

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет водного господарства та
природокористування
Рівненський державний гуманітарний університет

О. М. Гладка, І. М. Карпович, А. М. Сінчук

МОДЕЛІ ЕКОНОМІЧНОЇ ДИНАМІКИ для фахівців з інформаційних технологій

Навчальний посібник

Рівне – 2019

УДК 004(075.8)

ББК 32.97я7

Г52

*Затверджено вченою радою Рівненського державного
гуманітарного університету
(Протокол від 27.11.2018 р. № 10)*

Рецензенти:

Турбал Ю.В., доктор технічних наук, доцент, професор кафедри прикладної математики НУВГП;

Осадча О.О., доктор економічних наук, доцент, доцент кафедри обліку і аудиту НУВГП;

Барановський С.В., кандидат технічних наук, доцент, завідувач кафедри економічної кібернетики РДГУ.

Гладка О. М., Карпович І. М., Сінчук А. М.

Г 52 Моделі економічної динаміки для фахівців з інформаційних технологій: Навчальний посібник / О. М. Гладка, І. М. Карпович, А. М. Сінчук. – Рівне: РДГУ, 2019. – 158 с.

Посібник містить лекційний матеріал, а також завдання та методичні вказівки для виконання лабораторних і самостійних робіт з дисципліни “Моделі економічної динаміки”, що читається майбутнім фахівцям з інформаційних технологій. Мета курсу полягає у формуванні системи знань з методології, методики та інструментарію побудови математичних моделей динаміки розвитку економічних процесів, їх аналізу та використання; ознайомлення студентів з найбільш типовими моделями та забезпечення оволодіння навичками практичної роботи з ними.

Навчальний посібник буде корисним здобувачам вищої освіти, аспірантам та викладачам, а також фахівцям, котрі у своїх дослідженнях застосовують методи моделювання економічної динаміки.

УДК 004(075.8)

ББК 32.97я7

Г52

© Гладка О.М., Карпович І.М., Сінчук А.М., 2019

© Рівненський державний гуманітарний університет, 2019

© Національний університет водного господарства та природокористування, 2019

ЗМІСТ

Вступ	5
1. Принципи моделювання економічних процесів	6
1.1 Економіка як об'єкт математичного моделювання	6
1.2 Особливості та принципи економіко-математичного моделювання	9
1.3 Класифікація моделей, що використовуються в економіці	12
1.4 Етапи побудови економіко-математичної моделі	13
1.5 Формалізація опису динамічних систем	15
1.6 Історичні тенденції математичної економіки	17
2. Модель економічного кругообігу. Загальні умови макроекономічної рівноваги	22
3. Модель динамічної рівноваги економіки. Модель Леонтьєва	29
3.1 Метод економічного аналізу «витрати-виробництво». Динамічна модель Леонтьєва	29
3.2 Динаміка замкнутої виробничої системи	32
3.3 Міжгалузєва динамічна модель і аналіз пропорцій розширеного відтворення	36
3.4. Узагальнення динамічної моделі Леонтьєва	39
4. Лінійні динамічні моделі. Модель Харрода–Домара	43
4.1 Модель Харрода-Домара: суть та основні припущення	45
4.2 Модель Харрода-Домара для нульового споживання	45
4.3 Співвідношення між гарантованим, природним і фактичним темпами зростання	46
5. Рівновага та стійкість динамічних моделей економіки ...	49
5.1 Поняття рівноваги, стійкості, стабільності та стаціонарності динамічних систем. Стійкість за Ляпуновим	49
5.2 Характер стійкості особливих точок динамічних систем з неперервним часом. Критерії стійкості	51
5.3 Типи особливих точок та їх фазові портрети. Біфуркаційна діаграма	56
5.4. Нестійкість і нелінійність як джерело невизначеності економічних процесів	58
5.5. Якісний аналіз соціально-економічних систем	63
6. Нелінійні динамічні моделі економічних систем. Модель Солоу	67

6.1	Модель Солоу як приклад односекторної моделі економіки. Припущення моделі. Модель Солоу з абсолютними показниками	67
6.2	Модель Солоу з відносними показниками. перехідний режим у моделі Солоу	69
6.3	"Золоте правило" накопичення Солоу. Теорема про магістраль	71
6.4.	Розвиток моделі Солоу	72
7.	Модель трисекторної економіки	75
8.	Стохастичні моделі економічної динаміки	77
8.1	Формалізація стохастичних динамічних моделей	77
8.2	Приклад мультиплікативної стохастичної моделі динаміки фінансового ресурсу	81
9.	Моделі економічних змін та їх аналіз	84
10.	Синергетичний підхід у моделюванні та аналізі економічних процесів	91
10.1	Основні положення синергетики як науки	91
10.2	Суть синергетичного підходу у дослідженні соціально-економічних систем	96
<i>Лабораторні роботи</i>		
1.	Статистичні методи аналізу економічної динаміки	102
2.	Економетричні (кореляційно-регресійні) методи аналізу економічної динаміки	105
3.	Прогнозування економічних показників на основі трендових моделей економічної динаміки	112
4.	Побудова лінійної тригалузевої моделі Леонтьєва	113
5.	Побудова нелінійної моделі Леонтьєва та дослідження траєкторій економічного розвитку	116
6.	Дослідження динамічної економічної системи за допомогою моделі Харрода-Домара	121
7.	Побудова фазових портретів і дослідження поведінки динамічних систем для двох змінних	122
8.	Дослідження динаміки системи та прогнозування її параметрів на основі моделі Солоу	127
ДОДАТОК 1.		134
ДОДАТОК 2.		138
ДОДАТОК 3.		140
СПИСОК ЛІТЕРАТУРНИХ ДЖЕРЕЛ		157

Вступ

Економічна динаміка – розділ економічної науки (математичної економіки), у якому досліджують детерміновану поведінку економічних систем у часі. З кібернетичної точки зору економічні системи є складними динамічними системами. Складність та динамізм економічних систем зумовлені загальним збільшенням обсягів матеріального і нематеріального виробництва; зростанням темпів науково-технічного прогресу та появою нових високопродуктивних технологій; процесами світової інтеграції та кооперації, які ведуть до збільшення різноманітності світової економіки; нестабільністю політичних процесів та іншими чинниками.

Дослідження динаміки поведінки економічних систем дає змогу визначити перспективи їхнього розвитку, виявити можливі резерви, розробити комплекс адаптивних управлінських рішень, які забезпечать ефективне функціонування економічних об'єктів. Економічна статика вивчає допустимі та оптимальні стани економічних систем. Економічна динаміка досліджує процеси, тобто послідовність станів і переходи від одних станів до інших, визначає можливі та оптимальні траєкторії розвитку систем. У рамках статичного підходу передбачається, що ресурсно-технологічні можливості виробника і структура потреб споживача незмінні, в економічній динаміці особлива увага звертається на те, як зміни в часі впливають на взаємодію факторів виробництва та споживання.

Методологічним апаратом економічної динаміки є економіко-математичне та комп'ютерне моделювання, методи математичного аналізу, диференціального та варіаційного числення тощо.

Вивчення дисципліни “Моделі економічної динаміки” майбутніми фахівцями з інформаційних технологій спрямоване на розвиток наукового мислення у здобувачів вищої освіти та набуття практичних навичок роботи з сучасними пакетами прикладних програм і методикою експериментальних досліджень у конкретній предметній галузі. Завдання для самостійної роботи передбачають розробку комп'ютерних програм (програмних застосувань), що реалізують відповідні економіко-математичні моделі, та дають змогу студентам отримати практичний досвід з програмування прикладних задач.

Тема 1. Принципи моделювання економічних процесів

1. Економіка як об'єкт математичного моделювання.
2. Особливості та принципи економіко-математичного моделювання.
3. Класифікація моделей, що використовуються в економіці.
4. Етапи побудови економіко-математичних моделей.
5. Формалізація опису динамічних систем.
6. Історичні тенденції математичної економіки.

1.1 Економіка як об'єкт математичного моделювання

Основне призначення економіки – забезпечення суспільства предметами споживання та послугами, котрі створюють умови для життя та безпеки людини, родини, суспільства, країни. У зв'язку з цим є сенс розглядати, досліджувати та моделювати соціально-економічні системи.

Зазначимо, що під *соціально-економічною системою* розуміють складну ймовірнісну динамічну систему, що охоплює процеси виробництва, обміну, розподілу і споживання матеріальних та інших благ. Соціально-економічні системи належать до класу кібернетичних, тобто керованих, систем.

Економіка складається з елементів – господарських одиниць (підприємств, фірм, банків тощо). Надсистема економіки – природа та суспільство, дві її головні підсистеми – виробнича та фінансово-кредитна.

Основними підходами до моделювання соціально-економічних систем, є синергетичний і системний аналіз економіки як складної нестабільної динамічної системи.

Практичними завданнями економіко-математичного моделювання є: по-перше, аналіз економічних об'єктів і процесів; по-друге, економічне прогнозування, передбачення розвитку економічних процесів; по-третє, вироблення управлінських рішень на всіх рівнях господарської ієрархії управління.

Одним із важливих аспектів у економіко-математичному моделюванні є поняття *адекватності* моделі, тобто відповідності моделі модельованому об'єкту чи процесу. При чому, йдеться не

просто про адекватність, а про відповідність тим властивостям, які вважаються суттєвими для дослідника, відповідають меті дослідження та усталеній системі гіпотез. Зазначимо, що перевірка адекватності економіко-математичних моделей не є простою. Вона обтяжена складністю вимірювання економічних величин. Але без такої перевірки застосування результатів моделювання в аналізі та управлінських рішеннях може не лише виявитися малокорисним, а й призвести до негативних наслідків.

Соціально-економічні системи належать, здебільшого, до складних систем. Цим системам притаманна низка властивостей, які потрібно врахувати в їх моделюванні, зокрема, такі:

- *емерджентність* як прояв у найяскравішій формі властивості цілісності системи, тобто наявність у економічної системи таких властивостей, які не є притаманними жодному з її елементів, котрий розглядається окремо, поза системою. Емерджентність — це результат виникнення між елементами системи так званих синергетичних зв'язків, які забезпечують збільшення загального ефекту до більших обсягів, ніж сума ефектів окремо взятих елементів системи, що діють (функціонують) незалежно. Тому соціально-економічні системи потрібно досліджувати й моделювати зважаючи на синергізм;

- *динамічність* економічних процесів – зміни в часі параметрів і структури економічних систем під впливом як внутрішніх, так і зовнішніх чинників (навколишнього середовища);

- *невизначеність* щодо розвитку економічних явищ (процесів). Економічні явища та процеси мають нелінійний випадковий характер. Невизначеність іманентно притаманна економічним системам, тому для їх вивчення потрібно застосовувати економіко-математичні моделі на базі теорії ймовірностей і математичної статистики, а також на базі теорії нечітких (розпливчастих) множин тощо. Важливим також є розвиток *ризикології* (науки про економічний ризик) тощо;

- *неможливість* ізолювати процеси, які здійснюються в економічних системах, від процесів у навколишньому середовищі, щоб спостерігати та досліджувати їх окремо;

- *активна реакція* на нові чинники, що з'являються. Спроможність соціально-економічних систем до активних не

завжди передбачуваних дій залежно від ставлення суб'єктів управління та системи загалом до цих чинників, способів і методів їх впливу тощо.

Доцільно звернути увагу на такі дві особливості економіки як об'єкта моделювання.

1. В економіці неможливо використовувати моделі подібності, котрі широко застосовуються в техніці. Наприклад, неможливо побудувати копію економічної системи в масштабі 1:1000, і на ній моделювати різні варіанти економічної політики.

2. В економіці можливості локальних економічних експериментів гранично обмежені, оскільки всі її складові тісно взаємопов'язані, а, отже, «чистий» експеримент є практично неможливим.

Враховуючи ці обставини, в економічних дослідженнях доводиться спиратися на власний досвід, досвід інших країн, безпосередні експерименти з усією економікою та на математичне моделювання.

Досвід як інших країн, так і власний, важко переоцінити, але він далеко не завжди, як показав, зокрема, досвід пострадянських країн, може бути використаний в умовах конкретної економічної ситуації без адаптації.

Прямі експерименти з економікою, як свідчить історія, дуже дорого коштують: ми знаємо про колективізацію, індустріалізацію, гіперінфляцію, приватизацію тощо. Разом з тим неможливо безпосередньо передбачити середньо- та довготермінові наслідки окремих рішень. Це можна зробити лише на підставі концептуальних моделей розвитку економіки, що спираються на минулий досвід. У свою чергу концептуальні моделі, власне, і становлять фундамент математичних моделей.

Формування математичних моделей – досить тривалий процес, який потребує знань і праці. Відтак найважливішим (і найважчим) є те, щоб створена модель була достатньо адекватною щодо реальності.

Отже, для напрацювання правильних економічних рішень необхідно аналізувати весь минулий досвід, а також результати, отримані на підставі застосування концептуальних і математичних моделей, що є найбільш адекватними для даної економічної ситуації [2, С. 13-16].

1.2 Особливості та принципи економіко-математичного моделювання

Головна особливість моделювання полягає у тому, що це метод опосередкованого пізнання за допомогою об'єктив-замішувачів. Модель постає як своєрідний інструмент пізнання дослідника або системного аналітика, який ставить його між собою та об'єктом і в такий спосіб вивчає досліджуваний об'єкт. Саме ця особливість моделювання визначає специфічні форми використання абстракцій, аналогій, гіпотез, інших категорій і методів пізнання. Необхідність використання моделювання визначається тим, що багато об'єктів (чи аспектів, які стосуються цих об'єктів) безпосередньо досліджувати або взагалі неможливо, або це вимагає багато часу і коштів.

Загальновизнаними вважаються три **підходи до побудови** математичних моделей.

- Спрощення реальної ситуації. Суттєве спрощення досягається тоді, коли несуттєві властивості початкової емпіричної стадії пізнання досліджуваного об'єкта та його оточення не враховуються. Отже, складна за своєю природою практична ситуація спрощується до ідеалізованого аналога, який піддається математичному описові.
- Побудова простої моделі на підставі певних найхарактерніших особливостей реальної ситуації з наступним послідовним ускладненням такої моделі шляхом охоплення інших чинників аж до отримання «прийнятного» варіанту моделі.
- Введення значної кількості чинників з їх взаємозв'язками і побудова та вивчення моделі засобами імітаційного моделювання.

Системні аналітики зобов'язані керуватися також **принципами** щодо концепції «математична модель» деякого «об'єкта».

Принцип 1. Діалектична пара модель-об'єкт завжди полярна, має два полюси – «модель» і «об'єкт».

Принцип 2. З двох взаємопов'язаних полюсів діалектичної пари модель-об'єкт один є первинним, а інший – похідний від нього.

Принцип 3. Наявності полюса «об'єкт» недостатньо для наявності полюса «модель», наявність полюса «модель» зумовлює необхідність наявності полюса «об'єкт».

Принцип 4. Як «модель» для даного «об'єкта», так і «об'єкт» для даної «моделі» семантично та інтерпретаційно багатозначні: «модель» віддзеркалює властивості не одного, а багатьох «об'єктів», «об'єкт» описується не однією, а багатьма «моделями».

Принцип 5. «Модель» повинна бути адекватною «об'єктові» і відображати з певною точністю основні його риси та властивості залежно від цілей дослідження, наявної інформації, прийнятної системи гіпотез.

Варто зазначити, що на практиці реалізуються три основні **ступені формалізації** (формування математичної моделі): змістовний опис; формалізована схема; математична модель.

Змістовний опис полягає у тому, що на вербальному рівні (мовними засобами) відтворюються дані про природу (сутність) об'єкта, кількісні характеристики явищ (процесів), які спостерігаються, характер взаємодії між складовими елементами, місце та важливість кожного явища в загальному процесі функціонування об'єкта дослідження. На рівні змістовного опису формалізація зводиться до виокремлення множини суттєвих (ключових) чинників, що характеризують об'єкт (згідно з метою дослідження і побудови моделі), його структуру, властивості, співвідношення між складовими частинами. Кожен з виокремлених чинників повинен бути описаний на якісному та кількісному рівнях (інтервал можливих значень, шкала вимірювання тощо). Формою змістовного опису може бути термінологічне формулювання задачі, сукупність числових значень з відповідними коментарями.

Паралельно із змістовним описом (чи дещо пізніше) може формуватися *схема*, яка у вигляді символів, графіків, графів, таблиць зображує перелік та взаємозв'язки між суттєвими чинниками так, щоб надати їм цілісність, котра б у загальних рисах адекватно відтворювала властивості об'єкта дослідження. Закони та закономірності можуть бути замінені описовими виразами, назви – математичними символами, відношення – математичними діями (операторами).

Подальше перетворення змістовного опису та формалізованої схеми в єдину групу математичних символів і співвідношень

завершується побудовою *математичної моделі*. Дія законів і закономірностей «матеріалізується» через правила формальної логіки та логічного виведення у формі рівнянь, нерівностей, співвідношень між математичними символами з точністю до істинності математичних перетворень та відповідності сформульованих гіпотез реальним законам. Така модель є математичною моделлю досліджуваного об'єкта і подібних до нього об'єктів-аналогів.

Існують різні **форми** подання математичної моделі.

Інваріантна форма – подання математичної моделі безвідносно до методів, за допомогою яких може розв'язуватись поставлена задача моделювання.

Алгоритмічна форма – подання математичної моделі у вигляді послідовності дій, які необхідно виконати, щоб при розв'язанні поставленої задачі моделювання перейти від відомих даних до шуканого результату.

Аналітична форма – подання математичної моделі у вигляді формул та співвідношень між математичними виразами, за допомогою яких шукані в задачі моделювання результати визначаються через відомі дані.

Схемна форма – подання математичної моделі у вигляді таблиць даних, діаграм, схем, графів, графіків.

Ієрархічний підхід до формування моделей. Лише у небагатьох випадках буває зручно і виправдано відразу повністю, з урахуванням усіх суттєвих чинників, будувати математичну модель навіть простого об'єкта. Тому природним є підхід, що реалізує принцип «від простого – до складного», коли наступний крок робиться після досить детального вивчення не дуже складної моделі. Отже, виникає ланцюжок (ієрархія) усе більш деталізованих моделей, кожна з яких узагальнює попередні, включаючи їх як частковий випадок.

На практиці, зазвичай, використовують банк моделей і здійснюють адаптацію відомих моделей. Зауважимо, що різні за природою економічні явища можуть мати однаковий математичний опис, хоча економічна інтерпретація моделі та результати розрахунків будуть різними [2, С. 48-49].

1.3 Класифікація моделей, що використовуються в економіці

Математичні моделі, що використовуються в економіці, можна поділити на класи за низкою ознак. В залежності від особливостей об'єкта моделювання та застосованого математичного інструментарію виокремлюють такі моделі: макро- та мікроекономічні, теоретичні та прикладні, статичні та динамічні, детерміновані та стохастичні, оптимізаційні та моделі рівноваги тощо.

Макроекономічні моделі описують економіку загалом, пов'язуючи між собою узагальнені матеріальні та фінансові показники: ВВП, споживання, інвестиції, зайнятість, процентну ставку, кількість грошей тощо.

Мікроекономічні моделі описують взаємодію структурних і функціональних складових економіки або поведінку окремої складової в ринковому середовищі. Завдяки різноманіттю типів економічних елементів і форм їх взаємодії на ринку мікроекономічне моделювання становить основну частину економіко-математичної теорії.

Теоретичні моделі дають змогу вивчати загальні властивості економіки та її характерних елементів і отримувати нові результати на підставі формальних припущень.

За допомогою *прикладних* моделей можна оцінити певні економічні показники, надати їм конкретні значення, виходячи з відповідної статистичної інформації.

У *статичних* моделях описується стан економічного об'єкта в певний момент чи період часу, а *динамічні* моделі вивчають взаємозв'язки економічних змінних у часі. Змінні, що вивчаються в динаміці, у статичних моделях мають фіксоване значення. Однак динамічна модель не зводиться до простої суми статичних моделей, а описує взаємодію сил, що рухають економіку.

Детерміновані моделі передбачають жорсткі функціональні зв'язки між змінними моделі, а *стохастичні* — припускають наявність випадкових впливів на досліджувані показники.

В моделюванні ринкової економіки важливе місце належить моделям *рівноваги*. Вони описують такий стан економіки, коли всі сили, що намагаються вивести її з рівноваги, мають нульову сумарну дію.

Оптимізаційні моделі найчастіше застосовують на мікрорівні: вони дають змогу визначати найкращі рішення в умовах обмежених можливостей.

В залежності від способу відображення співвідношень між зовнішніми умовами, внутрішніми параметрами і шуканими величинами економіко-математичні моделі поділяють на *структурні* і *функціональні*.

У дослідженнях на макрорівні найчастіше використовуються структурні моделі, оскільки для планування та управління велике значення мають взаємозв'язки підсистем. *Структурні* моделі відображають внутрішню організацію об'єкта дослідження, його складові частини, внутрішні параметри, їхні зв'язки із входами і виходами і т.п. Типовими структурними моделями є моделі міжгалузевих зв'язків.

Функціональні моделі широко застосовуються в економічному регулюванні, коли на поведінку об'єкта («вихід») впливають, змінюючи «вхід». Прикладом може бути модель поведінки споживачів за умов товарно-грошових відносин [2, С. 66].

1.4 Етапи побудови економіко-математичних моделей

Побудова економіко-математичних моделей, у загальному випадку, складається з наступних етапів.

1. Постановка економічної проблеми та її якісний аналіз.

На цьому етапі потрібно сформулювати сутність проблеми, визначити передумови й висловити припущення. Необхідно виокремити найважливіші властивості об'єкта моделювання, вивчити його структуру, дослідити взаємозв'язки між його елементами, а також, хоча б попередньо, сформулювати гіпотези, що пояснюють поведінку і розвиток об'єкта (динаміку руху), дослідити його зв'язки із зовнішнім середовищем тощо.

2. Побудова математичної моделі. Цей етап полягає у формалізації економічної моделі, тобто поданні її у вигляді конкретних математичних залежностей (функцій, рівнянь, нерівностей тощо). Процес побудови моделі складається з кількох стадій. Спочатку визначають тип економіко-математичної моделі, вивчають можливості її застосування у цьому конкретному

випадку, уточнюють перелік змінних та параметрів, форми зв'язку між ними. Для складних об'єктів доцільно будувати кілька різноаспектних моделей.

3. Математичний аналіз моделі. На цьому етапі суто математичними прийомами досліджують загальні властивості моделей та розв'язків. На аналітичному етапі з'ясовують кількість розв'язків (єдиний чи не єдиний), визначають змінні та параметри, які можуть входити до розв'язку, а також межі та тенденції їх зміни. Однак, моделі складних економічних об'єктів дуже погано піддаються аналітичному дослідженню. У таких випадках переходять до числових методів дослідження.

4. Підготовка вхідної інформації. В економічних задачах це, зазвичай, найбільш трудомісткий етап моделювання, оскільки тут замало самого лише пасивного збору даних. В процесі системного економіко-математичного моделювання результати функціонування одних моделей виступають вхідною інформацією для інших.

5. Числове (комп'ютерне) моделювання. Цей етап передбачає розробку алгоритмів числового розв'язання задачі, розробку комп'ютерних програм та безпосереднє виконання розрахунків.

6. Аналіз числових результатів та їх застосування. На цьому етапі передусім з'ясовується найважливіше питання щодо правильності і повноти результатів моделювання та можливості їх практичного застосування, а також досліджуються можливі напрямки подальшого вдосконалення моделі. Спершу перевіряють адекватність моделі за тими властивостями, які були визначені як найсуттєвіші. Виконують верифікацію і валідацію моделі, оскільки головна мета моделювання полягає в розв'язуванні практичних задач (аналіз економічних об'єктів, економічне прогнозування, вироблення управлінських рішень тощо).

Нагадаємо, що *верифікація* моделі – це перевірка правильності структури (логіки) моделі. *Валідація* моделі – перевірка відповідності здобутих у результаті моделювання даних реальному процесу в економіці. [2, С. 67]

1.5 Формалізація опису динамічних систем

1.5.1 Формальне визначення динамічної системи

Відомі вчені П. Самуельсон та В. Фріск дають таке означення динамічної системи: "...систему називають динамічною, якщо її поведінка в часі визначена функціональними рівняннями, в яких змінні у різні моменти часу включені у явному вигляді". Іншими словами, економічна система динамічна, якщо всі значення змінних, що описують її стан, упорядковані в часі. Методи економічної динаміки передбачають, що закономірності поведінки системи, зумовлені дією внутрішніх та зовнішніх чинників, є детермінованими.

Однією з найважливіших наукових проблем є розв'язання задачі прогнозування поведінки досліджуваного об'єкта в часі та просторі на основі певних знань про його початковий стан. Ця задача зводиться до знаходження деякого закону, який дозволяє за наявною інформацією про об'єкт у початковий момент часу t_0 у точці x_0 визначити його майбутнє у будь-який момент часу $t > t_0$. Залежно від ступеня складності об'єкта цей закон може бути детермінованим або ймовірнісним, може описувати еволюцію об'єкта тільки в часі, тільки в просторі або просторово-часову еволюцію. В основу детермінованого опису динамічних систем покладено судження про те, що вся майбутня поведінка об'єкта однозначно визначена його станом у початковий момент часу.

Станом (або вектором стану) об'єкта називають сукупність N величин

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_N),$$

де N – розмірність опису.

Величини x_i ($i=1, \dots, N$) називаються *динамічними змінними*.

В загальному випадку розмірність опису може бути нескінченною величиною.

Оператор еволюції Φ_t дозволяє за початковим станом $x(t_0)$ визначити стан об'єкта в будь-який наступний момент часу t_0+t :

$$x(t_0+t) = \Phi_t(x(t_0)).$$

Математично оператор еволюції може бути заданий диференціальними або різницевиими рівняннями, дискретними відображеннями, матрицями, графами, марківськими ланцюгами

тощо. Головне – забезпечення однозначності прогнозу. В економіці найчастіше використовують моделі, описані за допомогою диференціальних і різницевих рівнянь.

Отже, **динамічна система** – це математична еволюційна модель, для опису якої необхідно:

а) визначити початковий стан об'єкта $x(t_0)$;

б) задати оператор еволюції Φ_t , який дозволяє за початковим станом об'єкта однозначно визначати майбутні стани;

в) визначити змінні та параметри системи.

Динамічні змінні – це величини x_i ($i=1, 2, \dots, N$), що утворюють вектор стану $x=(x_1, x_2, \dots, x_N)$. Величини a_1, a_2, \dots , які можуть підтримуватися постійними, а можуть цілеспрямовано регулюватися, називають *параметрами*. Параметри – це, здебільшого, коефіцієнти у рівняннях еволюції. Сукупність всіх параметрів системи називають вектором параметрів. Розподіл величин, що характеризують систему, на змінні та параметри обумовлений метою моделювання.

1.5.2 Формальні простори

Однією з важливих можливостей динамічного моделювання є наочне подання інформації, особливо, у випадку малої розмірності системи N і малої кількості параметрів. Для цього використовують формальні простори: простір станів (фазовий простір), простір параметрів, а також різноманітні їх гібридні варіанти. На осях координат формального простору відкладають або значення динамічних змінних, або значення параметрів, або на одних – параметри, на інших – змінні.

Стану $x(t)$ у деякий момент часу у фазовому просторі відповідає точка з координатами $x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)$ (фазові координати) – точка стану, яка відображає миттєвий стан. Простір усіх можливих станів системи називається **фазовим простором**. В процесі еволюції точка стану протягом деякого часу зсувається вздовж деякої лінії – **фазової траєкторії**. Отже, фазова траєкторія – ілюстрація переходу системи з одного стану в інший у фазовому просторі. У самій фазовій траєкторії інформація про момент часу, коли точка опиняється в тому чи іншому місці, відсутня. Фазові траєкторії ніколи не перетинаються. Перетин означає, що двом різним початковим умовам відповідає один розв'язок, а це

суперечить вимозі детермінованості моделі. Сукупність траєкторій системи, які відповідають різним (всім можливим) її початковим станам, називаються **фазовим портретом системи**.

1.5.3 Режими поведінки динамічної системи

Поведінку динамічної системи задають набором правил (алгоритмом), оскільки динамічна система – це модель деякої реальної системи, адже для будь-якої реальної системи характерні флуктації (зміни, коливання).

Розрізняють такі **режими поведінки** динамічних систем:

- **рівноважний** (стан системи не змінюється в часі; у просторі станів – рівноважні стани зображуються точками; ці точки називаються особливими точками);
- **періодичний** або **коливальний** (через рівні проміжки часу система опиняється в одних і тих же станах);
- **перехідний** (режим руху системи з деякого початкового стану до сталого стану – рівноважного або коливального; перехідний режим виникає під впливом зовнішнього збурення або внаслідок зміни внутрішніх властивостей; у системах з неперервним часом розрізняють монотонний і коливальний перехідні процеси);
- **хаотичний** [16, С. 10-12].

1.6 Історичні тенденції математичної економіки

Схематично можна виділити дві основні лінії розвитку математичних методів аналізу економічних систем – це загальна економічна рівновага і модель розширеного відтворення.

Загальна економічна рівновага. Засновниками цього напрямку є Ж.Б. Сей і А. Курно. Сей розглядав зв'язок процесів виробництва, розподілу і обміну в ринковій економіці. Він вважав, що в процесі виробництва витрачаються праця L , капітал K , земля Z і виробляються споживчі вартості-корисності.

Вартість товару визначається витратами виробництва і корисністю продукту. Вартість установлюється такою, щоб попит врівноважувався пропозицією товару. Ж.Б. Сей сформулював закон ринку: **процес обміну на ринку автоматично приводиться до рівноваги, тому сукупний попит на товар завжди дорівнює пропозиції товару**. Якщо закон Сея є правильним, то вивчення саме стану рівноваги на ринку має важливе значення.

Людині, як і системі, в загальному випадку притаманне прагнення до стабільності, яке формалізується в теорії динамічних економічних систем за допомогою поняття рівноваги. Рівновага – це стан системи, в якому параметри, що досліджуються, залишаються незмінними у часі.

Моделі стану рівноваги дають спрощену схему картини рівноважного світу ринкової економіки, проте вони допомагають точніше зрозуміти зв'язки економічних показників і тенденцій структурних зрушень.

Отже, модель ринкової рівноваги містить опис сукупного попиту та сукупної пропозиції товару на ринку. Функція пропозиції будується на основі моделі виробництва.

Розглянемо деяку технологію, що перетворює чинники виробництва в продукт. Позначимо через x_1, x_2, \dots, x_n кількість використаних чинників, а y – величину випуску за одиницю часу. Будемо вважати, що перетворення задається багатовимірною функцією у вигляді $y = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

За змістом, функція $y = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ визначена тільки при $x_i > 0$, $i = 1, \dots, n$ і набуває невід'ємних значень.

Частинна похідна $\frac{\partial F}{\partial x_i} > 0$ показує, яку добавку до випуску

дає використання додаткової одиниці i -го чинника за інших однакових умов, і називається **граничною продуктивністю i -го чинника**.

Модель виробництва ґрунтується на аксіомі спадної граничної продуктивності Дж. Б. Кларка: за інших рівних умов гранична продуктивність i -го чинника спадає із збільшенням кількості цього чинника у виробництві.

З аксіоми спадної граничної продуктивності випливає, що $\frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2} < 0$, $i = 1, \dots, n$. Отже, функція $y = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$

невід'ємна, монотонно зростаюча, увігнута. В математичній економіці вона називається **виробничою функцією**.

Функція попиту будується на підставі теорії **граничної корисності**, розробленої австрійською школою політичної економії.

Відповідно до цієї теорії споживач має апіорне представлення про корисність продуктів і оцінює споживчу вартість набору продуктів у кількостях y_1, y_2, \dots, y_n функцією корисності $U(y_1, \dots, y_n)$. Оскільки корисність має економічний зміст, то $U(y_1, \dots, y_n) > 0$.

Частинна похідна $\frac{\partial U}{\partial y_i}$ показує, наскільки зросте корисність набору

y_1, y_2, \dots, y_n , якщо додати одиницю i -го продукту. Природно вважати, що $\frac{\partial U}{\partial y_i} > 0$, $i = 1, \dots, n$. Похідна $\frac{\partial U}{\partial y_i}$ називається

граничною корисністю одиниці i -го продукту в наборі y_1, \dots, y_n .

Теорія споживчого попиту ґрунтується на аксіомі спадної граничної корисності: гранична корисність додаткової одиниці i -го продукту спадає зі збільшенням кількості його в наборі за інших

рівних умов. Отже, $\frac{\partial^2 U}{\partial y_i^2} < 0$, $i = 1, \dots, n$. Функція корисності

$U(y_1, \dots, y_n)$ невід'ємна, монотонно зростаюча, увігнута.

Функція пропозиції виробника будується на підставі аксіом про максимізацію прибутку виробниками, а функція попиту – на підставі аксіоми про максимізацію корисності при бюджетному обмеженні споживачів.

Математична модель об'єкта, що досліджується, зазвичай, містить в собі дві групи елементів: відомі до моменту побудови моделі, **екзогенні** (визначені поза моделлю) параметри і невідомі – **ендогенні** (обумовлені усередині моделі) параметри, які треба визначити з аналізу (розв'язання) моделі.

Побудувати математичну модель функціонування деякої системи означає відшукати або постулювати оператор (функцію), що зв'яже невідомі і відомі параметри моделі.

Як правило, у макроекономічних моделях як екзогенні параметри задаються технологія виробництва у вигляді виробничої функції і характер поведінки економічних суб'єктів на кожному з ринків у вигляді їхніх функцій попиту та пропозиції. Як ендогенні показники, які одержуються з аналізу моделі, виступають величина реального національного доходу, рівень зайнятості, ставка реальної

заробітної плати, реальна ставка відсотка і рівень цін. Особливий інтерес представляє такий вектор ендogenous величин, при якому економіка перебуває в стані загальної рівноваги.

Загальна економічна рівновага – це стан, при якому обсяг виробництва і пропорції обміну склалися таким чином, що на всіх ринках одночасно досягнуто рівність між попитом та пропозицією і при цьому жоден з учасників ринкових угод не зацікавлений змінювати свій обсяг покупок або продажів.

Визначити стан загальної економічної рівноваги – значить з'ясувати, при яких умовах всі учасники ринкового господарства зможуть реалізувати свої цілі. Досягнення загальної економічної рівноваги не означає, що тепер кожен учасник ринкового господарства задоволений своїм положенням: рівновага просто констатує, що за рахунок зміни обсягу і структури покупок або продажів ніхто не зможе поліпшити свій добробут у сформованих умовах.

Загальна економічна рівновага не є типовим станом ринкової економіки, тому що плани суверенних суб'єктів, які розробляються незалежно один від одного, лише випадково можуть виявитися взаємно узгодженими. Однак поведінка суб'єктів у ринковому господарстві визначається їхнім бажанням досягти рівноваги.

Для розуміння специфіки поточної господарської кон'юнктури і прийняття рішень про заходи економічної політики важливо виявити, чи є економічна рівновага стійкою або не стійкою. Якщо у відповідь на екзогенний імпульс, що порушує рівновагу, система сама під впливом внутрішніх сил повертається у рівноважний стан, то рівновага називається **стійкою (стабільною)**. Економічна рівновага називається **нестійкою**, якщо після екзогенного імпульсу вона самостійно не відновлюється. Тому поряд з визначенням умов встановлення загальної економічної рівноваги необхідно досліджувати характер рівноваги.

У залежності від того, якою мірою при дослідженні економічних явищ враховується час, розрізняють три види аналізу: **статичний, порівняльний статичний і динамічний**.

При **статичному аналізі** визначаються значення ендogenous параметрів на деякий момент часу. Якщо модель дозволяє визначити значення ендogenous параметрів у різні моменти часу, але при цьому не описується процес переходу від одного

рівноважного стану до іншого, то це модель **порівняльної статистики**. Процес переходу економіки з одного стану в інший досліджується в ході **динамічного аналізу**, при якому екзогенні та ендогенні змінні розглядаються як функції від часу.

В рамках динамічного аналізу з'ясовуються також причини можливого неповернення економіки в рівноважний стан після екзогенного шоку (поштовху).

Через взаємозв'язок всіх ендогенних макроекономічних параметрів їхні рівноважні значення, здебільшого, можна визначити тільки спільно на основі розв'язання системи рівнянь, що описує взаємодію макроекономічних суб'єктів одночасно на всіх макроекономічних ринках.

Точка рівноваги – точка, потрапивши в яку траєкторія розвитку динамічної системи вже не може її залишити без додаткових зовнішніх впливів. Аналогічним чином можна сказати, що, якщо траєкторія починається в точці рівноваги, то без зовнішнього поштовху траєкторія не залишить цю точку.

Модель розширеного відтворення. Кене розглядав процес суспільного відтворення в цілому. Він вивчав рух різних частин суспільного продукту в процесі відтворення, виписуючи систему вартісних балансів частин суспільно продукту. На основі досліджень Кене згодом були сформульовані умови розширеного відтворення. Ці ідеї були розвинуті далі В. В. Леонтьєвим у моделі «витрати-випуск» (input-output analysis). Модель економічної системи ним подано як систему лінійних балансових співвідношень виробництва і розподілу продуктів у процесі розширеного відтворення.

Отже, у теорії економічної рівноваги описані механізми ринкового регулювання виробництва і розподілу продуктів у конкретній формі ринкових механізмів, однак не розглядаються дія ринкових механізмів і процес еволюції економічної системи. У балансних моделях відтворення описані загальні співвідношення різних частин суспільного продукту в процесах еволюції економічної системи, але не описані механізми економічного регулювання, що могли б замкнути балансів співвідношення.

■ Сучасна математична економіка схрещуванням цих ліній одержала гібрид – теорію економічного зростання [21, С. 10-13].

Тема 2. Модель економічного кругообігу. Загальні умови макроекономічної рівноваги

В основу макроекономічного аналізу закладена найпростіша модель кругових потоків (або модель кругообігу доходів і витрат). У своїй елементарній формі ця модель містить у собі тільки дві категорії економічних агентів – домашні господарства та фірми – і не припускає державного втручання в економіку, а також яких-небудь зв'язків із зовнішнім світом (рис. 1).

Із схеми видно, що економіка є замкненою системою, в якій доходи одних економічних агентів є витратами інших:

- споживчі витрати домогосподарств на придбання товарів є доходами фірм від реалізації готової продукції;
- витрати фірм на оплату ресурсів є доходами домогосподарств (заробітна плата, рента та інші види доходів).

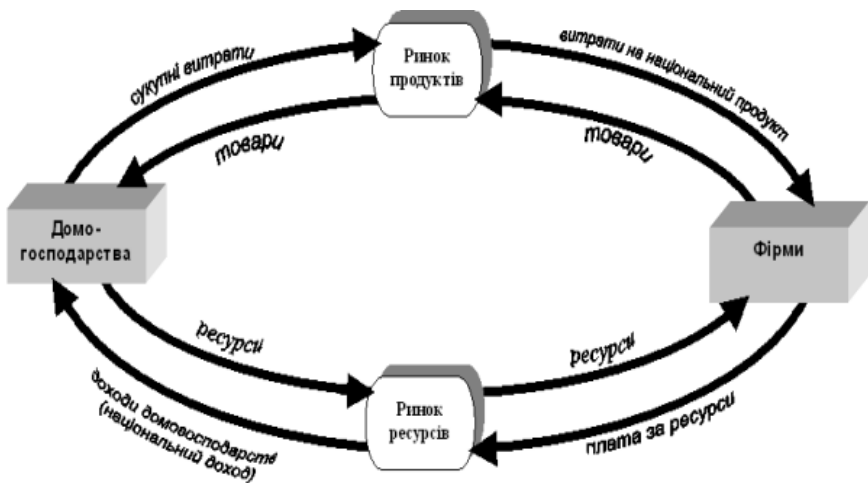


Рис. 1. Двосекторна модель кругообігу продуктів і доходів

Реальний («ресурси–товари») та грошовий («витрати–доходи») потоки циркулюють одночасно у протилежних напрямках і нескінченно повторюються.

Основним висновком із моделі є рівність між сумарною величиною продажів фірм та сумарною величиною доходів домогосподарств. Це означає, що для закритої економіки (тобто без

будь-яких зв'язків із зовнішнім світом), без державного втручання в економіку величина загального обсягу виробництва у грошовому вимірюванні дорівнює сумарній величині грошових доходів домогосподарств. При цьому також справедливою є рівність доходів (Y) і сукупних витрат (у даній моделі це витрати на поточне споживання – C), тобто $Y = C$.

Змінні *запасу* можуть бути виміряні тільки у певний момент часу і характеризують стан об'єкта дослідження на певну дату – початок або кінець року тощо. Прикладами запасу можуть служити державний борг, обсяг капіталу в економіці, загальна кількість безробітних тощо.

Змінні *поток* вимірюються за одиницю часу (на місяць, у квартал, у рік тощо) і характеризують власне “плин” економічних процесів у часі: розмір споживчих витрат за рік, обсяг інвестицій за рік, число тих, хто втратили роботу протягом кварталу і т.д.

Потоки викликають зміни в запасах: накопичення бюджетних дефіцитів за ряд років призводить до збільшення державного боргу; зміна запасу капіталу наприкінці поточного року в порівнянні з його розміром на кінець минулого року може бути подана як потік чистих інвестицій за рік тощо.

В основі вихідної макроекономічної моделі кругових потоків лежить взаємозв'язок запасів і потоків, що передбачає їх аналіз та вимірювання в часі.

Поняття “*потік*” характеризує економічний процес, який відбувається неперервно і вимірюється в одиницях за певний період часу. В моделі кругообігу ми розглядали потоки продукції, витрат, доходів.

Поняття “*запас*” – це величина, яку використовують для вимірювання показника у конкретний момент часу, на певну дату.

Для вимірювання запасу і потоку застосовуються різні одиниці виміру. Так, скажімо, запас може вимірюватися у гривнях, \$, літрах, а потік – в \$/год., грн./рік, л/сек.

В економіці існує певний взаємозв'язок між показниками запасу і потоку:

- запас дорівнює накопиченим за певний період потокам;
- потік дорівнює різниці між запасами на початок та кінець періоду.

Перша з них – “Чисті податки” – поєднує державу з домогосподарствами. Друга – “Державні закупівлі” – поєднує державу і ринок продуктів. І, нарешті, третя – “Державні позики” – направлена від фінансових ринків до державного сектора, оскільки дефіцит державного бюджету має покриватися за рахунок позик на фінансових ринках. Найчастіше ці позики здійснюються шляхом продажу державних облігацій та інших цінних паперів як безпосередньо домогосподарствам, так і фінансовим посередникам.

У тих випадках, коли утворюється надлишок державного бюджету, тобто коли чисті податки перевищують державні закупівлі $T > G$, стрілка на рис. 2. має бути направлена в протилежному напрямку. Держава сплачує борги за здійсненими в минулому позиками швидше, ніж отримує нові, створюючи тим самим чистий притік грошових коштів на фінансові ринки.

Введення державного сектора в круговий потік доходів і продуктів не порушує рівності національного доходу та національного продукту. Це пояснюється тим, що:

1. Грошовий дохід використовується на споживання товарів і послуг (C), чисті податки (T), які надходять у розпорядження уряду, і заощадження (S), які потрапляють на фінансові ринки. Тоді, з точки зору національного доходу, справедливим є рівняння: $Y = C + T + S$.

2. Існує три види витрат на товари і послуги: споживчі витрати домогосподарств (C), інвестиційні витрати фірм (I) та державні закупівлі товарів і послуг (G). Тобто, з точки зору національного продукту (витрат), можна записати: $Y = C + I + G$.

Відкрита економіка – це економічна система, яка пов'язана з іншими країнами світу механізмами експорту, імпорту і фінансових операцій.

Оскільки в моделі на рис. 3. зображено тільки грошові потоки (а не реальні), то:

- експорт (X) як потік грошових платежів, а не товарів і послуг, зображено стрілкою, що направлена всередину системи, тобто, на внутрішні ринки продуктів;
- платежі за імпорт (M) зображено стрілкою, що направлена із внутрішньої національної економіки за кордон (імпортні товари і послуги купуються як домогосподарствами, так і фірмами та

об'єктами державного сектора економіки, проте з метою спрощення на рис. 3 зображено лише одну, найбільшу за обсягом категорію імпорту – імпорт споживчих товарів);

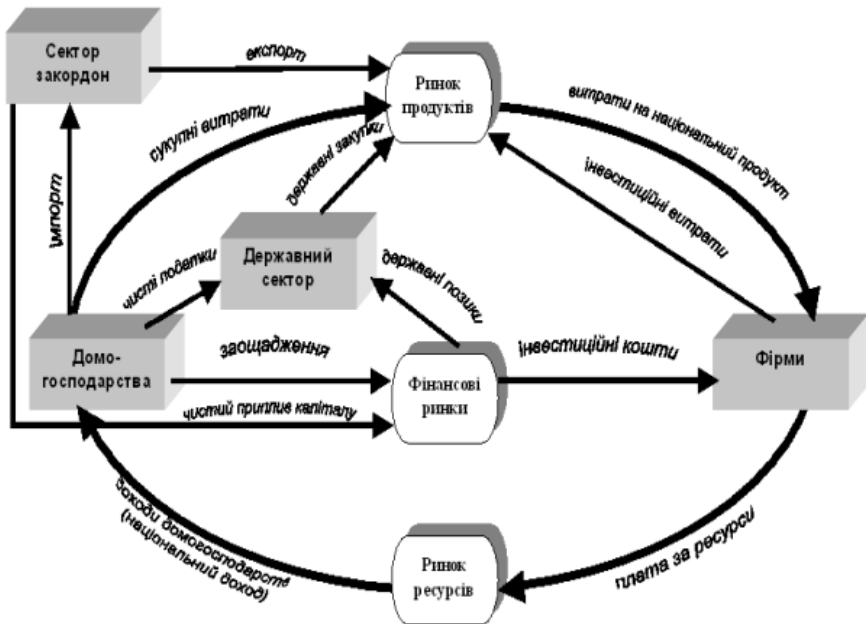


Рис. 3. Модель кругообігу для відкритої економіки

- різниця між величиною грошових надходжень від експорту (X) і величиною грошових платежів за імпорт (M) називається **чистим експортом** (NX): $NX = X - M$.
- коли експорт не покриває імпорту ($X < M$, $NX < 0$), то різниця має бути оплачена або шляхом позики в іноземних фінансових посередників, або шляхом продажу реальних і фінансових активів іноземцям – це призводить до чистого припливу капіталу (на рис. 3 такі операції зображено як потік, спрямований до внутрішніх фінансових ринків);
- коли ж експорт перевищує імпорт ($X > M$, $NX > 0$), то є відтік капіталу – ситуація, коли економічна система надає позики іноземцям або купує іноземні фінансові та реальні активи.

Існує певний взаємозв'язок між потоками платежів за імпортом-експортом товарів та послуг і потоками платежів за міжнародними фінансовими операціями. Так, наприклад, імпорт можна оплатити або ж експортом, або ж припливом капіталу. Тобто країна може імпортувати більше, ніж експортувати, коли має місце чистий приплив капіталу.

Рівність між національним доходом та національним продуктом зберігається і тоді, коли в моделі кругообігу враховується взаємозв'язок з іншими країнами світу, оскільки тоді справджуються рівняння:

1) з точки зору доходів $Y=C+T+S+M$;

2) з точки зору витрат $Y=C+I+G+X$.

Підсумовуючи вищесказане, можна зробити ряд важливих висновків:

1. Грошовий дохід використовується не тільки на споживання (C), але й на: чисті податки (T); платежі за імпортом (M); заощадження (S). Ці три напрями витрачання коштів називаються **“витокami”**. Тоді можна записати:

$$Y=C+T+M+S, \text{ або } Y=C+\sum \text{витоків.}$$

2. З іншого боку, існує три види витрат на товари і послуги, вироблені внутрішньою національною економікою, які не є витратами внутрішніх споживачів: інвестиційні витрати (I), державні закупівлі товарів і послуг (G); платежі від експорту (X). Ці три потоки називаються **“ін'єкціями”**. Звідси справедливим буде рівність:

$$Y=C+I+G+X, \text{ або } Y=C+\sum \text{ін'єкцій.}$$

3. Порівнявши національний продукт і національний дохід, отримуємо: $C+T+M+S=C+I+G+X$. Звідси випливає, що: $T+M+S=I+G+X$. Ця тотожність показує, що загальна сума витоків дорівнює загальній сумі ін'єкцій. Дуже важливо підкреслити, що тільки сумарні показники витоків та ін'єкцій рівні між собою. В окремих парах витоків та ін'єкцій найчастіше точний баланс відсутній. Зовсім не обов'язково, щоб заощадження дорівнювали інвестиціям, чисті податки – державним закупівлям, а експорт – імпорту.

4. Із введенням до моделі кругообігу фінансових ринків, державного сектора і решти країн світу, схема взаємодії між

рішеннями домогосподарств про витрати та рішеннями фірм щодо обсягів виробництва залишається такою ж, хоча й ускладнюється: за допомогою трансфертів, податків та інших економічних інструментів держава регулює коливання в рівнях виробництва, зайнятості та інфляції. Якщо домашні господарства приймають рішення витратити менше, то фірми змушені скорочувати випуск продукції, що, в свою чергу, призводить до зменшення доходів. Рівень попиту на товари визначає рівень виробництва і зайнятості, а від рівня випуску залежить рівень доходів власників факторів виробництва, що, знову ж таки, впливає на сукупний попит.

Таким чином, зробимо основний висновок із моделі кругообігу продуктів та доходів: реальний і грошовий потоки здійснюються без перешкод при умові рівності сукупних витрат домогосподарств, фірм, держави та решти країн світу сукупному обсягові виробництва. Якщо ж сукупні витрати, які визначають сукупний попит, скорочуються, то й сукупний обсяг випуску та рівень зайнятості падає, що зменшує сукупні доходи, які, в свою чергу, визначають сукупний попит. Звідси важливим завданням макроекономічної політики є стабілізація сукупного попиту.

Підходи до вирішення цієї задачі різні у представників різних напрямків макроекономічної теорії. Представники кейнсіанського напрямку пропонують здійснювати стабілізацію сукупних витрат за допомогою зміни величини державних витрат, податків і грошової пропозиції. Монетаристи вважають зміну грошової маси універсальним засобом стабілізації економіки. У рамках некейнсіанського підходу розробляються концепції макроекономічного управління очікуваннями економічних агентів при повільній зміні рівнів заробітної плати і цін. У неокласичній моделі раціональних очікувань ціна і заробітна плата швидко реагують на зміни ринкової кон'юнктури і тому економіка швидко стабілізується в стані довіри економічних агентів до політики уряду і Національного банку. Прихильники теорії “економіки пропозиції” вважають недоцільною будь-яку політику, направлену на регулювання сукупного попиту. На їхню думку, політика держави повинна обмежуватися стимулюванням підприємницької діяльності і збільшенням сукупної пропозиції завдяки лібералізації ринку, розвиткові конкуренції та зменшенню податків.

Тема 3. Модель динамічної рівноваги економіки. Модель Леонтьєва

1. *Метод економічного аналізу «витрати-виробництво».*
Динамічна модель Леонтьєва.
2. *Динаміка замкнутої виробничої системи.*
3. *Міжгалузєва динамічна модель і аналіз пропорцій розширеного відтворення.*
4. *Узагальнення динамічної моделі Леонтьєва.*

3.1 Метод економічного аналізу «витрати-виробництво». **Динамічна модель Леонтьєва**

Василь Леонтьєв (1906-1999 рр.) – американський економіст російського походження; професор Гарвардського університету у Кембриджі, пізніше у Нью-Йорку; творець методу економіко-математичного аналізу «витрати-виробництво» (Input-Output) для вивчення міжгалузєвих впливів. Отримав Нобелівську премію у 1973 р.

Динамічна модель Леонтьєва є деталізованою моделлю росту валового суспільного продукту і національного доходу. Базою для динамічної моделі В. Леонтьєва є статична модель міжгалузєвого балансу в грошовому вираженні, що відображає виробництво і розподіл валового суспільного продукту в галузєвому розрізі, міжгалузєві виробничі зв'язки, використання матеріальних і трудових ресурсів, створення і розподіл національного доходу (НД). Кожна галузь у балансі розглядається двічі – як споживач і як виробник. Це й визначає матричну структуру балансу. В основі статичної моделі лежить припущення про взаємозв'язок між нагромадженням і приростом валового продукту. При побудові динамічної моделі В. Леонтьєва, як і для моделі міжгалузєвого балансу, мають місце наступні припущення:

- 1) в кожній галузі є єдина технологія виробництва;
- 2) норми виробничих витрат не залежать від обсягу продукції, що випускається;
- 3) у виробництві не допускається заміщення одних видів продукції іншими.

Місце динамічних міжгалузєвих моделей серед моделей економічної динаміки визначають за такими трьома чинниками.

1. Вони є деталізованими (дезагрегованими) аналогами моделей відтворення валового внутрішнього продукту (ВВП) і національного доходу.

2. Моделі є узагальненням статичних (балансових і оптимізаційних) міжгалузевих моделей.

3. Моделі є теоретико-методологічною основою прикладних динамічних моделей з матрицями міжгалузевого балансу.

Запропонована В. Леонтєвим динамічна міжгалузева модель є класичним прикладом використання систем диференціальних рівнянь у дослідженні проблем економічного зростання. Її місце в системі моделей народногосподарського рівня можна трактувати двояко:

як дезагрегування моделі відтворення ВВП і НД;

як динамізацію статичної моделі міжгалузевого балансу.

Побудуємо модель згідно з першим методом.

Найпростіша модель відтворення валового внутрішнього продукту описується в такому вигляді:

$$x(t) = ax(t) + b \frac{dx(t)}{dt} + c(t).$$

При дезагрегуванні цієї моделі до галузевого рівня ендегенні та екзогенні змінні $x(t)$, $\frac{dx(t)}{dt}$, $c(t)$ замінюються векторами-

стовпцями $X(t)$, $\frac{dX(t)}{dt}$, $C(t)$, а параметри a і b – квадратними

матрицями A і B . Отримуємо систему звичайних лінійних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами, відому як динамічна модель Леонтєва:

$$X(t) = AX(t) + B \frac{dX(t)}{dt} + C(t), \quad (3.1)$$

де $X(t) = [x_j(t)]$ – вектор-стовпець обсягів виробництва;

$\frac{dX(t)}{dt} = \left[\frac{dx_i(t)}{dt} \right]$ – вектор-стовпець абсолютних приростів виробництва;

$C(t)$ – вектор-стовпець споживання (разом із невиробничим

нагромадженням);

$A = \{a_{ij}\}$ – матриця коефіцієнтів прямих матеріальних витрат (на відміну від коефіцієнтів статичного міжгалузевого балансу коефіцієнти в динамічній моделі включають також витрати на відшкодування вибуття і капітальний ремонт основних виробничих фондів);

$B = \{b_{ij}\}$ – матриця коефіцієнтів капіталомісткості приростів виробництва (витрати виробничого нагромадження на одиницю приросту відповідних видів продукції) ($i, j \in \{1, \dots, n\}$).

Нагадаємо, що статичну модель міжгалузевого балансу записують так:

$$X = AX + Y$$

або

$$X = (E - A)^{-1}Y,$$

де $(E - A)^{-1}$ – матриця коефіцієнтів повних потреб у випуску продукції для одержання одиниці відповідних видів кінцевої продукції.

Відповідність між статичною і динамічною моделями міжгалузевого балансу для кожного t встановлюють за допомогою матричного рівняння:

$$Y(t) = B \frac{dX(t)}{dt} + C(t).$$

Оскільки $\frac{dX(t)}{dt} = (E - A)^{-1} \frac{dY(t)}{dt}$, то замість (3.1) можна

досліджувати систему диференціальних рівнянь:

$$Y(t) = B(E - A)^{-1} \frac{dY(t)}{dt} + C(t), \quad (3.2)$$

де $B(E - A)^{-1}$ – матриця коефіцієнтів повної приростної капіталомісткості, тобто повних витрат виробничого нагромадження на одиничні прирости елементів національного доходу.

Припускають, що матриця A продуктивна. У подальшому аналізі зручно вважати матрицю A нерозкладною, а матрицю B – невивроженою. Тоді

$$(E - A)^{-1} > E - A$$

$$B(E - A)^{-1} > B$$

Далі розглянемо також випадок, коли матриці B і $B(E - A)^{-1}$ включають не все виробниче нагромадження, а тільки нагромадження основних виробничих фондів.

На перший погляд ці припущення неприпустимо штучні, оскільки дійсні матриці A , як правило, розкладні, а матриці B мають нульові рядки (зокрема, для галузей, що виробляють тільки предмети споживання). Однак після зведення системи (3.2) до рівнянь тільки для фондоутворюючих галузей обидва припущення стають цілком правомірними.

Очевидно, що економічне значення мають тільки розв'язки $X(t) > 0$. Аналогічну вимогу в моделі без зовнішньої торгівлі може бути накладено на вектор $Y(t)$. Як буде описано далі, економічним передумовам моделі (3.1) відповідають тільки неспадні траєкторії $X(t)$, тобто $\frac{dX(t)}{dt} \geq 0$.

Розв'язок системи (3.2) при $\frac{dY(t)}{dt} \geq 0$ через невід'ємність матриць $(E - A)^{-1}$ і $B(E - A)^{-1}$ гарантує, що $Y(t) \geq 0$ і $\frac{dX(t)}{dt} \geq 0$. Однак останні умови можуть бут виконані і тоді, коли окремі компоненти вектора $\frac{dY(t)}{dt}$ від'ємні.

3.2 Динаміка замкнутої виробничої системи

Проаналізуємо систему однорідних рівнянь:

$$Y(t) = B(E - A)^{-1} \frac{dY(t)}{dt}, \quad (3.3)$$

Економічний зміст розв'язку цієї системи полягає в тому, що він характеризує граничні технологічні можливості розвитку виробництва при заданих матрицях A і B , коли всі ресурси національного доходу спрямовуються на розширене відтворення.

Природно, виникає питання: чи існують траєкторії системи (3.3), аналогічні траєкторії зростання національного доходу з постійним технологічним темпом \hat{p} ?

Деагреговані аналоги закону зростання з постійним технологічним темпом \hat{p} для векторів національного доходу і валового продукту мають вигляд:

$$Y(t) = Y(0)e^{t\hat{p}}, \quad X(t) = X(0)e^{t\hat{p}}. \quad (3.4)$$

Відповідно до (3.4) з постійним темпом зростають не тільки національний дохід і валовий продукт загалом (як скалярні величини), але й обсяги виробництва продукції, а також обсяги використання національного доходу для кожної з галузей. Отже, галузева структура валового продукту і національного доходу для траєкторій (3.4) залишається незмінною. Відповідь на поставлене питання передбачає дослідження системи (3.3) для різних матриць A та B .

Загальний розв'язок системи (3.3) може бути поданий у вигляді:

$$Y_i(t) = \sum_{i=1}^n d_i K_i e^{\lambda_i t} \quad (3.5)$$

де λ_i – корені характеристичного рівняння n -го порядку $\det(E - \lambda B(E - A)^{-1}) = 0$,

K_i – відповідні до λ_i , власні вектори матриці $B(E - A)^{-1}$, тобто нетривіальні розв'язки системи однорідних рівнянь $(E - \lambda_i B(E - A)^{-1})K_i = 0$.

Деякі корені λ_i можуть виявитися комплексними. Кожній парі комплексно спряжених коренів $\lambda = \alpha \pm i\beta$ відповідає в (3.5) пара доданків $Ce^{\alpha t} \cos \beta t + De^{\alpha t} \sin \beta t$ (де C і D – постійні вектори розмірності n), що породжують коливання з частотою β і амплітудою $e^{\alpha t}$.

Величини d_i у формулі (3.5) однозначно визначаються із початкової умови.

У загальному випадку немає підстав розраховувати на те, що відмінною від нуля буде єдина компонента d_l . Отже, у типовій ситуації єдина траєкторія системи (3.3), яка виходить з початкової точки $Y(0)$, є комбінацією експонент, що зростають різними темпами. Тому розвиток точно за законом (3.4) є неможливим. Останнє твердження вказує на істотну відмінність міжгалузевої моделі від її макроекономічного прототипу.

Але певна схожість розв'язків однорідних макроекономічної та міжгалузевої моделей зберігається. Це стає очевидним з наведених нижче міркувань.

Відповідно до прийнятих припущень матриця $B(E - A)^{-1}$ додатна. Отже, вона має додатне власне число \widehat{s} , що за абсолютною величиною більше, ніж усі інші власні числа цієї матриці, а також відповідний строго додатний власний вектор \widehat{K} . При цьому власні вектори, що відповідають відмінним від \widehat{s} власним значенням, з необхідністю мають компоненти різних знаків.

З теорії невід'ємних матриць відомо, що \widehat{s} знаходиться між максимальною і мінімальною сумами елементів стовпців матриці $B(E - A)^{-1}$. Позначимо через $\widetilde{B}_j = \sum_{i=1}^n \beta_{ij}$ суму елементів j -го стовпця цієї матриці, тобто повну капіталомісткість продукції j -ї галузі. Тоді

$$\min_j \widetilde{B}_j \leq \widehat{s} \leq \max_j \widetilde{B}_j.$$

Разом з тим, параметр $\widehat{\lambda} = \frac{1}{\widehat{s}}$, що належить розв'язку (3.5) як показник експоненти, знаходиться на проміжку:

$$\min_j \frac{1}{\widetilde{B}_j} \leq \widehat{\lambda} \leq \max_j \frac{1}{\widetilde{B}_j}.$$

Таким чином, показник експоненти є оберненою величиною до деякої середньої з повних галузевих капіталомісткостей. У випадку ж їхньої рівності ($B_j = B_0, j = 1, \dots, n$) $\widehat{\lambda}$ збігається з

$\hat{p} = \frac{1}{B_0}$, що стає підставою називати величину $\hat{\lambda}$ технологічним

темпом приросту в міжгалузевій динамічній моделі (3.1).

Траскторія $Y_i(t)$ відповідно до (3.5) є сумою експонент. Очевидно, що при $t \rightarrow \infty$ в ній починає переважати доданок з максимальною дійсною частиною λ_i . Можливі дві взаємовиключні ситуації:

- 1) домінуючою є експонента $e^{\hat{\lambda}t}$;
- 2) домінує інший доданок з темпом λ_i , який відмінний від $\hat{\lambda}$.

У першому випадку темпи приросту продукції кожної галузі при $t \rightarrow \infty$ прямують до технологічного темпу зростання $\hat{\lambda}$, а гранична галузева структура національного доходу визначається пропорціями між компонентами власного вектора \hat{K} .

У другому випадку динаміка $Y_i(t)$ усе більше визначається власним вектором K_i , що відповідає власному значенню $\frac{1}{\lambda_i} \neq \hat{s}$ з

матриці $B(E - A)^{-1}$. Такий власний вектор, як було зазначено вище, обов'язково має компоненти різних знаків. Тому при досить великих t у розв'язку $Y_i(t)$ неодмінно з'являються від'ємні компоненти і тим самим втрачається економічний зміст розв'язку.

Отже, розв'язок (3.5), у якому домінує доданок з темпом, відмінним від $\hat{\lambda}$, економічно неприйнятний.

Зазначені особливості розв'язків однорідного рівняння (3.3) є принциповими визначальними рисами міжгалузевої моделі (3.1), порівняно з її макроекономічним аналогом, де розв'язок втрачає допустимість тільки в результаті надмірних вимог до зростання споживання.

3.3 Міжгалузева динамічна модель і аналіз пропорцій розширеного відтворення

Зв'язок результатів міжгалузевої динамічної моделі і макромоделі розширеного відтворення може бути посилений за допомогою класифікації та агрегування галузей за функціональним призначенням продукції, що ними виготовляється. Замість “знеособлених” галузей, представлених тільки порядковими номерами, варто виділяти галузі, що виконують особливі функції в процесі відтворення.

Поділимо все виробництво на три галузі: виробництво знарядь праці (галузь 1), виробництво предметів праці (галузь 2), виробництво предметів споживання (галузь 3). В результаті отримуємо тригалузову систему, яку можна досліджувати за допомогою міжгалузевої динамічної моделі.

У зазначеній тригалузевій системі лише галузь 1 здійснює капітальні вкладення, галузь 2 забезпечує тільки проміжне споживання, а весь фонд споживання забезпечує галузь 3.

Запишемо систему рівнянь, зважаючи на функціональне призначення продукції трьох галузей:

$$\begin{cases} x_1(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + a_{13}x_3(t) + b_{11} \frac{dx_1}{dt} + b_{12} \frac{dx_2}{dt} + b_{13} \frac{dx_3}{dt} \\ x_2(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + a_{23}x_3(t) \\ x_3(t) = c(t) \end{cases}$$

Підставивши $x_2(t)$ і $x_3(t)$ у перше рівняння, отримаємо диференціальне рівняння такого вигляду:

$$x_1(t) = \tilde{a}x_1(t) + \tilde{b} \frac{dx_1}{dt} + \tilde{g}_1c(t) + \tilde{g}_2 \frac{dc}{dt},$$

$$\text{де } \tilde{a} = a_{11} + \frac{a_{12}a_{21}}{1 - a_{22}}, \quad \tilde{b} = b_{11} + \frac{b_{12}a_{21}}{1 - a_{22}},$$

$$\tilde{g}_1 = a_{13} + \frac{a_{12}a_{23}}{1 - a_{22}}, \quad \tilde{g}_2 = b_{13} + \frac{b_{12}a_{23}}{1 - a_{22}}.$$

Завдяки продуктивності матриці A величина $\tilde{a} < 1$. Технологічний темп приросту, який досягається при $c(t)=0$, дорівнює $\hat{\lambda} = \frac{1-\tilde{a}}{\tilde{b}}$.

При $c(t) = c_0 e^{rt}$ траєкторія $x_1(t)$ має вигляд:

$$x_1(t) = \left(x_1(0) - \frac{(\tilde{g}_1 + r\tilde{g}_2)c_0}{1 - \tilde{a} - r\tilde{b}} \right) e^{\hat{\lambda}t} + \frac{(\tilde{g}_1 + r\tilde{g}_2)c_0}{1 - \tilde{a} - r\tilde{b}} e^{rt}.$$

Зокрема, при сталому рівні споживання ($r=0$) отримуємо:

$$x_1(t) = \left(x_1(0) - \frac{\tilde{g}_1 c_0}{1 - \tilde{a}} \right) e^{\hat{\lambda}t} + \frac{\tilde{g}_1 c_0}{1 - \tilde{a}},$$

тобто темп приросту виробництва знярядь праці дуже швидко прямує до величини $\hat{\lambda}$.

Пропорційне зростання всіх галузей виробництва $x_i(t) = x_i(0)e^{r_0 t}$ ($i = 1, 2, 3$) існує при $r_0 = \frac{(1-\tilde{a})x_i(0) - \tilde{g}_1 c_0}{\tilde{b}x_i(0) + \tilde{g}_2 c_0}$ і при цьому $0 \leq r_0 < \hat{\lambda}$.

При $0 < r < r_0$ темпи приросту виробництва галузей 1 і 2 збільшуються до межі $\hat{\lambda}$. Виробництво у 1 та 2 галузях зростає випереджуючими темпами, їхня частка у валовому продукті неперервно збільшується. Відповідно зростає частка виробничого нагромадження і знижується частка споживання (як і в макромоделях).

При $r > r_0$ темпи приросту виробництва галузей 1 і 2 необмежено зменшуються; відповідні траєкторії виходять за межі допустимої області. Водночас збільшується частка третьої галузі у валовому продукті та фонді споживання – у національному доході.

Залежності темпів приросту виробництва знярядь праці і предметів праці від темпу споживання r зображено на рис. 4.

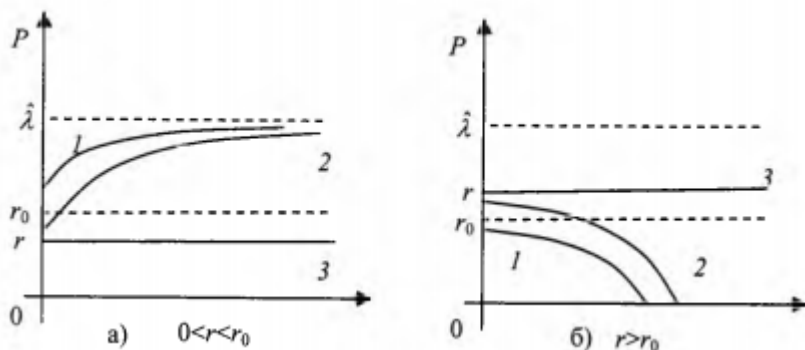


Рис. 4. Залежність динаміки темпів приросту виробництва галузей від темпу приросту споживання:

1 – виробництво знарядь праці; 2 – виробництво предметів праці; 3 – виробництво предметів споживання

Зміни галузевої структури валового внутрішнього продукту при зміні темпу споживання показано на рис. 5.

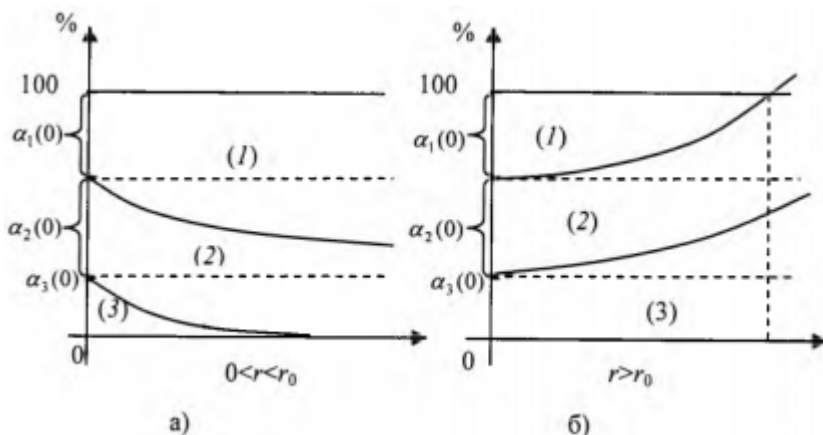


Рис. 5. Залежність динаміки галузевої структури валового внутрішнього продукту від темпу приросту споживання:
 α_1 – частка виробництва знарядь праці; α_2 – частка виробництва предметів праці; α_3 – частка виробництва предметів споживання

При $0 < r < r_0$ (рис. 5 а) частка виробництва знарядь праці зростає, а частка предметів споживання зменшується. При $r > r_0$

(рис. 5 б) структурні зміни протилежні. Частка виробництва предметів праці відносно стійка щодо темпу споживання. Це пояснюється тим, що виробництво предметів праці однаково необхідне при будь-якому співвідношенні між виробництвом знарядь праці і предметів споживання, а також між нагромадженням основних виробничих фондів і використанням продукції на невиробничі потреби.

3.4 Узагальнення динамічної моделі Леонтьєва

У динамічній моделі В. Леонтьєва зроблено низку припущень, що спрощують розв'язок системи диференціальних рівнянь і полегшують відповідний теоретичний аналіз. Однак ці припущення звужують можливості коректного перенесення результатів аналізу моделі на економічну дійсність. Поряд з критичною оцінкою припущень розглянутої моделі важливо описати шляхи її удосконалення.

1. Включення умов „необоротності“ капітальних вкладень і перехід до системи нерівностей.

В умовах (3.1) вектор виробничого нагромадження (чистих капітальних вкладень) пов'язаний з приростами виробництва співвідношенням $U(t) = B \frac{dX}{dt}$. Таке співвідношення передбачає

тільки невід'ємні похідні $\frac{dx_j(t)}{dt}$. Якщо $\frac{dx_j(t)}{dt} < 0$, то

$u_{ij} = b_{ij} \frac{dx_j(t)}{dt} < 0$. Формально це означає повернення ресурсів у

баланси продукції за повними нормами капіталомісткості (повне деінвестування), що не відповідає дійсності.

Тому розв'язки систем (3.1) і (3.2) можна використовувати лише тоді, коли вони задовольняють додаткову умову: $\frac{dX}{dt} \geq 0$.

Така умова виконується далеко не для будь-якої траєкторії (3.1), зокрема, вона порушується:

а) при домінуванні в розв'язку однорідної системи складової, що зростає з темпом, який відрізняється від технологічного;

б) при зростанні споживання з темпом $r > r_0$;

в) на початковому відрізку інших траєкторій.

Строго кажучи, ця додаткова умова не є необхідною. Адже важливо не заборонити від'ємні прирости, а виключити феномен “оборотності” капітальних вкладень. Тому більш обґрунтованим є безпосереднє включення в модель умов “необоротності” капіталовкладень:

$$u_{ij} = b_{ij} \left(\frac{dx_j(t)}{dt} \right)_+,$$

$$\text{де } \left(\frac{dx_j(t)}{dt} \right)_+ = \begin{cases} \frac{dx_j(t)}{dt}, & \text{якщо } \frac{dx_j(t)}{dt} \geq 0; \\ 0, & \text{якщо } \frac{dx_j(t)}{dt} < 0. \end{cases}$$

Відзначимо, що припущення абсолютної необоротності капіталовкладень є надто жорстким. Матеріальні елементи основних виробничих фондів, що вивільняються, можуть частково перерозподілятися. Це можна врахувати наступним чином.

Якщо $\frac{dx_j(t)}{dt} < 0$, то в баланс продукції надходить

$$\bar{u}_{ij} = \bar{b}_{ij} \frac{dx_j(t)}{dt}, \text{ де } 0 \leq \bar{b}_{ij} < b_{ij}. \text{ Однак теоретичне дослідження}$$

моделі з такими умовами помітно ускладнюється.

Із урахуванням умови “необоротності” капіталовкладень динамічна міжгалузева модель набуває вигляду:

$$X(t) = AX(t) + B \left(\frac{dX(t)}{dt} \right)_+ + C(t), \quad (3.6)$$

Однак система рівнянь (3.6) може не мати допустимих траєкторій, що проходять через задану початкову точку $X(0) \geq 0$.

У зв'язку з цим доцільно замінити систему рівнянь (3.6) системою нерівностей:

$$X(t) \geq AX(t) + B \left(\frac{dX(t)}{dt} \right)_+ + C(t), \quad (3.7)$$

Завдяки цьому вдається уникнути багатьох проблем, що виникали при попередньому аналізі.

Так, модель замкнутої виробничої системи $X(t) \geq AX(t) + B\left(\frac{dX(t)}{dt}\right)_+$, на відміну від рівняння (3.3), має розв'язок при будь-якому початковому значенні $X(0) \geq 0$: $X(t) = X(0)e^{\lambda t}$.

Отже, у моделі замкнутої виробничої системи максимально можливий постійний темп приросту виробництва всіх галузей існує при будь-якому початковому стані.

2. Урахування резервів виробничих потужностей.

У моделі В. Леонт'єва припускають, що приріст виробництва може бути здійснений тільки за рахунок виробничого нагромадження: з $u_{ij}(t) = 0$ випливає $\frac{dx_j(t)}{dt} = 0$. Насправді розширення виробництва може відбуватися і в результаті більш повного використання наявних виробничих потужностей (основних виробничих фондів).

Позначивши через $M_j(t)$ максимально можливий обсяг виробництва продукції j -ї галузі на діючих основних фондах у році t , можемо ввести умови: $x_j(t) \leq M_j(t)$, що роблять припустимим

$$u_{ij}(t) = 0 \text{ при } \frac{dx_j(t)}{dt} > 0.$$

Отже, введення додаткових умов $x_j(t) \leq M_j(t)$ може уточнити розв'язок системи (3.1).

3. Побудова міжгалузевих моделей з інвестиційними лагами.

У моделі В. Леонт'єва, так само як і в найпростішій макромоделі відтворення, передбачено миттєвість перетворення виробничого нагромадження (капітальних вкладень) у прирости виробництва. Надмірна спрощеність цієї умови неодноразово відзначалася багатьма дослідниками.

Природне вдосконалення моделі – включення інвестиційних лагів (зосереджених чи розподілених). Так, якщо визначати інвестиційний лаг у кожній j -й галузі як зосереджений і рівний $\tilde{\tau}_j$, то система рівнянь виробництва і розподілу продукції (національного доходу) набуває вигляду:

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j(t) + \sum_{j=1}^n b_{ij} \frac{dx_j}{dt}(t + \tilde{\tau}_j) + c_i(t), \quad i = 1, \dots, n.$$

Інвестиційні лаги можуть диференціюватися не тільки за галузями-“споживачами” капітальних вкладень, але й за матеріально-речовими елементами капітальних вкладень (продукція машинобудування, будівництва і т. ін.). Позначивши через τ_{ij} лаг капіталовкладень, що надходять з i -ї галузі і забезпечують приріст виробництва у j -й галузі, одержуємо таку систему рівнянь:

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j(t) + \sum_{j=1}^n b_{ij} \frac{dx_j}{dt}(t + \tau_{ij}) + c_i(t), \quad i = 1, \dots, n.$$

У динамічну міжгалузеву модель можуть бути включені також і розподілені лаги, при цьому змінюється зміст матриці B .

Методи розв'язування систем диференціальних рівнянь з лагами (запізнілими аргументами) розроблено досить добре, однак якісний аналіз розв'язків істотно ускладнюється.

4. Врахування динаміки коефіцієнтів матеріаломісткості і капіталомісткості виробництва.

Одним з найбільш сильних припущень аналізованої моделі є незмінність у часі матриць матеріальних і капітальних витрат A і B . Завдяки цьому вдається зробити низку висновків про властивості траєкторій (зокрема, довести існування технологічного темпу приросту і відповідної траєкторії пропорційного зростання). Але при цьому поза моделлю залишається найважливіший чинник економічної динаміки – науково-технічний прогрес.

Включення в модель матриць $A(t)$ і $B(t)$, що залежать від часу, підвищує її прикладне значення. Проте теоретичний аналіз узагальненої моделі залишається доступним для досить простих законів зміни, наприклад, при рівномірній зміні всіх коефіцієнтів матриць або коефіцієнтів окремих рядків матриць [5, С. 164-181].

Тема 4. Лінійні динамічні моделі. Модель Харрода–Домара

- 1. Модель Харрода-Домара: суть та основні припущення.*
- 2. Модель Харрода-Домара для нульового споживання.*
- 3. Співвідношення між гарантованим, природним і фактичним темпами зростання.*

Модель Харрода–Домара – це модель макроекономічної динаміки, запропонована Е. Домаром і М. Ф. Харродом (1939р.).

Рой Форбс Харрод (1900—1978), видатний англійський економіст, професор Оксфордського університету, один з найвидатніших продовжувачів кейнсіанських ідей, вважається батьком теорії економічного зростання. Саме йому належить пріоритет у розробці проблем економічного зростання та його математичного моделювання. Народився у 1900 р. у родині вчених-інтелектуалів, отримав блискучу освіту – закінчив Вестмінстерський коледж та Оксфордський університет. У 1933 р. – вийшла перша наукова книга Р. Харрода "Теорія міжнародної економіки". У 1936р. опублікована праця "Торговий цикл", у 1939 р. – праця "Нарис теорії динаміки". У 1948 р. – вихід основної фундаментальної монографії "До теорії економічної динаміки", яка мала величезний науковий успіх, принесла автору визнання та репутацію теоретика-новатора.

Науково-дослідницьку діяльність Р. Харрод вдало поєднував з практичною роботою на високих адміністративних посадах. У 1939 р., з початком Другої світової війни – перейшов на роботу в статистичне відомство прем'єр-міністра Великої Британії В. Черчіля та виконував функції радника британського уряду. У 1947–1950 рр. Р. Харрод очолював підкомісію Організації Об'єднаних Націй з питань зайнятості та стабільного розвитку. У 1952–1953 рр. – економічний радник Міжнародного Валютного Фонду. Ще у 1939 р. в статті "Нарис теорії динаміки" Р. Харрод сформулював основні принципи теорії економічної динаміки. У центрі уваги – намагання визначити темп зростання національного доходу, необхідного для використання всезростаючого обсягу виробничих потужностей і забезпечення повної зайнятості у тривалій перспективі.

До аналогічного висновку про необхідність постійного темпу

зростання національного доходу як важливої умови динамічної рівноваги приблизно в той самий час, коли і Р. Харрод, приходить професор Массачусетського університету (США) Євсїй Домар. Тому в економічній літературі їх споріднені підходи було об'єднано у так звану модель Харрода–Домара. Однак модель Є. Домара дещо відрізняється від моделі Р. Харрода. В її основу покладені не рівність заощаджень інвестиціям, а рівність грошового доходу (попиту) виробничим потужностям (пропозиції). Під виробничими потужностями Є. Домар розумів потенційно можливе виробництво продукції в умовах повної зайнятості. Тобто, якщо модель Харрода будувалася на акселераторі, то модель Домара – на мультиплікаторі.

В моделі Є. Домара динамічна рівновага досягається за умови, що попит і пропозиція мають зростати так, щоб приріст попиту дорівнював приросту пропозиції. При цьому динамічна рівновага може бути забезпечена лише певним темпом росту інвестицій. Зростання капіталовкладень – це стратегічний чинник збалансованості економічного зростання. Відмінність моделі Домара полягала і в тому, що в ній передбачалася повна зайнятість, тоді як Р. Харрод виходив з того, що динамічна рівновага може не збігатися з повною зайнятістю. Але висновок Є. Домар робить такий самий, що і Р. Харрод: необхідною умовою динамічної рівноваги, тобто поступального руху економіки, є стійкий темп економічного зростання. При цьому і Р. Харрод і Є. Домар, стоячи на позиціях Дж.М. Кейнса, підкреслювали складність вирішення проблеми динамічної рівноваги і необхідність проведення відповідної державної політики регулювання економіки.

Модель Харрода–Домара була спрямована на те, щоб на базі кейнсіанства подолати статичність макроекономічної моделі Кейнса і розробити модель, розраховану на довгостроковий період. Але Є. Домар і Р. Харрод усвідомлювали спрощеність своїх моделей, вважаючи, що вони є лише інструментами теоретичного аналізу. По суті, це були лише перші кроки в дослідженні складних зв'язків процесу відтворення у вигляді однофакторної моделі (коефіцієнт капіталомісткості). Далі моделі динамічної рівноваги розвивали у напрямку розробки багатфакторних моделей економічного зростання, дослідження виробничих функцій, економічного програмування.

4.1 Модель Харрода-Домара: суть та основні припущення

Модель Харрода–Домара – це модель з неперервним часом, представлена лінійним диференціальним рівнянням. Модель описує динаміку доходу $Y(t)$, що розглядається як сума споживання $C(t)$ і інвестицій $I(t)$:

$$Y(t) = C(t) + I(t).$$

Економіка вважається закритою, тому чистий експорт дорівнює нулю, а державні витрати в моделі не виділяються. Основна передумова моделі зростання – формула взаємозв'язку між інвестиціями й швидкістю росту доходу. Передбачається, що швидкість росту доходу пропорційна інвестиціям:

$$I(t) = B \frac{dY}{dt},$$

де B — коефіцієнт капіталомісткості приросту доходу або коефіцієнт приростної капіталомісткості (відповідно, обернена до нього величина $1/B$ називається приростною капіталовіддачею).

Тим самим у модель фактично включаються наступні передумови (припущення):

- інвестиційний лаг дорівнює нулю: інвестиції миттєво переходять у приріст капіталу. Формально це означає, що $AK(t)=I(t)$, де $AK(t)$ — неперервна функція приросту капіталу в часі;
- вибуття капіталу відсутнє;
- виробнича функція в моделі лінійна – це витікає із пропорційності приросту доходу приросту капіталу;
- витрати праці постійні в часі або випуск не залежить від витрат праці, оскільки праця не є дефіцитним ресурсом;
- модель не враховує технічного прогресу.

4.2 Модель Харрода-Домара для нульового споживання

Найпростіший варіант моделі отримуємо якщо покласти, що споживання відсутнє, тобто $C(t)=0$. Цей випадок абсолютно нереальний з практичної точки зору, але має важливе теоретичне значення. При нульовому споживанні всі ресурси спрямовуються на інвестиції, в результаті чого можна визначити максимальні технічно

можливі темпи зростання. При $C(t)=0$ маємо:

$$Y(t)=C(t)+I(t)=0+B\frac{dY(t)}{dt}=BY'(t).$$

Це – лінійне однорідне диференціальне рівняння, розв'язок якого має вигляд:

$$Y(t)=Y(0)e^{(1/B)t}.$$

Неперервний темп приросту тут становить – $1/B$. Це і є максимально можливий (технологічний) темп зростання.

4.3 Співвідношення між гарантованим, природним і фактичним темпами зростання

В моделі економічного зростання Харрода–Домара розрізняють два темпи економічного зростання:

- гарантований (рівноважний, G_w) темп, що забезпечує повне завантаження виробничих потужностей і стійку норму прибутку для підприємців. Гарантований темп зростання повинен бути сталим. Це обумовлено двома причинами: припущенням про сталість частки заощаджень в національному доході і припущенням про сталість необхідного капітального коефіцієнта C_r . Оскільки

$$G_w=S/C_r,$$

а чисельник і знаменник – сталі, то G_w – також стала величина;

- природний (потенційний, G_n) темп – це максимальний темп, який допускає зростання активного населення і технічний прогрес. Якщо визначені темпи зростання капіталу і продукту, то природний темп зростання за умови збільшення чисельності активного населення і з урахуванням технічного прогресу записується формулою:

$$G_n=d+t+d_t,$$

де d – темп зростання кількості активного населення;

t – темп зростання продуктивності праці;

d_t – вища продуктивність нової робочої сили.

Темп зростання продукції і доходу може бути вищим від природного темпу зростання, за винятком періоду депресії, коли є надлишок виробництва. Незбалансованість обумовлена тим, що гарантований темп, як правило, не збігається з природним, і це веде або до надлишку або до нестачі капітальних коштів. Ці темпи визначаються різними, не пов'язаними один з одним, чинниками. Гарантований темп визначається середньою нормою заощадження і технічними коефіцієнтами, що характеризують граничне відношення «продукт–капітал» і граничне відношення «капітал–продукт». Природний – ендегенними чинниками, котрі характеризують збільшення пропозиції праці, а саме – зростання чисельності робочої сили і продуктивності праці.

Можливість розбіжності зазначених темпів посилюється тим, що в моделі Харрода–Домара норма заощадження і технічні коефіцієнти стали. Тому пристосовність гарантованого темпу зростання до природного виключається. Р. Харрод приходить до висновку про нестійкість розвитку економіки з характерною для нього тенденцією відхилення від гарантованого темпу зростання. Цей висновок лежить в основі теорії економічної нестабільності, з якої випливає, що якщо підприємці планують темп приросту продукції вищим, ніж гарантований, то починає діяти механізм, що поступово віддаляє фактичну лінію розвитку від лінії рівноваги.

В теорії Р. Харрода розглядається темп зростання виробництва і доходу, який, будучи раз досягнутий, має тенденцію постійно відтворюватися. Якщо ж фактичний темп зростання виробництва відхиляється від гарантованого, то економічна система постійно віддаляється від нього. Таким чином, лінія розвитку економічної системи показує стан нестійкої рівноваги. Результатом розбіжності гарантованого і природного темпів є довготривалі диспропорції в економіці. Тому в моделі Харрода велике значення надається співвідношенню між фактичним G_f , природним G_n і підприємницьким G_w темпами, бо від цього залежить стан економіки.

Р. Харрод розглядає три можливі випадки співвідношень між гарантованим, природним і фактичним темпами зростання.

1. $G_w > G_n$, $G < G_w$. Якщо гарантований темп вищий від природного, то фактичний темп, досягнувши повної зайнятості трудових ресурсів, не може забезпечити обсяг продукції,

необхідний для використання всіх виробничих потужностей. Тому накопичуються незавантажені потужності, що стримує збільшення інвестиційних витрат. Виникає довгострокова стагнація, викликана недостатністю попиту. У цих умовах держава повинна проводити політику зниження норми заощаджень.

2. $G_w < G_n$, $G > G_w$. Якщо гарантований темп менший від природного, то фактичний темп, досягнувши повного завантаження потужностей, буде прагнути до природного темпу. Це призведе до хронічного надлишку інвестицій у порівнянні з величиною заощадження і до перевищення попиту над пропозицією, яке стане джерелом довгострокових інфляційних тенденцій. У цьому випадку доцільним є підвищення норми заощаджень, що наблизитиме гарантований темп до природного.

3. Якщо $G = G_w = G_n$, то досягається ідеальний рівень розвитку економічної системи, тому що в цьому випадку G не тільки реалізує очікування підприємців, а й поглинає всі виробничі потужності і всю наявну робочу силу.

У моделі Харрода–Домара ключове значення надається механізму прийняття інвестиційних рішень для економічного зростання. Інвестиції в період t пропорційні відношенню «капітал–продукт» і очікуваному збільшенню доходу. Якщо підприємець сподівається, що попит на його продукт зросте, то він, за умови повного завантаження виробничих потужностей, закуповує додаткове обладнання, щоб виробити додаткову продукцію відповідно до передбачуваного попиту.

В моделі Харрода підприємницькі цілі виправдовуються лише в тому випадку, коли темп зростання збігається з гарантованим. Вся додаткова продукція знайде попит, і, отже, всі додаткові потужності будуть використані. Якщо ж розраховувати на вищий темп зростання, то насправді він перевищить оптимістичні очікування. Можна припустити, що підприємці будуть прагнути до ще вищого зростання у наступний період. І навпаки, якщо очікуваний темп зростання є нижчим за гарантований, то фактичний також виявиться меншим від гарантованого темпу зростання. Підприємці переглянуть свої розрахунки для подальшого періоду в бік ще більшого зниження.

Отже, відхилення фактичного зростання від гарантованого не піддається саморегулюванню і має кумулятивний характер. Таким

чином, за Р. Харродом механізм формування підприємницьких очікувань надає нестабільності економічному розвитку, причому, при найменшому відхиленні фактичного зростання від гарантованого, вона посилюється.

Загальний висновок з моделі полягає в тому, що ринкова економіка не здатна забезпечити збіг підприємницьких очікувань з гарантованим темпом зростання, тому що підприємці при прийнятті інвестиційних рішень не враховують співвідношення «норма заощаджень—технічні можливості».

Тема 5. Рівновага та стійкість динамічних моделей економіки

1. *Поняття рівноваги, стійкості, стабільності та стаціонарності динамічних систем. Стійкість за Ляпуновим.*
2. *Характер стійкості особливих точок динамічних систем з неперервним часом. Критерії стійкості.*
3. *Типи особливих точок та їх фазові портрети. Біфуркаційна діаграма.*
4. *Нестійкість і нелінійність як джерело невизначеності економічних процесів.*
5. *Якісний аналіз соціально-економічних систем.*

5.1 Поняття рівноваги, стійкості, стабільності та стаціонарності динамічних систем. Стійкість за Ляпуновим.

Будь-яка динамічна система у певний момент часу характеризується своїм станом і напрямом руху. **Рівновага** системи – це такий її стан, який триває як завгодно довго за відсутності зовнішніх впливів. Наприклад, рівновага на ринку деякого товару, рівновага політичних сил у суспільстві тощо.

Якщо система не знаходиться в стані рівноваги, то вона здійснює рух під дією внутрішніх або зовнішніх збурень. У цьому випадку в дію вступає інша характеристика динамічної системи – *поведінка*. В залежності від будови системи та її властивостей поведінка системи може суттєво змінюватися з часом. Принципово різними є два варіанти розвитку подій після того, як на систему подіяло деяке збурення ззовні: повернення до початкового стану і

подальше віддалення від початкового стану. Ці можливості описуються поняттям стійкості. Під **стійкістю** розуміють здатність системи повертатися у рівноважний стан, якщо вона була виведена з нього. У такому випадку стан рівноваги називають *стабільним* (стійким). Другому варіанту відповідає *нестабільна* (нестійка) поведінка системи. Відповідно розрізняють *стійкі* та *нестійкі* системи.

Поведінка системи може змінюватися з часом. **Стаціонарність** є властивістю поведінки, а саме – процесів, що відбуваються в системі, і означає, що характер (закон) функціонування системи не змінюється в часі.

Отже, рівновага – це властивість стану, стабільність – властивість системи, а стаціонарність – властивість процесів, що відбуваються в системі.

Припустимо, що ми маємо деяку точку рівноваги x^* (стаціонарну або особливу точку).

Стаціонарна точка x^* називається **стійкою** за **Ляпуновим**, якщо для будь-якої області допустимих відхилень від неї (область ϵ) ми можемо вказати область $\delta(\epsilon)$, яка оточує стаціонарну точку і має таку властивість, що жоден рух, який розпочинається з середини $\delta(\epsilon)$, ніколи не досягне межі області ϵ , тобто, якщо для довільного $\epsilon > 0$ існує $\delta = \delta(\epsilon) > 0$, що, як тільки $|x(t_0) - x^*| < \delta$, то $|x(t) - x^*| < \epsilon$, для всіх $t \geq t_0$

(рис. 6). Якщо стаціонарна точка x^* стійка за Ляпуновим і, крім того, $\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t) - x^*| = 0$, то вона називається **асимптотично стійкою** (рис. 7).

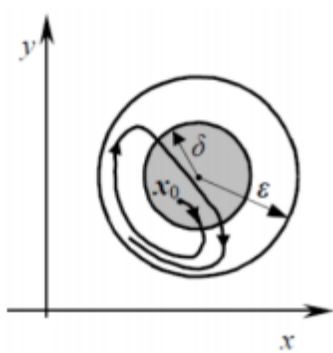


Рис. 6. Ілюстрація стійкості за Ляпуновим

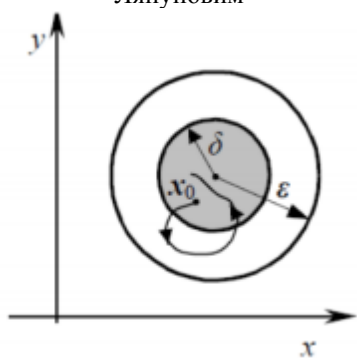


Рис. 7. Ілюстрація асимптотичної стійкості за Ляпуновим

Стационарна точка x^* називається **нестійкою** за **Ляпуновим**, якщо можна вказати таку область допустимих відхилень від неї (область ϵ), для якої не існує жодної області $\delta(\epsilon)$, яка оточує стаціонарну точку і має таку властивість, що жоден рух, який розпочинається всередині $\delta(\epsilon)$, ніколи не досягне межі області ϵ (рис. 8).

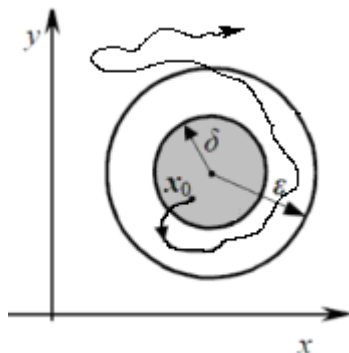


Рис. 8. Ілюстрація нестійкості за Ляпуновим

Асимптотично стійка точка називається **атрактором**, нестійка – **репелером**.

5.2 Характер стійкості особливих точок динамічних систем з неперервним часом. Критерії стійкості

5.2.1 Характер стійкості особливих точок динамічних систем, що описані одним диференціальним рівнянням.

Розглянемо більш детально якісний метод дослідження диференціального рівняння

$$\frac{dx}{dt} = f(x).$$

Зазначимо, що в більшості випадків отримати його аналітичний розв'язок не вдається, а якщо навіть і вдається, то відповідь містить неявні функції, властивості яких важко проаналізувати.

Особливою точкою динамічної системи називається точка, в якій праві частини диференціальних рівнянь приймають нульове значення. Особливих точок може бути одна, кілька або не бути зовсім. З точки зору якісної теорії диференціальних рівнянь нас цікавитиме поведінка системи в особливих точках (стійка, нестійка тощо).

Нехай рівняння $f(x)=0$ не має дійсних коренів, тобто, крива $f(x)$ не перетинає вісь x . Тоді $\frac{dx}{dt}$ весь час зберігає знак і всі

розв'язки $x(t)$ будуть монотонними функціями, зростаючими або спадними, залежно від знаку $f(x)$.

Нехай тепер рівняння $f(x)=0$ має дійсні корені x_1, x_2, \dots, x_k . Вони називаються стаціонарними розв'язками, особливими точками або точками рівноваги. Якщо точка x_i – стаціонарний розв'язок, а (x_{i-1}, x_i) і (x_i, x_{i+1}) – два суміжні з нею інтервали, то на кожному з них поведінка системи може мати траєкторію певного вигляду.

Якщо обидві точки, які належать інтервалам (x_{i-1}, x_i) і (x_i, x_{i+1}) , при зростанні часу t наближаються до стаціонарної точки x_i , то такий розв'язок називається **стійким** (рис. 9).

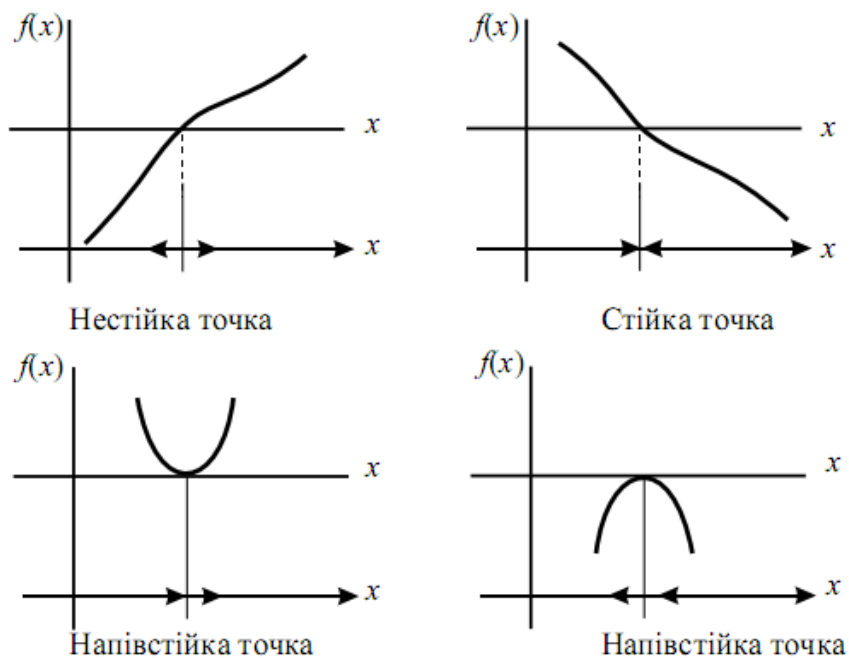


Рис. 9. Ілюстрація стійкості, нестійкості та напівстійкості стаціонарних розв'язків

Якщо обидві точки, які належать інтервалам (x_{i-1}, x_i) і (x_i, x_{i+1}) , при зростанні часу t віддаляються від стаціонарної точки

x_i , то такий розв'язок називається **нестійким** (рис. 9).

Якщо точки одного з інтервалів (x_{i-1}, x_i) і (x_i, x_{i+1}) наближаються до точки x_i , а іншого – віддаляються від неї, то розв'язок називається **напівстійким** (рис. 9).

У випадку опису динамічної системи одним диференціальним рівнянням питання про стійкість точок рівноваги можна вирішити за допомогою аналізу графіка самої функції.

Можливі три випадки:

1. Поблизу стану рівноваги функція $f(x)$ змінює знак з “+” на “-” при зростанні x – стан рівноваги **стійкий** (рис. 10).

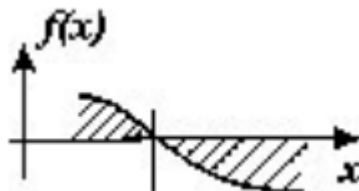


Рис. 10. Стійка точка рівноваги

2. Поблизу стану рівноваги функція $f(x)$ змінює знак з “-” на “+” при зростанні x – стан рівноваги **нестійкий** (рис. 11).

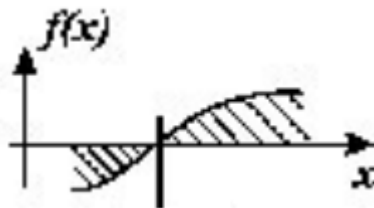


Рис. 11. Нестійка точка рівноваги

3. Поблизу стану рівноваги функція $f(x)$ не змінює знак – стан рівноваги **напівстійкий** (рис. 12).

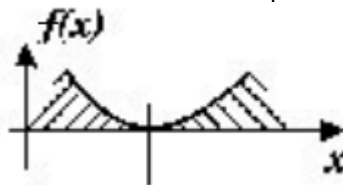


Рис. 12. Напівстійка точка рівноваги

5.2.2 Характер стійкості особливих точок динамічних систем, що описані системою лінійних диференціальних рівнянь.

Розглянемо систему лінійних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами:

$$\begin{cases} x_1' = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n, \\ \dots \\ x_m' = f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n. \end{cases}$$

Щоб знайти точки рівноваги системи, необхідно розв'язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Як відомо, вона має єдиний розв'язок, якщо визначник

матриці $A = \begin{bmatrix} a_{11}, \dots, a_{1n} \\ \dots \\ a_{m1}, \dots, a_{m,n} \end{bmatrix}$ не дорівнює нулю ($|A| \neq 0$).

Стійкість положення рівноваги визначається власними числами матриці A . Власні числа матриці A знаходять, розв'язуючи характеристичне рівняння:

$$\lambda^2 - \sigma\lambda + \Delta = 0,$$

де $\sigma = tr(A)$ – слід матриці; $\Delta = \det(A)$ – детермінант.

Характер стійкості особливих точок для різних випадків коренів характеристичного рівняння для системи двох диференціальних рівнянь подано в табл.1. Ці випадки поширюються і на системи більш високих порядків.

Таблиця 1.

Стійкість точки рівноваги в залежності від коренів характеристичного рівняння

λ_1, λ_2	Стійкість точки рівноваги
дійсні, від'ємні	стійка
дійсні, додатні	нестійка
дійсні, різних знаків	нестійка
комплексні з від'ємною дійсною частиною	стійка
комплексні з додатною дійсною частиною	нестійка
чисто уявні	стійка, але не асимптотично
нульові	стійка, але не асимптотично або нестійка

Отже, ознака стійкості – від'ємність дійсних частин коренів характеристичного рівняння (теорема Ляпунова).

5.2.3 Критерії стійкості.

Нехай маємо характеристичне рівняння n -го порядку:

$$\lambda^{(n)} + a_1 \lambda^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0$$

Як відомо, *необхідною, але не достатньою* умовою того, що всі дійсні частини коренів цього рівняння від'ємні, є $a_j > 0$, $j = \overline{1, n}$. Це означає, якщо хоча б один з коефіцієнтів характеристичного рівняння від'ємний, то знайдеться хоча б один корінь, який матиме невід'ємну дійсну частину і, отже, особлива точка буде нестійкою. Ця умова є також і достатньою для рівнянь першого та другого степенів.

Більш загальною *необхідною і достатньою умовою стійкості* є **критерій Рауса-Гурвіца**: система буде стійкою, якщо при усіх додатних коефіцієнтах $a_j > 0$, $j = \overline{1, n}$ будуть додатними визначник матриці Гурвіца і всі головні діагональні мінори.

Матриця Гурвіца складається з коефіцієнтів характеристичного рівняння за правилами:

1) на головній діагоналі записують коефіцієнти характеристичного рівняння;

2) над головною діагоналлю записують коефіцієнти з більшими індексами;

3) під головною діагоналлю записують коефіцієнти з меншими індексами;

4) решту елементів матриці заповнюють нулями.

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-2} & a_n \end{vmatrix} \text{ – визначник матриці}$$

Гурвіца, $\Delta_1 = a_1$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}$, $\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}$, ... – головні

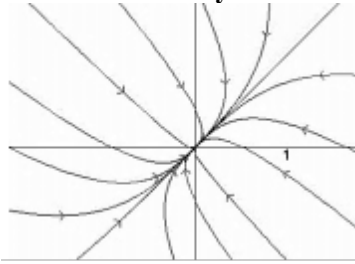
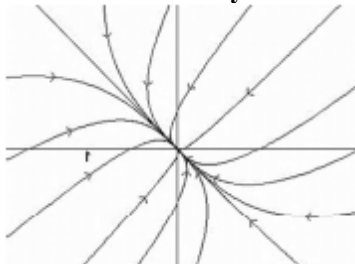
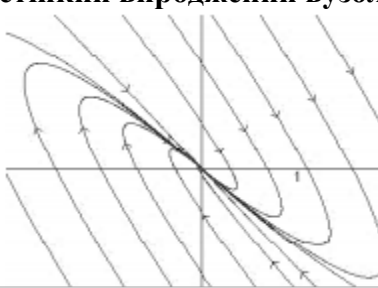
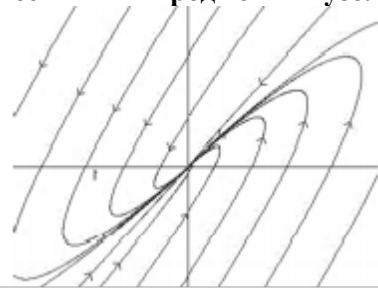
діагональні мінори матриці Гурвіца [16, С. 25-39].

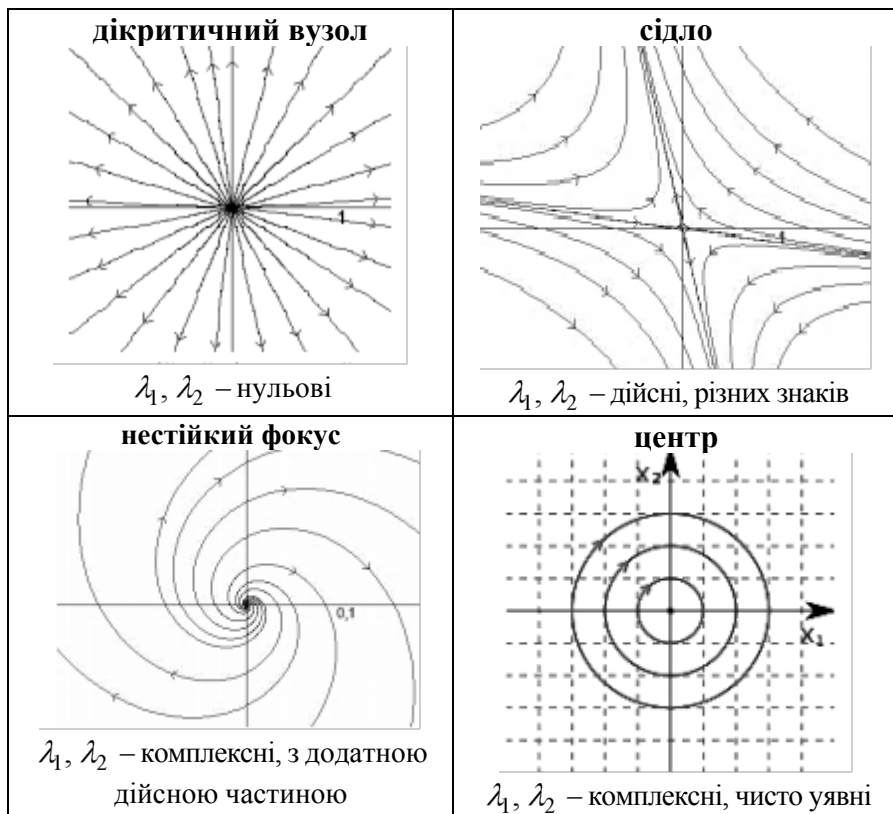
5.3 Типи особливих точок та їх фазові портрети. Біфуркаційна діаграма

Розглянемо динамічну систему для двох змінних. Якщо детермінант відповідного характеристичного рівняння не дорівнює нулю, то точка рівноваги єдина і її тип задається співвідношеннями між власними числами матриці системи λ_1, λ_2 – коренями характеристичного рівняння (табл. 2).

Таблиця 2.

Фазові портрети точок рівноваги в залежності від коренів характеристичного рівняння

<p style="text-align: center;">стійкий вузол</p>  <p style="text-align: center;">λ_1, λ_2 – дійсні, від'ємні, різні</p>	<p style="text-align: center;">нестійкий вузол</p>  <p style="text-align: center;">λ_1, λ_2 – дійсні, додатні, різні</p>
<p style="text-align: center;">стійкий вироджений вузол</p>  <p style="text-align: center;">λ_1, λ_2 – дійсні, від'ємні, однакові</p>	<p style="text-align: center;">нестійкий вироджений вузол</p>  <p style="text-align: center;">λ_1, λ_2 – дійсні, додатні, однакові</p>



Також можна визначити тип точки рівноваги і характер її стійкості, не знаходячи власних значень матриці системи, а знаючи тільки її слід $\sigma = tr(A)$ і визначник $\Delta = \det(A)$ (табл. 3).

Таблиця 3.

Тип точки рівноваги в залежності від значень $tr(A)$ і $\det(A)$

Визначник матриці	Слід матриці	Тип точки рівноваги
$\Delta < 0$	Будь-яке значення	Сідло
$\Delta > 0$	$\sigma = 0$	Центр
$\Delta = 0$	$\sigma \neq 0$	Пряма на фазовій площині
$0 < \Delta < \left(\frac{\sigma}{2}\right)^2$	$\sigma < 0$	Стійкий вузол
	$\sigma > 0$	Нестійкий вузол

$\Delta = \left(\frac{\sigma}{2}\right)^2$	$\sigma < 0$	Стійкий вироджений вузол
	$\sigma > 0$	Нестійкий вироджений вузол
$\Delta > \left(\frac{\sigma}{2}\right)^2$	$\sigma < 0$	Стійкий фокус
	$\sigma > 0$	Нестійкий фокус

Біфуркаційна діаграма, на якій можна побачити геометричне місце точок, описаних у табл. 3, зображена на рис. 13.

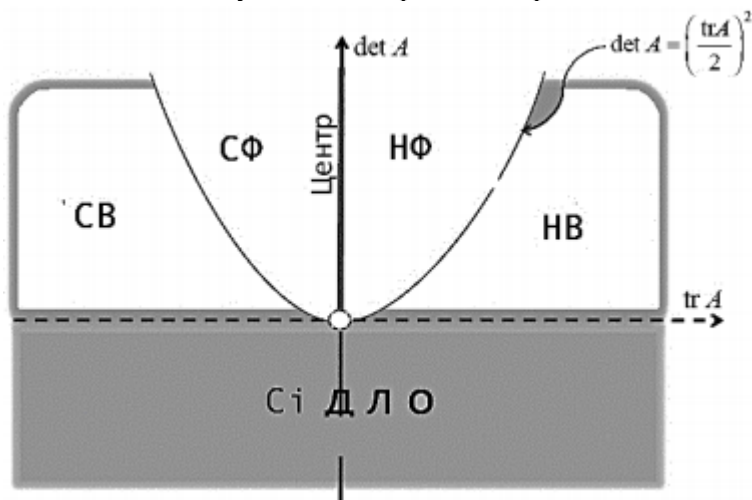


Рис. 13. Біфуркаційна діаграма

5.4 Нестійкість і нелінійність як джерело невизначеності економічних процесів

Складність та відкритість сучасних економічних систем пояснюють той факт, що рівновага та стійкість на практиці зустрічаються доволі рідко. Крім того, нелінійність в економічних системах породжує ускладнені варіанти рівноваги та стійкості, що потребують особливих підходів до їх вивчення. Притаманна економічним системам, явищам та процесам нелінійність та нестійкість породжують невизначеність, що є важливим аспектом всебічного аналізу економічних явищ та процесів і служить одним з основних джерел такого фундаментального поняття сучасної економічної науки як *економічний ризик*.

Сучасна економіка як складна система розвивається нерівномірно, їй притаманні як режими стійкого функціонування, так і режими хаотичної динаміки. В наш час бурхливо розвивається науковий підхід – «синергетична економіка», – який спирається на суттєву нелінійність економічних процесів, досліджує час і зміни в нелінійній економічній теорії. Цей напрямок сьогодні вважається одним із найперспективніших напрямків дослідження економічних систем. Методи і підходи так званої «нелінійної науки» бурхливо розвиваються та успішно використовуються останнім часом. Ці методи виокремились у науковий напрямок, який дістав назву «синергетика». Поряд із терміном синергетика часто використовують терміни теорія складності (complexity theory), теорія динамічних (складних) систем (dynamic (complex) system theory), теорія хаосу (chaos theory), нелінійна динаміка (nonlinear dynamic) або більш загальний — нелінійна наука (nonlinear science), увиразнюючи при цьому принципову *нелінійність, нерівноважність, складність* досліджуваних явищ.

Синергетика досліджує принципово *нерівноважні* (такі, що перебувають далеко від стану рівноваги) системи, принципово *нелінійні* (такі, що за певних умов деякі збурення – внутрішні або зовнішні – можуть привести систему до принципово нових станів, до виникнення нових стійких структур) процеси еволюції систем.

Для нелінійних явищ, математичні моделі яких не підпорядковуються принципу суперпозиції, знання стосовно поведінки частини об'єкта не гарантують знань про поведінку об'єкта в цілому. Більшість реальних економічних процесів і відповідних їм математичних моделей є нелійними. Тому останнім часом економісти намагаються створити відповідні моделі інтерпретації нелінійних явищ в економіці з метою опису процесів з доволі складною економічною динамікою на макро- та мікрорівні, використовуючи методи та підходи «нелінійної науки».

Для складних економічних систем стійкість означає, що при виникненні збурення, яке невеликою мірою виводить систему із стану рівноваги, система буде намагатися відновити попередній стан, тобто, всі її майбутні стани будуть знаходитись поблизу стану рівноваги. Таким чином, під стійкістю розуміють здатність системи повертатися у врівноважений стан, якщо вона була виведена з нього. В такому випадку стан рівноваги називається стійким.

Іншому варіанту, тобто, коли система не здатна повернутися до стану рівноваги, відповідає нестійкість стану й системи.

Розглянемо властивості відкритих систем, що перебувають далеко від стану рівноваги.

1. Такі системи нестійкі, тому повернення до початкового стану для них є необов'язковим. У деякій точці, що називається *точкою біфуркації* (розгалуження), поведіння системи стає неоднозначним.
2. За наявності нестійкості змінюється роль зовнішніх впливів. За певних умов незначний вплив на відкриту систему може призвести до значних та непередбачуваних наслідків.
3. У відкритих системах, далеких від рівноваги, виникають ефекти узгодження, коли елементи системи корелюють, узгоджують своє поведіння. Таке кооперативне (погоджене) поведіння характерне для систем різних типів: атомів та молекул, клітин та живих істот, економічних об'єктів та соціальних груп тощо.

У результаті погодженої взаємодії відбуваються процеси впорядкування, виникнення з хаосу певних структур, перетворення і ускладнення систем. Чим більшим є відхилення від стану рівноваги, тим сильнішим стає охоплення кореляціями та взаємозв'язками, тим вищою буде узгодженість процесів, що відбуваються навіть у віддалених областях і, на перший погляд, не зв'язані один з одним.

«Нелінійність» – фундаментальний концептуальний вузол сучасної наукової парадигми в економічній сфері, яку можна назвати також парадигмою нелінійності. В математичному сенсі нелінійність означає певний вид рівнянь, що містять шукані величини в степенях більших, ніж одиниця, або коефіцієнти, що залежать від властивостей середовища. Нелінійні рівняння можуть мати декілька якісно різних розв'язків. Множині розв'язків нелінійного рівняння відповідає множина шляхів еволюції системи, що описується рівняннями нелінійної системи. Більше того, вивчаючи різні стадії розвитку процесів у відкритому нелінійному середовищі, можна очікувати на якісну зміну процесів, зокрема, переструктурування – ускладнення чи деградацію – організації середовища. Причому це відбувається не через зміну параметрів середовища, а як результат розвитку процесів у ньому.

Феномен нелінійності можна охарактеризувати наступними особливостями.

1. Завдяки нелінійності має місце найважливіший принцип «розростання малого» або «посилення збурень».
2. Певні класи нелінійних систем демонструють іншу важливу властивість – граничну чутливість.
3. Нелінійність породжує подібність до квантового ефекту – дискретність шляхів еволюції нелінійних систем.

Нелінійність означає можливість несподіваних, так званих, емерджентних змін напрямку перебігу процесів. Нелінійність процесів робить принципово ненадійними і недостатніми прогнози.

Одним з основних результатів нелінійного підходу є визнання можливості різноманітного розвитку систем, наявності біфуркації. У точці біфуркації нестійкість підсилюється через те, що в системах завжди присутні флуктуації, які гасяться у стійкому стані. Але в результаті нелінійних процесів, які виводять параметри системи за критичні значення, такі флуктуації посилюються і можуть спричинити стрибкоподібний перехід до нового стійкого стану з меншою ентропією, після чого цикл «плавний розвиток—стрибок», «еволюція—революція», «стійкість—нестійкість» повторюється.

Отже, стійкість та нестійкість є однаково необхідними у процесі розвитку будь-якої системи. Абсолютно хистка система не може протистояти флуктуаціям, не здатна до адаптації і швидко руйнується. Проте надто стійка система, придушуючи будь-які флуктуації, консервує свою структуру й поведження, і тому не здатна змінитися якісно, вона позбавлена можливості розвитку, і її руйнування стає лише справою часу. Обидва типи систем приходять до хаосу, різниця між ними полягає в часі, що проходить до вибухового зростання ентропії.

У динамічних системах можливим є не тільки гладке (безперервне) і відносно передбачуване поведження, але й різкі стрибкоподібні зміни. Такі стрибкоподібні зміни стану динамічної системи при повільній зміні її параметрів (або керуючих змінних) вивчає теорія катастроф. В рамках цієї теорії розглядаються питання як технічного, соціологічного напрямків, так і економічного (наприклад, обвал фондового ринку).

Предметом теорії катастроф є вивчення залежності якісної природи розв'язків від значень параметрів, що є присутнім у

заданих рівняннях. Також предметом вивчення теорії катастроф є класифікація станів рівноваги градієнтних систем, які можуть проявлятися як раптові зміни – катастрофи – у поведженні динамічної системи. Основними припущеннями теорії катастроф є:

- система є динамічною, тобто її стан змінюється в часі;
- принцип максимального зволікання: система прагне зберігати свій стан якомога довше;
- поточний стан системи залежить від того, яким чином система прийшла в цей стан;
- траєкторії системи необоротні, тобто при зміні керуючих параметрів системи на протилежні, система не обов'язково прийде до початкового стану.

Відкриття того, що прості нелінійні моделі можуть демонструвати складну й хаотичну динаміку, підштовхнуло деяких економістів до того, щоб зацікавитися ще одним напрямком «нелінійної науки» – терією хаосу. Типові характерні риси поняття хаос:

- нелінійність (якщо процес лінійний, то він не може бути хаотичним);
- детермінізм (в основі явища хаосу лежать детерміновані, а не ймовірнісні, правила);
- чутливість до початкових умов (мала зміна в початковому стані системи може привести до радикально іншої поведінки в кінцевому стані);
- стійка нерегулярність (хаотичне явище характеризується прихованим порядком, що включає велику або нескінченну кількість нестійких періодичних проявів; цей прихований порядок формує інфраструктуру системи: хаотичний (дивний) атрактор; динаміка в хаотичному атракторі – ергодична).

5.5 Якісний аналіз соціально-економічних систем

Поведінка складних соціально-економічних систем супроводжується не тільки кількісними, але й якісними змінами. Якість характеризує цілісну нерозчленовану визначеність предметів

і явищ. Структура – це категорія, що характеризує розподіл взаємодії в просторі елементів, предметів і явищ, програму їхнього розвитку. Важлива особливість структури – цілісно-якісна відмінність від елементів, що входять до її складу. Структура тісно пов'язана з якістю. Зміна якості предметів у всіх випадках пов'язана з будовою структури складових їх елементів.

Розвиток може розглядатися як сукупна зміна у взаємозв'язку кількісних, якісних і структурних категорій системи. Кількісні зміни – це збільшення або зменшення складових частин цілого, що виражається збільшенням або зменшенням їх числових значень, які призводять за рахунок своєї зміни до якісного стрибка. Структурні зміни – це зміни складових частин, які зовсім не обов'язково повинні супроводжуватися збільшенням або зменшенням їхньої кількості. Навпаки, кількість складових частин може залишатися незмінною. Однак, структурні зміни також можуть призводити до якісного стрибка. Таким чином, можна вважати, що як кількісні, так і структурні зміни відіграють причинну роль у якісних змінах.

Якісні зміни – матеріальні процеси, які певним чином пов'язані з кількісними характеристиками матерії та енергії. Механізми якісних змін:

1. Перш за все предмети та явища можуть змінювати свою якість за рахунок кількісного додавання матерії та енергії в результаті взаємодії із зовнішнім середовищем. В економіці, наприклад, можна встановити залежність структури системи від кількості робочої сили та розміру основних фондів. На деякому визначеному рівні система стає неосяжною та відбувається розпад структури (наприклад виділення газової промисловості із нафтової). Якісні зміни в системі можуть відбуватися також у результаті перерозподілу (без порушення балансу) енергії та матерії всередині самої системи. Наприклад, в замкнених економічних системах спостерігається тенденція до максимізації певної цільової функції, яка може розглядатися як аналог фізичної ентропії. Все це, врешті-решт, призводить до нової якості системи.

2. Якісні зміни системи можуть бути результатом зміни якості підсистем (елементів), що складають структуру системи. В економічних системах при зміні виду підсистем (наприклад, автоматизація та комп'ютеризація процесів функціонування систем) можуть виникати нові якості.

Закон розвитку систем – деякий спосіб виразу стійкості зв'язків і відносин між предметами та явищами, а також стійкості структури (організації) самих цих предметів і явищ. Іншими словами, закон виражає собою не тільки порядок перетворень предметів і явищ у процесі їхнього розвитку, але й спосіб їхнього існування, характер їхньої внутрішньої організації.

Застосування якісної теорії до аналізу динамічних систем при вивченні соціально-економічних явищ та процесів є вкрай важливим аспектом аналізу та розуміння складних економічних явищ. Динамічна економічна система є математичним об'єктом, що відповідає реальній економічній системі, еволюція якої в часі на будь-якому часовому інтервалі однозначно визначається початковим станом. Таким математичним об'єктом може бути система диференціальних рівнянь. Еволюцію динамічної системи можна спостерігати в просторі станів системи. Диференціальні рівняння розв'язуються аналітично в явному вигляді вкрай рідко. Використання комп'ютерних засобів дає наближений розв'язок диференціальних рівнянь на скінченному часовому відрізку, що не дозволяє зрозуміти поведінку фазових траєкторій в цілому. Тому важливу роль набувають методи якісного дослідження диференціальних рівнянь.

Відповідь на питання про те, які режими поведінки можуть бути встановлені в даній системі, можна отримати з так званого фазового портрета системи – сукупності всіх її траєкторій, зображених у просторі фазових змінних (фазовому просторі). Серед цих траєкторій є деяке число основних, які і визначають якісні властивості системи. До них належать, перш за все, точки рівноваги, що відповідають стаціонарним режимам системи, і замкнені траєкторії (граничні цикли), що відповідають режимам періодичних коливань. Чи буде режим стійкий чи ні, можна судити за поведінкою сусідніх траєкторій: стійка рівновага або цикл притягує всі близькі траєкторії, нестійка відштовхує хоча б деякі з них.

Таким чином, фазова площа, розбита на траєкторії, дає легко осяжний "портрет" динамічної системи, вона дає можливість відразу, одним поглядом охопити всю сукупність рухів, які можуть виникнути при різних початкових умовах.

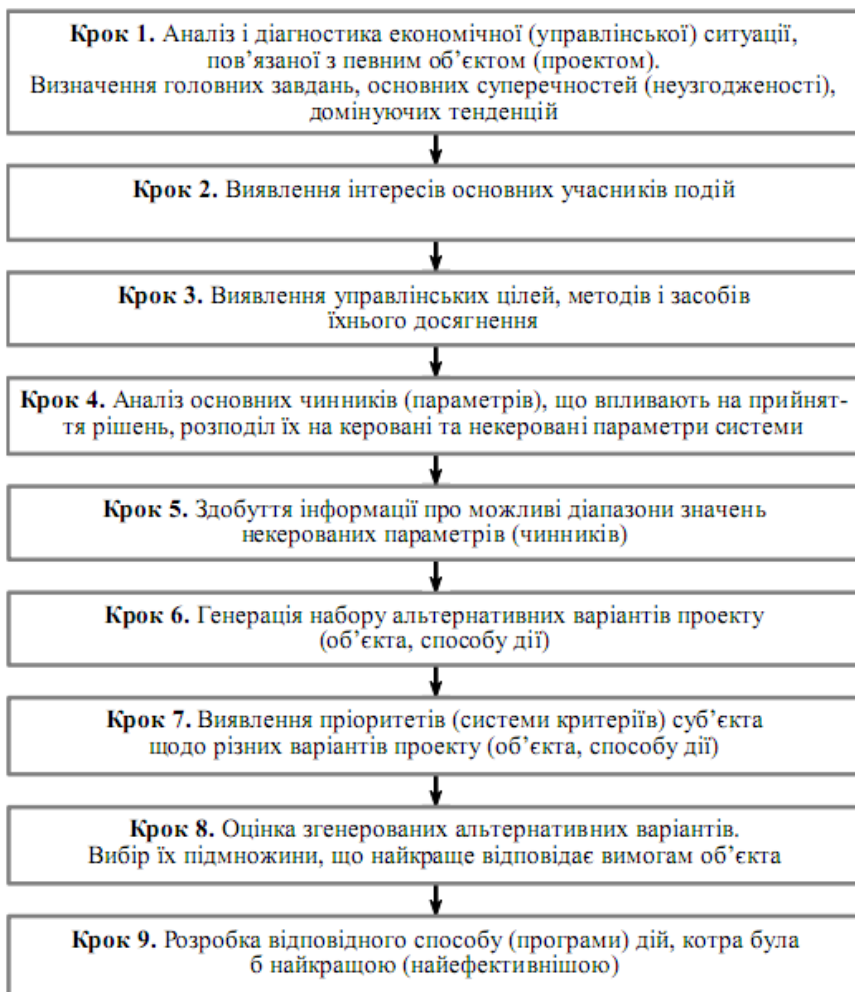
Завдання якісного методу – одержання якісного результату, тобто характерних рис усього явища відразу та, частково, – прогнозування явища. Математична частина якісного дослідження системи полягає у порівнянні фазового портрету з реальними соціально-економічними процесами або об'єктами разом із проведенням аналізу. При цьому немає необхідності проводити повний якісний аналіз існуючих систем рівнянь, оскільки якості реального економічного об'єкта накладають обмеження як на фазовий розв'язок, так і на рівняння. В деяких випадках виявляється достатнім лише визначення області стійкості, стану рівноваги та їх економічної інтерпретації.

Спираючись на якісний аналіз диференційного рівняння за допомогою фазового графіка та не розв'язуючи його, можна отримати досить глибоке розуміння поведінки його розв'язків. Наприклад, якщо маємо початкову умову, то можна сказати, як розв'язок буде поводитись із плином часу (зростати чи спадати), або, наприклад, до якого значення він буде збігатися.

Такий аналіз є дуже важливим, оскільки в реальності в економічних застосуваннях досить рідко вдається знайти явний розв'язок нелінійних диференційних рівнянь. В загальному випадку якісний аналіз спрямований на визначення точок рівноваги та умов стійкості розв'язків.

Якщо відійти від суто математичних аспектів проведення якісного аналізу динамічних систем, то можна побачити іншу сторону якісного аналізу соціально-економічних явищ та процесів, що полягає у визначенні основних чинників, параметрів, суб'єктів та об'єктів економічної системи і підтримки прийняття відповідних управлінських рішень. Адже якісний аналіз соціально-економічних систем та процесів є досить складним. Він вимагає ґрунтовних знань, досвіду та інтуїції у певній сфері економічної діяльності.

Пропонується така процедура (алгоритм) якісного аналізу соціально-економічних систем:



З точки зору управління складними економічними системами, якісний аналіз соціально-економічних явищ та процесів має декілька аспектів. *Перший аспект* пов'язаний з необхідністю порівнювати очікувані позитивні результати з можливими економічними, соціальними та іншими як сьогоднішніми, так і майбутніми, наслідками. *Другий аспект* пов'язаний з виявленням впливу рішень, які приймаються в умовах невизначеності, на інтереси суб'єктів економічного життя. Без урахування інтересів (зацікавленості) неможливі реальні якісні перетворення в соціально-економічному житті.

Тема 6. Нелінійні динамічні моделі економічних систем. Модель Солоу

1. *Модель Солоу як приклад односекторної моделі економіки. Припущення моделі. Модель Солоу з абсолютними показниками.*
2. *Модель Солоу з відносними показниками. Перехідний режим у моделі Солоу.*
3. *"Золоте правило" накопичення Солоу. Теорема про магістраль.*
4. *Розвиток моделі Солоу.*

6.1 Модель Солоу як приклад односекторної моделі економіки. Припущення моделі. Модель Солоу з абсолютними показниками

Типовим прикладом моделі економічного зростання є модель, яка була розроблена в 50-60-х рр. минулого століття лауреатом Нобелівської премії Робертом-Мертоном Солоу. Ця модель дає змогу дослідити, як основні чинники виробництва – праця, капітал, технологічні зміни – впливають на динаміку обсягу виробництва, коли економічна система перебуває у рівноважному сталому стані.

Перевагою моделі Солоу є розмежування цих чинників і поступове дослідження впливу кожного з них на процес довгострокового зростання національного доходу.

З огляду на значну складність нелінійних моделей макроекономіки для вивчення довготермінових тенденцій і чинників розвитку (трансформації) економіки часто використовуються малосекторні нелінійні моделі. Невелика кількість секторів дозволяє аналітично подати і проаналізувати на моделі розвиток економіки з адекватним урахуванням нелінійних залежностей обсягів випуску секторів від обсягів ресурсів за різних значень екзогенних параметрів і на підставі цього отримати деяку узагальнену картину економічного зростання. Так, зокрема, **модель Солоу** є *односекторною* моделлю економічного розвитку. У цій моделі економічна система розглядається як єдине ціле, виробляючи лише один узагальнений продукт, котрий може і споживатись, і інвестуватись. Модель досить адекватно відображає найважливіші макроекономічні аспекти процесу відтворення. Експорт та імпорт у явному вигляді не враховуються.

Стан економіки в моделі Солоу задається п'ятьма *ендогенними* змінними:

X – валовий суспільний продукт (ВСП),

C – фонд невиробничого споживання,

I – інвестиції,

L – кількість зайнятих,

K – виробничі фонди.

Окрім цього, в моделі фігурують такі *екзогенні* показники:

ν – річний темп приросту чисельності зайнятих,

μ – частка вибулих протягом року основних виробничих фондів,

a – коефіцієнт прямих витрат (частка проміжного продукту у ВВП),

ρ – норма накопичення (частка валових інвестицій у ВВП).

Робиться припущення, що ендогенні змінні змінюються з часом. Екзогенні змінні вважаються постійними. Вважається, що норма накопичення є керуючим параметром. Час t є неперервним і вимірюється в роках. Робиться припущення, що річний випуск у кожен момент часу визначається лінійно-однорідною неокласичною виробничою функцією від двох змінних (ресурсів) K та L :

$$X = F(K, L).$$

Темп приросту чисельності зайнятих:

$$\frac{\Delta L}{L} = \nu \Delta t, \text{ або } \frac{dL}{dt} = \nu L. \text{ Звідки } L = L_0 e^{\nu t}.$$

Зношеність фондів та інвестиції з розрахунку на рік дорівнюють μK та I відповідно, а протягом часу Δt – відповідно $\mu K \Delta t$, $I \Delta t$, тому приріст фондів упродовж цього часу: $\Delta K = -\mu K \Delta t + I \Delta t$, звідки отримаємо диференційне рівняння:

$$\frac{dK}{dt} = -\mu K + I, \quad K(0) = K_0.$$

Оскільки проміжний продукт становить aX , то валовий внутрішній продукт дорівнює $(1-a)X$.

Інвестиції становлять:

$$I = \rho(1-a)X.$$

Фонд споживання:

$$C = (1-\rho)(1-a)X.$$

Отримаємо таку **модель Солоу з абсолютними показниками**:

$$L = L_0 e^{\nu t}, \quad \frac{dK}{dt} = -\mu K + \rho(1-a)X, \quad K(0) = K_0,$$

$$X = F(K, L), \quad I = \rho(1-a)X, \quad C = (1-\rho)(1-a)X.$$

На рис. 14 наведена схема функціонування економіки за моделлю Солоу.

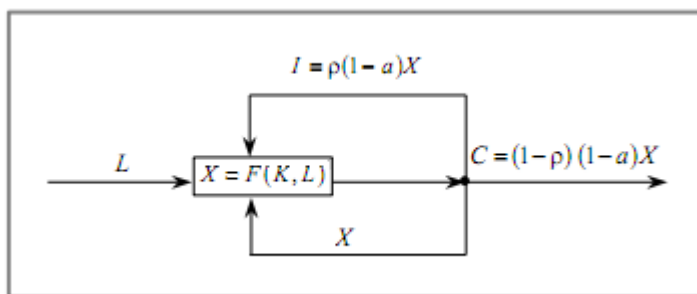


Рис. 14. Схема функціонування економіки за Солоу

6.2 Модель Солоу у відносних показниках. Перехідний режим у моделі Солоу

Введемо такі відносні показники:

$k = \frac{K}{L}$ – фондоозброєність; $x = \frac{X}{L}$ – суспільна продуктивність праці; $i = \frac{I}{L}$ – питомі інвестиції (на одного зайнятого); $c = \frac{C}{L}$ – середньодушове споживання (на одного зайнятого).

Модель Солоу набуває такої форми з **питомими (відносними) показниками**:

$$\frac{dk}{dt} = -\lambda k + \rho(1-a)f(k), \quad \lambda = \mu + \nu, \quad k(0) = k_0 = \frac{K_0}{L_0},$$

$$x = f(k), \quad i = \rho(1-a)f(k), \quad c = (1-\rho)(1-a)f(k).$$

Кожен абсолютний чи відносний показник змінюється з часом, тобто можна вести мову про траєкторію системи з абсолютними чи відносними показниками. Траєкторію називають *стаціонарною*, якщо показники не змінюються з часом:

$$k = k^0 = \text{const}, x = x^0 = \text{const}, i = i^0 = \text{const}, c = c^0 = \text{const}.$$

Як неважко помітити, встановлення фондоозброєності на деякому постійному рівні k^0 приводить до виходу на стаціонарну траєкторію.

На стаціонарній траєкторії $\frac{dk^0}{dt} = 0$, тому

$$-\lambda k^0 + \rho(1-a)f(k^0) = 0,$$

або
$$\lambda k^0 = \rho(1-a)f(k^0).$$

Оскільки функція $F(K, L)$ – неокласична, то $f'(0) = 0, f'' > 0, f''' < 0$.

Нехай k^0 – стаціонарний рівень фондоозброєності, \widehat{k} – рівень фондоозброєності, при якому швидкості зростання функцій $g_1(k) = \lambda k$ і $g_2(k) = \rho(1-a)f(k)$ є рівними, тобто \widehat{k} – корінь рівняння:

$$\rho(1-a)f'(\widehat{k}) = \lambda.$$

Перехідний режим у моделі Солоу.

Якщо $k_0 = k^0$, то економіка вже перебуває на стаціонарній траєкторії і може зійти з неї лише за зміни зовнішніх умов (встановлення іншого значення норми накопичення чи переходу до нових технологій, що супроводжується зміною функції $F(K, L)$). Якщо $k_0 \neq k^0$, то в економіці відбуватиметься перехідний процес, який (гіпотетично) завершиться встановленням стаціонарного режиму.

Маємо три типи перехідного процесу стосовно фондоозброєності:

1. якщо $k_0 < k^0$ – спочатку має місце прискорене зростання фондоозброєності, яке після досягнення значення \widehat{k} змінюється сповільненим зростанням;

2. якщо $\hat{k} < k_0 < k^0$ – сповільнене зростання фондоозброєності;
3. якщо $k_0 > k^0$ – сповільнене зниження фондоозброєності («проїдання» фондів).

На рис. 15 показані усі три типи переходу фондоозброєності до стаціонарного значення k^0 (криві 1–3 відповідно). Аналогічно змінюється й решта відносних показників (x , i , c), оскільки вони пропорційні до k^0 .

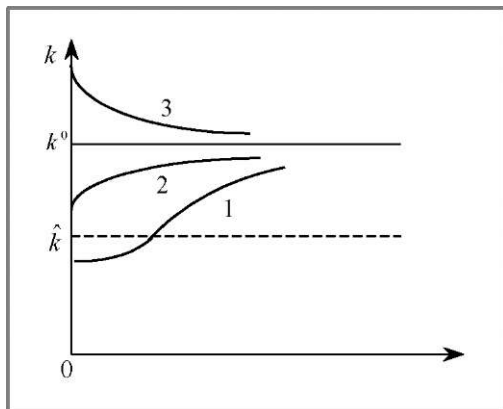


Рис. 15. Типи переходу до стаціонарного стану

Якщо $\hat{k} < k_0 < k^0$, то має місце досить короткотривалий перехідний процес. Тобто теоретично перехідний процес закінчується через нескінченно великий проміжок часу, але практично через відносно невеликий термін поточне і стаціонарне значення показника різнитимуться лише на кілька відсотків.

6.3 "Золоте правило" нагромадження Солоу.

Теорема про магістраль

Сутність «золотого» правила нагромадження в моделі Солоу полягає в тому, що, обираючи належним чином норму нагромадження, можна максимізувати середньодушове споживання в стаціонарному режимі, а отже, і через відносно невеликий проміжок часу після поточного перехідного процесу. Найбільше середньодушове споживання досягатиметься тоді, коли $\rho^* = \alpha$,

тобто норма нагромадження повинна дорівнювати еластичності випуску за фондами.

Пропорції суспільного відтворення, при яких фонд споживання на одиницю витраченої робочої сили (можна сказати, оплата одиниці робочої сили) максимальний, задаються умовою рівності оплати робочої сили граничній продуктивності праці:

$$c = \frac{\partial F}{\partial L}.$$

«Золоте правило зростання» Солоу можна інтерпретувати як рівновагу на ринку робочої сили.

Процес суспільного відтворення, пропорції якого відповідають «золотому правилу» Солоу, у математичній економіці називаються **магістраллю**. Це можна інтерпретувати таким чином. Якщо вважати, що в економіці діють ринкові механізми регулювання, то в кожний момент часу на магістралі виконуються умови рівноваги на ринках. Еволюціонуючи на магістралі, економіка майже неперервно переходить з одного стану рівноваги в інший. Проте питання чи можуть ринкові механізми регулювання зрушити структуру економіки до пропорцій зростання по магістралі – залишається відкритим.

Головний результат теорії економічного зростання називається **теоремою про магістраль**. На якісному рівні цей результат формулюється так: можна по-різному визначати критерії якості траєкторій розвитку економіки, але на великих проміжках часу оптимальне зростання практично збігається з магістраллю. Отже, магістраль можна вважати деякою "динамічною" характеристикою економічної системи, що відображає її ефективну структуру. Залишається тільки знайти ті механізми самоорганізації, які зможуть створити в системі таку структуру.

6.4 Розвиток моделі Солоу

Для подальшого розвитку моделі Р. Солоу по черзі знімаються два обмеження: незмінність чисельності населення та його зайнятої частини (їх динаміка передбачається однаковою) і відсутність технічного прогресу.

Припустимо, що чисельність населення зростає з постійним темпом n . Це новий чинник, що впливає разом з інвестиціями і

витратами на фондоозброєність. Зростання населення, аналогічно до витрат, знижує фондоозброєність, хоча й інакше – не через зменшення готівкового запасу капіталу, а шляхом розподілу його між збільшеним числом зайнятих. В даних умовах необхідно такий обсяг інвестицій, який не тільки б покрити вибуття капіталу, але й дозволив би забезпечити капіталом нових працівників в попередньому обсязі. Добуток nk показує, скільки потрібно додаткового капіталу з розрахунку на одного зайнятого, щоб капіталоозброєність "нових" працівників була на тому ж рівні, що і "старих".

У стійкому стані економіки капітал і випуск на одного зайнятого, тобто фондоозброєність (k) і продуктивність праці (x) залишаються незмінними. Та щоб фондоозброєність залишалася постійною і при зростанні населення, капітал повинен зростати з тим же темпом, що і населення, тобто

$$\frac{AX}{X} = \frac{AL}{L} = \frac{AK}{K} = n.$$

Таким чином, зростання чисельності населення стає однією з причин неперервного економічного зростання в умовах рівноваги.

Проте, із збільшенням темпу зростання чисельності населення зростає кутовий коефіцієнт кривої, що призводить до зменшення рівноважного рівня фондоозброєності, отже, до падіння.

Облік в моделі Р. Солоу технічного (технологічного) прогресу видозмінює вихідну виробничу функцію. Передбачається, що має місце працезберігаюча форма технологічного прогресу. Тоді виробничу функцію буде представлено як

$$X = F(K, LE),$$

де K – загальний обсяг капіталу; LE – чисельність умовних одиниць праці з постійною ефективністю k .

Чим вища ефективність праці, тим більше продукції може бути вироблено певною кількістю працівників. Пропонується, що технологічний прогрес здійснюється шляхом зростання ефективності праці з постійним темпом g . Зростання ефективності праці тут збігається із зростанням чисельності зайнятих. Якщо чисельність зайнятих (L) зростає з темпом n , а ефективність праці (E) зростає з темпом g , то LE буде збільшуватися з темпом $n + g$.

Включення технічного (технологічного) прогресу дещо змінює і аналіз стану стійкої рівноваги, хоча хід міркувань зберігається. Якщо визначити k' як кількість капіталу в розрахунку на одиницю праці з постійною ефективністю, то

$$k' = \frac{K}{LE}, \quad x' = \frac{X}{LE},$$

тобто, результати зростання ефективних одиниць праці аналогічні до зростання чисельності зайнятих (збільшення кількості одиниць праці з постійною ефективністю знижує величину капіталу, що припадає на одну таку одиницю). У стані стійкої рівноваги рівень фондоозброєності \hat{k} врівноважує, з одного боку, вплив інвестицій, що підвищують фондоозброєність, а з іншого – вплив видатків, росту числа зайнятих та технологічного прогресу, що знижують рівень капіталу в розрахунку на ефективну одиницю праці:

$$sf(k') = (d + n + g)k'.$$

У стійкому стані при наявності технологічного прогресу загальний обсяг капіталу (K) і випуску (X) будуть рости з темпом $(n + g)$. Але, на відміну від випадку зростання населення, тепер будуть рости з темпом g фондоозброєність (k) і випуск $\frac{CX}{L}$ з розрахунку на одного зайнятого. Останнє може служити основою для підвищення добробуту населення. Технологічний прогрес в моделі Солоу – єдина умова неперервного зростання рівня життя, оскільки лише за його наявності спостерігається стійке зростання виробництва на душу населення (x).

Таким чином, в моделі Солоу знайдено пояснення механізму неперервного економічного зростання в режимі рівноваги при повній зайнятості ресурсів.

Як відомо, в кейнсіанських моделях норма заощадження задавалася екзогенно і визначала величину рівноважного темпу зростання доходу. У неокласичній моделі Р. Солоу при будь-якій нормі заощадження ринкова економіка прагне до відповідного стійкого рівня фондоозброєності (\hat{k}) і збалансованого зростання, коли дохід і капітал зростають з темпом $(i + g)$.

Тема 7. Модель трисекторної економіки

Агреговані моделі економіки використовують для аналізу основних тенденцій розвитку економіки протягом тривалого періоду: п'яти, десяти, двадцяти років. У таких моделях економіка описується за допомогою невеликої кількості показників. У разі дослідження довгострокових тенденцій розвитку економіки деталізувати модель не має особливого сенсу, оскільки деталізована модель дуже складна через потребу прогнозування значень великої кількості параметрів на довгострокову перспективу, що на практиці важко здійснити.

Справді, коли йдеться про опис економіки країни з урахуванням її багатогалузевої структури, доводиться прогнозувати можливості зміни технології виробництва та відповідні зміни у споживанні сировини і енергії. Тому, будуючи моделі довгострокового аналізу, намагаються використовувати в них щонайменше вхідної інформації.

Розглянемо одну з найбільш агрегованих моделей – узагальнення моделі Солоу, а саме – трисекторну модель економіки, в якій виокремлюють:

- нульовий сектор, що виробляє предмети праці;
- перший сектор, в якому створюються засоби праці;
- другий сектор, в якому виробляються споживчі товари.

До нульового (матеріального) сектору відносять такі галузі: добувну промисловість, електроенергетику, нафтопереробну галузь, металургію, промислову хімію тощо.

До першого (виробничого) сектору – машинобудівну галузь, металообробку, промислове будівництво.

До другого (споживчого) сектору – переробку сільськогосподарської продукції, легку та харчову промисловість, деревообробку, побутову хімію, пасажирський транспорт, торгівлю предметами споживання, громадський зв'язок тощо.

Виробничі можливості кожного із секторів задаються у вигляді неокласичних виробничих функцій:

$$Y_i = F_i(K_i, L_i), \quad i = 0, 1, 2,$$

де Y_i , K_i , L_i — випуск, основні фонди та кількість зайнятих у відповідних секторах.

Стан економіки в моделі Солоу задається ендогенними змінними, до яких належать: Y – валовий внутрішній продукт (ВВП); C – фонд невиробничого споживання; I – інвестиції; L – кількість зайнятих; K – фонди (капітал).

Окрім цього в моделі застосовуються такі екзогенні змінні: v – річний темп приросту зайнятих ($-1 < v < 1$); μ_i – частка вибулих протягом року виробничих фондів ($0 < \mu_i < 1$); ρ – норма нагромадження (частка валових інвестицій у ВВП, $0 < \rho < 1$).

Графічну модель трисекторної економіки наведено на рис. 16.

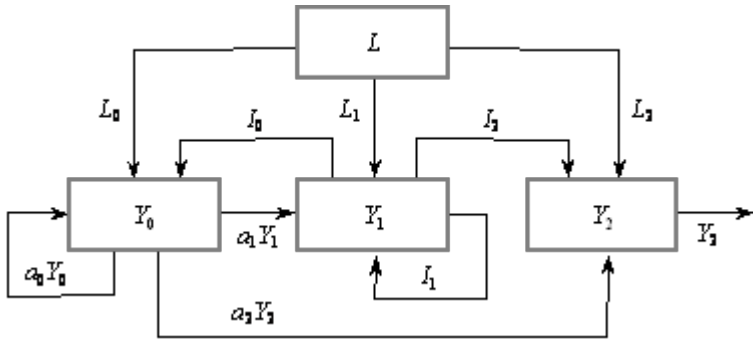


Рис. 16. Модель трисекторної економіки

Таким чином, використовуючи основні передумови моделі Солоу, можна отримати трисекторну модель економіки:

$$L = L(0)e^{vt} \text{ (кількість зайнятих);}$$

$$L_0 + L_1 + L_2 = L \text{ (розподіл тих, хто працює за секторами);}$$

динаміка продукції:

$$Y_1 = I_0 + I_1 + I_2 \text{ (розподіл продукції першого сектору);}$$

$$Y_0 = a_0 Y_0 + a_1 Y_1 + a_2 Y_2 \text{ (розподіл продукції матеріального сектору);}$$

де a_i – коефіцієнти повних матеріальних витрат за секторами.

З відносними показниками ця модель набуває вигляду:

$$\sum_{i=0}^2 \theta_i = 1, \theta_i > 0,$$

$$\sum_{i=0}^2 s_i = 1, s_i > 0,$$

$$\frac{dk_i}{dt} = \frac{\theta_1 s_1}{\theta_i} f_1'(k_1) - \lambda_i k_i, k_i(0) = k_{i0}, \lambda_i = \nu_i + \mu_i,$$

$$(1 - \alpha_0) \theta_0 f_0'(k_0) = \alpha_1 \theta_1 f_1'(k_1) + \alpha_2 \theta_2 f_2'(k_2),$$

де $\theta_i = L_i/L$ – частка зайнятих у відповідних секторах;

$s_i = I_i/Y_i$ – частка інвестицій в i -й сектор у загальному обсязі інвестицій;

$$f_i(k_i) = \frac{Y_i}{L_i} = F_i\left(\frac{K_i}{L_i}, 1\right) \quad \text{– продуктивність праці в } i\text{-му секторі.}$$

Останнє рівняння моделі можна подати в іншій формі:

$$(1 - \alpha_0) y_0 = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2,$$

де $y_i = Y_i/L$ – продуктивність i -го сектора, тобто випуск продукції i -го типу на одного зайнятого в економіці, причому $y_i = \theta_i f_i(k_i)$.

В цій моделі параметри $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \mu_0, \mu_1, \mu_2$ ендогенні, що вважаються сталими, а $\theta_0, \theta_1, \theta_2, s_0, s_1, s_2$ – параметри управління.

Тема 8. Стохастичні моделі економічної динаміки

1. *Формалізація стохастичних динамічних моделей.*
2. *Приклад мультиплікативної стохастичної моделі динаміки фінансового ресурсу.*

8.1 Формалізація стохастичних динамічних моделей

Стохастична модель економічної системи чи процесу відображає зв'язки між вимірними величинами (залежності ендогенних змінних від низки інших ендогенних змінних і/чи екзогенних змінних), причому хоча б деякі з цих зв'язків мають імовірнісний характер і/чи хоча б деякі з величин є випадковими. Самі зв'язки формалізуються як рівняння, нерівності чи умови оптимізації функцій ендогенних змінних. Стохастичні моделі економічної динаміки враховують випадковість та невизначеність,

що притаманні динамічним економічним процесам та системам і дозволяють більш адекватно описати існуючі складні економічні явища та процеси. Появі стохастичних моделей сприяло нагромадження статистичних даних, що дало дослідникам можливість працювати не лише з абстрактними моделями, але й з реальними параметрами і результатами економічних процесів. З'явилась можливість не тільки корегувати теоретичні моделі, але й враховувати чинники, що мають випадковий характер. У рівняннях стохастичних моделей відсутня жорстка функціональна залежність між параметрами (змінними), або функціональний зв'язок враховує випадкові події.

Врахування стохастичних складових дозволяє отримати нові моделі, що краще відображають реальні явища та процеси в економіці. Розглянемо, наприклад, перехід від функціонального рівняння до стохастичного на прикладі макроекономічної моделі неокласиків. Динамічна функція сукупного попиту має такий вигляд:

$$y_t = y_{t-1} + a\Delta A_t + c\Delta\pi_t^e + h\widehat{M}_t - h\pi_t,$$

де y_t, y_{t-1} – обсяги сукупного попиту за поточний та минулий періоди відповідно; A_t – незалежний від реальних доходів попит на блага, включаючи державні витрати; π_t – темп приросту цін у період t ; π_t^e – очікуваний темп приросту цін у період t ; $\widehat{M}_t \equiv \frac{M_t - M_{t-1}}{M_{t-1}}$ – темп приросту грошової маси; a, c, h – коефіцієнти.

В моделі нових класиків припускається, що економічні суб'єкти приймають рішення про обсяги сукупного попиту та сукупної пропозиції на основі прогнозу цін у відповідності до концепції раціональних очікувань. В результаті модель стає стохастичною, оскільки в ній з'являється випадкова величина. Сукупний попит в моделі представлений стохастичною динамічною функцією:

$$y_t^D = A_t + h(\widehat{M}_t - \pi_t) + U_t,$$

де U_t – стохастична змінна з нульовим очікуванням.

Стохастичні моделі економічної динаміки часто передбачають використання регресійних рівнянь для моделювання відповідних економічних процесів. Генерація стохастичних регресійних рівнянь здійснюється на основі часових рядів за допомогою класичного методу найменших квадратів і автокореляційної функції першого порядку, поряд з іншими використовуються лагові та фіктивні змінні.

Стохастичні динамічні моделі досить вдало використовуються для опису та моделювання фінансових потоків. Розглянемо основні положення стохастичного моделювання фінансових потоків на прикладі деякої фінансової установи, наприклад, банку.

Як зовнішні умови, що впливають на діяльність фінансової інституції (наприклад, комерційного банку), так і процеси, що розвиваються у самій фінансовій установі, є результатом складної і неоднозначної взаємодії багатьох чинників, причин, залежностей, багато з яких має випадкову (ймовірнісну) і/чи нечітку (розпливчасту) природу. Наслідком цього є те, що робота фінансової установи значною мірою обтяжена невизначеністю та зумовленим нею ризиком.

Поточний стан банку (чи іншої фінансової інституції), можна описати за допомогою вектора характеристик: $x = (x_1, \dots, x_n)$. Стан окремого j -го ресурсу ототожнюється з деяким елементом множини невід'ємних дійсних чисел, а стан банку загалом можна подати деякою точкою n -вимірного евклідового простору. Можуть створюватися також певні похідні (вторинні) характеристики $y = (y_1, \dots, y_n)$, що є функцією від вектора x : $y = f(x)$. Для врахування чинника часу потрібно задати деяку множину T , елементи котрої $t \in T$ називають моментами часу. Стан банку загалом – це значення векторної функції часу: $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$, а траєкторія системи $\{x(t)\}_{t \in T}$ – деяка крива (гіперповерхня) в n -вимірному просторі. Динаміка банку в цілому може бути описана за допомогою векторного ресурсного потоку $\dot{x}(t) = (\dot{x}_1(t), \dots, \dot{x}_n(t))$, який задає вектор швидкості зміни стану досліджуваного об'єкта в просторі. Формується модель, яка

ґрунтується на відображенні банку як системи (вектора) первинних ресурсних потоків:

$$\dot{x}(t) = (\dot{x}_1(t), \dots, \dot{x}_n(t)), \quad t \in (T_-, T_+).$$

Часто виникає необхідність у переході від «точкового» подання до «інтегрального» опису поведження j -ї характеристики на певному заданому інтервалі часу $(t_-, t_+) \subseteq (T_-, T_+)$. Для цього вводиться поняття середнього значення характеристики (j -ї компоненти вектора стану) на інтервалі (t_-, t_+) :

$$\tilde{x}_j(t_-, t_+) = \frac{1}{t_+ - t_-} \int_{t_-}^{t_+} \dot{x}_j(t) dt, \quad \text{а також середнього потоку:}$$

$$\tilde{\dot{x}}_j(t_-, t_+) = \frac{\dot{x}_j(t_+) - \dot{x}_j(t_-)}{t_+ - t_-}, \quad \text{що визначає середню швидкість зміни}$$

обсягу j -го ресурсу за інтервал часу (t_-, t_+) .

Моделі динаміки ресурсів, що ґрунтуються на неперервному поданні часових інтервалів, не повною мірою відповідають процесам, які реалізуються на практиці. Для переходу від неперервного часу до дискретного, що адекватніше враховує умови діяльності фінансово-економічних інститутів, може використовуватися *модель Хікса*. Згідно з цією концепцією скінченний відрізок часу $[t_-, t_+]$, впродовж якого спостерігається функціонування досліджуваної системи, поділяється на K рівних частин (відрізків та напівінтервалів) довжиною δ :

$$[t_-, t_- + \delta), [t_- + \delta, t_- + 2\delta), \dots, [t_- + (K - 1)\delta, t_+],$$

де $t_- + K\delta = t_+$.

Отже, отримуємо дискретний «економічний» час τ , що набуває значення $0, 1, \dots, k, \dots, K$. Із впровадженням дискретного часу відбувається фіксація відносно нього моментів векторів стану: $x(\tau) = (x_1(\tau), \dots, x_n(\tau))$ та векторів ресурсних потоків: $\dot{x}(\tau) = (\dot{x}_1(\tau), \dots, \dot{x}_n(\tau))$.

Наступний крок у процесі вдосконалення розглядуваного класу моделей – урахування в них чинників невизначеності. Під випадковим (стохастичним) процесом (випадковою функцією часу)

розуміють функцію $x(t)$, котра може мати ту чи іншу конкретну реалізацію (траєкторію) з деякої фіксованої множини можливих траєкторій.

Отже, в умовах невизначеності моделлю динаміки стану економіки може виступати векторний випадковий процес $\tilde{x}(t) = (\tilde{x}_1(t), \dots, \tilde{x}_n(t))$, кожна компонента $\tilde{x}_j(t)$ якого описує стохастичну динаміку j -ї характеристики (ресурсу) економіки. Аналогічно чинник невизначеності, наявний у системі ресурсних потоків, можна описати у формалізованому вигляді за допомогою векторного випадкового процесу:

$$\tilde{x}(t) = (\tilde{x}_1(t), \dots, \tilde{x}_n(t)), \quad t \in (T_-, T_+).$$

Дослідження, спрямовані на змістовний аналіз закономірностей функціонування банків, мають спиратися на дані та гіпотези, що конкретизують тип і параметри випадкових величин і функцій.

8.2 Приклад мультиплікативної стохастичної моделі динаміки фінансового ресурсу

Пропонована модель ґрунтується на гіпотезі щодо можливості відстеження обсягу досліджуваного ресурсу через дискретні рівновеликі проміжки часу t . Позначимо через x_t обсяг ресурсу в момент часу t , а x_0 – обсяг у початковий момент часу (припустимо, що $x_0 > 0$). Припустимо також, що перехід обсягу ресурсу, який визначається дійсним числом $x_{t-1} > 0$ у момент часу $t = i - 1$ до ресурсу обсягом $x_i > 0$, що відповідає моменту часу $t = i$, можна описати співвідношенням $x_i = \alpha_i x_{i-1}$, де α_i – невід'ємний коефіцієнт елементарного переходу від x_{t-1} до x_t , $i = 1, \dots, n$. Тоді

$$x_n = x_0 \prod_{i=1}^n \alpha_i.$$

У частковому випадку, коли всі коефіцієнти елементарних переходів є однаковими ($\alpha_i = \alpha > 0$, $i = 1, \dots, n$), виконується рівність:

$$x_n = x_0 \alpha^n = x_0 e^{n \ln \alpha},$$

що вказує на експоненційну залежність обсягу ресурсу від часу. Тому $x_n \rightarrow \infty$, якщо $\alpha > 1$ і $x_n \rightarrow 0$, якщо $\alpha < 1$.

Якщо значення спостережень $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ інтерпретувати як реалізації випадкових величин $\tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_n$, то отримаємо таку стохастичну мультиплікативну модель динаміки ресурсу з дискретним часом:

$$\tilde{x}_n = x_0 \prod_{i=1}^n \tilde{\alpha}_i,$$

де \tilde{x}_n – випадкова величина обсягу ресурсу в момент $t = n$.

Припустимо, що всі випадкові коефіцієнти елементарних переходів є незалежними і кожен з них має логарифмічно-нормальний закон розподілу ($\tilde{\alpha}_i \in L_n(\mu_i, \sigma_i^2)$), де μ_i, σ_i^2 – відповідно математичне сподівання та дисперсія логнормально розподіленої випадкової величини $\tilde{\alpha}_i$:

$$M(\ln \tilde{\alpha}_i) = \mu_i, \quad D(\ln \tilde{\alpha}_i) = \sigma_i^2.$$

Функція щільності розподілу $\tilde{\alpha}_i$:

$$f_{\tilde{\alpha}_i}(x) = \frac{1}{x\sigma_i\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - \mu_i)^2}{2\sigma_i^2}}$$

Математичне сподівання: $m_i = M(\tilde{\alpha}_i) = \int_0^{\infty} x f_{\tilde{\alpha}_i}(x) dx = e^{\mu_i + \frac{\sigma_i^2}{2}}$.

Другий момент: $M(\tilde{\alpha}_i^2) = \int_0^{\infty} x^2 f_{\tilde{\alpha}_i}(x) dx = e^{2\mu_i + 2\sigma_i^2}$.

Дисперсія: $S_i^2 = D(\tilde{\alpha}_i^2) = M(\tilde{\alpha}_i^2) - m_i^2 = e^{2\mu_i + 2\sigma_i^2} - e^{2\mu_i + \sigma_i^2}$.

Знайдемо тепер функцію розподілу випадкового коефіцієнта

$$\tilde{\alpha}_{1,n} = \prod_{i=1}^n \tilde{\alpha}_i.$$

Очевидно, що в цьому разі коефіцієнти $\tilde{\alpha}_{1,n}$ також мають логарифмічно-нормальний закон розподілу ($\tilde{\alpha}_{1,n} \in L_n(\mu_i, \sigma_i^2)$) з

$$\text{параметрами } \mu = \sum_{i=1}^n \mu_i, \quad \sigma^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2.$$

Звідси легко отримати вираз для математичного сподівання:

$$m_{1,n} = M(\tilde{\alpha}_{1,n}) = e^{\sum_{i=1}^n \mu_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sigma_i^2},$$

другого початкового моменту: $M(\tilde{\alpha}_{1,n}^2) = e^{2 \sum_{i=1}^n \mu_i + 2 \sum_{i=1}^n \sigma_i^2}$

та дисперсії: $S_{1,n}^2 = e^{2 \sum_{i=1}^n \mu_i + 2 \sum_{i=1}^n \sigma_i^2} - e^{2 \sum_{i=1}^n \mu_i + \sum_{i=1}^n \sigma_i^2}$.

Отримаємо також вираз для випадкової величини \tilde{x}_n : $\tilde{x}_n = x_0 \tilde{\alpha}_{1,n}$.

Для прогнозування обсягу ресурсу на момент часу $t=n$ можна використати математичне сподівання \tilde{m}_n випадкової величини \tilde{x}_n :

$$\tilde{m}_n = M(\tilde{x}_n) = x_0 M(\tilde{\alpha}_{1,n}) = x_0 m_{1,n}.$$

Точність такого прогнозу природно оцінити за допомогою середньоквадратичного відхилення:

$$S_n = \sqrt{D(\tilde{x}_n)} = x_0 \sqrt{D(\tilde{\alpha}_{1,n})} = x_0 S_{1,n},$$

яке можна використати для побудови довірчого інтервалу:

$$[\tilde{m}_n - \gamma S_n, \tilde{m}_n + \gamma S_n].$$

Щодо можливих значень прогнозованої величини ресурсу в момент $t=n$ коефіцієнт $\gamma > 0$ обирається так, щоб забезпечити задану ймовірність попадання значень випадкової величини ресурсу \tilde{x}_n у відрізок $[\tilde{m}_n - \gamma S_n, \tilde{m}_n + \gamma S_n]$ або ймовірність $\alpha = 1 - \gamma$ (ризик) того, що випадкова величина \tilde{x}_n сягне за межі вказаного відрізка.

Побудована мультиплікативна стохастична модель визначає достатню точність прогнозів на обмежений часовий період прогнозування, що характеризується незмінністю умов. Звідси впливає актуальність задачі щодо розроблення методів

оперативного та ефективного визначення моменту зміни чинників, які впливають на динаміку ресурсу (момент зміни значень μ , σ^2). Вона може бути розв'язана із врахуванням результатів моніторингу (постійного відстежування) значень математичного сподівання $m_i = M(\tilde{\alpha}_i)$ та дисперсії $S_i^2 = D(\tilde{\alpha}_i^2)$ випадкових коефіцієнтів елементарного переходу $\tilde{\alpha}_i$, $i = 1, \dots, n$. Розв'язання описаної задачі отримало назву моніторингу стохастичної динаміки фінансового ресурсу комерційної установи, що також належить до класу стохастичних моделей економічної динаміки.

Тема 9. Моделі економічних змін та їх аналіз

Еволюційна теорія економічних змін передбачає, що наявні та допустимі технології підприємств, а також відповідні правила прийняття рішень трактуються як відображення «режимів» (розпорядків, заведених порядків, рутин), які історично склалися на даний момент часу та якими керуються фірми. Застосовувані фірмами (підприємствами) правила прийняття рішень утворюють базису робочу концепцію еволюційної теорії.

Розрізняють три класи «режимів».

Перший пов'язаний з тим, що робить фірма в кожний момент часу за заданого парку обладнання та інших чинників виробництва, обсяг котрих неможливо легко збільшити протягом короткого терміну. Ці «режими», що управляють короткотерміновою поведінкою, називають «функціональними характеристиками».

Другий – множина «режимів» – визначає стратегію та необхідність збільшення чи зменшення основного капіталу фірми від одного періоду до другого. Вважається, що фактична інвестиційна поведінка здійснюється згідно з деяким прогнозованим зразком, що суттєво відрізняється від періоду до періоду. Яке саме рішення буде прийнято, ймовірно, суттєво залежить від співвідношення між обсягами інвестиційного проекту і результатами поточної господарської діяльності фірми. В еволюційній теорії цей спектр реалістичних можливостей відповідає діапазону, в котрому варіюється роль елементів випадковості у формалізації процесу прийняття інвестиційних

рішень. Правило інвестування налаштоване на рентабельність фірми з урахуванням допустимого ступеня ризику.

Третій – це «режими», дія котрих з плином часу модифікує різні аспекти функціональних характеристик фірм. Мається на увазі перегляд того, чим займається фірма, і навіть радикальна зміна діяльності фірми, її призначення.

Ці, керовані «режимами», процеси зміни «режимів» моделюються як «пошук». Тактика пошуку характеризується заданням розподілу ймовірностей того, що буде знайдено в результаті пошуку як функція від низки змінних, які, у свою чергу, можуть бути функціями від розмірів фірми.

Головні інтереси еволюційної теорії пов'язані з динамічним процесом, за допомогою якого спільно визначаються з часом зразки поведінки фірм і наслідки такої поведінки для певного ринку.

Пошук і відбір є двома одночасно наявними і взаємодіючими компонентами еволюційного процесу економічних змін. Під спільним впливом пошуку й відбору фірми розвиваються з часом, одночасно ситуація в галузі в кожний період має в собі зародки ситуації, що реалізується в ній у наступному періоді.

Ілюстрацією моделі економічних змін може бути *часткова модель економічного відбору*. Розглянемо відбір з двох різних видів «режимів». Один з них – «технологія», котру застосовує фірма. Другий – «правило прийняття рішень», яке визначає коефіцієнт використання виробничих потужностей (рівень випуску).

Маємо деяку (гіпотетичну) галузь, яка випускає один однорідний продукт. У всіх фірмах галузі наявна одна й та ж множина технологічних альтернатив (перший «режим») виробництва їхнього продукту. Усі можливі технології характеризуються постійними коефіцієнтами витрат і постійним ефектом масштабу. В усіх технологіях однаковим є співвідношення випуску продукції і виробничих потужностей (основного капіталу). Нехай для спрощення це відношення дорівнюватиме одиниці. Але технології різняться між собою змінними витратами. Припустимо, що у кожний момент часу фірма застосовує лише одну технологію.

Другий «режим», що його використовує фірма, — правило використання виробничих потужностей. Таке правило поєднує

ступінь використання виробничих потужностей з відношенням ціни продукту до змінних питомих витрат виробництва:

$$q = \alpha \left(\frac{P}{c} \right) k,$$

де P і c – відповідно ціна продукту і змінні питомі витрати виробництва, q , k – відповідно випуск і капітал (виробничі потужності).

Припустимо, що функція $\alpha(\cdot)$ – неперервна, монотонно не спадна, додатна за достатньо великих значень аргументу та задовольняє нерівність $0 < \alpha(\cdot) < 1$.

Правило використання потужностей можна інтерпретувати як таке, що характеризує показник прибутку у відсотках до змінних витрат, який є необхідним для того, щоб стимулювати фірму відповідним чином діяти за різних рівнів використання виробничих потужностей.

Припускається гіпотеза, що чинники виробництва, які постачаються в галузь, є абсолютно еластичними, ціни всіх чинників додатні і постійні на всьому проміжку часу здійснення аналізу. Отже, всі технології можна охарактеризувати і впорядкувати згідно зі змінними питомими витратами виробництва.

За будь-якої технології загальні питомі витрати виробництва перебувають у обернено-пропорційній залежності від рівня використання виробничих потужностей. Припустимо, що існує єдина найкраща технологія із змінними питомими витратами виробництва c . Справедливою є гіпотеза, що жодне інше правило не може переважити правило, виокремлене певною технологією:

$$\left\{ \begin{array}{l} q = 0, \quad \text{якщо } \frac{P}{c} < 1; \\ 0 \leq q \leq k, \quad \text{якщо } \frac{P}{c} = 1; \\ q = k, \quad \text{якщо } \frac{P}{c} > 1. \end{array} \right.$$

Галузі відповідає строго спадна неперервна функція попиту, яка виражає залежність ціни виробленого продукту від загального обсягу випуску. Ця функція є визначеною для всіх невід'ємних

обсягів випуску. Припускається, що коли загальний обсяг випуску галузі досить малий, то деяка технологія і деяке правило використання виробничих потужностей принесуть додатний прибуток. Якщо ж випуск галузі є досить великим, то жодна суперпозиція технологій і правил використання потужностей не буде прибутковою.

Формально систему можна охарактеризувати так. Нехай усі виробничі потужності використовують на фірмах однаково технологію і функціонують згідно з однаковими правилами щодо використання потужностей. Тоді стан деякої фірми i , $i = 1, \dots, M$ можна охарактеризувати змінними: c_{it} , a_{it} , k_{it} , де c_{it} – змінні питомі витрати i -ї фірми в період t ; a_{it} – функція, що характеризує вплив відношення ціни продукту до питомих витрат виробництва i -ї фірми в період t ; k_{it} – виробничі потужності i -ї фірми в період t . Стан усіх M фірм у період t (загалом) визначає короткотермінову функцію пропозиції для цього періоду (t):

$$q_t = \sum_{i=1}^M q_{it} = \sum_{i=1}^M \alpha_{it} \left(\frac{P_t}{c_{it}} \right) k_{it}.$$

Разом із функцією попиту $P_t = h(q_t)$ вона визначає P_t і q_t для короткотермінового періоду. Наведені вище припущення стосовно $h(\bullet)$ та $a_{it}(\bullet)$ гарантують, що така короткотермінова рівновага завжди існує. Прибуток фірми i за період часу t дорівнює:

$$\pi_{it} = \left((P_t - c_{it}) \alpha_{it} \left(\frac{P_t}{c_{it}} \right) - r \right) k_{it},$$

де r – капітальні послуги.

Зрозуміло, що коли існує рівновага, то за такої рівноваги максимізація прибутку вимагає, щоб усі функціонуючі фірми застосовували технологію з найнижчими питомими витратами. Тому, для всіх фірм, у яких $q_i > 0$, $c_i = \hat{c}$, щоб прибуток був невід'ємним, рівноважна ціна P^* має бути більшою, ніж деяке задане \hat{c} . У цьому випадку прибуток буде максимізуватися згідно з таким правилом щодо визначення обсягу випуску, котре потребує повного використання виробничих потужностей за умови, що $P =$

P^* . Рівноважна ціна P^* має дорівнювати $P^* = \bar{c} + r$, в іншому випадку у фірми з'явиться стимул змінити міру використання потужностей.

Припущення щодо функції попиту гарантує існування такого q^* , що $h(q^*) = \bar{c} + r$. Це рівноважні випуск і ціни відповідно.

Робиться також таке припущення щодо інвестицій. Якщо у фірм з додатним основним капіталом прибуток – нульовий, то й інвестиції є нульовими. Розширення фірм, що вилучають додатний прибуток, має ймовірнісний характер. Імовірність зменшення для них дорівнює нулеві. З додатною ймовірністю вони долучають до свого парку ще одну машину. В той же час існує ненульова ймовірність щодо скорочення наявних фірм, які мають від'ємний прибуток. Вони, безумовно, не розширюються. Фірми – потенційні конкуренти, котрі мають ненульовий постійний капітал і додатну ймовірність увійти в галузь тільки з однією машиною, а пара «режимів», які вони планують впровадити у практику, може принести їм додатний прибуток за ціни P_t .

Потенційні конкуренти, що планують пару «режимів», які принесуть нульовий чи від'ємний прибуток, у галузь не вступають. Перелічені альтернативи формально можна подати таким чином:

- в існуючих фірмах, які залишаються зі своїм капіталом:
 $k_{t+1} = k_t$;

- в існуючих фірмах, які вилучають додатний прибуток:
 $k_{t+1} = k_t + \delta$

$$\text{з ймовірністю} \left\{ \begin{array}{l} 0, \quad \text{якщо } \delta < 0; \\ > 0, \quad \text{якщо } \delta = 0, 1; \\ \geq 0, \quad \text{якщо } 1 < \delta \leq \Delta; \\ 0, \quad \text{якщо } \delta > \Delta; \end{array} \right.$$

- в існуючих фірмах, які мають від'ємний прибуток (збитки):
 $k_{t+1} = k_t - \delta$, де характеристики розподілу випадкової величини δ вважаються відомими ($\Delta = k_t$);

- у потенційних конкурентів, які планують «режими», котрі принесуть їм додатний прибуток: $k_{t+1} = 0$ або 1, де ці обидва випадки (0 чи 1) мають ненульову ймовірність;

- у потенційних конкурентів, які планують «режими», за котрих вони у кращому разі залишаться зі своїм капіталом: $k_{t+1} = 0$.

Гранню, яка різко відмежовує еволюційні моделі економічних змін від традиційних (ортодоксальних), є те, що фірмам не нав'язується здатність одночасно і одномоментно розглядати велику кількість альтернативних рішень. Пошук проводиться навмання. Обираються такі гіпотези щодо пошуку.

- По-перше, результат пошуку за умови, що фірма веде його активно, визначається в термінах імовірного розподілу «режимів», які будуть знайдені в процесі пошуку чи на підставі, можливо, вже існуючих у фірми «режимів».

- По-друге, віддаючи перевагу цим, уже існуючим «режимам», визнаємо ненульову ймовірність того, що в процесі пошуку буде віднайдена будь-яка інша пара «технологія–правило прийняття рішень».

- По-третє, існує ненульова ймовірність того, що фірма не відшукає нових «режимів» і тим самим за необхідності збереже свої вже існуючі «режими».

У яких випадках існує пошук? Фірми повинні досить активно займатися пошуком. З іншого боку, пошук не має бути настільки активним, щоб він міг змусити систему відійти від того стану, котрий у простому (ортодоксальному) випадку був би рівноважним. Припускається, що фірми, які мають додатні потужності, взагалі не займаються пошуком, якщо вони вилучають невід'ємний прибуток. Потенційні конкуренти, що прагнуть увійти в галузь (фірми з нульовими виробничими потужностями), вважаються такими, що перебувають завжди у стані пошуку, але коли входять у галузь, то повинні мати такі «режими», що вже пройшли тест на рентабельність.

В контексті описаної модельної концепції в еволюційній теорії економічних змін визначають статичну селекційну рівновагу як ситуацію, в якій стан усіх наявних у галузі фірм залишається незмінним, а перелік наявних фірм також не змінюється. Припущення щодо пошуку гарантують, що рано чи пізно якась із фірм – якщо не існуюча, то потенційний конкурент – відшукає дещо ліпшу технологію та краще правило використання виробничих потужностей, щоб вилучити невід'ємний прибуток.

Якщо ця пара «режимів» буде знайдена, а ця фірма вже діяла в галузі, то вона розшириться, а якщо це потенційний конкурент, то він увійде в ринок. А за ціни $\widehat{c} + r$ зі своїм інтересом залишаться лише фірми з відносно кращими технологіями й правилами прийняття рішень, що вимагає повного використання потужностей за цієї ціни; жодна з фірм не зможе здійснити нічого кращого.

Підкреслимо: якщо фірми діють згідно з означеними вище правилами, що забезпечують повне використання потужностей за рівноважної ціни P^* , $P^* = \widehat{c} + r$, то процес пошуку не порушує рівноваги. Не має значення, яку реакцію викликає це правило за інших цін. Залишається питання: чи приведе процес відбору до рівноважного стану галузь, якщо до цього його не було? З допущень еволюційної теорії випливає, що приведе.

«Рівноважний стан» – це такий стан, за якого сукупність потужностей галузі (k^*) дорівнює такому випуску q^* , що $h(q^*) = \widehat{c} + r$ і у всіх фірм, які мають невід’ємні потужності, є наявними прийнятні правила використання потужностей і прийнятні обсяги витрат \widehat{c} . У рівноважному стані ціна дорівнює $\widehat{c} + r$ і єдиним видом змін є пошук рентабельних «режимів» потенційними конкурентами, а отже, панує селекційна рівновага.

Оскільки множина «режимів» є скінченною, то постає питання – чи може нескінченно зростати капітал галузі? Не може. Зазначимо, що для будь-якої пари «режимів» (c, α) існує деякий граничний рівень потужностей $K(c, \alpha)$, що є найбільшим значенням k , за якого можуть одночасно виконуватись умови:

$$(P - c)\alpha\left(\frac{P}{c}\right) - r \geq 0,$$

$$P = h\left(\alpha\left(\frac{P}{c}\right)k\right).$$

Сьогодні в межах еволюційної теорії економічних змін робляться лише перші кроки до розбудови адекватних математичних моделей, які, використовуючи сучасний математичний апарат та комп’ютерні технології, можуть стати суттєвим доробком у розвитку економічної науки.

Тема 10. Синергетичний підхід у моделюванні та аналізі економічних процесів

- 1. Основні положення синергетики як науки.*
- 2. Суть синергетичного підходу у дослідженні соціально-економічних систем.*

10.1 Основні положення синергетики як науки

Як відомо, в основі системного аналізу лежить принцип системності, а в основі теорій самоорганізації – принцип розвитку. Обидва принципи взаємодоповнюють один одного і насправді утворюють єдність, що відображається в пізнанні як єдність теорій самоорганізації та системних досліджень.

До теорій самоорганізації належать синергетика, теорія змін і теорія катастроф.

Синергетика, основні положення якої були сформульовані професором Штутгартського університету Г. Хакеном, є евристичним методом дослідження відкритих систем, що самоорганізуються, схильних до кооперативного ефекту, який супроводжується утворенням просторових, часових або функціональних структур; або, стисло, процесів самоорганізації систем різної природи. Вона виникла у відповідь на кризу стереотипного, лінійного мислення, що вичерпало себе.

Основні риси лінійного мислення:

- уявлення про хаос як винятково деструктивний початок світу;
- розгляд випадковості як другорядного, побічного чинника;
- твердження, що світ вважається незалежним від мікрофлуктуацій (коливань) нижчих рівнів буття і космічних впливів;
- погляд на нерівноважність і нестійкість як на дошкульні неприємності, які мають бути подолані, оскільки виконують негативну руйнівну роль;
- думка про те, що процеси, які відбуваються у світі, є оборотними в часі, передбаченими на необмежено великі проміжки часу, не допускається; розвиток є лінійним, поступальним, безальтернативним (а якщо альтернативи і є,

то вони можуть бути тільки випадковими відхиленнями від магістральної течії, залежать від неї і, врешті-решт, поглинаються нею);

- минуле викликає лише історичний інтерес, а повернення до старого, якщо воно було, є діалектичним зрізом попереднього рівня і має нову основу; світ зв'язаний жорсткими причинно-наслідковими зв'язками; причинні ланцюги носять лінійний характер, а наслідування, якщо і не тотожне причині, то пропорційне до неї, тобто, чим більше вкладено енергії, тим більшим буде результат.

Отже, фактично йдеться про механістичну картину світу і механіцизм як метод, що розгадає світ як гігантський механізм, а окремі об'єкти і процеси – як деталі цього механізму.

На непридатність механіцизму як універсальної моделі світу вказували ще Д. Дідро і Ф. Шелінг, критикуючи його з філософської точки зору. Природничо-наукова критика розпочалася в ХІХ столітті, коли термодинаміка поставила питання щодо позачасового характеру механістичної картини світу, доводячи, що якби світ був гігантською машиною, то вона неминуче повинна була б зупинитися, оскільки запас корисної енергії рано чи пізно був би вичерпаний. Але, не дивлячись на це, механістична парадигма залишається дотепер “точкою відліку”, утворюючи центральне ядро науки в цілому, не говорячи вже про більшість соціальних наук, особливо, про економіку, які ще знаходяться в повній її (парадигми) владі.

Особливо неприйнятним у механіцизмі є розгляд об'єкта як простої “суми” частин, що неминуче обмежує дослідження рівнем підсистем, а це є недостатнім для пізнання об'єкта. Крім того, синергетика, як і інші теорії самоорганізації, намагається заповнити “білі плями”, які залишив після себе механіцизм, головна серед яких – практично повна відсутність узагальнень, що стосуються поведінки відкритих систем. Вивчаючи закони самоорганізації, самодезорганізації та самоврядування складних систем, вона дає те універсальне знання законів самоорганізації та розвитку систем, у якому давно існує потреба.

Етимологічно термін «синергетика» походить від грецьких слів «synergeia», «synergetikos» – такий, що діє спільно, спільний, сприяння, співробітництво. На першому етапі розвитку під

синергетикою розуміли галузь наукових досліджень, метою яких було виявлення загальних закономірностей у процесах утворення, стійкості та руйнування впорядкованих часових і просторових структур у складних нерівноважних системах різної природи: фізичних, хімічних, біологічних, соціальних тощо. Тут “сумісна, узгоджена дія” може бути як наслідком самоорганізації (в результаті розвитку власної нестійкості в системі), так і наслідком вимушеної організації за рахунок зовнішніх дій.

У наш час синергетику розуміють як науку про математичне моделювання переходу систем з одного стійкого стану в інший. Сукупність знань про хаос і порядок, перехідні процеси, фрактали і нелінійність, які називають синергетикою, розуміють і як теорію, і як навчання, і як науку, і як світогляд, виходячи з різних образів, фактів, уявлень про хаос, порядок, когерентність, перехідних і кооперативних процесів у природі, суспільстві, духовному світі. Перелік ідей, що формують синергетику як парадигму, містить нелінійність, самоорганізацію, відкритість системи, її нерівноважність тощо.

Існують чотири основні підходи до суті поняття синергетики.

Синергетика – це ...

1) парадигма – система ідей, принципів, образів, уявлень, з яких, можливо, з часом виросте фундаментальна наукова теорія або загальнонаукова теорія, або навіть світогляд;

2) ряд наукових теорій (у фізиці, хімії, біохімії, біології, соціології, психології й інших науках), що об’єднані ідеями нелінійності, відкритості, перехідності, нерівноважності процесів, які відбуваються в системах;

3) загальнонаукова теорія (яка поки що устатковується), тобто як теорія дисипативних структур (у розумінні І. Пригожина), або теорія систем (за Г. Хакеном), що самоорганізуються, або теорія перехідних процесів, взаємоперетворювання хаосу і порядку тощо;

4) новий світогляд, що долає пануюче до цього часу в науці мислення зі сталими незмінними поняттями (платонівська традиція) і затверджує мислення, засноване на тих, що “встановлюються”, перехідних, нестабільних, фрактальних формах і образах.

Головною властивістю систем, що вивчаються, є процеси самоорганізації. Отже, синергетику можна також розглядати як загальну теорію самоорганізації в системах різної природи.

Основне завдання синергетики – знаходження і детальне дослідження тих базових моделей, які можна отримати з найтипівіших припущень про властивості окремих елементів системи і закони взаємодії між ними.

Об'єкти досліджень синергетики – відкриті складні нелінійні системи із зворотними зв'язками. Зрозуміло, такі системи вивчалися і раніше без використання терміну “синергетика”. Основна трудність таких досліджень – виняткова складність і громіздкість точного математичного опису, особливо якщо в системі працює багато зворотних зв'язків.

Кооперація багатьох підсистем деякої системи підпорядковується одним і тим же принципам незалежно від природи підсистем. Пізнання цих принципів дозволяє по-новому підійти і до проблеми раціонального управління розвитком складних систем. З погляду синергетики не можна, наприклад, при управлінні розвитком природної або соціальної системи нав'язувати невластиві їй форми організації. Вивчивши систему, необхідно збільшувати не силу управляючої дії, а збільшувати узгодженість дії з власними тенденціями системи.

Синергетика як теорія самоорганізації виходить з того, що складним системам (до таких належать і соціально-економічні системи) не можна нав'язувати шляхи їх розвитку, а швидше необхідно зрозуміти, як сприяти їх власним тенденціям розвитку, як виводити системи на ці шляхи, зрозуміти закони сумісного життя природи і людства, їх коеволюції. Для складних систем існує декілька альтернативних шляхів розвитку, вибір яких залежить від результату боротьби протилежних сил. Актуальним є наукове обґрунтування цього шляху.

Принципи частинних теорій синергетики:

1. *Нелінійність* означає незбереження адитивності в процесі розвитку систем. Будь-яке явище розуміють як момент еволюції, як процес розвитку.

2. *Нестійкість* означає незбереження “близькості” станів системи в процесі її еволюції та суттєву залежність від зміни значення системотвірних параметрів.

3. *Відкритість* означає визнання обміну системи речовиною, енергією, інформацією з навколишнім середовищем і, отже, визнання системи як такої, що складається з елементів, зв'язаних структурою, і такої, що включається як підсистема, елемент в інше ціле.

4. *Підпорядкування* означає, що функціонування і розвиток системи визначаються процесами в її підсистемах при виникненні ієрархії масштабів часу. Це принцип “самоспрощення” системи, тобто зведення її динамічного опису до малої кількості параметрів порядку.

Змістовий блок методології синергетики містить:

1. *Принцип становлення*, який стверджує, що головна форма буття – не те, що вже є усталеним, а те, що тільки розвивається; не спокій, а рух; не завершені, вічні, стійко-цілісні форми, а перехідні, проміжні, тимчасові утворення. Становлення виражається через дві свої крайнощі – хаос і порядок. Хаос – основа складності, випадковості, творіння-руйнування, конструкції-деконструкції. Порядок – основа простоти, необхідності, закону, краси, гармонії.

2. *Принцип пізнання* означає пізнання (відкриття) буття як становлення. До того ж параметри порядку виконують подвійну роль: повідомляють системі, як поводитися, і доводять до відома спостерігача про дещо макроскопічний стан системи.

3. *Принцип узгодженості* (комунікативності, діалогічності), який означає, що буття як становлення формується і пізнається лише в ході діалогу, комунікативної, доброзичливої взаємодії суб'єктів і встановлення гармонії в результаті діалогу.

4. *Принцип відповідності*, що означає можливість переходу від досинергетичної (класичної, “некласичної” і “постнеокласичної”) науки до синергетичної (як з інтуїтивних міркувань, так і з формальних параметрів).

5. *Принцип додатковості*, що означає незалежність і принципову частковість, неповноту як досинергетичного опису реальності (без синергетичного), так і частковість синергетичного (без досинергетичного). Буття є усталеним (платонівське) і таким, що тільки становиться. Буття – і те, й інше.

Роль синергетики як нової наукової картини світу і методології дослідження процесів руху систем ще більш зростає,

якщо враховувати її синтетичний, по суті, характер. Г. Хакен визначив цілі, які вона ставить перед собою: переобтяжену величезною кількістю деталей інформацію про системи різної природи, що вивчаються сучасною наукою, необхідно стиснути, перетворивши на невелику кількість законів або концепцій, оскільки, за висловом англійського кібернетика З. Біра, дані перетворилися на новітній різновид забруднення навколишнього середовища – їх надлишок породив інформаційний голод. Появу концепцій самоорганізації (синергетики, зокрема) можна розглядати як новий важливий етап еволюції науки, що прийшов за суперспеціалізацією і несе нові можливості діалогу наук і нові підходи до їх викладання.

Крім відмінностей, у синергетики (й інших теорій самоорганізації) та системних досліджень є й спільне. Їх об'єднують принципи системності, розвитку, ізоморфізму, типологія систем. Синергетика увібрала в себе всі значущі для дослідження процесів самоорганізації теоретичні та методологічні висновки системних досліджень.

10.2 Суть синергетичного підходу у дослідженні соціально-економічних систем

Одним із найбільш перспективних напрямків дослідження економічних систем є застосування методів і підходів синергетики, що бурхливо розвиваються останнім часом. Термін «синергетика» акцентує увагу на *узгодженості, взаємодії частин системи у процесі утворення її структури як єдиного цілого*. Принциповим для синергетики є *нелінійність, нерівноважність, складність* досліджуваних явищ.

Синергетика вивчає складні системи, які містять багато підсистем різної природи, маючи на меті виявити, в який спосіб взаємодія таких підсистем приводить до виникнення нових стійких просторових, часових чи просторово-часових структур або режимів функціонування, а також досліджує характерні масштаби й швидкості перехідних процесів. Синергетика акцентує увагу на явищах, що виникають завдяки спільній дії кількох (багатьох) чинників, кожний з яких окремо до цього явища не призводить. Синергетику часто визначають як науку про самоорганізацію. Під

самоорганізацією розуміють мимовільне, спонтанне самоускладнення форми (у загальнішому випадку – структури системи та законів її функціонування) унаслідок повільної та плавної зміни її параметрів. Іншими словами, самоорганізація – це утворення впорядкованих структур із хаосу. Отже, синергетика являє собою нову узагальнювальну науку, що вивчає основні закони самоорганізації складних систем.

У синергетиці акцент робиться на принципах побудови, організації, розвитку та самоускладнення систем і їхньої еволюції. З погляду синергетики процеси у відкритих нерівноважних системах характеризуються принциповою нелінійністю, наявністю зворотних зв'язків, що зумовлює появу якісно нових можливостей здійснення керуючого впливу на систему. Саме *синергетика* може стати адекватним інструментом для аналізу складних динамічних процесів, що відбуваються в сучасному суспільстві та економіці.

До основних понять синергетики належать поняття *структури, хаосу, еволюції, дисипативної системи, дивного атратора, фракталів* тощо. Іншим важливим поняттям у синергетиці є точки біфуркації – такий стан системи, коли відносно незначні зміни параметрів системи або зовнішніх факторів можуть привести до значних якісних змін у поведінці системи, її стані, траєкторії або її структурі.

До основних математичних методів дослідження в синергетиці належить теорія динамічних систем, яка ґрунтується на якісній теорії диференціальних рівнянь. З-поміж сучасних напрямків досліджень у рамках синергетики та нелінійної динаміки можна виокремити такі:

1. Розробка методів описування істотно нерівноважних процесів на основі статистичної фізики.
2. Динаміка відкритих систем, що вивчає стаціонарні стани, тобто стани, що зберігають стійкість у певному діапазоні зміни зовнішніх впливів, досліджує умови самоорганізації – виникнення впорядкованих структур із невпорядкованих.
3. Дослідження якісної поведінки розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь, що визначають далекі від рівноваги стани залежно від зміни вхідних параметрів. Цей напрямок вивчає теорія катастроф.

Дослідники, аналізуючи функціонування макроекономіки, економіки регіону, сектора, галузі чи підприємства й намагаючись урахувати численні чинники та взаємозв'язки, часто змушені будувати математичні моделі (системи) великої розмірності, що містять десятки або й сотні параметрів і рівнянь. Аналітичний аналіз таких моделей доволі складний і становить окрему проблему, а через це їх важко застосовувати на практиці та інтерпретувати отримані результати.

Проте існує спосіб редукції відповідних систем до систем рівнянь значно меншої розмірності, завдяки чому вдається подати якісний опис об'єкта за допомогою кількох диференційних рівнянь. Ідея цього методу полягає в тому, що коли йдеться про опис динаміки системи, не всі її параметри (або процеси, які вони характеризують) мають однакові часові масштаби зміни. Деякі параметри стану (швидкі змінні) можна виразити через інші (повільні змінні) – так звані *параметри порядку*, у результаті чого кількість незалежних змінних зменшується.

Параметри порядку й принцип підпорядкування належать до числа найбільш фундаментальних понять синергетики. З економічного погляду принцип підпорядкування означає, що можна знайти невелику кількість змінних (можливо, агрегованих, перетворених тощо), які визначають динаміку всієї економічної системи в околі особливої точки, а решта змінних залежить від них.

В економіці, як і в інших складних системах, існують власні параметри порядку. У моменти загострення нерівноваги зростає нестійкість саме цих параметрів, і під їхнім безпосереднім впливом відбувається процес утворення нових структур, формується нове поведіння елементів системи. Характерним для параметрів порядку є те, що після виходу системи зі стану рівноваги вони відновлюються повільніше, ніж інші параметри системи.

З огляду на багатогранність властивостей соціально-економічних систем можна припустити наявність цілого спектра параметрів порядку. Вони, наприклад, можуть характеризувати відносини власності, форми координації економічних агентів, пропорції відтворення, функціональні зв'язки в економіці тощо. Кількісні характеристики параметрів та їхній склад можуть змінюватись на різних стадіях еволюції системи, причому

визначення цих параметрів потребує аналізу закономірностей поведінки економічної системи протягом тривалого часу.

Сучасна економіка як складна система розвивається нерівномірно, їй притаманні як режими стійкого функціонування, так і режими хаотичної динаміки. Останнім часом економісти намагаються інтерпретувати хаотичні явища в економіці в термінах детермінованих систем, серед яких широко використовуються дискретні відображення. Так, наприклад, логістичне відображення та його модифікації завдяки їхнім універсальним властивостям і здатності описувати процеси з доволі складною динамікою широко використовуються в побудові моделей економічної динаміки на макро- і мікрорівні, зокрема, для дослідження динаміки зростання малих підприємств; в моделі адаптації фірми в ринкових умовах для опису її стратегії; для розгляду процесів ціноутворення в павутиноподібній моделі фірми тощо.

Аналогічні моделі можна побудувати для інвестиційної динаміки: із зростанням інвестицій економіка наближається до інвестиційного бар'єру – лаг між інноваціями та їх реалізацією зменшується. При цьому зменшується можливість апробування альтернатив і зростає загальна невизначеність. Орієнтація на поточну кон'юнктуру веде до утворення надлишку капіталу, зниження темпів виробництва та продуктивності, що може призвести до інвестиційної кризи на ринках капіталу. Логістичне відображення можна також використовувати в дослідженні критичних режимів та хаосу на фондових і валютних ринках.

Процеси, які описуються навіть простими нелінійними моделями, при деяких значеннях параметрів мають хаотичне поведіння, яке здається випадковим і може помилково пояснюватися дією неврахованих або випадкових факторів. *Але в детермінованих нелінійних моделях хаос породжується саме нелінійністю.* З цього випливає, що під час побудови моделей економічної динаміки введення теоретично обґрунтованих нелінійних залежностей поряд із використанням випадкових змінних дає змогу успішно пояснювати різноманітні економічні флуктуації.

У соціально-економічних системах параметри управління генеруються самою системою, а також накладаються на неї ззовні і вже після цього починають чинити на неї зворотний вплив,

призводячи до нестійкості та флуктуацій. Для економіки це має принципове значення, оскільки розширюється коло явищ, що вводить у дію механізми самоорганізації. Це можуть бути зовнішньоекономічні чинники (вплив на економіку інших суспільних підсистем) і внутрішні чинники, зокрема зростання державного боргу, значний дефіцит державного бюджету, високі темпи інфляції, надвисокі ставки податків, які, досягаючи певних критичних значень, можуть спричинити незворотні зміни в системі. Як параметри управління можна розглядати також засоби й інструменти економічної політики (фіскальної, грошово-кредитної, митної тощо).

Сутність синергетичного підходу до ефективного управління системами полягає в тому, що він орієнтований на власні закони еволюції та самоорганізації системи. Процеси самоорганізації в системах – виникнення певних просторових, часових або функціональних структур без специфічного впливу на систему з боку зовнішнього середовища, тобто виникнення або зростання впорядкованості із хаосу. З точки зору синергетики розвиток економічних систем відбувається у двох формах – еволюційній та революційній (стрибкоподібній).

В синергетиці вважається, що визначальною умовою для забезпечення оптимального поведіння складних економічних систем є саме наявність нерівноважних станів та процесів самоорганізації. Нерівновага дає змогу здійснювати вільний вибір варіанта подальшого розвитку з цілого спектра можливих напрямків. Якщо рівноважний стан є необхідною умовою для стаціонарного існування економічних систем, то нерівноважний стан являє собою момент переходу до якісно нового стану, в якому економічна система може здобути більш високий рівень організації та продуктивності.

Тільки тоді, коли економічна система втрачає функціональну стійкість, виникають самоорганізаційні процеси формування нових ефективних структур. В нових умовах функціонування економічна система проходить свої рівноважні стани як проміжні етапи на траєкторіях нерівноважної самоорганізації. Ідеться про те, що в періоди нестабільності можуть спонтанно виникати паралельні неформальні структури, наприклад відпрацьовані схеми ухилення від податків, спрямування фінансових потоків в офшорні зони,

неплатежі постачальникам, бартерні схеми розрахунків, виплати заробітної платні «чорною» готівкою тощо. За певних умов вони можуть бути досить стійкими, що свідчить про стихійний вихід системи на не оптимальну щодо економічної ефективності траєкторію розвитку.

З погляду синергетики неефективне управління соціально-економічними системами полягає в нав'язуванні системі такого поведіння, яке їй не властиве. Згідно із синергетичною концепцією більш ефективним буде так зване «м'яке» управління (на відміну від «жорсткого», програмного). *М'яке управління* – це управління за допомогою незначних, але належних резонансних впливів, які мають відповідати власним внутрішнім тенденціям розвитку системи. Головна мета такого управління полягає в тому, щоб завдяки незначному резонансному впливу «підштовхнути систему» до одного із її власних сприятливих шляхів розвитку. Своєчасні резонансні впливи можуть виявити значні, потужні внутрішні резерви системи.

Таким чином, сутність синергетичного підходу до ефективного управління системою полягає в тому, що він орієнтований не на зовнішні властивості, не на цілі та сподівання суб'єкта управлінської діяльності, а на внутрішні властивості системи, її власні закони еволюції та самоорганізації. При цьому увага приділяється погодженості управлінського впливу із власними тенденціями динаміки системи. Синергетичний підхід до управління орієнтований на пізнання закономірностей самої системи та процесів її самоорганізації. Незначний, але погоджений резонансний вплив в точках біфуркації може призвести до суттєвих змін у траєкторії руху (поводженні) системи.

Сучасний менеджмент вимагає інтегрованого, системного підходу до розгляду економічної системи як сукупності взаємопов'язаних елементів, що орієнтовані на досягнення різних цілей за умови змін у зовнішньому середовищі, а управлінські рішення мають враховувати системний (синергетичний) ефект, зумовлений наявністю у системи якісно нових властивостей, які відсутні у її складових (емерджентністю) [4].

Лабораторна робота 1.

Статистичні методи аналізу економічної динаміки

Основні відомості

Ряд динаміки поєднує в собі два ряди даних – моменти чи періоди часу і рівні ознаки чи показника. Закономірна зміна рівнів ряду – це тенденція динаміки. Відхилення рівнів в окремі моменти від тенденції – це коливання ознаки. Тенденція визначається довгостроковими причинами, коливання – короткостроковими або циклічними чинниками. Рівняння, що апроксимує фактичну тенденцію динаміки, називається *трендом*.

Щоб описати динамічний ряд, треба визначити показники, що характеризують абсолютні і відносні зміни рівнів, рівномірність цих змін, а також визначити форму і параметри тренда.

Абсолютна зміна рівня (приріст або скорочення) – це різниця між рівнем звітного моменту і рівнем попереднього моменту (ланцюговий показник) або різниця між рівнем звітного моменту і рівнем базового моменту (базисний показник).

Прискорення абсолютної зміни – це різниця між абсолютною зміною на даний момент і абсолютною зміною на попередній момент.

Відносна зміна рівня – темп зміни (темп росту або спаду) – це відношення рівня звітного моменту до рівня попереднього або базового моменту.

Абсолютний приріст Δ показує, на скільки одиниць власного виміру рівень ряду y_i більший (+) чи менший (-) за рівень, взятий за базу порівняння (y_{i-1} чи y_0):

$$\text{ланцюговий } \Delta_i = y_i - y_{i-1}, \quad \text{базовий } \Delta_i = y_i - y_0.$$

Темп (коефіцієнт) зростання показує, у скільки разів один рівень ряду більший за інший:

$$\text{ланцюговий } K_i = y_i / y_{i-1}, \quad \text{базовий } K_i = y_i / y_0$$

Темп приросту показує, на скільки процентів значення y_i більше (+) чи менше (-) за рівень, який прийнято за 100 %.

Абсолютне значення 1% приросту обчислюється як частка від ділення абсолютного приросту на темп приросту, тобто вага відносного приросту є не що інше, як сота частина рівня, взятого за

базу порівняння.

Середньорічний абсолютний приріст – це середнє арифметичне ланцюгових абсолютних прирістів.

Середньорічний темп зростання визначають за формулою середнього геометричного

$$\bar{k} = \sqrt[n]{\prod k_i} = \sqrt[n]{K_n} = \sqrt[n]{\frac{y_n}{y_0}}.$$

Прискорення (сповільнення) зростання обчислюють зіставленням однойменних характеристик швидкості зростання, наприклад, абсолютних прирістів: $\delta_i = \Delta_i - \Delta_{i-1}$.

Значення $\delta_i < 0$ свідчить про сповільнення зростання. Темп сповільнення абсолютної швидкості обчислюють відношенням абсолютних прирістів.

Прискорення (сповільнення) відносної швидкості визначається як частка від ділення середньорічних темпів зростання. Дільником виступає більший за значенням параметр.

Індекси – це показники змін, що на відміну від інших показників (динамічних і кореляційних) дозволяють вимірювати зміну складних, агрегованих розмірів, не описаних аналітично.

Індекс може бути зведеним, якщо порівнюються узагальнені розміри (ознаки або показники), або індивідуальним, якщо порівнюються власні розміри.

Системі ознак відповідає система індексів. Так, наприклад, системі ознак $w = qp$, де q – об'єм продажів, p – ціна товару, w – виторг від продажів, відповідає система узагальнених індексів $I_w = I_q * I_p$.

Індекси дозволяють також аналізувати зміну середніх розмірів ознак. Наприклад, можна аналізувати зміну середньої по регіонах ціни в звітний період у порівнянні з базовим періодом при фіксованому або змінному складі реалізованих товарів.

Індивідуальні індекси обчислюють окремо для кожної групи товарів. Індивідуальний індекс цін $i_p = p_1/p_0$. Аналогічно визначають індивідуальні індекси фізичного обсягу $i_q = q_1/q_0$.

Індивідуальні індекси товарообороту розраховують за формулою $i_{pq} = \frac{p_1q_1}{p_0q_0}$.

Загальний індекс товарообороту в цілому обчислюють за формулою $I_{pq} = \frac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_0}$, загальний індекс цін $I_p = \frac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_1}$ загальний індекс фізичного обсягу реалізації обчислюють за формулою $I_q = \frac{\sum p_0q_1}{\sum p_0q_0}$.

Система взаємозалежних індексів матиме вигляд $I_{pq} = I_p * I_q$.

Абсолютний приріст обчислюють як різницю між чисельником і знаменником відповідних індексів.

Абсолютний приріст товарообороту в цілому становить:

$$\Delta_{pq} = \sum p_1q_1 - \sum p_0q_0,$$

за рахунок чинників:

$$\Delta_p = \sum p_1q_1 - \sum p_0q_1, \quad \Delta_q = \sum p_0q_1 - \sum p_0q_0.$$

Порядок виконання лабораторної роботи

Використовуючи один із пакетів прикладних програм комп'ютерної математики (табличний процесор Excel, MathCAD, Maple чи ін.) визначити статистичні характеристики динаміки для показників, значення яких наведені у Додатку 1:

- 1) базові і ланцюгові характеристики динаміки: абсолютні прирости, темпи зростання і приросту, абсолютні значення 1% приросту;
- 2) середньорічні темпи зростання і абсолютні прирости;
- 3) коефіцієнт прискорення (сповільнення) зростання;
- 4) індивідуальні і загальні індекси.

Завдання для самостійної роботи

Розробити алгоритм та програмне застосування, що реалізує обчислення основних статистичних характеристик динаміки.

Лабораторна робота 2.

Економетричні (кореляційно-регресійні) методи аналізу економічної динаміки

Основні відомості

Рівняння лінійної багатофакторної регресії має вигляд:

$$y = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_k x_k + u,$$

де β_i , ($i = 1, 2, \dots, k$) – регресійні коефіцієнти,

u – відхилення,

y – регресанд (залежна змінна),

x_1, \dots, x_k – регресори (незалежні змінні).

Регресор x_i використовується для уніфікації моделі і завжди дорівнює одиниці.

Змінні x і y – результати спостережень, тобто їх індивідуальні значення (реалізації) можна виміряти в моменти часу $t = 1, \dots, T$.

Для того, щоб оцінити параметри моделі β_i , необхідно мати T значень кожного регресора x_k і T значень регресанда y у відповідні моменти часу. При цьому довжина динамічних рядів спостережень повинна бути більшою за кількість регресорів, тобто $T > k$.

Похибка (відхилення) рівняння для t -го періоду дорівнює

$$\hat{u}_t = y_t - \hat{y}_t,$$

де y_t – значення регресанду, що спостерігається;

\hat{y}_t – оцінка y_t при знайдених значеннях оцінок коефіцієнтів β_i .

За теоремою Гаусса–Маркова з усіх оцінювачів функція оцінювання однокроковим методом найменших квадратів (МНК) для лінійної моделі є найкращою функцією оцінювання.

Основні передумови, при виконанні яких для розрахунку β_i можна використати однокроковий метод МНК:

а) Математичне очікування відхилення дорівнює нулю $M(u) = 0$.

б) Відсутній сильний статистичний взаємозв'язок чинників (мультиколінеарність).

с) Відсутня сильна залежність між відхиленнями, що відносяться до різних періодів (автокореляція).

д) Дисперсія відхилень у різні періоди постійна (відсутня гетероскедастичність).

У матричному вигляді формула обчислення оцінок регресійних коефіцієнтів за МНК буде такою:

$$\vec{\hat{\beta}} = (X'X)^{-1} X'\vec{y},$$

де $\vec{\hat{\beta}}$ – вектор оцінок параметрів рівняння регресії,

X – матриця значень чинників x , що спостерігаються,

X' – транспонована матриця до X ,

\vec{y} – вектор значень залежної змінної y , що спостерігається,

$(X'X)^{-1}$ – обернена матриця.

Вектор \vec{y} і матриця X разом утворюють матрицю даних D розмірністю $T \times (k + 1)$.

Для обчислення оцінок регресійних коефіцієнтів зручно використовувати статистичну функцію «ЛИНЕЙН» табличного процесора Excel, що дозволяє розрахувати багато параметрів регресійної моделі. Зауважимо, що функція «ЛИНЕЙН» реалізована як операція з масивами і потребує виділення відповідного діапазону комірок перед її використанням та натиснення комбінації клавіш *Ctrl + Shift + Enter* наприкінці.

Результати функції «ЛИНЕЙН» при $k = 4$ розміщені в комірках Excel у такому порядку:

$\hat{\beta}_4$	$\hat{\beta}_3$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\beta}_1$
$\hat{\sigma}_{\beta_4}$	$\hat{\sigma}_{\beta_3}$	$\hat{\sigma}_{\beta_2}$	$\hat{\sigma}_{\beta_1}$
R^2	$\hat{\sigma}_y$	-	-
F	$(T - k)$	-	-
S_{reg}	S_{rest}	-	-

де $\widehat{\beta}_i$ – оцінки регресійних коефіцієнтів,

$\widehat{\sigma}_{\beta_i}$ – оцінки середньоквадратичних похибок регресійних коефіцієнтів,

$\widehat{\sigma}_y$ – середньоквадратичне відхилення регресанду y ,

R^2 – коефіцієнт детермінації,

F – критерій Фішера,

T – число спостережень,

S_{reg} і S_{rest} – регресійна і залишкова дисперсії.

Для обчислення оцінок \widehat{y}_i регресанду y за усі періоди спостережень можна використати статистичну функцію «ТЕНДЕНЦИЯ», що також реалізована як операція з масивами:

а) виділити діапазон комірок, необхідний для розміщення всіх T значень \widehat{y}_i ;

б) викликати функцію «ТЕНДЕНЦИЯ» (категорія статистичних функцій) і ввести 4 її параметри: координати всіх відомих значень результуючого показника y ; координати всіх відомих значень регресорів x (матриця X); координати всіх значень регресорів x , для яких треба розрахувати величини y (знову матриця X чи задані значення чинників); логічну константу, що дорівнює нулю. Натиснути комбінацію клавіш *Ctrl + Shift + Enter*.

Для визначення статистичної надійності окремих коефіцієнтів регресії використовується критерій Стьюдента (t -критерій). Для кожного чинника x_i розраховуємо критерій t_i :

$$t_i = \frac{\beta_i}{\delta_{\beta_i}}$$

де δ_{β_i} – середньоквадратична похибка коефіцієнта β_i .

Якщо $|t_i| \geq t_{кр}$, то приймається гіпотеза про те, що оцінка коефіцієнта β_i з вірогідністю $(1 - \alpha)$ статистично надійна (α – це допустима вірогідність похибки, яка задається дослідником, що створює модель; зазвичай $\alpha = 0,05$). В Excel для визначення $t_{кр}$ використовується функція «СТЮДРАСПОБР(α , $T - k$)».

Для перевірки рівняння в цілому розраховують значення F критерію Фішера і порівнюють його з критичним. Якщо $F > F_{кр}$, то

з вірогідністю $(1 - \alpha)$ приймається гіпотеза про статистичну надійність рівняння в цілому, інакше – слід збільшити число спостережень. В Excel значення $F_{кр}$ визначається за допомогою функції «ФРАСПОБР($\alpha, T - k, k - 1$)».

Дослідити мультиколінеарність можна з допомогою χ^2 -критерію Фаррара—Глобера:

$$\chi^2 = -\left(T - 1 - \frac{1}{6}(2k + 7)\right) \ln \det(M)$$

де $\det(M)$ – визначник кореляційної матриці M , елементами якої є коефіцієнти кореляції r_{ij} ($0 \leq |r_{ij}| \leq 1$), кожен з яких характеризує статистичний взаємозв'язок чинників x_i і x_j .

Для розрахунку коефіцієнта кореляції в EXCEL використовують функцію «КОРРЕЛ($x_i; x_j$)».

Значення критерію χ^2 порівнюється з табличним при $1/2 - k(k - 1)$ ступенях свободи і рівні значущості α . Якщо фактичне значення критерію вище за табличне, то в моделі існує мультиколінеарність.

При виявленні мультиколінеарності необхідно в матриці M знайти найбільші коефіцієнти кореляції r_{ij} і замінити відповідні пари чинників x_i, x_j новими, тобто, незв'язаними або малопов'язаними чинниками. Після заміни чинників необхідно знову виконати діагностику мультиколінеарності.

Для перевірки на автокореляцію потрібно розрахувати значення критерію d :

$$d = \frac{\sum_{t=2}^T (\hat{u}_t - \hat{u}_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^T \hat{u}_t^2}$$

Він може приймати значення з проміжку $[0, 4]$. Якщо відхилення u_t – випадкові нормально-розподілені величини, а не

автокорельовані, то значення $d \approx 2$; при додатній автокореляції $d < 2$, при від'ємній $-d > 2$.

Фактичні значення критерію порівнюються з критичними (табличними) за числа спостережень T і числа незалежних змінних k для вибраного рівня значущості $\alpha = 0,05$. Табличні значення мають нижню межу d_n і верхню d_6 .

Якщо $d < d_n$, то відхилення мають автокореляцію. Якщо $d > d_6$, то приймається гіпотеза про відсутність автокореляції. Коли $d_n < d < d_6$, то конкретних висновків зробити не можна: необхідно далі проводити дослідження для більшої кількості спостережень.

За наявності автокореляції треба побудувати матрицю перетворення T^A , елементами якої є функції коефіцієнта автокореляції, і обчислити перетворену матрицю вхідних даних D^* .

$$T^A = \begin{Bmatrix} \sqrt{1-\rho^2} & 0 & 0 & 0 \\ -\rho & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\rho & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} \quad D^* = \left\{ \underbrace{T^A \cdot \vec{y}}_{\vec{y}^*}; \underbrace{T^A \cdot X}_{x^*} \right\},$$

де $\rho = 1 - d/2$.

До перетвореної матриці D^* можна застосовувати МНК.

Матриця початкових даних X сортується за збільшенням значень чинника, від якого залежить дисперсія відхилення, і розділяється на дві частини: T_1 і T_2 . В одній частині концентруються дані з меншим значенням дисперсії відхилень, в другій – з більшим. Для кожної частини обчислюється дисперсія відхилень:

$$\sigma_{u1}^2 = \frac{\sum_{t=1}^{T_1} u_t^2}{T_1 - k}, \quad \sigma_{u2}^2 = \frac{\sum_{t=T_1+1}^{T_2} u_t^2}{T_2 - k}$$

Обчислюється критерій F як відношення більшої дисперсії до меншої:

$$F = \frac{\sigma_{u2}^2}{\sigma_{u1}^2}.$$

Знайдене значення критерію F порівнюється з критичним значенням $F_{кр}$. Якщо $F > F_{кр}$, то гетероскедастичність існує і необхідно перетворити матрицю X за допомогою матриці перетворення T^H .

До перетвореної матриці D^* можна застосовувати МНК.

$$T_{T \times T}^H = \left\{ \begin{array}{cccc} 1/\sigma_{u_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sigma_{u_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sigma_{u_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/\sigma_{u_2} \end{array} \right\} \quad D^* = \left\{ \underbrace{T^H \cdot \bar{y}}_{\bar{y}^*}; \underbrace{T^H X}_{x^*} \right\}$$

де $\sigma_{u1} = \sqrt{\sigma_{u1}^2}$, $\sigma_{u2} = \sqrt{\sigma_{u2}^2}$.

Для порівняльного аналізу впливу чинників на величину y використовуються стандартизовані коефіцієнти регресії β_i^S і коефіцієнти еластичності ε_i . Чим більшим є абсолютне значення β_i^S , тим сильніше впливає чинник x_i на y . При збільшенні чинника x_i на 1% показник y змінюється на ε_i відсотків.

$$\beta_i^S = \beta_i \frac{\sigma_{x_i}}{\sigma_y},$$

$$\varepsilon_i = \beta_i \frac{\bar{x}_i}{\bar{y}},$$

де β_i^S – стандартизований коефіцієнт,

σ_{x_i} – середньоквадратичне відхилення регресора x_i ,

ε_i – коефіцієнт еластичності,

\bar{x}_i, \bar{y} – середні значення.

Порядок виконання лабораторної роботи

1. Для перевірки передумови $M(u) = 0$ досить визначити, чи дорівнює 0 середнє значення відхилення u за усі періоди спостережень.

2. Здійснити відбір чинників. Чим більше чинників включені в рівняння регресії, тим адекватнішою до початкових даних є модель. Проте, зі збільшенням числа врахованих чинників ростуть витрати на збір і обробку статистики за цими чинниками. Тому для включення в модель слід відбирати тільки важливі чинники за такою послідовністю:

а) включити у рівняння регресор $x_1 = 1$ і як регресори x_2 і x_3 – два явно істотних чинники з чотирьох заданих;

б) із чинників, що залишилися, відібрати той чинник, для якого максимальним є скорегований коефіцієнт детермінації Тейла:

$$R_T^2 = 1 - (1 - R^2) \frac{T - 1}{T - k}.$$

3. Виконати перевірку статистичної надійності моделі:

а) визначити статистичну надійність окремих коефіцієнтів регресії за критерієм Стьюдента (якщо хоч один коефіцієнт регресії статистично не надійний, то слід збільшити число періодів спостережень, тобто число T);

б) перевірити рівняння в цілому за критерієм Фішера.

4. Перевірити на мультиколінеарність за допомогою χ^2 -критерію.

5. Виконати перевірку на автокореляцію і, за необхідності, розрахувати перетворену матрицю вхідних даних.

6. Перевірити на гетероскедастичність.

7. Виконати порівняльний аналіз впливу чинників шляхом обчислення стандартизованих коефіцієнтів регресії і коефіцієнтів еластичності.

Завдання для самостійної роботи

Розробити алгоритм та програмне застосування, що реалізує кореляційно-регресійні методи аналізу економічних показників.

Лабораторна робота 3.

Прогнозування економічних показників на основі трендових моделей економічної динаміки

Основні відомості

В економічних дослідженнях часто виникає задача встановлення зв'язку (аналітичної залежності) між показниками, які позначимо змінними x і y . Цей зв'язок може бути функціональним або стохастичним (кореляційним). **Стохастичний зв'язок** показує залежність між випадковими (отриманими в результаті спостережень чи експериментів) величинами, які можуть перебувати під впливом інших величин. Наприклад, залежність величини стоку води в річці (y) від середньодобової температури повітря (x), залежність концентрації іонів важких металів у стічній воді (y) від продуктивності очисних споруд (x) тощо. Зазвичай, значення показників x і y записують у вигляді таблиці:

Показник x	Показник y
x^1	y^1
x^2	y^2
...	...
x^n	y^n

Якщо на координатній площині відкласти точки (x_i, y_i) , то отримаємо **поле розсіювання** величин x і y . Наближення табличних даних функціональною залежністю $y = f(x)$ називається **апроксимацією даних**.

Табличний процесор Excel має хороші засоби для статистичної обробки даних різними методами. Розглянемо один із алгоритмів дослідження зв'язку між двома змінними, побудови лінії тренду, що апроксимує експериментальні дані і дозволяє прогнозувати значення y для заданого значення чинника x .

1. Побудувати поле розсіювання показників x і y
(**Вставка ~ Диаграмма ~ Точечная**)
2. Додати лінію тренду (**Диаграмма ~ Добавить линию тренда**), вибрати тип лінії тренду, користуючись розміщенням точок на полі розсіювання і враховуючи коефіцієнт

достовірності апроксимації R^2 , в закладці **Параметры** обов'язково слід встановити прапорці *показывать уравнение на диаграмме* і *поместить на диаграмму величину достоверности аппроксимации (R^2)*.

Примітка. Значення R^2 міститься в межах від 0 до 1; $R^2=1$ означає, що лінія тренду абсолютно точно апроксимує зв'язок, тобто між величинами x , y існує функціональна залежність. Доброю вважається апроксимація, якщо $0,9 \leq R^2 \leq 1$.

3. Обчислити прогнозне значення, користуючись рівнянням лінії тренду.
4. Дати оцінку прогнозу (**Анализ данных ~ Описательная статистика**).

Порядок виконання лабораторної роботи

Для даних із Додатку 2 засобами табличного процесора Excel побудувати поле розсіювання показників, вибрати лінію тренду, обчислити прогнозне значення, користуючись рівнянням лінії тренду та дати оцінку прогнозу.

Завдання для самостійної роботи

Розробити алгоритм та програмне застосування, що реалізує прогнозування економічних показників на основі трендових моделей економічної динаміки.

Лабораторна робота 4.

Побудова лінійної тригалузевої моделі Леонтьєва

Основні відомості

Лінійна міжгалузева динамічна модель Леонтьєва має вигляд:

$$X(t) = AX(t) + B \frac{dX(t)}{dt} + C(t),$$

де $X(t) = [x_j(t)]$ – вектор-стовпець обсягів виробництва;

$\frac{dX(t)}{dt} = \left[\frac{dx_j(t)}{dt} \right]$ – вектор-стовпець абсолютних приростів виробництва;

$C(t)$ – вектор-стовпець споживання (разом із невиробничим нагромадженням);

$A = \{a_{ij}\}$ – матриця коефіцієнтів прямих матеріальних витрат;

$B = \{b_{ij}\}$ – матриця коефіцієнтів капіталомісткості приростів виробництва (витрати виробничого нагромадження на одиницю приросту відповідних видів продукції) ($i, j \in \{1, \dots, n\}$).

Замість “знеособлених” галузей, представлених тільки порядковими номерами, виділимо галузі, що виконують особливі функції в процесі відтворення.

Поділимо все виробництво на три галузі: виробництво знярядь праці (галузь 1), виробництво предметів праці (галузь 2), виробництво предметів споживання (галузь 3). В результаті отримуємо тригалузеву систему, яку можна досліджувати за допомогою міжгалузевої динамічної моделі Леонтьєва.

У зазначеній тригалузевій системі лише галузь 1 здійснює капітальні вкладення, галузь 2 забезпечує тільки проміжне споживання, а весь фонд споживання забезпечує галузь 3.

Запишемо систему рівнянь, зважаючи на функціональне призначення продукції трьох галузей:

$$\begin{cases} x_1(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + a_{13}x_3(t) + b_{11} \frac{dx_1}{dt} + b_{12} \frac{dx_2}{dt} + b_{13} \frac{dx_3}{dt} \\ x_2(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + a_{23}x_3(t) \\ x_3(t) = c(t) \end{cases}$$

Підставивши $x_2(t)$ і $x_3(t)$ у перше рівняння, отримаємо диференціальне рівняння такого вигляду:

$$x_1(t) = \tilde{a}x_1(t) + \tilde{b} \frac{dx_1}{dt} + \tilde{g}_1 c(t) + \tilde{g}_2 \frac{dc}{dt},$$

$$\text{де } \tilde{a} = a_{11} + \frac{a_{12}a_{21}}{1 - a_{22}}, \quad \tilde{b} = b_{11} + \frac{b_{12}a_{21}}{1 - a_{22}},$$

$$\tilde{g}_1 = a_{13} + \frac{a_{12}a_{23}}{1 - a_{22}}, \quad \tilde{g}_2 = b_{13} + \frac{b_{12}a_{23}}{1 - a_{22}}.$$

Технологічний темп приросту, який досягається при $c(t)=0$, дорівнює $\hat{\lambda} = \frac{1-\tilde{a}}{\tilde{b}}$.

При $c(t) = c_0 e^{rt}$ траєкторія $x_1(t)$ має вигляд:

$$x_1(t) = \left(x_1(0) - \frac{(\tilde{g}_1 + r\tilde{g}_2)c_0}{1 - \tilde{a} - r\tilde{b}} \right) e^{\hat{\lambda}t} + \frac{(\tilde{g}_1 + r\tilde{g}_2)c_0}{1 - \tilde{a} - r\tilde{b}} e^{rt}.$$

Зокрема, при сталому рівні споживання ($r=0$) отримуємо:

$$x_1(t) = \left(x_1(0) - \frac{\tilde{g}_1 c_0}{1 - \tilde{a}} \right) e^{\hat{\lambda}t} + \frac{\tilde{g}_1 c_0}{1 - \tilde{a}},$$

тобто темп приросту виробництва знарядь праці дуже швидко прямує до величини $\hat{\lambda}$.

Пропорційне зростання всіх галузей виробництва $x_i(t) = x_i(0)e^{r_0 t}$ ($i = 1, 2, 3$) існує при $r_0 = \frac{(1 - \tilde{a})x_i(0) - \tilde{g}_1 c_0}{\tilde{b}x_i(0) + \tilde{g}_2 c_0}$ і при цьому $0 \leq r_0 < \hat{\lambda}$.

Порядок виконання лабораторної роботи

1. За допомогою табличного процесора Excel (MathCAD, Maple чи ін.) розрахувати та побудувати траєкторії $x_1(t)$, $x_2(t)$ і $x_3(t)$ для заданих матриць коефіцієнтів A і B .

2. Дослідити розраховану тригалузеву динамічну модель при сталому рівні споживання.

3. Обчислити темпи приросту виробництва і споживання при пропорційному зростанні та можливі співвідношення між ними.

Завдання для самостійної роботи

Розробити алгоритм та програмне застосування, що реалізує числове знаходження розв'язків задачі Коші для системи диференціальних рівнянь, яка описує тригалузеву модель Леонтєва, і буде графік (траєкторію) розвитку.

Лабораторна робота 5.

Побудова нелінійної моделі Леонт'єва та дослідження траєкторій економічного розвитку

Основні відомості

Як відомо, динамічна модель Леонт'єва є деталізованою моделлю зростання валового суспільного продукту (ВСП) і національного доходу (НД). В основі моделі лежить припущення про взаємозв'язок між накопиченням і приростом ВСП. Цей взаємозв'язок реалізується за допомогою матриці капіталомісткості приростів виробництва. Крім того, передбачається миттєвість перетворення капіталовкладень у приріст основних фондів та миттєвість віддачі цих фондів в обсяги виробництва (що, взагалі, неправильно). Час вважається неперервним, що дозволяє застосування диференціальних рівнянь.

Використовуючи взаємозв'язок ВСП та НД:

$$X(t) = (E - A)^{-1}Y(t),$$

де вектор $Y(t)$ характеризує галузеву структуру НД, одержано рівняння моделі Леонт'єва щодо НД:

$$Y(t) = B(E - A)^{-1} \frac{dY(t)}{dt} + C(t),$$

де $B(E - A)^{-1}$ – матриця коефіцієнтів повної приростної капіталомісткості, тобто повних витрат виробничого нагромадження на одиничні прирости елементів національного доходу, що використовується.

Для з'ясування можливостей системи слід дослідити модель для різних траєкторій споживання.

Необхідно визначити технологічні можливості системи, які визначаються матрицями A і B . Для цього покладаючи $C(t) = 0$, знаходимо:

$$Y(t) = B(E - A)^{-1} \frac{dY(t)}{dt}.$$

Це система лінійних однорідних диференціальних рівнянь першого порядку з постійними коефіцієнтами. Загальний розв'язок

цієї системи відповідно до теорії диференціальних рівнянь має вигляд:

$$Y(t) = \sum_{i=1}^n d_i K_i e^{\frac{1}{s_i} t},$$

де s_i – власні числа матриці повного приросту капіталомісткості;

K_i – відповідні їм власні вектори;

d_i – коефіцієнти, які визначаються з початкової умови

$$Y(0) = \sum_{i=1}^n d_i K_i.$$

Траєкторія, що виходить з $Y(0)$, є комбінацією експонент з різними темпами приросту ($1/s_i$). В загальному випадку розвиток за траєкторією $Y(t) = Y_0 e^{kt}$, тобто з єдиним для всіх галузей темпом, неможливий, а відбувається з постійними структурними змінами. Однак існує певна схожість між розв'язком макроекономічної моделі, агрегованої до одного показника, та розв'язком структурної моделі. Ця схожість обумовлена наявністю в матриці коефіцієнтів повного приросту капіталомісткості власного числа Фробеніуса-Перрона.

Нехай тепер екзогенно задана траєкторія споживання $C(t) = C_0 e^{rt}$. У цьому випадку розв'язок системи є сумою загального розв'язку однорідної системи та часткового розв'язку неоднорідної і має вигляд:

$$Y(t) = \sum_{i=1}^n d_i K_i e^{\frac{1}{s_i} t} + (E - rB(E - A)^{-1})^{-1} C_0 e^{rt}$$

де коефіцієнти d_i визначаються на основі з початкової умови:

$$Y(0) = \sum_{i=1}^n d_i K_i + (E - rB(E - A)^{-1})^{-1} C_0.$$

Порядок виконання лабораторної роботи

Нехай економіка складається з двох галузей, причому відомі матриці прямих матеріальних витрат (A), приросту капіталомісткості (B) і початкового стану системи. Необхідно побудувати траєкторію розвитку системи з нульовим споживанням

і ненульовим споживанням, але із сталим темпом. Проілюструємо алгоритм розв'язування задачі на такому прикладі [12, С. 25-31]:

$$A = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.9 \\ 0.5 & 0.4 \end{pmatrix}, \quad X(0) = \begin{pmatrix} 50 \\ 50 \end{pmatrix}, \quad Y(0) = \begin{pmatrix} 25 \\ 15 \end{pmatrix},$$

$$C(0) = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad r = 0.1.$$

1. Перевірка допустимості траєкторії.

Підставивши початкові дані у траєкторію моделі Леонтєва

$$X(t) = AX(t) + B \frac{dX(t)}{dt} + C(t),$$

отримаємо системи рівнянь для

випадків нульового і ненульового споживання відповідно:

$$\begin{cases} 50 = 0.1 \cdot 50 + 0.1 \cdot 50 + 0.8 \frac{dX_1}{dt} + 0.9 \frac{dX_2}{dt}, \\ 50 = 0.2 \cdot 50 + 0.3 \cdot 50 + 0.5 \frac{dX_1}{dt} + 0.4 \frac{dX_2}{dt}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 50 = 0.1 \cdot 50 + 0.1 \cdot 50 + 0.8 \frac{dX_1}{dt} + 0.9 \frac{dX_2}{dt} + 10, \\ 50 = 0.2 \cdot 50 + 0.3 \cdot 50 + 0.5 \frac{dX_1}{dt} + 0.4 \frac{dX_2}{dt} + 10. \end{cases}$$

Розв'язуючи їх, отримаємо $\begin{cases} \frac{dX_1}{dt} = 50, \\ \frac{dX_2}{dt} = 0 \end{cases}$ і $\begin{cases} \frac{dX_1}{dt} = 30, \\ \frac{dX_2}{dt} = 0 \end{cases}$ відповідно.

Таким чином, для обох випадків умова допустимості траєкторії виконується.

2. Розрахунок матриці повних матеріальних витрат

$$S = (E - A)^{-1}.$$

Для нашого прикладу отримаємо $S = \begin{pmatrix} 1.143 & 0.164 \\ 0.328 & 1.475 \end{pmatrix}$.

3. Знаходження матриці повного приросту капіталомісткості $\tilde{B} = B \cdot S$.

$$\text{Отримаємо } \tilde{B} = \begin{pmatrix} 1.213 & 1.459 \\ 0.705 & 0.672 \end{pmatrix}.$$

4. Знаходження власних чисел матриці повного приросту капіталомісткості:

$$|\tilde{B} - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1.213 - \lambda & 1.459 \\ 0.705 & 0.672 - \lambda \end{vmatrix}$$

Звідси маємо квадратне рівняння:

$$\lambda^2 - 1.885\lambda - 0.214 = 0,$$

$$\text{корені якого } \begin{cases} \lambda_1 = 1.992 \\ \lambda_2 = -0.107 \end{cases}.$$

Оскільки власні числа мають різні знаки, то траєкторія є допустимою. Показники темпів зростання дорівнюють:

$$\rho_1 = \frac{1}{\lambda_1} = 0.502, \quad \rho_2 = \frac{1}{\lambda_2} = -9.346.$$

5. Знаходження власних векторів: $\tilde{B} \cdot K = \lambda \cdot K$.

Для знаходження елементів власних векторів $K_1 = \begin{pmatrix} K_{11} \\ K_{21} \end{pmatrix}$ і

$K_2 = \begin{pmatrix} K_{12} \\ K_{22} \end{pmatrix}$, що відповідають власним числам λ_1 і λ_2 , отримаємо

дві системи рівнянь:

$$\begin{pmatrix} 1.213 & 1.459 \\ 0.705 & 0.672 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} K_{11} \\ K_{21} \end{pmatrix} = 1.192 \cdot \begin{pmatrix} K_{11} \\ K_{21} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1.213 & 1.459 \\ 0.705 & 0.672 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} K_{12} \\ K_{22} \end{pmatrix} = -0.107 \cdot \begin{pmatrix} K_{12} \\ K_{22} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Їх розв'язки: } K_1 = \begin{pmatrix} K_{11} \\ K_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.533 \end{pmatrix} \text{ і } K_2 = \begin{pmatrix} K_{12} \\ K_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.904 \end{pmatrix}.$$

6. Знаходження коефіцієнтів d_i .

Для нульового споживання – $Y(0) = \sum_{i=1}^n d_i K_i$, звідки маємо

таку систему:
$$\begin{cases} 25 = d_1 + d_2 \\ 15 = 0.533d_1 - 0.904d_2 \end{cases}$$

і її розв'язок $d_1 = 26.162$, $d_2 = -1.162$.

У випадку ненульового споживання за формулою

$$Y(0) = \sum_{i=1}^n d_i K_i + (E - r\tilde{B})^{-1} C_0 \text{ отримаємо систему:}$$

$$\begin{cases} 25 = d_1 + d_2 + 13.33 \\ 15 = 0.533d_1 - 0.904d_2 + 11.73 \end{cases}$$

і її розв'язок $d_1 = 9.17$, $d_2 = 2.05$.

7. Побудова остаточної траєкторії розвитку системи.

Використовуючи обчислені показники, отримаємо траєкторію розвитку системи у випадку нульового споживання:

$$Y_1(t) = 26.162e^{0.502t} - 1.162e^{9.346t}$$

$$Y_2(t) = 26.162 \cdot 0.533 \cdot e^{0.502t} - 1.162 \cdot (-0.904) \cdot e^{9.346t}$$

або
$$Y_2(t) = 13.944e^{0.502t} + 1.05e^{9.346t}$$

При ненульовому споживанні траєкторія набуде вигляду:

$$Y_1(t) = 26.162e^{0.502t} - 1.162e^{9.346t} + 13.33e^{0.1t}$$

$$Y_2(t) = 13.944e^{0.502t} + 1.05e^{9.346t} + 11.73e^{0.1t}$$

Завдання для самостійної роботи

Розробити алгоритм та програмне застосування, що реалізує числове обчислення траєкторій розвитку системи для нульового і ненульового споживання з використанням динамічної моделі Леонтєва для двогалузевої економіки.

Лабораторна робота 6.

Дослідження динамічної економічної системи за допомогою моделі Харрода-Домара

Порядок виконання лабораторної роботи

Використовуючи модель економічного зростання Харрода-Домара $Y(t) = C(t) + \nu \frac{dY}{dt} + I(t)$, де $Y(t)$ – динаміка доходу, $C(t)$ – споживання, $I(t)$ – інвестиції, ν – коефіцієнт приростної капіталомісткості, дослідити динаміку $Y(t)$ та побудувати траєкторії розвитку системи.

1. Дослідити динаміку $Y(t)$, якщо споживання $C(t) = cY$ ($c = const$), а інвестиції $I(t) = I_0 = const$.

2. Знайти максимальний можливий темп приросту доходу для економіки, в якій коефіцієнт приростної капіталомісткості $\nu = 4$. Обчислити через скільки років у цій економіці подвоїться дохід.

3. Нехай у моделі Харрода-Домара відсутнє споживання, коефіцієнт приростної капіталомісткості залежить від часу: $\nu(t) = \nu(0)e^{\lambda t}$, $\nu(0)$ – коефіцієнт у початковий момент часу, $\lambda > 0$. Визначити межу (границю) доходу.

4. В моделі Харрода-Домара споживання зростає з темпом, що дорівнює технологічному темпу приросту ($\frac{1}{\nu}$), норма

споживання $\frac{C}{Y} = 0.8$, коефіцієнт приростної капіталомісткості ν

=4. Визначити:

- 1) проміжок часу, протягом якого дохід буде зростати;
- 2) момент часу, коли дохід впаде до нуля;
- 3) максимальне значення доходу, якщо споживання в початковий момент часу $C(0) = 400$.

Завдання для самостійної роботи

Розробити алгоритм та програмне застосування, що реалізує обчислення і побудову траєкторій динаміки доходу за моделлю Харрода-Домара.

Лабораторна робота 7.

Побудова фазових портретів і дослідження поведінки динамічних систем для двох змінних

Основні відомості

Алгоритм побудови фазового портрета динамічної системи

Дано динамічну систему для двох змінних:
$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

1. Визначити положення рівноваги, розв'язавши систему
$$\begin{cases} ax + by = 0 \\ cx + dy = 0 \end{cases}$$
2. Знайти власні значення матриці системи з рівняння $\lambda^2 - \delta\lambda + \Delta = 0$
3. Визначити тип точки рівноваги і зробити висновок про її стійкість.
4. Знайти рівняння головних ізоклін і побудувати їх на фазовій площині.
5. Якщо положення рівноваги є сідлом або вузлом, то знайти ті фазові траєкторії, які лежать на прямих, що проходять через точку рівноваги.
6. Побудувати фазові траєкторії.
7. Визначити напрямок руху по фазових траєкторіях, помітивши його стрілками на фазовому портреті.

Головні ізокліни

Вертикальна ізокліна – сукупність точок фазової площини, у яких дотична до фазової траєкторії паралельна вертикальній осі. Оскільки в цих точках $x'(t) = 0$, то рівняння вертикальної ізокліни має вигляд $ax + by = 0$.

Горизонтальна ізокліна – сукупність точок фазової площини, у яких дотична до фазової траєкторії паралельна горизонтальній осі. Оскільки в цих точках $y'(t) = 0$, то рівняння горизонтальної ізокліни має вигляд $cx + dy = 0$.

Точка рівноваги на фазовій площині – це точка перетину головних ізоклін.

Особливості фазових траєкторій

Якщо положення рівноваги є сідлом або вузлом, то існують фазові траєкторії, які лежать на прямих, що проходять через початок координат. Рівняння таких прямих можна відшукати у вигляді $y = kx$. Якщо підставити цей вираз у $\frac{dy}{dx} = \frac{cx + dy}{ax + by}$, то для

визначення k отримаємо: $k = \frac{c + dk}{a + bk}$ або $bk^2 + (a - d)k - c = 0$.

Якщо $k_1 \neq k_2$ і тип точки рівноваги – сідло, то прямі $y = k_1x$, $y = k_2x$ – називаються сепаратрисами, а інші фазові траєкторії – гіперболи, для яких сепаратриси є асимптотами.

Якщо $k_1 \neq k_2$ і тип точки рівноваги – вузол, то фазові траєкторії – прямі $y = k_1x$, $y = k_2x$, а інші фазові траєкторії – параболи, які дотикаються в початку координат до однієї з них.

Якщо $k_1 = k_2 = k$ і тип точки рівноваги – вироджений вузол, то фазова траєкторія – пряма $y = kx$, а інші фазові траєкторії – параболи, які дотикаються в початку координат до неї.

Якщо положення рівноваги – центр, то фазові траєкторії є еліпсами.

Якщо положення рівноваги – фокус, то фазові траєкторії є спіралями.

Приклади побудови фазових портретів динамічних систем

1). Побудувати фазовий портрет системи $\begin{cases} x' = -2x - 2y \\ y' = -x + 2y \end{cases}$.

1.1. Знайдемо точки рівноваги системи $\begin{cases} -2x - 2y = 0 \\ -x + 2y = 0 \end{cases}$.

Система лінійна, отже, особлива точка одна. Її координати $(0, 0)$.

1.2. Знайдемо власні значення матриці $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Детермінант $\Delta = -4 - 2 = -6$, слід $\delta = -2 + 2 = 0$. Характеристичне рівняння $\lambda^2 - 6 = 0$. Звідси $\lambda_1 = \sqrt{6}$, $\lambda_2 = -\sqrt{6}$.

1.3. Визначимо тип точки рівноваги: корені характеристичного рівняння дійсні і різних знаків, отже, маємо тип точки “сідло”.

1.4. Знайдемо рівняння головних ізоклін:

– вертикальна (зміна x не відбувається, тобто $x' = 0$):
 $x + y = 0$ або $y = -x$;

– горизонтальна (зміна y не відбувається, тобто $y' = 0$):
 $-x + 2y = 0$ або $y = \frac{x}{2}$.

1.5. Знайдемо ті фазові траєкторії, які лежать на прямих, що проходять через точку рівноваги (сепаратиси сідла). Шукаємо їх у вигляді $y = kx$: $k = \frac{-1 + 2k}{-2 \pm 2k}$, $-2k^2 - 4k + 1 = 0$, $k_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{6}}{2}$,

$k_1 = 0.22$, $k_2 = -2.22$. Отже, $y_1 = 0.22x$, $y_2 = -2.22x$.

Будуємо головні ізокліни та фазові траєкторії (рис. 1, а).

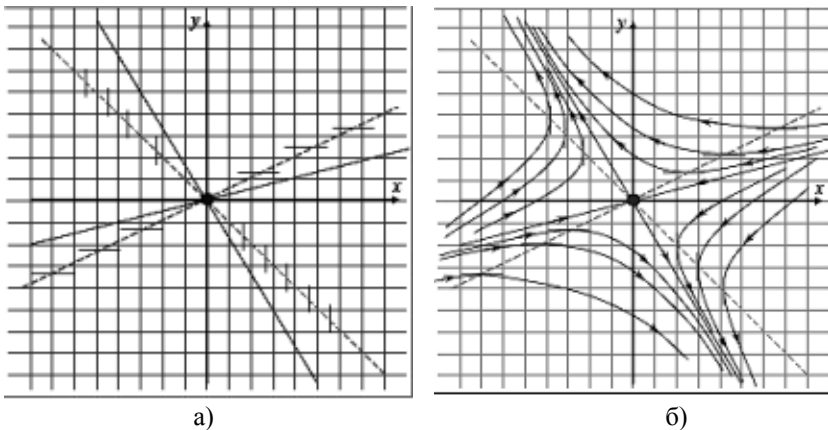


Рис. 1. Головні ізокліни та фазові траєкторії (а); фазовий портрет системи (б)

1.6. Визначимо напрямок руху вздовж фазових траєкторій. Для цього визначимо знак похідної y' в точках на осі x . При $y = 0$ маємо $y'|_{y=0} = -x < 0$ при $x > 0$. Це означає, що рух вздовж фазових траєкторій, які перетинають додатну частину осі x , відбувається згори вниз (рис. 1, б).

2). Побудувати фазовий портрет системи $\begin{cases} x' = -4x + 2y \\ y' = x + 3y \end{cases}$.

2.1. Знайдемо точки рівноваги системи $\begin{cases} -4x + 2y = 0 \\ x + 3y = 0 \end{cases}$.

Координати особливої точки $(0, 0)$.

2.2. Знайдемо власні значення матриці системи. Характеристичне рівняння має вигляд: $\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$. Звідси $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 5$.

2.3. Визначимо тип точки рівноваги: корені характеристичного рівняння дійсні і додатні, тому маємо “нестійкий вузол”.

2.4. Знайдемо рівняння головних ізоклін:

– вертикальна ($x' = 0$): $y = -2x$;

– горизонтальна ($y' = 0$): $y = -\frac{x}{3}$.

2.5. Знайдемо ті фазові траєкторії, які лежать на прямих, що проходять через точку рівноваги: $y_1 = -2x$, $y_2 = -x$.

Але для випадку вузла тільки одна із знайдених прямих буде належати до фазового портрета. Це та з них, що відповідає меншому із власних значень (тобто, $\lambda_1 = 2$). Встановити, яка саме, можна розв'язавши матричне рівняння

$(A - \lambda E)X = 0$: $\left[\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$. Отже, фазовою є

пряма $y_2 = -x$.

2.6. Напрямок руху вздовж фазових траєкторій однозначно визначається нестійкістю точок рівноваги (рис. 2).

3). Побудувати фазовий портрет системи $\begin{cases} x' = -x - 4y \\ y' = 4x - 2y \end{cases}$.

3.1. Знайдемо точки рівноваги системи $\begin{cases} -x - 4y = 0 \\ 4x - 2y = 0 \end{cases}$.

Координати особливої точки $(0, 0)$.

3.2. Зайдемо власні значення матриці системи. Характеристичне рівняння має вигляд: $\lambda^2 - 3\lambda + 18 = 0$. Маємо два комплексно-спряжені корені, дійсна частина яких дорівнює -3.

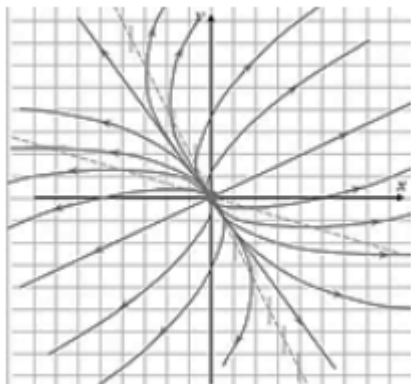


Рис. 2. Фазовий портрет системи 2

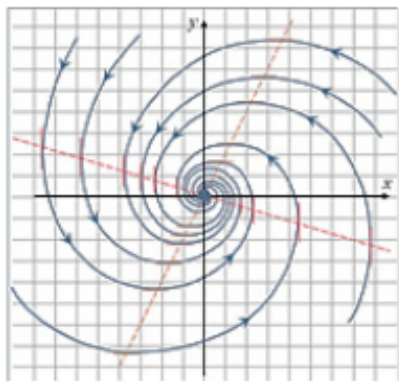


Рис. 3. Фазовий портрет системи 3

3.3. Визначимо тип точки рівноваги: корені характеристичного рівняння комплексні з від'ємною дійсною частиною, тому маємо тип – “стійкий фокус”.

3.4. Знайдемо рівняння головних ізоклін:

– вертикальна ($x' = 0$): $y = -x/4$;

– горизонтальна ($y' = 0$): $y = 2x$.

3.5. Оскільки тип особливої точки – фокус, то фазові траєкторії є спіралями.

3.6. Визначимо напрямок “закручування” спіралі – за годинниковою стрілкою чи проти. Для цього визначимо знак похідної y' в точках осі x . При $y = 0$ маємо $y'|_{y=0} = 4x > 0$ при $x > 0$. Отже, ордината точки, що перетинає додатну вісь x , зростає. Це означає, що рух вздовж фазових траєкторій, які перетинають додатну частину осі x , відбувається знизу вгору, тобто рух по спіралі йде проти годинникової стрілки (рис. 3) [21].

Завдання для самостійної роботи

Розробити програмне застосування, що реалізує алгоритм побудови фазового портрета динамічної системи для двох змінних.

Лабораторна робота 8.

Дослідження динаміки системи та прогнозування її параметрів на основі моделі Солоу

Мета і задачі лабораторної роботи. Основною метою лабораторної роботи є закріплення студентами теоретичного матеріалу, пов'язаного з дослідженням та аналізом динаміки господарської системи; оволодіння методикою побудови моделей динаміки системи на основі виробничої функції та формування прогнозів показників діяльності системи на основі моделі Солоу.

Як індивідуальне завдання студенти отримують вхідні дані для проведення самостійного дослідження, наведені в Додатку 3. У завдання входять реальні статистичні дані про роботу великої господарської системи за тривалий проміжок часу. Студент повинен проаналізувати роботу господарської системи й побудувати прогнози динаміки основних показників її діяльності. Для розв'язування цих задач йому потрібно:

- виявити тенденції й особливості динаміки господарської системи;
- обчислити необхідні параметри і сформувати виробничу функцію системи;
- розрахувати характеристики виробничої функції;
- провести моделювання динаміки системи на основі виробничої функції;
- сформувати прогнози показників діяльності системи на основі моделі Солоу;
- розглянути “золоте правило нагромадження” моделі Солоу.

Методи та засоби дослідження. При дослідженні економічної системи застосовуються методи аналізу часових рядів, методи побудови й аналізу виробничих функцій господарської системи, методи моделювання динаміки системи. Розрахунковим засобом може бути MS Excel чи інша система комп'ютерної математики (MathCAD, Maple тощо).

Вхідні дані подані у вигляді чотирьох часових рядів, що містять реальні річні значення показників великої господарської системи, а саме: валовий продукт у поточних цінах, валовий продукт у фіксованих цінах; капітал у фіксованих цінах і

чисельність працюючих.

У Додатку 3 наведено динамічні ряди основних макроекономічних показників за 26-річний період розвитку (1960-1985 рр.) провідних промислово розвинутих країн світу. Подані вхідні статистичні матеріали розраховані за методологією Системи національних рахунків (СНР) ООН. Дані наведені в агрегованій стандартній галузевій класифікації видів економічної діяльності (ISIC).

Структура лабораторної роботи

1. Введення вхідних даних.

2. Побудова похідних часових рядів. За чотирма вхідними рядами потрібно отримати ще п'ять похідних часових рядів: з показниками фондоозброєності, фондovіддачі, продуктивності праці, з базовими і ланцюговими показниками зміни рівня цін. Надалі в аналізі беруть участь усі дев'ять рядів.

3. Отримання рядів абсолютних і відносних приростів. Ці ряди дозволяють уточнити надалі тип тренда і використовуються безпосередньо для аналізу діяльності господарської системи.

4. Згладжування рядів методом ковзного середнього при різних варіантах параметрів згладжування. Аналізуються розбіжності між рядами і результатами їхнього згладжування.

5. Апроксимація рядів методом експоненційного згладжування при різних варіантах параметрів згладжування. Аналізуються розбіжності між рядами і результатами їхнього експоненційного згладжування. На основі цього методу формуються короткострокові прогнози за кожним з рядів.

6. Нормування трендів. На основі проведеного аналізу для кожного з дев'яти рядів вибираються лінії тренду. Визначаються параметри трендів, аналізуються розбіжності між рядами й виявленими трендами. Будуються трендові прогнози, визначаються довірчі границі прогнозів.

7. Формування виробничої функції. На основі часових рядів динаміки валового продукту, витрат капіталу і трудових ресурсів проводиться розрахунок параметрів виробничої функції без і з урахуванням технічного прогресу. Проводиться оцінка основних характеристик виробничої функції: ефективності праці й капіталу, граничної норми заміщення. За допомогою побудованої виробничої

функції формуються прогнози за основними показниками діяльності господарської системи.

8. Побудова і дослідження моделі динаміки. Використовуючи параметри виробничої функції, будується модель економічної динаміки Солоу. На основі отриманої комп'ютерної моделі проводяться розрахунки для різних варіантів політики норми нагромадження.

Порядок виконання лабораторної роботи

1. *Введення вхідних даних і одержання похідних рядів.* Потрібно ввести в таблицю часові ряди, що відповідають вхідним даним свого завдання. Таблиця повинна містити загальний заголовок із назвою країни й галузі, що досліджуються. У лівому стовпці вказуються періоди (роки). У наступному стовпці вводяться вхідні дані. Ярлик аркуша книги Excel назвати Дані.

За даними чотирьох введених рядів необхідно побудувати п'ять нових часових рядів, що визначають показники фондоозброєності, фондівіддачі, продуктивності праці й базові та ланцюгові показники зміни рівня цін у розглянутій господарській системі. Відповідні п'ять стовпців треба розмістити праворуч від таблиці вхідних даних.

За всіма отриманими рядами даних побудувати графіки. Графіки розташувати на тому ж аркуші, оформити необхідними заголовками та легендами і відформатувати.

2. *Побудова рядів приростів.* Для кожного з дев'яти рядів розрахувати ряди абсолютних і відносних приростів. Ці ряди навести на двох аркушах: Абс. прирости і Відн. прирости. На цих же аркушах побудувати і відформатувати діаграми з рядами приростів. Ряди приростів використовуються надалі для безпосереднього аналізу показників динаміки господарської системи і для вибору типу тренда.

3. *Згладжування рядів методом ковзного середнього.* Розрахунки і діаграми будуються на окремому аркуші Ковзн. середнє.

При згладжуванні можна використовувати функцію Excel СРЗНАЧ. Згладжування дозволяє виявити основний характер ряду, визначити основні закономірності динаміки показників господарської системи.

Базою згладжування може бути обране непарне число. Чим більшою є база, тим, у загальному випадку, сильнішим буде ефект згладжування. Студентові потрібно самому вибрати базу, найбільш прийнятну для подальшого аналізу. Для цього необхідно переглянути результати при різних базах згладжування і вибрати таку величину бази, що зберігає характерні риси динамічного ряду, але дозволяє абстрагуватися від випадкової складової ряду. Можливо, для різних рядів необхідно буде використати бази різної величини. В загальному випадку рекомендується база згладжування, що дорівнює 3 і 7.

Крім згладженого ряду, корисно розрахувати ряди залишків-розбіжностей між вхідним і згладженим рядом. Ряд залишків дозволяє оцінити якість проведеного згладжування.

В одному вікні діаграми слід відобразити графік за даними вхідного ряду разом з результатами його згладжування при різних базах.

4. *Апроксимація рядів методом експоненційного згладжування.* Розрахунки й діаграми будуються на окремому аркуші Експ. згладжування.

Параметр згладжування може бути обраний у проміжку від 0 до 1. Чим ближчою є величина параметра згладжування до 0, тим сильнішим буде ефект згладжування. Величини, що рекомендуються, зазвичай, лежать у проміжку від 0,1 до 0,3.

В одному вікні діаграми потрібно відображати графік вхідного ряду разом з результатами його експоненційного згладжування при двох значеннях параметра.

Апроксимацію методом експоненційного згладжування варто провести для кожного з дев'яти рядів. Така обробка ряду дає можливість виявити тенденції у формі, придатній для побудови короткострокового прогнозу.

5. *Формування трендів.* Розрахунки й діаграми будуються на окремому аркуші *Прогнози*.

Для кожного з дев'яти рядів проводиться аналіз тенденцій і побудова прогнозу шляхом виявлення аналітичного тренду. Для кожного ряду потрібно вивести чотири варіанти лінії тренду (лінійну, степеневу, логарифмічну, експоненційну) з рівнянням і коефіцієнтом детермінації (коефіцієнтом апроксимації) R^2 . Вибрати найбільш прийнятний тип тренду і за його рівнянням розрахувати

прогноз на 5 періодів вперед. Результати вивести на діаграму з вхідним рядом так, щоб лінія вхідних даних і лінія прогнозу відрізнялися за кольором. Таким чином, на аркуші повинні бути побудовані 9 діаграм із прогнозами.

6. *Формування виробничої функції.* Розрахунки виробничої функції (ВФ) проводяться на окремому аркуші з назвою ВФ.

Виробнича функція визначає залежність випуску продукції від витрат виробничих чинників – трудових і капітальних ресурсів. У лабораторній роботі визначаються параметри степеневі ВФ, тобто функції типу Кобба-Дугласа. Такий розрахунок проводиться на основі визначення параметрів регресії залежної змінної – Валовий продукт у фіксованих цінах – на дві незалежні змінні: Чисельності працюючих і Капітал у фіксованих цінах.

Виробнича функція Кобба-Дугласа має вигляд:

$$Y = A \cdot K^{\alpha} \cdot L^{\beta}$$

Для визначення її параметрів A , α , β застосовуються регресійні методи.

Разом з формуванням звичайної виробничої функції на цій же сторінці слід визначити параметри виробничої функції з урахуванням впливу технічного прогресу. Технічний прогрес враховується в моделі в автономній формі у вигляді множника вигляду e^{γ} . Таким чином, виробнича функція Кобба-Дугласа з урахуванням технічного прогресу має вигляд:

$$Y = A \cdot K^{\alpha} \cdot L^{\beta} \cdot e^{\gamma}$$

Для проведення необхідних розрахунків варто сформулювати нову змінну, що відповідає часу t . Потім звернутися до процедури Регресія і провести обчислення, що охоплюють новий натуральний ряд як одну з незалежних змінних. В результаті буде отримана виробнича функція Кобба-Дугласа з урахуванням технічного прогресу. Її параметри відрізняються від параметрів ВФ, отриманих без урахування технічного прогресу.

Виходячи з конкретних значень параметрів для двох варіантів ВФ, варто обчислити два варіанти прогнозу ВВП у цінах конкретного року на 5 періодів вперед. Такий розрахунок необхідно провести на аркуші Прогнози. Як дані чинників (Капітал і Праця) для майбутніх періодів варто використати їх трендові прогнозні значення.

Результати вивести на ту діаграму, де вже є раніше побудований прогноз ВВП у фіксованих цінах. Таким чином, у даному вікні діаграми ряд, що містить вхідні дані, буде продовжений трьома варіантами прогнозу: відповідно до тренду і до двох варіантів виробничої функції.

7. *Побудова і дослідження моделі динаміки.* На основі параметрів виробничої функції будується модель економічної динаміки. За основу взята модель Солоу, що зв'язує динаміку національного продукту, праці й капіталу через виробничу функцію. У комп'ютерному варіанті можна провести моделювання при численних припущеннях для неоднорідної виробничої функції з урахуванням технічного прогресу і з різними варіантами економічної політики. Побудова моделі й подальше експериментування з нею варто провести на окремому аркуші з назвою Модель.

Зразок для одного з варіантів з лінійною зміною норми нагромадження наведено у додатку 3. Там також подано графіки динаміки основних показників, отримані за результатами проведених табличних розрахунків.

Інший варіант, який потрібно розглянути, – модель з експоненційною політикою зміни норми нагромадження. Необхідно виявити основні розбіжності між моделями з лінійною та експоненційною політиками норми нагромадження.

Для реалізації моделі варто організувати на аркуші блок комірок із вхідними даними для моделі. Далі необхідно побудувати таблицю, рядки якої відповідають часу (наприклад, 12 років прогнозу динаміки) і прогнозованим обсягам виробництва, фонду нагромадження, фонду споживання, капіталу, праці, нормі нагромадження і нормі споживання. Комірки таблиці варто зв'язати одну з одною і з комірками вхідних даних відповідно до моделі.

Для моделі без технічного прогресу можна використати ту ж таблицю, поклавши в ній величину темпу прогресу рівною 0. При цьому, звичайно, потрібно ввести чисельні значення параметрів виробничої функції, розраховані без урахування технічного прогресу.

Побудувати графіки:

- за першими п'ятьма рядками таблиці, що відображають змінні моделі;

- за останніми чотирма рядками таблиці, що охоплюють найважливіші додаткові характеристики динаміки.

За отриманою комп'ютерною моделлю необхідно провести розрахунки для різних варіантів політики норми нагромадження, що реалізують певні завдання щодо останнього періоду моделювання:

- максимізацію випуску продукції;
- максимізацію продуктивності праці;
- максимізацію віддачі капіталу;
- максимізацію середньодушового споживання.

Наступний етап – розгляд “золотого правила нагромадження” моделі Солоу, за яким можна максимізувати середньодушове споживання.

Для цього потрібно розмістити на новій сторінці з назвою Норма нагромадження дві таблиці, які відображають модель Солоу з урахуванням технічного прогресу. Горизонт прогнозу моделей встановити 25 років. З огляду на те, що розглядатиметься стаціонарний режим політики норми нагромадження, то величина зміни норми нагромадження кожного року h дорівнює 0.

Для першої моделі розрахувати за допомогою Пошуку розв'язку Excel норму нагромадження, величина якої максимізує середньодушове споживання в третьому прогнозному періоді. Знайдене значення використовувати у всіх періодах прогнозу. Для другої моделі розрахувати норму нагромадження, величина якої максимізує середньодушове споживання в 25-му прогнозному періоді. Потрібно впевнитися, що найбільше середньодушове споживання в довготермінових періодах досягається тоді, коли норма нагромадження дорівнює еластичності випуску за фондами (для деяких варіантів потрібно взяти більший період).

В одному вікні діаграми побудувати графіки динаміки середньодушового споживання в обох випадках. Перевірити той факт, що вигреш у поточному споживанні перетворюється на програв у найближчій перспективі [18].

Завдання для самостійної роботи

Розробити алгоритм та програмне застосування, що реалізує побудову моделі динаміки господарської системи на основі виробничої функції і дослідження системи та прогнозування її параметрів на основі моделі Солоу.

Додаток 1

Варіант 1.

Номер родини	Заощадження, тис. грн.	Доходи, тис. грн.	Видатки, тис. грн.	Додаткові доходи, тис. грн.	Борг, тис. грн.
1	2	20	15	2,31	4
2	3	25	20	4,67	6
3	4	30	20	6,17	4
4	3	35	25	8,7	8
5	5	40	30	10,7	7
6	9	60	35	13,5	0
7	12	90	40	16,2	9
8	21	120	40	18,3	15
9	22	130	50	21,2	3
10	30	130	40	22,7	0

Варіант 2.

Рік	Споживання на душу населення, кг	Ціна за 1 кг, грн.	Дохід на душу населення за рік, грн.	Ціна заміників за 1 кг, грн.	Рівень інфляції, %
1	5,46	3,53	978	4,67	23
2	5,73	3,64	1 091	6,17	26
3	5,58	3,75	1 121	8,7	34
4	5,87	3,71	1 171	10,7	28
5	5,12	3,74	1 201	13,5	37
6	5,80	3,92	1 332	16,2	37
7	5,90	4,05	1 350	18,3	25
8	6,1	4,0	1 370	21,2	26
9	6,2	4,1	1 350	22,7	31
10	6,5	4,4	1 380	25,1	33

Варіант 3

Рік	Споживання на душу населення, кг	Ціна за 1 кг, грн.	Дохід на душу населення, грн.	Ціна заміників за 1 кг, грн.	Рівень інфляції, %
1	57,04	0,62	978	6,17	23
2	52,85	0,62	1091	8,7	26
3	53,60	0,63	1121	10,7	34

4	55,37	0,64	1171	13,5	28
5	55,33	0,65	1332	16,2	37
6	55,54	0,65	1332	18,3	37
7	56,01	0,65	1337	21,2	25
8	56,20	0,67	1335	22,7	26
9	56,30	0,68	1340	25,1	31
10	56,35	0,69	1345	26,1	33

Варіант 4.

Рік	Виробництво на душу населення, кг	Ціна за 1 кг, грн.	Дохід на душу населення, грн.	Ціна замінників за 1 кг, грн.	Рівень інфляції, %
1	15,06	16,20	1450,00	8,7	23
2	16,25	17,15	1475,00	10,7	26
3	16,75	17,77	1500,50	13,5	34
4	17,50	19,01	1510,75	16,2	28
5	18,10	19,50	1500,75	18,3	37
6	18,76	20,10	1527,30	21,2	37
7	19,42	20,90	1590,00	22,7	25
8	19,85	21,25	1620,00	25,1	26
9	20,0	22,22	1660,00	26,1	31
10	21,1	23,3	1610,00	27,5	33

Варіант 5.

Рік	Споживання на душу населення, кг	Ціна за 1 кг, грн.	Дохід на душу населення, грн.	Ціна замінників за 1 кг, грн.	Рівень інфляції, %
1	6,37	2,81	750	10,7	23
2	6,49	2,87	834	13,5	26
3	6,11	2,93	836	16,2	34
4	6,95	2,71	862	18,3	28
5	6,27	2,91	892	21,2	37
6	7,01	2,99	934	22,7	37
7	7,03	3,00	934	25,1	25
8	7,15	3,01	936	26,1	26
9	7,20	3,4	940	27,5	31
10	7,30	3,5	930	29,9	33

Варіант 6.

Місяць	Місячний дохід, млн. грн.	Число робочих днів у місяці	Виробничі затрати, млн. грн.	Інші затрати, тис. грн.	Рівень інфляції, %
1	3,40	20	2,64	13,5	3
2	2,70	18	2,54	16,2	6
3	3,30	21	2,71	18,3	4
4	3,37	22	2,82	21,2	8
5	3,41	19	2,84	22,7	7
6	3,52	22	2,73	25,1	7
7	3,12	22	2,85	26,1	5
8	3,01	22	2,70	27,5	6
9	3,45	22	2,95	29,9	1
10	3,47	20	2,96	32,1	3

Варіант 7.

Рік	Виробництво на душу населення, кг	Ціна за 1 кг, грн.	Дохід на душу населення за рік, грн.	Ціна замінників за 1 кг, грн.	Рівень інфляції, %
1	80	0,25	80,33	4,67	23
2	65	0,55	89,60	6,17	26
3	78	0,60	95,80	8,7	34
4	55	0,83	102,50	10,7	28
5	75	0,85	101,65	13,5	37
6	95	0,80	115,37	16,2	37
7	97	0,75	114,45	18,3	25
8	86	0,71	121,50	21,2	26
9	81	0,70	120,69	22,7	31
10	100	0,95	130,50	25,1	33

Варіант 8.

Рік	Споживання на душу населення, кг	Ціна за 1 кг, грн.	Дохід на душу населення за рік, грн.	Ціна замінників за 1 кг, грн.	Рівень інфляції, %
1	4,51	6,51	34,5	8,691	23
2	5,02	6,11	38,0	10,5	26
3	4,81	7,15	36,3	10,52	34
4	4,34	7,28	34,7	11,68	28

5	4,22	7,96	33,9	13,77	37
6	4,19	8,05	31,2	13,7	37
7	4,13	8,15	32,8	14,43	25
8	4,20	8,20	33,0	14,07	26
9	4,30	8,40	33,4	16,46	31
10	4,23	8,23	33,1	15,02	33

Варіант 9.

Рік	Споживання на душу населення, кг	Ціна за 1 кг, грн.	Дохід на душу населення, грн.	Ціна заміників за 1 кг, грн.	Рівень інфляції, %
1	18,8	6,51	1700	10,50	23
2	17,0	6,11	1750	10,52	26
3	16,5	7,15	2001	11,68	34
4	15,9	7,28	2127	13,77	28
5	14,7	7,96	2254	13,70	37
6	14,1	8,05	2200	14,43	37
7	14,0	8,15	2270	14,07	25
8	13,3	8,20	2280	16,46	26
9	13,1	8,40	2290	15,02	31
10	12,4	8,23	2300	15,27	33

Варіант 10.

Рік	Дохід, млн грн.	Виробничі площі, (м ²)	Виробничі затрати, млн грн.	Інші затрати, тис. грн.	Рівень інфляції, %
1	28,70	2500	20,75	18,75	23
2	34,20	2850	24,41	21,14	26
3	34,96	2850	24,32	23,37	34
4	35,20	3000	25,30	27,45	28
5	33,50	3000	27,85	27,13	37
6	37,62	3330	29,55	29,61	37
7	38,95	3500	29,88	32,52	25
8	40,00	3500	31,80	31,8	26
9	42,1	3600	32,60	35,18	31
10	43,3	3700	33,0	37,07	33

Додаток 2

Варіант 1

Задача 1	
Вміст сірки у вугіллі (кг/т)	Собівартість 1 кВт/год. електроенергії на ТЕС (коп./кВт)
7,9	9,81
6,7	8,75
6,5	8,55
5,5	6,89
5,6	7,42
5,7	6,25
4,6	5,64
4,8	4,93
4,0	?

Задача 2	
Швидкодія офісного Еко Trade-Херох	Кількість друкованих копій
100	55000
250	61000
400	65000
500	66000
900	71000
1200	73000
1500	74000
1700	75000
2000	76000
2500	?

Задача 3	
Дата	Курс UAH/USD
12.10.2009	8,1900
13.10.2009	8,1900
14.10.2009	8,1902
15.10.2009	8,1906
16.10.2009	8,1907
19.10.2009	8,2000
20.10.2009	8,2000
21.10.2009	8,210
22.10.2009	?

Задача 4.

Рік	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Прибуток (тис.грн.)	1200	2100	2500	2300	3500	4500	4900	5900	?

Варіант 2

Задача 1	
Вміст сірки у вугіллі (кг/т)	Собівартість 1 кВт/год. електроенергії на ТЕС (коп./кВт)
6,2	10,05
6,9	11,71
6,8	12,35
6	8,05
5,3	7,65
5	6,02
5,7	7,61
5,2	5,55
4	?

Задача 2	
Швидкодія офісного Еко Trade-Херох	Кількість друкованих копій
100	57000
250	63000
400	67000
500	69000
900	73000
1200	75000
1500	77000
1700	78000
2000	79000
2500	?

Задача 3	
Дата	Курс UAH/EVR
12.10.2009	12,4221
13.10.2009	12,4222
14.10.2009	12,4225
15.10.2009	12,4230
16.10.2009	12,4230
19.10.2009	12,4242
20.10.2009	12,4255
21.10.2009	12,4250
22.10.2009	?

Задача 4.

Рік	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Прибуток	1400	2100	3800	3100	3800	4000	5100	5200	?

Варіант 3

Задача 1		Задача 2		Задача 3	
Вміст сірки у вугіллі (кг/т)	Собівартість 1 кВт/год. електроенергії на ТЕС (коп./кВт)	Швидкодія офісного Еко Trade-Херох	Кількість друкованих копій	Дата	Курс UAH/RUB
8	10,01	100	34000	12.10.2009	2,5700
6,6	8,72	250	38000	13.10.2009	2,5705
6,4	8,48	400	40000	14.10.2009	2,5700
6,1	7,76	500	41000	15.10.2009	2,5690
5,3	7,54	900	44000	16.10.2009	2,5685
5	6,26	1200	45000	19.10.2009	2,5660
4,8	5,89	1500	46000	20.10.2009	2,5600
4,5	4,49	1700	46000	21.10.2009	2,5600
4	?	2000	47000	22.10.2009	?
		2500	?		

Задача 4

Рік	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Прибуток	6400	4800	4200	4200	3700	3800	3000	2900	?

Варіант 4

Задача 1		Задача 2		Задача 3	
Вміст сірки у вугіллі (кг/т)	Собівартість 1 кВт/год. електроенергії на ТЕС (коп./кВт)	Швидкодія офісного Еко Trade-Херох	Кількість друкованих копій	Дата	Курс UAH/USD
8,2	9,98	100	64000	11.01.2010	7,5600
6,4	7,73	250	72000	12.01.2010	7,5800
6,3	8,26	400	76000	13.01.2010	7,5900
6,2	7,81	500	78000	14.01.2010	7,5900
5,6	6,32	900	83000	15.01.2010	7,5950
5,9	6,15	1200	85000	18.01.2010	7,6500
5,5	5,76	1500	87000	19.01.2010	7,6700
4,8	4,58	1700	88000	20.01.2010	7,7000
4,0	?	2000	90000	22.01.2010	?
		2500	?		

Додаток 3

Статистичні дані економічної діяльності країни (США)

Роки	Сільське господарство				Промисловість			
	ВВП, млрд. дол.	Капітал-1972 р., млрд. дол.	Праця, тис. чол.	ВВП - 1980 р., млрд. дол.	ВВП, млрд. дол.	Капітал-1972 р., млрд. дол.	Праця, тис. чол.	ВВП - 1980 р., млрд. дол.
1960	20,3	137,5	5552	61,2	170,2	597,4	19499	405,4
1961	20,4	138,6	5289	61,2	171,0	613,0	18964	406,6
1962	20,8	140,9	5029	61,2	185,4	620,7	19497	436,2
1963	20,8	143,9	4810	61,9	195,3	647,4	19636	467,3
1964	19,8	147,0	4626	59,2	209,0	669,3	19941	480,4
1965	22,5	150,4	4470	61,6	227,4	697,7	20790	517,7
1966	23,6	154,4	4095	58,8	248,9	7313	22022	554,8
1967	22,9	158,9	3930	60,9	255,8	764,1	22279	559,1
1968	23,5	162,8	3902	59,9	278,5	798,5	22436	588,1
1969	26,3	166,9	3692	61,5	294,0	828,3	22884	610,2
1970	27,2	171,2	3561	64,5	292,6	855,7	22388	591,0
1971	28,9	176,8	3504	67,5	311,1	882,6	21261	599,1
1972	33,4	181,3	3598	66,9	342,5	910,2	21728	645,4
1973	33,8	187,8	3572	68,5	384,5	942,3	22923	712,1
1974	52,3	195,7	3613	67,3	412,7	980,1	22920	686,2
1975	53,0	200,6	3505	70,0	444,4	1010,0	21422	645,0
1976	51,8	207,8	3453	67,4	506,2	1038,3	22326	689,9
1977	54,3	216,2	3425	66,9	572,4	1071,7	23017	730,4
1978	65,1	223,9	3549	97,7	637,7	1112,1	23969	768,2
1979	77,2	232,6	3509	71,8	698,4	1150,6	24712	783,7
1980	70,3	237,7	3529	70,3	763,0	1192,9	24326	763,0
1981	83,7	239,6	3519	82,4	874,8	1236,3	24361	793,3
1982	81,4	242,0	3571	83,4	866,4	1273,9	22742	746,7
1983	66,4	242,0	3541	68,5	912,6	1300,7	22331	786,9
1984	86,2	242,0	3469	79,7	1013,0	1331,0	23451	862,6
1985	84,7	242,3	3338	88,2	1049,0	1366,2	23304	892,5

Статистичні дані економічної діяльності країни (США)

Роки	Добувна промисловість				Оброблювальна промисловість			
	ВВП, млрд. дол.	Капітал-1972 р., млрд. дол.	Праця, тис. чол.	ВВП - 1980 р., млрд. дол.	ВВП, млрд. дол.	Капітал-1972 р., млрд. дол.	Праця, тис. чол.	ВВП - 1980 р., млрд. дол.
1960	12,6	75,1	636	75,2	144,7	310,3	17286	297,9
1961	12,8	77,7	600	75,7	144,6	316,2	17329	296,7
1962	12,8	80,3	580	78,0	158,3	323,4	17889	322,6
1963	13,1	82,5	567	81,5	167,2	331,2	18041	348,4
1964	13,5	85,2	566	79,5	179,6	342,8	18339	362,4
1965	13,5	87,8	564	82,6	197,3	359,4	19177	394,7
1966	14,2	90,1	560	86,6	217,0	380,6	20401	425,2
1967	14,7	91,5	548	89,4	222,5	399,5	20650	424,4
1968	15,4	92,7	522	92,5	243,1	416,2	20807	446,0
1969	16,2	93,9	520	95,8	256,2	433,4	21207	461,4
1970	17,6	94,0	511	99,6	252,1	447,7	20700	436,8
1971	17,5	94,6	568	96,8	267,4	460,0	19564	444,0
1972	19,1	95,0	605	99,9	294,4	472,4	19943	485,5
1973	23,5	96,3	642	105,6	328,6	487,2	21054	546,2
1974	37,2	97,5	671	103,4	341,2	507,7	21026	520,8
1975	41,5	99,8	752	99,6	360,2	522,8	19457	480,5
1976	46,3	102,6	794	98,9	412,3	537,6	20261	526,9
1977	50,5	106,9	842	100,3	468,6	554,1	20889	565,5
1978	56,8	111,9	859	102,3	522,8	576,4	21784	599,8
1979	73,1	117,6	900	103,6	566,6	597,6	22458	613,2
1980	107,9	124,9	979	107,9	586,4	620,0	21942	586,4
1981	144,4	134,4	1118	112,6	649,6	642,5	21817	605,9
1982	132,9	142,3	1028	105,6	641,0	657,5	20286	566,4
1983	119,1	149,0	921	101,5	689,5	670,0	19946	607,4
1984	125,9	156,0	957	107,9	773,9	685,0	20995	672,7
1985	123,6	160,0	939	106,1	803,4	703,5	20879	700,0

Статистичні дані економічної діяльності країни (США)

Роки	Енергетика, газ, вода				Будівництво			
	ВВП, млрд. дол.	Капітал – 1972 р., млрд. дол.	Праця, тис. чол.	ВВП – 1980 р., млрд. дол.	ВВП, млрд. дол.	Капітал – 1972 р., млрд. дол.	Праця, тис. чол.	ВВП – 1980 р., млрд. дол.
1960	12,9	212,0	1037	32,3	22,9	20,9	4004	116,7
1961	13,6	219,1	1035	34,2	23,6	20,7	3908	117,8
1962	14,3	226,0	1028	35,6	25,2	20,9	4028	122,0
1963	15,0	233,7	1028	37,4	26,9	21,5	4117	126,0
1964	15,9	241,3	1036	38,5	29,3	22,9	4238	138,0
1965	16,6	250,5	1049	40,4	32,3	23,8	4427	144,0
1966	17,7	261,6	1061	43,0	35,4	25,1	4609	144,5
1967	18,6	273,1	1081	45,3	37,0	26,1	4513	141,4
1968	20,1	289,6	1107	49,6	40,5	27,3	4604	150,7
1969	21,6	301,0	1157	53,0	45,6	28,3	4803	148,1
1970	22,9	314,0	1177	54,6	47,8	30,3	4801	142,0
1971	26,2	328,0	1129	58,3	54,1	31,5	4985	153,8
1972	29,0	342,8	1180	60,0	59,9	32,7	5279	157,6
1973	32,4	358,8	1227	60,3	71,0	35,1	5562	146,4
1974	34,3	374,9	1223	62,0	75,3	37,5	5517	139,7
1975	42,7	387,4	1213	64,9	77,3	38,6	5093	128,7
1976	47,6	398,1	1271	64,1	86,9	39,5	5255	135,9
1977	53,3	410,7	1286	64,6	98,7	40,6	5612	141,9
1978	58,1	423,8	1326	66,1	116,6	42,8	6166	151,9
1979	58,7	435,4	1354	66,9	132,7	44,7	6437	149,4
1980	68,7	448,0	1405	68,7	139,4	45,5	6215	139,4
1981	80,8	459,4	1426	74,8	140,3	46,5	6060	129,0
1982	92,5	474,1	1428	74,7	143,0	44,7	5756	123,0
1983	104,0	481,7	1464	78,0	151,3	42,9	6149	129,7
1984	113,2	490,0	1499	82,0	173,0	42,0	6665	140,6
1985	122,0	502,7	1486	86,4	184,3	42,0	6987	143,5

Статистичні дані економічної діяльності країни (США)

Роки	Транспорт та зв'язок				Торгівля			
	ВВП, млрд., дол.	Капітал-1972 р., млрд. дол.	Праця, тис. чол.	ВВП - 1980 р., млрд. дол.	ВВП, млрд. дол.	Капітал-1972 р., млрд. дол.	Праця, тис. чол.	ВВП - 1980 р., млрд. дол.
1960	33,2	513,6	3482	70,8	87,4	74,0	11646	227,3
1961	34,0	525,3	3379	71,2	89,4	76,4	11644	229,6
1962	36,1	538,7	3386	74,9	95,3	79,4	11872	244,3
1963	38,2	553,9	3380	79,4	99,8	83,1	12090	244,7
1964	40,6	569,4	3422	83,8	108,5	87,7	12493	261,7
1965	44,2	587,8	3499	91,7	116,3	93,8	13059	278,6
1966	47,9	607,5	3734	99,2	125,7	100,2	13588	293,6
1967	50,3	628,6	3838	101,1	134,7	106,1	13954	301,5
1968	54,0	649,1	3984	108,7	149,3	113,0	14181	318,2
1969	59,0	670,3	4111	113,4	162,7	120,2	14538	325,9
1970	62,8	691,1	4129	115,7	173,2	127,1	15076	331,7
1971	68,1	710,6	4180	117,6	186,2	131,3	15905	346,5
1972	75,8	724,0	4311	126,6	205,4	141,6	16573	374,3
1973	86,9	751,8	4331	139,7	232,7	150,8	17000	396,6
1974	95,6	771,9	4549	142,9	253,9	161,2	17449	387,9
1975	99,7	787,6	4480	138,0	280,5	168,0	17713	391,0
1976	113,5	803,0	4464	147,5	309,0	175,0	18314	412,3
1977	126,3	819,7	4643	156,4	342,6	181,9	19042	434,0
1978	143,7	840,9	4945	168,4	384,9	191,9	19636	454,1
1979	158,5	864,1	5174	174,9	429,9	202,5	20101	464,2
1980	173,3	884,0	5120	173,3	455,2	210,2	20191	455,2
1981	190,2	903,4	5207	173,0	500,4	220,2	20524	467,0
1982	197,8	918,1	5124	166,0	525,5	229,3	20758	464,5
1983	217,8	931,5	5524	175,7	563,7	241,2	21145	489,3
1984	239,8	950,0	5859	185,2	632,1	258,4	21979	531,8
1985	254,6	971,0	6062	186,1	677,3	272,5	22296	555,7

Статистичні дані економічної діяльності країни (США)

Роки	Виробнича сфера				Невиробнича сфера			
	ВВП, млрд. дол.	Капітал – 1972 р., млрд. дол.	Праця, тис. чол.	ВВП – 1980 р., млрд. дол.	ВВП, млрд. дол.	Капітал – 1972 р., млрд. дол.	Праця, тис. чол.	ВВП – 1980 р., млрд. дол.
1960	334,0	1343,4	44183	881,4	181,1	620,4	19223	520,1
1961	338,4	1374,0	43184	886,4	191,5	640,1	19767	560,8
1962	362,8	1409,6	43812	938,6	205,1	662,1	20558	572,7
1963	381,0	1449,8	44033	979,3	218,4	685,4	21308	585,9
1964	407,2	1496,6	44720	1023,1	234,8	717,6	22175	649,7
1965	442,7	1553,5	46245	1093,6	253,3	739,9	23142	668,2
1966	481,5	1619,5	48048	1150,9	278,7	768,6	24253	712,4
1967	500,7	1683,8	48514	1164,0	305,2	796,3	25611	751,0
1968	545,9	1750,7	49107	1225,6	335,8	823,6	26577	782,7
1969	587,6	1814,0	50028	1259,1	366,9	856,9	27653	819,6
1970	603,6	1875,4	49955	1244,9	399,3	885,3	28510	825,4
1971	648,4	1932,8	49835	1284,5	440,9	914,4	29285	851,6
1972	717,0	1989,8	51489	1370,8	482,4	945,6	30664	884,7
1973	828,9	2067,8	53388	1463,3	545,0	967,2	31676	929,2
1974	889,8	2146,4	54048	1424,0	597,6	992,9	32746	954,9
1975	954,9	2204,8	52213	1372,7	657,1	1019,8	33633	969,3
1976	1067,4	2263,6	53812	1453,0	726,8	1046,3	34940	997,1
1977	1194,3	2330,1	55739	1529,6	809,4	1075,3	36278	1032,3
1978	1348,0	2411,6	58265	1610,3	917,0	1100,7	37783	1081,2
1979	1496,7	2494,5	59933	1644,0	1021,4	1141,5	38891	1116,7
1980	1601,2	2570,3	59381	1601,2	1140,8	1179,6	39922	1140,4
1981	1789,4	2646,0	59671	1644,7	1277,0	1217,2	40726	1185,9
1982	1814,1	2708,0	57951	1583,6	1375,0	1251,8	41575	1185,0
1983	1911,8	2758,3	58690	1650,1	1512,8	1294,3	42144	1229,3
1984	2144,1	2823,4	61423	1799,9	1649,9	1334,2	43582	1274,9
1985	2249,9	2894,0	61987	1866,0	1793,3	1370,5	45163	1312,9

Статистичні дані економічної діяльності країни (Великобританія)

Роки	Сільське господарство				Промисловість			
	ВВП, млрд. фунт.	Капітал-1980 р., млрд. фунт.	Праця, тис. чол.	ВВП-1980 р., млрд. фунт.	ВВП, млрд. фунт.	Капітал-1980 р., млрд. фунт.	Праця, тис. чол.	ВВП-1980 р., млрд. фунт.
1960	0,894	11,9	1129	2,68	9,479	160,7	9688	59,28
1961	0,935	12,5	1090	2,68	9,791	166,6	9743	59,34
1962	0,942	13,6	1054	2,72	10,019	174,8	9655	59,79
1963	0,940	15,1	1045	2,89	10,557	179,4	9509	61,45
1964	0,971	15,7	1003	2,94	11,568	187,1	9611	65,74
1965	1,001	16,2	945	3,02	12,365	193,9	9707	66,90
1966	1,043	16,8	913	3,03	12,820	203,5	9699	62,75
1967	1,074	17,3	885	3,13	13,077	215,1	9412	67,58
1968	1,088	18,5	853	3,12	13,970	223,6	9254	71,47
1969	1,198	19,1	822	3,12	15,095	232,0	9315	72,97
1970	1,277	19,8	782	3,31	16,862	239,9	9267	72,96
1971	1,437	20,0	734	3,48	18,373	243,0	8955	72,50
1972	1,571	20,6	709	3,59	20,705	255,5	8643	72,61
1973	1,955	21,3	725	3,68	24,058	261,4	8668	78,68
1974	2,042	21,9	688	3,72	26,377	268,6	8703	77,90
1975	2,507	22,4	677	3,43	32,679	276,5	8382	73,26
1976	3,052	22,9	676	3,16	38,553	284,7	8134	74,43
1977	3,287	23,3	684	3,57	47,470	292,4	8169	75,86
1978	3,507	23,8	680	3,84	54,599	300,1	8129	76,23
1979	3,818	24,2	666	3,78	63,921	307,1	8103	79,17
1980	4,192	24,4	654	4,19	73,931	312,6	7795	73,93
1981	4,696	24,4	639	4,30	79,033	316,2	7066	71,68
1982	5,395	24,5	632	4,66	86,350	319,3	6679	73,52
1983	5,373	25,0	622	4,45	94,161	322,9	6309	76,32
1984	5,971	25,2	615	5,12	100,497	327,2	6293	77,26
1985	5,485	25,4	615	4,89	111,135	332,0	6164	80,88

Статистичні дані економічної діяльності країни (Великобританія)

Роки	Добувна промисловість				Оброблювальна промисловість			
	ВВП, млрд. фунг.	Капітал-1980 р., млрд. фунг.	Праця, тис. чол.	ВВП - 1980 р., млрд. фунг.	ВВП, млрд. фунг.	Капітал-1980 р., млрд. фунг.	Праця, тис. чол.	ВВП - 1980 р., млрд. фунг.
1960	0,668	7,1	754	13,36	8,189	110,1	8557	42,84
1961	0,699	7,1	723	13,17	8,419	114,4	8634	42,95
1962	0,742	7,8	702	13,50	8,537	119,0	8558	42,95
1963	0,744	7,8	674	13,50	8,974	121,5	8430	44,44
1964	0,744	7,8	647	13,53	9,999	126,2	8554	48,53
1965	0,708	7,8	616	13,03	10,651	130,3	8672	49,91
1966	0,690	8,2	568	12,29	11,060	135,2	8700	50,85
1967	0,675	8,6	546	12,19	11,259	142,5	8434	51,12
1968	0,670	8,8	481	12,17	11,999	147,5	8352	54,77
1969	0,614	8,9	436	11,39	13,094	153,3	8474	56,81
1970	0,570	8,9	411	10,95	14,936	159,1	8465	57,03
1971	1,055	9,5	397	10,95	15,784	158,4	8181	56,42
1972	0,936	16,1	380	9,22	18,049	162,7	7907	57,80
1973	1,077	16,7	363	9,31	21,052	166,9	7961	63,05
1974	1,343	18,1	349	9,21	22,958	171,6	8007	62,27
1975	1,861	21,0	360	9,21	28,054	175,5	7669	59,97
1976	2,608	24,7	356	9,32	32,318	179,1	7425	59,07
1977	4,300	28,2	359	9,64	39,086	182,7	7461	60,18
1978	5,302	31,6	361	9,61	44,804	186,6	7427	60,56
1979	8,532	34,3	359	12,31	50,660	190,7	7395	60,45
1980	12,461	36,8	361	12,46	55,208	193,5	7081	55,21
1981	16,040	39,1	351	13,28	55,915	190,4	6365	51,90
1982	18,345	41,2	338	14,62	60,305	195,0	6005	52,01
1983	20,814	43,1	323	15,56	64,720	195,3	5664	53,50
1984	22,260	45,2	301	14,77	70,867	196,5	5679	55,59
1985	22,970	47,5	284	16,04	79,070	197,0	5578	57,31

Статистичні дані економічної діяльності країни (Великобританія)

Роки	Енергетика, газ, вода				Будівництво			
	ВВП, млрд. фунг.	Капітал-1980 р., млрд. фунг.	Праця, тис. чол.	ВВП - 1980 р., млрд. фунг.	ВВП, млрд. фунг.	Капітал-1980 р., млрд. фунг.	Праця, тис. чол.	ВВП - 1980 р., млрд. фунг.
1960	0,622	43,5	377	3,08	1,415	4,6	1554	10,44
1961	0,673	45,1	386	3,22	1,543	4,8	1636	11,24
1962	0,740	48,0	395	3,34	1,666	4,8	1680	11,32
1963	0,839	50,1	405	3,51	1,795	5,2	1719	11,29
1964	0,915	53,1	410	3,68	2,006	5,6	1801	12,43
1965	1,006	55,8	419	3,96	2,154	6,4	1851	12,98
1966	1,070	60,1	431	4,11	2,246	6,8	1883	13,26
1967	1,143	64,0	432	4,27	2,373	7,6	1822	13,79
1968	1,301	67,3	421	4,53	2,560	8,2	1807	14,12
1969	1,387	69,8	405	4,77	2,704	8,6	1766	14,01
1970	1,356	71,9	391	4,98	2,966	9,0	1653	13,74
1971	1,534	75,1	377	5,13	3,265	9,4	1594	13,96
1972	1,720	76,7	356	5,59	4,022	9,6	1674	14,22
1973	1,929	77,8	344	6,32	4,891	10,1	1830	14,55
1974	2,076	78,9	347	6,41	5,118	10,6	1762	13,05
1975	2,764	80,0	353	6,08	6,299	11,0	1626	12,36
1976	3,627	80,9	353	6,04	7,175	11,3	1586	12,18
1977	4,084	81,5	349	6,04	7,964	11,6	1504	12,15
1978	4,493	81,9	341	6,06	9,299	11,9	1524	12,97
1979	4,729	82,1	349	6,41	10,843	12,2	1590	13,06
1980	6,262	82,3	353	6,26	12,343	12,3	1617	12,34
1981	7,078	82,7	350	6,50	12,985	12,3	1526	11,10
1982	7,700	83,1	336	6,89	13,906	12,4	1474	11,31
1983	8,627	84,5	322	7,26	15,507	12,4	1461	11,76
1984	7,370	85,5	313	6,90	17,296	12,6	1509	12,17
1985	9,095	87,5	302	7,53	18,651	13,0	1501	12,32

Статистичні дані економічної діяльності країни (Великобританія)

Роки	Транспорт та зв'язок				Торгівля			
	ВВП, млрд. фунт.	Капітал-1980 р., млрд. фунт.	Праця, тис. чол.	ВВП - 1980 р., млрд. фунт.	ВВП, млрд. фунт.	Капітал-1980 р., млрд. фунт.	Праця, тис. чол.	ВВП - 1980 р., млрд. фунт.
1960	1,953	63,2	1705	8,45	2,733	19,0	4119	18,87
1961	2,022	64,1	1732	8,72	2,829	20,4	4200	19,12
1962	2,115	69,0	1742	8,70	2,969	22,0	4280	19,12
1963	2,286	71,4	1722	8,99	3,145	23,0	4307	19,91
1964	2,439	71,4	1705	9,57	3,323	24,7	4315	20,78
1965	2,629	71,5	1695	9,77	3,605	26,6	4325	21,22
1966	2,781	75,1	1669	10,05	3,756	28,3	4325	21,42
1967	2,834	73,6	1668	10,16	3,909	30,0	4172	21,62
1968	3,157	75,3	1651	10,59	4,054	32,1	4133	22,26
1969	3,418	77,0	1621	11,00	4,213	34,2	4069	22,39
1970	3,555	79,4	1640	11,47	6,036	36,2	4005	23,03
1971	3,777	82,5	1639	11,77	6,860	38,6	3916	23,55
1972	4,209	84,6	1614	12,34	7,752	41,0	3958	24,86
1973	4,998	87,1	1605	13,33	8,798	43,6	4148	26,05
1974	5,998	89,2	1569	13,37	9,770	46,1	4163	25,01
1975	7,772	90,2	1576	13,20	11,927	48,0	4515	24,12
1976	9,292	90,9	1534	13,06	13,666	49,8	4504	24,37
1977	10,228	92,1	1533	13,50	16,573	52,1	4555	24,22
1978	11,772	92,6	1551	13,83	19,456	54,7	4591	25,63
1979	13,177	92,8	1567	14,45	22,192	57,7	4729	26,37
1980	14,269	93,8	1580	14,27	24,737	60,3	4818	24,74
1981	15,558	93,3	1526	14,30	26,804	62,6	4705	24,34
1982	16,916	91,6	1477	14,21	29,029	65,0	4671	24,81
1983	17,896	91,7	1439	14,61	32,514	67,6	4639	25,87
1984	19,540	93,0	1460	15,24	36,014	70,0	4851	27,73
1985	20,957	95,0	1450	16,05	40,384	72,6	4944	28,97

Статистичні дані економічної діяльності країни (Великобританія)

Роки	Виробнича сфера				Невиробнича сфера			
	ВВП, млрд. фунг.	Капітал-1980 р., млрд. фунг.	Праця, тис. чол.	ВВП - 1980 р., млрд. фунг.	ВВП, млрд. фунг.	Капітал-1980 р., млрд. фунг.	Праця, тис. чол.	ВВП - 1980 р., млрд. фунг.
1960	16,474	259,4	18195	99,72	6,939	73,7	5829	37,30
1961	17,120	268,4	18401	101,10	7,661	81,5	5947	38,42
1962	17,711	284,2	18411	101,65	8,190	80,4	6133	40,15
1963	18,723	294,1	18302	104,53	8,871	81,9	6267	42,06
1964	20,307	304,5	18435	111,46	9,627	83,0	6394	44,07
1965	21,754	314,6	18523	113,89	10,476	84,4	6532	45,80
1966	22,646	327,5	18489	115,01	11,380	95,2	6699	47,59
1967	32,367	343,9	17959	116,28	12,390	96,7	6802	49,23
1968	24,829	357,7	17658	121,56	13,628	102,7	6879	51,02
1969	26,628	376,9	17593	123,49	14,676	103,1	6984	52,41
1970	30,696	384,3	17347	124,51	15,304	114,1	7034	54,51
1971	33,712	393,5	16838	125,26	17,627	127,1	7193	56,47
1972	38,259	411,3	16598	127,62	20,158	158,2	7422	59,72
1973	44,700	423,5	16976	136,29	23,899	172,7	7720	61,24
1974	49,305	436,4	16885	133,04	28,951	181,6	7900	61,58
1975	61,184	448,1	16776	126,37	37,071	190,4	7927	64,50
1976	71,738	459,6	16434	127,20	43,533	199,2	8058	67,62
1977	85,522	471,5	16445	129,30	48,895	207,1	8093	70,93
1978	98,633	483,1	16475	132,50	55,424	215,0	8222	74,59
1979	113,951	494,0	16655	136,83	65,000	224,2	8424	76,92
1980	129,472	503,4	16464	129,47	78,452	233,7	8540	78,45
1981	139,076	508,8	15462	125,72	87,886	242,4	8549	79,09
1982	151,596	512,8	14933	128,51	96,197	253,4	8651	80,04
1983	165,451	519,6	14470	133,01	105,370	261,9	8818	81,78
1984	179,318	528,0	14728	137,52	114,676	270,0	9006	84,33
1985	196,612	538,0	14674	143,11	126,377	280,0	9446	87,06

Статистичні дані економічної діяльності країни (Японія)

Роки	Сільське господарство				Промисловість			
	ВВП, млрд. ієн	Капітал – 1975 р., млрд. ієн	Праця, тис. чол.	ВВП – 1980 р., млрд. ієн	ВВП, млрд. ієн	Капітал – 1975 р., млрд. ієн	Праця, тис. чол.	ВВП – 1980 р., млрд. ієн
1960	2047	11767	13163	7404	5832	23806	10155	13794
1961	2243	13036	12800	7531	7527	27746	10768	16938
1962	2436	13422	12438	7926	8338	31679	11355	15900
1963	2525	14408	11775	7787	9777	35491	11692	17616
1964	2748	15466	11366	8026	11120	39890	11915	20289
1965	2982	16776	11014	8174	11746	43579	12124	21105
1966	3371	18386	10660	8379	13749	47244	12406	23805
1967	4045	20129	10360	8888	16753	52772	13048	28236
1968	4242	22454	9880	9147	19609	59991	13589	32372
1969	4421	24962	9460	9038	23977	68323	13960	37419
1970	4463	27586	8860	8904	28518	78463	14250	44034
1971	4253	30840	9150	8463	30682	88787	14310	46998
1972	5050	34699	7550	9652	34372	99158	14280	51522
1973	6675	38429	7050	10336	42331	110415	14900	58034
1974	7499	41600	6750	10111	48238	120512	14740	57709
1975	8141	44873	6610	10071	48579	128913	13940	55166
1976	8870	48883	6430	9601	55572	136201	13960	60553
1977	9402	52573	6340	9402	60868	143838	13900	63463
1978	9441	56959	6330	9358	66649	151085	13730	67545
1979	9623	61423	6130	9493	71079	159775	13780	72061
1980	8847	65695	5770	8847	78175	169267	14080	78175
1981	8957	69822	5570	8578	83246	180346	14260	81415
1982	9064	73578	5480	9015	87248	190773	14240	86280
1983	9264	77517	5310	9123	91513	201265	14520	93007
1984	9626	81397	5120	9314	99711	214262	14810	102756
1985	9949	85397	5090	9395	106032	228274	14950	111439

Статистичні дані економічної діяльності країни (Японія)

Роки	Добувна промисловість				Оброблювальна промисловість			
	ВВП, млрд. ієн	Капітал – 1975 р., млрд. ієн	Праця, тис. чол.	ВВП – 1980 р., млрд. ієн	ВВП, млрд. ієн	Капітал – 1975 р., млрд. ієн	Праця, тис. чол.	ВВП – 1980 р., млрд. ієн
1960	278	668	458	741	5184	14894	9490	11588
1961	313	733	413	725	6682	17971	10139	14523
1962	351	778	431	794	7378	20966	10699	13270
1963	341	808	359	802	8725	23838	11099	14803
1964	379	854	323	832	9934	27338	11349	17197
1965	417	908	323	824	10428	29984	11549	17866
1966	456	974	296	902	12279	32391	11849	20254
1967	524	1010	260	939	15126	36671	12518	24287
1968	561	1114	270	991	17846	41441	13049	28037
1969	593	1178	240	1028	22006	49257	13450	32626
1970	621	1232	200	1067	26340	57463	13770	38712
1971	635	1315	190	1122	28357	65359	13830	41108
1972	663	1375	160	1166	31918	72637	13830	45483
1973	822	1345	130	1201	39568	80689	14430	52013
1974	947	1373	140	1045	45137	88101	14270	51904
1975	776	1438	160	1012	44801	93694	13460	48744
1976	843	1471	180	1206	51101	98101	13450	53644
1977	959	1494	190	1315	55412	102510	13400	56577
1978	1104	1512	150	1268	60545	106383	13260	60390
1979	1240	1541	120	1181	64815	111577	13330	64453
1980	1363	1608	110	1363	70232	117756	13670	70232
1981	1321	1638	105	1354	74545	115165	13850	73416
1982	1287	1683	100	1439	78191	132125	13800	77653
1983	1221	1671	100	1406	81416	139314	14060	83872
1984	1208	1727	80	1360	88845	149274	14380	93568
1985	1226	1769	90	1376	94257	160258	14530	101465

Статистичні дані економічної діяльності країни (Японія)

Роки	Енергетика, газ, вода				Будівництво			
	ВВП, млрд. ієн	Капітал-1975 р., млрд. ієн	Праця, тис. чол.	ВВП - 1980 р., млрд. ієн	ВВП, млрд. ієн	Капітал-1975 р., млрд. ієн	Праця, тис. чол.	ВВП - 1980 р., млрд. ієн
1960	370	8244	207	1465	869	1464	2476	5032
1961	532	9042	216	1690	1265	1717	2675	5858
1962	609	9935	225	1836	1485	1962	2833	6182
1963	711	10845	234	2011	1726	2192	2865	6870
1964	807	11698	243	2260	2075	2431	3033	7965
1965	901	12687	252	2415	2265	2720	3233	8375
1966	1014	13878	261	2649	2654	3081	3453	9232
1967	1103	15091	270	3010	3191	3542	3590	10445
1968	1201	16436	270	3343	3889	4060	3700	12249
1969	1378	17890	270	3765	4415	4765	3710	13142
1970	1557	19768	280	4253	5662	5809	3940	15975
1971	1690	22113	290	4768	6514	6688	4140	17130
1972	1791	25146	290	4873	7763	8040	4330	18953
1973	1941	28381	340	4820	9854	9468	4670	21087
1974	2154	31038	330	4760	11718	10450	4640	19433
1975	3002	33781	320	5410	14322	11433	4790	20885
1976	3628	36629	330	5703	15175	12324	4920	20433
1977	4497	39834	310	5571	15994	13195	4990	20615
1978	5000	43190	320	5887	18551	14321	5200	22694
1979	5024	46657	330	6427	20992	15447	5360	23159
1980	6580	49903	300	6580	22506	16604	5480	22506
1981	7385	53548	310	6645	24062	17805	5440	22219
1982	7770	56965	340	7188	23966	18947	5410	22161
1983	8876	60279	360	7729	22097	20359	5410	19793
1984	9658	63261	350	7828	22437	21543	5270	19330
1985	10549	66247	330	8598	23129	22564	5300	19183

Статистичні дані економічної діяльності країни (Японія)

Роки	Транспорт та зв'язок				Торгівля			
	ВВП, млрд. ієн	Капітал – 1975 р., млрд. ієн	Праця, тис. чол.	ВВП – 1980 р., млрд. ієн	ВВП, млрд. ієн	Капітал – 1975 р., млрд. ієн	Праця, тис. чол.	ВВП – 1980 р., млрд. ієн
1960	1352	16791	2139	3355	2653	6511	7841	5398
1961	1391	17826	2216	3655	2679	6613	7777	6237
1962	1575	19153	2322	3919	2932	6793	7824	6828
1963	1896	20591	2418	4434	3721	7034	8268	7842
1964	2105	22149	2572	4946	3915	7355	8564	9233
1965	2305	24309	2659	5309	4370	7641	8832	99912
1966	2743	26816	2813	6056	5157	8053	9239	1119
1967	3231	29391	2890	6938	5834	8456	9470	12149
1968	3724	32469	3020	7953	7102	9108	9820	13685
1969	4272	35832	3110	9277	9015	10092	10010	15513
1970	5022	32889	3240	10436	10504	11207	10120	17187
1971	5433	43763	3330	10922	11295	12338	10350	18544
1972	5845	48509	3270	11151	13089	13831	10500	21397
1973	6970	53189	3370	12450	16106	15886	10850	22622
1974	8110	57045	3310	13285	20433	17559	10970	22548
1975	9546	60624	3320	13490	21934	19253	11270	23673
1976	10984	64010	3410	13680	25096	20632	11510	25433
1977	12918	68058	3410	13329	27331	22199	11930	27398
1978	13891	73976	3420	13571	29444	23770	12100	29467
1979	14462	80621	3490	13775	32227	25549	12280	32600
1980	14787	86822	3500	14787	36792	27509	12480	36792
1981	15755	93010	3440	15098	38418	29222	12740	37719
1982	16458	99160	3490	15159	40543	30782	12960	39434
1983	17300	105507	3500	15801	41774	32496	13130	40845
1984	18716	111127	3410	16748	42289	34208	13190	41163
1985	19652	116251	3430	17424	43313	36143	13180	42013

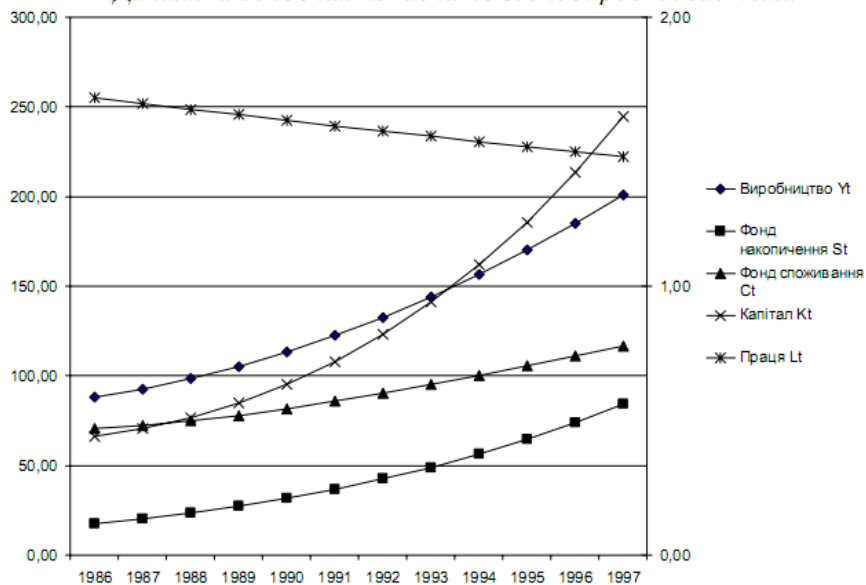
Статистичні дані економічної діяльності країни (Японія)

Роки	Виробнича сфера				Невиробнича сфера			
	ВВП, млрд. їн	Капітал-1975 р., млрд. їн	Праця, тис. чол.	ВВП - 1980 р., млрд. їн	ВВП, млрд. їн	Капітал-1975 р., млрд. їн	Праця, тис. чол.	ВВП - 1980 р., млрд. їн
1960	12753	60339	35774	34983	3633	25450	8234	18545
1961	15105	66938	36236	40219	4871	27027	8416	20226
1962	16766	73009	36772	40755	5755	29032	8489	25570
1963	19618	79716	37018	44649	7333	31304	8707	29475
1964	21963	87291	37450	50459	8110	33969	8937	31907
1965	23668	95025	37862	52875	9462	36505	9373	33510
1966	27674	103580	38570	58591	11073	39283	9725	36262
1967	33054	114290	39358	66656	12837	42242	9858	39154
1968	38566	128082	40009	75406	15054	45540	10029	42831
1969	46100	143974	40250	84389	17821	49522	10169	47122
1970	54169	162754	40410	96536	21783	54190	10530	52365
1971	58177	182416	40280	102057	25125	59900	10930	55698
1972	66119	204237	39930	112675	30040	66806	11330	62078
1973	81936	227387	40840	124529	36160	74160	11750	65923
1974	96005	247166	40410	123086	44058	79959	11960	65605
1975	102522	265096	39930	123285	51677	86073	12300	68303
1976	115697	282050	40230	129710	57814	92093	12480	70580
1977	126513	299863	40570	134207	65658	99124	12850	75501
1978	137976	320021	40780	142635	73617	106461	13300	79385
1979	148383	342815	41040	151088	81743	114303	13750	84687
1980	161107	365897	41310	161107	87944	122465	14050	87916
1981	178438	390205	41450	165838	94296	131924	14360	91200
1982	177279	413240	41580	172049	101842	141563	14800	93747
1983	181948	437144	41870	178569	109044	151611	15460	98346
1984	183153	462537	41800	189311	125989	162705	15860	103200
1985	192126	488629	41950	199454	139969	173649	16120	108296

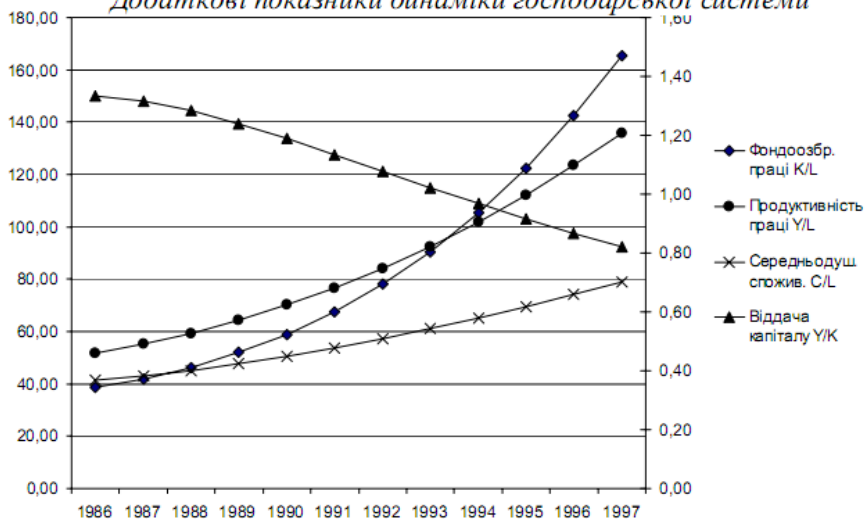
Узагальнена модель Солоу з лінійною нормою накопичення

Узагальнена модель Солоу			Вихідні дані моделі									
$Y_t = AK_t^\mu L_t^{1-\mu} e^{gt}$	$\Delta K_t = S_t - \mu K_t$	$S_t = s_t \cdot Y_t$	Параметри виробничої функції Кобба-Дугласа			Темпи			Початкові обсяги		Лінійна політика норми накопичення $s_t = s_0 + ht$	
$Y_t = C_t + S_t$	$\Delta L_t = g \cdot L_t$	$s_t = s_0 + ht$	Масштабний множник	Еластич- ність по капіталу	Еластич- ність по праці	Темп прогресу	Аморти- зація капіталу	Трудові ресурси	Капітал	Праця		
K_0, S_0 – початкові дані			α	β	γ	μ	g	K_0	L_0	S_0	h	
			10,24	0,44	0,58	0,03	0,2	-0,0125	66,00	1,70	0,20	0,02
Динаміка основних показників моделі												
Показники	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997
Виробництво, Y_t	88,02	92,63	98,40	105,30	113,32	122,46	132,71	144,09	156,59	170,25	185,08	201,10
Фонд накопичення, S_t	17,60	20,38	23,62	27,38	31,73	36,74	42,47	48,99	56,37	64,69	74,03	84,46
Фонд споживання, C_t	70,41	72,25	74,78	77,92	81,59	85,72	90,25	95,10	100,22	105,55	111,05	116,64
Капітал, K_t	66,00	70,40	76,70	84,98	95,36	108,02	123,15	140,99	161,78	185,80	213,33	244,70
Праця, L_t	1,70	1,68	1,66	1,64	1,62	1,60	1,58	1,56	1,54	1,52	1,50	1,48
Норма накопичення, s_t	0,20	0,22	0,24	0,26	0,28	0,30	0,32	0,34	0,36	0,38	0,40	0,42
Норма споживання, c_t	0,80	0,78	0,76	0,74	0,72	0,70	0,68	0,66	0,64	0,62	0,60	0,58
Фондоозброєність праці, K/L	38,82	41,94	46,27	51,91	58,99	67,67	78,12	90,57	105,24	122,40	142,31	165,30
Продуктивність праці, Y/L	51,77	55,18	59,36	64,32	70,10	76,71	84,19	92,56	101,87	112,15	123,46	135,85
Віддача капіталу, Y/K	1,33	1,32	1,28	1,24	1,19	1,13	1,08	1,02	0,97	0,92	0,87	0,82
Середньодушове споживан- ня, C/L	41,42	43,04	45,11	47,60	50,47	53,70	57,25	61,09	65,19	69,53	74,08	78,79

Динаміка основних показників господарської системи



Додаткові показники динаміки господарської системи



Список літературних джерел

1. Бутник О. М. Економіко-математичне моделювання перехідних процесів у соціально-економічних системах: Монографія. Харків: Інжек; СПД Лібуркіна Л.М., 2004. 304 с.
2. Вітлінський В. В. Моделювання економіки. Київ, 2007. 406 с.
3. Загородній Ю.В., Кадієвський В.А. Моделювання економіки. К.: ДАСОА, 2007. 214 с.
4. Занг В.Б. Синергетична економіка. М.: Мир, 1999. 336 с.
5. Здрок В. В., Паславська І. М. Моделювання економічної динаміки: Підручник для студентів вищих навчальних закладів. Львів: ЛНУ ім. Івана Франка, 2007. 244 с.
6. Економіко-математичне моделювання: Навч. посібник / За ред. О. Т. Іващука. Тернопіль: ТНЕУ, 2008. 704 с.
7. Электронный учебник StatSoft. URL: <http://www.statsoft.ru>.
8. Єфимова Г. О., Осадча О. О. Методичні вказівки по спецкурсу «Математичні моделі макроекономіки» та «Моделі економічної динаміки» Одеса: ОНУ ім. І. І. Мечникова, 2013. 68 с.
9. Кальна-Дубінюк Т. П. Моделювання економічної динаміки: Навч. посібник. К.: НАУ, 2002. 135 с.
10. Капустян О. В., Сукретна А. В. Методи нелінійного аналізу в математичній економіці К.: Київський університет, 2011.
11. Касьяненко В. О., Старченко Л. В. Моделювання та прогнозування економічних процесів. Конспект лекцій: Навч. посібник. Суми: Університетська книга, 2006. 185 с.
12. Лабораторний практикум з навчальної дисципліни "Економетрика і моделювання економічної динаміки" / Уклад. К. А. Стрижиченко, Л. А. Гольцяєва, В. І. Дериховська. Х.: ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2015. 44 с.
13. Лаврінський Л. В., Шарапов О.С., Устинко С.В., Шарапов О.Д. Моделювання системних характеристик в економіці. К.: ЕКМО, 2004. 169 с.
14. Лагоша Б. А. Оптимальное управление в экономике М.: Финансы и статистика, 2003. 192 с.
15. Лисенко Ю. Г., Петренко В. Л., Тимохин В. Н., Филипов А. В. Экономическая динамика. Донецк: ДГУ, 2000. 176 с.
16. Моделі економічної динаміки: конспект лекцій / Уклад. Л. П. Перхун. Суми : ДВНЗ "УАБС НБУ", 2014. 110 с.

17. Моделирование экономической динамики: Навч. посібник. К.: Атіка, 2006. 276 с.
18. Моделирование экономической динамики: Ч. I. Дослідження динаміки господарської системи на основі виробничої функції: Метод. вказівки щодо виконання лаб. роботи. / Уклад. С. В. Кунцев, С. О. Хайлук. Суми: УАБС, 2005. 58 с.
19. Моделирование экономической динамики: Учебное пособие / Клебанова Т. С., Дубровина Н. А., Полякова О. Ю и др. 2-ое изд., стереот. Харьков: Инжек, 2005. 244 с.
20. Моделирование экономических процессов / Под ред. Грачевой М. В., Фадеевой Л. Н., Черемных Ю. Н. М.: ЮНИТИ, 2005. 351 с.
21. Новожилова М. В., Коюда П. М., Чуб І. А. Моделирование економічної динаміки. Навчально-методичний посібник для самостійної роботи. Харків: ХДТУБА, 2006. 140 с.
22. Смирнов А. Д. Лекции по макроэкономическому моделированию. М., 2000. 350 с.
23. Статистика: навч. посіб. / Під ред. О. В. Расвнєвої. Х.: ХНЕУ, 2010. 520 с.
24. Пономаренко О. І., Перестюк М. О., Бурим В. М. Сучасний економічний аналіз. Мікроекономіка. Частина 2. К.: Вища школа, 2004. 262 с.
25. Ратникова Т. А. Введение в эконометрический анализ панельных данных : лекционные и методические материалы. URL: http://uisrussia.msu.ru/docs/nov/hse_ejournal/2006/2/10_02_06.pdf
26. Руська Р. В., Іващук О. Т. Методи економіко-статистичних досліджень: Навч. посібник. Тернопіль: Тайп, 2014. 190 с.
27. Фортуна В. В., Саркіс'янц О. В. Питання застосування панельних даних в економетричних дослідженнях. URL: http://www.nbuu.gov.ua/portal/Soc_Gum/VDU_ekon/2011_2_SV/tom2/235.pdf.
28. Факторный, дискриминантный и кластерный анализ / Дж. О. Ким, Ч. У. Мьюллер, У. Р. Клекка и др.; под ред. И. С. Енюкова; пер. с англ. М.: Финансы и статистика, 1989. 215 с.

Навчальне видання

*Гладка Олена Миколаївна
Карпович Іван Миколайович
Сінчук Алєся Михайлівна*

**МОДЕЛІ ЕКОНОМІЧНОЇ ДИНАМІКИ
для фахівців з інформаційних технологій**

Навчальний посібник

Підписано до друку 27.11.2018 р.
Формат 60x84 1/16. Папір офсетний
Гарнітура Times New Roman Суг
Умовн. друк. арк. 5,2
Тираж 100 прим. Зам № 549/2

Відділ інформаційного та мережевого забезпечення
Рівненського державного гуманітарного університету
33028, м. Рівне, вул. С. Бандери, 12