Міністерство освіти і науки України
Національний університет водного господарства
та природокористування

В.В. Крівцов, М.М. Козяр

НАРИСНА ГЕОМЕТРІЯ
(базовий курс)

Навчальний посібник

Рівне 2019

УДК 514.18(075)
К82

Рецензенти:

Кравець С. В., доктор технічних наук, професор Національного університету водного господарства та природокористування (м. Рівне);
Райковська Г. О., доктор педагогічних наук, професор Житомирського державного технологічного університету.

Рекомендовано вченою радою Національного університету водного господарства та природокористування. Протокол № 4 від 22 червня 2018 р.

Крівцов В. В., **Козяр М. М.**
К82 Нарисна геометрія (базовий курс) : навч. посібник. – Рівне : НУВГП, 2019. – 234 с.

ISBN 978-966-327-405-8

Посібник розроблено до програми курсу нарисної геометрії. Він містить теоретичні положення з усіх розділів курсу. Матеріал, наведений в навчальному посібнику, проілюстровано великою кількістю рисунків, які значно полегшують сприйняття студентами положень та правил нарисної геометрії. Всі розділи містять приклади розв’язування задач.

Посібник рекомендовано для здобувачів вищої освіти тих спеціальностей, де навчальними планами передбачено вивчення нарисної геометрії або інженерної графіки.

УДК 514.18(075):681.3

ISBN 978-966-327-405-8

ЗМІСТ

ВСТУП

Нарисна геометрія навчає студентів геометричному моделюванню об'єктів та процесів, надає знання, уміння, навики, потрібні для читання та виконання креслень, розв'язування за кресleником різноманітних інженерно-геометричних задач, що передбачає засвоєння великої кількості правил та положень. Проте переважна більшість першокурсників мають слабку уяву, недостатньо розвинене просторове та логічне мислення, тому процес вивчення відбувається надзвичайно складно, а постійне скорочення навчальних аудиторних годин не дає можливості детально розглянути матеріал, що вивчається, безпосередньо на заняттях. Тому виникає об'єктивна потреба у самостійному опрацьовуванні студентами навчальної літератури для поглиблення та систематизації знань.

Сучасне покоління студентів прагне отримувати інформацію, коротко викладену, естетично привабливо оформлену, де складний матеріал описано просто та доступно. Авторами під час написання посібника враховано ці новітні тенденції в поданні навчального матеріалу. Усвідомлюючи труднощі, які виникають у студентів під час вивчення нарисної геометрії, і те, що осмислення отриманих відомостей здійснюється переважно через зорове, образне їх сприйняття, авторами основні правила та положення нарисної геометрії викладено за допомогою рисунків, на яких показано наочні зображення та епюри фігур, що вивчаються, та надається стислий їх опис. В посібнику в концентрованому вигляді наведено алгоритми розв'язування різнопланових задач, виконано узагальнення поданої інформації з тем курсу та наведено висновки з питань, що розглядаються. Така форма подання навчального матеріалу, що міститься у посібнику, на думку авторів, дозволить студентам витрачати мінімум часу на самостійне опанування потрібними знаннями з курсу нарисної геометрії.

Даний навчальний посібник є першою частиною комплекту посібників і містить 9 розділів. В ньому розглядаються найпростіші геометричні фігури – точка, пряма, площина, взаємне їх розміщення та перетин. Описано перпендикулярність прямої та площини, двох площин, геометричні місця простору та способи перетворення проекцій. В останньому розділі наведено основні метричні задачі за участю зазначених геометричних фігур.

У кожному розділі наведено приклади розв'язування задач як на епюрі, так і на наочному зображенні. Вони показують студентам шляхи практичної реалізації теоретичних положень нарисної геометрії

УМОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ ТА ЗНАКИ

1. Позначення геометричних фігур та їх проекцій

1.1. Точки позначено великими літерами латинського алфавіту або арабськими цифрами, наприклад: A, B, C, D,… або цифрами 1, 2, 3, 4, …

Проекції точок позначають тими самими буквами або цифрами, що й оригінали, тільки з індексами, проставленими знизу, і які відповідають індексам площин проекцій:

горизонтальні проекції – A_1, B_1, C_1, D_1 … або $1_1, 2_1, 3_1, 4_1$. …;

фронтальні проекції – A_2, B_2, C_2, D_2 … або $1_2, 2_2, 3_2, 4_2$. …;

проекції на додаткову площину проекцій, наприклад, Π_4 – A_4, B_4, C_4, D_4… або $1_4, 2_4, 3_4, 4$. … .

Різні точки, що позначені тією самою літерою – A, A^1, A^2 …. B, B^1, B^2 …. 1, 1^1, 1^2 (індекс зазначено зверху).

1.2. Лінії (прямі і криві) позначено малими літерами латинського алфавіту, наприклад, літерами *a*, *b*, *c*, d, … .

Лінії рівня позначено: h – горизонтальна пряма (горизонталь), f – фронтальна пряма (фронталь), p – профільна пряма.

Проекції ліній відповідно:

горизонтальні – a_1, b_1, c_1, d_1, … h_1, f_1 … ;

фронтальні – a_2, b_2, c_2, d_2, … h_2, f_2 … ;

на додаткову площину проекцій, наприклад, Π_4 – a_4, b_4, … h_4, f_4 … .

Належність лінії площині або поверхні позначено індексом, позначеним зверху, причому індекс відповідає літері, якою позначено площину або поверхню, наприклад, запис f^{Δ} означає, що фронтальна пряма належить площині Δ.

Відрізок прямої, виділений двома точками, позначають AB, або 12, 23.

1.3. **Площини** позначено літерами грецького алфавіту, наприклад, Δ, Σ, ω, α, β, … .

Щоб підкреслити спосіб задання площини, вказують геометричні елементи, які визначають площину, наприклад: $\Delta\ (a \cap b)$ – площина Δ задана прямими *a* і *b*, що перетинаються.

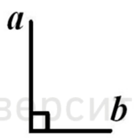
Сліди площини позначають:

Δ_1 – горизонтальний слід, Δ_2 – фронтальний слід, Δ_4 – слід на додаткову площину проекцій Π_4.

Площини проекцій позначено: Π_1 – горизонтальна площина проекцій, Π_2 – фронтальна площина проекцій, Π_3 – профільна площина проекцій, Π_4, Π_5 – додаткові площини проекцій.

1.5. Кути нахилу прямих та площин позначають літерами грецького алфавіту разом з додаванням верхнього індексу ^{0}, наприклад, α^0, φ^0, … або $\angle\alpha$, $\angle\varphi$, …

2. Знаки, які визначають відношення між геометричними фігурами

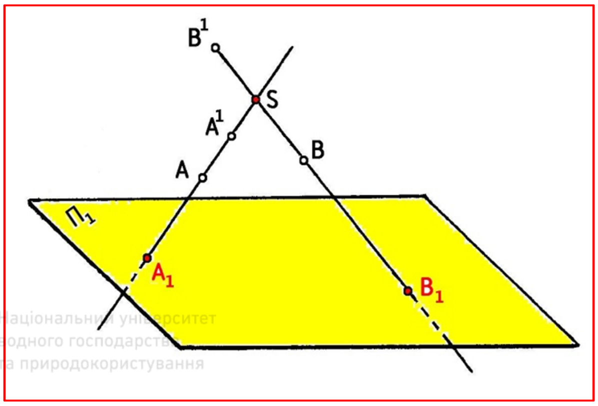
Вид знака	Призначення знака	Приклади застосування знака
$\cap$	Перетин геометричних фігур	$l \cap \Sigma$ – пряма l перетинається з площиною Σ
$\in$	Належність однієї геометричної фігури іншій	$1 \in h$ – точка 1 належить горизонтальній прямій h
$=$	Рівність	A_1B_1 = Н.В. АВ – довжина горизонтальної проекції A_1B_1 дорівнює натуральній величині відрізка АВ
$=$	Результат	$l = \alpha \cap \beta$ – лінія l є результат перетину площин α і β
$\perp$	Перпендикулярність	$l \perp \Sigma$ – пряма l перпендикулярна до площини Σ
$\angle$	Кут	$\angle\alpha$ – кут нахилу прямої або площини до площини проекцій
	Прямий кут – графічне позначення на епюрах	 – пряму *a* розміщено відносно прямої *b* під прямим кутом
$\equiv$	Збіг	$A_1 \equiv B_1$ – горизонтальна проекція точки А збігається з горизонтальною проекцією точки В
//	Паралельність	*a* // *b* – пряма *a* паралельна до прямої *b*
$\Rightarrow$	Логічний наслідок	$a \parallel b \Rightarrow a_1 \parallel b_1$ – якщо прямі *a* і *b* паралельні, то їх горизонтальні проекції a_1 і b_1 також паралельні

Національний університет
водного господарства
та природокористування

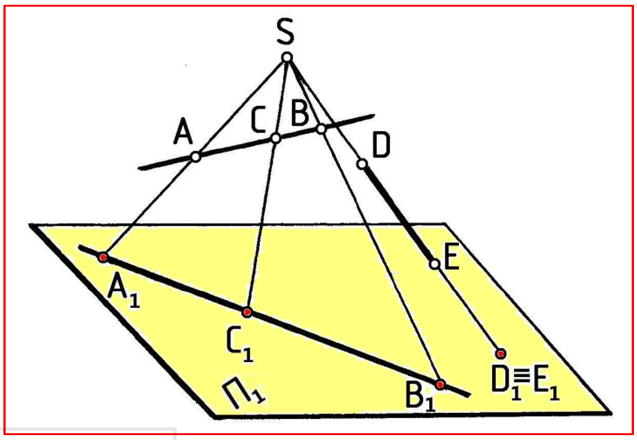
Розділ 1. Методи проекціювання і проекції точки

1.1. Центральне проекціювання

1.1.1. Проекціювання з одного центра



S – центр проекціювання; $П_1$- площина проекцій; A_1 і B_1 – центральні проекції точок A, A^1 і B, B^1; SA_1 і SB_1 – проекціюючі прямі.



Основні властивості:

1. Проекція точки – точка ($A \rightarrow A_1$, $B \rightarrow B_1$).

2. Проекція прямої – пряма ($AB \rightarrow A_1B_1$, крім випадку, коли пряма знаходиться на проекціюючій прямій: $DE \rightarrow D_1 \equiv E_1$).

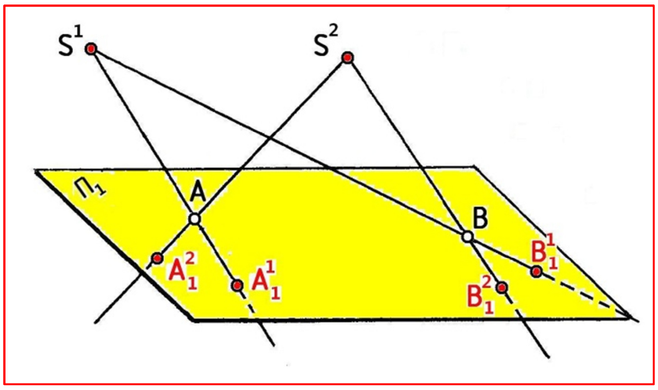
3. Якщо точка належить прямій, то проекція цієї точки належить проекції прямої ($C \in AB \Rightarrow C_1 \in A_1B_1$).

Висновки:

1. Кожна точка простору має тільки одну центральну проекцію.

2. Одна центральна проекція не визначає положення самої точки в просторі.

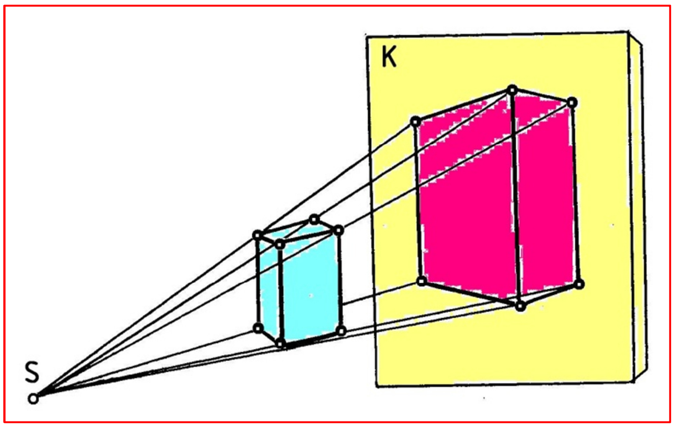
1.1.2. Проекціювання з двох центрів



S^1, S^2 – центри проекціювання; A_1^1, B_1^1 – центральні проекції точок A і B, отримані з центра S^1, A_1^2, B_1^2 - центральні проекції точок A і B, отримані з центра S^2.

Висновок:
Дві центральні проекції точки, отримані з двох різних центрів проекціювання, можуть визначати положення точки в просторі (проекції A_1^1 і A_1^2 визначають положення точки А).

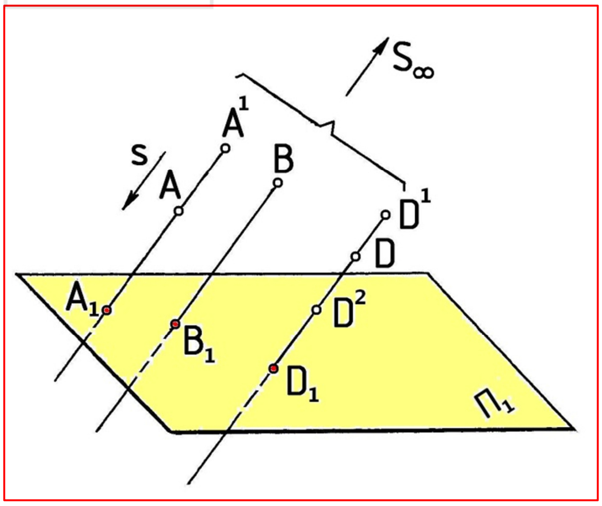
Зображення паралелепіпеда, виконане в центральній проекції або перспективі на площині К



1.2. Паралельне проекціювання

Паралельне проекціювання є частковим випадком центрального проекціювання, коли центр проекціювання віддалений у нескінченність відповідно до напряму проекціювання.

1.2.1. Проекціювання за одним напрямком



s – напрмок проекціювання; S_∞ – центр проекціювання; A_1, B_1, D_1 – косокутні паралельні проекції точок A, A^1, B, D, D^1, D^2; AA_1, BB_1, DD_1 – проекціюючі прямі, паралельні до напрямку проекціювання s.

Паралельні проекції діляться на косокутні – проекціюючі прямі складають з площиною проекцій довільний кут та прямокутні - проекціюючі прямі складають з площиною проекцій прямий кут.

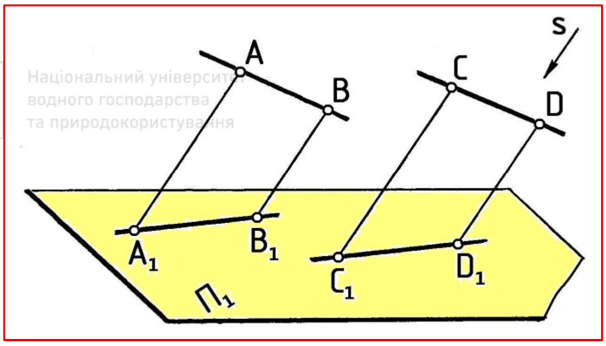
При паралельному проекціюванні зберігаються властивості центрального проекціювання та додаються такі:

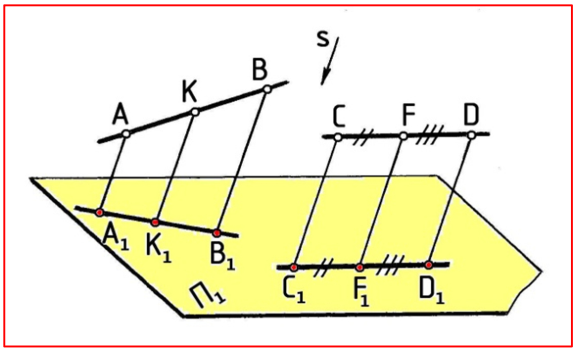
1. Проекції паралельних прямих паралельні між собою ($AB \parallel CD \Rightarrow A_1B_1 \parallel C_1D_1$).

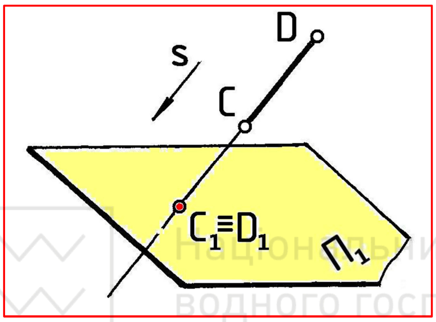
2. Відношення довжин відрізків прямої дорівнює відношенню довжин їх проекцій ($AK / KB = A_1K_1 / K_1B_1$, $CD / FD = C_1D_1 / F_1D_1$).

3. Відношення довжин відрізків двох паралельних прямих дорівнює відношенню довжин їх проекцій ($AB / CD = A_1B_1 / C_1D_1$).

4. Відрізок прямої проекціюється на площину проекцій, до якої він паралельний, в свою натуральну величину ($CD \parallel \Pi_1 \Rightarrow C_1D_1 = CD$). Якщо пряма збігається з напрямком проекціювання, то її проекцією є точка: $CD \parallel s \Rightarrow C_1 \equiv D_1$.

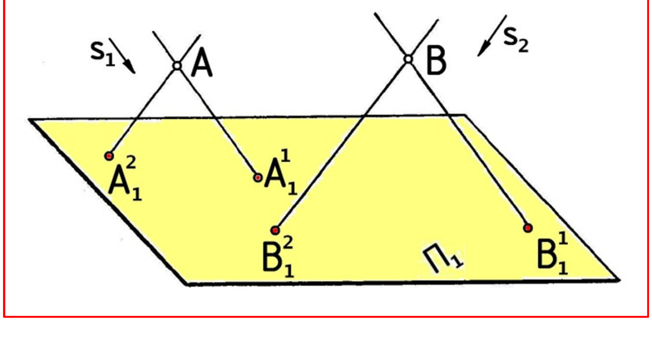






Зазначені властивості центрального та паралельного проекціювання становлять теоретичну базу для побудови проекцій геометричних фігур.

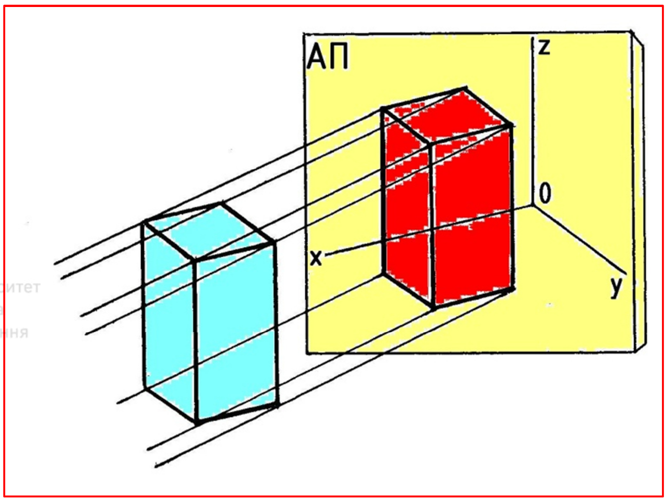
1.2.2. Проекціювання за двома напрямами



s_1, s_2 – напрямки проекціювання; A_1^1, B_1^1 – паралельні проекції точок A і B за напрямком s_1, A_1^2, B_1^2 – паралельні проекції точок A і B за напрямком s_2; AA_1^1, BB_1^1 – проекціюючі прямі за напрямком s_1 (AA_1^1, $BB_1^1 \parallel s_1$), AA_1^2, BB_1^2 – проекціюючі прямі за напрямком s_2 (AA_1^2, $BB_1^2 \parallel s_2$).

Висновок:
Дві паралельні проекції точки, отримані за двома різними напрямами проекціювання, можуть визначати положення точки в просторі (проекції A_1^1 і A_1^2 визначають положення точки А, проекції B_1^1 і B_1^2 визначають положення точки В)

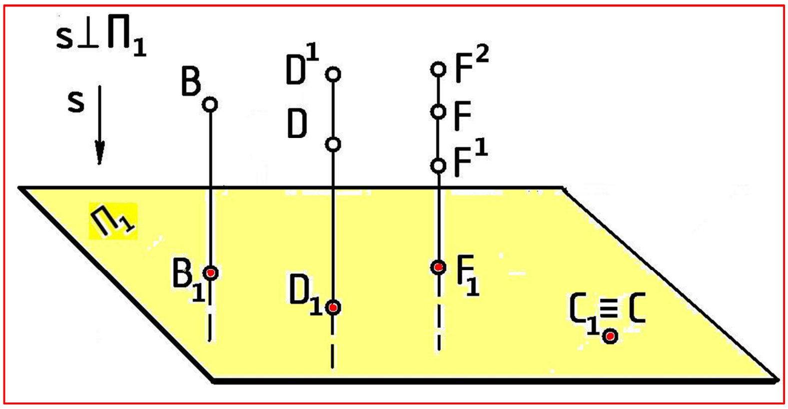
Зображення паралелепіпеда виконано в паралельній проекції - аксонометрії на аксонометричній площині АП



1.3. Прямокутне (ортогональне) проекціювання

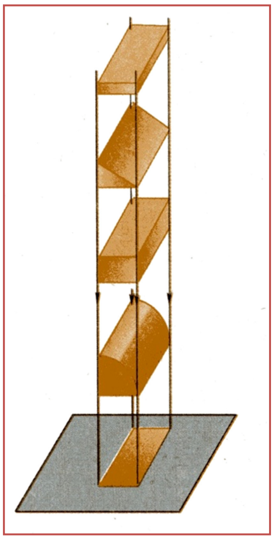
1.3.1. Проекціювання на одну площину проекцій

Прямокутне (ортогональне) проекціювання є частковим випадком паралельного проекціювання, за яким напрмок проекціювання s перпендикулярний площині проекцій.



B_1, D_1, F_1, D_1 – ортогональні проекції точок B, D, D^1, F, F^1, F^2, C (точка С належить $П_1$); BB_1, ,DD_1, FF_1 – проекціюючі прямі, перпендикулярні площині проекцій $П_1$.

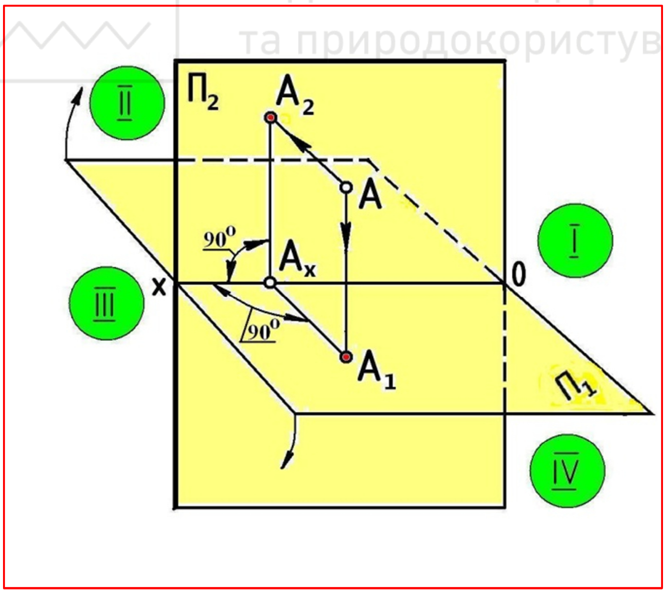
Висновки:
1. Кожна точка простору має тільки одну ортогональну проекцію.
2. Одна ортогональна проекція не визначає положення самої точки в просторі.



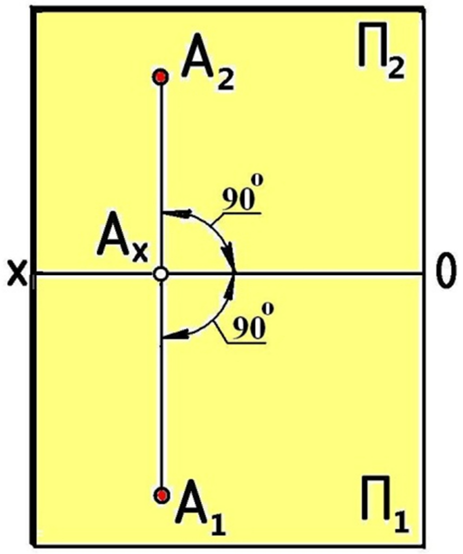
Невизначеність форми предмета за однією проекцією

Оскільки через точку можна провести тільки одну пряму, перпендикулярну до площини проекцій, то, на відміну від центрального та паралельного (косокутного) проекціювання, для отримання двох проекцій однієї точки потрібно мати дві не-паралельні площини проекцій. Французький вчений Гаспар Монж запропонував для усунення неоднозначності креслення проекціювання здійснювати на дві взаємно перпендикулярні площини проекцій.

1.3.2.Проекціювання на дві взаємно перпендикулярні площини проекцій



Наочне зображення точки А та її проекцій A_1, A_2 в системі двох площин проекцій $П_1$ і $П_2$



Епюр точки А в системі двох площин проекцій $П_1$ і $П_2$

$П_1$– горизонтальна площина проекцій (позначають цю площину також π_1)

$П_2$ – фронтальна площина проекцій (позначають цю площину також π_2)

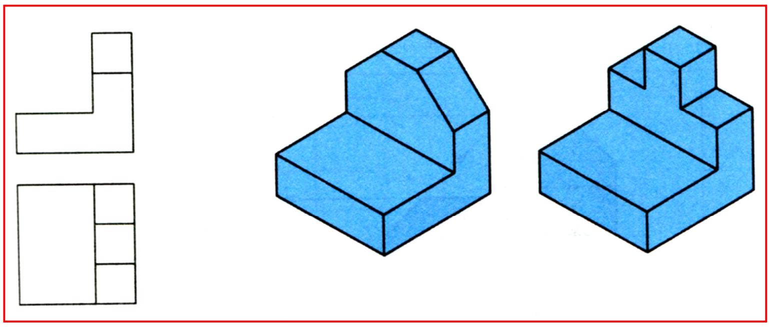
A_1 – горизонтальна проекція точки А (ортогональна проекція точки А на площину проекцій $П_1$)

A_2 – фронтальна проекція точки А (ортогональна проекція точки А на площину проекцій $П_2$)

I, II, III, IV – квадранти або чверті простору, на які ділять простір площини $П_1$ і $П_2$

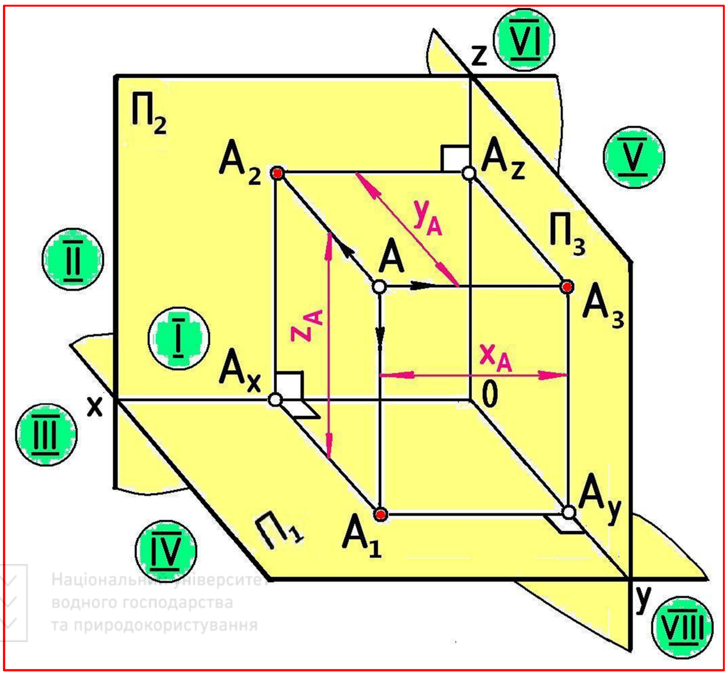
Висновок:
Дві проекції точки однозначно визначають її положення в просторі відносно площин проекцій $П_1$ і $П_2$.

Форму деяких предметів не завжди можна визначити за двома його проекціями (зображеннями)

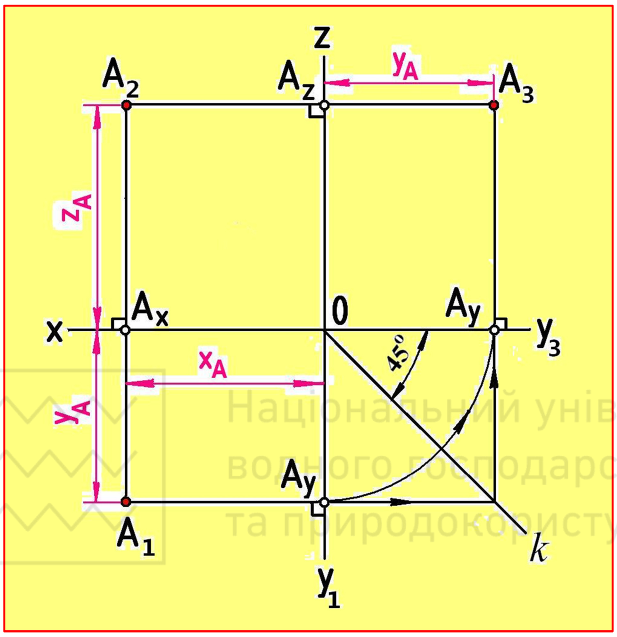


Невизначеність форми предмета за двома проекціями (зображеннями)

1.3.3. Проекціювання на три взаємно перпендикулярні площини проекцій



Наочне зображення точки A та її проекцій A_1, A_2, A_3 в системі двох площин проекцій Π_1, Π_2, Π_3



Епюр точки A в системі трьох площин проекцій Π_1, Π_2, Π_3

Π_3 – профільна площина проекцій (позначають цю площину також π_3)

A_3 – профільна проекція точки A (ортогональна проекція точки A на площину проекцій Π_3)

0x або x – вісь проекцій ($x = \Pi_1 \cap \Pi_2$); 0y або y – вісь проекцій, яка при утворенні епюра розпадається на два променя $0y_1$ (y_1) та $0y_3$ (y_3), причому $y_1 \in \Pi_1$, $y_3 \in \Pi_3$ ($y = \Pi_1 \cap \Pi_3$); 0z або z – вісь проекцій ($z = \Pi_2 \cap \Pi_3$); *k* – стала пряма креслення

A_1A_2 – вертикальна лінія проекційного зв'язку, з'єднує горизонтальну та фронтальну проекції точки ($A_1A_2 \perp x$); A_2A_3 – горизонтальна лінія проекційного зв'язку, з'єднує фронтальну та профільну проекції точки ($A_2A_3 \perp z$); A_1A_3 – горизонтально-вертикальна лінія проекційного зв'язку, з'єднує горизонтальну та профільну проекції точки ($A_1A_3 \perp y$), розпадається на два відрізки $A_1A_y \perp y_1$ та $A_3A_y \perp y_3$

I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII – октанти простору, на які ділять простір площини $П_1$, $П_2$, $П_3$.

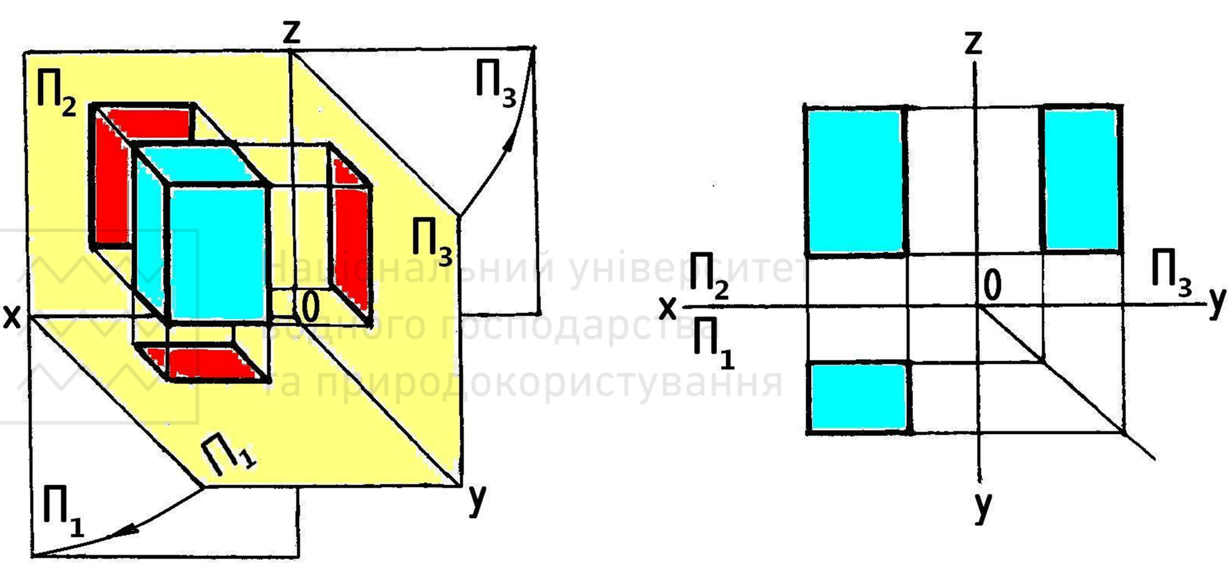
Якщо прийняти площини проекцій за координатні площини, а осі проекцій за осі координат, можна вимірювати відстані точки до площин проекцій, вибравши одиницю масштабу:

координата x визначає відстань від точки до площини $П_3$: $x_A = |A, П_3|$;

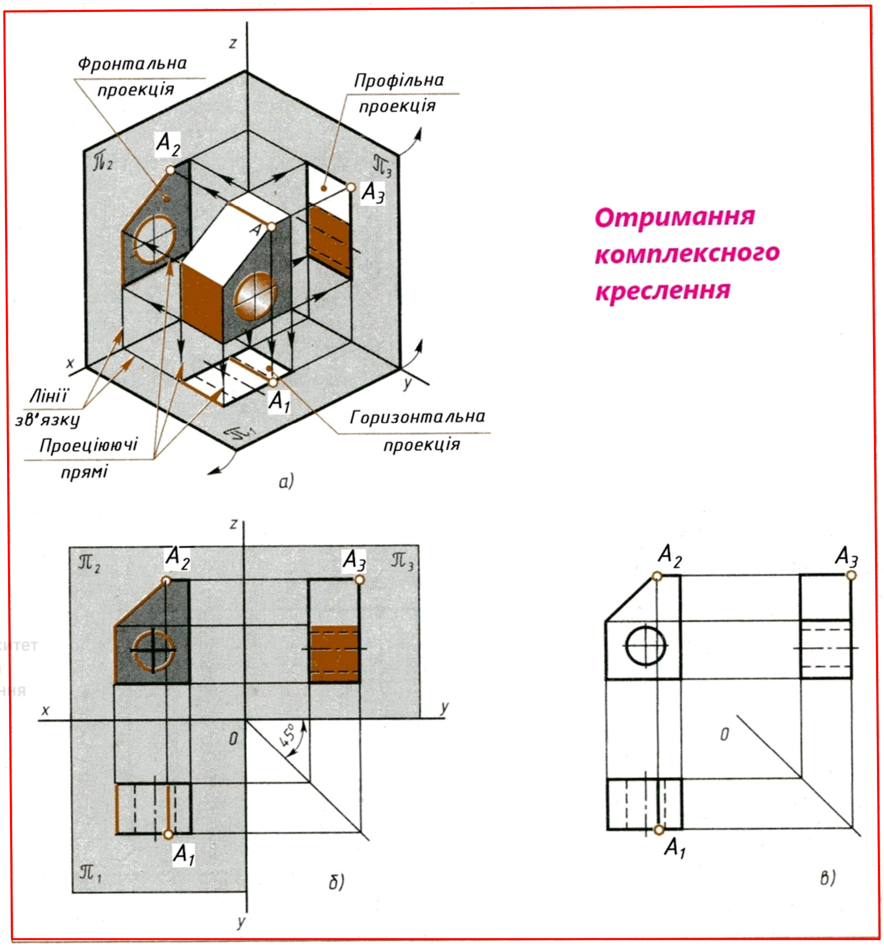
координата y визначає відстань від точки до площини $П_2$: $y_A = |A, П_2|$;

координата z визначає відстань від точки до площини $П_1$: $x_A = |A, П_1|$.

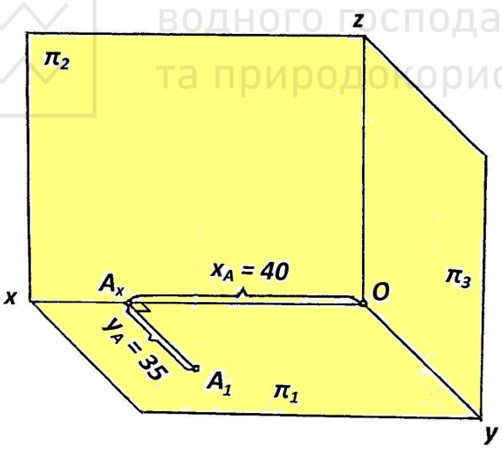
Зображення паралелепіпеда виконане в прямокутній (ортогональній) проекції

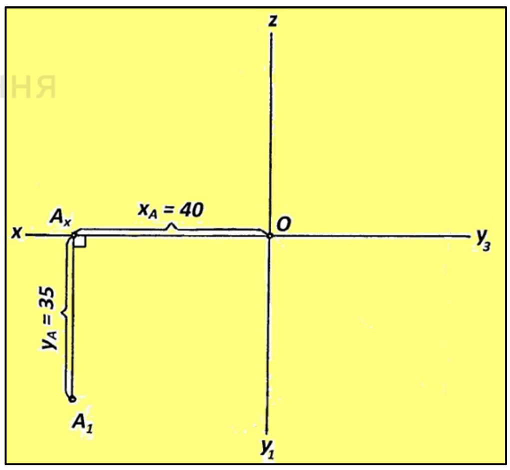


Зображення предмета виконано в прямокутній (ортогональній) проекції з проекціями точки А, розміщеної на поверхні предмета



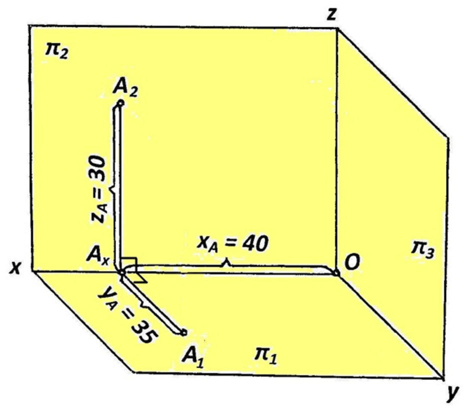
Приклад поетапної (покрокової) побудови в системі площин проекцій π_1, π_2, π_3 наочного зображення та епюра точки А за її координатами: А(40, 35, 30)



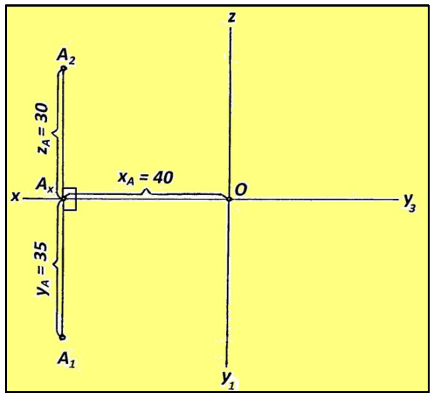


Побудова на наочному зображенні горизонтальної проекції A_1 точки А (1 етап)

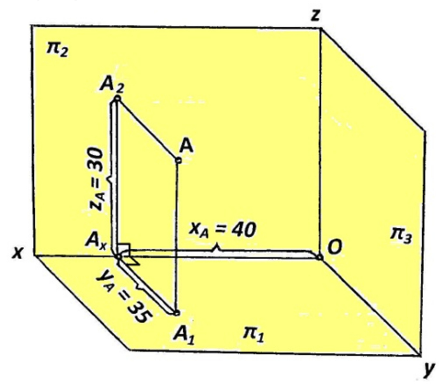
Побудова на епюрі горизонтальної проекції A_1 точки А (1 етап)



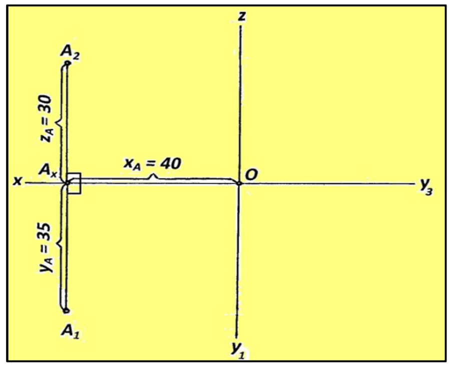
Побудова на наочному зображенні фронтальної проекції A_2 точки А (2 етап)



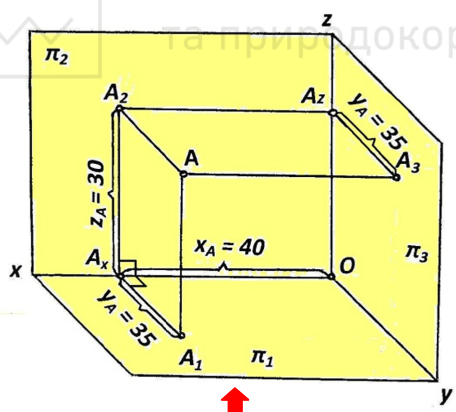
Побудова на епюрі фронтальної проекції A_2 точки А (2 етап)



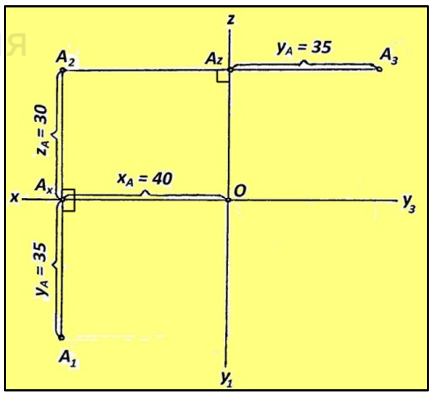
Побудова на наочному зображенні точки А (3 етап)



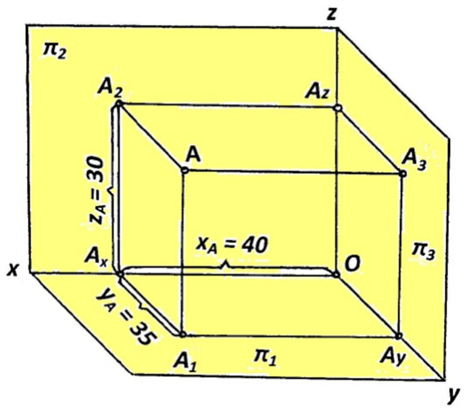
На епюрі ніяких побудов не виконано, оскільки точка А і проекціюючі прямі, за допомогою яких вона отримана, не лежать в площинах проекцій

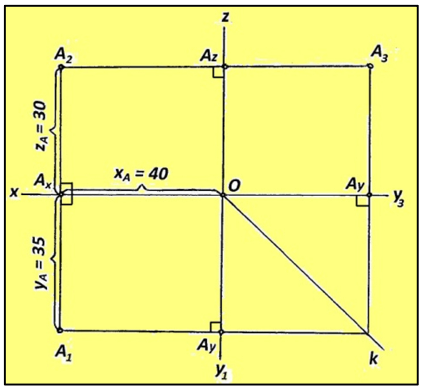


Побудова на наочному зображенні профільної проекції A_3 точки А за допомогою відрізків, що утворюють горизонтальну лінію проекційного зв’язку (4 етап)



Побудова на епюрі профільної проекції A_3 точки А за допомогою горизонтальної лінії проекційного зв’язку (3 етап)





Побудова на наочному зображенні профільної проекції A_3 точки А за допомогою відрізків, що утворюють горизонтально-вертикальну лінію проекційного зв'язку (заключний етап)

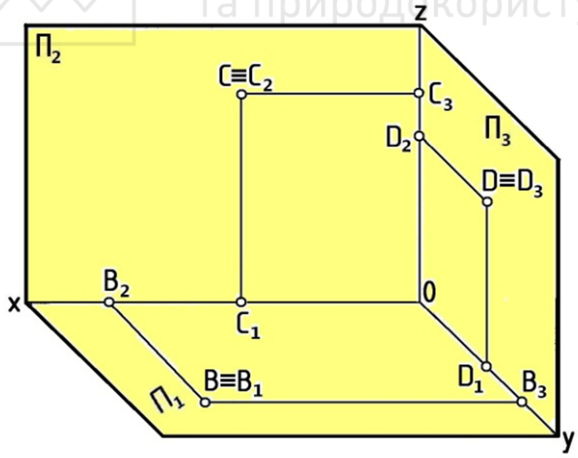
Побудова на епюрі профільної проекції A_3 точки А за допомогою горизонтальної та горизонтально-вертикальної лінії проекційного зв'язку (заключний етап)

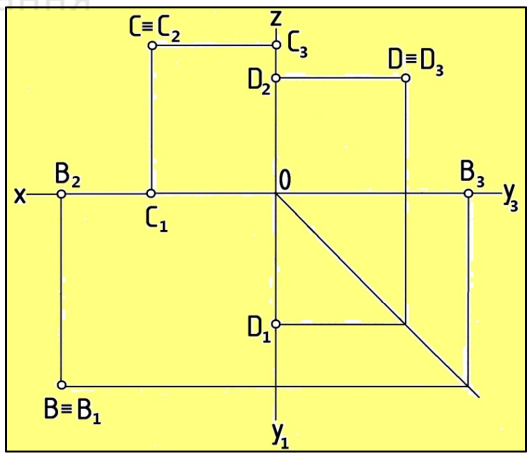
1.3.4. Класифікація точок за їх положенням відносно площин проекцій

Точки поділяють на такі, що не належать площинам проекцій, і точки, що належать площинам проекцій.

У точки, що не належить площинам проекцій (точка А), всі три координати не дорівнюють нулю і на епюрі жодна з проекцій не лежить на осі проекцій.

1.3.4.1. Наочне зображення та епюр точок, що належать одній площині





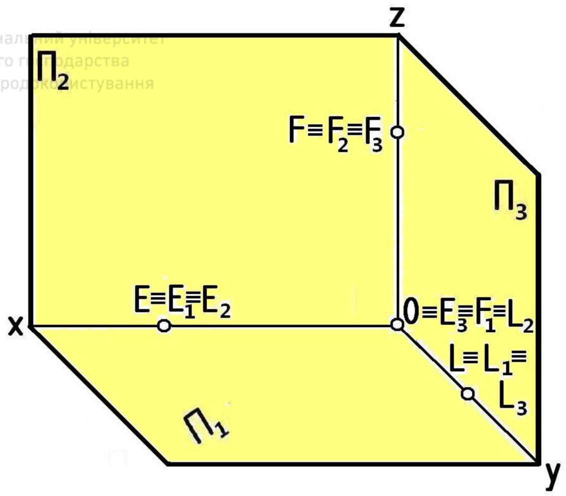
У точок, що належать одній площині проекцій, одна з координат дорівнює нулю, дві проекції точки знаходяться на осях проекцій, а третя збігається з самою точкою:

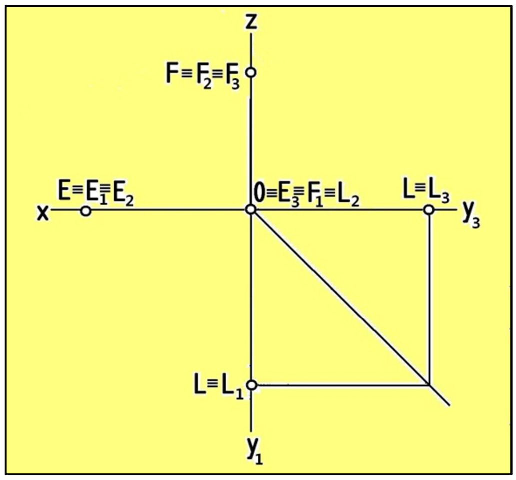
$B \in \Pi_1$, $z_B = 0$, x_B, $y_B \neq 0$;

$C \in \Pi_2$, $y_C = 0$, x_C, $z_C \neq 0$;

$D \in \Pi_3$, $x_D = 0$, y_D, $z_D \neq 0$.

1.3.4.2. Наочне зображення та епюр точок, що належать двом площинам проекцій, тобто лежать на осях проекцій





У точок, що належать осям проекцій, дві координати дорівнюють нулю, дві проекції точки збігаються між собою і з самою точкою та лежать на осі проекцій, а третя проекція знаходиться в точці початку координат:

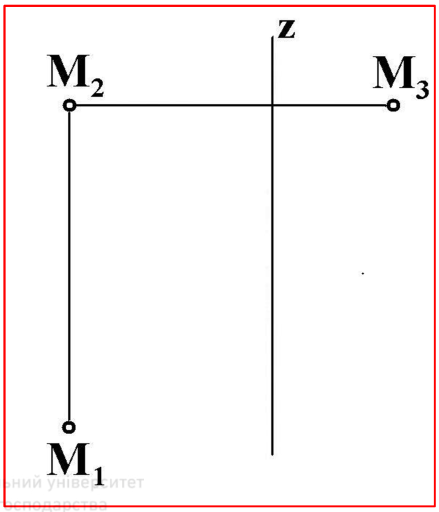
$E \in x$, y_E, $z_E = 0$, $x_E \neq 0$;

$L \in y$, x_L, $z_L = 0$, $y_L \neq 0$:

$F \in z$, x_F, $y_F = 0$, $z_F \neq 0$.

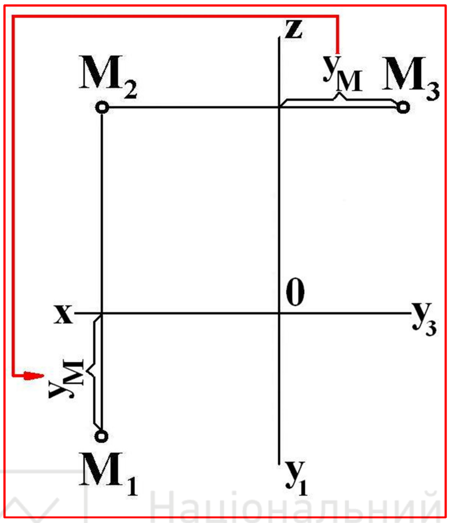
Ортогональне проекціювання відрізняється від центрального та паралельного (косокутного) тим, що воно не має такої наочності і предмет проекціюється не на одну, а на дві або більше площин і таким чином, щоб форма та основні розміри предмета не спотворювалися. Щоб скласти уявлення про форму предмета, зображеного на кресленні, потрібно співставити його проекції. Проте ортогональні проекції предмета мають дуже важливу якість: за наявністю масштабу, розмірних та інших даних за проекціями можна відтворити предмети, що зображені, у точній відповідності до проектного замислу.

Приклади розв’язування задач



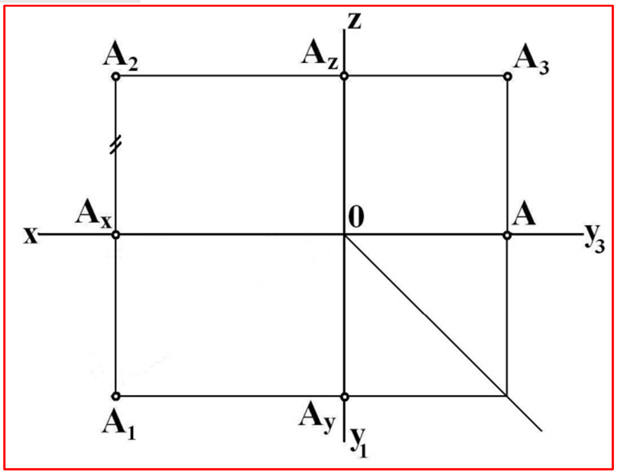
Задача № 1

Початкова умова задачі.
На епюрі точки М знайти положення осі проекцій x.

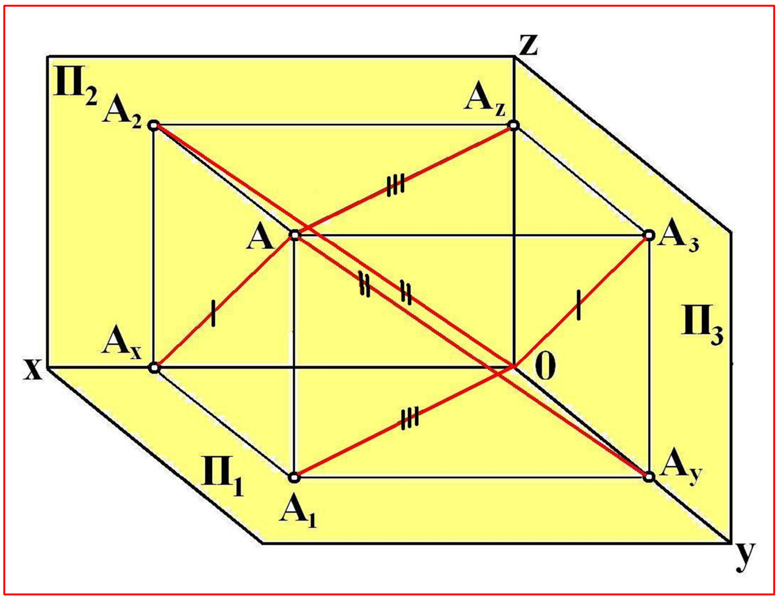


Розв’язування задачі.
Відстань від M_3 до осі z дорівнює відстані M_1 до осі x і визначає відстань точки М до $П_2$, тобто ця відстань дорівнює координаті y точки М – y_M.

Задача № 2



Початкова умова задачі.
Визначити відстань від точки А до осей проекцій x, y, z і до точки початку координат – точки 0.

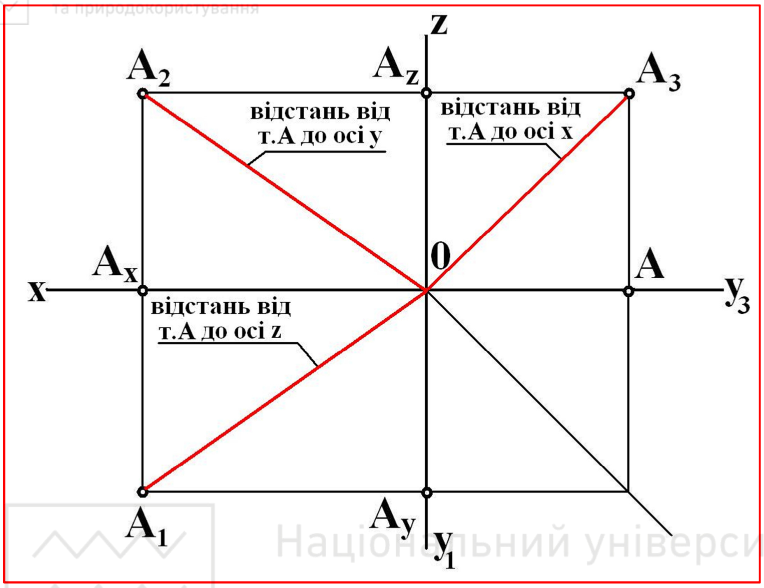


Розв'язування задачі на наочному зображенні (визначення відстані від точки А до осей проекцій x, y, z) .

Відрізок AA_x визначає відстань від точки А до осі x. Він паралельний до $П_3$, а, отже, $A_30 = AA_x$.

Відрізок AA_y визначає відстань від точки А до осі y. Він паралельний до $П_2$, а, отже, $A_20 = AA_y$.

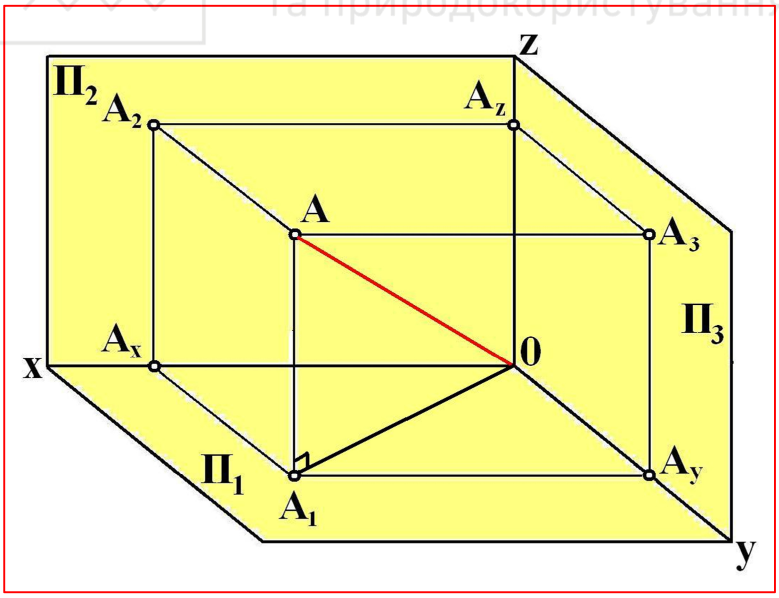
Відрізок AA_z визначає відстань від точки А до осі z. Він паралельний до $П_1$, а, отже, $A_10 = AA_z$.



Розв'язування задачі на епюрі (визначення відстані від точки А до осей проекцій x, y, z) .

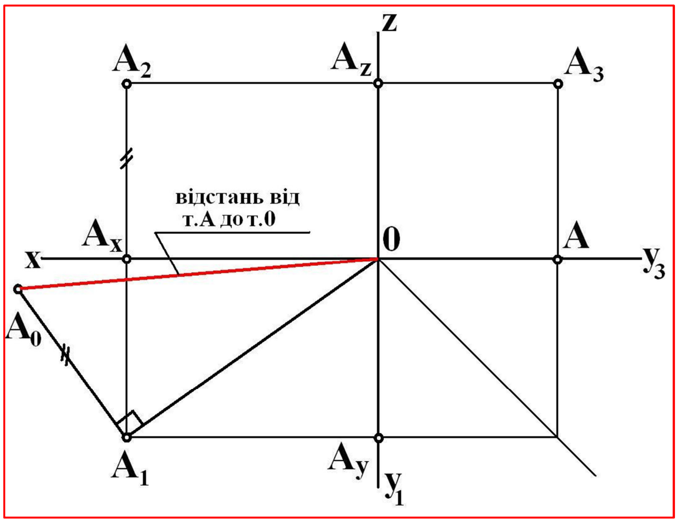
Відрізок A_30 визначає відстань від точки А до осі x. Відрізок A_20 визначає відстань від точки А до осі y.

Відрізок A_10 визначає відстань від точки А до осі z.



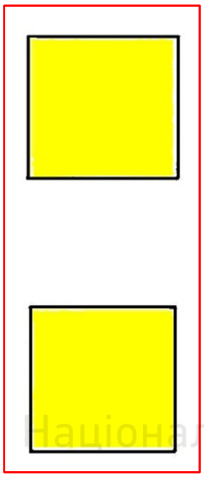
Розв'язування задачі на наочному зображенні (визначення відстані від точки А до точки початку координат – точки 0) .

Відрізок А0 визначає відстань від точки А до точки 0. Відрізок А0 є гіпотенузою прямокутного трикутника $A0A_1$, катет A_10 якого лежить в $П_1$, а катет AA_1 паралельний до A_2A_x.



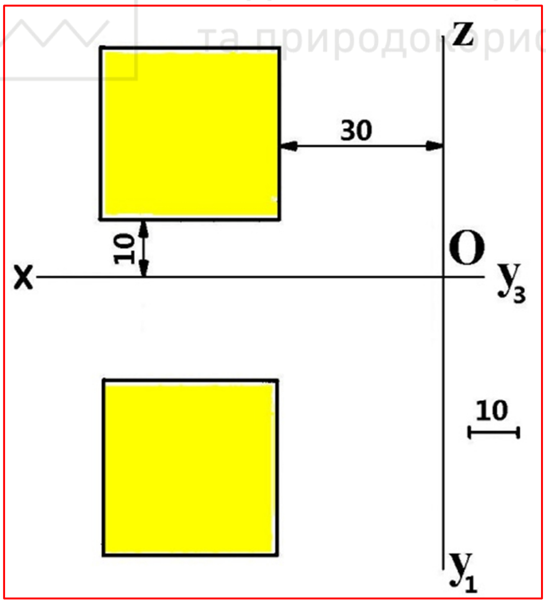
Розв'язування задачі на епюрі (визначення відстані від точки А до точки початку координат – точки 0) .
Побудований на епюрі прямокутний трикутник A_1A_00 рівний трикутнику A_1A0, побудованому на наочному зображенні, оскільки катет $A_1A_0 = A_2A_x = AA1$. Гіпотенуза A_00 цього трикутника визначає відстань від точки А до точки початку координат – точки 0.

Задача № 3



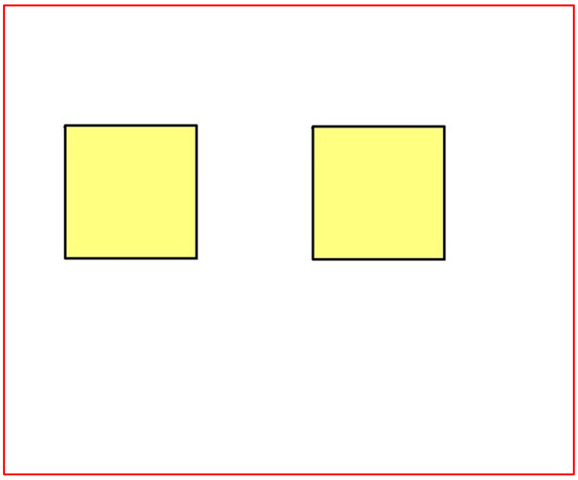
Початкова умова задачі.
Наведено горизонтальну та фронтальну проекції куба. Потрібно побудувати осі проекцій, якщо відомо, що куб віддалений від $П_1$ на відстань 10 о.д., а від $П_3$ – на 30 о.д.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

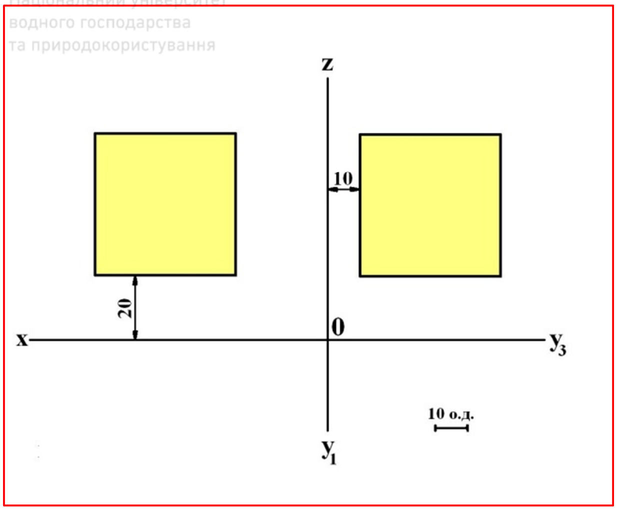


Розв'язування задачі.
Віддаленість куба від $П_1$ на 10 о.д. дозволяє провести вісь x, а віддаленість куба до $П_3$ на 30 о.д. – провести вісь z.

Задача № 4



Початкова умова задачі.
Наведено фронтальну та профільну проекції куба. Потрібно побудувати осі проекцій, якщо відомо, що куб віддалений від $П_1$ на відстань 20 о.д., а від $П_2$ – на 10 о.д.

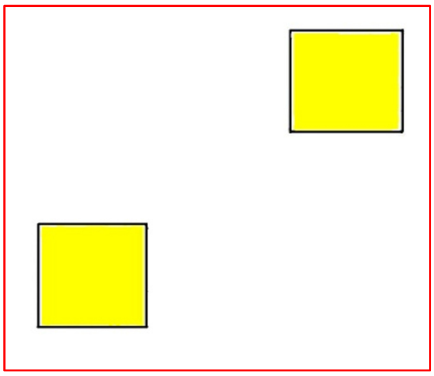


Розв’язування задачі.
Віддаленість куба від $П_1$ на 20 о.д. дозволяє провести вісь x, а віддаленість куба до $П_2$ на 20 о.д. – провести вісь z.

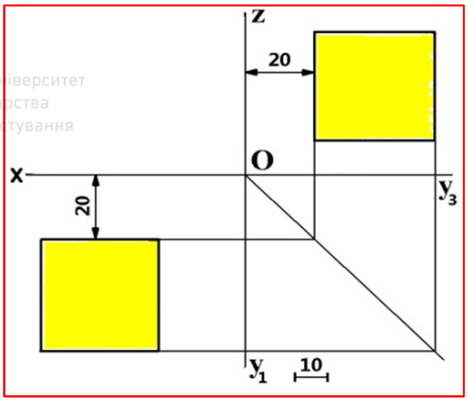
Примітка: В задачах №№ 3, 4 для побудови осей проекцій x і z потрібно знати відстань від куба до двох площин проекцій, причому обов’язково необхідно знати відстань від куба до тієї площини проекцій, на якій немає проекцій куба. В задачі № 3 ця відстань до $П_3$ - 30 о.д., а в задачі № 4 ця відстань до $П_1$- 20 о.д..

Якщо відомо горизонтальну та профільну проекцію куба, то достатньо для побудови осей x і z знати відстань куба тільки до однієї площини $П_2$, на якій не зображено фронтальної проекції куба.

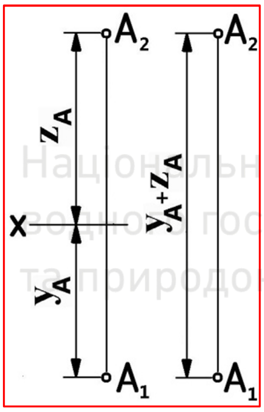
Задача № 5

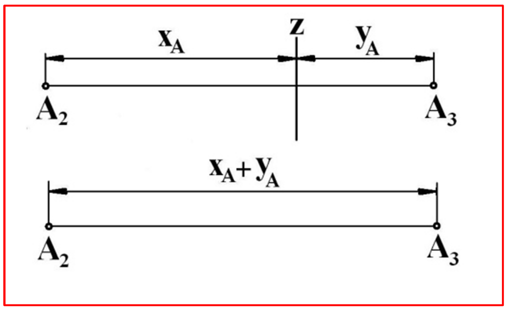


Початкова умова задачі.
Наведено горизонтальну та профільну проекції куба. Потрібно побудувати осі проекцій, якщо відомо, що куб віддалений від $П_2$ на відстань 20 о.д.

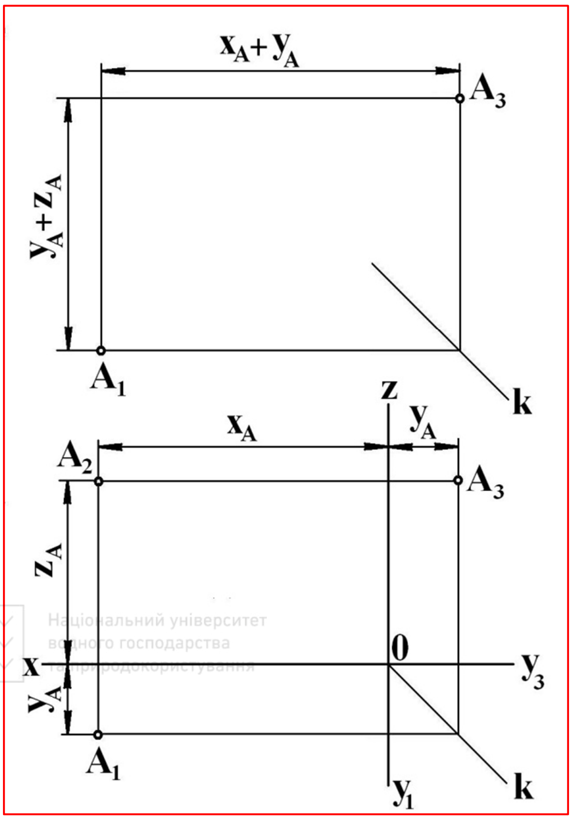


Розв'язування задачі.
Віддаленість куба від $П_2$ на 20 о.д. дозволяє провести як вісь x, так і вісь z.



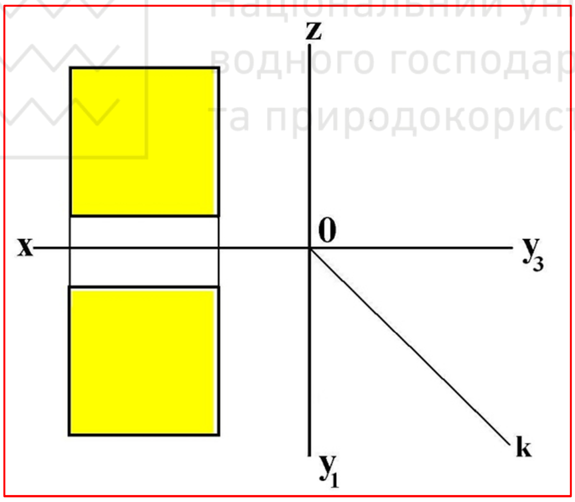


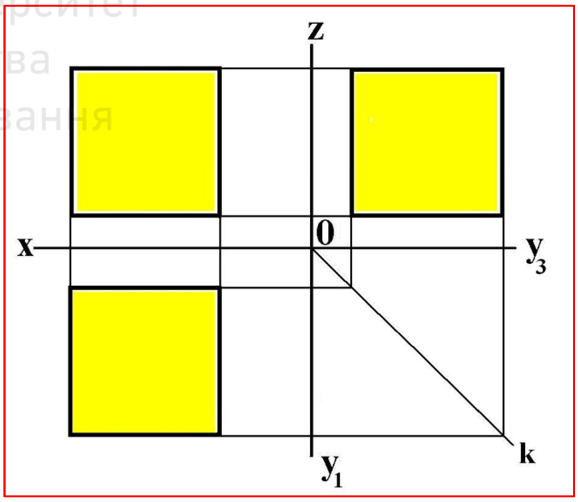
Пояснення до розв'язування задач №№ 4, 5, 6.
На безостому епюрі відстань між A_1 і A_2 дорівнює сумі $y_A + z_A$, тому проведення осі x визначає y_A і z_A точки A, що не дозволяє побудувати вісь z, оскільки невідома координата x_A.
На безостому епюрі відстань між A_2 і A_3 дорівнює сумі $x_A + y_A$, тому проведення осі z визначає x_A і y_A точки A, що не дозволяє побудувати вісь x, оскільки невідома координата z_A.
Тому обов'язковим для розв'язування задач №№ 3, 4 є наявність відстаней куба до двох площин проекцій, одна з яких є відстанню до площини проекцій, що не містить проекції (зображення) куба.



На безостому епюрі наявність горизонтальної та профільної проекції точки дозволяє визначити як суму $x_A + y_A$, так і суму $y_A + z_A$. Тому за відомою відстанню точки А до П$_2$, тобто координатою y_A, можна відразу визначити і дві інші координати точки – x_A і z_A, що дозволяє провести осі проекцій. Отже, розв'язати задачу № 5 на відміну від задач № 3, 4 можна, знаючи лише відстань куба до однієї площини проекцій П$_2$, на якій немає проекції куба.

Наявність на епюрі (кресленні) осей проекцій не дозволяє змінити положення третьої проекції, якщо відомі дві проекції предмета. Профільна проекція куба, яка побудована за двома заданими, має на епюрі певне місце розташування, обумовлене присутністю на епюрі осей проекцій.



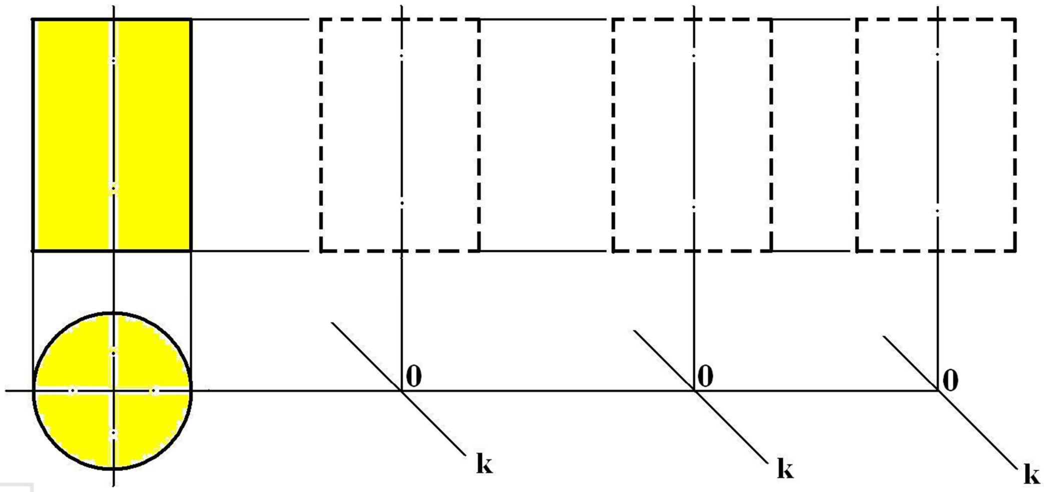


Під час виконання технічних креслень виникає потреба розміщувати зображення в заданому місці. Це можна зробити на безостому кресленні за допомогою сталої прямої креслення k.

Умова завдання: **Дано горизонтальну та фронтальну проекції прямого кругового (колового) конуса. Потрібно профільну проекцію побудувати на місцях, позначених штриховою лінією.**

Розв'язування: **На зображеннях циліндра відзначають проекції осі обертання, знаходять точку 0 їх перетину і через неї проводять сталу пряму креслення k. Після цього можна побудувати профільну проекцію циліндра в потрібному для виконавця креслення місці, а також проекції точок, що лежать на його поверхні.**

На безостому кресленні стала пряма креслення встановлює зв'язок між проекціями і дозволяє за двома проекціями об'єкта або його частини будувати третю.

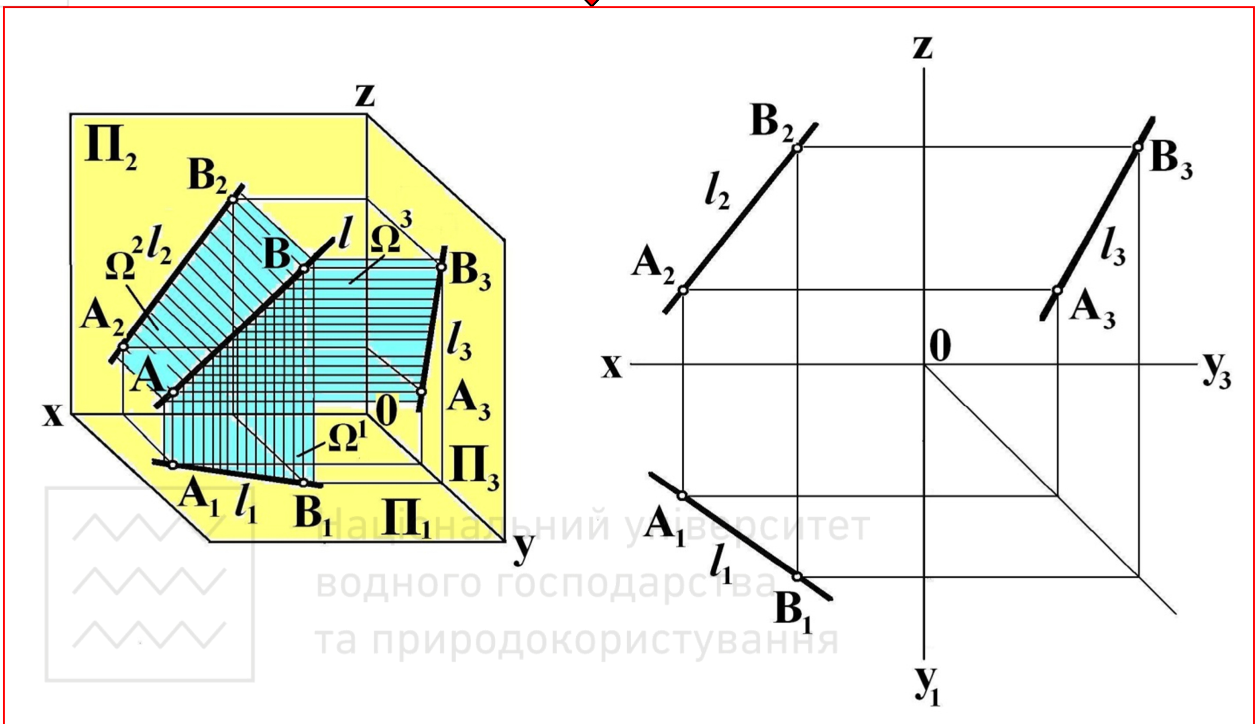


Розділ 2. Пряма лінія та її проекціювання

2.1. Проекції прямої лінії

Ортогональними проекціями прямої лінії в загальному випадку є прямі лінії, які можна отримати як лінії перетину площин, що проходять через задану пряму, із площинами проекцій, до яких ці площини перпендикулярні: $l_1 = \Omega^1 \cap \Pi_1$, $l_2 = \Omega^2 \cap \Pi_2$, $l_3 = \Omega^3 \cap \Pi_3$ ($\Omega^1 \perp \Pi_1$, $\Omega^2 \perp \Pi_2$, $\Omega^3 \perp \Pi_3$).

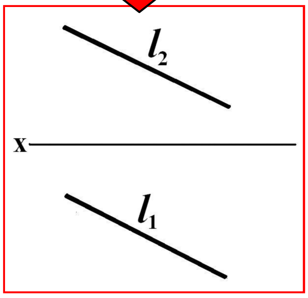
Оскільки пряма лінія в просторі визначається за двома її нетотожними точками, то побудова проекцій прямої зводиться до побудови проекцій двох її нетотожних точок: A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3 – проекції точок A і B прямої l на площинах проекцій Π_1, Π_2, Π_3.

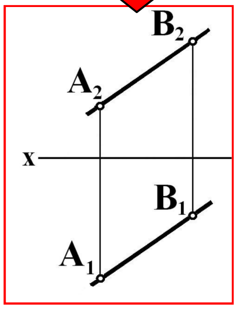


Два способи позначення прямої на епюрі

Малими літерами латинського алфавіту (пряма l)

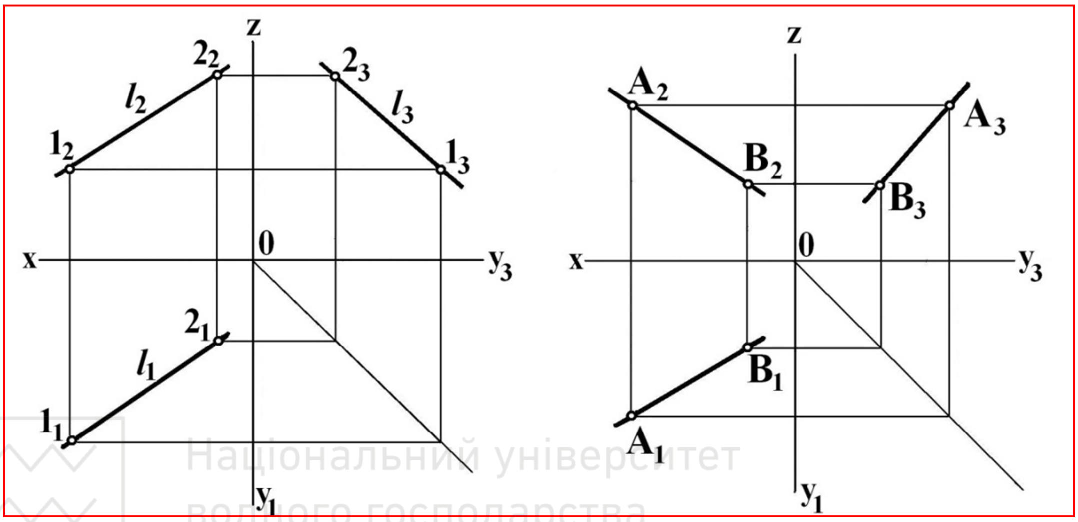
Великими літерами латинського алфавіту за позначенням двох її нетотожних точок (пряма AB)





Дві проекції прямої визначають її положення в просторі.

Для побудови третьої проекції прямої потрібно на двох заданих проекціях прямої відмітити проекції двох її нетотожних точок (для прямої *l* – це точки 1 і 2, для прямої AB – це точки A і B)

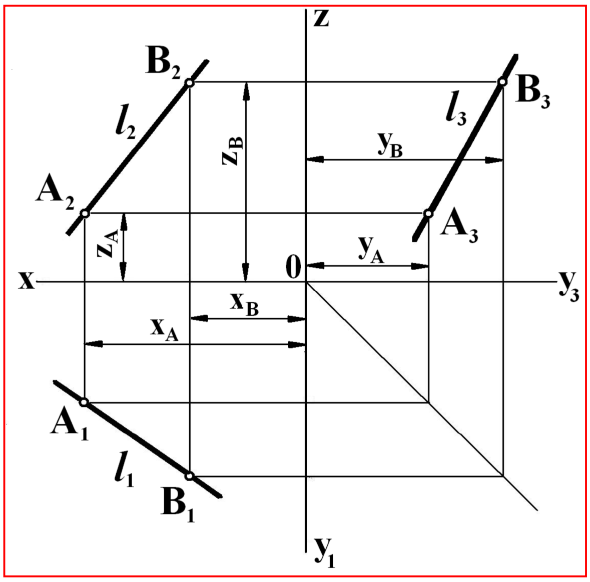


2.2. Класифікація прямих

Прямі залежно від їх розміщення відносно площин проекцій поділяють на прямі загального положення, прямі рівня та проекціюючі прямі.

2.2.1. Прямі загального положеняя

Прямі загального положення – це прямі, які не паралельні і не перпендикулярні до жодної з площин проекцій (в 2.1 наведено наочне зображення та епюри прямих загального положення).



Епюр прямої загального положення *l* з указанням координат x, y, z двох її нетотожних точок A і B.

Проекційні властивості та координатні характеристики прямої загального положення:

1. Проекції прямої не паралельні і не перпендикулярні до осей проекцій – це характерна графічна ознака, що властива лише прямій загального положення і дозволяє відрізнити епюр цієї прямої від епюрів прямих рівня та проекціюючих.
2. Кожна проекція відрізка прямої коротша за натуральну (дійсну) величину самого відрізка, оскільки пряма не паралельна до жодної з площин проекцій.
3. Різниці значень координат x, y, z двох нетотожних точок прямої не дорівнюють нулю.

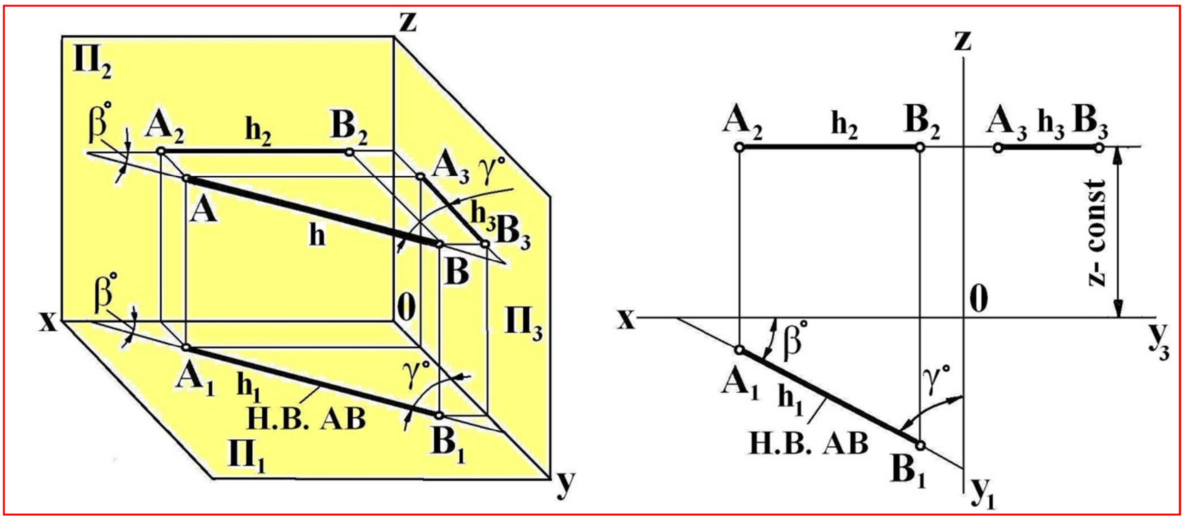
2.2.2. Прямі рівня

Прямі рівня – це прямі, які паралельні до однієї з площин проекцій: горизонтальна пряма, фронтальна пряма, профільна пряма.

2.2.2.1. Горизонтальна пряма

Горизонтальна пряма або горизонталь – це пряма рівня, яка паралельна до горизонтальної площини проекцій і позначається буквою h

Наочне зображення та епюр горизонтальної прямої AB.

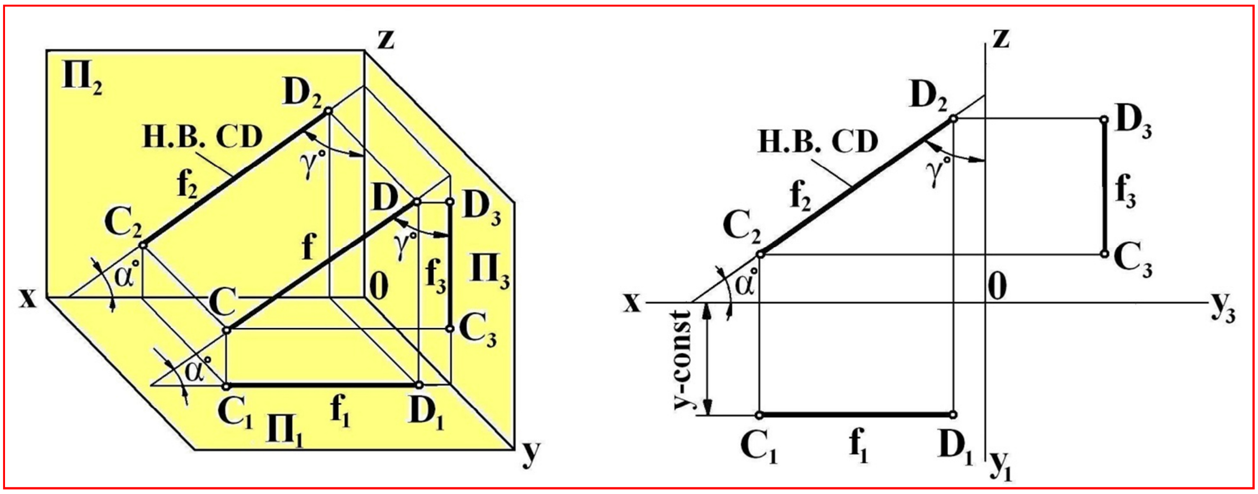


Проекційні властивості та координатні характеристики горизонтальної прямої:
1. Фронтальна та профільні проекції прямої паралельні до осей проекцій x і y. Це характерна графічна ознака, що властива лише горизонтальній прямій.
2. Координата z всіх точок прямої є сталою величиною.
3. Горизонтальна проекція відрізка прямої визначає натуральну величину самого відрізка (A_1B_1 = Н.В.АВ).
4. Кути β^0 і γ^0 – кути нахилу прямої до площин проекцій відповідно до $П_2$ і $П_3$. Вони визначаються безпосередньо за епюром без додаткових графічних побудов.

2.2.2.2. Фронтальна пряма

Фронтальна пряма або фронталь – це пряма рівня, яка паралельна до фронтальної площини проекцій і позначається буквою f

Наочне зображення та епюр фронтальної прямої CD

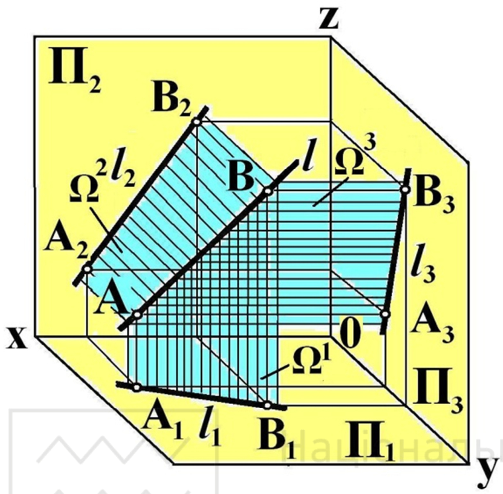


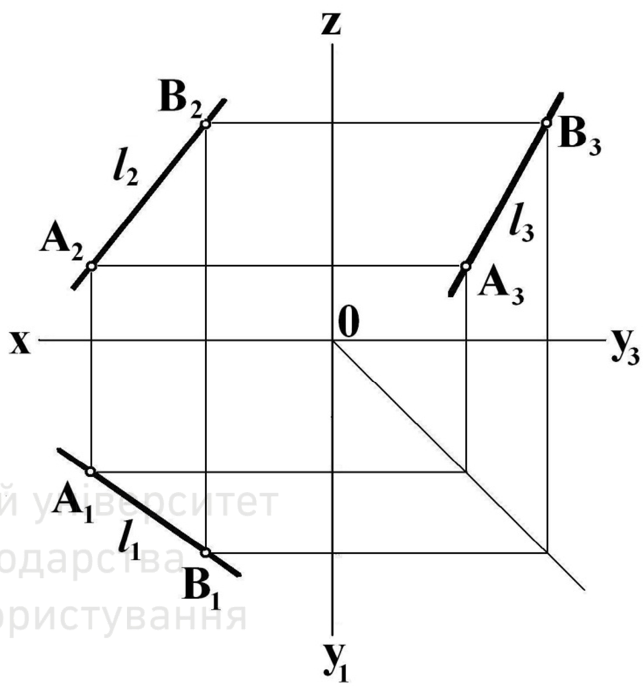
Розділ 2. Пряма лінія та її проекціювання

2.1. Проекції прямої лінії

Ортогональними проекціями прямої лінії в загальному випадку є прямі лінії, які можна отримати як лінії перетину площин, що проходять через задану пряму, із площинами проекцій, до яких ці площини перпендикулярні: $l_1 = \Omega^1 \cap \Pi_1$, $l_2 = \Omega^2 \cap \Pi_2$, $l_3 = \Omega^3 \cap \Pi_3$ ($\Omega^1 \perp \Pi_1$, $\Omega^2 \perp \Pi_2$, $\Omega^3 \perp \Pi_3$).

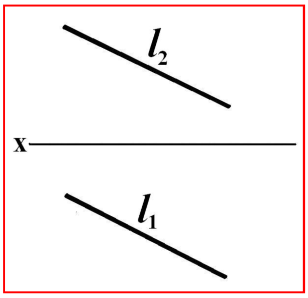
Оскільки пряма лінія в просторі визначається за двома її нетотожними точками, то побудова проекцій прямої зводиться до побудови проекцій двох її нетотожних точок: A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3 – проекції точок A і B прямої *l* на площинах проекцій Π_1, Π_2, Π_3.

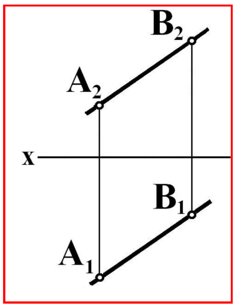




Два способи позначення прямої на епюрі

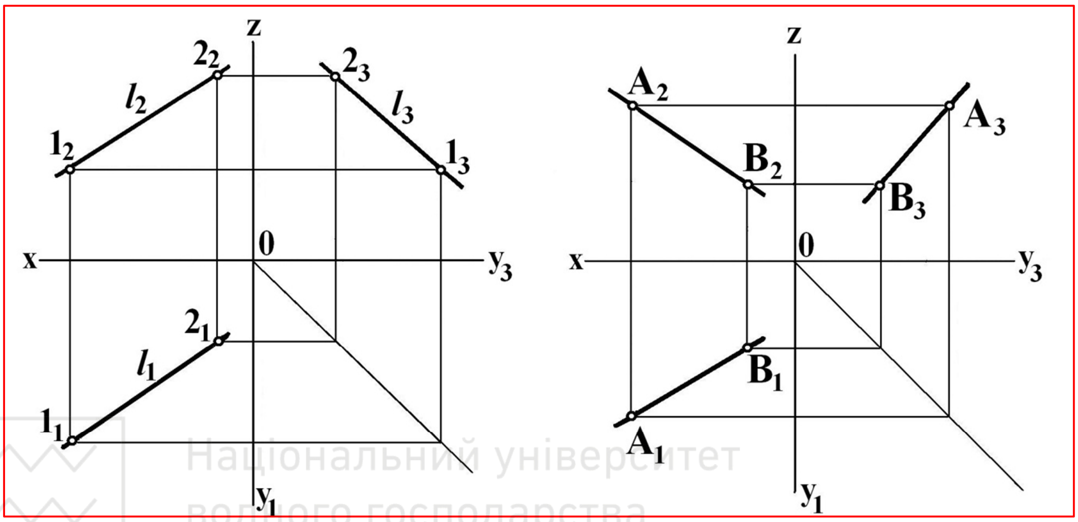
Малими літерами латинського алфавіту (пряма *l*)	**Великими літерами латинського алфавіту за позначенням двох її нетотожних точок (пряма AB)**





Дві проекції прямої визначають її положення в просторі.

Для побудови третьої проекції прямої потрібно на двох заданих проекціях прямої відмітити проекції двох її нетотожних точок (для прямої *l* – це точки 1 і 2, для прямої АВ – це точки А і В)

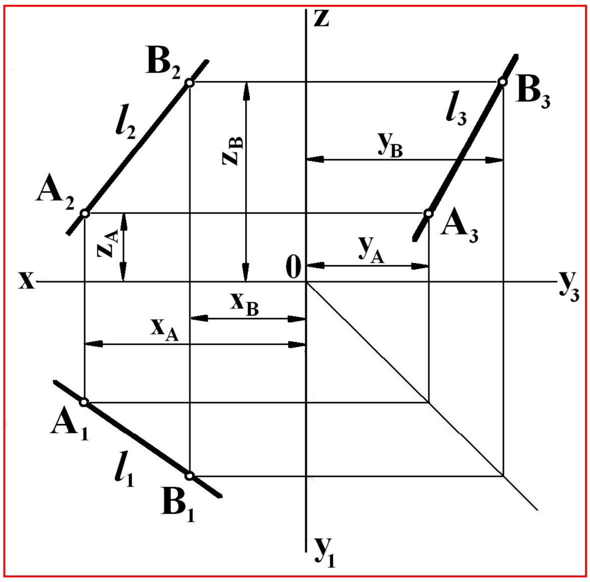


2.2. Класифікація прямих

Прямі залежно від їх розміщення відносно площин проекцій поділяють на прямі загального положення, прямі рівня та проекціюючі прямі.

2.2.1. Прямі загального положення

Прямі загального положення – це прямі, які не паралельні і не перпендикулярні до жодної з площин проекцій (в 2.1 наведено наочне зображення та епюри прямих загального положення).



Епюр прямої загального положення *l* з указанням координат x, y, z двох її нетотожних точок A і B.

Проекційні властивості та координатні характеристики прямої загального положення:

1. Проекції прямої не паралельні і не перпендикулярні до осей проекцій – це характерна графічна ознака, що властива лише прямій загального положення і дозволяє відрізнити епюр цієї прямої від епюрів прямих рівня та проекціюючих.

2. Кожна проекція відрізка прямої коротша за натуральну (дійсну) величину самого відрізка, оскільки пряма не паралельна до жодної з площин проекцій.

3. Різниці значень координат x, y, z двох нетотожних точок прямої не дорівнюють нулю.

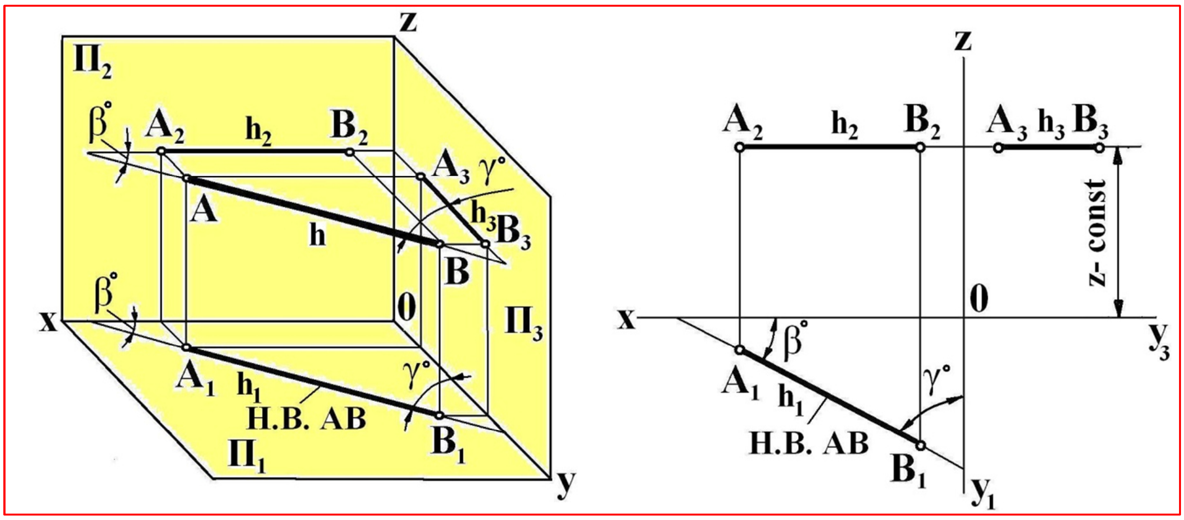
2.2.2. Прямі рівня

Прямі рівня – це прямі, які паралельні до однієї з площин проекцій: горизонтальна пряма, фронтальна пряма, профільна пряма.

2.2.2.1. Горизонтальна пряма

Горизонтальна пряма або горизонталь – це пряма рівня, яка паралельна до горизонтальної площини проекцій і позначається буквою h

Наочне зображення та епюр горизонтальної прямої AB.



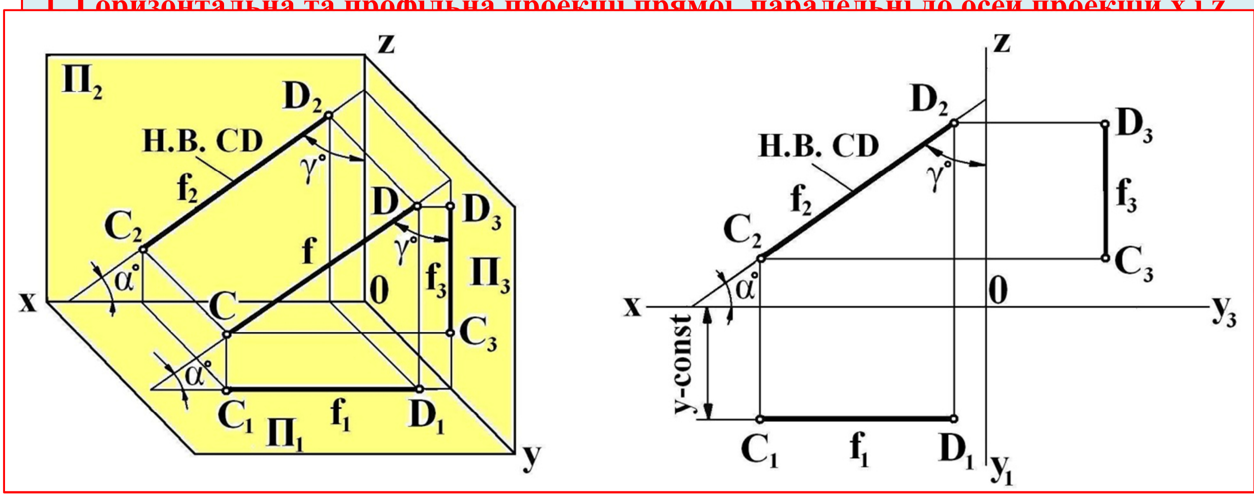
2.2.2.2. Фронтальна пряма

Фронтальна пряма або фронталь – це пряма рівня, яка паралельна до фронтальної площини проекцій і позначається буквою f

Наочне зображення та епюр фронтальної прямої CD

Проекційні властивості та координатні характеристики фронтальної прямої:

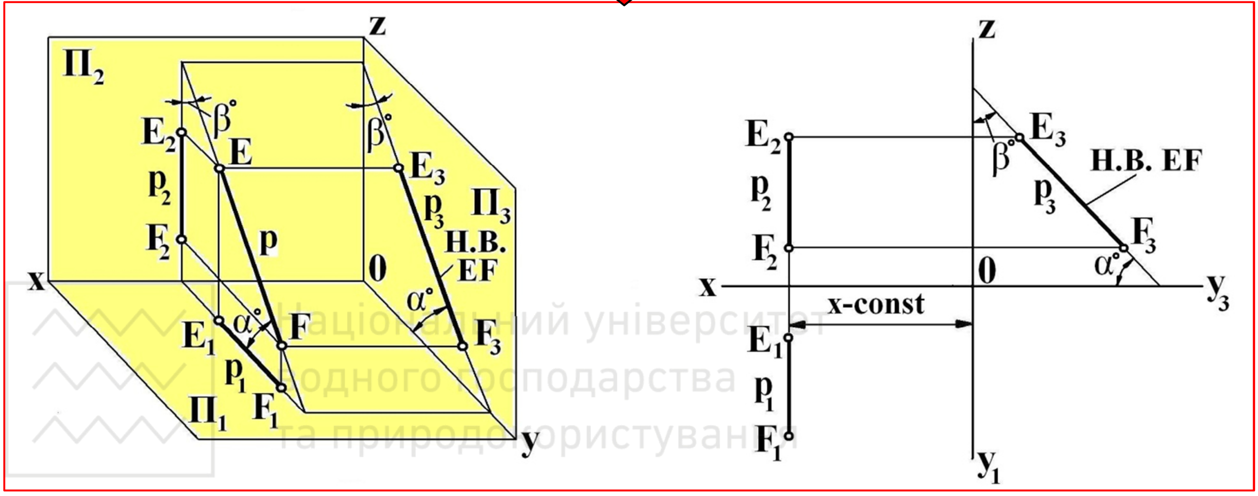
1. Горизонтальна та профільна проекції прямої паралельні до осей проекцій x і z



2.2.2.3. Профільна пряма

Профільна пряма – це пряма рівня, яка паралельна до профільної площини проекцій і позначається буквою .

Наочне зображення та епюр профільної прямої EF



Проекційні властивості та координатні характеристики профільної прямої:

1. Горизонтальна та профільні проекції прямої паралельні до осей проекцій у і z . Це характерна графічна ознака, що властива лише фронтальній прямій.

2. Координата х всіх точок прямої є сталою величиною.

3. Профільна проекція відрізка прямої визначає натуральну величину самого відрізка (E_3F_3 = Н.В.EF).

4. Кути α^0 і β^0 – кути нахилу прямої до площин проекцій відповідно $П_1$ і $П_2$. Вони визначаються безпосередньо за епюром без додаткових графічних побудов.

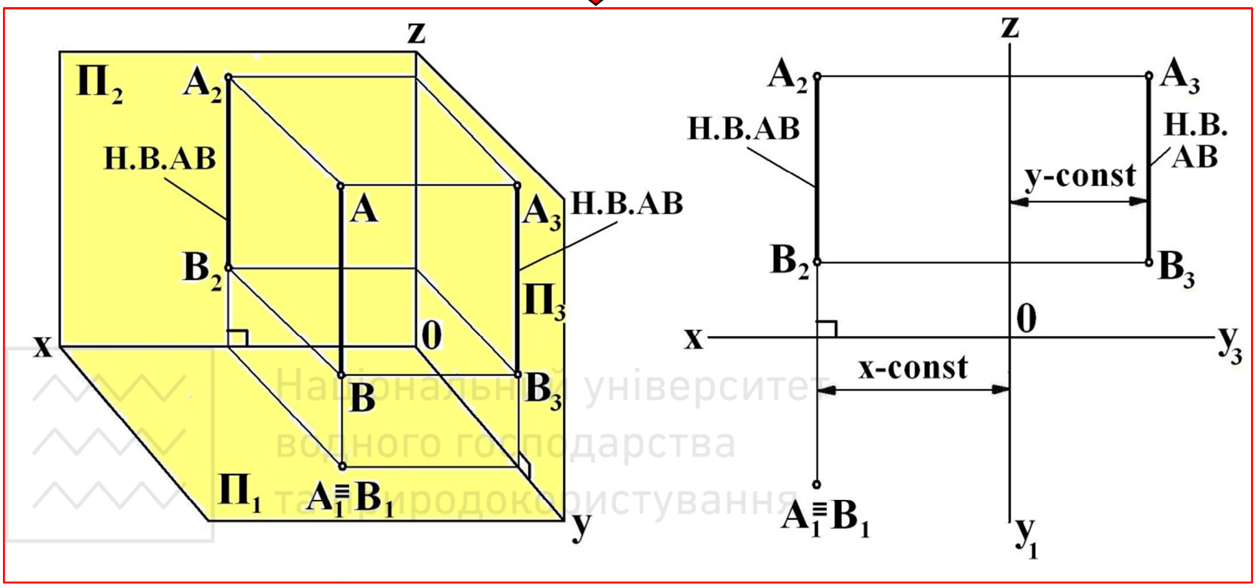
2.2.3. Проекціюючі прямі

Проекціюючі прямі – це прямі, які перпендикулярні до однієї з площин проекцій: горизонтально-проекціююча пряма, фронтально-проекціююча пряма, профільно-проекціююча пряма (ці прямі водночас паралельні до двох інших площин проекцій).

2.2.3.1. Горизонтально-проекціююча пряма

Горизонтально-проекціююча пряма – це проекціююча пряма, яка перпендикулярна до горизонтальної площини проекці.

Наочне зображення та епюр горизонтально-проекціюючої прямої АВ



Проекційні властивості та координатні характеристики горизонтально-проекціюючої прямої:

1. Горизонтальна проекція прямої – точка, фронтальна та профільна проекції перпендикулярні відповідно до осей x і y.

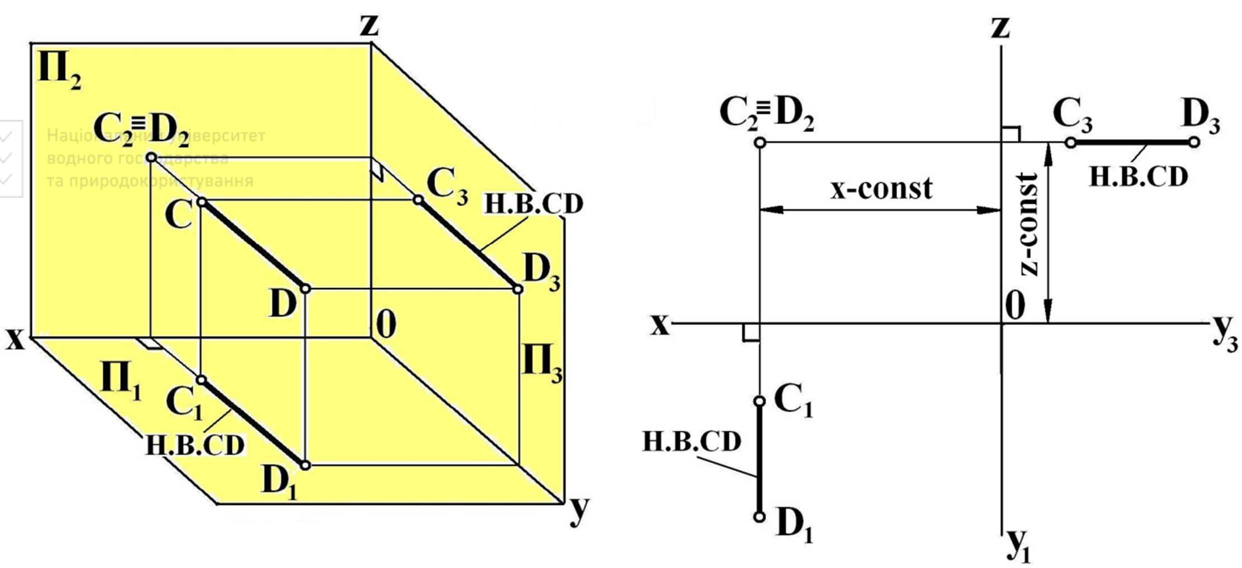
2. Координати x і y всіх точок прямої є сталими величинами.

3. Фронтальна та профільна проекції відрізка прямої визначають натуральну величину самого відрізка ($A_2B_2 = A_3B_3$ = Н.В.АВ).

2.2.3.1. Фронтально-проекціююча пряма

Фронтально-проекціююча пряма – це проекціююча пряма, яка перпендикулярна до фронтальної площини проекцій

Наочне зображення та епюр фронтально-проекціюючої прямої CD



Проекційні властивості та координатні характеристики фронтально-проекціюючої прямої:

1. Фронтальна проекція прямої – точка, горизонтальна та профільна проекції перпендикулярні відповідно до осей x і z.

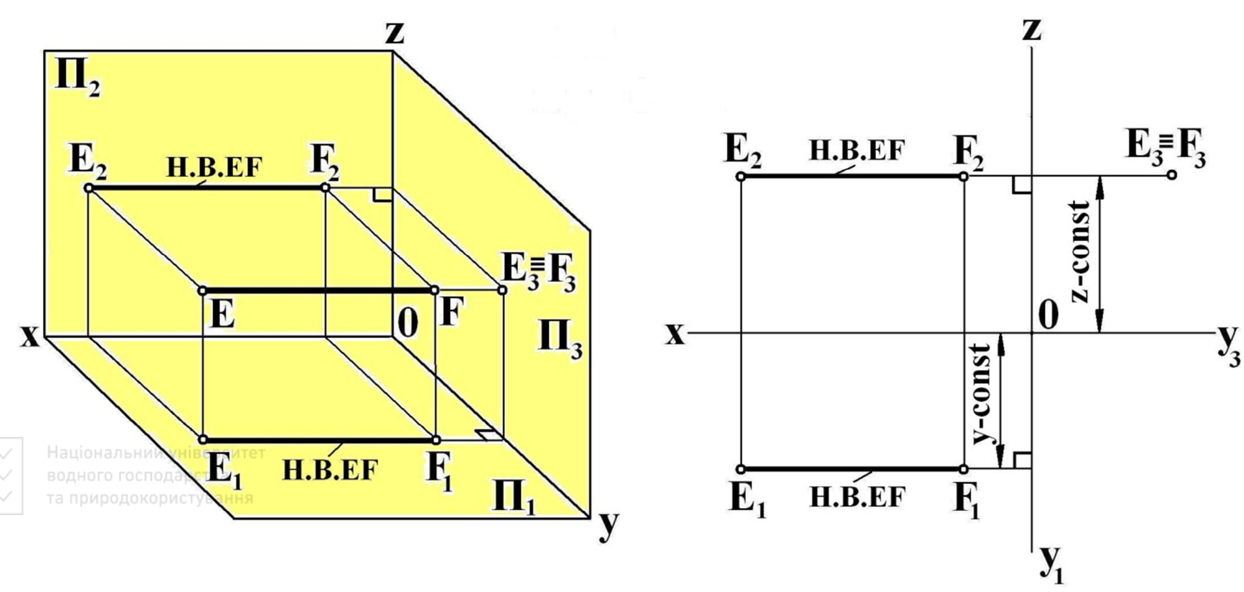
2. Координати x і z всіх точок прямої є сталими величинами.

3. Горизонтальна та профільна проекції відрізка прямої визначають натуральну величину самого відрізка ($C_1D_1 = C_3D_3$ = Н.В.CD).

2.2.3.1. Профільно-проекціююча пряма

Профільно -проекціююча пряма – це проекціююча пряма, яка перпендикулярна до профільної площини проекцій

Наочне зображення та епюр профільно-проекціюючої прямої Е



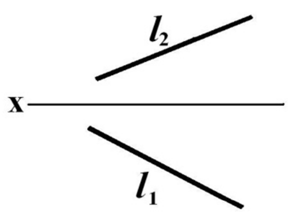
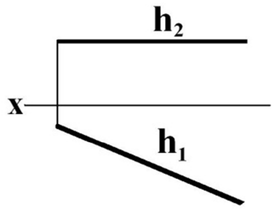
Проекційні властивості та координатні характеристики профільно-проекціюючої прямої:

1. Профільна проекція прямої – точка, горизонтальна та профільна проекції перпендикулярні відповідно до осей y і z.

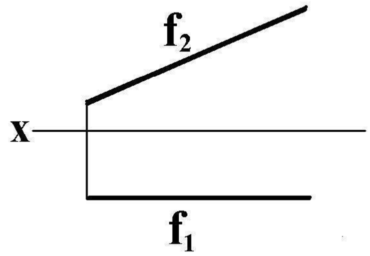
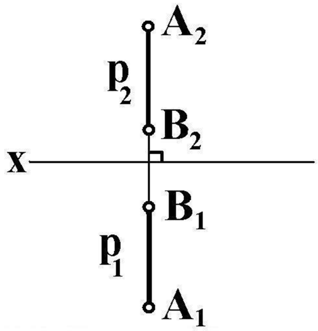
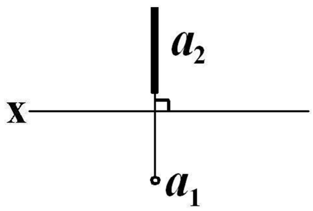
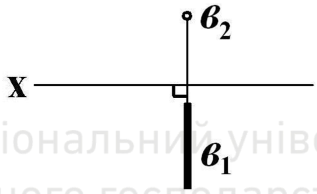
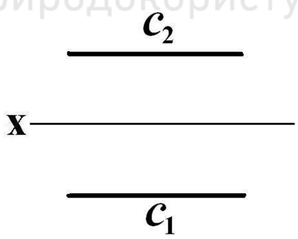
2. Координати x і z всіх точок прямої є сталими величинами.

3. Горизонтальна та фронтальна проекції відрізка прямої визначають натуральну величину самого відрізка ($E_1F_1 = E_2F_2$ = Н.В.EF).

Епюри та проекційні особливості прямих в системі двох площин проекцій Π_2 і Π_1

Назви прямих ліній	Епюри прямих ліній	Графічна ознака прямої лінії на епюрі
Пряма загального положення		Проекції прямої не паралельні і не перпендикулярні до осі проекцій x
Горизонтальна пряма (горизонталь)		Фронтальна проекція паралельна до осі x

Продовження таблиці

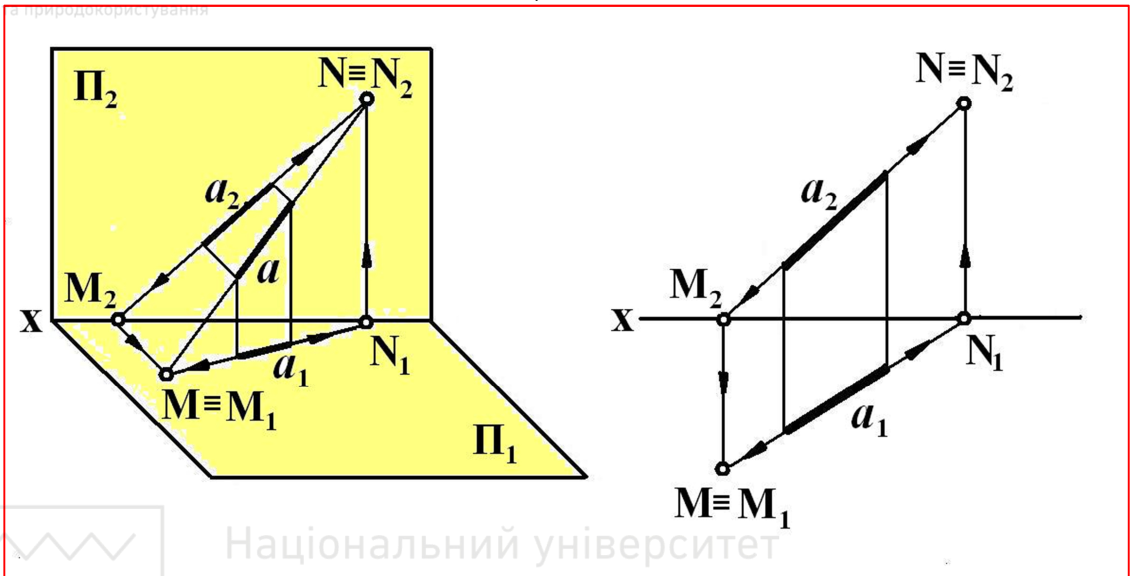
Фронтальна пряма (фронталь)		**Горизонтальна проекція паралельна осі х**
Профільна пряма		**Горизонтальна та фронтальна проекції перпендикулярні до осі х** **Примітка: Для одно – значного визначення прямої потрібно зазначити проекції двох її нетотожних точок**
Горизонтально-проекціююча пряма		**Горизонтальна проекція - точка, фронтальна проекція перпендикулярна до осі х**
Фронтально-проекціююча пряма		**Фронтальна проекція - точка, горизонтальна проекція перпендикулярна до осі х**
Профільно-проекціююча пряма		**Горизонтальна та фронтальна проекції паралельні до осі х**

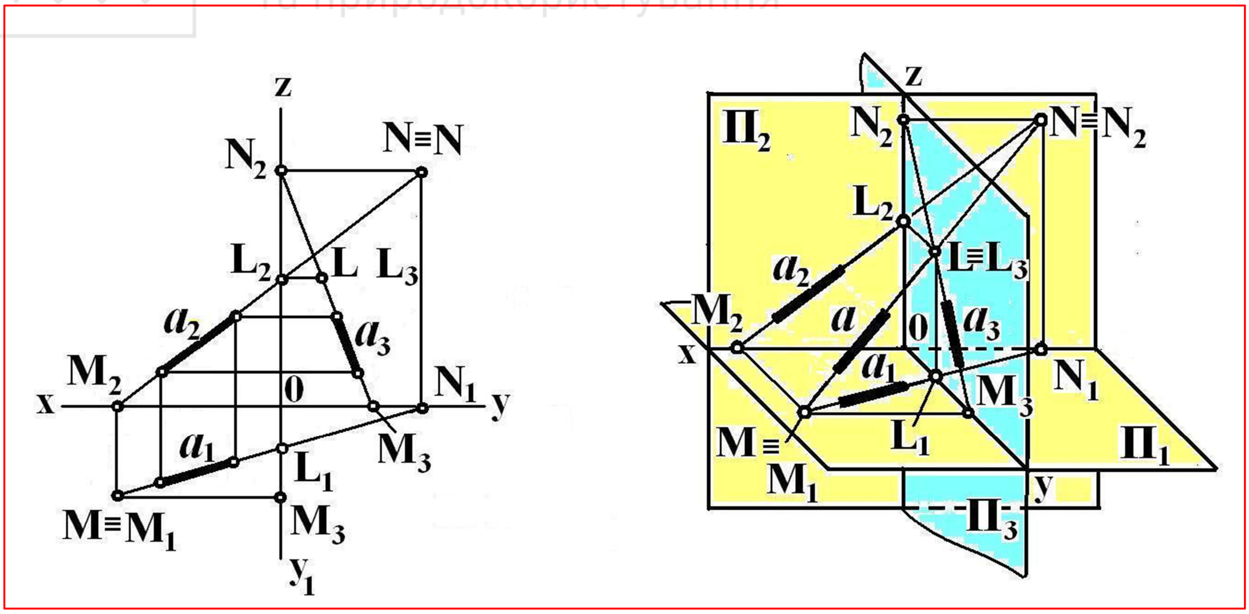
2.3. Сліди прямої

Слідом прямої називається точка перетину прямої з площиною проекцій.

В системі трьох площин проекцій пряма загального положення має три сліди: горизонтальний – точка перетину прямої з Π_1 (позначається літерою N), фронтальний - точка перетину прямої з Π_2 (позначається літерою M), профільний - точка перетину прямої з Π_3 (позначається літерою L). Пряма рівня має два сліди, проекціююча – один.

Побудова слідів прямої *a* в системі двох та трьох площин проекцій

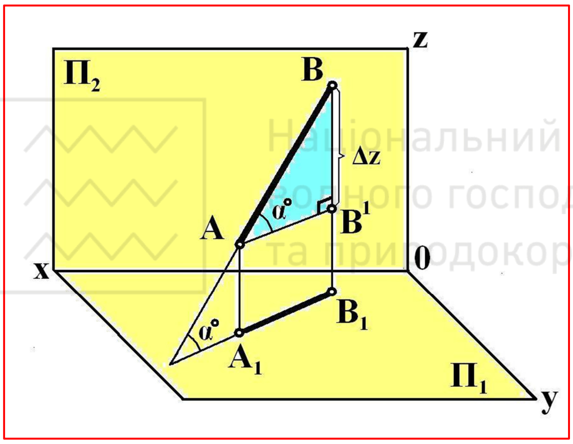


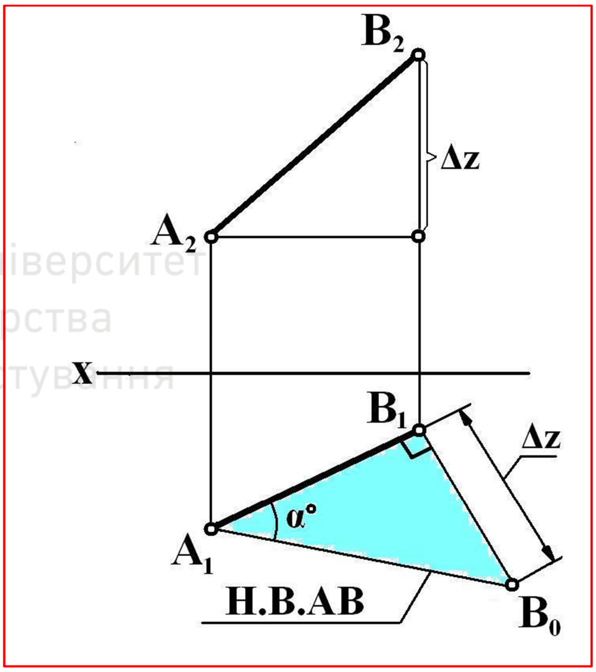


Для визначення сліду прямої потрібно виконати дві умови: 1 - слід повинен знаходитися в площині проекцій (це означає, що дві проекції сліду з трьох лежать на осях проекцій) та 2 – належати прямій. Тому побудову сліду прямої починають із визначення точки перетину тієї проекції прямої, яка не лежить в площині проекцій знаходження сліду, з віссю проекцій. Наприклад, для визначення горизонтального сліду прямої спочатку продовжують фронтальну або профільну проекцію прямої до перетину з віссю проекцій. Ця точка буде однією з проекцій сліду, з якої проводять лінію проекційного зв'язку для знаходження самого сліду за умови, що він належить прямій.

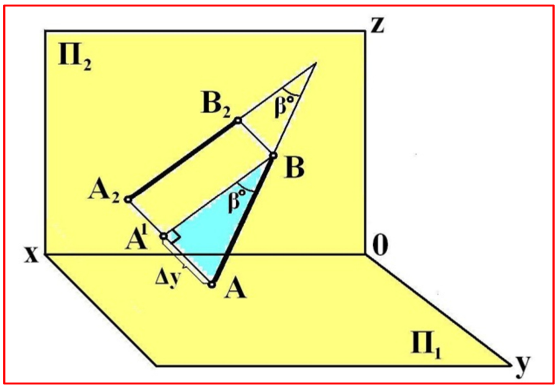
2.4. Визначення натуральної величини відрізка прямої загального положення

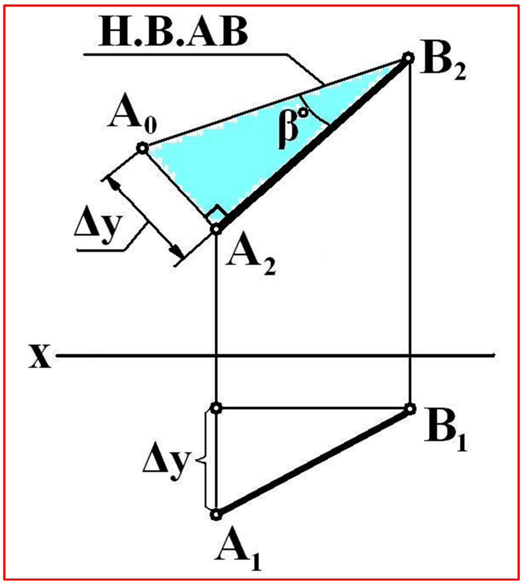
Визначення способом прямокутного трикутника натуральної величини (довжини) відрізка АВ прямої загального положення та кута α^o нахилу прямої до горизонтальної площини проекцій





Визначення способом прямокутного трикутника натуральної величини (довжини) відрізка АВ прямої загального положення та кута β^o нахилу прямої до фронтальної площини проекцій



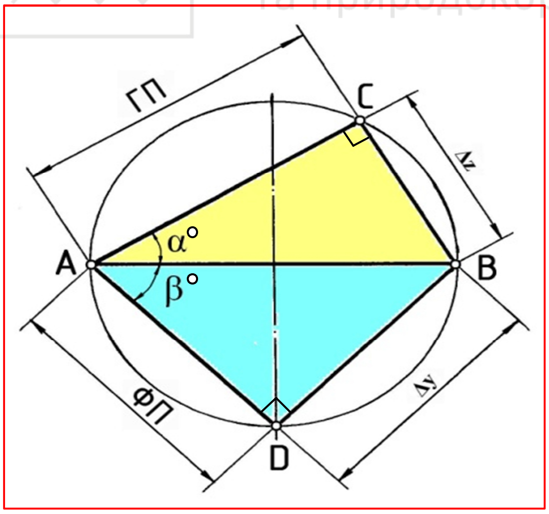


Висновки:

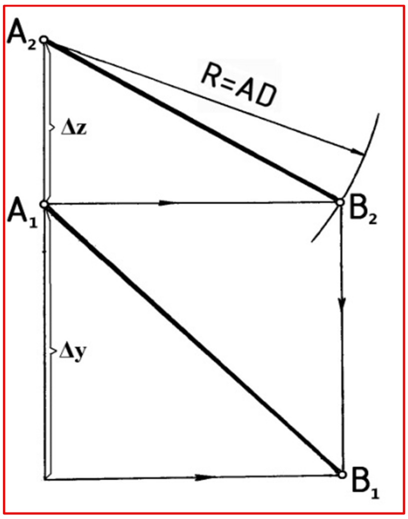
Натуральна величина відрізка прямої загального положення визначається гіпотенузою прямокутного трикутника, у якого один катет – проекція відрізка прямої на одну з площин проекцій, а другий катет дорівнює різниці відстаней кінців відрізка прямої до тієї площини проекцій, на якій будується прямокутний трикутник.

Із цього прямокутного трикутника визначається і кут нахилу прямої до тієї площини проекцій, на якій будується прямокутний трикутник, як кут між катетом - проекцією і гіпотенузою.

Якщо з'єднати прямокутні трикутники $A_1B_1B_0$ і $A_2B_2A_0$ таким чином, щоб вони мали спільну гіпотенузу ($AB = A_1B_0 = B_2A_0$), то навколо цих трикутників можна описати коло, діаметром якого буде спільна гіпотенуза АВ.



В трикутнику АВС катет АС виражає горизонтальну проекцію (ГП) відрізка АВ, а катет СВ – різницю координат z точок А і В. В трикутнику ABD катет AD виражає фронтальну проекцію (ФП) відрізка АВ, а катет BD – різницю координат у точок А і В. Дане зображення (конфігурація) дозволяє дослідити геометрію прямої лінії, наприклад, знаючи одну проекцію відрізка та кут нахилу прямої, побудувати другу проекцію відрізка тощо.

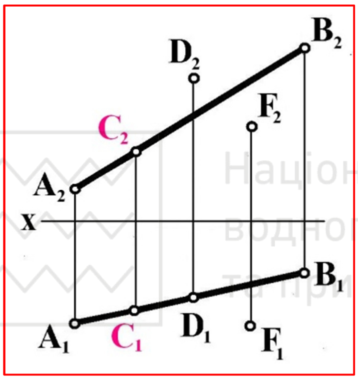


Проведення на епюрі через точку А прямої, яка складає з площинами проекцій $П_1$ і $П_2$ кути 30^0 і 45^0. Для цього будують зазначену конфігурацію, де АВ – відрізок довільного розміру, а кути α і β дорівнюють 30^0 і 45^0.

У прямої загального положення кожний з кутів α і β є гострим, а сума кутів є меншою 90^0.

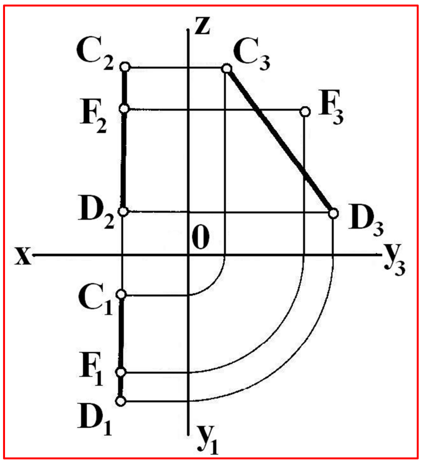
2.5. Взаємне розміщення точки та прямої

Точка належить прямій, якщо її проекції знаходяться на однойменних проекціях цієї прямої



Серед трьох точок C, D і F лише точка C належить прямій АВ

Якщо точка і пряма розміщені в одній площині рівня, яка паралельна до площини проекцій, то питання про їх взаємне розміщення може бути вирішено таким чином:



1 спосіб. Побудовою проекцій точки і прямої на цю площину проекцій. Точка F і відрізок CD належать площині рівня, паралельній до $П_3$. Проте точка F не лежить на прямій CD, про що свідчать їх проекції на $П_3$.

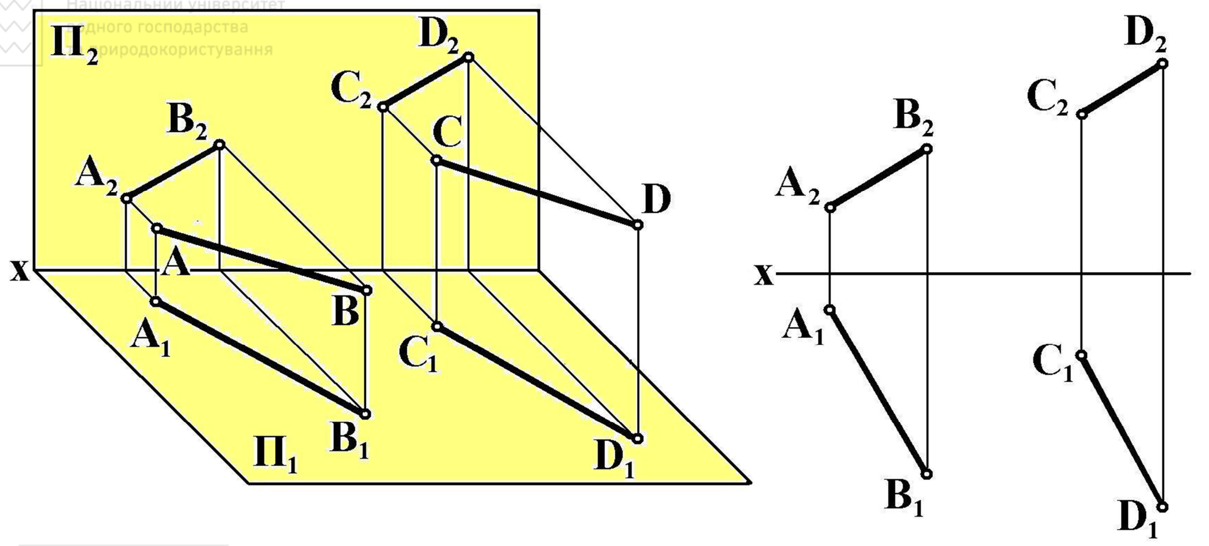
2 спосіб. Оскільки $C_2F_2/F_2D_2 \neq C_1F_1/F_1D_1$, то точка F не належить прямій CD.

2.6. Взаємне розміщення двох прямих ліній

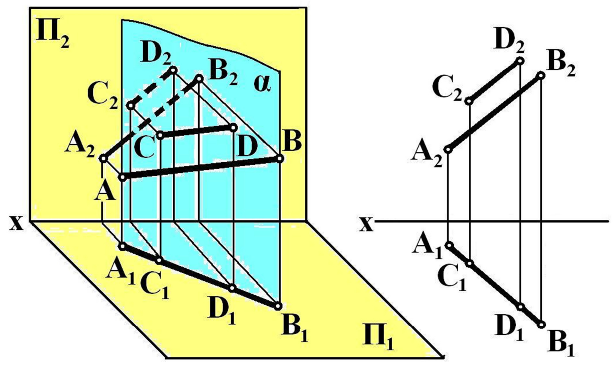
Дві прямі лінії у просторі можуть бути: 1) паралельними, 2) перетинатися, 3) мимобіжними.
Паралельні та прямі, що перетинаються, лежать в одній площині, а мимобіжні прямі не мають спільної точки, тому не лежать в одній площині.

2.6.1. Паралельні прямі

Однойменні проекції паралельних прямих на площину проекцій, до якої прямі не перпендикулярні, паралельні між собою



Якщо паралельні прямі лежать в площині, що перпендикулярна до площини проекцій, то проекції прямих на цю площину проекцій збігаються

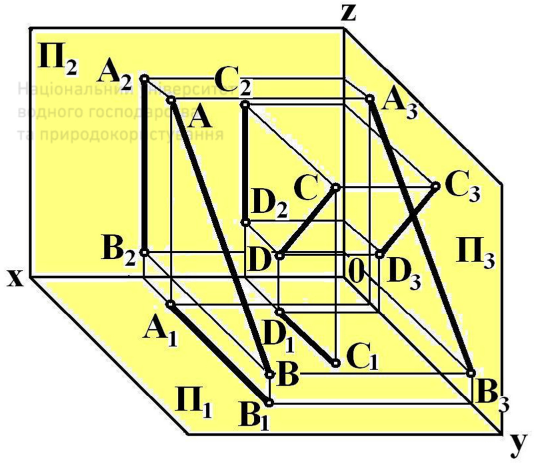


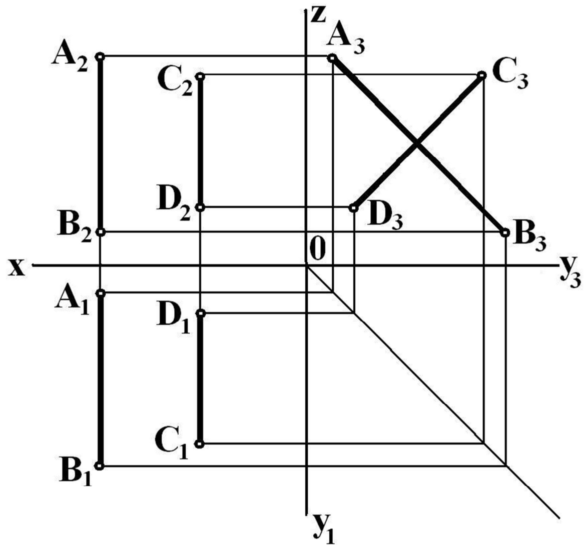
Паралельні прямі AB і CD лежать в площині α, яка перпендикулярна до площини проекцій $П_1$

В системі двох площин проекцій паралельність прямих завжди можна визначити для прямих загального положення. А для прямих рівня, паралельних одній з площин проекцій, на якій не зазначено проекцій цих прямих, можна визначити одним з чотирьох способів.

1 спосіб. Побудова проекцій прямих на площину проекцій, до якої ці прямі паралельні.

Прямі AB і CD паралельні до $П_3$. В системі $П_2$ і $П_1$ визначення паралельності прямих утруднено. Побудова профільних проекцій дозволяє встановити, що дані прямі не є паралельними. Це дві мимобіжні прямі.

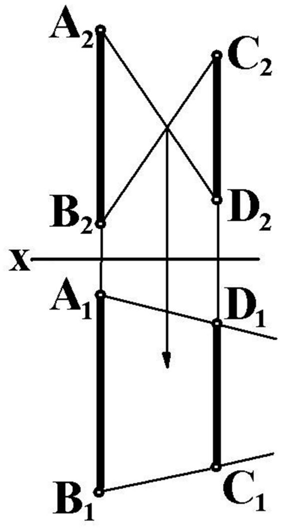




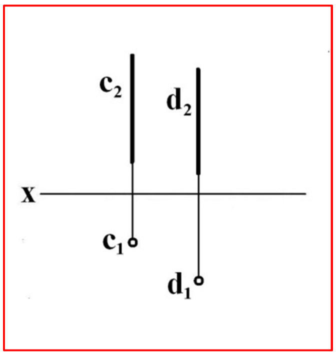
2 спосіб. Порівняння послідовності розміщення літерних позначень кінців відрізків прямих. **Оскільки C_1 розміщено знизу під D_1, то прямі AB і CD не є паралельними прямими. В даному випадку профільні проекції будувати не потрібно.**

3 спосіб. Порівняння відношень довжини проекцій відрізків прямих.

У паралельних прямих дотримується рівність відношень довжин проекцій відрізків цих прямих за умови послідовного розміщення літер, якими позначено точки на прямих.



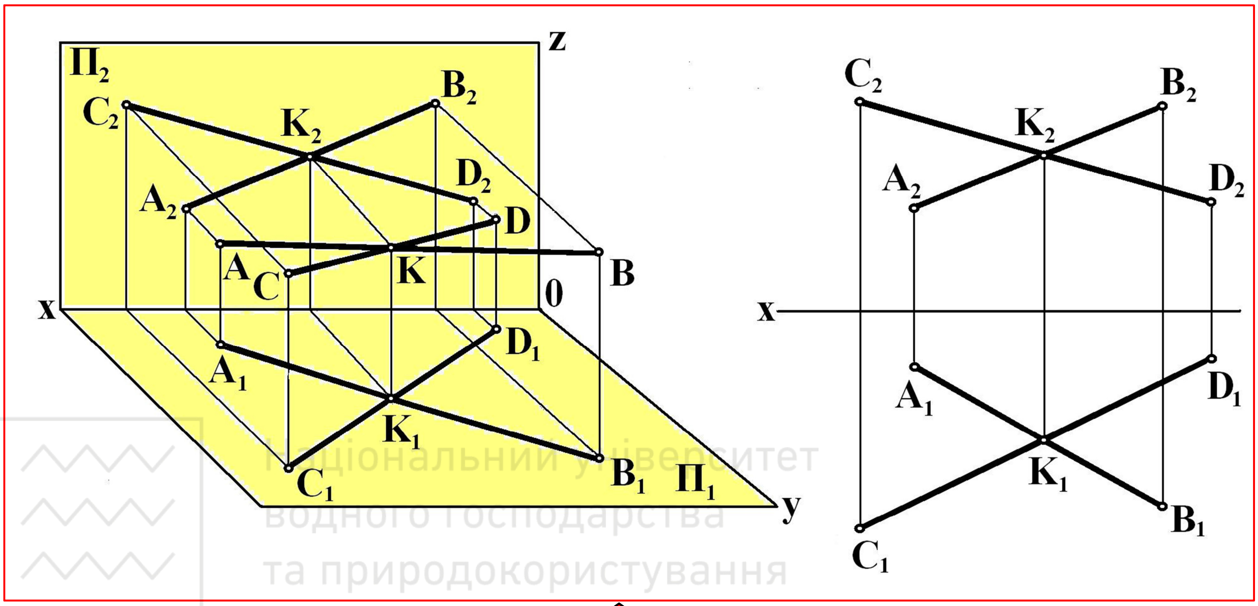
4 спосіб. **З'єднаємо кінці відрізків різних прямих. Прямі AD і BC можуть або перетинатися (це свідчить, що прямі AB і CD лежать в одній площин і паралельні), або бути мимобіжними. Оскільки прямі AD і BC не перетинаються, то прямі AB і CD не є паралельними прямими, а є мимобіжними прямими.**



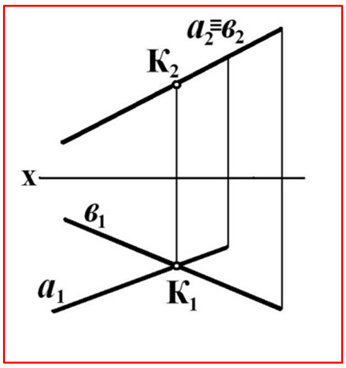
Епюр паралельних прямих c і d, які перпендикулярні до $П_1$ (лежать в площині, перпендикулярній до $П_1$).

2.6.2. Прямі, що перетинаються

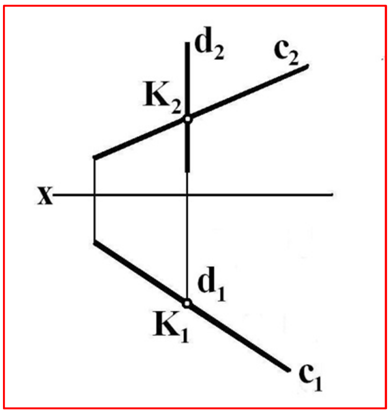
Проекції прямих, що перетинаються, проекціюються на площини проекцій, в загальному випадку, прямими лініями, що також перетинаються, причому точки перетину однойменних проекцій прямих лежать на одній лінії проекційного зв’язку, оскільки є проекціями однієї і тієї ж точки – точки перетину прямих.



Наочне зображення та епюр прямих AB і CD, що перетинаються в точці K. Прямі AB і CD лежать в площині, яка не перпендикулярна до жодної з площин проекцій.



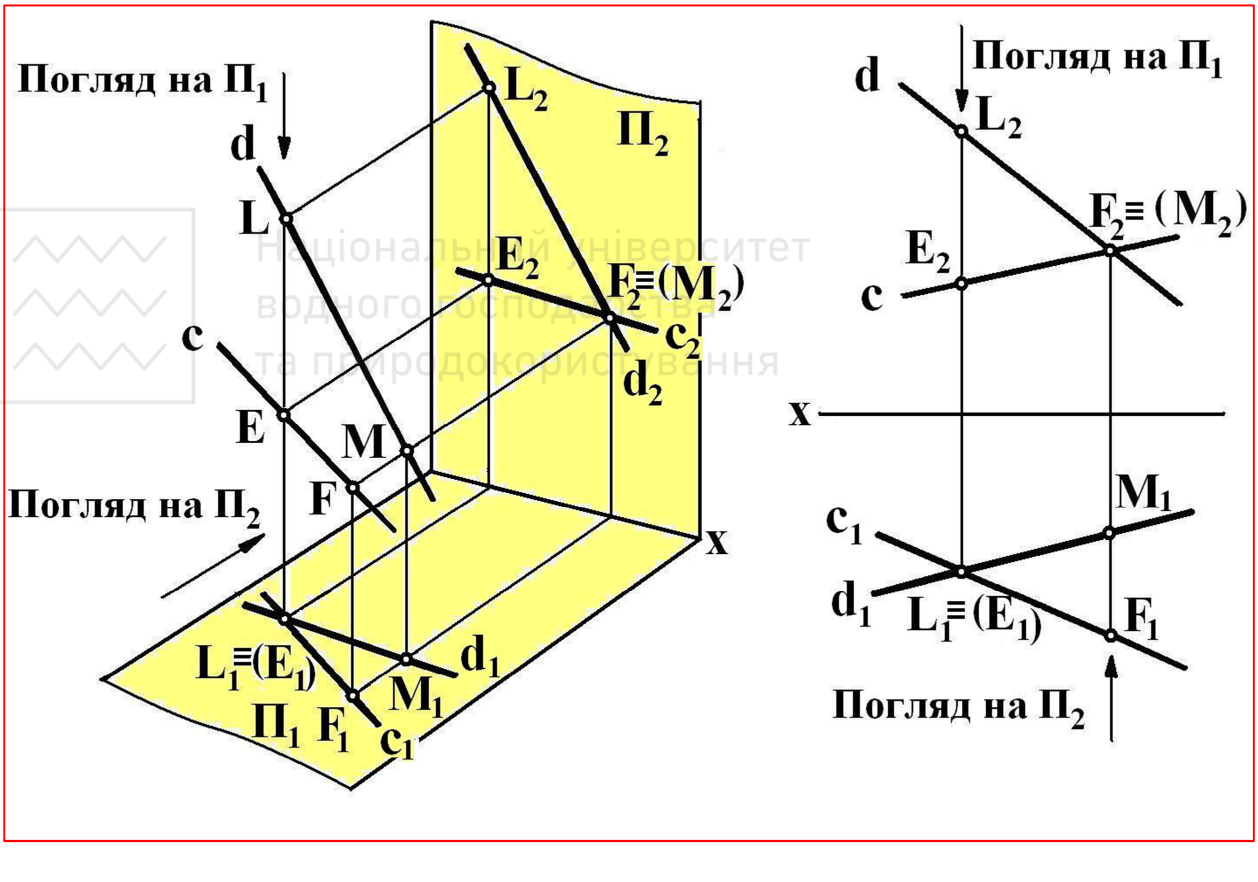
Епюр прямих *а* і *в*, що перетинаються. Прямі *а* і *в* лежать у площині, яка перпендикулярна до $П_2$



Епюр прямих c і d, що перетинаються. Прямі c і d лежать у площині, яка перпендикулярна до $П_1$. Пряма d – горизонтально-проекціююча пряма

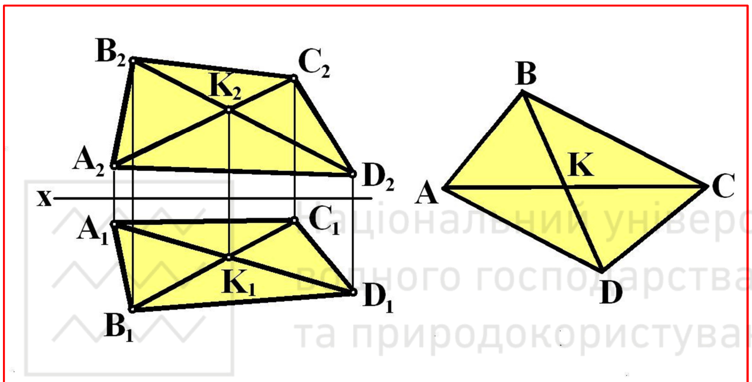
2.6.3. Мимобіжні прямі

У мимобіжних прямих, тобто прямих, які не паралельні і не перетинаються, точки перетину їх однойменних проекцій не лежать на одній лінії проекційного зв'язку, як це має місце у прямих, що перетинаються, а проекції ніколи не збігаються, оскільки мимобіжні прямі не лежать в одній площині

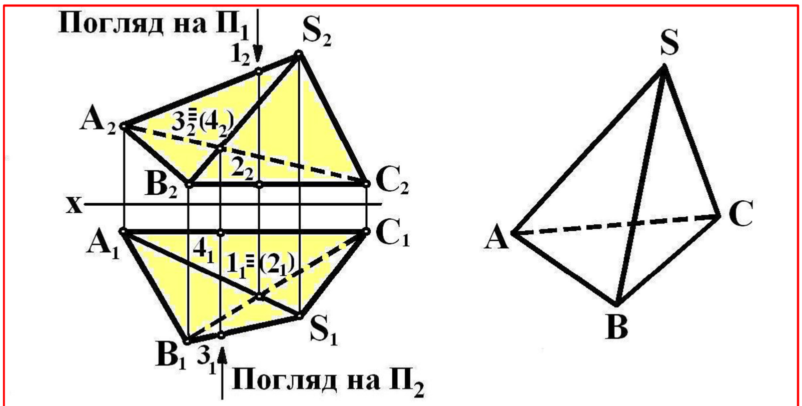


Наочне зображення та епюр мимобіжних прямих c і d.
Для мимобіжних прямих характерна наявність конкуруючих точок, за допомогою яких визначають видимість елементів геометричних фігур на епюрі.
Конкуруючими називаються точки, які лежать на одній проекціюючій прямій.
Для мимобіжних прямих c і d пари точок L, E і F, M є конкуруючими точками.
Точки L і E утворюють горизонтально-проекціюючу пряму, де $L_1 \equiv E_1$. Точки F і M утворюють фронтально-проекціюючу пряму, де $F_2 \equiv M_2$.
З двох конкуруючих точок видимою відносно площин проекцій буде та, у якої проекція, що не збігається з проекцією іншої конкуруючої точки, розміщена далі від осі проекцій, тобто ця точка буде знаходитися ближче до спостерігача.
Видимість елементів на епюрі розв'язується для кожної проекції окремо, а саме для тієї проекції елемента, на якій проекції конкуруючих точок збігаються.
Серед конкуруючих точок L і E видимою на $П_1$ є точка L, фронтальна проекція L_2 якої розміщена далі від осі x. Невидимою на $П_1$ буде точка E, тому її горизонтальну проекцію E_1 взято в дужки (E_1). Серед конкуруючих точок F і M видимою на $П_2$ є точка F, горизонтальна проекція F_1 якої розміщена далі від осі x. Невидимою на $П_2$ буде точка M, тому її фронтальну проекцію M_2 беруть в дужки (M_2).

Приклади зображення геометричних фігур з чотирма вершинами – плоского чотирикутника та чотирьохгранної піраміди



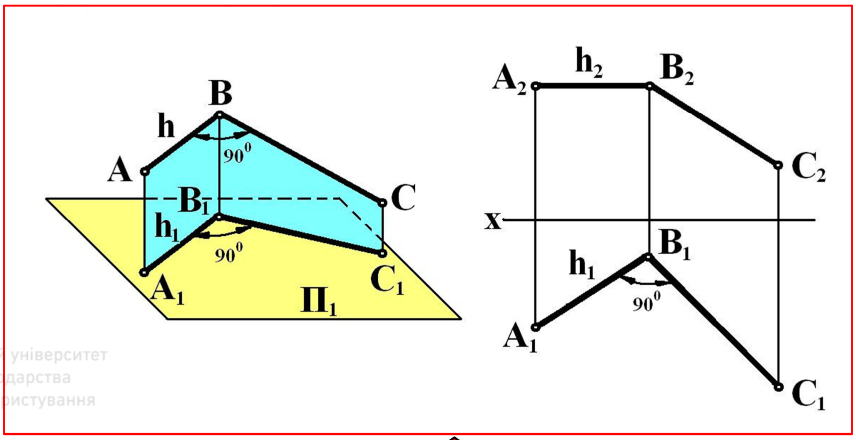
Наочне зображення і епюр плоского чотирикутника (AD і BD є діагоналями чотирикутника – це дві прямі, що перетинаються в точці К).



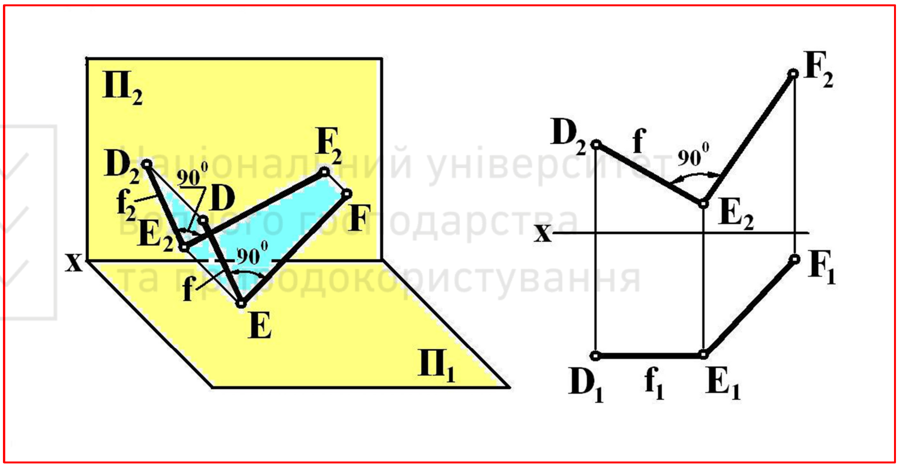
Наочне зображення і епюр піраміди ABCS (ребра AS і BC, AC і BS – це пари мимобіжних прямих).

2.7. Проекціювання взаємно перпендикулярних прямих, що перетинаються

Прямий кут, утворений перпендикулярними прямими, проекціюється у вигляді прямого кута на ту площину проекцій, до якої одна з прямих (сторона кута) паралельна, а друга не перпендикулярна.



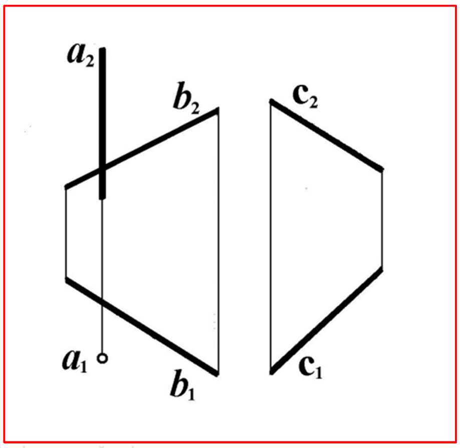
Наочне зображення та епюр прямого кута, утвореного сторонами AB і BC, які є відрізками прямих, що перетинаються у вершині B, де AB – відрізок горизонтальної прямої h, паралельної до $П_1$. Горизонтальна проекція кута $A_1B_1C_1$ складає прямий кут при вершині B_1.



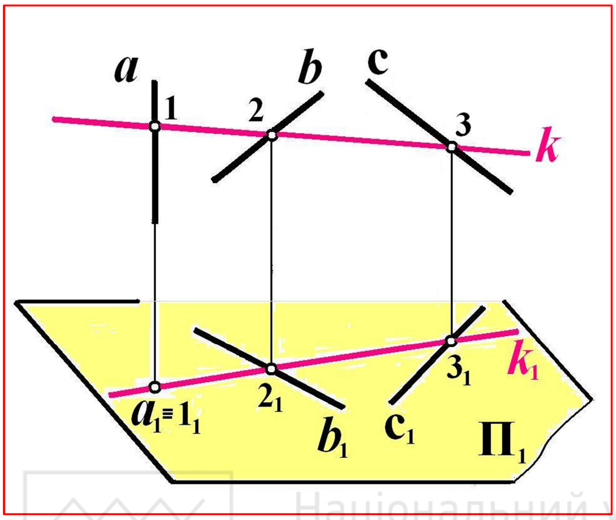
Наочне зображення та епюр прямого кута, утвореного сторонами DE і EF, які є відрізками прямих, що перетинаються у вершині E, де DE – відрізок фронтальної прямої f, паралельної до $П_2$. Фронтальна проекція кута $D_2E_2F_2$ складає прямий кут при вершині E_2.

Приклади розв'язування задач

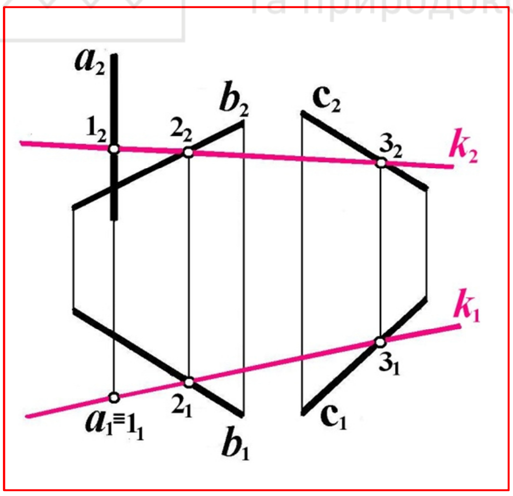
Задача № 1



Початкова умова задачі.
Побудувати проекції прямої *k*, яка перетинає задані прямі *a*, *b* і с.

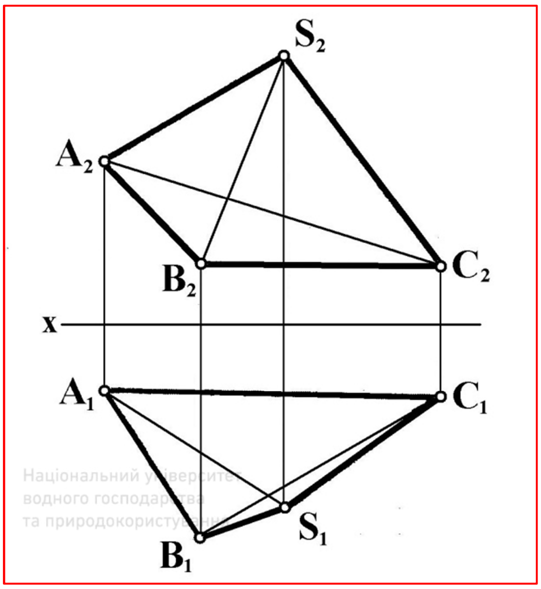


Розв'язування задачі на наочному зображенні.
Оскільки пряма *a* перпендикулярна до П$_1$, то горизонтальна проекція 1_1 точки 1 перетину прямої *k* з прямою *a* буде збігатися з *a*: $1_1 \equiv a_1$. Тому побудову проекцій прямої *k* починаємо з проведення її горизонтальної проекції k_1, яка проходить через a_1.
Примітка. Оскільки горизонтальну проекцію k_1 проведено у довільному напряму, то звідси випливає, що задані прямі a, b і с можуть перетинати безліч прямих.



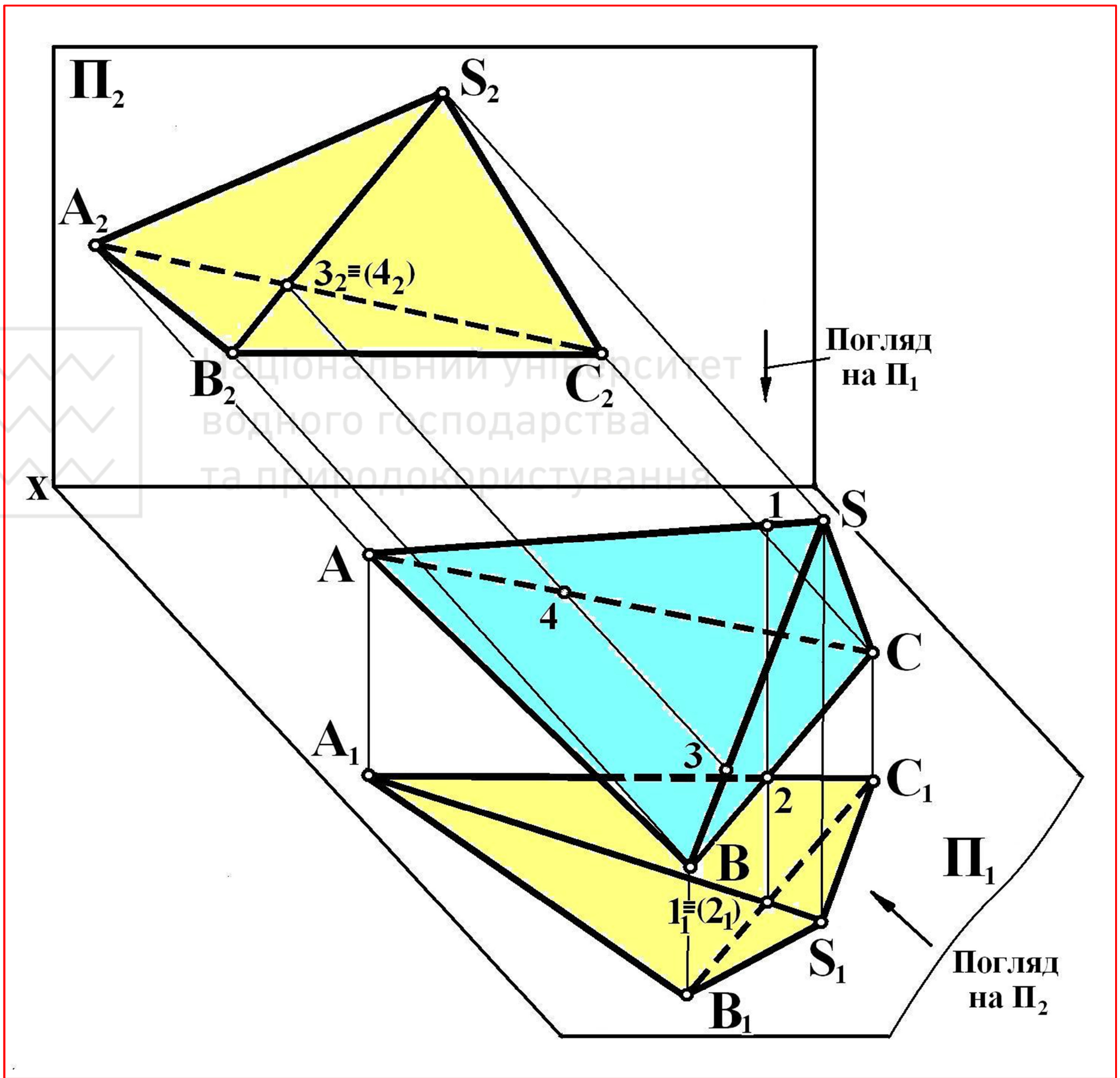
Розв'язування задачі на епюрі.

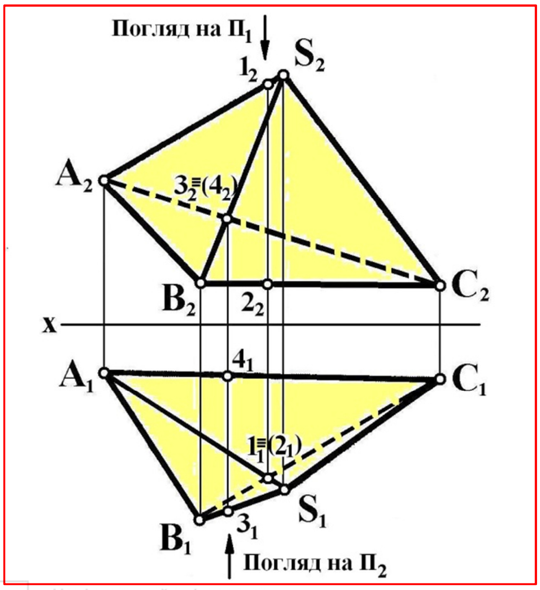
Задача № 2



Початкова умова задачі.
Визначити видимість ребер піраміди ABCS.

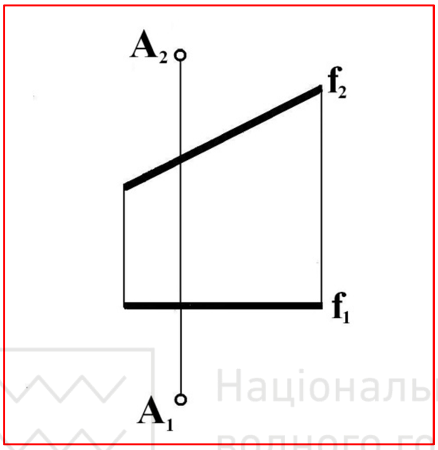
Розв'язування задачі на наочному зображенні.
Видимість ребер на горизонтальній проекції визначено за допомогою конкуруючих точок 1 і 2, а на фронтальній проекції – за допомогою конкуруючих точок 3 і 4.
Примітка. Видимість ребер визначають на тій проекції піраміди, на якій збігаються проекції конкуруючих точок.



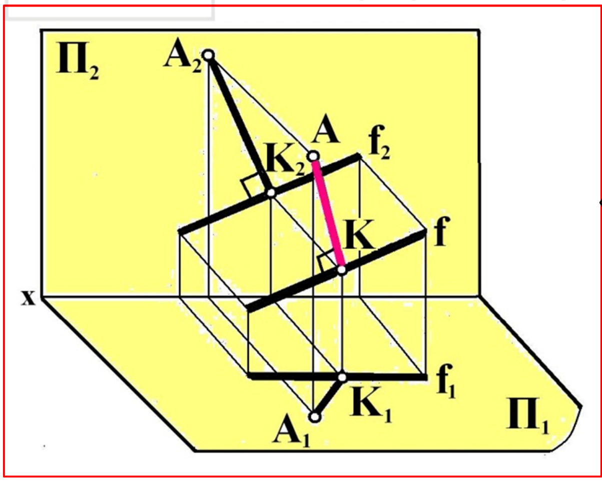


Розв'язування задачі на епюрі.

Задача № 3



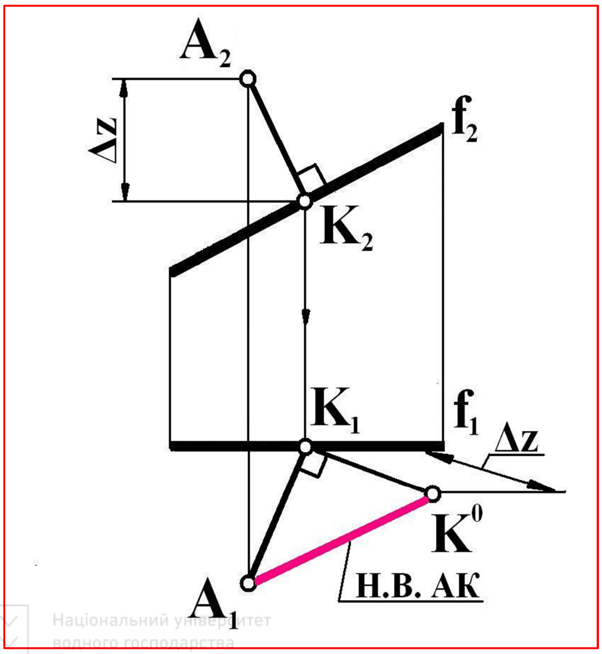
Початкова умова задачі.
Визначити відстань від точки А до фронтальної прямої f.



Розв'язування задачі на наочному зображенні.

Відстань від точки до прямої визначається відрізком перпендикуляра, проведеного з точки на пряму.

Оскільки пряма f паралельна до П$_2$, то провівши з точки А пряму АК перпендикулярно до f, отримаємо, що фронтальні проекції прямих АК і f будуть взаємно перпендикулярними: $A_2K_2 \perp f_2$. Тому побудову перпендикуляра будемо починати з проведення фронтальної проекції A_2K_2 перпендикулярно до f_2.



Розв'язування задачі на епюрі.

Послідовність побудов:

1. З точки A_2 проводимо $A_2K_2 \perp f_2$.

2. Визначаємо прекції K_2, K_1 точки К перетину АК з f.

3. Будуємо горизонтальну проекцію A_1K_1 відрізка перпендикуляра АК.

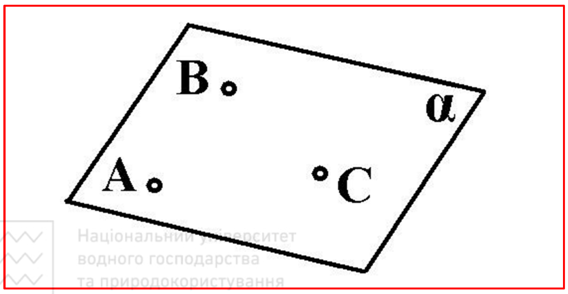
4. Способом прямокутного трикутника визначаємо натуральну величину відрізка АК, яка і буде шуканою відстанню точки А до прямої f: A_1K^0 = Н.В. АК = $|A\ f|$.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Розділ 3. Площина

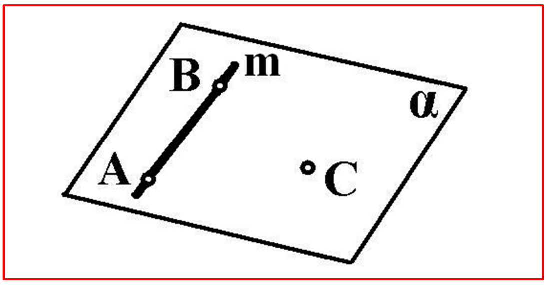
3.1. Задання площини в просторі і на епюрі

Площину в просторі визначають трьома точками, які не лежать на одній прямій



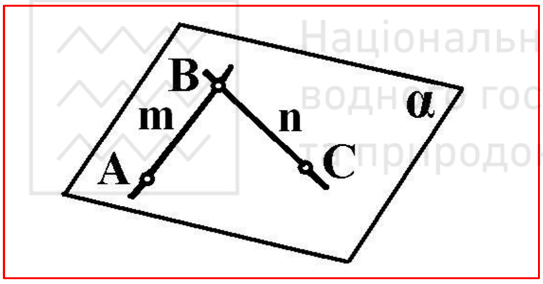
Точки А, В і С є визначником площини α

Розширення визначника площини дозволяє задати її іншими елементами:



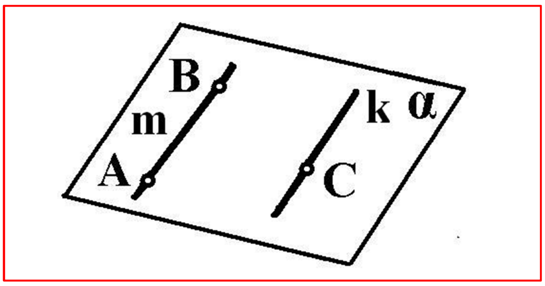
Прямою лінією та точкою, що їй не належить

Площину α задано прямою m та точкою С



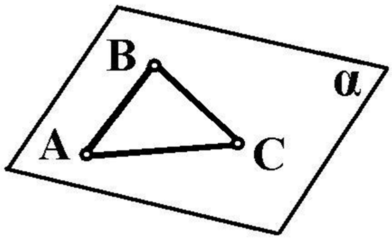
Двома прямими, що перетинаються

Площину α задано прямими m і n, що перетинаються



Двома паралельними прямими

Площину α задано паралельними прямими m і k

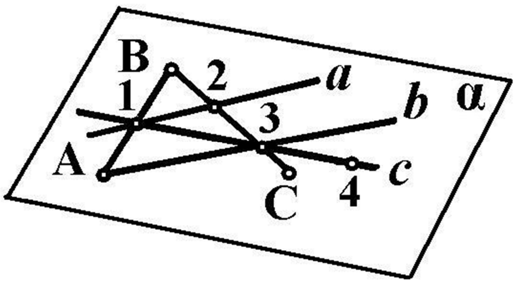


Відтинком площини, наприклад, трикутником

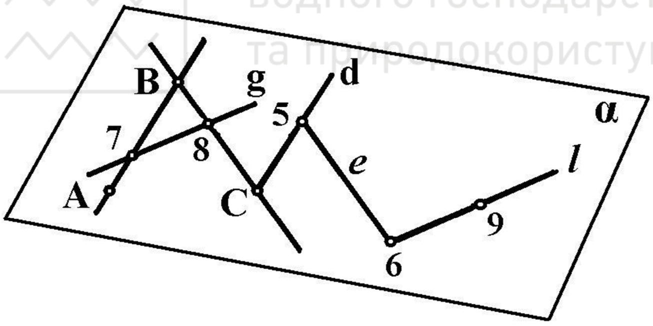
Площину α задано трикутником ABC

Вміння розширювати визначник площини дозволяє будувати потрібні для розв’язування різних задач точки та прямі, що належать площині.

Належність точки та прямої площині: точка належить площині, якщо вона лежить на прямій лінії цієї площини. Пряма лінія належить площині, якщо вона:
1) проходить через дві точки площини або
2) проходить через одну точку і паралельна до прямої цієї площини.

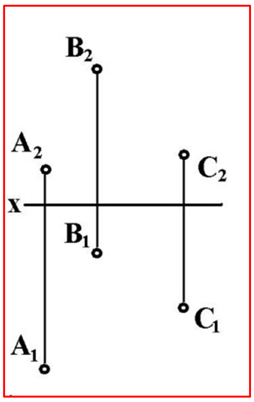


Пряма *a* належить площині α, оскільки проходить через точки 1 і 2 площини α. Прямі *b* і *c* належить площині α, оскільки проходять через точки 1, 3 і A, 3 площини α. Точка 4 належить площині α, оскільки лежить на прямій *c* площини α.

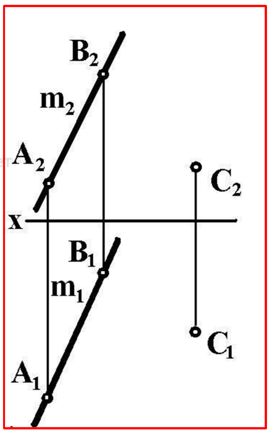


Пряма d належить площині α, оскільки проходить через точку C і паралельна до прямої AB. Пряма *e* належить площині α, оскільки проходить через точку 5 на прямій d і паралельна до прямої BC. Пряма *l* належить площині α, оскільки проходить через точку 6 на прямій *e* і паралельна до прямої g площини α.

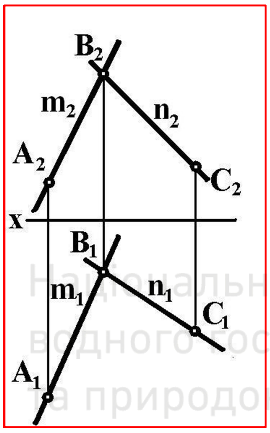
Аналогічно заданню площини в просторі площину на епюрі задають проекціями:



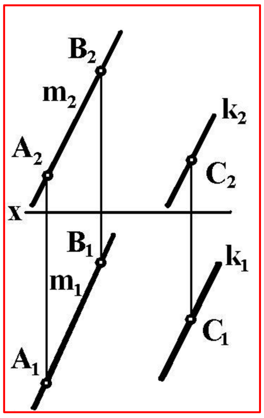
трьох точок, що не лежать на одній прямій



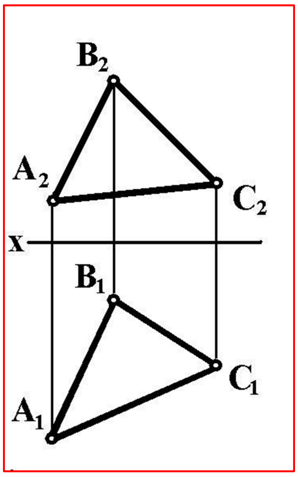
прямої лінії та точки, що їй не належить



двох прямих, що перетинаються

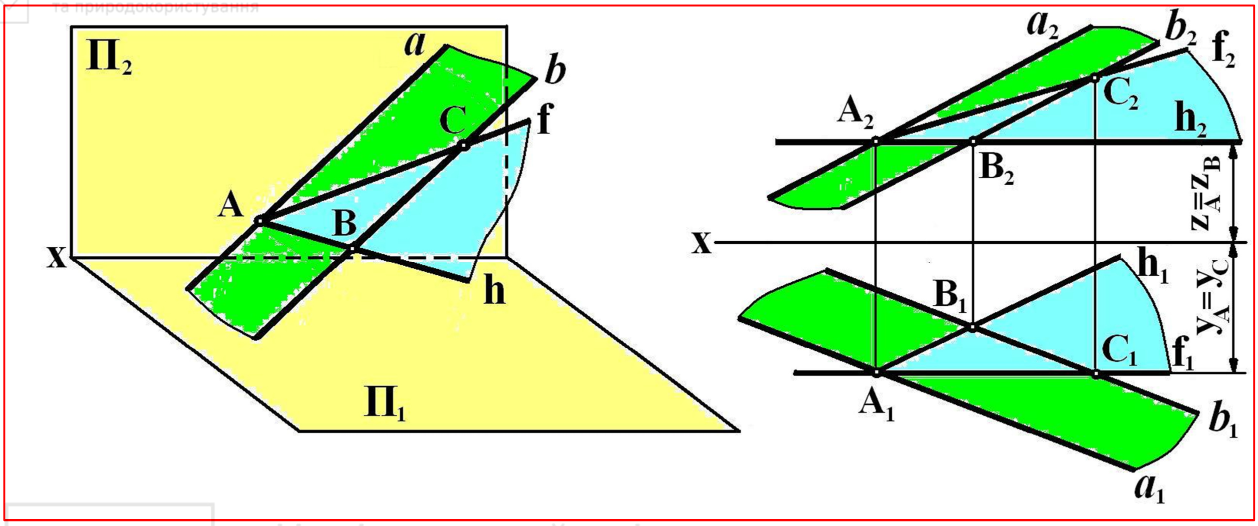


двох паралельних прямих



відтинку площини (трикутника)

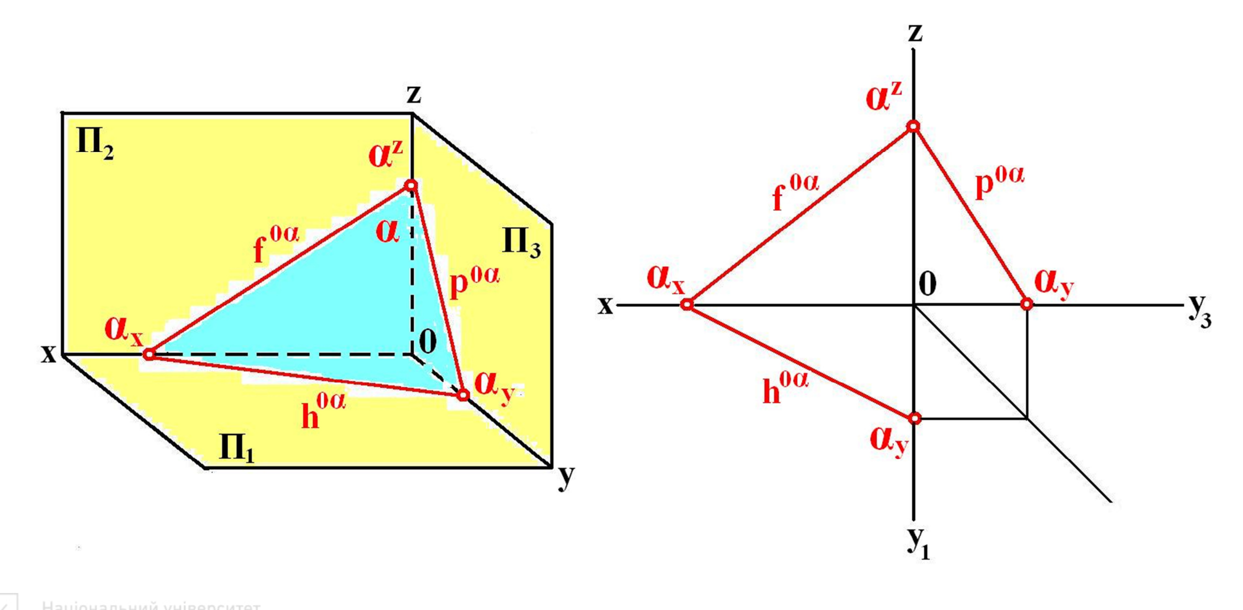
Перехід від задання площини одним відтинком до задання цієї ж площини іншим відтинком



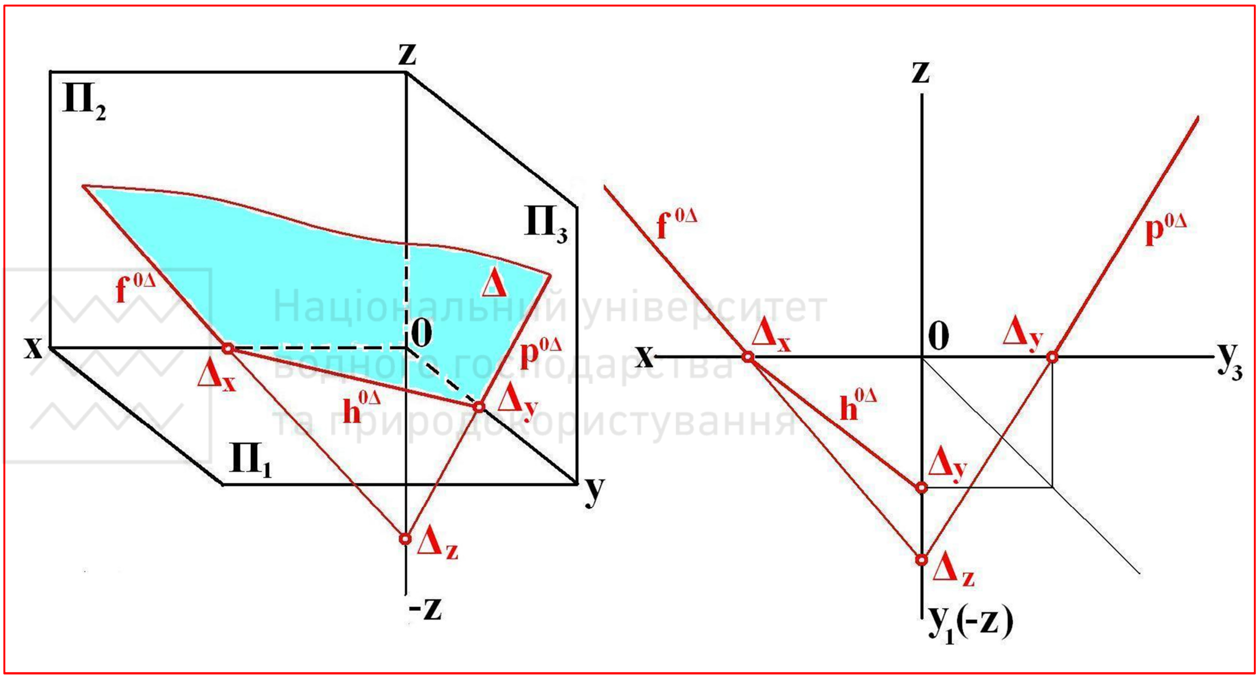
Наочне зображення та епюр площини, в якій здійснено перехід від задання площини двома паралельними прямими *a* і *b* до її задання двома прямими, що перетинаються, - горизонтальною прямою h і фронтальною прямою f.

Часто площину задають не довільними прямими, що перетинаються, а прямими, по яких площина перетинає площини проекцій.
Пряму, по якій площина перетинає площину проекцій, називають слідом площини.

Наочне зображення та епюр площини α, що задана слідами: $h^{0\alpha}$ – горизонтальний слід площини α, $f^{0\alpha}$ – фронтальний слід площини α, $p^{0\alpha}$ – профільний слід площини α, α_x, α_y, α_z – точки сходу слідів площини α

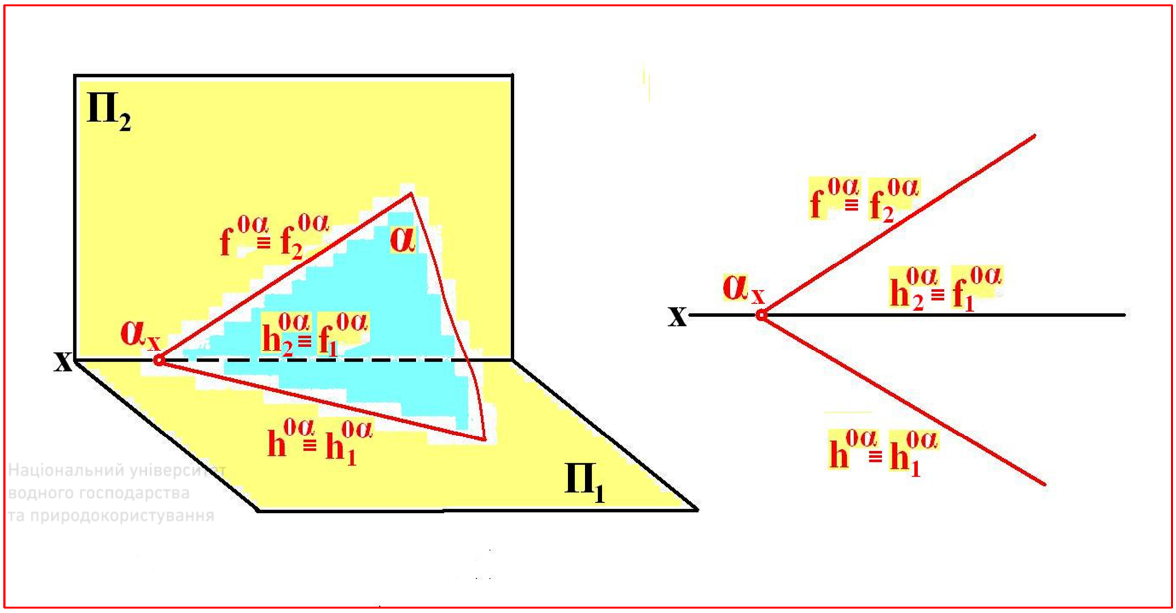


На наочному зображенні та епюрі наведено приклад іншого розміщення площини Δ, що задана слідами (видимість площини Δ показано в межах 1 октанту)

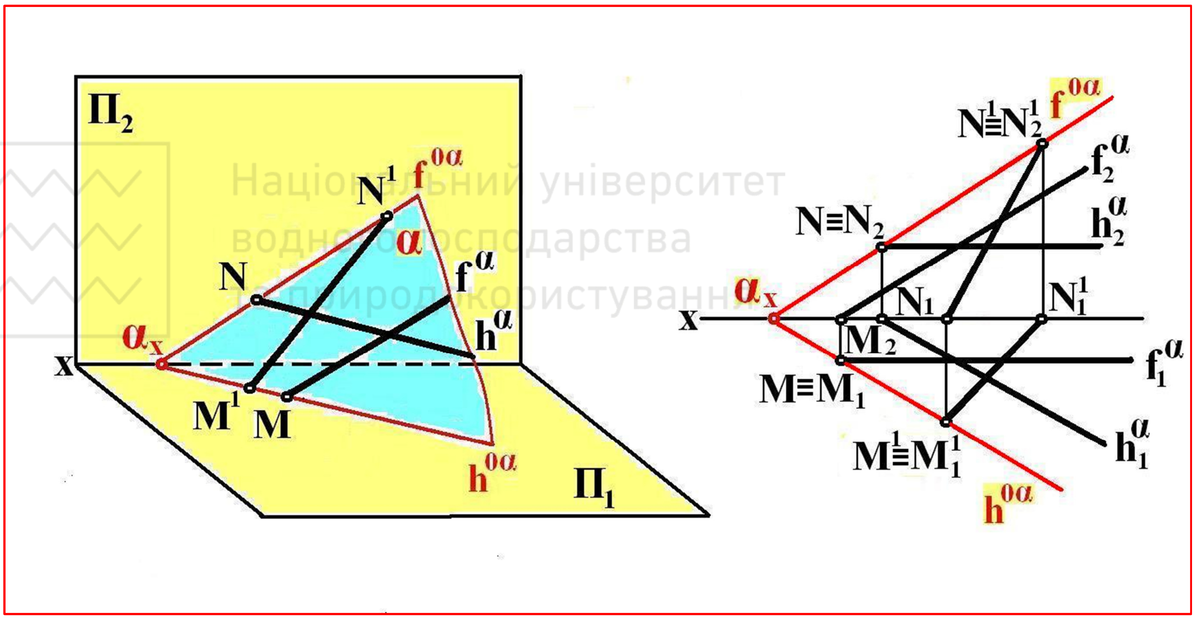


Задання площини слідами має переваги перед іншими варіантами її зображення на епюрі:
по-перше, зберігається наочність зображення, що дозволяє легко уявити положення площини в просторі;
по-друге, при заданні площини потрібно вказати в системі двох площин проекцій тільки дві прямі (два сліда) замість чотирьох або шести.

Наведемо проекції слідів площини в системі двох площин проекцій, які дозволяють будувати проекції прямих, що лежать в цій площині



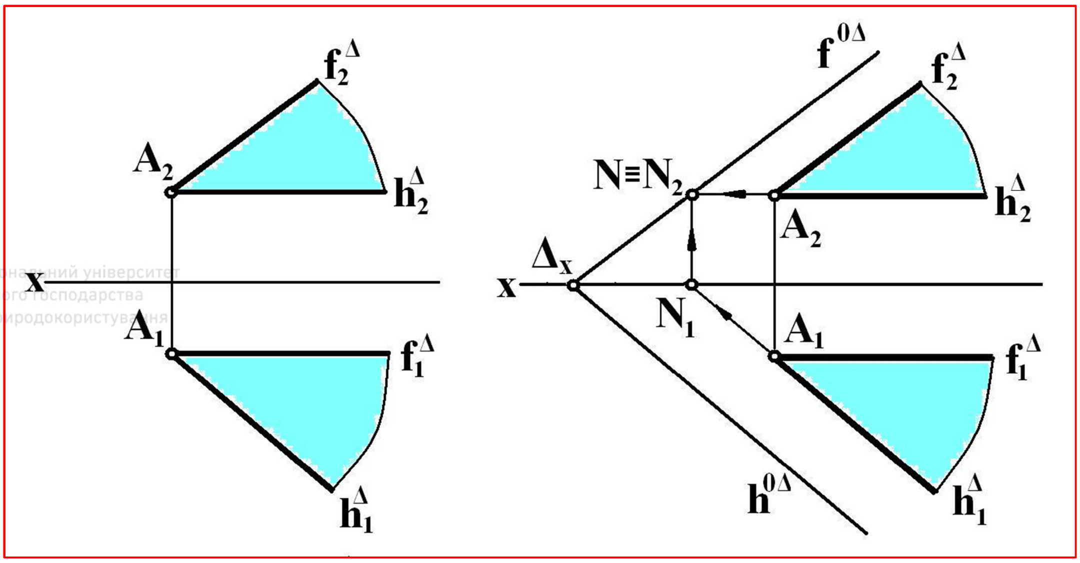
У разі задання площини слідами, пряма належить площині, якщо:
1) сліди прямої (тобто її дві точки) належать однойменним слідам площини,
2) пряма має спільну точку з одним із слідів площини і паралельна до іншого сліду.



M^1N^1 – пряма площини α, оскільки $M^1 \in h^{0\alpha}$, $N^1 \in f^{0\alpha}$; h^{α} – горизонтальна пряма площини α (горизонталь площини), у якої $N \in f^{0\alpha}$, $h^{\alpha} \,//\, h^{0\alpha}$; f^{α} – фронтальна пряма площини α (фронталь площини), у якої $M \in h^{0\alpha}$, $f^{\alpha} \,//\, f^{0\alpha}$.

Якщо пряма лежить в площині, то сліди прямої знаходяться на слідах площини.
Це дозволяє будувати сліди площини, якщо її задано іншими елементами.

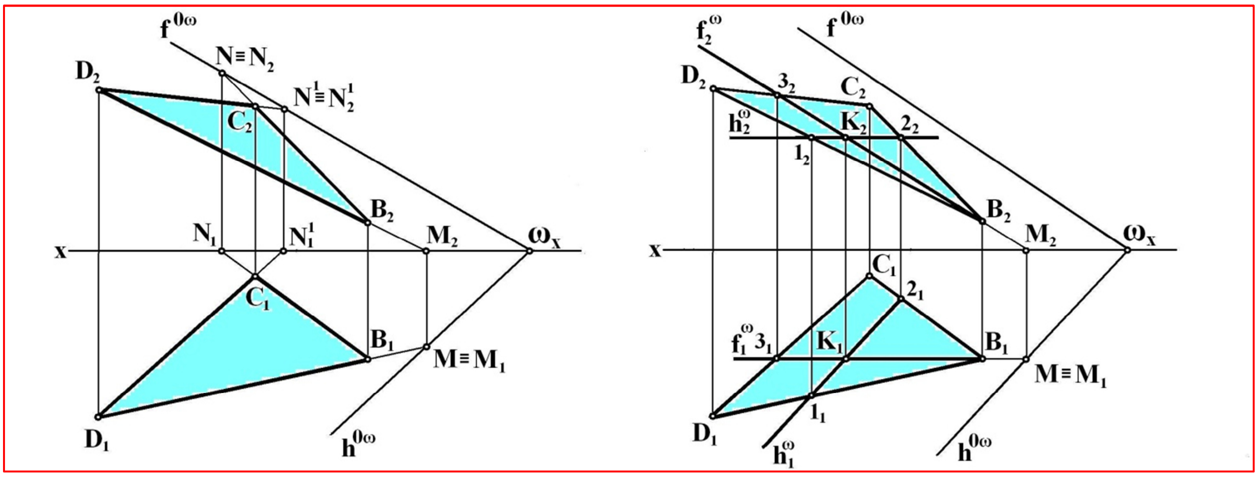
Приклад побудови слідів $h^{0\Delta}$ і $f^{0\Delta}$ площини Δ, яку задано горизонтальною прямою h^{Δ} і фронтальною прямою f^{Δ}.
Послідовність побудов: 1. Знайдено слід N прямої h^{Δ}. 2. Через N проведено $f^{0\Delta}$// f^{Δ}. 3. Визначено точку сходу слідів Δ_x. 4. Через Δ_x проведено $h^{0\Delta}$// h^{Δ}.



Приклади побудови слідів площини ω, яку задано трикутником DBC.

1 спосіб
Послідовність побудов: 1. Знаходимо фронтальні сліди N і N^1 прямих CB і DC. 2. Через N і N^1проводимо фронтальний слід $f^{0\omega}$ площини ω і визначаємо точку сходу площин ω_x. 3. Знаходимо горизонтальний слід M прямої DB. 4. Через ω_x і M проводимо горизонтальний слід $h^{0\omega}$ площини ω.

2 спосіб
За цим способом в площині трикутника проводимо горизонтальну h^{ω} та фронтальну f^{ω} прямі. Потім будуємо сліди площини ω.



3.2. Класифікація площин

Площини, як і прямі лінії, залежно від їх розміщення відносно площин проекцій поділяють на площини загального положення, площини рівня та проекціюючі площини

3.2.1. Площини загального положення

Площини загального положення – це площини, які не паралельні і не перпендикулярні до жодної з площин проекцій (в 3.1 наведено наочне зображення та епюри площин загального положення)

У площини загального положення сліди не паралельні і не перпендикулярні до осей проекцій.
Якщо площину загального положення задано іншими елементами, наприклад, трикутником, то ці елементи на жодну з площин проекцій не проекціюються в одну спільну пряму лінію.
У визначника площини координати x, y, z трьох точок, що не лежать на одній прямій, мають різні величини.

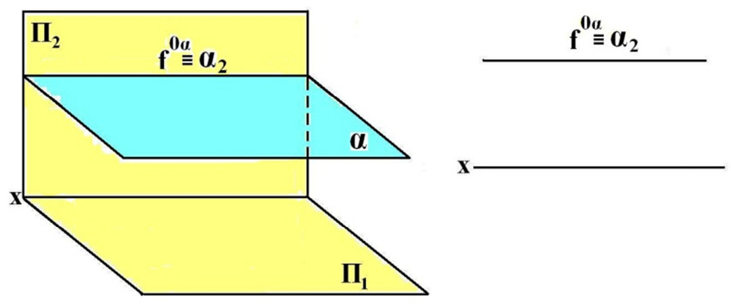
3.2.2. Площини рівня

Площини рівня – це площини, які паралельні до однієї з площин проекцій

3.2.2.1. Горизонтальна площина

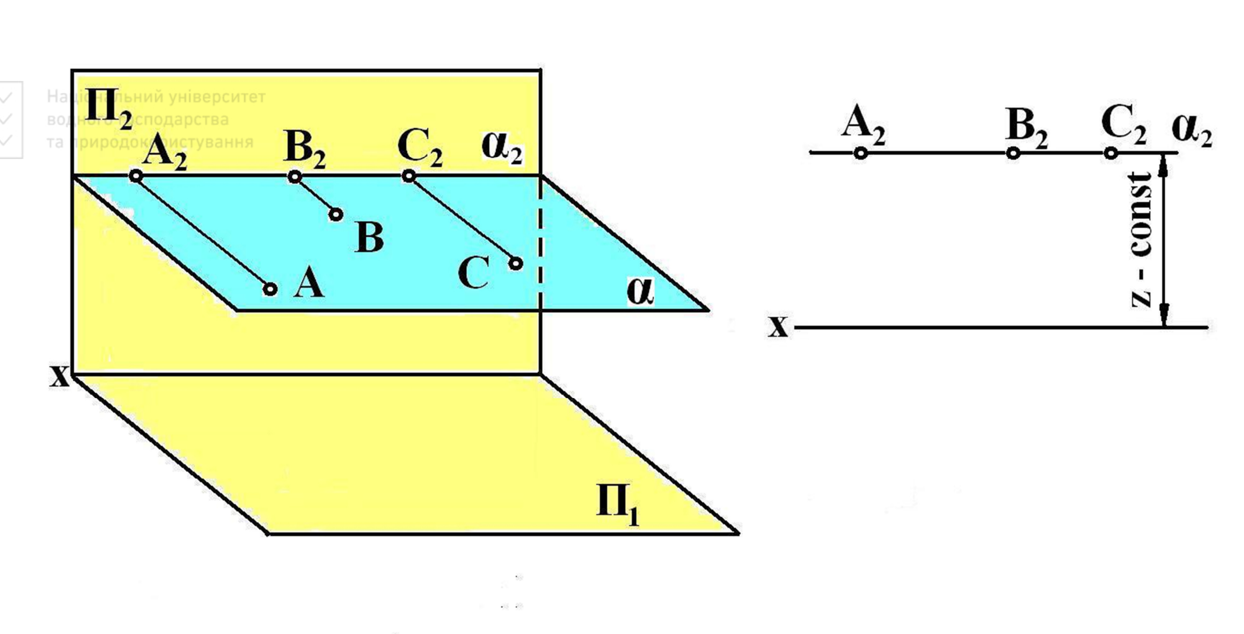
Горизонтальна площина або горизонтальна площина рівня – це площина, яка паралельна до горизонтальної площини проекцій

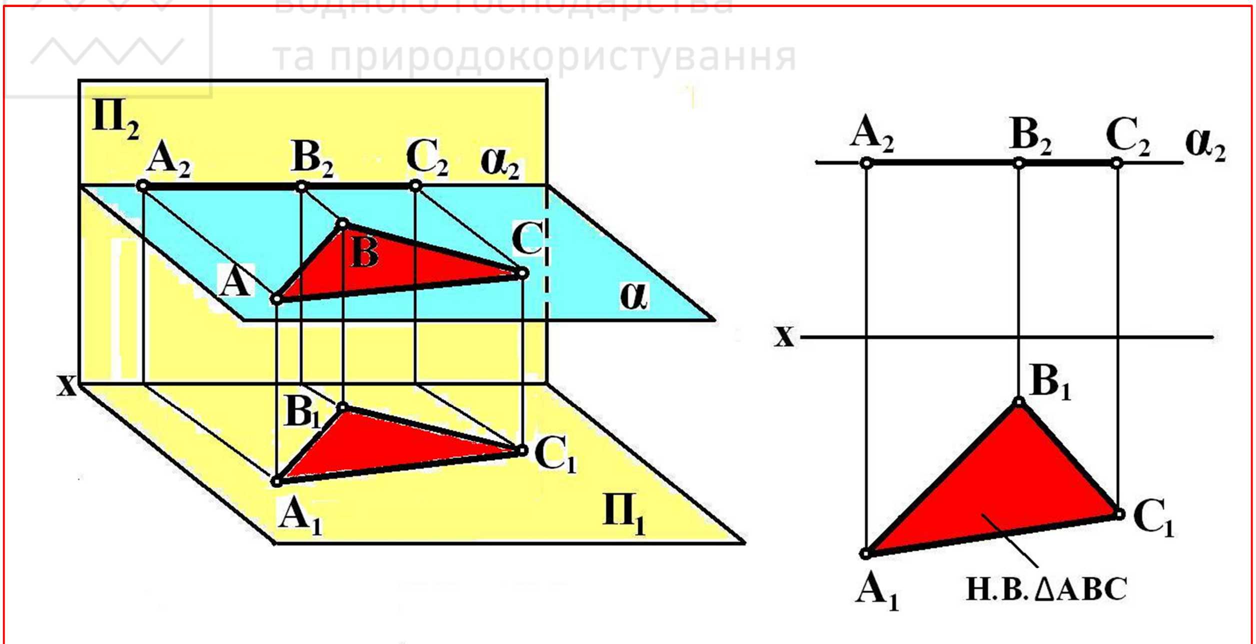
Наочне зображення та епюр горизонтальної площини α



У площині α фронтальний слід $f^{0\alpha}$ паралельний до осі x і є слідом-проекцією α_2 площини α; горизонтальний слід відсутній.

Слід-проекція – це лінія перетину площини з площиною проекцій, до якої вона перпендикулярна.
Слід-проекція має таку властивість: проекції точок, прямих ліній, плоских фігур, що знаходяться в площині, яка перпендикулярна до площини проекцій, проекціюються саме на слід-проекцію.
У визначника площини рівня одна з координат x, y, z трьох точок, що не лежать на одній прямій, має однакове значення (у горизонтальної площини координата z має однакове значення).
Прямі, плоскі фігури, що лежать в площині рівня, проекціюються на площину проекцій, до якої площина паралельна, в натуральну величину (горизонтальні проекції прямих, плоских фігур, що лежать у горизонтальній площині, визначають їх натуральні величини).

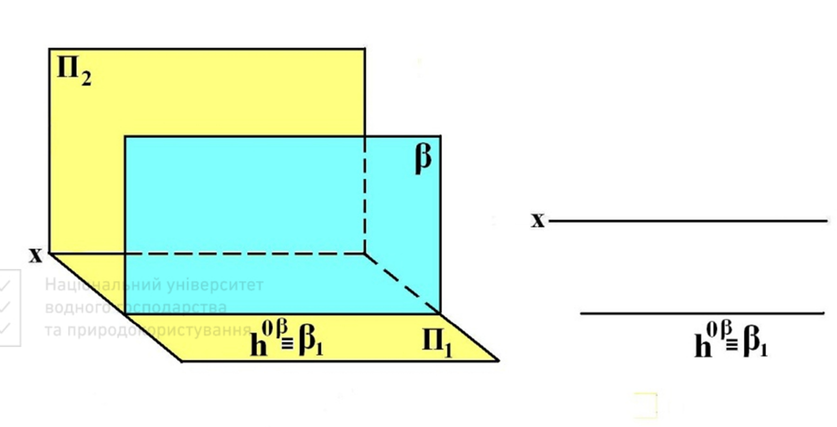




3.2.2.2. Фронтальна площина

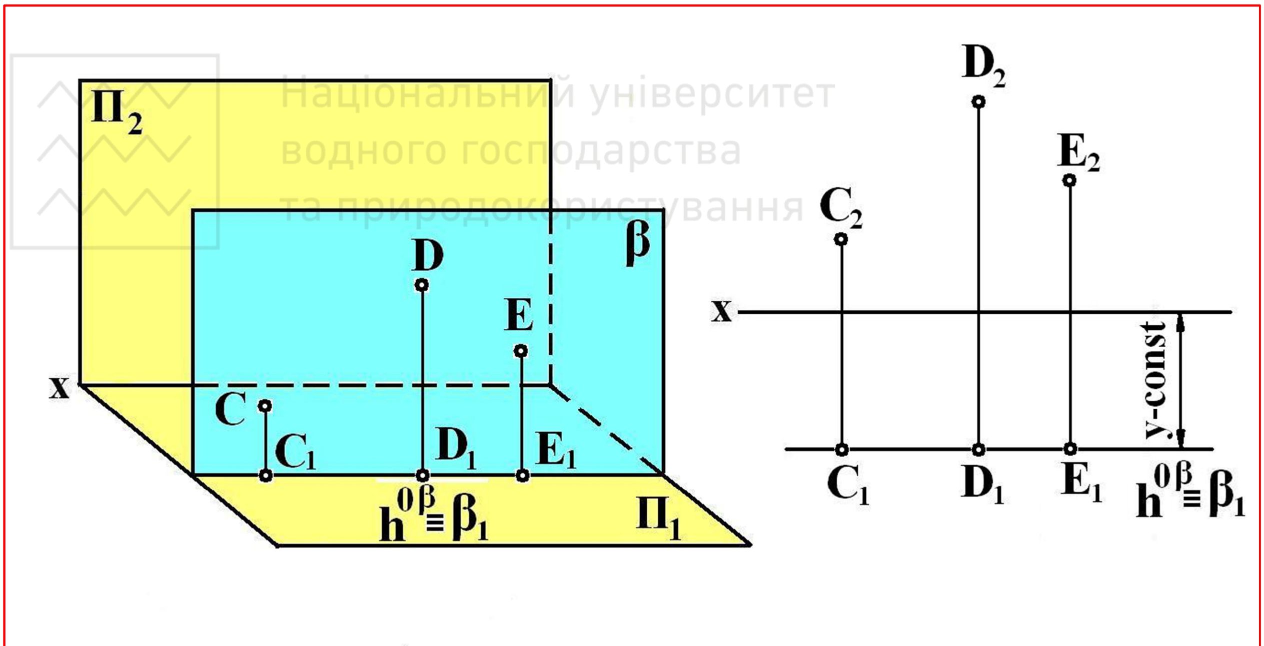
Фронтальна площина або фронтальна площина рівня – це площина, яка паралельна до фронтальної площини проекцій.

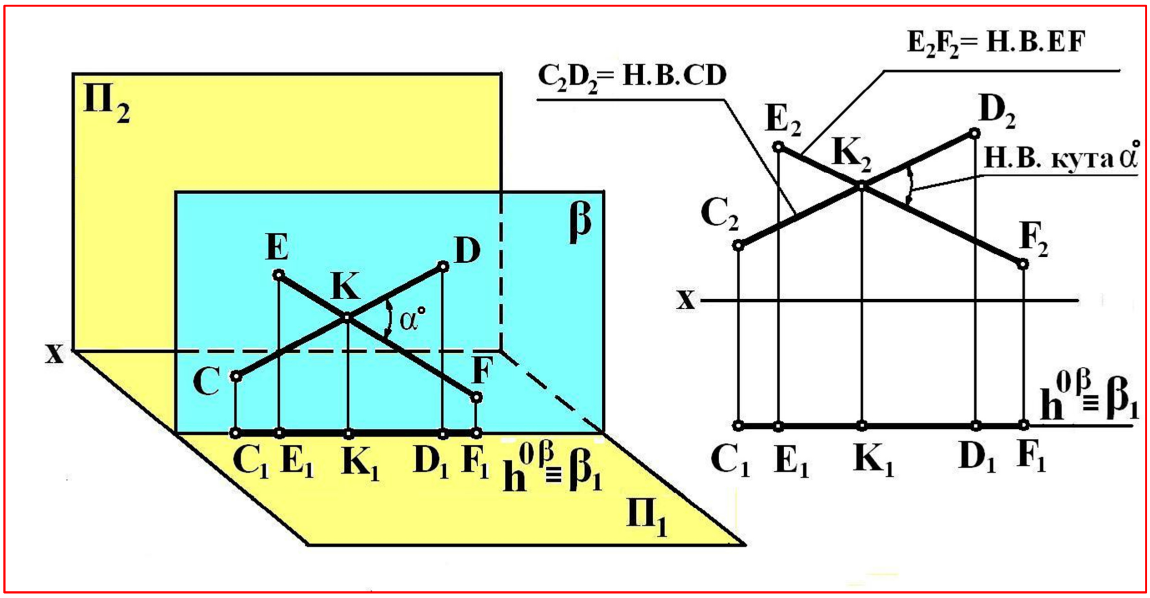
Наочне зображення та епюр фронтальної площини β



У площині β горизонтальний слід $h^{0\beta}$ паралельний до осі x і є слідом-проекцією β_1 площини β; фронтальний слід відсутній.

У фронтальної площини координата *y* трьох точок, що не лежать на одній прямій і визначають площину, має однакове значення.
Фронтальні проекції прямих, плоских фігур, що лежать у фронтальній площині, визначають їх натуральні величини.



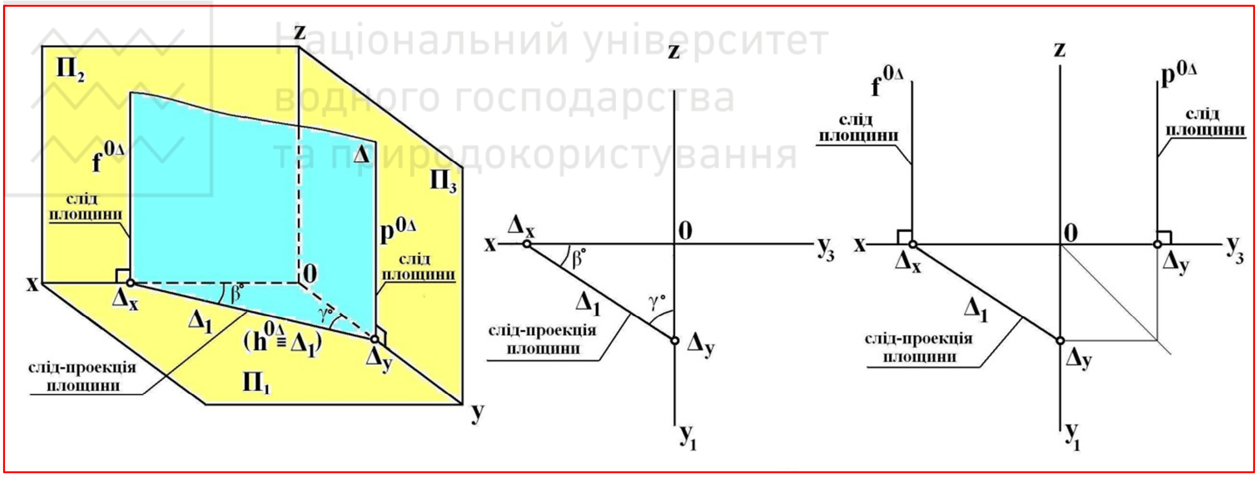


3.2.3. Проекціюючі площини

Проекціюючі площини – це площини, які перпендикулярні до однієї з площин проекцій

3.2.3.1. Горизонтально-проекціююча площина

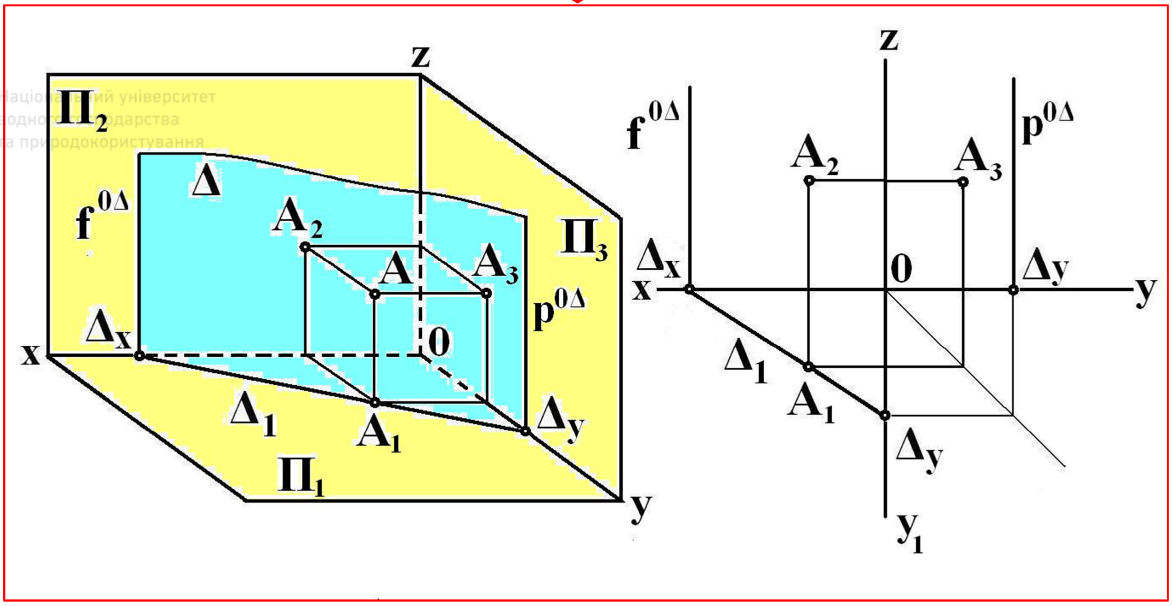
Горизонтально-проекціююча площина – це площина, яка перпендикулярна до горизонтальної площини проекцій.



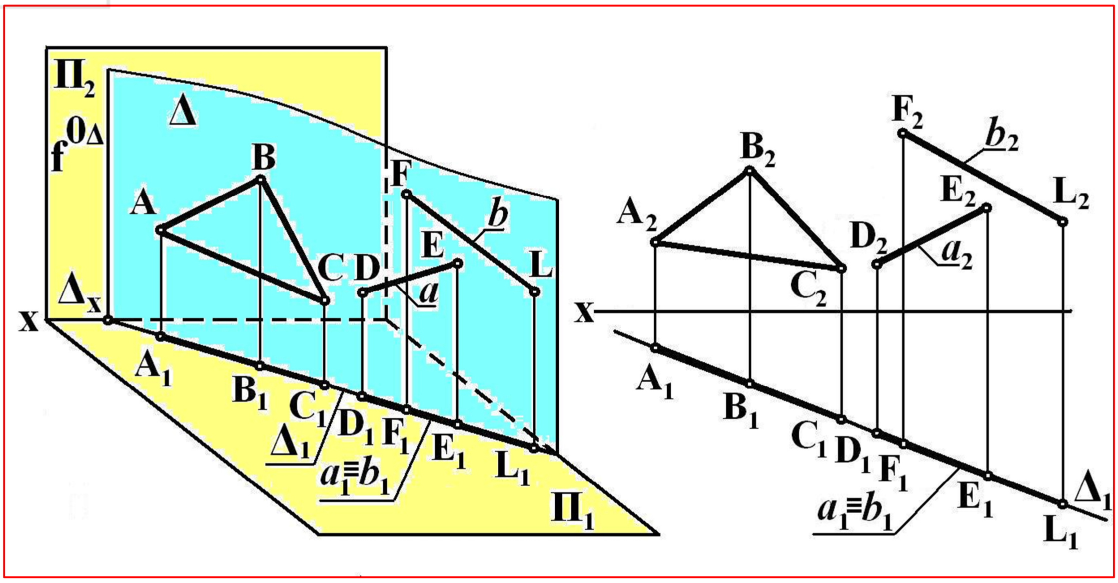
$f^{0Δ}$ – фронтальний слід площини Δ, $p^{0Δ}$ – профільний слід площини Δ, $h^{0Δ}$ – горизонтальний слід площини Δ є водночас слідом-проекцією $Δ_1$ площини Δ (площина Δ на $П_1$ проекціюється у слід-проекцію $Δ_1$, який повністю визначає положення площини Δ в просторі за наявності осей проекцій); $β^0$, $γ^0$ – кути нахилу площини Δ до $П_2$ і $П_3$.

Визначник проекціюючої площини відрізняється тим, що в ньому існує пряма, дві нетотожні точки якої мають однакові координати, тобто в проекціюючій площині можна провести проекціюючу пряму, паралельну до відповідної осі проекцій (в горизонтально-проекціюючій площині – це горизонтально-проекціююча пряма, паралельна до осі z, дві нетотожні точки якої мають однакові координати x і y). **Точки, прямі, плоскі фігури, що лежать в проекціюючій площині, проекціюються на слід-проекцію** (у горизонтально-проекціюючій площині горизонтальні проекції цих фігур знаходяться на сліді-проекції).

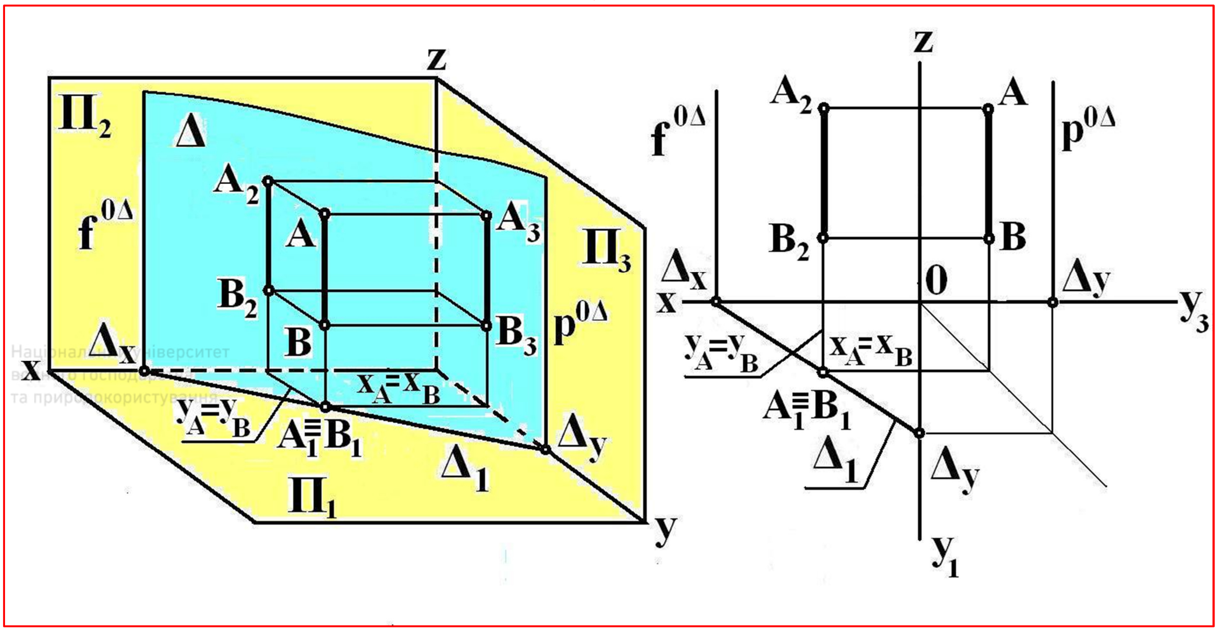
Наочне зображення та епюр точки A, яка лежить в горизонтально-проекціюючій площині Δ ($A_1 \equiv \Delta_1$, A_2 і A_3 не лежать на слідах $f^{0\Delta}$ і $p^{0\Delta}$).



Наочне зображення та епюр трикутника ABC, прямих *a* і *b*, які належать горизонтально-проекціюючій площині Δ (горизонтальні проекції цих фігур збігаються зі слідом-проекцією Δ_1 площини Δ).

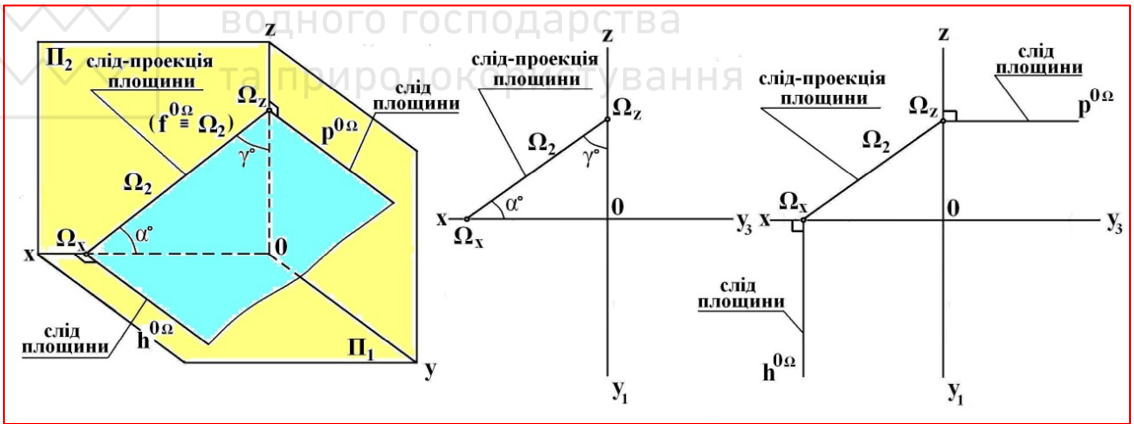


Наочне зображення та епюр горизонтально-проекціюючої прямої AB, що належить горизонтально-проекціюючій площині Δ і у якої координати x та y двох її нетотожних точок мають однакове значення.



3.2.3.2. Фронтально-проекціююча площина

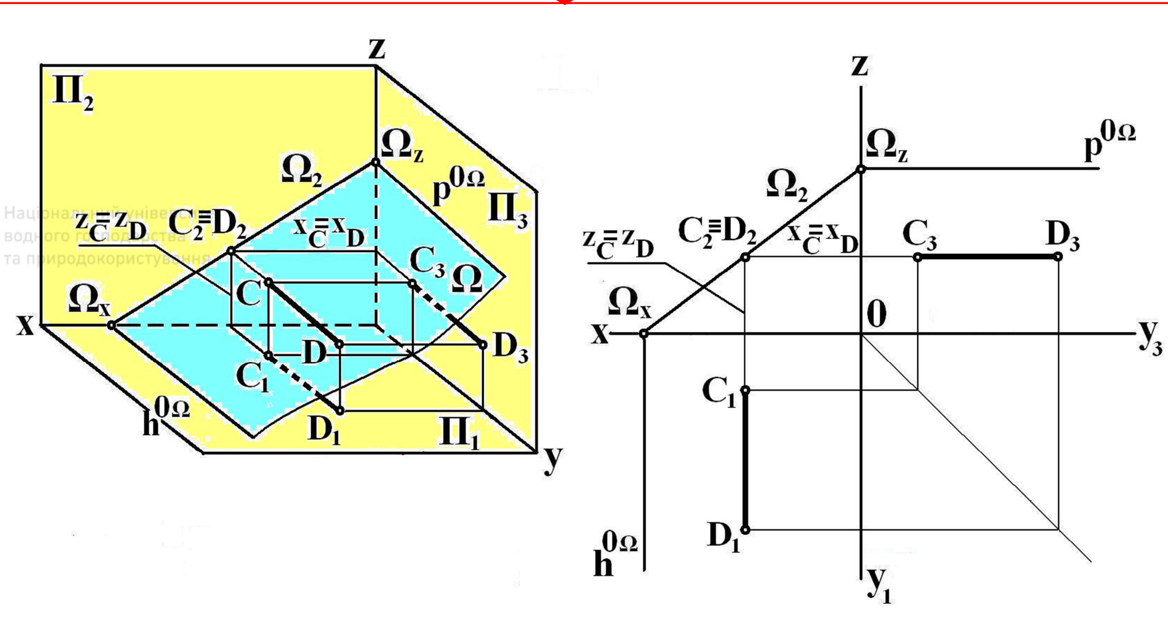
Фронтально-проекціююча площина – це площина, яка перпендикулярна до фронтальної площини проекцій.



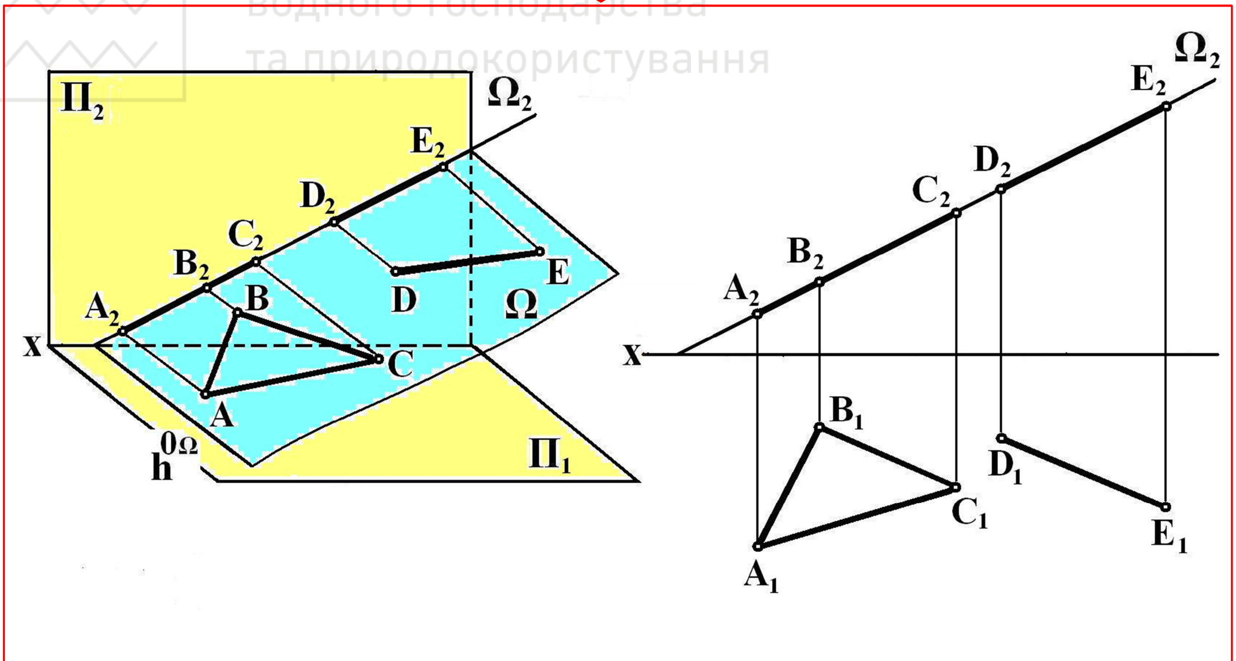
$h^{0\Omega}$ – горизонтальний слід площини Ω, $p^{0\Omega}$ – профільний слід площини Ω, $f^{0\Omega}$ – фронтальний слід площини Ω є водночас слідом-проекцією Ω_2 площини Ω (площина Ω на Π_2 проекціюється у слід-проекцію Ω_2, який повністю визначає положення площини Ω в просторі за наявності осей проекцій); α^0, γ^0 – кути нахилу площини Ω до Π_1 і Π_3.

У фронтально-проекціюючій площині існує дві нетотожні точки, які мають однакові координати x і z, тобто пряма, що проходить через ці точки є фронтально-проекціюючою.
Фронтальні проекції точок, прямих, плоских фігур, що лежать у фронтально-проекціюючій площині, проекцюються на слід-проекцію.

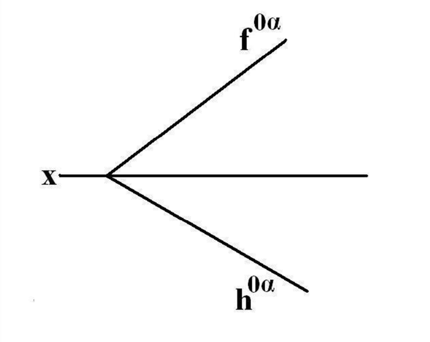
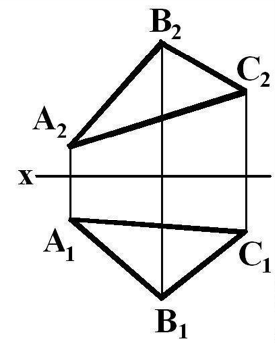
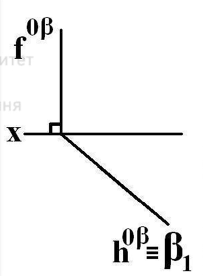
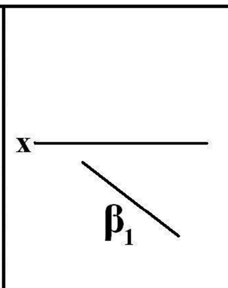
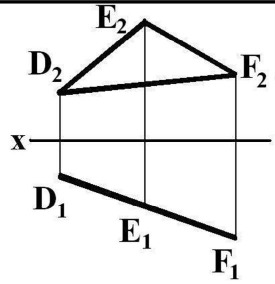
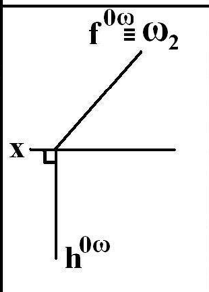
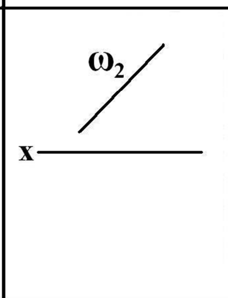
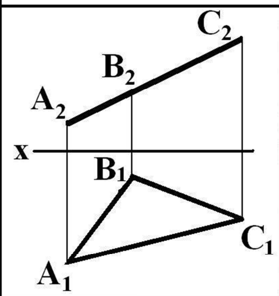
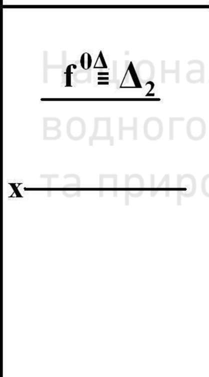
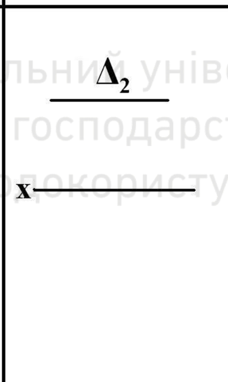
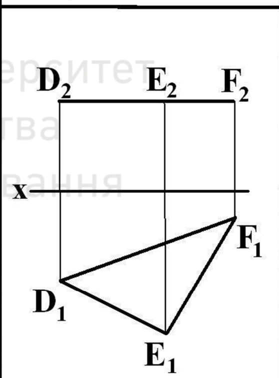
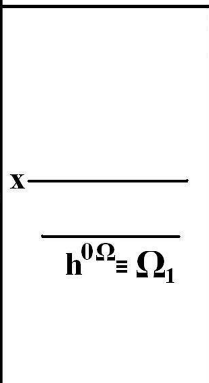
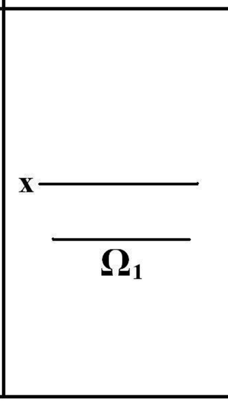
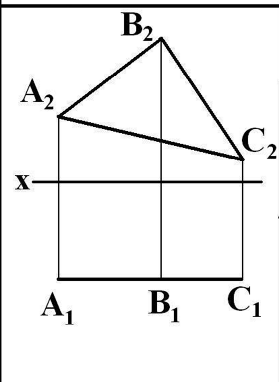
Наочне зображення та епюр фронтально-проекціюючої прямої CD, що належить фронтально-проекціюючій площині Ω і у якої координати x та z двох її нетотожних точок мають однакове значення.



Наочне зображення та епюр трикутника ABC, прямої DE, які належать фронтально-проекціюючій площині Ω (фронтальні проекції цих фігур збігаються зі слідом-проекцією $Ω_2$ площини Ω).



Епюри та проекційні особливості площин

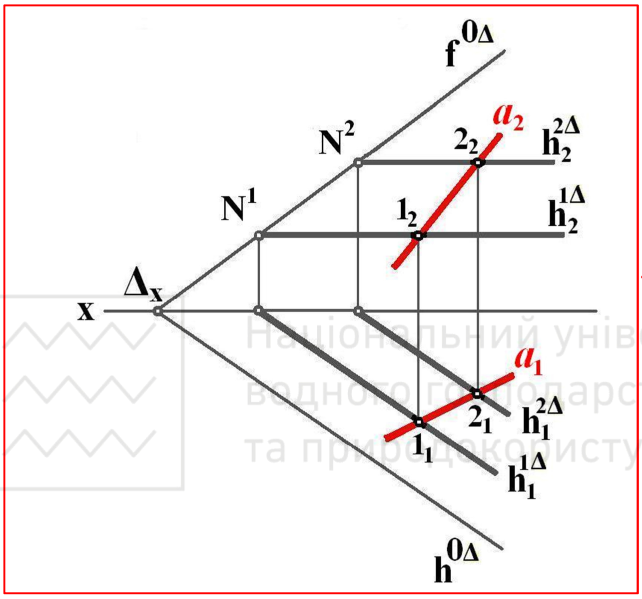
Назви площин	Епюри площин: Задання слідами		Епюри площин: Задання трикутником	Графічні ознаки площин на епюрі
Площина загального положення				Сліди не паралельні і не перпендикулярні до осі x. Проекції трикутника на площини проекцій– трикутники (на жодну з площин проекцій трикутник не проекціюється в пряму лінію).
Горизонтально-проекціююча площина				Горизонтальний слід є слідом-проекцією. Горизонтальна проекція трикутника — пряма лінія, яка є слідом-проекцією.
Фронтально-проекціююча площина				Фронтальний слід є слідом-проекцією. Фронтальна проекція трикутника — пряма лінія, яка є слідом-проекцією.
Горизонтальна площина				Фронтальний слід є слідом-проекцією і паралельний до осі x. Горизонтальний слід відсутній. Фронтальна проекція трикутника паралельна осі x, горизонтальна — визначає натуральну величину трикутника.
Фронтальна площина				Горизонтальний слід є слідом-проекцією і паралельний до осі x. Фронтальний слід відсутній. Горизонтальна проекція трикутника паралельна осі x, фронтальна — визначає натуральну величину трикутника.

Площини загального положення не мають слідів-проекцій, оскільки вони не перпендикулярні до площин проекцій.
Сліди-проекцій мають проекціюючі площини або площини рівня, оскільки вони перпендикулярні хоча б до однієї з площин проекцій.
Проекціюючі площини та площини рівня можуть бути задані тільки однією лінію, яка є слідом-проекцією, з обов'язковим позначенням сліда-проекції як проекції площини.
Якщо проекціюючі площини та площини рівня задані не слідами, а іншими елементами, то одна з проекцій цих елементів є прямою лінією, яка збігається з слідом-проекцією.

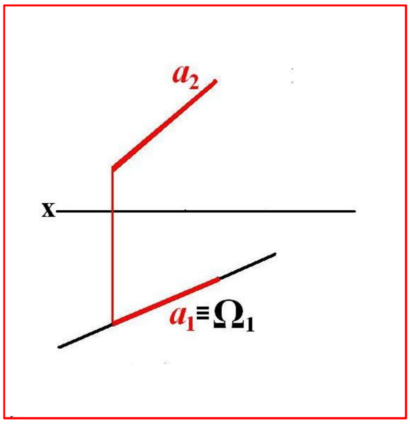
3.3. Проведення площин через прямі загального положення, рівня та проекціюючі

3.3.1. Проведення площини через пряму загального положення

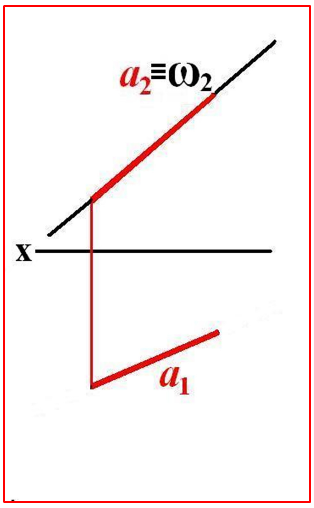
Через пряму загального положення можна провести безліч площин загального положення, дві проекціюючі площини в системі двох площин проекцій, а площину рівня провести неможливо.



Проведення через пряму загального положення *a* площини загального положення Δ, заданої слідами.
Порядок побудов:
1. Проводимо горизонталі $h^{1\Delta}$, $h^{2\Delta}$ площини Δ.
2. Знаходимо фронтальні сліди N^1 і N^2 горизонтальних прямих.
3. Через N^1 і N^2 проводимо фронтальний слід $f^{0\Delta}$ площини Δ і фіксуємо точку сходу Δ_x площини Δ.
4. Через Δ_x проводимо горизонтальний слід $h^{0\Delta}$ площини Δ, який паралельний до $h_1^{1\Delta}$, $h_1^{2\Delta}$.



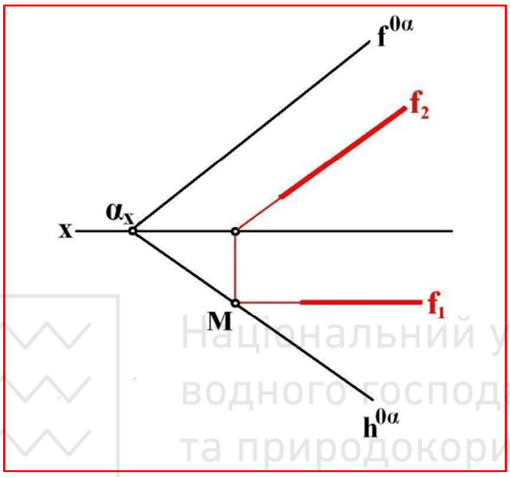
Проведення через пряму загального положення *a* горизонтально-проекціюючої площини Ω (якщо $a_1 \equiv \Omega_1$, то пряма *a* належить площині Ω або, іншими словами, площина Ω проходить через пряму *a*).



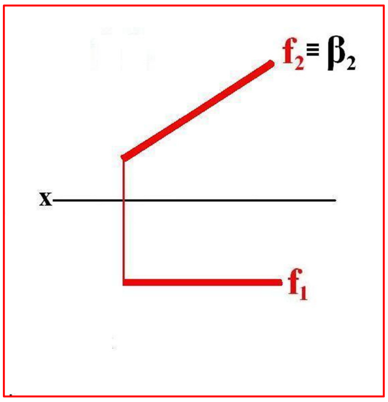
Проведення через пряму загального положення *a* фронтально-проекціюючої площини ω (якщо $a_2 \equiv \omega_2$, то пряма *a* належить площині ω або, іншими словами, площина ω проходить через пряму *a*).

3.3.2. Проведення площини через пряму рівня

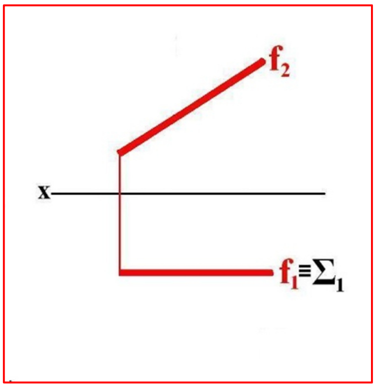
Через пряму рівня можна провести безліч площин загального положення, дві проекціюючі площини в системі двох площин проекцій та одну площину рівня, паралельну до тієї площини проекцій, до якої пряма рівня паралельна.



Проведення через фронтальну пряму f площини загального положення α, заданої слідами.
Порядок побудов:
1. Знаходимо горизонтальний слід M фронтальної прямої f.
2. Через точку M проводимо довільну пряму до перетину з віссю x, яку приймаємо за горизонтальний слід $h^{0\alpha}$ площини α, і визначаємо точку сходу α_x.
3. Через α_x проводимо фронтальний слід $f^{0\alpha}$ паралельно до f_2.



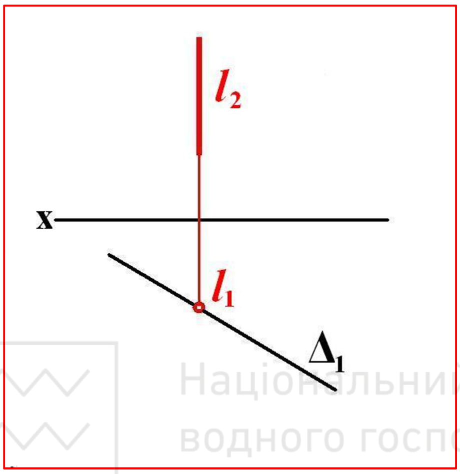
Проведення через фронтальну пряму f фронтально-проекціюючої площини β.



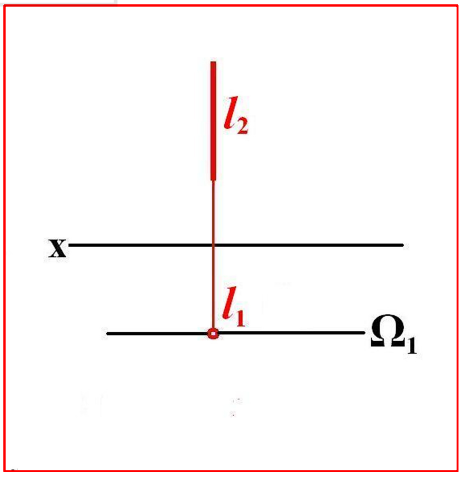
Проведення через фронтальну пряму f фронтальної площини рівня Σ

3.3.3. Проведення площини через проекціюючу пряму

Через проекціюючу пряму неможливо провести площину загального положення. Можна провести безліч проекціюючих площин, перпендикулярних до тієї площини проекцій, до якої перпендикулярна проекціююча пряма, та одну площину рівня в системі двох площин проекцій, паралельну до тієї площини проекцій, до якої проекціююча пряма паралельна.



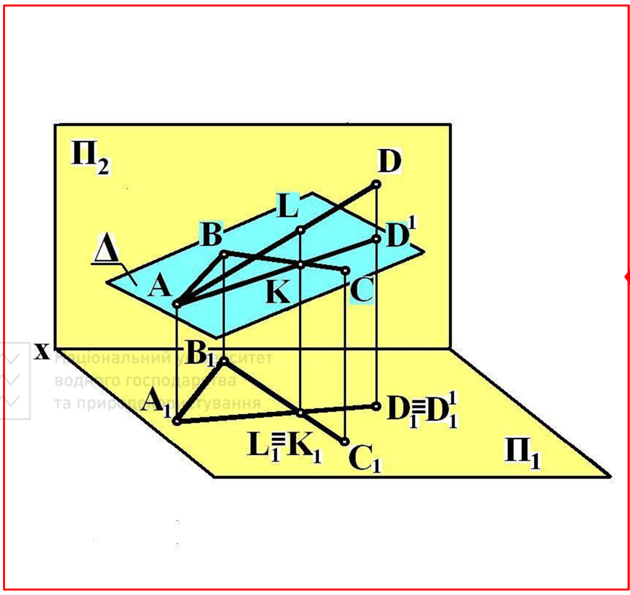
Проведення через горизонтально-проекціюючу пряму *l* горизонтально-проекціюючої площини Δ



Проведення через горизонтально-проекціюючу пряму *l* фронтальної площини рівня Ω

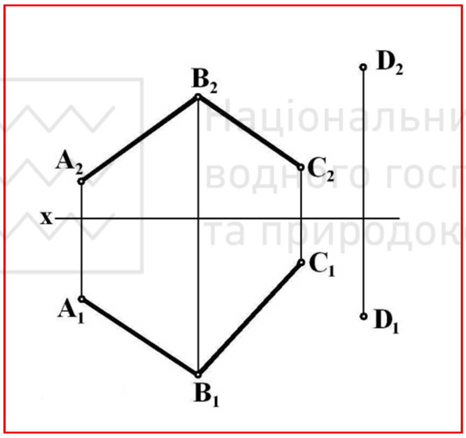
3.4. Задачі на визначення належності точки площині

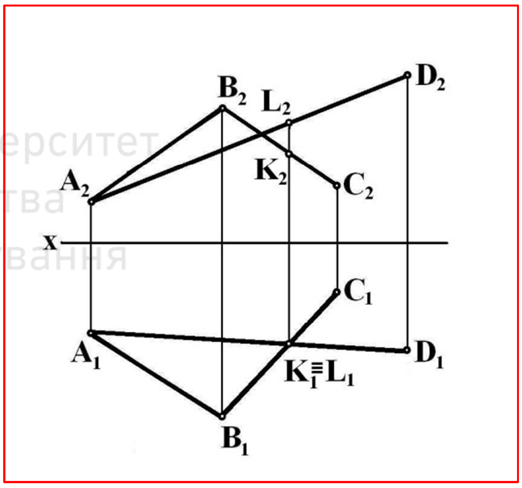
Задача на належність точки площині є однією з основних в геометрії. **Точка належить площині, якщо вона лежить на прямій цієї площини.**



Площину Δ задано визначником – трьома точками A, B, C. З'єднавши ці точки, отримаємо дві прямі AB і BC, що перетинаються. Щоб визначити, чи належить точка D площині Δ, потрібно через точку D провести пряму до перетину з будь-якою точкою площини Δ, наприклад, точкою A. Далі розглядаємо пряму DA і будь-яку іншу пряму площини Δ, яка не проходить через точку A, наприклад, пряму BC. Якщо вони мимобіжні, то точка D не належить площині Δ як на наведеному рисунку. Проте точка D^1 ($D^1 = D\,D_1 \cap \Delta$) належить площині, оскільки прямі D^1A і BC є прямими, що перетинаються в спільній точці K.

3.4.1. Перевірка належності довільної точки простору D площині Δ, яку задано двома прямими AB і BC, що перетинаються:





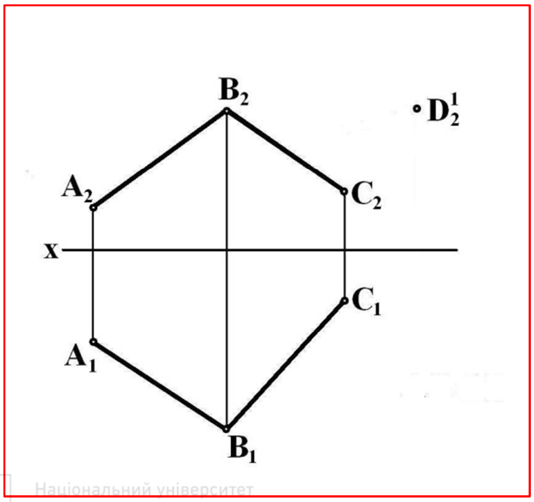
Початкова умова задачі. Визначити, чи належить точка D площині Δ

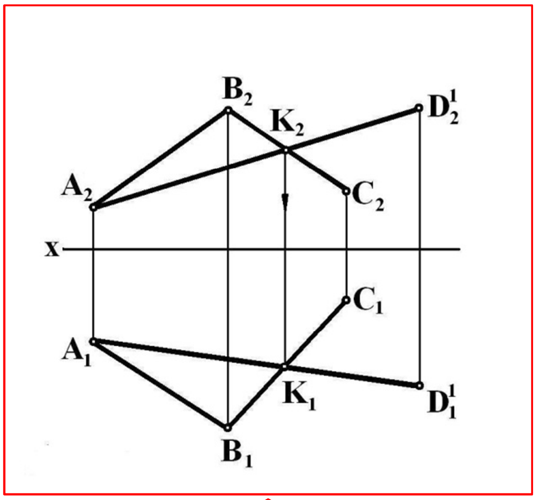
Порядок побудов:

1. **З'єднуємо точку D з точкою A площини Δ.**
2. **Визначаємо взаємне положення прямих DA і BC. Вони є мимобіжними.**

Висновок: Точка D не належить площині Δ.

3.4.2. Побудова точки D[1], що належить площині Δ (AB∩BC), за однією її проекцією:





Початкова умова задачі. Визначити, чи належить точка D площині Δ.

Порядок побудов:
1. Точку D_2^1 з'єднуємо з A_2.
2. Визначаємо K_2, де $K_2 = A_2 D_2^1 \cap B_2C_2$.
3. Знаходимо K_1 на B_1C_1.
4. Проводимо єдину можливу горизонтальну проекцію A_1K_1 прямої АК, що належить площині Δ, на якій знаходимо D_1^1.

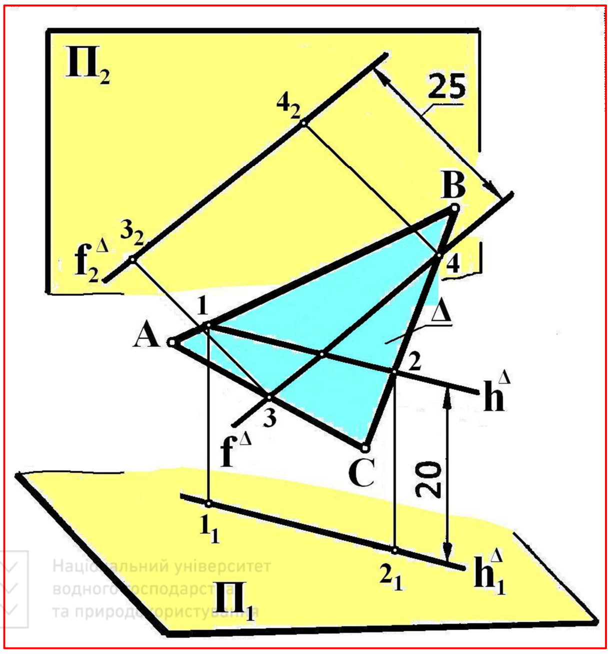
За наявності двох проекцій точки її положення в просторі визначено, а, отже, можна лише перевірити, чи належить ця точка заданій площині.
Якщо задано одну проекцію точки, тобто положення точки в просторі не визначено, то можна, змінюючи положення відсутньої другої проекції точки, розмістити саму точку в заданій площині.

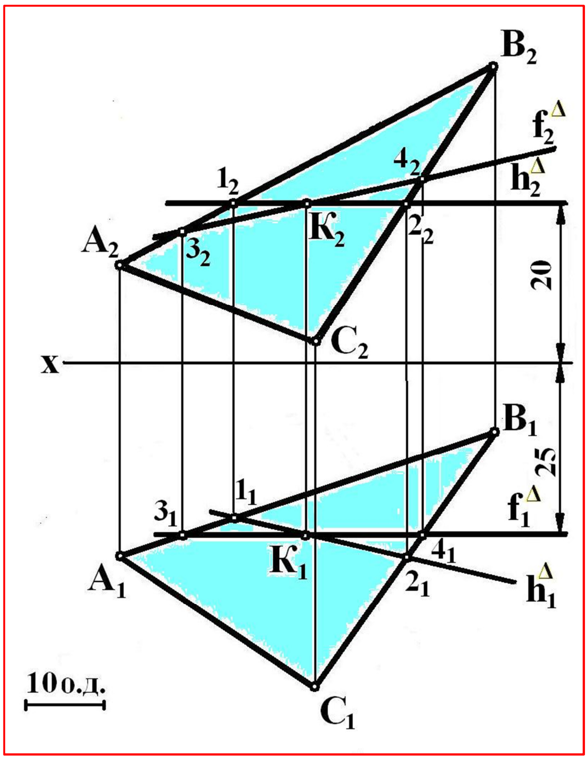
3.4.3. Побудова точки К, що належить площині, за її двома координатами

Умова задачі: В площині Δ, яку задано трикутником АВС, визначити положення точки К, яку розміщено на відстані 20 мм під площини проекцій $П_1$ і 25 мм від площини проекцій $П_2$:

Розв'язування задачі на наочному зображенні.

Розв'язування задачі на епюрі.

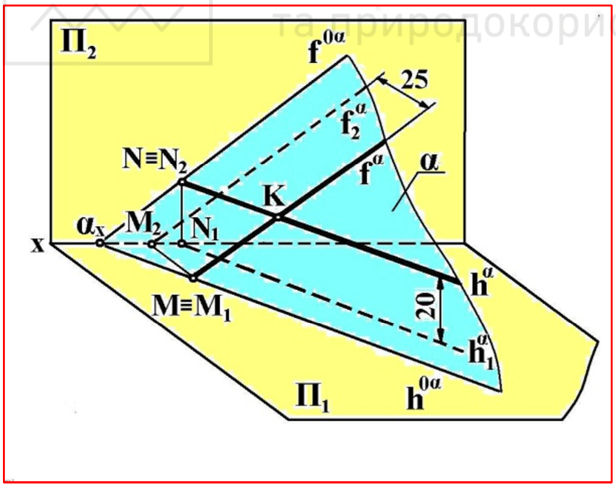


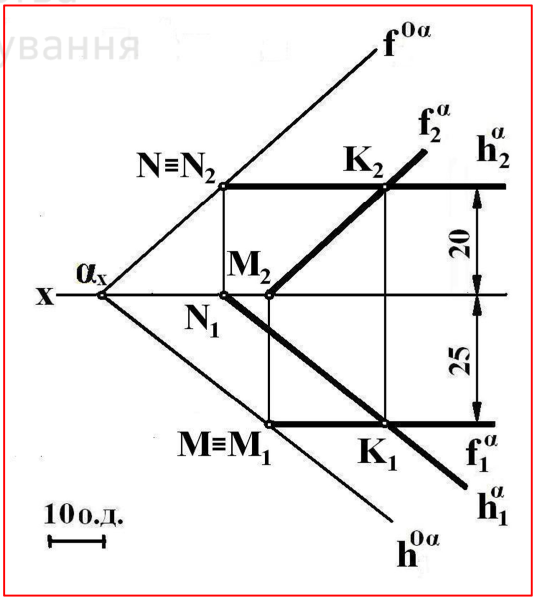


Умова задачі. В площині α, яку задано слідами, визначити положення точки К, яку розміщено на відстані 20 мм від площини проекцій $П_1$ і 25 мм від площини проекцій $П_2$:

Розв'язування задачі на наочному зображенні.

Розв'язування задачі на епюрі.

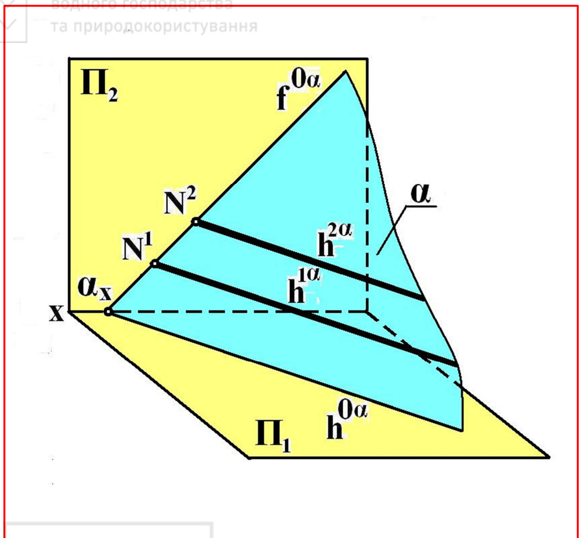


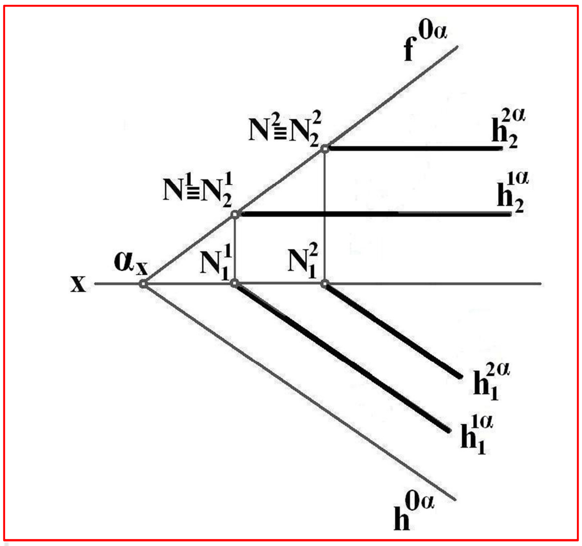


3.5. Головні лінії площини

Головні лінії площини – це лінії рівня та лінія найбільшого уклону (ухилу) площини.
Лінії рівня площини – прямі, що лежать в площині і паралельні до однієї з площин проекцій. Це горизонталі (горизонтальні прямі) та фронталі (фронтальні прямі) площини.

3.5.1. Горизонталі площини – прямі, які належать площині і паралельні до горизонтальної площини проекцій

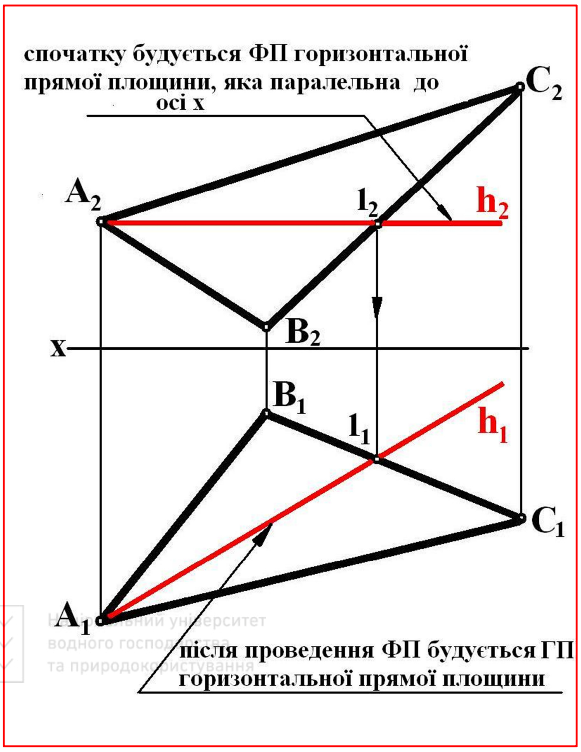




Наочне зображення горизонталей $h^{1\alpha}$ і $h^{2\alpha}$, що належать площині α, заданої слідами.

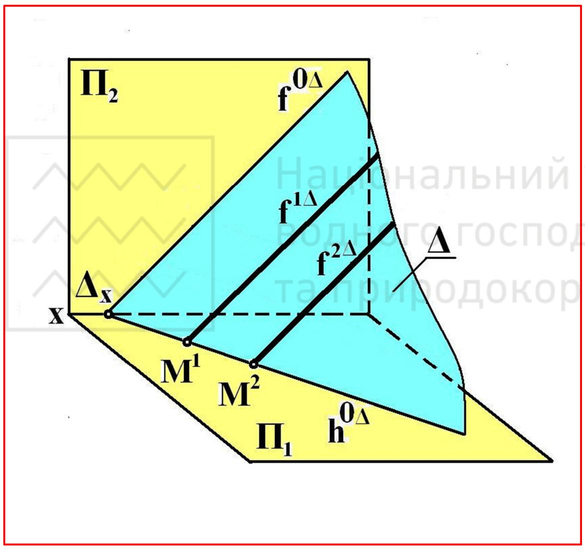
Епюр горизонталей $h^{1\alpha}$ і $h^{2\alpha}$, що належать площині α, заданої слідами.

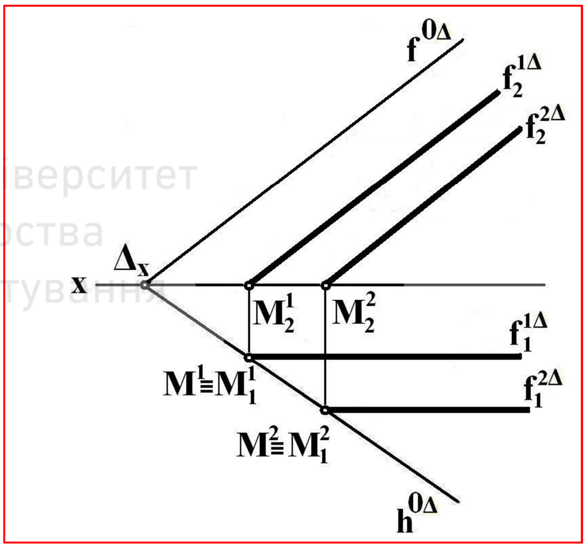
Всі горизонталі площини паралельні між собою і до горизонтального сліду площини.
Мають спільну точку з фронтальним слідом і паралельні до горизонтального сліду.
При проведенні на епюрі горизонталі площини спочатку проводять її фронтальну проекцію паралельно до осі проекцій x.



Проведення через точку А горизонталі площини h, яку задано трикутником АВС (ГП – горизонтальна проекція, ФП – фронтальна проекція).

3.5.2. Фронталі площини – прямі, які належать площині і паралельні до фронтальної площини проекцій

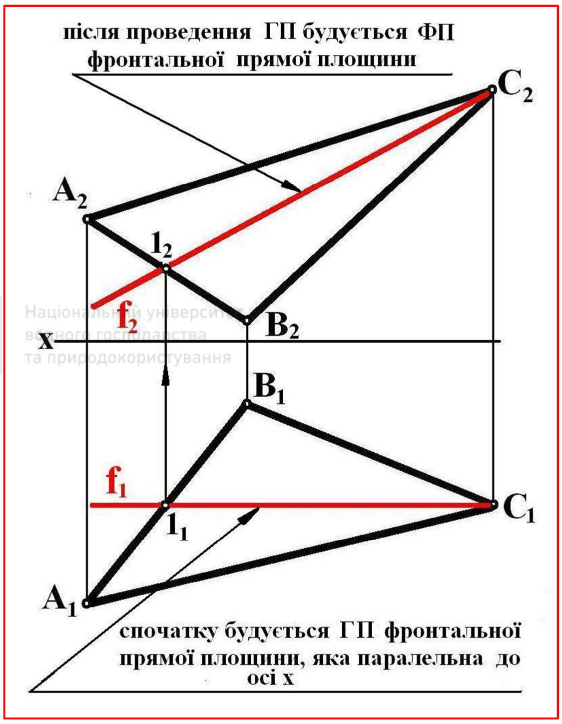




Наочне зображення фронталей $f^{1\Delta}$ і $f^{2\Delta}$, що належать площині Δ, заданої слідами.

Епюр фронталей $f^{1\Delta}$ і $f^{2\Delta}$, що належать площині Δ, заданої слідами.

Всі фронталі площини паралельні між собою і до фронтального сліду площини. Мають спільну точку з горизонтальним слідом і паралельні до фронтального сліду.
При проведенні на епюрі фронталі площини спочатку проводять її горизонтальну проекцію паралельно до осі проекцій х.



Проведення через точку С фронталі площини f, що задана трикутником АВС (ГП – горизонтальна проекція, ФП – фронтальна проекція).

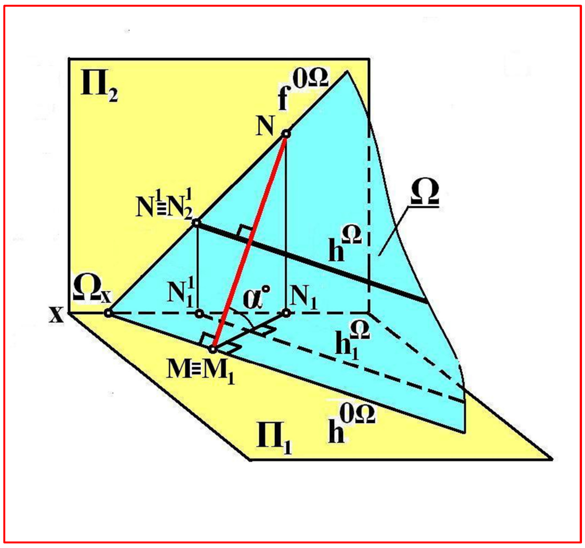
3.5.3. Лінія найбільшого уклону (ухилу) площини – пряма площини, яка перпендикулярна до горизонталей площини або до горизонтального сліду площини, при цьому кут α^0 її нахилу до площини проекцій Π_1 визначає кут α^0 нахилу самої площини до тієї ж Π_1.

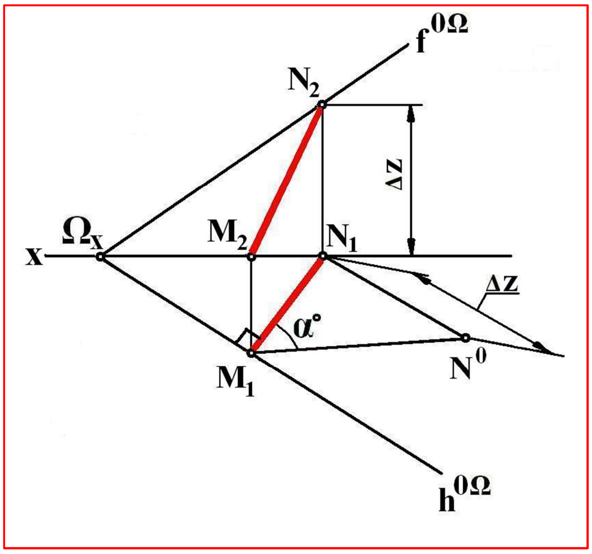
Побудову ліній найбільшого уклону площини починають з її горизонтальної проекції, яку проводять перпендикулярно (під прямим кутом) до горизонтальних проекцій горизонталей площини або до її горизонтального сліду.

Умова задачі: Визначити кут нахилу α^0 площини Ω, яку задано слідами

Розв'язування задачі на наочному зображенні.

Розв'язування задачі на епюрі.



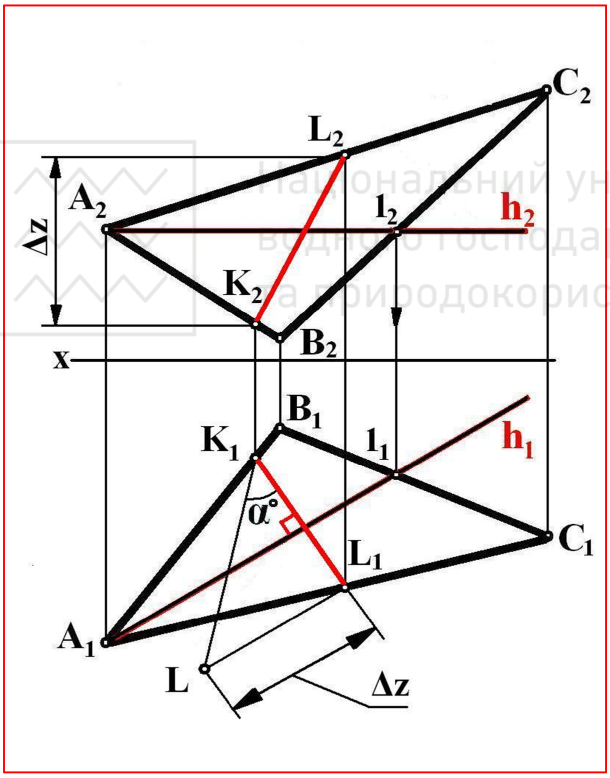


Послідовність побудов:

1. Проведення M_1N_1 перпендикулярно до $h^{0\Omega}$, де M_1N_1 - горизонтальна проекція відрізка MN лінії найбільшого уклону площини Ω.

2. Побудова M_2N_2.

3. Знаходження способом прямокутного трикутника кута нахилу α^0 лінії найбільшого уклону MN площини до $П_1$, який визначає кут нахилу самої площини до $П_1$.



Проведення лінії найбільшого уклону KL в площині, яку задано трикутником ABC, та визначення кута нахилу α^0 площини до $П_1$.

Послідовність побудов:

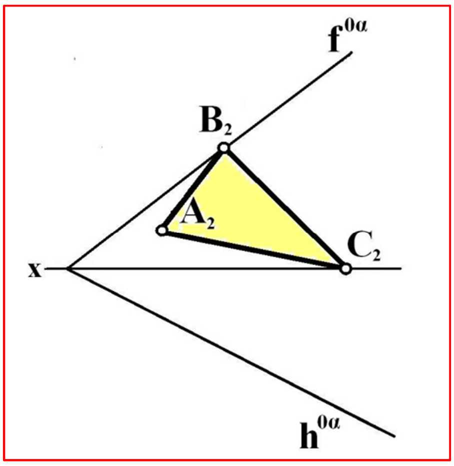
1. Проведення горизонталі h в площині.

2. Проведення K_1L_1 перпендикулярно до h_1 (K_1L_1 проводиться в довільному, зручному для розв'язування задачі місці).

3. Побудова K_2L_2.

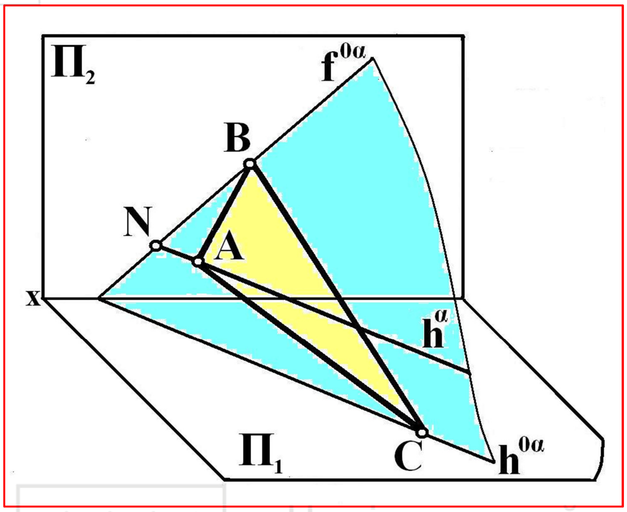
4. Знаходження способом прямокутного трикутника кута нахилу α^0 лінії найбільшого уклону KL площини до $П_1$, який визначає кут нахилу самої площини до $П_1$.

Приклади розв'язування задач

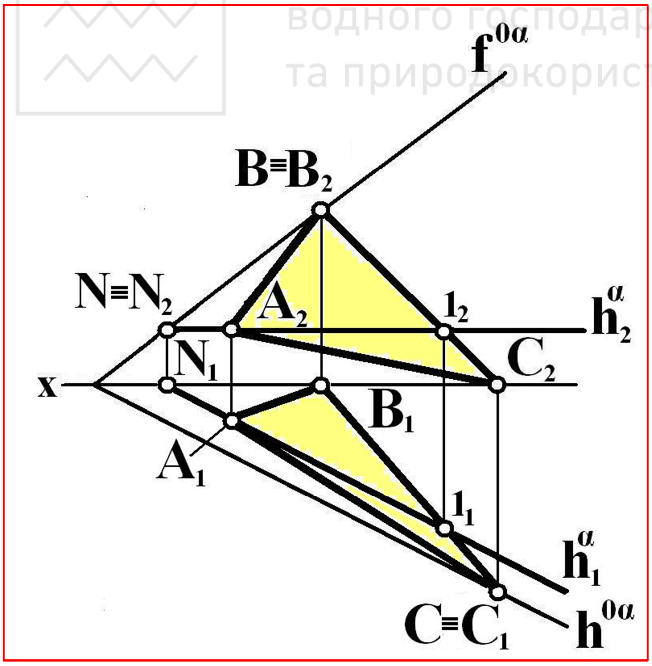


Задача № 1

Початкова умова задачі. **Побудувати горизонтальну проекцію трикутника ABC, що належить площині α ($h^{0\alpha} \cap f^{0\alpha}$)**

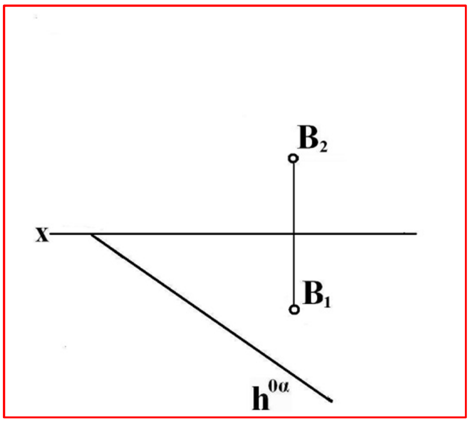


Пояснення до розв'язування задачі на наочному зображенні. **Точка належить площині, коли знаходиться на прямій цієї площини. Фронтальний слід $f^{0\alpha}$ лежить в $П_2$, тому $f_2^{0\alpha} \equiv f^{0\alpha}$, а $f_1^{0\alpha} \equiv x$. Якщо $B_2 \equiv f^{0\alpha}$ або $B_2 \equiv f_2^{0\alpha}$, то це означає, що точка B буде належити площині α за умови, що вона лежить на $f^{0\alpha}$. Якщо $C_2 \equiv x$, то це означає, що $C \in П_1$. Серед прямих площини α тільки $h^{0\alpha} \in П_1$. а, отже, точка C буде належити площині α, якщо $C \in h^{0\alpha}$. Шукану A_1 легше визначити, за умови, що вона лежить на лінії рівня площини α, наприклад, $h^{0\alpha}$.**

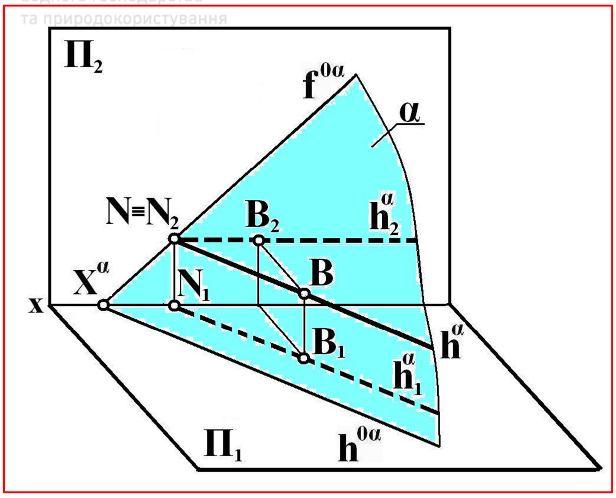


Розв'язування задачі на епюрі.

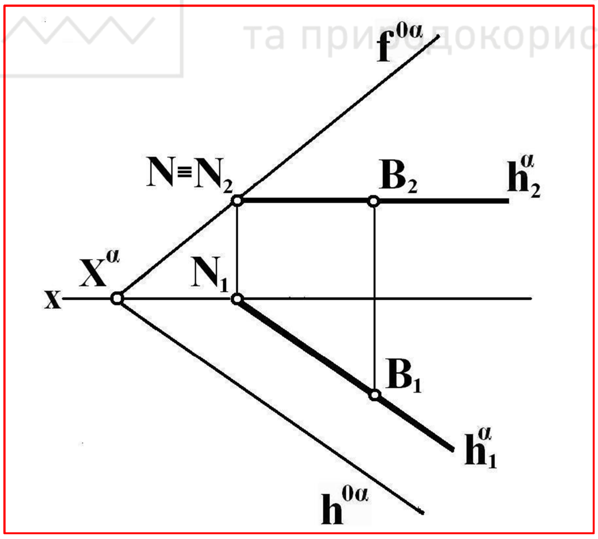
Задача № 2



Початкова умова задачі.
Побудувати фронтальний слід $f^{0\alpha}$ площини α, що задана горизонтальним слідом $h^{0\alpha}$ і точкою B.



Розв'язування задачі на наочному зображенні.
Щоб провести $f^{0\alpha}$ потрібно знайти ще одну точку, крім X^{α}, через яку проходить $f^{0\alpha}$. Цю другу точку можна визначити, провівши через точку B горизонтальну пряму h^{α} площини α. Пряму h^{α} дійсно можна побудувати, враховуючи, що $h^{\alpha} // h^{0\alpha}$. Знаходимо точку N – фронтальний слід h^{α}. $N \in \Pi_2$ і $N \in h^{\alpha}$, тобто N є другою точкою, через яку проходить $f^{0\alpha}$



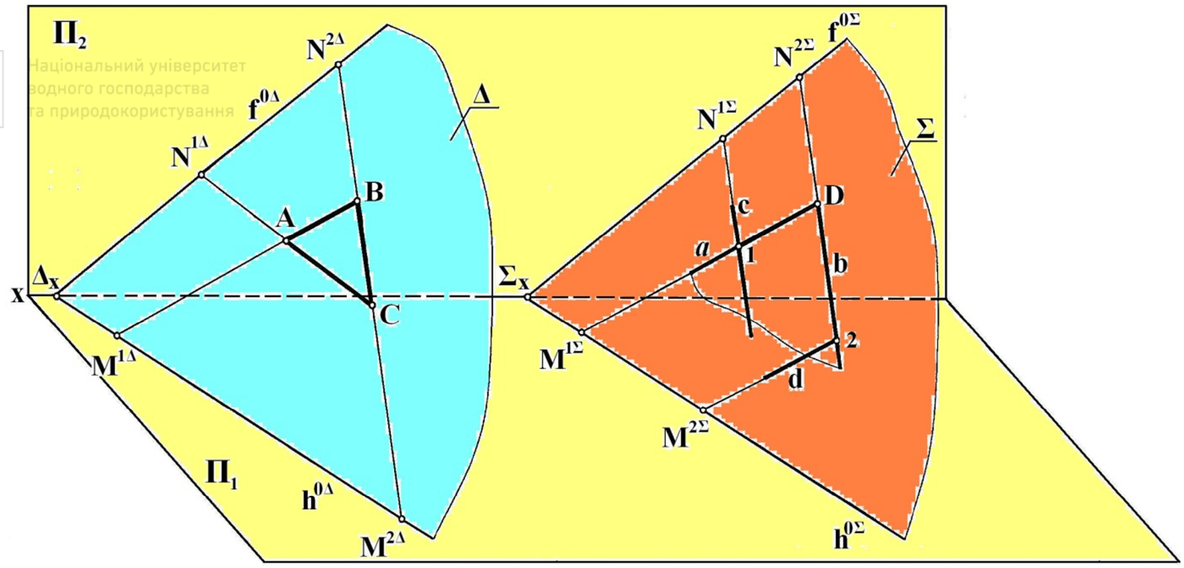
Розв'язування задачі на епюрі.
Послідовність побудов:
1. Через B_1 проводимо $h_1^{\alpha} // h^{0\alpha}$, а через B_2 – $h_2^{\alpha} // x$.
2. Знаходимо точку N перетину h^{α} з Π_2, тобто її горизонтальний слід.
3. Через точки X^{α} і N, які належать площині α і водночас Π_2, проводимо $f^{0\alpha}$.

Розділ 4. Взаємне положення двох площин

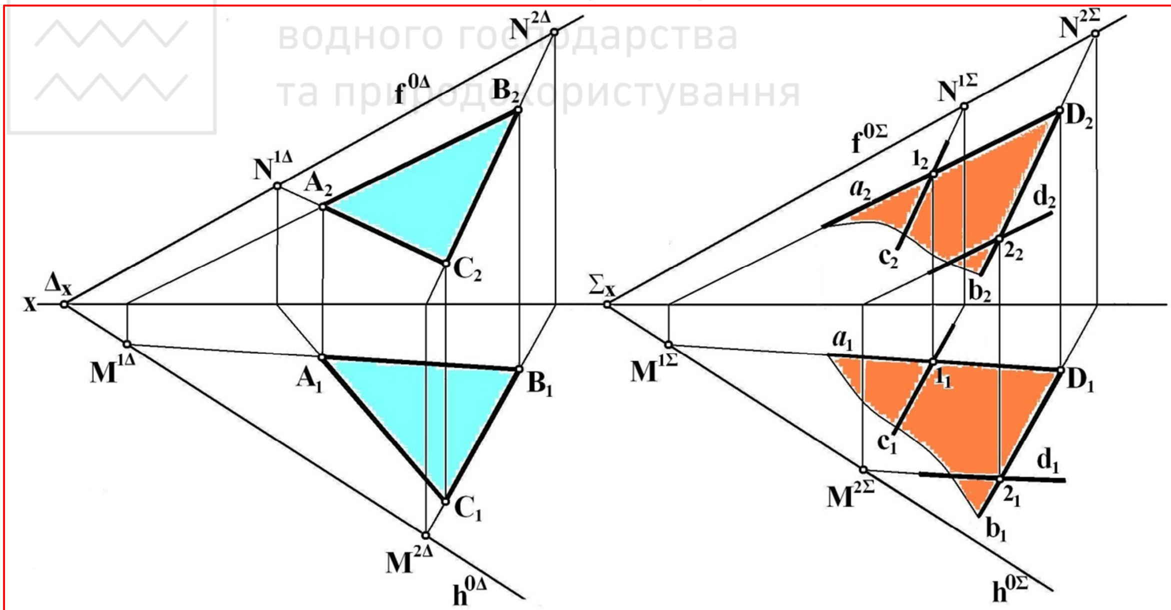
Дві площини між собою в просторі можуть бути: 1) паралельними і 2) перетинатися.

4.1. Паралельність двох площин

Дві площини паралельні, якщо дві прямі, що перетинаються, однією площини відповідно паралельні двом прямим, що перетинаються, іншої площини.



Наочне зображення паралельних площин Δ і Σ



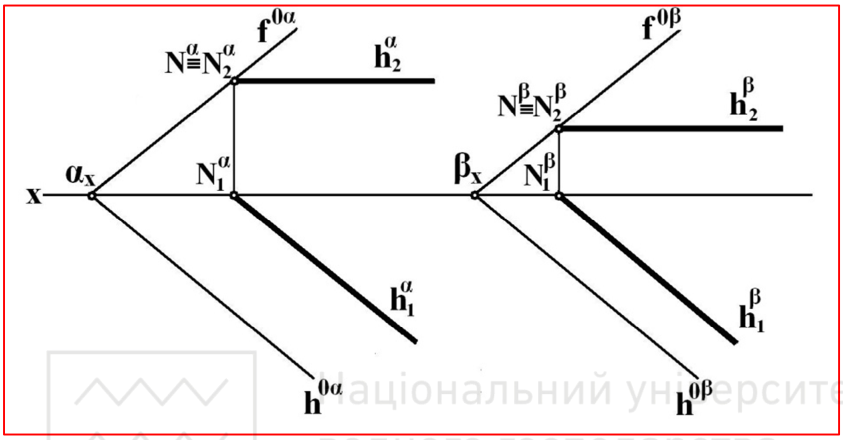
Епюр паралельних площин Δ і Σ

Наочне зображення та епюр паралельних площин Δ і Σ, заданих відповідно трикутником АВС і двома прямими *a* і b, що перетинаються (АВ//*a* і ВС//b). У паралельних площин сліди паралельні: $h^{0\Delta}$// $h^{0\Sigma}$ і $f^{0\Delta}$// $f^{0\Sigma}$. Для площини Δ горизонтальний слід $h^{0\Delta}$побудовано за точками $M^{1\Delta}$ і $M^{2\Delta}$ ($M^{1\Delta}$ = АВ∩Π_1, $M^{2\Delta}$ = ВС∩Π_1), фронтальний слід $f^{0\Delta}$ побудовано за точками $N^{1\Delta}$ і $N^{2\Delta}$($N^{1\Delta}$ = АС∩Π_2, $N^{2\Delta}$ = ВС∩Π_2). Для площини Σ горизонтальний слід $h^{0\Sigma}$побудовано за точками $M^{1\Sigma}$ і $M^{2\Sigma}$ ($M^{1\Sigma}$ = *a*∩Π_1, $M^{2\Sigma}$ = d∩Π_1, де d//*a*), фронтальний слід $f^{0\Sigma}$ побудовано за точками $N^{1\Sigma}$ і $N^{2\Sigma}$($N^{1\Sigma}$ = c∩Π_2, $N^{2\Sigma}$ = b∩Π_2, де c//b).

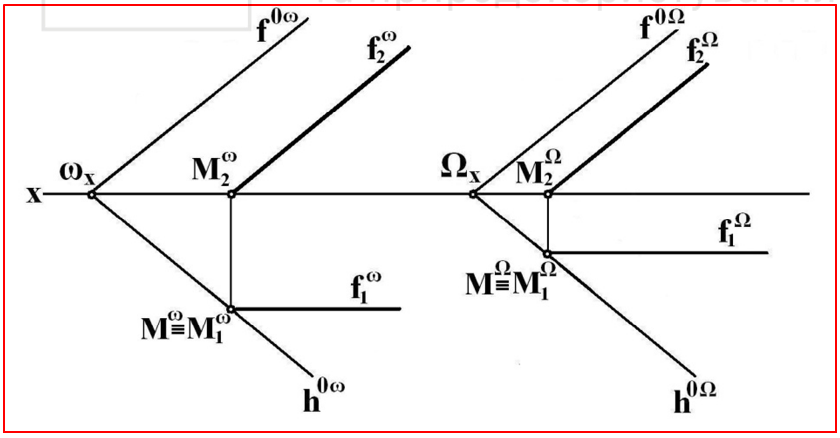
Примітка:якщо побудовано один із слідів площини, то інший слід можна провести через точку сходу та один слід прямої цієї площини.

Якщо дві паралельні площини перетнути третьою, то лінії перетину – паралельні.

У паралельних площинах горизонталі однієї площини паралельні горизонталям іншої площини, а фронталі однієї площини паралельні фронталям іншої площини.

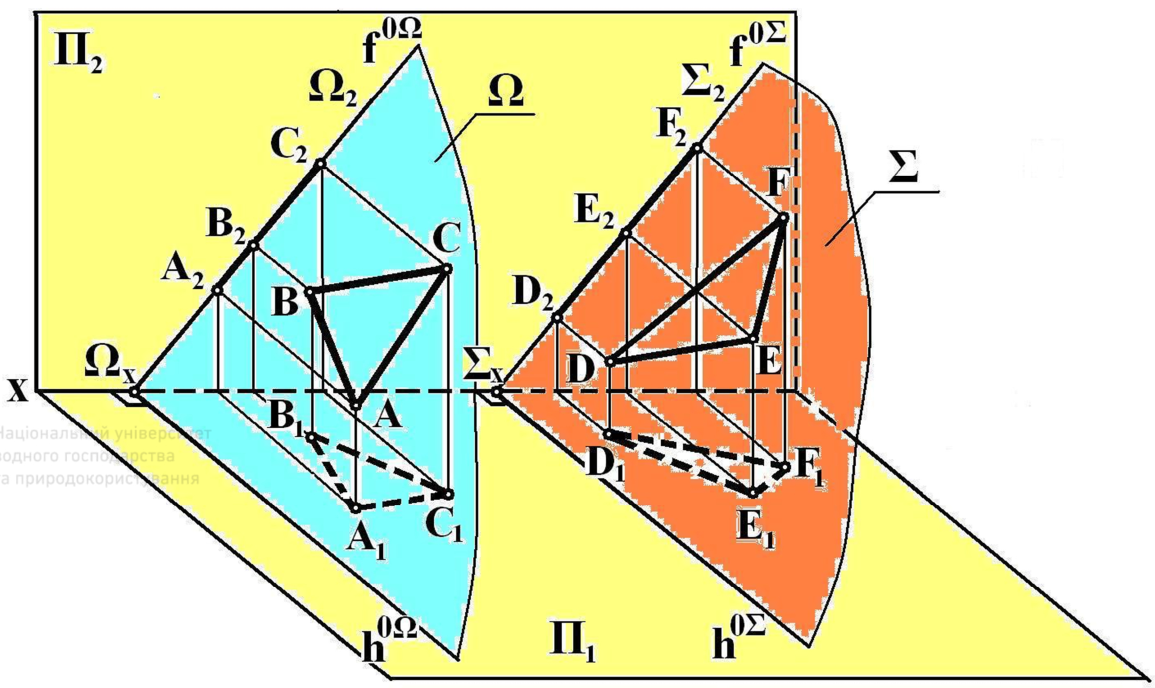


У паралельних площинах α і β паралельні їх горизонтальні прямі h^{α} і h^{β}

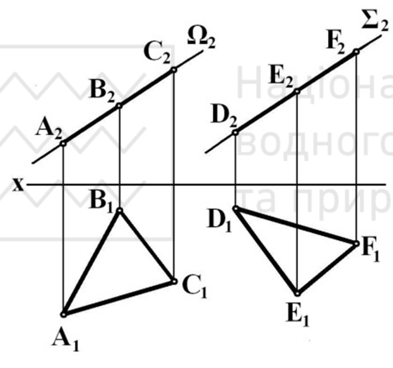


У паралельних площинах ω і Ω паралельні їх фронтальні прямі f^{ω} і f^{Ω}

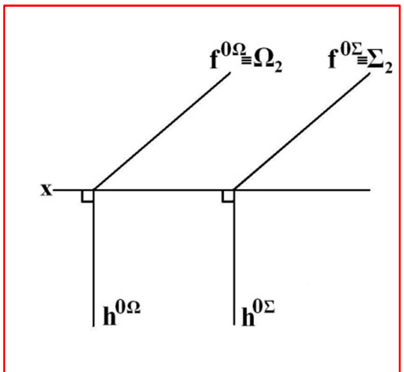
У паралельних проекціюючих площинах паралельні їх сліди-проекції.



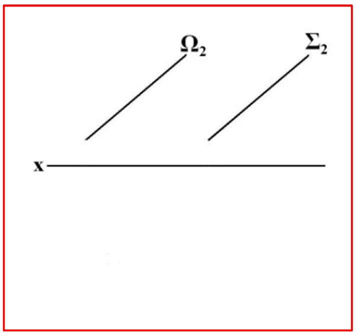
Наочне зображення паралельних фронтально-проекціюючих площин Δ і Σ, у яких сліди-проекції Ω_2 та Σ_2 паралельні.



Епюр паралельних фронтально-проекціюючих площин Ω і Σ, заданих відповідно трикутниками ABC і DEF (фронтальні проекції $A_2B_2C_2$ і $D_2E_2F_2$ трикутників паралельні і збігаються зі слідами-проекціями Ω_2 і Σ_2).



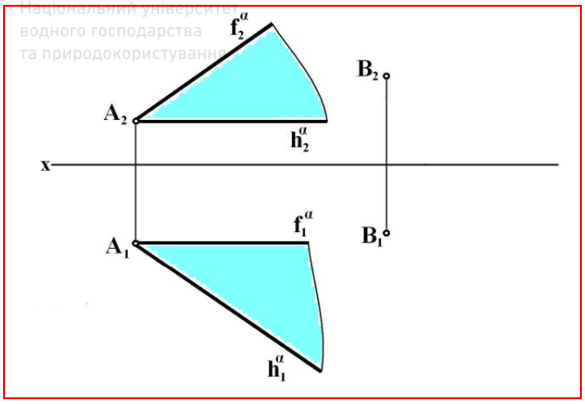
Епюр паралельних фронтально-проекціюючих площин Ω і Σ, заданих слідами (сліди площин паралельні, фронтальні сліди є слідами-проекціями цих площин).



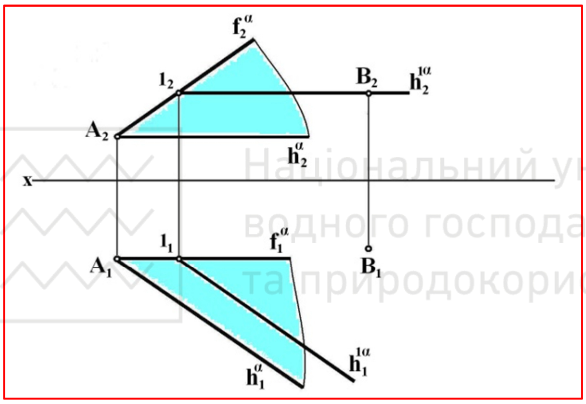
Епюр паралельних фронтально-проекціюючих площин Ω і Σ, заданих слідами-проекціями Ω_2 і Σ_2 ($\Omega_2 // \Sigma_2$).

4.2. Задачі на проведення через точку простору площини, паралельної до заданої площини

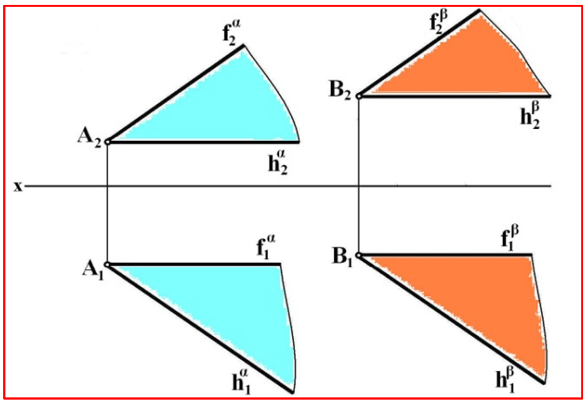
Задача № 1



Початкова умова задачі. **Через точку В провести площину β паралельно до площини α ($h^\alpha \cap f^\alpha$), заданої лініями рівня h^α і f^α.**

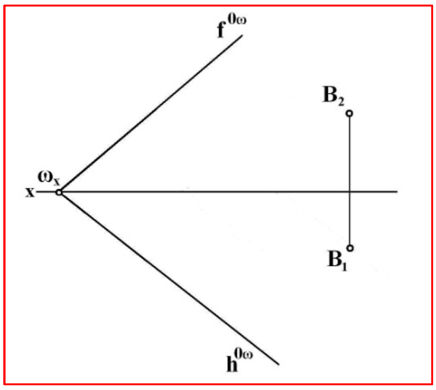


1 етап. **Перевірка належності точки В площині α (точка В не належить площині α, оскільки не лежить на прямій $h^{1\alpha}$ площини α). Якщо б точка В належала площині α, то проведена паралельно до заданої площини α площина β належала б площині α.**

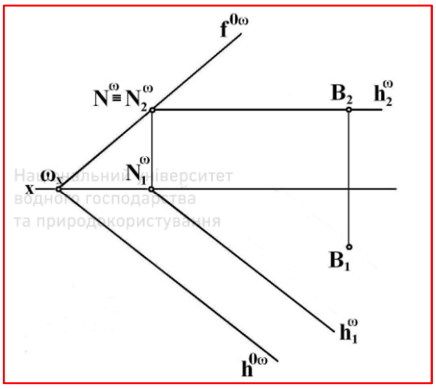


2 етап. **Через точку В проводимо площину β паралельно до площини α. Площину β задаємо також лініями рівня h^β і f^β, які проводимо паралельно до h^α і f^α.**

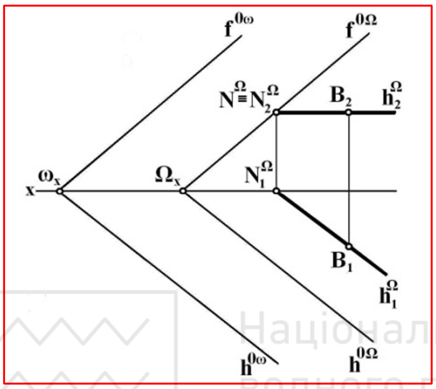
Задача № 2



Початкова умова задачі. Через точку B провести площину Ω паралельно до площини ω ($h^{0\omega} \cap f^{0\omega}$), заданої слідами $h^{0\omega}$ і $f^{0\omega}$.



1 етап. Перевірка належності точки B площині ω (точка B не належить площині α, оскільки не лежить на горизонтальній прямій h^{ω} площини ω). Якщо б точка B належала площині ω, то проведена паралельно до заданої площини ω площина Ω належала б площині ω.

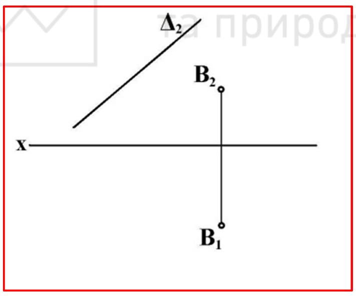


2 етап. Через точку B проводимо площину Ω паралельно до площини ω (площину Ω задаємо також слідами $h^{0\Omega}$ і $f^{0\Omega}$).

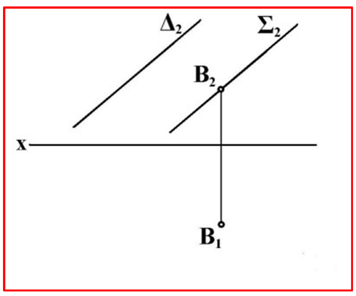
Для цього:

1. Через точку B проводимо горизонтальну пряму h^{Ω} паралельно до $h^{0\omega}$ і знаходимо її фронтальний слід N^{Ω}.
2. Через N^{Ω} проводимо $f^{0\Omega} // f^{0\omega}$ і визначаємо точку сходу Ω_x площини Ω.
3. Через Ω_x проводимо $h^{0\Omega} // h^{0\omega}$.

Задача № 3



Початкова умова задачі. Через точку B провести площину Σ паралельно до фронтально-проекціюючої площини Δ.

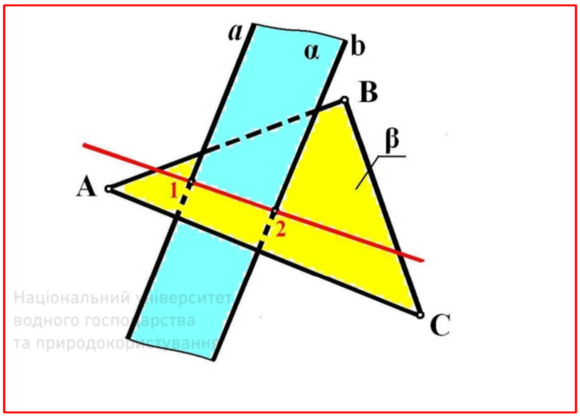


Розв'язування задачі зводиться до проведення сліду-проекції Σ_2 площини Σ паралельно до Δ_2, причому Σ_2 проходить через B_2.

4.3. Перетин двох площин

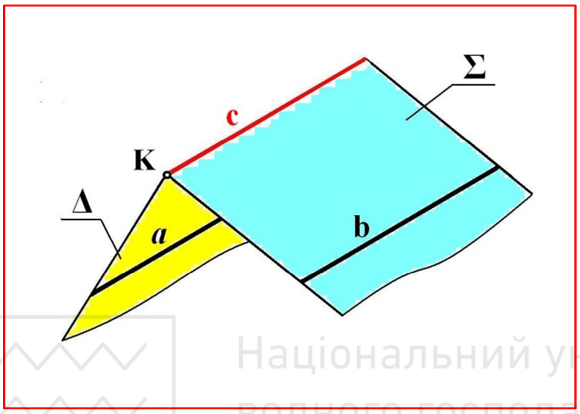
Дві площини перетинаються по прямій лінії, для побудови якої потрібно визначити: 1) дві спільні точки, що належать водночас обом площинам, або 2) одну спільну точку при відомому напрямку прямої лінії перетину:

1 спосіб. Побудова лінії перетину двох площин за двома спільними точками

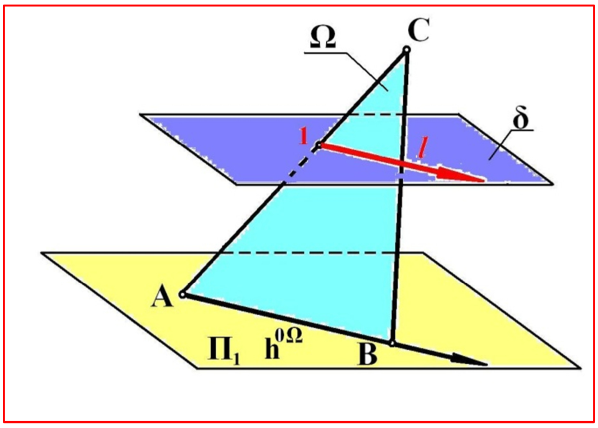


Площину α задано двома паралельними прямими *a* і b, площина β – трикутником ABC. Точки 1 і 2 є спільними точками площин α і β. Лінія перетину 12 площин α і β проходить через точки 1 і 2 (точки 1 і 2 для даного прикладу визначено як точки перетину прямих *a* і b площини α з площиною β).

2 спосіб. Побудова лінії перетину двох площин за однією спільною точкою і відомим напрямком лінії перетину



1 варіант. Точка К – спільна точка площин Δ і Σ, що перетинаються. Якщо прямі *a* і b, що належать відповідно площинам Δ і Σ, паралельні, то лінія перетину c цих площин буде паралельною до прямих *a* і b.

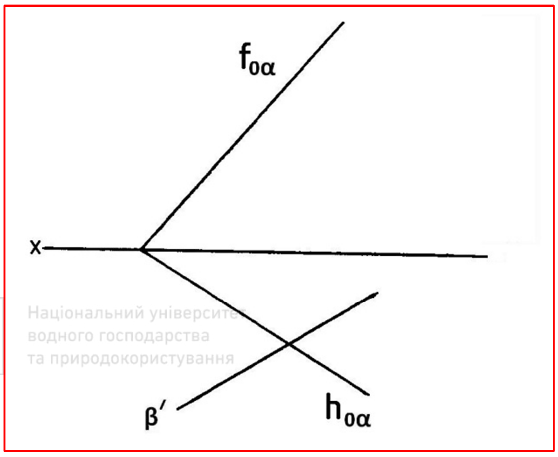


2 варіант. Точка 1 – спільна точка площин Ω і δ, що перетинаються. Оскільки площина δ паралельна до площини проекцій $П_1$, то лінія перетину *l* площин Ω і δ є прямою, що паралельна до $П_1$. Якщо в площині Ω відомі горизонтальна пряма або її горизонтальний слід, то лінія перетину *l* буде проходити через точку 1 паралельно до цих прямих площини Ω (для даного прикладу пряма *l* паралельна до горизонтального сліду $h^{0Ω}$ площини Ω).

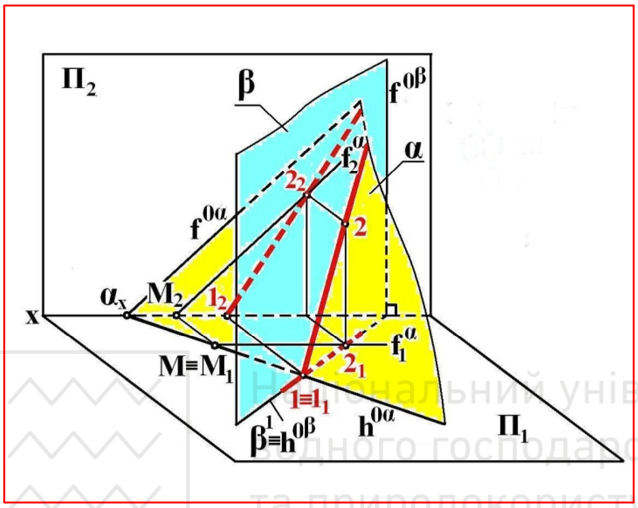
4.3.1. Перетин площини загального положення з проекціюючою площиною та площиною рівня

Одна проекція лінії перетину проекціюючої площини чи площини рівня з площиною загального положення збігається із слідом-проекцією цих площин.

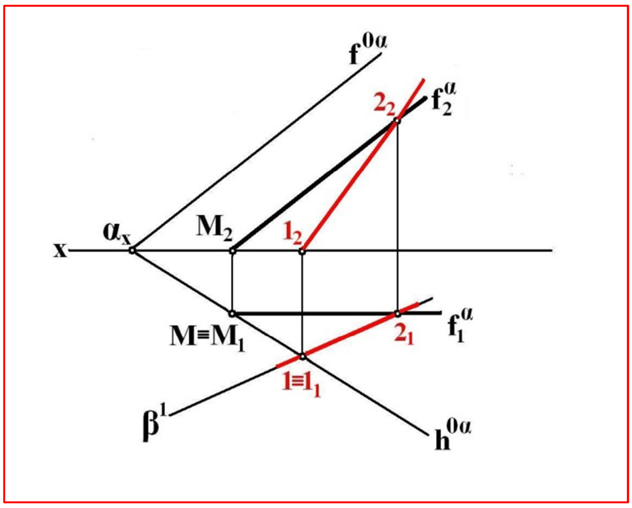
Задача № 1



Початкова умова задачі.
Побудувати лінію перетину 12 площини загального положення $\alpha(h^{0\alpha} \cap f^{0\alpha})$ з горизонтально-проекціюючою площиною β.

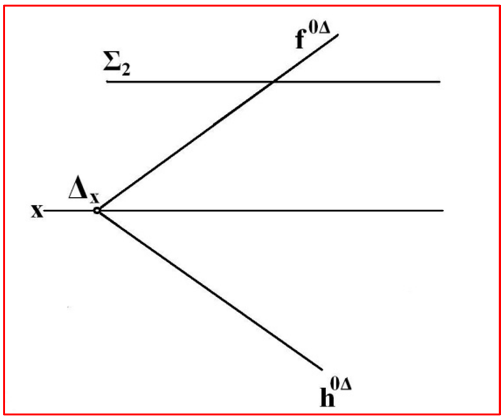


Розв'язування задачі на наочному зображенні.
Одну спільну точку – точку 1 – визначено як точку перетину горизонтальних слідів площин α і β. Другу спільну точку – точку 2 – визначено, виходячи з того, що горизонтальна проекція лінії перетину площин збігається зі слідом-проекцією β_1 площини β. На β_1 в довільному місці відмічаємо горизонтальну проекцію 2_1 точки 2. Це означає, що точка 2 належить площині β. Належність точки 2 площині α визначено за допомогою фронтальної прямої f^α площини α.

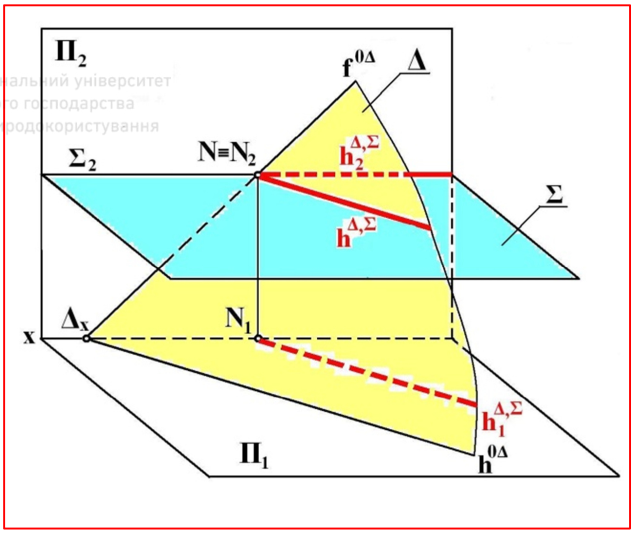


Розв'язування задачі на епюрі.

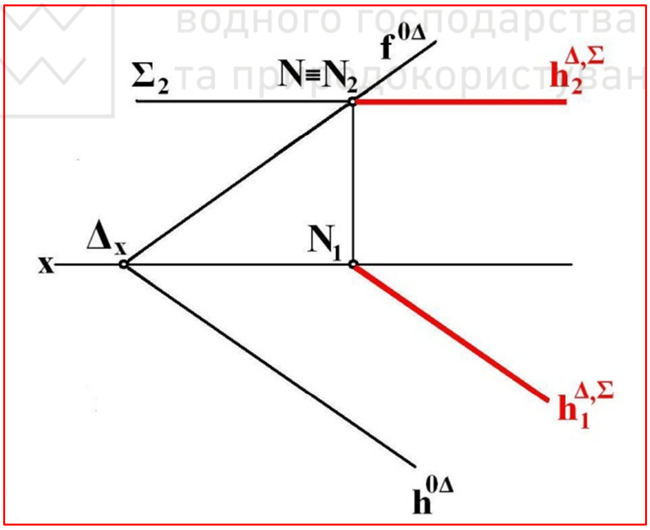
Задача № 2



Початкова умова задачі.
Побудувати лінію перетину площини загального положення $\Delta(h^{0\Delta} \cap f^{0\Delta})$ з горизонтальної площиною рівня Σ.

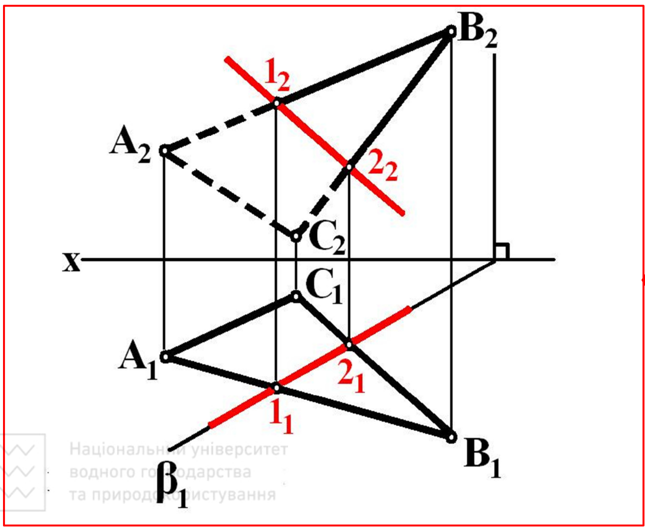


Розв’язування задачі на наочному зображенні.
Одну спільну точку – точку N – визначено як точку перетину фронтальних слідів площин Δ і Σ. Оскільки площина Σ паралельна до площини проекцій Π_1, то напрямок лінії перетину відомий – він паралельний до Π_1. Тому, провівши через точку N горизонтальну пряму площини Δ, отримаємо лінію перетину $h^{\Delta,\Sigma}$ площин Δ і Σ (індекс «Δ,Σ» означає, що пряма $h^{\Delta,\Sigma}$ належить і площині Δ, і площині Σ).



Розв’язування задачі на епюрі.

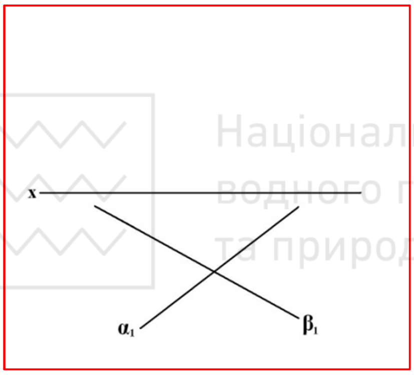
Задача № 3



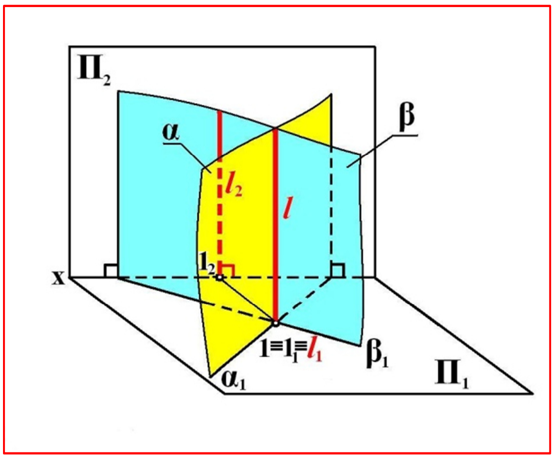
Побудовано лінію перетину 12 площини загального положення α, яку задано трикутником АВС, з горизонтально-проекціюючою площиною β.
Горизонтальна проекція лінії перетину збігається зі слідом-проекцією β_1 площини β. На β_1 фіксуємо точки 1_1 і 2_1. Це буде означати, що точки 1 і 2 належать площині β. Проте точки 1 і 2 повинні належити і площині α. Тому точки 1_1 і 2_1 фіксуємо не на довільному місці β_1, а в точках перетину β_1 з горизонтальними проекціями A_1B_1 і B_1C_1 сторін трикутника. Фронтальні проекції 1_2 і 2_2 визначено на A_2B_2 і B_2C_2 за допомогою ліній проекційного зв'язку. Це означає, що точки 1 і 2 будуть належити і площині α.

Приклади побудови лінії перетину проекціюючих площин та площин рівня:

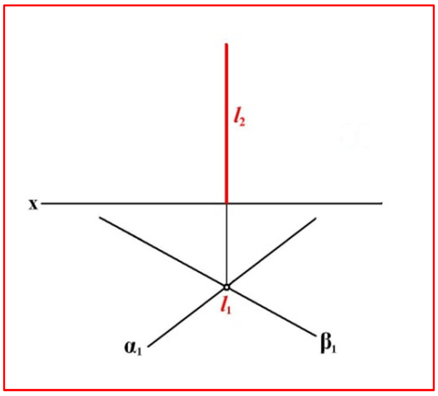
Задача № 1



Початкова умова задачі.
Побудувати лінію перетину *l* горизонтально-проекціюючих площин α і β

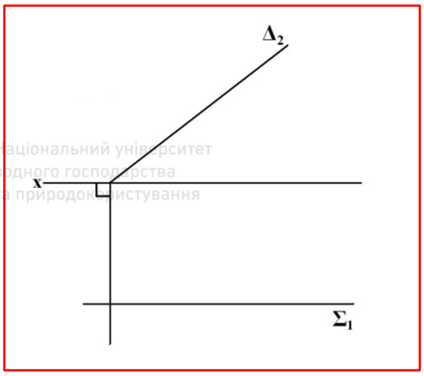


Розв'язування задачі на наочному зображенні.
У горизонтально-проекціюючих площинах α і β фронтальні сліди паралельні, а, отже, лінія перетину площин α і β буде паралельною до їх фронтальних слідів. Спільну точку – точку 1 – визначено в перетині слідів-проекцій α_1 і β_1. Через точку 1 проводимо лінію *l* паралельно до фронтальних слідів площин α і β, яка і буде лінією перетину площин α і β (пряма *l* є горизонтально-проекціюючою прямою, спільною для площин α і β).

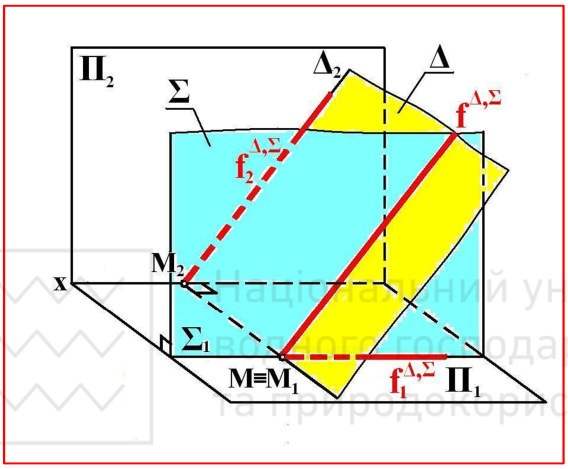


Розв'язування задачі на епюрі.

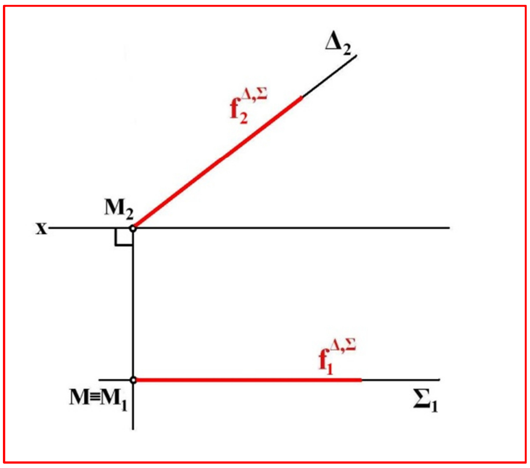
Задача № 2



Початкова умова задачі.
Побудувати лінію перетину фронтально-проекціюючої площини Δ з фронтальною площиною рівня Σ.



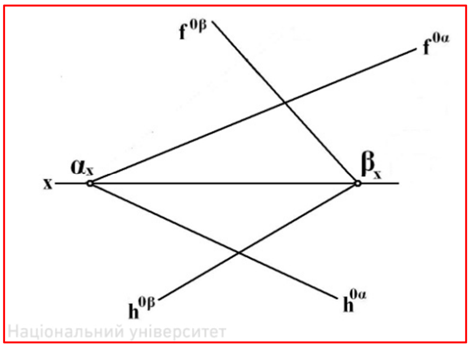
Розв'язування задачі на наочному зображенні.
Площина Σ паралельна до Π_2, тобто лінією перетину площин Δ і Σ є фронтальна пряма $f^{\Delta,\Sigma}$. Її горизонтальна проекція $f_1^{\Delta,\Sigma}$ збігається з Σ_1, а фронтальна проекція $f_2^{\Delta,\Sigma}$ збігається з Δ_2. Пряма $f^{\Delta,\Sigma}$ проходить через спільну точку M двох площин – точку перетину горизонтальних слідів площин Δ і Σ (точка M також є горизонтальним слідом $f^{\Delta,\Sigma}$).



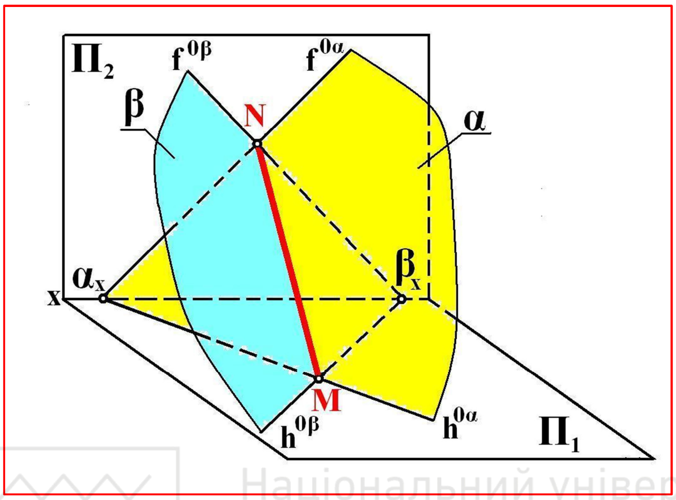
Розв'язування задачі на епюрі.

4.3.2. Перетин площин загального положення

Розглянемо приклад перетину площин, заданих визначниками, які містять по дві прямі, що лежать в одній площині

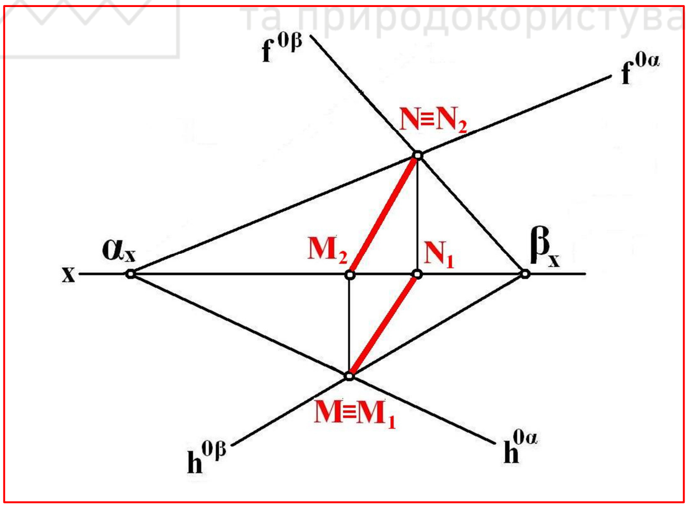


Початкова умова задачі.
Побудувати лінію перетину двох площин загального положення α і β, заданих слідами, які перетинаються в межах креслення.



Розв'язування задачі на наочному зображенні.
Спільну точку M двох площин знайдено в перетині їх горизонтальних слідів $h^{0\alpha}$ і $h^{0\beta}$. Ці сліди лежать в одній площині – площині $П_1$. Другу спільну точку N знайдено в перетині фронтальних слідів $f^{0\alpha}$ і $f^{0\beta}$, які лежать в одній площині – площині $П_2$.

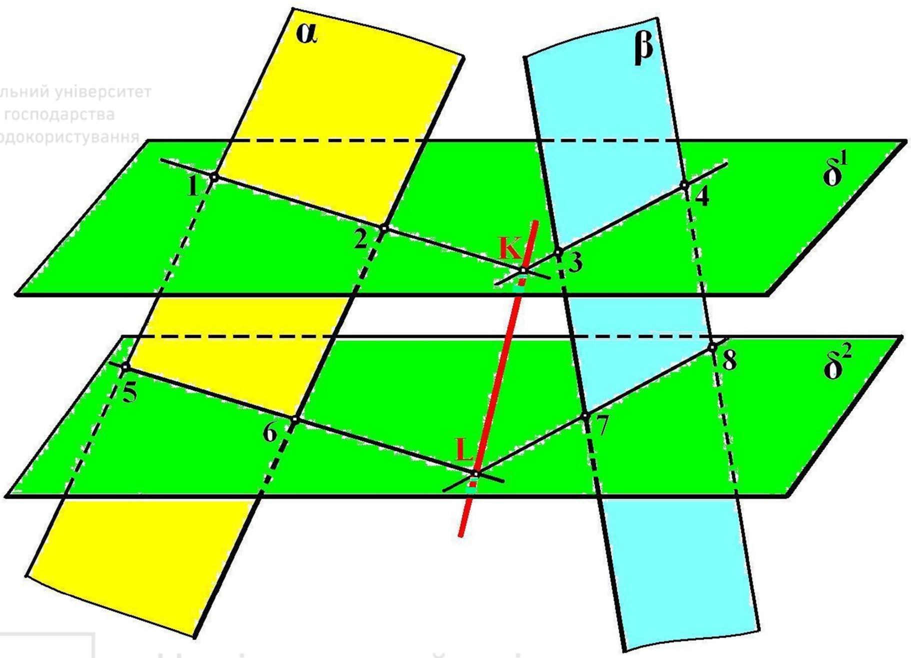
Національний університет водного господарства та природокористування



Розв'язування задачі на епюрі.

Якщо задані визначники двох площин, що перетинаються, не містять прямих, які лежать в одній площині, то дві спільні точки визначають за допомогою введення двох нових січних площин-посередників, які перетинають задані площини по прямих лініях, що лежать в цих січних площинах-посередниках. Кожна з січних площин-посередників призначена для визначення спільної точки двох площин, що перетинаються.

Приклад застосування двох січних площин-посередників для побудови лінії перетину двох площин. Цей спосіб, який називають загальним, доцільно застосовувати, коли в межах креслення визначники заданих площин не накладаються один на одний (знаходяться в різних областях креслення).



Послідовність (алгоритм) побудови лінії перетину KL площин α і β:

1. Для визначення першої спільної точки K проводимо допоміжну січну площину δ^1, яка перетинає задані площини α і β.

2. Будуємо лінії перетину 12 і 34 площини δ^1 відповідно з площинами α і β.

3. Оскільки прямі 12 і 34, що належать площинам α і β, лежать в площині δ^1, то точка K їх перетину належить водночас площинам α і β.

4. Для визначення другої спільної точки L проводимо допоміжну січну площину δ^2, яка перетинає задані площини α і β.

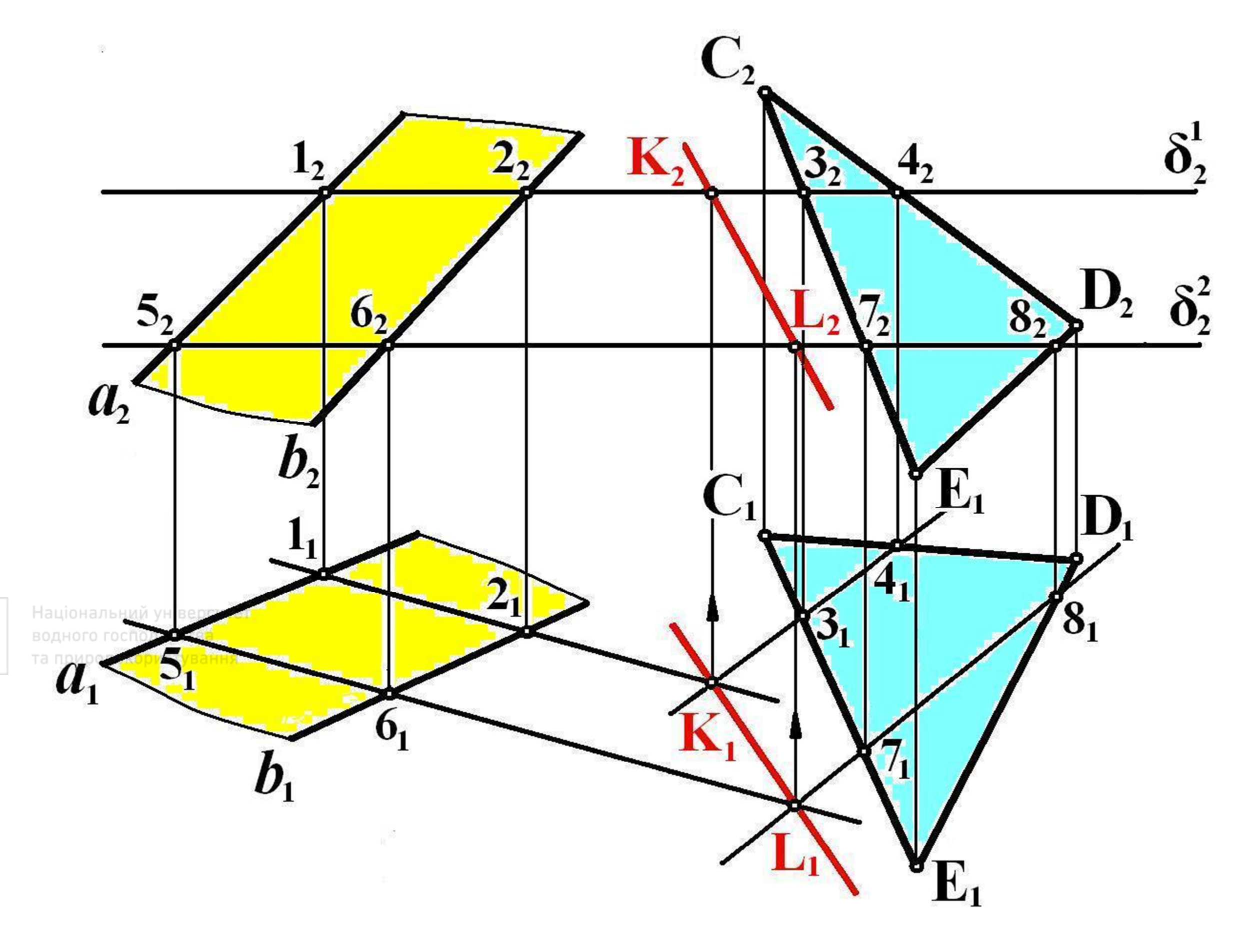
5. Будуємо лінії перетину 56 і 78 площини δ^2 відповідно з площинами α і β.

6. Оскільки прямі 56 і 78, що належать площинам α і β, лежать в площині δ^2, то точка L їх перетину належить водночас площинам α і β.

7. Через точки K і L проводимо пряму KL, яка і буде лінією перетину заданих площин α і β.

Примітка: 1. Якщо січні площини δ^1 і δ^2 задати паралельними, то для побудови ліній перетину 56 і 78 достатньо визначити по одній точці, наприклад 5 і 8, а самі лінії 56 і 78 провести паралельно відповідно до побудованих ліній 12 і 34 (паралельні площини δ^1 і δ^2 перетинають задані площини α і β по паралельних лініях: 12//56, 34//78).

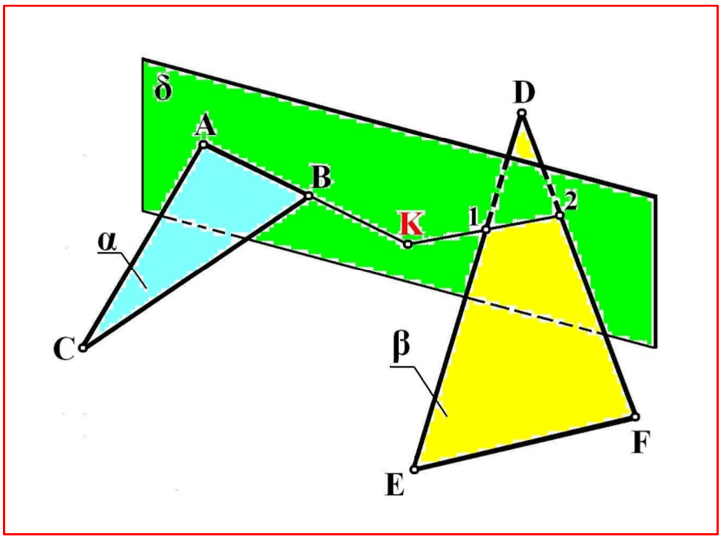
2. Якщо січні площини δ^1 і δ^2 будуть площинами рівня, то лінії 12, 34, 56, 78 будуть прямими рівня.



Приклад розв'язування на епюрі задачі на визначення лінії перетину KL площин загального положення α і β, де площину α задано паралельними прямими *a* і *b*, а площину β − трикутником CDE.
Послідовність дій аналогічна, розглянутим на наочному зображенні (для спрощення виконання побудов січні площини δ^1 і δ^2 є горизонтальними площинами рівня, які перетинають задані площини по горизонтальних прямих 12, 34, 56, 78).

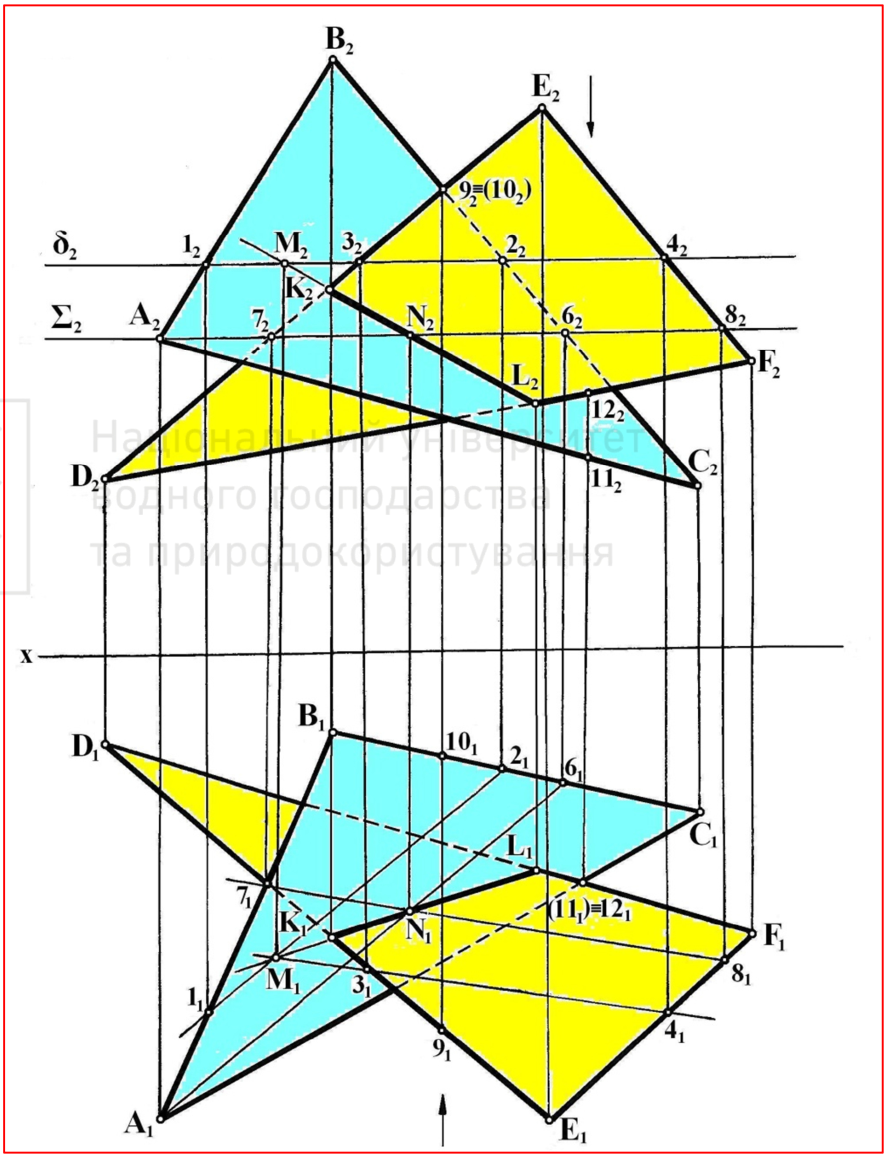
В багатьох випадках простіше побудувати лінію перетину двох площин загального положення, визначники яких не містять прямих, що лежать в одній площині, можна, якщо провести дві допоміжні січні через:
- дві прямі, які належать одній з площин, що перетинаються, або
- одну пряму в кожній із площин, що перетинаються.

На наочному зображенні наведено приклад визначення спільної точки К площини α, заданої трикутником АВС, та площини β, заданої трикутником DEF, шляхом проведення січної площини δ через пряму АВ площини α. Площина δ перетинає площини α і β по прямимх АВ і 12, які лежать в площині δ. Спільну точку К визначено як точку перетину прямих АВ і 12.



Нижче наведено три приклади побудови лінії перетину площин, заданих трикутниками ABC (площина α) і DEF (площина β), трьома різними способами:

1 спосіб



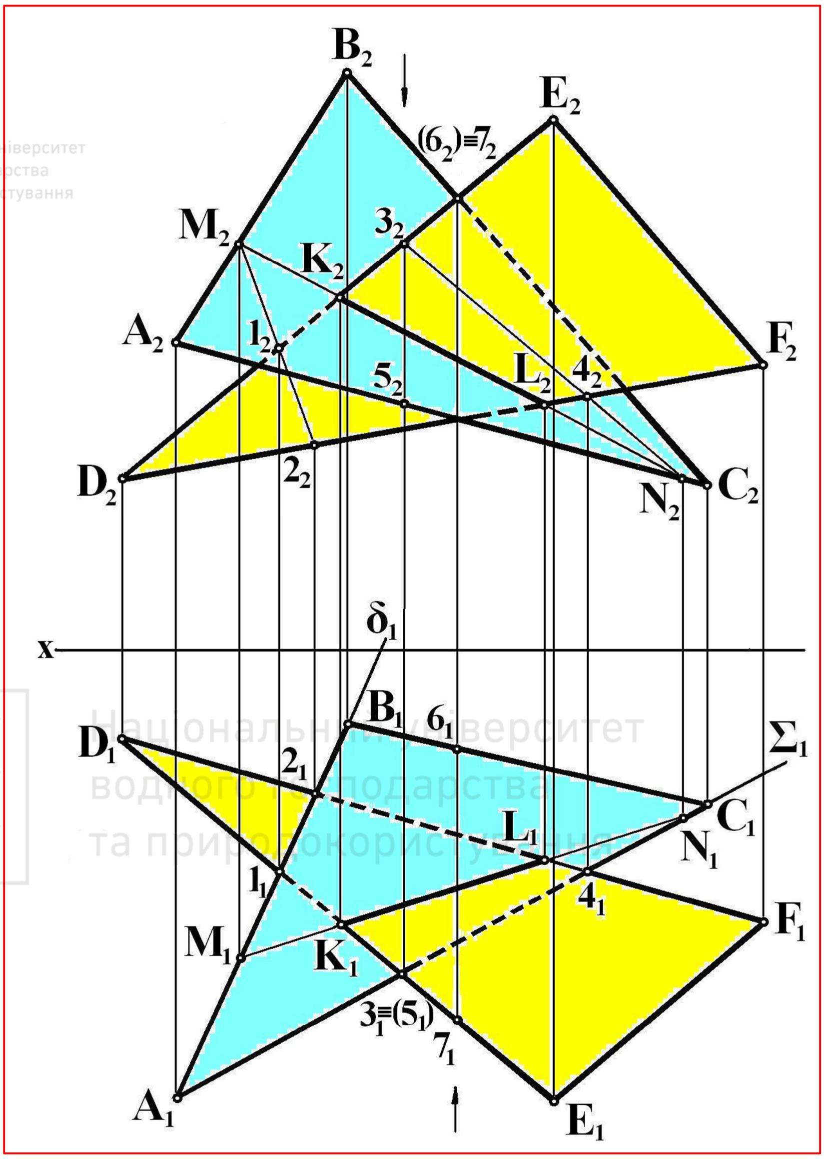
1 спосіб

1спосіб. Загальний.

Уведенням першої січної горизонтальної площини рівня δ знаходимо першу спільну точку M (M = 12∩34) двох площин α і β. Уведенням другої січної горизонтальної площини рівня Σ знаходимо другу спільну точку N (N = 56∩78) двох площин α і β. На лінії перетину MN визначено відрізок KL, по якому трикутники врізаються один в одний.

На фронтальній проекції видимість трикутників визначено за допомогою конкуруючих точок 9 і 10. На горизонтальній проекції видимість трикутників визначено за допомогою конкуруючих точок 11 і 12.

2 спосіб



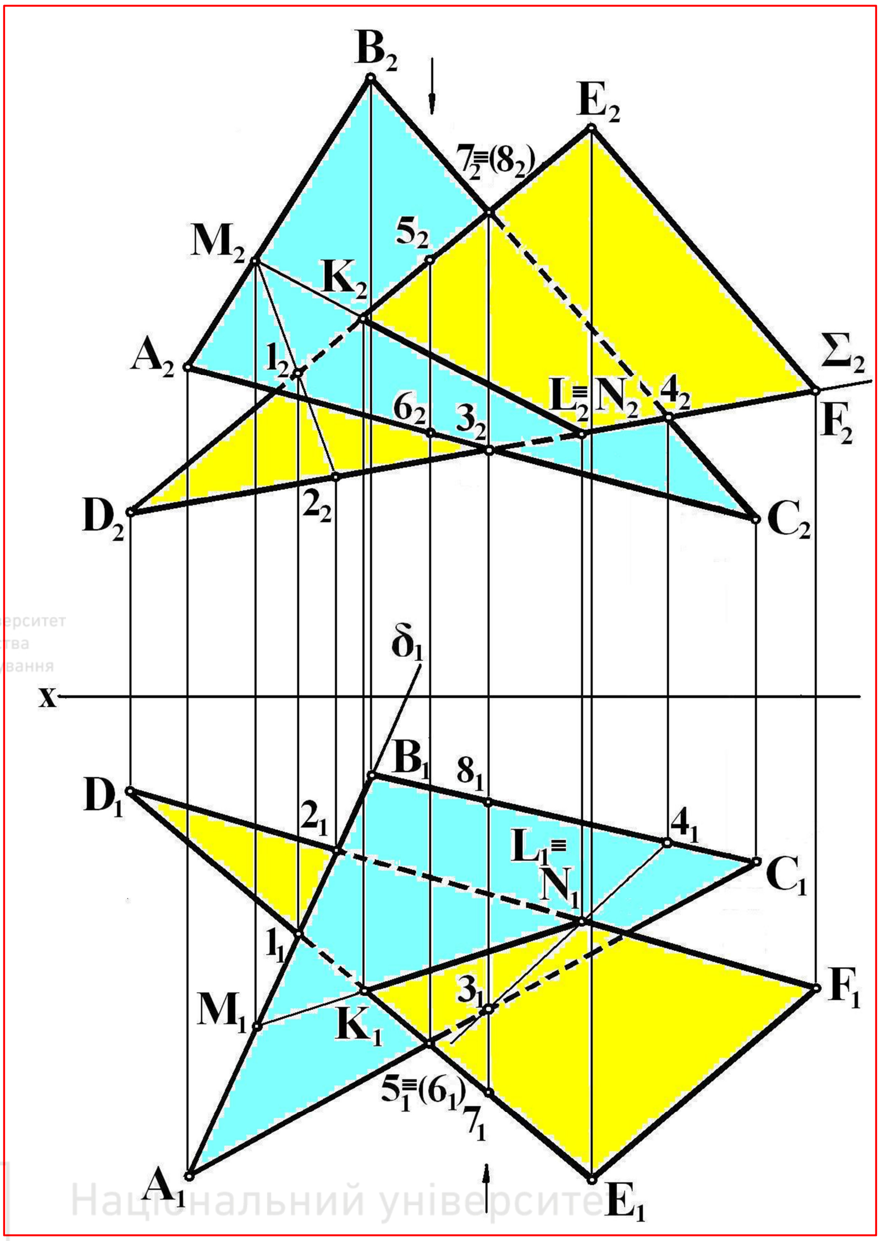
2 спосіб

2 спосіб. Проведення двох січних площин через дві прямі, які належать одній з площин, що перетинаються.

Через прямі (сторони трикутника) AB і AC площини α проведено січні горизонтально-проекціюючі площини δ і Σ. За допомогою площини δ визначено одну спільну точку M (M = AB∩12), а за допомогою площини Σ – другу спільну точку N (N = AC∩34).

3 спосіб

3 спосіб



Національний університет
водного господарства
та природокористування

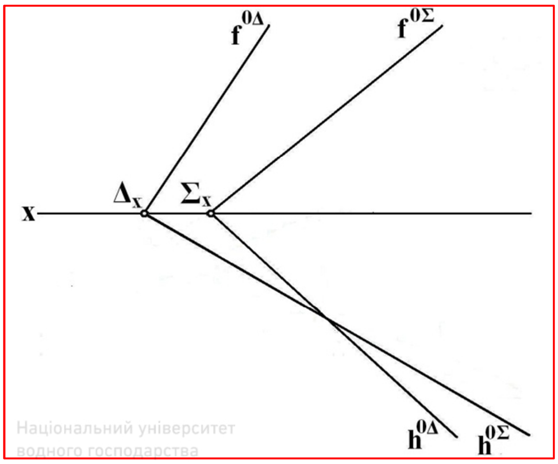
3 спосіб. Проведення двох січних площин через одну пряму в кожній із площин, що перетинаються.

Через пряму AB площини α проведено січну горизонтально-проекціюючу площину δ, за допомогою якої визначено спільну точку M (M = AB∩12). Через пряму DF площини β проведено другу січну фронтально-проекціюючу площину Σ, за допомогою якої визначено другу спільну точку N (N = DF∩34).

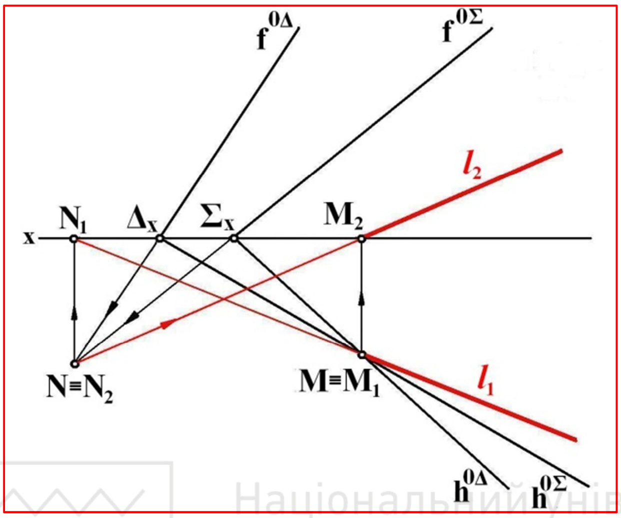
Порівняльний аналіз виконаних побудов:
За наведеним розміщенням на епюрі трикутників, які накладаються один на одний, для визначення лінії перетину площин більш раціональним і точним є 2 і 3 способи, оскільки кількість графічних побудов за цими способами значно менша, ніж за 1 способом.

Розглянемо приклади перетину площин, заданих визначниками, які містять прямі, що лежать в одній площині

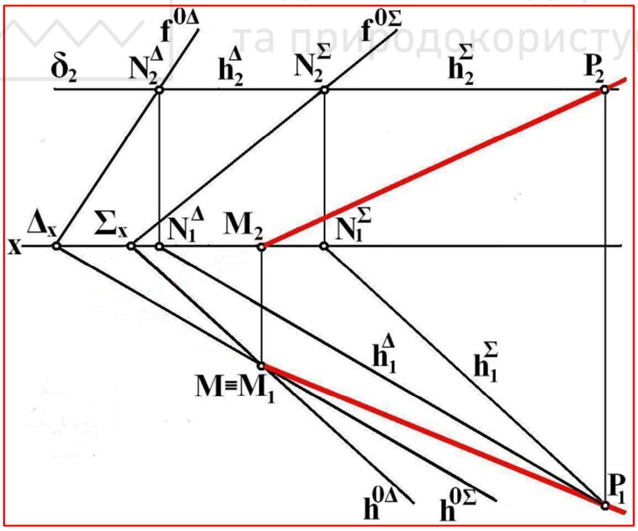
Задача № 1



Початкова умова задачі.
Побудувати лінію перетину двох площин загального положення Δ і Σ, заданих слідами.

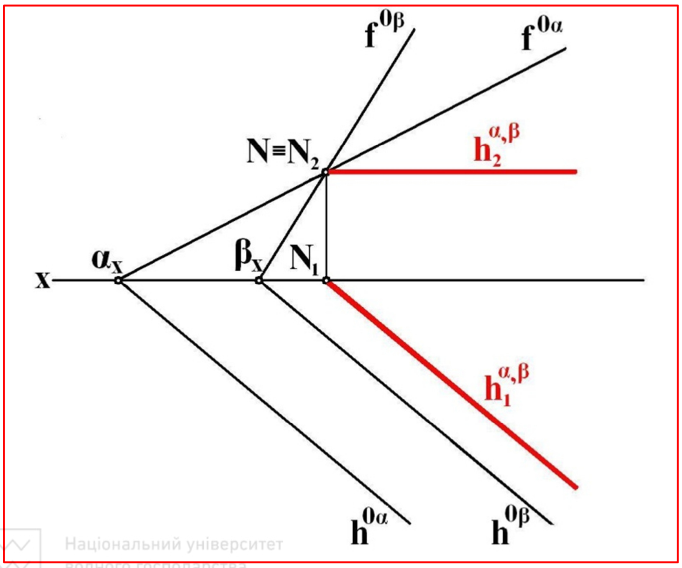


Розв'язування задачі. 1 спосіб.
Спільну точку M двох площин знайдено в перетині їх горизонтальних слідів $h^{0\Delta}$ і $h^{0\Sigma}$. Ці сліди лежать в одній площині – площині Π_1. Другу спільну точку N знайдено шляхом продовження фронтальних слідів $f^{0\Delta}$ і $f^{0\Sigma}$ до їх взаємного перетину (в іншій чверті простору). Ці сліди лежать в одній площині – площині Π_2. Через точки M і N проведено лінію *l*, яка є лінією перетину площин Δ і Σ. В межах 1 чверті простору пряму *l* виділено товстою лінією.



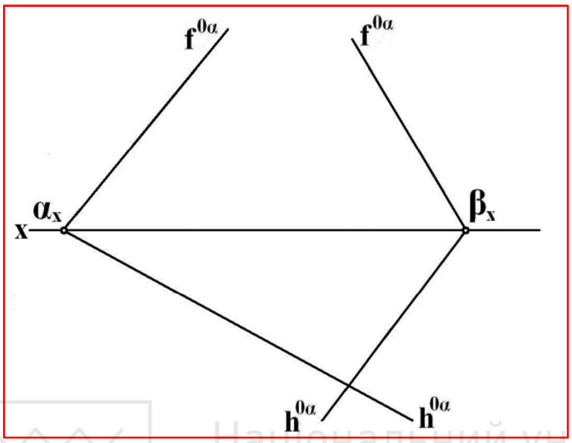
Розв'язування задачі. 2 спосіб.
Спільну точку M двох площин знайдено в перетині їх горизонтальних слідів $h^{0\Delta}$і $h^{0\Sigma}$. Ці сліди лежать в одній площині – площині Π_1. Другу спільну точку P знайдено за допомогою січної горизонтальної площини рівня δ, яка перетинає задані площини по горизонтальних прямих h^{Δ} і h^{Σ}. Ці горизонтальні прямі лежать в площині δ і точка P їх перетину буде другою спільною точкою площин Δ іΣ. MP є лінією перетину заданих площин.

Задача № 2

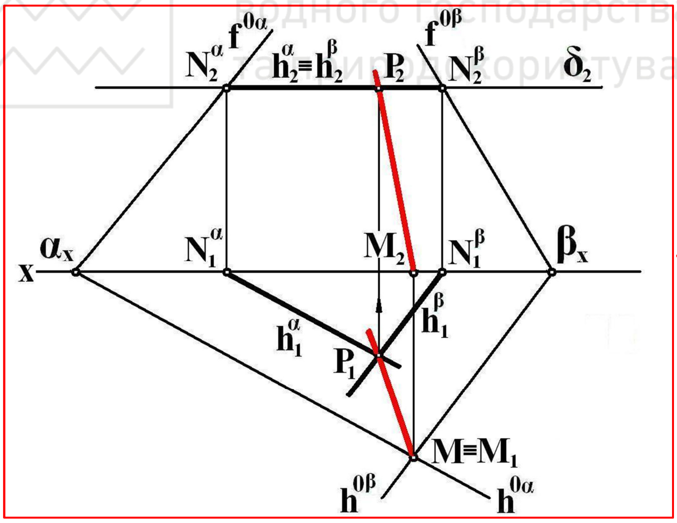


Наведено побудову лінії перетину площин α і β загального положення, заданих слідами, у яких горизонтальні сліди паралельні.
Розв'язування задачі:
Спільну точку N двох площин знайдено в перетині фронтальних слідів $f^{0\alpha}$ і $f^{0\beta}$. Оскільки горизонтальні сліди $h^{0\alpha}$ і $h^{0\beta}$ паралельні, то лінією перетину площин α і β є спільна для заданих площин горизонтальна пряма $h^{\alpha,\beta}$, яка паралельна до $h^{0\alpha}$ і $h^{0\beta}$ і проходить через точку N.

Задача № 3

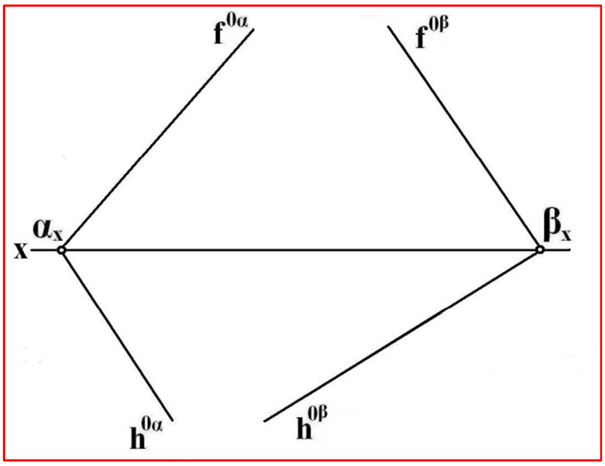


Початкова умова задачі.
Побудувати лінію перетину двох площин загального положення α і β, заданих слідами, у яких горизонтальні сліди $h^{0\alpha}$і $h^{0\beta}$ перетинаються в межах креслення, а фронтальні сліди $f^{0\alpha}$і $f^{0\beta}$ не перетинаються.

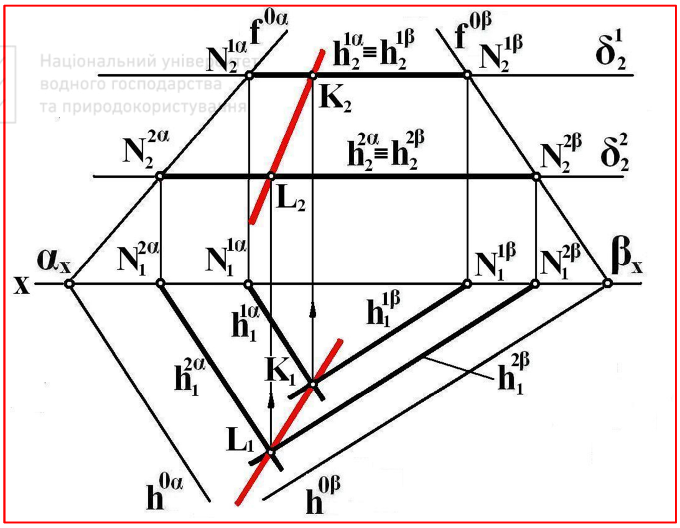


Розв'язування задачі.
Спільну точку M двох площин знайдено в перетині їх горизонтальних слідів $h^{0\alpha}$і $h^{0\beta}$. Ці сліди лежать в одній площині – площині Π_1. Другу спільну точку P знайдено за допомогою січної горизонтальної площини рівня δ, яка перетинає задані площини по горизонтальних прямих h^{α} і h^{β}. Ці горизонтальні прямі лежать в площині δ і точка P їх перетину буде другою спільною точкою площин Δ іΣ. MP є лінією перетину заданих площин.

Задача № 4



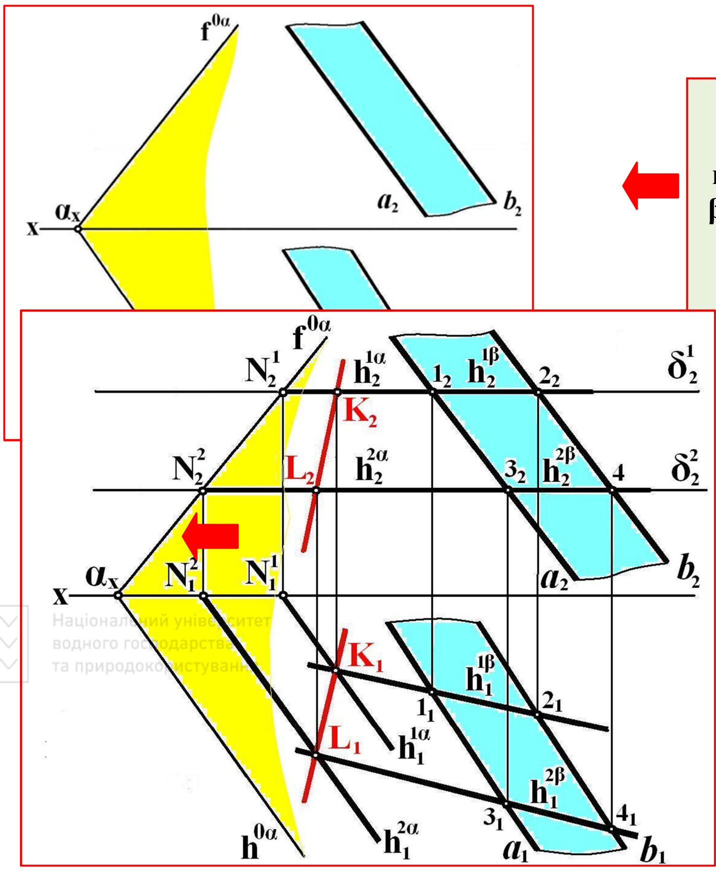
Початкова умова задачі.
Побудувати лінію перетину двох площин загального положення α і β, заданих слідами, у яких сліди не перетинаються в межах креслення.



Розв'язування задачі.
Незважаючи на те, що сліди площин α і β знаходяться в площинах $П_1$ і $П_2$, вони не перетинаються в межах креслення. Тому для визначення двох спільних точок заданих площин уводимо дві допоміжні січні горизонтальні площини рівня δ^1 і δ^2. За допомогою δ^1 знаходимо першу спільну точку К: $\delta^1 \cap \alpha = h^{1\alpha}$, $\delta^1 \cap \beta = h^{1\beta}$, $h^{1\alpha} \cap h^{1\beta}$ = К. За допомогою δ^2 знаходимо другу спільну точку L: $\delta^2 \cap \alpha = h^{2\alpha}$, $\delta^2 \cap \beta = h^{2\beta}$, $h^{2\alpha} \cap h^{2\beta}$ = L. Лінія КL є лінією перетину площин α і β.

Примітка: Якщо задані площини, що перетинаються, не містять прямих, які лежать в одній площині, для знаходження спільних точок площин можна вводити як допоміжні січні площини загального положення. Проте побудову їх ліній перетину із заданими площинами виконувати складніше, ніж при введенні січних площин проекціюючих або рівня. Тому доцільно з метою зменшення графічних побудов та спрощення розв'язування задачі використовувати як січні не площини загального положення, а проекціюючі площини або площини рівня.

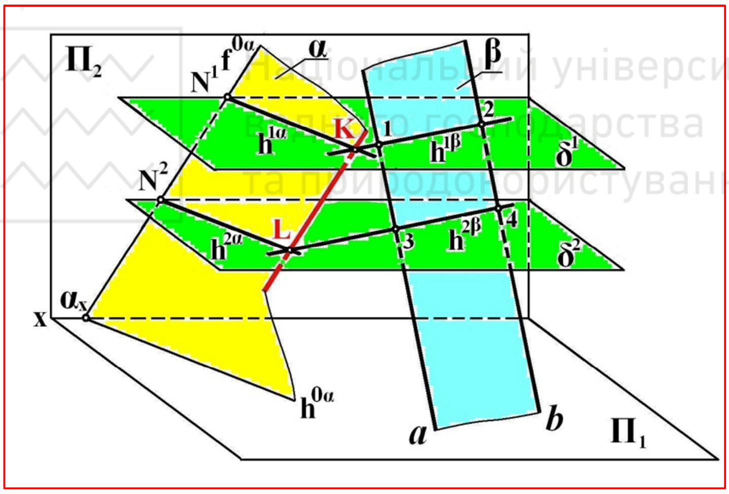
Приклад побудови лінії перетину площин загального положення, заданих визначниками, які не містять прямих, що лежать в одній площині



Початкова умова задачі.
Побуду…
площин…
β. Площ…
$f^{0\alpha}$…
парал…

Розв'язування задачі на наочному зображенні.

Визначники заданих площин α і β не містять прямих, що лежать в одній площині, тому для визначення двох спільних точок уводимо дві допоміжні січні площини δ^1 і δ^2. Для спрощення виконання побудов доцільно застосовувати для розв'язку даної задачі не площини загального положення, а площини рівня , наприклад, горизонтальні площини рівня, які перетинають задані площини по горизонтальних прямих. За допомогою δ^1 знаходимо першу спільну точку К: $\delta^1 \cap \alpha = h^{1\alpha}$, $\delta^1 \cap \beta = h^{1\beta}$, $h^{1\alpha} \cap h^{1\beta} = К$. За допомогою δ^2 знаходимо другу спільну точку L: $\delta^2 \cap \alpha = h^{2\alpha}$, $\delta^2 \cap \beta = h^{2\beta}$, $h^{2\alpha} \cap h^{2\beta} = L$. Лінія КL є лінією перетину площин α і β.



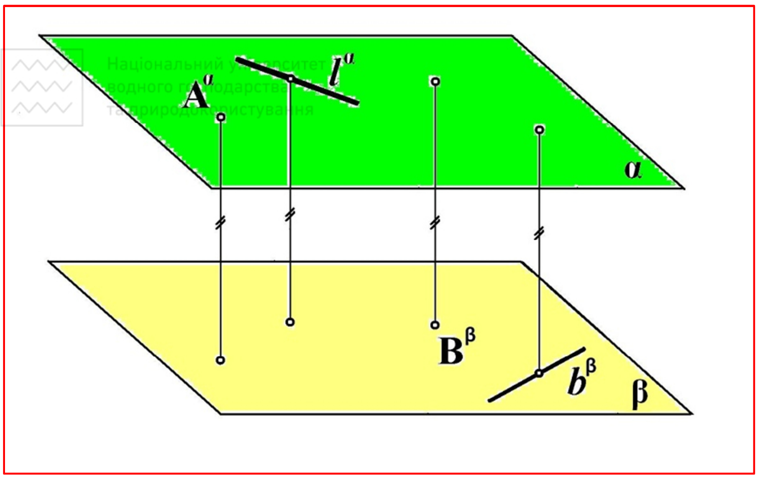
Розв'язування задачі на епюрі.

Розділ 5. Взаємне положення прямої та площини

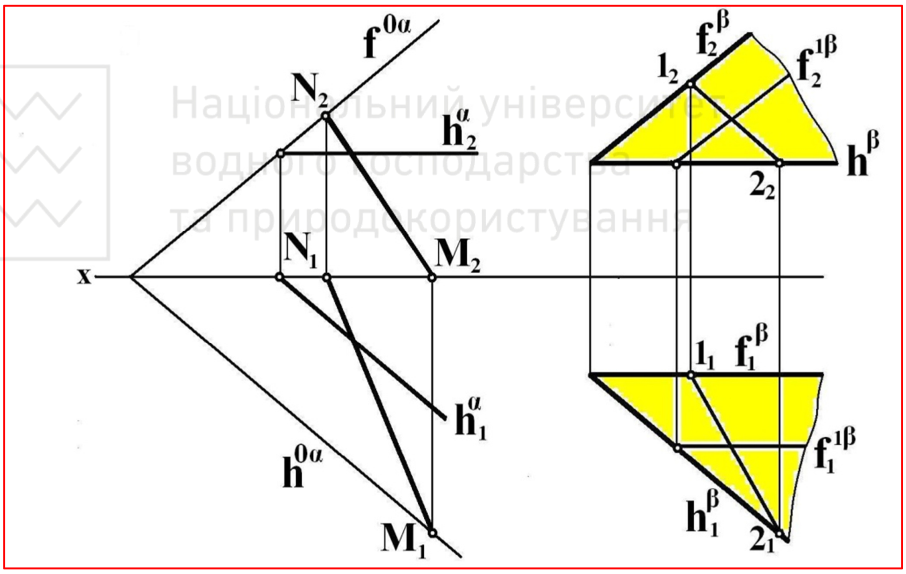
Розрізняють два взаємних положення прямої та площини: 1) пряма паралельна до площини та 2) пряма перетинає площину.

5.1. Пряма, що паралельна до площини

1 варіант. Якщо є дві паралельні площини, то будь-яка пряма, що лежить в одній площині, паралельна до другої площини.



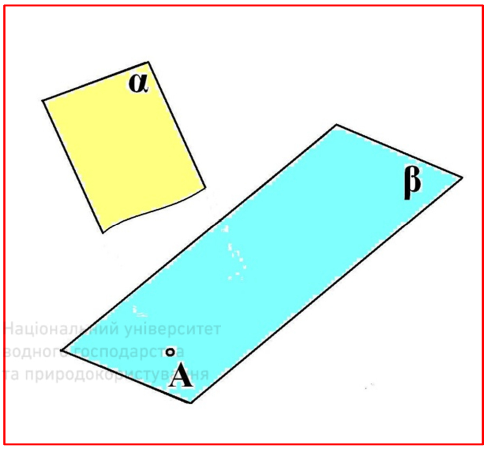
Кожну з двох паралельних площин можна розглядати як геометричне місце точок та прямих, рівновіддалених від іншої площини на відстань, що дорівнює довжині відрізка перпендикуляра, опущеного з точки однієї площини або точки на прямій цієї площини до перетину з іншою площиною. Точка A^α і пряма l^α площини α віддалені від площини β на таку саму відстань, на яку віддалені точка B^β і пряма $в^\beta$ площини β від площини α.



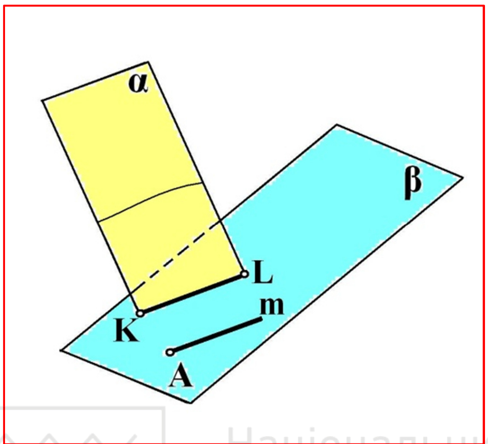
Площина α, яку задано слідами $h^{0\alpha}$ і $f^{0\alpha}$, паралельна до площини β, яку задано лініями рівня h^β і f^β.
Прямі MN і h^α, що знаходяться в площині α, паралельні до площини β.
Прямі 12 і $f^{1\beta}$ площини β паралельні до площини α.

2 варіант. Пряма паралельна до площини, якщо в цій площині існує пряма, яка паралельна до заданої прямої (пряма паралельна до площини, якщо вона паралельна до будь-якої прямої цієї площини).

Задача



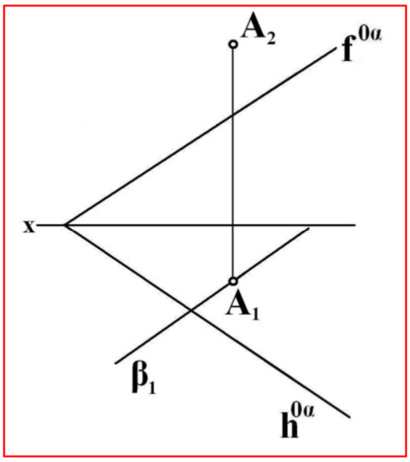
Початкова умова задачі. **Через точку А, яка знаходиться в площині β, провести пряму, паралельну площині α і яка б знаходилася в площині β.**



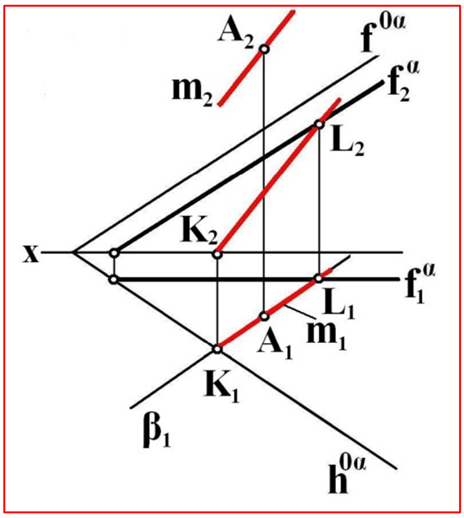
Розв'язування задачі на наочному зображенні.
Шукана пряма повинна задовольняти дві умови: знаходитися в площині β і бути паралельною до площини α.
Пряма належить площині, якщо вона проходить через точку площини і паралельна до прямої площини β.
Якщо знайти лінію перетину KL площин α і β, то шукану пряму m можна провести через точку А паралельно до KL.
Висновок. Пряма m лежить в площині β, оскільки KL знаходиться в площині β, і пряма m паралельна до площини α, оскільки KL також належить і площині α.

Нижче аналогічну задачу розв'язано на епюрі.

Задача



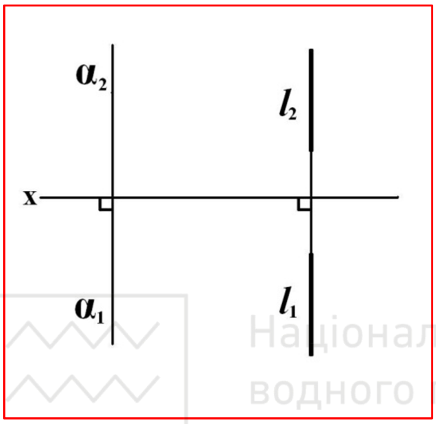
Початкова умова задачі. Через точку А, яка знаходиться в горизонтально-проекціюючій площині β, провести пряму m, яка була би паралельною до площини α і знаходилася в площині β.



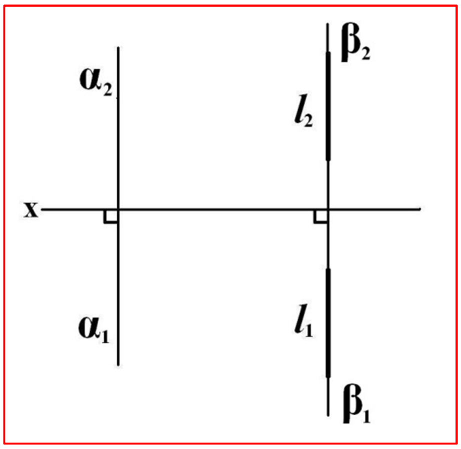
Розв'язування задачі на епюрі:
1. Визначаємо лінію KL перетину площин α і β (точку К знайдено в перетині β_1 і $h^{0\alpha}$, а точку L – за допомогою фронталі f^{α} площини α).
2. Через точку А проводимо пряму m паралельно до KL ($m_1 \equiv K_1L_1 \equiv \beta_1$, оскільки площина β є горизонтально-проекціюючою площиною, а β_1 є її слідом-проекцією, на який проекціюються горизонтальні проекції точок та прямих, що лежать в площині β).

3 варіант. Пряма паралельна до площини, якщо вона лежить в площині, яка паралельна до заданої площини (частковий випадок 1 варіанта паралельності прямої та площини).

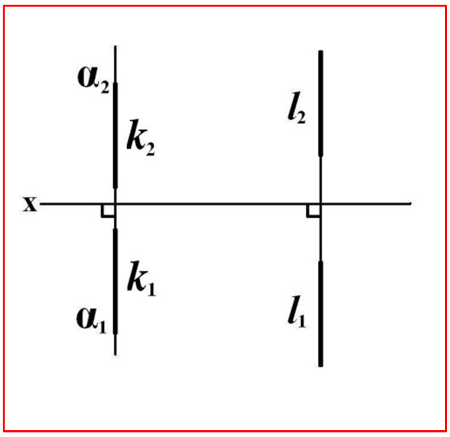
Задача



Початкова умова задачі.
Визначити, чи паралельна пряма *l* до заданої площини α.



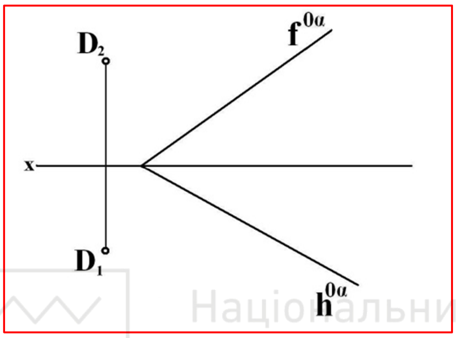
Розв'язування задачі:
<u>1 спосіб.</u> Через пряму *l* проводимо площину β, паралельну до заданої площини α ($\beta_1 // \alpha_1$, $\beta_2 // \alpha_2$). Оскільки β // α, а пряма *l* належить β, то звідси випливає, що *l* // α.



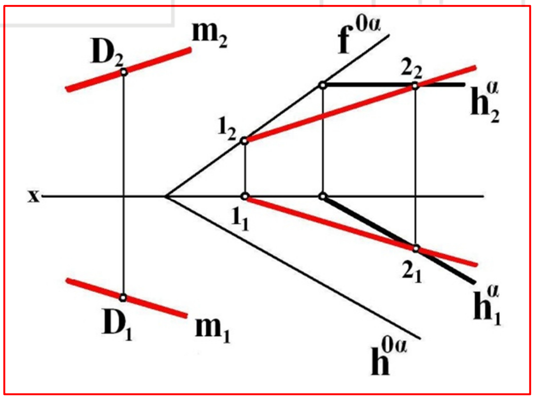
Розв’язування задачі:
2спосіб. В площині α можна провести пряму *k* // *l* , дотримуючись при цьому вимог, зазначених в 2.6 (3 спосіб). Оскільки *l* // *k*, а пряма *k* лежить в площині α, то звідси випливає, що *l* // α.

Приклади проведення через точку простору прямої, паралельної до заданої площини.

Задача №1



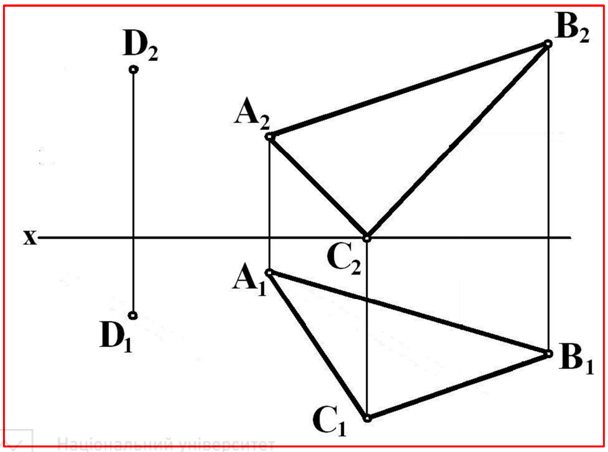
Початкова умова задачі.
Через точку D провести пряму загального положення m, паралельну до площини загального положення α, що задана слідами $h^{0\alpha}$ і $f^{0\alpha}$.



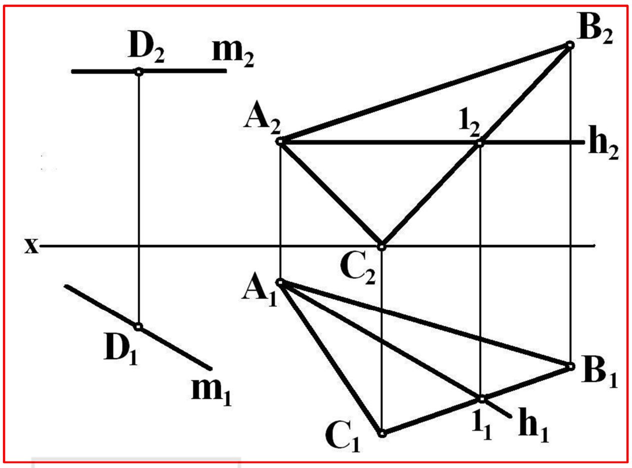
Розв’язування задачі:
1. В площині α проведено пряму 12 загального положення (точка 1 знаходиться на $f^{0\alpha}$, а точку 2 знайдено за допомогою h^{α}).
2. Через точку D проводимо пряму m паралельно до 12.

Ця задача має безліч рішень, оскільки можна провести через точку D безліч прямих загального положення, паралельних до заданої площини.

Задача №2

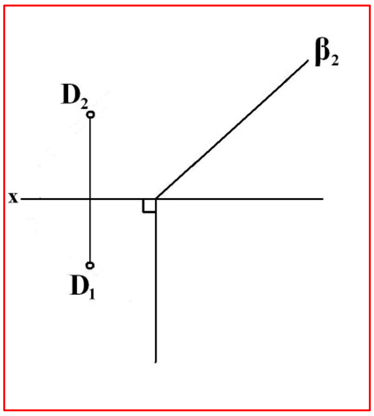


Початкова умова задачі.
Через точку D провести горизонтальну пряму m, паралельну до площини загального положення, яку задано трикутником ABC.

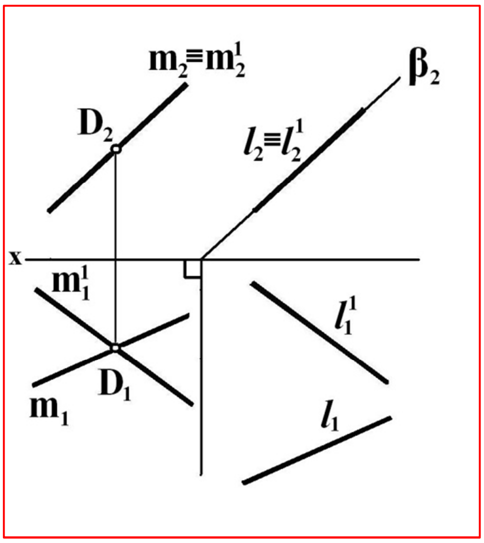


Розв'язування задачі:
1. В площині трикутника ABC проводимо горизонтальну пряму h.
2. Через точку D проводимо пряму m паралельно до h. Пряма m також буде горизонтальною прямою.
Ця задача, на відміну від попередньої, має єдине рішення, оскільки на проведення прямої m накладено додаткове обмеження – вона повинна бути паралельною не тільки до площини трикутника ABC, а і паралельною до площини проекцій Π_1.

Задача №3



Початкова умова задачі.
Через точку D провести пряму загального положення m, паралельну до фронтально-проекціюючої площини β.



Розв’язування задачі:

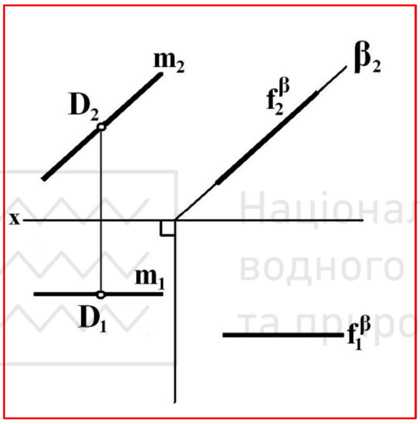
1. В площині β проводимо пряму загального положення *l* (пряма *l* належить площині β, оскільки $l_2 \equiv \beta_2$).

2. Через точку D проводимо пряму m паралельно до *l*.

Ця задача, як і задача № 1, має безліч рішень, оскільки можна провести через точку D безліч прямих загального положення, паралельних до заданої площини (для підтвердження цього, крім прямої *l*, в площині β проведено також пряму загального положення l^1, а через точку D – пряму m^1 паралельно до l^1).

Пряма буде паралельною до проекціюючої площини або до площини рівня, якщо відповідна її проекція буде паралельною до сліду-проекції цих площин.

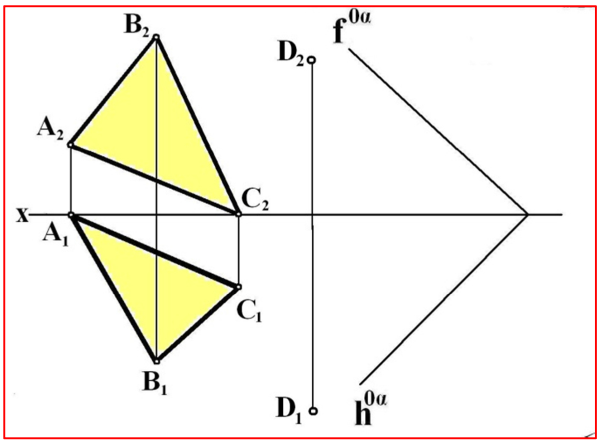
Задача №4



Через точку D проведено пряму m паралельно до фронтально-проекціюючої площини β і до площини проекцій Π_2 (пряма m паралельна до фронтальної прямої f^β площини β).

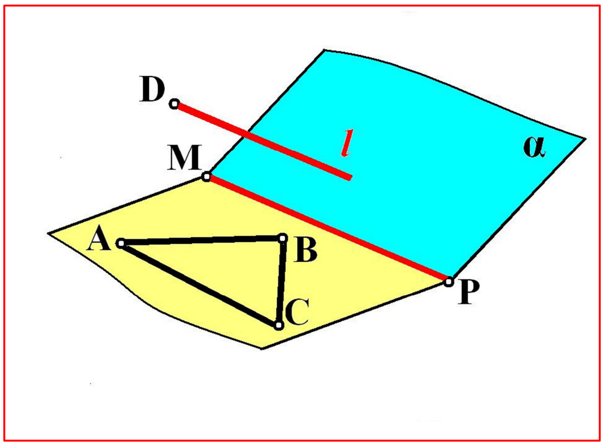
Ця задача, як і задача №2, має єдине рішення, оскільки на проведення прямої m накладено додаткове обмеження – вона повинна бути паралельною не тільки до площини β, а і паралельною до площини проекцій Π_2.

Задача №5

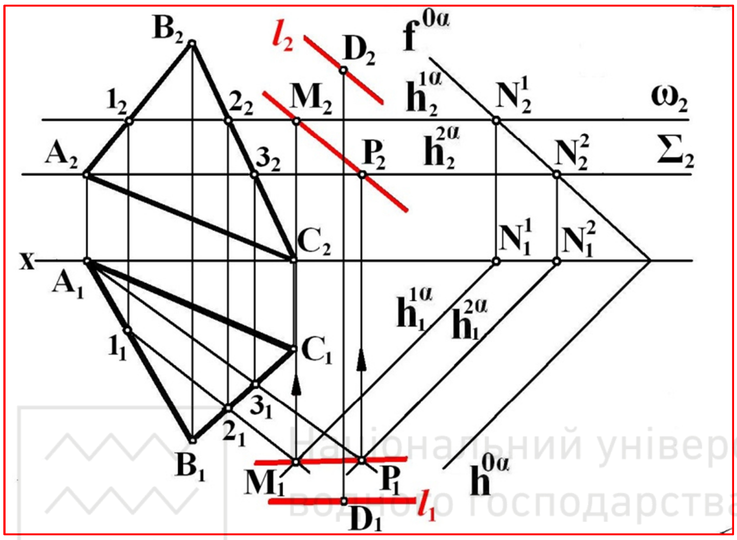


Початкова умова задачі.

Через точку D провести пряму *l* паралельно до площини трикутника ABC і площини α, заданої слідами $h^{0\alpha}$ і $f^{0\alpha}$.



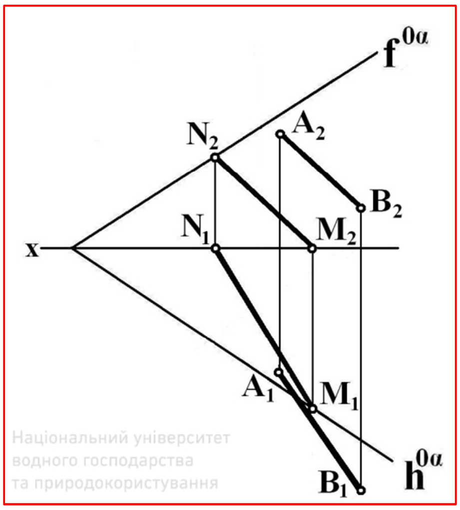
Розв'язування задачі на наочному зображенні.
Пряма *l* повинна задовольняти дві умови: бути паралельної до площини трикутника АВС і до площини α.
Пряма паралельна до площини, якщо вона паралельна до прямої цієї площини.
Визначити по одній прямій в кожній площині так, щоб вони були б паралельними між собою, складно. Якщо ж визначити лінію перетину МР цих площин, то таким чином визначається пряма, що належить двом заданим площинам водночас, а, отже, пряма *l*, яку проведено через точку D простору паралельно до МР, буде паралельною до двом заданим площинам водночас.
Задача має одне рішення.



Розв'язування задачі на епюрі.
Для визначення лінії перетину МР заданих площин уводимо дві допоміжні горизонтальні площини рівня ω і Σ (на епюрі вони задані своїми слідами-проекціями ω_2 і Σ_2, паралельно розміщеними до осі х).
За допомогою площини ω визначено спільну точку М двох площин, а за допомогою площини Σ – точку Р.
Пряма *l*, яку проведено через точку D паралельно до МР, є шуканою, паралельною до двох заданих площин.

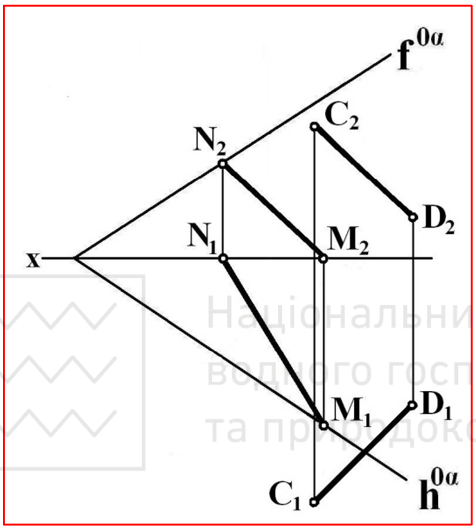
Для перевірки паралельності на епюрі прямої до площини в останній потрібно провести пряму, одна з проекцій якої повинна бути паралельною до однієї з проекцій заданої прямої. Якщо друга проекція прямої площини виявиться паралельною до однойменної проекції заданої прямої, то така пряма паралельна до заданої площини, якщо ні, то задана пряма непаралельна до площини.

Задача №1



З метою перевірки паралельності заданої прямої AB до площини α в останній проведено пряму MN таким чином, що проекцію M_2N_2 розміщено паралельно до A_2B_2. Оскільки виявилося, що і M_1N_1 // A_1B_1, то AB // MN і задана пряма AB паралельна до заданої площини α.

Задача №2



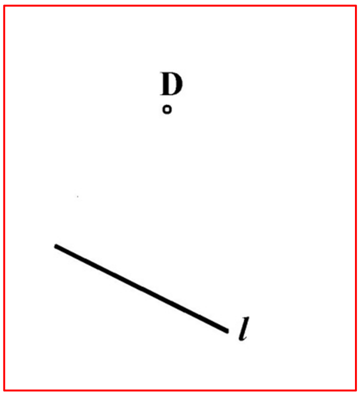
В цій задачі задана пряма CD виявилася непаралельною до площини α, оскільки M_1N_1 непаралельна до A_1B_1.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

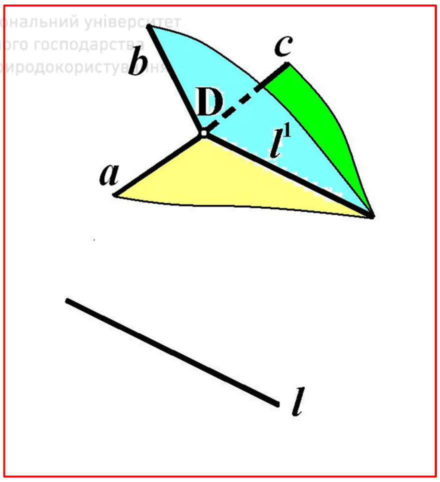
5.2. Задачі на проведення через точку простору площини, паралельної до заданої прямої

Площина паралельна до заданої прямої, якщо в площині існує пряма, яка паралельна до заданої прямої.

Задача №1



Початкова умова задачі.
Через точку D провести площину, паралельну до заданої прямої *l*.



Розв'язування задачі на наочному зображенні:

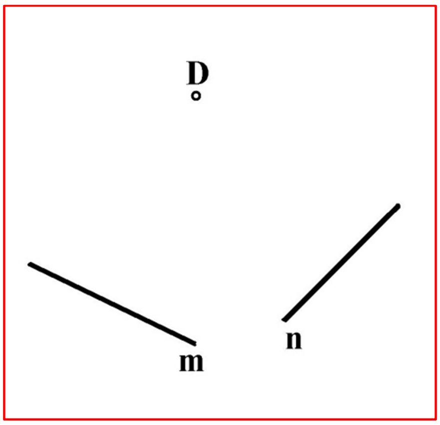
1.Через точку D проводимо пряму l^1 паралельно до заданої прямої *l*.

2. Щоб отримати шукану площину, через точку D проводимо в довільному напрямку пряму *a*.

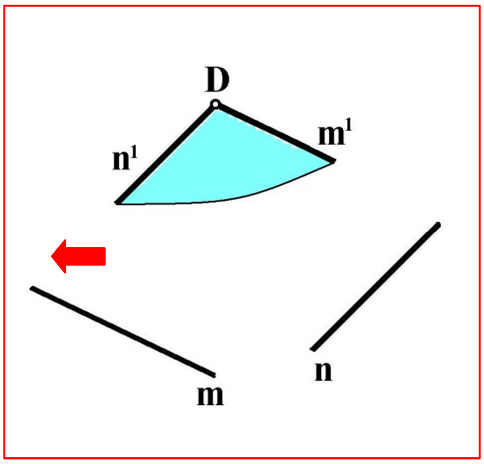
Побудована площина, яку задано пересічними прямими l^1 і *a*, паралельна до прямої *l*.

Задача має безліч рішень, оскільки пряму а проведено в довільному напрямку. Так, площини, задані пересічними прямими l^1, b і l^1, c, також паралельні до прямої l. Паралельними до прямої l будуть всі площини, які можуть обертатися навколо прямої l^1.

Задача №2

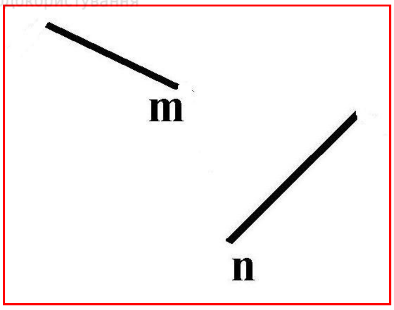


Початкова умова задачі.
Через точку D провести площину, паралельну до заданих прямих m і n.

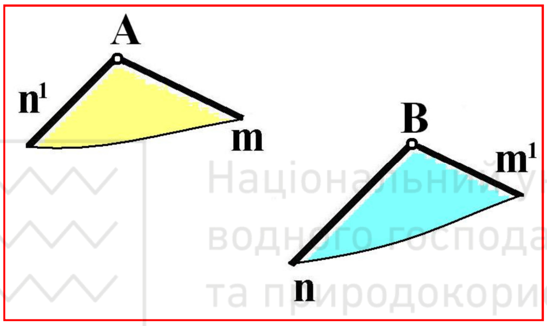


Розв’язування задачі на наочному зображенні:
1.Через точку D проводимо пряму m^1 // m та n^1 // n.
2. Отримана площина, що задана пересічними прямими m^1 і n^1, буде паралельною до заданих прямих m і n. Задача має єдине рішення, оскільки шукана площина повинна бути паралельною не до однієї, а до двох площин проекцій.

Задача №3



Початкова умова задачі.
Через мимобіжні прямі m і n провести площини, паралельні одна до одної.



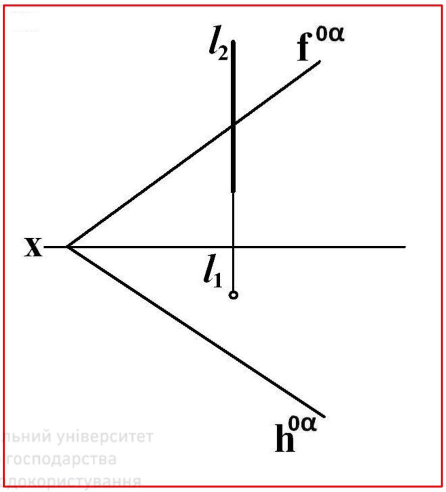
Розв’язування задачі на наочному зображенні:
1.Через точку А прямої m проводимо пряму n^1 // n.
2. Через точку В прямої n проводимо пряму m^1 // m.
Отримані площини, що задані пересічними прямими n^1, m і n, m^1, паралельні між собою. вони є єдиними площинами, які паралельні до заданих мимобіжних прямих m і n.
Задача має єдине рішення.

5.3. Пряма перетинає площину

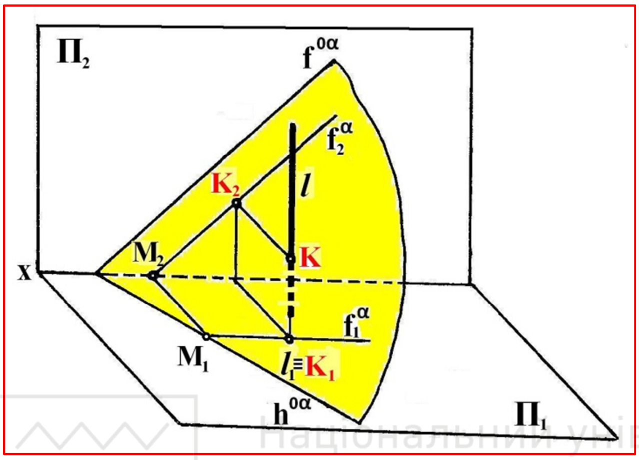
5.3.1. Перетин проекціюючої прямої з площиною загального положення

При такому перетині одна з проекцій точки перетину збігається з проекцією прямої на площину проекцій, до якої проекціююча пряма перпендикулярна (ця проекція проекціюючої прямої є точкою).

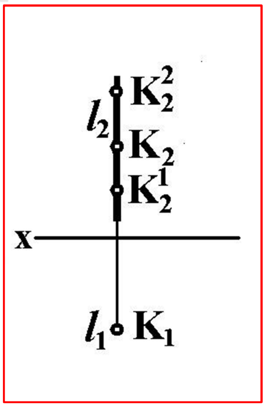
Задача № 1



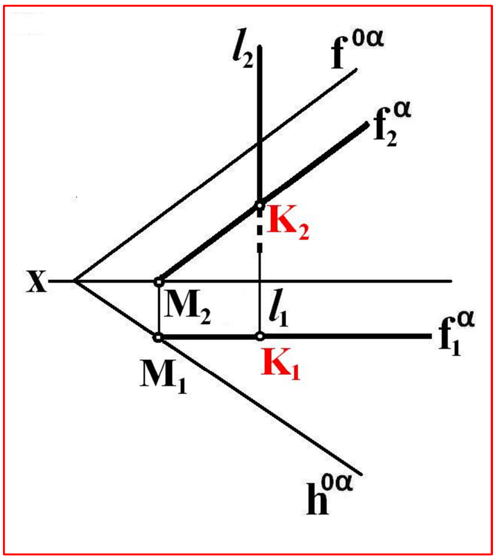
Початкова умова задачі.
Побудувати точку К перетину горизонтально-проекціюючої прямої l з площиною загального положення α.



Розв'язування задачі на наочному зображенні:
Оскільки пряма l перпендикулярна до площини $П_1$, то будь-яка точка, що лежить на цій прямій, в тому числі і точка К, проекціюється на $П_1$ в l_1 (див. пояснення), тобто, якщо $K_1 \equiv l_1$, то точка К належить прямій l. Точка К повинна належити і площині α. Оскільки відома K_1, то фронтальну проекцію K_2 точки К можна знайти за допомогою фронтальної прямої f^{α} площини α.
Отже, $K = l \cap \alpha$, оскільки $K \in l$ і $K \in \alpha$.

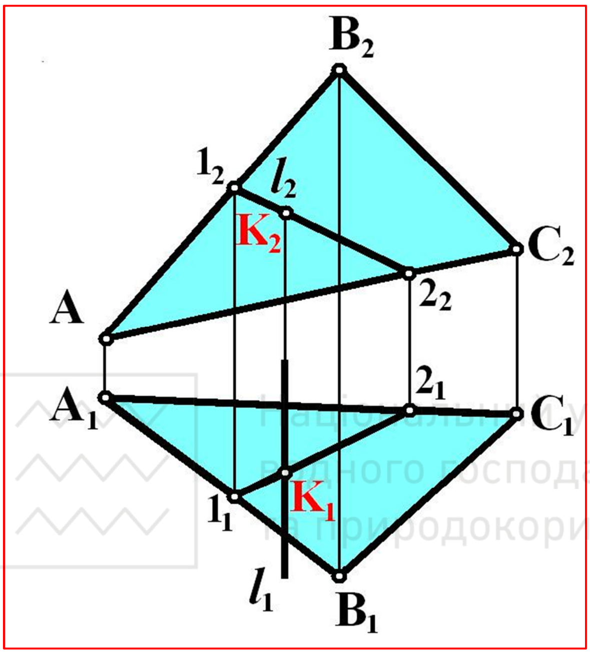


Пояснення до роз'язку.
Незалежно від розміщення на прямій l точок, наприклад К, K^1, K^2, їх горизонтальні проекції збігаються з l_1 ($K_1 \equiv l_1$).



Розв'язування задачі на епюрі.

Задача № 2



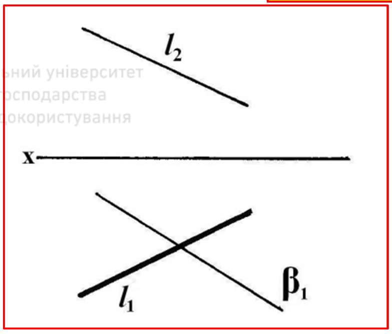
В цій задачі побудовано точку К перетину фронтально-проекціюючої прямої *l* з площиною загального положення, яку задано трикутником АВС:
1. $K_2 \equiv l_2$.
2. K_1 знайдено за допомогою прямої 12 трикутника АВС.

Одна проекція точки перетину проекціюючої прямої з площиною загального положення визначається за умови належності точки прямій, а друга проекція цієї точки – за умови її належності площині.

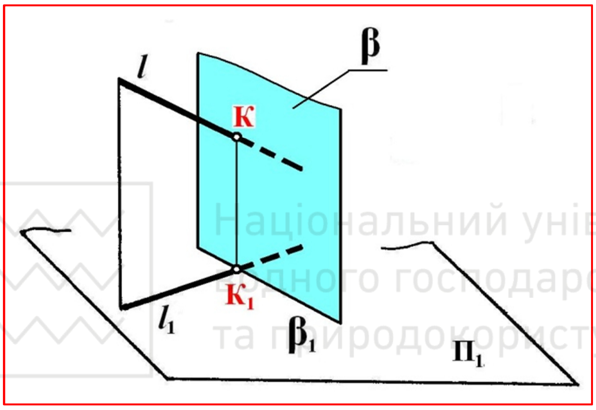
5.3.2. Перетин прямої загального положення з проекціюючою площиною та площиною рівня

Одна з проекцій точки перетину знаходиться на сліді-проекції цих площин, конкретно в тому місці сліду-проекції, де він перетинається з відповідною проекцією прямої, оскільки точка перетину – це точка, яка водночас належить і площині, і прямій.
Другу проекцію точки перетину визначають за допомогою лінії проекційного зв’язку за умови, що ця точка належить прямій.

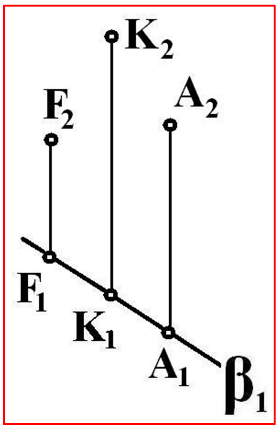
Задача № 1



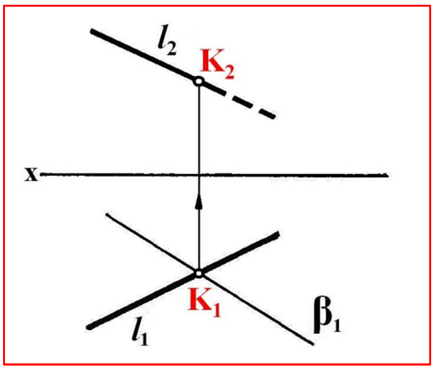
Початкова умова задачі.
Побудувати точку К перетину прямої загального положення прямої *l* з горизонтально-проекціюючою площиною β.



Розв’язування задачі на наочному зображенні:
Горизонтальну проекцію $К_1$ точки К перетину прямої *l* з площиною β знаходимо в точці перетину l_1 з β_1 ($К_1 = l_1 \cap \beta_1$). Якщо $К_1 \equiv \beta_1$, то точка К належить площині β незалежно від того, де знаходиться фронтальна проекція цієї точки (див. пояснення). Фронтальну проекцію $К_2$ точки К знаходимо за умови, що вона належить прямій *l*.

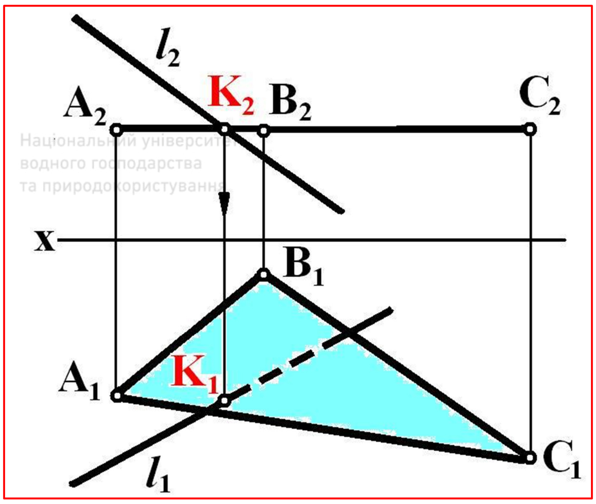


Пояснення до роз’язку.
Точки К, А і F належать горизонтально-проекціюючій площині β, оскільки їх горизонтальні проекції $К_1$, $А_1$ і F_1 лежать на сліді-проекції β_1.



Розв'язування задачі на епюрі:
1. $K_1 = l_1 \cap \beta_1$.
2. K_2 визначаємо за допомогою лінії проекційного зв'язку за умови, що точка належить прямій *l*.

Задача № 2



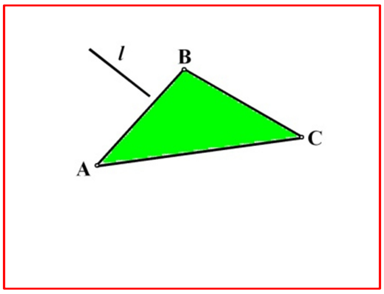
В цій задачі побудовано точку К перетину прямої загального положення *l* з горизонтальною площиною рівня, яку задано трикутником АВС:
1. $K_2 = l_2 \cap A_2B_2C_2$, де $A_2B_2C_2$ – слід-проекція площини рівня ($A_2B_2C_2$ // x). Якщо $K_2 \equiv A_2B_2C_2$, то точка К належить заданій площині.
2. K_1 знайдено за допомогою лінії проекційного зв'язку за умови, що точка К належить прямій *l*.

Одна проекція точки перетину прямої загального положення з проекціюючою площиною та площиною рівня знаходиться на сліді-проекції цих площин, тобто за умови належності точки перетину площині. Другу проекцію точки перетину визначається за умови її належності прямій.

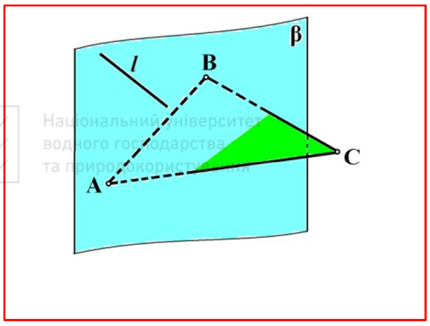
5.3.3. Перетин прямої загального положення з площиною загального положення

В 5.2.1, 5.2.2 розглянуто приклади перетину прямої з площиною, коли одна з них є проекціюючою. В цих прикладах одну проекцію точки перетину визначено без додаткових графічних побудов і уведення нових геометричних фігур.
При перетині прямої з площиною, коли обидві геометричні фігури займають загальне положення, визначити одну з проекцій точки перетину без додаткових графічних побудов не є можливим. В цьому випадку для визначення точки перетину вводять допоміжну січну площину, яку проводять через задану пряму загального положення.

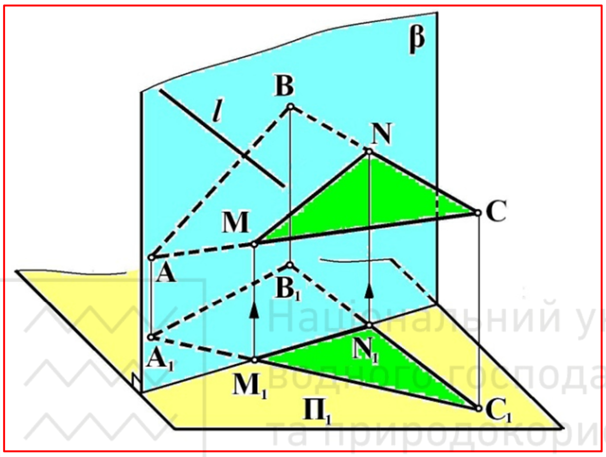
ПОСЛІДОВНІСТЬ (АЛГОРИТМ) ВИЗНАЧЕННЯ ТОЧКИ ПЕРЕТИНУ ПРЯМОЇ ЗАГАЛЬНОГО ПОЛОЖЕННЯ З ПЛОЩИНОЮ ЗАГАЛЬНОГО ПОЛОЖЕННЯ (на наочному зображенні):



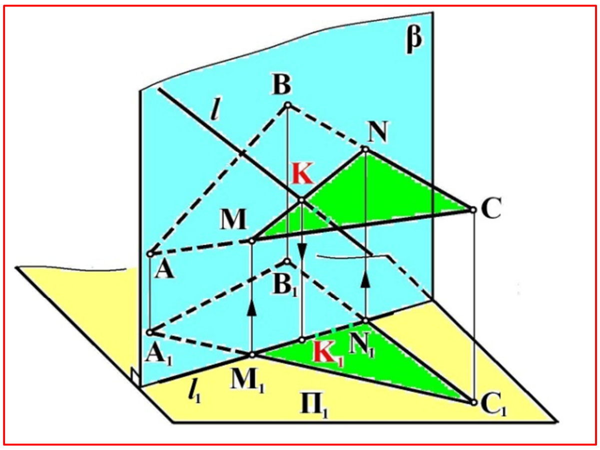
Початкова умова задачі.
Побудувати точку К перетину прямої загального положення *l* з площиною загального положення, яку задано трикутником АВС.



1 дія:
Через пряму *l* проводимо допоміжну січну площину β.

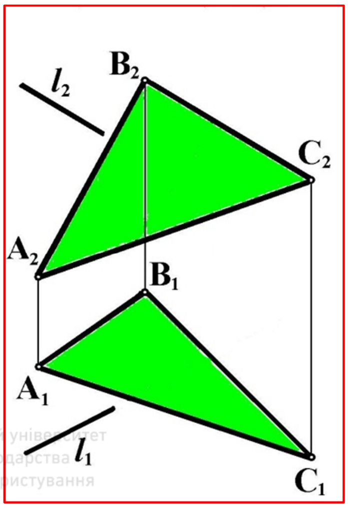


2 дія:
Будуємо лінію перетину MN допоміжної площини β із площиною, заданою трикутником АВС.

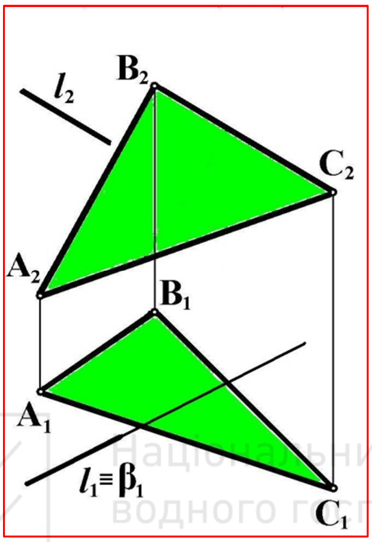


3 дія:
Знаходимо точку К перетину заданої прямої *l* з побудованою лінією перетину MN, яка і буде шуканою точкою перетину прямої загального положення *l* із площиною загального положення, заданою трикутником АВС (К = *l*∩MN = *l* ∩ трикутник АВС).
Примітка. Пряма l і лінія MN лежать в одній площині β, тому вони перетинаються в точці К.

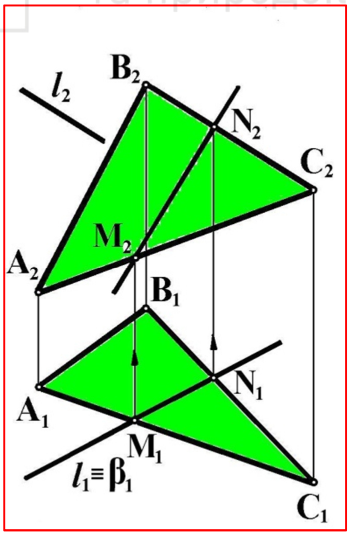
ПОСЛІДОВНІСТЬ (АЛГОРИТМ) ВИЗНАЧЕННЯ ТОЧКИ ПЕРЕТИНУ ПРЯМОЇ ЗАГАЛЬНОГО ПОЛОЖЕННЯ З ПЛОЩИНОЮ ЗАГАЛЬНОГО ПОЛОЖЕННЯ (на епюрі):



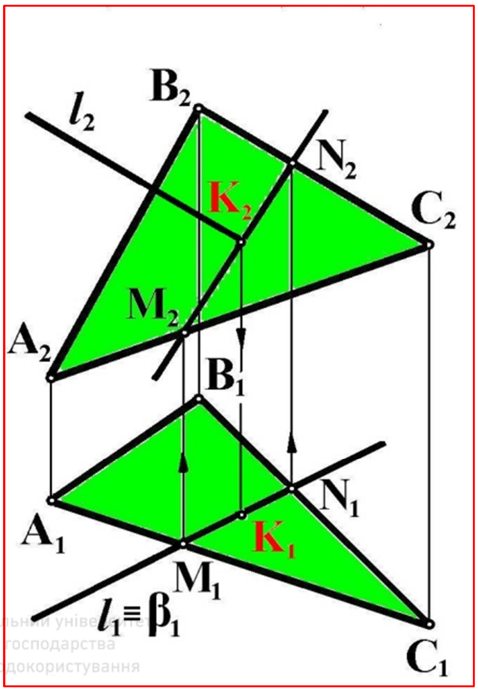
Початкова умова задачі.
Побудувати точку К перетину прямої загального положення *l* з площиною загального положення, яку задано трикутником АВС.



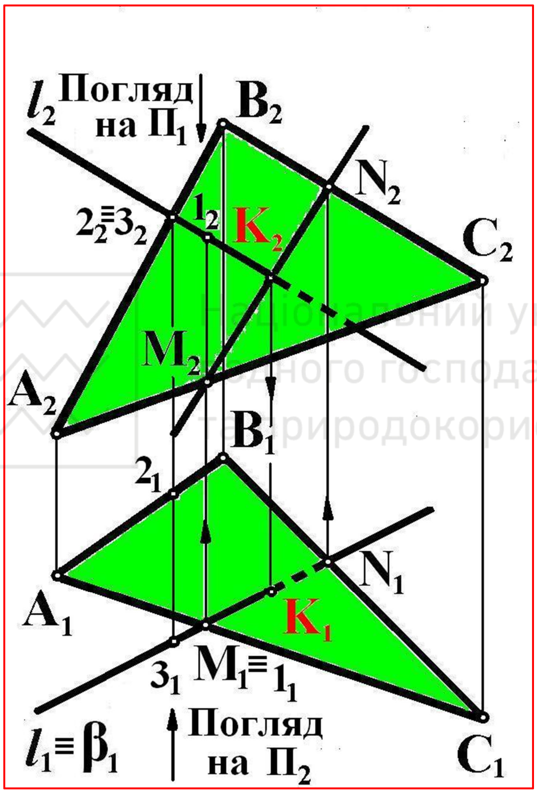
1 дія:
Через пряму *l* проводимо допоміжну січну площину β:
$l_1 \equiv \beta_1 \Rightarrow l \in \beta$.
Січна площина β є горизонтально-проекціюючою.
Вибір її обумовлено тим, що лінія її перетину із заданою площиною будується простіше, ніж при проведенні через пряму l площини загального положення.
Тому під час розв'язування таких задач через пряму проводять, як правило, не площину загального положення, а проекціюючу.



2 дія:
Будуємо лінію перетину MN допоміжної горизонтально-проекціюючої площини β із заданою трикутником АВС: $M_1N_1 \equiv \beta_1$, а M_2N_2 знайдено за допомогою ліній проекційного зв'язку за умови, що MN належить площині трикутника АВС.

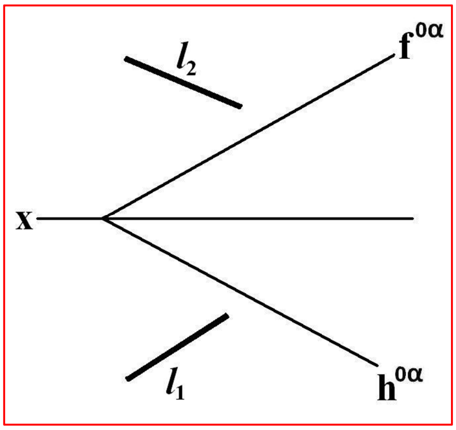


3 дія:
Знаходимо точку К перетину заданої прямої *l* з побудованою лінією перетину MN, яка і буде шуканою точкою перетину прямої загального положення *l* із площиною загального положення, заданою трикутником АВС (К = *l* ∩ MN = *l* ∩ трикутник АВС).
Примітка. Пряма l і лінія MN лежать в одній площині β, тому вони перетинаються в точці К.

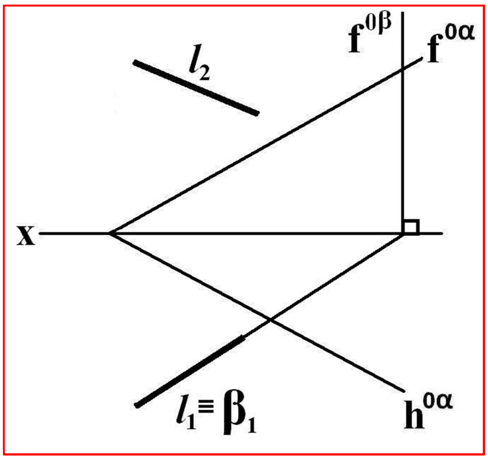


Визначення видимості прямої *l* відносно трикутника АВС:
1. Видимість на горизонтальній проекції визначено за допомогою конкуруючих точок М і 1, горизонтальні проекції яких M_1 і 1_1 збігаються та знаходяться в точці перетину l_1 з A_1C_1 горизонтальної проекції $A_1B_1C_1$ (на стику горизонтальних проекцій прямої та площини трикутника).
$M \in AC$, $1 \in l$, видимою на $П_1$ буде точка 1.
2. 1. Видимість на фронтальній проекції визначено за допомогою конкуруючих точок 2 і 3, фронтальні проекції яких 2_2 і 3_2 збігаються та знаходяться в точці перетину l_2 з A_2B_2 фронтальної проекції $A_2B_2C_2$ (на стику фронтальних проекцій прямої та площини трикутника).
$2 \in AB$, $3 \in l$, видимою на $П_2$ буде точка 3.

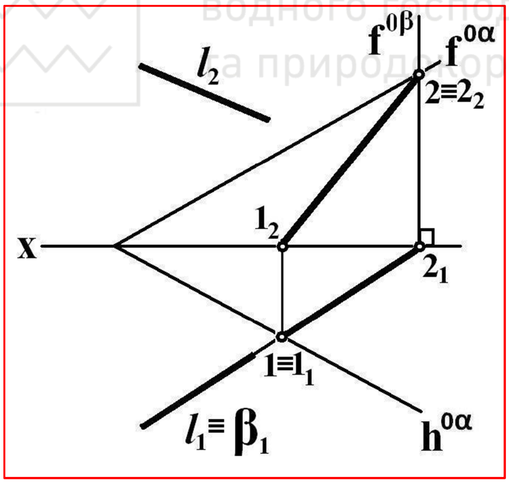
Задача № 1



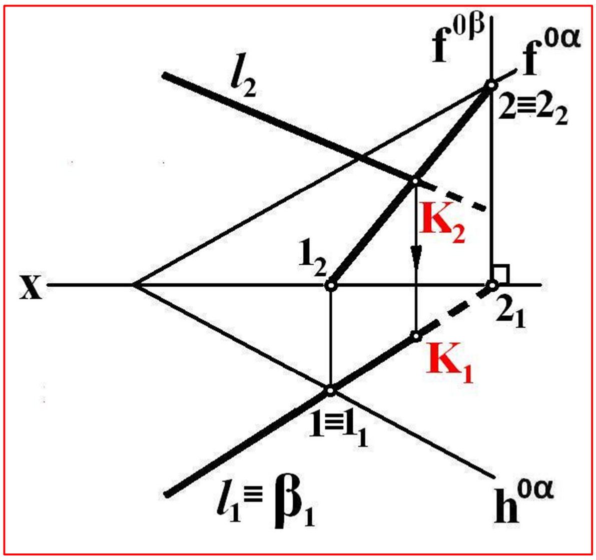
Початкова умова задачі.
Побудувати точку К перетину прямої загального положення *l* з площиною загального положення α, яку задано слідами.



1 дія:
Через пряму *l* проводимо допоміжну горизонтально-проекціюючу січну площину β: $l_1 \equiv \beta_1 \Rightarrow l \in \beta$.

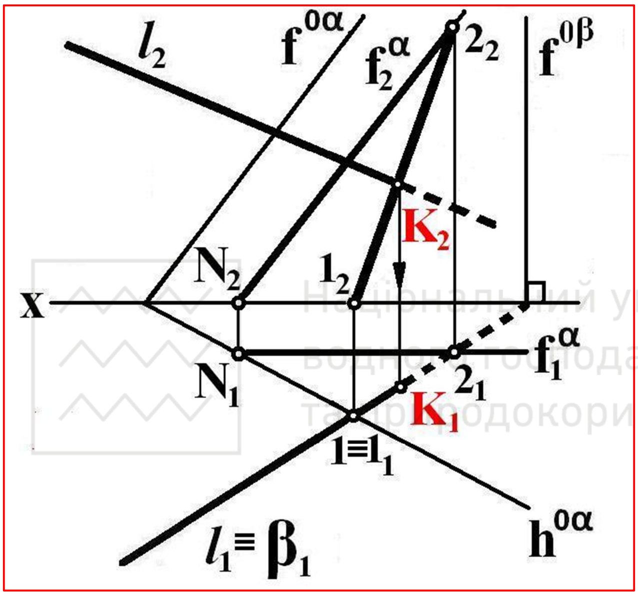


2 дія:
Будуємо лінію перетину 12 допоміжної площини β із заданою площиною α: $1_1 2_1 \equiv \beta_1$; $1_2 2_2$ знайдено за умови належності 12 площині α.



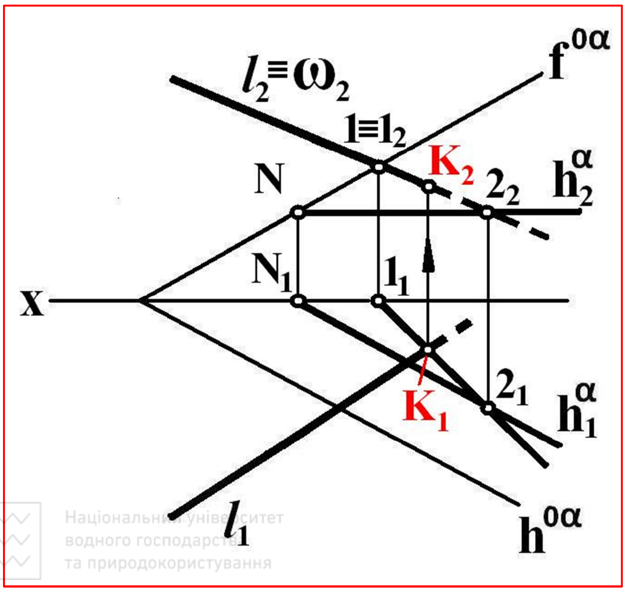
3 дія:
Знаходимо точку К перетину заданої прямої l з побудованою лінією перетину 12, яка і буде шуканою точкою перетину прямої загального положення l із площиною загального положення α (К = $l \cap 12 = l \cap \alpha$).
Примітка. Пряма l і лінія 12 лежать в одній площині β, тому вони перетинаються в точці К.

Задача № 2



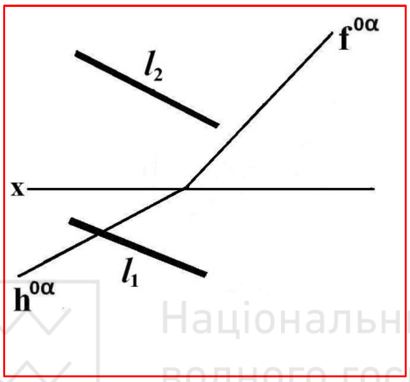
В цій задачі побудовано точку К перетину прямої загального положення l з площиною загального положення α.
1 дія: Через пряму l проводимо допоміжну горизонтально-проекціюючу січну площину β:
$l_1 \equiv \beta_1 \Rightarrow l \in \beta$.
2 дія: Будуємо лінію перетину 12 допоміжної площини β із заданою площиною α: $1_1 2_1 \equiv \beta_1$; $1_2 2_2$ знайдено за умови, що 12 належить площині α.
Примітка. На відміну від попередньої задачі фронтальні сліди $f^{0\alpha}$ і $f^{0\beta}$ не перетинаються в межах креслення, тому точку 2 знайдено за допомогою фронталі f^{α} площини α.
3 дія: Знаходимо точку К перетину заданої прямої l з побудованою лінією перетину 12, яка і буде шуканою точкою перетину прямої загального положення l із площиною загального положення α: К = $l \cap 12 = l \cap \alpha$.

Задача № 3

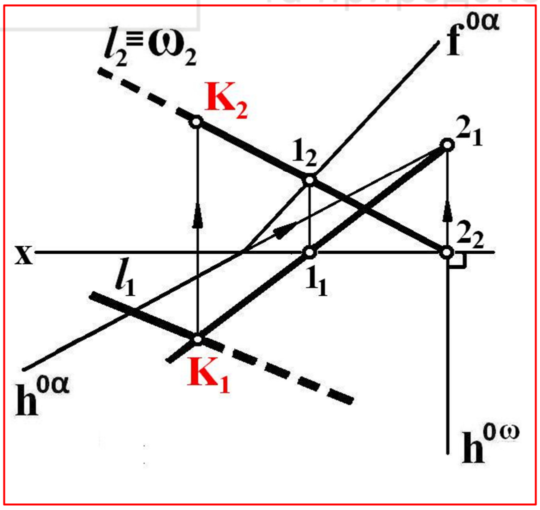


В цій задачі побудовано точку К перетину прямої загального положення *l* з площиною загального положення α.
На відміну від попередньої задачі як допоміжну взяли фронтально-проекціюючу площину ω.

Задача № 4



Початкова умова задачі.
Побудувати точку К перетину прямої загального положення *l* з площиною загального положення α, яку задано слідами.

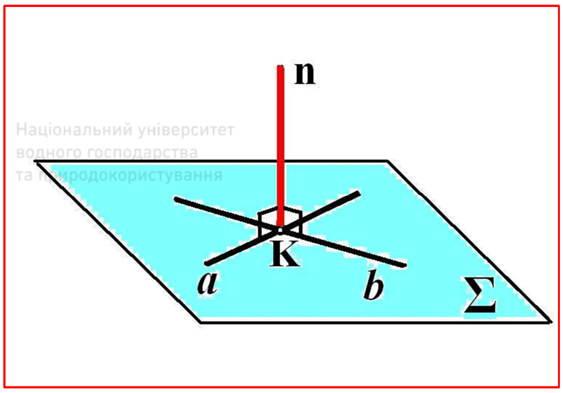


Розв'язування задачі на епюрі.
1 дія: Через пряму *l* проводимо допоміжну фронтально-проекціюючу січну площину ω.
2 дія: Будуємо лінію перетину 12 площин α і β (точка 2 знаходиться не в 1 октанті, а в другому).
3 дія: Знаходимо точку К: $K = l \cap 12 = l \cap \alpha$, де $K_1 = l_1 \cap 1_1 2_1$, а K_2 визначено за допомого лінії проекційного зв'язку за умови, що точка К належить прямій *l*.

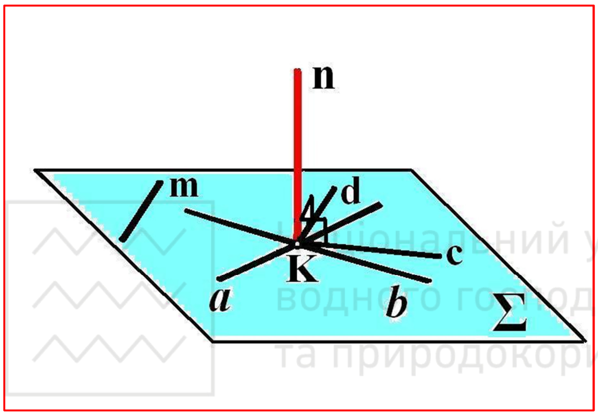
Розділ 6. Перпендикулярність прямої та площини, двох площин

6.1. Перпендикулярність прямої та площини

Ознака перпендикулярності прямої до площини: ***пряма перпендикулярна до площини, якщо вона перпендикулярна до двох прямих, що перетинаються, цієї площини.***



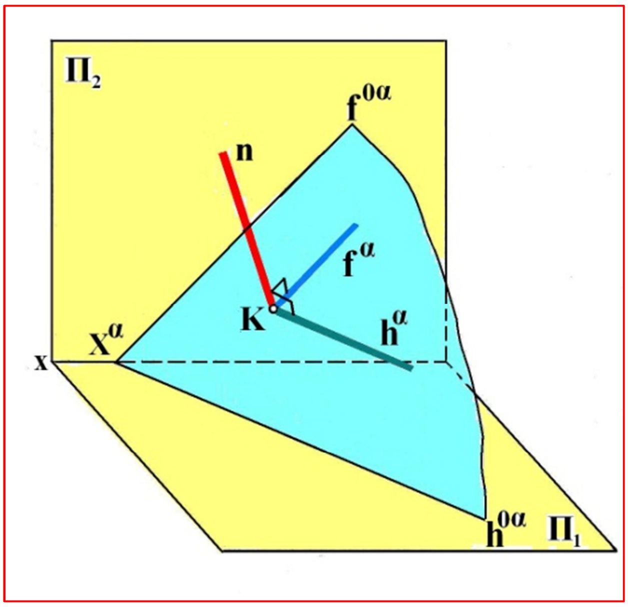
Точка К – точка перетину прямої n з площиною Σ. В цій точці перетинаються прямі *a* і *b* площини Σ.
Пряма n перпендикулярна до площини Σ, оскільки вона перпендикулярна до двох прямих *a* і *b*, що перетинаються, цієї площини.



Оскільки n ⊥ Σ, то, можна сказати, що задана площина Σ перпендикулярна до прямої n. Це означає, що довільна пряма, наприклад *c*, площини Σ, що проходить через точку К, буде перпендикулярною до прямої n. Пряма m, яка не проходить через точку К, також буде перпендикулярною до прямої n, незважаючи на те, що m і n є мимобіжними прямими, оскільки кут між мимобіжними прямими дорівнює куту між паралельними до них прямими, що

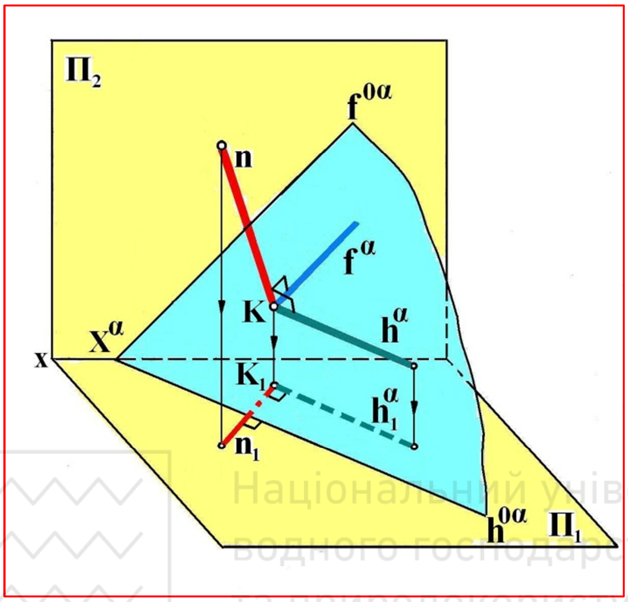
Площину Σ можна розглядати як геометричне місце (множину) прямих, перпендикулярних до прямої n.

При проведенні на епюрі прямої, перпендикулярної до площини, в останній вибирають не будь-які дві прямі, що перетинаються, а прямі рівня. Це обумовлено тим, що за правилом проекціювання прямого кута (див. 2.7), прямий кут, утворений двома прямими, одна з яких є прямою рівня, проекціюється на площину проекцій, до якої пряма рівня паралельна, також прямим кутом.



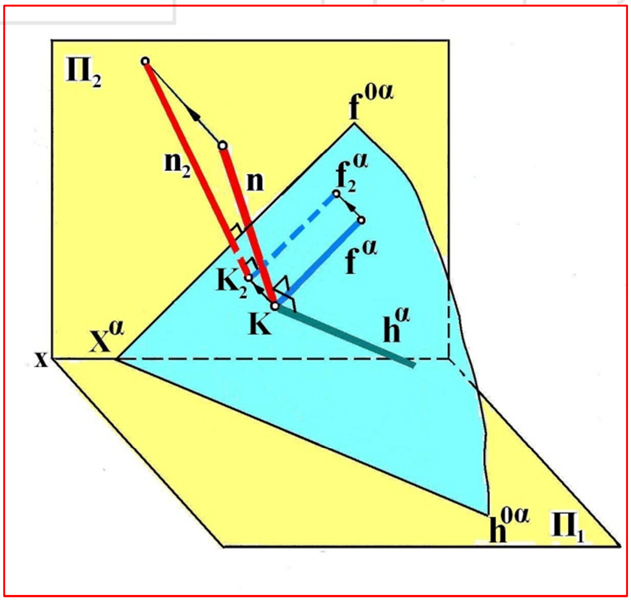
Пряма n перпендикулярна до площини α, яку задано слідами $h^{0\alpha}$ і $f^{0\alpha}$, оскільки вона перпендикулярна до прямих рівня цієї площини – горизонталі h^{α} і фронталі f^{α}, які перетинаються в точці К: $n \perp h^{\alpha}, f^{\alpha}$; $K = h^{\alpha} \cap f^{\alpha} \Rightarrow$

$n \perp \alpha(h^{\alpha} \cap f^{\alpha})$.

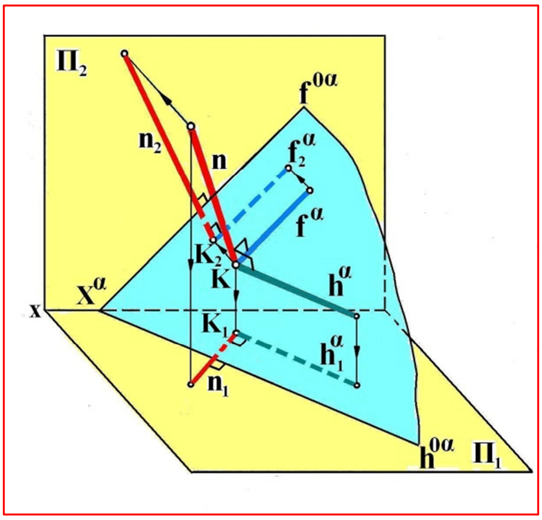


Горизонтальна проекція n_1 прямої n перпендикулярна до горизонтальної проекції h_1^{α} горизонталі h^{α} або до горизонтального сліду $h^{0\alpha}$ площини α: $n_1 \perp h_1^{\alpha}, h^{0\alpha}$.

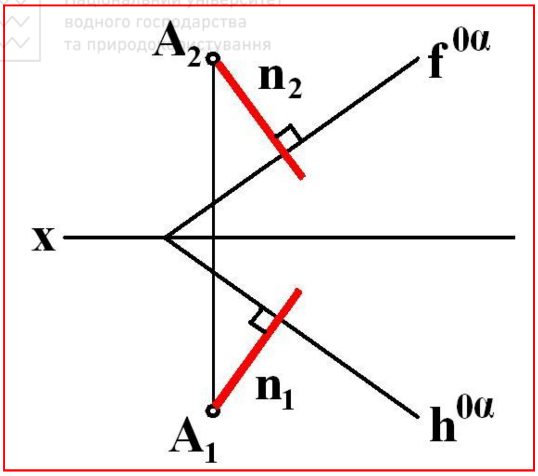
Національний університет
водного господарства
та природокористування



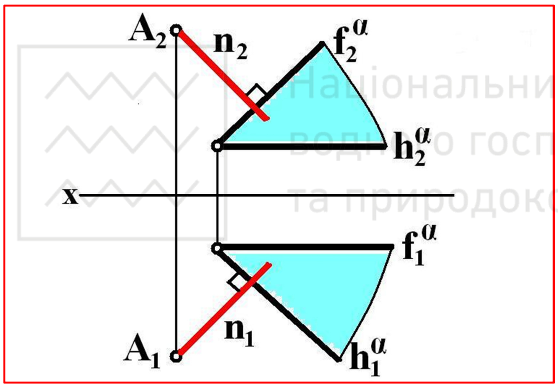
Фронтальна проекція n_2 прямої n перпендикулярна до фронтальної проекції f_2^{α} фронталі f^{α} або до фронтального сліду $f^{0\alpha}$ площини α: $n_2 \perp f_2^{\alpha}, f^{0\alpha}$.



На епюрі проекції прямої, перпендикулярної до площини, проводять: горизонтальну – перпендикулярно до горизонтальної проекції горизонталі площини або до її горизонтального сліду; фронтальну – перпендикулярно до фронтальної проекції фронталі площини або до її фронтального сліду: $n_1 \perp h_1^{\alpha}$, $h^{0\alpha}$; $n_2 \perp f_2^{\alpha}$, $f^{0\alpha}$



Пряма n перпендикулярна до площини α, оскільки $n_1 \perp h^{0\alpha}$ і $n_2 \perp f^{0\alpha}$.

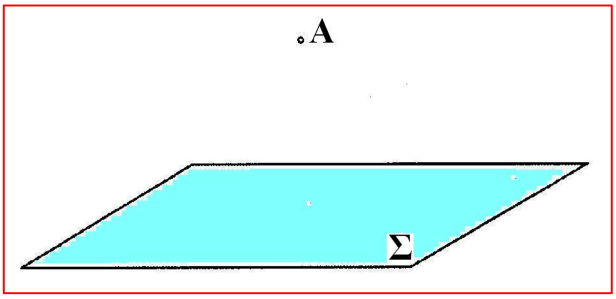


Пряма n перпендикулярна до площини α, оскільки $n_1 \perp h_1^{\alpha}$ і $n_2 \perp f_2^{\alpha}$.

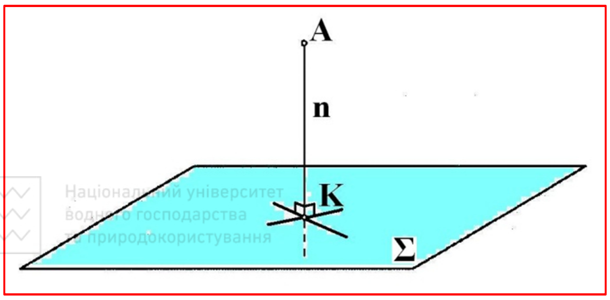
6.1.1. Задачі на проведення через точку прямої, перпендикулярної до заданої площини

Примітка. Такі задачі дозволяють визначати відстань від точки до площини.

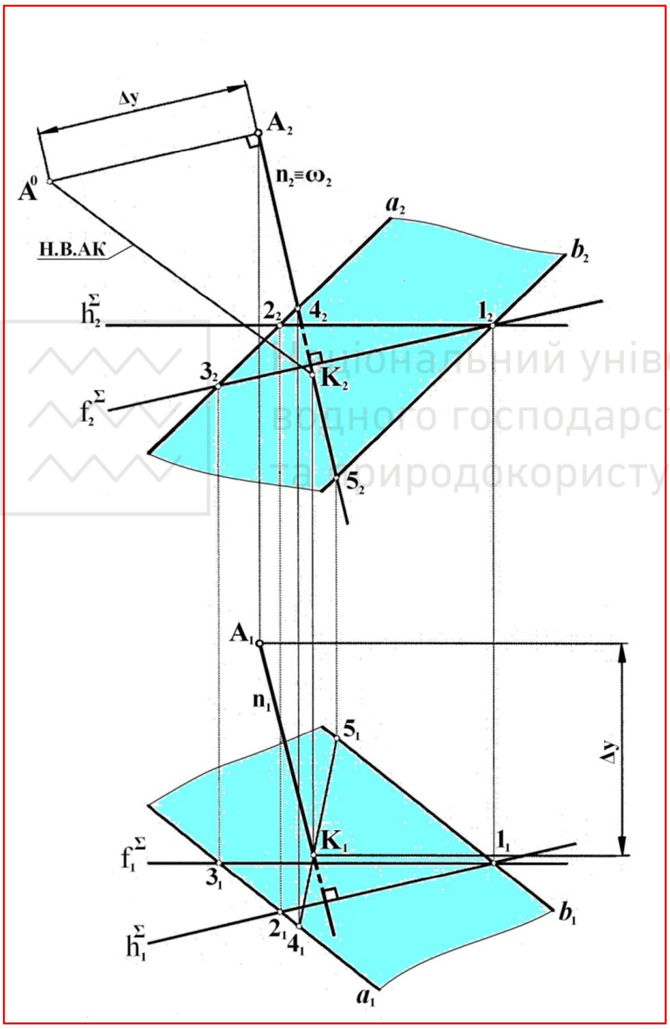
Задача № 1



Початкова умова задачі.
Визначити відстань від точки А до площини Σ.

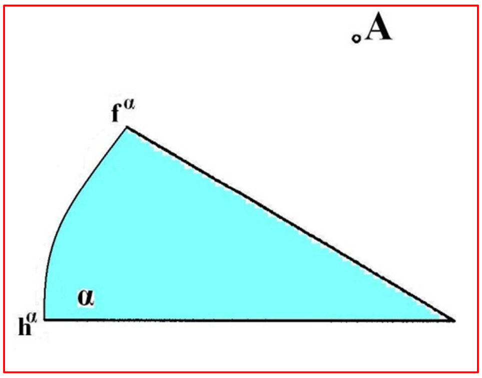


Розв'язування задачі на наочному зображенні:
1. З точки А проводимо перпендикуляр n до площини Σ.
2. Визначаємо точку К перетину n з Σ.
3. АК – відстань від точки А до площини Σ.

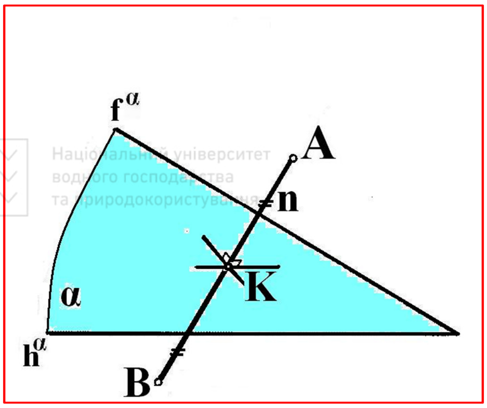


Розв'язування задачі на епюрі, де площину Σ задано двома паралельними прямими *a* і *b*:
1. Оскільки площину Σ не задано слідами та прямими рівня, в ній проводимо горизонталь h^Σ і фронталь f^Σ.
2. Проводимо проекції перпендикуляра n: $n_1 \perp h_1^\Sigma$ і $n_2 \perp f_2^\Sigma$.
3. Знаходимо точку К перетину n з Σ за допомогою фронтально-проекціюючої площини ω ($n_2 \equiv \omega_2$).
4. Способом прямокутного трикутника визначаємо Н.В. відрізка АК перпендикуляра n.
5. A^0K_2 = Н.А. АК – відстань від точки А до площини Σ, яку задано паралельними прямими *a* і *b*.

Задача № 2

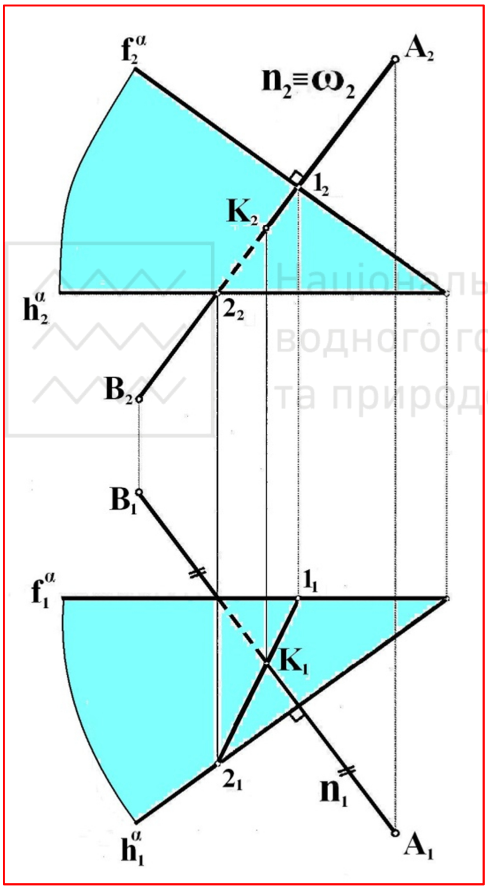


Початкова умова задачі.
Побудувати точку В, симетричну точці А відносно площини $\alpha(h^{0\alpha} \cap f^{0\alpha})$.



Розв'язування задачі на наочному зображенні:

1. З точки А проводимо перпендикуляр n до площини $\alpha(h^{0\alpha} \cap f^{0\alpha})$.
2. Визначаємо точку К перетину n з α.
3. Від точки К відкладаємо на n відрізок КВ = КА.
4. Точка В є точкою, симетричною точці А відносно площини $\alpha(h^{0\alpha} \cap f^{0\alpha})$.



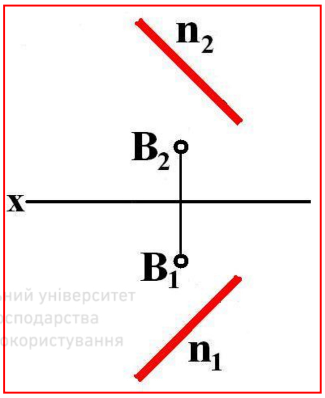
Розв'язування задачі на епюрі:

1. Оскільки площину α задано горизонталлю h^{α} і фронталлю f^{α}, проводимо відразу з точки А проекції перпендикуляра n: $n_1 \perp h_1^{\alpha}$ і $n_2 \perp f_2^{\alpha}$.
2. Знаходимо точку К перетину n з α за допомогою фронтально-проекціюючої площини ω ($n_2 \equiv \omega_2$).
3. На n_1 відкладаємо від точки K_1 відрізок $K_1B_1 = K_1A_1$. Фіксуємо B_1.
4. За допомогою лінії проекційного зв'язку на n_2 знаходимо B_2.

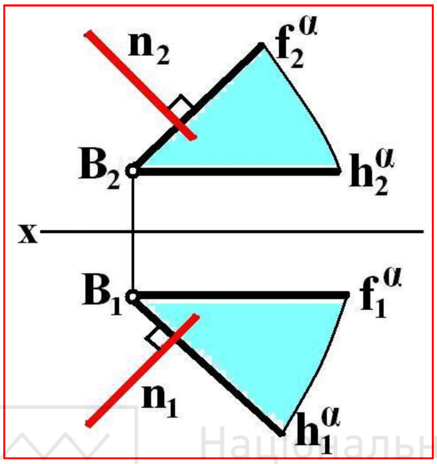
6.1.2. Задачі на проведення через точку площини, перпендикулярної до заданої прямої

Примітка. Такі задачі дозволяють визначати відстань від точки до прямої.

Задача № 1



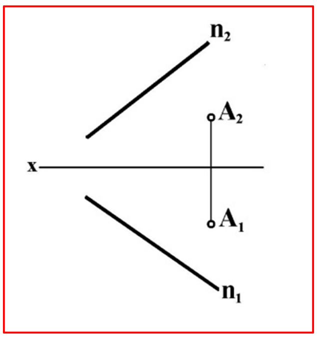
Початкова умова задачі.
Через точку В провести площину α перпендикулярно до заданої прямої.



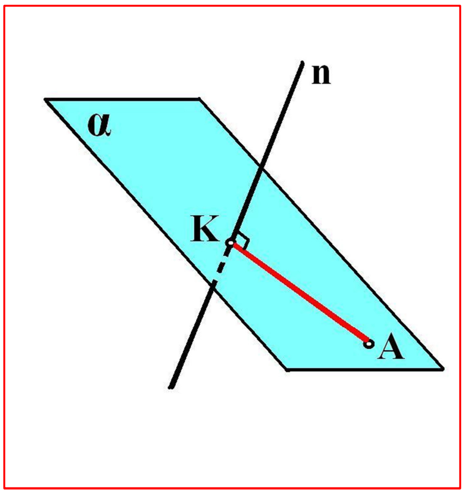
Розв'язування задачі:
Площину α задамо прямими рівня - горизонталлю h^{α} і фронталлю f^{α}, які проводимо через точку В.
Для цього з B_1 проводимо $h_1^{\alpha} \perp n_1$ (з B_2 проводимо h_2^{α} // x), а з B_2 проводимо $f_2^{\alpha} \perp n_2$ (з B_1 проводимо f_1^{α} // x).
Можна сказати, що площина $\alpha(h^{0\alpha} \cap f^{0\alpha}) \perp n$, оскільки отримано відомий епюр, де $n \perp \alpha(h^{0\alpha} \cap f^{0\alpha})$.

Задачі на проведення через точку прямої, перпендикулярної до площини (6.1.1), і площини, перпендикулярної до прямої (6.1.2), мають однаковий кінцевий результат, але послідовність побудов і розмірковування, які їх супроводжують, різні.

Задача № 2



Початкова умова задачі.
Визначити відстань від точки А до прямої n.



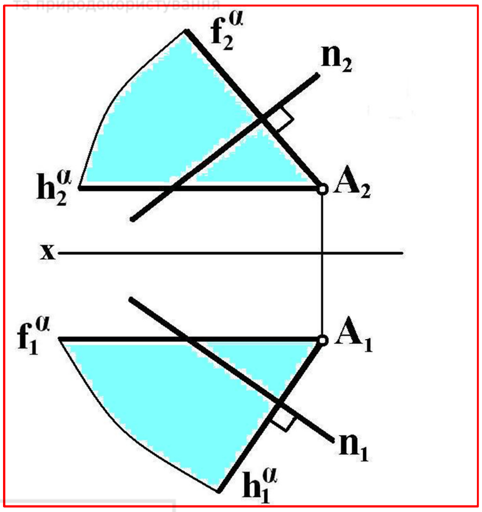
Розв'язування задачі на наочному зображенні:

1.Через точку А проводимо площину α перпендикулярно до прямої n.

2. Визначаємо точку К перетину n з α.

3. Відрізок АК, що лежить в площині α і перпендикулярний до прямої n, визначає відстань від точки А до прямої n.

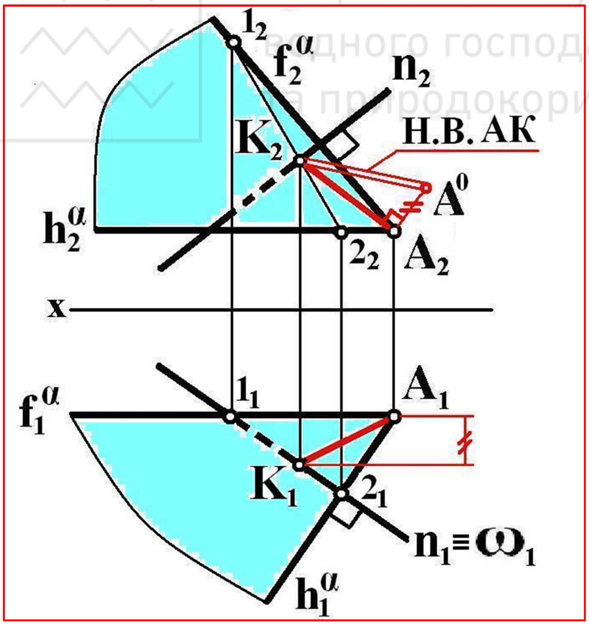
1 спосіб. Розв'язування задачі на епюрі шляхом проведення площини α, заданої прямими рівня.



Розв'язування задачі на епюрі (проміжний етап):

З точки А проводимо площину $\alpha(h^{0\alpha} \cap f^{0\alpha})$ перпендикулярно до прямої n.

Для цього проводимо $h_1^\alpha \perp n_1$ і $f_2^\alpha \perp n_2$.



Розв'язування задачі на епюрі (заключний етап):

Будуємо точку К перетину n з α. Для цього:

1. Через n проводимо допоміжну горизонтально-проекціюючу площину ω ($n_1 \equiv \omega_1$).

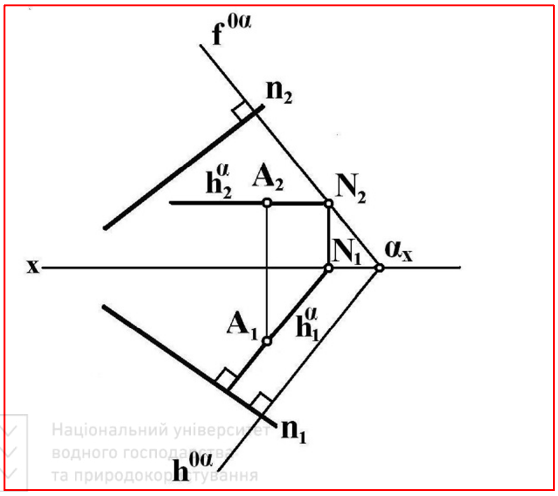
2. Знаходимо лінію перетину 12 площин α і ω.

3. Знаходимо точку К: $K = n \cap 12 = n \cap \alpha(h^{0\alpha} \cap f^{0\alpha})$.

4. З'єднуємо точки А і К. АК – відрізок перпендикуляра, проведеного з точки А на пряму n, який визначає відстань від точки А до заданої прямої n.

5. Способом прямокутного трикутника визначаємо Н.В. відрізка АК. A^0K_2 – шукана відстань від точки А до прямої n.

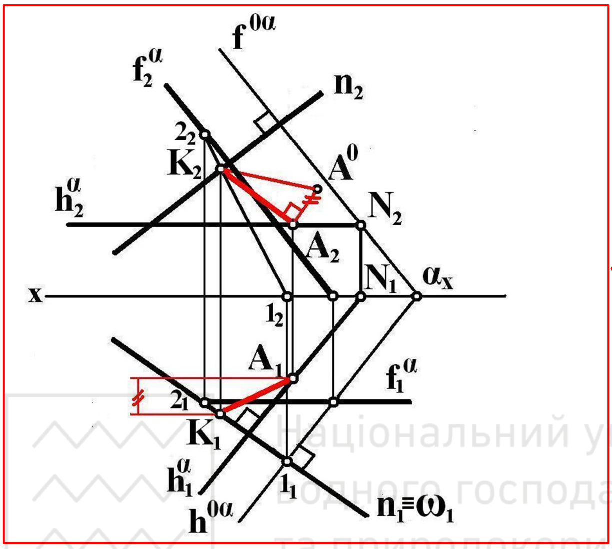
2 спосіб. Розв’язування задачі на епюрі шляхом проведення площини α, заданої слідами



Розв’язування задачі на епюрі (проміжний етап).

Через точку А проводимо площину α, задану слідами $h^{0\alpha}$ і $f^{0\alpha}$, перпендикулярно до прямої n. Для цього:

1. **Через точку А проводимо горизонтальну пряму h^{α} таким чином, щоб $h_1^{\alpha} \perp n_1$. Пряма h^{α} буде горизонтальною прямою площини α.**
2. **Знаходимо слід N прямої h^{α}, через який проводимо фронтальний слід $f^{0\alpha} \perp n_2$.**
3. **Визначаємо точку сходу α_x, через яку проводимо горизонтальний слід $h^{0\alpha} \perp n_1$.**

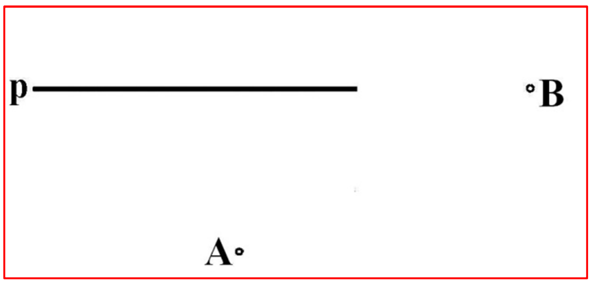


Розв’язування задачі на епюрі (заключний етап):

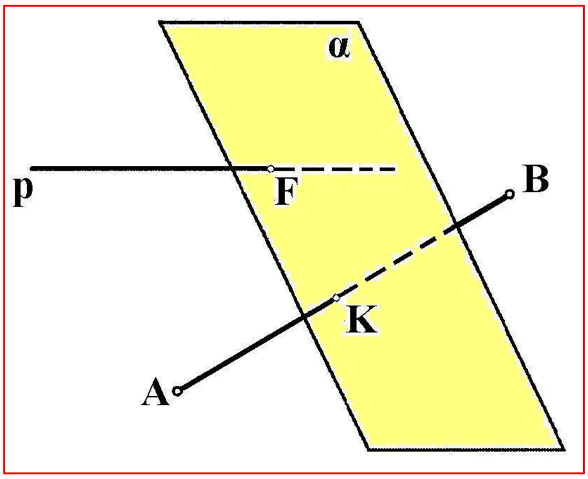
Будуємо точку К перетину n з α. Для цього:

1. **Через n проводимо допоміжну горизонтально-проекціюючу площину ω ($n_1 \equiv \omega_1$).**
2. **Знаходимо лінію перетину 12 площин α і ω. Точку 1 знайдено в перетині горизонтальних слідів $h^{0\alpha}$ і ω_1, точку 2 – за допомогою фронталі f^{α} площини α.**
3. **Знаходимо точку К: $K = n \cap 12 = n \cap \alpha(h^{0\alpha} \cap f^{0\alpha})$.**
4. **З’єднуємо точки А і К. АК – відрізок перпендикуляра, проведеного з точки А на пряму n, який визначає відстань від точки А до заданої прямої n.**
5. **Способом прямокутного трикутника визначаємо Н.В. відрізка АК. A^0K_2 – шукана відстань від точки А до прямої n.**

Задача № 3



Початкова умова задачі.
Знайти на прямій p точку F, рівновіддалену від точок А і В.

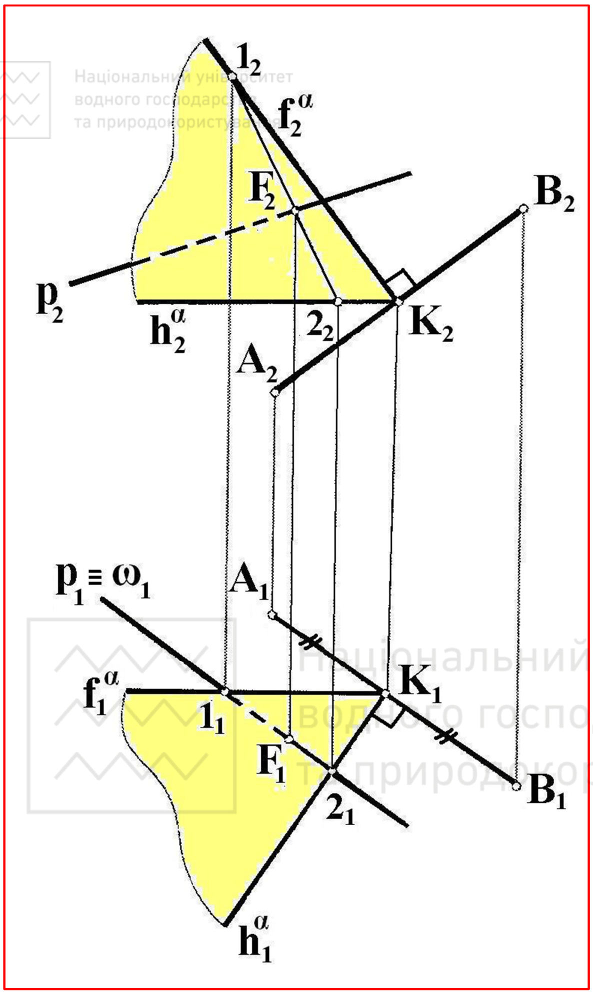


Розв’язування задачі на наочному зображенні:

1.Знаходимо середину відрізка AB. Це точка K.

2. Через точку K проводимо площину α перпендикулярну до AB. Площина α є геометричним місцем точок простору, рівновіддалених від A і B.

3. Знаходимо точку F перетину площини α із заданою прямою p. Точка F належить прямій p, лежить в площині α і рівновіддалена від точок A і B.



Розв’язування задачі на епюрі:

1. Знаходимо точку K - середину відрізка AB.

2. Через точку K проводимо площину α, задану прямими рівня h^α і f^α, перпендикулярно до AB: $h_1^\alpha \perp A_1B_1$ і $f_2^\alpha \perp A_2B_2$.

3. Знаходимо точку F перетину прямої p з $\alpha(h^\alpha \cap f^\alpha)$. Для цього:

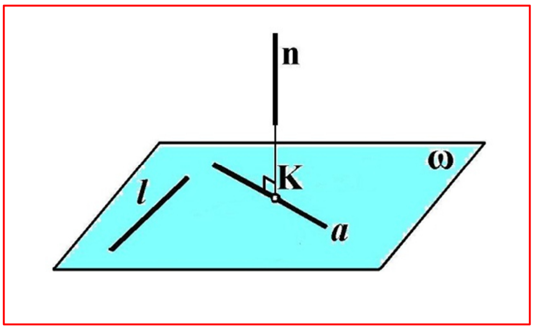
а) через p проводимо допоміжну площину ω ($p_1 \equiv \omega_1$);

б) знаходимо лінію перетину 12 площин α і ω;

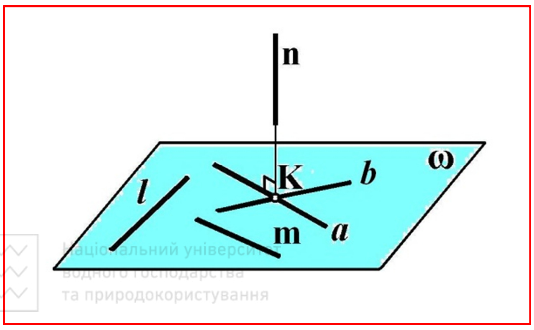
в)знаходимо точку F перетину p з α: $F = p \cap 12 = p \cap \alpha(h^\alpha \cap f^\alpha)$. Точка F є шуканою точкою.

6.2. Перпендикулярність двох прямих

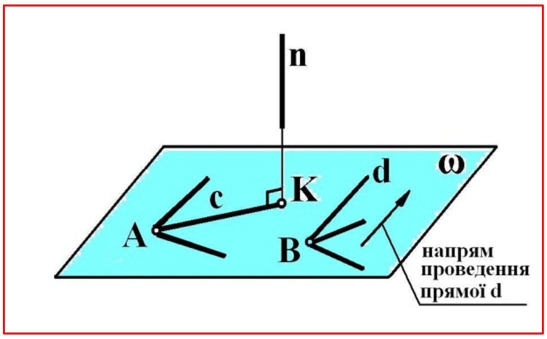
Ознака перпендикулярності двох прямих: ***дві прямі перпендикулярні, якщо одна з цих прямих належить площині, яка перпендикулярна до іншої прямої.***



Прямі *l* і *a* перпендикулярні до прямої n, оскільки вони лежать в площині ω, яка перпендикулярна до прямої n.
Примітка. Пряма а є прямою, яка перетинає задану пряму n в точці К. Пряма l також перпендикулярна до прямої n, хоча відносно неї є мимобіжною.



В площині ω можна провести безліч прямих, які перпендикулярні до прямої n і перетинають її (наприклад, прямі *a* і *b*), а також безліч мимобіжних прямих, перпендикулярних до прямої n (наприклад, прямі *l* і m).

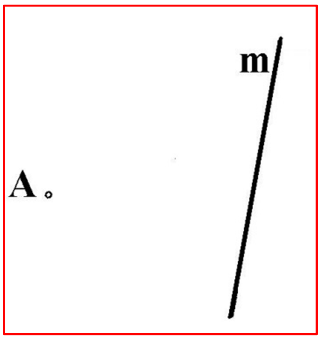


Через точку простору також можна провести безліч прямих, перпендикулярних до заданої прямої n, тобто задача на проведення через точку прямої, перпендикулярної до заданої, має безліч рішень.
Щоб задача мала єдине рішення, потрібно надати додаткові умови. Наприклад, через точку А провести пряму, яка перетинає пряму n (такій умові задовольняє тільки одна пряма с), або через точку В провести мимобіжну пряму відповідно до заданого напрямку (такій умові задовольняє тільки одна пряма m).

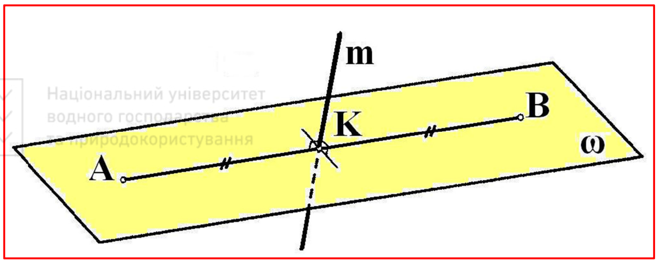
6.2.1. Задачі на проведення через точку простору прямої, перпендикулярної до іншої прямої

В задачі № 2 (параграф 6.1.2) пряма АК, яку проведено з точки А перпендикулярно до заданої прямої n, лежить в площині α, що проходить через точку А перпендикулярно до прямої n.
Щоб через точку простору провести пряму, перпендикулярну до заданої прямої, спочатку через задану точку потрібно провести площину, перпендикулярну до заданої прямої, і в ній знайти шукану пряму.

Задача № 1

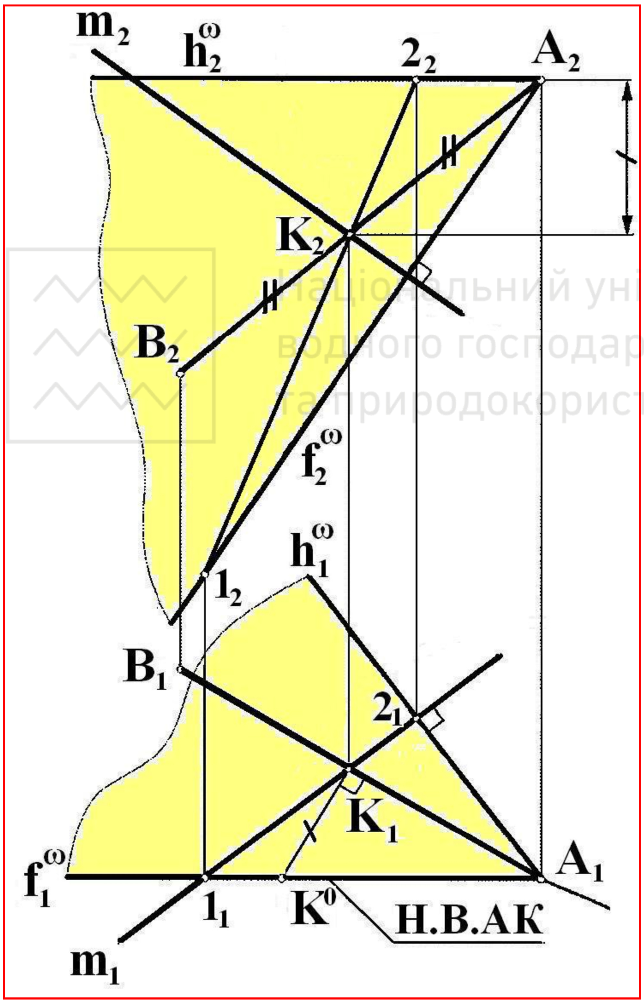


Початкова умова задачі.
Побудувати точку В, симетричну точці А відносно прямої m.



Розв'язування задачі на наочному зображенні:

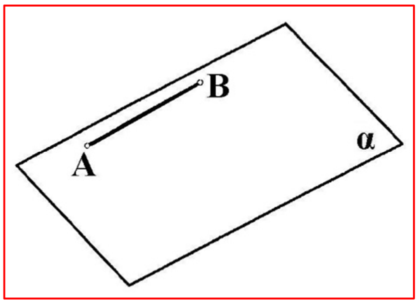
1. Щоб розв'язати задачу, потрібно через точку А провести пряму, перпендикулярну до m. Для цього через точку А проводимо площину ω ⊥ m.
2. Знаходимо точку К перетину ω з m. З'єднуємо точки А і К, отримуємо відрізок АК ⊥ m.
3. На продовженні АК фіксуємо точку В, симетричну точці А (ВК = АК).



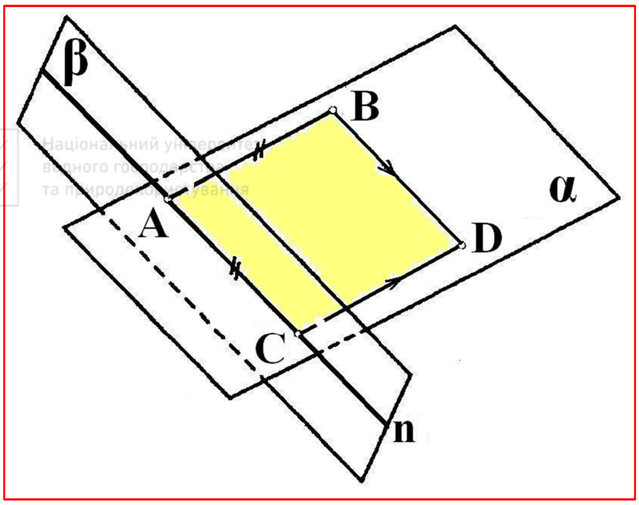
Розв'язування задачі на епюрі:

1. Через точку А проводимо площину ω, задану прямими рівня h^{ω} і f^{ω}, перпендикулярно до прямої m: $h_1^{\omega} \perp m_1$ і $f_2^{\omega} \perp m_2$.
2. Знаходимо точку К перетину ω з m. З'єднуємо точки А і К, отримуємо відрізок АК ⊥ m.
3. На продовженні АК фіксуємо точку В, симетричну точці А (ВК = АК).

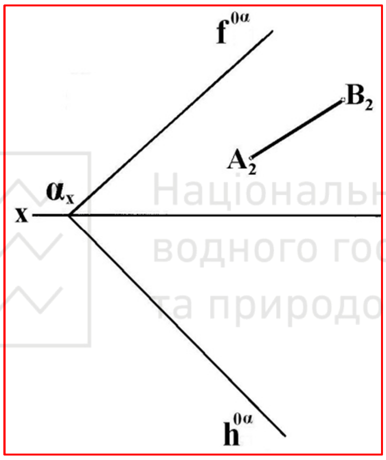
Задача № 2



Початкова умова задачі на наочному зображенні.
Відрізок AB є стороною квадрата, який лежить в площині α. Побудувати квадрат ABCD.

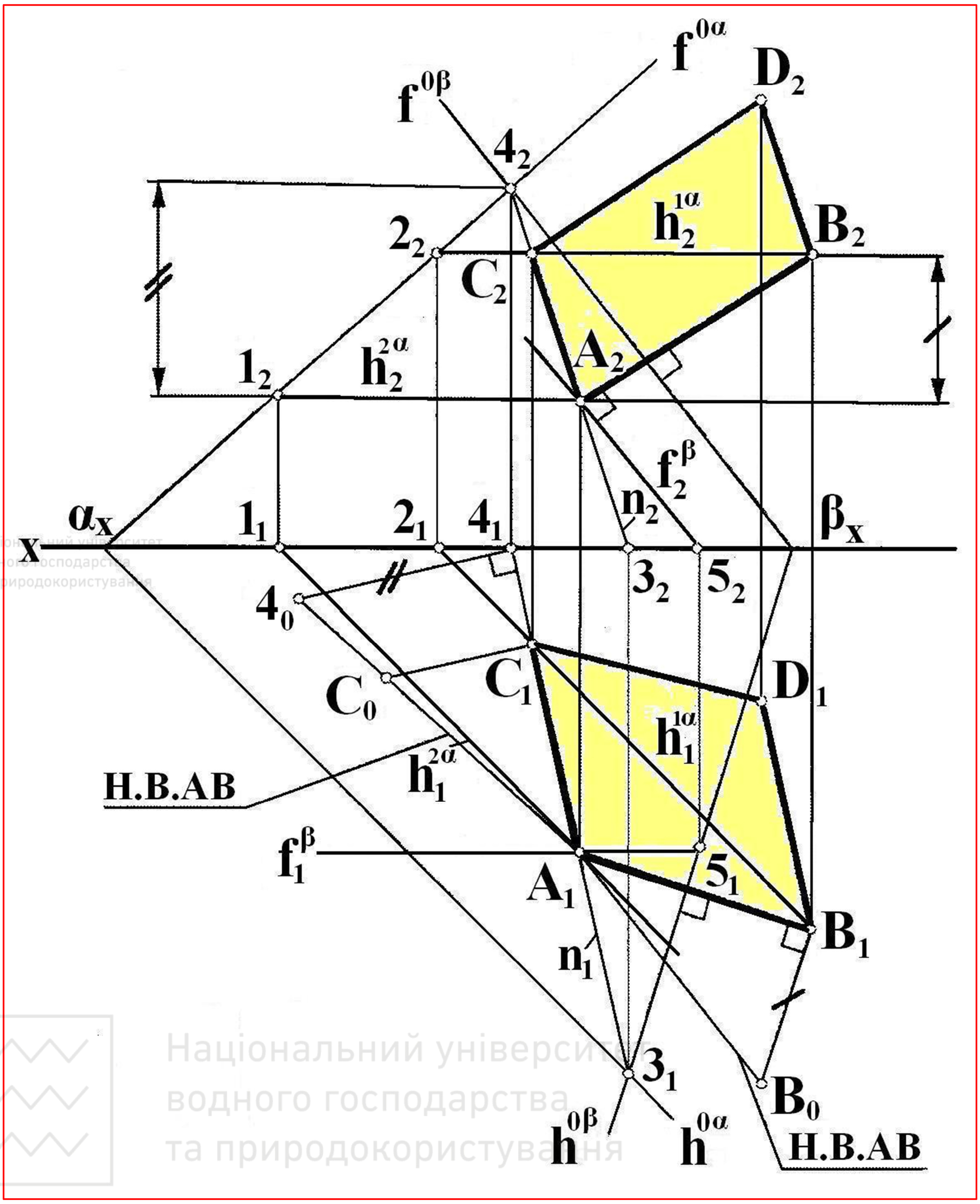


Розв'язування задачі на наочному зображенні:
1. Через точку A проводимо площину β ⊥ AB.
2. Визначаємо лінію перетину n площин α і β .
3. На лінії n від точки A відкладаємо відрізок AC = AB, знаходимо вершину C.
4. Через вершину C проводимо пряму, паралельну до AB, а через вершину B – пряму, паралельну до AC, знаходимо вершину D. Квадрат ABCD побудовано.



Початкова умова задачі на епюрі.

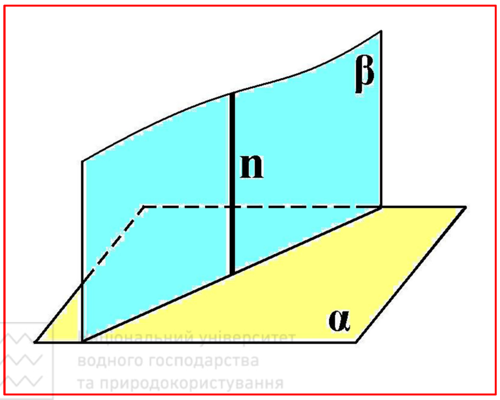
Розв'язування задачі на епюрі:
1. За допомогою горизонталей $h^{1\alpha}$ і $h^{2\alpha}$ площини α знаходимо A_1B_1. Визначаємо Н.В. AB: A_1B_0 = Н.В. AB.
2. Будуємо площину β ⊥ AB і яка проходить через точку A. Для цього проводимо через точку A фронталь f^{β} площини β перпендикулярно до AB: $f_2^{\beta} \perp A_2B_2$. Знаходимо горизонтальний слід фронталі f^{β} – точку 5. Через точку 5_1, яка знаходиться на горизонтальному сліді $h^{0\beta}$ площини β, проводимо $h^{0\beta} \perp A_1B_1$, а



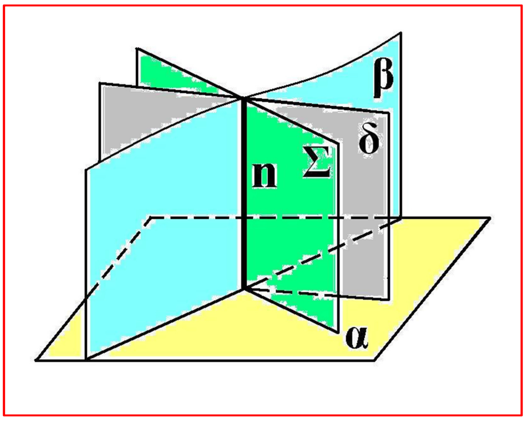
через точку сходу слідів β_x проводимо $f^{0\beta} \perp A_2B_2$.
3. Знаходимо лінію перетину 34 (пряма n) площин α і β.
4. На 34 від точки A відкладаємо проекції відрізка AC рівного AB. Для цього побудовано прямокутний трикутник $A_1 4_1 4_0$, на гіпотенузі якого відкладено A_1C_0 = Н.В. AB. Проводимо $C_0C_1 \parallel 4_0 4_1$, фіксуємо C_1, а потім C_2.
5. Провівши CD // AB і BD // AC, знаходимо четверту вершину D квадрата ABCD, який знаходиться в площині α.

6.3. Перпендикулярність двох площин

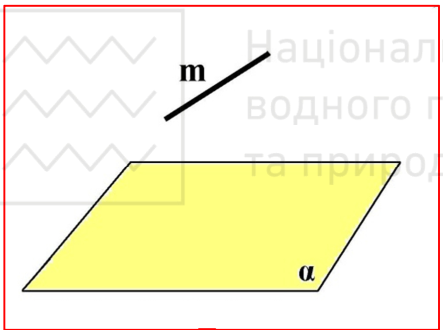
Ознака перпендикулярності двох площин: ***дві площини перпендикулярні, якщо одна з них містить пряму, перпендикулярну до іншої площини.*** **Можна сказати і таким чином: дві площини перпендикулярні, якщо одна з них проходить через пряму, перпендикулярну до іншої площини.**



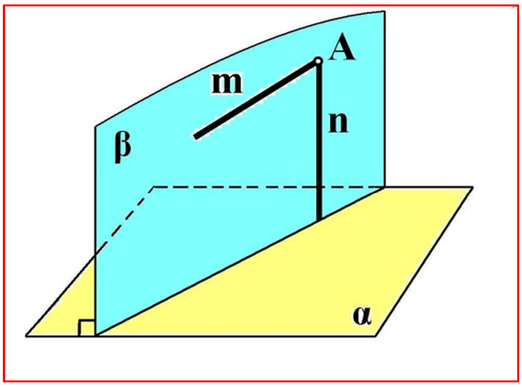
Площина β перпендикулярна до заданої площини α, оскільки вона проходить через пряму n, яка перпендикулярна до площини α.



Через задану пряму n, яка перпендикулярна до площини α, можна провести безліч площин, перпендикулярних до заданої площини α. Наприклад, площини β, δ, Σ перпендикулярні до площини α і пряма n є їх віссю обертання.
Отже, задача на проведення через точку простору площини, перпендикулярної до заданої площини, має безліч рішень.



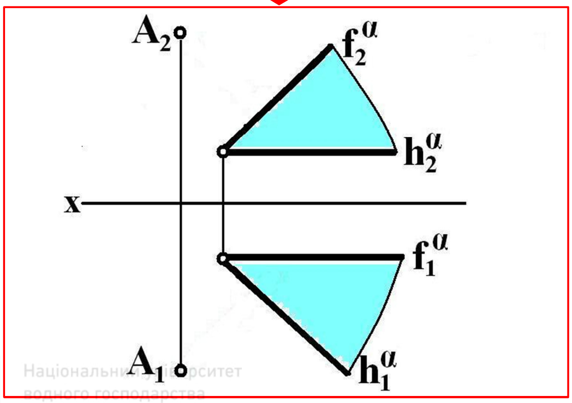
Щоб задача на проведення площини, перпендикулярної до заданої, мала єдине рішення, потрібно надати додаткові умови. Наприклад, провести через пряму m площину β перпендикулярно до заданої площини α (початкова умова задачі).

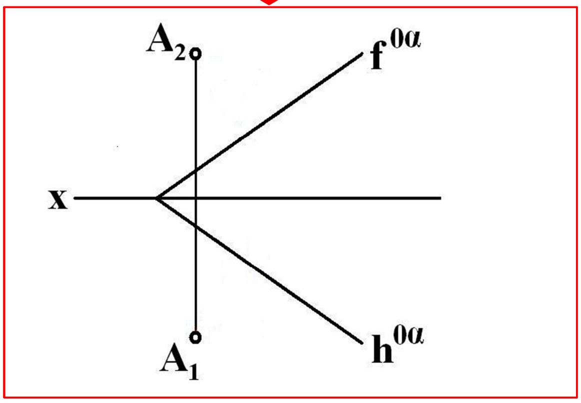


Розв'язування задачі:
1. **На прямій m фіксуємо точку А.**
2. **Через точку А проводимо пряму n, перпендикулярну до площини α.**
3. **Площина β, яку задано прямими m і n, що перетинаються, перпендикулярна до заданої площини α і є єдиною площиною, яку можна провести через m перпендикулярно до площини α.**

Задача № 1

Умова задачі. **Через точку А провести площину β, перпендикулярну до площини α, задану прямими рівня h^{α} і f^{α} (рисунок зліва) або до площини α, заданої слідами $h^{0\alpha}$ і $f^{0\alpha}$ (рисунок справа).**



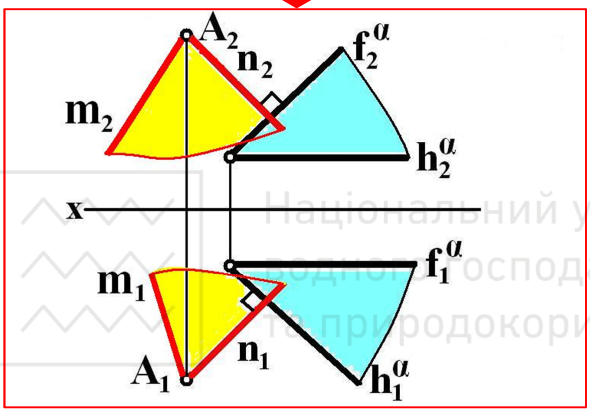


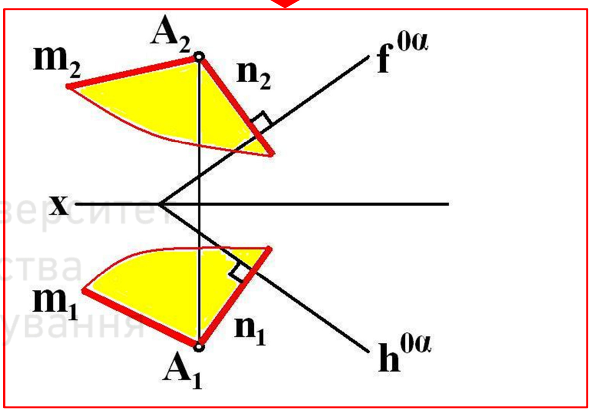
Розв'язування задачі:

1. Через точку А проводимо пряму n, перпендикулярну до заданої площини α: $n_1 \perp h_1^{\alpha}$ і $n_2 \perp f_2^{\alpha}$ (рисунок зліва) та $n_1 \perp h^{0\alpha}$ і $n_2 \perp f^{0\alpha}$ (рисунок справа).

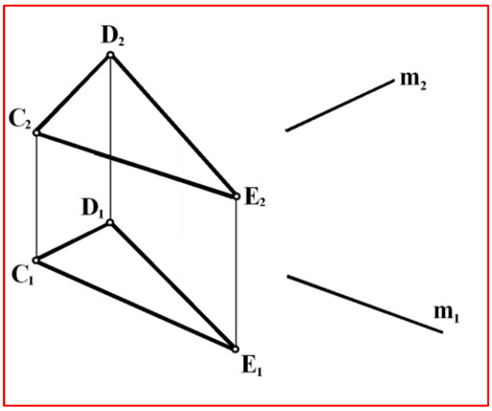
2. Проводимо в довільному напрямку через точку А пряму m. Площина β, яку задано пересічними прямими n і m, перпендикулярна до площини α, оскільки містить пряму n, перпендикулярну до площини α.

Примітка. Задача має безліч рішень, оскільки m можна провести в довільному напрямку.

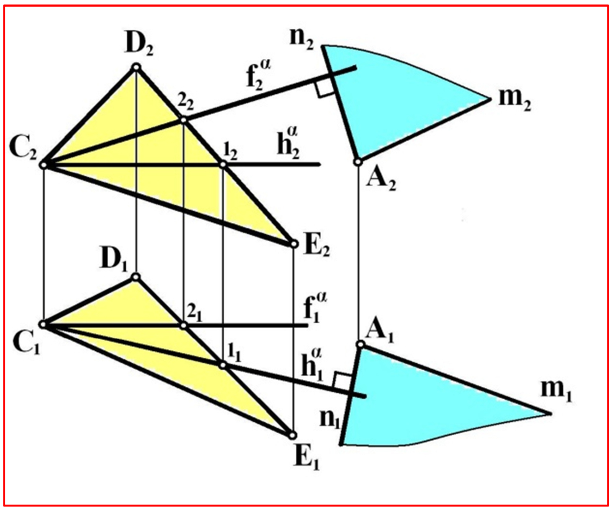




Задача № 2



Початкова умова задачі.
Через пряму m провести площину β, перпендикулярну до заданої площини α(ΔCDE).

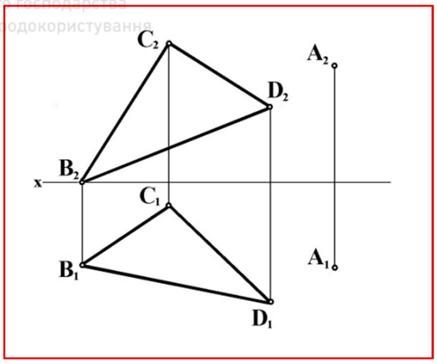


Розв'язування задачі:

1. Оскільки площину α не задано прямими рівня або слідами, то для побудови прямої, перпендикулярної до площини α, проводимо в площині α прямі рівня – горизонталь h^{α} і f^{α}.
2. На прямій m фіксуємо точку A.
3. Через точку A проводимо пряму n, перпендикулярну до площини α: $n_1 \perp h_1^{\alpha}$ і $n_2 \perp f_2^{\alpha}$.

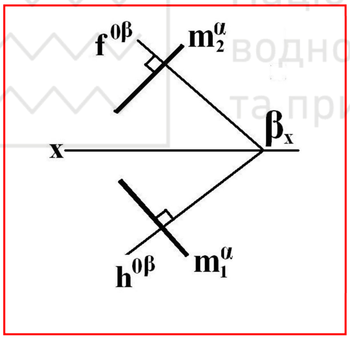
Площина β, яку задано прямими m і n, що перетинаються, перпендикулярна до заданої площини α, оскільки вона містить пряму n, перпендикулярну до площини α.

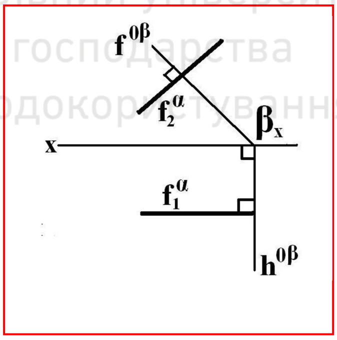
Задача № 3

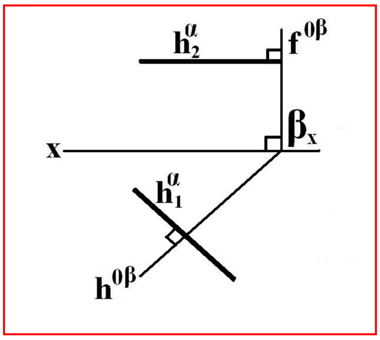


Початкова умова задачі. Через точку A провести горизонтально-проекціюючу площину β, перпендикулярну до заданої площини α(ΔBCD).

Пояснення до розв'язку. Щоб шукана горизонтально-проекціююча площина β була б перпендикулярна до площини α, вона повинна бути перпендикулярної до якоїсь прямої площини α.



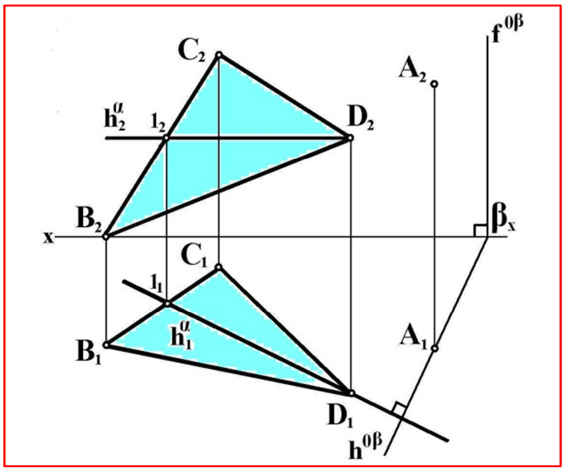




До прямої загального положення m^{α} перпендикулярною буде площина загального положення β

До фронтальної прямої f^{α} перпендикулярною буде фронтально-проекціююча площина β

До горизонтальної прямої h^{α} перпендикулярною буде горизонтально-проекціююча площина β



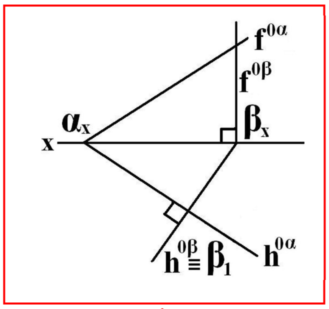
Розв'язування задачі:

1. В площині $\alpha(\Delta BCD)$ проводимо горизонтальну пряму h^{α}.
2. Через точку A проводимо горизонтально-проекціюючу площину β ($A_1 \equiv \beta_1 \Rightarrow A \in \beta$) перпендикулярно до h^{α}: $h^{0\beta} \perp h_1^{\alpha}$ і $f^{0\beta} \perp h_2^{\alpha}$.

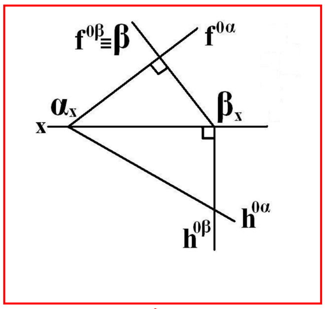
Оскільки площина β перпендикулярна до h^{α}, то площина β перпендикулярна до $\alpha(\Delta BCD)$, яка містить h^{α}.

Якщо одна із заданих площин (або обидві) є проекціюючими площинами або рівня, то взаємна перепндикулярність однієї пари слідів свідчить про перпендикулярність площин.

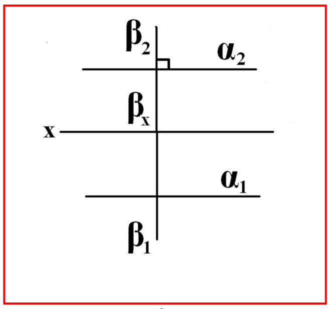
Приклади зображення взаємно перпендикулярних площин



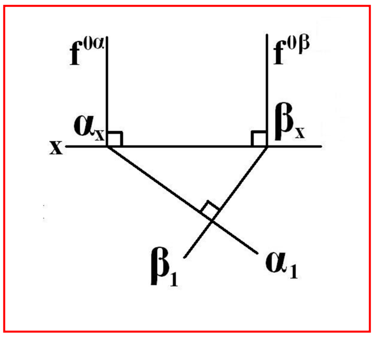
α – площина загального положення;
β – горизонтально-проекціююча площина



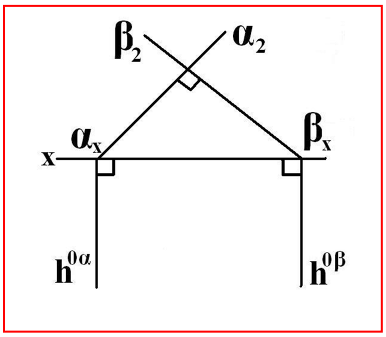
α – площина загального положення;
β – фронтально-проекціююча площина



α – площина, перпендикулярна до Π_3;
β – площина, паралельна до Π_3

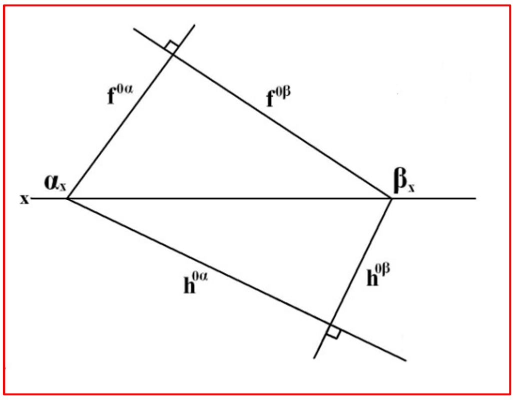


α і β – горизонтально-проекціюючі площини;



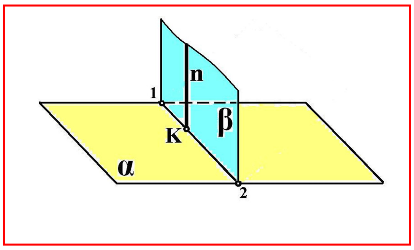
α і β – фронтально-проекціюючі площини;

Задача № 4

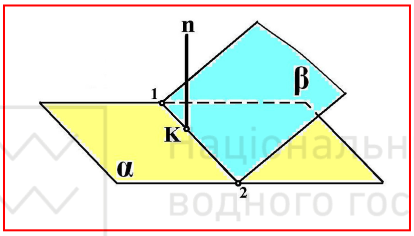


Початкова умова задачі.
Довести, що дві площини загального положення α і β, в яких однойменні сліди складають між собою прямий кут, не є взаємно перпендикулярними площинами.

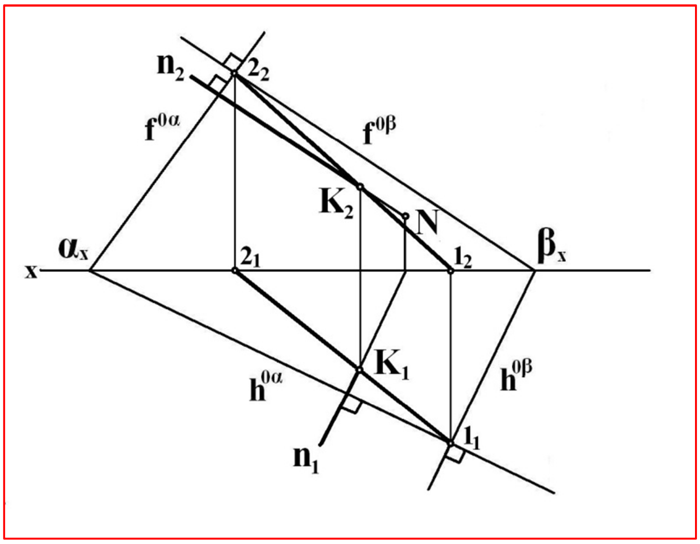
Пояснення до розв'язку.
Перевірку перпендикулярності двох площин можна здійснити таким чином. З будь-якої точки на лінії перетину 12 площин α і β (наприклад, точки К) проводимо перпендикуляр n до площини α.



Якщо перпендикуляр n буде належати площині β, то це означає, що площини α і β є взаємно перпендикулярними.

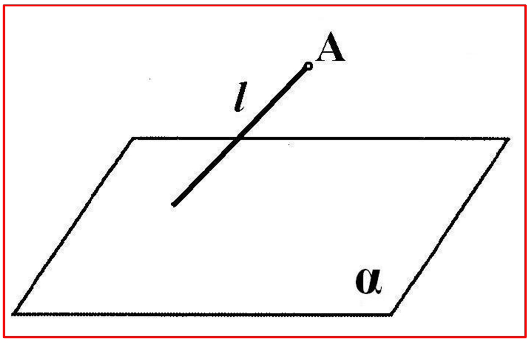


Якщо перпендикуляр n не буде належати площині β, то це означає, що площини α і β не є взаємно перпендикулярними.

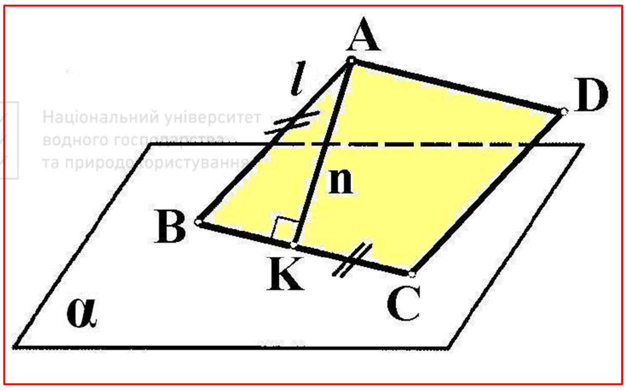


Розв'язування задачі:
1. Будуємо лінію перетину 12 площин α і β.
2. На лінії 12 візьмемо точку К. З точки К проводимо перпендикуляр n до площини α: $n_1 \perp h^{0\alpha}$ і $n_2 \perp f^{0\alpha}$.
3. Перевіряємо належність перпендикуляра n площині β: перпендикуляр n не лежить в площині β, оскільки його фронтальний слід (точка N) не лежить на фронтальному сліді $f^{0\beta}$ площини β.

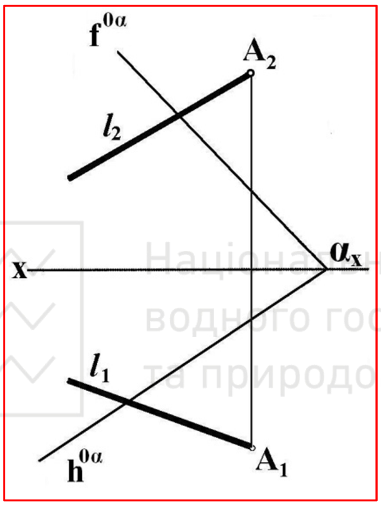
Задача № 5



Початкова умова задачі.
На прямій *l* лежить сторона AB ромба. Побудувати ромб ABCD, площина якого перпендикулярна до заданої площини α, якщо вершина B є точкою перетину *l* з α, а сторона BC лежить в площині α.

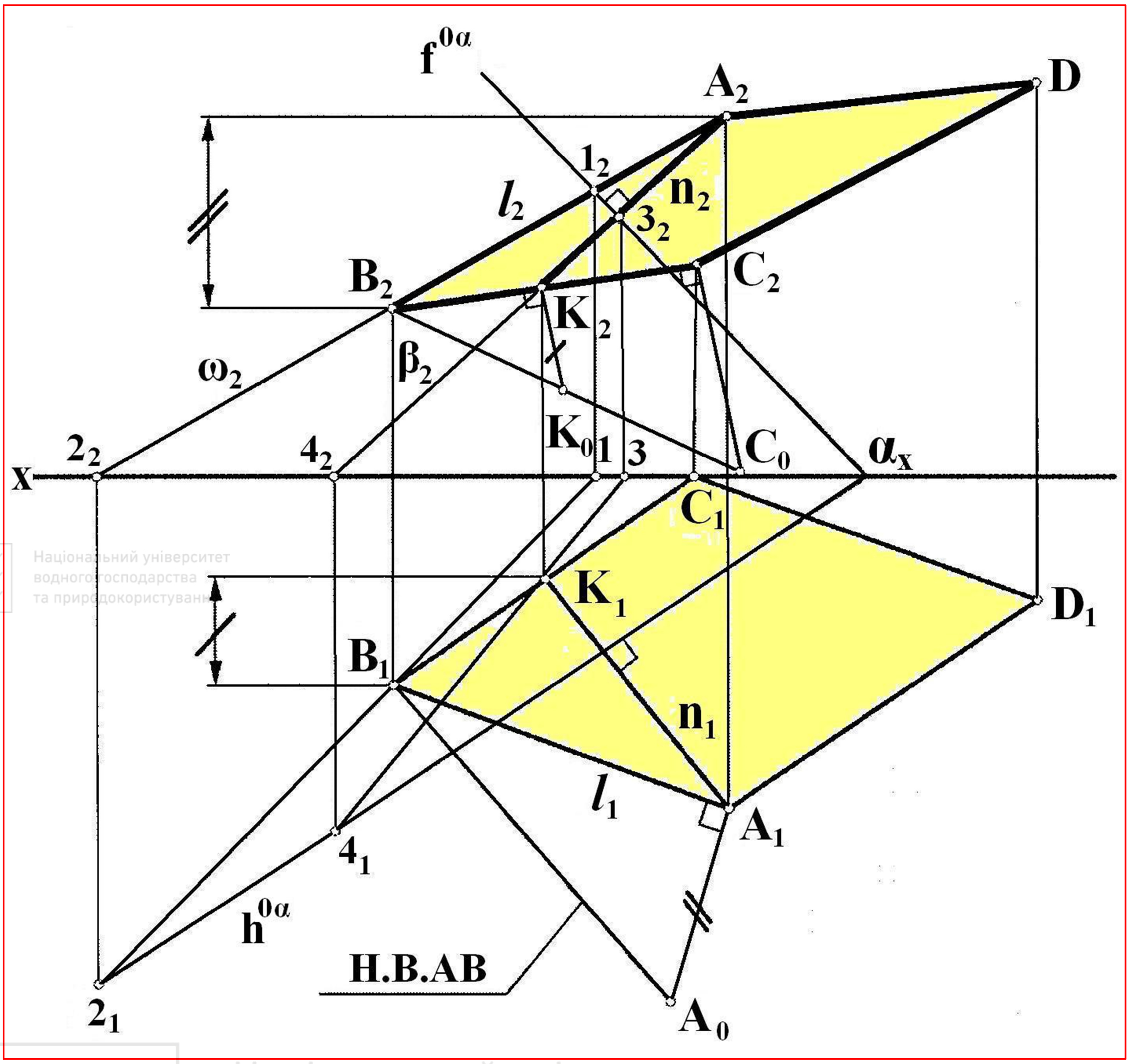


Розв'язування задачі на наочному зображенні:
1. Знаходимо точку B перетину *l* з α.
2. Визначаємо Н.В. сторони AB.
3. З точки A проводимо перпендикуляр n на площину α.
4. Знаходимо точку K перетину n з α.
5. Через точки B і K проводимо сторону BC, яка дорівнює AB. Визначаємо точку C.
6. Проводимо з точок A і C прямі, паралельні до BC і AB. Визначаємо точку D.



Початкова умова задачі на епюрі.

Розв'язування задачі на епюрі:
1. Точку B знайдено за допомогою фронтально-проекціюючої площини ω.
2. З точки A проводимо перпендикуляр n до α: $n_1 \perp h^{0\alpha}$ і $n_2 \perp f^{0\alpha}$.
3. Точку K перетину n з α визначаємо за допомогою фронтально-проекціюючої площини β.
4. Для знаходження точки C визначаємо Н.В. відрізка BK, побудувавши прямокутний трикутник $B_2K_2K_0$, на продовженні гіпотенузи якого відкладаємо B_2C_0 = Н.В. AB.



5. Проводимо C_0C_2 // K_2K_0, на продовженні фронтальної проекції B_2K_2 фіксуємо C_2, а потім і C_1.

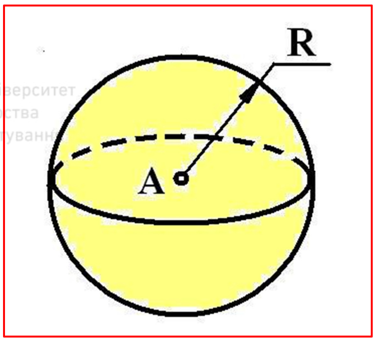
6. Проводимо AD // BC і CD // BA, знаходимо вершину D ромба.

Проекції ромба побудовано.

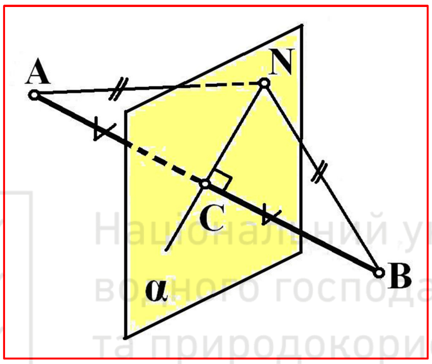
Розділ 7. Геометричні місця простору

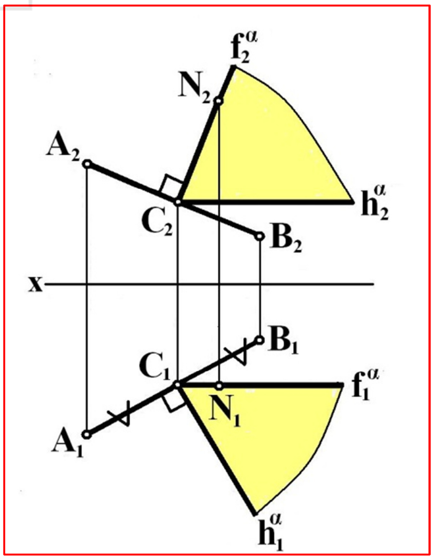
Геометричним місцем точок, прямих або площин в просторі називають однойменні геометричні фігури простору, які задовольняють певній умові. Розглянемо геометричні місця простору, які **найбільш часто зустрічаються під час розв'язування задач.**

7.1. Геометричні місця точок простору (ГМТП)

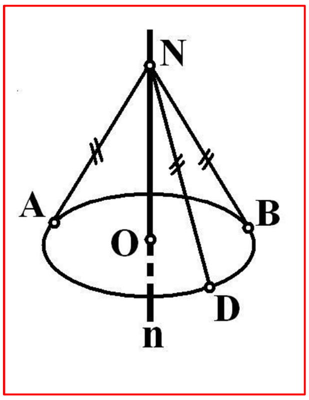


7.1.1. ГМТП, віддалених від заданої точки A на задану відстань R, є <u>сфера</u> з центром в точці A і радіусом, який дорівнює заданій відстані R. Проекція сфери на всі площини проекцій – це коло, радіус якого дорівнює заданій відстані, а центр – проекції заданої точки.

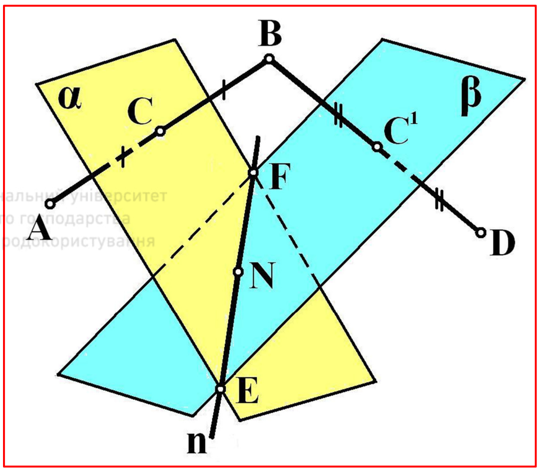


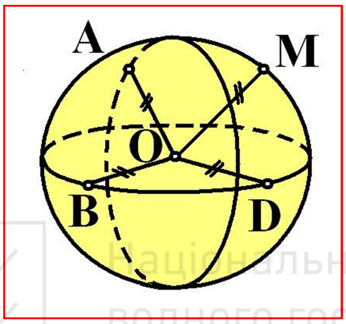


7.1.2. ГМТП, рівновіддалених від двох заданих точок A і B, є <u>площина</u> *α*, що перпендикулярна до відрізка AB, який з'єднує задані точки A і B та проходить через його середину – точку C. На епюрі показано площину α, що задана горизонтальною та фронтальною прямими, яка є ГМТП, рівновіддалених від точок A і B. Будь - яка точка площини α, наприклад точка N, рівновіддалена від точок A і B.



7.1.3. ГМТП, рівновіддалених від трьох заданих точок A, B, D, що не лежать на одній прямій, є <u>пряма</u> n, яка проходить через центр кола (точку 0), проведеного через ці точки, і перпендикулярна до площини кола. Пряму n можна отримати як лінію перетину EF двох площин α і β, які проходять через середини відрізків AB і BD (точки C і C^1) перпендикулярно до цих відрізків. Точка, наприклад N, що лежить на прямій n буде рівновіддалена від заданих трьох точок A, B і D.

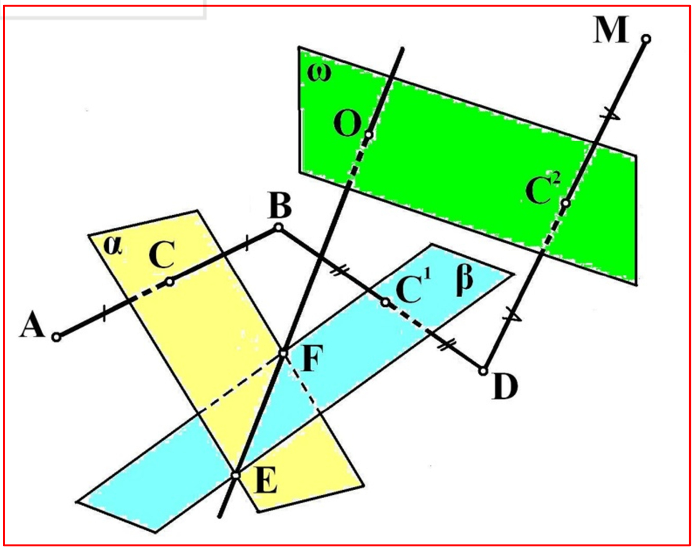


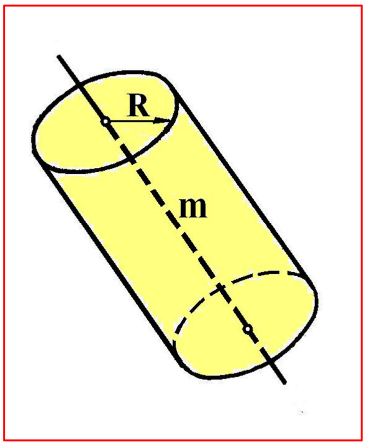


7.1.4. ГМТП, рівновіддалених від чотирьох заданих точок A, B, D, M, що не лежать в одній площині, <u>є точка O</u>, яку можна прийняти за центр сфери, на поверхні якої розміщені всі чотири задані точки. Точку O можна визначити як точку перетину трьох площин α, β, ω, які проходять через середини відрізків AB, BD і DM (точки C, C^1, C^2) перпендикулярно до цих відрізків.

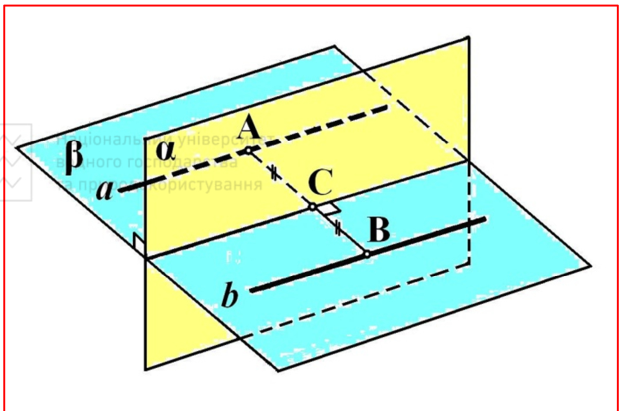
Пряма EF є ГМТП, рівновіддалених від точок A, B і D. Площина ω є ГМТП, рівновіддалених від точок D і M. Точка O – точка перетину EF з ω – є точкою, рівновіддаленою від чотирьох заданих точок A, B, D і M.

Визначивши натуральну величину, наприклад відрізка OA, можна отримати розмір радіуса сфери, на поверхні якої знаходяться всі чотири задані точки.

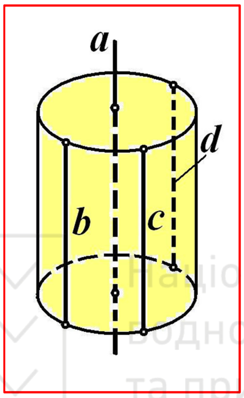




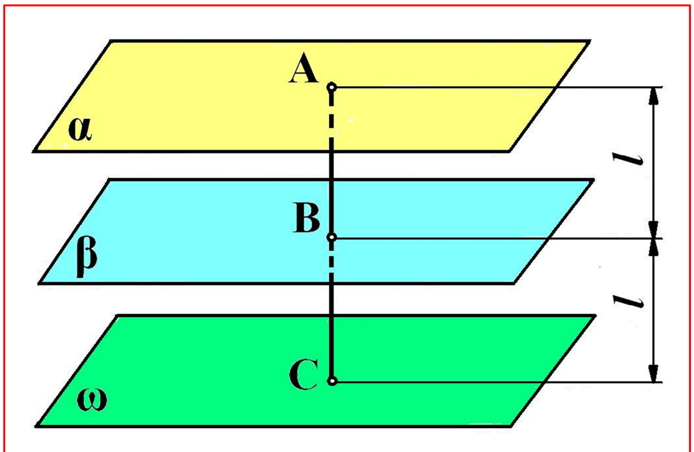
7.1.5. ГМТП, віддалених від заданої прямої m на задану відстань R, є <u>поверхня прямого кругового циліндра</u>, причому віссю обертання циліндра є задана пряма m, а радіус кола нормального перерізу поверхні дорівнює заданій відстані R.



7.1.6. ГМТП, рівновіддалених від заданих двох паралельних прямих *a* і *b*, є <u>площина</u> α, перпендикулярна до деякої площини β, яку проведено через задані прямими *a* і *b*, причому площина α проходитьчерез середину (точку С) відрізка АВ, що з'єднує задані прямі та паралельна до прямих *a* і *b*.

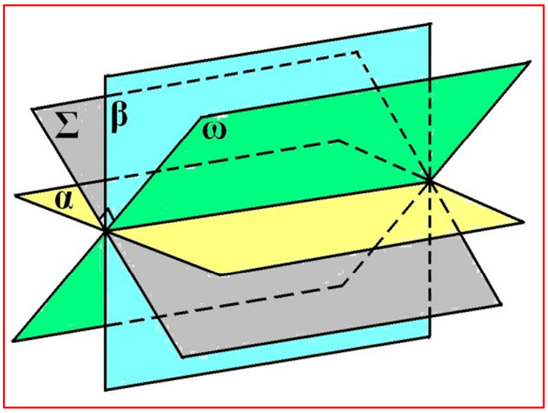


7.1.7. ГМТП, рівновіддалених від заданих трьох паралельних прямих *b*, *c*, *d*, що не лежать на одній площині, є <u>пряма *a*</u>, яку можна прийняти за вісь обертання прямого кругового циліндра, на бічній поверхні якого знаходяться задані прямі *b*, *c*, *d*.

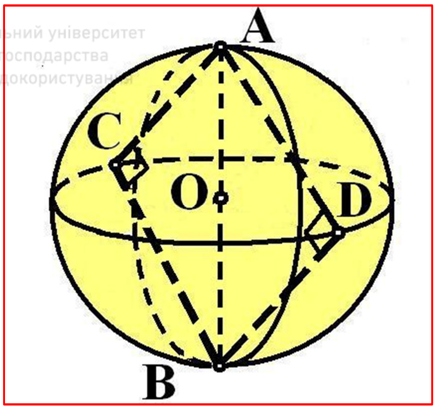


7.1.8. ГМТП, віддалених від заданої площини β на заданій відстані *l*, є <u>дві площини</u> α і ω, які паралельні заданій площині β і розміщені з двох боків від неї на заданій відстані *l*.

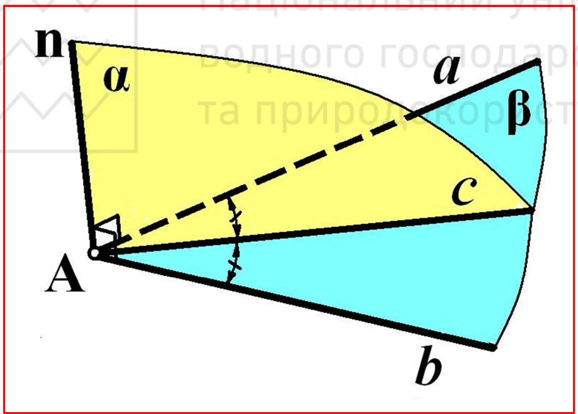
7.1.9. ГМТП, рівновіддалених від двох паралельних площин α і ω, є <u>площина</u> β, яка паралельна даним площинам і проходить через середину (точку В) відрізка АС, який визначає відстань між площинами α і ω та перпендикулярний до них.



7.1.10. ГМТП, рівновіддалених від двох площин α і β, що перетинаються, є <u>дві взаємно перпендикулярні площини</u> *ω* і Σ, які є <u>бісекторними площинами двогранних кутів</u>, утворених заданими площинами α і β.

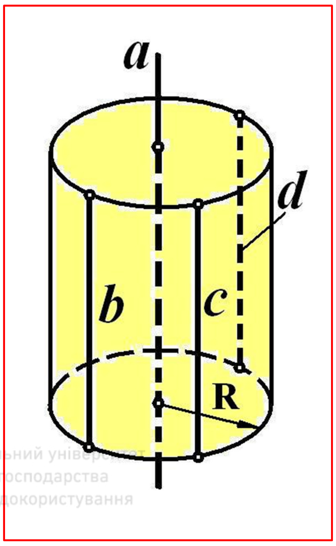


7.1.11. ГМТП, які містять вершини прямокутних трикутників, що мають спільну гіпотенузу, є <u>поверхня кулі (сфера)</u>, діаметр AB, якої є ця гіпотенуза. Вершини C і D, як і вершини A і B, прямокутних трикутників ABC і ABD зі спільною гіпотенузою AB знаходяться на поверхні кулі з центром в точці O.

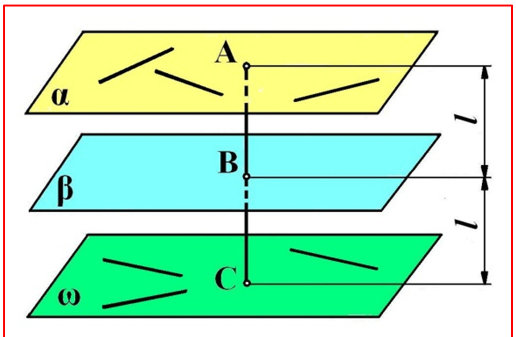


7.1.12. ГМТП, рівновіддалених від прямих *a* і *b*, що перетинаються, є <u>площина</u> α, яка проходить через бісектрису *c* кута між заданими прямими *a* і *b* та перпендикулярно до площини β, утвореної прямими *a* і *b*.

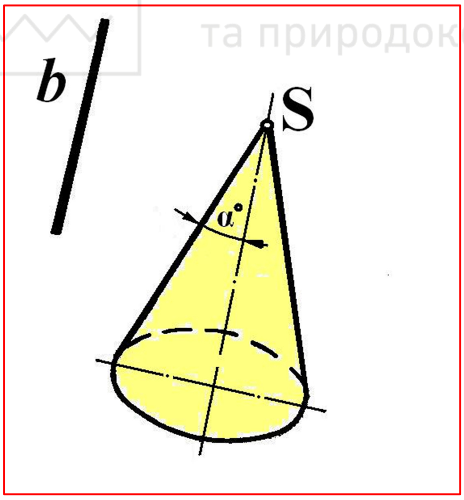
7.2. Геометричні місця прямих простору (ГМПП)



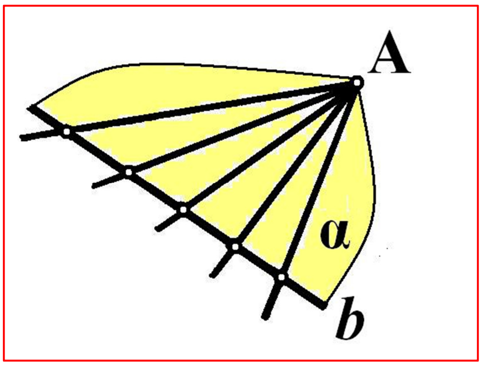
7.2.1. ГМПП, паралельних заданій прямій *a* і віддалених від неї на задану відстань R, є <u>бічна поверхня прямого кругового циліндра</u>, віссю якого є задана пряма *a*, а радіус R кола нормального перерізу поверхні дорівнює заданій відстані.
Прямі *a*, *b*, *d*, які є твірними поверхні прямого кругового циліндра, віддалені від прямої *a* – осі циліндра – на відстань, що дорівнює R.



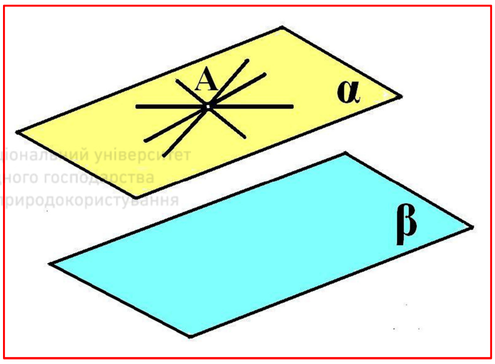
7.2.2. ГМПП, віддалених від заданої площини β на задану відстань *l*, є <u>дві площини αі ω</u>, які паралельні заданій площині β і розміщені з двох боків від неї на заданій відстані *l*.



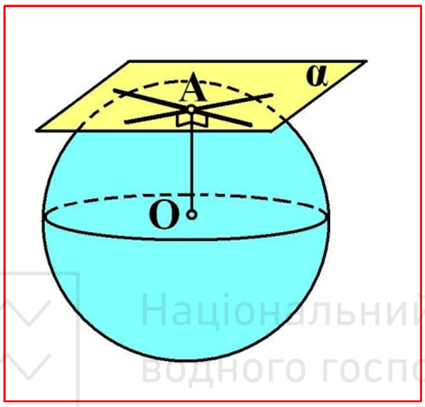
7.2.3. ГМПП, які проходять через задану точку S і нахилені до заданої прямої *b* під заданим кутом α^0, є <u>сукупність твірних бічної поверхні прямого кругового конуса з</u> вершиною в заданій точці S і віссю, що паралельна заданій прямій, причому твірні поверхні конуса утворюють кут з віссю, який дорівнює заданному куту α^0.
Якщо задана точка S буде розміщена на заданій прямій *b*, то пряма *b* буде віссю конуса, а твірні бічної поверхні конуса перетинають вісь в точці S під заданим кутом. На наведеному рисунку твірні бічної поверхні конуса відносно заданої прямої *b* є мимобіжними.



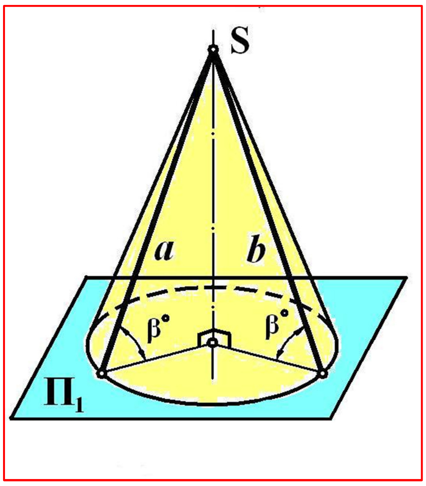
7.2.4. ГМПП, які проходять через задану точку А і перетинають задану пряму *b*, є площина α, яка утворена заданою точкою А і прямою *b*.



7.2.5. ГМПП, які проходять через задану точку А і паралельні заданій площині β, є площина α, що проходить через задану точку А і паралельна заданій площині β.

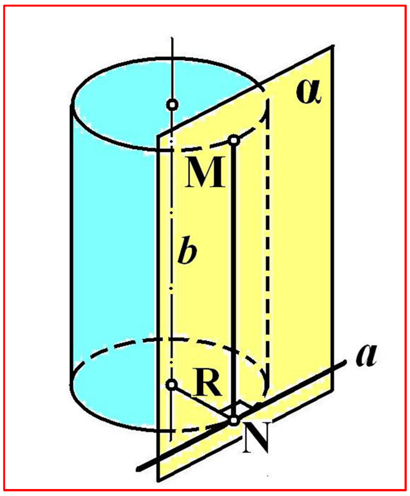


7.2.6. ГМПП, які є дотичними до поверхні кулі (сфери) в заданій точці А на її поверхні, є площина *α*, яка пройде через задану точку А перпендикулярно до радіуса сфери, проведеного з центра сфери (точки О) до точки А.



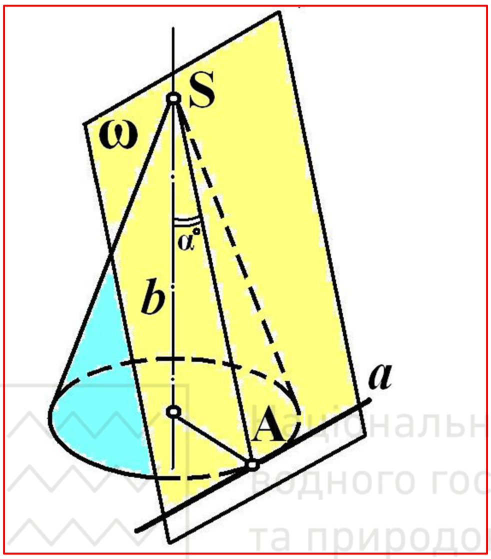
7.2.7. ГМПП, що проходять через задану точку S і нахилені під заданим кутом β^0 до заданої площини, наприклад площини проекцій $П_1$, є бічна поверхня прямого кругового конуса з вершиною в заданій точці S і твірними, наприклад *a* і *b*, що складають із заданою площиною заданий кут β^0 , причому вісь обертання цієї поверхні проходить через задану точку S перпендикулярно до заданої площини.

7.3. Геометричні місця площин простору (ГМПлП)



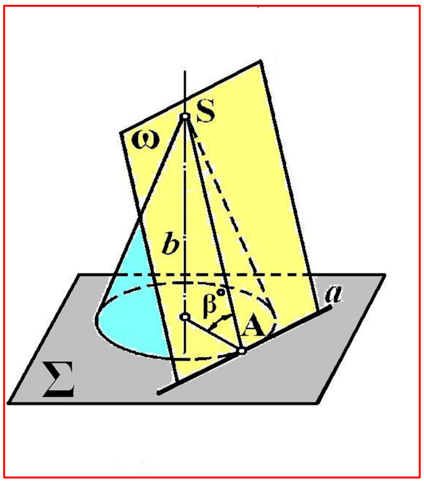
7.3.1. ГМПлП, які паралельні до заданої прямої *b* і віддалені від неї на задану відстань R, є <u>безліч площин</u> (на рисунку показано лише одну з цих площин – площину α), дотичних до циліндричної поверхні обертання, віссю якої є задана пряма *b*, а радіус нормального перерізу поверхні дорівнює заданій відстані R.

Пряма MN – твірна циліндричної поверхні, по якій площина α дотикається до поверхні циліндра, *a* – дотична до кола нормального перерізу циліндра (площина α проходить через прямі MN і *a*).



7.3.2. ГМПлП, які проходять через задану точку S під заданим кутом α^0 до будь-якої прямої *b*, є <u>безліч площин</u> (на рисунку показано лише одну з цих площин – площину *ω*), дотичних до конічної поверхні обертання з вершиною в заданій точці S, причому віссю поверхні є дана пряма *b*, а твірні поверхні нахилені до осі під заданим кутом α^0.

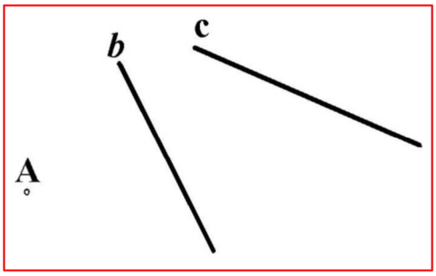
Якщо точка S не лежить на заданій прямій, то твірні конічної поверхні з віссю, яка не збігається із заданою прямою, є мимобіжними прямими. Пряма SA – твірна конічної поверхні, по якій площина ω дотикається до поверхні конуса, *a* – дотична до кола нормального перерізу конуса (площина ω проходить через прямі SA і *a*).



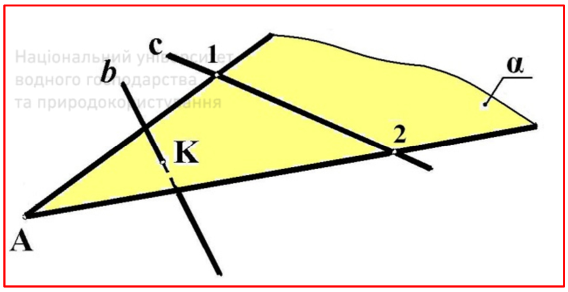
7.3.3. ГМПлП, які проходять через задану точку S під заданим кутом β^0 до заданої площини Σ, є <u>безліч площин</u> (на рисунку показано лише одну з цих площин – площину ω), дотичних до конічної поверхні обертання з вершиною в заданій точці S, причому вісь поверхні перпендикулярна до даної площини Σ, а твірні нахилені до цієї площини під заданим кутом β^0. Пряма SA – твірна конічної поверхні, по якій площина ω дотикається до поверхні конуса, *a* – дотична до кола нормального перерізу конуса (площина ω проходить через прямі SA і *a*).

7.4. Приклади задач із застосуванням геометричних місць простору

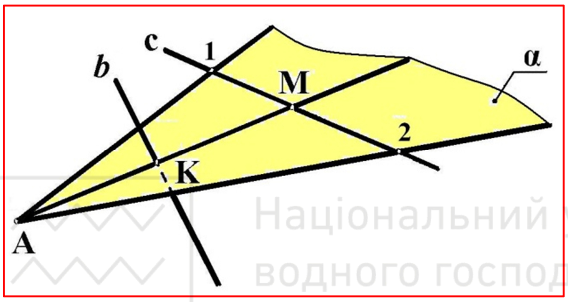
Задача № 1



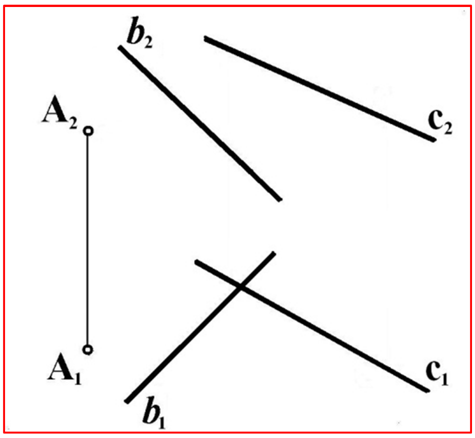
Початкова умова задачі.
Через точку А провести пряму, що перетинає прямі *b* і с.



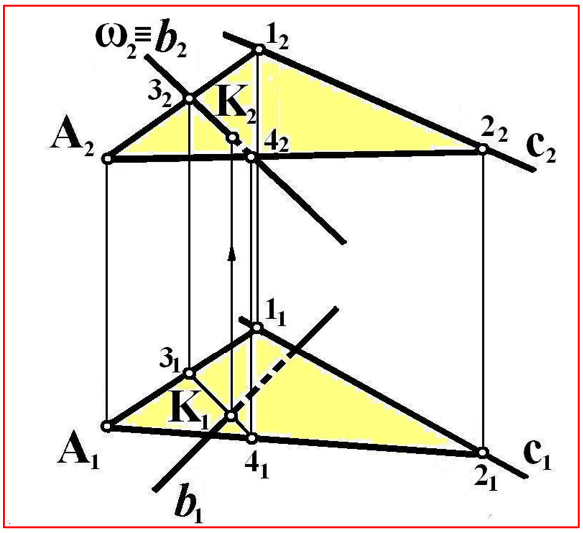
Розв'язування задачі на наочному зображенні (проміжний етап):
Геометричним місцем прямих, що проходять через точку А і перетинають пряму с, є площина α, задана цими елементами (пункт 7.2.4).
1. На прямій с візьмемо точки 1 і 2. Через точку А проводимо прямі А1 і А2, які задають площину α.
2. Знаходимо точку К перетину прямої *b* з площиною α.



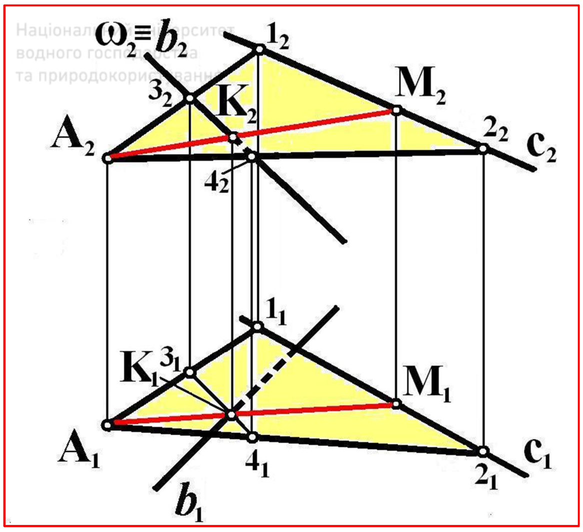
Розв'язування задачі на наочному зображенні (заключний етап):
Шукана пряма пройде через точки А і К та перетне пряму с в точці М.



Початкова умова задачі на епюрі.

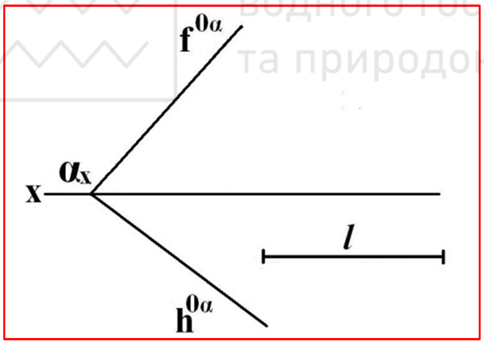


Розв'язування задачі на епюрі (проміжний етап):
1. Задаємо площину α двома прямими, що перетинаються А1 і А2.
2. Знаходимо точку К перетину прямої *b* з площиною α за допомогою фронтально-проекціюючої площини ω.



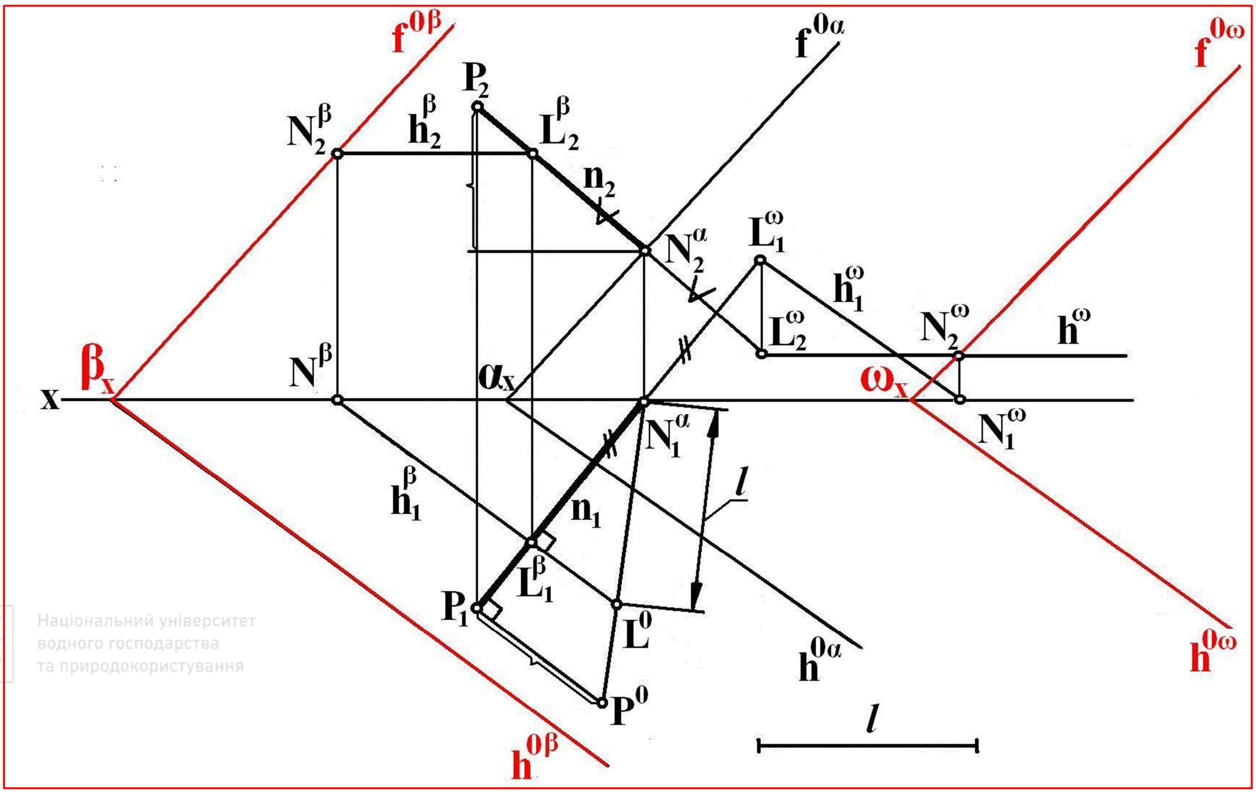
Розв'язування задачі на епюрі (заключний етап):
Будуємо шукану пряму, яка пройде через точку А, знайдену точку К та перетне пряму с в точці М.

Задача № 2



Початкова умова задачі на епюрі.
Побудувати геометричне місце точок, віддалених від площини α, що задана слідами, на відстані *l*.

Розв'язування задачі:
ГМПлП, віддалених від заданої площини на задану відстань, є дві площини, які паралельні заданій площині і розміщені з двох боків від неї на заданій відстані (пункт 7.2.2).
Послідовність розв'язування:



1. На заданій площині α візьмемо точку N^{α}, що лежить на фронтальному сліді $f^{0\alpha}$.

2. З точки N^{α} проводимо перпендикуляр n до площини α: $n_1 \perp h^{0\alpha}$ і $n_2 \perp f^{0\alpha}$.

3. На n_2 фіксуємо точку P і визначаємо Н.В. відрізка NP способом прямокутного трикутника: $P^0N_1^{\alpha}$ = Н.В. NP.

4. На гіпотенузі $P^0N_1^{\alpha}$ прямокутного трикутника $P^0P_1N_1^{\alpha}$ відкладаємо від N_1^{α} відрізок $N_1^{\alpha}P^0 = l$. Визначаємо L_1^{β} і L_2^{β}. Точка L^{β} знаходиться від площини α на відстані *l*.

5. Через точку L^{β} проводимо площину β, паралельну до площини α. Для цього через L^{β} проводимо горизонтальну пряму h^{β} площини β таким чином, щоб $h_1^{\beta} // h^{0\alpha}$.

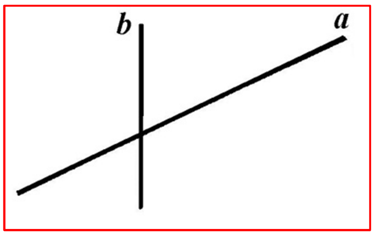
6. Фіксуємо фронтальний слід N^{β} горизонтальної прямої h^{β}, через який проводимо $f^{0\beta} // f^{0\alpha}$. Визначаємо βx, проводимо $h^{0\beta} // h^{0\alpha}$.

Побудована площина β паралельна до заданої площині α і віддалена від неї на відстані *l*, оскільки сліди площин паралельні, а точка L^{β}, через яку проходить площина β віддалена від α на відстань *l*.

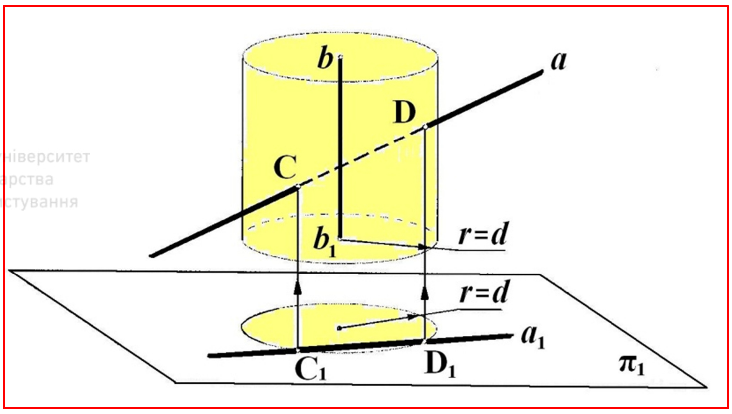
7. Будуємо другу шукану площину ω, розміщену з іншого боку від α. Для цього на n_1 і n_2 від точки N^{α} відкладаємо відрізки $L_1^{\omega}N_1^{\alpha} = N_1^{\alpha}L_1^{\omega}$ і $L_2^{\omega}N_2^{\alpha} = N_2^{\alpha}L_2^{\omega}$, отримаємо точку L^{ω}, яка віддалена від α на відстань *l* і розміщена з іншого боку площини α, ніж точка L^{β}. Точка L^{ω} знаходиться у 2 чверті простору.

8. Через L^{ω} проводимо горизонтальну пряму h^{ω} площини ω таким чином, щоб $h_1^{\omega} // h^{0\alpha}$. Фіксуємо фронтальний слід N^{ω}горизонтальної прямої h^{ω}, через який проводимо $f^{0\omega} // f^{0\alpha}$. Визначаємо ω_x, проводимо $h^{0\omega} // h^{0\alpha}$.

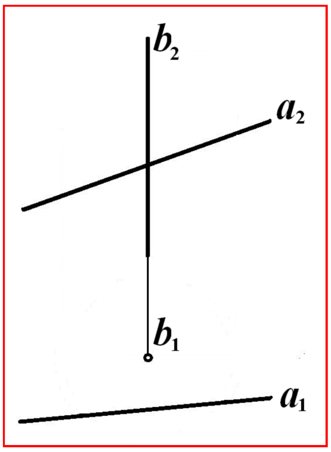
Задача № 3



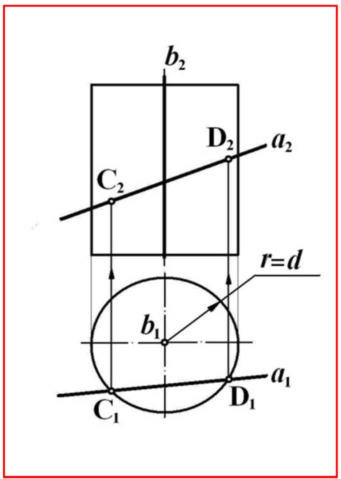
Початкова умова задачі.
Побудувати точки, що розміщені на прямій *a* і знаходяться від вертикальної прямої *b* на відстані *d*.



Розв’язування задачі на наочному зображенні:
Геометричним місцем точок простору, віддалених від заданої прямої *b* на відстань *d*, є поверхня прямого кругового циліндра, віссю обертання якого є пряма *b*, а радіус *r* кола нормального перерізу дорівнює заданій відстані *d* (пункт 7.1.5).
Оскільки пряма *b* перпендикулярна до площини π_1, то поверхня прямого кругового циліндра, віссю обертання якого є пряма *b*, проекціюється на π_1 колом радіуса *d* (r = *d*).
Знаходимо точки C_1 і D_1 перетину кола з a_1, а потім за допомогою ліній проекційного зв'язку знаходимо точки C і D прямої *a*, що віддалені від прямої *b* на відстань, що дорівнює *d*.

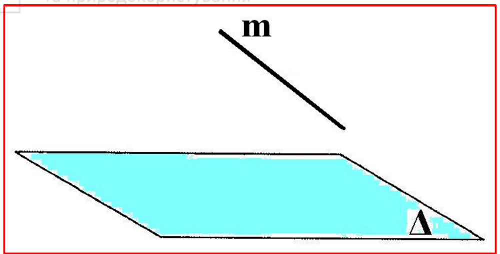


Початкова умова задачі на епюрі.

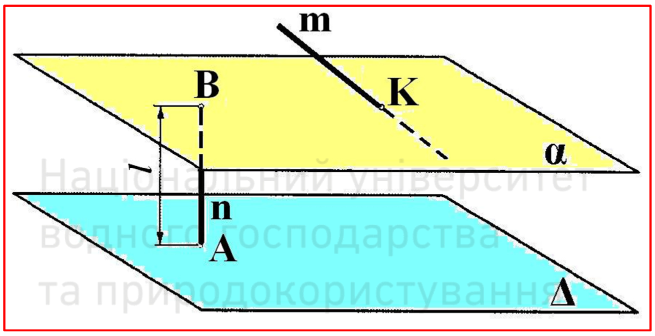


Розв'язування задачі на епюрі (циліндричну поверхню приймаємо прозорою).

Задача № 4



Початкова умова задачі.
На прямій m знайти точку К, віддалену від заданої площини Δ на відстань *l*.



Розв'язування задачі на наочному зображенні:

Геометричним місцем точок простору, віддалених від заданої площини Δ на відстань *l*, є площина α, паралельна Δ і розміщена від Δ на відстань *l* (пункт 7.1.8). Другу площину з такими властивостями, розміщену нижче Δ, не показано.

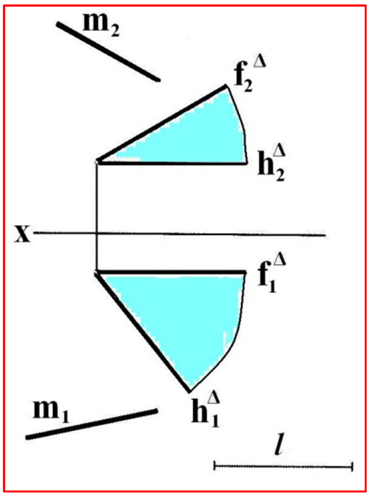
Послідовність побудов:

1. З довільної точки А площини Δ проведимо перпендикуляр n до Δ.

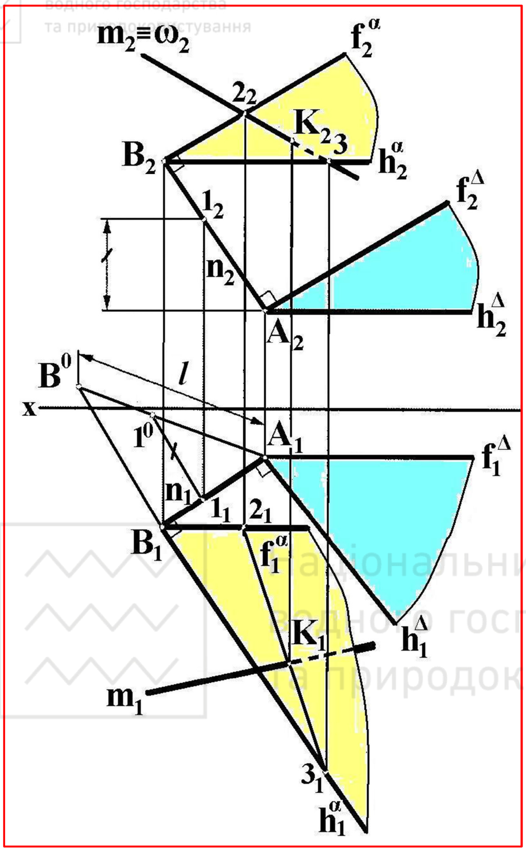
2. На n відкладаємо відрізок АВ = *l*, фіксуємо точку В.

3. Через точку В проводимо площину α //Δ.

4. Знаходимо точку К перетину m з α. Точка К належить m і віддалена від Δ на відстань *l*, оскільки лежить в площині α, віддаленій від Δ на відстань *l*.

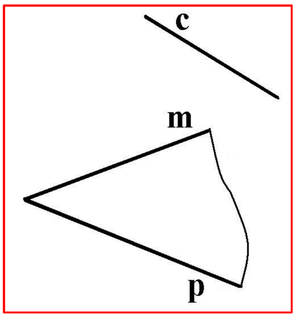


Початкова умова задачі на епюрі.
(площину Δ задано горизонталлю h^{Δ} і фронталлю f^{Δ}).

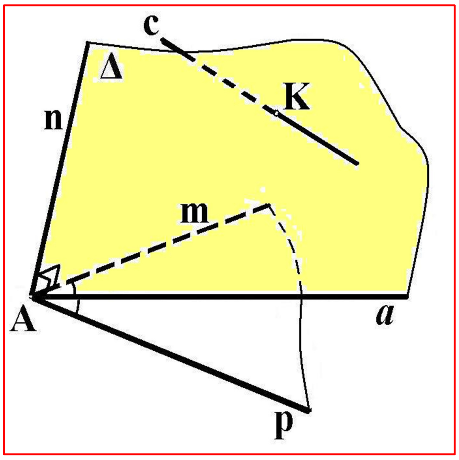


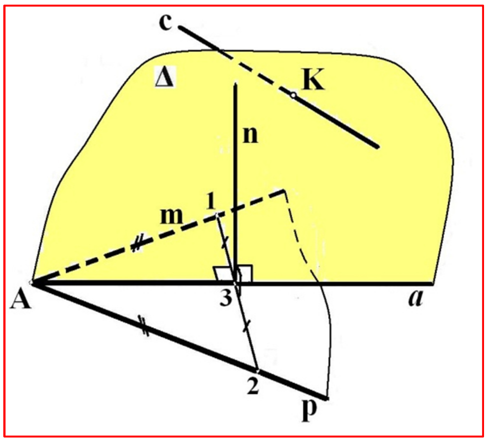
Розв'язування задачі на епюрі:
Перпендикуляр n до Δ зручно проводити з точки А перетину h^{Δ} і f^{Δ}: $n_1 \perp h_1^{\Delta}$ і $n_2 \perp f_2^{\Delta}$. Для побудови проекції відрізка АВ перпендикуляра n, який відповідає заданій відстані *l*, беремо на n довільну точку 1 і визначаємо Н.В. А1 за допомогою прямокутного трикутника $A_1 1_1 1^0$. На продовженні гіпотенузи $A_1 1^0$ відкладаємо відрізок $A_1 B^0 = l$, знаходимо B_1, а потім B_2. З точки В проводимо площину α паралельно до Δ або перпендикулярно до n. Площину α, як і Δ, задаємо горизонталлю h^{α} та фронталлю f^{α}. Точку К перетину m з α знайдено за допомогою фронтально - проекціюючої площини ω.

Задача № 5



Початкова умова задачі.
На прямій с знайти точку К, рівновіддалену від прямих m і p.





Розв'язування задачі на наочному зображенні:

Геометричним місцем точок простору, рівновіддалених від сторін m і p лінійного кута є площина Δ, яка проходить через бісектрису *a* цього кута перпендикулярно до площини, утвореної m і p (пункт 7.1.12).

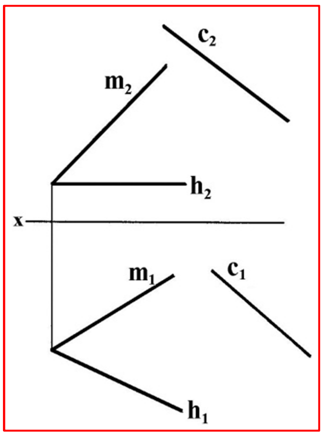
Послідовність побудов така:

1. В площині лінійного кута зі сторонами m і p з вершини A проводимо бісектрису *a* цього кута.

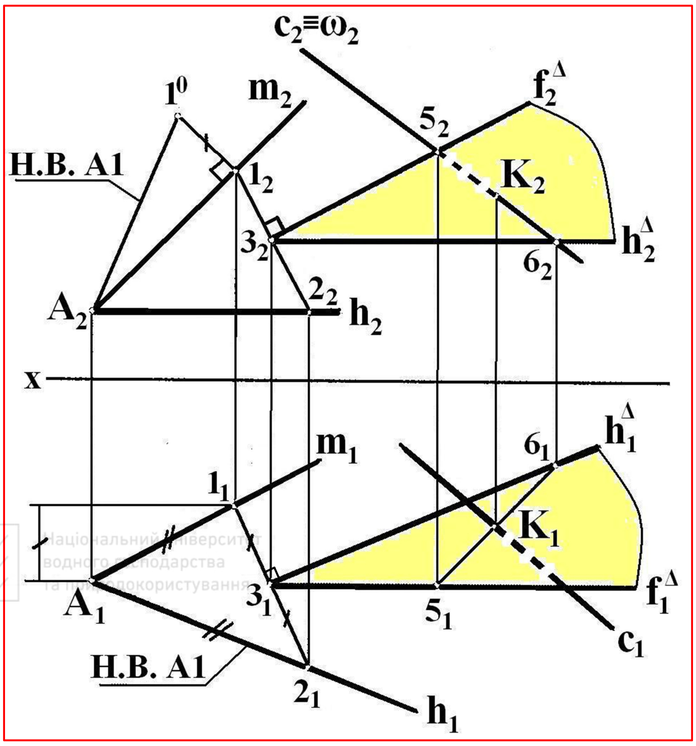
2. Через бісектрису *a* проводимо площину Δ, перпендикулярну до площини, утвореної m і p. Пряма n площини Δ перпендикулярна до площини, утвореною m і p.

3. Знаходимо точку K перетину c з Δ.

Проте бісектрису на епюрі можна провести лише у випадку, коли площина кута є паралельною до площини проекцій, оскільки проекції бісектриси кута, переважно, не є бісектрисами проекцій цього кута. Тому для проведення проекцій бісектриси кута можна застосувати такі перетворення (див. рисунок справа). З точки A на сторонах m і p відкладаємо рівні відрізки A1 і A2 та з'єднуємо точки 1 і 2 з утворенням трикутника A12. Цей трикутник рівнобедрений, де 12 – основа. Тоді висота трикутника, проведена з вершини A на 12, буде проходити через середину (точку 3) основи 12 (A3 ⊥ 12). Площину Δ можна проводити через точку 3 перпендикулярно до основи 12. Ця площина перетне площину кута по бісектрисі *a*, яку для проведення Δ можна в цьому випадку не будувати.



Початкова умова задачі на епюрі.
(на відміну від наочного зображення замість прямої загального положення p задано горизонтальну пряму h)



Розв'язування задачі на епюрі:

1. На прямій m беремо довільну точку 1 і визначаємо Н.В. відрізка А1 (A_21^0 = Н.В. А1).

2. На h відкладаємо відрізок $A_12_1=A_21^0$, знаходимо2_1 і 2_2.

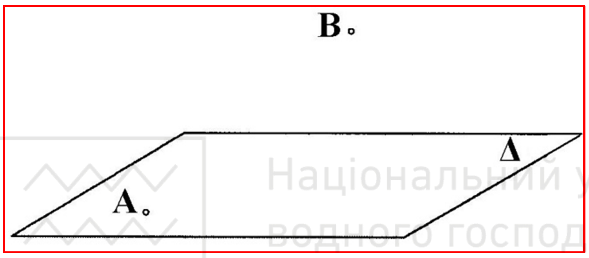
3. З'єднавши точки 1 і 2, отримаємо проекції рівнобедреного трикутника А12.

4. На основі 12 визначаємо точку 3 – середину 12.

5. Через точку 3 проводимо $\Delta \perp 12$: $h_1^\Delta \perp 1_12_1$ і $f_2^\Delta \perp 1_22_2$.

6. Точку К перетину *c* з Δ знаходимо за допомогою фронтально-проекціюючої площини ω.

Задача № 6



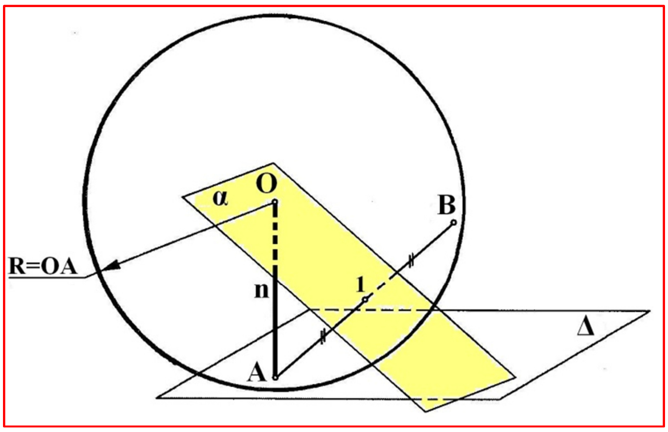
Початкова умова задачі.
Побудувати сферу, якщо вона в точці А дотикається до площини Δ, а точка В належить сфері.

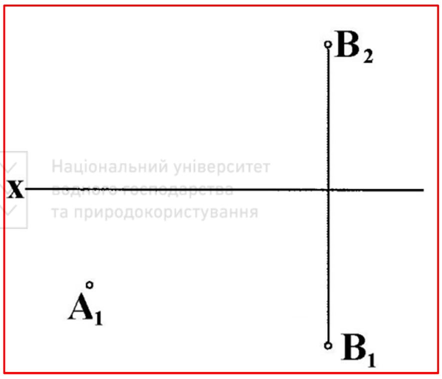
Розв'язування задачі на наочному зображенні:

Побудувати сферу - це знайти її центр та радіус. Точка А – точка дотикання сфери до Δ. Отже, центр сфери буде розміщено на перпендикулярі n, що виходить з точки А перпендикулярно до Δ. З іншого боку, центр сфери (точка О) рівновіддалена від усіх точок сфери, а, отже, і від А та В. Геометричним місцем точок простору, рівновіддалених від А і В, є площина α, що проходить через середину відрізка АВ (точку 1) перпендикулярно до АВ (пункт 7.1.2).

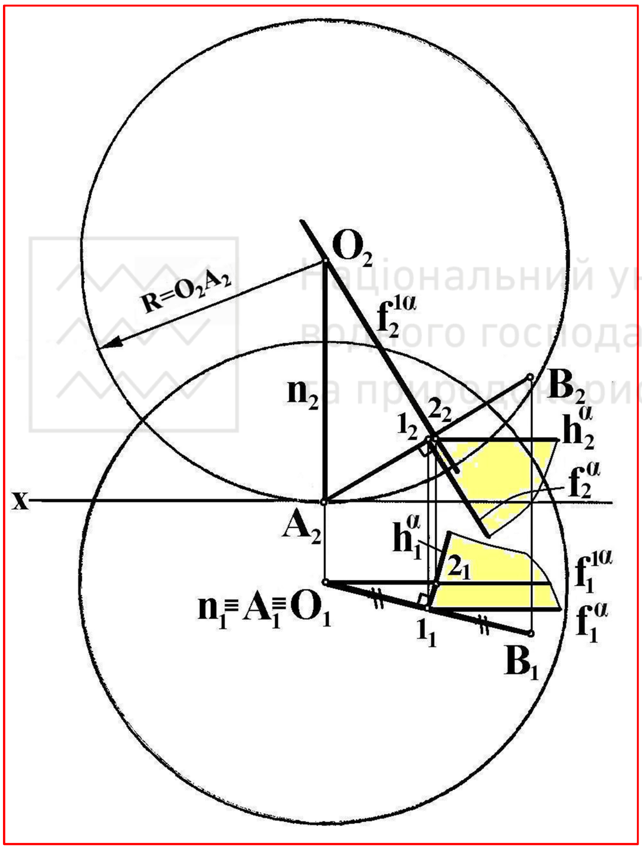
Послідовність побудов:

1. З точки А проводимо перпендикуляр n до Δ.
2. З'єднуємо точки А і В та визначаємо середину відрізка АВ (точку 1).
3. Через точку 1 проводимо α ⊥ АВ.
4. Знаходимо точку О перетину n з α. Ця точка і буде центром сфери, рівновіддаленої від А і В.





Початкова умова задачі на епюрі.
(Δ – це горизонтальна площина проекцій $П_1$)



Розв'язування задачі на епюрі:

1. Знаходимо A_2. Оскільки A належить $П_1$, то A_2 лежить на осі *x*.

2. Будуємо проекції перпендикуляра n, на якому лежить центр сфери. Оскільки $n \perp П_1$, то $n_1 \equiv A_1$, а $n_2 \perp x$.

3. Знаходимо середину відрізка AB (точку 1).

4. Через точку 1 проводимо $\alpha(h^{\alpha} \cap f^{\alpha}) \perp AB$: $h_1^{\alpha} \perp A_1B_1$ і $f_2^{\alpha} \perp A_2B_2$.

5. Знаходимо точку O перетину перпендикуляра n з площиною α. Оскільки точка O лежить на n, а $n \perp П_1$, то $O_1 \equiv n_1$. O_2 знаходиться за допомогою фронталі $f^{1\alpha}$ площини α.

6. Визначаємо Н.В. радіуса R сфери ($R = O_2A_2$, оскільки $n \perp П_1$ або $n \parallel П_2$).

7. Радіусом $R = O_2A_2$ проводимо з точок O_1 і O_2 проекції сфери.

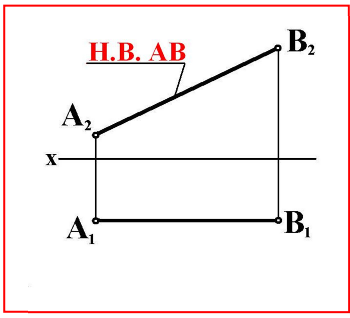
Розділ 8. Способи перетворення проекцій

8.1. Мета застосування способів перетворення проекцій

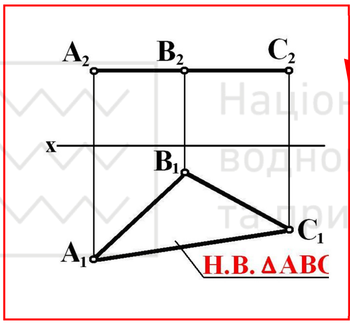
Трудомісткість графічного розв'язування задачі багато в чому залежить від того, яке положення відносно площин проекцій займають геометричні фігури, що входять в початкову умову задачі.
Орієнтуючись на вісь проекцій, можна за розміщенням проекцій геометричних фігур відносно осі проекцій судити про їх положення в просторі.

Приклади епюрів геометричних фігур, коли розміщення їх проекцій відносно осі проекцій або самих фігур відносно площин проекцій, <u>дозволяє</u> без графічних побудов або з мінімальною їх кількістю дати відповідь на поставлену задачу:

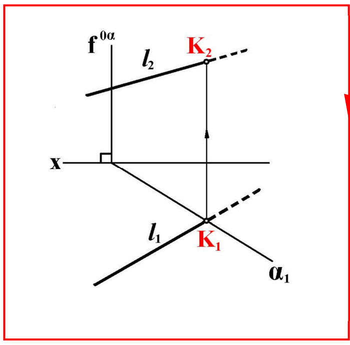
Н.В. відрізка АВ фронтальної прямої визначено без графічних побудов: A_2B_2 = Н.В. АВ.



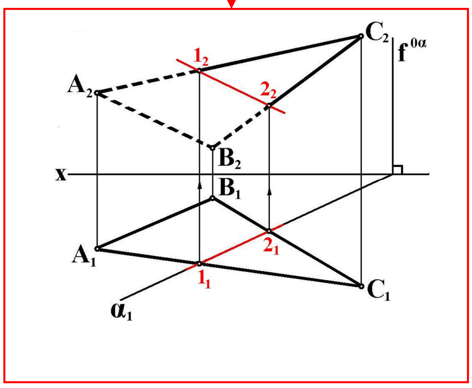
Н.В. трикутника АВС, площина якого паралельна до $П_1$, визначено без графічних побудов: $A_1B_1C_1$ = Н.В. ΔАВС.



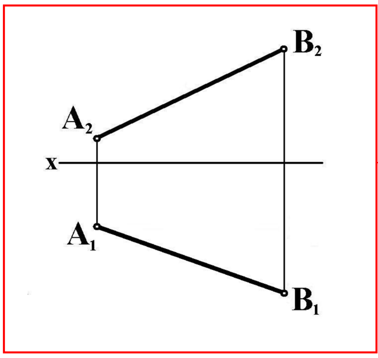
Точку К перетину горизонтально-проекціюючої площини α з прямою *l* визначено за мінімальною кількістю графічних побудов.



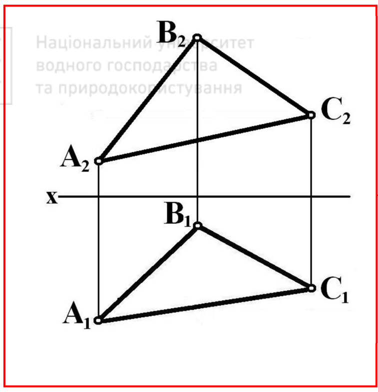
Лінію 12 перетину горизонтально-проекціюючої площини α з площиною загального положення, заданої трикутником АВС, визначено за мінімальною кількістю графічних побудов.



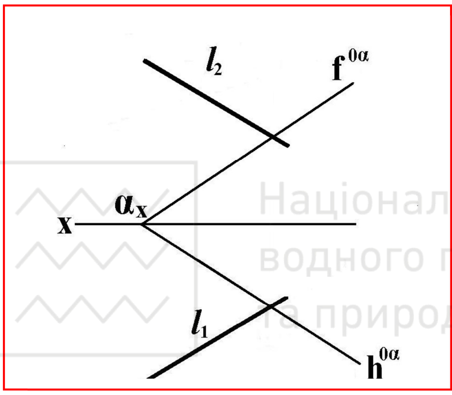
Приклади епюрів геометричних фігур, коли розміщення їх проекцій відносно осі проекцій або самих фігур відносно площин проекцій, <u>не дозволяє</u> без значних графічних побудов дати відповідь на поставлену задачу:



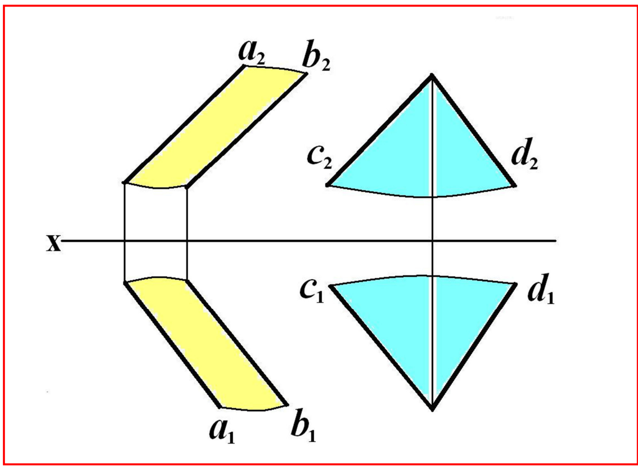
Визначення Н.В. відрізка AB прямої загального положення відразу за епюром не є можливим, оскільки проекції відрізка коротші за його Н.В. Поставлена задача може бути вирішена тільки за допомогою додаткових графічних побудов, зокрема способом прямокутного трикутника.



Визначення безпосередньо за епюром Н.В. трикутника ABC, який займає загальне положення відносно $П_1$ і $П_2$, не є можливим, оскільки площина трикутника не паралельна до $П_1$ і $П_2$, тому його проекції мають спотворений вигляд порівняно з Н.В. самого трикутника. Для визначення його Н.В. потрібно виконати додаткові графічні побудови, наприклад, визначити Н.В. кожної сторони, а потім за трьома сторонами побудувати Н.В. трикутника ABC.



Визначення точки перетину прямої загального положення *l* з площиною загального положення α можливе лише за допомогою додаткових графічних побудов, зокрема за відомим алгоритмом проведення січної площини через задану пряму *l* .



Визначення лінії перетину двох площин загального положення, заданих паралельними прямими *a* і *b* та прямими *c* і *d*, що перетинаються, можливе лише за допомогою додаткових графічних побудов, зокрема за відомим алгоритмом проведення допоміжних січних площин.

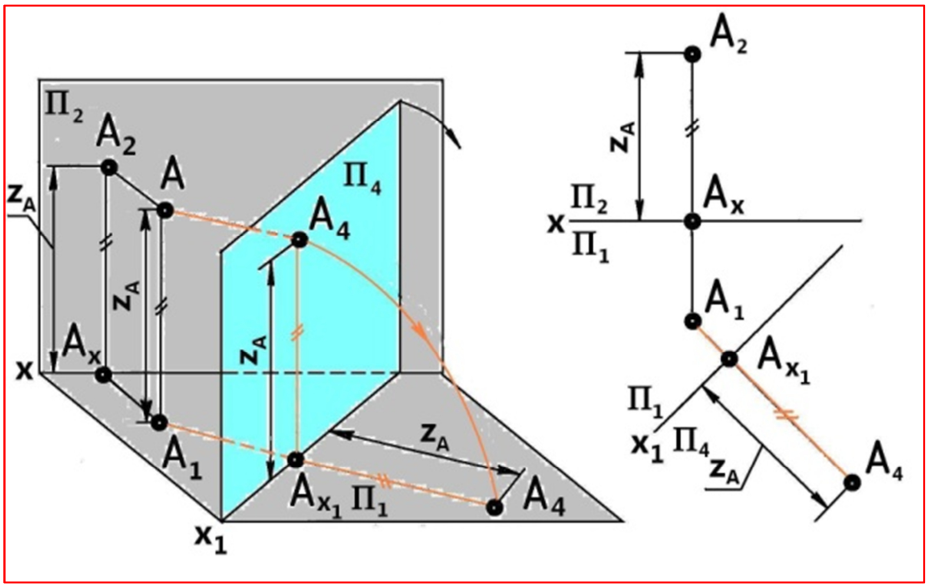
Наведені в таблицях приклади показують, що проекції геометричних фігур можуть бути зручними та забезпечувати просте розв'язування задачі – це за частковим розміщенням прямих та плоских геометричних фігур відносно площин проекцій, коли фігури перпендикулярні або паралельні до площин проекцій. Проекції геометричних фігур можуть бути незручними, вони потребують для розв'язування тієї ж задачі додаткових, часом громіздких, графічних побудов. Це зазвичай буває за загальним розміщенням геометричних фігур відносно площин проекцій.
Якщо потрібно певним чином зорієнтувати геометричну фігуру в просторі, то її проекції повинні бути певним чином зорієнтовані відносно осі проекцій.

Метою способів перетворення проекцій є перехід від загального положення, незручного для розв'язування задач, за яким геометричні фігури проекціюються у спотвореному вигляді, до часткового положення, зручного, який забезпечує простий розв'язок задачі, коли величина та форма геометричної фігури проекціюються без спотворення. Крім того, при переході від загального до часткового положення полегшується розв'язування задач, пов'язаних з побудовою точок та ліній перетину геометричних фігур. При цьому кінцевий результат перетворень повинен давати відповідь на розв'язування задачі.
Перехід від загального положення геометричної фігури до часткового здійснюється або введенням нових площин проекцій відносно нерухомих геометричних фігур, або обертанням фігур відносно нерухомих площин проекцій.

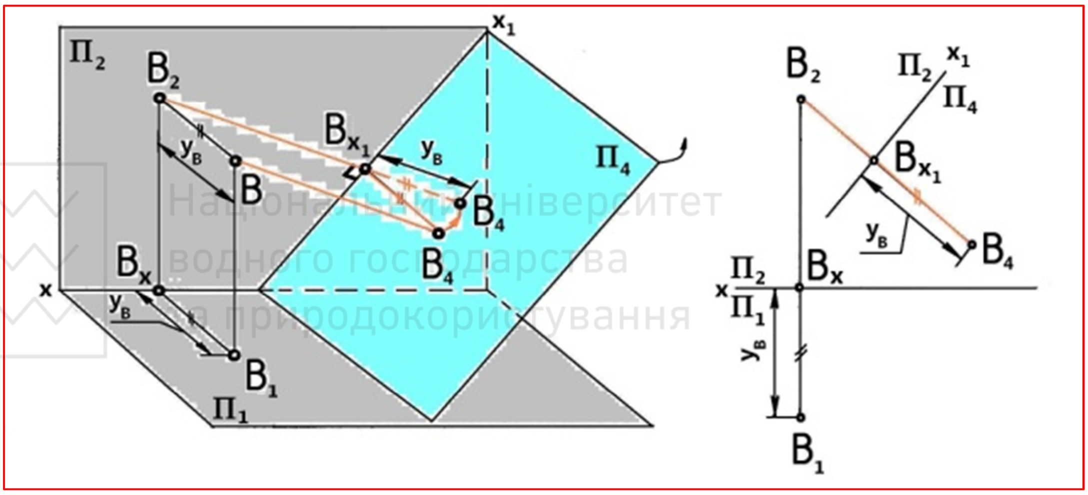
8.2. Спосіб заміни площин проекцій

Суть способу заміни площин проекцій полягає у тому, що геометричні фігури не змінюють в просторі свого положення, а система площин проекцій $П_2/П_1$ (стара система) доповнюється новими площинами проекцій $П_4$, $П_5$, що утворюють з $П_2$, $П_1$ або між собою нову систему площин проекцій, відносно якої геометричні фігури займають часткове положення, зручне для розв'язування даної задачі.
Перша нова площина проекцій ($П_4$) розміщується перпендикулярно до однієї із заданих (старих) площин проекцій ($П_1$ або $П_2$). Друга нова площина проекцій $П_5$, яку уводять за потребою, розміщується перпендикулярно до $П_4$, таким чином відбувається повна заміна старих систем площин проекцій $П_1$, $П_2$, і нерухомі геометричні фігури розглядаються в новій системі площин проекцій $П_4/П_5$.
Одночасно дозволяється замінювати тільки одну стару площину проекцій на одну нову площину проекцій. Це забезпечує незмінність однієї з проекцій, яка виконує функцію ланки, що зв'язує між собою нову та вихідну проекції.

Розглянемо графічну сутність способу на прикладі проекціювання точки.



Уводимо нову площину проекцій Π_4, розміщуючи її перпендикулярно до Π_1. Π_4 з Π_1 перетинаються по новій осі проекцій x_1, яку можна розглядати як слід-проекцію Π_4 на Π_1. Утворилася нова система площин проекцій $x_1\Pi_4/\Pi_1$, в якій збереглася проекція A_1 на Π_1 (задана проекція) та побудована проекція A_4 на Π_4 (нова проекція).
Відстань точки А до Π_1 дорівнює відстані A_2 до осі x, а також дорівнює відстані A_4 до нової осі x_1. Зазначені відстані дорівнюють z_A. Це дозволяє, маючи задані проекції A_1 і A_2 в системі $x\Pi_2/\Pi_1$, побудувати нову проекцію A_4 точки А на площині Π_4.



Уводимо нову площину проекцій Π_4, розміщуючи її перпендикулярно до Π_2. Π_4 з Π_2 перетинаються по новій осі проекцій x_1, яку можна розглядати як слід-проекцію Π_4 на Π_2. Утворилася нова система площин проекцій $x_1\Pi_4/\Pi_2$, в якій збереглася проекція B_2 на Π_2 (задана проекція) та побудована проекція B_4 на Π_4 (нова проекція).

Відстань від точки В до Π_2 дорівнює відстані B_2 до осі x, а також дорівнює відстані B_4 до нової осі x_1. Зазначені відстані дорівнюють y_B. Це дозволяє, маючи задані проекції B_1 і B_2 в системі $x\Pi_2/\Pi_1$, побудувати нову проекцію B_4 точки В на площині Π_4.

Основні положення способу:

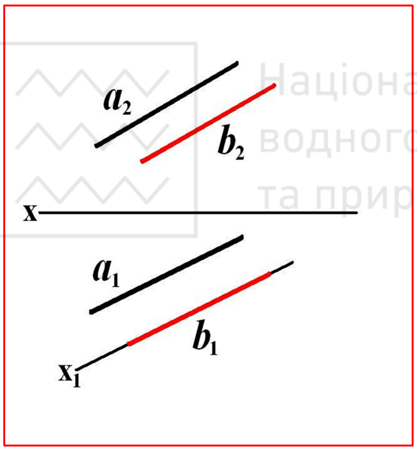
1. При переході до нової системи одна з площин проекцій старої системи зберігається як одна з площин проекцій нової системи, а другу площину проекцій старої системи замінюють на нову площину проекцій, яку розміщують перпендикулярно до тієї старої площини проекцій, яку зберігають.

2. Проекції точки в новій системі площин проекцій розміщені, як і в старій, на одній лінії проекційного зв'язку, яка перпендикулярна до нової осі проекцій.

3. Відстань від нової проекції точки до нової осі проекцій дорівнює відстані від проекції точки, що замінюється, до старої осі проекцій.

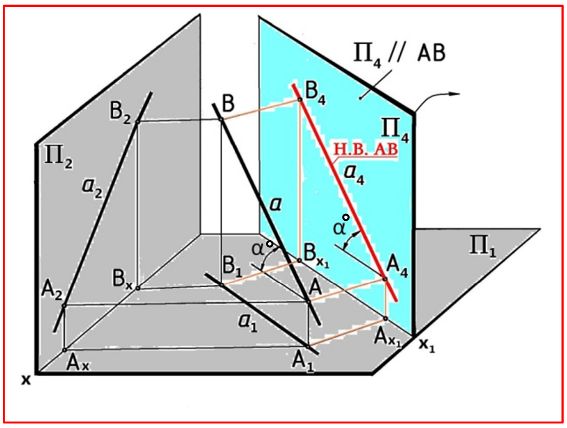
ВИКОНАННЯ ПЕРЕТВОРЕНЬ ШЛЯХОМ ЗАМІНИ ОДНІЄЇ ПЛОЩИНИ ПРОЕКЦІЙ

8.2.1. Перетворення прямої загального положення в пряму рівня



Пояснення до виконання побудов.

У прямої рівня на епюрі одна з проекцій паралельна до осі проекцій x. Тому для перетворення прямої загального положення в пряму рівня нову вісь проекцій x_1 потрібно проводити паралельно до однієї із заданих проекцій прямої загального положення. Якщо x_1 паралельна, наприклад, до a_1 прямої загального положення a, то $П_4$ буде паралельною до прямої a. Це можна просто довести, провівши в $П_4$ пряму, наприклад b, паралельну до a: $b_1 // a_1$, $b_2 // a_2$. Пряма b належить $П_4$, оскільки $b_1 \equiv x_1$, а x_1 можна розглядати як слід-проекцію площини проекцій $П_4$. Крім того, площина $П_4$ може бути новою площиною проекцій, оскільки вона перпендикулярна до $П_1$ і проекціюється на $П_1$ в свій слід-проекцію x_1, яка водночас є новою віссю проекцій нової системи площин проекцій $x_1П_4/П_1$, де задана пряма a стає прямою рівня, паралельною до $П_4$.



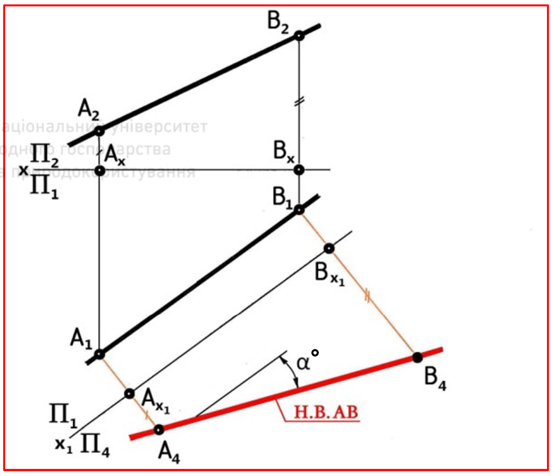
Умова задачі: **перетворити пряму загального положення AB в пряму рівня.**

Послідовність побудов:

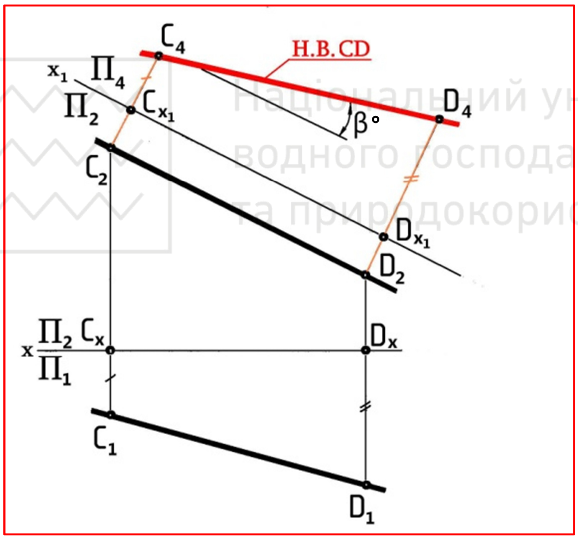
1. Проводимо x_1 // A_1B_1.

2. Будуємо A_4 і B_4 на $П_4$.

В результаті побудов пряма AB, яка в системі $xП_2/П_1$ займає загальне положення, перетворилася в системі $x_1П_4/П_1$ на пряму рівня, паралельну $П_4$.



$П_4$ // AB, оскільки x_1 // A_1B_1; $П_4 \perp П_1$; Кут α^0 – кут нахилу прямої AB до $П_1$; A_4B_4 = Н.В. AB.



Умова задачі: **перетворити пряму загального положення CD в пряму рівня.**

Послідовність побудов:

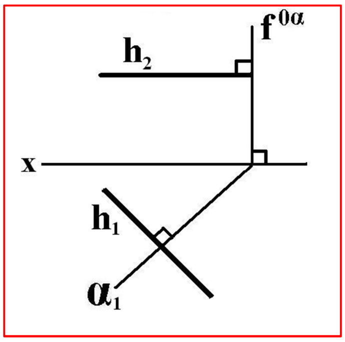
1. Проводимо x_1 // C_2D_2.

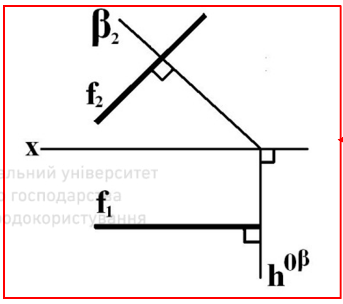
2. Будуємо C_4 і D_4 на $П_4$.

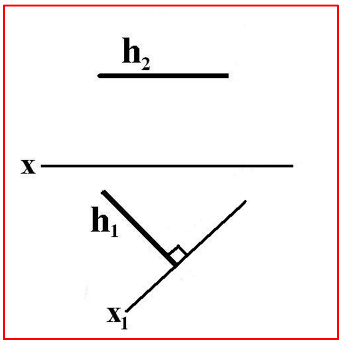
В результаті побудов пряма CD, яка в системі $xП_2/П_1$ займає загальне положення, перетворилася в системі $x_1П_4/П_2$ на пряму рівня, паралельну $П_4$.

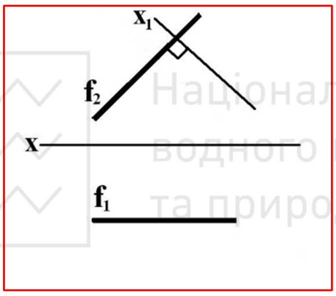
$П_4$ // CD, оскільки x_1 // C_2D_2; $П_4 \perp П_2$; Кут β^0 – кут нахилу прямої CD до $П_2$; C_4D_4 = Н.В. CD.

8.2.2. Перетворення прямої рівня в проекціюючу



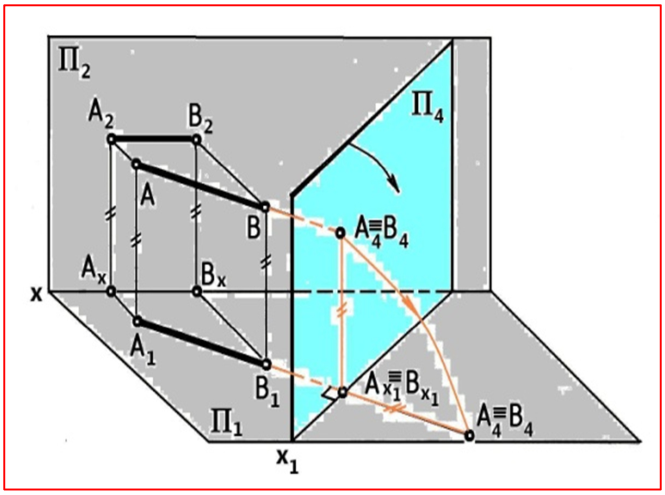


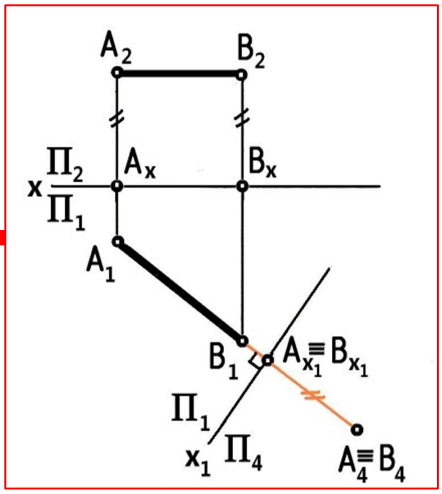


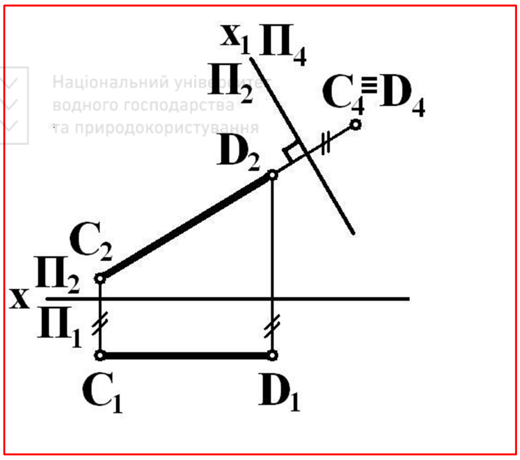


Пояснення до виконання побудов.
Щоб пряма рівня в новій системі площин проекцій перетворилася в проекціюючу, потрібно нову вісь x_1 провести перпендикулярно до горизонтальної проекції горизонтальної прямої або до фронтальної проекції фронтальної прямої.
Площина α перпендикулярна до h, оскільки $\alpha_1 \perp h_1$ і $f^{0\alpha} \perp h_2$.
Площина β перпендикулярна до f, оскільки $h^{0\beta} \perp f_1$ і $\beta_2 \perp f_2$.
Нову вісь x_1 можна уявити як сліди-проекції α_1 і β_2 проекціюючих площин α і β, а самі площини α і β є аналогами нової площини проекцій $П_4$, оскільки вони не тільки перпендикулярні до h і f, але перпендикулярні до однієї із заданих площин проекцій $П_1$ і $П_2$.

Умова задачі: **перетворити горизонтальну пряму АВ в проекціюючу.**
Послідовність побудов:
1. Проводимо $x_1 \perp A_1B_1$.
2. Будуємо A_4 і B_4 на $П_4$: $A_4 \equiv B_4$.
В результаті побудов пряма АВ, яка в системі $xП_2/П_1$ є горизонтальною прямою, перетворилася в системі $x_1П_4/П_1$ на проекціюючу пряму, перпендикулярну до $П_4$.
$П_4 \perp AB$, оскільки $x_1 \perp A_1B_1$; $П_4 \perp П_1$.







Умова задачі: перетворити фронтальну пряму CD в проекціююючу.

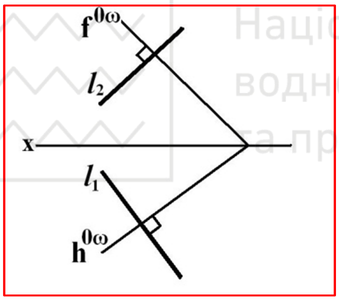
Послідовність побудов:

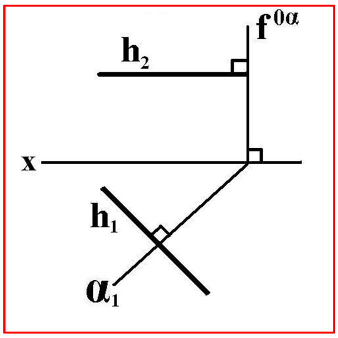
1. Проводимо $x_1 \perp C_2D_2$.
2. Будуємо C_4 і D_4 на $П_4$: $C_4 \equiv D_4$.

В результаті побудов пряма CD, яка в системі $xП_2/П_1$ є фронтальною прямою, перетворилася в системі $x_1П_4/П_1$ на проекціюючу пряму, перпендикулярну до $П_4$.

$П_4 \perp CD$, оскільки $x_1 \perp C_2D_2$; $П_4 \perp П_2$.

8.2.3. Перетворення площини загального положення в проекціюючу

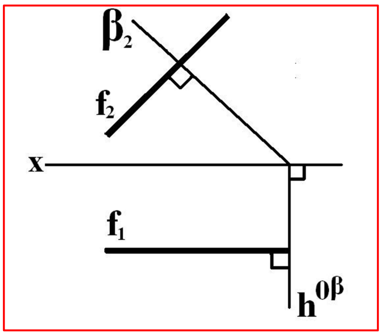




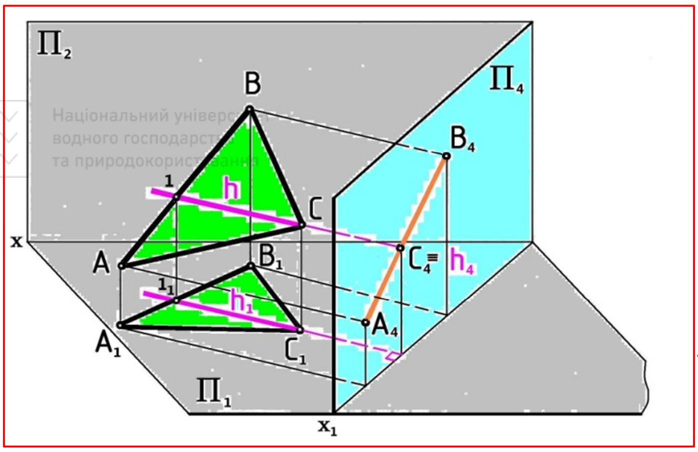
Пояснення до виконання побудов.

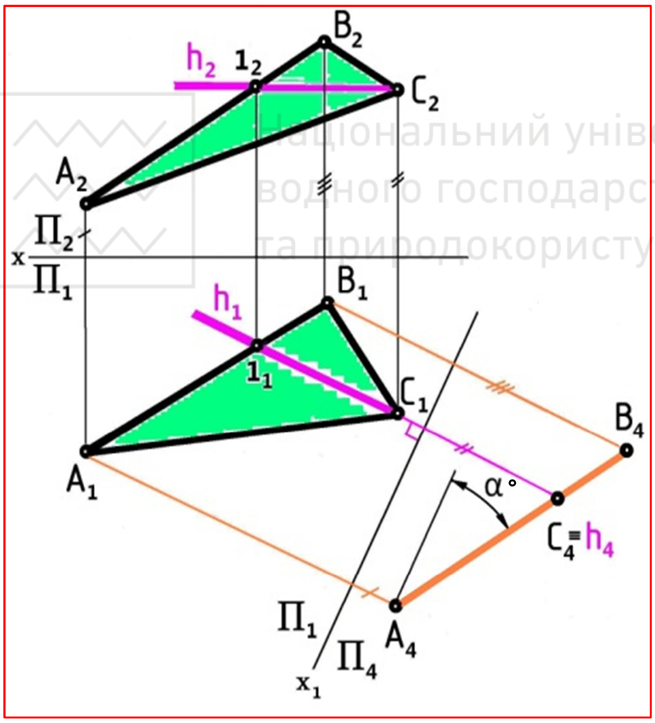
Дві площини перпендикулярні, якщо одна з них перпендикулярна до прямої, що міститься в іншій площині. До прямої загального положення *l* перпендикулярною є площина загального положення ω, яка не може бути новою площиною проекцій, оскільки вона не перпендикулярна до $П_1$ або $П_2$. До прямих рівня h або f перпендикулярною є проекціююча площина, яку можна прийняти за нову площину проекцій.

Тому, перш ніж провести нову вісь x_1, потрібно в заданій площині загального положення провести пряму рівня, перпендикулярно до якої розміщують $П_4$. Для цього нову вісь x_1



проводять перпендикулярно до горизонтальної проекції горизонтальної прямої (h_1) або до фронтальної проекції фронтальної прямої (f_2).





Умова задачі: **перетворити площину загального положення, яку задано трикутником ABC, в проекціюючу.**

Послідовність побудов:

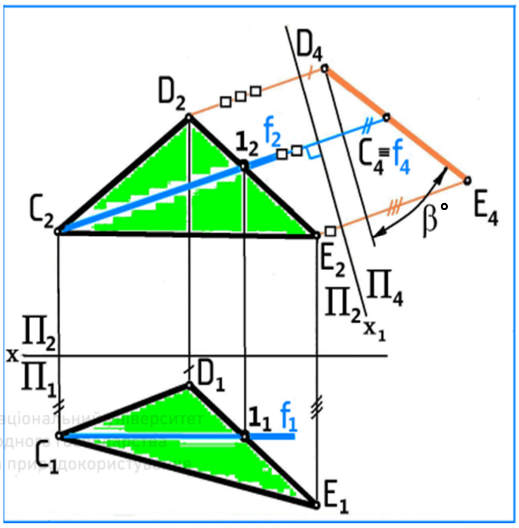
1. В площині трикутника ABC проводимо горизонтальну пряму h.

2. Проводимо вісь $x_1 \perp h_1$.

3. Будуємо проекції вершин трикутника на $П_4$: A_4, B_4, C_4 розміщені на одній прямій, яка є слідом-проекцією площини трикутника на $П_4$.

В результаті побудов площина трикутника ABC, яка в системі $xП_2/П_1$ займає загальне положення, перетворилася на проекціюючу площину в системі $x_1П_4/П_1$, перпендикулярну до $П_4$.

$П_4 \perp \Delta ABC$, оскільки $x_1 \perp h_1$; $П_4 \perp П_1$; кут α – кут нахилу площини трикутника ABC до $П_1$.



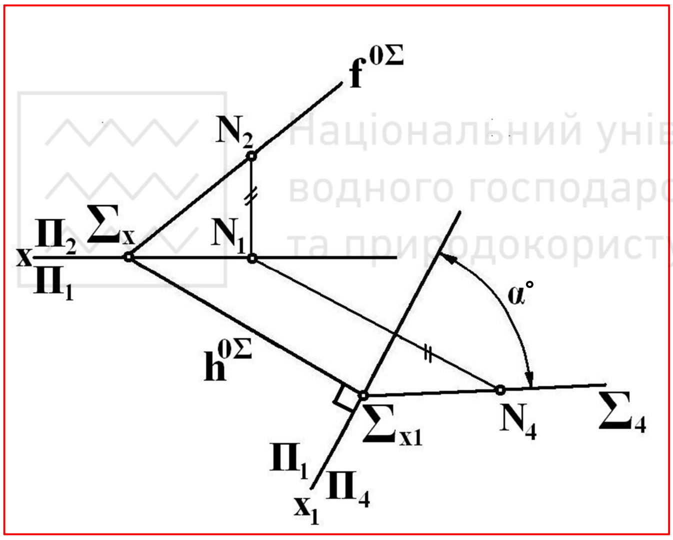
Умова задачі: перетворити площину загального положення, яку задано трикутником CDE, в проекціюючу.

Послідовність побудов:

1. В площині трикутника CDE проводимо фронтальну пряму f.
2. Проводимо вісь $x_1 \perp f_2$.
3. Будуємо проекції вершин трикутника на Π_4: C_4, D_4, E_4 розміщені на одній прямій, яка є слідом-проекцією площини трикутника на Π_4.

В результаті побудов площина трикутника CDE, яка в системі $x\Pi_2/\Pi_1$ займає загальне положення, перетворилася на проекціюючу площину в системі $x_1\Pi_4/\Pi_2$, перпендикулярну до Π_4.

$\Pi_4 \perp \Delta CDE$, оскільки $x_1 \perp f_2$; $\Pi_4 \perp \Pi_2$; кут β^0 – кут нахилу площини трикутника CDE до Π_2.

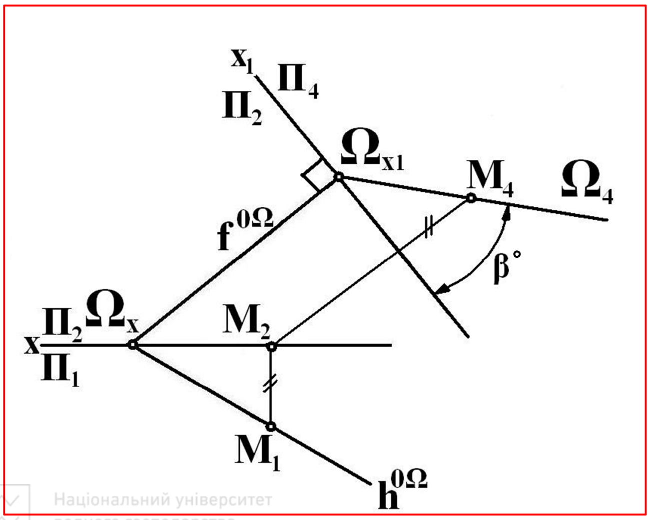


Умова задачі: перетворити площину загального положення Σ, яку задано слідами, в проекціюючу.

Послідовність побудов:

1. Проводимо вісь $x_1 \perp h^{0\Sigma}$. Площина Π_4 буде перпендикулярна до площини Σ, оскільки $h_2^{0\Sigma}$ перпендикулярна до фронтального сліду Π_4, який перпендикулярний до осі x. Фронтальний слід площини Π_4 ніколи не зображують, але мають на увазі, що в системі $x\Pi_2/\Pi_1$ площина Π_4 перетинає Π_2 по прямій, перпендикулярній до осі x.
2. В площині Σ вибираємо дві нетотожні точки: Σ_x – точку сходу слідів і точку N, що лежить на $f^{0\Sigma}$. Проекціюємо ці точки на Π_4, знаходимо Σ_{x1} і N4, з'єднуємо їх та отримаємо проекцію Σ на Π_4. Це слід-проекція Σ_4.

В результаті побудов площина Σ, яка в системі $x\Pi_2/\Pi_1$ займає загальне положення, перетворилася на проекціюючу площину в системі $x_1\Pi_4/\Pi_1$, перпендикулярну до Π_4. Кут α^0 – кут нахилу площини Σ до Π_1.



Умова задачі: перетворити площину загального положення Ω, яку задано слідами, в проекціюючу.

Послідовність побудов:

1. Проводимо вісь $x_1 \perp f^{0\Omega}$. В результаті площина Π_4 буде перпендикулярна до площини Ω.

2. В площині Ω вибираємо дві нетотожні точки: Ω_x – точку сходу слідів і точку М, що лежить на $h^{0\Omega}$. Проекціюємо ці точки на Π_4, знаходимо Ω_{x1} і M_4, з'єднуємо їх та отримаємо проекцію Ω на Π_4. Це слід-проекція Ω_4.

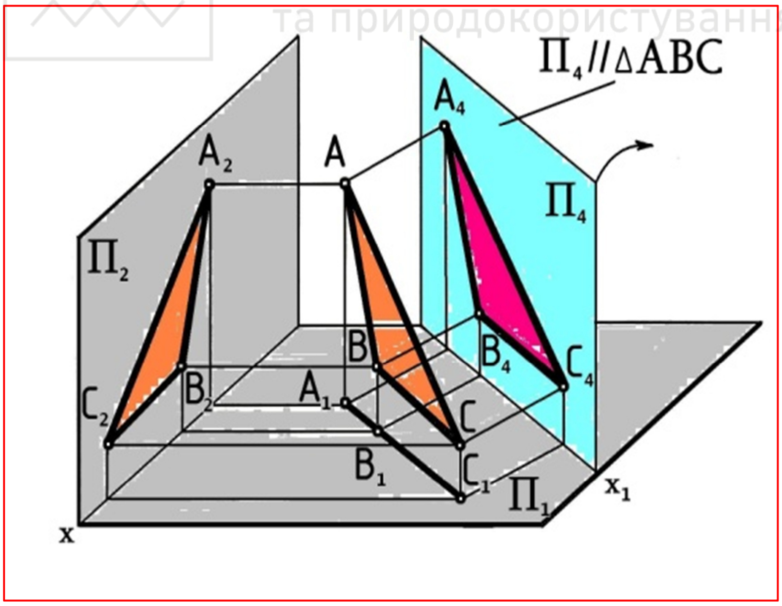
В результаті побудов площина Ω, яка в системі $x\Pi_2/\Pi_1$ займає загальне положення, перетворилася на проекціюючу площину в системі $x_1\Pi_4/\Pi_2$, перпендикулярну до Π_4.

Кут β^0 – кут нахилу площини Σ до Π_2.

8.2.4. Перетворення проекціюючої площини в площину рівня

Пояснення до виконання побудов.

Проекціюючі площини паралельні, якщо їх однойменні сліди-проекції паралельні. Слід-проекція проекціюючої площини – це аналог осі x_1 для Π_4, тому для перетворення проекціюючої площини в площину рівня вісь x_1 проводять паралельно до сліду-проекції заданої проекціюючої площини.

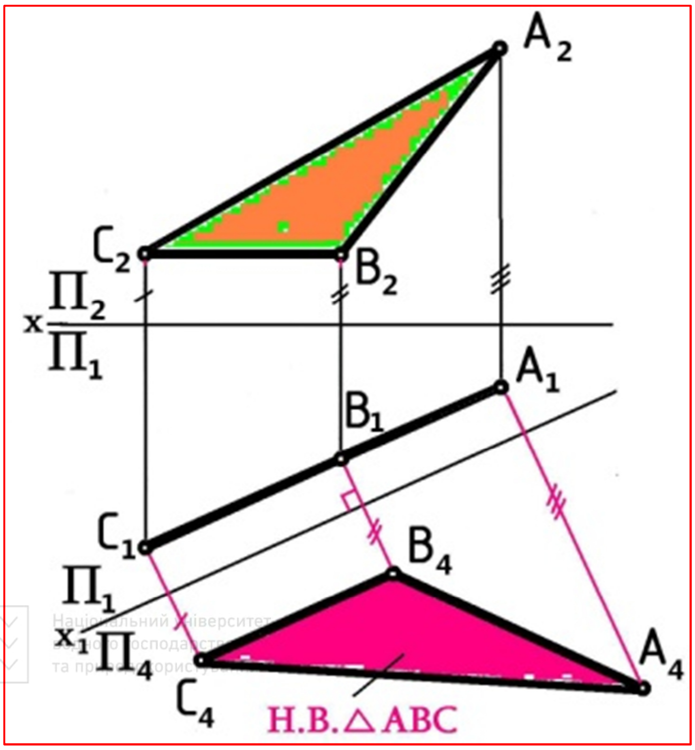


Умова задачі: перетворити проекціюючу площину, яку задано трикутником АВС, на площину рівня.

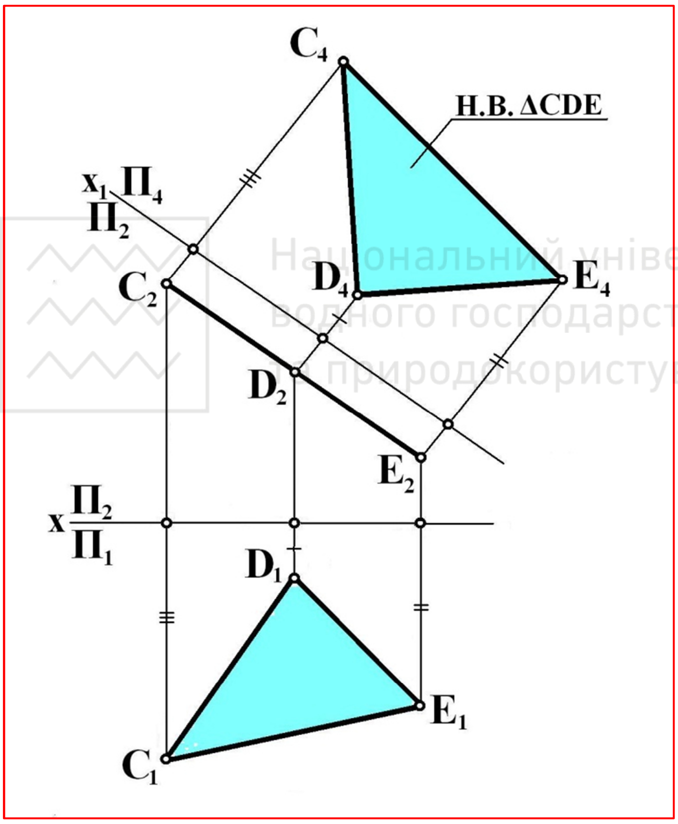
Послідовність побудов:

1. Проводимо $x_1 // A_1B_1C_1$.

2. Будуємо A_4, B_4, C_4 на Π_4.



В результаті побудов площина трикутника АВС, яка в системі $x\Pi_2/\Pi_1$ займає проекціююче положення, перетворилася на площину рівня в системі $x_1\Pi_4/\Pi_1$, паралельну до Π_4: $A_4B_4C_4$ = Н.В. трикутника АВС.



Умова задачі: перетворити проекціюючу площину, яку задано трикутником CDE, на площину рівня.

Послідовність побудов:

1. Проводимо x_1 // $C_2D_2E_2$.
2. Будуємо C_4, D_4, E_4 на Π_4.

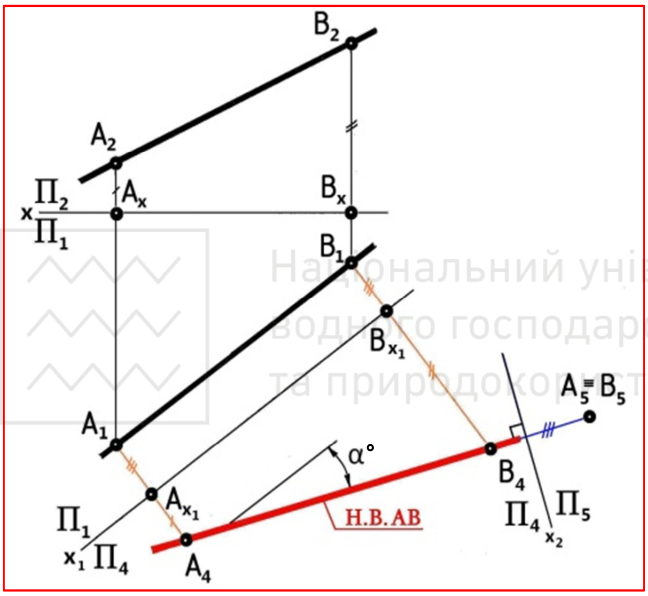
В результаті побудов площина трикутника CDE, яка в системі $x\Pi_2/\Pi_1$ займає проекціююче положення, перетворилася на площину рівня в системі $x_1\Pi_4/\Pi_2$, паралельну до Π_4: $C_4D_4E_4$ = Н.В. трикутника CDE.

ВИКОНАННЯ ПЕРЕТВОРЕНЬ ШЛЯХОМ ЗАМІНИ ДВОХ ПЛОЩИН ПРОЕКЦІЙ

8.2.5. Перетворення прямої загального положення в проекціюючу

Пояснення до виконання побудов.

До прямої загального положення перпендикулярною є площина загального положення, яку не можна використовувати як нову площину проекцій, оскільки вона не перпендикулярна до $П_1$ і $П_2$. Тому для перетворення прямої загального положення в проекціюючу вводять не одну, а дві нові площини проекцій. Спочатку вводять площину $П_4$ паралельно до заданої прямої загального положення, перетворюючи її в першій новій системі площин проекцій на пряму рівня. Потім уводять другу площину $П_5$ перпендикулярно до прямої рівня, перетворюючи її в другій новій системі площин проекцій на проекціюючу пряму.



Умова задачі: **перетворити пряму загального положення АВ в проекціюючу.**

Послідовність побудов:

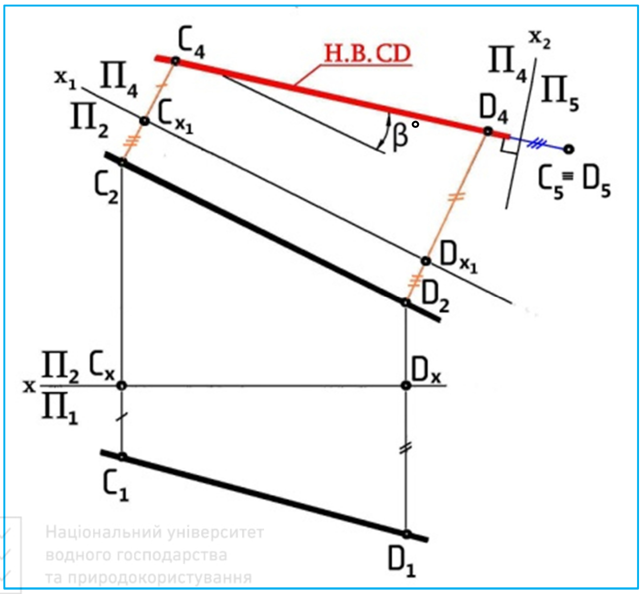
1. Проводимо $x_1 // A_1B_1$, розміщуючи тим самим площину $П_4$ паралельно до АВ.

2. Будуємо A_4 і B_4 на $П_4$. В системі $x_1П_4/П_1$ пряма АВ стала прямою рівня, паралельною до $П_4$.

3. Проводимо $x_2 \perp A_4B_4$, розміщуючи другу нову площину проекцій $П_5$ перпендикулярно до нерухомої прямої АВ.

4. Будуємо A_5, B_5 па $П_5$: $A_5 \equiv B_5$.

В системі $x_2П_5/П_4$ пряма АВ стала проекціюючою, перпендикулярною до $П_5$.



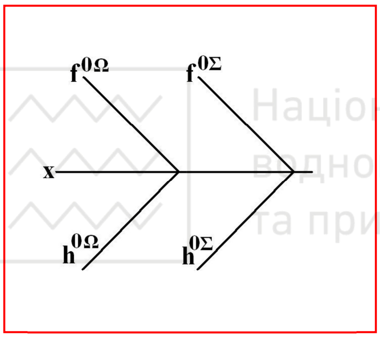
Умова задачі: перетворити пряму загального положення CD в проекціюючу.

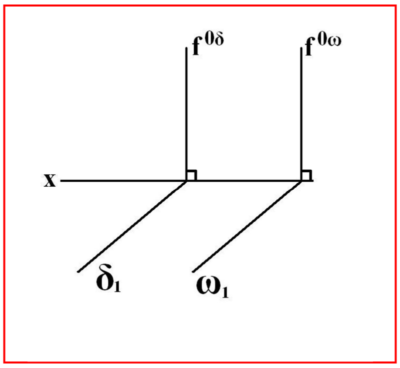
Послідовність побудов:

1. Проводимо $x_1 // C_2D_2$, розміщуючи тим самим площину $П_4$ паралельно до CD.
2. Будуємо C_4 і D_4 на $П_4$.
В системі $x_1П_4/П_2$ пряма CD стала прямою рівня, паралельною до $П_4$.
3. Проводимо $x_2 \perp C_4D_4$, розміщуючи другу нову площину проекцій $П_5$ перпендикулярно до нерухомої прямої CD.
4. Будуємо C_5, D_5 па $П_5$: $C_5 \equiv D_5$.
В системі $x_2П_5/П_4$ пряма CD стала проекціюючою, перпендикулярною до $П_5$.

8.2.6. Перетворення площини загального положення в площину рівня

Пояснення до виконання побудов.





Паралельною до заданої площини загального положення Ω є також площина загального положення Σ, яку не можна використовувати як нову площину проекцій, оскільки вона не перпендикулярна до $П_1$ і $П_2$. В той же час до проекціюючої площини δ паралельною є також проекціююча площина ω, у якої $ω_1 // δ_1$. Слід-проекцію $ω_1$ можна прийняти за нову вісь, а площину ω – за нову площину проекцій.
Тому для перетворення площини загального положення в площину рівня потрібно вводити не одну, а дві нові площини проекцій. Спочатку вводять площину $П_4$ перпендикулярно до заданої площини загального положення, перетворюючи її в першій новій системі площин проекцій в проекціюючу. Потім уводять другу площину $П_5$ паралельно до проекціюючої площини, перетворюючи її в другій новій системі площин проекцій на площину рівня.

Умова задачі: перетворити площину загального положення, яку задано трикутником АВС, в площину рівня.

Послідовність побудов:

1. В площині трикутника АВС проводимо горизонталь h.

2. Проводимо $x_1 \perp h_1$, розміщуючи тим самим площину $П_4$ перпендикулярно до площини трикутника АВС.

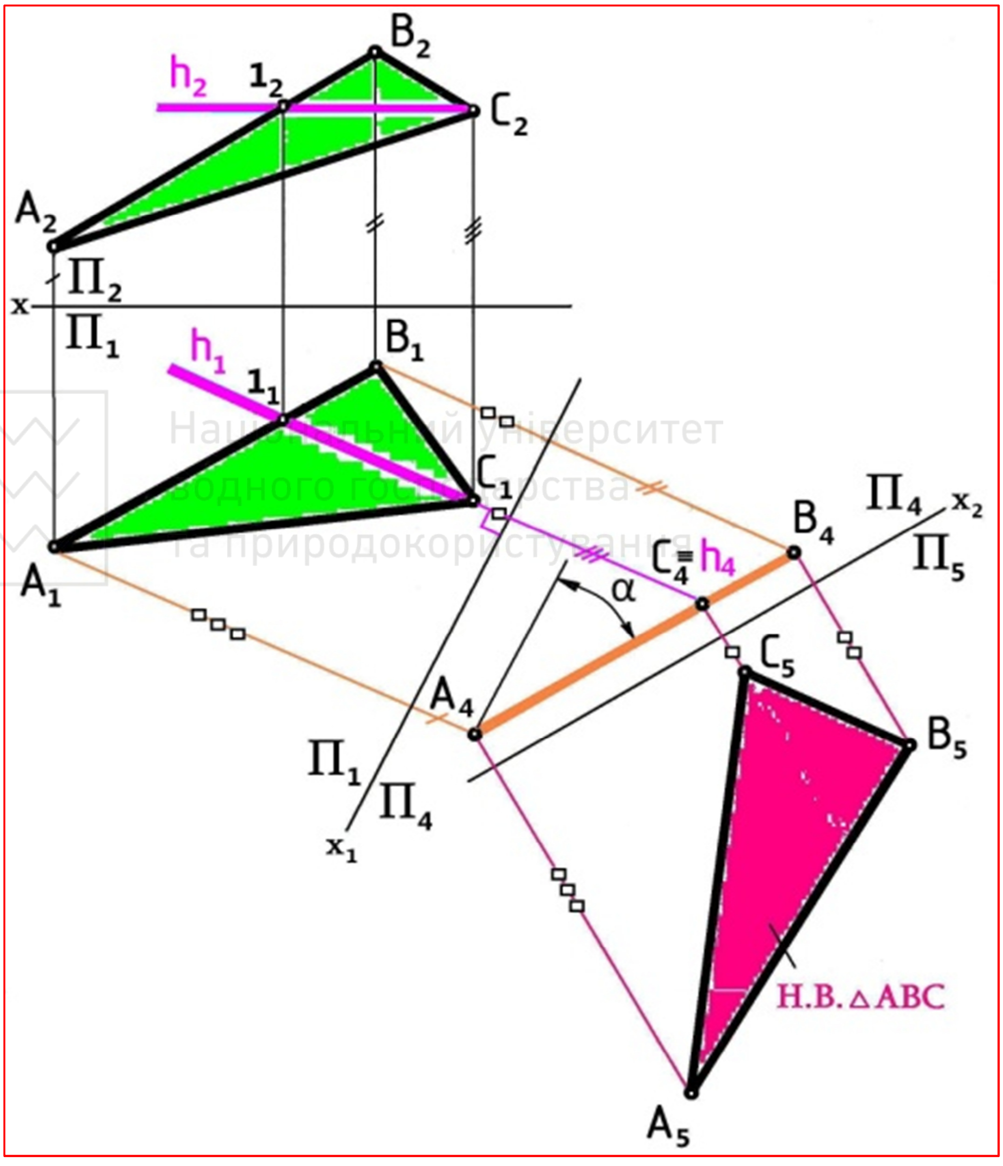
3. Будуємо проекції вершин трикутника на $П_4$.

В системі $x_1П_4/П_1$ площина трикутника АВС стала проекціюючою, перпендикулярною до $П_4$.

4. Проводимо x_2 // $A_4B_4C_4$, розміщуючи тим самим площину $П_4$ паралельно до площини трикутника АВС.

5. Будуємо проекції вершин трикутника на $П_5$.

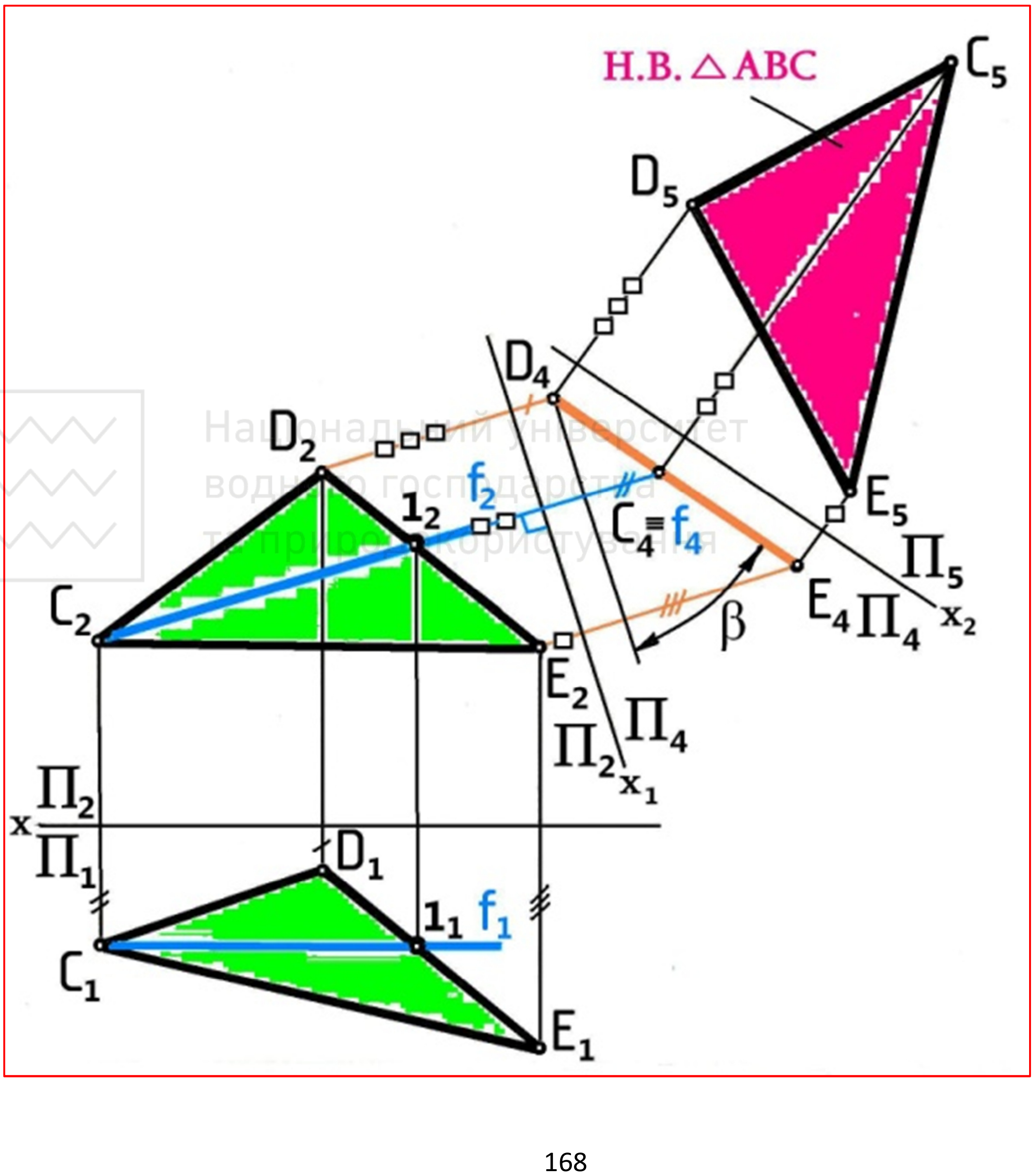
В системі $x_2П_5/П_4$ площина трикутника АВС стала площиною рівня, паралельною до $П_5$: $A_5B_5C_5$ = Н.В. трикутника АВС.



Умова задачі: перетворити площину загального положення, яку задано трикутником CDE, в площину рівня.

Послідовність побудов:

1. В площині трикутника CDE проводимо фронталь f.
2. Проводимо $x_1 \perp f_2$, розміщуючи тим самим площину $П_4$ перпендикулярно до площини трикутника CDE.
3. Будуємо проекції вершин трикутника на $П_4$.
В системі $x_1П_4/П_2$ площина трикутника CDE стала проекціюючою, перпендикулярною до $П_4$.
4. Проводимо $x_2 \parallel D_4C_4E_4$, розміщуючи тим самим площину $П_4$ паралельно до площини трикутника CDE.
5. Будуємо проекції вершин трикутника на $П_5$.
В системі $x_2П_5/П_4$ площина трикутника CDE стала площиною рівня, паралельною до $П_5$: $C_5D_5E_5$ = Н.В. трикутника CDE.



УЗАГАЛЬНЕННЯ

Всі метричні та позиційні задачі, що розв'язуються способом заміни площин проекцій, зводяться до однієї з 4 основних задач, які розглянуто в 8.2.1 – 8.2.6:

1 основна задача: Перетворити пряму загального положення в пряму рівня (досягається одним перетворенням, тобто введенням однієї нової площини проекцій). Використовують для визначення Н.В. відрізка прямої та кутів її нахилу до площин проекцій:

Початкова умова: пряма загального положення → **Уводимо $П_4$** → **Отримаємо пряму рівня в системі $x_1П_4/П_1$ або $x_1П_4/П_2$ (кінцевий результат)**

2 основна задача: Перетворити пряму загального положення в проекціюючу (досягається двома перетвореннями, тобто введенням двох нових площин проекцій), причому 1 основна задача є складовою другої. Використовують для визначення відстаней між паралельними прямими, мимобіжними прямими, від точки до прямої тощо:

Початкова умова: пряма загального положення → **Уводимо $П_4$** → **Отримаємо пряму рівня в системі $x_1П_4/П_1$ або $x_1П_4/П_2$ (проміжний результат)** → **Уводимо $П_5$** → **Отримаємо проекціюючу пряму в системі $x_2П_5/П_4$ (кінцевий результат)**

Також виконується задача на перетворення прямої рівня в проекціюючу, що є другим етапом перетворень 2 основній задачі (досягається одним перетворенням, тобто введенням однієї нової площини проекцій):

Початкова умова: пряма рівня → **Уводимо $П_4$** → **Отримаємо проекціюючу пряму в системі $x_1П_4/П_1$ або $x_1П_4/П_2$ (кінцевий результат)**

3 основна задача: Перетворити площину загального положення в проекціюючу (досягається одним перетворенням, тобто уведенням однієї нової площини проекцій). Використовують для визначення кутів нахилу площини до площин проекцій, відстаней між паралельними площинами, від точки до площини тощо, а також для розв'язування позиційних задач:

Початкова умова: площина загального положення → **Уводимо Π_4** → **Отримаємо проекціюючу площину в системі $x_1\Pi_4/\Pi_1$ або $x_1\Pi_4/\Pi_2$ (кінцевий результат)**

4 основна задача: Перетворити площину загального положення в площину рівня (досягається двома перетвореннями, тобто введенням двох нових площин проекцій), причому 3 основна задача є складовою четвертої. Використовують для визначення Н.В. плоских фігур та різних параметрів плоских фігур:

Початкова умова: площина загального положення → **Уводимо Π_4** → **Отримаємо проекціюючу площину в системі $x_1\Pi_4/\Pi_1$ або $x_1\Pi_4/\Pi_2$ (проміжний результат)** → **Уводимо Π_5** → **Отримаємо площину рівня в системі $x_2\Pi_5/\Pi_4$ (кінцевий результат)**

Також виконується задача на перетворення проекціюючої площини в площину рівня, що є другим етапом перетворень 4 основної задачі (досягається одним перетворенням, тобто введенням однієї нової площини проекцій):

Початкова умова: проекціююча площина → **Уводимо Π_4** → **Отримаємо площину рівня в системі $x_1\Pi_4/\Pi_1$ або $x_1\Pi_4/\Pi_2$ (кінцевий результат)**

8.3. Спосіб обертання навколо проекціюючої прямої

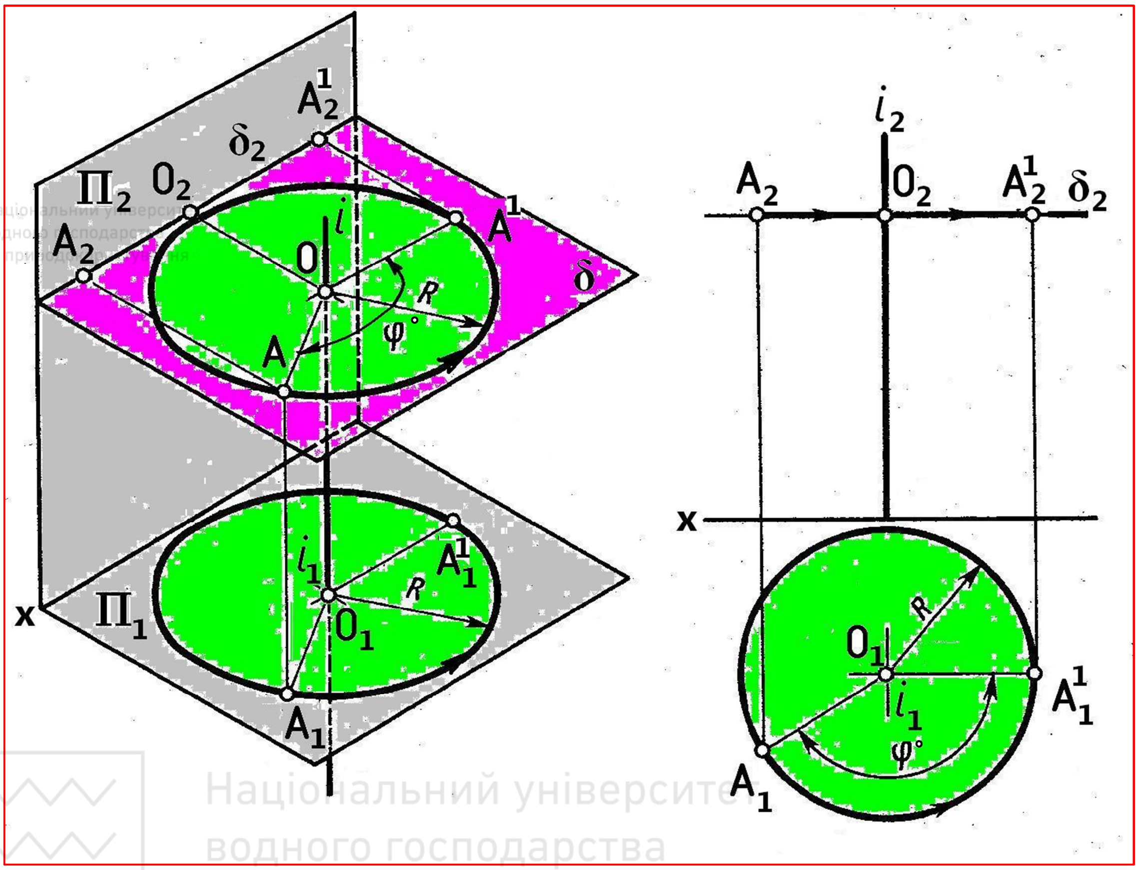
Суть способу полягає у тому, що геометричні фігури (прямі та плоскі фігури) обертанням навколо осі, яка перпендикулярна до однієї з нерухомих площин проекцій Π_1 або Π_2, розміщують таким чином, щоб вони відносно нерухомої системи площин проекцій Π_2/Π_1 займали часткове положення, зручне для розв'язування задачі.

Саме при такому обертанні точки фігури переміщуються в площинах, паралельних до тієї площини проекцій, до якої перпендикулярна вісь обертання фігури.

Під час обертання геометричної фігури її проекція на площину проекцій, до якої вісь обертання перпендикулярна, не змінює своєї форми і розмірів, при цьому проекції точок фігури на площину проекцій, до якої вісь обертання паралельна, переміщуються по прямих, паралельних до осі проекцій x або за її відсутності - по

прямих, перпендикулярних до вертикальних ліній проекційного зв'язку. **Незмінність форми і розмірів однієї з проекцій фігури при її обертанні спрощує побудову нових положень цієї проекції фігури шляхом проведення через точку, в яку проекціюється вісь обертання, перпендикуляра до проекції фігури, що обертається.**

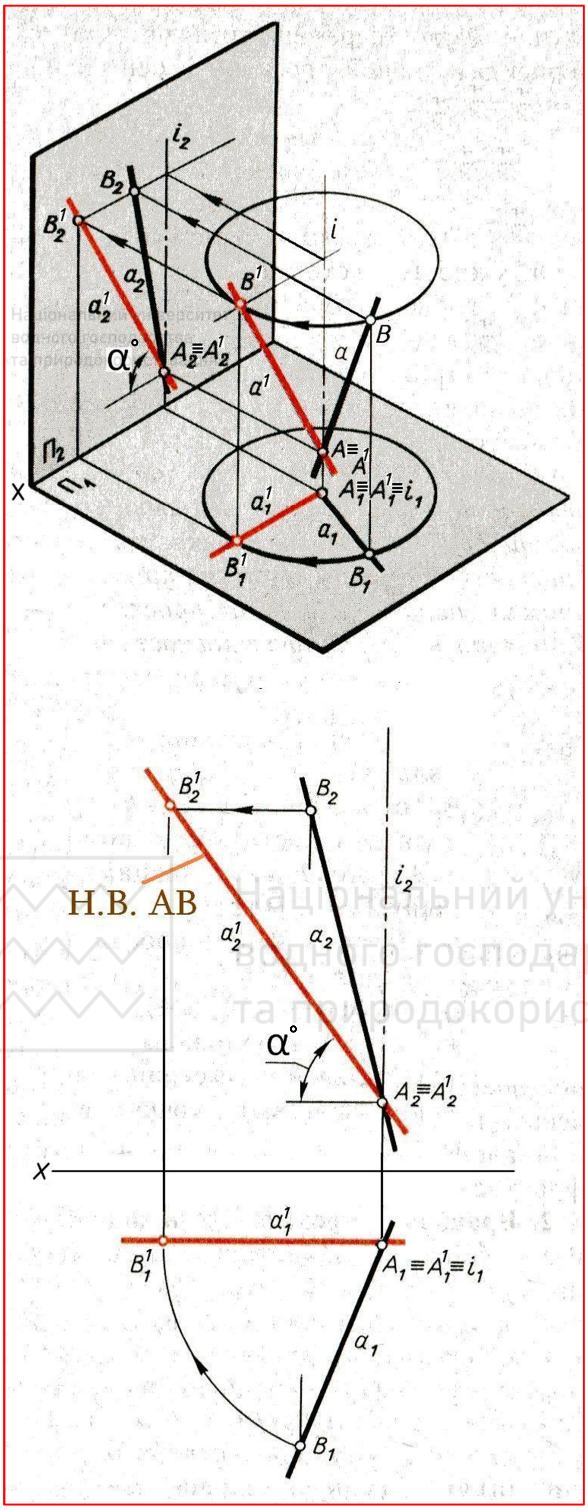
Розглянемо графічну сутність способу на прикладі обертання точки.



Точка А обертається навколо осі *i*, яка перпендикулярна до Π_1. Траєкторія обертання точки А – коло радіуса R, площина δ якого перпендикулярна до осі *i* та паралельна до Π_1. Площина δ кола обертання точки А проекціюється на Π_2 в пряму δ_2, яка є слідом-проекцією площини δ, причому δ_2 // x. Точка О – центр кола обертання точки А – розміщена на осі *i*.
Точка А з свого початкового положення перемістилася на кут обертання φ^0 в положення A^1. При цьому горизонтальна проекція A_1 перемістилася по колу радіуса R на кут φ^0 в положення A_1^1 , а фронтальна проекція A_2 перемістилася по прямій δ_2, паралельній осі x, в положення A_2^1.

ОБЕРТАННЯ НАВКОЛО ОДНІЄЇ ОСІ ОБЕРТАННЯ

8.3.1. Перетворення прямої загального положення в пряму рівня



Вісь обертання проходить через точку прямої

Умова задачі: **перетворити пряму загального положення АВ в пряму рівня.**

Послідовність побудов:

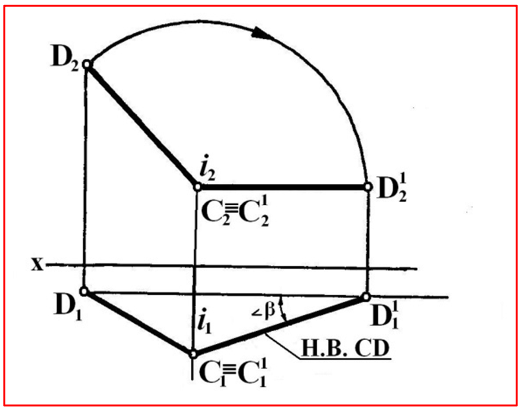
1. Проводимо через точку А вісь обертання $i \perp П_1$. В цьому випадку точка А при обертанні прямої залишається нерухомою.

2. Оскільки $i \perp П_1$, то горизонтальна проекція прямої АВ не змінює своєї форми та розмірів при обертанні навколо осі. Тому горизонтальну проекцію A_1B_1 повертаємо в положення $A_1^1B_1^1$ // х.

3. Будуємо B_2^1, переміщуючи B_2 по прямій, паралельній до осі х.

В результаті побудов задана пряма загального положення АВ перетворилася при обертанні на пряму рівня A^1B^1, паралельну до $П_2$.

$A_2^1B_2^1$ = Н.В. АВ; кут α^0 – кут нахилу прямої АВ до $П_1$.



Умова задачі: перетворити пряму загального положення CD в пряму рівня.

Послідовність побудов:

1. Через точку C проводимо вісь обертання $i \perp П_2$.

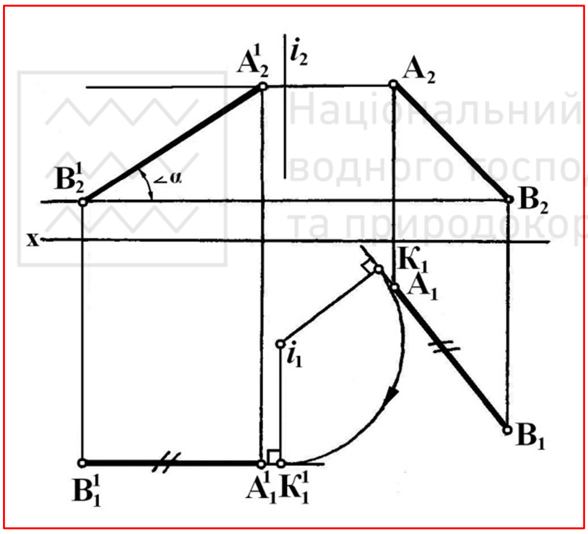
2. Оскільки $i \perp П_2$, то фронтальна проекція прямої CD не змінює своєї форми та розмірів при обертанні навколо осі. Тому фронтальну проекцію C_2D_2 повертаємо в положення $C_2^1D_2^1$ // x.

3. Будуємо D_1^1, переміщуючи D_1 по прямій, паралельній до осі x.

В результаті побудов задана пряма загального положення CD перетворилася при обертанні на пряму рівня C^1D^1, паралельну до $П_2$.

$C_1^1D_1^1$ = Н.В. CD; $\angle$ β – кут нахилу прямої AB до $П_2$.

Вісь обертання не проходить через точку прямої



Умова задачі: перетворити пряму загального положення AB в пряму рівня.

Послідовність побудов:

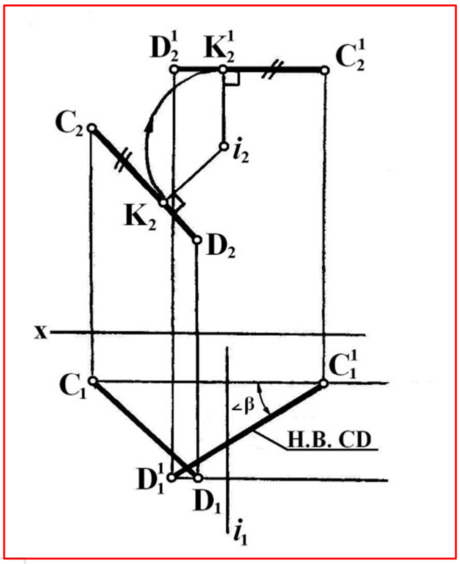
1. Проводимо вісь обертання $i \perp П_1$, яка не проходить через точку прямої.

2. Для спрощення обертання A_1B_1 з i_1 проводимо перпендикуляр i_1K_1 до A_1B_1. Розміщуємо цей перпендикуляр в положення $i_1K_1^1$ перпендикулярне до осі x або паралельне до ліній проекційного зв'язку.

3. Будуємо A_2^1 і B_2^1, переміщуючи A_2 і B_2 по прямим, що паралельні до осі x.

В результаті побудов задана пряма загального положення AB перетворилася при обертанні в пряму рівня A^1B^1, паралельну до $П_2$.

$A_2^1B_2^1$ = Н.В. AB; $\angle$ α – кут нахилу прямої AB до $П_1$.



Умова задачі: перетворити пряму загального положення CD в пряму рівня.

Послідовність побудов:

1. Проводимо вісь обертання $i \perp П_2$, яка не проходить через точку прямої.
2. Для спрощення обертання C_2D_2 з i_2 проводимо перпендикуляр i_2K_2 до C_2D_2. Розміщуємо цей перпендикуляр в положення $i_2K_2^1$ перпендикулярне до осі x або паралельне до ліній проекційного зв'язку.
3. Будуємо C_1^1 і D_1^1, переміщуючи C_1 і D_1 по прямим, що паралельні до осі x.

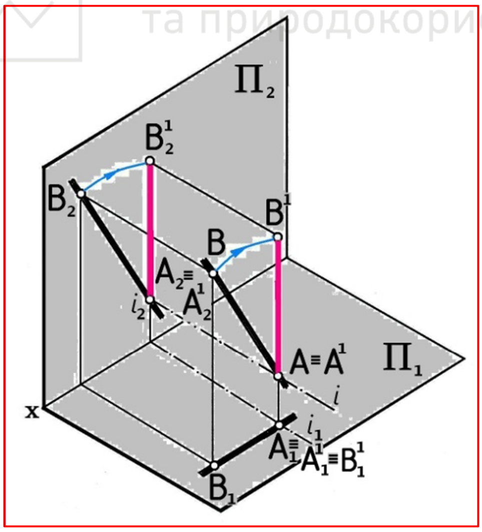
В результаті побудов задана пряма загального положення CD перетворилася при обертанні в пряму рівня C^1D^1, паралельну до $П_1$.

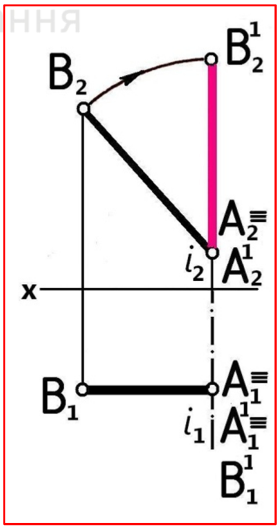
$C_1^1D_1^1$ = Н.В. CD; ∠ β – кут нахилу прямої AB до $П_2$.

При обертанні прямої загального положення навколо осі, що перпендикулярна до $П_1$, вона перетворюється у фронтальну пряму рівня, а навколо осі, що перпендикулярна до $П_2$, - у горизонтальну пряму рівня.

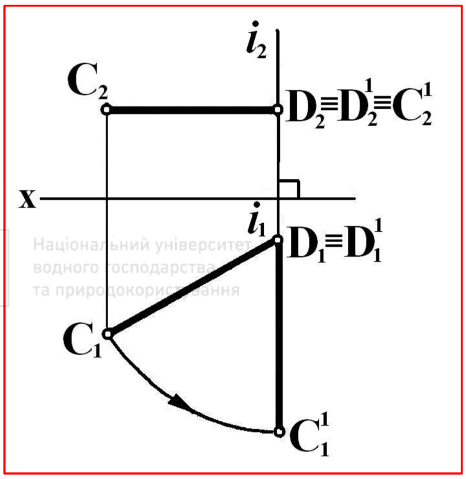
8.3.2. Перетворення прямої рівня в проекціюючу

Вісь обертання проходить через точку прямої



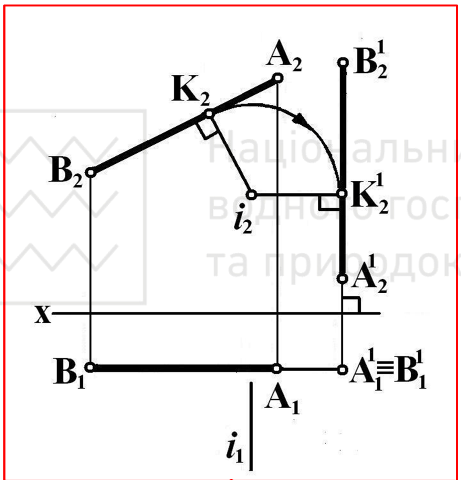


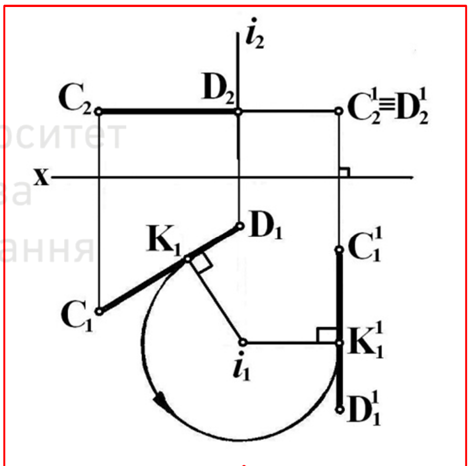
Умова задачі: перетворити фронтальну пряму AB в проекціюючу пряму.
Послідовність побудов:
1. Оскільки фронтальна пряма AB // $П_2$, то вісь обертання *i* розміщуємо перпендикулярно до $П_2$. В даній задачі *i* проходить через точку A прямої AB.
2. Фронтальну проекцію A_2B_2 обертаємо в положення $A_2^1B_2^1 \perp x$.
3. Знаходимо $A_1^1 \equiv B_1^1$.
В результаті побудов задана фронтальна пряма AB перетворилася при обертанні на проекціюючу пряму A^1B^1, перпендикулярну до $П_1$.



Умова задачі: перетворити горизонтальну пряму CD в проекціюючу пряму.
Послідовність побудов:
1. Оскільки горизонтальна пряма CD // $П_1$, то вісь обертання *i* розміщуємо перпендикулярно до $П_1$. В даній задачі *i* проходить через точку D прямої CD.
2. Горизонтальну проекцію C_1D_1 обертаємо в положення $C_1^1D_1^1 \perp x$.
3. Знаходимо $C_2^1 \equiv D_2^1$.
В результаті побудов задана горизонтальна пряма CD перетворилася при обертанні в проекціюючу пряму C^1D^1, перпендикулярну до $П_2$.

Вісь обертання не проходить через точку прямої





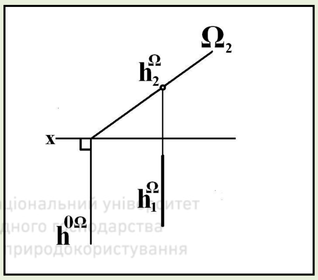
В результаті обертання навколо осі $i \perp П_2$ фронтальна пряма рівня AB перетворилася в горизонтально-проекціюючу пряму A^1B^1, перпендикулярну до $П_1$. Для спрощення обертання з i_2 проведено перпендикуляр i_2K_2 на фронтальну проекцію A_2B_2, яка обертається.

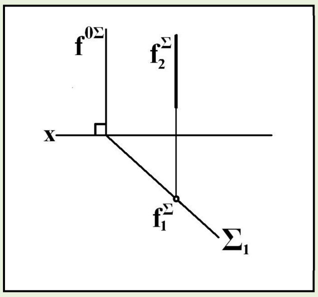
В результаті обертання навколо осі $i \perp П_1$ горизонтальна пряма рівня CD перетворилася у фронтально-проекціюючу пряму C^1D^1, перпендикулярну до $П_2$. Для спрощення обертання з i_1 проведено перпендикуляр i_1K_1 на горизонтальну проекцію C_1D_1, яка обертається.

При обертанні фронтальної прямої рівня навколо осі, що перпендикулярна до $П_2$, вона перетворюється у горизонтально-проекціюючу пряму, а при обертанні горизонтальної прямої рівня навколо осі, що перпендикулярна до $П_1$, вона перетворюється у фронтально-проекціюючу пряму.

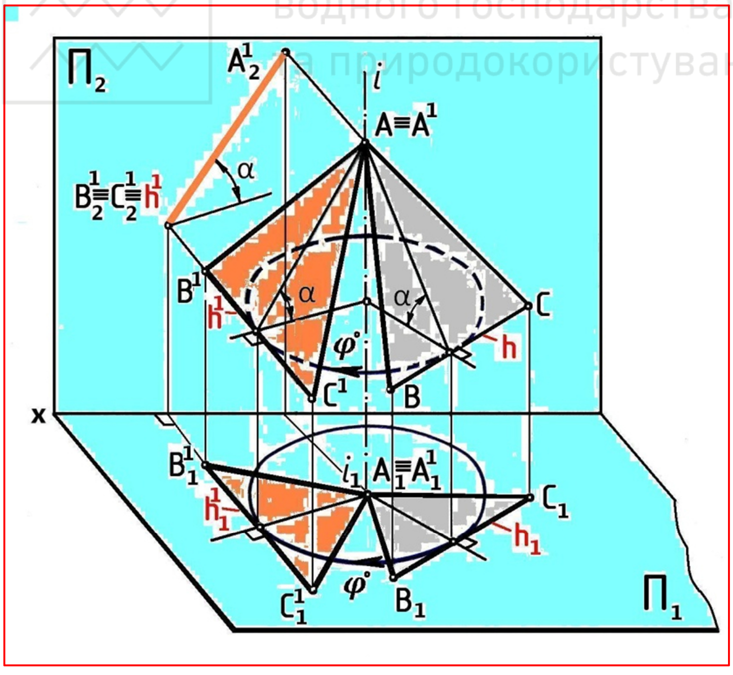
8.3.3. Перетворення площини загального положення у проекціюючу

Пояснення до виконання побудов.





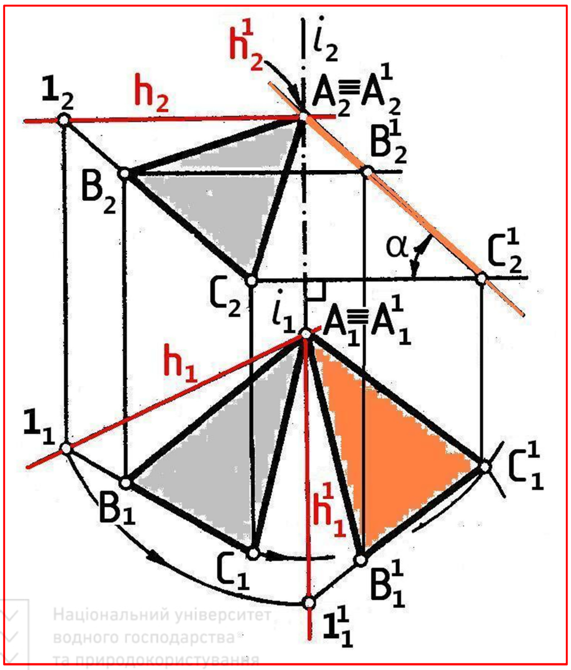
Задана площина загального положення в результаті її обертання повинна бути перпендикулярною до однієї з нерухомих площин проекцій $П_1$ і $П_2$.
Для того, щоб площина Ω стала перпендикулярною до $П_2$, в площині Ω слід провести горизонтальну пряму h і обертати її навколо осі *i* ($i \perp П_1$) до того моменту, поки h стане перпендикулярною до $П_2$. При цьому h обертається в площині, яка паралельна до $П_1$ і перпендикулярна до осі обертання.
Для того, щоб площина Σ стала перпендикулярною до $П_1$, в площині Σ слід провести фронтальну пряму f і обертати її навколо осі *i* ($i \perp П_2$) до того моменту, поки f стане перпендикулярною до $П_1$. При цьому f обертається в площині, яка паралельна до $П_2$ і перпендикулярна до осі обертання.



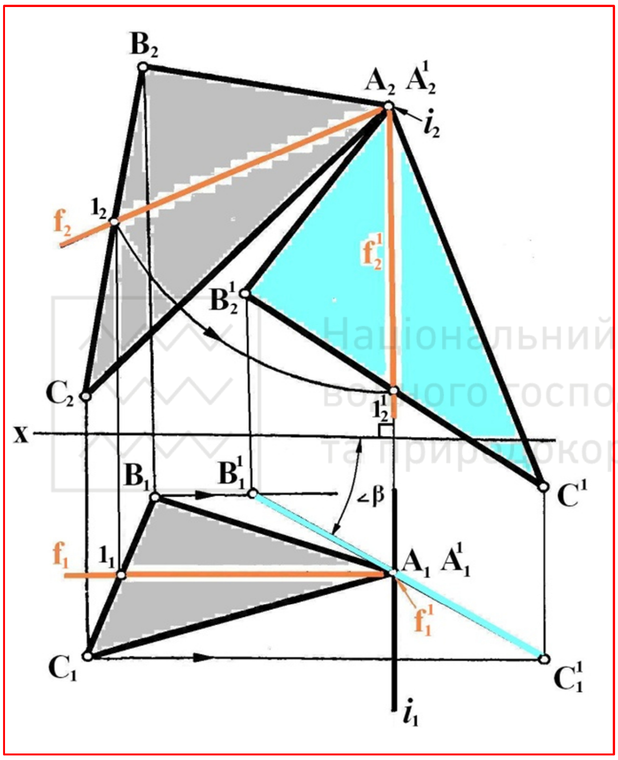
Умова задачі: **перетворити площину загального положення, яку задано трикутником ABC, на проекціюючу.**

Послідовність побудов:

1. В площині трикутника ABC проводимо горизонтальну пряму h.
2. Оскільки h // $П_1$, то проводимо вісь обертання *i* $\perp П_1$. Вісь *i* проходить через точку A.
3. Обертаємо h_1 до положення $h_1^1 \perp x$, при цьому форма і розміри $A_1B_1C_1$ разом з h_1 не змінюються.

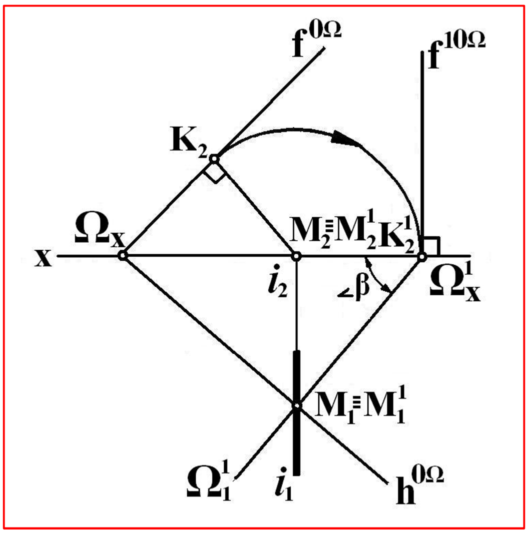


Будуємо $A_1^1B_1^1C_1^1$, у якої $h_1^1 \perp$ x.
4. Знаходимо $A_2^1B_2^1C_2^1$ шляхом переміщення A_2, B_2, C_2 по прямим, що паралельні до осі x, а у разі відсутності осі x, - по прямим, що перпендикулярні до вертикальних ліній проекційного зв'язку.
В результаті побудов заданий трикутник ABC, що займав загальне положення, перетворився при обертанні в трикутник $A^1B^1C^1$, що займає проекціююче положення, перпендикулярне до $П_2$.
$A_2^1B_2^1C_2^1$ – слід-проекція площини трикутника $A^1B^1C^1$; ∠ α – кут нахилу площини трикутника ABC до $П_1$.

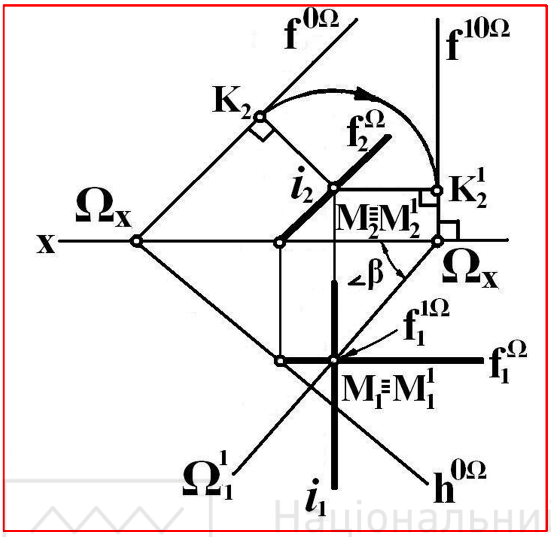


Площина загального положення, яку задано трикутником ABC, перетворилася в результаті обертання навколо осі *i*, що перпендикулярна до $П_2$, в проекціюючу площину трикутника $A^1B^1C^1$, перпендикулярну до $П_1$.
Для цього в площині трикутника ABC проведено фронтальну пряму f, з подальшим обертанням її фронтальної проекції разом з $A_2B_2C_2$ в положення $f_2^1 \perp$ x.
В результаті побудов заданий трикутник ABC, що займав загальне положення, перетворився при обертанні на трикутник $A^1B^1C^1$, що займає проекціююче положення, перпендикулярне до $П_1$.
$B_1^1A_11C_1^1$ – слід-проекція площини трикутника $A^1B^1C^1$; ∠ β – кут нахилу площини трикутника ABC до $П_2$.

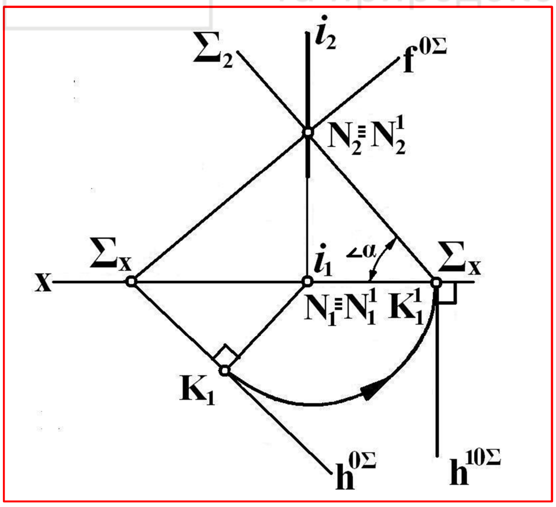
Приклади обертання площини, яку задано слідами



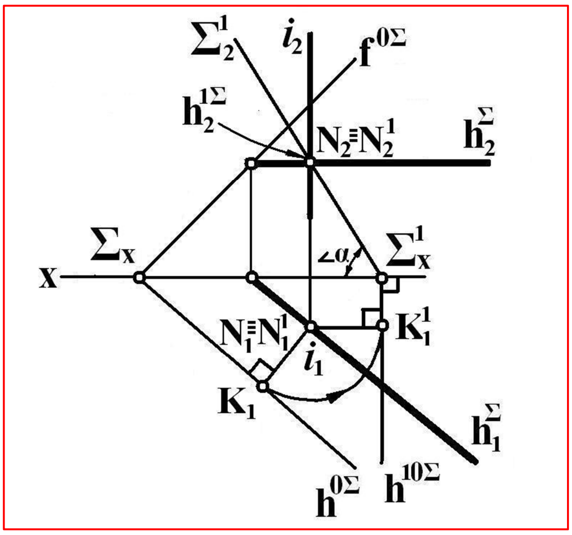
Площина загального положення Ω, яку задано слідами, обертанням навколо осі i ($i \perp П_2$), яка проходить через точку М на $h^{o\Omega}$, перетворюється у горизонтально-проекціюючу площину Ω^1, перпендикулярну до $П_1$, де $\angle\ \beta$ – кут нахилу площини Ω до $П_2$. Обертання площини Ω здійснено за допомогою $f^{0\Omega}$ в положення $f^{10\Omega} \perp$ x. Для спрощення обертання з i_2 на $f^{0\Omega}$ проведено перпендикуляр $i_2К_2$.



Вісь обертання i площини Ω не проходить через точку, що лежить на її сліді. Перетворення площини загального положення Ω в горизонтально-проекціюючу площину Ω^1 здійснюється обертанням фронтального сліду $f^{0\Omega}$ та фронтальної прямої f^{Ω} площини Ω. Вісь обертання проходить через точку М, що лежить на f^{Ω}. Фронталь f^{Ω} в положенні площини Ω, перпендикулярному до $П_1$ (площина Ω^1), проекціюється на $П_1$ в точку – $f_1^{1\Omega}$, через яку проходить горизонтальний слід площини Ω^1, який є слідом-проекцією Ω_1^1.



Площина загального положення Σ, яку задано слідами, обертанням навколо осі i ($i \perp П_1$), що проходить через точку N на $f^{o\Sigma}$, перетворюється у фронтально-проекціюючу площину Σ^1, перпендикулярну до $П_2$, де $\angle\ \alpha$ – кут нахилу площини Σ до $П_1$. Обертання площини Σ здійснено за допомогою $h^{0\Sigma}$ в положення $h^{10\Sigma} \perp$ x. Для спрощення обертання з i_1 на $h^{0\Sigma}$ проведено перпендикуляр $i_1К_1$.

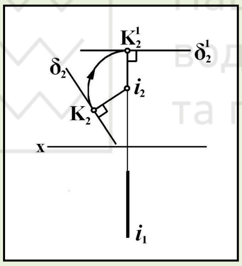


Вісь обертання i площини Σ не проходить через точку, що лежить на її сліді. Перетворення площини загального положення Σ в фронтально-проекціюючу площину Σ^1 здійснюється обертанням горизонтального сліду $h^{0\Sigma}$ та горизонтальної прямої h^{Σ} площини Σ. Вісь обертання проходить через точку N, що лежить на h^{Σ}. Горизонталь h^{Σ} в положенні площини Σ, перпендикулярному до Π_2 (площина Σ^1), проекціюється на Π_2 в точку – $h_2^{1\Sigma}$, через яку проходить фронтальний слід площини Σ^1, який є слідом-проекцією Σ_2^1.

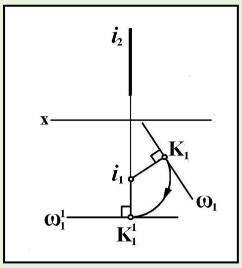
При обертанні площини загального положення навколо осі, що перпендикулярна до Π_2, вона перетворюється у горизонтально-проекціюючу площину, а навколо осі, що перпендикулярна до Π_1, - у фронтально-проекціюючу площину.

8.3.4. Перетворення проекціюючої площини в площину рівня

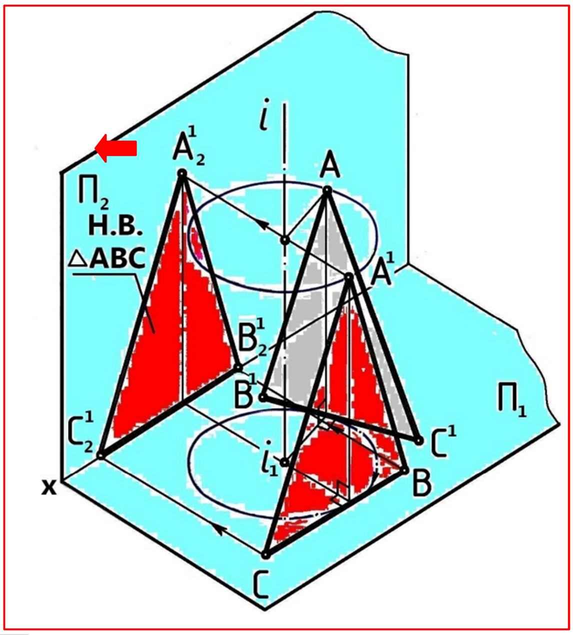
Пояснення до виконання побудов.

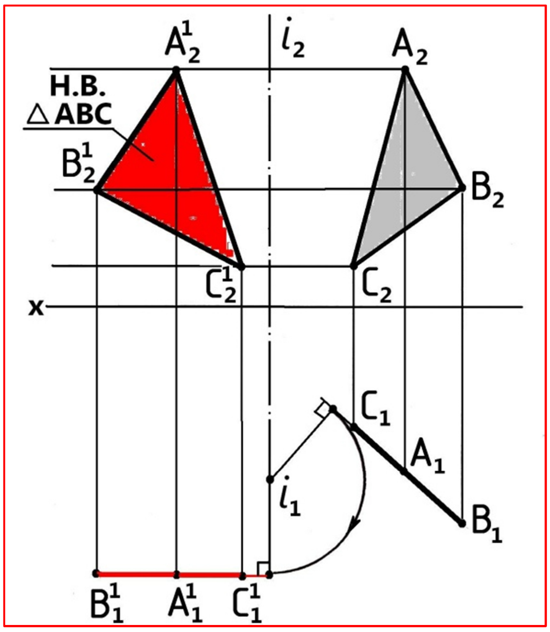


Фронтально-проекціююча площина δ обертанням навколо осі $i \perp \Pi_2$ перетворюється у горизонтальну площину рівня δ^1. Побудову здійснено обертанням сліду δ_2 в положення δ_2^1 // x. Це стає можливим, оскільки і площина δ, і площина δ^1 перпендикулярні до Π_2.

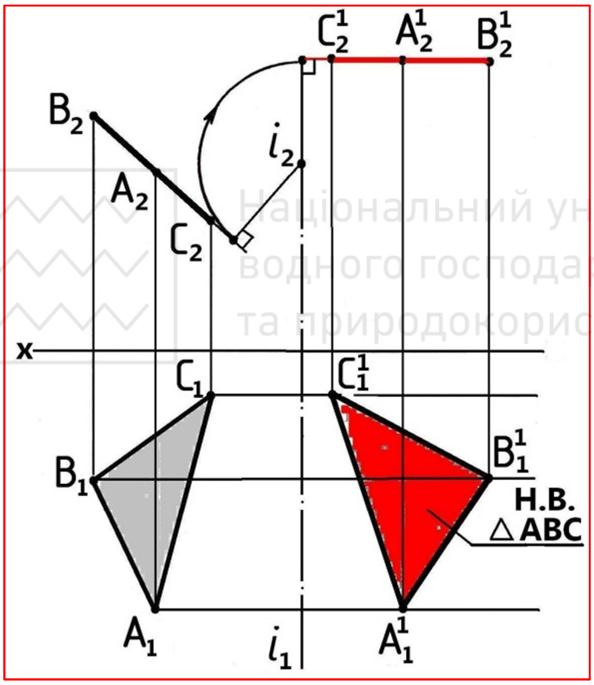


Горизонтально-проекціююча площина ω обертанням навколо осі $i \perp \Pi_1$ перетворюється у фронтальну площину рівня ω^1. Побудову здійснено обертанням сліду ω_1 в положення ω_1^1 // x. Це стає можливим, оскільки і площина ω, і площина ω^1 перпендикулярні до Π_1.





Горизонтально-проекціююча площина, яку задано трикутником ABC, в результаті обертання навколо осі $i \perp П_1$ перетворилася в площину рівня, яку задано трикутником $A^1B^1C^1$, паралельну до $П_2$.
Побудову здійснено обертанням сліду-проекції $C_1A_1B_1$ в положення $C_1^1A_1^1B_1^1$ // x.



Національний університет водного господарства та природокористування

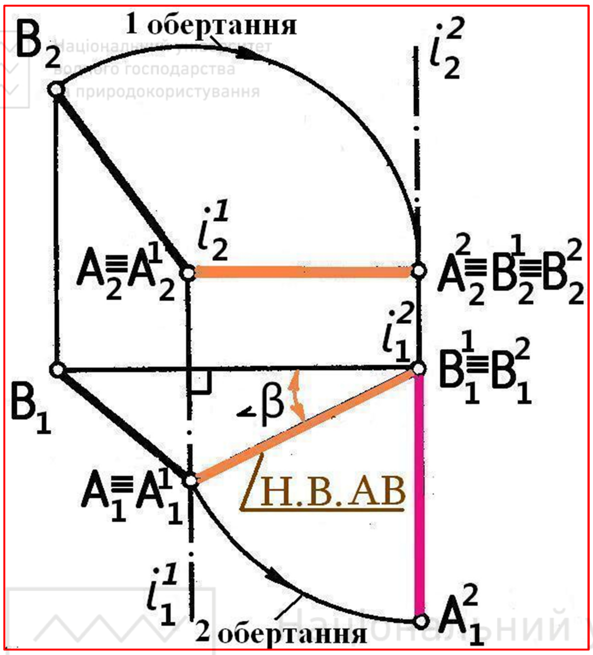
Фронтально-проекціююча площина, яку задано трикутником ABC, в результаті обертання навколо осі $i \perp П_2$ перетворилася в площину рівня, яку задано трикутником $A^1B^1C^1$, паралельну до $П_1$.
Побудову здійснено обертанням сліду-проекції $C_2A_2B_2$ в положення $C_2^1A_2^1B_2^1$ // x.

ОБЕРТАННЯ НАВКОЛО ДВОХ ОСЕЙ ОБЕРТАННЯ

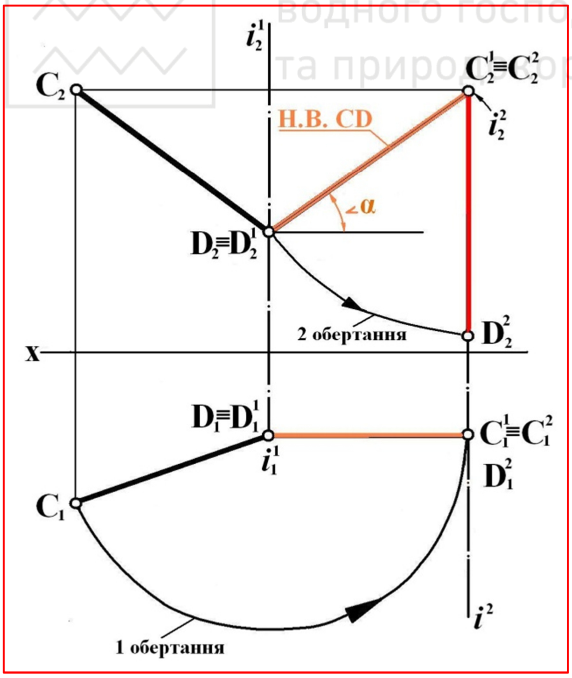
8.3.5. Перетворення прямої загального положення в проекціюючу

Пояснення до виконання побудов.

Пряма загального положення при обертанні навколо осі, що перпендикулярна до однієї з нерухомих площин проекцій, не може зайняти проекціююче положення, перпендикулярне до $П_1$ або $П^2$. Вона може займати або загальне положення, або положення прямої рівня. Проте пряма рівня одним обертанням може перетворитися в проекціюючу пряму. Тому для перетворення прямої загального положення в проекціюючу потрібно виконати два обертання: перше – перетворити пряму загального положення в пряму рівня та друге – перетворити пряму рівня в проекціюючу пряму.



Для перетворення прямої загального положення AB в проекціюючу виконуємо два обертання.
1 обертання: через точку A проводимо вісь обертання i^1($i^1 \perp П_2$). Оскільки $i^1 \perp П_2$, то обертати потрібно A_2B_2 в положення $A_2{}^1B_2{}^1$ // x з подальшою побудовою $A_1{}^1B_1{}^1$. В результаті 1 обертання пряма загального положення AB перетворилася в горизонтальну пряму рівня A^1B^1.
2 обертання: Пряма A^1B^1 // $П_1$, тому вона перетвориться в проекціюючу, якщо її обертати навколо осі $i_2 \perp П_1$. Вісь i^2 проводимо через точку B^1 і обертаємо $A_1{}^1B_1{}^1$ в положення $A_1{}^2B_1{}^2 \perp$ x. В результаті 2 обертання пряма рівня A^1B^1 перетворилася у фронтально-проекціюючу прямуA^2B^2.

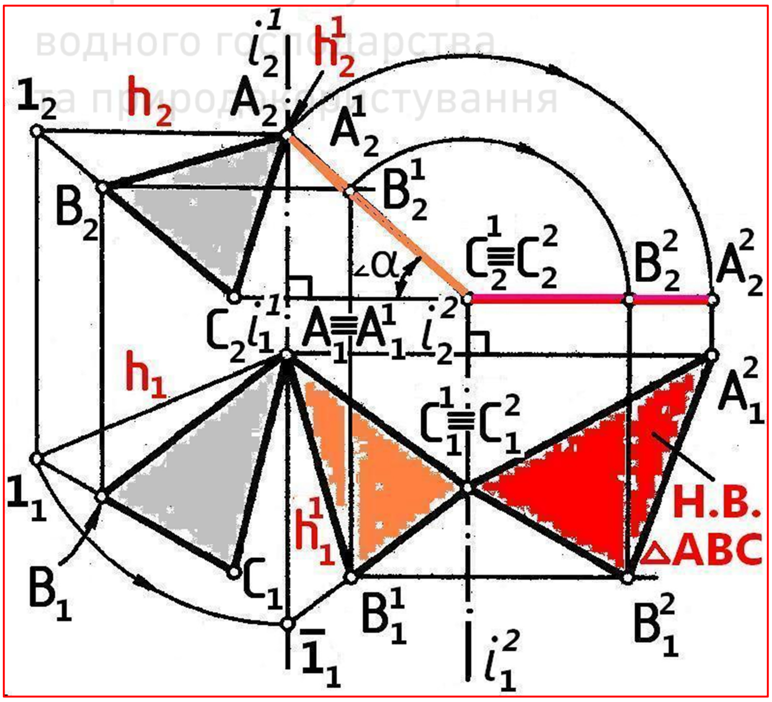


Для перетворення прямої загального положення CD в проекціюючу виконуємо два обертання.
На відміну від попередньої задачі вісь i^1 проведено перпендикулярно до $П_1$.
В результаті 1 обертання пряма загального положення CD перетворилася у фронтальну пряму рівня C^1D^1, паралельну до $П_2$.
В результаті 2 обертання прямої C^1D^1 навколо осі $i_2 \perp П_2$ вона перетворилася у горизонтально-проекціюючу пряму C^2D^2, перпендикулярну до $П_1$.

Якщо пряму загального положення почати обертати навколо осі, що перпендикулярна до Π_2, вона може стати в результаті двох обертань фронтально-проекціюючою прямою, тобто прямою, перпендикулярною до тієї площини проекцій, до якої перпендикулярна вісь першого обертання.
Якщо пряму загального положення почати обертати навколо осі, що перпендикулярна до Π_1, вона може стати в результаті двох обертань горизонтально-проекціюючою прямою, тобто прямою, перпендикулярною до Π_1, до якої перпендикулярна вісь першого обертання.
При цьому пряму рівня обертають для її перетворення в проекціюючу навколо осі, яка перпендикулярна до тієї площини проекцій, до якої пряма рівня паралельна.

8.3.6. Перетворення площини загального положення в площину рівня

Пояснення до виконання побудов.
Площина загального положення при обертанні навколо осі, що перпендикулярна до однієї з нерухомих площин проекцій, не може зайняти положення площини рівня, паралельно до Π_1 або Π_2. Вона може займати або загальне положення, або положення проекціюючої площини. Проте проекціююча площини одним обертанням може перетворитися в площину рівня. Тому для перетворення площини загального положення в площину рівня потрібно виконати два обертання: перше – перетворити площину загального положення в проекціюючу та друге – перетворити проекціюючу площину в площину рівня.
Якщо в площині загального положення проведено пряму рівня, то для перетворення заданої площини в проекціюючу її слід обертати навколо осі, що перпендикулярна до тієї площини проекцій, до якої пряма рівня паралельна.
Проекціюючу площину для її перетворення в площину рівня слід обертати навколо осі, яка перпендикулярна до тієї площини проекцій, до якої перпендикулярна проекціююча площина.

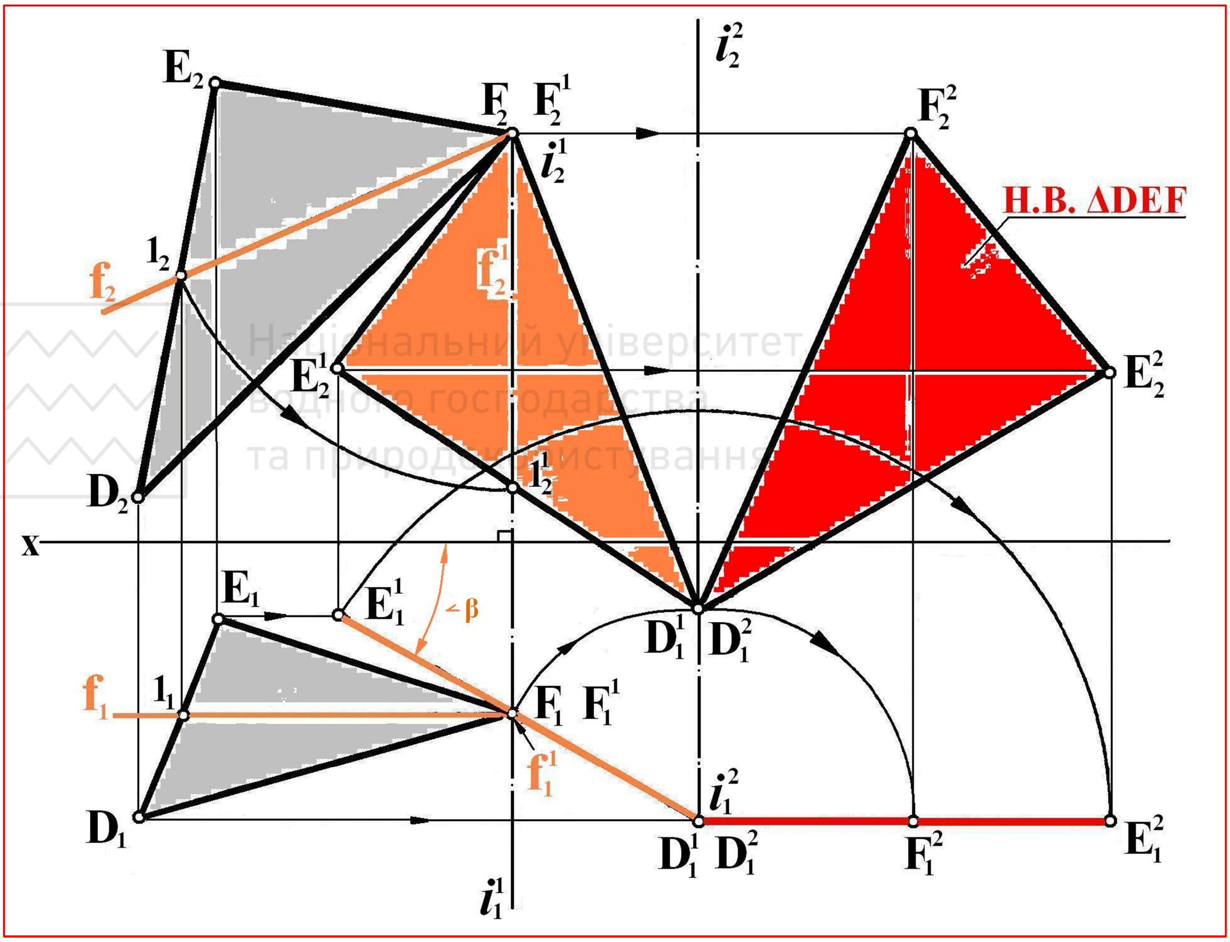


Для перетворення площини загального положення АВС в площину рівня виконуємо два обертання.

1 обертання: В площині трикутника АВС проводимо горизонтальну пряму h. Це означає, що перетворення площини трикутника АВС в проекціюючу може бути здійснено обертанням навколо осі i^1, яка перпендикулярна до тієї площини проекцій, до якої паралельна h, тобто до $П_1$. Через точку А проводимо $i_1 \perp П_1$.

З іншого боку, якщо спочатку провести вісь $i_1 \perp П_1$, то в площині трикутника АВС потрібно провести саме горизонтальну пряму, а не фронтальну, оскільки h // $П_1$. Розміщуючи h_1 в положення $h_1^1 \perp x$, отримаємо, що в результаті 1 обертання площина трикутника АВС перетворилася в проекціюючу площину трикутника $A^1B^1C^1$.

2 обертання: Оскільки площина трикутника $A^1B^1C^1 \perp П_2$, а обертати для її перетворення в площину рівня потрібно її слід-проекцію, то вісь обертання i^2 розміщуємо перпендикулярно до $П_2$. Вісь i^2 проводимо через точку C^1. Розміщуючи $A_2^1B_2^1C_2^1$ в положення $A_2^2B_2^2C_2^2$ // x, отримаємо, що в результаті 2 обертання площина трикутника $A^1B^1C^1$ з проекціюючого положення перетворилася в площину рівня, яку задано трикутником $A^2B^2C^2$.



Для перетворення площини загального положення DEF в площину рівня виконуємо **два обертання.**

1 обертання: **В площині трикутника DEF проводимо фрзонтальну пряму f. Це означає, що перетворення площини трикутника DEF в проекціюючу може бути здійснено обертанням навколо осі i^1, яка перпендикулярна до тієї площини проекцій, до якої паралельна f, тобто до $П_2$. Через точку F проводимо $i_1 \perp П_2$.**

З іншого боку, якщо спочатку провести вісь $i_1 \perp П_2$, то в площині трикутника DEF потрібно провести саме фронтальну пряму, а не горизонтальну, оскільки f // $П_2$. Розміщуючи f_2 в положення $f_2^1 \perp x$, отримаємо, що в результаті **1 обертання** **площина трикутника DEF перетворилася в проекціюючу площину трикутника $D^1E^1F^1$.**

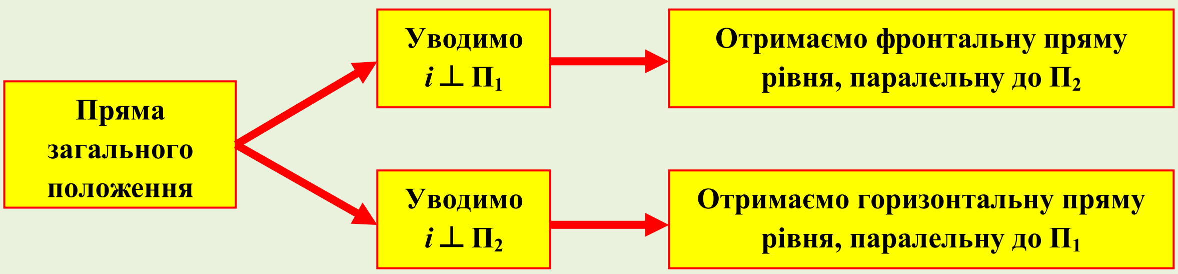
2 обертання: **Оскільки площина трикутника $D^1E^1F^1 \perp П_1$, а обертати для її перетворення в площину рівня потрібно її слід-проекцію, то вісь обертання i^2 розміщуємо перпендикулярно до $П_1$. Вісь i^2 проводимо через точку D^1. Розміщуючи $E_1^1F_1^1D_1^1$ в положення $E_1^2F_1^2D_1^2$ // x, отримаємо, що в результаті** **2 обертання** **площина трикутника $D^1E^1F^1$ з проекціюючого положення перетворилася в площину рівня, яку задано трикутником $D^2E^2F^2$.**

УЗАГАЛЬНЕННЯ

1 основна задача: Перетворити пряму загального положення в пряму рівня (досягається одним обертанням).

Якщо розмістити вісь $i \perp П_1$, то для отримання прямої рівня обертати потрібно горизонтальну проекцію прямої загального положення, розміри якої не змінюються при обертанні навколо осі $i \perp П_1$. Горизонтальну проекцію прямої загального положення розміщують паралельно до осі x, що відповідає положенню фронтальної прямої рівня, характерна графічна ознака якої є паралельність її горизонтальної проекції до осі x. Таким чином, при обертанні прямої загального положення навколо осі $i \perp П_1$ отримують фронтальну пряму рівня, паралельну до $П_2$.

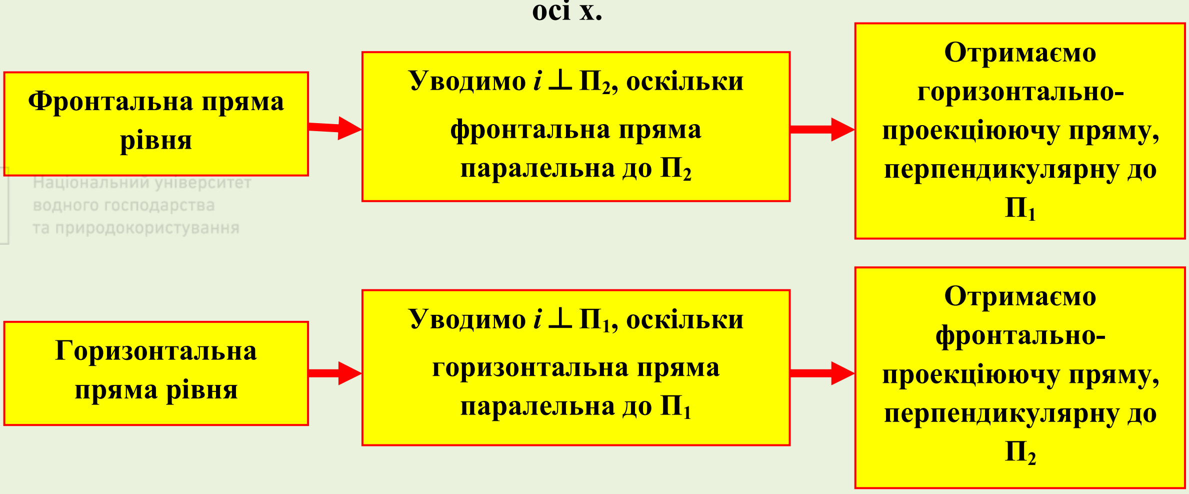
Якщо розмістити вісь $i \perp П_2$, то для отримання прямої рівня обертати потрібно фронтальну проекцію прямої загального положення, розміри якої не змінюються при обертанні навколо осі $i \perp П_2$. Фронтальну проекцію прямої загального положення розміщують паралельно до осі x, що відповідає положенню горизонтальної прямої рівня, характерна графічна ознака якої є паралельність її фронтальної проекції до осі x. Таким чином, при обертанні прямої загального положення навколо осі $i \perp П_2$ отримують горизонтальну пряму рівня, паралельну до $П_1$.



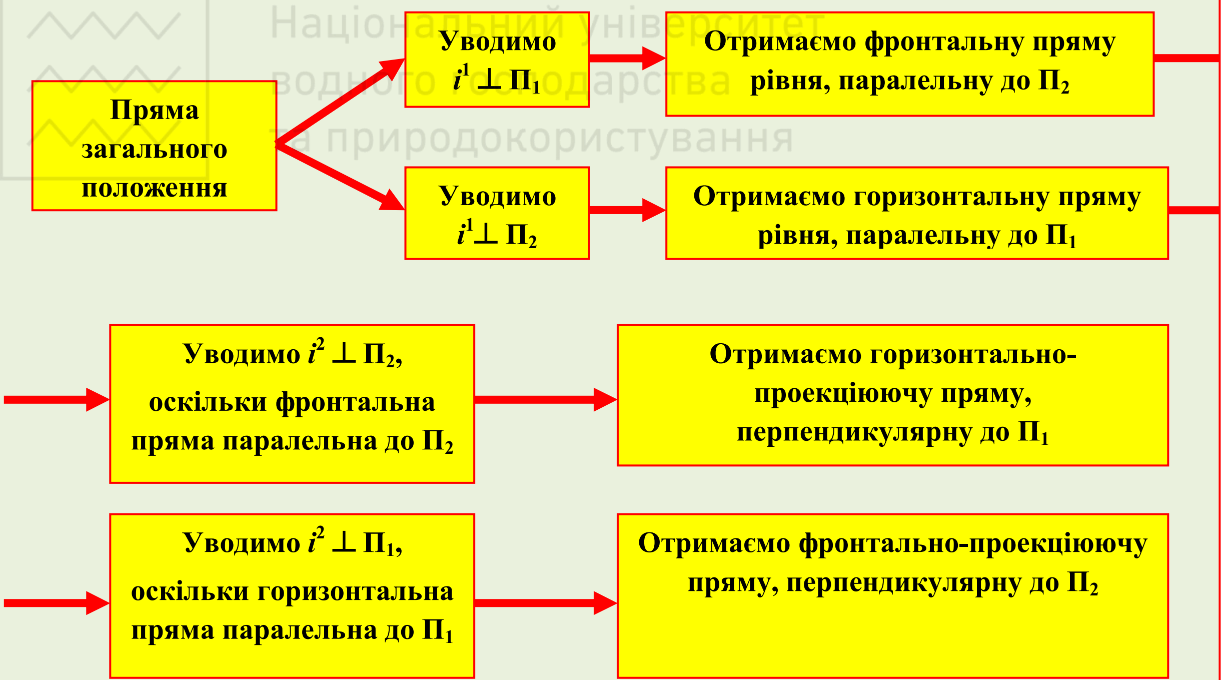
Також одним обертанням пряма рівня перетворюється в проекціюючу пряму.

Фронтальна пряма рівня паралельна до $П_2$, тому для перетворення її в проекціюючу обертання фронтальної прямої здійснюється в площині, яка паралельна до $П_2$. Отже, вісь обертання *i* повинна бути перпендикулярною до $П_2$, а фронтальну проекцію фронтальної прямої розміщують перпендикулярно до осі х.

Горизонтальна пряма рівня паралельна до $П_1$, тому для перетворення її в проекціюючу обертання горизонтальної прямої здійснюється в площині, яка паралельна до $П_1$. Отже, вісь обертання *i* повинна бути перпендикулярною до $П_1$, а горизонтальну проекцію горизонтальної прямої розміщують перпендикулярно до осі х.



2 основна задача: Перетворити пряму загального положення в проекціюючу (досягається двома обертаннями): 1 обертання – перетворення прямої загального положення в пряму рівня (1 основна задача), 2 обертання – перетворення прямої рівня в проекціюючу.



3 основна задача: Перетворити площину загального положення в проекціюючу (досягається одним обертанням).

Площина загального положення

Проводимо в площині горизонтальну пряму. Уводимо $i \perp \Pi_1$, оскільки горизонтальна пряма паралельна до Π_1

Отримаємо фронтально-проекціюючу площину, перпендикулярну до Π_2

Проводимо в площині фронтальну пряму. Уводимо $i \perp \Pi_2$, оскільки фронтальна пряма паралельна до Π_2

Отримаємо горизонтально-проекціюючу площину, перпендикулярну до Π_1

Також одним обертанням проекціююча площина перетворюється в площину рівня.

Фронтально-проекціююча площина

Уводимо $i \perp \Pi_2$, оскільки фронтально-проекціююча площина перпендикулярна до Π_2

Отримаємо горизонтальну площину рівня, паралельну до Π_1

Горизонтально-проекціююча площина

Уводимо $i \perp \Pi_1$, оскільки горизонтально-проекціююча площина перпендикулярна до Π_1

Отримаємо фронтальну площину рівня, паралельну до Π_2

4 основна задача: Перетворити площину загального положення в площину рівня (досягається двома обертаннями): 1 обертання – перетворення площини загального положення в проекціюючу (3 основна задача), 2 обертання – перетворення проекціюючої площини в площину рівня.

Площина загального положення

Проводимо в площині горизонтальну пряму. Уводимо $i^1 \perp \Pi_1$

Отримаємо фронтально-проекціюючу площину, перпендикулярну до Π_2

Проводимо в площині фронтальну пряму. Уводимо $i^1 \perp \Pi_2$

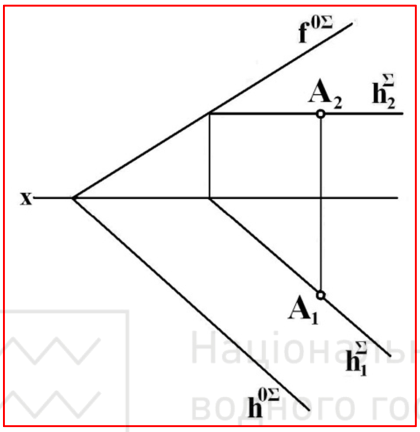
Отримаємо горизонтально-проекціюючу площину, перпендикулярну до Π_1

Уводимо $i \perp \Pi_2$, оскільки фронтально-проекціююча площина перпендикулярна до Π_2 → **Отримаємо горизонтальну площину рівня, паралельну до Π_1**

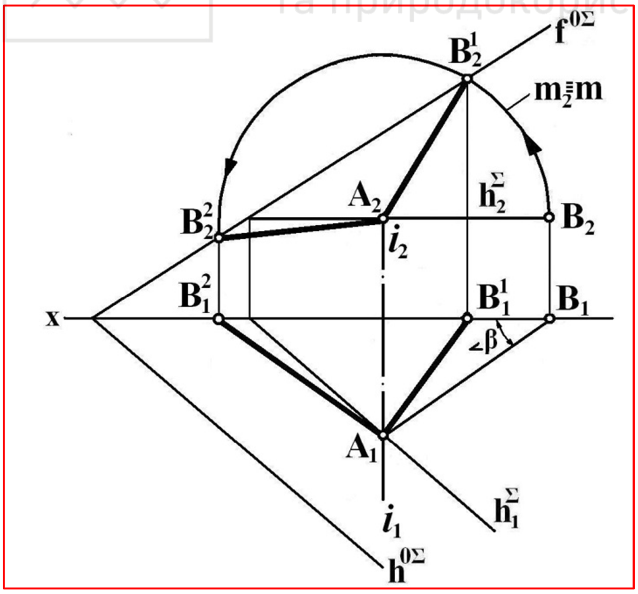
Уводимо $i \perp \Pi_1$, оскільки горизонтально-проекціююча площина перпендикулярна до Π_1 → **Отримаємо фронтальну площину рівня, паралельну до Π_2**

8.3.7. Приклади розв'язування задач із застосуванням способу обертання навколо проекціюючої прямої

Задача №1



Початкова умова задачі.
Провести в площині Σ, яку задано слідами, через точку A пряму під кутом β до площини Π_2.



Розв'язування задачі.
Задача розв'язується шляхом побудови поверхні конуса обертання з вершиною в точці A і віссю обертання, що проходить через точку A перпендикулярно до Π_2. Твірна AB цієї поверхні складає кут β з площиною Π_2, причому точка B належить площині Π_2.
Послідовність розв'язування:
1. Проводимо через точку A вісь обертання *i* конічної поверхні перпендикулярно до Π_2.

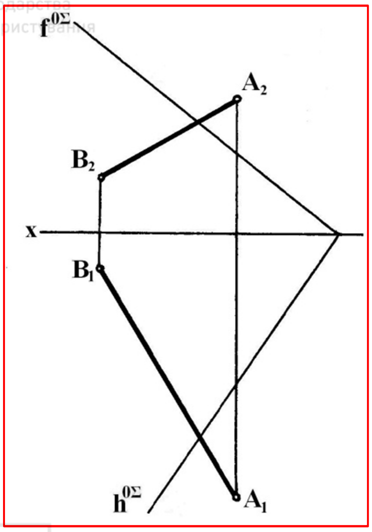
2. Через точку A проводимо обрисову твірну AB поверхні конуса обертання, яка є горизонтальною прямою з кутом β до $П_2$, причому точка B належить $П_2$. Твірна AB обертанням навколо осі *i* утворює поверхню конуса обертання, причому точка B описує коло m радіусом A_2B_2 в площині $П_2$.

3. Визначаємо точки B^1 і B^2 перетину кола m з фронтальним слідом $f^{0\Sigma}$.

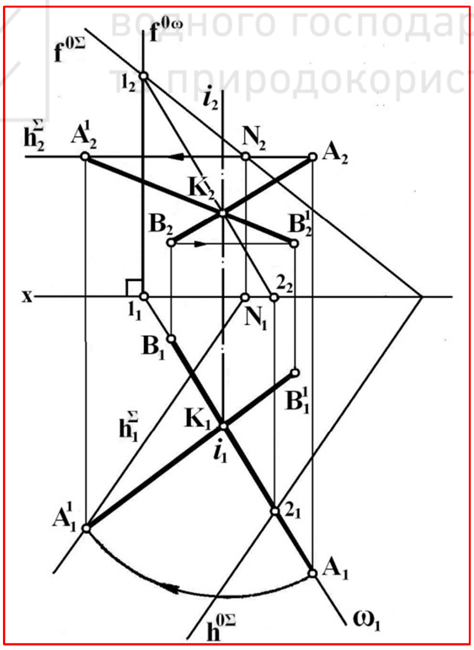
4. З'єднуємо точки B^1 і B^2 з точкою A, отримаємо шукані прямі AB^1 і AB^2, які є твірними поверхні конуса обертання і водночас належать площині Σ, мають кут нахилу β до площини $П_2$.

Якщо побудоване коло m дотикається сліду $f^{0\Sigma}$, то задача має один розв'язок. В цьому випадку пряма AB і площина Σ мають однаковий кут нахилу β до площини π_2. При відсутності спільних точок у кола m і сліду $f^{0\Sigma}$ неможливо провести в площині Σ жодної прямої, що нахилена під кутом β до площини $П_2$.

Задача №2



Початкова умова задачі.
Сумістити пряму AB з площиною Σ обертанням прямої навколо осі i, що перпендикулярна до $П_1$.



Розв'язування задачі:

1. Знаходимо точку K перетину прямої AB з площиною Σ за допомогою горизонтально-проеціюючої площини ω, що проходить через AB.

2. Проводимо через точку K вісь обертання *i* поверхні кругового конуса з вершиною в точці K ($i \perp П_1$). Точки A і B при обертанні навколо *i* будуть переміщуватися по колах, площини яких паралельні до $П_1$.

3. В площині Σ проводимо горизонталь h^{Σ} на рівні розміщення точки A.

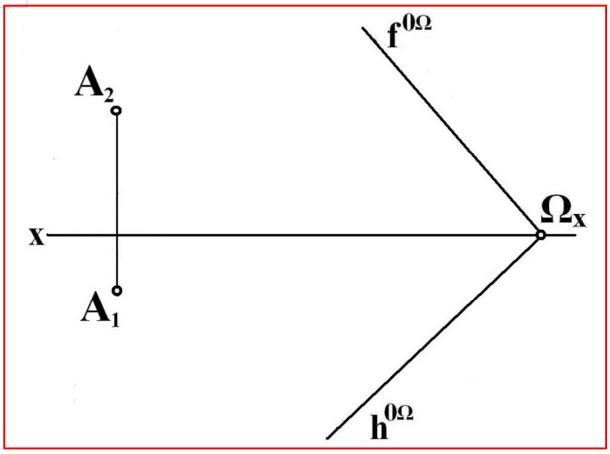
4. Обертаємо навколо i точку A_1 до того моменту, поки точка А суміститься з площиною Σ. Для цього перемістимо A_1 по колу з центром в точці $К_1$ в точку A_1^1, що розміщена на $h_1^Σ$. Знаходимо A_2^1на $h_2^Σ$. Точка A^1 належить площині Σ, оскільки лежить на $h^Σ$ (по $h_2^Σ$ при обертанні буде переміщуватися фронтальна проекція A_2 точки А, оскільки $h_2^Σ$ є слідом площини обертання точки А).

5. Проводимо $A_2^1К_2$ за точку $К_2$ до перетину з горизонтальною лінією переміщування точки B_2, що має місце при обертанні АВ навколо i. Відмічаємо B_2^1.

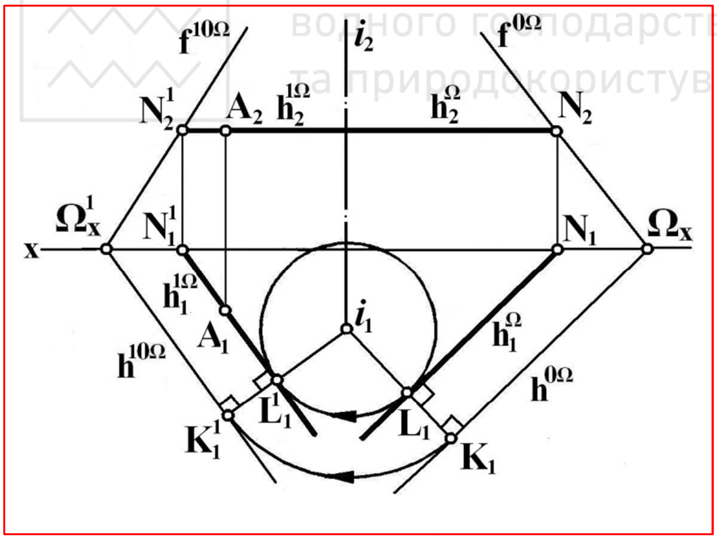
6. За допомогою лінії проекційного зв'язку, яку проведено з точки B_2^1, знаходимо B_1^1 на продовженні $A_1^1К_1$.

Пряма A^1B^1 знаходиться в площині Σ, оскільки проходить через дві точки площини Σ – точки A^1 і К.

Задача №3



Початкова умова задачі.
Повернути площину Ω навколо осі і, що перпендикулярна до $П_1$, щоб вона пройшла через точку А.



Розв'язування задачі:

1. Проводимо в площині Ω на рівні точки А горизонталь $h^Ω$.

2. Повернемо горизонталь $h^Ω$ в положення, при якому вона пройде через точку А. Для цього:

а) з i_1 опускаємо перпендикуляр i_1L_1 на $h_1^Ω$. Точка L_1 – основа перпендикуляра;

б) точка L_1 при обертанні горизонталі $h^Ω$ опише коло. Проводимо через точку A_1 дотичну до цього кола, знайдемо нове положення $N_1^1L_1^1$ горизонтальної проекції горизонталі $h_1^{1Ω}$ площини $Ω^1$.

3. Точка K_1 при обертанні площини Ω також опише коло з центром в i_1. Проводимо дотичну до цього кола, паралельну $N_1^1L_1^1$, отримаємо горизонтальний слід $h^{10\Omega}$ площини Ω в новому її положенні Ω^1.

4. Фронтальний слід $f^{10\Omega}$ пройде через точку сходу Ω_x^1 і фронтальний слід N21горизонталі $h^{1\Omega}$ площини Ω^1.

Задача має два розв'язки, оскільки через A_1 можна провести дві дотичні до кола радіуса i_1L_1.

8.4. Спосіб плоско-паралельного переміщення (обертання без нанесення на епюрі осей)

Сутність способу. Розглядаючи в 8.3 спосіб обертання навколо проеціюючої прямої, було показано, що при обертанні прямої, площини (як і будь-якого іншого об'єкта), їх проекції на площини, які перпендикулярні до осі обертання *i*, зберігають свою форму і розміри, змінюючи тільки положення. Проекції об'єктів на площини, паралельні до осі обертання, змінюють як своє положення, так форму і розміри. Причому точки цих проекцій переміщуються по паралельних прямих – слідах площин обертання точок об'єкта. Ці властивості проекцій дозволяють виконувати обертання без нанесення на епюрі осі обертання, а вибираючи тільки її напрямок. Напрямок осей обертання визначається на епюрі положенням обертання точок об'єкта.

Переваги цього способу: проекція прямої, площини або іншого об'єкта на площину проекцій, що перпендикулярна до осі обертання, розміщується в будь-якому місці креслення. Це дозволяє запобігти накладанню одних проекцій на інші, що іноді трапляється при обертанні об'єктів навколо осей, перпендикулярних до площин проекцій, а також більш раціонально використовувати графічне поле креслення.

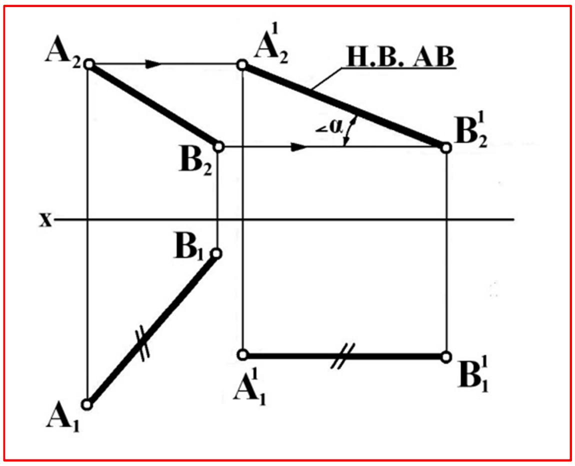
ОБЕРТАННЯ НАВКОЛО ОДНІЄЇ УЯВНОЇ ОСІ ОБЕРТАННЯ

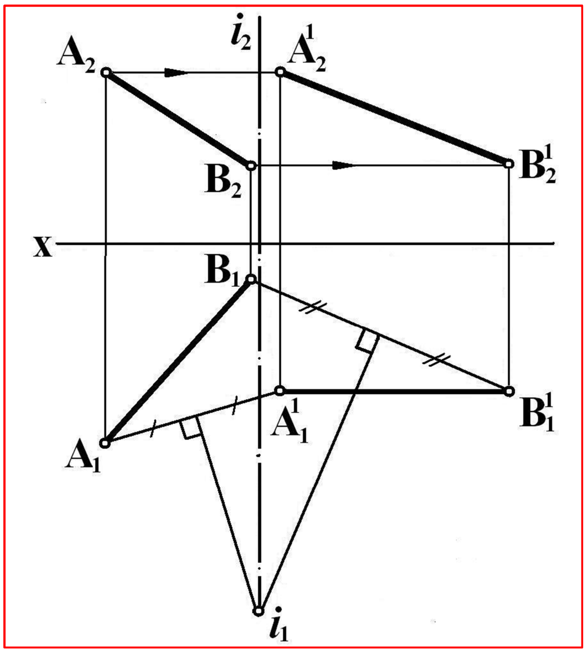
8.4.1. Перетворення прямої загального положення в пряму рівня

Умова задачі: перетворити пряму загального положення AB у фронтальну пряму рівня.

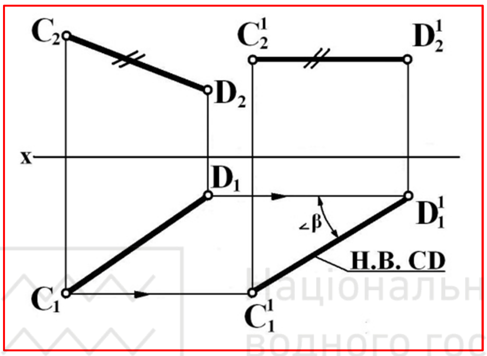
Розв'язування:

Горизонтальна проекція фронтальної прямої паралельна до осі x, тому відрізок A_1B_1 розміщуємо, не змінюючи його розмірів, в положення $A_1^1B_1^1$ // x. При цьому $A_1^1B_1^1$ розміщуємо в будь-якому зручному місці поля креслення. Це означає, що обертання AB відбувається навколо осі, яка перпендикулярна до $П_1$, хоча цю вісь на епюрі не показують. $A_2^1B_2^1$ = Н.В. AB; ∠ α – кут нахилу прямої AB до площини $П_1$.





За потребою можна визначити положення осі *i*, навколо якої повернули пряму АВ до положення фронтальної прямої. Горизонтальна проекція осі обертання (точка i_1) є точкою перетину перпендикулярів, що проведені через середини відрізків $A_1A_1^1$ і $B_1B_1^1$. Проте в побудові осі потреби немає, якщо це не обумовлено умовою задачі.

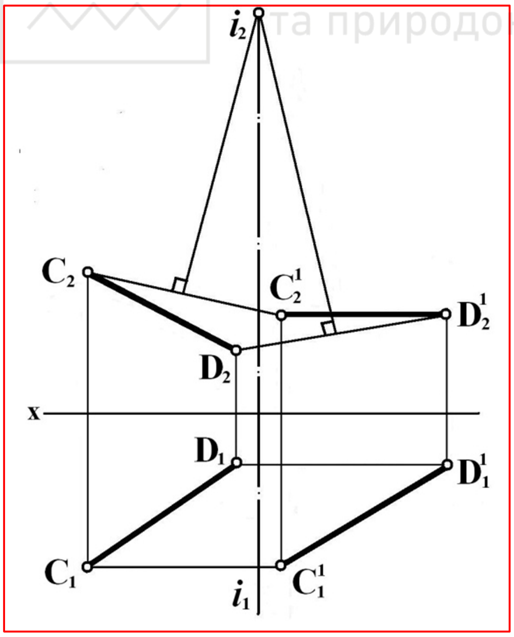


Умова задачі: **перетворити пряму загального положення CD у горизонтальну пряму рівня.**

Розв'язування:

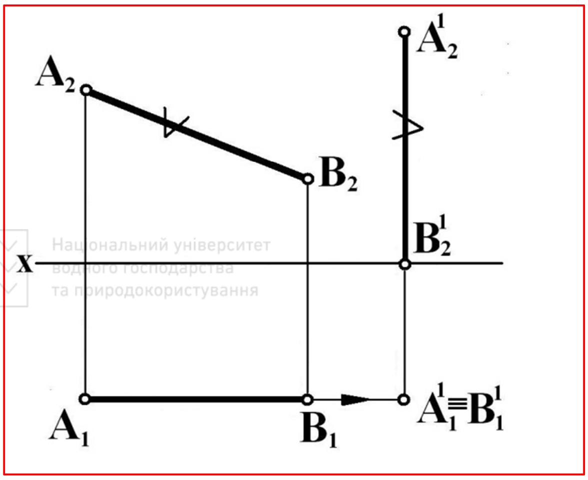
Фронтальна проекція горизонтальної прямої паралельна до осі x, тому відрізок C_2D_2 розміщуємо, не змінюючи його розмірів, в положення $C_2^1D_2^1$ // x. При цьому $C_2^1D_2^1$ розміщуємо в будь-якому зручному місці поля креслення. Це означає, що обертання CD відбувається навколо осі, яка перпендикулярна до Π_2, хоча цю вісь на епюрі не показують.

$C_1^1D_1^1$ = Н.В. CD; $\angle$ β – кут нахилу прямої CD до площини Π_2.



За потребою можна визначити положення осі *i*, навколо якої повернули пряму CD до положення горизонтальної прямої. Фронтальна проекція осі обертання (точка i_2) є точкою перетину перпендикулярів, що проведені через середини відрізків $C_2C_2^1$ і $D_2D_2^1$. Проте в побудові осі потреби немає, якщо це не обумовлено умовою задачі.

8.4.2. Перетворення прямої рівня в проекціюючу пряму



Умова задачі: перетворити фронтальну пряму рівня АВ у проекціюючу.

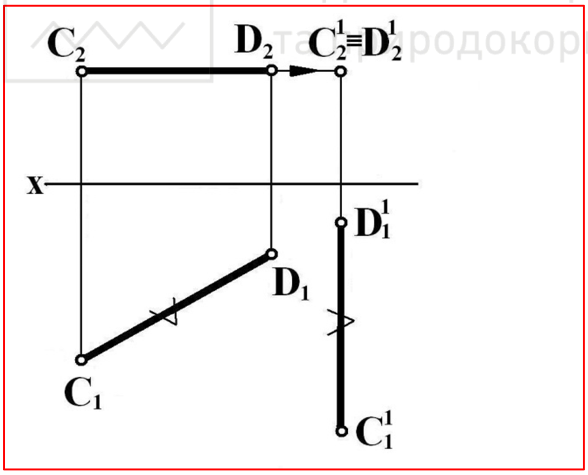
Пояснення до розв'язування:

В 8.3.2 показано, що фронтальна пряма перетворюється у горизонтально-проекціюючу при обертанні навколо осі $i \perp \Pi_2$, оскільки до Π_2 паралельна фронтальна пряма. Якщо обертати фронтальну пряму навколо $i \perp \Pi_1$, то вона не перетвориться в проекціюючу. Так, у випадку розміщення горизонтальної проекції фронтальної прямої перпендикулярно до осі x, вона перетвориться у пряму рівня, паралельну до Π_3.

Таким чином, фронтальна пряма при своєму обертанні може перетворитися тільки у горизонтально-проекціюючу.

Розв'язування:

Розміщуємо фронтальну проекцію A_2B_2 відрізка АВ, не змінюючи його розмірів, у положення $A_2^1B_2^1 \perp$ x. Отримаємо, що фронтальна пряма АВ перетворилася в результаті обертання навколо уявної осі, перпендикулярної до Π_2, у горизонтально-проекціюючу пряму A^1B^1.



Умова задачі: перетворити горизонтальну пряму рівня CD у проекціюючу.

Розв'язування:

Горизонтальна пряма CD при своєму обертанні може перетворитися тільки у фронтально-проекціюючу пряму. Оскільки CD // Π_1, то її обертають навколо уявної осі, що перпендикулярна до Π_1. Для цього C_1D_1 розміщують, не змінюючи розмірів, у положення $C_1^1D_1^1 \perp$ x.

В результаті маємо, що горизонтальна пряма CD перетворилася в результаті обертання навколо уявної осі, перпендикулярної до Π_1, у фронтально-проекціюючу пряму C^1D^1.

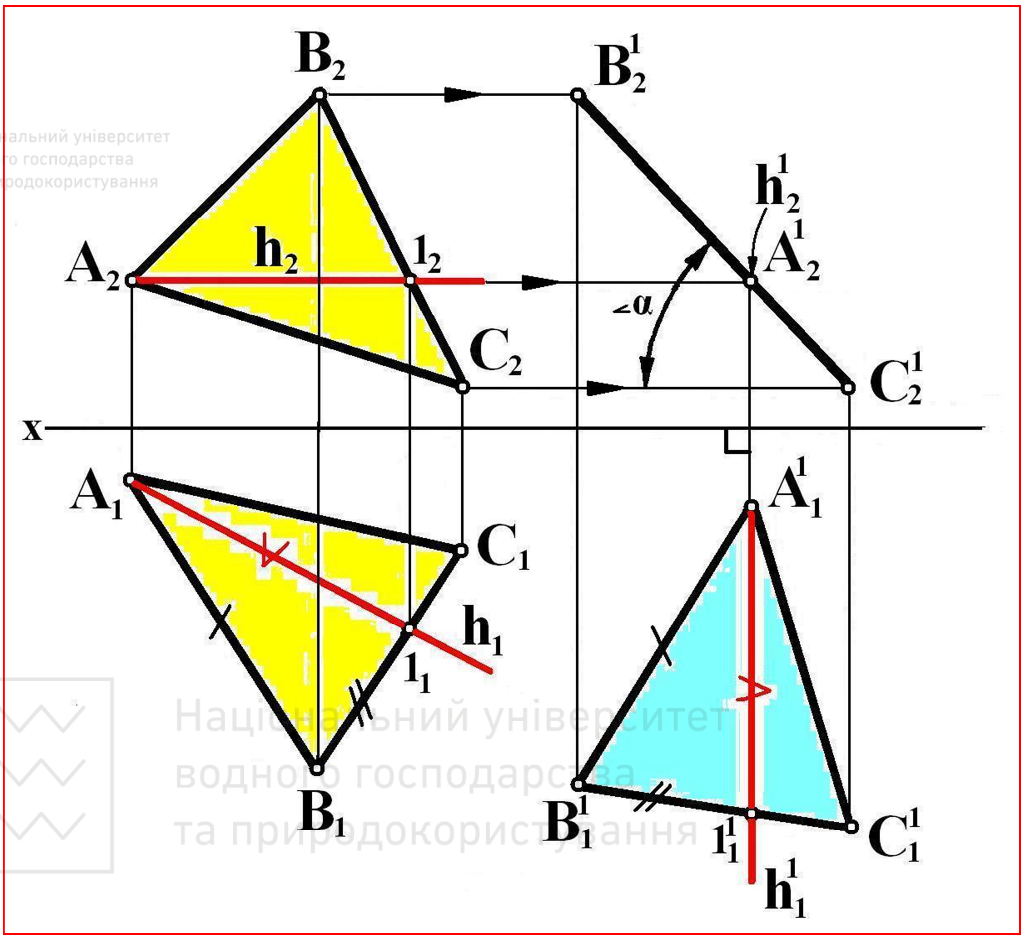
8.4.3. Перетворення площини загального положення в проекціюючу площину

Умова задачі: **перетворити площину трикутника ABC у фронтально- проекціюючу.**

Розв'язування:

Для цього відповідно до 8.3.3 в площині трикутника ABC проводимо горизонтальну пряму h і розміщуємо її горизонтальну проекцію h_1 разом з горизонтальною проекцією трикутника ABC, не змінюючи початкових форм і розмірів, у положення $h_1^1 \perp x$.

В результаті обертання отримаємо, що трикутник $A^1B^1C^1$ займає фронтально-проекціююче положення, перпендикулярне до $П_2$, де $\angle$ α – кут нахилу площини трикутника ABC до $П_1$.

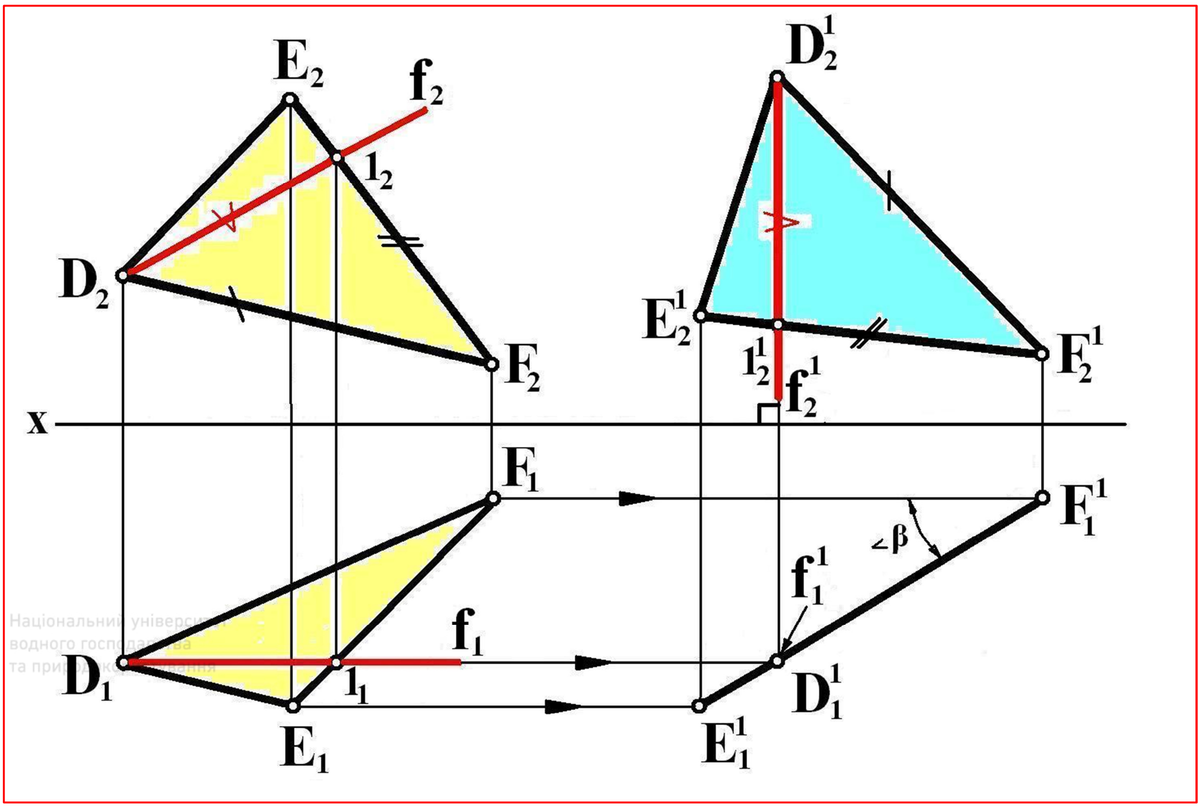


Умова задачі: **перетворити площину трикутника DEF у горизонтально-проекціюючу.**

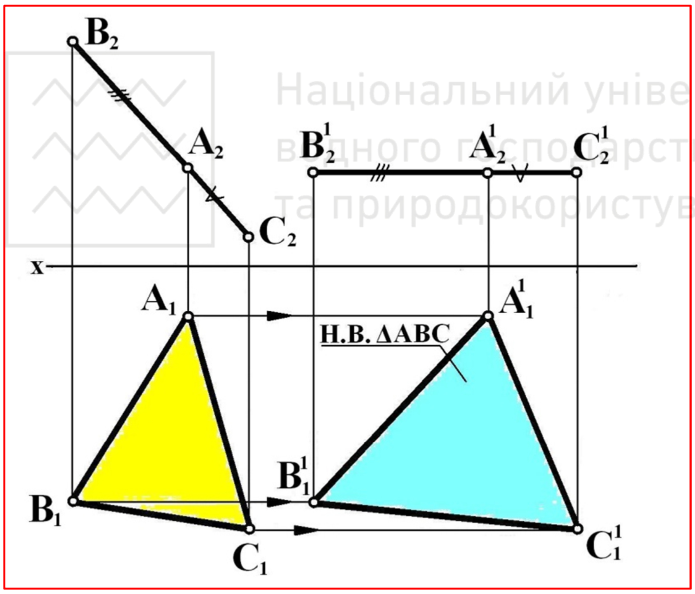
Розв'язування:

Для цього відповідно до 8.3.3 в площині трикутника DEF проводимо фронтальну пряму f і розміщуємо її фронтальну проекцію f_2 разом з фрзонтальною проекцією трикутника DEF, не змінюючи початкових форм і розмірів, у положення $f_2^1 \perp x$.

В результаті обертання отримаємо, що трикутник $D^1E^1F^1$ займає горизонтально-проекціююче положення, перпендикулярне до $П_1$, де $\angle$ β – кут нахилу площини трикутника DEF до $П_2$.



8.4.4. Перетворення проекціюючої площини в площину рівня



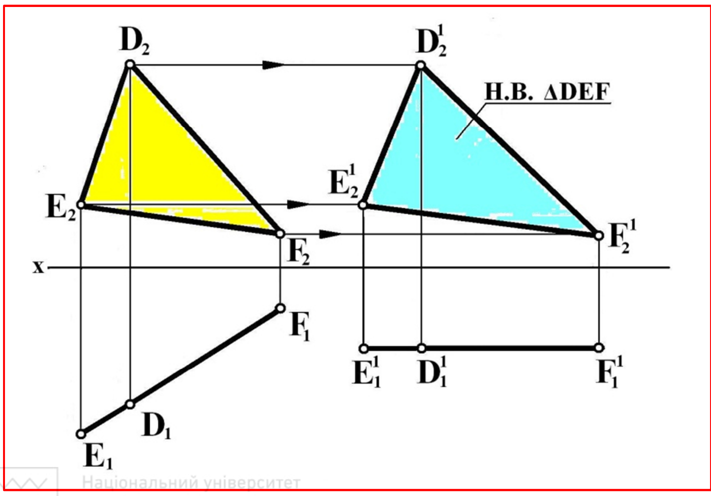
Умова задачі: перетворити фронтально-проекціюючу площину трикутника АВС у площину рівня.

Розв'язування:

Оскільки задана площина перпендикулярна до $П_2$, то її можна обертати для отримання положення площини рівня навколо осі, перпендикулярної до $П_2$, розміщуючи слід-проекцію $B_2A_2C_2$, не змінюючи її розмірів, у положення $B_2^1A_2^1C_2^1$ // x.

В результаті обертання площини трикутника АВС, який займав початкове положення фронтально-проекціюючої площини, він перетворився в трикутник $A^1B^1C^1$, який займає положення горизонтальної площини рівня. $A_1^1B_1^1C_1^1$ = Н.В. ΔАВС.

Примітка: якщо обертати трикутник АВС навколо осі, перпендикулярної до $П_1$, то трикутник буде займати загальне положення або ще одне положення фронтально-проекціюючої площини.



Умова задачі: перетворити горизонтально-проекціюючу площину трикутника DEF у площину рівня.

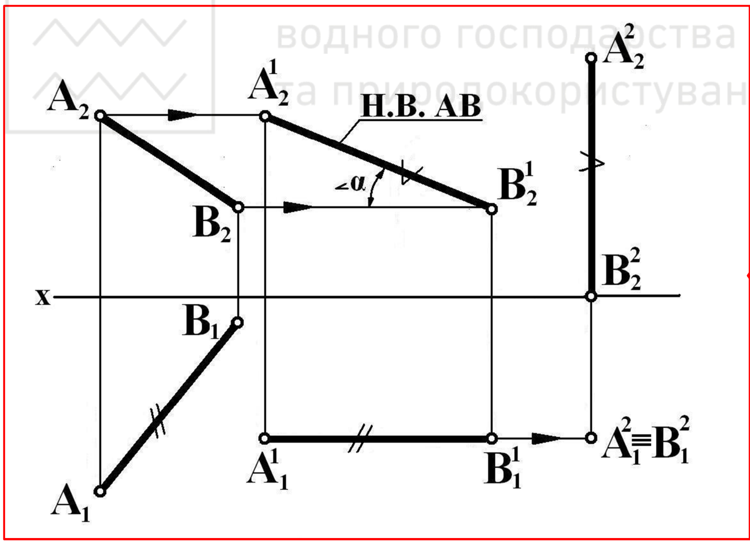
Розв'язування:

Обертання здійснюємо навколо уявної осі, перпендикулярної до $П_1$, до якої перпендикулярна задана площина трикутника, причому площина трикутника в будь-якому положенні при обертанні буде перпендикулярною саме до $П_1$. Розміщуючи слід-проекцію $E_1D_1F_1$ у положення $E_1^1D_1^1F_1^1$ // x, отримаємо трикутник $D^1E^1F^1$, який займає положення фронтальної площини рівня. $D_2^1E_2^1F_2^1$ = Н.В. ΔDEF.

Примітка: якщо обертати трикутник DEF навколо осі, перпендикулярної до $П_2$, то трикутник буде займати загальне положення або ще одне положення горизонтально-проекціюючої площини.

ОБЕРТАННЯ НАВКОЛО ДВОХ УЯВНИХ ОСЕЙ ОБЕРТАННЯ

8.4.5. Перетворення прямої загального положення в проекціюючу пряму



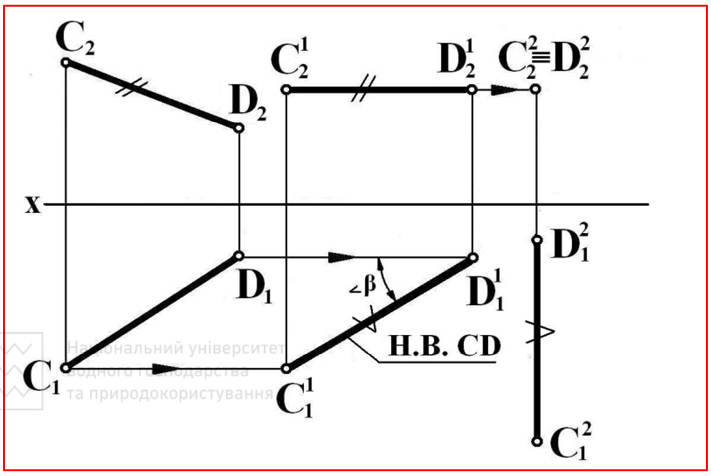
Умова задачі: перетворити пряму загального положення АВ у горизонтально-проекціюючу.

Розв'язування:

Задача розв'язується в результаті 2 обертань. Оскільки у горизонтально-проекціюючу пряму може перетворитися фронтальна пряма рівня в результаті її одного обертання, то спочатку потрібно перетворити пряму загального положення у фронтальну пряму рівня.

1 обертання: **розміщуємо A_1B_1, не змінюючи розмірів, в положення $A_1^1B_1^1$ // x. В результаті 1 обертання пряма загального положення АВ перетворилася у фронтальну**

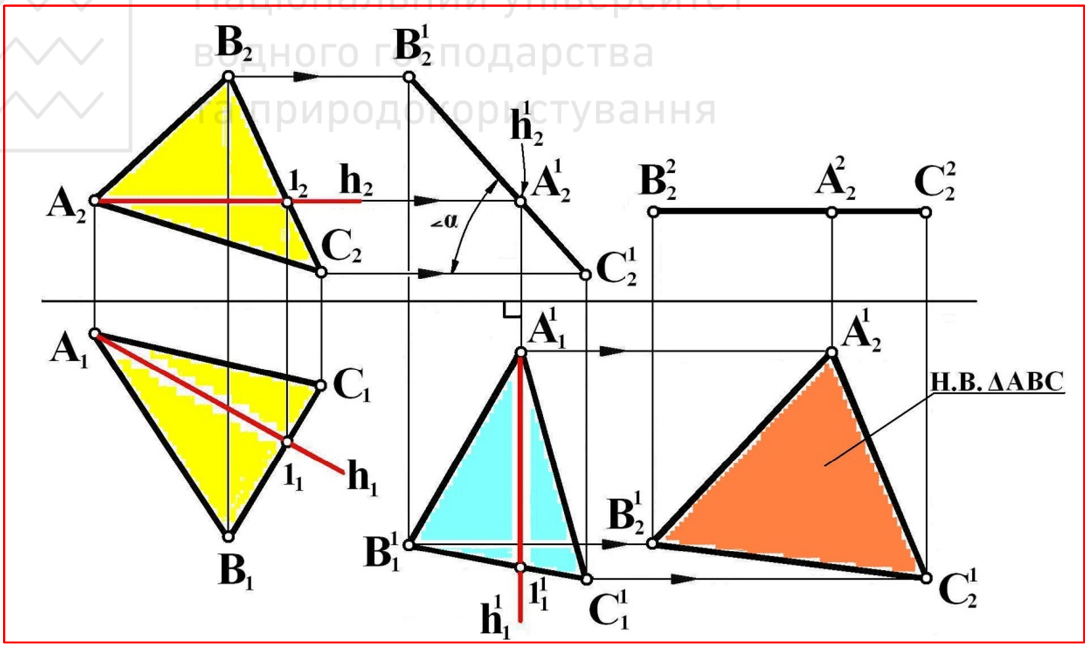
пряму рівня A^1B^1. Обертання здійснено навколо уявної осі, перпендикулярної до $П_1$.
2 обертання: розміщуємо $A_2^1B_2^1$, не змінюючи розмірів, у положення $A_2^2B_2^2 \perp x$.
В результаті обертання фронтальна пряма A^1B^1 перетворилася у горизонтально-проекціюючу пряму A^2B^2. Обертання здійснено навколо уявної осі, перпендикулярної до $П_2$.



Умова задачі: перетворити пряму загального положення CD у фронтально-проекціюючу.
Розв'язування:
Задача розв'язується в результаті 2 обертань. Оскільки у фронтально-проекціюючу пряму може перетворитися горизонтальна пряма рівня в результаті її одного обертання, то спочатку потрібно перетворити пряму загального положення у горизонтальну пряму рівня.

1 обертання: розміщуємо C_2D_2, не змінюючи розмірів, в положення $C_2^1D_2^1 // x$. В результаті 1 обертання пряма загального положення CD перетворилася у горизонтальну пряму рівня C^1D^1. Обертання здійснено навколо уявної осі, перпендикулярної до $П_2$.
2 обертання: розміщуємо $C_1^1D_1^1$, не змінюючи розмірів, у положення $C_1^2D_1^2 \perp x$. В результаті обертання фронтальна пряма C^1D^1 перетворилася у фронтально-проекціюючу пряму C^2D^2. Обертання здійснено навколо уявної осі, перпендикулярної до $П_1$.

8.4.6. Перетворення площини загального положення в площину рівня



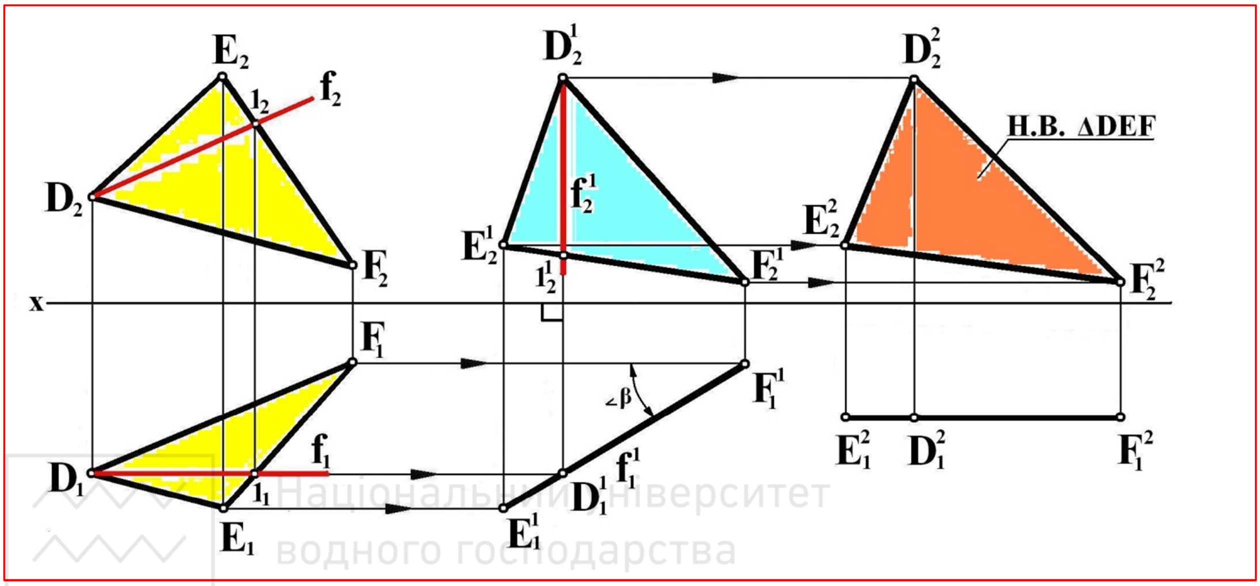
Умова задачі: перетворити площину трикутника ABC, що займає загальне положення, у горизонтальну площину рівня.

Розв'язування:

Задача розв'язується в результаті 2 обертань. Оскільки у горизонтальну площину рівня може перетворитися фронтально-проекціююча площина в результаті одного її обертання, то спочатку потрібно перетворити площину загального положення у фронтально-проекціюючу.

1 обертання: в площині трикутника ABC проводимо горизонтальну пряму h і обертаємо її разом з трикутником до положення, коли $h \perp \Pi_2$. Для цього на епюрі h_1 разом з $A_1B_1C_1$ розміщуємо у положення $h_1^1 \perp x$. В результаті 1 обертання трикутник ABC зайняв положення трикутника $A^1B^1C^1$, площина якого перпендикулярна до Π_2. $\angle\ \alpha$ – кут нахилу площини трикутника ABC до Π_1.Обертання здійснено навколо уявної осі, перпендикулярної до Π_1.

2 обертання: розміщуємо слід-проекцію $B_2^1A_2^1C_2^1$ у положення $B_2^2A_2^2C_2^2 \,//\, x$. В результаті обертання трикутник $A^1B^1C^1$, площина якого займала фронтально-проекціююче положення, перетворився у трикутник $A^2B^2C^2$, площина якого займає положення горизонтальної площини рівня. $\Delta A_2^1B_2^1C_2^1$ = Н.В. ΔABC. Обертання здійснено навколо уявної осі, перпендикулярної до Π_2.



Умова задачі: перетворити площину трикутника DEF, що займає загальне положення, у фронтальну площину рівня.

Розв'язування:

Задача розв'язується в результаті 2 обертань. Оскільки у фронтальну площину рівня може перетворитися горизонтально-проекціююча площина в результаті її одного обертання, то спочатку потрібно перетворити площину загального положення у горизонтально-проекціюючу.

1 обертання: в площині трикутника DEF проводимо фронтальну пряму f і обертаємо її разом з трикутником до положення, коли $f \perp \Pi_1$. Для цього на епюрі f_2 разом з $D_2E_2F_2$ розміщуємо у положення $f_2^1 \perp x$. В результаті 1 обертання трикутник DEF зайняв положення трикутника $D^1E^1F^1$, площина якого перпендикулярна до Π_1. $\angle\ \beta$ – кут нахилу площини трикутника DEF до Π_2.Обертання здійснено навколо уявної осі, перпендикулярної до Π_2.

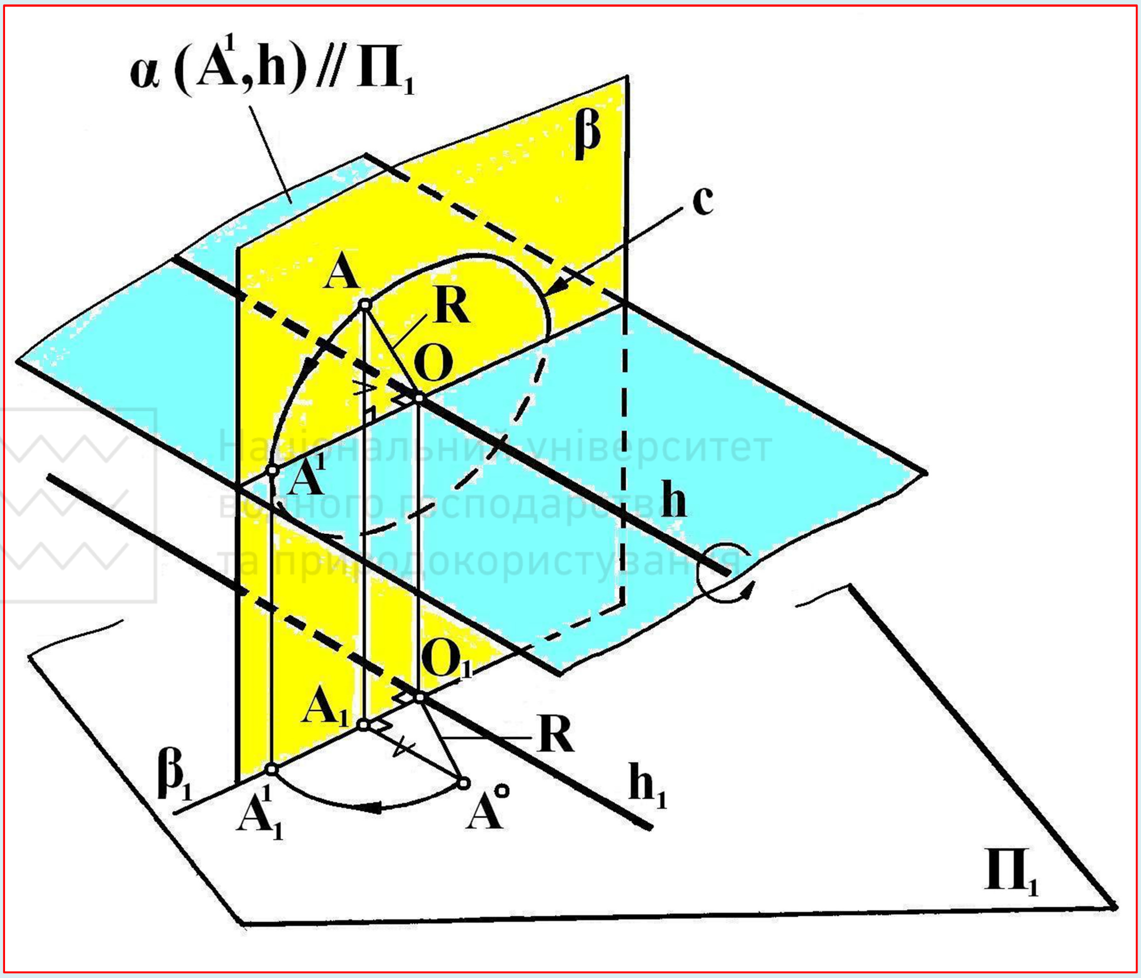
2 обертання: розміщуємо слід-проекцію $E_1^1D_1^1F_1^1$ у положення $E_1^2D_1^2F_1^2$ // x. В результаті обертання трикутник $D^1E^1F^1$, площина якого займала горизонтально-проекціююче положення, перетворився у трикутник $D^2E^2F^2$, площина якого займає положення фронтальної площини рівня. $\Delta D_2^2E_2^2F_2^2$= Н.В. ΔDEF. Обертання здійснено навколо уявної осі, перпендикулярної до Π_1.

8.5. Спосіб обертання навколо лінії рівня

Застосування способу. Спосіб обертання навколо лінії рівня застосовується для перетворення площини загального положення в площину рівня і для визначення натуральної величини плоскої фігури.

Переваги способу. Цей спосіб відрізняється від інших тим, що тільки за одне перетворення (обертання) площина загального положення стає площиною рівня.

Суть способу розглянемо на прикладі обертання точки А навколо горизонталі h.



Візьмемо площину β, щоб вона проходила через точку А перпендикулярно до горизонталі h. Кожна точка площини β, в тому числі і точка А, при обертанні навколо лінії рівня (горизонталі h), яка є віссю обертання, переміщується по колу с, що належить площині β. Площину β називають площиною обертання.

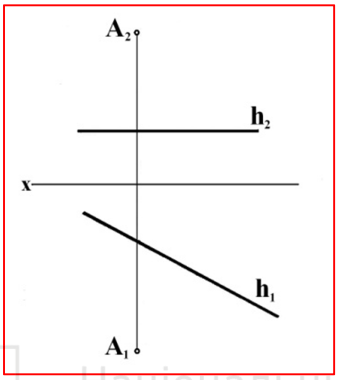
Точка О – центр кола обертання, знаходиться на горизонталі h в точці її перетину з площиною β ($O = h \cap \beta$).

Відрізок ОА – радіус обертання точки А, який позначено через R. Радіус R визначає відстань від точки А до горизонталі h – осі обертання.

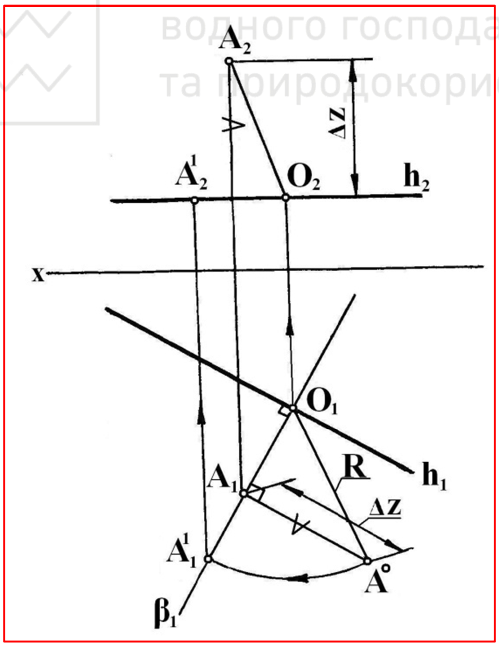
Переміщуючи точку А в положення A^1, можна отримати горизонтальну площину рівня $\alpha(A^1, h)$, що паралельна до площини $П_1$, при цьому відрізок OA^1 паралельний $П_1$ і проекціюється на $П_1$ в натуральну величину ($OA^1 = R$).

Положення точки A^1, при якому радіус обертання точки А паралельний до $П_1$ і проекціюється на $П_1$ в натуральну величину, можна отримати, визначивши величину радіуса обертання способом прямокутного трикутника, побудувавши останній на $П_1$: $R=O_1A^0$. Горизонтальну проекцію A_1^1 точки A^1 знаходимо як точку перетину сліду-проекції β_1 з дугою кола, яку проводимо з точки O_1 радіусом $R=O_1A^0$. Знаючи A_1^1, визначаємо точку A^1 як точку перетину лінії проекційного зв'язку $A_1^1A^1$ з колом с.

Задача №1



Умова задачі: Визначити натуральну величину радіуса обертання точки А навколо осі обертання – горизонталі h і нове положення A^1 точки А, за яким площина $\alpha(A^1, h)$ паралельна до $П_1$.



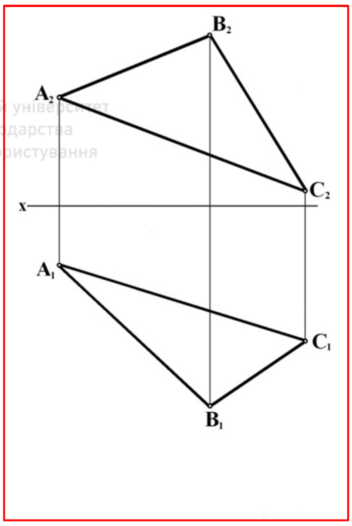
Розв'язування задачі:

1. Через точку А проводимо площину обертання β перпендикулярно до $П_1$ і горизонталі h (β_1 проходить через A_1 і перпендикулярно до h_1).
2. Визначаємо проекції точки О – центра обертання точки А, який знаходиться на h ($O_1 = \beta_1 \cap h_1$, O_2 знаходимо за допомогою лінії проекційного зв'язку).
3. Визначаємо натуральну величину відрізка ОА, який є радіусом обертання R точки А. З трикутника $A_1O_1A^0$ знаходимо, що $R=O_1A^0$.

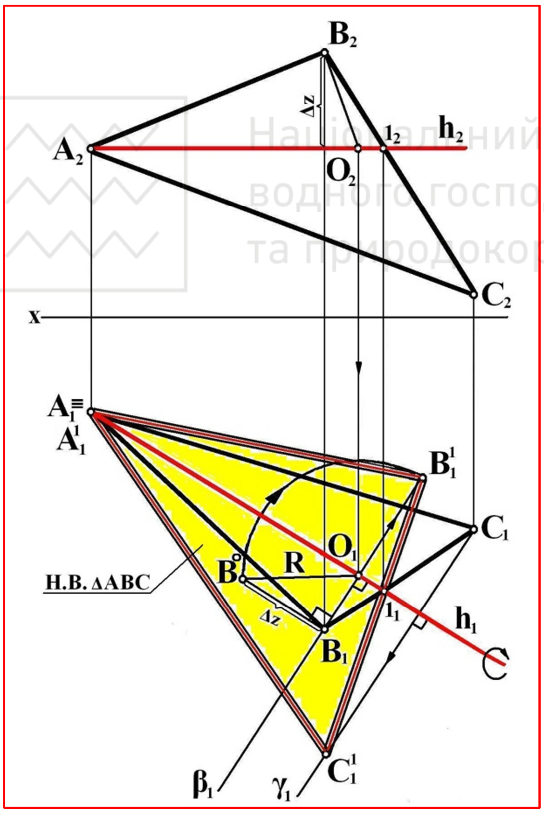
4. Визначаємо нове положення A^1 точки А, при якому радіус обертання точки А паралельний площині $П_1$: $A_1^1 = A^0A_1^1 \cap \beta_1$, а A_2^1 знаходимо за допомогою лінії проекційного зв'язку, причому $A_2^1 \equiv h_2$.

Таким чином, побудована площина $\alpha(A^1, h)$, що паралельна до $П_1$, і відрізок OA^1, який також розміщений паралельно до $П_1$, тобто в результаті обертання точка А перемістилася в положення точки A^1, яка знаходиться з центром обертання (точкою О) на одному рівні відносно площини проекцій $П_1$. Точку A^1 можна розмістити з іншого боку відносно центра обертання, тобто задача має два варіанта розв'язування.

Задача №2



Умова задачі: **Визначити натуральну величину трикутника АВС шляхом переведення його в положення, паралельне до горизонтальної площини проекцій.**



Розв'язування задачі:

Переведення площини трикутника АВС, що займає загальне положення, в положення, паралельне $П_1$, здійснено шляхом обертання площини навколо її горизонтальної прямої h, яка проходить через точки А і 1. Ці точки, що лежать на осі обертання, залишаються на місці при обертанні площини, тому для її обертання в нове положення достатньо повернути тільки одну точку трикутника АВС, яка не належить прямій h. За таку точку зручно взяти, наприклад, вершину В трикутника. При обертанні площини точка В переміщується по колу, який знаходиться в площині обертання β, що перпендикулярна до осі обертання – горизонталі *h* : $\beta_1 \perp h_1$.

Точка С при обертанні переміщується також по колу, який знаходиться в площині обертання γ, що також перпендикулярна до прямої h: $\gamma_1 \perp h_1$.

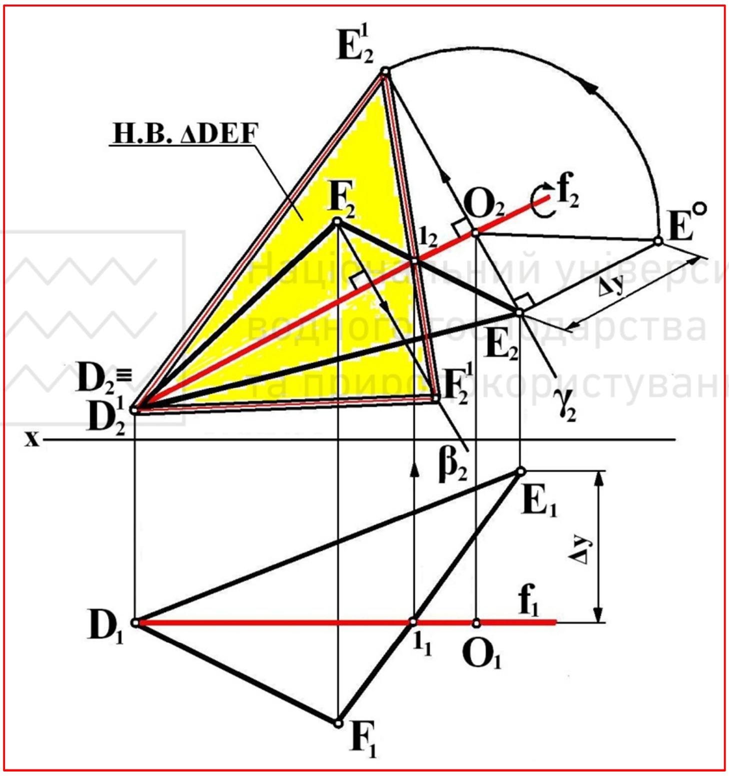
Центр кола обертання точки B (точка O) належать осі h. Величина радіуса R кола обертання точки B дорівнює відстані між точками O і B. Для визначення Н.В. відрізка OB побудовано прямокутний трикутник $O_1B_1B^0$, довжина гіпотенузи O_1B^0 якого дорівнює Н.В. OB, а, отже, величині радіуса R.

Якщо площина трикутника ABC займе положення, паралельне до $П_1$, то радіуси обертання її точок будуть розміщені також паралельно до $П_1$, тобто вони будуть проекціюватися на площину $П_1$ в натуральну величину.

Тому на сліді β_1 площини обертання точки B відмічаємо точку B_1^1, яка є точкою перетину дуги радіуса R обертання точки B з β_1. Відрізок $O_1B_1^1$ є горизонтальною проекцією радіуса обертання точки B, що розміщений паралельно до $П_1$, тобто точка B_1^1 є шуканою проекцією вершини B^1 трикутника $A^1B^1C^1$, що займе в результаті обертання трикутника ABC положення, паралельне до $П_1$. Нове положення точки C_1^1, що є горизонтальною проекцією вершини C^1, визначаємо в перетині сліду γ_1 площини обертання точки C з прямою, яка проходить через точки B_1^1 і 1_1 (точка 1 є нерухомую при обертанні трикутника).

Отриманий трикутник $A_1^1B_1^1C_1^1$ є горизонтальною проекцією трикутника $A^1B^1C^1$, що займає положення, паралельне до $П_1$, тому побудований трикутинк $A_1^1B_1^1C_1^1$ визначає натуральну вершину трикутника ABC. Фронтальна проекція трикутника $A^1B^1C^1$ буде знаходитися на h_2 (на епюрі не показано).

Задача №3



Умова задачі: Визначити натуральну величину трикутника DEF шляхом переведення його в положення, паралельне до фронтальної площини проекцій.

Розв'язування цієї задачі аналогічно до попередньої. Відмінність полягає лише в тому, що за вісь обертання прийнято фронталь площини трикутника, оскільки її потрібно розмістити паралельно до $П_2$. Побудови виконують в такій послідовності:

1. Проводимо фронталь f (вісь обертання) в площині трикутника DEF.

2. Знаходимо положення центра обертання точки E (точка O). Для цього через E_2 проводимо $\gamma_2 \perp f_2$ і знаходимо $O_2 = \gamma_2 \cap f_2$, де γ_2 – слід-проекція фронтально-

проекціюючої площини обертання γ точки Е.

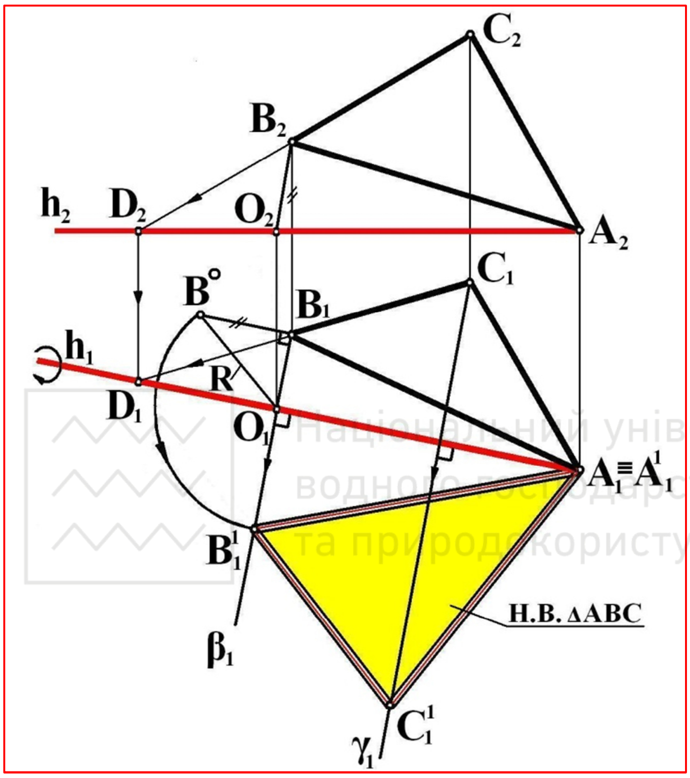
3. Визначаємо величину радіуса обертання R точки Е. Способом прямокутного трикутника визначено натуральну величину відрізка ОЕ. З трикутника $O_2E_2E^0$ отримаємо, що $R=O_2E^0$.

4. Відмічаємо положення точки E_2^1 ($E_2^1 = E^0E_2^1 \cap \gamma_2$). Таким чином, фронтальна проекція O_2E_2 радіуса обертання точки Е з початкового положення перемістилася в результаті обертання точки Е в положення $O_2E_2^1$, що є фронтальною проекцією радіуса обертання, коли він став розміщений паралельно до Π_2.

5. Знаходимо F_2^1. Для цього проводимо пряму $E_2^11_2$ і на ній фіксуємо F_2^1 ($F_2^1 = F_2^11_2 \cap \beta_2$, де β_2 – слід-проекція фронтально-проекціюючої площини обертання β точки F, проходить через F_2 перпендикулярно до f_2).

6. Точки E_2^1 і F_2^1 з'єднуємо з точкою $D_2^1 \equiv D_2$. Отримаємо трикутник $D_2^1E_2^1F_2^1$, що є фронтальною проекцією трикутника $D^1E^1F^1$, площина якого паралельна до Π_2, тобто $\Delta D_2^1E_2^1F_2^1$ = Н.В. ΔDEF. Горизонтальна проекція трикутника $D^1E^1F^1$ збігається з f_1 (на епюрі не показано).

Задача №4



Умова задачі: **Визначити натуральну величину трикутника АВС переведенням його в положення паралельне до горизонтальної площини проекцій шляхом обертання навколо осі, що знаходиться за межами проекцій трикутника.**

Розв'язування задачі:

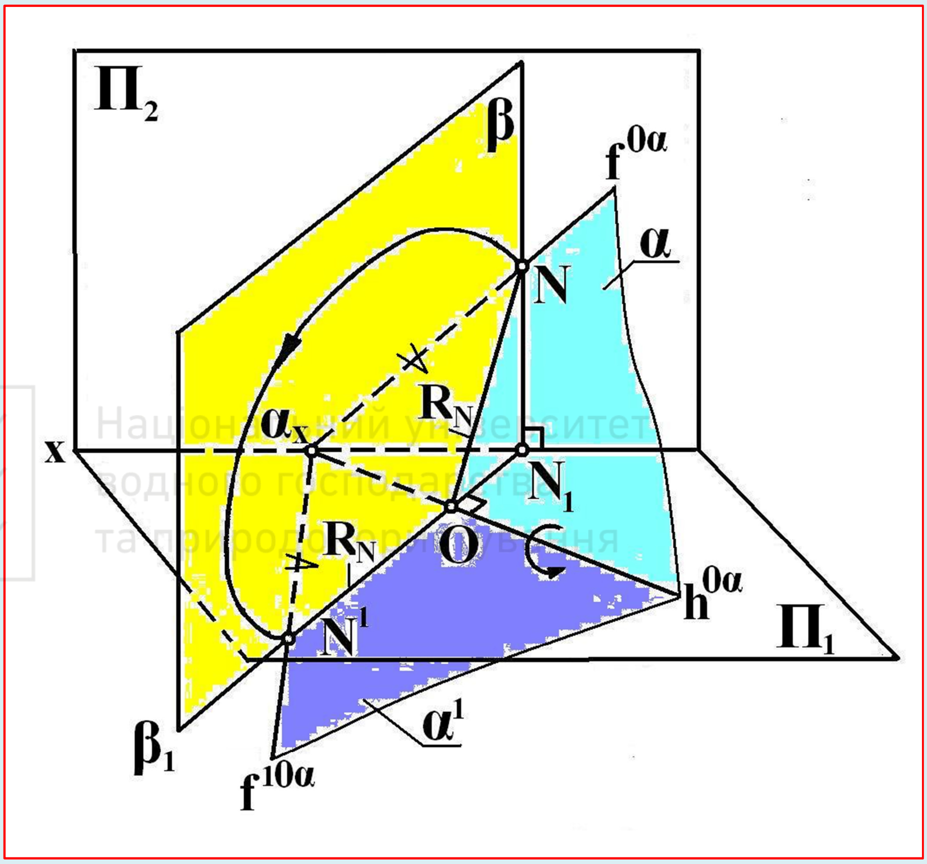
Обертання трикутника АВС здійснено навколо горизонталі h площини цього трикутника, яку проведено за допомоги точок А і D. Розміщення горизонталі h як осі обертання за межами трикутника АВС дозволяє уникнути накладання проекцій одна на одну, що є корисним для розв'язування окремих задач, проте креслення при цьому займає більшу площу.

β_1, γ_1 – сліди-проекцій горизонтально-проекціюючих площин обертання точок В і С. Натуральну величину радіуса обертання R точки В визначено з прямокутного трикутника $O_1B_1B^0$, де $R = O_1B^0$. Нове положення горизонтальної проекції B_1^1 вершини B^1 визначено як точку перетину дуги $B_1^1B^0$ з β_1. Горизонтальну проекцію C_1^1 вершини C^1 визначено як точку перетину прямої $D_1B_1^1$ з слідом-проекцією γ_1, де D_1 – нерухома точка. Трикутник $A^1B^1C^1$ займає положення, паралельне до Π_1, його горизонтальна проекція $A_1^1B_1^1C_1^1$ визначає Н.В. трикутника АВС.

8.6. Спосіб суміщення (обертання навколо лінії нульового рівня)

Суть способу. **Спосіб суміщення є частковим випадком обертання навколо лінії рівня. При цьому за вісь обертання приймається горизонтальний або фронтальний слід площини. Якщо площина обертається навколо горизонтального сліду (горизонталі нульового рівня), то площина суміщується з площиною проекцій $П_1$, а коли площина обертається навколо фронтального сліду (фронталі нульового рівня), то площина суміщується з площиною проекцій $П_2$. При обертанні площини, що суміщується з площиною проекцій, точки плоских геометричних фігур, які розміщені в цій площині, обертаються по колах, площини яких перпендикулярні до осі обертання – горизонтального або фронтального сліду. Оскільки вісь обертання належить площині, то для знаходження суміщеного положення площини достатньо визначити суміщене положення всього лише однієї точки, що належить площині і не лежить на осі обертання. За таку точку доцільно взяти точку, що належить іншому сліду площини.**

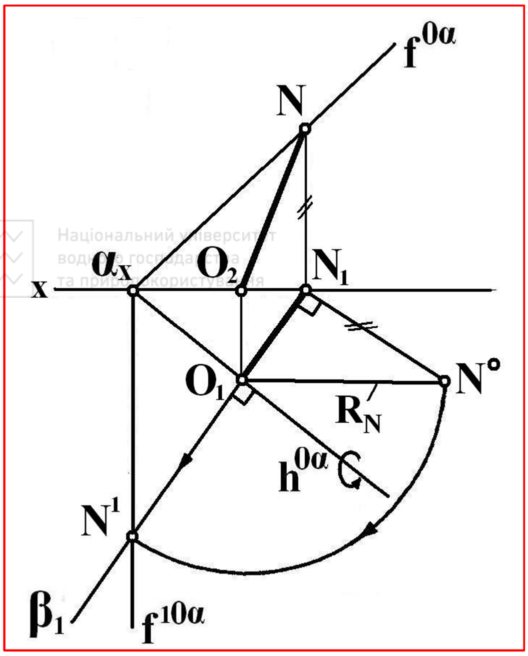
Механізм суміщення площини. **Площина загального положення, яку задано слідами $h^{0\alpha}$ і $f^{0\alpha}$, обертається навколо горизонтального сліду, що є віссю обертання,**



до суміщення площини α з площиною проекцій $П_1$. Це суміщення відбудеться в той момент, коли фронтальний слід $f^{0\alpha}$ при його обертанні навколо $h^{0\alpha}$ суміститься з площиною $П_1$ і займе положення $f^{10\alpha}$. Суміщена з $П_1$ площина α^1 буде визначена двома прямими $h^{0\alpha}$ і $f^{10\alpha}$, що перетинаються в точці α_x. Для побудови $f^{10\alpha}$ на фронтальному сліді $f^{0\alpha}$ взяли точку N. При обертанні площини α точка N переміщується по колу, що лежить в площині β, яка перпендикулярна до $h^{0\alpha}$.

Відрізок ON – це радіус R_N кола обертання точки N, який проекціюється на $П_1$ на слід-проекцію $β_1$. В той момент, коли R_N займе положення ON^1, при якому радіус кола обертання точки N знаходиться в $П_1$, довжина відрізка ON^1 визначить натуральну величину R_N. Нове, суміщене з $П_1$, положення $f^{10α}$ фронтального сліду $f^{0α}$ пройде через нерухому точку $α_x$ і суміщену з $П_1$ точку N^1. Зазначимо, що відрізок $α_xN$, що належить $f^{0α}$, при суміщенні $f^{0α}$ з $П_1$ займе положення $α_xN^1$, причому $α_xN^1 = α_xN$.

Суміщення площини з горизонтальною площиною проекцій $П_1$ шляхом обертання навколо горизонтального сліду

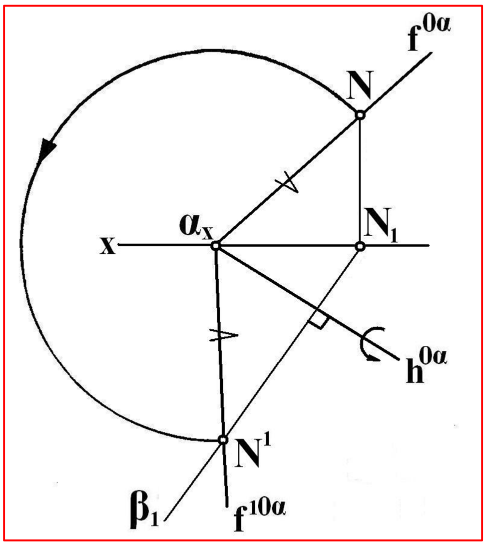


Умова задачі: Сумістити площину α, яку задано слдами $h^{0α}$ і $f^{0α}$, з $П_1$.

Розв'язування задачі (1 спосіб):

На $f^{0α}$ візьмемо в довільному місці точку N та побудуємо N_1. При обертанні навколо $h^{0α}$ точка N переміщується по колу, площина якого знаходиться в горизонтально-проекціюючій площині β, що перпендикулярна до $h^{0α}$: слід-проекція $β_1$ проходить через N_1 перпендикулярно до $h^{0α}$. Визначаємо точку O – центр кола обертання точки N, який знаходиться на $h^{0α}$. Відрізок ON є одним із положень радіуса обертання точки N навколо осі $h^{0α}$. Визначаємо Н.В. відрізка ON. Будуємо трикутник $O_1N_1N^0$, з якого знаходимо, що O_1N^0 = Н.В. O N, а, отже, $R_N = O_1N^0$, де R_N – радіус кола обертання точки N.

Проекції точки N на площину $П_1$ при її обертанні переміщуються по $β_1$. При суміщенні точки N з $П_1$ відрізок ON^1 проекціюється на $П_1$ в свою натуральну величину, яка дорівнює R_N. На епюрі точку N^1 визначено в перетині дуги N^0N^1, радіус якої дорівнює R_N, з слідом-проекцією $β_1$. Суміщений з $П_1$ фронтальний слід $f^{0α}$ в своєму новому положенні $f^{10α}$ пройде через точки $α_x$ і N^1.



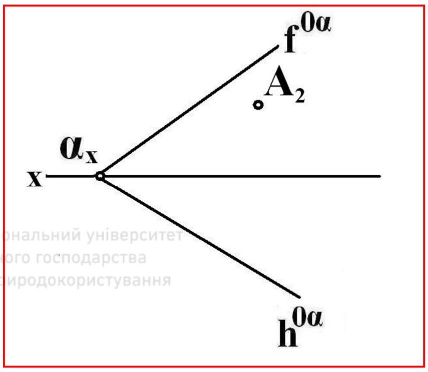
Умова задачі: Сумістити площину α, яку задано слдами $h^{0α}$ і $f^{0α}$, з $П_1$.

Розв'язування задачі (2 спосіб):

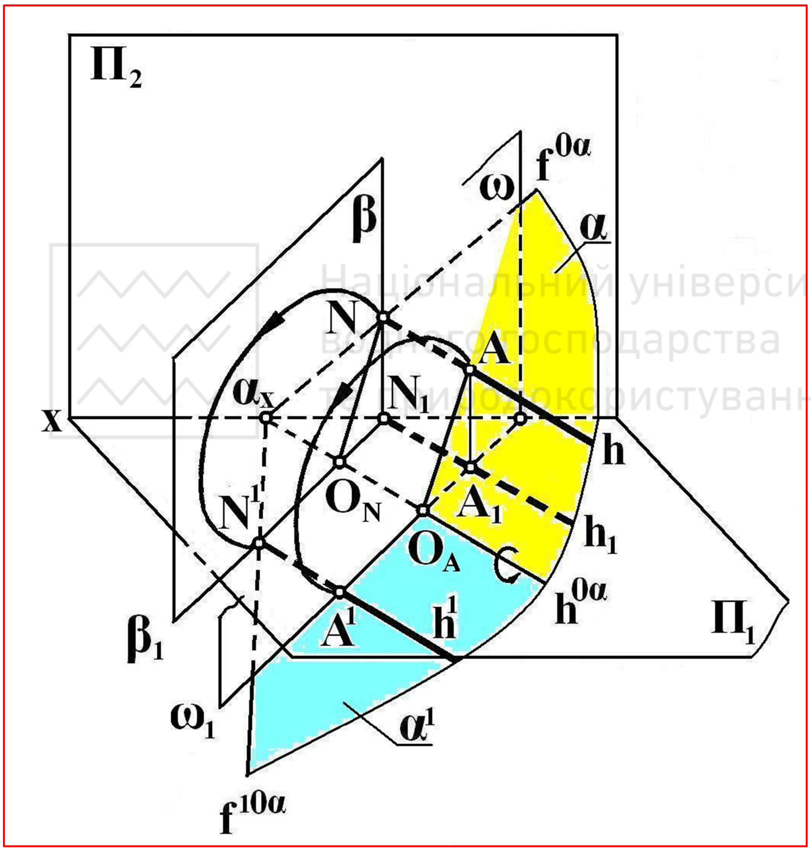
Нове, суміщене положення $f^{10α}$ фронтального сліду $f^{0α}$ визначено із урахуванням рівності довжин відрізків $α_xN$ і $α_xN^1$. Для цього на епюрі з точки $α_x$, як із центра, проведено дугу радіусом, що дорівнює довжині відрізка $α_xN$. Точку N^1 визначено в перетині дуги NN^1 з слідом-проекцією $β_1$.

Для побудови суміщених з $П_1$ проекцій плоских елементів, що лежать в площині загального положення, потрібно вміти будувати суміщені з $П_1$ положення точок цих елементів, що не знаходяться на слідах площини. Найпростіше такі побудови виконувати за допомогою ліній рівня площини, що проходять через задані точки.

Задача №1

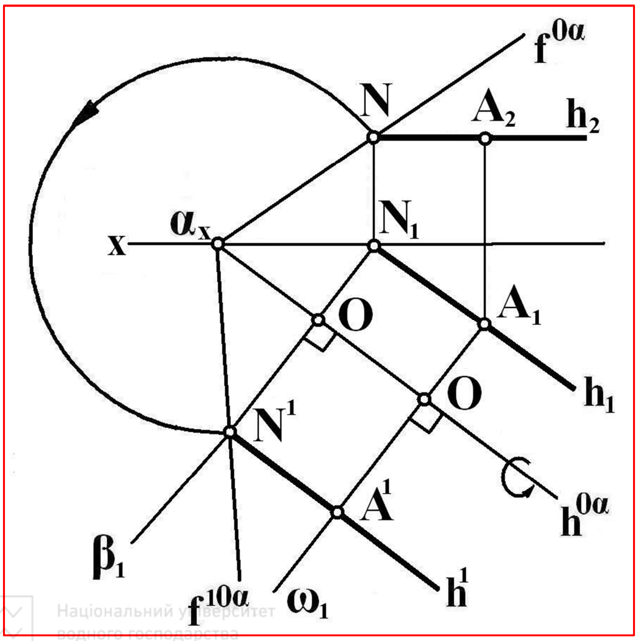


Умова задачі: **Сумістити з $П_1$ точку А, що належить площині α і не лежить на слідах площини, шляхом обертання площини α навколо горизонтального сліду. Суміщення точки здійснити за допомогою горизонталі площини.**



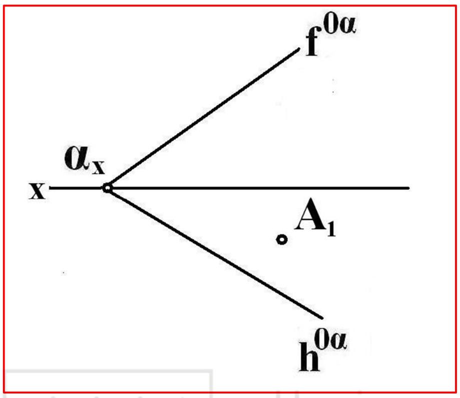
Розв'язування задачі на наочному зображенні та епюрі:

Точка А при обертанні площини α, в якій вона знаходиться, обертається разом з площиною навколо горизонтального сліду $h^{0α}$. Через точку А проводимо горизонталь h площини α. Суміщене з $П_1$ положення $f^{10α}$ фронтального сліду $f^{0α}$ визначено за допомогою точки N, яка обертається в площині β. Точка А обертається по колу в горизонтально-проеціюючій площині ω, яка паралельна до площини β, причому площини ω і β перпендикулярні до $h^{0α}$.

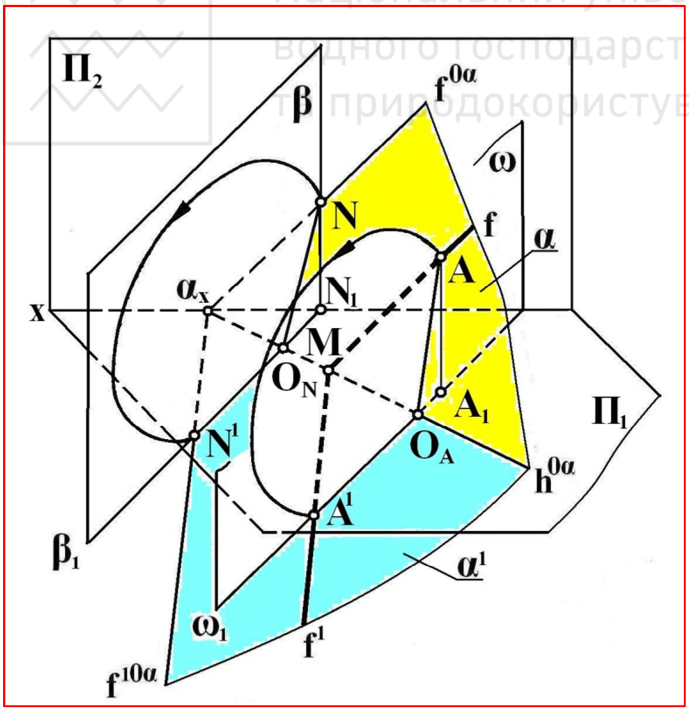


На епюрі слід-проекцію ω_1 площини ω проведено через A_1 перпендикулярно до $h^{0\alpha}$. Суміщене з Π_1 положення h^1 горизонталі h визначається прямою лінією, що проходить через точку N^1 паралельно до $h^{0\alpha}$, оскільки горизонталі площини паралельні до горизонтального сліду. За допомогою лінії проекційного зв'язку A_1A^1 визначено точку A^1 на h^1. Точка A^1 знаходиться (сумістилася) разом з α^1 в Π_1.

Задача №2

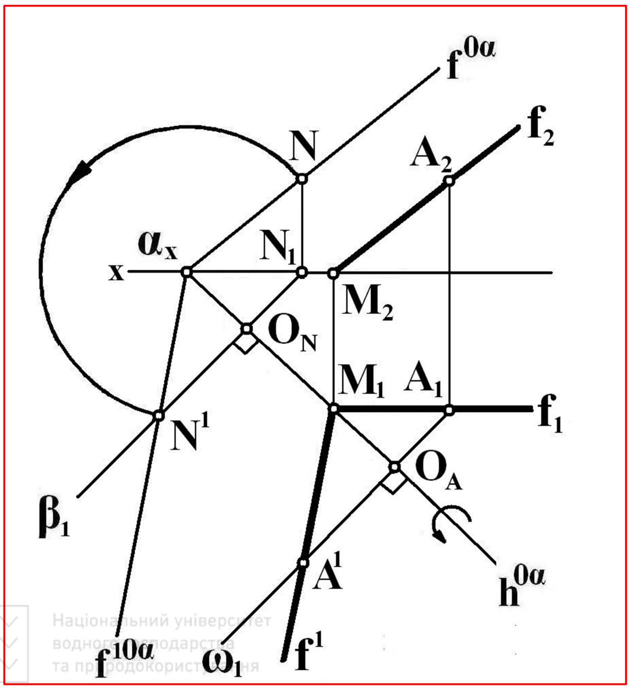


Умова задачі: Сумістити з Π_1 точку A, що належить площині α і не лежить на слідах площини, шляхом обертання площини α навколо горизонтального сліду. Суміщення точки здійснити за допомогою фронталі площини.



Розв'язування задачі на наочному зображенні та епюрі:

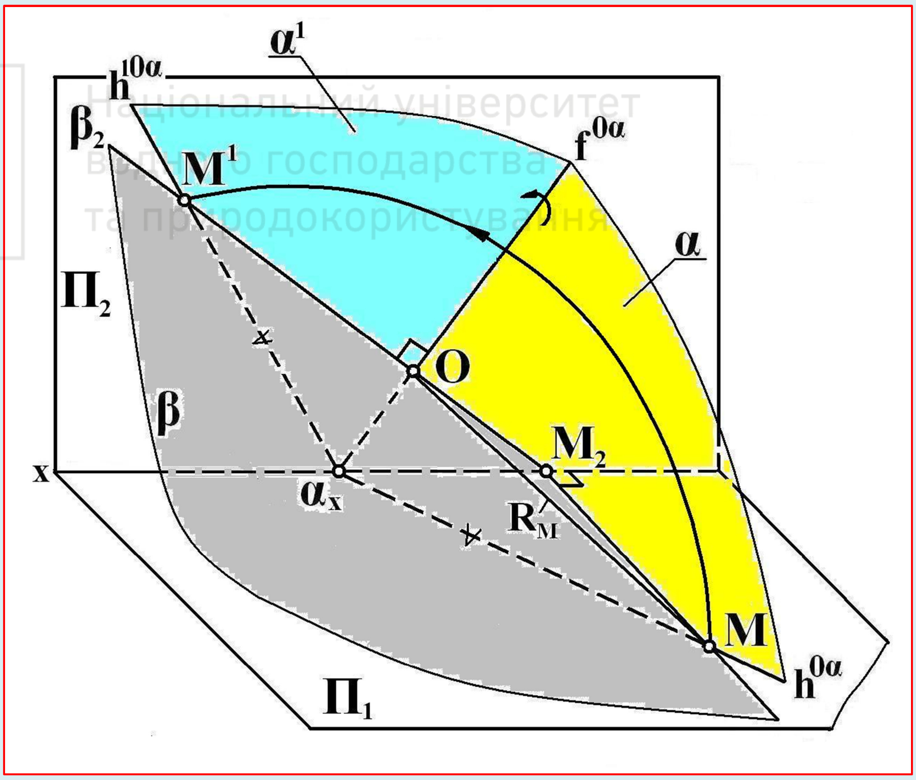
Точка A при обертанні площини α, в якій вона знаходиться, обертається разом з площиною навколо горизонтального сліду $h^{0\alpha}$. Через точку A проводимо фронталь f площини α. Суміщене з Π_1 положення $f^{10\alpha}$ фронтального сліду $f^{0\alpha}$ визначено за допомогою точки N, яка обертається в площині β. Точка A обертається по колу в горизонтально-проекціюючій площині ω, яка паралельна до площини β, причому площини ω і β перпендикулярні до $h^{0\alpha}$.



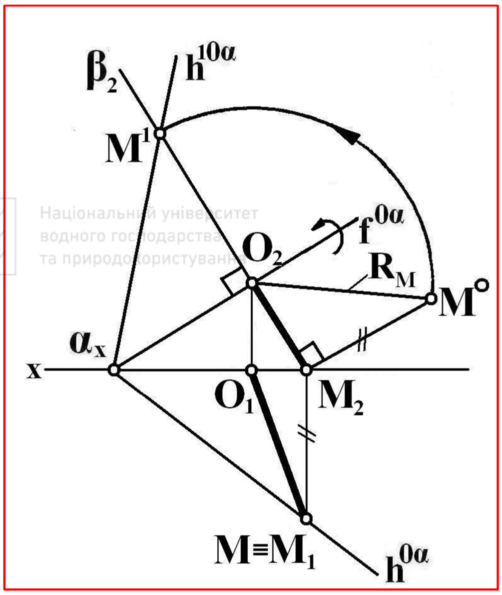
На епюрі слід-проекцію ω_1 площини ω проведено через A_1 перпендикулярно до $h^{0\alpha}$. Суміщене з $П_1$ положення f^1 фронталі f визначається прямою лінією, що проходить через нерухому точку M паралельно до $f^{10\alpha}$, оскільки фронталі площини паралельні її фронтальному сліду. За допомогою лінії проекційного зв'язку A_1A^1 визначено точку A^1 на f^1. Точка A^1 знаходиться (сумістилася) разом з α^1 в $П_1$.

Суміщення площини з фронтальною площиною проекцій $П_2$ шляхом обертання навколо фронтального сліду

На наочному зображенні показано суміщення площини α з площиною $П_2$ шляхом обертання площини α навколо фронтального сліду $f^{0\alpha}$, який є віссю обертання. Це суміщення відбудеться в той момент, коли горизонтальний слід $h^{0\alpha}$ під час обертання навколо $f^{0\alpha}$ суміститься з площиною $П_2$ і займе положення $h^{10\alpha}$. Суміщену з $П_2$ площину α^1 буде визначено двома прямими $f^{0\alpha}$ і $h^{10\alpha}$, що перетинаються в точці α_x. Для побудови $h^{10\alpha}$ на горизонтальному сліді $h^{0\alpha}$ взяли точку M. При обертанні

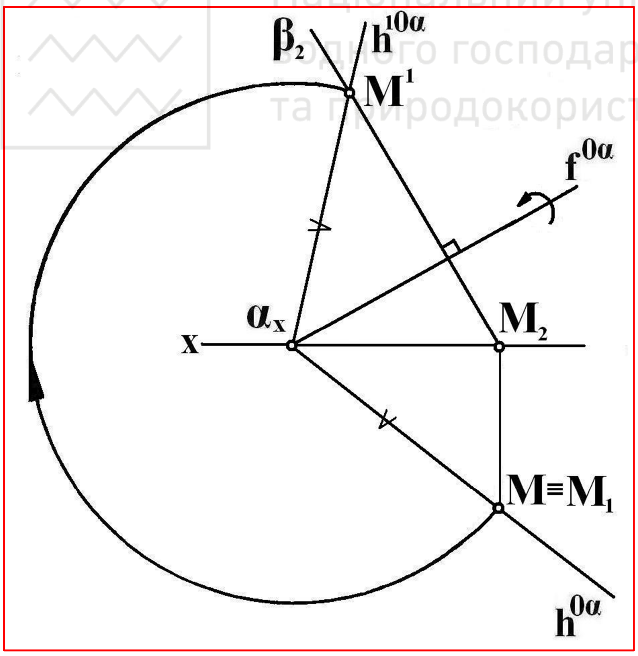


площини α точка M переміщується по колу, що лежить в площині β, яка перпендикулярна до $f^{0\alpha}$. Відрізок OM – радіус R_M кола обертання точки M, проекція якого на $П_2$ при обертанні точки M переміщується по сліду β_2 . В той момент, коли R_M займе положення OM^1 , при якому радіус кола обертання точки M знаходиться в $П_2$, а довжина відрізка OM^1 визначить натуральну величину R_M. Нове, суміщене з $П_2$ положення $h^{10\alpha}$ горизонтального сліду $h^{0\alpha}$, визначить пряма лінія, що пройде через нерухому точку α_x і суміщену з $П_2$ точку M^1. Зазначимо, що відрізок $\alpha_x M$, що належить $h^{0\alpha}$, при суміщенні $h^{0\alpha}$ і з $П_2$ займе положення $\alpha_x M^1$, причому $\alpha_x M^1 = \alpha_x M$.



Розв'язування задачі на епюрі (1 спосіб):

Виконаємо суміщення площини α з $П_2$ обертанням α навколо $f^{0\alpha}$. Для цього на $h^{0\alpha}$ в довільному місці візьмемо точку M та побудуємо M_2. При обертанні навколо $f^{0\alpha}$ точка M переміщується по колу, площина якого знаходиться у фронтально-проекціюючій площині β, що перпендикулярна до $f^{0\alpha}$. Фронтальний слід β_2 площини β проходить через M_2 перпендикулярно до $f^{0\alpha}$. Визначаємо точку *O* – центр кола обертання точки M. З трикутника $O_2M_2M^0$ знаходимо натуральну величину радіуса R_M кола обертання точки M. Проекції точки M на площину $П_2$ при її обертанні переміщуються по β_2. При суміщенні точки M з $П_2$ відрізок OM^1 проеціюється на $П_2$ в свою натуральну величину O_2M^1, яка дорівнює дійсній довжині R_M ($R_M = OM^1 = O_2M^1$). На епюрі точку M^1 визначено в перетині дуги M^0M^1, радіус якої дорівнює R_M, з слідом β_2. Суміщений з $П_2$ горизонтальний слід $h^{0\alpha}$ в своєму новому положенні $h^{10\alpha}$ пройде через точки α_x і M^1.

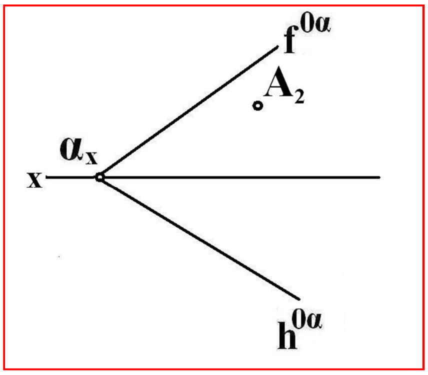


Розв'язування задачі на епюрі (2 спосіб):

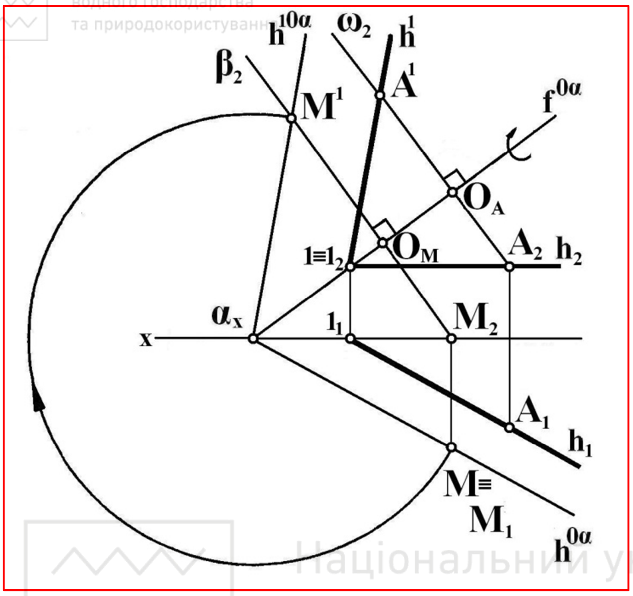
Нове, суміщене положення $h^{10\alpha}$ горизонтального сліду визначено з урахуванням рівності довжин відрізків $\alpha_x M$ і $\alpha_x M^1$. Для цього на епюрі з точки α_x, як із центра, проведено дугу радіусом, що дорівнює довжини відрізка $\alpha_x M$. Точку M^1 визначено в перетині дуги MM^1 з слідом β_2 .

Приклади суміщення з $П_2$ точок площини, що не лежать на її слідах, шляхом проведення через точки ліній рівня площини

Задача №1



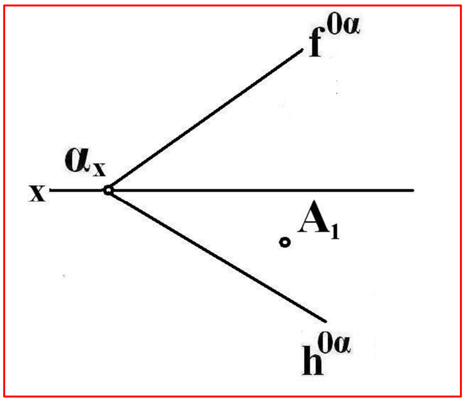
Умова задачі: **Сумістити з $П_2$ точку А, що належить площині α і не лежить на її слідах, шляхом обертання площини α навколо фронтального сліду. Суміщення точки здійснити за допомогою горизонталі площини.**



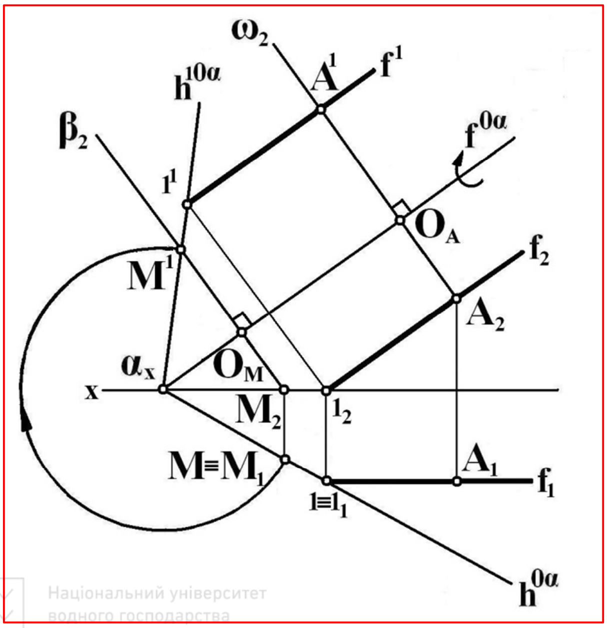
Розв'язування задачі:

Суміщене з $П_2$ положення A^1 точки А побудовано за допомогою горизонталі h площини α, на якій лежить точка А. На епюрі ω_2 – фронтальний слід площини обертання точки А: $\omega_2 \perp f^{0\alpha}$, O_A – центр кола обертання точки А. Оскільки горизонталь h торкається фронтального сліду $f^{0\alpha}$ в точці 1, яка є нерухомою при обертанні площини α навколо $f^{0\alpha}$, суміщене з $П_2$ положення h^1 горизонталі h визначається прямою, що проходить через точку 1 паралельно $h^{10\alpha}$: $h^1 \,//\, h^{10\alpha}$. За допомогою лінії проекційного зв'язку A_2A^1 визначено точку A^1 на h^1.

Задача №2



Умова задачі: **Сумістити з $П_2$ точку А, що належить площині α і не лежить на її слідах, шляхом обертання площини α навколо фронтального сліду. Суміщення точки здійснити за допомогою фронталі площини.**

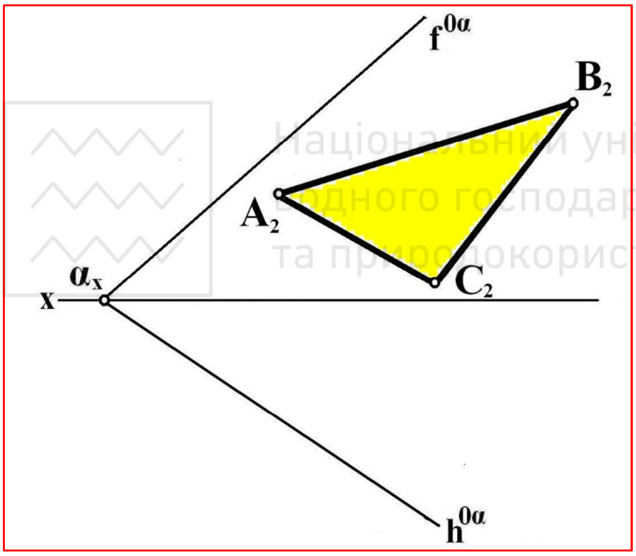


Розв'язування задачі:

Суміщене з Π_2 положення A^1 точки A побудовано за допомогою фронталі f площини α, на якій лежить точка A. На епюрі ω_2 – фронтальний слід площини обертання точки A: $\omega_2 \perp f^{0\alpha}$, O_A – центр кола обертання точки A. Фронталь f дотикається до горизонтального сліду $h^{0\alpha}$ в точці 1, тому суміщене положення f^1 фронталі f визначається прямою, що проходить через точку 1^1 паралельно до $f^{0\alpha}$: $f^1 \ // \ f^{0\alpha}$. За допомогою лінії проекційного зв'язку A_2A^1 визначено точку A^1 на f^1 .

Застосовуємо розглянуті способи суміщення точок площини з площинами проекцій для розв'язування задач на визначення натуральної величини плоскої фігури

Задача №3

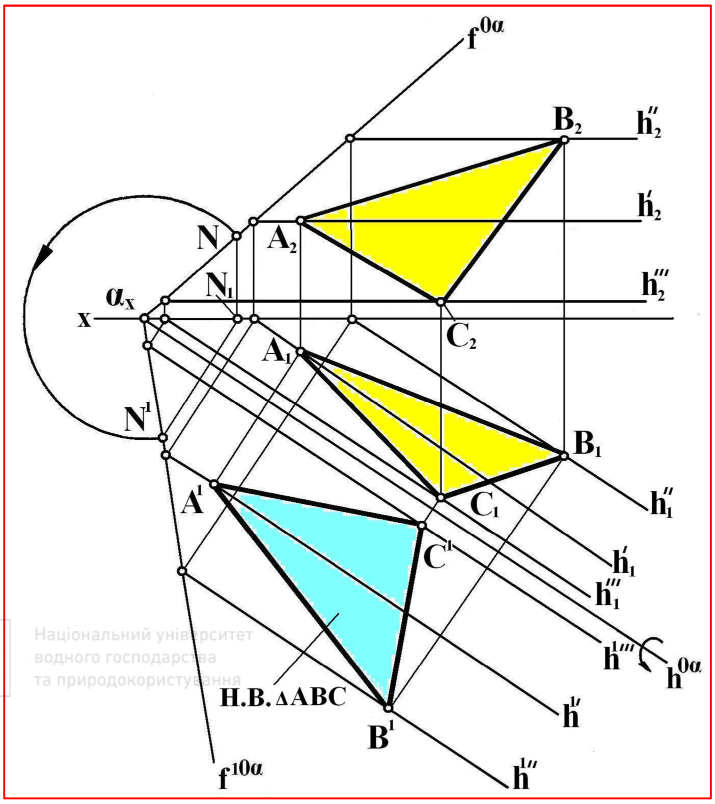


Умова задачі. Визначити натуральну величину трикутника ABC, що лежить в площині α загального положення, задану слідами $h^{0\alpha}$ і $f^{0\alpha}$, якщо відома його фронтальна проекція.

Розв'язування задачі (1 спосіб):

Розв'язування здійснимо шляхом суміщення площини α з площиною Π_1. Для цього обертаємо площину α навколо горизонтального сліду $h^{0\alpha}$, який є віссю обертання. Послідовність побудов така:

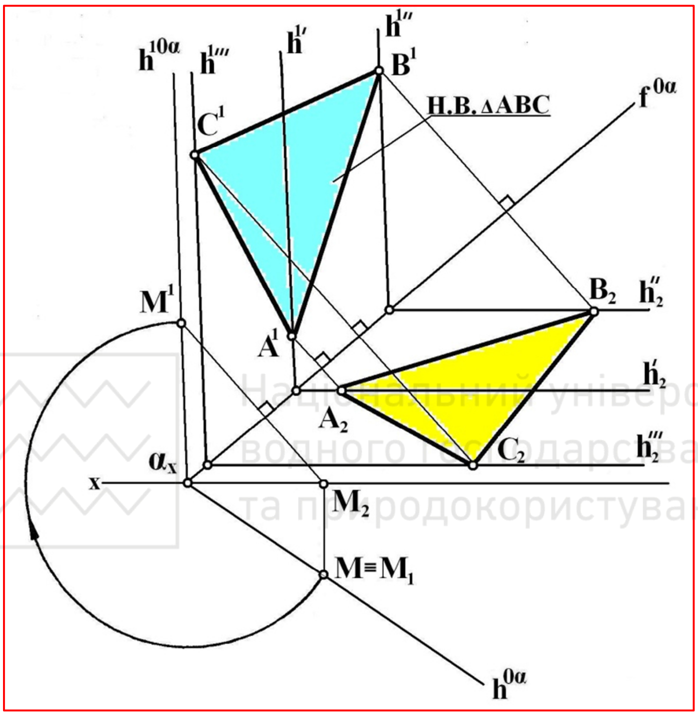
1. За допомогою горизонталей $h^/$, $h^{//}$, $h^{///}$ площини α будуємо горизонтальну проекцію $A_1B_1C_1$ трикутника ABC.



2. За допомогою точки N визначаємо положення $f^{10\alpha}$ сліду $f^{0\alpha}$, при якому площина α обертанням навколо $h^{0\alpha}$ суміститься з площиною $П_1$.

3. Будуємо суміщене з $П_1$ положення $h^{1/}$ $h^{1//}$, $h^{1///}$ горизонталей площини α , що проходять через вершини трикутника АВС.

4. За допомогою ліній проекційного зв'язку визначимо на $h^{1/}$ $h^{1//}$, $h^{1///}$ суміщені з $П_1$ проекції A^1, B^1, C^1 вершин трикутника АВС: $\Delta A^1B^1C^1$ = Н.В. ΔАВС.



Розв'язування задачі (2 спосіб):

Цю задачу розв'язано шляхом суміщення площини α з площиною $П_2$. Суміщену з $П_2$ проекцію трикутника АВС визначено також за допомогою горизонталей площини α. Проте в даному випадку будувати горизонтальну проекцію трикутника АВС для визначення натуральної величини трикутника не потрібно, що значно зменшує графічні побудови.

Спосіб суміщення є зручним, коли доводиться будувати в площині загального положення фігури заданих розмірів та форм. В цьому випадку площину суміщають з однією з площин проекцій ($П_1$ або $П_2$), будують в ній проекцію заданої фігури в її натуральну величину, а потім за цією проекцією визначають проекції фігури на $П_1$ і $П_2$. Остання графічна операція називається відновленням точок із суміщеного положення в площину загального положення.

Розділ 9. Основні метричні задачі

Під метричними розуміють задачі на визначення відстаней, натуральних та кутових величин геометричних фігур.

Розв’язування всіх метричних задач включає в себе розв’язування однієї з двох задач:

1) визначення відстані між двома точками;

2) знаходження кута між двома прямими.

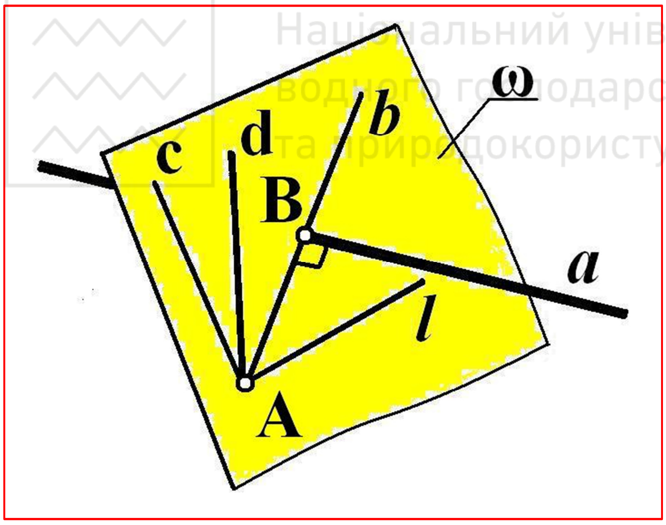
Часто доводиться розв’язувати обернену задачу: побудувати відрізок прямої або кут між двома прямими за заданими лінійної та кутової величинами.

Слід враховувати, що в практиці інженерної діяльності чисто метричні задачі зустрічаються порівняно рідко. Частіше розв’язування метричних задач обумовлено розв’язуванням позиційних задач, наприклад, під час визначення питання при належність або перетин геометричних фігур.

В розділі 6 «Перпендикулярність геометричних елементів» були розв’язані деякі метричні задачі.

Додатково розглянемо метричні задачі, які є основними з визначення відстаней та кутів.

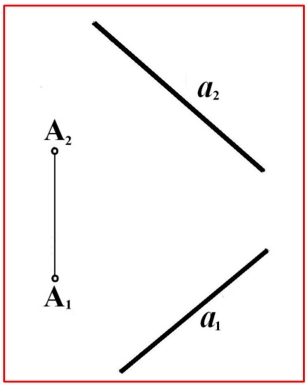
9.1. Визначення відстані від точки до прямої лінії



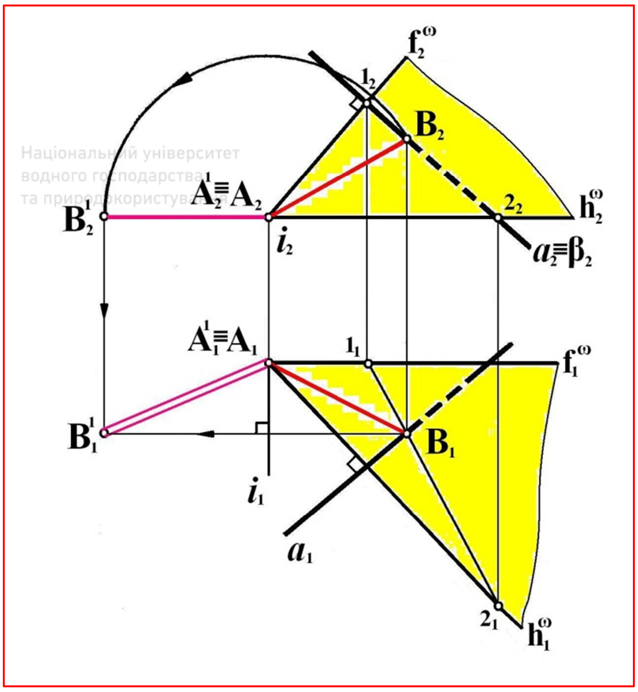
Відстань від точки до прямої визначається довжиною відрізка перпендикуляра, проведеного з точки на пряму.

Для проведення перпендикуляра із точки А на задану пряму *a* через точку А проводять площину ω, яка перпендикулярна до прямої *a*. Будь-яка пряма с, d, *b*, *l* площини ω перпендикулярна до прямої *a*, проте тільки пряма *b* перетинає її. Точка В є основою перпендикуляра, в якій пряма *a* перетинає площину ω.

Задача №1



Умова задачі: Визначити відстань від точки А до прямої *а*.

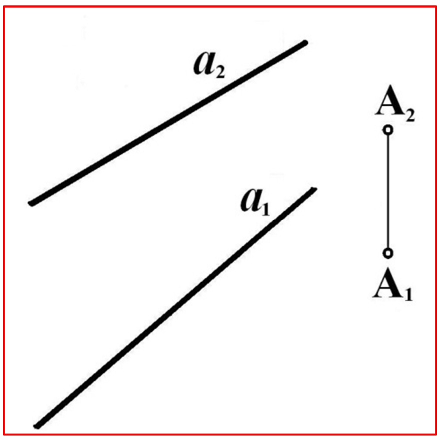


Розв'язування задачі (1 спосіб):

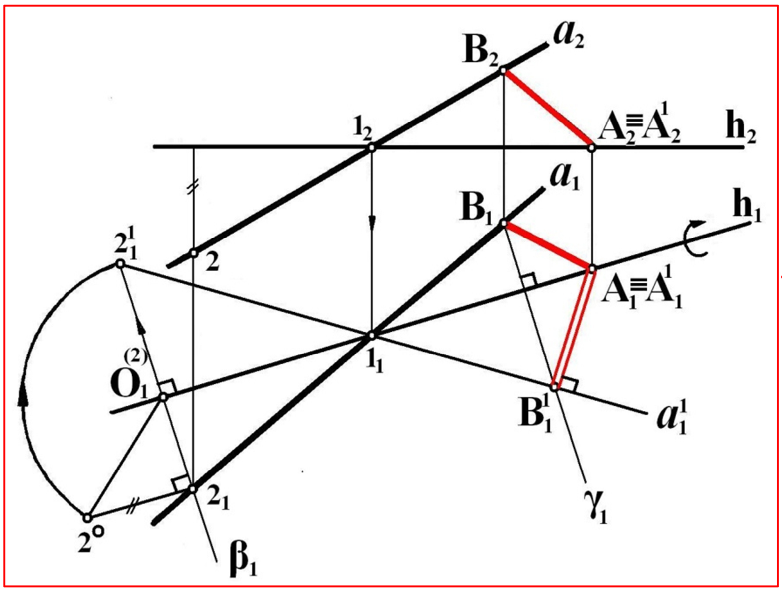
1. Через точку А проводимо площину ω, задану горизонталлю h_ω і фронталлю f_ω,: $h_1^\omega \perp a_1$, $f_2^\omega \perp a_2$.
2. Визначаємо точку В перетину прямої *а* з площиною ω ($h_\omega \cap f_\omega$). Для цього через пряму *а* проводимо допоміжну фронтально-проекціюючу площину β: $a_2 \equiv \beta_2$.
3. Натуральну величину відрізка АВ визначаємо його обертанням навколо фронтально-проекціюючої осі *і*, що проходить через точку А, до горизонтального положення.
4. Оскільки A^1B^1 є горизонтальною прямою, то $A_1^1B_1^1$ визначає натуральну величину відрізка АВ, а, отже, і відстань від точки А до прямої *а*.

Інший спосіб розв'язування подібних задач полягає в перетворенні епюра, за яким відрізок АВ відразу б проекціювався на площину проекцій в натуральну величину

Задача №2

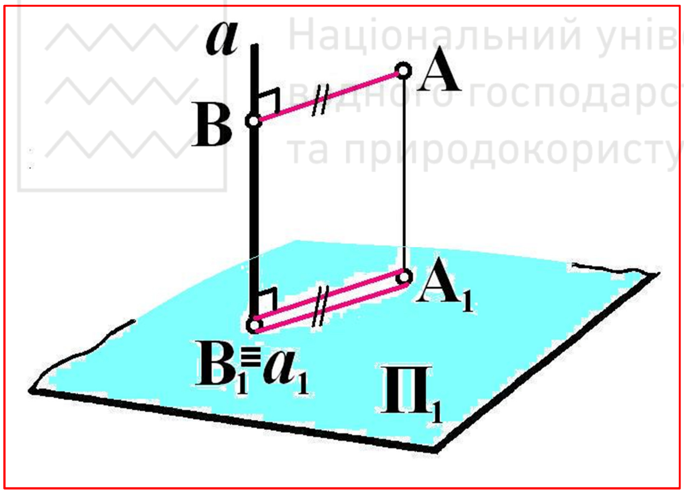


Умова задачі: Визначити відстань від точки А до прямої *а*.



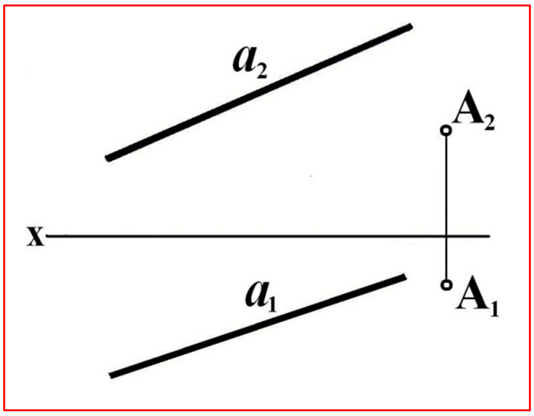
Розв'язування задачі (2 спосіб):

Задані точки А і пряма *a* визначають площину, що займає загальне положення. Ця площина обертанням навколо її горизонталі h, що проходить через точку 1 прямої *a* та точку А, переведена в положення, паралельне до $П_1$ (таке переведення здійснено за допомогою точки 2 прямої *a*). Горизонтальна проекція a_1^1 прямої a^1 (пряма a^1 паралельна до $П_1$) проходить через точку 2_1^1 і 1_1 нерухомої точки 1 прямої h (відрізок $O_1^{(2)}2_1^1$ – горизонтальна проекція радіуса кола обертання точки 2 в положенні паралельному до $П_1$, $O_1^{(2)}$ – проекція центра кола обертання точки 2, $β_1$ – слід-проекція горизонтально-проекціюючої площини обертання точки 2). Нове положення площини, що задано прямою a^1 і нерухомою точкою А, паралельне до $П_1$. Провівши $A_1B_1^1 \perp a_1$, отримаємо відрізок $A_1^1B_1^1$, який визначає відстань від точки А до прямої *a*, оскільки він є горизонтальною проекцією відрізка A^1B^1, розміщеного паралельно до $П_1$: $A^1B^1 \parallel П_1$). Побудовано також горизонтальну та фронтальну проекції відрізка АВ ($γ_1$ – слід-проекція горизонтально-проекціюючої площини обертання точки В).

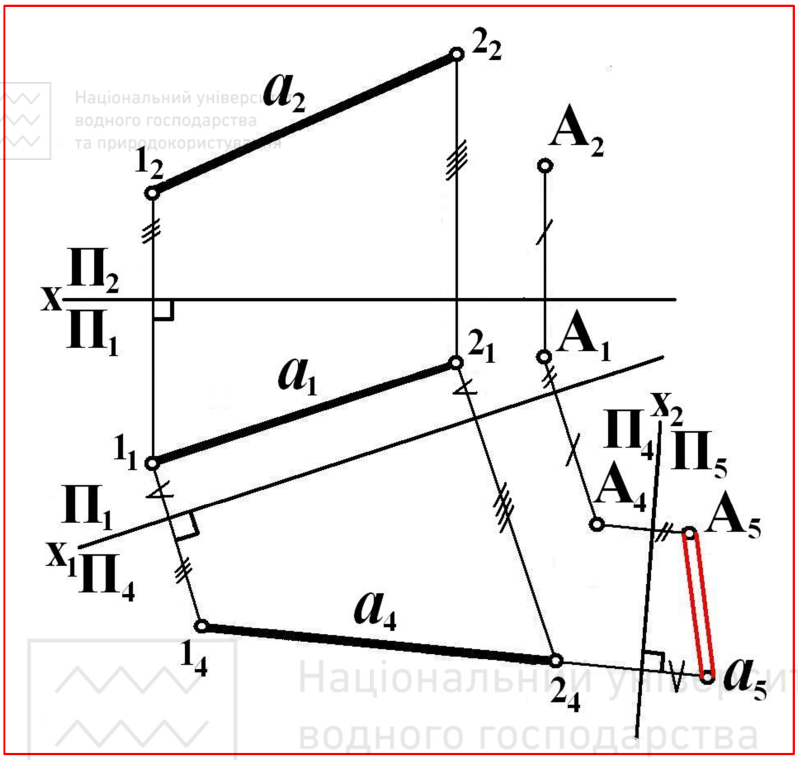


Натуральну величину відстані від точки А до прямої лінії *a* можна отримати на площині проекцій, наприклад $П_1$, яка перпендикулярна до даної прямої *a*. Відрізок АВ паралельний до $П_1$, а, отже, його проекція A_1B_1 на $П_1$ визначає відстань від точки *А* до прямої *a*. Введення додаткової площини проекцій, яка перпендикулярна до даної прямої *a*, та перетворення прямої загального положення *a* в проекціюючу здійснено під час розв'язування задач №№ 3, 4.

Задача №3

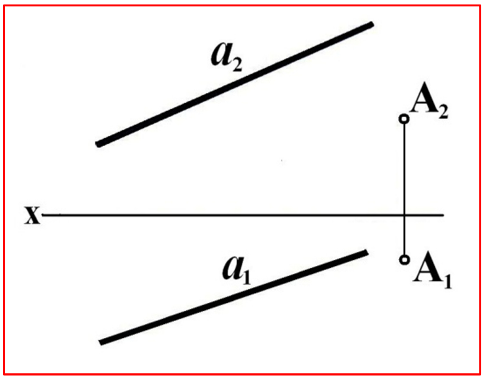


Умова задачі: Визначити відстань від точки А до прямої ***a*** за допомогою способу заміни площин проекцій.

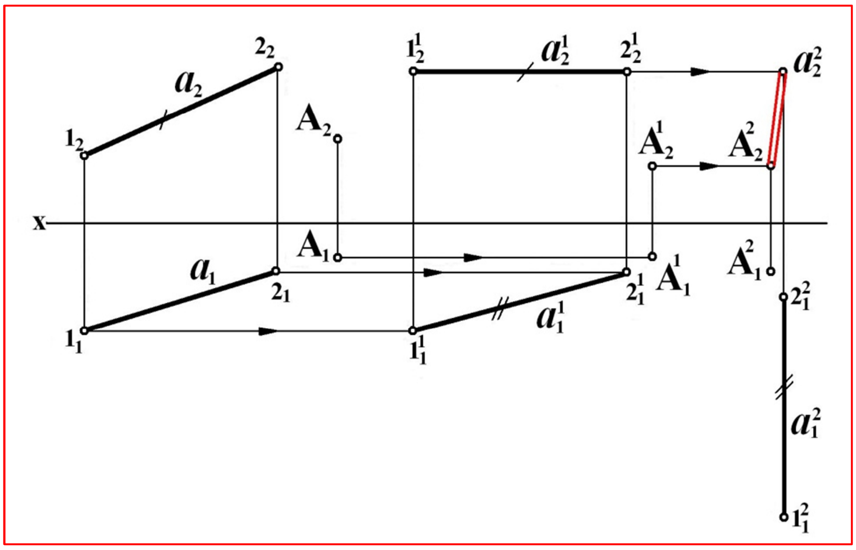


Розв'язування задачі (3 спосіб): Для перетворення прямої ***a*** в проекціюючу на ній взяли дві точки 1 і 2. В результаті двох перетворень (уведення двох нових площин проекцій $П_4$ і $П_5$) пряма ***a***, що займає загальне положення, перетворюється в пряму, перпендикулярну до $П_5$: проекція a_5 прямої ***a*** є точка. Довжина відрізка a_5A_5 визначає шукану відстань від точки *А* до прямої *a*.

Задача №4



Умова задачі: Визначити відстань від точки А до прямої ***a*** за допомогою способу плоско-паралельного переміщення



Розв'язування задачі (4 спосіб):

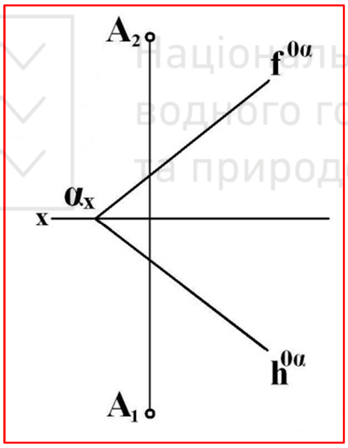
В результаті двох обертань прямої *a* і точки А спочатку відносно уявної осі, що перпендикулярна до $П_2$ (1 обертання), а потім відносно уявної осі, що перпендикулярна до $П_1$ (2 обертання), пряма *a* стала прямою a^2, що перпендикулярна до $П_2$.

Проекції прямої *a* і точки А на площину проекцій, до якої вісь обертання перпендикулярна, не змінюють своє взаємне положення. Наприклад, відрізки $A_2^1 2_2^1 = A_2 2_2$ і $A_2^1 1_2^1 = A_2 1_2$, а $A_1^2 2_1^2 = A_1^1 2_1^1$ і $A_1^2 1_1^2 = A_1^1 1_1^1$. Довжина відрізка $A_2^2 a_2^2$ визначає відстань від точки А до прямої *a*.

9.2. Визначення відстані від точки до площини

Відстань від точки до площини визначається довжиною відрізка перпендикуляра, проведеного з точки на площину.

Задача №1



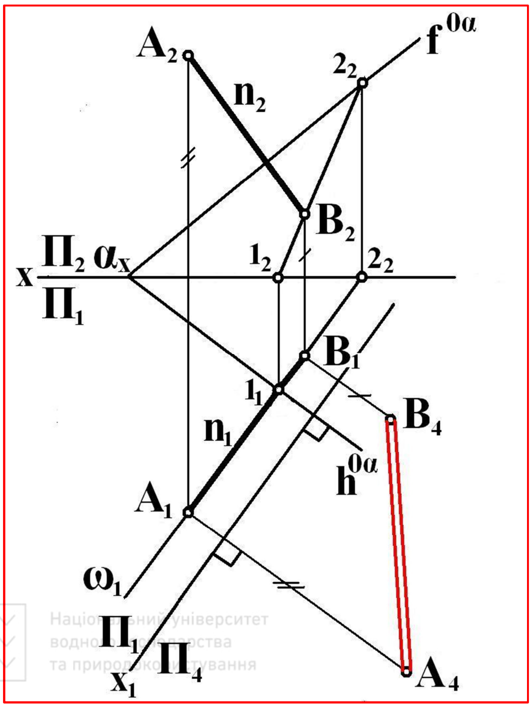
Умова задачі: Визначити відстань від точки А до площини α, яку задано слідами $h^{0\alpha}$ і $f^{0\alpha}$.

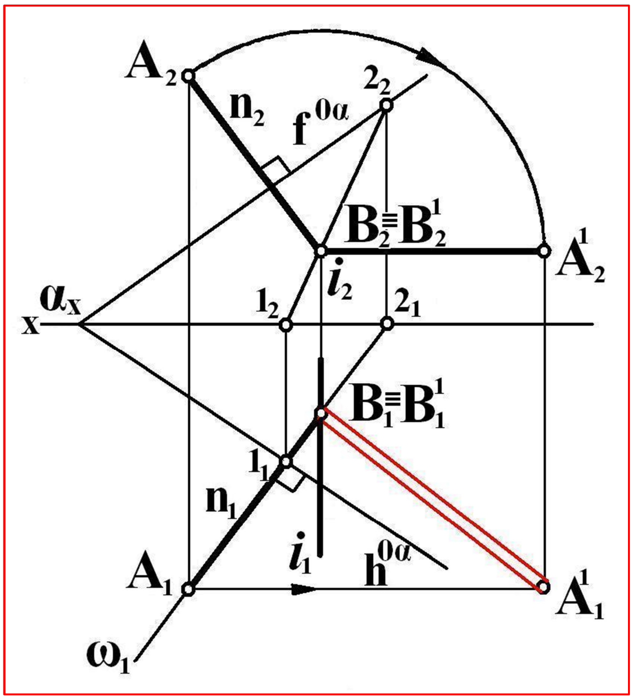
Розв'язування задачі:

Через точку А проведено пряму n перпендикулярно до площини α: $n_1 \perp h^{0\alpha}$, $n_2 \perp f^{0\alpha}$.

Далі знайдено точку В перетину прямої n з площиною α за допомогою горизонтально-проекціюючої площини ω, яку проведено через пряму n: $n_1 \equiv \omega_1$.

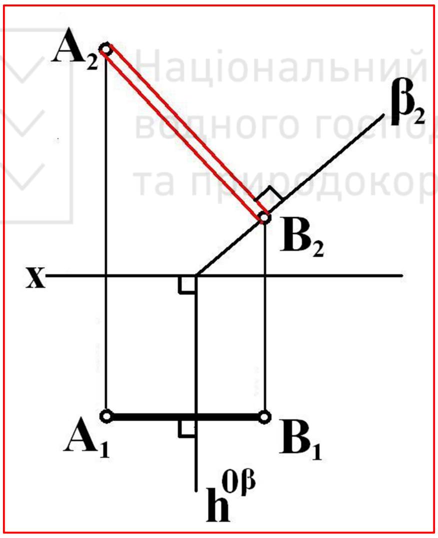
AB – відрізок перпендикуляра, опущеного з точки А на площину α.





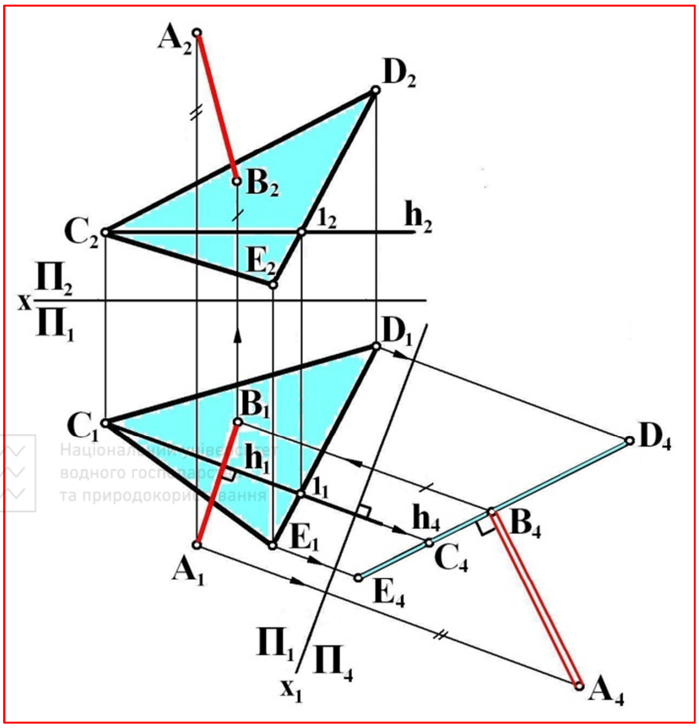
Натуральну величину відрізка АВ визначено способом заміни площин проекцій (1 спосіб).

Натуральну величину відрізка АВ визначено способом обертання навколо осі і, що перпендикулярна до Π_2 і проведена через точку В (2 спосіб).



У випадку площини, що займає проекціююче положення (площина β – фронтально-проекціююча площина), відрізок АВ, який визначає відстань від точки А до площини β, паралельний до Π_2 і довжина відрізка його фронтальної проекції A_2B_2, дорівнює відстані від точки А до фронтально-проекціюючої площини β (A_2B_2 = Н.В. АВ). Розв'язування такої метричної задачі, коли площина займає загальне положення, можна виконати проекціюванням заданої площини на додаткову площину проекцій, до якої задана площина перпендикулярна, або перетворенням заданої площини загального положення в проекціюючу шляхом способу перетворення проекцій, наприклад, способом обертання.

Задача №2



Умова задачі: **Визначити відстань від точки А до площини α, яку задано трикутником CDE.**

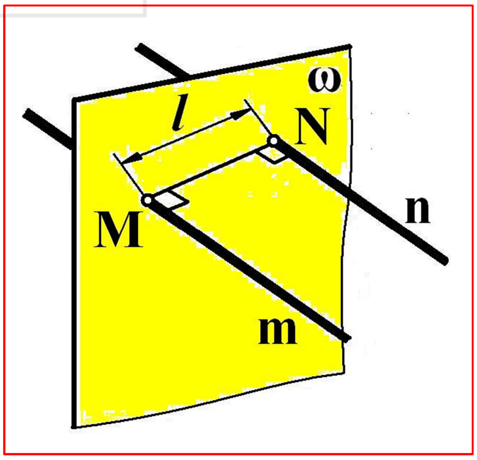
Розв'язування задачі:

Площину трикутника CDE способом заміни площин проекцій перетворюємо в проекціюючу, перпендикулярну до Π_4. Для цього в трикутнику CDE проводимо горизонталь h і нову вісь x_1 розташовуємо перпендикулярно до h_1.

Оскільки в системі $x_1\Pi_4/\Pi_1$ площина трикутника перпендикулярна до Π_4 (на Π_4 проеціюється в пряму лінію), то провівши з A_4 пряму, перпендикулярну до $E_4C_4D_4$, отримаємо відрізок A_4B_4, довжина якого визначає відстань від точки А до площини трикутника CDE. На епюрі побудовано горизонтальну та фронтальну проекції відрізка AB.

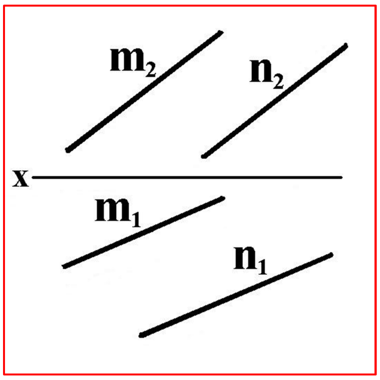
9.3. Визначення відстані між двома паралельними прямими лініями

Відстань між паралельними прямими визначається довжиною відрізка перпендикуляра, проведеного з точки, яку взято на одній з прямих, на іншу пряму.

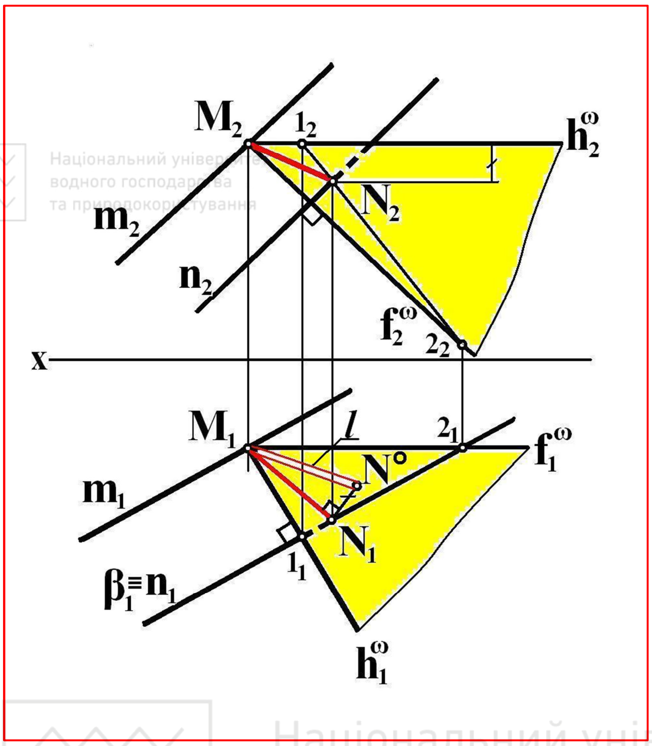


Задача на визначення відстані між двома паралельними прямими зводиться до визначення відстані між точкою та прямою лінією і може бути розв'язана аналогічними способами. На рисунку площина ω – площина, перпендикулярна до паралельних прямих m і n, *l* – відстань між прямими m і n.

Задача



Умова задачі: Визначити відстань між паралельними прямими m і n.

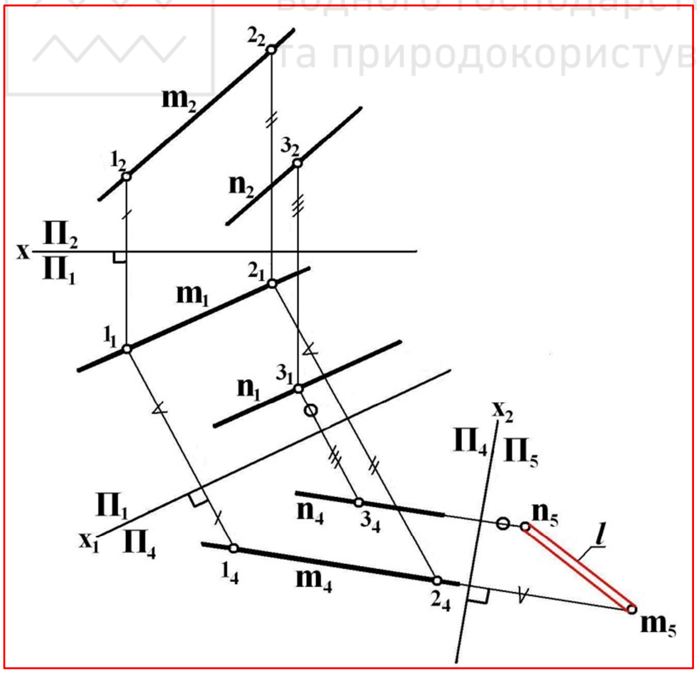


Розв'язування задачі (1 спосіб):

1. З точки M прямої m проводимо площину ω, задану прямими рівня h^{ω} і f^{ω}, перпендикулярну до прямої n: $h_1^{\omega} \perp n_1$ і $f_2^{\omega} \perp n_2$.

2. Визначаємо точку N перетину прямої n з площиною ω за допомогою горизонтально-проекціюючої площини β, що проходить через n: $\beta_1 \equiv n_1$. MN – це відрізок перпендикуляра, що з'єднує m і n.

3. Будуємо прямокутний трикутник $M_1N_1N^0$ і визначаємо натуральну величину відрізка MN: M_1N^0 = Н.В. MN = *l*, який визначає шукану відстань між m і n.



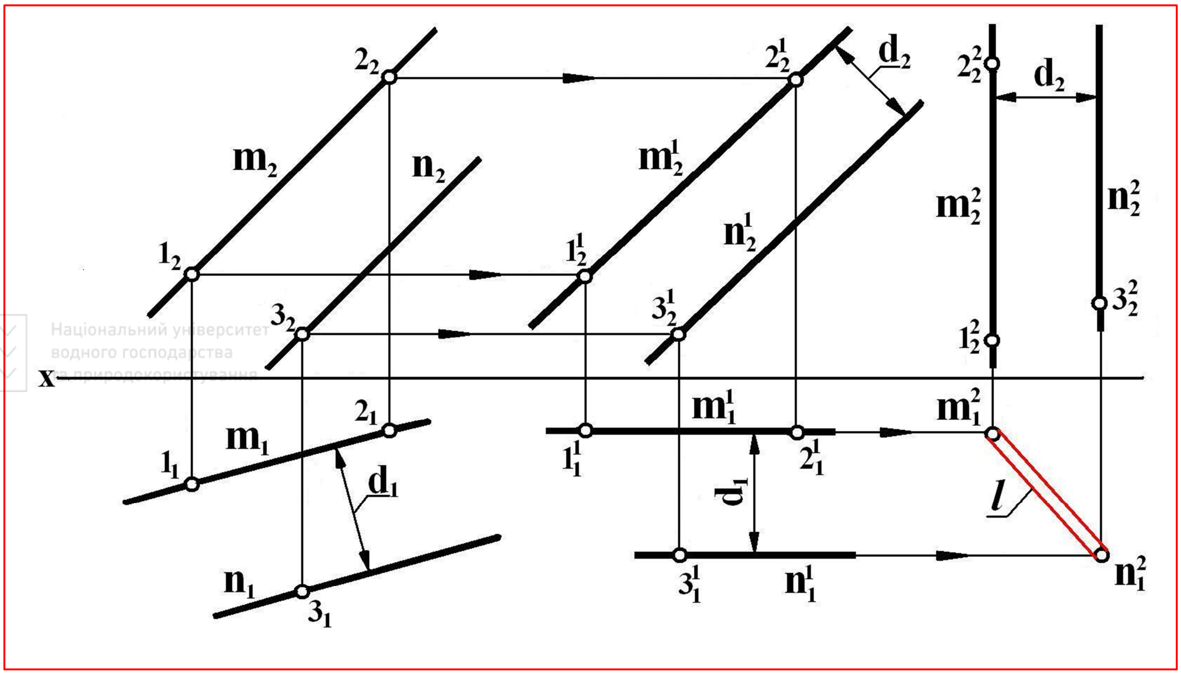
Розв'язування задачі (2 спосіб):

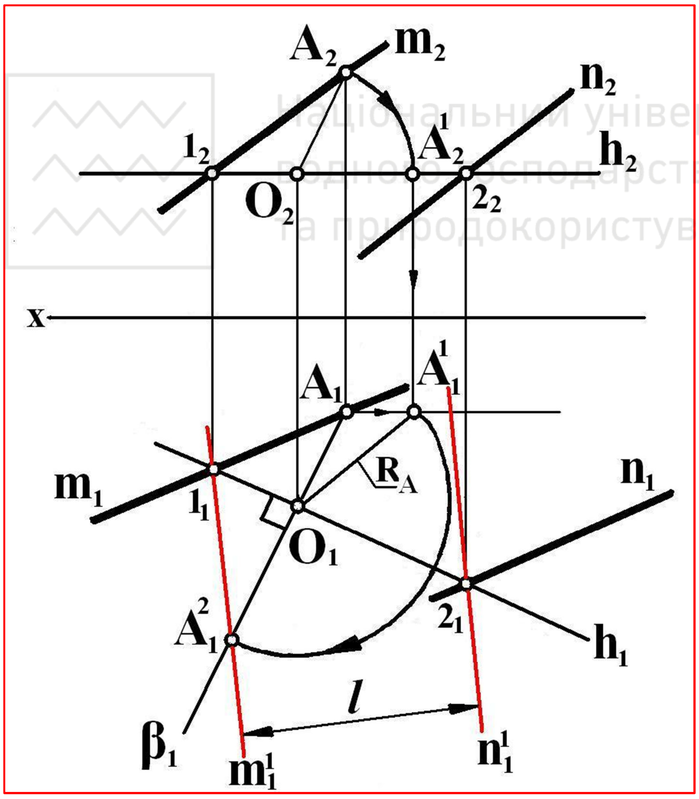
За допомогою способу заміни площин проекцій прямі m і n, що займають початкове загальне положення, переведені в проекціююче положення, при якому вони перпендикулярні до $П_5$. $m_5n_5 = l$ – відстань між прямими m і n.

***Примітка:** площина $П_5$ грає роль площини ω, до якої перпендикулярні паралельні прямі m і n.*

Розв'язування задачі (3 спосіб):

За допомогою способу плоско-паралельного переміщення прямі m і n, що займають початкове загальне положення, переведені в проекціююче положення, при якому вони перпендикулярні до Π_1. $m_1^2 n_1^2 = l$ – відстань між паралельними прямими m і n.





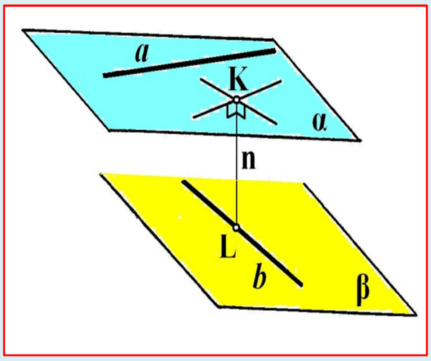
Розв'язування задачі (4 спосіб):

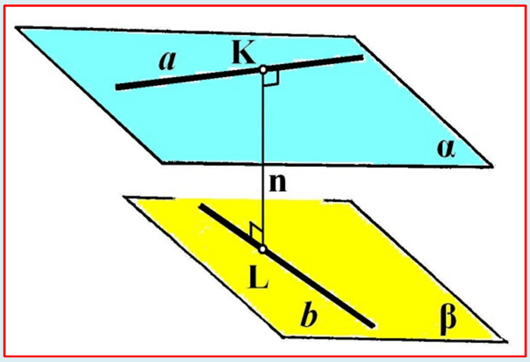
Розв'язування даної задачі може бути здійснено також шляхом перетворення площини, яку утворюють задані паралельні прямі *m* і *n*, в положення, паралельне до площини проекцій. Таке перетворення простіше всього виконати обертанням площини навколо горизонталі або фронталі. На епюрі обертання площини, заданої прямими m і n, здійснено навколо горизонталі h, що в ній проведена через точки 1 і 2, до положення, паралельного до Π_1. Для цього на прямій m взяли точку A, визначили натуральну величину радіуса R_A обертання цієї точки навколо h ($R_A = O_1A_1^1$, що визначено обертанням відрізка OA навколо осі, яка перпендикулярна до Π_2 і проходить через точку O).

Після чого проекцію точки А, яка рухається при обертанні по сліду β_1 площини обертання точки А, переміщуємо в положення A_1^2, при якому радіус обертання точки А займе положення, паралельне до $П_1$ ($O_1A_1^2 = R_A$). Горизонтальна проекція m_1^1 прямої m^1, що стала в результаті обертання паралельною до $П_1$, пройде через 1_1 нерухомої точки 1 і A_1^2. Горизонтальна проекція n_1^1 прямої n^1, яка паралельна до $П_1$ і прямої m^1, пройде через точку 2_1 паралельно до m_1^1. Відстань між m_1^1 і n_1^1 визначить відстань l між заданими паралельними прямими m і n.

9.4. Визначення відстані між мимобіжними прямими

Відстань між мимобіжними прямими визначається довжиною відрізка перпендикуляра, що знаходиться між паралельними площинами, в яких розміщені задані прямі. **Потрібний результат може бути отриманий також шляхом розміщення однієї з мимобіжних прямих в площину, паралельну іншій прямій. В цьому випадку шукана величина буде визначатися відстанню від довільної точки прямої до площини.**





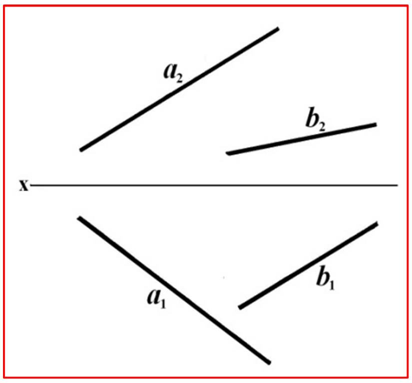
Мимобіжні прямі *a* і *b* розміщено в площини α і β, які паралельні між собою. На прямій *b* (рисунок зліва) взято довільну точку L і з неї проведено перпендикуляр n на площину α. Точка К – точка перетину перпендикуляра n з площиною α, а довжина відрізка KL визначає відстань між мимобіжними прямими *a* і *b*. Відрізок KL також визначає відстань між паралельними площинами α і β.

Слід розрізняти відстань між мимобіжними прямими та найкоротшу відстань.

Найкоротша відстань визначається довжиною відрізка спільного перпендикуляра між мимобіжними прямими.

На рисунках точки K і L – це точки перетину перпендикуляра n з площинами α і β. Якщо точки K і L знаходяться на мимобіжних прямих, то відрізок KL визначає найкоротшу відстань між ними (на рисунку справа KL є найкоротшою відстанню між мимобіжними прямими *a* і *b*), якщо ні, то відрізок KL визначає просто відстань між мимобіжними прямими (рисунок зліва) і водночас відстань між паралельними площинами α і β, проведеними через m і n.

Задача №1

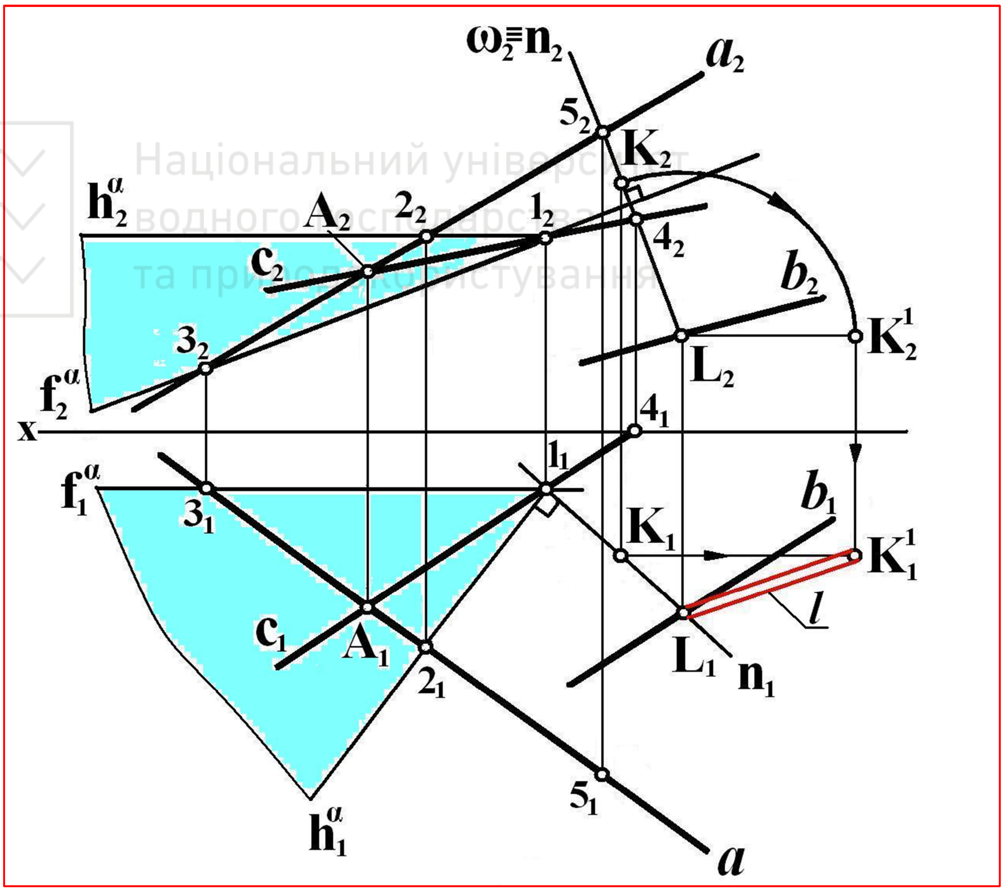


Умова задачі: Визначити відстань між мимобіжними прямими *a* і *b*.

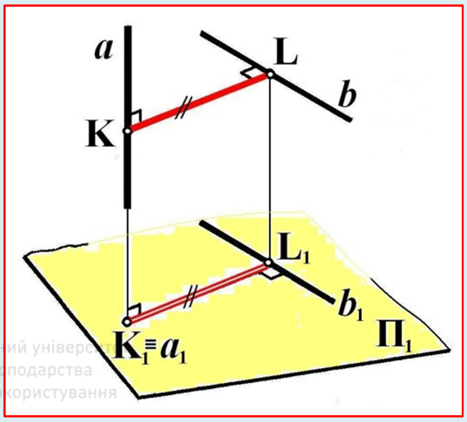
Розв'язування задачі:

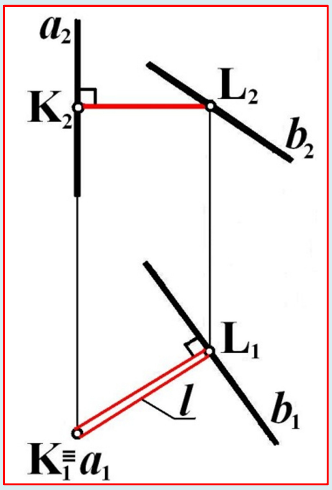
Розміщуємо пряму *a* в площину α, паралельну до іншої прямої *b*. Для цього через довільну точку A, яку взяли на прямій *a*, проводимо пряму c паралельно до прямої *b*. Для визначення відстані між прямою *b* і площиною α (*a*∩c) із довільної точки L прямої *b* опускаємо перпендикуляр n до площини α. Для цього спочатку в площині α проводимо горизонталь h^{α} через точки 1 і 2 та фронталь f^{α} через точки 1 і 3, а потім проводимо проекції перпендикуляра $n_1 \perp h_1^{\alpha}$, $n_2 \perp f_2^{\alpha}$.

Знаходимо точку К перетину перпендикуляра n з площиною α. Для цього через n проводимо допоміжну фронтально-проекціюючу площину ω: $\omega_2 \equiv n_2$. Натуральну величину відрізка KL визначено його обертанням до положення паралельного до Π_1 навколо осі, яка перпендикулярна до Π_2 і проходить через точку L. Довжина відрізка $K_1^1L_1$ дорівнює натуральній величині відрізка KL – відстані між прямою *b* і площиною α (*a*∩c) та визначає водночас відстань *l* між мимобіжними прямими *a* і *b*.



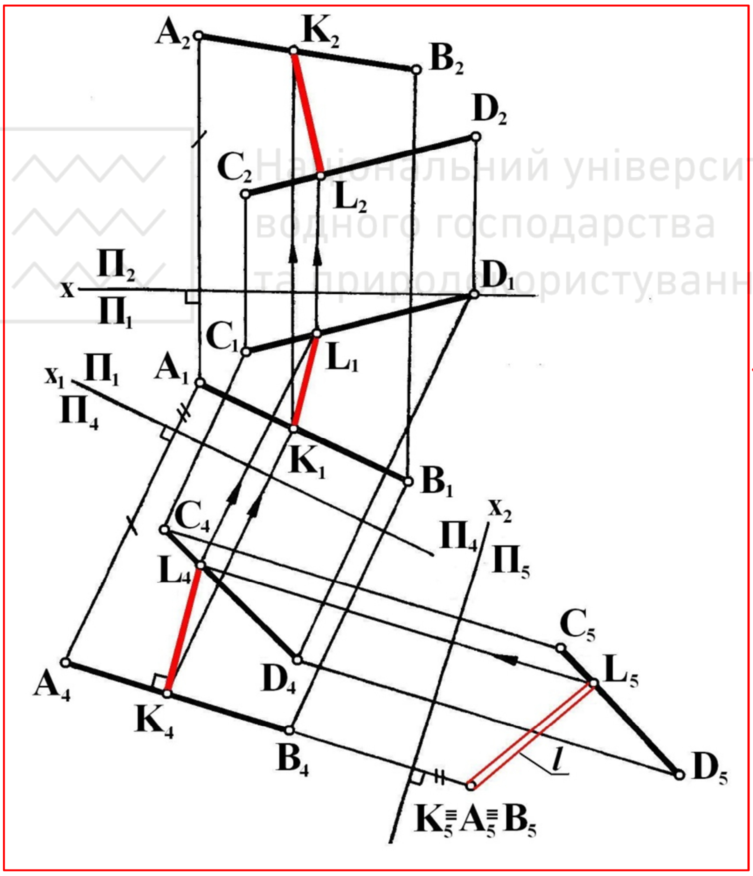
Найкоротшу відстань між мимобіжними прямими *a* і *b* зручно визначити , розмістивши одну з прямих перпендикулярно до площини проекцій. Якщо пряму *a* розмістити перпендикулярно до $П_1$ і з довільної точки К провести пряму перпендикулярну до прямої *b*, то спільний перпендикуляр KL буде паралельним до $П_1$. При цьому прямий кут між KL і *b* проекціюється прямим кутом на $П_1$ ($K_1L_1 \perp b_1$) і відрізок K_1L_1 визначає найкоротшу відстань *l* між мимобіжними прямими *a* і *b*.





Переведення однієї з мимобіжних прямих в проекціююче положення можна здійснити одним із способів перетворення проекцій.

Задача №2



Умова задачі: **Визначити відстань *l* між мимобіжними прямими AB і CD.**

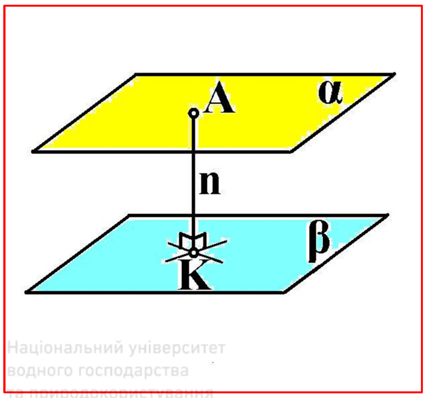
Розв'язування задачі:

Способом заміни площин проекцій в результаті вводу двох нових площин проекцій пряма AB стає в системі $x_2П_5/П_4$ проекціюючою прямою, перпендикулярною до $П_5$, а пряма CD займає загальне положення.

Довжина відрізка $К_5L_5$, перпендикулярного до C_5D_5, визначає відстань *l* між прямими AB і CD. Побудовано також проекції спільного до прямих AB і CD перпендикуляра KL. Відрізок $К_4L_4$ // x_2 і $К_4L_4 \perp A_4B_4$; відрізки $К_1L_1$ і $К_2L_2$ визначено за допомогою ліній проекційного зв'язку за умови, що точка К належить прямій AB, а точка L – прямій CD.

9.5. Визначення відстані між паралельними площинами

Відстань між двома паралельними площинами визначається довжиною відрізка перпендикуляра, проведеного з точки однієї площини на іншу площину.



Визначення відстані між паралельними площинами α і β зводиться до виконання таких дій:

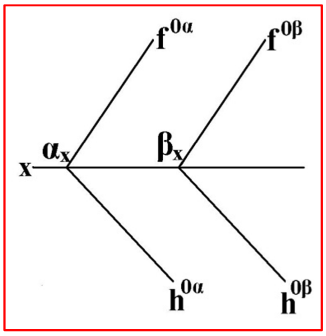
1. З довільної точки А, що належить площині α, опускаємо перпендикуляр n на площину β;

2. Знаходимо точку К перетину перпендикуляра n з площиною β: К = n ∩ β;

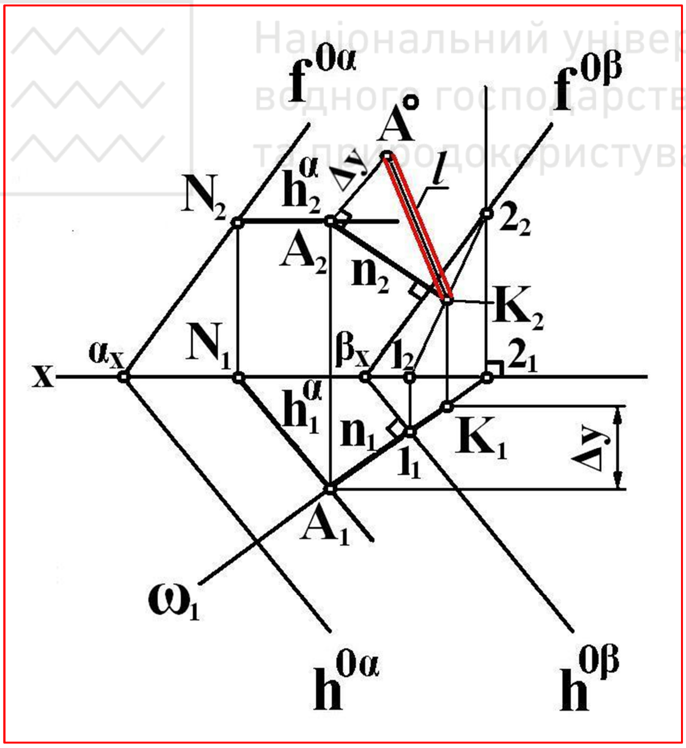
3. Визначаємо довжину відрізка АК перпендикуляра n.

Примітка: дана задача зводиться до визначення відстані від точки до площини і може бути розв'язана такими ж способами.

Задача



Умова задачі: Визначити відстань *l* між паралельними площинами α і β.

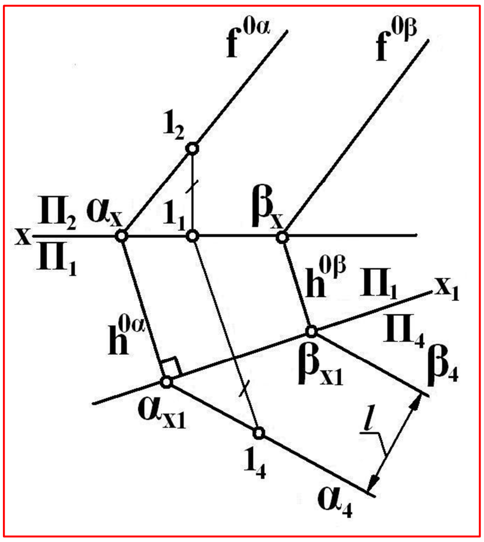


Розв'язування задачі (1 спосіб):

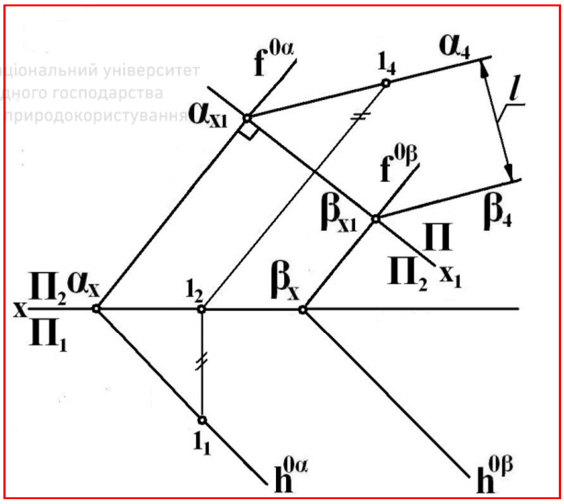
1. Через точку А площини α проводимо перпендикуляр n до площини β: $n_1 \perp h^{0\beta}$, $n_2 \perp f^{0\beta}$.

2. За допомогою горизонтально-проекціюючої площини ω визначено точку К перетину n з β: К = n ∩ β.

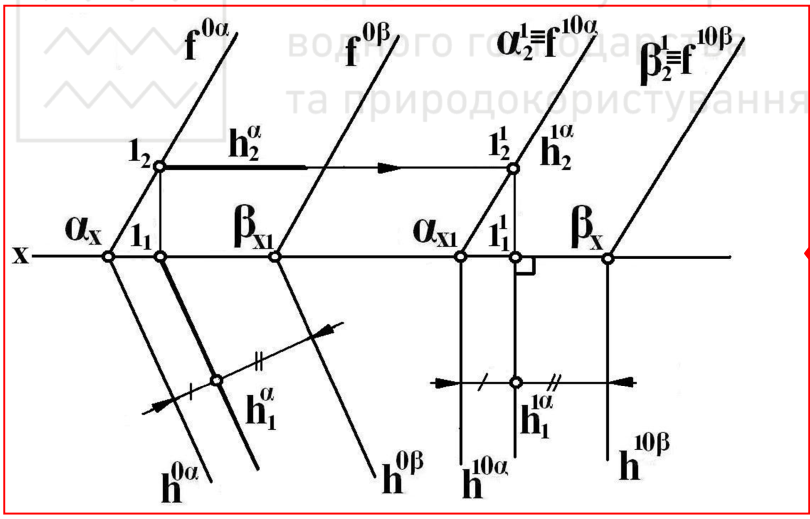
3. З побудованого прямокутного трикутника $A_2K_2A^0$ визначено натуральну величину відрізка АК перпендикуляра n: A^0K_2 = Н.В. АК = *l* – відстань між паралельними площинами α і β.



Розв'язування задачі
(2 спосіб):
Відстань *l* між паралельними площинами α і β визначено шляхом їх переводу в проєкціююче положення за допомогою способу заміни площин. Нову вісь x_1 проведено перпендикулярно до горизонтальних слідів



Розв'язування задачі
(3 спосіб):
Відстань *l* між паралельними площинами α і β визначено шляхом їх переводу в проєкціююче положення за допомогою способу заміни площин. Нову вісь x_1 проведено перпендикулярно до фронтальних слідів площин.



Розв'язування задачі
(4 спосіб):
Перетворення площин α і β із початкового загального положення в проєкціююче здійснено шляхом їх обертання навколо уявної осі, що перпендикулярна до Π_1. Для цього в площині α проведено горизонталь h^{α}, яка в своєму новому положенні розміщується перпендикулярно до Π_2:
$h_1^{1\alpha} \perp x$.

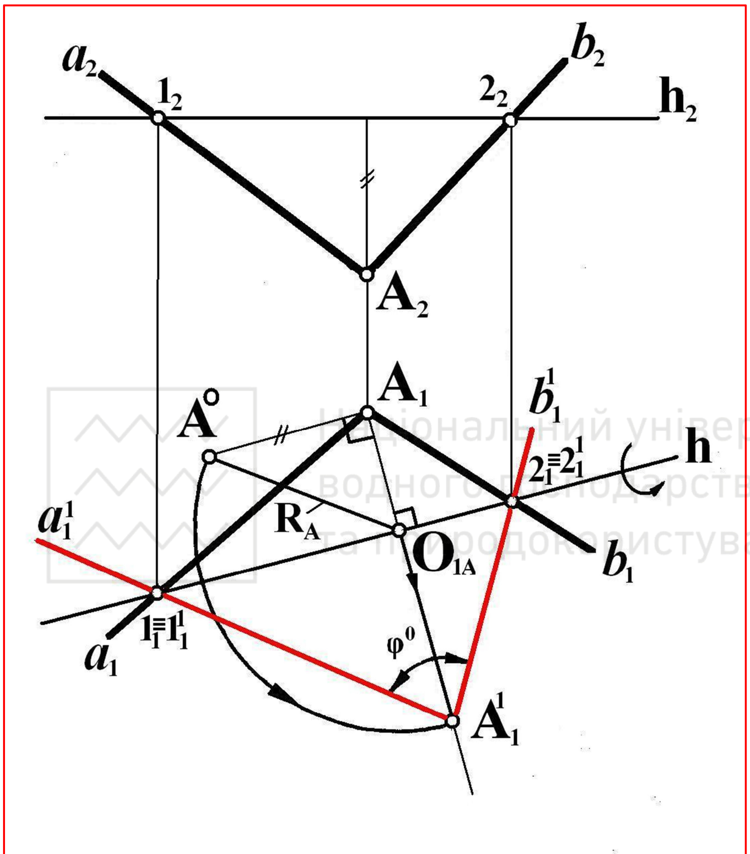
9.6. Визначення кута між двома прямими, що перетинаються

Кут між двома прямими, що перетинаються, проекціюється без спотворення на площину, яка паралельна до площини кута.

Розв'язування задач на визначення кута між двома прямими, прямою та площиною, двома площинами, в підсумку, зводиться до знаходження кута між двома прямими, що перетинаються.

Серед різних способів, якими може бути розв'язана дана задача, перевагу слід надати способу обертання навколо ліній рівня, що є найбільш простим за кількістю графічних побудов.

Задача



Умова задача: **Визначити кут φ^0 між прямими *a* і *b*, що перетинаються.**

Розв'язування задачі:

Обертанням навколо горизонталі h переводимо площину, яку задано прямими *a* і *b*, в положення, паралельне до Π_1.

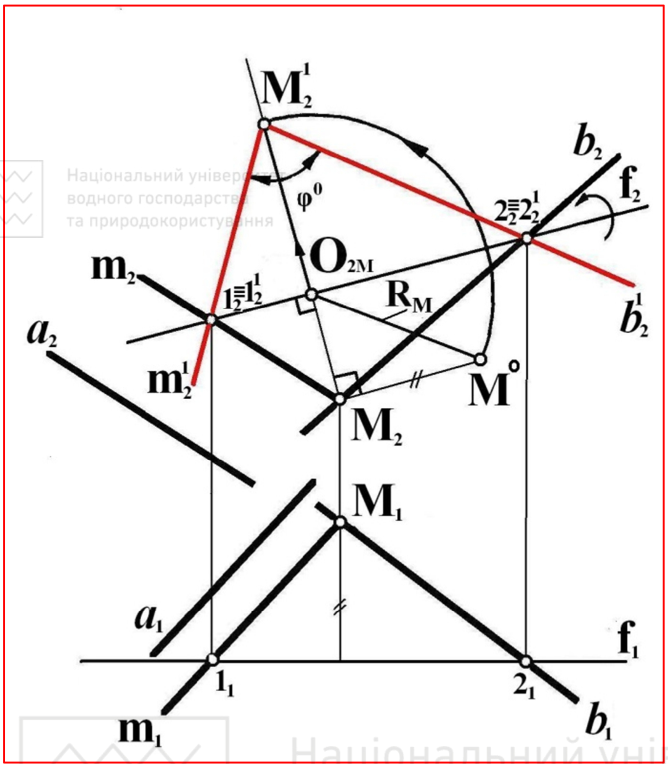
Точки 1 і 2, які взяли на прямих *a* і *b*, належать горизонталі h – осі обертання, тому вони не змінюють свого положення при обертанні навколо осі. Для знаходження нового положення a^1 і b^1 прямих *a* і *b* достатньо повернути тільки одну точку А. O_{1A}, R_A – горизонтальна проекція центра кола обертання і радіус кола обертання точки А. Прямі a^1 і b^1, що перетинаються в точці A^1, паралельні до Π_1, тому кут $\varphi°$ між a^1 і b^1 визначає кут між прямими *a* і *b*, що перетинаються.

9.7. Визначення кута між мимобіжними прямими

Кут між двома мимобіжними прямими вимзначається кутом між двома прямими, що перетинаються, і які є паралельними до заданих мимобіжних прямих.

Задача зводиться до проведення прямої, що перетинає одну з мимобіжних прямих, і водночас є паралельною до другої мимобіжної прямої, з наступним визначенням кута між утвореними прямими, що перетинаються.

Задача



Умова задача: **Визначити кут φ^0 між двома мимобіжними прямими *a* і *b*.**

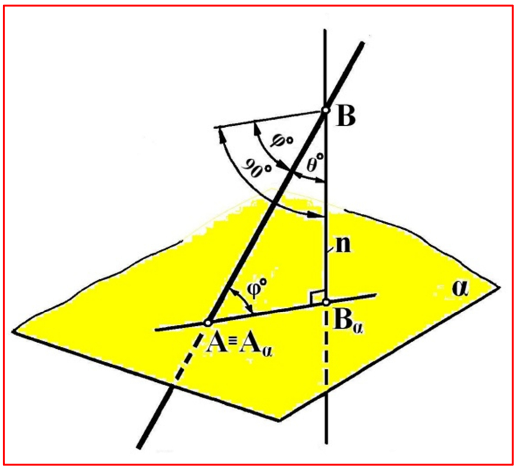
Розв'язування задачі:

1. Через довільну точку М, яку візьмемо на прямій *b*, проводимо пряму m, паралельну до прямої *a*.

2. Визначаємо величину кута φ° між прямими *m* і *b*, що перетинаються, обертанням навколо фронталі f, яку проведено через точки 1 і 2.

Для цього обертанням точки М навколо f проводимо прямі m і *b* в положення m^1 і b^1, при якому вони паралельні до $П_2$. Кут між m^1 і b^1 визначає кут φ° між пересічними прямими m і *b*, а, отже, і кут між мимобіжними прямими *a* і *b*. O_2M, R_M – фронтальна проекція центра кола обертання і радіус кола обертання точки М

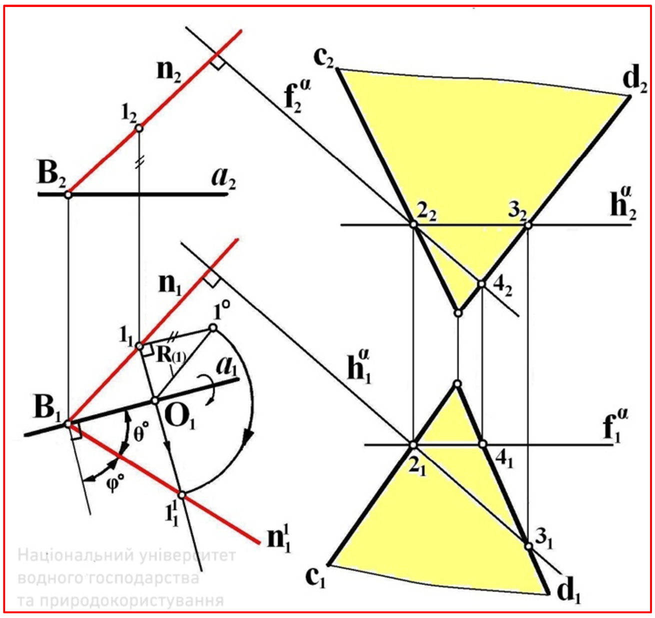
9.8. Визначення кута між прямою лінією та площиною



Кут між прямою АВ та площиною *α* вимірюється кутом φ°, що утворений між прямою АВ і її ортогональною проекцією $A_\alpha B_\alpha$ на площину *α*.

Якщо не потрібно визначати проекції кута між прямою та площиною, а тільки знайти величину цього кута, доцільно буде визначити спочатку кут θ° між АВ і перпендикуляром n, який є доповненням кута φ° до 90°, а потім знайти величину φ°: φ°=90°- θ°.

Задача



Умова задача: **Визначити кут φ^0 між горизонтальною прямою a і площиною α, яку задано двома пересічними прямими c і d.**

Розв'язування задачі:

1. В площині α, яку задано прямими c і d, проводимо горизонтальну пряму h^α та фронтальну пряму f^α.

2. Через довільну точку B прямої a проводимо пряму n, перпендикулярну до площини α: $n_1 \perp h_1{}^\alpha$, $n_1 \perp f_2{}^\alpha$.

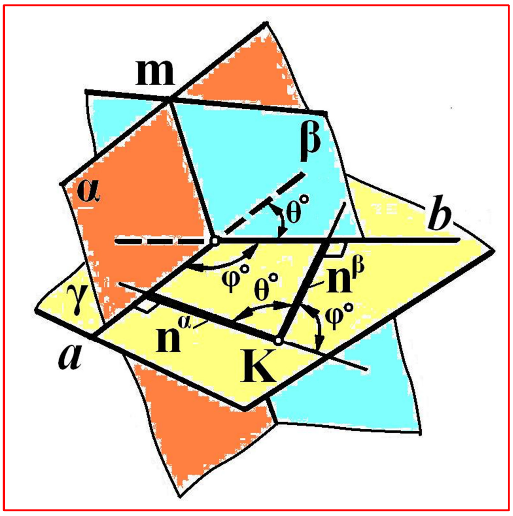
3. Обертаємо перпендикуляр n навколо горизонтальної прямої a до положення n^1, паралельного до Π_1. Для цього візьмемо точку 1 на прямій n і обертаємо її навколо a до положення точки $1_1{}^1$. Довжина відрізка $O_11_1{}^1$ дорівнює величині радіуса дуги $R_{(1)}$ обертання точки 1. $O_11_1{}^1$ - горизонтальна проекція відрізка $O1^1$, розміщеного паралельно до Π_1, O_1 – горизонтальна проекція центра кола обертання точки 1.

4. Прямі n^1 і a утворюють площину, паралельну до Π_1. Кут між n^1 і a є кутом θ°.

5. Якщо провести з точки B_1 перпендикуляр до прямої a_1, то на епюрі отримаємо шуканий кут φ° - кут нахилу прямої a до площини α.

9.9. Визначення кута між площинами

Кут, утворений двома площинами ,є двогранним. Мірою величини кута між двома площинами є лінійний кут, отриманий в результаті перетину даних площин третьою площиною, яка перпендикулярна до двох заданих площин.



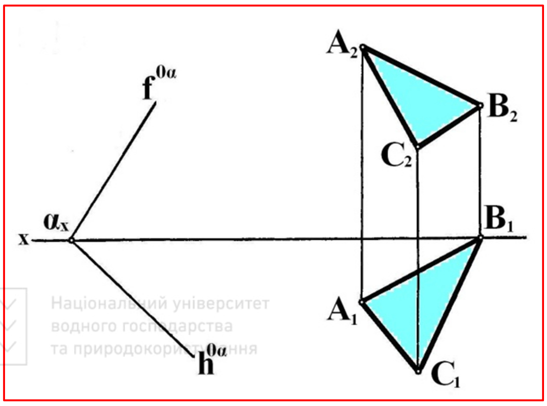
Дві площини, що перетинаються, утворюють чотири суміжних кути, протилежні з яких є рівними. Двогранні кути визначаються лінійними кутами φ° і θ°, які утворено лініями a і b перетину площин α і β з третьою допоміжною площиною γ, що перпендикулярна до цих площин.

Для побудови на епюрі лінійних кутів φ° і θ°, можна провести допоміжну площину γ перпендикулярно до лінії перетину m площин α і β. Це означає, що площина γ буде перпендикулярною і до площин α і β. Далі визначають лінії a і b перетину γ з α і β, а потім і величину кутів φ° і θ°, утворених цими

прямими. Проте розв'язування задачі за таким планом обумовлює низку складних графічних побудов.

Розв'язування задачі може бути спрощено, якщо з довільної точки К провести перпендикуляри n^{α} і n^{β} до заданих площин α і β. Ці перпендикуляри задають допоміжну площину γ і утворюють між собою кути, рівні шуканим кутам φ° і θ°.

Задача №1

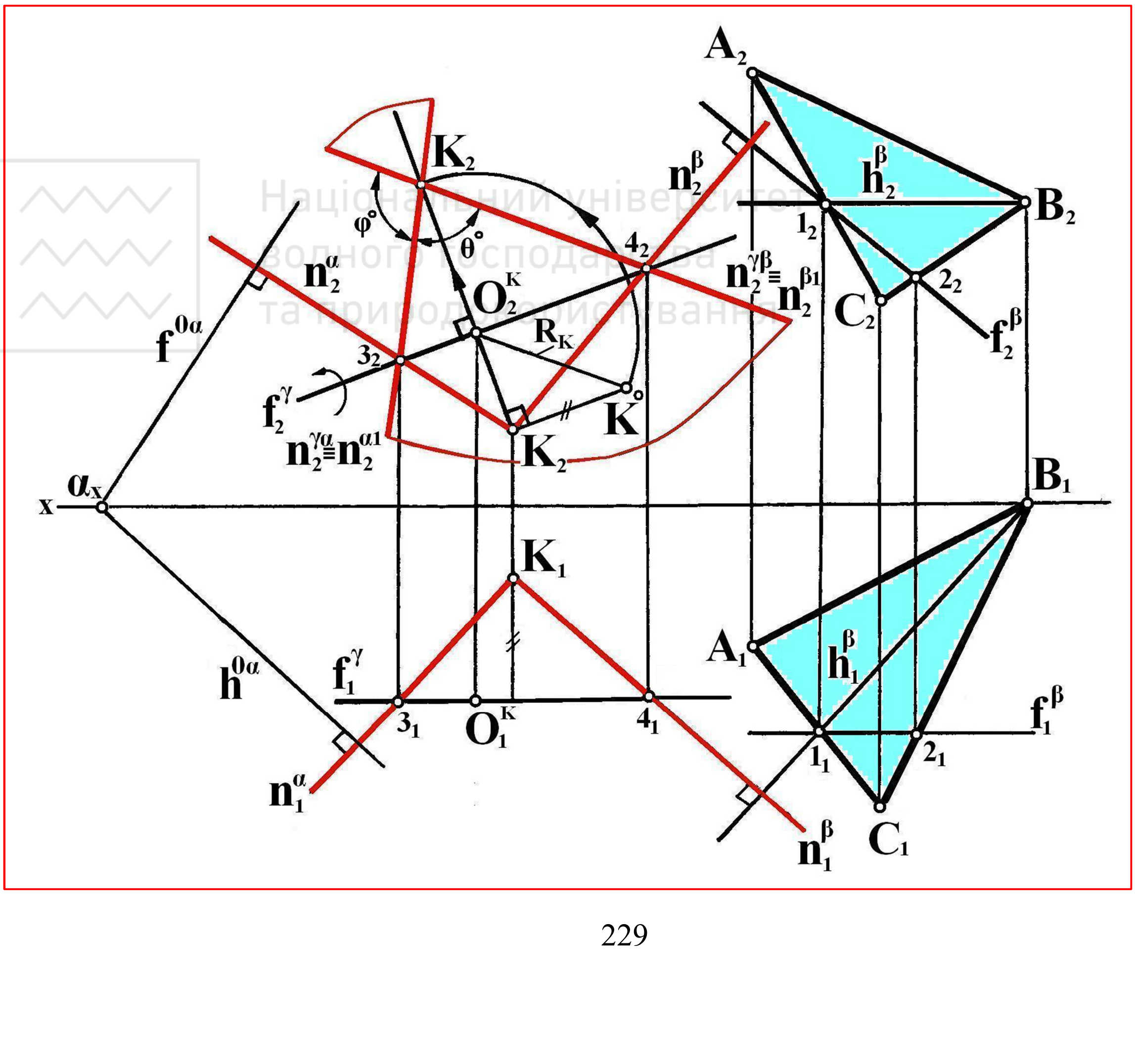


Умова задачі: **Визначити кути φ° і θ° між площинами α, що задана слідами $h^{0\alpha}$ і $f^{0\alpha}$, та β, яку задано трикутником ABC.**

Розв'язування задачі:

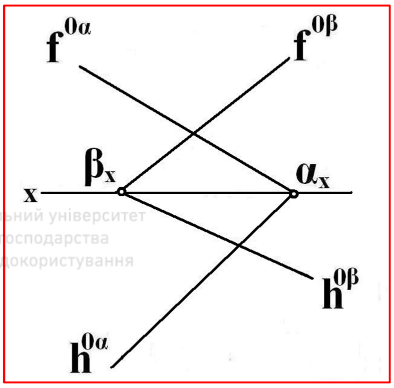
1. В площині β проводимо горизонталь h^{β} і фронталь f^{β}.

2. З довільної точки К проводимо перпендикуляр n^{α} до площини α: $n_1^{\alpha} \perp h^{0\alpha}$, $n_2^{\alpha} \perp f^{0\alpha}$ та перпендикуляр n^{β} до площини β: $n_1^{\beta} \perp h_1^{\beta}$, $n_2^{\beta} \perp f_2^{\beta}$.

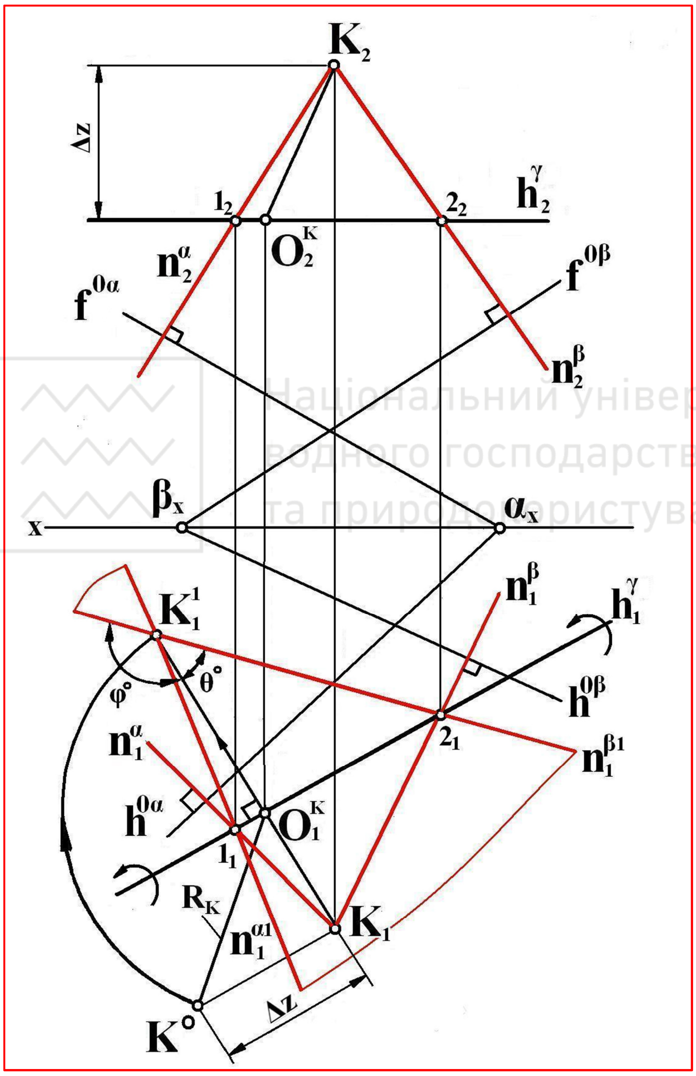


3. Площину γ, що утворена перпендикулярами n^{α} і n^{β}, обертаємо навколо фронталі f^{γ} до положення площини $\gamma^1(n^{\alpha1} \cap n^{\beta1})$, що паралельна до $П_2$. Для цього точку К обертаємо навколо f^{γ} до положення $К^1$, при якому радіус обертання $R_К$ точки К буде розміщений паралельно до $П_2$. $O_1^К$, $O_2^К$ та $R_К$ – проекції центра та радіус кола обертання точки К.

4. Проекції $n_2^{\alpha1}$ і $n_2^{\beta1}$ утворюють шукані кути $\varphi°$ і $\theta°$.



Умова задачі: Визначити кути $\varphi°$ і $\theta°$ між площинами α, та β, що задані слідами.

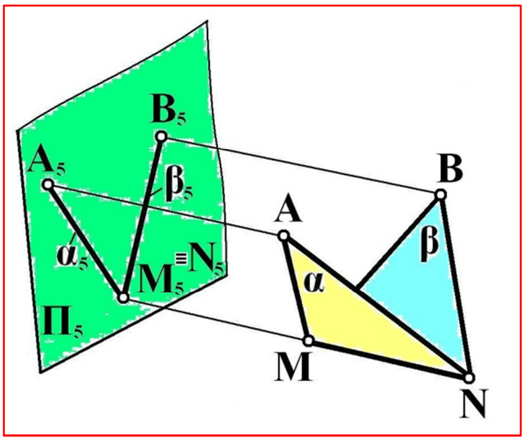


Розв'язування задачі:

1. З довільної точки К проводимо перпендикуляр n^{α} до площини α: $n_1^{\alpha} \perp h^{0\alpha}$, $n_2^{\alpha} \perp f^{0\alpha}$ та перпендикуляр n^{β} до площини β: $n_1^{\beta} \perp h^{0\beta}$, $n_2^{\beta} \perp f^{0\beta}$.

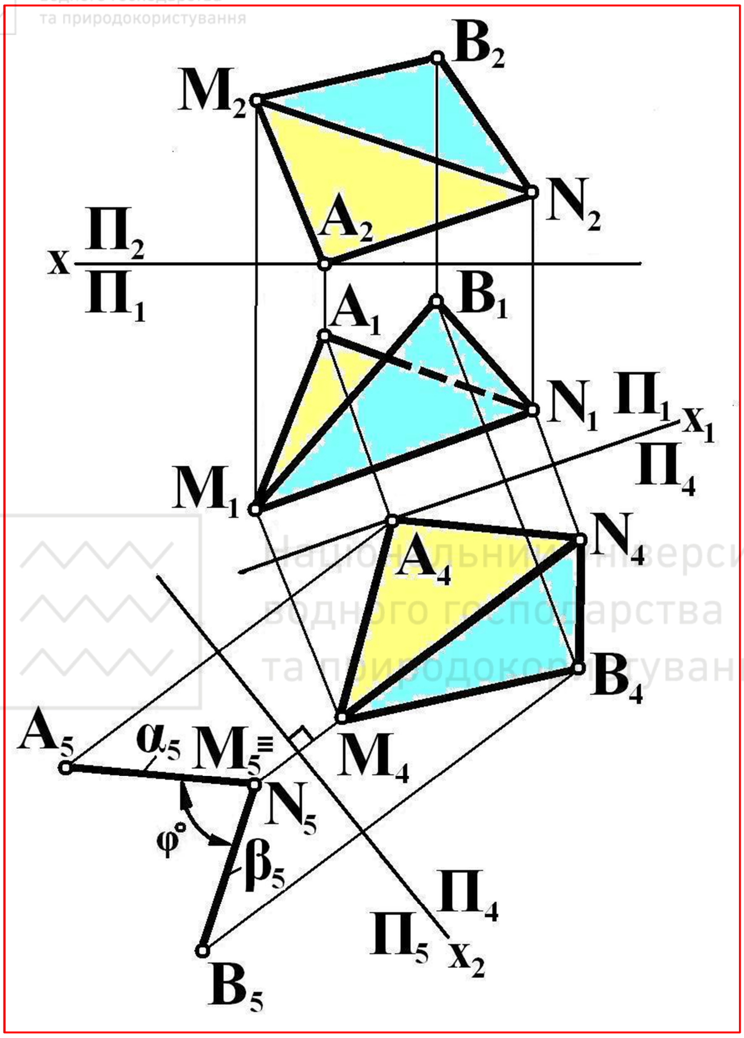
2. Площину γ перпендикулярів n^{α} і n^{β} обертаємо навколо горизонталі h^{γ} до положення площини γ^1 ($n^{\alpha} \cap n^{\beta}$), що паралельна до $П_1$ (горизонталь h^{γ} площини γ проходить через точки 1 і 2). Для цього точку К обертаємо навколо h^{γ} до положення $К^1$, при якому радіус обертання $R_К$ точки К буде розміщений паралельно до $П_1$. $O_1^К$, $O_2^К$ та $R_К$ – проекції центра та радіус кола обертання точки К.

3. Проекції $n_1^{\alpha1}$ і $n_1^{\beta1}$ утворюють шукані кути $\varphi°$ і $\theta°$ ($\theta°=180°- \varphi°$).



Якщо двогранний кут, утворений двома площинами α і β, ортогонально спроекціювати на площину проекцій, наприклад Π_5, перпендикулярну до його ребра MN, то цей двогранний кут буде проекціюватися на Π_5 в натуральну величину, визначену лінійним кутом φ^0. Описаний спосіб розв'язування є доцільним, якщо задано зображення двогранного кута.

Задача №3



Умова задача: Визначити кут φ° між площиною α, що задана трикутником MAN, і площиною β, яку задано трикутником MBN, і які мають спільну сторону MN.

Розв'язування задачі:

Уведенням двох нових площин проекцій Π_4 і Π_5 спільну сторону MN двох трикутників із початкового загального положення переведено в проекціююче, що перпендикулярне до Π_5. Для цього на епюрі x_1 розміщуємо паралельно до M_1N_1, а x_2 розміщуємо перпендикулярно до M_4N_4. На Π_5 сторона MN проекціюється точкою ($M_5 \equiv N_5$), а трикутники площин α і β – відрізками прямих M_5A_5 і N_5B_5. Кут φ° між цими відрізками є шуканою величиною двогранного кута.

ТЕРМІНОЛОГІЧНИЙ СЛОВНИК

Визначник – сукупність умов, потрібних та достатніх для визначення геометричної фігури у просторі.

Вісь проекцій – пряма лінія, по якій перетинаються площини проекцій.

Геометрична фігура – сукупність точок.

Епюр – креслення, яке складається з декількох проекцій геометричної фігури, отриманих способом прямокутного (ортогонального) проекціювання і розміщених у проекційному зв'язку. Під час утворення епюра спочатку просторову фігуру подумки проекціюють на взаємно перпендикулярні площини проекцій, а потім їх суміщають в одну спільну площину креслення.

Лінії проекційного зв'язку – прямі лінії, які з'єднують проекції точки геометричної фігури на епюрі.

Площина проекцій – площина, на якій розміщують проекції геометричної фігури.

Проекційний зв'язок – зв'язок проекцій геометричної фігури, що здійснюють за допомогою ліній проекційного зв'язку.

Проекціювання – відображення на площині геометричних фігур простору, за яким кожній точці фігури простору відповідає на площині точка, побудована за певним правилом.

Проекціююча пряма – пряма лінія, за допомогою якої визначають проекції точок геометричної фігури. При прямокутному (ортогональному) проекціюванні проекціююча пряма розміщена перпендикулярно до площини проекцій.

Проекція – зображення на площині просторових геометричних фігур у вигляді плоских геометричних фігур. Проекцією точки називається точка перетину проекціюючої прямої, що проходить через точку простору, з площиною проекцій.

Проекція геометричної фігури – сукупність проекцій її точок.

Стала пряма креслення – пряма лінія, яку використовують для визначення третьої проекції точки геометричної фігури за двома відомими її проекціями. При наявності на епюрі осей проекцій сталу пряму креслення проводять з точки перетину осей проекцій під кутом 45^0 в напрямку до осей ординат – осей проекцій *y*. Вона є бісектрисою кута, утвореного горизонтально-вертикальною лінією проекційного зв'язку.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ТА РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Антонович Є. А. Нарисна геометрія : практикум : посібник / упоряд. : Є. А. Антонович, Я. В. Василишин, О. В. Фольта та ін. Львів : Світ, 2004. 527 с.

2. Белов Н.В. Начертательная геометрия : учеб. пособие / учред. : Н. В. Беллов, А. А. Виксель. Л. : Изд-во лит. по строительству, 1969. 288 с.

3. Бубенников А.В. Начертательная геометрия : учеб. для втузов / А. В. Бубенников. М. : Высш. шк., 1985. 288 с.

4. Ванін В. В. Інженерна графіка. підручник / упоряд. : В. В. Ванін, В. В. Перевертун, Т. М. Надкернична, Г. Г. Власюк. К. : Видавнича група BHV, 2009. 400 с.

5. Виноградов В. Н. Начертательная геометрия : учеб. для стедентов пед. ин-тов / В. Н. Виноградов. М. : Просвещение, 1989. 239 с.

6. Вышнепольский И.С. Черчение для техникумов / учред. : И. С. Вышнепольский, В. И. Вышнепольский. М. : ООО «Издательство Астрель» : ООО «Издательство АСТ», 2002. 399 с.

7. Гордон В. О. Курс начертательной геометрии: учеб. пособие / учред. : В. О. Гордон, М. А. Семенцов – Огиевский. М. : Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1988. 272 с.

8. Гордон В. О. Сборник задач по курсу начертательной геометрии / В. О. Гордон, Ю. Б. Иванов, Т. Е. Солнцева. М. : Гл. ред. физ-мат. лит. узд-ва «Наука», 1967. 352 с.

9. Джеджула О. М. Курс нарисної геометрії : навчальний посібник / упоряд. : О. М. Джеджула, С. І. Кормановський. Вінниця : ВНАУ, 2011. 200 с.

10. Інженерна та комп’ютерна графіка : підручник / упоряд. : В. Є. Михайленко, В. М. Найдиш, А. М. Підкоритов, І. А. Скидан. К. : Вища шк., 2001. 350 с.

11. Кириченко А. Ф. Теоретичні основи інженерної графіки : підручник для вищих технічних навчальних закладів. К. : ВД «Професіонал», 2004. 496 с.

12. Климухин А. Г. Начертательная геометрия : учеб. пособие / А. Г. Климухин. М. : Архитекрура, 2007. 336 с.

13. Ковальов Ю. М. Прикладна геометрія : нарисна геометрія, інженерна та комп’ютерна графіка. Сучасні напрями : підручник / упоряд. : Ю. М. Ковальов, В. М. Верещага. К.: Дія, 2012. 472 с.

14. Козяр М.М. Нарисна геометрія : навчальний посібник / упоряд. : М. М. Козяр, З. К. Сасюк. Рівне : НУВГП, 2013. 206 с

15. Короев Ю. И. Начертательная геометрия : учебник / Ю. И. Короев. М. : КНОРУС, 2013. 424 с.

16. Королев Ю. И. Начертательная геометрия : учебник для вузов / Ю. И. Королев. Спб. : Питер, 2010. 266 с.

17. Крівцов В. В. Нарисна геометрія : навч. посібник. Рівне: НУВГП, 2012. 240 с.

18. Кузнецов Н. С. Начертательная геометрия : учебник для вузов / Н. С. Кузнецов. М. : Высш. школа, 1969. 501 с.

19. Локтев О. В. Краткий курс начертательной геометрии : учебник для втузов / О. В. Локтев. М. : Высш. шк., 1985. 136 с.

20. Локтев О. В. Задачник по начертательной геометри : учеб. пособие для втузов / О. В. Локтев. М. : Высш. шк., 1984. 104 с.

21. Михайленко В. Є. Інженерна та комп’ютерна графіка : підруч. для студ. вищих закл. освіти / упоряд. : В. Є. Михайленко, В. В. Ванін, С. М. Ковальов. К. : Каравела, 2003. 344 с.

22. Нарисна геометрія : підручник / упоряд. : В. Є. Михайленко, М. Ф. Євстіфєєв, С. М. Ковальов, О. В. Кащенко. К. : Видавничий Дім «Слово», 2013. 304 с.

23. Начертательная геометрия : учеб. для вузов / учред. : Н. М. Крылов, Г. С. Иконникова, В. Л. Николаев, Н. М. Лаврухина. М. : Высш. шк., 1990. 240 с.

24. Начертательная геометрия : учеб. для вузов / учред. : Н. Ф. Четверухин, В. С. Левицкий, З. И. Прянишникова, А. М. Тевлин, Г. И. Федотов. М.: Изд-во «Высшая школа», 1963. 420 с.

25. Райковська Г. О. Нарисна геометрія. Практикум : навч. посібник / Г. О. Райковська. Житомир : ЖДТУ, 2013. 183 с.

26. Сберегаев Н. П. Краткий справочник по начертательной геометрии и машиностроительному черчению / Н. П. Сберегаев. М.: Государственное научно-техническое изд-во машиностроительной литературы, 1962. 216 с.

27. Фролов С.А. Начертательная геометрия : учебник для втузов / С. А. Фролов. М. : Машиностроение, 1983. 240 с.

28. Фролов С. А. Начертательная геометрия : Что это такое? / учред. : С. А. Фролов, М. В. Покровская. Мн. : Выш. шк., 1986. 208 с.

29. Фролов С. А. Сборник задач по начертательной геометри : учеб. пособие для студентов машиностроительных и приборостроительных специальностей вузов / С. А. Фролов. М. : Машиностроение, 1986. 176 с.

30. Хмеленко О.С. Нарисна геометрія : підручник. К.: Кондор, 2008. 440 с.

31. Чалый А. Т. Курс начертательной геометрии : учебник для вузов / А. Т. Чалый. М. : Изд-во «Машиностроение», 1964. 280 с.

32. Чекмарев А. А. Начертательная геометрия и черчение : учеб. пособие / А. А. Чекмарев. М. : Просвещение, 1987. 400 с.

Навчальне видання

Крівцов Валерій Володимирович
Козяр Микола Миколайович

НАРИСНА ГЕОМЕТРІЯ
(базовий курс)

Навчальний посібник

Друкується в авторській редакції

Технічний редактор *Г.Ф. Сімчук*

Формат 60×84 $^{1}/_{16.}$
Ум.-друк. арк. 13,7. Обл.-вид. арк. 14,3.
Тираж 100 прим. Зам. № 5389.

Видавець і виготовлювач
Національний університет
водного господарства та природокористування
вул. Соборна, 11, м. Рівне, 33028.

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції РВ № 31 від 26.04.2005 р.