Національний університет
водного господарства
та природокористування

Міністерство освіти і науки України
Національний університет водного господарства
та природокористування
Кафедра теоретичної механіки, інженерної графіки
та машинознавства

02-05-92

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

з навчальної дисципліни «Інженерна графіка»
(Модуль 1. Нарисна геометрія.)
для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня
за спеціальністю 194 «Гідротехнічне будівництво, водна
інженерія та водні технології» денної
і заочної форм навчання

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Рекомендовано
науково-методичною комісією
зі спеціальності
194 «Гідротехнічне будівництво,
водна інженерія та водна
технологія»
Протокол № 3 від 29.01.2019 р.

Рівне – 2019

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Конспект лекцій з навчальної дисципліни «Інженерна графіка» (Модуль 1. Нарисна геометрія) для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня за спеціальністю 194 «Гідротехнічне будівництво, водна інженерія та водні технології» денної і заочної форм навчання / Крівцов В.В. – Рівне : НУВГП, 2018. – 137 с.

Укладач: Крівцов В. В. – канд. техн. наук, доцент кафедри теоретичної механіки, інженерної графіки та машинознавства

Відповідальний за випуск – М. М. Козяр, доктор пед. наук, професор, завідувач кафедри теоретичної механіки, інженерної графіки та машинознавства

Національний університет
водного господарства
та природокористування

© Крівцов В.В., 2019
© Національний університет
водного господарства та
природокористування, 2019

Національний університет
водного господарства
та природокористування

ЗМІСТ

ВСТУП…….. 4
Лекція 1. Метод проекцій. Проеціювання точки…….. 5
1.1. Завдання нарисної геометрії……..... 5
1.2. Метод проекцій. Ортогональні проекції…….. 5
1.3. Проеціювання точки на дві площини проекцій…… 6
1.4. Проеціювання точки на три площини проекцій…….. 7
1.5. Класифікація точок…… 9
Лекція 2. Проеціювання прямої…… 11
2.1. Проекції прямої лінії…….. 11
2.2. Класифікація прямих…… 12
2.3. Сліди прямої……... 18
2.4. Визначення натуральної величини відрізка прямої загального положення…….. 19
2.5. Взаємне розміщення двох прямих ліній…….. 21
2.6. Проеціювання взаємно перпендикулярних прямих….. 26
Лекція 3. Площина……..... 28
3.1. Задання площини в просторі і на епюрі…….. 28
3.2. Класифікація площин…… 34
3.3. Задачі на визначення належності точки площині…….. 41
3.4. Головні лінії площини……... 44
Лекція 4. Взаємне положення двох площин, прямої та площини…… 49
4.1. Паралельність двох площин, прямої та площини…….. 49
4.2. Перетин двох площин…… 51
4.3. Перетин прямої з площиною…… 65
4.4. Перпендикулярність прямої та площини, двох площин……... 76
Лекція 5. Способи перетворення проекцій…… 80
5.1. Мета застосування способів перетворення проекцій…. 80
5.2. Спосіб заміни площин проекцій……... 83
5.3. Спосіб плоско-паралельного переміщення…… 93
Лекція 6. Поверхні. Точка на поверхні……... 103
6.1. Багатогранні поверхні та їх зображення…….. 103
6.2. Криві поверхні та їх зображення…….. 105
Лекція 7. Перетин поверхонь з площиною…… 114
7.1. Перетин поверхні багатогранника з площиною…….. 114

Національний університет
водного господарства
та природокористування

7.2. Перетин кривої поверхні з площиною……. 118
Лекція 8. Взаємний перетин поверхонь…….. 130
8.1. Побудова лінії перетину поверхонь при проекціюючому положенні однієї з поверхонь відносно площин проекцій……... 130
8.2. Побудова лінії перетину поверхонь при їх загальному положенні…….. 134
Список використаної та рекомендованої літератури…. 137

ВСТУП

Відповідно до робочої програми навчальної дисципліни «Інженерна графіка» для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня за спеціальністю 194 «Гідротехнічне будівництво, водна інженерія та водні технології» передбачено в І семестрі вивчення розділу «Нарисна геометрія» (модуль 1).

Мета конспекту лекцій – дати можливість студентам без значних затрат часу закріпити матеріал, що прослуханий на лекції, виділити за кожною темою ті вузлові питання, без опанування яких неможливо успішно вивчити курс нарисної геометрії.

Оскільки осмислення отриманих відомостей здійснюється переважно через зорове, образне їх сприйняття, автором основні правила та положення нарисної геометрії викладено за допомогою рисунків, на яких показано наочні зображення та епюри фігур, що вивчаються, та надається стислий їх опис. Викладений матеріал дозволяє студентам самостійно оволодівати основними теоретичними положеннями та здобути практичні уміння виконувати різні задачі з курсу нарисної геометрії.

Конспект лекцій може бути рекомендований до використання студентами як денної, так і заочної форм навчання.

Національний університет водного господарства та природокористування

ЛЕКЦІЯ 1. МЕТОД ПРОЕКЦІЙ. ПРОЕКЦІЮВАННЯ ТОЧКИ

1.1. Завдання нарисної геометрії
1.2. Метод проекцій. Ортогональні проекції
1.3. Проекціювання точки на дві площини проекцій
1.4. Проекціювання точки на три площини проекцій
1.5. Класифікація точок

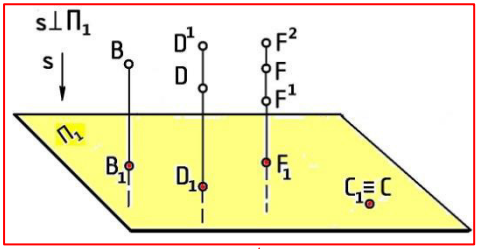
1.1. ЗАВДАННЯ НАРИСНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Основне завдання нарисної геометрії полягає у визначенні способів зображення просторових об'єктів на площині (аркуші паперу або екрані комп'ютера), тобто знати правила та вміти виконувати креслення.

Ще одним завданням нарисної геометрії є вивчення способів, що дозволяють уявити форми просторових об'єктів за їх плоскими зображеннями, тобто опанувати правила читання креслень.

В основу нарисної геометрії покладено метод проекцій.

1.2. МЕТОД ПРОЕКЦІЙ. ОРТОГОНАЛЬНІ ПРОЕКЦІЇ



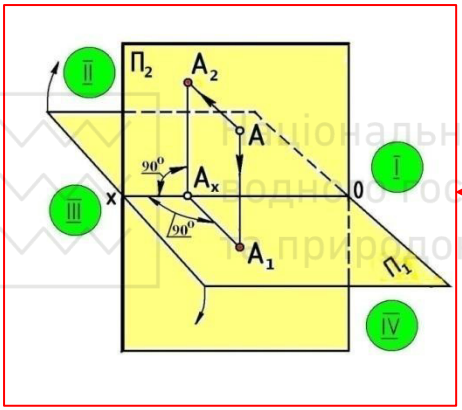
B_1, D_1, F_1, D_1 – ортогональні проекції точок B, D, D^1, F, F^1, F^2, C (точка C належить $П_1$); BB_1, DD_1, FF_1 – проекціюючі прямі, перпендикулярні площині проекцій $П_1$.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

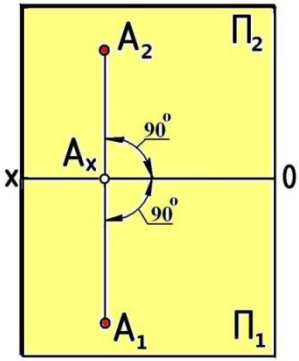
Висновки:

1. Кожна точка простору має тільки одну ортогональну проекцію.
2. Одна ортогональна проекція не визначає положення самої точки в просторі, тобто креслення з однією проекцією об'єкта є невизначеним, необоротним.

1.3. ПРОЕКЦІЮВАННЯ ТОЧКИ НА ДВІ ПЛОЩИНИ ПРОЕКЦІЙ



Наочне зображення точки А та її проекцій A_1, A_2 в системі двох площин проекцій $П_1$ і $П_2$



Епюр точки А в системі двох площин проекцій $П_1$ і $П_2$

$П_1$– горизонтальна площина проекцій (позначають цю площину також π_1)

$П_2$ – фронтальна площина проекцій (позначають цю площину також π_2)

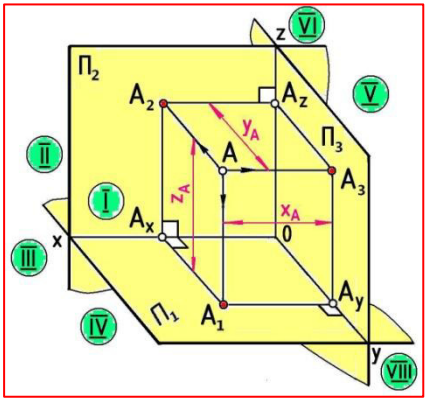
A_1 – горизонтальна проекція точки А (ортогональна проекція точки А на площину проекцій $П_1$)

A_2 – фронтальна проекція точки А (ортогональна проекція точки А на площину проекцій $П_2$)

I, II, III, IV – квадранти або чверті простору, на які ділять простір площини $П_1$ і $П_2$

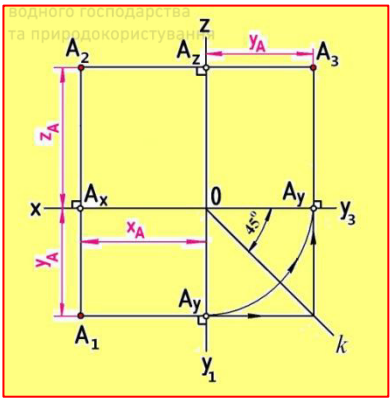
Висновок:
Дві проекції точки однозначно визначають її положення в просторі відносно площин проекцій $П_1$ і $П_2$.

1.4. ПРОЕКЦІЮВАННЯ ТОЧКИ НА ТРИ ПЛОЩИНИ ПРОЕКЦІЙ



Наочне зображення точки А та її проекцій A_1, A_2, A_3 в системі двох площин проекцій $П_1$, $П_2$, $П_3$

Національний університет водного господарства та природокористування



Епюр точки А в системі трьох площин проекцій $П_1$, $П_2$, $П_3$

$П_3$ – профільна площина проекцій (позначають цю площину також π_3)

A_3 – профільна проекція точки А (ортогональна проекція точки А на площину проекцій $П_3$)

0x або x – вісь проекцій ($x = П_1 \cap П_2$); 0y або y – вісь проекцій, яка при утворенні епюра розпадається на два променя $0y_1$ **(y_1)** та $0y_3$ (y_3), причому $y_1 \in П_1$, $y_3 \in П_3$ ($y = П_1 \cap П_3$); 0z або z – вісь проекцій ($z = П_2 \cap П_3$); *k* – стала пряма креслення

A_1A_2 – вертикальна лінія проекційного зв'язку, з'єднує горизонтальну та фронтальну проекції точки ($A_1A_2 \perp x$); A_2A_3 – горизонтальна лінія проекційного зв'язку, з'єднує фронтальну та профільну проекції точки ($A_2A_3 \perp z$); A_1A_3 – горизонтально-вертикальна лінія проекційного зв'язку, з'єднує горизонтальну та профільну проекції точки ($A_1A_3 \perp y$), розпадається на два відрізки $A_1Ay \perp y_1$ та $A_3Ay \perp y_3$

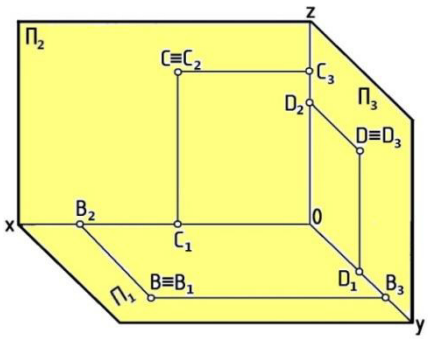
I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII – октанти простору, на які ділять простір площини $П_1$, $П_2$, $П_3$.

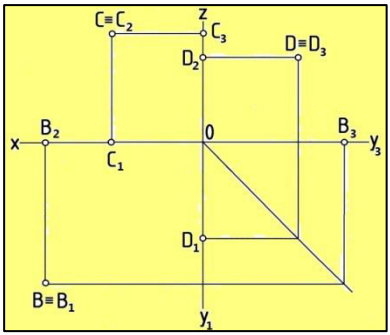
Якщо прийняти площини проекцій за координатні площини, а осі проекцій за осі координат, можна вимірювати відстані точки до площин проекцій, вибравши одиницю масштабу:
координата x визначає відстань від точки до площини $П_3$:
$x_A = |A, П_3|$;
координата y визначає відстань від точки до площини $П_2$:
$y_A = |A, П_2|$;
координата z визначає відстань від точки до площини $П_1$:
$x_A = |A, П_1|$.

1.5. КЛАСИФІКАЦІЯ ТОЧОК

Точки поділяють на такі, що не належать площинам проекцій, і точки, що належать площинам проекцій.
У точки, що не належить площинам проекцій (точка А), всі три координати не дорівнюють нулю і на епюрі жодна з проекцій не лежить на осі проекцій.

1.5.1. Наочне зображення та епюр точок, що належать одній площині проекцій



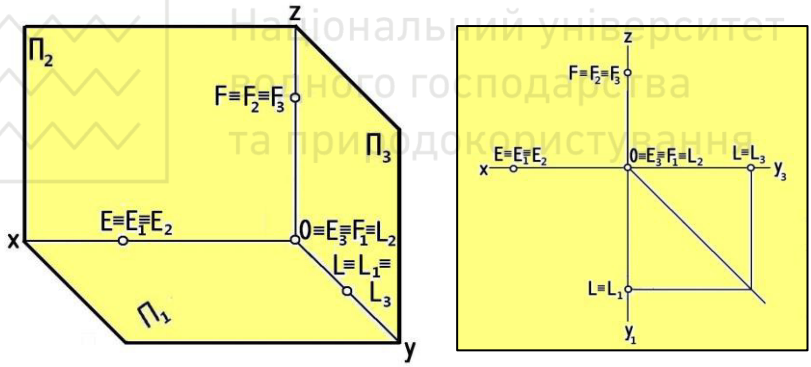


Національний університет
водного господарства
та природокористування

У точок, що належать одній площині проекцій, одна з координат дорівнює нулю, дві проекції точки знаходяться на осях проекцій, а третя збігається з самою точкою:

$B \in \Pi_1$, $z_B = 0$, x_B, $y_B \neq 0$;
$C \in \Pi_2$, $y_C = 0$, x_C, $z_C \neq 0$;
$D \in \Pi_3$, $x_D = 0$, y_D, $z_D \neq 0$.

1.5.2. Наочне зображення та епюр точок, що належать двом площинам проекцій, тобто лежать на осях проекцій



У точок, що належать осям проекцій, дві координати дорівнюють нулю, дві проекції точки збігаються між собою і з самою точкою та лежать на осі проекцій, а третя проекція знаходиться в точці початку координат:

$E \in x$, y_E, $z_E = 0$, $x_E \neq 0$;
$L \in y$, x_L, $z_L = 0$, $y_L \neq 0$:
$F \in z$, x_F, $y_F = 0$, $z_F \neq 0$.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

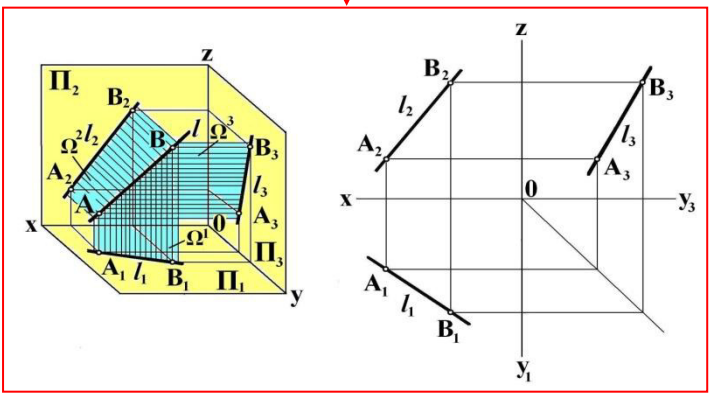
ЛЕКЦІЯ 2. ПРОЕКЦІЮВАННЯ ПРЯМОЇ

2.1. Проекції прямої лінії
2.2. Класифікація прямих
2.3. Сліди прямої
2.4. Визначення натуральної величини відрізка прямої загального положення
2.5. Взаємне розміщення двох прямих ліній
2.6. Проекціювання взаємно перпендикулярних прямих, що перетинаються

2.1. ПРОЕКЦІЇ ПРЯМОЇ ЛІНІЇ

Ортогональними проекціями прямої лінії в загальному випадку є прямі лінії, які можна отримати як лінії перетину площин, що проходять через задану пряму, із площинами проекцій, до яких ці площини перпендикулярні: $l_1 = \Omega_1 \cap \Pi_1$, $l_2 = \Omega_2 \cap \Pi_2$, $l_3 = \Omega_3 \cap \Pi_3$ ($\Omega_1 \perp \Pi_1$, $\Omega_2 \perp \Pi_2$, $\Omega_3 \perp \Pi_3$).

Оскільки пряма лінія в просторі визначається за двома її нетотожними точками, то побудова проекцій прямої зводиться до побудови проекцій двох її нетотожних точок: A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3 – проекції точок A і B прямої l на площинах проекцій Π_1, Π_2, Π_3.

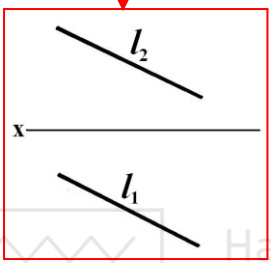


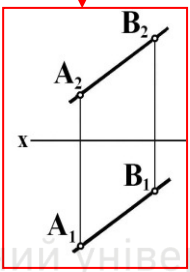
Національний університет
водного господарства
та природокористування

Два способи позначення прямої на епюрі

Малими літерами латинського алфавіту (пряма *l*)

Великими літерами латинського алфавіту за позначенням двох її нетотожних точок (пряма AB)





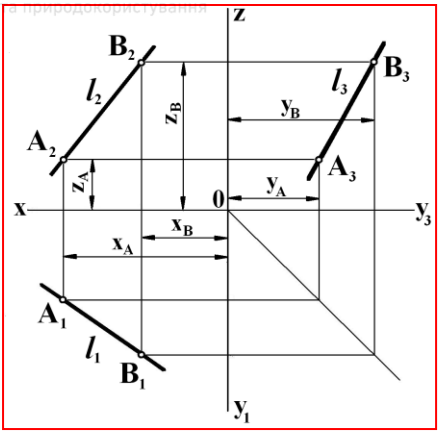
Національний університет
водного господарства
та природокористування

Прямі залежно від їх розміщення відносно площин проекцій поділяють на прямі загального положення, прямі рівня та проекціюючі прямі.

2.2.1. Прямі загального положення

Прямі загального положення – це прямі, які не паралельні і не перпендикулярні до жодної з площин проекцій (в 2.1 наведено наочне зображення та епюри прямих загального положення).

Національний університет
водного господарства
та природокористування



Епюр прямої загального положення l з указанням координат x, y, z двох її нетотожних точок A і B.

Проекційні властивості та координатні характеристики прямої загального положення:

1. Проекції прямої не паралельні і не перпендикулярні до осей проекцій – це характерна графічна ознака, що властива лише прямій загального положення і дозволяє відрізнити епюр цієї прямої від епюрів прямих рівня та проекціюючих.

2. Кожна проекція відрізка прямої коротша за натуральну (дійсну) величину самого відрізка, оскільки пряма не паралельна до жодної з площин проекцій.

3. Різниці значень координат x, y, z двох нетотожних точок прямої не дорівнюють нулю.

2.2.2. Прямі рівня

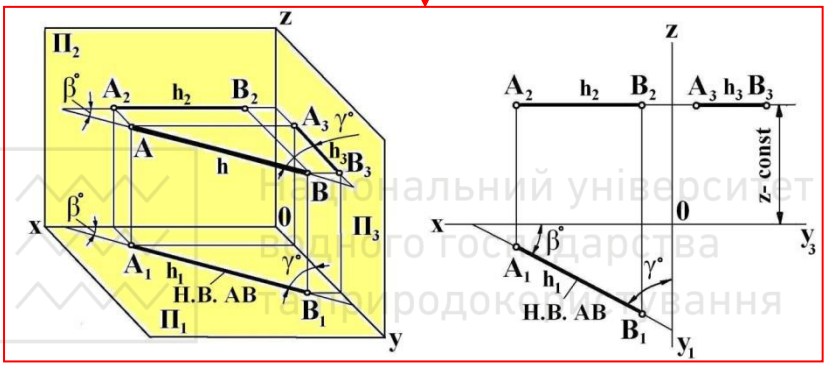
Прямі рівня – це прямі, які паралельні до однієї з площин проекцій: горизонтальна пряма, фронтальна пряма, профільна пряма.

Національний університет водного господарства та природокористування

2.2.2.1, Горизонтальна пряма

Горизонтальна пряма або горизонталь – це пряма рівня, яка паралельна до горизонтальної площини проекцій і позначається буквою h

Наочне зображення та епюр горизонтальної прямої АВ.



Проекційні властивості та координатні характеристики горизонтальної прямої:

1. Фронтальна та профільні проекції прямої паралельні до осей проекцій x і y. Це характерна графічна ознака, що властива лише горизонтальній прямій.

2. Координата z всіх точок прямої є сталою величиною.

3. Горизонтальна проекція відрізка прямої визначає натуральну величину самого відрізка (A_1B_1 = Н.В.АВ).

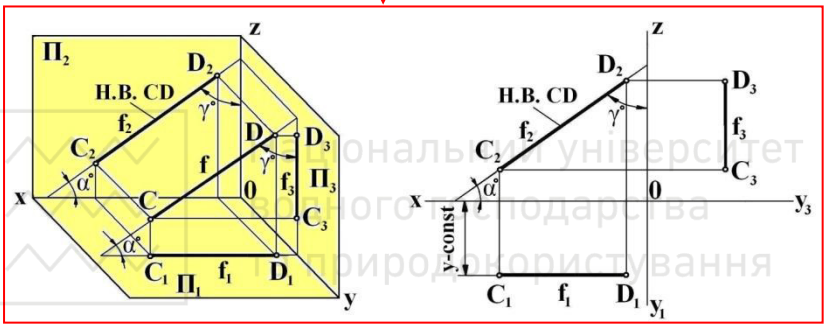
4. Кути β^0 і γ^0 – кути нахилу прямої до площин проекцій відповідно до $П_2$ і $П_3$. Вони визначаються безпосередньо за епюром без додаткових графічних побудов.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

2.2.2.2, Фронтальна пряма

Фронтальна пряма або фронталь – це пряма рівня, яка паралельна до фронтальної площини проекцій і позначається буквою f

Наочне зображення та епюр фронтальної прямої CD



Проекційні властивості та координатні характеристики фронтальної прямої:

1. Горизонтальна та профільна проекції прямої паралельні до осей проекцій x і z. Це характерна графічна ознака, що властива лише фронтальній прямій.

2. Координата y всіх точок прямої є сталою величиною.

3. Фронтальна проекція відрізка прямої визначає натуральну величину самого відрізка (C_2D_2 = H.B.CD).

4. Кути α^0 і γ^0 – кути нахилу прямої до площин проекцій відповідно $П_1$ і $П_3$. Вони визначаються безпосередньо за епюром без додаткових графічних побудов.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

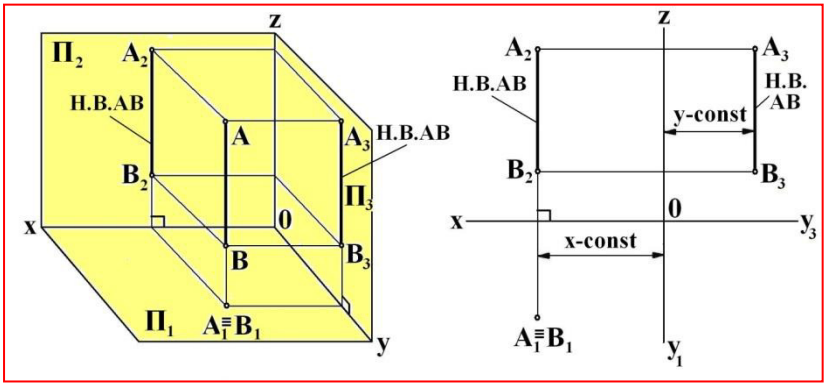
2.2.3. Проекціюючі прямі

Проекціюючі прямі – це прямі, які перпендикулярні до однієї з площин проекцій: горизонтально-проекціююча пряма, фронтально-проекціююча пряма, профільно-проекціююча пряма (ці прямі водночас паралельні до двох інших площин проекцій).

2.2.3.1. Горизонтально-проекціююча пряма

Горизонтально-проекціююча пряма – це проекціююча пряма, яка перпендикулярна до горизонтальної площини проекці.

Наочне зображення та епюр горизонтально-проекціюючої прямої AB



Національний університет
водного господарства
та природокористування

Проекційні властивості та координатні характеристики горизонтально-проекціюючої прямої:

1. Горизонтальна проекція прямої – точка, фронтальна та профільна проекції перпендикулярні відповідно до осей x і y.

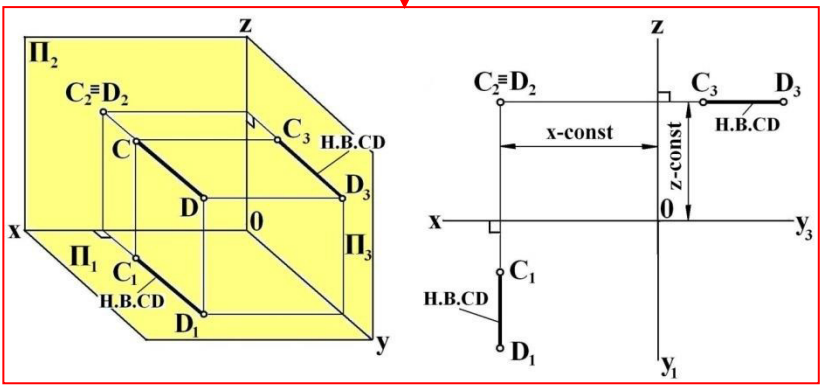
2. Координати x і y всіх точок прямої є сталими величинами.

3. Фронтальна та профільна проекції відрізка прямої визначають натуральну величину самого відрізка ($A_2B_2 = A_3B_3$ = Н.В.АВ).

2.2.3.2. Фронтально-проекціююча пряма

Фронтально-проекціююча пряма – це проекціююча пряма, яка перпендикулярна до фронтальної площини проекцій

Наочне зображення та епюр фронтально-проекціючої прямої CD



Національний університет
водного господарства
та природокористування

Проекційні властивості та координатні характеристики фронтально-проекціюючої прямої:

1. Фронтальна проекція прямої – точка, горизонтальна та профільна проекції перпендикулярні відповідно до осей x і z.

2. Координати x і z всіх точок прямої є сталими величинами.

3. Горизонтальна та профільна проекції відрізка прямої визначають натуральну величину самого відрізка ($C_1D_1 = C_3D_3$ = H.B.CD).

2.3. СЛІДИ ПРЯМОЇ

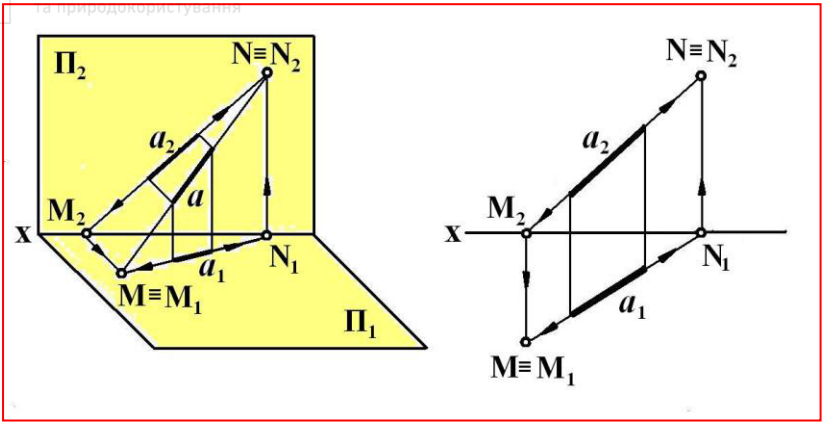
Національний університет
водного господарства
та природокористування

Слідом прямої називається точка перетину прямої з площиною проекцій**.**

В системі трьох площин проекцій пряма загального положення має три сліди: горизонтальний – точка перетину прямої з $П_1$ (позначається літерою M), фронтальний - точка перетину прямої з $П_2$ (позначається літерою N), профільний - точка перетину прямої з $П_3$ (позначається літерою L). Пряма рівня має два сліди, проекціююча – один.

Побудова слідів прямої *a* в системі двох площин проекцій

Національний університет
водного господарства
та природокористування

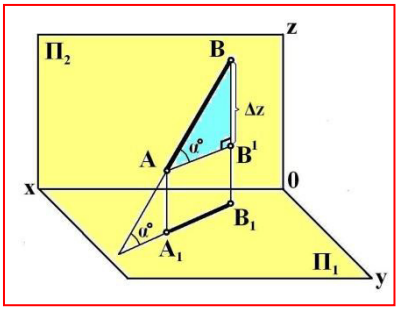


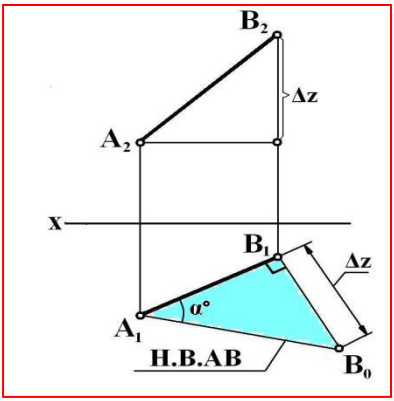
Для визначення сліду прямої потрібно виконати дві умови: 1 - слід повинен знаходитися в площині проекцій (це означає, що дві проекції сліду з трьох лежать на осях проекцій) та 2 – належати прямій. Тому побудову сліду прямої починають із визначення точки перетину тієї проекції прямої, яка не лежить в площині проекцій знаходження сліду, з віссю проекцій. Наприклад, для визначення горизонтального сліду прямої спочатку продовжують фронтальну або профільну проекцію прямої до перетину з віссю проекцій. Ця точка буде однією з проекцій сліду, з якої проводять лінію проекційного зв'язку для знаходження самого сліду за умови, що він належить прямій.

2.4. ВИЗНАЧЕННЯ НАТУРАЛЬНОЇ ВЕЛИЧИНИ ВІДРІЗКА ПРЯМОЇ ЗАГАЛЬНОГО ПОЛОЖЕННЯ

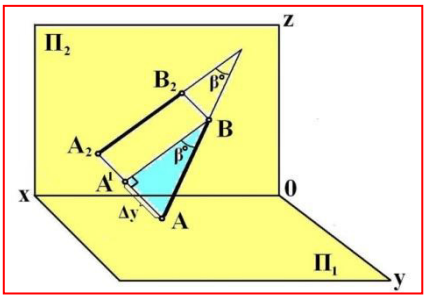
Визначення способом прямокутного трикутника натуральної величини (довжини) відрізка АВ прямої загального положення та кута α^o нахилу прямої до горизонтальної площини проекцій

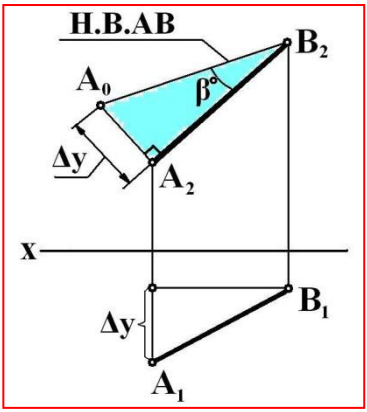
Національний університет
водного господарства
та природокористування





Визначення способом прямокутного трикутника натуральної величини (довжини) відрізка АВ прямої загального положення та кута β^o нахилу прямої до фронтальної площини проекцій





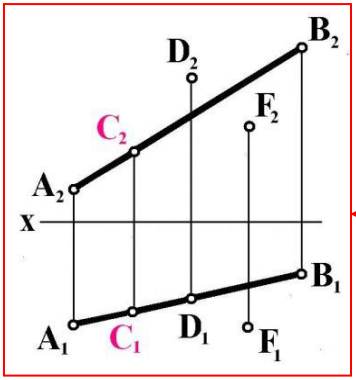
Національний університет
водного господарства
та природокористування

Висновки:
Натуральна величина відрізка прямої загального положення визначається гіпотенузою прямокутного трикутника, у якого один катет – проекція відрізка прямої на одну з площин проекцій, а другий катет дорівнює різниці відстаней кінців відрізка прямої до тієї площини проекцій, на якій будується прямокутний трикутник.
Із цього прямокутного трикутника визначається і кут нахилу прямої до тієї площини проекцій, на якій будується прямокутний трикутник, як кут між катетом - проекцією і гіпотенузою.

2.5. ВЗАЄМНЕ РОЗМІЩЕННЯ ДВОХ ПРЯМИХ ЛІНІЙ

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Точка належить прямій, якщо її проекції знаходяться на однойменних проекціях цієї прямої



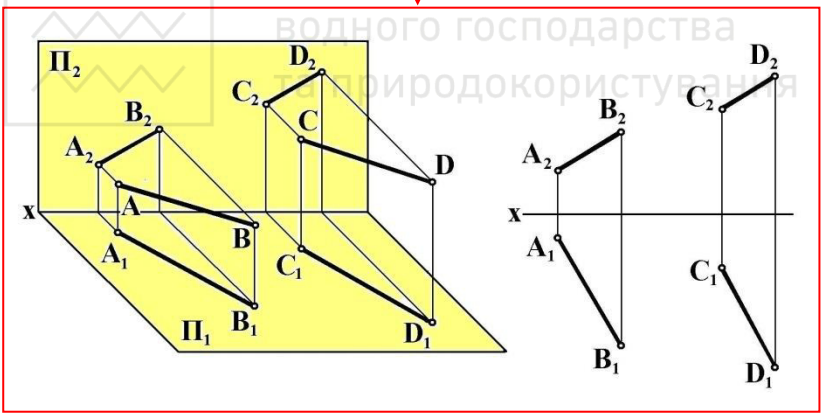
Серед трьох точок C, D і F лише точка C належить прямій AB

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Дві прямі лінії у просторі можуть бути: 1) паралельними, 2) перетинатися, 3) мимобіжними.
Паралельні та прямі, що перетинаються, лежать в одній площині, а мимобіжні прямі не мають спільної точки, тому не лежать в одній площині.

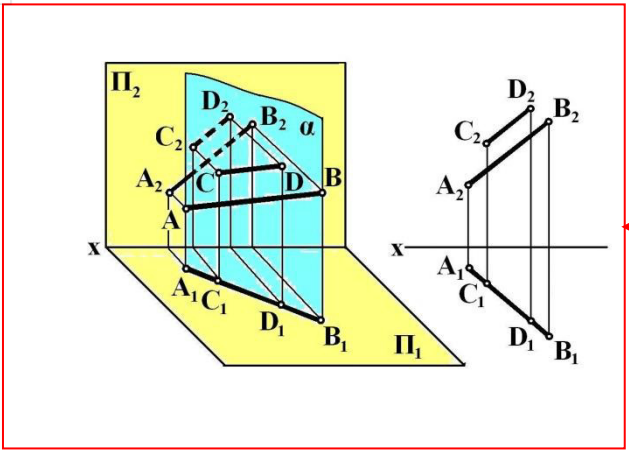
2.5.1. Паралельні прямі

Одноіменні проекції паралельних прямих на площину проекцій, до якої прямі не перпендикулярні, паралельні між собою



Якщо паралельні прямі лежать в площині, що перпендикулярна до площини проекцій, то проекції прямих на цю площину проекцій збігаються

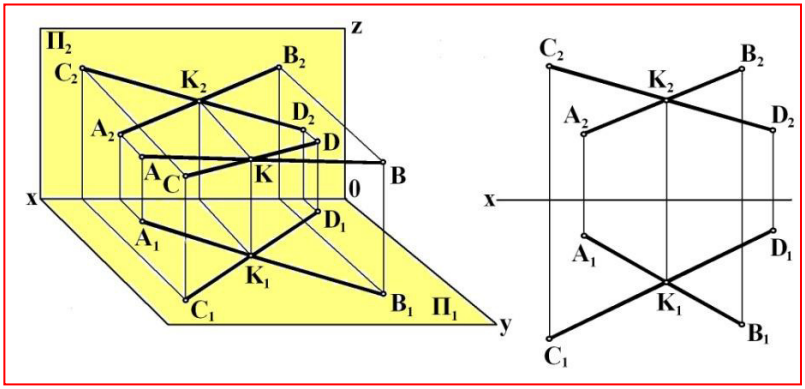
Національний університет
водного господарства
та природокористування



Паралельні прямі AB і CD лежать в площині α, яка перпендикулярна до площини проекцій $П_1$

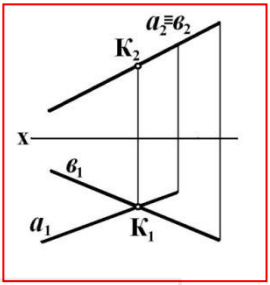
2.5.2. Прямі, що перетинаються

Проекції прямих, що перетинаються, проекціюються на площини проекцій, в загальному випадку, прямими лініями, що також перетинаються, причому точки перетину однойменних проекцій прямих лежать на одній лінії проекційного зв'язку, оскільки є проекціями однієї і тієї ж точки – точки перетину прямих.



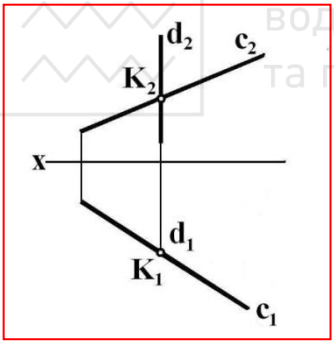
Національний університет
водного господарства
та природокористування

Наочне зображення та епюр прямих AB і CD, що перетинаються в точці К. Прямі AB і CD лежать в площині, яка не перпендикулярна до жодної з площин проекцій.



Епюр прямих *а* і *в*, що перетинаються. Прямі *а* і *в* лежать у площині, яка перпендикулярна до $П_2$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

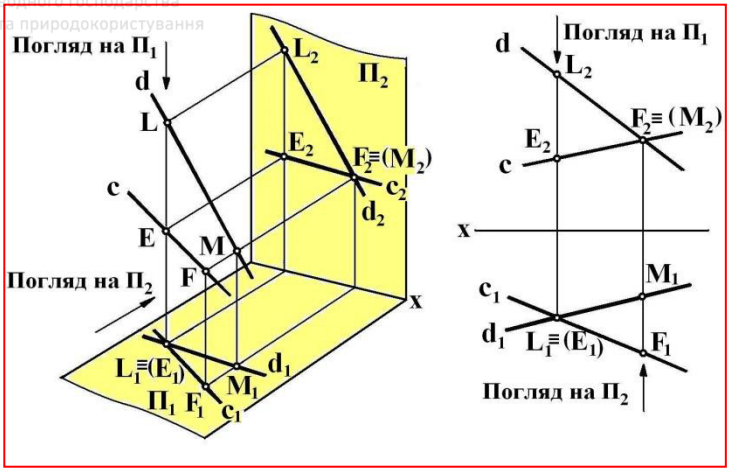


Епюр прямих c і d, що перетинаються. Прямі c і d лежать у площині, яка перпендикулярна до $П_1$. Пряма d – горизонтально-проекціююча пряма

2.5.3. Мимобіжні прямі

У мимобіжних прямих, тобто прямих, які не паралельні і не перетинаються, точки перетину їх однойменних проекцій не лежать на одній лінії проекційного зв'язку, як це має місце у прямих, що перетинаються, а проекції ніколи не збігаються, оскільки мимобіжні прямі не лежать в одній площині

Національний університет водного господарства та природокористування

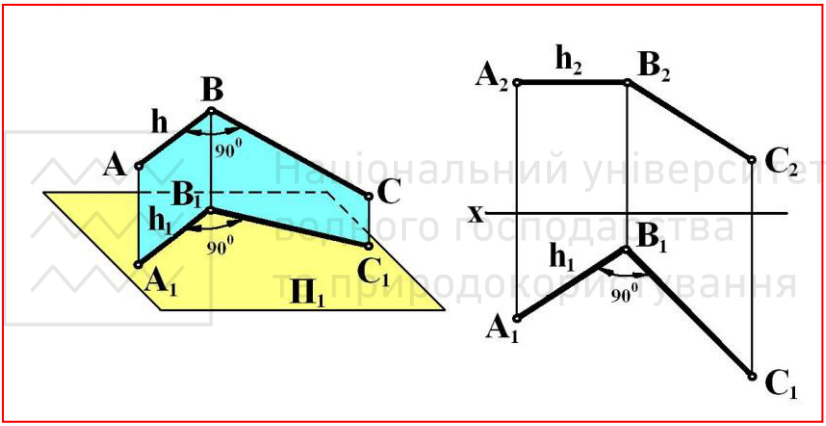


Наочне зображення та епюр мимобіжних прямих c і d.
Для мимобіжних прямих характерна наявність конкуруючих точок, за допомогою яких визначають видимість елементів геометричних фігур на епюрі. Конкуруючими називаються точки, які лежать на одній проекціюючій прямій. Для мимобіжних прямих c і d пари точок L, E і F, M є конкуруючими точками. Точки L і E утворюють горизонтально-проекціюючу пряму, де $L_1 \equiv E_1$. Точки F і M утворюють фронтально-проекціюючу пряму, де $F_2 \equiv M_2$.
З двох конкуруючих точок видимою відносно площин проекцій буде та, у якої проекція, що не збігається з проекцією іншої конкуруючої точки, розміщена далі від осі проекцій, тобто ця точка буде знаходитися ближче до спостерігача.
Видимість елементів на епюрі розв'язується для кожної проекції окремо, а саме для тієї проекції елемента, на якій проекції конкуруючих точок збігаються.
Серед конкуруючих точок L і E видимою на $П_1$ є точка L, фронтальна проекція L_2 якої розміщена далі від осі x. Невидимою на $П_1$ буде точка E, тому її горизонтальну проекцію E_1 взято в дужки (E_1). Серед конкуруючих точок F і M видимою на $П_2$ є точка F, горизонтальна проекція F_1 якої розміщена далі від осі x. Невидимою на $П_2$ буде точка M, тому її фронтальну проекцію M_2 беруть в дужки (M_2).

Національний університет
водного господарства
та природокористування

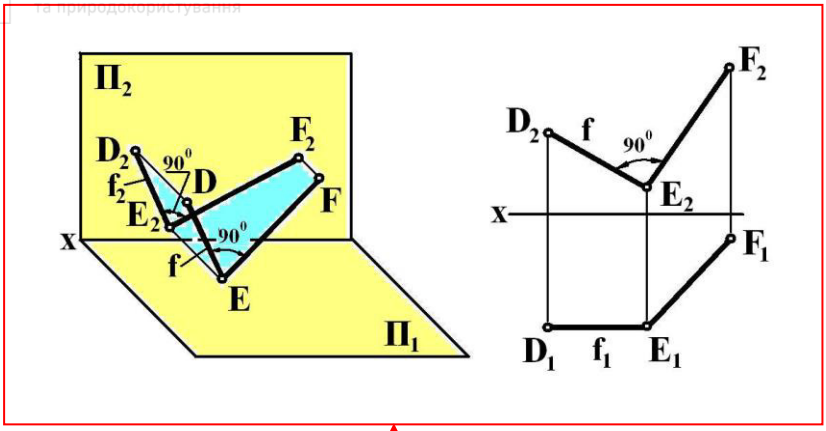
2.6. ПРОЕКЦІЮВАННЯ ВЗАЄМНО ПЕРПЕНДИКУЛЯРНИХ ПРЯМИХ, ЩО ПЕРЕТИНАЮТЬСЯ

Прямий кут, утворений перпендикулярними прямими, проекціюється у вигляді прямого кута на ту площину проекцій, до якої одна з прямих (сторона кута) паралельна, а друга не перпендикулярна.



Наочне зображення та епюр прямого кута, утвореного сторонами AB і BC, які є відрізками прямих, що перетинаються у вершині B, де AB – відрізок горизонтальної прямої h, паралельної до $П_1$. Горизонтальна проекція кута $A_1B_1C_1$ складає прямий кут при вершині B_1.

Національний університет
водного господарства
та природокористування



Наочне зображення та епюр прямого кута, утвореного сторонами DE і EF, які є відрізками прямих, що перетинаються у вершині E, де DE – відрізок фронтальної прямої f, паралельної до $П_2$. Фронтальна проекція кута $D_2E_2F_2$ складає прямий кут при вершині E_2.

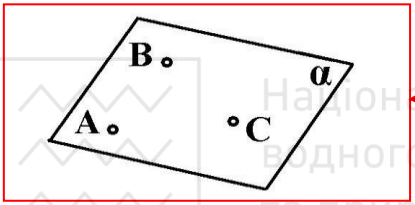
Національний університет
водного господарства
та природокористування

Лекція 3. Площина

3.1. Задання площини в просторі і на епюрі
3.2. Класифікація площин
3.3. Задачі на визначення належності точки площині
3.4. Головні лінії площини

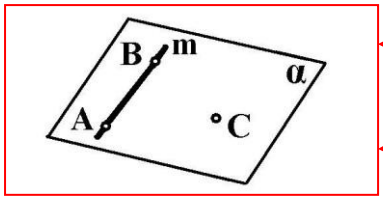
3.1. Задання площини в просторі і на епюрі

Площину в просторі визначають трьома точками, які не лежать на одній прямій



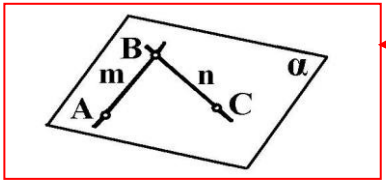
Точки A, B і C є визначником площини α

Розширення визначника площини дозволяє задати її іншими елементами:



Прямою лінією та точкою, що їй не належить

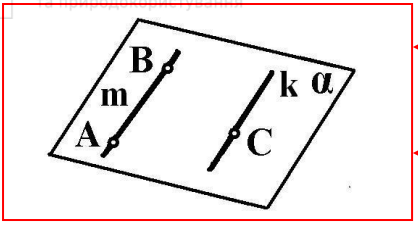
Площину α задано прямою m та точкою C



Двома прямими, що перетинаються

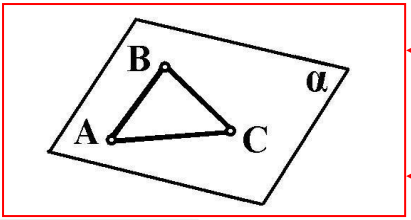
Площину α задано прямими m і n, що перетинаються

Національний університет
водного господарства
та природокористування



Двома паралельними прямими

Площину α задано паралельними



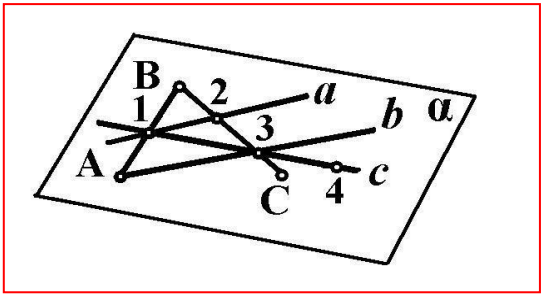
Відтинком площини, наприклад, трикутником

Площину α задано трикутником АВС

Національний університет
водного господарства
та природокористування

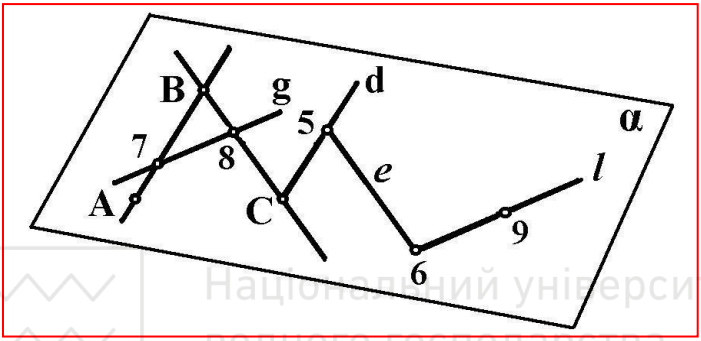
Вміння розширювати визначник площини дозволяє будувати потрібні для розв'язування різних задач точки та прямі, що належать площині.

Належність точки та прямої площині: точка належить площині, якщо вона лежить на прямій лінії цієї площини.
Пряма лінія належить площині, якщо вона:
1) проходить через дві точки площини або
2) проходить через одну точку і паралельна до прямої цієї площини.



Національний університет
водного господарства
та природокористування

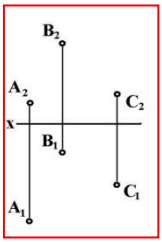
Пряма *a* належить площині α, оскільки проходить через точки 1 і 2 площини α. Прямі *b* і *c* належить площині α, оскільки проходять через точки 1, 3 і А, 3 площини α. Точка 4 належить площині α, оскільки лежить на прямій *c* площини α.



Національний університет
водного господарства
та природокористування

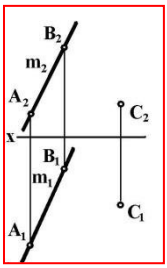
Пряма d належить площині α, оскільки проходить через точку С і паралельна до прямої АВ. Пряма *e* належить площині α, оскільки проходить через точку 5 на прямій d і паралельна до прямої ВС. Пряма *l* належить площині α, оскільки проходить через точку 6 на прямій *e* і паралельна до прямої g площини α.

Аналогічно заданню площини в просторі площину на епюрі задають проекціями:

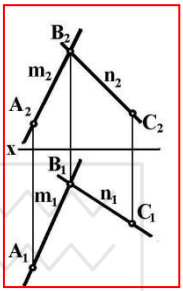


трьох точок, що не лежать на одній

Національний університет
водного господарства
та природокористування

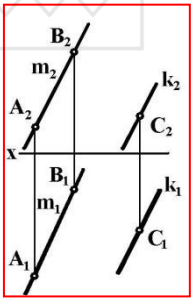


прямої лінії та точки, що їй не належить

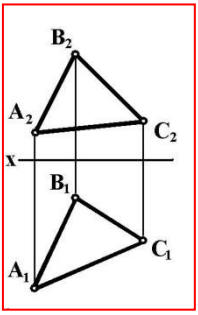


двох прямих, що перетинаються

Національний університет
водного господарства
та природокористування



двох паралельних прямих

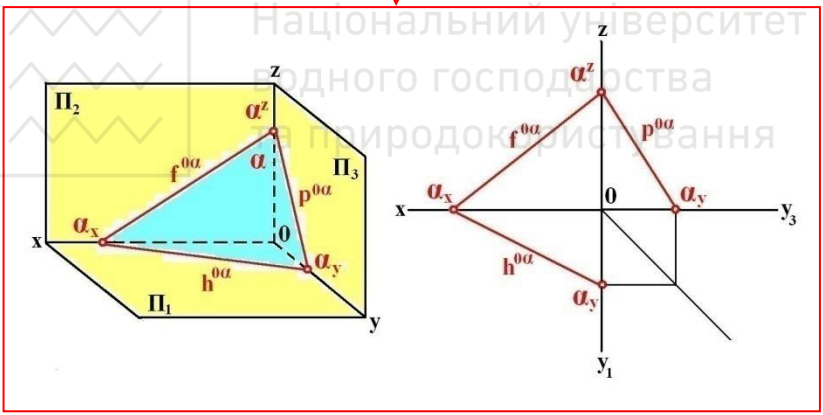


відтинку площини (трикутника)

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Часто площину задають не довільними прямими, що перетинаються, а прямими, по яких площина перетинає площини проекцій.
Пряму, по якій площина перетинає площину проекцій, називають слідом площини.

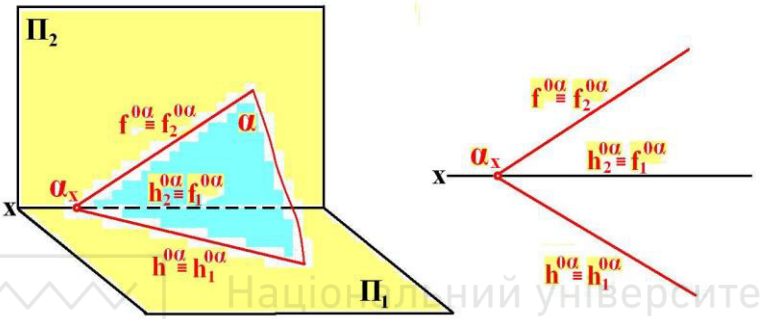
Наочне зображення та епюр площини α, що задана слідами: $h^{0\alpha}$ – горизонтальний слід площини α, $f^{0\alpha}$ – фронтальний слід площини α, $p^{0\alpha}$ – профільний слід площини α, α_x, α_y, α_z – точки сходу слідів площини **α**



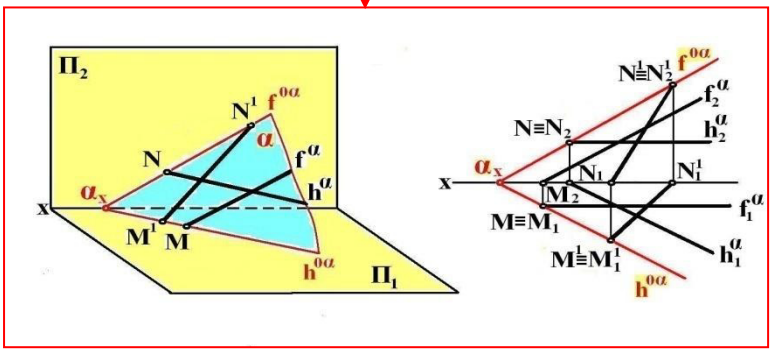
Задання площини слідами має переваги перед іншими варіантами її зображення на епюрі:
по-перше, зберігається наочність зображення, що дозволяє легко уявити положення площини в просторі;
по-друге, при заданні площини потрібно вказати в системі двох площин проекцій тільки дві прямі (два сліда) замість чотирьох або шести.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Наведемо проекції слідів площини в системі двох площин проекцій, які дозволяють будувати проекції прямих, що лежать в цій площині



У разі задання площини слідами, пряма належить площині, якщо:
1) сліди прямої (тобто її дві точки) належать однойменним слідам площини,
2) пряма має спільну точку з одним із слідів площини і паралельна до іншого сліду.



Національний університет
водного господарства
та природокористування

M^1N^1 – пряма площини α, оскільки $M^1 \in h^{0\alpha}$, $N^1 \in f^{0\alpha}$; h^α – горизонтальна пряма площини α (горизонталь площини), у якої $N \in f^{0\alpha}$, $h^\alpha \,//\, h^{0\alpha}$; f^α – фронтальна пряма площини α (фронталь площини), у якої $M \in h^{0\alpha}$, $f^\alpha \,//\, f^{0\alpha}$.

3.2. Класифікація площин

Площини, як і прямі лінії, залежно від їх розміщення відносно площин проекцій поділяють на площини загального положення, площини рівня та проекціюючі площини

Національний університет
водного господарства
та природокористування

3.2.1. Площини загального положення

Площини загального положення – це площини, які не паралельні і не перпендикулярні до жодної з площин проекцій (в 3.1 наведено наочне зображення та епюри площин загального положення)

У площини загального положення сліди не паралельні і не перпендикулярні до осей проекцій.

Якшо площину загального положення задано іншими елементами, наприклад, трикутником, то ці елементи на жодну з площин проекцій не проекціюються в одну спільну пряму лінію.

У визначника площини координати x, y, z трьох точок, що не лежать на одній прямій, мають різні величини.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

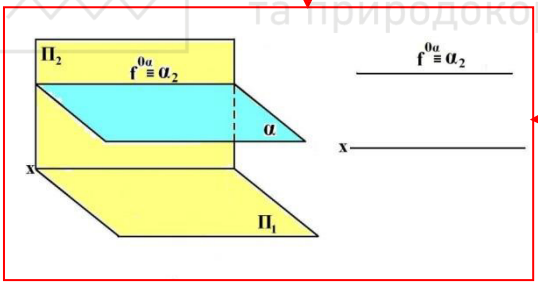
3.2.2. Площини рівня

Площини рівня – це площини, які паралельні до однієї з площин проекцій

3.2.2.1. Горизонтальна площина

Горизонтальна площина або горизонтальна площина рівня – це площина, яка паралельна до горизонтальної площини проекцій

Наочне зображення та епюр горизонтальної площини α



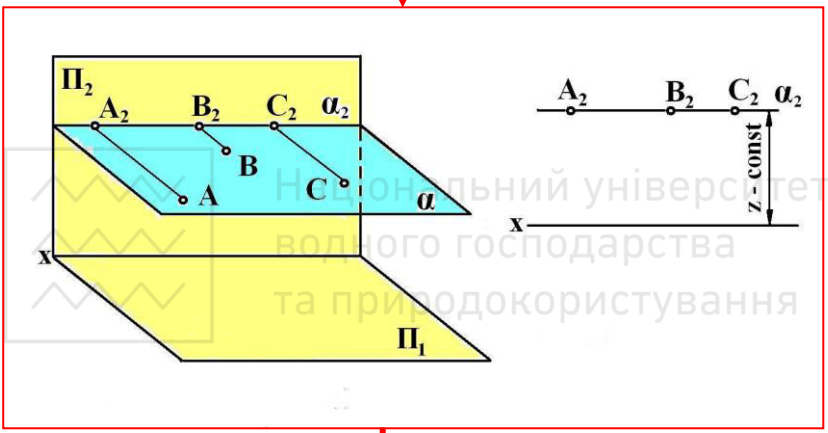
У площині α фронтальний слід $f^{0\alpha}$ паралельний до осі x і є слідом-проекцією α_2 площини α; горизонтальний слід відсутній.

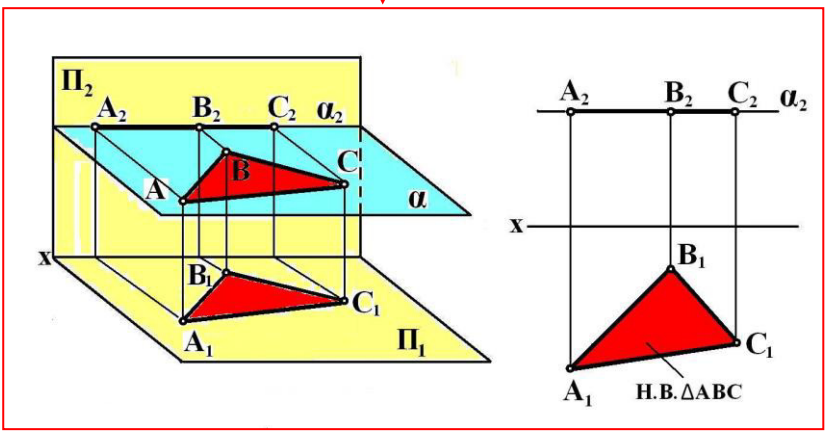
Слід-проекція – це лінія перетину площини з площиною проекцій, до якої вона перпендикулярна.
Слід-проекція має таку властивість: проекції точок, прямих ліній, плоских фігур, що знаходяться в площині, яка перпендикулярна до площини проекцій, проекціюються саме на слід-проекцію.
У визначника площини рівня одна з координат x, y, z трьох точок, що не лежать на одній прямій, має однакове

Національний університет
водного господарства
та природокористування

значення (у горизонтальної площини координата z має однакове значення).

Прямі, плоскі фігури, що лежать в площині рівня, проекціюються на площину проекцій, до якої площина паралельна, в натуральну величину (горизонтальні проекції прямих, плоских фігур, що лежать у горизонтальній площині, визначають їх натуральні величини).



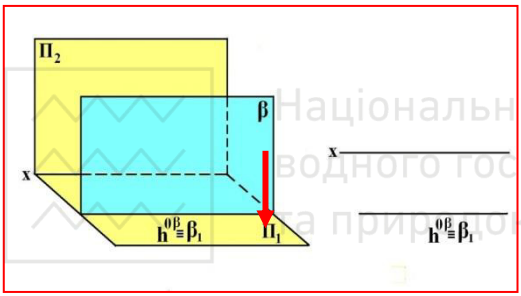


Національний університет
водного господарства
та природокористування

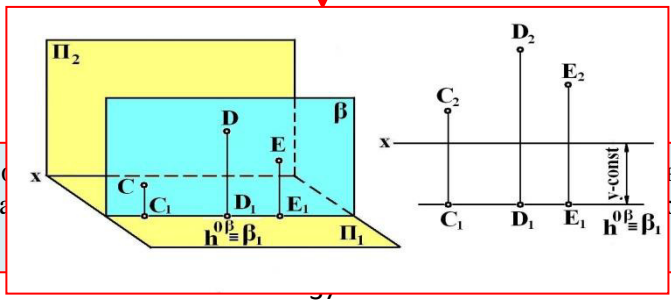
3.2.2.2. Фронтальна площина

Фронтальна площина або фронтальна площина рівня – це площина, яка паралельна до фронтальної площини проекцій.

Наочне зображення та епюр фронтальної площини β



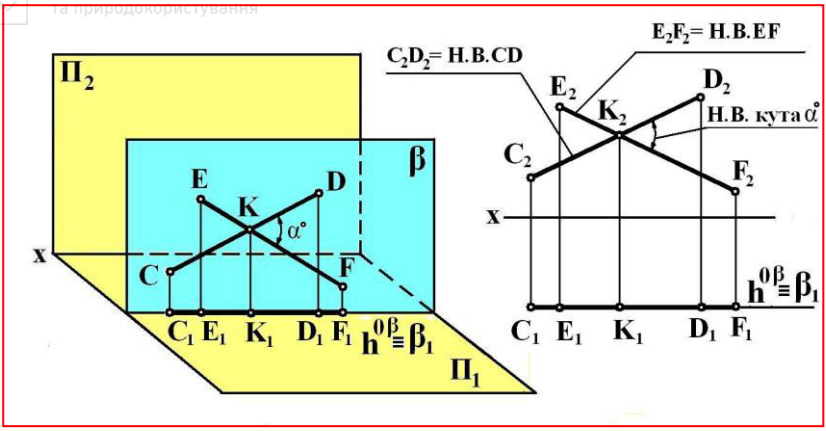
У площині β горизонтальний слід $h^{0\beta}$ паралельний до осі x і є слідом-проекцією β_1 площини β; фронтальний слід відсутній.



У (… не
лежа … кове

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Національний університет
водного господарства
та природокористування



3.2.3. Проекціюючі площини

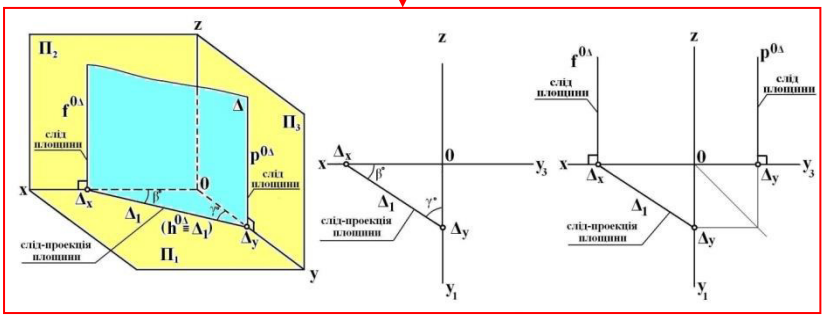
Проекціюючі площини – це площини, які перпендикулярні до однієї з площин проекцій

3.2.3.1. Горизонтально-проекціююча площина

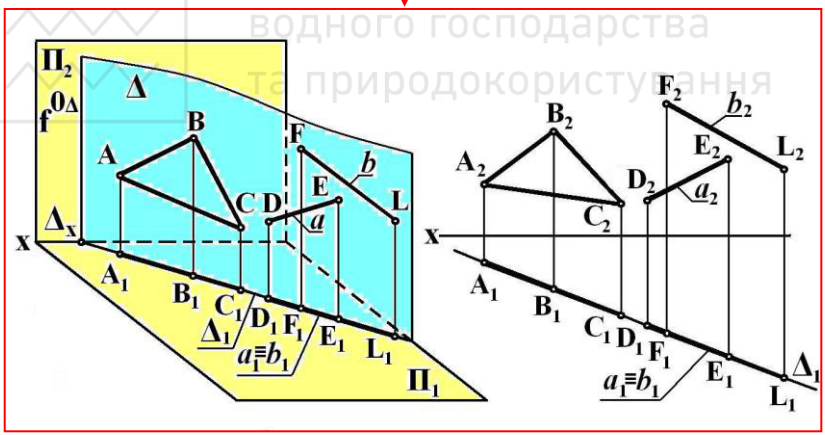
Горизонтально-проекціююча площина – це площина, яка перпендикулярна до горизонтальної площини проекцій.

$f^{0\Delta}$ – фронтальний слід площини Δ, $p^{0\Delta}$ – профільний слід площини Δ, $h^{0\Delta}$ – горизонтальний слід площини Δ є водночас слідом-проекцією Δ_1 площини Δ (площина Δ на $П_1$ проекціюється у слід-проекцію Δ_1, який повністю визначає положення площини Δ в просторі за наявності осей проекцій); β^0, γ^0 – кути нахилу площини Δ до $П_2$ і $П_3$.

Національний університет
водного господарства
та природокористування



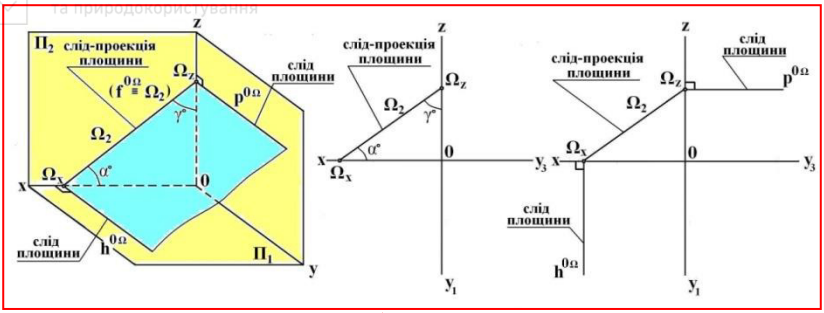
Наочне зображення та епюр трикутника ABC, прямих *a* і *b*, які належать горизонтально-проекціюючій площині Δ (горизонтальні проекції цих фігур збігаються зі слідом-проекцією Δ_1 площини Δ).



3.2.3.2. Фронтально-проекціююча площина

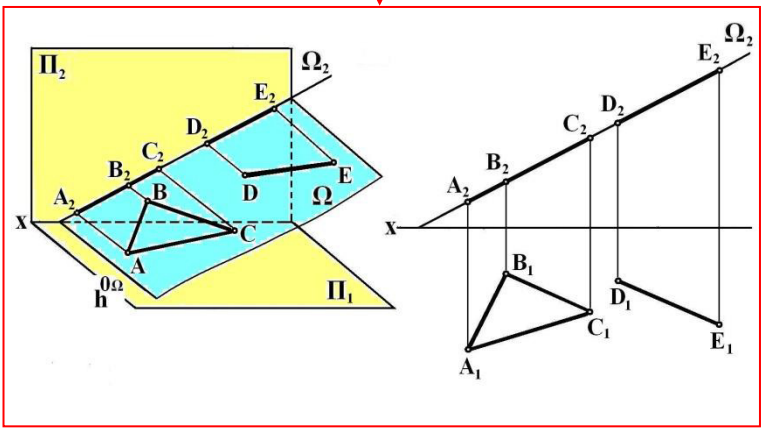
Фронтально-проекціююча площина – це площина, яка перпендикулярна до фронтальної площини проекцій.

Національний університет
водного господарства
та природокористування



$h^{0\Omega}$ – горизонтальний слід площини Ω, $p^{0\Omega}$ – профільний слід площини Ω, $f^{0\Omega}$ – фронтальний слід площини Ω є водночас слідом-проекцією Ω_2 площини Ω (площина Ω на $П_2$ проекціюється у слід-проекцію Ω_2, який повністю визначає положення площини Ω в просторі за наявності осей проекцій); α^0, γ^0 – кути нахилу площини Ω до $П_1$ і $П_3$.

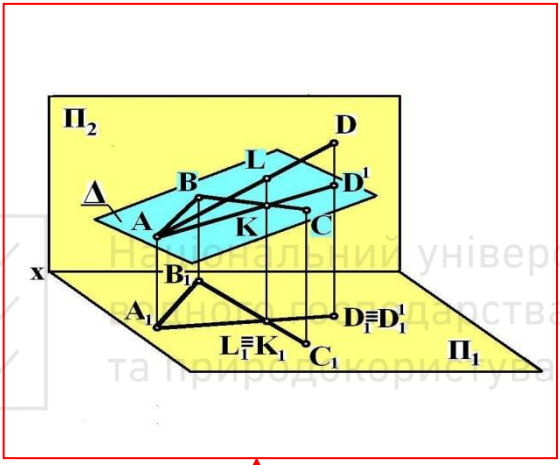
Наочне зображення та епюр трикутника ABC, прямої DE, які належать фронтально-проекціюючій площині Ω (фронтальні проекції цих фігур збігаються зі слідом-проекцією Ω_2 площини Ω).



Національний університет
водного господарства
та природокористування

3.3. Задачі на визначення належності точки площині

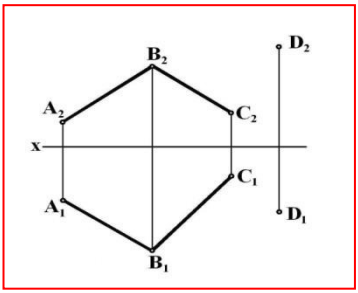
Задача на належність точки площині є однією з основних в геометрії. Точка належить площині, якщо вона лежить на прямій цієї площини.

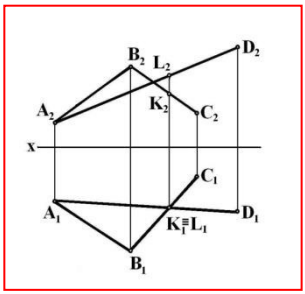


Площину Δ задано визначником – трьома точками A, B, C. З'єднавши ці точки, отримаємо дві прямі AB і BC, що перетинаються. Щоб визначити, чи належить точка D площині Δ, потрібно через точку D провести пряму до перетину з будь-якою точкою площини Δ, наприклад, точкою A. Далі розглядаємо пряму DA і будь-яку іншу пряму площини Δ, яка не проходить через точку A, наприклад, пряму BC. Якщо вони мимобіжні, то точка D не належить площині Δ як на наведеному рисунку. Проте точка D^1 ($D^1 = D\,D_1 \cap \Delta$) належить площині, оскільки прямі D^1A і BC є прямими, що перетинаються в спільній точці K.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

3.3.1. Перевірка належності довільної точки простору D площині Δ, яку задано двома прямими AB і BC, що перетинаються:



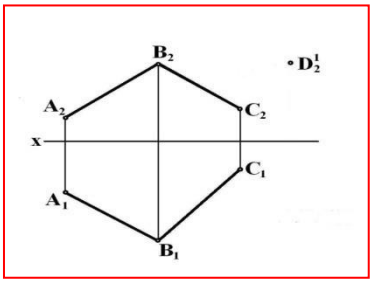


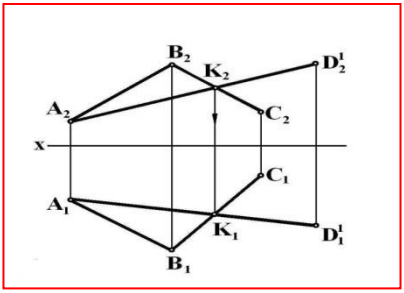
Початкова умова задачі.
Визначити, чи належить точка D площині Δ (AB∩BC).

Порядок побудов:

1. З'єднуємо точку D з точкою A площини Δ.
2. Визначаємо взаємне положення прямих DA і BC. Вони є мимобіжними.

3.3.2. Побудова точки D^1, що належить площині Δ (AB∩BC), за однією її проекцією:





Національний університет
водного господарства
та природокористування

Початкова умова задачі. Визначити, чи належить точка D^1 площині Δ. (АВ∩ВС).

Порядок побудов:
1. Точку D_2^1 з'єднуємо з A_2.
2. Визначаємо K_2, де $K_2 = A_2 D_2^1 \cap B_2C_2$.
3. Знаходимо K_1 на B_1C_1.
4. Проводимо єдину можливу горизонтальну проекцію A_1K_1 прямої АК, що належить площині Δ, на якій знаходимо D_1^1.

За наявності двох проекцій точки її положення в просторі визначено, а, отже, можна лише перевірити, чи належить ця точка заданій площині. Якщо задано одну проекцію точки, тобто положення точки в просторі не визначено, то можна, змінюючи положення відсутньої другої проекції точки, розмістити саму точку в заданій площині.

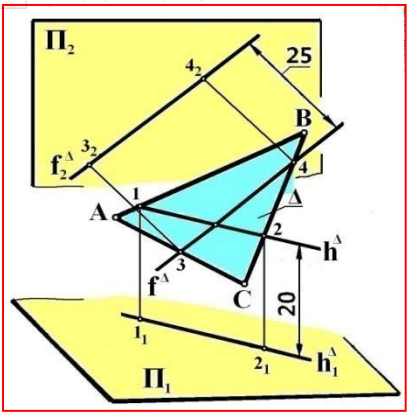
3.3.3. Побудова точки К, що належить площині, за її двома координатами

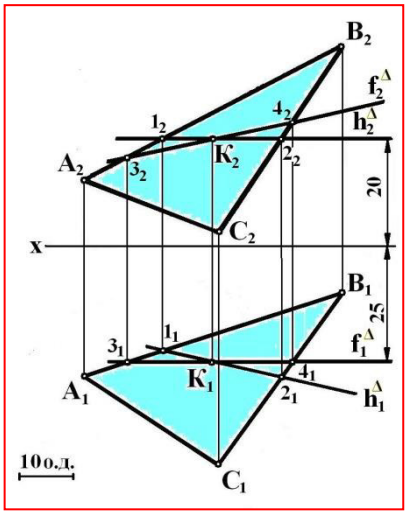
Умова задачі: В площині Δ, яку задано трикутником АВС, визначити положення точки К, яку розміщено на відстані 20 мм під площини проекцій $П_1$ і 25 мм від площини проекцій $П_2$:

Розв'язування задачі на наочному зображенні.

Розв'язування задачі на епюрі.

Національний університет
водного господарства
та природокористування





3.4. Головні лінії площини

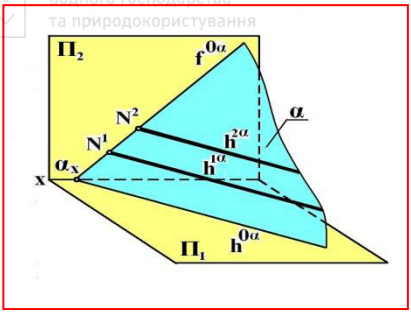
Головні лінії площини – це лінії рівня та лінія найбільшого уклону (ухилу) площини.
Лінії рівня площини – прямі, що лежать в площині і паралельні до однієї з площин проекцій. Це горизонталі (горизонтальні прямі) та фронталі (фронтальні прямі) площини.

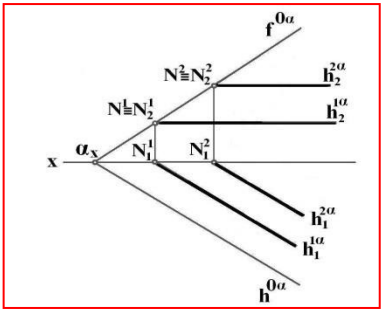
3.4.1. Горизонталі площини – прямі, які належать площині і паралельні до горизонтальної площини проекцій

Наочне зображення горизонталей $h^{1\alpha}$ і $h^{2\alpha}$, що належать площині α, заданої слідами.

Епюр горизонталей $h^{1\alpha}$ і $h^{2\alpha}$, що належать площині α, заданої слідами.

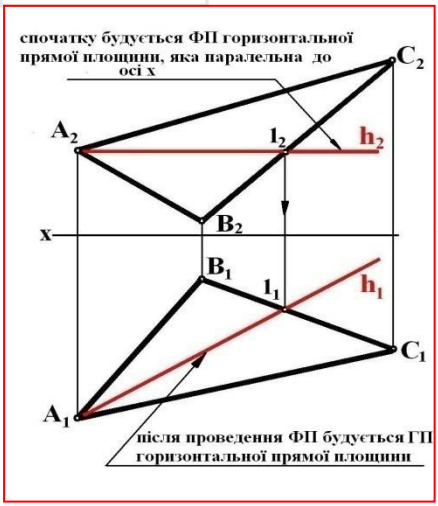
Національний університет
водного господарства
та природокористування





Всі горизонталі площини паралельні між собою і до горизонтального сліду площини.
Мають спільну точку з фронтальним слідом і паралельні до горизонтального сліду.
При проведенні на епюрі горизонталі площини спочатку проводять її фронтальну проекцію паралельно до осі проекцій x.

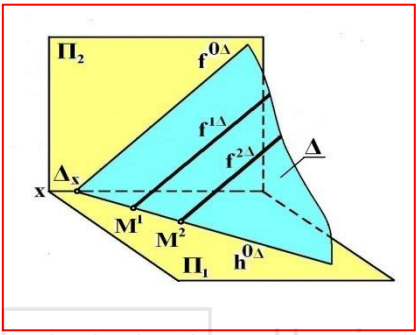
Національний університет
водного господарства
та природокористування



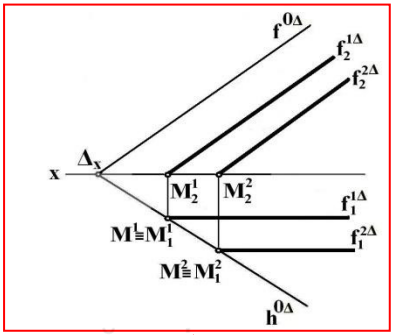
Проведення через точку А горизонталі площини h, яку задано трикутником АВС (ГП – горизонтальна проекція, ФП – фронтальна проекція).

Національний університет
водного господарства
та природокористування

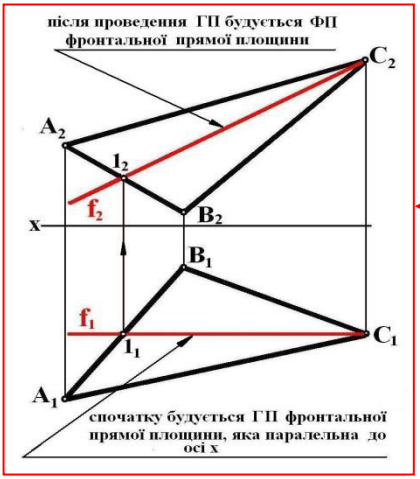
3.4.2. Фронталі площини – прямі, які належать площині і паралельні до фронтальної площини проекцій



Наочне зображення фронталей $f^{1\Delta}$ і $f^{2\Delta}$, що належать площині Δ, заданої слідами.



Епюр фронталей $f^{1\Delta}$ і $f^{2\Delta}$, що належать площині Δ, заданої слідами.



Проведення через точку С фронталі площини f, що задана трикутником АВС (ГП – горизонтальна проекція, ФП – фронтальна проекція).

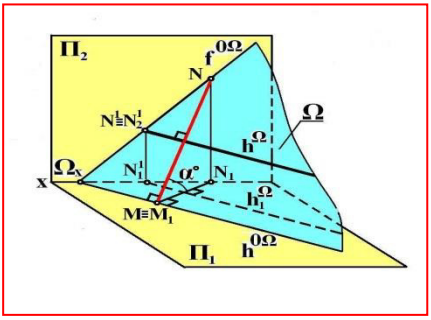
Національний університет
водного господарства
та природокористування

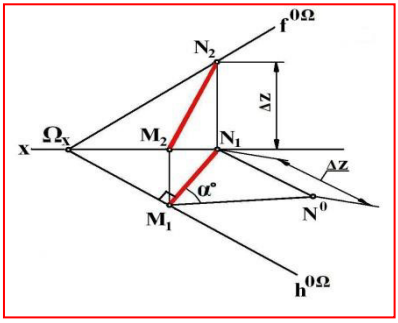
Всі фронталі площини паралельні між собою і до фронтального сліду площини.
Мають спільну точку з горизонтальним слідом і паралельні до фронтального сліду.
При проведенні на епюрі фронталі площини спочатку проводять її горизонтальну проекцію паралельно до осі проекцій x.

3.4.3.Лінія найбільшого уклону (ухилу) площини – пряма площини, яка перпендикулярна до горизонталей площини або до горизонтального сліду площини, при цьому кут α^0 її нахилу до площини проекцій Π_1 визначає кут α^0 нахилу самої площини до тієї ж Π_1.

Побудову ліній найбільшого уклону площини починають з її горизонтальної проекції, яку проводять перпендикулярно (під прямим кутом) до горизонтальних проекцій горизонталей площини або до її горизонтального сліду.

Умова задачі: Визначити кут нахилу α^0 площини Ω, яку задано слідами





Національний університет
водного господарства
та природокористування

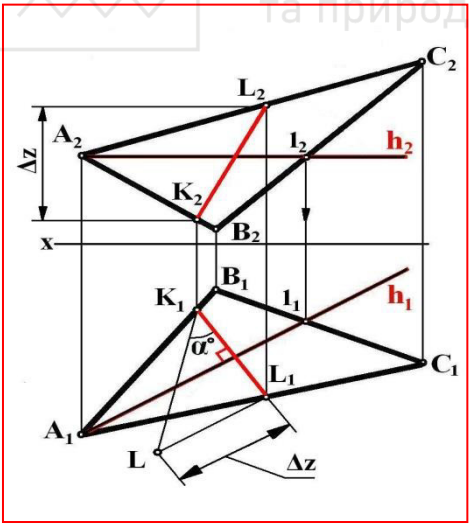
Розв'язування задачі на наочному зображенні

Розв'язування задачі на епюрі

Послідовність побудов:
1. Проведення M_1N_1 перпендикулярно до $h^{0\Omega}$, де M_1N_1 - горизонтальна проекція відрізка MN лінії найбільшого уклону площини Ω.

2. Побудова M_2N_2.
3. Знаходження способом прямокутного трикутника кута нахилу α^0 лінії найбільшого уклону MN площини до $П_1$, який визначає кут нахилу самої площини до $П_1$.

Національний університет
водного господарства
та природокористування



Проведення лінії найбільшого уклону KL в площині, яку задано трикутником ABC, та визначення кута нахилу α^0 площини до $П_1$.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

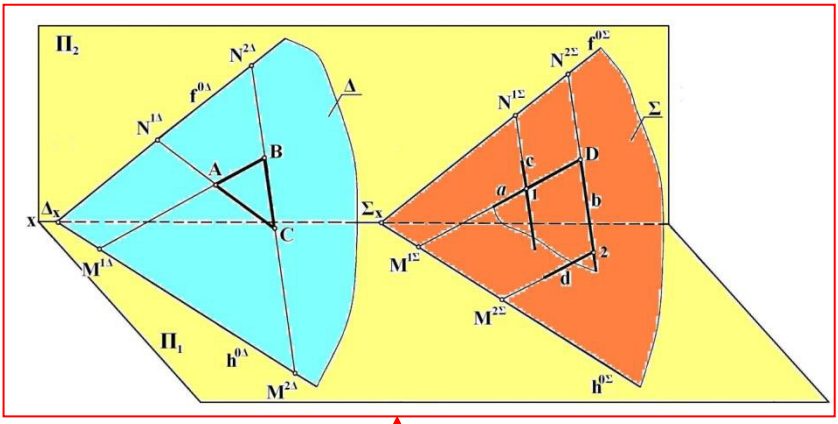
ЛЕКЦІЯ 4. ВЗАЄМНЕ ПОЛОЖЕННЯ ДВОХ ПЛОЩИН, ПРЯМОЇ ТА ПЛОЩИНИ

4.1. Паралельність двох площин, прямої та площини
4.2. Перетин двох площин
4.3. Перетин прямої з площиною
4.4. Перпендикулярність прямої та площини, двох площин

Дві площини між собою в просторі можуть бути:
1) паралельними і 2) перетинатися.

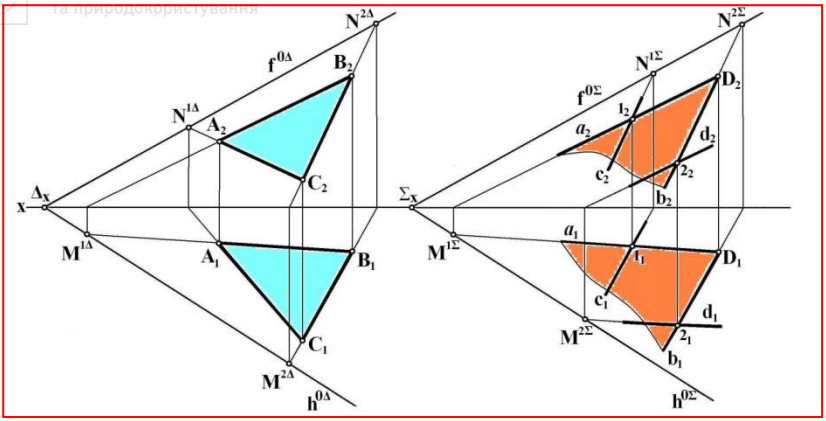
4.1. ПАРАЛЕЛЬНІСТЬ ДВОХ ПЛОЩИН, ПРЯМОЇ ТА ПЛОЩИНИ

Дві площини паралельні, якщо дві прямі, що перетинаються, однією площини відповідно паралельні двом прямим, що перетинаються, іншої площини.



Наочне зображення паралельних площин Δ і Σ

Національний університет
водного господарства
та природокористування



Епюр паралельних площин Δ і Σ

Наочне зображення та епюр паралельних площин Δ і Σ, заданих відповідно трикутником АВС і двома прямими *a* і b, що перетинаються (АВ//*a* і ВС//b). У паралельних площин сліди паралельні: $h^{0\Delta}$// $h^{0\Sigma}$ і $f^{0\Delta}$// $f^{0\Sigma}$. Для площини Δ горизонтальний слід $h^{0\Delta}$побудовано за точками $M^{1\Delta}$ і $M^{2\Delta}$ ($M^{1\Delta}$ = АВ∩Π_1, $M^{2\Delta}$ = ВС∩Π_1), фронтальний слід $f^{0\Delta}$ побудовано за точками $N^{1\Delta}$ і $N^{2\Delta}$($N^{1\Delta}$ = АС∩Π_2, $N^{2\Delta}$ = ВС∩Π_2). Для площини Σ горизонтальний слід $h^{0\Sigma}$побудовано за точками $M^{1\Sigma}$ і $M^{2\Sigma}$ ($M^{1\Sigma}$ = *a*∩Π_1, $M^{2\Sigma}$ = d∩Π_1, де d//*a*), фронтальний слід $f^{0\Sigma}$ побудовано за точками $N^{1\Sigma}$ і $N^{2\Sigma}$($N^{1\Sigma}$ = c∩Π_2, $N^{2\Sigma}$ = b∩Π_2, де c//b).

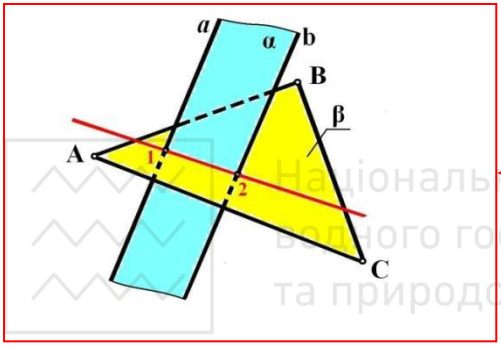
Примітка: якщо побудовано один із слідів площини, то інший слід можна провести через точку сходу та один слід прямої цієї площини.

Пряма паралельна до площини, якщо в цій площині існує пряма, яка паралельна до заданої прямої (пряма паралельна до площини, якщо вона паралельна до будь-якої прямої цієї площини)

Національний університет
водного господарства
та природокористування

4.2. ПЕРЕТИН ДВОХ ПЛОЩИН

Дві площини перетинаються по прямій лінії, для побудови якої потрібно визначити: 1) дві спільні точки, що належать водночас обом площинам, або 2) одну спільну точку при відомому напрямку прямої лінії перетину:



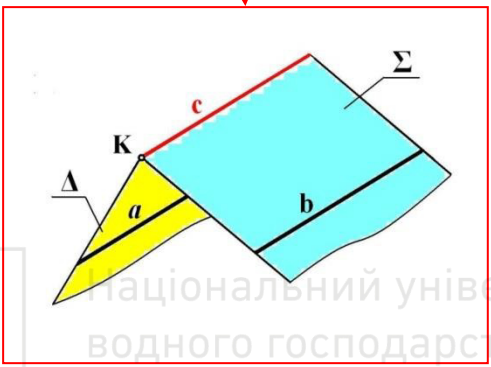
1 спосіб. Побудова лінії перетину двох площин за двома спільними точками

Площину α задано двома паралельними прямими *a* і b, площина β – трикутником АВС. Точки 1 і 2 є спільними точками площин α і β. Лінія перетину 12 площин α і β проходить через точки 1 і 2 (точки 1 і 2 для даного прикладу визначено як точки перетину прямих *a* і b площини α з площиною β).

2 спосіб. Побудова лінії перетину двох площин за однією спільною точкою і відомим напрямом лінії перетину

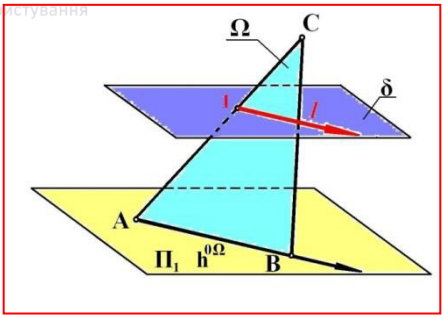
Національний університет
водного господарства
та природокористування

1 варіант. Точка К – спільна точка площин Δ і Σ, що перетинаються. Якщо прямі *a* і b, що належать відповідно площинам Δ і Σ, паралельні, то лінія перетину с цих площин буде паралельною до прямих *a* і b.



2 варіант. Точка 1 – спільна точка площин Ω і δ, що перетинаються. Оскільки площина δ паралельна до площини проекцій $П_1$, то лінія перетину *l* площин Ω і δ є прямою, що паралельна до $П_1$. Якщо в площині Ω відомі горизонтальна пряма або її горизонтальний слід, то лінія перетину *l* буде проходити через точку 1 паралельно до цих прямих площини Ω (для даного прикладу пряма *l* паралельна до горизонтального сліду $h^{0\Omega}$ площини Ω).

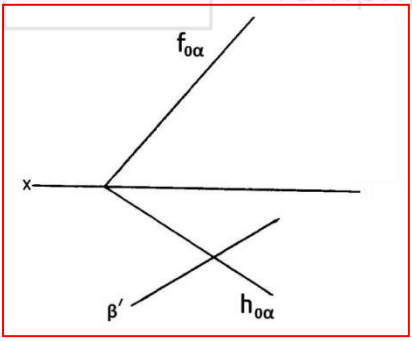
Національний університет
водного господарства
та природокористування



4.2.1. Перетин площини загального положення з проекціюючою площиною та площиною рівня

Одна проекція лінії перетину проекціюючої площини чи площини рівня з площиною загального положення збігається із слідом-проекцією цих площин.

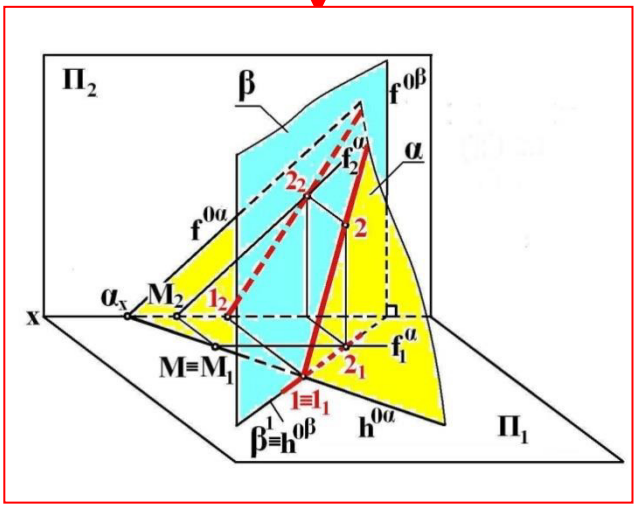
Задача № 1



Національний університет водного господарства та природокористування

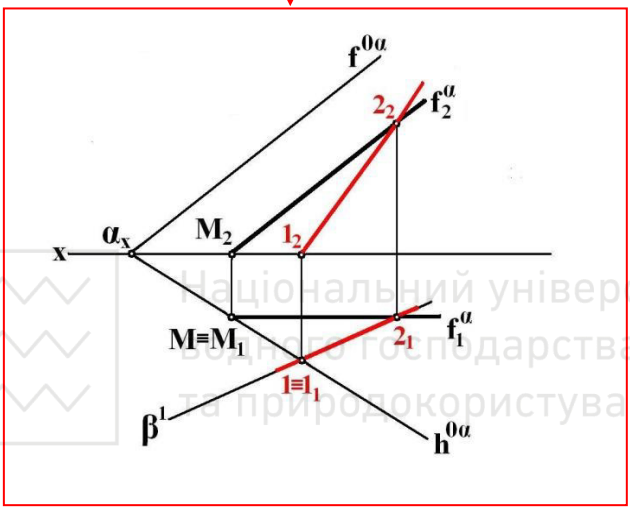
Початкова умова задачі.
Побудувати лінію перетину 12 площини загального положення $\alpha(h^{0\alpha} \cap f^{0\alpha})$ з горизонтально-проекціюючою площиною β.

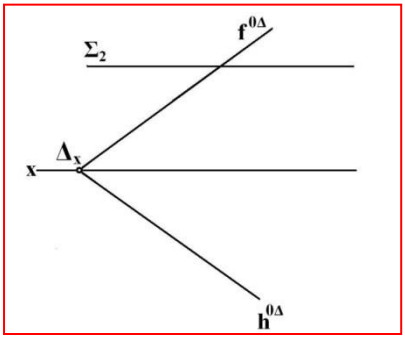
Розв'язування задачі на наочному зображенні.
Одну спільну точку – точку 1 – визначено як точку перетину горизонтальних слідів площин α і β. Другу спільну точку – точку 2 – визначено, виходячи з того, що горизонтальна проекція лінії перетину площин збігається зі слідом-проекцією β_1 площини β. На β_1 в довільному місці відмічаємо горизонтальну проекцію 2_1 точки 2. Це означає, що точка 2 належить площині β. Належність точки 2 площині α визначено за допомогою фронтальної прямої f^{α} площини α.



Національний університет
водного господарства
та природокористування

Розв’язування задачі на епюрі.

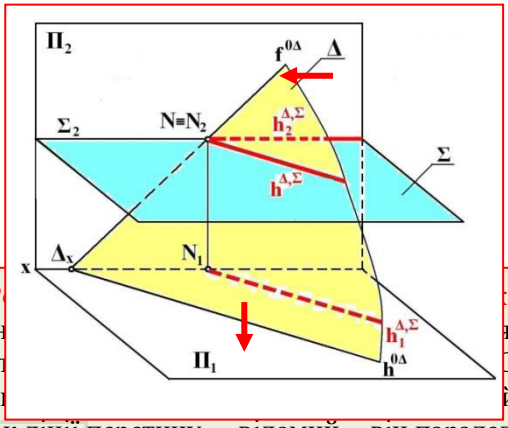




Задача № 2

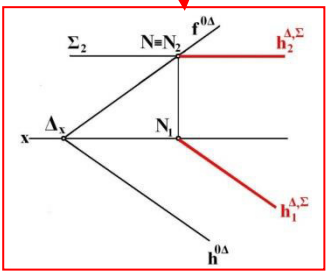
Початкова умова задачі.
Побудувати лінію перетину площини загального положення $\Delta(h^{0\Delta} \cap f^{0\Delta})$ з горизонтальної площиною рівня Σ.

Національний університет
водного господарства
та природокористування



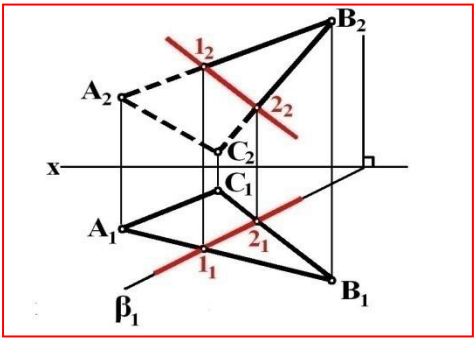
Р…тенні.
Одн…як точку
перет… Оскільки
пло… й $П_1$, то
напрямок лінії перетину … відомий – він паралельний до $П_1$.
Тому, провівши через точку N горизонтальну пряму площини Δ, отримаємо лінію перетину $h^{Δ,Σ}$ площин Δ і Σ (індекс «Δ,Σ» означає, що пряма $h^{Δ,Σ}$ належить і площині Δ, і площині Σ).

Розв'язування задачі на епюрі.



Національний університет
водного господарства
та природокористування

Задача № 3



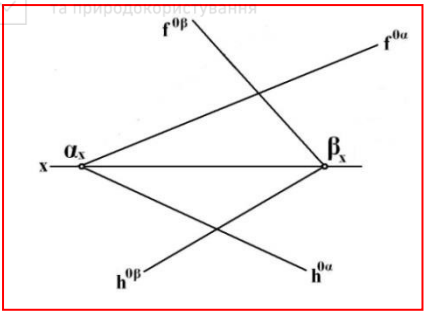
Побудовано лінію перетину 12 площини загального положення α, яку задано трикутником ABC, з горизонтально-проекціюючою площиною β.

Горизонтальна проекція лінії перетину збігається зі слідом-проекцією β_1 площини β. На β_1 фіксуємо точки 1_1 і 2_1. Це буде означати, що точки 1 і 2 належать площині β. Проте точки 1 і 2 повинні належити і площині α. Тому точки 1_1 і 2_1 фіксуємо не на довільному місці β_1, а в точках перетину β_1 з горизонтальними проекціями A_1B_1 і B_1C_1 сторін трикутника. Фронтальні проекції 1_2 і 2_2 визначено на A_2B_2 і B_2C_2 за допомогою ліній проекційного зв'язку. Це означає, що точки 1 і 2 будуть належити і площині α.

4.2.2. Перетин площин загального положення

Розглянемо приклад перетину площин, заданих визначниками, які містять по дві прямі, що лежать в одній площині

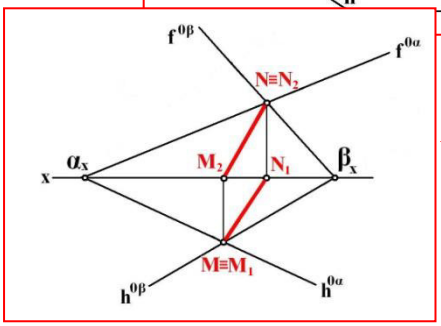
Національний університет
водного господарства
та природокористування



Початкова умова задачі. Побудувати лінію перетину двох площин загального положення α і β, заданих слідами, які перетинаються в межах креслення.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Розв'язування задачі на наочному зображенні.
Спільну точку M двох площин знайдено в перетині їх горизонтальних слідів $h^{0\alpha}$ і $h^{0\beta}$. Ці сліди лежать в одній площині – площині Π_1. Другу спільну точку N знайдено в перетині фронтальних слідів $f^{0\alpha}$ і $f^{0\beta}$, які лежать в одній площині – площині Π_2.



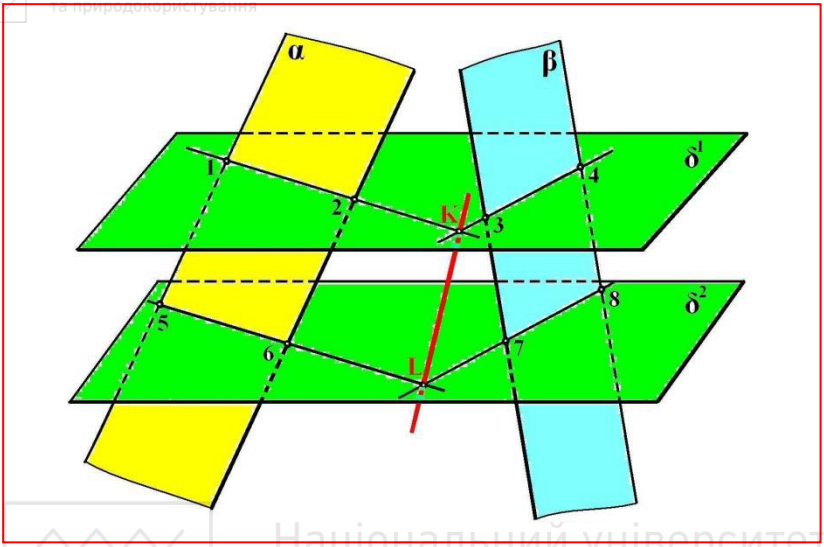
Розв'язування задачі на епюрі.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Якщо задані визначники двох площин, що перетинаються, не містять прямих, які лежать в одній площині, то дві спільні точки визначають за допомогою введення двох нових січних площин-посередників, які перетинають задані площини по прямих лініях, що лежать в цих січних площинах-посередниках. Кожна з січних площин-посередників призначена для визначення спільної точки двох площин, що перетинаються.

Приклад застосування двох січних площин-посередників для побудови лінії перетину двох площин. Цей спосіб, який називають загальним, доцільно застосовувати, коли в межах креслення визначники заданих площин не накладаються один на одний (знаходяться в різних областях креслення).

Національний університет
водного господарства
та природокористування



Послідовність (алгоритм) побудови лінії перетину KL площин α і β:

1. Для визначення першої спільної точки K проводимо допоміжну січну площину δ^1, яка перетинає задані площини α і β.

2. Будуємо лінії перетину 12 і 34 площини δ^1 відповідно з площинами α і β.

3. Оскільки прямі 12 і 34, що належать площинам α і β, лежать в площині δ^1, то точка K їх перетину належить водночас площинам α і β.

4. Для визначення другої спільної точки L проводимо допоміжну січну площину δ^2, яка перетинає задані площини α і β.

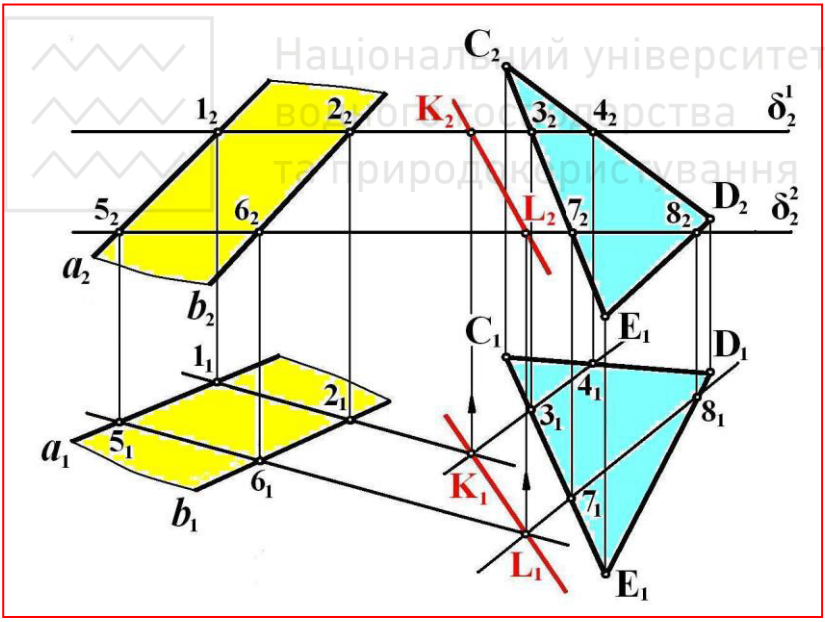
5. Будуємо лінії перетину 56 і 78 площини δ^2 відповідно з площинами α і β.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

7. Через точки K і L проводимо пряму KL, яка і буде лінією перетину заданих площин α і β.

Примітка: 1. Якщо січні площини δ^1 і δ^2 задати паралельними, то для побудови ліній перетину 56 і 78 достатньо визначити по одній точці, наприклад 5 і 8, а самі лінії 56 і 78 провести паралельно відповідно до побудованих ліній 12 і 34 (паралельні площини δ^1 і δ^2 перетинають задані площини α і β по паралельних лініях: 12 // 56, 34 // 78).

2. Якщо січні площини δ^1 і δ^2 будуть площинами рівня, то лінії 12, 34, 56, 78 будуть прямими рівня.

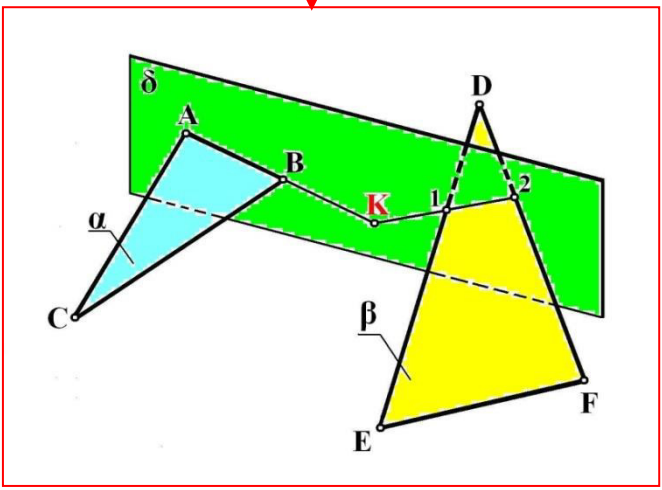


Приклад розв'язування на епюрі задачі на визначення лінії перетину KL площин загального положення α і β, де площину α задано паралельними прямими *a* і *b*, а

площину β – трикутником CDE.
Послідовність дій аналогічна, розглянутим на наочному зображенні (для спрощення виконання побудов січні площини δ^1 і δ^2 є горизонтальними площинами рівня, які перетинають задані площини по горизонтальних прямих 12, 34, 56, 78).

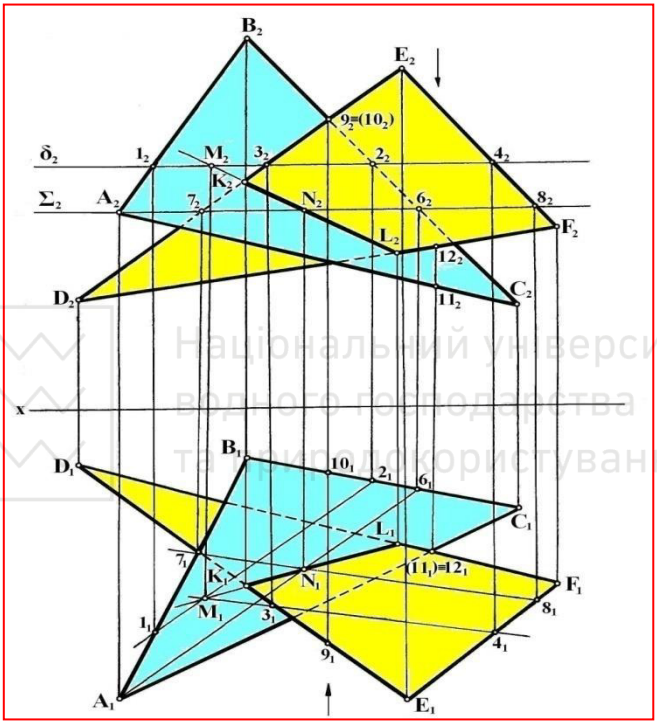
В багатьох випадках простіше побудувати лінію перетину двох площин загального положення, визначники яких не містять прямих, що лежать в одній площині, можна, якщо провести дві допоміжні січні через:
- дві прямі, які належать одній з площин, що перетинаються, або
- одну пряму в кожній із площин, що перетинаються.

На наочному зображенні наведено приклад визначення спільної точки К площини α, заданої трикутником ABC, та площини β, заданої трикутником DEF, шляхом проведення січної площини δ через пряму AB площини α. Площина δ перетинає площини α і β по прямимх AB і 12, які лежать в площині δ. Спільну точку К визначено як точку перетину прямих AB і 12.



Нижче наведено три приклади побудови лінії перетину площин, заданих трикутниками ABC (площина α) і DEF (площина β), трьома різними способами:

1 спосіб



1спосіб. Загальний.

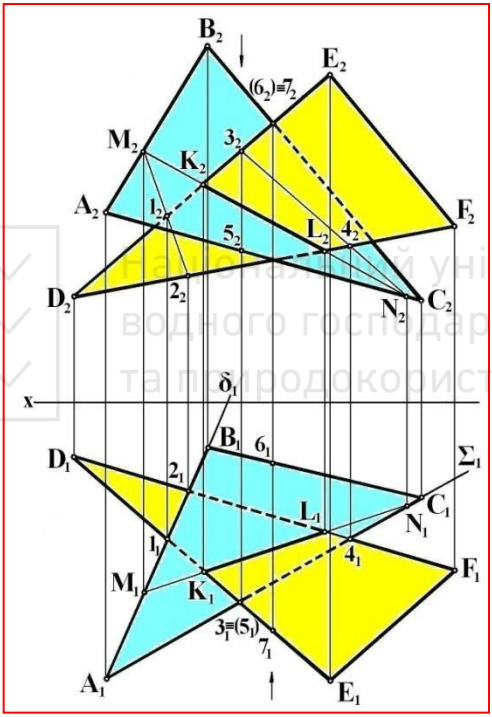
Уведенням першої січної горизонтальної площини рівня δ знаходимо першу спільну точку M (M = 12∩34) двох площин α і β. Уведенням другої січної горизонтальної площини рівня Σ знаходимо другу спільну точку N (N = 56∩78) двох площин α і β. На лінії перетину MN визначено відрізок KL, по якому трикутники врізаються один в одний.

На фронтальній проекції видимість трикутників визначено

Національний університет
водного господарства
та природокористування

за допомогою конкуруючих точок 9 і 10. На горизонтальній проекції видимість трикутників визначено за допомогою конкуруючих точок 11 і 12.

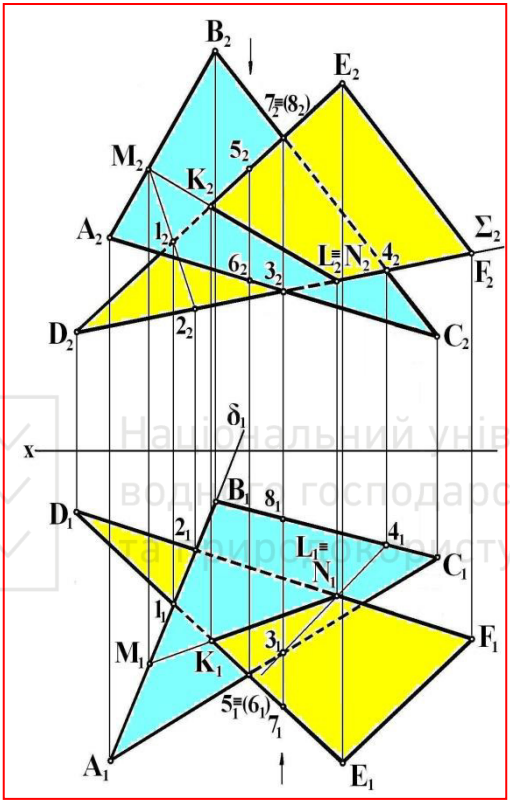
2 спосіб



2 спосіб. Проведення двох січних площин через дві прямі, які належать одній з площин, що перетинаються. Через прямі (сторони трикутника) АВ і АС площини α проведено січні горизонтально-проекціюючі площини δ і Σ. За допомогою площини δ визначено одну спільну точку М (М = АВ∩12), а за допомогою площини Σ – другу спільну точку N (N = АС∩34).

Національний університет
водного господарства
та природокористування

3 спосіб



3 спосіб. Проведення двох січних площин через одну пряму в кожній із площин, що перетинаються.
Через пряму AB площини α проведено січну горизонтально-проекціюючу площину δ, за допомогою якої визначено спільну точку M (M = AB∩12). Через пряму DF площини β проведено другу січну фронтально-проекціюючу площину Σ, за допомогою якої визначено другу спільну точку N (N = DF∩34).

Національний університет
водного господарства
та природокористування

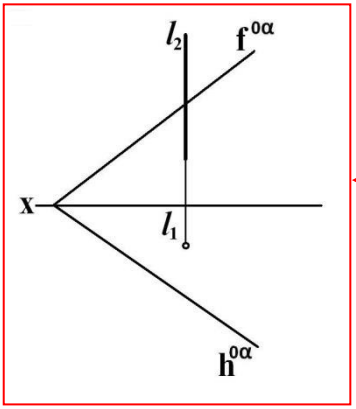
Порівняльний аналіз виконаних побудов:
За наведеним розміщенням на епюрі трикутників, які накладаються один на одний, для визначення лінії перетину площин більш раціональним і точним є 2 і 3 способи, оскільки кількість графічних побудов за цими способами значно менша, ніж за 1 способом.

4.3. ПЕРЕТИН ПРЯМОЇ З ПЛОЩИНОЮ

4.3.1. Перетин проекціюючої прямої з площиною загального положення

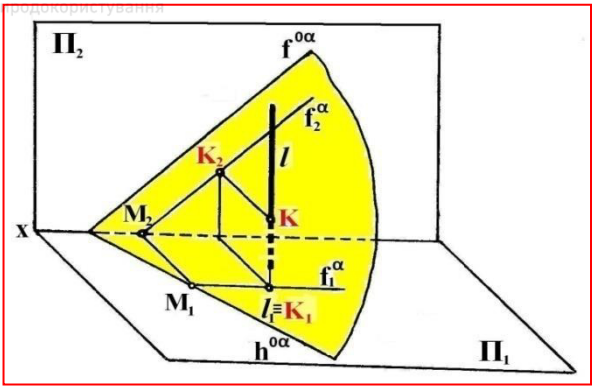
При такому перетині одна з проекцій точки перетину збігається з проекцією прямої на площину проекцій, до якої проекціююча пряма перпендикулярна (ця проекція проекціюючої прямої є точкою).

Задача № 1

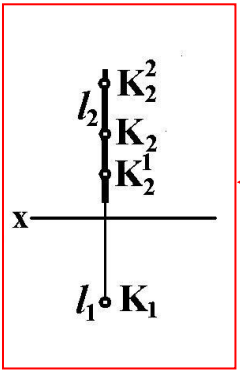


Початкова умова задачі. Побудувати точку К перетину горизонтально-проекціюючої прямої *l* з площиною загального положення α.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

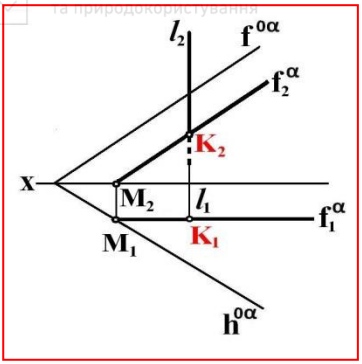


Розв’язування задачі на наочному зображенні:
Оскільки пряма l перпендикулярна до площини $П_1$, то будь-яка точка, що лежить на цій прямій, в тому числі і точка К, проекціюється на $П_1$ в l_1 (див. пояснення), тобто, якщо $К_1 \equiv l_1$, то точка К належить прямій l. Точка К повинна належити і площині α. Оскільки відома $К_1$, то фронтальну проекцію $К_2$ точки К можна знайти за допомогою фронтальної прямої f^{α} площини α. Отже, $К = l \cap \alpha$, оскільки $К \in l$ і $К \in \alpha$.



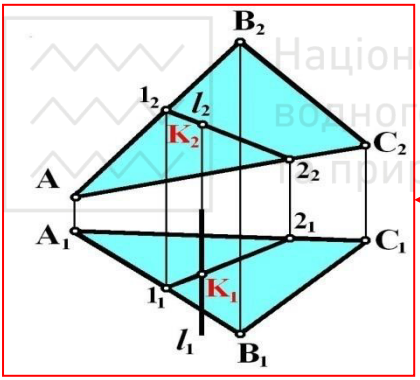
Пояснення до роз’язку.
Незалежно від розміщення на прямій l точок, наприклад К, $К^1$, $К^2$, їх горизонтальні проекції збігаються з l_1 ($К_1 \equiv l_1$).

Національний університет
водного господарства
та природокористування



Розв'язування задачі на епюрі.

Задача № 2



В цій задачі побудовано точку К перетину фронтально-проекціюючої прямої *l* з площиною загального положення, яку задано трикутником АВС:
1. $K_2 \equiv l_2$.
2. K_1 знайдено за допомогою прямої 12 трикутника АВС.

Одна проекція точки перетину проекціюючої прямої з площиною загального положення визначається за умови належності точки прямій, а друга проекція цієї точки – за умови її належності площині.

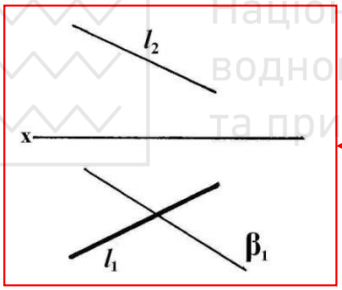
Національний університет
водного господарства
та природокористування

4.3.2. Перетин прямої загального положення з проекціюючою площиною та площиною рівня

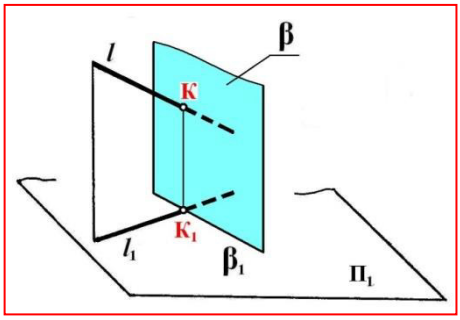
Одна з проекцій точки перетину знаходиться на сліді-проекції цих площин, конкретно в тому місці сліду-проекції, де він перетинається з відповідною проекцією прямої, оскільки точка перетину – це точка, яка водночас належить і площині, і прямій.

Другу проекцію точки перетину визначають за допомогою лінії проекційного зв'язку за умови, що ця точка належить прямій.

Задача № 1

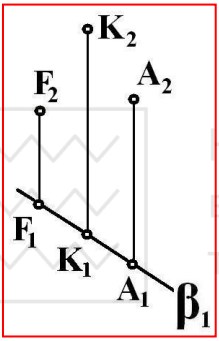


Початкова умова задачі. Побудувати точку К перетину прямої загального положення прямої l з горизонтально-проекціюючою площиною β.



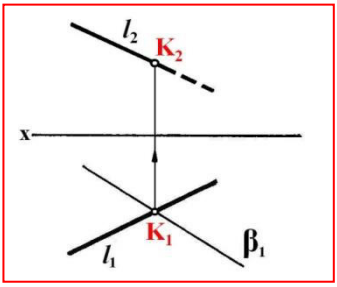
Національний університет
водного господарства
та природокористування

Розв'язування задачі на наочному зображенні:
Горизонтальну проекцію K_1 точки К перетину прямої l з площиною β знаходимо в точці перетину l_1 з β_1 ($K_1 = l_1 \cap \beta_1$). Якщо $K_1 \equiv \beta_1$, то точка К належить площині β незалежно від того, де знаходиться фронтальна проекція цієї точки (див. пояснення).
Фронтальну проекцію K_2 точки К знаходимо за умови, що вона належить прямій l.



Пояснення до роз'язку.
Точки К, А і F належать горизонтально-проекціюючій площині β, оскільки їх горизонтальні проекції K_1, A_1 і F_1 лежать на сліді-проекції β_1.

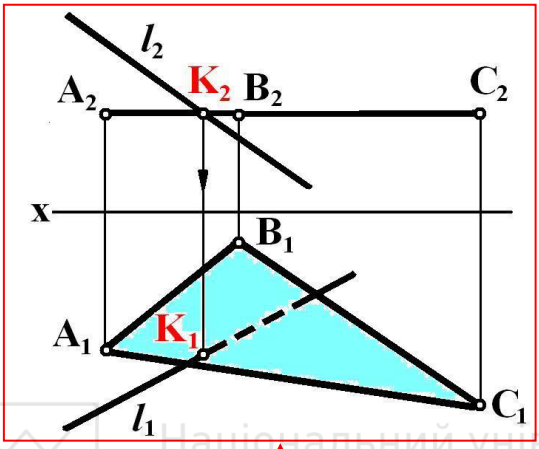
Національний університет
водного господарства
та природокористування



Розв'язування задачі на епюрі:
1. $K_1 = l_1 \cap \beta_1$.
2. K_2 визначаємо за допомогою лінії проекційного зв'язку за умови, що точка

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Задача № 2



В цій задачі побудовано точку К перетину прямої загального положення *l* з горизонтальною площиною рівня, яку задано трикутником АВС:

1. $К_2 = l_2 \cap A_2B_2C_2$, де $A_2B_2C_2$ – слід-проекція площини рівня ($A_2B_2C_2$ // x). Якщо $К_2 \equiv A_2B_2C_2$, то точка К належить заданій площині.

2. $К_1$ знайдено за допомогою лінії проекційного зв'язку за умови, що точка К належить прямій *l*.

Одна проекція точки перетину прямої загального положення з проекціюючою площиною та площиною рівня знаходиться на сліді-проекції цих площин, тобто за умови належності точки перетину площині. Другу проекцію точки перетину визначається за умови її належності прямій.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

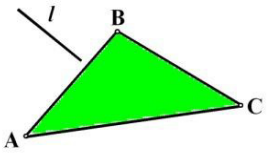
4.3.3. Перетин прямої загального положення з площиною загального положення

В 4.2.1, 4.2.2 розглянуто приклади перетину прямої з площиною, коли одна з них є проекціюючою. В цих прикладах одну проекцію точки перетину визначено без додаткових графічних побудов і уведення нових геометричних фігур.

При перетині прямої з площиною, коли обидві геометричні фігури займають загальне положення, визначити одну з проекцій точки перетину без додаткових графічних побудов не є можливим. В цьому випадку для визначення точки перетину вводять допоміжну січну площину, яку проводять

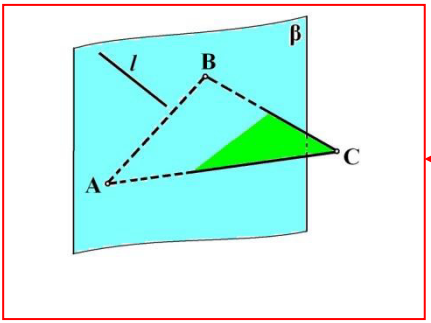
Національний університет
водного господарства
та природокористування

ПОСЛІДОВНІСТЬ (АЛГОРИТМ) ВИЗНАЧЕННЯ ТОЧКИ ПЕРЕТИНУ ПРЯМОЇ ЗАГАЛЬНОГО ПОЛОЖЕННЯ З ПЛОЩИНОЮ ЗАГАЛЬНОГО ПОЛОЖЕННЯ (на наочному зображенні):

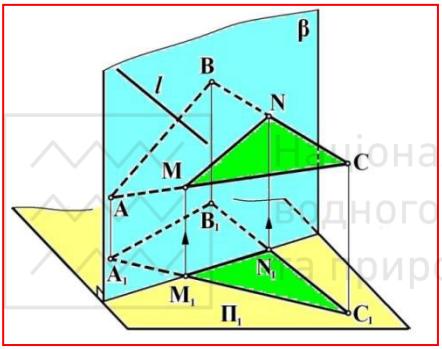


Початкова умова задачі. Побудувати точку К перетину прямої загального положення *l* з площиною загального положення, яку задано трикутником АВС.

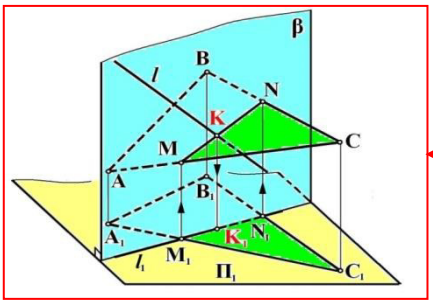
Національний університет
водного господарства
та природокористування



1 дія:
Через пряму *l* проводимо допоміжну січну площину β.



2 дія:
Будуємо лінію перетину MN допоміжної площини β із площиною, заданою трикутником ABC.

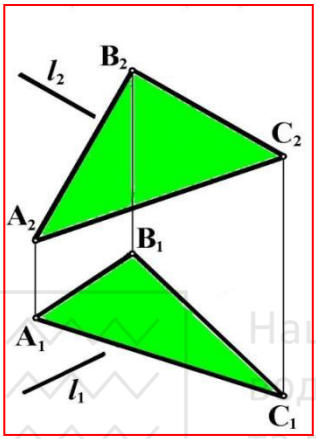


3 дія:
Знаходимо точку К перетину заданої прямої *l* з побудованою лінією перетину MN, яка і буде шуканою точкою

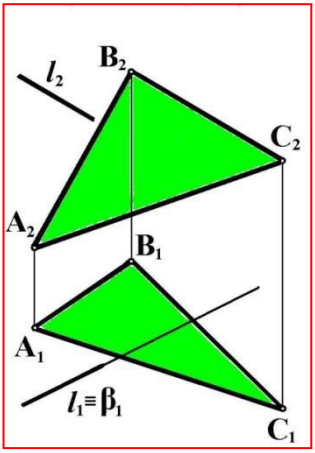
перетину прямої загального положення *l* із площиною загального положення, заданою трикутником ABC (К = *l*∩MN = *l* ∩ трикутник ABC).
Примітка. Пряма l і лінія MN лежать в одній площині β, тому вони перетинаються в точці ***K.***

Національний університет
водного господарства
та природокористування

ПОСЛІДОВНІСТЬ (АЛГОРИТМ) ВИЗНАЧЕННЯ ТОЧКИ ПЕРЕТИНУ ПРЯМОЇ ЗАГАЛЬНОГО ПОЛОЖЕННЯ З ПЛОЩИНОЮ ЗАГАЛЬНОГО ПОЛОЖЕННЯ (на епюрі):



Початкова умова задачі. Побудувати точку К перетину прямої загального положення *l* з площиною загального положення, яку задано трикутником АВС.

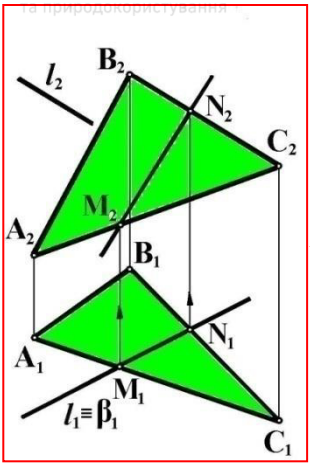


1 дія:

Через пряму *l* проводимо допоміжну січну площину β: $l_1 \equiv \beta_1 \Rightarrow l \in \beta$.

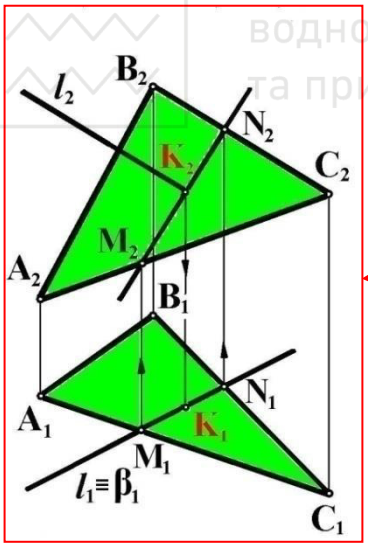
Січна площина β є горизонтально-проекціюючою. Вибір її обумовлено тим, що лінія її перетину із заданою площиною будується простіше, ніж при проведенні через пряму l площини загального положення. Тому під час розв'язування таких задач через пряму проводять, як правило, не площину загального положення, а проекціюючу.

Національний університет
водного господарства
та природокористування



2 дія:
Будуємо лінію перетину MN допоміжної горизонтально-проекціюючої площини β із заданою трикутником ABC:
$M_1N_1 \equiv \beta_1$, а M_2N_2 знайдено за допомогою ліній проекційного зв'язку за умови, що MN належить площині трикутника ABC.

Національний університет
водного господарства
та природокористування



3 дія:
Знаходимо точку К перетину заданої прямої *l* з побудованою лінією перетину MN, яка і буде шуканою точкою перетину прямої загального положення *l* із площиною загального положення, заданою трикутником ABC (К = *l* ∩ MN = *l* ∩ трикутник ABC).

Примітка. Пряма l і лінія MN лежать в одній площині β, тому вони перетинаються в точці

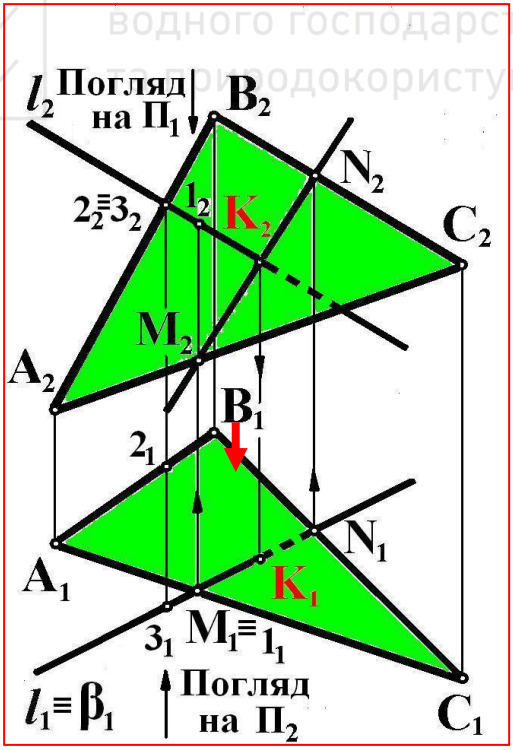
Національний університет
водного господарства
та природокористування

Визначення видимості прямої *l* відносно трикутника АВС:

1. Видимість на горизонтальній проекції визначено за допомогою конкуруючих точок М і 1, горизонтальні проекції яких M_1 і 1_1 збігаються та знаходяться в точці перетину l_1 з A_1C_1 горизонтальної проекції $A_1B_1C_1$ (на стику горизонтальних проекцій прямої та площини трикутника).
М ∈ АС, 1 ∈ *l*, видимою на $П_1$ буде точка 1.

2. Видимість на фронтальній проекції визначено за допомогою конкуруючих точок 2 і 3, фронтальні проекції яких 2_2 і 3_2 збігаються та знаходяться в точці перетину l_2 з A_2B_2 фронтальної проекції $A_2B_2C_2$ (на стику фронтальних проекцій прямої та площини трикутника).
2 ∈ АВ, 3 ∈ *l*, видимою на $П_2$ буде точка 3.

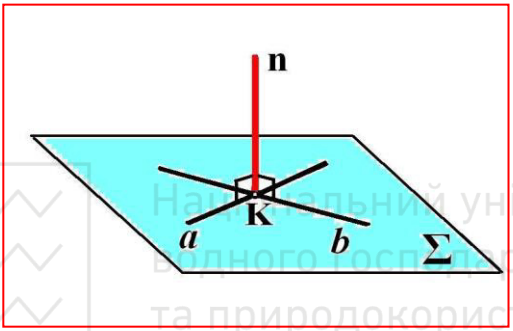
Національний університет
водного господарства
та природокористування



Національний університет
водного господарства
та природокористування

4.4. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІСТЬ ПРЯМОЇ ТА ПЛОЩИНИ, ДВОХ ПЛОЩИН

Ознака перпендикулярності прямої до площини: *пряма перпендикулярна до площини, якщо вона перпендикулярна до двох прямих, що перетинаються, цієї площини.*

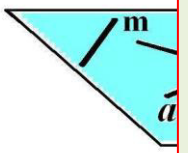


Точка К – точка перетину прямої n з площиною Σ. В цій точці перетинаються прямі *a* і *b* площини Σ.

Пряма n перпендикулярна до площини Σ, оскільки вона перпендикулярна до двох прямих *a* і *b*, що перетинаються,

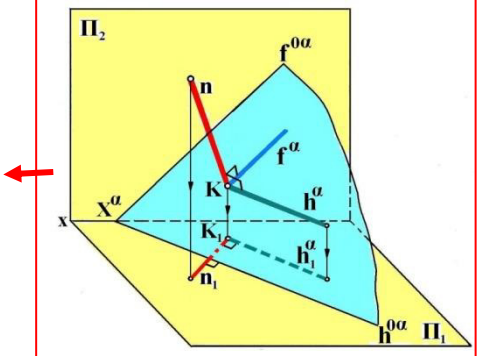
Площину Σ можна розглядати як геометричне місце (множину) прямих, перпендикулярних до прямої n.

Національний університет
водного господарства
та природокористування



Оскільки n ⊥ Σ, то, можна сказати, що задана площина Σ перпендикулярна до прямої n. Це означає, що довільна пряма, наприклад *c*, площини Σ, що проходить через точку К, буде перпендикулярною до прямої n. Пряма m, яка не проходить через точку К, також буде перпендикулярною до прямої n, незважаючи на те, що m і n є мимобіжними прямими, оскільки кут між мимобіжними прямими дорівнює куту між паралельними до них прямими, що перетинаються.

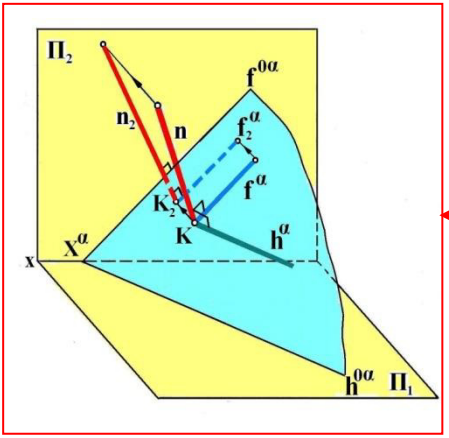
При проведенні на епюрі прямої, перпендикулярної до площини, в останній вибирають не будь-які дві прямі, що перетинаються, а прямі рівня. Це обумовлено тим, що за правилом проекціювання прямого кута (див. 2.7), прямий кут, утворений двома прямими, одна з яких є прямою рівня, проекціюється на площину проекцій, до якої пряма рівня паралельна, також прямим кутом.



Горизонтальна проекція n_1 прямої n перпендикулярна до горизонтальної проекції h_1^{α} горизонталі h^{α} або до горизонтального сліду $h^{0\alpha}$ площини α: $n_1 \perp h_1^{\alpha}, h^{0\alpha}$.

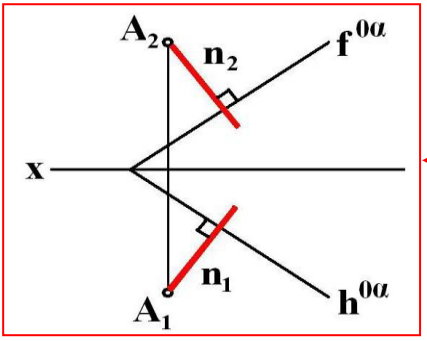
яма n
икулярна до
ни α, яку
лідами $h^{0\alpha}$ і
льки вона
икулярна до
рівня цієї
цини –
нталі h^{α} і
алі f^{α}, які
перетинаються в точці К: $n \perp h^{\alpha}, f^{\alpha}$; $K = h^{\alpha} \cap f^{\alpha} \Rightarrow n \perp \alpha(h^{\alpha} \cap f^{\alpha})$.

Національний університет
водного господарства
та природокористування



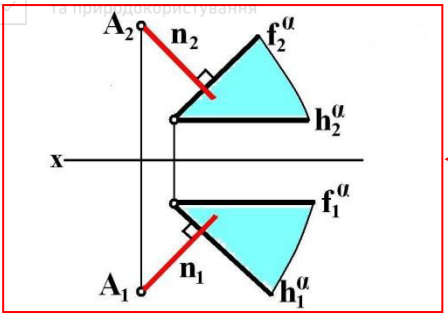
Фронтальна проекція n_2 прямої n перпендикулярна до фронтальної проекції f_2^{α} фронталі f^{α} або до фронтального сліду $f^{0\alpha}$ площини α: $n_2 \perp f_2^{\alpha}, f^{0\alpha}$.

На епюрі проекції прямої, перпендикулярної до площини, проводять: горизонтальну – перпендикулярно до горизонтальної проекції горизонталі площини або до її горизонтального сліду; фронтальну – перпендикулярно до фронтальної проекції фронталі площини або до її фронтального сліду: $n_1 \perp h_1^{\alpha}, h^{0\alpha}$; $n_2 \perp f_2^{\alpha}, f^{0\alpha}$



Пряма n перпендикулярна до площини α, оскільки $n_1 \perp h^{0\alpha}$ і $n_2 \perp f^{0\alpha}$.

Національний університет
водного господарства
та природокористування



Пряма n перпендикулярна до площини α, оскільки $n_1 \perp h_1^{\alpha}$ і $n_2 \perp f_2^{\alpha}$.

Ознака перпендикулярності двох площин: ***дві площини перпендикулярні, якщо одна з них містить пряму, перпендикулярну до іншої площини.*** **Можна сказати і таким чином: дві площини перпендикулярні, якщо одна з них проходить через пряму, перпендикулярну до іншої площини.**

Національний університет
водного господарства
та природокористування

ЛЕКЦІЯ 5. СПОСОБИ ПЕРЕТВОРЕННЯ ПРОЕКЦІЙ

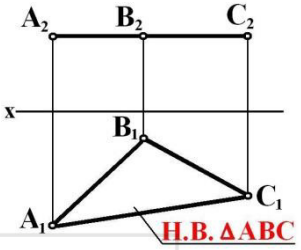
5.1. Мета застосування способів перетворення проекцій
5.2. Спосіб заміни площин проекцій
5.3.Спосіб плоско-паралельного переміщення (спосіб обертання навколо проекціюючої прямої без її нанесення)

5.1. МЕТА ЗАСТОСУВАННЯ СПОСОБІВ ПЕРЕТВОРЕННЯ ПРОЕКЦІЙ

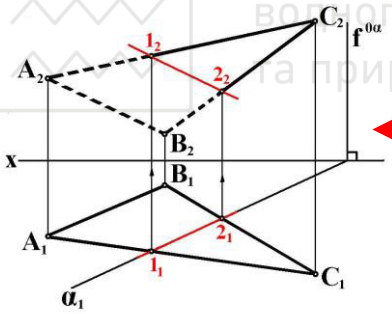
Трудомісткість графічного розв'язування задачі багато в чому залежить від того, яке положення відносно площин проекцій займають геометричні фігури, що входять в початкову умову задачі.
Орієнтуючись на вісь проекцій, можна за розміщенням проекцій геометричних фігур відносно осі проекцій судити про їх положення в просторі.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Приклади епюрів геометричних фігур, коли розміщення їх проекцій відносно осі проекцій або самих фігур відносно площин проекцій, **дозволяє** без графічних побудов або з мінімальною їх кількістю дати відповідь на поставлену задачу:



Н.В. трикутника ABC, площина якого паралельна до $П_1$, визначено без графічних побудов: $A_1B_1C_1$ = Н.В. ΔABC.



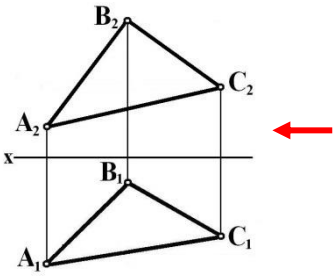
Лінію 12 перетину горизонтально-проекціюючої площини α з площиною загального положення, заданої трикутником ABC, визначено за мінімальною кількістю графічних побудов

Національний університет
водного господарства
та природокористування

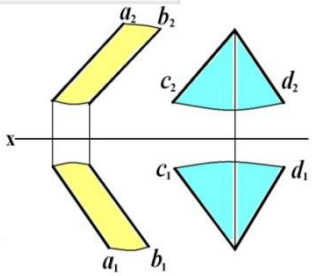
Приклади епюрів геометричних фігур, коли розміщення їх проекцій відносно осі проекцій або самих фігур відносно площин проекцій, **не дозволяє** без значних графічних побудов дати відповідь на поставлену задачу**:**

Визначення безпосередньо за епюром Н.В. трикутника ABC, який займає загальне положення відносно $П_1$ і $П_2$, не

Національний університет
водного господарства
та природокористування



Національний університет
водного господарства
та природокористування



Визначення лінії перетину двох площин загального положення, заданих паралельними прямими *a* і *b* та прямими *c* і *d*, що перетинаються, можливе лише за допомогою додаткових графічних побудов, зокрема за відомим алгоритмом проведення допоміжних січних площин

Наведені в таблицях приклади показують, що проекції геометричних фігур можуть бути зручними та забезпечувати просте розв'язування задачі – це за частковим розміщенням прямих та плоских геометричних фігур відносно площин проекцій, коли фігури перпендикулярні або паралельні до площин проекцій. Проекції геометричних фігур можуть бути незручними, вони потребують для розв'язування тієї ж задачі додаткових, часом громіздких, графічних побудов. Це

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Метою способів перетворення проекцій є перехід від загального положення, незручного для розв'язування задач, за яким геометричні фігури проекціюються у спотвореному вигляді, до часткового положення, зручного, який забезпечує простий розв'язок задачі, коли величина та форма геометричної фігури проекціюються без спотворення. Крім того, при переході від загального до часткового положення полегшується розв'язування задач, пов'язаних з побудовою точок та ліній перетину геометричних фігур. При цьому кінцевий результат перетворень повинен давати відповідь на розв'язування задачі.

Перехід від загального положення геометричної фігури до часткового здійснюється або введенням нових площин проекцій відносно нерухомих геометричних фігур, або обертанням фігур відносно нерухомих площин проекцій.

5.2. СПОСІБ ЗАМІНИ ПЛОЩИН ПРОЕКЦІЙ

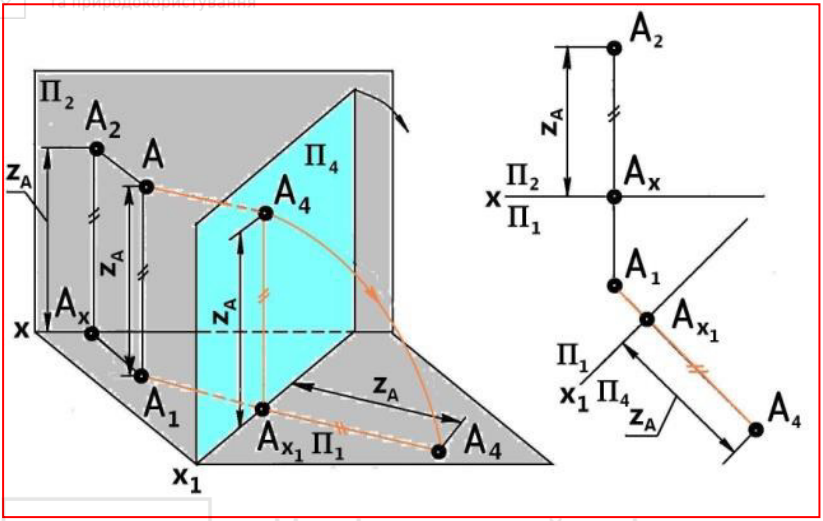
Суть способу заміни площин проекцій полягає у тому, що геометричні фігури не змінюють в просторі свого положення, а система площин проекцій $П_2/П_1$ (стара система) доповнюється новими площинами проекцій $П_4$, $П_5$, що утворюють з $П_2$, $П_1$ або між собою нову систему площин проекцій, відносно якої геометричні фігури займають часткове

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Розглянемо графічну сутність способу на прикладі проекціювання точки.

Національний університет
водного господарства
та природокористування



Уводимо нову площину проекцій $П_4$, розміщуючи її перпендикулярно до $П_1$. $П_4$ з $П_1$ перетинаються по новій осі проекцій x_1, яку можна розглядати як слід-проекцію $П_4$ на $П_1$. Утворилася нова система площин проекцій $x_1П_4/П_1$, в якій збереглася проекція A_1 на $П_1$ (задана проекція) та побудована проекція A_4 на $П_4$ (нова проекція).

Відстань точки А до $П_1$ дорівнює відстані A_2 до осі х, а також дорівнює відстані A_4 до нової осі x_1. Зазначені відстані дорівнюють z_A. Це дозволяє, маючи задані проекції A_1 і A_2 в системі $xП_2/П_1$, побудувати нову проекцію A_4 точки А на площині $П_4$.

Основні положення способу:

1. При переході до нової системи одна з площин проекцій старої системи зберігається як одна з площин проекцій нової системи, а другу площину проекцій старої системи замінюють на нову площину проекцій, яку розміщують перпендикулярно до тієї старої площини проекцій, яку зберігають.

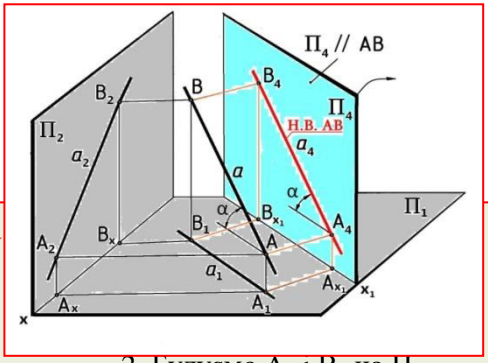
2. Проекції точки в новій системі площин проекцій розміщені, як і в старій, на одній лінії проекційного зв'язку, яка перпендикулярна до нової осі проекцій

озміщуючи її

Національний університет
водного господарства
та природокористування

5.2.1. ВИКОНАННЯ ПЕРЕТВОРЕНЬ ШЛЯХОМ ЗАМІНИ ОДНІЄЇ ПЛОЩИНИ ПРОЕКЦІЙ

5.2.1.1. Перетворення прямої загального положення в пряму рівня



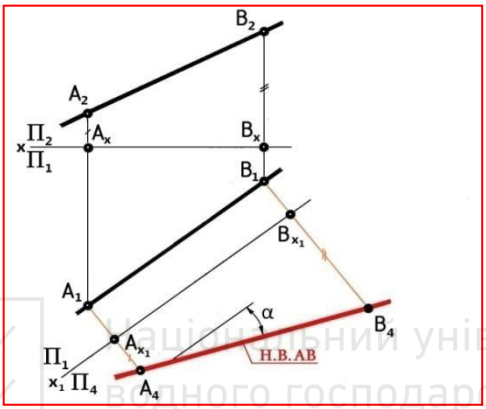
Умова положення

2. Будуємо A_4 і B_4 на $П_4$.

В результаті побудов пряма АВ, яка в системі $xП_2/П_1$ займає загальне положення, перетворилася в системі $x_1П_4/П_1$ на пряму рівня, паралельну $П_4$.

$П_4$ // АВ, оскільки x_1 // A_1B_1; $П_4 \perp П_1$; Кут α^0 – кут нахилу прямої АВ до $П_1$; A_4B_4 = Н.В. АВ.

Національний університет
водного господарства
та природокористування



Національний університет
водного господарства
та природокористування

5.2.1.2. Перетворення прямої рівня в проекціюючу

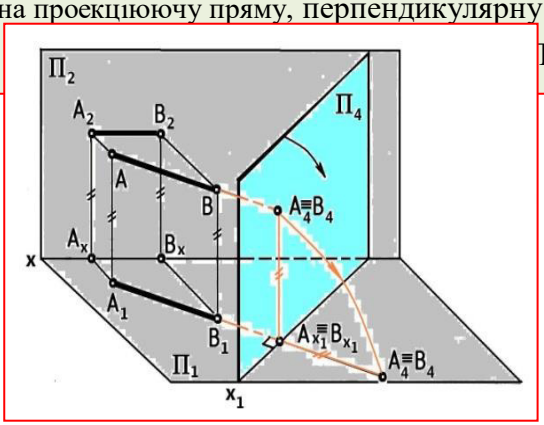
Умова задачі: перетворити горизонтальну пряму АВ в проекціюючу.

Послідовність побудов:

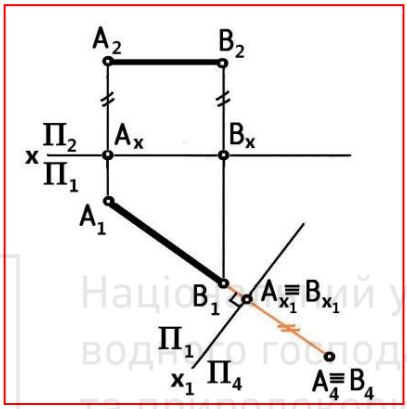
1. Проводимо $x_1 \perp A_1B_1$.
2. Будуємо A_4 і B_4 на $П_4$: $A_4 \equiv B_4$.

В результаті побудов пряма АВ, яка в системі $xП_2/П_1$ є горизонтальною прямою, перетворилася в системі $x_1П_4/П_1$ на проекціюючу пряму, перпендикулярну до $П_4$.

$П_1$.



Національний університет
водного господарства
та природокористування



Національний університет
водного господарства
та природокористування

5.2.1.3. Перетворення площини загального положення в проекціюючу

Умова задачі: перетворити площину загального положення, яку задано трикутником АВС, в проекціюючу.

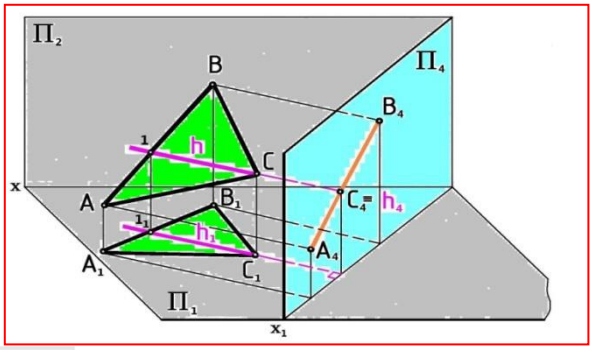
Послідовність побудов:

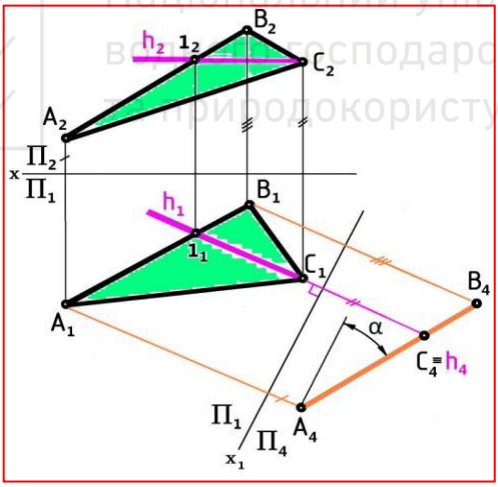
1. В площині трикутника АВС проводимо горизонтальну пряму h.
2. Проводимо вісь $x_1 \perp h_1$.
3. Будуємо проекції вершин трикутника на $П_4$: A_4, B_4, C_4 розміщені на одній прямій, яка є слідом-проекцією площини трикутника на $П_4$.

В результаті побудов площина трикутника АВС, яка в системі $xП_2/П_1$ займає загальне положення, перетворилася на проекціюючу площину в системі $x_1П_4/П_1$, перпендикулярну до $П_4$.

$П_4 \perp \Delta ABC$, оскільки $x_1 \perp h_1$; $П_4 \perp П_1$; кут α – кут нахилу площини трикутника АВС до $П_1$.

Національний університет
водного господарства
та природокористування



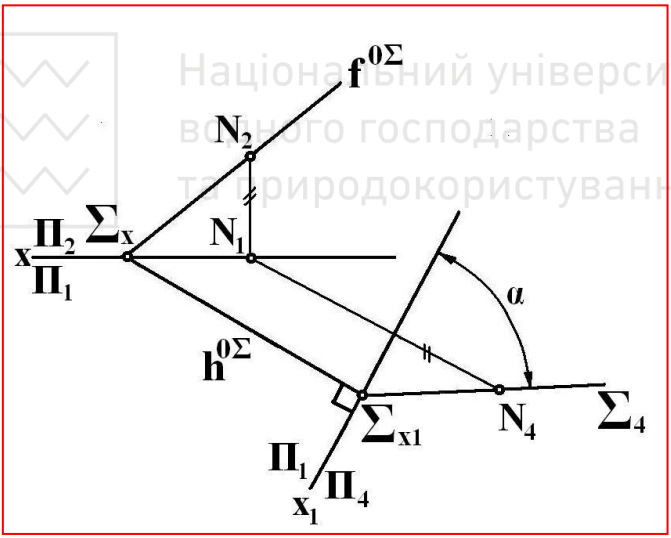


Умова задачі: перетворити площину загального положення, яку задано трикутником АВС, в проекціюючу.

Послідовність побудов:

1. В площині трикутника АВС проводимо горизонтальну пряму h.
2. Проводимо вісь $x_1 \perp h_1$.
3. Будуємо проекції вершин трикутника на $П_4$: A_4, B_4, C_4 розміщені на одній прямій, яка є слідом-проекцією площини трикутника на $П_4$.

Національний університет
водного господарства
та природокористування



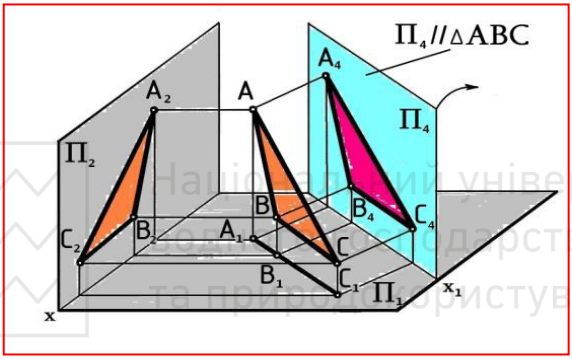
5.2.1.4. Перетворення проекціюючої площини в площину рівня

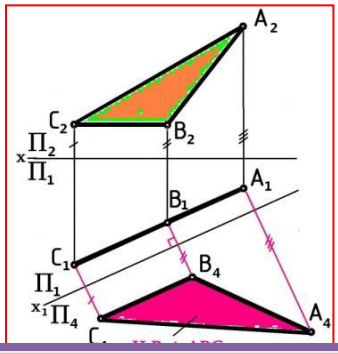
Умова задачі: перетворити проекціюючу площину, яку задано трикутником АВС, на площину рівня.

Послідовність побудов:

1. Проводимо $x_1 // A_1B_1C_1$.
2. Будуємо A_4, B_4, C_4 на $П_4$.

Національний університет
водного господарства
та природокористування



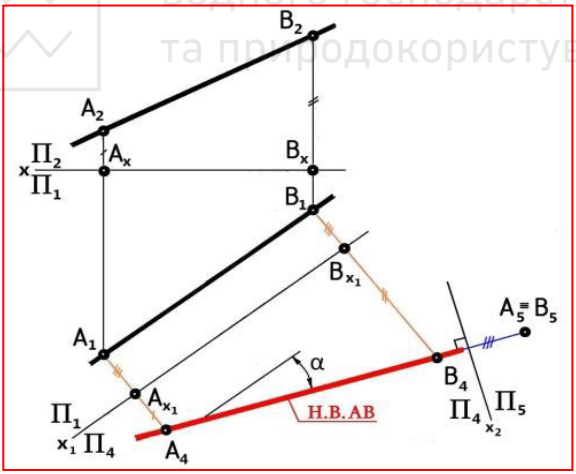


5.2.2. ВИКОНАННЯ ПЕРЕТВОРЕНЬ ШЛЯХОМ ЗАМІНИ ДВОХ ПЛОЩИН ПРОЕКЦІЙ

5.2.2.1. Перетворення прямої загального положення в проекціюючу

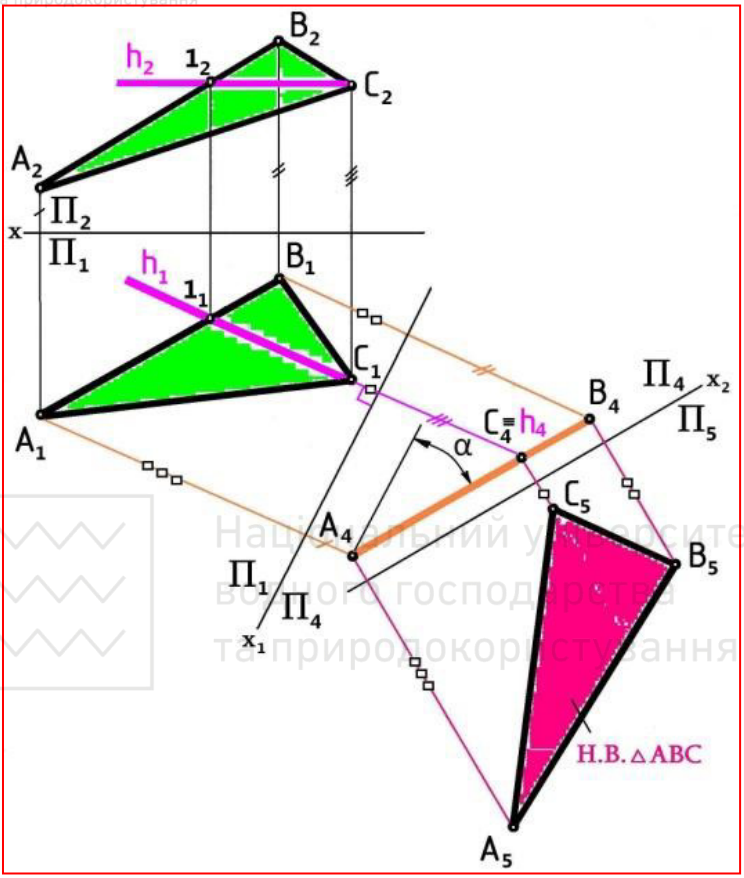
Умова задачі: перетворити пряму загального положення

Національний університет
водного господарства
та природокористування



5.2.2.2. Перетворення площини загального положення в площину рівня

Національний університет
водного господарства
та природокористування



Умова задачі: перетворити площину загального положення, яку задано трикутником ABC, в площину рівня.

Послідовність побудов:

1. В площині трикутника ABC проводимо горизонталь

2. Проводимо $x_1 \perp h_1$, розміщуючи тим самим площину $П_4$ перпендикулярно до площини трикутника ABC.

3. Будуємо проекції вершин трикутника на $П_4$.

В системі $x_1П_4/П_1$ площина трикутника ABC стала проекціюючою, перпендикулярною до $П_4$.

4. Проводимо x_2 // $A_4B_4C_4$, розміщуючи тим самим площину $П_4$ паралельно до площини трикутника ABC.

5. Будуємо проекції вершин трикутника на $П_5$.

В системі $x_2П_5/П_4$ площина трикутника ABC стала площиною рівня, паралельною до $П_5$; $A_5B_5C_5$ = Н.В.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

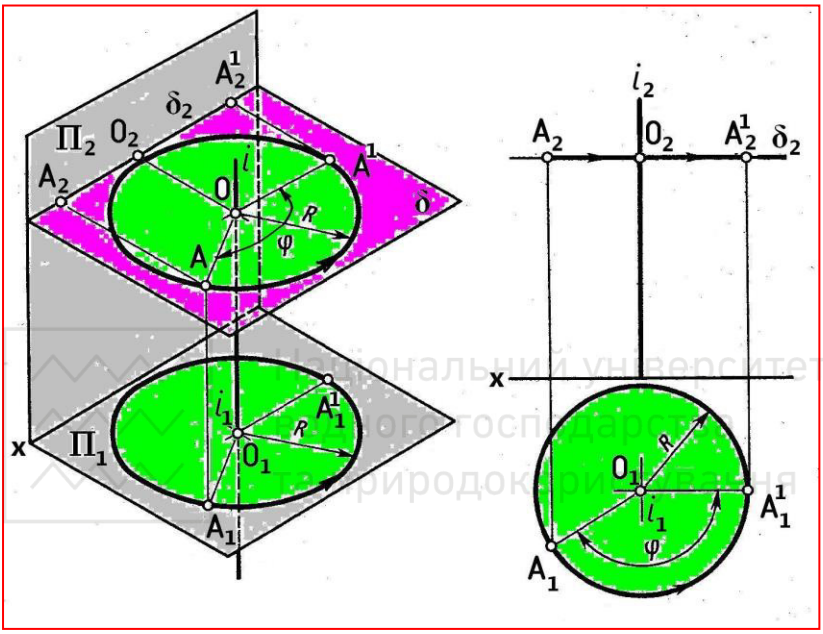
Суть способу полягає у тому, що геометричні фігури (прямі та плоскі фігури) обертанням навколо осі, яка перпендикулярна до однієї з нерухомих площин проекцій $П_1$ або $П_2$, розміщують таким чином, щоб вони відносно нерухомої системи площин проекцій $П_2/П_1$ займали часткове положення, зручне для розв'язування задачі. Саме при такому обертанні точки фігури переміщуються в площинах, паралельних до тієї площини проекцій, до якої перпендикулярна вісь обертання фігури.

Під час обертання геометричної фігури її проекція на площину проекцій, до якої вісь обертання перпендикулярна, не змінює своєї форми і розмірів, при цьому проекції точок фігури на **площину проекцій, до** якої вісь обертання паралельна, переміщуються по прямих, паралельних до осі проекцій x або за її відсутності - по прямих, перпендикулярних до вертикальних ліній проекційного зв'язку.

Незмінність форми і розмірів однієї з проекцій фігури при її обертанні спрощує побудову нових положень цієї проекції фігури шляхом проведення через точку, проекціюється вісь обертання, перпендикуляра до проекції фігури, що обертається.

Розглянемо графічну сутність способу на прикладі обертання точки.

Національний університет
водного господарства
та природокористування



Точка А обертається навколо осі *i*, яка перпендикулярна до Π_1. Траєкторія обертання точки А – коло радіуса R, площина δ якого перпендикулярна до осі *i* та паралельна до Π_1. Площина δ кола обертання точки А проекціюється на Π_2 в пряму δ_2, яка є слідом-проекцією площини δ, причому δ_2 // x. Точка О – центр кола обертання точки А – розміщена на осі *i*.

Точка А з свого початкового положення перемістилася на кут обертання φ^0 в положення A^1. При цьому горизонтальна проекція A_1 перемістилася по колу радіуса R на кут φ^0 в положення $A_1{}^1$, а фронтальна проекція A_2 перемістилася по прямій δ_2, паралельній осі x, в положення $A_2{}^1$.

При обертанні прямої, площини (як і будь-якого іншого

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Національний університет
водного господарства
та природокористування

5.3.1. ОБЕРТАННЯ НАВКОЛО ОДНІЄЇ УЯВНОЇ ОСІ ОБЕРТАННЯ

5.3.1.1. Перетворення прямої загального положення в пряму рівня

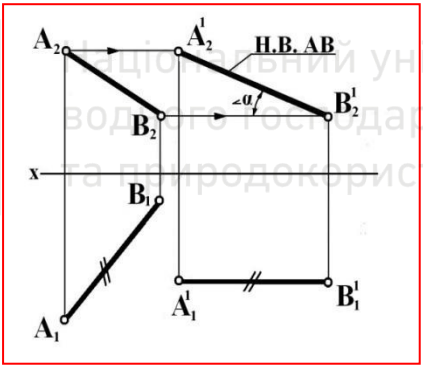
Національний університет
водного господарства
та природокористування

Умова задачі: перетворити пряму загального положення AB у фронтальну пряму рівня.

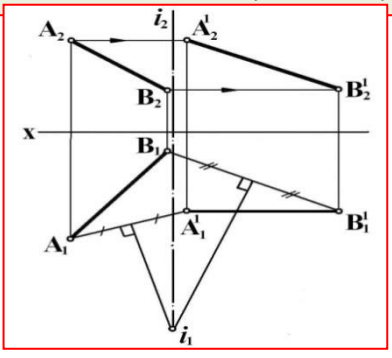
Розв'язування:

Горизонтальна проекція фронтальної прямої паралельна до осі x, тому відрізок A_1B_1 розміщуємо, не змінюючи його розмірів, в положення $A_1^1B_1^1$ // x. При цьому $A_1^1B_1^1$ розміщуємо в будь-якому зручному місці поля креслення. Це означає, що обертання AB відбувається навколо осі, яка перпендикулярна до $П_1$, хоча цю вісь на епюрі не показують.

$A_2^1B_2^1$ = Н.В. AB; $\angle$ α – кут нахилу прямої AB до площини $П_1$.



За потребою можна визначити положення осі *i*, навколо якої повернули пряму AB до положення фронтальної прямої. Горизонтальна проекція осі обертання (точка i_1) є точкою перетину перпендикулярів, що проведені через середини відрізків $A_1A_1^1$ і $B_1B_1^1$. Проте в побудові осі потреби немає, якщо це не обумовлено умовою задачі.



Національний університет
водного господарства
та природокористування

5.3.1.2. Перетворення прямої рівня в проекціюючу пряму

Умова задачі: перетворити фронтальну пряму рівня АВ у проекціюючу.

Пояснення до розв'язування:

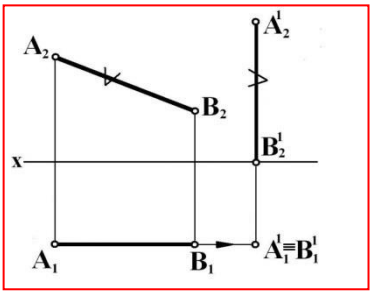
В 8.3.2 показано, що фронтальна пряма перетворюється у горизонтально-проекціюючу при обертанні навколо осі $i \perp \Pi_2$, оскільки до Π_2 паралельна фронтальна пряма. Якщо обертати фронтальну пряму навколо і $\perp \Pi_1$, то вона не перетвориться в проекціюючу. Так, у випадку розміщення горизонтальної проекції фронтальної прямої перпендикулярно до осі х, вона перетвориться у пряму рівня, паралельну до Π_3.

Таким чином, фронтальна пряма при своєму обертанні може перетворитися тільки у горизонтально-проекціюючу.

Розв'язування:

Розміщуємо фронтальну проекцію A_2B_2 відрізка АВ, не змінюючи його розмірів, у положення $A_2^1B_2^1 \perp$ х.

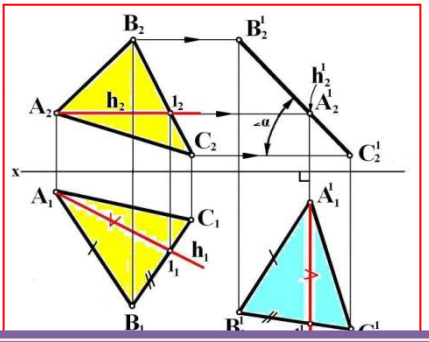
Отримаємо, що фронтальна пряма АВ перетворилася в результаті обертання навколо уявної осі, перпендикулярної до Π_2, у горизонтально-проекціюючу пряму A^1B^1.



Національний університет
водного господарства
та природокористування

5.3.1.3. Перетворення площини загального положення в проекціюючу площину

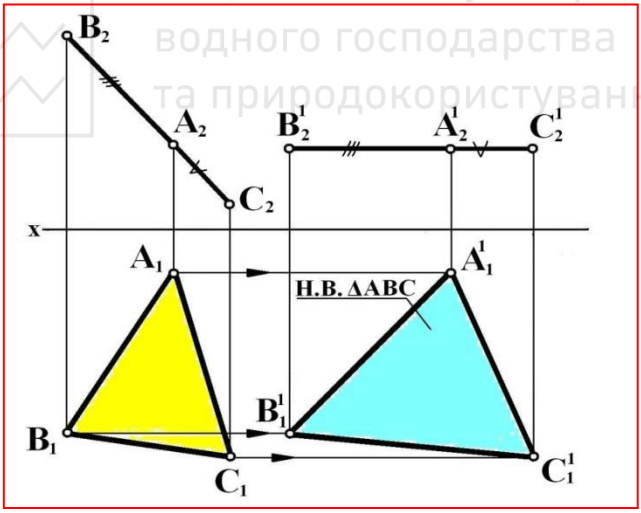
Умова задачі: перетворити площину трикутника АВС у фронтально- проекціюючу.
Розв'язування:
Для цього відповідно до 8.3.3 в площині трикутника АВС проводимо горизонтальну пряму h і розміщуємо її горизонтальну проекцію h1 разом з горизонтальною проекцією трикутника АВС, не змінюючи початкових форм і розмірів, у положення h11 ⊥ x.
В результаті обертання отримаємо, що трикутник A1B1C1 займає фронтально-проекціююче положення, перпендикулярне до П2, де ∠ α – кут нахилу площини трикутника АВС до П1.



5.3.1.4. Перетворення проекціюючої площини в площину рівня

Умова задачі: перетворити фронтально-проекціюючу площину трикутника АВС у площину рівня.
Розв'язування:
Оскільки задана площина перпендикулярна до $П_2$, то її можна обертати для отримання положення площини рівня навколо осі, перпендикулярної до $П_2$, розміщуючи слід-проекцію $B_2A_2C_2$ не змінюючи її розмірів, у положення

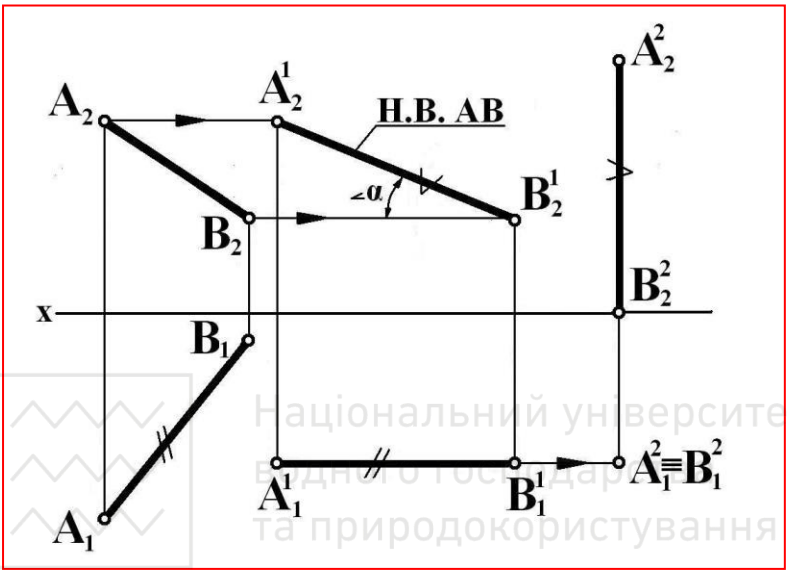
Національний університет
водного господарства
та природокористування



5.3.2. ОБЕРТАННЯ НАВКОЛО ДВОХ УЯВНИХ ОСЕЙ ОБЕРТАННЯ

5.3.2. 1. Перетворення прямої загального положення в проекціюючу пряму

Національний університет
водного господарства
та природокористування



Умова задачі: перетворити пряму загального положення АВ у горизонтально-проекціюючу.

Розв'язування:

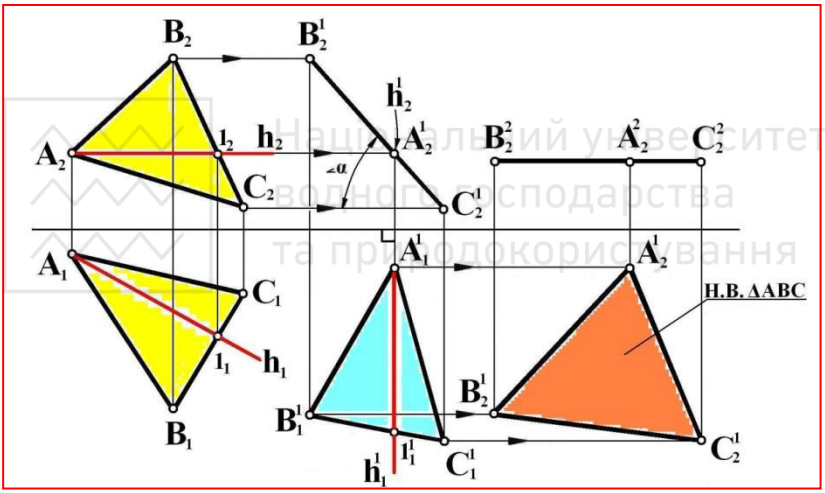
Задача розв'язується в результаті 2 обертань. Оскільки у горизонтально-проекціюючу пряму може перетворитися фронтальна пряма рівня в результаті її одного обертання, то спочатку потрібно перетворити пряму загального положення у фронтальну пряму рівня

1 обертання: розміщуємо A_1B_1, не змінюючи розмірів, в положення $A_1{}^1B_1{}^1 \parallel x$. В результаті 1 обертання пряма загального положення АВ перетворилася у фронтальну пряму рівня A^1B^1. Обертання здійснено навколо уявної осі, перпендикулярної до $П_1$.

2 обертання: розміщуємо $A_2{}^1B_2{}^1$, не змінюючи розмірів, у положення $A_2{}^2B_2{}^2 \perp x$. В результаті обертання фронтальна пряма A^1B^1 перетворилася у горизонтально-проекціюючу пряму A^2B^2. Обертання здійснено навколо уявної осі, перпендикулярної до $П_2$.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

5.3.2. 2. Перетворення прямої загального положення в проекціюючу пряму



Умова задачі: перетворити площину трикутника АВС, що займає загальне положення, у горизонтальну площину рівня.

Розв'язування:

Задача розв'язується в результаті 2 обертань. Оскільки у горизонтальну площину рівня може перетворитися фронтально-проекціююча площина в результаті одного її обертання, то спочатку потрібно перетворити площину загального положення у фронтально-проекціюючу.

1 обертання: в площині трикутника АВС проводимо

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Національний університет
водного господарства
та природокористування

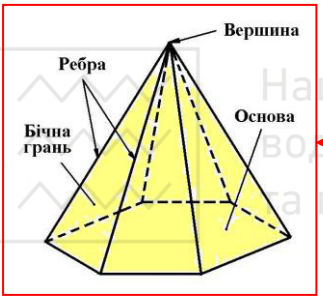
ЛЕКЦІЯ 6. ПОВЕРХНІ. ТОЧКА НА ПОВЕРХНІ.

6.1. Багатогранні поверхні та їх зображення
6.2. Криві поверхні та їх зображення

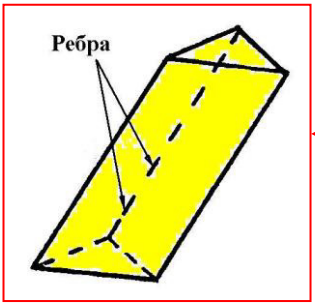
6.1. БАГАТОГРАННІ ПОВЕРХНІ ТА ЇХ ЗОБРАЖЕННЯ

Багатогранною поверхнею називається поверхня, яка

Національний університет
водного господарства
та природокористування



Піраміда – багатогранник, у якого одна грань (основа) – є будь-який багатокутник, а бічні грані – трикутники, що сходяться в одній точці – вершині піраміди.

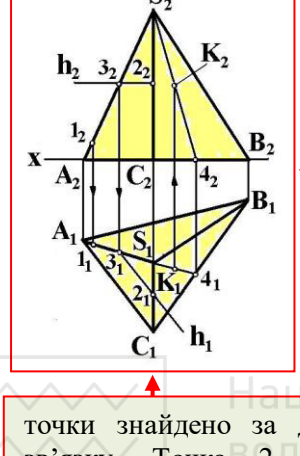


Призма – багатогранник, всі ребра якого паралельні між собою.

Зображення багатогранника зводиться до зображення його ребер та вершин.

Лінія, яка обмежує проекцію багатогранника, називається обрисом поверхні багатогранника. Обрис поверхні – завжди видима лінія, вона позначається

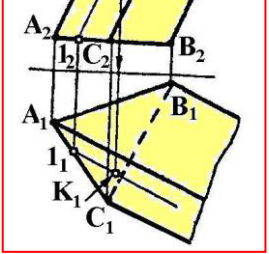
Національний університет
водного господарства
та природокористування



На горизонтальній проекції обрисом піраміди ABCS є лінія $A_1B_1C_1$, а на фронтальній проекції – лінія $A_2B_2S_2$.

Точка і пряма лінія на поверхні багатогранника визначається так, як і в площині.

Точка 1 належить ребру AS, де горизонтальну проекцію точки знайдено за допомогою лінії проекційного зв'язку. Точка 2 належить ребру SC, проте горизонтальну проекцію точки визначити за допомогою лінії проекційного зв'язку неможливо, оскільки SC – відрізок профільної прямої, паралельної до площини $П_3$ (у цієї прямої проекції розміщені на одній лінії, перпендикулярній до осі *x*). В даному випадку горизонтальну проекцію 2_1 знайдено за допомогою прямої 23, яка проведена в грані ASC піраміди паралельно до сторони AC основи і тому є горизонталлю *h*. Точка К лежить в середині грані BCS, і її фронтальну проекцію $К_2$ знайдено за допомогою прямої S4, проведеної в грані BCS. Точка К розміщена на прямій S4 грані BCS і тому належить поверхні піраміди.



На рисунку зображена тр
призма, нижня основа
паралельна до горизонта
площини проекцій, а вер
показана. Відома фронта
проекція $К_2$ точки К,
знаходиться на поверхні п
Оскільки $К_2$ є видимою, т
К знаходиться в грані пр
що примикає до сторон

Національний університет
водного господарства
та природокористування

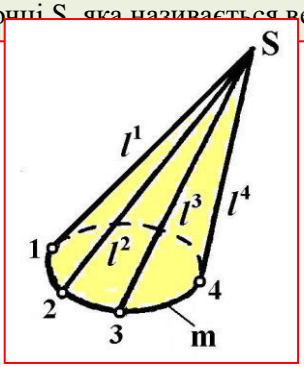
КРИВІ ПОВЕРХНІ ТА ЇХ ЗОБРАЖЕННЯ

иві поверхні можна розглядати як сукупність
них положень лінії, що називається твірною, яка
ться по напрямній лінії.
лежно від виду твірної криві поверхні поділяються
: лінійчасті (твірна – пряма лінія) та нелінійчасті
ійні (твірна – крива лінія).

Національний університет
водного господарства
та природокористування

6.2.1. Конічна поверхня

Конічна поверхня - це лінійчаста поверхня, що утворена рухом прямолінійної твірної l уздовж криволійної напрямної m, і яка в усіх своїх положеннях перетинає напрямну, причому всі твірні (l^1, l^2, l^3 і т.д.) перетинаються в точці S, яка називається вершиною.



Національний університет
водного господарства
та природокористування

Криві поверхні, зокрема конічні, зображуються на площинах проекцій своїми обрисами поверхні

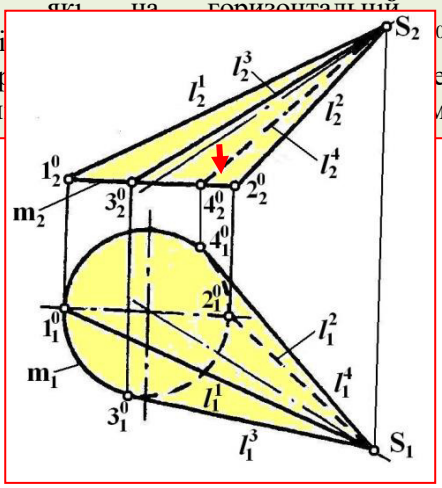
На рисунку зображено обриси геометричного тіла – похилого кругового конуса (еліптичного конуса), обмеженого конічною поверхнею і площиною (основою конуса), що перетинає всі твірні поверхні, причому лінія m називається лінією основи конуса.

Показано проекції обрисових твірних l^1, l^2 (на фронтальній проекції) і l^3, l^4 (на горизонтальній проекції). Ці твірні проходять через вершину S і перетинають лінію основи m в точках 1_0, 2_0, 3_0, 4_0.

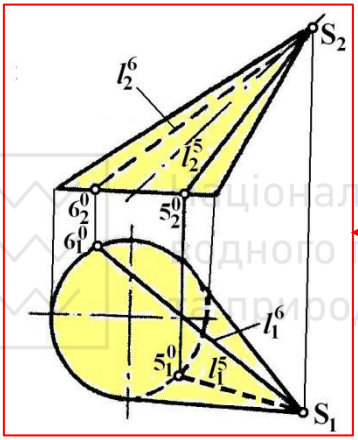
Точки лінії основи m, через які проходять обрисові твірні, ділять лінію основи на видиму та невидиму частини. Так, на горизонтальній проекції твірні l^3 і l^4 ділять горизонтальну проекцію m_1 в точках $3_1{}^0$ і $4_1{}^0$ на видиму та невидиму частини.

На горизонтальній проекції твірні, що перетинають лінію основи між точками $3_1{}^0$- $2_1{}^0$ – $4_1{}^0$ – невидимі (перетинають невидиму зверху частину лінії основи m), а між точками $3_1{}^0$- $1_1{}^0$ – $4_1{}^0$ – видимі.

Твірні, які на горизонтальній проекції перетинають лі 0 – $2_1{}^0$, на фронтальній пр етинають лінію основи м ні.

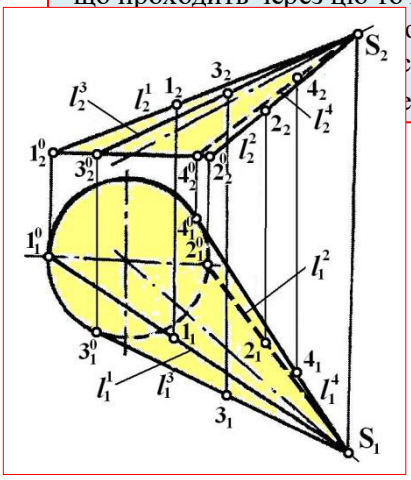


Національний університет
водного господарства
та природокористування



На рисунку показано видимість твірних l^5 і l^6, які проведено в середині обрису конічної поверхні.

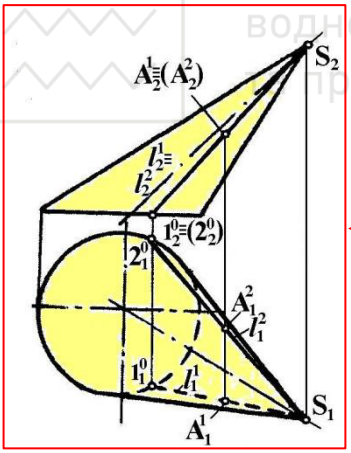
Точка належить поверхні, зокрема конічній, якщо вона знаходиться на лінії цієї поверхні. Точка на конічній поверхні визначається за допомогою твірної, що проходить через цю точку, перетинаючи вершину S
основи m.
совій твірній, відповідає одна
ерхні конуса.



На рисунку показано проекції точок 1,2,3,4, що лежать на відповідних обрисових твірних

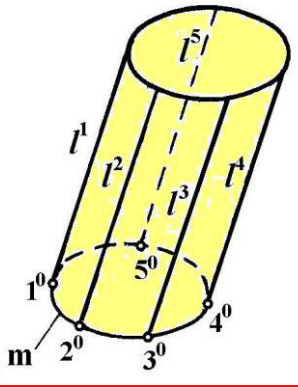
Національний університет
водного господарства
та природокористування

Якщо лінія основи є замкненою лінією, наприклад колом, то точка, що задана на одній проекції в середині обрису, визначає положення двох точок поверхні геометричного тіла.



На рисунку точці А, що зазначена в середині обрису на фронтальній проекції, відповідають дві точки поверхні A^1 і A^2, фронтальні проекції яких збігаються ($A_2{}^1 \equiv A_2{}^2$). Ці точки лежать на твірних l^1 і l^2. Видимість точок A^1 і A^2 на горизонтальній проекції визначена за видимістю твірних l^1 і l^2.

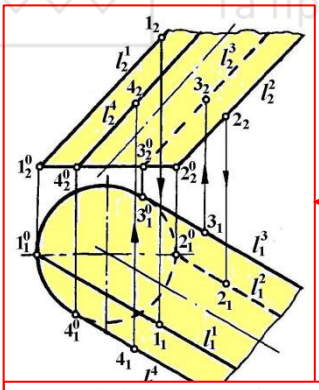
ична поверхня



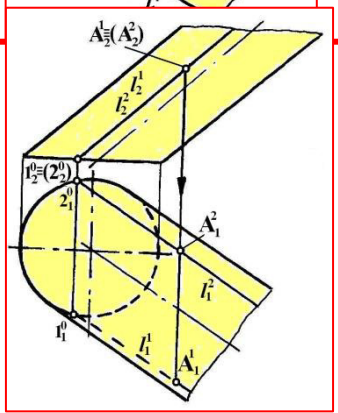
Циліндрична поверхня - це лінійчаста поверхня, яка утворена паралельним рухом прямолінійної твірної

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Видимість твірних та точок на циліндричній поверхні визначається так само, як і для конічної



На рисунку показано обриси похилого кругового циліндра (еліптичного циліндра), лінія основи якого – коло (верхня основа циліндра не показана), а також проекції обрисових твірних l^1, l^2, l^3, l^4 та проекції точок 1,2,3,4, що на них знаходяться.



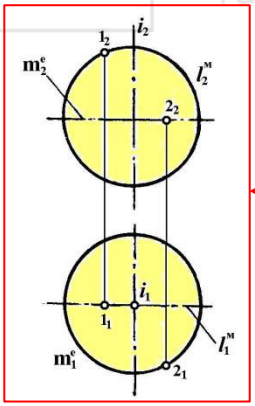
Побудова проекцій точки А, що розміщена в середині обрису.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

6.2.3. Поверхня кулі (сфера)

Поверхня кулі (сфера) – це нелінійчаста поверхня, утворена обертанням кола, яке є твірною, навколо осі, що збігається з діаметром кола.

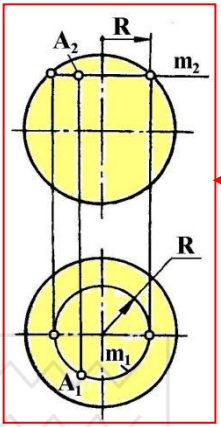
Лініями обрису сфери на горизонтальних та фронтальних площинах проекцій є кола.



На рисунку показано обриси поверхні кулі, де зазначено: i – вісь обертання ($i \perp П_1$), $l^м$ – головний меридіан (обрис поверхні на $П_2$), m^e – екватор (обрис поверхні на площині $П_1$), а також проекції точки 1, що належить $l^м$, і точки 2, що належить m^e.

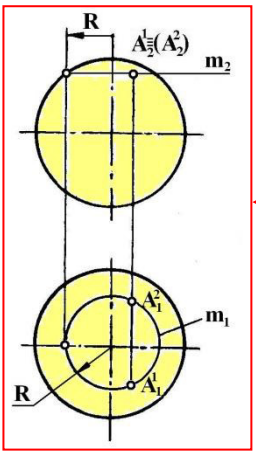
Національний університет водного господарства та природокористування

Поверхня кулі є поверхнею обертання, тобто точка поверхні при обертанні кулі описує коло відносно осі обертання. Ці кола називаються паралелями поверхні обертання. Найбільша паралель – це екватор.



На рисунку показано, що точка А при обертанні кулі описує коло m радіуса R. Оскільки площина кола паралельна площині π_1, то коло, яке називається паралеллю, проекціюється на $П_1$ в натуральну величину.

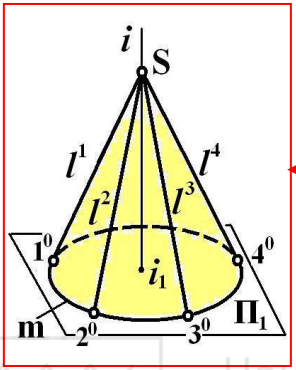
Точка на поверхні кулі, яка знаходиться в середині обрису, визначає положення двох точок поверхні і будується за допомогою паралелей поверхні кулі.



На рисунку точка А, зазначена в середині обрису кулі, визначає положення двох точок A^1 і A^2 поверхні кулі, причому горизонтальні проекції A_1^1 і A_1^2 побудовані за допомогою паралелі *m* радіуса R.

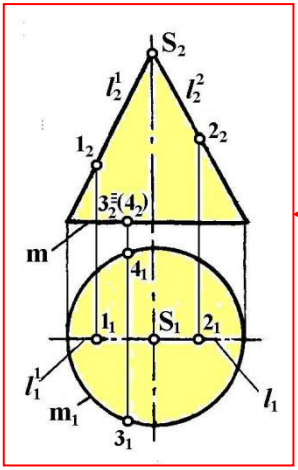
Національний університет
водного господарства
та природокористування

6.2.4. Поверхня прямого кругового конуса (конуса обертання)



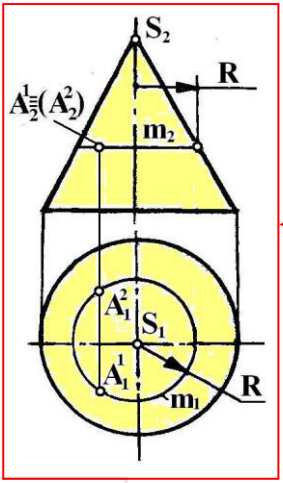
Поверхня прямого кругового конуса утворена обертанням прямолінійної твірної l (рис. 5.28) навколо осі i, що перпендикулярна до площини $П_1$, і є висотою конуса. Якщо поверхню прямого кругового конуса перетнути площиною, паралельною до $П_1$, то лінією основи m конуса буде коло.

Національний університет
водного господарства
та природокористування



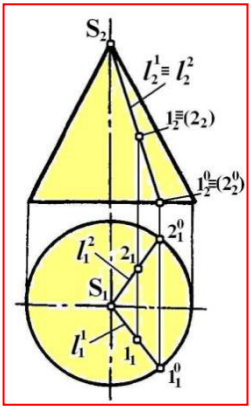
На рисунку зображено прямий круговий конус або конус обертання, на поверхні якого зазначені проекції точок 1 і 2, що лежать на обрисових твірних l^1 і l^2, а також проекції точок 3 і 4, що знаходяться на лінії основи m.

Національний університет
водного господарства
та природокористування



Оскільки ця поверхня є поверхнею обертання, то точку на поверхні конуса можна визначити за допомогою паралелі. На рисунку горизонтальні проекції точок A^1 і A^2 визначені за допомогою паралелі m.

Національний університет
водного господарства
та природокористування



Точку на поверхні такого конуса можна визначити також і за допомогою твірної поверхні. Так, на рисунку горизонтальні проекції точок 1 і 2 визначені за допомогою твірних l^1 і l^2.

Примітка: точці, зазначеній в середині обрису на фронтальній проекції конуса, відповідають дві точки поверхні.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

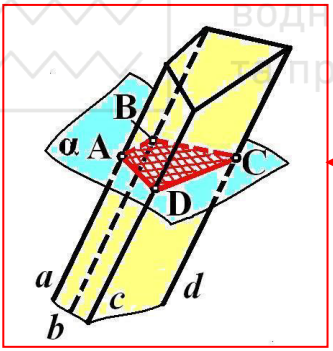
Лекція 7. Перетин поверхонь з площиною

7.1. Перетин поверхні багатогранника з площиною
7.2. Перетин кривої поверхні з площиною

7.1. ПЕРЕТИН ПОВЕРХНІ БАГАТОГРАННИКА З ПЛОЩИНОЮ

Лінія перетину поверхні багатогранника з площиною – плоский замкнений багатокутник, який може бути побудований шляхом визначення його вершин як точок перетину ребер багатогранника із заданою площиною.

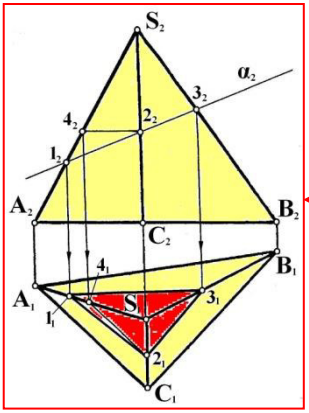
Видимими будуть ті сторони многокутника лінії перетину,



На рисунку замкнена лінія ABCDA є лінією перетину призми з площиною α. Чотири вершини чотирикутника лінії перетину визначені як точки перетину ребер *a*, *b*, *c*, *d* призми з площиною α: A = *a*∩α, B = *b*∩α, C = *c*∩α, D = *d*∩α.

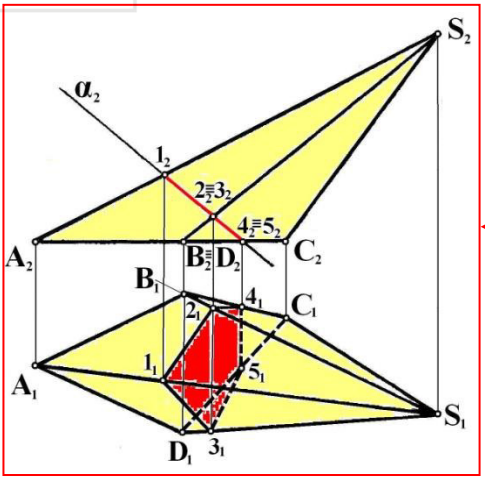
Якщо січна площина є проекціюючою, то одна проекція її лінії перетину з поверхнею багатогранника збігається зі слідом-проекцією січної площини

Національний університет
водного господарства
та природокористування



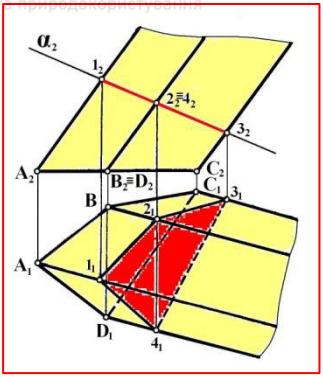
На рисунку побудована лінія перетину піраміди ABCS з фронтально-проекціюючими площинами α. Лінією перетину є трикутник 123, оскільки три бічні ребра піраміди перетинають площтну α. Горизонтальні проекції 1_1 і 3_1 отримано за допомогою ліній проекційного зв'язку, а точку 2_1 визначено за допомогою горизонталлі 24.

Національний університет
водного господарства
та природокористування



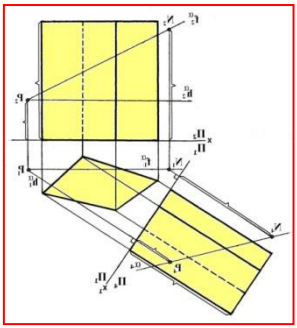
Лінією перетину піраміди ABCDS з площиною α є плоский п'ятикутник 12345, оскільки площину α перетинають три бічні ребра AS, BS, DS та дві сторони лінії основи BC і DC.

Національний університет
водного господарства
та природокористування



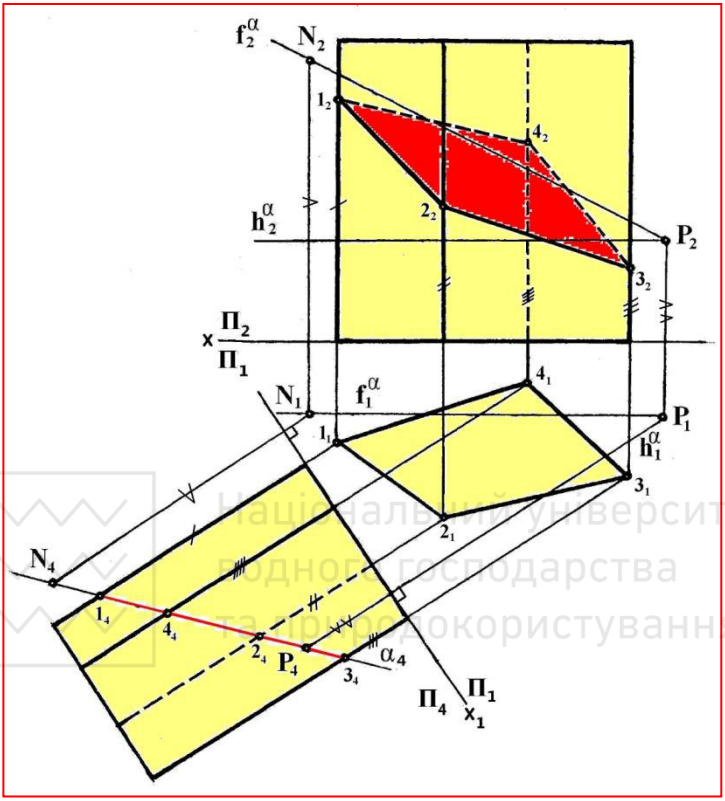
Лінією перетину призми з площиною α є плоский чотирикутник 1234, оскільки площину α перетинають чотири бічні ребра.

Якщо січною площиною є площина загального положення, то для побудови лінії перетину можна застосовувати спосіб заміни площин проекцій, за допомогою якого січна площина загального положення перетворюється у новій системі площин проекцій в проекціюючу. Це дозволяє тільки за допомогою ліній проекційного зв'язку визначити проекції лінії перетину у старій (заданій) системі площин проекцій.



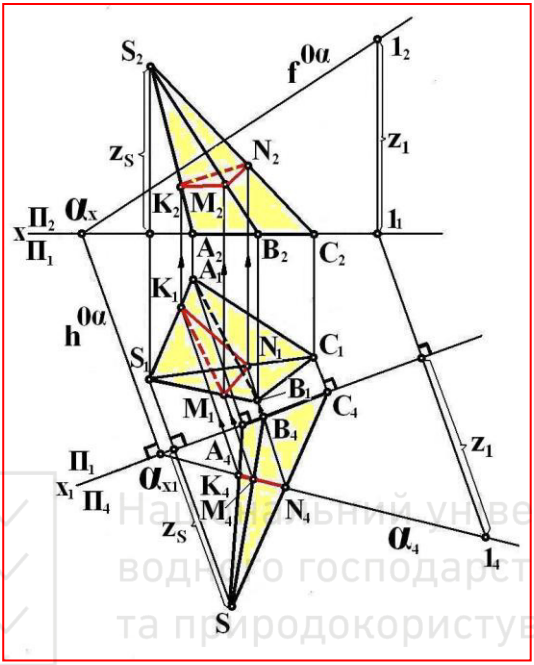
Перетворення площини загального положення α, що задана лініями рівня, в проекціюючу площину в новій системі площин проекцій $П_4/П_1$, а також побудова нової проекції призми на площині $П_4$.

Національний університет
водного господарства
та природокористування



Побудова лінії перетину 1234 призми з площиною загального положення α ($h^\alpha \cap f^\alpha$) за допомогою способу заміни площин проекцій

Національний університет
водного господарства
та природокористування



Побудова лінії перетину KMN піраміди ABCS з площиною загального положення α, що задана слідами $h^{0\alpha}$ і $f^{0\alpha}$, за допомогою способу заміни площин проекцій

7.2. ПЕРЕТИН КРИВОЇ ПОВЕРХНІ З ПЛОЩИНОЮ

Для побудови лінії перетину конічної поверхні з площиною, як і іншої кривої поверхні, визначають проекції окремих точок лінії перетину і плавно їх з'єднують.

Серед характерних (особливих) точок лінії перетину виділимо точки видимості, які знаходяться на обрисових лініях поверхні, або лежать на лініях, що обмежують площини основ поверхні. В цих точках може змінюватися

Національний університет водного господарства та природокористування

видимість лінії перетину, крива лінія може переходити в пряму лінію тощо.

Якщо площина, що перетинає криву поверхню, проекціююча, то одна проекція лінії перетину збігається зі слідом-проекцією проекціюючої площини, а іншу проекцію можна знайти за допомогою твірних (для конічної та циліндричної поверхонь), а для поверхонь кулі та прямого кругового конуса, які є поверхнями обертання, за допомогою паралелей, які проекціюються у вигляді простих ліній – кіл та прямих ліній.

На рисунку побудувано лінію перетину похилого кругового конуса (еліптичного конуса) з фронтально-проекціюючою площиною α.

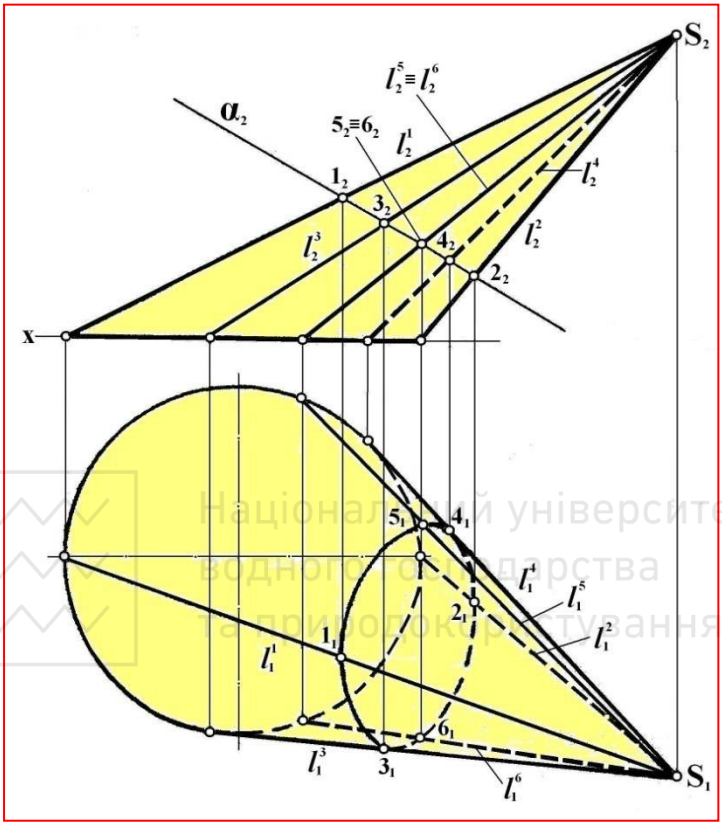
Розв'язування:

1. Оскільки фронтальна проекція лінії перетину збігається зі слідом-проекцією α_2 площини α, то на фронтальній проекції вибираємо фронтальні проекції точок лінії перетину і за допомогою твірних конічної поверхні знаходимо їх горизонтальні проекції.

Визначаємо характерні точки лінії перетину – точки, які лежать на обрисових твірних: $1 \in l^1$, $2 \in l^2$, $3 \in l^3$, $4 \in l^4$. Для точок 1 і 2 спочатку фіксуємо їх фронтальні проекції, а потім за допомогою обрисових твірних l^1 і l^2 знаходимо їх горизонтальні проекції 1_1 і 2_1. В точках 3_1 і 4_1 на горизонтальних проекціях обрисових твірних l^3 і l^4 буде мінятися видимість лінії перетину, тому для визначення положення точок 3_1 і 4_1 будуємо фронтальні проекції твірних l^3 і l^4, фіксуємо 3_2 і 4_2 ($3_2 = l_2^3 \cap \alpha_2$, $4_2 = l_2^4 \cap \alpha_2$), а потім за допомогою ліній проекційного зв'язку знаходимо на l_1^3 і l_1^4 горизонтальні проекції 3_1 і 4_1.

2. Горизонтальні проекції проміжних точок 5 і 6 визначаємо за допомогою твірних l^5 і l^6 (точка, що зазначена в середині обрису конічної поверхні, визначає положення

Національний університет
водного господарства
та природокористування

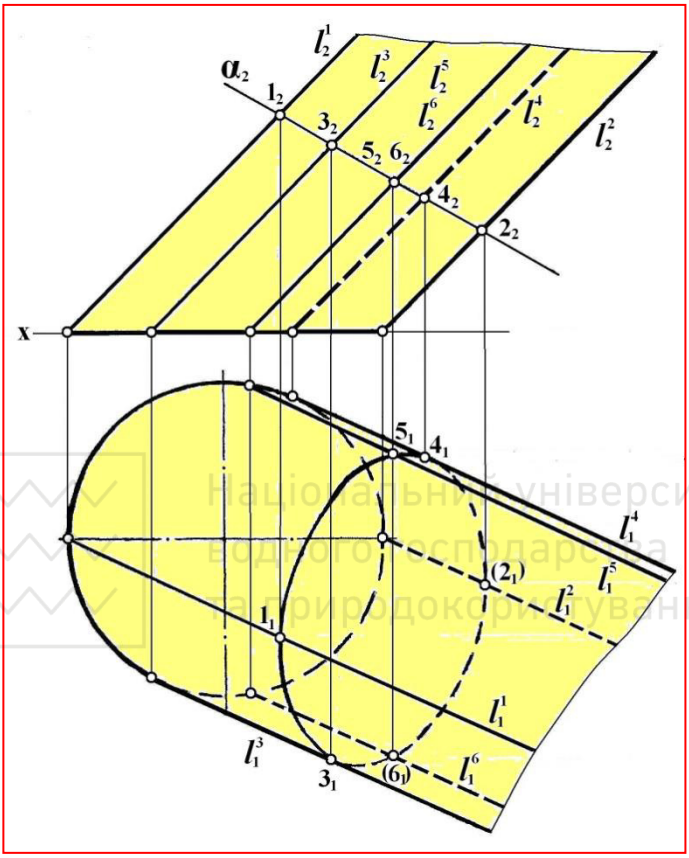


двох точок поверхні, тому фіксуємо 5◌̍ ◌̍ ≡ 6◌̍ ◌̍).

3. Отримані горизонтальні проекції точок 1,2,3,4,5,6 з'єднуємо плавною лінією з урахуванням їх видимості – видимими будуть ті точки лінії перетину, які лежать на твірних, видимих на горизонтальній проекції.

Точки 1◌̍, 5◌̍ є видимими, а точки 2◌̍, 6◌̍ – невидимими, в точках 3◌̍ і 4◌̍, які лежать на обрисових твірних l_3 і l_4, змінюється видимість лінії перетину.

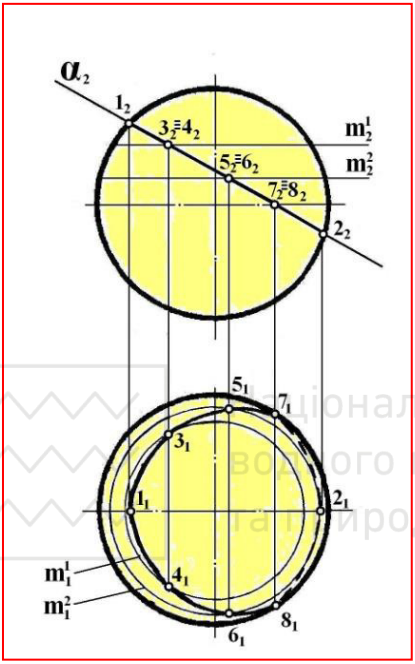
Національний університет
водного господарства
та природокористування



На рисунку побудовано лінію перетину похилого кругового циліндра (еліптичного циліндра) з фронтально-проекціюючою площиною α.
Під час розв'язування цієї задачі потрібно враховувати, що твірні циліндричної поверхні між собою.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

На рисунку побудувано лінію перетину поверхні кулі з фронтально-проекціюючою площиною α.



Розв'язування:

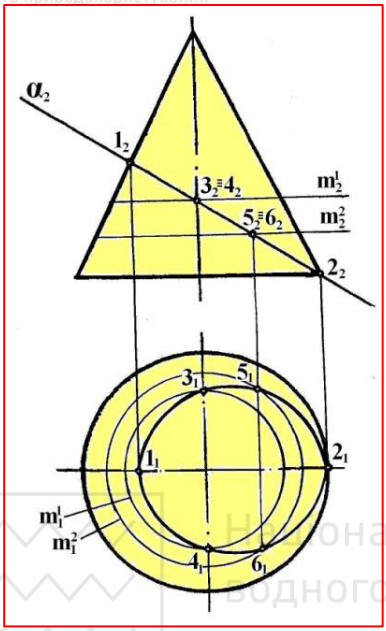
1. На фронтальній проекції фіксуємо 1_2 і 2_2 точок, що лежать на головному меридіані. Головний меридіан є обрисовою лінією на фронтальній проекції. За допомогою ліній проекційного зв'язку знаходимо 1_1 і 2_1.

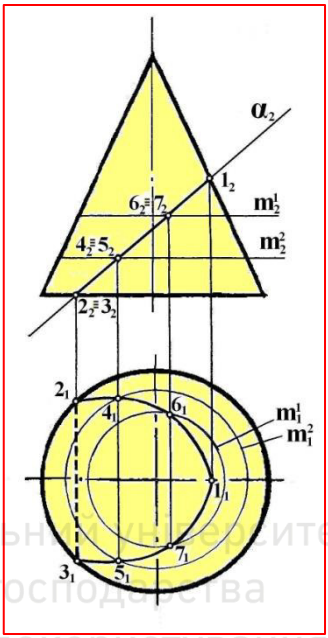
2. На фронтальній проекції фіксуємо точки $7_2 \equiv 8_2$ і за допомогою лінії проекційного зв'язку знаходимо їх горизонтальні проекції 7_1 і 8_1. В цих точках змінюється видимість горизонтальної проекції лінії перетину (точки 7, 8 лежать на обрисовій на горизонтальній проекції лінії - екваторі , що є найбільшою паралеллю).

3. Фіксуємо фронтальні проекції $3_2,4_2$ і $5_2,6_2$ проміжних точок 3,4 і 5,6. Оскільки точки зазначені в середині обрису, то $3_2 \equiv 4_2$ і $5_2 \equiv 6_2$. За допомогою паралелей m^1 і m^2 визначаємо горизонтальні проекції $3_1,4_1$ і $5_1,6_1$.

4. З'єднуємо горизонтальні проекції точок лінії перетину плавною лінією з урахуванням їх видимості.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

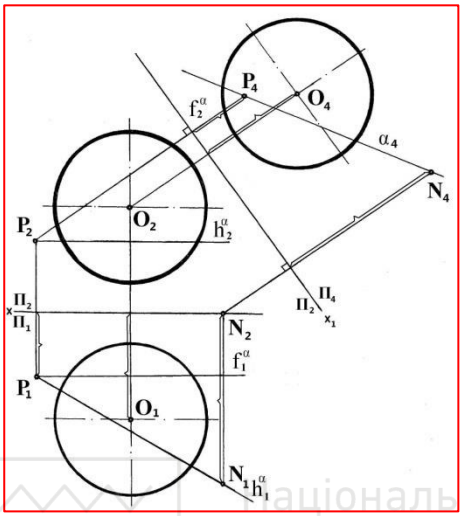




На рисунках побудовано лінії перетину прямих кругових конусів (конусів обертання) з фронтально-проекціюючими площинами α. Горизонтальні проекції проміжних точок (точок, що не лежать на обрисових лініях) знайдено за допомогою паралелей m^1 і m^2.

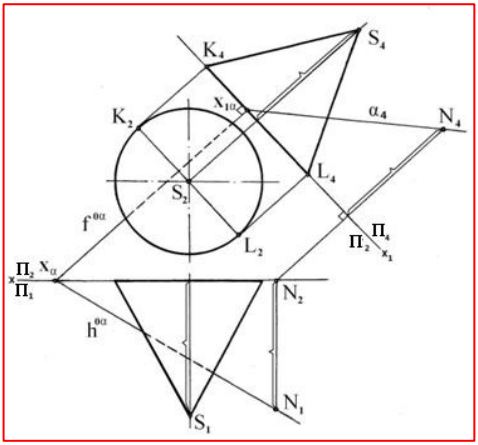
При перетині кривої поверхні з площиною загального положення для визначення лінії перетину можна застосовувати спосіб заміни площин проекцій, перетворюючи задану площину загального положення в проекціюючу.

Національний університет
водного господарства
та природокористування



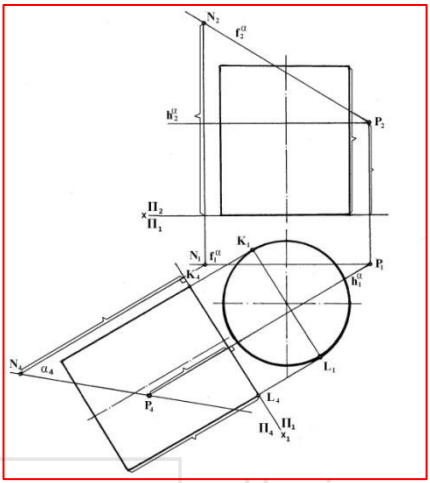
Перетворення площини загального положення α, що задана лініями рівня, в проекціюючу площину в новій системі площин проекцій $П_4/П_2$, а також побудова нової проекції поверхні кулі на площині $П_4$

Національний університет
водного господарства
та природокористування



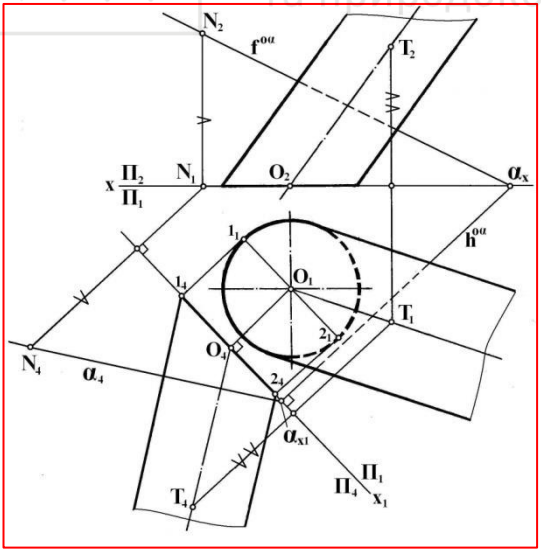
Перетворення площини загального положення α, що задана слідами, в проекціюючу площину в новій системі площин проекцій $П_4/П_2$, а також побудова нової проекції конуса обертання на площині $П_4$

Національний університет
водного господарства
та природокористування



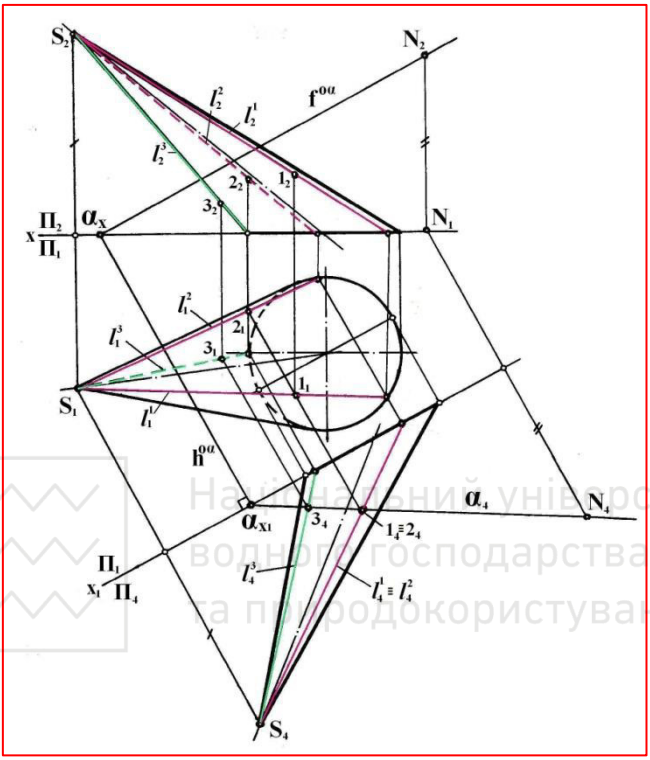
Перетворення площини загального положення α, що задана лініями рівня, в проекціюючу площину в новій системі площин проекцій $П_4/П_2$, а також побудова нової проекції прямого кругового циліндра на площині $П_4$

Національний університет
водного господарства
та природокористування



Перетворення площини загального положення α, що задана слідами, в проекціюючу площину в новій системі площин проекцій $П_4/П_1$, а також побудова нової проекції похилого кругового циліндра на площині $П_4$

Національний університет
водного господарства
та природокористування



На рисунку показано, як знайдено точки 1,2,3, що належать лінії перетину похилого кругового конуса з площиною загального положення $\alpha(h^{0\alpha} \cap f^{o\alpha})$. Застосовуючи спосіб заміни площин проекцій, провівши $x_1 \perp h^{0\alpha}$, отримаємо, що площина α в новій системі площин проекцій $П_4/П_1$ становиться проекціюючою, перпендикулярною до $П_4$, де α_4 – слід-проекція площини α. На α_4, що розміщена в межах обрису поверхні конуса, взято точки проекції 1_4, 2_4 точок 1, 2, що належать лінії перетину. Проекції 1_1, 2_1 і 1_2, 2_2 в старій (заданій) системі $П_2/П_1$ знайдено за допомогою твірних l^1 і l^2.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

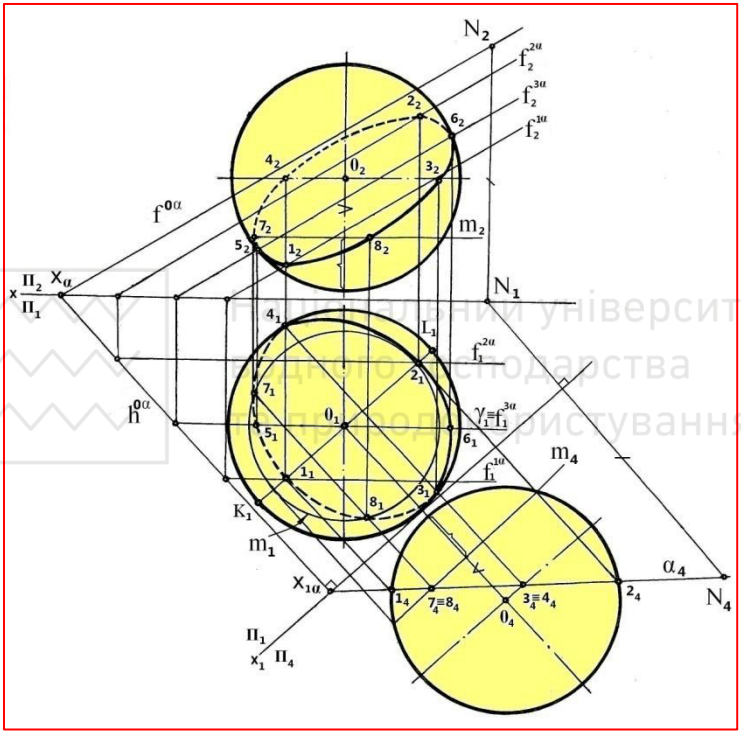
В точці 3_2 змінюється видимість фронтальної проекції лінії перетину. Для її визначення спочатку будуємо проекції l^3 на $П_1$, а потім на $П_4$. Визначаємо точку 3_4: $3_4 = l_4^3 \cap \alpha_4$. Далі за допомогою ліній проекційного зв'язку знаходимо 3_1 на l_1^3, а потім 3_2 на l_2^3.

Наведемо приклади побудови лінії перетину кривої поверхні з площиною загального положення за допомогою способу заміни площин проекцій.

На рисунку побудовано лінію перетину поверхні кулі (сфери) з площиною загального положення $\alpha(h^{0\alpha} \cap f^{0\alpha})$. Дамо пояснення до виконання цієї задачі. За допомогою способу заміни площин проекцій площину загального положення α перетворюємо в проеціюючу в системі $П_4/П_1$ і знаходимо проекцію сфери на $П_4$. Відмічаємо точки 1_4 і 2_4 перетину α_4 з обрисом сфери на $П_4$. Між точками 1_4 і 2_4 знаходиться проекція на $П_4$ лінії перетину сфери з площиною $\alpha(h_{0\alpha} \cap f_{0\alpha})$. Горизонтальні проекції 1_1 і 2_1 точок 1 і 2 знаходяться на лінії K_1L_1, яка паралельна до x_1 і є горизонтальною проекцією обрису сфери на $П_4$. За допомогою фронтальних прямих $f^{1\alpha}$ і $f^{2\alpha}$ площини α знаходимо фронтальні проекції 1_2 і 2_2 точок 1 і 2. Точки 3 і 4 є точками видимості для горизонтальної проекції лінії перетину. Вони знаходяться на екваторі сфери. Спочатку зафіксуємо їх проекції 3_4 і 4_4 на проекції екватора на $П_4$, а потім їх спроеційуємо на $П_1$ і на $П_2$. Точки 5 і 6 є точками видимості для фронтальної проекції лінії перетину. Вони знайдені за допомогою січної площини γ, яка проходить через центр сфери і паралельно до площини $П_2$. Площина γ перетинає сферу

Національний університет
водного господарства
та природокористування

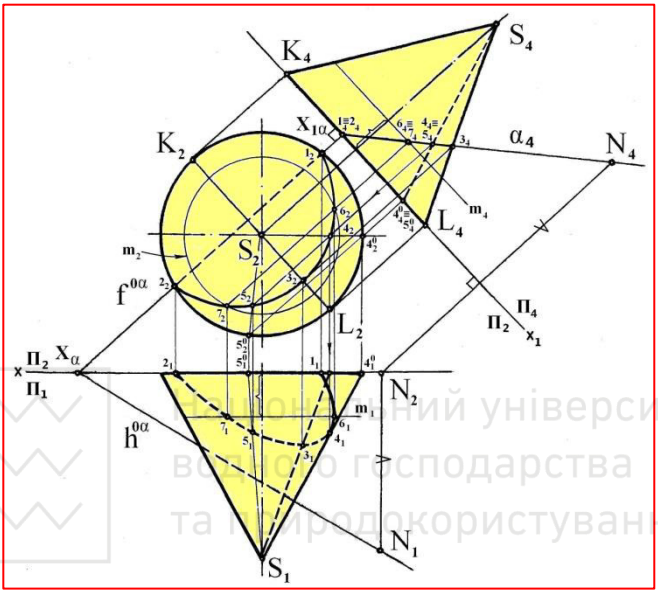
по головному меридіану, а площину α – по фронталі $f^{3\alpha}$. В точках перетину цих ліній знайдено точки 5 і 6. Проміжні точки 7 і 8 побудовано за допомогою паралелі m.

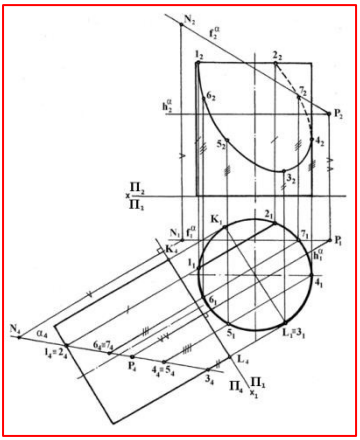


На рисунку показано побудову лінії перетину поверхні прямого кругового конуса з площиною загального положення $\alpha(h_{0\alpha} \cap f_{0\alpha})$. Точку 4, в якій міняється видимість горизонтальної проекції лінії перетину, визначено за допомогою твірної $S4^0$, точку 3 – за допомогою твірної LS, а точку 5 – за допомогою твірної

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$S5^0$, точки 6 і 7 – за допомогою паралелі m. Точки 1 і 2 знаходяться на лінії основи конуса.





На рисунку за допомогою способу заміни площин проекцій побудовано лінію перетину поверхні прямого кругового циліндрі з площиною загального положення, що задана лініями рівня.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Лекція 8. Взаємний перетин поверхонь

8.1. Побудова лінії перетину поверхонь при проекціюючому положенні однієї з поверхонь відносно площин проекцій
8.2. Побудова лінії перетину поверхонь при їх загальному положенні

Залежно від розміщення поверхонь, що перетинаються, перетин може бути повним або неповним.

Повним називається перетин, коли всі твірні або ребра поверхні одного з тіл перетинають поверхню іншого тіла.

Неповним називається перетин, при якому не всі твірні або ребра поверхонь обох тіл, що перетинаються, беруть участь в перетині.

Проекції лінії перетину повинні розміщуватися у межах обрисових ліній як однієї, так і іншою поверхні водночас

Лінія перетину поверхонь видима, якщо вона знаходиться водночас в межах видимих на епюрі поверхонь, що перетинаються.

8.1. Побудова лінії перетину поверхонь при проекціюючому положенні однієї з поверхонь відносно площин проекцій

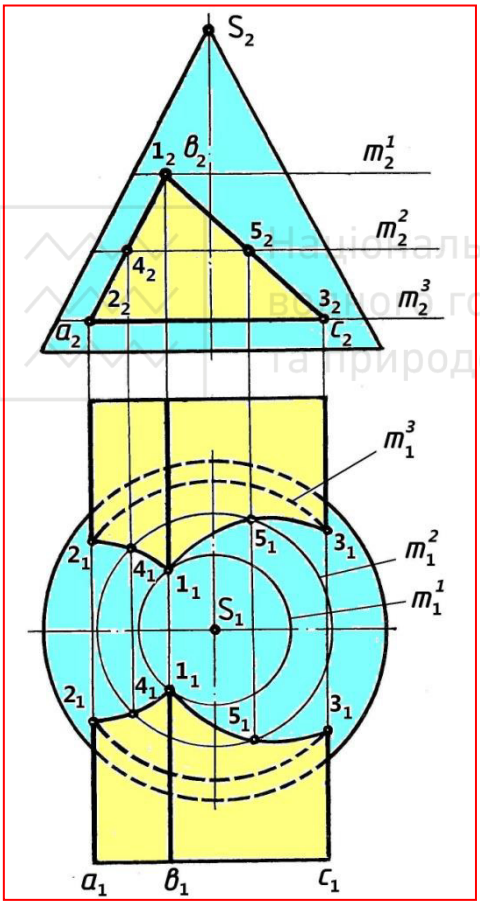
В цьому випадку одна проекція лінії пертину відома – вона збігається з проекцією поверхні на ту площину проекцій, до якої ця поверхня перпендикулярна. Відсутню проекцію будують за допомогою допоміжних ліній (твірних, паралелей) іншої поверхні, що займає загальне положення.

Наведемо приклади на побудову лінії перетину поверхонь, що пере[illegible]аються.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

На рисунку показано побудову лінії перетину поверхні прямого кругового конуса з поверхнею прямої призми.

Перетин поверхонь є повним, оскільки всі три бічні ребра призми, що займають фронтально-проеціюючe положення, перетинають поверхню конуса.



Три бічні грані призми є фронтально-проеціюючими площинами, перпендикулярними до площини π_2. Лінія перетину двох площин знаходиться в трьох бічних гранях призми і проеціюється на площину π_2 у відрізки прямих ліній, які є проекціями граней призми на ту ж площину π_2, тобто фронтальна проекція лінії перетину двох поверхонь збігається з фронтальною проекцією самої призми.

Послідовність побудови лінії перетину така:

Національний університет
водного господарства
та природокористування

1. Визначаємо характерні точки лінії перетину – це точки 1,2,3, в яких здійснюється перехід одного виду лінії перетину до іншого.

Просторова крива лінія перетину розпадається на три плоскі лінії, де точки 1,2,3 є кінцями цих ліній:

- лінія 13 знаходиться в грані (*b*//*c*) призми і є неповним еліпсом;
- лінія 12 знаходиться в грані (*a*//*b*) і є параболою, оскільки відрізок $1_2 2_2$ паралельний до обрисової твірної;
- лінія 23 знаходиться в грані (*a*//*c*) і є дугою кола, оскільки грань (*a*//*c*) паралельна до площини основи конуса.

Горизонтальні проекції точки 1 визначено за допомогою паралелі m^1, а точок 2 і 3 – за допомогою паралелі m^3. Оскільки точці, що зазначена в середині обрису, відповідають дві точки поверхні, то на епюрі фіксується одна фронтальна проекція точки, наприклад 1_2, але дві горизонтальні проекції – 1_1 і 1_1.

2. Горизонтальні проекції проміжних точок 4 і 5 побудовано за допомогою паралелі m^2.

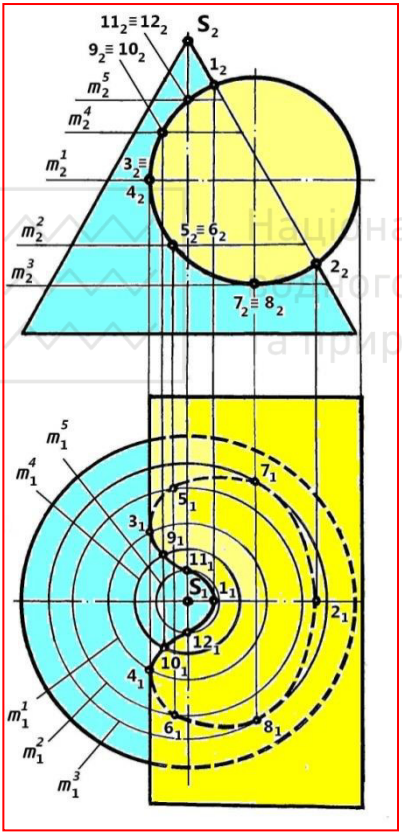
3. Горизонтальні проекції точок лінії перетину з'єднано з урахуванням їх видимості. Грані (*a*//*b*) і (*b*//*c*) на горизонтальній проекції є видимими, тому лінії $1_1 4_1 2_1$ і $1_1 5_1 3_1$ є видимими, проте грань (*a*//*c*) є невидимою, тому лінія $2_1 3_1$, що є дугою кола, також є невидимою.

Перетин поверхонь є повним, тому на горизонтальній проекції видно дві окремі замкнені горизонтальні проекції лінії перетину. На фронтальній проекції ці дві окремі лінії перетину збігаються в одну спільну, яка, в свою чергу, збігається з фронтальною проекцією призми.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

На рисеуге показано побудову лінію перетину поверхні прямого кругового конуса з поверхнею прямого кругового циліндра.

Перетин поверхонь є неповним, оскільки не всі твірні як поверхні конуса, так і поверхні циліндра, беруть участь у перетині.



Бічна поверхня циліндра є проекціюючою, перпендикулярною до площини π_2, тому лінія перетину, яка розміщена на поверхні циліндра, проекціюється на фронтальну проекцію в лінію, що збігається з фронтальною проекцією циліндра, яка розміщена в межах обрису конічної поверхні.

Послідовність побудови лінії перетину така:

1. Горизонтальні проекції 1_1 і 2_1 точок 1 і 2, що лежать на обрисовій твірній , визначено за допомогою ліній проекційного зв'язку.

2. В точках 3_1 і 4_1 змінюється видимість горизонтальної проекції лінії перетину. Ці точки

Національний університет
водного господарства
та природокористування

визначено за допомогою паралелі m^1.

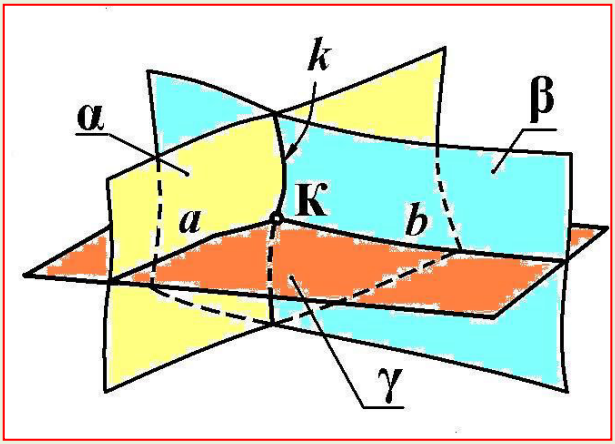
3. Горизонтальні проекції проміжних точок 5 …12 визначено за допомогою паралелей m^2, m^3, m^4, m^5.

4. Горизонтальні проекції визначених точок лінії перетину з'єднано з урахуванням їх видимості

8.2. Побудова лінії перетину поверхонь при їх загальному положенні

Якщо в попередніх прикладах поверхня призми або циліндра займала загальне непроекціююче положення, то слід перетворити епюр так, щоб вона стала проекціюючою, наприклад, заміною площин проекцій. Якщо ж жодна з поверхонь принципово не може бути проекціюючою слід застосовувати загальний спосіб знаходження лінії перетину за допомогою допоміжних січних площин або поверхонь, вже розглянутий при побудові лінії перетину двох площин загального положення.

На рисунку зображено поверхні α і β, що перетинаються. Щоб побудувати лінію k їх перетину потрібно визначити



Національний університет водного господарства та природокористування

точки, що належать водночас поверхням α і β, і з'єднати ці точки плавною лінією. Для знаходження довільної точки К, що належить лінії перетину, потрібно:

1) вести допоміжні площини або поверхні (на рисунку ведена допоміжна площина γ);

2) побудувати лінію перетину допоміжної площини або поверхні з кожною із заданих двох поверхонь ($a = \gamma \cap \alpha$, $b = \gamma \cap \beta$);

3) на перетині отриманих ліній знайти шукану точку, що належить водночас двом поверхням (К = $a \cap b$, К є α, β).

При використанні цього універсального способу визначення лінії перетину важливим є питання про раціональний вибір допоміжної площини-посередника. Ці площини вибирають таким чином, щоб вони перетинали криву поверхню по лініям, що мають вигляд прямих та кіл, котрі легко визначити та зобразити на епюрі.

На рисунку показано побудову лінії перетину поверхні прямого кругового конуса та сфери

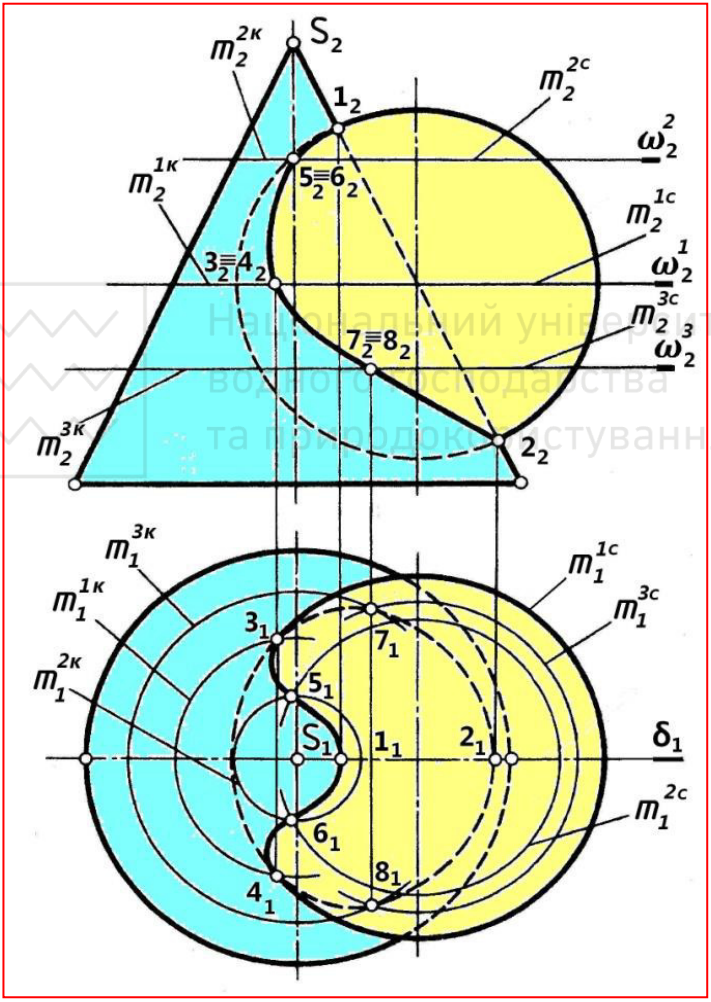
Жодна з поверхонь обох тіл, що перетинаються, не може займати проекціюючe положення відносно площин проекцій, а це означає, що визначити хоча б одну з проекцій лінії перетину без додаткових побудов, як це мало місце на рис. 38. 39, неможливо. Тому для побудови точок, що належать лінії перетину, застосовують допоміжні площини.

Точки 1 і 2 побудовано за допомогою фронтальної площини δ, яка є площиною симетрії для поверхонь обох тіл. Площина δ перетинає поверхні по їх обрисах, що дозволяє визначити фронтальні проекції 1_2, 2_2 цих точок, а потім і горизонтальні 1_1, 2_1, які розміщені на δ_1.

В точках 3 і 4 змінюється видимість горизонтальної проекції лінії перетину. Їх проекції визначено за допомогою горизонтальної площини ω^1. Площина ω^1 перетинає поверхню конуса по паралелі $m^{1к}$, а сферу – по паралелі $m^{1с}$. В точках перетину горизонтальних

Національний університет
водного господарства
та природокористування

проекцій цих паралелей визначено горизонтальні проекції 3_1 і 4_1 цих точок. Їх фронтальні проекції 3_2 і 4_2 розміщені на сліді-проекції ω_2^1.



Національний університет
водного господарства
та природокористування

Сипсок використаної та рекомендованої літератури

1. Ковальов Ю.М., Верещага В.М. Прикладна геометрія: нарисна геометрія, інженерна та комп'ютерна графіка. Сучасні напрями : підручник. Київ : Дія, 2012. 472 с.

2. Михайленко В.Є., Євстіфєєв М.Ф., Ковальов С.М., Кащенко О.В. Нарисна геометрія : підручник. Київ : Вища шк., 2004. 303 с.

3. Хмеленко О.С. Нарисна геометрія : підручник. Київ : Кондор, 2008. 440 с.

4. Кириченко А.Ф. Теоретичні основи інженерної графіки: Підручник для вищих технічних навчальних закладів. Київ : ВД «Професіонал», 2004. 496 с.

5. Крівцов В.В., Дєєв С.С. Нарисна геометрія: навч. посіб. Київ : НМК ВО, 1992. 244 с.

7. Крівцов В.В. Нарисна геометрія : навч. посіб. Рівне : НУВГП, 2012. 240 с.

8. Науменко Ю.В., Крівцов В.В. Нарисна геометрія : навч. посіб. Рівне : НУВГП, 2012. 213 с.

9. Крівцов В.В., Дєєв С.С. Нарисна геометрія: контрольні запитання та відповіді : навч. посіб. Рівне : НУВГП, 2010. 162 с.

10. Крівцов В.В., Науменко Ю.В. Теоретичні основи розв'язування задач з нарисної геометрії : навч. посіб. Рівне : НУВГП, 2013. 267 с.

11. Крівцов В.В., Козяр М.М., Полінчук А.Е. Розв'язування задач підвищеної складності з нарисної геометрії : навч. посіб. Херсон : ОЛДІ-ПЛЮС, 2017. 224 с.

12. Крівцов В.В., Козяр М.М. Ілюстрований курс нарисної геометрії : навч. посіб. Рівне : НУВГП, 2019. 232 с.

Національний університет
водного господарства
та природокористування