Міністерство освіти і науки України
Національний університет водного господарства та природокористування

Кафедра прикладної математики

04-01-04

Методичні вказівки

**до виконання практичних робіт з навчальної дисципліни «*ТЕОРІЯ КЕРУВАННЯ*», частина 1
для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня за спеціальністю 113 «Прикладна математика»
денної і заочної форм навчання**

Рекомендовано
науково-методичною комісією
зі спеціальності
113 «Прикладна математика».
Протокол № 6 від 25.03.2019 р.

Рівне – 2019

Методичні вказівки до виконання практичних робіт з дисципліни «Теорія керування», частина 1 для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня за спеціальністю 113 «Прикладна математика» денної і заочної форм навчання / Гладун Л. В. – Рівне : НУВГП, 2019. – 57 с.

Укладач: Гладун Л. В., кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри прикладної математики.

Відповідальний за випуск : Мартинюк П. М., доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри прикладної математики.

ЗМІСТ

Вступ

При функціонуванні керованих систем виникають задачі знаходження таких значень параметрів керування, при яких досягаються оптимальні значення деяких критеріїв, які пов'язані з ними. Теорія керування розглядає методи розв'язання таких задач.

Методичні вказівки розроблені для студентів спеціальності ,,Прикладна математика”.

Перша практична робота містить критерій цілком керованості для лінійних систем керування. У другій практичній роботі розглянуто знаходження розв'язку задачі швидкодії з одним параметром керування для лінійних систем керування. Приведено два методи розв'язання – з використанням вигляду траєкторій руху системи та аналітичний. Задача швидкодії з двома параметрами керування для лінійних систем керування розглянута в третій практичній роботі

До кожної практичної роботи приведений необхідний теоретичний матеріал, а також розглянуто розв'язання прикладів відповідних типів задач.

В кінці кожної практичної роботи подано завдання для самостійної роботи, які містять значну кількість задач. Вони можуть використовуватися для проведення тестового опитування з відповідних тем.

1. Цілком керовані лінійні системи керування

Під *лінійною системою керування* розуміють керовану систему, рух якої описується лінійною системою диференціальних рівнянь вигляду

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + b_{11}u_1 + \ldots + b_{1m}u_m, \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + b_{21}u_1 + \ldots + b_{2m}u_m, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + b_{n1}u_1 + \ldots + b_{nm}u_m, \end{cases} \tag{1.1}$$

де x_i - фазові координати, u_k - параметри керування, a_{ij}, b_{ik} - деякі відомі константи $(i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,n},\ k = \overline{1,m})$.

У матричному вигляді система (1.1) запишеться таким чином:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{1.2}$$

де

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \ldots & b_{nm} \end{pmatrix}.$$

Лінійна система керування (1.2) називається *цілком керованою*, якщо для довільних двох точок $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$, $x^1 = (x_1^1, \ldots, x_n^1)$ з фазового простору R^n і довільних двох значень $t_0, t_1 \in R$ існує керування $u(t)$, яке визначене для довільного $t \in [t_0, t_1]$, таке, при якому система (1.2) має розв'язок, який задовольняє умови:

$$\begin{aligned} x(t_0) &= x^0, \\ x(t_1) &= x^1. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Розглянемо матриці $B, AB, A^2B, ..., A^{n-1}B$. Кожна з них має розмір $n \times m$. Позначимо через S_n матрицю, стовпчиками якої є стовпчики цих матриць:

$$S_n = \ B, AB, A^2B, ..., A^{n-1}B \ .$$

Матриця S_n має розмір $n \times \ n \times m \ $.

Критерій цілком керованості лінійної системи. Лінійна система керування (1.2) є цілком керованою тоді і тільки тоді, коли ранг матриці S_n дорівнює n, тобто

$$rang S_n = n. \tag{1.4}$$

Якщо матриця B є стовпчиком, тоді умова (1.4) має вигляд

$$det\, S_n \neq 0. \tag{1.5}$$

Приклад. Перевірити на цілком керованість лінійну систему керування

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + 2x_2 + 8x_3 + 6u_1 + 4u_2, \\ \dot{x}_2 = 3x_1 + x_2 + 6x_3 + 3u_1 + 2u_2, \\ \dot{x}_3 = x_1 + x_2 + 2x_3 + 9u_1 + 6u_2. \end{cases} \tag{1.6}$$

Розв'язування. Запишемо матриці A і B для системи (1.6):

$$A=\begin{pmatrix}1&2&8\\3&1&6\\1&1&2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}6&4\\3&2\\9&6\end{pmatrix}.$$

Знайдемо матриці AB та A^2B:

$$AB=\begin{pmatrix}1&2&8\\3&1&6\\1&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6&4\\3&2\\9&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}84&56\\75&50\\27&18\end{pmatrix},$$

$$A^2B=\begin{pmatrix}84&56\\75&50\\27&18\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6&4\\3&2\\9&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}450&300\\489&326\\213&142\end{pmatrix}.$$

Матриця S_3 має вигляд

$$S_3=\begin{pmatrix}6&4&84&56&450&300\\3&2&75&50&489&326\\9&6&27&18&213&142\end{pmatrix}.$$

Знаходимо мінори матриці, які відмінні від нуля.

$$M_1=6\neq 0,\ M_{21}=\begin{vmatrix}6&4\\3&2\end{vmatrix}=0,$$

$$M_{22}=\begin{vmatrix}6&84\\3&75\end{vmatrix}=450-252=198,$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} 6 & 4 & 84 \\ 3 & 2 & 75 \\ 9 & 6 & 27 \end{vmatrix} = 0$$ (1-ий і 2-ий стовпці пропорційні),

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 6 & 84 & 56 \\ 3 & 75 & 50 \\ 9 & 27 & 18 \end{vmatrix} = 0$$ (2-ий і 3-ій стовпці пропорційні),

$$M_{33} = \begin{vmatrix} 6 & 84 & 450 \\ 3 & 75 & 489 \\ 9 & 27 & 213 \end{vmatrix} = 6 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 14 & 75 \\ 1 & 25 & 163 \\ 3 & 9 & 71 \end{vmatrix} = 54 \begin{vmatrix} 1 & 14 & 75 \\ 0 & 11 & 88 \\ 0 & -33 & -154 \end{vmatrix} =$$

$$= 54 \begin{vmatrix} 11 & 88 \\ -33 & -154 \end{vmatrix} = 65340 \neq 0.$$

Отже, $rang S_3 = 3$, тобто лінійна система керування (1.6) є цілком керованою.

Завдання для самостійної роботи.

Перевірити на цілком керованість лінійну систему керування.

1. $$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 6u_1 - 4u_2, \\ \dot{x}_2 = 3x_1 + x_2 + 6x_3 + 3u_1 + 2u_2, \\ \dot{x}_3 = x_1 + x_2 + 2x_3 + 9u_1 + 6u_2. \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - 2x_2 + 8x_3 + 6u_1 + 4u_2, \\ \dot{x}_2 = 3x_1 + x_2 + 6x_3 + 3u_1 + 2u_2, \\ \dot{x}_3 = x_1 - x_2 + 2x_3 + 9u_1 + 6u_2. \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + 8x_3 + 2u_1 + 4u_2, \\ \dot{x}_2 = 3x_1 + x_2 + 6x_3 + u_1 + 2u_2, \\ \dot{x}_3 = x_1 - x_2 + 2x_3 + 3u_1 + 6u_2. \end{cases}$$

4. $$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - 2x_2 + 8x_3 + 6u_1 + 4u_2, \\ \dot{x}_2 = 3x_1 + x_2 - 3u_1 - 2u_2, \\ \dot{x}_3 = x_1 - x_2 + 2x_3 + 9u_1 + 6u_2. \end{cases}$$

5. $$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - 2x_2 + 8x_3 + 6u_1 + 4u_2, \\ \dot{x}_2 = 3x_1 + x_2 + 6x_3 + 3u_1 + 2u_2, \\ \dot{x}_3 = x_1 + x_2 - 9u_1 - 6u_2. \end{cases}$$

6. $$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - 2x_2 + 8x_3 + 6u_1 + 4u_2, \\ \dot{x}_2 = -x_2 + 6x_3 - 3u_1 - 2u_2, \\ \dot{x}_3 = x_1 - x_2 + 2x_3 + 9u_1 + 6u_2. \end{cases}$$

7. $$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - 2x_2 + 8x_3 + 6u_1 + 4u_2, \\ \dot{x}_2 = 3x_1 + x_2 + 6x_3 + 3u_1 + 2u_2, \\ \dot{x}_3 = x_1 - x_2 + 2x_3 + 9u_1 + 6u_2. \end{cases}$$

8. $$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - 2x_2 - 6u_1 - 4u_2, \\ \dot{x}_2 = 3x_1 + x_2 + x_3 + 3u_1 + 2u_2, \\ \dot{x}_3 = x_1 - x_2 + x_3 + 9u_1 + 6u_2. \end{cases}$$

9. $$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - 2x_2 + 8x_3 + 6u_1 + 4u_2, \\ \dot{x}_2 = 3x_1 + 6x_3 + 3u_1 + 2u_2, \\ \dot{x}_3 = x_1 - x_2 + 2x_3 - 3u_1 - 2u_2. \end{cases}$$

10. $$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - x_2 + 8x_3 + 6u_1 + 4u_2, \\ \dot{x}_2 = x_2 + 6x_3 - 3u_1 - 2u_2, \\ \dot{x}_3 = x_1 - x_2 + 2x_3 + 9u_1 + 6u_2. \end{cases}$$

11. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - 2x_2 + x_3 - 3u_1 - 2u_2, \\ \dot{x}_2 = 3x_1 + x_2 + 6x_3 + 3u_1 + 2u_2, \\ \dot{x}_3 = x_1 - x_2 + 9u_1 + 6u_2. \end{cases}$

12. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - 2x_2 + x_3 - 6u_1 - 4u_2, \\ \dot{x}_2 = x_2 + x_3 + 3u_1 + 2u_2, \\ \dot{x}_3 = x_1 - x_2 + 2x_3 + 9u_1 + 6u_2. \end{cases}$

13. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - 2x_2 + 8x_3 + u_1 + 2u_2, \\ \dot{x}_2 = 3x_1 + x_2 + 2u_1 + 4u_2, \\ \dot{x}_3 = x_1 - x_2 - 2x_3 + 3u_1 + 6u_2. \end{cases}$

14. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - 2x_2 + x_3 + 2u_1 + 4u_2, \\ \dot{x}_2 = 3x_1 + x_2 + u_1 + 2u_2, \\ \dot{x}_3 = x_1 - x_2 + 2x_3 + 3u_1 + 6u_2. \end{cases}$

15. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - 2x_2 + 8x_3 + 6u_1 + 4u_2, \\ \dot{x}_2 = x_2 + 6x_3 - 3u_1 - 2u_2, \\ \dot{x}_3 = x_1 - x_2 + 2x_3 - 9u_1 - 6u_2. \end{cases}$

16. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - 2x_2 - 6u_1 - 4u_2, \\ \dot{x}_2 = 3x_1 + x_2 + 6x_3 + 3u_1 + 2u_2, \\ \dot{x}_3 = x_1 - x_2 + 2x_3 - 9u_1 - 6u_2. \end{cases}$

17. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - 2x_2 + 8x_3 - 6u_1 - 4u_2, \\ \dot{x}_2 = 3x_1 + x_2 + 3u_1 + 2u_2, \\ \dot{x}_3 = x_1 - x_2 + 2x_3 - 9u_1 - 6u_2. \end{cases}$

18. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - 8x_3 + 2u_1 + 4u_2, \\ \dot{x}_2 = 3x_1 + x_2 + x_3 - u_1 - 2u_2, \\ \dot{x}_3 = x_1 - x_2 + x_3 + 3u_1 + 6u_2. \end{cases}$

19. $$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - 2x_2 + 2u_1 + 4u_2, \\ \dot{x}_2 = 3x_1 + x_2 + x_3 - u_1 - 2u_2, \\ \dot{x}_3 = x_1 - 2x_2 + x_3 + u_1 + 2u_2. \end{cases}$$

20. $$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - 2x_2 + x_3 - 6u_1 - 4u_2, \\ \dot{x}_2 = -x_2 + 6x_3 - 3u_1 - 2u_2, \\ \dot{x}_3 = x_1 - x_2 + 2x_3 - 9u_1 - 6u_2. \end{cases}$$

21. $$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - 2x_2 + x_3 - 6u_1 - 4u_2, \\ \dot{x}_2 = -x_2 + 6x_3 - 3u_1 - 2u_2, \\ \dot{x}_3 = x_1 - x_2 + 2x_3 - 9u_1 - 6u_2. \end{cases}$$

22. $$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - x_3 + u_1 + 2u_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 + x_3 - u_1 - 2u_2, \\ \dot{x}_3 = x_1 - x_2 + x_3 + 3u_1 + 6u_2. \end{cases}$$

23. $$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - x_2 - 2u_1 - 4u_2, \\ \dot{x}_2 = 3x_1 + x_2 - x_3 - u_1 - 2u_2, \\ \dot{x}_3 = x_1 - x_2 + x_3 + u_1 + 2u_2. \end{cases}$$

24. $$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - 8x_3 + 2u_1 + u_2, \\ \dot{x}_2 = 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 4u_1 - 2u_2, \\ \dot{x}_3 = x_1 - x_2 - x_3 + 6u_1 + 3u_2. \end{cases}$$

25. $$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - x_2 - x_3 + 2u_1 + u_2, \\ \dot{x}_2 = 3x_1 + x_3 - 4u_1 - 2u_2, \\ \dot{x}_3 = x_1 - x_2 - x_3 + 2u_1 + u_2. \end{cases}$$

26. $$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - 2x_2 - x_3 - 2u_1 - u_2, \\ \dot{x}_2 = -3x_1 + x_3 - 4u_1 - 2u_2, \\ \dot{x}_3 = x_1 - x_2 - x_3 - 2u_1 - u_2. \end{cases}$$

27. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - x_2 - x_3 + 4u_1 + 2u_2, \\ \dot{x}_2 = 3x_1 - x_2 - 4u_1 - 2u_2, \\ \dot{x}_3 = x_1 - 2x_2 - x_3 + 2u_1 + u_2. \end{cases}$

28. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - x_2 - x_3 - 4u_1 - 2u_2, \\ \dot{x}_2 = 3x_1 - x_2 - 4u_1 - 2u_2, \\ \dot{x}_3 = -2x_2 - x_3 - 2u_1 - u_2. \end{cases}$

29. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - 2x_2 - x_3 + 4u_1 + 2u_2, \\ \dot{x}_2 = 3x_1 - x_3 - 4u_1 - 2u_2, \\ \dot{x}_3 = -x_1 - 2x_2 - 2u_1 - u_2. \end{cases}$

30. $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 - x_2 + 2u_1 + u_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 - 2x_3 - 4u_1 - 2u_2, \\ \dot{x}_3 = -x_1 - 2x_2 - x_3 + 2u_1 + u_2. \end{cases}$

2. Задача швидкодії з одним параметром керування для лінійної системи керування

Нехай $V \subset R^m$ - замкнений випуклий багатокутник простору R^m, який містить початок координат, що не є вершиною випуклого багатокутника, x^0 - початковий стан системи в початковий момент часу t_0.

Задача швидкодії. Знайти таке керування $\overline{u}\ t\ \in V$, яке цілком керовану лінійну систему (1.2) переводить із довільної заданої точки x^0 (початкового стану системи в початковий момент часу t_0) в довільну кінцеву точку x^1 (кінцевий стан системи в кінцевий момент часу t_1) за найкоротший час $T = t_1 - t_0$, t_1 - невідомий час.

За кінцеву точку беремо початок координат.

Функцією Гамільтона-Понтрягіна лінійної системи керування (1.2) називається функція вигляду

$$H(t, x_1, ..., x_n, u_1, ..., u_m, \psi_1, ..., \psi_n) = \psi_1(a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n + b_{11}u_1 + \\ + ... + b_{1m}u_m) + ... + \psi_n(a_{n1}x_1 + ... + a_{nn}x_n + b_{n1}u_1 + ... + b_{nm}u_m)$$

або в матричному вигляді

$$H(t, x, u, \psi) = \psi^T (Ax + Bu), \tag{2.1}$$

де $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix}$ - невідома вектор-функція.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Спряженою до системи лінійних рівнянь (1.2) називається система рівнянь вигляду

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = -\dfrac{\partial H}{\partial x_1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{\psi}_n = -\dfrac{\partial H}{\partial x_n} \end{cases}$$

або в матричному вигляді

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial H}{\partial x}. \tag{2.2}$$

Спряжену систему рівнянь, враховуючи (2.1), можна також записати таким чином

$$\dot{\psi} = -\psi^T A = -A^T \psi .$$

*Принцип максимуму Понтрягіна (*необхідна умова*)*. Нехай $\bar{x}(t), \bar{u}(t)$ - розв'язок задачі швидкодії для цілком керованої системи (1.2). Тоді існує такий розв'язок $\bar{\psi}(t)$, $t_0 \le t \le t_1$, спряженої системи (2.2), що виконується наступна умова максимуму: для кожного значення $t \in [t_0, t_1]$ функція $H(t, \bar{x}(t), v, \bar{\psi}(t))$ досягає свого максимального значення по змінній $v \in V$ при $v = \bar{u}(t)$, тобто

$$\max_{v \in V} H(t, \bar{x}(t), v, \bar{\psi}(t)) = H(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{\psi}(t)). \quad (2.3)$$

Алгоритм знаходження розв'язку задачі швидкодії для лінійної системи керування.

1. Перевіряють лінійну систему керування на цілком керованість.

2. Записують функцію Гамільтона-Понтрягіна (2.1).

3. Знаходять спряжену систему рівнянь (2.2).

4. Використовуючи умову (2.3), знаходять вираження u через x та ψ.

5. Встановлюють вигляд траєкторій руху лінійної системи керування, тобто знаходять загальний розв'язок зведеної системи рівнянь (1.2), (2.2), враховуючи знайдене вираження u у пункті 4.

6. Для кожної довільної точки x^0 фазового простору $X_1 O X_2$ знаходять траєкторії, по яких лінійна система керування за найкоротший час переміститься із x^0 в початок координат.

7. Для кожної знайденої траєкторії знаходять час переміщення системи із точки x^0 в початок координат – розв'язок задачі швидкодії.

Приклад 1. Рух лінійної системи керування описується системою диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_2, \\ \dot{x}_2 = u. \end{cases} \tag{2.4}$$

На параметр керування накладено умову

$$|u| \le 1.$$

Знайти розв'язок задачі швидкодії .

Розв'язання. 1. Перевіримо лінійну систему керування на цілком керованість.

Оскільки $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, то знаходимо:

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, S_2 = \left(B, AB \right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так як $\det S_2 = -1 \ne 0$, то лінійна система керування (2.4) є цілком керованою.

2. Запишемо функцію Гамільтона-Понтрягіна

$$H\left(t, x_1, x_2, u, \psi_1, \psi_2 \right) = 2\psi_1 x_2 + \psi_2 u.$$

3. Знаходимо спряжену систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = -\dfrac{\partial H}{\partial x_1} = 0, \\ \dot{\psi}_2 = -\dfrac{\partial H}{\partial x_2} = -2\psi_1. \end{cases}$$

4. Знайдемо вираження u через x та ψ.

Згідно принципу максимуму Понтрягіна (2.3) маємо:

$$\max_{|v|\le 1} H\left(t, x_1, x_2, v, \psi_1, \psi_2\right) = \max_{|v|\le 1}\left(2\psi_1 x_2 + \psi_2 v\right) =$$
$$= 2\psi_1 x_2 + \psi_2 sign\psi_2,$$

тобто максимум досягається при $u = sign\psi_2$.

Знайдемо вигляд функції ψ_2, використовуючи спряжену систему рівнянь. Із першого рівняння спряженої системи отримаємо $\psi_1 = c_1$. Тоді з другого рівняння спряженої системи знаходимо $\psi_2 = -2c_1 t + c_2$.

Отже, $u = sign\left(-2c_1 t + c_2\right)$.

Лінійна функція $(-2c_1\,\mathrm{t} + c_2)$ може змінювати знак не більше одного разу. Тому функція H набуває найбільшого значення при $u = +1$ або $u = -1$ і, крім того, при русі системи по оптимальній траєкторії зміна значення параметра керування може відбуватися не більше одного разу.

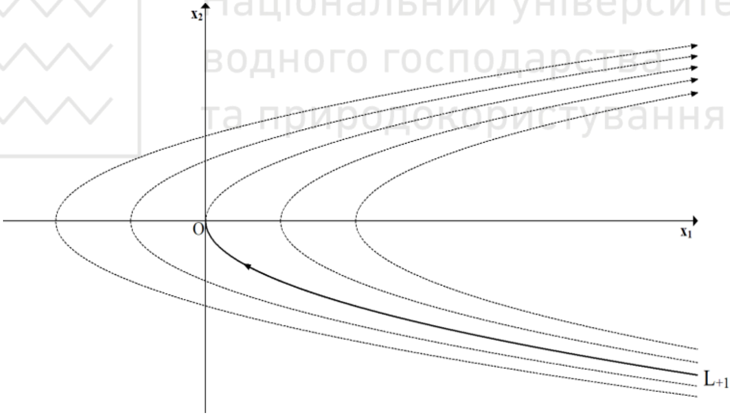
Зауваження. Значення функції $\left(-2c_1 t + c_2\right)$ залежить від значень констант c_1, c_2, а також від початкового t_0 та кінцевого t_1 моментів часу.

5. Встановимо вигляд траєкторій руху лінійної системи керування (2.4).

Нехай $u = +1$. Тоді рух системи описується системою диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_2, \\ \dot{x}_2 = 1, \end{cases} \text{ або } \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 2x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 1. \end{cases}$$

Поділивши перше рівняння системи на друге, отримаємо $dx_1 = 2x_2 dx_2$. Звідси знаходимо $x_1 = 2\int x_2\, dx_2 = x_2^2 + c_3$ - вигляд траєкторій руху системи при значенні параметра керування $u = +1$ (мал. 2.1).



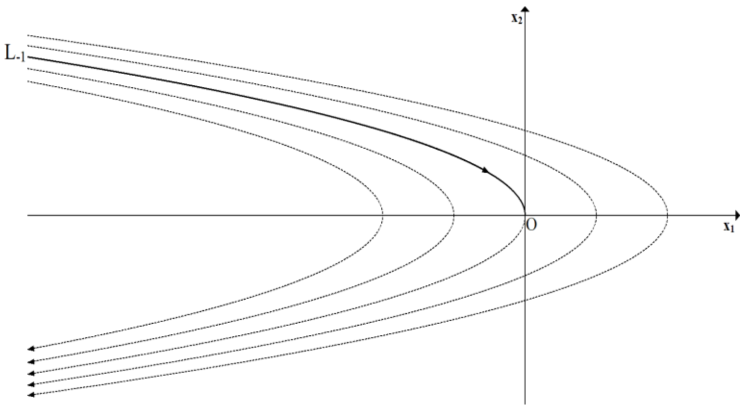
Мал. 2.1. Траєкторії руху системи керування при $u = +1$

Визначимо напрямок руху системи керування по знайдених траєкторіях. Оскільки $\dot{x}_2 = 1$, то з ростом часу координата x_2 збільшується, тобто рух системи по знайдених траєкторіях відбувається вгору (у напрямку зростання x_2). Виходячи з вигляду траєкторії руху системи при керуванні $u=+1$, встановлюємо, що система керування може переміститись в початок координат без зміни значень параметра керування лише тоді, коли вона в початковий момент часу знаходиться на кривій L_{+1} (мал. 2.1).

Нехай $u=-1$. Тоді рух системи описується системою диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_2, \\ \dot{x}_2 = -1, \end{cases} \text{ або } \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 2x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -1. \end{cases}$$

Розділивши перше рівняння системи на друге, знаходимо $x_1 = -2\int x_2\, dx_2 = -x_2^2 + c_4$ - вигляд траєкторій руху системи при значенні параметра керування $u=-1$ (мал. 2.2).

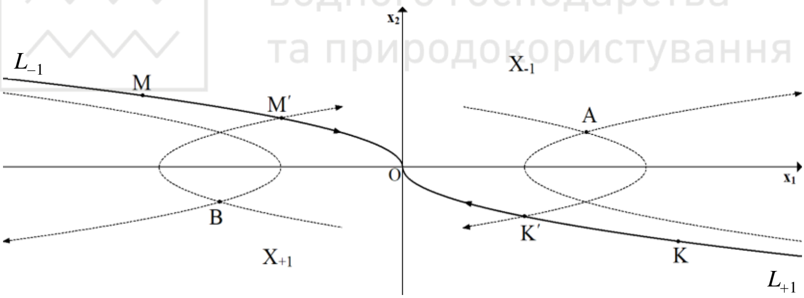


Мал. 2.2. Траєкторії руху системи керування при $u=-1$

Так як $\dot{x}_2 = -1$, то з ростом часу координата x_2 зменшується, тобто рух системи керування по знайдених траєкторіях відбувається вниз (у напрямку спадання x_2). Крім того, система може переміститись в початок координат при значенні параметра керування $u = -1$ лише тоді, коли вона в початковий момент часу знаходиться на кривій L_{-1} (мал. 2.2).

6. Для кожної довільної точки x^0 фазового простору X_1OX_2 знайдемо траєкторії, по яких система керування за найкоротший час переміститься із x^0 в початок координат.

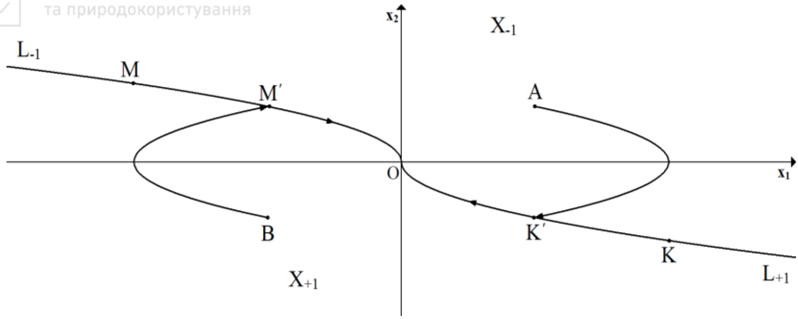
Розіб'ємо фазовий простір X_1OX_2 кривими L_{+1} і L_{-1} на два криволінійні підпростори X_{-1} та X_{+1} (мал. 2.3).



Мал. 2.3. Розбиття фазового простору

Позначимо через $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ - місце знаходження системи в початковий момент часу t_0.

Розглянемо все можливі наступні випадки (мал. 2.4).



Мал. 2.4. Оптимальні траєкторії руху системи керування

1). Нехай $K = x^0 \in L_{+1}$. Тоді оптимальною траєкторією є траєкторія KO, при чому рух по ній здійснюється під дією керування $u = +1$.

2). Нехай $M = x^0 \in L_{-1}$ - оптимальна траєкторія MO, рух по якій здійснюється під дією керування $u = -1$.

3). Нехай $A = x^0 \in X_{-1}$ - оптимальна траєкторія $AK'O$, при чому по траєкторії AK' рух відбувається під дією керування $u = -1$, а по траєкторії $K'O$ - під дією керування $u = +1$.

4). Нехай $B = x^0 \in X_{+1}$ - оптимальна траєкторія $BM'O$: по траєкторії BM' рух відбувається під дією керування $u = +1$, а по траєкторії $M'O$ - під дією керування $u = -1$.

7. Знайдемо час переміщення системи $T = t_1 - t_0$, t_1 - час попадання системи в початок координат, із довільної точки x^0 по знайдених оптимальних траєкторіях – розв’язок задачі швидкодії.

1). Рух системи по кривій L_{+1} описується системою рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_2, \\ \dot{x}_2 = 1. \end{cases}$$

Оскільки $dx_2 = dt$, то інтегруємо в межах від t_0 до t_1. Маємо:

$$\int_{t_0}^{t_1} dx_2 = \int_{t_0}^{t_1} dt,$$

$$x_2(t_1) - x_2(t_0) = t_1 - t_0.$$

Так як $x_2(t_1) = 0,\ x_2(t_0) = x_2^0$, то отримаємо $T = t_1 - t_0 = -x_2^0$.

2). Рух системи по кривій L_{-1} описується системою рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_2, \\ \dot{x}_2 = -1. \end{cases}$$

Інтегруючи друге рівняння в межах від t_0 до t_1, отримаємо:

$$\int_{t_0}^{t_1} dx_2 = -\int_{t_0}^{t_1} dt,\ \ x_2(t_1) - x_2(t_0) = -(t_1 - t_0),$$

$$-x_2^0 = -(t_1 - t_0).$$

Отже, в цьому випадку час переміщення системи керування в початок координат $T = t_1 - t_0 = x_2^0$.

3). Система керування з точки A переходить в початок координат по траєкторії $AK'O$, при чому по траєкторії AK' вона рухається під дією керування $u=-1$, а по траєкторії $K'O$ - під дією керування $u=+1$.

Позначимо через τ - час попадання системи керування в точку K', а її координати через $x_{1\tau}, x_{2\tau}$. Тоді час переміщення системи в початок координат можна записати у вигляді

$$T = (t_1 - \tau) + (\tau - t_0),$$

де $(\tau - t_0)$ - час руху системи з точки A в точку K', $(t_1 - \tau)$ - час руху системи з точки K' в точку O.

Оскільки по траєкторії AK' система рухається під дією керування $u=-1$, то її рух описується системою рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_2, \\ \dot{x}_2 = -1. \end{cases}$$

Інтегруємо друге рівняння в межах від t_0 до τ:

$$\int_{t_0}^{\tau} dx_2 = -\int_{t_0}^{\tau} dt, \; x_{2\tau} - x_2^0 = -(\tau - t_0).$$

Звідки $\tau - t_0 = x_2^0 - x_{2\tau}$.

Час руху системи по траєкторії $K'O$, згідно випадку 1), рівний $-x_{2\tau}$. Отже, загальний час руху по траєкторії $AK'O$ рівний $T = x_2^0 - 2x_{2\tau}$.

Знайдемо координату $x_{2\tau}$ точки K'. Точка K' - це точка перетину траєкторій AK' та $K'O$. Траєкторія AK' належить до траєкторій руху системи під дією керування $u=-1$, які мають вигляд $x_1=-x_2^2+c_4$. Оскільки траєкторія AK' проходить через точку A, то підставивши її координати, знайдемо значення константи c_4:

$$x_1^0=-\left(x_2^0\right)^2+c_4,\; c_4=x_1^0+\left(x_2^0\right)^2.$$

Отже, рівняння траєкторії AK' $x_1=-x_2^2+x_1^0+\left(x_2^0\right)^2$.

Траєкторія $K'O$ належить до сімейства траєкторій $x_1=x_2^2+c_3$ і проходить через початок координат. Тому її рівняння $x_1=x_2^2$.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Із отриманих рівнянь траєкторій руху системи записуємо систему рівнянь для знаходження координати $x_{2\tau}$ точки K':

$$\begin{cases} x_1=-x_2^2+x_1^0+\left(x_2^0\right)^2, \\ x_1=x_2^2. \end{cases}$$

Оскільки точка K' знаходиться нижче осі OX_1 (див. мал. 2.4), то отримаємо

$$x_{2\tau}=-\sqrt{\left(x_1^0+\left(x_2^0\right)^2\right)/2}.$$

Отже, в даному випадку найшвидший час переходу системи керування (2.4) з довільної точки $A \in X_{-1}$ в початок координат

$$T = x_2^0 + 2\sqrt{\left(x_1^0 + \ x_2^0\ {}^2\right)/\,2} = x_2^0 + \sqrt{2\left(x_1^0 + \ x_2^0\ {}^2\right)}.$$

4). Система керування з точки B переходить в початок координат по траєкторії $BM'O$, при чому по траєкторії BM' вона рухається під дією керування $u = +1$, а по траєкторії $M'O$ - під дією керування $u = -1$.

Нехай τ - час попадання системи в точку M', а її координати позначимо через $x_{1\tau}, x_{2\tau}$. Тоді час переміщення системи в початок координат можна записати у вигляді

$$T = \ t_1 - \tau \ + \ \tau - t_0 \ ,$$

де $\tau - t_0$ - час руху системи з точки B в точку M', $t_1 - \tau$ - час руху системи з точки M' в точку O.

По траєкторії BM' система рухається під дією керування $u = +1$, а її рух описується системою рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_2, \\ \dot{x}_2 = +1. \end{cases}$$

Інтегруючи друге рівняння в межах від t_0 до τ, отримаємо:

$$\int_{t_0}^{\tau} dx_2 = \int_{t_0}^{\tau} dt\,,\; x_{2\tau} - x_2^0 = \tau - t_0\,.$$

Так як по траєкторії $M'O$ система рухається під дією керування $u = -1$, то, згідно випадку 2), вона рухається по ній протягом часу $x_{2\tau}$. Отже, загальний час руху системи по траєкторії $BM'O$ рівний $T = 2x_{2\tau} - x_2^0$.

Аналогічно, як і в попередньому випадку, шукаємо координату $x_{2\tau}$ точки M'.

Траєкторія BM' належить до сімейства траєкторій $x_1 = x_2^2 + c_3$. Маємо: $x_1^0 = (x_2^0)^2 + c_3$, $c_3 = x_1^0 - (x_2^0)^2$. Тобто рівняння траєкторії BM' має вигляд $x_1 = x_2^2 + x_1^0 - (x_2^0)^2$.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Оскільки траєкторія $M'O$, яка належить до сімейства траєкторій $x_1 = -x_2^2 + c_4$, проходить через початок координат, то її рівняння $x_1 = -x_2^2$.

Для знаходження координати $x_{2\tau}$ точки M' отримали систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 = x_2^2 + x_1^0 - (x_2^0)^2, \\ x_1 = -x_2^2. \end{cases}$$

Оскільки точка M' розміщена вище осі OX_1 (див. мал. 2.4), то знаходимо

$$x_{2\tau} = \sqrt{\left((x_2^0)^2 - x_1^0\right)/2}\,.$$

Отже, найкоротший час переміщення системи керування (2.4) з довільної точки $B \in X_{+1}$ в початок координат

$$T = 2\sqrt{\left((x_2^0)^2 - x_1^0 \right)/2} - x_2^0 = \sqrt{2\left((x_2^0)^2 - x_1^0 \right)} - x_2^0 .$$

Завдання для самостійної роботи.

Знайти розв’язок задачі швидкодії для лінійної системи керування.

1. $\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_2, \\ \dot{x}_2 = u, \end{cases} \quad -1 \le u \le 2.$

2. $\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_2, \\ \dot{x}_2 = u, \end{cases} \quad -2 \le u \le 2.$

3. $\begin{cases} \dot{x}_1 = 4x_2, \\ \dot{x}_2 = u, \end{cases} \quad -1 \le u \le 2.$

4. $\begin{cases} \dot{x}_1 = u, \\ \dot{x}_2 = 2x_1, \end{cases} \quad -1 \le u \le 2.$

5. $\begin{cases} \dot{x}_1 = u, \\ \dot{x}_2 = 2x_1, \end{cases} \quad -2 \le u \le 2.$

6. $\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_2, \\ \dot{x}_2 = u, \end{cases} \quad -2 \le u \le 1.$

7. $\begin{cases} \dot{x}_1 = u, \\ \dot{x}_2 = 2x_1, \end{cases} \quad -2 \le u \le 1.$

8. $\begin{cases} \dot{x}_1 = 4x_2, \\ \dot{x}_2 = u, \end{cases} \quad -2 \le u \le 1.$

9. $\begin{cases} \dot{x}_1 = 3x_2, \\ \dot{x}_2 = u, \end{cases} \quad -3 \le u \le 1.$

10. $\begin{cases} \dot{x}_1 = 4x_2, \\ \dot{x}_2 = u, \end{cases} \quad -2 \le u \le 2.$

11. $\begin{cases} \dot{x}_1 = 3x_2, \\ \dot{x}_2 = u, \end{cases} \quad -3 \le u \le 3.$

12. $\begin{cases} \dot{x}_1 = 3x_2, \\ \dot{x}_2 = u, \end{cases} \quad -1 \le u \le 1.$

13. $\begin{cases} \dot{x}_1 = u, \\ \dot{x}_2 = 4x_1, \end{cases} \quad -2 \le u \le 1.$

14. $\begin{cases} \dot{x}_1 = 4x_2, \\ \dot{x}_2 = u, \end{cases} \quad -1 \le u \le 1.$

15. $\begin{cases} \dot{x}_1 = 4x_2, \\ \dot{x}_2 = u, \end{cases} \quad -4 \le u \le 1.$

16. $\begin{cases} \dot{x}_1 = u, \\ \dot{x}_2 = 3x_1, \end{cases} \quad -3 \le u \le 1.$

17. $\begin{cases} \dot{x}_1 = u, \\ \dot{x}_2 = 3x_1, \end{cases}$ $-1 \le u \le 3.$

18. $\begin{cases} \dot{x}_1 = 4x_2, \\ \dot{x}_2 = u, \end{cases}$ $-1 \le u \le 4.$

19. $\begin{cases} \dot{x}_1 = 4x_2, \\ \dot{x}_2 = u, \end{cases}$ $-4 \le u \le 2.$

20. $\begin{cases} \dot{x}_1 = u, \\ \dot{x}_2 = 3x_1, \end{cases}$ $-3 \le u \le 3.$

21. $\begin{cases} \dot{x}_1 = u, \\ \dot{x}_2 = 4x_1, \end{cases}$ $-2 \le u \le 4.$

22. $\begin{cases} \dot{x}_1 = u, \\ \dot{x}_2 = 3x_1, \end{cases}$ $-1 \le u \le 1.$

23. $\begin{cases} \dot{x}_1 = 4x_2, \\ \dot{x}_2 = u, \end{cases}$ $-2 \le u \le 2.$

24. $\begin{cases} \dot{x}_1 = u, \\ \dot{x}_2 = 3x_1, \end{cases}$ $-1 \le u \le 2.$

25. $\begin{cases} \dot{x}_1 = 4x_2, \\ \dot{x}_2 = u, \end{cases}$ $-4 \le u \le 4.$

26. $\begin{cases} \dot{x}_1 = u, \\ \dot{x}_2 = 3x_1, \end{cases}$ $-2 \le u \le 1.$

27. $\begin{cases} \dot{x}_1 = 4x_2, \\ \dot{x}_2 = u, \end{cases}$ $-2 \le u \le 4.$

28. $\begin{cases} \dot{x}_1 = u, \\ \dot{x}_2 = 4x_1, \end{cases}$ $-4 \le u \le 2.$

29. $\begin{cases} \dot{x}_1 = u, \\ \dot{x}_2 = 4x_1, \end{cases}$ $-1 \le u \le 2.$

30. $\begin{cases} \dot{x}_1 = 3x_2, \\ \dot{x}_2 = u, \end{cases}$ $-1 \le u \le 3.$

Приклад 2. Нехай рух керованої системи описується системою лінійних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = u. \end{cases} \tag{2.5}$$

У початковий момент часу $t_0 = 0$

$$x_1(0) = 3, \; x_2(0) = 0, \tag{2.6}$$

а в кінцевий момент часу T, $T > 0$,

$$x_1(\mathrm{T}) = -5,\; x_2(\mathrm{T}) = 0. \qquad (2.7)$$

На параметр керування накладено умову

$$-3 \le u \le 1. \qquad (2.8)$$

Знайти розв’язок задачі швидкодії.

Розв’язання. Оскільки $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, то маємо:

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\; S_2 = \left(B, AB \right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так як $\det S_2 = -1 \ne 0$, тому система (2.5) є цілком керованою.

2. Записуємо функцію Гамільтона-Понтрягіна

$$H\left(t, x_1, x_2, u, \psi_1, \psi_2 \right) = \psi_1 x_2 + \psi_2 u.$$

3. Знаходимо вигляд спряженої системи рівнянь:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = -\dfrac{\partial H}{\partial x_1} = 0, \\ \dot{\psi}_2 = -\dfrac{\partial H}{\partial x_2} = -\psi_1. \end{cases}$$

4. Використовуючи принцип максимуму Понтрягіна, знаходимо вираження керування u через x та ψ:

$$\max_{-3\le v\le 1} H\left(t, x_1, x_2, v, \psi_1, \psi_2\right) = \max_{-3\le v\le 1}\left(\psi_1 x_2 + \psi_2 v\right) =$$
$$= \psi_1 x_2 + \psi_2\left(2 sign\psi_2 - 1\right).$$

Звідки дістанемо $u = 2sign\psi_2 - 1$. Розв’язок спряженої системи рівнянь має вигляд:

$$\begin{cases} \psi_1 = c_1, \\ \psi_2 = -c_1 t + c_2 . \end{cases}$$

Отже, отримали вираження параметра керування $u = 2sign(-c_1 t + c_2) - 1$.

Функція $2sign(-c_1 t + c_2) - 1$ змінює знак не більше одного разу. Тому функція H набуває найбільшого значення при $u = -3$ або $u = +1$.

Отже, оптимальне керування $u(t)$, якщо воно існує, набуває значень -3 або +1 і може мати єдину точку перемикання $t = t^*$, при переході через яку $u(t)$ змінює значення.

5. Нехай $u = +1$. Тоді рух керованої системи описується системою диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 , \\ \dot{x}_2 = 1, \end{cases}$$

розв’язок якої $x_1(t) = \dfrac{t^2}{2} + c_3 t + c_4$, $x_2(t) = t + c_3$, де c_3, c_4 - довільні сталі, задає траєкторії руху системи при цьому керуванню. Для знаходження значень сталих c_3 та c_4

використаємо граничні умови (2.6). Маємо : $3=\frac{0^2}{2}+c_3 0+c_4$, $0=0+c_3$ або $c_3=0$, $c_4=3$.

Отже, при значенні параметра керування $u=+1$ рух системи з початкової точки (3,0) відбувається по траєкторії $x_1(t)=\frac{t^2}{2}+3$, $x_2(t)=t$. При зростанні t, $t>0$, система віддаляється від кінцевої точки (-5,0), тобто під дією керування $u=+1$ вона не може потрапити в кінцеву точку (-5,0).

Нехай $u=-3$. Із системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2,\\ \dot{x}_2=-3,\end{cases}$$

знаходимо траєкторії руху керованої системи $x_1(t)=-\frac{3t^2}{2}+c_5 t+c_6$, $x_2(t)=-3t+c_5$, де c_5, c_6 - довільні сталі, що відповідають цьому значенню керування. Врахувавши граничні умови (2.6), знаходимо $c_5=0$, $c_6=3$. Тоді $x_1(t)=-\frac{3t^2}{2}+3$, $x_2(t)=-3t$. Оскільки отримана траєкторія не проходить через кінцеву точку (-5,0), то по ній система також не потрапляє в кінцеву точку.

Розглянемо кусково-стале керування

$$u(t)=\begin{cases}+1,\ 0\le t\le t^*,\\ -3,\ t^*\le t\le T.\end{cases}$$

Цьому керуванню відповідає траєкторія

$$x_1(t) = \begin{cases} \dfrac{t^2}{2} + c_7 t + c_9, & 0 \le t \le t^*, \\ -\dfrac{3t^2}{2} + c_8 t + c_{10}, & t^* \le t \le T; \end{cases}$$

$$x_2(t) = \begin{cases} t + c_7, & 0 \le t \le t^*, \\ -3t + c_8, & t^* \le t \le T, \end{cases}$$

де c_7, c_8, c_9, c_{10} - довільні сталі.

Для знаходження значень сталих c_7, c_9 використаємо граничні умови (2.6): $3 = \dfrac{0^2}{2} + c_7 0 + c_9$, $0 = 0 + c_7$ або $c_7 = 0$, $c_9 = 3$.

Значення сталих c_8, c_{10} знайдемо з умов неперервності функцій $x_1(t)$, $x_2(t)$ у точці $t = t^*$: $\dfrac{t^{*2}}{2} + 3 = -\dfrac{3t^{*2}}{2} + c_8 t^* + c_{10}$, $t^* = -3t^* + c_8$. Отримаємо $c_8 = 4t^*$, $c_{10} = 3 - 2t^{*2}$.

Тоді траєкторія руху системи має вигляд

$$x_1(t) = \begin{cases} \dfrac{t^2}{2} + 3, & 0 \le t \le t^*, \\ -\dfrac{3t^2}{2} + 4t^* t + 3 - 2t^{*2}, & t^* \le t \le T; \end{cases}$$

$$x_2(t)=\begin{cases} t, & 0\le t\le t^*,\\ -3t+4t^*, & t^*\le t\le T.\end{cases}$$

Для знаходження t^* використаємо граничні умови (2.7) :

$$\begin{cases} -\dfrac{3T^2}{2}+4t^*T+3-2t^{*2}=-5,\\ -3T+4t^*=0.\end{cases}$$

Звідки отримаємо $T=\dfrac{4}{3}t^*$, $\dfrac{2}{3}t^{*2}=-8$. Але ця система не має розв’язку для $t^*\ge 0$.

Отже, залишається розглянути керування

$$u(t)=\begin{cases} -3, & 0\le t\le t^*,\\ +1, & t^*\le t\le T.\end{cases}$$

Цьому керуванню відповідає траєкторія

$$x_1(t)=\begin{cases} -\dfrac{3t^2}{2}+c_7t+c_9, & 0\le t\le t^*,\\ \dfrac{t^2}{2}+c_8t+c_{10}, & t^*\le t\le T;\end{cases}$$

$$x_2(t)=\begin{cases} -3t+c_7, & 0\le t\le t^*,\\ t+c_8, & t^*\le t\le T,\end{cases}$$

де c_7, c_8, c_9, c_{10} - довільні сталі.

Значення сталих c_7, c_9 знайдемо з умов (2.6). Отримаємо $3 = -3\frac{0^2}{2} + c_7 0 + c_9$, $0 = -3 \cdot 0 + c_7$. Звідки $c_7 = 0$, $c_9 = 3$. Оскільки функції $x_1(t)$, $x_2(t)$ у точці $t = t^*$ неперервні, то повинні виконуватись рівності : $-\frac{3t^{*2}}{2} + 3 = \frac{t^{*^2}}{2} + c_8 t^* + c_{10}$, $-3t^* = t^* + c_8$. Звідки знаходимо $c_8 = -4t^*$, $c_{10} = 3 + 2t^{*^2}$.

Тоді траєкторія руху системи має вигляд

$$x_1(t) = \begin{cases} -\frac{3t^2}{2} + 3, & 0 \le t \le t^*, \\ \frac{t^2}{2} - 4t^* t + 3 + 2t^{*2}, & t^* \le t \le T; \end{cases}$$

$$x_2(t) = \begin{cases} -3t, & 0 \le t \le t^*, \\ t - 4t^*, & t^* \le t \le T. \end{cases}$$

Використаємо граничні умови (2.7) для знаходження значень t^* та T :

$$\begin{cases} \frac{T^2}{2} - 4t^* T + 3 + 2t^{*2} = -5, \\ T - 4t^* = 0. \end{cases}$$

Звідки отримаємо $T = 4t^*$, $-6t^{*2} = -8$ або, з врахуванням невід'ємності t^*, $t^* = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$, $T = \dfrac{8}{\sqrt{3}}$.

Отже, оптимальне керування і відповідна йому фазова траєкторія руху системи мають вигляд :

$$u(t) = \begin{cases} -3, & 0 \le t \le \dfrac{2}{\sqrt{3}}, \\ 1, & \dfrac{2}{\sqrt{3}} \le t \le \dfrac{8}{\sqrt{3}}; \end{cases}$$

$$x_1(t) = \begin{cases} -\dfrac{3t^2}{2} + 3, & 0 \le t \le \dfrac{2}{\sqrt{3}}, \\ \dfrac{t^2}{2} - \dfrac{8}{\sqrt{3}} t + \dfrac{17}{3}, & \dfrac{2}{\sqrt{3}} \le t \le \dfrac{8}{\sqrt{3}}; \end{cases}$$

$$x_2(t) = \begin{cases} -3t, & 0 \le t \le \dfrac{2}{\sqrt{3}}, \\ t - \dfrac{8}{\sqrt{3}}, & \dfrac{2}{\sqrt{3}} \le t \le \dfrac{8}{\sqrt{3}}, \end{cases}$$

а час руху системи керування (2.5) з початкової точки (3,0) в кінцеву точку (-5,0) по оптимальній траєкторії $T = \dfrac{8}{\sqrt{3}}$.

Завдання для самостійної роботи.

Знайти розв'язок задачі швидкодії для лінійної системи керування.

1. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & x_1(0) = 1,\ x_1(T) = -1, \\ \dot{x}_2 = u, & x_2(0) = 0,\ x_2(T) = 0, \end{cases} \quad -2 \le u \le 1.$

2. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & x_1(0) = 2,\ x_1(T) = -2, \\ \dot{x}_2 = u, & x_2(0) = 0,\ x_2(T) = 0, \end{cases}$ $\quad -1 \le u \le 2.$

3. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & x_1(0) = 3,\ x_1(T) = 1, \\ \dot{x}_2 = u, & x_2(0) = 0,\ x_2(T) = 0, \end{cases}$ $\quad -2 \le u \le 1.$

4. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & x_1(-1) = 1,\ x_1(T) = -1, \\ \dot{x}_2 = u, & x_2(-1) = 0,\ x_2(T) = 0, \end{cases}$ $\quad -3 \le u \le 3.$

5. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & x_1(-2) = -1,\ x_1(T) = 1, \\ \dot{x}_2 = u, & x_2(-2) = 0,\ x_2(T) = 0, \end{cases}$ $\quad -2 \le u \le 2.$

6. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & x_1(0) = 2,\ x_1(T) = -1, \\ \dot{x}_2 = u, & x_2(0) = 0,\ x_2(T) = 0, \end{cases}$ $\quad -3 \le u \le 2.$

7. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & x_1(0) = -1,\ x_1(T) = 2, \\ \dot{x}_2 = u, & x_2(0) = 0,\ x_2(T) = 0, \end{cases}$ $\quad -2 \le u \le 2.$

9. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & x_1(2) = 2,\ x_1(T) = 0, \\ \dot{x}_2 = u, & x_2(2) = 0,\ x_2(T) = 0, \end{cases}$ $\quad -3 \le u \le 3.$

10. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & x_1(0) = 0,\ x_1(T) = 0, \\ \dot{x}_2 = u, & x_2(0) = 2,\ x_2(T) = -1, \end{cases}$ $\quad -3 \le u \le 3.$

11. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & x_1(0) = 3,\ x_1(T) = -5, \\ \dot{x}_2 = u, & x_2(0) = 0,\ x_2(T) = 0, \end{cases}$ $\quad -3 \le u \le 1.$

12. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & x_1(0) = 4,\ x_1(T) = -3, \\ \dot{x}_2 = u, & x_2(0) = 0,\ x_2(T) = 0, \end{cases}$ $\quad -2 \le u \le 2.$

13. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & x_1(0) = 1,\ x_1(T) = 0, \\ \dot{x}_2 = 3u, & x_2(0) = 3,\ x_2(T) = 0, \end{cases}$ $\quad -3 \le u \le 3.$

14. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & x_1(0) = 1,\ x_1(T) = 0, \\ \dot{x}_2 = 4u, & x_2(0) = 2,\ x_2(T) = 0, \end{cases}$ $\quad -2 \le u \le 2.$

15. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & x_1(0) = 1,\ x_1(T) = 0, \\ \dot{x}_2 = 2u, & x_2(0) = 2,\ x_2(T) = 0, \end{cases}$ $\quad -1 \le u \le 1.$

16. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & x_1(-1) = 1,\ x_1(T) = -1, \\ \dot{x}_2 = u, & x_2(-1) = 0,\ x_2(T) = 0, \end{cases}$ $\quad -3 \le u \le 2.$

17. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & x_1(-1) = -1,\ x_1(T) = 2, \\ \dot{x}_2 = u, & x_2(-1) = 0,\ x_2(T) = 0, \end{cases}$ $\quad -2 \le u \le 2.$

18. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & x_1(1) = 2,\ x_1(T) = -1, \\ \dot{x}_2 = u, & x_2(1) = 0,\ x_2(T) = 0, \end{cases}$ $\quad -2 \le u \le 2.$

19. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & x_1(0) = 0,\ x_1(T) = 0, \\ \dot{x}_2 = u, & x_2(0) = 2,\ x_2(T) = -3, \end{cases}$ $\quad -2 \le u \le 1.$

20. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & x_1(0) = 0,\ x_1(T) = 0, \\ \dot{x}_2 = u, & x_2(0) = -2,\ x_2(T) = 0, \end{cases}$ $\quad -2 \le u \le 1.$

21. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & x_1(0) = 1,\ x_1(T) = 0, \\ \dot{x}_2 = 4u, & x_2(0) = 2,\ x_2(T) = 0, \end{cases}$ $\quad -1 \le u \le 1.$

22. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & x_1(0) = 2,\ x_1(T) = 0, \\ \dot{x}_2 = 2u, & x_2(0) = 1,\ x_2(T) = 0, \end{cases}$ $\quad -1 \le u \le 2.$

23. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & x_1(0) = -1,\ x_1(T) = 1, \\ \dot{x}_2 = 3u, & x_2(0) = 0,\ x_2(T) = 0, \end{cases}$ $\quad -2 \le u \le 4.$

24. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & x_1(0) = -2,\ x_1(T) = 1, \\ \dot{x}_2 = 0.5u, & x_2(0) = 0,\ x_2(T) = 0, \end{cases}$ $\quad -3 \le u \le 1.$

25. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & x_1(0) = 0, \quad x_1(T) = 0, \\ \dot{x}_2 = 0.5u, & x_2(0) = -2,\ x_2(T) = 1, \end{cases}$ $\quad -2 \le u \le 1.$

26. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & x_1(0) = 4,\ x_1(T) = -3, \\ \dot{x}_2 = u, & x_2(0) = 1,\ x_2(T) = 2, \end{cases}$ $\quad -2 \le u \le 2.$

27. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & x_1(0) = -1,\ x_1(T) = -3, \\ \dot{x}_2 = u, & x_2(0) = 1, \quad x_2(T) = 0, \end{cases}$ $\quad -2 \le u \le 1.$

28. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & x_1(0) = 1,\ x_1(T) = -3, \\ \dot{x}_2 = u, & x_2(0) = -2,\ x_2(T) = 1, \end{cases}$ $\quad -2 \le u \le 1.$

29. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & x_1(0) = -2,\ x_1(T) = 3, \\ \dot{x}_2 = u, & x_2(0) = -2,\ x_2(T) = 3, \end{cases}$ $\quad -1 \le u \le 1.$

30. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & x_1(0) = 2,\ x_1(T) = -2, \\ \dot{x}_2 = u, & x_2(0) = -2,\ x_2(T) = 2, \end{cases}$ $\quad -2 \le u \le 2.$

3. Задача швидкодії з двома параметрами керування для лінійної системи керування

Нехай рух керованої системи описується лінійною системою диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u_1, \\ \dot{x}_2 = 2x_1 + u_2. \end{cases} \qquad (3.1)$$

На параметри керування накладено умови

$$|u_1| \le 1, |u_2| \le 1.$$

Знайти розв'язок задачі швидкодії.

Розв'язання. 1. Перевіримо систему на цілком керованість. Оскільки $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, то маємо:

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \ S_2 = (B, AB) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так як $rang S_2 = 2$, тому лінійна система керування (3.1) є цілком керованою.

2. Записуємо функцію Гамільтона-Понтрягіна

$$H(t, x_1, x_2, u_1, u_2, \psi_1, \psi_2) = \psi_1 u_1 + \psi_2 (2x_1 + u_2).$$

3. Знаходимо вигляд спряженої системи рівнянь:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = -\dfrac{\partial H}{\partial x_1} = -2\psi_2, \\ \dot{\psi}_2 = -\dfrac{\partial H}{\partial x_2} = 0. \end{cases}$$

4. Використовуючи принцип максимуму Понтрягіна, знаходимо вираження керування u через x та ψ:

$$\max_{|v_1|\le 1, |v_2|\le 1} \psi_1 v_1 + \psi_2 \;\; 2x_1 + v_2 \quad = 2\psi_2 x_1 + \psi_1 sign\psi_1 + \psi_2 sign\psi_2 .$$

Звідки дістанемо $u_1 = sign\psi_1, u_2 = sign\psi_2$. Розв'язок спряженої системи рівнянь має вигляд:

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$\begin{cases} \psi_1 = -2c_1 t + c_2, \\ \psi_2 = c_1. \end{cases}$$

Отже, отримали вираження параметрів керування $u_1 = sign(-2c_1 t + c_2),\ u_2 = sign c_1$.

Функції $sign(-2c_1 t + c_2)$ та $sign c_2$ змінюють знак не більше одного разу. Тому функція H набуває найбільшого значення при $u_1 = \pm 1$ і $u_2 = \pm 1$.

5. Встановимо вигляд траєкторій руху лінійної системи керування (3.1).

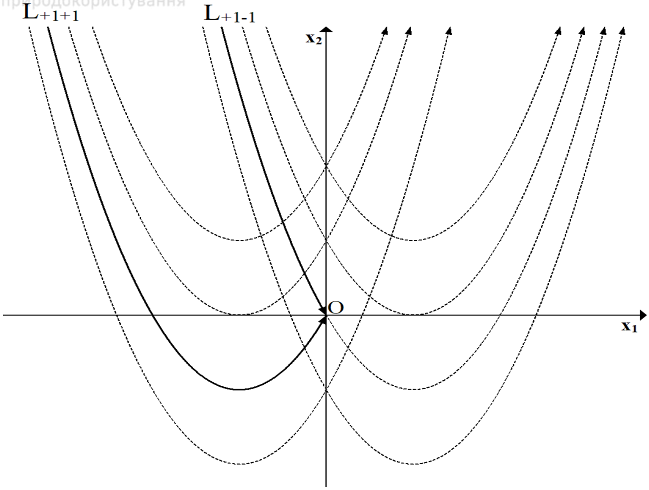
Нехай $u_1 = +1,\ u_2 = +1.$ Тоді рух системи описується системою диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = +1, \\ \dot{x}_2 = 2x_1 + 1, \end{cases} \text{ або } \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 1, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 2x_1 + 1. \end{cases}$$

Поділивши друге рівняння системи на перше, отримаємо $dx_2 = (2x_1 + 1)dx_1$. Звідси знаходимо $x_2 = \int 2x_1 + 1 \; dx_1 = \left(x_1 + \dfrac{1}{2}\right)^2 + c_3$ - вигляд траєкторій руху системи при значеннях параметрів керування $u_1 = +1,\ u_2 = +1$ (мал. 3.1).

Визначимо напрямок руху керованої системи по знайдених траєкторіях. Оскільки $\dot{x}_1 = 1$, то з ростом часу координата x_1 збільшується. Тому рух системи по знайдених траєкторіях відбувається вправо (у напрямку зростання x_1).

Виходячи з вигляду траєкторії руху системи при $u_1 = +1,\ u_2 = +1$, встановлюємо, що система керування може переміститись в початок координат без зміни значень параметрів керування лише тоді, коли вона в початковий момент часу знаходиться на кривій L_{+1+1} (мал. 3.1).



Мал. 3.1. Траєкторії руху системи при $u_1 = +1,\ u_2 = \pm 1$

При значеннях параметрів керування $u_1 = +1,\ u_2 = -1$ рух системи описується системою диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 1, \\ \dot{x}_2 = 2x_1 - 1, \end{cases} \text{ або } \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 1, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 2x_1 - 1. \end{cases}$$

Після ділення другого рівняння системи на перше дістанемо $dx_2 = (2x_1 - 1)dx_1$. Тоді $x_2 = \left(x_1 - \dfrac{1}{2}\right)^2 + c_4$ - вигляд траєкторій руху системи при значеннях параметрів керування $u_1 = +1,\ u_2 = -1$ (мал. 3.1).

Перше рівняння системи $\dot{x}_1 = 1$ вказує на те, що протягом руху системи перша фазова координата x_1

зростає. А це означає, що рух по знайдених траєкторіях відбувається вправо (у напрямку зростання x_1). Крім того, система може переміститись в початок координат при $u_1 = +1,\ u_2 = -1$ лише тоді, коли вона в початковий момент часу знаходиться на кривій L_{+1-1} (мал. 3.1).

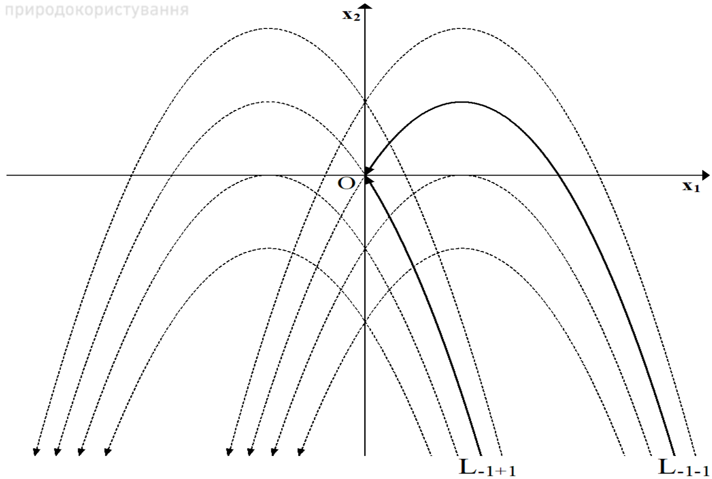
Нехай $u_1 = -1,\ u_2 = +1.$ Тоді рух системи описується системою диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -1, \\ \dot{x}_2 = 2x_1 + 1, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -1, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 2x_1 + 1. \end{cases}$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Поділивши друге рівняння системи на перше, отримаємо $dx_2 = -(2x_1 + 1)dx_1$. Звідси знаходимо $x_2 = -\int 2x_1 + 1\ dx_1 = -\left(x_1 + \dfrac{1}{2}\right)^2 + c_5$ - вигляд траєкторій руху системи при значеннях параметрів керування $u_1 = -1,\ u_2 = +1$ (мал. 3.2).

Визначимо напрямок руху системи по знайдених траєкторіях. Оскільки $\dot{x}_1 = -1$, то під час руху системи фазова координата x_1 зменшується. Тому рух системи по знайдених траєкторіях відбувається вліво (у напрямку спадання x_1). Траєкторію, по якій система при значеннях параметрів керування $u_1 = -1,\ u_2 = +1$ попадає в початок координат без зміни значень параметрів керування, позначимо L_{-1+1}.



Мал. 3.2. Траєкторії руху системи при $u_1 = -1,\ u_2 = \pm 1$

При значеннях параметрів керування $u_1 = -1,\ u_2 = -1$ рух системи описується системою диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -1, \\ \dot{x}_2 = 2x_1 - 1. \end{cases} \text{ або } \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -1, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 2x_1 - 1. \end{cases}$$

Після ділення другого рівняння системи на перше дістанемо $dx_2 = -(2x_1 - 1)dx_1$. Тоді $x_2 = -\left(x_1 - \dfrac{1}{2}\right)^2 + c_6$ - вигляд траєкторій руху системи при значеннях параметрів керування $u_1 = -1,\ u_2 = -1$ (мал. 3.2).

Перше рівняння системи $\dot{x}_1 = -1$ вказує на те, що під час руху системи перша фазова координата x_1

зменшується. А це означає, що рух по знайдених траєкторіях відбувається вліво (у напрямку спадання x_1). Через L_{-1-1} позначимо ту траєкторію, по якій система керування при $u_1 = -1,\ u_2 = -1$ попадає в початок координат без зміни значень параметрів керування.

Отже, якщо в деякий момент руху система знаходиться на одній з кривих $L_{+1+1}, L_{+1-1}, L_{-1+1}, L_{-1-1}$, то без зміни значень відповідних параметрів керування система переміститься в початок координат.

6. Для кожної довільної точки x^0 фазового простору X_1OX_2 знайдемо траєкторії, по яких керована система за найкоротший час переміститься із x^0 в початок координат.

Для цього розіб'ємо фазовий простір X_1OX_2 кривими $L_{+1+1}, L_{+1-1}, L_{-1+1}, L_{-1-1}$ на чотири криволінійні області (1)-(4) (мал. 3.3).

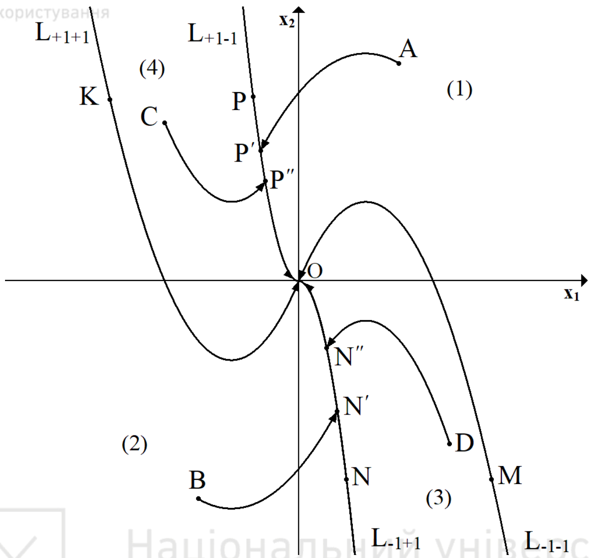
Позначимо через $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ - місце знаходження системи в початковий момент часу t_0.

Розглянемо все можливі наступні випадки (мал. 3.3).

1). Нехай $K = x^0 \in L_{+1+1}$. Тоді оптимальною траєкторією є траєкторія KO, при чому рух по ній здійснюється під дією керувань $u_1 = +1,\ u_2 = +1$.

2). Нехай $P = x^0 \in L_{+1-1}$ - оптимальна траєкторія PO, рух по якій здійснюється під дією керувань $u_1 = +1,\ u_2 = -1$.

3). Нехай $N = x^0 \in L_{-1+1}$ - оптимальна траєкторія NO, при чому рух здійснюється під дією керувань $u_1 = -1,\ u_2 = +1$.



Мал. 3.3 Оптимальні траєкторії руху системи

4). Нехай $M = x^0 \in L_{-1-1}$ - оптимальна траєкторія MO, рух по якій здійснюється під дією керувань $u_1 = -1, u_2 = -1$.

5). Нехай $A = x^0 \in 1$ - оптимальна траєкторія руху $AP'O$: по траєкторії AP' рух відбувається під дією керувань $u_1 = -1, u_2 = -1$, а по траєкторії $P'O$ - під дією керувань $u_1 = +1, u_2 = -1$.

6). Нехай $B = x^0 \in 2$ - оптимальна траєкторія руху $BN'O$, при чому по траєкторії BN' рух відбувається під дією керувань $u_1 = +1, u_2 = +1$, а по траєкторії $N'O$ - під дією керувань $u_1 = -1, u_2 = +1$.

7.) Нехай $D = x^0 \in 3$ - оптимальна траєкторія руху $DN''O$: по траєкторії DN'' рух відбувається під дією керувань $u_1=-1,\, u_2=-1$, а по траєкторії $N''O$ - під дією керувань $u_1=-1,\, u_2=+1$.

8). Нехай $C=x^0\in 4$ - оптимальна траєкторія руху $CP''O$, при чому по траєкторії CP'' рух відбувається під дією керувань $u_1=+1,\, u_2=+1$, а по траєкторії $P''O$ - під дією керувань $u_1=+1,\, u_2=-1$.

7. Знайдемо час переміщення системи $T=t_1-t_0$ із довільного початкового стану x^0 в початок координат по знайдених оптимальних траєкторіях.

1). Система по траєкторії KO рухається при значеннях параметрів керування $u_1=+1,\, u_2=+1$. Тоді рух системи описується системою диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x}_1=+1, \\ \dot{x}_2=2x_1+1. \end{cases}$$

Перше рівняння системи $\dfrac{dx_1}{dt}=1$ інтегруємо в межах від t_0 до t_1:

$$\int_{t_0}^{t_1} dx_1=\int_{t_0}^{t_1} dt,\quad x_1(t_1)-x_1(t_0)=t_1-t_0.$$

Оскільки $x_1(t_1)=0$, то отримаємо час руху системи (3.1) по траєкторії KO: $T=t_1-t_0=-x_1^0$.

2). Система рухається по траєкторії PO під дією параметрів керування $u_1=+1,\, u_2=-1$, а її рух описується системою диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = +1, \\ \dot{x}_2 = 2x_1 - 1. \end{cases}$$

Інтегруючи перше рівняння в межах від t_0 до t_1, отримаємо:

$$\int_{t_0}^{t_1} dx_1 = \int_{t_0}^{t_1} dt, \; x_1(t_1) - x_1(t_0) = t_1 - t_0 .$$

Так як $x_1(t_1) = 0$, то час руху системи (3.1) по траєкторії PO $T = t_1 - t_0 = -x_1^0$.

3). Система по траєкторії NO рухається при значеннях параметрів керування $u_1 = -1, u_2 = +1$, а її рух описується системою диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -1, \\ \dot{x}_2 = 2x_1 + 1. \end{cases}$$

Перше рівняння системи $\frac{dx_1}{dt} = -1$ інтегруємо в межах від t_0 до t_1:

$$\int_{t_0}^{t_1} dx_1 = -\int_{t_0}^{t_1} dt, \; x_1(t_1) - x_1(t_0) = -(t_1 - t_0) .$$

Звідки знаходимо $T = t_1 - t_0 = x_1^0$ - час руху системи (3.1) по траєкторії NO.

4). Система рухається по траєкторії MO. Рух системи описується системою диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -1, \\ \dot{x}_2 = 2x_1 - 1. \end{cases}$$

Інтегруючи перше рівняння в межах від t_0 до t_1, маємо:

$$\int_{t_0}^{t_1} dx_1 = -\int_{t_0}^{t_1} dt, \;\; x_1(t_1) - x_1(t_0) = -(t_1 - t_0).$$

Так як $x_1(t_1) = 0$, то час руху системи (3.1) по траєкторії MO $T = t_1 - t_0 = x_1^0$.

5). Система рухається по траєкторії $AP'O$. Нехай τ - це час попадання системи в точку P'. По траєкторії $P'O$ система рухається протягом часу $t_1 - \tau$, а по траєкторії AP' час руху складає $\tau - t_0$. Тоді час руху по траєкторії $AP'O$ рівний $T = (t_1 - \tau) + (\tau - t_0)$. Позначимо координати точки P' через $(x_{1\tau}, x_{2\tau})$.

Знаходимо часи руху системи по траєкторіях $P'O$ і AP'.

Рух системи по траєкторії $P'O$ відбувається під дією керувань $u_1 = +1, u_2 = -1$. Тому час руху по ній, згідно пункту 2), $t_1 - \tau = -x_{1\tau}$.

Рух по траєкторії AP' відбувається під дією керувань $u_1 = -1, u_2 = -1$ і описується системою рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -1, \\ \dot{x}_2 = 2x_1 - 1. \end{cases}$$

Інтегруючи перше рівняння в межах від t_0 до τ, отримаємо:

$$\int_{t_0}^{\tau} dx_1 = -\int_{t_0}^{\tau} dt; \; x_1(\tau) - x_1(0) = -(\tau - \mathrm{t}_0)\,.$$

Звідки знаходимо $\tau - t_0 = x_1^0 - x_{1\tau}$ - час руху системи по траєкторії AP'.

Отже, час руху системи по траєкторії $AP'O$ рівний

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$T = x_1^0 - 2x_{1\tau}\,.$$

Знайдемо координату $x_{1\tau}$ точки P' - точки перетину траєкторій $P'O$ і AP'.

Для цього спочатку знайдемо рівняння траєкторій $P'O$ і AP'.

Траєкторія $P'O$ належить до сімейства траєкторій $x_2 = \left(x_1 - \frac{1}{2}\right)^2 + c_4$. Оскільки точка $O(0{,}0)$ належить цій траєкторії, то її координати задовольняють її рівняння: $0 = \left(0 - \frac{1}{2}\right)^2 + c_4$. Звідки $c_4 = -\frac{1}{4}$ і рівняння траєкторії $P'O$ має вигляд $x_2 = \left(x_1 - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$.

Траєкторія AP' належить до сімейства траєкторій $x_2 = -\left(x_1 - \frac{1}{2}\right)^2 + c_6$ і їй належить точка $A = x_1^0, x_2^0$. Тому $x_2^0 = -\left(x_1^0 - \frac{1}{2}\right)^2 + c_6$, тобто $c_6 = x_2^0 + \left(x_1^0 - \frac{1}{2}\right)^2$.Отже, $x_2 = -\left(x_1 - \frac{1}{2}\right)^2 + x_2^0 + \left(x_1^0 - \frac{1}{2}\right)^2$ - рівняння траєкторії AP'.

Для знаходження коордирати $x_{1\tau}$ точки P' отримали систему рівнянь

$$\begin{cases} x_2 = -\left(x_1 - \frac{1}{2}\right)^2 + x_2^0 + \left(x_1^0 - \frac{1}{2}\right), \\ x_2 = \left(x_1 - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Прирівнявши праві частини рівнянь системи, дістанемо:

$$-\left(x_1 - \frac{1}{2}\right)^2 + x_2^0 + \left(x_1^0 - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(x_1 - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4},$$

$$2\left(x_1 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + x_2^0 + \left(x_1^0 - \frac{1}{2}\right)^2.$$

Звідки знаходимо

$$x_1 = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{8} + \frac{x_2^0}{2} + \frac{\left(x_1^0 - \frac{1}{2}\right)^2}{2}}.$$

Оскільки перша координата точки P' від'ємна, то для значення $x_{1\tau}$ вибираємо

$$x_{1\tau} = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{8} + \frac{x_2^0}{2} + \frac{\left(x_1^0 - \frac{1}{2}\right)^2}{2}}\,.$$

Отже, по траєкторії $AP'O$ система керування (3.1) рухається протягом часу

$$T = x_1^0 - 2x_{1\tau} = x_1^0 + \sqrt{\frac{1}{2} + 2x_2^0 + 2\left(x_1^0 - \frac{1}{2}\right)^2} - 1\,.$$

6). Рух системи відбувається по траєкторії $BN'O$. Час руху по траєкторії $BN'O$ складається з часів руху по траєкторіях $N'O$ і BN': $T = \; t_1 - \tau \; + \; \tau - t_0 \;$, де τ - це час попадання системи в точку N'. Позначимо координати точки N' через $\; x_{1\tau}, x_{2\tau} \;$.

Знаходимо часи руху системи по траєкторіях $N'O$ і BN'.

Оскільки по траєкторії $N'O$ система рухається під дією керувань $u_1 = -1,\ u_2 = +1$, тому час руху по ній, згідно пункту 3), $t_1 - \tau = x_{1\tau}$.

Рух по траєкторії BN' відбувається під дією керувань $u_1 = +1,\ u_2 = +1$ і описується системою рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 1, \\ \dot{x}_2 = 2x_1 + 1. \end{cases}$$

Інтегруємо перше рівняння в межах від t_0 до τ. Отримаємо:

$$\int_{t_0}^{\tau} dx_1 = \int_{t_0}^{\tau} dt, \; x_1(\tau) - x_1(0) = \tau - t_0 .$$

Звідки знаходимо $\tau - t_0 = x_{1\tau} - x_1^0$ - час руху системи по траєкторії BN'.

Таким чином, час руху системи по траєкторії $BN'O$ рівний

$$T = 2x_{1\tau} - x_1^0 .$$

Знайдемо координату $x_{1\tau}$ точки N', як точки перетину траєкторій $N'O$ і BN'.

Для цього спочатку знайдемо рівняння траєкторій $N'O$ і BN'.

Траєкторії $N'O$ відповідає траєкторія сімейства $x_2 = -\left(x_1 + \frac{1}{2}\right)^2 + c_5$, яка проходить через точку $O(0,0)$, координати якої задовольняють її рівняння. Маємо $0 = -\left(0 + \frac{1}{2}\right)^2 + c_5$. Звідки знаходимо $c_5 = \frac{1}{4}$. Отже, рівняння траєкторії $N'O$ має вигляд $x_2 = -\left(x_1 + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$.

Траєкторія BN' належить до сімейства траєкторій $x_2 = \left(x_1 + \frac{1}{2}\right)^2 + c_3$ і проходить через точку $B = \ x_1^0, x_2^0 \ $.

Тому $x_2^0 = \left(x_1^0 + \frac{1}{2}\right)^2 + c_3$, тобто $c_3 = x_2^0 - \left(x_1^0 + \frac{1}{2}\right)^2$. Отже, рівняння траєкторії BN' має вигляд $x_2 = \left(x_1 + \frac{1}{2}\right)^2 + x_2^0 - \left(x_1^0 + \frac{1}{2}\right)^2$.

Для знаходження $x_{1\tau}$ розглянемо систему рівнянь, утворену з рівнянь траєкторій BN' і $N'O$:

$$\begin{cases} x_2 = \left(x_1 + \frac{1}{2}\right)^2 + x_2^0 - \left(x_1^0 + \frac{1}{2}\right)^2, \\ x_2 = -\left(x_1 + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Оскільки ліві частини рівнянь однакові, то маємо:

$$\left(x_1 + \frac{1}{2}\right)^2 + x_2^0 - \left(x_1^0 + \frac{1}{2}\right)^2 = -\left(x_1 + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4},$$

$$2\left(x_1 + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} - x_2^0 + \left(x_1^0 + \frac{1}{2}\right)^2.$$

Звідки знаходимо

$$x_1 = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{8} - \frac{x_2^0}{2} + \frac{\left(x_1^0 + \frac{1}{2}\right)^2}{2}}\ .$$

Оскільки перша координата точки N' додатна, то для значення $x_{1\tau}$ вибираємо

$$x_{1\tau} = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{8} - \frac{x_2^0}{2} + \frac{\left(x_1^0 + \frac{1}{2}\right)^2}{2}}\ .$$

Отже, система (3.1) по траєкторії $BN'O$ рухається протягом часу

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$T = 2x_{1\tau} - x_1^0 = \sqrt{\frac{1}{2} - 2x_2^0 + 2\left(x_1^0 + \frac{1}{2}\right)^2} - 1 - x_1^0 .$$

7). Система рухається по траєкторії $DN''O$. Тоді час руху по траєкторії $DN''O$ є загальним часом руху по траєкторіях $N''O$ і DN'': $T = \ t_1 - \tau \ + \ \tau - t_0 \ $, де τ - це час попадання системи в точку N''. Координати точки N'' позначимо через $\ x_{1\tau}, x_{2\tau}\ $.

Знаходимо часи руху системи по траєкторіях $N''O$ і DN''.

Так як по траєкторії $N''O$ система рухається під дією керувань $u_1 = -1,\ u_2 = +1$, то час руху по ній, згідно пункту 3), $t_1 - \tau = x_{1\tau}$.

Система по траєкторії DN'' рухається під дією керувань $u_1 = -1,\ u_2 = -1$, а рух описується системою диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -1, \\ \dot{x}_2 = 2x_1 - 1. \end{cases}$$

Інтегруючи в межах від t_0 до τ перше рівняння, дістанемо:

$$\int_{t_0}^{\tau} dx_1 = -\int_{t_0}^{\tau} dt,\ \ x_1(\tau) - x_1(0) = -(\tau - t_0).$$

Звідки знаходимо $\tau - t_0 = x_1^0 - x_{1\tau}$ - час руху системи по траєкторії DN''.

Отже, $T = x_1^0$ - загальний час руху системи керування (3.1) по траєкторії $DN''O$.

8). Система рухається по траєкторії $CP''O$. Нехай τ - це час попадання системи в точку P''. Тоді протягом часу $t_1 - \tau$ система рухається по траєкторії $P''O$, а по траєкторії CP'' час руху складає $\tau - t_0$. Тоді загальний час руху по траєкторії $CP''O$ рівний $T = (t_1 - \tau) + (\tau - t_0)$. Позначимо координати точки P'' через $(x_{1\tau}, x_{2\tau})$.

Знаходимо часи руху системи по траєкторіях $P''O$ і CP''.

Так як по траєкторії $P''O$ система рухається при значеннях керувань $u_1 = +1,\ u_2 = -1$, тому час руху по ній, згівно випадку 2), $t_1 - \tau = -x_{1\tau}$.

По траєкторії CP'' система рухається під дією керувань $u_1 = +1,\ u_2 = +1$, а її рух описується системою диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 1, \\ \dot{x}_2 = 2x_1 + 1. \end{cases}$$

Інтегруючи в межах від t_0 до τ перше рівняння, дістанемо:

$$\int_{t_0}^{\tau} dx_1 = \int_{t_0}^{\tau} dt;\ x_1(\tau) - x_1(0) = \tau - \mathrm{t}_0 .$$

Звідки знаходимо час руху системи по траєкторії CP'': $\tau - t_0 = x_{1\tau} - x_1^0$.

Отже, система керування (3.1) по траєкторії $CP''O$ рухається протягом часу $T = -x_1^0$.

Завдання для самостійної роботи

Знайти розв’язок задачі швидкодії для лінійної системи керування.

1. $\begin{cases} \dot{x}_1 = u_1, \\ \dot{x}_2 = 2x_1 + u_2. \end{cases}$ $|u_1| \le 1,\ |u_2| \le 2$.

2. $\begin{cases} \dot{x}_1 = 4x_2 + u_1, \\ \dot{x}_2 = u_2. \end{cases}$ $|u_1| \le 2,\ |u_2| \le 1$.

3. $\begin{cases} \dot{x}_1 = u_1, \\ \dot{x}_2 = 4x_1 + u_2. \end{cases}$ $|u_1| \le 1,\ |u_2| \le 1$.

4. $\begin{cases} \dot{x}_1 = u_1, \\ \dot{x}_2 = x_1 + u_2. \end{cases}$ $|u_1| \le 1,\ |u_2| \le 2$.

5. $\begin{cases} \dot{x}_1 = 4x_2 + u_1, \\ \dot{x}_2 = u_2. \end{cases}$ $|u_1| \le 1,\ |u_2| \le 1$.

6. $\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_2 + u_1, \\ \dot{x}_2 = u_2. \end{cases}$ $|u_1| \le 1,\ |u_2| \le 1$.

7. $\begin{cases} \dot{x}_1 = u_1, \\ \dot{x}_2 = 4x_1 + u_2. \end{cases}$ $|u_1| \le 2,\ |u_2| \le 1.$

8. $\begin{cases} \dot{x}_1 = u_1, \\ \dot{x}_2 = 2x_1 + u_2. \end{cases}$ $|u_1| \le 2,\ |u_2| \le 1.$

9. $\begin{cases} \dot{x}_1 = u_1, \\ \dot{x}_2 = x_1 + u_2. \end{cases}$ $|u_1| \le 1,\ |u_2| \le 1.$

10. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + u_1, \\ \dot{x}_2 = u_2. \end{cases}$ $|u_1| \le 1,\ |u_2| \le 1.$

11. $\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_2 + u_1, \\ \dot{x}_2 = u_2. \end{cases}$ $|u_1| \le 1,\ |u_2| \le 2.$

12. $\begin{cases} \dot{x}_1 = 4x_2 + u_1, \\ \dot{x}_2 = u_2. \end{cases}$ $|u_1| \le 1,\ |u_2| \le 2.$

13. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + u_1, \\ \dot{x}_2 = u_2. \end{cases}$ $|u_1| \le 2,\ |u_2| \le 2.$

14. $\begin{cases} \dot{x}_1 = u_1, \\ \dot{x}_2 = 4x_1 + u_2. \end{cases}$ $|u_1| \le 2,\ |u_2| \le 2.$

15. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + u_1, \\ \dot{x}_2 = u_2. \end{cases}$ $|u_1| \le 2,\ |u_2| \le 1.$

16. $\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_2 + u_1, \\ \dot{x}_2 = u_2. \end{cases}$ $|u_1| \le 2,\ |u_2| \le 2.$

17. $\begin{cases} \dot{x}_1 = u_1, \\ \dot{x}_2 = x_1 + u_2. \end{cases}$ $|u_1| \le 2,\ |u_2| \le 2.$

18. $\begin{cases} \dot{x}_1 = u_1, \\ \dot{x}_2 = 4x_1 + u_2. \end{cases}$ $|u_1| \le 1,\ |u_2| \le 2.$

19. $\begin{cases} \dot{x}_1 = u_1, \\ \dot{x}_2 = 2x_1 + u_2. \end{cases}$ $|u_1| \le 2,\ |u_2| \le 2.$

20. $\begin{cases} \dot{x}_1 = 4x_2 + u_1, \\ \dot{x}_2 = u_2. \end{cases}$ $|u_1| \le 2,\ |u_2| \le 2.$

21. $\begin{cases} \dot{x}_1 = u_1, \\ \dot{x}_2 = x_1 + u_2. \end{cases}$ $|u_1| \le 2,\ |u_2| \le 1.$

22. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + u_1, \\ \dot{x}_2 = u_2. \end{cases}$ $|u_1| \le 1,\ |u_2| \le 2.$

23. $\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_2 + u_1, \\ \dot{x}_2 = u_2. \end{cases}$ $|u_1| \le 2,\ |u_2| \le 1.$

24. $\begin{cases} \dot{x}_1 = 6x_2 + u_1, \\ \dot{x}_2 = u_2. \end{cases}$ $|u_1| \le 1,\ |u_2| \le 1.$

25. $\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_2 + u_1, \\ \dot{x}_2 = u_2. \end{cases}$ $-1 \le u_1 \le 2,\ |u_2| \le 1.$

26. $\begin{cases} \dot{x}_1 = 4x_2 + u_1, \\ \dot{x}_2 = u_2. \end{cases}$ $|u_1| \le 1,\ \ -2 \le u_2 \le 1.$

27. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + u_1, \\ \dot{x}_2 = u_2. \end{cases}$ $-1 \le u_1 \le 2,\ -2 \le u_2 \le 1.$

28. $\begin{cases} \dot{x}_1 = 4x_2 + u_1, \\ \dot{x}_2 = u_2. \end{cases}$ $-2 \le u_1 \le 1,\ \ -2 \le u_2 \le 1.$

29. $$\begin{cases} \dot{x}_1 = u_1, \\ \dot{x}_2 = 4x_1 + u_2. \end{cases}$$

$$-2 \le u_1 \le 1, \quad -1 \le u_2 \le 2.$$

30. $$\begin{cases} \dot{x}_1 = 4x_2 + u_1, \\ \dot{x}_2 = u_2. \end{cases}$$

$$-1 \le u_1 \le 2, \quad -2 \le u_2 \le 1.$$

Список літератури

1. Бейко І. В., Зінько П. М., Наконечний О. Г. Задачі, методи і алгоритми оптимізації : навч. посіб. Рівне : НУВГП, 2011. 624 с.

2. Бублик Б.Н., Кириченко Н,Ф. Основы теории управления. Київ : Вища школа, 1975. 328 с.

3. Крак Ю.В., Левошич О.Л. Теорія керування. Київ : КНУ, 2001. 253 с.

4. Моклярчук П.М. Варіаційне числення. Екстремальні задачі. Київ : Либідь, 2003. 380 с.

5. Пічкур В.В. Лекції з теорії керування. Київ : Київський університет, 2017. 232 с.

6. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. Москва : Наука, 1983. 392 с.