрузка, действующая на грузозахватное устройство, составит

$$D_{\text{полн.}} = Q + D_{\dot{A} \max} = Q \left[1 + (v/g) \cdot \sqrt{c_K / (m_K + m_{\Gamma})} \right]. \quad (4.16)$$

Тогда коэффициент динамичности будет равен

$$\beta = 1 + (v/g) \cdot \sqrt{c_K / (m_K + m_{\Gamma})}. \quad (4.17)$$

Применение формулы (4.17) для различных кранов имеет свои особенности.

Так, для башенных кранов она преобразуется к такому виду

$$\beta \approx 1 + 0,64 v / T, \quad (4.18)$$

где $T = 2 \pi / \omega$ – период свободных колебаний груженого крана (с); ω – собственная частота колебаний крана (с⁻¹); v – скорость подъема груза (м/мин).

Величина T (с) определяется в зависимости от параметров башенного крана по табл.4.1.

Таблица 4.1

Наибольший вылет крюка, м	Высота расположения опорного шарнира стрелы над поверхностью земли, м									
	до 20				свыше 20 до 40				свыше 40 до 60	свыше 60 до 80
	Грузоподъемность крана при наибольшем вылете, м									
	до 5	свыше 5 до 10	свыше 10 до 20	свыше 20 до 30	до 5	свыше 5 до 10	свыше 10 до 20	свыше 20 до 30	до 10	до 10
10	1,5	1,6	1,7	1,9	1,7	1,9	2,2	2,5	2,7	2,9
20	1,6	1,7	1,9	2,2	1,9	2,2	2,5	2,7	2,9	3,1
30	1,7	1,9	2,2	2,5	2,2	2,5	2,7	2,9	3,1	3,4
40	1,9	2,2	2,5	2,7	2,5	2,7	2,9	3,1	3,4	3,7
50	2,2	2,5	2,7	2,9	2,7	2,9	3,1	3,4	3,7	4,0
60	2,5	2,7	2,9	3,1	2,9	3,1	3,4	3,7	4,0	4,5
Примечание. Период свободных колебаний ненагруженного крана должен приниматься равным 2/3 периода свободных колебаний груженого крана.										

Результаты расчетов по формуле (4.18) показывают, что $\beta_{\max} = 1,42$.

Для мостовых кранов грузоподъемностью $Q = 5 \dots 50$ т имеем

$$\beta = 1 + A v, \quad (4.19)$$

где $A = 6,85 / \sqrt{(1 + 0,28L/Q)L}$; L – пролет крана, м; v – скорость подъема груза, м/с.



Пролет крана L , м	Грузоподъемность крана Q , т				
	5	12,5	20	32	50
10,5	1,68	1,90	1,96	2,00	2,05
19,5	1,08	1,30	1,38	1,42	1,50
31,5	0,76	0,96	1,03	1,08	1,13

Пример 4.2. Определить коэффициент динамичности грузозахватного устройства мостового крана, который имеет такие параметры: грузоподъемность $Q = 20$ т, пролет $L = 19,5$ м; скорость подъема $v = 0,265$ м/с

Решение. Определяем значение параметра A :

$$A = 6,85 / \sqrt{(1 + 0,28 \cdot 19,5 / 20)19,5} = 1,38$$

Тогда

$$\beta = 1 + 1,38 \cdot 0,265 = 1,37$$

4.2. Динамические нагрузки в крановой тележке при раскачивании груза на канатах

При пуске и торможении крановой тележки происходят маятниковые колебания груза на гибком подвесе. Это существенно влияет на динамическую устойчивость крана и создает дополнительные динамические нагрузки на его силовые элементы. Для расчета таких нагрузок используются две принципиальные схемы, представленные на рис.4.3.

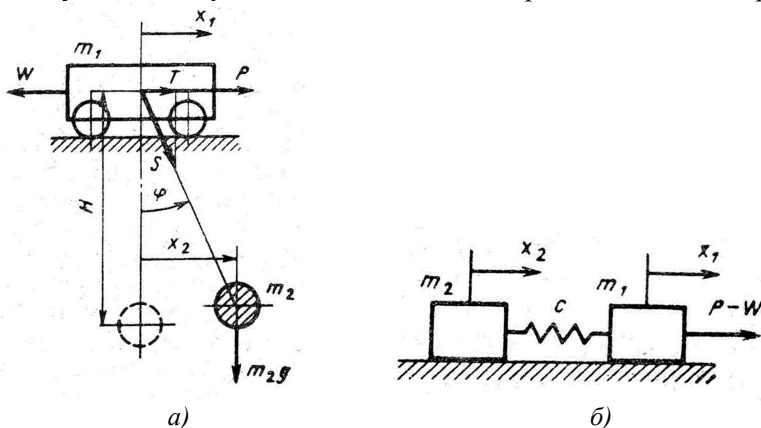


Рис. 4.3. Схемы двухмассовой динамической системы крановой тележки с грузом на гибком подвесе: а – расчетная; б – аналоговая



На расчетной схеме приняты такие обозначения: m_1 – масса крановой тележки, приведенная к ее поступательному перемещению; m_2 – масса груза; $G = m_2g$ – вес груза; P – суммарное тяговое или тормозное усилие приводных колес тележки; W – сила сопротивления передвижению тележки; x_1 и x_2 – горизонтальные перемещения масс m_1 и m_2 ; S – суммарное натяжение канатов; φ – угол отклонения канатов от вертикали; T – горизонтальная составляющая усилия в канатах; H – длина отвеса канатов.

Так как максимальные отклонения канатов от вертикали не превышают $10...12^\circ$, принимаем $\sin\varphi \approx \varphi$; $\cos\varphi \approx 1,0$. С учетом этого допущения $x_2 = x_1 + H\varphi$; $S = G$, а горизонтальная составляющая натяжения канатов

$$T = S \cdot \varphi = m_2g(x_2 - x_1) / H.$$

Уравнения движения тележки и груза имеют вид:

$$\dot{\partial}_1 \ddot{x}_1 + \frac{m_2g}{H}(x_1 - x_2) = P - W; \quad (4.20)$$

$$\dot{\partial}_2 \ddot{x}_2 + \frac{m_2g}{H}(x_2 - x_1) = 0.$$

Аналогом динамической системы на рис.4.3, а является двухмассовая система, приведенная на рис.4.3, б. Движение этой системы описывается уравнениями:

$$\begin{aligned} \dot{\partial}_1 \ddot{x}_1 + \tilde{n}(x_1 - x_2) &= P - W; \\ \dot{\partial}_2 \ddot{x}_2 + \tilde{n}(x_2 - x_1) &= 0. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Сопоставляя системы уравнений (4.20) и (4.21), можно заметить, что они идентичны, если принять $c = m_2g / H$. Следовательно, динамическое воздействие колеблющегося груза на тележку аналогично воздействию груза, прикрепленного при помощи пружины с жесткостью $c = G / H$. Эта аналогия позволяет наглядно оценить влияние раскачивающегося груза на движение тележки. Так, при $x_2 > x_1$ отклоняющийся груз увеличивает силы сопротивления передвижению тележки.

Рассмотрим движение тележки при ее разгоне. Так как период маятниковых колебаний груза больше или сопоставим со временем разгона тележки, будем принимать, что движущее усилие приводного двигателя постоянно. Тогда систему уравнений (4.21) можно свести к одному уравнению второго порядка относительно разности смещения масс $x = x_1 - x_2$. Для этого умножаем первое уравнение системы (4.21) на m_2 , а второе на m_1 и вычитаем второе уравнение из первого. В результате имеем



$$\ddot{\delta} + \omega^2 \delta = (P - W) / m_1, \quad (4.22)$$

где x – горизонтальное смещение груза относительно движущейся точки подвеса;

$$\omega = \sqrt{\frac{(m_1 + m_2)g}{m_1 H}} - \text{собственная частота колебаний груза в период разгона.}$$

При нулевых начальных условиях решение уравнения имеет вид

$$x = A (1 - \cos \omega t), \quad (4.23)$$

где $A = (P - W) \cdot H / [g(m_1 + m_2)]$ – амплитуда относительных колебаний груза.

В таком случае динамическое усилие, действующее на крановую тележку, будет равно

$$T_D = -x \cdot c = -A \cdot c (1 - \cos \omega t). \quad (4.24)$$

Усилие T_D изменяется от 0 до $-2Ac$ и никогда не становится положительным. Это означает, что оно направлено в ту же сторону, что и сила сопротивления W .

Что касается расчета динамической устойчивости кранов в процессе подъема, поворота и передвижения с грузом на гибкой подвеске, то эта задача окончательно еще не решена и соответствующие научно обоснованные критерии пока не найдены.

Применение на кранах ограничителей грузоподъемности не решает проблемы безопасной эксплуатации кранов полностью, т.к. это не влияет на предотвращение раскачивания груза, являющееся одной из основных причин аварий.

Пример 4.3. Определить динамическую нагрузку на тележку мостового крана при раскачивании груза на канатах. Для расчета принять следующие параметры: грузоподъемность крана $Q = 20$ т; приведенная масса крановой тележки $m_1 = 22,24$ кН·с²/м; сопротивление передвижению тележки $W = 40$ кН; суммарное тяговое усилие $P = 100$ кН; длина подвески груза $H = 16$ м.

Решение. Определим условную жесткость динамической системы

$$c = G / H = 200 / 16 = 12,5 \text{ кН/м}.$$

Учитывая, что $Q = m_2 g$, получим

$$\begin{aligned} \ddot{x}_{\max} &= -2Ac - \frac{2(P - W)H \cdot c}{m_1 g + Q} = \\ &= \frac{-2(100 - 40) \cdot 16 \cdot 12,5}{22,24 \cdot 9,8 + 200} = -57,42 \text{ м/с}^2. \end{aligned}$$



4.3. Ударные нагрузки при наезде крана на концевые упоры (буфера)

При исправных тормозах и системы концевой автоматической защиты кранов установка буферов позволяет расширить рабочий ход крана, а при возможной неисправности тормозов и системы защиты – повысить надежность и безопасность работы кранов.

При расчете динамических нагрузок полагаем, что удар крана воспринимается двумя буферами, расположенными на двух его сторонах; потенциальная энергия деформации крановой металлоконструкции при ударе о буфера мала по сравнению с кинетической энергией крана; за время удара подъемные канаты отклоняются от вертикали на такой малый угол, что массу груза при расчете не учитываем.

Начальная скорость v_0 крана при ударе согласно правилам Госгортехнадзора принимается равной $v_0 \leq 0,5$ м/с.

При расчете полной осадки буферов исходим из равенства начальной кинетической энергии крана T_H и работы сил сопротивления перемещению крана при ударе A_C . При этом

$$\begin{aligned} \dot{O}_H &= \dot{O}_П \cdot v_0^2 / 2; \\ A_C &= n \int_0^S P_A dy + (W + P_T) S, \end{aligned} \quad (4.25)$$

где $m_П$ – масса крана и его механизма передвижения, приведенная к перемещению крана; $n = 2$ – число буферов; P_B – сила сопротивления буфера; y – текущая осадка буфера; S – полная осадка буфера; W – сила сопротивления передвижению крана; P_T – тормозное усилие механизма передвижения крана.

Положим, что концевые упоры снабжены пружинными буферами. В таком случае

$$P_B = c y, \quad (4.26)$$

где c – жесткость пружин одного буфера.

Приравняв выражения для T_H и A , получим алгебраическое уравнение относительно S :

$$n c S^2 + 2(W + P_T) S - 2T_H = 0. \quad (4.27)$$

Максимальное динамическое усилие на одном буфере $P_{B \max}$ и максимальное замедление крана a_{\max} имеют такой вид:



$$P_{\text{Б max}} = c \cdot S; \quad \dot{a}_{\text{max}} = \frac{2D_{\text{А max}} + W + P_{\text{T}}}{m_{\text{П}}}. \quad (4.28)$$

4.4. Динамика механизма подъема стреловых кранов-манипуляторов

Кран-манипулятор с электроприводом состоит из стрелы, на конце которой закреплен захватный орган с грузом, оголовок и колонны (рис.4.4). В случае установки крана на жестком основании колонна отсутствует. Типоразмерный ряд кранов-манипуляторов составляет по грузоподъемности 1000; 2500; 3200 Н.

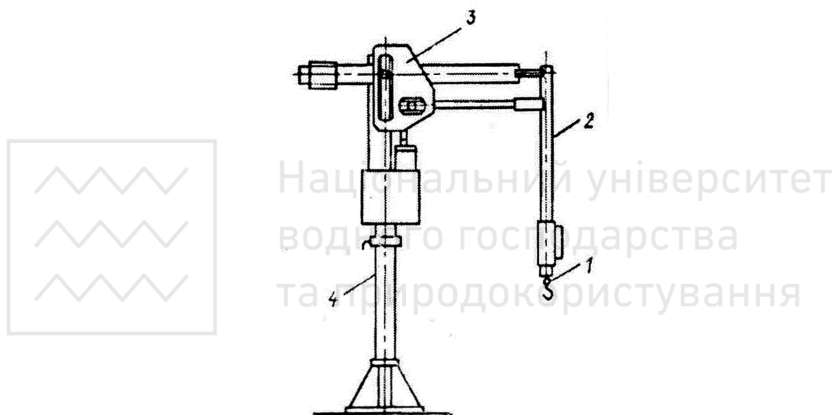


Рис. 4.4. Стреловой кран-манипулятор: 1 – захватный орган; 2 – стрела; 3 – оголовок; 4 – колонна (стойка)

На динамику переходных процессов стреловых кранов-манипуляторов влияют особенности их конструкции и рабочих режимов: выполнение стрелы в виде пантографа, устанавливаемого опорными шарнирами в вертикальных и горизонтальных направляющих оголовка крана, высокие (до 0,5 м/с) скорости перемещения груза механизмом подъема, жесткая связь груза с конструкцией стрелы.

Рассмотрим двухмассовую расчетную схему, когда кран-манипулятор установлен на жестком основании (рис.4.5).

Масса m_1 груза, захвата и приведенная к грузу масса звеньев стрелы и масса m_2 вращающихся частей привода, приведенная к вертикальным направляющим оголовка, соединены между собой и с опорой упругими

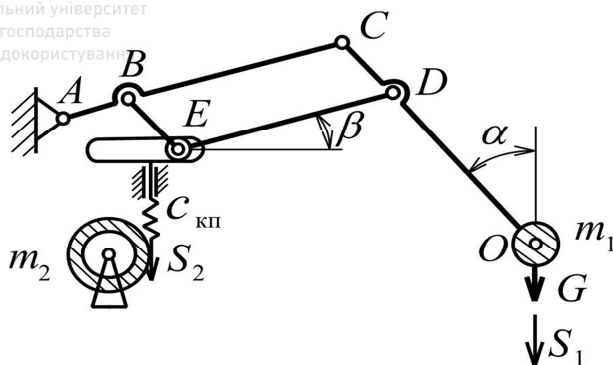


Рис. 4.5. Расчетная схема динамической системы крана-манипулятора

связями. Для этих масс введем обобщенные координаты — соответственно S_1 и S_2 .

Учитывая свободную установку шарнира E в горизонтальных направляющих, будем считать, что масса m_1 колеблется в вертикальном направлении, совпадающем с линией действия силы G .

Приведенная к точке 0 жесткость крана-манипулятора определяется из выражения

$$\frac{1}{\tilde{n}_{\text{ПП}}} = \frac{(\lambda + 1)}{\tilde{n}_{\text{к П}}} + \frac{1}{\tilde{n}_{\tilde{n}}} \quad (4.29)$$

где $c_{к.п}$ – приведенная к выходному звену жесткость кинематической передачи привода подъема; c_c – вертикальная жесткость стрелы; $\lambda = BC / AB = DO / CD$ – постоянная пантографа.

Используя схему Лагранжа, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} m_1 \cdot \ddot{S}_1 + c_{\text{TP}}[S_1 - S_2(\lambda + 1)] &= G; \\ m_2 \cdot \ddot{S}_2 - c_{\text{TP}}(\lambda + 1)[S_1 - S_2(\lambda + 1)] &= P(t), \end{aligned} \quad (4.30)$$

где $P(t)$ – приведенная к выходному звену движущая сила привода подъема.

Полагая, что $y = S_1 - S_2 (\lambda + 1)$, преобразуем систему к одному уравнению

$$\ddot{\phi} + \omega^2 \phi = G/m_1 - (\lambda + 1)P(t)/m_2, \quad (4.31)$$

где $\omega = \sqrt{c_{\text{ПР}} \left[1/m_1 + (\lambda + 1)^2 / m_2 \right]}$ – собственная частота колебаний динамической системы.



Общим решением уравнения (4.31) будет такое

$$y = a \sin(\omega t - \varphi) + y^*, \quad (4.32)$$

где a и φ – амплитуда и начальная фаза колебаний, определяемые из начальных условий; y^* – частотное решение уравнения, определяемое законом изменения $P(t)$.

Схема решения подробно рассмотрена в п.2.3.2.

Динамическое усилие, воспринимаемое конструкцией стрелы составляет

$$P_d(t) = c_{пр} \cdot y. \quad (4.33)$$

В отношении вида функции $P(t)$ можно отметить следующее. Во-первых, она описывает изменение избыточной силы привода. Во-вторых, вследствие особенностей короткозамкнутого асинхронного двигателя в период пуска и торможения $P(t) = \text{const}$. В-третьих, после того, как скорость массы m_2 достигнет номинального значения, $P(t) = 0$ и начинаются свободные колебания динамической системы.

4.5. Динамические нагрузки в упругой системе погрузчика перекидного типа

Положим, что возмущающая функция микропрофиля грунтовой поверхности аппроксимируется единичным импульсом в виде отдельной неровности (впадины), при преодолении которой возникают динамические нагрузки в упругой системе погрузчика, имеющие характер ударных. После такого удара подрессоренная часть машины начинает совершать вертикальные колебания, а стрела с грузом – круговые колебания относительно точки крепления стрелы к раме. Соответствующая расчетная схема приведена на рис.4.6.

На схеме приняты такие обозначения: φ_1 и y_2 – обобщенные координаты; m_1 , c_1 , I_1 – приведенные к точке 1 масса, угловая жесткость и момент инерции стрелы, гидроцилиндров и груза; c_2 – жесткость рессо́ры; m_2 – приведенная к точке 2 масса подрессоренной части погрузчика; α – угол установки стрелы.

Силы сопротивления F_2 , вызывающие затухание свободных колебаний, в основном обусловлены трением в подвеске

$$F_2 = 2hm_2\dot{y}_2,$$

где h – коэффициент демпфирования.

Используя схему Лагранжа, получим такую систему уравнений движения:

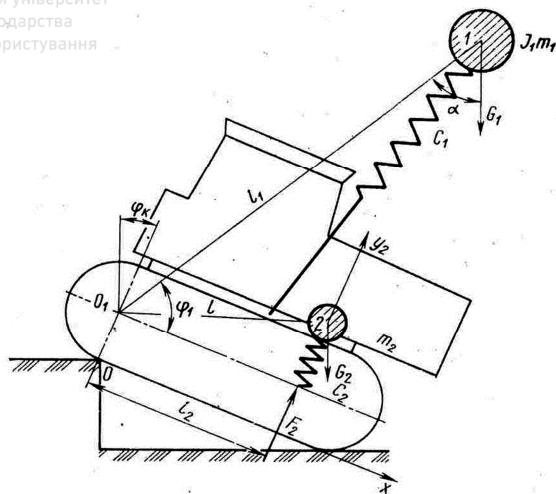


Рис. 4.6. Расчетная схема динамической системы погрузчика при наезде на глубокую впадину

$$I_1 \ddot{\varphi}_1 + \frac{c_1}{\ell_2} (\ell_2 \varphi_1 - y_2) = m_1 g \cdot \sin \alpha; \quad (4.34)$$

$$m_2 \ddot{y}_2 + 2hm_2 \dot{y}_2 - \frac{c_1}{\ell_2} (\ell_2 \varphi_1 - y_2) + c_2 y_2 = m_2 g \cos \varphi_K.$$

Для решения этих уравнений используются следующие начальные условия:

$$\text{при } t = 0 \quad y_2 = 0; \quad \dot{y}_2 = \omega_K \ell; \quad \varphi_1 = \frac{m_1 g \ell_1 \cdot \sin \alpha}{c_1}.$$

При жестком ударе, когда рессора при соударении полностью деформирована, динамическая система превращается в одномассовую ($y_2 = 0$). В этом случае колебание системы описывается первым уравнением системы (4.34).

Динамический расчет производился на ЭВМ по стандартной программе. В качестве базовой машины использовался трактор Т-130Г. при расчете приняты следующие исходные данные: $I_1 = 1335,7 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$; $c_1 = 29 \text{ МН/м}$; $c_2 = 4,6 \text{ МН/м}$; $m_1 = 1,98 \text{ т}$; $m_2 = 7,1 \text{ т}$; $\ell = 7,1 \text{ м}$; $\ell_2 = 1,72 \text{ м}$; $\alpha = 58^\circ$; скорость движения погрузчика для 1 – 4 передачи: 1,03; 1,43; 2,07; 2,85; м/с; расчетные значения ω_K – 0,93; 1,23; 1,74; 2,8 с^{-1} .



Динамические усилия в упругих звеньях определялись по формуле:

$$M_{1 \text{ дин}} = c_1 \varphi_1; \quad P_{2 \text{ дин}} = c_2 y_2. \quad (4.35)$$

Коэффициенты динамичности в рессоре вычислялись по соотношению:

$$\beta = \frac{\tilde{n}_2 \dot{o}_2}{g \cdot m_2}. \quad (4.36)$$

В зависимости от скорости движения погрузчика они изменялись в диапазоне от 1,2 до 1,4.

4.6. Динамические процессы в ленточных конвейерах

Динамические процессы в ленточных конвейерах происходят при пуске и торможении. Они характеризуются появлением динамических натяжений в конвейерной ленте и дополнительных нагрузок в элементах конвейера.

При пуске может возникнуть неустойчивая работа приводного барабана и его пробуксовка, которая сопровождается интенсивным изнашиванием футеровки барабана, его нагревом и резким снижением коэффициента сцепления.

При торможении в результате перераспределения натяжений в ленте может произойти потеря ее продольной устойчивости, образование значительных провесов или гофр, просыпей груза, а также пробуксовка барабана.

Таким образом, основной задачей расчета динамических процессов в ленточных конвейерах является определение результирующих натяжений как на приводном барабане, так и вдоль става конвейера с учетом динамических и статических составляющих. Это позволяет выбирать рациональные предварительные натяжения в ленте при пуске и торможении таким образом, чтобы исключить отмеченные выше явления.

Динамическая система конвейера (рис.4.7, а) представляет собой замкнутый контур конвейерной ленты, состоящий из двух ветвей – набегающей верхней и сбегающей нижней. В этом контуре с помощью грузового натяжного устройства, расположенного в головной части, создается предварительное статическое натяжение $S_{\text{ст}}$, равное натяжению при установившемся режиме работы.

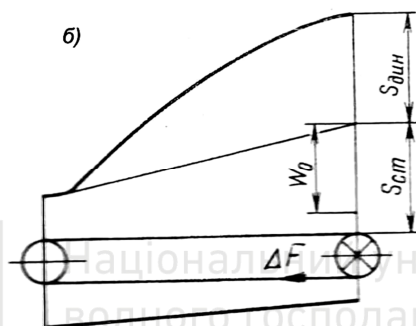
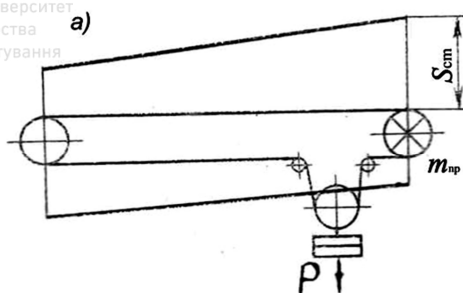


Рис. 4.7. Расчетная схема динамической системы ленточного конвейера (а) и диаграмма динамического натяжения в набегающей ветви при его пуске (б)

Одной из основных характеристик динамического процесса в конвейере является скорость распространения упругой волны в ленте c_B , которая зависит от модуля упругости материала ленты, его плотности, распределенной линейной нагрузки на ленте, ее натяжения, формы провисания между роlikоопорами. Наиболее достоверные значения c_B получают в результате практических измерений на реальных объектах.

При неустановившемся движении динамическое натяжение в ленте равно

$$S_d(t) = c_B \rho \cdot v(t), \quad (4.37)$$

где ρ – линейная плотность ветви ленты; $v(t)$ – переменная скорость ленты при нестационарном движении.

Примем такие обозначения: $m_{пр}$ – приведенная к ободу барабана масса привода; F_0 – усредненное пусковое усилие; W_0 – статическое сопротивление движению ленты; $\Delta F = (F_0 - W_0)$ – избыточное усилие привода.



Тогда дифференциальное уравнения движения привода при пуске конвейера примет вид:

$$\dot{\delta}_{\text{пр}} \cdot \dot{v} + c_B \rho v = \Delta F. \quad (4.38)$$

Это линейное уравнение 1-го порядка. Если положить, что при $t = 0$ $v = 0$, то после преобразований придем к такому решению:

$$v(t) = -\frac{\Delta F}{c_B \rho} \left[\exp\left(-\frac{c_B \rho}{m_{\text{пр}}} t\right) - 1 \right]. \quad (4.39)$$

По формуле (4.37) найдем динамическое усилие в набегающей ветви:

$$S_{\dot{A}HA}(t) = -\Delta F \left[\exp\left(-\frac{c_B \rho}{m_{\text{пр}}} t\right) - 1 \right]. \quad (4.40)$$

На сбегавшей ветви натяжение постоянное $S_{CB} = \text{const}$, а динамическая составляющая натяжения равна нулю.

Диаграмма изменения величины $S_{днб}$ вдоль става конвейера показана на рис.4.7, б. Ее максимальное значение достигается при $t = 2L / c_B$ (L – длина конвейера). В этот момент действует упругая волна отрицательного знака, отраженная от границы двух ветвей. В таком случае имеем:

$$S_{\dot{A}HA \max} = -\Delta F \left[\exp\left(-\frac{2L \cdot \rho}{m_{\text{пр}}}\right) - 1 \right]. \quad (4.41)$$

Пробуксовка на приводе отсутствует при выполнении условия

$$\frac{S_{\dot{N}OHA} + S_{\dot{A}HA \max}}{S_{\dot{N}A}} = \frac{1}{\hat{e}_T} \exp(\mu \cdot \alpha), \quad (4.42)$$

где $S_{ст.нб}$ – статическое натяжение набегающей ветви; μ – коэффициент сцепления ленты с барабаном; α – угол обхвата барабана лентой; κ_T – коэффициент запаса сил трения на приводном барабане ($\kappa_T = 1, 1 \dots 1, 15$).

Вес груза натяжного устройства, обеспечивающий беспробуксовочный пуск, определяется таким образом:

$$P = 2 S_{CB}, \quad (4.43)$$

$$\text{где } S_{CA} = \frac{(S_{COHA} + S_{\dot{A}HA \max}) \hat{e}_T}{\exp(\mu \alpha)}.$$

При тормозных режимах определяется минимальное натяжение в верхней ветви ленты, при котором не происходит потеря ее поперечной формы. Соответствующая расчетная схема приведена на рис.4.8.

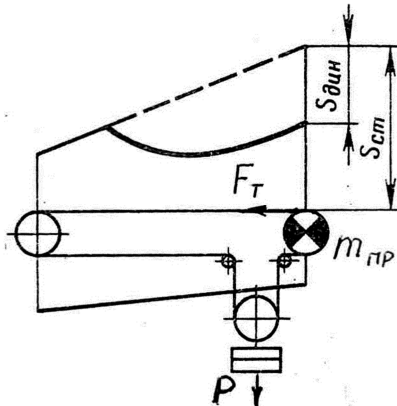


Рис. 4.8. Совмещенная расчетная схема динамической системы ленточного конвейера и диаграмма динамического натяжения в набегающей ветви при его торможении

Составим дифференциальное уравнение движения привода при торможении конвейера:

$$m_{пр} \frac{d(v_{\dot{O}\dot{N}\dot{O}} - v)}{dt} + c_B \rho (v_{\dot{O}\dot{N}\dot{O}} - v) = W_0 + F_T, \quad (4.44)$$

где $v_{уст}$ – установившаяся скорость конвейера перед торможением; $v(t)$ – переменная скорость ленты при торможении; F_T – приведенное к ободу барабана тормозное усилие.

Полагаем, что перед торможением конвейера привод отключается.

При условии, что если $t = 0$, то $v = v_{уст}$, получаем такое решение уравнения (4.44):

$$v(t) = v_{уст} + \frac{W_0 + F_T}{c_B \rho} \left[\exp\left(-\frac{c_B \rho}{m_{пр}} t\right) - 1 \right]. \quad (4.45)$$

Динамическое усилие на набегающей ветви имеет отрицательное значение

$$S_{\dot{A}\dot{H}\dot{A}}(t) = (W_0 + F_T) \left[\exp\left(-\frac{c_B \rho}{m_{пр}} t\right) - 1 \right]. \quad (4.46)$$



Характер изменения этого усилия вдоль става конвейера показан на рис.4.8.

Минимальное результирующее натяжение в набегающей ветви имеет место при $t = 2L / c_B$:

$$\begin{aligned} S_{\text{НБ min}} &= S_{\text{СТ.НБ}} + S_{\text{Д НБ max}} = \\ &= S_{\text{СТ.НБ}} + (W_0 + F_T) \left[\exp\left(-\frac{2L\rho}{m_{\text{ГР}}}\right) - 1 \right]. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Величина $S_{\text{НБ min}}$ не должна превышать допустимой величины

$$[S]_{\text{доп}} = (5 \dots 8) q L, \quad (4.48)$$

где q – суммарная распределенная линейная нагрузка на ленте; L – длина конвейера.

Обязательно должно выполняться условие отсутствия пробуксовки на приводе при торможении конвейера:

$$\frac{S_{\text{НО.ЛА}}}{S_{\text{ЛА min}}} = \frac{1}{\hat{e}_T} \exp(\mu \cdot \alpha). \quad (4.49)$$

Пример 4.4. Определить динамическое натяжение в ленте и возможность пробуксовки приводного барабана при пуске ленточного конвейера при следующих данных: $\Delta F = 15$ кН; $m_{\text{ГР}} = 5200$ кг; $L = 100$ м; $\rho = 20$ кг/м; $e^{\mu\alpha} = 7,0$; $\kappa_T = 1,1$. Из тягового статического расчета известно, что $S_{\text{СТ НБ}} = 14$ кН; $S_{\text{СБ}} = 3,4$ кН.

Решение. По формуле (4.41) находим максимальное динамическое натяжение в набегающей ветви:

$$S_{\text{А НБ max}} = -15 \left[\exp\left(-\frac{2 \cdot 100 \cdot 20}{5200}\right) - 1 \right] = 8,1 \text{ кН}.$$

Проверяем условие пробуксовки приводного барабана по соотношению (4.42):

$$\frac{14 + 8,1}{3,4} = \frac{7,0}{1,1}.$$

Имеем $6,5 = 6,36$, что вполне допустимо.

5. ДИНАМИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ В ЗЕМЛЕРОЙНЫХ МАШИНАХ

5.1. Общая постановка динамических задач



Одноковшовые и многоковшовые экскаваторы, рыхлители, а также землеройно-транспортные машины (ЗТМ), являются основными землеройными машинами в комплексах строительных и дорожных работ. При анализе динамических процессов этих машин решаются задачи, связанные с исследованием колебаний и динамических нагрузок в элементах конструкций, которые предопределяют режимы нагружения. Обычно динамические задачи сводятся к определению максимальных нагрузок, возникающих при стопорении рабочих органов или движителей при встрече с непреодолимым препятствием, а также при нестационарных режимах разгона и торможения механизмов привода.

У ЗТМ есть и своя специфическая проблема. По технологии их применения не менее 60% рабочего времени машины находятся в транспортном режиме. При этом должна обеспечиваться возможность движения на максимальной скорости. Однако это вызывает большие вертикальные колебания машин, приводящие к усталостному разрушению основных механизмов и металлоконструкций, а также к повышению утомляемости машинистов-операторов.

Для решения указанной проблемы используются методы статистической динамики, позволяющие формировать стохастические модели динамических систем ЗТМ и на их основе находить оптимальные параметры подрессорирования. В п.8 рассматриваются такие модели для некоторых ЗТМ.

5.2. Одноковшовые экскаваторы

5.2.1. Особенности динамического расчета

В связи с широким использованием в одноковшовых экскаваторах гидравлического и электрического привода основных механизмов их динамические системы значительно упростились в механической части, но усложнились в части гидро-и электромеханических трансмиссий. Расчет таких систем представляет определенные трудности вследствие недостаточной теоретической проработки этой проблемы.

Дополнительные задачи в области динамики гидравлических экскаваторов возникают при использовании рабочего оборудования ударного, виброударного или вибрационного действия. В этом случае необходимо рассматривать не только взаимодействие ударного или вибрационного процессов рабочего органа со средой, но и одновременно оценивать степень передачи колебательных воздействий на элементы кон-

5.2.2. Динамические нагрузки при разгоне и торможении механизма поворота

Механизм поворота одноковшового экскаватора работает при частых включениях реверсивного устройства. Поэтому возможно существенное увеличение динамических нагрузок за счет наличия зазоров в кинематических парах. Соответствующая расчетная схема приведена на рис. 5.1.

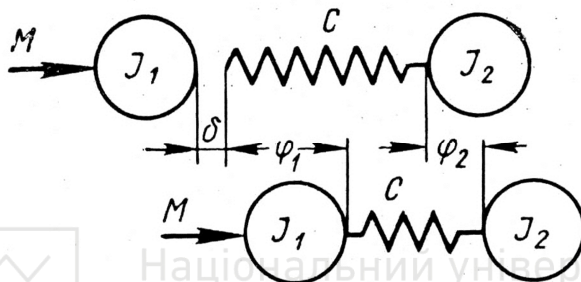


Рис. 5.1. Расчетная схема двухмассовой динамической системы механизма поворота

Рассмотрим разгон динамической системы при постоянном движущем усилии $M = M_{max}$; внешнее сопротивление ввиду его малости не учитываем.

Введем такие обозначения: I_1 – приведенный момент инерции вращающихся масс привода; I_2 – приведенный момент инерции поворотной платформы с груженным ковшом; c – приведенная угловая жесткость динамической системы; δ – суммарный зазор в кинематической цепи; φ_1 и φ_2 – угловые координаты.

Наибольшую деформацию упругого элемента $\Delta\varphi_{max} = (\varphi_1 - \varphi_2)$ и соответствующую ей максимальную динамическую нагрузку $M_{dmax} = c \cdot \Delta\varphi_{max}$ найдем энергетическим методом. Для этого используем выражения для максимальной потенциальной энергии упругого элемента Π_{max} и для максимальной работы A_{max} движущего усилия M_{max} на пути $(\delta + \Delta\varphi_{max})$:

$$\Pi_{max} = \frac{M_{max} \cdot \Delta\varphi_{max}}{2} = \frac{\tilde{n} \cdot \Delta\varphi_{max}^2}{2};$$



$$A_{\max} = \frac{I_2}{I_1 + I_2} M_{\max} (\delta + \Delta\varphi_{\max}) \quad (5.1)$$

В последнем соотношении выражение перед скобками представляет собой среднюю инерционную нагрузку.

Приравняв потенциальную энергию Π_{\max} и работу A_{\max} , найдем зависимость для $\Delta\varphi_{\max}$, умножим ее на c и окончательно получим после преобразований выражение для максимальной динамической нагрузки:

$$\dot{A}_{\max} = \frac{I_2}{I_1 + I_2} M_{\max} \left(1 + \sqrt{1 + 2 \frac{I_1 + I_2}{I_2} \cdot \frac{\tilde{n} \cdot \delta}{M_{\max}}} \right) \quad (5.2)$$

Второй член подкоренного выражения характеризует добавку к динамической нагрузке в результате наличия зазора δ . Этот член уменьшается по мере увеличения отношения I_1/I_2 .

Разделив $M_{\text{Дmax}}$ на среднюю инерционную нагрузку, получим зависимость для коэффициента динамичности упругого элемента:

$$\beta = 1 + \sqrt{1 + 2 \frac{I_1 + I_2}{I_2} \cdot \frac{\tilde{n} \cdot \delta}{M_{\max}}} \quad (5.3)$$

Таким образом, при движущем усилии $M = M_{\max} = \text{const}$ при наличии зазоров в кинематических парах механизма поворота всегда $\beta > 2$.

Если движущее усилие в механизме поворота нарастает по прямолинейному закону

$$M = \frac{t}{t_0} M_{\max} \quad (t_0 - \text{время нарастания нагрузки}),$$

то выражение для динамической нагрузки принимает такой вид

$$M_{\dot{A} \max} = \frac{I_2}{I_1 + I_2} M_{\max} \times \left[1 + \sqrt{1 + 2 \frac{I_1 + I_2}{I_2} \cdot \frac{\tilde{n}}{M_{\max}} \left(\delta - \frac{1}{24} \frac{M_{\max} \cdot t_0^2}{I_1} \right)} \right] \quad (5.4)$$

Если зазор выбирается первой массой за время t_0 , то в этом случае второй член подкоренного выражения уменьшается на 25% по сравнению с мгновенным загрузением, когда $M = M_{\max}$.

Время нарастания нагрузки обычно составляет $t_0 = 0,7 \dots 1,7$ с.

5.2.3. Динамические нагрузки при стопорении механизмов



экскаватора, находящегося в устойчивом положении

Рассматриваемый вариант возникновения динамических нагрузок возможен, например, при стопорении механизма напора, когда отсутствует движение стрелы вверх; механизма тяги обратной лопаты; механизма передвижения; механизма поворота при случайном упоре ковша в препятствие в процессе вращения платформы. Расчетная схема представляет собой крутильную динамическую систему с одной степенью свободы при заделке на одном конце (рис.5.2).

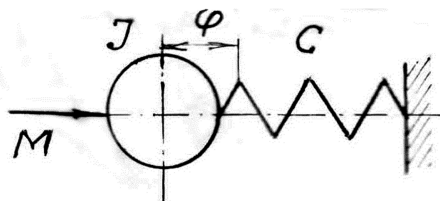


Рис. 5.2. Расчетная схема одномассовой динамической системы привода при стопорении

На схеме приняты такие обозначения: M – движущее усилие; I – приведенный момент инерции вращающихся масс привода; c – приведенная угловая жесткость механизмов, подвергнутых стопорению; φ – угловая координата.

Положим, что движущее усилие в процессе стопорения изменяется по линейному закону

$$M = M_0 + (M_{\max} - M_0) \frac{t}{t_{\text{ст}}}, \quad (5.5)$$

где $t_{\text{ст}}$ – время полного стопорения,

M_0 – предварительное усилие в упругом элементе.

Уравнение движения примет вид:

$$I \cdot \ddot{\varphi} + \tilde{n} \varphi = \frac{(M_{\max} - M_0) \cdot t}{t_{\text{ст}}} + \dot{I}_0. \quad (5.6)$$

Решение может быть записано в форме

$$\varphi = A \cdot \sin \omega t + B \cos \omega t + \frac{M_{\max} - M_0}{\tilde{n}} \frac{t}{t_{\text{ст}}} + \frac{\dot{I}_0}{\tilde{n}}, \quad (5.7)$$

где $\omega = \sqrt{\frac{\tilde{n}}{I}}$ – собственная частота колебаний.



Коэффициенты A и B находятся из начальных условий:

$$\text{при } t = 0 \quad \varphi = \varphi_0 = \frac{\dot{I}_0}{\tilde{n}}; \quad \dot{\varphi} = \omega_0.$$

В таком случае

$$\dot{A} = \frac{1}{\omega} \left(\omega_0 - \frac{\dot{I}_{\max} - \dot{I}_0}{\tilde{n} \cdot t_{\dot{N}\dot{O}}} \right); \quad B = 0.$$

Умножая выражение для φ на c и подставляя значения A и B , получим соотношение для динамической нагрузки в упругом элементе при $t \leq t_{\text{ст}}$:

$$\dot{I}_A = \varphi \cdot \tilde{n} = \left[\tilde{n} \frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\dot{I}_{\max} - \dot{I}_0}{\omega t_{\dot{N}\dot{O}}} \right] \sin \omega t + \frac{M_{\max} - M_0}{t_{\dot{C}\dot{O}}} t + M_0. \quad (5.8)$$

Динамическая нагрузка достигает максимальной величины при $\sin \omega t = 1$, что происходит в конце стопорения при $t = t_{\text{ст}}$, когда скорость движущихся масс будет равна нулю ($\dot{\varphi} = 0$):

$$\dot{I}_{A \max} = \frac{\omega_0 \tilde{n}}{\omega} - \frac{M_{\max} - M_0}{\omega t_{\dot{N}\dot{O}}} + M_{\max}. \quad (5.9)$$

Полагая, что для практических расчетов с достаточной точностью можно принять $t_{\dot{N}\dot{O}} = \frac{1}{4} \dot{O}$, где $T = 2\pi/\omega$, будем иметь

$$M_{\text{дmax}} = \omega_0 \sqrt{\tilde{n}^2} + 0,636 M_0 + 0,364 M_{\max}. \quad (5.10)$$

Если процесс стопорения происходит при отсутствии предварительной нагрузки в упругом элементе ($M_0 = 0$), то

$$M_{\text{дmax}} = \omega_0 \sqrt{\tilde{n}^2} + 0,364 M_{\max}. \quad (5.11)$$

Первый член в этой формуле характеризует динамическую нагрузку в упругом элементе, возникающую вследствие поглощения кинетической энергии движущихся масс, второй – от движущегося усилия в процессе стопорения.

Расчеты показывают, что максимальные динамические нагрузки при упоре ковша в жесткое препятствие (работа в каменном карьере) могут превышать номинальные нагрузки для экскаваторов в 3...4 раза.

5.2.4. Динамические нагрузки при стопорении механизмов экскаватора, находящегося в неустойчивом положении относительно ребра опрокидывания

Этот вариант возникновения динамических нагрузок возможен, например, при стопорении механизмов подъема, тяги или напора. Со-



ответствующая расчетная схема представляет собой крутильную динамическую систему с двумя степенями свободы (рис.5.3).

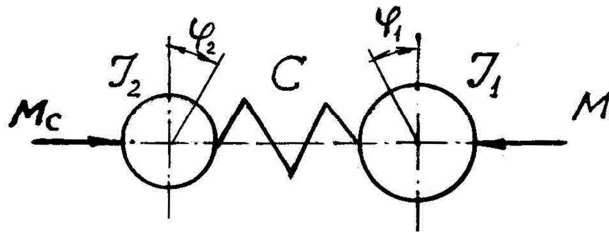


Рис. 5.3. Расчетная схема двухмассовой динамической системы привода при стопорении

На схеме приняты обозначения M_c – внешнее сопротивление; M – движущее усилие; I_1 – приведенный момент инерции движущихся масс привода; I_2 – приведенный момент инерции экскаватора относительно ребра опрокидывания; c – приведенная угловая жесткость механизмов, подвергнутых стопорению; φ_1 и φ_2 – угловые координаты.

Рассмотрим расчетный случай движения динамической системы, когда предохранительная муфта передает полное усилие, получающееся при стопорении, и при этом не срабатывает.

Первый этап движения системы происходит в интервалом времени $t_0 \leq t < t_d$. Здесь t_0 – время начала стопорения; t_d – время начала движения массы с момента инерции I_2 .

Положим, что движущее усилие, как и в п.5.2.3, изменяется по линейному закону, а динамическое усилие на рассматриваемом этапе не достигает величины M_c , т.е. $M_d < M_c$. При таких условиях экскаватор находится в устойчивом (неподвижном) состоянии и значение динамического усилия определяется по соотношению (5.8).

Второй этап движения системы происходит при $M_d \geq M_c$ на интервале времени $t_d \leq t \leq t_{CT}$, где t_{CT} – время полного стопорения. В момент $t = t_d$ начинается движение экскаватора относительно ребра опрокидывания. Величина t_d определяется из соотношения (5.8) при подстановке $M_d = M_c$.

Усилие, развиваемое приводом при $t = t_d$ будет равно

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_0 + (\dot{I}_{\max} - M_0) \frac{t_{\bar{A}}}{t_{\bar{N}\bar{O}}} . \quad (5.12)$$

Этот этап описывается системой уравнений:



$$\begin{aligned} I_1 \cdot \ddot{\varphi}_1 + (\varphi_1 - \varphi_2) \tilde{n} &= M_1; \\ I_2 \cdot \ddot{\varphi}_2 + M_C &= (\varphi_1 - \varphi_2) \tilde{n}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Если $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$, то система приводится к одному уравнению и решается с учетом таких начальных условий:

при $t = t_d$ $\varphi = 0$; $\dot{\varphi} = \omega_{\tilde{A}}$.

Максимальная динамическая нагрузка в конце стопорения будет равна

$$\dot{I}_{\tilde{A} \max} = \frac{\omega_{\tilde{A}} \cdot \tilde{n}}{\omega} + 0,364 \frac{I_2}{I_1 + I_2} (M_{\max} - M_C) + M_C, \quad (5.14)$$

где $\omega_{\tilde{A}} = \omega_0 \cdot \tilde{n} / \omega_{\tilde{A}}$;

$$\omega = \sqrt{\tilde{n} \frac{I_1 + I_2}{I_1 \cdot I_2}} - \text{собственная частота колебаний}. \quad (5.15)$$

Расчеты показывают, что в случае, когда экскаватор начинает при перегрузках механизмов поворачиваться относительно ребра опрокидывания, динамические нагрузки уменьшаются на 5...25% по сравнению с устойчивым (неподвижным) положением экскаватора.

Заметное снижение динамических нагрузок в механизмах одноковшовых экскаваторов обеспечивается при применении предохранительных муфт предельного момента.

5.2.5. Динамические нагрузки в тяговом канате драглайна

При внезапной разгрузке ковша драглайна в результате резкого торможения барабана подъема в тяговом канате возникают значительные динамические нагрузки. Соответствующая расчетная схема представлена на рис. 5.4.

Свободную длину каната на участке ab обозначим через L (нагрузка отсутствует). Тогда линейная жесткость каната составит

$$c = EF/L \quad (5.16)$$

где E – модуль упругости материала каната; F – площадь его поперечного сечения.

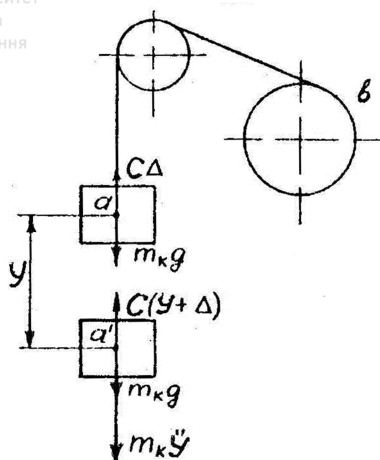


Рис. 5.4. Расчетная схема динамической системы драглайна при стопорении барабана подъема

Приведенную к точке a массу ковша и каната обозначим m_k , деформацию каната на участке ab при порожнем ковше – Δ ; дополнительную деформацию каната от веса грунта – y .

Составим уравнение движения ковша с помощью принципа Даламбера и по схеме Лагранжа.

А. Принцип Даламбера.

При внезапной разгрузке ковша на него будут действовать упругая сила каната $c(\Delta + y)$, направленная снизу вверх, сила тяжести порожнего ковша и каната $m_k g$, инерционная сила $m_k \ddot{y}$, направленные сверху вниз.

Составим соотношение для динамического равновесия ковша

$$\tilde{n}(\Delta + y) - m_k g - m_k \ddot{y} = 0. \quad (5.17)$$

Так как при порожнем ковше

$$m_k g - \tilde{n}\Delta = 0,$$

то расчетное уравнение движения ковша примет вид однородного линейного уравнения второго порядка

$$m_k \ddot{y} - \tilde{n}y = 0 \quad (5.18)$$

Б. Схема Лагранжа

Найдем выражения для кинетической и потенциальной энергий ковша и каната:



$$T = \frac{m_K \dot{y}^2}{2}; \quad \ddot{I} = -m_K g y + \frac{\tilde{n}(\Delta + y)^2}{2} - \frac{\tilde{n}\Delta^2}{2} \quad (5.19)$$

Диссипативную функцию и обобщенную силу принимаем равными нулю.

Используя схему Лагранжа, получим такое уравнение движения:

$$m_K \ddot{y} = -m_K g + \tilde{n}\Delta + \tilde{n}y. \quad (5.20)$$

Так как $m_K g = c\Delta$, окончательно имеем

$$m_K \ddot{y} - cy = 0. \quad (5.21)$$

Полученные уравнения (5.18) и (5.21) аналогичны модели (2.19). Принимаем такие начальные условия:

при $t = 0$; $y = 0$; $\dot{y} = V$ (окружная скорость барабана перед торможением).

Тогда решение примет вид

$$y = \frac{V}{\omega} \sin \omega t, \quad (5.22)$$

где $\omega = \sqrt{\frac{\tilde{n}}{m_K}}$ – собственная частота колебаний.

Найдем максимальное динамическое усилие в канате

$$Q_{\max} = \tilde{n} \cdot y_{\max} = \frac{\tilde{n}V}{\omega} = V \cdot \sqrt{\tilde{n}m_K}. \quad (5.23)$$

5.3. Многоковшовые роторные экскаваторы

5.3.1. Особенности динамического расчета

В многоковшовых роторных экскаваторах, в частности траншейных с механическим приводом рабочего органа от двигателя внутреннего сгорания, могут возникать опасные вынужденные колебания механизма привода резонансного характера. Обычно это проявляется при разработке сложно-структурных пород с твердыми пластами, что сопровождается частым стопорением ротора. Основными источниками вынужденных колебаний являются периодически изменяющийся крутящий момент двигателя, а при больших количествах сыпкок при инерционной разгрузке – нестационарный процесс изменения сопротивления грунта копанью. В связи со сказанным необходимо анализировать частоты собственных колебаний динамической системы экскаватора и



сопоставлять их со спектром возмущающих нагрузок. Следует также оценивать влияние режущих периметров ковшей и упругой подвески ротора на общую динамику машины.

Большую опасность с точки зрения возникновения динамических нагрузок в элементах конструкции многоковшового экскаватора, оборудованного гусеничной ходовой системой, вызывает передвижение по неровной площадке, переезды через твердые неровности высотой более 10 см, съезды с одного уровня на другой и т.п.

5.3.2. Динамические нагрузки в приводе ротора при его стопорении

Для определения максимально возможных нагрузок в механизме привода роторного колеса при стопорении его вращения примем расчетную схему, показанную на рис.5.5.

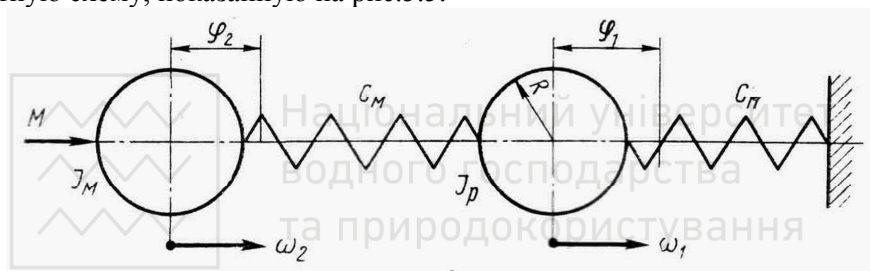


Рис. 5.5. Расчетная схема динамической системы привода при стопорении роторного колеса

На схеме приняты такие обозначения: M – момент, создаваемый двигателем; I_M – приведенный момент инерции вращающихся масс привода; c_m – угловая жесткость привода, приведенная к оси вращения ротора; I_p – момент инерции роторного колеса; c_{Π} – приведенная к оси вращения ротора угловая жесткость препятствия; ω_1 и ω_2 – номинальные угловые скорости вращения ротора и двигателя; φ_1 и φ_2 – угловые координаты ведомой и ведущей масс динамической системы; R – радиус ротора; предварительная нагрузка трансмиссии перед началом стопорения равна M_0 .

В случае, если муфта предельного момента не срабатывает, то происходят колебания двухмассовой системы до тех пор, пока ротор не разобьется с препятствием. Эти колебания описываются такими уравнениями:



$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_2 - \ddot{\varphi}_1 &= \ddot{\varphi}_2 - \ddot{\varphi}_1 = \ddot{\varphi}_2 - \ddot{\varphi}_1; \\ \ddot{\varphi}_1 &= \ddot{\varphi}_1 (\varphi_2 - \varphi_1) - \ddot{\varphi}_1 \cdot \varphi_1. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Начальные условия следующие:

при $t = 0$ $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$; $\dot{\varphi}_1 = \omega_1$; $\dot{\varphi}_2 = \omega_2$.

Решение этих уравнений осуществляется методом исключения, что требует большого объема вычислительной работы. Поэтому ограничимся анализом полученных результатов для двух вариантов решения при $c_{\pi} \gg c_m$.

А. В процессе стопорения ротора движущее усилие изменяется по линейному закону (см. п. 5.2.3):

$$\dot{I} = \dot{I}_0 + (\dot{I}_{\max} - \dot{I}_0) \frac{t}{t_{\dot{N}\dot{O}}}. \quad (5.25)$$

Максимальное динамическое усилие в приводе ротора будет равно:

$$M_{\dot{A}\max} = 0,5M_0 + 0,5M_{\max} + \omega_1 \sqrt{c_M \cdot I_M}. \quad (5.26)$$

При срабатывании муфты предельного момента

$$M_{\dot{A}\max} = M_{\phi} + \omega_1 \sqrt{c_M \cdot I_M}, \quad (5.27)$$

где M_{ϕ} – максимальный момент, передаваемый муфтой.

Б. В процессе стопорения ротора движущее усилие изменяется по полуволне синусоиды:

$$\dot{I} = \dot{I}_0 + (\dot{I}_{\max} - \dot{I}_0) \sin \frac{\pi t}{t_{\dot{N}\dot{O}}}. \quad (5.28)$$

В этом случае

$$M_{\dot{A}\max} = 0,25M_0 + 0,75M_{\max} + \omega_1 \sqrt{c_M \cdot I_M}. \quad (5.29)$$

Пример 5.1. Определить динамические нагрузки в приводе роторно-го траншейного экскаватора при стопорении рабочего органа.

Исходные данные для расчета:

$I_M = 0,077 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2$; $c_M = 15 \cdot 10^2 \text{ Н} \cdot \text{м}$; $\omega_1 = 120 \text{ с}^{-1}$; $M_{\phi} = 460 \text{ Н} \cdot \text{м}$.

Решение. Используем зависимость (5.27) и получим

$$M_{D\max} = 120 \sqrt{15 \cdot 10^2 \cdot 0,077} + 460 = 1750 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

5.3.3. Динамические нагрузки в упругой системе ротора при его стопорении

Соответствующая расчетная схема приведена на рис.5.6.

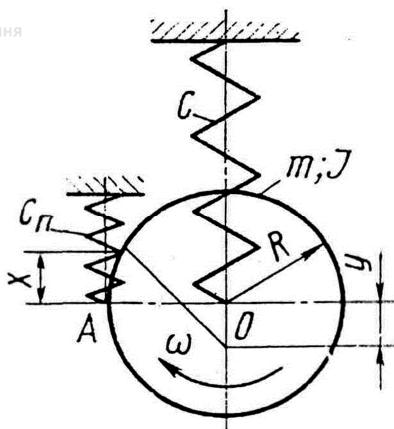


Рис. 5.6. Расчетная схема динамической системы ротора при стопорении

На схеме приняты такие обозначения: c – линейная жесткость подвески ротора; I – момент инерции вращающихся частей привода и ротора; m – приведенная масса ротора; c_n – линейная жесткость препятствия; ω – угловая скорость вращения роторного колеса; R – радиус роторного колеса; x – координата деформации препятствия; y – координата вертикального смещения ротора до разобщения с препятствием. Номинальную угловую скорость вращения ротора при нормальных условиях эксплуатации обозначим через ω_0 .

Поскольку связь роторного колеса с препятствием является односторонней, то колебания будут иметь сложный характер. Для получения расчетных соотношений используем схему Лагранжа. Выражения для кинетической и потенциальных энергий имеют такой вид:

$$\dot{O} = \frac{m\dot{y}^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}; \quad \Pi = \frac{c_n \cdot x^2}{2} + \frac{cy^2}{2}. \quad (5.30)$$

Так как $\omega = (\dot{x} + \dot{y})/R$, то

$$\dot{O} = \frac{m\dot{y}^2}{2} + \frac{I}{2R^2}(\dot{x} + \dot{y})^2.$$

Диссипативная функция рассеивания в элементах конструкции ротора не учитывается, т.к. логарифмический декремент затухания не превышает 0,1...0,2.

Уравнения свободных колебаний динамической системы ротора за-



$$\frac{I}{R^2}(\ddot{x} + \ddot{y}) + c_{\Pi} \cdot x = 0; \quad (5.31)$$

$$m\ddot{y} + \frac{I}{R^2}(\ddot{x} + \ddot{y}) + c\phi = 0.$$

Примем такие начальные условия:

при $t = 0$ $x = 0$; $\dot{x} = \omega_0$ $R = V_0$; $y = 0$; $\dot{y} = 0$.

Воспользуемся методом решения аналитических моделей с двумя степенями свободы типа (2.66). Получим следующее уравнение частот:

$$\omega^4 + \omega^2 \beta^2 (1 + \varepsilon + \varepsilon \Psi) + \beta^4 \cdot \varepsilon \Psi = 0, \quad (5.32)$$

где $\beta^2 = \tilde{n}/\partial$; $\varepsilon = \tilde{n}_{\Pi}/\tilde{n}$; $\Psi = \partial R^2 / I$.

Найдем действительные частоты ω_1 и ω_2 :

$$\omega_{1,2} = \beta \left\{ \frac{1}{2} \left[(1 + \varepsilon + \varepsilon \Psi) \mp \sqrt{(1 + \varepsilon + \varepsilon \Psi)^2 - 4\varepsilon \Psi} \right] \right\}^{1/2}. \quad (5.33)$$

Необходимо сопоставить значения полученных частот со спектром внешних воздействий на динамическую систему для оценки возможности возникновения резонансного режима.

Опускаем подробности нахождения выражений для x и y . Приведем конечные значения:

$$x = \frac{V_0}{\omega_0^2 \cdot \varepsilon (1 + \Psi)} \left(\frac{\omega_0^2 - \omega_1^2}{\omega_1} \sin \omega_1 t - \frac{\omega_0^2 - \omega_2^2}{\omega_2} \sin \omega_2 t \right); \quad (5.34)$$

$$y = \frac{V_0 \cdot \varepsilon \cdot \beta^2}{\omega_1 (\omega_2^2 - \omega_1^2)} \sin \omega_1 t - \frac{V_0 \cdot \varepsilon \cdot \beta^2}{\omega_2 (\omega_2^2 - \omega_1^2)} \sin \omega_2 t. \quad (5.35)$$

Характер изменения координаты x свидетельствует о том, что разобщение ротора с препятствием может произойти несколько раз в зависимости от значений ε и Ψ .

Для определения динамических нагрузок в упругой системе ротора необходимо найти соотношение для y_{\max} . В результате анализа зависимости (5.35) установлено, что при $\Psi > 1$, что всегда имеет место, и при $\varepsilon > 2$ справедливо неравенство

$$\frac{\omega_1 + \omega_2}{\omega_1 \omega_2} < \frac{2}{\beta}. \quad (5.36)$$

В таком случае, значение y_{\max} до разобщения ротора с препятствием



$$\dot{\phi}_{\max} \leq \frac{2V_0}{(1 + \Psi)\beta} . \quad (5.37)$$

Следовательно, максимальное динамическое усилие, действующее на упругую систему ротора при его стопорении, составит

$$Q_{\max} = c \cdot y_{\max} = \frac{2\omega_0 RI \sqrt{cm}}{I + mR^2} . \quad (5.38)$$

5.3.4. Динамические нагрузки в упругой системе ротора при переезде через одиночные твердые неровности

Рассмотрим схематизированный переезд одной гусеницей экскаватора через камень, лежащий на твердом основании, и определим характер внешних воздействий на упругую систему подвески ротора. Соответствующая расчетная схема приведена на рис. 5.7.

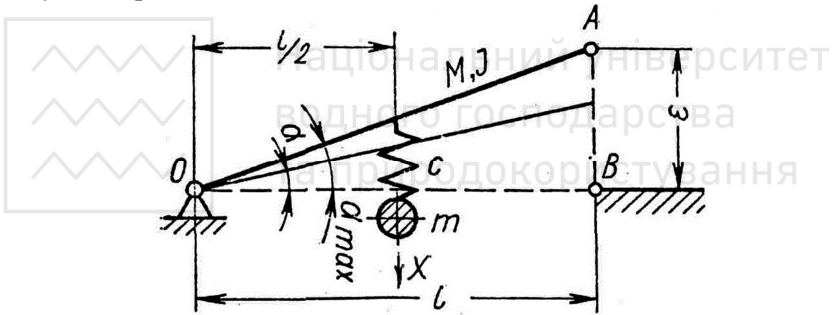


Рис. 5.7. Расчетная схема динамической системы ротора при переезде через камень

Полагаем, что правая гусеница экскаватора (имитируется точкой A) переезжает через камень высотой ϵ . Левая гусеница находится на рабочей площадке (имитируется точкой O).

Жесткая опорная часть конструкции экскаватора моделируется стержнем, наклоненным к горизонтальной поверхности под углом α и вращающимся вокруг точки O. Характеристики стержня следующие: m – масса; I – момент инерции относительно точки O; ℓ – длина (расстояние между гусеницами).

К середине стержня с помощью упругой связи, имеющей линейную жесткость c , подвешен ротор массой m .



При переезде через камень в динамической системе ротора возникает колебательный процесс, который характеризуется двумя обобщенными координатами α и x .

Уравнения движения системы имеют вид:

$$\begin{aligned} I\ddot{\alpha} + \frac{c\ell x}{2} &= -\frac{Q \cdot \ell}{2}; \\ m\left(\ddot{x} + \frac{\ddot{\alpha} \ell}{2}\right) + cx &= 0, \end{aligned} \quad (5.39)$$

где Q – вес подвижных частей.

Первое уравнение представляет собой равенство моментов сил относительно точки 0; второе – равенство динамических сил, действующих на массу m .

Принимаем следующие начальные условия:

$$\text{при } t = 0 \quad x = \delta = 0; \quad \alpha = \frac{\varepsilon}{\ell}; \quad \dot{\alpha} = 0.$$

Решения уравнений имеют вид:

$$x = -\frac{Q \ell^2}{4I \omega^2} (1 - \cos \omega t); \quad (5.40)$$

$$\alpha = -\frac{Q \ell}{4I + m \ell^2} t^2 + \frac{\varepsilon}{\ell} + \frac{m \ell^2}{4I + m \ell^2} \cdot \frac{Q \ell}{2I \omega^2} (1 - \cos \omega t), \quad (5.41)$$

$$\text{где } \omega^2 = \frac{\tilde{n}}{\delta} \left[1 + \frac{\delta \ell^2}{4I} \right].$$

После переезда через камень экскаватор резко осаживается на рабочую площадку, динамическая система ротора получает ударный импульс, в результате чего возникает новый колебательный процесс непосредственно в упругой системе ротора, более опасный, чем предыдущий.

Найдем начальные условия для этого процесса.

При $\alpha = 0$ вычисляем время осаживания экскаватора t_{Π} . Подставляя это значение в уравнения для x и δ , получим условия кинематического возбуждения колебаний ротора. Уравнение движения такой одномассовой консервативной системы относительно новой обобщенной координаты x_1 , а также его решение, рассматривается в п. 2.3.2.1. Определив значение $x_{1\max}$ и зная жесткость упругой системы c , можно вычислить наиболее опасное динамическое усилие $P_{\text{Дмакс}} = cx_{1\max}$.



5.4. Землеройно-транспортные машины

5.4.1. Особенности динамического расчета

Для оценки динамических нагрузок в ЗТМ при неустановившемся процессе разработки грунтов в качестве исходного параметра принимают интенсивность возрастания сопротивлений копания, которую обозначают через A . Максимальные значения этого параметра имеют место при полном внедрении в грунт рабочих органов и определяются в основном интенсивностью возрастания сопротивления резанию.

В общем случае параметр A не является постоянной величиной. Тем не менее имеется возможность определения некоторой осредненной постоянной интенсивности возрастания сопротивлений, которая правильно отражает основную тенденцию процесса копания. Так, для скреперов $A = 50 \dots 80$ кН/м; для автогрейдеров – $80 \dots 125$ кН/м; для бульдозеров – $50 \dots 200$ кН/м. Эти значения соответствуют наиболее тяжелым однородным грунтам.

5.4.2. Динамические нагрузки на рабочий орган при отсутствии буксования движителей

При неограниченном сцеплении движителей ЗТМ с грунтом можно выделить две технологические стадии функционирования: начальное установившееся движение машины до заглубления рабочего органа; рабочее неустановившееся движение в процессе копания. Соответствующая расчетная схема представлена на рис. 5.8.

На первой стадии (рис.5.8, а) машина с приведенной массой m_{Π} движется с установившейся скоростью $V_{\text{нач.}}$, преодолевая до начала копания сопротивление движению P_0 . При этом движущая сила P_d равна силе P_0 .

На второй стадии (рис.5.8, б) сила сопротивления копанию P_c , представляется как сопротивление при линейной деформации грунта и графически интерпретируется в виде пружины с жесткостью, равной интенсивности возрастания сопротивления A . В этом случае принимаем

$$P_c = P_0 + A \cdot S, \quad (5.42)$$

где S – координата перемещения.

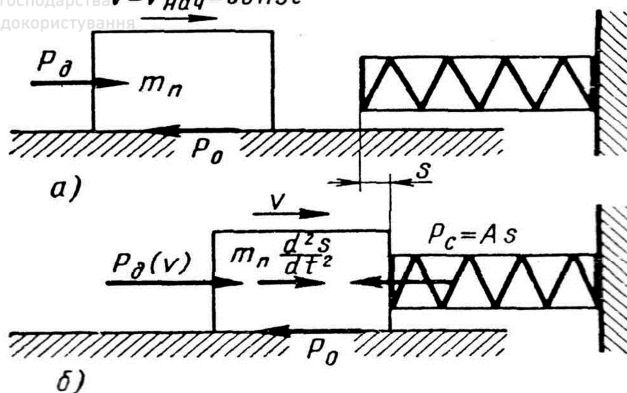


Рис. 5.8. Расчетная схема одномассовой динамической системы ЗТМ
(а – до начала копания, б – в процессе копания грунта)

Буксование движителей отсутствует и движущая сила меньше силы сцепления ($P_d < T_\phi$). Полагаем, что движущая сила является функцией скорости: $P_d = f(\dot{S})$.

Уравнение движения машинного агрегата имеет вид:

$$P_d(\dot{S}) - P_0 - A \cdot S - m \cdot \ddot{S} = 0. \quad (5.43)$$

После преобразования имеем:

$$\ddot{S} + G \cdot \dot{S} + \frac{A}{m_\Pi} \cdot S = D. \quad (5.44)$$

Постоянные коэффициенты G и D зависят от начального сопротивления P_0 и от характера изменения движущей силы P_d . Их значения определяются по формулам, приведенным в монографии А.М.Холодова.

Корни характеристического уравнения, соответствующего уравнению (5.44), имеют такой вид:

$$\alpha_{1,2} = -\frac{G}{2} \pm \sqrt{\frac{G^2}{4} - \frac{A}{m_\Pi}}. \quad (5.45)$$

Если $G^2 > \frac{4A}{m_\Pi}$, то

$$S_1 = C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 e^{\alpha_2 t} + \frac{D \cdot m_\Pi}{A}. \quad (5.46)$$



Если $G^2 < \frac{4A}{m_{\Pi}}$, то

$$S_2 = e^{-Gt/2} \left(C_3 \cdot \cos pt + C_4 \cdot \sin pt \right) + \frac{D \cdot m_{\Pi}}{A}, \quad (5.47)$$

где $p = \sqrt{\frac{A}{m_{\Pi}} - \frac{G^2}{4}}$ – частота затухающих колебаний.

В практических расчетах приходится иметь дело с обоими полученными решениями.

Примем такие начальные условия: при $t = 0$ $S = 0$; $\dot{S} = V_n$.

Заметим, что начальную скорость при переходе от равномерного движения к копанию с возрастающим сопротивлением можно представить в виде

$$V_n = D/G. \quad (5.48)$$

После нахождения произвольных постоянных C_1, C_2, C_3, C_4 и ряда преобразований получим:

$$S_1 = \frac{D}{G \cdot r} \left(-\frac{\alpha_2}{\alpha_1} e^{\alpha_1 t} + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} e^{\alpha_2 t} \right) + \frac{D \cdot m_{\Pi}}{A}, \quad (5.49)$$

$$V_1 = \dot{S}_1 = \frac{D}{G \cdot r} \left(-\alpha_2 e^{\alpha_1 t} + \alpha_1 e^{\alpha_2 t} \right), \quad (5.50)$$

$$a_1 = \ddot{S}_1 = -\frac{DA}{m_{\Pi} \cdot G \cdot r} \left(e^{\alpha_1 t} - e^{\alpha_2 t} \right), \quad (5.51)$$

где $r = 2 \sqrt{\frac{G^2}{4} - \frac{A}{m_{\Pi}}}$;

$$S_2 = \frac{Dm_{\Pi}}{A} e^{-Gt/2} \left[\left(\frac{A}{G \cdot m_{\Pi} \cdot p} - \frac{G}{2p} \right) \sin pt - \cos pt + 1 \right], \quad (5.52)$$

$$V_2 = \dot{S}_2 = D \cdot e^{-Gt/2} \left(\frac{1}{G} \cos pt + \frac{1}{2p} \sin pt \right), \quad (5.53)$$

$$a_2 = \ddot{S}_2 = -e^{-Gt/2} \frac{AD}{G \cdot m_{\Pi} \cdot p} \sin pt. \quad (5.54)$$

Задача динамического расчета ЗТМ обычно сводится к отысканию максимальных ускорений в процессе копания ($a_{1\max}$ или $a_{2\max}$). При этом



динамическая нагрузка на рабочий орган составляет

$$F_{\max} = m_{\Pi} \cdot a_{\max} \quad (5.55)$$

Таким образом, главными факторами, определяющими динамические нагрузки в ЗТМ, являются начальная скорость копания, приведенная масса машины и интенсивность возрастания сопротивления.

5.4.3. Динамические нагрузки на рабочий орган при буксовании движителей

В условиях потери сцепления движителей с грунтом при полном их буксовании уравнение движения ЗТМ имеет такой вид:

$$\dot{O}_{\varphi} - \dot{o} \cdot \ddot{S}_{\varphi} - P_c = 0, \quad (5.56)$$

где T_{φ} – сила сцепления; m – масса сцепного веса; P_c – сила сопротивления копанию; S_{φ} – путь копания на режиме буксования.

Момент потери сцепления движителей с грунтом характеризуется равенством

$$T_{\varphi} = P_0 + A \cdot S_0 + m a_H, \quad (5.57)$$

где S_0 – путь, пройденный машиной при копании до начала буксования; a_H – ускорение, которое имела машина к началу буксования.

Сила сопротивления имеет вид:

$$P_c = P_0 + A S_0 + A S_{\varphi}. \quad (5.58)$$

После преобразования уравнения (5.56) получим:

$$\ddot{S}_{\varphi} + \frac{A}{m} S_{\varphi} = a_H. \quad (5.59)$$

Его решение имеет вид:

$$S_{\varphi} = C_5 \cdot \sin \omega t + C_6 \cdot \cos \omega t + \frac{m \cdot a_H}{A}, \quad (5.60)$$

где $\omega = \sqrt{A/m}$ – собственная частота колебаний.

Принимаем такие начальные условия: при $t = 0$ $S_{\varphi} = 0$; $\dot{S}_{\varphi} = V_H$ (номинальная скорость движения ЗТМ при минимальном коэффициенте сцепления).

Тогда получим:

$$S_{\varphi} = V_H \sqrt{m/A} \sin \omega t - \frac{m \cdot a_H}{A} \cos \omega t + \frac{m \cdot a_H}{A}; \quad (5.61)$$

$$V_{\varphi} = V_H \cdot \cos \omega t + a_H \sqrt{m/A} \sin \omega t; \quad (5.62)$$



$$a_{\varphi} = -V_H \cdot \omega \sin \omega t + a_H \cdot \cos \omega t . \quad (5.63)$$

Из полученных выражений можно найти максимальный путь движения ЗТМ при буксовании $S_{\varphi \max}$ и максимальное ускорение $a_{\varphi \max}$ (по абсолютной величине). Найдем соответствующее время $t_{\varphi \max}$, при котором $V_{\varphi} = 0$:

$$t_{\varphi \max} = \sqrt{m/A} \arctg \left(-\frac{V_H}{a_H} \cdot \omega \right) . \quad (5.64)$$

Подставляя это значение в выражения для S_{φ} и a_{φ} и принимая во внимание, что $\sin \arctg \left(-\frac{V_H}{a_H} \cdot \omega \right) \approx 1$; $\cos \arctg \left(-\frac{V_H}{a_H} \cdot \omega \right) \approx 0$, получим простые выражения для $S_{\varphi \max}$ и $a_{\varphi \max}$:

$$S_{\varphi \max} = V_H \sqrt{m/A} ; \quad (5.65)$$

$$a_{\varphi \max} = -V_H \cdot \omega . \quad (5.66)$$

Максимальная динамическая нагрузка на рабочий орган машины, ограничиваемая условиями сцепления движителей с грунтом, составит

$$F_{\max} = A \cdot S_{\varphi \max} = V_H \cdot \sqrt{Am} . \quad (5.67)$$

Полная нагрузка составит

$$F_{\text{н\acute{e}i}} = \dot{O}_{\varphi} + V_H \sqrt{Am} - P_0 , \quad (5.68)$$

где T_{φ} – предельное касательное усилие по сцеплению.

Пример 5.2. Для бульдозера с массой сцепного веса $m = 6320$ кг определить максимальный путь машины $S_{\varphi \max}$ и максимальное ускорение $a_{\varphi \max}$ при буксовании, а также полную нагрузку на рабочий орган. При расчете принять: $A = 50$ кН/м; $V_H = 0,95$ м/с; $T_{\varphi} = 55800$ Н; $P_0 = 0$.

Решение. По формулам (5.65), (5.66), (5.68) находим

$$S_{\varphi \max} = 0,95 \sqrt{\frac{6200}{50000}} = 0,33 \text{ м} ;$$

$$a_{\varphi \max} = -0,95 \sqrt{\frac{50000}{6200}} = -2,7 \text{ м/с}^2 ;$$

$$F_{\text{полн.}} = 55800 + 0,95 \sqrt{50000 \cdot 6200} = 72526 \text{ Н} .$$

5.4.4. Динамические нагрузки на рабочий орган при стопорении жестким препятствием

В случае, если ЗТМ стопорится непреодолимым препятствием, то



для определения динамической и полной нагрузок вместо интенсивности нарастания сопротивления A используется приведенная линейная жесткость препятствия и металлоконструкции рабочего органа c_{np} (последовательное соединение жесткостей $c_{п}$ и $c_{мк}$).

В частности, нагрузка на рабочий орган автогрейдера и бульдозера определится по формуле

$$F_{\partial.f.} = \dot{O}_{\varphi} + V_H \sqrt{\tilde{n}_{ГП} \cdot m} - P_0. \quad (5.69)$$

Жесткость препятствий $c_{п}$ характеризуется такими значениями:

- массивный камень шириной 0,5 м – $c_{п} = 130000$ кН/м;
- кирпичный столб шириной 0,65 м – $c_{п} = 18150$ кН/м;
- сосновая свая диаметром 700 мм – $c_{п} = 9300$ кН/м.

В инженерных расчетах при вычислении жесткости металлоконструкций бульдозерного оборудования $c_{мк}$ широко используется приближенная формула

$$c_{мк} = \kappa_0 \cdot m_{б.о.}, \quad (5.70)$$

где $m_{б.о.}$ – масса оборудования (кг); κ_0 – коэффициент, значение которого принимают равным 5 (кН/м)/кг.

Например, для тяжелого бульдозера $m_{б.о.} = 3000$ кг, следовательно, $c_{мк} = 15000$ кН/м.

Для определения нагрузки, действующей на рабочее оборудование $F_{р.о.}$ и на прицепное устройство $F_{п}$ скрепера, используются соответственно такие зависимости:

$$F_{р.о.} = T_{\varphi} + V_H \sqrt{c_{ГП} \cdot m_2} - P_0; \quad (5.71)$$

$$F_{п} = T_{\varphi} + c_{т.р.} \cdot V_H \left(\sqrt{\frac{m_1}{c_{т.р.}}} - \sqrt{\frac{m_2}{c_{ГП}}} \right) - P_0, \quad (5.72)$$

где m_1 – масса тяговой рамы скрепера; $c_{т.р.}$ – её жесткость; m_2 – масса прицепной части скрепера.

5.4.5. Динамические нагрузки при ударном нагружении в системе «скрепер–толкач»

При разработке грунтов скреперами дополнительная мощность обеспечивается тракторами–толкачами, снабженными амортизаторами.

Так как скорость скрепера при заборе грунта является случайной величиной, то при стыковке и совместной работе с толкачом между ними постоянно происходит ударное взаимодействие.

Для определения динамических нагрузок в упругой системе «скре-

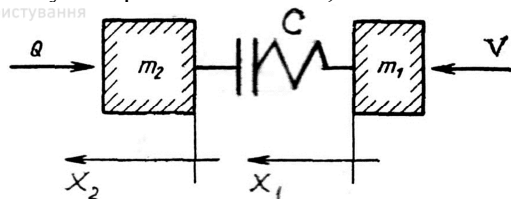


Рис. 5.9. Расчетная схема ударного нагружения динамической системы «скрепер–толкач»

Положим, что толкач массой m_1 движется с постоянной скоростью V . На скрепер массой m_2 действует сила сопротивления Q . При стыковке толкача и скрепера между ними образуется упругая связь с жесткостью, равной c .

Рассмотрим наиболее опасный случай: в момент стыковки скорость скрепера равна нулю. Координаты масс обозначим через x_1 и x_2 . Масса m_2 будет неподвижна до тех пор, пока деформация упругого элемента (амортизатора) не будет соответствовать внешней нагрузке Q .

Уравнение движения массы m_2 имеет вид:

$$\ddot{\delta}_2 \cdot \ddot{\delta}_2 - (\ddot{\delta}_1 - \ddot{\delta}_2) \cdot \tilde{n} = -Q, \quad (5.73)$$

Координата x_1 определяется так: $x_1 = V \cdot t$.

В таком случае получаем

$$\ddot{\delta}_2 + \frac{\tilde{n}}{\dot{\delta}_2} \ddot{\delta}_2 = \frac{Vct}{m_2} - \frac{Q}{m_2}. \quad (5.74)$$

Найдем общее решение

$$x_2 = A \cdot \sin \omega t + B \cdot \cos \omega t + Vt - Q/c, \quad (5.75)$$

где $\omega = \sqrt{\tilde{n}/\dot{\delta}_2}$ – собственная частота колебаний массы m_2 .

Деформация упругого элемента составит

$$x = x_1 - x_2 = -A \cdot \sin \omega t - B \cos \omega t + Q/c$$

Примем такие начальные условия: при $t = 0$ $x = 0$; $\dot{\delta} = V$.

Тогда

$$x = V \cdot \sqrt{\frac{\dot{\delta}_2}{\tilde{n}}} \sin \omega t + Q/c. \quad (5.76)$$

Характер изменения деформации $x = f(t)$ показан на рис.5.10.

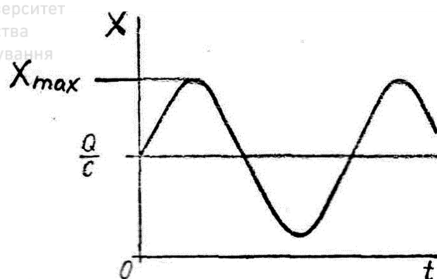


Рис. 5.10. График изменения функции $x = f(t)$

Найдем максимальную деформацию

$$\delta_{\max} = V \cdot \sqrt{\frac{m_2}{c}} + \sqrt{\frac{Q}{c}} \quad (5.77)$$

и максимальную нагрузку в упругом элементе

$$F_{\max} = c \cdot x_{\max} = V \sqrt{m_2 c} + Q. \quad (5.78)$$

Таким образом, существенное влияние на величину ударной нагрузки оказывают скорость соударения и жесткость упругого элемента.

Установлено, что благодаря установке амортизатора ударные нагрузки оказываются примерно на 30% ниже, чем при контакте толкача без амортизатора. На тракторах-толкачах класса 10 т наибольший эффект дают амортизаторы с жесткостью 3,0...3,5 МН/м. Допустимая скорость стыковки должна быть не более 0,5 м/с.

5.5. Рыхлители

Практика эксплуатации навесных тракторных рыхлителей показала, что при встрече рабочего органа с непреодолимым препятствием (валуны и т.п.) в элементах рыхлителя возникают динамические нагрузки, способные привести к разрушению машины. Усиление недостаточно прочных элементов за счет увеличения их сечения является неэффективным, т.к. при этом повышается жесткость рабочего оборудования, которая, в свою очередь, приводит к возрастанию динамических нагрузок.

Существуют апробированные способы снижения динамических усилий путем изменения рабочих скоростей и ограничения тягового усилия трактора соответствующей регулировкой бортовых фрикционов или силами сцепления гусениц с грунтом. Однако такие способы связа-



ны с уменьшением производительности машины. Наиболее рациональный путь – это снижение жесткости навесного оборудования, например, с помощью амортизаторов. Для оценки такого варианта использовалась четырехмассовая расчетная схема, представленная на рис.5.11.

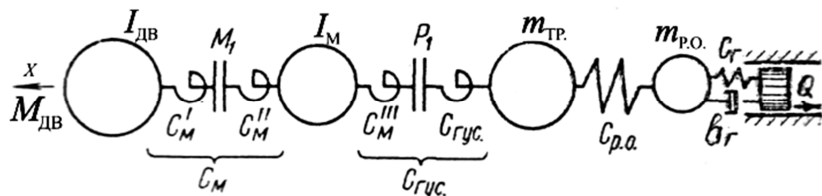


Рис. 5.11. Расчетная схема общей динамической системы рыхлителя на базе трактора тягового класса 250 кН

На расчетной схеме приняты такие обозначения: $M_{ДВ}(\dot{\varphi}_{\dot{A}\dot{A}})$ – характеристика двигателя; $I_{ДВ}$ – приведенный момент инерции вращающихся масс двигателя; $I_{М}$ – приведенный момент инерции вращающихся масс привода; M_1 – момент, передаваемый муфтой (момент ее пробуксовки); P_1 – предельное усилие тяги трактора; $m_{ТР}$ и $m_{p.o.}$ – приведенные массы трактора и рабочего оборудования; Q – усилие сопротивления грунта внедрению рабочего органа; c_M – угловая жесткость элементов привода; $c_{гус.}$ – угловая жесткость гусеничной ленты; $c_{p.o.}$ – линейная жесткость рабочего оборудования; $c_г$ – линейная жесткость грунта; $b_г$ – коэффициент вязкости грунта.

Уравнения движения динамической системы имеют вид:

$$\begin{aligned}
 {}^2_{\dot{A}\dot{A}} \ddot{\varphi}_{\dot{A}\dot{A}} + \tilde{n}_i (\varphi_{\dot{A}\dot{A}} - \varphi_i) &= \dot{I}_{\dot{A}\dot{A}} (\dot{\varphi}_{\dot{A}\dot{A}}); \\
 {}^2_i \ddot{\varphi}_i + \tilde{n}_i (\varphi_{\dot{A}\dot{A}} - \varphi_i) + \tilde{n}_{\dot{a}\dot{o}\dot{n}} \left(\varphi_i - \frac{\tilde{\delta}_{\dot{o}\dot{o}}}{R} \right) &= 0; \\
 \dot{o}_{\dot{o}\dot{o}} \ddot{\delta}_{\dot{o}\dot{o}} - \frac{\tilde{n}_{\dot{a}\dot{o}\dot{n}}}{R^2} (R \cdot \varphi_M - \tilde{\delta}_{\dot{o}\dot{o}}) + \tilde{n}_{\dot{\delta}\dot{i}} (\tilde{\delta}_{\dot{o}\dot{o}} - \tilde{\delta}_{\dot{\delta}\dot{i}}) &= 0; \\
 \dot{o}_{\dot{\delta}\dot{o}} \ddot{\delta}_{\dot{o}\dot{o}} - c_{p.o.} (\tilde{\delta}_{\dot{o}\dot{o}} - \tilde{\delta}_{\dot{\delta}\dot{i}}) + c_г x_{p.o.} + b_г \dot{x}_{p.o.} &= 0,
 \end{aligned}
 \tag{5.79}$$

причем



$$\tilde{n}_i (\varphi_{\dot{A}\dot{A}} - \varphi_i) \leq \dot{I}_1;$$

$$\frac{\tilde{n}_{\dot{a}\dot{o}\tilde{n}}}{R^2} (R \cdot \varphi_M - x_{TP}) \leq P_1;$$

$$\tilde{n}_\Gamma \tilde{o}_{\delta.i.} + b_\Gamma \tilde{o}_{\delta.i.} \leq Q,$$

где R – радиус звездочки; $\varphi_{ДВ}$ и φ_M – угловые перемещения масс $I_{ДВ}$ и I_M ; x_{TP} и $x_{p.o.}$ – линейные перемещения масс m_{TP} и $m_{p.o.}$.

Анализ динамической системы рыхлителя в соответствии с полученными нелинейными уравнениями производился на ЭВМ при $P_1 = 250$ кН; скорости движения $v = 1.6$ м/с; жесткость рабочего оборудования измерялась в диапазоне $c_{p.o.} = 1,0 \dots 20,0$ МН/м; жесткость грунта принималась равной $c_\Gamma = 10$ МН/м.

Изменение нагрузки в рабочем оборудовании при его стопорении $P_{ст}$ (суммарное действие тягового усилия P_1 и максимальной динамической нагрузки $P_{Дmax}$) в зависимости от $c_{p.o.}$ показано на рис.5.12. Там же приводится зависимость $P_{ст.} = f(c_{p.o.})$, полученная для упрощенной одно-массовой динамической системы рыхлителя по формуле:

$$P_{ст} = E_1 + V \sqrt{m_{II} \cdot \tilde{n}_{II}}, \quad (5.80)$$

где m_{II} – приведенная масса тягача и рабочего оборудования;

c_{II} – суммарная приведенная жесткость рабочего оборудования и препятствия.

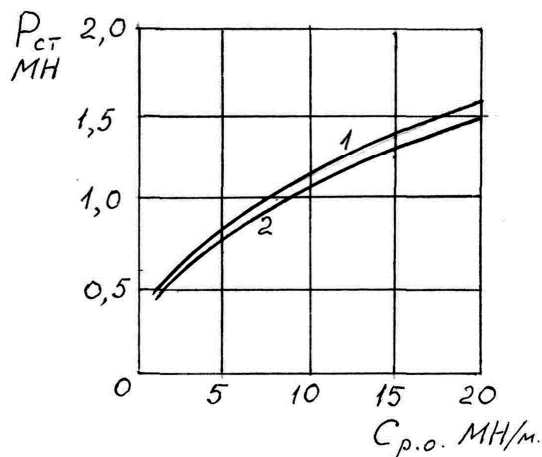


Рис. 5.12. Зависимость $P_{ст} = f(c_{p.o.})$:

1 – одномассовая система; 2 – четырехмассовая система

Формула (5.80) аналогична зависимости (5.69), которая



зуется при динамическом расчете ЗТМ.

Анализ полученных графиков позволяет сделать два вывода. Во-первых, результаты динамических расчетов рабочего оборудования по четырехмассовой и одномассовой расчетным схемам отличаются не более чем на 8%. Поэтому при инженерных расчетах вполне допустимо использование формулы (5.80).

Во-вторых, ограничить динамическую нагрузку в рабочем оборудовании при стопорении, например, величиной 1,0 МН, можно путем введения в его конструкцию амортизаторов. Это позволит снизить жесткость рабочего оборудования до $c_{p.o.} = 8$ МН/м вместо реальной 20 МН/м.

6. ДИНАМИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ В МАШИНАХ ВИБРАЦИОННОГО ПРИНЦИПА ДЕЙСТВИЯ

6.1. Особенности динамического расчета

Рассматриваемые машины относятся к классу вибрационных машин, в которых широко используются уникальные силовые качества колебательных процессов. Эффективность воздействия таких машин на обрабатываемую среду определяется амплитудой и частотой колебаний их рабочих органов в линейных динамических системах или зависит от гармонического состава колебаний рабочего органа и от амплитудных и фазовых соотношений различных гармоник и их значений в нелинейных динамических системах.

Отсюда вытекает основная задача динамики вибрационных машин – обеспечение оптимальной траектории движения их рабочих органов. Взаимодействия рабочих органов с обрабатываемой средой, как правило, существенно нелинейны, поэтому динамические расчеты вибрационных машин редко укладываются в рамки линейных теорий, что значительно усложняет определение оптимальных траекторий.

Еще большие сложности возникают при расчете вибрационных машин, работающих на резонансных режимах. В этом случае возникает целый комплекс связанных между собою задач: определение области устойчивых режимов; возбуждение и стабилизация режимов; выбор уровней изменения скоростей и ускорений рабочих органов в зависимости от условий технологического процесса.



6.2. Динамические параметры вибровозбудителей

Важнейшим элементом любой вибрационной машины является вибровозбудитель (вибратор), который сообщает движение колебательной системе и создает возмущающую силу, необходимую для преодоления внутренних и внешних сопротивлений.

По принципу действия вибровозбудители классифицируются на механические с диапазоном рабочих частот до 200 Гц, пневматические (200 Гц), электромагнитные (400 Гц), гидравлические (1000 Гц), электродинамические (5000 Гц). Наибольшее распространение получили механические вибровозбудители – центробежные и кривошипно-шатунные. При создании тяжелых вибрационных машин (например, с трамбующим и рыхлящим оборудованием) применяются гидравлические вибровозбудители, обладающие высокой удельной мощностью.

6.2.1. Центробежные вибровозбудители

В таких вибровозбудителях возмущающая сила создается центробежной силой инерции при вращении одной или нескольких неуравновешенных масс, которые называются дебалансами. Крутящий момент сообщается валу дебаланса двигателем, находящимся вне корпуса вибровозбудителя или встроенным в него.

Динамическая система центробежного вибровозбудителя с одним дебалансом представлена на рис.6.1.

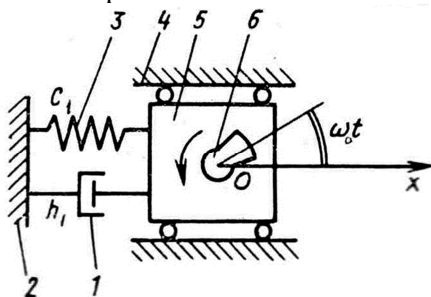


Рис. 6.1. Расчетная схема динамической системы вибровозбудителя с одним дебалансом: 1 – демпфирующая связь; 2 – жесткая неподвижная стенка; 3 – упругая связь; 4 – направляющие для поступательно движущейся массы; 5 – подвижная масса вибровозбудителя (m_1); 6 – масса дебаланса (m_0).

Введем такие обозначения: c_1 – коэффициент жесткости упругой связи; h_1 – коэффициент демпфирования; ω_0 – угловая скорость вращения дебаланса; r – его эксцентриситет.



Общая масса динамической системы равна

$$m = m_1 + m_0, \quad (6.1)$$

а внешняя сила, создаваемая дебалансом, -

$$F = m_0 \cdot r \cdot \omega_0^2 \cdot \cos \omega_0 t. \quad (6.2)$$

Система совершает вынужденные колебания вдоль оси ОХ. Соответствующее расчетное уравнение, полученное по схеме Лагранжа, примет вид:

$$\ddot{x} + 2h_1 \dot{x} + \omega_1^2 x = \frac{m_0 \cdot r \cdot \omega_0^2}{m_1 + m_0} \cos \omega_0 t. \quad (6.3)$$

Решение уравнения такого типа рассмотрено в п.2.3.

Выражения для амплитуды вынужденных колебаний A_1 и начальной фазы φ_1 соответственно равны:

$$A_1 = \frac{m_0 \cdot r \cdot \omega_0^2}{(m_1 + m_0) \sqrt{(\omega_1^2 - \omega_0^2)^2 + 4h_1^2 \omega_0^2}}; \quad (6.4)$$

$$\varphi_1 = \arctg \frac{2h_1 \omega_0}{\omega_1^2 - \omega_0^2},$$

где $\omega_1 = \sqrt{\frac{c_1}{m_1 + m_0}}$ – собственная частота колебаний по оси ОХ.

Максимальное (резонансное) значение амплитуды A_1 составляет

$$A_{1P} = \frac{m_0 \cdot r \cdot \omega_1^2}{2(m_1 + m_0)h_1 \sqrt{\omega_1^2 - h_1^2}} \quad (6.5)$$

при резонансной частоте

$$\omega_P = \frac{\omega_1^2}{\sqrt{\omega_1^2 - 2h_1^2}}. \quad (6.6)$$

Амплитудно-частотная характеристика динамической системы центробежного вибровозбудителя приведена на рис.6.2.

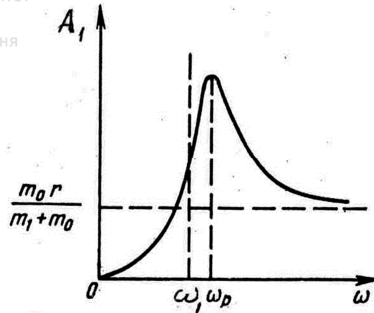


Рис. 6.2. Амплитудно-частотная характеристика вибровозбудителя с одним дебалансом

Усложним расчетную схему и положим, что динамическая система совершает вынужденные колебания по двум координатным осям ОХ и ОУ. В таком случае получаем второе расчетное уравнение:

$$\ddot{y} + 2h_2\dot{y} + \omega_2^2 y = \frac{m_0 \cdot r \cdot \omega_0^2}{m_1 + m_0} \cdot \sin \omega_0 t. \quad (6.7)$$

В результате его решения найдем выражения для амплитуды A_2 и начальной фазы φ_2 :

$$A_2 = \frac{m_0 \cdot r \cdot \omega_0^2}{(m_1 + m_0) \sqrt{(\omega_2^2 - \omega_0^2)^2 + 4h_2^2 \omega_0^2}}; \quad (6.8)$$

$$\varphi_2 = \arctg \frac{2h_2 \cdot \omega_0}{\omega_2^2 - \omega_0^2},$$

где $\omega_2 = \sqrt{\frac{c_2}{m_1 + m_0}}$ – собственная частота колебаний по оси ОУ.

Параметры c_2 и h_2 являются характеристиками вертикальных упругих и демпфирующих связей.

Если учесть, что коэффициенты демпфирования незначительно влияют на частоты колебаний, то основная масса динамической системы при двойных колебаниях по осям ОХ и ОУ будет описывать траекторию, близкую к эллиптической с полуосями A_1 и A_2 .

При
$$\frac{\omega_1^2 - \omega_0^2}{\omega_2^2 - \omega_0^2} > 0, \quad (6.9)$$

динамическая система имеет настройку вдоль обеих координатных осей: одновременно дорезонансную или одновременно зарезонансную.



При этом основная масса будет двигаться по эллиптической траектории в направлении вращения дебаланса.

Если
$$\frac{\omega_1^2 - \omega_0^2}{\omega_2^2 - \omega_0^2} < 0, \quad (6.10)$$

то настройка системы вдоль одной из координатных осей дорезонансная, вдоль другой – зарезонансная. При этом основная масса движется по своей траектории в направлении, обратном вращению дебаланса.

Траектория движения основной массы становится окружностью в двух случаях:

- при равенстве частот $\omega_1 = \omega_2 \neq \omega_0$ и выполнении условия (6.9);
- при выполнении соотношения $\omega_0 = \sqrt{\frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2}}$ и условия (6.10).

Теперь рассмотрим работу вибровозбудителя с двумя дебалансами массой m_0 каждый. Соответствующая расчетная схема представлена на рис.6.3.

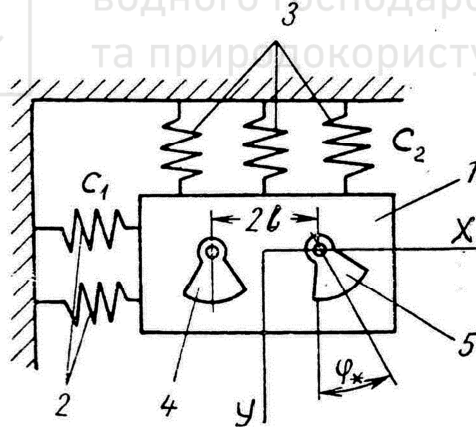


Рис. 6.3. Расчетная схема динамической системы вибровозбудителя с двумя дебалансами:

1 – корпус вибровозбудителя; 2 и 3 – упругие связи; 4 и 5 – дебалансы

Возмущающая сила изменяется по закону

$$F = 2m_0 \cdot r \cdot \omega_0^2 \cdot \sin \omega_0 t. \quad (6.11)$$

Линия ее действия обеспечивается синхронизацией вращения деба-



лансов при определенной их фазировке. Это достигается принудительной кинематической или электрической синхронизацией.

При определенном соотношении параметров наступает явление самосинхронизации. Определим условия, при которых она возможна.

Найдем общую массу вибровозбудителя

$$m = m_1 + 2m_0. \quad (6.12)$$

Обозначим через I_1 – центральный момент инерции массы m_1 ; c_3 – коэффициент угловой жесткости пружинной подвески; 2ℓ – расстояние между осями дебалансов.

Тогда условие синхронного вращения дебалансов запишется в виде:

$$\left(\frac{1}{1-\gamma_\sigma^2} + \frac{\sigma}{1-\gamma_y^2} - \frac{m\ell^2}{(1-\gamma_\psi^2) \cdot I} \right) \cos \varphi^* < 0, \quad (6.13)$$

где $I = I_1 + 2m_0 \cdot \ell^2$;

$$\gamma_x = \sqrt{\frac{c_1}{m\omega_0^2}}; \quad \gamma_y = \sqrt{\frac{c_2}{m\omega_0^2}}; \quad \gamma_\psi = \sqrt{\frac{c_3}{I\omega_0^2}};$$

$$\sigma = \begin{cases} 1 - i\delta & \omega_1 = \omega_2 \\ -1 - i\delta & \omega_1 = -\omega_2 \end{cases};$$

$$|\omega_1| = |\omega_2| = \omega_0;$$

$$\varphi^* = \begin{cases} 0 - i\delta & \text{нелінійні адаптивні адрієдіння}; \\ \pi - i\delta & \text{ідідієдіння ілі адаптивні адрієдіння}. \end{cases}$$

Всего имеется 16 комбинаций параметров, при которых происходит явление самосинхронизации.

6.2.2. Кривошипно-шатунные вибровозбудители

Для определения возмущающей силы вибровозбудителя и его частотного режима рассмотрим расчетную схему, представленную на рис.6.4.

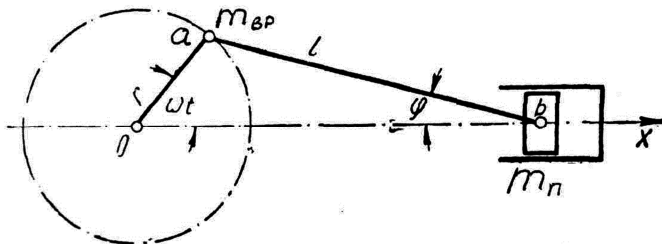




Рис. 6.4. Расчетная схема динамической системы кривошипно-шатунного вибровозбудителя

Все массы вибровозбудителя заменим двумя приведенными масса-ми: m_{BP} – масса вращающихся частей, размещенная в точке a на оси пальца кривошипа; $m_{П}$ – масса частей, совершающих возвратно-поступательное движение, размещенная в точке b на оси пальца ползуна.

Введем такие обозначения: M_1 – масса кривошипа; M_2 – масса ползуна; M_3 – масса шатуна; ρ – расстояние от оси вращения до центра тяжести кривошипа; r – радиус кривошипа; ℓ – длина шатуна; ℓ_a и ℓ_b – расстояния от центра масс шатуна соответственно до точек a и b ; ω – угловая скорость вращения кривошипа.

Массу кривошипа M_1 , приведенную к точке a , обозначим через m_K . Центробежная сила этой массы равна центробежной силе кривошипа:

$$\dot{I}_1 \cdot \rho \cdot \omega^2 = m_K \cdot r \cdot \omega^2,$$

откуда

$$m_K = M_1 \rho / r. \quad (6.14)$$

Массу ползуна M_2 можно считать сосредоточенной в точке b .

Массу шатуна M_3 заменим двумя приведенными массами m_a и m_b , сосредоточенными в точках a и b :

$$m_a = \frac{\ell_b}{\ell} M_3; \quad m_b = \frac{\ell_a}{\ell} M_3, \quad (6.15)$$

причем $\ell_a + \ell_b = \ell$.

Окончательно получаем

$$m_{BP} = m_K + m_a; \quad (6.16)$$

$$m_{П} = M_2 + m_b. \quad (6.17)$$

Горизонтальная составляющая силы инерции массы m_{BP} будет равна $m_{BP} \cdot r \cdot \omega^2 \cdot \cos \omega t$.

Частота изменения этой силы равна угловой скорости вращения кривошипа ω .

Для определения горизонтальной составляющей силы инерции массы $m_{П}$ сначала определим закон ее возвратно-поступательного движения. Как видно из расчетной схемы, расстояние $x = ob$ составляет

$$x = r \cdot \cos \omega t + \ell \cdot \cos \varphi. \quad (6.18)$$

Между углами ωt и φ существует такая связь:

$$r \cdot \sin \omega t = \ell \cdot \sin \varphi,$$

$$\sin \varphi = \frac{r}{\ell} \sin \omega t.$$

Тогда можно записать

$$x = r \cdot \cos \omega t + \ell \sqrt{1 - \left(\frac{r}{\ell}\right)^2 \cdot \sin^2 \omega t}. \quad (6.19)$$

Разлагая второе слагаемое в степенной ряд и, ограничиваясь в разложении двумя первыми членами, получим:

$$x = r \cdot \cos \omega t + \ell \left(1 - \frac{r^2}{2\ell^2} \sin^2 \omega t \right). \quad (6.20)$$

Дважды дифференцируя это выражение, будем иметь:

$$\ddot{x} = -r\omega^2 \cdot \cos \omega t - \frac{r^2 \cdot \omega^2}{\ell} \cos 2\omega t. \quad (6.21)$$

Найдем силу инерции массы m_{Π} :

$$-m_{\Pi} \cdot \ddot{x} = m_{\Pi} \cdot r \cdot \omega^2 \left(\cos \omega t + \frac{r}{\ell} \cos 2\omega t \right). \quad (6.22)$$

Полная возмущающая сила, создаваемая в горизонтальном направлении, будет равна

$$P = m_{BP} \cdot r \cdot \omega^2 \cos \omega t + m_{\Pi} \cdot r \cdot \omega^2 \left(\cos \omega t + \frac{r}{\ell} \cos 2\omega t \right). \quad (6.23)$$

Эта сила состоит из двух слагаемых с частотой ω и 2ω .

Максимальное значение возмущающей силы имеет такой вид:

$$P_{\max} = m_{BP} \cdot r \cdot \omega^2 + m_{\Pi} \cdot r \cdot \omega^2 \left(1 + \frac{r}{\ell} \right). \quad (6.24)$$

6.3. Динамика вибрационных транспортеров

Вибрационный транспортер предназначен для перемещения кусковых и сыпучих материалов, которые условно будем называть грузом.

Действие вибрационного транспортера основано на том, что рабочий орган машины в начале и в конце каждого цикла колебаний занимает одно и то же положение, а транспортируемый груз в каждом цикле продвигается вперед относительно рабочего органа.

Имеются два основных типа вибротранспортирования – с постоянным нормальным давлением груза на рабочий орган и с переменным давлением, когда осуществляется периодическое ударное подбрасывание груза.

Наиболее перспективным является второй тип, т.к. он позволяет получать большую скорость перемещения груза. Увеличение скорости объясняется тем, что груз перемещается при его свободном полете, тогда как в безударных вибрационных транспортерах груз всегда находится в контакте с рабочим органом.

На рис.6.5. приведена расчетная схема одномассового вибрационного транспортера с дебалансным приводом для горизонтального перемещения груза с подбрасыванием.

Кинематика вибротранспортера задается опорными упругими элементами в виде плоских рессорных пакетов. Его колебания совершаются в направлении S под углом α к оси OX по гармоническому закону

$$S = A \cdot \sin kt, \quad (6.25)$$

где A – амплитуда возмущающей силы; k – ее частота; t – время.

Вертикальная и горизонтальная составляющие движения рабочего органа определяются соотношениями:

$$y = A \cdot \sin \alpha \cdot \sin kt; \quad x = A \cdot \cos \alpha \cdot \sin kt. \quad (6.26)$$

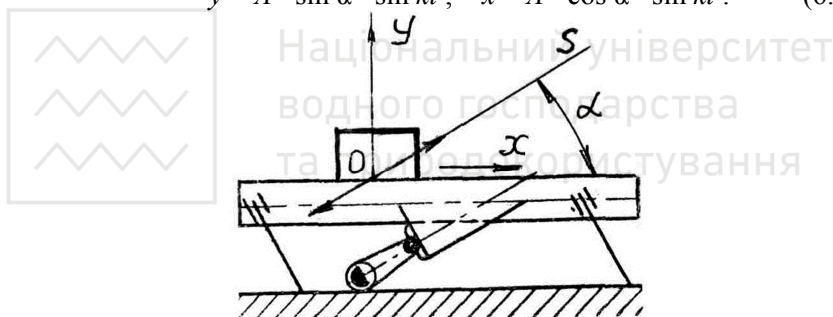


Рис. 6.5. Расчетная схема вибрационного транспортирования груза с подбрасыванием

Дифференцирование по времени дает

$$\begin{aligned} \dot{y} &= A \cdot k \sin \alpha \cdot \cos kt; \quad \ddot{y} = -A \cdot k^2 \sin \alpha \cdot \sin kt, \\ \dot{x} &= A \cdot k \cos \alpha \cdot \cos kt; \quad \ddot{x} = -A \cdot k^2 \cos \alpha \cdot \sin kt. \end{aligned} \quad (6.27)$$

Сначала рассмотрим вертикальное движение груза после отрыва его от рабочего органа, которое происходит в момент времени t_1 , когда вертикальное ускорение \ddot{y} по абсолютной величине становится равным ускорению силы тяжести g :

$$A \cdot k^2 \sin \alpha \cdot \sin kt_1 = g.$$

Основным параметром вибрационного транспортирования груза с



$$K_B = \frac{Ak^2 \cdot \sin \alpha}{g}. \quad (6.28)$$

Этот коэффициент показывает, во сколько раз максимум вертикальной составляющей ускорения рабочего органа \ddot{y}_{\max} больше ускорения силы тяжести. Момент времени t_1 , при котором происходит отрыв груза, связан с коэффициентом режима вибрации соотношением

$$\sin kt_1 = \frac{1}{K_B}. \quad (6.29)$$

Свободный полет груза в вертикальном направлении описывается уравнением

$$y_{\Gamma} = y_0 + \dot{y}_0(t - t_1) - g \frac{(t - t_1)^2}{2}, \quad (6.30)$$

где y_{Γ} – вертикальное перемещение груза; y_0 – начальное положение груза в момент отрыва от рабочего органа; \dot{y}_0 – начальная скорость груза в этот же момент.

Из соотношений (6.26) и (6.27) получаем

$$y_0 = A \cdot \sin \alpha \cdot \sin kt_1; \quad \dot{y}_0 = A k \sin \alpha \cdot \cos kt_1.$$

Подставляя эти значебния в (6.30) и принимая во внимание (6.28) и (6.29), имеем

$$y_{\Gamma} = \frac{g}{k^2} + \frac{gK_B \cdot \cos kt_1}{k}(t - t_1) - \frac{g}{2}(t - t_1)^2. \quad (6.31)$$

Момент времени t_2 падения груза на рабочий орган находим из условия $y_0(t_2) = y_{\Gamma}(t_2)$:

$$A \sin \alpha \cdot \sin kt_2 = \frac{g}{k^2} + \frac{gK_B \cdot \cos kt_1}{k}(t_2 - t_1) - \frac{g}{2}(t_2 - t_1)^2. \quad (6.32)$$

Введем обозначения

$$\psi = \frac{k}{2}(t_2 - t_1). \quad (6.33)$$

Тогда условие (6.32) принимает вид

$$A \sin \alpha \cdot \sin(2\psi + kt_1) = \frac{g}{k^2} + \frac{2\psi gK_B \cdot \cos kt_1}{k^2} - \frac{2g\psi^2}{k^2} \quad (6.34)$$

или после преобразований



$$\sin(2\psi + kt_1) = \sin kt_1 + 2\psi \cos kt_1 - 2\psi^2 \cdot \sin kt_1. \quad (6.35)$$

Из квадратного уравнения (6.35) при известном значении kt_1 , находим ψ и затем t_2 из (6.33). В момент времени t_2 происходит удар, и если нет отскока, груз движется в контакте с рабочим органом до нового отрыва при $t = t_1 + 2\pi/k$.

На рис.6.6. штриховой линией показан график $y_T(t)$ при $t_2 < t_1 + 2\pi/k$. При $t_2 = t_1 + 2\pi/k$ наблюдается режим непрерывного подбрасывания. Для этого режима $\psi = \pi$. Подставляя $\psi = \pi$ в (6.35), находим значение kt_1^* , при котором будет режим непрерывного подбрасывания,

$$\sin kt_1^* = \sin kt_1^* + 2\pi \cos kt_1^* - 2\pi^2 \sin kt_1^*,$$

или
$$tgkt_1^* = \frac{1}{\pi}. \quad (6.36)$$

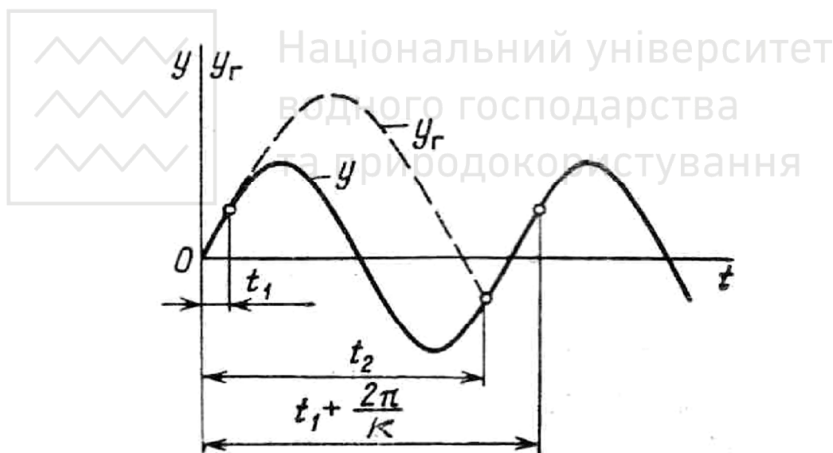


Рис. 6.6. График изменения функций $y = f(t)$ и $y_T = f(t)$

Безразмерный коэффициент режима вибрации при непрерывном подбрасывании

$$K_B^* = \frac{1}{\sin kt_1^*} \quad \text{или} \quad K_B^* = \sqrt{\pi^2 + 1} \approx 3,3. \quad (6.37)$$

В промышленных вибрационных транспортерах принимают $2 < K_B < 2,8$.

Горизонтальная скорость груза при свободном полете сохраняется постоянной и равной горизонтальной составляющей рабочего органа в



$$V_{\Gamma} = Ak \cos \alpha \cos kt_1 \quad \text{или} \\ V_{\Gamma} = Ak \cos \alpha \frac{\sqrt{K_B^2 - 1}}{K_B}. \quad (6.38)$$

После удара груз некоторое время находится в контакте с рабочим органом, т.е. горизонтальная составляющая скорости груза $V_{\Gamma} = \delta$ по соотношению (6.27). Вследствие относительной кратковременности контакта груза с рабочим органом считают, что расчетную горизонтальную скорость груза V можно принять постоянной и равной скорости V_{Γ} с поправочным коэффициентом b , зависящим от вида перемещаемого материала:

$$V = b \cdot Ak \cos \alpha \frac{\sqrt{K_B^2 - 1}}{K_B}. \quad (6.39)$$

Для кусковых материалов $b = 0,7 \dots 1,0$; для сыпучих материалов значительно меньше – $b = 0,2 \dots 0,5$. Это объясняется тем, что при вибротранспортировании сыпучих материалов их сплошной слой отрывается от рабочего органа с некоторым запозданием при более высоком вертикальном ускорении.

Направление действия вибрационных сил обычно варьирует в пределах $\alpha = 25 \dots 35^\circ$.

6.4. Динамика виброударного погружения свай

Виброударное погружение свай характеризуется большой скоростью процесса и его экономичностью, так как в этом случае не нужны дорогостоящие копры и паросиловые установки. Необходим только механический возбудитель колебаний, приводимый в движение электродвигателем.

Виброударное погружение осуществляется под действием статической силы, направленной вниз, и периодической ударной нагрузки, создаваемой вибромолотом. Принципиальная схема динамической системы вибромолота представлена на рис.6.7.

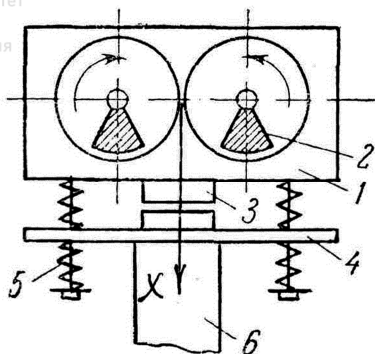


Рис. 6.7. Расчетная схема виброударного погружения свай:
1 – виброударная масса; 2 – вибровозбудитель; 3 – ударный боек;
4 – опорная плита; 5 – упругая связь; 6 – свая

Положим, что на динамическую систему вибромолота действует возмущающая сила

$$F = F_0 \cdot \cos(kt + \alpha), \quad (6.40)$$

где k – частота возмущающей силы; α – начальная фаза вынужденных колебаний.

Введем следующие обозначения: m – подвижная ударная масса; $c_{\text{ПР}}$ – приведенная линейная жесткость упругой связи; x_0 – начальный зазор между бойком и свайей; x – текущая координата смещения подвижной массы.

Уравнение движения подвижной массы имеет вид:

$$\ddot{\delta} + \omega^2 \cdot \delta = q \cos(kt + \alpha), \quad (6.41)$$

где $\omega = \sqrt{c_{\text{ПР}} / m}$ – собственная частота колебаний; $q = F_0 / m$; t – текущее время.

Общее решение ищем в такой форме:

$$x = \tilde{n}_1 \cos(\omega t + \varphi) + \tilde{n}_2 \cos(kt + \alpha), \quad (6.42)$$

где φ – начальная фаза собственных колебаний.

Примем такие начальные условия:

$$\text{при } t = 0 \quad x(0) = -x_0; \quad \dot{\delta} = \Delta \cdot V;$$

$$\text{при } t = T = 2\pi/k \quad x(T) = -x_0; \quad \dot{\delta} = V,$$

где V – скорость ударной массы до соударения; Δ – коэффициент восстановления скорости при ударе; T – период вынужденных колебаний.

После ряда преобразований находим такое конечное решение:



$$x = \frac{V(1+\Delta)}{2\omega \sin(\pi\omega/k)} \cos(\omega t - \pi\omega/k) - \frac{q}{k^2 - \omega^2} \cos\{kt + \arcsin[V(\Delta-1)(k^2 - \omega^2)/2qk]\} \quad (6.43)$$

Так как в момент соударения при $t = 0$ $x = -x_0$, то

$$-x_0 = V(1+\Delta) \operatorname{ctg}(\pi\omega/k) / 2\omega - q \cos \arcsin[V(\Delta-1) \times (k^2 - \omega^2) / 2qk] / (k^2 - \omega^2). \quad (6.44)$$

Из соотношения (6.44) получим расчетное уравнение для нахождения ударной скорости V :

$$V^2 + 4x_0 \frac{k\nu}{(1-\Delta)(1+\nu^2)} V + \frac{4k^2 \left[x_0^2 - \frac{q^2}{k^4(1-\Psi^2)^2} \right]}{(1-\Delta)^2(1+\nu^2)} = 0, \quad (6.45)$$

где $\nu = (1+\Delta) \operatorname{ctg} \pi\Psi / (1-\Delta)\Psi$; $\Psi = \omega/k$.

Решая квадратное уравнение (6.45) относительно скорости V и вводя безразмерную функцию $\Phi_{1,2} = V \cdot k/q$, получим:

$$\hat{O}_{1,2} = \frac{1}{1-\Delta} \left[\frac{\lambda\nu \pm \sqrt{\frac{1+\nu^2}{(1-\Psi^2)^2} - \lambda^2}}{1+\nu^2} \right], \quad (6.46)$$

где $\lambda = -\frac{x_0 \cdot k^2}{q}$ – приведенный зазор.

Знаки (+) и (–) перед радикалом в соотношении (6.46) показывают, что скорость ударной массы может принимать положительные и отрицательные значения. Причем действительные значения функция $\Phi_{1,2}$ принимает только в случае, когда

$$|\lambda| \leq \left| \frac{\sqrt{1+\nu^2}}{1-\Psi^2} \right|. \quad (6.47)$$

Функция $\Phi_{1,2}$ достигает оптимального значения при

$$\lambda_{\text{opt}} = \frac{\nu}{|1-\Psi^2|}. \quad (6.48)$$

С учетом выражения для ν фактически мы имеем функциональную зависимость $\lambda_{\text{ндо}} = f(\Delta, \psi)$.

Величина коэффициента Δ зависит от материала и формы бойка вибромолота и свай, соотношения их масс, характера грунта и глубины забивки свай. На практике величина Δ колеблется от $-0,2$ до $+0,2$. В процессе забивки свай наблюдается возрастание Δ на величину, приблизительно равную $0,2$. Это объясняется возрастанием сил взаимодействия свай с грунтом. Поэтому для легких свай, труб и шпунта можно принять $\Delta = 0$. И только для тяжелых свай принимают $\Delta = 0,2$.

Графическая зависимость $\lambda_{\text{ндо}} = f(\psi)$ показана на рис.6.8.

Анализ полученных зависимостей показывает, что при дорезонансном режиме ($\psi < 1,0$) значения $\lambda_{\text{опт}}$ следует определять при $\psi = 0,3 \dots 0,7$, а при резонансном режиме ($\psi > 1,0$) – при $\psi = 1,3 \dots 1,9$.

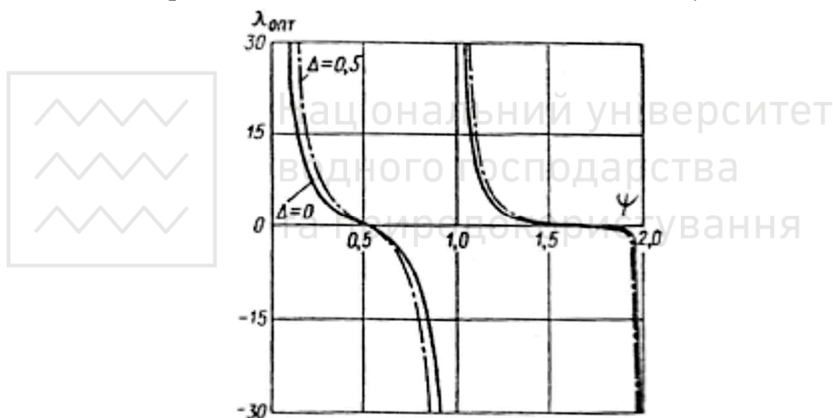


Рис. 6.8. Графики изменения функции $\lambda_{\text{ндо}} = f(\psi)$ при $\Delta = 0; 0,5$

6.5. Динамика вибрационных рыхлителей

Вибрационное разрушение наиболее эффективно для грунтов средней крепости, а также при работе узких ножей на больших глубинах и скоростях. Наиболее рациональным режимом разрушения грунтов является такой режим, при котором направление рабочей скорости землеройной машины ν_r совпадает с направлением приложения вибрации, т.е. при продольных колебаниях. При этом скорость вспомогательного колебательного движения составляет



$$u = a k \cos kt . \quad (6.49)$$

где a и k – соответственно амплитуда и частота колебаний возмущающей силы.

Абсолютная скорость рабочего органа будет равна

$$V = v_p + a k \cos kt . \quad (6.50)$$

Основными энергетическими параметрами вибрационных рыхлителей являются динамические нагрузки при разрушении грунтов и суммарная мощность, потребная для перемещения рабочего органа.

При определении динамических нагрузок будем исходить из теории ударного разрушения. Уравнение движения рабочего органа при ударе о грунт имеет такой вид:

$$m\ddot{x} + P(t) = 0 . \quad (6.51)$$

где m – приведенная масса подвижных частей рабочего органа; $P(t)$ – усилие сопротивления грунта.

Полагаем, что $P(t) = A \cdot x(t)$,

где $\dot{A} = \frac{2rE}{1 - \mu^2}$; E – динамический модуль упругости; μ – коэффициент Пуассона; r – радиус сечения рабочего органа, контактирующего с грунтом в момент удара.

Преобразуем уравнение к стандартному виду:

$$\ddot{\delta} + \omega^2 \delta = 0 , \quad (6.52)$$

где $\omega = \sqrt{\dot{A} / \delta}$ – собственная частота колебаний динамической системы рабочего органа рыхлителя.

Найдем решение расчетного уравнения

$$x(t) = C_1 \cdot \sin \omega t + C_2 \cdot \cos \omega t . \quad (6.53)$$

Примем такие начальные условия:

при $t = 0$ $x = 0$; $\dot{x} = v_p + ak$.

Тогда окончательно имеем

$$x(t) = \frac{V}{\omega} \sin \omega t . \quad (6.54)$$

Максимальное динамическое усилие, затрачиваемое на разрушение грунта, составит:

$$P_{A \max} = (v_p + ak) \sqrt{\frac{2rEm}{1 - \mu^2}} . \quad (6.55)$$

Вопрос об оценке мощности, расходуемой на преодоление сил

трения при перемещении вибрационного рабочего органа через разрушаемую среду, является довольно спорным. Некоторые ученые полагают, что в этом случае возникает эффект снижения сил и коэффициентов трения и указанная мощность заметно снижается. Наиболее полно эта проблема исследована д.т.н. И.Я.Федоренко^{*)}.

Основные выводы сводятся к следующему.

Зависимость действительной силы трения F от абсолютной скорости движения вибрационного рабочего органа V можно представить в виде закона Кулона:

$$F(V) = F \cdot \text{sign}(V), \quad (6.56)$$

^{*)} И.Я.Федоренко. Механизм трения вибрационных рабочих органов. Ж. «Механизация и электрификация сельского хозяйства, № 6, 1986, стр. 14-16.

где $\text{sign} = \begin{cases} 1 & \text{їđđ } V < 0 \\ -1 & \text{їđđ } V > 0 \end{cases}$.

Из выражения (6.50) следует, что при $v_p > ak$ движение рабочего органа пульсирующее, при $v_p < ak$ рабочий орган скользит относительно среды вперед и назад. Интерес представляет именно второй тип движения. Дело в том, что при $V < 0$ сила трения F из сопротивления превращается в силу, способствующую перемещению, т.е. происходит так называемое отрицательное трение.

Введем в рассмотрение критерий Струхала

$$Sh = v_p / ak. \quad (6.57)$$

Найдем среднее за период колебаний значение силы трения для вибрационного рабочего органа, движущегося со скоростью v_p :

$$F_B = \begin{cases} F \left[\frac{2}{\pi} \arccos(-Sh) - 1 \right] & \text{їđđ } Sh \leq 1 \\ F & \text{їđđ } Sh > 1. \end{cases}; \quad (6.58)$$

Таким образом, эффект снижения трения при вибрации действительно присутствует и зависит от числа Струхала. Однако он возможен только при $Sh < 1$ ($v_p < ak$).

Сопоставим значения мощностей для безвибрационного (N) и вибрационного (N_B) перемещений рабочего органа со средней скоростью v_p в течение одного периода колебаний.

В первом случае имеем

$$N = F \cdot v_p, \quad (6.59)$$



$$N_B = \frac{k}{2\pi} F(S_+ + S_-), \quad (6.60)$$

где S_+ и S_- – перемещения рабочего органа в течение периода колебаний соответственно вперед и назад.

Для вычисления величин S_+ и S_- следует определить моменты времени остановки рабочего органа в течение периода колебаний. Для этого необходимо решить уравнение

$$\dot{S} = V = v_p + ak \cos kt = 0. \quad (6.61)$$

Корни этого уравнения будут действительными только при $v_p < ak$, т.е. при $Sh < 1$:

$$t_1 = -\frac{1}{k} \arccos(-Sh);$$

$$t_2 = \frac{1}{k} \arccos(-Sh); \quad (6.62)$$

$$t_3 = -\frac{1}{k} \arccos(-Sh) + \frac{2\pi}{k}.$$

Тогда

$$S_+ = S(t_2) - S(t_1) = \frac{2v_p}{k} \arccos(-Sh) + 2a\sqrt{1 - Sh^2}; \quad (6.63)$$

$$S_- = S(t_2) - S(t_3) = v_p \left[\frac{2}{k} \arccos(-Sh) - \frac{2\pi}{k} \right] + 2a\sqrt{1 - Sh^2}. \quad (6.64)$$

После преобразования выражения (6.60) с учетом (6.63) и (6.64) получим

$$\theta = \frac{N_B}{N} = \frac{2}{\pi} \arccos(-Sh) - 1 + \frac{2}{\pi} \frac{\sqrt{1 - Sh^2}}{Sh}. \quad (6.65)$$

Зависимость $\theta = f(Sh)$ представлена на рис 6.9.

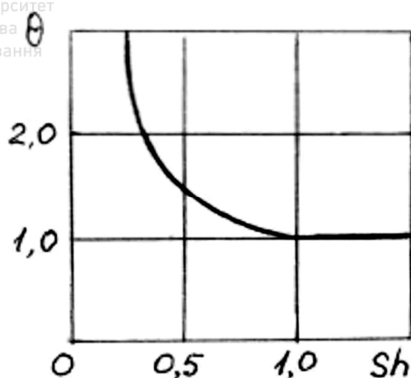


Рис. 6.9. График функции $\theta = f(Sh)$

Анализ рис.6.9. показывает, что величина мощности N_B , затрачиваемой на вибрационное перемещение рабочего органа с постоянной скоростью v_r на всем диапазоне изменения $Sh \leq 1$ превышает величину мощности N при безвибрационном перемещении, несмотря на наличие эффекта снижения трения. Наиболее целесообразно использовать при вибрационном рыхлении диапазон $Sh = 0,4 \dots 0,8$, когда соотношение $N_B / N \leq 1,5$.

7. ВИБРОИЗОЛЯЦИЯ МАШИН

Виброизоляцией называется способ уменьшения колебаний динамической системы, основанный на значительном ослаблении ее связей с другими системами. Например, виброизоляция двигателя от рамы машины; виброизоляция движущейся машины от воздействия микронеровностей грунтовой поверхности (т.н. подрессоривание).

Таким образом, при виброизоляции, как минимум, присутствуют две динамические системы: одна из них является источником возбуждения, а другая – защищаемым объектом. Эти две системы соединены между собой посредством виброизоляторов (амортизаторов).

7.1. Динамические характеристики одноосного виброизолятора

Обычно массы источника возбуждения и объекта виброзащиты существенно отличаются одна от другой. В таком случае движение тела «большой» массы считается независимым от движения тела «малой» массы. Тело «большой» массы называют основанием независимо от того, является ли оно защищаемым объектом или источником возбуж-



На рис.7.1 приведена расчетная схема виброизоляции динамической системы (например, двигателя внутреннего сгорания) массой m , которая является источником возбуждения, от другой динамической системы (массивной рамы машины), которая является защищаемым объектом и играет роль основания. Между системами помещен виброизолятор с приведенным коэффициентом линейной жесткости c и приведенным коэффициентом демпфирования h . Силовое возбуждение осуществляется силой $F(t) = F_0 \cdot \sin kt$.

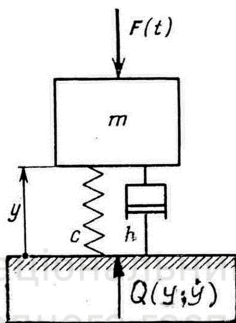


Рис. 7.1. Расчетная схема одноосного виброизолятора

В рассматриваемом случае реакция виброизолятора Q выражается таким соотношением:

$$Q(y, \dot{y}) = -cy - b\dot{y}, \quad (7.1)$$

где b – приведенный коэффициент вязкости ($b = 2hm$).

Так как внешняя сила $F(t)$ и реакция $Q(y, \dot{y})$ направлены вдоль одной оси, то виброизолятор будем называть одноосным.

Уравнение движения источника возбуждения описывается аналитической моделью типа (2.45) и имеет такой вид:

$$\ddot{y} = 2h\dot{y} + \omega^2 y = \frac{F_0}{m} \sin kt, \quad (7.2)$$

где $h = b/2m$; $\omega^2 = c/m$.

Решение этого уравнения для установившихся вынужденных колебаний, т.е. после затухания собственных колебаний, согласно соотношению (2.47), получим в виде

$$y = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega^2 - k^2)^2 + 4h^2k^2}} \sin(kt + \varphi), \quad (7.3)$$



где $tg\varphi = \frac{2hk}{\omega^2 - k^2}$.

Дифференцируя выражение (7.3), находим

$$\dot{y} = \frac{F_0 \cdot k}{m\sqrt{(\omega^2 - k^2)^2 + 4h^2k^2}} \cos(kt + \varphi). \quad (7.4)$$

Подставляя значения y и \dot{y} в (7.1), получаем силу, передаваемую виброизолятором на основание:

$$Q = -\frac{F_0 \cdot c}{m\sqrt{(\omega^2 - k^2)^2 + 4h^2k^2}} \left[\sin(kt + \varphi) + \frac{kb}{c} \cos(kt + \varphi) \right]. \quad (7.5)$$

Согласно соотношению (2.51), коэффициент динамичности описывается таким выражением

$$\beta^* = \frac{\omega^2}{\sqrt{(\omega^2 - k^2)^2 + 4h^2k^2}}.$$

Тогда равенство (7.5) примет вид:

$$Q = -\beta^* F_0 \left[\sin(kt + \varphi) + \frac{2hk}{\omega^2} \cos(kt + \varphi) \right]. \quad (7.6)$$

Для определения Q_{\max} преобразуем выражение (7.6), используя известное тригонометрическое соотношение

$$a \cdot \sin \alpha + b \cdot \cos \alpha = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\alpha + \varepsilon), \quad (7.7)$$

где $\varepsilon = \arctg(b/a)$.

В нашем случае: $a = 1$, $b = 2hk/\omega^2$.

Тогда

$$Q = -\beta^* F_0 \sqrt{1 + \frac{4h^2k^2}{\omega^4}} \sin(kt + \varphi + \varepsilon), \quad (7.8)$$

где $\varepsilon = \arctg(2hk/\omega^2)$.

Следовательно, максимальное значение силы Q равно

$$Q_{\max} = \beta^* F_0 \sqrt{1 + \frac{4h^2k^2}{\omega^4}}. \quad (7.9)$$

Отношение наибольшей силы, передаваемой основанию при силовом возбуждении, к амплитуде гармонической возбуждающей силы называется коэффициентом амортизации колебаний, или коэффициентом

$$\eta = \frac{Q_{\max}}{F_0} = \beta^* \sqrt{1 + \frac{4h^2 k^2}{\omega^4}}. \quad (7.10)$$

На рис.7.2 показаны графики зависимости коэффициента виброизоляции η от отношения частоты возмущающей силы к собственной частоте источника возбуждения.

При жестком соединении источника возбуждения и основания $\eta = 1$; при $\eta < 1$ виброзащитная система эффективна; при $\eta > 1$ применение виброизолятора нецелесообразно. Для того, чтобы выполнялось соотношение $\eta < 1$, должно соблюдаться условие

$$\frac{k}{\omega} > \sqrt{2}. \quad (7.11)$$

Обычно принимают $k/\omega \geq 4$.

При кинематическом возбуждении коэффициент виброизоляции имеет такое же значение, как и при силовом возбуждении.

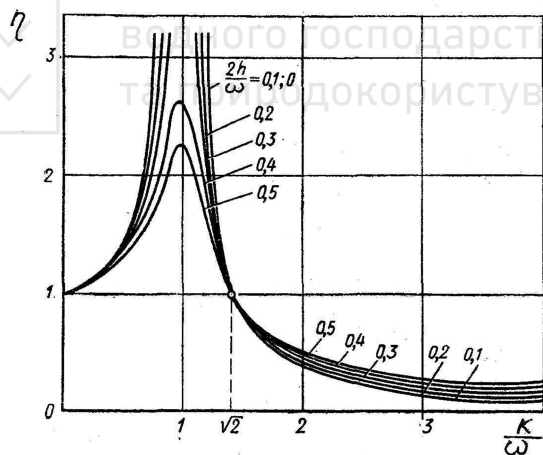


Рис. 7.2. Зависимости $\eta = f\left(\frac{k}{\omega}\right)$ при различных значениях $2h/\omega$

Один из рациональных вариантов конструкции виброизолятора показан на рис.7.3.

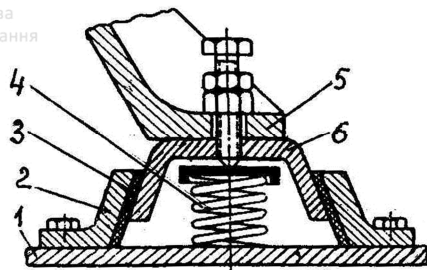


Рис. 7.3. Конструктивная схема одноосного виброизолятора:
1 – защищаемый объект; 2 – неподвижная часть виброизолятора;
3 – резиновый демпфирующий элемент; 4 – упругий элемент;
5 – источник возбуждения; 6 – подвижная часть виброизолятора

В последнее время вместо традиционной резины в виброизоляторах стали применять литьевой полиуретан с высокими прочностными свойствами. Это позволяет уменьшить габаритные размеры и массу виброизоляторов, повысить их долговечность.

В современных землеройных машинах жесткость виброизоляторов изменяется в большом диапазоне. Например, суммарная жесткость амортизационного крепления при «подвеске» кабин составляет для среднего бульдозера 2117 Н/м, для тяжелого (на базе трактора Т-330) – 4400 Н/м.

7.2. Динамические характеристики двухкаскадной виброизоляции

Для повышения эффективности виброизоляции при высокочастотных колебаниях, когда $k \gg \omega$, целесообразно применять двухкаскадную виброизоляцию, расчетная схема которой приведена на рис.7.4.

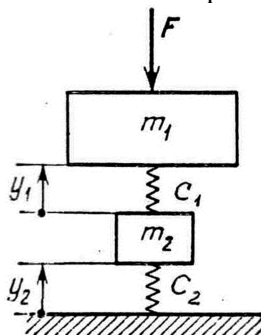




Рис. 7.4. Расчетная схема двухкаскадной виброизоляции

Источник возбуждения массой m_1 , совершающий гармонические колебания под действием силы $F = F_0 \cdot \sin kt$, упругой связью с коэффициентом жесткости c_1 соединен с промежуточной массой m_2 , которая, в свою очередь, соединена с основанием упругой связью с коэффициентом жесткости c_2 . Демпфирование не учитывается.

Уравнения движения динамической системы описываются аналитической моделью типа (2.69):

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{y}_1 + c_1 (y_1 - y_2) &= F_0 \cdot \sin kt, \\ m_2 \ddot{y}_2 - c_1 (y_1 - y_2) + c_2 y_2 &= 0. \end{aligned} \quad (7.12)$$

Установившиеся вынужденные колебания в соответствии с (2.71) имеют такой вид:

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{F_0 (c_1 - m_2 k^2 + c_2)}{\Delta} \sin kt, \\ y_2 &= \frac{F_0 \cdot c_1}{\Delta} \sin kt, \end{aligned} \quad (7.13)$$

где $\Delta = (c_1 - m_1 k^2)(c_1 - m_2 k^2 + c_2) - c_1^2$.

Сила, передаваемая виброизолятором на основание, будет равна

$$Q = -y_2 \cdot c_2 = -\frac{F_0 \cdot c_1 \cdot c_2}{\Delta} \sin kt. \quad (7.14)$$

Ее максимальная величина

$$Q_{\max} = \frac{F_0 \cdot c_1 \cdot c_2}{\Delta}. \quad (7.15)$$

Найдем выражение для коэффициента виброизоляции

$$\eta^* = \frac{Q_{\max}}{F_0} = \frac{c_1 \cdot c_2}{c_1 c_2 - [c_1 m_2 + (c_1 + c_2) m_1] k^2 + m_1 m_2 k^4}. \quad (7.16)$$

При больших значениях k имеем

$$\eta^* \approx \frac{c_1 \cdot c_2}{k^4 m_1 m_2} \equiv \frac{c_1}{m_1 k^2} \cdot \frac{c_2}{m_2 k^2}. \quad (7.17)$$

Отсюда следует, что для повышения эффективности виброизоляции надо удовлетворить условию $\frac{c_2}{m_2} < k^2$.



Учет демпфирования при больших значениях k не изменяет существенно выводов об эффективности двухкаскадной виброизоляции.

7.3. Динамические характеристики виброизоляции при ударном воздействии

Мерой ударного воздействия считается мгновенный импульс силы

$$S = \int_0^{\tau} P(t) dt, \quad (7.18)$$

где $P(t)$ – импульсивная нагрузка; τ – длительность удара.

Импульсивная нагрузка представляется выражением

$$\begin{cases} P(t) = P_0 f(t) & \text{и} \text{ } 0 \leq t \leq \tau; \\ P(t) = 0 & \text{и} \text{ } t > \tau, \end{cases} \quad (7.19)$$

где P_0 – максимальное значение нагрузки; $f(t)$ – форма удара.

В таком случае выражение (7.18) примет вид:

$$S = P_0 \int_0^{\tau} f(t) dt. \quad (7.20)$$

Рассмотрим особенности динамики виброизолятора при простейшей (прямоугольной) форме удара, когда $f(t) = 1$. В этом случае

$$S = P_0 \tau. \quad (7.21)$$

Будем полагать, что виброизолятор имеет только упругую связь с основанием с коэффициентом жесткости c ; демпфирование не учитываем. Тогда уравнение движения условного источника возбуждения массой m , который подвергается ударному нагружению, опишется аналитической моделью типа (2.37):

$$\ddot{y} + \omega^2 y = \frac{P(t)}{m}, \quad (7.22)$$

где $\omega^2 = c/m$.

Положим, что мгновенный импульс приложен к источнику возбуждения в момент $t = \xi$; после этого он начал совершать свободные колебания

$$y = \tilde{N}_1 \cdot \sin \omega(t - \xi) + \tilde{N}_2 \cos \omega(t - \xi). \quad (7.23)$$

В начальный момент времени перемещение $y = 0$, а скорость \dot{y}



находится по теореме об изменении количества движения $m\dot{y} = S$. С учетом этих начальных условий получаем: $C_1 = S/(m\omega)$; $C_2 = 0$.

Следовательно, свободные колебания источника возбуждения после ударного воздействия совершаются по гармоническому закону

$$y = \frac{S}{m\omega} \sin \omega(t - \xi). \quad (7.24)$$

Максимальная величина силы, передаваемой на основание,

$$Q_{\max} = c \cdot \frac{S}{m\omega} \equiv \omega S. \quad (7.25)$$

Для уменьшения Q_{\max} надо уменьшить собственную частоту ω . При этом, согласно (7.24), увеличивается амплитуда колебаний.

При инженерном динамическом расчете величину импульса при прямом ударе тела массой M по конструкции машины определяют по приближенной формуле

$$S = M v_0 (1 + k_B), \quad (7.26)$$

где v_0 – скорость в начале удара; k_B – коэффициент восстановления при ударе.

Например, при ударе по стальной конструкции стальным телом в форме шара $k_B = 0,60$, а при ударе стальным телом в форме параллелепипеда $k_B = 0,35$.

7.4. Управляемые системы виброизоляции

Управляемыми или активными системами виброизоляции называют такие системы, в которых эффективность защиты от колебаний достигается компенсацией возмущающих сил или перемещений.

На рис.7.5 показана схема электрогидравлической виброзащитной системы, предназначенной для уменьшения перемещений y объекта с общей массой m относительно неподвижного основания.

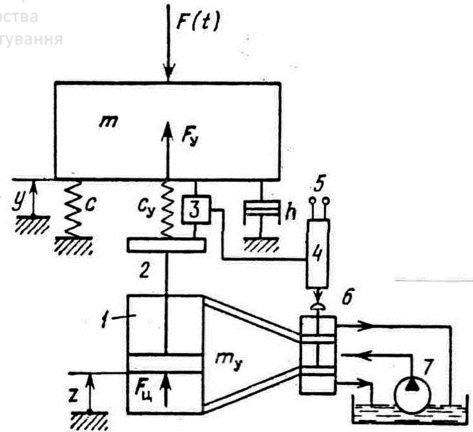


Рис. 7.5. Управляемая система виброизоляции

Источником возбуждения колебаний является сила $F(t) = F_0 \cdot \sin kt$. Между объектом и основанием помещен одноосный виброизолятор с приведенным коэффициентом жесткости c и приведенным коэффициентом демпфирования h . Управляющее воздействие F_y создается силовым гидроцилиндром 1, поршень которого действует на объект через упругую прокладку 2 с коэффициентом жесткости c_y . Движение поршня силового гидроцилиндра управляется по сигналу от датчика 3 относительных перемещений объекта и поршня. Этот сигнал подается в усилитель 4 с электрическим питанием 5. Усилитель вырабатывает сигнал, управляющий движением золотника 6, который регулирует подачу жидкости от насоса 7 в силовой гидроцилиндр. В среднем положении золотника перекрыты оба трубопровода, ведущие в силовой гидроцилиндр. При движении золотника вверх жидкость под давлением поступает в верхнюю полость силового гидроцилиндра и его поршень идет вниз. Соответственно, при движении золотника вниз – поршень идет вверх. Перемещение поршня z вызывает изменение силы упругости $F_y = c_y (y - z)$, действующей на объект со стороны упругой прокладки. При надлежащем выборе параметров виброзащитной системы сила F_y противодействует возбуждающей силе $F(t)$ и уменьшает перемещения y . Эту силу называют управляющим воздействием.

Коэффициент эффективности виброзащиты определяется по соотношению (вывод опускается):



$$K_{\dot{\phi}} = (\Delta_1^2 + k^2 \Delta_2^2) \sqrt{\frac{(c - mk^2)^2 + b^2 k^2}{(\gamma \cdot \Delta_1 + k^2 \Delta_2)^2 + k^2 (\Delta_1 - \gamma \cdot \Delta_2)^2}}, \quad (7.26)$$

где $\Delta_1 = \tilde{n} \cdot \gamma - (b + \gamma \cdot m)k^2$; $\Delta_2 = \tilde{n} + c_y + b\gamma - mk^2$; $b = 2hm$; γ - коэффициент, зависящий от параметров золотника, параметров настройки электрической части и эффективной площади поршня.

Параметры виброзащитной системы (h , c , c_y , γ) должны быть выбраны так, чтобы $K_{\text{эф}} > 1$.

7.5. Динамическое подрессоривание машин

Система динамического подрессоривания предназначена для защиты рабочего оборудования и машиниста-оператора движущейся машины от вибрационного воздействия микропрофиля дорожного полотна. Такая система обеспечивается специальными подвесками, которые создают упругую и демпфирующую связь остова машины с ходовыми элементами. Основная задача подвесок – нейтрализовать влияние вертикальных и продольных угловых колебаний машины при ее перемещениях, а также сдвинуть спектр возмущающих сил в сторону высоких частот (низкие частоты крайне опасны для машинистов-операторов). Угловые поперечные колебания обычно не учитываются.

Несмотря на большое многообразие конструкций подвесок их моделируют по единой расчетной схеме, представленной на рис.7.6.

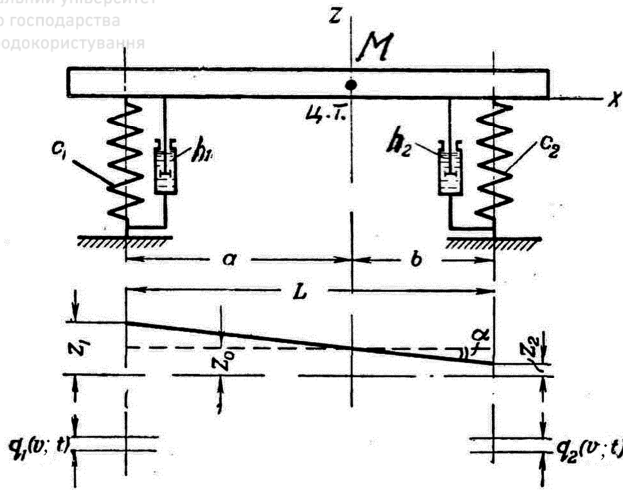


Рис. 7.6. Расчетная схема динамического поддрессирования машин

Приняты следующие обозначения: M – масса машины, приведенная к ее центру тяжести (ц.т.); ρ – радиус инерции машины относительно поперечной оси, проходящей через ц.т.; a и b – расстояния от ц.т. до передней и задней подвесок; c_1 и c_2 – приведенные коэффициенты жесткости; h_1 и h_2 – приведенные коэффициенты демпфирования; α – угол поворота остова машины в продольной плоскости; z_0 – вертикальное смещение ц.т.; z_1 и z_2 – вертикальные перемещения передней и задней подвесок; $q_1 = q_1(v; t)$ и $q_2 = q_2(v; t)$ – перемещения подвесок, создаваемые микрорельефом дорожного полотна; v – скорость передвижения машины.

Используя схему Лагранжа, получим общие уравнения колебаний остова машины:

$$\begin{aligned} M \cdot \ddot{z}_0 + h_1(\dot{z}_1 - \dot{q}_1) + h_2(\dot{z}_2 - \dot{q}_2) + \\ + c_1(z_1 - q_1) + c_2(z_2 - q_2) = 0; \\ M \rho^2 \ddot{\alpha} + h_1(\dot{z}_1 - \dot{q}_1)a - h_2(\dot{z}_2 - \dot{q}_2)b + \\ + c_1(z_1 - q_1)a - c_2(z_2 - q_2)b = 0. \end{aligned} \quad (7.27)$$

Так как вязкое трение незначительно влияет на частоту колебаний, будем полагать, что $h_1 = 0$; $h_2 = 0$.

В уравнения (7.27) входят четыре неизвестные: z_0 , z_1 , z_2 , α . Из них независимыми являются только две, например, z_1 и z_2 .



Согласно расчетной схеме имеем

$$z_1 = z_0 + a \alpha ; \quad z_2 = z_0 - b \alpha , \quad (7.28)$$

откуда

$$\alpha = \frac{z_1 - z_2}{L} ; \quad z_0 = \frac{a z_2 + b z_1}{L} , \quad (7.29)$$

где $L = a + b$.

После упрощений система уравнений (7.27) примет вид:

$$\begin{aligned} M \frac{b}{L} \ddot{z}_1 + c_1 z_1 + M \frac{a}{L} \ddot{z}_2 + c_2 z_2 &= c_1 q_1 + c_2 q_2 ; \\ M \frac{\rho^2}{L} \ddot{z}_1 + c_1 a z_1 - M \frac{\rho^2}{L} \ddot{z}_2 - c_2 b z_2 &= -c_1 q_1 a + c_2 q_2 b . \end{aligned} \quad (7.30)$$

Умножим первое уравнение на b и вычтем из него второе; далее умножим первое уравнение на a и сложим его со вторым. Получим такие уравнения:

$$\begin{aligned} M \frac{b^2 + \rho^2}{L^2} \ddot{z}_1 + c_1 z_1 + M \frac{ab - \rho^2}{L^2} \ddot{z}_2 &= c_1 q_1 ; \\ M \frac{a^2 + \rho^2}{L^2} \ddot{z}_2 + c_2 z_2 + M \frac{ab - \rho^2}{L^2} \ddot{z}_1 &= c_2 q_2 . \end{aligned} \quad (7.31)$$

Правые части уравнений представляют собой возмущающие силы, создаваемые микропрофилем дорожного полотна.

В первую очередь, найдем собственные частоты колебаний исследуемой динамической системы. Для этого положим, что в уравнениях (7.31) отсутствуют возмущающие силы, и воспользуемся аналитической моделью типа (2.66). Используя принятый в ней метод решения, придем к следующему уравнению частот:

$$(M_1 \cdot M_2 - M_3^2) \omega^4 - (c_1 \cdot M_2 + c_2 M_1) \omega^2 + c_1 c_2 = 0 , \quad (7.32)$$

где: $M_1 = M \frac{b^2 + \rho^2}{L^2} ; \quad M_2 = M \frac{a^2 + \rho^2}{L^2} ; \quad M_3 = M \frac{ab - \rho^2}{L^2} .$

Учитываем только положительные значения частот

$$\begin{aligned} \omega_{1,2}^2 &= \frac{1}{2(M_1 M_2 - M_3^2)} \times \\ &\times \left[c_1 M_1 + c_2 M_1 \mp \sqrt{(c_1 M_1 - c_2 M_2)^2 + 4 M_3^2 c_1 c_2} \right] . \end{aligned} \quad (7.33)$$



В случае, если $ab = \rho^2$, имеем

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{\tilde{n}_2}{M_2}}; \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{\tilde{n}_1}{M_1}}. \quad (7.34)$$

Это свидетельствует о независимости колебаний остова машины на передней и задней подвесках. При этом прекращаются продольные колебания машины, создающие эффект галопирования. Указанное свойство особенно важно для короткобазовых пневмоколесных стреловых кранов, т.к. исключается возможность отрыва колес от дорожного покрытия при движении с увеличенной скоростью.

В другом случае, когда $c_1 a = c_2 b$, происходят только вертикальные колебания и исчезает эффект подпрыгивания.

Если соблюдаются оба условия, то собственные частоты колебаний ω_1 и ω_2 совпадают. При этом устраняются и галопирование и подпрыгивание машины. Это обстоятельство, в частности, должно учитываться при создании тяжелых стреловых самоходных кранов на специальном многоосном шасси для обеспечения достаточных вертикальных нагрузок на ведущие оси и соответственно тягового усилия при движении по любым дорогам.

Перейдем к рассмотрению вынужденных колебаний подвесок. Введем упрощающее допущение о том, что между координатами z_1 и z_2 нет взаимной связи. Тогда уравнения (7.31) примут вид:

$$\begin{aligned} M \left(\frac{b^2 + \rho^2}{L^2} \right) \ddot{z}_1 + c_1 z_1 &= c_1 q_1; \\ M \left(\frac{a^2 + \rho^2}{L^2} \right) \ddot{z}_2 + c_2 z_2 &= c_2 q_2. \end{aligned} \quad (7.35)$$

Из разнообразных комбинаций последовательно чередующихся толчков на ходовые элементы машин, создаваемых дорожными условиями, наиболее нежелательны те, которые следуют периодически, через равные промежутки времени. Положим, что соответствующая возмущающая сила подчиняется гармоническому закону. В таком случае вынужденные колебания системы поддрессоривания описываются аналитической моделью типа (2.37).

Для определения частоты вынужденных колебаний k динамической системы можно сделать грубое допущение о том, что расстояние между дорожными неровностями является постоянным и равным ℓ . Тогда время прохождения через два соседних препятствия машиной, движу-



щейся со скоростью v , будет равно $t = \ell/v$. Период вынужденных колебаний $T = 2\pi/k$. Полагая $t = T$, получим

$$k = 2\pi v/\ell. \quad (7.36)$$

Экспериментальные исследования показали, что при транспортном режиме землеройных машин вертикальные колебания их ходовых элементов совершаются с технической частотой $f = 1 \dots 5$ Гц. Эти частоты являются резонансными для отдельных частей тела машиниста-оператора. Поэтому при проектировании системы динамического подрессоривания необходимо осуществлять так называемую отстройку (сдвиг) ее собственных частот из зоны наиболее опасных возмущающих воздействий в сторону повышенных частот (15...20 Гц). Это достигается соответствующим изменением жесткости упругих связей.

Пример 7.1. Для малогабаритной землеройной машины известны такие исходные данные: $M = 1,49 \frac{\text{ед} \cdot \tilde{n}^2}{\text{и}}$; $a = 1,42$ м; $b = 1,28$ м; $\rho = 1,23$ м; $c_1 = 32$ кН/м; $c_2 = 43$ кН/м.

Определить частоты собственных колебаний остова машины для заданной системы подрессоривания.

Решение. Найдем условные массы

$$M_1 = 0,643 \frac{\text{ед} \cdot \tilde{n}^2}{\text{и}}; \quad M_2 = 0,721 \frac{\text{ед} \cdot \tilde{n}^2}{\text{и}}; \quad M_3 = 0,063 \frac{\text{ед} \cdot \tilde{n}^2}{\text{и}}.$$

Подставляя эти данные в формулу (7.33) получим

$$\omega_1 = 6,93 \text{ с}^{-1}; \quad \omega_2 = 7,92 \text{ с}^{-1}.$$

Такие частоты опасны для машиниста-оператора, поэтому систему подрессоривания следует сделать более жесткой.

Пример 7.2. Определить транспортную скорость передвижения колесного экскаватора, при которой может наступить резонанс задней системы подрессоривания. Профиль дорожного полотна описывается законом (рис.7.7):

$$z = \frac{a}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{\ell} \right),$$

где: a – глубина впадин; ℓ – длина дорожной волны (принимаем $\ell = 7$ м).

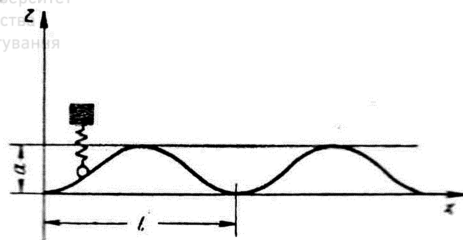


Рис. 7.7. Расчетная схема к Примеру 7.2.

Статическая нагрузка на заднюю систему поддрессирования $Q = 28,6$ кН, коэффициент линейной жесткости системы $c = 90$ кН/м. Упругость шин не учитывается. Принять при расчете, что колебание передней и задней систем поддрессирования не зависимы друг от друга.

Решение.

Находим собственную частоту колебаний системы поддрессирования

$$\omega = \sqrt{\frac{\tilde{n}g}{Q}} = \sqrt{\frac{90 \cdot 9,8}{28,6}} = 5,56 \text{ с}^{-1}.$$

Частота вынужденных колебаний k определяется по соотношению (7.36). Резонанс системы поддрессирования возможен в случае, когда $\omega = k$, т.е.

$$\frac{2\pi v}{\ell} = \omega,$$

откуда определяем резонансную скорость движения экскаватора

$$v = \frac{\omega \cdot \ell}{2\pi} = \frac{5,56 \cdot 7}{2 \cdot 3,14} = 6,2 \text{ м/с (22,3 км/ч)}.$$

7.6. Виброзащита машиниста-оператора

Для разработки систем виброзащиты рабочего места машиниста-оператора*) мобильных строительных и дорожных машин необходимо располагать данными об источниках динамического возбуждения, их интенсивности, частотном диапазоне, путях продвижения вибрации по элементам конструкции машины. На блок-схеме, представленной на

*) В дальнейшем вместо термина «машинист-оператор» будем использовать упрощенный термин «машинист»

рис.7.8, показано формирование вибрации на одноковшовом экскаваторе.

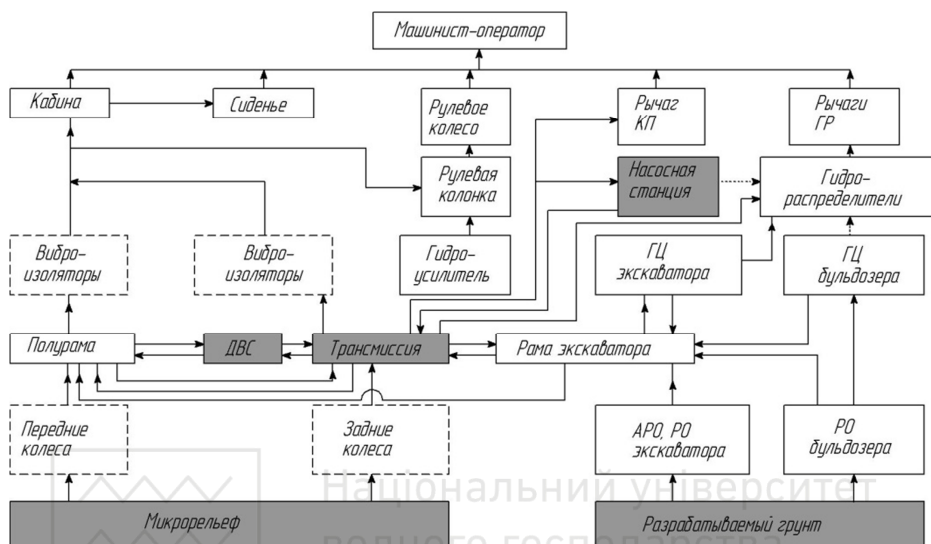


Рис. 7.8. Распространение вибрации от ее источников до рабочего места машиниста на экскаваторе ЭО-4121

Источниками динамических воздействий (на блок-схеме выделены серым цветом) являются двигатель внутреннего сгорания (ДВС), трансмиссия, насосная станция, элементы ходового оборудования при взаимодействии с рельефом, рабочие органы (РО) при взаимодействии с разрабатываемым грунтом.

Основными путями распространения вибрации являются: пассивные блоки, передающие динамическое воздействие без искажения (на блок-схеме – сплошные линии); блоки, преобразующие передаваемое динамическое воздействие (пунктирные линии).

Векторы передачи возмущающего воздействия показаны линиями со стрелками (механические связи – сплошными линиями, гидравлические – пунктирными).

Установлено, что для различных землеройных машин характерны два диапазона вибраций, действующих на рабочее место машиниста, – транспортная (0,5...6,0 Гц) и технологическая (15...65 Гц).

Самые низкие вибрационные воздействия на рабочее место (порядка



0,5...2,0 Гц) генерируются ходовыми системами самоходных скрепелов.

При работе башенных кранов максимальная вибрация металлоконструкций не превышает 5 Гц.

У машин с активным рабочим органом вибрация совпадает с частотой возмущающих воздействий.

При распространении вибрации от двигателя по конструктивным элементам динамической системы какой-либо машины могут наблюдаться случаи, когда возникают резонансные явления.

Частотный диапазон вибрации машин называют спектром вибрации. Для количественной оценки этого спектра его разделяют на отдельные октавные полосы частот (октава представляет собой полосу, конечная частота которой в два раза больше начальной). В каждой полосе вибрация оценивается суммарным (общим) уровнем.

При оценке вибрации подъемно-транспортных, строительных и дорожных машин используются октавные полосы с низкими среднегеометрическими частотами: 1; 2; 4; 8; 16; 31,5; 63 Гц.

Непосредственная оценка спектрального состава вибрации машин производится по виброскорости и виброускорению. Виброскорость измеряется в натуральных единицах (м/с) или по логарифмическому уровню в децибелах (дБ). Аналогично измеряется виброускорение – в м/с^2 или дБ.

Санитарные эргономические нормы допустимых спектральных показателей вибрационной нагрузки на машиниста рассматриваемых машин при вертикальных колебаниях приведены в табл. 7.1.

Таблица 7.1

Средне-геометрическая частота октавной полосы, Гц	Среднеквадратичные значения			
	Виброускорения		Виброскорости	
	м/с^2	дБ	$\text{м/с} \cdot (10^{-2})$	дБ
1	1,10	121	19,95	132
2	0,79	118	7,08	123
4	0,57	115	2,51	116
8	0,63	116	1,26	108
16	1,13	121	1,12	107
31,5	2,25	127	1,12	107
63	4,50	133	1,12	107



Биологическое действие вибрации на машиниста зависит от ее частоты: колебания с частотами до 15 Гц вызывают смещение тела и органов; до 25 Гц – воспринимаются как отдельные толчки, вызывают костно-сосудистые изменения; свыше 50 Гц – влияют на нервную систему.

Основные резонансные состояния динамической системы «машинист – машина» находятся в области 1...6 Гц. Поэтому особенно актуальна защита машиниста от вибрации именно в указанном диапазоне частот. Для решения этой проблемы используются различные виброзащитные системы.

Обычно вибрация проникает на рабочее место машиниста через пол кабины, к которому жестко крепится кронштейн основания сиденья машиниста. Чтобы оптимизировать распространение вибрации от кронштейна к посадочному месту, между ними встраивается виброзащитная система, включающая параллелограммную подвеску и пружинно-гидравлическую амортизацию. Такая конструкция показана на рис.7.9.

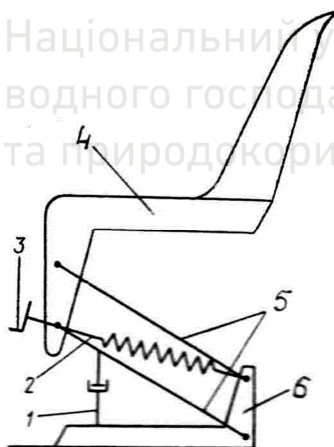


Рис. 7.9. Конструктивная схема сиденья машиниста: 1 – гидроамортизатор; 2 – пружина; 3 – регулировочный винт; 4 – посадочное место; 5 – параллелограммная подвеска; 6 – кронштейн основания сиденья

В динамической системе «машинист-сиденье» (рис.7.10) тело человека рассматривается как твердое, а масса принимается равной $5/7$ всей его массы. Эту массу вместе с массой подрессоренной части сиденья принимают за единую приведенную массу $m_{пр}$.

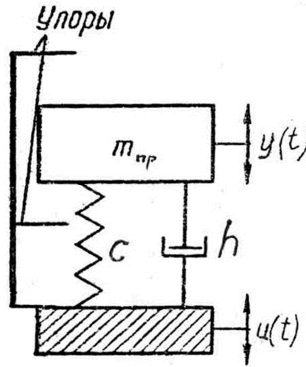


Рис. 7.10. Расчетная схема динамической системы
«машинист- сиденье»

Как видно из расчетной схемы, динамическая система имеет кинематическое возбуждение. Закон движения основания сиденья – гармонический:

$$u(t) = A_u \sin \lambda t, \quad (7.37)$$

где λ – частота вынужденных колебаний пола кабины.

Расчетное уравнение движения динамической системы имеет такой вид:

$$\ddot{y} + 2h\dot{y} + \omega^2 y = A_u \cdot \lambda^2 \cdot \sin \lambda t, \quad (7.38)$$

где $\omega = \sqrt{c/m_{\text{пр}}}$ – собственная частота колебаний; h – коэффициент демпфирования.

Уравнение (7.38) совпадает с уравнением (7.2) при условии, что $F_0 = m_{\text{пр}} \cdot A_u \cdot \lambda^2$.

Используем решение (7.3) и примем во внимание, что абсолютное перемещение z массы $m_{\text{пр}}$ есть сумма ее относительного перемещения y и перемещения u основания сиденья.

Тогда получим:

$$z = \frac{A_u \lambda^2}{\sqrt{(\omega^2 - \lambda^2)^2 + 4h^2 \lambda^2}} \sin(\lambda t - \theta) + A_u \sin \lambda t. \quad (7.39)$$

Коэффициент виброизоляции динамической системы при кинематическом возбуждении представляет собой отношение максимального ускорения массы $m_{\text{пр}}$ к максимальному ускорению основания сиденья:



$$\eta = \frac{|\ddot{z}|_{\max}}{|\ddot{u}|_{\max}}. \quad (7.40)$$

После ряда преобразований имеем:

$$z = A \cdot \sin(\lambda t - \theta + \varepsilon), \quad (7.41)$$

где $A = A_u \cdot \sqrt{\frac{\omega^4 + 4h^2 \lambda^2}{(\omega^2 - \lambda^2)^2 + 4h^2 \lambda^2}}; \quad \operatorname{tg} \varepsilon = \frac{2h\lambda}{\omega^2}.$

Следовательно

$$\eta = \frac{A\lambda^2}{A_u \lambda^2} \equiv \sqrt{\frac{1 + 4\beta^2 v^2}{(1 - v^2)^2 + 4\beta^2 v^2}}, \quad (7.42)$$

где $\beta = h/\omega; v = \lambda/\omega.$

Величина, обратная коэффициенту η , называется коэффициентом эффективности виброизоляции

$$\eta_{\text{эф}} = 1/\eta. \quad (7.43)$$

Он показывает во сколько раз снижается амплитуда колебаний массы $m_{\text{пр}}$.

Относительным коэффициентом виброизоляции называется отношение амплитуды A_y перемещения y к амплитуде A_u перемещения u :

$$\eta_{\text{отн}} = \frac{A_{\delta}}{A_u} = \frac{\lambda^2}{\sqrt{(\omega^2 - \lambda^2)^2 + 4h^2 \lambda^2}} = \frac{v^2}{\sqrt{(1 - v^2)^2 + 4\beta^2 v^2}}. \quad (7.44)$$

По величине A_y , найденной из выражения (7.44), определяется расстояние d между упорами (рис.7.10), при котором происходит безударное колебательное перемещение массы $m_{\text{пр}}$:

$$d \geq 2A_y. \quad (7.45)$$

В реальных конструкциях сидений величина d обычно не превышает 80 мм, т.к. в противном случае изменится рабочая поза машиниста и нарушатся зоны досягаемости органов управления (рычагов, педалей, руля).

Амплитуда виброскорости и виброускорения массы $m_{\text{пр}}$ соответственно составляют:

$$A_{\text{ск}} = A \lambda; \quad (7.46)$$

$$A_{\text{уск}} = A \lambda^2, \quad (7.47)$$

а их среднеквадратичные значения



$$\sigma_{c\dot{e}} = A_{\dot{n}\dot{e}} / \sqrt{2}; \quad (7.48)$$

$$\sigma_{\dot{o}\dot{n}\dot{e}} = A_{\dot{o}\dot{n}\dot{e}} / \sqrt{2}. \quad (7.49)$$

Величины $\sigma_{ск}$ и $\sigma_{уск}$ сопоставляются с допустимыми виброскоростями и виброускорениями, приведенными в табл.7.1. Если они не превышают допустимых значений, то виброзащита машиниста считается удовлетворительной и соответствующей эргономическим требованиям. В противном случае в динамической системе «машинист – сиденье» необходимо изменить упругие и демпфирующие связи.

В заключение следует отметить, что в настоящее время больших успехов достигла вибрационная биомеханика. Поскольку сопротивления, массы, упругие и демпфирующие связи основных органов человека известны, создана его простейшая динамическая модель (рис.7.11). С помощью такой модели на специальных манекенах можно исследовать реакцию человеческого тела при различных вибрационных воздействиях и определять его собственные колебательные характеристики. Поэтому вполне возможно, что в недалеком будущем можно будет подбирать индивидуальные системы виброзащиты машинистов.

Пример 7.2. Определить эффективность динамической системы «машинист – сиденье», среднеквадратичные значения виброскорости и виброускорения сиденья; свободный ход сиденья до упоров.

Исходные данные: масса машиниста – $m_ч = 80$ кг; масса сиденья – $m_c = 26$ кг; коэффициент линейной жесткости – $c = 6500$ Н/м; коэффициент демпфирования – $h = 4,22$ с⁻¹; кинематическое возбуждение основания сиденья – $u(t) = 0,0035 \sin(6\pi t)$.

Решение. Находим приведенную массу

$$m_{пр} = 5/7 m_ч + m_c = 5/7 \cdot 80 + 26 = 83 \text{ кг.}$$

Тогда собственная частота колебаний системы будет равна

$$\omega = \sqrt{\frac{\tilde{n}}{\delta_{пр}}} = \sqrt{\frac{6500}{83}} = 8,85 \tilde{n}^{-1}.$$

Вычислим отношения

$$\beta = h / \omega = 4,22 / 8,85 = 0,477; \quad \nu = \lambda / \omega = 6\pi / 8,85 = 2,13$$

и определим значения коэффициентов виброизоляции

$$\eta = \sqrt{\frac{1 + (2 \cdot 0,477 \cdot 2,13)^2}{(1 - 2,13^2)^2 + (2 \cdot 0,477 \cdot 2,13)^2}} = 0,56;$$

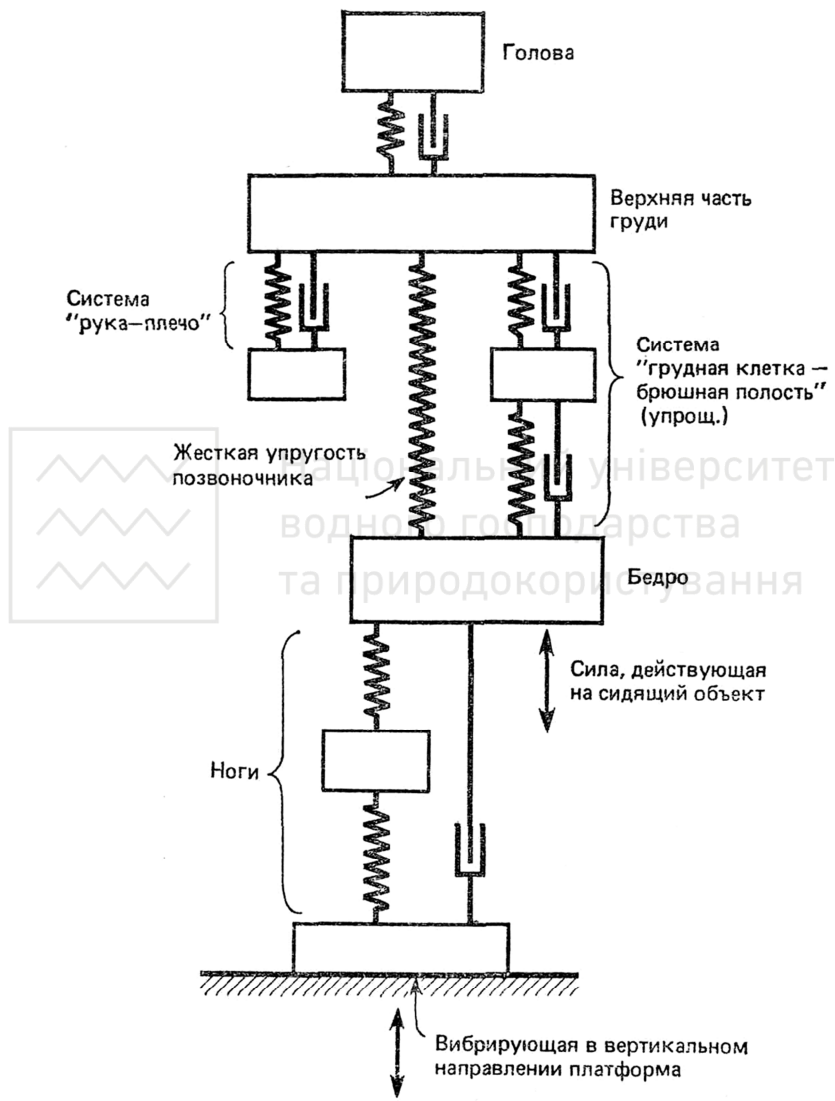


Рис. 7.11. Динамическая модель тела человека



$$\eta_{\text{отн}} = \frac{2,13^2}{\sqrt{(1 - 2,13^2)^2 + (2 \cdot 0,477 \cdot 2,13)^2}} = 1,11;$$

$$\eta_{\text{эф}} = 1 / 0,56 = 1,78 .$$

Далее находим значения амплитуд абсолютного и относительного перемещений сиденья:

$$A = A_u \cdot \eta = 0,0035 \cdot 0,56 = 0,00196 \text{ м} ;$$

$$A_y = A_u \cdot \eta_{\text{отн}} = 0,0035 \cdot 1,11 = 0,0039 \text{ м} ,$$

а также среднеквадратичные значения его виброскорости и виброускорения при вертикальных колебаниях:

$$\sigma_{\ddot{n}\dot{e}} = 0,00196 \cdot 6\pi / \sqrt{2} = 0,026 \text{ м/с} ;$$

$$\sigma_{\ddot{o}\ddot{n}\dot{e}} = 0,00196 \cdot (6\pi)^2 / \sqrt{2} = 0,49 \text{ м/с}^2 .$$

Техническая частота кинематического возбуждения динамической системы составляет

$$f = \lambda / 2\pi = 6\pi / 2\pi = 3 \text{ Гц} .$$

Частота находится в активной полосе со среднегеометрической частотой 4 Гц. Для этой полосы допустимые по санитарным нормам среднеквадратичные значения виброскорости и виброускорения соответственно составляют 0,025 м/с и 0,57 м/с². Сопоставляя эти значения со значениями $\sigma_{ск}$ и $\sigma_{уск}$, приходим к выводу, что виброзащита машиниста удовлетворяет эргономическим требованиям.

Наконец, определим безударный свободный ход сиденья до упоров:

$$d = 2A_y \cong 0,008 \text{ м} .$$

Этот показатель также соответствует допустимым нормам.

8. СТОХАСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Математическое описание и решение стохастических моделей основаны на методах теории случайных процессов, корреляционном и спек-



тральном анализе. Такие модели весьма эффективны для исследования динамических систем машин при наличии случайных внешних воздействий (случайное изменение нагрузок, координат положения, микрорельефа планируемых площадей и транспортных путей, массы и объема перерабатываемых материалов и т.п.).

Весьма актуальной проблемой является исследование влияния дорожных условий на функционирование строительной и дорожной техники. Эта проблема включает два самостоятельных этапа:

- анализ реальных свойств микронеровностей на строительных площадках и связанных с ними транспортных коммуникациях;
- разработку математического аппарата для оценки статистических возмущений, создаваемых микронеровностями, на динамические характеристики ходовых элементов машин.

Указанная проблема имеет прямое отношение к колесным землеройно-транспортным машинам (планирующая способность; скорость передвижения) и бетонотранспортным машинам (побуждение – перемешивание – высокочувствительных бетонных или растворных смесей в пути следования; стабильность качества смесей при наличии случайного спектра возбуждений).

8.1. Постановка задачи

Обычно стохастический процесс выражается случайной функцией времени $X(t)$, значения которой при каждом фиксированном значении аргумента t являются случайными величинами. Такие значения называются реализацией случайной функции и обозначаются строчными буквами: $x_1(t)$, $x_2(t)$, Следовательно, случайную функцию $X(t)$ можно рассматривать как совокупность ее возможных реализаций в виде случайных величин $X(t) = \{x(t)\}$.

Значение реализаций какого-либо случайного явления $\{x(t)\}$ не может быть выражено в определенный момент времени t_1 точной формулой. Оно может быть описано только в вероятностной постановке в виде функции плотности вероятности $f(x, t_1)$, которую называют законом распределения.

При стационарных процессах, которые рассматриваются в настоящем разделе, плотности вероятности не зависят от времени, т.е. $f(x, t_1) = f(x)$.

Плотности многих случайных процессов, описывающих практически важные физические процессы, хорошо аппроксимируются нор-



$$f[x(t)] = \frac{1}{\sigma_x(t)\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-[x(t)-\bar{x}(t)]^2}{2[\sigma_x(t)]^2}}, \quad (8.1)$$

где $x(t)$ – конкретная реализация случайной функции; $\bar{x}(t)$ – среднее значение всех реализаций; $\sigma_x(t)$ – рассеивание реализаций около среднего значения.

В таком случае мы имеем дело с нормальным случайным процессом.

Если допустить, что на вход динамической системы подается случайное внешнее возмущение $X(t)$ с плотностью распределения $f[x(t)]$, то соответствующий выходной параметр будет характеризоваться случайной функцией $Y(t)$ с плотностью распределения $f[y(t)]$. Между этими двумя распределениями имеется функциональная связь

$$f[y(t)] = f[x(t)] \frac{dx}{dy}. \quad (8.2)$$

Соотношение (8.2) является основным уравнением преобразования плотности вероятности входного параметра системы в плотность вероятности выходного параметра, определение которого представляет большой интерес при исследовании динамических систем машин.

Однако прямое отыскание плотности распределения $f[y(t)]$ сопряжено со значительной сложностью. Поэтому при инженерных расчетах прибегают к определению числовых характеристик случайных функций. Такие характеристики позволяют с достаточной полнотой и высокой точностью описать свойства стохастических процессов и в значительной степени упростить решение многих динамических задач.

8.2. Характеристики случайных функций

Основными характеристиками случайных функций $X(t)$ являются математическое ожидание $M_x(t)$, дисперсия $D_x(t)$, корреляционная функция $K_x(t_1, t_2)$.

Математическое ожидание представляет собой среднеарифметическое значение ординат случайной функции $X(t)$ при данном значении аргумента t :

$$M_x(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i(t). \quad (8.3)$$

Математическое ожидание неслучайной функции $\varphi(t)$ равно самой неслучайной функции



$$M_x[\varphi(t)] = \varphi(t) . \quad (8.4)$$

Неслучайный множитель $\varphi(t)$ можно выносить за знак математического ожидания

$$M_x[\varphi(t) X(t)] = \varphi M_x(t) . \quad (8.5)$$

Наконец, математическое ожидание суммы двух случайных функций равно сумме их математических ожиданий.

Дисперсией случайной функции $X(t)$ называется неслучайная функция $D_x(t)$, которая при каждом t характеризует разброс возможных реализаций случайной функции вокруг математического ожидания $M_x(t)$:

$$D_x(t) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n [x_i(t) - M_x(t)]^2 . \quad (8.6)$$

Дисперсия неслучайной функции $\varphi(t)$ равна нулю

$$D_x[\varphi(t)] = 0 . \quad (8.7)$$

Дисперсия произведения случайной функции $X(t)$ на неслучайную функцию $\varphi(t)$ равна произведению квадрата неслучайного множителя на дисперсию случайной функции

$$D_x[\varphi(t) X(t)] = \varphi^2(t) D_x(t) . \quad (8.8)$$

Дисперсия суммы двух случайных функций $X(t)$ и $Y(t)$ определяются по соотношению

$$D[X(t) + Y(t)] = D_x(t) + D_y(t) + 2R_{xy}(t) , \quad (8.9)$$

где $R_{xy}(t)$ – взаимно корреляционная функция, причем

$$R_{xy}(t) \leq \sqrt{D_x(t) \cdot D_y(t)} .$$

Часто вместо дисперсии рассматривают среднее квадратичное отклонение случайной функции

$$\sigma_x(t) = \sqrt{D_x(t)} . \quad (8.10)$$

Универсальной характеристикой стохастического процесса является корреляционная функция $K_x(t_1, t_2)$. Она устанавливает зависимость между значениями случайной функции $X(t)$ в момент времени t_1 и t_2

$$\hat{E}_x(t_1, t_2) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n [x_i(t_1) - M_x(t_1)][x_i(t_2) - M_x(t_2)] . \quad (8.11)$$

Важнейшим классом случайных функций являются стационарные случайные функции, у которых $M_x(t) = \text{const}$; $D_x(t) = \text{const}$, а корреляционная функция зависит только от разности между своими аргументами:

$$K_x(t_1, t_2) = K_x(\tau), \text{ где } \tau = t_2 - t_1.$$



В дальнейшем будем оперировать только стационарными случайными функциями.

В этом случае корреляционная функция обладает свойством симметрии $K_x(\tau) = K_x(-\tau)$, что соответствует четной функции.

При $\tau = 0$ получаем очень важное соотношение

$$K_x(0) = D_x(t). \quad (8.12)$$

Таким образом, достаточно знать корреляционную функцию, чтобы найти дисперсию случайной функции.

При определении параметров динамических систем машин, на которые воздействуют стохастические процессы, обычно используются так называемые стандартные корреляционные функции, которые аппроксимируются функциями следующих типов:

1. $K_x(\tau) = D_x \cdot e^{-\alpha|\tau|}, \quad \alpha > 0;$
2. $K_x(\tau) = D_x \cdot e^{-\alpha\tau^2}, \quad \alpha > 0;$
3. $K_x(\tau) = D_x \cdot e^{-\alpha|\tau|} \cdot \cos \beta|\tau|, \quad \alpha > 0;$
4. $K_x(\tau) = D_x \cdot e^{-\alpha\tau^2} \cdot \cos \beta|\tau|, \quad \alpha > 0, \quad (8.13)$

где D_x – дисперсия случайной функции.

Коэффициенты α и β подбираются из условия наилучшего приближения опытной кривой (например, методом наименьших квадратов).

В силу четности функций (8.13) они симметричны относительно оси ординат.

На практике вместо корреляционной функции $K_x(\tau)$ часто используется нормированная корреляционная функция $\rho_x(\tau)$

$$\rho_x(\tau) = K_x(\tau) / D_x(t), \quad (8.14)$$

причем $\rho_x(\tau) \leq 1$.

Графики стандартных функций $\rho_x(\tau)$ приведены на рис.(8.1) – рис.(8.4).

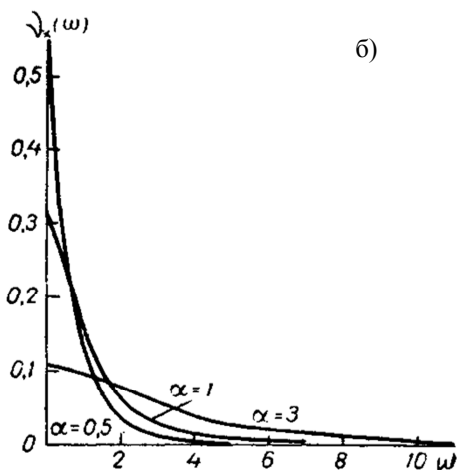
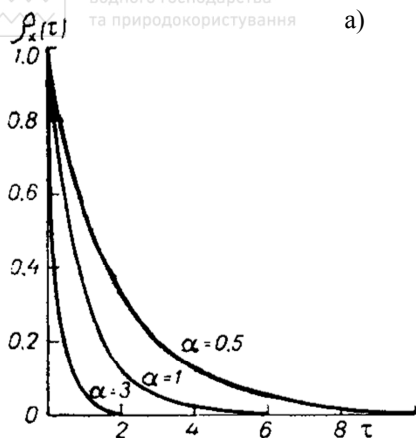


Рис. 8.1. Графики $\rho_x(\tau)$ и $v_x(\omega)$ для 1 типа

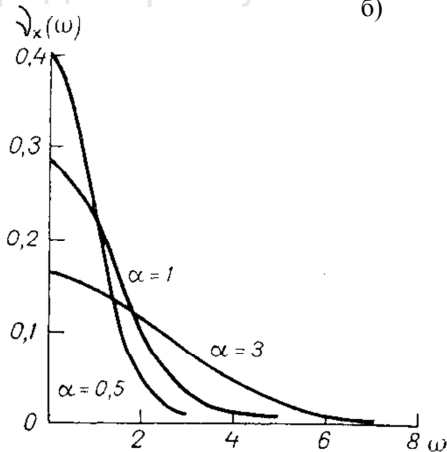
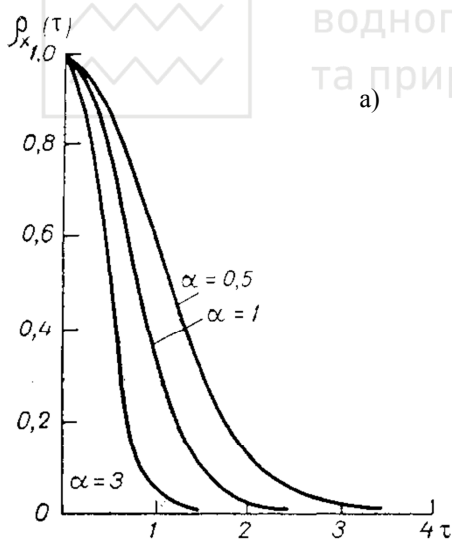


Рис. 8.2. Графики $\rho_x(\tau)$ и $v_x(\omega)$ для 2 типа

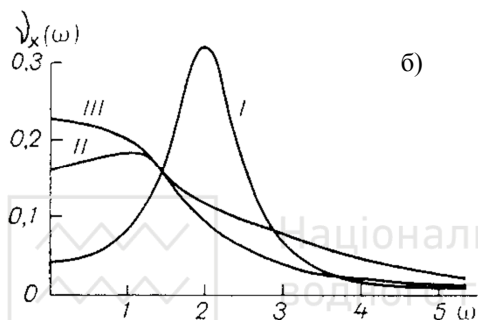
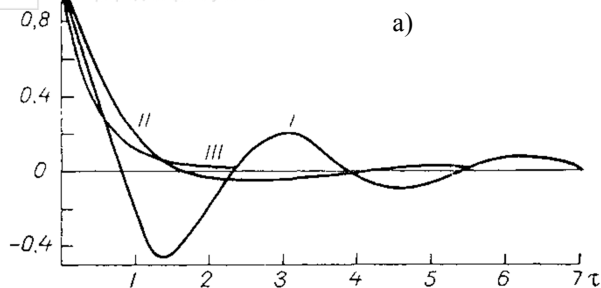


Рис. 8.3. Графики $\rho_x(\tau)$ и $\nu_x(\omega)$ для 3 типа:

I – $\alpha = 0,5$; $\beta = 2$;

II – $\alpha = 1$; $\beta = 1$;

III – $\alpha = 2$; $\beta = 0,5$

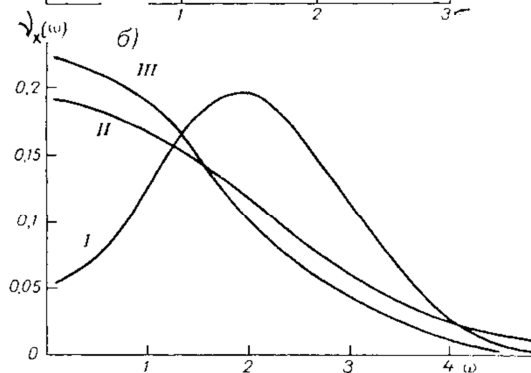
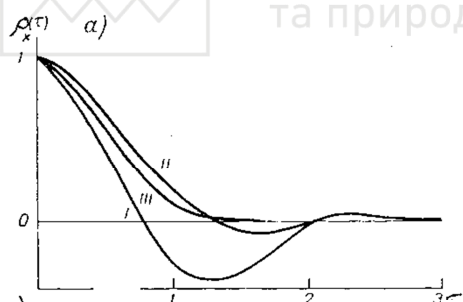


Рис. 8.4. Графики $\rho_x(\tau)$ и $\nu_x(\omega)$ для 4 типа:

I – $\alpha = 0,5$; $\beta = 2$;

II – $\alpha = 1$; $\beta = 1$;

III – $\alpha = 2$; $\beta = 0,5$



Стационарные случайные процессы обладают свойством эргодичности, которое заключается в том, что отдельная реализация случайного процесса на бесконечном временном интервале полностью определяет весь случайный процесс. В таком случае математическое ожидание, дисперсию и корреляционную функцию можно приближенно определять по одной достаточно длинной реализации.

Об эргодичности или неэргодичности стационарного случайного процесса можно судить по его корреляционной функции. Если $K_x(\tau) \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow \infty$, то это является достаточным условием для того, чтобы случайный процесс обладал свойством эргодичности.

8.3. Спектральное разложение стационарной случайной функции

Стационарная случайная функция $X(t)$ может быть представлена в виде суммы бесконечно большого числа гармонических колебаний с непрерывно изменяющимися частотами ω_k (непрерывным спектром) и случайными амплитудами A_k и B_k .

$$X(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (A_k \cdot \cos \omega_k t + B_k \cdot \sin \omega_k t). \quad (8.15)$$

Такое преобразование случайной функции называется спектральным разложением.

Перейдем от тригонометрических функций к показательным в комплексной форме, используя формулы Эйлера:

$$\begin{aligned} \cos \omega_k t &= \frac{1}{2} (e^{i\omega_k t} + e^{-i\omega_k t}); \\ \sin \omega_k t &= \frac{1}{2i} (e^{i\omega_k t} - e^{-i\omega_k t}), \end{aligned}$$

где $i = \sqrt{-1}$.

Тогда вместо (8.15) получим такое выражение:

$$X(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Phi(\omega) e^{i\omega_k t}, \quad (8.16)$$

где $\Phi(\omega)$ – обобщенная амплитуда колебаний.

Если случайная функция является непрерывной, то



$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (8.17)$$


Выделим функцию

$$S_x(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{4\pi}{T} |\Phi(\omega)|^2, \quad (8.18)$$

где T – длительный промежуток времени.

Эта функция называется спектральной плотностью функции $X(t)$. Она представляет собой плотность распределения амплитуды колебаний и является статистической характеристикой, позволяющей оценить частотный состав случайной функции по спектру частот.

В учебных курсах по теории стохастических процессов доказываются, что корреляционная функция $K_x(\tau)$ и спектральная плотность $S_x(\omega)$ связаны между собой взаимно обратными косинус преобразованиями Фурье:



$$\begin{aligned} \hat{E}_x(\tau) &= \int_0^{\infty} S_x(\omega) \cos \omega \tau d\omega; \\ S_x(\omega) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} K_x(\tau) \cos \omega \tau d\tau. \end{aligned} \quad (8.19)$$

В комплексной форме эти соотношения имеют такой вид:

$$\begin{aligned} \hat{E}_x(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{i\omega \tau} d\omega; \\ S_x(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau) e^{-i\omega \tau} d\tau. \end{aligned} \quad (8.20)$$

В частном случае при $\tau = 0$

$$\hat{E}_x(0) = \sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) d\omega. \quad (8.21)$$

Спектральная плотность $S_x(\omega)$ является положительной, четной функцией. Ее размерность равна произведению дисперсии на секунду.

Для реализаций стационарных случайных процессов $X(t)$ и $Y(t)$ используется взаимная спектральная плотность $S_{xy}(\omega)$, которая определяется как прямое преобразование Фурье взаимной корреляционной функции $R_{xy}(\tau)$:



$$S_{\dot{o}\dot{o}}(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{\dot{o}\dot{o}}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (8.22)$$

Обратным преобразованием Фурье получают взаимную корреляционную функцию

$$R_{\dot{o}\dot{o}}(\tau) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\dot{o}\dot{o}}(\omega) d^{i\omega\tau} d\omega. \quad (8.23)$$

Выражения для $S_x(\omega)$, соответствующие стандартным выражениям для $K_x(\tau)$, имеют такой вид:

$$\begin{aligned} 1. \quad S_x(\omega) &= \frac{\alpha \cdot D_x}{\pi(\alpha^2 + \omega^2)}; \\ 2. \quad S_x(\omega) &= \frac{D_x}{2\sqrt{\pi\alpha}} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}; \end{aligned} \quad (8.24)$$

$$\begin{aligned} 3. \quad S_x(\omega) &= \frac{\alpha(\omega^2 + \alpha^2 + \beta^2) \cdot D_x}{\pi[(\omega^2 - \alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2]}; \\ 4. \quad S_x(\omega) &= \frac{D_x}{4\sqrt{\pi\alpha}} \left[e^{-\frac{(\omega-\beta)^2}{4\alpha}} + e^{-\frac{(\omega+\beta)^2}{4\alpha}} \right] \end{aligned}$$

Вместо спектральной плотности $S_x(\omega)$ часто используется нормированная спектральная плотность

$$\nu_x(\omega) = S_x(\omega) / D_x. \quad (8.25)$$

Для функции $\nu_x(\omega)$ имеет место такое соотношение:

$$\int_0^{\infty} \nu_x(\omega) d\omega = 1. \quad (8.26)$$

Графики стандартных функций $\nu_x(\omega)$ приведены на рис.(8.1) – рис.(8.4).

8.4. Оценка реакции динамической системы при воздействии на нее стационарного стохастического процесса

Положим, что на вход динамической системы машины поступает внешнее возмущение в виде стационарной случайной функции $X(t)$. Чтобы соответствующая реакция динамической системы в виде слу-

чайной функции $Y(t)$ была также стационарной, параметры системы должны быть постоянными. Это возможно только в том случае, если она является линейной.

Примем расчетную схему, представленную на рис.8.5.

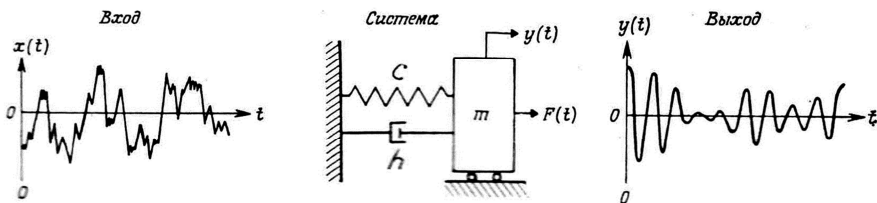


Рис. 8.5. Расчетная схема линейной динамической системы с одним входом и одним выходом

В общем случае аналитическую модель рассматриваемой динамической системы можно описать таким уравнением:

$$\begin{aligned} a_0 \frac{d^2 Y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dY(t)}{dt} + a_2 Y(t) &= \\ &= b_0 \frac{d^2 X(t)}{dt^2} + b_1 \frac{dX(t)}{dt} + b_2 X(t). \end{aligned} \quad (8.27)$$

В левой части уравнения выходная стационарная случайная функция $Y(t)$ является деформацией (смещением), в правой части входная стационарная случайная функция $X(t)$ – силой, т.е. $X(t) = F(t)$.

Представим уравнение (8.27) в операторной форме, обозначив оператор дифференцирования $\frac{d}{dt}$ через p , $\frac{d^2}{dt^2}$ – через p^2 . В итоге уравнение примет вид:

$$(a_0 p^2 + a_1 p + a_2) Y(t) = (b_0 p^2 + b_1 p + b_2) X(t). \quad (8.28)$$

«Решим» это уравнение относительно $Y(t)$:

$$Y(t) = \frac{b_0 p^2 + b_1 p + b_2}{a_0 p^2 + a_1 p + a_2} X(t). \quad (8.29)$$

Выражение при $X(t)$ называется передаточной функцией

$$W(\delta) = \frac{b_0 p^2 + b_1 p + b_2}{a_0 p^2 + a_1 p + a_2}. \quad (8.30)$$

Таким образом



$$Y(t) = W(p) X(t) . \quad (8.31)$$

Если в передаточной функции заменить аргумент p на аргумент $i\omega$ (ω – частота стохастического процесса), то получим частотную характеристику

$$W(i\omega) = \frac{b_0(i\omega)^2 + b_1(i\omega) + b_2}{a_0(i\omega)^2 + a_1(i\omega) + a_2} . \quad (8.32)$$

Доказано, что спектральные плотности выходной и входной функций связаны равенством

$$S_y(\omega) = S_x(\omega) |W(i\omega)|^2 . \quad (8.33)$$

Зная спектральную плотность выходной функции, можно найти ее корреляционную функцию:

$$\hat{E}_o(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_o(\omega) e^{-i\omega\tau} d\omega . \quad (8.34)$$

Полагая $\tau = 0$, находим выражение для среднего квадратичного отклонения

$$\sigma_o^2 = \hat{E}_o(0) = D_y = \int_{-\infty}^{\infty} S_o(\omega) d\omega . \quad (8.35)$$

Во многих случаях на этом и заканчивается расчет стационарной линейной динамической системы.

Для более полного решения рассчитывают математическое описание случайной функции выходного параметра

$$M_y(t) = M_x(t) \cdot W(0) . \quad (8.36)$$

Полагая, что плотность вероятности случайной функции $Y(t)$ описывается нормальным распределением, находят доверительные границы ее изменения

$$Y(t) = M_y(t) \pm 3\sigma_y . \quad (8.37)$$

8.5. Моделирование динамического взаимодействия ходовой системы на балансирной подвеске с микрорельефом обрабатываемой поверхности

Ходовые системы на балансирной подвеске используются для снижения влияния микронеровностей обрабатываемой поверхности на вертикальное перемещение рабочего органа ряда машин (например, отвала автогрейдера или планировщика, режущего аппарата косилки



для окатывания откосов дорог, скребкового и ковшевого оборудования для очистки сточных лотков и канав).

Так как микрорельеф оказывает случайные воздействия на ходовые элементы, установленные на балансирной подвеске, то для обоснования ее параметров используем стохастическое моделирование. Соответствующая расчетная схема представлена на рис.8.6.

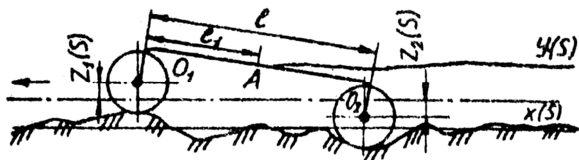


Рис. 8.6. Расчетная схема динамической системы балансирной подвески

Рассмотрим взаимосвязь геометрических параметров подвески с элементами обрабатываемой поверхности S . Обозначим через A точку крепления балансира к раме машины или рабочего органа; $Z_1(S)$ и $Z_2(S)$ – вертикальные перемещения осей переднего и заднего опорных колес (или катков); r – радиус колес (или катков); ℓ – длина подвески; ℓ_1 – положение точки A на подвеске; $x(S)$ – профиль микрорельефа обрабатываемой поверхности; $y(S)$ – траектория смещения точки A .

Из условия подобия геометрических элементов на расчетной схеме найдем траекторию $y(S)$:

$$y(S) = Z_1(S) \frac{\ell - \ell_1}{\ell} + Z_2(S) \frac{\ell_1}{\ell}. \quad (8.38)$$

Используя соотношения (8.8) и (8.9), получим выражение для дисперсии вертикальных перемещений точки A :

$$D_y = \frac{1}{\ell^2} [D_{Z_1} (\ell - \ell_1)^2 + 2R_Z(\ell)(\ell - \ell_1)\ell_1 + D_{Z_2} \cdot \ell_1^2], \quad (8.39)$$

где D_{Z_1} и D_{Z_2} – дисперсии вертикальных колебаний осей переднего и заднего колес; $R_Z(\ell)$ – взаимная корреляционная функция.

Допускаем стационарность колебаний осей колес.

Тогда $Z_1(S) = Z_2(S + \ell)$; $D_{Z_1} + D_{Z_2} = D_Z$.

В этом случае

$$D_y = \frac{(\ell - \ell_1)^2 + \ell_1^2}{\ell^2} D_Z + \frac{2\ell_1 \cdot (\ell - \ell_1)}{\ell^2} R_Z(\ell). \quad (8.40)$$



Положим, что колесо линейно преобразует микронеровности $x(S)$ в вертикальные колебания $Z(S)$.

На основании зависимости (8.33) получим

$$S_Z(\lambda) = S_x(\lambda) |W(i\lambda)|^2, \quad (8.41)$$

где $S_Z(\lambda)$ – спектральная плотность выходного случайного процесса; $S_x(\lambda)$ – спектральная плотность микрорельефа; $W(i\lambda)$ – частотная характеристика опорного колеса; λ – дорожная частота.

Представим выражение (8.41) через нормированные спектральные плотности $v_Z(\lambda)$ и $v_x(\lambda)$:

$$D_Z \cdot v_Z(\lambda) = D_x \cdot v_x(\lambda) |W(i\lambda)|^2, \quad (8.42)$$

где D_x – дисперсия микрорельефа.

Проинтегрируем левую и правую части соотношения (8.42) и учтем зависимость (8.26):

$$D_Z = D_x \int_{-\infty}^{\infty} |W(i\lambda)|^2 \cdot v_x(\lambda) d\lambda. \quad (8.43)$$

Полагая, что $R_Z(\ell) = K_Z(\lambda)$ и учитывая соотношение (8.34), получим:

$$R_Z(\ell) = D_x \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\ell} |W(i\lambda)|^2 \cdot v_x(\lambda) d\lambda. \quad (8.44)$$

Нормированная спектральная плотность микрорельефа по экспериментальным данным составляет:

$$v_x(\lambda) = \frac{\alpha}{\pi(\alpha^2 + \lambda^2)}, \quad (8.45)$$

где α – коэффициент затухания.

Частотная характеристика динамической системы балансирной подвески описывается таким выражением:

$$W(i\lambda) = \frac{1}{1 + 4r i\lambda}, \quad (8.46)$$

где r – радиус колеса.

После интегрирования выражений (8.43) и (8.44) имеем:

$$D_Z = \frac{D_x}{1 + 4\alpha r}; \quad (8.47)$$



$$R_z(\ell) = \frac{D_x}{1-16\alpha^2 r^2} (e^{-\alpha\ell} - 4\alpha r e^{-\ell/4r}). \quad (8.48)$$

Окончательно на основании (8.40) получим

$$D_y = \frac{D_x}{\ell^2} \left[\frac{(\ell - \ell_1)^2 + \ell_1^2}{1 + 4\alpha r} + \frac{2\ell_1(\ell - \ell_1)}{1 - 16\alpha^2 r^2} (e^{-\alpha\ell} - 4\alpha r e^{-\ell/4r}) \right]. \quad (8.49)$$

Оценку конструктивных качеств балансирной подвески проводят по отношению

$$\frac{\sigma_{\delta}}{\sigma_x} = \sqrt{\frac{D_y}{D_x}}. \quad (8.50)$$

Если это отношение равно 0,5 или меньше этого значения, то параметры подвески следует считать удовлетворительными. В противном случае следует подобрать иной вариант для ℓ , ℓ_1 и r .

Расчеты показывают, что чем больше r и ℓ , тем меньше влияние микрорельефа обрабатываемой поверхности на вертикальные смещения рабочих органов машин.

Например, при $\alpha = 0,035 \text{ см}^{-1}$; $D_x = 2,25 \text{ см}^2$; $\ell = 60 \text{ см}$, $\ell_1 = \ell/2$; $r = 11 \text{ см}$ имеем $D_y / D_x = 0,28$; если $r = 15 \text{ см}$, то $D_y / D_x = 0,24$.

8.6. Стохастическая модель подвесной системы конвейера при его загрузке крупнокусовым материалом

Рассмотрим колебания подвесной роликоопоры с линейными амортизаторами, устанавливаемой в месте загрузки на конвейер крупнокусового груза (рис.8.7, а).

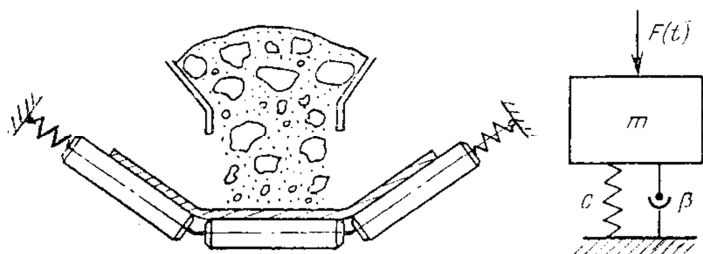


Рис. 8.7. Подвесная трехроликовая опора конвейера: а – конструктивная схема; б – расчетная схема динамической системы



Наиболее простым аналогом роликоопоры является линейная динамическая система с одной степенью свободы (рис.8.7, б)

Поставим задачу определить максимальное смещение динамической системы a^* под действием потока груза, который представляет собой нормальный случайный процесс.

Примем такие обозначения: m – масса роликоопоры; $y(t)$ – обобщенная координата; c – линейная жесткость; b – характеристика затухания; $F(t)$ – обобщенная стационарная случайная сила с математическим ожиданием M_F и дисперсией D_F .

Экспериментально записанные реализации силы $F(t)$ аппроксимируются корреляционной функцией 1-го типа

$$K_F(\tau) = D_F \cdot e^{-\alpha|\tau|}, \quad (8.51)$$

которой соответствует спектральная плотность

$$S_F(\omega) = \frac{\alpha \cdot D_F}{\pi(\alpha^2 + \omega^2)}. \quad (8.52)$$

Перейдем к стандартным входным характеристикам стохастического процесса:

$$M_x = M_F / m; \quad D_x = D_F / m^2; \quad S_x(\omega) = \frac{\alpha \cdot D_x}{\pi(\alpha^2 + \omega^2)}. \quad (8.53)$$

Составим уравнение движения роликоопоры:

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + cy = F(t). \quad (8.54)$$

Преобразуем его к стандартному виду

$$\ddot{y} + 2h\dot{y} + \omega_0^2 y = f(t), \quad (8.56)$$

где $f(t) = \frac{F(t)}{m}$; h – коэффициент демпфирования; $\omega_0 = \sqrt{c/m}$ – собственная частота колебаний роликоопоры.

Введем относительное демпфирование $\beta = h/\omega_0$.

Тогда

$$\ddot{y} + 2\beta\omega_0 \dot{y} + \omega_0^2 y = f(t). \quad (8.57)$$

Определим частотную характеристику роликоопоры

$$W(i\omega) = 1/(\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega\omega_0\beta). \quad (8.58)$$

Математическое ожидание реакции M_y будет равно

$$M_y = M_x W(0) = M_x / \omega_0^2. \quad (8.59)$$



Так как спектральная плотность $S_x(\omega)$ располагается вблизи собственной частоты динамической системы (рис.8.8), то можно положить, что $S_x(\omega) = S_x(\omega_0) = \text{const}$.

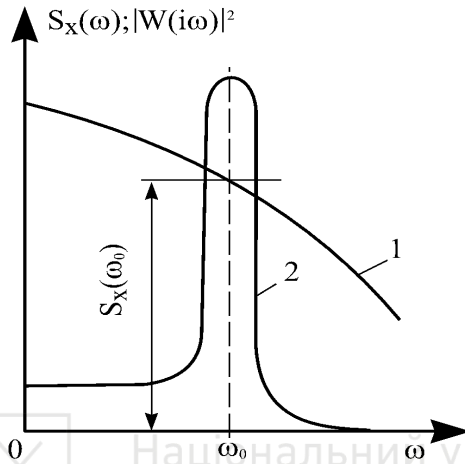


Рис. 8.8. Графики функций:

1 – $S_x(\omega)$; 2 – $|W(i\omega)|^2$

В таком случае

$$S_y(\omega) = S_x(\omega_0) |W(i\omega)|^2. \quad (8.60)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \hat{E}_o(0) = \sigma_y^2 &= 2S_x(\omega_0) \int_0^\infty |W(i\omega)|^2 d\omega = \\ &= 2S_x(\omega_0) \int_0^\infty \frac{d\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2 \omega_0^2}. \end{aligned} \quad (8.61)$$

Интеграл полученного вида табулирован и равен $\pi / (4\beta\omega_0^3)$.

В таком случае

$$\sigma_y = \sqrt{\pi S_x(\omega_0) / (2\beta\omega_0^3)}. \quad (8.62)$$

При нормальном случайном процессе суммарное перемещение с вероятностью 0,995 составит

$$a^* = M_y + 3\sigma_y. \quad (8.63)$$

Пример 8.1. Найти максимальное перемещение роликоопоры кон-



вейера a^* под действием стационарного стохастического процесса $F(t)$, создаваемого потоком крупнокускового груза с математическим ожиданием $M_F = 10$ кН и среднеквадратичным отклонением $\sigma_F = 2$ кН. Корреляционная функция аппроксимируется выражением $K_F(\tau) = \sigma_F^2 \cdot e^{-\alpha\tau}$, где $\alpha = 0,5$ с⁻¹. Масса роликоопоры $m = 100$ кг; линейная жесткость упругой системы $c = 70$ кН/м; коэффициент относительного демпфирования $\beta = 0,2$.

Решение. Используем расчетные формулы п.8.6. Вычисляем собственную частоту колебаний роликоопоры:

$$\omega_0 = \sqrt{70000/100} \cong 26 \tilde{n}^{-1}.$$

Находим спектральную плотность $S_x(\omega_0) = 0,2$ м²/с³; тогда по формуле (8.62) имеем $\sigma_y = 0,009$ м.

Максимальное перемещение роликоопоры определяем по соотношению (8.63).

Сначала ищем M_y :

$$M_y = M_x / \omega_0^2 = M_F / (m \cdot \omega_0^2) = 0,143 \text{ м}.$$

Окончательно получаем:

$$a^* = 0,143 + 3 \cdot 0,009 = 0,17 \text{ м}.$$

8.7. Моделирование динамической системы подвески самоходного скрепера

Тенденция к ужесточению санитарных норм на допустимые уровни колебаний рабочих мест механиков-операторов, а также необходимость снижения вертикальных колебаний самоходных скреперов при повышении транспортных скоростей, требуют обоснованного подхода к выбору динамической системы подвески указанных машин.

Рассмотрим расчетные схемы для двух наиболее распространенных систем подвески передней секции и кабины самоходного скрепера (рис.8.9).

На рис.8.9, *а* представлена простейшая расчетная схема, единственным упругим элементом которой являются шины. Ее можно назвать схемой с жесткой подвеской. Кабина прикреплена к мосту без амортизаторов и составляет с ним одно целое.

Расчетная схема на рис.8.9, *б* отличается от предыдущей тем, что кабина выполнена в виде отдельного подрессорного блока.

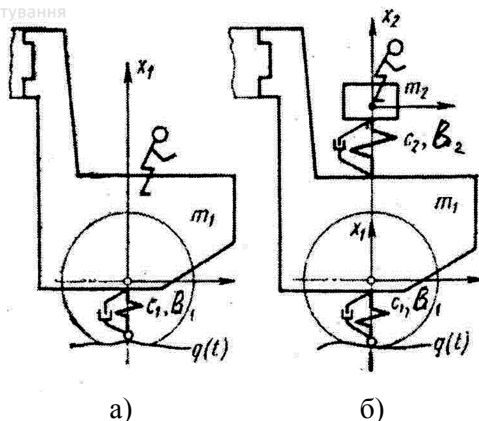


Рис. 8.9. Расчетные схемы динамических систем подвески:
а – с жесткой подвеской кабины; б – с упругой подвеской кабины

В линейной постановке расчетная схема при жесткой подвеске кабины описывается таким уравнением:

$$m_1 \ddot{x}_1 + b_1 \dot{x}_1 + c_1 x_1 = c_1 q(t) + b_1 \dot{q}(t). \quad (8.64)$$

Расчетная схема с упругой подвеской кабины описывается системой уравнений:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + b_1 \dot{x}_1 + c_1 x_1 + c_2 (x_1 - x_2) + b_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) &= c_1 q(t) + b_1 \dot{q}(t); \\ m_2 \ddot{x}_2 + b_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + c_2 (x_2 - x_1) &= 0. \end{aligned} \quad (8.65)$$

В уравнениях приняты такие обозначения: x_1 и x_2 – перемещения масс; $m_{1,2}$; $c_{1,2}$; $b_{1,2}$ – соответственно приведенные массы, жесткости и коэффициенты вязкости; $q(t)$ – возмущающее воздействие дороги.

Спектральная плотность микронеровностей дороги описывается зависимостью:

$$S_q(\omega) = \frac{2D_q(\alpha + \beta)\alpha \cdot \beta}{(\alpha^2 + \omega^2)(\alpha^2 + \beta^2)}, \quad (8.66)$$

где D_q – дисперсия входного процесса; α , β – постоянные коэффициенты; ω – частота воздействия.

В качестве критериев оценки динамической системы подвески принимаются дисперсии перемещений $\sigma_{x_1}^2$ и $\sigma_{x_2}^2$, определяемые по соотношению:



$$\sigma_K^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |W_K(i\omega)|^2 \cdot S_q(\omega) d\omega, \quad (8.67)$$

а также дисперсии ускорений $\sigma_{\ddot{x}_1}^2$ и $\sigma_{\ddot{x}_2}^2$, определяемые по соотношению:

$$\sigma_K^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |W_K(i\omega)|^2 \cdot \omega^4 \cdot S_q(\omega) d\omega, \quad (8.68)$$

где k – обобщенная характеристика стохастического процесса.

Приведенные соотношения являются известными зависимостями статистической динамики.

Наибольшие трудности вызывает определение передаточных функций динамической системы $W_K(i\omega)$ от входа q к одному из выходов ($k = x_1; x_2; \ddot{x}_1; \ddot{x}_2$). Эти функции находятся из решения уравнений (8.65).

Их общий вид представляет собой сложные дробно-рациональные функции, которые являются отношениями полиномов различной степени. Ввиду громоздкого вычислительного аппарата указанные передаточные функции в настоящем пособии не приводятся. Рассмотрим только конечные результаты.

Расчеты выполнялись для средних самоходных скреперов с собственной массой, приходящейся на переднюю ось машины, равной 20...40 т.

Дорожные условия (грунтовая дорога) характеризовались такими данными: $\sqrt{D_q} = 3,5$ см; $\alpha = 0,3$; $\beta = 12$. Собственная частота колебаний динамической системы $\omega_0 = 17...20$ с⁻¹. Скорость варьировалась в интервале 5...15 м/с.

Результаты вычислений сведены в табл.8.1.

Таблица 8.1

Тип кабины	Показатель	Скорость движения, м/с		
		5	10	15
без амортизации	σ_{x_1} , см	3,0	4,0	4,6
	$\sigma_{\ddot{x}_1}$, м/с ²	6,0	8,0	10,0
с амортизацией	σ_{x_2} , см	1,0	2,0	2,5
	$\sigma_{\ddot{x}_2}$, м/с ²	3,0	4,5	5,6



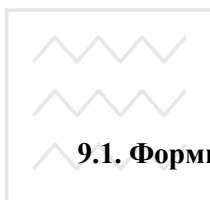
Таким образом, подвеска кабины на амортизаторах позволяет почти в два раза снизить средние квадратичные отклонения по перемещениям и ускорениям. При этом значения $\sigma_{\ddot{x}_2}$ не превышают допустимую норму $[\sigma_{\ddot{x}}] = 7 \text{ м/с}^2$.

Следует отметить, что во многих случаях в качестве спектральной плотности микронеровностей грунтовой дороги (после прохода автогрейдера) используют такую зависимость:

$$S_q(\omega) = \frac{2D_q \cdot \alpha \cdot v}{(\alpha v)^2 + \omega^2}, \quad (8.69)$$

где α – характеристика корреляционной связи; v – скорость движения машины.

Обычно принимают $D_q = 32 \text{ см}^2$; $\alpha = 0,16 \cdot 10^{-2} \text{ см}^{-1}$.



9. ЭМПИРИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ^{*)}

9.1. Формирование и свойства эмпирических моделей

Эмпирические модели формируются в результате идентификации динамических систем при проведении на них активных физических экспериментов. При этом осуществляются наблюдения за входными (контролируемыми) факторами X_1, X_2, \dots, X_n , которые являются независимыми переменными, и выходными факторами y_1, y_2, \dots, y_m , которые являются зависимыми переменными и называются откликами.

Соотношение вида

$$y_k = f(X_1, X_2, \dots, X_n), \quad (9.1)$$

$$(k = 1, 2, \dots, m)$$

и есть эмпирическая математическая модель динамической системы.

Вероятностные связи между переменными зависимости (9.1) обычно выражаются через регрессионные функции. Соответственно и эмпирические модели представляют собой регрессионные модели.

Основным математическим аппаратом при формировании регрессионных моделей служат методы планирования экспериментов, когда входные переменные варьируются по специальному плану.

Проанализируем общую схему построения линейных регрессионных моделей. Допустим, что осуществляется варьирование n входных пере-



менных на двух уровнях (верхнем и нижнем) и реализуются все возможные комбинации таких уровней. В этом случае мы имеем дело с полным факторным экспериментом (ПФЭ) типа 2^n .

Регрессионная модель формируется в таком виде:

$$y = b_0 + \sum_{i=1}^n b_i x_i, \quad (9.2)$$

где b_0 и b_i – коэффициенты регрессии;

x_i – кодированная переменная, причем $x_i = (X_i - X_{0i}) / \Delta X_i$;

$\Delta X_i = (X_{i\max} - X_{i\min})$ – натуральное значение интервала варьирования i -го фактора;

$X_{i\max}$ и $X_{i\min}$ – натуральные значения верхнего и нижнего уровней i -го фактора;

X_{0i} – натуральное значение основного уровня i -го фактора.

*) Раздел написан аспирантом Голотюком Н.В.

Таким образом, кодированная переменная может принимать значения -1 ; 0 ; $+1$.

Кодированные переменные очень удобны при экспериментальных исследованиях, т.к. обработка результатов опытов проводится в стандартной форме, не зависящей от конкретных условий динамической задачи.

Рассмотрим ПФЭ типа 2^3 . Он задается матрицей планирования, приведенной в табл.9.1.

Таблица 9.1

Номер опыта №	Ф а к т о р ы			Отклик y
	x_1	x_2	x_3	
1	-	-	-	y_1
2	+	-	-	y_2
3	-	+	-	y_3
4	+	+	-	y_4
5	-	-	+	y_5
6	+	-	+	y_6
7	-	+	+	y_7
8	+	+	+	y_8

Каждая строка матрицы отвечает условиям определенного опыта, а столбцы (кроме последнего) – кодированным значениям одной из независимых переменных.



В последний столбец записываются натуральные значения зависимой переменной y , полученные при проведении эксперимента.

Для упрощения матрицы вместо значений $+1$ и -1 кодированных факторов в нее вносятся только знаки « $+$ » и « $-$ ».

Особо следует отметить, что выбор центра плана ПФЭ (нулевой точки) и интервалов варьирования факторов лежат вне математической теории планирования эксперимента. Этот этап должен решаться исследователем на основе особенностей динамической системы.

После построения матрицы планирования ее преобразуют в рабочую матрицу. Для этого заменяют кодированные значения факторов натуральными величинами. В соответствии с рабочей матрицей проводят эксперимент таким образом, чтобы можно было устранить систематическую ошибку. Для этого последовательность опытов в эксперименте должна быть случайной. Это называется рандомизацией. Рандомизацию проводят, как правило, искусственно, применяя таблицу случайных чисел. Например, рандомизированный ряд для первых десяти натуральных чисел имеет такой вид: 2; 9; 5; 8; 1; 3; 7; 4; 6; 10.

Получив экспериментальные данные в виде откликов, вновь переходят к матрице планирования и с ее помощью вычисляют коэффициенты регрессии по следующим формулам:

$$b_0 = \frac{1}{N} \sum_{u=1}^N \bar{y}_u ; \quad b_i = \frac{1}{N} \sum_{u=1}^N x_{iu} \bar{y}_u , \quad (9.3)$$

где N – число опытов; \bar{y}_u – среднее значение функции отклика в u -ом опыте; x_{iu} – кодированное значение i -го фактора в u -ом опыте.

Оценка значимости коэффициентов регрессии производится с помощью дисперсионного анализа.

Дисперсией называется степень разброса значений случайной величины от ее среднего значения. Дисперсия единичного u -го опыта равна

$$S_u^2 = \frac{\sum_{k=1}^m (y_{uk} - \bar{y}_u)^2}{m - 1} , \quad (9.4)$$

где m – число параллельных наблюдений в u -ом опыте; y_{uk} – одно из значений переменной в u -ом опыте; \bar{y}_u – среднее значение переменной в u -ом опыте.

Дисперсией воспроизводимости, или дисперсией опытов, называется



$$S_y^2 = \frac{1}{N} \sum_{u=1}^N S_u^2 . \quad (9.5)$$

Статистическая значимость коэффициентов регрессии (возможность принять значение некоторого коэффициента b_i равным нулю) проверяется с помощью t – критерия Стьюдента

$$t_{b_i} = \frac{|b_i|}{S_{b_i}} , \quad (9.6)$$

где $S_{b_i} = S_y / \sqrt{N \cdot m}$ – дисперсия оценки коэффициентов.

Вычисленное по (9.6) значение t_{b_i} сравнивается при доверительной вероятности 0,95 с табличным значением t_T (табл.9.2), которое находится в зависимости от числа степеней свободы

$$f = N(m - 1) . \quad (9.7)$$

Таблица 9.2

f	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t_T	12,7	4,3	3,18	2,77	2,57	2,45	2,36	2,31	2,26	2,23
f	11	12	13	14	15	20	30	40	60	120
t_T	2,20	2,18	2,16	2,14	2,13	2,09	2,04	2,02	2,00	1,98

При $t_{b_i} > t_T$ коэффициент уравнения регрессии b_i значим. В противном случае этот коэффициент следует исключить из уравнения. При этом повторный перерасчет коэффициентов не проводится.

Для раскодирования уравнений регрессии в расчетные формулы используется соотношение

$$b_i x_i = \frac{b_i}{\Delta X_i} (X_i - X_{oi}) . \quad (9.8)$$

Пример 9.1. По результатам эксперимента построить эмпирическую модель динамической системы двигателя автокрана КС-2561Д, в которой выходная величина y (интенсивность вибрации двигателя, дБ) является функцией следующих факторов: X_1 – дисбаланса коленчатого вала в сборе с маховиком и сцеплением, г·см; X_2 – массы комплекта шатунно-поршневой группы, г; X_3 – зазора в коренных

Соответствующие исходные данные, матрица планирования ПФЭ 2^3 и результаты эксперимента (при трех параллельных наблюдениях) приведены в табл.9.3.

Решение. Расчетные значения оценок дисперсии для каждого опыта S_u , и усредненная оценка дисперсии воспроизводимости всего эксперимента S_y приведены в табл.9.4.

По формулам (9.3) вычисляем коэффициенты регрессии с учетом знаков матрицы планирования:

$$b_0 = 74,93; \quad b_1 = 3,27; \quad b_2 = 4,34; \quad b_3 = -1,53.$$

Находим дисперсию оценки коэффициентов S_{b_i}

$$S_{b_i} = 1,4 / \sqrt{8 \cdot 3} = 0,286.$$

Таблица 9.3

Показатели		Факторы			Отклики
		1	2	3	$\bar{y}(\bar{o} = 3)$
Уровни варьирования; интервал варьирования	+1	200	2510	0,18	
	0	120	2450	0,12	
	-1	40	2390	0,06	
	ΔX_i	80	60	0,06	
Номера опыта, N	1	+	+	+	81,02
	2	-	+	+	73,60
	3	+	-	+	72,30
	4	-	-	+	66,67
	5	+	+	-	84,17
	6	-	+	-	78,30
	7	+	-	-	75,33
	8	-	-	-	68,06

Таблица 9.4

	Номер опыта								$\sum_{u=1}^N S_u^2$	S_y^2
	1	2	3	4	5	6	7	8		

S_u^2	2,97	2,09	2,71	1,62	2,52	1,29	1,33	1,16	15,69	1,96
---------	------	------	------	------	------	------	------	------	-------	------

По t – критерию определяем значимость коэффициентов:

$$t_{b_0} = 261,99; t_{b_1} = 11,43; t_{b_2} = 25,17; t_{b_3} = 5,34.$$

Табличное значение t – критерия при $f = 8(3 - 1) = 16$ составляет $t_T = 2,12$.

Так как во всех случаях $t_b > t_T$, то все коэффициенты регрессии значимы.

Таким образом, закодированное уравнение регрессии примет вид:

$$y = 74,93 + 3,27x_1 + 4,34x_2 - 1,53x_3.$$

После раскодирования получим эмпирическую модель динамической системы двигателя автокрана:

$$y = -104,12 + 0,041X_1 + 0,072X_2 - 25,5X_3.$$

В центре эксперимента при $X_{01} = 120$ г·см, $X_{02} = 2450$ г; $X_{03} = 0,12$ мм имеем $y = 77,14$ дБ.

9.2. Оптимизационное исследование эмпирических моделей

При использовании линейных регрессионных моделей с 2 – 4 факторами поиск оптимальных решений обычно осуществляется с помощью метода Бокса-Уилсона, который часто называют методом крутого восхождения. Суть метода состоит в следующем.

По результатам малой серии опытов находится локальное описание поверхности отклика в некоторой исходной области с помощью регрессионной модели

$$y = b_0 + b_1x_1 + \dots + b_nx_n. \quad (9.9)$$

В центре исходной области задается вектор-градиент полученной функции отклика $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$:

$$\text{grad } y = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}j + \frac{\partial f}{\partial x_2}k + \dots \right), \quad (9.10)$$

где j, k – единичные векторы по осям переменных x_i .

Этот вектор перпендикулярен поверхности равного уровня $y = \text{const}$ и указывает направление движения к оптимуму. Коэффициенты b_i уравнения (9.9) являются координатами вектор-градиента. При этом

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = b_i.$$

Для движения по графику следует по каждой из осей факторного

пространства изменять значения факторов пропорционально коэффициентом b_i . Чтобы выполнить эту операцию, осуществляют переход от кодированных переменных x_i к натуральным X_i и вычисляют произведения $b_i \Delta X_i$ для всех факторов (ΔX_i – интервал варьирования i -го фактора). Эти произведения называются составляющими градиента.

Далее выбирают фактор, для которого произведение $b_i \Delta X_i$ оказалось наименьшим по абсолютной величине. Этот фактор принимают за базовый и из физических соображений назначают шаг его изменения h_B в натуральных единицах.

Для всех остальных факторов определяют отношения θ_i произведений $b_i \Delta X_i$ к такому же произведению для базового фактора. Полученным величинам θ_i приписывают знаки, соответствующие коэффициентам b_i каждого фактора, если ищется максимум функции отклика.

Для продвижения вдоль направления градиента шаги всех факторов рассчитывают по соотношению

$$h_i = h_B \cdot \theta_i . \quad (9.11)$$

Проведение соответствующих опытов осуществляется при условии изменения уровней факторов одновременным прибавлением рассчитанных шагов к исходному (нулевому) уровню в реальном масштабе:

$$X_{iq} = X_{i0} + h_i , \quad (9.12)$$

где X_{iq} – натуральное значение i -го фактора в некоторой точке q , где проводится опыт ; X_{i0} – нулевой уровень i -го фактора.

Указанные опыты могут быть мысленные и реальные. Мысленные опыты играют важную роль как дополнительные расчетные выходные величины по уравнению регрессии в точках, расположенных в направлении движения к оптимуму. Реализацию мысленных опытов начинают от точки, лежащей вне области, ограниченной точками начального плана.

Однако, чем ближе эксперимент приближается к оптимуму, тем меньше нужно делать мысленных опытов, чтобы не перейти его. В этом случае через 2–3 мысленных опыта следует ставить на экспериментальной установке реальные опыты с заданным шагом.

Если при крутом восхождении окажется, что каким-либо фактором нельзя варьировать (в силу ограниченности возможностей установки или условий опытов), то его фиксируют на оптимальном уровне и продолжают движение по другим факторам.

Обычно после первого линейного приближения центр эксперимента переносят в точку с наилучшим выходом оптимизируемых факторов и, сократив интервалы варьирования, продолжают восхождение по по-

верхности отклика. В результате этого эксперимента получают новое уравнение регрессии. Если окажется, что все его коэффициенты незначимы, следовательно, зона оптимума достигнута.

Как правило, число циклов крутого восхождения или наискорейшего спуска не превышает трех.

Пример 9.2. Найти оптимальные параметры динамической системы вибротрамбовки, которые обеспечивают максимальный уровень вибрации (Гц).

В качестве основных параметров принять: X_1 – дисбаланс вала вибратора, г·см; X_2 – момент затяжки болтов крепления вибратора к рабочей площадке, Нм. Для расчетов использовать исходную линейную регрессионную модель динамической системы вибротрамбовки, полученную в результате предварительных экспериментальных исследований.

Решение. В табл.9.5 приведены уровни варьирования факторов, матрица планирования и результаты ПФЭ типа 2^2 для исходной регрессионной модели, а также расчет крутого восхождения к оптимуму по методу Бокса-Уилсона.

Таблица 9.5

Последовательность операций	Факторы		Функция отклика, y
	1	2	
Основной уровень, X_{i0}	50	25	
Интервал варьирования, ΔX_i	5	1	
Верхний уровень, X_{\max}	55	26	
Нижний уровень, X_{\min}	45	24	
Опыты ПФЭ	x_1	x_2	
I	-	-	35,0
II	+	-	38,9
III	-	+	32,3
IV	+	+	36,2
b_i	1,95	-1,35	
$b_i \Delta X_i$	9,75	-1,35	
Шаг при изменении X_2 на $-0,5$	3,6	-0,5	
Округления	3,5	-0,5	
Опыты крутого восхождения	X_1	X_2	
Y (мысленный)	53,5	24,5	37,6
YI (мысленный)	57,0	24,0	39,7
YII (реальный)	60,5	23,5	42,5
YIII (реальный)	64,0	23,0	41,5



В результате проведения ПФЭ было получено следующее уравнение регрессии:

$$y = 35,6 + 1,95x_1 - 1,35x_2 .$$

Рассмотрим более подробно этапы крутого восхождения.

1. Находим составляющие градиента

$$b_1 \Delta X_1 = 1,95 \cdot 5 = 9,75 ; \quad b_2 \Delta X_2 = -1,35 \cdot 1 = -1,35 .$$

2. В качестве базового принимаем фактор X_2 и назначаем шаг его изменения $h_b = 0,5$.

3. Вычисляем отношение

$$\theta_1 = 9,75 / 1,35 = 7,2 .$$

4. Находим шаг изменения первого фактора

$$h_1 = h_b \cdot \theta_1 = 0,5 \cdot 7,2 = 3,6 .$$

5. Для удобства эксперимента округляем этот шаг и принимаем $h_1 = 3,5$.

6. Определяем условия проведения опытов Y – YIII. Они формируются в результате последовательного прибавления $h_1 = 3,5$ и $h_2 = -0,5$ к основным уровням факторов X_{10} и X_{20} .

7. При проведении мысленных опытов представляем уравнение регрессии в натуральном масштабе. После его раскодирования получим

$$y = 49,85 + 0,39 X_1 - 1,35 X_2 .$$

С помощью этого уравнения рассчитываем результаты Y и YI мысленных опытов.

8. На экспериментальной установке проводим YII и YIII реальные опыты.

Анализ результатов опытов Y – YIII показывает, что максимальный уровень вибрации ($y = 42,5$ Гц) в вибротрамбовке достигается при следующих значениях определяющих факторов: $X_{1\text{опт}} = 60,5$ г·см; $X_{2\text{опт}} = 23,5$ Нм. Для получения более точных результатов можно провести новый ПФЭ, в котором значения $X_{1\text{опт}}$ и $X_{2\text{опт}}$ следует принять в качестве основных уровней, а затем осуществить очередное крутое восхождение.



ЛИТЕРАТУРА

1. Баладинский В.Л. Динамическое разрушение грунтов. - К.: Изд-во КГУ, 1971, 224 с.
2. Бирюков М.П. Динамика и прогнозирующий расчет механических систем. – Минск: Вышэйшая школа, 1980, 192 с.
3. Вайнсон А.А., Андреев А.Ф. Крановые грузозахватные устройства: Справочник. – М.: Машиностроение, 1982, 304 с.
4. Вейц В.Л., Кочура А.Е., Мартыненко А.И. Динамические расчеты приводов машин. – Л.: Машиностроение, 1971, 352 с.
5. Волков Д.П. Динамика и прочность одноковшовых экскаваторов. – М.: Машиностроение, 1965, 288 с.
6. Волков Д.П., Каминская Д.А. Динамика электромеханических систем экскаваторов. – М.: Машиностроение, 1971, 384 с.
7. Волков Д.П., Черкасов В.А. Динамика и прочность многоковшовых экскаваторов и отвалообразователей. – М.: Машиностроение, 1969, 408 с.
8. Вульфсон И.И. Колебания машин с механизмами циклового действия. – Л.: Машиностроение, 1990, 309 с.
9. Гихман И.И., Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов. – М.: Наука, 1977, 567 с.
10. Гончаревич И.Ф., Докукин Л.В. Динамика горных машин с упругими связями. – М.: Наука, 1975, 212 с.
11. Гончаревич И.Ф., Фролов К.В. Теория вибрационной техники и технологии. – М.: Наука, 1981, 320 с.
12. Живейнов С.И., Карасев Г.Н., Цвей И.Ю. Строительная механика и металлоконструкции строительных и дорожных машин. – М.: Машиностроение, 1988, 280 с.
13. Казак С.А. Динамика мостовых кранов. – М.: Машиностроение, 1968, 332 с.
14. Кожевников С.Н. Динамика нестационарных процессов в машинах. – К.: Наукова думка, 1986, 288 с.
15. Коловский М.З. Динамика машин. – Л.: Машиностроение, 1989, 280 с.
16. Комаров М.С. Динамика механизмов и машин. – М.: Машиностроение, 1969, 294 с.
17. Левитский Н.И. Колебания в механизмах. – М.: Наука, 1988, 336 с.
18. Лобов Н.А. Динамика грузоподъемных машин. – М.: Машино-



19. Малиновский Е.Ю., Гайцгори М.М. Динамика самоходных машин с шаровой рамой. – М.: Машиностроение, 1974, 176 с.
20. Орликов М.Л. Динамика станков. – К.: Вища школа, 1989, 272 с.
21. Пановко Я.Г. Основы прикладной теории колебаний и удара. – Л.: Политехника, 1990, 272 с.
22. Подэрни Р.Ю. Горные машины и комплексы для открытых работ. Том 2. – М.: Изд-во Московского государственного горного университета, 2001, 292 с.
23. Попов Е.П., Верещагин А.Ф., Зенкевич С.Л. Манипуляционные работы. Динамика и алгоритм. – М.: Наука, 1978, 398 с.
24. Потураев В.Н., Белобров В.И., Михайличенко Е.И. Анализ динамики механических систем на аналоговых ЭВМ. – К.: Вища школа, 1989, 151 с.
25. Холодов А.М. Основы динамики землеройно-транспортных машин. – М.: Машиностроение, 1968, 156 с.
26. Фролов К.В., Фурман Ф.А. Прикладная теория виброзащитных систем. – М.: Машиностроение, 1980, 276 с.
27. Червоненко А.Г., Раздольский А.Г., Заболотный Ю.В. Динамика протяженных горных транспортных машин. – К.: Наукова думка, 1983, 192 с.
28. Шахмейстер Л.Г., Дмитриев В.Г. Теория и расчет ленточных конвейеров. – М.: Машиностроение, 1987, 336 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

	ВВЕДЕНИЕ	3
1.	ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ	5



2.	АНАЛИТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ	13
2.1.	Приведение динамических систем к эквивалентной расчетной схеме	13
2.2.	Научные основы формирования аналитических моделей динамических систем	27
2.3.	Модели одномассовых динамических систем и их решение	30
2.4.	Модели линейных многомассовых динамических систем и их решение	49
3.	3. ДИНАМИКА ТРАНСМИССИЙ МАШИН	58
3.1.	Особенности формирования расчетной схемы	58
3.2.	Типовые технологические нагрузки трансмиссий	61
3.3.	Оценка динамических нагрузок	62
3.4.	Критические состояния валов трансмиссий	69
4.	ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ПОДЪЕМНО-ТРАНСПОРТНЫХ МАШИН	73
4.1.	Оценка динамических нагрузок в грузозахватных устройствах кранов	73
4.2.	Динамические нагрузки в крановой тележке при раскачивании груза на канатах	79
4.3.	Ударные нагрузки при наезде крана на концевые упоры (буфера)	82
4.4.	Динамика механизма подъема стреловых кранов-манипуляторов	83
4.5.	Динамические нагрузки в упругой системе погрузчика перекидного типа	85
4.6.	Динамические процессы в ленточных конвейерах	87
5.	ДИНАМИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ В ЗЕМЛЕРОЙНЫХ МАШИНАХ	92
5.1.	Общая постановка динамических задач	92
5.2.	Одноковшовые экскаваторы	92
5.3.	Многоковшовые роторные экскаваторы	100
5.4.	Землеройно-транспортные машины	107
5.5.	Рыхлители	114
6.	ДИНАМИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ В МАШИНАХ ВИБРАЦИОННОГО ПРИНЦИПА ДЕЙСТВИЯ	118
6.1.	Особенности динамического расчета	118
6.2.	Динамические параметры вибровозбудителей	118
6.3.	Динамика вибрационных транспортеров	125

6.4.	Динамика виброударного погружения свай	129
6.5.	Динамика вибрационных рыхлителей	132
7.	ВИБРОИЗОЛЯЦИЯ МАШИН	136
7.1.	Динамические характеристики одноосного виброизолятора	136
7.2.	Динамические характеристики двухкаскадной виброизоляции	140
7.3.	Динамические характеристики виброизоляции при ударном воздействии	141
7.4.	Управляемые системы виброизоляции	143
7.5.	Динамическое поддрессирование машин	144
7.6.	Виброзащита машиниста-оператора	149
8.	СТОХАСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ	158
8.1.	Постановка задачи	158
8.2.	Характеристики случайных функций	159
8.3.	Спектральное разложение стационарной случайной функции	164
8.4.	Оценка реакции динамической системы при воздействии на нее стационарного стохастического процесса	166
8.5.	Моделирование динамического взаимодействия ходовой системы на балансирной подвеске с микрорельефом обрабатываемой поверхности	168
8.6.	Стохастическая модель подвесной системы конвейера при его загрузке крупнокусковым материалом	171
8.7.	Моделирование динамической системы подвески самоходного скрепера	174
9.	ЭМПИРИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ	178
9.1.	Формирование и свойства эмпирических моделей	178
9.2.	Оптимизационное исследование эмпирических моделей	183
	ЛИТЕРАТУРА	187

Учебное пособие

Сухарев Эдуард Александрович



Національний університет
водного господарства
та природокористування

ОСНОВЫ ДИНАМИКИ ПОДЪЕМНО - ТРАНСПОРТНЫХ И ДОРОЖНО - СТРОИТЕЛЬНЫХ МАШИН

Рецензенты:

С.В.Кравец, профессор, д.т.н.

В.Ф. Ткачук, профессор, к.т.н.



Компьютерная верстка Н.В. Голотюк

Набор А.В.Климова

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Подписано в печать 2012 г. Формат 60х84 $\frac{1}{16}$
Бумага типографская №1. Гарнитура Times. Печать высокая.
Усл.-печ. лист. 10.6. Тираж 100 экз.

Издательство Национального университета водного
хозяйства и природоиспользования
33000, Ровно, ул. Соборная, 11