Міністерство освіти і науки України
Національний університет водного господарства
та природокористування
Навчально-науковий механічний інститут
Кафедра розробки родовищ та видобування корисних копалин

02-06-47

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до лабораторних робіт із навчальної дисципліни
«Інформаційні технології в гірництві»
для здобувачів вищої освіти другого (магістерського) рівня за
спеціальністю 184 «Гірництво»
денної та заочної форми навчання.
Частина 2

Рекомендовано
методичною комісією
зі спеціальності
184 «Гірництво»
Протокол № 8
від 20.02.2019 р.

Рівне – 2019

Методичні вказівки до лабораторних робіт із навчальної дисципліни «Інформаційні технології в гірництві» для здобувачів вищої освіти другого (магістерського) рівня за спеціальністю 184 «Гірництво» денної та заочної форми навчання. В 2 частинах. Частина 2 / Заєць В. В., Семенюк В. В., Оксенюк Р. Р. – Рівне : НУВГП, 2019. – 29 с.

Укладачі:

Заєць В. В., к.т.н., доцент кафедри розробки родовищ та видобування корисних копалин;

Семенюк В. В., асистент кафедри розробки родовищ та видобування корисних копалин;

Оксенюк Р. Р., асистент кафедри розробки родовищ та видобування корисних копалин.

Відповідальний за випуск: В. Я. Корнієнко, професор, д.т.н., в.о. завідувача кафедри розробки родовищ та видобування корисних копалин.

Зміст

Вступ

Велика кількість інженерних та наукових задач вимагає розв’язку лінійних та нелінійних рівнянь та систем рівнянь, наближеного обчислення та інтегрування функцій, розв’язку диференціальних рівнянь, відшукання екстремумів функції з певними обмеженнями, знаходження оптимальних рішень тощо. Для розв’язку таких задач успішно застосовуються засоби обчислювальної техніки.

Сьогодні широко використовуються методи реалізації розв’язування перерахованих задач з використанням комп’ютерної техніки. Такі методи отримали назву чисельних методів. Як правило, розв’язування задач з використанням чисельних методів здійснюється або на базі алгоритмічних мов програмування, або з використанням спеціалізованих пакетів прикладних програм (Mathlab, Mathcad тощо).

Поява такого потужного засобу інженерних та наукових обчислень, як табличний процесор (ТП) Microsoft Excel дозволяє реалізовувати чисельні методи з його допомогою.

В процесі виконання представлених лабораторних робіт студенти матимуть змогу познайомитись з чисельними методами та їх реалізацією в Microsoft Excel на прикладах розв'язку рівнянь, систем рівнянь, інтегрування функцій, інтерполяції та екстраполяції, а також на прикладах розв'язування деяких класів оптимізаційних задач.

У підготовці методичних вказівок використані науково-методичні праці Невзорова А.В., Марченка В.П., Журило С.В.

Лабораторна робота № 6
Розв’язування лінійних оптимізаційних задач графічним методом

Мета:. Набути практичних навичок при розв’язуванні лінійних оптимізаційних задач графічним методом

Приклад виконання роботи.

Для виробництва двох видів продукції (A і B) гірниче підприємство використовує сировину трьох типів. Норми розходу сировини кожного типу для виробництва продукції кожного виду наведено в табл. 6.1. Там же вказано прибуток від реалізації одиниці продукції кожного виду і загальну кількість сировини кожного типу, яка може бути використана гірничим підприємством. Враховуючи, що вироби A і B можуть вироблятись у довільних співвідношеннях (збут виробів забезпечений у повному обсязі), скласти оптимізаційну модель виробництва продукції. За складеною моделлю розрахувати такий план виробництва виробів *A* і *B*, що забезпечить максимум прибутку від їх реалізації.

Таблиця 6.1

Тип сировини	Норми розходу сировини (кг) для виробництва одного виробу		Загальна кількість сировини, кг
	A	*B*	
I II III	12 4 3	4 4 12	300 120 252
Прибуток від реалізації кожного виду продукції, у.о.	30	40	

Розв’язок. Введемо такі позначення: x_1 – кількість виробленої продукції виду A; x_2 – кількість виробленої продукції виду B.

Оскільки виробництво продукції обмежене кількістю сировини, що є у наявності і кількість виробленої продукції не може приймати від’ємних значень, повинні виконуватись нерівності:

$$\begin{cases} 12 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \le 300; \\ 4 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \le 120; \\ 3 \cdot x_1 + 12 \cdot x_2 \le 252; \\ x_1 \ge 0; \quad x_2 \ge 0. \end{cases} \tag{6.1}$$

Загальний прибуток від реалізації обох видів продукції складе

$$Z = 30 \cdot x_1 + 40 \cdot x_2 . \tag{6.2}$$

Таким чином, ми приходимо до наступної оптимізаційної моделі: серед усіх невід'ємних розв'язків системи (6.1) лінійних нерівностей потрібно вибрати такий, при якому функція (6.2) приймає максимальне значення ($Z = 30x_1 + 40x_2 \to \max$).

Для розв'язку поставленої моделі потрібно побудувати багатокутник допустимих розв'язків. Для цього в системі (6.1) знаки нерівностей замінюємо на знаки жорсткої рівності:

$$\begin{cases} 12 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 = 300 \quad (L1); \\ 4 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 = 120 \quad (L2); \\ 3 \cdot x_1 + 12 \cdot x_2 = 252 \quad (L3); \\ x_1 = 0; \quad x_2 = 0. \end{cases} \tag{6.3}$$

Як бачимо, в (6.3) перші три рівняння є рівняннями прямих (L1, L2, L3). Останні два рівняння описують позитивні напіввісі декартової системи координат. Зобразимо ці прямі на площині (рис. 6.1).

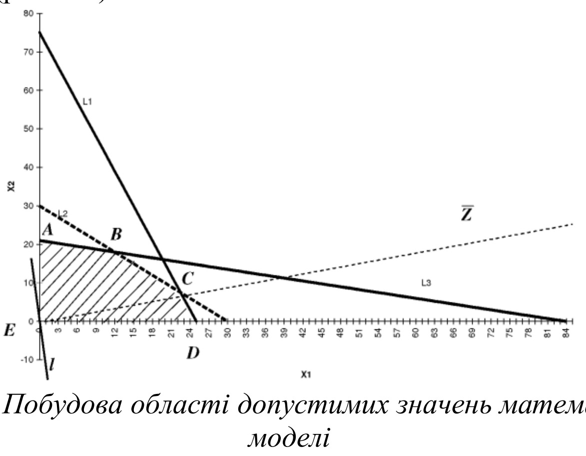

Рис. 6.1. Побудова області допустимих значень математичної моделі

Враховуючи знаки порівняння у системі (6.1), можна стверджувати, що областю допустимих значень розв'язку поставленої задачі буде п'ятикутник *ABCDE* (заштрихована область на рис. 6.1).

Для знаходження оптимального розв'язку математичної моделі побудуємо вектор $\overline{Z}$, який відповідає виразу (6.2), що являє собою цільову функцію моделі. До цього вектора побудуємо перпендикуляр *l*, що носить назву лінії рівня цільової функції (рис. 6.1). Очевидно, зростання значення цільової функції буде відбуватись по напрямку вектора $\overline{Z}$. Проте значення, які може приймати ця функція, обмежені областю *ABCDE.* Тому пересуватимемо лінію рівня *l* вздовж вектора $\overline{Z}$ у напрямку його зростання доти, поки *l* не доторкнеться крайньої точки області допустимих значень. Координати цієї точки і будуть являти собою оптимальний розв'язок складеної оптимізаційної математичної моделі. Очевидно, у нашому випадку цією точкою буде точка С. Вона утворена перетином двох прямих - *L2* і *L3*. Таким чином, для знаходження оптимального розв'язку достатньо розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь, які описують вказані прямі (6.4):

$$\begin{cases} 4 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 = 120; \\ 3 \cdot x_1 + 12 \cdot x_2 = 252. \end{cases} \tag{6.4}$$

Розв'язком цієї системи рівнянь будуть значення: x_1=12; x_2=18. Таким чином, при заданих умовах гірниче підприємство для отримання максимального прибутку повинно випустити 12 одиниць продукції *A* та 18 одиниць продукції *B*. Прибуток при цьому відповідно (6.2) складе Z=30·12+40·18=1080 у.о.

Завдання для самостійного виконання.

1. У відповідності із своїм варіантом (табл. 6.2), з використанням графічного методу розв'язати лінійні оптимізаційні моделі, що визначають максимум цільової функції при заданих обмеженнях.

2. Підготувати відповіді на контрольні запитання.

Таблиця 6.2

Завдання для індивідуального виконання

Вар	Розрахувати $Z_{\max}$	Вар	Розрахувати $Z_{\max}$
1	$\begin{cases} -4x_1+x_2\le 1, \\ x_1+4x_2\le 21, \\ 2x_1+x_2\le 14, \\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0, \end{cases}$ $4x_1+2x_2\to\max.$	**16**	$\begin{cases} -5x_1+x_2\ge 3, \\ x_1+2x_2\le 17, \\ 7x_1+x_2\ge 28, \\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0, \end{cases}$ $3x_1+2x_2\to\max.$
2	$\begin{cases} -7x_1+x_2\ge 8, \\ 3x_1+2x_2\le 33, \\ 9x_1+x_2\ge 54, \\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0, \end{cases}$ $7x_1+5x_2\to\max.$	**17**	$\begin{cases} -2x_1+x_2\ge 4, \\ x_1+x_2\ge 7, \\ x_1-x_2\ge 3, \\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0, \end{cases}$ $x_1+3x_2\to\max.$
3	$\begin{cases} -x_1+x_2\le 4, \\ x_1+2x_2\le 11, \\ 3x_1+x_2\le 18, \\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0, \end{cases}$ $3x_1+x_2\to\max.$	**18**	$\begin{cases} -6x_1+x_2\ge 2, \\ 3x_1+2x_2\ge 23, \\ x_1-2x_2\ge 2, \\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0, \end{cases}$ $4x_1+5x_2\to\max.$
4	$\begin{cases} -3x_1+x_2\ge 3, \\ 2x_1+3x_2\le 20, \\ 4x_1+x_2\ge 20, \\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0, \end{cases}$ $4x_1+3x_2\to\max.$	**19**	$\begin{cases} -7x_1+x_2\ge 3, \\ 4x_1+3x_2\le 34, \\ x_1-3x_2\ge 1, \\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0, \end{cases}$ $4x_1+7x_2\to\max.$
5	$\begin{cases} -3x_1+x_2\ge 3, \\ x_1+2x_2\le 13, \\ 5x_1+x_2\ge 20, \\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0, \end{cases}$ $5x_1+4x_2\to\max.$	**20**	$\begin{cases} -2x_1+x_2\le 6, \\ 7x_1+2x_2\le 23, \\ x_1-2x_2\le 1, \\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0, \end{cases}$ $7x_1+2x_2\to\max.$
6	$\begin{cases} -4x_1+x_2\ge 1, \\ x_1+4x_2\le 21, \\ 2x_1+x_2\ge 14, \\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0, \end{cases}$ $4x_1+6x_2\to\max.$	**21**	$\begin{cases} -x_1+x_2\ge 4, \\ 2x_1+5x_2\le 27, \\ 3x_1-4x_2\ge 6, \\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0, \end{cases}$ $4x_1+3x_2\to\max.$

Вар	Розрахувати $Z_{\max}$	Вар	Розрахувати $Z_{\max}$
7	$\begin{cases} -7x_1 + x_2 \ge 7, \\ 6x_1 + x_2 \ge 20, \\ x_1 - x_2 \ge 1, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$ $6x_1 + 5x_2 \to \max.$	22	$\begin{cases} -4x_1 + x_2 \ge 5, \\ 4x_1 + 7x_2 \ge 67, \\ x_1 - x_2 \ge 3, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$ $2x_1 + 5x_2 \to \max.$
8	$\begin{cases} -x_1 + x_2 \ge 4, \\ x_1 + 2x_2 \le 11, \\ 3x_1 + x_2 \ge 18, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$ $3x_1 + 7x_2 \to \max.$	23	$\begin{cases} -7x_1 + x_2 \le 7, \\ 6x_1 + x_2 \le 20, \\ x_1 - x_2 \le 1, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$ $6x_1 + x_2 \to \max.$

Контрольні запитання

1. Які лінійні оптимізаційні задачі можна розв’язати графічним методом?
2. Що означають координати будь-якої точки багатокутника допустимих розв’язків задачі?
3. В якій точці багатокутника допустимих розв’язків цільова функція досягає екстремального значення?
4. В якому випадку лінійна оптимізаційна задача має множину оптимальних розв’язків?
5. В якому випадку лінійна оптимізаційна задача не має розв’язків?

Лабораторна робота № 7
Розв'язування лінійних оптимізаційних задач симплексним методом

Мета: Набути практичних навичок при розв'язуванні лінійних оптимізаційних задач симплексним методом.

Приклад виконання роботи.

Для виготовлення трьох різних видів продукції *A, B, C* гірниче підприємство використовує три різного виду сировини. Норми витрат сировини на виробництво одного з виду продукції, ціна однієї одиниці кожного з виробів, а також загальна кількість сировини кожного виду, що може бути використана гірничим підприємством, наведені в табл. 7.1.

Таблиця 7.1

Вид сировини	**Норми витрати сировини (кг) на одиницю одного виду продукції**			**Загальна кількість сировини (кг)**
	A	***B***	***C***	
I	18	15	12	360
II	6	4	8	192
III	5	3	3	180
Ціна одиниці продукції (у.о.)	9	10	16	

Продукція кожного виду може бути вироблена у довільних співвідношеннях (повний збут забезпечено), проте її виробництво обмежене наявною кількістю сировини.

Скласти оптимальний план виробництва, за яким загальна вартість усієї виробленої продукції буде максимальною.

Розв'язок. Перед розв'язуванням поставленої задачі приведемо її спочатку до класичного, а потім до канонічного виду.

Для переведення до класичного виду введемо такі змінні: x_1 - кількість виробленої продукції виду A; x_2 - кількість виробленої продукції виду B; x_3 - кількість виробленої продукції виду C.

В такому випадку, виходячи із прийнятих позначень, можна записати нерівності, що визначатимуть обмеження щодо кількості сировини, що має бути витрачена на виробництво продукції кожного виду (7.1):

$$\begin{cases}18x_1+15x_2+12x_3\le 360;\\ 6x_1+4x_2+8x_3\le 192;\\ 5x_1+3x_2+3x_3\le 180.\end{cases} \quad (7.1)$$

Вартість виробленої сировини, виходячи з умов задачі, повинна бути максимальною (7.2).

$$Z_{\max}=9x_1+10x_2+16x_3. \quad (7.2)$$

Таким чином, ми отримали цільову функцію лінійної оптимізаційної моделі (7.2) та систему обмежень, які повинні задовольнятись в результаті розв'язку поставленої задачі. Окрім того, на результати розв'язку задачі логічним чином накладаються обмеження невід'ємності (7.3):

$$x_1\ge 0;\ x_2\ge 0;\ x_3\ge 0. \quad (7.3)$$

Вирази (7.1)-(7.3) є математичною моделлю задачі, записаною у класичному вигляді.

Для розв'язку цієї задачі перепишемо її у канонічному вигляді, позбавившись знаків нерівностей (замінивши їх на знаки «=») у системі (7.1).

З цією метою введемо в задачу додаткові змінні, які мають таку фізичну

суть:

S_1 - кількість невикористаної сировини I-го типу;

S_2 - кількість невикористаної сировини II-го типу;

S_3 - кількість невикористаної сировини III-го типу.

Додамо ці додаткові змінні до лівих частин кожної з нерівностей системи (7.1). В результаті отримаємо:

$$\begin{cases}18x_1+15x_2+12x_3+S_1=360;\\ 6x_1+4x_2+8x_3+S_2=192;\\ 5x_1+3x_2+3x_3+S_3=180.\end{cases} \quad (7.4)$$

У цільову функцію (7.2) ці додаткові змінні введемо з нульовим коефіцієнтом:

$$Z_{\max}=0-(-9x_1-10x_2-16x_3). \quad (7.5)$$

Оскільки у виразах (7.4) та (7.5) відсутні знаки нерівностей, вони є записом математичної моделі, побудованої до умов задачі у канонічному вигляді.

Оскільки за умовою задачі ми отримали 3 змінні (x_1, x_2 та x_3), розв'язок її графічним методом викликає певні складності, тому що графіки доведеться будувати у тривимірному просторі. Тому для знаходження розв'язків моделі застосуємо **сиплекс-метод**. В зв'язку з тим, що цей метод передбачає побудову відповідних таблиць, найбільш доцільним буде застосування для знаходження розв'язків моделі табличного процесора **MS Excel**.

Відкриємо робочу книгу та створимо у ній першу симплексну таблицю, що відображатиме базисний розв'язок задачі (рис. 7.1):

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	
1	№ з/п	Базисні змінні	Значення базисних змінних	X1	X2	X3	S1	S2	S3	L		
2	1	S1	360	18	15	12	1	0	0	30	←	=C2/F2
3	2	S2	192	6	4	8	0	1	0	24	←	=C3/F3
4	3	S3	180	5	3	3	0	0	1	60	←	=C4/F4
5	4	Z max	0	-9	-10	-16	0	0	0			

Рис. 7.1. Перша симплексна таблиця

Як видно з першої симплексної таблиці, базисний розв'язок не є оптимальним, оскільки у рядку цільової функції (рядок 4) присутні від'ємні коефіцієнти. В зв'язку з цим потрібно перейти до наступної симплексної таблиці за таким алгоритмом:

1. Визначається розв'язуюча колонка. Це та колонка, у якій присутній максимальний за модулем від'ємний коефіцієнт у рядку цільової функції (такий коефіцієнт в нашому випадку рівний -16, відповідно, розв'язуюча колонка відповідає небазисній змінній x_3).

2. Визначаються коефіцієнти L-колонки як частки від ділення значень базисних змінних на відповідний коефіцієнт розв'язуючої колонки. Для цього в табличному процесорі MS Excel у відповідні комірки L-колонки вводяться формули, як показано на рис. 7.1, після чого у відповідних комірках отримуємо результати обчислень.

3. Визначається розв'язуючий рядок. Цим рядком буде той, для якого в L- колонці коефіцієнт буде найменшим (в нашому випадку цей коефіцієнт рівний 24 і відповідає рядку базисної змінної S_2*)*.

4. Визначається розв’язуючий коефіцієнт на перетині розв’язуючого рядка та розв’язуючої колонки (в нашому випадку цей коефіцієнт рівний 8).

У другій симплексній таблиці з базисного розв’язку виводиться змінна, що знаходиться у розв’язуючому рядку (в нашому випадку - S_2) та на її місце вводиться небазисна змінна із розв’язуючої колонки (в нашому випадку - x_3).

Коефіцієнти нової (другої) симплексної таблиці визначаються за такими правилами:

Коефіцієнти, що відповідають номеру розв’язуючого рядка попередньої симплексної таблиці (в нашому випадку - рядок 2) визначаються за виразом (7.6):

$$\boxed{= \frac{\text{Коефіцієнт попереднього розв'язуючого рядка}}{\text{Розв'язуючий коефіцієнт}}}. \qquad (7.6)$$

Коефіцієнти решти рядків (включаючи рядок цільової функції), визначаються за виразом (7.7):

$$\boxed{\begin{gathered} = \text{коеф - т попереднього рядка} - \\ - \text{коеф - т нового розв. рядка} \times \text{коеф - т розв. колонки} \end{gathered}}. \qquad (7.7)$$

Формули для обчислень цих коефіцієнтів для таблиці MS Excel (з урахуванням відносної та абсолютної адресації), а також результати обчислень представлені на рис 7.2 (а, б).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
8										
9	№ з/п	Базисні змінні	Значення базисних змінних	X1	X2	X3	S1	S2	S3	L
10	1	S1	=C2-C$11*$F2	=D2-D$11*$F2	=E2-E$11*$F2	=F2-F$11*$F2	=G2-G$11*$F2	=H2-H$11*$F2	=I2-I$11*$F2	
11	2	X3	=C3/$F$3	=D3/$F$3	=E3/$F$3	=F3/$F$3	=G3/$F$3	=H3/$F$3	=I3/$F$3	
12	3	S3	=C4-C$11*$F4	=D4-D$11*$F4	=E4-E$11*$F4	=F4-F$11*$F4	=G4-G$11*$F4	=H4-H$11*$F4	=I4-I$11*$F4	
13	4	Z max	=C5-C$11*$F5	=D5-D$11*$F5	=E5-E$11*$F5	=F5-F$11*$F5	=G5-G$11*$F5	=H5-H$11*$F5	=I5-I$11*$F5	

а)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
9	№ з/п	Базисні змінні	Значення базисних змінних	X1	X2	X3	S1	S2	S3	L
10	1	S1	72	9	9	0	1	-1,5	0	8
11	2	X3	24	0,75	0,5	1	0	0,125	0	48
12	3	S3	108	2,75	1,5	0	0	-0,375	1	72
13	4	Z max	384	3	-2	0	0	2	0	

б)

Рис. 7.2. Друга симплексна таблиця: а) − розрахункові формули; б) – результат обчислень

Як видно з рис. 7.2, результат обчислень у другій симплексній таблиці також не є оптимальним, оскільки у рядку цільової функції присутні від’ємні коефіцієнти.

Таким чином, необхідно продовжити розв’язування задачі, створюючи наступну симплексну таблицю.

За вказаними вище правилами, визначимо розв’язуючу колонку, розв’язуючий рядок та розв’язуючий коефіцієнт. На рис. 7.2, б) показано, що такою колонкою буде та, що відповідає небазисній змінній x_2, рядок - базисній змінній S_1, а розв’язуючий коефіцієнт - =9.

Створимо нову (третю) симплексну таблицю, використовуючи розрахункові співвідношення (7.6) та (7.7).

Формули для обчислень коефіцієнтів для третьої симплексної таблиці у MS Excel (з урахуванням відносної та абсолютної адресації), а також результати обчислень представлені на рис 7.3 (а, б).

17	№ з/п	Базисні змінні	Значення базисних змінних	X1	X2	X3	S1	S2	S3	L
18	1	X2	=C10/$E$10	=D10/$E$10	=E10/$E$10	=F10/$E$10	=G10/$E$10	=H10/$E$10	=I10/$E$10	
19	2	X3	=C11-C$18*$E11	=D11-D$18*$E11	=E11-E$18*$E1	=F11-F$18*$E11	=G11-G$18*$E	=H11-H$18*$E11	=I11-I$18*$E11	
20	3	S3	=C12-C$18*$E12	=D12-D$18*$E12	=E12-E$18*$E1	=F12-F$18*$E12	=G12-G$18*$E	=H12-H$18*$E12	=I12-I$18*$E12	
21	4	Z max	=C13-C$18*$E13	=D13-D$18*$E13	=E13-E$18*$E1	=F13-F$18*$E13	=G13-G$18*$E	=H13-H$18*$E13	=I13-I$18*$E13	

а)

17	№ з/п	Базисні змінні	Значення базисних змінних	X1	X2	X3	S1	S2	S3	L
18	1	X2	8	1	1	0	0,111	-0,1667	0	
19	2	X3	20	0,25	0	1	-0,056	0,20833	0	
20	3	S3	96	1,25	0	0	-0,167	-0,125	1	
21	4	Z max	400	5	0	0	0,222	1,66667	0	

Рис. 7.3. Третя симплексна таблиця: а) – розрахункові формули; б) – результат обчислень

Як видно з третьої таблиці, у рядку цільової функції відсутні від’ємні коефіцієнти, отже розв’язок математичної моделі, яка описує поставлену зад., у цій таблиці є оптимальним. Проаналізуємо його:

Висновки

Виходячи із розрахованих значень базисних змінних, для отримання максимальної вартості виробленої продукції гірниче підприємство повинно виробляти:

- продукції виду А (призначена змінна x_1) - 0 одиниць (оскільки ця змінна відсутня в отриманому базисному розв’язку) (таким чином, виготовлення продукції даного виду є економічно недоцільним);

- продукції виду В (призначена змінна x_2) - 8 одиниць;
- продукції виду С (призначена змінна x_3) - 20 одиниць.

Після виробництва продукції у розрахованій кількості залишається невикористаною сировина ІІІ (змінна S_3) в кількості 96 кг.

В результаті розрахованого плану виробництва гірниче підприємство виробить продукцію загальною вартістю 400 у.о. (значення, що відповідає рядку Z_{max} у колонці базисних змінних).

Завдання для самостійного виконання

1. Відповідно до умови зад., розрахувати оптимальний план виробництва продукції гірничим підприємством, виходячи з даних, наведених у табл. 7.2.
2. Підготувати відповіді на контрольні запитання.

Таблиця 7.2

Завдання для індивідуального виконання

Вид сировини	**Норми витрати сировини (кг) на одиницю одного виду продукції**			**Загальна кількість сировини (кг)**
	A	*B*	*C*	
I	18+**В**	15+**В**	12+**В**	360+12·**В**
II	6+**В**	4+**В**	8+**В**	192+22·**В**
III	5+**В**	3+**В**	3+**В**	180+30·**В**
Ціна одиниці продукції (у.о.)	9+1,5·**В**	10+1,5·**В**	16+1,5·**В**	

де **В** – номер варіанту

Контрольні запитання

1. Класичне формулювання оптимізаційної задачі.
2. Запис математичної моделі задачі у класичному вигляді.
3. Запис математичної моделі задачі у канонічному вигляді.
4. Порядок знаходження розв’язуючого рядка, розв’язуючої колонки, розв’язуючого елемента.
5. Умови оптимальності розв’язку оптимізаційної моделі на максимум цільової функції з використанням симплексних таблиць.

6. Правила визначення коефіцієнтів наступної симплексної таблиці за попередньою.

Лабораторна робота № 8
Розв'язування лінійних оптимізаційних задач з використанням надбудови «ПОИСК РЕШЕНИЯ» табличного процесора MS Excel

Мета: Набути практичних навичок при розв'язуванні лінійних оптимізаційних задач з використанням надбудови «Поиск решения».

Приклад виконання роботи.

Для виготовлення трьох різних видів продукції А, *В, С* гірниче підприємство використовує три різних виду сировини. Норми витрат сировини на виробництво одного з виду продукції, ціна однієї одиниці кожного з виробів, а також загальна кількість сировини кожного виду, що може бути використана підприємством, наведені в таблиці 8.1.

Таблиця 8.1

Вид сировини	Норми витрати сировини (кг) на одиницю одного виду продукції			Загальна кількість сировини (кг)
	A	*B*	*C*	
I	18	15	12	360
II	6	4	8	192
III	5	3	3	180
Ціна одиниці продукції (у.о.)	9	10	16	

Продукція кожного виду може бути вироблена у довільних співвідношеннях (повний збут забезпечено), проте її виробництво обмежене наявною кількістю сировини.

Складати оптимальний план виробництва, за яким загальна вартість усієї виробленої продукції буде максимальною.

Розв'язок. Перед розв'язуванням поставленої задачі приведемо її спочатку до класичного, а потім до канонічного виду.

Для переведення до класичного виду введемо такі змінні: x_1 - кількість виробленої продукції виду А; x_2 - кількість виробленої продукції виду В; x_3 - кількість виробленої продукції виду С.

В такому випадку, виходячи із прийнятих позначень, можна записати нерівності, що визначатимуть обмеження щодо кількості сировини, що має бути витрачена на виробництво продукції кожного виду (8.1):

$$\begin{cases} 18x_1 + 15x_2 + 12x_3 \le 360; \\ 6x_1 + 4x_2 + 8x_3 \le 192; \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 \le 180. \end{cases} \tag{8.1}$$

Вартість виробленої сировини, виходячи з умов задачі, повинна бути максимальною (8.2):

$$Z_{\max} = 9x_1 + 10x_2 + 16x_3 . \tag{8.2}$$

Таким чином, ми отримали цільову функцію лінійної оптимізаційної моделі (8.2) та систему обмежень, які повинні задовольнятись в результаті розв’язку поставленої задачі. Окрім того, на результати розв’язку задачі логічним чином накладаються обмеження невід’ємності (8.3):

$$x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0;\ x_3 \ge 0 . \tag{8.3}$$

Вирази (8.1)-(8.3) є математичною моделлю задачі, записаною у класичному вигляді.

Для розв’язування поставленої задачі створимо нову робочу книгу MS Excel та введемо до неї інформацію, представлену на рис. 8.1.

	A	B	C	D	E
1					
2					Загальний обсяг
3	Змінні	X1	X2	X3	
4	Значення змінних	0	0	0	
5	Витрати сировини типу I	18	15	12	=СУММПРОИЗВ($B$4:$D$4;B5:D5)
6	Витрати сировини типу II	6	4	8	=СУММПРОИЗВ($B$4:$D$4;B6:D6)
7	Витрати сировини типу III	5	3	3	=СУММПРОИЗВ($B$4:$D$4;B7:D7)
8	Вартість продукції	9	10	16	=СУММПРОИЗВ($B$4:$D$4;B8:D8)

Рис. 8.1. Введення початкових даних моделі

Як видно з рис. 8.1, у діапазоні комірок **B3:D3** введені початкові наближення обсягів виробництва видів продукції А, В і С відповідно рівними 0. У діапазон комірок **E5:E8** введено функцію **СУММПРОИЗВ( )**, з використанням якої визначається загальний обсяг витрати кожного з видів сировини для виробництва загального обсягу продукції (I, II та III відповідно), а також сумарну вартість виробленої продукції (дані, що містяться у комірці **E8**). Результати обчислень за цією функцію з урахуванням початкових наближень змінних (нагадаємо - прийнятих 0), наведено на рис. 8.2.

	A	B	C	D	E
1					
2					Загальний обсяг
3	Змінні	X1	X2	X3	
4	Значення змінних	0	0	0	
5	Витрати сировини типу I	18	15	12	0
6	Витрати сировини типу II	6	4	8	0
7	Витрати сировини типу III	5	3	3	0
8	Вартість продукції	9	10	16	0

Рис. 8.2. Результати обчислень з урахуванням початкових (нульових) значень змінних x_1, x_2 та x_3

Оскільки за умовою задачі є максимізація цільової функції (8.2) (у нашому випадку вона вписана у комірку **E8**) з урахуванням обмежень (8.1) (вписаних відповідно у діапазон комірок **E5:E7**), скористаємось надбудовою MS Excel «**Поиск решения**». Для цього перш за все виконаємо команду «**Сервис-Надстройки**», завдяки якій буде викликано однойменне діалогове вікно. У цьому діалоговому вікні необхідно впевнитись, що надбудова «**Поиск решения**» підключена (відмічена «**прапорцем**»). В іншому випадку її необхідно підключити, після чого натиснути кнопку **OK** цього діалогового вікна.

Після виконання підготовчих операцій, описаних вище, можна приступати до безпосереднього розв’язку задачі. З цією метою виконаємо команду «**Сервис-Поиск решения**» (не забувши при цьому встановити курсор у цільовій комірці **E8**). При цьому виникає однойменне діалогове вікно.

У цьому вікні у полі **Установить целевую ячейку** необхідно вказати адресу комірки таблиці, яку потрібно змінити для досягнення розв’язку поставленої задачі (у нашому випадку - максимізація значення комірки з адресою **E8**). Оскільки значення цільової функції потрібно у даному випадку максимізувати, потрібно відмітити пункт ***Равной: ⦿ максимальному значению*** (у протилежному випадку, наприклад, для вирішення **M**-задачі, потрібно відмітити пункт ***Равной ⦿ минимальному значению***).

Далі у полі **Изменяя ячейки** потрібно вказати (використовуючи виділення діапазону з використанням маніпулятора «**Миша**») той діапазон комірок, значення якого повинні будуть змінені з метою вирішення поставленої задачі (в нашому випадку цим діапазоном є діапазон комірок **B4:D4**).

Після вказаних маніпуляцій необхідно задати систему обмежень задачі, що виражена системою нерівностей (8.1). Для цього потрібно праворуч вікна **Ограничения** натиснути кнопку **Добавить** і, користуючись підказками діалогових вікон, задати потрібні обмеження для вирішення поставленої задачі.

Для поставленої задачі у кінцевому випадку діалогове вікно **Поиск решения** набере вигляду, представленого на рис. 8.3.

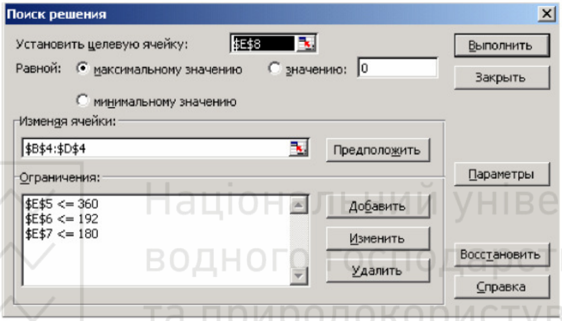

Рис 8.3. Зовнішній вигляд діалогового вікна ***Поиск решения***

Після вказаних вище дій у діалоговому вікні, зображеному на рис. 8.3, необхідно натиснути кнопку **Параметры**. У дочірньому вікні (рис. 8.4) відповідно до обмежень (8.3) та виразів (8.1) і (8.2) потрібно встановити параметри, вказані на рисунку, після чого натиснути кнопку **ОК**.

Після виконаних дій у головному вікні **Поиск решения** (рис. 8.3) потрібно натиснути кнопку **Выполнить**. У випадку сформульованої задачі отримаємо результат, зображений на рис. 8.5.

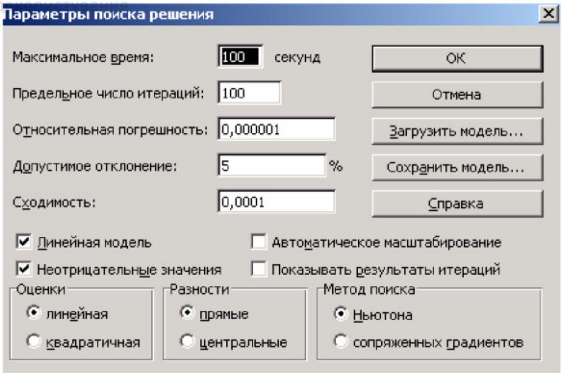

Рис. 8.4. Параметри надбудови «Поиск решения»

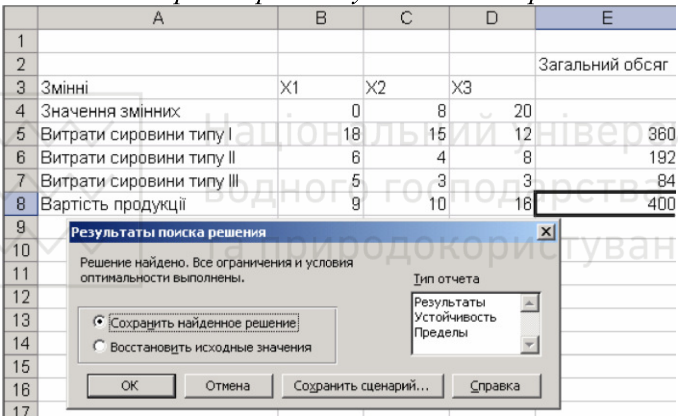

Рис. 8.5. Результат розв'язку задачі

З аналізу розв'язку задачі робимо такі висновки:

- оптимальний обсяг випуску продукції типу **A** (змінна $\mathbf{x_1}$) - 0 одиниць;

- оптимальний обсяг випуску продукції типу **B** (змінна $\mathbf{x_2}$) - 8 одиниць;

- оптимальний обсяг випуску продукції типу **C** (змінна $\mathbf{x_3}$) - 20 одиниць;

- отриманий прибуток від реалізації продукції - 400 умовних одиниць; недовикористана сировина типу **III** складає 180-84=96 одиниць.

Як бачимо, результат розв'язку задачі повністю співпадає з результатом, отриманим у симплексних таблицях (див. ЛР № 7).

Завдання для самостійного виконання

1. Відповідно до умови задачі, розрахувати оптимальний план виробництва продукції гірничим підприємством, виходячи з даних, наведених у табл. 7.2.

2. Підготувати відповіді на контрольні запитання.

Контрольні запитання

1. Як підключається надбудова «Поиск решения»?
2. Яка комірка обирається у якості цільової?
3. Які налаштування необхідно зробити у вікні «Поиск решения» при розв'язуванні лінійних оптимізаційних задач?

Лабораторна робота № 9

Розв'язування цілочисельних оптимізаційних задач з використанням надбудови «ПОИСК РЕШЕНИЯ» MS Excel

Мета: Набути практичних навичок при розв'язуванні цілочисельних оптимізаційних задач.

Приклад виконання роботи.

Умовно гірниче підприємство з переробки корисних копалин виготовляє базальтові блоки об'ємної групи IV, V, VI. На виготовлення одного блоку кожної групи потрібно відповідно 1500, 1000 та 600 кг сировини. При цьому витрати робочого часу при виробництві блоку IV групи складають 5 машино-годин, V групи - 1,5 машино-години, VI групи - 0,7 машино-години.

Всього для виробництва блоків гірниче підприємство може використати 1220 т сировини. Обладнання може бути зайнятим протягом 26 машино-годин.

Прибуток від реалізації одного блоку IV, V, VI групи складає відповідно 200, 30 і 15 у.о. Гірниче підприємство повинно щоденно виготовляти не менше двох блоків IV групи. На виробництво іншої продукції обмеження відсутні.

Необхідно визначити, яку продукцію і у якій кількості слід щоденно виготовляти на підприємстві, щоб прибуток від її реалізації був максимальним.

Розв'язок. Для початку складемо оптимізаційну модель виробництва та систему обмежень. Введемо позначення:

x_1 - кількість вироблених блоків IV групи;

x_2 - кількість вироблених блоків V групи;

x_3 - кількість вироблених блоків VI групи.

Відповідно до введених позначень цільова функція, що визначає прибуток підприємства, може бути записана як

$$Z_{\max} = 200 \cdot x_1 + 30 \cdot x_2 + 15 \cdot x_3 \text{ (у.о.)}. \qquad (9.1)$$

Відповідно до умов задачі система обмежень матиме такий вигляд:

$$\begin{cases} 1500 \cdot x_1 + 1000 \cdot x_2 + 620 \cdot x_3 \le 1220000 \ (\text{кг}); \\ 5 \cdot x_1 + 1{,}5 \cdot x_2 + 0{,}7 \cdot x_3 \le 26 \ (\text{машино-годин}); \\ x_1 \ge 0; \ x_2 \ge 0; \ x_3 \ge 0 \ (\text{умова невід'ємності}); \\ x_1 > 2 \ (\text{обмеження на мін. к-сть блоків}). \end{cases} \qquad (9.2)$$

Слід зауважити, що продукція гірничого підприємства являється штучними виробами, тому кількість виробленої продукції кожного з видів не може виражатись дробовим числом. У зв'язку з цим, на умову задачі додатково накладаються обмеження цілочисленості:

$$x_1 \equiv \text{ціле}; \quad x_2 \equiv \text{ціле}; \quad x_3 \equiv \text{ціле}. \qquad (9.3)$$

Після запису умови задачі у канонічному вигляді створимо на робочому аркуші MS Excel таблицю і заповнимо її вихідними даними, функціями та формулами, як показано на рис. 9.1.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		***Цілочисельна оптимізаційна задача***						
2								
3	Змінні	**X1**	**X2**	**X3**				
4	Значення змінних	0	0	0				
5								
6		**Коефіцієнти**				**Результат**		
7								
8	Затрати праці	5	1,5	0,7		=СУММПРОИЗВ($B$4:$D$4;B8:D8)	<=	26
9	Затрати сировини	1500	1000	620		=СУММПРОИЗВ($B$4:$D$4;B9:D9)	<=	1220000
10	Прибуток	200	30	15		=СУММПРОИЗВ($B$4:$D$4;B10:D10)	Макс	

Рис. 9.1. Заповнення даними аркуша MS Excel для розв'язку задачі

Після виконання усіх підготовчих етапів перейдемо до безпосереднього розв'язку задачі.

Отриманий прибуток в залежності від виробленої продукції міститься у комірці **F10**. Встановимо у цю комірку курсор і виконаємо команду **Сервис-Поиск решения**. У діалогове вікно введемо дані, як показано на рис. 9.2.

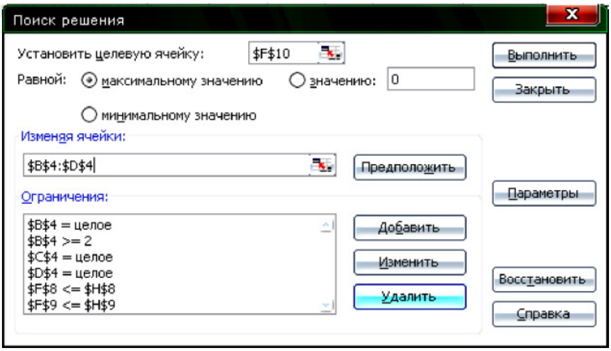

Рис. 9.2. Введення даних у діалогове вікно «Поиск решения»

Для налаштування режиму пошуку рішень у діалоговому вікні натиснемо кнопку **Параметры** і налаштуємо параметри, як показано на рис. 9.3.

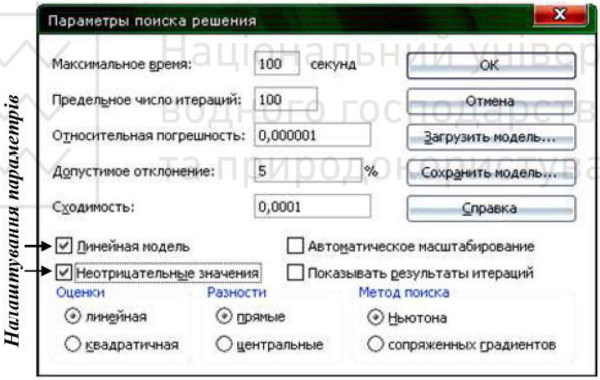

Рис. 9.3. Налаштування параметрів режиму пошуку рішень

Після встановлення усіх налаштувань натиснемо кнопку **OK**, а потім кнопку **Выполнить** в результаті отримаємо розв’язок задачі, як показано на рис. 9.4.

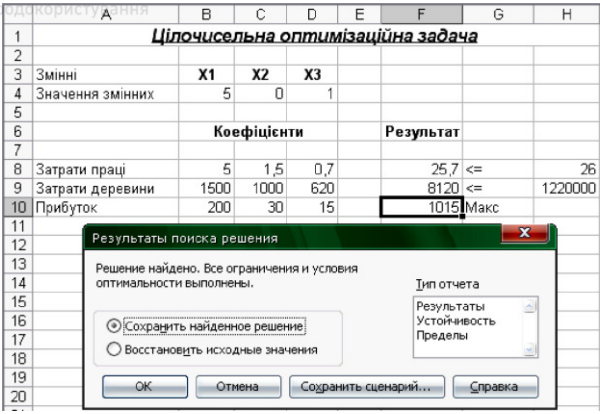

Рис. 9.4. Результат розв'язку цілочисельної оптимізаційної задачі з використанням надбудови «Поиск решения»

Проаналізуємо отримані результати.

Як видно з рис. 9.4, гірниче підприємство щоденно повинне випускати 5 блоків IV (змінна x_1) та 1 блок VI (змінна x_3). За поставлених умов випуск блоків V групи є недоцільним (x_2=0). Отриманий прибуток при цьому буде складати 1015 у.о.

При такому плані невикористаними залишаються 0,3 машино-години робочого часу та 1211880 кг сировини.

Завдання для індивідуального виконання.

1. За допомогою надбудови MS Excel «Поиск решения» розв'язати цілочисельну оптимізаційну задачу відповідно до свого варіанту (табл. 9.1). Проаналізувати отриманий розв'язок та зробити висновки.
2. Підготувати відповіді на контрольні запитання.

Таблиця 9.1

Варіанти індивідуальних завдань до лабораторної

Вар.	Умова	Вар.	Умова
1.	$\begin{cases} Z_{\max} = 2x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4; \\ 30x_1 - 15x_2 + 20x_3 + 21x_4 \le 324; \\ 21x_1 + 51x_2 + 28x_3 + 25x_4 \le 483; \\ 12x_1 - 44x_2 + 32x_3 + 62x_4 \le 367; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0;\ x_3 \ge 0;\ x_4 \ge 0. \end{cases}$	**9.**	$\begin{cases} Z_{\max} = x_1 + x_2 - x_3 + 8x_4; \\ 22x_1 - 21x_2 - 17x_3 - 41x_4 \le 461; \\ 25x_1 + 52x_2 + 44x_3 - 77x_4 \le 489; \\ 21x_1 - 46x_2 - 55x_3 - 83x_4 \le 591; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0;\ x_3 \ge 0;\ x_4 \ge 0. \end{cases}$
2.	$\begin{cases} Z_{\max} = x_1 + x_2 + x_3 + x_4; \\ 14x_1 + 16x_2 + 25x_3 + 19x_4 \le 551; \\ 11x_1 + 35x_2 + 14x_3 - 17x_4 \le 512; \\ 82x_1 + 63x_2 + 54x_3 - 92x_4 \le 767; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0;\ x_3 \ge 0;\ x_4 \ge 0. \end{cases}$	**10.**	$\begin{cases} Z_{\max} = -x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4; \\ 12x_1 - 23x_2 + 25x_3 + 41x_4 \le 579; \\ 21x_1 - 7x_2 + 14x_3 + 37x_4 \le 945; \\ 82x_1 - 44x_2 + 54x_3 + 92x_4 \le 831; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0;\ x_3 \ge 0;\ x_4 \ge 0. \end{cases}$
3.	$\begin{cases} Z_{\min} = x_1 - x_2 + x_3 + 5x_4; \\ 21x_1 + 12x_2 - 13x_3 + 12x_4 \ge 282; \\ 22x_1 - 26x_2 + 23x_3 - 25x_4 \ge 245; \\ 27x_1 + 72x_2 - 49x_3 + 94x_4 \ge 579; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0;\ x_3 \ge 0;\ x_4 \ge 0. \end{cases}$	**11.**	$\begin{cases} Z_{\min} = x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4; \\ 9x_1 + 12x_2 + 28x_3 + 25x_4 \ge 77; \\ 21x_1 - 11x_2 - 24x_3 + 46x_4 \ge 93; \\ 17x_1 + 17x_2 - 12x_3 - 12x_4 \ge 39; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0;\ x_3 \ge 0;\ x_4 \ge 0. \end{cases}$
4.	$\begin{cases} Z_{\min} = x_1 + x_2 + x_3 - 4x_4; \\ 73x_1 + 13x_2 + 61x_3 + 15x_4 \ge 651; \\ 61x_1 - 61x_2 - 24x_3 + 76x_4 \ge 612; \\ 97x_1 + 12x_2 + 92x_3 + 32x_4 \ge 863; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0;\ x_3 \ge 0;\ x_4 \ge 0. \end{cases}$	**12.**	$\begin{cases} Z_{\min} = 5x_1 + x_2 + x_3 + x_4; \\ 88x_1 + 83x_2 + 91x_3 + 55x_4 \ge 151; \\ 81x_1 + 13x_2 - 27x_3 + 59x_4 \ge 167; \\ 84x_1 + 17x_2 + 23x_3 + 37x_4 \ge 184; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0;\ x_3 \ge 0;\ x_4 \ge 0. \end{cases}$
5.	$\begin{cases} Z_{\max} = 5x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4; \\ 9x_1 + 16x_2 + 27x_3 + 33x_4 \le 455; \\ 14x_1 + 23x_2 - 18x_3 - 41x_4 \le 512; \\ 5x_1 - 9x_2 + 72x_3 - 12x_4 \le 739; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0;\ x_3 \ge 0;\ x_4 \ge 0. \end{cases}$	**13.**	$\begin{cases} Z_{\max} = x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4; \\ 61x_1 - 76x_2 - 37x_3 - 51x_4 \le 472; \\ 21x_1 + 65x_2 - 84x_3 - 37x_4 \le 493; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0;\ x_3 \ge 0;\ x_4 \ge 0. \end{cases}$
6.	$\begin{cases} Z_{\min} = -x_1 + 6x_2 - x_3 + x_4; \\ 8x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 \ge 45; \\ 15x_1 + 11x_2 - 14x_3 + 6x_4 \ge 32; \\ 7x_1 + 23x_2 - 18x_3 - 12x_4 \ge 13; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0;\ x_3 \ge 0;\ x_4 \ge 0. \end{cases}$	**14.**	$\begin{cases} Z_{\min} = x_1 + x_2 + x_3 - x_4; \\ 81x_1 - 82x_2 - 14x_3 + 21x_4 \ge 597; \\ 33x_1 + 91x_2 - 99x_3 - 87x_4 \ge 583; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0;\ x_3 \ge 0;\ x_4 \ge 0. \end{cases}$
7.	$\begin{cases} Z_{\min} = 8x_1 + x_2 + x_3 - x_4; \\ 43x_1 + 63x_2 - 21x_3 + 35x_4 \ge 151; \\ 51x_1 - 17x_2 + 16x_3 + 16x_4 \ge 167; \\ 37x_1 + 12x_2 - 12x_3 + 32x_4 \ge 133; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0;\ x_3 \ge 0;\ x_4 \ge 0. \end{cases}$	**15.**	$\begin{cases} Z_{\min} = 5x_1 - x_2 - x_3 - 4x_4; \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 \ge 151; \\ 3x_1 - 13x_2 - 4x_3 + 6x_4 \ge 162; \\ 7x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 \ge 213; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0;\ x_3 \ge 0;\ x_4 \ge 0. \end{cases}$
8.	$\begin{cases} Z_{\max} = 4x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4; \\ 18x_1 + 7x_2 + 14x_3 + 32x_4 \le 627; \\ 32x_1 - 15x_2 + 19x_3 + 37x_4 \le 841; \\ 64x_1 - 16x_2 + 54x_3 + 92x_4 \le 932; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0;\ x_3 \ge 0;\ x_4 \ge 0. \end{cases}$	**16.**	$\begin{cases} Z_{\max} = x_1 + x_2 + x_3 + x_4; \\ 5x_1 + 15x_2 - 35x_3 + 33x_4 \le 924; \\ x_1 + 25x_2 + 15x_3 - 21x_4 \le 928; \\ 3x_1 + 26x_2 + 14x_3 + 12x_4 \le 863; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0;\ x_3 \ge 0;\ x_4 \ge 0. \end{cases}$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Для всіх варіантів накладається обмеження на цілочисельність змінних:

$$x_i \to \text{цілі};\ x = 1;4$$

Контрольні запитання.

1. Яка оптимізаційна задача називається цілочисельною?

2. Які методи існують для розв'язування цілочисельних задач?

3. Які розв'язки вважаються оптимальними для цілочисельних оптимізаційних задач?

Список рекомендованої літератури

1. Косинський В .І., Швець О. Ф. Сучасні інформаційні технології. К. : Знання, 2011. 318 с.
2. Грицунов О. В. Інформаційні системи та технології : навчальний посібник. Харків : ХНАМГ, 2010. 222 с.
3. Тлумачний словник з інформатики / Г. Г. Півняк, Б. С. Бусигін, М. М. Дівізінюк та ін. Дніпропетровськ : Нац. гірн. ун-т, 2008. 599 с