

Міністерство освіти і науки України  
Національний університет водного господарства та природокористування

**Іванчук Наталія Віталіївна**

УДК 519.87:631.41(043.2)

**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ФІЛЬТРАЦІЙНИХ ПРОЦЕСІВ В  
ГРУНТОВИХ СЕРЕДОВИЩАХ З УРАХУВАННЯМ ВПЛИВУ ЕЛЕМЕНТІВ  
ІНЖЕНЕРНИХ СПОРУД**

**01.05.02** – математичне моделювання та обчислювальні методи

**Автореферат**  
дисертації на здобуття наукового ступеня  
кандидата технічних наук

Рівне – 2019

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана у Національному університеті водного господарства та природокористування Міністерства освіти і науки України, м. Рівне.

**Науковий керівник:** доктор технічних наук, доцент  
**Мартинюк Петро Миколайович**,  
Національний університет водного  
господарства та природокористування,  
завідувач кафедри прикладної математики,  
м. Рівне.

**Офіційні опоненти:**

**Чернуха Ольга Юріївна**, доктор технічних наук, професор,  
Центр математичного моделювання Інституту прикладних  
проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН  
України, завідувач відділом математичного моделювання  
нерівноважних процесів, м. Львів;

**Богаєнко Всеволод Олександрович**, кандидат технічних  
наук, Інститут кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН  
України, старший науковий співробітник лабораторії  
методів математичного моделювання процесів  
екології та енергетики № 141, м. Київ.

Захист дисертації відбудеться « 21 » червня 2019 року о 12:00 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 47.104.09 в Національному університеті водного господарства та природокористування Міністерства освіти і науки України за адресою: 33028, м. Рівне, вул. Соборна, 11.

З дисертацією можна ознайомитися у бібліотеці Національного університету водного господарства та природокористування за адресою: 33017, м. Рівне, вул. Олекси Новака, 75.

Автореферат розісланий « 10 » травня 2019 року.

Вчений секретар  
спеціалізованої вченої ради

О. Р. Мічута

## ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

**Актуальність теми.** Використання ґрунтів в якості природного економічно вигідного матеріалу для будівництва гідротехнічних та гідромеліоративних об'єктів зумовив зростання інтересу до питань фільтрації та фільтраційних руйнувань пористих середовищ загалом і ґрунтів зокрема. При цьому ґрунтові масиви досить часто містять елементи інженерних споруд (водоводи, дренажні та меліоративні системи із перфорованих труб, системи підземних трубопроводів та ін.), які можуть суттєво впливати на перебіг фільтраційних процесів в цих середовищах. Питання впливу наявності таких елементів інженерних споруд на стійкість, наприклад, ґрунтових гребель, вимагає дослідження процесів фільтрації в навколотрубній зоні. Зокрема, можуть розвинути небезпечні фільтраційні деформації, викликані контактною зосередженою фільтрацією вздовж трубопроводу, що супроводжується розмивом ґрунтів та підйомом депресійної поверхні. Навіть при справній роботі трубопроводу може відбуватися суфозійний розмив ґрунту в навколотрубній зоні контактною зосередженою фільтрацією.

Включення із труб є невід'ємною складовою конструкцій і знехтувати їх наявністю не можна, оскільки вони є частиною інженерних рішень при зведенні чи конструюванні тієї чи іншої споруди водного господарства. Наприклад – біоплато, як споруди для очищення господарсько-побутових, виробничих стічних вод, забрудненого поверхневого стоку. У відомих конструкціях біоплато відбувається поступова кольматація порового простору фільтрувальної засипки та нижнього дренажу біоплівкою і мінералізованим осадом, накопичення мулу в донній частині споруди. Все це впливає на пористість фільтрувальної засипки, а звідси – на коефіцієнт фільтрації та продуктивність роботи. Для відновлення роботи біоплато необхідна їх періодична зупинка на складні і тривалі ремонтно-відновлювальні роботи, пов'язані з промивкою і регенерацією фільтрувальної засипки та дренажу. Тому актуальним є дослідження фільтраційних та суфозійно-кольматаційних процесів, що протікають в об'ємі фільтрувальної засипки біоплато під час фільтрування забрудненої води, в тому числі, з точки зору ефективності їх (біоплато) роботи.

Такі задачі, як дослідження ґрунтів в якості основ гідротехнічних об'єктів чи в якості матеріалу для їх спорудження обов'язково мають своєю складовою вивчення і прогнозування фільтраційних процесів в ґрунтах, що впливають на прогнозування щодо безаварійної роботи даних об'єктів. Питання руйнування пористого матеріалу ґрунтових масивів та їх стійкості є дуже важливим, оскільки несе за собою економічну, екологічну та гуманітарну загрози. Самі фільтраційні процеси в ґрунтових середовищах досить детально вивчені з точки зору математичного та комп'ютерного моделювання. При експлуатації інженерних споруд виникає низка інших задач, що потребують розв'язання, які вказують на актуальність подальших досліджень в даному напрямку. Зокрема, за наявності перфорованих труб починають проявлятися суфозійно-кольматаційні процеси, які, в свою чергу впливають і на фільтрацію. Так само, за наявності пошкоджень у водоводах ґрунтових гребель може відбуватися вимив ґрунту, а це може призвести до критичних ситуацій та аварій гідротехнічної споруди. Стосовно другої задачі, актуальність подальших досліджень проявляється в кількох аспектах. По-перше, за

наявності водоводу просторову модель фільтрації в тілі ґрунтової греблі не можна звести до двовимірної з використанням планової або профільної схем. Таке зведення призведе до суттєвих втрат і викривлень у фізиці досліджуваних процесів. По-друге, вже сама задача фільтрації в ґрунтовій греблі пов'язана з наявністю вільної межі. По-третє, урахування суфозійно-кольматаційних процесів призводить до нелінійних крайових задач для систем диференціальних рівнянь, де параметри одних процесів впливають на параметри інших процесів. Тому актуальною щодо вказаних проблем є також задача вибору ефективного методу розв'язання таких задач і програмного пакету для реалізації алгоритмів.

Проведення натурних експериментів є досить затратним, а, інколи, навіть неможливим. Тому, доцільним є прогнозування роботи ґрунтових споруд з елементами інженерних конструкцій та можливих їх пошкоджень ще на етапі проектування саме засобами математичного та комп'ютерного моделювання. Крім того, задача ідентифікації параметрів пористих середовищ, можливих ділянок пошкоджень трубопроводів та водоводів передбачає побудову математичної моделі.

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.** Робота виконана в рамках планів наукових досліджень Національного університету водного господарства та природокористування (НУВГП). Результати дисертаційної роботи отримані в рамках науково-дослідних тем, в яких здобувач була виконавцем: «Математичне і комп'ютерне моделювання нелінійних фізико-хімічних процесів гідромеханіки в багатокомпонентних середовищах пористої та нанопористої структури» (№ ДР 0113U004052); «Математичне та комп'ютерне моделювання складних фізико-хімічних процесів підземної гідромеханіки природного та техногенного характеру» (№ ДР 0114U001148); «Математичне та комп'ютерне моделювання процесів в гетерогенних пористих середовищах з урахуванням впливу фізико-хімічних факторів» (№ ДР 0117U000655); «Дослідження суфозії, картоутворення, корозії та вилуговування в пористих середовищах» (№ ДР 0119U000081). У рамках виконання цих науково-дослідних робіт автором проведено математичне та комп'ютерне моделювання фільтраційних процесів в пористих середовищах за наявності елементів інженерних споруд з урахуванням впливу техногенних факторів.

**Мета і завдання дослідження.** Метою роботи є підвищення точності та адекватності прогнозних розрахунків, шляхом вдосконалення існуючих або побудови нових математичних та комп'ютерних моделей фільтраційних процесів в пористих середовищах (на прикладі ґрунтових масивів), в тому числі в областях з вільними рухомими межами та в просторовому випадку, за наявності в них елементів інженерних споруд з урахуванням впливу техногенних факторів. Для досягнення поставленої мети встановлені наступні завдання дослідження:

- на основі аналізу літературних джерел визначити актуальність задачі дослідження фільтраційних процесів в пористих середовищах з елементами інженерних споруд з урахуванням суфозійно-кольматаційних явищ та тепломасоперенесення;

- розробити підхід до математичного моделювання фільтраційних процесів в пористих середовищах з елементами інженерних споруд залежно від типів

включень, їх фізико-механічних властивостей, які впливають на тип граничних умов для невідомих функцій на границях даних включень;

- вдосконалити або модифікувати існуючі математичні моделі задач фільтрації, ущільнення повністю насичених пористих середовищ, їх фільтраційного руйнування, теплосолеперенесення за наявності елементів інженерних споруд в пористих середовищах;

- модифікувати кінематичну граничну умову на верхній межі ґрунтового масиву з урахуванням змінної пористості та впливу фізико-хімічних факторів;

- розробити підхід до чисельного розв'язання відповідних нелінійних крайових задач для систем диференціальних рівнянь в областях з елементами інженерних споруд;

- відповідно до розробленого підходу використати пакет FreeFem++ для знаходження наближених розв'язків відповідних нелінійних крайових задач методом скінченних елементів в областях з рухомими межами, використати можливості пакету FreeFem++ по розпаралеленню обчислень для зменшення затрат машинного часу на розв'язання сформульованих крайових задач;

- розробити алгоритми, створити відповідні програмні реалізації розроблених алгоритмів та провести серії числових експериментів щодо дослідження впливу елементів інженерних споруд на фільтраційні процеси в пористих середовищах.

*Об'єкт дослідження* – фільтраційні процеси в ґрунтових масивах з елементами інженерних споруд з урахуванням впливу суфозійних, кольматаційних явищ та процесів теплосолеперенесення.

*Предмет дослідження* – нелінійні математичні моделі фільтраційних процесів в ґрунтових масивах з елементами інженерних споруд за наявності рухомих меж та з урахуванням впливу техногенних факторів.

**Методи дослідження.** Для побудови математичних моделей використано відомі підходи механіки насиченого пористого середовища, теорії фільтрації та теорії теплосолеперенесення в пористих середовищах. Також використано методи математичної фізики, варіаційне числення, теорію комплексних змінних, елементи лінійної алгебри, елементи теорії механіки ґрунтів і числові методи. Для відшукування наближених розв'язків нелінійних крайових задач використано метод скінченних елементів, який відноситься до класу сіткових проєкційних методів. Також використано пакет FreeFem++ для створення власного програмного забезпечення і методи об'єктно-орієнтованого програмування.

**Наукова новизна одержаних результатів** полягає в наступному:

- вперше запропоновано нелінійну математичну модель фільтраційних процесів в ґрунтових масивах, яка враховує наявність в них елементів інженерних споруд (в тому числі водоводи та можливість їх пошкоджень) та модифіковану кінематичну граничну умову на депресійній поверхні ґрунтового масиву зі змінною пористістю та впливом фізико-хімічних факторів в тривимірному випадку, що дає можливість оцінити вплив наявності даних елементів (особливо руйнування їх частин) на фільтраційні процеси та фільтраційні деформації ґрунтових масивів;

- вперше запропоновано нелінійну математичну модель процесів фільтрації в біоплато-фільтрі, яка характеризується врахуванням змінної пористості та

суфозійно-кольматаційних процесів, що дає можливість спрогнозувати та оцінити вплив даних факторів на ефективність роботи біоплато;

- удосконалено математичну модель задач фільтраційних деформацій ґрунтових масивів, яка відрізняється можливістю моделювання зосереджених шляхів фільтрації як узагальнення водоводів, але з проникними стінками та змінними в часі розмірами та дає можливість узагальнити та застосувати побудовані в роботі математичні моделі і схеми їх чисельного розв'язання до вказаного типу задач.

**Практичне значення одержаних результатів.** Отримано подальший розвиток застосування варіаційного формулювання задачі та сіткового методу скінченних елементів для знаходження розв'язків нелінійних крайових задач фільтраційних процесів з урахуванням впливу техногенних факторів в тривимірному випадку в областях з елементами інженерних споруд, що дало можливість автоматизувати програмну реалізацію та оптимізувати час відшукування наближених розв'язків вказаних нелінійних крайових задач.

Проведені в дисертаційній роботі дослідження можуть бути використані при проектуванні, будівництві та розрахунку стійкості гідротехнічних та гідромеліоративних споруд з можливістю визначення прогнозних полів напорів, впливу наявності елементів інженерних споруд на фільтраційні процеси, а також форми та розмірів зони вимиву, яка утворюється в результаті пошкоджень даних включень з урахуванням впливу техногенних факторів.

Задача дослідження суфозійно-кольматаційних процесів, що протікають в об'ємі фільтрувальної засипки біоплато під час фільтрування забрудненої води може бути використана при проектуванні та побудові біоплато (споруди для очищення господарсько-побутових, виробничих стічних вод, забрудненого поверхневого стоку), оцінці ефективності нових інженерних рішень для забезпечення більшої продуктивності його роботи.

Одержані в дисертаційній роботі результати використані під час розробки проектної документації проекту реконструкції водопровідної мережі в с. Оженин Острозького району Рівненської області на ДП «БТС-ІНЖИНІРИНГ» ТОВ «БІОТЕХСОЮЗ»; при розробці проектної документації проекту реконструкції каналізаційної системи на виробничій площадці спиртогорілчаного заводу КУПП «Маньковичі», с. Маньковичі, Столінського р-ну, Брестської обл., Республіка Білорусь (підтверджено актами про впровадження).

Одержані в дисертаційній роботі результати впроваджені в навчальному процесі при підготовці спецкурсів «Математичне і комп'ютерне моделювання природних і техногенних систем», «Проекційно-сіткові та безсіткові методи математичної фізики» для студентів Національного університету водного господарства та природокористування МОН України за спеціальністю 113 «Прикладна математика».

**Особистий внесок здобувача.** Всі теоретичні та прикладні результати, що складають зміст дисертаційної роботи, отримані автором самостійно. У роботах, опублікованих у співавторстві, здобувачеві належать: дослідження впливу наявності елементів інженерних споруд на фільтраційні процеси в ґрунтових масивах [2; 10; 11]; дослідження впливу пошкоджень наявних в ґрунтових масивах елементів інженерних споруд на фільтраційні процеси [1]; побудова нелінійної математичної

моделі фільтраційних процесів в ґрунтових масивах за наявності елементів інженерних споруд та з урахуванням впливу техногенних факторів [3; 12]; розробка програмного забезпечення для чисельного розв'язання задачі фільтраційних процесів в ґрунтових масивах за наявності елементів інженерних споруд та з урахуванням впливу техногенних факторів, проведення числових експериментів та аналіз отриманих результатів [13; 16]; побудова нелінійної математичної моделі фільтраційних процесів в ґрунтових масивах за наявності пошкоджених елементів інженерних споруд [5]; побудова нелінійної математичної моделі фільтраційних процесів в ґрунтових масивах за наявності елементів інженерних споруд та з урахуванням впливу техногенних факторів [6]; побудова нелінійної математичної моделі фільтраційних процесів в ґрунтових масивах за наявності пошкоджень елементів інженерних споруд та розробка програмного забезпечення [21; 22]; розробка програмного забезпечення з використанням розпаралелення обчислень для задач гео-гідродинаміки [23]; побудова нелінійної математичної моделі фільтраційних процесів в ґрунтових масивах за наявності елементів інженерних споруд та з урахуванням суфозійно-кольматаційних процесів, розробка програмного забезпечення для чисельного розв'язання відповідних нелінійних крайових задач [4; 24; 25]; побудова нелінійної математичної моделі фільтраційних процесів в ґрунтових масивах за наявності елементів інженерних споруд та їх пошкоджень з урахуванням впливу техногенних факторів в просторовому випадку, розробка програмного забезпечення для чисельного розв'язання відповідних нелінійних крайових задач, проведення числових експериментів та аналіз отриманих результатів [14; 15; 17]; модифікація кінематичної граничної умови на депресійній поверхні ґрунтової греблі з урахуванням змінної пористості та впливу фізико-хімічних факторів в тривимірному випадку [8]; застосування методу радіальних базисних функцій для знаходження розв'язків нелінійних крайових задач підземної гідромеханіки [26]; розробка програмного модуля для дослідження фільтраційного руйнування ґрунтових гребель [27]; розробка програмних модулів для дослідження взаємозв'язаних фільтраційно-суфозійних процесів в ґрунтах [28; 29].

**Апробація результатів дослідження.** Основні результати дисертації доповідались й обговорювались на міжнародних та вітчизняних конференціях: Міжнародних наукових конференціях «Сучасні проблеми математичного моделювання та обчислювальних методів» (м. Рівне, 2013 р., 2015 р.); XIX-XXII Всеукраїнських наукових конференціях «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики» (м. Львів, 2013 р., 2014 р., 2015 р., 2016 р.); Міжнародній науковій конференції ім. акад. Михайла Кравчука (м. Київ, 2014 р.); III-IV Міжнародних науково-практичних конференціях «Математика в сучасному технічному університеті» (м. Київ, 2014 р., 2015 р.); VIII Міжнародній науковій конференції імені академіка І.І. Ляшка «Обчислювальна та прикладна математика» (м. Київ, 2015 р.); IV International Conference «Analysis and mathematical physics» (с. Kharkiv, 2016); VII Міжнародній науковій конференції «Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації» (м. Кам'янець-Подільський, 2016 р.); III Всеукраїнській науково-практичній конференції «Комп'ютерне моделювання та програмне забезпечення інформаційних систем і технологій» (м. Рівне, 2017 р.); VI Міжнародній науково-технічній конференції молодих учених і студентів

«Актуальні задачі сучасних технологій» (м. Тернопіль, 2017 р.); Міжнародній науковій конференції «Сучасні проблеми математичного моделювання, обчислювальних методів та інформаційних технологій» (м. Рівне, 2018 р.); IV міжнародній науково-технічній конференції «Комп'ютерне моделювання та оптимізація складних систем» (м. Дніпро, 2018 р.).

В повному обсязі робота доповідалася на розширеному науковому семінарі кафедри інформатики та прикладної математики Рівненського державного гуманітарного університету; розширеному науковому семінарі кафедри прикладної математики Львівського національного університету імені Івана Франка; розширеному науковому семінарі кафедри прикладної математики Національного університету водного господарства та природокористування.

**Публікації.** За темою дисертації опубліковано 29 наукових праць, у тому числі: 9 статей, з них 1 у зарубіжному науковому виданні (Білорусь), 8 статей у наукових фахових виданнях України з технічних наук, 3 з яких у наукових виданнях, які входять до міжнародної наукометричної бази Scopus, 3 свідоцтва про реєстрацію авторського права на твір, 16 публікацій в матеріалах міжнародних та національних конференцій, 1 монографія, 5 праць опубліковано без співавторів.

**Структура й обсяг дисертації.** Дисертація складається із анотації, вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел із 154 найменувань на 18 сторінках, додатків на 22 сторінках. Обсяг роботи становить 166 сторінок, в тому числі основного тексту 106 сторінок.

## **ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ**

**У вступі** дано загальну характеристику роботи, обґрунтовано актуальність теми та необхідність проведення дослідження, сформульовано мету роботи та задачі дослідження, наукову новизну та практичне значення отриманих результатів.

**У першому розділі** викладено огляд та проведено аналіз літератури за темою дисертації, визначено місце досліджень, наведених у роботі, у розв'язанні науково-технічного завдання розробки нових математичних моделей фільтраційних процесів в пористих середовищах (на прикладі ґрунтових масивів) за наявності елементів інженерних споруд з урахуванням впливу техногенних факторів.

Теорія фільтраційних процесів в пористих середовищах (ґрунтах) досить повно описана в роботах П. Я. Полубаринової-Кочиної, Т. Murase, М. Iwata, М. Wakita, Т. Adachi, І. І. Ляшка, І. В. Сергієнка, В. В. Скопецького, В. С. Дейнеки, С. І. Ляшка, В. О. Богаєнка, Я. Д. П'янило, А. Я. Бомби, А. П. Сафоника, О. Ю. Чернухи, В. Л. Полякова, В. М. Булавацького, В. І. Лаврика, А. П. Власюка, О. В. Жеребятєва, М. Р. Петрика, J. Bear, N. Seetha, Kumar M. S. Mohan, S. M. Hassanizadeh, A. Chetti, A. Benamar, A. Hazzab, S. Berres, R. Bürger, W. L. Wendland, M. Zhang, F. He, D. Zhao, X. Hao та ін.

Математичні моделі фільтрації та фільтраційного руйнування пористих середовищ побудовано та досліджено в роботах А. П. Власюка, П. М. Мартинюка, проведено математичне моделювання процесів фільтраційної консолідації та фільтраційного руйнування в ґрунтах з урахуванням впливу теплосолеперенесення. Але в своїх роботах авторами не враховано наявності в ґрунтових масивах елементів інженерних споруд та можливих їх пошкоджень. Також не було досліджено таких



задач в тривимірному випадку. При цьому в роботах А. П. Власюка та О. П. Остапчук досліджувався вплив теплосолеперенесення на процеси фільтрації в ґрунтах, однак не досліджено впливу процесів теплосолеперенесення на фільтраційні процеси в ґрунтових масивах в просторовому випадку.

Двовимірна задача контактної розмиву ґрунту на основі ґрунтової греблі розглянута в роботах J. B. Sellmeijer. Але в даних роботах також не розглядалася просторова задача. Крім того, не розглянуто випадків елементів інженерних споруд та впливу техногенних факторів.

Математичні моделі фільтраційних процесів в областях з вільними межами (включаючи ґрунтові греблі) в просторі приведені в роботах А. Я. Бомби, В. І. Гаврилюка, А. В. Теробус та ін. Проте авторами не враховувалося наявності елементів інженерних споруд.

Як свідчить аналіз публікацій з визначеної проблематики є низка невирішених задач. Одна з них – це комплексна задача, в якій враховується наявності в ґрунтових масивах елементів інженерних споруд та їх можливих пошкоджень, наявність депресійної поверхні, розташування якої є невідомим і визначається у процесі розв'язання крайової задачі, а також враховується вплив теплосолеперенесення на фільтраційні процеси в ґрунтових масивах.

У другому розділі вдосконалено математичні моделі фільтраційних процесів в ґрунтових масивах з урахуванням впливу техногенних факторів в областях з елементами інженерних споруд. Також виведена кінематична гранична умова на депресійній поверхні ґрунту з урахуванням змінної пористості та впливу фізико-хімічних факторів. Однією зі складових математичних моделей є наступне рівняння фільтраційної консолідації, узагальнене на випадок впливу факторів як техногенного, так і природного походження:

$$\begin{aligned} & \frac{R\gamma a(T, \boldsymbol{\sigma}_m, \mathbf{N})}{1 + (R-1)\xi} \frac{\partial h}{\partial t} - (1+e)^2 \sum_{i=1}^l \frac{\partial \sigma_m^{(i)}}{\partial t} - (1+e)^2 \sum_{j=1}^k \frac{1}{\rho_N^{(j)}} \frac{\partial N_j}{\partial t} - \\ & - e \left( \frac{1}{\rho_p} \left( \frac{\partial \rho_p}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} + \sum_{j=1}^k \frac{\partial \rho_p}{\partial c_j} \frac{\partial c_j}{\partial t} \right) - \frac{1}{\rho_m} \left( \frac{\partial \rho_m}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} + \sum_{j=1}^k \frac{\partial \rho_m}{\partial N^{(j)}} \frac{\partial N_j}{\partial t} \right) \right) = \\ & = (1+e)(\nabla \cdot (\mathbf{K}_h(t, h, T, \boldsymbol{\sigma}_m, \mathbf{N}, \mathbf{c}) \nabla h) - \nabla \cdot \mathbf{F}_{osm}), \end{aligned} \quad (1)$$

де  $\mathbf{K}_h$  – тензор фільтрації, що залежить від часу та вектора, який характеризує фактори впливу;  $e$  – коефіцієнт пористості ґрунту;  $\rho_m$  – густина твердих частинок ґрунту;  $a$  – коефіцієнт стискуваності ґрунту;  $R$  – розмірність задачі;  $\xi$  – коефіцієнт бічного тиску ґрунту;  $\boldsymbol{\sigma}_m$  – концентрація суфозійних нерозчинних частинок ґрунту;  $\rho_N$  – густина солей в твердій фазі;  $\mathbf{N}$  – концентрація солей в твердій фазі пористого середовища;  $\mathbf{F}_{osm}$  – вектор-функція осмотичних впливів;  $\rho_p$  – густина порової рідини, яка залежить від концентрації порового розчину у рідкій фазі та температури пористого середовища;  $h$  – напір;  $c$  – концентрація хімічного розчину;  $T$  – температура;  $t$  – час;  $\gamma$  – питома вага сольового розчину. З рівняння (1) при відсутності консолідаційних процесів можна отримати рівняння фільтрації.

У випадку урахування впливу на зміну густини порової рідини хімічного та теплового факторів, рівняння солеперенесення має вигляд

$$\begin{aligned} \sigma \left( 1 - \frac{c}{\rho_p} \frac{\partial \rho_p}{\partial c} \right) \frac{\partial c}{\partial t} = \nabla \cdot (\mathbf{D}_c \nabla c) - \mathbf{u} \left( 1 - \frac{c}{\rho_p} \frac{\partial \rho_p}{\partial c} \right) \nabla c + \\ + \frac{c}{\rho_p} \left( \sigma \frac{\partial \rho_p}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial \rho_p}{\partial T} \nabla T \right) - \frac{\partial N}{\partial t}, \end{aligned} \quad (2)$$

де  $\mathbf{D}_c$  – коефіцієнти (тензори) дифузії;  $\mathbf{u}$  – швидкість фільтрації, яка визначається згідно узагальненого закону Дарсі – Герсеванова.

Рівняння теплоперенесення з урахуванням суфозійних процесів

$$c_T \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) - \rho_p c_p \mathbf{u} \nabla T - \left( \rho_s c_s \frac{\partial s}{\partial t} + \rho_N c_N \frac{\partial N}{\partial t} \right) T, \quad (3)$$

де  $\lambda$  – коефіцієнт (тензор) теплопровідності пористого середовища;  $\rho$  – густина порового сольового розчину;  $c_p, c_s, c_N$  – питомі теплоємності відповідних матеріалів (порової рідни, суфозійних частинок, твердих водорозчинних частинок).

В результаті контактного розмиву ґрунту утворюється зона вимиву і її займає пульпа. Пульпа – це суміш водного розчину солей (на випадок урахування солеперенесення) та твердих нерозчинних частинок, вимитих зі скелету ґрунту. Рівняння (4) описує зміну концентрації пульпи в зоні розмиву

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \nabla \cdot (\mathbf{D}_s \nabla s) - (\mathbf{u} - \mathbf{w}) \nabla s, \quad (4)$$

де  $s(\mathbf{X}, t)$  – об'ємна концентрація пульпи в областях розмиву;  $\mathbf{D}_s$  – тензор коефіцієнтів дисперсії пульпи;  $\mathbf{w} = (0; 0; w_3)$  – вектор швидкості осідання твердих частинок пульпи.

Задача фільтрації в тілі ґрунтової греблі пов'язана із наявністю вільної межі (депресійної поверхні) – лінії, на якій тиск у поровій рідині дорівнює атмосферному. Кінематичну граничну умову на депресійній поверхні ґрунтової греблі модифіковано на випадок урахування змінної пористості та впливу фізико-хімічних факторів, а саме

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dt} \varphi(\mathbf{X}, t) + \sigma \frac{d\varphi(\mathbf{X}, t)}{dt} = (\mathbf{u}, \mathbf{n}) + \\ + \int_{L(x, y, t)}^{\varphi(\mathbf{X}, t)} \left( \frac{e}{1+e} \left( \frac{1}{\rho_p} \frac{d\rho_p}{dt} - \frac{1}{\rho_m} \frac{d\rho_m}{dt} \right) + \nabla \cdot \mathbf{u} \right) dz, \end{aligned} \quad (5)$$

де  $\rho_p$  – густина порової рідини, яка залежить від фізико-хімічних факторів (концентрація розчинених речовин та температура);  $\rho_m$  – густина твердих частинок ґрунту (включаючи водорозчинні та нерозчинні компоненти), яка також може залежати від вказаних факторів;  $e$  – коефіцієнт пористості ( $e = \frac{\sigma}{1-\sigma}$ ,  $\sigma$  – пористість ґрунту);  $z = l(x, y, t)$  – рівняння верхньої рухомої межі ґрунту;  $z = L(x, y, t)$  – нижня межа ґрунту, яка теж може бути рухомою, але закон розташування її положення є відомим.

**Третій розділ** присвячено математичному моделюванню просторової фільтрації в ґрунтових масивах з урахування впливу техногенних факторів. Для відшукування наближеного розв'язку крайової задачі використано метод скінченних елементів. Досліджено вплив техногенних факторів на розподіл напорів та швидкостей фільтрації. Отримані результати дозволять визначити місце можливої локалізації фільтраційних руйнувань, спрогнозувати характер можливих аварій та пошкоджень, пов'язаних із коливаннями напорів.

Математична модель тривимірної задачі фільтрації в ґрунтовому масиві на непроникній основі з врахуванням впливу теплосолеперенесення побудована у вигляді:

$$\nabla \cdot (\rho_p(c, T) \mathbf{K}_h(c, T, s, \sigma) \nabla h) = \sigma \left( \frac{\partial \rho_p}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial \rho_p}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} \right) - \frac{\rho_p}{\rho_N} \frac{\partial N}{\partial t} - \frac{\rho_p}{\rho_s} \frac{\partial s}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_p(c, T) \mathbf{F}_{osm}), \mathbf{X} \in \Omega, t > 0, \quad (6)$$

$$\sigma \left( 1 - \frac{c}{\rho_p} \frac{\partial \rho_p}{\partial c} \right) \frac{\partial c}{\partial t} = \nabla \cdot (\mathbf{D}_c \nabla c) - \mathbf{u} \left( 1 - \frac{c}{\rho_p} \frac{\partial \rho_p}{\partial c} \right) \nabla c + \frac{c}{\rho_p} \left( \sigma \frac{\partial \rho_p}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \frac{\partial \rho_p}{\partial T} \nabla T \right) - \frac{\partial N}{\partial t}, \mathbf{X} \in \Omega, t > 0, \quad (7)$$

$$c_T \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) - \rho_p c_p \mathbf{u} \nabla T - \left( \rho_s c_s \frac{\partial s}{\partial t} + \rho_N c_N \frac{\partial N}{\partial t} \right) T, \mathbf{X} \in \Omega, t > 0, \quad (8)$$

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}(c, T) \nabla h + \mathbf{K}_c \nabla c + \mathbf{K}_T \nabla T, \mathbf{X} \in \Omega, \quad (9)$$

де  $\Omega$  – область греблі. Вищенаведені рівняння (6)-(9) доповнюються початковими і граничними умовами для кожної контрольної задачі.

Для відшукування наближеного розв'язку сформованої нелінійної крайової задачі використано метод скінченних елементів (МСЕ). Задача розв'язана в середовищі FreeFem++, яке являє собою програмне забезпечення для розв'язування крайових задач для диференціальних рівнянь в частинних похідних саме методом скінченних елементів.

В якості модельної задачі розглянуто процес фільтрації в тілі ґрунтової греблі хвостосховища при концентрації хімічних речовин у верхньому б'єфі на рівні 160 г/літр. При цьому, враховані сезонні коливання температури від  $T_{\max} = 30^\circ C$  до  $T_{\min} = 4^\circ C$  на межі контакту греблі із атмосферою. Розміри греблі: висота греблі – 30 м, ширина верхньої межі – 20 м, ширина нижньої межі – 80 м, довжина греблі – 20 м.

Числові експерименти показали, що врахування теплових та хімічних факторів впливу зумовлює відхилення у значеннях напорів з амплітудою близько 3,5 м. Такі коливання напорів обумовлюються урахуванням осмотичних явищ та нелінійною залежністю коефіцієнта фільтрації від концентрації солей і температури. Причому, ці залежності є немонотонними. Тому спрогнозувати вплив теплосолеперенесення в

часі на розподіл напорів неможливо простим аналізом залежностей, а лише на основі числових експериментів.

Критерієм розмиву пористого матеріалу є перевищення швидкістю фільтрації деякого критичного значення. Тому з практичної точки зору більш інформативним є значення різниці в розподілах швидкостей фільтрації (компоненти  $u_y$ ) у випадку урахування та без урахування впливу теплосолеперенесення. Врахування теплових та хімічних факторів впливу зумовлює відхилення у значеннях швидкості фільтрації з амплітудою близько 30%.

Для математичного опису процесів фільтрації в ґрунтовому масиві з урахуванням суфозійно-кольматаційних сформульована математична модель у вигляді (що в роботі доповнена відповідними початковими та граничними умовами):

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\rho_p(c) \mathbf{K}_h(c, \sigma) \nabla h) &= \sigma \frac{\partial \rho_p}{\partial c} \cdot \frac{\partial c}{\partial t} - \frac{\rho_p}{\rho_s} \frac{\partial s}{\partial t}, \mathbf{X} \in \Omega, t > 0, \\ \sigma \left(1 - \frac{c}{\rho_p} \frac{\partial \rho_p}{\partial c}\right) \frac{\partial c}{\partial t} &= \nabla \cdot (\mathbf{D}_c \nabla c) - \mathbf{u} \cdot \left(1 - \frac{c}{\rho_p} \frac{\partial \rho_p}{\partial c}\right) \nabla c - \frac{\partial s}{\partial t}, \mathbf{X} \in \Omega, t > 0, \\ \frac{\partial s}{\partial t} &= \alpha \cdot c - \beta \cdot s, \mathbf{X} \in \Omega, t > 0 \\ \mathbf{u} &= -\mathbf{K}_h(c, s, \sigma) \nabla h, \mathbf{X} \in \Omega. \end{aligned}$$

Тут:  $\Omega$  – область біоплато-фільтра,  $c$  – концентрація пульпи,  $s$  – концентрація кольматуючих частинок.

Для відшукування наближеного розв'язку поставленої крайової задачі використано МСЕ.

В якості модельної задачі розглянемо систему біоплато-фільтра довжиною 50 метрів та висотою 2 метри з щелевним завантаженням (рис. 1). В ній протікають складні взаємопов'язані фільтраційно-кольматаційні процеси. На межі  $\Gamma_1$  розміщена перфорована труба, через яку на поверхню біоплато подається забруднена вода. Хоча вода подається в трубу під певним тиском, але витікши з труби, вона вільно фільтрується в пористе середовище. Тому вважаємо, що тиск, під яким забруднена вода подається на межу  $\Gamma_1$ , дорівнює атмосферному. Оскільки  $p_a = 0$ , то гранична умова на  $\Gamma_1$ :  $h|_{\Gamma_1} = 2$  м. На межі  $\Gamma_2$  знаходиться перфорована труба, з якої видається очищена вода. Потіки відповідно при  $x = 0$  м приймаються  $q_{\min} = 0,13$  м/доба і при  $x = 50$  м –  $q_{\max} = 0,17$  м/доба. Межі  $\Gamma_3, \Gamma_4$  – межі непроникності.

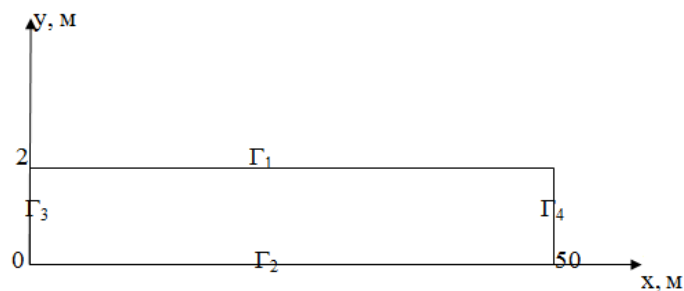


Рисунок 1 – Область розв'язку задачі

Проведені дослідження показали, що на етапі проектування актуальним є дослідження суфозійно-кольматаційних процесів, що протікають в об'ємі фільтрувальної засипки біоплато під час фільтрування забрудненої води. Дані процеси значним чином впливають на ефективність роботи біоплато-фільтра. Використані засоби математичного та комп'ютерного моделювання дозволяють урахувати нелінійні взаємовпливи параметрів як пористого середовища, так і параметрів самих процесів. Вони дають змогу значно економити ресурси та час на проведення натурних експериментів. Числові експерименти показали, максимальна відносна різниця в значеннях напорів сягає 19,5% (рис. 2).

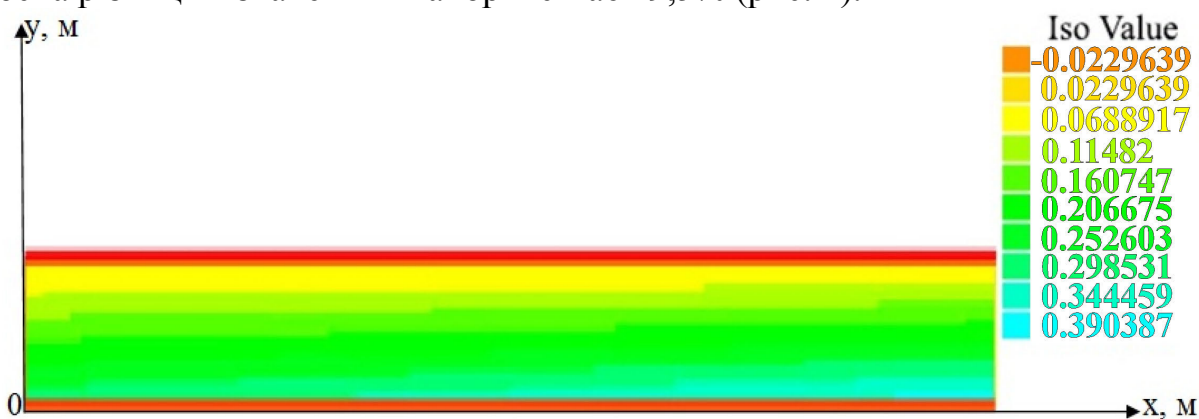


Рисунок 2 – Різниця напорів у засипці біоплато через 180 діб

Встановлено, що за 180 діб максимальна відносна різниця значень швидкостей фільтрації складає близько 25%. Тобто, вже за півроку прогнозна продуктивність біоплато знизиться щонайменше на чверть. Встановлення такого ефекту уможлиблюється урахуванням нелінійної залежності коефіцієнта фільтрації від концентрації кольматуючих частинок. Зі збільшенням об'єму частинок, які затримуються засипкою в біоплато-фільтрі, її (засипки) пористість зменшується. А це, в свою чергу, приводить до зменшення коефіцієнта фільтрації, а звідси – до зменшення швидкості руху та об'єму рідини, яка фільтрується через біоплато. В побудованій математичній моделі враховано фізичні ефекти динамічної зміни пористості та залежності коефіцієнта фільтрації від концентрації забруднень, чого немає у відомих аналогах.

**Четвертий розділ** присвячений математичному моделюванню фільтраційних процесів в ґрунтових масивах в просторовому випадку. Враховано вплив наявності елементів інженерних споруд та можливих зон вимиву. Враховано модифікацію кінематичної граничної умови на депресійній поверхні при дослідженні процесів фільтрації в ґрунтовій греблі. Для відшукування наближеного розв'язку поставлених крайових задач в областях з вільними рухомими межами використано МСЕ.

Розглянуто  $R$  – вимірну задачу фільтраційних процесів в тілі ґрунтової греблі з водоводом. Актуальність даного дослідження впливає з того, що в процесі експлуатації тіло греблі просідає. А, оскільки різні її (греблі) частини зводяться з різних ґрунтів, то це зумовлює нерівномірність просідань різних частин греблі. За наявності водоводу в тілі греблі і при нерівномірному просіданні ґрунту греблі, на стиках різних типів ґрунтів можливі пошкодження водоводів – наявність тріщин та розломів, а також зміщень частин водоводу одна відносно іншої. Нерівномірність просідань різних частин греблі може бути наслідком не лише неоднорідності

матеріалу самої греблі, але і особливостями природної будови основи, на якій вказана гребля збудована.

Математична модель вказаних процесів в загальному випадку має вигляд:

$$\begin{aligned} & \frac{R\gamma a(T, \boldsymbol{\sigma}_m, \mathbf{N})}{1+(R-1)\xi} \frac{\partial h}{\partial t} - (1+e)^2 \sum_{i=1}^l \frac{\partial \sigma_m^{(i)}}{\partial t} - (1+e)^2 \sum_{j=1}^k \frac{1}{\rho_N^{(j)}} \frac{\partial N_j}{\partial t} - \\ & - e \left( \frac{1}{\rho_p} \left( \frac{\partial \rho_p}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} + \sum_{j=1}^k \frac{\partial \rho_p}{\partial c_j} \frac{\partial c_j}{\partial t} \right) - \frac{1}{\rho_m} \left( \frac{\partial \rho_m}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} + \sum_{j=1}^k \frac{\partial \rho_m}{\partial N^{(j)}} \frac{\partial N_j}{\partial t} \right) \right) = \\ & = (1+e)(\nabla \cdot (\mathbf{K}_h(t, h, T, \boldsymbol{\sigma}_m, \mathbf{N}, \mathbf{c}) \nabla h) - \nabla \cdot \mathbf{F}_{osm}), \mathbf{X} \in \Omega_1, t > 0, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} & \sigma \left( 1 - \frac{c}{\rho_p} \frac{\partial \rho_p}{\partial c} \right) \frac{\partial c}{\partial t} = \nabla \cdot (\mathbf{D}_c \nabla c) - \mathbf{u} \left( 1 - \frac{c}{\rho_p} \frac{\partial \rho_p}{\partial c} \right) \nabla c + \\ & + \frac{c}{\rho_p} \left( \sigma \frac{\partial \rho_p}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \frac{\partial \rho_p}{\partial T} \nabla T \right) - \frac{\partial N}{\partial t}, \mathbf{X} \in \Omega_1, t > 0, \end{aligned} \quad (11)$$

$$c_T \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (\boldsymbol{\lambda} \nabla T) - \rho_p c_p \mathbf{u} \nabla T - \left( \rho_s c_s \frac{\partial s}{\partial t} + \rho_N c_N \frac{\partial N}{\partial t} \right) T, \mathbf{X} \in \Omega_1, t > 0, \quad (12)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \nabla \cdot (\mathbf{D}_s \nabla s) - \mathbf{u} \cdot \nabla s, \mathbf{X} \in \Omega_2, t > 0, \quad (13)$$

$$\mathbf{u} = e\mathbf{v} - \mathbf{K}_h \nabla h + \mathbf{K}_c \nabla c + \mathbf{K}_T \nabla T, \mathbf{X} \in \Omega_1, \quad (14)$$

де  $t \in (0; t_0]$ ;  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ ,  $R$  – розмірність задачі; при  $R = 3$   $\mathbf{X} = (x, y, z)$ .

Вказані рівняння доповнюється крайовими умовами відповідно до конкретного випадку.

Числові розв'язки сформованої крайової задачі знайдено методом скінченних елементів у вигляді:

$$\begin{aligned} h(\mathbf{X}, t) &= \sum_{j=1}^n h_j(t) \cdot N_j^{(h)}(\mathbf{X}), \quad c(\mathbf{X}, t) = \sum_{j=1}^n c_j(t) \cdot N_j^{(c)}(\mathbf{X}), \\ T(\mathbf{X}, t) &= \sum_{j=1}^n T_j(t) \cdot N_j^{(T)}(\mathbf{X}), \quad s(\mathbf{X}, t) = \sum_{j=1}^n s_j(t) \cdot N_j^{(s)}(\mathbf{X}). \end{aligned}$$

Тут  $N_j(\mathbf{X})$  – базисні функції,  $h_j(t), c_j(t), T_j(t), s_j(t)$  – невідомі коефіцієнти.

Вільна межа  $\Gamma_0$  (депресійна поверхня) описується співвідношенням

$$\varphi(\mathbf{X}, t) = (y - h(\mathbf{X}, t))|_{\Gamma_0} = 0,$$

і на ній задається модифікована кінематична гранична умова

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dt} \varphi(\mathbf{X}, t) + \sigma \frac{d\varphi(\mathbf{X}, t)}{dt} &= (\mathbf{u}, \mathbf{n}) + \int_{L(x, y, t)}^{\varphi(\mathbf{X}, t)} \left( \frac{e}{1+e} \left( \frac{1}{\rho_p} \frac{d\rho_p}{dt} - \frac{1}{\rho_m} \frac{d\rho_m}{dt} \right) + \nabla \cdot \mathbf{u} \right) dz - \\ & - \frac{1}{\sigma_{\max} - \sum_{i=1}^n S_i(\mathbf{X}, t)} \sum_{i=1}^n (\mathbf{q}^{(i)}, \mathbf{n}_0) \Big|_{\mathbf{X} \in \Gamma_0}. \end{aligned}$$

На основі запропонованої математичної моделі розглянуто просторову задачу фільтраційної консолідації в тілі ґрунтової греблі з водоводом та зоною вимиву. В якості модельної задачі розглянуто процес фільтрації в тілі ґрунтової греблі при концентрації хімічних речовин у верхньому б'єфі на рівні 160 г/літр. При цьому враховані сезонні коливання температури від  $T_{\max} = 30^\circ \text{C}$  до  $T_{\min} = 4^\circ \text{C}$  на межі контакту греблі із атмосферою. Розміри греблі: висота греблі – 30 м, ширина верхньої межі – 20 м, ширина нижньої межі – 80 м, довжина греблі – 20 м. Задача розв'язана в програмному середовищі FreeFem++. Проведено низку числових експериментів. Отримані значення температури, концентрації солей, суспензії та напорів на момент часу 360 діб.

Числові розрахунки проведені за наступних вхідних даних:

$$\begin{aligned} \sigma &= 0,4, \rho = 1100 \text{ кг} / \text{м}^3, \rho_c = 2100 \text{ кг} / \text{м}^3, \rho_s = 2300 \text{ кг} / \text{м}^3, C_m = 160 \text{ г} / \text{л}, \\ D_c &= 0,001 \text{ м}^2 / \text{доба}, D_T = 0,0001 \text{ м}^2 / \text{доба}, K_c = 6 \cdot 10^{-7} \text{ м}^5 / \text{кг} \cdot \text{доба}, \\ K_T &= 6 \cdot 10^{-8} \text{ м}^2 / \text{кг} \cdot \text{доба}, c_T = 2137 \text{ кДж} / \text{м}^3 \cdot \text{град}, c_p = 4,2 \text{ кДж} / \text{кг} \cdot \text{град}, \\ \lambda &= 108 \text{ кДж} / \text{м} \cdot \text{град} \cdot \text{доба}, T_0(x) = 4^\circ \text{C}, T_{\text{атм}} = 17 + 13 \cos\left(\frac{\pi t}{180}\right), \\ C_0(x) &= 8 \text{ г} / \text{л}, C_1(t) = 8 \text{ г} / \text{л}, C_m = 160 \text{ г} / \text{літр}. \end{aligned}$$

Чисельні експерименти показали, що напори збільшуються з 0,0116644 м на низовій грані до 30 м на напірній. Максимальна зміна депресійної поверхні становить 1,42276 м. При врахуванні в тілі греблі наявності пошкодженого водоводу та впливу теплосолеперенесення на момент часу 360 діб, отримані наступні результати: максимальна зміна депресійної поверхні становить 1,50815 м. Напори плавно збільшуються з 0,0078392 м на низовій грані до 30 м на напірній. В зоні вимиву напори змінюються з 6 м до 22,7751 м. Це призводить до різкого зростання градієнтів напорів в околі даної зони вимиву та до збільшення швидкості руху порової рідини. А це в свою чергу, може викликати подальший вимив ґрунту та збільшення зони вимиву.

Отже, різниця зміни депресійної поверхні становить близько 0,09 м через 360 діб. Через 720 діб ця різниця становить уже близько 0,82 м. Тобто в ґрунтовій греблі, що має прорив у водоводі, депресійна поверхня з часом просідає більше і це потрібно враховувати.

Розподіл концентрації солей варіюється з 7,36359 г/л на низовій грані та гребені до 160 г/л на напірній грані. В зоні вимиву значення концентрації змінюються з 8,34753 г/л до 8,90031 г/л.

Температура ґрунту змінюється від  $4,10752^\circ \text{C}$  до  $30^\circ \text{C}$  від підшви до гребеня греблі. В зоні вимиву температура практично не змінюється і знаходиться в межах з  $4^\circ \text{C}$ - $5^\circ \text{C}$ .

Розподіл концентрації твердих частинок ґрунту в пульпі зони вимиву змінюється від 0, в зоні пошкодження водоводу, до 0,6 на межі контактного розмиву.

Також в четвертому розділі побудовано та досліджено просторову нелінійну крайову задачу фільтраційних процесів в тілі ґрунтової греблі зі справним

водоводом. Проведені експерименти показали, що значення напорів в тілі ґрунтової греблі без водоводу через 360 діб змінюється з 0,00068 м до 30 м. А максимальна зміна розташування вільної поверхні становить 1,8349 м. Значення напорів в тілі ґрунтової греблі з водоводом через 360 діб змінюється з 0,00012 м до 30 м. А максимальна зміна розташування вільної поверхні становить 1,8884 м. Різниця в зміні розташування вільної поверхні становить майже 0,06 м і це потрібно враховувати ще на етапі будівництва та проектування.

Також досліджено просторову нелінійну крайову задачу фільтраційних процесів в ґрунтовій греблі з водоводом та зосередженою фільтрацією. Наявність зони контактної розмиву вздовж водоводу суттєво впливає на розташування депресійної поверхні в околі водоводу. При цьому, депресійна поверхня піднімається. Підняття рівня депресійної поверхні може негативно позначитися на стійкості ґрунтової греблі. Нехтувати впливом наявності водоводу в тілі ґрунтової греблі не можна.

## **ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ РОБОТИ ТА ВИСНОВКИ**

Дисертаційна робота є завершеним науковим дослідженням, у якому розв'язано важливу науково-технічну задачу математичного та комп'ютерного моделювання фільтраційних процесів в пористих середовищах (на прикладі ґрунтових масивів) за наявності елементів інженерних споруд з урахуванням впливу техногенних факторів. При цьому отримано такі основні результати та висновки:

1. Вдосконалено нелінійну математичну модель фільтраційних процесів в ґрунтових масивах з елементами інженерних споруд (в тому числі з водоводами, враховуючи наявність в них пошкоджень) та модифікованою кінематичною граничною умовою на верхній межі ґрунтового масиву з урахуванням змінної пористості та впливу фізико-хімічних факторів в просторовому випадку. Це дало змогу встановити, що наявність елементів інженерних споруд (особливо, їх пошкоджень) суттєво впливає на перебіг фільтраційних процесів в цих середовищах. Зокрема, можуть розвинутися небезпечні фільтраційні деформації, що супроводжується розмивом ґрунтів та підйомом депресійної поверхні.

2. Модифіковано нелінійну математичну модель процесів фільтрації в біоплато-фільтрі з урахуванням змінної пористості та суфозійно-кольматаційних процесів. Встановлено, що при врахуванні даних факторів в процесі фільтрування, прогнозна продуктивність біоплато за півроку знижується на 25%. Отже, необхідно розробляти інженерні рішення для зниження впливу кольматаційно-суфозійних процесів на процеси фільтрування.

3. Вперше запропоновано розглядати зосереджені шляхи фільтрації в ґрунтових масивах як узагальнення елементів інженерних споруд (водоводів). Це дало можливість провести аналогію між водоводом та зосередженим шляхом фільтрації в тілі ґрунтової греблі, а, отже, ставити та розв'язувати і такі задачі – в даному випадку припускається, що стінки водоводу є проникними, а розміри змінюються в часі.

4. Отримано подальший розвиток застосування варіаційного формулювання задачі та сіткового методу скінченних елементів для знаходження розв'язків нелінійних крайових задач фільтраційних процесів з урахуванням впливу техногенних факторів в дво- та тривимірному випадках в областях з елементами



інженерних споруд, що дало можливість автоматизувати програмну реалізацію та оптимізувати час відшукання наближених розв'язків вказаних нелінійних крайових задач.

5. Практичне значення дисертаційної роботи полягає в наступному: результати дисертації були використані під час розробки проектної документації проекту реконструкції водопровідної мережі в с. Оженин Острозького району Рівненської області на ДП «БТС-ІНЖИНІРИНГ» ТОВ «БІОТЕХСОЮЗ»; при розробці проектної документації проекту реконструкції каналізаційної системи на виробничій площадці спиртогорілчаного заводу КУПП «Маньковичі», с. Маньковичі, Столінського р-ну, Брестської обл., Республіка Білорусь. Одержані в дисертаційній роботі результати впроваджені в навчальному процесі при підготовці спецкурсів «Математичне і комп'ютерне моделювання природних і техногенних систем», «Проекційно-сіткові та безсіткові методи математичної фізики» для студентів Національного університету водного господарства та природокористування МОН України за спеціальністю 113 «Прикладна математика».

## СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

*Наукові праці, в яких опубліковано основні наукові результати дисертації*

1. Власюк А. П., Мартинюк П. М., Медвідь Н. В. Математичне моделювання консолідації та фільтраційного руйнування ґрунтів в основах гідротехнічних та енергетичних споруд : монографія. Рівне : НУВГП, 2017. 423 с.
2. Ivanchuk N., Martynyuk P., Tsvetkova T., Michuta O. Mathematical modeling and computer simulation of the filtration processes in earth dams. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2017. № 2/6(86). P. 63–69.
3. Герус В. А., Іванчук Н. В., Мартинюк П. М. Системний підхід до математичного і комп'ютерного моделювання геоміграційних процесів з використанням пакету FreeFem++ та розпаралелювання обчислень. *Кібернетика та системний аналіз*. 2018. Том. 54, № 2. С. 123–133.  
Herus, V. A., Ivanchuk N. V., Martyniuk P. M. A System Approach to Mathematical and Computer Modeling of Geomigration Processes Using Freefem++ and Parallelization of Computations. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2018. Vol. 54, No. 2. P. 284–294.
4. Moshynskiy V., Filipchuk V., Ivanchuk N., Martyniuk P. Computer modeling of water cleaning in wetland taking into account of suffosion and colmatation. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2018. № 1/10(91). P. 38–43.
5. Медвідь Н. В., Мартинюк П. М. Математичне моделювання впливу на надлишкові напори наявності зони вимиву в ґрунтовій греблі з водоводом. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки*. 2014. Вип. 10. С. 101–112.
6. Медвідь Н. В., Мартинюк П. М. Дослідження впливу тепло-солеперенесення на швидкість фільтрації в ґрунтовій греблі (просторова задача). *Вісник ТНТУ*. 2015. Том 80, № 4. С. 172–181.
7. Медвідь Н. В. Дослідження впливу водоводу та зони вимиву на процеси фільтраційної консолідації ґрунтової греблі методом скінченних елементів. *Вісник*

*Національного університету водного господарства та природокористування. Серія: Технічні науки.* 2015. Вип. 4(72). С. 132–142.

8. Medvid N. V., Herus V. A., Martyniuk P. M. Modification of Kinematic Boundary Condition at Free Surfaces in Filtration Problems by means of Earth Dam. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: Технічні науки.* 2016. № 1. С. 119–124.

9. Медвідь Н. В. Комп'ютерне моделювання впливу контактної зосередженої фільтрації вздовж водоводу на положення депресійної поверхні в ґрунтовій греблі. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки.* 2016. Вип. 13. С. 99–106.

*Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації*

10. Мартинюк П. М., Медвідь Н. В. Про задачу фільтрації в греблі з водоводом. *Сучасні проблеми математичного моделювання та обчислювальних методів* : матеріали Міжнародної наукової конференції (м. Рівне, 22-23 лют. 2013 р.). Рівне, 2013. С. 105.

11. Медвідь Н. В., Мартинюк П. М. Про задачу фільтраційної консолідації ґрунтових гребель з водоводами. *Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики* : матеріали ХІХ Всеукраїнської наукової конференції (м. Львів, 3-4 жовт. 2013 р.). Львів, 2013. С. 94–95.

12. Медвідь Н. В., Мартинюк П. М. Числове розв'язання задачі фільтраційної консолідації ґрунтових гребель з водоводами в умовах впливу техногенних факторів. *П'ятнадцята Міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука* : матеріали конференції (м. Київ, 15-17 травн. 2014 р.). Київ, 2014. С. 135–136.

13. Медвідь Н. В., Мартинюк П. М. Про вплив n-компонентного хімічного розчину на процес фільтраційної консолідації ґрунтових гребель з водоводами. *Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики* : матеріали І міжнародної ХХ Всеукраїнської наукової конференції (м. Львів, 7-9 квіт. 2014 р.). Львів, 2014. С. 105–106.

14. Медвідь Н. В., Мартинюк П. М. Про просторову задачу фільтрації через ґрунтову греблю в умовах впливу техногенних факторів. *Математика в сучасному технічному університеті* : матеріали ІІІ Міжнародної науково-практичної конференції (м. Київ, 25-26 груд. 2014 р.). Київ, 2015. С. 81–83.

15. Медвідь Н. В., Мартинюк П. М. Про просторову задачу нестационарної фільтрації в греблі з водоводом. *Сучасні проблеми математичного моделювання та обчислювальних методів* : матеріали Міжнародної наукової конференції (м. Рівне, 19-22 лют. 2015 р.). Рівне, 2015. С. 113.

16. Медвідь Н. В., Мартинюк П. М. Математичне моделювання фільтрації через ґрунтову греблю з водоводом та зоною вимиву в умовах впливу техногенних факторів. *Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики* : збірник наукових праць ХХІ Всеукраїнської наукової конференції (м. Львів, 24-25 вер. 2015 р.). Львів, 2015. С. 223–224.

17. Медвідь Н. В., Мартинюк П. М. Про просторову задачу фільтрації в греблі з водоводом та зоною вимиву з урахуванням техногенних факторів. *Обчислювальна та прикладна математика* : матеріали VIII Міжнародної наукової конференції імені академіка І.І. Ляшка (м. Київ, 8-9 жовт. 2015 р.). Київ, 2015. С. 64.
18. Медвідь Н. В. Задача пружного режиму фільтрації в ґрунтовій греблі з водоводом в умовах впливу техногенних факторів. *Математика в сучасному технічному університеті* : матеріали IV Міжнародної науково-практичної конференції (м. Київ, 24-25 груд. 2015 р.). Київ, 2016. С. 72–74.
19. Medvid N. How the presence of water pipeline effects filtration processes in the soil dam. *Analysis and mathematical physics* : abstracts of IV International Conference (с. Kharkiv, June 13-17, 2016). Kharkiv, 2016. P. 26–27.
20. Медвідь Н. В. Про вплив контактної зосередженої фільтрації вздовж водоводу в ґрунтовій греблі на положення депресійної поверхні. *Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації* : тези VII Міжнародної наукової конференції (м. Кам'янець-Подільський, 21-22 квіт. 2016 р.). Кам'янець-Подільський, 2016. С. 143–144.
21. Медвідь Н. В., Герус В. А., Мартинюк П. М. Метод скінченних елементів в задачі фільтраційної консолідації ґрунтової греблі з водоводом та зоною вимиву. *Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики* : збірник наукових праць XXII Всеукраїнської наукової конференції (м. Львів, 5-7 жовт. 2016 р.). Львів, 2016. С. 130–132.
22. Герус В., Іванчук Н., Мартинюк П. М. Про застосування пакету freefem в нелінійних крайових задачах з вільними рухомими межами. *Комп'ютерне моделювання та програмне забезпечення інформаційних систем і технологій* : збірник наукових праць III Всеукраїнської науково-практичної конференції (м. Рівне, 28-30 вер. 2017 р.). Рівне, 2017. С. 47–49.
23. Іванчук Н. В., Мартинюк П. М. Про застосування розпаралелення обчислень в пакеті FreeFem++ в задачах гео-гідродинаміки. *Актуальні задачі сучасних технологій* : тези VI Міжнародної науково-технічної конференції молодих учених і студентів (м. Тернопіль, 16-17 лист. 2017 р.). Тернопіль, 2017. С. 71–72.
24. Филипчук В. Л., Іванчук Н. В., Мартинюк П. М. Математичне та комп'ютерне моделювання очищення води в біоплато. *Сучасні проблеми математичного моделювання, обчислювальних методів та інформаційних технологій* : матеріали Міжнародної наукової конференції (м. Рівне, 2-4 бер. 2018 р.). Рівне, 2018. С. 93–95.
25. Іванчук Н. В., Мартинюк П. М., Филипчук В. Л. Математичне моделювання та прогнозування ефективності очищення води в біоплато-фільтрах модифікованої конструкції. *Комп'ютерне моделювання та оптимізація складних систем* : матеріали IV міжнародної науково-технічної конференції (м. Дніпро, 1-2 лист. 2018 р.). Дніпро, 2018. С. 67–68.

*Наукові праці, які додатково відображають наукові результати дисертації*

26. Медвідь Н. В., Мартинюк П. Н. Реализация алгоритма бессеточного метода радиальных базисных функций в задачах подземной гидромеханики. *Информатика*. 2016. № 4. С. 20–32.

27. Свідоцтво про реєстрацію авторського права на твір № 67160 Медвідь Н.В., Мартинюк П. М. Комп'ютерна програма «Комп'ютерна програма для математичного моделювання фільтраційного руйнування ґрунтових гребель». Дата реєстрації 11.08.2016 р.
28. Свідоцтво про реєстрацію авторського права на твір № 71633 Іванчук Н. В., Лобунь В. М., Мартинюк П. М., Мічута О. Р., Герус В. А. Комп'ютерна програма «Комп'ютерна програма для математичного моделювання взаємозв'язаних фільтраційно-суфозійних процесів в ґрунтах». Дата реєстрації 25.04.2017 р.
29. Свідоцтво про реєстрацію авторського права на твір № 78432 Іванчук Н. В., Филипчук В. Л., Мартинюк П. М., Мічута О. Р. «Комп'ютерна програма для математичного моделювання очищення води в біоплато з урахуванням суфозійно-кольматаційних явищ». Дата реєстрації 19.04.2018 р.

## АНОТАЦІЯ

**Іванчук Н. В. Математичне моделювання фільтраційних процесів в ґрунтових середовищах з урахуванням впливу елементів інженерних споруд. – На правах рукопису.**

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук за спеціальністю 01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи. – Національний університет водного господарства та природокористування МОН України, Рівне, 2019.

Дисертація присвячена розробці нових математичних моделей фільтраційних процесів в пористих середовищах за наявності елементів інженерних споруд з урахуванням впливу техногенних факторів. Вдосконалено існуючі математичні моделі задач фільтрації, ущільнення повністю насичених пористих середовищ, їх фільтраційного руйнування, теплосолеперенесення на випадок наявності елементів інженерних споруд в пористих середовищах. Модифіковано кінематичну граничну умову на депресійній поверхні ґрунтового масиву з урахуванням змінної пористості та впливу фізико-хімічних факторів. Розроблено підхід до чисельного розв'язання відповідних нелінійних крайових задач для систем диференціальних рівнянь в областях з включеннями. Відповідно до розробленого підходу адаптовано пакет FreeFem++ для знаходження наближених розв'язків відповідних нелінійних крайових задач методом скінченних елементів в областях з рухомими межами, використано можливості пакету FreeFem++ по розпаралеленню обчислень для зменшення затрат машинного часу на розв'язання сформованих крайових задач. Розроблено алгоритми, створено відповідні програмні реалізації розроблених алгоритмів та проведено серії числових експериментів щодо дослідження впливу елементів інженерних споруд на фільтраційні процеси в пористих середовищах. Виявлено, що наявність даних елементів (особливо, їх пошкоджень) суттєво впливає на перебіг фільтраційних процесів в цих середовищах. Також досліджено вплив змінної пористості та суфозійно-кольматаційних процесів на процеси фільтрації в біоплато-фільтрі та їх вплив на його (біоплато) прогнозу продуктивність. В роботі також запропоновано розглядати зосереджені шляхи фільтрації в ґрунтових масивах як узагальнення елементів інженерних споруд.

**Ключові слова:** математичне та комп'ютерне моделювання, фільтраційні процеси, елементи інженерних споруд, депресійна поверхня, ущільнення ґрунтів, нелінійна крайова задача, метод скінченних елементів, FreeFem++.

### АННОТАЦИЯ

**Иванчук Н. В. Математическое моделирование фильтрационных процессов в грунтовых средах с учетом влияния элементов инженерных сооружений. – На правах рукописи.**

Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук по специальности 01.05.02 – математическое моделирование и вычислительные методы. – Национальный университет водного хозяйства и природопользования МОН Украины, Ровно, 2019.

Диссертация посвящена разработке новых математических моделей фильтрационных процессов в пористых средах за наличия элементов инженерных сооружений с учетом влияния техногенных факторов. Усовершенствовано существующие математические модели задач фильтрации, уплотнения полностью насыщенных пористых сред, их фильтрационного разрушения, теплосолепереноса в случае наличия элементов инженерных сооружений в пористых средах. Модифицировано кинематическое граничное условие на подвижной депрессионной поверхности грунтового массива с учетом переменной пористости и влияния физико-химических факторов. Разработан подход к численному решению соответствующих нелинейных краевых задач для систем дифференциальных уравнений в областях с включениями. Согласно разработанного подхода адаптировано пакет FreeFem++ для нахождения приближенных решений соответствующих нелинейных краевых задач методом конечных элементов в областях с подвижными границами, использованы возможности пакета FreeFem++ по распараллеливанию вычислений для уменьшения затрат машинного времени на решение сложившихся краевых задач. Разработаны алгоритмы, созданы соответствующие программные реализации разработанных алгоритмов и проведены серии численных экспериментов по исследованию влияния элементов инженерных сооружений на фильтрационные процессы в пористых средах. Выявлено, что наличие данных элементов (особенно их повреждений) существенно влияет на ход фильтрационных процессов в этих средах. Также исследовано влияние переменной пористости и суффозионно-кольматационных процессов на процессы фильтрации в биоплато-филт্রে и их влияние на его (биоплато) прогнозную производительность. В работе также предложено рассматривать сосредоточенные пути фильтрации в грунтовых массивах как обобщение элементов инженерных сооружений.

**Ключевые слова:** математическое и компьютерное моделирование, фильтрационные процессы, элементы инженерных сооружений, депрессионная поверхность уплотнение ґрунтов, нелинейная крайова задача, метод конечных элементов, FreeFem++.

### ABSTRACT

**Ivanchuk N. V. Mathematical modeling of filtration processes in soil environments taking into account the influence of elements of engineering structures. – On the right of manuscript.**

Thesis for a PhD degree in Technical Sciences in specialty 01.05.02 – Mathematical Modelling and Computational Methods. – National University of Water and Environmental Engineering, Rivne, 2019.

The dissertation is devoted to the development of new mathematical models of filtration processes in porous media under the conditions of elements of engineering structures presence, taking into account the influence of technogenic factors. Existing mathematical models of filtration problems, consolidation of completely saturated porous environments, their filtration destruction, heat and salt transfer in the case of elements of engineering structures presence in porous environments have been improved. The kinematic boundary condition on the mobile depression surface of the soil massif has been modified, taking into account the variable porosity and the influence of physico-chemical factors. An approach to the numerical solution of the corresponding nonlinear boundary value problems for systems of differential equations in domains with inclusions is developed. According to the developed approach, the FreeFem++ package has been used to find approximate solutions of the corresponding nonlinear boundary value problems using the finite element method in the domains with moving boundaries, using the features of the FreeFem++ package for the parallelization of computations to reduce the machine time to solve the boundary value problems. The algorithms were developed, corresponding software implementations of the developed algorithms were created, and a series of numerical experiments were conducted in relation to the study of the influence of elements of engineering structures on filtration processes in porous environments. It was revealed that the presence of these elements of engineering structures (especially their damage) significantly influence the filtration processes in these environments. Also, the influence of variable porosity and suffusion, and colmatage processes on the processes of filtration in a bioplato filter and their influence on its (bioplato) predictive productivity is studied. The study also offers to consider the concentrated ways of filtration in soil massifs as a generalization of elements of engineering structures.

The results of dissertational work have been used during the development of the design documentation for reconstruction of the water supply network in Ozhenyn village in Ostroh region of Rivne oblast by “BTS-ENGINEERING” state enterprise, “BIOTEKHSOIUZ” LLC; during development of the reconstruction project documentation for the sewage system on the manufacturing site of “Mankovychi” distillery, Mankovychi village, Stolin region, Brest oblast, Republic of Belarus. Results obtained in the dissertational work have been introduced into the educational process in development of courses “Mathematical and computer modelling of natural and anthropogenic systems”, “Projection-mesh and mesh-free methods of mathematical physics” for the students of National University of Water and Environmental Engineering of Ministry for Education and Science of Ukraine in specialty 113 “Applied mathematics”. Four authors' rights registration certificates have been obtained.

**Keywords:** mathematical and computer modeling, filtration processes, elements of engineering structures, depression surface, soil compaction, nonlinear boundary value problem, finite element method, FreeFem++.

Підписано до друку 02.05.2019 р. Формат 60×90<sup>1</sup>/<sub>16</sub>.  
Ум.-друк. арк. 0,9. Тираж 100 прим.  
Зам. № 5424.

---

*Видавець і виготовлювач  
Національний університет  
водного господарства та природокористування,  
вул. Соборна, 11, м. Рівне, 33028.*

*Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до державного  
реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів  
видавничої продукції РВ № 31 від 26.04.2005 р.*