Міністерство освіти і науки України
Національний університет водного господарства та природокористування

04-02-35

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ТА ЗАВДАННЯ
до вивчення та виконання самостійної роботи з навчальної дисципліни "Вища математика" (розділ "Основи теорії ймовірностей")

для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня спеціальності 192 "Будівництво та цивільна інженерія" заочної форми навчання

Рекомендовано науково-методичною
комісією за спеціальністю 192
"Будівництво та цивільна інженерія"
Протокол № 1 від 25.10. 2018 р.

Рівне ─ 2019

Методичні вказівки та завдання до вивчення та виконання самостійної роботи з навчальної дисципліни "Вища математика" з розділу "Основи теорії ймовірностей" для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня спеціальності 192 “Будівництво та цивільна інженерія” заочної форми навчання / Брушковський О.Л., Дубчак І.В. ─ Рівне: НУВГП, 2019. ─ 112 с.

Укладачі:
Брушковський О. Л., канд. техн. наук, доцент;
Дубчак І.В., асистент.

Відповідальна за випуск: С.П. Цецик, кандидат педагогічних наук, доцент, в.о. завідувача кафедри вищої математики.

ЗМІСТ

1. Вступ

Мета методичних вказівок — максимально допомогти здобувачам вищої освіти заочної форми навчання у вивченні важливого розділу вищої математики “Основи теорії ймовірностей” та полегшити їх підготовку до складання відповідного модуля.

Здобувач вищої освіти повинен вивчити відповідні терміни, теореми і методи теорії ймовірностей та їх застосування до розв’язування задач та прикладів.

В умовах обмеженої кількості аудиторних годин конспекти втратили своє традиційне значення бути основним джерелом знань для здобувача вищої освіти, тому його наполеглива самостійна робота набуває великого значення. Відповідно до робочої програми, пропонується стислий конспект лекцій, методичні рекомендації до вивчення курсу, завдання для самостійної роботи, що охоплюють весь розділ “Основи теорії ймовірностей”. Методичні вказівки призначені для студентів I курсу спеціальності 192 “Будівництво та цивільна інженерія” заочної форми навчання, мають універсальну структуру і можуть бути використані для студентів всіх форм навчання різних технічних спеціальностей.

2. Зміст навчальної дисципліни

Змістовий модуль “Основи теорії ймовірностей”

Тема 1. Основні поняття і теореми

Масові випадкові явища. Предмет теорії ймовірностей. Події та їх класифікація. Алгебра подій. Частоти і їх властивості. Ймовірність події. Аксіоми теорії ймовірностей.

Класичний і статистичний методи визначення базових ймовірностей. Елементи комбінаторики. Біном Ньютона. Властивості ймовірностей (ймовірність появи протилежної події, ймовірність появи неможливої події, теорема додавання ймовірностей будь-яких двох подій, умовна ймовірність, теорема добутку ймовірностей, теорема добутку ймовірностей для незалежних подій). Поняття про формулу повної ймовірності і формули Байєса.

Послідовність незалежних випробувань. Схема Бернуллі. Формула Бернуллі. Найімовірніша частота появи події в незалежних пробах. Граничні теореми Лапласа і Пуассона.

Тема 2. Випадкові величини

Поняття випадкової величини. Дискретні та неперервні випадкові величини. Функція розподілу та її властивості. Ймовірність попадання випадкової величини у напівзамкнутий проміжок.

Розподіл дискретних випадкових величин. Многокутник розподілу. Типові розподіли дискретних випадкових величин: біноміальний і пуассонівський.

Неперервний і абсолютно неперервний розподіли. Функція розподілу і щільність розподілу абсолютно неперервних випадкових величин. Властивості щільності розподілу. Ймовірність попадання неперервної випадкової величини у заданий інтервал. Типові розподіли неперервних випадкових величин: рівномірний, нормальний. Параметри нормального закону. Крива Гауса. Вплив параметрів нормального розподілу на форму і положення нормальної кривої (кривої Гауса).

Ймовірність попадання у заданий інтервал і ймовірність заданого відхилення для нормально розподіленої випадкової величини. Правило трьох сигм.

Математичне сподівання і дисперсія випадкових величин та їх властивості. Математичне сподівання і дисперсія при типових розподілах випадкових величин. Початкові і центральні моменти та їх обчислення.

Поняття про закон великих чисел і центральну граничну теорему.

3. Методичні рекомендації до вивчення розділу

Перед вивченням цього розділу необхідно повторити основні правила диференціювання та інтегрування, таблиці похідних і невизначених інтегралів. Стислий конспект лекцій допоможе здобувачу вищої освіти у вивченні “Теорії ймовірностей”. Після вивчення теоретичного матеріалу кожного параграфу потрібно уважно розібрати розв’язки наведених прикладів і задач, відповісти на питання для самоперевірки, а також розв’язати приклади і задачі для самостійної роботи, умови яких наведено у кожному параграфі. Сприятиме засвоєнню матеріалу виконання індивідуального завдання на тему “Основи теорії ймовірностей”, виконання завдань навчального та тренінгового варіантів тестової модульної роботи.

Стислий конспект лекцій

§1. Предмет теорії ймовірностей. Події та їх класифікація

1.1. Масові випадкові явища. Предмет теорії ймовірностей

Багато явищ носить випадковий характер, тобто при однократному спостеріганні такого явища неможливо наперед вказати його результат. Однак при багатократному спостереженні випадкових явищ можливо помітити деякі закономірності. Масовими випадковими явищами називають такі явища, які можливо спостерігати багатократно, практично необмежену кількість разів при одних і тих же умовах.

Теорія ймовірностей є математична наука, яка займається вивченням закономірностей масових випадкових явищ.

Історична довідка. *Теорія ймовірностей виникла у XVII сторіччі. Її виникнення пов'язано з розв'язанням задач, що відносяться до області азартних ігор та страхової справи. Деякі елементи теорії ймовірностей були закладені в працях Б. Паскаля, П. Ферма і Х.Гюйгенса. Основи класичної теорії ймовірностей закладені в працях Я.Бернуллі, А.Муавра, П.Лапласа, С.Пуассона, К.Гауса, П.Чебишева, А.Маркова, А.Ляпунова. У 1933 році вийшла з друку праця А.Колмогорова "Основні поняття теорії ймовірностей", що поклала початок сучасній теорії ймовірностей як строгої математичної науки, побудованої на основі аксіом.*

1.2. Події та їх класифікація

Спостерігання даного випадкового явища при одному і тому ж комплексі умов, яке можна виконувати практично необмежену кількість разів будемо називати ймовірнісним експериментом.

Елементарною подією ω (омега) будемо називати любий результат із сукупності всіх можливих, взаємно виключних (несумісних) результатів даного ймовірнісного експерименту.

Простір елементарних подій Ω (омега), це множина всіх елементарних подій $\Omega = \{\omega\}$, що відповідає даному ймовірнісному експерименту. По числу елементів він може бути скінченним або нескінченним, останній зчисленним або незчислен-ним. Скінченний простір позначають: $\Omega = \{\omega_i \mid i = \overline{1,n}\}$.

Нескінченний простір із зчисленною множиною елементів позначають: $\Omega = \{\omega_i \mid i = \overline{1,\infty}\}$.

Приклади:

1) Якщо монету підкинуто 1 раз, то простір елементарних подій складається з двох подій: ω_1 — випав "герб" і ω_2 — випала "решка", тобто $\Omega = \{\omega_1 ; \omega_2\} = \{Г ; Р\}$.

2) Якщо монету підкинуто 2 рази, то простір елементарних подій складається з чотирьох подій:

$$\Omega = \{\omega_i \mid i = \overline{1,4}\} = \{ГГ ; ГР ; РГ ; РР\}.$$

Подією називається усяка підмножина простору елементарних подій. Події позначаються великими буквами латинського алфавіту *A*,*B*, *C* (можливо з індексами).

Приклади:

1) *A*— влучення у мішень при пострілі;
2) *B* — справна робота приладу у даний проміжок часу.

В результаті випробування відбувається тільки одна з елементарних подій ймовірнісного простору. Разом з нею відбувається або не відбуваються і багато інших, більш складних подій. Наприклад: ймовірнісний експеримент полягає в підрахуванні числа очок, що випали на верхній грані грального кубика при його однократному підкиданні. Ймовірнісний простір складається з шести елементарних подій $\Omega = \{\omega_i \mid i = \overline{1,6}\}$. Нехай в результаті експерименту відбулась подія ω_5 (випало 5 очок). Разом з тим відбулися або не відбулися більш складні події:

$A = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$ — випало непарне число очок (відбулася);

$B = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$ — випало парне число очок (не відбулася);

$C = \{\omega_5, \omega_6\}$ — випало число очок не менше 5 (відбулася).

Класифікація подій

Вірогідною називається подія, яка співпадає з простором елементарних подій. Ця подія завжди відбувається при кожному повторенні ймовірнісного експерименту. Вона позначається символом Ω .

Неможливою називається подія, яка співпадає з порожньою множиною. Ця подія завжди не відбувається при кожному повторенні ймовірнісного експерименту. Вона позначається символом $\varnothing$.

Випадковою називається подія, яка може відбутися або не відбутися при кожному повторенні ймовірнісного експерименту, тобто результат передбачити неможливо.

1.3. Алгебра подій

Об'єднанням (або сумою) двох подій *A* і *B* називається така складна подія $A \cup B$, що містить ті елементарні події, які належать хоча б одній з цих подій:

$$A \cup B = \{\omega \,|\, \omega \in A\,,\, або\, \omega \in B,\, або\, \omega \in A\, і\, B\}.$$

Таким чином подія $A \cup B$ відбувається тоді, коли відбувається хоча б одна з подій *A* або *B*, тобто або *A* , або *B*, або обидві разом.

Узагальнення. Об'єднанням (або сумою) скінченної або зчисленної множини подій $A_1, A_2, \ldots$ називається така складна подія , що містить ті елементарні події, які належать хоча б одній з цих подій.

Перетином (або добутком) двох подій *A* і *B* називається така складна подія $A \cap B$, що містить ті елементарні події, які належать як події *A* так і події *B:*

$$A \cap B = \{\omega \,|\, \omega \in A \;\; і \;\; \omega \in B\}.$$

Таким чином подія $A \cap B$ відбувається тоді, коли відбувається і подія *A* і подія *B*, тобто обидві події відбуваються разом.

Узагальнення. Перетином (або добутком) скінченної або зчисленної множини подій $A_1, A_2, \ldots$ називається така складна подія , що містить ті елементарні події, які належать одночасно всім подіям, що входять в дану множину подій.

Дві події називаються **несумісними**, якщо їх перетин є неможливою подією $A \cap B = \varnothing$. інакше події називаються **сумісними**.

Зауваження. Для несумісних подій замість $A \cup B$ можна писати $A+B$, а перетин будь-яких подій $A \cap B$ позначати $A \cdot B$ або AB.

Подія $\overline{A}$ називається **протилежною** події *A*, якщо вона є доповненням множини *A* до Ω.

Таким чином: $A \cup \overline{A} = \Omega;$ $A \cap \overline{A} = \varnothing;$ $\overline{\Omega} = \varnothing;$ $\overline{\overline{A}} = A.$

Різницею двох подій $A \setminus B$ називається така подія, яка складається з тих елементарних подій, що входять до події *A*, але не входять до події *B*.

Приклад 1. Дана множина, що складається з двох подій $\{A, B\}$.
Тоді: $A \cdot B$ — відбулись обидві події;

$A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B$ — відбулась тільки одна подія;

$A \cup B = A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B + A \cdot B$ — відбулась хоча б одна з подій;

$\overline{A} \cdot \overline{B}$ — не відбулась жодна з подій.

Звідки $A \cdot B + A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B + \overline{A} \cdot \overline{B} = \Omega$ або $A \cup B + \overline{A} \cdot \overline{B} = \Omega$.

Приклад 2. Дана множина , що складається з трьох подій $\{A, B, C\}$.

Тоді: $A \cdot B \cdot C$ — відбулись всі три події;

$A \cdot B \cdot \overline{C} + A \cdot \overline{B} \cdot C + \overline{A} \cdot B \cdot C$ — відбулись тільки дві події;

$A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C$ — відбулась тільки одна подія;

$$A \cup B \cup C = ABC + \left(AB\overline{C} + A\overline{B}C + \overline{A}BC\right) + \left(A\overline{B}\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\overline{B}C\right)$$

— відбулась хоча б одна з подій;

$\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$ — не відбулась жодна з подій.

Зрозуміло, що $A \cup B \cup C + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} = \Omega$.

Питання для самоперевірки

1. Яке явище називається випадковим?
2. Які випадкові явища називаються масовими?
3. Яка математична наука займається вивченням закономірностей масових випадкових явищ?
4. Що таке ймовірнісний експеримент?
5. Дайте означення елементарної події і простору елементарних подій. Як вони позначаються?
6. Яким може бути простір елементарних подій по числу елементів?
7. Яким буде простір елементарних подій при підкиданні монети один раз? А два рази? А три рази?
8. Яким буде простір елементарних подій при підкиданні грального кубика один раз? А два рази?
9. Дайте означення події. Як позначаються події?
10. Дайте означення вірогідної, неможливої і випадкової подій. Як вони позначаються?
11. Дайте означення об'єднання (або суми) двох подій A і B .
12. Дайте означення об'єднання (або суми) скінченної або зчисленної множини подій $A_1, A_2, \ldots$
13. Дайте означення перетину (або добутку) двох подій A і B .
14. Дайте означення перетину (або добутку) скінченної або зчисленної множини подій $A_1, A_2, \ldots$
15. Які дві події A і B називаються несумісними, а які сумісними?
16. Як позначається об'єднання двох несумісних подій A і B ?
17. Як ще позначається перетин будь-яких подій $A \cap B$?
18. Яка подія називається протилежною події A ? Які вона має властивості?
19. Дайте означення різниці двох подій A і B .

§ 2. Ймовірність події. Елементи комбінаторики

2.1. Частота події. Властивості частот

Групу випробувань з фіксованим комплексом умов називають **серією** випробувань.

Нехай n — загальна кількість випробувань в даній серії; m — кількість з них, в яких відбулась подія A ($m \le n$).

Частотою події $p^*(A)$ називається відношення числа випробувань m, у яких відбулась подія A, до загального числа випробувань n:

$$p^*(A)=\frac{m}{n}. \qquad (1)$$

У деяких випадках частоту події A потрібно визначати при додатковій умові, що відбулась інша подія B. Така частота називається умовною частотою і дорівнює

$$p^*(A|B)=\frac{m_{AB}}{m_B}, \qquad (2)$$

де m_B — кількість випробувань, в яких відбулась подія B; m_{AB} — кількість з них, в яких відбулась подія A.

Властивості частот

1. Частота неможливої події дорівнює нулю: $p^*(\varnothing)=0$.

2. Частота вірогідної події дорівнює 1 : $p^*(\Omega)=1$.

3. Частота випадкової події є невід'ємне число, не більше за 1:

$$0\le p^*(A)\le 1.$$

4. Частота появи однієї з несумісних подій, байдуже якої, дорівнює сумі їх частот:

$$p^*(A\cup B)=p^*(A)+p^*(B) \cdot$$

5. Частота сумісної появи двох подій A і B дорівнює частоті однієї з них, помножену на умовну частоту іншої:

$$p^*(A\cap B)=p^*(A)\cdot p^*(B|A) \quad \text{або} \quad p^*(A\cap B)=p^*(B)\cdot p^*(A|B).$$

6. Якщо частота події у даній серії випробувань дорівнює 0 або 1, то з цього не випливає, що подія неможлива або вірогідна.

2.2. Ймовірність події. Класичне і статистичне визначення ймовірності події. Аксіоми теорії ймовірностей

Основною закономірністю, яка спостерігається у масових випадкових явищах, є стійкість частот при великому числі випробувань. Якщо при малому числі випробувань частота події носить випадковий характер, то при достатньо великому числі випробувань вона проявляє тенденцію до стабілізації відносно деякого характерного для даної події значення. Це дає підставу вважати, що існує об'єктивна числова характеристика кожної події, ймовірність події, коло якої стабілізується частота цієї події при необмеженому зростанні числа випробувань. Ймовірність події A позначають $P(A)$. У сучасній теорії ймовірностей цю числову характеристику об'єктивної можливості появи події вводять за допомогою системи аксіом. Наведено одну з них:

Аксіома 1. Для кожної події A ймовірність $P(A)$ задовольняє подвійній нерівності:

$$0 \le P(A) \le 1.$$

Аксіома 2. Ймовірність вірогідної події дорівнює 1 :

$$P(\Omega) = 1.$$

Аксіома 3 (Аксіома додавання ймовірностей несумісних подій).
Ймовірність об'єднання попарно несумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій. Так для двох несумісних подій:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Класичний (лапласівський метод визначення ймовірностей).
Якщо всі елементарні події із деякого скінченного ймовірнісного простору рівноможливі, то ймовірність здійснення події A дорівнює відношенню числа сприятливих для неї елементарних подій m до загального числа n всіх елементарних подій

$$P(A) = \frac{m}{n}. \tag{3}$$

Класичний метод визначення ймовірностей носить обмежений характер: множина елементарних подій повинна бути скінченною, а всі елементарні події — рівноможливими. Якщо хоч одна з цих вимог порушена, то замість класичного методу потрібно застосовувати інший. Найбільш загальним з них є **статистичний метод**. Його суть полягає в тому, що за ймовірність події приймають її частоту при достатньо великому числі випробувань. Існує ряд теорем, на основі яких можна розрахувати число випробувань n для знаходження ймовірності події A з потрібною точністю.

2.3. Елементи комбінаторики

В теорії ймовірностей широке застосування знаходять методи комбінаторики, яка розглядає задачі вибору і розміщення m елементів (вибірки) з деякої скінченної множини, що містить n елементів (генеральної сукупності) у відповідності з заданими правилами.

Можливі два способи відбору: з поверненням і без повернення. У першому випадку перед відбором наступного елемента відібраний попередньо елемент повертається у генеральну сукупність, у другому — не повертається.

Вибірка об'ємом m з n елементів при вибірці з поверненням може бути проведена n^m способами.

Вибірка об'ємом m з n елементів при вибірці без повернення може бути проведена $A_n^m = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-m+1)$ числом способів. Ці вибірки відрізняються одна від одної або самими елементами, або їх порядком і називаються **розміщеннями.** Число розміщень із n елементів по m знаходиться за вказано формулою, яку на практиці використовують у такому вигляді:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}. \tag{4}$$

Приклад 1. Скількома способами можна вибрати 5 чоловік на 5 різних посад з 9 кандидатів на ці посади?

Розв'язання. $A_9^5 = \frac{9!}{(9-5)!} = \frac{9!}{4!} = \frac{4! \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{4!} = 15120.$

Розміщення з n елементів по n носять назву **перестановок**. Перестановки відрізняються одна від одної лише порядком елементів. Число перестановок із n елементів знаходиться за формулою:

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n! \tag{5}$$

Приклад 2. Дев'ять студентів вирішили піти у кінотеатр і купили 9 квитків. Скількома способами їх можна розподілити між цими студентами.

Розв'язання. $$P_9 = 9! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9 = 362\,880.$$

Вибірки з n елементів по m, які відрізняються одна від одної хоча б одним з елементів називаються **сполуками (або комбінаціями)**. Число сполук із n елементів по m знаходиться за формулою:

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} \quad . \qquad (6)$$

При цьому $C_n^0 = C_n^n = 1$; $\qquad C_n^m = C_n^{n-m}$.

Приклад 3. Скількома способами можна вибрати 4 деталі з 8 ?

Розв'язання. $$C_8^4 = \frac{8!}{4!(8-4)!} = \frac{8!}{4!\cdot 4!} = \frac{4!\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 4!} = 70\,.$$

Приклад 4. Яка ймовірність вгадати 6 номерів з 49?

Розв'язання. $m = 1$,

$$n = C_{49}^6 = \frac{49!}{6!\cdot 43!} = \frac{43!\cdot 44\cdot 45\cdot 46\cdot 47\cdot 48\cdot 49}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 43!} = 13\,983\,816.$$

Таким чином, ймовірність вгадати 6 номерів з 49 дуже мала:

$$P = \frac{m}{n} = \frac{1}{13\,983\,816} \quad .$$

Біном Ньютона. Для будь-яких чисел a і b та будь-якого натурального n :

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^n b^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m a^{n-m} b^m . \qquad (7)$$

Приклад 5. Знайти $(a+b)^4$.

Розв'язання. $$(a+b)^4 = C_4^0 a^4 + C_4^1 a^3 b + C_4^2 a^2 b^2 + C_4^3 a b^3 + C_4^4 b^4 .$$

$$C_4^0 = C_4^4 = 1; \quad C_4^1 = C_4^3 = \frac{4!}{1!\cdot 3!} = 4; \quad C_4^2 = \frac{4!}{2!\cdot 2!} = 6;$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

2.4. Формула гіпергеометричного розподілу

Часто у теорії ймовірностей розглядаються задачі, що зводяться до такої схеми. Маємо генеральну сукупність, що містить n елементів, з яких n_1 елементів I виду і $n_2 = n - n_1$ елементів II виду. З цієї сукупності вибирається r елементів. Знайти ймовірність того, що серед цих r елементів буде k елементів I виду. Ця ймовірність знаходиться за формулою **гіпергеометричного** розподілу:

$$P = \frac{C_{n_1}^k \cdot C_{n_2}^{r-k}}{C_n^r}. \tag{8}$$

Приклад 6. У цеху працюють 6 чоловіків і 4 жінки. По табельним номерам навмання відібрали 7 робітників. Знайти ймовірність, що серед них опиниться 3 жінки.

Розв'язання. $n = 10; \; n_1 = 4; \; n_2 = 6; \; r = 7; \; k = 3.$

$$P = \frac{C_{n_1}^k \cdot C_{n_2}^{r-k}}{C_n^r} = \frac{C_4^3 \cdot C_6^4}{C_{10}^7} = \frac{4!}{3!\cdot 1!} \cdot \frac{6!}{4!\cdot 2!} \cdot \frac{7!\cdot 3!}{10!} = \frac{6!\cdot 7!}{2!\cdot 10!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7!}{1\cdot 2\cdot 7!\cdot 8\cdot 9\cdot 10} = 0{,}5.$$

Питання для самоперевірки

1. Яку групу випробувань називають серією випробувань?

2. Дайте означення частоти події.

3. Сформулюйте властивості частот.

4. Який висновок можна зробити, якщо частота події в даній серії випробувань дорівнює 0 або 1? Чи буде така подія неможливою або вірогідною?

5. Яка основна закономірність спостерігається у масових випадкових явищах при великому числі випробувань?

6. Як ймовірність події пов'язана з частотою події? Як вона позначається?

7. Які аксіоми теорії ймовірностей Ви знаєте? Сформулюйте їх.

8. Які методи визначення базових ймовірностей Ви знаєте?

9. Розкажіть про класичний (лапласівський) метод визначення базових ймовірностей. Які його недоліки?

10. Розкажіть про статистичний метод визначення базових ймовірностей.

11. Що вивчає комбінаторика?

12. Яка вибірка носить назву розміщень? Як визначається число розміщень?

13. Яка вибірка носить назву перестановок? Як визначається число перестановок?

14. Яка вибірка носить назву комбінацій? Як визначається число комбінацій?

15. Запишіть біном Ньютона.

16. Запишіть формулу гіпергеометричного розподілу.

Приклади та задачі

П1. Скількома способами можна вибрати 4 чоловік на 4 різні посади з 9 кандидатів на ці посади?

В. 3 024 .

П2. Скількома способами можна посадити 6 гостей на 8 стільцях?

В. 20 160.

П3. Шість студентів вирішили піти у кінотеатр і купили 6 квитків. Скількома способами їх можна розподілити між цими студентами?

В. 720.

П4. У навчальному корпусі 10 аудиторій для проведення лабораторних робіт. Скількома способами їх можна розподілити між 10 групами студентів на одну й ту саму пару, якщо кожна група проводить заняття в окремій аудиторії?

В. 3 628 800.

П5. Скількома способами можна вибрати 2 деталі з 10 ?

В. 45.

П6. З 20 робітників потрібно виділити 6 для роботи на певній дільниці. Скількома способами це можна зробити?

В. 38 760.

П7. Знайти: а) C_9^3 ; б) $C_6^4 + C_6^0$; в) $C_{10}^1 + C_{10}^{10}$.

В. а) 84 ; б) 16 ; в) 11.

П8. Знайти $(a+b)^5$.

В. $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^4$.

П9. Знайти $(a+b)^7$.

В. $$(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^2b^5 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + \\ + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7 .$$

П10. Монету підкинуто 2 рази. Знайти ймовірність того, що хоча б один раз випав “герб”.

В. 3/4 .

П11. Підкинуто два гральних кубика. Знайти ймовірність того, що сума очок на верхніх гранях дорівнює 7.

В. 1/6 .

П12. Гральний кубик підкинуто два рази. Знайти ймовірність того, що сума очок, що випали, дорівнює 5, а добуток 4.

В. 1/18

П13. На змаганнях з біатлону виступають 100 спортсменів. Вони тягнуть із скриньки жетони з номерами від 1 до 100. Знайти ймовірність того, що номер першого навмання взятого жетона не містить цифри 5.

В. 0,81 .

П14. На п'яти однакових картках написано букви: І, В, Е, Н, Р. Картки перемішуються і розкладаються навмання в ряд. Знайти ймовірність, що з'явиться слово РІВНЕ.

В. 1/120 .

П15. У ящику є 15 деталей, серед яких 10 пофарбованих. Робітник навмання дістає 3 деталі. Знайти ймовірність того, що всі вони виявляться пофарбованими.

В. 24/91 .

П16. В групі 15 студентів, серед яких 4 відмінника. По списку навмання відібрали 5 студентів. Знайти ймовірність, що серед них буде 3 відмінника.

В. 0,073 .

П17. В будівельній бригаді 18 юнаків і 7 дівчат. По табельних номерах навмання відбирають 6 будівельників. Яка ймовірність, що серед них буде 4 юнака?

В. 0,363 .

§ 3. Основні теореми теорії ймовірностей

3.1. Властивості ймовірностей

Їх формулюють у вигляді теорем, для доведення яких використовують аксіоми теорії ймовірностей. Наведемо їх як властивості, включаючи і аксіоми.

1. Аксіома. Ймовірність випадкової події A задовольняє подвійній нерівності:

$$0 \le P(A) \le 1. \qquad (1)$$

2. Аксіома. Ймовірність вірогідної події дорівнює 1: $P(\Omega)=1$. (2)

3. Аксіома додавання ймовірностей несумісних подій. Ймовірність об'єднання попарно несумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій. Так для двох несумісних подій:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B). \qquad (3)$$

4. Ймовірність протилежної події: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$. (4)

5. Ймовірність неможливої події дорівнює 0: $P(\varnothing)=0$. (5)

6. Теорема добутку ймовірностей.

Умовною ймовірністю $P(A|B)$ події A відносно події B у випадку, коли $P(B) \ne 0$, називається відношення ймовірності перетину подій $P(A \cdot B)$ до ймовірності події B:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)}. \qquad (6)$$

Аналогічно:

$$P(B|A) = P\frac{(A \cdot B)}{P(A)}. \qquad (7)$$

При такому означенні ймовірність сумісної появи двох подій дорівнює ймовірності однієї з них, помноженої на умовну ймовірність іншої:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B). \qquad (8)$$

Узагальнення:

Ймовірність сумісної появи будь-якої кількості подій дорівнює ймовірності однієї з них, помноженої на умовну ймовірність другої відносно першої, помноженої на умовну ймовірність третьої відносно перетину двох перших і т.д., помноженої на умовну ймовірність останньої відносно перетину всіх попередніх:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1 \cdot A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n | A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_{n-1}). \qquad (9)$$

7. Теорема добутку ймовірностей для незалежних подій.

Дві події називаються незалежними, якшо поява однієї з них не змінює ймовірності іншої. Інакше події залежні.

Для незалежних подій $P(A|B) = P(A)$, $P(B|A) = P(B)$.

Ймовірність перетину або сумісної появи двох незалежних подій дорівнює добутку їх ймовірностей:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B). \qquad (10)$$

Події $A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n$ називаються незалежними, якщо кожна з них не залежить від кожної з інших і усіх їх можливих перетинів.

Для незалежних подій $A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n$:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n) \ . \qquad (11)$$

8. Теорема додавання будь-яких двох подій. Ймовірність появи об'єднання будь-яких двох подій дорівнює сумі їх ймовірностей без ймовірності їх перетину (сумісної появи):

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB). \qquad (12)$$

Приклад 1. Прилад складається з двох вузлів. Ймовірність виходу з ладу на протязі року відповідно для першого і другого вузла становить 0,2, та 0,4 . Прилади виходять з ладу незалежно один від одного. Знайти ймовірність того, що на протязі року вийдуть з ладу:

1) обидва вузли;

2) тільки один вузол;

3) ні один з вузлів;

4) хоча би один з вузлів.

Розв'язання. Позначимо події:

A — на протязі року вийшов з ладу перший вузол;

B — на протязі року вийшов з ладу другий вузол.

Ймовірності цих подій задані: $P(A)=0{,}2;\ \ P(B)=0{,}4$.

Ймовірності протилежних подій:

$$P(\bar{A})=1-P(A)=0{,}8; \qquad P(\bar{B})=1-P(B)=0{,}6.$$

Складні події:

1) AB — на протязі року вийшли з ладу обидва вузли;

2) $A\bar{B}+\bar{A}B$ — на протязі року вийшов з ладу тільки один вузол;

3) $\bar{A}\bar{B}$ — на протязі року не вийшов з ладу ні один з вузлів;

4) $A\cup B$ — на протязі року вийшов з ладу хоча би один з вузлів.

Знайдемо їх ймовірності:

1) $P(AB)=P(A)\cdot P(B)=0{,}2\cdot 0{,}4=0{,}08;$

2) $P(A\bar{B}+\bar{A}B)=P(A)\cdot P(\bar{B})+P(\bar{A})\cdot P(B)=0{,}2\cdot 0{,}6+0{,}8\cdot 0{,}4=0{,}44;$

3) $P(\bar{A}\bar{B})=P(\bar{A})\cdot P(\bar{B})=0{,}8\cdot 0{,}6=0{,}48;$

4) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0{,}2+0{,}4-0{,}08=0{,}52.$

Останню ймовірність можна знайти і інакше:

$$P(A\cup B)=P(AB)+P(A\bar{B}+\bar{A}B)=0{,}08+0{,}44=0{,}52$$ або

$$P(A\cup B)=1-P(\bar{A}\cdot\bar{B})=1-0{,}48=0{,}52\,.$$

Поясніть чому і які теореми та аксіоми були використані при знаходженні вказаних ймовірностей.

3.2. Формула повної ймовірності

Ймовірність події A, яка може відбутися тільки сумісно з однією з подій $H_1, H_2, \dots, H_n$, що утворюють повну групу несумісних подій (гіпотез, об'єднання яких співпадає з Ω) знаходиться за формулою повної ймовірності:

$$P(A)=P(H_1)\cdot P(A|H_1)+\ldots+P(H_n)\cdot P(A|H_n). \qquad (13)$$

Якщо гіпотез тільки дві, то:

$$P(A)=P(H_1)\cdot P(A|H_1)+P(H_2)\cdot P(A|H_2). \qquad (14)$$

Приклад 2. Два кооперативи виробляють однакові деталі, які після їх одержання на склад були змішані. Ймовірність браку для першого кооперативу 0,2, для другого — 0,4. Знайти ймовірність того, що взята навмання деталь буде бракована, якщо I кооператив поставив 70% деталей, а другий 30%.

Розв'язання. Введемо у розгляд події:

A — взята деталь бракована; H_1 — взята деталь виготовлена I кооперативом; H_2 — взята деталь виготовлена II кооперативом.

Тоді: $P(H_1)=0{,}7$; $P(A|H_1)=0{,}2$;

$P(H_2)=0{,}3$; $P(A|H_2)=0{,}4$;

$$P(A)=P(H_1)\cdot P(A|H_1)+P(H_2)\cdot P(A|H_2)=$$
$$=0{,}7\cdot 0{,}2+0{,}3\cdot 0{,}4=0{,}14+0{,}12=0{,}26\,.$$

3.3. Формули Байєса (переоцінка гіпотез після випробування)

Ймовірність події $P(H_k|A)$ гіпотези H_k після того, як мала місце подія A, визначається за формулами Байєса:

$$P(H_k|A)=\frac{P(H_k)P(A|H_k)}{\sum_{i=1}^{n}P(H_i)P(A|H_i)}=\frac{P(H_k)P(A|H_k)}{P(A)}, \qquad (15)$$

де $k=1,2,...,n$ і гіпотези $H_1, H_2, ..., H_n$ складають повну групу несумісних подій, об'єднання яких співпадає з простором елементарних подій Ω .

Приклад 3. Нехай при використанні умови попередньої задачи взята навмання деталь виявилась бракованою. Знайти ймовірність того, що вона була виготовлена І кооперативом.

Розв'язання. $P(H_1|A)=\frac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(A)}=\frac{0,7\cdot 0,2}{0,26}=\frac{14}{26}\approx 0,54.$

Питання для самоперевірки

1. Сформулюйте аксіому теорії ймовірностей (ймовірність випадкової події).

2. Сформулюйте аксіому теорії ймовірностей (ймовірність вірогідної події).

3. Сформулюйте аксіому додавання ймовірностей несумісних подій.

4. Сформулюйте теорему ймовірності появи протилежної події.

5. Сформулюйте теорему ймовірності появи неможливої події.

6. Дайте означення умовної ймовірності події *A* відносно події *B* і умовної ймовірності події *B* відносно події *A*.

7. Сформулюйте теорему добутку ймовірностей для залежних подій *A* і *B*.

8. Які події $A_1\cdot A_2\cdot ...\cdot A_n$ називаються незалежними?

9. Сформулюйте теорему добутку ймовірностей для незалежних подій $A_1\cdot A_2\cdot ...\cdot A_n$.

10. Сформулюйте теорему додавання ймовірностей будь-яких двох подій.

11. Запишіть формулу повної ймовірності.

12. Які обмеження накладаються на гіпотези у формулі повної ймовірності?

13. Запишіть формули Байєса.

Приклади та задачі

П1. Прилад складається з двох вузлів. Ймовірність виходу з ладу на протязі року відповідно для першого і другого вузла становить 0,8, та 0,4 . Вузли виходять з ладу незалежно один від одного. Знайти ймовірність того, що на протязі року вийдуть з ладу:а) обидва вузли; б) тільки один вузол; в) ні один з вузлів; г) хоча би один з вузлів.

В. а) 0,32; б) 0,56; в) 0,12; г) 0.88.

П2. Встановлено два незалежно працюючих сигналізатора. Ймовірність справної роботи першого 0,9, другого 0,8. Знайти ймовірність того, що справно працює тільки один сигналізатор.
В. 0,26

П3. Два агрегати працюють незалежно один від одного. Ймовірність зупинки першого на протязі місяця дорівнює 0,2, а другого 0.3. Знайти ймовірність того, що на протязі місяця зупиняться: а) обидва агрегати; б) тільки один агрегат.
В. а) 0,06; б) 0,38.

П4. Прилад складається з трьох вузлів. Ймовірність безвідмовної роботи на протязі року першого вузла становить 0,8, другого 0,5, третього 0,6. Вузли виходять з ладу незалежно один від одного. Яка ймовірність того, що на протязі року вийдуть з ладу всі три вузли?

В. 0,04 .

П5. Прилад складається з трьох вузлів. Ймовірність безвідмовної роботи на протязі року першого вузла становить 0,6 ; другого – 0,7 ; третього – 0,8. Вузли виходять з ладу незалежно один від одного. Яка ймовірність, що на протязі року вийдуть з ладу не більше двох вузлів?

В. 0,664 .

П6. Студент розшукує потрібну йому формулу в довідниках.

Ймовірності того, що потрібна йому формула знаходиться в першому, другому і третьому довідниках відповідно рівні 0,6; 0,7 і 0,8. Знайти ймовірність того, що формула міститься: а) тільки в одному довіднику; б) тільки в двох довідниках; в) в усіх трьох довідниках.

В. а) 0,188; б) 0,452; в) 0,336.

П7. Студент знає 20 з 25 питань програми. Знайти ймовірність того, що студент знає відповіді на три питання програми, задані йому викладачем.

В. 57/115.

П8. Студент знає 30 з 40 питань програми. Знайти ймовірність того, що студент знає відповідь на чотири питання програми, запропоновані йому викладачем.

В. 0,300 .

П9. Студент здає іспит по трьох розділах програми, кожний з яких містить по 20 питань. Студент знає 18 питань з першого розділу, 16 питань – з другого і 12 питань з третього розділу програми. Яка ймовірність здати іспит, якщо для цього потрібно вірно відповісти не менше, ніж на два питання?

В. 0,876 .

П10. Чому дорівнює ймовірність того, що при підкиданні трьох гральних кубиків число 6 випаде хоча б на одному?

В. 91/216.

П11. Бетоновоз розвозить бетонний розчин на три будівельні майданчики. Ймовірність того, що на протязі деякого проміжку часу бетон буде потрібний на першому майданчику, становить 0,8; для двох інших – по 0,6. Знайти ймовірність, що на протязі цього проміжку часу бетон буде потрібний менше, ніж на двох майданчиках.

В. 0,256.

П12. На будівництво залізобетонні блоки доставляються з двох заводів, причому з першого заводу доставляється 40% всіх необхідних блоків, а з другого 60 %. Ймовірність доброякісної продукції складає для першого заводу 0,80 , для другого — 0,90. Знайти ймовірність того, що навмання взятий залізобетонний блок буде доброякісним.

Відп. 0,86 .

П13. Два кооперативи виробляють однакові деталі, які після їх одержання на склад були змішані. Ймовірність браку для першого кооперативу 0,1, для другого — 0,3. Знайти ймовірність того, що взята навмання деталь буде бракована, якщо I кооператив поставив 75% деталей, а другий 25%.

B. 0,15 .

П14. Нехай при використанні умови попередньої задачі взята навмання деталь виявилась бракованою. Знайти ймовірність того, що вона була виготовлена I кооперативом.

B. 0,50 .

П15. В групі три стрільці. Ймовірність влучення у мішень при одному пострілі для першого дорівнює 0,9 , для другого — 0, 7 , для третього — 0,2. а) Знайти ймовірність того, що взятий навмання стрілець влучить у мішень, зробивши один постріл. б) Після пострілу було зафіксовано влучення у мішень. Знайти ймовірність того, що стріляв другий стрілець.

B. а) 0,6. б) 0,39.

П16. Електролампи виготовляються на трьох заводах. Перший завод виготовляє 50% загальної кількості електроламп, другий – 30%, третій – 20%. Ймовірність того, що електролампа, яка виготовлена першим заводом, є стандартною, дорівнює 0,80; для другого і третього заводів ця ймовірність становить відповідно 0,70 і 0,90. В магазин поступає продукція всіх трьох заводів. а) Яка ймовірність того, що куплена в магазині електролампа буде стандартною? б) Куплена в магазині лампа виявилася стандартною. Знайти ймовірність того, що вона виготовлена I заводом.
B. а) 0,79 . б) 0, 506.

§ 4. Послідовність незалежних випробувань

4.1. Послідовність незалежних випробувань. Формула Бернуллі

Послідовність незалежних випробувань — це повторне виконання n випробувань, при незмінному комплексі умов, в кожному з яких ймовірність події A не залежить від результатів інших випробувань.

Схема Бернуллі — це така послідовність незалежних випробувань, у кожному з яких ймовірність події A дорівнює p (стала).

Формула Бернуллі. Ймовірність настання події A m разів при n незалежних випробуваннях, у кожному з яких ймовірність настання події дорівнює p (схема Бернуллі) знаходиться за формулою (формула біноміального розподілу):

$$P_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m}, \quad \text{де:} \quad q=1-p; \quad C_n^m=\frac{n!}{m!(n-m)!}. \quad (1)$$

Приклад 1. Монету підкидають 10 разів. Знайти ймовірність того, що герб випав 6 разів.

Розв'язання: $n=10;$ $m=6;$ $p=\frac{1}{2};$ $q=1-p=\frac{1}{2};$

$$C_n^m=\frac{n!}{m!(n-m)!}; \quad C_{10}^6=\frac{10!}{6!(10-6)!}=\frac{10!}{6!4!}=\frac{6!\ 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{6!\ 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=210.$$

$$P_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m}; \quad P_6(4)=210\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{210}{2^6\cdot 2^4}=\frac{210}{1024}.$$

Приклад 2. Монету підкидають 9 разів. Знайти ймовірність того, що герб випав 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 разів.

Розв'язання: $n=9;$ $p=\frac{1}{2};$ $q=1-p=\frac{1}{2};$

$$m=0,1,2,3,4,5,6,7,8,9. \quad P_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m}.$$

Відповідь.

$$P_9(0)=1/512; \ P_9(1)=9/512; \ P_9(2)=36/512; P_9(3)=84/512;$$

$$P_9(4)=126/512; \ P_9(5)=126/512; \ P_9(6)=84/512;$$

$$P_9(7)=36/512; \ P_9(8)=9/512; \ P_9(9)=1/512.$$

Приклад 3. Гральний кубик підкинуто 4 рази. Знайти ймовірність того, що число 6 випало 0,1,2,3 і 4 рази.

Розв'язання: $n=4$; $p=\dfrac{1}{6}$; $q=1-p=\dfrac{5}{6}$;

$m=0,1,2,3,4.$ $P_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m}$.

Відповідь.

$P_4(0)=625/1296$; $P_4(1)=500/1296$; $P_4(2)=150/1296$;

$P_4(3)=20/1296$; $P_4(4)=1/1296$.

Приклад 4. Знайти ймовірність того, що подія А у п'яти незалежних випробуваннях відбулася не більше 2 разів, якщо в кожному випробуванні ймовірність появи події А дорівнює 1/2.

Розв'язання: $n=5$; $p=1/2$; $q=1-p=1/2$;

$m=0,1,2.$ $P_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m}$;

$P_5(m\le 2)=P_5(m=0)+P_5(m=1)+P_5(m=2)$.

Відповідь.

$P_5(0)=1/32$; $P_5(1)=5/32$; $P_5(2)=10/32$;

$P_5(m\le 2)=1/32+5/32+10/32=16/32=1/2$.

4.2. Локальна та інтегральна теореми Лапласа. Формула Пуассона

Граничні теореми теорії ймовірностей це спільна назва ряду теорем, що вказують умови появи тих чи інших закономірностей у результаті дії великого числа випадкових факторів. До них зокрема відносяться теореми Лапласа і Пуассона.

При великих n обчислення з використанням формули Бернуллі стають громіздкими. Лаплас одержав зручну формулу для приблизного знаходження $P_n(m)$ для достатньо великих n.

Локальна теорема Лапласа. Ймовірність того, що при n незалежних випробуваннях, в кожному з яких ймовірність події A дорівнює p, $(0<p<1)$ подія A відбудеться рівно

m разів (байдуже в якій послідовності) знаходиться по наближеній формулі (формула Лапласа):

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(t), \qquad (2)$$

де: $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-t^2/2}; \quad q = 1 - p; \quad t = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}.$

Таблиця функції $\varphi(t)$ для додатних t наводиться в підручниках і довідниках по теорії ймовірностей. Для від'ємних t користуються тією ж таблицею, враховуючи те, що функція $\varphi(t)$ парна і тому $\varphi(-t) = \varphi(t)$.

Приклад 5. Знайти ймовірність того, що подія А відбулась рівно 36 разів при 100 випробуваннях, якщо ймовірність події А в кожному випробуванні стала і дорівнює 0,3.

Розв'язання. $p = 0{,}3; \ q = 1 - p = 0{,}7; \ n = 100; \ m = 36.$

$$\sqrt{npq} = \sqrt{100 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7} = 4{,}58;$$

$$t = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{36 - 100 \cdot 0{,}3}{4{,}58} = \frac{6}{4{,}58} = 1{,}31.$$

$\varphi(1{,}31) = 0{,}169$ (таблиця функції на стор. 110).

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(t);$$

$$P_{100}(36) \approx \frac{1}{4{,}58} \varphi(1{,}31) = \frac{1}{4{,}58} \cdot 0{,}169 \approx 0{,}037.$$

Інтегральна теорема Лапласа. Ймовірність того, що при n незалежних випробуваннях, в кожному з яких ймовірність події A дорівнює p, $(0 < p < 1)$ подія A відбудеться не менше m_1 разів і не більше m_2 разів приблизно знаходиться за формулою :

$$P_n(m_1, m_2) \approx \Phi\left(t_{m_2}\right) - \Phi\left(t_{m_1}\right), \qquad (3)$$

де: $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int\limits_0^x e^{-t^2/2}dt;\quad q=1-p;\quad t=\frac{m-np}{\sqrt{npq}};$

$$t_{m_2}=\frac{m_2-np}{\sqrt{npq}};\qquad t_{m_1}=\frac{m_1-np}{\sqrt{npq}}.$$

Функцію $\Phi(x)$ називають стандартним інтегралом ймовірностей або **функцією Лапласа**. Інтеграл $\Phi(x)$ не може бути виражений через елементарні функції і для його обчислення застосовують спеціальні таблиці. Таблиця функції $\Phi(x)$ для додатних x наводиться в підручниках і довідниках по теорії ймовірностей, причому $0\le x\le 5$. Для значень $x>5$ приймають $\Phi(x)=0{,}5.$ Для від'ємних x користуються тією ж таблицею, враховуючи те, що функція $\Phi(x)$ непарна і тому $\Phi(-x)=-\Phi(x)$.

Приклад 6. Використовуючи умову попередньої задачі, знайти ймовірність того, що подія A відбудеться не менше 25 і не більше 40 разів.

Розв'язання.

$$p=0{,}3;\ \ q=1-p=0{,}7;\ \ n=100;\ \ m_1=25;\ \ m_2=40.$$

$$\sqrt{npq}=\sqrt{100\cdot 0{,}3\cdot 0{,}4}=4{,}58;\quad np=100\cdot 0{,}3=30;$$

$$t_{m_2}=\frac{m_2-np}{\sqrt{npq}};\ \ t_{40}=\frac{40-30}{4{,}58}=\frac{10}{4{,}58}=2{,}18.$$

$$t_{m_1}=\frac{m_1-np}{\sqrt{npq}};\ \ t_{25}=\frac{25-30}{4{,}58}=\frac{-5}{4{,}58}=-1{,}09.$$

$$P_n(m_1,m_2)\approx\Phi\left(t_{m_2}\right)-\Phi\left(t_{m_1}\right),$$

$$P_{100}(25;40)\approx\Phi\left(t_{40}\right)-\Phi\left(t_{25}\right)=\Phi(2{,}18)-\Phi(-1{,}09)=$$
$$=\Phi(2{,}18)+\Phi(1{,}09)=0{,}485+0{,}362\approx 0{,}847.$$

(таблиця функції $\Phi(x)$ на стор. 111).

Теорема Пуассона. Ймовірність того, що при великому числі незалежних випробувань n, в кожному з яких ймовірність події *A* дорівнює *p,* подія *A* відбудеться рівно m разів знаходиться по наближеній формулі (формула Пуассона):

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m \cdot e^{-\lambda}}{m!}, \quad \text{де:} \quad \lambda = np. \tag{4}$$

Формулу Пуассона застосовують у теорії масового обслуговування коли n “велике”, p — “мале”, а $\lambda = np$ “не велике і не мале”.

Приклад 7. Підручник з математики деяким видавництвом видано тиражем 100 000 екземплярів. Ймовірність того, що у підручнику є дефект дорівнює 0,0001. Знайти ймовірність того, що тираж містить 5 бракованих книжок.

Розв'язання. $n = 100\,000;\ \ p = 0{,}0001;\ \ \lambda = np = 10;\ \ m = 5.$

$$P_{100\,000}(5) \approx \frac{10^5 \cdot e^{-10}}{5!} \approx 0{,}0375.$$

4.3. Найімовірніше число появ події у незалежних випробуваннях

Число k_0 (появи події у незалежних випробуваннях, в кожному з яких ймовірність появи події дорівнює p) називається найімовірнішим, якщо ймовірність того, що подія у цих випробуваннях відбудеться k_0 разів перевищує (або принаймні не менше) ймовірності інших можливих результатів випробувань.

Найімовірніше число k_0 визначається з подвійної нерівності

$$np - q \le k_0 < np + p \quad , \tag{5}$$

причому:

1) якщо число *np-q* — дробове, то існує одне найімовірніше число k_0 ;

2) якщо число *np-q* — ціле, то існують два найімовірніших числа k_0 і k_0+1;

3) якщо число *np* — ціле, то найімовірніше число $k_0 = np$.

Приклад 8. Проводиться випробування кожного з 16 елементів деякого приладу. Ймовірність того, що елемент витримає випробування, дорівнює 0,8. Знайти найімовірніше число елементів, що витримають випробування.

Розв'язання. За умовою: $n=16;\ \ p=0{,}8;\ \ q=1-p=0{,}2.$

$$np-q\le k_0<np+p\ ;$$

$$16\cdot 0{,}8-0{,}2\le k_0<16\cdot 0{,}8+0{,}8;\quad 12{,}6\le k_0<13{,}6;\quad k_0=13.$$

Приклад 9. Товарознавець оглядає 24 зразки товару.Ймовірність того, що кожний із зразків буде визнано гідним для продажу дорівнює 0,6. Знайти найімовірніше число зразків товару, які товарознавець визнає гідними для продажу.

Розв'язання. За умовою: $n=24;\ \ p=0{,}6;\ \ q=1-p=0{,}4.$

$$np-q\le k_0<np+p\ ;$$

$$24\cdot 0{,}6-0{,}4\le k_0<24\cdot 0{,}6+0{,}6;\quad 14\le k_0<15;$$

Так як $np-q$ ціле, то то існують два найімовірніших числа $k_0=14$ і $k_0+1=15$.

Питання для самоперевірки

1. Дайте означення послідовності незалежних випробувань.
2. Яка послідовність незалежних випробувань називається схемою Бернуллі?
3. Поясніть, ймовірність якої події визначається за формулою Бернуллі.
4. Запишіть формулу Бернуллі.
5. Для чого використовується локальна теорема Лапласа?
6. Запишіть формули, що відносяться до локальної теореми Лаплапса.
7. Для чого використовується інтегральна теорема Лапласа?
8. Запишіть формули, що відносяться до інтегральної теореми Лаплапса.
9. Для чого використовується формула Пуассона?
10. Запишіть формулу Пуассона.

11. Яке число k_0 (появи події у незалежних випробуваннях, в кожному з яких ймовірність появи події дорівнює p) називається найімовірнішим?
12. Як визначається найімовірніше число появи події?
13. В якому випадку існують два найімовірніших числа?

Приклади і задачі

П1. Монету підкидають 5 разів. Знайти ймовірність того, що герб випав 4 рази.

В. 5/32.

П2. Монету підкидають 6 разів. Знайти ймовірність того, що герб випав 0,1,2,3,4,5,6 разів.

В.

$P_6(0)=1/64$; $P_6(1)=6/64$; $P_6(2)=15/64$; $P_6(3)=20/64$;

$P_6(4)=15/64$; $P_6(5)=6/64$; $P_6(6)=1/64$.

П3. Гральний кубик підкидають 3 рази. Знайти ймовірність того, що число 6 випало 0,1,2,3 рази.

В. $P_3(0)=125/216$; $P_3(1)=75/216$; $P_3(2)=15/216$;

$P_3(3)=1/216$.

П4. Знайти ймовірність того, що подія А у п'яти незалежних випробуваннях відбулася не менше 2 разів, якщо в кожному випробуванні ймовірність появи події А дорівнює 0,5.

В. $P(m\geq 2)=1-P(0)-P(1)=1-1/32-5/32=26/32$.

П5. Знайти ймовірність того що подія А у п’яти незалежних випробуваннях відбулася 4 рази, якщо відомо, що $P(m\geq 4)=0{,}46$ і $P(m\leq 4)=0{,}68$.

В. *P(4)* = 0,14 .

П6. Парашутист робить чотири стрибки на точність приземлення, причому ймовірність приземлення в центр круга складає для нього 0,9. Знайти ймовірність приземлення в центр круга не менше двох разів.

В. 0,996.

П7. Ймовірність влучення у мішень при одному пострілі дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що із 100 пострілів у мішень буде 73 влучних.

В. 0,0215 .

П8. Знайти ймовірність того, що подія *А* відбудеться 75 разів у 100 випробуваннях, якщо ймовірність появи цієї події в кожному випробуванні дорівнює 0.8.

В. 0,046

П9. Знайти ймовірність того, що подія *А* відбудеться 86 разів у 100 випробуваннях, якщо ймовірність появи цієї події в кожному випробуванні дорівнює 0,9.
В. 0,055 .

П10. Знайти ймовірність того, що подія *А* відбудеться 95 разів у 100 випробуваннях, якщо ймовірність появи цієї події в кожному випробуванні дорівнює 0,9.
В. 0,033.

П11. Підприємство випускає в середньому 80% продукції першого сорту. Знайти ймовірність того, що в партії із 1000 виробів число першосортних знаходиться між 780 і 810.
В. 0,727 .

П12. Фабрика випускає в середньому 70% продукції першого сорту. Знайти ймовірність того, що в партії із 1000 виробів число першосортних знаходиться між 684 і 712.

В. 0,661.

П13. В кожній партії телевізорів (в партії 100 штук), що їх виготовляє деякий завод, 80 є вищої якості. Знайти ймовірність того, що в даній партії телевізорів вищої якості буде не менше 78 і не більше 92.

В. 0,691 .

П14. Ймовірність появи події в кожному із 100 незалежних випробувань стала і дорівнює 0,9. Знайти ймовірність того, що подія відбудеться не менше 85 разів.

В. 0,953.

П15. Ймовірність появи події в кожному з 2500 незалежних випробувань дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що подія відбудеться не менше 1970 і не більше 2040 разів.

В. 0,91.

П16. Підручник з математики деяким видавництвом видано тиражем 50 000 екземплярів. Ймовірність того, що у підручнику є дефект дорівнює 0,0001. Знайти ймовірність того, що тираж містить 4 бракованих книжки.

В. $P_{50\,000}(4) \approx \dfrac{5^4 \cdot e^{-5}}{4!} \approx 0{,}176.$

П17. Ймовірність виготовлення нестандартної деталі дорівнює 0,004. Знайти ймовірність того, що серед 1000 деталей 5 будуть нестандартними.

В. 0,1563 (за формулою Пуассона).

П18. Відділ технічного контролю перевіряє партію з 10 деталей. Ймовірність того, що деталь стандартна, дорівнює 0,76. Знайти найімовірніше число деталей, які будуть визнані стандартними.

В. 8.

П19. Товарознавець оглядає 30 зразків товарів. Ймовірність того, що кожний із зразків буде визнано придатним для продажу, дорівнює 0,6. Знайти найімовірніше число зразків, які товарознавець визнає придатними для продажу.

В. 18 .

П20. Товарознавець оглядає 20 зразків товарів. Ймовірність того, що кожний із зразків буде визнано придатним для продажу, дорівнює 0,8. Знайти найімовірніше число зразків, які

товарознавець визнає придатними для продажу.
В. 16 .

П21. У цеху 6 станків. Для кожного станка ймовірність того, що він в даний момент працює дорівнює 0,8. Станки працюють незалежно один від одного. Знайти ймовірність того, що в даний момент працюють: а) 4 станки; б) 6 станків; в) 0 станків; г) знайти найімовірніше число станків, які працюють в даний момент.

В. а) 0,246; б)),260; в) 0,000064: г) 5.

§ 5. Випадкові величини. Дискретні випадкові величини

5.1. Випадкові величини. Дискретні та неперервні випадкові величини. Функція розподілу випадкової величини

Випадкова величина — це змінна величина, яка приймає в залежності від випадку ті чи інші значення з визначеними ймовірностями.

Випадкові величини позначають великими буквами з кінця латинського алфавіту, а їх можливі значення відповідними малими буквами з індексами. Наприклад: *X, Y, Z* і відповідно x_i, y_i, z_i .

Дискретною випадковою величиною називається випадкова величина із скінченною або зчисленною множиною можливих значень

(це випадкова величина можливі значення якої можна пронумерувати).

Наприклад:

1) число бракованих деталей у перевіреній партії деталей;
2) число появ герба при 200 підкиданнях монети;
3) число влучень у мішень при 30 пострілах.

Неперервні випадкові величини можуть приймати будь-яке значення з деякого скінченного або нескінченного інтервалу.

Наприклад:

1) величина відхилень розміру деталей від стандарту;

2) дальність польоту снаряду;

3) час справної роботи приладу.

Функцією розподілу випадкової величини $F(x)$ називається функція дійсної змінної x, яка визначає ймовірність того, що випадкова величина в результаті експерименту прийме значення менше деякого фіксованого числа x:

$$F(x)=P(X<x)=P(X\in(-\infty;x)). \tag{1}$$

Це універсальна характеристика, яка повністю характеризує випадкову величину і застосовується як для дискретних, так і для неперервних випадкових величин.

Властивості функції розподілу:

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)=0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=1$;

2) $F(x)$ неспадна функція;

3) $F(x)$ неперервна зліва, тобто $\lim\limits_{x\to x_0-0} F(x)=F(x_0)$.

Ймовірність попадання випадкової величини X у напівзамкнутий проміжок:

$$P(a\le X<b)=F(b)-F(a). \tag{2}$$

5.2. Задання дискретної випадкової величини. Ряд розподілу і його графічне зображення

Дискретну випадкову величину задають її **рядом розподілу**, тобто шляхом переліку можливих значень $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, записаних у зростаючому порядку і відповідних їм ймовірностей $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$, при цьому повинна виконуватись умова $\sum\limits_i p_i=1$. Ряд розподілу може бути заданий у вигляді таблиці або формули. Графічне зображення ряду розподілу дискретної випадкової величини називається **многокутником розподілу**.

Приклад 1. Можливі значення дискретної випадкової величини такі: $x_1=1\,;x_2=4\,;x_3=6\,;x_4=10$. Відомі ймовірності перших трьох можливих зачень: $p_1=0{,}1\,;p_2=0{,}3\,;p_3=0{,}2$. Яка ймовірність четвертого можливого значення?

Розв'язання. Так як $\sum_i p_i=1$, то $p_4=1-p_1-p_2-p_3=0{,}4$.

5.3. Типові розподіли дискретних випадкових величин

Біноміальний розподіл це розподіл ймовірностей випадкової величини X — числа здійснень події у n незалежних повторних випробуваннях, якщо в кожному випробуванні ймовірність здійснення такої події дорівнює p. Таким чином біноміальний розподіл це розподіл ймовірностей випадкової величини з цілочисловими значеннями $m=0,1,2,\ldots,n$, що задається формулою Бернуллі:

$$P_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m},\quad \text{де:}\quad q=1-p\,;\quad C_n^m=\frac{n!}{m!(n-m)!} \qquad (3)$$

Приклад 2. Монету підкинуто 5 разів. Записати ряд розподілу випадкової величини X — числа появ герба.

Розв'язання. Це біноміальний розподіл: n=5; p=1/2; q=1/2;

$X=\{0;1;2;3;4;5\}$.

Відповідні ймовірності для m = 0;1;2;3;4;5 знаходимо за формулою Бернуллі:

$$P_5(m)=\frac{5!}{m!\cdot(5-m)!}\left(\frac{1}{2}\right)^m\left(\frac{1}{2}\right)^{5-m}=\frac{5!}{m!\cdot(5-m)!}\cdot\left(\frac{1}{32}\right).$$

Ряд розподілу:

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	1/32	5/32	10/32	10/32	5/32	1/32

Многокутник розподілу побудуйте самостійно, можливі значення x_i випадкової величини X відкладають по осі абсцис, а відповідні їм ймовірності p_i по осі ординат. Побудовані точки M (x_i ,p_i) послідовно з'єднують відрізками прямих.

Дискретна випадкова величина X **розподілена по закону**

Пуассона, якщо вона приймає зчисленну множину можливих значень $m=0,1,2,\ldots,n$ з ймовірностями

$$P_n(m)\approx\frac{\lambda^m\cdot e^{-\lambda}}{m!}, \tag{4}$$

де число λ називається параметром розподілу.

Зауваження. Розподіл Пуассона може використовуватись як хороше наближення біноміального розподілу, якщо n велике, а p мале. Тоді $\lambda=np$.

5.4. Числові характеристики дискретної випадкової величини

Математичне сподівання

$$M(X)=x_1 p_1+x_2 p_2,\ldots,+x_n p_n=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i. \tag{5}$$

Для зчисленної величини:

$$M(X)=x_1 p_1+x_2 p_2,\ldots,+x_n p_n,+\ldots=\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i, \tag{6}$$

при умові, що цей ряд збіжний абсолютно, а $\sum_{i=1}^{\infty} p_i=1$.

Властивості математичного сподівання

1) Математичне сподівання сталої величини дорівнює цій сталій: $M(a)=a$.

2) Математичне сподівання суми випадкових величин дорівнює сумі їх математичних сподівань:

$$M\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)=\sum_{i=1}^{n} M(X_i).$$

3) Математичне сподівання добутку незалежних випадкових величин дорівнює добутку їх математичних сподівань:

$$M\left(X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_n\right) = M(X_1) \cdot M(X_2) \cdot \ldots \cdot M(X_n).$$

4) Сталий множник можна виносити за знак математичного сподівання:

$$M(aX) = a\,M(X) \quad .$$

Дисперсія

$$D(X) = M(X-m)^2 \quad \text{або} \qquad D(X) = M(X^2) - m^2. \qquad (7)$$

Для зручності написання формул математичне сподівання позначено $m = M(X)$.

Для скінченної величини:

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m)^2 p_i, \quad \text{або} \quad D(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i)^2 p_i - (m)^2. \quad (8)$$

Для зчисленної величини

$$D(X) = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - m)^2 p_i, \quad \text{або} \quad D(X) = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i)^2 p_i - (m)^2, \quad (9)$$

при умові, що ці ряди збіжний абсолютно.

Властивості дисперсії

1) Дисперсія сталої величини дорівнює нулю $D(a) = 0$.

2) Сталий множник можна виносити за знак дисперсії, при цьому він підноситься до другого степеня : $D(aX) = a^2 D(X)$.

3) Дисперсія суми незалежних випадкових величин дорівнює сумі їх дисперсій: $D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} D(X_i).$

Середнє квадратичне відхилення

Дисперсія невід'ємна величина, яка служить для характеристики розсіювання випадкової величини і має розмірність квадрату розмірності випадкової величини, тому для характеристики розсіювання застосовують і середнє квадратичне відхилення:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}, \qquad (10)$$

яке має розмірність випадкової величини.

Для біноміального розподілу:

$$M(X)=np; \quad D(X)=npq; \quad \sigma(X)=\sqrt{npq}. \qquad (11)$$

Для розподілу Пуассона з параметром λ :

$$M(X)=\lambda; \quad D(X)=\lambda; \quad \sigma(X)=\sqrt{\lambda}. \qquad (12)$$

Приклад 2. Задана таблиця розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини *X*. Знайти математичне сподівання *M*(*X*), дисперсію *D*(*X*) і середнє квадратичне відхилення σ (*X*).

x_i	2	4	6	8	10
p_i	0,2	0,10	0,30	0,10	0,30

Розв’язання. Математичне сподівання:

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i=$$

$$=2\cdot 0{,}20+4\cdot 0{,}10+6\cdot 0{,}30+8\cdot 0{,}10+10\cdot 0{,}30=6{,}40.$$

Дисперсія:

$$D(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot p_i-M^2(X)=$$

$$=2^2\cdot 0{,}20+4^2\cdot 0{,}10+6^2\cdot 0{,}30+8^2\cdot 0{,}10+10^2\cdot 0{,}30-(6{,}40)^2=8{,}64.$$

Середнє квадратичне відхилення:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{8{,}64}=2{,}94.$$

Приклад 3. Монету підкинуто 16 разів. Знайти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X — числа появ герба.

Розв'язання. Для біноміального розподілу:

$$M(X)=np; \quad D(X)=npq; \quad \sigma(X)=\sqrt{npq}.$$

n=16; p=1/2 ; q=1-p = 1/2 .

$$M(X)=16\cdot\frac{1}{2}=8; \;\; D(X)=16\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=4; \;\; \sigma(X)=\sqrt{4}=2.$$

Питання для самоперевірки

1. Дайте означення випадкової величини. Які види випадкових величин Ви знаєте? Дайте їх означення.
2. Розкажіть про функцію розподілу та її властивості.
3. Як задається розподіл дискретної випадкової величини?
4. Розкажіть про ряд розподілу і многокутник розподілу дискретної випадкової величини.
5. Розкажіть про типові розподіли дискретних випадкових величин (біноміальний і розподіл Пуассона).
6. Розкажіть про математичне сподівання і його властивості.
7. Розкажіть про дисперсію та її властивості.
8. Чому крім дисперсії для характеристики розсіювання значень випадкової величини використовується середнє квадратичне відхилення?
9. Як визначаються математичне сподівання і дисперсія для дискретних випадкових величин?
10. Як визначаються математичне сподівання і дисперсія для типових розподілів дискретних випадкових величин?

Приклади та задачі

П1. Для постачання води на деяке будівництво використовують два трубопроводи, що працюють незалежно. Ймовірність розриву трубопроводу внаслідок гідравлічного удару на протязі кварталу складає для першого з них 0,1; для другого – 0,2. X – число розірваних на протязі кварталу трубопроводів. Написати ряд розподілу величини X. Побудувати многокутник розподілу.

B.

x_i	0	1	2
p_i	0,72	0,26	0,02

П2. Два рівносильних шахіста грають у шахи. Що більш ймовірно виграти: одну партію з двох чи три партії з шести?
В. Одну з двох .

П3. Монету підкидають 3 рази. Знайти закон розподілу випадкової величини *X* – числа появ герба. Побудувати многокутник розподілу. Знайти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення цієї величини.
В. $M(X)=3/2$; $D(X)=3/4$; $\sigma(X)=\sqrt{3}/2$.

П4. Гральний кубик підкидають 3 рази. Знайти закон розподілу випадкової величини *X* – числа появ “4. Побудувати многокутник розподілу. Знайти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення цієї величини.

В. $M(X)=1/2$; $D(X)=1/12$; $\sigma(X)=1/\left(2\cdot\sqrt{3}\right)$.

П5. Знайти математичне сподівання, дисперсію та побудувати многокутник розподілу дискретної випадкової величини *X*:

x_i	-2	4	6
p_i	0,3	0,2	0,5

В. $M(X)=3{,}2$; $D(X)=12{,}16$.

Завдання 6. ***Скласти таблицю розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини X, побудувати многокутник розподілу, знайти математичне сподівання M(X), дисперсію D(X) і середнє квадратичне відхилення*** σ ***(X)***

1. Для сигналізації про пожежу в цеху встановлено 4 сигналізатори, які працюють незалежно один від одного. Ймовірність того, що при пожежі сигналізатор спрацює дорівнює 0,8 для кожного з них. *X* – число сигналізаторів, які спрацюють при пожежі.

2. На насосній станції незалежно один від одного працюють два насоси. Ймовірність нормальної роботи (без втручання механіка) для першого насоса становить 0,6; для другого – 0,7. X – число насосів, що нормально працюють на протязі дня.

3. Ймовірність правильної відповіді на кожне з 4-х питань екзаменаційного білета для деякого студента складає 0,6. X – число правильних відповідей.

4. В кожній сотні приладів, які випускає деякий завод, 70 першосортних. X – число першосортних приладів серед чотирьох взятих.

5. Для зрошення деякої ділянки використовують два трубопроводи, що працюють незалежно. Ймовірність розриву трубопроводу внаслідок гідравлічного удару на протязі сезону складає для першого з них 0,05; для другого – 0,10. X – число розірваних на протязі сезону трубопроводів.

6. Для деякого шахіста ймовірність виграшу в кожній партії складає 0,4. Грається матч з чотирьох партій. X – число виграних партій.

7. Робітник обслуговує два насоси, які працюють незалежно один від одного. Ймовірність того, що робота першого насосу на протязі зміни вимагатиме втручання робітника, становить 0,6; для другого – 0,8. X – число насосів, які на протязі зміни будуть вимагати втручання робітника.

8. Обчислювальний центр, що складається з двох ЕОМ, які працюють незалежно одна від одної, проводить обробку інформації. Ймовірність відмови на протязі деякого часу для першої ЕОМ складає 0,2; для другої – 0,1. X – число ЕОМ, які відмовлять за вказаний час.

9. На ділянці зрошувального каналу є п'ять автоматичних затворів. Ймовірність того, що на протязі дня затвор буде відкритим, складає для кожного з них 0,5. X – число відкритих на протязі дня затворів.

10. На станції спостереження встановлені 2 радіолокатори різних конструкцій. Ймовірність виявлення цілі для першого локатора складає 0,8; для другого – 0,9. X – число радіолокаторів, які виявлять ціль.

§ 6. Неперервні випадкові величини

6.1. Неперервна випадкова величина. Неперервний розподіл. Абсолютно неперервний розподіл. Функція і щільність абсолютно неперервного розподілу

Усі можливі значення неперервної випадкової величини цілком заповнюють деякий скінченний або нескінченний проміжок (a, b) . Припускається, що при кожному випробуванні така величина приймає одне і тільки одне значення з цього проміжку. Розподіл неперервної випадкової величини з незчисленною множиною можливих значень неможливо задати ймовірностями окремих значень, але його можна задати за допомогою функції розподілу: $F(x)=P(X<x)$. **Неперервний розподіл** — це розподіл ймовірностей випадкової величини *X*, функція розподілу *F* (*x*) якої неперервна.

Серед неперервних розподілів найбільш важливими є **абсолютно неперервні розподіли**, для яких функція розподілу

F(*x*) може бути представлена у вигляді: $F(x)=\int_{-\infty}^{x} p(t)\,dt$, де

підінтегральна функція $p(x)\geq 0$; її називають **щільністю розподілу** або **диференціальною функцією розподілу**. Функцію розподілу *F*(*x*) абсолютно неперервної випадкової величини *X* іноді називають **інтегральною функцією розподілу**.

Властивості щільності розподілу:

1) $p(x)\geq 0;$

2) $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\,dx=1;$

3) $p(x)=F'(x)$ у точках неперервності.

6.2. Ймовірність попадання неперервної випадкової величини X у заданий проміжок

Ймовірність (до випробування) того, що неперервна випадкова величина X прийме наперед вказане строго визначене значення a дорівнює нулю. Тому для неперервної випадкової величини крім рівності що визначає ймовірність попадання випадкової величини X

у заданий проміжок $P(a \le X < b) = F(b) - F(a)$ вірними є рівності:

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a) \quad ; \quad P(a < X \le b) = F(b) - F(a) \quad ;$$

$$P(a \le X \le b) = F(b) - F(a) \quad .$$

Ймовірність попадання випадкової величини X у заданий проміжок може бути визначена і через щільність розподілу

$$P(a \le X \le b) = \int_a^b p(x)\,dx\,. \tag{32}$$

6.3. Типові розподіли неперервних випадкових величин:

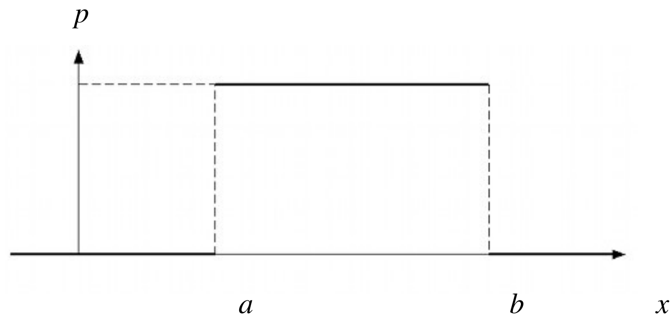
а) Рівномірний розподіл

Абсолютно неперервну випадкову величину X називають **рівномірно розподіленою** на проміжку $[a\ ,\ b]$ якщо її щільність імовірності на цьому проміжку стала, а в усіх зовнішніх точках дорівнює нулю. Звідси випливає, що для рівномірного розподілу:

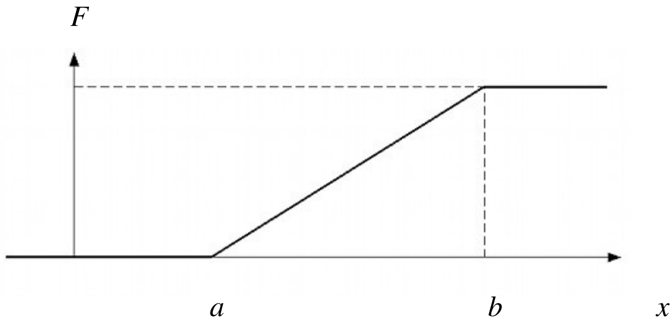
$$p = \frac{1}{b-a} \qquad \text{і} \qquad F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при}\, x < a; \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{при}\, a \le x \le b; \\ 1, & \text{при}\, x > b. \end{cases} \tag{33}$$

Графіки $p(x)$ і $F(x)$ наведені нижче.

1)



2)

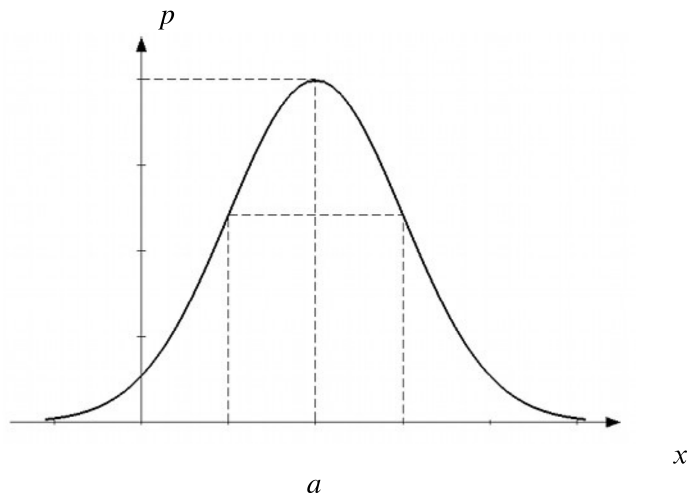


б) Нормальний розподіл

Розподіл ймовірностей неперервної випадкової величини X називається **нормальним** з параметрами a, σ, якщо він має щільність імовірності:

$$p(x, a, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} . \qquad (34)$$

Графік щільності нормального розподілу називається **кривою Гауса.** Нижче зображено графік щільності нормального розподілу при $a = 2$ і $\sigma = 1$.



6.4. Ймовірність попадання в заданий інтервал нормальної випадкової величини

$$P(\alpha \le X \le \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right), \qquad (35)$$

де $\Phi(x)$ - функція Лапласа.

Ймовірність заданого відхилення

$$P(|X-a| \le \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right). \qquad (36)$$

Правило трьох сигм

$P(|X-a| < 3\sigma) = 2\Phi(3) = 2 \cdot 0{,}49865 = 0{,}9973.$ Звідси можна зробити висновок, що для нормально розподіленої випадкової величини X всі розсіювання з точністю до долей проценту належать інтервалу $(a - 3\sigma; a + 3\sigma)$. Це і є **правило трьох сигм.**

6.5. Числові характеристики неперервної випадкової величини

Математичне сподівання

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, p(x)\, dx. \tag{37}$$

В частковому випадку, коли всі можливі значення належать проміжку (a,b), то $M(X) = \int_{a}^{b} x\, p(x)\, dx$.

Дисперсія

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m)^2 p(x)\, dx \quad \text{або} \quad D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x)\, dx - m^2. \tag{38}$$

Для зручності написання формул математичне сподівання позначено $m = M(x)$.

В частковому випадку, коли всі можливі значення належать проміжку (a,b) , то:

$$D(X) = \int_{a}^{b} (x-m)^2 p(x)\, dx \quad \text{або} \quad D(X) = \int_{a}^{b} x^2 p(x)\, dx - m^2.$$

Середнє квадратичне відхилення $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$ (39)

Для рівномірного розподілу:

$$M(X) = \frac{a+b}{2}; \quad D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}; \quad \sigma(X) = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}. \tag{40}$$

Для нормального розподілу :

$$M(X) = a; \quad D(X) = \sigma^2. \tag{41}$$

Таким чином параметри нормального розподілу це математичне сподівання і середнє квадратичне відхилення цього розподілу.

6.6. Поняття про початкові і центральні моменти

Проблема моментів — це важлива задача математичного аналізу, суть якої полягає у тому, щоб охарактеризувати властивості функції *f(x)* за допомогою послідовності її числових характеристик, моментів:

$$\alpha_k = \int_a^b x^k f(x)\,dx, \quad (k = 1,2,...) \qquad (1)$$

Узагальненими числовими характеристиками для випадкових величин у теорії ймовірностей і математичній статистиці є початкові і центральні моменти, які зокрема використовуються при знаходженні статистичних оцінок невідомих параметрів розподілу по результатам спостережень.

Число виду

$$\alpha_k = MX^k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k p_i, \quad (k = 1,2,...) \qquad (2)$$

називається **початковим моментом *k*-го порядку** (k>0) дискретної випадкової величини X^k, що має розподіл:

x_i	x_1	x_2	...	x_n
p_i	p_1	p_2	...	p_n

Відмітимо, що розподіл дискретної випадкової величини X^k, має вигляд:

x_i^k	x_1^k	x_2^k	...	x_n^k
p_i	p_1	p_2	...	p_n

Для зчисленної випадкової величини початковий момент *k*-го порядку

$$\alpha_k = MX^k = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^k p_i, \quad (k = 1,2,...) \quad , \qquad (3)$$

якщо цей ряд збіжний.

Для абсолютно неперервної випадкової величини X з щільністю розподілу $p(x)$ початковий момент k-го порядку

$$\alpha_k = MX^k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k p(x)\,dx, \quad (k=1,2,\ldots) \qquad (4)$$

Якщо неперервна випадкова величина задана на інтервалі $[a;b]$,

то початковий момент k-го порядку знаходиться за формулою:

$$\alpha_k = MX^k = \int_a^b x^k p(x)\,dx, \quad (k=1,2,\ldots) \quad .$$

Центральним моментом k-го порядка називають математичне сподівання від центрированої величини $X_ц$, яка визначається як відхилення випадкової величини X від її математичного сподівання m :

$$X_ц = X - m \qquad , k=1,2,3... \qquad (6)$$

Для дискретної випадкової величини центральні моменти обчислюють за формулою:

$$\mu_k = MX_ц^k = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m)^k p_i, \quad (k=1,2,\ldots) \quad , \qquad (7)$$

Для неперервної випадкової величини обчислення проводяться за наступною формулою:

$$\mu_k = MX_ц^k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m)^k p(x)\,dx, \quad (k=1,2,\ldots) \qquad (8)$$

Якщо неперервна випадкова величина задана на інтервалі $[a;b]$,

то центральний момент k-го порядку знаходиться за формулою:

$$\mu_k = MX_ц^k = \int_a^b (x-m)^k p(x)\,dx, \quad (k=1,2,\ldots) \qquad (9)$$

З цих формул випливає:

1) Математичне сподівання — це початковий момент першого порядку:

$$M(X) = \alpha_1 \quad .$$

2) Дисперсія — це центральний момент другого порядку

$$D(X) = \mu_2 \quad .$$

3) Центральний момент I порядку дорівнює нулю:

$$\mu_1 = 0 \quad .$$

Третій центральний момент використовується для характеристики асиметрії розподілу. Якщо розподіл симетричний відносно математичного сподівання, то всі моменти непарного порядку дорівнюють нулю. Тому для характеристики асиметрії розподілу вибирають який-небудь з непарних центральних моментів. Найпростішим з них є третій центральний момент. Він має розмірність куба розмірності випадкової величини. Щоб одержати безрозмірну характеристику третій центральний момент ділять на куб середнього квадратичного відхилення. Одержану величину називають коефіцієнтом асиметрії або просто асиметрією і позначають символом A_s:

$$A_s = \frac{\mu_3}{\sigma^3}. \tag{10}$$

Четвертий центральний момент використовують для характеристики "крутизни" розподілу. Ця властивість розподілу описується за допомогою "ексцеса".

Ексцесом випадкової величини X називається величина:

$$E_x = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3. \tag{11}$$

Число 3 віднімається від відношення $\frac{\mu_4}{\sigma^4}$ тому, щоб для нормального закону $E_x = 0$, так як для нього величина $\frac{\mu_4}{\sigma^4} = 3$.

Якщо $E_x > 0$, то крива більш гостровершинна порівняно з нормальною. Якщо $E_x < 0$, то більш плосковершинна.

6.7. Поняття про закон великих чисел і центральну граничну теорему

В наш час під законом великих чисел розуміють загальний принцип, згідно з яким сукупна дія великого числа випадкових факторів приводить при деяких достатньо широких умовах до результата, що майже не залежить від випадку. До цього закону зокрема відносяться теореми Чебишова, Бернуллі [2], для яких спільною назвою є закон великих чисел.

Теорема Чебишова стверджує, що середнє арифметичне великого числа незалежних випадкових величин втрачає характер випадкової величини і збігається по імовірності до деякого сталого числа, що є середнім арифметичним їх математичних сподівань.

Теорема Бернуллі стверджує, що при достатньо великих n відносна частота $p^* = m/n$ буде як завгодно мало відрізнятися від сталої імовірності.

Центральна гранична теорема — це спільна назва ряду теорем, що вказують умови, при яких закон розподілу суми великого числа незалежних випадкових величин близький до нормального. Вперше центральна гранична теорема була сформульована і доведена академіком Л.М.Ляпуновим (1857-1918).

Граничні теореми утворюють великий розділ сучасної теоріі ймовірностей. Вони пояснюють причину широкого розподілу нормального закону і механізм його формування. На основі граничних теорем можна стверджувати, що у всіх випадках, коли випадкова величина утворюється у результаті додавання великого числа незалежних або слабо залежних випадкових величин, дисперсія кожної з яких мала порівняно з дисперсією суми, розподіл такої величини виявляється практично нормальним.

6.8 Неперервні випадкові величини (прикдади)

Приклад 1. Задана функція розподілу ймовірностей абсолютно неперервної випадкової величини X:

$$F(x)=\begin{cases} 0, при\ x \leqslant a; \\ k(x-a)^2, при\ a < x \leqslant b; \\ 1, при\ x > b. \end{cases}$$

Необхідно: 1) знайти коефіцієнт k і щільність розподілу ймовірностей; 2) побудувати графіки функцій розподілу ймовірностей і щільності розподілу ймовірностей; 3) знайти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X; 4) знайти ймовірність попадання випадкової величини X в інтервал (α , β) та зобразити цю ймовірність на графіках функції розподілу ймовірностей і щільності розподілу ймовірностей.

$a = 3$; $b = 8$; $\alpha = 5$; $\beta = 9$.

Розв'язання. При заданих значеннях параметрів функція розподілу має вид: $F(x)=\begin{cases} 0, при\ x \leqslant 3; \\ k(x-3)^2, при\ 3 < x \leqslant 8; \\ 1, при\ x > 8. \end{cases}$

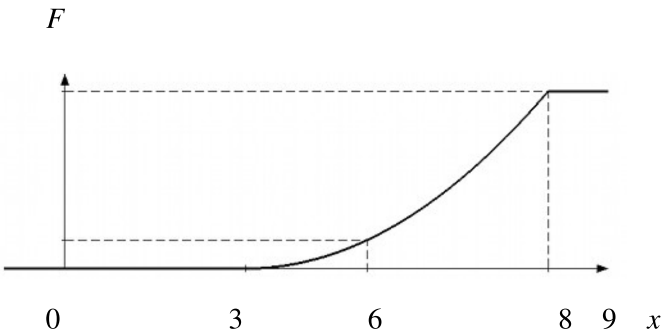
1) Функція $F(x)$ – неперервна і $F(8) = 1$, звідки $25\,k = 1$ і k=1/25. Отже:

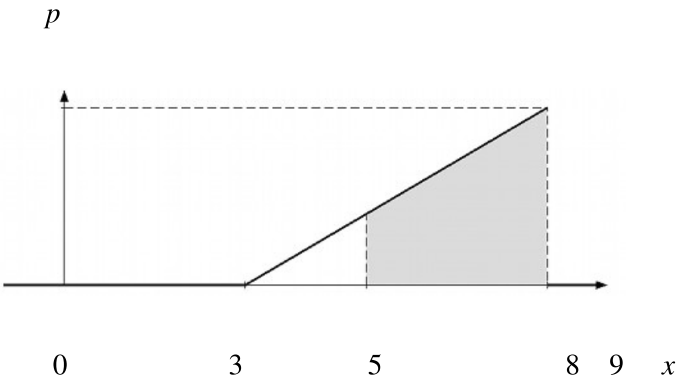
$$F(x)=\begin{cases} 0, при\ x \leqslant 3; \\ \frac{1}{25}\cdot(x-3)^2, при\ 3 < x \leqslant 8; \\ 1, при\ x > 8. \end{cases}$$

Щільність розподілу:

$$p(x)=F'(x)=\begin{cases} 0, \text{при } x \leqslant 3; \\ \frac{2}{25}\cdot(x-3), \text{при } 3<x<8; \\ 0, \text{при } x>8. \end{cases}$$

2) Будуємо графіки функції розподілу і щільності розподілу:





Математичне сподівання:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x\,p(x)\,dx=\int_{3}^{8}\frac{2}{25}\cdot(x^2-3x)\,dx=\frac{2}{25}\cdot\left(\frac{x^3}{3}-3\frac{x^2}{2}\right)\Big|_3^8=$$

$$=\frac{2}{25}\cdot\left(\frac{512}{3}-96-9+\frac{27}{2}\right)=\frac{19}{3}.$$

Дисперсія:

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2\,p(x)\,dx-M^2(X)=\int_{3}^{8}\frac{2}{25}\cdot(x^3-3x^2)\,dx-\frac{361}{9}=$$

$$=\frac{2}{25}\cdot\left(\frac{x^4}{4}-3\frac{x^3}{3}\right)\Big|_3^8-\frac{361}{9}=\frac{2}{25}\cdot\left(\frac{8^4}{4}-\frac{3\cdot 8^3}{3}-\frac{81}{4}+\frac{81}{3}\right)-\frac{361}{9}=$$

$$=1{,}39.$$

Середнє квадратичне відхилення:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{1{,}39}=1{,}18.$$

Ймовірність попадання в заданий інтервал:

$$P(\alpha<x<\beta)=F(\beta)-F(\alpha).$$

$$P(5<x<9)=F(9)-F(5)=1-\frac{4}{25}=\frac{21}{25}=0{,}84.$$

Приклад 2. Завод залізобетонних виробів виготовляє будівельні блоки. Можна вважати, що маса блока є нормально розподілена випадкова величина X з математичним сподіванням (проектною масою) a кг і середнім квадратичним відхиленням σ кг. Знайти ймовірності того, що маса навмання взятого блока буде: 1) знаходитись в межах від α до β кг; 2) відхилятись від проектної маси по абсолютній величині менше ніж на δ кг.

$a = 220$; $\sigma = 3$; $\alpha = 213$; $\beta = 223$; $\delta = 5$.

Розв'язання

1) Ймовірність попадання нормально розподіленої величини в заданий інтервал:

$$P(\alpha < x < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right).$$

$$P(213 < x < 223) = \Phi\left(\frac{223 - 220}{3}\right) - \Phi\left(\frac{213 - 220}{3}\right) =$$

$$= \Phi(1) - \Phi(-2{,}33) = \Phi(1) + \Phi(2{,}33) = 0{,}341 + 0{,}490 = 0{,}831.$$

2) Ймовірність заданого відхилення:

$$P(|X - a| < \delta) = 2\,\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

$$P(|X - 220| < 5) = 2\,\Phi\left(\frac{5}{3}\right) = 2\,\Phi(1{,}67) = 2 \cdot 0{,}453 = 0{,}906.$$

Питання для самоперевірки

1. Який розподіл називається абсолютно неперервним?
2. Розкажіть про щільність розподілу і її властивості.
3. Як ще називаються щільність розподілу і функція розподілу абсолютно неперервних розподілів?
4. Які числові характеристики випадкових величин Ви знаєте?
5 Як визначаються математичне сподівання і дисперсія для неперервних випадкових величин при абсолютно неперервних розподілах?
6. Рівномірний розподіл абсолютно неперервної випадкової величини. Його числові характеристики.
7. Нормальний розподіл і його параметри. Числові характеристики нормального розподілу.
8. Графічне зображення нормального розподілу. Крива Гауса.
9. Вплив параметрів нормального розподіду на форму нормальної кривої (кривої Гауса).
10. Імовірність попадання у заданий інтервал нормальної випадкової величини.
11. Імовірність заданого відхилення нормальної випадкової величини.
12. Правило трьох сигм.

Приклади та задачі

П1. Знайти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини *X*, розподіленої по закону рівномірної щільності у інтервалі (4;12).

Відп. $M(X)=8$; $D(X)=5{,}33$; $\sigma(X)=2{,}31$.

П2. Математичне сподівання і середнє квадратичне відхилення нормально розподіленої випадкової величини Х відповідно рівні 8 і 2. Знайти $P(4<X<14)$.

Відп. 0,998 .

П3. Випадкова величина *X* розподілена за нормальним законом з математичним сподіванням $M(X)=2$ і дисперсією $D(X)=1/4$. Записати аналітичний вираз щільності розподілу і побудувати криву Гауса.

Відп. $p(x)=\sqrt{2/\pi}\ e^{-2(x-2)^2}$

П4. Випадкова величина *X* розподілена нормально. Середнє квадратичне відхилення цієї величини дорівнює 0,2. Знайти ймовірність того, що відхилення випадкової величини від її математичного сподівання по модулю менше 0,5.

Відп. 0,988 .

П5. Випадкова величина *X* розподілена нормально з середнім квадратичним відхиленням $\sigma=3$ і математичним сподіванням *M*=4. Знайти інтервал її практично можливих значень і побудувати криву Гауса.

Відп. (-2 ; 13) .

П6. Завод залізобетонних виробів виготовляє будівельні блоки. Можна вважати, що маса блока є нормально розподілена випадкова величина *X* з математичним сподіванням (проектною масою) *a* кг і середнім квадратичним відхиленням σ кг. Знайти ймовірності того, що маса навмання взятого блока буде: 1) знаходитись в межах від α до β кг; 2) відхилятись від проектної маси по абсолютній величині менше ніж на δ кг.

.

$a=600$; $\sigma=10$; $\alpha=580$; $\beta=615$; $\delta=15$.

Відп. 1) 0,910 ; 2) 0,866 .

11. Контроль знань

11.1 Теоретичні питання для підготовки до змістового модуля "Основи теорії ймовірностей"

1. Масові випадкові явища. Предмет теорії ймовірностей. Події та їх класифікація. Алгебра подій.
2. Частоти і їх властивості. Ймовірність події. Аксіоми теорії ймовірностей.
3. Класичний і статистичний методи визначення базових ймовірностей. Елементи комбінаторики.
4. Властивості ймовірностей (ймовірність появи протилежної події, ймовірність появи неможливої події, теорема додавання ймовірностей будь яких двох подій, умовна ймовірність, теореми добутку ймовірностей для залежних і незалежних подій).
5. Формули повної ймовірності і формули Байєса.
6. Послідовність незалежних випробувань. Схема Бернуллі. Формула Бернуллі. Найімовірніша частота появи події в незалежних пробах.
7. Граничні теореми Лапласа і Пуассона.
8. Поняття випадкової величини. Дискретні і неперервні випадкові величини. Функція розподілу і її властивості.
9. Розподіл дискретних випадкових величин. Типові розподіли: біноміальний і пуассонівський.
10. Неперервний і абсолютно неперервний розподіли. Функція розподілу і щільність розподілу абсолютно неперервних випадкових величин. Властивості щільності розподілу. Ймовірність попадання абсолютно неперервної випадкової величини в заданий інтервал.
11. Типові розподіли неперервних випадкових величин : рівномірний, нормальний. Крива Гауса.
12. Ймовірність попадання в заданий інтервал і ймовірність заданого відхилення для нормально розподіленої випадкової величини. Правило трьох сигм.

13. Математичне сподівання і дисперсія випадкових величин та їх властивості.

14. Математичне сподівання і дисперсія при типових розподілах випадкових величин : дискретних (біноміальному, пуассонівському), неперервних (рівномірному, нормальному).

11.2. Питання для самоперевірки

1. Яке явище називається випадковим?
2. Які випадкові явища називаються масовими?
3. Яка математична наука займається вивченням закономірностей масових випадкових явищ?
4. Що таке ймовірнісний експеримент?
5. Дайте означення елементарної події і простору елементарних подій. Як вони позначаються?
6. Яким може бути простір елементарних подій по числу елементів?
7. Яким буде простір елементарних подій при підкиданні монети один раз? А два рази?
8. Яким буде простір елементарних подій при підкиданні грального кубика один раз? А два рази?
9. Дайте означення події. Як позначаються події?
10. Дайте означення вірогідної, неможливої і випадкової подій. Як вони позначаються?
11. Розкажіть про алгебру подій.
12. Дайте означення частоти події. Сформулюйте властивості частот.
13. Який висновок можна зробити, якщо частота події в даній серії випробувань дорівнює 0 або 1? Чи буде така подія неможливою або вірогідною?
14. Яка основна закономірність спостерігається у масових випадкових явищах при великому числі випробувань?
15. Як ймовірність події пов'язана з частотою події? Як вона позначається?
16. Які аксіоми теорії ймовірностей Ви знаєте? Сформулюйте їх.
17. Які методи визначення базових ймовірностей Ви знаєте?
18. Розкажіть про класичний (лапласівський) метод визначення базових ймовірностей.
19. Розкажіть про статистичний метод визначення базових ймовірностей.
20. Що вивчає комбінаторика?
21. Яка вибірка носить назву розміщень? Як визначається число розміщень?
22. Яка вибірка носить назву перестановок? Як визначається

число перестановок?
23. Яка вибірка носить назву комбінацій? Як визначається число комбінацій?
24. Запишіть біном Ньютона.
25. Сформулюйте основні теореми теорії ймовірностей (ймовірність появи протилежної події, ймовірність появи неможливої події, теорема додавання ймовірностей будь-яких двох подій, теореми добутку ймовірностей для залежних і незалежних подій).
26. Запишіть формулу повної ймовірності.
27. Запишіть формули Байєса.
28. Що таке послідовність незалежних випробувань?
29. Розкажіть про схему Бернуллі. Наведіть формулу Бернуллі.
30. Розкажіть про граничні теореми теорії ймовірностей
(локальну та інтегральну теореми Лапласа і теорему Пуассона).
32. Як визначається найімовірніше число появи події?
33. Дайте означення випадкової величини. Які види випадкових величин Ви знаєте? Дайте їх означення.
34. Розкажіть про функцію розподілу та її властивості.
35. Як задається розподіл дискретної випадкової величини?
36. Розкажіть про ряд розподілу і многокутник розподілу дискретної випадкової величини.
37. Розкажіть про типові розподіли дискретних випадкових величин (біноміальний і розподіл Пуассона).
38. Який розподіл називається абсолютно неперервним?
39. Розкажіть про щільність розподілу і її властивості.
40. Як ще називаються щільність розподілу і функція розподілу абсолютно неперервних розподілів?
41. Розкажіть про типові розподіли неперервних випадкових величин (рівномірний та нормальний).
42. Які параметри входять в формулу щільності нормального розподілу?
43. Розкажіть про графічне зображення щільності нормального закону і вплив параметрів нормального розподілу на форму нормальної кривої.
44. Який нормальний розподіл називається стандартним?
45. Як визначається ймовірність попадання в заданий інтервал нормальної випадкової величини?
46. Як визначається ймовірність заданого відхилення нормальної випадкової величини?
47. Які числові характеристики випадкових величин Ви знаєте?
48. Розкажіть про математичне сподівання і його властивості.
49. Розкажіть про дисперсію та її властивості.
50. Чому крім дисперсії для характеристики розсіювання значень випадкової величини використовується середнє квадратичне

відхилення?
48. Як визначаються математичне сподівання і дисперсія для дискретних і неперервних випадкових величин?
49. Як визначаються математичне сподівання і дисперсія для типових розподілів випадкових величин?
50. Як пов'язані параметри, що входять у формулу щільності нормально розподіленої випадкової величини з її математичним сподіванням і середнім квадратичним відхиленням?
51. Розкажіть про закон великих чисел і центральну граничну теорему.

11.3. Навчальний варіант типової самостійної роботи

Завдання 1. В будівельній бригаді 20 чоловіків і 10 жінок. По табельних номерах навмання відбирають 9 робітників. Яка ймовірність, що серед них буде 5 чоловіків і 4 жінки?

Розв'язання. Задача розв’язується за допомогою формули гіпергеометричного розподілу:

$$P(A)=\frac{C_{n_1}^{k}\cdot C_{n_2}^{r-k}}{C_n^r},$$

де n – число робітників у бригаді, n_1 - число чоловіків у бригаді, n_2 - число жінок у бригаді, r – число відібраних робітників, k – число з них чоловіків. Число комбінацій знаходиться за формулою:

$$C_n^m=\frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Отже:

$$P(A)=\frac{20!\cdot 10!\cdot 9!\cdot 21!}{6!\cdot 15!\cdot 4!6!\cdot 30!}=0{,}57.$$

Завдання 2. Парашутист робить чотири стрибки на точність приземлення, причому ймовірність приземлення в центр круга складає для нього 0,8. Знайти ймовірність приземлення в центр круга не менше трьох разів.

Розв'язання. Використовуємо формулу Бернуллі:

$$P_n(m)=\frac{n!}{m!(n-m)!}\cdot p^m\cdot q^{n-m} \quad ,$$

де: $n = 4$; $p = 0,8$; $q = 1 - p = 1 - 0,8 = 0,2$.

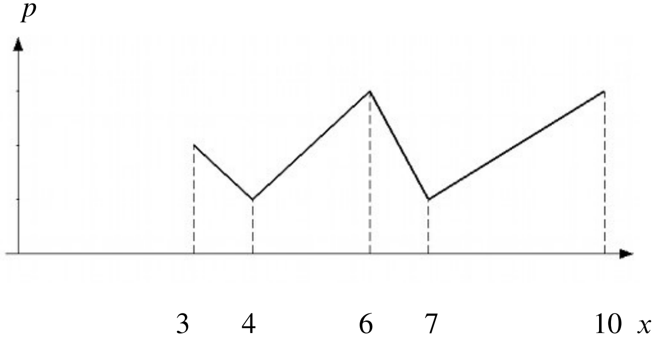
$$P_4(m\geq 3)=P_4(3)+P_4(4)=$$

$$=\frac{4!}{3!1!}\cdot(0,8)^3\cdot(0,2)^1+\frac{4!}{4!0!}\cdot(0,8)^4\cdot(0,2)^0=0,8192\,.$$

Завдання 3. Задана таблиця розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини X. Побудувати многокутник розподілу, знайти математичне сподівання $M(X)$, дисперсію $D(X)$ і середнє квадратичне відхилення σ (X).

x_i	3	4	6	7	10
p_i	0,20	0,10	0,30	0,10	0,30

Многокутник розподілу:



Математичне сподівання:

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i=$$

$$=3\cdot 0{,}20+4\cdot 0{,}10+6\cdot 0{,}30+7\cdot 0{,}10+10\cdot 0{,}30=6{,}50.$$

Дисперсія:

$$D(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot p_i - M^2(X)=$$

$$=3^2\cdot 0{,}20+4^2\cdot 0{,}10+6^2\cdot 0{,}30+7^2\cdot 0{,}10+10^2\cdot 0{,}30-(6{,}50)^2=6{,}85.$$

Середнє квадратичне відхилення:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{6{,}85}=2{,}62.$$

Завдання 4. Задана функція розподілу ймовірностей абсолютно неперервної випадкової величини *X*:

$$F(x)=\begin{cases} 0, при\, x \leqslant a; \\ k(x-a)^2, при\, a<x\leqslant b; \\ 1, при\, x>b. \end{cases}$$

Необхідно: 1) знайти коефіцієнт *k* і щільність розподілу ймовірностей; 2) побудувати графіки функцій розподілу ймовірностей і щільності розподілу ймовірностей; 3) знайти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини *X*; 4) знайти ймовірність попадання випадкової величини *X* в інтервал (α , β) та зобразити цю ймовірність на графіках функції розподілу ймовірностей і щільності розподілу ймовірностей.

a = 3; b = 8; α = 5; β = 9.

Завдання розв'язано вище (стор. 52)

Завдання 5. Завод залізобетонних виробів виготовляє будівельні блоки. Можна вважати, що маса блока є нормально розподілена випадкова величина *X* з математичним сподіванням (проектною масою) *a* кг і середнім квадратичним відхиленням σ кг. Знайти ймовірності того, що маса навмання взятого блока буде: 1) знаходитись в межах від α до β кг; 2) відхилятись від проектної маси по абсолютній величині менше ніж на δ кг.

$$a = 220; \quad \sigma = 3; \quad \alpha = 213; \quad \beta = 223; \quad \delta = 5.$$

Завдання розв'язано вище (стор. 54) .

11.4 . Тренінговий варіант типової самостійної роботи

Завдання 1. Для кожної з чотирьох дощувальних установок, які працюють на зрошувальному масиві незалежно одна від одної, ймовірність виходу з ладу на протязі доби складає 0,1. Яка ймовірність того, що на протязі доби вийде з ладу не більше двох установок?

Завдання 2. Знайти ймовірність того, що подія А відбулась рівно 36 разів при 100 випробуваннях, якщо ймовірність події А в кожному випробуванні стала і дорівнює 0,3.

Завдання 3. *Скласти таблицю розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини X, побудувати многокутник розподілу, знайти математичне сподівання M(X), дисперсію D(X) і середнє квадратичне відхилення* σ *(X).*

На станції спостереження встановлені 2 радіолокатори різних конструкцій. Ймовірність виявлення цілі для першого локатора складає 0,8; для другого – 0,9. *X* – число радіолокаторів, які виявлять ціль.

Завдання 4. Задана функція розподілу ймовірностей абсолютно неперервної випадкової величини *X*:

$$F(x) = \begin{cases} 0, \textit{при}\ x \leqslant a\,; \\ k(x-a)^2, \textit{при}\ a < x \leqslant b\,; \\ 1, \textit{при}\ x > b. \end{cases}$$

Необхідно: 1) знайти коефіцієнт *k* і щільність розподілу ймовірностей; 2) побудувати графіки функцій розподілу ймовірностей і щільності розподілу ймовірностей; 3) знайти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини *X*; 4) знайти ймовірність попадання випадкової величини *X* в інтервал (α , β)

та зобразити цю ймовірність на графіках функції розподілу ймовірностей і щільності розподілу ймовірностей.

$a = 1$; $b = 4$; $\alpha = 2$; $\beta = 6$.

Завдання 5 . Завод залізобетонних виробів виготовляє будівельні блоки. Можна вважати, що маса блока є нормально розподілена випадкова величина X з математичним сподіванням (проектною масою) a кг і середнім квадратичним відхиленням σ кг. Знайти ймовірності того, що маса навмання взятого блока буде: 1) знаходитись в межах від α до β кг; 2) відхилятись від проектної маси по абсолютній величині менше ніж на δ кг.

$a = 1000$; $\sigma = 25$; $\alpha = 960$; $\beta = 1050$; $\delta = 20$.

11.5. Варіанти індивідуальних завдань на тему "Основи теорії ймовірностей" (30 варіантів)

Зауваження. Всього потрібно виконати 5 завдань. Виконувати по одній задачі свого варіанта з кожного завдання

Завдання 1.

1. В будівельній бригаді 12 юнаків і 6 дівчат. По табельних номерах навмання відбирають 8 будівельників. Яка ймовірність, що серед них буде 4 юнака?
2. На насосній станції працюють незалежно один від одного три насоси. Ймовірність того, що на протязі зміни робота першого насоса вимагатиме втручання механіка, становить 0,8; для другого – 0,7; для третього – 0,6. Знайти ймовірність того, що на протязі зміни вимагатиме втручання механіка робота не менше, ніж двох насосів.
3. Електролампи виготовляються на трьох заводах. Перший завод виготовляє 40% загальної кількості електроламп, другий – 50%, третій – 10%. Ймовірність того, що електролампа, яка виготовлена першим заводом, є стандартною, дорівнює 0,85; для другого і третього заводів ця ймовірність становить відповідно 0,85 і 0,95. В магазин поступає продукція всіх трьох заводів. Яка ймовірність того, що куплена в магазині електролампа буде стандартною?

4. На ділянці зрошувального каналу є три автоматичні затвори на водоспусках. Затвори працюють незалежно один від одного. Ймовірність того, що на протязі дня буде відкрито перший водоспуск становить 0,2; другий – 0,3; третій – 0,4. Яка ймовірність того, що на протязі дня буде відкритим не більше, ніж один водоспуск?

5. На станцію очистки вода поступає по трьох водогонах, причому по першому водогону подається половина всієї необхідної кількості води, а по двох інших – відповідно 20% і 30%. Ймовірність подачі першим водогоном води із вмістом заліза, що перевищує норму, становить 0,05; для двох інших водогонів ця ймовірність складає відповідно 0,04 і 0,03. Яка ймовірність попадання на станцію очистки води із збільшеним вмістом заліза?

6. Бетоновоз розвозить бетонний розчин на три будівельні майданчики. Ймовірність того, що на протязі деякого проміжку часу бетон буде потрібний на першому майданчику, становить 0,6; для двох інших – по 0,5. Знайти ймовірність, що на протязі цього проміжку часу бетон буде потрібний менше, ніж на двох майданчиках.

7. Прилад складається з трьох вузлів. Ймовірність безвідмовної роботи на протязі року першого вузла становить 0,8; другого – 0,7; третього – 0,9. Вузли виходять з ладу незалежно один від одного. Яка ймовірність, що на протязі року вийдуть з ладу не більше двох вузлів?

8. Збори колективу, на яких присутні 25 чоловік, в тому числі 8 інженерно-технічних працівників, обирають делегацію з 5 чоловік. Вважаючи, що кожний із присутніх з однаковою ймовірністю може бути обраний, знайти ймовірність того, що в складі делегації буде 3 інженерно-технічних працівники.

9. Студент здає іспит по трьох розділах програми, кожний з яких містить по 20 питань. Студент знає 16 питань з першого розділу, 14 питань – з другого і 18 питань з третього розділу програми. Яка ймовірність здати іспит, якщо для цього потрібно вірно відповісти не менше, ніж на два питання?

10. Для кожної з чотирьох дощувальних установок, які працюють на зрошувальному масиві незалежно одна від одної, ймовірність виходу з ладу на протязі доби складає 0,1. Яка ймовірність того, що на протязі доби вийде з ладу не більше двох установок?

11. В будівельній бригаді 12 чоловіків і 8 жінок. По табельних номерах навмання відбирають 9 будівельників. Яка ймовірність, що серед них буде 4 чоловіка і 5 жінок?

12. Робітник обслуговує три автоматичні станки, які працюють незалежно один від одного. Ймовірність того, що на протязі зміни робота першого станка вимагатиме втручання робітника, становить 0,7; для другого – 0,6; для третього – 0,6. Знайти ймовірність того, що на протязі зміни робота двох станків вимагатиме втручання робітника.

13. Електролампи виготовляються на трьох заводах. Перший завод виготовляє 30% загальної кількості електроламп, другий – 50%, третій – 20%. Ймовірність того, що електролампа, яка виготовлена першим заводом, є стандартною, дорівнює 0,80; для другого і третього заводів ця ймовірність становить відповідно 0,85 і 0,90. В магазин поступає продукція всіх трьох заводів. Яка ймовірність того, що куплена в магазині електролампа буде стандартною?
14. На спостережній станції встановлені 3 радіолокатори різних конструкцій, які працюють незалежно один від одного. Ймовірність того, що ціль буде своєчасно виявлена для першого локатора становить 0,7; другого – 0,9; третього – 0,95. Яка ймовірність того, що ціль буде своєчасно виявлена не менше, ніж двома радіолокаторами?
15. На складі знаходиться 20 манометрів, серед яких 5 мають приховані дефекти, що впливають на точність вимірювань. Для встановлення на трубопроводах насосної станції беруть навмання 8 манометрів. Яка ймовірність того, що серед них 6 не будуть мати скриті дефекти?
16. Прилад складається з трьох вузлів. Ймовірність безвідмовної роботи на протязі року першого вузла становить 0,6; другого – 0,7; третього – 0,8. Вузли виходять з ладу незалежно один від одного. Яка ймовірність, що на протязі року вийдуть з ладу не більше двох вузлів?
17. Робітник обслуговує три станки, на яких обробляються однотипні деталі, причому продуктивності першого, другого і третього станків відносяться як 2:3:5. Ймовірність браку для першого станка складає 0,02, для другого – 0,05, для третього – 0,10. Знайти ймовірність того, що взята навмання деталь буде якісною.
18. Робітник обслуговує два станки, на яких обробляються однотипні деталі, причому на першому станку виробляється 40% деталей, а на другому – 60%. Ймовірність браку для першого станка складає 0,04, для другого – 0,08. Знайти ймовірність того, що взята навмання деталь буде якісною.
19. В групі 15 студентів, серед яких 6 відмінників. По списку навмання відбирають 9 студентів. Яка ймовірність, що серед них буде 3 відмінники?
20. На ділянці зрошувального каналу є три автоматичні затвори на водоспусках. Затвори працюють незалежно один від одного. Ймовірність того, що на протязі дня буде відкрито перший водоспуск становить 0,2; другий – 0,4; третій – 0,46. Яка ймовірність того, що на протязі дня буде відкритим не більше, ніж один водоспуск?

21. На будівництво залізобетонні блоки доставляються з трьох заводів, причому з першого заводу доставляється 50% всіх необхідних блоків, а з двох інших — по 25 %. Ймовірність доброякісної продукції складає для першого заводу 0,80 , для другого — 0,90 , для третього — 0,95. Знайти ймовірність того, що навмання взятий залізобетонний блок буде доброякісним.
22. Студент здає іспит по трьох розділах програми, кожний з яких містить по 20 питань. Студент знає 14 питань з першого розділу, 15 питань – з другого і 16 питань з третього розділу програми. Яка ймовірність здати іспит, якщо для цього потрібно вірно відповісти не менше, ніж на два питання?
23. Збори колективу, на яких присутні 28 чоловік, в тому числі 12 інженерно-технічних працівників, обирають делегацію з 5 чоловік. Вважаючи, що кожний із присутніх з однаковою ймовірністю може бути обраний, знайти ймовірність того, що в складі делегації буде 4 інженерно-технічних працівники.
24. На насосній станції працюють незалежно один від одного три насоси. Ймовірність того, що на протязі зміни робота першого насоса вимагатиме втручання механіка, становить 0,2; для другого – 0,4; для третього – 0,6. Знайти ймовірність того, що на протязі зміни вимагатиме втручання механіка робота не менше, ніж двох насосів.
25. На станцію очистки вода поступає по трьох водогонах, причому по першому водогону подається половина всієї необхідної кількості води, а по двох інших – відповідно 15% і 35%. Ймовірність подачі першим водогоном води із вмістом заліза, що перевищує норму, становить 0,06; для двох інших водогонів ця ймовірність складає відповідно 0,04 і 0,02. Яка ймовірність попадання на станцію очистки води із збільшеним вмістом заліза?
26. Бетоновоз розвозить бетонний розчин на три будівельні майданчики. Ймовірність того, що на протязі деякого проміжку часу бетон буде потрібний на першому майданчику, становить 0,8; для двох інших – по 0,6. Знайти ймовірність, що на протязі цього проміжку часу бетон буде потрібний менше, ніж на двох майданчиках.
27. Прилад складається з трьох вузлів. Ймовірність безвідмовної роботи на протязі року першого вузла становить 0,8; другого – 0,8; третього – 0,6. Вузли виходять з ладу незалежно один від одного. Яка ймовірність, що на протязі року вийдуть з ладу не більше двох вузлів?
28. Збори колективу, на яких присутні 30 чоловік, в тому числі 6 інженерно-технічних працівників, обирають делегацію з 5 чоловік. Вважаючи, що кожний із присутніх з однаковою ймовірністю може бути обраний, знайти ймовірність того, що в складі делегації буде 2 інженерно-технічних працівника.

29. Студент здає іспит по трьох розділах програми, кожний з яких містить по 20 питань. Студент знає 19 питань з першого розділу, 18 питань – з другого і 12 питань з третього розділу програми. Яка ймовірність здати іспит, якщо для цього потрібно вірно відповісти не менше, ніж на два питання?
30. Для кожної з трьох дощувальних установок, які працюють на зрошувальному масиві незалежно одна від одної, ймовірність виходу з ладу на протязі доби складає 0,2. Яка ймовірність того, що на протязі доби вийде з ладу не більше двох установок?

Завдання 2.

1. Ймовірність влучення у мішень при одному пострілі дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що із 100 пострілів 75 буде влучних.

2. Фабрика випускає в середньому 70% продукції першого сорту. Знайти ймовірність того, що в партії із 1000 виробів число першосортних знаходиться між 680 і 725.

3. Ймовірність того, що довільний абонент подзвонить на комутатор на протязі години, дорівнює 0,01. Телефонна станція обслуговує 800 абонентів. Яка ймовірність того, що протягом години подзвонять 4 абоненти?

4. Відділ технічного контролю перевіряє партію з 10 деталей. Ймовірність того, що деталь стандартна, дорівнює 0,75. Знайти найімовірніше число деталей, які будуть визнані стандартними.

5. В кожній партії телевізорів (в партії 100 штук), що їх виготовляє деякий завод, 80 є вищої якості. Знайти ймовірність того, що в даній партії телевізорів вищої якості буде не менше 75 і не більше 90.

6. Товарознавець оглядає 25 зразків товарів. Ймовірність того, що кожний із зразків буде визнано придатним для продажу, дорівнює 0,6. Знайти найімовірніше число зразків, які товарознавець визнає придатними для продажу.

7. Знайти ймовірність того, що подія A відбудеться 70 разів у 100 випробуваннях, якщо ймовірність появи цієї події в кожному випробуванні дорівнює 0.8.

8. Ймовірність появи події в кожному з 2100 незалежних випробувань дорівнює 0,7. Знайти ймовірність того, що подія відбудеться не менше 1470 і не більше 1500 разів.

9. Ймовірність появи події в кожному із 100 незалежних випробувань стала і дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що подія відбудеться не менше 90 разів.

10. Ймовірність народження хлопчика дорівнює 0,51. Знайти ймовірність того, що серед 100 новонароджених виявиться 53 хлопчика.

11. Парашутист робить чотири стрибки на точність приземлення, причому ймовірність приземлення в центр круга складає для нього 0,8. Знайти ймовірність приземлення в центр круга не менше двох разів.

12. Фабрика випускає в середньому 70% продукції першого сорту. Знайти ймовірність того, що в партії із 1000 виробів число першосортних знаходиться між 685 і 720.

13. Ймовірність того, що довільний абонент подзвонить на комутатор на протязі години, дорівнює 0,01. Телефонна станція обслуговує 900 абонентів. Яка ймовірність того, що протягом години подзвонять 3 абоненти?

14. Висіяно 600 зернин кукурудзи з ймовірністю проростання 0,9 для кожної зернини. Яка ймовірність того, що проросте не менше 530 зернин?

15. Деякий шахіст із кожних 100 партій в середньому виграє 70. Яка ймовірність того, що в матчі з 6 партій він виграє не менше 4-х партій?

16. Знайти ймовірність того, що хлопчиків серед 1000 новонароджених буде більше 490, але менше 540 (ймовірність народження хлопчика прийняти 0,51).

17. Прядильниця обслуговує 200 веретен. Ймовірність обриву нитки на одному веретені на протязі однієї хвилини дорівнює 0,004. Знайти ймовірність того, що на протязі однієї хвилини буде не більше двох обірваних ниток.

18. Виробництво дає 2% бракованої продукції. Яка ймовірність того, що з 900 взятих на дослідження виробів буде 20 бракованих?

19. В кожній партії телевізорів (в партії 400 штук), що їх виготовляє деякий завод, 300 є першосортними. Яка ймовірність того, що із п'яти навмання взятих телевізорів не менше трьох будуть першосортними?

20. Пересаджено 400 дерев. Знайти ймовірність того, що приживеться більше 340 дерев, якщо в середньому може прижитися 80 % дерев.

21. Ймовірність влучення у мішень для деякого стрільця при одному пострілі дорівнює 0,7. Знайти ймовірність того, що з 200 пострілів у мішень буде 150 влучних.

22. Ймовірність правильної відповіді на кожне з чотирьох питань екзаменаційного білета для деякого студента становить 0,7 Яка ймовірність того, що число правильних відповідей буде не менше двох?

23. На підприємстві 300 робітників. В середньому 40% з них перевиконують норму виробітку. Яка ймовірність того, що в навмання взятий день перевиконали норму більше 100 робітників?
24. З умов випуску лотереї відомо, що виграє 3% всіх випущених білетів. Яка ймовірність того, що серед 200 куплених білетів виграє не менше трьох?
25. Проростання насінини деякої рослини дорівнює 80%. Яка ймовірність того, що з 800 посіяних насінин цієї рослини проросте 620?
26. Товарознавець оглядає 25 зразків товарів. Ймовірність того, що кожний із зразків буде визнано придатним для продажу, дорівнює 0,8. Знайти найімовірніше число зразків, які товарознавець визнає придатними для продажу.
27. Знайти ймовірність того, що подія A відбудеться 85 разів у 100 випробуваннях, якщо ймовірність появи цієї події в кожному випробуванні дорівнює 0,9.
28. Ймовірність появи події в кожному з 2100 незалежних випробувань дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що подія відбудеться не менше 1660 і не більше 1710 разів.
29. Ймовірність появи події в кожному із 100 незалежних випробувань стала і дорівнює 0,9. Знайти ймовірність того, що подія відбудеться не менше 85 разів.
30.Ймовірність народження хлопчика дорівнює 0,51. Знайти ймовірність того, що серед 100 новонароджених виявиться 56 хлопчиків.

Завдання 3.

Скласти таблицю розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини X, побудувати многокутник розподілу, знайти математичне сподівання M(X), дисперсію D(X) і середнє квадратичне відхилення σ (X)

1. Для сигналізації про пожежу в цеху встановлено 4 сигналізатори, які працюють незалежно один від одного. Ймовірність того, що при пожежі сигналізатор спрацює дорівнює 0,8 для кожного з них. X – число сигналізаторів, які спрацюють при пожежі.

2. На насосній станції незалежно один від одного працюють два насоси. Ймовірність нормальної роботи (без втручання механіка) для першого насоса становить 0,6; для другого – 0,7. X – число нормально працюючих на протязі дня насосів.

3. Ймовірність правильної відповіді на кожне з 4-х питань екзаменаційного білета для деякого студента складає 0,6. X – число правильних відповідей.

4. В кожній сотні приладів, які випускає деякий завод, 70 першосортних. X – число першосортних приладів серед чотирьох взятих.

5. Для зрошення деякої ділянки використовують два незалежно працюючих трубопроводи. Ймовірність розриву трубопроводу внаслідок гідравлічного удару на протязі сезону складає для першого з них 0,05; для другого – 0,10. X – число розірваних на протязі сезону трубопроводів.

6. Для деякого шахіста ймовірність виграшу в кожній партії складає 0,4. Грається матч з чотирьох партій. X – число виграних партій.

7. Робітник обслуговує два насоси, які працюють незалежно один від одного. Ймовірність того, що робота першого насосу на протязі зміни вимагатиме втручання робітника, становить 0,6; для другого – 0,8. X – число насосів, які на протязі зміни будуть вимагати втручання робітника.

8. Обчислювальний центр, що складається з двох ЕОМ, які працюють незалежно одна від одної, проводить обробку інформації. Ймовірність відмови на протязі деякого часу для першої ЕОМ складає 0,2; для другої – 0,1. X – число ЕОМ, які відмовлять за вказаний час.

9. На ділянці зрошувального каналу є п'ять автоматичних затворів. Ймовірність того, що на протязі дня затвор буде відкритим, складає для кожного з них 0,5. X – число відкритих на протязі дня затворів.

10. На станції спостереження встановлені 2 радіолокатори різних конструкцій. Ймовірність виявлення цілі для першого локатора складає 0,8; для другого – 0,9. X – число радіолокаторів, які виявлять ціль.

11. Для сигналізації про пожежу в цеху встановлено 4 сигналізатори, які працюють незалежно один від одного. Ймовірність того, що при пожежі сигналізатор спрацює дорівнює 0,9 для кожного з них. X – число сигналізаторів, які спрацюють при пожежі.

12. На насосній станції незалежно один від одного працюють два насоси. Ймовірність нормальної роботи (без втручання механіка) для першого насоса становить 0,6; для другого – 0,8. X – число нормально працюючих на протязі дня насосів.

13. Ймовірність правильної відповіді на кожне з 4-х питань екзаменаційного білету для деякого студента складає 0,8. X – число правильних відповідей.

14. В кожній сотні приладів, які випускає завод, 90 першосортних. X – число першосортних приладів серед чотирьох взятих.

15. Для зрошення деякої ділянки використовують два незалежно працюючих трубопроводи. Ймовірність розриву трубопроводу внаслідок гідравлічного удару на протязі сезону складає для першого з них 0,10; для другого – 0,20. X – число розірваних на протязі сезону трубопроводів.

16. Для деякого шахіста ймовірність виграшу в кожній партії складає 0,6. Грається матч з чотирьох партій. X – число виграних партій.

17. Робітник обслуговує два насоси, які працюють незалежно один від одного. Ймовірність того, що робота першого насосу на протязі зміни вимагатиме втручання робітника, становить 0,7; для другого – 0,9. X – число насосів, які на протязі зміни будуть вимагати втручання робітника.

18. Обчислювальний центр, що складається з двох ЕОМ, які працюють незалежно одна від одної, проводить обробку інформації. Ймовірність відмови на протязі деякого часу для першої ЕОМ складає 0,3; для другої – 0,2. X – число ЕОМ, які відмовлять за вказаний час.

19. На ділянці зрошувального каналу є п'ять автоматичних затворів. Ймовірність того, що на протязі дня затвор буде відкритим, складає для кожного з них 0,4. X – число відкритих на протязі дня затворів.

20. На станції спостереження встановлені 2 радіолокатори різних конструкцій. Ймовірність виявлення цілі для першого локатора складає 0,7; для другого – 0,8. X – число радіолокаторів, які виявлять ціль.

21. Для сигналізації про пожежу в цеху встановлено 4 сигналізатори, які працюють незалежно один від одного. Ймовірність того, що при пожежі сигналізатор спрацює дорівнює 0,6 для кожного з них. X – число сигналізаторів, які спрацюють при пожежі.

22. На насосній станції незалежно один від одного працюють два насоси. Ймовірність нормальної роботи (без втручання механіка) для першого насоса становить 0,68; для другого – 0,9. X – число нормально працюючих на протязі дня насосів.

23. Ймовірність правильної відповіді на кожне з 4-х питань екзаменаційного білета для деякого студента складає 0,9. X – число правильних відповідей.

24. В кожній сотні приладів, які випускає деякий завод, 80 першосортних. X – число першосортних приладів серед чотирьох взятих.

25. Для зрошення деякої ділянки використовують два незалежно працюючих трубопроводи. Ймовірність розриву трубопроводу внаслідок гідравлічного удару на протязі сезону складає для першого з них 0,20; для другого – 0,30. X – число розірваних на протязі сезону трубопроводів.

26. Для деякого шахіста ймовірність виграшу в кожній партії складає 0,8. Грається матч з чотирьох партій. X – число виграних партій.

27. Робітник обслуговує два насоси, які працюють незалежно один від одного. Ймовірність того, що робота першого насосу на протязі зміни вимагатиме втручання робітника, становить 0,9; для другого – 0,8. X – число насосів, які на протязі зміни будуть вимагати втручання робітника.

28. Обчислювальний центр, що складається з двох ЕОМ, які працюють незалежно одна від одної, проводить обробку інформації. Ймовірність відмови на протязі деякого часу для першої ЕОМ складає 0,4; для другої – 0,2. X – число ЕОМ, які відмовлять за вказаний час.

29. На ділянці зрошувального каналу є п'ять автоматичних затворів. Ймовірність того, що на протязі дня затвор буде відкритим, складає для кожного з них 0,2. X – число відкритих на протязі дня затворів на ділянці зрошувального каналу.

30. На станції спостереження встановлені 2 радіолокатори різних конструкцій. Ймовірність виявлення цілі для першого локатора складає 0,6; для другого – 0,7. X – число радіолокаторів, які виявлять ціль.

Завдання 4.

Задана функція розподілу ймовірностей абсолютно неперервної випадкової величини X:

$$F(x)=\begin{cases} 0, \text{при } x \leqslant a; \\ k(x-a)^2, \text{при } a < x \leqslant b; \\ 1, \text{при } x > b. \end{cases}$$

Необхідно: 1) знайти коефіцієнт k і щільність розподілу ймовірностей; 2) побудувати графіки функцій розподілу ймовірностей і щільності розподілу ймовірностей; 3) знайти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини *X*; 4) знайти ймовірність попадання випадкової величини *X* в інтервал (α, β) та зобразити цю ймовірність на графіках функції розподілу ймовірностей і щільності розподілу ймовірностей.

Варіант	a	b	α	β
1	2	6	4	8
2	-2	4	0	5
3	3	6	4	8
4	-3	3	0	5
5	4	8	6	9
6	2	8	5	10
7	-2	3	0	4
8	4	9	6	10
9	-4	1	0	3
10	1	4	2	6
11	2	8	4	11
12	-2	7	0	8
13	3	9	4	10
14	-3	6	0	8
15	4	10	6	12
16	-4	2	-2	6
17	2	5	3	8
18	-2	9	0	12
19	3	12	5	14
20	-3	3	1	4
21	4	11	6	14
22	-4	5	0	7

Варіант	*a*	*b*	α	β
23	1	7	3	9
24	-1	5	2	8
25	1	4	3	10
26	-2	7	-1	8
27	-1	8	1	12
28	5	11	7	14
29	-3	9	1	4
30	2	11	3	12

Завдання 5.

Завод залізобетонних виробів виготовляє будівельні блоки. Можна вважати, що маса блока є нормально розподілена випадкова величина X з математичним сподіванням (проектною масою) a кг і середнім квадратичним відхиленням σ кг. Знайти ймовірності того, що маса навмання взятого блока буде: 1) знаходитись в межах від α до β кг; 2) відхилятись від проектної маси по абсолютній величині менше ніж на δ кг.

Варіант	*a*	σ	α	β	δ
1	200	3	195	208	5
2	400	8	390	420	10
3	600	10	580	615	15
4	1000	15	980	1030	20
5	1000	20	950	1030	15
6	800	10	785	820	15
7	600	12	585	620	10

Варіант	a	σ	α	β	δ
8	400	15	390	420	5
9	800	12	780	825	15
10	1000	25	960	1050	20
11	200	4	194	210	6
12	400	6	392	416	8
13	600	9	585	620	12
14	800	14	776	820	16
15	1000	20	975	1032	13
16	200	5	193	212	8
17	400	6	392	417	7
18	600	14	576	622	18
19	800	16	782	825	24
20	1000	24	964	1040	28
21	200	5	192	208	8
22	400	9	388	410	6
23	600	8	588	618	14
24	800	11	788	820	18
25	1000	16	988	1036	20
26	800	12	785	828	22
27	600	9	584	620	16
28	400	6	388	416	10
29	800	12	785	817	15
30	1000	26	972	1038	30

12. Особливості тестової форми контролю знань і зразок білета з тестовими завданнями

12.1 Особливості тестової форми контролю знань

Самостійна робота студента включає в себе опрацювання теоретичного матеріалу, що розглядається у розділі "Основи теорії ймовірностей", по підручникам, конспектам і навчальним посібникам, підготовку до практичних занять, виконання домашніх вправ, опрацювання окремих розділів робочої програми з навчальної дисципліни, які не виносяться на лекції, підготовку до написання самостійних робіт, до складання відповідного модуля.

Теоретичні тестові завдання суттєво відрізняються від традиційної форми контролю знань і мають свої переваги і недоліки. Наприклад в тестовому варіанті не можна задати питання: "Вплив параметрів нормального закону на на його графік" або "Довести ту чи іншу теорему" або "Основні властивості математичного сподівання", тому що відповідь на такі питання потребує і часу і займає багато місця. А у студента на вибір правильної відповіді час обмежений, не більше 1 хвилини на 1 теоретичне питання I рівня. Тому питання дроблять так, щоб відповіді були лаконічними, хоча кількість питань стає значно більшою. Це є значним недоліком тестової форми оцінки теоретичних знань з математики і суттєво впливає на якість математичної освіти.

Але якщо у навчальному закладі тестова форма складання іспитів, заліків і модулів стає основною, то до неї потрібно готуватися.

Тестові завдання з вищої математики по темі "Основи теорії ймовірностей" розбито на три рівні. Питання першого рівня оцінюються в 1 бал кожне, другого у 2 бали, третього у 3 бали. Всього при складанні модульної роботи на комп'ютері можна заробити 15 балів. До складу білету, наприклад, вводять 6 питань першого рівня, 3 питання другого рівня і 1 питання третього рівня. В кожному білеті до кожного питання вказано по 5 відповідей, вірною з них є лише одна. Наведемо зразок такого білету

12.2. Зразок білета з тестовими завданнями

I рівень

1. Яку назву мають розміщення n елементів з n ?

1) Сполуки
2) Перестановки
3) Розміщення
4) Корені
5) Досконалі

2. Як називається подія, яка співпадає з простором елементарних подій? Ця подія завжди відбувається при кожному повторенні ймовірностного експерименту.

1) Випадковою
2) Неможливою
3) Вірогідною
4) Базовою
5) Переважною

3. Дана множина, що складається з двох подій $\{A\ ,\ B\}$. Що означає складна подія:

$A\cdot\bar{B}+\bar{A}\cdot B$?

1) Відбулась тільки одна подія
2) Відбулись обидві події
3) Відбулась хоча б одна з подій
4) Не відбулося жодної з подій
5) Не відбулась подія B

4. До якої теореми відносяться формули:

$$P_n(m)\approx\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(t),$$

де: $$\varphi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-t^2/2};\quad q=1-p;\quad t=\frac{m-np}{\sqrt{npq}}.$$

1) До теореми Гауса
2) До теореми Бернуллі
3) До теореми Пуассона
4) До локальної теореми Лапласа
5) До інтегральної теореми Лаплпса

5. Випадкова величина із скінченною або зчисленною множиною значень називається...

1) дискретною випадковою величиною
2) досконалою випадковою величиною
3) неперервною випадковою величиною
4) числовою випадковою величиною
5) елементарною випадковою величиною

6. Для якого розподілу щільність розподілу має вигляд:

$$p(x, a, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \qquad ?$$

1) Рівномірного
2) Нормального
3) Біноміальнрго
4) Пуассона
5) Лапласа

7. Прилад складається з двох вузлів. Ймовірність виходу з ладу на протязі року відповідно для першого і другого вузла становить 0,1 та 0,2. Прилади виходять з ладу незалежно один від одного. Знайти ймовірність того, що на протязі року не вийде з ладу жоден з аузлів.

1) 0,08
2) 0,02
3) 0,56
4) 0,64
5) 0,72

8. Проводиться випробування кожного з 24 елементів деякого приладу. Ймовірність того, що елемент витримає випробування, дорівнює 0,6. Знайти найімовірніше число елементів, що витримають випробування.

1) 14
2) 14, 15
3) 15, 16
4) 18
5) 16

9. Задано нормальний розподіл ймовірностей неперервної випадкової величини X:

$$p(x, a, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot 2} e^{-\frac{(x-8)^2}{8}} \quad .$$

Знайти математичне сподівання і дисперсію.

1) 6;1
2) 8;2
3) 8;4
4) 6;2
5) 6;4

III рівень

10. Випадкова величина X розподілена по нормальному закону. Середнє квадратичне відхилення цієї величини дорівнює 20 кг. Знайти ймовірності того, що відхиленнямаса випадкової величини від її математичного сподівання по модулю менше 10 кг.

1) 0,828
2) 0,715
3) 0,384
4) 0,628
5) 0,546

12.3. Тренінгові завдання для підготовки до складання модульної роботи по тестам

Ці завдання можуть бути опрацьовані під час практичних занять, в якості домашніх завдань, при самостійній підготовці. Щоб не засмічувати пам’ять студента непотрібною інформацією при підготовці до складання змістового модуля “Основи теорії ймовірностей” за тестовою формою, вказано лише правильні відповіді.

І рівень

1. Комбінаторика розглядає задачі вибору і розміщенню m елементів (вибірки) з деякої скінченної множини, що містить n елементів (генеральної сукупності) ...
В. у відповідності з заданими правилами

2. Вкажіть два основні способи відбору елементів у вибірку з генеральної сукупності.
В. З поверненням і без повернення. У першому випадку перед відбором кожного наступного елемента відібраний попередньо елемент повертається у генеральну сукупність, у другому — не повертається

3. При якій вибірці обчислення числа способів, якими може бути проведена вибірка m з n елементів проводиться за виразом n^m ?
В. При вибірці з поверненням

4. При якій вибірці обчислення числа способів, якими може бути проведена вибірка m з n елементів проводиться за формулою

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

, де A називається числом розміщень?

В. При вибірці без повернення

5. Яку назву мають розміщення n елементів з n?

В. Перестановки

6. Яку назву мають розміщення m елементів з n, які відрізняються хоча б одним з елементів?
В. Сполуки

7. Яке число способів, якими може бути проведена вибірка n з n елементів при вибірці без повернення, знаходиться за формулою

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n! \qquad ?$$

В. Число перестановок

8. Яке число способів, якими може бути проведена вибірка m з n елементів при вибірці без повернення, знаходиться за формулою

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} \qquad ?$$

В. Число сполук

9. Для будь-яких чисел a і b та будь-якого натурального числа n вірною є формула:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^n b^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m a^{n-m} b^m \qquad ?$$

Як вона називається?
В. Біном Ньютона

10. Які явища називають масовими випадковими явищами?
В. Масовими випадковими явищами називають такі явища, які можливо спостерігати багатократно, практично необмежену кількість разів при одних і тих же умовах

11. Що вивчає теорія ймовірностей?
В. Теорія ймовірностей є математична наука, яка займається вивченням закономірностей масових випадкових явищ

12. Що називається ймовірностним експериментом?
В. Спостерігання даного випадкового явища при одному і тому ж комплексі умов, яке можно виконувати практично необмежену кількість разів

13. Яка подія називається елементарною?

В. Елементарною подією ω *(омега) будемо називати любий результат із сукупності всіх можливих, взаємно виключних (несумісних) результатів даного ймовірнісного експерименту.*

14. Що називається простором елементарних подій ?

В. Простір елементарних подій Ω *(омега), це множина всіх елементарних подій* $\Omega = \{\omega\}$ *, що відповідає даному ймовірнісному експерименту.*

15. Що називається подією?
В. Подією називається усяка підмножина простору елементарних подій

16. Як називається подія, яка співпадає з простором елементарних подій? Ця подія завжди відбувається при кожному повторенні ймовірнісного експерименту.
В. Вірогідною

17. Як називається подія, яка співпадає з порожньою множиною? Ця подія завжди не відбувається при кожному повторенні ймовірнісного експерименту.
В. Неможливою

18. Як називається подія, яка може відбутися або не відбутися при кожному повторенні ймовірнісного експерименту, тобто результат передбачити неможливо?
В. Випадковою

19. Об'єднанням (або сумою) двох подій A і B називається така складна подія $A \cup B$, що містить ті елементарні події, які ...

В. належать хоч би одній з цих подій

20. Подія $A \cup B$ відбувається тоді, коли відбувається ...
В. хоч би одна з подій А або В, тобто (або А , або В, або обидві разом)

21. Об'єднанням (або сумою) скінченної або зчисленної множини подій $A_1, A_2, \ldots$ називається така складна подія , що містить ті елементарні події, які ....

В. належать хоч би одній з цих подій

22. Перетином (або добутком) двох подій *А* і *В* називається така складна подія $A \cap B$, що містить ті елементарні події, які ...
В. належать як події А, так і події В

23. Подія $A \cap B$ відбувається тоді, коли відбувається ...
В. і подія А і подія В, тобто обидві події відбуваються разом

24. Перетином (або добутком) скінченної або зчисленної множини подій $A_1, A_2, \ldots$ називається така складна подія , що містить ті елементарні події, які...
В. належать одночасно всім подіям, що входять в дану множину подій

25. Дві події називаються несумісними, якщо ...
В. їх перетин є неможливою подією

26. В якому випадку замість символа $A \cup B$ пишуть $A + B$?
В. Для несумісних подій

27. В якому випадку замість символа $A \cap B$ вживають символи $A \cdot B$ або AB ?

В. Для довільних подій

28. Подія $\bar{A}$ називається **протилежною** події *А*, якщо вона...
В. є доповненням множини А до простору елементарних подій Ω .

29. Групу випробувань з фіксованим комплексом умов називають серією випробувань Нехай *n* - загальна кількість випробувань в даній

серії; m - кількість з них, в яких відбулась подія A. Яка числова характеристика знаходиться за формулою $p^*(A)=\frac{m}{n}$?

В. Частота події А

30. Яка закономірність частот дає підставу вважати, що існує об’єктивна числова характеристика кожної події, ймовірність події?
В. Якщо при малому числі випробувань частота події носить випадковий характер, то при достатньо великому числі випробувань вона проявляє тенденцію до стабілізації відносно деякого характерного для даної події значення, яке і називають ймовірністю події

31. Якщо частота події у даній серії випробувань дорівнює 0 або 1, то чи випливає з цього, що подія неможлива або вірогідна?
В. Ні

32. Суть якого методу визначення базових ймовірностей полягає в такому їх визначенні: якщо всі елементарні події із деякого скінченного ймовірнісного простору рівноможливі, то ймовірність здійснення події A дорівнює відношенню числа сприятливих для неї елементарних подій m до загального числа n всіх елементарних подій?
В. Класичного

33. Вкажіть недоліки класичного методу визначення базових ймовірностей.
В. Множина елементарних подій повинна бути скінченною, а всі елементарні події — рівноможливими

34. Суть якого методу визначення базових ймовірностей полягає в тому, що за ймовірність події приймають її частоту при достатньо великому числі випробувань?
В. Статистичного

35. Дана множина, що складається з двох подій $\{A, B\}$. Що означає складна подія $A \cdot B$?

В. Відбулись обидві події

36. Дана множина, що складається з двох подій $\{A, B\}$. Що означає

складна подія $A\cdot\overline{B}+\overline{A}\cdot B$?

В. Відбулась тільки одна подія

37. Дана множина, що складається з двох подій $\{A, B\}$. Що означає

подія $A\cup B=A\cdot\overline{B}+\overline{A}\cdot B+A\cdot B$?

В. Відбулась хоча б одна подія

38. Дана множина, що складається з двох подій $\{A, B\}$. Що означає

складна подія $\overline{A}\cdot\overline{B}$?

В. Не відбулась жодна з подій

39. Дана множина, що складається з двох подій $\{A, B\}$. Що означає

складна подія $\overline{A}\cdot\overline{B}+A\cdot\overline{B}+\overline{A}\cdot B+A\cdot B$?

В. Відбулась вірогідна подія

40. Дана множина, що складається з трьох подій $\{A, B, C\}$.

Що означає складна подія $A\cdot B\cdot C$?

В. Відбулись всі три події

41. Дана множина, що складається з трьох подій $\{A, B, C\}$.

Що означає складна подія $A\cdot B\cdot\overline{C}+A\cdot\overline{B}\cdot C+\overline{A}\cdot B\cdot C$?

В. Відбулись тільки дві події

42. Дана множина, що складається з трьох подій $\{A, B, C\}$.

Що означає складна подія $A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}+\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}+\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C$?

В. Відбулась тільки одна подія

43. Дана множина, що складається з трьох подій $\{A, B, C\}$.

Що означає складна подія

$$A \cup B \cup C = ABC + \left(AB\bar{C} + A\bar{B}C + \bar{A}BC\right) + \left(A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C\right) \quad ?$$

B. Відбулась хоча б одна подія

44. Дана множина, що складається з трьох подій $\{A, B, C\}$.

Що означає складна подія $\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}$?

B. Не відбулась жодна з цих трьох подій

45. Чому дорівнює ймовірність вірогідної події ?
B. 1

46. Чому дорівнює ймовірність неможливої події?
B. 0

47. Ймовірність якої події лежить в межах $0 \leq P(A) \leq 1$?
B. Випадкової

48.Імовірність якої події знаходять за формулою: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$?
B. Протилежної події

49. До якої аксіоми належить формула $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$?
B. До аксіоми додавання для несумісних подій

50. Імовірність якої події знаходять за формулою:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) \quad ?$$

B. Імовірність об'єднання сумісних подій

51. Імовірність якої події знаходять за формулою:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B) \quad ?$$

В. Імовірність перетину залежних подій

52. Імовірність якої події знаходять за формулою:

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B) \quad ?$$

В. Імовірність перетину незалежних подій

53. Імовірність події *А*, яка може відбутися тільки сумісно з однією з гіпотез $H_1, H_2, \ldots, H_n$, знаходиться за формулою повної імовірності: $P(A)=P(H_1)\cdot P(A|H_1)+\ldots+P(H_n)\cdot P(A|H_n)$.

Які з наведених нижче умов накладаються на гіпотези?
В. Гіпотези утворюють повну групу несумісних подій, об'єднання яких співпадає з ймовірностним простором

54. За якими з формул здійснюється переоцінка гіпотез після випробування?
В. За формулами Байєса

55. Ймовірність події $P(H_k|A)$ гіпотези H_k після того, як мала місце подія A, визначається за формулами :

$$P(H_k|A)=\frac{P(H_k)P(A|H_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A|H_i)}=\frac{P(H_k)P(A|H_k)}{P(A)}.$$

де $k=1,2,...,n$ і гіпотези $H_1, H_2, \ldots, H_n$ складають повну групу несумісних подій, об'єднання яких співпадає з простором елементарних подій Ω.

Як називаються ці формули?
В. Формули Байєса

56. Повторне виконання *n* випробувань, при незмінному комплексі умов, в кожному з яких ймовірність події *А* не залежить від

результатів інших випробувань називається...
В. послідовністю незалежних випробувань

57. Послідовність незалежних випробувань, у кожному з яких ймовірність події *A* дорівнює *p* (стала) називається ...
В. послідовністю (схемою) Бернуллі

58. Ймовірність настання події *A* m разів при n незалежних випробуваннях, у кожному з яких ймовірність настання події дорівнює p знаходиться за формулою:

$$P_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m}, \quad \text{де:} \quad q=1-p; \quad C_n^m=\frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Як називається ця формула?
В. Формула біноміального розподілу або формула Бернуллі

59. До якої теореми відносяться формули: $P_n(m)\approx\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(t)$,

де: $\varphi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-t^2/2}; \quad q=1-p; \quad t=\frac{m-np}{\sqrt{npq}}$?

В. До локальної теореми Лапласа

60. До якої теореми відносяться формули:

$$P_n(m_1, m_2)\approx\Phi\left(t_{m_2}\right)-\Phi\left(t_{m_1}\right),$$

де: $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_0^x e^{-t^2/2}dt; \quad q=1-p; \quad t=\frac{m-np}{\sqrt{npq}};$

$t_{m_2}=\frac{m_2-np}{\sqrt{npq}}; \qquad t_{m_1}=\frac{m_1-np}{\sqrt{npq}}$?

В. До інтегральної теореми Лапласа

61. Як називається формула:

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m \cdot e^{-\lambda}}{m!}, \quad \text{де:} \quad \lambda = np \quad ?$$

В. Формулою Пуассона

62. Число k_0 (появи події у незалежних випробуваннях, в кожному з яких ймовірність появи події дорівнює p) називається найімовірнішим, якщо ймовірність того, що подія у цих випробуваннях відбудеться k_0 разів перевищує (або принаймні не менше) ймовірності всіх інших можливих результатів випробувань.

Найімовірніше число k_0 визначається з подвійної нерівності:

$$np - q \le k_0 < np + p \quad .$$

При якій умові існує два найімовірніших числа k_0 і $k_0 + 1$?

В. Якщо число np-q — ціле

63. Змінна величина, яка приймає в залежності від випадку ті чи інші значення з визначеними ймовірностями називається...
В. випадковою величиною

64. Випадкова величина із скінченною або зчисленною множиною можливих значень називається...
В. дискретною випадковою величиною

65. Випадкова величина, яка може приймати будь-яке значення з деякого скінченного або нескінченного інтервалу називається...
В. неперервною випадковою величиною

66. Вкажіть, яка із вказаних випадкових величин є неперервною.
В. Час справної роботи приладу

67. Яку випадкову величину задають її рядом розподілу, тобто

шляхом переліку можливих значень , записаних у зростаючому порядку і відповідних їм ймовірностей; при цьому сума цих ймовірностей повинна дорівнювати 1.
В. Дискретну випадкову вtличину

68. Як може бути заданий ряд розподілу дискретної випадкової величини?
В. За допомогою таблиці або аналітично

69. Графічне зображення ряду розподілу дискретної випадкової величини називається...
В. многокутником розподілу

70. Яка числова характеристика скінченної дискретної випадкової величини обчислюється за формулою:

$$M(X)=x_1 p_1+x_2 p_2, \ldots, +x_n p_n=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i \quad ?$$

В. Математичне сподівання

71. Яка числова характеристика скінченної дискретної випадкової величини обчислюється за формулами:

$$D(X)=M(X-m)^2 \quad \text{або} \qquad D(X)=M(X^2)-m^2 \quad ?$$

Для зручності написання формул математичне сподівання позначено

$m=M(X)$

В. Дисперсія

72. Яка числова характеристика скінченної дискретної випадкової величини обчислюється за формулою: $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$?

В. Середнє квадратичне відхилення

73. Яка числова характеристика абсолютно неперервної випадкової

величини обчислюється за формулою:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\,p(x)\,dx \quad ?$$

В. Математичне сподівання

74. Яка числова характеристика абсолютно неперервної випадкової величини обчислюється за формулами:

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} (x-m)^2\,p(x)\,dx \quad \text{або} \quad D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\,p(x)\,dx-m^2 \quad ?$$

Для зручності написання формул математичне сподівання позначено $m=M(X)$

В. Дисперсія

75. Чи може дисперсія бути від’ємною?
В. Ні

76. Як називається розподіл ймовірностей випадкової величини X — числа здійснень події у n незалежних повторних випробуваннях, якщо в кожному випробуванні ймовірність здійснення такої події дорівнює p, тобто розподіл ймовірностей випадкової величини з цілочисловими значеннями $m = 0,1,2,...,n$, що задається формулою Бернуллі:

$$P_n(m)=C_n^m\,p^m\,q^{n-m}, \quad \text{де:} \quad q=1-p\,; \quad C_n^m=\frac{n!}{m!(n-m)!} \quad ?$$

В. Біноміальним розподілом

77. Як називається розподіл дискретної випадкової величини X, якщо вона приймає зчисленну множину можливих значень $m = 0,1,2,3,...$ з ймовірностями

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m \cdot e^{-\lambda}}{m!},$$

де число λ називається параметром розподілу?

В. Розподілом Пуассона

78. Якщо n велике, а p мале, то при значенні параметра $\lambda = np$ розподіл Пуассона може бути хорошим наближенням...
В. Біноміального розподілу

79.Числовими характеристиками якого розподілу є наступні числові характеристики:
$$M(X) = np; \quad D(X) = npq; \quad \sigma(X) = \sqrt{npq} \quad ?$$

В. Біноміального розподілу

80. Числовими характеристиками якого розподілу є наступні числові характеристики:

$$M(X) = \lambda; \quad D(X) = \lambda; \quad \sigma(X) = \sqrt{\lambda} \quad ?$$

В. Розподілу Пуассона

81. Як називається функція $F(x)$ дійсної змінної x, яка визначає ймовірність того, що випадкова величина X в результаті експерименту прийме значення менше деякого фіксованого числа x :

$$F(x) = P(X < x) = P(X \in (-\infty; x)) \quad ?$$
В. Функцією розподілу

82. Функція розподілу $F(x)$ — це універсальна характеристика, яка повністю характеризує випадкову величину X і застосовується...
В. як для дискретних, так і для неперервних випадкових величин

83. Розподіл ймовірностей випадкової величини X, функція розподілу $F(x)$ якої неперервна, називається...
В. неперервним

84. Серед неперервних розподілів найбільш важливими є ті, для яких функція розподілу $F(x)$ може бути представлена у вигляді

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} p(t)\,dt,$$

де підінтегральна функція $p(x)\geq 0$. Як називається цей розподіл?
В. Абсолютно неперервний розподіл

85. Серед неперервних розподілів найбільш важливими є ті, для яких функція розподілу $F(x)$ може бути представлена у вигляді

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} p(t)\,dt,$$

де підінтегральна функція $p(x)\geq 0$. Як називають функцію $p(x)$?
В. Щільністю розподілу або диференціальною функцією розподілу

86. Яка ймовірність для дискретної випадкової величини знаходиться за формулою:

$$P(a\leq X<b)=F(b)-F(a) \quad ?$$

В. Імовірність попадання дискретної випадкової величини у заданий напівзамкнутий проміжок

87. Чому дорівнює ймовірність (до випробування) того, що неперервна випадкова величина X прийме наперед вказане строго визначене значення?
В. 0

88. Як ще називають функцію розподілу $F(x)$ абсолютно неперервної випадкової величини X ?
В. Інтегральною функцією розподілу

89. Формула

$$P(a \le X \le b) = \int_a^b p(x)\,dx$$

використовується для знаходження ймовірності попадання...
В. абсолютно неперервної випадкової величини в заданий проміжок при відомій щільності розподілу

90. Абсолютно неперервну випадкову величину X називають рівномірно розподіленою на проміжку $[a,b]$, якщо...
В. її щільність ймовірності на цьому проміжку стала, а в усіх зовнішніх точках дорівнює нулю

91. Числові характеристики якого розподілу знаходяться за формулами:

$$M(X) = \frac{a+b}{2}; \quad D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}; \quad \sigma(X) = \frac{b-a}{2\sqrt{3}} \quad ?$$

В. Рівномірного розподілу

92. Для якого розподілу функція розподілу має вигляд

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < a; \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{при } a \le x \le b; \\ 1, & \text{при } x > b. \end{cases} \quad ?$$

В. Рівномірного розподілу

93. Для якого розподілу щільність розподілу має вигляд:

$$p(x, a, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \quad ?$$

В. Нормального розподілу

94. Графік щільності нормального розподілу називається...
В. нормальною кривою або кривою Гауса

95. Для нормально розподіленої випадкової величини X з

параметрами a, σ ймовірність заданого відхилення 3σ :

$$P(|X-a|<3\sigma)=2\Phi(3)=2\cdot 0{,}49865=0{,}9973.$$

Звідси можна зробити висновок, що для нормально розподіленої випадкової величини X всі розсіювання з точністю до долей проценту належать інтервалу $(a-3\sigma; a+3\sigma)$. Як називається це правило?
В. Правило трьох сигм

96. Для якого розподілу числові характеристики випадкової величини

X з параметрами a, σ знаходяться за формулами:

$M(X)=a; \quad D(X)=\sigma^2$?
В. Нормального розподілу

97. Імовірність попадання у заданий интервал якої величини знаходиться за формулою:

$$P(\alpha \le X \le \beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right),$$

де $\Phi(x)$ - функція Лапласа?
В. Нормально розподіленої випадкової величини

98. Для якого розподілу ймовірність заданого відхилення δ випадкової величини X з параметрами a, σ знаходяться за формулою:

$P(|X-a|\le\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$, де $\Phi(x)$ -функція Лапласа?

В. Нормального розподілу

99. Для якого розподілу випадкової величини X з параметрами параметр a має зміст математичного сподівання, а параметр σ – середнього квадратичного відхилення?

В. Нормального розподілу

100. Як впливає зміна величин параметра a і параметра σ на форму і положення нормальної кривої (кривої Гауса)?

В. Параметр а не змінює форми нормальної кривої, а приводить лише до її зсуву вздовж осі Ох; параметр σ *не змінює положення нормальної кривої, а змінює її форму*

II рівень

1. Скількома способами можна вибрати 4 чоловік на 4 різні посади з 8 кандидатів на ці посади?

В. 1680 .

2. Скількома способами можна вибрати 4 чоловік на 4 різні посади з 9 кандидатів на ці посади?

В. 3024 .

3. П’ять студентів вирішили піти в кінотеатр і купили 5 квитків. Скількома способами їх можна розподілити між цими студентами?

В. 120 .

4. Скількома способами можна 6 гостей на 6 стільцях?

В. 720 .

5. Скількома способами можна вибрати 3 деталі з 8?

В. 56 .

6. Скількома способами можна вибрати 2 деталі з 10?

В. 45.

7. З 20 робітників потрібно виділити 6 для роботи на певній ділянці. Скількома способами це можна зробити?

В. 38 760.

8. Скількома способами можна вибрати 6 номерів з 49?

В. 13 983 816 .

9. Знайти $(a+b)^4$

В. $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + a b^3 + b^4$

10. Знайти $(a+b)^5$

В. $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4 b + 10a^3 b^2 + 10a^2 b^3 + 5ab^4 + b^4$

11. Знайти $(a+b)^7$

В. $$(a+b)^7 = a^7 + 7a^6 b + 21a^2 b^5 + 35a^4 b^3 + 35a^3 b^4 + \\ + 21a^2 b^5 + 7ab^6 + b^7$$

12. Монету підкидають 2 рази. Знайти ймовірність того, що хоча б один раз випав герб.

В. 0,75 .

13. Підкидають 2 гральних кубика. Знайти ймовірність того, що сума очок на верхніх гранях дорівнює 7.

В. 1/6 .

14. Підкидають 2 гральних кубика. Знайти ймовірність того, що сума очок на верхніх гранях дорівнює 5, а добуток 4.

В. 2/36 .

15. На змаганнях з біатлону виступають 100 спортсменів. Вони тягнуть із сриньки жетони з номерами від 1 до 100. Знайти ймовірність того, що номер першого, навмання взятого жетону, не містить цифри 7.

В. 0,81.

16. На п’яти однакових карточках написано букви І, В, Е, Н, Р. Картки перемішують і розкладають навмання у ряд. Знайти ймовірність, що з’явиться слово РІВНЕ.

В. 1/120 .

17. Прилад складається з двох вузлів. Ймовірність виходу з ладу на протязі року відповідно для першого і другого вузла становить 0,1 та 0,2 . Прилади виходять з ладу незалежно один від одного. Знайти ймовірність того, що на протязі року вийдуть з ладу обидва вузли.

В. 0,02 .

18. Прилад складається з двох вузлів. Ймовірність виходу з ладу на протязі року відповідно для першого і другого вузла становить 0,1 та 0,2 . Прилади виходять з ладу незалежно один від одного. Знайти ймовірність того, що на протязі року вийде з ладу тільки один вузол.

В. 0,26.

19. Прилад складається з двох вузлів. Ймовірність виходу з ладу на протязі року відповідно для першого і другого вузла становить 0,1 та 0,2 . Прилади виходять з ладу незалежно один від одного. Знайти ймовірність того, що на протязі року вийде з ладу хоча би один з вузлів.

В. 0,28 .

20. Прилад складається з двох вузлів. Ймовірність виходу з ладу на протязі року відповідно для першого і другого вузла становить 0,1 та 0,2 . Прилади виходять з ладу незалежно один від одного. Знайти ймовірність того, що на протязі року не вийде з ладу жоден з вузлів.

В. 0,72 .

21. Прилад складається з двох вузлів. Ймовірність виходу з ладу на протязі року відповідно для першого і другого вузла становить 0,1 та 0,2 . Прилади виходять з ладу незалежно один від одного. Знайти ймовірність того, що на протязі року вийде з ладу навмання взятий вузол.

В. 0,15 .

22. На ділянці зрошувального каналу є три автоматичні затвори на водовипусках. Затвори працюють незалежно один від одного. Ймовірність того, що на протязі дня буде відкрито перший водовипуск становить 0,8; другий – 0,7; третій – 0,6. Яка ймовірність того, що на протязі дня буде відкрито всі три водовипуска ?

В. 0,336 .

23. На ділянці зрошувального каналу є три автоматичні затвори на водовипусках. Затвори працюють незалежно один від одного. Ймовірність того, що на протязі дня буде відкрито перший водовипуск становить 0,8; другий – 0,7; третій – 0,6. Яка ймовірність того, що на протязі дня буде закрито всі три водовипуска?

В. 0,024 .

24. Два кооперативи виробляють однакові деталі, які після їх одержання на склад були змішані. Ймовірність браку для першого кооперативу 0,2 , для другого — 0,6. Знайти ймовірність того, що взята навмання деталь буде бракована, якщо I кооператив поставив 80% деталей, а другий 20%.

В. 0,28 .

25. Два рівносильних шахіста грають у шахи. Яка ймовірність виграти дві партії з чотирьох?

В. 0,375 .

26. Монету підкидають 6 разів. Знайти ймовірність того, що герб випав 0 разів.

В. 1/64 .

27. Монету підкидають 6 разів. Знайти ймовірність того, що герб випав 1 раз.

В. 6/64 .

28. Монету підкидають 6 разів. Знайти ймовірність того, що герб випав 2 рази.

В. 15/64 .

29. Монету підкидають 6 разів. Знайти ймовірність того, що герб випав 3 рази.

В. 20/64 .

30. Монету підкидають 6 разів. Знайти ймовірність того, що герб випав 4 рази.

В. 15/64 .

31. Монету підкидають 6 разів. Знайти ймовірність того, що герб випав 5 разів.

B. 6/24 .

32. Монету підкидають 6 разів. Знайти ймовірність того, що герб випав 6 разів.

B. 1/64 .

33. Монету підкидають 9 разів. Знайти ймовірність того, що герб випав 0 разів.

B. 1/512 .

34. Монету підкидають 9 разів. Знайти ймовірність того, що герб випав 1 раз.

B. 9/512 .

35. Монету підкидають 9 разів. Знайти ймовірність того, що герб випав 2 рази.

B. 36/512 .

36. Монету підкидають 9 разів. Знайти ймовірність того, що герб випав 3 рази.

B. 84/512 .

37. Монету підкидають 9 разів. Знайти ймовірність того, що герб випав 4 рази.

B. 126/512 .

38. Монету підкидають 9 разів. Знайти ймовірність того, що герб випав 5 разів.

B. 126/512 .

39. Монету підкидають 9 разів. Знайти ймовірність того, що герб випав 6 разів.

B. 84/512 .

41. Монету підкидають 9 разів. Знайти ймовірність того, що герб випав 7 разів.

B. 36/512 .

42. Монету підкидають 9 разів. Знайти ймовірність того, що герб випав 8 разів.

В. 9/512 .

43. Монету підкидають 9 разів. Знайти ймовірність того, що герб випав 9 разів.

В. 1/512 .

44. Гральний кубик підкидають 4 рази. Знайти ймовірність того, що число 6 випало 0 разів.

В. 625/1296 .

45. Гральний кубик підкидають 4 рази. Знайти ймовірність того, що число 6 випало 1 раз.

В. 500/1296 .

46. Гральний кубик підкидають 4 рази. Знайти ймовірність того, що число 6 випало 2 рази.

В. 150/1296 .

47. Гральний кубик підкидають 4 рази. Знайти ймовірність того, що число 6 випало 3 рази.

В. 20/1296 .

48. Гральний кубик підкидають 4 рази. Знайти ймовірність того, що число 6 випало 4 рази.

В. 1/1296 .

49. Гральний кубик підкидають 3 рази. Знайти ймовірність того, що число 6 випало 0 разів.

В. 125/216.

50. Гральний кубик підкидають 3 рази. Знайти ймовірність того, що число 6 випало 1 раз.

В. 75/216.

51. Гральний кубик підкидають 3 рази. Знайти ймовірність того, що число 6 випало 2 рази.

В. 15/216.

52. Гральний кубик підкидають 3 рази. Знайти ймовірність того, що число 6 випало 3 рази.

В. 1/216.

53. Відділ технічного контролю перевіряє партію з 10 деталей. Ймовірність того, що деталь стандартна, дорівнює 0,76. Знайти найімовірніше число деталей, які будуть визнані стандартними.

В. 8.

54. Проводиться випробування кожного з 24 елементів деякого приладу. Ймовірність того, що елемент витримає випробування, дорівнює 0,6. Знайти найімовірніше число елементів, що витримають випробування.

В. 14;15 .

55. Монету підкидають 4 рази. Випадкова величина *X* — число появ герба. Знайти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення цієї величини.

В. 2;1;1.

56. Монету підкидають 8 разів. Випадкова величина *X* — число появ герба. Знайти математичне сподівання і дисперсію цієї величини.

В. 4; 2.

57. Монету підкидають 12 разів. Випадкова величина Х — число появ герба. Знайти математичне сподівання і дисперсію цієї величини.

В. 6; 3 .

58. Гральний кубик підкидають 6 разів. Випадкова величина *X* — число появ числа 6. Знайти математичне сподівання і дисперсію цієї величини.

В. 1; 5/6.

59. Знайти математичне сподівання і дисперсію випадкової величини *X*, розподіленої по закону рівномірної щільності у інтервалі (2;14).

В. 8;12 .

60. Задано нормальний розподіл ймовірностей неперервної випадкової величини X :

$$p(x, a, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 2} e^{-\frac{(x-6)^2}{8}} .$$

Знайти математичне сподівання і дисперсію.

B. 6; 4 .

61. Задано нормальний розподіл ймовірностей неперервної випадкової величини X :

$$p(x, a, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 2} e^{-\frac{(x-4)^2}{8}} .$$

Знайти інтервал практично можливих значень.

B. (-2;10) .

III рівень

1. У цеху працюють 6 чоловіків і 4 жінки. По табельним номерам навмання відібрали 7 робітників. Знайти ймовірність того, що серед них опиниться 3 жінки.

B. 0,50

2. На ділянці зрошувального каналу є три автоматичні затвори на водовипусках. Затвори працюють незалежно один від одного. Ймовірність того, що на протязі дня буде відкрито перший водовипуск становить 0,8; другий – 0,6; третій – 0,5. Яка ймовірність того, що на протязі дня буде відкрито тільки один водовипуск ?

B. 0,26 ;

3. На ділянці зрошувального каналу є три автоматичні затвори на водовипусках. Затвори працюють незалежно один від одного. Ймовірність того, що на протязі дня буде відкрито перший водовипуск становить 0,8; другий – 0,6; третій – 0,5. Яка ймовірність того, що на протязі дня буде відкрито тільки два водовипуски ?

B. 0,46

4. На ділянці зрошувального каналу є три автоматичні затвори на водовипусках. Затвори працюють незалежно один від одного. Ймовірність того, що на протязі дня буде відкрито перший водовипуск становить 0,8; другий – 0,6; третій – 0,5. Яка ймовірність того, що на протязі дня; а) будуть відкриті всі три водовипуски; б) будуть закриті всі три водовипуски ?

В. 0,24 ; 0,04

5. На ділянці зрошувального каналу є три автоматичні затвори на водовипусках. Затвори працюють незалежно один від одного. Ймовірність того, що на протязі дня буде відкрито перший водовипуск становить 0,8; другий – 0,6; третій – 0,4. Яка ймовірність того, що на протязі дня буде відкритим навмання вибраний водовипуск?

В. 0,6

6. Два кооперативи виробляють однакові деталі, які після їх одержання на склад були змішані. Ймовірність браку для першого кооперативу 0,2, для другого — 0,6. а) Знайти ймовірність того, що взята навмання деталь буде бракована, якщо І кооператив поставив 80% деталей, а другий 20%. б) Нехай при використанні умови задачі взята навмання деталь виявилась бракованою. Знайти ймовірність того, що вона була виготовлена І кооперативом.

В. 0,28 ; 16/28

7. Два кооперативи виробляють однакові деталі, які після їх одержання на склад були змішані. Ймовірність браку для першого кооперативу 0,2, для другого — 0,4. а) Знайти ймовірність того, що взята навмання деталь буде бракована, якщо І кооператив поставив 70% деталей, а другий 30%. б) Нехай при використанні умови задачі взята навмання деталь виявилась бракованою. Знайти ймовірність того, що вона була виготовлена І кооперативом.

В. 0,26 ; 14/26

8. Два курсанти стріляють по мішені. Ймовірність влучення в мішень для першого курсанта 0,8, для другого — 0,6. а) Знайти ймовірність того, що вибраний навмання курсант влучить у мішень. б) Нехай при використанні умови задачі вибраний навмання курсант влучив у мішень. Знайти ймовірність того, що стріляв І курсант.

В. 0,7 ; 4/7

9. Три студенти вчаться розв'язувати задачі по теорії ймовірностей на застосування формули повної ймовірності і формул Байєса. Ймовірність того, що I студент розв'яже задачу 0,8, для другого ця ймовірність — 0,6 , для третього — 0,4. а) Знайти ймовірність того, що вибраний навмання студент розв'яже задачу. б) Нехай при використанні умови задачі вибраний навмання студент розв'язав задачу. Знайти ймовірність того, що розв'язував II студент.

Відп. 0,6 ; 1/3

10. Монету підкидають 6 разів. Знайти ймовірність того, що герб випав 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 разів.

В. P(0)=1/64 ; P(1)=6/64 ; P(2)=15/64; P(3)=20/64; P(4)=15/64; P(5)=6/64; P(6)=1/64

11. Монету підкидають 4 рази. Знайти ймовірність того, що герб випав 0, 1, 2, 3, 4 разів.

В. P(0)=1/16 ; P(1)=4/16 ; P(2)=6/16; P(3)=4/16; P(4)=1/16

12. Гральний кубик підкидають 4 рази. Знайти ймовірність того, що чмсло 6 випало 0, 1, 2, 3, 4 разів.

В. P(0)=625/1296 ; P(1)=500/1296 ; P(2)=150/1296; P(3)=20/1296; P(4)=1/1296

13. Знайти ймовірність того, що подія *A* відбудеться рівно 25 разів при 100 випробуваннях, якщо ймовірність події *A* в кожному випробуванні стала і дорівнює 0,2.

В. 0,04575

14. Знайти ймовірність того, що подія *A* відбудеться рівно 17 разів при 100 випробуваннях, якщо ймовірність події *A* в кожному випробуванні стала і дорівнює 0,1.

В. 0,0087

15. Знайти ймовірність того, що подія *A* відбудеться не менше 15 і не більше 25 разів при 100 випробуваннях, якщо ймовірність події *A* в кожному випробуванні стала і дорівнює 0,2.

В. 0,788

16. Знайти ймовірність того, що подія A відбудеться не менше 15 і не більше 27 разів при 100 випробуваннях, якщо ймовірність події A в кожному випробуванні стала і дорівнює 0,2.

В. 0,854

17. В кожній партії телевізорів (в партії 100 штук), що їх виготовляє деякий завод, 90 є вищої якості. Знайти ймовірність того, що в даній партії телевізорів вищої якості буде не менше 85 і не більше 94.

В. 0,861

18. Випадкова величина X задана функцією розподілу:

$$F(x)=\begin{cases} 0, \text{при } x \leqslant 3; \\ k(x-3)^2, \text{при } 3 < x \leqslant 8; \\ 1, \text{при } x > 8. \end{cases}$$

Знайти коефіцієнт k.

В. 1/25

19. Випадкова величина X задана функцією розподілу:

$$F(x)=\begin{cases} 0, \text{при } x \leqslant 1; \\ \frac{1}{25}\cdot(x-1)^2, \text{при } 1 < x \leqslant 6; \\ 1, \text{при } x > 6. \end{cases}$$

Знайти ймовірність попадання в інтервал (2;5).

В. 0,60

20. Випадкова величина X задана функцією розподілу:

$$F(x)=\begin{cases} 0, \text{при } x \leqslant 1; \\ k(x-1)^2, \text{при } 1 < x \leqslant 9; \\ 1, \text{при } x > 9. \end{cases}$$

Знайти коефіцієнт k.

В. 1/64

21. Випадкова величина X задана функцією розподілу:

$$F(x)=\begin{cases} 0,\, при\; x \leqslant 2; \\ \frac{1}{36}(x-2)^2,\, при\; 2 < x \leqslant 8; \\ 1,\, при\; x > 8. \end{cases}$$

Знайти ймовірність попадання в інтервал (5;10).
B. 0,75

22. Випадкова величина X задана функцією розподілу:

$$F(x)=\begin{cases} 0,\, при\; x \leqslant 2; \\ \frac{1}{36}(x-2)^2,\, при\; 2 < x \leqslant 8; \\ 1,\, при\; x > 8. \end{cases}$$

Знайти математичне сподівання та дисперсію цієї величини.
B. $M(X)=6$; $D(X)=2$.

23. Математичне сподівання і середнє квадратичне відхилення нормально розподіленої випадкової величини X відповідно рівні 30 і 10. Знайти ймовірність того, що вона прийме значення, яке буде належати інтервалу (10;50).

B. 0,954

24. Математичне сподівання і середнє квадратичне відхилення нормально розподіленої випадкової величини X відповідно рівні 8 і 2. Знайти $P(4 < X < 14)$.

B. 0,976

25. Випадкова величина X розподілена по нормальному закону. Середнє квадратичне відхилення цієї величини дорівнює 0,8. Знайти

ймовірність того, що відхилення випадкової величини від її математичного сподівання по модулю менше 0,6 .

В. 0,546

26. Випадкова величина X розподілена по нормальному закону. Середнє квадратичне відхилення цієї величини дорівнює 2. Знайти ймовірність того, що відхилення випадкової величини від її математичного сподівання по модулю менше 3 .

В. 0,866

27. Випадкова величина X розподілена по нормальному закону. Середнє квадратичне відхилення цієї величини дорівнює 20. Знайти ймовірність того, що відхилення випадкової величини від її математичного сподівання по модулю менше 10.

В. 0,384

Довідковий матеріал [4]

Таблиця значень функції $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}$. При $x\geqslant 3{,}7$ $\varphi(x)=0.$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,399	399	399	399	399	399	398	398	398	398
0,1	397	396	396	396	395	394	394	393	392	392
0,2	391	390	389	388	388	387	386	385	384	382
0,3	381	380	379	378	376	375	374	373	371	370
0,4	368	367	365	364	362	361	359	357	356	354
0,5	352	350	348	347	345	343	341	339	337	335
0,6	333	331	329	327	325	323	321	319	317	314
0,7	312	310	308	306	303	301	299	297	294	292
0,8	290	287	285	283	280	278	276	273	271	268
0,9	266	264	261	259	257	254	252	249	247	244
1,0	242	240	237	235	232	230	228	225	223	220
1,1	218	216	213	211	208	206	204	201	199	197
1,2	194	192	190	187	185	183	180	178	176	174
1,3	171	169	167	165	163	160	158	156	154	152
1,4	150	148	146	144	142	139	137	135	133	132
1,5	130	128	126	124	122	120	118	116	115	113
1,6	111	109	107	106	104	102	101	099	097	096
1,7	094	093	091	089	088	086	085	083	082	080
1,8	079	078	076	075	073	072	071	069	068	067
1,9	066	064	063	062	061	060	058	057	056	055
2,0	054	053	052	051	050	049	048	047	046	045
2,1	044	043	042	041	040	040	039	038	037	036
2,2	036	035	034	033	033	032	031	030	030	029
2,3	028	028	027	026	026	025	025	024	024	023
2,4	022	022	021	021	020	020	019	019	018	018
2,5	018	017	017	016	016	015	015	015	014	014
2,6	014	013	013	013	012	012	012	011	011	011
2,7	010	010	010	010	009	009	009	009	008	008
2,8	008	008	007	007	007	007	007	007	006	006
2,9	006	006	006	006	005	005	005	005	005	005
3,0	004	004	004	004	004	004	004	004	004	004
3,1	003	003	003	003	003	003	003	003	003	003
3,2	002	002	002	002	002	002	002	002	002	002
3,3	002	002	002	002	002	002	001	001	001	001
3,4 -3,6	001	001	001	001	001	001	001	001	001	001

Таблиця значень $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{x} e^{\frac{-t^2}{2}}\,dt.$ При $x \geqslant 3{,}3$ $\Phi(x)=0{,}5$.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,000	004	008	012	016	020	024	028	032	036
0,1	040	044	048	052	056	060	064	068	071	075
0,2	079	079	087	091	095	099	103	106	110	114
0,3	118	118	126	129	133	137	141	144	148	152
0,4	155	155	162	166	170	174	177	181	184	188
0,5	192	195	199	202	205	209	212	216	219	222
0,6	226	229	232	236	239	242	245	249	252	255
0,7	258	261	264	267	270	273	276	279	282	285
0,8	288	291	294	297	300	302	305	308	311	313
0,9	316	319	321	324	326	329	332	334	337	339
1,0	341	344	346	349	351	353	355	358	360	362
1,1	364	367	369	371	373	375	377	379	381	383
1,2	385	387	389	391	393	394	396	398	400	402
1,3	403	405	407	408	410	412	413	415	416	418
1,4	419	421	422	424	425	427	428	429	431	432
1,5	433	435	436	437	438	439	441	442	442	444
1,6	445	446	447	448	450	451	452	453	454	455
1,7	455	456	457	458	459	460	461	462	463	463
1,8	464	465	466	466	467	468	469	469	470	471
1,9	471	472	473	473	474	474	475	476	476	472
2,0	477	478	478	479	480	480	481	481	481	481
2,1	482	483	483	484	484	485	486	486	485	485
2,2	486	486	487	488	488	488	488	489	489	489
2,3	489	489	490	490	491	491	491	491	491	492
2,4	492	492	492	493	493	493	493	493	493	494
2,5	494	494	494	495	495	495	495	495	495	495
2,6	495	495	496	496	496	496	496	496	496	496
2,7	497	497	497	497	497	497	497	497	497	497
2,8	497	498	498	498	498	498	498	498	498	498
2,9	498	498	498	498	498	499	499	499	499	499
3,0	499	499	499	499	499	499	499	499	499	499
3,1	499	499	499	499	499	499	499	499	499	499
3,2	499	499	499	499	499	499	499	499	499	499

13. Рекомендована література

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. – М.:Наука., 1985. Т.1.2.
2. Задачи и упражнения по математическому анализу /Под редакцией Демидовича Б.П./ .-М.:Наука, 1978.
3. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. -М.: Наука, 1985.
4. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. –М.: Высшая школа, 1979.
5. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. -–М.: Высшая школа, 1980. Ч.1,2
6. Брушковський О.Л. Вища математика. Частина IV. Ряди. Основи теорії ймовірностей та математичної статистики: [навчальний посібник] /О.Л. Брушковський . – Рівне: НУВГП. 2010. – 245 с.
7. Брушковський О.Л. Вища математика. Для студентів І курсу заочної форми навчання напрямів підготовки “Економіка підприємства”, “Облік і аудит”, “Фінанси і кредит”: [навчальний посібник] / О.Л. Брушковський., І.В. Дубчак. – Рівне, НУВГП, 2010. 144 с.
8. Мізюк В.Г. Вища математика: [навчальний посібник] / В.Г.Мізюк. – Рівне : НУВГП, 2008. – 245 с.