МАТЕРІАЛИ

VIII МІЖНАРОДНОЇ НАУКОВО-ПРАКТИЧНОЇ КОНФЕРЕНЦІЇ

"НАУКА І ОСВІТА '2005"

7-21 лютого 2005 року

Том 62
ТЕХНІКА

Дніпропетровськ
Наука і освіта
2005

Матеріали VIII Міжнародної науково-практичної конференції "Наука і освіта '2005". Том 62. Техніка. - Дніпропетровськ: Наука і освіта, 2005. - 64 с.

ISBN 966-7191-86-9

У збірнику містяться матеріали VIII Міжнародної науково-практичної конференції "Наука і освіта '2005" з техніки.
Для студентів, аспірантів та викладачів.

ISBN 966-7191-86-9

© Колектив авторів, 2005
© Наука і освіта, 2005

4. Гоноровский И. С. Радиотехнические цепи и сигналы: Учебник для вузов. - 4–е изд., перераб. и доп. - М.: Радио и связь, 1986. - 512 с.

Рудик А.В., Дрючин О.О., Семенов А.О.
Вінницький національний технічний університет

ДО ВИЗНАЧЕННЯ ТОЧНОСТІ РЕЗУЛЬТАТІВ ВИМІРЮВАНЬ

Встановлення фундаментальних констант, а також вимірювання в науці та виробництві пов'язані з наведенням значення фізичної величини, що визначається, а також точності її вимірювання. Такі дані необхідні для порівняння результатів, отриманих різними експериментаторами, для уточнення значення фізичних констант на основі вимірювань, проведених в різний час та різними методами, і т.і. Нажаль, питання про методи визначення похибок результатів вимірювань досі залишається дискусійним. Зокрема, одним з спірних питань є розділ похибок на випадкові та систематичні складові. Традиційне представлення про систематичну похибку пов'язують з її незмінністю від вимірювання до вимірювання, а випадкову складову вважають такою, що зменшується в залежності від кількості вимірювань. Однак таке розуміння складових похибки вимірювань призводить до деяких практичних ускладнень. Справа в тому, що до початку вимірювань об'єктивно важко зробити висновок, яка складова похибки має місце в процесі вимірювань. Тому важко спланувати процес вимірювань та визначити величину систематичної та випадкової складових похибки.

Однак традиційна точка зору на складові похибки вимірювань досить поширена, тому для того, щоб похитнути впевненість в її вірності, розглянемо ситуацію з багатократним вимірюванням деякої фізичної величини. Будемо вважати, що проведено N вимірювань деякої фізичної величини та отримано ряд результатів $x_1,...,x_j,...,x_N$. При взаємному калібруванні міри відповідної фізичної величини допущена одна і та сама похибка, тому замість вимірюваного значення x_j розглядають скореговане значення

$$y_j = x_j + \alpha, \tag{1}$$

де α – можливий загальний зсув (зміщення, обумовлене неточним калібруванням). Оскільки корекція проведена, можна покласти, що найбільш ймовірне значення α дорівнює нулю, однак невизначеною залишається оцінка його середньоквадратичного значення (СКЗ) $S_\alpha > 0$.

Для подальших міркувань скористаємося так званим загальним законом поширення похибки, сутність якого з'ясуємо далі. Якщо *y* є відомою функцією N змінних x_j, тобто $y = f(x_1,...,x_j,...,x_N)$, то малі зміни Δx_j призводять до змін функції *y*, які приблизно можна виразити таким чином:

$$\Delta y \approx \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_j} \Delta x_j. \tag{2}$$

Квадрат цієї величини в першому наближенні дорівнює

$$(\Delta y)^2 \approx \sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\Delta x_j\right)^2 + \sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\Delta x_j\right)\times\sum_{\substack{k=1\\(k\neq j)}}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\Delta x_k\right). \quad (3)$$

Позначивши

$$E\left\{\left(\Delta x_j\right)^2\right\}=\sigma_j^2 \text{ та } E\left\{\Delta x_j \Delta x_k\right\}=\sigma_{jk}, \quad (4)$$

(де E – знак математичного очікування) та підставивши ці значення у співвідношення (3), отримаємо:

$$\sigma_y^2 \approx \sum_j \left(f'_j \sigma_j\right)^2 + \sum_{j\neq k} f'_j f'_k \sigma_{jk}, \quad (5)$$

де $f'_j = \dfrac{\partial f}{\partial x_j}$, а додавання відбувається від 1 до N.

Це рівняння і є відомим законом поширення похибки. Якщо вважати, що $\sigma_{jj} = \sigma_j^2$, то останнє рівняння набуде вигляду

$$\sigma_y^2 \approx \sum_{j,k} f'_j f'_k \sigma_{jk}. \quad (6)$$

В більшості практичних випадків величини σ_{jk} невідомі, тому замість них використовуються їх оцінки. Так, якщо проведено *m* вимірювань для величини x_j, тобто $x_{j1}, x_{j2}, ..., x_{jm}$, то замість σ_j^2 потрібно використовувати

$$S_j^2 = \frac{1}{m-1}\left[\sum_i x_{ji}^2 - \frac{1}{m}\left(\sum_i x_{ji}\right)^2\right], \quad (7)$$

а замість σ_{jk} необхідно використовувати

$$S_{jk} = \frac{1}{m-1}\left[\sum_i x_{ji} x_{ki} - \frac{1}{m}\left(\sum_i x_{ji}\right)\cdot\left(\sum_i x_{ki}\right)\right]. \quad (8)$$

В двох останніх співвідношеннях додавання проводиться від 1 до *m*.

Отримані співвідношення показують, що традиційна думка про те, що незалежність так званих випадкових та систематичних складових похибки вимірювань дає можливість не враховувати їх корельованість та спростити обчислення сумарною похибкою вимірювань, є хибною, оскільки ці складові корельовані іншим чином.

Повертаючись до розглянутого прикладу, позначимо похибку одиничного вимірювання x_j через S_x та будемо вважати, що всі вимірювання x_j незалежні один від одного. Тоді середнє значення

$$\bar{y} = \frac{1}{N}\sum_j y_j = \frac{1}{N}\sum_j x_j + \alpha. \quad (9)$$

Похибку оцінки такого середнього можна обчислити декількома способами. Спочатку будемо вважати, що

$$\bar{y} = f_1\left(x_1, x_2, ..., x_N; \alpha\right). \quad (10)$$

Оскільки x_j та α некорельовані, то враховуючи, що $\frac{\partial f_1}{\partial x_j} = 1$ та $\frac{\partial f_1}{\partial \alpha} = 1$, з рівняння (5) отримаємо:

$$S_{\bar{y}}^2 = \sum\left(\frac{1}{N}S_x\right)^2 + (1 \cdot S_\alpha)^2 = \frac{S_x^2}{N} + S_\alpha^2. \tag{11}$$

Інший можливий метод оцінки точності визначення $\bar{y}$ полягає у використанні співвідношення виду

$$\bar{y} = f_2(y_1, y_2, ..., y_N). \tag{12}$$

В цьому випадку величини дисперсії та коваріації, що входять до співвідношення (5), визначаються таким чином:

$$S_j^2 = \mathrm{var}(y_j) = S_x^2 + S_\alpha^2; \qquad S_{jk} = \mathrm{cov}(y_j, y_k).$$

При цьому якщо $E(\alpha)$ та $\mathrm{cov}(x_j, x_k)$ достатньо малі, то $S_{jk} = S_\alpha^2$. Тому при $\frac{\partial f_2}{\partial y_j} = \frac{1}{N}$ дисперсію оцінки $\bar{y}$ можна визначити таким чином:

$$S_{\bar{y}}^2 = \frac{1}{N^2}\left[N(S_x^2 + S_\alpha^2) + N(N-1)S_\alpha^2\right] = \frac{S_x^2}{N} + S_\alpha^2, \tag{13}$$

що є ідентичним співвідношенню (11). Такий результат має важливе значення, тому що на початку проведення вимірювань не було інформації про те, якого роду похибка має місце при вимірюваннях. Просто результати вимірювань були коректно описані, а отримані значення S_x та S_α можна інтерпретувати як оцінки випадкової та систематичної складових похибки тільки для розв'язання конкретної задачі. Наприклад, якщо калібрування міри фізичної величини проводилася на різних зразкових приладах, то S_α можна також розглядати як випадкову складову похибки вимірювань. Також необхідно зазначити, що оцінки випадкової та систематичної складових похибки вимірювань додаються геометрично. Крім того, систематична складова похибки оцінюється середньоквадратичним відхиленням (СКВ) S_α. В загальному випадку, коли необхідно приймати до уваги дисперсії та коваріації, немає необхідності розрізняти складові похибки вимірювань.

Більш складна задача постає в тому випадку, коли немає можливості проводити багатократні вимірювання, однак точність їх необхідно оцінити. В цьому випадку спираються на досвід, а для характеристики точності вимірювань користуються довірчим інтервалом, в якому з деякою заздалегідь встановленою ймовірністю знаходиться дійсне значення вимірюваної фізичної величини. Точне визначення границь довірчого інтервалу потребує знання закону розподілу похибки вимірювань, що в загальному випадку невідомо. Крім того, саме визначення довірчого інтервалу потребує, щоб дійсне значення вимірюваної величини з однаковою ймовірністю знаходилося в будь-якій точці інтервалу, що ускладнює перехід від фактичного закону розподілу похибок до рівномірного, яким характеризується довірчий інтервал.