Національний університет
водного господарства
та природокористування

Міністерство освіти і науки України

Національний університет водного господарства та природокористування

А.П. Власюк, О.П. Остапчук

Математичне моделювання переносу сольових розчинів при фільтрації підземних вод у ґрунтових масивах

Монографія

Рівне – 2015

Національний університет водного господарства та природокористування

УДК 532.72:532.546:517.54:519.63
ББК 22.193:38.58
В58

Рекомендовано вченою радою Національного університету водного господарства та природокористування.
(*Протокол № 4 від 30 березня 2015 р.*)
Рекомендовано вченою радою Міжнародного економіко-гуманітарного університету імені академіка Степана Дем'янчука.
(*Протокол № 7 від 26 березня 2015 р.*)

Рецензенти:
Савула Я. Г., доктор фіз.-мат. наук, професор, Львівського національного університету ім. І. Франка;
Лаврик В. І. **,** доктор технічних наук, професор Національного університету «Києво-Могилянська академія»;
Бомба А. Я., доктор технічних наук, професор Рівненського державного гуманітарного університету.

Національний університет водного господарства та природокористування

Власюк А. П., Остапчук О. П.
В58 Математичне моделювання переносу сольових розчинів при фільтрації підземних вод у ґрунтових масивах: Монографія. – Рівне : НУВГП, 2015. – 214 с.
ISBN 978-966-327-314-3

В монографії досліджено процеси масопереносу та тепло-масопереносу при фільтрації сольових розчинів в ґрунтових масивах, а також процеси міграції радіонуклідів у ґрунтах. Побудовано математичні моделі даних процесів, які досліджено з використанням числових методів. Наведені числові експерименти засвідчили значну відмінність процесів тепло-масопереносу в ґрунтових середовищах при фільтрації сольових розчинів у порівнянні з фільтрацією чистої води.

Для наукових працівників, викладачів, аспірантів та студентів.

Бібліогр.: 211 найм.

УДК 532.72:532.546:517.54:519.63
ББК 22.193:38.58

ISBN 978-966-327-314-3

© Власюк А. П., Остапчук О. П., 2015
© Національний університет водного господарства та природокористування, 2015

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Зміст

Вступ …… **7**

Розділ 1 **Основні математичні моделі процесу масопереносу при фільтрації сольових розчинів у ґрунтових середовищах..... 10**

1.1 Короткий огляд наукової літератури з математичного моделювання фільтрації сольових розчинів та локалізації радіонуклідів у ґрунтових середовищах..... 10

1.2 Експериментальні дослідження параметрів фільтрації і масопереносу в ґрунтових середовищах..... 13

1.3 Фізичні закони, що описують процеси фільтрації сольових розчинів у ґрунтах..... 23

1.4 Вихідні диференціальні рівняння та залежності..... 26

1.5 Початкові та граничні умови..... 29

Розділ 2 **Одновимірні математичні моделі процесу масопереносу при фільтрації сольових розчинів у ґрунтових середовищах..... 34**

2.1 Монотонна різницева схема для нелінійного одновимірного рівняння параболічного типу, що містить першу похідну..... 34

2.2 Математичне моделювання одновимірної задачі масопереносу сольових розчинів в ґрунтових масивах при фільтрації до водозабірника..... 40

2.2.1 Постановка задачі та її математична модель..... 40

2.2.2 Числовий розв’язок задачі..... 42

2.2.3 Результати числових експериментів та їх аналіз.. 45

2.3 Математичне моделювання одновимірної задачі тепло-масопереносу при фільтрації сольових розчинів в ґрунтових масивах..... 49

2.3.1 Постановка задачі та її математична модель..... 49

2.3.2 Числовий розв’язок задачі..... 52

2.3.3 Результати числових експериментів та їх аналіз.. 55

Розділ 3 **Математичне моделювання двовимірної**

Національний університет
водного господарства
та природокористування

фільтрації сольових розчинів у ґрунтових середовищах ……..…….. 60

3.1 Математичне моделювання масопереносу при двовимірній нестаціонарній фільтрації сольових розчинів в основі ГТС..... 60

3.1.1 Постановка задачі та її математична модель…….....…… 60

3.1.2 Числове розв'язування крайової задачі масопереносу при двовимірній нестаціонарній фільтрації сольових розчинів в основі ГТС методом скінченних елементів..... 62

3.1.3 Результати числових експериментів та їх аналіз……..... 65

3.2 Математичне моделювання масопереносу при плановій стаціонарній фільтрації сольових розчинів із свердловини……..... 68

3.2.1 Математичне моделювання масопереносу при плановій стаціонарній фільтрації сольових розчинів із свердловини з круговим контуром впливу…….....….. 68

3.2.2.1 Постановка задачі……. 68

3.2.1.2 Математична модель задачі в змінних x, y фізичної площини..... 69

3.2.1.3 Математична модель задачі в змінних φ, ψ області комплексного потенціалу……... 71

3.2.1.4 Числовий розв'язок задачі……... 72

3.2.1.5 Результати числових експериментів та їх аналіз……..... 77

3.2.2 Математичне моделювання масопереносу при плановій стаціонарній фільтрації сольових розчинів із свердловини з криволінійним контуром впливу ……..... 80

3.2.2.1 Математична модель задачі в змінних φ, ψ області комплексного потенціалу……... 81

3.2.2.2 Числова побудова конформної гідродинамічної різницевої сітки в кільцевій двохзв'язній області G_w ……..... 83

3.2.2.3 Числовий розв'язок задачі масопереносу в

Національний університет водного господарства та природокористування

	двохзв'язній кільцевій області.....	86
3.2.2.4	Результати числових експериментів та їх аналіз…….....	90
3.3	Математичне моделювання масопереносу при плановій нестаціонарній фільтрації із свердловини з криволінійним контуром живлення..……...…….....	97
3.3.1	Постановка задачі.....	97
3.3.2	Математична модель задачі в змінних x, y фізичної області	98
3.3.3	Постановка задачі в змінних ξ, η комплексної області…….....	99
3.3.4	Числовий метод розв'язку задачі……	108
3.3.4.1	Числове конформне відображення двохзв'язної кільцевої області з розрізом на параметричний прямокутник…….....	108
3.3.4.2	Числовий розв'язок задачі фільтрації.....	108
3.3.4.3	Числовий розв'язок задачі масопереносу……..	113
3.3.5	Результати числових експериментів та їх аналіз….....	116
Розділ 4	**Математичне і комп'ютерне моделювання процесу міграції та локалізації радіонуклідів з використанням фільтрів-вловлювачів та дрен-вловлювачів…….....…..**	**126**
4.1	Математичне моделювання процесу вловлювання радіонуклідів при їх вертикальній міграції в горизонтальному шарі ґрунту…….....	127
4.1.1	Постановка задачі.....	127
4.1.2	Математичні моделі задачі.....	128
4.1.3	Числовий розв'язок задачі.....	131
4.1.4	Результати числових експериментів та їх аналіз…….....…….....	139
4.2	Математичне моделювання вертикальної міграції радіонуклідів в горизонтальному шарі ґрунту в неізотермічних умовах……..……	146
4.2.1	Постановка задачі та її математична модель.....…	146
4.2.2	Обчислювальний алгоритм розв'язку задачі…….	148
4.2.3	Результати числових експериментів та їх	

Національний університет
водного господарства
та природокористування

аналіз…….... 152
4.3 Математичне моделювання міграції радіонуклідів та їх локалізація за допомогою системи горизонтальних дрен-вловлювачів..... 158
4.3.1 Постановка задачі……..... 158
4.3.2 Математичні моделі задачі……..... 159
4.3.3 Числовий розв'язок задачі..... 162
4.3.3.1 Математична модель задачі в змінних φ, ψ області комплексного потенціалу……... 162
4.3.3.2 Алгоритм розв'язання задачі фільтрації……..... 166
4.3.3.3 Алгоритм розв'язання задачі массопереносу…... 168
4.3.4 Програмна реалізація задачі, результати числових експериментів та їх аналіз ……. 181
Список використаних джерел…….. 195

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Національний університет
водного господарства
та природокористування

ВСТУП

В сучасних умовах великого значення заслуговують проблеми масопереносу забруднюючих речовин фільтраційними потоками підземних вод. В якості забруднюючих речовин розуміють розчини солей. Зокрема, під сольові підпадають радіонукліди, які є наслідком радіоактивного забруднення.

В зв'язку з цим, великої уваги заслуговують питання розробки, дослідження та впровадження методів математичного моделювання для розв'язання задач, що моделюють процеси адсорбції радіонуклідів та інших хімічних забрудників в ґрунтових середовищах з метою прийняття оптимальних технічних рішень.

Питаннями дослідження процесів масопереносу розчинених в фільтраційному потоці речовин займалось багато вчених, зокрема: С. І. Нумеров, О. Н. Патрашев, М. М. Веригін, Б. С. Шержуков, В. М. Ніколаєвський, Ф. Н. Бочевер, В. І. Лаврик, І. І. Ляшко, С.І.Ляшко, А.А.Глущенко, І.В.Сергієнко, В.С.Дейнека, В. В. Скопецький, О. Я. Олійник, В. Л. Поляков, В. М. Булавацький, Я. Г. Савула, Г. А. Шинкаренко, Я. Й. Бурак, Є. Я. Чапля, О. Ю. Чернуха, А. П. Власюк, А. Я. Бомба, П. М. Мартинюк, J. Bear, K. Eriksson, A. D. Nield та ін. [1, 9-20, 29-34, 65-67, 75, 83-85, 96-107, 112-116, 137, 138, 167-169, 180, 181, 191, 198, 196, 201, 204].

Однак процеси масопереносу розчинених речовин вивчались в основному на фоні фільтрації чистої води.

В роботах А. П. Власюка, П. М. Мартинюка [65, 66] та в даній роботі процеси масопереносу вивчаються при фільтрації сольових розчинів в ґрунтових масивах, оскільки, як показали експериментальні дослідження (А. П. Власюк, М. Т. Кузло, І. А. Філатова [63, 93]), фільтрація сольового розчину в ґрунті являє собою фільтрацію слабкого електроліту. А це означає, що параметри фільтрату залежать від його концентрації. Останнє призводить до того, що побудовані математичні моделі масопереносу та тепломасопереносу сольових розчинів у ґрунтових середовищах є нелінійні, що більш адекватно описує дані процеси.

Внаслідок чорнобильської катастрофи великого радіонуклідного забруднення зазнала значна частина Волинського і Житомирського Полісся. Специфічні природні умови регіону - кисла реакція ґрунтів, бідність їх глинистими та слюдистими мінералами, висока

Національний університет водного господарства та природокористування
зволоженість території, наявність великої кількості лісів, боліт і торфовищ сприяють посиленій міграції радіонуклідів з ґрунту в рослини та по трофічних ланцюгах – дальше. Як наслідок, навіть більше як через 25 років з моменту аварії, тут спостерігаються високі рівні забруднення ґрунтів і продуктів харчування. Споживання продукції присадибних господарств, висока доля у раціоні населення ягід і грибів спричиняють високе надходження радіонуклідів в організм людини. Тому в цьому регіоні зафіксовані самі високі з уражених територій паспортні дози опромінення людей. У зв'язку з цим екологічна оцінка забруднених радіонуклідами територій, виявлення найбільш небезпечних ділянок, вивчення закономірностей зниження з часом рівнів забрудненості різних угідь від радіонуклідів є дуже актуальними питаннями [19, 20, 38, 53, 55-57, 143, 180, 181, 195, 202, 205]. Розв'язання їх дозволило б отримувати відносно чисту продукцію на забруднених землях та запобігати поширенню ареалу забруднення.

Все це потребує створення державної системи екологічної безпеки, що гарантувала б захист громадян та природи України від негативного впливу антропогенних чи техногенних чинників. При цьому забезпечення стійкого безпечного розвитку, особливо в умовах існування ризиків природних, техногенних та природно – техногенних катастроф і стихійних лих, має спиратися на фундаментальні знання причин їхнього можливого виникнення.

Подібні розрахунки виникають в задачах міграції забруднень, при прогнозі гідрохімічного режиму ґрунтів та при оцінці родючого шару ґрунту.

Тому на даний момент багато науковців звертаються до питань забруднення ґрунтових масивів радіонуклідами, розробляють схеми та моделі їх локалізації [38, 53, 55, 143, 144].

Для розв’язання такого класу задач зручно користуватися математичними моделями, оскільки моделювання дозволяє отримати попереднє пояснення і прогноз поведінки екосистем в умовах, коли теоретичний рівень дослідження в тенденціях розвитку природоохоронного середовища є недостатньо точним або ймовірнісно невизначеним [30, 68, 80, 88, 83-85, 98, 106, 110, 123, 124, 126, 133, 157, 158, 167, 180, 185].

Національний університет водного господарства та природокористування

Моделювання дуже широко використовується в різноманітних галузях науки, техніки, виробництва і є однією з характерних особливостей пізнання об'єктивної дійсності. Моделювання пов'язане з процесом створення моделей і роботою з ними. Основний зміст моделювання полягає в тому, щоб за результатами дослідів з моделями можна було дістати відповідь про характер ефектів, які пов'язані з досліджуваним об'єктом.

Математичне моделювання тісно пов’язане із розв’язанням крайових задач для рівнянь математичної фізики, які є математичними моделями різних реальних фізичних процесів. Для розв’язання крайових задач математичної фізики розроблено ряд наближених [10, 13, 21, 96, 103, 107] та числових методів [8, 23, 25, 27, 64-66, 69, 72,74, 77, 83-85, 87, 88, 90, 104, 106, 120-123, 147, 157, 159-165, 167, 173, 183, 186, 190, 199, 206, 211]. Однією із вимог до математичних моделей є їх адекватність щодо досліджуваних процесів або явищ. Збільшення адекватності математичної моделі призводить до її ускладнення. Одним із факторів, що впливає на ускладнення математичних моделей є нелінійність розглядуваних природних процесів. Наприклад, коефіцієнти фільтрації, дифузії та теплопровідності ґрунту залежать від тиску, концентрації солей в поровій воді та температури ґрунтового середовища.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

РОЗДІЛ 1
ОСНОВНІ МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ПРОЦЕСУ МАСОПЕРЕНОСУ ПРИ ФІЛЬТРАЦІЇ СОЛЬОВИХ РОЗЧИНІВ У ҐРУНТОВИХ СЕРЕДОВИЩАХ

1.1. Короткий огляд наукової літератури з математичного моделювання фільтрації сольових розчинів та локалізації радіонуклідів в ґрунтових середовищах

У даний час інтенсивного розвитку енергетики та інших галузей промисловості великого значення набувають проблеми, пов'язані зі стійкістю гідротехнічних та енергетичних об'єктів, надійністю та безпекою їх експлуатації. У багатьох випадках експлуатація останніх відбувається при фільтрації підземних вод в їх основах, де солі можуть бути дисперсно-розчинені або залягати у вигляді окремих включень, пластів тощо. У зв'язку з цим великої уваги заслуговують питання розробки, дослідження і впровадження методів математичного моделювання для розв'язання задач підземного масопереносу при фільтрації підземних вод з метою прийняття оптимальних технічних рішень.

Подібні розрахунки виникають в задачах міграції забруднень, при прогнозі гідрохімічного режиму ґрунтів та ґрунтових вод, при зрошенні, промивках чи осушенні земель.

Серед важливих питань особливе місце займає питання про виникнення осмотичних явищ в нерівномірно засолених ґрунтах і про їх вплив на фільтрацію та масоперенос в даних ґрунтах.

Дослідженнями процесів масопереносу при фільтрації підземних вод в недеформівних ґрунтових середовищах, одними з перших, займались такі вчені С. Ф. Авер'янов, О. М. Патрашев, М. Х. Арутюнян, С. М. Нумеров та ін. [1, 109, 111, 137, 146]. Відомими роботами М. О. Веригіна, І. І. Ляшко, С. І. Ляшко, В. І. Лаврика, А. А. Глущенка, І. В. Сергієнка, В. С. Дейнеки, В. В. Скопецького, О. Я. Олійника, В. Л. Полякова, Б. С. Шержукова, В. М. Ніколаєвського, В. С. Голубєва, А. П. Власюка, Я. Г. Савули, Г. А. Шинкаренка, Я. Й. Бурака, Є. Я. Чаплі, О. Ю. Чернухи, А. Я. Бомби, В. М. Булавацького та інших дані дослідження були поставлені на строгу математичну основу і отримали значний розвиток [7, 10-13, 18-20, 28-36, 69-72,

Національний університет водного господарства та природокористування

75, 78, 79, 82-85, 88, 89, 96, 99-107, 112-115, 118, 134, 136, 138, 153, 158, 167-169, 176, 180, 181, 192-194, 196, 204, 210].

При дослідженні процесів масопереносу при фільтрації підземних вод в ґрунті, зазвичай вважали, справедливий закон Дарсі, згідно якого швидкість фільтрації води пропорційна градієнту напору [3, 6, 22, 69, 106, 115, 152, 167, 197]

$$\vec{V} = -k \; grad \; h \, . \qquad (1.1)$$

Тут: V – швидкість фільтрації, k – коефіцієнт фільтрації, h – п'єзометричний напір. В (1.1) коефіцієнт фільтрації k, як відомо [22, 152, 166], обчислюється за формулою

$$k = \frac{k_n \cdot \rho_p g}{\mu_p},$$

де k_n – проникність ґрунту, μ_p, ρ_p - відповідно в`язкість сольового розчину і його густина, g - прискорення вільного падіння. З (1.1) випливає, що об'ємна кількість рідини, яка протікає за одиницю часу через одиницю площі при заданому градієнті тиску не залежить від зміни концентрації розчину.

Це припущення справедливе, як вказано в [30], якщо концентрація розчину знаходиться в межах від 2-3 до 50-60 г/л. Отже, при моделюванні процесу масопереносу в пористих середовищах при фільтрації підземних вод з концентрацією солей до 60 г/л, параметри фільтрації та массопереносу (коефіцієнт фільтрації, коефіцієнт конвективної дифузії, пористість) вважалися постійними [10-15, 19, 20, 29-36, 42, 69, 71, 72, 74, 78, 80, 83-85, 92, 96-107, 110, 112-118, 123-134, 140, 146, 148, 149, 150, 152, 155, 167, 178, 180-181, 184-189, 196, 201]. У зв'язку з цим масоперенос розчинених у воді солей в основному вивчався на фоні фільтраційного потоку підземних вод, причому замість фільтрації сольового розчину розглядалась фільтрація чистої води. Процес фільтрації підземних вод у ґрунтових середовищах вивчався в роботах [4, 6, 22, 145, 170, 175, 183]. Проте ряд практичних задач (фільтрація сольових розчинів із хвостосховищ, добування корисних копалин із надр шляхом їх вилуговування, промивання

Національний університет водного господарства та природокористування

засолених і забруднених земель, поширення забруднень в ґрунтових масивах та ін.) показали неадекватність існуючих математичних моделей процесам, перерахованим вище.

Так, при зміні мінералізації води від 0 до 200 г/л в'язкість при температурі 20° С змінюється від 1 до 1,9 *спз.* Якщо вважати, що під час фільтрації розчинів проникність середовища k_n не змінюється, то, як видно з формули (1.1) швидкість *v* із зміною концентрації може змінюватися досить значно. Врахування цих змін суттєво ускладнює питання про рух сольових розчинів в ґрунті.

У неоднорідно-ізотропних ґрунтах коефіцієнт фільтрації залежить, як відомо [3, 67, 99, 103, 152], від координат області фільтрації $k = k(x, y)$ і не залежить від напрямку.

У неоднорідно-анізотропних ґрунтах коефіцієнт фільтрації залежить як від координат області руху, так і від напрямку і є тензором 2-го рангу [67, 69, 115, 167]

$$\boldsymbol{K} = \begin{Vmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{Vmatrix},$$

де $k_{ij} = k_{ij}(x, y), \quad i, j = 1,2$ - його компоненти.

Національний університет водного господарства та природокористування

У випадку анізотропних пористих середовищ існують головні напрямки анізотропії, вздовж яких коефіцієнт фільтрації приймає відповідно максимальне $k_1 = k_{\max}$ і мінімальне значення $k_1 = k_{\min}$. В таких пористих ґрунтових середовищах виділяють: прямолінійні однорідно-анізотропні середовища $k_{ij} = const$; криволінійні однорідно-анізотропні середовища (коли компоненти зведеного тензора фільтрації зв'язані співвідношенням $\boldsymbol{K}_* = k_{11}k_{22} - k_{12}^2 = 1$); неоднорідно-анізотропні середовища ($k_{ij} = k_{ij}(x, y)$) [3, 67, 69, 73, 99, 103, 152].

Вивченням питань адсорбції радіонуклідів в ґрунтах та їх математичному моделюванню присвячені роботи Я. І. Бурака, Є. Я. Чаплі, О. Ю. Чернухи, І. М. Гудкова, С. І. Ляшка, А. П. Власюка, C.-T. Chen, J. B. Park, Y. Sun, M. M. R. Williams та ін. [19, 20, 38, 53, 55-57, 116, 143, 180, 181, 195, 202, 205]. Ними були встановлені закономірності вертикальної міграції

Національний університет водного господарства та природокористування

радіонуклідів на різних типах ґрунтів, надходження їх в рослини залежно від біологічних особливостей останніх та від властивостей ґрунтів. На підставі цього запропоновані моделі, які дозволяють прогнозувати залежність концентрації радіонуклідів в ґрунтових середовищах від часу. Однак питання зниження радіонуклідного забруднення ґрунтів з часом в залежності від їх властивостей на даний час ще недостатньо досліджені.

1.2. Експериментальні дослідження параметрів фільтрації і масопереносу в ґрунтових середовищах

Як відомо, процеси тепло-масопереносу, фільтрації сольових розчинів в ґрунтових середовищах, зокрема в основах гідротехнічних споруд описуються достатньо складними математичними моделями, системи диференціальних рівнянь яких комплексно описують фільтрацію сольового розчину в деформівному скелеті ґрунту, конвективну дифузію розчинених солей, мосообмін та теплоперенос. Складність даної математичної моделі полягає в тім, що наявність у воді тих чи інших асоційованих в ній компонентів солей впливає на в`язкість фільтруючого сольового розчину, проникність ґрунту, а через них на коефіцієнти конвективної дифузії D, бародифузії D_B, термодифузії D_T, фільтрації k, ефективної теплопровідності λ вологого ґрунту.

Для спрощення математичної моделі, що описує ці процеси, область, в якій вона застосовується, обмежують малими та середніми концентраціями компонентів, що містяться в фільтраційному розчині. Крім того, вважають, що швидкість фільтрації розчину, тобто об’ємна його кількість, що протікає за одиницю часу через одиничну площу при заданому одиничному градієнті напору, не залежить від зміни концентрації розчину. Це допущення виправдане при мінералізації води до 60 г/л і можливості зміни водорозчинного комплексу в ґрунтах до 5 % від початкової ваги скелету ґрунту, оскільки в’язкість і густина мінералізованої води, а також пористість і проникність ґрунту змінюється незначно. Це дозволило вважати, що відповідні коефіцієнти диференціальних рівнянь вищевказаних математичних моделей є постійними.

Національний університет водного господарства та природокористування

Однак, коефіцієнт фільтрації, а отже і швидкість фільтрації можуть значно змінюватися в залежності від зміни концентрації розчинених у воді солей. Врахування цього факту досить ускладнює вивчення питання про фільтрацію розчинів солей в ґрунтових середовищах.

Для вивчення фізико-хімічних процесів, що проходять при фільтрації сольових розчинів і встановлення кількісної оцінки їх впливу на проникливість ґрунтів Власиком А. П., Кузло М. Т., Філатовою І. А. в геотехнічній лабораторії кафедри механіки ґрунтів, основ і фундаментів Національного університету водного господарства та природокористування (НУВГП) було виконано серію експериментів з визначення коефіцієнта фільтрації для піщаних ґрунтів [63, 93]. З метою зменшення похибки експерименту і впливу різноманітних факторів, досліди проводились для однорідних кварцових пісків з крупністю фракцій 0,25 мм. Гранулометричний (зерновий) склад піщаного ґрунту встановлювався за стандартною методикою у відповідності з ГОСТ 12536-79. Фільтруючою рідиною був розчин NaCl з концентрацією від 1,0 до 16%. Визначення коефіцієнта фільтрації виконувалось на стандартному приладі КФ-00М. Підготовка приладу і ґрунту, що досліджувався, а також проведення самого експерименту, виконувалось за стандартною методикою у відповідності з ГОСТ 25584-83.

Згідно з ГОСТом коефіцієнт фільтрації сольового розчину визначався за формулою $K = Q \cdot 864/(t_m \cdot A \cdot T \cdot J)$, де Q – об'єм розчину, що профільтрувався, см^3; t_m — час фільтрації розчину, с; A – площа поперечного перерізу циліндра фільтраційної трубки, см^2; J – градієнт напору; $T = (0{,}7 + 0{,}003T_w)$ – поправка для приведення значення коефіцієнта фільтрації до умов фільтрації розчину при температурі 10°С, T_w – фактична температура розчину під час дослідження.

Результати проведених досліджень коефіцієнта фільтрації від концентрації фільтруючого розчину для одиничного градієнта напору наведені в таблиці 1.1.

Отримані дані експериментальних досліджень коефіцієнта фільтрації від концентрації сольового розчину оброблені з використанням програмного комплексу для обробки даних експерименту, розробленого на кафедрі інформаційних систем та

Національний університет
водного господарства
та природокористування

математичного моделювання (2000 р., нині кафедра прикладної математики НУВГП). Він включає в себе: засоби формування баз даних, їх математичну обробку та візуальне представлення отриманих результатів обробки. Математична обробка результатів експерименту здійснена шляхом поліноміальної апроксимації введених даних з використанням методу найменших квадратів.

Таблиця 1.1

Результати досліджень коефіцієнта фільтрації сольових розчинів в піщаних ґрунтах

c, %	0	1	2	3	4	5	6	7	8
k, м/доба	18,4	20,7	25,3	29	30,4	31	23	19,8	18,4

продовження таблиці 1.1

c, %	9	10	11	12	13	14	15	16
k, м/доба	17,5	16,1	15,2	13,8	12,9	12,4	11,5	19,2

Національний університет
водного господарства
та природокористування

В результаті проведених експериментальних досліджень фільтрації сольових розчинів у піщаних ґрунтах [63], їх математичної обробки та поширення цих досліджень для піщаних ґрунтів, отримана наступна залежність коефіцієнта фільтрації k від концентрації c сольового розчину (рис. 1.1):

$$k(c) = a_6 \cdot c^6 + a_5 \cdot c^5 + a_4 \cdot c^4 + a_3 \cdot c^3 + a_2 \cdot c^2 + a_1 \cdot c + a_0, \quad (1.2)$$

де $a_6 = 2 \cdot 10^{-4}$, $a_5 = -0{,}88 \cdot 10^{-2}$, $a_4 = 0{,}162$, $a_3 = -1{,}3194$, $a_2 = 3{,}9229$, $a_1 = 0{,}0223$, $a_0 = 18{,}187$. $c \in [0;1]$ – обезрозмірена величина концентрації сольового розчину.

Розрахунковий критерій Фішера для даного випадку становить $F_{розр} = 47{,}04369$, а табличне значення його з імовірністю P=0,95 становить F=5,3858.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Оскільки $F_{розр} > F$, то з імовірністю P=0,95 можна стверджувати, що (1.2) описує функціональну залежність коефіцієнта фільтрації сольового розчину від концентрації при температурі $t = 22^{\circ} C$.

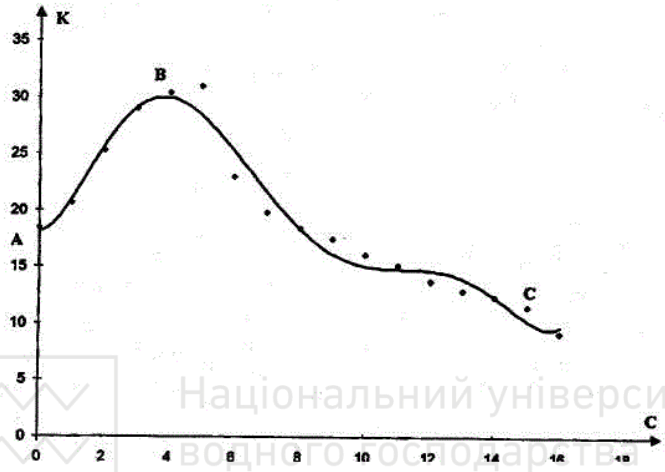


Рис. 1.1. Графік залежності коефіцієнта фільтрації піщаного ґрунту від концентрації сольового розчину

Залежність коефіцієнта фільтрації k від концентрації c сольового розчину для глинистих ґрунтів, отримана в роботі [65], має вигляд

$$k(c) = a_5 \cdot c^5 + a_4 \cdot c^4 + a_3 \cdot c^3 + a_2 \cdot c^2 + a_1 \cdot c + a_0, \qquad (1.3)$$

де

$$a_5 = 5.9404 \cdot 10^{-2},\ a_4 = -1.6703 \cdot 10^{-1},\ a_3 = 1.7051 \cdot 10^{-1},$$
$$a_2 = -7.4311 \cdot 10^{-2},\ a_1 = 1.0563 \cdot 10^{-2},\ a_0 = 1.0054 \cdot 10^{-3}.$$

$c \in [0;1]$ – обезрозмірена величина концентрації сольового розчину.

Фільтрація сольового розчину з точки зору хімії являє собою рух електроліту в поровому просторі скелета ґрунту. При цьому в умовах описаних експериментів мінеральні частинки скелета ґрунту заряджені негативно, а сольового розчину – позитивно.

Як видно з рис. 1.1, при збільшенні концентрації сольового розчину NaCl від 0% до 5% коефіцієнт фільтрації різко зростає. При

Національний університет водного господарства та природокористування

концентрації 5% коефіцієнт фільтрації досягає максимуму. Зростання коефіцієнта фільтрації при збільшенні концентрації фільтруючого сольового розчину до 5% відбувається внаслідок дії електростатичних сил. При фільтрації сольового розчину невеликих концентрацій відбувається стиснення дифузійних шарів рихлозв`язної води навколо мінеральних частинок скелету ґрунту. В результаті чого відбувається збільшення ефективного діаметра пор скелету ґрунту, а отже і його проникності. Це і спостерігається на ділянці графіка від 0% до 5%.

При подальшому збільшенні концентрації сольового розчину спостерігається так зване явище осолонцювання ґрунтів, що призводить до різкого зменшення його проникності, а відповідно і коефіцієнта фільтрації сольового розчину.

Таке зниження коефіцієнта фільтрації при подальшому зростанні концентрації сольового розчину починаючи від 5% пояснюється значним зростанням в`язкості фільтрату, оскільки, як відомо, вони зв'язані залежністю [63, 96]

Національний університет водного господарства та природокористування

$$k = k(c) = \frac{k_n \cdot \rho(c) g}{\mu(c)},$$

де k_n – проникність ґрунту; $\mu(c)$, $\rho(c)$ – відповідно в`язкість сольового розчину і його густина; g – прискорення вільного падіння, c – концентрація сольового розчину.

В літературних джерелах наводяться експериментальні дані залежності коефіцієнтів фільтрації та проникливості ґрунтів від концентрації солей в поровій воді, однак їх математична обробка не проведена. Зокрема встановлено, що при зростанні концентрації хлоридних розчинів до $60\ {}^{г}\!/_{л}$ проникливість піщано-глинистих сумішей може зростати від 1,2 до 5 разів (в порівнянні з чистою водою), а для глин в 1,5÷7 разів і більше.

Досить повні результати досліджень впливу мінералізації водних розчинів на коефіцієнт проникливості та коефіцієнт фільтрації гірських порід наведені в роботах [174, 177]. Встановлено, що з підвищенням ступеня мінералізації водних розчинів коефіцієнт водопроникливості збільшується до тих пір, поки концентрація

Національний університет
водного господарства
та природокористування

солей в розчині не досягне певної величини C_M. Для кожної дослідженої гірської породи існує своя власна величина C_M, при якій ефективна проникливість даної породи є екстремальною. Зменшення або збільшення концентрації порового сольового розчину зменшує фільтраційні властивості породи. Для прикладу, на рис. 1.2 наведено залежності коефіцієнта проникливості k_n та коефіцієнта фільтрації k від концентрації розчину *NaCl* для піщаника. Як видно з даного рисунку і як зазначено в роботах [174, 177], збільшення мінералізації від прісної води до оптимального значення $C_M = 150\ г/л$ приводить до збільшення коефіцієнта проникливості від 1,55 до 2,1 *мД*. Подальше збільшення мінералізації до $300\ г/л$ призводить до повільного зменшення коефіцієнта проникливості до величини 1,85 *мД*. Коефіцієнт фільтрації збільшується при збільшенні концентрації порового розчину до $100\ г/л$, а далі зменшується, досягаючи при $300\ г/л$ величини 0,6 від свого значення при фільтрації чистої води.

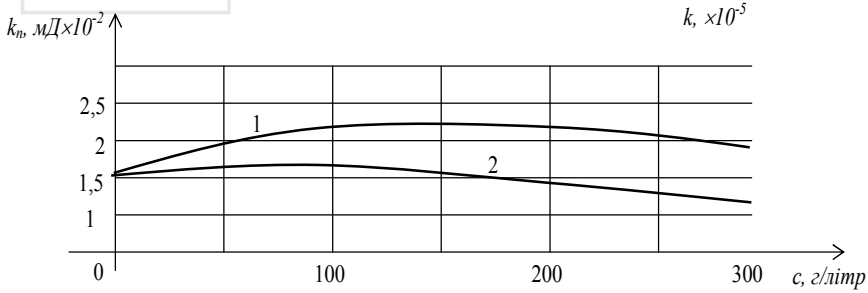


Рис. 1.2. Вплив концентрації розчину *NaCl* на коефіцієнт проникливості (1) та коефіцієнт фільтрації (2) піщаника

Також на коефіцієнт фільтрації значно впливає пористість ґрунтового середовища. Для вивчення параметрів фільтрації сольових розчинів в піщаних ґрунтах і встановлення кількісної оцінки їх впливу на проникливість ґрунтів в геотехнічній лабораторії кафедри основ і фундаментів Національного

Національний університет
водного господарства
та природокористування

університету водного господарства і природокористування (НУВГП) виконано серію експериментів з визначення коефіцієнта фільтрації з урахуванням параметрів ґрунтового середовища і концентрації сольового розчину [93].

Результати проведених досліджень коефіцієнта фільтрації залежно від концентрації фільтруючого розчину і пористості ґрунтового середовища для одиничного градієнта напору наведені на рис. 1.3. Апроксимуюча функція $k = k(c, \sigma)$ отримана у вигляді [93]

$$k(c,n) = a_0 + a_1 c + a_2 c^2 + a_3 c^3 + a_4 c^4 + b_1 \sigma ,$$

де $a_0 = -9.0467$, $a_1 = 1.7740$, $a_2 = -0.3794$, $a_3 = 0.02571$, $a_4 = -0.00058$, $b_1 = 28.2478$.

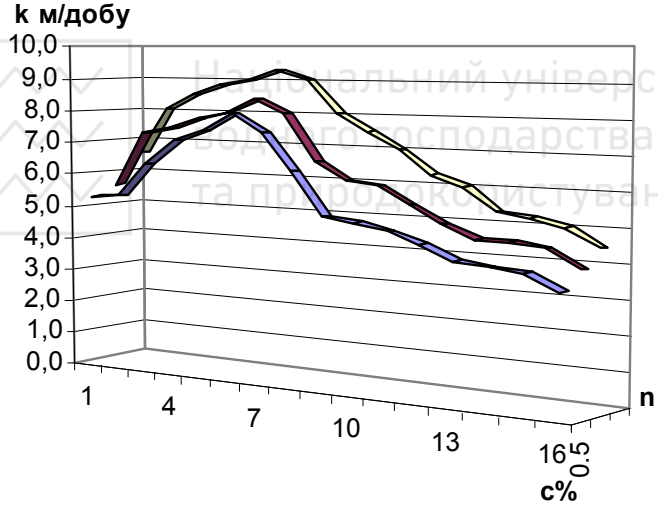


Рис. 1.3. Залежність коефіцієнта фільтрації від пористості та концентрації порового сольового розчину

При фільтрації рідини в недеформованому однорідному ізотропному ґрунтовому середовищі коефіцієнт фільтрації k залежить від властивостей як ґрунтового середовища, так і фільтруючої рідини. У випадку фільтрації сольових розчинів у таких середовищах коефіцієнт проникливості k_p є функцією як

Національний університет водного господарства та природокористування

характеристик ґрунту, так і фільтруючої рідини. Крім того, в'язкість μ і густина ρ сольового розчину також є функціями його концентрації, тобто $\mu = \mu(c)$, $\rho = \rho(c)$. Тоді згідно [93] маємо:

$$k = \frac{k_p(c,\sigma)\rho(c)g}{\mu(c)}.$$

Як підтверджують проведені експерименти [93], при фільтрації сольових розчинів у піщаних ґрунтах для заданих параметрів мінеральних часток визначальним на коефіцієнт фільтрації є вплив градієнта концентрації розчинених у воді солей.

В роботі [156] наведено результати експериментальних досліджень найбільш характерних проявів осмосу та основні закономірності для осмотичної фільтрації та осмотичного тиску в ґрунтах.

На даний час відомі експериментальні дослідження, в яких вказується на залежність коефіцієнта фільтрації від температури [66, 115] (див. також вказану там бібліографію). На рис. 1.4. наведені графіки залежностей коефіцієнта фільтрації від температури для каоліну та гумбрину. Як видно, для гумбрину в інтервалі температур від 3°C до 70°C коефіцієнт фільтрації зростає на чотири порядки.

Залежність коефіцієнта фільтрації від температури визначалась апроксимацією за методом найменших квадратів результатів експериментів, наведених в [66] для каоліну на нижній межі пластичності

$$k(T) = b_5 \cdot T^5 + b_4 \cdot T^4 + b_3 \cdot T^3 + b_2 \cdot T^2 + b_1 \cdot T + b_0,$$

де $b_5 = 1.4154 \cdot 10^{-2}$, $b_4 = -2.6097 \cdot 10^{-2}$, $b_3 = 1.0819 \cdot 10^{-2}$, $b_2 = 1.2844 \cdot 10^{-4}$, $b_1 = 1.0404 \cdot 10^{-2}$, $b_0 = 3.0925 \cdot 10^{-3}$, $T \in [0,1]$ – обезрозмірена величина.

Також дані по залежності проникливості глин від температури наведені в роботі [66] (див. також вказану там бібліографію). Встановлено, що при зростанні температури від 20÷25 до 80÷90°C

Національний університет водного господарства та природокористування

прониклівість глин значно зростає. Зокрема, відношення проникливості при 80°С до проникливості при 20°С складає для каолінової глини 1,7÷3,2, а для монтморилонітової – 4÷20 і більше (дані наведені у випадку фільтрації прісної води).

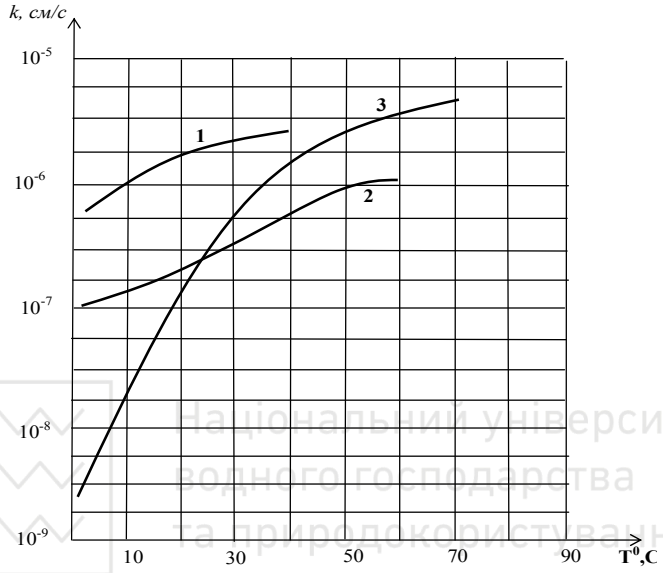


Рис. 1.4. Залежність коефіцієнта фільтрації від температури:
1, 2 – каолін на верхній та нижній межах пластичності;
3 – гумбрин на верхній межі пластичності

Оскільки комплексні експериментальні дані щодо одночасної залежності коефіцієнта фільтрації від концентрації солей та температури відсутні, то можна покласти [66]

$$k(c,T) = \frac{1}{k_0^2} k(c) \cdot k(T),$$

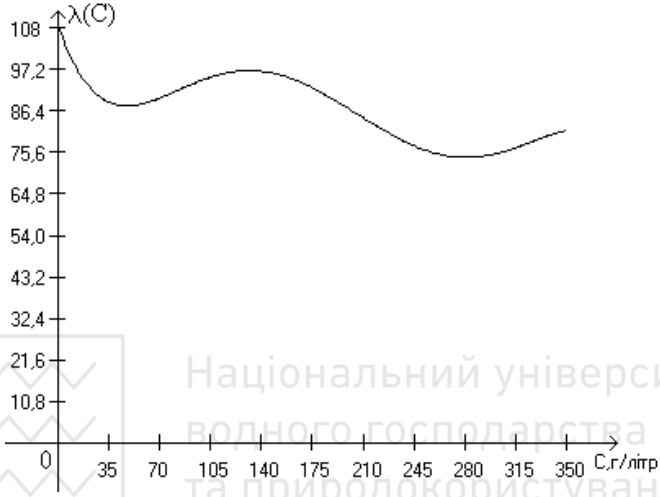
де k_0 – коефіцієнт фільтрації для чистої води при температурі $20°C$.

Встановлено [66], що коефіцієнт теплопровідності засолених ґрунтів залежить від концентрації порового сольового розчину. Залежність коефіцієнта теплопровідності від концентрації солей визначалась апроксимацією за методом найменших квадратів результатів експериментів, наведених в [66] (рис. 1.5)

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$\lambda(c) = d_5 \cdot c^5 + d_4 \cdot c^4 + d_3 \cdot c^3 + d_2 \cdot c^2 + d_1 \cdot c + d_0,$$

де $d_5 = -184.523 \cdot 10^4$, $d_4 = 540.015 \cdot 10^4$, $d_3 = -557.026 \cdot 10^4$, $d_2 = 237.508 \cdot 10^4$, $d_1 = -387.23 \cdot 10^3$, $d_0 = 108.65 \cdot 10^3$, $c \in [0,1]$ – обезрозмірена величина.



Національний університет
водного господарства
та природокористування

Рис. 1.5. Залежність коефіцієнта теплопровідності ґрунту від концентрації порового сольового розчину

Коефіцієнт фільтрації, визначений тим чи іншим шляхом, відносять до температури 0°С або 10°С. Тоді коефіцієнт фільтрації при температурі t°С обчислюють за формулами вигляду

$$k = k_0(1 + 0{,}0337t + 0{,}000221t^2), \quad k = k_{10}(0{,}7 + 0{,}03t).$$

Перша з формул є формула Пуазейля, а друга – формула Хазена. Тут k_0 і k_{10} – коефіцієнти фільтрації віднесені відповідно при $t = 0°C$ і $t = 10°C$.

Існують формули, що виражають залежність коефіцієнта фільтрації від пористості σ і від даних механічного складу ґрунту

$$k = \beta \frac{d^2}{\mu} \frac{\sigma^3}{(1-\sigma)^2},$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

де μ – в'язкість рідини, d – ефективний діаметр частинок, β – деякий сталий коефіцієнт. Дана формула є формулою Козені [152]. Дані для інших параметрів тепло-масопереносу при фільтрації підземних вод наведені в роботах [80, 111, 126, 128, 133, 140, 151, 155, 166, 171, 187, 191, 200, 201, 203, 207].

1.3. Фізичні закони, що описують процеси фільтрації сольових розчинів у ґрунтах

На основі вищесказаного, узагальнений закон Дарсі для фільтрації сольових розчинів у насичених ґрунтах в ізотермічних умовах прийме вигляд [63]

$$\vec{V} = -k(c) \cdot grad\ h\,,$$

а з врахуванням осмосу [63, 65, 70]

$$\vec{V} = -k(c) grad\ h + \nu(c) \cdot grad\ c\,,$$

де $\nu(c)$ – коефіцієнт осмосу.

В неізотермічних умовах залежності, що виражають дані закони, відповідно приймуть вигляд [66]

$$\vec{V} = -k(c,T) grad\ h + \nu_1 \cdot grad\ T\,,$$

$$\vec{V} = -k(c,T) grad\ h + \nu(c,T) \cdot grad\ c + \nu_1 \cdot grad\ T\,,$$

де ν_1 – коефіцієнт термічного осмосу, T – температура.

Крім того, для фільтрації сольових розчинів у недеформованих ґрунтах справедливе рівняння нерозривності фільтраційного потоку

$$div\,\vec{V} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0\,.$$

Національний університет
водного господарства

У випадку анізотропних ґрунтів коефіцієнти k, ν, ν_1, як відомо, мають тензорний характер. Тоді відповідні закони приймуть вигляд [65, 66]:

$$\vec{V} = -\boldsymbol{K} \cdot grad\ h,$$

$$\vec{V} = -\boldsymbol{K} \cdot grad\ h + \boldsymbol{v} \cdot grad\ c,$$

$$\vec{V} = -\boldsymbol{K} \cdot grad\ h + \boldsymbol{v} \cdot grad\ c + \boldsymbol{v_1} \cdot grad\ T,$$

де $\boldsymbol{K}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v_1}$ – тензори коефіцієнтів фільтрації, хімічного та термічного осмосів.

Досить часто зустрічаються випадки, коли у ґрунті наявні залягання пластів солей, карстових порід, дисперсно-розсіяних солей, сольових включень, наявність різноманітних джерел забруднень, в тому числі і радіоактивних. Є приклади окремих забруднених солями водойм тощо.

При наявності в ґрунті вологи, а тим більше процесів фільтрації, навіть в ізотермічних умовах, солі починають розчинятися, згідно першого закону Фіка

$$q = -D_m \frac{\partial c}{\partial n}$$

або, згідно другого закону Фіка (при наявності фільтрації),

$$q = v_n c - D(c) \frac{\partial c}{\partial n},$$

в неізотермічних умовах

$$q = v_n c - D(c) \frac{\partial c}{\partial n} - D_T \frac{\partial T}{\partial n},$$

де q – питомий потік розчинених солей, $D(c)$ – коефіцієнт конвективної дифузії, який залежить від концентрації сольових розчинів $D(c) = D_m + \lambda |v_n(c)|$, D_m – коефіцієнт молекулярної

Національний університет
водного господарства
та природокористування

дифузії в пористому середовищі, D_T – коефіцієнт термодифузії, λ – параметр гідродинамічної дисперсії, v_n – нормальна складова вектора швидкості фільтрації.

У випадку, коли коефіцієнти молекулярної, конвективної та термо-дифузії мають тензорний характер, відповідні рівняння приймуть вигляд [65, 66]

$$\boldsymbol{q_c} = -\boldsymbol{D} \cdot grad\, c\,,$$

$$\boldsymbol{q_c} = -\vec{v} \cdot c - \boldsymbol{D}_c \cdot grad\, c\,,$$

$$\boldsymbol{q_c} = -\vec{v} \cdot c - \boldsymbol{D}_c \cdot grad\, c - \boldsymbol{D}_T \cdot grad\, T\,,$$

де $\boldsymbol{q_c}$ – вектор потоку розчинених солей, $\boldsymbol{D}, \boldsymbol{D}_c, \boldsymbol{D}_T$ – тензори коефіцієнтів молекулярної, конвективної та термо-дифузії.

Закони Фур'є для рівняння теплопровідності має вигляд [107]

$$\boldsymbol{q}_T = -\lambda \cdot grad\, T\,,$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

а з урахуванням впливу конвективного потоку набуває вигляду

$$\boldsymbol{q}_T = \rho\, c_\rho T\vec{v} - \lambda(c,T) \cdot grad\, T\,,$$

де $\boldsymbol{q}_T$ – вектор теплового потоку, λ – тензор коефіцієнтів ефективної теплопровідності вологого грунту, ρ, c_ρ – густина та питома теплоємність фільтрату.

Крім того, рівняння балансу солей має вигляд [30]

$$div\, \vec{q} = \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial N}{\partial t}\,,$$

де N – концентрація солей в твердій фазі.

Із умов балансу маси розчиненої речовини для елементарного об'єму пористого середовища можна отримати загальне рівняння міграції розчинених солей [30]

$$\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial (mc)}{\partial t} = 0\,.$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

1.4. Вихідні диференціальні рівняння та залежності

На основі робіт [30, 34, 36, 96-107, 111, 115, 116], аналізу праць [63, 93] та проведеної нами математичної обробки результатів експериментів по виявленню залежності коефіцієнта фільтрації розчинів від концентрації забруднювача, процес масопереносу розчинів у недеформованих ґрунтових масивах можна описати такою системою диференціальних рівнянь [65, 66]:

- фільтрації сольових розчинів з врахуванням осмотичних явищ

$$\vec{V}(c) = -k(c) \cdot grad\ h + v(c) grad\ c + k_T grad\ T\ ,\quad div\vec{V} = 0;$$

- нестаціонарної фільтрації сольових розчинів

$$div(\boldsymbol{K}(c) grad\, h) = \mu \frac{\partial h}{\partial t};$$

- конвективно-дифузійного перенесення сольових розчинів

$$div(D(c) \cdot grad\ c + D_T(c) \cdot grad\ T) - \vec{V}(c) grad\, c = \sigma \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial N}{\partial t};$$

- теплоперенесення в ґрунтових масивах

$$div(\lambda\ grad T) - \rho C_p \vec{V}(c) grad T = C_n \frac{\partial T}{\partial t},$$

- масообміну між рідкою і твердою фазами

$$\frac{\partial N}{\partial t} = f(c, N, C_*, N_*, T, \gamma_1, ..., \gamma_n)$$

при відповідних крайових умовах на межі області фільтрації

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$l_1 h(x,y,t)\big|_{S_T} = \widetilde{H}(x,y,t), \quad l_2 c(x,y,t)\big|_{S_T} = \widetilde{C}(x,y,t),$$

$$l_3 T(x,y,t)\big|_{S_T} = \widetilde{T}(x,y,t), \; h(x,y,0) = \widetilde{H}_0(x,y),$$

$$c(x,y,0) = \widetilde{C}_0(x,y), \quad T(x,y,0) = \widetilde{T}_0(x,y).$$

Тут $c(x,y)$, $N(x,y)$ – масові концентрації солей у рідкій та твердій фазах відповідно; C_*, N_* – теж саме в умовах рівноваги; $T(x,y,t)$ – температура; $V(c)$ – швидкість фільтрації сольового розчину; $\nu(c)$ – коефіцієнт осмосу; σ – пористість грунту; $k(c)$ – коефіцієнт фільтрації, залежність якого від концентрації сольових розчинів встановлена експериментально [63]; $h = \frac{p}{\rho \cdot g} + y$ – п'єзометричний напір, p – тиск, ρ – густина сольового розчину, g - прискорення вільного падіння, y – вертикальна координата, напрямлена вгору; $D(c) = D_m + \lambda|V(c)|$ – коефіцієнт конвективної дифузії, де D_m – коефіцієнт молекулярної дифузії, λ – параметр гідродинамічної дисперсії; $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ – константи швидкості масообміну; t – час; $\widetilde{C}_0(x,y), \widetilde{H}_0(x,y), \widetilde{T}_0(x,y)$ – розподіли концентрації, напору та температури по області Ω в початковий момент часу; Ω – двовимірна область (криволінійний чотирикутник або область зв'язності ≥ 1), в якій протікають процеси масопереносу сольових розчинів при фільтрації підземних вод. Оператори l_1, l_2 задають відповідно граничні умови для напору, концентрації та температури на бічній поверхні S_T циліндра $Q_T = \Omega \times (0,T)$.

Крайова задача є системою двох нелінійних диференціальних рівнянь параболічного типу, які доповнені відповідними початковими та граничними умовами для шуканих функцій $h(x,y,t)$, $c(x,y,t)$. Ця система рівнянь є частковим випадком більш загальної системи нелінійних параболічних рівнянь другого порядку, існування та єдність розв'язку якої досліджено в [119]. Тому, на основі результатів роботи [119] при відповідних вимогах на коефіцієнти рівнянь, класичний розв'язок крайової задачі існує та єдиний.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Зважаючи на те, що в неізотермічних умовах має місце явище термодифузії, питомий потік розчинених солей визначається як [66]

$$\boldsymbol{q}_c = c\boldsymbol{V} - \boldsymbol{D}\nabla c - \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{T}}\nabla T\,,$$

рівняння переносу солей в пористому середовищі набуває вигляду

$$div(\boldsymbol{D}\nabla c) + div(\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{T}}\nabla T) - div(c\cdot\boldsymbol{V}) = \frac{\partial(\sigma\, c)}{\partial t} + \frac{\partial N}{\partial t}\,, \qquad (1.4)$$

де рівняння кінетики масообміну описується залежністю

$$\frac{\partial N}{\partial t} = f(c, N, T, C_m, N^*, \gamma_1, ..., \gamma_n)\,.$$

Тут $\boldsymbol{D}, \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{T}}$ – тензори коефіцієнтів конвективної дифузії та термодифузії відповідно; c, N – концентрація солей в рідкій та твердій фазах; $C_m(T)$, $N^*(T)$ – концентрація солей в рідкій та твердій фазах в умовах повної стабілізації; $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n$ – константи швидкості масообміну.

Згідно [30] у випадку розчинення та випадання розчинених речовин в осад, рівняння кінетики масообміну має вигляд

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\gamma_1 (C_m - c) N^{\chi}\,.$$

Показник степеня χ залежить від характеру засолення породи. Для поверхневого засолення, при якому водорозчинні солі вкривають поверхню пор та тріщин, $\chi = 0$. Для об'ємного засолення породи (ґрунту), при якому солі у вигляді гранул різної форми та об'єму дисперсно розсіяні в об'ємі породи, $\chi = 1/2$, а в деяких спеціальних випадках $\chi = 1$.

Національний університет водного господарства та природокористування

Враховуючи рівняння нерозривності рідкої фази ґрунту при $\varepsilon = 0$, $\rho_p = const$ та нехтуючи термічним розширенням фаз ґрунту, рівняння (1.4) набуває вигляду

$$div(\boldsymbol{D}\nabla c) + div(\boldsymbol{D_T}\nabla T) - \boldsymbol{V}\nabla c = \sigma\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial N}{\partial t}.$$

Рівняння масопереносу містить в собі члени, котрі залежать від температури ґрунту. Тому рівняння масопереносу повинно доповнюватись рівнянням, яке описує температурний режим ґрунтового середовища.

Зважаючи на те, що питомий тепловий потік в ґрунті визначається як [116]

$$\boldsymbol{q_T} = \rho c_\rho T\boldsymbol{V} - \boldsymbol{\lambda}\nabla T,$$

рівняння теплопереносу в пористому середовищі прийме вигляд

$$div(\boldsymbol{\lambda}\nabla T) - \rho C_\rho \boldsymbol{V}\nabla T = C_n\frac{\partial T}{\partial t}.$$

Національний університет водного господарства та природокористування

Тут: $\boldsymbol{\lambda}$ – тензор коефіцієнтів ефективної теплопровідності вологого ґрунту; ρ, c_ρ – густина та питома теплоємність порового розчину; c_T – об'ємна теплоємність ґрунту.

1.5. Початкові та граничні умови

Для знаходження єдиного розв'язку системи диференціальних рівнянь, що описують масоперенос сольових розчинів при фільтрації підземних вод потрібно доповнити дану систему початковими та граничними умовами для шуканих функцій $h = h(x, y)$, $T = T(x, y, t)$, $c = c(x, y, t)$. Розглянемо їх детальніше. Розглянемо фільтраційні схеми, зображені на рис. 1.6, рис. 1.7.

Як видно з рис. 1.6, рис. 1.7, області фільтрації в обох випадках являють собою з математичної точки зору деякий криволінійний чотирикутник – однозв'язну область з чотирма відміченими точками A, B, C, D (які при конформному відображенні переходять у чотири вершини параметричного прямокутника). В даному випадку граничні умови, які можуть задаватись для h, c і T, наступні.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

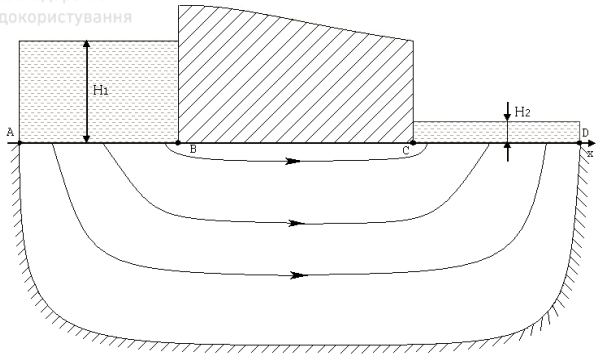


Рис. 1.6. Фільтрація сольових розчинів в основі гідротехнічної споруди

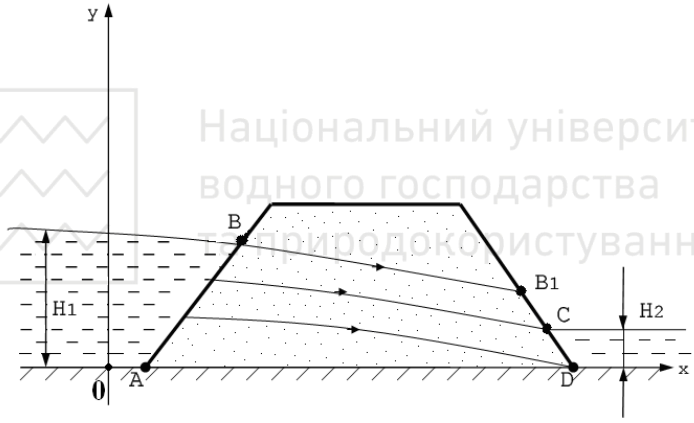


Рис.1.7. Фільтрація сольових розчинів в основі ґрунтової греблі

На границях водних басейнів (ділянки AB, CD входу та виходу фільтраційного потоку), або коли одна з сторін криволінійного чотирикутника Γ_i ($i = \overline{1,4}$) області Ω дренована, то

$$h\big|_{\Gamma_i} = \widetilde{H}_i(x, y, t).$$

Зокрема, $h\big|_{AB} = \widetilde{H}_1(x, y, t)$, $h\big|_{CD} = \widetilde{H}_2(x, y, t)$. Для концентрації можуть задаватись граничні умови одного з трьох типів:

– першого роду

$$c\big|_{AB} = \widetilde{C}(x, y, t),$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

– другого роду (умова швидкого виносу забруднень)

$$\left.\frac{\partial c}{\partial n}\right|_{CD} = 0,$$

де $\frac{\partial}{\partial n}$ – похідна в напрямку зовнішньої нормалі до межі області;

– третього роду (умова Данквертса)

$$\left.\left(D\frac{\partial c}{\partial n} - V_n(c - \widetilde{C})\right)\right|_{CD} = 0,$$

де $\widetilde{C}$ – концентрація розчинених речовин на виході (або вході) потоку, V_n – нормальна складова вектора швидкості фільтрації.

Якщо одна з сторін Γ_i ($i = \overline{1,4}$) області Ω є непроникною, то

$$(\boldsymbol{V}, n)\big|_{\Gamma_i} = 0,$$

де $n=(n_x, n_y)$, n_x, n_y – напрямні косинуси вектора зовнішньої нормалі до Γ_i, $(\mathbf{V}, n)$ – скалярний добуток векторів.

Граничні умови для концентрації розчину забруднюючих речовин на непроникній стороні Γ_i ($i = \overline{1,4}$) залежать від того, чим дана непроникність зумовлена. Якщо непроникність Γ_i (AD) зумовлена заляганням пласта солі, то для концентрації задається гранична умова першого роду (граничного насичення)

$$c\big|_{AD} = C_m$$

або більш строга балансова гранична умова [69]

$$\left.\left(D\frac{\partial c}{\partial n} + \left[\frac{D}{\delta} - V_n\right]\cdot c\right)\right|_{AD} = \frac{D\cdot C_m}{\delta},$$

де δ – товщина дифузійного примежового шару, що утворюється в околі фронту розчинення, C_m – концентрація

Національний університет
водного господарства
та природокористування

граничного насичення. Якщо непроникність зумовлюється заляганням кам'яного пласта або ґрунту з набагато меншим коефіцієнтом фільтрації, то для концентрації задається умова непроникності

$$\left.\frac{\partial c}{\partial n}\right|_{\Gamma_i} = 0 .$$

Гранична умова для напору прийме вигляд

$$\left.\frac{\partial h}{\partial n}\right|_{\Gamma_i} = 0 .$$

Оскільки на вільній рухомій межі Γ_V тиск сольового розчину води дорівнює атмосферному, а атмосферний приймається рівним нулю, то гранична умова для напору задається у наступному вигляді:

$$h(x, y)\,|_{\Gamma_V} = y . \tag{1.5}$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Для швидкості фільтрації задається гранична умова

$$(\boldsymbol{V}, n)\,|_{\Gamma_V} = \sigma' \frac{\partial \varphi}{\partial t} \tag{1.6}$$

і співвідношення $\varphi(x, y, t) = (y - h(x, y, t))\,|_{\Gamma_V} = 0$ описує вільну поверхню,

де $\boldsymbol{V}$ – вектор швидкості фільтрації, σ – пористість ґрунту, σ' – об'єм порового розчину в одиниці об'єму ґрунту.

Проводячи перетворення, одержимо

$$-(D \cdot gradc, n) + (V, n)c = \sigma' \frac{\partial \varphi}{\partial t} c . \tag{1.7}$$

На вільній межі для концентрації сольового розчину задається умова [65]

$$(D \cdot gradc, \boldsymbol{V})\,|_{\Gamma_V} = 0 . \tag{1.8}$$

Національний університет водного господарства та природокористування

Початкова умова для температури ґрунту запишеться наступним чином:

$$T(X,0) = T_0(X),$$

де $T_0(X)$ – задана функція, $X \in \overline{\Omega}$.

Початкові значення температури $T_0(X),\ X \in \overline{\Omega},$ задаються для кожної конкретної розглянутої задачі переносу сольових розчинів в ґрунтових масивах в наступних розділах роботи.

Граничні умови для температури залежать від нижченаведених чинників.

На межі (частині межі) Γ області Ω відома температура

В даному випадку для температури задається гранична умова першого роду

$$T\big|_{\Gamma_{t_0}} = T_1(X,t), \quad (X,t) \in \Gamma_{t_0}, \tag{1.9}$$

де $T_1(X,t), \quad (X,t) \in \Gamma_{t_0}$, задана функція.

На межі (частині межі) Γ області Ω відома величина теплового потоку

В даному випадку для температури задається гранична умова третього роду

$$(\boldsymbol{q_T}, \boldsymbol{n})\big|_{\Gamma_{t_0}} = Q_T, \tag{1.10}$$

де Q_T – величина теплового потоку; $\boldsymbol{q_T} = \rho c_p T \boldsymbol{V} - \boldsymbol{\lambda} \nabla T$.

Якщо дана межа (частина межі) є непроникною для фільтраційного потоку, то гранична умова третього роду переходить в граничну умову другого роду

$$(\boldsymbol{\lambda} \nabla T, \boldsymbol{n})\big|_{\Gamma_{t_0}} = Q_T. \tag{1.11}$$

Межа (частина межі) Γ області Ω теплоізольована

В даному випадку для температури задається однорідна гранична умова третього роду

$$(\boldsymbol{q_T}, \boldsymbol{n})\big|_{\Gamma_{t_0}} = 0. \tag{1.12}$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

РОЗДІЛ 2
ОДНОВИМІРНІ МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ПРОЦЕСУ МАСОПЕРЕНОСУ ПРИ ФІЛЬТРАЦІЇ СОЛЬОВИХ РОЗЧИНІВ У ГРУНТОВИХ СЕРЕДОВИЩАХ

2.1. Монотонна різницева схема для нелінійного одновимірного рівняння параболічного типу, що містить першу похідну

При розв'язуванні задач масопереносу в ґрунтових середовищах, хімічної кінетики, плазми та ін. доводиться мати справу з числовим розв'язком крайових задач для нелінійних рівнянь параболічного типу, що містять конвективні члени [2, 11, 12, 16, 18, 25, 26, 32, 68]. Особливістю їх є те, що при побудові неявних різницевих схем значну роль відіграє число Пекле [148], при певних значеннях якого різницева схема може бути немонотонною.

Математичну модель масопереносу сольових розчинів при одновимірній фільтрації підземних вод до водозабірника з урахуванням залежності параметрів фільтрації і масопереносу від концентрації сольового розчину, координат області фільтрації та впливу осмотичних явищ на процес переносу можна описати наступною крайовою задачею [47, 48]:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(D(c)\frac{\partial c}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(V(c)\cdot c\right)-\gamma(c-C_*)=\frac{\partial(\sigma c)}{\partial t},\quad x\in(0,l),\ t>0, \tag{2.1}$$

$$V(c) = -k(c)\frac{\partial h}{\partial x}+v(c)\frac{\partial c}{\partial x},\quad \frac{\partial V}{\partial x}=0,\quad x\in(0,l), \tag{2.2}$$

$$h(0)=H_1,\qquad h(l)=H_2, \tag{2.3}$$

$$c(x,0)=\widetilde{C}_0(x),\qquad 0\le x\le l, \tag{2.4}$$

$$l_1c\,(0,t)=\widetilde{C}_1(t),\quad l_2c\,(l,t)=\widetilde{C}_2(t),\quad t\ge 0, \tag{2.5}$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

де l_i, $i=\overline{1,2}$ – оператори, що задають граничні умови на вході і виході фільтраційного потоку, C_* – концентрація граничного насичення. Зокрема, оператор l_2 може задавати одну з наступних граничних умов на виході фільтраційного потоку

$$l_2 c = \begin{cases} c(l,t) = \widetilde{C}_2(t), \\ \dfrac{\partial c(l,t)}{\partial x} = 0, \\ \left[V(c)\cdot(c-\widetilde{C}_2) - D(c)\cdot\dfrac{\partial c}{\partial x} \right]_{x=l} = 0. \end{cases} \tag{2.6}$$

Розв'яжемо задачу масопереносу (2.1), (2.4)-(2.5) з вибором нової монотонної різницевої схеми [44, 45]. Побудуємо монотонну різницеву схему порядку апроксимації $O(h^2+\tau)$. Для цього використаємо різницеву схему з направленими різницями для (2.1) [162, 164]

$$\frac{1}{h_1}\left(d_{i+1}^k \frac{C_{i+1}^{k+1}-C_i^{k+1}}{h_1} - d_i^k \frac{C_i^{k+1}-C_{i-1}^{k+1}}{h_1} \right) + r_{i+}^k \frac{C_{i+1}^{k+1}-C_i^{k+1}}{h_1} + r_{i-}^k \frac{C_i^{k+1}-C_{i-1}^{k+1}}{h_1} -$$

$$-\gamma(C_i^k - C_*) = \sigma \frac{C_i^{k+1}-C_i^k}{\tau}, \ i=\overline{0,n-1}, \ k=\overline{0,K-1}, \tag{2.7}$$

$$C_i^0 = \widetilde{C}_0(ih), \quad C_0^{k+1} = C_1((k+1)\cdot\tau),$$
$$l_2 C_n^{k+1} = \widetilde{C}_2((k+1)\cdot\tau), \ i=\overline{0,n-1}, \ k=\overline{0,K-1}, \tag{2.8}$$

де $d_i^k = \dfrac{D(x_i,C_i^k)+D(x_{i-1},C_{i-1}^k)}{2}$, $d_{i+1}^k = \dfrac{D(x_{i+1},C_{i+1}^k)+D(x_i,C_i^k)}{2}$,

$$r_{i+}^k = 0.5(V(x_i,C_i^k) + \left|V(x_i,C_i^k)\right| \geq 0, \quad r_{i-}^k = 0.5(V(x_i,C_i^k) - \left|V(x_i,C_i^k)\right| \leq 0,$$

$$V(x_i,C_i^k) = r_{i+}^k + r_{i-}^k, \ i=\overline{0,n-1}, \ k=\overline{0,K-1}, .$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Неважко показати, що побудована таким чином різницева схема є монотонною при будь-яких кроках сітки h і τ, однак має порядок апроксимації $O(h+\tau)$. Для отримання монотонної різницевої схеми, що має порядок апроксимації $O(h^2+\tau)$, вивчимо детальніше асимптотику похибки апроксимації нев'язки даної різницевої схеми

$$\psi_i = L_1 C + r_{i+}^k C_{x,i}^{k+1} + r_{i-}^k C_{\bar{x},i}^{k+1} + f_i^k - \sigma C_{t,k}, \;\; i = \overline{0, n-1}, \;\; k = \overline{0, K-1}, \tag{2.9}$$

де $L_1 C = \dfrac{1}{h_1}\left(d_{i+1}^k \dfrac{C_{i+1}^{k+1} - C_i^{k+1}}{h_1} - d_i^k \dfrac{C_i^{k+1} - C_{i-1}^{k+1}}{h_1} \right)$, $C_{t,k} = \dfrac{C_i^{k+1} - C_i^k}{\tau}$,

$$C_{x,i}^{k+1} = \frac{C_{i+1}^{k+1} - C_i^{k+1}}{h_1}, \; C_{\bar{x},i}^{k+1} = \frac{C_i^{k+1} - C_{i-1}^{k+1}}{h}, \; f_i^k = -\gamma \cdot (C_i^k - C_*),$$

$$i = \overline{0, n-1}, \;\; k = \overline{0, K-1}.$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Використовуючи розклади за формулою Тейлора, отримаємо

$$L_1 C = \Im_1 c + O(h^2),$$

де

$$\Im_1 c = \frac{\partial\left(D(x,c)\dfrac{\partial c}{\partial x} \right)}{\partial x}, \qquad C_{x,i}^{k+1} = \frac{\partial C(x_i, t_{k+1})}{\partial x} + \frac{h}{2}\frac{\partial^2 C(x_i, t_{k+1})}{\partial x^2} + O(h^2),$$

$$C_{\bar{x},i}^{k+1} = \frac{\partial C(x_i, t_{k+1})}{\partial x} - \frac{h}{2}\frac{\partial^2 C(x_i, t_{k+1})}{\partial x^2} + O(h^2).$$

Підставивши дані розклади у вираз (2.9) і звівши подібні члени, отримаємо

$$\psi_i = \Im_1 c + O(h^2) + r_{i+}^k \left(\frac{\partial C(x_i, t_{k+1})}{\partial x} + \frac{h}{2}\frac{\partial^2 C(x_i, t_{k+1})}{\partial x^2} + O(h^2) \right) +$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$+ r_{i-}^k \left(\frac{\partial C(x_i, t_{k+1})}{\partial x} - \frac{h}{2} \frac{\partial^2 C(x_i, t_{k+1})}{\partial x^2} + O(h^2) \right) + f_i^k - \sigma C_{t,k} =$$

$$= \Im_1 c + \left(r_{i+}^k + r_{i-}^k \right) \frac{\partial C(x_i, t_{k+1})}{\partial x} + f_i^k - \sigma C_{t,k} + \left(r_{i+}^k - r_{i-}^k \right) \frac{h}{2} \frac{\partial^2 C(x_i, t_{k+1})}{\partial x^2} + O(h^2).$$

Враховуючи (2.1), матимемо

$$\Im_1 C + r_i^k \frac{\partial C(x_i, t_{k+1})}{\partial x} + f_i^k - \sigma C_{t,k} = 0.$$

А отже $\psi_i = \frac{1}{2} \left| r_i^k \right| \cdot h \frac{\partial^2 C(x_i, t_{k+1})}{\partial x^2} + O(h^2)$. Представимо

$$\frac{\partial^2 C(x_i, t_{k+1})}{\partial x^2} = C_{\bar{x}x,i}^{k+1} + O(h^2),$$

де $C_{\bar{x}x,i}^{k+1} = \frac{C_{i-1}^{k+1} - 2C_i^{k+1} + C_{i+1}^{k+1}}{h^2} = \frac{C_{i+1}^{k+1} - C_i^{k+1}}{h^2} - \frac{C_i^{k+1} - C_{i-1}^{k+1}}{h^2}$,

$i = \overline{0, n-1},\ k = \overline{0, K-1}$.

Тоді $\psi_i = 0.5h \left| r_i^k \right| \frac{C_{i+1}^{k+1} - C_i^{k+1}}{h^2} - 0.5h \left| r_i^k \right| \frac{C_i^{k+1} - C_{i-1}^{k+1}}{h^2} + O(h^2)$.

А отже, дещо видозмінена різницева схема

$$d_{i+1}^k \frac{C_{i+1}^{k+1} - C_i^{k+1}}{h^2} - d_i^k \frac{C_i^{k+1} - C_{i-1}^{k+1}}{h^2} - 0.5h \left| r_i^k \right| \frac{C_{i+1}^{k+1} - C_i^{k+1}}{h^2} +$$

$$+ 0.5h \left| r_i^k \right| \frac{C_i^{k+1} - C_{i-1}^{k+1}}{h^2} + r_{i+}^k \frac{C_{i+1}^{k+1} - C_i^{k+1}}{h} + r_{i-}^k \frac{C_i^{k+1} - C_{i-1}^{k+1}}{h} + f_i^k = \sigma \frac{C_i^{k+1} - C_i^k}{\tau},$$

$$\left(d_{i+1}^k - 0.5h \left| r_i^k \right| \right) \frac{C_{i+1}^{k+1} - C_i^{k+1}}{h^2} - \left(d_i^k - 0.5h \left| r_i^k \right| \right) \frac{C_i^{k+1} - C_{i-1}^{k+1}}{h^2} +$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$+ r_{i+}^k \frac{C_{i+1}^{k+1} - C_i^{k+1}}{h} + r_{i-}^k \frac{C_i^{k+1} - C_{i-1}^{k+1}}{h} + f_i^k = \sigma \frac{C_i^{k+1} - C_i^k}{\tau}.$$

має порядок апроксимації $O\left(h^2 + \tau\right)$. Оскільки справедливі рівності

$$d_{i+1}^k - 0.5h\left|r_i^k\right| = d_{i+1}^k \left(1 - \frac{0.5h\left|r_i^k\right|}{d_{i+1}^k}\right) = d_{i+1}^k \left(\frac{1}{1 + \dfrac{0.5h\left|r_i^k\right|}{d_{i+1}^k}} + O\left(h^2\right)\right),$$

$$d_i^k - 0.5h\left|r_i^k\right| = d_i^k \left(1 - \frac{0.5h\left|r_i^k\right|}{d_i^k}\right) = d_i^k \left(\frac{1}{1 + \dfrac{0.5h\left|r_i^k\right|}{d_i^k}} + O\left(h^2\right)\right),$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

то порядок апроксимації не зміниться, якщо коефіцієнти $1 - \dfrac{0.5h\left|r_i^k\right|}{d_i^k}$, $1 - \dfrac{0.5h\left|r_i^k\right|}{d_{i+1}^k}$ замінити з точністю до $O\left(h^2 + \tau\right)$ додатними коефіцієнтами

$$\mu_{i1}^k = \frac{1}{1 + \dfrac{0.5h\left|r_i^k\right|}{d_i^k}}, \qquad \mu_{i2}^k = \frac{1}{1 + \dfrac{0.5h\left|r_i^k\right|}{d_{i+1}^k}}.$$

Таким чином, різницева схема

$$\mu_{i2}^k d_{i+1}^k \frac{C_{i+1}^{k+1} - C_i^{k+1}}{h^2} - \mu_{i1}^k d_i^k \frac{C_i^{k+1} - C_{i-1}^{k+1}}{h^2} + r_{i+}^k \frac{C_{i+1}^{k+1} - C_i^{k+1}}{h} +$$

$$+ r_{i-}^k \frac{C_i^{k+1} - C_{i-1}^{k+1}}{h} + f_i^k = \sigma \frac{C_i^{k+1} - C_i^k}{\tau}, \; i = \overline{0, n-1}, \; k = \overline{0, K-1}.$$

Національний університет
водного господарства
має порядок апроксимації $O\left(h^2+\tau\right)$. Записавши її в канонічному вигляді

$$\left(\frac{1}{h^2}\left(d_i^k\mu_{i1}^k+d_{i+1}^k\mu_{i2}^k\right)+\frac{\left|r_i^k\right|}{h}+\frac{\sigma}{\tau}\right)C_i^{k+1}=$$

$$=\frac{1}{h}\left(\frac{d_i^k\mu_{i1}^k}{h}-r_{i-}^k\right)C_{i-1}^{k+1}+\frac{1}{h}\left(\frac{d_{i+1}^k\mu_{i2}^k}{h}+r_{i+}^k\right)C_{i+1}^{k+1}+\frac{\sigma}{\tau}C_i^k-\gamma(C_i^{k+1}-C_*)$$

переконуємося в її монотонності при будь-яких кроках h і τ.

Для отримання числового розв'язку побудованої різницевої схеми використаємо метод прогонки. Для цього представимо дану різницеву схему в прогоночному вигляді

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$a1_i^k C_{i-1}^{k+1}-c1_i^k C_i^{k+1}+b1_i^k C_{i+1}^{k+1}=-f_i^k,\ i=\overline{0,n-1},\ k=\overline{0,K-1}, \tag{2.10}$$

$$C_0^{k+1}=\chi_1 C_1^{k+1}+\mu_5,\qquad C_n^{k+1}=\chi_2 C_{n-1}^{k+1}+\mu_6, \tag{2.11}$$

де

$$a1_i^k=\frac{1}{h_1}\left(\frac{d_i^k\mu_{i1}^k}{h_1}-r_{i-}^k\right),\quad b1_i^k=\frac{1}{h_1}\left(\frac{d_{i+1}^k\mu_{i2}^k}{h_1}+r_{i+}^k\right),$$

$$c1_i^k=\frac{1}{h^2}\left(d_i^k\mu_{i1}^k+d_{i+1}^k\mu_{i2}^k\right)+\frac{\left|r_i^k\right|}{h}+\frac{\sigma}{\tau},$$

$$f_i=\frac{\gamma}{D(x_i,C_i^k)}C_*+\frac{\sigma}{D(x_i,C_i^k)\tau}C_i^k,\ i=\overline{0,n-1},\ k=\overline{0,K-1},$$

$$\chi_1=0,\qquad \mu_5=C_1((k+1)\cdot\tau), \tag{2.12}$$

$$\chi_2=0,\quad \mu_6=C_2((k+1)\cdot\tau)\quad \text{або}\quad \chi_2=1,\quad \mu_6=0. \tag{2.13}$$

Національний університет водного господарства та природокористування

Граничні умови 1-го роду на лівому кінці задає формула (2.12), а формула (2.13) – 1-го або 2-го роду на правому кінці.

Умови застосування методу прогонки виконані, а саме

$$a1_i^k \neq 0, \quad b1_i^k \neq 0, \quad \left|c1_i^k\right| > \left|a1_i^k\right| + \left|b1_i^k\right|, \quad \forall i = \overline{1, n-1}, \quad \forall k = \overline{1, K};$$
$$\left|\chi_1\right| \leq 1, \quad \left|\chi_2\right| \leq 1.$$

Тому розв'язок (2.10), (2.11) шукатимемо у вигляді

$$C_i^k = \alpha_{i+1} C_{i+1}^{k+1} + \beta_{i+1}; \; i = \overline{0, n-1}, \; k = \overline{0, K-1} \qquad (2.14)$$

де

$$\alpha_{i+1} = \frac{b1_i^k}{c1_i^k - \alpha_i a1_i^k}; \qquad \beta_{i+1} = \frac{a1_i \beta_i + f_i}{c1_i^k - \alpha_i a1_i^k};$$
$$i = \overline{0, n-1}, \; k = \overline{0, K-1},$$

$$\alpha_1 \equiv \chi_2 \equiv 0; \qquad \beta_1 \equiv \mu_7 \equiv C_1.$$

Національний університет водного господарства та природокористування

Умови стійкості методу прогонки виконані, а саме:

$$0 \leq \alpha_i \leq 1, \qquad \beta_i \geq 0.$$

2.2. Математичне моделювання одновимірної задачі масопереносу сольових розчинів в ґрунтових масивах при фільтрації до водозабірника

2.2.1. Постановка задачі та її математична модель

Розглянемо процес переносу сольових розчинів в горизонтальному протяжному ґрунтовому пласті довжиною l із одного водного басейну в інший , напори в яких H_1 і H_2 (рис. 2.1) [47, 48]. Коефіцієнт фільтрації ґрунтового масиву k, а отже швидкість фільтрації V і коефіцієнт конвективної дифузії D, як показали, проведені в роботах [63, 93] експерименти, залежать від концентрації сольового розчину ($k = k(c), \; v = v(c), \; D = D(c)$).

Національний університет
водного господарства
та природокористування

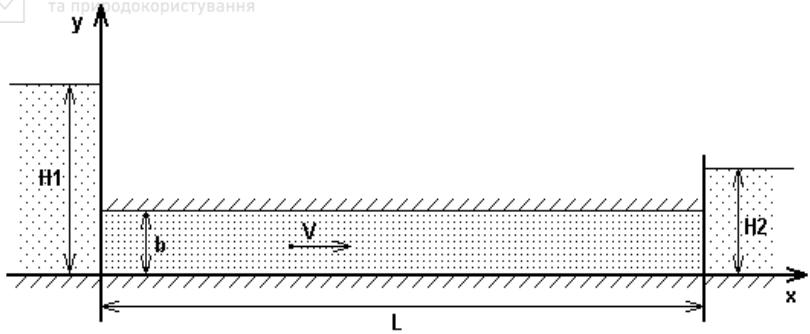


Рис. 2.1. Фільтрація сольового розчину до водозабірника

Будемо вважати, що процес переносу сольових розчинів в ґрунтовому пласті відбувається в ізотермічних умовах, а ґрунтове середовище є недеформівним. Крім того, вважатимемо, що $l >> b$ і процес масопереносу можна розглядати в рамках одновимірної моделі. Математичну модель даного процесу можна описати крайовою задачею (2.1)-(2.5) [47, 48].

Неважко бачити, що (2.1)-(2.6) є нелінійною крайовою задачею.

Доведено [119], що при заданні граничних умов першого роду існує єдиний класичний розв'язок крайової задачі (2.1)-(2.6).

В результаті розв'язку даної задачі, що описується математичною моделлю (2.1)-(2.6), потрібно знайти розподіл концентрації сольових розчинів $c(x,t)$ по області фільтрації з часом, розподіл поля швидкостей фільтрації $V(c)$ та напорів $h(x)$ по області фільтрації.

На основі числового моделювання потрібно також встановити відмінність протікання процесів масопереносу в припущенні не залежності величин $k, v \; i \; D$ від концентрації сольового розчину та у випадку наявності такої залежності.

При $\left|k(c)\frac{\partial h}{\partial x}\right| >> \left|v(c)\frac{\partial c}{\partial x}\right|$, використовуючи (2.2), (2.3), отримаємо значення п'єзометричного напору на *[0,l]* при відомому розподілі концентрації *c(x,t), x∈[0,l]*

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$h(x,t) = \frac{H_2 - H_1}{\int\limits_0^l \frac{dx}{k(c(x,t))}} \cdot \int\limits_0^x \frac{ds}{k(c(s,t))} + H,$$

а звідси і значення швидкості фільтрації $V(x, c(x,t))$

$$V(c(x,t)) = \frac{H_1 - H_2}{\int\limits_0^l \frac{dx}{k(c(x,t))}},$$

де $x \in \{0; l\}$.

При наявності осмосу швидкість фільтрації обчислюється за формулою

$$V(c(x,t)) = \frac{H_1 - H_2 + \int\limits_0^l \frac{v(c(x,t))}{k(c(x,t))} \cdot \frac{\partial c}{\partial x} dx}{\int\limits_0^l \frac{dx}{k(c(x,t))}}.$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

2.2.2. Числовий розв'язок задачі

Для отримання числового розв'язку задачі (2.1)-(2.6) введемо рівномірну сітку $\omega_{h_1\tau}$ з кроками h_1 і τ по осях *Ox* та *Ot* відповідно:

$$\omega_{h_1\tau} = \left\{ (x_i, t_j) \;\middle|\; \begin{array}{l} x_i = i \cdot h_1,\ t_k = k \cdot \tau,\ \ i = \overline{0, N_1},\ k = \overline{0, N_2}, \\ h_1 \cdot N_1 = l,\ \ \tau \cdot N_2 = T. \end{array} \right\}.$$

Для крайової задачі (2.1)-(2.6) на основі [44] побудуємо монотонну різницеву схему, яка має порядок апроксимації $O(h_1^2 + \tau)$

$$\mu_{i2}^k d_{i+1}^k \cdot \frac{C_{i+1}^{k+1} - C_i^{k+1}}{h_1^2} - \mu_{i1}^k d_i^k \cdot \frac{C_i^{k+1} - C_{i-1}^{k+1}}{h_1^2} + r_{+i}^k \cdot \frac{C_{i+1}^{k+1} - C_i^{k+1}}{h_1} +$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$+ r_{-i}^k \cdot \frac{C_i^{k+1} - C_{i-1}^{k+1}}{h_1} - \gamma(C_i^{k+1} - C_*) = \sigma \frac{C_i^{k+1} - C_i^k}{\tau}\ , \qquad (2.15)$$

$$C_i^0 = \widetilde{C}_0(x_i),\ x_i = i \cdot h_1,\ i = \overline{0, N_1}\ ; \qquad (2.16)$$

$$C_0^k = \widetilde{C}_1(t_k),\ t_k = k \cdot \tau,\ k = \overline{0, N_2}\ ;\ C_{N_1}^k = \widetilde{C}_2(t_k),\ t_k = k \cdot \tau,\ k = \overline{1, N_2}\ ; \qquad (2.17)$$

$$C_{N_1}^{k+1} = \frac{D_i^k + 0{,}5 \cdot r_{+i}^k \cdot h_1}{D_i^k + 0{,}5 \cdot h_1 \cdot \left(r_{+i}^k + \dfrac{\sigma \cdot h_1}{\tau} + \gamma \right)} \cdot C_{N_1 - 1}^{k+1} + \frac{0{,}5 \cdot h_1^{\,2} \dfrac{\sigma}{\tau}}{D_i^k + 0{,}5 \cdot h_1 \cdot \left(r_{+i}^k + \dfrac{\sigma \cdot h_1}{\tau} + \gamma \right)} C_{N_1}^k +$$

$$+ \frac{0{,}5 \cdot h_1^{\,2} \gamma \cdot C_*}{D_i^k + 0{,}5 \cdot h_1 \cdot \left(r_{+i}^k + \dfrac{\sigma \cdot h_1}{\tau} + \gamma \right)}, \qquad (2.18)$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

де $\quad d_i^k = \dfrac{D(C_i^k) + D(C_{i-1}^k)}{2}, \quad d_{i+1}^k = \dfrac{D(C_{i+1}^k) + D(C_i^k)}{2},$

$$\mu_{i1}^k = \frac{1}{1 + \dfrac{0{,}5 h_1 \cdot \left| r_i^k \right|}{d_i^k}}, \quad \mu_{i2}^k = \frac{1}{1 + \dfrac{0{,}5 h_1 \cdot \left| r_i^k \right|}{d_{i+1}^k}}, \quad r_i^k = r_{+i}^k + r_{-i}^k,$$

$$r_{+i}^k = \frac{-V_i^k + \left| V_i^k \right|}{2} \geq 0, \qquad r_{-i}^k = \frac{-V_i^k - \left| V_i^k \right|}{2} \leq 0,$$

$$V_i^k = -k_i^k \frac{h_{i+1}^k - h_{i-1}^k}{2h_1} + \nu_i^k \frac{C_{i+1}^k - C_{i-1}^k}{2h_1}.$$

Національний університет водного господарства та природокористування

Запишемо цю різницеву схему у канонічному вигляді і перевіримо її на монотонність. Маємо

$$\left(\frac{2\mu_i^k}{h_1^{\,2}}-\frac{r_{-i}^k}{h_1}+\frac{r_{+i}^k}{h_1}+\gamma+\frac{\sigma}{\tau}\right)C_i^{k+1}-\left(\frac{\mu_i^k}{h_1^{\,2}}-\frac{r_{-i}^k}{h_1}\right)C_{i-1}^{k+1}- \\ -\left(\frac{\mu_i^k}{h_1^{\,2}}+\frac{r_{+i}^k}{h_1}\right)C_{i+1}^{k+1}-\frac{\sigma}{\tau}C_i^k=\gamma\cdot C_*. \tag{2.19}$$

Неважко показати, на основі (2.19), додатність відповідних коефіцієнтів різницевої схеми (2.15)-(2.18).

Отже, побудована різницева схема має порядок апроксимації $O(h_1^{\,2}+\tau)$ відповідної диференціальної крайової задачі і є монотонною при $\forall\ h_1,\ \tau>0$. Тому, до цієї різницевої схеми можна застосувати принцип максимуму [164] та його наслідки, з чого випливає коректність даної різницевої схеми і збіжність її розв'язку до розв'язку відповідної крайової задачі. Розв'язок різницевої схеми на кожному часовому шарі отримано методом прогонки. Монотонність різницевої схеми гарантує стійкість методу прогонки.

Кількість мігруючих речовин, яка виноситься фільтраційним потоком за час t з області фільтрації, можна обчислити за формулою

$$Q_C=\int_0^t c(l,t)\cdot V(x_*,c(x_*,t))\,dt-\int_0^t D(x_*,c(x_*,t))\cdot\frac{\partial c(l,t)}{\partial x}dt. \tag{2.20}$$

У випадку задання оператором l_2c граничних умов (2.6), відповідно маємо

$$Q_C=\int_0^t \widetilde{C}_2(t)\cdot V(x_*,c(x_*,t))\,dt-\int_0^t D(x_*,c(x_*,t))\cdot\frac{\partial c(l,t)}{\partial x}dt, \tag{2.21}$$

$$Q_C=\int_0^t V(x_*,c(x_*,t)\cdot c(l,t)\,dt, \tag{2.22}$$

$$Q_C=\int_0^t V(x_*,c(x_*,t))\cdot\widetilde{C}_2(t))dt. \tag{2.23}$$

Національний університет водного господарства та природокористування

Користуючись (2.21)-(2.23), можна визначити масу солей, яка попаде в басейн стічних вод за проміжок часу *t*, а також знайти, за який проміжок часу в басейн попаде певна маса забруднень.

2.2.3. Результати числових експериментів та їх аналіз

Для даної задачі розроблена комплексна програма, яка володіє великими перевагами для інтерактивної роботи з нею в діалоговому режимі. В ній реалізовано: діалоговий режим задання параметрів моделі, задання крайових та початкових умов з можливістю візуального контролю відповідних параметрів. Значна увага приділена сервісному оформленню програми у вигляді систем меню та наглядному графічному представленню отриманих результатів з візуалізацією змодельованих фізичних процесів. Зокрема, передбачено: візуалізацію поширення розчинених речовин у ґрунті при перенесенні їх фільтраційним потоком до водозабірника; візуалізацію динаміки поширення фронту забруднень; числові розрахунки та графічне представлення поля швидкості фільтрації, поля концентрації мігруючих речовин та маси винесених речовин в басейн стічних вод.

На основі програмної реалізації задачі проведено значну кількість числових експериментів, що дало можливість провести аналіз отриманих результатів для різних вхідних даних задачі та детально дослідити процес масопереносу розчинених у воді солей при залежності параметрів фільтраційного потоку від фізико-хімічних властивостей фільтруючого розчину і середовища. У результаті проведення числових експериментів та аналізу результатів зроблено їх порівняння для коефіцієнтів фільтрації *k=const* і *k=k(c)*. Нижче наведено результати числового експерименту для сталих граничних і початкової умов із наступними вихідними даними: *T=300 діб, l=100 м,* σ*=0,5;* γ*=0,0005 доба*$^{-1}$*;* $D_м$*=0,0001м*^{2}*/добу;* λ*=0,01 м;* H_1*=1,5 м;* H_2*=0,5 м;* N_1*=340;* N_2*=200;* C_**=0,18 г/літр;* $\widetilde{C}_0$ *=0 г/літр;* $\widetilde{C}_1$ *=0,18 г/літр;* $\widetilde{C}_2$ *=0,01 г/літр*. На виході фільтраційного потоку задана умова швидкого винесення сольового розчину. Тут і далі концентрації сольових розчинів вказані у відносних безрозмірних одиницях

Національний університет
водного господарства
та природокористування

(фактична концентрація віднесена до концентрації граничного насичення сольового розчину C_*).

На рис. 2.2 показано, що значення швидкостей фільтрації суттєво відрізняються для моделювання масопереносу на фоні фільтрації чистої води (*k=const)* та у випадку фільтрації сольового розчину (*k=k(c)).* Так в першому випадку швидкість фільтрації є постійною, а в другому – змінюється в залежності від розподілу концентрації сольового розчину по області фільтрації, яка через деякий час, при виході процесу на стаціонарний режим, стабілізується на певній величині. На рис. 2.3 продемонстровано, що фронт забруднень при *k=k(c*) з часом значно випереджає фронт забруднень при *k =const*.

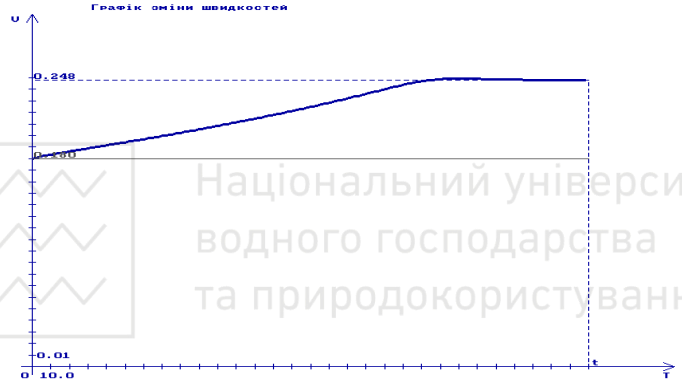


Рис. 2.2. Графіки полів швидкостей фільтрації

k =const; *k=k(c)*

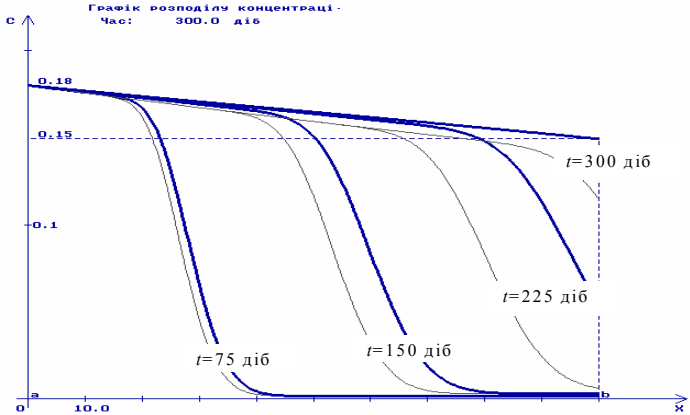


Рис. 2.3. Динаміка руху фронту концентрації сольових розчинів

Національний університет
водного господарства
та природокористування

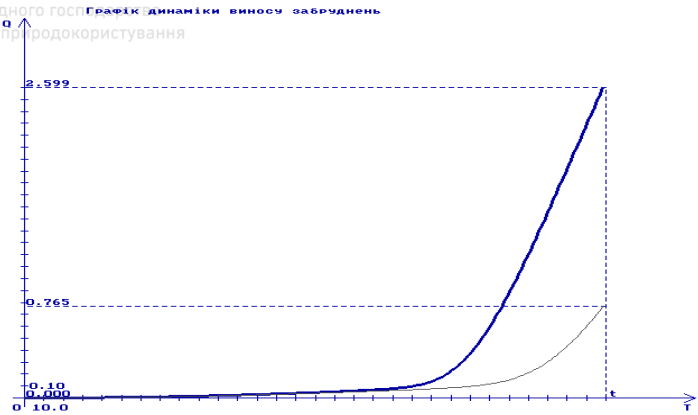


Рис. 2.4. Динаміка винесення кількості речовини,
що поступає з розчином в басейн стічних вод

Кількість винесеної з області фільтрації речовини, що поступає з розчином, яка часто є однією з найважливіших характеристик даного процесу, для задач оцінки та прогнозу ступеня забруднення підземних вод та басейну стічних вод, як проілюстровано на рис. 2.4, при $k=k(c)$ і $k=const$ може відрізнятися в декілька разів.

Нижче наведені графіки розподілу напорів по області фільтрації для різних значень коефіцієнта осмосу відповідно при $k=k(c)$ і $k=const$ (рис. 2.5, рис. 2.6).

В результаті аналізу отриманих результатів числового розв'язку задачі для $k=const$ і $k=k(c)$ виявлено їх суттєву відмінність. Так, наприклад, при заданні граничних умов першого та другого родів, швидкість фільтрації, час поширення фронту забруднення та кількість винесених солей в басейн стічних вод значно відрізняються. Це пояснюється тим, що в першому випадку розглядається фільтрація чистої води, а в другому – слабкого електроліту. Дані процеси описуються різними математичними моделями. В зв'язку з цим, можна стверджувати, що при математичному моделюванні процесу масопереносу розчинених в фільтраційному потоці солей потрібно враховувати залежність параметрів конвективно-фільтраційного потоку від його фізико-хімічних властивостей та властивостей пористого середовища.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

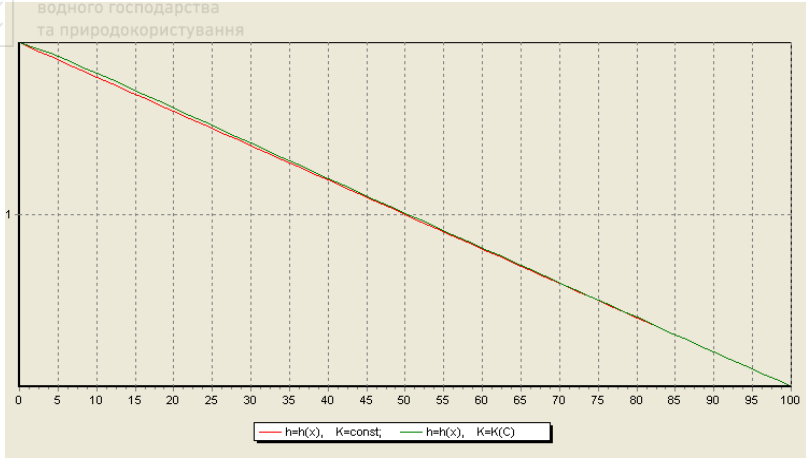


Рис. 2.5. Розподіл напорів $h=h(x)$ при $\nu = 0.005$, t=1470 діб

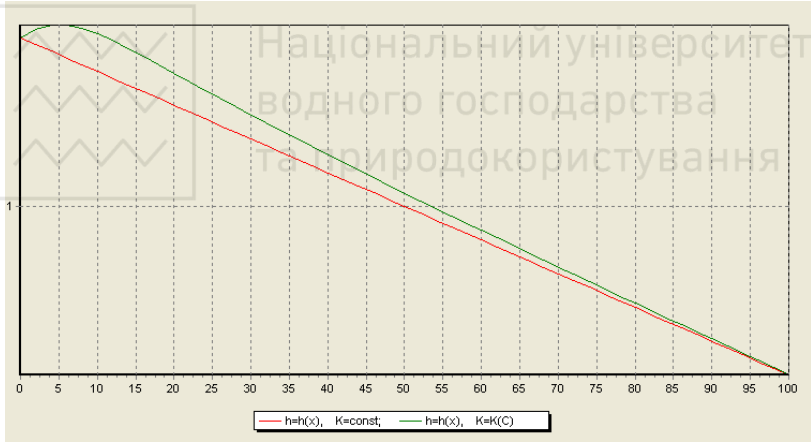


Рис. 2.6. Розподіл напорів $h=h(x)$ при $\nu = 0.05$, t=1470 діб

Як свідчать результати числових експериментів, осмотичні явища при $\left|k(c)\frac{\partial h}{\partial x}\right| >> \left|\nu(c)\frac{\partial c}{\partial x}\right|$ незначно впливають на процес масопереносу. Цей вплив суттєво проявляється для значних коефіцієнтів осмосу, як наведено на рис. 2.5, рис. 2.6, або в тих підобластях області фільтрації, в яких $grad\ h \to 0$.

Національний університет водного господарства та природокористування

2.3. Математичне моделювання одновимірної задачі тепло-масопереносу при фільтраціїсольових розчинів в ґрунтових масивах

2.3.1. Постановка задачі та її математична модель

У зв'язку із всезростаючим впливом антропогенного навантаження на оточуюче середовище виникає проблема у вивченні техногенного впливу різноманітних фізичних процесів на нього. Тому великої уваги заслуговують питання розробки, дослідження і впровадження методів математичного моделювання для розв'язання задач підземного тепло-масопереносу при фільтрації підземних вод з метою прийняття оптимальних технічних рішень.

Природне середовище настільки перевантажене відходами промислового виробництва і побутовими викидами, що воно не в змозі їх повністю знешкодити. Багато речовин не розкладаються або розкладаються дуже повільно, тому створюється загроза порушення екологічних зв'язків у природі. Зокрема, забруднення ґрунтів та ґрунтових вод різними хімічними речовинами та відходами виробництва є однією з важливих проблем сьогодення.

Дослідимо процес масопереносу сольових розчинів з урахуванням залежностей параметрів фільтрації і масопереносу від концентрації сольового розчину, наявності осмотичних явищ в неізотермічних умовах на модельній задачі (рис. 2.1).

Математичну модель одновимірної задачі масопереносу сольових розчинів при фільтрації підземних вод до водозабірника з урахуванням залежності параметрів фільтрації і масопереносу від концентрації сольового розчину та впливу осмотичних явищ на процес переносу в неізотермічних умовах можна описати наступною крайовою задачею [58]:

$$\frac{\partial\left(D(c)\dfrac{\partial c}{\partial x}\right)}{\partial x} - V(c)\frac{\partial c}{\partial x} - \gamma(c - C_*) + D_T\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \sigma\frac{\partial c}{\partial t},\ x \in (0,l),\ t > 0, \tag{2.24}$$

$$V(c) = -k(c)\frac{\partial h}{\partial x} + v(c)\frac{\partial c}{\partial x},\quad \frac{\partial V}{\partial x} = 0,\quad x \in (0,l), \tag{2.25}$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - VC_p \frac{\partial T}{\partial x} = C_n \frac{\partial T}{\partial t}, \qquad x \in (0,l),\ t > 0, \tag{2.26}$$

$$h(0)=H_1, \qquad h(l)=H_2, \tag{2.27}$$

$$c(x,0) = \widetilde{C}_0(x),\ 0 \le x \le l,\ c(0,t) = \widetilde{C}_1(t),\ l_2 c\ (l,t) = \widetilde{C}_2(t),\ t \ge 0, \tag{2.28}$$

$$T(x,0) = \widetilde{T}_0(x), 0 \le x \le l,\ T(0,t) = \widetilde{T}_1(t),\ T(l,t) = \widetilde{T}_2(t), 0 < t \le t_1. \tag{2.29}$$

Тут введені наступні позначення: $c(x,t)$ – концентрація сольового розчину в точці з координатою x в момент часу t; $\widetilde{C}_1(t)$ – концентрація розчинених речовин в лівому басейні; l_2 – диференціальний оператор, що задає граничну умову для концентрації в правому басейні; $\widetilde{C}_0(x)$ – розподіл концентрації в шарі ґрунту в початковий момент часу; $\widetilde{T}_1(t)$ – температура в лівому басейні; $\widetilde{T}_2(t)$ – температура в правому басейні; $T_0(x)$ – розподіл температури в пласті в початковий момент часу $t=0$; C_* – концентрація граничного насичення; $V(c)$ – швидкість фільтрації сольового розчину; $\nu(c)$ – коефіцієнт осмосу; σ – пористість ґрунту; $k(c)$ – коефіцієнт фільтрації, залежність якого від концентрації сольового розчину встановлена експериментально [63]; $h = \dfrac{p}{\rho \cdot g} + y$ – п'єзометричний напір, p – тиск, ρ – густина сольового розчину, g – прискорення вільного падіння, y - вертикальна координата; $D(c) = D_\mu + \lambda_1 |V(c)|$ – коефіцієнт конвективної дифузії, де D_μ – коефіцієнт молекулярної дифузії, λ_1 – параметр гідродинамічної дисперсії; γ – константа швидкості масообміну; t – час; C_p , C_n – питомі теплоємності відповідно при сталому тиску та температурі.

Ґрунтовий масив вважається неоднорідним щодо фільтрації, коефіцієнт фільтрації якого залежить не лише від координат області фільтрації, але й від концентрації сольового розчину, тобто $k=k(c)$,

Національний університет
водного господарства
та природокористування

оскільки рух сольового розчину в ґрунті, як показано в роботі [63], представляє собою рух слабкого електроліту. В результаті проведених експериментальних досліджень фільтрації сольових розчинів в піщаних ґрунтах, їх математичної обробки, в [63] отримана поліноміальна залежність коефіцієнта фільтрації k від концентрації сольового розчину (1.2).

Доведено [118], що при заданні граничних умов першого роду існує єдиний класичний розв'язок крайової задачі (2.24), (2.25), (2.28). При $\left|k(c)\frac{\partial h}{\partial x}\right| >> \left|\nu(c)\frac{\partial c}{\partial x}\right|$, використовуючи (2.25), (2.27), отримаємо значення п'єзометричного напору на [0,l] при відомому розподілі концентрації $c(x,t)$, $x\in[0,l]$, а звідси і значення швидкості фільтрації

$$h(x,t)=\frac{H_2-H_1}{\int\limits_0^l \frac{dx}{k(c(x,t))}}\cdot\int\limits_0^x \frac{ds}{k(c(s,t))}+H_1,$$

$$V(c(x_*,t),t)=\frac{H_1-H_2}{\int\limits_0^l \frac{dx}{k(c(x,t))}},$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

де $x_*\in\{0;l\}$.

При наявності осмосу швидкість фільтрації обчислюється за формулою

$$V(c(x_*,t),t)=\frac{H_1-H_2\pm\int\limits_0^l \frac{V(c(x,t))}{k(c(x,t))}\frac{\partial c}{\partial x}dx}{\int\limits_0^l \frac{dx}{k(c(x,t))}}.$$

Для апроксимації інтегралу $I=\int\limits_0^l \frac{dx}{k(c(x,t))}$ використаємо формулу трапеції. Так, як $k\in C([0,+\infty])$, a $c(x,t)\in C^2[0,l]$ і

Національний університет водного господарства та природокористування

$c(x,t) \geq 0,\ x \in [0,l],$ то $k(c(x,t)) \in C([0,l])$ і $k(c(x,t)) > 0$ $\forall\, x \in [0,l],$ а $I(C(x,t_k)) = I_h^k + O(h_1^2)$,

$$I_h^k = h\left(\frac{1}{2k(C_0^k)} + k(C_1^k) + k(C_2^k) + \ldots + k(C_{n-1}^k) + \frac{1}{2k(C_n^k)}\right).$$

У випадку сталого коефіцієнта фільтрації фільтруючого розчину значення швидкості фільтрації обчислюється за формулою

$$V = k\frac{H_1 - H_2}{l}.$$

2.3.2. Числовий розв'язок задачі

Розв'язок задачі (2.24)-(2.29) отримаємо методом скінченних різниць. В зв'язку з цим покриємо область розв'язку даної задачі сіткою з кроками h_1 і τ по осях Ox і Ot відповідно

$$\omega_{\substack{h\ \tau \\ l}} = \left\{ (x_i, t_k) \;\middle|\; \begin{array}{l} x_i = i \cdot h_1, \quad i = \overline{0,n}, \quad h_1 = \dfrac{l}{n}, \\ t_k = k \cdot \tau, \quad k = \overline{0,K_1}, \quad \tau = \dfrac{t_1}{K_1}. \end{array} \right\}$$

Отримаємо спочатку числовий розв'язок задачі теплопереносу (2.26), (2.29). Для розв'язання даної задачі побудуємо монотонну різницеву схему. З (2.26) маємо

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + r^1 \frac{\partial T}{\partial x} = N_t \frac{\partial T}{\partial t}, \tag{2.30}$$

де $$r^1 = \frac{-VC_p}{\lambda}; \quad N_t = \frac{C_n}{\lambda}. \tag{2.31}$$

Замінивши похідні їх скінченними різницями і підставивши у (2.30), отримаємо наступну монотонну різницеву схему:

$$\mu_1 \frac{T_{i-1}^{k+1} - 2T_i^{k+1} + T_{i+1}^{k+1}}{h_1^2} + r_+^1 \frac{T_{i+1}^{k+1} - T_i^{k+1}}{h_1} + r_-^1 \frac{T_i^{k+1} - T_{i-1}^{k+1}}{h_1} = N_t \frac{T_i^{k+1} - T_i^k}{\tau}, \tag{2.32}$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$T_i^0 = \widetilde{T}_0(x_i),\ x_i = i \cdot h_1,\ i = \overline{0,n}\,, \tag{2.33}$$

$$T_0^k = \widetilde{T}_1(t_k),\ T_n^k = \widetilde{T}_2(t_k),\ t_k = k \cdot \tau,\quad k = \overline{0, K_1}\,. \tag{2.34}$$

Тут введені наступні позначення:

$$\mu_1 = \frac{1}{1 + 0.5 h_1 \left| r^1 \right|}\,,\quad r^1 = r_+^1 + r_-^1\,, \tag{2.35}$$

$$r_+^1 = 0.5(r^1 + \left| r^1 \right|) \ge 0\,,\ r_-^1 = 0.5(r^1 - \left| r^1 \right|) \le 0$$

або, з врахуванням (2.31), (2.35)

$$r_+^1 = 0\,,\quad r_-^1 = \frac{-VC_p}{\lambda}.$$

Запишемо (2.32) в прогоночному вигляді

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$\begin{cases} a_i^1 T_{i-1}^{k+1} - c_i^1 T_i^{k+1} + b_i^1 T_{i+1}^{k+1} = -f_i^1\,, \\ T_0^{k+1} = \chi_1^1 T_1^{k+1} + \chi_2^1,\quad T_n^{k+1} = \chi_3^1 T_{n-1}^{k+1} + \chi_4^1. \end{cases} \tag{2.36}$$

Розв'язок (2.36) знаходимо методом прогонки

$$T_i^{k+1} = \alpha_{i+1}^1 T_{i+1}^{k+1} + \beta_{i+1}^1\,, \tag{2.37}$$

де

$$\alpha_{i+1}^1 = \frac{b_1}{c_1 - \alpha_i^1 a_1},\qquad \beta_{i+1}^1 = \frac{a_1 \beta_i^1 + f_1}{c_1 - \alpha_i^1 a_1},$$

$$\alpha_1 = 0;\quad \beta_1 = \chi_4^1 = T_1\,,$$

$$a_i^1 = \frac{\mu_1}{h^2} - \frac{r_-^1}{h},\quad b_i^1 = \frac{\mu_1}{h^2} + \frac{r_+^1}{h},\quad c_i^1 = \frac{2\mu_1}{h^2} + \frac{r_+^1}{h} - \frac{r_-^1}{h} + \frac{N_t}{\tau},$$

$$f_1 = \frac{N_t}{\tau} T_i^k;\quad \chi_1^1 = 0;\quad \chi_2^1 = T_1;\quad \chi_3^1 = 0;\quad \chi_4^1 = T_2.$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Побудуємо монотонну різницеву схему для отримання числового розв'язку задачі (2.24), (2.28). З рівняння (2.24) маємо

$$D(c)\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}+\frac{\partial D(c)}{\partial x}\frac{\partial c}{\partial x}-V(c)\frac{\partial c}{\partial x}-\gamma(c-C_*)+D_T\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=\sigma\frac{\partial c}{\partial t}. \quad (2.38)$$

Оскільки $D(c)=D_\mu+\lambda_1|V(c)|$, то враховуючи друге рівняння в (2.25), матимемо

$$D(c)\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}-V(c)\frac{\partial c}{\partial x}-\gamma(c-C_*)+D_T\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=\sigma\frac{\partial c}{\partial t} \quad (2.39)$$

або

$$\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}-\frac{V(c)}{D(c)}\frac{\partial c}{\partial x}-\frac{\gamma}{D(c)}(c-C_*)+\frac{D_T}{D(c)}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=\frac{\sigma}{D(c)}\frac{\partial c}{\partial t}.$$

Тоді монотонна різницева схема для (2.38) матиме наступний вигляд:

$$\mu_2\frac{C_{i-1}^{k+1}-2C_i^{k+1}+C_{i+1}^{k+1}}{h_1^{\,2}}-\frac{\gamma}{D_i^k}(C_i^{k+1}-C_*)+\frac{D_T}{D_i^k}\frac{T_{i-1}^{k+1}-2T_i^{k+1}+T_{i+1}^{k+1}}{h_1^{\,2}}+$$

$$+r_+\frac{C_{i+1}^{k+1}-C_i^{k+1}}{h_1}+r_-\frac{C_i^{k+1}-C_{i-1}^{k+1}}{h_1}=\frac{\sigma}{D_i^k}\frac{C_i^{k+1}-C_i^k}{\tau}, \quad (2.40)$$

$$C_i^0=\widetilde{C}_0(x_i),\ x_i=i\cdot h_1,\ i=\overline{0,N_1};$$

$$C_0^k=\widetilde{C}_1(t_k),\quad C_{N_1}^k=\widetilde{C}_2(t_k),\ t_k=k\cdot\tau,\quad k=\overline{0,N_2};$$

$$\mu_2=\frac{1}{1+0.5h_1|r_2|}=\frac{1}{1+\dfrac{h_1V}{2D_i^k}},$$

$$r_2=r_+^2+r_-^2,\qquad r_+^2\equiv 0,\qquad r_-^2\equiv r_2=-\frac{V}{D_i^k}<0.$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Запишемо різницеву схему у прогоночному вигляді

$$\begin{cases} a_i^2 C_{i-1}^{k+1} - c_i^2 C_i^{k+1} + b_i^2 C_{i+1}^{k+1} = -f_i^2, \\ C_0^{k+1} = \chi_1^2 C_1^{k+1} + \chi_2^2, \\ C_n^{k+1} = \chi_3^2 C_{n-1}^{k+1} + \chi_4^2, \end{cases} \tag{2.41}$$

$$a_i^2 = \frac{\mu_2}{h_1^2} - \frac{r_-^2}{h_1}; \quad b_i^2 = \frac{\mu_2}{h_1^2} + \frac{r_+^2}{h_1}; \quad c_i^2 = \frac{2\mu_2}{h_1^2} + \frac{r_+}{h_1} - \frac{r_-}{h_1} + \frac{\gamma}{D_i^k} + \frac{\sigma}{D_i^k \tau};$$

$$f_i^2 = \frac{\gamma}{D_i^k} C_* + \frac{\sigma}{D_i^k \tau} C_i^k + \frac{D_T}{v_i^k} \frac{T_{i-1}^{k+1} - 2T_i^{k+1} + T_{i+1}^{k+1}}{h_1^2},$$

$$\chi_1^2 \equiv 0, \quad \chi_2^2 \equiv c_1, \quad \chi_3^2 \equiv 0, \quad \chi_4^2 \equiv c_2.$$

Розв'язок (2.41) знаходиться методом прогонки

$$C_i^{k+1} = \alpha_{i+1}^2 C_{i+1}^{k+1} + \beta_{i+1}^2,$$

де $$\alpha_{i+1}^2 = \frac{b_i^2}{c_i^2 - \alpha_i^2 a_i^2}; \qquad \beta_{i+1}^2 = \frac{a_i^2 \beta_i^2 + f_i^2}{c_i^2 - \alpha_i^2 a_i^2},$$

$$\alpha_1^2 \equiv \chi_1^2 \equiv 0; \qquad \beta_1^2 \equiv \chi_2^2 \equiv C_1^0.$$

2.3.3. Результати числових експериментів та їх аналіз

Для даної задачі розроблена комплексна програма. На основі програмної реалізації задачі проведено значну кількість числових експериментів, що дало можливість провести аналіз отриманих результатів для різних вхідних даних задачі та детально дослідити процес тепло-масопереносу розчинених у воді солей.

У результаті проведення числових експериментів та аналізу результатів зроблено порівняння для коефіцієнтів фільтрації *k=const* і *k=k(c).* Нижче наведено результати числових експериментів для сталих граничних і початкової умов із наступними вхідними даними:

Національний університет водного господарства та природокористування

$t=30$ діб, $l=100$ м, $\sigma=0,4$; $\gamma=0,0065$ доба$^{-1}$; $D_м=0,000001$ м^2/добу; $\lambda_1=0,3$ м; $H_1=5$ м; $H_2=1$ м; $N_1=10$; $N_2=20$; $C_*=35$ г/літр; $\widetilde{C}_0=5$ г/літр; $\widetilde{C}_1=35$ г/літр; $\widetilde{C}_2=5$ г/літр. $\widetilde{T}_0=10$ град; $\widetilde{T}_1=30$ град; $\widetilde{T}_2=10$ град; $C_p=4.2\cdot10^6$ Дж/кг$\cdot$град; $C_п=3\cdot10^6$ Дж/кг$\cdot$град.

На основі результатів числових експериментів отримані графіки полів швидкостей фільтрації (рис. 2.8), розподілу концентрації сольових розчинів по області фільтрації для різних значень коефіцієнта фільтрації та коефіцієнта конвективної дифузії (як сталих, так і залежних від концентрації сольового розчину), пористості ґрунту в ізотермічних (чорний колір) та неізотермічних (червоний колір) умовах, які представлені на рис. 2.9, рис. 2.10.

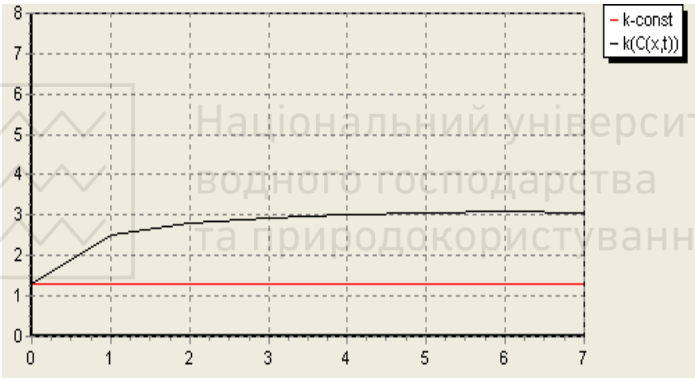


Рис. 2.8. Графіки полів швидкостей фільтрації для коефіцієнтів фільтрації *k=const* і *k=k(c)*

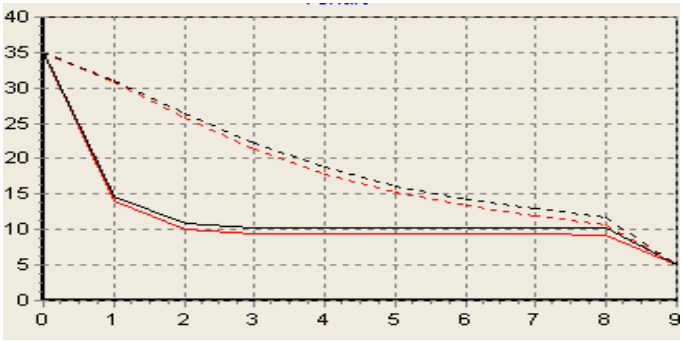


Рис. 2.9. Графіки полів концентрацій сольового розчину для коефіцієнтів фільтрації *k=const* (суцільна лінія) *і k=k(c)* (пунктирна лінія)

Національний університет
водного господарства
та природокористування

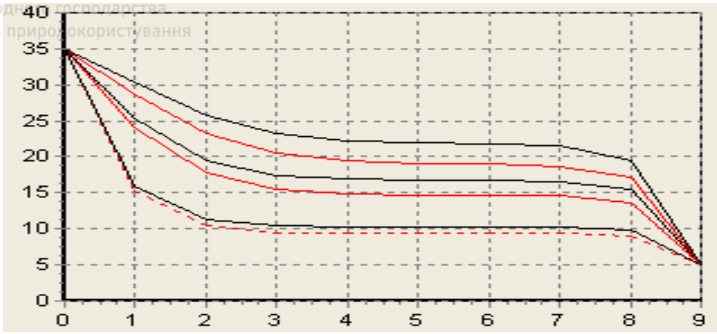


Рис. 2.10. Порівняльні графіки полів концентрацій сольового розчину в ізотермічних та неізотермічних умовах

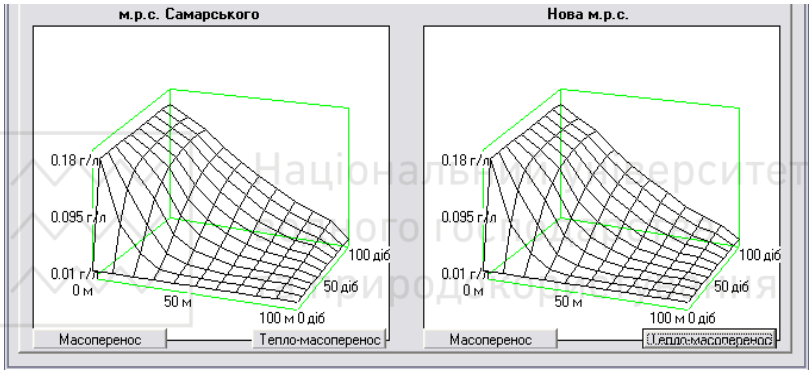


Рис. 2.11. Графік зміни поля концентрацій сольового розчину з часом при використанні монотонних різницевих схем О. А. Самарського та А. П. Власюка в неізотермічних умовах

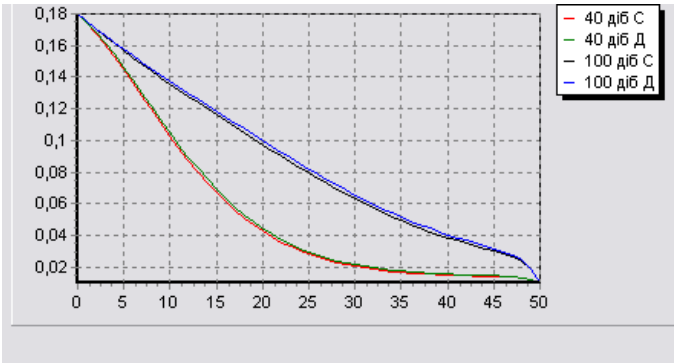


Рис 2.12. Порівняльний графік розподілу концентрацій сольового розчину при використанні монотонних різницевих схем О. А. Самарського та А. П. Власюка в неізотермічних умовах

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Обчислення похибки між результатами за м.р.с. Самарського та за Новою м.р.с. з теплопереносом

x/t	0 d m/s	10 d m/s	20 d m/s	30 d m/s	40 d m/s	50 d m/s	60 d m/s	70 d m/s	80
0 m	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,0
2 m	0,000000	0,000414	0,000417	0,000411	0,000389	0,000357	0,000321	0,000285	0,0
4 m	0,000000	0,000668	0,000772	0,000781	0,000749	0,000693	0,000627	0,000559	0,0
6 m	0,000000	0,000807	0,001051	0,001105	0,001078	0,001008	0,000918	0,000822	0,0
8 m	0,000000	0,000867	0,001254	0,001378	0,001373	0,001300	0,001193	0,001075	0,0
10 m	0,000000	0,000874	0,001389	0,001597	0,001629	0,001565	0,001450	0,001315	0,0
12 m	0,000000	0,000848	0,001465	0,001763	0,001846	0,001801	0,001687	0,001541	0,0
14 m	0,000000	0,000801	0,001492	0,001879	0,002022	0,002008	0,001903	0,001751	0,0

Рис. 2.13. Похибка між результатами обчислень при використанні монотонних різницевих схем О. А. Самарського та А. П. Власюка в неізотермічних умовах

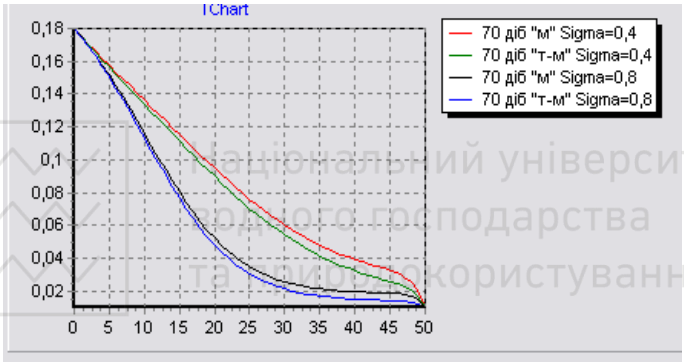


Рис. 2.14. Графіки полів концентрацій сольового розчину при $\sigma = 0{,}4$ і $\sigma = 0{,}8$ в ізотермічних та неізотермічних умовах

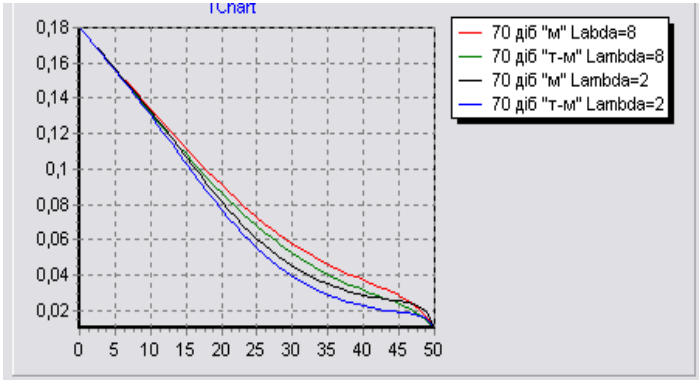


Рис. 2.15. Графіки полів концентрацій сольового розчину при $\lambda_1 = 8$ і $\lambda_1 = 2$ в ізотермічних та неізотермічних умовах

Національний університет водного господарства та природокористування

На основі результатів проведених числових експериментів та їх аналізу можна зробити наступні висновки:

– швидкість фільтрації при $k=k(c)$ зростає і прямує до насичення в часі, а для сталого коефіцієнта фільтрації $k=const$ швидкість фільтрації також стала $V = const$ (див. рис. 2.8);

– фронт концентрації сольових розчинів при $k=k(c)$ з часом значно випереджує фронт забруднень при $k=const$ (див. рис. 2.9);

– при збільшенні пористості ґрунту концентрація сольових розчинів інтенсивніше перерозподіляється по області фільтрації (див. рис. 2.14);

– при збільшенні параметра дисперсії λ_1, а отже і коефіцієнта конвективної дифузії $D(c)$ швидше відбувається дисипація фронту поширення сольових розчинів, як видно з (див. рис. 2.15);

– врахування неізотермічних умов призводить до того, що концентрація швидше досягає свого насичення в порівнянні з ізотермічними умовами; з ростом температури концентрація сольових розчинів інтенсивніше перерозподіляється по області фільтрації (див. рис. 2.10);

– результати, отримані з використанням монотонної різницевої схеми О.А. Самарського та нової монотонної різницевої схеми А.П. Власюка (див. рис. 11, рис. 12), достатньо добре співпадають для заданого діапазону вхідних значень. Похибка між ними становить $0.003 \div 0.000001$ г/літр (див. рис. 2.13).

В зв'язку з цим, можна стверджувати, що при математичному моделюванні процесу тепло-масопереносу сольових розчинів потрібно враховувати залежність параметрів фільтраційного потоку від його фізико-хімічних властивостей та властивостей пористого середовища. Вплив неізотермічних умов на проходження процесу фільтрації сольових розчинів в ґрунтових середовищах є суттєвим і це проявляється в тому, що процеси фільтрації сольових розчинів проходять інтенсивніше часом.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

РОЗДІЛ 3
МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДВОВИМІРНОЇ ФІЛЬТРАЦІЇ СОЛЬОВИХ РОЗЧИНІВ У ҐРУНТОВИХ СЕРЕДОВИЩАХ

3.1. Математичне моделювання масопереносу при двовимірній нестаціонарній фільтрації сольових розчинів в основі ГТС

3.1.1. Постановка задачі та її математична модель

Розглянемо процес фільтрації сольових розчинів із хвостосховищ в основі гідротехнічної споруди (рис. 3.1) з врахуванням впливу осмотичних явищ та залежності параметрів фільтрації і масопереносу від концентрації сольового розчину. Нехай задано напори у верхньому та нижньому б'єфах H_1 та H_2. Основа ГТС підстилається водоупором, що знаходиться на глибині b.

При нехтуванні залежністю параметрів фільтрації і масопереносу від концентрації сольового розчину дана задача достатньо повно висвітлена в роботах [17, 24, 30, 36, 71, 75, 83, 104, 113, 115, 128, 137, 167, 188].

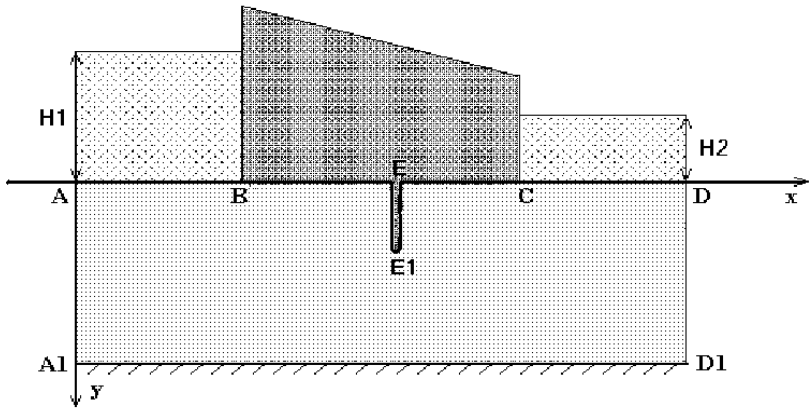


Рис. 3.1. Фільтрація сольових розчинів в основі ГТС

Математичну модель процесу нестаціонарної фільтрації сольових розчинів в основі ГТС з урахуванням впливу осмотичних

Національний університет водного господарства та природокористування

явищ та залежності параметрів фільтрації і масопереносу від концентрації сольового розчину в двовимірному випадку в загальноприйнятих позначеннях можна описати наступною крайовою задачею [43, 51, 54]:

$$div(\boldsymbol{D}(c)gradc) - \vec{V}grad\ c - \gamma(c - C_m) = \sigma\frac{\partial c}{\partial t}, (x,y) \in \Omega,\ t > 0, \tag{3.1}$$

$$div(\boldsymbol{K}(c)grad\, h) = \mu\frac{\partial h}{\partial t}, \quad (x,y) \in \Omega,\ t > 0, \tag{3.2}$$

$$\vec{V} = -\boldsymbol{K}(c)grad\ h + \boldsymbol{v}(c)gradc, \quad div\vec{V} = 0, \quad (x,y) \in \Omega, \tag{3.3}$$

$$(\vec{V}, \boldsymbol{n})\Big|_{AA_1D_1D} = (\vec{V}, \boldsymbol{n})\Big|_{BEE_1C} = 0,\ t > 0,\ \ h\big|_{AB} = \widetilde{H}_1,\ \ h\big|_{CD} = \widetilde{H}_2, \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial c}{\partial n}\Big|_{BEE_1C} = 0,\ \ \frac{\partial c}{\partial n}\Big|_{CD} = 0,\ \ lc\big|_{AA_1D_1D} = \begin{cases} \dfrac{\partial c}{\partial n} = 0, \\ c\big|_{AA_1D_1D} = C_m, \end{cases} t > 0, \tag{3.5}$$

$$c(x,0,t) = \widetilde{C}_1(t),\ t > 0,\ h(x,y,0) = \widetilde{H}_0(x,y),\ c(x,y,0) = \widetilde{C}_0(x,y),\ (x,y) \in \Omega. \tag{3.6}$$

Тут $h(x,y,t)$ – п'єзометричний напір; H_1, H_2 – напори у верхньому та нижньому б'єфах відповідно; *c(x,y,t)* – концентрація сольового розчину; $C_1(t)$ – концентрація солей у верхньому б'єфі $\boldsymbol{K}(c)$, $\boldsymbol{D}(c)$, $\boldsymbol{v}(c)$ – відповідно тензори коефіцієнтів фільтрації, конвективної дифузії та осмосу; $\vec{V} = (V_x; V_y)$ – вектор швидкості фільтрації сольового розчину; $\boldsymbol{n}$ – внутрішня нормаль до межі області фільтрації; t – час; σ – пористість ґрунту; γ – константа швидкості масообміну; C_m – концентрація граничного насичення, μ – коефіцієнт пружноємкості гірської породи, l – диференціальний оператор, що задає граничну умову для концентрації солей на водоупорі та на межі $AA_1 \bigcup DD_1$.

Національний університет водного господарства та природокористування

Рівняння (3.2) описує нестаціонарну фільтрацію сольових розчинів в основі ГТС, (3.1) – рівняння масопереносу солей, (3.3) – закон Дарсі для фільтрації сольових розчинів та рівняння нерозривності.

3.1.2. Числове розв'язування крайової задачі масопереносу при двовимірній нестаціонарній фільтрації сольових розчинів в основі ГТС методом скінченних елементів

Варіаційне формулювання задачі (3.1)-(3.6) має вигляд [43, 51, 54]

$$\mu \iint\limits_{\Omega} \frac{\partial h}{\partial t} \cdot s(x,y)dxdy = \iint\limits_{\Omega} (\boldsymbol{K}(c) grad\, h,\ grad\, s)dxdy, \tag{3.7}$$

$$\forall\ s(x,y) \in S, \quad h(x,y,t) \in \Phi, \quad c(x,y,t) \in \Psi, \quad \forall\ t \in (0,T];$$

$$\iint\limits_{\Omega} h(x,y,0) \cdot s(x,y)dxdy = \iint\limits_{\Omega} \widetilde{H}_0(x,y) \cdot s(x,y)dxdy\,, \forall\ s(x,y) \in S, t = 0\,; \tag{3.8}$$

$$\sigma \iint\limits_{\Omega} \frac{\partial c}{\partial t} \cdot g(x,y)dxdy + \iint\limits_{\Omega} (\boldsymbol{D}(c) grad\ c, grad\ g)dxdy +$$

$$+ \iint\limits_{\Omega} (\vec{V},\ grad\ c) \cdot g(x,y)\ dxdy + \gamma \iint\limits_{\Omega} c \cdot g(x,y)dxdy = \gamma\, C_m \iint\limits_{\Omega} g(x,y)dxdy, \tag{3.9}$$

$$\forall\ g(x,y) \in G, \qquad h(x,y,t) \in \Phi, \qquad c(x,y,t) \in \Psi, \qquad \forall\ t \in (0,T],$$

$$\iint\limits_{\Omega} c(x,y,0) \cdot g(x,y)dxdy = \iint\limits_{\Omega} \widetilde{C}_0(x,y) \cdot g(x,y)dxdy, \tag{3.10}$$

$$\forall\ g(x,y) \in G,\ \ t = \overline{0,T},$$

де $S = \left\{ s \in W_2^1(\Omega) \middle| s\big|_{AB} = 0,\ s\big|_{CD} = 0 \right\}$, $G = \left\{ g \in W_2^1(\Omega) \middle| g\big|_{AB} = 0 \right\}$,

Національний університет водного господарства та природокористування

$$\Phi \in \left\{ \varphi(x,y,t) \in L_2(\Omega), \frac{\partial \varphi}{\partial t} \in L_2(\Omega), \frac{\partial \varphi}{\partial x} \in L_2(\Omega), \frac{\partial \varphi}{\partial y} \in L_2(\Omega) \middle| \varphi|_{AB} = \widetilde{H}_1, \varphi|_{CD} = \widetilde{H}_2 \right\}$$

$$\Psi \in \left\{ \psi(x,y,t) \in L_2(\Omega), \frac{\partial \psi}{\partial t} \in L_2(\Omega), \frac{\partial \psi}{\partial x} \in L_2(\Omega), \frac{\partial \psi}{\partial y} \in L_2(\Omega) \middle| \psi|_{AB} = C_1 \right\}$$

- простори допустимих функцій; $W_2^1(\Omega)$ - простір Соболєва.

Наближений розв'язок задачі (3.1)-(3.6) шукаємо у вигляді

$$\widehat{h}(x,y,t) = \sum_{i=1}^{n_1} b_i(t) \cdot N_i^{(h)}(x,y) + W^{(h)}(x,y,t),$$

$$\widehat{c}(x,y,t) = \sum_{i=1}^{n_2} a_i(t) \cdot N_i^{(c)}(x,y) + W^{(c)}(x,y,t),$$

де $\left\{N_i^{(h)}(x,y)\right\}_{i=1}^{n_1}$, $\left\{N_i^{(c)}(x,y)\right\}_{i=1}^{n_2}$ - базиси відповідно n_1-вимірного та n_2-вимірного підпросторів $S_0 \subset S$, $F_0 \subset F$; $W^{(h)}(x,y,t)$, $W^{(c)}(x,y,t)$ - відомі функції, такі, що $W^{(h)}\big|_{AL_1} = \widetilde{H}_1$, $W^{(h)}\big|_{L_2C} = \widetilde{H}_2$, $W^{(c)}\big|_{AB} = \widetilde{C}_1$.

Національний університет водного господарства та природокористування

З рівностей (3.7)-(3.10) при $g(x,y) \in F_0$, $s(x,y) \in S_0$ отримуємо задачу Коші для системи нелінійних диференціальних рівнянь [65, 66, 167, 198]

$$\boldsymbol{M} \cdot \frac{d\boldsymbol{A}}{dt} + \boldsymbol{L}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{A}(t) = 0, \tag{3.11}$$

$$\boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{A}^{(0)} = \boldsymbol{F}^{(0)}, \tag{3.12}$$

$$\boldsymbol{M}^* \cdot \frac{d\boldsymbol{B}}{dt} + \boldsymbol{L}^*(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{B}(t) = \boldsymbol{F}^*, \tag{3.13}$$

$$\boldsymbol{M}^* \cdot \boldsymbol{B}^{(0)} = \boldsymbol{F}^{(0)*}, \tag{3.14}$$

Національний університет
водного господарства

де $\boldsymbol{A} = (a_1(t), a_2(t), ..., a_{n_2}(t))^T$, $\boldsymbol{A}^{(0)} = (a_1(0), a_2(0), ..., a_{n_2}(0))^T$,

$$\boldsymbol{B} = (b_1(t), b_2(t), ..., b_{n_1}(t))^T, \quad \boldsymbol{B}^{(0)} = (b_1(0), b_2(0), ..., b_{n_1}(0))^T,$$

$$\boldsymbol{M} = (m_{ij})_{i,j=1}^{n_2}, \ \boldsymbol{L} = (l_{ij})_{i,j=1}^{n_2}, \ \boldsymbol{F}^{(0)} = (f_i^0)_{i=1}^{n_2}, \ \boldsymbol{M}^* = (m_{ij}^*)_{i,j=1}^{n_1},$$

$$\boldsymbol{L}^* = (l_{ij}^*)_{i,j=1}^{n_1}, \ \boldsymbol{F}^* = (f_i^*)_{i=1}^{n_1}, \ \boldsymbol{F}^{(0)*} = (f_i^{0*})_{i=1}^{m}, \ m_{ij} = \mu \iint\limits_{\Omega} N_i^{(h)} N_j^{(h)} dxdy,$$

$$l_{ij} = \iint\limits_{\Omega} (\boldsymbol{K} grad N_i^{(h)}, grad N_j^{(h)}) dxdy,$$

$$f_i^0 = \mu \iint\limits_{\Omega} H_0 \cdot N_i^{(h)} dxdy - \mu \iint\limits_{\Omega} W^{(h)}(x, y, 0) N_i^{(h)} dxdy,$$

$$m_{ij}^* = m \iint\limits_{\Omega} N_i^{(c)} N_j^{(c)} dxdy,$$

$$l^*_{ij} = \iint\limits_{\Omega} \left\{ (\mathbf{D} grad N_i^{(c)}, grad N_j^{(c)}) + \vec{V} \cdot N_i^{(c)} grad N_j^{(c)} + \gamma N_i^{(c)} \cdot N_j^{(c)} \right\} dxdy,$$

$$f_i^* = \iint\limits_{\Omega} \left(Z_i^1 + Z_i^2 \right) dxdy,$$

де $$Z_i^1 = \gamma \, C_1 N_i^{(c)} - m \frac{\partial W^{(c)}}{\partial t} N_i^{(c)} - (\mathbf{D} grad N_i^{(c)}, grad W^{(c)}),$$

$$Z_i^2 = -\vec{V} \cdot N_i^{(c)} \cdot grad W^{(c)} - \gamma N_i^{(c)} \cdot W^{(c)}$$

$$f_i^{*0} = \iint\limits_{\Omega} C_0 \cdot N_i^{(c)} dxdy - \iint\limits_{\Omega} W^{(c)}(x, y, 0) N_i^{(c)} dxdy.$$

Для знаходження числового розв'язку задачі Коші для системи нелінійних диференціальних рівнянь (3.11)-(3.14), розіб'ємо часовий відрізок [0,T] на M рівних частин з кроком $\tau = \frac{T}{M}$.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Позначимо через $\boldsymbol{A}^{(j)}$, $\boldsymbol{B}^{(j)}$ – наближені розв'язки даної задачі, $\boldsymbol{F}^{*(j)}$ – значення відповідної вектор-функції при $t = j\tau$.

Наближений розв'язок системи нелінійних диференціальних рівнянь (3.11)-(3.14), отримаємо за допомогою неявної різницевої схеми [167]

$$\boldsymbol{M} \cdot \frac{\boldsymbol{A}^{(j+1)} - \boldsymbol{A}^{(j)}}{\tau} + \boldsymbol{L}(\boldsymbol{A}^{(j)}, \boldsymbol{B}^{(j)}) \cdot \boldsymbol{A}^{(j+1)} = 0,$$

$$\boldsymbol{M}^* \cdot \frac{\boldsymbol{B}^{(j+1)} - \boldsymbol{B}^{(j)}}{\tau} + \boldsymbol{L}^*(\boldsymbol{A}^{(j)}, \boldsymbol{B}^{(j)}) \cdot \boldsymbol{B}^{(j+1)} = \boldsymbol{F}^{*(j+1)}, \; j = 0,1,2,..., M-1.$$

Неважко показати, що точність скінченноелементних розв'язків оцінюється величиною, що має порядок $O(h_{\max}^r + \tau)$, де r – степінь поліноміальних базисних функцій МСЕ, $h_{\max}$ – найбільша з довжин сторін всіх трикутних елементів.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

3.1.3. Результати числових експериментів та їх аналіз

Для даної задачі розроблена комплексна програма, яка виконана в інтегрованому середовищі візуального програмування Delphi 6.0. Дана програма володіє великими перевагами для інтерактивної роботи з нею в діалоговому режимі. В ній реалізовано: діалоговий режим задання параметрів моделі, формування області та автоматичне розбиття її на скінченні елементи [60], задання крайових умов з можливістю візуального контролю відповідних параметрів (рис. 3.2). Значна увага приділена сервісному оформленню програми у вигляді систем меню та наглядному графічному представленню отриманих результатів з візуалізацією змодельованих фізичних процесів. Зокрема, передбачено: візуалізацію поширення сольових розчинів в основі гідротехнічного об'єкта при перенесенні їх фільтраційним потоком; візуалізацію динаміки поширення фронту сольового розчину; числові розрахунки та візуалізація полів п'єзометричного напору, швидкості фільтрації, концентрації сольового розчину та маси винесених солей в нижній б'єф. Розроблено зручний інтерфейс,

який дає можливість перегляду відповідних графічних представлень під будь яким кутом. Виведення результатів чисельних розрахунків передбачено на екран монітора, принтер або у файл даних.

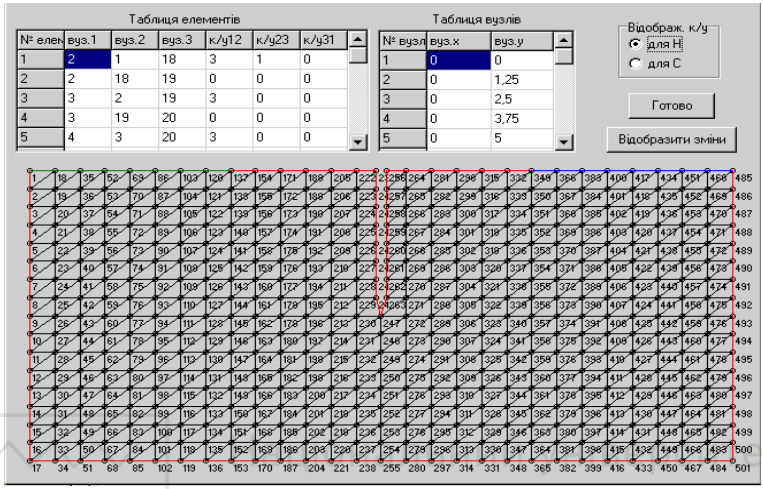


Рис. 3.2. Діалогова форма задання параметрів моделі

Нижче наведено результати числових експериментів даної задачі для $k_{11}(c) = k_{22}(c) = k(c)$ і $k_{11} = k_{22} = k(0) = const$ з наступними початковими даними (рис. 3.3, рис. 3.4):

$AB = CD = 30м$, $BC = AA_1 = DD_1 = 20м$, $EE_1 = 10м$, $m = 0.5$,

$D_{11} = D_m + \lambda|V_x(c)|$, $D_{22} = D_m + \lambda|V_y(c)|$, $D_m = 0.02м^2/добу$,

$\lambda = 0{,}005м$, $D_{12} = D_{21} = 0\,м^2/добу$, $k_{12} = k_{21} = 0\,м/добу$,

$\gamma_1 = 0\ доба^{-1}$, $\mu = 0.001м^{-1}$, $\widetilde{H}_1(x,y,t) = 5м$, $\widetilde{H}_2(x,y,t) = 1м$,

$C_1 = 35г/літр$, $C_0 = 5\,г/літр$, $\nu = 10^{-5}$.

Залежність коефіцієнта фільтрації від концентрації фільтруючого розчину $k = k(c)$ взята з роботи [63].

Обчислення проведено на сітці з 896 трикутних скінченних елементів при лінійних та квадратичних базисних функціях. Для дискретизації в часі використано неявну різницеву схему з рівномірним кроком $\tau = 0{,}5$ доби. Також було досліджено розподіл поля концентрації в основі ГТС з часом (рис. 3.5-3.10).

Національний університет
водного господарства
та природокористування

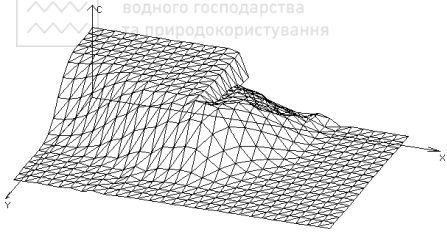


Рис.3.3. Розподіл поля концентрації при *t=27 діб для k=k(c)*

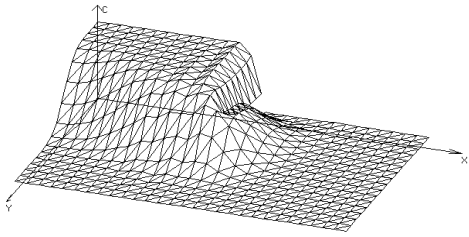


Рис.3.4. Розподіл поля концентрації при *t=27 діб для k=const*

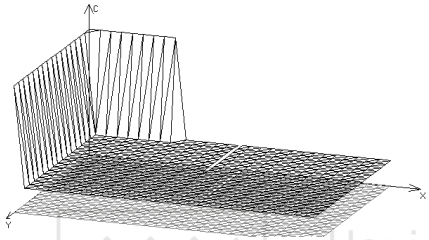


Рис. 3.5. Розподіл концентрації при *t=5 діб*

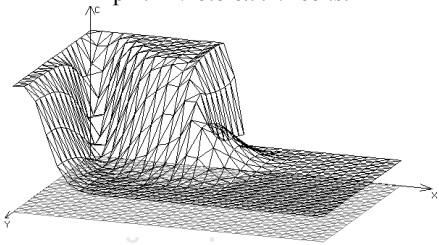


Рис. 3.6. Розподіл концентрації при *t=10 діб*

Національний університет
водного господарства
та природокористування

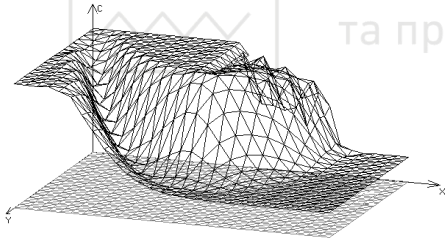


Рис. 3.7. Розподіл концентрації при *t=15 діб*

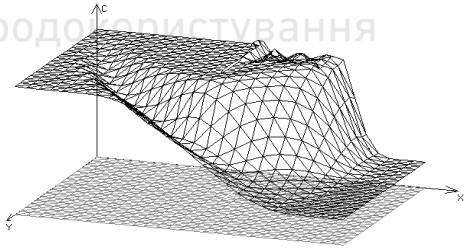


Рис. 3.8. Розподіл концентрації при *t=20 діб*

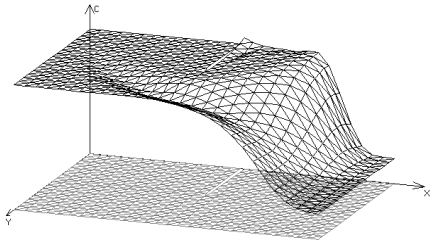


Рис. 3.9. Розподіл концентрації при *t=25 діб*

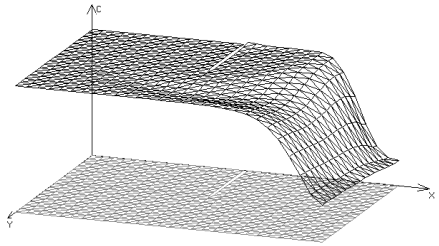


Рис. 3.10. Розподіл концентрації при *t=30 діб*

Національний університет водного господарства та природокористування

При аналізі отриманих результатів числових розв'язків розглянутої вище задачі для сталого коефіцієнта фільтрації ($k=const$) та його залежності від концентрації розчинених солей ($k=k(c)$), виявлено їх суттєву відмінність. Зокрема, як видно з рис.3 і рис.4 розподілів концентрації на момент часу $t=27$ діб, фронт концентрації сольових розчинів при $k=k(c)$ з часом значно випереджає фронт концентрації сольових розчинів при $k=const$. Аналогічні відмінності спостерігаються при співставленні полів швидкостей фільтрації, напорів фільтрації, фільтраційної витрати та кількості винесених солей. Проведене математичне моделювання та результати числових експериментів дозволяють стверджувати, що при проектуванні ГТС, в основах яких наявний процес масопереносу розчинених в фільтраційному потоці солей, потрібно враховувати залежність параметрів фільтраційного потоку від його фізико-хімічних властивостей та пористого середовища. Зокрема, враховувати залежність коефіцієнта фільтрації (а отже і компонент швидкості фільтрації), коефіцієнта конвективної дифузії, коефіцієнта осмосу від концентрації розчину, що фільтрується.

3.2. Математичне моделювання масопереносу при плановій стаціонарній фільтрації сольових розчинів із свердловини

3.2.1. Математичне моделювання масопереносу при плановій стаціонарній фільтрації сольових розчинів із свердловини з круговим контуром впливу

3.2.1.1. Постановка задачі

При добуванні корисних копалин із надр, як один із способів використовують нагнітання деякого розчинника в досконалу свердловину з метою розчинення і перенесення їх фільтраційним потоком та подальшим вловлюванням достатньо густою системою свердловин, що знаходиться на контурі впливу даної свердловини.

Розглянемо процес нагнітання сольових розчинів в досконалу свердловину радіуса r_1 при плановій напірній або безнапірній фільтрації в круговому пласті з радіусом впливу свердловини r_2 або довільним криволінійним контуром впливу і потужністю пласта b.

Національний університет водного господарства та природокористування

Напір в свердловині дорівнює H_1, а на контурі її впливу – H_2 (рис. 3.11).

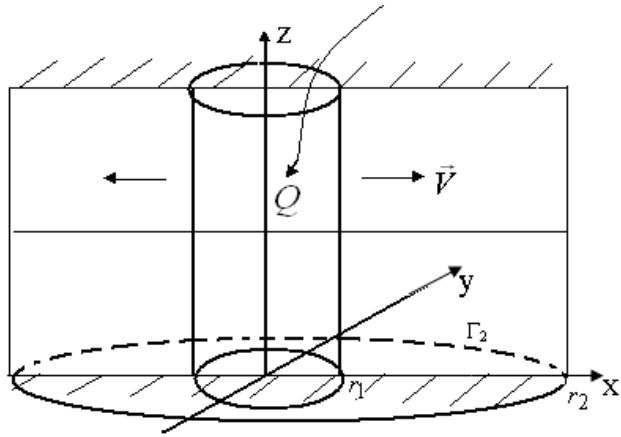


Рис. 3.11. Нагнітання розчинника в досконалу свердловину

Розглянемо процес поширення сольових розчинів в круговому пласті при плановій фільтрації підземних вод. Нехай задано розподіл концентрації сольових розчинів в свердловині $\widetilde{C}_1(t)$ та на контурі її впливу $\widetilde{C}_2(t)$ (або $\left.\frac{\partial c}{\partial n}\right|_{\Gamma_2} = 0$), а також розподіл концентрації солей по області фільтрації кругового пласта $\widetilde{C}_0(x, y)$. Ґрунтове середовище вважається ізотропним відносно проникності сольового розчину з коефіцієнтом фільтрації *k(c)*.

Необхідно дослідити розподіл солей в круговому пласті з плином часу та відмінність між процесом поширення солей на фоні фільтрації чистої води (*k=const*) та у випадку фільтрації сольових розчинів (*k=k(c)*).

3.2.1.2. Математична модель задачі в змінних *x*, *y* фізичної площини

Математична модель перенесення сольових розчинів в ізотропному пласті при плановій напірній фільтрації їх із досконалої свердловини з контуром живлення Γ_2, має вигляд [39, 40]

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$\frac{\partial\left(D(c)\frac{\partial c}{\partial x}\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(D(c)\frac{\partial c}{\partial y}\right)}{\partial y}-V_x(c)\frac{\partial c}{\partial x}-V_y(c)\frac{\partial c}{\partial y}-\gamma(c-C_*)=\sigma\frac{\partial c}{\partial t},$$

$$(x,y)\in G_z,\ t>0, \tag{3.15}$$

$$\vec{V}=-\frac{k(c)}{b}\,gradh\ ,\quad div(b\cdot\vec{V})=0,\quad (x,y)\in G_z, \tag{3.16}$$

$$h\big|_{r=r_1}=H_1,\quad h\big|_{\Gamma_2}=H_2, \tag{3.17}$$

$$c(x,y,0)=\widetilde{C}_0(x,y),\ \ (x,y)\in\overline{G}_z, \tag{3.18}$$

$$c\big|_{r=r_1}=\widetilde{C}_1(t),\quad l_2c=\begin{cases}c\big|_{\Gamma_2}=\widetilde{C}_2(t),\\ \dfrac{\partial c}{\partial n}\Big|_{\Gamma_2}=0,\end{cases}\quad t>0. \tag{3.19}$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Тут $c(x,y,t)$ – концентрація сольових розчинів в пласті, $\vec{V}=(V_x,V_y)$ – вектор швидкості фільтрації, C_* – концентрація граничного насичення, γ – константа швидкості масообміну; σ – пористість ґрунту, l_2 – диференціальний оператор, що задає граничну умову для концентрації на контурі впливу свердловини Γ_2, h – п'єзометричний напір, $D(c)=D_m+\lambda\cdot|V(c)|$ – коефіцієнт конвективної дифузії, λ – параметр гідродинамічної дисперсії.

Після перетворень (3.15), отримаємо

$$D(c)\left(\frac{\partial^2c}{\partial x^2}+\frac{\partial^2c}{\partial y^2}\right)-\left(V_x-\frac{\partial D(c)}{\partial x}\right)\frac{\partial c}{\partial x}-\left(V_y-\frac{\partial D(c)}{\partial y}\right)\frac{\partial c}{\partial y}-\gamma(c-C_*)=\sigma\frac{\partial c}{\partial t}\cdot \tag{3.20}$$

Варто зауважити, що масоперенос на фоні фільтрації чистої води із свердловини вивчався в роботах [13, 15, 104]

Національний університет
водного господарства
та природокористування

3.2.1.3. Математична модель задачі в змінних φ, ψ області комплексного потенціалу

Для побудови числового розв'язку поставленої задачі, використаємо числовий метод конформних відображень [31, 32, 72]. Згідно розробленого підходу [69, 96, 98, 103], перейдемо в задачі (3.15)-(3.19), до нових незалежних змінних φ, ψ області комплексного потенціалу, де φ потенціал фільтрації: $\varphi = -\bar{k}bh$, $\bar{k}$ – усереднений коефіцієнт фільтрації по області фільтрації, ψ – функція течії. Тоді компоненти усередненої швидкості фільтрації для середовища з усередненим коефіцієнтом фільтрації $\bar{k}$ визначаються як

$$\bar{V}_x = -\bar{k}\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{1}{b}\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \bar{V}_y = -\bar{k}\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{1}{b}\frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Ввівши функцію течії $\psi = \psi(x,y)$ [3, 95, 98], на основі (3.16), отримаємо

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

Тоді, після переходу в рівнянні (3.20) до нових незалежних змінних φ, ψ області комплексного потенціалу, остаточно отримаємо

$$D(c)\cdot \bar{V}^2(\varphi,\psi)\left(\frac{\partial^2 c}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial \psi^2}\right) - \bar{V}^2(\varphi,\psi)\frac{\partial c}{\partial \varphi}\frac{1}{b} +$$

$$+\bar{V}^2(\varphi,\psi)\left(\frac{\partial D(c)}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial c}{\partial \varphi} + \frac{\partial D(c)}{\partial \psi}\cdot\frac{\partial c}{\partial \psi}\right) - \frac{\gamma}{b^2}(c - C_*) = \frac{\sigma}{b^2}\frac{\partial c}{\partial t},$$

де $\bar{V}^2(\varphi,\psi) = \bar{V}_x^2(\varphi,\psi) + \bar{V}_y^2(\varphi,\psi)$ – квадрат усередненої швидкості по області фільтрації.

Математична модель задачі (3.15)-(3.19) з урахуванням осесиметричності випадку в нових змінних φ, ψ матиме вигляд [39, 40, 41]

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$D(c)\cdot\overline{V}^{2}(\varphi,\psi)\frac{\partial^2 c}{\partial\varphi^2}-\overline{V}^{2}(\varphi,\psi)\left(\frac{1}{b}-\frac{\partial D(c)}{\partial\varphi}\right)\frac{\partial c}{\partial\varphi}-\frac{\gamma}{b^2}(c-C_*)=\frac{\sigma}{b}\frac{\partial c}{\partial t},$$

$$(\varphi,\psi)\in G_w,\ t>0,\tag{3.21}$$

$$\frac{\partial x}{\partial\varphi}=\frac{\partial y}{\partial\psi},\ \ \frac{\partial x}{\partial\psi}=-\frac{\partial y}{\partial\varphi},\ (x,y)\in G_w,\ x^2(0,\psi)+y^2(0,\psi)=r_1^2,\ 0<\psi<\frac{Q}{4},\tag{3.22}$$

$$g(x(\varphi,\psi),y(\varphi,\psi))=0,\ (\text{зокрема}\ \ x^2(\varphi_0,\psi)+y^2(\varphi_0,\psi)=r_2^2),$$
$$0<\psi<\frac{Q}{4},\tag{3.23}$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$c(\varphi,\psi,0)=\widetilde{C}_0(\varphi),(\varphi,\psi)\in\overline{G}_\omega,c(0,\psi,t)=\widetilde{C}_1(t),\ l_2c=\begin{cases}c(\varphi_0,\psi,t)=\widetilde{C}_2(t),\\ \left.\dfrac{\partial c}{\partial\varphi}\right|_{\varphi=\varphi_0}=0.\end{cases}\tag{3.24}$$

де φ_0 – потенціал фільтрації, значення якого знаходиться нижче, змінна ψ розглядається як параметр.

Перетворимо (3.21) наступним чином (оскільки $\overline{V}^{2}(\varphi,\psi)\neq 0$ для $(\varphi,\psi)\in G_\omega$):

$$\frac{\partial^2 c}{\partial\varphi^2}-\frac{1}{D(c)}\left(\frac{1}{b}-\frac{\partial D(c)}{\partial\varphi}\right)\frac{\partial c}{\partial\varphi}-\frac{\gamma(c-C_*)}{D(c)\cdot\overline{V}^{2}(\varphi,\psi)b^2}=\frac{\sigma}{D(c)\cdot\overline{V}^{2}(\varphi,\psi)b^2}\cdot\frac{\partial c}{\partial t}.$$

3.2.1.4. Числовий розв’язок задачі

Для розв’язку поставленої задачі масопереносу, потрібно спочатку знайти поле швидкості фільтрації $\overline{V}=\left(\overline{V}_x,\overline{V}_y\right)$ із розв’язку

задачі фільтрації (3.22)-(3.24) в оберненій постановці. Після чого отримаємо розв'язок задачі масопереносу (3.21), (3.25). Для її розв'язання використаємо різницевий метод з використанням монотонної різницевої схеми [74, 164] та числових конформних відображень, згідно розроблених алгоритмів [61, 62, 72].

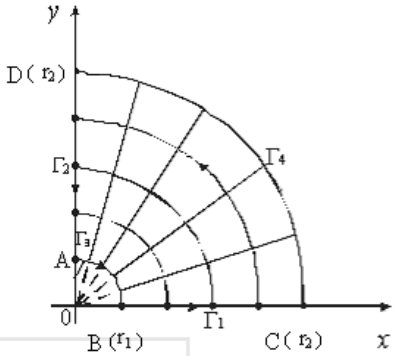


Рис. 3.12. Фрагмент області фільтрації в плані

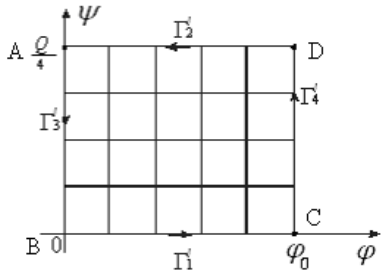


Рис. 3.13. Параметричний прямокутник в області комплексного потенціалу

Якщо контур свердловини та контур її впливу є концентричні кола, то в результаті конформного відображення областей (див. рис. 3.12, рис. 3.13) знаходимо характеристичну функцію течії [13]

$$z = e^{\frac{2\pi}{Q}\left(w_1 + w_0'\right)}, \qquad (3.25)$$

де фільтраційна витрата Q знаходиться як

$$Q = \frac{2\pi\left(\varphi_2 - \varphi_1\right)}{\ln\frac{r_2}{r_1}}, \qquad w_0 = \varphi_0 = \frac{(\varphi_2 - \varphi_1)\ln r_1}{\ln\frac{r_2}{r_1}}.$$

Тут $\varphi_1 = -\bar{k}bH_1$, $\varphi_2 = -\bar{k}bH_2$ – потенціали фільтрації відповідно на контурі свердловини та на контурі її впливу у випадку планової напірної фільтрації; $\varphi_1 = 0{,}5\bar{k}H_1^2$, $\varphi_2 = 0{,}5\bar{k}H_2^2$ – у випадку планової фільтрації з вільною поверхнею.

Національний університет водного господарства та природокористування

З (3.25) маємо

$$x + iy = e^{\frac{2\pi}{Q}(\varphi + \varphi_0 + i\psi)}$$

або

$$x + iy = e^{\frac{2\pi}{Q}(\varphi+\varphi_0)} \cdot e^{i\frac{2\pi\psi}{Q}} = e^{\frac{2\pi(\varphi+\varphi_0)}{Q}} \cdot \left(\cos\frac{2\pi\psi}{Q} + i \sin\frac{2\pi\psi}{Q} \right).$$

Звідси, відокремлюючи дійсну і уявну частини, отримаємо

$$\begin{cases} x = e^{\frac{2\pi(\varphi+\varphi_0)}{Q}} \cdot \cos\frac{2\pi\psi}{Q}, \\ y = e^{\frac{2\pi(\varphi+\varphi_0)}{Q}} \cdot \sin\frac{2\pi\psi}{Q}. \end{cases}$$

Національний університет водного господарства та природокористування

Тоді координати різницевої гідродинамічної сітки фільтрації знаходяться як

$$\begin{cases} x_{ij} = e^{\frac{2\pi(ih_1+\varphi_0)}{Q}} \cdot \cos\frac{2\pi(jh_2)}{Q}, \\ y_{ij} = e^{\frac{2\pi(ih_1+\varphi_0)}{Q}} \cdot \sin\frac{2\pi(jh_2)}{Q}, \end{cases}$$

де $i = \overline{0,n}$, $j = \overline{0,m}$, h_1, h_2 – кроки різницевої сітки на параметричному прямокутнику області комплексного потенціалу.

Комплексна усереднена швидкість фільтраційного потоку, як відомо з [3], знаходиться за формулою

$$\overline{V} = \frac{dw}{dz} = 1 \Big/ \frac{dz}{dw} = \frac{Q}{2\pi}\frac{1}{z}.$$

Квадрат модуля усередненої швидкості фільтрації знаходиться як

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$|V_c| = \left|\frac{dw}{dz}\right| = \frac{1}{\left|\frac{dz}{dw}\right|} = \frac{Q}{2\pi}\frac{1}{|x+iy|} = \frac{Q}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Звідси

$$V_c^2 = \frac{Q^2}{4\pi^2} e^{\frac{4\pi(\varphi+\varphi_0)}{Q}}.$$

Значення квадрата усередненої швидкості фільтрації у вузлах сітки прийме вигляд

$$V_{c_i}^2 = \frac{Q^2}{4\pi^2} e^{\frac{4\pi(ih_1+\varphi_0)}{Q}}, \quad i = \overline{0,n}.$$

Квадрат істинної швидкості фільтрації знаходиться як:

$$V^2(\varphi,c) = V_x^2 + V_y^2 = \frac{k^2(c)}{\overline{k}^2} V_c^2(\varphi).$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Тоді значення квадрату істинної швидкості фільтрації у вузлах різницевої сітки дорівнює

$$V^2 = \frac{k^2}{\overline{k}^2} \cdot \frac{Q^2}{4\pi^2} \cdot e^{-\frac{4\pi(\varphi+\varphi_0)}{Q}}.$$

Для крайової задачі (3.21)-(3.24) запишемо монотонну різницеву схему [164]

$$\mu_i \frac{C_{i-1}^{k+1} - 2C_i^{k+1} + C_{i+1}^{k+1}}{h_1^2} + r_+ \frac{C_{i+1}^{k+1} - C_i^{k+1}}{h_1} + r_- \frac{C_i^{k+1} - C_{i-1}^{k+1}}{h_1} + F_i^{k+1} = \sigma' \frac{C_i^{k+1} - C_i^k}{\tau},$$

$$i = \overline{1,n-1}, \quad k = \overline{0,K-1}, \qquad (3.26)$$

Національний університет водного господарства та природокористування

де $$\mu_i = \frac{1}{1 + 0{,}5h_1\left|r_i\right|} = \frac{1}{1 + \dfrac{0{,}5h_1}{D_i}\left(\dfrac{1}{b} - \dfrac{D_{i+1}^k - D_{i-1}^k}{2h_1}\right)},$$

$$r_i = r_{i+} + r_{i-}, \quad r_{i+} \equiv 0, \quad r_{i-} \equiv r_i < 0,$$

$$r_{i-} = -\frac{1}{D_i}\left(\frac{1}{b} - \frac{D_{i+1}^k - D_{i-1}^k}{2h_1}\right), \; D_i = D_m + \lambda \cdot \left|\overline{V_i}\right|,$$

$$F_i^{k+1} = -\frac{\gamma\left(C_i^{k+1} - C_*\right)}{D\left(C_i^k\right) \cdot \overline{V_i}^2 \cdot b^2}, \quad \sigma' = \frac{\sigma}{D_i \cdot \overline{V_i}^2 \cdot b^2},$$

$$i = \overline{1, n-1}, \quad k = \overline{0, K-1}.$$

Національний університет водного господарства та природокористування

Запишемо різницеву схему (3.26) в прогоночному вигляді

$$a_i \cdot C_{i-1}^{k+1} - \overline{c}_i \cdot C_i^{k+1} + b_i \cdot C_{i+1}^{k+1} = -f_i,$$

$$i = \overline{1, n-1}, \quad k = \overline{0, K-1},$$

де $$a_i = \frac{\mu_i}{{h_1}^2} - \frac{r_-}{h_1}, \quad b_i = \frac{\mu_i}{{h_1}^2} + \frac{r_+}{h_1},$$

$$\overline{c}_i = \frac{2\mu_i}{{h_1}^2} + \frac{r_+}{h_1} - \frac{r_-}{h_1} + \frac{\gamma}{D_i \cdot \overline{V_i}^2 \cdot b^2} + \frac{\sigma}{D_i \cdot \overline{V_i}^2 \cdot \tau \cdot b^2},$$

$$f_i = \frac{\gamma}{D_i \cdot \overline{V_i}^2 \cdot b^2} C_* + \frac{\sigma}{D_i \cdot \overline{V_i}^2 \cdot \tau \cdot b^2} C_i^k, \; i = \overline{1, n-1}.$$

Розв'язок даної різницевої схеми знаходимо методом прогонки [164]

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$C_i^{k+1} = \alpha_{i+1} \cdot C_{i+1}^{k+1} + \beta_{i+1}, \quad i = \overline{1, n-1},$$

де прогоночні коефіцієнти відповідно рівні

$$\alpha_{i+1} = \frac{b_i}{\overline{c}_i - \alpha_i \cdot a_i}, \quad \beta_{i+1} = \frac{a_i \beta_i + f_i}{\overline{c}_i - \alpha_i \cdot a_i}, \quad i = \overline{1, n-1}$$

причому $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = \widetilde{C}_1^{k+1}$.

У випадку задання на контурі впливу свердловини граничної умови першого роду, матимемо $C_n^{k+1} = \widetilde{C}_2^k$, а у випадку задання граничної умови другого роду – $C_n^{k+1} = \frac{\beta_n}{1 - \alpha_n}$.

3.2.1.5. Результати числових експериментів та їх аналіз

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Для реалізації різницевої схеми даної задачі розроблена комплексна програма в інтегрованому середовищі візуального програмування Delphi 7.0. В ній реалізовано: діалоговий режим задання параметрів моделі, задання крайових та початкової умов з можливістю візуального контролю відповідних параметрів. Значна увага приділена сервісному оформленню програми у вигляді систем меню та наглядному графічному представленню отриманих результатів. Зокрема, передбачено: візуалізацію поширення розчинених речовин у ґрунті при перенесенні їх фільтраційним потоком із свердловини; візуалізацію динаміки поширення фронту забруднень; числові розрахунки та графічне представлення поля швидкості фільтрації, поля концентрації мігруючих речовин та маси винесених речовин із області фільтрації.

У результаті проведення числових експериментів та аналізу результатів зроблено їх порівняння для коефіцієнтів фільтрації *k=const* і *k=k(c)*. Нижче наведено результати числового експерименту (рис. 3.14, рис. 3.15) із наступними вхідними даними:

b=10 м; l=100 м; σ=0,5; γ=0,00065 доба$^{-1}$; $D_м$=0,02 м^2/добу; λ=5 м; H_1=1.5 м; H_2=1 м; r1=0.3; r2=100.3м; n=10 м; m=5; C_*=350 г/літр; $\widetilde{C}_0$ *=5 г/літр;* $\widetilde{C}_1$ *=350 г/літр;* $\widetilde{C}_2$ *=5г/літр, k=1 м/добу.*

Національний університет
водного господарства
та природокористування

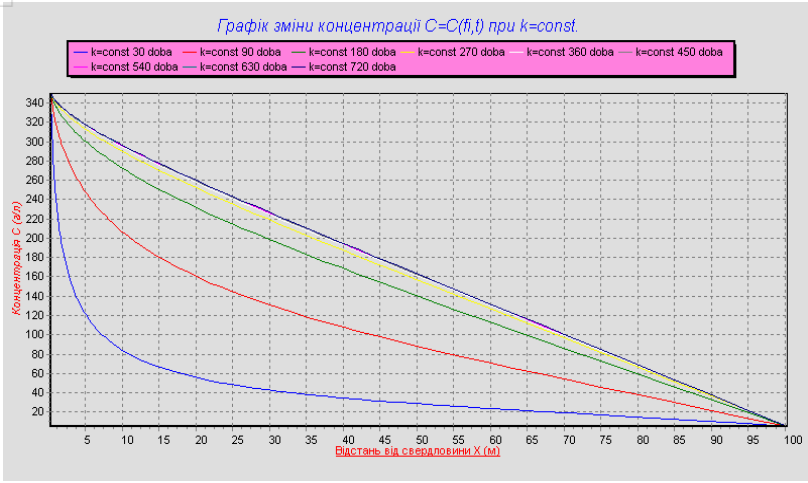


Рис. 3.14. Графіки розподілу концентрації сольових розчинів при заданні на контурі впливу свердловини граничних умов 1-го роду

Національний університет
водного господарства
та природокористування

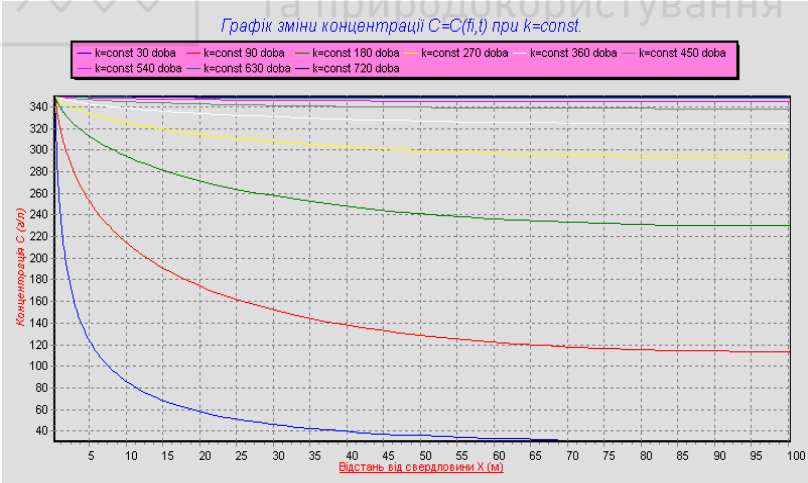


Рис. 3.15. Графіки розподілу концентрації сольових розчинів при заданні на контурі впливу свердловини граничних умов 2-го роду

Національний університет
водного господарства
та природокористування

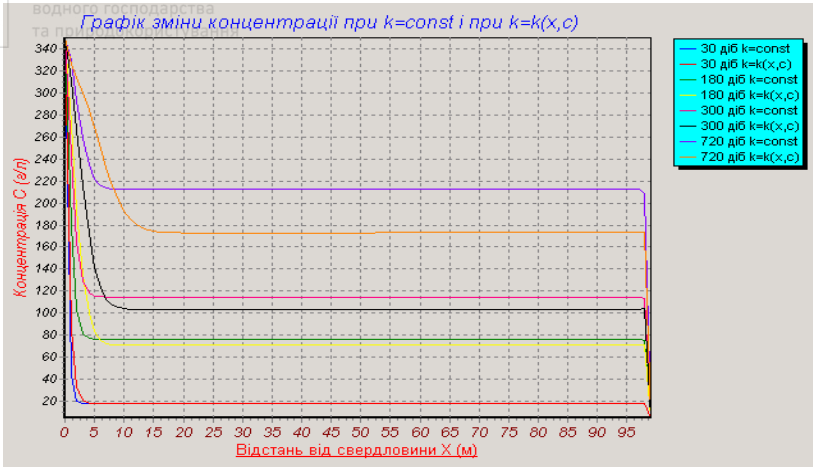


Рис. 3.16. Порівняльні графіки розподілу концентрації сольових розчинів по області фільтрації для різних проміжків часу при *k=const* і *k=k(c)*

При аналізі отриманих результатів числового розв'язку задачі для коефіцієнтів фільтрації *k=const* і *k=k*(*c*) виявлено їх суттєву відмінність. Так, наприклад, при заданні деяких крайових умов, швидкість фільтрації, розподіл полів напорів та концентрацій сольових розчинів, час поширення фронту сольових розчинів та кількість винесених солей в басейн стічних вод можуть значно відрізнятись. Зокрема, розподіл концентрації розчинених солей з плином часу інтенсивніше прямує до насичення при врахуванні залежності *k=k(c)* в порівнянні з випадком *k=const* (див. рис. 3.16). Аналогічне спостерігається у випадку дослідження розподілу концентрації по області фільтрації.

В зв'язку з цим, можна стверджувати, що при математичному моделюванні процесу масопереносу розчинених в фільтраційному потоці солей потрібно враховувати залежність параметрів фільтраційного потоку від його фізико-хімічних властивостей та властивостей пористого середовища.

Результати даного пункту, що знайшли своє відображення в роботі [39, 40], повністю підтверджують результати роботи [47, 48, 58] на випадок масопереносу сольових розчинів в ґрунтових масивах в одновимірному випадку.

3.2.2. Математичне моделювання масопереносу при плановій стаціонарній фільтрації сольових розчинів із свердловини з криволінійним контуром впливу

Розглянемо розв'язок задачі (3.15)-(3.19) у випадку, коли контур впливу свердловини Γ_2 є криволінійним (рис. 3.17).

Для отримання числового розв'язку крайової задачі (3.15)-(3.19) застосуємо метод скінченних різниць з використанням числових конформних відображень [27, 61, 62, 72, 76, 154, 206]. В зв'язку з цим, проведемо в кільцевій двохзв'язній області фільтрації нескінченно тонкий розріз по лінії течії $\psi = const$. Після чого відобразимо конформно так розрізану кільцеву двохзв'язну область на параметричний прямокутник G_w області комплексного потенціалу (рис. 3.18).

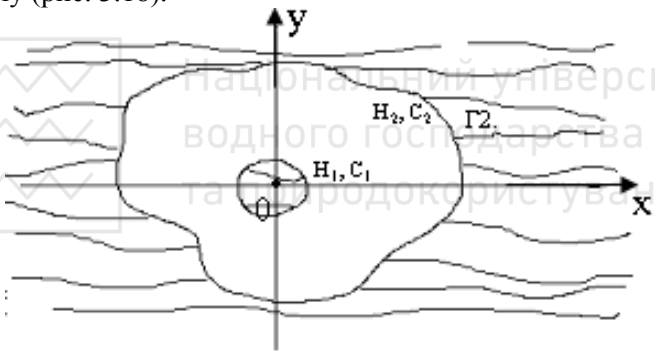
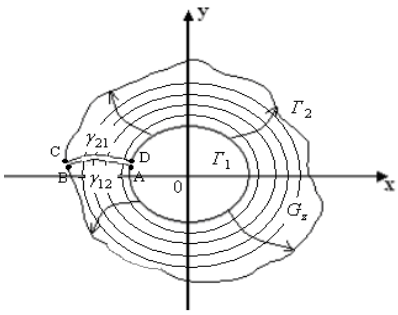
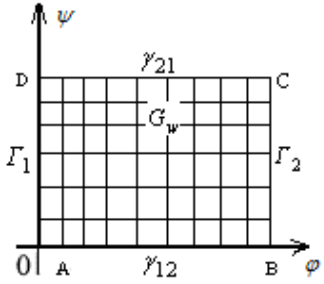


Рис. 3.17. Область фільтрації із свердловини з криволінійним контуром живлення





Національний університет водного господарства та природокористування

Рис. 3.18. Конформне відображення двохзв'язної кільцевої області з розрізом на параметричний прямокутник

3.2.2.1. Математична модель задачі в змінних φ, ψ області комплексного потенціалу

Запишемо математичну постановку оберненої задачі конформного відображення розрізаної кільцевої області на параметричний прямокутник в змінних φ, ψ області комплексного потенціалу [49].

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = \frac{\partial y}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial x}{\partial \psi} = -\frac{\partial y}{\partial \varphi}, \quad (\varphi, \psi) \in G_w, \tag{3.27}$$

$$x^2(0,\psi) + y^2(0,\psi) = r_1^2, \quad 0 < \psi < Q, \tag{3.28}$$

$$g_2(x(\varphi_0,\psi), y(\varphi_0,\psi)) = 0, \quad 0 < \psi < Q \quad . \tag{3.29}$$

Тут (3.29) задає рівняння контура Γ_2.

На обох краях розрізу γ задаються умови періодичності, а саме:

$$x(\varphi,\psi)\big|_{\gamma_{12}} = x(\varphi,\psi)\big|_{\gamma_{21}}, \quad y(\varphi,\psi)\big|_{\gamma_{12}} = y(\varphi,\psi)\big|_{\gamma_{21}}, \quad (\varphi,\psi) \in \gamma,$$

$$\left.\frac{\partial x(\varphi,\psi)}{\partial n}\right|_{\gamma_{12}} = \left.\frac{\partial x(\varphi,\psi)}{\partial n}\right|_{\gamma_{21}}, \quad \left.\frac{\partial y(\varphi,\psi)}{\partial n}\right|_{\gamma_{12}} = \left.\frac{\partial y(\varphi,\psi)}{\partial n}\right|_{\gamma_{21}}, \quad (\varphi,\psi) \in \gamma$$

,

або

$$x(\varphi,0) = x(\varphi,Q), \quad y(\varphi,0) = y(\varphi,Q), \tag{3.30}$$

$$\frac{\partial x(\varphi,0)}{\partial \psi} = \frac{\partial x(\varphi,Q)}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial y(\varphi,0)}{\partial \psi} = \frac{\partial y(\varphi,Q)}{\partial \psi}, \tag{3.31}$$

де Q – фільтраційна витрата рідини (дебіт свердловини).

Крім того, до граничних умов (3.28)-(3.31) потрібно додати ще одну з додаткових умов, зокрема:

Національний університет водного господарства та природокористування

1) умови Коші-Рімана типу (3.27) для x і y, що належать околу цих меж;

2) умови ортогональності ізоліній сітки її межам Γ_1 і Γ_2;

а) умови ортогональності ізоліній, що не використовують рівняння меж Γ_1 і Γ_2:

$$grad\varphi(x,y)\cdot grad\psi(x,y)=0$$

або у такому вигляді для оберненої постановки задачі

$$\frac{\partial x}{\partial\varphi}\frac{\partial x}{\partial\psi}+\frac{\partial y}{\partial\varphi}\frac{\partial y}{\partial\psi}=0; \tag{3.32}$$

б) умови ортогональності, що використовують рівняння меж Γ_1 і Γ_2, а саме

$$\frac{\partial g_i}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial\varphi}-\frac{\partial g_i}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\psi}=0, \tag{3.33}$$

де $g_i(x(\varphi,\psi),y(\varphi,\psi))=0,\ i=1,2$ – рівняння меж Γ_1 і Γ_2 відповідно.

Тоді, після переходу в рівнянні (3.27) до нових незалежних змінних φ, ψ області комплексного потенціалу, остаточно отримаємо

$$D(c)\cdot\overline{V}^2(\varphi,\psi)\left(\frac{\partial^2 c}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 c}{\partial\psi^2}\right)-\frac{\overline{V}^2(\varphi,\psi)}{b}\frac{\partial c}{\partial\varphi}+\overline{V}^2(\varphi,\psi)\cdot$$

$$\left(\frac{\partial D(c)}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial c}{\partial\varphi}+\frac{\partial D(c)}{\partial\psi}\cdot\frac{\partial c}{\partial\psi}\right)-\frac{\gamma}{b^2}(c-C_*)=\frac{\sigma}{b^2}\frac{\partial c}{\partial t},\ (\varphi,\psi)\in G_w,\ t>0, \tag{3.34}$$

де $\overline{V}^2(\varphi,\psi)=\overline{V}_x^2(\varphi,\psi)+\overline{V}_y^2(\varphi,\psi)$ – квадрат усередненої швидкості фільтрації по області фільтрації.

Національний університет водного господарства та природокористування

Оскільки «вільний» розріз γ зроблено по лінії течії $\psi = const$, то з (3.34) при відсутності перетоків матимемо

$$D(c)\cdot\overline{V}^2(\varphi,\psi)\left(\frac{\partial^2 c}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 c}{\partial\psi^2}\right)-\overline{V}^2(\varphi,\psi)\left(\frac{1}{b}-\frac{\partial D(c)}{\partial\varphi}\right)\frac{\partial c}{\partial\varphi}-$$

$$-\frac{\gamma}{b^2}(c-C_*)=\frac{\sigma}{b^2}\frac{\partial c}{\partial t},\quad (\varphi,\psi)\in G_w,\quad t>0, \tag{3.35}$$

$$c(\varphi,\psi,0)=\widetilde{C}_0(\varphi,\psi),\ (\varphi,\psi)\in\overline{G}_w,$$

$$c(0,\psi,\mathrm{t})=\widetilde{C}_1(\psi,t),\ 0<\psi<Q,\ t>0, \tag{3.36}$$

$$c(\varphi_0,\psi,0)=\widetilde{C}_2(\psi,t)\ \text{ або }\ \frac{\partial c(\varphi_0,\psi,t)}{\partial\varphi}=0,\ 0<\psi<Q,\ t>0, \tag{3.37}$$

$$c(\varphi,0,t)=c(\varphi,Q,t),\ \frac{\partial c(\varphi,0,t)}{\partial\psi}=\frac{\partial c(\varphi,Q,t)}{\partial\psi},\ 0<\varphi<\varphi_0,\ t>0. \tag{3.38}$$

3.2.2.2. Числова побудова конформної гідродинамічної різницевої сітки в кільцевій двохзв'язній області G_w

Побудуємо конформну гідродинамічну різницеву сітку фільтраційного потоку в результаті числового розв'язування оберненої задачі фільтрації (3.27)-(3.33). В зв'язку з цим побудуємо різницеву схему даної задачі. В результаті дискретизації (3.27)-(3.29), отримаємо [61]

$$(\Lambda u)_{ij}=0,\qquad i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m}, \tag{3.39}$$

$$g_1(x_{0j},y_{0j})=0,\qquad (x_{0j},y_{0j})\in\Gamma_1,\quad j=\overline{0,m}, \tag{3.40}$$

$$g_2(x_{nj},y_{nj})=0,\qquad (x_{nj},y_{nj})\in\Gamma_2,\quad j=\overline{0,m}, \tag{3.41}$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$\begin{cases} x_{i0} = x_{im}, \quad y_{io} = y_{im}, \quad (x_{i0}, y_{io}) \in \gamma_{12}, \quad i = \overline{0,n}, \\ \\ x_{i1} = x_{im+1}, \quad y_{i1} = y_{im+1}, \quad (x_{im}, y_{im}) \in \gamma_{21}, \quad i = \overline{0,n}, \end{cases} \tag{3.42}$$

де Λ – деякий різницевий оператор для (3.27) (Коші-Рімана, Лапласа або більш загальний еліптичний оператор), під u розуміється x або y.

З (3.42) випливає, що координати «вільного» розрізу є подвійними і виконуються умови періодичності. Для уточнення координат «плаваючих» вузлів x_{0j}, y_{0j} по контуру Γ_1, крім (3.40), потрібно використати наступні співвідношення:

$$-x_{2j} + 4x_{1j} - 4x^s_{0j} = y^{s-1}_{0j+1} - y^{s-1}_{0j-1}, \tag{3.43}$$

або

$$-y_{2j} + 4y_{1j} - 4y^s_{0j} = -(x^{s-1}_{0j+1} - x^{s-1}_{0j-1}), \tag{3.44}$$

а для уточнення координат «плаваючих» вузлів x_{nj}, y_{nj} по контуру Γ_2, такі:

$$3x^s_{nj} - 4x_{n-1j} + 4x_{n-2j} = y^{s-1}_{nj+1} - y^{s-1}_{nj-1}, \tag{3.45}$$

або

$$3y^s_{nj} - 4y_{n-1j} + 4y^s_{n-2j} = -(x^{s-1}_{nj+1} - x^{s-1}_{nj-1}), \tag{3.46}$$

де s – номер ітерації при уточненні координат «плаваючих» вузлів.

Для уточнення координат вузлів «вільного» розрізу, крім умов періодичності, записаних в дискретному вигляді (3.42), потрібно додати ще такі:

$$-x_{i2} + 4x_{i1} - 3x^s_{i0} = -(y^{s-1}_{i+1,0} - y^{s-1}_{i-1,0}),$$

або

$$-y_{i2} + 4y_{i1} - 3y^s_{i0} = x^{s-1}_{i+1,0} - x^{s-1}_{i-1,0}.$$

Національний університет водного господарства та природокористування

Таким чином, отримали різницеву схему задачі, що здійснює обернене конформне відображення розрізаної двохзв'язної кільцевої області на параметричний прямокутник.

Для уточнення координат «плаваючих» вузлів x_{0j}, y_{0j} по Γ_1 маємо n систем з двох рівнянь (3.40), (3.43) або (3.40), (3.44), з яких одне рівняння лінійне, а інше нелінійне. Ці системи алгебраїчних рівнянь розв'язують одним з числових методів [121, 141, 179].

Аналогічно, для уточнення координат «плаваючих» вузлів x_{nj} , y_{nj} на Γ_2 також маємо n систем із двох рівнянь (3.41), (3.45) або (3.41), (3.46).

Зауважимо, що замість різницевих співвідношень зв'язку (3.43), (3.44) і (3.45), (3.46) можна використати на основі (3.33) наступні:

$$g_{1x}(-y_{2j} + 4y_{1j} - 3y^s_{0j}) - g_{1y}(-x_{2j} + 4x_{1j} - 3x_{0j}) = 0,$$

$$g_{2x}(3y^s_{nj} - 4y_{n-1,j} + y_{n-2,j}) - g_{2y}(3x^s_{nj} - 4x_{n-1,j} + x_{n-2,j}) = 0.$$

Оскільки функція $z(\varpi)$ аналітична, то вона має всі похідні аж до n-го порядку, а отже на розрізі маємо рівність не лише функцій $x(\varphi,\psi)$, $y(\varphi,\psi)$, але і рівність всіх їх похідних до n-го порядку. На основі цього отримаємо наступні умови періодичності:

$$x_{i,1} = x_{i,m+1}, \quad y_{i,1} = y_{i,m+1}. \tag{3.47}$$

Умови (3.47) потрібно врахувати, оскільки рівняння «вільного» розрізу невідоме і координати «вільного» розрізу знаходяться в ході побудови відображення.

Використовуючи алгоритм побудови числового конформного відображення, описаного в роботах [61, 62, 72], знаходимо координати внутрішніх вузлів гідродинамічної сітки (x_{ij}, y_{ij}), $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$, потенціал фільтрації φ_{ij} і компоненти швидкості фільтрації $V_{x_{ij}}$, $V_{y_{ij}}$ та $V_{ij}{}^2$, де $V^2{}_{ij} = V^2{}_{x_{ij}} + V^2{}_{y_{ij}}$ – квадрат вектора швидкості фільтрації. Знаючи координати внутрішніх вузлів в дискретному вигляді, знаходимо компоненти швидкості фільтрації та V^2.

Національний університет водного господарства та природокористування

Таким чином,

$$\begin{cases} V_x = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = \dfrac{\partial \psi}{\partial y} = \dfrac{1}{J_1}\dfrac{\partial x}{\partial \varphi}, \\ V_y = \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = -\dfrac{\partial \psi}{\partial x} = \dfrac{1}{J_1}\dfrac{\partial y}{\partial \varphi}, \end{cases}$$

де $J_1 = \dfrac{\partial x}{\partial \varphi}\dfrac{\partial y}{\partial \varphi} - \dfrac{\partial x}{\partial \psi}\dfrac{\partial y}{\partial \psi}$.

Отже, задача фільтрації в двохзв'язній кільцевій області алгоритмічно розв'язана повністю.

3.2.2.3. Числовий розв'язок задачі масопереносу в двохзв'язній кільцевій області

Для знаходження числового розв'язку задачі масопереносу (3.35)-(3.38) використаємо локальний одновимірний метод О. А. Самарського [164] та монотонну різницеву схему [44].

В результаті застосування даного методу вихідна двовимірна крайова задача розщепляється на дві одновимірні. Зокрема, вздовж осі $O\varphi$ отримуємо таку крайову задачу

$$\frac{\partial^2 c}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{D}\frac{\partial c}{\partial \varphi} - \frac{1}{2}\frac{\gamma}{DV^2}(c - C_*) = \frac{1}{2}\frac{\sigma}{DV^2}\frac{\partial c}{\partial t}, \ (\varphi,\psi) \in G_w, \ t > 0, \tag{3.48}$$

$$c(\varphi,\psi,0) = \widetilde{C}_0(\varphi,\psi), \ (\varphi,\psi) \in \overline{G}_w, \tag{3.49}$$

$$\mathrm{c}(0,\psi,\mathrm{t}) = \widetilde{\mathrm{C}}_1(t), \ l_2 c = \begin{cases} c(\varphi_0,\psi,t) = C_2(t), \\ \dfrac{\partial c(\varphi_0,\psi,t)}{\partial \varphi} = 0, \end{cases} \quad 0 < \psi < Q, \ t > 0. \tag{3.50}$$

Вздовж осі $O\psi$ отримаємо наступну крайову задачу:

$$\frac{\partial^2 c}{\partial \psi^2} - \frac{1}{2}\frac{\gamma}{DV^2}(c - C_*) = \frac{1}{2}\frac{\sigma}{DV^2}\frac{\partial c}{\partial t}, \ (\varphi,\psi) \in G_w, \ t > 0, \tag{3.51}$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$c(\varphi,\psi,0)=\widetilde{C}_0(\varphi,\psi),\ \ (\varphi,\psi)\in\overline{G}_w, \tag{3.52}$$

$$c(\varphi,\psi,t)=\widetilde{C}_2(\varphi,Q,t),\ \frac{\partial c(\varphi,0,t)}{\partial\psi}=\frac{\partial c(\varphi,Q,t)}{\partial\psi},\ \ 0<\varphi<\varphi_0,\ t>0\,. \tag{3.53}$$

Крайова задача (3.48)-(3.50) містить першу похідну в рівнянні (3.48), тому для неї використаємо монотонну різницеву схему, а для задачі (3.51)-(3.53) – неявну різницеву схему.

Монотонна різницева схема для задачі (3.48)-(3.50) має вигляд

$$\mu\ \frac{C^{k+1/2}_{i-1j}-2C^{k+1/2}_{ij}+C^{k+1/2}_{i+1j}}{h^2}+r_+\frac{C^{k+1/2}_{i+1j}-C^{k+1/2}_{ij}}{h}+r_-\frac{C^{k+1/2}_{ij}-C^{k+1/2}_{i-1j}}{h}-$$

$$-\frac{0.5(C^{k+1/2}_{ij}-C_*)}{D\,V^2_{ij}}=\frac{0.5\sigma}{D\,V^2_{ij}}\frac{C^{k+1/2}_{ij}-C^{k}_{ij}}{0.5\tau}, \tag{3.54}$$

$$i=\overline{1,n-1},\ j=\overline{1,m-1},\ k=\overline{0,K-1},$$

$$C^0_{ij}=\widetilde{C}_{0ij},\ \ C^{k+1/2}_{nj}=\widetilde{C}_{0nj},\ \ C^{k+1/2}_{0j}=C^{k+1/2}_{1j},$$

$$i=\overline{1,n-1},\ j=\overline{1,m-1},\ k=\overline{0,K-1},$$

коефіцієнти якої визначаються таким чином:

$$\mu=\frac{1}{1+0.5h|r|}=\frac{1}{1+\dfrac{h}{2D}},\qquad r=r_++r_-,$$

$$r_+=0.5(r^2+|r^2|)\ge 0,\quad r_-=0.5(r^2-|r^2|)\le 0,\quad r_+=0,\quad r_-=-\frac{1}{D}\,.$$

Запишемо (3.54) в прогоночному вигляді

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$a_1 C_{i-1j}^{k+1/2} - c_1 C_{ij}^{k+1/2} + b_1 C_{i+1j}^{k+1/2} = -f_1 \ , \quad i = \overline{1, n-1},\ j = \overline{1, m-1},\ k = \overline{0, K-1}, \tag{3.55}$$

$$C_{0j}^{k+1/2} = k_1^1 C_j^{k+1/2} + \eta_1^1, \quad C_{nj}^{k+1/2} = k_2^1 C_{n-1j}^{k+1/2} + \eta_2^1,$$

$$i = \overline{1, n-1},\ j = \overline{1, m-1},\ k = \overline{0, K-1},$$

де

$$a_1 = \frac{\mu}{h^2} - \frac{r_-}{h}\ ,\ b_1 = \frac{\mu}{h^2} + \frac{r_+}{h}\ ,\ c_1 = \frac{2\mu}{h^2} + \frac{r_+}{h} - \frac{r_-}{h} + \frac{\gamma}{2D\,V^2},$$

$$f_1 = \frac{\gamma C_{ij}^k}{2D\,V^2} + \frac{\sigma\, C_{ij}^k}{D\,\tau V^2},\ i = \overline{1, n-1},\ j = \overline{1, m-1},\ k = \overline{0, K-1}.$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Розв'язок різницевої схеми (3.55) знайдемо методом прогонки

$$C_{ij}^{k+1/2} = \alpha_{i+1j}^1 C_{i+1j}^{k+1/2} + \beta_{i+1j}^1,\ i = \overline{1, n-1},\ j = \overline{1, m-1},\ k = \overline{0, K-1},$$

де

$$\alpha_{i+1j}^1 = \frac{b_1}{c_1 - \alpha_{ij}^1 a_1},\ \beta_{i+1j}^1 = \frac{a_1 \beta_{ij}^1 + f_1}{c_1 - \alpha_{ij}^1 a_1},$$
$$i = \overline{1, n-1},\ j = \overline{1, m-1},\ k = \overline{0, K-1},$$

$$\alpha_{1j}^1 = k_1^1 = 1, \quad \beta_{1j}^1 = \eta_1^1 = 0\,.$$

Неявна різницева схема для крайової задачі (3.51)-(3.53) має вигляд

$$\frac{C_{ij-1}^{k+1} - 2C_{ij}^{k+1} + C_{ij+1}^{k+1}}{h^2} - \frac{0.5\gamma(C_{ij}^{k+1} - C_*)}{D\,V_{ij}^2} = \frac{0.5\sigma}{D\,V_{ij}^2}\frac{C_{ij}^{k+1} - C_{ij}^{k+1/2}}{0.5\tau},$$
$$i = \overline{1, n-1},\ j = \overline{1, m-1},\ k = \overline{0, K-1}, \tag{3.56}$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$C_{ij}^0 = \widetilde{C}_{0ij}, \quad C_{0j}^{k+1} = C_{1j}^{k+1}, \quad C_{im}^{k+1} = C_{im-1}^{k+1},$$
$$i = \overline{1, n-1}, \; j = \overline{1, m-1}, \; k = \overline{0, K-1}.$$

Запишемо (3.56) в прогоночному вигляді

$$a_2 C_{ij-1}^{k+1} - c_2 C_{ij}^{k+1} + b_2 C_{ij+1}^{k+1} = -f_2, \tag{3.57}$$
$$i = \overline{1, n-1}, \; j = \overline{1, m-1}, \; k = \overline{0, K-1},$$

$$C_{i0}^{k+1} = k_3^1 C_{i1}^{k+1} + \eta_3^1, \quad C_{im}^{k+1} = k_4^1 C_{im-1}^{k+1} + \eta_4^1,$$

$$i = \overline{1, n-1}, \; j = \overline{1, m-1}, \; k = \overline{0, K-1},$$

де $$a_2 = \frac{1}{h^2}, \quad b_2 = \frac{1}{h^2}, \quad c_2 = \frac{2}{h^2} + \frac{\gamma}{2DV^2} + \frac{\sigma}{D\tau V^2},$$

$$f_2 = \frac{\gamma C_{ij}^{k+1/2}}{2DV^2} + \frac{\sigma C_{ij}^{k+1/2}}{D\,\tau V^2}, \quad i = \overline{1, n-1}, \; j = \overline{1, m-1}, \; k = \overline{0, K-1}.$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Розв'язок різницевої схеми (3.57) знайдемо методом прогонки

$$C_{ij}^{k+1} = \alpha_{ij+1}^2 C_{ij+1}^{k+1} + \beta_{ij+1}^2,$$
$$i = \overline{1, n-1}, \; j = \overline{1, m-1}, \; k = \overline{0, K-1},$$

де $$\alpha_{ij+1}^2 = \frac{b_2}{c_2 - \alpha_{ij}^2 a_2}, \quad \beta_{ij+1}^2 = \frac{a_2 \beta_{ij}^2 + f_2}{c_2 - \alpha_{ij}^2 a_2},$$
$$i = \overline{1, n-1}, \; j = \overline{1, m-1}, \; k = \overline{0, K-1},$$

$$\alpha_{i1}^2 = k_3^1 = 1, \quad \beta_{i1}^2 = \eta_3^1 = 0.$$

Таким чином, крайова задача (3.35)-(3.38) алгоритмічно розв'язана повністю.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Аналогічно будується різницева схема вихідної задачі (3.35)-(3.38) з використанням побудованої нової монотонної різницевої схеми [44, 45].

Знаючи розподіл концентрації c, знаходимо, яка кількість розчинених розчинених солей по області фільтрації попаде на контур впливу свердловини Γ_2 з часом (аналогічно п. 2.2.2).

3.2.2.4. Результати числових експериментів та їх аналіз

Програмна реалізація обчислювального алгоритму розв'язку задачі проведена в інтегрованому середовищі візуального програмування Delphi 7.0. На основі програмної реалізації задачі, проведено ряд числових експериментів. Це дало можливість провести аналіз отриманих результатів для різних вихідних даних до задачі та детально дослідити процес розподілу солей на контурі впливу свердловини з плином часу.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

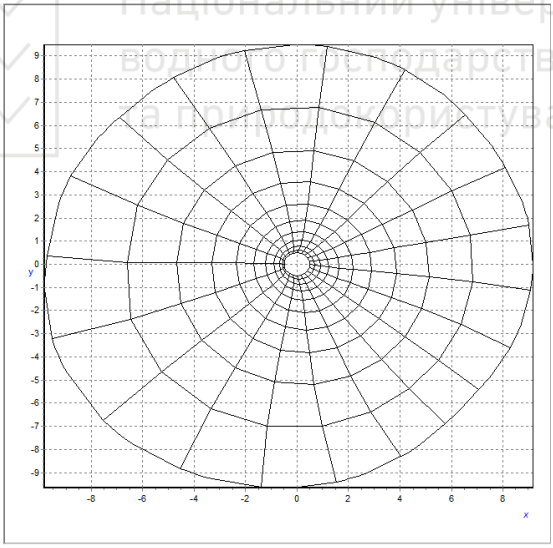


Рис. 3.19. Конформна гідродинамічна різницева сітка фільраційного потоку при нагнітанні розчину в свердловину

Конформну гідродинамічну різницеву сітку фільтраційного потоку представлено на рис. 3.19. Розподіли швидкості фільтрації, концентрації сольових розчинів по області фільтрації можна

Національний університет
водного господарства
та природокористування

переглядати як у вигляді таблиці, так і у вигляді 3d-графіків. Швидкість фільтрації можна переглянути у графічному вигляді (див. рис. 3.20). Осі на графіку позначені наступним чином: червоний колір - вісь *Ox*, зелений - вісь *Oy*, синій - швидкість фільтрації.

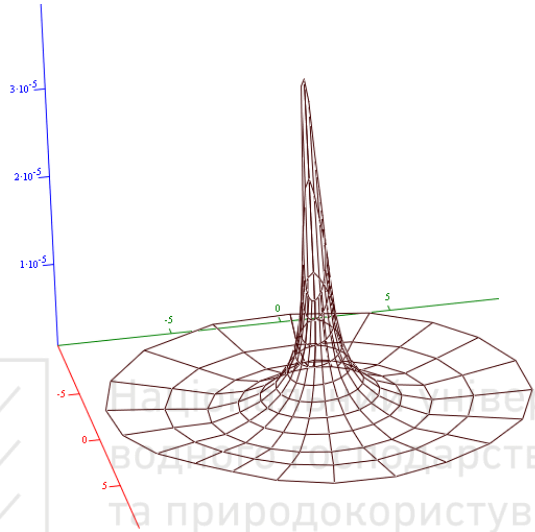


Рис. 3.20. Графік квадрата ($V^2(\varphi,\psi)$) швидкості фільтрації

В якості конкретного прикладу отримаємо розподіл концентрації сольових розчинів через 3600 діб з такими початковими даними:

$$\tau = 30\,діб,\ n = 10,\ \ m = 20,\ \ h = 1м,\ \ \gamma = 0{,}065\,,\ \ \lambda = 3м\,,\ \ \sigma = 0{,}75\,,$$

$$H_1 = 1м\,,\ H_2 = 0{,}5м\,,\ \widetilde{C}_1 = 120\frac{кг}{м^3}\,,\ \widetilde{C}_2 = 10\frac{кг}{м^3}\,,\ D_{\text{m}} = 10^{-6}\frac{м^2}{добу}\,,$$

$$C_* = 350\frac{кг}{м^3}\,,\ b = 8м\,.$$

Поверхня розподілу концентрації сольових розчинів по області фільтрації на даний момент часу зображена на рис. 3.21.

Значна кількість проведених числових експериментів, дала можливість провести аналіз отриманих результатів для різних вхідних даних задачі та детально дослідити розподіл солей в

Національний університет
водного господарства
та природокористування

круговому пласті з плином часу та відмінність між процесом поширення солей на фоні фільтрації чистої води ($k=const$) та у випадку фільтрації сольових розчинів ($k=k(c)$).

Розглянемо числові експерименти для математичної моделі при ($k=k(c)$). Значення коефіцієнтів фільтрації для піщаних та глинистих ґрунтів обчислюються за формулами (1.2) відповідно.

В результаті проведених числових експериментів наведено залежності концентрації сольових розчинів по лінії розрізу від різних значень коефіцієнта масообміну γ (рис. 3.22), параметра гідродинамічної дисперсії λ (рис. 3.23) коефіцієнта пористості ґрунту σ (рис. 3.24) та від задання різних значень для напорів H_1 та H_2 (рис. 3.25) у свердловині та на контурі її впливу.

На рис. 3.26 наведено графіки концентрацій сольових розчинів (при залежності коефіцієнта фільтрації $k(c)$) для різних типів ґрунтів, а на рис. 3.27 порівняльні графіки концентрацій для різних коефіцієнтів фільтрації ($k=const$ і $k=k(c)$).

Національний університет
водного господарства
та природокористування

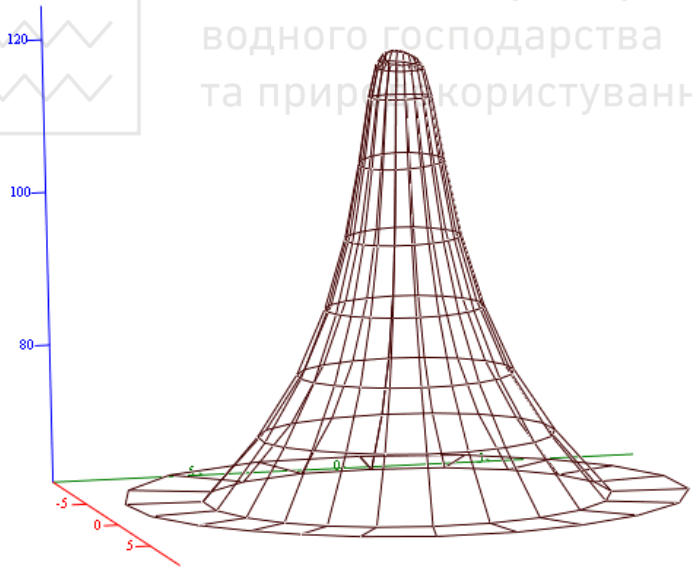


Рис. 3.21. Поверхня концентрації сольових розчинів
на момент часу t=3600 діб

Національний університет
водного господарства
та природокористування

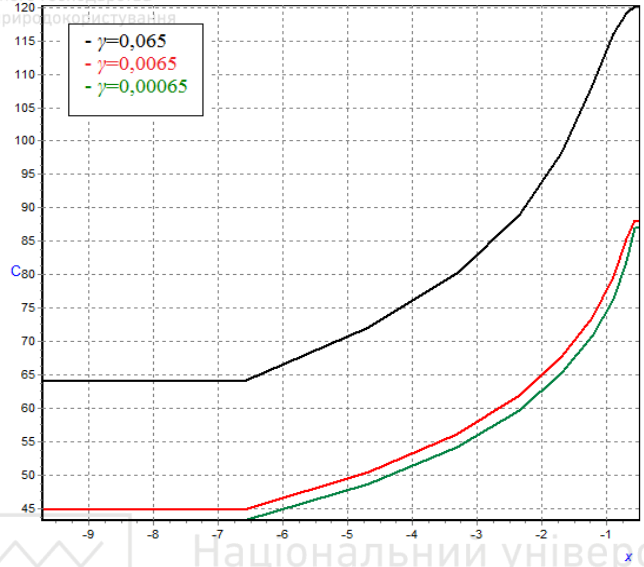


Рис. 3.22. Графіки залежності концентрації сольових розчинів від γ

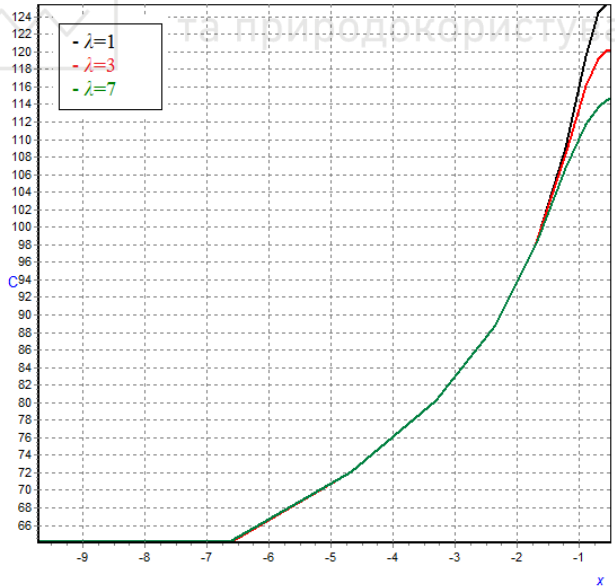


Рис. 3.23. Графіки залежності концентрації сольових розчинів від λ

Національний університет
водного господарства
та природокористування

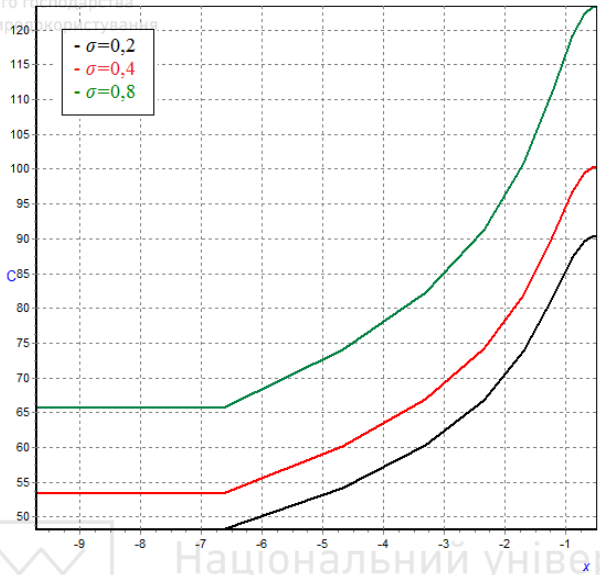


Рис. 3.24. Графіки залежності концентрації сольових розчинів від пористості σ

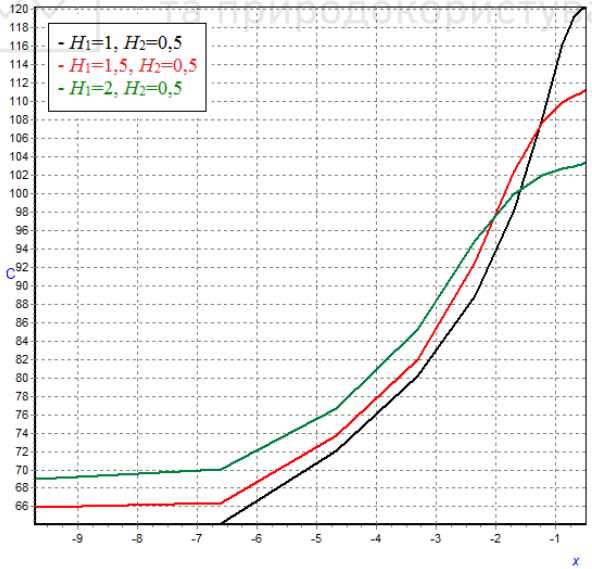


Рис. 3.25. Графіки залежності концентрації сольових розчинів від напорів H_1 та H_2

Національний університет
водного господарства
та природокористування

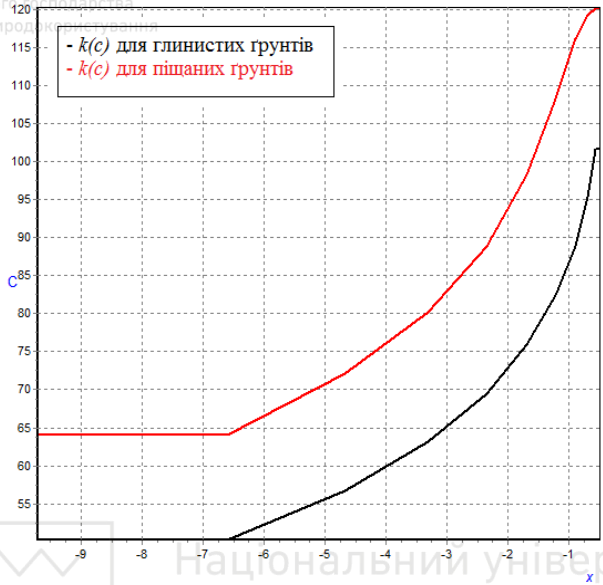


Рис. 3.26. Графіки концентрацій сольових розчинів при *k(c)* для різних типів ґрунтів

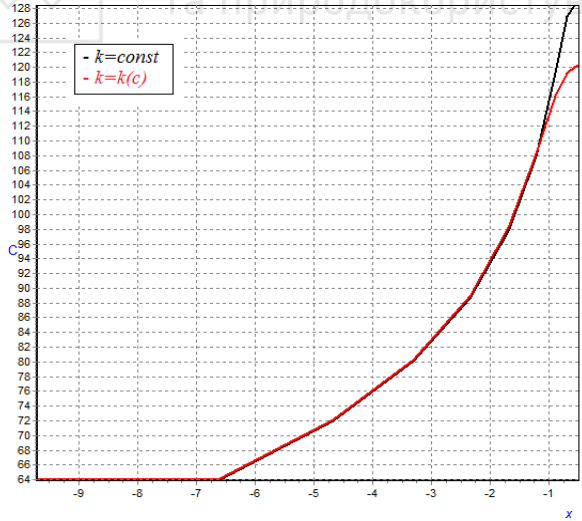


Рис. 3.27. Графіки концентрацій сольових розчинів для різних коефіцієнтів фільтрації (*k=const* і *k=k(c)*)

Національний університет водного господарства та природокористування

В результаті аналізу числових експериментів та вище наведених графічних зображень можна зробити наступні загальні висновки:

– значення концентрації сольових розчинів в межах впливу свердловини значно залежить від коефіцієнта фільтрації: з його ростом – швидкість фільтрації збільшується, а отже, спостерігається ріст значень концентрації солей по області фільтрації;

– значення концентрації сольових розчинів значною мірою залежить від задання напорів у свердловині та на криволінійній межі зони впливу свердловини Γ_2. Чим більша різниця напорів, тим більша швидкість фільтрації і тим швидше зростає концентрація на межі Γ_2;

– розподіл концентрації сольових розчинів суттєво залежить від коефіцієнта масообміну. Чим він більший, тим більшою буде концентрація солей з плином часом по всій області фільтрації;

– розподіл концентрації сольових розчинів в меншій мірі залежить від коефіцієнтів конвективної дифузії, молекулярної дифузії та параметра гідродинамічної дисперсії. Графіки з різними значеннями даних параметрів суттєво не відрізняються;

– значний вплив на розподіл концентрації має пористість ґрунту. Чим більший цей показник, тим більша концентрація сольових розчинів. І навпаки, при малих значеннях пористості ґрунту концентрація з часом змінюється досить повільно;

– розподіл концентрації сольових розчинів з плином часу залежить від задання початкових значень концентрації на межі Γ_1 та Γ_2. Чим більша концентрація сольових розчинів в початковий момент часу, тим вона буде більшою і в деякий наступний момент часу.

Також було розглянуто дві математичні моделі даної задачі. Основна відмінність між ними полягає в тому, що перша модель описує процес поширення солей на фоні фільтрації чистої води ($k=const$), а друга модель описує масоперенос у випадку фільтрації сольових розчинів ($k=k(c)$).

Порівнюючи результати числових експериментів, отримані для двох математичних моделей (див. рис. 3.27), можна зауважити, що на межі Γ_2 отримуємо майже однакові результати (різниця між значеннями концентрації сольових розчинів становить не більше

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$0{,}5\frac{кг}{м^3}$). Що стосується межі Γ_1, то можемо стверджувати, що концентрація сольових розчинів швидше перерозподіляється по області фільтрації для другої математичної моделі в порівнянні з першою математичною моделлю. Зокрема, різниця в числових значеннях концентрації досягає до $9\frac{кг}{м^3}$.

Таким чином, при математичному моделюванні процесу масопереносу речовин потрібно враховувати залежність параметрів фільтраційного потоку від його фізико-хімічних властивостей та властивостей пористого середовища, оскільки це суттєво впливає на масоперенос.

3.3. Математичне моделювання масопереносу при плановій нестаціонарній фільтрації із свердловини з криволінійним контуром живлення

Національний університет
водного господарства
та природокористування

3.3.1. Постановка задачі

Розглянемо задачу планової нестаціонарної фільтрації сольових розчинів із досконалої свердловини радіуса r_1 з контуром впливу Γ_2 в ґрунтовому середовищі. Задано розподіли напорів H_1 і H_2 відповідно на свердловині та на контурі її впливу. Відомі розподіли напорів $H_0(x,y)$ і концентрації $\widetilde{C}_0(x,y)$ в початковий момент часу. Крім того, на свердловині відома концентрація солей $\widetilde{C}_1(t)$, а на контурі впливу може задаватися концентрація солей $\widetilde{C}_2(t)$ або умова швидкого їх виносу у водне середовище $\left.\frac{\partial c}{\partial n}\right|_{\Gamma_2} = 0$. Потрібно розрахувати поля напорів $h(x,y,t)$ і концентрації солей в області фільтрації (рис. 3.17) з часом та кількість солей, винесених фільтраційним потоком з області фільтрації за певний проміжок часу t [142].

Варто зауважити, що у випадку фільтрації чистої води аналогічні задачі розглядались в роботах [15, 30, 104, 126, 152].

Національний університет водного господарства та природокористування

3.3.2. Математична модель задачі в змінних *x*, *y* фізичної області

Математична модель даної задачі в фізичній області в загально прийнятих позначеннях має вигляд [37, 142]

$$\frac{\partial\left(D(c)\frac{\partial c}{\partial x}\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(D(c)\frac{\partial c}{\partial y}\right)}{\partial y}-V_x(c)\frac{\partial c}{\partial x}-V_y(c)\frac{\partial c}{\partial y}-\gamma(c-C_*)=\sigma\frac{\partial c}{\partial t},$$
$$(x,y)\in G_z,\ t>0, \qquad (3.58)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k(c)H\frac{\partial h}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k(c)H\frac{\partial h}{\partial y}\right)+\varepsilon=\mu\frac{\partial h}{\partial t}\ ,\ (x,y)\in G_z,\ t>0, \qquad (3.59)$$

$$h\big|_{\Gamma_1}=H_1,\ h\big|_{\Gamma_2}=H_2;\ h(x,y,0)=H_0(x,y);\ (x,y)\in\overline{G}_z, \qquad (3.60)$$

$$V_x=-k(c)\frac{\partial h}{\partial x}+\nu\frac{\partial c}{\partial x},\ V_y=-k(c)\frac{\partial h}{\partial y}+\nu\frac{\partial c}{\partial y};\quad (x,y)\in G_z, \qquad (3.61)$$

$$c(x,y,0)=\widetilde{C}_0(x,y),\ (x,y)\in\overline{G}_z,\quad c\big|_{\Gamma_1}=\widetilde{C}_1(x,y,t),$$
$$lc\big|_{\Gamma_2}=\begin{cases}\widetilde{C}_2(x,y,t),\\ \dfrac{\partial c}{\partial n}=0,\end{cases}\qquad (x,y)\in G_z,\ t>0, \qquad (3.62)$$

де $h(x,y,t)$ – п'єзометричний напір, $c(x,y,t)$ – концентрація сольового розчину; $D(c)$ – коефіцієнт конвективної дифузії; V_x, V_y – компоненти швидкості фільтрації; γ – коефіцієнт масообміну; C_* – концентрація граничного насичення; σ – пористість ґрунту; $k(c)$ – коефіцієнт фільтрації, μ – коефіцієнт гідропружності, ε – коефіцієнт інфільтрації, H – товщина пласта,

Національний університет водного господарства та природокористування

H_1, H_2, C_1, C_2 – розподіли напору та концентрації на межах Γ_1, Γ_2 відповідно, $H_0(x,y), \widetilde{C}_0(x,y)$ – розподіли напору та концентрації солей в початковий момент часу; (3.58) – рівняння конвективної дифузії; (3.59), (3.61) – рівняння фільтрації підземних вод; крайові умови: (3.60) – для напору; (3.62) – для концентрації по області фільтрації $\overline{G_z}$.

При $k(c) = k = const$, $H = const$ рівняння (3.59) зведеться до наступного:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \varepsilon_1 = \mu_1 \frac{\partial h}{\partial t}, \qquad (x,y) \in G_z,\ t > 0, \qquad (3.63)$$

де $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{kH} = const$, $\mu_1 = \dfrac{\mu}{kH}$.

Після перетворень рівняння (3.58) прийме вигляд

$$D(c)\left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2}\right) - \left(V_x(c) - \frac{\partial D(c)}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial c}{\partial x} - \left(V_y(c) - \frac{\partial D(c)}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial c}{\partial y} - \qquad (3.64)$$
$$-\gamma(c - C_*) = \sigma\frac{\partial c}{\partial t}.$$

3.3.3. Постановка задачі в змінних ξ, η комплексної області

В математичній моделі задачі (3.58)-(3.62) перейдемо до змінних ξ, η [69, 206]. Будемо шукати обернене конформне відображення – пару функцій

$$x = x(\xi,\eta),\ y = y(\xi,\eta),$$

які зв'язані умовами Коші-Рімана

$$x_\xi = y_\eta,\ x_\eta = y_\xi. \qquad (3.65)$$

Національний університет водного господарства та природокористування

Величини ξ_x, ξ_y, ξ_t, η_x, η_y, η_t, які визначають метрику відображення легко виражаються через похідні x_ξ, x_η, x_ζ, y_ξ, y_η, y_ζ, а саме [69, 206]

$$\begin{cases} \xi_x = \dfrac{y_\eta}{J_1}, \\ \xi_y = \dfrac{-x_\eta}{J_{11}}, \\ \xi_t = -x_\zeta \cdot \xi_x - \xi_y \cdot y_\zeta; \end{cases} \qquad \begin{cases} \eta_x = \dfrac{-y_\xi}{J_1}, \\ \eta_y = \dfrac{x_\xi}{J_1}, \\ \eta_t = -x_\zeta \cdot \eta_x - \eta_y \cdot y_\zeta. \end{cases} \tag{3.66}$$

Тут $J_1 = \dfrac{1}{J} = \dfrac{1}{\xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x} = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi$, як відомо, J, J_1 – відповідно якобіани прямого та оберненого відображень. Використовуючи умови Коші-Рімана (3.65), отримаємо

$$J_1 = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi = x_\xi^2 + y_\xi^2 = x_\eta^2 + y_\eta^2.$$

Перші похідні $\dfrac{\partial h}{\partial x}, \dfrac{\partial h}{\partial y}$ визначаються так:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial(y,h)}{\partial(\xi,\eta)} \Big/ \frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)} = \frac{1}{J_1}\left(\frac{\partial h}{\partial \xi} y_\eta - \frac{\partial h}{\partial \eta} y_\xi\right), \tag{3.67}$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial(x,h)}{\partial(\xi,\eta)} \Big/ \frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)} = \frac{1}{J_1}\left(-\frac{\partial h}{\partial \xi} x_\eta + \frac{\partial h}{\partial \eta} x_\xi\right). \tag{3.68}$$

Другі похідні перетворюються наступним чином:

Національний університет водного господарства та природокористування

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 h}{\partial \xi^2} \cdot \xi_x^2 + 2 \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \xi_x \cdot \eta_x + \frac{\partial h}{\partial \xi} \cdot \xi_{xx} + \frac{\partial h}{\partial \eta} \cdot \eta_{xx} + \frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2} \cdot \eta_x^2, \tag{3.69}$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 h}{\partial \xi^2} \cdot \xi_y^2 + 2 \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \xi_y \cdot \eta_y + \frac{\partial h}{\partial \xi} \cdot \xi_{yy} + \frac{\partial h}{\partial \eta} \cdot \eta_{yy} + \frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2} \cdot \eta_y^2, \tag{3.70}$$

де ξ_x, η_x, ξ_y, η_y виражаються через функції $x(\xi,\eta)$, $y(\xi,\eta)$ за формулами (3.66), а ξ_{xx}, η_{xx}, ξ_{yy}, η_{yy}, ξ_{xy}, η_{xy} мають вигляд

$$\xi_{xx} = \frac{1}{J_1^2} \cdot \left[y_\eta \cdot y_{\xi\eta} - y_\xi \cdot y_{\eta\eta} - y_\eta \cdot \left[y_\eta \cdot J_{1\xi} - y_\xi \cdot J_{1\eta} \right] \right], \tag{3.71}$$

$$\xi_{xy} = \frac{1}{J_1^2} \cdot \left[-x_\eta \cdot y_{\xi\eta} + x_\xi \cdot y_{\eta\eta} - y_\eta \cdot \left[-x_\eta \cdot J_{1\xi} + x_\xi \cdot J_{1\eta} \right] \right], \tag{3.72}$$

$$\xi_{yy} = \frac{1}{J_1^2} \cdot \left[-x_\eta \cdot x_{\xi\eta} + x_\xi \cdot x_{\eta\eta} + x_\eta \cdot \left[-x_\eta \cdot J_{1\xi} + x_\xi \cdot J_{1\eta} \right] \right], \tag{3.73}$$

$$\eta_{xx} = -\frac{1}{J_1^2} \cdot \left[y_\eta \cdot y_{\xi\xi} - y_\xi \cdot y_{\xi\eta} + y_\xi \cdot \left[y_\eta \cdot J_{1\xi} - y_\xi \cdot J_{1\eta} \right] \right], \tag{3.74}$$

$$\eta_{xy} = -\frac{1}{J_1^2} \cdot \left[-x_\eta \cdot y_{\xi\xi} + x_\xi \cdot y_{\xi\eta} + y_\xi \cdot \left[-x_\eta \cdot J_{1\xi} + x_\xi \cdot J_{1\eta} \right] \right], \tag{3.75}$$

$$\eta_{yy} = \frac{1}{J_1^2} \cdot \left[-x_\eta \cdot x_{\xi\xi} + x_\xi \cdot x_{\xi\eta} - x_\xi \cdot \left[-x_\eta \cdot J_{1\xi} + x_\xi \cdot J_{1\eta} \right] \right], \tag{3.76}$$

У формулах (3.71)-(3.76) $J_{1\xi}$, $J_{1\eta}$ мають представлення

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$\begin{cases} J_{1\xi} = \dfrac{\partial J_1}{\partial \xi} = x_{\xi\xi} \cdot y_\eta + x_\xi \cdot y_{\xi\eta} - x_{\xi\eta} \cdot y_\xi - x_\eta \cdot y_{\xi\xi}, \\ J_{1\eta} = \dfrac{\partial J_1}{\partial \eta} = x_{\xi\eta} \cdot y_\eta + x_\xi \cdot y_{\eta\eta} - x_{\eta\eta} \cdot y_\xi - x_\eta \cdot y_{\xi\eta}. \end{cases} \quad (3.77)$$

Рівняння (3.63) для напору набуде вигляду

$$\frac{\partial^2 h}{\partial \xi^2} \cdot \xi_x^2 + 2 \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \xi_x \cdot \eta_x + \frac{\partial h}{\partial \xi} \cdot \xi_{xx} + \frac{\partial h}{\partial \eta} \cdot \eta_{xx} + \frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2} \cdot \eta_x^2 + \frac{\partial^2 h}{\partial \xi^2} \cdot \xi_y^2 +$$

$$+ 2 \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \xi_y \cdot \eta_y + \frac{\partial h}{\partial \xi} \cdot \xi_{yy} + \frac{\partial h}{\partial \eta} \cdot \eta_{yy} + \frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2} \cdot \eta_y^2 + \varepsilon_1 = \mu_1 \cdot \frac{\partial h}{\partial t}.$$

Звівши подібні члени, отримаємо

$$\overline{A} \frac{\partial^2 h}{\partial \xi^2} + \overline{B} \frac{\partial^2 h}{\partial \xi \partial \eta} + \overline{C} \frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2} + \overline{D} \frac{\partial h}{\partial \xi} + \overline{E} \frac{\partial h}{\partial \eta} + \varepsilon_1 = \mu_1 \frac{\partial h}{\partial t}, \quad (3.78)$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

де коефіцієнти $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{D}, \overline{E}$ мають вигляд

$$\overline{A} = \xi_x^2 + \xi_y^2 = \frac{y_\eta^2}{J_1^2} + \frac{x_\eta^2}{J_1^2} = \frac{1}{J_1^2}\left[y_\eta^2 + x_\eta^2\right],$$

$$\overline{B} = 2(\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y) = 2\left(\frac{y_\eta}{J_1} \cdot \frac{\left(-y_\xi\right)}{J_1} + \frac{\left(-x_\eta\right)}{J_1} \cdot \frac{x_\xi}{J_1}\right) = \frac{-2}{J_1^2}\left[y_\eta \cdot y_\xi + x_\eta \cdot x_\xi\right],$$

$$\overline{C} = \eta_x^2 + \eta_y^2 = \frac{y_\xi^2}{J_1^2} + \frac{x_\xi^2}{J_1^2} = \frac{1}{J_1^2}\left[y_\xi^2 + x_\xi^2\right],$$

$$\overline{D} = \frac{1}{J_1^2}\left[y_\eta y_{\xi\eta} - y_\xi y_{\eta\eta} - y_\eta \left[y_\eta J_{1\xi} - y_\xi J_{1\eta}\right]\right] +$$

$$+ \frac{1}{J_1^2}\left[-x_\eta x_{\xi\eta} + x_\xi x_{\eta\eta} + x_\eta \left[-x_\eta J_{1\xi} + x_\xi J_{1\eta}\right]\right],$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$\overline{E} = -\frac{1}{J_1^2}\left[y_\eta y_{\xi\xi} - y_\xi y_{\xi\eta} + y_\xi\left[y_\eta J_{1\xi} - y_\xi J_{1\eta}\right]\right] +$$

$$+\frac{1}{J_1^2}\left[-x_\eta x_{\xi\xi} + x_\xi x_{\xi\eta} - x_\xi\left[-x_\eta J_{1\xi} + x_\xi J_{1\eta}\right]\right].$$

Після спрощень і перетворень, отримаємо

$$\overline{A} = \overline{C} = \frac{1}{J_1}\ ,\ \overline{B} = 0\ ,\ \varepsilon_1 = 0\ ,\ \overline{D} = -\frac{h_\xi}{J_1}\ ,\ \overline{E} = -\frac{h_\eta}{J_1}\ . \quad (3.79)$$

Аналогічний підхід здійснюється і в крайових умовах (3.60).

Закон Дарсі, записаний через потенціал фільтрації φ, прийме вигляд

$$\vec{V} = \frac{k(c)}{k_0} grad\,\varphi\ ,$$

де $\varphi = -k_0 \cdot h$ – потенціал фільтрації, $k(c)$ – коефіцієнт фільтрації, $k_0 = k(c(x,y,0))$ – коефіцієнт фільтрації в початковий момент часу $t = 0$.

В змінних ξ, η (3.61) запишеться

$$V_x = -k(c)\frac{\partial h}{\partial x} = -k(c)\left(\frac{\partial h}{\partial \xi}\cdot\frac{1}{J_1}\cdot y_\eta + \frac{\partial h}{\partial \eta}\cdot\left(-\frac{1}{J_1}\right)\cdot y_\xi\right) =$$

$$= -\frac{k(c)}{J_1}\cdot\left(\frac{\partial h}{\partial \xi}\cdot y_\eta - \frac{\partial h}{\partial \eta}\cdot y_\xi\right),$$

$$V_y = -k(c)\frac{\partial h}{\partial y} = -k(c)\left(\frac{\partial h}{\partial \xi}\cdot\left(-\frac{1}{J_1}\right)\cdot x_\eta + \frac{\partial h}{\partial \eta}\cdot\frac{1}{J_1}\cdot x_\xi\right) =$$

$$= -\frac{k(c)}{J_1}\cdot\left(-\frac{\partial h}{\partial \xi}\cdot x_\eta + \frac{\partial h}{\partial \eta}\cdot x_\xi\right),$$

або

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$V_x = \frac{k(c)}{k_0 \cdot J_1}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\cdot y_\eta - \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\cdot y_\xi\right),\ V_y = \frac{k(c)}{k_0 \cdot J_1}\left(-\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\cdot x_\eta + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\cdot x_\xi\right). \tag{3.80}$$

Після перетворень, використовуючи формули (3.66)-(3.77), рівняння (3.64) матиме вигляд

$$\overline{\overline{A}}\,\frac{\partial^2 c}{\partial \xi^2} + \overline{\overline{B}}\,\frac{\partial^2 c}{\partial \xi \partial \eta} + \overline{\overline{C}}\,\frac{\partial^2 c}{\partial \eta^2} + \overline{\overline{D}}\,\frac{\partial c}{\partial \xi} + \overline{\overline{E}}\,\frac{\partial c}{\partial \eta} + \overline{\overline{F}} = \sigma \frac{\partial c}{\partial t}, \tag{3.81}$$

де коефіцієнти $\overline{\overline{A}}, \overline{\overline{B}}, \overline{\overline{C}}, \overline{\overline{D}}, \overline{\overline{E}}, \overline{\overline{F}}$ представляються наступним чином:

$$\overline{\overline{A}} = D(c)\cdot\left(\xi_x^2 + \xi_y^2\right) = \frac{D(c)}{J_1^2}\left[y_\eta^2 + x_\eta^2\right] = \frac{D(c)}{J_1^2}\left[y_\eta^2 + \left(-y_\xi\right)^2\right] =$$

$$= \frac{D(c)}{J_1^2}\cdot J_1 = \frac{D(c)}{J_1},$$

$$\overline{\overline{B}} = 2\cdot D(c)\cdot\left(\xi_x\cdot\eta_x + \xi_y\cdot\eta_y\right) = \frac{-2\cdot D(c)}{J_1^2}\left[y_\xi\cdot y_\eta + x_\xi\cdot x_\eta\right] \equiv 0,$$

$$\overline{\overline{C}} = D(c)\cdot\left(\eta_x^2 + \eta_y^2\right) = \frac{D(c)}{J_1^2}\left[y_\xi^2 + x_\xi^2\right] = \frac{D(c)}{J_1^2}\left[y_\xi^2 + y_\eta^2\right] = \frac{D(c)}{J_1^2}\cdot J_1 =$$

$$= \frac{D(c)}{J_1},$$

$$\overline{\overline{D}} = V_x'' + \left(\xi_{xx} + \xi_{yy}\right) = \frac{1}{J_1}\cdot\overline{V}_x'' + \left(\xi_{xx} + \xi_{yy}\right) = \frac{1}{J_1}\cdot\left[V_x'\cdot y_\eta - V_y'\cdot x_\eta\right] +$$

$$+\left(\xi_{xx} + \xi_{yy}\right),$$

$$\overline{\overline{E}} = V_y'' + \left(\eta_{xx} + \eta_{yy}\right) = \frac{1}{J_1}\cdot\overline{V}_y'' + \left(\eta_{xx} + \eta_{yy}\right) = \frac{1}{J_1}\cdot\left[-V_x'\cdot y_\xi + V_y'\cdot x_\xi\right] +$$

$$+\left(\eta_{xx} + \eta_{yy}\right),$$

$$\overline{\overline{F}} = -\gamma\left(c - C_*\right).$$

Національний університет водного господарства та природокористування

Після спрощень і перетворень, отримаємо

$$\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{C}} = \frac{D(c)}{J_1},\ \overline{\overline{B}} = 0,\ \overline{\overline{D}} = \frac{1}{J_1}\left[V_x' \cdot y_\eta - V_y' \cdot x_\eta\right],$$
$$\overline{\overline{E}} = \frac{1}{J_1}\left[-V_x' \cdot y_\xi + V_y' \cdot x_\xi\right]. \qquad (3.82)$$

Аналогічно перетворюються крайові умови (3.62).

Враховуючи вирази для коефіцієнтів в (3.81), отримаємо

$$\frac{D(c)}{J_1}\left(\frac{\partial^2 c}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial \eta^2}\right) - V_x''(c)\frac{\partial c}{\partial \xi} - V_y''(c)\frac{\partial c}{\partial \eta} - \gamma(c - C_*) = \sigma\frac{\partial c}{\partial t},$$

або

$$\frac{D(c)}{J_1}\left(\frac{\partial^2 c}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial \eta^2}\right) - \frac{\overline{V}_x''(c)}{J_1}\frac{\partial c}{\partial \xi} - \frac{\overline{V}_y''(c)}{J_1}\frac{\partial c}{\partial \eta} - \gamma(c - C_*) = \sigma\frac{\partial c}{\partial t}. \qquad (3.83)$$

Національний університет водного господарства та природокористування

Перейдемо в рівнянні (3.64) до нових змінних ξ, η. Використовуючи аналогічні перетворення, матимемо

$$\frac{\partial D(c)}{\partial x} = \frac{\partial D(c)}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial D(c)}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial D(c)}{\partial \xi}\cdot\left(\frac{1}{J_1}\cdot y_\eta\right) +$$
$$+ \frac{\partial D(c)}{\partial \eta}\cdot\left(-\frac{1}{J_1}\cdot y_\xi\right) = \frac{1}{J_1}\left[\frac{\partial D(c)}{\partial \xi}y_\eta - \frac{\partial D(c)}{\partial \eta}y_\xi\right],$$

$$\frac{\partial D(c)}{\partial y} = \frac{\partial D(c)}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial D(c)}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial D(c)}{\partial \xi}\cdot\left(-\frac{1}{J_1}\cdot x_\eta\right) +$$
$$+ \frac{\partial D(c)}{\partial \eta}\cdot\left(\frac{1}{J_1}\cdot x_\xi\right) = \frac{1}{J_1}\left[-\frac{\partial D(c)}{\partial \xi}x_\eta + \frac{\partial D(c)}{\partial \eta}x_\xi\right],$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$\left(V_x - \frac{\partial D(c)}{\partial x}\right) = V_x'(\xi,\eta) =$$

$$= \frac{1}{J_1}\left[\left(-\frac{k(c)}{k_0}\cdot\varphi_\eta + D_\eta\right)\cdot y_\xi + \left(\frac{k(c)}{k_0}\cdot\varphi_\xi - D_\xi\right)\cdot y_\eta\right],$$

$$\left(V_y - \frac{\partial D(c)}{\partial y}\right) = V_y'(\xi,\eta) =$$

$$= \frac{1}{J_1}\left[\left(\frac{k(c)}{k_0}\cdot\varphi_\eta - D_\eta\right)\cdot x_\xi + \left(-\frac{k(c)}{k_0}\cdot\varphi_\xi + D_\xi\right)\cdot x_\eta\right].$$

$$\left(V_x(c) - \frac{\partial D(c)}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial c}{\partial x} + \left(V_y(c) - \frac{\partial D(c)}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial c}{\partial y} = V_x'\cdot\frac{\partial c}{\partial x} + V_y'\cdot\frac{\partial c}{\partial y} =$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$= \frac{V_x'}{J_1}\left(\frac{\partial c}{\partial \xi}\cdot y_\eta - \frac{\partial c}{\partial \eta}\cdot y_\xi\right) + \frac{V_y'}{J_1}\left(-\frac{\partial c}{\partial \xi}\cdot x_\eta + \frac{\partial c}{\partial \eta}\cdot x_\xi\right) =$$

$$= \frac{1}{J_1}\left[V_x'\cdot y_\eta - V_y'\cdot x_\eta\right]\frac{\partial c}{\partial \xi} + \frac{1}{J_1}\left[-V_x'\cdot y_\xi + V_y'\cdot x_\xi\right]\frac{\partial c}{\partial \eta} =$$

$$= \frac{1}{J_1}\cdot\overline{V}_x'' + \frac{1}{J_1}\cdot\overline{V}_y'' = V_x'' + V_y''.$$

Остаточно маємо

$$\left(\frac{\partial^2 c}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial \eta^2}\right) + r^3(\xi,\eta,c)\frac{\partial c}{\partial \xi} + r^4(\xi,\eta,c)\frac{\partial c}{\partial \eta} - \overline{\gamma}(c - C_*) = \overline{\sigma}\cdot\frac{\partial c}{\partial t}, \tag{3.84}$$

де

$$r^3 = -\frac{\overline{V}_x''}{D(c)} = -\frac{1}{D(c)}\left(V_x' y_\eta - V_y' x_\eta\right) = -\frac{1}{D(c)\cdot J_1}\left\{\left[\left(-\widetilde{k}\,\varphi_\eta + D_\eta\right)y_\xi + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \left(\widetilde{k}\cdot\varphi_\xi - D_\xi\right)\cdot y_\eta\right]\cdot y_\eta - x_\eta\left[\left(\widetilde{k}\,\varphi_\eta - D_\eta\right)x_\xi + \left(-\widetilde{k}\,\varphi_\xi + D_\xi\right)x_\eta\right]\right\} =$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$= -\frac{1}{D(c)\cdot J_1}\left\{\left(-\widetilde{k}\cdot\varphi_\eta + D_\eta\right)\cdot y_\xi \cdot y_\eta + \left(\widetilde{k}\cdot\varphi_\xi - D_\xi\right)\cdot y_\eta^2 -\right.$$

$$\left. -\left(\widetilde{k}\,\varphi_\eta - D_\eta\right)x_\xi x_\eta + \left(-\widetilde{k}\,\varphi_\xi + D_\xi\right)x_\eta^2\right\} =$$

$$= -\frac{1}{D(c)\cdot J_1}\left\{\left(-\widetilde{k}\cdot\varphi_\eta + D_\eta\right)\left(x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta\right) + \left(\widetilde{k}\cdot\varphi_\xi - D_\xi\right)\left(y_\eta^2 + x_\eta^2\right)\right\} =$$

$$= -\frac{1}{D(c)\cdot J_1}\cdot\left(\widetilde{k}\cdot\varphi_\xi - D_\xi\right)\cdot J_1 = -\frac{\widetilde{k}\cdot\varphi_\xi - D_\xi}{D(c)} = -\frac{k(c)\cdot\varphi_\xi - k_0\cdot D_\xi}{D(c)\cdot k_0},$$

$$r^4 = -\frac{\overline{V}_y''}{D(C)} = -\frac{1}{D(C)}\left(-V_x'\cdot y_\xi + V_y'\cdot x_\xi\right) =$$

$$= -\frac{1}{D(C)\cdot J_1} = \left\{-\left[\left(-\widetilde{k}\cdot\varphi_\eta + D_\eta\right)\cdot y_\xi + \left(\widetilde{k}\cdot\varphi_\xi - D_\xi\right)\cdot y_\eta\right]\cdot y_\xi +\right.$$

$$\left. + x_\xi\left[\left(\widetilde{k}\,\varphi_\eta - D_\eta\right)x_\xi + \left(-\widetilde{k}\,\varphi_\xi + D_\xi\right)x_\eta\right]\right\} =$$

$$= -\frac{1}{D(C)\cdot J_1}\left\{\left(\widetilde{k}\cdot\varphi_\eta - D_\eta\right)\cdot y_\xi^2 - \left(\widetilde{k}\cdot\varphi_\xi - D_\xi\right)\cdot y_\eta y_\xi + \left(\widetilde{k}\,\varphi_\eta - D_\eta\right)x_\xi^2 -\right.$$

$$\left. -\left(\widetilde{k}\,\varphi_\xi - D_\xi\right)x_\eta x_\xi\right\} = -\frac{1}{D(C)\cdot J_1}\times$$

$$\times\left\{\left(\widetilde{k}\cdot\varphi_\eta - D_\eta\right)\left(x_\xi^2 + y_\xi^2\right) - \left(\widetilde{k}\cdot\varphi_\xi - D_\xi\right)\left(y_\eta y_\xi + x_\eta x_\xi\right)\right\} =$$

$$= -\frac{1}{D(c)\cdot J_1}\cdot\left(\widetilde{k}\cdot\varphi_\eta - D_\eta\right)\cdot J_1 = -\frac{\widetilde{k}\cdot\varphi_\eta - D_\eta}{D(c)} = -\frac{k(c)\cdot\varphi_\eta - k_0\cdot D_\eta}{D(c)\cdot k_0},$$

$$\bar{\gamma} = \frac{\gamma\cdot J_1}{D(c)},\quad \bar{\sigma} = \frac{\sigma\cdot J_1}{D(c)},\quad \widetilde{k} = \frac{k(c)}{k_0},\quad k_0 = const\,.$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

3.3.4. Числовий метод розв'язку задачі

3.3.4.1. Числове конформне відображення двохзв'язної кільцевої області з розрізом на параметричний прямокутник

Використовуючи алгоритм побудови числового конформного відображення, описаного в роботах [62, 72], двохзв'язної кільцевої області з розрізом на параметричний прямокутник, по аналогії з п.3.2.2.2, знаходимо координати внутрішніх вузлів конформної різницевої сітки у вигляді двох масивів $\{x_{ij}\},\ \{y_{ij}\},\ i=\overline{0,n},\ j=\overline{0,m}$, яка, однак, не буде гідродинамічною.

3.3.4.2. Числовий розв'язок задачі фільтрації

Числовий розв'язок задачі фільтрації (3.59), (3.60) знаходимо, використовуючи економні методи [120, 162, 164, 190], зокрема ЛОС О. А. Самарського [164]. Після розщеплення рівняння (3.78), отримаємо

$$\overline{A}\frac{\partial^2 h}{\partial \xi^2}+\frac{\overline{C}}{2}\cdot\frac{\partial^2 h}{\partial \xi \partial \eta}+\overline{D}\frac{\partial h}{\partial \xi}+\frac{\varepsilon_1}{2}=\frac{\mu_1}{2}\cdot\frac{\partial h}{\partial t},\ (\xi,\eta)\in G_\zeta, \quad (3.85)$$

$$\overline{B}\frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2}+\frac{\overline{C}}{2}\cdot\frac{\partial^2 h}{\partial \xi \partial \eta}+\overline{E}\frac{\partial h}{\partial \eta}+\frac{\varepsilon_1}{2}=\frac{\mu_1}{2}\cdot\frac{\partial h}{\partial t},\ (\xi,\eta)\in G_\zeta. \quad (3.86)$$

Запишемо різницеві схеми для кожного з рівнянь (3.85), (3.86). Отримаємо різницеву схему для (3.85), записавши його в такому вигляді:

$$\frac{\mu_1}{2}\cdot\frac{\partial h^{k+1/2}}{\partial t}=\overline{A}\frac{\partial^2 h^{k+1/2}}{\partial \xi^2}+\overline{D}\frac{\partial h^{k+1/2}}{\partial \xi}+\frac{\overline{C}}{2}\cdot\frac{\partial^2 h^{k}}{\partial \xi \partial \eta}+\frac{\varepsilon_1}{2}. \quad (3.87)$$

Побудуємо для рівняння (3.87) монотонну різницеву схему

$$\mu^1\cdot\frac{h_{i-1,j}^{k+1/2}-2\cdot h_{i,j}^{k+1/2}+h_{i+1,j}^{k+1/2}}{h_1^2}+r_+^1\cdot\frac{h_{i+1,j}^{k+1/2}-h_{i,j}^{k+1/2}}{h_1}+r_-^1\cdot\frac{h_{i,j}^{k+1/2}-h_{i-1,j}^{k+1/2}}{h_1}+F_1=$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$= \mu_1 \cdot \frac{h_{i,j}^{k+1/2} - h_{i,j}^{k}}{\tau},\ i = \overline{0,n},\ j = \overline{1,m-1},\ k = \overline{0,K-1}, \quad (3.88)$$

де $$r_i^1 = r_{i+}^1 + r_{i-}^1,\ r_+^1 = \frac{\overline{D} + |\overline{D}|}{2\overline{A}} \geq 0,\ r_-^1 = \frac{\overline{D} - |\overline{D}|}{2\overline{A}} \leq 0,$$

$$\mu^1 = \frac{1}{1 + \frac{h_1 \cdot |\overline{D}|}{2\overline{A}}}, \quad F_1 = \frac{\overline{C}}{2}\left(\frac{h_{i-1,j-1}^k - h_{i-1,j+1}^k - h_{i+1,j-1}^k + h_{i+1,j+1}^k}{4h_1h_2}\right) + \frac{\varepsilon_1}{2},$$

$$i = \overline{0,n},\ j = \overline{1,m-1},\ k = \overline{0,K-1}.$$

В прогоночному вигляді (3.88) запишеться

$$a_1^1 \cdot h_{i-1,j}^{k+1/2} - c_1^1 \cdot h_{i,j}^{k+1/2} + b_1^1 \cdot h_{i+1,j}^{k+1/2} = -f_1,\ i = \overline{0,n},\ j = \overline{1,m-1},\ k = \overline{0,K-1},$$

$$h_{0,j}^{k+1/2} = \chi_1^1 \cdot h_{1,j}^{k+1/2} + \mu_1^1;\ \ h_{n,j}^{k+1/2} = \chi_2^1 \cdot h_{n-1,j}^{k+1/2} + \mu_2^1,\ \ j = \overline{1,m-1},\ k = \overline{0,K-1}, \quad (3.89)$$

де

$$a_1^1 = \frac{1}{h_1}\left(\frac{\mu^1}{h_1} - r_-^1\right),\ b_1^1 = \frac{1}{h_1}\left(\frac{\mu^1}{h_1} - r_+^1\right),\ c_1^1 = \frac{2 \cdot \mu^1}{h_1^2} + \frac{r_+^1}{h_1} - \frac{r_-^1}{h_1} + \frac{\mu_1}{\tau},$$

$$f_1 = F_1 + \frac{\mu_1}{\tau} \cdot h_{i,j}^k,\ i = \overline{0,n},\ j = \overline{1,m-1},\ k = \overline{0,K-1}.$$

Числовий розв'язок різницевої схеми (3.89) знаходимо методом прогонки

$$h_{i,j}^{k+1/2} = \alpha_{i+1,j}^1 \cdot h_{i+1,j}^{k+1/2} + \beta_{i+1,j}^1,\ \ i = \overline{0,n},\ j = \overline{1,m-1},\ k = \overline{0,K-1},$$

де $$\alpha_{i+1,j}^1 = \frac{b_1^1}{c_1^1 - \alpha_{i,j}^1 \cdot a_1^1};\ \beta_{i+1,j}^1 = \frac{a_1^1 \cdot \beta_{i,j}^1 + f_1}{c_1^1 - \alpha_{i,j}^1 \cdot a_1^1};$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$i=\overline{0,n},\ j=\overline{1,m-1},\ k=\overline{0,K-1}$$

$$\alpha_{1,j}^{1}=\chi_{1}^{1}=0,\ \ \beta_{1,j}^{1}=h_{0,j}^{k+1/2},.\ j=\overline{1,m-1},\ k=\overline{0,K-1}.$$

Аналогічно, для (3.86) маємо

$$\frac{\mu_1}{2}\cdot\frac{\partial h^{k+1}}{\partial t}=\overline{B}\,\frac{\partial^2 h^{k+1}}{\partial\eta^2}+\overline{E}\,\frac{\partial h^{k+1}}{\partial\eta}+\frac{\overline{C}}{2}\cdot\frac{\partial^2 h^{k+1/2}}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\varepsilon_1}{2}. \qquad (3.90)$$

Монотонна різницева схема для (3.90) має вигляд

$$\mu^2\cdot\frac{h_{i,j-1}^{k+1}-2\cdot h_{i,j}^{k+1}+h_{i,j+1}^{k+1}}{h_2^2}+r_+^2\cdot\frac{h_{i,j+1}^{k+1}-h_{i,j}^{k+1}}{h_2}+r_-^2\cdot\frac{h_{i,j}^{k+1}-h_{i,j-1}^{k+1}}{h_2}+F_2=$$

$$=\mu_1\cdot\frac{h_{i,j}^{k+1}-h_{i,j}^{k+1/2}}{\tau},\ i=\overline{0,n},\ j=\overline{1,m-1},\ k=\overline{0,K-1}, \qquad (3.91)$$

де $$r_i^2=r_{i+}^2+r_{i-}^2,\ r_+^2=\frac{\overline{E}+|\overline{E}|}{2\overline{B}}\ge 0,\ \ r_-^2=\frac{\overline{E}-|\overline{E}|}{2\overline{B}}\le 0,$$

$$\mu^2=\frac{1}{1+\dfrac{h_2\cdot|\overline{E}|}{2\overline{B}}},\ \ F_2=\frac{\overline{C}}{2}\left(\frac{h_{i-1,j-1}^{k+1/2}-h_{i-1,j+1}^{k+1/2}-h_{i+1,j-1}^{k+1/2}+h_{i+1,j+1}^{k+1/2}}{4h_1h_2}\right)+\frac{\varepsilon_1}{2},$$

$$i=\overline{0,n},\ j=\overline{1,m-1},\ k=\overline{0,K-1}.$$

Прогоночний вигляд (3.91) наступний:

$$a_1^2\cdot h_{i,j-1}^{k+1}-c_1^2\cdot h_{i,j}^{k+1}+b_1^2\cdot h_{i,j+1}^{k+1}=-f_2,\ \ i=\overline{0,n},\ j=\overline{1,m-1},\ k=\overline{0,K-1},$$

$$h_{i,0}^{k+1}=\chi_1^2\cdot h_{i,1}^{k+1}+\mu_1^2;\ \ h_{i,m}^{k+1}=\chi_2^2\cdot h_{i,m-1}^{k+1}+\mu_2^2,\ \ i=\overline{0,n}, \qquad (3.92)$$

де $$a_1^2=\frac{1}{h_2}\left(\frac{\mu^2}{h_2}-r_-^2\right),\qquad b_1^2=\frac{1}{h_2}\left(\frac{\mu^2}{h_2}-r_+^2\right),$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$c_1^2 = \frac{2\cdot\mu^2}{h_2^2} + \frac{r_+^2}{h_2} - \frac{r_-^2}{h_2} + \frac{\mu_1}{\tau}, \qquad f_2 = F_2 + \frac{\mu_1}{\tau}\cdot h_{i,j}^{k+1/2},$$

$$i = \overline{0,n},\ j = \overline{1,m-1},\ k = \overline{0,K-1}.$$

Методом прогонки знаходимо числовий розв'язок різницевої схеми (3.92)

$$h_{i,j}^{k+1} = \alpha_{i,j+1}^2 \cdot h_{i,j+1}^{k+1} + \beta_{i,j+1}^2,\ \ i = \overline{0,n},\ j = \overline{1,m-1},\ k = \overline{0,K-1},$$

де $$\alpha_{i,j+1}^2 = \frac{b_1^2}{c_1^2 - \alpha_{i,j}^2 \cdot a_1^2},\ \beta_{i,j+1}^2 = \frac{a_1^2\cdot\beta_{i,j}^2 + f_2}{c_1^2 - \alpha_{i,j}^2\cdot a_1^2},$$

$$i = \overline{0,n},\ j = \overline{1,m-1},\ k = \overline{0,K-1},$$

$$\alpha_{i,1}^2 = \chi_1^2 = 0,\ \ \beta_{i,1}^2 = h_{i,0}^{k+1},.\ i = \overline{0,n},\ k = \overline{0,K-1}.$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Компоненти швидкості фільтрації знаходимо за формулами

$$V_x = -\frac{k(c)}{J_1}\cdot\left(h_\xi\cdot y_\eta - h_\eta\cdot y_\xi\right),\quad V_y = -\frac{k(c)}{J_1}\cdot\left(-h_\xi\cdot x_\eta + h_\eta\cdot x_\xi\right),$$

де

$$J_1 = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi =$$

$$= \frac{1}{4h_1h_2}\left[\left(x_{i+1,j} - x_{i-1,j}\right)\left(y_{i+1,j} - y_{i-1,j}\right) - \left(x_{i,j+1} - x_{i,j-1}\right)\left(y_{i,j+1} - y_{i,j-1}\right)\right]$$

У вузлах різницевої сітки компоненти швидкості фільтрації приймуть вигляд

$$V_{x_{ij}} = -\frac{k_{ij}(c)}{x_\xi\cdot y_\eta - x_\eta\cdot y_\xi}\times$$

$$\times\left(\frac{h_{i+1,j} - h_{i-1,j}}{2h_1}\cdot\frac{y_{i,j+1} - y_{i,j-1}}{2h_2} - \frac{h_{i,j+1} - h_{i,j-1}}{2h_2}\cdot\frac{y_{i+1,j} - y_{i-1,j}}{2h_1}\right) =$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$= -\frac{k_{ij} \cdot 4 \cdot h_1 \cdot h_2}{\left(x_{i+1,j} - x_{i-1,j}\right) \cdot \left(y_{i,j+1} - y_{i,j-1}\right) - \left(x_{i,j+1} - x_{i,j-1}\right) \cdot \left(y_{i+1,j} - y_{i-1,j}\right)} \cdot$$

$$\cdot \frac{\left(h_{i+1,j} - h_{i-1,j}\right) \cdot \left(y_{i,j+1} - y_{i,j-1}\right) - \left(h_{i,j+1} - h_{i,j-1}\right) \cdot \left(y_{i+1,j} - y_{i-1,j}\right)}{4 \cdot h_1 \cdot h_2} =$$

$$= -k_{ij} \cdot \frac{\left(h_{i+1,j} - h_{i-1,j}\right) \cdot \left(y_{i,j+1} - y_{i,j-1}\right) - \left(h_{i,j+1} - h_{i,j-1}\right) \cdot \left(y_{i+1,j} - y_{i-1,j}\right)}{\left(x_{i+1,j} - x_{i-1,j}\right) \cdot \left(y_{i,j+1} - y_{i,j-1}\right) - \left(x_{i,j+1} - x_{i,j-1}\right) \cdot \left(y_{i+1,j} - y_{i-1,j}\right)},$$

$$V_{y_{ij}} = -\frac{k_{ij}}{x_\xi \cdot y_\eta - x_\eta \cdot y_\xi} \times$$

$$\times \left(-\frac{h_{i+1,j} - h_{i-1,j}}{2h_1} \cdot \frac{x_{i,j+1} - x_{i,j-1}}{2h_2} + \frac{h_{i,j+1} - h_{i,j-1}}{2h_2} \cdot \frac{x_{i+1,j} - x_{i-1,j}}{2h_1} \right) =$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$= -\frac{k_{ij} \cdot 4 \cdot h_1 \cdot h_2}{\left(x_{i+1,j} - x_{i-1,j}\right) \cdot \left(y_{i,j+1} - y_{i,j-1}\right) - \left(x_{i,j+1} - x_{i,j-1}\right) \cdot \left(y_{i+1,j} - y_{i-1,j}\right)} \times$$

$$\times \frac{-\left(h_{i+1,j} - h_{i-1,j}\right) \cdot \left(x_{i,j+1} - x_{i,j-1}\right) + \left(h_{i,j+1} - h_{i,j-1}\right) \cdot \left(x_{i+1,j} - x_{i-1,j}\right)}{4 \cdot h_1 \cdot h_2} =$$

$$= -k_{ij} \cdot \frac{-\left(h_{i+1,j} - h_{i-1,j}\right) \cdot \left(x_{i,j+1} - x_{i,j-1}\right) + \left(h_{i,j+1} - h_{i,j-1}\right) \cdot \left(x_{i+1,j} - x_{i-1,j}\right)}{\left(x_{i+1,j} - x_{i-1,j}\right) \cdot \left(y_{i,j+1} - y_{i,j-1}\right) - \left(x_{i,j+1} - x_{i,j-1}\right) \cdot \left(y_{i+1,j} - y_{i-1,j}\right)}.$$

Квадрат швидкості фільтрації знаходиться за формулою

$$V_{ij}^{\,2} = V_{x_{ij}}^2 + V_{y_{ij}}^2 .$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

3.3.4.3. Числовий розв'язок задачі масопереносу

Розв'язок задачі масопереносу (3.58)-(3.62) знаходимо, використовуючи економні методи, зокрема ЛОС О. А. Самарського [164]. В результаті розщеплення рівняння (3.84), отримаємо

$$\frac{\partial^2 c}{\partial \xi^2} + r^3 \frac{\partial c}{\partial \xi} - 0.5 \cdot \bar{\gamma}\left(c - C_*\right) = 0.5 \cdot \bar{\sigma} \cdot \frac{\partial c}{\partial t}, \quad (\xi, \eta) \in G_\zeta, \quad (3.93)$$

$$\frac{\partial^2 c}{\partial \eta^2} + r^4 \frac{\partial c}{\partial \eta} - 0.5 \cdot \bar{\gamma}\left(c - C_*\right) = 0.5 \cdot \bar{\sigma} \cdot \frac{\partial c}{\partial t}, \quad (\xi, \eta) \in G_\zeta, \quad (3.94)$$

Побудуємо монотонні різницеві схеми для кожного з рівнянь (3.93), (3.94). Для рівняння (3.93) матимемо

$$\mu^3 \frac{C_{i-1,j}^{k+1/2} - 2 \cdot C_{i,j}^{k+1/2} + C_{i+1,j}^{k+1/2}}{h_1^2} + r_+^3 \frac{C_{i+1,j}^{k+1/2} - C_{i,j}^{k+1/2}}{h_1} + r_-^3 \frac{C_{i,j}^{k+1/2} - C_{i-1,j}^{k+1/2}}{h_1} -$$

$$- 0.5 \cdot \bar{\gamma} \cdot \left(C_{i,j}^{k+1/2} - C_*\right) = 0.5 \cdot \bar{\sigma} \frac{C_{i,j}^{k+1/2} - C_{i,j}^{k}}{0.5 \cdot \tau}; \quad (3.95)$$

$$i = \overline{0,n},\ j = \overline{1,m-1},\ k = \overline{0,K-1}.$$

де $$\mu^3 = \frac{1}{1 + 0.5 \cdot h_1 \cdot \left|r^3\right|}, \quad r_i^3 = r_{i+}^3 + r_{i-}^3,$$

$$r_{i+}^3 = 0.5\left(r_i^3 + \left|r_i^3\right|\right) \geq 0, \quad r_{i-}^3 = 0.5\left(r_i^3 - \left|r_i^3\right|\right) \leq 0,$$

$$r^3 = -\frac{k(c) \cdot \varphi_\xi - k_0 \cdot D_\xi}{D(c) \cdot k_0} = -\frac{k_{i,j}\left(-k_0 \dfrac{h_{i+1,j} - h_{i-1,j}}{2h_1}\right) - k_0 \dfrac{D_{i+1,j} - D_{i-1,j}}{2h_1}}{D_{i,j} \cdot k_0} =$$

$$= \frac{k_{i,j} \cdot \left(h_{i+1,j} - h_{i-1,j}\right) + \left(D_{i+1,j} - D_{i-1,j}\right)}{2 \cdot h_1 \cdot D_{i,j}}, \quad i = \overline{0,n},\ j = \overline{1,m-1}.$$

Національний університет водного господарства та природокористування

Запишемо (3.95) в прогоночному вигляді

$$a_2^1 \cdot C_{i-1,j}^{k+1/2} - c_2^1 \cdot C_{i,j}^{k+1/2} + b_2^1 \cdot C_{i+1,j}^{k+1/2} = -f_3\ , i = \overline{0,n},\ j = \overline{1,m-1},\ k = \overline{0,K-1},$$

$$C_{0,j}^{k+1/2} = \chi_1^3 \cdot C_{1,j}^{k+1/2} + \mu_1^3;\ C_{n,j}^{k+1/2} = \chi_2^3 \cdot C_{n-1,j}^{k+1/2} + \mu_2^3,\ j = \overline{1,m-1},\ k = \overline{0,K-1}, \tag{3.96}$$

де

$$a_2^1 = \frac{\mu^3}{h_1^2} - \frac{r_-^3}{h_1},\quad b_2^1 = \frac{\mu^3}{h_1^2} + \frac{r_+^3}{h_1},\quad c_2^1 = \frac{2\cdot\mu^3}{h_1^2} + \frac{r_+^3}{h_1} - \frac{r_-^3}{h_1} + \frac{\overline{\gamma}}{2} + \frac{\overline{\sigma}}{\tau},$$

$$f_3 = \frac{\overline{\gamma}\cdot C_*}{2} + \frac{\overline{\sigma}\cdot C_{i,j}^k}{\tau},\quad i = \overline{0,n},\ j = \overline{1,m-1},\ k = \overline{0,K-1}.$$

Числовий розв'язок різницевої схеми (3.96) знаходимо методом прогонки

$$C_{i,j}^{k+1/2} = \alpha_{i+1,j}^3 \cdot C_{i+1,j}^{k+1/2} + \beta_{i+1,j}^3,\ i = \overline{0,n},\ j = \overline{1,m-1},\ k = \overline{0,K-1},$$

де $$\alpha_{i+1,j}^3 = \frac{b_2^1}{c_2^1 - a_2^1 \cdot \alpha_{i,j}^3};\quad \beta_{i+1,j}^3 = \frac{a_2^1 \cdot \beta_{i,j}^3 + f_3^k}{c_2^1 - a_2^1 \cdot \alpha_{i,j}^3};$$

$$i = \overline{0,n},\ j = \overline{1,m-1},\ k = \overline{0,K-1},$$

$$\alpha_{1,j}^3 = \chi_1^3 = 0,\quad \beta_{1,j}^3 = \mu_1^3 = \widetilde{C}_1,\ j = \overline{1,m-1}.$$

Побудуємо монотонну різницеву схему для (3.94)

$$\mu^4 \frac{C_{i,j-1}^{k+1} - 2\cdot C_{i,j}^{k+1} + C_{i,j+1}^{k+1}}{h_2^2} + r_+^4 \frac{C_{i,j+1}^{k+1} - C_{i,j}^{k+1}}{h_2} + r_-^4 \frac{C_{i,j}^{k+1} - C_{i,j-1}^{k+1}}{h_2} -$$

$$-0.5\cdot\overline{\gamma}\cdot\left(C_{i,j}^{k+1} - C_*\right) = 0.5\cdot\overline{\sigma}\frac{C_{i,j}^{k+1} - C_{i,j}^{k+1/2}}{0.5\cdot\tau}, \tag{3.97}$$

$$i = \overline{0,n},\ j = \overline{1,m-1},\ k = \overline{0,K-1},$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

де $\mu^4 = \dfrac{1}{1+0.5\cdot h_2\cdot\left|r^4\right|}, \qquad r_i^4 = r_{i+}^4 + r_{i-}^4,$

$$r_{i+}^4 = 0.5\left(r_i^4 + \left|r_i^4\right|\right) \geq 0, \qquad r_{i-}^4 = 0.5\left(r_i^4 - \left|r_i^4\right|\right) \leq 0,$$

$$r^4 = -\frac{k(c)\cdot\varphi_\eta - k_0\cdot D_\eta}{D(c)\cdot k_0} = -\frac{k_{i,j}\left(-k_0\dfrac{h_{i,j+1}-h_{i,j-1}}{2h_2}\right) - k_0\dfrac{D_{i,j+1}-D_{i,j-1}}{2h_2}}{D_{i,j}\cdot k_0} =$$

$$= \frac{k_{i,j}\cdot\left(h_{i,j+1}-h_{i,j-1}\right)+\left(D_{i,j+1}-D_{i,j-1}\right)}{2\cdot h_2\cdot D_{i,j}}.$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Запишемо (3.97) в прогоночному вигляді

$$a_2^2\cdot C_{i,j-1}^{k+1} - c_2^2\cdot C_{i,j}^{k+1} + b_2^2\cdot C_{i,j+1}^{k+1} = -f_4,\ i=\overline{0,n},\ j=\overline{1,m-1},\ k=\overline{0,K-1},$$

$$C_{i,0}^{k+1} = \chi_1^4\cdot C_{i,1}^{k+1} + \mu_1^4;\ C_{i,m}^{k+1} = \chi_2^4\cdot C_{i,m-1}^{k+1} + \mu_2^4,\ i=\overline{0,n},\ k=\overline{0,K-1}. \tag{3.98}$$

де $a_2^2 = \dfrac{\mu_2}{h_2^2} - \dfrac{r_-^4}{h_2}, \quad b_2^2 = \dfrac{\mu^4}{h_2^2} + \dfrac{r_+^4}{h_2}, \quad c_2^2 = \dfrac{2\cdot\mu^4}{h_2^2} + \dfrac{r_+^4}{h_2} - \dfrac{r_-^4}{h_2} + \dfrac{\overline{\gamma}}{2} + \dfrac{\overline{\sigma}}{\tau},$

$$f_4 = \frac{\overline{\gamma}\cdot C_*}{2} + \frac{\overline{\sigma}\cdot C_{i,j}^{k+1/2}}{\tau}, \quad i=\overline{0,n},\ j=\overline{1,m-1},\ k=\overline{0,K-1}.$$

Числовий розв'язок різницевої схеми (3.98) знаходимо методом прогонки

$$C_{i,j}^{k+1} = \alpha_{i,j+1}^4\cdot C_{i,j+1}^{k+1} + \beta_{i,j+1}^4,\ i=\overline{0,n},\ j=\overline{1,m-1},\ k=\overline{0,K-1},$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

де $$\alpha_{i,j+1}^4 = \frac{b_2^2}{c_2^2 - a_2^2 \cdot \alpha_{i,j}^4}, \quad \beta_{i,j+1}^4 = \frac{a_2^2 \cdot \beta_{i,j}^4 + f_4^{k+1/2}}{c_2^2 - a_2^2 \cdot \alpha_{i,j}^4},$$

$$i = \overline{0,n},\ j = \overline{1,m-1},\ k = \overline{0,K-1},$$

$$\alpha_{i,1}^4 = \chi_1^4 = 0, \quad \beta_{i,1}^4 = \mu_1^4 = C_m, \quad C_{i,m}^{k+1} = \frac{\beta_{i,m}^4}{1 - \alpha_{i,m}^4},$$

$$i = \overline{0,n},\ j = \overline{1,m-1}.$$

3.3.5. Результати числових експериментів та їх аналіз

Розроблені алгоритми для розв'язку даної задачі, програмно реалізовані в інтегрованому середовищі візуального програмування Delphi 6.0. В результаті числового розв'язання даної задачі отримана конформна різницева сітка (рис. 3.28).

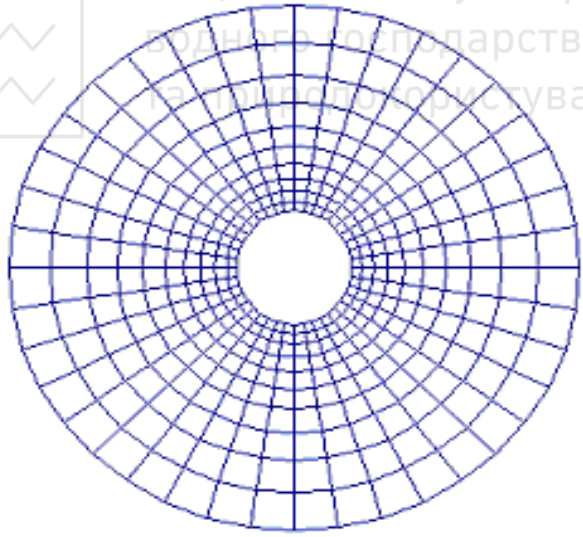


Рис. 3.28. Гідродинамічна різницева сітка фільтраційного потоку із свердловини

На основі програмної реалізації задачі проведено значну кількість числових експериментів, що дало можливість провести

Національний університет
водного господарства
та природокористування

аналіз отриманих результатів для різних вхідних даних задачі та детально дослідити процеси розподілу напорів $h(x,y,t)$ (рис. 3.29-3.31), швидкості фільтрації $V^2(x,y,t)$ (рис. 3.32-3.34), концентрації сольових розчинів $c(x,y,t)$ (рис. 3.35-3.37) в будь-якій точці двохзв'язної області фільтрації в кожен момент часу.

Нижче наведено результати числових експериментів при сталих граничних і початковій умовах для різних часових шарів із наступними вхідними даними:

$$\widetilde{C}_1 = 350\ {}^{г}\!/_{літр},\quad \widetilde{C}_2 = 5\ {}^{г}\!/_{літр},\quad c(x,y,0) = \frac{\widetilde{C}_2 - \widetilde{C}_1}{(r_2 - r_1)}\cdot(r - r_1) + \widetilde{C}_1,$$

$$H_1 = 1{,}5\ м,\ H_2 = 1\ м,\ h(x,y,0) = \frac{H_2 - H_1}{(r_2 - r_1)}\cdot(r - r_1) + H_1,\ r_1 = 20\ м,$$

$$r_2 = 100\ м,\ n = 10,\ m = 40,\ \delta = 0.000001,\ \tau = 15\ діб,\ \lambda = 5\ м,$$

$$k = 1\ {}^{м}\!/_{добу},\ H = 1\ м,\ \mu = 1,\ \varepsilon = 0,\ \sigma = 0{,}5,\ C_* = 350\ {}^{г}\!/_{літр},$$

$$\gamma = 0{,}00065\ доба^{-1},\ D(c) = D_m + \lambda\cdot|V|,\ D_m = 0{,}0002\ {}^{м^2}\!/_{добу}.$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Досліджено розподіл концентрації сольових розчинів по області фільтрації для різних параметрів фільтрації та масопереносу при $t = 30$ діб: коефіцієнта фільтрації k (рис. 3.38), коефіцієнта конвективної дифузії $D(c) =_m \lambda\cdot V$ (рис. 3.39), пористості ґрунту σ (рис. 3.40), коефіцієнта масообміну γ (рис. 3.41), а також при заданні граничної умови 2-го роду на контурі впливу свердловини (рис. 3.42).

В результаті проведення числових експериментів отримано просторові часові розгортки п'єзометричних напорів, швидкості фільтрації та поля концентрації солей при нестаціонарній фільтрації сольових розчинів із досконалої свердловини з довільним контуром живлення. Проаналізовано їх зміну від різних значень коефіцієнта фільтрації k, коефіцієнта конвективної дифузії, пористості ґрунту σ, коефіцієнта масообміну γ.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

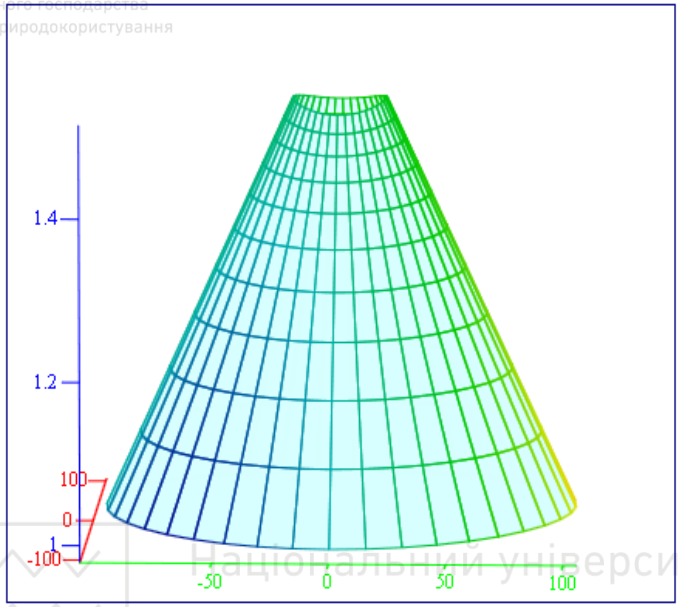


Рис. 3.29. Графік поля напорів фільтрації із свердловини при t=0 діб

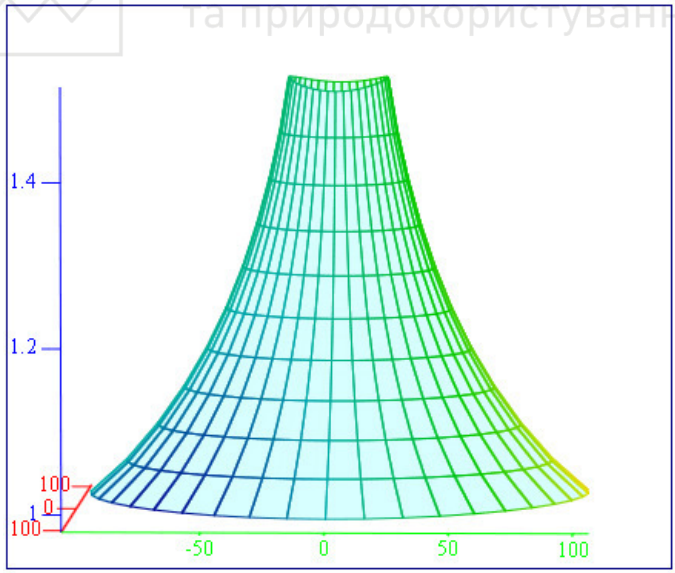


Рис. 3.30. Графік поля напорів фільтрації із свердловини при t = 120 діб

Національний університет
водного господарства
та природокористування

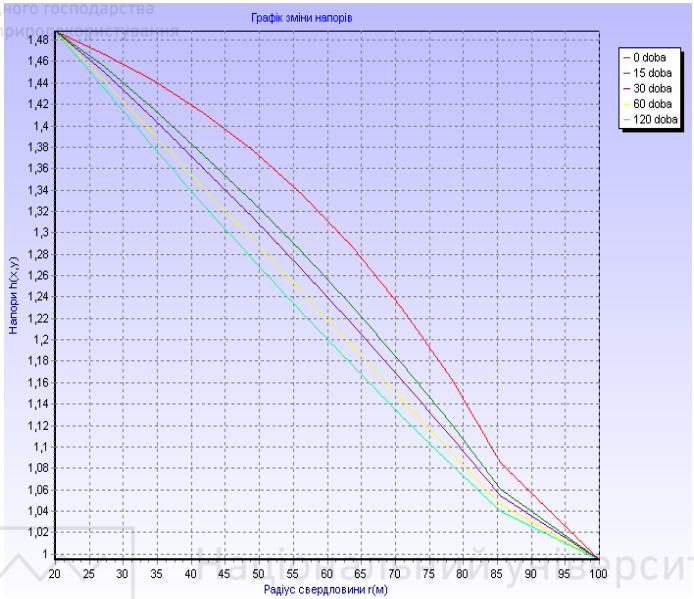


Рис. 3.31. Графік радіального розподілу напорів для різних моментів часу t

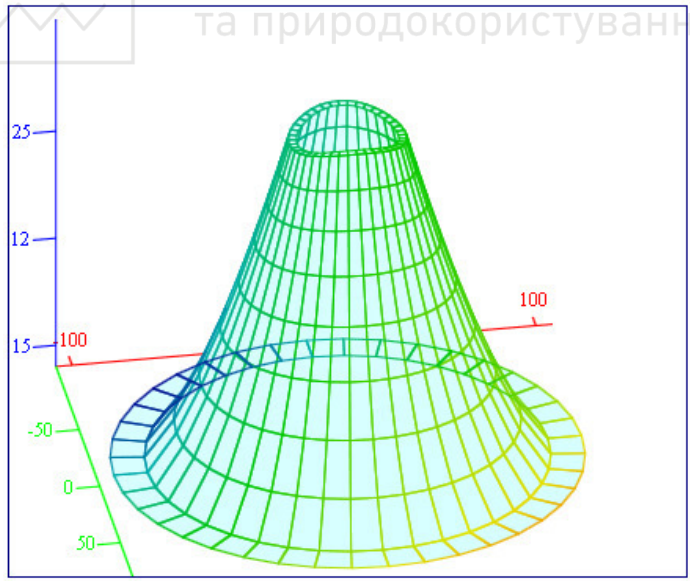


Рис. 3.32. Графік поля швидкості фільтрації $t = 0$ діб

Національний університет
водного господарства
та природокористування

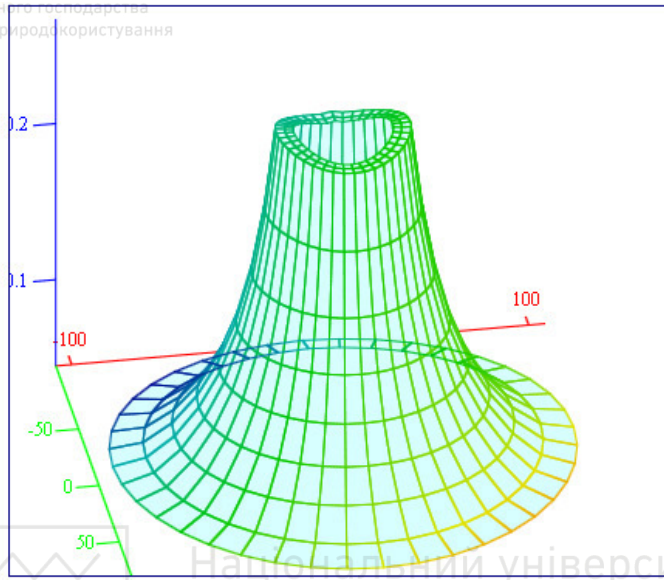


Рис. 3.33. Графік поля швидкості фільтрації при $t = 120$ *діб*

Національний університет
водного господарства
та природокористування

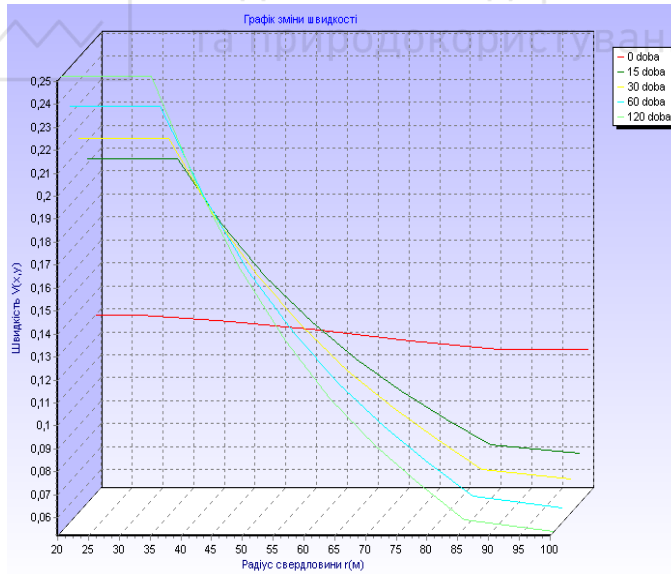


Рис. 3.34. Графік радіального розподілу швидкості фільтрації для різних моментів часу t

Національний університет
водного господарства
та природокористування

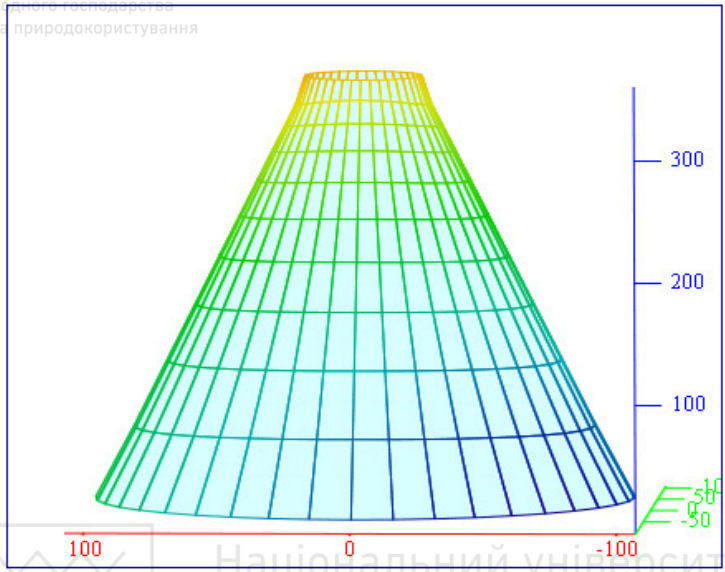


Рис. 3.35. Графік поля концентрації сольових розчинів при t=0 діб

Рис. 3.36. Графік поля концентрації сольових розчинів при t=120 діб

Національний університет
водного господарства
та природокористування

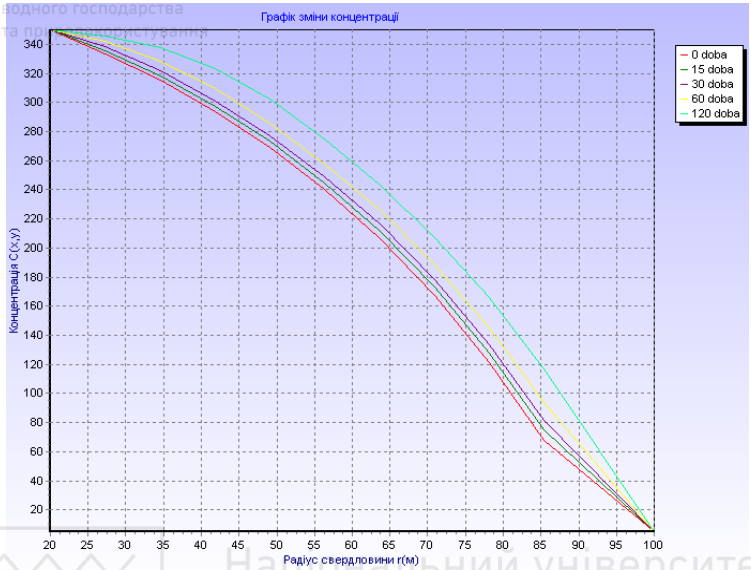


Рис. 3.37. Графік радіального розподілу концентрації по області фільтрації в різні моменти часу

Національний університет
водного господарства
та природокористування

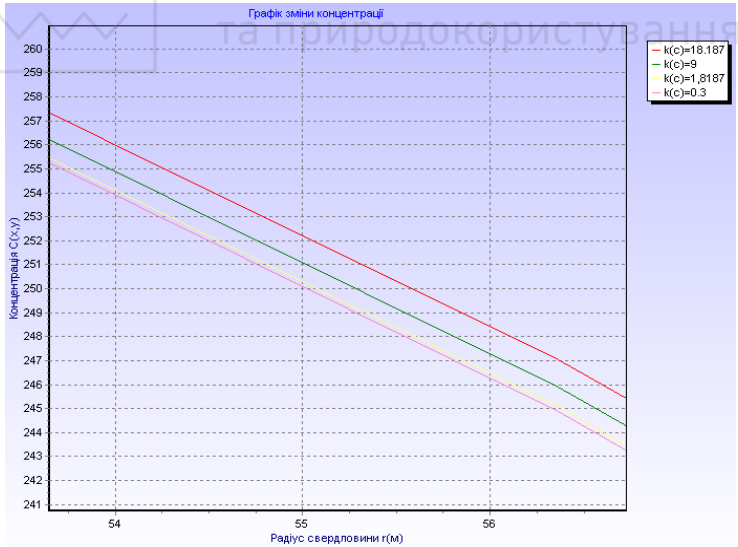


Рис. 3.38. Графік радіального розподілу концентрації солей по області фільтрації при різних значеннях коефіцієнта фільтрації *k*

Національний університет
водного господарства
та природокористування

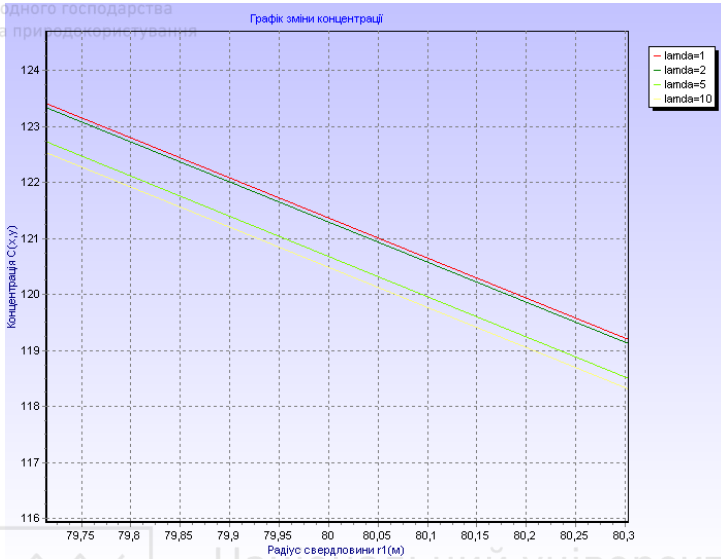


Рис. 3.39. Графік радіального розподілу концентрації солей по області фільтрації при різних значеннях коефіцієнта конвективної дифузії $D(c)$

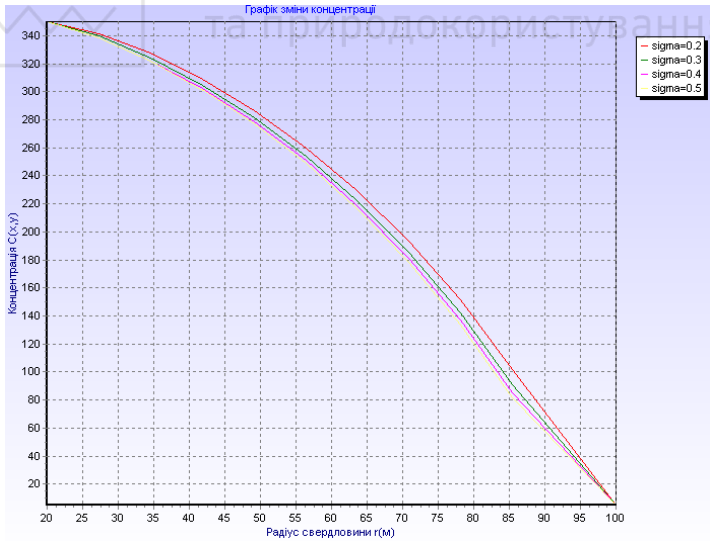


Рис. 3.40. Графік радіального розподілу концентрації солей по області фільтрації при різних значеннях пористості ґрунту σ

Національний університет
водного господарства
та природокористування

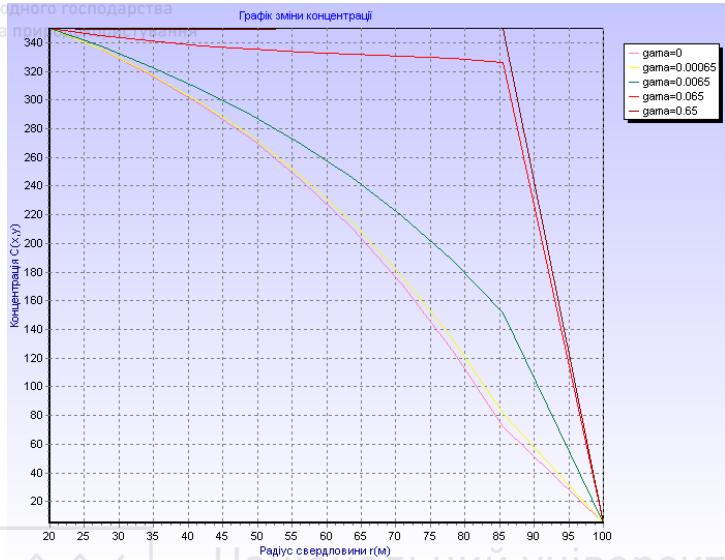


Рис. 3.41. Графік радіального розподілу концентрації солей по області фільтрації при різних значеннях коефіцієнта масообміну γ

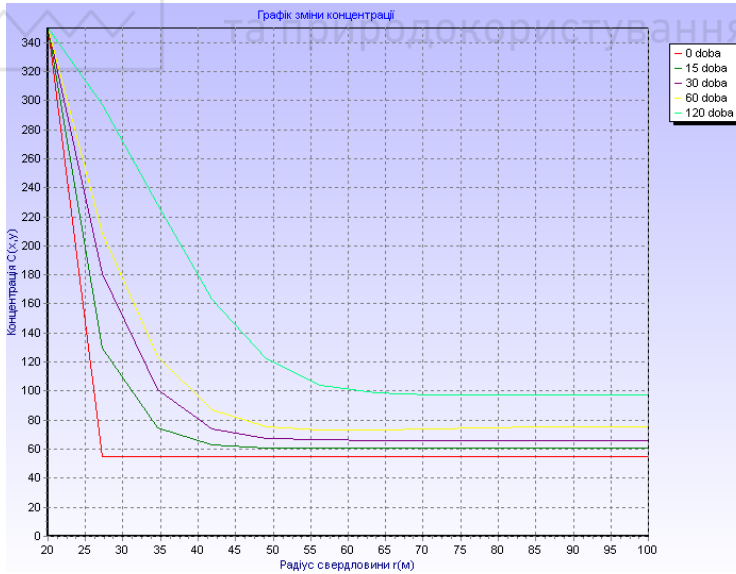


Рис. 3.42. Графік радіального розподілу концентрації солей по області фільтрації для граничних умов 2-го роду на контурі впливу свердловини

Національний університет водного господарства та природокористування

Проаналізувавши отримані результати, можна зробити наступні висновки:

– графіки сімейства п'єзометричних напорів монотонно спадають в кожен момент часу по області фільтрації, причому їх числові значення зростають з часом;

– графіки сімейства швидкостей фільтрації сольового розчину теж монотонно спадають в кожен момент часу по області фільтрації, причому значення швидкості фільтрації на контурі свердловини зростає з часом, а на контурі її впливу – спадає;

– графіки сімейства концентрації солей монотонно спадають по області фільтрації в кожен фіксований момент часу, при цьому значення концентрації солей в кожній точці області фільтрації зростає з часом до насичення.

Також було досліджено розподіл концентрації сольових розчинів по області фільтрації в залежності від параметрів фільтрації та масопереносу. Зокрема, виявлено: вплив зміни коефіцієнта фільтрації $k(c)$ на зміну градієнта концентрації, а саме: градієнт концентрації змінюється тим більше, чим більша зміна коефіцієнта фільтрації; при зміні параметра гідродинамічної дисперсії λ змінюється коефіцієнт дифузії $D(c)$, а це впливає на розподіл концентрації: при збільшені λ – концентрація не значно зменшується; при збільшені пористості ґрунту σ концентрація сольового розчину зменшується по області фільтрації; при різних значеннях коефіцієнта масообміну γ концентрація змінюється, а саме при збільшені γ – концентрація зростає.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

РОЗДІЛ 4
МАТЕМАТИЧНЕ І КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ МІГРАЦІЇ ТА ЛОКАЛІЗАЦІЇ РАДІОНУКЛІДІВ З ВИКОРИСТАННЯМ ФІЛЬТРІВ-ВЛОВЛЮВАЧІВ ТА ДРЕН-ВЛОВЛЮВАЧІВ

В цьому розділі проведено математичне та комп'ютерне моделювання процесу міграції радіонуклідів ^{90}Sr (стронцій-90) та ^{137}Cs (цезій-137) у ґрунтах. Даним дослідженням присвячено роботи [19, 20, 116, 180, 195, 196, 205, 209].

З метою очищення радіоактивно забруднених родючих ґрунтів досить ефективним є застосування фільтрів та дрен-вловлювачів, наповнених деяким сорбуючим матеріалом, наприклад, вермикулітом [38, 52, 53, 143, 144]. В зв'язку з цим, в подальшому розглядаються задачі числового моделювання процесу міграції та утилізації радіонуклідів на прикладі задач вертикальної міграції радіонуклідів в горизонтальному шарі ґрунту та їх утилізації за допомогою системи симетрично розміщених дрен-вловлювачів при плоско-вертикальній фільтрації.

Надалі допускається, що процес міграції радіонуклідів відбувається внаслідок молекулярної та конвективної дифузії в процесі фільтрації підземних вод. А отже, рівняннями, які описують міграцію радіонуклідів служать рівняння масопереносу розчинених в фільтраційному потоці речовин [30, 106, 116]. В зв'язку з цим, моделювання переносу радіонуклідів базується на наступних припущеннях:

1) міграція радіонуклідів відбувається фільтраційним потоком (фільтрація встановлена і потенціальна згідно закону Дарсі);

2) фільтраційна рідина вважається нестискуваною рідиною, що в даному випадку є сольовим розчином (слабким електролітом);

3) ґрунт є недеформівне пористе середовище, а отже фільтрація відбувається в жорсткому режимі;

4) фільтруюча рідина займає весь пористий простір, тобто розглядається насичений фільтраційний потік;

5) міграція радіонуклідів відбувається згідно законів Фіка;

6) процеси міграції радіонуклідів вивчаються в ізотермічних та неізотермічних умовах;

Національний університет
водного господарства
та природокористування

7) процеси міграції досліджуються з врахуванням наявності двох шляхів міграції домішкових частинок одного сорту – у фільтраційному потоці (конвективно рухомому поровому розчині) та у воді, яка зв'язана зі скелетом ґрунту.

Моделювання міграції радіонуклідів в підземних водах базується на розв'язку системи диференціальних рівнянь теорії фільтрації і гідрогеохімічної міграції, до складу якої входять рівняння руху і збереження маси рідини, що фільтрується, рівняння руху і збереження маси мігрантів, які знаходяться в розчині, і рівняння, що описують процеси фізико-хімічної взаємодії між розчином і фільтруючим пористим середовищем. Перенесення мігранта в ґрунтових водах обумовлюється спільною дією сукупності фізичних процесів, серед яких, в першу чергу виділимо конвективне перенесення, молекулярну дифузію і фільтраційну дисперсію. Конвективне перенесення являє собою переміщення мігруючої речовини безпосередньо разом з потоком ґрунтових вод. Як правило, це є найбільш суттєва форма переносу [116].

4.1. Математичне моделювання процесу вловлювання радіонуклідів при їх вертикальній міграції в горизонтальному шарі ґрунту

4.1.1. Постановка задачі

Розгляднемо задачу локалізації радіонуклідів (наприклад, ^{90}Sr (стронцій-90) або ^{137}Cs (цезій-137)) при їх вертикальній міграції в горизонтальному шарі ґрунту великої протяжності шляхом переносу їх фільтраційним потоком зі швидкістю $\vec{V}$ та під впливом конвективної дифузії (рис. 4.1).

На глибині l в ґрунті розміщений фільтр-вловлювач, наповнений сорбуючим елементом (наприклад, вермикулітом [144]). Відомі п'єзометричні напори на верхній та нижній (підстилаючій)поверхнях ґрунту відповідно H_1 та H_2 ($H_1>H_2$). Також відомий розподіл концентрацій радіонуклідів (мігранту) в початковий момент часу $t=0$: $\widetilde{C}_1^0(x)$ (для частинок, що знаходяться в конвективно рухомому поровому розчині) та $\widetilde{C}_2^0(x)$

Національний університет водного господарства та природокористування

(для частинок, що знаходяться у воді, що зв'язана зі скелетом ґрунту). На верхній поверхні ґрунту відомі концентрації $\widetilde{C}_1^1(x)$ та $\widetilde{C}_2^1(x)$, а на фільтрі-вловлювачі задаються концентрації $\widetilde{C}_1^2(x)$, $\widetilde{C}_2^2(x)$ або умова швидкого поглинання радіонуклідів фільтром: $\frac{\partial c_1(l,t)}{\partial x} = \frac{\partial c_2(l,t)}{\partial x} = 0$.

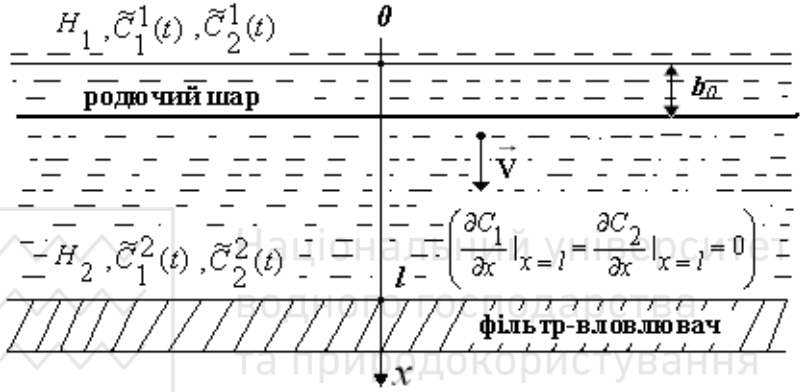


Рис. 4.1. Вертикальна міграція радіонуклідів в горизонтальному шарі ґрунту

Потрібно дослідити розподіл концентрації $c_1(x,t)$, $c_2(x,t)$ радіонуклідів по області фільтрації з часом; визначити час, за який концентрація радіонуклідів в родючому шарі грунту стане менше гранично допустимої концентрації. Це дасть можливість зробити прогноз щодо ступеня очищення ґрунтів та їх подальшого використання.

4.1.2. Математичні моделі задачі

Для формалізації описаної вище постановки задачі утилізації радіонуклідів при їх вертикальній міграції, нижче наводяться дві математичні моделі: 1) математична модель № 1, в якій міграція радіонуклідів розглядається на фоні фільтрації чистої води ($k = const$); 2) математична модель № 2, в якій фільтрат є сольовим розчином $k = k(c_1(x,t))$.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Математична модель № 1

В першому випадку математична модель задачі прийме вигляд

$$D_1 \frac{\partial^2 c_1}{\partial x^2} - V \frac{\partial c_1}{\partial x} - \gamma_1 c_1 + \gamma_2 c_2 = \sigma \frac{\partial c_1}{\partial t},\ x \in \Omega,\ t > 0, \quad (4.1)$$

$$D_2 \frac{\partial^2 c_2}{\partial x^2} + \gamma_1 c_1 - \gamma_2 c_2 = \sigma \frac{\partial c_2}{\partial t},\ x \in \Omega,\ t > 0, \quad (4.2)$$

$$V = -k \frac{\partial h}{\partial x}, \quad \frac{dV}{dx} = 0,\ x \in \Omega, \quad (4.3)$$

$$h(0) = H_1, \quad h(l) = H_2, \quad (4.4)$$

$$c_1(x,0) = \widetilde{C}_1^{\,0}(x), \quad c_2(x,0) = \widetilde{C}_2^{\,0}(x), \quad x \in (0,l), \quad (4.5)$$

$$c_1(0,t) = \widetilde{C}_1^{\,1}(t), \quad c_2(0,t) = \widetilde{C}_2^{\,1}(t), \quad 0 < t < t_1, \quad (4.6)$$

$$l_2 c_1(l,t) = \begin{cases} c_1(l,t) = \widetilde{C}_1^{\,2}(t), \\ \dfrac{\partial c_1(l,t)}{\partial x} = 0, \end{cases} \quad l_2 c_2(l,t) = \begin{cases} c_2(l,t) = \widetilde{C}_2^{\,2}(t), \\ \dfrac{\partial c_2(l,t)}{\partial x} = 0, \end{cases} \quad 0 < t < t_1. \quad (4.7)$$

Тут $c_1(x,t)$, D_1 – відповідно концентрація та коефіцієнт конвективної дифузії радіонуклідів, що знаходяться в фільтраційному потоці (конвективно рухомому поровому розчині); $c_2(x,t)$, D_2 – відповідно концентрація та коефіцієнт молекулярної дифузії радіонуклідів, що знаходяться у воді, яка зв'язана зі скелетом ґрунту; V – швидкість фільтраційного потоку мігранта; γ_1, γ_2 – коефіцієнти масообміну; σ – пористість ґрунту; l_2 – диференціальний оператор, що задає одну з граничних умов на фільтрі поглинання радіонуклідів; k – коефіцієнт фільтрації води з

Національний університет
водного господарства
та природокористування

мігрантами ($k = const$); $h = \frac{p}{\rho g} - x$ – п'єзометричний напір, p – тиск рідини, ρ – густина рідини, g – прискорення вільного падіння, x – вертикальна координата напрямлена вниз; t – час.

Математична модель № 2

Для більш адекватного опису процесу міграції радіонуклідів запишемо другу математичну модель, в якій фільтруючий розчин з радіонуклідами мігрантами моделюється сольовим розчином (слабким електролітом), в якому $k = k(c_1(x,t))$. Дана математична модель прийме вигляд

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(D_1(c_1)\frac{\partial c_1}{\partial x}\right) - V(c_1)\frac{\partial c_1}{\partial x} - \gamma_1 c_1 + \gamma_2 c_2 = \sigma\frac{\partial c_1}{\partial t},\ x \in \Omega,\ t > 0, \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(D_2(c_2)\frac{\partial c_2}{\partial x}\right) + \gamma_1 c_1 - \gamma_2 c_2 = \sigma\frac{\partial c_2}{\partial t}, \qquad x \in \Omega,\ t > 0, \quad (4.9)$$

$$V(c_1) = -k(c_1)\frac{\partial h}{\partial x} + v(c_1)\frac{\partial c_1}{\partial x}, \qquad \frac{\partial V}{\partial x} = 0, \quad x \in \Omega, \quad (4.10)$$

$$h(0) = H_1, \quad h(l) = H_2, \quad (4.11)$$

$$c_1(x,0) = \widetilde{C}_1^{\,0}(x), \quad c_2(x,0) = \widetilde{C}_2^{\,0}(x), \quad x \in (0,l), \quad (4.12)$$

$$c_1(0,t) = \widetilde{C}_1^{\,1}(t), \quad c_2(0,t) = \widetilde{C}_2^{\,1}(t), \quad 0 < t < t_1, \quad (4.13)$$

$$l_2 c_1(l,t) = \begin{cases} c_1(l,t) = \widetilde{C}_1^{\,2}(t), \\ \dfrac{\partial c_1(l,t)}{\partial x} = 0 \end{cases}, \ l_2 c_2(l,t) = \begin{cases} c_2(l,t) = \widetilde{C}_2^{\,2}(t), \\ \dfrac{\partial c_2(l,t)}{\partial x} = 0, \end{cases} \quad 0 < t < t_1. \quad (4.14)$$

Тут $k(c_1(x,t))$ – коефіцієнт фільтрації сольового розчину,

Національний університет водного господарства та природокористування

залежність якого від концентрації в фільтраційному потоці встановлено експериментально [63], $v(c_1(x,t))$ – коефіцієнт осмосу, $D_1(c_1) = D_{1m} + \lambda_1 |V(c_1)|$ – коефіцієнт конвективної дифузії радіонуклідів, що знаходяться в фільтраційному потоці, D_{1m} – коефіцієнт молекулярної дифузії, λ_1 – параметр гідродинамічної дисперсії. $D_2(c_2)$ – коефіцієнт молекулярної дифузії радіонуклідів, що знаходяться у воді, яка зв'язана зі скелетом ґрунту. Як видно з (4.8) – (4.14), дана математична модель є нелінійною.

4.1.3. Числовий розв'язок задачі

Для отримання числового розв'язку розглядуваної задачі поступимо наступним чином. Побудуємо спочатку обчислювальний алгоритм для першої математичної моделі, що описується крайовою задачею (4.1)-(4.7). В зв'язку з цим, поставимо у відповідність крайовій задачі (4.1)-(4.7) сукупність двох крайових задач

$$\begin{cases} D_1 \dfrac{\partial^2 c_1}{\partial x^2} - V \dfrac{\partial c_1}{\partial x} - \gamma_1 c_1 + \gamma_2 c_2 = \sigma \dfrac{\partial c_1}{\partial t}, \quad x \in \Omega, \ t > 0, \\ c_1(x,0) = \widetilde{C}_1^{\,0}(x), \quad c_2(x,0) = \widetilde{C}_2^{\,0}(x), \quad x \in (0,l), \\ c_1(0,t) = \widetilde{C}_1^{\,1}(t), \quad l_2 c_1(l,t) = \begin{cases} c_1(l,t) = \widetilde{C}_1^{\,2}(t), \\ \dfrac{\partial c_1(l,t)}{\partial x} = 0, \end{cases} \quad 0 < t < t_1; \end{cases} \tag{4.15}$$

$$\begin{cases} D_2 \dfrac{\partial^2 c_2}{\partial x^2} + \gamma_1 c_1 - \gamma_2 c_2 = \sigma \dfrac{\partial c_2}{\partial t}, \quad x \in \Omega, \ t > 0, \\ c_1(x,0) = \widetilde{C}_1^{\,0}(x), \quad c_2(x,0) = \widetilde{C}_2^{\,0}(x), \quad x \in (0,l), \\ c_2(0,t) = \widetilde{C}_2^{\,1}(t), \quad l_2 c_2(l,t) = \begin{cases} c_2(l,t) = \widetilde{C}_2^{\,2}(t), \\ \dfrac{\partial c_2(l,t)}{\partial x} = 0, \end{cases} \quad 0 < t < t_1. \end{cases} \tag{4.16}$$

Національний університет
водного господарства

Ввівши різницеву сітку $\omega_{h\tau} = \left\{x_i = ih,\ i = \overline{0,n};\ \ t_k = k\tau,\ k = \overline{0,k_1}\right\}$, побудуємо різницеві схеми для розглядуваних вище задач, причому для (4.15) – монотонну різницеву схему, а для (4.16) – чисто неявну різницеву схему.

В результаті дискретизації (4.15), отримаємо

$$\mu_i \frac{C_{1,i-1}^{k+1} - 2C_{1,i}^{k+1} + C_{1,i+1}^{k+1}}{h^2} + r_+ \frac{C_{1,i+1}^{k+1} - C_{1,i}^{k+1}}{h} + r_- \frac{C_{1,i}^{k+1} - C_{1,i-1}^{k+1}}{h} -$$

$$- \frac{\gamma_1}{D_1} C_{1,i}^{k+1} + \frac{\gamma_2}{D_1} C_{1,i}^{k+1} = \frac{\sigma'}{D_1} \frac{C_{1,i}^{k+1} - C_{1,i}^{k}}{\tau},\ \ i = \overline{1,n-1},\ \ k = \overline{0,K-1}, \tag{4.17}$$

$$C_{1,i}^{\ 0} = \widetilde{C}_{1,i}^{\ 0}, \qquad C_{1,0}^{k+1} = \widetilde{C}_1^{1\,k+1}, \qquad C_{1,n}^{k+1} = \chi_1 C_{1,n-1}^{k+1} + \overline{\mu}_1,$$
$$i = \overline{1,n-1},\ \ k = \overline{0,K-1},$$

де $\chi_1 = 0$, $\overline{\mu}_1 = \widetilde{C}_2^{k+1}$ у випадку, коли диференціальний оператор l_2 задає на фільтрі граничну умову 1-го роду і $\chi_1 = 1$, $\overline{\mu}_1 = 0$ – у випадку задання граничної умови 2-го роду. Тут введені наступні позначення:

$$\mu_i = \frac{1}{1 + 0{,}5h_1 \mid r \mid} = \frac{1}{1 + \dfrac{h_1 V}{2D_1}},\quad r = r_+ + r_-,\quad r = -\frac{V}{D_1},\quad \sigma' = \frac{\sigma}{D_1},$$

$$r_+ = 0{,}5\left(-\frac{V}{D_1} + \frac{V}{D_1}\right) \equiv 0,\quad r_- = 0{,}5\left(-\frac{V}{D_1} - \frac{V}{D_1}\right) = -\frac{V}{D_1}.$$

Чисто неявна різницева схема для (4.16) має вигляд

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$D_2\frac{C_{2,i-1}^{k+1}-2C_{2,i}^{k+1}+C_{2,i+1}^{k+1}}{h^2}+\gamma_1 C_{1,i}^{k}-\gamma_2 C_{2,i}^{k+1}=\sigma\frac{C_{2,i}^{k+1}-C_{2,i}^{k}}{\tau},$$

$$i=\overline{1,n-1},\quad k=\overline{0,K-1}, \qquad (4.18)$$

$$C_{2,i}^{\ 0}=\widetilde{C}_{2,i}^{0},\qquad C_{2,0}^{k+1}=\widetilde{C}_{2}^{1,k+1},\qquad C_{2,n}^{k+1}=\chi_2\widetilde{C}_{2,n-1}^{k+1}+\overline{\mu}_2,$$

$$i=\overline{1,n-1},\quad k=\overline{0,K-1},$$

де $\chi_2=0$, $\overline{\mu}_2=\widetilde{C}_2^{2,k+1}$ у випадку задання граничних умов 1-го роду і $\chi_2=1$, $\overline{\mu}_2=0$ - у випадку задання граничної умови 2-го роду.

Представимо різницеву схему (4.17) в прогоночному вигляді

$$a_{1,i}C_{1,i-1}^{k+1}-\overline{c}_{1,i}C_{1,i}^{k+1}+b_{1,i}C_{1,i+1}^{k+1}=-f_{1,i}^{k},\ \ i=\overline{1,n-1},\ \ k=\overline{0,K-1}, \qquad (4.19)$$

$$C_{1,\mathrm{i}}^{0}=\widetilde{C}_{1,\mathrm{i}}^{0},\quad C_{1,0}^{k+1}=\widetilde{C}_{1}^{1,k+1},\quad C_{1,n}^{k+1}=\chi_1 C_{1,n-1}^{k+1}+\overline{\mu}_1,$$

$$i=\overline{1,n-1},\quad k=\overline{0,K-1},$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

де $a_{1,i}=\dfrac{\mu_i}{h^2}-\dfrac{r_-}{h},\quad b_{1,i}=\dfrac{\mu_i}{h^2}+\dfrac{r_+}{h},\ \overline{c}_{1,i}=\dfrac{\mu_i}{h^2}+\dfrac{r_+}{h}-\dfrac{r_-}{h}+\dfrac{\gamma_1}{D_1}+\dfrac{\sigma}{D_1\tau},$

$$f_{1,i}^{k}=\frac{\sigma}{D_1\tau}C_{1,i}^{k}+\frac{\gamma_2}{D_1}C_{2,i}^{k+1},\quad i=\overline{1,n-1},\quad k=\overline{0,K-1}.$$

Прогоночний вигляд (4.18) наступний

$$a_{2,i}C_{2,i-1}^{k+1}-\overline{c}_{2,i}C_{2,i}^{k+1}+b_{2,i}C_{2,i+1}^{k}=-f_{2,i}^{k},\ \ i=\overline{1,n-1},\ \ k=\overline{0,K-1}, \qquad (4.20)$$

$$C_{2,i}^{\ 0}=\widetilde{C}_{2,i}^{0},\ \ C_{2,0}^{k+1}=\widetilde{C}_{2}^{1,k+1},\ \ C_{2,n}^{k+1}=\chi_2\widetilde{C}_{2,n-1}^{k+1}+\overline{\mu}_2,$$

$$i=\overline{1,n-1},\quad k=\overline{0,K-1},$$

Національний університет водного господарства та природокористування

де $a_{2,i} = \frac{1}{h^2}, \quad b_{2,i} = \frac{1}{h^2}, \quad \bar{c}_{2,i} = \frac{2}{h^2} + \frac{\gamma_2}{D_2} + \frac{\sigma}{D_2\tau},$

$$f_{2,i}^k = \frac{\sigma}{D_2\tau} C_{2,i}^k + \frac{\gamma_1}{D_2} C_{1,i}^k, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad k = \overline{0, K-1}.$$

Числовий розв'язок (4.19) знаходимо методом прогонки [91, 120, 164]

$$C_{1,i}^{k+1} = \alpha_{i+1}^1 C_{1,i+1}^{k+1} + \beta_{i+1}^1, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad k = \overline{0, K-1}, \qquad (4.21)$$

де $\alpha_{i+1}^1 = \frac{b_{1,i}}{\bar{c}_{1,i} - \alpha_i^1 a_{1,i}}, \quad \beta_{i+1}^1 = \frac{a_{1,i}\beta_i^1 + f_{1,i}^k}{\bar{c}_{1,i} - \alpha_i^1 a_{1,i}},$

$$i = \overline{1, n-1}, \quad k = \overline{0, K-1},$$

$$\alpha_1^1 = 0, \quad \beta_1^1 = \tilde{C}_1^{k+1}.$$

Національний університет водного господарства та природокористування

Аналогічно попередньому числовий розв'язок (4.20) знаходимо методом прогонки [91, 120, 164]

$$C_{2,i}^{k+1} = \alpha_{i+1}^2 C_{2,i+1}^{k+1} + \beta_{i+1}^2, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad k = \overline{0, K-1}, \qquad (4.22)$$

де $\alpha_{i+1}^2 = \frac{b_{2,i}}{\bar{c}_{2,i} - \alpha_i^2 a_{2,i}}, \quad \beta_{i+1}^2 = \frac{a_{2,i}\beta_i^2 + f_{2,i}^k}{\bar{c}_{2,i} - \alpha_i^2 a_{2,i}},$

$$i = \overline{1, n-1}, \quad k = \overline{0, K-1},$$

$$\alpha_1^2 = 0, \quad \beta_1^2 = \tilde{C}_1^{2,k+1}.$$

Обчислювальний алгоритм реалізуємо наступним чином. Спочатку, використовуючи (4.22), знаходимо значення $C_{2,i}^1$ на

Національний університет
водного господарства
та природокористування

першому часовому шарі $t=\tau$, причому беручи для $C_{1,i}^0$ значення концентрації з початкової умови, потім знаходимо на основі (4.21) значення $C_{1,i}^1$ на цьому ж шарі і т.д.

Побудуємо тепер обчислювальний алгоритм для другої математичної моделі, що описується крайовою задачею (4.8)-(4.14). В зв'язку з цим, поставимо у відповідність даній крайовій задачі сукупність двох крайових задач

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(D_1(c_1)\dfrac{\partial c_1}{\partial x}\right) - V(c_1)\dfrac{\partial c_1}{\partial x} - \gamma_1 c_1 + \gamma_2 c_2 = \sigma\dfrac{\partial c_1}{\partial t}, \quad x\in\Omega,\ t>0, \\ c_1(x,0)=\widetilde{C}_1^{\,0}(x), \quad c_2(x,0)=\widetilde{C}_2^{\,0}(x), \quad x\in(0,l), \\ c_1(0,t)=\widetilde{C}_1^{\,1}(t), \quad l_2 c_1(l,t)=\begin{cases} c_1(l,t)=\widetilde{C}_1^{\,2}(t), \\ \dfrac{\partial c_1(l,t)}{\partial x}=0, \end{cases} \quad 0<t<t_1; \end{cases} \tag{4.23}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(D_2(c_2)\dfrac{\partial c_2}{\partial x}\right) + \gamma_1 c_1 - \gamma_2 c_2 = \sigma\dfrac{\partial c_2}{\partial t}, \quad x\in\Omega,\ t>0, \\ c_1(x,0)=\widetilde{C}_1^{\,0}(x), \quad c_2(x,0)=\widetilde{C}_2^{\,0}(x), \quad x\in(0,l), \\ c_2(0,t)=\widetilde{C}_2^{\,1}(t), \quad l_2 c_2(l,t)=\begin{cases} c_2(l,t)=\widetilde{C}_2^{\,2}(t), \\ \dfrac{\partial c_2(l,t)}{\partial x}=0, \end{cases} \quad 0<t<t_1. \end{cases} \tag{4.24}$$

Для (4.23) також використаємо монотонну різницеву схему [44, 45].

$$\mu_{i2}^k d_{i+1}^k \frac{C_{1,i+1}^{k+1}-C_{1,i}^{k+1}}{h^2} - \mu_{i1}^k d_i^k \frac{C_{1,i}^{k+1}-C_{1,i-1}^{k+1}}{h^2} + r_{i+}^k \frac{C_{1,i+1}^{k+1}-C_{1,i}^{k+1}}{h} +$$

Національний університет водного господарства та природокористування

$$+ r_{i-}^k \frac{C_{1,i}^{k+1} - C_{1,i-1}^{k+1}}{h} + f_i^k = \sigma \frac{C_{1,i}^{k+1} - C_{1,i}^k}{\tau}, \ i = \overline{1, n-1}, \ \ k = \overline{0, K-1}, \quad (4.25)$$

$$C_{1,i}^0 = \widetilde{C}_{1,i}^0, \quad C_{1,0}^{k+1} = \widetilde{C}_1^{1,k+1}, \quad C_{1,n}^{k+1} = \chi_1 \widetilde{C}_{1,n-1}^{k+1} + \overline{\mu}_1,$$

$$i = \overline{1, n-1}, \ \ k = \overline{0, K-1},$$

де коефіцієнти визначаються таким чином:

$$\mu_{i1}^k = \frac{1}{1 + \dfrac{0{,}5h\left|r_i^k\right|}{d_i^k}}, \qquad \mu_{i2}^k = \frac{1}{1 + \dfrac{0{,}5h\left|r_i^k\right|}{d_{i+1}^k}},$$

$$d_i^k = \frac{D\left(C_{1,i}^k\right) + D\left(C_{1,i-1}^k\right)}{2}, \quad d_{i+1}^k = \frac{D\left(C_{1,i+1}^k\right) + D\left(C_{1,i}^k\right)}{2},$$

$$D_1(c_1) = D_m + \lambda \left| V(c_1) \right|,$$

$$r_{i+}^k = 0{,}5\left(V\left(C_{1,i}^k\right) + \left|V\left(C_{1,i}^k\right)\right|\right) \geq 0, \quad r_{i-}^k = 0{,}5\left(V\left(C_{1,i}^k\right) - \left|V\left(C_{1,i}^k\right)\right|\right) \leq 0,$$

$$r_i^k = r_{i+}^k + r_{i-}^k, \quad f_i^k = -\frac{\sigma}{\tau} C_{1,i}^k + \gamma_2 C_{2,i}^k, \quad i = \overline{1, n-1}, \ \ k = \overline{0, K-1}.$$

Для розвязку (4.24) використаємо неявну різницеву схему

$$d_{i+1}^k \frac{C_{2,i+1}^{k+1} - C_{2,i}^{k+1}}{h^2} - d_i^k \frac{C_{2,i}^{k+1} - C_{2,i-1}^{k+1}}{h^2} + \gamma_1 C_{1,i}^{k+1} - \gamma_2 C_{2,i}^{k+1} = \sigma \frac{C_{2,i}^{k+1} - C_{2,i}^k}{\tau},$$

$$i = \overline{1, n-1}, \ \ k = \overline{0, K-1} \quad (4.26)$$

Національний університет водного господарства та природокористування

$$C_{2,i}^0 = \widetilde{C}_{2,i}^0, \quad C_{2,0}^{k+1} = \widetilde{C}_2^{1,k+1}, \quad C_{2,n}^{k+1} = \chi_2 \widetilde{C}_{2,n-1}^{k+1} + \overline{\mu}_2,$$
$$i = \overline{1, n-1}, \quad k = \overline{0, K-1},$$

де $$d_i^k = \frac{D_2\left(C_{2,i}^k\right) + D_2\left(C_{2,i-1}^k\right)}{2}, \quad d_{i+1}^k = \frac{D_2\left(C_{2,i+1}^k\right) + D_2\left(C_{2,i}^k\right)}{2},$$
$$i = \overline{1, n-1}, \quad k = \overline{0, K-1}.$$

$\chi_2 = 0$, $\overline{\mu}_2 = \widetilde{C}_2^{2,k+1}$ у випадку задання граничних умов 1-го роду і $\chi_2 = 1$, $\overline{\mu}_2 = 0$ – у випадку задання граничної умови 2-го роду.

Запишемо різницеву схему (4.25) в прогоночному вигляді

$$a_{1,i} C_{1,i-1}^{k+1} - \overline{c}_{1,i} C_{1,i}^{k+1} + b_{1,i} C_{1,i+1}^k = -f_{1,i}^k, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad k = \overline{0, K-1}, \quad (4.27)$$

$$C_{1,0}^{k+1} = \widetilde{C}_1^{1,k+1}, \quad C_{1,n}^{k+1} = \chi_1 \widetilde{C}_{1,n-1}^{k+1} + \overline{\mu}_1, \; i = \overline{1, n-1}, \quad k = \overline{0, K-1},$$

де $$a_{1,i}^k = \frac{1}{h}\left(\frac{d_i^k \mu_{i1}^k}{h} - r_{i-}^k\right), \quad b_{1,i}^k = \frac{1}{h}\left(\frac{d_{i+1}^k \mu_{i2}^k}{h} + r_{i+}^k\right),$$

$$\overline{c}_{1,i}^k = \frac{1}{h^2}\left(d_i^k \mu_{i1}^k + d_{i+1}^k \mu_{i2}^k\right) + \frac{\left|r_i^k\right|}{h} + \frac{\sigma}{\tau} + \gamma_1, \quad f_{1,i}^k = -\frac{\sigma}{\tau} C_{1,i}^k + \gamma_2 C_{2,i}^k,$$

$$C_{1,0}^{k+1} = \widetilde{C}_1^{1,k+1}, \quad C_{1,n}^{k+1} = \chi_1 \widetilde{C}_{1,n-1}^{k+1} + \overline{\mu}_1, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad k = \overline{0, K-1}.$$

$\chi_1 = 0$, $\overline{\mu}_1 = \widetilde{C}_2^{k+1}$ у випадку, коли диференціальний оператор l_2 задає на фільтрі граничну умову 1-го роду і $\chi_1 = 1$, $\overline{\mu}_1 = 0$ – у випадку задання граничної умови 2-го роду.

Запишемо різницеву схему (4.26) в прогоночному вигляді

$$a_{2,i} C_{2,i-1}^{k+1} - \overline{c}_{2,i} C_{2,i}^{k+1} + b_{2,i} C_{2,i+1}^k = -f_{2,i}^k, \; i = \overline{1, n-1}, \quad k = \overline{0, K-1}, \quad (4.28)$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

де $a_{2,i}^k = \frac{d_i^k}{h^2}, \quad b_{2,i}^k = \frac{d_{i+1}^k}{h^2}, \quad \overline{c}_{2,i}^k = \frac{1}{h^2}\left(d_i^k + d_{i+1}^k\right) + \frac{\sigma}{\tau}. + \gamma_2,$

$$f_{2,i} = \frac{\sigma}{\tau} C_{2,i}^k + \gamma_1 C_{1,i}^{k+1},$$

$$C_{2,i}^0 = \widetilde{C}_{2,i}^0, \quad C_{2,0}^{k+1} = \widetilde{C}_2^{1,k+1}, \quad C_{2,n}^{k+1} = \chi_2 \widetilde{C}_{2,n-1}^{k+1} + \overline{\mu}_2,$$

$$i = \overline{1, n-1}, \quad k = \overline{0, K-1}.$$

Числовий розв'язок (4.27) знаходимо методом прогонки [91, 120, 164]

$$C_{1,i}^{k+1} = \alpha_{i+1}^1 C_{1,i+1}^{k+1} + \beta_{i+1}^1, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad k = \overline{0, K-1}, \qquad (4.29)$$

де $\alpha_{i+1}^1 = \frac{b_{1,i}}{\overline{c}_{1,i} - \alpha_i^1 a_{1,i}}, \; \beta_{i+1}^1 = \frac{a_{1,i}\beta_i^1 + f_{1,i}^k}{\overline{c}_{1,i} - \alpha_i^1 a_{1,i}}, \; i = \overline{1, n-1}, \quad k = \overline{0, K-1},$

$$\alpha_1^1 = 0, \quad \beta_1^1 = \widetilde{C}_1^{1,k+1}.$$

Розв′язок (4.28) знаходимо методом прогонки

$$C_{2,i}^{k+1} = \alpha_{i+1}^2 C_{2,i+1}^{k+1} + \beta_{i+1}^2, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad k = \overline{0, K-1}, \quad (4.30)$$

де $\alpha_{i+1}^2 = \frac{b_{2,i}}{\overline{c}_{2,i} - \alpha_i^2 a_{2,i}}, \; \beta_{i+1}^2 = \frac{a_{2,i}\beta_i^2 + f_{2,i}^k}{\overline{c}_{2,i} - \alpha_i^2 a_{2,i}}, \; i = \overline{1, n-1}, \quad k = \overline{0, K-1},$

$$\alpha_1^2 = 0, \quad \beta_1^2 = \widetilde{C}_1^{2,k+1}.$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

4.1.4. Результати числових експериментів та їх аналіз

Розроблені алгоритми числових розв'язків поставлених задач програмно реалізовано з використанням сучасних технологій програмування, зокрема в середовищі візуального програмування Delphi 7.0.

В якості конкретного прикладу спрогнозуємо зміну концентрації радіонуклідів через 10 років з такими вхідними даними:

$$l = 20\ м,\ H_1 = 1\ м,\ H_2 = 0\ м,\ k = 0.005\ \frac{м}{доба},$$

$$\nu = 2.8 \cdot 10^{-5}\ {}^{м^5}\!/_{кг \cdot доба},\ \sigma = 0.4,\ \tau = 30\ діб,$$

$$D_1 = 0.02\ \frac{м^2}{доба},\ D_2 = 0.01\ \frac{м^2}{доба},\ \gamma_1 = \gamma_2 = 0.0065,$$

$$\widetilde{C}_1^{\,0} = \widetilde{C}_2^{\,0} = 0\ \frac{кг}{м^3},\quad \widetilde{C}_1^{\,1} = \begin{cases} 150\ {}^{кг}\!/_{м^3}, \\ 26t^2e^{-0.3t}\ {}^{кг}\!/_{м^3}, \end{cases} \widetilde{C}_2^{\,1} = \begin{cases} 20\ {}^{кг}\!/_{м^3}, \\ t^3e^{-0.3t}\ {}^{кг}\!/_{м^3}, \end{cases}$$

$$\widetilde{C}_1^{\,2} = \begin{cases} 0\ {}^{кг}\!/_{м^3}, \\ \dfrac{\partial c_1(l,t)}{\partial x} = 0, \end{cases} \widetilde{C}_2^{\,2} = \begin{cases} 0\ {}^{кг}\!/_{м^3}, \\ \dfrac{\partial c_2(l,t)}{\partial x} = 0. \end{cases}$$

Графіки розподілів швидкостей фільтрації та концентрацій радіонуклідів при заданні на поверхні грунту та на фільтрі-вловлювачі граничних умов 1-го роду відображено на рис. 4.2-4.4. Аналогічні графіки при заданні на поверхні грунту граничних умов 1-го роду, а на фільтрі-вловлювачі - граничних умов 2-го роду зображено на рис. 4.5-4.7. На рис. 4.8-4.10 показані відповідні сімейства графіків при заданні на поверхні грунту концентрацій за експоненціальними законами, а на фільтрі-вловлювачі задані граничні умови 2-го роду. Також було проведено ряд експериментів для різних параметрів фільтрації та масопереносу.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

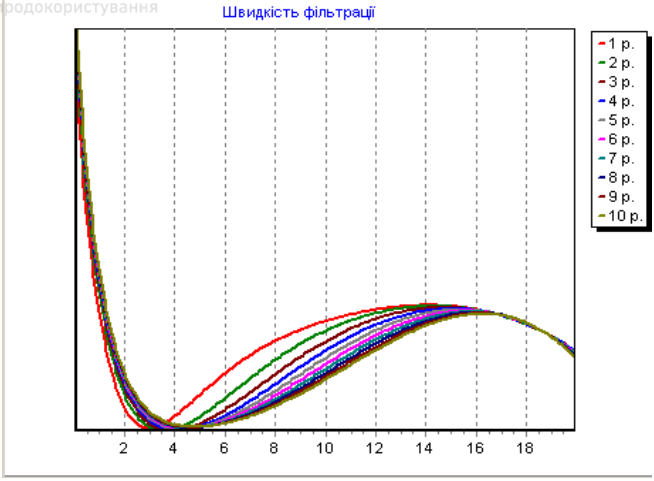


Рис. 4.2. Графіки швидкостей фільтрації при заданні на поверхні грунту та на фільтрі-вловлювачі граничних умов 1-го роду

Національний університет
водного господарства
та природокористування

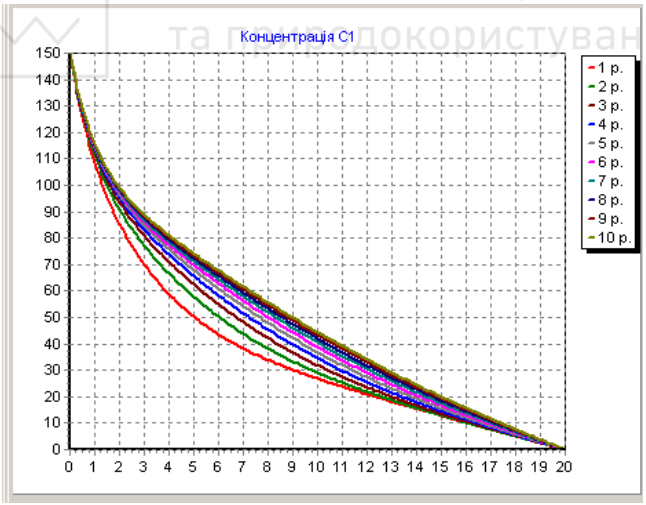


Рис. 4.3. Графіки розподілу концентрації C_1 при заданні на поверхні грунту та на фільтрі-вловлювачі граничних умов 1-го роду

Національний університет
водного господарства
та природокористування

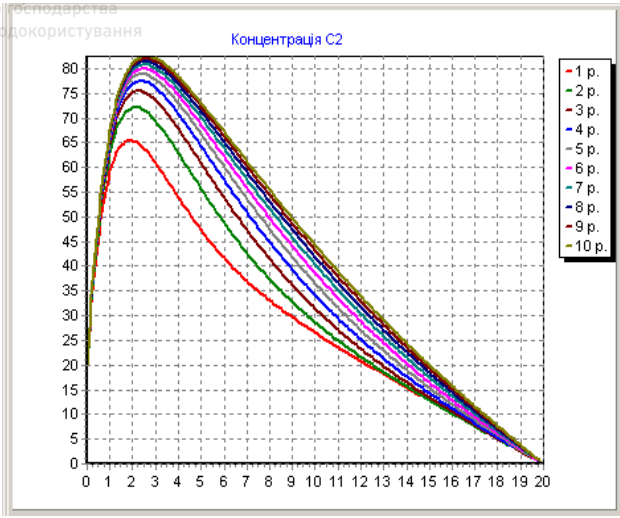


Рис. 4.4. Графіки розподілу концентрації C_2 при заданні на поверхні грунту та на фільтрі-вловлювачі граничних умов 1-го роду

Національний університет
водного господарства
та природокористування

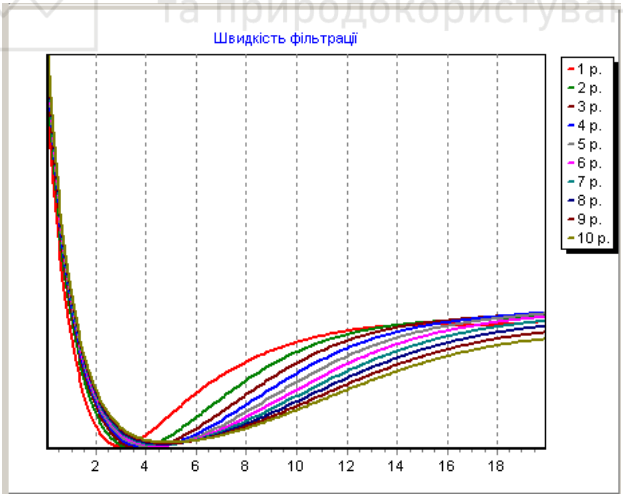


Рис. 4.5. Графіки швидкостей фільтрації при заданні на поверхні грунту граничних умов 1-го роду, а на фільтрі-вловлювачі – граничних умов 2-го роду

Національний університет
водного господарства
та природокористування

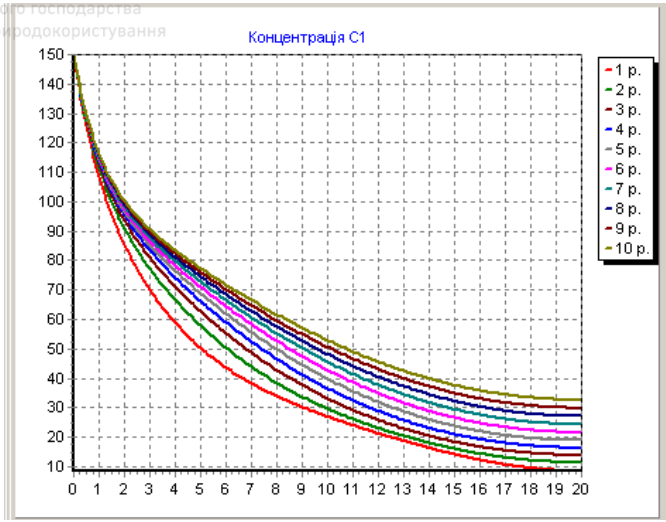


Рис. 4.6. Графіки розподілу концентрації C_1 при заданні на поверхні грунту граничних умов 1-го роду, а на фільтрі-вловлювачі – граничних умов 2-го роду

Національний університет
водного господарства
та природокористування

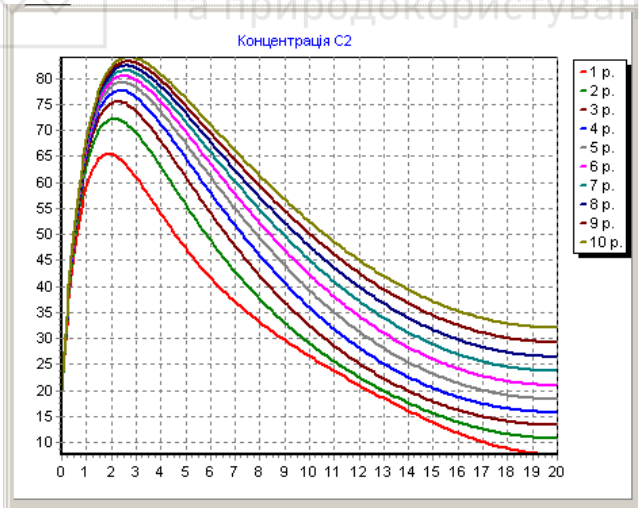


Рис. 4.7. Графіки розподілу концентрації C_2 при заданні на поверхні грунту граничних умов 1-го роду, а на фільтрі-вловлювачі – граничних умов 2-го роду

Національний університет
водного господарства
та природокористування

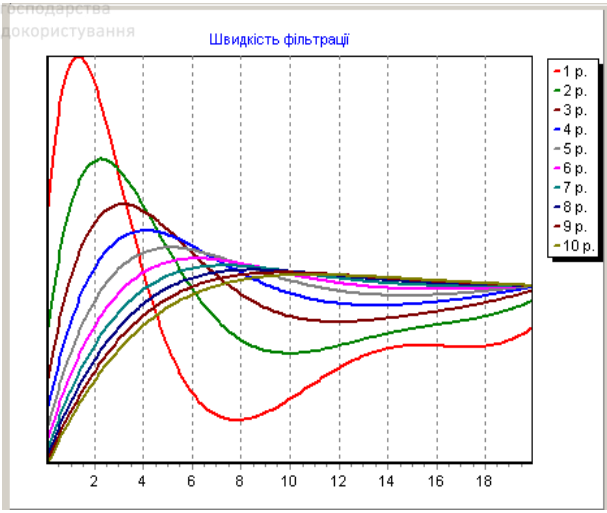


Рис. 4.8. Графіки швидкостей фільтрації при заданні граничних умов

$$c_1(0,t)=\widetilde{C}_1^1=26t^2e^{-0.3t}\ {кг}/{м^3}\ ,\ c_2(0,t)=\widetilde{C}_2^1=t^3e^{-0.3t}\ {кг}/{м^3}\ ,\ \frac{\partial c_1(l,t)}{\partial x}=\frac{\partial c_2(l,t)}{\partial x}=0$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

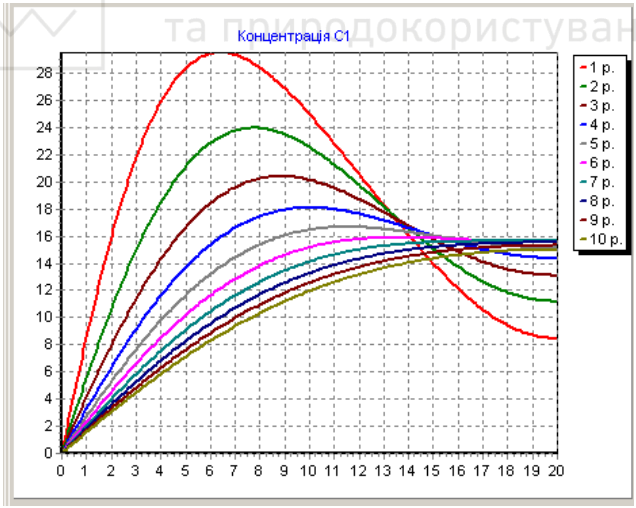


Рис. 4.9. Графіки розподілу концентрації C_1 при заданні граничних умов

$$c_1(0,t)=\widetilde{C}_1^1=26t^2e^{-0.3t}\ {кг}/{м^3}\ ,\quad \frac{\partial c_1(l,t)}{\partial x}=0$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

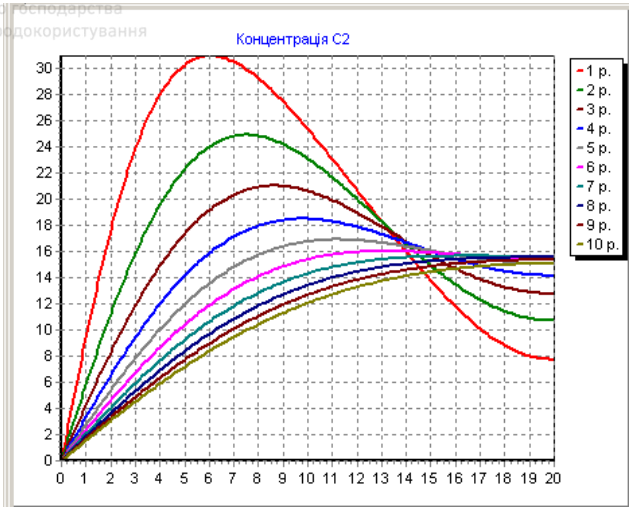


Рис. 4.10. Графіки розподілу концентрації C_2 при заданні граничних умов

$$c_2(0,t) = \widetilde{C}_2^1 = t^3 e^{-0.3t}\ {кг}/{м^3}\ ,\quad \frac{\partial c_2(l,t)}{\partial x} = 0$$

Як показали результати числових експериментів при математичному моделюванні процесу масопереносу речовин потрібно враховувати залежність параметрів фільтраційного потоку від його фізико-хімічних властивостей та властивостей пористого середовища, оскільки це суттєво впливає на процес масопереносу радіонуклідів у грунтах. Зокрема:

– при різних значеннях коефіцієнта фільтрації k, швидкість фільтрації змінюється, а саме: при збільшенні k – швидкість зростає;

– при збільшенні пористості ґрунту концентрації c_1 і c_2 інтенсивніше перерозподіляються по області фільтрації;

– значення концентрацій c_1 і c_2 прямо-пропорційно залежить від коефіцієнтів масообміну.

В результаті проведення ряду числових експериментів і проаналізувавши вищенаведені графіки можна зробити наступні висновки:

– розподіли концентрацій c_1 і c_2 з часом по глибині шару ґрунту суттєво відрізняються, а саме – концентрація c_1 зменшується значно швидше в порівнянні з концентрацією c_2;

Національний університет
водного господарства

– родючий шар ґрунту практично очищується від радіонуклідів в межах допустимих норм та стає придатним до використання приблизно через два роки після початку процесу забруднення при заданих вхідних даних.

Аналіз існуючих експериментальних даних, їх математична обробка показує, що для різних ґрунтів міграція радіонуклідів проходить по-різному. Так, наприклад, для торфових ґрунтів міграція радіонуклідів спостерігається за 1-2 метри, для інших ґрунтів міграція радіонуклідів відбувається таким чином, що локалізація концентрації відбувається біля лівої межі їх поширення.

В більшості випадків для кількісного опису процесів переносу радіонуклідів можна вважати, що в кожній довільно вибраній малій частині ґрунту завжди міститься макроскопічне число, крім частинок, які складають його базові компоненти (склет і поровий розчин), радіоактивних частинок одного сорту у трьох фізично різних станах – порому розчині, адсорбованій на поверхні скелету воді і об'ємі скелету. При цьому коефіцієнти дифузії частинок у поровому розчині є на декілька порядків більші, ніж у зв'язаних шарах води, а в об'ємі скелету вони практично не дифундують. Зазначимо, що коли кількість частинок, які знаходяться в слабо зв'язній частині води, є значно більшою, ніж у поровому розчині, то дифузійні потоки у конвективно-рухомому розчині і адсорбованій воді будуть співмірними.

Аналіз динаміки зміни концентрації різних форм радіонуклідів показав, що забруднення відбувалось в різні періоди циклу досліджень у всіх мезо-кайнозойських водоносних горизонтах, при цьому на поверхні спостерігається зміна вмісту домінуючого компоненту та типу забруднення. Наявність джерел надходження радіонуклідів в підземні води створило деякі складнощі при виясненні особливостей міграції. На основі результатів вивчення динаміки зміни концентрації різних форм радіонуклідів, їх максимальна концентрація розподілена на відрізках із різною інтенсивністю забруднення підземних вод**.**

На основі узагальнення та аналізу матеріалів по стану підземних вод і навколишнього середовища на досліджуваній ділянці, а також динаміки зміни хімічного стану підземних вод було вивчено процес

Національний університет водного господарства та природокористування

міграції поширення забруднень та проведена оцінка зміни концентрації.

4.2. Математичне моделювання вертикальної міграції радіонуклідів в горизонтальному шарі грунту в неізотермічних умовах

4.2.1. Постановка задачі та її математична модель

Розглянемо задачу вертикальної міграції радіонуклідів (наприклад, ^{90}Sr (стронцій-90) або ^{137}Cs (цезій-137)) в ґрунтовому масиві великої протяжності в неізотермічних умовах шляхом переносу їх фільтраційним потоком зі швидкістю $\vec{V}$ та під впливом конвективної дифузії (рис. 4.1) [143].

Фільтруючий розчин будемо розглядати як сольовий розчин з коефіцієнтом фільтрації $k = k(c_1(x,t), T(x,t))$. Тоді математичну модель даної задачі можна описати наступною крайовою задачею [143]:

Національний університет водного господарства та природокористування

$$\frac{\partial}{\partial x}(D_1(c_1,T)\frac{\partial c_1}{\partial x}) - V(c_1,T)\frac{\partial c_1}{\partial x} - \gamma_1 c_1 + \gamma_2 c_2 + D_T\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \sigma\frac{\partial c_1}{\partial t},$$
$$x \in \Omega,\ t > 0, \tag{4.31}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(D_2(c_2)\frac{\partial c_2}{\partial x}) + \gamma_1 c_1 - \gamma_2 c_2 + D_T\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \sigma\frac{\partial c_2}{\partial t},\ x \in \Omega,\ t > 0, \tag{4.32}$$

$$\lambda\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - V(c_1,T)c_p\frac{\partial T}{\partial x} = c_n\frac{\partial T}{\partial t}, \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \tag{4.33}$$

$$V(c_1,T) = -k(c_1,T)\frac{\partial h}{\partial x} + \nu(c_1)\frac{\partial c_1}{\partial x} + \mu\frac{\partial T}{\partial x}, \quad \frac{\partial V}{\partial x} = 0, \quad x \in \Omega, \tag{4.34}$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$c_1(x,0) = \widetilde{C}_1^0(x),\ c_2(x,0) = \widetilde{C}_2^0(x)\ ,\ x \in (0,l)\,, \qquad (4.35)$$

$$c_1(0,t) = \widetilde{C}_1^1(t),\ \ c_2(0,t) = \widetilde{C}_2^1(t),\ 0 < t < t_1\,, \qquad (4.36)$$

$$h\big|_{x=0} = H_1,\ h\big|_{x=l} = H_2\,,\quad T(x,0) = \widetilde{T}_0(x),\quad x \in (0,l)\,, \qquad (4.37)$$

$$T(0,t) = \widetilde{T}_1(t),\quad T(l,t) = \widetilde{T}_2(t)\,,\ 0 < t < t_1\,, \qquad (4.38)$$

$$l_2 c_1(l,t) = \begin{cases} c_1(l,t) = \widetilde{C}_1^{\,2}(t), \\ \dfrac{\partial c_1(l,t)}{\partial x} \end{cases} = 0\,,\ l_2 c_2(l,t) = \begin{cases} c_2(l,t) = \widetilde{C}_2^{\,2}(t), \\ \dfrac{\partial c_2(l,t)}{\partial x} \end{cases} = 0\,,$$

$$0 < t < t_1\,. \qquad (4.39)$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Тут $k(c_1(x,t), T(x,t))$ – коефіцієнт фільтрації сольового розчину, залежність якого від концентрації сольового розчину в фільтраційному потоці встановлено експериментально в [63] та від температури в [66]; $D_1(c_1,T) = D_{1m} + \lambda_D\,|V(c_1,T)|$ – коефіцієнт конвективної дифузії радіонуклідів, що знаходяться в фільтраційному потоці, де D_{1m} – коефіцієнт молекулярної дифузії, λ_D – параметр гідродинамічної дисперсії; $D_2(c_2)$ – коефіцієнт молекулярної дифузії радіонуклідів, що знаходяться у воді, яка зв'язана зі скелетом ґрунту; T – температура; c_p – питома теплоємність рідкої фази; c_n – питома теплоємність твердої фази; D_T – коефіцієнт термодифузії; $V(c_1,T)$ – швидкість фільтраційного потоку мігранта; λ – коефіцієнт теплопровідності; μ – коефіцієнт термічного осмосу.

На основі робіт [19, 20, 116, 180, 195, 196, 205, 209] можна стверджувати, що дана задача поставлена коректно та існує її класичний розв'язок [91, 108, 119, 172].

Національний університет
водного господарства
та природокористування

4.2.2. Обчислювальний алгоритм розв'язку задачі

Побудуємо обчислювальний алгоритм розв'язку крайової задачі (4.31)-(4.39). Для отримання числового розв'язку задачі, поставимо їй у відповідність сукупність двох крайових задач

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(D_1(c_1,T)\dfrac{\partial c_1}{\partial x}\right) - V(c_1,T)\dfrac{\partial c_1}{\partial x} - \gamma_1 c_1 + \gamma_2 c_2 + D_T\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \sigma\dfrac{\partial c_1}{\partial t}, \\ x\in\Omega,\ t>0, \\ c_1(x,0) = \widetilde{C}_1^{\,0}(x),\ x\in(0,l), \quad c_1(0,t) = \widetilde{C}_1^{\,1}(t), 0<t<t_1, \\ l_2 c_1(l,t) = \begin{cases} c_1(l,t) = \widetilde{C}_1^{\,2}(t), \\ \dfrac{\partial c_1(l,t)}{\partial x} = 0, \end{cases} \quad 0<t<t_1; \end{cases} \tag{4.40}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(D_2(c_2)\dfrac{\partial c_2}{\partial x}\right) + \gamma_1 c_1 - \gamma_2 c_2 + D_T\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \sigma\dfrac{\partial c_2}{\partial t},\ x\in\Omega,\ t>0, \\ c_2(x,0) = \widetilde{C}_2^{\,0}(x),\ x\in(0,l), \quad c_2(0,t) = \widetilde{C}_2^{\,1}(t),\ 0<t<t_1, \\ l_2 c_2(l,t) = \begin{cases} c_2(l,t) = \widetilde{C}_2^{\,2}(t), \\ \dfrac{\partial c_2(l,t)}{\partial x} = 0,\ 0<t<t_1. \end{cases} \end{cases} \tag{4.41}$$

Спочатку розв'яжемо задачу фільтрації (4.42), а потім задачу теплопереносу (4.43).

$$\begin{cases} V(c_1,T) = -k(c_1,T)\dfrac{\partial h}{\partial x} + \nu(c_1)\dfrac{\partial c_1}{\partial x} + \mu\dfrac{\partial T}{\partial x},\ x\in\Omega, \\ \dfrac{\partial V}{\partial x} = 0,\ h\big|_{x=0} = H_1,\ h\big|_{x=l} = H_2. \end{cases} \tag{4.42}$$

$$\begin{cases} \lambda\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} - Vc_p\dfrac{\partial T}{\partial x} = c_n\dfrac{\partial T}{\partial t}, \quad x\in\Omega,\ t>0, \\ T(x,0) = \widetilde{T}_0(x), \quad x\in(0,l), \\ T(0,t) = \widetilde{T}_1(t), \quad T(l,t) = \widetilde{T}_2(t),\ 0<t<t_1. \end{cases} \tag{4.43}$$

Національний університет водного господарства та природокористування

Апроксимуючи задачу фільтрації (4.42), отримаємо формулу для знаходження швидкості фільтрації:

$$V_i^k = -k\frac{H_2 - H_1}{l} + \nu\frac{c_{i+1}^k - c_{i-1}^k}{2h} + \mu\frac{T_{i+1}^k - T_{i-1}^k}{h}.$$

В результаті дискретизації (4.43) отримаємо монотонну різницеву схему

$$\chi_i\frac{T_{i-1}^{k+1} - 2T_i^{k+1} + T_{i+1}^{k+1}}{h^2} + r_+\frac{T_{i+1}^{k+1} - T_i^{k+1}}{h} + r_-\frac{T_i^{k+1} - T_{i-1}^{k+1}}{h} = \widetilde{g}\frac{T_i^{k+1} - T_i^k}{\tau},$$
$$i = \overline{1, n-1}, \quad k = \overline{0, K-1}, \qquad (4.44)$$

де $\chi_i = \dfrac{1}{1 + \dfrac{hV_i c_p}{2\lambda}} = \dfrac{\lambda}{\lambda + 0.5hV_i c_p}, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad k = \overline{0, K-1},$

$r = \dfrac{-V_i c_p}{\lambda} = r_+ + r_-, \; r_+ = \dfrac{1}{2}(r + |r|) \geq 0, \; r_- = \dfrac{1}{2}(r - |r|) \leq 0, \; \widetilde{g} = \dfrac{c_n}{\lambda}.$

Національний університет водного господарства та природокористування

Числовий розв'язок задачі теплопереносу знаходимо методом прогонки [164]. Крайову задачу (4.40) розв'яжемо з використанням нової монотонної різницевої схеми, запропонованої Власюком А. П. [44]. В результаті дискретизації отримаємо

$$\mu_{i2}^k d_{i+1}^k\frac{C_{1,i+1}^{k+1} - C_{1,i}^{k+1}}{h^2} - \mu_{i1}^k d_i^k\frac{C_{1,i}^{k+1} - C_{1,i-1}^{k+1}}{h^2} + r_{i+}^k\frac{C_{1,i+1}^{k+1} - C_{1,i}^{k+1}}{h} + r_{i-}^k\frac{C_{1,i}^{k+1} - C_{1,i-1}^{k+1}}{h} -$$
$$-\gamma_1 C_{1,i}^{k+1} + \gamma_2 C_{2,i}^k + D_T\frac{T_{i-1}^{k+1} - 2T_i^{k+1} + T_{i+1}^{k+1}}{h^2} = \sigma\frac{C_{1,i}^{k+1} - C_{1,i}^k}{\tau}, i = \overline{1, n-1}, k = \overline{0, K-1},$$
$$C_{1,i}^0 = \widetilde{C}_{1,i}^0, \; C_{1,0}^{k+1} = \widetilde{C}_1^{1\,k+1}, \; C_{1,n}^{k+1} = \chi_1 C_{1,n-1}^{k+1} + \overline{\mu}, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad k = \overline{0, K-1}, \qquad (4.45)$$

де $\chi_1 = 0, \; \overline{\mu}_1 = \widetilde{C}_1^{2,k+1}$ – у випадку, коли диференціальний оператор l_2 задає на фільтрі граничну умову 1-го роду, і $\chi_1 = 1, \; \overline{\mu}_1 = 0$ – у

Національний університет водного господарства та природокористування

випадку задання граничної умови 2-го роду. Тут введені наступні позначення:

$$\mu_{i1}^k = \frac{1}{1+\dfrac{0{,}5h\,|\,r_i^k\,|}{d_i^k}},\quad \mu_{i2}^k = \frac{1}{1+\dfrac{0{,}5h\,|\,r_i^k\,|}{d_{i+1}^k}},$$

$$D_1(c_1,T) = D_m + \lambda_D\,|\,V(c_1,T)\,|,$$

$$d_i^k = \frac{D_1(c_{1,i}^k,T_i^k)+D_1(c_{1,i-1}^k,T_i^k)}{2},\quad d_{i+1}^k = \frac{D_1(c_{1,i+1}^k,T_i^k)+D_1(c_{1,i}^k,T_i^k)}{2},$$

$$r_i^k = r_{i+}^k + r_{i-}^k,\quad r_{i+}^k = 0{,}5(V(c_{1,i}^k,T_i^k)+|\,V(c_{1,i}^k,T_i^k)\,|) \ge 0,$$

$$r_{i-}^k = 0{,}5(V(c_{1,i}^k,T_i^k)-|\,V(c_{1,i}^k,T_i^k)\,|) \le 0,\ \ i=\overline{1,n-1},\ \ k=\overline{0,K-1}.$$

Національний університет водного господарства та природокористування

Для крайової задачі (4.41) використаємо неявну різницеву схему, яка має вигляд

$$d_{i+1}^k\frac{C_{2,i+1}^{k+1}-C_{2,i}^{k+1}}{h^2} - d_i^k\frac{C_{2,i}^{k+1}-C_{2,i-1}^{k+1}}{h^2} + \gamma_1 C_{1,i}^{k+1} - \gamma_2 C_{2,i}^{k+1} +$$

$$+ D_T\frac{T_{i-1}^{k+1}-2T_i^{k+1}+T_{i+1}^{k+1}}{h^2} = \sigma\frac{C_{2,i}^{k+1}-C_{2,i}^k}{\tau},\ i=\overline{1,n-1},\ \ k=\overline{0,K-1}. \tag{4.46}$$

$$C_{2,i}^{\ 0} = \widetilde{C}_{2,i}^0,\ C_{2,0}^{k+1} = \widetilde{C}_2^{1,k+1},\ C_{2,n}^{k+1} = \chi_2\widetilde{C}_{2,n-1}^{k+1} + \overline{\mu}_2,\ i=\overline{1,n-1},\ k=\overline{0,K-1}.$$

де $\chi_2 = 0,\ \ \overline{\mu}_2 = \widetilde{C}_2^{2,k+1}$ – у випадку задання граничної умови 1-го роду, і $\chi_2 = 1,\ \ \overline{\mu}_2 = 0$ – у випадку задання граничної умови 2-го роду. Тут введені наступні позначення:

$$d_i^k = \frac{D_2(c_{2,i}^k,T_i^k)+D_2(c_{2,i-1}^k,T_i^k)}{2},\quad d_{i+1}^k = \frac{D_2(c_{2,i+1}^k,T_i^k)+D_2(c_{2,i}^k,T_i^k)}{2}.$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Прогоночний вигляд (4.45) наступний:

$$a_{1,i}C_{1,i-1}^{k+1} - \bar{c}_{1,i}C_{1,i}^{k+1} + b_{1,i}C_{1,i+1}^{k+1} = -f_{1,i}^{k},\ i = \overline{1,n-1},\quad k = \overline{0,K-1}. \quad (4.47)$$

$$C_{1,\mathrm{i}}^{0} = \widetilde{C}_{1,\mathrm{i}}^{0},\ C_{1,0}^{k+1} = \widetilde{C}_{1}^{1,k+1},\ C_{1,n}^{k+1} = \chi_1 C_{1,n-1}^{k+1} + \bar{\mu},\ i = \overline{1,n-1},\quad k = \overline{0,K-1}.$$

де $$a_{1,i}^{k} = \frac{1}{h}\left(\frac{d_i^k \mu_{i1}^k}{h} - r_{i-}^k\right),\quad b_{1,i}^{k} = \frac{1}{h}\left(\frac{d_{i+1}^k \mu_{i2}^k}{h} + r_{i+}^k\right),$$

$$\bar{c}_{1,i}^{k} = \frac{1}{h^2}\left(d_i^k \mu_{i1}^k + d_{i+1}^k \mu_{i2}^k\right) + \frac{|\, r_i^k \,|}{h} + \frac{\sigma}{\tau} + \gamma_1,$$

$$f_{1,i}^{k} = \frac{\sigma}{\tau}C_{1,i}^{k} + \gamma_2 C_{2,i}^{k} + \frac{D_T}{h^2}(T_{i-1}^{k+1} - 2T_i^{k+1} + T_{i+1}^{k+1}),\ i = \overline{1,n-1},\quad k = \overline{0,K-1}.$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Прогоночний вигляд (4.46) наступний:

$$a_{2,i}C_{2,i-1}^{k+1} - \bar{c}_{2,i}C_{2,i}^{k+1} + b_{2,i}C_{2,i+1}^{k+1} = -f_{2,i}^{k},\quad i = \overline{1,n-1},\quad k = \overline{0,K-1}, \quad (4.48)$$

$$C_{2,i}^{\ 0} = \widetilde{C}_{2,i}^{0},\ C_{2,0}^{k+1} = \widetilde{C}_{2}^{1,k+1},\ C_{2,n}^{k+1} = \chi_2 \widetilde{C}_{2,n-1}^{k+1} + \bar{\mu}_2,\ i = \overline{1,n-1},\ k = \overline{0,K-1},$$

де $$a_{2,i}^{k} = \frac{d_i^k}{h^2},\quad b_{2,i}^{k} = \frac{d_{i+1}^k}{h^2},\quad \bar{c}_{2,i}^{k} = \frac{1}{h^2}\left(d_i^k + d_{i+1}^k\right) + \frac{\sigma}{\tau} + \gamma_2,$$

$$f_{2,i}^{k} = \frac{\sigma}{\tau}C_{2,i}^{k} + \gamma_1 C_{1,i}^{k+1} + \frac{D_T}{h^2}(T_{i-1}^{k+1} - 2T_i^{k+1} + T_{i+1}^{k+1}),$$
$$i = \overline{1,n-1},\ k = \overline{0,K-1}.$$

Числовий розв’язок (4.47) знаходимо методом прогонки [164]

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$C_{1,i}^{k+1} = \alpha_{i+1}^1 C_{1,i+1}^{k+1} + \beta_{i+1}^1,\ i = \overline{1, n-1},\ \ k = \overline{0, K-1}, \qquad (4.49)$$

де $$\alpha_{i+1}^1 = \frac{b_{1,i}}{\overline{c}_{1,i} - \alpha_i^1 a_{1,i}},\ \ \beta_{i+1}^1 = \frac{a_{1,i}\beta_i^1 + f_{1,i}^k}{\overline{c}_{1,i} - \alpha_i^1 a_{1,i}},$$

$$i = \overline{1, n-1},\ \ k = \overline{0, K-1},$$

$$\alpha_1^1 = 0,\ \ \beta_1^1 = \widetilde{C}_1^{1,k+1}.$$

Аналогічно попередньому, розв'язок (4.48) знаходимо методом прогонки.

Таким чином, задача вертикальної міграції радіонуклідів в ґрунтовому середовищі в неізотермічних умовах алгоритмічно розв'язана повністю.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

4.2.3. Результати числових експериментів та їх аналіз

Програмна реалізація розв'язку задачі проведена в інтегрованому середовищі візуального програмування Delphi 7.0.

На основі програмної реалізації задачі проведено значну кількість числових експериментів, що дало можливість провести аналіз отриманих результатів для різних вхідних даних та детально дослідити процеси розподілу концентрації радіонуклідів по області фільтрації в неізотермічних умовах в будь-який момент часу.

В якості конкретного прикладу спрогнозуємо зміну концентрації радіонуклідів через 10 років з такими вихідними даними:

$$\tau = 30\ діб\ ,\ l = 20\ м\ ,\ \gamma_1 = \gamma_2 = 0.0065\ ,\ \sigma = 0.4\ ,$$

$$\mu = 2.8 \cdot 10^{-6}\ м^2 / град \cdot доба\ ,\ \nu = 2.8 \cdot 10^{-5}\ м^5 / кг \cdot доба\ ,$$

$$D_T = 0.002\ кг \cdot м^2 / град \cdot доба \cdot л\ ,\ \ D_2 = 0.01\ м^2 / доба\ ,$$

$$\rho = 1100\ кг / м^3\ ,\ \ \lambda = 108\ кДж / м \cdot град \cdot доба\ ,$$

$$c_p = 4.2\ кДж / кг \cdot град\ ,\ c_n = 2137\ кДж / м^3 \cdot град\ ,\ \ H_1 = 1\ м\ ,$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$H_2 = 0\ м;\ \widetilde{T}_0 = 4^\circ C,\ \widetilde{T}_2 = 4^\circ C,\ \widetilde{C}_1^0 = 50\,{кг}/{м^3},\ \widetilde{C}_2^0 = 0\,{кг}/{м^3};$$

$$\widetilde{T}_1 = \begin{cases} 30\ ^\circ C, \\ 17 + 13\cos(\pi t/180)\ ^\circ C, \end{cases} \quad \widetilde{C}_1^1 = \begin{cases} 150\,{кг}/{м^3}, \\ 26t^2 e^{-0.3t}\,{кг}/{м^3}, \end{cases}$$

$$\widetilde{C}_2^1 = \begin{cases} 20\,{кг}/{м^3}, \\ t^3 e^{-0.3t}\,{кг}/{м^3}, \end{cases} \quad \widetilde{C}_1^2 = \begin{cases} 0\,{кг}/{м^3}, \\ \dfrac{\partial c_1(l,t)}{\partial x} = 0, \end{cases} \quad \widetilde{C}_2^2 = \begin{cases} 0\,{кг}/{м^3}, \\ \dfrac{\partial c_2(l,t)}{\partial x} = 0. \end{cases}$$

Залежність коефіцієнта фільтрації від сольового розчину взята з роботи [63], а від температури – з роботі [66]. Розглянемо порівняльні графіки розподілів концентрацій радіонуклідів по області фільтрації в ізотермічних (чорний колір) та неізотермічних умовах (червоний колір) при заданні на поверхні грунту і на фільтрі-вловлювачі різних граничних умов для концентрації. При цьому для температури задається на поверхні грунту гранична умова за формулою сезонних коливань (рис. 4.11- 4.16).

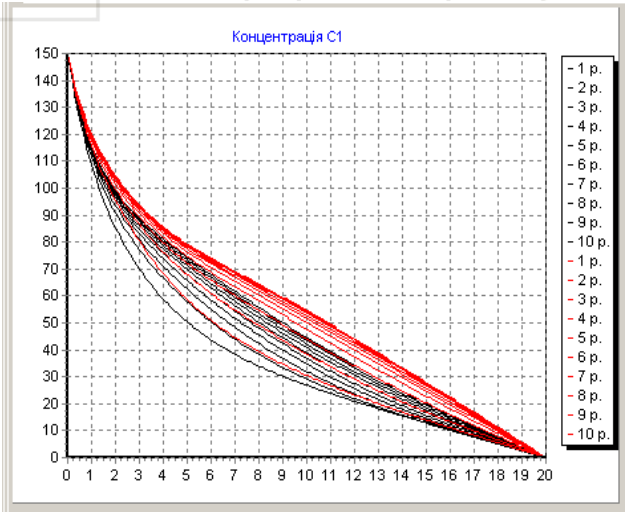


Рис. 4.11. Порівняльні графіки розподілу концентрації C_1 при заданні на поверхні грунту та на фільтрі-вловлювачі граничних умов 1-го роду

Національний університет
водного господарства
та природокористування

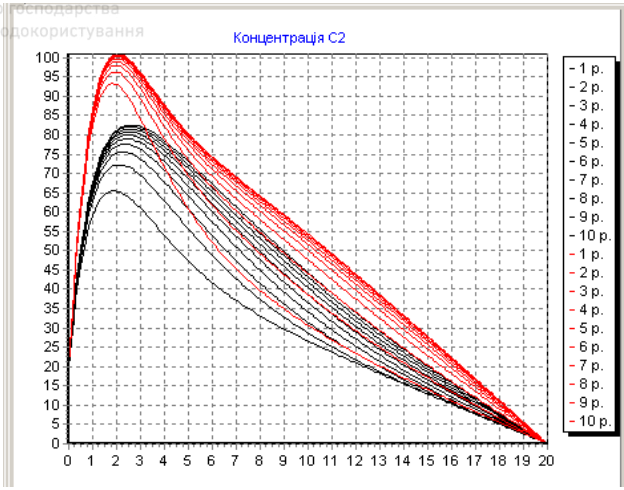


Рис. 4.12. Порівняльні графіки розподілу концентрації C_2 при заданні на поверхні грунту та на фільтрі-вловлювачі граничних умов 1-го роду

Національний університет
водного господарства
та природокористування

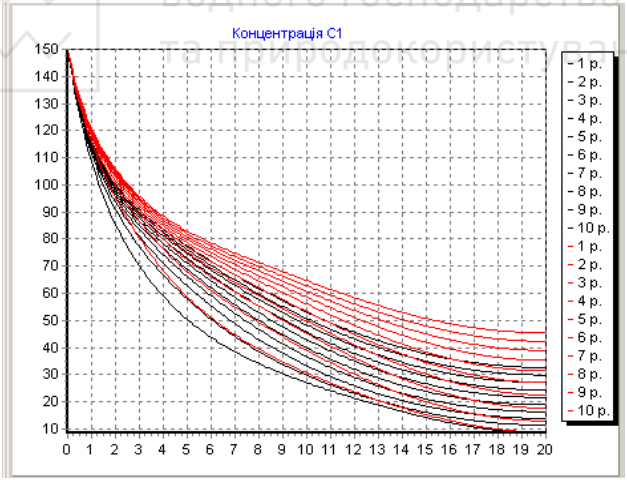


Рис.4.13. Порівняльні графіки розподілу концентрації C_1 при заданні на поверхні грунту граничних умов 1-го роду, а на фільтрі-вловлювачі - граничних умов 2-го роду

Національний університет
водного господарства
та природокористування

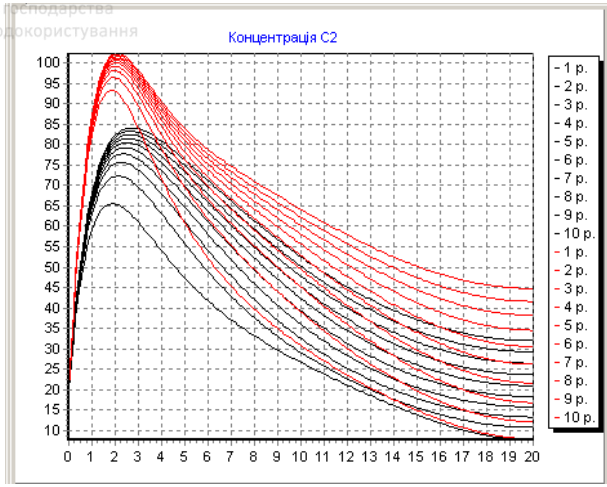


Рис.4.14. Порівняльні графіки розподілу концентрації C_2 при заданні на поверхні грунту граничних умов 1-го роду, а на фільтрі-вловлювачі - граничних умов 2-го роду

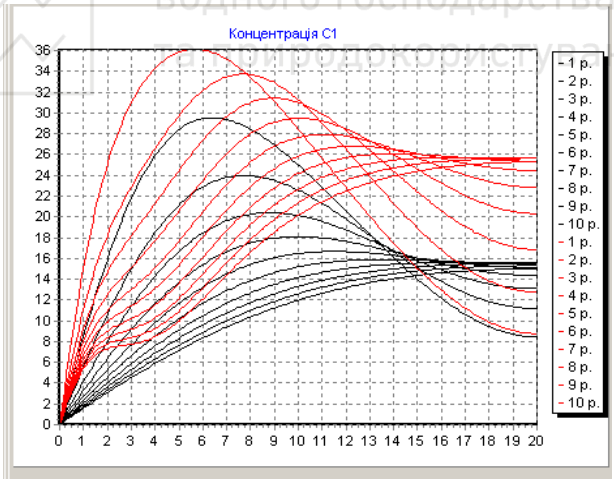


Рис. 4.15. Порівняльні графіки розподілу концентрації C_1 при заданні граничних умов $c_1(0,t) = \widetilde{C}_1^1 = 26t^2 e^{-0.3t}$ $кг/м^3$, $\dfrac{\partial c_1(l,t)}{\partial x} = 0$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

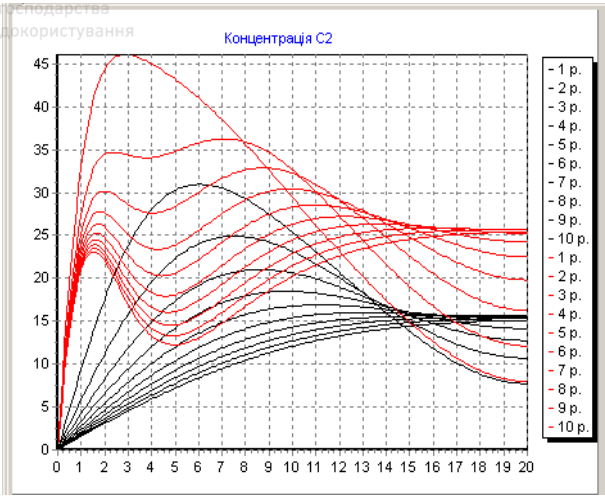


Рис. 4.16. Порівняльні графіки розподілу концентрації C_2 при заданні граничних умов $c_2(0,t) = \tilde{C}_2^1 = t^3 e^{-0.3t}$ $кг/м^3$, $\dfrac{\partial c_2(l,t)}{\partial x} = 0$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Також проведено ряд числових експериментів для часткового випадку, коли коефіцієнт фільтрації сталий. На основі цього були зроблені порівняльні висновки.

Аналізуючи отримані результати числових експериментів для математичної моделі № 1 із сталим коефіцієнтом фільтрації ($k = const$), можна зробити висновок, що процес теплопереносу несуттєво впливає на поширення радіонуклідів при заданих вхідних даних. Лише при вар'юванні певних параметрів фільтрації та масопереносу (коефіцієнта фільтрації, термодифузії) процеси міграції радіонуклідів в ізотермічних та неізотермічних умовах значно відрізняються. Так, з урахуванням неізотермічних умов, радіонукліди швидше мігрують по області фільтрації і за менший проміжок часу ґрунт стає придатним до використання.

Зробивши аналіз числових експериментів, отриманих для математичної моделі № 2, в якій коефіцієнт фільтрації залежить від концентрації сольового розчину та від температури ($k = k(c,T)$), видно, що спостерігається суттєва різниця між розподілом концентрації радіонуклідів в ґрунтовому масиві, враховуючи неізотермічні умови в порівнянні з ізотермічними. Температурне

Національний університет водного господарства та природокористування

поле значно впливає на міграцію нуклідів при врахуванні залежностей коефіцієнта фільтрації.

Крім того, можна зробити наступні висновки:

– при математичному моделюванні процесу міграції радіонуклідів потрібно враховувати залежність параметрів фільтраційного потоку від його фізико-хімічних властивостей та властивостей пористого середовища, оскільки це суттєво впливає на масоперенос. Зокрема: при різних значеннях коефіцієнта k, швидкість фільтрації змінюється, а саме - при збільшенні швидкість зростає; при збільшенні пористості ґрунту концентрації c_1 та c_2 інтенсивніше перерозподіляються по області фільтрації; значення c_1 та c_2 прямо-пропорційно залежить від коефіцієнтів масообміну;

– при врахуванні неізотермічних умов розподіл концентрації радіонуклідів по області фільтрації відбувається інтенсивніше;

– родючий шар ґрунту практично очищається від радіонуклідів в межах допустимих норм та стає придатним до використання приблизно через 2-2,5 років після забруднення при заданих вхідних даних.

Аналіз існуючих експериментальних даних, їх математична обробка показує, що для різних ґрунтів міграція радіонуклідів проходить по-різному. Так, наприклад, для торфових ґрунтів міграція радіонуклідів спостерігається за 1-2 метри, для інших ґрунтів міграція радіонуклідів відбувається таким чином, що локалізація концентрації відбувається біля лівої межі їх поширення.

Практичне значення одержаних результатів полягає у тому, що запропонована методика дозволяє обґрунтувати першочерговість проведення природоохоронних заходів та сприяє цілеспрямованому розподілу коштів. Цінність досліджень також в тому, що їх результати обґрунтовують необхідність посилення радіологічного контролю за забрудненими радіонуклідами територіями.

Національний університет водного господарства та природокористування

4.3. Математичне моделювання міграції радіонуклідів та їх локалізація за допомогою системи горизонтальних дрен-вловлювачів

4.3.1. Постановка задачі

З метою очищення радіоактивно забруднених родючих ґрунтів досить ефективним є застосування фільтрів та дрен-вловлювачів, наповнених деяким сорбуючим матеріалом, наприклад, вермикулітом, [38, 52, 53]. В зв'язку з цим, є актуальним розв'язування задачі очищення шару родючого ґрунту від радіонуклідів шляхом переносу їх фільтраційним потоком до системи горизонтальних дрен з подальшим їх вловлюванням (рис. 4.17).

Нехай маємо фронтальний переріз ґрунту, в якому на глибині b_1 розташовані дрени–вловлювачі радіусом r_1, відстань між центрами сусідніх дрен дорівнює l, відстань від центру дрени до до водонепроникного шару ґрунту становить b_2, товщина верхнього родючого шару ґрунту становить b_0. Потрібно провести числове моделювання даного процесу, в результаті якого побудувати гідродинамічну сітку фільтраційного потоку з візуалізацією її на комп'ютері, розрахувати поле швидкостей фільтрації та концентрації радіонуклідів, здійснити прогнозування про придатність родючих земель до їх подальшого використання, тобто визначити час, за який концентрація радіонуклідів в межах родючого шару товщиною b_0 стане менше гранично допустимої C_Γ^*.

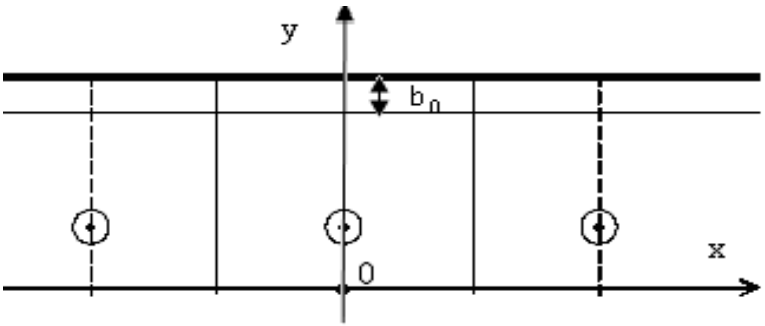


Рис. 4.17. Систематичний дренаж, наповнений фільтрами-вловлювачами

Область фільтрації G_z (рис. 4.18) обмежена двома еквіпотенціальними лініями і двома лініями течії, тобто являє собою криволінійний чотирикутник. Конкретним прикладом, що ілюструє дану постановку в загальному вигляді, є, наприклад, задача притоку рідини до системи симетрично розміщених горизонтальних дрен.

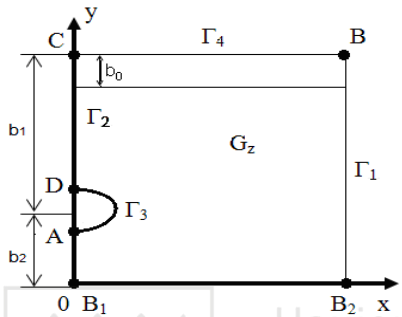


Рис. 4.18. Фрагмент фізичної області перенесення радіонуклідів

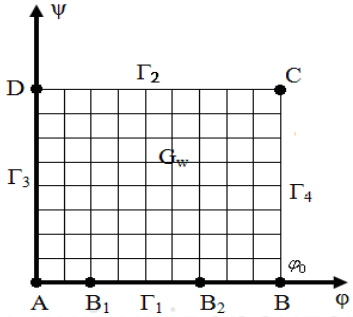


Рис. 4.19. Параметричний прямокутник в області комплексного потенціалу

В силу симетрії картини течії будемо розглядати лише фрагмент області фільтрації – область AB_1B_2BCD (див. рис. 4.18), обмежену двома еквіпотенціальними лініями і двома лініями течії, яка являє собою криволінійний чотирикутник. Вона є областю з чотирьома відміченими точками A, B, C, D, які при конформному відображенні перейдуть у вершини параметричного прямокутника G_w (область комплексного потенціалу) (див. рис. 4.19).

4.3.2. Математичні моделі задачі

Для формалізації наведеної вище постановки задачі, нижче наводяться дві математичні моделі даної задачі. В першій з них міграція радіонуклідів вивчається лише в рідкій фазі фільтруючої рідини, в другій – як у фільтраційному потоці (конвективно рухомому поровому розчині), так і у воді, яка зв'язана зі скелетом грунту.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Математична модель № 1

В даній математичній моделі фільтрація радіонуклідів вивчається лише в рідкій фазі. Тоді на основі робіт [10, 30, 69, 106, 115, 116, 134, 167], математична модель поставленої задачі в фізичній області матиме вигляд [53]

$$D\left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 c}{\partial y^2}\right)-V_x\frac{\partial c}{\partial x}-V_y\frac{\partial c}{\partial y}-\gamma\left(c-C_*\right)=\sigma\frac{\partial c}{\partial t},$$
$$(x,y)\in G_z,\ t>0, \tag{4.50}$$

$$V_x=\frac{\partial\varphi}{\partial x},\quad V_y=\frac{\partial\varphi}{\partial y},\quad \frac{\partial V_x}{\partial x}+\frac{\partial V_y}{\partial y}=0,\ (x,y)\in G_z, \tag{4.51}$$

$$\varphi\big|_{\Gamma_3}=0,\quad \varphi\big|_{\Gamma_4}=\varphi_0,\quad \left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_{\Gamma_1\cup\Gamma_2}=0\ , \tag{4.52}$$

$$c(x,y,0)=\widetilde{C}_0(x,y),\qquad (x,y)\in\overline{G}_z, \tag{4.53}$$

$$\left.\frac{\partial c}{\partial n}\right|_{\Gamma_1}=0,\qquad \left.\frac{\partial c}{\partial n}\right|_{\Gamma_2}=0, \tag{4.54}$$

$$c\big|_{\Gamma_3}=\widetilde{C}_1(x,y,t),\ (x,y)\in\Gamma_3,\ t>0\quad \text{або}\quad \left.\frac{\partial c}{\partial n}\right|_{\Gamma_3}=0, \tag{4.55}$$

$$c\big|_{\Gamma_4}=\widetilde{C}_2(x,y,t),\ (x,y)\in\Gamma_4,\ t>0\quad \text{або}\quad \left.\frac{\partial c}{\partial n}\right|_{\Gamma_4}=0. \tag{4.56}$$

Тут використані наступні позначення: *c(x,y,t)* – концентрація розчинених у воді радіонуклідів в момент часу *t*; D – коефіцієнт конвективної дифузії; σ – пористість ґрунту; γ – коефіцієнт масообміну; V_x, V_y – вектор швидкості фільтрації; C_* – концентрація граничного насичення, $\varphi=-kh$ – потенціал фільтрації, h – п'єзометричний напір, *k* – коефіцієнт фільтрації.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Однією з труднощів для розв'язання поставленої задачі є наявність криволінійної межі розглядуваної області, в якій шукається розв'язок.

Математична модель № 2

В даній математичній моделі фільтрація радіонуклідів моделюється як у фільтраційному потоці (конвективно рухомому поровому розчині), так і у воді, яка зв'язана зі скелетом грунту. Математична модель задачі у фізичній площині (x, y), в загальноприйнятих позначеннях має вигляд [38]

$$D_1\left(\frac{\partial^2 c_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 c_1}{\partial y^2}\right)-V_x\frac{\partial c_1}{\partial x}-V_y\frac{\partial c_1}{\partial y}-\gamma_1 c_1+\gamma_2 c_2=\sigma\frac{\partial c_1}{\partial t},$$

$$(x,y)\in G_z,\ t>0, \qquad (4.57)$$

$$D_2\left(\frac{\partial^2 c_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 c_2}{\partial y^2}\right)+\gamma_1 c_1-\gamma_2 c_2=\frac{\partial c_2}{\partial t},\ (x,y)\in G_z,\ t>0, \qquad (4.58)$$

$$V_x=\frac{\partial\varphi}{\partial x},\ V_y=\frac{\partial\varphi}{\partial y},\ \frac{\partial V_x}{\partial x}+\frac{\partial V_y}{\partial y}=0,\quad (x,y)\in G_z, \qquad (4.59)$$

$$c_1(x,y,0)=\widetilde{C}_0^1(x,y),\quad c_2(x,y,0)=\widetilde{C}_0^2(x,y),\ (x,y)\in\overline{G}_z, \qquad (4.60)$$

$$c_1\big|_{\Gamma_3}=\widetilde{C}_1^1(x,y,t),\ (x,y)\in\Gamma_3,\ t>0 \text{ або } \left.\frac{\partial c_1}{\partial n}\right|_{\Gamma_3}=0, \qquad (4.61)$$

$$c_2\big|_{\Gamma_3}=\widetilde{C}_1^2(x,y,t),(x,y)\in\Gamma_3,\ t>0 \text{ або } \left.\frac{\partial c_2}{\partial n}\right|_{\Gamma_3}=0, \qquad (4.62)$$

$$\left.\frac{\partial c_1}{\partial n}\right|_{\Gamma_1\cup\Gamma_2}=0,\quad \left.\frac{\partial c_2}{\partial n}\right|_{\Gamma_1\cup\Gamma_2}=0, \qquad (4.63)$$

$$c_1\big|_{\Gamma_4}=\widetilde{C}_2^1(x,y,t),\ (x,y)\in\Gamma_4,\ t>0 \text{ або } \left.\frac{\partial c_1}{\partial n}\right|_{\Gamma_4}=0, \qquad (4.64)$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$c_2\big|_{\Gamma_4} = \widetilde{C}_2^2(x,y,t)\,,\ (x,y)\in G_4,\ t>0 \quad \text{або} \quad \left.\frac{\partial c_2}{\partial n}\right|_{\Gamma_4} = 0\,, \tag{4.65}$$

$$\varphi\big|_{\Gamma_3} = \varphi_1, \quad \varphi\big|_{\Gamma_4} = \varphi_2, \quad \left.\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right|_{\Gamma_1\cup\Gamma_2} = 0\ . \tag{4.66}$$

4.3.3. Числовий розв'язок задачі

4.3.3.1. Математична модель задачі в змінних φ, ψ області комплексного потенціалу

Отримаємо числовий розв'язок даної задачі з використанням числових конформних відображень в оберненій постановці.

Перейдемо в задачі (4.50)-(4.56) до нових незалежних змінних φ, ψ та запишемо цю задачу в нових змінних. Виразимо перші та другі похідні рівнянь (4.50) в змінних φ, ψ

$$\frac{\partial c}{\partial x} = \frac{\partial c}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial c}{\partial \psi}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial x} = V_x\frac{\partial c}{\partial \varphi} - V_y\frac{\partial c}{\partial \psi}, \tag{4.67}$$

$$\frac{\partial c}{\partial y} = \frac{\partial c}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial \psi}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial y} = V_y\frac{\partial c}{\partial \varphi} + V_x\frac{\partial c}{\partial \psi}\ , \tag{4.68}$$

$$\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial c}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\left(\frac{\partial c}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial c}{\partial \psi}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial c}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) +$$

$$+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial c}{\partial \psi}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 c}{\partial \varphi^2}\cdot\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial^2 c}{\partial \psi^2}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \tag{4.69}$$

$$+2\frac{\partial^2 c}{\partial \varphi \partial \psi}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial c}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial c}{\partial \psi}\cdot\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2},$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$\frac{\partial^2 c}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial c}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\left(\frac{\partial c}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial c}{\partial \psi}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial c}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)+$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial c}{\partial \psi}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 c}{\partial \varphi^2}\cdot\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial^2 c}{\partial \psi^2}\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2+ \qquad (4.70)$$

$$+2\frac{\partial^2 c}{\partial \varphi \partial \psi}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial y}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial y}+\frac{\partial c}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial c}{\partial \psi}\cdot\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}.$$

Враховуючи (4.67)-(4.70) оператор Лапласа при конформному перетворенні прийме вигляд

$$\Delta_{xy}c=\frac{\partial^2 c}{\partial \varphi^2}\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2\right]+\frac{\partial^2 c}{\partial \psi^2}\left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2\right]+$$
$$+2\frac{\partial^2 c}{\partial \varphi \partial \psi}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial y}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial y}\right]+\frac{\partial c}{\partial \varphi}\left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right]+\frac{\partial c}{\partial \psi}\left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\right].$$

Використовши (4.51), маємо

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2=V_x^2+V_y^2=V^2(x,y)=V^2(\varphi,\psi),$$

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2=V_y^2+V_x^2=V^2(x,y)=V^2(\varphi,\psi).$$

Крім того, оскільки $\varphi=\varphi(x,y)$, $\psi=\psi(x,y)$ – спряжені гармонічні функції, то маємо

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0\,,\quad \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=0\,.$$

Так як, сімейства ліній $\varphi=const$ і $\psi=const$ ортогональні, то справедлива рівність, яка слугує так званою умовою ортогональності цих ізоліній

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial y}=0\,.$$

Тоді остаточно маємо

$$\Delta_{xy}c=V^2(\varphi,\psi)\cdot\left(\frac{\partial^2 c}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 c}{\partial\psi^2}\right).$$

Перетворивши конвективну складову в (4.50), маємо

$$V_x\frac{\partial c}{\partial x}+V_y\frac{\partial c}{\partial y}=V_x\left(V_x\frac{\partial c}{\partial\varphi}-V_y\frac{\partial c}{\partial\psi}\right)+V_y\left(V_y\frac{\partial c}{\partial\varphi}-V_y\frac{\partial c}{\partial\psi}\right)=$$
$$=V_x{}^2\frac{\partial c}{\partial\varphi}-V_xV_y\frac{\partial c}{\partial\psi}+V_y{}^2\frac{\partial c}{\partial\varphi}+V_xV_y\frac{\partial c}{\partial\psi}=V^2(\varphi,\psi)\frac{\partial c}{\partial\varphi}\,.$$

Тоді задача (4.50)-(4.56) в змінних φ,ψ області комплексного потенціалу матиме вигляд

$$\frac{\partial x}{\partial\varphi}=\frac{\partial y}{\partial\psi},\qquad \frac{\partial x}{\partial\psi}=-\frac{\partial y}{\partial\varphi},\qquad (\varphi,\psi)\in G_w,\tag{4.71}$$

$$\Gamma_1:\begin{cases}AB_1: x(\varphi,0)=0, & \varphi\in(0,\varphi_1),\\ B_1B_2: y(\varphi,0)=0, & \varphi\in(\varphi_1,\varphi_2),\\ B_2B: x(\varphi,0)=l/2, & \varphi\in(\varphi_2,\varphi_0),\end{cases}\tag{4.72}$$

$$\Gamma_2(CD): x\left(\varphi,\frac{Q}{2}\right)=0,\quad \varphi\in(0,\varphi_0)\,,\tag{4.73}$$

$$\Gamma_3(DA): x^2(0,\psi)+\left(y(0,\psi)-b_1\right)^2=r_1^2,\tag{4.74}$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$\Gamma_4(CB): y(\varphi_0,\psi)=b_0. \tag{4.75}$$

Крім того, ще додаються додаткові умови ортогональності ліній сітки її межам.

При переході до нових змінних φ,ψ рівняння конвективної дифузії прийме вигляд

$$V^2(\varphi,\psi)\left[\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(D_1\frac{\partial c}{\partial\varphi}\right)+\frac{\partial}{\partial\psi}\left(D_2\frac{\partial c}{\partial\psi}\right)-\frac{\partial c}{\partial\varphi}\right]-\gamma(c-C_*)=\sigma\frac{\partial c}{\partial t},$$
$$(\varphi,\psi)\in G_w,\ t>0 \tag{4.76}$$

або в більш простішому вигляді [134, 136]

$$V^2(\varphi,\psi)\cdot\left[D\left(\frac{\partial^2 c}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 c}{\partial\psi^2}\right)-\frac{\partial c}{\partial\varphi}\right]-\gamma(c-C_*)=\sigma\frac{\partial c}{\partial t}\ ,$$
$$(\varphi,\psi)\in G_w,\ t>0.$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Крайові умови перетворяться так:

$$\left.\frac{\partial c}{\partial n}\right|_{\Gamma_1}=\frac{\partial c(\varphi,0,t)}{\partial\psi}=0,\ \left.\frac{\partial c}{\partial n}\right|_{\Gamma_2}=\frac{\partial c\left(\varphi,\frac{Q}{2},t\right)}{\partial\psi}=0,\ \varphi\in(0,\varphi_0),\ t>0, \tag{4.77}$$

$$c\big|_{\Gamma_3}=\widetilde{C}_1(\psi,t)\ \text{ або }\ \left.\frac{\partial c}{\partial n}\right|_{\Gamma_3}=\frac{\partial c(0,\psi,t)}{\partial\varphi}=0,\ 0<\psi<\frac{Q}{2},\ t>0, \tag{4.78}$$

$$c\big|_{\Gamma_4}=\widetilde{C}_2(\psi,t)\ \text{ або }\ \left.\frac{\partial c}{\partial n}\right|_{\Gamma_4}=\frac{\partial c(\varphi_0,\psi,t)}{\partial\varphi}=0,\ 0<\psi<\frac{Q}{2},\ t>0, \tag{4.79}$$

$$c\big(x(\varphi,\psi),\ y(\varphi,\psi),0\big)=\widetilde{C}_0(\varphi,\psi).\ (\varphi,\psi)\in\overline{G}_w. \tag{4.80}$$

Національний університет водного господарства та природокористування

Таким чином, (4.71)-(4.80) є запис математичної моделі задачі в нових незалежних змінних φ,ψ, яку потрібно розв'язати в області $\Omega = G_w \times t$, де G_w – параметричний прямокутник, $t > 0$.

4.3.3.2. Алгоритм розв'язання задачі фільтрації

На основі викладеного вище випливає, що розв'язок задачі фільтрації у виділеному фрагменті зводиться до конформного відображення області виділеного фрагмента на параметричний прямокутник так, щоб чотири відмічені точки A, B, C, D перейшли при відображенні у чотири вершини параметричного прямокутника в області комплексного потенціалу G_w. Будемо проводити числову побудову такого відображення.

Використовуючи відомий алгоритм побудови числового конформного відображення криволінійного чотирикутника на параметричний прямокутник [62, 72], знайдено відповідність вузлів різницевої сітки параметричного прямокутника (φ_i, ψ_j), $\varphi_i = ih_1,\ i = \overline{0,n},\ \psi_j = jh_2,\ j = \overline{0,m}$ відповідним вузлам $x_{ij},\ y_{ij}$, $i = \overline{0,n},\ \ j = \overline{0,m}$ виділеного фрагмента області фільтрації. Тут h_1, h_2 - кроки сітки по $O\varphi$ *і* $O\psi$ відповідно.

В результаті комп'ютерної реалізації алгоритму числового конформного відображення областей, отримано два масиви $\{x_{ij},\ \ i = \overline{0,n},\ \ j = \overline{0,m}\}$, $\{y_{ij},\ \ i = \overline{0,n},\ \ j = \overline{0,m}\}$ та модуль М параметричного прямокутника, що дорівнює в даному випадку $M = \dfrac{Q}{2}$ і дає можливість визначити фільтраційну витрату рідини.

Компоненти швидкості фільтрації обчислюються за формулами (4.59). Використовуючи зв'язок між похідними прямого і оберненого відображення, отримаємо

$$V_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{J} \cdot \frac{\partial x}{\partial \varphi},\ \ V_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{1}{J} \cdot \frac{\partial y}{\partial \varphi}, \qquad (4.81)$$

Національний університет водного господарства та природокористування

де $J = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \psi} - \frac{\partial x}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \varphi}$ – якобіан оберненого конформного відображення. Враховуючи те, що функції $x = x(\varphi, \psi)$, $y = y(\varphi, \psi)$ є спряженими гармонічними функціями, зв'язані умовами Коші-Рімана (4.73), отримаємо

$$J = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \psi} - \frac{\partial x}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \varphi} = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \psi}\right)^2 = \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \psi}\right)^2. \quad (4.82)$$

Квадрат модуля швидкості фільтрації знаходиться як:

$$V^2(\varphi, \psi) = V_x^2 + V_y^2 = \frac{1}{J^2}\left[\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2\right] = \frac{1}{J^2}\left[\left(\frac{\partial x}{\partial \psi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \psi}\right)^2\right] = \frac{1}{J}. \quad (4.83)$$

Національний університет водного господарства та природокористування

Тоді компоненти та квадрат швидкості фільтрації у вузлах конформної різницевої сітки можна обчислити за формулами

$$V_{x_{ij}} \approx \frac{\Delta \varphi}{\Delta x} = \frac{h_1}{\frac{1}{2} \cdot \left(x_{i+1,j} - x_{i-1,j}\right)} = \frac{2h_1}{x_{i+1,j} - x_{i-1,j}}, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad j = \overline{1, m-1}, \quad (4.84)$$

$$V_{y_{ij}} \approx \frac{\Delta \varphi}{\Delta y} = \frac{h_1}{\frac{1}{2} \cdot \left(y_{i,j+1} - y_{i,j-1}\right)} = \frac{2h_1}{y_{i,j+1} - y_{i,j-1}}, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad j = \overline{1, m-1}, \quad (4.85)$$

$$V_{ij}^2 = 4h_1^2 \cdot \left(\frac{1}{\left(x_{i+1,j} - x_{i-1,j}\right)^2} + \frac{1}{\left(y_{i,j+1} - y_{i,j-1}\right)^2}\right), \quad i = \overline{1, n-1}, \quad j = \overline{1, m-1}. \quad (4.86)$$

Національний університет водного господарства та природокористування

Можливий інший варіант обчислення компонент та квадрата швидкості фільтрації у вузлах вузлах конформної різницевої сітки. На основі (4.81), (4.83), отримаємо

$$V_{x_{ij}} = \frac{2h_1h_2^2(x_{i+1,j} - x_{i-1,j})}{h_2^2(x_{i+1,j} - x_{i-1,j})^2 + h_1^2(x_{i,j+1} - x_{i,j-1})^2}\ ,\ i = \overline{1, n-1},\ j = \overline{1, m-1},$$

(4.87)

$$V_{y_{ij}} = \frac{2h_1h_2^2(y_{i+1,j} - y_{i-1,j})}{h_2^2(x_{i+1,j} - x_{i-1,j})^2 + h_1^2(x_{i,j+1} - x_{i,j_1})^2}\ ,\ i = \overline{1, n-1},\ j = \overline{1, m-1},$$

(4.88)

$$V_{ij}^2 = \frac{4h_1^2h_2^2}{h_2^2(x_{i+1,j} - x_{i-1,j})^2 + h_1^2(x_{i,j+1} - x_{i,j-1})^2}\ ,\ i = \overline{1, n-1},\ j = \overline{1, m-1}.$$

(4.89)

Таким чином, знайдено числовий розв'язок задачі фільтрації.

Національний університет водного господарства та природокористування

4.3.3.3. Алгоритм розв'язання задачі массопереносу

Алгоритм розв'язання задачі масопереносу (модель № 1)

Як відомо [172], диференціальне рівняння (4.76) є двовимірним рівнянням параболічного типу зі змінними коефіцієнтами. Тому для розв'язання крайової задачі (4.76)-(4.80) використано економні методи розв'язання крайових задач математичної фізики [164].

Запишемо рівняння (4.76) в наступному вигляді:

$$\frac{\partial^2 c}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial \psi^2} - \frac{1}{D} \cdot \frac{\partial c}{\partial \varphi} - \frac{\gamma}{D \cdot V^2} \cdot \left(c - C^*\right) = \frac{\sigma}{D \cdot V^2} \cdot \frac{\partial c}{\partial t}.$$

Скориставшись методом розщеплення, крайову задачу (4.76)-(4.80) з врахуванням (4.81) представимо в такому вигляді:

а) для поздовжньої схеми

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 c}{\partial \varphi^2} - \dfrac{1}{D}\cdot\dfrac{\partial c}{\partial \varphi} - \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\gamma}{D\cdot V^2}\cdot\left(c - C^*\right) = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sigma}{D\cdot V^2}\cdot\dfrac{\partial c}{\partial t},\ (\varphi,\psi)\in G_w,\ t>0, \\ c(\varphi,\psi,0) = \widetilde{C}_0(\varphi,\psi),\ (\varphi,\psi)\in \overline{G}_w, \\ c(0,\psi,t) = \widetilde{C}_1(\psi,t)\ \text{ або }\ \dfrac{\partial c(0,\psi,t)}{\partial \varphi} = 0,\ 0<\psi<\dfrac{Q}{2},\ t>0, \\ c(\varphi_0,\psi,t) = \widetilde{C}_2(\psi,t)\ \text{ або }\ \dfrac{\partial c(\varphi_0,\psi,t)}{\partial \varphi} = 0,\ 0<\psi<\dfrac{Q}{2},\ t>0; \end{cases} \tag{4.90}$$

б) для поперечної схеми

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 c}{\partial \psi^2} - \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\gamma}{D\cdot V^2}\cdot\left(c - C^*\right) = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sigma}{D\cdot V^2}\cdot\dfrac{\partial c}{\partial t},\ (\varphi,\psi)\in G_w,\ t>0, \\ c(\varphi,\psi,0) = \widetilde{C}_0(\varphi,\psi),\ (\varphi,\psi)\in \overline{G}_w, \\ \dfrac{\partial c(\varphi,0,t)}{\partial \psi} = 0,\ \dfrac{\partial c\left(\varphi,{}^{Q}\!/_{2},t\right)}{\partial \psi} = 0,\ 0<\varphi<\varphi_0,\ t>0. \end{cases} \tag{4.91}$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Оскільки диференціальне рівняння конвективної дифузії в крайовій задачі (4.90) містить конвективний член, то для розв'язування даної задачі побудуємо монотонну різницеву схему, а для крайової задачі (4.91) – звичайну неявну різницеву схему.

Монотонна різницева схема для крайової задачі (4.90) має вигляд

$$\mu\cdot\frac{C_{i-1,j}^{k+1/2} - 2C_{ij}^{k+1/2} + C_{i+1,j}^{k+1/2}}{h_1^2} + r_+\cdot\frac{C_{i+1,j}^{k+1/2} - C_{ij}^{k+1/2}}{h_1} + r_-\cdot\frac{C_{ij}^{k+1/2} - C_{i-1,j}^{k+1/2}}{h_1} -$$

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{\gamma}{D\cdot V_{ij}^2}\cdot\left(C_{ij}^{k+1/2} - C^*\right) = \frac{\sigma}{2D\cdot V_{ij}^2}\cdot\frac{C_{ij}^{k+1/2} - C_{ij}^{k}}{\tau/2}, \tag{4.92}$$

$$i=\overline{1,n-1},\ j=\overline{1,m-1},\ k=\overline{0,K-1},$$

$$C_{ij}^0 = \widetilde{C}_{0,ij},\quad i=\overline{0,n},\ j=\overline{0,m},\quad C_{0j}^{k+1/2} = \widetilde{C}_1,\ C_{nj}^{k+1/2} = \widetilde{C}_2,$$
$$i=\overline{1,n-1},\ j=\overline{1,m-1}, \tag{4.93}$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

де $\mu = \dfrac{1}{1+0.5h_1\cdot|r|} = \dfrac{1}{1+\dfrac{h_1}{2D}}, \qquad r = r_+ + r_-,$

$$r_+ \equiv 0, \quad r_- = r < 0, \quad r = -\frac{1}{D}.$$

У випадку дискретизації умови $\dfrac{\partial c(\varphi_0, \psi, t)}{\partial \varphi} = 0$ маємо $C_{nj}^{k+1/2} = C_{n-1,j}^{k+1/2}$, $j = \overline{1, m-1}, k = \overline{0, K}$.

Прогоночний вигляд (4.92), (4.93) наступний:

$$a_1 C_{i-1,j}^{k+1/2} - c_1 C_{ij}^{k+1/2} + b_1 C_{i+1,j}^{k+1/2} = -f_1,$$
$$i = \overline{1, n-1},\ j = \overline{1, m-1},\ k = \overline{0, K-1}, \tag{4.94}$$

$$C_{ij}^0 = \widetilde{C}_{0,ij},\ i = \overline{0, n},\ j = \overline{0, m},\ C_{0j}^{k+1/2} = \widetilde{C}_1,\ C_{nj}^{k+1/2} = \widetilde{C}_2,$$
$$j = \overline{1, m-1},\ k = \overline{0, K-1}, \tag{4.95}$$

де $a_1 = \left(\dfrac{\mu}{h_1^2} - \dfrac{r_-}{h_1}\right) > 0, \quad b_1 = \left(\dfrac{\mu}{h_1^2} + \dfrac{r_+}{h_1}\right) > 0,$

$$c_1 = \frac{2\mu}{h_1^2} + \frac{r_+}{h_1} - \frac{r_-}{h_1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\gamma}{D\cdot V_{ij}^2} + \frac{\sigma}{D\cdot V_{ij}^2\cdot\tau},$$

$$f_1 = \frac{\sigma}{D\cdot V_{ij}^2\cdot\tau} C_{ij}^k + \frac{1}{2}\cdot\frac{\gamma}{D\cdot V_{ij}^2} C_*, \quad i = \overline{1, n-1},\ j = \overline{1, m-1}.$$

Розв'язок (4.94), (4.95) знаходимо методом прогонки

$$C_{ij}^{k+1/2} = \alpha_{i+1,j}^1 \cdot C_{i+1,j}^{k+1/2} + \beta_{i+1,j}^1,\ i = \overline{1, n-1},\ j = \overline{1, m-1},\ k = \overline{0, K-1},$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

де $$\alpha^1_{i+1,j} = \frac{b_1}{c_1 - \alpha^1_{ij} \cdot a_1}, \quad \beta^1_{i+1,j} = \frac{a_1 \beta^1_{ij} + f_1}{c_1 - \alpha^1_{ij} \cdot a_1},$$

$$i = \overline{1, n-1},\ j = \overline{1, m-1},\ k = \overline{0, K-1},$$

$$\alpha^1_{1j} = 0, \qquad \beta^1_{1j} = \widetilde{C}_1, \quad j = \overline{1, m-1}.$$

У випадку задання на межі *CD* граничної умови другого роду, маємо

$$C_{nj} = \frac{1}{1 - \beta_{nj}}, \quad j = \overline{1, m}.$$

В результаті поздовжньої прогонки знаходимо проміжні значення концентрації $C^{k+1/2}_{ij}$, $i = \overline{0, n},\ j = \overline{0, m},\ k = \overline{0, K},$ які слугуватимуть як допоміжні значення для знаходження C^{k+1}_{ij}, $i = \overline{0, n},\ j = \overline{0, m},\ k = \overline{0, K-1}$.

Числовий розв'язок задачі (4.91) знаходимо, використовуючи неявну різницеву схему

$$\frac{C^{k+1}_{i,j-1} - 2C^{k+1}_{ij} + C^{k+1}_{i,j+1}}{h_2^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\gamma}{D \cdot V^2_{ij}} \cdot \left(C^{k+1}_{ij} - C^*\right) = \frac{\sigma}{D \cdot V^2_{ij}} \cdot \frac{C^{k+1}_{ij} - C^{k+1/2}_{ij}}{\tau},$$

$$i = \overline{1, n-1},\ j = \overline{1, m-1},\ k = \overline{0, K-1}, \qquad (4.96)$$

$$C^{k+1}_{i0} = C^{k+1}_{i1}, \quad C^{k+1}_{im} = C^{k+1}_{i,m-1}, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad k = \overline{0, K-1}. \qquad (4.97)$$

Для використання методу прогонки представимо (4.96) так

$$a_2 C^{k+1}_{i,j-1} - c_2 C^{k+1}_{ij} + b_2 C^{k+1}_{i,j+1} = -f_2,$$
$$i = \overline{1, n-1},\ j = \overline{1, m-1},\ k = \overline{0, K-1}, \qquad (4.98)$$

де

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$a_2 = \frac{1}{h_2^2},\ b_2 = \frac{1}{h_2^2},\ c_2 = \frac{2}{h_2^2} + \frac{\gamma}{2D \cdot V_{ij}^2} + \frac{\sigma}{D \cdot V_{ij}^2 \cdot \tau},$$

$$f_2 = \frac{\sigma}{D \cdot V_{ij}^2 \cdot \tau} \cdot C_{ij}^{k+1/2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\gamma}{D \cdot V_{ij}^2} \cdot C_* \ ,$$

$$i = \overline{1, n-1},\ j = \overline{1, m-1}, k = \overline{0, K-1}.$$

Розв'язок (4.98) знаходимо методом прогонки

$$C_{ij}^{k+1} = \alpha_{i,j+1}^2 \cdot C_{i+1,j}^{k+1} + \beta_{i,j+1}^2,\ \ i = \overline{1, n-1},\ j = \overline{1, m-1}, k = \overline{0, K-1},$$

де $$\alpha_{i,j+1}^2 = \frac{b_2}{c_2 - \alpha_{ij}^2 \cdot a_2}, \qquad \beta_{i,j+1}^2 = \frac{a_2 \beta_{ij}^2 + f_2}{c_2 - \alpha_{ij}^2 \cdot a_2},$$

$$i = \overline{1, n-1},\ j = \overline{1, m-1}, k = \overline{0, K-1},$$

$$\alpha_{i1}^2 = 1, \quad \beta_{i1}^2 = 0,\ i = \overline{1, n-1}.$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Таким чином, задача локалізації радіонуклідів в рамках моделі 1 алгоритмічно повністю розв'язана.

Алгоритм розв'язання задачі масопереносу (модель № 2)

Аналогічно попередньому, перейдемо до нових незалежних змінних φ, ψ в крайовій задачі (4.57)-(4.66) та в результаті розщеплення її на дві задачі, отримаємо:

а) для поздовжньої схеми

$$D_1 V^2(\varphi,\psi) \frac{\partial^2 c_1}{\partial \varphi^2} - V^2(\varphi,\psi) \frac{\partial c_1}{\partial \varphi} - \frac{1}{2}\gamma_1 c_1 + \frac{1}{2}\gamma_2 c_2 = \frac{\sigma}{2}\frac{\partial c_1}{\partial t},$$

$$(\varphi,\psi) \in G_w,\ t > 0, \tag{4.99}$$

$$D_2 V^2(\varphi,\psi) \frac{\partial^2 c_2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{2}\gamma_1 c_1 - \frac{1}{2}\gamma_2 c_2 = \frac{\partial c_2}{\partial t},\ \ (\varphi,\psi) \in G_w,\ t > 0, \tag{4.100}$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$c_1(\varphi,\psi,0)=\widetilde{C}_0^1(\varphi,\psi),\ c_2(\varphi,\psi,0)=\widetilde{C}_0^2(\varphi,\psi),\ (\varphi,\psi)\in\overline{G}_w, \tag{4.101}$$

$$c_1(0,\psi,t)=\widetilde{C}_1(\psi,t)\ \text{ або }\ \frac{\partial c_1(0,\psi,t)}{\partial\varphi}=0,\ \frac{\partial c_1(\varphi_0,\psi,t)}{\partial\varphi}=0,$$

$$0<\psi<\frac{Q}{2},\ t>0, \tag{4.102}$$

$$c_2(0,\psi,t)=\widetilde{C}_2(\psi,t)\ \text{ або }\ \frac{\partial c_2(0,\psi,t)}{\partial\varphi}=0,\ \frac{\partial c_2(\varphi_0,\psi,t)}{\partial\varphi}=0,$$

$$0<\psi<\frac{Q}{2},\ t>0; \tag{4.103}$$

б) для поперечної схеми

$$D_1V^2(\varphi,\psi)\frac{\partial^2 c_1}{\partial\psi^2}-\frac{1}{2}\gamma_1c_1+\frac{1}{2}\gamma_2c_2=\frac{\sigma}{2}\frac{\partial c_1}{\partial t},\ (\varphi,\psi)\in G_w,\ t>0, \tag{4.104}$$

$$D_2V^2(\varphi,\psi)\frac{\partial^2 c_2}{\partial\psi^2}+\frac{1}{2}\gamma_1c_1-\frac{1}{2}\gamma_2c_2=\frac{\partial c_2}{\partial t},\ (\varphi,\psi)\in G_w,\ t>0, \tag{4.105}$$

$$c_1(\varphi,\psi,0)=\widetilde{C}_0^1(\varphi,\psi),\ c_2(\varphi,\psi,0)=\widetilde{C}_0^2(\varphi,\psi),\ (\varphi,\psi)\in\overline{G}_w, \tag{4.106}$$

$$\frac{\partial c_1(\varphi,0,t)}{\partial\psi}=0,\ \frac{\partial c_1(\varphi,Q,t)}{\partial\psi}=0,\ 0<\varphi<\varphi_0,\ t>0, \tag{4.107}$$

$$\frac{\partial c_2(\varphi,0,t)}{\partial\psi}=0,\ \frac{\partial c_2(\varphi,Q,t)}{\partial\psi}=0,\ 0<\varphi<\varphi_0,\ t>0. \tag{4.108}$$

В кожній із задач (4.99)-(4.103), (4.104)-(4.108) виділимо дві підзадачі і поділимо кожне із рівнянь відповідно на $D_1V^2(\varphi,\psi)$ та $D_2V^2(\varphi,\psi)$. В результаті отримаємо:

а) для поздовжньої схеми

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 c_1}{\partial \varphi^2} - \dfrac{1}{D_1}\dfrac{\partial c_1}{\partial \varphi} - \dfrac{\gamma_1 c_1}{2D_1 V^2(\varphi,\psi)} + \dfrac{\gamma_2 c_2}{2D_1 V^2(\varphi,\psi)} = \dfrac{\sigma}{2D_1 V^2(\varphi,\psi)}\dfrac{\partial c_1}{\partial t}, \\ (\varphi,\psi) \in G_w,\ t > 0, \\ c_1(\varphi,\psi,0) = \widetilde{C}_0^1(\varphi,\psi),\ (\varphi,\psi) \in \overline{G}_w, \\ c_1(0,\psi,t) = \widetilde{C}_1(\psi,t),\ \dfrac{\partial c_1(\varphi_1,\psi,t)}{\partial \varphi} = 0, 0 < \psi < \dfrac{Q}{2},\ t > 0; \end{cases} \tag{4.109}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 c_2}{\partial \varphi^2} + \dfrac{\gamma_1 c_1}{2D_2 V^2(\varphi,\psi)} - \dfrac{\gamma_2 c_2}{2D_2 V^2(\varphi,\psi)} = \dfrac{1}{2D_2 V^2(\varphi,\psi)}\dfrac{\partial c_2}{\partial t}, \\ (\varphi,\psi) \in G_w,\ t > 0, \\ c_2(\varphi,\psi,0) = \widetilde{C}_0^2(\varphi,\psi),\ (\varphi,\psi) \in \overline{G}_w, \\ c_2(0,\psi,t) = \widetilde{C}_2(\psi,t),\ \dfrac{\partial c_2(\varphi_1,\psi,t)}{\partial \varphi} = 0,\ 0 < \psi < \dfrac{Q}{2},\ t > 0; \end{cases} \tag{4.110}$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

б) для поперечної схеми

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 c_1}{\partial \psi^2} - \dfrac{\gamma_1 c_1}{2D_1 V^2(\varphi,\psi)} + \dfrac{\gamma_2 c_2}{2D_1 V^2(\varphi,\psi)} = \dfrac{\sigma}{2D_1 V^2(\varphi,\psi)}\dfrac{\partial c_1}{\partial t}, \\ (\varphi,\psi) \in G_w,\ t > 0, \\ c_1(\varphi,\psi,0) = \widetilde{C}_0^1(\varphi,\psi), (\varphi,\psi) \in \overline{G}_w, \\ \dfrac{\partial c_1(\varphi,0,t)}{\partial \psi} = 0,\ \dfrac{\partial c_1\left(\varphi_1, {}^{Q}/_{2}, t\right)}{\partial \psi} = 0,\ 0 < \varphi < \varphi_0,\ t > 0; \end{cases} \tag{4.111}$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 c_2}{\partial \psi^2} + \dfrac{\gamma_1 c_1}{2D_2 V^2(\varphi,\psi)} - \dfrac{\gamma_2 c_2}{2D_2 V^2(\varphi,\psi)} = \dfrac{\sigma}{2D_2 V^2(\varphi,\psi)} \dfrac{\partial c_2}{\partial t}, \\ (\varphi,\psi) \in G_w,\ t > 0, \\ c_2(\varphi,\psi,0) = \widetilde{C}_0^2(\varphi,\psi), (\varphi,\psi) \in \overline{G}_w, \\ \dfrac{\partial c_2(\varphi,0,t)}{\partial \psi} = 0,\ \dfrac{\partial c_2\left(\varphi\ ,\frac{Q}{2},t\right)}{\partial \psi} = 0,\ 0 < \varphi < \varphi_0,\ t > 0. \end{cases} \tag{4.112}$$

Побудуємо різницеві схеми для вищенаведених крайових задач. Запишемо для (4.109), (4.110) різницеві схеми. Різницева схема для (4.109) має вигляд

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$\mu_1 \frac{C_{1i-1j}^{k+1/2} - 2C_{1ij}^{k+1/2} + C_{1i+1j}^{k+1/2}}{h^2} + r_+ \frac{C_{1i+1j}^{k+1/2} - C_{1ij}^{k+1/2}}{h} + r_- \frac{C_{1ij}^{k+1/2} - C_{1i-1j}^{k+1/2}}{h} -$$

$$- \frac{0.5\gamma_1 C_{1ij}^{k+1/2}}{D_1 v_{ij}^2} + \frac{0.5\gamma_2 C_{2ij}^{k}}{D_1 V_{ij}^2} = \frac{0.5\sigma}{D_1 V_{ij}^2} \frac{C_{1ij}^{k+1/2} - C_{1ij}^{k}}{0.5\tau}, \tag{4.113}$$

$$i = \overline{1, n-1},\ j = \overline{1, m-1},\ k = \overline{0, K-1},$$

$$C_{1ij}^0 = \widetilde{C}_{0ij}^1,\ C_{10j}^{k+1/2} = \widetilde{C}_1,\ C_{1nj}^{k+1/2} = C_{1n-1j}^{k+1/2},\ i = \overline{1, n-1},\ j = \overline{1, m-1}, \tag{4.114}$$

де коефіцієнти визначаються таким чином

$$\mu_1 = \frac{1}{1 + 0.5h\left|\tau^2\right|} = \frac{1}{1 + \dfrac{h}{2D_1}},\ r = r_+ + r_-,$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$r_+ = 0.5(r^2 + |r^2|) \ge 0,\ \ r_- = 0.5(r^2 - |r^2|) \le 0,\ \ r_+ = 0,$$

$$r_- = -\frac{1}{D_1}.$$

Різницева схема для (4.110) має вигляд

$$\frac{C^{k+1/2}_{2i-1j} - 2C^{k+1/2}_{2ij} + C^{k+1/2}_{2i+1j}}{h^2} + \frac{0.5\gamma_1 C^k_{1ij}}{D_2 V^2_{ij}} - \frac{0.5\gamma_2 C^{k+1/2}_{2ij}}{D_2 V^2_{ij}} = \frac{0.5\sigma}{D_2 V^2_{ij}} \frac{C^{k+1/2}_{2ij} - C^k_{2ij}}{0.5\tau},$$

$$i = \overline{1, n-1},\ j = \overline{1, m-1},\ \ k = \overline{0, K-1}, \tag{4.115}$$

$$\begin{gathered} C^0_{2ij} = \widetilde{C}^2_{0ij},\ \ C^{k+1/2}_{20j} = \widetilde{C}_2,\ \ C^{k+1/2}_{2nj} = C^{k+1/2}_{2n-1j}, \\ i = \overline{1, n-1},\ j = \overline{1, m-1},\ k = \overline{0, K-1}. \end{gathered} \tag{4.116}$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

В канонічному вигляді дані різницеві схеми приймуть вигляд

$$\begin{cases} a^1_1 C^{k+1/2}_{1i-1} - c^1_1 C^{k+1/2}_{1ij} + b^1_1 C^{k+1/2}_{1i+1j} = -f^1_1, \\ i = \overline{1, n-1},\ j = \overline{1, m-1}, k = \overline{0, K-1}, \\ C^0_{1ij} = C^1_{0,ij},\ C^{k+1/2}_{10j} = k^1_1 C^{k+1/2}_{11j} + \eta^1_1,\ \ C^{k+1/2}_{1nj} = k^1_2 C^{k+1/2}_{1n-1j} + \eta^1_2, \\ i = \overline{1, n-1},\ j = \overline{1, m-1}, \end{cases} \tag{4.117}$$

де $a^1_1 = \frac{\mu_1}{h^2} - \frac{r_-}{h}$, $b^1_1 = \frac{\mu_1}{h^2} + \frac{r_+}{h}$, $c^1_1 = \frac{2\mu_1}{h^2} + \frac{r_+}{h} - \frac{r_-}{h} - \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2D_1 V_{ij}^{\ 2}}$,

$$f^1_1 = \frac{\gamma_2 C^k_{2ij}}{2D_1 V^2_{ij}} + \frac{\sigma C^{k+1/2}_{1ij}}{D_1 \tau V^2_{ij}},\ \ i = \overline{1, n-1},\ j = \overline{1, m-1},\ \ k = \overline{0, K-1}.$$

Національний університет водного господарства та природокористування

$$\begin{cases} a_1^2 C_{2i-1}^{k+1/2} - c_1^2 C_{2ij}^{k+1/2} + b_1^2 C_{2i+1j}^{k+1/2} = -f_1^2, \;\; i = \overline{1, n-1},\; j = \overline{1, m-1}, \\ C_{2ij}^0 = \widetilde{C}_{0ij}^2,\; C_{20j}^{k+1/2} = k_1^2 C_{21j}^{k+1/2} + \eta_1^2,\; C_{2nj}^{k+1/2} = k_2^2 C_{2n-1j}^{k+1/2} + \eta_2^2, \\ i = \overline{1, n-1},\; j = \overline{1, m-1}, \end{cases} \tag{4.118}$$

де $$a_1^2 = \frac{1}{h^2}, \quad b_1^2 = \frac{1}{h^2}, \quad c_1^2 = \frac{2}{h^2} + \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2D_2 V_{ij}^2} + \frac{\sigma}{D_2 \tau V_{ij}^2},$$

$$f_1^2 = \frac{\gamma_1 C_{1ij}^k}{2D_2 V_{ij}^2} + \frac{\sigma C_{2ij}^{k+1/2}}{D_2 \tau V_{ij}^2}, \quad i = \overline{1, n-1},\; j = \overline{1, m-1},\; k = \overline{0, K-1}.$$

Методом прогонки знаходимо розв′язок задачі (4.117)

$$C_{1ij}^{k+1/2} = \alpha_{i+1j}^1 C_{1i+1j}^{k+1/2} + \beta_{i+1j}^1, \; i = \overline{1, n-1},\; j = \overline{1, m-1},\; k = \overline{0, K-1}, \tag{4.119}$$

де $$\alpha_{i+1j}^1 = \frac{b_1^1}{c_1^1 - \alpha_{ij}^1 a_1^1}, \quad \beta_{i+1j}^1 = \frac{a_1^1 \beta_{ij}^1 + f_1^1}{c_1^1 - \alpha_{ij}^1 a_1^1},$$

$$i = \overline{1, n-1},\; j = \overline{1, m-1},\; k = \overline{0, K-1},$$

$$\alpha_{1j}^1 = k_1^1 = 0, \quad \beta_{1j}^1 = \eta_1^1 = \widetilde{C}_1, \quad j = \overline{1, m-1}.$$

Для проведення прогонки згідно (4.119), потрібно спочатку розрахувати концентрацію $C_{1nj}^{k+1/2}$ за формулою

$$C_{1nj}^{k+1/2} = \frac{\beta_{nj}^1}{1 - \alpha_{nj}^1}, \quad j = \overline{1, m-1},\; k = \overline{0, K-1}.$$

Розв′язок задачі (4.118) методом прогонки має вигляд

Національний університет водного господарства та природокористування

$$C_{2ij}^{k+1/2} = \alpha_{i+1j}^2 C_{2i+1j}^{k+1/2} + \beta_{i+1j}^2, \quad i = \overline{1, n-1},\ j = \overline{1, m-1},\ k = \overline{0, K-1} \tag{4.120}$$

де $$\alpha_{i+1j}^2 = \frac{b_1^2}{c_1^2 - \alpha_{ij}^2 a_1^2}, \quad \beta_{i+1j}^2 = \frac{a_1^2 \beta_{ij}^2 + f_1^2}{c_1^2 - \alpha_{ij}^2 a_1^2},$$

$$i = \overline{1, n-1},\ j = \overline{1, m-1},\ k = \overline{0, K-1},$$

$$\alpha_{1j}^2 = k_1^2 = 0, \quad \beta_{1j}^2 = \eta_1^2 = \widetilde{C}_2, \quad j = \overline{1, m-1}.$$

Для проведення прогонки за (4.120), потрібно розрахувати концентрацію $C_{2nj}^{k+1/2}$ за формулою

$$C_{2nj}^{k+1/2} = \frac{\beta_{nj}^2}{1 - \alpha_{nj}^2}, \quad j = \overline{1, m-1},\ k = \overline{0, K-1}.$$

Національний університет водного господарства та природокористування

Таким чином, поздовжня прогонка завершена.

Для реалізації поперечної схеми, запишемо різницеві схеми для (4.111), (4.112). Зокрема, різницева схема для (4.111) має вигляд

$$\frac{C_{1ij-1}^{k+1} - 2C_{1ij}^{k+1} + C_{1ij+1}^{k+1}}{h^2} - \frac{0.5\gamma_1 C_{1ij}^{k+1}}{D_1 V_{ij}^2} + \frac{0.5\gamma_2 C_{2ij}^{k}}{D_1 V_{ij}^2} = \frac{0.5\sigma}{D_1 V_{ij}^2} \frac{C_{1ij}^{k+1} - C_{1ij}^{k+1/2}}{0.5\tau},$$

$$i = \overline{1, n-1},\ j = \overline{1, m-1},\ k = \overline{0, K-1}, \tag{4.121}$$

$$C_{1ij}^0 = \widetilde{C}_{0ij}^1, \quad C_{1i0}^{k+1} = \widetilde{C}_1, \quad C_{1im}^{k+1} = C_{1im-1}^{k+1},$$

$$i = \overline{1, n-1},\ j = \overline{1, m-1},\ k = \overline{0, K-1}. \tag{4.122}$$

Різницева схема для (4.112) наступна:

Національний університет водного господарства та природокористування

$$\frac{C_{2ij-1}^{k+1}-2C_{2ij}^{k+1}+C_{2ij+1}^{k+1}}{h^2}+\frac{0.5\gamma_1 C_{1ij}^{k}}{D_2V_{ij}^2}-\frac{0.5\gamma_2 C_{2ij}^{k+1}}{D_2V_{ij}^2}=\frac{0.5\sigma}{D_2V_{ij}^2}\frac{C_{2ij}^{k+1}-C_{2ij}^{k+1/2}}{0.5\tau},$$

$$i=\overline{1,n-1},\ j=\overline{1,m-1},\ k=\overline{0,K-1}, \qquad (4.123)$$

$$C_{2ij}^{0}=\widetilde{C}_{0ij}^{2},\quad C_{2i0}^{k+1}=\widetilde{C}_{2},\quad C_{2im}^{k+1}=C_{2im-1}^{k+1},$$

$$i=\overline{1,n-1},\ j=\overline{1,m-1},\ k=\overline{0,K-1}. \qquad (4.124)$$

Запишемо (4.121), (4.122) у канонічному вигляді

$$\begin{cases} a_2^1C_{1ij-1}^{k+1}-c_2^1C_{1ij}^{k+1}+b_2^1C_{1ij+1}^{k+1}=-f_2^1, \\ i=\overline{1,n-1},\ j=\overline{1,m-1},\ k=\overline{0,K-1}, \\ C_{1ij}^{0}=\widetilde{C}_{0ij}^{1},\ C_{1i0}^{k+1}=k_3^1C_{1i1}^{k+1/2}+\eta_3^1,\ C_{1im}^{k+1/2}=k_4^1C_{1im-1}^{k+1}+\eta_4^1, \\ i=\overline{1,n-1},\ j=\overline{1,m-1},\ k=\overline{0,K-1}, \end{cases} \qquad (4.125)$$

Національний університет водного господарства та природокористування

де $$a_2^1=\frac{1}{h^2},\quad b_2^1=\frac{1}{h^2},\quad c_2^1=\frac{2}{h^2}-\frac{\gamma_1+\gamma_2}{2D_1V_{ij}^{\ 2}}+\frac{\sigma}{D_1\tau V_{ij}^{\ 2}},$$

$$f_2^1=\frac{\gamma_1C_{1ij}^{k+1}}{2D_1V_{ij}^{\ 2}}+\frac{\sigma\,C_{2ij}^{k}}{D_1\tau V_{ij}^{\ 2}},\ i=\overline{1,n-1},\ j=\overline{1,m-1},\ k=\overline{0,K-1}.$$

Аналогічно представимо (4.123), (4.124)

$$\begin{cases} a_2^2C_{2ij-1}^{k+1}-c_2^2C_{2ij}^{k+1}+b_2^2C_{2ij+1}^{k+1}=-f_2^2, \\ i=\overline{1,n-1},\ j=\overline{1,m-1},\ k=\overline{0,K-1}, \\ C_{2ij}^{0}=\widetilde{C}_{0ij}^{2},\ C_{2i0}^{k+1}=k_3^2C_{2i1}^{k+1/2}+\eta_3^2,\ C_{2im}^{k+1/2}=k_4^2C_{2im-1}^{k+1}+\eta_4^2, \\ i=\overline{1,n-1},\ j=\overline{1,m-1},\ k=\overline{0,K-1}, \end{cases} \qquad (4.126)$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

де $a_2^2 = \frac{1}{h^2}$, $b_2^2 = \frac{1}{h^2}$, $c_2^2 = \frac{2}{h^2} + \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2D_2 V_{ij}^{\ 2}} + \frac{\sigma}{D_2 \tau V_{ij}^{\ 2}}$,

$$f_2^2 = \frac{\gamma_2 C_{2ij}^k}{2D_2 V_{ij}^{\ 2}} + \frac{\sigma\, C_{1ij}^{k+1}}{D_2 \tau\, V_{ij}^{\ 2}},\ i = \overline{1, n-1},\ j = \overline{1, m-1},\ k = \overline{0, K-1}.$$

Розв′язок (4.125) знаходимо методом прогонки

$$C_{1ij}^{k+1} = \alpha_{ij+1}^3 C_{1ij+1}^{k+1} + \beta_{ij+1}^3,\ i = \overline{1, n-1},\ j = \overline{1, m-1},\ k = \overline{0, K-1},$$

де $\alpha_{ij+1}^3 = \frac{b_2^1}{c_2^1 - \alpha_{ij}^3 a_2^1}$, $\beta_{ij+1}^3 = \frac{a_2^1 \beta_{ij}^3 + f_2^1}{c_2^1 - \alpha_{ij}^3 a_2^1}$,

$i = \overline{1, n-1},\ j = \overline{1, m-1},\ k = \overline{0, K-1}$,

$\alpha_{i1}^3 = k_3^1 = 0$, $\beta_{i1}^3 = \eta_3^1 = \widetilde{C}_1$, $i = \overline{1, n-1}$.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Аналогічно попередньому, концентрація C_{1im}^{k+1} знаходиться за формулою

$$C_{1im}^{k+1} = \frac{\beta_{im}^3}{1 - \alpha_{im}^3},\ i = \overline{1, n-1},\ k = \overline{0, K-1}.$$

Розв′язок (4.126) має вигляд

$$C_{2ij}^{k+1} = \alpha_{ij+1}^4 C_{2ij+1}^{k+1} + \beta_{ij+1}^4,\ i = \overline{1, n-1},\ j = \overline{1, m-1},\ k = \overline{0, K-1},$$

де $\alpha_{ij+1}^4 = \frac{b_2^2}{c_2^2 - \alpha_{ij}^4 a_2^2}$, $\beta_{ij+1}^4 = \frac{a_2^2 \beta_{ij}^3 + f_2^2}{c_2^2 - \alpha_{ij}^4 a_2^2}$,

$i = \overline{1, n-1},\ j = \overline{1, m-1},\ k = \overline{0, K-1}$,

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$\alpha_{i1}^4 = k_3^2 = 0\,, \quad \beta_{i1}^4 = \eta_3^2 = \widetilde{C}_2\,, \quad i = \overline{1, n-1}\,.$$

Концентрація C_{2im}^{k+1} знаходиться за формулою $C_{2im}^{k+1} = \dfrac{\beta_{im}^4}{1-\alpha_{im}^4}$,

$i = \overline{1, n-1}$, $k = \overline{0, K-1}$.

Таким чином, задача локалізації радіонуклідів в рамках моделі 2 алгоритмічно розв'язана повністю.

4.3.4. Програмна реалізація задачі, результати числових експериментів та їх аналіз

Для реалізації обчислювального алгоритму розв'язку даної задачі розроблений комплекс програм, який виконаний в інтегрованому середовищі візуального програмування Delphi 6.0. Даний комплекс складається з двох програм (Vidobrazhennja. exe, Rozrahunok. exe), які взаємодіють між собою наступним чином:

– запускаємо на виконання програму Rozrahunok.exe;

– після натиснення на формі, що відкрилася, відповідної кнопки "Розрахувати" дана програма виводить зображення в фіктивній області.

– далі запускаємо на виконання програму Vidobrazhennja.exe;

– після чого програма Vidobrazhennja.exe виводить зображення в фізичній області.

Програма Vidobrazhennja розроблена для побудови числового конформного відображення фрагмента області G_z на параметричний прямокутник G_w. Вхідними даними для роботи даної програми є геометричні розміри фрагмента області фільтрації та кількість поділів по осях. Програма складається з шести модулів та відповідних їм форм. Перша форма служить для візуалізації числових результатів роботи програми і має вигляд, зображений на рис. 4.20. Друга форма створена для графічної візуалізації отриманої різницевої сітки (рис. 4.21). Третя форма зображає поверхню компоненти швидкості фільтрації V_y в фізичній області (рис. 4.22). Четверта форма зображає поверхню коипоненти швидкості фільтрації V_x в фізичній області (рис. 4.23). П'ята форма зображає поверхню квадрата швидкості фільтрації V^2 в фізичній

області (рис. 4.24). Шоста форма призначена для виведення вигляду фрагмента фізичної області фільтрації (*x,y*) (рис. 4.25).

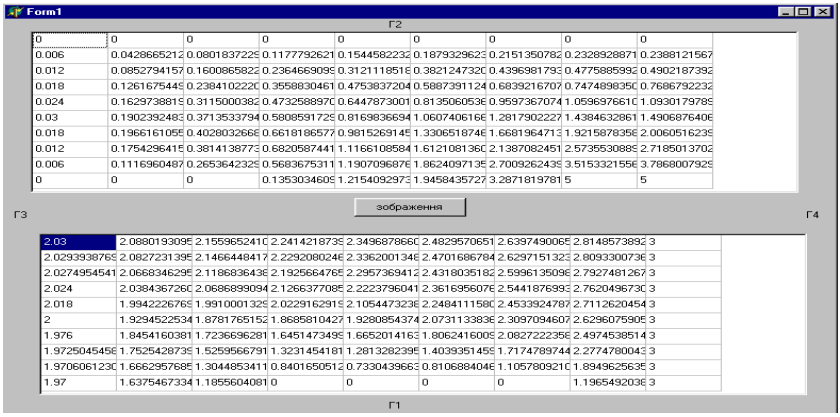


Рис. 4.20. Форма програми Vidobrazhennja для виведення координат вузлів різницевої сітки фільтраційного потоку

В програмі Rozrahunok реалізовано алгоритм числового розв’язання задачі міграції радіонуклідів. Зокрема, тут задаються різні параметри моделі, крайові та початкові умови з можливістю контролю відповідних параметрів.

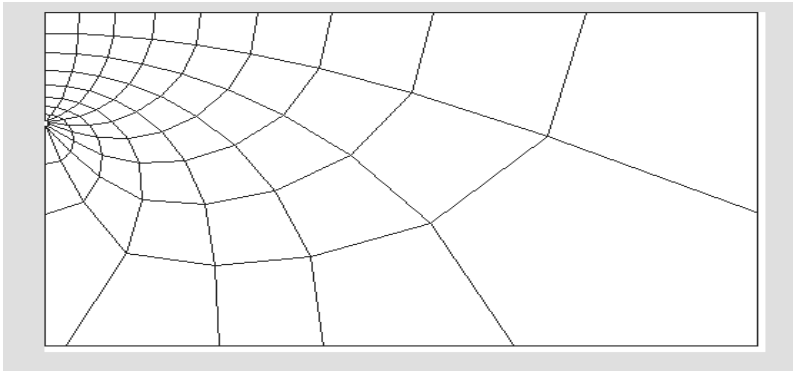


Рис. 4.21. Форма програми Vidobrazhennja для виведення графічної візуалізації різницевої сітки фільтраційного потоку

Національний університет
водного господарства
та природокористування

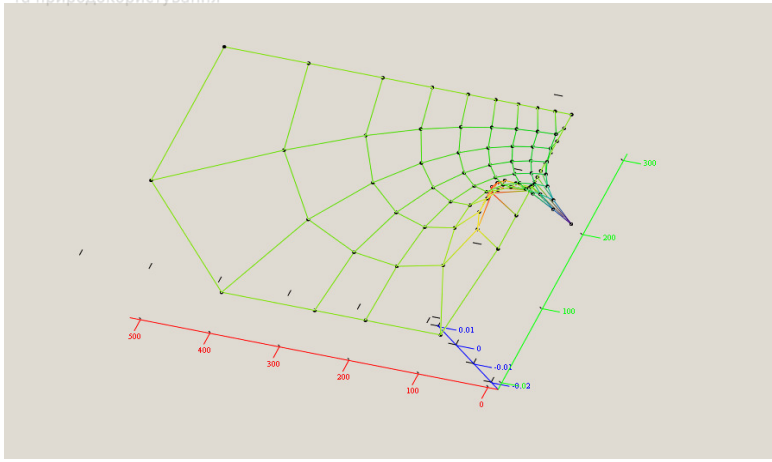


Рис. 4.22. Форма програми Vidobrazhennja для виведення поверхні компоненти швидкості фільтрації V_y в фізичній області

Національний університет
водного господарства
та природокористування

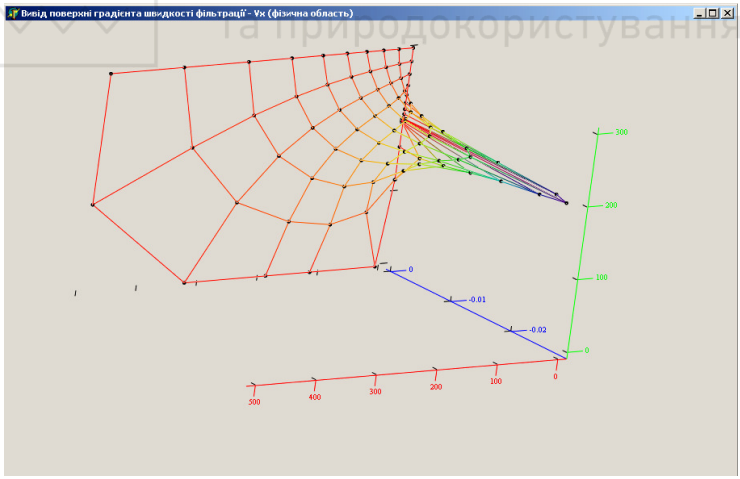


Рис. 4.23. Форма програми Vidobrazhennja для виведення поверхні компоненти швидкості фільтрації V_x в фізичній області

Національний університет
водного господарства
та природокористування

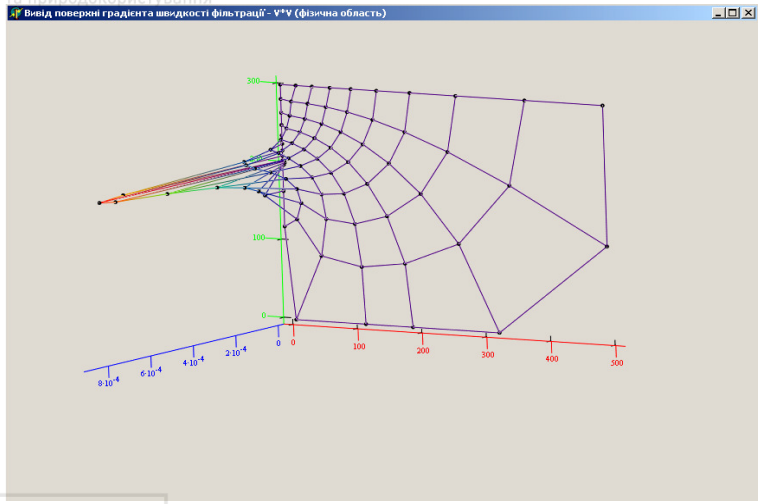


Рис. 4.24. Форма програми Vidobrazhennja для виведення поверхні квадрата швидкості фільтрації V^2 в фізичній області

Національний університет
водного господарства
та природокористування

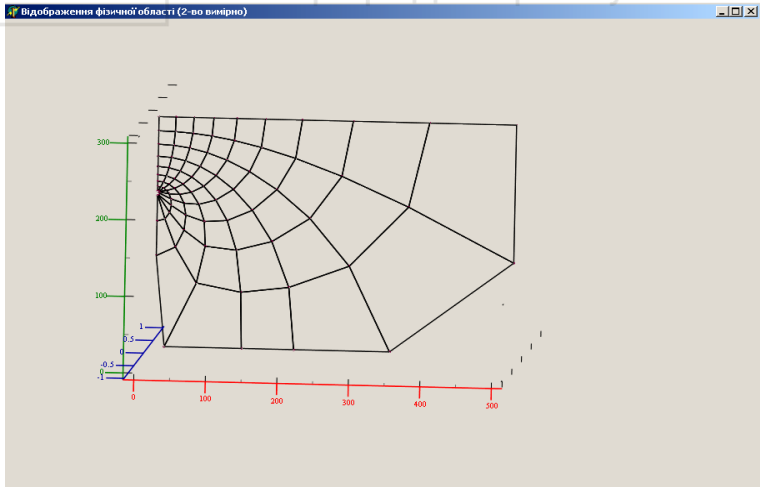


Рис. 4.25. Форма програми Vidobrazhennja для виведення вигляду фрагмента фізичної області фільтрації

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Значна увага приділена сервісному оформленню програми та наглядному графічному представленню отриманих результатів з візуалізацією змодельованих фізичних процесів. Зокрема, передбачено: візуалізацію поширення розчинених речовин у ґрунті при перенесенні їх фільтраційним потоком до дрени; візуалізацію динаміки поширення фронту забруднень; числові розрахунки та графічне представлення поля швидкості фільтрації, поля концентрації мігруючих речовин. Форма, що служить для візуалізації числових результатів роботи програми, має вигляд, зображений на рис. 4.26. Наявні виведення поверхонь в фіктивній області: компоненти швидкості фільтрації V_y (рис. 4.27), компоненти швидкості фільтрації V_x (рис. 4.28), квадрата швидкості фільтрації V^2 (рис. 4.29), поверхні концентрації C_{ij}^k для кожного моменту часу (рис. 4.30), поверхні концентрації C_{ij}^k в фізичній області (рис. 4.31). При побудові площин на екран виводиться не вся фізична область, а лише та її частина, яка обмежена крайніми лініями різницевої сітки (фрагмент). В процесі побудови графіків на різних часових шарах для вектора швидкості фільтрації видозмінюються певні відповідні ділянки початкової площини.

В результаті роботи порграми побудована гідродинамічна сітка фільтраційного потоку, яка служить різницевою сіткою для розв'язку поставленої задачі; проведено числові експерименти та зроблено їх порівняння для різних вхідних значень (коефіцієнтів фільтрації, конвективної дифузії, масообміну, пористості середовища, концентрації граничного насичення та різних граничних умов на виході фільтраційного потоку (на фільтр-вловлювачі)).

На основі програмної реалізації задачі, описаної вище, проведено значну кількість числових експериментів, проведено аналіз отриманих результатів для різних вхідних даних задачі та досліджено процес масопереносу радіонуклідів при залежності параметрів фільтраційного потоку від фізико-хімічних властивостей фільтруючого розчину і середовища.

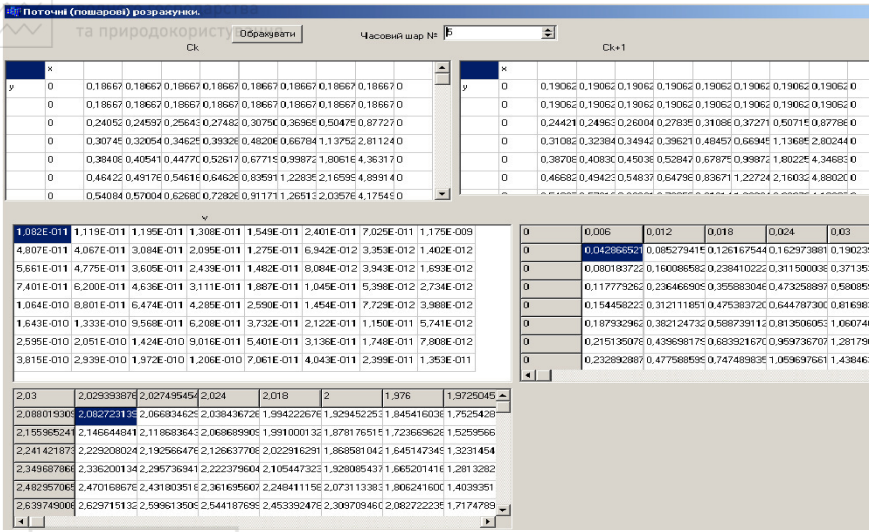


Рис. 4.26. Форми програми Rozrahunok для виведення числових результатів (швидкості фільтрації та концентрації радіонуклідів)

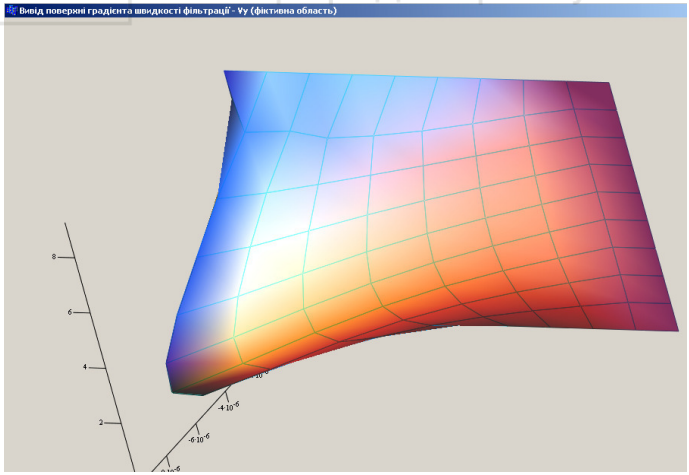


Рис. 4.27. Форма програми для виведення поверхні компоненти швидкості фільтрації V_y в фіктивній області

Національний університет
водного господарства
та природокористування

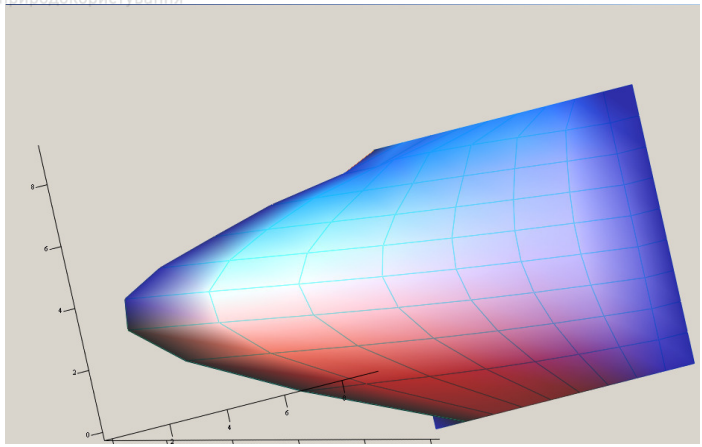


Рис. 4.28. Форма програми для виведення поверхні компоненти швидкості фільтрації V_x в фіктивній області

Національний університет
водного господарства
та природокористування

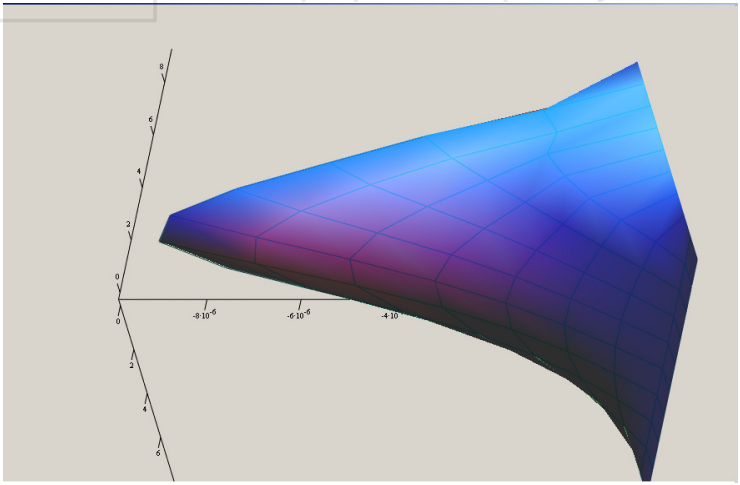


Рис. 4.29. Форма програми для виведення поверхні квадрата швидкості фільтрації V^2 в фіктивній області

Національний університет
водного господарства
та природокористування

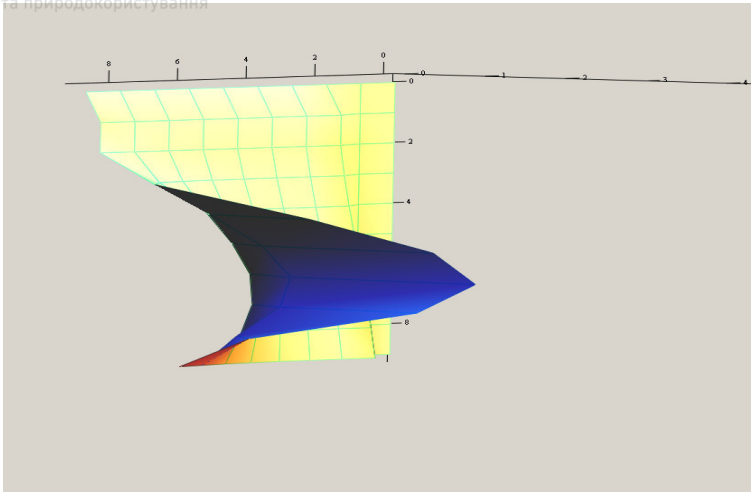


Рис. 4. 30. Форма програми для виведення поверхні концентрації C_{ij}^{k} для певного моменту часу в фіктивній області

Національний університет
водного господарства
та природокористування

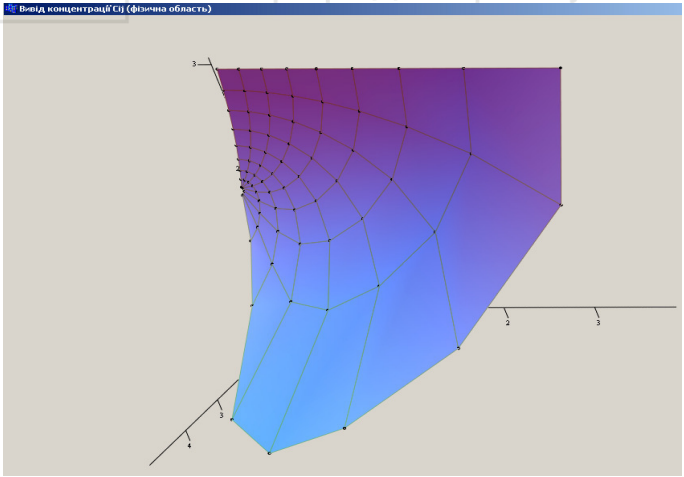


Рис. 4.31. Форма програми для виведення поверхні концентрації C_{ij}^{k} для певного моменту часу в фізичній області

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Результати роботи програми Vidobrazhennja при таких вхідних даних: b_1=1 м, b_2=2 м, l=10 м, b_0=0,4 м, r_1=0,03 м, n=9, m=8, m_1=2, m_2=5 (відповідно кількість кроків по *Oy, Ox,* на AB_1, на B_1B_2) було наведено на рис. 4.20, рис. 4.21.

Для отримання густішої різницевої сітки в програмі передбачено зміну кількості поділів по осях на такі: n=18, m=16, m_1=4, m_2=9 (відповідно кількість кроків по *Oy, Ox,* на AB_1, на B_1B_2) (рис. 4.32).

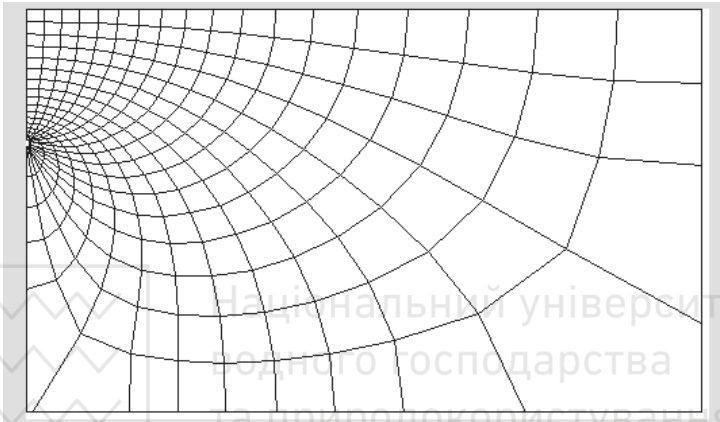


Рис. 4.32. Форма програми для виведення уточненої гідродинамічної сітки фільтраційного потоку в фізичній області

Нижче наведено результати числових експериментів із наступними вхідними даними: τ=30 діб, λ=1 м, σ=0,2; γ=0,0065 доба$^{-1}$; D=0,01 м^2/добу; C_*=4 кг/м^3; $\widetilde{C}_0$=10 кг/м^3; $\widetilde{C}_1$=0 кг/м^3; $\widetilde{C}_2$=5 кг/м^3.

При аналізі отриманих результатів числового розв'язку задачі для різних початкових даних та граничних умов на межі Γ_4 виявлено їх суттєву відмінність. Так, наприклад, при заданні крайових умов 1-го та 2-го родів, час поширення фронту забруднення та кількість винесених з ґрунту в дренажну систему радіонуклідів можуть значно відрізнятись.

Оскільки, розв'язуючи дану задачу, ми ставили перед собою завдання здійснити прогнозування щодо придатності родючих земель для їх подальшого використання після забруднення, то аналізувати доцільно верхній родючий шар ґрунту. Товщина цього шару становить b_0 = 0,4 м, що приблизно відповідає верхній межі

Національний університет водного господарства та природокористування

фізичної області та першій верхній лінії побудованої різницевої сітки. Зміну концентрації радіонуклідів з часом при різних вхідних даних саме в цій області ми і проаналізуємо (рис. 4.33-4.35).

Як видно з нищенаведених графіків, концентрація радіонуклідів зменшиться до допустимої норми і родючий шар грунту стане придатним для подальшого використання через 6 місяців після забруднення (модель 1), а для моделі 2 цього часу ще недостатньо. Далі з часом концентрація змінюється незначно для моделі 1.

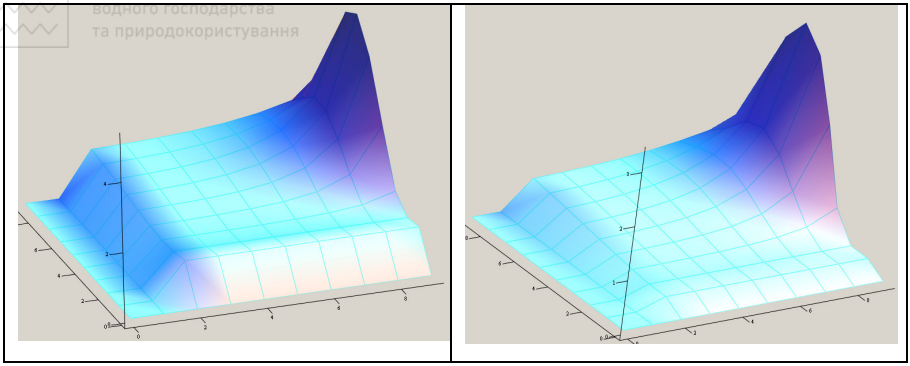
Припустимо, що моделюється ситуація, коли на поверхні області (на межі Γ_4 задається умова другого роду (швидкого виносу забрудників). Тоді отримані результати будуть виглядати як на рис. 4.36. Аналізуючи отриманий результат, можна сказати, що при заданні граничної умови другого роду на поверхні області (на межі Γ_4) розподіл концентрації в часі пришвидшився, тобто грунт стане придатним для використання ще за менший проміжок часу.

Якщо на виході фільтраційного потоку задати умову швидкого винесення забруднень, а початковий розподіл концентрації відбувається за законом $C_0=C_0 \cdot e^{-0,1 \cdot y}$, то отримані результати зображені на рис. 4.37. Як видно з графіка, результат значно не змінився і концентрація радіонуклідів в родючому шарі ґрунту вже за 6 місяців зменшилася вдвічі (модель 1) в порівнянні з початковою.

Розглянемо результати числових експериментів, змінивши вхідні дані. Нехай задано: $\tau=30$ діб, $\lambda=10$ м, $\sigma=0,4$; $\gamma=0,000065$ доба$^{-1}$; $D=0,01$м^2/добу; $C_*=8$ кг/м^3; $\widetilde{C}_0=20$ кг/м^3; $\widetilde{C}_1=10$ кг/м^3; $\widetilde{C}_2=5$ кг/м^3. При цьому розподіл концентрації в певні моменти часу має вигляд зображений на рис.4.38-4.41.

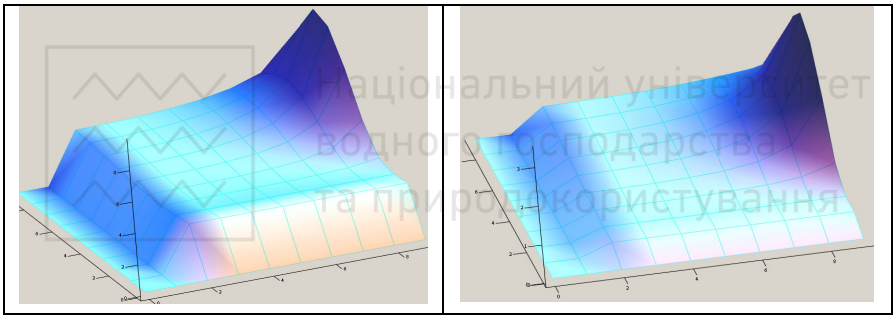
Як бачимо, отримані графічні зображення значно змінилися в порівнянні з попередніми. Змінивши вхідні дані, можемо спостерігати зміну форми графіків розподілу концентрації радіонуклідів по лінії течії. В попередньому випадку в місячний термін концентрація зменшилася приблизно на третину, а в даному випадку за цей же період вона залишилася майже такою ж як і початкова.

Національний університет
водного господарства
та природокористування



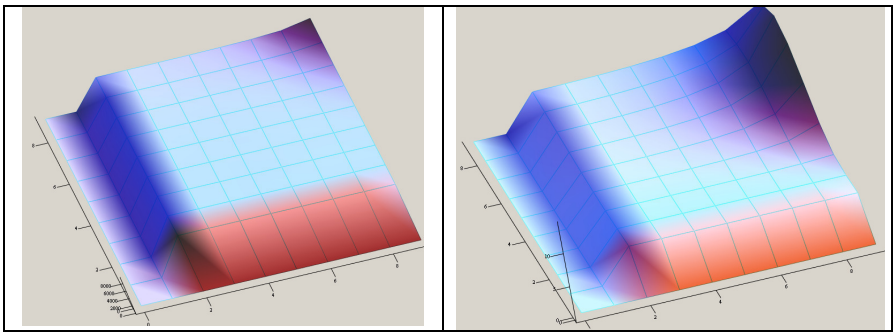
(модель 1) (модель 2)

Рис. 4.33. Розподіл концентрації в момент часу t=0



(модель 1) (модель 2)

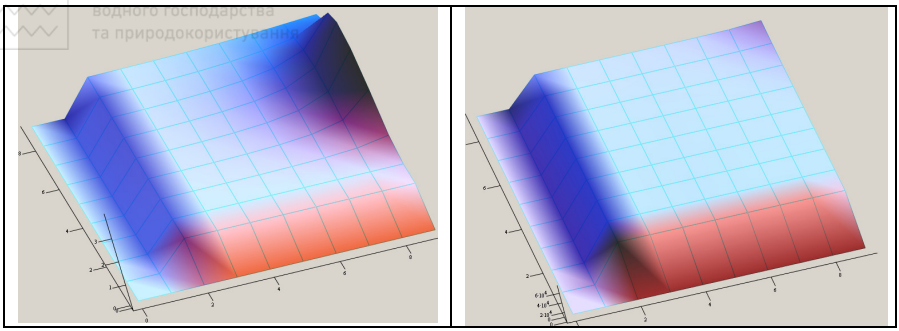
Рис. 4.34. Розподіл концентрації в момент часу t=1місяць



(модель 1) (модель 2)

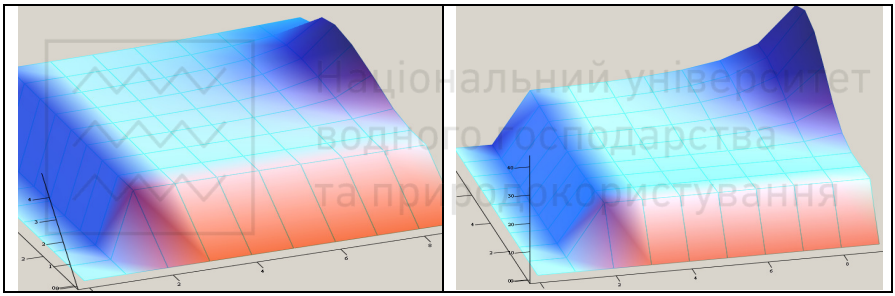
Рис. 4.35. Розподіл концентрації в момент часу t = 6 місяців

Національний університет
водного господарства
та природокористування



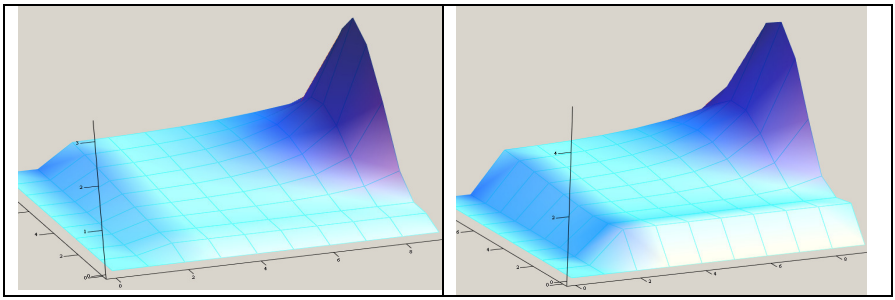
(модель 1) (модель 2)

Рис. 4.36. Розподіл концентрації при заданні граничної умови другого роду на поверхні області (на межі Γ_4) в момент часу t = 6 місяців



(модель 1) (модель 2)

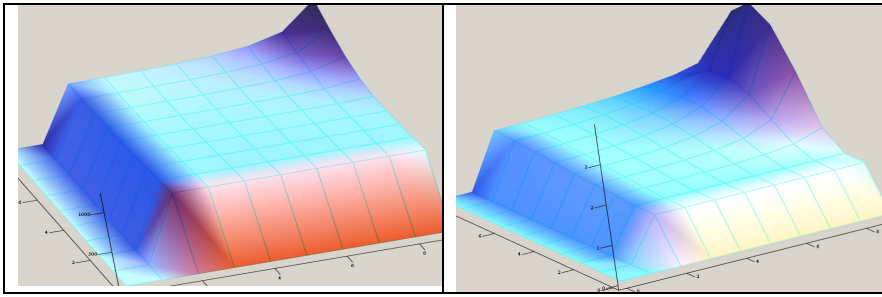
Рис. 4.37. Розподіл концентрації при заданні $C_0 = C_0 \cdot e^{-0,1 \cdot y}$ та граничної умови другого роду на поверхні області (на межі Γ_4) в момент часу t = 6 місяців



(модель 1) (модель 2)

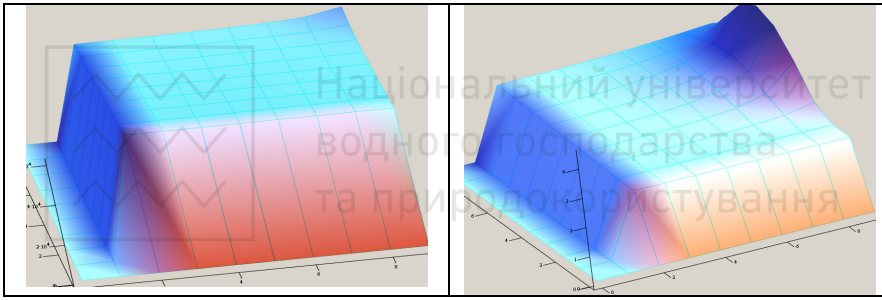
Рис. 4.38. Розподіл концентрації при змінених даних в момент часу t=0

Національний університет
водного господарства
та природокористування



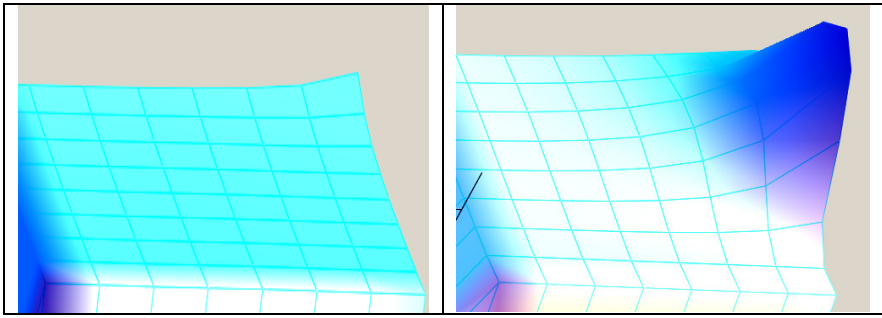
(модель 1) (модель 2)

Рис. 4.39. Розподіл концентрації при змінених даних в момент часу t= 3 роки



(модель 1) (модель 2)

Рис. 4.40. Розподіл концентрації при змінених даних в момент часу t= 5 років



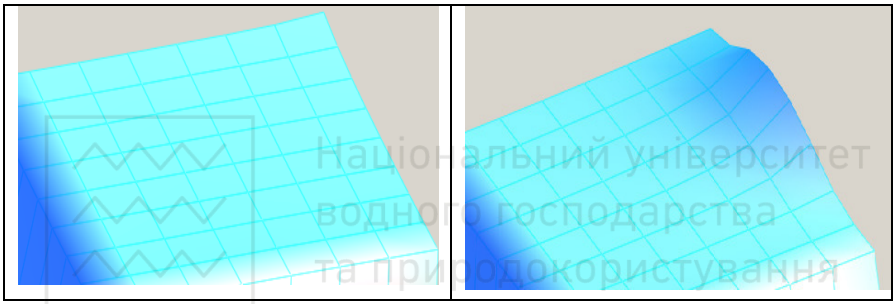
(модель 1) (модель 2)

Рис. 4.41. Розподіл концентрації при змінених даних, коли на поверхні області (на межі Γ_4) задається гранична умова 2-го роду

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Якщо в попередньому прикладі концентрація змінювалася рівномірно по всій лінії току, то в цьому випадку концентрація в точках, близьких до точки B фізичної області, зменшується швидше, ніж у всіх інших точках. Змінюючи один із вхідних параметрів було досліджено, що саме коефіцієнт масообміну γ має значний вплив на розподіл концентрації забрудника.

Оцінюючи придатність родючих земель для подальшого використання, можна сказати, що збільшивши початкові концентрації в середньому в два рази, час очищення родючого шару до гранично допустимого рівня збільшився в десятки разів і становить тепер 5-10 років (залежно від моделі).


Національний університет
водного господарства
та природокористування

(модель 1) (модель 2)

Рис. 4.42. Розподіл концентрації при змінених даних при $C_0 = C_0 \cdot e^{-0,1 \cdot y}$ і на поверхні області задається гранична умова 2-го роду

Змоделюємо ситуацію, коли на поверхні області (на межі Γ_4) задається умова другого роду (умова швидкого виносу забрудників) (див. рис. 4.41). Як бачимо при ускладненні задачі граничною умовою другого роду вплив коефіцієнт масообміну стає мало помітним. Час же, через який можна знову використовувати землі після забруднення не змінився і так само становить 5-10 років.

При заданні початкової концентрації радіонуклідів за експоненціальним законом, тобто $C_0 = C_0 \cdot e^{-0,1 \cdot y}$, загальний результат змінився таким чином, що час очищення родючих земель зменшився на 3 роки і становить 2-7 років (див. рис. 4.42).

З усього вищесказаного можна зробити висновок, що час очищення родючого шару грунту до гранично допустимих норм суттєво залежить від задання початкових та граничних умов і фізичних властивостей ґрунтового середовища.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Аверьянов С. Ф. Рассоляющее действие фильтрации из каналов / С. Ф. Аверьянов // Влияние орошения на режим грунтовых вод. – М. : Изд. АН СССР, 1959. – С. 44–120.

2. Андерсон Д. Вычислительная гидромеханика и теплообмен / Д. Андерсон, Дж. Таннехилл, Р. Плетчер. В 2-х т. – М. : Мир, 1990. – 726 с.

3. Аравин В. И. Теория движения жидкостей и газов в недеформируемой пористой среде / В. И. Аравин, С. Н. Нумеров. – М. : Гостехиздат, 1953. – 616 с.

4. Байокки К. О задачах со свободной границей, связанных с течением жидкости через пористые материалы / К. Байокки, Э. Мадженес // Успехи математических наук. – 1974. – 29, № 2. – С. 50–69.

5. Бан А. Влияние свойств горных пород на движение в них жидкостей / А. Бан. – М. : Гостехиздат, 1962. – 274 с.

6. Баренблатт Г. И. Движение жидкостей и газов в природных пластах / Г. И. Баренблатт, В. М. Ентов, В. М. Рыжик. – М. : Недра, 1984. – 211 с.

7. Беляев Н. Д. Экспертиза технического состояния морских гидротехнических сооружений / Н. Д. Беляев, В. В. Вилькевич // Гидротехническое строительство. – 2007. – № 5. – С. 37–45.

8. Березовский А. А. Лекции по нелинейным краевым задачам математической физики / А. А. Березовский. В 2-х т. – К. : Наук. думка, 1976. – Т. 1. – 287 с.; – Т. 2. – 292 с.

9. Богусский И. Г. О скорости химических реакций / И. Г. Богусский, Н. О. Каяндер // Журнал русского физико-химического общества. – 1876. – С. 8.

10. Бомба А. Я. Методи комплексного аналізу / А. Я. Бомба, С. С. Каштан, Д. С. Пригодницький, С. В. Ярощак. – Рівне : НУВГП, 2013. – 415 с.

11. Бомба А. Я. Нелінійні задачі типу фільтрація-конвекція-дифузія-масообмін за умов неповних даних / А. Я. Бомба, В. І. Гаврилюк, А. П. Сафоник, О. А. Фурсачик. – Рівне : НУВГП, 2011. – 276 с.

Національний університет водного господарства та природокористування

12. Бомба А. Я. Нелінійні математичні моделі процесів геогідродинаміки / А. Я. Бомба, В. М. Булавацький, В. В. Скопецький. – К. : Наук. думка, 2007. – 92 с.

13. Бомба А. Я. Об асимптотическом методе приближённого решения одной задачи массопереноса при фильтрации в пористой среде / А. Я. Бомба // Украинский математический журнал. – 1982. – 34, № 4. – С. 37–40.

14. Бондарев Э. Н. Конвективная диффузия в пористых средах с учетом явления адсорбции / Э. Н. Бондарев, В. Н. Николаевский // Журнал прикладной математики и технической физики. – 1962. – № 5. – С. 127–134.

15. Бочевер Ф. Н. Конвективная диффузия солей в радиальном потоке подземных вод / Ф. Н. Бочевер, А. Е. Орадовская, В. И. Пагуров // Журнал прикладной математики и технической физики. – 1966. – № 2. – С. 128–130.

16. Бугай Д. А. Локально-одномерная разностная схема для уравнения конвективной диффузии / Д. А. Бугай // Вычислительная и прикладная математика. – 1992. – Вып. 74. – С. 64–67.

17. Бугай Д. А. О численном решении задачи конвективной диффузии солей в основании гидротехнических сооружений / Д. А. Бугай, Г. Е. Мистецкий, Б. С. Шержуков // Гидромеханика. – 1990. – № 62. – С. 5–9.

18. Булавацький В. М. Некласичні моделі процесів тепло- та масопереносу / В. М. Булавацький, Ю. Г. Кривонос, В. В. Скопецький. – К : Наук. думка, 2005. – 283 с.

19. Буряк Я. Й. Вихідні положення математичної моделі гетеродифузного переносу радіонуклідів у приповерхневих шарах Землі / Я. Й. Бурак, Є. Я. Чапля // Доп. НАН України. – 1993. – № 10. – С. 59–63.

20. Бурак Я. Й. Фізико-математичне моделювання складних систем / Я. Й. Бурак, Є. Я. Чапля, Т. С. Нагірний та ін. – Львів : Сполом, 2004. – 264 с.

21. Бутузов В. Ф. Об одном сингулярно возмущенном уравнении параболического типа / В. Ф. Бутузов, А. В. Нестеров // Вестник МГУ. Вычислительная математика и кибернетика. – 1978. – № 2. – С. 49–56.

Національний університет водного господарства та природокористування

22. Бэр Я. Физико-математические основы фильтрации воды / Я. Бэр, Д. Заславски, С. Ирмей. – М. : Мир, 1971. – 452 с.

23. Вабищевич П. Н. Адаптивные сетки составного типа в задачах математической физики / П. Н. Вабищевич // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1989. – 29, № 6. – С. 902–914.

24. Вабищевич П. Н. Численное решение задачи напорной фильтрации под гидротехническим сооружением / П. Н. Вабищевич, Р. В. Гасиев // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1989. – 27, № 10. – С. 1580–1584.

25. Вабищевич П. Н. Численные методы решения задач со свободной границей / П. Н. Вабищевич. – М. : Изд-во Моск. ун-та. – 1987. – 164 с.

26. Вакал Е. С. Об одном методе решения нелинейных уравнений параболического типа / Е. С. Вакал, С. Л. Кивва, Г. Е. Мистецкий, О. Б. Стеля // Вычислительная и прикладная математика. – 1985. – Вып. 56. – С. 36–43.

27. Веретенцев В. А. Построение разностной сетки в области с криволинейными границами с помощью конформного отображения / В. А. Веретенцев // Актуальные вопросы прикладной математики. – М. : – Изд-во Моск. ун-та, 1989. – С. 88–93.

28. Веретехина Л. В. Численный расчёт тепломассопереноса при работе систематического дренажа и капельном орошении / Л. В. Веретехина, Л. И. Демченко, Д. А. Клюшин // Теория гидродинамических моделей технических задач: Сб. научн. трудов. – Свердловск, 1988. – С. 103–110.

29. Веригин Н. Н. Гидродинамические и физико-химические свойства горных пород / Н. Н. Веригин, С. В. Васильев, В. С. Саркисян, Б. С. Шержуков. – М. : Недра, 1977. – 272 с.

30. Веригин Н. Н. Диффузия и массообмен при фильтрации жидкостей в пористых средах / Н. Н. Веригин, Б. С. Шержуков // Развитие исследований по теории фильтрации в СССР (1917-1967). – М. : Наука, 1969. – С. 237–313.

31. Веригин Н. Н. Конвективная диффузия и массообмен при фильтрации растворов в пористой среде / Н. Н. Веригин, В. С. Саркисян // Гидрогеол. исслед. водозаборн., водопонизительн. и дренаж. систем. – М. : 1980. – С. 19–24.

Національний університет водного господарства та природокористування

32. Веригин Н. Н. Методы лабораторного определения параметров диффузии и сорбции при фильтрации в пористых средах / Н. Н. Веригин, Н. К. Голованова // Тр. ин-та ВОДГЕО, 1971. – 29. – С. 28–34.

33. Веригин Н. Н. Миграции солей при промывках сухих засоленных земель при их поверхностном засолении / Н. Н. Веригин, Н. П. Куранов // Совершенствование методов гидрогеологических и почвенно-мелиоративных исследований орошаемых и осушаемых земель. – М. : Колос, 1974. – С. 14–23.

34. Веригин Н. Н. Некоторые вопросы химической гидродинамики, представляющие интерес для мелиорации и гидротехники / Н. Н. Веригин // Изв. АН СССР, отн. – 1953. – № 7. – С. 1369–1382.

35. Веригин Н. Н. Распространение фронта загрязнения в районах наземных и подземных хранилищ с учетом диффузии и равновесного массообмена / Н. Н. Веригин, А. В. Шибанов // Труды ин-та ВОДГЕО. – 1975. – Вып. 54. – С. 6–17.

36. Веригин Н. Н. Растворение и вынос солей в основаниях гидротехнических сооружений / Н. Н. Веригин, Б. С. Шержуков // Тр. координац. совещаний по гидротехнике. – Л. : ВНИИГ. –1970. – Вып. 48. – С. 263–277.

37. Власюк А. П. Застосування чисельних конформних відображень до розв'язання нестаціонарної задачі фільтрації підземних вод / А. П. Власюк, О. П. Остапчук // Тези доп. Міжн. конф. «Прогнозування та прийняття рішень в умовах невизначеності». – Київ – Рівне, 2008. – С. 250–252.

38. Власюк А. П. Математичне моделювання задачі про утилізацію радіонуклідів в шарі ґрунту / А. П. Власюк, О. П. Остапчук // Тези доп. XI Міжн. конф. ім. академіка М. Кравчука. – К., 2006. – С. 57.

39. Власюк А. П. Математичне моделювання переносу сольових розчинів при фільтрації із свердловини / А. П. Власюк, О. П. Остапчук // Вісник Київського університету. Сер. фіз.-мат. наук. – К., 2007. – Вип. 3. – С. 130–134.

40. Власюк А. П. Математичне моделювання переносу сольових розчинів при фільтрації із свердловини / А. П. Власюк, О. П. Остапчук // Тези доп. Всеукр. наук.-метод. конф. «Сучасні

Національний університет водного господарства та природокористування
проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації». – Кам'янець-Подільський, 2004. – С. 248.

41. Власюк А. П. Математичне моделювання переносу сольових розчинів при фільтрації із свердловини в неізотермічних умовах / А. П. Власюк, О. П. Остапчук // Тези доп. XIII Міжн. конф. ім. академіка М. Кравчука. – К., 2010. – С. 90.

42. Власюк А. П. Математичне моделювання процесів масопереносу в областях з криволінійними фіксованими границями / А. П. Власюк // Вісн. Укр. держ. академії водного господарства. – Рівне, 1998. – Вип. 1. Ч. 1. – С.203–207.

43. Власюк А. П. Моделювання процесу масопереносу сольових розчинів в основі гідротехнічного об'єкта / А. П. Власюк, О.П. Остапчук // Вісник Хмельницького національного університету. Сер. техн. науки. – Хмельницький, 2005. – Ч. 1, том 2. – С. 5–10.

44. Власюк А. П. Монотонна різницева схема для нелінійного одновимірного рівняння параболічного типу, що містить першу похідну / А. П. Власюк, О. П. Остапчук, О. М. Степанченко // Вісник Київського університету. Сер. фіз.-мат. наук. – К., 2005. – Вип. 2. – С. 188–197.

45. Власюк А. П. Побудова монотонної різницевої схеми для одновимірного нелінійного рівняння параболічного типу, що містить першу похідну / А. П. Власюк, О. П. Остапчук // Тези доп. Міжн. конф. «Прогнозування та прийняття рішень в умовах невизначеності». – Бердянськ, 2005. – С. 113–114.

46. Власюк А. П. Розв'язання задачі фільтрації рідини до горизонтального дренажу з використанням чисельних конформних відображень / А. П. Власюк, О. П. Остапчук // Тези доп. XII Міжн. конф. ім. академіка М. Кравчука. – К., 2008. – С. 71.

47. Власюк А. П. Чисельне дослідження однієї задачі масопереносу сольових розчинів у ґрунтових масивах / А. П. Власюк, О. П. Остапчук // Тези доп. Міжн. наук.-техн. конф. «Проблеми математичного моделювання сучасних технологій (ПММ-2002)». – Хмельницький, 2002. – С. 24.

48. Власюк А. П. Чисельне дослідження одновимірної задачі масопереносу сольових розчинів у ґрунтових масивах / А. П. Власюк, О. П. Остапчук // Вісник Київського університету. Сер. фіз.-мат. наук. – К., 2004. – Вип. 4. – С. 228–237.

Національний університет водного господарства та природокористування

49. Власюк А. П. Чисельне моделювання масопереносу при плановій стаціонарній фільтрації сольових розчинів в двозв'язних кільцевих областях / А. П. Власюк, О. П. Остапчук, А. Ю. Шмендрук // Вісник НУВГП. – Рівне, 2012. – Вип. 2 (58). – С. 204–211.

50. Власюк А. П. Чисельне моделювання переносу сольових розчинів в основі ґрунтової греблі / А. П. Власюк, О. П. Остапчук // Тези доп. Всеукр. наук. конф. «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики». – Львів, 2004. – С. 33.

51. Власюк А. П. Чисельне моделювання переносу сольових розчинів в основах гідротехнічних об'єктів / А. П. Власюк, О. П. Остапчук // Тези доп. Міжн. школи-семінару «Прогнозування та прийняття рішень в умовах невизначеності». – Тернопіль, 2004. – С. 217–219.

52. Власюк А. П. Чисельне розв'язування задачі стаціонарної фільтрації до горизонтального дренажу при наявності вільної поверхні в неоднорідному ґрунтовому середовищі / А. П. Власюк, О. П. Остапчук, М. Г. Раковець // Вісник НУВГП. – Рівне, 2008. – Вип. 4 (44). – С. 72–79.

53. Власюк А. П. Числове моделювання локалізації радіонуклідів за допомогою дрен-вловлювачів при плоско-вертикальній напірній фільтрації / А. П. Власюк, О. П. Остапчук // Тези доп. Всеукр. наук. конф. «Сучасні проблеми математичного моделювання та обчислювальних методів». – Рівне, 2013. – С. 43.

54. Власюк А. П. Числове моделювання масопереносу сольових розчинів під гідротехнічними спорудами / А. П. Власюк, О. П. Остапчук // Вісник НУВГП. Сер. техн. науки. – Рівне, 2006. – Вип. 4 (36). Ч. 2. – С. 30–38.

55. Власюк А. П. Числове моделювання міграції радіонуклідів при горизонтальній фільтрації підземних вод / А. П. Власюк, О. П. Остапчук // Тези доп. Міжн. школи-семінару «Прогнозування та прийняття рішень в умовах невизначеності». – Східниця, 2006. – С. 180–181.

56. Власюк А. П. Числове моделювання міграції радіонуклідів при плановій фільтрації підземних вод / А. П. Власюк, О. П. Остапчук // Тези доп. Міжн. конф. «Прогнозування та прийняття рішень в умовах невизначеності». – Чернівці, 2007. – С. 72–74.

Національний університет водного господарства та природокористування

57. Власюк А. П. Числове моделювання однієї задачі про утилізацію радіонуклідів / А. П. Власюк, О. П. Остапчук // Тези доп. Міжн. конф. «Прогнозування та прийняття рішень в умовах невизначеності». – Бердянськ, 2005. – С. 111–113.

58. Власюк А. П. Числове моделювання одновимірної задачі переносу сольових розчинів при фільтрації до водозабірника в неізотермічних умовах / А. П. Власюк, О. П. Остапчук // Вісник НУВГП. Сер. техн. науки. – Рівне, 2006. – Вип. 4 (36). Ч. 2. – С. 39–48.

59. Власюк А. П. Числове моделювання процесу переносу сольових розчинів в двозв'язних кільцевих областях в неізотермічних умовах / А. П. Власюк, О. П. Остапчук // Вісник НУВГП. – Рівне, 2007. – Вип. 4 (40). Ч. 3. – С. 293–298.

60. Власюк А. П. Автоматизована система скінченно-елементного покриття багатозв'язних та складених областей / А. П. Власюк, М. С. Філатов // Вісник НУВГП. – Рівне, 2006. Вип. 4 (36). Ч. 2. – С. 35–48.

61. Власюк А. П. Автоматическое построение конформных и квазиконформных отображений двухсвязных и трехсвязных областей: Препр. / А. П. Власюк, В. Г. Михальчук // АН УССР. Ин-т математики; 91.57. – Киев, 1991. – 56 с.

62. Власюк А. П. Автоматическое построение конформных и квазиконформных отображений четырехугольных областей с помощью разностных сеток с "плавающими" узлами: Препр. / А. П. Власюк, В. Г. Михальчук // АН УССР. Ин-т математики; 89.79. – Киев, 1989. – 55 с.

63. Власюк А. П. Експериментальні дослідження деяких параметрів фільтрації сольових розчинів в піщаних грунтах / А. П. Власюк, М. Т. Кузло // Меліорація і водне господарство. – К. : 2000. – Вип. 87. – С. 43–46.

64. Власюк А. П. Комп'ютерна візуалізація гідродинамічних полів в областях з криволінійними межами / А. П. Власюк, Т. П. Дячук // Вісник НУВГП. – Рівне, 2006. – Вип. 4 (36). Ч. 2. – С. 35–48.

65. Власюк А. П. Математичне моделювання консолідації ґрунтів в процесі фільтрації сольових розчинів / А. П. Власюк, П. М. Мартинюк. – Рівне : НУВГП, 2004. – 210 с.

Національний університет водного господарства та природокористування

66. Власюк А. П. Математичне моделювання консолідації ґрунтів при фільтрації сольових розчинів в неізотермічних умовах / А. П. Власюк, П. М. Мартинюк. – Рівне : НУВГП, 2008. – 416 с.

67. Власюк А. П. Некоторые случаи фильтрации под флютбетами в анизотропных средах / А. П. Власюк // Мат. методы исследования фильтрации и массопереноса. – К. : Ин-т математики АН УССР, 1984. – С. 77–84.

68. Власюк А. П. Про деякі нові математичні моделі підземної гідромеханіки / А. П. Власюк // Вісник РДТУ. – Рівне, 2000. – Вип. 3 (5). Ч. 2. – С. 57–62.

69. Власюк А. П. Теоретичне дослідження процесів розчинення та вимивання солей і карстових порід при фільтрації підземних вод в областях з криволінійними та вільними границями: автореф. дис. ... д-ра техн. наук: 05.13.02 / Власюк Анатолій Павлович; Київський ун-т ім. Тараса Шевченка. – К., 1996. – 43 с.

70. Власюк А. П. Фільтраційна консолідація глинистих ґрунтів при наявності масопереносу солей / А. П. Власюк, О. В. Жеребятьев // Вісн. Укр. держ. академії водного господарства. – Рівне, 1998. – С. 40–43.

71. Власюк А. П. Чисельне розв'язання задачі розчинення і винесення пластових солей з основи гідротехнічних споруд / А. П. Власюк // Доп. НАН України. – 1995. – №8. – С. 37–39.

72. Власюк А. П. Чисельне розв'язування задач консолідації та фільтраційного руйнування ґрунтів в умовах тепло-масопереносу методом радіальних базисних функцій / А. П. Власюк, П. М. Мартинюк. – Рівне: НУВГП, 2010. – 277 с.

73. Гиринский Н. К. Расчет фильтрации под гидротехническими сооружениями на неоднородных грунтах / Н. К. Гиринский. – М.-Л. : Гостехиздат, 1941. – 160 с.

74. Гладкий А. В. Алгоритмизация и численный расчёт фильтрационных схем / А. В. Гладкий, И. И. Ляшко, Г. Е. Мистецкий. – К : Вища школа, 1981. – 288 с.

75. Глущенко А. А. Дослідження розповсюдження забруднень під дренованими гідросплрудами / А. А. Глущенко, Т. Л. Гординська / Вісник Київського університету. Сер. фіз.-мат. наук. –1997. – Вип. 2. – С. 16 – 27.

Національний університет водного господарства та природокористування

76. Годунов С. К. О расчетах конформных отображений и построении разностных сеток / С. К. Годунов, Г. П. Прокопов // Журнал вычислительная математика и математическая физика. – 1967. – 7, № 5. – С. 1031–1059.

77. Годунов С. К. Разностные схемы / С. К. Годунов, В. С. Рябенький. – М. : Наука, 1976. – 400 с.

78. Голубев В. С. Динамика геохимических процессов / В. С. Голубев. – М. : Недра, 1981. – 208 с.

79. Гольдберг В. М. Гидрогеологические основы охраны подземных вод от загрязнения / В. М. Гольдберг, С. Газда. – М. : Недра, 1984. – 262 с.

80. Горев Л. Н. Основи моделювання в гідроекології / Л. Н. Горев. – К. : Либідь, 1996. – 336 с.

81. Гужев Д. С. и др. Численные методы решения задач химической кинетики с диффузией / Д. С. Гужев и др. // Математическое моделирование. – 1992. – Т.4, №1. – С.98–110.

82. Дворкин Л. Б. К теории конвективной диффузии солей в пористых средах с учетом влияния “тупиковых” пор / Л. Б. Дворкин // Журнал физической химии. – 1968. – Т. 42, № 4. – С. 238–243.

83. Дейнека В. С. Математические модели и методы расчета задач с разрывными решениями / В. С. Дейнека, И. В. Сергиенко, В. В. Скопецький. – К. : Наукова думка. – 1995. – 263 с.

84. Дейнека В. С. Модели и методы решения задач в неоднородных середах / В. С. Дейнека, И. В. Сергиенко. – К. : Наукова думка. – 2001. – 606 с.

85. Дейнека В. С. Модели и методы решения задач с условиями сопряжения / В. С. Дейнека, И. В. Сергиенко, В. В. Скопецький. – К. : Наукова думка. – 1998. – 615 с.

86. Денисов Ю. М. Математическая модель переноса влаги, тепла и солей в почвогрунтах / Ю. М. Денисов // Метеорология и гидрогеология. – 1978, № 3. – С. 71–79.

87. Дьяконов Е. Г. Минимизация вычислительной работы. Асимптотически оптимальные алгоритмы для эллиптических задач / Е. Г. Дьяконов. – М. : Наука, 1989. – 272 с.

88. Згуровский М. З. Численное моделирование распространения загрязнений в окружающей среде /

Національний університет водного господарства та природокористування

М. З. Згуровский, В. В. Скопецкий, В. К. Хрущ, Н. Н. Беляев. – К. : Наукова думка, 1997. – 367 с.

89. Иванов Н. С. Тепло- и массообмен в горных породах / Н. С. Иванов // Теоретич. исследов. и использов. тепла Земли. – М. : Наука, 1966. – С. 167–183.

90. Ильин В. П. Численные методы решения задач электрофизики / В. П. Ильин. – М. : Наука, 1985. – 336 с.

91. Калиткин Н. Н. Численные методы / Н. Н. Калиткин. – М. : Наука, 1978. – 512 с.

92. Клыков В. Е. Численное решение задачи о растворении и выщелачивании водорастворимых веществ из горных пород / В. Е. Клыков // Вопросы механики. – 1975. – 3. – С. 47–53.

93. Кузло М. Т. Дослідження впливу концентрації сольових розчинів на деформаційні характеристики грунтів / М. Т. Кузло, І. А. Філатова // Вісник НУВГП. – Рівне, 2006. – Вип. 4 (36). Ч. 2. – С. 209–214.

94. Курант Р. Уравнения с частными производными / Р. Курант. – М. : Мир, 1964. – 830 с.

95. Лаврентьев М. А. Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. – М. : Наука, 1973. – 736 с.

96. Лаврик В. И. Аналитическое и численно-аналитическое решение двумерных краевых задач конвективной диффузии растворимых веществ при фильтрации подземных вод: Препр. / В. И. Лаврик, А. Ф. Милютин //АН УССР. Ин-т математики; 78.24. – Киев, 1978. – 56 с.

97. Лаврик В. И. Исследование конвективного массопереноса при двумерной фильтрации подземных вод в условиях наличия массообмена: препр. / В. И. Лаврик, Н. А. Никифорович // АН УССР. Ин-т математики; 82.20). – Киев, 1982. – 46 с.

98. Лаврик В. И. Конформные отображения физико-топологических моделей / В. И. Лаврик, В. П. Фильчакова, А. А. Яшин. – К. : Наукова думка, 1990. – 376 с.

99. Лаврик В. И. Некоторые задачи фильтрации и массопереноса в неоднородных анизотропных пористых средах: Препр. / В. И. Лаврик, А. П. Власюк // АН УССР. Ин-т математики; 85.15. – Киев, 1985. – 59 с.

Національний університет водного господарства та природокористування

100. Лаврик В. И. О двух краевых задачах неустановившейся конвективной диффузии в случае фильтрации грунтовых вод со свободной поверхностью / В. И. Лаврик // Український математичний журнал. – 1976. – 28, № 5. – С. 667–681.

101. Лаврик В. И. О приближенном решении краевых задач конвективной диффузии растворимых в фильтрационном потоке веществ / В. И. Лаврик // Український математичний журнал. – 1979. – 31, № 4. – С. 437–441.

102. Лаврик В. И. О решении краевых задач конвективной диффузии растворимых веществ, когда скорость фильтрации осредняется по одной из криволинейных координат / В. И. Лаврик // Теория и расчеты фильтрации. – К. : Наукова думка, 1980. – С. 83–96.

103. Лаврик В. И. Об асимптотическом приближении решений некоторых задач массопереноса при фильтрации в неоднородной анизотропной среде: Препр. / В. И. Лаврик, А. Я. Бомба, А. П. Власюк // АН УССР. Ин-т математики; 85.72. – Киев, 1985. – 17 с.

104. Лаврик В. И. Применение метода прямых к решению задач массопереноса при профильной и плановой фильтрации подземных вод: Препр. / В. И. Лаврик, И. В. Рогаль // АН УССР. Ин-т математики; 83.32. – Киев, 1983. – 57 с.

105. Лаврик В. И. Решение задач массопереноса водорастворимых веществ в случае зависимости коэффициента конвективной диффузии от скорости фильтрации. Некоторые задачи массопереноса при фильтрации подземных вод: Препр. / В. И. Лаврик // АН УССР. Ин-т математики; 81.18. – Киев, 1981. – С. 3–24.

106. Лаврик В. И. Теоретическое исследование процессов фильтрации, загрязнения и засоления подземных вод: автореф. дисс. … доктора техн. наук / Лаврик Владимир Иванович; Інститут гідромеханіки АН УРСР. – Киев, 1979.– 39 с.

107. Лаврик В. И., Бомба А. Я. Об одном приближенном методе решения задач конвективного массопереноса при плановой фильтрации подземных вод / В. И. Лаврик, А. Я. Бомба // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1980. – № 5. – С. 47–51.

Національний університет водного господарства та природокористування

108. Ладыженская О. А. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева. – М. : Наука, 1973. – 473 с.

109. Левич В. Г. Физико-химическая гидродинамика / В. Г. Левич. – 2-е изд., М. : 1959. – 699 с.

110. Лукнер Л. Моделирование миграции подземных вод / Л. Лукнер В. М. Шестаков. – М. : Недра, 1986. – 208 с.

111. Лыков А. В. Теория тепло- и массопереноса / А. В. Лыков, Ю. А. Михайлов. М. : Госэнергоиздат, 1963. – 536 с.

112. Ляшко И. И. Метод мажорантных областей в теории фильтрации / И. И. Ляшко, И. М. Великоиваненко, В. И. Лаврик, Г. Е. Мистецкий. – К : Наукова думка, 1974. – 200 с.

113. Ляшко И. И. Расчет фильтрации в зоне гидротехнических сооружений / И. И. Ляшко, Г. Е. Мистецкий, А. Я. Олейник. – К : Наукова думка, 1974. – 200 с.

114. Ляшко И. И. Численное интегрирование многомерного уравнения конвективной диффузии / И. И. Ляшко, Г. Е. Мистецкий, Д. А. Бугай // Вычислительная и прикладная математика. – 1989. – Вып. 67. – С. 50–55.

115. Ляшко И. И. Численное решение задач тепло- и массопереноса в пористых средах / И. И. Ляшко, Л. И. Демченко, Г. Е. Мистецкий. – К. : Наукова думка, 1991. – 264 с.

116. Ляшко С. И. Моделирование и оптимизация подземного массопереноса / С. И. Ляшко, Д. А. Клюшин, А. С. Тригуб. – Київ : Наук. думка, 1998. – 240 с.

117. Ляшко С. И. Обобщенное управление линейными системами / С. И. Ляшко. – Київ : Наук. думка, 1998. – 471 с.

118. Мандзак Т. І. Математичне моделювання і числовий аналіз адвекції-дифузії у неоднорідних середовищах / Т. І. Мандзак, Я. Г. Савула. – Львів : Сплайн, 2009. – 148 с.

119. Мартинюк П. М. Дослідження існування та єдиності розв’язку однієї квазілінійної параболічної системи диференційних рівнянь другого порядку: Препр. / П. М. Мартинюк, А. П. Власюк // НАН України. Ін-т математики; 2001.3. – К., 2001. – 20 с.

120. Марчук Г. И. Введение в проекционно-сеточные методы / Г. И. Марчук, В. И. Агошков. – М. : Наука, 1981. – 416 с.

Національний університет водного господарства та природокористування

121. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики / Г. И. Марчук. – М. : Наука, 1989. – 608 с.

122. Марчук Г. И. Повышение точности решений разностных схем / Г. И. Марчук, В. В. Шайдуров. – М. : Наука, 1979. – 318 с.

123. Математические модели контроля загрязнения воды / Под ред. А. Джеймса. – М. : Мир, 1981. – 472 с.

124. Методы прогноза солевого режима грунтов и грунтовых вод. / Под ред. Н. Н. Веригина. – М. : Колос, 1979. – 336 с.

125. Миграция химических элементов в подземных водах СССР. – М. : Наука. – 1974. – 239 с.

126. Мироненко В. А. Динамика подземных вод / В. А. Мироненко. – М. : Недра, 1983. – 357 с.

127. Мироненко В. А. Основы гидрогеомеханики / В. А. Мироненко, В. М. Шестаков. – М. : Недра, 1984. – 232 с.

128. Мистецкий Г. Е. Гидростроительство. Автоматизация расчета массопереноса в почвогрунтах / Г. Е. Мистецкий. – Киев : 1985. – 185 с.

129. Моделирование вещества и энергии в природных системах. – Новосибирск: Наука, 1984. – 192 с.

130. Моделирование и управление водно-солевым режимом почв. – Алма-Ата: Наука, 1976. – 180 с.

131. Молтянер Г. Л. Массоперенос в подземных водах / Г. Л. Молтянер, А. С. Хабиров. – Ташкент: Укнтувчи, 1976. – 100 с.

132. Нестационарные процессы в химических реакторах. – Новосибирск: Ин-т катализа. СО АН СССР. – 1982. – 86 с.

133. Микитенко Н. И. Теория тепломассопереноса / Н. И. Никитенко. – К. : Наукова думка, 1983. – 352 с.

134. Николаевский В. Н. Конвективная диффузия в пористых средах / В. Н. Николаевский // Прикладная математика и механика. – 1959. – 23, Вып. 6. – С. 1042 – 1050.

135. Николаевский В. Н. Механика пористых и трещиноватых сред / В. Н. Николаевский. – М. : Недра, 1984. – 232 с.

136. Николаевский В. Н. Некоторые задачи распространения меченых частиц в фильтрационных потоках / В. Н. Николаевский // Изв. АН СССР. Мех. и машиностроение. – 1960. – № 5. – С. 189 – 193.

Національний університет водного господарства та природокористування

137. Нумеров С. Н. Диффузия растворимых веществ в основаниях гидротехнических сооружений / С. Н. Нумеров, А. Н. Патрашев //Тр. Ленинград. политехн. ин-та. – 1947. – № 4. – С. 165–169.

138. Олейник А. Я. Теоретические исследования фильтрационных процессов в пористых средах с изменяющимися водно-физическими свойствами / А. Я. Олейник, В. Л. Поляков // Прикладна гідромеханіка. – 2007, Т. 9 (81), вип. 2-3. – С. 122–137.

139. Орадовская А. Е. Миграция вещества и тепла в подземных водах / А. Е. Орадовская // Гидрогеологические исследования за рубежем. – М. : Наука, 1982. – С. 33–74.

140. Орадовская А. Е. Некоторые экспериментальные данные о коэффициенте диффузии (дисперсии) в горных породах / А. Е. Орадовская // Тр. ин-та ВОДГЕО, гидрогеология. – 1969. – № 22. – С. 99–102.

141. Ортега Дж. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными / Дж. Ортега, В. Рейнболдт. – М. : Мир, 1975. – 558 с.

142. Остапчук О. П. Математичне моделювання процесу переносу сольових розчинів при нестаціонарній фільтрації із свердловини / О. П. Остапчук // Вісник НУВГП. – Рівне, 2007. – Вип. 4 (40). Ч. 3. – С. 329–334.

143. Остапчук О. П. Математичне та комп'ютерне моделювання вертикальної міграції радіонуклідів в ґрунтовому масиві в неізотермічних умовах / О. П. Остапчук, М. О. Ющук // Вісник НУВГП. – Рівне, 2011. – Вип. 3 (55). – С. 188–195.

144. Остапчук О. П. Чисельне моделювання процесу очищення горизонтального шару ґрунту від радіонуклідів при їх вертикальній міграції / О. П. Остапчук // Математичне та комп'ютерне моделювання. Сер. технічні науки. – Кам'янець-Подільський, 2010. – Вип. 4. – С. 162–172.

145. Павловский Н. Н. Теория движения грунтовых вод под гидротехническими сооружениями и ее основные приложения. – М.- Л. : Изд-во АН СССР, 1956. – Т. 2. – 352 с.

146. Патрашев А. Н. Диффузия солей при одномерной фильтрации / А. Н. Патрашев, Н. Х. Арутюнян // Изв. ВНИИГ. – 1941. – 30. – С. 64–77.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

147. Пейре Р. Вычислительные методы в задачах механики жидкости / Р. Пейре, Т. Тейлор. – Л. : Гидрометеоиздат, 1986. – 353 с.

148. Пеньковский В. И. Одномерная задача растворения и вымыва солей при фильтрации с большим значением критерия Пекле / В. И. Пеньковский // Журнал прикладной математики и технической физики. – 1969. – № 2. – С. 148–152.

149. Петрик М. Р. Математичне моделювання адсорбційного нелінійного масопереносу в каталітичних пористих середовищах / М. Р. Петрик, Д. М. Михалик // Вісник ТДТУ ім. І. Пулюя. – 2009. – № 4. – С. 193–198.

150. Петрик М. Р. Моделирование и анализ концентрационных полей нелинейной компетитивной двухкомпонентной диффузии в среде нанопористых частиц / М. Р. Петрик, Ж. Фрессард, Д. М. Михалик // Проблемы управления и информатики. – 2009. – № 4. – С. 73–83.

151. Питьева К. Е. Практикум по гидрогеохимии / К. Е. Питьева, С. А. Брусиловский, Л. Ю. Вострикова, С. М. Чесалов. – М. : Изд-во Моск. ун-та, 1984. – 320 с.

152. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод / П. Я. Полубаринова-Кочина. – М. : Наука, изд. 2, 1977. – 664 с.

153. Поляков В. Л. К расчету фильтрации со свободной поверхностью / В. Л. Поляков // Теория и расчеты фильтрации. – К. : Наук. думка, 1980. – С. 46–56.

154. Прокопов Г. П. Построение ортогональных разностных сеток посредством расчета конформных отображений: Препр. / Г. П. Прокопов // АН СССР. Ин-т прикл. математики; 70.45. – М. : 1970. – 46 с.

155. Развитие исследований по теории фильтрации в СССР (1917-1967). – М. : Наука, 1969. – 545 с.

156. Рельтов Б. Ф. Дальнейшие экспериментальные исследования осмотических явлений в связных грунтах / Б. Ф. Рельтов, Н. А. Новицька, Ю. С. Большакова// Изв. ВНИИГ. – 1955. – Т. 53. – С. 147–164.

157. Савула Я. Г. Числовий аналіз задач математичної фізики варіаційними методами / Я. Г. Савула. – Львів : ЛНУ ім. І.Франка, 2004. – 221 с.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

158. Самарский А. А. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры / А. А. Самарський, А. П. Михайлов. – 2-е изд. испр. – М. : физмат, 2002. – 320 с.

159. Самарский А. А. Методы решения сеточных уравнений / А. А. Самарский, Е. С. Николаев. – М. : Наука, 1978. – 590 с.

160. Самарский А. А. Однородные разностные схемы для нелинейных уравнений параболического типа / А. А. Самарский // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1962. – 2, № 1. – С. 25–56.

161. Самарский А. А. Разностные методы для эллиптических уравнений / А. А. Самарский, В. Б. Андреев. – М. : Наука, 1976. – 352 с.

162. Самарський А. А. Теория разностных схем. / А. А. Самарский. – 3-е изд. – М. : Наука, 1989. – 616 с.

163. Самарский А. А. Устойчивость разностных схем / А. А. Самарский, А. В. Гулин. – М. : Наука, 1973. – 356 с.

164. Самарский А. А. Численные методы математической физики / А. А. Самарский, А. В. Гулин. – М. : Наука, 2003. – 316 с.

165. Саульев В. К. Интегрирование уравнений параболического типа методом сеток / В. К. Саульев. – М. : Физматгиз, 1960. – 332 с.

166. Сергеев Е. М. Грунтоведение / Е. М. Сергеев, Г. А. Голод–ковская, Р. С. Зиангиров, В. И. Осипов, В. Т. Трофимов. – Изд-во Моск. ун-та, 1973. – 387 с.

167. Сергиенко И. В. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах / И. В. Сергиенко, В. В. Скопецкий, В. С. Дейнека. – К. : Наук. думка, 1991. – 432 с.

168. Сергиенко И. В. Некоторые вопросы автоматизации исследования сложных физических полей / И. В. Сергиенко, В. В. Скопецкий, В. С. Дейнека // Пакеты прикладных программ. Опыт использования. – М. : Наука, 1989. – С. 45–53.

169. Сергієнко І. В. Розв'язок нелінійних параболічних рівнянь при наявності розривів і членів конвективного переносу / І. В. Сергієнко, В. С. Дейнека, В. В. Скопецький // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1989. – № 9. – С. 21–24.

170. Ситников А. Б. Динамика влаги и солей в почвогрунтах зоны аэрации / А. Б. Ситников. – К. : Наук. думка, 1986. – 152 с.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

171. Смирнов С. И. Происхождение солености подземных вод седиментационных бассейнов / С. И. Смирнов. – М. : Недра, 1971. – 216 с.

172. Тихонов А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – М. : Наука, 1972. – 735 с.

173. Федоренко Р. П. Итерационные методы решения разностных эллиптических уравнений / Р. П. Федоренко // Успехи мат. наук. – 1973. – 28, 2. – С. 121–182.

174. Фіалко А. И. Исследование влияния степени минерализации водних ратворов на фильтрационные свойства горнах пород / А. И. Фиалко, Ф. А. Руденко // Материалы по геологи, гидрогеологии и геохимии Украины, РСФСР и Молдавии. – Вип. 14. – К. : Вища школа, 1978. – С. 63–68.

175. Фильчаков П. Ф. Теория фильтрации под гидротехническими сооружениями: В 2 т. / П. Ф. Фильчаков. – Киев : Изд-во АН УССР, 1959-1960. – Т. 1. – 307 с. – Т. 2. – 256 с.

176. Франк-Каменецкий Д. А. Диффузия и теплопередача в химической кинетике / Д. А. Франк-Каменецкий. – М. : Наука, 1987. – 404 с.

177. Франчук А. У. Таблицы теплофизических показателей строительных материалов / А. У. Франчук. – М.-Л. : Промстройиздат. – 1949. – 120 с.

178. Фрид Ж. Загрязнение подземных вод /Ж. Фрид.– М. : Недра, 1981. – 304 с.

179. Хейгеман Л., Янг Д. Прикладные итерационные методы / Л. Хейгеман, Д. Янг. – М. : Мир, 1968. – 446 с.

180. Чапля Є Я. Фізико-математичне моделювання гетеро-дифузного масопереносу / Є Я. Чапля, О. Ю. Чернуха. – Львів : Сполом, 2003. – 128 с.

181. Чернуха О. Ю. Про один метод побудови розв'язку контактно-крайових задач дифузії при мішаних граничних умовах / О. Ю. Чернуха // Доп. НАН України. – 2006. – № 1. – С. 82–87.

182. Чудновский А. Ф. Теплофизические характеристики дисперсионных материалов / А. Ф. Чудновский. – М. : Физматгиз, 1962. – 456 с.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

183. Шаманский В. Е. Численное решение задач фильтрации грунтовых вод на ЭЦВМ / В. Е. Шаманский. – К. : Наук. думка, 1969. – 375с.

184. Шержуков Б. С. Диффузия и неравновесный массообмен при фильтрации в районах наземных и подземных хранилищ промстоков / Б. С. Шержуков // Тр. ин-та ВОДГЕО. – 1975. – Вып. 54. – С. 25–39.

185. Шестаков В. М. Динамика подземных вод / В. М. Шестаков. – М. : Изд-во Моск. ун-та, 2 изд. – 1979. – 368 с.

186. Шинкаренко Г. А. Проекційно-сіткові методи розв'язування початково-крайових задач. – К. : НМКВО, 1991. – 88 с.

187. Шульгин Д. Ф. Определение параметров переноса солей в почвогрунтах по данным полевых опытов / Д. Ф. Шульгин, Р. М. Машарипов // Мелиорация и водное хозяйство. – Киев : Урожай. – 1973. – 26. – С. 243–251.

188. Шульгин Д. Ф. Прогнозирование процессов растворения и вымывания воднорастворимых веществ в основании гидротехнических сооружений на ЭВМ / Д. Ф. Шульгин, В. Е. Клыков // Фильтрация воды в пористых средах. – К. : Наук. думка. – 1978. – Ч. 3. – С. 34–40.

189. Щукарев А. Н. Распределение веществ между двумя несмешивающимися растворителями / А. Н. Щукарев // Журнал русского физико-химического общества. – 1896. – 28. – С. 604–614.

190. Яненко Н. Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики / Н. Н. Яненко. – Новосибирск : Наука, 1967. – 195 с.

191. Bear J. Introduction to modeling of Transport Phenomena in Porous Media / J. Bear, Y. Bachmat. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991. – 580 p.

192. Bonelli S. Approximate solution to the diffusion equation and its application to seepage-related problems / S. Bonelli // Applied Mathematical Modeling. – 2009. – V. 33. – P. 110–126.

193. Brezzi F. A monotonic scheme for scheme for advection-diffusion problem / F. Brezzi, L. Marini, P. Pietra, A.Russo // Trans. Theory Stat. Phys. – 1996. – Iss.22. –P.463–475.

Національний університет водного господарства та природокористування

194. Burman E. Edge stabilization for Galerkin approximations of convection-diffusion problems: Preprint / E. Burman, P. Hansbo. – Chalmers University of Technology. Chalmers Finite Element Center; 2002.17. – Goteborg, 2002. – 18 p.

195. Chen C.-T. Radionuclide transport in fractured porous media: Analytical solutions for a system of parallel fractures with a constant inlet flux / C.-T. Chen, S.-H. Li // Waste Management. – 1997. – V. 17, № 1. – P. 53–64.

196. Chernuha O. Admixture mass transfer in a body with horizontally periodical structure / O. Chernuha // Ibid. – 2005. – V. 48. – P. 2290–2298.

197. Darcy H. Les fontains puliques de la ville de Dijio / H. Darcy. – Paris, 1856. – 647 p.

198. Eriksson K. Adaptive streamline diffusion finite element methods for convection-diffusion problems / K. Eriksson, C. Johnson // Math. Comp. – 1993. – Iss.60. – P.167–188.

199. Heinrich J. An Upwind finite element scheme for two-dimensional convective transport equation / J. Heinrich, P. Huyakorn, O. Zienkiewicz, A. Mitchell // Int. J. Num. Meth. Engrg. – 1977. – Iss.11. – P.131–143.

200. Jackson R.D. Circulation of water in soil under a temperature gradient / R.D. Jackson, D.A. Rose, H.L. Penman // Nature. – 1965. – 205, № 16. – P. 314–316.

201. Nield D. A. Convection in porous media / D. A. Nield, A. Bejan. – Springer, - 2006. – 653 p.

202. Park J. B. Analytic solutions of radionuclide transport with the limited diffusion from the fracture into a porous rock matrix / J. B. Park, Y. Hwang, K. J. Lee //Annals of Nuclear Energy. – 2001. – V. 28. – P. 993–1011.

203. Plum R. L. Some temperature effects on soil compressibility and pore water pressure / R. L. Plum, M. J. Esrig // Highway Research Board. – Sp Rpt 103, 1969. – P. 213–242.

204. Savula Y. H. Numerical analysis of advection diffusion in the continuum with thin canal / Y. H. Savula, V. M. Koukharskiy, Y. Y. Chaplia // Numerical Heat Trans. Part A. – 1998. –36, № 3. – P. 657–679.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

205. Sun Y. Analytical solutions for reactive transport of N-member radionuclide chain in a single fracture / Y. Sun, T. A. Buscheck // Journal of Contaminant Hydrology. – 2003. – V. 62-63. – P. 695–712.

206. Thompson J. F. Numerical Grid Generation/ J. F. Thompson, Z. U. A. Warsi, C. W. Mastin // Foundation and Applications. – New York : Elsevier, 1985. – 931 p.

207. Vafai K. Handbook of porous media / K. Vafai. – Taylor&Francis Group, 2005, – 747 p.

208. Wang S. A Novel exponentially fitted triangular finite element method for an advection-diffusion problem with boundary layers / S. Wang // J. Comout. Phys. – 1997. – Iss.134. – P.253–260.

209. Williams M. M. R. Radionuclide in fractured rock / M. M. R. Williams // Progress in Nuclear Energy. – 1996. – V.30, № 3. – P. 243–253.

210. Xu J. A. Monotone finite element scheme for convection-diffusion equations / j. Xu, L. Zikatanov // Math. Comp. – 1999. – Iss. 68 (228). – P.1429–1446.

211. Zhangxin C. Computational Methods for Multiphase Flows in Porous Media (Computational Science and Engineering) / C. Zhangxin, M. Yuanle // Paperback. Society for Industrial and Applied Mathematic, 2006. – 531 p.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Наукове видання

Власюк Анатолій Павлович
Остапчук Оксана Петрівна

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПЕРЕНОСУ СОЛЬОВИХ РОЗЧИНІВ ПРИ ФІЛЬТРАЦІЇ ПІДЗЕМНИХ ВОД У ҐРУНТОВИХ МАСИВАХ

Монографія

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Технічний редактор *Г. Ф. Сімчук*
Дизайн обкладинки *Т. В. Жаранова*

Підписано до друку 30.03.2015 р. Формат 60×84 $1/16$.
Папір друкарський №1. Гарнітура Times. Друк різографічний.
Ум.-друк. арк. 12,5. Обл.-вид. арк.13,1
Тираж 300 прим. Зам №.4480.

Видавець і виготовлювач
Редакційно-видавничий центр
Національного університету
водного господарства та природокористування
33000, Рівне, вул. Соборна, 11.

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції РВ №31 від 20.04.2005 р.