

УДК 628.16

Меддур М. М., аспірант (Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне)

## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ПРОМИВАННЯ ПІНОПОЛІСТИРОЛЬНОЇ ЗАСИПКИ

Наведені результати лабораторних досліджень процесу промивання пінополістирольних фільтрів та встановлено вплив різних дослідних факторів на брудомісткість фільтруючої засипки.

**Ключові слова:** регенерація, пінополістирольна засипка, рівняння регресії, інтенсивність промивання.

**Аналіз останніх досліджень.** Проблема оптимізації процесу промивання водоочисних фільтрів, а саме знаходження такої інтенсивності промивного потоку, при якій забруднення максимально вимивалися із фільтруючої засипки, не має остаточного вирішення до цього часу. При вивченні процесу промивання науковцем Амиршараяховим [1] було зроблено висновок, що якість промивання залежить тільки від об'єму промивання, тобто при меншій інтенсивності промивного потоку із більшим часом промивання забезпечується той самий ефект, що й при великих інтенсивностях з меншим часом промивання. Його результати протирічили досвіду експлуатації водоочисних фільтрів, адже відомо, що засипка погано відмивається від забруднень при малій інтенсивності та швидко колюматується. Тому науковцями Д.М. Мінцом, С.А. Шубертом, О.М. Тодесом був зроблений акцент на залежність відносного розширення фільтруючої засипки від інтенсивності промивного потоку [3, 4]. При промиванні водоочисних фільтрів спочатку необхідно було задати необхідне розширення засипки і вже після цього визначити інтенсивність промивання.

**Постановка завдання.** В виробничих умовах експлуатації пінополістирольних фільтрів задатись необхідним оптимальним розширенням візуально дуже складно, тому нами було вирішено варіювати один із головних параметрів промивання – інтенсивність. Врахувавши досвід попередніх дослідників та застосувавши повнофакторний експеримент, можна отримати математичну залежність дослідного процесу. З точки зору теорії планування експерименту на процес регенерації фільтруючої засипки впливають різні параметри, які являють собою багатафакторну систему.

**Результати досліджень.** Дослідження були проведенні в лаборато-

рії кафедри водопостачання водовідведення та бурової справи НУВГП, одним із головних завдань було оптимізувати процес промивання фільтруючої пінополістирольної засипки з еквівалентним діаметром  $d_{екв.} = 2,8$  мм, висотою  $h_{зас.} = 1$  м та тривалістю фільтрування  $T_{\phi} = 8$  год, шляхом пошуку оптимального значення інтенсивності промивного потоку. Величина параметру оптимізації визначається реакцією на взаємодію різних змінних факторів. Зазвичай оптимізується та функція, яка найбільш важлива з точки зору мети досліджень. Тому нами було вибрано інтенсивність промивання  $I$  в якості параметру оптимізації, а інші – вихідна концентрація заліза  $Fe_{ex}$ , швидкість фільтрування  $V_{\phi}$ , відносне розширення  $e$  та тривалість промивання  $t_{np}$  служать обмеженням. Ступінь впливу цих факторів на величину інтенсивності промивання необхідно визначити. Таким чином для заданої мети було прийнято чотири варійовані фактори:

1. Вихідна концентрація заліза  $Fe_{ex}$ ;
2. Швидкість фільтрування  $V_{\phi}$ ;
3. Тривалість промивання  $t_{np}$ ;
4. Відносне розширення  $e$ .

Кожний фактор має визначені межі, в яких він може змінюватися та приймати конкретні значення.

Вихідна концентрація заліза. Води багатьох підземних водоносних горизонтів України мають підвищений вміст заліза, який коливається від 0,5 до 30 мг/дм<sup>3</sup> і більше, але найчастіше буває до 5 мг/дм<sup>3</sup> [5, 6]. Натурні дослідження процесу промивання пінополістирольних фільтрів були проведенні на станції знезалізнення смт Гоща, де концентрація загального заліза у підземній воді змінювалася впродовж року від 0,9 до 2,5 мг/дм<sup>3</sup> [7]. Тому нами в лабораторних умовах досліджено вхідну концентрацію заліза  $Fe_{ex} = 1 \dots 2$  мг/дм<sup>3</sup>.

Швидкість фільтрування є одним із важливих параметрів роботи водоочисних фільтрів, від якого залежить кількість затриманих забруднень в товщі засипки. Швидкість фільтрування залежить від гранулометричного складу фільтруючого матеріалу і зазвичай при нормальному режимі складає 5-12 м/год [5, 6]. В лабораторних умовах нами був досліджений діапазон швидкостей від  $V_{\phi} = 3$  м/год до  $V_{\phi} = 7$  м/год.

Тривалість промивання. В середньому тривалість промивання встановлюється на основі контролю за кінетикою вимивання забруднень із засипки при різних інтенсивностях промивного потоку [1, 5, 6]. При недостатній тривалості промивання забруднення, які залишилися в фільтруючій засипці, можуть збільшуватися, що призводить до зростання втрат напору, зниження швидкості фільтрування та скорочення фі-

льтроциклу. З іншої сторони, якщо тривалість промивання підвищена, спостерігається перевитрати промивної води. Таким чином, можна стверджувати, що є така тривалість промивання, яка забезпечує найкращі умови роботи фільтрів. На практиці зазвичай промивання проводять до повного освітлення промивної води, використовуючи візуальні дані. Результати наших лабораторних досліджень вказують на достатність промивання пінополістирольної засипки з еквівалентним діаметром гранул  $d_{екв.} = 2,8$  мм та висотою  $h_{зас.} = 1$  м, тривалістю фільтрування  $T_{ф} = 8$  год, в більшості випадків впродовж  $t_{пр} = 2$  хв.

Відносне розширення. Основним завданням промивання фільтруючої засипки є встановлення такого відносного розширення, при якому забезпечувалося практично повне вимивання забруднень. Згідно літератури [1, 5, 6], найбільш оптимальним розширенням фільтруючої засипки є 30...50%. При дослідженні фільтруючої пінополістирольної засипки з еквівалентним діаметром гранул  $d_{екв.} = 2,8$  мм, насипною густиною  $\rho_n = 20$  кг/м<sup>3</sup> досягти бажаного розширення було дуже складно, максимально наблизити відносне розширення нам вдалося до 10%. Досліди проводилися у змінному режимі напору води (від 0,5 м до 0) над утримуючою решіткою пінополістирольного фільтру.

Аналіз факторів дозволить отримати уявлення про параметр оптимізації і про фактори, які можуть впливати на процес промивання пінополістирольної засипки. Після визначення числа факторів та аналізу результатів наших досліджень були вибрані інтервали варіювання табл. 1.

Таблиця 1

Рівні факторів і інтервали варіювання

Фактори	Рівні факторів			Інтервал варіювання
	-1	0	+1	
$x_1$ – вихідна концентрація заліза $C_{ек.}$ , мг/дм <sup>3</sup>	1	1,5	2	0,5
$x_2$ – швидкість фільтрування $V_{ф}$ , м/год	3	5	7	2
$x_3$ – тривалість промивання $t_{пр}$ , год	0,008	0,021	0,034	0,013
$x_4$ – відносне розширення $e$ , %	2,5	6,65	10,8	4,15

В таблиці  $x_1, x_2, x_3, x_4$  – кодовані значення, яким відповідають варіювані фактори; (+1) та (-1) – кодовані значення факторів, які відповідають верхньому та нижньому рівню.

План досліджень проводився залежно від передбаченої математич-

ної моделі дослідного процесу

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_k). \quad (1)$$

Математичну модель можна шукати серед поліномів, тобто невідому аналітичну функцію можна апроксимувати поліномом  $n$ -степеня. Експерименти потрібні для того, щоб знайти чисельні значення коефіцієнтів поліному. Необхідно знайти такий поліном, який буде вміщувати як можна менше коефіцієнтів та задовольняти вимогам, які висунуті до моделі, та при цьому необхідно, щоб вона була адекватною.

Для реалізації завдання приймаємо план досліджень типу  $2^k$ , де  $k = 4$  ( $k$  – число факторів) [8, 9, 10]. Математична модель повнофакторного експерименту типу  $k = 4$  має вигляд:

$$y(x_1, \dots, x_k) = b_0 + \sum_{i=1}^k b_i \cdot x_i + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^k b_{ij} \cdot x_i \cdot x_j + \dots + \sum_{\substack{i,j,\dots,n=1 \\ i \neq j \neq \dots \neq n}} b_{ijn} \cdot x_i \cdot x_j \cdot \dots \cdot x_n, \quad (2)$$

де  $b_0$  – вільний член,  $b_i$  – лінійні ефекти,  $b_{ij}$  – ефекти парної взаємодії,  $b_{ijn}$  – ефекти потрійної взаємодії.

Коефіцієнти рівняння регресії визначаються за формулами

$$b_0 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m y_i; \quad (3)$$

$$b_i = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_{yi} y_i; \quad (4)$$

$$b_{ln} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_{yi} x_{in} y_i \quad (\text{де } l \neq n). \quad (5)$$

Таблиця 2

Коефіцієнти рівняння регресії

$b_0$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$	$b_{12}$	$b_{13}$	$b_{14}$	$b_{23}$	$b_{24}$	$b_{34}$
16,61	0,52	-1,65	-0,15	0,8	-0,01	0,05	-0,17	0,05	-0,23	-0,024

Визначаємо статистичні характеристики. Дисперсія відтворюваності розраховується за формулою

$$S_{\{y\}}^2 = \frac{\sum_{u=1}^N \sum_{i=1}^r (y_{ui} - \bar{y}_u)^2}{N(r-1)} = \frac{2,56}{16(3-1)} = 0,08, \quad (6)$$

де  $\sum_{i=1}^r$  – сума по строкам матриці;  $\sum_{u=1}^N$  – сума по стовбцям матриці;

$r$  – число повторних дослідів;  $N$  – загальне число точок плану.

Таблиця 3

Повний факторний експеримент для чотирьох факторів

Точки плану	Фактори				$I, (\text{л/с}\cdot\text{м}^2)$			Середнє арифметичне значення інтенсивності
	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$\bar{y}_u$
1	1	1	1	1	15,3	15,8	15,9	15,67
2	1	1	1	-1	15,1	15,2	15,3	15,2
3	1	1	-1	1	15,65	15,96	15,81	15,81
4	1	1	-1	-1	14,85	14,9	15,9	15,22
5	1	-1	1	1	20,1	19,4	19,5	19,67
6	1	-1	1	-1	17,42	17,83	17,53	17,59
7	1	-1	-1	1	19,82	19,72	20,14	19,89
8	1	-1	-1	-1	17,93	17,85	18,22	18,00
9	-1	1	1	1	15,2	15,1	15,4	15,23
10	-1	1	1	-1	13,4	13,1	13,5	13,33
11	-1	1	-1	1	15,22	15,32	15,71	15,42
12	-1	1	-1	-1	13,72	13,92	13,82	13,82
13	-1	-1	1	1	18,2	18,3	18,6	18,37
14	-1	-1	1	-1	16,3	16,6	16,9	16,60
15	-1	-1	-1	1	19,42	19,13	19,12	19,22
16	-1	-1	-1	-1	16,32	16,62	17,22	16,72
Сума								265,76

Середнє квадратичне відхилення визначається

$$S_{\{y_u\}} = \sqrt{\frac{\sum_{u=1}^N \sum_{i=1}^r (y_{ui} - \bar{y}_u)^2}{N(r-1)}} = \sqrt{0,08} = 0,28 \cdot \quad (7)$$

Середньоквадратичну похибку при визначенні коефіцієнтів розраховуємо за формулою [4, 5, 6]

$$S_{\{b_0\}} = S_{\{b_i\}} = S_{\{b_j\}} = \frac{S_{\{y_u\}}}{\sqrt{N_1}} = \frac{0,28}{\sqrt{16}} = 0,07 \cdot \quad (8)$$

Слід виявити незначні коефіцієнти, які в математичній моделі можна порівняти до нуля. Для цього використовується критерій Стюдента, для даного прикладу при  $f_{\{y\}} = N(r-1) = 16(3-1) = 32$  отримуємо  $t_{табл.} =$

2,04 [10, 11].

Розрахункове значення  $t_p$  визначасмо за формулою

$$t_{p\{b_{ij}\}} = \frac{|b_{ij}|}{S_{\{b_{ij}\}}} \quad (9)$$

Таблиця 4

Розрахункові значення критерію Стьюдента для кожного  
коєфіцієнта та при їх взаємодії

$t_{p(1)}$	$t_{p(2)}$	$t_{p(3)}$	$t_{p(4)}$	$t_{p(12)}$	$t_{p(13)}$	$t_{p(14)}$	$t_{p(23)}$	$t_{p(24)}$	$t_{p(34)}$
7,37	-23,3	-2,15	11,31	-0,14	0,76	-2,43	0,69	-3,26	-0,33

Оскільки  $t_{p(12)}, t_{p(13)}, t_{p(23)}, t_{p(34)} < t_{табл}$ , коєфіцієнти  $b_{(12)}, b_{(13)}, b_{(22)}, b_{(34)}$  незначні тому враховувати їх для оптимізації процесу недоцільно.

Таблиця 5

Розрахунок дисперсії відтворюваності по матриці

Точки плану $u$	$\left(y_1 - \bar{y}_u\right)^2$	$\left(y_2 - \bar{y}_u\right)^2$	$\left(y_3 - \bar{y}_u\right)^2$	$\sum S^2_{\{y\}}$
1	0,134	0,018	0,054	0,207
2	0,01	0	0,01	0,020
3	0,025	0,024	0,000	0,048
4	0,134	0,100	0,467	0,702
5	0,188	0,071	0,028	0,287
6	0,030	0,056	0,004	0,090
7	0,005	0,0300	0,061	0,096
8	0,0049	0,0225	0,0484	0,076
9	0,001	0,018	0,028	0,047
10	0,004	0,054	0,028	0,087
11	0,039	0,009	0,086	0,134
12	0,010	0,010	0,000	0,020
13	0,028	0,004	0,054	0,087
14	0,090	0,000	0,090	0,180
15	0,039	0,009	0,011	0,058
16	0,160	0,010	0,250	0,420
Сума				2,56

Із врахуванням всіх коєфіцієнтів, які суттєво впливають на математичну модель оптимізації режиму промивання, її можна записати у наступному вигляді:

$$y = 16,56 + 0,52x_1 - 1,65x_2 - 0,15x_3 + 0,80x_4 - 0,17x_1x_4 - 0,22x_2x_4 \quad (10)$$

Перевіримо адекватність отриманого рівняння регресії. Згідно цього рівняння визначимо розрахункове значення  $\bar{y}$  для кожного рядку

матриці.

$\bar{y}_1 = 16,56 + 0,52(+1) - 1,65(+1) - 0,15(+1) + 0,80(+1) - 0,17(+1)(+1) - 0,22(+1)(+1)$ . Всі дані заносимо в табл. 6.

Таблиця 6

Розрахунок дисперсії адекватності

Точки плану	$\bar{y}$	$(\bar{y} - \bar{y}_u)$	$(\bar{y} - \bar{y}_u)^2$
$\bar{y}_1$	15,73	0,06	0,00
$\bar{y}_2$	14,93	-0,27	0,07
$\bar{y}_3$	16,03	0,23	0,05
$\bar{y}_4$	15,24	0,02	0,00
$\bar{y}_5$	19,48	-0,18	0,03
$\bar{y}_6$	17,77	0,17	0,03
$\bar{y}_7$	19,79	-0,10	0,01
$\bar{y}_8$	18,07	0,07	0,01
$\bar{y}_9$	15,03	-0,20	0,04
$\bar{y}_{10}$	13,55	0,21	0,05
$\bar{y}_{11}$	15,33	-0,08	0,01
$\bar{y}_{12}$	13,85	0,03	0,00
$\bar{y}_{13}$	18,79	0,42	0,18
$\bar{y}_{14}$	16,38	-0,22	0,05
$\bar{y}_{15}$	19,09	-0,13	0,02
$\bar{y}_{16}$	16,69	-0,03	0,00
Сума			0,54

Дисперсію адекватності  $S_{ad}^2$  визначаємо за формулою

$$S_{ad}^2 = \frac{r}{N_1 - m} \sum_{u=1}^{N_1} (\bar{y} - \bar{y}_u)^2. \quad (11)$$

$$S_{ao}^2 = \frac{0,54 \cdot 3}{16 - 7} = 0,18.$$

Для оцінки однорідності дисперсії використовуємо  $F$ -критерій Фішера для нашого випадку, коли  $S_{ao}^2 > S_{[u]}^2$  розрахункове  $F_p$  знаходиться за формулою

$$F_p = \frac{S_{ao}^2}{S_{[y]}^2} = \frac{0,18}{0,08} = 2,27.$$

Знаходимо табличне значення критерію Фішера  $F_T$  по інтерполяції при  $f_y = 16(3 - 1) = 32$  та  $f_{ao} = 16 - 7 = 9$ ,  $F_T = 2,28$  [10, 11].

Оскільки  $F_p = 2,27 < F_T = 2,28$  дане рівняння регресії є адекватним.

Проведемо інтерполяцію отриманої моделі в натуральні величини:

$$I = 16,56 + 0,52 \left( \frac{C_{\text{вх}} - 1,5}{0,5} \right) - 1,65 \left( \frac{V_{\text{ф}} - 5}{2} \right) - 0,15 \left( \frac{t_{\text{пр}} - 0,021}{0,013} \right) + 0,8 \left( \frac{e - 6,65}{4,15} \right) - 0,17 \left( \frac{C_{\text{вх}} - 1,5}{0,5} \right) \left( \frac{e - 6,65}{4,15} \right) - 0,22 \left( \frac{V_{\text{ф}} - 5}{2} \right) \left( \frac{e - 6,65}{4,15} \right) \quad (12)$$

Після спрощення отримаємо рівняння регресії для визначення інтенсивності промивного потоку.

$$I = 16,39 + 1,58C_{\text{вх}} - 0,65V_{\text{ф}} - 11,54t_{\text{пр}} + 0,32e - 0,08C_{\text{вх}} \cdot e - 0,026V_{\text{ф}} \cdot e \quad (13)$$

**Висновок.** Дане рівняння регресії можна використовувати для прогнозування оптимальної інтенсивності промивання пінополістирольних фільтрів після фільтроциклів із вихідною концентрацією заліза  $C_{\text{вх}}$  = 1,0 до 2,0 мг/дм<sup>3</sup>, швидкістю фільтрування  $V_{\text{ф}}$  = 3 до 7 м/год.

1. Грабовский П. А. Промывка водоочисных фильтров / П. А. Грабовский, Г. М. Ларкина, В. И. Прогульный // Одесса : Изд-во «Optimum», 2012. – 240 с. 2. Орлов В. О. Знезалізнення підземних вод спрощеною аерацією та фільтруванням. Монографія / В. О. Орлов. – Рівне : НУВГП, 2008. – 158 с. 3. Минц Д. М. Гидравлика зернистых материалов / Д. М. Минц, С. А. Шуберт. – М. : Изд-во минкомунхоза РСФСР, 1957. – 111 с. 4. Тодес О. М. Апараты с кипящим зернистым слоем: Гидравлические и тепловые основы работы / О. М. Тодес, О. Б. Цитович. – Л. : Химия, 1981. – 296 с. 5. Очищення природної води на пінополістирольних фільтрах [монографія] / В. О. Орлов, С. Ю. Мартинов, А. М. Орлова, В. О. Зошук, Н. Л. Мінаєва, С. О. Куницький, М. М. Меддур, М. М. Трохимчук. – Рівне : НУВГП, 2012. 6. Орлов В. О. Водоочисні фільтри із зернистою засипкою. [монографія] / В. О. Орлов. – Рівне : НУВГП, 2005. 7. Реконструкція водоочисного комплексу смт Гоща / В. О. Орлов, С. Ю. Мартинов, С. О. Куницький, М. М. Меддур // Вісник НУВГП : збірник наукових праць. – Рівне, 2011. – Вип. 3 (55). – С. 37–43. 8. Адляр Ю. П. Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий / Ю. П. Адляр, Е. В. Маркова, Ю. В. Грановский. – М. :

Наука, 1976. – 278 с. **9.** Барковський В. В. Теорія ймовірностей та математична статистика / В. В. Барковський, Н. В. Барковська, О. К. Лопатін. – Київ : ЦУЛ, 2002. – 448 с. – Серія: Математичні науки. **10.** Большов Л. Н. Таблицы математической статистики / Л. Н. Большов, Н. В. Смирнов. – М. : Наука, 1983. – 416 с. **11.** Рекомендации по применению методов математического планирования эксперимента в технологии бетона. – М. : НИИЖБ, 1982.

Рецензент: д.т.н., професор Орлов В. О. (НУВГП)

---

**Meddour M. M., Post-graduate Student** (National University of Water Management and Nature Resources Use, Rivne)

### **MATHEMATICAL MODELING OF FOAMPOLYSTYRENE DOWNLOADS LAVAGE PROCESS**

**These results of research the process lavage of foampolystyrene filters under laboratory conditions and the influence of various factors on dirty capacity backfill of filter and and kinetics of washing out contaminants detainees.**

**Keywords: regeneration, foampolystyrene filling, the regression equation, the intensity of flushing.**

---

**Меддур М. М., аспирант** (Национальный университет водного хозяйства и природоиспользования, г. Ровно)

### **МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ПРОМЫВАНИЯ ПЕНОПОЛИСТИРОЛЬНОЙ ЗАГРУЗКИ**

**Приведенные результаты лабораторных исследований процесса промывки пенополистирольных фильтров, установлено влияние различных факторов на грязеемкость фильтрующей загрузки.**

**Ключевые слова: регенерация, пенополистирольная загрузка, уравнение регрессии, интенсивность промывки.**

---