Міністерство освіти і науки України
Національний університет водного господарства
та природокористування
Навчально-науковий інститут автоматики, кібернетики та
обчислювальної техніки
Кафедра прикладної математики

04-01-43

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до практичних робіт з навчальної дисципліни
«*Теорія ймовірностей та математична статистика*»
для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня за спеціальностями 122 «Комп'ютерні науки» та 121 «Інженерія програмного забезпечення»
денної та заочної форм навчання

ЧАСТИНА 1

Рекомендовано
науково-методичною комісією
зі спеціальності
122 «Комп'ютерні науки»
протокол № 4 від 20.02.2019
та 121 «Інженерія
програмного забезпечення»
протокол № 5 від 20.02.2019

Рівне – 2019

Методичні вказівки до практичних робіт з навчальної дисципліни «Теорія ймовірностей та математична статистика» для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня за спеціальностями 122 «Комп’ютерні науки» та 121 «Інженерія програмного забезпечення» денної та заочної форм навчання / Прищепа О. В., Іванчук Н. В. – Рівне : НУВГП, 2019. – 43 с.

Укладач: Прищепа О. В., к.ф.-м.н., доцент кафедри прикладної математики; Іванчук Н. В., старший викладач кафедри прикладної математики.

Відповідальний за випуск: Мартинюк П. М., д.т.н., професор, завідувач кафедри прикладної математики.

ЗМІСТ

Вступ

Теорія ймовірностей та математична статистика відіграє важливу роль у базовій освіті спеціалістів галузі інформаційних технологій. Ймовірнісні та статистичні методи є важливим математичним апаратом при розв’язуванні практичних задач, що пов’язанні з випадковими явищами та обробкою статистичних даних.

Методичні вказівки розроблені для студентів спеціальностей 122 «Комп’ютерні науки» та 121 «Інженерія програмного забезпечення» денної та заочної форм навчання.

До кожного практичного заняття подано необхідний теоретичний матеріал, розв’язані приклади задач, наведено перелік завдань.

1. Стохастичний експеримент, випадкові події. Класичне та геометричне визначення ймовірності.

Нехай простір елементарних подій є скінченною множиною, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$. Тобто є тільки n можливих результатів випробування: $|\Omega| = n$. Таку множину часто називають повною групою подій всіх попарно несумісних результатів випробування. Довільну підмножину з Ω називають подією, а кількість цих подій є, очевидно, 2^n. Кожній елементарній події ω_i з простору Ω. ставиться у відповідність число p_i, що є ймовірністю елементарного наслідку, таке, що $0 \le p_i \le 1$ та $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Тоді ймовірність довільної події $A \subset \Omega$ підраховують як суму ймовірностей елементарних подій, що входять до A:

$$P(A) = \sum_{i:\omega_i \in A} P(\omega_i).$$

Вважатимемо додатково, що всі елементарні події рівноможливі, тобто $\forall i \;\; p_i = 1/n$. Тоді класичне означення ймовірності: ймовірність $P(A)$ для події $A \subset \Omega$ визначається формулою:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}, \qquad (1.1)$$

де $|A|$ – кількість елементів множини A.

У випадку стохастичного експерименту із зліченною множиною елементарних подій, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n, ...\}$. візьмемо послідовність чисел $p_1, p_2, ..., p_n, ...$ таку, що

$p_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$. Подією також будемо називати довільну підмножину з $\boldsymbol{\Omega}$. Для будь-якої події $A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, ..., \omega_{i_k}, ...\} \subset \Omega$ ймовірність $P(A)$ має вигляд:

$$P(A) = \sum_{k=1}^{\infty} p_{i_k} .$$

Якщо $\Omega \subset R^n$ – множина n-вимірного евклідового простору, яка має обмежений об'єм. Стохастичний експеримент полягає у тому, що n-вимірна точка ω навмання кидається в область Ω. Розглянемо клас $\Re$ усіх підмножин Ω, які мають об'єм. Для довільного $A \in \Re$ подією будемо називати те, що в результаті експерименту $\omega \in A$, і покладемо

$$P(A) = \frac{mes(A)}{mes(\Omega)}, \qquad (1.2)$$

де $mes(.)$ – об'єм множини.

Приклад 1.1. Яка ймовірність того, що на двох гральних кубиках в сумі випаде 9 (подія A) ?

Розв'язання. Побудуємо простір елементарних подій: $\Omega = \{(i, j) : i, j = \overline{1,6}\}$. Кількість всього можливих випадків $|\Omega| = 36$. Подія A матиме вигляд: $A = \{(3,6), (6,3), (4,5), (5,4)\}$. За класичним означенням ймовірності (1.1), маємо:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}.$$

Відповідь: $\frac{1}{9}$.

Приклад 1.2. У ліфт семиповерхового будинку на першому поверсі зайшли три особи. Кожен із них із однаковою ймовірністю може вийти на будь-якому поверсі, починаючи з другого. Знайти ймовірність:а) що всі особи вийдуть одночасно (на одному і тому ж поверсі); б) всі пасажири вийдуть на різних поверхах

Розв'язання. Побудуємо простір елементарних подій $\Omega = \{(i,j,k) : i,j,k = \overline{2,7}\}$. Кількість всього можливих випадків $|\Omega| = 6^3 = 216$.

а) Позначимо A={ всі особи вийдуть одночасно (на одному і тому ж поверсі)}. Таких варіантів становить $|A| = 6$

Тоді за класичним означенням ймовірності (1.1):

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{6}{216} = \frac{1}{36}.$$

б) Позначимо B={Всі пасажири вийдуть на різних поверхах}. Кількість таких випадків складає $|B| = C_6^3$. Тоді за класичним означенням ймовірності (1.1) маємо:

$$P(B) = \frac{C_6^3}{6^3} = \frac{20}{216} = \frac{5}{54}$$

Відповідь:а) $\frac{1}{36}$; б) $\frac{5}{54}$.

Приклад 1.3. Деформована монета (аверс випадає з ймовірністю q, а реверс – з ймовірністю $p = 1 - q$) підкидається до тих пір, поки не випаде реверс (подія B). Підрахувати ймовірність того, що експеримент закінчиться на кроці, кратному трьом.

Розв'язання. Визначимо простір елементарних подій

$$\Omega = \{\omega_n \mid n \ge 1, \omega_n = (\underbrace{AA...A}_{n-1}P)\}$$

$$B = \{\omega_n \mid n \ge 1, \omega_n = (\underbrace{AA...A}_{n-1}P), n = 3k, k \ge 1\}$$

$$P(B)=\sum_{k=1}^{\infty} q^{3k-1}=\sum_{k=0}^{\infty} q^{3k+1}p=pq\sum_{k=0}^{\infty} q^{3k}=\frac{pq}{1-q^3}.$$

Відповідь: $\dfrac{pq}{1-q^3}$.

Приклад 1.4. Дві особи A і B домовились зустрітися в певному місці, причому кожен з них приходить незалежно від другого у випадковий момент між 12 і 13 год. Той, хто приходить першим чекає 20 хв. І, якщо другий за цей час не прийде, то перший залишає місце зустрічі. Знайти ймовірність того, що зустріч відбудеться.

Розв'язання. Позначимо момент приходу A і B через x та y. Тоді простір елементарних подій матиме вигляд

$$\Omega=\{(x,y)\in R^2 : 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\},$$

що у площині xOy має вигляд квадрата (рис. 1.1).

Розглянемо подію C, яка полягає в тому, що різниця між моментами приходу не перевищує 20 хв.:

$$C=\{(x,y)\in R^2 : 0\le x\le 1, 0\le y\le 1, |x-y|\le \frac{1}{3}\}$$

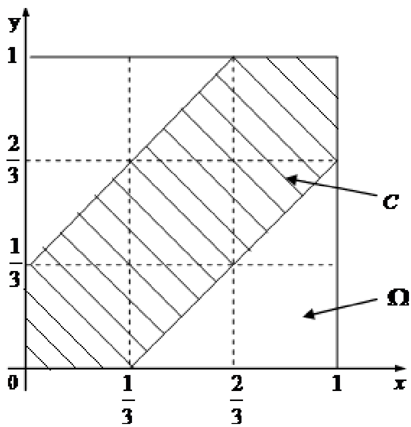

Рис.1.1

Можна записати нерівність $|x-y|\le\frac{1}{3}$ у еквівалентному вигляді $x-\frac{1}{3}\le y\le x+\frac{1}{3}$, що відповідає заштрихованій область на рис. 1.1.

Тоді ймовірність події C знаходимо за формулою (1.2):

$$P(C)=\frac{S_C}{S_\Omega}=\frac{1-2\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2}{1}=1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}.$$

Відповідь: $\frac{5}{9}$.

Завдання.

1. В кошику a білих та b чорних куль. З кошика виймають одну за одною кулі, окрім однієї. Знайти ймовірність того, що остання куля, яка залишилась буде білою.
2. Є два кошики: в першому a білих та b чорних куль, в другому c білих та d чорних. З кожного кошика беруть по кулі. Знайти ймовірність того, що обидві кулі будуть білі.
3. Знайти ймовірність того, що вибране випадковим чином двозначне число ділиться на: а) 3; б) 5.
4. Кинуто 2 гральні кубики. Знайти ймовірності наступних подій: а) B = {сума 8, різниця 4}; б) D = {сума 5, добуток 4}.
5. В коробці 6 карток з номерами від 1 до 6. Картки витягають одну за іншою. Яка ймовірність того, що картки будуть витягнуті у зростаючому порядку?
6. На 10 картках написано літери С, С, Т, Т, Т, А, А, И, И, К. Знайти ймовірність того, що при випадковому розміщенні цих карток отримаємо слово СТАТИСТИКА.
7. В ящику 15 деталей, серед яких 10 пофарбованих. Навмання дістають 3 деталі. Яка ймовірність того, що

вони пофарбовані?

8. Із семи деталей три є новими. Робітник взяв п'ять деталей. Знайти ймовірність того, що серед них є дві нові.

9. Група з 24 студентів, серед яких 5 відмінників, довільно розбивається порівну на дві підгрупи. Знайти ймовірність того, що три відмінники будуть у першій підгрупі.

10. Дано 5 відрізків довжиною $1, 3, 5, 7$ та 9 см. Яка ймовірність того, що випадково обрані три відрізки утворять трикутник?

11. 22 футболістів навмання ділять на 2 команди по 11 гравців. Яка ймовірність того, що 2 найсильніші гравці потраплять до однієї команди?

12. У групі 25 студентів одного віку. Яка ймовірність того, що всі вони народилися в різні дні року?

13. Серед 10 кульок у кошику 5 білого кольору, 3 – синього та 2 – зеленого. Обирають навмання 3 кулі. Знайти ймовірність того, що з трьох куль: 1) будуть рівно дві, що мають один і той самий колір; 2) всі кулі будуть різного кольору.

14. Група з 20 хлопців і 20 дівчат розділена на дві рівні частини. Знайти ймовірність того, що кожна частина буде маги однакове число хлопців і дівчат.

15. Коефіцієнти p та q квадратного рівняння $x^2 + px + q = 0$ вибираються навмання в інтервалі $(0;2)$. Знайти ймовірність того, що корені будуть дійсними числами.

16. Несиметрична монета (аверс випадає з ймовірністю - q, а реверс – з ймовірністю $p = 1 - q$) підкидається до тих пір, поки не випаде реверс. Підрахувати ймовірність того, що експеримент закінчиться на парному кроці.

17. У колі радіуса 7 кидають точку. Знайти ймовірність того, що відстань від цієї точки до центра кола не перевищує 4.

18. У декартовій системі координат розглядають квадрат $ABCD$ із вершинами $A(0;0)$, $B(2;0)$, $C(2;2)$, $D(0;2)$. Знайти ймовірність того, що координати довільної точки $M(x;y)$ всередині квадрата задовольняють умову $x^2+y^2<4$.

19. На відрізок довжини 25 см навмання кидають дві точки. Знайти ймовірність того, що з утворених частин можна скласти трикутник.

20. Навмання обирають два невід'ємні числа a та b, кожне з яких не більше одиниці, а їх добуток не більше $2/9$.

2. Аксіоматика теорії ймовірностей.

Аксіоматичне визначення ймовірності. Нехай задано вимірний простір $\{\Omega,\Re\}$. Числова функція $P(\cdot)$, яка визначена на σ-алгебрі вимірного простору $\{\Omega,\Re\}$, називається **ймовірністю**, якщо виконуються наступні умови (аксіоми):

1) $0\le P(A)\le 1$ для будь-якої події $A\in\Re$;
2) $P(\Omega)=1$;
3) аксіома σ-адитивності: якщо $A_1,\dots,A_n,\dots\in\Re$ такі, що $A_i\cap A_j=\varnothing,\quad i\ne j$, то $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)$.

Наслідками аксіом є наступні властивості:

1) Якщо $A\subseteq B$, то $P(B\setminus A)=P(B)-P(A)$;
2) Якщо $A\subseteq B$, то $P(A)\le P(B)$;
3) $P(\overline{A})=1-P(A)$ для кожної події $A\in\Re$.
4) $P(\varnothing)=0$;
5) Якщо $A_1,\dots,A_n\in\Re$ – довільні події, то

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le n} P(A_i A_j) +$$

$$+ \sum_{1 \le i < j < k \le n} P(A_i A_j A_k) - ... + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 ... A_n)$$

Це так звана теорема про ймовірність суми довільних подій. Зокрема, для випадку двох подій

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Умовна ймовірність події A при умові, що відбулася подія B $(B > 0)$, визначається наступним чином:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Звідси випливає, що

$$P(AB) = P(A/B)P(B) \text{ та } P(AB) = P(B/A)P(A).$$

Ці формули називаються **формулами добутку**.

Теорема 2.1. Якщо $A_1, ..., A_n \in \mathfrak{R}$ довільні події, то

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = P(A_1)P(A_2 / A_1)P(A_3 / A_1 A_2) \times ...$$

$$... \times P(A_n / A_1 A_2 ... A_{n-1})$$

Події A та B називаються **незалежними**, якщо

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

Якщо події A та B є **незалежними**, то $P(A/B) = P(A)$, $P(B) \neq 0$ та $P(B/A) = P(B)$, $P(A) \neq 0$.

Події $A_1, A_2, ..., A_n$ називаються **незалежними у сукупності**, якщо $P\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{n_j}\right) = \prod_{j=1}^{k} P\left(A_{n_j}\right)$ для кожної послідовності індексів $n_1 < n_2 < .... < n_k$, $2 \le k \le n$.

Повна група подій **–** це набір подій $H_1, H_2, ..., H_n (...)$, які є: 1) попарно несумісні $H_i \cap H_j = \varnothing$; 2) $\bigcup_j H_j = \Omega$; 3) $\sum_j P(H_j) = 1$, $P(H_j) > 0$, $j = 1,2,...$

Теорема 2.2 (Формула повної ймовірності) Нехай для події A снує послідовність подій H_i, $i = 1,2,...$ таких, що $H_i \cap H_j = \varnothing$ для $i \ne j$, $P(H_i) > 0$ для $i = 1,2,...$, крім того $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} H_i$. Тоді

$$P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A / H_i) P(H_i) \qquad (2.1)$$

Формула (2.1) називається ***формулою повної ймовірності***.

Теорема 2.3 (Формула Байєса) Нехай $H_1, H_2, ..., H_n (...)$ – повна група подій та A – деяка подія такі, що $P(H_i) > 0$, $i = 1,2,...$ та $P(A) > 0$. Тоді

$$P(H_i / A) = \frac{P(H_i) P(B / H_i)}{\sum_{j=1}^{\infty} P(B / H_j) P(H_j)} = \frac{P(H_i) P(A / H_i)}{P(A)}. \qquad (2.2)$$

Приклад 2.1. Нехай двічі підкидають гральний кубик. а) Знайти ймовірність того, що сума очок при цих двох підкиданнях дорівнює 7 (подія A). б) Знайти ймовірність події A, якщо відомо, що при першому підкиданні випала трійка (подія B).

Розв'язання. а) Визначимо простір елементарних подій: $\Omega=\{(m,n): m,n=\overline{1,6}\}$, $|\Omega|=36$.

Визначимо подію A:

$$A=\{(1,6),(6,1),(3,4),(4,3),(2,5),(5,2)\},\ |A|=6.$$

Тому ймовірність події A: $P(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$.

б) Визначимо простір елементарних подій:

$$\Omega=\{(m,n); m=3, n=\overline{1,6}\},\ |\Omega|=6.$$

Визначимо подію A/B:

$$A/B=\{(3,4)\}, |A/B|=1.$$

Тому ймовірність події A/B: $P(A/B)=\frac{1}{6}$.

Відповідь: а) $\frac{1}{6}$.; б) $\frac{1}{6}$.

Приклад 2.2. Студент прийшов на екзамен, підготувавши лише 20 із 25 питань програми; екзаменатор задав йому три питання. Знайти ймовірність того, що студент знає відповіді на всі ці питання.

Розв'язання. Нехай A_i, $i=1,2,3$ – подія, яка полягає в тому, що студент знає відповідь на і-е питання.

$$P(A_1\cap A_2\cap A_3)=P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1\cap A_2)=$$

$$=\frac{20}{25}\cdot\frac{19}{24}\cdot\frac{18}{23}=0,496$$

Відповідь: $0,496$.

Приклад 2.3. Два стрільці виконують постріли в ціль. Ймовірність того, що перший стрілець попаде в ціль (подія A) дорівнює $0,8$, а другий (подія B) – $0,9$. Яка ймовірність того, що: а) вцілить хоча б один стрілець; б) вцілить тільки один стрілець?

Розв'язання. а) Нехай подія C полягає в тому, що відбулась хоча б одна з подій A, B. Враховуючи, що $P(\overline{A}) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$ та $P(\overline{B}) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$. Маємо

$$P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - P(\overline{A})P(\overline{B}) = 1 - 0{,}2 \cdot 0{,}1 = 0{,}98.$$

Або

$$P(C) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) =$$
$$= 0{,}8 + 0{,}9 - 0{,}8 \cdot 0{,}9 = 0{,}98$$

б) Нехай подія D полягає в тому, вцілить тільки один стрілець.

$$P(D) = P\left(A\overline{B} \cup \overline{A}B\right) = P\left(A\overline{B}\right) + P\left(\overline{A}B\right) =$$
$$= P(A)P\left(\overline{B}\right) + P\left(\overline{A}\right)P(B) =$$
$$= 0{,}8 \cdot 0{,}1 + 0{,}2 \cdot 0{,}9 = 0{,}08 + 0{,}18 = 0{,}26$$

Відповідь: а) $0{,}98$; б) $0{,}26$.

Приклад 2.4. У кошику n куль, білі або чорні. Усі припущення про число білих куль в кошику рівноможливі. З кошика навмання беруть одну кулю. Яка ймовірність того, що вона біла?

Розв'язання. Введемо гіпотези стосовно складу кошика: H_i – i куль білі, $n - i$ – чорні, $i = 0, 1, \ldots, n$. Оскільки усі припущення рівноможливі, то $P(H_i) = \dfrac{1}{n+1}$. З урахуванням вказаних припущень знайдемо умовні ймовірності: $P(A / H_i) = \dfrac{i}{n}$, $i = 0, 1, \ldots, n$. За формулою повної ймовірності (2.1) маємо

$$P(A) = \sum_{i=0}^{n} P(A / H_i)P(H_i) =$$
$$= \frac{1}{n(n+1)} \sum_{i=0}^{n} i = \frac{1}{n(n+1)} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}.$$

Відповідь: $\frac{1}{2}$.

Приклад 2.5. Є три кошика: в першому 10 білих куль та 5 чорних; в другому 8 білих куль та 7 чорних; в третьому – 6 білих (чорних немає). Вибрали навмання один із кошиків та вийняли з нього кулю. Ця куля виявилася білою. Знайти ймовірність того, що ця куля була вийнята з першого кошика.

Розв'язання. Нехай подія A – вийняли з кошика білу кулю; подія H_1 – куля була вийнята з першого кошика; подія H_2 – куля була вийнята з другого кошика; подія H_3 – куля була вийнята з третього кошика.

Апріорні ймовірності цих гіпотез однакові: $P(H_i)=\frac{1}{3}$.

Знайдемо умовні ймовірності: $P(A/H_1)=\frac{10}{10+5}=\frac{2}{3}$,

$P(A/H_2)=\frac{8}{8+7}=\frac{8}{15}$, $P(A/H_3)=1$

Тоді ймовірність вийняти з кошика білу кулю знайдемо за формулою (2.1):

$$P(A)=\sum_{j=1}^{3}P(A/H_j)P(H_j)=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}+\frac{8}{15}+1\right)=\frac{11}{15}$$

З формулою Байєса (2.2) маємо ймовірність того, що біла куля була вийнята з першого кошика:

маємо $P(H_1/A)=\frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}}{\frac{11}{15}}=\frac{10}{33}$.

Відповідь: $\frac{10}{33}$.

Завдання

1. Кидають два гральні кубики. Знайти ймовірність того, що сума чисел на гранях, що випали – парна, причому на грані хоча б одного із кубиків з'явиться число 6.

2. Підкинули два гральні кубики. Яка ймовірність того, що на обох кульках випали парні числа, якщо відомо сума чисел, що випали, дорівнює 6?

3. У продаж надійшло 1000 лотерейних білетів, серед яких 100 виграшних. Яка ймовірність хоча б одного виграшу при купівлі 3 білетів?

4. Три стрільці одночасно стріляють у мішень. Ймовірності влучення для них дорівнюють відповідно $p_1 = 0{,}2$, $p_2 = 0{,}4$, $p_3 = 0{,}6$. а) Яка ймовірність хоча б одного влучення? б) Відомо, що відбулося лише одне влучення. Яка ймовірність того, що влучив перший, другий або третій мисливець?

5. До кошика, який містить дві кулі покладено білу кулю, після чого із нього навмання взято одну кулю. Знайти ймовірність того, що взята куля буде білою. Всі припущення про початковий склад куль є рівноможливі.

6. Серед 30 екзаменаційних білетів є 3 щасливих. За білетами студенти підходять один за одним. У кого більша ймовірність узяти щасливий білет: у того, хто підійшов першим, чи у того, хто підійшов другим.?

7. Маємо дві монети: справжню та фальшиву. Фальшива монета випадає гербом у два рази частіше, ніж решіткою. Підкидаємо навмання обрану монету. Вона випала гербом. Яка ймовірність того, що ця монета фальшива?

8. У ящику знаходиться 15 тенісних м'ячів, з яких 9 є новими. Для першої гри навмання беруть 3 м'ячі, які після цього повертають у ящик. Для другої гри також навмання беруть 3 м'ячі. Знайти ймовірність того, що усі м'ячі, які узяли для другої гри, є новими.

9. У двох кошиках знаходиться 10 і 15 куль відповідно. У першому кошику: 3 білих куль та 7 чорних куль, у

другому – 5 та 10. З першого кошика переклали до другого одну кулю, колір якої невідомий. Після цього з другого кошика беруть одну кулю. Яка ймовірність, що ця куля чорна?

10. Дві фабрики виробляють деяку продукцію. Частина браку на першій фабриці складає 3 %, а на другій – 5 %. Навмання обрано фабрику і придбано 100 одиниць продукції. Яка ймовірність того, що серед них буде 2 бракованих?

11. Деталі виробляють на двох заводах. Об'єм продукції на другому заводі у 3 раз більший, ніж на першому. Частина браку на першому заводі – $0{,}03$, на другому заводі – $0{,}05$. Навмання обрана деталь виявилась бракованою. Яка ймовірність того, що вона зроблена на другому заводі?

12. З урни, яка містить 7 білих куль і 8 чорних куль, загубили одну кулю. Для того, щоб визначити склад куль в урні, з урни взяли дві кулі. Вони виявилися білими. Обчислити ймовірність того, що загублена куля була білою.

13. В урні знаходиться одна куля, про яку відомо, що вона або біла, або чорна. В цю урну кладуть білу кулю і після перемішування навмання виймають одну кулю. Вона виявляється білою. Яка ймовірність того, що в урні залишилася біла куля?

14. У рибалки є три місця для ловлі риби, які він відвідує рівноймовірно. Відомо, що якщо він закидає вудку на першому місці, то риба клює з ймовірністю $0{,}9$, на другому – ймовірністю $0{,}7$, на третьому - з ймовірністю $0{,}91$. На ловлі риби рибак три рази закинув вудку, а риба клюнула тільки один раз. Треба знайти ймовірність того, що це трапилося на першому місці.

15. Імовірність поразки футбольної команди №1 у матчі з командою №2 при дощовій погоді становить $0{,}5$, а при відсутності дощу – $0{,}6$. Імовірність дощу у день матчу

становить $0{,}2$. а) Знайти ймовірність уникнення поразки командою №1. б) Футбольна команда №1 зазнала поразки. Яка ймовірність того, що матч відбувається при дощовій погоді?

16. З 10 стрільців п'ять влучають у мішень з ймовірністю $0{,}8$, два влучають з ймовірністю $0{,}7$ і три стрільці з ймовірністю $0{,}5$. Навмання обраний стрілець зробив постріл, але у мішень не влучив. До якої групи найбільш ймовірно він належить?

3. Схема незалежних випробувань Бернуллі. Найімовірніше число успіхів. Практичне використання граничних теорем.

Схемою Бернуллі називається послідовність незалежних випробувань, якщо всі n випробувань проводять в однакових умовах та ймовірність появи деякої події A не залежить від появи в інших випробуваннях.

Ймовірність k успіхів у n випробуваннях обчислюється за біноміальною формулою:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}. \qquad (3.1)$$

Граничні теореми у схемі Бернуллі:

Теорема 3.1. *(Терема Пуассона).* Якщо $P_n(k)$- ймовірність k успіхів у серії з n випробувань Бернуллі, в кожному з яких ймовірність успіху дорівнює $\frac{\lambda}{n}$, то

$$\lim_{n \to \infty} P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

На практиці теоремою Пуассона користуються у формі наближеної рівності

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \text{ де } \lambda = np. \qquad (3.2).$$

Формулу доцільно використовувати при великих n та

$p \le 0{,}1$, $\lambda = np \le 10$.

Для знаходження найбільш імовірного значення k_0 числа появ події А використовують нерівність

$$np - q \le k_0 \le np + p \tag{3.3}$$

Якщо $np - q$ – неціле, то є одне таке значення k_0, якщо $np - q$ – ціле, то таких значень два.

Теорема 3.2. (*Локальна теорема Муавра-Лапласа)* Якщо у схемі Бернуллі кількість випробувань n достатньо велика та ймовірність p появи події A в усіх випробуваннях однакова, то ймовірність появи події A k разів може бути знайдена за наближеною формулою:

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x), \tag{3.4}$$

де $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ – локальна функція Лапласа,

$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$.

Теорема 3.3 (*Інтегральна теорема Муавра-Лапласа)* Якщо у схемі Бернуллі в кожному з n незалежних випробувань ймовірність p появи події A в усіх випробуваннях однакова, то ймовірність появи події A не менше k_1 та не більше k_2 разів може бути знайдена за наближеною формулою:

$$P_n(k_1, k_2) = P\{k_1 \le \mu \le k_2\} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{x^2}{2}} dx =$$

$$= \Phi_0(x_2) - \Phi_0(x_1), \tag{3.5}$$

де $\Phi_0(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ – інтегральна функція Лапласа,

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}},\ x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Приклад 3.1. Прилад складено з 8 блоків, ймовірність безвідмовної роботи кожного з них становить $0,9$. Блоки можуть виходити з ладу незалежно один від одного. Знайти імовірність того, що а) відмовлять два блоки; б) відмовить хоча б один блок; в) відмовлять не менше трьох блоків.

Розв'язання. Позначимо подію A – відмова блока, тоді ймовірність появи такої події постановить $p = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$, де ймовірність безвідмовної роботи $q = 0{,}9$. Згідно з умовою задачі $n = 8$. Використовуючи біноміальну формулу (3.1), маємо

Розв'язання.

а) $P_8(2) = C_8^2 p^2 q^6 = 28 \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}9^6 = 0{,}15$;

б) $\sum\limits_{k=1}^{8} P_n(k) = 1 - P_8(0) = 1 - C_8^0 p^0 q^8 =$

$= 1 - q^8 = 1 - 0{,}9^8 = 1 - 0{,}43 = 0{,}57;$

в) $\sum\limits_{k=3}^{8} P_n(k) = 1 - \sum\limits_{k=0}^{2} P_n(k) =$

$= 1 - \left(C_8^0 p^0 q^8 + C_8^1 p^1 q^7 + C_8^2 p^2 q^6\right) =$

$= 1 - 0{,}9^8 = 1 - (0{,}43 + 0{,}38 + 0{,}15) = 0{,}04$

Відповідь: а) $0{,}15$; б) $0{,}57$; в) $0{,}04$.

Приклад 3.2. Скільки випробувань Бернуллі з ймовірністю успіху $p = 0{,}01$ потрібно провести, щоб ймовірність хоча б одного успіху була не менше $\frac{1}{2}$?

Розв'язання. Оскільки ймовірність того, що відбудеться хоча б один успіх є $1-P_n(0)$, то за умовою задачі потрібно знайти таке n, для якого $1-P_n(0)\geq\frac{1}{2}$.

Тобто, $1-(0{,}99)^n\geq\frac{1}{2}$. Звідси $n\geq log_{0,99}0{,}5\approx 68{,}97$.

Враховуючи, що шукане n є натуральним числом, маємо $n\geq 69$.

Відповідь: $n\geq 69$.

Приклад 3.3. Два рівносильні шахісти грають в шахи. Що є більш ймовірним: виграти дві партії з чотирьох чи три партії із шести (нічия до уваги не приймається)?

Розв'язання. Ймовірність виграшу становить $p=\frac{1}{2}$, ймовірність програшу також дорівнює $q=\frac{1}{2}$. Оскільки ймовірність виграшу у всіх партіях постійна та не має різниці, в якій послідовності будуть виграні партії, то застосовується біноміальна формула (3.1):

$$P_4(2)=C_4^2p^2q^2=C_4^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{6}{16}$$

$$P_6(3)=C_6^3p^3q^3=C_6^3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{5}{16}$$

Відповідь: оскільки $\frac{6}{16}>\frac{5}{16}$, то ймовірніше виграти дві партії з чотирьох, ніж три партії із шести.

Приклад 3.4. Передається 5 повідомлень по каналу сполучень, кожне з яких з імовірністю 0,3 незалежно від інших спотворюється. Знайти найімовірнішу кількість спотворень.

Розв'язання. Згідно з умовою: $n = 5$, $p = 0{,}3$, $q = 1 - p = 0{,}7$. Виконаємо підстановку цих значень у формулу (3.3), маємо

$$5 \cdot 0{,}3 - 0{,}7 \le k_0 \le 5 \cdot 0{,}3 + 0{,}3,$$

$$0{,}8 \le k_0 \le 1{,}8.$$

Відповідь: $k_0 = 1$.

Приклад 3.5. Гральний кубик підкидають 35 разів. Яке найімовірніше число появ грані із одиницею?

Розв'язання. Найімовірніше число k_0 подій обчислюється за формулою (3.3). В умові задано, що $n = 35$, $p = \frac{1}{6}$, $q = 1 - p = \frac{5}{6}$. Тоді

$$35 \cdot \frac{1}{6} - \frac{5}{6} \le k_0 \le 35 \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6},$$

$$5 \le k_0 \le 6.$$

Відповідь: існує два найімовірніших значення: 5 та 6.

Приклад 3.6. Завод відправив на базу 5000 виробів. Ймовірність того, що виріб зіпсується в дорозі, дорівнює $0{,}002$. Знайти ймовірність, що до бази надійдуть рівно 10 зіпсованих виробів.

Розв'язання. Нехай A – дана подія. В умові задачі задано, що $n = 5000$, $p = 0{,}002$, $k = 10$. Оскільки подія A – малоймовірна, використаємо формулу Пуассона (3.2).

Оскільки $\lambda = 5000 \cdot 0{,}002 = 10$, то

$$P(A) = P_{5000}(10) \approx \frac{10^{10}}{10!} \cdot e^{-10} = 0{,}125.$$

Відповідь: $0{,}125$.

Приклад 3.7. Знайти ймовірність того,що при 6000 киданнях грального кубика грань з двома очками випаде 900 разів.

Розв'язання. Нехай A – дана подія. В умові задачі задано, що $n = 6000$, $k = 900$. Ймовірність успіху становить $p = \frac{1}{6}$, а імовірність протилежної події: $q = \frac{5}{6}$. Використаємо локальну теорему Муавра-Лапласа та формулу (3.4).

Визначаємо $\sqrt{npq} = \sqrt{6000 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} = \sqrt{833{,}3} = 28{,}87$

та

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{-100}{28{,}87} = -3{,}46\,.$$

Звідси,

$$P(A) = P_{6000}(900) \approx \frac{\varphi(-3{,}46)}{28{,}87} = \frac{\varphi(3{,}46)}{28{,}87} = \frac{0{,}001}{28{,}87} = 0{,}000034$$

Значення $\varphi(3{,}46)$ знаходимо за таблицею локальної функція Лапласа .

Відповідь: $0{,}000034$.

Приклад 3.8. Ймовірність появи події A рівна $0{,}35$. Знайти ймовірність того, що в серії з 250 випробувань дана подія з`явиться від 90 до 110 разів.

Розв'язання. Нехай A – шукана подія. В умові задачі задано, що $n = 250$, $k_1 = 90$, $k_2 = 110$, $p = 0{,}35$, $q = 0{,}65$. Скористаємось інтегральною формулою Муавра-Лапласа (3.5).

$$.\ \sqrt{npq} = \sqrt{250 \cdot 0{,}35 \cdot 0{,}65} = 7{,}5416.$$

$$P(A)=P_{250}(90,110)=P(90<\mu<110)\approx$$

$$\approx\Phi_0\left(\frac{110-250\cdot 0,35}{7,542}\right)-\Phi_0\left(\frac{90-250\cdot 0,35}{7,542}\right)=$$

$$=\Phi_0(2,98)-\Phi_0(0,33)=0,4986-0,129=0,3693.$$

Значення $\Phi_0(2,98)$ та $\Phi_0(0,33)$ знаходимо за таблицею інтегральної функція Лапласа .

Відповідь: $0,3693.$

Завдання.

1. Скільки разів потрібно підкинути три монети, щоб ймовірність появи принаймні один раз трьох аверсів була більшою за $0,8$.

2. Гральний кубик підкидають 5 разів. Знайти ймовірність того, що два рази з'явилося число очок, яке кратне трьом?

3. Зроблено 20 пострілів в ціль. Ймовірність влучення при одному пострілі дорівнює 0.7. Обчислити: а) ймовірність того, що буде принаймні одне влучення; б) ймовірність того, що буде не більше двох влучень;в) найбільш ймовірне число влучень.

4. Стрілець зробив 14 пострілів по об'єкту. Ймовірність влучення дорівнює $0,2$. Обчислити:а) найбільш ймовірне число влучень; б) ймовірність знищення об'єкту, якщо для знищення потрібно не менше чотирьох влучень.

5. Відділ технічного контролю перевіряє партію із 10 деталей. Ймовірність того, що деталь стандартна дорівнює $0,75$. Знайти найімовірніше число деталей, які будуть визнані стандартними.

6. Випробуються кожні із 15 елементів деякого пристрою. Ймовірність того, що елемент витримає випробування дорівнює $0,9$. Знайти найімовірніше число елементів, які витримають випробування.

7. Ймовірність виготовлення стандартної деталі дорівнює $0,95$. Скільки деталей повинно бути в партії, щоб

найімовірніше число нестандартних деталей в ній дорівнювало 55?

8. Урна містить 20 білих та 5 чорних куль. Послідовно виймають 6 куль, після кожного вибору куля повертається до урни (вибір з поверненням). Яка ймовірність того, що серед вибраних куль буде: 1) рівно 4 білих;2) менше 4 білих;3) не менше 4 білих; 4) не більше 4 білих; 5) більше 4 білих; 6) не менше 3 та не більше 5 білих.

9. Гральний кубик кинули 10 разів. Знайти ймовірність того, що кількість очок, кратна трьом випаде: а) три рази; б) не менше трьох разів; в) не більше трьох разів.

10. Урна містить 10 білих та одну чорну кулю. Скільки разів треба виймати по одній кулі з поверненням, щоб ймовірність появи хоча б однієї чорної кулі була не менше $0{,}9$?

11. З умов випуску лотереї відомо, що виграє $0{,}04$ всіх випущених білетів. Скільки треба купити білетів, щоб ймовірність виграшу була не менше $0{,}99$? Яка ймовірність того, що з 200 білетів виграє не менше п'яти?

12. На факультеті навчається 1200 студентів. Ймовірність народження кожного студента в даний день дорівнює $1/365$. Знайти: а) найімовірніше число студентів, що народилися 1 квітня; б) ймовірність того, що 1 квітня народилося рівно 5 студентів; в) ймовірність того, що знайдуться 3 студенти, що народилися 1 квітня.

13. Ймовірність влучити в мішень при одному пострілі дорівнює $0{,}01$. Знайти ймовірність того, що при 900 пострілах в мішень буде вцілено 20 раз.

14. Монета була кинута 2000 разів. Знайти ймовірність того, що герб випаде рівно 1000 разів.

15. Знайти ймовірність того, що подія A відбудеться 1400 разів в 2400 випробуваннях, якщо ймовірність появи події в кожному із випробуваннях становить $0{,}6$.

16. Монету кинуто 2500 разів. Знайти ймовірність того, що число появ герба лежатиме в межах між числами 1225 та 1275.

4. Дискретні випадкові величини та їх характеристики.

Випадкова величина називається **дискретною**, якщо значення, які вона може набувати, утворюють тільки скінчену або зліченну множину.

Позначимо $\{\xi = x_k\}$– подію «випадкова величина ξ набуває значення x_k»:

$$\{\xi = x_k\} = \{\omega : \xi(\omega) = x_k, \omega \in \Omega\}.$$

Ймовірність такої події підраховується за формулою

$$P\{\xi = x_k\} = \sum_{\omega : \xi(\omega) = x_k} P(\omega) = p_k.$$

Закон розподілу випадкової величини ξ задається значеннями $x_1, x_2, ..., x_k, ...$, які приймає ξ, та ймовірностями набування цих значень $P\{\xi = x_k\} = p_k$.

Закон розподілу можна визначати за допомогою таблиці:

x_1	x_2	$\cdots$	x_k	$\cdots$
p_1	p_2	$\cdots$	p_k	$\cdots$

Значення $x_1, x_2, ..., x_k, ...$ випадкової величини можуть бути будь-якими, для ймовірностей очевидно має виконуватися наступне: $p_k \geq 0$, $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$.

Окрім табличного задання закону розподілу існує аналітичний та графічний.

Основні числові характеристики дискретних випадкових величин:

1) математичне сподівання: $M\xi = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$;

2) дисперсія: $D\xi = M(\xi - M\xi)^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (x_k - M\xi)^2 p_k$

або у більш зручній формі:

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 p_k - (M\xi)^2 .$$

Приклад 4.1. Задано закон розподілу випадкової величини ξ

x_i	1	2	3
p_i	0,25	0,4	0,35

Знайти закон розподілу функції $\eta = \xi^2$.

Розв'язання. Для заданої множини значень ξ функція $\eta = \xi^2$ приймає значення: $y_1 = 1^2 = 1$, $y_2 = 2^2 = 4$, $y_3 = 3^2 = 9$. Отже, закон розподілу $\eta = \xi^2$ має вигляд:

x_i	1	4	9
p_i	0,25	0,4	0,35

Приклад 4.2. Задано закон розподілу випадкової величини ξ

x_i	-2	-1	0	1	2
p_i	0,15	0,15	0,4	0,12	0,18

Знайти закон розподілу функції $\eta = \xi^2$.

Розв'язання. Оскільки $\eta = \xi^2$, то значення функції

$y_1 = 4$, $y_2 = 1$, $y_3 = 0$, $y_4 = 1$, $y_5 = 4$.

Якщо значення повторюються, то залишаємо одне та відповідні ймовірності додаємо. Для значення 1 маємо

$$q_2 = P\{\eta = 1\} = p_2 + p_4 = 0{,}15 + 0{,}12 = 0{,}27.$$

Для значення 4 маємо

$$q_3 = P\{\eta = 4\} = p_1 + p_5 = 0{,}15 + 0{,}18 = 0{,}33.$$

Отже, закон розподілу функції $\eta = \xi^2$

x_i	0	1	4
q_i	0,4	0,27	0,33

Приклад 4.3. Експеримент полягає у підкиданні симетричного однорідного грального кубика. Нехай випадкова величина ξ дорівнює кількості очок, які випадають на верхній грані при одному підкиданні. Побудувати функцію розподілу випадкової величини ξ.

Розв'язання. Закон розподілу випадкової величини ξ має вигляд:

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Побудуємо функцію розподілу.

Якщо $x \le 1$ $F(x) = 0$, тому що ξ не приймає значення менше 1.

Якщо $1 < x \le 2$, то

$$F(x) = P\{\xi < x\} = P\{\xi = 1\} = \frac{1}{6}.$$

Якщо $2 < x \le 3$, то

$$F(x) = P\{\xi < x\} = P\{\xi = 1\} + P\{\xi = 2\} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}.$$

Якщо $3 < x \le 4$, то

$$F(x) = P\{\xi < x\} = P\{\xi = 1\} + P\{\xi = 2\} + P\{\xi = 3\} =$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

Якщо $4 < x \le 5$, то $F(x) = P\{\xi < x\} = 4 \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$.

Якщо $5 < x \le 6$, то $F(x) = \frac{5}{6}$. Якщо $x > 6$, то $F(x) = 1$.

Отже,

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & при\ x \le 1, \\ \frac{1}{6}, & при\ 1 < x \le 2, \\ \frac{1}{3}, & при\ 2 < x \le 3, \\ \frac{1}{2}, & при\ 3 < x \le 4, \\ \frac{2}{3}, & при\ 4 < x \le 5, \\ \frac{5}{6}, & при\ 5 < x \le 6, \\ 1, & при\ x > 6. \end{cases}$$

Приклад 4.4. Для випадкової величини ξ, що розподілена за законом Пуассона знайти математичне сподівання та дисперсію.

Розв'язання. Математичне сподівання:

$$M\xi = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} =$$

$$= \lambda e^{-\lambda} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda$$

Для визначення дисперсії скористаємося формулою $D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2$. Знайдемо спочатку початковий момент другого порядку.

$$M\xi^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} =$$

$$= \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \big((k-1)+1\big) \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} =$$

$$= \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} (k-1) \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} + \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} =$$

$$= \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} =$$

$$= \lambda^2 e^{-\lambda} e^{\lambda} + \lambda\, e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda^2 + \lambda.$$

Отже, $D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = (\lambda^2 + \lambda) - (\lambda)^2 = \lambda$.

Відповідь: $M\xi = \lambda$, $D\xi = \lambda$.

Приклад 4.5. Закон розподілу випадкової величини ξ має вигляд:

x_i	0	1	2	3
p_i	0,3	0,2	0,1	0,4

Знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення випадкової величини ξ.

Розв'язання. Математичне сподівання:

$$M\xi = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k = 0 \cdot 0{,}3 + 1 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 0{,}1 + 3 \cdot 0{,}4 =$$

$$= 0{,}2 + 0{,}2 + 1{,}2 = 1{,}6.$$

Для визначення дисперсії скористаємося формулою $D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2$. Знайдемо спочатку початковий момент другого порядку.

$$M\xi^2 = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 p_k = 0^2 \cdot 0{,}3 + 1^2 \cdot 0{,}2 + 2^2 \cdot 0{,}1 + 3^2 \cdot 0{,}4 =$$

$$= 0{,}2 + 0{,}4 + 3{,}6 = 4{,}2.$$

$$D\xi = 4{,}2 - 1{,}6^2 = 1{,}64.$$

Середнє квадратичне відхилення: $\sigma = \sqrt{1{,}64} \approx 1{,}28$.

Відповідь: $M\xi = 1{,}6$, $D\xi = 1{,}64$, $\sigma = 1{,}28$.

Завдання.

1. В партії із 20 деталей є 5 стандартних. Навмання вибирають 3 деталі. Скласти закон розподілу кількості стандартних деталей серед відібраних. Побудувати функцію розподілу.
2. Дано функцію розподілу дискретної випадкової величини

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2; \\ 0{,}2, & 2 < x \le 3; \\ 0{,}5, & 3 < x \le 4; \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

Знайти розподіл випадкової величини ξ та $P\{1 \le \xi \le 3\}$.

3. Розподіл випадкової величини ξ задано таблицею:

x_i	$\pi/2$	π	$3\pi/2$
p_i	0,2	0,7	0,1

Знайти розподіл випадкової величини $\eta = \sin\xi$.

4. Розподіл випадкової величини ξ задано таблицею:

x_i	0	4	5	8
p_i	0,15	--	0,33	0,22

Знайти: відсутнє значення ймовірності, $P\{\xi \le 4\}$ та побудувати многокутник розподілу.

5. Підкидаються два гральних кубики випадкова величина ξ визначається як сума очок, що випали при підкиданні. Знайти розподіл, математичне сподівання та дисперсію випадкової величини ξ

6. Випадкова величина ξ приймає значення -1, 0, 1 ймовірностями $1/3$. Знайти розподіл випадкової величини $\eta = |\xi|$, $M\xi$ та $D\xi$, $M\eta$ та $D\eta$.

7. Випадкова величина ξ приймає значення -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 з ймовірностями 1/16, 1/16, 1/8, 1/4, 1/4, 1/8, 1/16, 1/16 відповідно. Треба знайти розподіл випадкових величин $\eta = \xi - 3$ та $\mu = \xi^2 - 1$, їхні математичні сподівання та дисперсії.

8. Випадкова величина ξ приймає значення -1, 0, 1, 2 з ймовірностями $0{,}2$, $0{,}1$, $0{,}3$, $0{,}4$ відповідно. Знайти розподіл випадкової величини $\eta = 2^{\xi}$, $M\eta$ та $D\eta$.

9. Дискретна випадкова величина ξ приймає тільки два можливі значення: x_1 та x_2, причому $x_1 < x_2$. Ймовірність того, що ξ прийме значення x_1, дорівнює $0{,}2$. Знайти закон розподілу ξ, якщо математичне сподівання $M\xi = 2{,}6$, а середньо квадратичне відхилення $\sigma_{\xi} = 0{,}8$.

10. Для випадкової величини, що має біноміальний розподіл знайти математичне сподівання та початковий момент другого порядку.

11. Гральний кубик підкидають n раз. Нехай ξ – число появ одиниці. Знайти $M\xi$.

12. Випадкові величини ξ та η є незалежними. Визначити математичне сподівання та дисперсію випадкової величини ζ: а) $\zeta = 2\xi + 3\eta$, якщо $D\xi = 3$, $D\eta = 1$; б) $\zeta = 6\xi - 2\eta$, якщо $D\xi = 3$, $D\eta = 2$.

13. Підкидають n гральних кубиків. Знати математичне сподівання та дисперсію суми числа очок, що випадуть на всіх гранях.

14. Монету підкидають до першої появи герба. Знайти середнє число підкидань.

15. Ймовірність відмови деталі при випробуванні на надійність дорівнює $0{,}1$. Знайти математичне сподівання та дисперсію числа таких деталей (ξ), що відмовили, якщо для випробування надійде 40 деталей.

16. Нехай ξ – випадкова величина, яка має біноміальний розподіл з параметрами n і p. Відомо, що $M\xi = 12$, $D\xi = 4$. Знайти n і p.

17. Випадкова величина ξ має розподіл Пуассона із математичним сподіванням $M\xi = 3$. Знайти $P\{\xi < 3\}$.

18. Випадкова величина ξ має розподіл Пуассона з параметром λ. Знайти $M\dfrac{1}{1+\xi}$

5. Неперервні випадкові величини та їх характеристики.

Випадкову величину ξ називають **неперервною**, якщо її функцію розподілу можна подати у вигляді

$$F(x) = P\{\xi < x\} = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

Функцію $f(x)$ називають **функцією щільності**, яка має наступні властивості:

1) $f(x) \geq 0$, $\forall x$;

2) $f(x) = F'(x)$;

3) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

Для неперервної випадкової величини при будь-яких дійсних $a, b, a \le b$ мають місце рівності:

$$P\{a < \xi \le b\} = F(b) - F(a)$$

або
$$P\{a < \xi \le b\} = \int\limits_a^b f(x)dx.$$

Числові характеристики неперервних випадкових величин:

1) Математичним сподіванням неперервної випадкової величини ξ називають число $M\xi$, яке визначається формулою

$$M\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx. \qquad (5.1)$$

При цьому припускається, що інтеграл (5.1) збігається абсолютно, тобто існує $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x)dx.$

2) Дисперсією неперервної випадкової величини ξ називають число $D\xi$, яке визначається формулою

$$D\xi = M(\xi - M_\xi)^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - M_\xi)^2 f(x)dx. \qquad (5.2)$$

Для обчислення дисперсії неперервної випадкової величини ξ можна також використовувати більш зручну формулу:

$$D\xi = M\xi^2 - (M_\xi)^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - (M_\xi)^2. \qquad (5.3)$$

Для нормально розподіленої випадкової величини ξ з параметрами m та σ^2 справедливе наступне.

1) Правило **трьох** σ**:** Практично вірогідно, що нормально розподілена випадкова величина може відхилятися від свого математичного сподівання не більше, ніж на потроєне середнє квадратичне відхилення.

2) Ймовірність того, що випадкова величина ξ набуде значення з інтервалу (α,β), визначається наступним чином:

$$P\{\alpha<\xi<\beta\}=F(\beta)-F(\alpha)=\Phi_0\left(\frac{\beta-m}{\sigma}\right)-\Phi_0\left(\frac{\alpha-m}{\sigma}\right),$$

де $\Phi_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{y^2}{2}}dy$.

3) Ймовірність того, що абсолютна величина різниці значень нормально розподіленої випадкової величини ξ та її математичного сподівання $m=M\xi$ менше за будь-яке число $\delta>0$:

$$P\{|\xi-m|<\delta\}=2\Phi_0\left(\delta/\sigma\right).$$

Зокрема, при $m=0$, справедлива рівність $P\{|\xi|\le\delta\}=2\Phi_0\left(\delta/\sigma\right)$.

Приклад 5.1. Знайти математичні сподівання та дисперсію для випадкової величини ξ, що розподілена за рівномірним законом з параметрами a та b.

Розв'язання. Зважаючи на вигляд функції щільності випадкової величини з рівномірним законом розподілу

$$f_\xi(x)=\begin{cases}0, & x<a, x>b,\\ \dfrac{1}{b-a}, & a\le x\le b,\end{cases}$$

за формулою (5.1) знаходимо математичне сподівання:

$$M\xi = \int_a^b x\frac{1}{b-a}dx = x^2\frac{1}{2(b-a)}\Bigg|_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

Для визначення дисперсії використовуємо формулу (5.3).

$$M\xi^2 = \int_a^b x^2\frac{1}{b-a}dx = \frac{x^3}{3(b-a)}\Bigg|_a^b = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{a^2+ab+b^2}{3},$$

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Відповідь: $M\xi = \dfrac{a+b}{2}, D\xi = \dfrac{(b-a)^2}{12}$.

Приклад 5.2. Випадкова величина ξ розподілена за нормальним законом із параметрами m та σ^2. Знайти $M\xi$, $D\xi$.

Розв'язання. Зважаючи на вигляд функції щільності нормально розподіленої випадкової величини

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \sigma > 0, -\infty < x < +\infty,$$

за формулою (5.1) знайдемо математичне сподівання ξ:

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} t = \dfrac{x-m}{\sigma\sqrt{2}} & x = t\sigma\sqrt{2}+m \\ dt = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2}}dx & dx = \sigma\sqrt{2}dt \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(t\sigma\sqrt{2} + m\right) e^{-t^2} dt =$$

$$= \frac{\sigma\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} te^{-t^2} dt + \frac{m}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = m.$$

Оскільки $\int_{-\infty}^{+\infty} te^{-t^2} dt = 0$, $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$.

Дисперсію ξ знаходимо за формулою (5.2):

$$D\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M\xi)^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m)^2 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} t = \dfrac{x-m}{\sigma\sqrt{2}} & x = t\sigma\sqrt{2} + m \\ dt = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2}} dx & dx = \sigma\sqrt{2}dt \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} 2t^2 e^{-t^2} \sigma^2 \sigma\sqrt{2}dt = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = t & dv = 2te^{-t^2} dt \\ du = dt & v = -e^{-t^2} \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \left(\underbrace{-te^{-t^2} \Big|_{-\infty}^{+\infty}}_{=0} + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt \right) = \frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\pi} = \sigma^2.$$

Відповідь: $M\xi = m$, $D\xi = \sigma^2$. Нормальний розподіл повністю визначається своїм математичним сподіванням та дисперсією.

Приклад 5.3. Дано математичне сподівання та середнє квадратичне відхилення нормально розподіленої випадкової величини ξ відповідно дорівнює 5 та 2. Знайти ймовірність того, що випадкова величина ξ в результаті випробування прийме значення з інтервалу $(7;9)$.

Розв'язання:

$$P\{7<\xi<9\}=\Phi_0\left(\frac{9-5}{2}\right)-\Phi_0\left(\frac{7-5}{2}\right)=$$

$$=\Phi_0(2)-\Phi_0(1)=0{,}4772-0{,}3413=0{,}1359$$

Відповідь: $0{,}1359$.

Завдання.

1. Дана функція розподілу неперервної випадкової величини ξ:

$$F_\xi(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо } x\le 0,\\ \sin x, & \text{якщо } 0<x\le\dfrac{\pi}{2},\\ 1, & \text{якщо } x>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Знайти функцію щільність розподілу $f_\xi(x)$ та побудувати її графік.

2. Дана функція щільності неперервної випадкової величини ξ:

$$f_\xi(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо } x\le 0 \text{ та } x>\dfrac{\pi}{2},\\ \cos x, & \text{якщо } 0<x\le\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Знайти функція розподілу $F_{\xi}(x)$. Побудувати графік функції розподілу.

3. Дана функція щільності неперервної випадкової величини ξ:

$$f_{\xi}(x)=\begin{cases}0, \quad якщо\ x\le\dfrac{\pi}{4}\ та\ x>\dfrac{\pi}{2},\\[2ex] 2sin2x, \quad якщо\ \dfrac{\pi}{4}<x\le\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Знайти функція розподілу $F_{\xi}(x)$ та побудувати її графік функції.

4. Неперервна випадкова величина ξ задана щільністю розподілу

$$f_{\xi}(x)=\begin{cases}0, \quad якщо\ x\le 0\ та\ x>\dfrac{\pi}{3},\\[2ex] \dfrac{3}{2}sin3x, \quad якщо\ 0<x\le\dfrac{\pi}{3}\end{cases}$$

Знайти $P\left\{\dfrac{\pi}{6}<\xi<\dfrac{\pi}{3}\right\}$.

5. Випадкова величина ξ розподілена за показниковий законом зі щільністю розподілу

$$f_{\xi}(x)=\begin{cases}0, \quad якщо\ x<0\ ,\\ 2e^{-2x}, \quad якщо\ x\ge 0\end{cases}$$

Знайти $P\{2<\xi<4\}$.

6. Функція розподілу неперервної випадкової величини ξ має вигляд:

$$F_{\xi}(x)=\begin{cases}0, \quad якщо\ x\le 0,\\ 0{,}5x, \quad якщо\ 0<x\le 2,\\ 1, \quad якщо\ x>2.\end{cases}$$

Знайти математичне сподівання та дисперсію випадкової величини ξ.

7. Функція розподілу неперервної випадкової величини ξ має вигляд:

$$F_{\xi}(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо } x\le 0,\\ \dfrac{x}{4}, & \text{якщо } 0<x\le 4,\\ 1, & \text{якщо } x>4.\end{cases}$$

Знайти математичне сподівання та дисперсію випадкової величини ξ.

8. Функція розподілу неперервної випадкової величини ξ має вигляд:

$$F_{\xi}(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо } x\le 0,\\ ax^2, & \text{якщо } 0<x\le 1,\\ 1, & \text{якщо } x>1.\end{cases}$$

Знайти: 1) коефіцієнт a; 2) щільність розподілу $f_{\xi}(x)$; 3) ймовірність $P\{0{,}2<\xi\le 0{,}5\}$. Знайти математичне сподівання та дисперсію випадкової величини ξ.

9. Неперервна випадкова величина ξ задана щільністю розподілу

$$f_{\xi}(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо } x\notin(0,\pi),\\ \dfrac{1}{2}\sin 3x, & \text{якщо } x\in(0,\pi).\end{cases}$$

Знайти математичне сподівання функції $\eta=\varphi(\xi)=\xi^2$ (попередньо не знаходити щільність розподілу випадкової величини η).

10. Знайти математичне сподівання та дисперсію випадкової величини, що має показниковий розподіл зі щільністю розподілу $f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & якщо\ x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & якщо\ x \geq 0. \end{cases}$

11. Випадкова величина ξ має рівномірний розподіл із математичним сподіванням $M\xi = 5$ та дисперсією $D\xi = 3$. Знайти функцію розподілу та щільність розподілу ймовірностей випадкової величини ξ.

12. Випадкова величина має рівномірний розподіл з параметрами 0 та 1. Знайти: а) $M \sin^2 \pi\xi$; б) Me^{ξ}.

13. . Випадкова величина ξ має рівномірний розподіл на відрізку $[0, b]$. Відомо, що $P\left\{\xi \geq \dfrac{1}{3}\right\} = \dfrac{5}{6}$. Знайти b та початковий момент другого порядку $M\xi^2$.

14. Дана функція щільності неперервної випадкової величини ξ: $f_\xi(x) = 2k/\left(e^x + e^{-x}\right),\ -\infty < x < +\infty$. Знайти сталий параметр k.

15. Процентний вміст шкідливих речовин деякої ділянки є випадковою величиною ξ, що рівномірно розподілена на відрізку $[1{,}4;\ 3{,}6]$. Знайти щільність розподілу ймовірностей та функцію розподілу даної випадкової величини. Обчислити середнє значення та дисперсію процентного вмісту шкідливих речовин та ймовірність того, що ділянка містить від $2 - 3\%$ шкідливих речовин.

16. Перехрестя доріг оснащене світлофором. Проїзд дозволений за умови зеленого світла, що горить 1хв. Проїзд забороняється, якщо жовте та червоне світло, що горить протягом 45 с. Автомобіль під'їжджає до перехрестя у випадковий момент часу. Знайти ймовірність того,що він проїде перехрестя без зупинки.

17. Час безвідмовної роботи деталі є випадковою величиною, що розподілена за показниковим законом зі щільністю розподілу ймовірностей

$$f_{\xi}(t) = \begin{cases} 0, & \textit{якщо } t < 0, \\ 0{,}01e^{-0{,}01t}, & \textit{якщо } t \geq 0 \end{cases}$$

де t – час (год.). Знайти ймовірність того, що деталь буде працювати безвідмовно не менше 100 год.

Список літератури

1. Авраменко В. І., Карімов І. К. Теорія ймовірностей і математична статистика : навч. посібник. 2-ге вид., перероб. і доп. Дніпродзержинськ : ДДТУ, 2013. 245 с. URL: http://www.dstu.dp.ua/Portal/Data/3/21/7-18-b4.pdf

2. Андронов А. М., Копытов Е. А., Гринглаз Л. Я, Теория вероятностей и математическая статистика. С.П.Б. : Питер, 2004. 460 с.

3. Вентцель Е. С., Овчаров Л. А. Задачи и упражнения по теории вероятностей: учеб. пособие для студ. втузов, 5-е изд. М. : Издательский центр «Академия», 2003. 448 с.

4. Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М. : Высш. шк., 2002. 405 с.

5. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М. : Высшая школа, 2003. 479 с.

6. Дороговцев А. Я., Сильвестров Д. С., Скороход А. В., Ядренко М. И. Теория вероятностей. Сборник задач. Киев : Вища школа, 1980. 432 с.

7. Лебедєв Є. О., Шарапов М. М. Курс лекцій з теорії ймовірностей. К. : Норіта-плюс, 2007. 168 с.

8. Лебедєв Є. О., Братійчук М. С., Чечельницький О. А., Шарапов М. М., Розора І. В. Збірник задач з прикладної статистики : навчальний посібник. Київ, 2010. 116 с.

9. Шефтель З. Г. Теорія ймовірностей. К. : Вища школа, 1994. 193 с.