УДК 519.21

ПРО СИСТЕМУ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ ТИПУ M/M/2/N З КЕРОВАНИМ ВХІДНИМ ПОТОКОМ

О. В. Лесько, Р. П. Немкович
студенти 6 курсу, група ПМ-61м, навчально-науковий інститут автоматики, кібернетики та обчислювальної техніки
Науковий керівник – к. ф.-м. н., доц. О. В. Прищепа

Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне, Україна

У статті розглянуто урізану модель двоканальної системи масового обслуговування з однією повторною спробою почати обслуговування та керованим вхідним потоком. Запропоновано ефективний алгоритм підрахунку стаціонарних ймовірностей з використанням ланцюгових дробів. Розглянуто оптимізаційну задачу керування інтенсивністю вхідного потоку в класі порогових стратегій.
Ключові слова: стохастична система з повторними викликами, процес обслуговування, стаціонарні ймовірності, порогова стратегія керування, задача оптимізації.

В статье рассматривается урезанная модель двухканальной системы массового обслуживания с одной повторной попыткой начать обслуживание и управляемым входным потоком. Предлагается эффективный алгоритм подсчета стационарных вероятностей с использованием цепных дробей. Рассматривается оптимизационная задача управления интенсивностью входного потока в классе пороговых стратегий.
Ключевые слова: стохастическая система с повторными вызовами, процесс обслуживания, стационарные вероятности, пороговая стратегия управления, задача оптимизации.

The truncated model of the retrial queue with two-channel, a single retrial attempt to begin service and controlled input flow is considered. The effective algorithm for calculation of the stationary probabilities with use of the finite continued fractions is obtained. The optimization problem to control the input flow in the class of threshold strategies is considered.
Keywords: retrial queue, service process, stationary probabilities, threshold control strategy, optimization problem.

Стрімкий розвиток телекомунікаційних та комп’ютерних мереж вимагає побудови нових моделей систем масового обслуговування, що ефективно відображають реальні процеси сьогодення. Саме тому варто розглядати системи з повторними викликами, які можуть використовуватися для розв’язання практичних задач без втрати точності в розрахунках. Керування параметрами стохастичних систем є одним із напрямків їх дослідження. Такий підхід надає можливість оптимізувати роботу систем та отримати максимальний прибуток від їх роботи.

Для систем з повторними викликами характерним є те, що вимоги, які надійшли до системи при зайнятості всіх каналів обслуговування, можуть повертатися для обслуговування після деякого періоду часу. Більш детально аналіз систем з повторними викликами проведено в роботах [1] та [2]. При цьому для таких систем покладають, що повторне звернення здійснюються до тих пір, поки вимога не отримає обслуговування. Це є лише наближенням реальних ситуацій, тому що число повторних звернень до системи часто буває обмеженим, що розглянуто в роботах [3; 5; 6]. Для пошуку стаціонарних розподілів стохастичних систем з обмеженим числом повторів в даних роботах було запропоновано ряд підходів, які полягають у використанні методу генератрис, теореми про рівність потоків ймовірностей через замкнений контур, методу, що полягає в апроксимації вихідної системи системою з обмеженим числом джерел повторних викликів та у використанні теорії процесів квазі народження та загибелі.

Враховуючи наявні дослідження постає питання знаходження ефективних алгоритмів для підрахунку стаціонарних ймовірностей та розв’язання задач керування інтенсивністю вхідного потоку для двохканальних систем з обмеженим числом повторів.

Будемо розглядати систему типу $M/M/2/N$ з однієї повторною спробою, яку формально подамо наступним чином. На вхід системи, що має два прилади, ззовні надходять вимоги для обслуговування. Якщо у момент надходження є хоча б один вільний прилад, то вимога відразу починає обслуговуватися і після цього залишає систему. Час обслуговування – показниково розподілена випадкова величина з параметром μ. Якщо всі прилади зайняті, то вимога стає джерелом повторних викликів та повторно намагається отримати обслуговування через випадковий час, який має показниковий розподіл з параметром ν. Вимога, яка при повторному зверненні знайшла прилад зайнятим, залишає систему та не отримує обслуговування. При умові, що всі прилади зайняті та існує N джерел повторних викликів, нові вимоги при надходженні втрачаються системою назавжди. Інтенсивність вхідного потоку дорівнює λ_j, $j = 0,1,...$ та залежить від кількості джерел повторних викликів.

Алгоритм підрахунку стаціонарних імовірностей. Стан системи в будь-який момент часу $t \ge 0$ є двовимірним ланцюгом Маркова з неперервним часом $X(t) = (X_1(t), X_2(t))$, $t \ge 0$ у фазовому просторі $S = \{0,1,...,c\} \times \{0,1,...,N\}$, де $X_1(t)$ – кількість зайнятих приладів, $X_2(t)$ – кількість джерел повторного виклику. Інфінітезимальні характеристики $a_{(i,j)(i',j')}$, $(i,j),(i',j') \in S$ ланцюга Маркова $X(t)$ визначаються у вигляді (1)-(3):

1) якщо $i = 0, 1$; $0 \le j \le N$, то

$$a_{(i,j)(i',j')} = \begin{cases} \lambda_j, & \text{якщо } (i', j') = (i+1, j), \\ j\nu, & \text{якщо } (i', j') = (i+1, j-1), \\ i\mu, & \text{якщо } (i', j') = (i-1, j), \\ -(\lambda_j + i\mu + j\nu), & \text{якщо } (i', j') = (i, j), \\ 0, & \text{в іншому випадку}. \end{cases} \tag{1}$$

2) якщо $i = 2$; $0 \le j \le N-1$, то

$$a_{(i,j)(i',j')} = \begin{cases} \lambda_j, & \text{якщо } (i', j') = (2, j+1), \\ 2\mu, & \text{якщо } (i', j') = (1, j), \\ j\nu, & \text{якщо } (i', j') = (2, j-1) \\ -(\lambda_j + 2\mu + j\nu), & \text{якщо } (i', j') = (2, j), \\ 0, & \text{в іншому випадку}. \end{cases} \tag{2}$$

3) якщо $i = 2$; $j = N$, то

$$a_{(i,j)(i',j')} = \begin{cases} 2\mu, & \text{якщо } (i', j') = (1, N), \\ N\nu, & \text{якщо } (i', j') = (2, N-1), \\ -(2\mu + N\nu), & \text{якщо} (i', j') = (2, N) \\ 0, & \text{в іншому випадку}. \end{cases} \tag{3}$$

Оскільки фазовий простір процесу $X(t)$ скінченний, то для нього завжди існує стаціонарний режим і через $p_{ij}^{(N)} = \lim_{t\to\infty}\{X_1(t)=i, X_2(t)=j\}$ будемо позначати стаціонарні ймовірності.

Введемо позначення для скінченного ланцюгового дробу:

$$\varphi_j^N = \cfrac{\gamma_{j+1}}{\beta_{j+1} + \cfrac{\gamma_{j+2}}{\beta_{j+2} + \cfrac{\dots}{\dots + \cfrac{\gamma_{N-1}}{\beta_{N-1} + \cfrac{\gamma_N}{\beta_N}}}}}, \quad j = 0, 1, \dots, N-1, \tag{4}$$

де $\gamma_j = -\dfrac{\lambda_{j-1}((\lambda_{j-1} + (j-1)\nu)^2 + (j-1)\nu\mu)}{j(j+1)\nu^2\mu}$,

$$\beta_j = -\frac{j\nu((\lambda_j + \mu + j\nu)^2 + \mu(\lambda_{j-1} + \mu + j\nu))}{j(j+1)\nu^2\mu}, \; j = 1, \dots, N-1$$

$$\gamma_N = \lambda_{N-1}((\lambda_{N-1} + (N-1)\nu)^2 + (N-1)\nu\mu),$$

$$\beta_N = N\nu((\lambda_N + \mu + N\nu)^2 + \mu(\lambda_{N-1} + \mu + N\nu)).$$

Теорема 1. Стаціонарні ймовірності p_{ij}^N, $(i, j) \in S$ системи типу $M/M/2/N$ з однією повторною спробою мають вигляд:

$$p_{0j}^N = \left(\prod_{k=0}^{j-1} \varphi_k^N\right) p_{00}^N, \; j = 1, 2, \dots, N, \quad p_{1j}^N = \frac{\lambda_j + j\nu}{\mu}\left(\prod_{k=0}^{j-1} \varphi_k^N\right) p_{00}^N, \; j = 0, 1, \dots, N,$$

$$p_{2j}^N = \frac{1}{2\mu^2}((\lambda_j + j\nu)^2 + j\nu\mu - (j+1)\nu\mu\varphi_j^N)\left(\prod_{k=0}^{j-1} \varphi_k^N\right) p_{00}^N, \; j = 0, 1, \dots, N-1,$$

$$p_{2N}^N = \frac{(\lambda_N + N\nu)^2 + N\nu\mu}{2\mu^2}\left(\prod_{k=0}^{N-1} \varphi_k^N\right) p_{00}^N,$$

$$\left(p_{00}^N\right)^{-1} = \frac{1}{2\mu^2}\left(\sum_{j=0}^{N}\left((\lambda_j + \mu + j\nu)^2 + \mu(\mu + j\nu)\right)\left(\prod_{k=0}^{j-1} \varphi_k^N\right) - \sum_{j=0}^{N-1}(j+1)\nu\mu\varphi_j^N\left(\prod_{k=0}^{j-1} \varphi_k^N\right)\right),$$

де φ_k^N визначаються формулою (4).

Доведення даної теореми випливає із доведення теореми 4 роботи [6]. Таким чином, за допомогою вище вказаного алгоритму ми можемо знаходити стаціонарні ймовірності системи. Існують також інші методи, з якими можна ознайомитися в роботах [3], [5], [6]. У випадку двох та більше повторних спроб поширити отриманий результат неможливо. В таких випадках варто використовувати результати теорії процесів квазі народження та загибелі та будувати рекурентні обчислювальні алгоритми знаходження стаціонарних ймовірностей для процесу обслуговування.

Оптимальний вибір параметрів. Змінний характер інтенсивності вхідного потоку в моделі, що розглядається, дає можливість ставити і розв'язувати для них оптимізаційні задачі. Розглянемо порогову стратегію, яка задаються порогом H. Процес функціонування даної системи при пороговій стратегії H наступний. Фіксують одне невід'ємне ціле число H, яке називається порогом. Якщо в деякий момент часу $t \geq 0$ кількість джерел повторних викликів в системі не перевищує H, то система функціонує в першому режимі, і інтенсивність вхідного потоку дорівнює λ_1. Якщо кількість повторних викликів більша за H, то система функціонує у другому режимі, при цьому інтенсивністю вхідного потоку λ_2.

Виходячи з формулювання вибору порогу H, маємо:

$$\lambda_j = \begin{cases} \lambda_1, & j = 0, ..., H, \\ \lambda_2, & j = H+1, ... \end{cases}$$

Введемо позначення: $W_i(t,H)$ – число вимог, обслуговування яких завершено за час t, при роботі системи в i-му режимі, $i = 1, 2$; $W_3(t,H)$ – число вимог, які отримали відмову в обслуговуванні та стали повторними викликами; $W_4(t,H)$ – число перемикань інтенсивності вхідного потоку; $W_5(t,H)$ – число вимог, які залишили систему без обслуговування після невдалої повторної спроби. Якщо існують границі $\lim_{t\to\infty} t^{-1} W_i(t,H)$, то будемо позначати їх через $W_i(H)$, $i = \overline{1,5}$.

Розглянемо оптимізаційну задачу:

$$W(H) = C_1 W_1(H) + C_2 W_2(H) - C_3 W_3(H) - C_4 W_4(H) - C_5 W_5(H) \to \max, \qquad (5)$$
$$H \in \{0,1,..., N\},$$

де C_1 – прибуток, пов'язаний з обслуговуванням однієї вимоги в першому режимі; C_2 – прибуток, пов'язаний з обслуговуванням однієї вимоги в другому режимі; C_3– штраф за відмову в обслуговуванні; C_4– штраф за перемикання інтенсивності вхідного потоку; C_5– штраф за втрату вимоги після невдалої повторної спроби.

Граничні функціонали $W_i(H)$, $i = \overline{1,5}$ визначатимуться через стаціонарні ймовірності системи на основі теореми 1:

$$W_1(H) = \mu \sum_{j=0}^{H} \left(p_{1j} + 2p_{2j}\right), \ W_2(H) = \mu \sum_{j=H+1}^{N} \left(p_{1j} + 2p_{2j}\right), \ W_3(H) = \lambda_1 \sum_{j=0}^{H} p_{2j} + \lambda_2 \sum_{j=H+1}^{N} p_{2j},$$

$$W_4(H) = \lambda_1 p_{1H} + (H+1)\nu\left(p_{0H+1} + p_{1H+1} + p_{2H+1}\right), \ W_5(H) = \nu \sum_{j=1}^{N} j p_{2j}.$$

Розв'язком задачі (5) є такий поріг H, який максимізує середній прибуток від роботи системи. Подібні оптимізаційні задачі розглянуті в працях [3]-[5].

Для прикладу розглянемо систему з параметрами: $c = 2$, $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = 3$, $\mu = 3$, $\nu = 3$, $C_1 = 96$, $C_2 = 75$, $C_3 = 8$, $C_4 = 4$, $C_5 = 45$. За допомогою розробленого програмного додатку знайдено, що при $H = 4$ досягається максимальне значення функціоналу $W(H) = 251$.

В даній роботі розглянуто стохастичну двоканальну систему з однією повторною спробою почати обслуговування та керованим вхідним потоком в класі порогових стратегій. З використанням ланцюгових дробів подано стаціонарні ймовірності в явному вигляді, що дозволяє будувати функціонали якості оптимізаційної задачі із врахуванням порогової стратегії керування. Розроблено програмний додаток для пошуку оптимальної стратегії керування.

Список використаних джерел:

1. Artalejo J. R., Gomez-Corral A. Retrial Queueing Systems: A Computational Approach. Berlin : Springer, 2008. 317 p. **2.** Falin G. I., Templeton J. G. C. Retrial Queues. London : Chapman and Hall, 1997. 317 p. **3.** Лебєдєв Є. О., Прищепа О. В. Системи з повторними викликами, нетерплячими вимогами та керованим вхідним потоком. *Журнал обчислюваної та прикладної математики*. 2007. № 2(95). С. 59–64. **4.** Лебєдєв Є. О., Усар І. Я. Про системи з повторними викликами та керованим вхідним потоком. *Доповіді НАН України*. 2009. № 5. С. 52–59. **5**. Прищепа О. В. Про оптимізацію систем з обмеженнями на число спроб почати обслуговування. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Фізико-математичні науки*. 2016. № 1. С. 137–142. **6.** Прищепа О. В., Лебедев Е. О. Об одной многоканальной системе массового обслуживания с повторными вызовами. *Кибернетика и системный анализ*. 2017. Т. 53, № 3. С. 127–137.