

Національний університет водного господарства та природокористування  
Міністерство освіти і науки України

Національний університет водного господарства та природокористування  
Міністерство освіти і науки України

Кваліфікаційна наукова  
праця на правах рукопису

**ІВАНЧУК НАТАЛІЯ ВІТАЛІЇВНА**

УДК 519.87:631.41(043.3)

**ДИСЕРТАЦІЯ**

**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ФІЛЬТРАЦІЙНИХ ПРОЦЕСІВ В  
ГРУНТОВИХ СЕРЕДОВИЩАХ З УРАХУВАННЯМ ВПЛИВУ  
ЕЛЕМЕНТІВ ІНЖЕНЕРНИХ СПОРУД**

01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи  
05 «Технічні науки»

Подається на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей,  
результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

\_\_\_\_\_ Н. В. Іванчук

Науковий керівник:

**Мартинюк Петро Миколайович**  
доктор технічних наук, доцент

*Ідентичність всіх примірників дисертації  
ЗАСВІДЧУЮ*

*Вчений секретар спеціалізованої вченої ради  
/О. Р. Мічута/*

Рівне – 2019

## АНОТАЦІЯ

Іванчук Н. В. Математичне моделювання фільтраційних процесів в ґрунтових середовищах з урахуванням впливу елементів інженерних споруд. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук за спеціальністю 01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи. – Національний університет водного господарства та природокористування, Міністерство освіти і науки України, Рівне, 2019.

Підготовка здійснювалась на кафедрі прикладної математики Національного університету водного господарства та природокористування Міністерства освіти і науки України.

Спеціалізована вчена рада Д 47.104.09 при Національному університеті водного господарства та природокористування Міністерства освіти і науки України.

Дисертація присвячена розробці нових математичних моделей фільтраційних процесів в пористих середовищах за наявності елементів інженерних споруд з урахуванням впливу техногенних факторів (в тому числі, в просторовому випадку).

У першому розділі викладено огляд та проведено аналіз літератури за темою дисертації, визначено місце досліджень, наведених у роботі, у розв'язанні науково-технічного завдання розробки нових математичних моделей фільтраційних процесів в пористих середовищах (на прикладі ґрунтових масивів) за наявності елементів інженерних споруд з урахуванням впливу техногенних факторів.

Проведений в розділі аналіз показав, що відома низка вчених, завдяки роботам яких вивчено теоретичні і практичні питання стосовно вирішенням проблеми фільтрації та фільтраційного руйнування ґрунтових споруд. Але незважаючи на це, ще деякі аспекти є не дослідженими і не врахованими.

Про це свідчить той факт, що аварії гідротехнічних споруд, пов'язані з фільтраційними деформаціями, все ще мають місце і приносять великі збитки.

Одним з таких аспектів є урахування наявності в гідротехнічних об'єктах та спорудах водного господарства елементів інженерних споруд – водоводів, перфорованих труб, систем підземних трубопроводів. Більше того, зосереджені шляхи фільтрації в тілах ґрунтових гребель (які (шляхи) згідно статистичних даних є однією з основних причин фільтраційного руйнування ґрунтових гідротехнічних споруд) можна розглядати як узагальнення водоводів. Тому, за аналогією, процеси в обох випадках будуть описуватись подібними математичними моделями. Подальше дослідження цих процесів є однією із важливих теоретичних і практичних задач. Що ж стосується фільтраційних руйнувань ґрунтових масивів, то загалом аналіз наукових літературних джерел дозволяє навести низку наступних узагальнюючих висновків.

Необхідно вдосконалити існуючі математичні моделі задач фільтрації та фільтраційного руйнування пористих (ґрунтових) середовищ, врахувавши вплив елементів інженерних споруд та техногенних факторів, знайти чисельні розв'язки відповідних нелінійних крайових задач та провести аналіз чисельних розв'язків модельних задач.

Для досягнення поставленої мети необхідно сформулювати відповідні математичні моделі, врахувати вплив наявності елементів інженерних споруд. Далі – використати пакет FreeFem++ для знаходження наближеного розв'язку відповідних крайових задач методом скінченних елементів в областях з рухомими межами, при цьому використавши можливості пакету по розпаралеленню обчислень для зменшення затрат машинного часу на розв'язання сформульованих крайових задач. Заключний етап – розробити алгоритми, створити відповідні програмні реалізації розроблених алгоритмів

та провести серії чисельних експериментів, проаналізувати їх, а також сформулювати відповідні висновки.

У другому розділі наведено постановки задач фільтрації в пористих середовищах з елементами інженерних споруд – задача фільтрації в ґрунтовій греблі з водоводом та можливою зоною вимиву, яку займає пульпа; задача фільтрації та фільтрування в біоплато із системою перфорованих труб. Аналогія між водоводом та зосередженим шляхом фільтрації в тілі ґрунтової греблі дозволяє ставити та розв’язувати і такі задачі – в даному випадку припускається, що стінки водоводу є непроникними.

Також у другому розділі дисертаційної роботи модифіковано кінематичну граничну умову на депресійній поверхні ґрунтової греблі, що дало змогу врахувати вплив просідань ґрунту в результаті його консолідації. Сформовано нелінійну математичну модель фільтраційних процесів в ґрунтових масивах з елементами інженерних споруд (в тому числі з водоводами, враховуючи наявність в них пошкоджень) та модифікованою кінематичною граничною умовою на верхній межі ґрунтового масиву з урахуванням змінної пористості та впливу фізико-хімічних факторів в тривимірному випадку; нелінійну математичну модель процесів фільтрації в біоплато-фільтрі з урахуванням змінної пористості та суфозійно-кольматаційних процесів. Математичні моделі описуються крайовими задачами для систем нелінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних.

Третій розділ присвячено математичному моделюванню просторової фільтрації в ґрунтових масивах з урахування впливу техногенних факторів. В даному розділі сформовано вдосконалені математичні моделі фільтраційних процесів в пористих середовищах з елементами інженерних споруд з урахуванням суфозійно-кольматаційних явищ та тепломасоперенесення.

Для відшукування наближених розв'язків поставлених крайових задач використано метод скінченних елементів (МСЕ) і це дало суттєву перевагу у тривимірному випадку, оскільки дозволило врахувати геометрію області. Задачі були розв'язані в середовищі FreeFem++, яке являє собою програмне забезпечення для розв'язування крайових задач для диференціальних рівнянь в частинних похідних методом скінченних елементів. Цей безкоштовний програмний продукт, поміж іншого, надає можливості варіаційного формулювання проблеми, автоматизації генерування сітки на основі алгоритму Делоне-Вороного та великий вибір типів скінченних елементів. Також даний пакет містить вмонтовані алгоритми апроксимації вільних меж. FreeFem++ дав змогу автоматизувати процеси тріангуляції та тетраедризації тіла ґрунтових масивів, повністю автоматизувати чисельне інтегрування та розв'язування систем лінійних алгебричних рівнянь.

Також було досліджено вплив техногенних факторів на розподіл напорів та швидкостей фільтрації. Отримані результати дозволять визначити місце можливої локалізації фільтраційних руйнувань, спрогнозувати характер можливих аварій та пошкоджень, пов'язаних із коливаннями напорів.

Отримані результати дозволять попередити характер можливих аварій та пошкоджень, пов'язаних із змінами напорів, оскільки зупинити фільтраційні руйнування, що почалися, практично неможливо.

Четвертий розділ присвячений математичному моделюванню фільтраційних процесів в ґрунтових масивах в просторовому випадку. Враховано вплив наявності елементів інженерних споруд та можливих зон вимиву. Враховано модифікацію кінематичної граничної умови на депресійній поверхні при дослідженні процесів фільтрації в ґрунтовій греблі.

Сформовано математичну модель просторових фільтраційних процесів в ґрунтових масивах з елементами інженерних включень (в тому числі з водоводами, враховуючи наявність в них пошкоджень) та модифікованою

кінематичною граничною умовою на верхній межі ґрунтового масиву з урахуванням змінної пористості та впливу фізико-хімічних факторів в тривимірному випадку.

Для відшукування наближеного розв'язку поставлених крайових задач в областях з вільними рухомими межами використано МСЕ та безкоштовний програмний продукт FreeFem++.

Також в четвертому розділі побудовано та досліджено просторову нелінійну крайову задачу фільтраційних процесів в тілі ґрунтової греблі зі справним водоводом та просторову нелінійну крайову задачу фільтраційних процесів в ґрунтовій греблі з водоводом та зосередженою фільтрацією.

Дисертаційна робота є завершеним науковим дослідженням, у якому розв'язано важливу науково-технічну задачу математичного та комп'ютерного моделювання фільтраційних процесів в пористих середовищах (на прикладі ґрунтових масивів) за наявності елементів інженерних споруд з урахуванням впливу техногенних факторів.

Результати дисертації були використані під час розробки проектної документації проекту реконструкції водопровідної мережі в с. Оженин Острозького району Рівненської області на ДП «БТС-ІНЖИНІРИНГ» ТОВ «БІОТЕХСОЮЗ»; при розробці проектної документації проекту реконструкції каналізаційної системи на виробничій площадці спиртогорілчаного заводу КУПП «Маньковичі», с. Маньковичі, Столінського р-ну, Брестської обл., Республіка Білорусь. Одержані в дисертаційній роботі результати впроваджені в навчальному процесі при підготовці спецкурсів «Математичне і комп'ютерне моделювання природних і техногенних систем», «Проекційно-сіткові та безсіткові методи математичної фізики» для студентів Національного університету водного господарства та природокористування МОН України за спеціальністю 113 «Прикладна математика». Отримано 3 свідоцтва про реєстрацію авторського права на твір

**Ключові слова:** математичне та комп'ютерне моделювання, фільтраційні процеси, елементи інженерних споруд, депресійна поверхня, ущільнення ґрунтів, нелінійна крайова задача, метод скінченних елементів, FreeFem++.

## ПЕРЕЛІК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

*Наукові праці, в яких опубліковано основні наукові результати дисертації*

1. Власюк А. П., Мартинюк П. М., Медвідь Н. В. Математичне моделювання консолідації та фільтраційного руйнування ґрунтів в основах гідротехнічних та енергетичних споруд: монографія. Рівне: НУВГП, 2017. 423 с.
2. Ivanchuk N., Martynyuk P., Tsvetkova T., Michuta O. Mathematical modeling and computer simulation of the filtration processes in earth dams. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2017. № 2/6(86). P. 63–69.
3. Герус В. А., Іванчук Н. В., Мартинюк П. М. Системний підхід до математичного і комп'ютерного моделювання геоміграційних процесів з використанням пакету FreeFem++ та розпаралелювання обчислень. *Кібернетика та системний аналіз*. 2018. Том. 54, № 2. С. 123–133.  
Herus, V. A., Ivanchuk N. V., Martyniuk P. M. A System Approach to Mathematical and Computer Modeling of Geomigration Processes Using Freefem++ and Parallelization of Computations. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2018. Vol. 54, No. 2. P. 284–294.
4. Moshynskiy V., Filipchuk V., Ivanchuk N., Martyniuk P. Computer modeling of water cleaning in wetland taking into account of suffosion and colmatation. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2018. № 1/10 (91). P. 38–43.
5. Медвідь Н. В., Мартинюк П. М. Математичне моделювання впливу на надлишкові напори наявності зони вимиву в ґрунтовій греблі з водоводом. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки*. 2014. Випуск 10. С. 101–112.



6. Медвідь Н. В., Мартинюк П. М. Дослідження впливу тепло-солеперенесення на швидкість фільтрації в ґрунтовій греблі (просторова задача). *Вісник ТНТУ*. 2015. Том 80, № 4. С. 172–181.
7. Медвідь Н. В. Дослідження впливу водоводу та зони вимиву на процеси фільтраційної консолідації ґрунтової греблі методом скінченних елементів. *Вісник Національного університету водного господарства та природокористування. Серія: Технічні науки*. 2015. Випуск 4(72). С. 132–142.
8. Medvid N. V., Herus V. A., Martyniuk P. M. Modification of Kinematic Boundary Condition at Free Surfaces in Filtration Problems by means of Earth Dam. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: Технічні науки*. 2016. № 1. С. 119–124.
9. Медвідь Н. В. Комп'ютерне моделювання впливу контактної зосередженої фільтрації вздовж водоводу на положення депресійної поверхні в ґрунтовій греблі. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки*. 2016. Випуск 13. С. 99–106.

*Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації*

10. Мартинюк П. М., Медвідь Н. В. Про задачу фільтрації в греблі з водоводом. *Сучасні проблеми математичного моделювання та обчислювальних методів*: матеріали Міжнародної наукової конференції (м. Рівне, 22–23 лют. 2013 р.). Рівне, 2013. С. 105.
11. Медвідь Н. В., Мартинюк П. М. Про задачу фільтраційної консолідації ґрунтових гребель з водоводами. *Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики*: матеріали XIX Всеукраїнської наукової конференції (м. Львів, 3–4 жовт. 2013 р.). Львів, 2013. С. 94–95.
12. Медвідь Н. В., Мартинюк П. М. Числове розв'язання задачі фільтраційної консолідації ґрунтових гребель з водоводами в умовах впливу

техногенних факторів. *П'ятнадцята Міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука*: матеріали конференції (м. Київ, 15–17 травн. 2014 р.). Київ, 2014. С. 135–136.

13. Медвідь Н. В., Мартинюк П. М. Про вплив n-компонентного хімічного розчину на процес фільтраційної консолідації ґрунтових гребель з водоводами. *Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики*: матеріали I міжнародної XX Всеукраїнської наукової конференції (м. Львів, 7–9 квіт. 2014 р.). Львів, 2014. С. 105–106.

14. Медвідь Н. В., Мартинюк П. М. Про просторову задачу фільтрації через ґрунтову греблю в умовах впливу техногенних факторів. *Математика в сучасному технічному університеті*: матеріали III Міжнародної науково-практичної конференції (м. Київ, 25–26 груд. 2014 р.). Київ, 2015. С. 81–83.

15. Медвідь Н. В., Мартинюк П. М. Про просторову задачу нестационарної фільтрації в греблі з водоводом. *Сучасні проблеми математичного моделювання та обчислювальних методів*: матеріали Міжнародної наукової конференції (м. Рівне, 19–22 лют. 2015 р.). Рівне, 2015. С. 113.

16. Медвідь Н. В., Мартинюк П. М. Математичне моделювання фільтрації через ґрунтову греблю з водоводом та зоною вимиву в умовах впливу техногенних факторів. *Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики*: збірник наукових праць XXI Всеукраїнської наукової конференції (м. Львів, 24–25 вер. 2015 р.). Львів, 2015. С. 223–224.

17. Медвідь Н. В., Мартинюк П. М. Про просторову задачу фільтрації в греблі з водоводом та зоною вимиву з урахуванням техногенних факторів. *Обчислювальна та прикладна математика*: матеріали VIII Міжнародної наукової конференції імені академіка І.І. Ляшка (м. Київ, 8–9 жовт. 2015 р.). Київ, 2015. С. 64.

18. Медвідь Н. В. Задача пружного режиму фільтрації в ґрунтовій греблі з водоводом в умовах впливу техногенних факторів. *Математика в сучасному*

*технічному університеті*: матеріали IV Міжнародної науково-практичної конференції (м. Київ, 24–25 груд. 2015 р.). Київ, 2016. С. 72–74.

19. Medvid N. How the presence of water pipeline effects filtration processes in the soil dam. *Analysis and mathematical physics: abstracts of IV International Conference* (с. Kharkiv, June 13–17, 2016). Kharkiv, 2016. P. 26–27.

20. Медвідь Н. В. Про вплив контактної зосередженої фільтрації вздовж водоводу в ґрунтовій греблі на положення депресійної поверхні. *Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації*: тези VII Міжнародної наукової конференції (м. Кам'янець-Подільський, 21–22 квіт. 2016 р.). Кам'янець-Подільський, 2016. С. 143–144.

21. Медвідь Н. В., Герус В. А., Мартинюк П. М. Метод скінченних елементів в задачі фільтраційної консолідації ґрунтової греблі з водоводом та зоною вимиву. *Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики*: збірник наукових праць XXII Всеукраїнської наукової конференції (м. Львів, 5–7 жовт. 2016 р.). Львів, 2016. С. 130–132.

22. Герус В., Іванчук Н., Мартинюк П. М. Про застосування пакету freefem в нелінійних крайових задачах з вільними рухомими межами. *Комп'ютерне моделювання та програмне забезпечення інформаційних систем і технологій*: збірник наукових праць III Всеукраїнської науково-практичної конференції (м. Рівне, 28–30 вер. 2017 р.). Рівне, 2017. С. 47–49.

23. Іванчук Н. В., Мартинюк П. М. Про застосування розпаралелення обчислень в пакеті FreeFem++ в задачах гео-гідродинаміки. *Актуальні задачі сучасних технологій*: тези VI Міжнародної науково-технічної конференції молодих учених і студентів (м. Тернопіль, 16–17 лист. 2017 р.). Тернопіль, 2017. С. 71–72.

24. Филипчук В. Л., Іванчук Н. В., Мартинюк П. М. Математичне та комп'ютерне моделювання очищення води в біоплато. *Сучасні проблеми математичного моделювання, обчислювальних методів та інформаційних*

*технологій*: матеріали Міжнародної наукової конференції (м. Рівне, 2–4 бер. 2018 р.). Рівне, 2018. С. 93–95.

25. Іванчук Н. В., Мартинюк П. М., Филипчук В. Л. Математичне моделювання та прогнозування ефективності очищення води в біоплато-фільтрах модифікованої конструкції. *Комп'ютерне моделювання та оптимізація складних систем*: матеріали IV міжнародної науково-технічної конференції (м. Дніпро, 1–2 лист. 2018 р.). Дніпро, 2018. С. 67–68.

*Наукові праці, які додатково відображають наукові результати дисертації*

26. Медвидь Н. В., Мартинюк П. Н. Реализация алгоритма бессеточного метода радиальных базисных функций в задачах подземной гидромеханики. *Информатика*. 2016. № 4. С. 20–32.

27. Свідоцтво про реєстрацію авторського права на твір №67160 Медвидь Н.В., Мартинюк П.М. Комп'ютерна програма “Комп'ютерна програма для математичного моделювання фільтраційного руйнування ґрунтових гребель”. Дата реєстрації 11.08.2016 р.

28. Свідоцтво про реєстрацію авторського права на твір №71633 Іванчук Н. В., Лобунь В. М., Мартинюк П. М., Мічута О. Р., Герус В. А. Комп'ютерна програма “Комп'ютерна програма для математичного моделювання взаємозв'язаних фільтраційно-суфозійних процесів в ґрунтах”. Дата реєстрації 25.04.2017 р.

29. Свідоцтво про реєстрацію авторського права на твір №78432 Іванчук Н. В., Филипчук В. Л., Мартинюк П. М., Мічута О. Р. "Комп'ютерна програма для математичного моделювання очищення води в біоплато з урахуванням суфозійно-кольматаційних явищ". Дата реєстрації 19.04.2018 р.

## ABSTRACT

Ivanchuk N. V. Mathematical modeling of filtration processes in soil environments taking into account the influence of elements of engineering structures. – Qualifying scientific work on the rights of manuscript.

Thesis for a PhD degree in Technical Sciences in specialty 01.05.02 – mathematical modeling and computational methods. – National University of Water and Environmental Engineering, Ministry of Education and Science of Ukraine, Rivne, 2019.

Preparation was carried out at the Department of Applied Mathematics of National University of Water and Environmental Engineering of the Ministry of Education and Science of Ukraine.

Specialized Academic Council D 47.104.09 at the National University of Water and Environmental Engineering of the Ministry of Education and Science of Ukraine.

The dissertation is dedicated to the development of new mathematical models of filtrational processes in porous media containing elements of engineering structures with regard to the impact of technogenic factors (including spatial case).

In chapter 1 the literature review and analysis is presented, and the place of the introduced research in solving the scientific and engineering task of building new mathematical models of filtrational processes in porous media (exampled by soil bodies) with elements of engineering structures considering impact of technogenic factors is determined.

Analysis given in chapter 1 presents a number of scientists, thanks to whose work theoretical and practical aspects of water flow and filtrational ruination of soil structures have been studied. In spite of that, some aspects remain not researched or considered yet. This is evidenced by the fact accidents on hydraulic structures still occur and cause significant losses.

One of such aspects is taking into account elements of engineering structures in hydraulic facilities and water management structures, such as conduits, perforated pipes, system of underground pipelines etc. Moreover, the focused flux paths in the bodies of soil dams (which paths are among the chief causes of filtrational ruination of soil hydraulic structures according to statistical information) can be regarded as generalization of conduits. Thus, by analogy, processes in both cases will be described by similar mathematical models. Further research on these processes is one of the significant theoretical and practical problems. As to filtrational ruination of soil bodies, general review of scientific literature sources confirms necessity for the improvement of existing mathematical models of water flow and filtrational ruination of porous media (soils), considering impact of elements of engineering structures and technogenic factors, finding numerical solutions of corresponding nonlinear boundary value problems and analyze numerical solutions of model problems.

To reach the stated goal corresponding mathematical problems have to be formulated, and the impact of existing artificial elements of engineering structures considered. Then we will have to adapt FreeFem++ package to calculate approximate solution of corresponding boundary value problems with the finite elements method in domains with moving boundaries, using the package's capabilities on parallelization to reduce computing time for solving formulated boundary value problems. Final stage is to develop algorithms, build program realizations for the corresponding algorithms and to perform series of numerical experiments, analyze them and formulate conclusions accordingly.

In chapter 2 the settings of the water flow problems in soil dam with conduit and potential outwash zone, occupied by suspension; water flow and filtration problem in bioplato with a system of perforated pipes. Setting of such problems is made possible by analogy between conduit and focused flux path in the body of soil dam – in given case it is assumed that conduit walls are impermeable.

Also in chapter 2 of the dissertation a kinematic boundary condition on moving depression surface is modified, which allows taking into consideration the impact of soil subsidence resulting from its consolidation. Nonlinear mathematical model of filtrational processes in soil bodies with elements of engineering structures (including conduits and damages in them) and modified kinematic boundary condition on the moving upper boundary is formulated for the spatial case taking into account variable porosity and impact of physical and chemical factors, as well as nonlinear mathematical model of filtrational processes in bioplato-filter considering variable porosity, suffusion and colmatation. Mathematical models are described by the boundary value problems for systems of nonlinear partial differential equations.

Chapter 3 deals with mathematical modelling of spatial filtration in soil bodies considering the impact of technogenic factors. In this chapter improved mathematical models of filtrational processes in porous media with elements of engineering structures and considered suffusion, colmatation, heat and mass transfer effects are formulated.

To calculate approximate solutions of the stated boundary value problems the finite elements method (FEM) is used, which gives a significant advantage in three-dimensional case, for it allows accounting the domain geometry. The problems have been solved in FreeFem++ environment, which is a software for solving boundary value problems for partial differential equations with the finite elements method. This free software, among other things, admits weak formulation of the problem, provides automated mesh generation by Delaunay-Voronoi algorithm and a variety of finite elements. The package also contains built-in algorithms of free boundaries approximation. FreeFem++ made it possible to automate the triangulation and tetraetrization of soil bodies, fully automate numerical integration and solution of linear equations systems.

Also the impact of technogenic factors on the pressure head and water flux distributions have been investigated. Obtained results allow to determine the location of possible filtrational ruination, predict the pattern of potential accidents and damages, related to pressure head fluctuations.

Obtained results make possible to prevent potential accidents and damages, related to pressure head fluctuations, for the filtrational ruinations, that has already started, are nearly impossible to stop.

Chapter 4 is dedicated to the mathematical modelling of filtrational processes in soil bodies in spatial case. The impact of present elements of engineering structures and probable outwash zones is taken into account. Modification of kinematic boundary condition on moving depression surface is considered in the investigation of filtrational processes in soil dams.

The mathematical model of spatial filtrational processes in soil bodies with elements of engineering structures (such as conduits and damages in them) and modified kinematic boundary condition on the moving upper boundary considering variable porosity and the impact of physico-chemical factors in three-dimensional case is formulated.

To calculate the approximate solutions of the stated boundary value problems in domains with moving free boundaries the FEM FreeFem++free software have been used.

Additionally, in chapter 4 a spatial nonlinear boundary value problem in the soil body with intact conduit and a spatial nonlinear boundary value problem in the soil dam with conduit and focused flux are developed and investigated.

The dissertation is a complete scientific research in which the important scientific and technical problem of mathematical and computer modelling of filtrational processes in porous media (exemplified by soil bodies) containing elements of engineering structures is solved taking into account the impact of technogenic factors.



The results of dissertational work have been used during development of the design documentation for reconstruction of the water supply network in Ozhenyn village in Ostroh region of Rivne oblast by “BTS-ENGINEERING” state enterprise, “BIOTEKHSOIUZ” LLC; during development of the reconstruction project documentation for the sewerage system on the manufacturing site of “Mankovychi” distillery, Mankovychi village, Stolin region, Brest oblast, Republic of Belarus. Results obtained in the dissertational work have been introduced into the educational process in development of courses “Mathematical and computer modelling of natural and anthropogenic systems”, “Projection-mesh and mesh-free methods of mathematical physics” for the students of National University of Water and Environmental Engineering of Ministry for Education and Science of Ukraine in specialty 113 “Applied mathematics”. Four authors' rights registration certificates have been obtained.

**Keywords:** mathematical and computer modeling, filtration processes, elements of engineering structures, depression surface, soil compaction, nonlinear boundary value problem, finite element method, FreeFem++.

## ЗМІСТ

<b>ВСТУП.....</b>	<b>20</b>
<b>РОЗДІЛ 1.....</b>	<b>31</b>
<b>ПРОЦЕСИ ФІЛЬТРАЦІЇ ТА ФІЛЬТРАЦІЙНОГО РУЙНУВАННЯ ГРУНТОВИХ СПОРУД.....</b>	<b>31</b>
1.1. Ґрунтові гідротехнічні та гідромеліоративні об’єкти з елементами інженерних споруд .....	31
1.2. Проблеми фільтрації та фільтраційного руйнування ґрунтових гідротехнічних та гідромеліоративних об’єктів .....	39
1.3. Зосереджені шляхи фільтрації як аналог водоводів в ґрунтових гідротехнічних спорудах .....	43
1.4. Математичне моделювання процесів фільтрації та фільтраційного руйнування ґрунтів.....	48
1.5. Обґрунтування вибору чисельного методу в нелінійних крайових задачах в областях з вільними рухомими межами.....	50
1.6. Застосування пакету FreeFem++ в наукових дослідженнях.....	53
1.7. Паралелізм у FreeFem++.....	55
<b>ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 1 ТА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ДОСЛІДЖЕНЬ .....</b>	<b>56</b>
<b>РОЗДІЛ 2.....</b>	<b>59</b>
<b>МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ФІЛЬТРАЦІЇ ТА ФІЛЬТРАЦІЙНОГО РУЙНУВАННЯ ПОРИСТИХ СЕРЕДОВИЩ З ЕЛЕМЕНТАМИ ІНЖЕНЕРНИХ СПОРУД.....</b>	<b>59</b>
2.1. Постановки задач у фізичних областях та структурні елементи для їх подальшого математичного описання.....	59
2.2. Рівняння фільтрації в пористих середовищах зі змінною пористістю .....	62
2.3. Математичні моделі тепломасоперенесення та руху пульпи.....	64

2.4. Граничні умови на рухомій межі розмиву та в зоні вимиву .....	68
2.5. Модифікована кінематична гранична умова на депресійній поверхні ґрунтової греблі .....	69
2.6. Математичні моделі поставлених задач у фізичних областях.....	72
<b>ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 2 .....</b>	<b>77</b>
<b>РОЗДІЛ 3 .....</b>	<b>78</b>
<b>МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВПЛИВУ ТЕХНОГЕННИХ ФАКТОРІВ НА ФІЛЬТРАЦІЙНІ ПРОЦЕСИ В ҐРУНТОВИХ МАСИВАХ.....</b>	<b>78</b>
3.1. Чисельне розв’язання просторової задачі фільтрації в ґрунтовому масиві з урахуванням впливу теплосолеперенесення .....	78
3.1.1. Просторова задача фільтрації та її математична модель .....	78
3.1.2. Слабке формулювання крайової задачі в тривимірному випадку.....	81
3.1.3. Чисельні експерименти для модельної задачі фільтрації в ґрунтовій греблі та їх аналіз .....	83
3.2. Чисельне розв’язання задачі фільтрації в ґрунтовому масиві з урахуванням суфозійно-кольматаційних процесів .....	88
3.2.1. Постановка задачі фільтрування в біоплато та її математична модель .....	88
3.2.2. Скінченноелементний розв’язок крайової задачі .....	91
3.2.3. Результати чисельних експериментів та їх аналіз .....	93
<b>ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 3 .....</b>	<b>98</b>
<b>РОЗДІЛ 4.....</b>	<b>100</b>
<b>МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ФІЛЬТРАЦІЙНИХ ПРОЦЕСІВ В ҐРУНТОВИХ МАСИВАХ З ЕЛЕМЕНТАМИ ІНЖЕНЕРНИХ СПОРУД ТА ЗОНАМИ ВИМИВУ .....</b>	<b>100</b>
4.1. Постановка задачі та її математична модель.....	100

4.2. Чисельний розв’язок крайової задачі фільтраційних процесів в ґрунтових масивах з елементами інженерних споруд .....	102
4.3. Слабка постановка задачі фільтраційних процесів в тілі ґрунтової греблі з водоводом .....	105
4.4. Результати чисельного експерименту розв’язання задачі фільтраційних процесів в тілі ґрунтової греблі з водоводом .....	107
4.5. Слабка постановка задачі фільтраційних процесів в ґрунтовій греблі з водоводом та зосередженою фільтрацією.....	109
4.6. Результати чисельного експерименту розв’язку задачі фільтраційних процесів в ґрунтовій греблі з водоводом та зосередженою фільтрацією.....	111
4.7. Слабка постановка задачі фільтраційної консолідації в тілі ґрунтової греблі з водоводом та зоною вимиву.....	115
4.8. Результати чисельних експериментів розв’язку задачі фільтраційної консолідації в тілі ґрунтової греблі з водоводом та зоною вимиву .....	119
ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 4 .....	122
ЗАГАЛЬНІ ВИСНОВКИ.....	124
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ .....	127
ДОДАТОК А.....	145
ДОДАТОК В.....	148
ДОДАТОК С.....	151
ДОДАТОК D.....	153
ДОДАТОК Е.....	155
ДОДАТОК F.....	157
ДОДАТОК G.....	159

## ВСТУП

**Актуальність теми.** Використання ґрунтів в якості природного економічно вигідного матеріалу для будівництва гідротехнічних та гідромеліоративних об'єктів зумовив зростання інтересу до питань фільтрації та фільтраційних руйнувань пористих середовищ загалом і ґрунтів зокрема. При цьому ґрунтові масиви досить часто містять елементи інженерних споруд (водоводи, дренажні та меліоративні системи із перфорованих труб, системи підземних трубопроводів), які можуть суттєво впливати на перебіг фільтраційних процесів в цих середовищах. Питання впливу наявності таких елементів інженерних споруд на стійкість, наприклад, ґрунтових гребель, вимагає дослідження процесів фільтрації в навколотрубній зоні. Зокрема, можуть розвинути небезпечні фільтраційні деформації, викликані контактною зосередженою фільтрацією вздовж трубопроводу, що супроводжується розмивом ґрунтів та підйомом депресійної поверхні. Навіть при справній роботі трубопроводу може відбуватися суфозійний розмив ґрунту в навколотрубній зоні контактною зосередженою фільтрацією.

Включення із труб є невід'ємною складовою конструкцій і знехтувати їх наявністю не можна, оскільки вони є частиною інженерних рішень при зведенні чи конструюванні тієї чи іншої споруди водного господарства. Наприклад – біоплато, як споруди для очищення господарсько-побутових, виробничих стічних вод, забрудненого поверхневого стоку. У відомих конструкціях біоплато відбувається поступова кольматація порового простору фільтрувальної засипки та нижнього дренажу біоплівкою і мінералізованим осадом, накопичення мулу в донній частині споруди. Все це впливає на пористість фільтрувальної засипки, а звідси – на коефіцієнт фільтрації та продуктивність роботи. Для відновлення роботи біоплато необхідна їх періодична зупинка на складні і тривалі ремонтно-

відновлювальні роботи, пов'язані з промивкою і регенерацією фільтрувальної засипки та дренажу. Тому актуальним є дослідження фільтраційних та суфозійно-кольматаційних процесів, що протікають у об'ємі фільтрувальної засипки біоплато під час фільтрування забрудненої води, в тому числі, з точки зору ефективності їх (біоплато) роботи.

Такі задачі, як дослідження ґрунтів в якості основ гідротехнічних об'єктів чи в якості матеріалу для їх спорудження обов'язково мають своєю складовою задачу вивчення і прогнозування фільтраційних процесів в ґрунтах, що впливають на безаварійну роботу даних об'єктів. Питання руйнування пористого матеріалу ґрунтових масивів та їх стійкості є дуже важливим, оскільки несе за собою економічну, екологічну та гуманітарну загрози. Самі фільтраційні процеси в ґрунтових середовищах досить детально вивчені з точки зору математичного та комп'ютерного моделювання. За наявності елементів інженерних споруд виникає низка інших задач, що поребують розв'язання, які вказують на актуальність подальших досліджень в даному напрямку. Зокрема, за наявності перфорованих труб починають проявлятися суфозійно-кольматаційні процеси, які, в свою чергу впливають і на фільтрацію. Так само, за наявності пошкоджень у водоводах ґрунтових гребель може відбуватись вимив ґрунту, що в кінцевому рахунку може призвести до критичних ситуацій та аварій гідротехнічної споруди. Стосовно другої задачі, актуальність подальших досліджень проявляється в кількох аспектах. По-перше, за наявності водоводу просторову модель фільтрації в тілі ґрунтової греблі не можна звести до двовимірної з використанням планової або профільної схем. Таке зведення призведе до суттєвих втрат і викривлень у фізиці досліджуваних процесів. По-друге, вже сама задача фільтрації в ґрунтовій греблі пов'язана з наявністю вільної межі. По-третє, урахування суфозійно-кольматаційних процесів призводить до нелінійних крайових задач для систем

диференціальних рівнянь, де параметри одних процесів впливають на параметри інших процесів. Тому актуальною щодо вказаних проблем є також задача вибору ефективного методу розв'язання таких задач і програмного пакету для реалізації алгоритмів.

Проведення натурних експериментів є досить затратним, а, інколи, навіть неможливим. Тому, доцільним є прогнозування роботи ґрунтових споруд та їх можливих пошкоджень ще на етапі проектування саме засобами математичного та комп'ютерного моделювання. Крім того, задача ідентифікації параметрів пористих середовищ, можливих ділянок пошкоджень трубопроводів та водоводів передбачає побудову математичної моделі.

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.** Робота виконана в рамках планів наукових досліджень Національного університету водного господарства та природокористування (НУВГП). Результати дисертаційної роботи отримані в рамках науково-дослідних тем, в яких здобувач була виконавцем: «Математичне і комп'ютерне моделювання нелінійних фізико-хімічних процесів гідромеханіки в багатокомпонентних середовищах пористої та нанопористої структури» (№ ДР 0113U004052); «Математичне та комп'ютерне моделювання складних фізико-хімічних процесів підземної гідромеханіки природного та техногенного характеру» (№ ДР 0114U001148); «Математичне та комп'ютерне моделювання процесів в гетерогенних пористих середовищах з урахуванням впливу фізико-хімічних факторів» (№ ДР 0117U000655); «Дослідження суфозії, картоутворення, корозії та вилуговування в пористих середовищах» (№ ДР 0119U000081). У рамках виконання цих науково-дослідних робіт автором проведено математичне та комп'ютерне моделювання фільтраційних процесів в пористих середовищах за наявності елементів інженерних споруд з урахуванням впливу техногенних факторів.

**Мета і задачі дослідження.** Метою роботи є підвищення точності та адекватності прогнозних розрахунків, шляхом вдосконалення існуючих або побудови нових математичних та комп'ютерних моделей фільтраційних процесів в пористих середовищах (на прикладі ґрунтових масивів), в тому числі в областях з вільними рухомими межами та в просторовому випадку, за наявності в них елементів інженерних споруд з урахуванням впливу техногенних факторів. Для досягнення поставленої мети встановлені наступні завдання дослідження:

- на основі аналізу літературних джерел визначити актуальність задачі дослідження фільтраційних процесів в пористих середовищах з елементами інженерних споруд з урахуванням суфозійно-кольматаційних явищ та тепломасоперенесення;
- розробити підхід до математичного моделювання фільтраційних процесів в пористих середовищах з елементами інженерних споруд залежно від їх типів, їх фізико-механічних властивостей, які впливають на тип граничних умов для невідомих функцій на цих спорудах;
- вдосконалити або модифікувати існуючі математичні моделі задач фільтрації, ущільнення повністю насичених пористих середовищ, їх фільтраційного руйнування, теплосолеперенесення за наявності елементів інженерних споруд в пористих середовищах;
- модифікувати кінематичну граничну умову на верхній межі ґрунтового масиву з урахуванням змінної пористості та впливу фізико-хімічних факторів;
- розробити підхід до чисельного розв'язання відповідних нелінійних крайових задач для систем диференціальних рівнянь в областях з елементами інженерних споруд;
- відповідно до розробленого підходу використати пакет FreeFem++ для знаходження наближених розв'язків відповідних нелінійних крайових задач



методом скінченних елементів в областях з рухомими межами, використати можливості пакету FreeFem++ по розпаралеленню обчислень для зменшення затрат машинного часу на розв'язання сформульованих крайових задач;

- розробити алгоритми, створити відповідні програмні реалізації розроблених алгоритмів та провести серії чисельних експериментів щодо дослідження впливу елементів інженерних споруд на фільтраційні процеси в пористих середовищах.

*Об'єкт дослідження* – фільтраційні процеси в ґрунтових масивах з елементами інженерних споруд з урахуванням впливу суфозійних, кольматаційних явищ та процесів теплосолеперенесення.

*Предмет дослідження* – нелінійні математичні моделі фільтраційних процесів в ґрунтових масивах з елементами інженерних споруд за наявності рухомих меж та з урахуванням впливу техногенних факторів.

**Методи дослідження.** Для побудови математичних моделей використано відомі підходи механіки насиченого пористого середовища, теорії фільтрації та теорії теплосолеперенесення в пористих середовищах. Також використано методи математичної фізики, варіаційне числення, теорію комплексних змінних, елементи лінійної алгебри, елементи теорії механіки ґрунтів і чисельні методи. Для відшукування наближених розв'язків нелінійних крайових задач використано метод скінченних елементів, який відноситься до класу сіткових проєкційних методів. Також використано безкоштовний пакет FreeFem++ для створення власного програмного забезпечення і методи об'єктно-орієнтованого програмування.

**Наукова новизна одержаних результатів** полягає в наступному:

- вперше запропоновано нелінійну математичну модель фільтраційних процесів в ґрунтових масивах, яка враховує наявність елементів інженерних споруд (в тому числі водоводи та їх пошкодження) та модифіковану кінематичну граничну умову на депресійній поверхні ґрунтового масиву зі

змінною пористістю та впливом фізико-хімічних факторів в тривимірному випадку, що дає можливість оцінити вплив наявності даних елементів (особливо руйнування їх частин) на фільтраційні процеси та фільтраційні деформації ґрунтових масивів;

- вперше запропоновано нелінійну математичну модель процесів фільтрації в біоплато-фільтрі, яка характеризується врахуванням змінної пористості та суфозійно-кольматаційних процесів, що дає можливість спрогнозувати та оцінити вплив даних факторів на ефективність роботи біоплато;

- удосконалено математичну модель задач фільтраційних деформацій ґрунтових масивів, яка відрізняється можливістю розгляду зосереджених шляхів фільтрації як узагальнення водоводів, але з проникними стінками та змінними в часі розмірами та дає можливість узагальнити та застосувати побудовані в роботі математичні моделі і схеми їх чисельного розв'язання до вказаного типу задач.

**Практичне значення одержаних результатів.** Отримано подальший розвиток застосування варіаційного формулювання задачі та сіткового методу скінченних елементів для знаходження розв'язків нелінійних крайових задач фільтраційних процесів з урахуванням впливу техногенних факторів в тривимірному випадку в областях з елементами інженерних споруд, що дало можливість автоматизувати програмну реалізацію та оптимізувати час відшукування наближених розв'язків вказаних нелінійних крайових задач.

Проведені в дисертаційній роботі дослідження можуть бути використані при проектуванні, будівництві та розрахунку стійкості гідротехнічних та гідромеліоративних споруд з можливістю визначення прогнозних полів напорів, впливу наявності елементів інженерних споруд на фільтраційні процеси, а також форми та розмірів зони вимиву, яка утворюється в

результаті пошкоджень елементів інженерних споруд з урахуванням впливу техногенних факторів.

Задача дослідження суфозійно-кольматаційних процесів, що протікають у об'ємі фільтрувальної засипки біоплато під час фільтрування забрудненої води може бути використана при проектуванні та побудові біоплато (споруди для очищення господарсько-побутових, виробничих стічних вод, забрудненого поверхневого стоку), оцінці ефективності нових інженерних рішень для забезпечення більшої продуктивності його роботи.

Одержані в дисертаційній роботі результати використані під час розробки проектної документації проекту реконструкції водопровідної мережі в с. Оженин Острозького району Рівненської області на ДП «БТС-ІНЖИНІРИНГ» ТОВ «БІОТЕХСОЮЗ»; при розробці проектної документації проекту реконструкції каналізаційної системи на виробничій площадці спиртогорілчаного заводу КУПП «Маньковичі», с. Маньковичі, Столінського р-ну, Брестської обл., Республіка Білорусь (підтверджено актами про впровадження).

Одержані в дисертаційній роботі результати впроваджені в навчальному процесі при підготовці спецкурсів «Математичне і комп'ютерне моделювання природних і техногенних систем», «Проекційно-сіткові та безсіткові методи математичної фізики» для студентів Національного університету водного господарства та природокористування МОН України за спеціальністю 113 «Прикладна математика».

**Особистий внесок здобувача.** Всі теоретичні та прикладні результати, що складають зміст дисертаційної роботи, отримані автором самостійно. У роботах, опублікованих у співавторстві, здобувачеві належать: дослідження впливу наявності елементів інженерних споруд на фільтраційні процеси в ґрунтових масивах [54, 64, 146]; дослідження впливу пошкоджень наявних в ґрунтових масивах елементів інженерних споруд на фільтраційні процеси

[20]; побудова нелінійної математичної моделі фільтраційних процесів в ґрунтових масивах за наявності елементів інженерних споруд та з урахуванням впливу техногенних факторів [114]; розробка програмного забезпечення для чисельного розв'язання задачі фільтраційних процесів в ґрунтових масивах за наявності елементів інженерних споруд та з урахуванням впливу техногенних факторів, проведення числових експериментів та аналіз отриманих результатів [60, 62]; побудова нелінійної математичної моделі фільтраційних процесів в ґрунтових масивах за наявності пошкоджених елементів інженерних споруд [59]; побудова нелінійної математичної моделі фільтраційних процесів в ґрунтових масивах за наявності елементів інженерних споруд та з урахуванням впливу техногенних факторів [56]; побудова нелінійної математичної моделі фільтраційних процесів в ґрунтових масивах за наявності пошкоджень елементів інженерних споруд та розробка програмного забезпечення [61]; розробка програмного забезпечення з використанням розпаралелення обчислень для задач гео-гідродинаміки [41]; побудова нелінійної математичної моделі фільтраційних процесів в ґрунтових масивах за наявності елементів інженерних споруд та з урахуванням суфозійно-кольматаційних процесів, розробка програмного забезпечення для чисельного розв'язання відповідних нелінійних крайових задач [125]; побудова нелінійної математичної моделі фільтраційних процесів в ґрунтових масивах за наявності елементів інженерних споруд та їх пошкоджень з урахуванням впливу техногенних факторів в просторовому випадку, розробка програмного забезпечення для чисельного розв'язання відповідних нелінійних крайових задач, проведення числових експериментів та аналіз отриманих результатів [65–67]; модифікація кінематичної граничної умови на депресійній поверхні ґрунтової греблі з урахуванням змінної пористості та впливу фізико-хімічних факторів в тривимірному випадку

[124]; застосування методу радіальних базисних функцій для знаходження розв'язків нелінійних крайових задач підземної гідромеханіки [68]; розробка програмного модуля для дослідження фільтраційного руйнування ґрунтових гребель [78]; розробка програмних модулів для дослідження взаємозв'язаних фільтраційно-суфозійних процесів в ґрунтах [79, 80].

**Апробація результатів дисертації.** Основні результати дисертації доповідались й обговорювались на міжнародних та вітчизняних конференціях: Міжнародних наукових конференціях «Сучасні проблеми математичного моделювання та обчислювальних методів» (м. Рівне, 2013 р., 2015 р.); XIX-XXII Всеукраїнських наукових конференціях «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики» (м. Львів, 2013 р., 2014 р., 2015 р., 2016 р.); Міжнародній науковій конференції ім. акад. Михайла Кравчука (м. Київ, 2014 р.); III-IV Міжнародних науково-практичних конференціях «Математика в сучасному технічному університеті» (м. Київ, 2014 р., 2015 р.); VIII Міжнародній науковій конференції імені академіка І.І. Ляшка «Обчислювальна та прикладна математика» (м. Київ, 2015 р.); IV International Conference «Analysis and mathematical physics» (с. Kharkiv, 2016); VII Міжнародній науковій конференції «Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації» (м. Кам'янець-Подільський, 2016 р.); III Всеукраїнській науково-практичній конференції «Комп'ютерне моделювання та програмне забезпечення інформаційних систем і технологій» (м. Рівне, 2017 р.); VI Міжнародній науково-технічній конференції молодих учених і студентів «Актуальні задачі сучасних технологій» (м. Тернопіль, 2017 р.); Міжнародній науковій конференції «Сучасні проблеми математичного моделювання, обчислювальних методів та інформаційних технологій» (м. Рівне, 2018 р.); IV міжнародній науково-технічній конференції «Комп'ютерне моделювання та оптимізація складних систем» (м. Дніпро, 2018 р.).

В повному обсязі робота доповідалася на розширеному науковому семінарі кафедри інформатики та прикладної математики Рівненського державного гуманітарного університету; розширеному науковому семінарі кафедри прикладної математики Львівського національного університету імені Івана Франка; розширеному науковому семінарі кафедри прикладної математики Національного університету водного господарства та природокористування.

**Публікації.** За темою дисертації опубліковано 29 наукових праць, у тому числі: 9 статей, з них 1 у зарубіжному науковому виданні (Білорусь), 8 статей у наукових фахових виданнях України з технічних наук, 3 з яких у наукових виданнях, які входять до міжнародної наукометричної бази Scopus, 3 свідоцтва про реєстрацію авторського права на твір, 16 публікацій в матеріалах міжнародних та національних конференцій, 1 монографія, 5 праць опубліковано без співавторів.

**Структура та обсяг роботи.** Дисертація складається із анотації, вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел із 154 найменувань на 18 сторінках, додатків на 22 сторінках. Обсяг роботи становить 166 сторінок, в тому числі основного тексту 106 сторінок.

# РОЗДІЛ 1

## ПРОЦЕСИ ФІЛЬТРАЦІЇ ТА ФІЛЬТРАЦІЙНОГО РУЙНУВАННЯ ГРУНТОВИХ СПОРУД

(огляд літератури та постановка задач досліджень)

### 1.1. Грунтові гідротехнічні та гідромеліоративні об'єкти з елементами інженерних споруд

Грунтові масиви, як економічно вигідний природний матеріал, широко використовується для будівництва гідротехнічних та гідромеліоративних об'єктів. Для пропуску води в цих ґрунтових масивах використовують водопропускні елементи інженерних споруд [31]. Прикладом таких інженерних споруд можуть бути ґрунтові греблі (дамби), що виконуються з місцевих насипів ґрунтів або каміння (рис. 1.1 – 1.3). Вони використовуються як для захисту низовин від затоплення, огороження каналів, з'єднання напірних споруд гідровузлів так і для регулювання русел річок [51].



Рисунок 1.1 – Дамба на Десні у Вишгородському районі (Київська область)

(<https://www.wikiwand.com/uk/Дамба>)

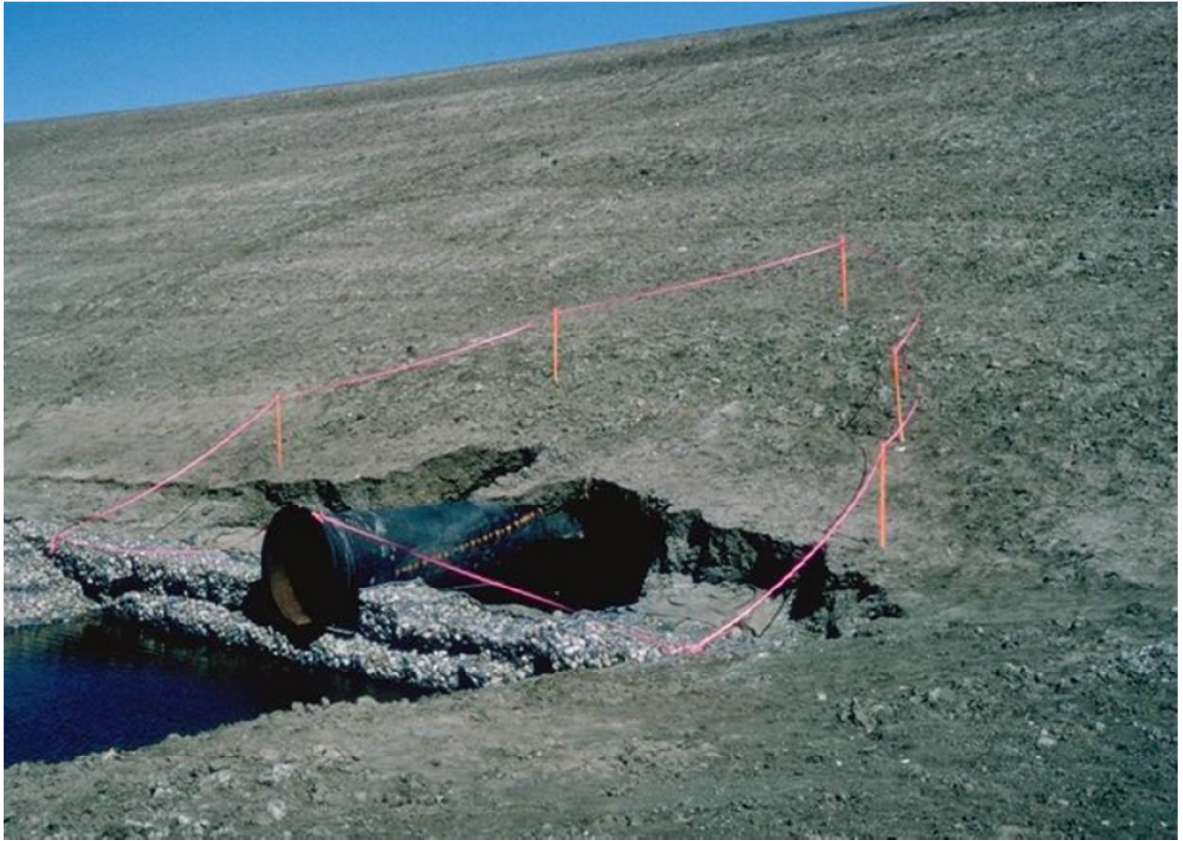


Рисунок 1.2 – Водовід дамби Аніта у штаті Монтана (США)  
(<http://damfailures.org/case-study/anita-dam-montana-1997/>)



Рисунок 1.3 – Встановлення водоводу через греблю Майк Хорс (США)  
(<http://pioneer-technical.com/projects/mike-horse-dam/>)



Ще одним прикладом ґрунтової гідротехнічної споруди з елементами інженерних споруд може служити хвостосховище (рис. 1.4) з відповідними огорожувальними дамбами, яке обмежує площу, що відведена для складання відходів збагачувальних фабрик (мулів, відвальних хвостів) [51].



Рисунок 1.4 – Хвостосховище ВАТ «Південний ГЗК»

(<https://www.google.com.ua/search?q=хвостосховище+ват+південний+гзк+фото&client=opera&hs=IPC&tbn=isch&tbo=u&source=univ&sa=X&ved=0ahUKewiG8b349YHZAhXBhywKHWndCc0QsAQIJQ&biw=1326&bih=658#imgrc=xdQeSNCIEPsa7M:>)

Ґрунт, як матеріал, може також використовуватися і при будівництві каналів (рис. 1.5). Канал може проходити у відкритій виїмці або в насипах (в дамбах), іноді в напіввиїмці-напівнасипу. Влаштовується зазвичай в ґрунті та створюється для дренажу, іригації, водопостачання, навігації, гідрорегуляції та інших цілей [38].



Рисунок 1.5 – Суецький канал

(<https://www.google.com.ua/search?q=суецкий++канал&client=opera&tbm=isch&tbo=u&source=univ&sa=X&ved=0ahUKEwj5ocni6ZzUAhWIBZoKHRDRA0wQsAQITA&biw=1366&bih=658#imgrc=26mVZ04wQ8dCOM:>)

Ще одним поширеним видом ґрунтової гідротехнічної споруди з елементами інженерних споруд може бути перемичка (рис. 1.6) — це огорожа, що захищає гідротехнічні споруди або місце робіт (котлован) від затоплення під час будівництва або ремонту. Після закінчення робіт перемички звичайно розбирають, іноді вона стає частиною гідротехнічної споруди. За положенням відносно водотоку перемички поділяють на поздовжні й поперечні, їх зводять з ґрунту (намивні, насипні перемички), каменю (накидні перемички), деревини (зрубові, шпунтові перемички), металу (шпунтові, ніздрюваті перемички), рідше — з бетону, габіонів або фашин [71].



Рисунок 1.6 – Будівництво перемички

([https://uk.wikipedia.org/wiki/Перемичка\\_\(гідротехніка\)#/media/File:Вoges12.JPG](https://uk.wikipedia.org/wiki/Перемичка_(гідротехніка)#/media/File:Вoges12.JPG))

Грунт також служить матеріалом і для осушувально-зволожувальних систем (рис. 1.7), що поєднують функції осушувальної системи і зрошувальної системи. Елементами таких систем також можуть бути елементи інженерних споруд. Вказана система являє собою комплекс гідромеліоративних споруд двосторонньої дії, що дозволяє регулювати водно-повітряний режим ґрунту на осушуваних землях [43].



Рисунок 1.7 – Меліоративна осушувально-зволожувальна система  
«Смолянка» Чернігівської області

([http://www.mynizhyn.com/blogs/100008074029716\\_108.html](http://www.mynizhyn.com/blogs/100008074029716_108.html))

Фільтраційні біоплато (рис. 1.8, рис. 1.9) – це також ґрунтова інженерна споруда з елементами інженерних споруд (їх невід’ємним елементом є перфоровані труби). В останні роки біоплато набувають значного поширення і використовується для очищення та доочищення господарсько-побутових, виробничих стічних вод, поверхневого стоку. Їх перевагою є те, що вони практично не потребують витрат електроенергії та хімічних реагентів, значного експлуатаційного обслуговування і забезпечують високу якість очищення води від широкого спектру забруднюючих речовин органічного та мінерального характеру [85].



Рисунок 1.8 – Біоплато

(<https://www.google.com.ua/search?q=биоплато+очистка+сточных+вод+фото&client=opera&tbm=isch&tbo=u&source=univ&sa=X&ved=0ahUKEwi885iz8JzUAhVjD5oKHbcoCTkQsAQIIg&biw=1366&bih=658#imgrc=a0Kapn4tK8elDM:>)



Рисунок 1.9 – Біоплато у селищі в Німеччині

([https://en.wikipedia.org/wiki/Wetland#/media/File:Flintenbreite\\_constructed\\_wetland.jpg](https://en.wikipedia.org/wiki/Wetland#/media/File:Flintenbreite_constructed_wetland.jpg))

Геотермальна вентиляція (рис. 1.10) також використовує систему підземних трубопроводів, які діють за основним законом теплообміну. Вона базується на принципі теплового насоса і призначена для стабілізації температури припливного повітря протягом усього року.

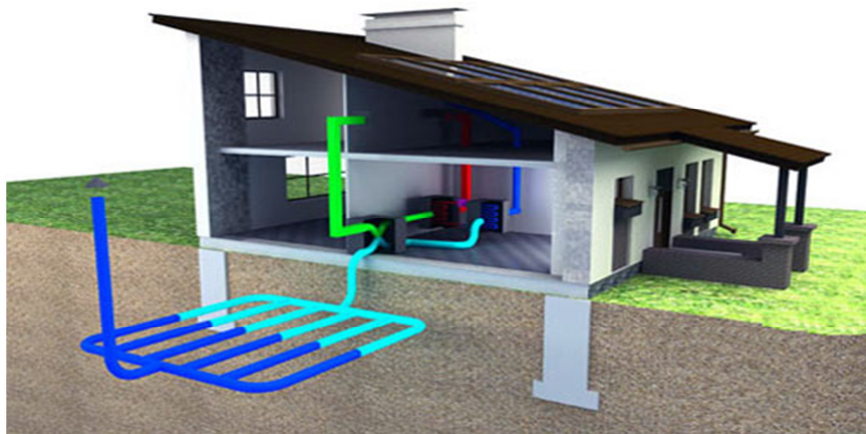


Рисунок 1.10 – Схема геотермальної вентиляції

([https://www.google.com.ua/search?q=Геотермальна+вентиляція&client=opera&hs=WQv&tbm=isch&tbo=u&source=univ&sa=X&ved=0ahUKEwj0hPfX09\\_Y](https://www.google.com.ua/search?q=Геотермальна+вентиляція&client=opera&hs=WQv&tbm=isch&tbo=u&source=univ&sa=X&ved=0ahUKEwj0hPfX09_Y))

AhVjQJoKHUEJCIkQsAQILA&biw=1326&bih=658#imgcr=qwZYFgFd7NMfn

M:)

В роботі [76] розглянуті технічні передумови використання ґрунтових теплообмінників у геотермальних системах вентиляції (рис. 1.11) та наведені результати аналітичних досліджень визначення температури ґрунту на різних глибинах протягом року. Отримано графічні залежності температури ґрунту від місяця року за заданих глибин прокладання теплообмінника. За результатами досліджень визначено рекомендовану глибину вкладання ґрунтових теплообмінників для Львова. Автори констатують, що впровадження у будівництві концепції пасивного будинку дає змогу заощадити традиційні види палива.

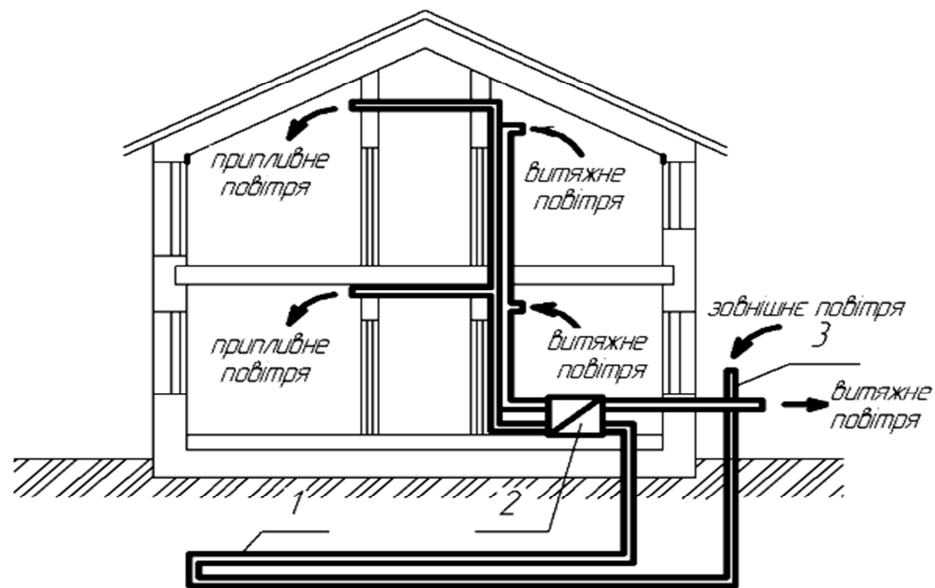


Рисунок 1.11 – Принципова схема геотермальної вентиляції пасивного будинку 1 – горизонтальні ґрунтові теплообмінники, 2 – рекуператор, 3 – забірна вентиляційна шахта

(76)

## 1.2. Проблеми фільтрації та фільтраційного руйнування ґрунтових гідротехнічних та гідромеліоративних об'єктів

Питання руйнування пористого матеріалу ґрунтових масивів, як матеріалу гідротехнічних та гідромеліоративних об'єктів є дуже важливим, оскільки несе за собою економічну, екологічну та гуманітарну загрозу. Відома статистика про аварії та інциденти на ґрунтових греблях, які пов'язані із значними втратами матеріальних ресурсів та, що головне, людськими жертвами [95, 117].

Стосовно ґрунтових гребель, основна проблема як на етапі проектування, так і на етапі експлуатації – це забезпечення її стійкості, втрата якої несе за собою катастрофічні наслідки (рис. 1.12) [33, 45].



Рисунок 1.12 – Село в Бразилії після аварії на греблі

(<http://www.aljazeera.com/news/2015/11/dam-burst-mining-site-devastates-brazilian-town-151106022548631.html>)

Одним із факторів, які збільшують ризик втрати стійкості укосів ґрунтових споруд аж до повного їх руйнування, є фільтраційні деформації

пористого матеріалу (рис. 1.13). В роботі [93] автор наводить шість основних видів фільтраційних деформацій ґрунтових гідротехнічних споруд.



а)



б)



в)



г)

Рисунок 1.13 – Аварія на ґрунтовій греблі Тетон (США) в 1976 році  
([http://copypast.ru/2007/07/16/proryv\\_damby\\_teton\\_19\\_foto.html](http://copypast.ru/2007/07/16/proryv_damby_teton_19_foto.html))

Для пропуску води в ґрунтових спорудах широко використовують елементи інженерних споруд (наприклад, водоводи), наявність яких може бути причиною аварій і пошкоджень [31]. Водовід має суттєвий вплив на



характер фільтрації в наколотрубній зоні [98]. Зокрема, можуть розвинутися небезпечні фільтраційні деформації, викликані контактною зосередженою фільтрацією вздовж водоводу з розмивом ґрунтів, підйомом депресійної поверхні [1]. Навіть при справній роботі водоводу може відбуватися суфозійний розмив ґрунту в наколотрубній зоні тіла ґрунтової споруди контактною зосередженою фільтрацією [137]. Ще більш негативні наслідки спричиняють пошкодження водоводів або дефекти у їх конструкціях, через які відбувається витік води у ґрунтовий матеріал (рис. 1.14, рис. 1.15) [104]:



Рисунок 1.14 – Наслідки пошкодження водоводу у ґрунтовій греблі  
(104)

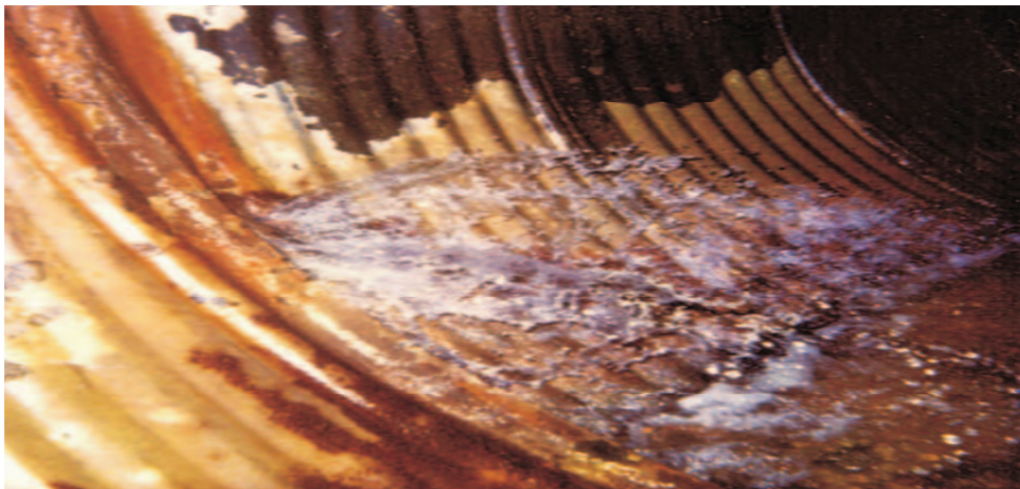


Рисунок 1.15 – Пошкодження водоводу всередині ґрунтової греблі  
(104)

Відомо чимало випадків аварій та пошкоджень ґрунтових гребель, викликаних суфозією ґрунту та утворенням зосереджених шляхів фільтрації [107], в тому числі пов'язаних з наявністю водоводу в тілі греблі. Серед таких аварій і пошкоджень варто згадати, що руйнування греблі Кюддов в Німеччині відбулося по причині контактної зосередженої фільтрації вздовж водоводу [44]. Також подібні руйнування декількох ґрунтових гребель внаслідок посиленої фільтрації вздовж водоводу сталося у Воронежській області [46]. Відома аварія на ґрунтовій греблі в Ставропольському краї, яка сталася внаслідок контактної зосередженої фільтрації в насколотрубній зоні за неякісно виконаній зворотній засипці трубчастого водовипуску [39]. В Тульській області в 1982 році внаслідок суфозії ґрунту та зосередженої фільтрації виникла порожнина на низовому схилі греблі [44]. На ґрунтовій греблі South Fork в США в результаті суфозійного розмиву ґрунту зосередженою фільтрацією в насколотрубних зонах утворились зони вимиву (рис. 1.16, 1.17) [3]. Підсумовуючи вище сказане, стає очевидним, що дослідження питання фільтраційного руйнування пористого матеріалу ґрунтових масивів є дуже важливим, оскільки значним впливає на безаварійну роботу розглянутих гідротехнічних та гідромеліоративних об'єктів.



Рисунок 1.16 – Ґрунтова гребля South Fork після катастрофи  
[https://en.wikipedia.org/wiki/South\\_Fork\\_Dam#/media/File:Below\\_dam\\_looking\\_up\\_through\\_Gap,\\_from\\_Robert\\_N.\\_Dennis\\_collection\\_of\\_stereoscopic\\_views.jp](https://en.wikipedia.org/wiki/South_Fork_Dam#/media/File:Below_dam_looking_up_through_Gap,_from_Robert_N._Dennis_collection_of_stereoscopic_views.jpg)

g)



Рисунок 1.17 – Сучасний вигляд греблі South Fork

([https://en.wikipedia.org/wiki/South\\_Fork\\_Dam#/media/File:What\\_remains\\_of\\_the\\_South\\_Fork\\_Dam\\_\(11717678065\).jpg](https://en.wikipedia.org/wiki/South_Fork_Dam#/media/File:What_remains_of_the_South_Fork_Dam_(11717678065).jpg))

### **1.3. Зосереджені шляхи фільтрації як аналог водоводів в ґрунтових гідротехнічних спорудах**

Зосереджений шлях фільтрації утворюється внаслідок потоку рідини через порожнину або тріщину всередині ґрунтового масиву (рис. 1.18) [110]:



Рисунок 1.18 – Утворення зосередженого шляху фільтрації  
(110)

Важливим є те, що зосереджені шляхи фільтрації можуть розглядатися як аналогія трубопроводів. Саме такі процеси досліджувалися в роботі (рис. 1.19) [146]. Тобто, з точки зору математичного моделювання, зосереджений шлях фільтрації можна розглядати як водовід, але з проникними для рідини стінками та можливою зміною розмірів, внаслідок розмиву, в часі.





Рисунок 1.19 – Зосереджений шлях фільтрації через експериментальний насип в Гідротехнічній дослідницькій лабораторії в часі  
(146)

Експерименти з дослідження зосереджених шляхів фільтрації викладені в роботі (рис. 1.20) [128]. Автори констатують, що розміри утвореного отвору залежать від щільності та однорідності ґрунтового матеріалу.

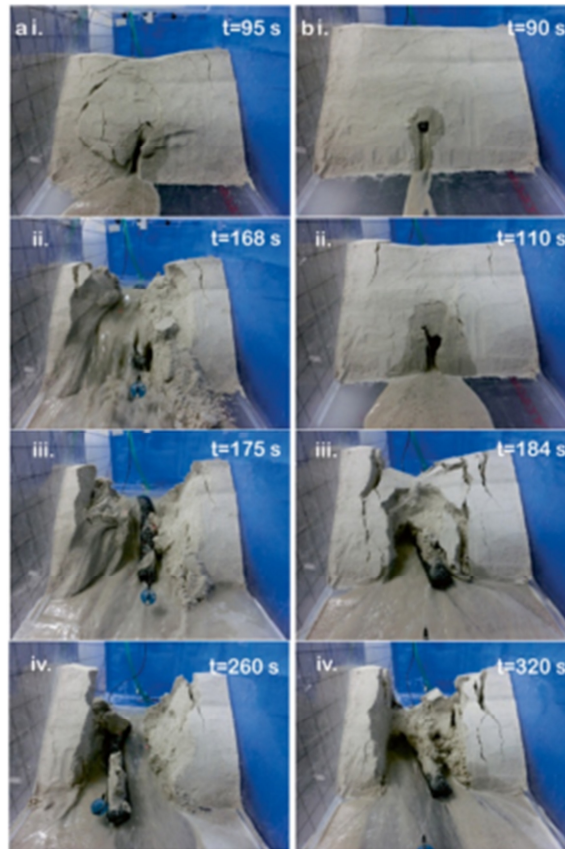


Рисунок 1.20 – Зображення одного із проведених натурних експериментів

(128)

В роботі [133] наведені статистичні дані про пошкодження ґрунтових масивів саме через зосереджені шляхи фільтрації. Зібрані дані згруповані в таблицях з детальним розглядом різних факторів впливу.

А в роботі [139] наведене експериментальне дослідження процесів ерозії через штучно створений зосереджений шлях фільтрації в ґрунтових масивах. Для експерименту використовувалися суміші з різними показниками ущільнення. Процес ерозії відстежувався з боків та знизу вгору. Результати показують, що збільшення ущільнення будівельних шарів значно збільшує час, необхідний для ерозії, але мало впливає на глибину кінцевої середньої глибини ерозії. Наведено експоненціальні рівняння для оцінки глибини ерозії.

Результати лабораторних експериментів з дослідження впливу зосереджених шляхів фільтрації на стійкість ґрунтових гребель наведені в роботі (рис. 1.21) [109]. Експерименти проводилися з різними матеріалами та порівнювалися з натурними статистичними даними.

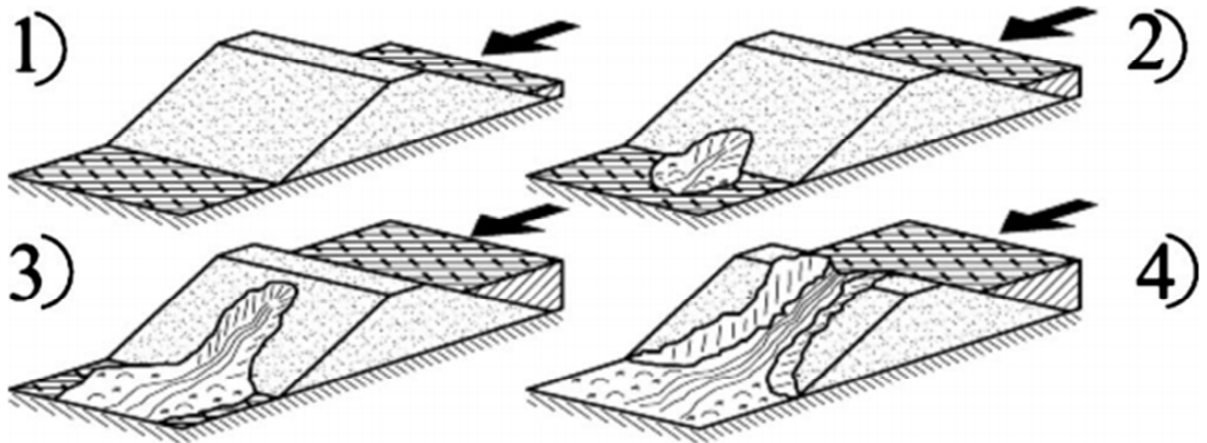


Рисунок 1.21 – Процес руйнування ґрунтової греблі внаслідок утворення зосередженого шляху фільтрації

(109)

В роботі [107] вказано, що половина із інцидентів аварій на ґрунтових греблях пов'язана саме з фільтраційним руйнуванням. Також автор звертає увагу на той факт, що дані процеси є досить швидкоплинними і зупинити їх практично неможливо. Детальний аналіз видів фільтраційного руйнування ґрунтів та математичних моделей цих процесів наведено, наприклад, в працях [25, 92].

Відома статистика про аварії та інциденти на ґрунтових спорудах, які пов'язані із значними втратами ресурсів. Мова йде не тільки про великі матеріальні збитки, які складають мільярди доларів, але і про людські жертви [32, 52, 53]. Зростаючий техногенний вплив людської діяльності на навколишнє середовище, техногенні аварії вимагають урахування цих факторів в гідротехнічному та гідромеліоративному будівництві [2].

Тому, прогнозування роботи ґрунтової споруди і можливих аварій має важливе значення для забезпечення безаварійної роботи. Це актуально на етапі проектування з метою здійснення прогнозних розрахунків.

#### **1.4. Математичне моделювання процесів фільтрації та фільтраційного руйнування ґрунтів**

Розвиток теорії фільтрації в пористих середовищах займає великий часовий проміжок: від середини 19-го століття і до наших днів. Варто згадати роботи таких науковців, як Полубаринова-Кочина П. Я., Murase T., Iwata M., Wakita M., Adachi T., Ляшко І. І., Сергієнко І. В., Скопецький В. В., Дейнека В. С., Богаєнко В. О., Власюк А. П., Мартинюк П. М., Ляшко С. І., П'янило Я. Д., Сафоник А. П., Поляков В. Л., Булавацький В. М., Лаврик В. І., Бомба А. Я., Чернуха О. Ю., Жеребят'єв О. В., Петрик М. Р. [7, 23, 48, 72, 73, 81, 101, 127, 130]. Із зарубіжних варто згадати також роботи науковців Bear J., Seetha N., Mohan Kumar M. S., Hassanizadeh S. M., Chetti A., Venamar A., Hazzab A., Berres S., Bürger R., Wendland W. L., Zhang M., He F., Zhao D., Hao X. [97, 99, 103, 136, 147].

Основними факторами фільтраційного руйнування пористих середовищ є швидкість фільтрації, яка згідно закону Дарсі, пропорційна до градієнта напорів. Тому зміна напорів відразу впливає на швидкість фільтрації. Однак, крім того, на швидкість фільтрації впливає і зміна коефіцієнта пропорційності в законі Дарсі – коефіцієнта фільтрації. При зміні концентрації розчинених солей в поровій рідині (в межах від чистої води до концентрації граничного насичення) коефіцієнт фільтрації змінюється у 1,5-3 рази (як в сторону збільшення, так і зменшення), а при змінах температури від  $0^{\circ}\text{C}$  до  $40^{\circ}\text{C}$  для деяких типів ґрунтів коефіцієнт фільтрації зростає на кілька порядків [19]. Якщо прийняти до уваги явища хімічного та термічного



осмосу, то виникає потреба в дослідженні впливу теплосолеперенесення на процеси фільтрації в ґрунтах [21]. Однак, в даній роботі не досліджено впливу процесів теплосолеперенесення на фільтраційні процеси в ґрунтових масивах в просторовому випадку.

Математичне моделювання процесів фільтраційної консолідації в ґрунтах з урахуванням впливу теплосолеперенесення досліджено в роботах [19, 25]. В роботі [19] для розв'язання відповідних нелінійних крайових задач використані методи скінченних різниць та скінченних елементів. Також розглядалися задачі фільтраційної консолідації ґрунтів з тонкими напівпроникними включеннями, з урахуванням повзучості скелету ґрунту та в умовах змінної області. В роботі [25] розглянуто задачі фільтраційної консолідації трифазних ґрунтів, враховано повзучість ґрунтового скелету та його миттєві деформації, розглянуто процеси контактного розмиву ґрунту. Для розв'язання відповідних нелінійних крайових задач використано безсітковий метод радіальних базисних функцій. Проте в цих роботах не враховано наявності в ґрунтових масивах елементів інженерних споруд та можливих їх пошкоджень. Також не було досліджено таких задач в тривимірному випадку.

Двовимірна задача контактного розмиву ґрунту на основі ґрунтової греблі розглянута в роботі [138]. Для описання процесів фільтрації автор використовує рівняння Лапласа, яке доповнює граничними умовами. В зоні вимиву виконується лінеаризована система рівнянь Нав'є-Стокса. Проте в даних роботах також не розглядалася просторова задача. Крім того, не розглянуто випадків елементів інженерних споруд та впливу техногенних факторів.

Математичні моделі фільтраційних процесів в областях з вільними межами (включаючи ґрунтові греблі) в просторі приведені в роботі [4]. В даній роботі метод квазіконформних відображень чисельного розв'язання

просторових модельних нелінійних крайових задач фільтрації модифіковано для випадку, коли однією з ділянок границі області є невідома (вільна) поверхня. А саме, для випадку ґрунтової греблі за умови наявності проміжку типу «височування» та наявності води в нижньому б'єфі. Проте в ній автори не враховували наявності елементів інженерних споруд.

Як свідчить аналіз публікацій з визначеної проблематики, є низка невирішених задач. Одна з них – це урахування впливу теплосолеперенесення на фільтраційні процеси в ґрунтових масивах в просторі. Адже, саме величина швидкості фільтрації є основним фактором фільтраційного руйнування пористого матеріалу (ґрунту). Крім того, задача фільтрації пов'язана із наявністю вільної межі (депресійної поверхні) – лінії, на якій тиск у поровій рідині дорівнює атмосферному. В загальному випадку її (депресійної поверхні) розташування є невідомим і визначається в процесі розв'язання крайової задачі.

Ще однією невирішеною проблемою є врахування наявності в ґрунтових масивах елементів інженерних споруд та можливих їх пошкоджень. Особливо актуально це для просторових задач, де стає можливим побачити загальну та повну картину отриманих результатів. Це стосується як стаціонарних, так і нестаціонарних крайових задач. Ситуація спрощується, якщо існують вже розроблені пакети автоматизованого розв'язування відповідних крайових задач, які вимагають модифікації програмного коду.

### **1.5. Обґрунтування вибору чисельного методу в нелінійних крайових задачах в областях з вільними рухомими межами**

Крайові задачі, якими описуються побудовані в дисертаційній роботі математичні моделі фізико-хімічних процесів в пористих середовищах, мають свої особливості. По-перше, це крайові задачі для систем

диференціальних рівнянь в частинних похідних (ДРЧП). По-друге, вказані ДРЧП є квазілінійними, а в деяких випадках – нелінійними. По-третє, крайові задачі розглядаються в областях з вільними рухомими межами. І, по-четверте, розглядаються просторові задачі. Зважаючи на ці особливості, відшукування розв’язку даних задач вимагає застосування чисельних методів.

Не претендуючи на повноту розгляду та огляду чисельних методів математичної фізики, відмітимо, що найбільш популярними серед них (методів), на нашу думку, є метод граничних елементів (МГЕ) [145], метод скінченних елементів (МСЕ) [75, 83, 121] та безсіткові методи [102, 121], які активно розвиваються останні двадцять років [20]. Кожен із названих методів насправді представляє об’єднавчу ідею і являє собою цілу групу методів. Причому всі методи в межах виділених груп володіють спільними рисами, але і характеризуються своїми особливостями [20].

МСЕ є гнучким стосовно геометрії області, стосовно апроксимації граничних умов, а також стосовно застосування до крайових задач з вільними рухомими межами. Однією зі значних переваг методу є його теоретична обґрунтованість. МСЕ в Україні розвивався і розвивається завдяки роботам Савули Я. Г., Венгерського П. С., Шинкаренка Г. А., Дейнеки В. С., Сергієнка І. В., Скопецького В. В., Молчанова І. Н., Ніколенка Л. Д., Трушевського В. М., Щербини Н. М., Хіміча О. М. [34–36, 75, 81, 83, 88, 140], а також завдяки роботам науковців Huebner K. H. H., Dewhurst D. L., Smith D. E., Byron T. G., Murad M. A., Loula A. F. D., Logan D. L., Reddy J. N., Zienkiewicz O. C., Taylor R. L., Zhu J. Z., Park B. Y., Roberts B. L., Sobolik S. R., Madzvamuse A., Chung A. H. W. [115, 121, 122, 126, 129, 132, 148].

Стосовно застосування МСЕ в областях з вільними рухомими межами, то тут варто згадати роботи науковців Власюка А. П., Мартинюка П. М., Лущина Л. П., Шаранюка А. В. [19, 47].

МСЕ відносяться до класу так званих сіткових методів. Характерною особливістю сіткових методів є необхідність покриття області, в якій шукається розв'язок задачі, геометричною сіткою. Під геометричною сіткою розуміють множину вузлів між якими встановлено взаємозв'язки наперед визначеним способом, який характерний для конкретного сіткового чисельного методу. При додаванні нового вузла в геометричну сітку треба переформатовувати взаємозв'язки. Це один із основних «мінусів» сіткових методів в наближеному розв'язуванні крайових задач з рухомими вільними межами. Додавання нових вузлів в скінченноелементну сітку вимагає: 1) переформатування положення та форм скінченних елементів в околі нового вузла; 2) перерахунку номерів вузлів всієї сітки. Адже величина різниці між номерами суміжних вузлів впливає на півширину стрічки матриці СЛАР, до розв'язування якої приводить застосування МСЕ; 3) згладжування координат вузлів нової скінченноелементної сітки. Адже на величину похибки апроксимації впливає форма скінченних елементів – по можливості всі скінченні елементи повинні бути близькими до рівносторонніх трикутників (якщо розглядається трикутна сітка). Звичайно змінювати скінченноелементну сітку можна без додавання нових вузлів. Це здійснюється «прив'язуванням» вузлів на вільній межі до неї і автоматичною зміною координат вузлів відповідно до зміни розташування вільної межі. Однак, це може призвести до появи скінченних елементів з надто гострими кутами. А така форма скінченних елементів різко негативно впливає на точність скінченноелементних розрахунків [75]. Загалом описані дві схеми апроксимації вільних рухомих меж вкладаються в дві загальновідомі групи алгоритмів – алгоритми вловлювання та алгоритми відслідковування [14].

Для можливості застосування МСЕ область, в якій шукається розв'язок задачі, потрібно покрити геометричною сіткою. Це є окремим етапом всього процесу отримання чисельного розв'язку крайової задачі на який в МСЕ

витрачається близько 70% всього машинного часу, який потрібний загалом для всього процесу. Покриття області геометричною сіткою ще більше ускладнюється, якщо досліджуються крайові задачі в тривимірних областях.

Всі вищенаведені «мінуси» МСЕ легко вирішується, якщо використати вже розроблені пакети автоматизованого розв'язування відповідних крайових задач, які вимагають модифікації програмного коду. Одним з таких безкоштовних пакетів є FreeFem++, який дозволяє автоматизувати розв'язання крайових задач методом скінченних елементів. Цей безкоштовний програмний продукт, поміж іншого, надає можливості варіаційного формулювання проблеми, автоматизації генерування сітки на основі алгоритму Делоне-Вороного та великий вибір типів скінченних елементів [112].

### **1.6. Застосування пакету FreeFem++ в наукових дослідженнях**

В роботах [112, 113] сказано про те, що FreeFem++ являє собою безкоштовне програмне забезпечення для розв'язання крайових задач для диференціальних рівнянь в частинних похідних. Багато проблем у фізиці, інженерії, математиці і навіть банківській справі моделюються одним або системою таких диференціальних рівнянь. Дане програмне забезпечення базується на основі методу скінченних елементів та має свою власну мову програмування високого рівня. Це програмне забезпечення працює на ОС UNIX, Window і на MacOS.

FreeFem++ надає низку можливостей:

- постановка проблеми, її варіаційне формулювання, з доступом до внутрішніх векторів і матриць у разі потреби;
- робота з двовимірними та тривимірними рівняннями, статичними або залежними від часу, лінійними або нелінійними системами рівнянь;

- автоматичний генератор сіток з трикутників або тетраедрів на основі алгоритму Делоне-Вороного, де щільність внутрішніх точок пропорційна щільності точок на межах;
- велика різноманітність скінченних елементів;
- оптимальна швидкість виконання;
- он-лайн графіка, файли для сіток для подальшої обробки вхідних і вихідних даних;
- паралелізм обчислень.

Мова FreeFem++ дозволяє швидко розв'язати будь-яку систему диференціальних рівнянь. Бібліотека скінченних елементів, яка доступна в FreeFem++, доповнюється з новим номером версії і з числом користувачів, які мають можливість запрограмувати нові елементи.

Саме тому в останні роки науковці все частіше використовують дане програмне забезпечення у своїх дослідженнях. Так, в роботі [119] автор представив метод імітації руху твердих часток у ньютонівській рідині. Для перевірки методу, представлені симуляції виконані саме за допомогою FreeFem++. В роботі [105] автори описують як можна використовувати FreeFem++ для дослідження руху вільних поверхонь. Були представлені дослідження у дво- та тривимірних випадках в контексті водних хвиль. В роботі [106] автор приділяє основну увагу практичній стороні чисельного розв'язання диференціальних рівнянь за допомогою FreeFem++, наводить кілька прикладів. Таким чином автор спрощує викладки для читачів, які не мають міцного фундаменту знань як в варіаційних методах, так і в чисельному аналізі. В роботі [131] автор робить акцент на тому, що FreeFem++ значно спрощує розв'язання тривимірних задач, оскільки триангуляція та тетраедризація досліджуваної області проводиться автоматично.

## 1.7. Паралелізм у FreeFem++

Паралельні обчислення є ефективним інструментом зменшення затрат машинного часу на розв'язування прикладних задач, оскільки дають можливість проводити кілька дій одночасно. Ґрунтуються на тому, що великі задачі можна розділити на кілька менших, кожна з яких можна розв'язати незалежно від інших [84, 96, 118, 142]. Можливості пакета FreeFem++ з розпаралелення стосуються застосування паралельних вирішувачів до розв'язування систем лінійних алгебричних рівнянь (СЛАР) [112]. Автори розділяють паралельні вирішувані на два класи: прямі вирішувачі та ітераційні. Прямі вирішувачі ґрунтуються на факторизації матриць. До таких вирішувачів належать: MUMPS (використовується для розв'язування лінійних систем рівнянь тільки з квадратними матрицями [149]), SuperLU (використовується для прямого розв'язання великих, розріджених, несиметричних систем лінійних рівнянь [150]) та Pastix (використовується для розв'язання розріджених лінійних систем з прямими та блочними ітераційними методами [151]). Ітераційні вирішувачі призначені для дуже великих задач і використовують методи підпросторів Крилова. До таких вирішувачів належать: pARMS (використовується для розподілених розріджених лінійних систем рівнянь [152]), Nips (використовується для дуже великих розріджених лінійних систем [153]), Nurge (дозволяє проводити більш детальні симуляції, вирішуючи проблеми швидше, ніж традиційні методи; має набір рішень для наукового моделювання, що включає паралельні багатогранні методи для структурованих і неструктурованих сіток [154]).

## ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 1 ТА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ДОСЛІДЖЕНЬ

Проведений в розділі аналіз показав, що відома низка вчених, завдяки роботам яких вивчено теоретичні і практичні питання стосовно вирішенням проблеми фільтрації та фільтраційного руйнування ґрунтових споруд. Але незважаючи на це, ще деякі аспекти є не дослідженими і не врахованими. Про це свідчить той факт, що аварії гідротехнічних споруд все ще мають місце і приносять великі збитки.

Одним з таких аспектів є урахування наявності в гідротехнічних об'єктах та спорудах водного господарства елементів інженерних споруд – водоводів, перфорованих труб, систем підземних трубопроводів. Більше того, зосереджені шляхи фільтрації в тілах ґрунтових гребель (які (шляхи) згідно статистичних даних є однією з основних причин фільтраційного руйнування ґрунтових гідротехнічних споруд) можна розглядати як узагальнення водоводів. Тому, по аналогії, процеси в обох випадках будуть описуватись подібними математичними моделями. Подальше дослідження цих процесів є однією із важливих теоретичних і практичних задач. Що ж стосується фільтраційних руйнувань ґрунтових масивів, то загалом аналіз наукових літературних джерел дозволяє навести низку наступних узагальнюючих висновків:

- Щодо ґрунтових споруд накопичено значний експериментальний матеріал і методики їх натурних досліджень. Проте незважаючи на це, ще деякі аспекти (вплив наявності елементів інженерних споруд, їх пошкоджень, утворення можливих зон вимиву на фільтраційні процеси та зміну розташування вільної поверхні в тілі ґрунтового масиву) є не дослідженими і не врахованими. Про це свідчить той факт, що аварії гідротехнічних споруд все ще мають місце і приносять великі збитки.



- Фільтраційні процеси, що відбуваються в тілі ґрунтових споруд впливають на їх безаварійну роботу. Тому дослідженню даних процесів слід приділяти серйозну увагу, як на етапі проектування та конструювання, так і на етапі експлуатації з метою зменшення негативних наслідків.

- Наявність елементів інженерних споруд в тілі ґрунтових споруд має суттєвий вплив на фільтраційні процеси в їх тілі навіть при справній їх роботі, а, особливо, при їх пошкодженнях. Тому наявність таких включень також необхідно враховувати ще на етапі проектування та конструювання для попередження аварійних ситуацій шляхом побудови відповідних математичних моделей та проведення чисельних експериментів.

- Математичне моделювання поведінки ґрунтових споруд з інженерними включеннями вимагає урахування багатьох факторів (наявності елементів інженерних споруд, зміни в часі вільної поверхні, впливу теплосолепереносу та ін.). Також необхідно розглядати просторові задачі, які дають змогу врахувати геометрію області. Врахування даних факторів дає змогу отримати більш точні результати.

- Необхідно вдосконалити існуючі математичні моделі задач фільтрації та фільтраційного руйнування пористих (ґрунтових) середовищ, врахувавши вплив елементів інженерних споруд та техногенних факторів, знайти чисельні розв'язки відповідних нелінійних крайових задач та провести аналіз чисельних розв'язків модельних задач.

- Для досягнення поставленої мети необхідно сформулювати відповідні математичні моделі, врахувати вплив наявності елементів інженерних споруд. Далі – використати пакет FreeFem++ для знаходження наближеного розв'язку відповідних крайових задач методом скінченних елементів в областях з рухомими межами, при цьому використавши можливості пакету по розпаралеленню обчислень для зменшення затрат машинного часу на розв'язання сформульованих крайових задач. Заключний етап – розробити

алгоритми, створити відповідні програмні реалізації розроблених алгоритмів та провести серії чисельних експериментів, проаналізувати їх, а також сформулювати відповідні висновки.

## РОЗДІЛ 2

### МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ФІЛЬТРАЦІЇ ТА ФІЛЬТРАЦІЙНОГО РУЙНУВАННЯ ПОРИСТИХ СЕРЕДОВИЩ З ЕЛЕМЕНТАМИ ІНЖЕНЕРНИХ СПОРУД

В даному розділі наведено математичні моделі фільтраційних процесів в ґрунтових масивах з урахуванням впливу техногенних факторів в областях з елементами інженерних споруд. Ґрунт вважається ізотропним. Диференціальні рівняння, що описують процеси фільтрації та фільтраційного руйнування ґрунту, виводяться на основі відомих класичних підходів, але з урахуванням впливу техногенних факторів та нелінійних взаємозалежностей. Також виведена кінематична гранична умова на верхній рухомій межі ґрунту з урахуванням змінної пористості та впливу фізико-хімічних факторів.

#### **2.1. Постановки задач у фізичних областях та структурні елементи для їх подальшого математичного описання**

На рис. 2.1 зображена ґрунтова гребля, в тілі якої наявний водовід. В результаті його (водоводу) пошкодження утворюється зона вимиву (заштрихована область на рис. 2.1). В тілі греблі відбуваються складні фільтраційні процеси, на які певним чином впливає наявність водоводу (справного або пошкодженого). Наявність такого водоводу впливає на розташування депресійної поверхні, а також на фільтраційні процеси в навколотрубній зоні. При пошкодженні такого водоводу утворюється зона вимиву з суфозійним виносом ґрунту, яка з часом може збільшуватися і привести до руйнування греблі. З математичної точки зору, гребля – це тривимірна область  $\Omega_1$  з межами  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4, \Gamma_5$ , вільною межею (депресійною поверхнею)  $\Gamma_0$ , водоводом та зоною вимиву  $\Omega_2$ .  $\Gamma_2, \Gamma_3$  – межі

контакту з водосховищем та атмосферою;  $\Gamma_1, \Gamma_4, \Gamma_5$  – непроникні межі;  $\Gamma_{12}$  – межа, на якій виконується умова швидкого виносу ґрунту;  $\Gamma_{11}$  – межа, на якій задаються умови спряження для невідомих функцій, адже це межа контакту між пористим середовищем та областю вимиву, яку займає пульпа. Пульпа – це суміш водного розчину солей (на випадок урахування солеперенесення) та твердих нерозчинних частинок, вимитих зі скелету ґрунту. У випадку не пошкодженого водоводу його стінки вважаються непроникними.

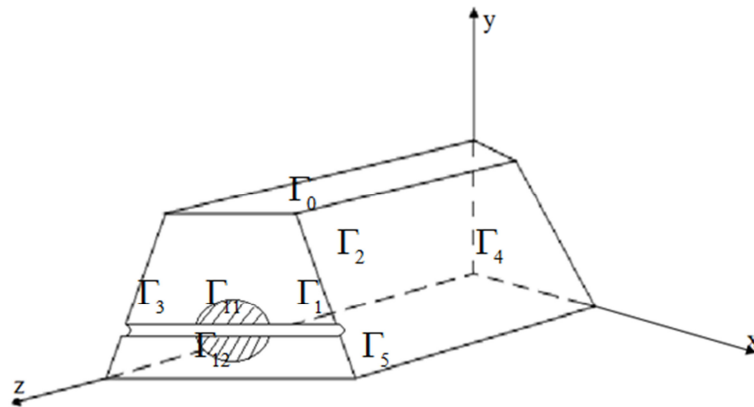


Рисунок 2.1 – Тіло ґрунтової греблі з водоводом та зоною вимиву

На рис. 2.2 зображено систему біоплато-фільтра зі щєбєневим завантаженням. В ній протікають складні взаємопов’язані фільтраційно-кольматацийні процеси. На межі  $\Gamma_1$  розміщені перфоровані труби, через які на поверхню біоплато подається забруднена вода. Хоча вода подається в труби під певним тиском, але витікши з труб вона вільно фільтрується в пористе середовище. На межі  $\Gamma_2$  знаходяться перфоровані труби, з яких викачується очищена вода. Межі  $\Gamma_3, \Gamma_4$  – межі непроникності. В процесі кольматация відбувається динамічна зміна пористості пористого середовища, що, в свою чергу, впливає на коефіцієнт фільтрації  $i$ , опосередковано, на весь процес фільтрації. Тому для справної роботи біофільтра потрібно врахувати вказані ефекти у рівнянні фільтрації.

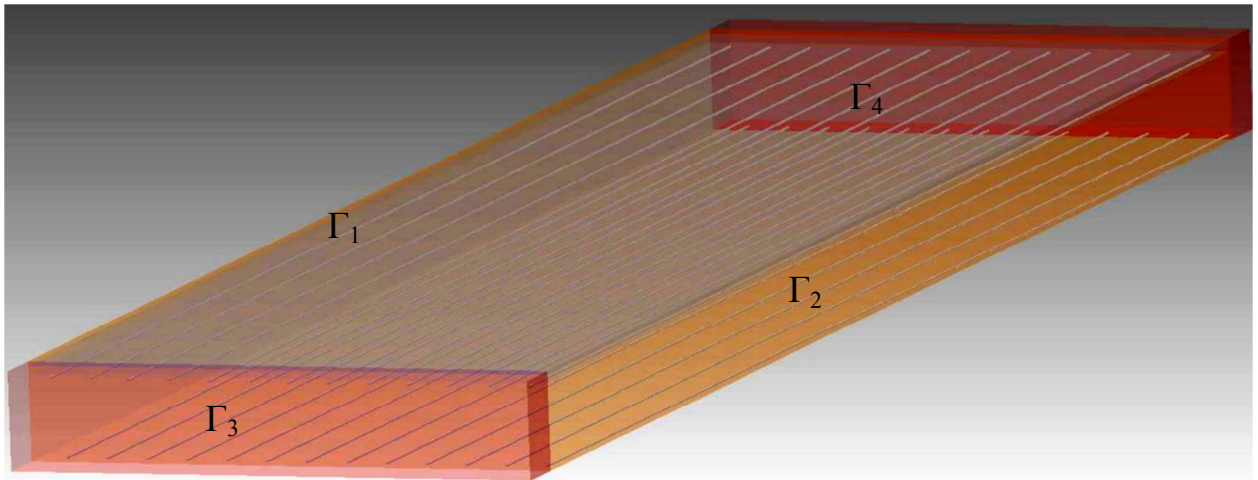


Рисунок 2.2 – Тіло біоплато-фільтра

На рис. 2.3 зображено потік рідини через горизонтальний отвір в ґрунті (зосереджений шлях фільтрації) [100]:

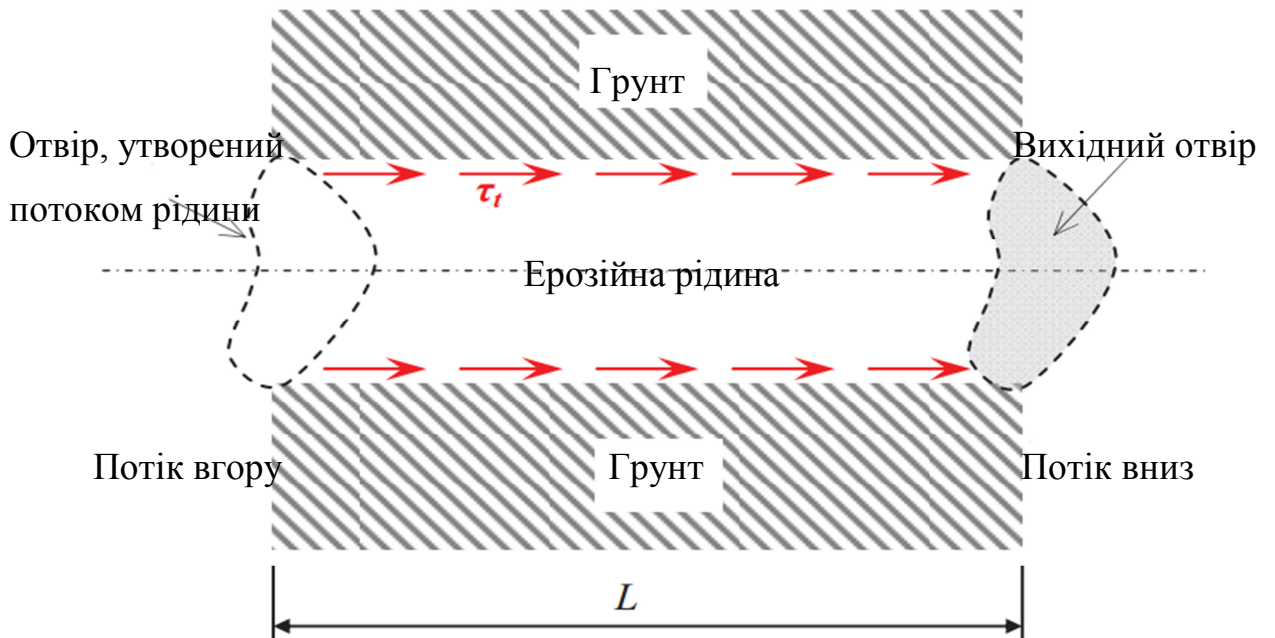


Рисунок 2.3 – Схематичний опис параметрів потоку через отвір в ґрунті

В роботі [100] запропоновано визначати  $\tau_t$  згідно формули

$$\tau_t = \frac{\gamma_w (R_h)_t H}{L}, \text{ де}$$

$\gamma_w$  – питома вага води;

$(R_h)_t$  – гідравлічний радіус отвору в момент часу  $t$ ;

$t$  – момент часу;

$L$  – довжина отвору;

$H$  – втрата напору уздовж отвору внаслідок тертя;

Для формування математичних моделей вказаних задач необхідні рівняння фільтрації в деформівних пористих середовищах, рівняння тепломасоперенесення, кінематична гранична умова на рухомій депресійній поверхні, початкові та граничні умови.

## 2.2. Рівняння фільтрації в пористих середовищах зі змінною пористістю

Закон руху рідини в недеформівному пористому середовищі (закон Дарсі) має вигляд [48–50, 69, 70, 81, 94]

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}_h \nabla h,$$

де

$\mathbf{u}$  – вектор швидкості фільтрації;

$h$  – напір;

$\mathbf{K}_h$  – тензор коефіцієнтів фільтрації.

М. М. Герсеванов запропонував модифікувати закон руху рідини в деформівному пористому середовищі, який отримав назву закон Дарсі-Герсеванова [27, 40, 86, 87]

$$\mathbf{u} - e\mathbf{v} = -\mathbf{K}_h \nabla h,$$

де

$e$  – коефіцієнт пористості ґрунту;

$\mathbf{v}$  – вектор швидкості руху твердих частинок ґрунту.

В роботах [19, 24, 25] закон Дарсі-Герсеванова узагальнено на випадок руху сольових розчинів в неізотермічних умовах

$$\mathbf{u} - e\mathbf{v} = -\mathbf{K}_h(c, T, h)\nabla h + \mathbf{K}_c(c)\nabla c + \mathbf{K}_T\nabla T, \quad (2.1)$$

де

$c$  – концентрація хімічного розчину;

$T$  – температура;

$\mathbf{K}_c$  – тензор коефіцієнтів хімічного осмосу;

$\mathbf{K}_T$  – тензор коефіцієнтів термічного осмосу.

В роботі [29] виведено узагальнене рівняння фільтраційної консолідації з урахуванням впливу техногенних факторів

$$\begin{aligned} & \frac{R\gamma a(T, \boldsymbol{\sigma}_m, \mathbf{N})}{1 + (R-1)\xi} \frac{\partial h}{\partial t} - (1+e)^2 \sum_{i=1}^l \frac{\partial \sigma_m^{(i)}}{\partial t} - (1+e)^2 \sum_{j=1}^k \frac{1}{\rho_N^{(j)}} \frac{\partial N_j}{\partial t} \\ & - e \left( \frac{1}{\rho_p} \left( \frac{\partial \rho_p}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} + \sum_{j=1}^k \frac{\partial \rho_p}{\partial c_j} \frac{\partial c_j}{\partial t} \right) - \frac{1}{\rho_m} \left( \frac{\partial \rho_m}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} + \sum_{j=1}^k \frac{\partial \rho_m}{\partial N^{(j)}} \frac{\partial N_j}{\partial t} \right) \right) = \\ & = (1+e)(\nabla \cdot (\mathbf{K}_h(t, h, T, \boldsymbol{\sigma}_m, \mathbf{N}, \mathbf{c})\nabla h) - \nabla \cdot \mathbf{F}_{osm}), \end{aligned} \quad (2.2)$$

де

$\mathbf{K}_h$  – тензор фільтрації, що залежить від часу та вектора, який характеризує фактори впливу;

$e$  – коефіцієнт пористості ґрунту;

$\rho_m$  – густина твердих частинок ґрунту;

$\rho_p$  – густина порової рідини;

$a$  – коефіцієнт стискуваності ґрунту;

$R$  – розмірність задачі;

$\xi$  – коефіцієнт бічного тиску ґрунту;

$\sigma_m$  – концентрація суфозійних нерозчинних частинок ґрунту;  
 $\rho_N$  – густина солей в твердій фазі;  
 $N$  – концентрація солей в твердій фазі пористого середовища;  
 $\mathbf{F}_{osm}$  – вектор-функція осмотичних впливів;  
 $\gamma$  – питома вага сольового розчину.

В роботі [30] виведено рівняння фільтрації

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot (\rho_p(c, T) \mathbf{K}_h(c, T, s, \sigma) \nabla h) = \sigma \left( \frac{\partial \rho_p}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial \rho_p}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} \right) - \\
 - \frac{\rho_p}{\rho_N} \frac{\partial N}{\partial t} - \frac{\rho_p}{\rho_s} \frac{\partial s}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_p(c, T) \mathbf{F}_{osm}),
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

де

$\sigma$  – змінна пористість;  
 $N$  – змінна концентрація водорозчинних порід в твердій фазі;  
 $s$  – змінна концентрація рухомих твердих водонерозчинних частинок;  
 $\rho_N$  – густина водорозчинних порід;  
 $\rho_s$  – густина матеріалу суфозійних частинок.

### 2.3. Математичні моделі тепломасоперенесення та руху пульпи

Оскільки в рівняннях фільтрації враховується вплив техногенних факторів, то вищенаведені рівняння потрібно доповнити рівнянням для знаходження концентрації солей  $c(\mathbf{X}, t)$  у поровому розчині, температури пористого середовища, концентрації солей в твердій компоненті та концентрації твердих нерозчинних частинок.

Рівняння солеперенесення в класичному варіанті має вигляд [5, 6, 8–13, 17–19, 25, 26, 34, 36, 82, 89, 91, 111, 135, 144]



$$\nabla \cdot (\mathbf{D}_T^{(c)} \nabla T) + \nabla \cdot (\mathbf{D}_c \nabla c) - \mathbf{u} \nabla c - \frac{\partial N}{\partial t} = \sigma \frac{\partial c}{\partial t}, \quad (2.4)$$

де

$\mathbf{D}_c$  – коефіцієнти (тензори) конвективної дифузії;

$\mathbf{D}_T^{(c)}$  – коефіцієнти (тензори) термічної дифузії;

$N$  – концентрація водорозчинних порід в твердій фазі;

$\mathbf{u}$  – швидкість фільтрації, яка визначається згідно узагальненого закону Дарсі-Герсеванова.

У випадку урахування впливу на зміну густини порової рідини хімічного та теплового факторів, рівняння солеперенесення набуває вигляду [30]

$$\begin{aligned} \sigma \left( 1 - \frac{c}{\rho_p} \frac{\partial \rho_p}{\partial c} \right) \frac{\partial c}{\partial t} = \nabla \cdot (\mathbf{D}_c \nabla c) - \mathbf{u} \left( 1 - \frac{c}{\rho_p} \frac{\partial \rho_p}{\partial c} \right) \nabla c + \\ + \frac{c}{\rho_p} \left( \sigma \frac{\partial \rho_p}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial \rho_p}{\partial T} \nabla T \right) - \frac{\partial N}{\partial t}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

де

$\rho_p$  – густина порової рідини, яка залежить від концентрації порового розчину у рідкій фазі та температури пористого середовища .

Рівняння для відшукування функції температури насиченого ґрунту  $T(\mathbf{X}, t)$  в класичному варіанті має вигляд [19, 25]

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{\lambda} \nabla T) - \rho c_p \mathbf{u} \nabla T = c_T \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (2.6)$$

де

$\boldsymbol{\lambda}$  – коефіцієнт (тензор) теплопровідності пористого середовища;

$\rho$  – густина порового сольового розчину;

$c_p$  – питома теплоємність порового сольового розчину;

$c_T$  – об'ємна теплоємність ґрунту.

У роботі [30] виведено наступне рівняння теплоперенесення на випадок суфозійних процесів

$$c_T \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) - \rho_p c_p \mathbf{u} \nabla T - \left( \rho_s c_s \frac{\partial s}{\partial t} + \rho_N c_N \frac{\partial N}{\partial t} \right) T, \quad (2.7)$$

де

$c_p, c_s, c_N$  – питомі теплоємності відповідних матеріалів (порової рідни, суфозійних частинок, твердих водорозчинних частинок).

В результаті контактного розмиву ґрунту утворюється зона вимиву і її займає пульпа [25]. Для описання зміни концентрації пульпи в зоні вимиву використаємо дифузійну модель [7] з урахуванням швидкості осідання частинок пульпи

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \nabla \cdot (\mathbf{D}_s \nabla s) - (\mathbf{u} - \mathbf{w}) \nabla s, \quad (2.8)$$

де

$s(\mathbf{X}, t)$  – об'ємна концентрація пульпи в областях розмиву;

$\mathbf{D}_s$  – тензор коефіцієнтів дисперсії пульпи;

$\mathbf{w} = (0; 0; w_3)$  – вектор швидкості осідання твердих частинок пульпи.

Рівняння (2.8) описує зміну концентрації пульпи в зоні розмиву [143].

Для забезпечення коректності постановки задачі потрібно задати початкові та граничні умови для невідомих функцій [12, 16, 22].

Для надлишкових напорів, концентрації хімічних речовин, температури та концентрації пульпи початкові мови мають вигляд

$$h(\mathbf{X}, 0) = H_0(\mathbf{X}), \quad c(\mathbf{X}, 0) = C_0(\mathbf{X}), \quad T(\mathbf{X}, 0) = T_0(\mathbf{X}), \quad s(\mathbf{X}, 0) = s_0(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X} \in \bar{\Omega},$$

де  $H_0(\mathbf{X}), C_0(\mathbf{X}), T_0(\mathbf{X}), s_0(\mathbf{X})$  – задані функції, які будуть конкретизуватися залежно від цілей проведення того чи іншого чисельного експерименту.

Граничні умови для напору, концентрацій хімічних речовин, температури та пульпи залежать від нижченаведених чинників [19].

### **Межа (частинка межі) області $\Omega$ дренована**

В даному випадку для напору задається гранична умова першого роду

$$h(\mathbf{X}, t)|_{\mathbf{X} \in \Gamma} = H_1(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in \Gamma,$$

де  $H_1(\mathbf{X}, t)$  – задана функція.

Для концентрації задається наступна гранична умова першого роду

$$c(\mathbf{X}, t)|_{\mathbf{X} \in \Gamma} = C_1(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in \Gamma,$$

де  $C_1(\mathbf{X}, t)$  – задана функція.

### **Межа (частинка межі) області $\Omega$ непроникна**

В даному випадку для швидкості фільтрації задається гранична умова непроникності

$$(\mathbf{u}, \mathbf{n})|_{\mathbf{X} \in \Gamma} = 0, \quad \mathbf{X} \in \Gamma.$$

Якщо непроникність зумовлюється заляганням кам'яного непроникного пласта або ґрунту, який за своїми фізико-хімічними властивостями є непроникним для хімічних речовин, то для концентрації задаються граничні умови непроникності

$$(\mathbf{D} \nabla c + \mathbf{D}_T \nabla T, \mathbf{n})|_{\mathbf{X} \in \Gamma} = 0, \quad \mathbf{X} \in \Gamma.$$

Якщо непроникність зумовлюється заляганням пласту солі, то для концентрації задається гранична умова першого роду

$$c(\mathbf{X}, t)|_{\mathbf{X} \in \Gamma} = C_{\max}, \quad \mathbf{X} \in \Gamma,$$

де  $C_{\max}$  – концентрація граничного насичення.

### **На межі (частині межі) області $\Omega$ відома температура**

В даному випадку для температури задається гранична умова першого роду

$$T(\mathbf{X}, t)|_{\mathbf{X} \in \Gamma} = T_1(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in \Gamma,$$

де  $T_1(\mathbf{X}, t)$  – задана функція.

### На межі (частині межі) області розмиву відома концентрація пульпи

В даному випадку для концентрації пульпи задається гранична умова першого роду

$$s(\mathbf{X}, t)|_{\mathbf{X} \in \Gamma} = s_1(\mathbf{X}, t) \quad \mathbf{X} \in \Gamma,$$

де  $s_1(\mathbf{X}, t)$  – задана функція.

### 2.4. Граничні умови на рухомій межі розмиву та в зоні вимиву

Припускається, що на межі контакту  $\Gamma_r$  області вимиву з областю ґрунтового масиву виконуються умови спряження ідеального контакту [81].

$$[h]|_{\Gamma_r} = 0, (\mathbf{u}, \mathbf{n})|_{\Gamma_r} = 0, [c]|_{\Gamma_r} = 0, [T]|_{\Gamma_r} = 0, \quad (2.9)$$

де

$[\cdot]$  – символ стрибка функцій.

На межі можливого контактного розмиву задається кінематична гранична умова [25]

$$k_{er}s(\mathbf{X}, t)((\mathbf{v}, \mathbf{n}) + |(\mathbf{v}, \mathbf{d})|) = -(1 - \sigma)\rho_T \dot{\Gamma}_r. \quad (2.10)$$

де

$s(\mathbf{X}, t)$  – об'ємна концентрація пульпи в областях розмиву;

$\rho_T$  – густина твердих частинок ґрунту;

$k_{er}$  – коефіцієнт розмиву ґрунту на межі  $\Gamma_{ij}$ ;

$\mathbf{n}$  – вектор напрямних косинусів зовнішньої нормалі;

$\mathbf{d}$  – вектор напрямних косинусів дотичної;

$\mathbf{v}$  – вектор швидкості руху твердих частинок ґрунту.

Оскільки концентрація твердих частинок в зоні вимиву є малою, тому припускаємо, що вони суттєво не впливають на в'язкість, а, отже, процес

руху пульпи в зоні вимиву може бути описаний системою рівнянь Нав'є-Стокса [74]

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = -((u_1, u_2, u_3), (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})) \cdot (u_1, u_2, u_3) + \nu \cdot \Delta \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} - g \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{\partial h}{\partial y} \\ \frac{\partial h}{\partial z} \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

Тут

$u_1, u_2, u_3$  – компоненти швидкості руху пульпи;

$g$  – прискорення вільного падіння;

$\nu$  – кінематична в'язкість.

## 2.5. Модифікована кінематична гранична умова на депресійній поверхні ґрунтової греблі

Задача фільтрації в тілі ґрунтової греблі пов'язана із наявністю вільної межі (у просторовому випадку – депресійної поверхні) – лінія, на якій тиск у поровій рідині дорівнює атмосферному [72]. Зробимо наступне спрощуюче припущення: будь-яка вертикальна лінія перетинає вільну межу лише в одній точці. Це припущення виконується для депресійних поверхонь в ґрунтових греблях.

Виділимо в момент часу  $t = t_j$  на вільній поверхні  $\varphi(\mathbf{X}, t_j) = 0$  область  $S^{(j)}$  одиничної площі і розглянемо рух вільної поверхні в напрямку зовнішньої нормалі до неї (рис. 2.4). Не зменшуючи загальності викладок, знехтуємо інфільтрацією. Якщо в роботах [19, 25] фізико-хімічні та механічні властивості у виділеному циліндрі ґрунту між двома положеннями вільної межі в моменти часу  $t = t_j$  та  $t = t_{j+1}$  осереднювались, то тут ми їх

апроксимуємо лінійними залежностями. Тоді об'єм пор у виділеному циліндрі буде:

$$V = \sigma^{(j+1)}\varphi(\mathbf{X}^{(j+1)}, t_{j+1}) - \sigma^{(j)}\varphi(\mathbf{X}^{(j)}, t_j), \quad (2.12)$$

де

$\sigma$  – змінна в часі пористість пористого середовища;

$\sigma^{(j)} = \sigma(\mathbf{X}^{(j)}, t_j)$ ;  $\mathbf{X}^{(j)} \in S^{(j)}$  – точка, належна виділеній області  $S^{(j)}$ .

Як видно з (2.12) пористість в областях  $S^{(j)}$  та  $S^{(j+1)}$  осереднюється і покладається рівною вказаній величині в точках  $\mathbf{X}^{(j+1)} \in S^{(j+1)}$  та  $\mathbf{X}^{(j)} \in S^{(j)}$  відповідно.

З іншого боку за проміжок часу  $\Delta t = t_{j+1} - t_j$  зміна об'єму рідини у виділеному циліндрі пористого середовища буде

$$V = (\mathbf{u}, \mathbf{n})\Delta t, \quad (2.13)$$

де  $\mathbf{u}$  – швидкість фільтрації.

Прирівнюючи (2.12) та (2.13) і переходячи до границі при  $\Delta t \rightarrow 0$  маємо кінематичну граничну умову

$$\frac{d}{dt}(\sigma\varphi) = (\mathbf{u}, \mathbf{n}). \quad (2.14)$$

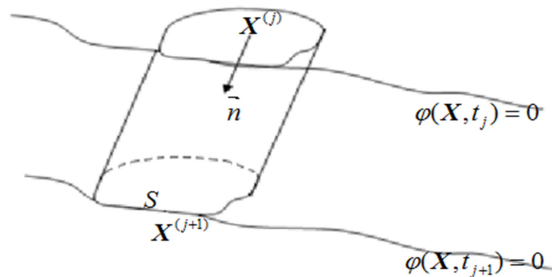


Рисунок 2.4 – Зміна розташування вільної рухомої межі в часі

В лівій частині (2.14) стоїть повна похідна в часі. Маємо

$$\frac{d}{dt}(\sigma\varphi) = \frac{d\sigma}{dt}\varphi + \sigma\frac{d\varphi}{dt}. \quad (2.15)$$

Враховуючи (2.15), з (2.14) маємо модифіковану кінематичну граничну умову

$$\frac{d\sigma}{dt} \varphi(\mathbf{X}, t) + \sigma \frac{d\varphi(\mathbf{X}, t)}{dt} = (\mathbf{u}, \mathbf{n}). \quad (2.16)$$

Зміна розташування депресійної поверхні може відбуватися і за рахунок ущільнення, розущільнення, набухання ґрунтів під нею. В роботі [28] виведено узагальнену кінематичну граничну умову на випадок просідань ґрунту в результаті його консолідації

$$\frac{dl(x, y, t)}{dt} = \int_{l(x, y, t)}^{l(x, y, t)} \left( \frac{e}{1+e} \left( \frac{1}{\rho_p} \frac{d\rho_p}{dt} - \frac{1}{\rho_m} \frac{d\rho_m}{dt} \right) + \nabla \cdot \mathbf{u} \right) dz, \quad (2.17)$$

де

$\rho_p$  – густина порової рідини, яка залежить від фізико-хімічних факторів (концентрація розчинених речовин та температура);

$\rho_m$  – густина твердих частинок ґрунту (включаючи водорозчинні та нерозчинні компоненти), яка також може залежати від вказаних факторів;

$e$  – коефіцієнт пористості ( $e = \frac{\sigma}{1-\sigma}$ ,  $\sigma$  – пористість ґрунту);

$z = l(x, y, t)$  – рівняння верхньої рухомої межі ґрунту;

$z = L(x, y, t)$  – нижня межа ґрунту, яка теж може бути рухомою, але закон зміни її розташування є відомим.

Припускаючи незалежність просідань та адитивність загального просідання і враховуючи (2.17), з (2.16) маємо

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dt} \varphi(\mathbf{X}, t) + (1 + \sigma) \frac{d\varphi(\mathbf{X}, t)}{dt} = (\mathbf{u}, \mathbf{n}) + \\ + \int_{L(x, y, t)}^{\varphi(\mathbf{X}, t)} \left( \frac{e}{1+e} \left( \frac{1}{\rho_p} \frac{d\rho_p}{dt} - \frac{1}{\rho_m} \frac{d\rho_m}{dt} \right) + \nabla \cdot \mathbf{u} \right) dz. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Для можливості застосування (2.18) мають бути відомими залежності для  $e$  (або  $\sigma$ ),  $\rho_p$ ,  $\rho_m$  від фізико-хімічного та механічного стану пористого

середовища (концентрація солей в рідкій та твердій фазах, концентрація суфозійних частинок, температура). Детальний аналіз таких залежностей наведено наприклад в роботі [28].

## 2.6. Математичні моделі поставлених задач у фізичних областях

Математична модель фільтрації в тілі ґрунтової греблі із зоною вимиву (рис. 2.1) містить рівняння:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\rho_p(c, T) \mathbf{K}_h(c, T, s, \sigma) \nabla h) &= \sigma \left( \frac{\partial \rho_p}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial \rho_p}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} \right) - \\ &\quad - \frac{\rho_p}{\rho_N} \frac{\partial N}{\partial t} - \frac{\rho_p}{\rho_s} \frac{\partial s}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_p(c, T) \mathbf{F}_{osm}), \quad \mathbf{X} \in \Omega, t > 0, \\ \sigma \left( 1 - \frac{c}{\rho_p} \frac{\partial \rho_p}{\partial c} \right) \frac{\partial c}{\partial t} &= \nabla \cdot (\mathbf{D}_c \nabla c) - \mathbf{u} \left( 1 - \frac{c}{\rho_p} \frac{\partial \rho_p}{\partial c} \right) \nabla c + \\ &\quad + \frac{c}{\rho_p} \left( \sigma \frac{\partial \rho_p}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial \rho_p}{\partial T} \nabla T \right) - \frac{\partial N}{\partial t}, \quad \mathbf{X} \in \Omega, t > 0, \\ c_T \frac{\partial T}{\partial t} &= \nabla \cdot (\lambda \nabla T) - \rho_p c_p \mathbf{u} \nabla T - \left( \rho_s c_s \frac{\partial s}{\partial t} + \rho_N c_N \frac{\partial N}{\partial t} \right) T, \quad \mathbf{X} \in \Omega, t > 0, \\ \frac{\partial s}{\partial t} &= \nabla \cdot (\mathbf{D}_s \nabla s) - (\mathbf{u} - \mathbf{w}) \nabla s, \quad \mathbf{X} \in \bar{\Omega}, t > 0, \\ \mathbf{u} - e\mathbf{v} &= -\mathbf{K}_h(c, T, h) \nabla h + \mathbf{K}_c(c) \nabla c + \mathbf{K}_T \nabla T, \quad \mathbf{X} \in \Omega, \end{aligned}$$



$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = -((u_1, u_2, u_3), \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)) \cdot (u_1, u_2, u_3) + \mathbf{v} \cdot \Delta \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} - g \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{\partial h}{\partial y} \\ \frac{\partial h}{\partial z} \end{pmatrix}, \mathbf{X} \in \Omega_2, t > 0,$$

$$\frac{d\sigma}{dt} \varphi(\mathbf{X}, t) + (1 + \sigma) \frac{d\varphi(\mathbf{X}, t)}{dt} = (\mathbf{u}, \mathbf{n}) + \int_{L(x, y, t)}^{\varphi(\mathbf{X}, t)} \left( \frac{e}{1+e} \left( \frac{1}{\rho_p} \frac{d\rho_p}{dt} - \frac{1}{\rho_m} \frac{d\rho_m}{dt} \right) + \nabla \cdot \mathbf{u} \right) dz \Big|_{\mathbf{X} \in \Gamma_0}, t > 0,$$

$$[h]_{\Gamma_{11}} = 0, (\mathbf{u}, \mathbf{n})_{\Gamma_{11}} = 0, [c]_{\Gamma_{11}} = 0, [T]_{\Gamma_{11}} = 0,$$

$$-(1 - \sigma) \rho_T \frac{\Gamma_{11}^{(S+1)} - \Gamma_{11}^{(S)}}{\tau} = k_{er, S}(\mathbf{X}, t) (\mathbf{v}^{(S)}, \mathbf{n}),$$

де

$$\mathbf{v}^{(s)} = \frac{\alpha^+}{\sigma} \cdot \mathbf{u}^{(s)},$$

$$\alpha^+ = \begin{cases} 1, & |u| \geq u_{kr}, \\ 0, & |u| < u_{kr}, \end{cases}$$

$$h(\mathbf{X}, 0) = H_0(\mathbf{X}), \mathbf{X} \in \bar{\Omega}, c(\mathbf{X}, 0) = C_0(\mathbf{X}), \mathbf{X} \in \bar{\Omega},$$

$$T(\mathbf{X}, 0) = T_0(\mathbf{X}), \mathbf{X} \in \bar{\Omega}, s(\mathbf{X}, 0) = s_0(\mathbf{X}), \mathbf{X} \in \bar{\Omega},$$

$$l_h h(\mathbf{X}, t)|_{\Gamma} = H_1(\mathbf{X}, t), \mathbf{X} \in \Gamma, l_c c(\mathbf{X}, t)|_{\Gamma} = C_1(\mathbf{X}, t), \mathbf{X} \in \Gamma,$$

$$l_T T(\mathbf{X}, t)|_{\Gamma} = T_1(\mathbf{X}, t), \mathbf{X} \in \Gamma, l_s s(\mathbf{X}, t)|_{\Gamma} = s_1(\mathbf{X}, t), \mathbf{X} \in \Gamma,$$

де  $t \in [0; t_0]$ ,  $l_h, l_c, l_T, l_s$  – оператори, що задають граничні умови для напору, концентрації солей, температури та концентрації пульпи відповідно.

Математична модель фільтраційної консолідації тіла ґрунтової греблі із зоною вимиву (рис. 2.1) включає рівняння:

$$\begin{aligned} & \frac{R\gamma\alpha(T, \boldsymbol{\sigma}_m, \mathbf{N})}{1+(R-1)\xi} \frac{\partial h}{\partial t} - (1+e)^2 \sum_{i=1}^l \frac{\partial \sigma_m^{(i)}}{\partial t} - (1+e)^2 \sum_{j=1}^k \frac{1}{\rho_N^{(j)}} \frac{\partial N_j}{\partial t} \\ & - e \left( \frac{1}{\rho_p} \left( \frac{\partial \rho_p}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} + \sum_{j=1}^k \frac{\partial \rho_p}{\partial c_j} \frac{\partial c_j}{\partial t} \right) - \frac{1}{\rho_m} \left( \frac{\partial \rho_m}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} + \sum_{j=1}^k \frac{\partial \rho_m}{\partial N^{(j)}} \frac{\partial N_j}{\partial t} \right) \right) = \\ & = (1+e)(\nabla \cdot (\mathbf{K}_h(t, h, T, \boldsymbol{\sigma}_m, \mathbf{N}, \mathbf{c}) \nabla h) - \nabla \cdot \mathbf{F}_{osm}), \mathbf{X} \in \Omega, t > 0, \\ & \sigma \left( 1 - \frac{c}{\rho_p} \frac{\partial \rho_p}{\partial c} \right) \frac{\partial c}{\partial t} = \nabla \cdot (\mathbf{D}_c \nabla c) - \mathbf{u} \left( 1 - \frac{c}{\rho_p} \frac{\partial \rho_p}{\partial c} \right) \nabla c + \\ & + \frac{c}{\rho_p} \left( \sigma \frac{\partial \rho_p}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial \rho_p}{\partial T} \nabla T \right) - \frac{\partial N}{\partial t}, \mathbf{X} \in \Omega, t > 0, \\ & c_T \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) - \rho_p c_p \mathbf{u} \nabla T - \left( \rho_s c_s \frac{\partial s}{\partial t} + \rho_N c_N \frac{\partial N}{\partial t} \right) T, \mathbf{X} \in \Omega, t > 0, \\ & \frac{\partial s}{\partial t} = \nabla \cdot (\mathbf{D}_s \nabla s) - (\mathbf{u} - \mathbf{w}) \nabla s, \mathbf{X} \in \bar{\Omega}, t > 0, \\ & \mathbf{u} - e\mathbf{v} = -\mathbf{K}_h(c, T, h) \nabla h + \mathbf{K}_c(c) \nabla c + \mathbf{K}_T \nabla T, \mathbf{X} \in \Omega, \\ & \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \\ & = -((u_1, u_2, u_3), \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)) \cdot (u_1, u_2, u_3) + \mathbf{v} \cdot \Delta \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} - g \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{\partial h}{\partial y} \\ \frac{\partial h}{\partial z} \end{pmatrix}, \mathbf{X} \in \Omega_2, t > 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{d\sigma}{dt} \varphi(\mathbf{X}, t) + (1 + \sigma) \frac{d\varphi(\mathbf{X}, t)}{dt} = (\mathbf{u}, \mathbf{n}) + \\ & + \int_{L(x, y, t)}^{\varphi(\mathbf{X}, t)} \left( \frac{e}{1 + e} \left( \frac{1}{\rho_p} \frac{d\rho_p}{dt} - \frac{1}{\rho_m} \frac{d\rho_m}{dt} \right) + \nabla \cdot \mathbf{u} \right) dz \Big|_{\mathbf{X} \in \Gamma_0}, t > 0, \\ & [h]_{\Gamma_{ii}} = 0, (\mathbf{u}, \mathbf{n})_{\Gamma_{ii}} = 0, [c]_{\Gamma_{ii}} = 0, [T]_{\Gamma_{ii}} = 0, \\ & - (1 - \sigma) \rho_T \frac{\Gamma_{11}^{(S+1)} - \Gamma_{11}^{(S)}}{\tau} = k_{er, s}(\mathbf{X}, t) (\mathbf{v}^{(S)}, \mathbf{n}), \end{aligned}$$

де

$$\mathbf{v}^{(s)} = \frac{\alpha^+}{\sigma} \cdot \mathbf{u}^{(s)},$$

$$\alpha^+ = \begin{cases} 1, & |u| \geq u_{kr}, \\ 0, & |u| < u_{kr}, \end{cases}$$

$$h(\mathbf{X}, 0) = H_0(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X} \in \bar{\Omega}, \quad c(\mathbf{X}, 0) = C_0(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X} \in \bar{\Omega},$$

$$T(\mathbf{X}, 0) = T_0(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X} \in \bar{\Omega}, \quad s(\mathbf{X}, 0) = s_0(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X} \in \bar{\Omega},$$

$$l_h h(\mathbf{X}, t) \Big|_{\Gamma} = H_1(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in \Gamma, \quad l_c c(\mathbf{X}, t) \Big|_{\Gamma} = C_1(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in \Gamma,$$

$$l_T T(\mathbf{X}, t) \Big|_{\Gamma} = T_1(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in \Gamma, \quad l_s s(\mathbf{X}, t) \Big|_{\Gamma} = s_1(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in \Gamma,$$

де  $t \in [0; t_0]$ ,  $l_h, l_c, l_T, l_s$  – оператори, що задають граничні умови для напору, концентрації солей, температури та концентрації пульпи відповідно.

Математична модель фільтрації в системі біоплато-фільтра (рис. 2.5) з урахуванням суфозійно-кольматаційних процесів містить наступні рівняння:

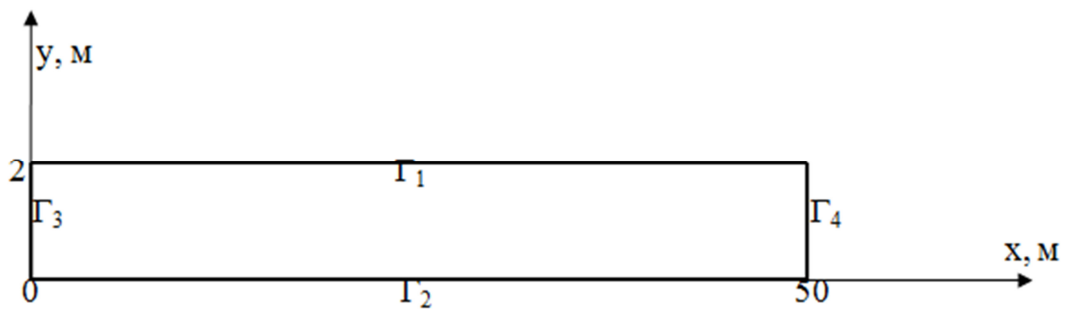


Рисунок 2.5 – Умовна схема біоплато-фільтра

$$\nabla \cdot (\rho_p(c) k_h(c, \sigma) \nabla h) = \sigma \frac{\partial \rho_p}{\partial c} \cdot \frac{\partial c}{\partial t} - \frac{\rho_p}{\rho_s} \frac{\partial s}{\partial t}, \mathbf{X} \in \Omega, t > 0,$$

$$\sigma \left(1 - \frac{c}{\rho_p} \frac{\partial \rho_p}{\partial c}\right) \frac{\partial c}{\partial t} = \nabla \cdot (\mathbf{D}_c \nabla c) - \mathbf{u} \cdot \left(1 - \frac{c}{\rho_p} \frac{\partial \rho_p}{\partial c}\right) \nabla c - \frac{\partial s}{\partial t}, \mathbf{X} \in \Omega, t > 0,$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \alpha \cdot c - \beta \cdot s, \mathbf{X} \in \Omega, t > 0,$$

$$\mathbf{u} = -k_h(c, s, \sigma) \nabla h, \mathbf{X} \in \Omega,$$

$$c(\mathbf{X}, 0) = C_0, \mathbf{X} \in \bar{\Omega},$$

$$s(\mathbf{X}, 0) = s_0, \mathbf{X} \in \bar{\Omega},$$

$$h(\mathbf{X}, t)|_{\mathbf{X} \in \Gamma_1} = y,$$

$$q|_{\mathbf{X} \in \Gamma_2} = C_2,$$

$$c(\mathbf{X}, t)|_{\mathbf{X} \in \Gamma_1} = C_1.$$

## ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 2

Основні результати даного розділу зводяться до наступного:

1. Наведено постановки задач фільтрації в пористих середовищах з елементами інженерних споруд – задача фільтрації в ґрунтовій греблі з водоводом та можливою зоною вимиву, яку займає пульпа; задача фільтрації та фільтрування в біоплато із системою перфорованих труб. Аналогія між водоводом та зосередженим шляхом фільтрації в тілі ґрунтової греблі дозволяє ставити та розв’язувати і такі задачі – в даному випадку припускається, що стінки водоводу є непроникними.

2. Модифіковано кінематичну граничну умову на депресійній поверхні ґрунтової греблі, що дало змогу врахувати вплив просідань ґрунту в результаті його консолідації.

3. Результати двох попередніх пунктів дають можливість сформулювати нелінійну математичну модель фільтраційних процесів в ґрунтових масивах з елементами інженерних споруд (в тому числі з водоводами, враховуючи наявність в них пошкоджень) та модифікованою кінематичною граничною умовою на верхній рухомій межі ґрунтового масиву з урахуванням змінної пористості та впливу фізико-хімічних факторів в тривимірному випадку; нелінійну математичну модель процесів фільтрації в біоплато-фільтрі з урахуванням змінної пористості та суфозійно-кольматаційних процесів. Математичні моделі описуються крайовими задачами для систем нелінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних.

Результати даного розділу опубліковані в роботах [66, 124].

### **РОЗДІЛ 3**

## **МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВПЛИВУ ТЕХНОГЕННИХ ФАКТОРІВ НА ФІЛЬТРАЦІЙНІ ПРОЦЕСИ В ГРУНТОВИХ МАСИВАХ**

В даному розділі чисельно досліджено математичну модель фільтрації в ґрунтовому масиві з урахування впливу техногенних факторів. Для відшукування наближеного розв'язку поставленої крайової задачі використано метод скінченних елементів. Це дало суттєву перевагу у тривимірному випадку, оскільки дозволило врахувати геометрію області. Виведено слабке формулювання поставленої крайової задачі. Створено програмне забезпечення для автоматизації розрахунків та відшукування чисельного розв'язку в середовищі FreeFem++. Проведено низку чисельних експериментів та здійснено їх аналіз. Досліджено вплив техногенних факторів на розподіл напорів та швидкостей фільтрації. Отримані результати дозволять визначити місце можливої локалізації фільтраційних руйнувань, спрогнозувати характер можливих аварій та пошкоджень, пов'язаних із коливаннями напорів.

### **3.1. Чисельне розв'язання просторової задачі фільтрації в ґрунтовому масиві з урахуванням впливу теплосолеперенесення**

#### **3.1.1. Просторова задача фільтрації та її математична модель**

Розглянемо тривимірну задачу фільтрації в ґрунтовому масиві – область  $\Omega$  (рис. 3.1).

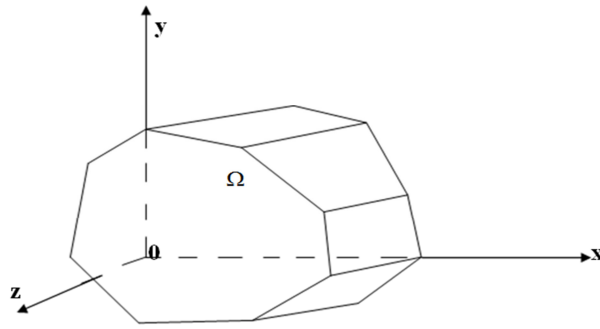


Рисунок 3.1 – Досліджувана область – масив ґрунту

Стосовно фільтрації – розглянемо квазістаціонарний процес (див. наприклад [4, 7]). Розташування вільної поверхні (якщо вона присутня і є межею розділу гравітаційної води і повітря в пористому середовищі) є невідомим і має визначатись в процесі розв'язку задачі (огляд алгоритмів визначення розташування вільних меж наведено наприклад в [14]). Тоді, математична модель тривимірної задачі фільтрації в ґрунтовому масиві на непроникній основі з урахуванням впливу теплосолеперенесення, враховуючи викладки розділу 2, містить наступні рівняння [30]:

- рівняння фільтрації

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\rho_p(c, T) \mathbf{K}_h(c, T, s, \sigma) \nabla h) = \sigma \left( \frac{\partial \rho_p}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial \rho_p}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} \right) - \\ - \frac{\rho_p}{\rho_N} \frac{\partial N}{\partial t} - \frac{\rho_p}{\rho_s} \frac{\partial s}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_p(c, T) \mathbf{F}_{osm}), \end{aligned} \quad (3.1)$$

- рівняння солеперенесення

$$\begin{aligned} \sigma \left( 1 - \frac{c}{\rho_p} \frac{\partial \rho_p}{\partial c} \right) \frac{\partial c}{\partial t} = \nabla \cdot (\mathbf{D}_c \nabla c) - \mathbf{u} \left( 1 - \frac{c}{\rho_p} \frac{\partial \rho_p}{\partial c} \right) \nabla c + \\ + \frac{c}{\rho_p} \left( \sigma \frac{\partial \rho_p}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial \rho_p}{\partial T} \nabla T \right) - \frac{\partial N}{\partial t}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

- рівняння теплоперенесення

$$c_T \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) - \rho_p c_p \mathbf{u} \nabla T - \left( \rho_s c_s \frac{\partial s}{\partial t} + \rho_N c_N \frac{\partial N}{\partial t} \right) T, \quad (3.3)$$

- закон фільтрації, в якому враховано залежність параметрів фільтрації від концентрації солей та температури, а також явища осмосу [19, 25].

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}(c, T) \nabla h + \mathbf{K}_c \nabla c + \mathbf{K}_T \nabla T. \quad (3.4)$$

В якості модельної розглянемо тримірну задачу фільтрації в тілі ґрунтової греблі, яка зображена на рис. 3.2.

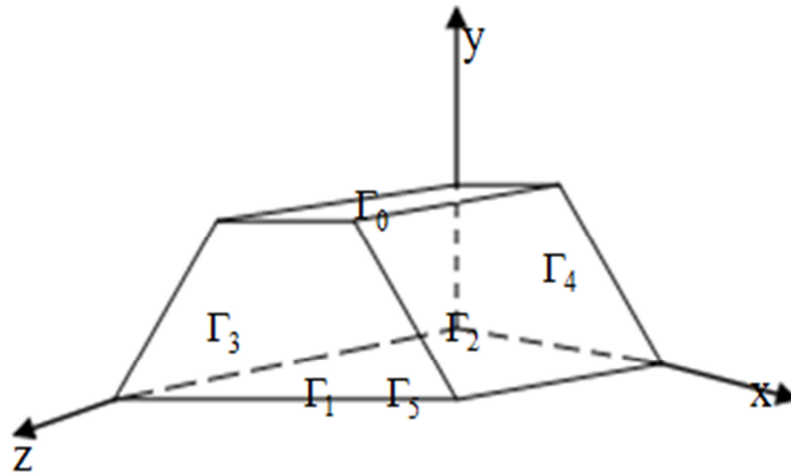


Рисунок 3.2 – Тіло ґрунтової греблі

З математичної точки зору, гребля – це тривимірний область  $\Omega$  з межами  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4, \Gamma_5$  та вільною межею  $\Gamma_0$ . На рис. 3.2 ребра області  $\Omega$  для зручності зображено прямими лініями. Це не зменшує загальності задачі, оскільки вони можуть бути і криволінійними.

Вищенаведені рівняння (3.1)–(3.4) доповнюються початковими і граничними умовами

$$(\mathbf{u}, \mathbf{n})|_{\Gamma_0} = 0, c(\mathbf{X}, 0) = C_0(\mathbf{X}), T(\mathbf{X}, 0) = T_0(\mathbf{X}),$$



$$\begin{aligned}
h(\mathbf{X})\Big|_{\Gamma_1 \cup \Gamma_0} &= y, \mathbf{X} \in \Gamma_1 \cup \Gamma_0, h(\mathbf{X})\Big|_{\Gamma_2} = H_1(\mathbf{X}), \mathbf{X} \in \Gamma_2, \\
(\nabla h, \mathbf{n})\Big|_{\Gamma_3 \cup \Gamma_4 \cup \Gamma_5} &= 0, \mathbf{X} \in \Gamma_3 \cup \Gamma_4 \cup \Gamma_5, \\
c(\mathbf{X}, t)\Big|_{\Gamma_1} &= C_1, \mathbf{X} \in \Gamma_1, c(\mathbf{X}, t)\Big|_{\Gamma_2} = C_m(\mathbf{X}, t), \mathbf{X} \in \Gamma_2, \\
(\mathbf{D}_c \nabla c + \mathbf{D}_T \nabla T, \mathbf{n})\Big|_{\Gamma_0 \cup \Gamma_2} &= 0, \mathbf{X} \in \Gamma_0 \cup \Gamma_2, \\
(\nabla c, \mathbf{n})\Big|_{\Gamma_3 \cup \Gamma_4 \cup \Gamma_5} &= 0, \mathbf{X} \in \Gamma_3 \cup \Gamma_4 \cup \Gamma_5, \\
T(\mathbf{X}, t)\Big|_{\Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2} &= T_{amm}(\mathbf{X}, t), \mathbf{X} \in \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2, \\
(\nabla T, \mathbf{n})\Big|_{\Gamma_3 \cup \Gamma_4 \cup \Gamma_5} &= 0, \mathbf{X} \in \Gamma_3 \cup \Gamma_4 \cup \Gamma_5,
\end{aligned} \tag{3.5}$$

де  $H_1(\mathbf{X}), C_0(\mathbf{X}), C_1(\mathbf{X}, t), C_m(\mathbf{X}, t), T_0(\mathbf{X}), T_{amm}(\mathbf{X}, t)$  – відомі функції.

Для відшукування наближеного розв'язку сформованої нелінійної крайової задачі використаємо метод скінченних елементів (МСЕ). Він полягає в тому, що апроксимуючі функції відмінні від нуля на окремих підобластях (скінченних елементах, більш конкретно-тетраедрах), на які розбивається вся область розв'язку [75, 83, 112].

### 3.1.2. Слабке формулювання крайової задачі в тривимірному випадку

Домножимо рівняння (3.1) на пробну функцію  $v(\mathbf{X}) \in H_0 = \{v(\mathbf{X}) : v(\mathbf{X}) \in W_2^1(\Omega), v(\mathbf{X})\Big|_{\Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2} = 0\}$  і проінтегрувавши отриману рівність по області  $\Omega$ , отримаємо

$$\begin{aligned}
& \iiint_{\Omega} (\nabla(\rho_p(c, T) \mathbf{K}_h(c, T, s, \sigma) \nabla h) - \sigma \left( \frac{\partial \rho_p}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial \rho_p}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} \right) + \\
& + \frac{\rho_p}{\rho_N} \frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\rho_p}{\rho_s} \frac{\partial s}{\partial t} - \nabla \cdot (\rho_p(c, T) \mathbf{F}_{osm})) v(\mathbf{X}) d\Omega = 0.
\end{aligned}$$

Застосувавши формулу Остроградського-Гаусса, дістанемо

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} (\rho_p \mathbf{K}_h \nabla h \nabla v) d\Omega - \iiint_{\Omega} \left( \sigma \left( \frac{\partial \rho_p}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial \rho_p}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} \right) v \right) d\Omega - \iiint_{\Omega} (\nabla \cdot (\rho_p \mathbf{F}_{osm}) v) d\Omega \\ + \iiint_{\Omega} \left( \frac{\rho_p}{\rho_N} \frac{\partial N}{\partial t} \right) v d\Omega + \iiint_{\Omega} \left( \frac{\rho_p}{\rho_s} \frac{\partial s}{\partial t} \right) v d\Omega = 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Домножимо рівняння (3.2) на пробну функцію  $v1(\mathbf{X}) \in H_0 = \{v1(\mathbf{X}) : v1(\mathbf{X}) \in W_2^1(\Omega), v1(\mathbf{X})|_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} = 0\}$  і отримаємо

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} (\nabla(\mathbf{D}_c \nabla c) - \mathbf{u} \left( 1 - \frac{c}{\rho_p} \frac{\partial \rho_p}{\partial c} \right) \nabla c) + \\ + \frac{c}{\rho_p} \left( \sigma \frac{\partial \rho_p}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial \rho_p}{\partial T} \nabla T \right) - \frac{\partial N}{\partial t} v1(\mathbf{X}) d\Omega = \iiint_{\Omega} \sigma \left( 1 - \frac{c}{\rho_p} \frac{\partial \rho_p}{\partial c} \right) \frac{\partial c}{\partial t} v1(\mathbf{X}) d\Omega. \end{aligned}$$

Аналогічно, як і в (3.6), застосовуючи формулу Остроградського-Гаусса, отримаємо

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \left( \frac{c}{\rho_p} \left( \sigma \frac{\partial \rho_p}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \frac{\partial \rho_p}{\partial T} \nabla T \right) \nabla v1 \right) d\Omega + \iiint_{\Omega} (\mathbf{D}_c \nabla c \nabla v1) d\Omega - \\ - \iiint_{\Omega} \left( \mathbf{u} \left( 1 - \frac{c}{\rho_p} \frac{\partial \rho_p}{\partial c} \right) \nabla c v1 \right) d\Omega - \iiint_{\Omega} \frac{\partial N}{\partial t} v1 d\Omega = \iiint_{\Omega} \sigma \left( 1 - \frac{c}{\rho_p} \frac{\partial \rho_p}{\partial c} \right) \left( \frac{\partial c}{\partial t} v1 \right) d\Omega. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Домноживши рівняння (3.3) на пробну функцію  $v2(\mathbf{X}) \in H_0 = \{v2(\mathbf{X}) : v2(\mathbf{X}) \in W_2^1(\Omega), v2(\mathbf{X})|_{\Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2} = 0\}$ , проінтегрувавши по області  $\Omega$  та застосовуючи формулу Остроградського-Гаусса, отримаємо

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} (\lambda \nabla T \nabla v2) d\Omega - \iiint_{\Omega} (\rho_p c_p \mathbf{u} \nabla T v2) d\Omega - \iiint_{\Omega} \left( \rho_s c_s \frac{\partial s}{\partial t} + \rho_N c_N \frac{\partial N}{\partial t} \right) T v2 d\Omega = \\ = \iiint_{\Omega} c_T \left( \frac{\partial T}{\partial t} v2 \right) d\Omega. \end{aligned} \quad (3.8)$$

З початкових умов для функцій концентрації солей та температури маємо

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} c(\mathbf{X},0) \cdot v_1(\mathbf{X}) d\Omega &= \iiint_{\Omega} C_0(\mathbf{X}) v_1(\mathbf{X}) d\Omega, \\ \iiint_{\Omega} T(\mathbf{X},0) \cdot v_2(\mathbf{X}) d\Omega &= \iiint_{\Omega} T_0(\mathbf{X}) v_2(\mathbf{X}) d\Omega. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Для відшукування наближеного узагальненого розв'язку із варіаційного формулювання задачі (3.6)–(3.9) потрібно застосовувати дискретизацію в часі. Оскільки задача нелінійна, то можна використати, наприклад, схему предиктор-коректор [81] або повністю неявну лінеаризовану різницеву схему [19].

### 3.1.3. Чисельні експерименти для модельної задачі фільтрації в ґрунтовій греблі та їх аналіз

Чисельні розрахунки проведені за наступних вхідних даних:

$$\sigma = 0.4, \rho = 1100 \text{ кг} / \text{м}^3, C_m = 160 \text{ г} / \text{л}, D_C = 0.001 \text{ м}^2 / \text{доба},$$

$$D_T = 0.0001 \text{ кг} / \text{доба} \cdot \text{м} \cdot \text{°C}, K_C = 6 \cdot 10^{-7} \text{ м}^5 / \text{кг} \cdot \text{доба},$$

$$K_T = 6 \cdot 10^{-8} \text{ м}^2 / \text{°C} \cdot \text{доба}, c_T = 2137 \text{ кДж} / \text{м}^3 \cdot \text{°C},$$

$$c_p = 4,2 \text{ кДж} / \text{кг} \cdot \text{°C}, \lambda = 108 \text{ кДж} / \text{м} \cdot \text{°C} \cdot \text{доба},$$

$$T_0(x) = 4 \text{ °C}, T_{\text{атм}} = 17 + 13 \cos\left(\frac{\pi t}{180}\right),$$

$$C_0(x) = 8 \text{ г} / \text{л}, C_1(t) = 8 \text{ г} / \text{л}, C_m = 160 \text{ г} / \text{літр}.$$

Вільна поверхня покладалась паралельною до осі  $Ox$  і задавалась рівнянням  $y = 30 \text{ м}$ .

Задача розв'язана в середовищі FreeFem++, яке являє собою програмне забезпечення для розв'язування крайових задач для диференціальних рівнянь в частинних похідних методом скінченних елементів [112]. Цей безкоштовний програмний продукт, поміж іншого, надає можливості варіаційного формулювання проблеми, автоматизації генерування сітки на основі алгоритму Делоне-Вороного та великий вибір типів скінченних

елементів. Також даний пакет містить вмонтовані алгоритми апроксимації вільних меж.

В якості модельної задачі з фізичної точки зору розглянуто процес фільтрації в тілі ґрунтової греблі хвостосховища при концентрації хімічних речовин у верхньому б'єфі на рівні 160 г/літр. При цьому враховані сезонні коливання температури від  $T_{\max} = 30^{\circ}C$  до  $T_{\min} = 4^{\circ}C$  на межі контакту греблі із атмосферою. Розміри греблі: висота греблі – 30 м, ширина верхньої межі – 20 м, ширина нижньої межі – 80 м, довжина греблі – 20 м. Апроксимаційна залежність коефіцієнта фільтрації від температури та концентрації розчинених солей взята з роботи [25]. Коефіцієнт фільтрації чистої води  $k_0 = 1$  м/доба. Отримані значення температури, концентрації солей, швидкості фільтрації та напорів на момент часу 360 діб (час вибрано для прикладу, але в загальному випадку шукані функції можна відобразити для будь-якого скінченного моменту часу), відображені на рис. 3.3–3.7. Зручність застосування FreeFem++ обумовлюється ще й можливістю візуалізації представлення графіків у вигляді ліній (площин) рівних значень шуканих функцій (що і відображено на рис. 3.3–3.7) та можливістю аналізу значень в будь-якій точці розрахункової області. Крім того, задача покриття області геометричною сіткою скінченних елементів розв'язується автоматично і від користувача вимагається задання лише рівнянь межі області, в якій шукається наближений розв'язок крайової задачі.

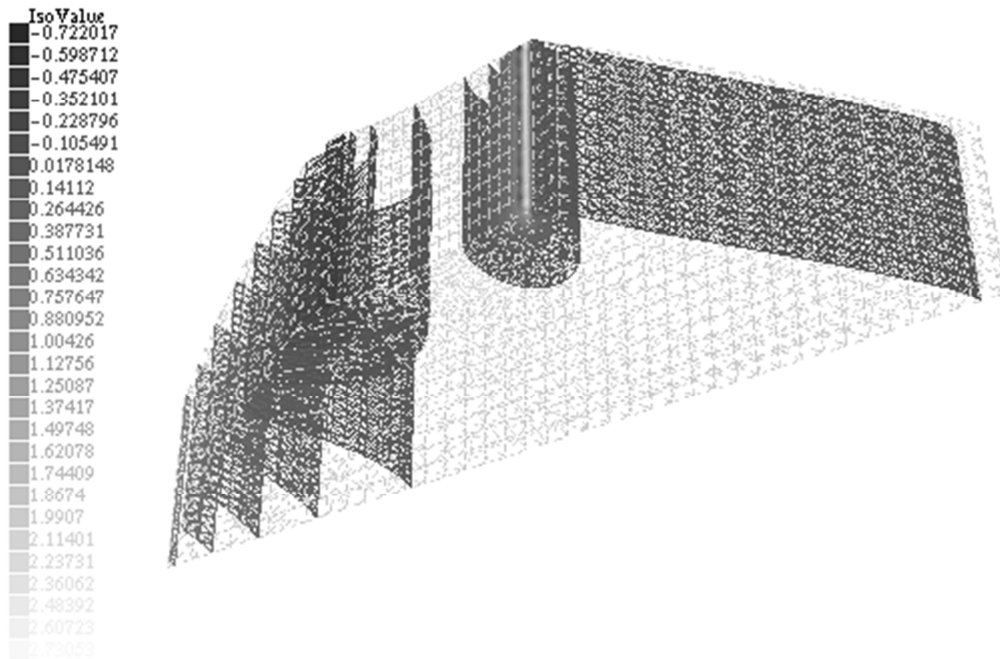


Рисунок 3.3 – Розподіл різниці напорів без урахування та з урахуванням впливу теплосолеперенесення

На рисунку 3.3 зображено розподіл різниці напорів без урахування та з урахуванням впливу теплосолеперенесення (рис. 3.4) на момент часу 360 діб. Видно, що різниця напорів лежить в межах від  $-0.722017$  м до  $2.85384$  м. Тобто, врахування теплових та хімічних факторів впливу зумовлює відхилення у значеннях напорів з амплітудою близько  $3.5$  м. Такі коливання напорів обумовлюються урахуванням осмотичних явищ та нелінійною залежністю коефіцієнта фільтрації від концентрації солей і температури. Причому, ці залежності є немонотонними. А тому спрогнозувати вплив теплосолеперенесення в часі на розподіл напорів неможливо простим аналізом залежностей, а лише на основі чисельних експериментів.

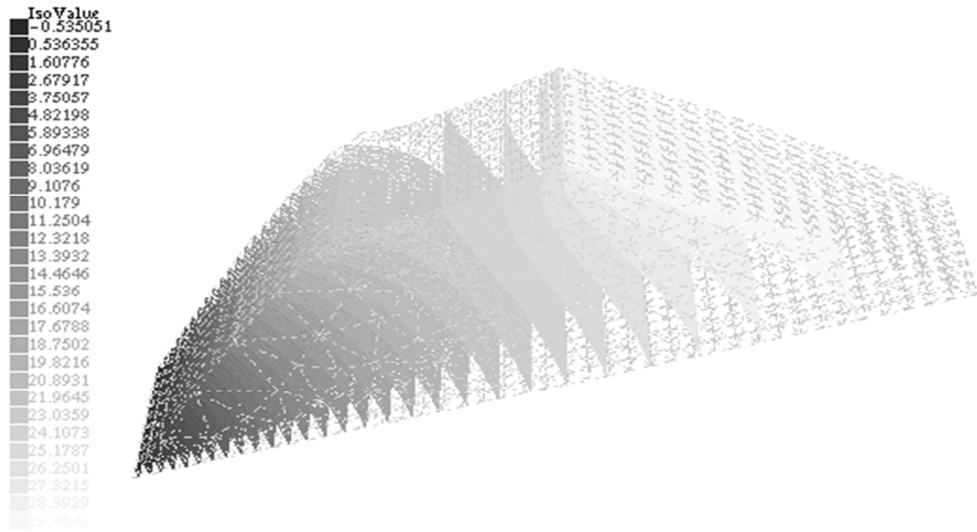


Рисунок 3.4 – Розподіл напорів з урахуванням впливу теплосолеперенесення

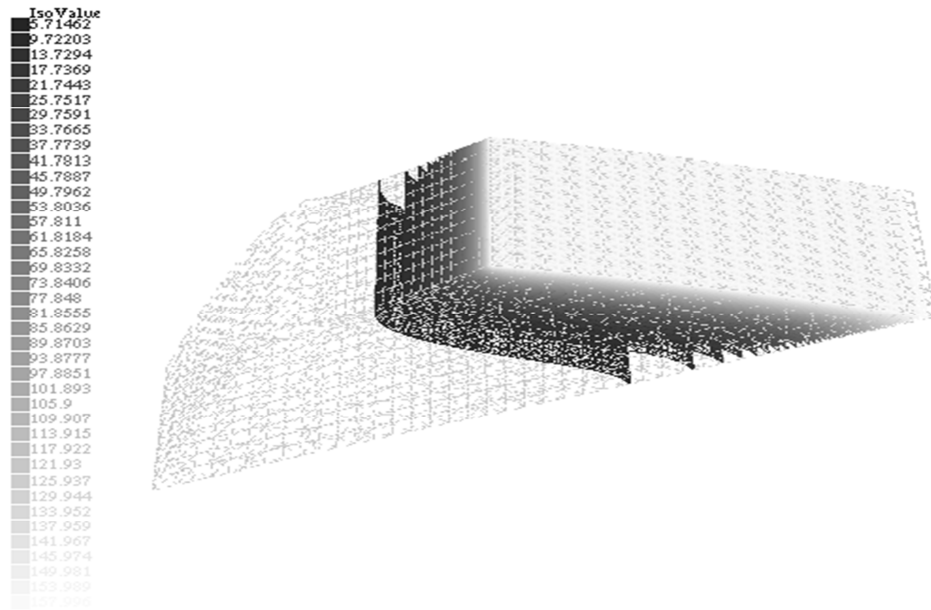


Рисунок 3.5 – Розподіл концентрації солей

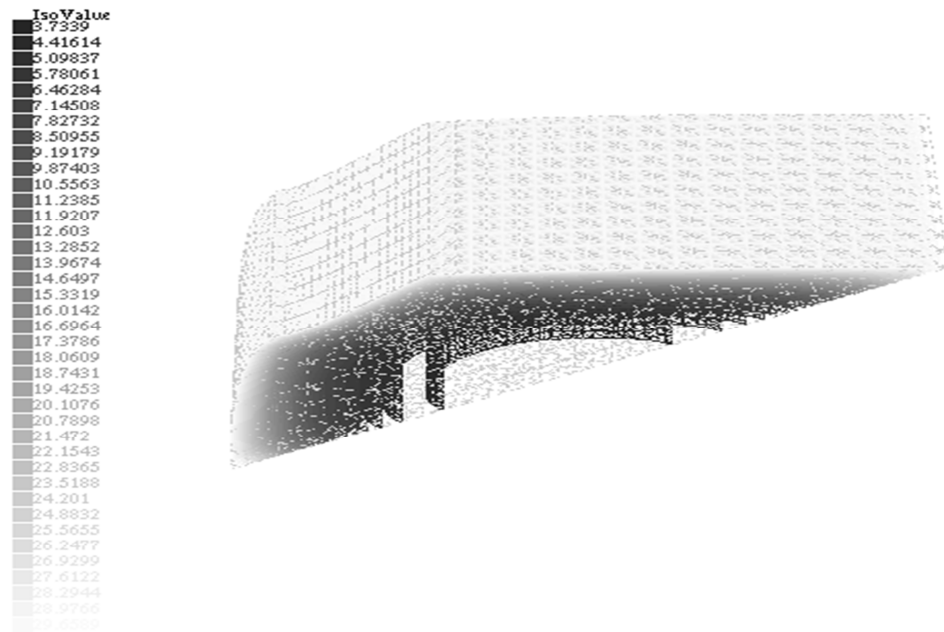


Рисунок 3.6 – Розподіл температури

Для можливості аналізу впливів теплосолеперенесення на розподіл напорів в тілі греблі на рис. 3.5, 3.6 наведено розподіл хімічного та температурного полів на момент часу  $t = 360$  дів.

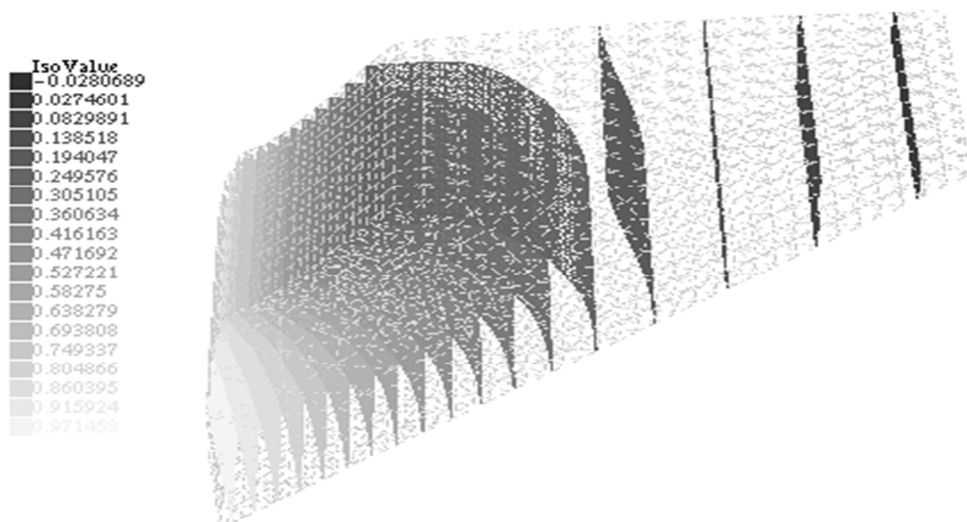


Рисунок 3.7 – Розподіл різниці швидкостей фільтрації (компоненти  $u_y$ ) з урахуванням впливу теплосолеперенесення та без відповідно

Загальною метою даного дослідження є математичне та комп'ютерне моделювання процесів фільтраційного руйнування пористого матеріалу ґрунтових масивів в тривимірному випадку. В роботах [19, 21, 25] такі дослідження проведено лише для двовимірної задачі, що не може повністю врахувати геометрію областей розмиву ґрунту фільтраційним потоком порової рідини. Критерієм розмиву пористого матеріалу є перевищення швидкістю фільтрації деякого критичного значення [25]. Тому з практичної точки зору більш інформативною є картина різниці в розподілах швидкостей фільтрації (компоненти  $u_y$ ) у випадку урахування та без урахування впливу теплосолеперенесення. Така різниця на момент часу 360 діб відображена на рис. 3.7. Видно, що різниця швидкостей лежить в межах від  $-0.0280689$  м/доба до  $0.971453$  м/доба. Тобто, врахування теплових та хімічних факторів впливу зумовлює відхилення у значеннях швидкості фільтрації з амплітудою близько 1 м/доба.

### 3.2. Чисельне розв'язання задачі фільтрації в ґрунтовому масиві з урахуванням суфозійно-кольматаційних процесів

#### 3.2.1. Постановка задачі фільтрування в біоплато та її математична модель

Згідно розділу 2 (рівняння (2.3)) рівняння фільтрації має вигляд

$$\nabla \cdot (\rho_p(c) \mathbf{K}_h(c, \sigma) \nabla h) = \sigma \frac{\partial \rho_p}{\partial c} \cdot \frac{\partial c}{\partial t} - \frac{\rho_p}{\rho_s} \frac{\partial s}{\partial t}. \quad (3.10)$$

Рівняння (3.10) є квазістаціонарним відносно функції  $h = h(X, t)$ , оскільки не містить похідної “ $\frac{\partial h}{\partial t}$ ”. Це є наслідком того, що  $\sigma_0 = \sigma_0(X)$  і не залежить від часу. Якби, наприклад,  $\sigma_0 = \sigma_0(X, t)$ , то рівняння (3.10) містило



б  $\frac{\partial h}{\partial t}$  і відображало б випадок пружного режиму фільтрації (в частковому випадку – фільтраційної консолідації).

Рівняння (3.10) містить дві невідомі функції –  $c = c(X, t)$  та  $s = s(X, t)$ , а тому має доповнюватись ще двома рівняннями для вказаних функцій. Для зміни концентрації пульпи  $c = c(X, t)$  використаємо дифузійну модель. Зокрема, згідно розділу 2 (рівняння (2.5)) модифіковане рівняння масо перенесення набуде вигляду

$$\sigma \left(1 - \frac{c}{\rho_p} \frac{\partial \rho_p}{\partial c}\right) \frac{\partial c}{\partial t} = \nabla \cdot (D_c \nabla c) - u \left(1 - \frac{c}{\rho_p} \frac{\partial \rho_p}{\partial c}\right) \nabla c - \frac{\partial s}{\partial t}, \quad (3.11)$$

Щодо рівняння для зміни  $s = s(X, t)$  – концентрації кольматуючих (прилиплих до скелету ґрунту) частинок, то в принципі існує два підходи – лінійний та нелінійний. Згідно [37] можливе використання лінійного рівняння кольматації та суффозії

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \alpha \cdot c - \beta \cdot s, \quad (3.12)$$

або нелінійного рівняння кольматації та суффозії

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \alpha^* \cdot (s_{\max} - s) \cdot c - \beta \cdot s, \quad (3.13)$$

де  $\alpha, \alpha^*$  – коефіцієнти швидкості прилипання частинок;  $\beta$  – коефіцієнт швидкості відриву частинок;  $s_{\max}$  – максимальна концентрація кольматуючих частинок.

В [42] обґрунтовано замість (3.13) використовувати дещо модифіковане рівняння.

Зокрема

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -\frac{1}{\delta} (\sigma - \sigma_{\min}) \cdot c \cdot \left| \vec{v} \right|, \quad (3.14)$$

де  $\delta = l_0(\sigma_0 - \sigma_{\min})$ ,  $\sigma_{\min}$  – мінімальне значення пористості (всі проходи забито кольматуючими частинками);  $l_0$  – середня відстань, яку проходить частинка до затримання її поровим каналом.

В роботі [134] при дослідженні фільтрів запропоновано використовувати наступне рівняння для зміни концентрації частинок в твердій компоненті

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \alpha \cdot c - \varepsilon \cdot \beta(t) \cdot s,$$

де  $\varepsilon$  – малий параметр.

Нехай  $\sigma_{\min}$  – мінімальне значення пористості. Тоді

$$\sigma_{\min} = \sigma_0 \cdot \sigma_s, \quad (3.15)$$

де  $\sigma_s$  – пористість пористого середовища, яке складається лише з кольматуючих частинок. Тоді з (3.15) маємо

$$\begin{aligned} \sigma_{\min} &= \sigma_0 - \frac{s_{\max}}{\rho_s}, \\ \sigma_0 \cdot \sigma_s &= \sigma_0 - \frac{s_{\max}}{\rho_s}, \\ s_{\max} &= \rho_s(1 - \sigma_s) \cdot \sigma_0. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Для повноцінного формулювання крайової задачі потрібно вищенаведені рівняння доповнити початковими та граничними умовами для невідомих функцій.

Математична модель фільтрації з урахуванням суфозійно-кольматаційних процесів містить наступні рівняння:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\rho_p(c) \mathbf{K}_h(c, \sigma) \nabla h) &= \sigma \frac{\partial \rho_p}{\partial c} \cdot \frac{\partial c}{\partial t} - \frac{\rho_p}{\rho_s} \frac{\partial s}{\partial t}, \mathbf{X} \in \Omega, \\ \sigma \left(1 - \frac{c}{\rho_p} \frac{\partial \rho_p}{\partial c}\right) \frac{\partial c}{\partial t} &= \nabla \cdot (\mathbf{D}_c \nabla c) - \mathbf{u} \cdot \left(1 - \frac{c}{\rho_p} \frac{\partial \rho_p}{\partial c}\right) \nabla c - \frac{\partial s}{\partial t}, \mathbf{X} \in \Omega, \\ \frac{\partial s}{\partial t} &= \alpha \cdot c - \beta \cdot s, \mathbf{X} \in \Omega, \end{aligned}$$

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}_h(c, s, \sigma)\nabla h, \mathbf{X} \in \Omega.$$

Початкові умови:

$$c(\mathbf{X}, 0) = C_0, \mathbf{X} \in \bar{\Omega},$$

$$s(\mathbf{X}, 0) = s_0, \mathbf{X} \in \bar{\Omega}.$$

Граничні умови

$$h(\mathbf{X}, t)|_{\mathbf{X} \in \Gamma_1} = y.$$

На межі  $\Gamma_2$  потік залежить від відстані до правого краю:

$$q|_{\mathbf{X} \in \Gamma_2} = C_2,$$

$$c(\mathbf{X}, t)|_{\mathbf{X} \in \Gamma_1} = C_1.$$

Для відшукування наближеного розв'язку поставленої крайової задачі використано МСЕ.

### 3.2.2. Скінченноелементний розв'язок крайової задачі

Домножимо рівняння (3.10) на пробну функцію  $v_1(\mathbf{X}) \in H_0 = \{v_1(\mathbf{X}) : v_1(\mathbf{X}) \in W_2^1(\Omega)\}$ ,  $v_1(\mathbf{X})|_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} = 0$ , інтегруємо по області  $\Omega$ , застосовуємо формулу Остроградського-Гаусса і отримаємо

$$\iint_{\Omega} (\mathbf{K}_h \rho_p \nabla h \nabla v_1) d\Omega + \iint_{\Omega} \left( \sigma \frac{\partial \rho_p}{\partial c} \cdot \frac{\partial c}{\partial t} \cdot v_1 \right) d\Omega - \iint_{\Omega} \left( \frac{\rho_p}{\rho_s} \cdot \frac{\partial s}{\partial t} \cdot v_1 \right) d\Omega = 0.$$

Програмна реалізація отриманого рівняння в FreeFem++:

```

problem pressure(h,v1) =
int2d(Th)(k*rop*(dx(h)*dx(v1)+ dy(h)*dy(v1)))
+ int2d(Th)(sig*ropC*(c*v1)/dt)
- int2d(Th)(sig*ropC*(cold*v1)/dt)
- int2d(Th)((rop/ros)*(s*v1)/dt)
+ int2d(Th)((rop/ros)*(sold*v1)/dt)
+ int1d(Th,B2)((1-k)*((qmin*((x-50)/(0-50)))+(qmax*((x-0)/(50-0))))*v1)

```

+ on(B1,h=y);

Домножимо рівняння (3.11) та початкову умову для концентрації пульпи на пробну функцію  $v_2(\mathbf{X}) \in H_0 = \{v_2(\mathbf{X}) : v_2(\mathbf{X}) \in W_2^1(\Omega)\}$ ,  $v_2(\mathbf{X})|_{\Gamma_1} = 0$ , інтегруємо по області  $\Omega$ , застосовуємо формулу Остроградського-Гаусса і отримаємо

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} (\mathbf{D}_c \nabla c \nabla v_2) d\Omega - \iint_{\Omega} \left( \mathbf{u} \left( 1 - \frac{c}{\rho_p} \frac{\partial \rho_p}{\partial c} \right) \cdot \nabla c \cdot v_2 \right) d\Omega + \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial s}{\partial t} \cdot v_2 \right) d\Omega = \\ \iint_{\Omega} \left( \sigma \left( 1 - \frac{c}{\rho_p} \frac{\partial \rho_p}{\partial c} \right) \cdot \frac{c^i - c^{i-1}}{dt} \cdot v_2 \right) d\Omega, \end{aligned}$$

Програмна реалізація отриманого рівняння в FreeFem++:

```
problem conc(c,v2)=int2d(Th)(Dc*(dx(c)*dx(v2) + dy(c)*dy(v2)))
+ int2d(Th)(u*(1-(cold/rop)*ropC)*(c*dx(v2) + c*dy(v2)))
- int2d(Th)(cold*v2)
+ int2d(Th)((s*v2)/dt)
- int2d(Th)((sold*v2)/dt)
+ int2d(Th)(sig*(1-(cold/rop)*ropC)*(c*v2)/dt)
- int2d(Th)(sig*(1-(cold/rop)*ropC)*(cold*v2)/dt)
+ on(B1,c=250);
```

$$\iint_{\Omega} c(\mathbf{X},0) \cdot v_2(\mathbf{X}) d\Omega = \iint_{\Omega} C_0 \cdot v_2(\mathbf{X}) d\Omega.$$

Програмна реалізація отриманого рівняння в FreeFem++:

```
Vh cold=8;
cold=c;
```

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}_h \nabla h.$$

Програмна реалізація отриманого рівняння в FreeFem++:

```
u = -k*(dx(h)+dy(h));
```

$$s^i = (\alpha \cdot c^{i-1} - \beta \cdot s^{i-1}) \cdot dt + s^{i-1}.$$

Програмна реалізація отриманого рівняння в FreeFem++:

$$s=(0.1*cold-0.01*sold)*dt+sold;$$

Для відшукування наближеного узагальненого розв'язку отриманої задачі потрібно застосовувати дискретизацію в часі. Можна використати, наприклад, схему предиктор-коректор [81] або повністю неявну лінеаризовану різницеву схему [19].

### 3.2.3. Результати чисельних експериментів та їх аналіз

В якості модельної задачі розглянемо систему біоплато-фільтра довжиною 50 метрів та висотою 2 метри з щелепним завантаженням (рис. 3.8). В ній протікають складні взаємопов'язані фільтраційно-кольматаційні процеси. На межі  $\Gamma_1$  розміщена перфорована труба, через яку на поверхню біоплато подається забруднена вода. Хоча вода подається в трубу під певним тиском, але витікши з труби, вона вільно фільтрується в пористе середовище. Тому вважаємо, що тиск, під яким забруднена вода подається на межу  $\Gamma_1$ , дорівнює атмосферному. Оскільки  $p_a = 0$ , то гранична умова на  $\Gamma_1$ :  $h|_{\Gamma_1} = 2$  м. На межі  $\Gamma_2$  знаходиться перфорована труба, з якої викачується очищена вода. Потоки відповідно при  $x = 0$  м приймаються  $q_{\min} = 0.13$  м/доба і при  $x = 50$  м –  $q_{\max} = 0.17$  м/доба. Межі  $\Gamma_3, \Gamma_4$  – межі непроникності.

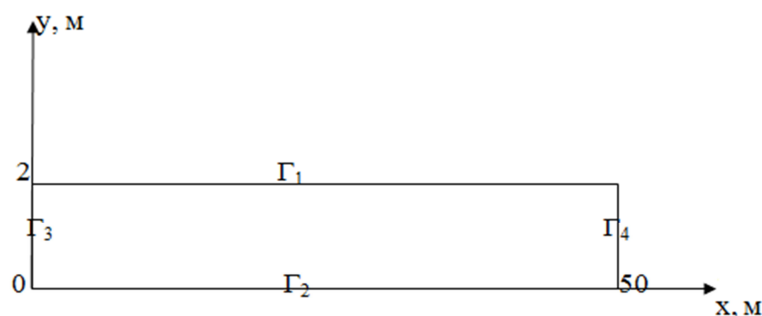


Рисунок 3.8 – Область розв'язку задачі

В роботі [141] наведено формулу залежності густини водного розчину NaCl від його концентрації  $c$  (%)

$$\rho_p(c) = \sum_{j=1}^3 a_j c^{j-1}, \quad \frac{\partial \rho_p}{\partial c} = \sum_{j=2}^3 (j-1) a_j c^{j-2},$$

Значення коефіцієнтів  $a_j$ ,  $j = \overline{1,3}$ , наведено в наступній таблиці

$a_1$	$a_2$	$a_3$
750.2834	26.7822	-0.26389
1.90165	-0.11734	0.00175
-0.003604	0.0001701	-0.00000261

На межі  $\Gamma_2$  потік залежить від відстані до правого краю:

$$q|_{x \in \Gamma_2} = \frac{q_{\min}(x - x_2)}{x_1 - x_2} + \frac{q_{\max}(x - x_1)}{x_2 - x_1},$$

де  $q$  – потік рідини на одиницю довжини;  $x_1=0$  м;  $x_2=50$  м; на межі  $\Gamma_1$   $c(X, t)=200$  кг/м<sup>3</sup>. Інші вхідні параметри наступні:

$$\sigma_0 = 0.7, \quad e_0 = 2.3, \quad \rho_s = 2200 \text{ (кг/м}^3\text{)}, \quad D_c = 9.51 \cdot 10^{-3} \text{ (м}^2\text{ / доба)}, \quad \alpha = 0.01,$$

$$\beta = 0.01, \quad C_0 = 8 \text{ (кг/м}^3\text{)}, \quad s_0 = 0 \text{ (кг/м}^3\text{)}.$$

Крок дискретизації в часі  $\tau=30$  діб.

На рис. 3.9 зображена різниця напорів з урахуванням впливу концентрації пульпи та концентрації кольматуючих частинок (коефіцієнт

фільтрації  $k = k_0 \frac{1+e_0}{1+e} \left( \frac{e}{e_0} \right)^3$  [108]) та без урахування (коефіцієнт фільтрації

$k = k_0 = 100$  м/доба [15]) відповідно.

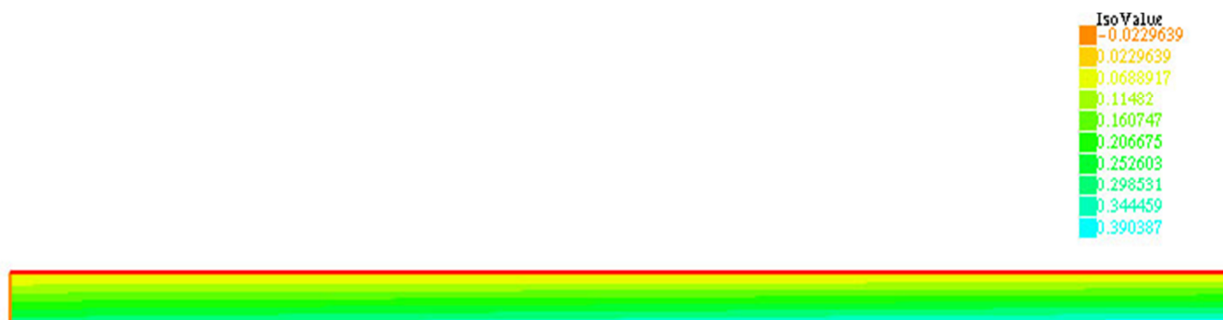


Рисунок 3.9 – Різниця напорів у засипці біоплато через 180 діб



Рисунок 3.10 – Графік розподілу  $u_2 = -\mathbf{K}(e) \frac{\partial h}{\partial y}$  з урахуванням впливу концентрації пульпи та концентрації кольматуючих частинок через 180 діб



Рисунок 3.11 – Графік розподілу  $u_2 = -\mathbf{K} \frac{\partial h}{\partial y}$  без урахування впливу концентрації пульпи та концентрації кольматуючих частинок через 180 діб

Проведені дослідження, хоча і на прикладі модельної задачі, показали, що на етапі проектування актуальним є дослідження суфозійно-кольматаційних процесів, що протікають у об'ємі фільтрувальної засипки біоплато під час фільтрування забрудненої води. Дані процеси значним чином впливають на ефективність роботи біоплато-фільтра. Засоби

математичного та комп'ютерного моделювання, які використані, дозволяють урахувати нелінійні взаємовпливи параметрів як пористого середовища, так і параметрів самих процесів. Вони дають змогу значно економити ресурси та час на проведення натурних експериментів.

Приймаючи до уваги, що максимальне значення напорів в засипці біоплато складає 2 м, то, як видно з рис. 3.9, максимальна відносна різниця сягає 19.5 %. Графіки швидкості фільтрації по осі  $Oy$  (компоненти  $u_2$ ) показують, що за 180 діб (рис. 3.10 та рис. 3.11) максимальна відносна різниця значень швидкостей фільтрації складає близько 25 %. Тобто, вже за півроку прогнозна продуктивність біоплато знизиться щонайменше на чверть. Такий ефект пояснюється урахуванням нелінійної залежності коефіцієнта фільтрації від концентрації кольматуючих частинок. Зі збільшенням об'єму частинок, які затримуються засипкою в біоплато-фільтрі, її (засипки) пористість зменшується. А це, в свою чергу, приводить до зменшення коефіцієнта фільтрації, а звідси – до зменшення швидкості руху та об'єму рідини, яка фільтрується через біоплато. Описані в роботі [85] дослідні підтверджують, що у конструкціях біоплато відбувається поступова кольматація порового простору фільтрувальної засипки та нижнього дренажу біоплівкою і мінералізованим осадом, накопичення мулу в донній частині споруди.

В побудованій математичній моделі враховано фізичні ефекти динамічної зміни пористості та залежності коефіцієнта фільтрації від концентрації забруднень, чого немає у відомих аналогах. Урахування цих ефектів дозволяє стверджувати про підвищення адекватності математичної моделі досліджуваним фізичним процесам. Якісно негативний вплив збільшення концентрації кольматуючих частинок на продуктивність фільтра можна було б зробити і без досліджень запропонованої математичної моделі. Однак отримання конкретних прогнозних даних неможливе без чисельного



дослідження побудованої математичної моделі та проведення чисельних експериментів. Нелінійність побудованої моделі не дозволяє говорити про аналітичні розв'язки відповідної крайової задачі. Математичне моделювання дозволяє оцінити ефект впливу розглянутих факторів, але не дозволяє знизити такий негативний вплив. Тому для збереження продуктивності біоплато потрібні інженерні рішення, які знижують вплив кольматаційно-суфозійних процесів на ефективність роботи біоплато-фільтра.

### ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 3

В даному розділі отримані наступні результати:

- Сформовано вдосконалені математичні моделі фільтраційних процесів в пористих середовищах з елементами інженерних споруд з урахуванням суфозійно-кольматаційних явищ та тепломасоперенесення.

- Для чисельного дослідження нелінійної крайової задачі використано МСЕ і це дало суттєву перевагу у тривимірному випадку, оскільки дозволило врахувати геометрію області.

- Для чисельних експериментів було використано безкоштовний пакет FreeFem++, який дав змогу автоматизувати процеси тріангуляції та тетраедризації тіла ґрунтових масивів, повністю автоматизувати чисельне інтегрування та розв'язування систем лінійних алгебричних рівнянь.

- Проведені чисельні експерименти з дослідження модельної задачі фільтрації показують, що в тілі ґрунтової греблі врахування теплосолеперенесення змінює розподіл напорів з різницею від  $-0.722017$  м до  $2.85384$  м. Амплітуда коливань швидкості фільтрації складає близько  $1$  м/доба. А це може стати причиною фільтраційних руйнувань ґрунтових масивів. Тому, результати експериментів потрібно враховувати при проектуванні і конструюванні ГТС, що можуть перебувати в умовах техногенних навантажень (греблі водойм-охолоджувачів АЕС, греблі хвостосховищ тощо).

- Щодо дослідження модельної задачі системи біоплато-фільтра, то експерименти показують, що при врахуванні нелінійності прогнозна продуктивність біоплато за півроку знижується на  $25\%$ . Такий ефект неможливо прослідкувати при нехтуванні нелінійністю. Математична модель дозволила підвищити адекватність результатів для досліджуваних фізичних процесів, однак не дозволяє знизити негативний вплив кольматації. Тому

така задача потребує розробки інженерних рішень для зниження впливу кольматаційно-суфозійних процесів на процеси фільтрації. Це вимагатиме, в свою чергу, урахування цих інженерних рішень в математичній моделі і подальшому дослідженню їх (рішень) ефективності.

Отримані результати дозволять попередити характер можливих аварій та пошкоджень, пов'язаних із змінами напорів, оскільки зупинити фільтраційні руйнування, що почалися, практично неможливо.

Результати даного розділу опубліковані в роботах [41, 56, 66, 68, 80].

## **РОЗДІЛ 4**

### **МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ФІЛЬТРАЦІЙНИХ ПРОЦЕСІВ В ГРУНТОВИХ МАСИВАХ З ЕЛЕМЕНТАМИ ІНЖЕНЕРНИХ СПОРУД ТА ЗОНАМИ ВИМИВУ (ПРОСТОРОВА ЗАДАЧА)**

В даному розділі досліджені математичні моделі фільтраційних процесів в ґрунтових масивах в тривимірному випадку. Враховано вплив наявності елементів інженерних споруд та можливих зон вимиву. Враховано модифікацію кінематичної граничної умови на депресійній поверхні при дослідженні процесів фільтрації в ґрунтовій греблі. Для відшукування наближеного розв'язку поставлених крайових задач в областях з вільними рухомими межами використано метод скінченних елементів. Створено програмне забезпечення для автоматизації розрахунків та відшукування чисельних розв'язків в середовищі FreeFem++. Проведено низку чисельних експериментів та здійснено їх аналіз. Досліджено вплив наявності в ґрунтових греблях елементів інженерних споруд, а також наслідки їх пошкоджень. Отримані результати дозволять оцінити та попередити характер можливих аварій та пошкоджень, пов'язаних із наявністю в тілі ґрунтових гребель елементів інженерних споруд та їх пошкоджень.

**Дослідження впливу наявності елементів інженерних споруд на  
фільтраційні процеси в ґрунтових масивах**

#### **4.1. Постановка задачі та її математична модель**

Технологічно різні частини ґрунтових гребель зводяться з різних типів ґрунтів [34, 90]. В процесі експлуатації греблі її тіло просідає. Оскільки різні типи ґрунтів просідають з різними ступенями – це зумовлює нерівномірність

просідань різних частин греблі. За наявності водоводу в тілі греблі і при нерівномірному просіданні ґрунту греблі, на стиках різних типів ґрунтів можливі пошкодження водоводів – наявність тріщин та розломів, а також зміщень частин водоводу одна відносно іншої. Це створює передумови для детального дослідження (з точки зору математичного моделювання) фільтраційних процесів в ґрунтових греблях за наявності пошкоджень водоводів. Нерівномірність просідань різних частин греблі може бути наслідком не лише неоднорідності матеріалу самої греблі, але і особливостями природної будови основи, на якій вказана гребля збудована.

Математична модель  $R$ -вимірної задачі фільтраційних процесів в тілі ґрунтової греблі, згідно викладок розділу 2, містить наступні рівняння (рис. 4.11):

$$\begin{aligned} & \frac{R\gamma a(T, \boldsymbol{\sigma}_m, \mathbf{N})}{1+(R-1)\xi} \frac{\partial h}{\partial t} - (1+e)^2 \sum_{i=1}^l \frac{\partial \sigma_m^{(i)}}{\partial t} - (1+e)^2 \sum_{j=1}^k \frac{1}{\rho_N^{(j)}} \frac{\partial N_j}{\partial t} \\ & - e \left( \frac{1}{\rho_p} \left( \frac{\partial \rho_p}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} + \sum_{j=1}^k \frac{\partial \rho_p}{\partial c_j} \frac{\partial c_j}{\partial t} \right) - \frac{1}{\rho_m} \left( \frac{\partial \rho_m}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} + \sum_{j=1}^k \frac{\partial \rho_m}{\partial N^{(j)}} \frac{\partial N_j}{\partial t} \right) \right) = \\ & = (1+e)(\nabla \cdot (\mathbf{K}_h(t, h, T, \boldsymbol{\sigma}_m, \mathbf{N}, \mathbf{c}) \nabla h) - \nabla \cdot \mathbf{F}_{osm}), \mathbf{X} \in \Omega, t > 0, \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} & \sigma \left( 1 - \frac{c}{\rho_p} \frac{\partial \rho_p}{\partial c} \right) \frac{\partial c}{\partial t} = \nabla \cdot (\mathbf{D}_c \nabla c) - \mathbf{u} \cdot \left( 1 - \frac{c}{\rho_p} \frac{\partial \rho_p}{\partial c} \right) \nabla c + \\ & + \frac{c}{\rho_p} \left( \sigma \frac{\partial \rho_p}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial \rho_p}{\partial T} \nabla T \right) - \frac{\partial N}{\partial t}, \mathbf{X} \in \Omega, t > 0, \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$c_T \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (\boldsymbol{\lambda} \nabla T) - \rho_p c_p \mathbf{u} \cdot \nabla T - \left( \rho_s c_s \frac{\partial s}{\partial t} + \rho_N c_N \frac{\partial N}{\partial t} \right) T, \mathbf{X} \in \Omega, t > 0, \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \nabla \cdot (\mathbf{D}_s \nabla s) - \mathbf{u} \cdot \nabla s, \mathbf{X} \in \Omega_2, t > 0, \quad (4.4)$$

$$\mathbf{u} = e\mathbf{v} - \mathbf{K}_h \nabla h + \mathbf{K}_c \nabla c + \mathbf{K}_T \nabla T, \quad (4.5)$$

де  $t \in (0; t_0]$ ;  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ ,  $R$  – розмірність задачі; при  $R = 3$   $\mathbf{X} = (x, y, z)$ .

Вказані рівняння доповнюється крайовими умовами відповідно до конкретного випадку.

#### 4.2. Чисельний розв’язок крайової задачі фільтраційних процесів в ґрунтових масивах з елементами інженерних споруд

Використовуючи стандартну процедуру: домноживши рівності (4.1)–(4.5) на відповідні пробні функції  $v_1(\mathbf{X})$ ,  $v_2(\mathbf{X})$ ,  $v_3(\mathbf{X})$ ,  $v_4(\mathbf{X})$  такі, що  $(v_s(\mathbf{X})) \in H_0 = \{v_s(\mathbf{X}) : v_s(\mathbf{X}) \in W_2^1(\Omega), v_s(\mathbf{X})|_{\Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2} = 0\}$ ,  $s = \overline{1,4}$ , інтегруючи їх по області  $\Omega$ , застосовуючи формулу Остроградського-Гауса, отримаємо

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} \frac{R\gamma a}{1+(R-1)\xi} \frac{\partial h}{\partial t} v_1(\mathbf{X}) d\Omega - \iiint_{\Omega} \left( (1+e)^2 \sum_{i=1}^l \frac{\partial \sigma_m^{(i)}}{\partial t} + (1+e)^2 \sum_{j=1}^k \frac{1}{\rho_N^{(j)}} \frac{\partial N_j}{\partial t} \right) v_1(\mathbf{X}) d\Omega \\ & - \iiint_{\Omega} e \left( \frac{1}{\rho_p} \left( \frac{\partial \rho_p}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} + \sum_{j=1}^k \frac{\partial \rho_p}{\partial c_j} \frac{\partial c_j}{\partial t} \right) + \frac{1}{\rho_m} \left( \frac{\partial \rho_m}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} + \sum_{j=1}^k \frac{\partial \rho_m}{\partial N^{(j)}} \frac{\partial N_j}{\partial t} \right) \right) d\Omega = \\ & = - \iiint_{\Omega} (1+e) (\mathbf{K}_h \nabla h \nabla v_1(\mathbf{X})) d\Omega - \iiint_{\Omega} (1+e) \nabla \cdot \mathbf{F}_{osm} v_1(\mathbf{X}) d\Omega, \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} \left( \sigma \left( 1 - \frac{c}{\rho_p} \frac{\partial \rho_p}{\partial c} \right) \frac{\partial c}{\partial t} v_2(\mathbf{X}) + (\mathbf{D}_c \nabla c \nabla v_2) + \left( \frac{c}{\rho_p} \left( \mathbf{u} \frac{\partial \rho_p}{\partial T} \nabla T \right) \nabla v_2 \right) \right) d\Omega + \\ & + \iiint_{\Omega} \mathbf{u} \left( 1 - \frac{c}{\rho_p} \frac{\partial \rho_p}{\partial c} \right) \nabla c v_2(\mathbf{X}) d\Omega = \\ & = - \iiint_{\Omega} \frac{c}{\rho_p} \left( \sigma \frac{\partial \rho_p}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} \right) v_2(\mathbf{X}) d\Omega + \iiint_{\Omega} \frac{\partial N}{\partial t} v_2(\mathbf{X}) d\Omega, \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} \left( c_T \frac{\partial T}{\partial t} v_3(\mathbf{X}) + (\lambda \nabla T \nabla v_3) + \rho c_p \mathbf{u} \nabla T v_3(\mathbf{X}) + \right. \\ & \left. + \left( \rho_s c_s \frac{\partial s}{\partial t} + \rho_N c_N \frac{\partial N}{\partial t} \right) T v_2(\mathbf{X}) \right) d\Omega = 0, \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\iiint_{\Omega} \left( \frac{\partial s}{\partial t} v_4(\mathbf{X}) + (\mathbf{D}_s \nabla s \nabla v_4) + \mathbf{u} \nabla s v_4(\mathbf{X}) \right) d\Omega = 0. \quad (4.9)$$

Наближений розв'язок для шуканих функцій знаходимо у вигляді:

$$h(\mathbf{X}, t) = \sum_{j=1}^n h_j(t) \cdot N_j^{(h)}(\mathbf{X}),$$

$$c(\mathbf{X}, t) = \sum_{j=1}^n c_j(t) \cdot N_j^{(c)}(\mathbf{X}),$$

$$T(\mathbf{X}, t) = \sum_{j=1}^n T_j(t) \cdot N_j^{(T)}(\mathbf{X}),$$

$$s(\mathbf{X}, t) = \sum_{j=1}^n s_j(t) \cdot N_j^{(s)}(\mathbf{X}).$$

Тут  $N_j(\mathbf{X})$  – базисні вектор-функції,  $h_j(t), c_j(t), T_j(t), s_j(t)$  – невідомі коефіцієнти.

Підставляючи вигляд шуканих функцій в рівняння (4.1)–(4.4) отримаємо задачу Коші для системи нелінійних диференціальних рівнянь відносно

векторів невідомих  $\mathbf{H}(t) = \{h_j(t)\}_{j=1}^n$ ,  $\mathbf{C}(t) = \{c_j(t)\}_{j=1}^n$ ,  $\mathbf{T}(t) = \{T_j(t)\}_{j=1}^n$ ,

$\mathbf{s}(t) = \{s_j(t)\}_{j=1}^n$  :

$$\mathbf{M}^{(1)} \cdot \frac{d\mathbf{H}(t)}{dt} + \mathbf{L}^{(1)} \cdot \mathbf{H}(t) = \mathbf{F}^{(1)}, \quad (4.10)$$

$$\mathbf{M}^{(2)} \cdot \frac{d\mathbf{C}(t)}{dt} + \mathbf{L}^{(2)} \cdot \mathbf{C}(t) = \mathbf{F}^{(2)}, \quad (4.11)$$

$$\mathbf{M}^{(3)} \cdot \frac{d\mathbf{T}(t)}{dt} + \mathbf{L}^{(3)} \cdot \mathbf{T}(t) = \mathbf{F}^{(3)}, \quad (4.12)$$

$$\mathbf{M}^{(4)} \cdot \frac{d\mathbf{s}(t)}{dt} + \mathbf{L}^{(4)} \cdot \mathbf{s}(t) = \mathbf{F}^{(4)}, \quad (4.13)$$

$$\mathbf{M}^{(1)} \mathbf{H}_0(t) = \mathbf{F}^{(1)}, \quad \mathbf{M}^{(2)} \mathbf{C}_0(t) = \mathbf{F}^{(2)}, \quad \mathbf{M}^{(3)} \mathbf{T}_0(t) = \mathbf{F}^{(3)}, \quad \mathbf{M}^{(4)} \mathbf{s}_0(t) = \mathbf{F}^{(4)}, \quad (4.14)$$

де

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}^{(r)} &= (m^{(r)}_{ij})_{i,j=1}^n, \mathbf{L}^{(r)} = (l^{(r)}_{ij})_{i,j=1}^n, \mathbf{F}^{(r)} = (f^{(r)}_i)_{i=1}^n, r = \overline{1,4}. \\
\mathbf{M}'^{(r)} &= (m'^{(r)}_{ij})_{i,j=1}^n, \mathbf{F}'^{(r)} = (f'^{(r)}_i)_{i=1}^n, r = \overline{1,4}. \\
m^{(1)}_{ij} &= \frac{R\gamma a(T, \boldsymbol{\sigma}_m, \mathbf{N})}{1 + (R-1)\xi} \iiint_{\Omega} N_j^h d\Omega; \quad m^{(2)}_{ij} = \sigma \left( 1 - \frac{c}{\rho_p} \frac{\partial \rho_p}{\partial c} \right) \iiint_{\Omega} N_j^c d\Omega; \\
m^{(3)}_{ij} &= c_T \iiint_{\Omega} N_j^T d\Omega; \quad m^{(4)}_{ij} = \iiint_{\Omega} N_j^s d\Omega; \\
l^{(1)}_{ij} &= -\iiint_{\Omega} (1+e)(\nabla \cdot (\mathbf{K}_h \nabla N_j^h)) d\Omega; \\
l^{(2)}_{ij} &= -\iiint_{\Omega} \nabla \cdot (\mathbf{D}_c \nabla N_j^c) - \mathbf{u} \left( \frac{N_j^c}{\rho_p} \frac{\partial \rho_p}{\partial N_j^c} \right) \nabla N_j^c + \frac{N_j^c}{\rho_p} \left( \sigma \frac{\partial \rho_p}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial \rho_p}{\partial T} \nabla T \right) d\Omega; \\
l^{(3)}_{ij} &= -\iiint_{\Omega} \nabla \cdot (\boldsymbol{\lambda} \nabla N_j^T) - \rho_p c_p \mathbf{u} \nabla N_j^T - \left( \rho_s c_s \frac{\partial s}{\partial t} + \rho_N c_N \frac{\partial N}{\partial t} \right) N_j^T d\Omega; \\
l^{(4)}_{ij} &= -\iiint_{\Omega} \nabla \cdot (\mathbf{D}_s \nabla N_j^s) - (\mathbf{u} - \mathbf{w}) \nabla N_j^s d\Omega; \\
f^{(1)}_{ij} &= \iiint_{\Omega} (1+e)^2 \sum_{i=1}^l \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_m^{(i)}}{\partial t} + (1+e)^2 \sum_{j=1}^k \frac{1}{\rho_N^{(j)}} \frac{\partial N_j}{\partial t} + \\
&+ e \left( \frac{1}{\rho_p} \left( \frac{\partial \rho_p}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} + \sum_{j=1}^k \frac{\partial \rho_p}{\partial c_j} \frac{\partial c_j}{\partial t} \right) - \frac{1}{\rho_m} \left( \frac{\partial \rho_m}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} + \sum_{j=1}^k \frac{\partial \rho_m}{\partial N^{(j)}} \frac{\partial N_j}{\partial t} \right) \right) - (1+e) \nabla \cdot \mathbf{F}_{osm} d\Omega; \\
f^{(2)}_{ij} &= \iiint_{\Omega} -\frac{\partial N}{\partial t} d\Omega; \\
f^{(3)}_{ij} &= 0; \quad f^{(4)}_{ij} = 0; \\
f'^{(1)}_{ij} &= \iiint_{\Omega} H_0 d\Omega; \quad f'^{(2)}_{ij} = \iiint_{\Omega} C_0 d\Omega; \quad f'^{(3)}_{ij} = \iiint_{\Omega} T_0 d\Omega; \quad f'^{(4)}_{ij} = \iiint_{\Omega} s_0 d\Omega.
\end{aligned}$$

Для знаходження чисельного розв'язку задачі Коші (4.10)–(4.14)

розіб'ємо часовий проміжок  $[0; T]$  на  $m$  рівних частин з кроком  $\tau = \frac{T}{m}$ .

Наближений розв'язок задачі Коші отримаємо за допомогою лінеаризованої неявної різницевої схеми [77]



$$\begin{aligned}
\mathbf{M}^{(1)} \cdot \frac{\mathbf{H}^{(j+1)} - \mathbf{H}^{(j)}}{\tau} + \mathbf{L}^{(1)} \cdot \mathbf{H}^{(j+1)} &= \mathbf{F}^{(1)}, \\
\mathbf{M}^{(2)} \cdot \frac{\mathbf{C}^{(j+1)} - \mathbf{C}^{(j)}}{\tau} + \mathbf{L}^{(2)} \cdot \mathbf{C}^{(j+1)} &= \mathbf{F}^{(2)}, \\
\mathbf{M}^{(3)} \cdot \frac{\mathbf{T}^{(j+1)} - \mathbf{T}^{(j)}}{\tau} + \mathbf{L}^{(3)} \cdot \mathbf{T}^{(j+1)} &= \mathbf{F}^{(3)}, \\
\mathbf{M}^{(4)} \cdot \frac{\mathbf{s}^{(j+1)} - \mathbf{s}^{(j)}}{\tau} + \mathbf{L}^{(4)} \cdot \mathbf{s}^{(j+1)} &= \mathbf{F}^{(4)}, \\
\mathbf{M}'^{(1)} \cdot \mathbf{H}^{(0)} = \mathbf{F}'^{(1)}, \mathbf{M}'^{(2)} \cdot \mathbf{C}^{(0)} = \mathbf{F}'^{(2)}, \mathbf{M}'^{(3)} \cdot \mathbf{T}^{(0)} = \mathbf{F}'^{(3)}, \mathbf{M}'^{(4)} \cdot \mathbf{s}^{(0)} = \mathbf{F}'^{(4)}, \\
j = 0, 1, \dots, m-1.
\end{aligned}$$

Варто відмітити, що при програмній реалізації чисельного розв'язання вищенаведеної крайової задачі в середовищі FreeFem++ безпосередньо використовуються слабкі формулювання виду (4.6)–(4.9), а не задача Коші (4.10)–(4.14).

### 4.3. Слабка постановка задачі фільтраційних процесів в тілі ґрунтової греблі з водоводом

Розглянемо просторову задачу фільтраційних процесів в тілі ґрунтової греблі з водоводом. З математичної точки зору, гребля – це тривимірна область  $\Omega$  з межами  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4, \Gamma_5$  та вільною межею  $\Gamma_0$  (рис. 4.1).

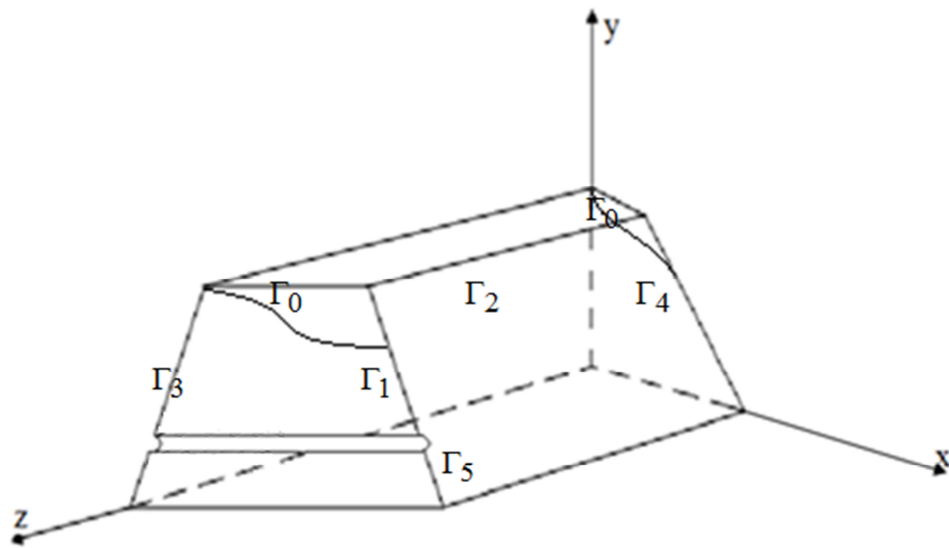


Рисунок 4.1 – Тіло ґрунтової греблі з водоводом

Тут  $\Gamma_2, \Gamma_3$  – межі контакту з водосховищем та атмосферою;  $\Gamma_1, \Gamma_4, \Gamma_5$  – непроникні межі.

Математична модель тривимірної задачі фільтраційних процесів в тілі ґрунтової греблі з водоводом, згідно математичної моделі (4.1)–(4.5), містить наступні рівняння:

$$\nabla \cdot (\mathbf{K} \nabla h) = 0, \mathbf{X} \in \Omega, \quad (4.15)$$

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K} \nabla h. \quad (4.16)$$

В даній математичній моделі знехтуємо процесами солета та теплоперенесення.

Вказані рівняння доповнюються наступними крайовими умовами:

$$h(\mathbf{X})|_{\Gamma_1 \cup \Gamma_0} = y, \mathbf{X} \in \Gamma_1 \cup \Gamma_0, h(\mathbf{X})|_{\Gamma_2} = H_1(\mathbf{X}), \mathbf{X} \in \Gamma_2, \\ (\mathbf{u}, \mathbf{n})|_{\Gamma_3 \cup \Gamma_4 \cup \Gamma_5} = 0, \mathbf{X} \in \Gamma_3 \cup \Gamma_4 \cup \Gamma_5,$$

де  $H_1(\mathbf{X})$  – відома функція;  $\mathbf{n}$  – вектор напрямних косинусів зовнішньої нормалі.

Вільна межа  $\Gamma_0$  (депресійна поверхня) описується співвідношенням [80]:

$$\varphi(\mathbf{X}, t) = (y - h(\mathbf{X}, t))|_{\Gamma_0} = 0,$$

і на ній задається кінематична гранична умова [80]

$$(\mathbf{u}, \mathbf{n})|_{\Gamma_0} = \sigma \frac{\partial \varphi}{\partial t},$$

де  $\sigma$  – пористість ґрунту греблі. При цьому має бути відомим початкове розташування вільної поверхні  $\varphi(X, t)|_{t=0} = \varphi_0(X)$ .

Домножимо рівняння (4.15) та початкову умову для напорів на пробну функцію  $v(\mathbf{X}) \in H_0 = \{v(\mathbf{X}) : v(\mathbf{X}) \in W_2^1(\Omega), v(\mathbf{X})|_{\Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2} = 0\}$  інтегруємо їх по області  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ , виконуємо спрощуючі перетворення і отримаємо

$$- \iiint_{\Omega} (\mathbf{K} \nabla h \nabla v) d\Omega = 0.$$

Спрощуючі перетворення полягають у застосуванні формули Остроградського-Гауса та урахуванні належності  $v(\mathbf{X})$  простору  $H_0$ .

#### **4.4. Результати чисельного експерименту розв'язання задачі фільтраційних процесів в тілі ґрунтової греблі з водоводом**

В якості модельної задачі з фізичної точки зору розглянуто процес фільтрації в тілі ґрунтової греблі з водоводом. Розміри греблі: висота греблі – 30 м, ширина верхньої межі – 20 м, ширина нижньої межі – 80 м, довжина греблі – 20 м. Задача розв'язана в середовищі FreeFem++, яке являє собою програмне забезпечення для розв'язування крайових задач для диференціальних рівнянь МСЕ [112]. Проведено низку чисельних експериментів, результати яких відображено на рис. 4.2 та 4.3.

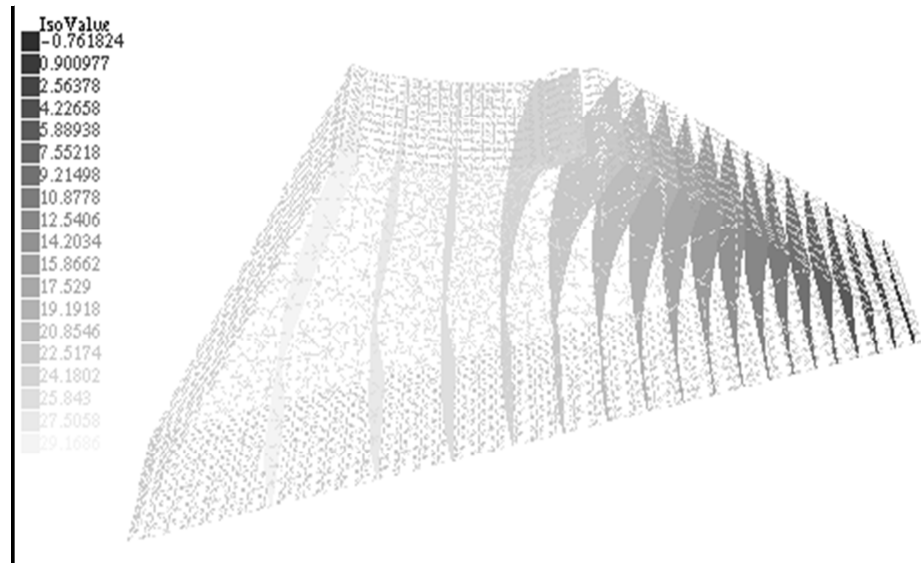


Рисунок 4.2 – Розподіл напорів в ґрунтовій греблі через 360 діб

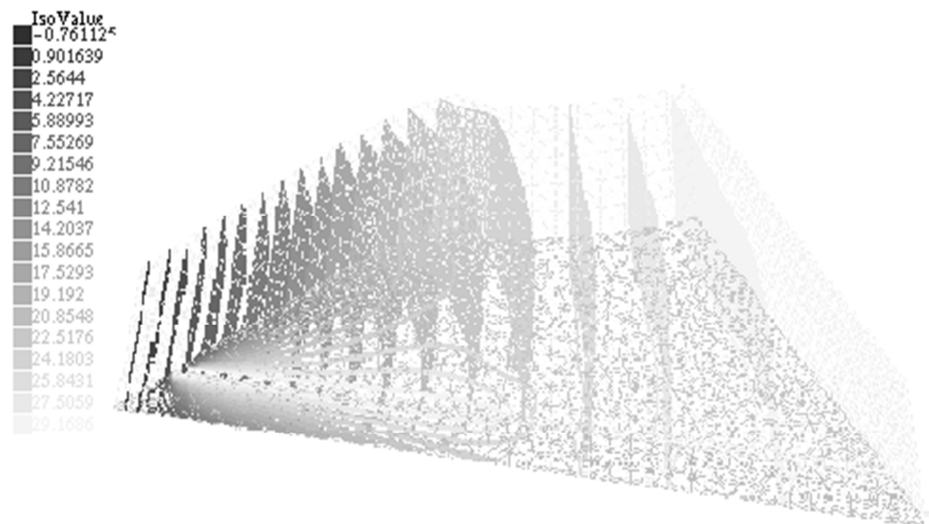


Рисунок 4.3 – Розподіл напорів в ґрунтовій греблі з водоводом через 360 діб

Видно, що значення напорів в тілі ґрунтової греблі без водоводу через 360 діб змінюється з 0.00068 м до 30 м. А максимальна зміна розташування вільної поверхні становить 1.8349 м.

Значення напорів в тілі ґрунтової греблі з водоводом через 360 діб змінюється з 0.00012 м до 30 м. А максимальна зміна розташування вільної

поверхні становить 1.8884 м. Різниця в зміні розташування вільної поверхні становить майже 0.06 м і це потрібно враховувати ще на етапі будівництва та проектування.

#### 4.5. Слабка постановка задачі фільтраційних процесів в ґрунтовій греблі з водоводом та зосередженою фільтрацією

Розглянемо просторову задачу фільтраційних процесів в ґрунтовій греблі з водоводом. Фізична постановка задачі полягає в наступному. В тілі греблі наявний водовід. В результаті виникнення зосередженої фільтрації вздовж водоводу там утворюється зона вимиву (рис. 4.4). Зона вимиву являє собою порожнину, яка сполучена з верхнім б'єфом і заповнена рідиною.

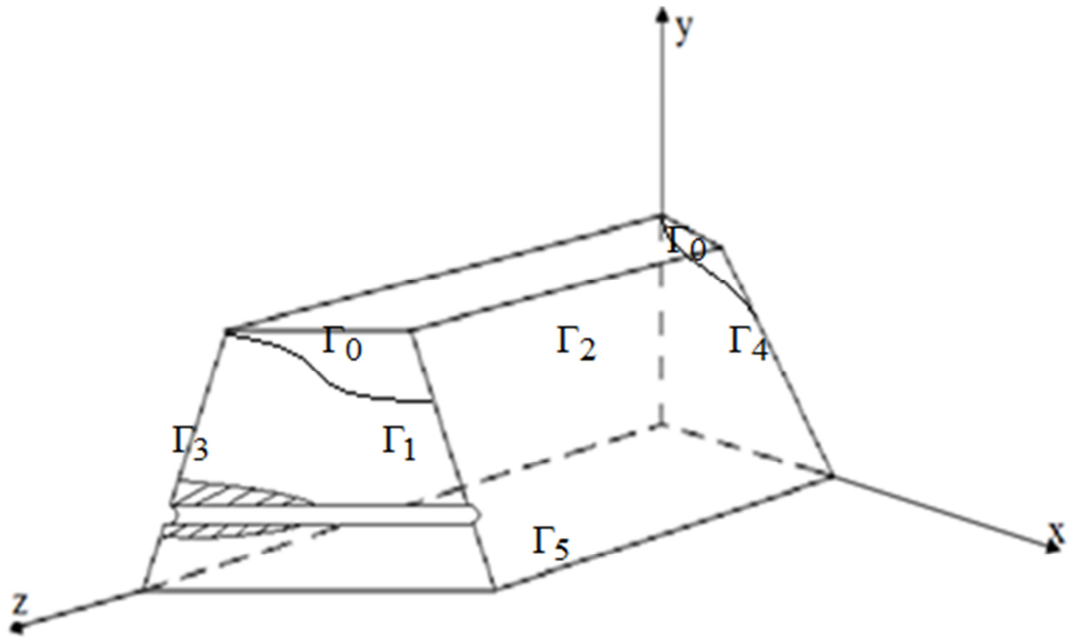


Рисунок 4.4 – Тіло ґрунтової греблі та зона вимиву вздовж водоводу

Тут  $\Gamma_2, \Gamma_3$  – межі контакту з водосховищем та атмосферою;  $\Gamma_1, \Gamma_4, \Gamma_5$  – непроникні межі.

Математична модель тривимірної задачі фільтраційних процесів в тілі ґрунтової греблі з водоводом, згідно математичної моделі (4.1)–(4.5), містить наступні рівняння [56]:

$$\nabla \cdot (\mathbf{K} \nabla h(\mathbf{X}, t)) = \beta \frac{\partial h}{\partial t}, \quad \mathbf{X} \in \Omega, \quad (4.17)$$

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K} \nabla h(\mathbf{X}, t), \quad (4.18)$$

де  $\mathbf{K}$  – тензор коефіцієнтів фільтрації,  $h(\mathbf{X}, t)$  – напір в поровій рідині,  $\beta$  – відомий коефіцієнт.

В даному випадку знехтувано процесами теплосолеперенесення.

Вказані рівняння доповнюються наступними початковими та граничними умовами:

$$\begin{aligned} h(\mathbf{X}, 0) &= h_0(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X} \in \bar{\Omega}, \\ h(\mathbf{X})|_{\Gamma_1 \cup \Gamma_0} &= y, \quad \mathbf{X} \in \Gamma_1 \cup \Gamma_0, \quad h(\mathbf{X})|_{\Gamma_2} = H_1(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X} \in \Gamma_2, \\ (\mathbf{u}, \mathbf{n})|_{\Gamma_3 \cup \Gamma_4 \cup \Gamma_5} &= 0, \quad \mathbf{X} \in \Gamma_3 \cup \Gamma_4 \cup \Gamma_5, \end{aligned}$$

де  $h_0(\mathbf{X}), H_1(\mathbf{X})$  – відомі функції;  $\mathbf{n}$  – вектор напрямних косинусів зовнішньої нормалі.

З математичної точки зору товщиною порожнини вздовж стінок водоводу нехтуємо і її присутність відображається в математичній моделі заданням граничних умов виду:

$$h(\mathbf{X}, t)|_{\Gamma_p} = H_1(t),$$

Розміри порожнини вважаємо незмінними. В результаті присутності зосередженого шляху фільтрації вздовж водоводу, депресійна поверхня в тілі греблі буде змінювати своє розташування.

Вільна межа  $\Gamma_0$  (депресійна поверхня) описується співвідношенням [81]:

$$\varphi(\mathbf{X}, t) = (y - h(\mathbf{X}, t))|_{\Gamma_0} = 0,$$

і на ній задається модифікована кінематична гранична умова [124]

$$\begin{aligned} & \frac{d\sigma}{dt} \varphi(\mathbf{X}, t) + (1 + \sigma) \frac{d\varphi(\mathbf{X}, t)}{dt} = (\mathbf{u}, \mathbf{n}) + \\ & + \int_{L(x, y, t)}^{\varphi(\mathbf{X}, t)} \left( \frac{e}{1 + e} \left( \frac{1}{\rho_p} \frac{d\rho_p}{dt} - \frac{1}{\rho_m} \frac{d\rho_m}{dt} \right) + \nabla \cdot \mathbf{u} \right) dz - \\ & - \frac{1}{\sigma_{\max} - \sum_{i=1}^n S_i(\mathbf{X}, t)} \sum_{i=1}^n (\mathbf{q}^{(i)}, \mathbf{n}_0) \Big|_{\mathbf{X} \in \Gamma_0}. \end{aligned}$$

Для відшукування наближеного розв'язку поставленої крайової задачі використано МСЕ. Слабке формулювання крайової задачі полягає в наступному. Домножимо рівняння (4.17) та початкову умову для напорів на пробну функцію  $v(\mathbf{X}) \in H_0 = \{v(\mathbf{X}) : v(\mathbf{X}) \in W_2^1(\Omega), v(\mathbf{X})|_{\Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2} = 0\}$  інтегруємо їх по області  $\Omega$ , виконуємо спрощуючі перетворення і отримаємо

$$\begin{aligned} - \iiint_{\Omega} (K \nabla h \nabla v) d\Omega &= \iiint_{\Omega} \beta \frac{\partial h}{\partial t} \cdot v(\mathbf{X}) d\Omega, \\ \iiint_{\Omega} h(\mathbf{X}, 0) \cdot v(\mathbf{X}) d\Omega &= \iiint_{\Omega} h_0(\mathbf{X}) \cdot v(\mathbf{X}) d\Omega. \end{aligned}$$

Спрощуючі перетворення полягають у застосуванні формули Остроградського-Гауса та урахуванні належності  $v(\mathbf{X})$  простору  $H_0$ .

#### 4.6. Результати чисельного експерименту розв'язку задачі фільтраційних процесів в ґрунтовій греблі з водоводом та зосередженою фільтрацією

В якості модельної задачі з фізичної точки зору розглянуто процес фільтрації в тілі ґрунтової греблі при концентрації хімічних речовин у верхньому б'єфі на рівні 160 г/літр. При цьому враховані сезонні коливання температури від  $T_{\max} = 30^\circ C$  до  $T_{\min} = 4^\circ C$  на межі контакту греблі із атмосферою. Розміри греблі: висота греблі – 30 м, ширина верхньої межі – 20

м, ширина нижньої межі – 80 м, довжина греблі – 20 м. Порожнина заходить на половину довжини водоводу. Задача розв’язана в середовищі FreeFem++ [112]. Результати проведених чисельних експериментів відображені на рис. 4.5. – 4.10.

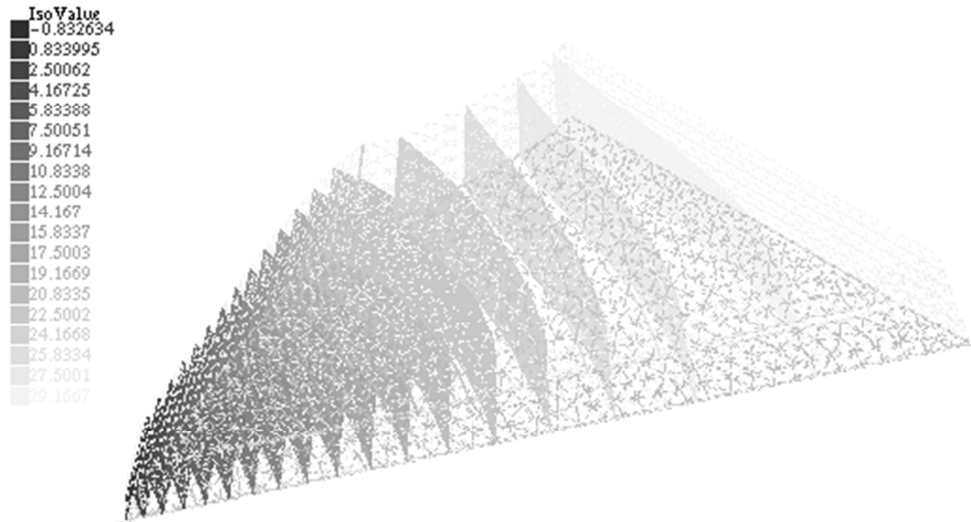


Рисунок 4.5 – Розподіл напорів в ґрунтовій греблі з водоводом без контактної зосередженої фільтрації через 10 років при  $K = 0.001$  м/доба

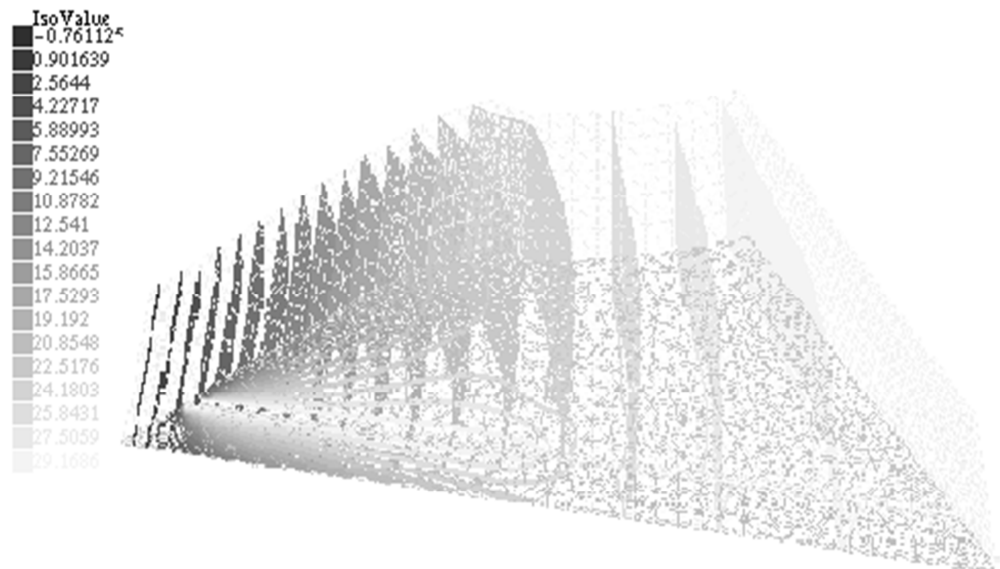


Рисунок 4.6 – Розподіл напорів в ґрунтовій греблі з водоводом та контактною зосередженою фільтрацією вздовж водоводу через 1 рік при  $K = 0.001$  м/доба



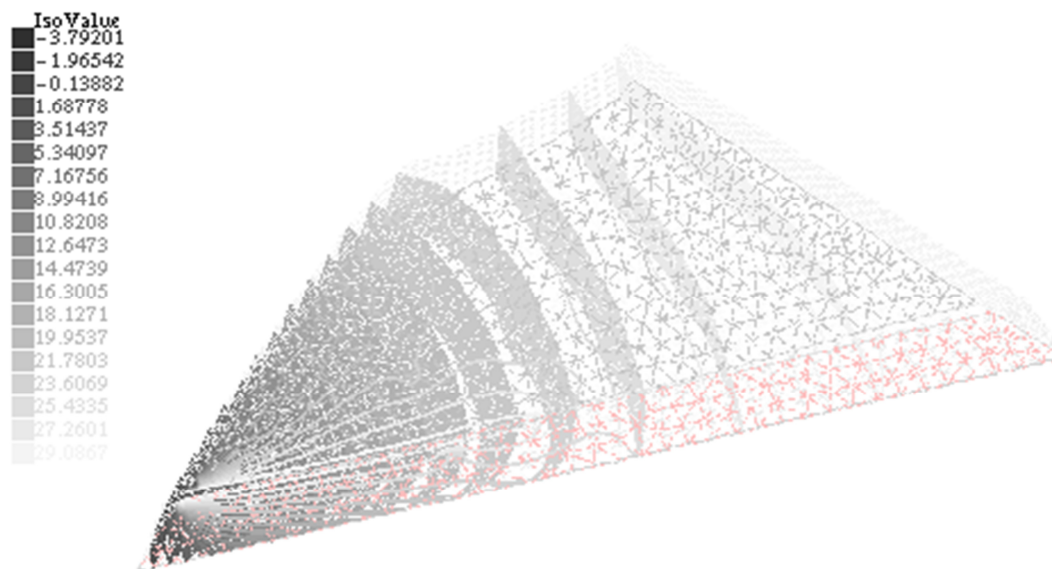


Рисунок 4.7 – Розподіл напорів в ґрунтовій греблі з водоводом та контактною зосередженою фільтрацією вздовж водоводу через 10 років при  $K = 0.001 \text{ м/доба}$

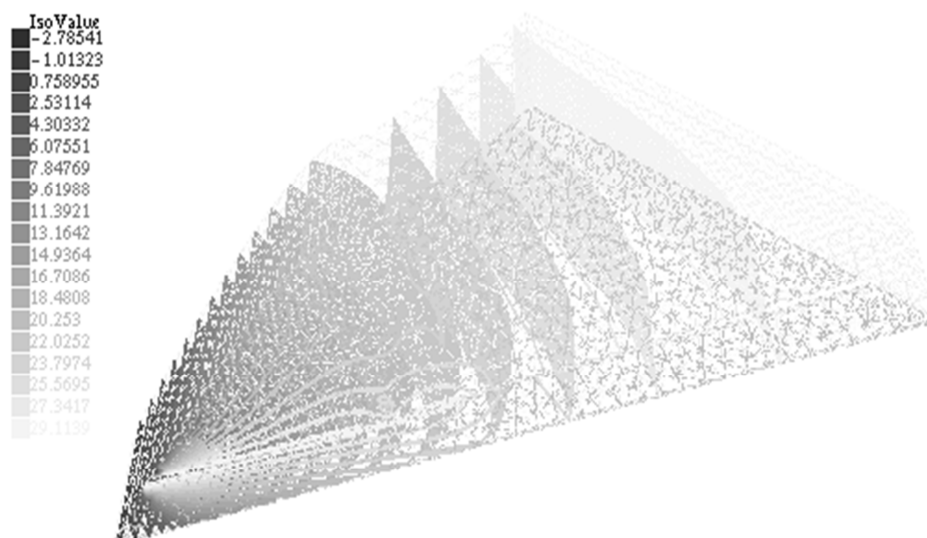


Рисунок 4.8 – Розподіл напорів в ґрунтовій греблі з водоводом та контактною зосередженою фільтрацією вздовж водоводу через 10 років при  $K = 0.01 \text{ м/доба}$

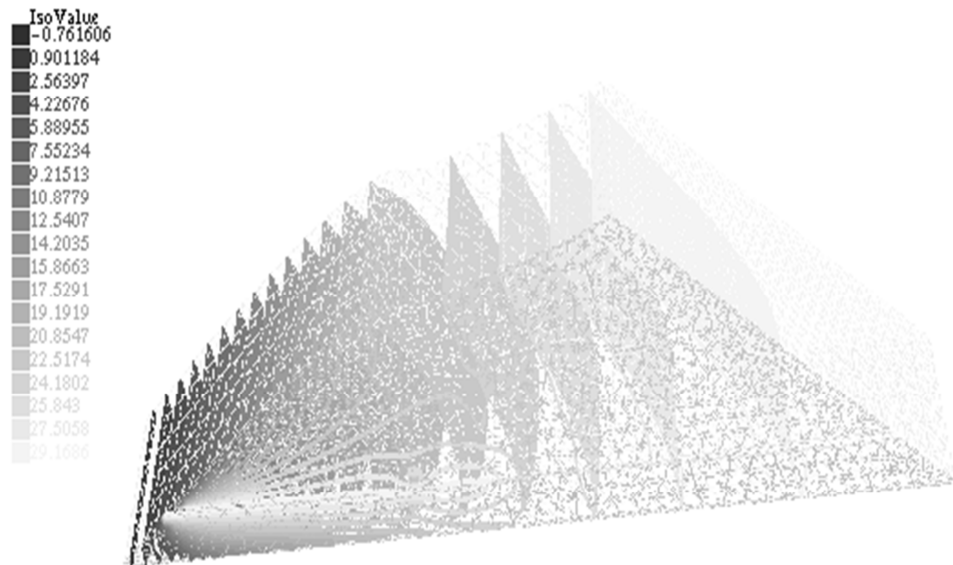


Рисунок 4.9 – Розподіл напорів в ґрунтовій греблі з водоводом та контактною зосередженою фільтрацією вздовж водоводу через 10 років при  $K = 0.1 \text{ м/доба}$

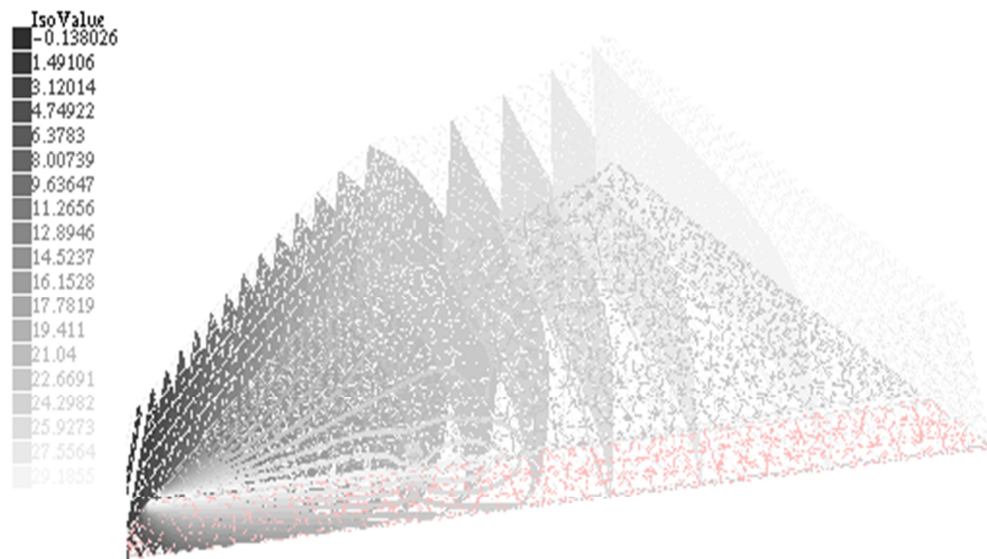


Рисунок 4.10 – Розподіл напорів в ґрунтовій греблі з водоводом та контактною зосередженою фільтрацією вздовж водоводу через 10 років при  $K = 1 \text{ м/доба}$

Наявність зони контактної розмиву вздовж водоводу суттєво впливає на розташування депресійної поверхні в околі водоводу. При цьому,

депресійна поверхня піднімається і максимальна різниця між положеннями вільних меж в греблях за наявності та відсутності водоводу через 1 рік складає майже 0.03 м, а через 10 років ця різниця складає вже 0.22 м при коефіцієнті фільтрації  $K=0.001$  м/доба. При  $K=0.01$  м/доба через 10 років ця різниця складає 0.25 м, при  $K=0.1$  м/доба – 0.33 м, а при  $K=1$  м/доба 0.39 м. Підняття рівня вільної поверхні може негативно позначитися на стійкості ґрунтової греблі. Нехтувати впливом наявності водоводу в тілі ґрунтової греблі не можна.

#### 4.7. Слабка постановка задачі фільтраційної консолідації в тілі ґрунтової греблі з водоводом та зоною вимиву

Розглянемо тривимірну задачу фільтраційної консолідації в тілі ґрунтової греблі, яка зображена на рис. 4.11. З математичної точки зору, гребля – це тривимірна область  $\Omega_1$  з межами  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4, \Gamma_5$ , вільною межею  $\Gamma_0$ , водоводом та зоною вимиву  $\Omega_2$ .

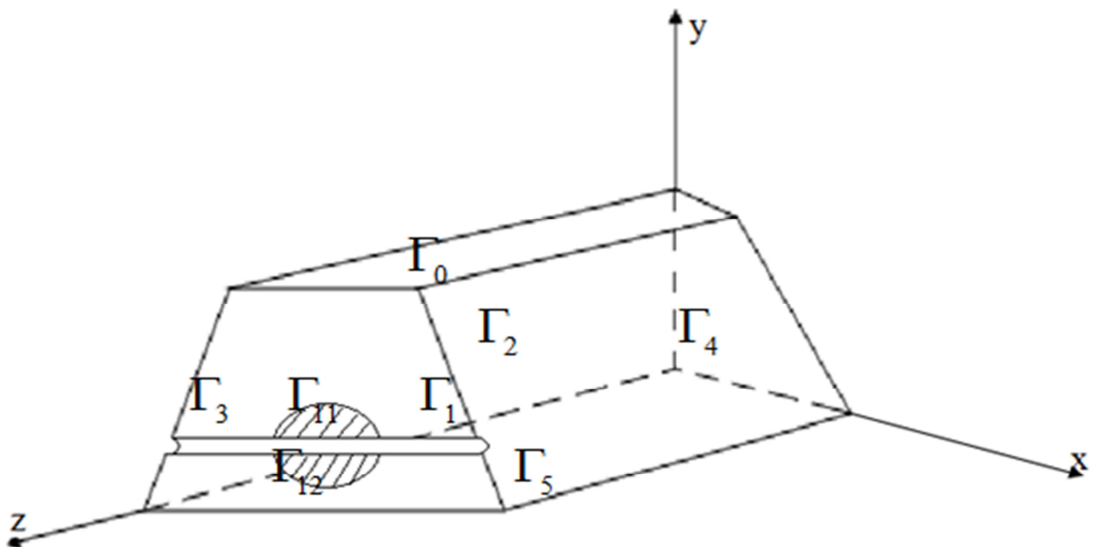


Рисунок 4.11 – Тіло ґрунтової греблі з водоводом та зоною вимиву

Тут  $\Gamma_2, \Gamma_3$  – межі контакту з водосховищем та атмосферою;  $\Gamma_1, \Gamma_4, \Gamma_5$  – непроникні межі;  $\Gamma_{12}$  – межа, на якій виконується умова швидкого виносу ґрунту;  $\Gamma_{11}$  – межа, на якій задаються умови спряження.

Математична модель тривимірної задачі фільтраційної консолідації тіла ґрунтової греблі з водоводом та зоною вимиву з урахуванням впливу теплосолеперенесення та наявності пульпи містить наступні рівняння (відповідно до математичної моделі (4.1) – (4.5)) [25, 59, 60]:

- нестационарне рівняння фільтрації

$$\nabla(\mathbf{K}(c, T)\nabla h) - \nabla(\mathbf{K}_c\nabla c) - \nabla(\mathbf{K}_T\nabla T) = \beta \frac{\partial h}{\partial t}, \mathbf{X} \in \Omega_1 \cup \Omega_2, \quad (4.19)$$

- рівняння солеперенесення

$$\nabla(\mathbf{D}_T^{(c)}\nabla T) + \nabla(\mathbf{D}_c\nabla c) - \mathbf{u} \cdot \nabla c = \sigma \frac{\partial c}{\partial t}, \mathbf{X} \in \Omega_1 \cup \Omega_2, \quad (4.20)$$

- рівняння теплоперенесення

$$\nabla(\lambda\nabla T) - \rho c_p \mathbf{u} \cdot \nabla T = c_T \frac{\partial T}{\partial t}, \mathbf{X} \in \Omega_1 \cup \Omega_2, \quad (4.21)$$

- рівняння зміни концентрації пульпи

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \nabla \cdot (\mathbf{D}_s\nabla s) - \mathbf{u} \cdot \nabla s, \mathbf{X} \in \Omega_2, \quad (4.22)$$

• закон фільтрації, в якому враховано залежність параметрів фільтрації від концентрації солей, температури та функції самих напорів [19, 25], а також знехтувано швидкістю руху твердих частинок ґрунту

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}(c, T)\nabla h + \mathbf{K}_c\nabla c + \mathbf{K}_T\nabla T.$$

Значення коефіцієнтів вищенаведених рівнянь залежать від області  $\Omega_1$  або  $\Omega_2$ , в яку попадає точка  $\mathbf{X}$ .

Вказані рівняння доповнюються початковими і граничними умовами:

$$\begin{aligned}
c(\mathbf{X},0) &= C_0(\mathbf{X}), T(\mathbf{X},0) = T_0(\mathbf{X}), h(\mathbf{X},0) = h_0(\mathbf{X}), s(\mathbf{X},0) = s_0(\mathbf{X}), \\
h(\mathbf{X})\Big|_{\Gamma_1 \cup \Gamma_0} &= y, \mathbf{X} \in \Gamma_1 \cup \Gamma_0, h(\mathbf{X})\Big|_{\Gamma_2} = H_1(\mathbf{X}), \mathbf{X} \in \Gamma_2, \\
(\nabla h, n)\Big|_{\Gamma_3 \cup \Gamma_4 \cup \Gamma_5} &= 0, \mathbf{X} \in \Gamma_3 \cup \Gamma_4 \cup \Gamma_5, c(\mathbf{X},t)\Big|_{\Gamma_1} = C_1, \mathbf{X} \in \Gamma_1, \\
h(\mathbf{X}) &= y, \mathbf{X} \in \Gamma_{12}, [h(\mathbf{X})] = 0, \mathbf{X} \in \Gamma_{11}, \\
c(\mathbf{X},t)\Big|_{\Gamma_2} &= C_m(\mathbf{X},t), \mathbf{X} \in \Gamma_2, (D_c \nabla c + D_T \nabla T, n)\Big|_{\Gamma_0 \cup \Gamma_2} = 0, \mathbf{X} \in \Gamma_0 \cup \Gamma_2, \\
(\nabla c, n)\Big|_{\Gamma_3 \cup \Gamma_4 \cup \Gamma_5} &= 0, \mathbf{X} \in \Gamma_3 \cup \Gamma_4 \cup \Gamma_5, T(\mathbf{X},t)\Big|_{\Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2} = T_{амм}(\mathbf{X},t), \\
\mathbf{X} \in \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2, (\nabla T, n)\Big|_{\Gamma_3 \cup \Gamma_4 \cup \Gamma_5} &= 0, \mathbf{X} \in \Gamma_3 \cup \Gamma_4 \cup \Gamma_5, \\
s(\mathbf{X},t)\Big|_{\Gamma_{11}} &= s_1(\mathbf{X},t), \mathbf{X} \in \Gamma_{11}, s(\mathbf{X},t)\Big|_{\Gamma_{12}} = s_2(\mathbf{X},t), \mathbf{X} \in \Gamma_{12},
\end{aligned}$$

Вільна межа  $\Gamma_0$  (депресійна поверхня) описується співвідношенням [81]

$$\varphi(\mathbf{X},t) = (y - h(\mathbf{X},t))\Big|_{\Gamma_0} = 0,$$

і на ній задається модифікована кінематична гранична умова [124]

$$\begin{aligned}
&\frac{d\sigma}{dt} \varphi(\mathbf{X},t) + (1 + \sigma) \frac{d\varphi(\mathbf{X},t)}{dt} = (\mathbf{u}, \mathbf{n}) + \\
&+ \int_{L(x,y,t)}^{\varphi(\mathbf{X},t)} \left( \frac{e}{1+e} \left( \frac{1}{\rho_p} \frac{d\rho_p}{dt} - \frac{1}{\rho_m} \frac{d\rho_m}{dt} \right) + \nabla \cdot \mathbf{u} \right) dz - \\
&- \frac{1}{\sigma_{\max} - \sum_{i=1}^n S_i(\mathbf{X},t)} \sum_{i=1}^n (\mathbf{q}^{(i)}, \mathbf{n}_0) \Big|_{\mathbf{X} \in \Gamma_0}.
\end{aligned}$$

Тут  $\sigma$  – пористість ґрунту;  $h$  – напір в поровій рідині;  $c$  – концентрація однокомпонентного хімічного розчину;  $T$  – температура;  $\mathbf{u}$  – вектор швидкості фільтрації;  $\mathbf{K}$  – тензор коефіцієнтів фільтрації;  $\mathbf{K}_c$  – тензор коефіцієнтів хімічного осмосу;  $\mathbf{K}_T$  – тензор коефіцієнтів термічного осмосу;  $\mathbf{D}_c, \mathbf{D}_T$  – тензори коефіцієнтів конвективної дифузії та термодифузії;  $\lambda$  – тензор коефіцієнтів ефективної теплопровідності вологого ґрунту;  $\rho$  – густина порового розчину;  $c_p$  – питома теплоємність порового розчину;  $c_T$  –

об'ємна теплоємність ґрунту;  $C_m$  – концентрація граничного насичення хімічних речовин в рідкій фазі;  $\beta$  – відомий коефіцієнт.

Для відшукування наближеного розв'язку поставленої крайової задачі використано МСЕ. Домножимо рівняння (4.19) та початкову умову для напорів на пробну функцію  $v(\mathbf{X}) \in H_0 = \{v(\mathbf{X}) : v(\mathbf{X}) \in W_2^1(\Omega), v(\mathbf{X})|_{\Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2} = 0\}$ , інтегруємо їх по області  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ , виконуємо спрощуючі перетворення і отримаємо

$$\begin{aligned} - \iiint_{\Omega} (K(c, T) \nabla h \nabla v) d\Omega + \iiint_{\Omega} (K_c \nabla c \nabla v) d\Omega + \iiint_{\Omega} (K_T \nabla T \nabla v) d\Omega = \\ = \iiint_{\Omega} \beta \frac{\partial h}{\partial t} \cdot v(\mathbf{X}) d\Omega, \\ \iiint_{\Omega} h(\mathbf{X}, 0) \cdot v(\mathbf{X}) d\Omega = \iiint_{\Omega} h_0(\mathbf{X}) \cdot v(\mathbf{X}) d\Omega. \end{aligned}$$

Спрощуючі перетворення полягають у застосуванні формули Остроградського-Гауса та урахуванні належності  $v(\mathbf{X})$  простору  $H_0$ .

Домножимо рівняння (4.20) та початкову умову для концентрації солей на пробну функцію  $v_1(\mathbf{X}) \in H_0 = \{v_1(\mathbf{X}) : v_1(\mathbf{X}) \in W_2^1(\Omega)\}$ ,  $v_1(\mathbf{X})|_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} = 0$  і провівши аналогічні перетворення, отримаємо

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} (D_T^{(c)} \nabla T \nabla v_1) d\Omega + \iiint_{\Omega} (D_c \nabla c \nabla v_1) d\Omega + \iiint_{\Omega} (u \nabla c \cdot v_1) d\Omega = \\ = \iiint_{\Omega} n \left( \frac{c^i - c^{i-1}}{dt} \cdot v_1 \right) d\Omega, \\ \iiint_{\Omega} c(\mathbf{X}, 0) \cdot v_1(\mathbf{X}) d\Omega = \iiint_{\Omega} C_0(\mathbf{X}) \cdot v_1(\mathbf{X}) d\Omega. \end{aligned}$$

Домножимо рівняння (4.21) та початкову умову для температури на пробну функцію  $v_2(\mathbf{X}) \in H_0 = \{v_2(\mathbf{X}) : v_2(\mathbf{X}) \in W_2^1(\Omega)\}$ ,  $v_2(\mathbf{X})|_{\Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2} = 0$  і провівши аналогічні перетворення, отримаємо

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} (\lambda \nabla T \nabla v_2) d\Omega + \iiint_{\Omega} (\rho c_p u \nabla T \cdot v_2) d\Omega &= \\ &= \iiint_{\Omega} c_T \left( \frac{T^i - T^{i-1}}{dt} \cdot v_2 \right) d\Omega, \\ \iiint_{\Omega} T(\mathbf{X}, 0) \cdot v_2(\mathbf{X}) d\Omega &= \iiint_{\Omega} T_0(\mathbf{X}) \cdot v_2(\mathbf{X}) d\Omega. \end{aligned}$$

Домножимо рівняння (4.22) та початкову умову для концентрації пульпи на пробну функцію  $v_3(\mathbf{X}) \in H_0 = \{v_3(\mathbf{X}) : v_3(\mathbf{X}) \in W_2^1(\Omega)\}$ ,  $v_3(\mathbf{X})|_{\Gamma_{11} \cup \Gamma_{12}} = 0$  і провівши аналогічні перетворення, отримаємо

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} (D_s \nabla s \nabla v_3) d\Omega + \iiint_{\Omega} (u \nabla s \cdot v_3) d\Omega &= \iiint_{\Omega} \left( \frac{s^i - s^{i-1}}{dt} \cdot v_3 \right) d\Omega, \\ \iiint_{\Omega} s(\mathbf{X}, 0) \cdot v_3(\mathbf{X}) d\Omega &= \iiint_{\Omega} s_0(\mathbf{X}) \cdot v_3(\mathbf{X}) d\Omega. \end{aligned}$$

#### 4.8. Результати чисельних експериментів розв'язку задачі фільтраційної консолідації в тілі ґрунтової греблі з водоводом та зоною вимиву

Чисельні розрахунки проведені за наступних вхідних даних:

$$\begin{aligned} \sigma &= 0.4, \rho = 1100 \text{ кг} / \text{м}^3, \rho_c = 2100 \text{ кг} / \text{м}^3, \rho_s = 2300 \text{ кг} / \text{м}^3, C_m = 160 \text{ г} / \text{л}, \\ D_c &= 0.001 \text{ м}^2 / \text{доба}, D_T = 0.0001 \text{ м}^2 / \text{доба}, K_c = 6 \cdot 10^{-7} \text{ м}^5 / \text{кг} \cdot \text{доба}, \\ K_T &= 6 \cdot 10^{-8} \text{ м}^2 / \text{кг} \cdot \text{доба}, c_T = 2137 \text{ кДж} / \text{м}^3 \cdot \text{град}, c_p = 4.2 \text{ кДж} / \text{кг} \cdot \text{град}, \\ \lambda &= 108 \text{ кДж} / \text{м} \cdot \text{град} \cdot \text{доба}, T_0(x) = 4^\circ \text{C}, T_{амм} = 17 + 13 \cos\left(\frac{\pi t}{180}\right), \\ C_0(x) &= 8 \text{ г} / \text{л}, C_1(t) = 8 \text{ г} / \text{л}, C_m = 160 \text{ г} / \text{літр}. \end{aligned}$$

В якості модельної задачі з фізичної точки зору розглянуто процес фільтрації в тілі ґрунтової греблі при концентрації хімічних речовин у верхньому б'єфі на рівні 160 г/літр. При цьому враховані сезонні коливання температури від  $T_{\max} = 30^\circ \text{C}$  до  $T_{\min} = 4^\circ \text{C}$  на межі контакту греблі із атмосферою. Розміри греблі: висота греблі – 30 м, ширина верхньої межі – 20

м, ширина нижньої межі – 80 м, довжина греблі – 20 м. Задача розв’язана в безкоштовному програмному середовищі FreeFem++ MCE [112]. Проведено низку чисельних експериментів. Отримані значення температури, концентрації солей, пульпи та напорів на момент часу 360 діб.

На рис. 4.12 зображено розподіл надлишкових напорів в тілі ґрунтової греблі з урахуванням впливу теплосолеперенесення на момент часу 360 діб. Напори збільшуються з 0.0116644 м на низовій грані до 30 м на напірній. Максимальна зміна вільної межі становить 1.42276 м. А на рис. 4.13 зображено розподіл надлишкових напорів в тілі греблі з водоводом та зоною вимиву з урахуванням впливу теплосолеперенесення також на момент часу 360 діб. Максимальна зміна вільної межі становить 1.50815 м. Напори плавно збільшуються з 0.0078392 м на низовій грані до 30 м на напірній. В зоні вимиву напори змінюються з 6 м до 22.7751 м. Це призводить до різкого зростання градієнтів напорів в околі даної зони вимиву та до збільшення швидкості руху порової рідини. А це в свою чергу, може викликати подальший вимив ґрунту та збільшення зони вимиву.

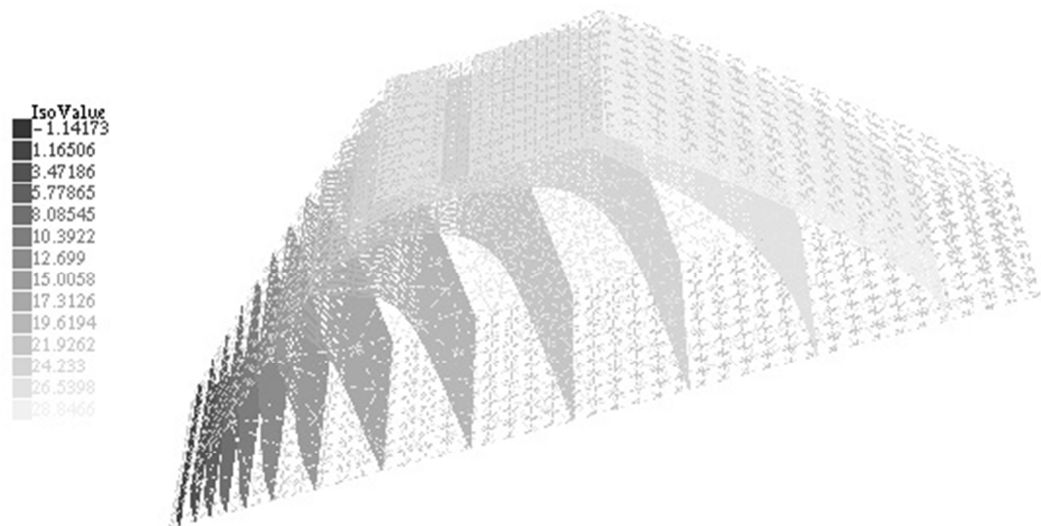


Рисунок 4.12 – Розподіл надлишкових напорів в ґрунтовій греблі через 360 діб



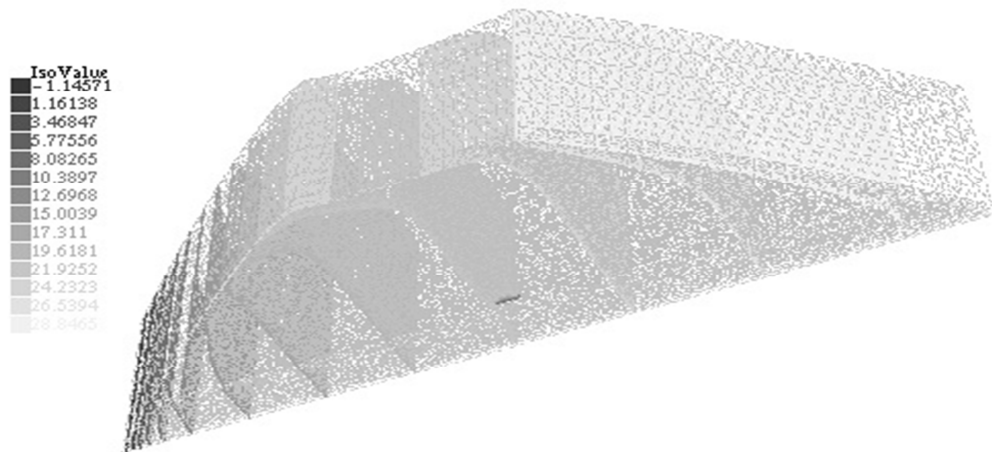


Рисунок 4.13 – Розподіл надлишкових напорів в греблі з водоводом та зоною вимиву через 360 діб

Отже, різниця зміни вільної поверхні (кривої депресії) становить близько 0.09 м через 360 діб. Через 720 діб ця різниця становить уже близько 0.82 м. Тобто в ґрунтовій греблі, що має прорив у водоводі, вільна межа з часом просідає більше і це потрібно враховувати.

Розподіл концентрації солей варіюється з 7.36359 г/л на низовій грані та гребені до 160 г/л на напірній грані. В зоні вимиву значення концентрації змінюються з 8.34753 г/л до 8.90031 г/л.

Температура змінюється від підшови греблі з 4.10752 °C до гребеня з температурою 30°C . В зоні вимиву – з 4.1524 °C до 4.44315 °C .

Розподіл концентрації пульпи в зоні вимиву змінюється від 0, в зоні пошкодження водоводу, до 0.6.

## ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 4

В даному розділі отримані наступні результати:

- Сформовано математичну модель просторових фільтраційних процесів в ґрунтових масивах з елементами інженерних споруд (в тому числі з водоводами, враховуючи наявність в них пошкоджень) та модифікованою кінематичною граничною умовою на верхній межі ґрунтового масиву з урахуванням змінної пористості та впливу фізико-хімічних факторів в тривимірному випадку.

- Для чисельного дослідження нелінійної крайової задачі використано МСЕ і це дало суттєву перевагу у тривимірному випадку, оскільки дозволило врахувати геометрію області.

- Для чисельних експериментів було використано безкоштовний пакет FreeFem++, який дав змогу автоматизувати процеси тетраедризації тіла ґрунтових масивів, повністю автоматизувати числове інтегрування та розв'язування систем лінійних алгебричних рівнянь.

- Проведені чисельні експерименти з дослідження модельних задач показують, що наявність навіть справного водоводу, а особливо його пошкоджень та утворення зони вимиву має суттєвий вплив на фільтраційні процеси в тілі греблі. Різниця в зміні розташування вільної поверхні за наявності в тілі греблі справного водоводу через 360 діб становить майже 0.06 м. Якщо брати до уваги наявність контактного розмиву вздовж водоводу, то ця різниця через 1 рік складає майже 0.03 м, а через 10 років ця різниця складає вже 0.22 м при коефіцієнті фільтрації  $K = 0.001$  м/доба. При  $K = 0.01$  м/доба через 10 років ця різниця складає 0.25 м, при  $K = 0.1$  м/доба – 0.33 м, а при  $K = 1$  м/доба 0.39 м. Якщо ж водовід несправний і в результаті його пошкодження утворюється зона вимиву, то максимальна різниця зміни вільної поверхні через 720 діб становить 0.82 м. І

з часом ця різниця тільки зростає. Також через отвір у пошкодженому водоводі (внаслідок перепаду напорів) може початися суфозійний виніс ґрунту з подальшими прогресуючими деформаціями і руйнуванням споруди.

Результати даного розділу опубліковані в роботах [55, 57, 58, 60, 62–65, 67, 123, 124].

## ЗАГАЛЬНІ ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота є завершеним науковим дослідженням, у якому розв'язано важливу науково-технічну задачу математичного та комп'ютерного моделювання фільтраційних процесів в пористих середовищах (на прикладі ґрунтових масивів) за наявності елементів інженерних споруд з урахуванням впливу техногенних факторів. При цьому отримано такі основні результати та висновки:

1. Вдосконалено нелінійну математичну модель фільтраційних процесів в ґрунтових масивах з елементами інженерних споруд (в тому числі з водоводами, враховуючи наявність в них пошкоджень) та модифікованою кінематичною граничною умовою на верхній межі ґрунтового масиву з урахуванням змінної пористості та впливу фізико-хімічних факторів в просторовому випадку. Це дало змогу встановити, що наявність елементів інженерних споруд (особливо, їх пошкоджень) суттєво впливає на перебіг фільтраційних процесів в цих середовищах. Зокрема, можуть розвинутися небезпечні фільтраційні деформації, що супроводжується розмивом ґрунтів та підйомом депресійної поверхні.

2. Вдосконалено нелінійну математичну модель процесів фільтрації в біоплато-фільтрі з урахуванням змінної пористості та суфозійно-кольматаційних процесів. Виявлено, що при врахуванні даних факторів в процесі фільтрування, прогнозна продуктивність біоплато за півроку знижується на 25 %. Отже, необхідно розробляти інженерні рішення для зниження впливу кольматаційно-суфозійних процесів на процеси фільтрування.

3. Вперше запропоновано розглядати зосереджені шляхи фільтрації в ґрунтових масивах як узагальнення елементів інженерних споруд (водоводів). Це дало можливість провести аналогію між водоводом та

зосередженим шляхом фільтрації в тілі ґрунтової греблі, а, отже, ставити та розв'язувати і такі задачі – в даному випадку припускається, що стінки водоводу є проникними, а розміри змінюються в часі.

4. Вперше досліджено можливість застосування варіаційного формулювання задачі та сіткового методу скінченних елементів для знаходження розв'язків нелінійних крайових задач фільтраційних процесів з урахуванням впливу техногенних факторів в областях з елементами інженерних споруд. Створено програмно-числову реалізацію з наближеного розв'язування відповідних нелінійних крайових задач в дво- та тривимірному випадку.

5. Практичне значення дисертаційної роботи полягає в наступному: результати дисертації були використані під час розробки проектної документації проекту реконструкції водопровідної мережі в с. Оженин Острозького району Рівненської області на ДП «БТС-ІНЖИНІРИНГ» ТОВ «БІОТЕХСОЮЗ»; при розробці проектної документації проекту реконструкції каналізаційної системи на виробничій площадці спиртогорілчаного заводу КУПП «Маньковичі», с. Маньковичі, Столінського р-ну, Брестської обл., Республіка Білорусь. Одержані в дисертаційній роботі результати впроваджені в навчальному процесі при підготовці спецкурсів «Математичне і комп'ютерне моделювання природних і техногенних систем», «Проекційно-сіткові та безсіткові методи математичної фізики» для студентів Національного університету водного господарства та природокористування МОН України за спеціальністю 113 «Прикладна математика». Отримано 3 свідоцтва про реєстрацію авторського права на твір (№67160 Медвідь Н. В., Мартинюк П. М. Комп'ютерна програма для математичного моделювання фільтраційного руйнування ґрунтових гребель. Дата реєстрації 11.08.2016 р.; №71633 Іванчук Н. В., Лобунь В. М., Мартинюк П. М., Мічута О. Р., Герус В. А. Комп'ютерна програма для

математичного моделювання взаємозв'язаних фільтраційно-суфозійних процесів в ґрунтах. Дата реєстрації 25.04.2017 р.; №78432 Іванчук Н. В., Филипчук В. Л., Мартинюк П. М., Мічута О. Р. Комп'ютерна програма для математичного моделювання очищення води в біоплато з урахуванням суфозійно-кольматаційних явищ. Дата реєстрації 19.04.2018 р.).

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Анахаев К. Н., Гегиев К. А., Амшоков Б. Х. Об авариях и повреждениях земляных плотин с водоводами: причины и способы совершенствования противofiltrационной защиты. *Гидротехническое строительство*. 2004. № 3. С. 30–36.
2. Багрова Л. А. Боков В. А., Мазин С.-А. Опасные техногенные катастрофы в энергетике как факторы экологического риска. *Учетные записки Таврического национального университета им. В.И. Вернадского. Серия «География»*. 2012. Т. 25(64), № 2. С. 9–19.
3. Белов В. А. Противofiltrационные мероприятия на малых водоемах. Ростов-на-Дону: СКНЦ ВШ, 2000. 191 с.
4. Бомба А., Гаврилюк В., Теробус А. Математичне моделювання нелінійних фільтраційних процесів у пористих середовищах з вільними межами. *Вісник ТНТУ. Серія: Математичне моделювання. Математика. Фізика*. 2011. Т. 16, № 4. С. 168–177.
5. Бомба А. Я., Гаврилюк В. І. Математичне моделювання фільтраційних процесів у криволінійних областях складної геометрії з невизначеними ділянками меж. *Вісник Київського нац. ун-ту ім. Тараса Шевченка. Сер. фіз.-матем. науки*. 2009. Вип. 4. С. 73–76.
6. Бомба А. Я., Ярощак С. В. Метод квазіконформних відображень моделювання нелінійних процесів витіснення у деформівних середовищах. *Вісник Київського нац. ун-ту ім. Тараса Шевченка. Сер. фіз.-матем. науки*. 2010. Вип. 2. С. 91–96.
7. Бомба А. Я., Гаврилюк В. І., Сафоник А. П., Фурсачик О. А. Нелінійні задачі типу фільтрація-конвекція-дифузія-масообмін за умов неповних даних: монографія. Рівне: НУВГП, 2011. 276 с.

8. Бомба А. Я., Теробус А. В. Про один підхід до моделювання просторової квазіідеальної течії. *Вісник Київського нац. ун-ту ім. Тараса Шевченка. Сер. фіз.-матем. науки.* 2011. Вип. 3. С. 93–98.
9. Бомба А. Я., Скопецький В. В. Просторові нелінійні сингулярно збурені крайові задачі типу "конвекція-дифузія" в анізотропних середовищах. *Вісник Київського нац. ун-ту ім. Тараса Шевченка. Сер. фіз.-матем. науки.* 2007. Вип. 7. С. 105–113.
10. Булавацький В. М., Скопецький В. В. Математичне моделювання динаміки консолідаційних процесів з урахуванням релаксаційних ефектів. *Кибернетика и системный анализ.* 2008. № 6. С. 59-66.
11. Булавацький В. М., Рогаль І. В. Математичне моделювання процесу консолідації основ накопичувачів промислових стоків. *Доповіді НАН України.* 2004. № 1. С. 42–47.
12. Булавацький В. М., Лаврик В. І. Математичне моделювання процесу фільтраційної консолідації з урахуванням дифузійної нерівноважності та масообміну. *Наукові записки НУКМА. Фізико-математичні науки.* 2006. Том 51. С. 7–10.
13. Булавацький В. М., Кривонос Ю. Г., Скопецький В. В. Некласичні математичні модель процесів тепло- та масо переносу. Київ: Наук. думка, 2005. 282 с.
14. Бураго Н. Г., Кукуджанов В. Н. Обзор контактных алгоритмов. *Известия РАН, МТТ.* 2005. No. 1. С. 45–87.
15. Ваганов І. І., Маєвська І. В., Попович М. М. Інженерна геологія та охорона навколишнього середовища: навчальний посібник дистанційної форми навчання. Вінниця: ВНТУ, 2010. 262 с.
16. Веригин Н. Н., Васильев С. В., Куранов Н. П. и др. Методы прогноза солевого режима грунтов и грунтовых вод. М.:Колос, 1979. 336 с.



17. Власюк А. П., Кузло М. Т. Експериментальні дослідження деяких параметрів фільтрації сольових розчинів у піщаних ґрунтах. *Меліорація та водне господарство: міжвідомчий тематич. наук. зб.* К.: Аграрна наука, 2000. Вип. 87. С. 43–46.
18. Власюк А. П., Мартинюк П. М. Математичне моделювання консолідації ґрунтів в процесі фільтрації сольових розчинів. Рівне: Вид-во УДУВГП, 2004. 211с.
19. Власюк А. П., Мартинюк П.М. Математичне моделювання консолідації ґрунтів при фільтрації сольових розчинів в неізотермічних умовах. Рівне: НУВГП, 2008. 416 с.
20. Власюк А. П., Мартинюк П. М., Медвідь Н. В. Математичне моделювання консолідації та фільтраційного руйнування ґрунтів в основах гідротехнічних та енергетичних споруд: монографія. Рівне: НУВГП, 2017. 423 с.
21. Власюк А. П., Остапчук О. П. Математичне моделювання переносу сольових розчинів при фільтрації підземних вод у ґрунтових масивах. Рівне: НУВГП, 2015. 214 с.
22. Власюк А. П., Степанченко О. М., Остапчук О. П. Монотонна різницева схема для нелінійного одновимірного рівняння параболічного типу, що містить першу похідну. *Вісник Київського ун-ту. Серія фіз.-математ. науки.* 2005. Вип. 2. С. 188–197.
23. Власюк А. П., Жеребят'єв О. В. Фільтраційна консолідація глинистих ґрунтів при наявності масопереносу солей. *Вісник Укр. держ. акад. водн. госп-ва.* 1998. Вип. 1. С. 40–43.
24. Власюк А. П., Мартинюк П. Н. Фильтрационная консолидация трёхфазных грунтов с учётом ползучести скелета и влияния солепереноса в неізотермическом режиме. *Математическое моделирование.* 2010. Т. 22, № 4. С. 32–56.

25. Власюк А. П., Мартинюк П. М. Чисельне розв'язування задач консолідації та фільтраційного руйнування ґрунтів в умовах тепло-масопереносу методом радіальних базисних функцій. Рівне: НУВГП, 2010. 277 с.
26. Гера Б., Чапля Є., Чернуха О. Дифузія у тришаровій смузї з урахуванням стрибка функції концентрації домішкової речовини на внутрішніх поверхнях контакту. *Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології*. 2010. Вип. 12. С. 61–68.
27. Герсеванов Н. М. Основы динамики грунтовой массы. М.: Госстройиздат, 1931. 242 с.
28. Герус В., Мартинюк П., Мічута О. Загальна кінематична гранична умова в теорії фільтраційної консолідації ґрунтів. *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології*. 2015. Вип. 22. С. 23–30.
29. Герус В. А., Мартинюк П. М. Узагальнення рівняння консолідації ґрунтів з урахуванням впливу фізико-хімічних факторів. *Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. Серія: Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління*. 2015. Вип. 27. С. 41–52
30. Герус В. А., Кутя Т. В., Мартинюк П. М. Узагальнення рівнянь фільтрації та тепломасоперенесення на випадок суфозійних процесів. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки*. 2016. Вип. 14. С. 48–63.
31. Гидротехнические сооружения: справочник проектировщика / под ред. В. П. Недриги. М.: СИ, 1983. 544 с.
32. Гогоберидзе М. И. и др. Обобщение данных статистического анализа аварий и инцидентов в аспекте надежности плотин. *Сообщения АН Груз. ССР*. 1977. Вип. 86, № 3. С. 681–684.

33. Громадченко Т. В., Мартинюк П. М. Математичне моделювання впливу вологоперенесення на стійкість зсувонебезпечного масиву ґрунту. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки.* 2012. Вип. 7. С. 49–55.
34. Дейнека В. С., Сергиенко И. В. Модели и методы решения задач в неоднородных средах. Киев: Наук. думка, 2001. 605 с.
35. Дейнека В. С., Сергиенко И. В., Скопецкий В. В. Модели и методы решения задач с условиями сопряжения. Киев: Наук. думка, 1998. 614 с.
36. Дейнека В. С., Петрик М. Р. Параметрична ідентифікація кінетичних параметрів дифузії в багат шарових неоднорідних Fe/Dy-наномультиткомползитах. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. пр. Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільськ. нац. ун-т,* 2011. Вип. 5. С. 85–111.
37. Добронравов О. О., Кремез В. С. Моделювання фільтрації ґрунтових вод з урахуванням суфозії і кольматації. *Пробл. Водопостачання, водовідведення та гідравліки.* 2006. Вип. 7. С. 141–146.
38. Досвід проектування об'єктів водопостачання, водовідведення та промислової гідротехніки: зб. наук. пр. / за заг. ред. О. І. Оглоблі. К.: Сталь, 2011. 234 с.
39. Запорожченко Э. В. и др. Природно-антропогенные процессы и явления: сб. научных трудов ин-та «Севкавгипроводхоз». 1999. № 14. 144 с.
40. Иванов П. Л. Ґрунты и основания гидротехнических сооружений. Механика ґрунтов. М.: Высш. школа, 1991. 447 с.
41. Іванчук Н. В., Мартинюк П. М. Про застосування розпаралелення обчислень в пакеті FreeFem++ в задачах гео-гідродинаміки. *Актуальні задачі сучасних технологій: тези VI Міжнародної науково-технічної конференції молодих учених і студентів (м. Тернопіль, 16–17 лист. 2017 р.).* Тернопіль, 2017. С. 71–72.

42. Капранов Ю. И., Тропин Н. М. Структура кольматируемого слоя в окрестности подвижной границы. *Прикладная механика и техническая физика*. 2011. Т. 52, № 6. С. 77–91.
43. Коваленко П. І. та ін. Модернізація та реконструкція осушувальних систем в умовах реформування власності у сільському господарстві. Київ, 2003. 31 с.
44. Косиченко Ю. М. и др. Оценка уровня фильтрационной безопасности земляных плотин и эффективности инженерной защиты малых водохранилищ. Новочеркасск, 2001. 57 с.
45. Красильников Н. А., Арипов Н. Ф., Корбашов В. Ф. Сопоставительные исследования методов расчета устойчивости откосов и уровня риска аварий грунтовых плотин при оценке их надежности и безопасности в эксплуатационный период. *Гидротехническое строительство*. 2004. Вып. 5. С. 6–10.
46. Кремез С. А. Опыт строительства и эксплуатации малых водохранилищ ЦЧО. Воронеж: ВГУ, 1965. 138 с.
47. Луцин Л. П., Шаранюк А. В. Метод конечных элементов в задачах динамики свободных конструкций. *Ученые записки ЦАГИ*. 2000. Том XXXI, № 3–4. С. 156–177.
48. Ляшко И. И., Демченко Л. И., Мистецкий Г. Е. Численное решение задач тепло- и массопереноса в пористых средах. Киев: Наук. думка, 1991. 264 с.
49. Ляшко С. И., Ключин Д. А., Тригуб А. С. Моделирование и оптимизация подземного массопереноса. К.: Наук. думка, 1998. 238 с.
50. Ляшко С. И. Оптимизация и математическое моделирование массопереноса подземных вод. К.: Наук. думка, 1998. 256 с.
51. Мала гірнича енциклопедія / за ред. В. С. Білецького. Донецьк: Схід. видав. дім, 2013. Т. 3. 644 с.

52. Малик Л. К. Факторы риска повреждения гидротехнических сооружений. Проблемы безопасности. М.: Наука, 2005. 354 с.
53. Малик Л. К. Чрезвычайные ситуации, связанные с гидротехническим строительством (ретроспективный обзор). *Гидротехническое строительство*. 2009. № 12. С. 2–16.
54. Мартинюк П. М., Медвідь Н. В. Про задачу фільтрації в греблі з водоводом. *Сучасні проблеми математичного моделювання та обчислювальних методів*: матеріали Міжнародної наукової конференції (м. Рівне, 22–23 лют. 2013 р.). Рівне, 2013. С. 105.
55. Медвідь Н. В. Дослідження впливу водоводу та зони вимиву на процеси фільтраційної консолідації ґрунтової греблі методом скінченних елементів. *Вісник Національного університету водного господарства та природокористування. Серія: Технічні науки*. 2015. Випуск 4(72). С. 132–142.
56. Медвідь Н. В., Мартинюк П. М. Дослідження впливу тепло-солеперенесення на швидкість фільтрації в ґрунтовій греблі (просторова задача). *Вісник ТНТУ*. 2015. Том 80, № 4. С. 172–181.
57. Медвідь Н. В. Задача пружного режиму фільтрації в ґрунтовій греблі з водоводом в умовах впливу техногенних факторів. *Математика в сучасному технічному університеті*: матеріали IV Міжнародної науково-практичної конференції (м. Київ, 24–25 груд. 2015 р.). Київ, 2016. С. 72–74.
58. Медвідь Н. В. Комп'ютерне моделювання впливу контактної зосередженої фільтрації вздовж водоводу на положення депресійної поверхні в ґрунтовій греблі. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки*. 2016. Випуск 13. С. 99–106.
59. Медвідь Н. В., Мартинюк П. М. Математичне моделювання впливу на надлишкові напори наявності зони вимиву в ґрунтовій греблі з водоводом. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки*. 2014. Випуск 10. С. 101–112.

60. Медвідь Н. В., Мартинюк П. М. Математичне моделювання фільтрації через ґрунтову греблю з водоводом та зоною вимиву в умовах впливу техногенних факторів. *Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики*: збірник наукових праць XXI Всеукраїнської наукової конференції (м. Львів, 24–25 вер. 2015 р.). Львів, 2015. С. 223–224.
61. Медвідь Н. В., Герус В. А., Мартинюк П. М. Метод скінченних елементів в задачі фільтраційної консолідації ґрунтової греблі з водоводом та зоною вимиву. *Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики*: збірник наукових праць XXII Всеукраїнської наукової конференції (м. Львів, 5–7 жовт. 2016 р.). Львів, 2016. С. 130–132.
62. Медвідь Н. В., Мартинюк П. М. Про вплив n-компонентного хімічного розчину на процес фільтраційної консолідації ґрунтових гребель з водоводами. *Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики*: матеріали I міжнародної XX Всеукраїнської наукової конференції (м. Львів, 7–9 квіт. 2014 р.). Львів, 2014. С. 105–106.
63. Медвідь Н. В. Про вплив контактної зосередженої фільтрації вздовж водоводу в ґрунтовій греблі на положення депресійної поверхні. *Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації*: тези VII Міжнародної наукової конференції (м. Кам'янець-Подільський, 21–22 квіт. 2016 р.). Кам'янець-Подільський, 2016. С. 143–144
64. Медвідь Н. В., Мартинюк П. М. Про задачу фільтраційної консолідації ґрунтових гребель з водоводами. *Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики*: матеріали XIX Всеукраїнської наукової конференції (м. Львів, 3–4 жовт. 2013 р.). Львів, 2013. С. 94–95.
65. Медвідь Н. В., Мартинюк П. М. Про просторову задачу нестационарної фільтрації в греблі з водоводом. *Сучасні проблеми математичного моделювання та обчислювальних методів*: матеріали Міжнародної наукової конференції (м. Рівне, 19–22 лют. 2015 р.). Рівне, 2015. С. 113.

66. Медвідь Н. В., Мартинюк П. М. Про просторову задачу фільтрації через ґрунтову греблю в умовах впливу техногенних факторів. *Математика в сучасному технічному університеті: матеріали III Міжнародної науково-практичної конференції* (м. Київ, 25–26 груд. 2014 р.). Київ, 2015. С. 81–83.
67. Медвідь Н. В., Мартинюк П. М. Про просторову задачу фільтрації в греблі з водоводом та зоною вимиву з урахуванням техногенних факторів. *Обчислювальна та прикладна математика: матеріали VIII Міжнародної наукової конференції імені академіка І.І. Ляшка* (м. Київ, 8–9 жовт. 2015 р.). Київ, 2015. С. 64.
68. Медвідь Н. В., Мартинюк П. Н. Реализация алгоритма бессеточного метода радиальных базисных функций в задачах подземной гидромеханики. *Информатика*. 2016. № 4. С. 20–32.
69. Методы прогноза солевого режима ґрунтов и ґрунтовых вод / под ред. Н. Н. Веригина. М.: Колос, 1979. 336 с.
70. Механика насыщенных пористых сред / В. Н. Николаевский, К. С. Басниев, А. Т. Горбунов, Г. А. Зотов. М.: Недра, 1970. 339 с.
71. Перемичка. *Українська радянська енциклопедія: у 12-ти т.* / гол. ред. М. П. Бажан. 2-ге вид. К.: Головна редакція УРЕ, 1974–1985.
72. Полубаринова-Кочина П. Я Теория движения ґрунтовых вод. М.: Наука, 1977. 664 с.
73. Развитие исследований по теории фильтрации в СССР / ред. В. М. Ентов, С. Н. Нумеров, П. Я. Полубаринова-Кочина, И. А. Чарный. М.: Наука, 1969. 545 с.
74. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980. 616 с.
75. Савула Я. Г. Числовий аналіз задач математичної фізики варіаційними методами. Львів: Видавничий центр ЛНУ ім. Івана Франка, 2004. 221 с.
76. Савченко О. О., Желих В. М., Дуднік К. А., Конончук О. М. Технічні передумови влаштування геотермальної вентиляції пасивних будинків.

*Вісник Національного університету "Львівська політехніка". Теорія і практика будівництва.* 2015. № 823. С. 281–285.

77. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы математической физики. 2-е изд. М.: Научный мир, 2003. 316 с.

78. Свідоцтво про реєстрацію авторського права на твір №67160 Медвідь Н. В., Мартинюк П. М. Комп'ютерна програма "Комп'ютерна програма для математичного моделювання фільтраційного руйнування ґрунтових гребель". Дата реєстрації 11.08.2016 р.

79. Свідоцтво про реєстрацію авторського права на твір №71633 Іванчук Н. В., Лобунь В. М., Мартинюк П. М., Мічута О. Р., Герус В. А. Комп'ютерна програма "Комп'ютерна програма для математичного моделювання взаємозв'язаних фільтраційно-суфозійних процесів в ґрунтах". Дата реєстрації 25.04.2017 р.

80. Свідоцтво про реєстрацію авторського права на твір №78432 Іванчук Н. В., Филипчук В. Л., Мартинюк П. М., Мічута О. Р. "Комп'ютерна програма для математичного моделювання очищення води в біоплато з урахуванням суфозійно-кольматаційних явищ". Дата реєстрації 19.04.2018 р.

81. Сергиенко И. В., Скопецкий В. В., Дейнека В. С. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах. Киев: Наук.думка, 1991. 432 с.

82. Токарчук М., Жаліло А., Чапля Є., Чернуха О. Кінетика переносу радіонуклідів у склоподібних радіоактивно збуджених матеріалах. *Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології.* 2005. Вип. 2. С. 87–99.

83. Трушевський В. М., Шинкаренко Г. А., Щербина Н.М. Метод скінченних елементів і штучні нейронні мережі: теоретичні аспекти та застосування. Львів: ЛНУ імені Івана Франка, 2014. 396 с.

84. Трушевський В. М., Шинкаренко Г. А. Розпаралелена апроксимація еліптичних крайових задач штучною нейромережею з радіально-базисними



- функціями. *Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інф.* 2014. Вип. 22. С. 108–117.
85. Филипчук В. Л., Бондар О. І., Курилюк М. С., Айайа Анієфіок, Кривошей П. П., Курилюк О. М., Почтар О. В. Очищення води у фільтраційно-регенераційних біоплато. *Вісник Національного університету водного господарства та природокористування. Технічні науки.* 2016. Вип. 2. С. 193–204.
86. Флорин В. А. Основы механики грунтов. Т.2. М.: Госстройиздат, 1961. 544 с.
87. Флорин В. А. Теория уплотнения земляных масс. М.: Госстройиздат, 1948. 284 с.
88. Химич А. Н., Попов А. В., Полянко В. В. Алгоритмы параллельных вычислений для задач линейной алгебры с матрицами нерегулярной структуры. *Кибернетика и системный анализ.* 2011. Т. 47, № 6. С. 159–174.
89. Чапля Є., Чернуха О. Математичне моделювання дифузії розпадної речовини у регулярних структурах. *Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології.* 2008. Вип. 8. С. 173–185.
90. Червинський Я. Й., Шумінський В. Д., Титаренко В. А. Розробка ДБН В.2.4-Х:201Х «Греблі з ґрунтових матеріалів. Основні положення». *Збірник наукових праць (галузеве машинобудування, будівництво).* 2014. Вип. 1(40). С. 239–247.
91. Чернуха О. Математичне моделювання дифузійних процесів у багатофазних тілах випадкової структури з використанням діаграм Фейнмана. *Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології.* 2005. Вип. 1. С. 116–131.
92. Чугаев Р. Р. Гидротехнические сооружения. Ч.1. Глухие плотины. М.: Агропромиздат, 1985. 318 с.

93. Чугаев Р. Р. Земляные гидротехнические сооружения. Ленинград: Энергия, 1967. 460 с.
94. Шестаков В. М. Динамика подземных вод. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1979. 368 с.
95. "Arizona's 1890 dam disaster killed more than 100 people" The Daily Courier. Retrieved 30 January 2015. URL: <http://dcourier.com/main.asp?SectionID=1&SubSectionID=1&ArticleID=48987>.
96. Baranov A. Yu., Bilous M. V., Sergienko I. V., Khimich A. N. Hybrid Algorithms to Solve Linear Systems for Finite-Element Modeling of Filtration Processes. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2015. Vol. 51, № 4. P. 594–602.
97. Bear J. Dynamics of fluids in porous media. New York: Dover Publications, 2013. 784 p.
98. Beier H., Schade D., Lorens W. Penetration of impervious earth cores by structures. *Treizieme Congres der Grands Barrages*. 1979. V. I, Q. 48, R 13. P. 221–234.
99. Berres S., Bürger R., Wendland W. L. Mathematical Models for the Sedimentation of Suspensions. *Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics*. 2006. Vol. 28. P. 7–44.
100. Boukhemacha M. A., Bica I., Mezouar K. Theoretical mathematical modeling for piping erosion near conduits. *Mathematical Modelling in Civil Engineering*. 2011. No. 2. P. 5–11.
101. Chaplya Y., Chernukha O., Dmytruk V. Advective–diffusive mass transfer in binary regular structures in the steady-state regime. *Applied Mathematical Modelling*. 2013. Vol. 37. P. 6191–6211.
102. Chen J. S., Hillman M., Chi S. W. Meshfree Methods: Progress Made after 20 Years. *Journal of Engineering Mechanics*. 2017. Vol. 143(4). URL: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)EM.1943-7889.0001176](https://doi.org/10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0001176).

103. Chetti A., Benamar A., Hazzab A. Modeling of Particle Migration in Porous Media: Application to Soil Suffusion. *Transport in Porous Media*. 2016. Vol. 113, № 3. P. 591–606.
104. Conduits through Embankment Dams. URL: [https://damsafety.org/sites/default/files/files/L-266\\_ConduitsBrochure\\_05.pdf](https://damsafety.org/sites/default/files/files/L-266_ConduitsBrochure_05.pdf).
105. Decoene A., Maury B. Moving meshes with FreeFem++. *Journal of Numerical Mathematics*. 2012. Vol. 20. P. 195–214.
106. Font R., Periago F. The Finite Element Method with FreeFem++ for beginners. *The Electronic Journal of Mathematics and Technology*. 2013. Vol. 7, № 4. P. 289–307.
107. Foster M., Fell R. Use of Event Trees to Estimate the Probability of Failure of Embankment Dams by Internal Erosion and Piping. *International Commission on Large Dams (ICOLD): proceedings of the 20th International Congress on Large Dams (Paris, 2000)*. Paris, 2000. P. 237–260.
108. Francisca F. M., Glatstein D. A. Long term hydraulic conductivity of compacted soils permeated with landfill leachate. *Applied Clay Science*. 2010. Vol. 49. P. 187–193.
109. Gregoretto C., Maltauro A., Lanzoni S. Laboratory experiments on the failure of coarse homogeneous sediment natural dams on a sloping bed. *Journal of Hydraulic Engineering*. 2010. Vol. 136, No. 11. P. 868–879.
110. Hanson G. J., Tejral R. D., Hunt S. L., Temple D. M. Internal erosion and impact of erosion resistance. *Society on Dams Annual Meeting and Conference: proceedings of the 30th U.S. Society (Sacramento, April 12–16, 2010)*. Sacramento, 2010. P. 773–784.
111. Hassanizadeh S. M., Leijnse A. A non-linear theory of high-concentration gradient dispersion in porous media. *Adv. Water Resour.* 1995. № 18. P. 203–215.

112. Hecht F., Auliac S., Pironneau O., Morice J., Hyaric A. Le, Ohtsuka K. FreeFem++. Third Edition. URL: <http://www.freefem.org/ff++/ftp/freefem++doc.pdf>.
113. Hecht F. New development in freefem++. *J. Numer. Math.* 2012. Vol. 20, № 3–4. P. 251–265.
114. Herus, V. A., Ivanchuk N. V., Martyniuk P. M. A System Approach to Mathematical and Computer Modeling of Geomigration Processes Using Freefem++ and Parallelization of Computations. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2018. Vol. 54, No. 2. P. 284–294.
115. Huebner K. H. H., Dewhirst D. L., Smith D. E., Byron T. G. Finite Element Method. New York: Wiley&Sons, 2001. 744 p.
116. Ivanchuk N., Martynyuk P., Tsvetkova T., Michuta O. Mathematical modeling and computer simulation of the filtration processes in earth dams. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2017. № 2/6 (86). P. 63–69.
117. "Kauai Dam Breach Killed 7 People Five Years Ago, But Criminal Charges Against Dam Owner Still Pending". URL: <http://www.hawaiireporter.com/kauai-dam-breach-killed-7-five-years-ago-but-criminal-charges-still-pending/123>.
118. Khimich A., Nikolaevskaya E., Chistyakova T. Programming with Multiple Precision. Verlag: Springer, 2012. 206 p.
119. Lefebvre A. Fluid-particle simulations with FreeFem++. *Esaim proceedings*. 2007. Vol. 18. P. 120–132.
120. Liu G. R. Mesh Free Methods. CRC Press, 2009. 792 p.
121. Logan Daryl L. A first course in the finite element method. Cengage Learning. CL Engineering, 2011. 954 p.
122. Madzvamuse A., Chung Andy H. W. The bulk-surface finite element method for reaction–diffusion systems on stationary volumes. *Finite Elements in Analysis and Design*. 2016. Vol. 108. P. 9–21.

123. Medvid N. How the presence of water pipeline effects filtration processes in the soil dam. *Analysis and mathematical physics: abstracts of IV International Conference* (c. Kharkiv, June 13–17, 2016). Kharkiv, 2016. P. 26–27.
124. Medvid N. V., Herus V. A., Martyniuk P. M. Modification of Kinematic Boundary Condition at Free Surfaces in Filtration Problems by means of Earth Dam. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: Технічні науки*. 2016. № 1. С. 119–124.
125. Moshynskiy V., Filipchuk V., Ivanchuk N., Martyniuk P. Computer modeling of water cleaning in wetland taking into account of suffosion and colmatation. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2018. № 1/10 (91). P. 38–43.
126. Murad M. A., Loula A. F. D. On stability and convergence of finite element approximation of Biot's consolidation problem. *Int. J. Numer. Meth. Engin.* 1994. № 37. P. 645–667.
127. Murase T., Iwata M., Wakita M., Adachi T., Hayashi N., Shirato M. Variable–Pressure/Variable–Rate Expression of Semisolid Materials. *J. Chem. Eng. Jap.* 1987. Vol. 20 (6). P. 603–608.
128. Okeke Austin Chukwueloka-Udechukwu, Wang Fawu. Hydromechanical constraints on piping failure of landslide dams: an experimental investigation. *Geoenvironmental Disasters*. 2016. Vol. 3(1). P. 1–17.
129. Park B. Y., Roberts B. L., Sobolik S. R. Construction of hexahedral finite element mesh capturing realistic geometries of a petroleum reserve. *Finite Elements in Analysis and Design*. 2017. Vol. 135. P. 68–78.
130. Petryk M., Vorobiev E. Liquid Flowing from Porous particles During the Pressing of Biological Materials. *Computer & Chem. Eng. Elsevier Irland*. 2007. Issue 31. P. 1336–1345.

131. Pironneau O. FreeFem++: A High Level MultiPhysics Finite Element Software. URL: <https://sinews.siam.org/Details-Page/freefem-a-high-level-multiphysics-finite-element-software>.
132. Reddy J. N. Introduction to the Finite Element Method (Third ed.). McGraw-Hill, 2006. 423 p.
133. Richards K. S., Krishna A., Reddy R. Critical appraisal of piping phenomena in earth dams. *Bulletin of engineering geology and the environment*. 2007. Vol. 66. P. 381–402.
134. Safonyk A. P. Modelling the filtration processes of liquids from multicomponent contamination in the conditions of authentication of mass transfer coefficient. *Int. J. Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*. 2015. Vol. 9. P. 189 –192.
135. Schotting R. J., Moser H., Hassanizadeh S. M. High–concentration gradient dispersion in porous media: experiments, analysis and approximations. *Adv. Water Resour.* 1999. № 22. P. 655–680.
136. Seetha N., Mohan Kumar M. S., Hassanizadeh S. M. Modeling the co-transport of viruses and colloids in unsaturated porous media. *Journal of Contaminant Hydrology*. 2015. Vol. 181. P. 82–101.
137. Sellmeijer J. B. Numerical computation of seepage erosion below dams (piping). URL: [https://www.deltares.nl/app/uploads/2014/12/Deltares-Piping\\_Paper-Sellmeijer.pdf](https://www.deltares.nl/app/uploads/2014/12/Deltares-Piping_Paper-Sellmeijer.pdf).
138. Sellmeijer J. B. On the mechanism of piping under impervious structures: doctoral thesis / Technische Universiteit Delft. Delft, 1988. 112 p.
139. Sharif Y. A., Elkholy M., Chaudhry M. H., Imran J. Experimental Study on the Piping Erosion. Process in Earthen Embankments. *Journal of Hydraulic Engineering*. 2015. Vol. 141(7). P. 1–9.

140. Shynkarenko H., Vovk O. A posteriori error estimations for finite element approximations on quadrilateral meshes. *Журнал обчислювальної та прикладної математики*. 2013. № 3. С. 107–118.
141. Simion A. I., Grigoras C.-G., Rosu A.-M., Gavril L. Mathematical modeling of density and viscosity of NaCl aqueous solutions. *J. of Agroalimentary Processec and Technologies*. 2015. № 21(1). P. 41–52.
142. Smith I. M., Griffiths D. V., Margetts L. Programming the Finite Element Method. Wiley, 2014. 664 p.
143. Van Rijn L. C., Meijer K. Three-dimensional modeling of sand and mud transport in current and waves. *The transport of suspended sediments and its mathematical modeling: international symposium (Florence, 1991)*. Florence, 1991. P. 683–708.
144. Watson S. J., Barry D. A., Schotting R. J., Hassanizadeh S. M. On the validity of Darcy's law for stable high-concentration displacements in granular porous media. *Transport in Porous Media*. 2002. № 47. P. 149–167.
145. Whye-Teong Ang. A beginner's course in boundary element methods. Boca Raton, FL: Universal Publishers, 2007. 253p.
146. Wilson G. V., Nieber J. L., Sidle R. C., Fox G. A. Internal erosion during soil pipeflow: state of the science for experimental and numerical analysis. *Transactions of the ASABE*. 2012. Vol. 56(2). P. 465–478.
147. Zhang M., He F., Zhao D. Hao X. Transport of stabilized iron nanoparticles in porous media: Effects of surface and solution chemistry and role of adsorption. *Journal of Hazardous Materials*. 2017. Vol. 322, Part A. P. 284–291.
148. Zienkiewicz O. C., Taylor R. L., Zhu J. Z. The finite element method: its basis and fundamentals (6 ed.). Butterworth-Heinemann, 2005. 752 p.
149. URL: <http://graal.ens-lyon.fr/MUMPS/>.
150. URL: <http://crd.lbl.gov/xiaoye/SuperLU/>.
151. URL: <http://dept-info.labri.u-bordeaux.fr/ramet/pastix/main.html>.

152. URL: <http://www-users.cs.umn.edu/~saad/software/pARMS/index.html>.
153. URL: <http://hips.gforge.inria.fr/>.
154. URL: [https://computation.llnl.gov/casc/linear\\_solvers/sls\\_hypre.html](https://computation.llnl.gov/casc/linear_solvers/sls_hypre.html).



**ДОДАТОК А**

УТВЕРЖДАЮ:

Директор спиртоводочного завода  
КУПП «Маньковичи»  
д. Маньковичи, Столинского р-на,  
Брестской обл., Республика

Беларусь



*А. В. Микулич*

А. В. Микулич

М.П. «

» \_\_\_\_\_ 2018 г.

**АКТ**

**о результатах внедрения на спиртоводочном заводе**

**КУПП «Маньковичи»**

**материалов кандидатской диссертационной работы**

***Иванчук Наталии Витальевны***

**старшего преподавателя кафедры прикладной математики**

**Национального университета водного**

**хозяйства и природопользования (Украина, г. Ровно)**

Комиссией спиртоводочного завода КУПП «Маньковичи» в составе:  
председатель комиссии:

*Ляхович У.Ф. зам. директора*

члены комиссии:

*Курчрейчик С.А. ш. механик*

*Пашкевич В.Еф. инженер-энергетик*

назначенной распоряжением директора спиртоводочного завода КУПП  
«Маньковичи» № 17 от «24» января 2018 г.,

составлен этот акт о внедрении материалов кандидатской диссертационной  
работы Иванчук Н. В.


При разработке проектной документации проекта реконструкции канализационной системы на производственной площадке спиртоводочного завода КУПП «Маньковичи» была использована методика расчетов характера фильтрации в околотрубной зоне в грунтовом массиве. Данная методика основывается на том, что наличие инженерных включений в грунтовых массивах оказывает существенное влияние, поскольку могут развиваться опасные фильтрационные деформации, вызванные контактной сосредоточенной фильтрацией вдоль водовода с размывом грунтов, подъемом депрессионной поверхности. Даже при исправной работе водовода может происходить суффозионный размыв грунта в околотрубной зоне контактной сосредоточенной фильтрацией.


Это позволило обеспечить большую надёжность при эксплуатации данного объекта. Без учета указанных факторов было бы невозможно спрогнозировать характер фильтрационных деформаций и возникновения аварийных ситуаций относительно рассматриваемого объекта.

Председатель комиссии: \_\_\_\_\_

 Иванов В.А.

Члены комиссии: \_\_\_\_\_

 С.А. ...

 В.А. ...

**ДОДАТОК В**

ЗАТВЕРДЖУЮ:

ДП «БТС-ІНЖИНІРИНГ» ТОВ  
«БІОТЕХСОЮЗ»

м. Рівне, Рівненського району,  
Рівненської області

*Гоч*  
А.М. Гоч



15 лютого 2017 р.

**АКТ**

**про результати впровадження на ДП «БТС-ІНЖИНІРИНГ» ТОВ  
«БІОТЕХСОЮЗ»**

**матеріалів кандидатської дисертаційної роботи**

***Іванчук Наталії Віталіївни***

**старшого викладача кафедри прикладної математики**

**Національного університету водного**

**господарства та природокористування (м. Рівне)**

Комісією ДП «БТС-ІНЖИНІРИНГ» у складі:

голова комісії:

- директор – Гоч А.

члени комісії:

- провідний інженер – Жупанін І.

- провідний інженер – Войтович Ю.

що призначена розпорядженням директора ДП «БТС-ІНЖИНІРИНГ» № 01  
від «15» лютого 2017 р.,

складено цей акт про впровадження матеріалів кандидатської дисертаційної  
роботи Іванчук Н. В.

Під час розробки проектної документації проекту реконструкції водопровідної мережі в с. Оженин Острозького району Рівненської області була використана методика розрахунків характеру фільтрації в навколотрубній зоні. Методика ґрунтується на тому, що при наявності інженерних включень в ґрунтових масивах можуть розвинутися небезпечні фільтраційні деформації, викликані контактною зосередженою фільтрацією вздовж водоводу з розмивом ґрунтів, підйомом депресійної поверхні. Навіть при справній роботі водоводу може відбуватися суфозійний розмив ґрунту в навколотрубній зоні контактною зосередженою фільтрацією.

Це дозволило забезпечити більшу надійність під час експлуатації об'єкта в повністю насичених ґрунтах. Без урахування вказаних факторів було б неможливо спрогнозувати характер фільтраційних деформацій та виникнення критичних ситуацій стосовно розглядуваного об'єкта.

Голова комісії: \_\_\_\_\_ /Гоч А./

Члени комісії: \_\_\_\_\_ /Жупанін І./

\_\_\_\_\_ /Войтович Ю./



**ДОДАТОК С**



**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**  
**НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ВОДНОГО ГОСПОДАРСТВА**  
**ТА ПРИРОДОКОРИСТУВАННЯ**

вул. Соборна, 11, м. Рівне, 33028, тел. (0362)63-30-98, факс (0362) 63-32-09, mail@nuwm.edu.ua

Від 13.02.2018р № 001-215

На № \_\_\_\_\_ від \_\_\_\_\_

Довідка

про використання у навчальному процесі  
 Національного університету водного господарства та природокористування  
 результатів досліджень, одержаних при виконанні дисертаційної роботи  
 Іванчук Наталії Віталіївни  
 на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук

Наукові розробки та результати досліджень старшого викладача кафедри прикладної математики Іванчук Наталії Віталіївни, що викладені в її дисертаційній роботі, використано у навчальному процесі Національного університету водного господарства та природокористування.

1) При підготовці спецкурсу «Математичне і комп'ютерне моделювання природних і техногенних систем» для студентів спеціальності «Прикладна математика» (рівень вищої освіти «магістр»):

Тема 11. Дослідження впливу тепло-солеперенесення на швидкість фільтрації в ґрунтовій греблі (просторова задача).

2) При підготовці спецкурсу «Проекційно-сіткові та безсіткові методи математичної фізики» для студентів спеціальності «Прикладна математика» (рівень вищої освіти «магістр»):

Тема 10. Програмне середовище FreeFem++. Основні принципи роботи.

Тема 11. Розпаралелювання обчислень у FreeFem++.

Проректор з наукової роботи  
та міжнародних зв'язків,  
д.е.н., професор

Н. Б. Савіна



**ДОДАТОК D**



**ДОДАТОК Е**



**ДОДАТОК F**



**ДОДАТОК G**

Наукові праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації:

1. Власюк А. П., Мартинюк П. М., Медвідь Н. В. Математичне моделювання консолідації та фільтраційного руйнування ґрунтів в основах гідротехнічних та енергетичних споруд: монографія. Рівне: НУВГП, 2017. 423 с.
2. Ivanchuk N., Martynyuk P., Tsvetkova T., Michuta O. Mathematical modeling and computer simulation of the filtration processes in earth dams. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2017. № 2/6(86). P. 63–69.
3. Герус В. А., Іванчук Н. В., Мартинюк П. М. Системний підхід до математичного і комп'ютерного моделювання геоміграційних процесів з використанням пакету FreeFem++ та розпаралелювання обчислень. *Кібернетика та системний аналіз*. 2018. Том. 54, № 2. С. 123–133.  
Herus, V. A., Ivanchuk N. V., Martyniuk P. M. A System Approach to Mathematical and Computer Modeling of Geomigration Processes Using Freefem++ and Parallelization of Computations. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2018. Vol. 54, No. 2. P. 284–294.
4. Moshynskiy V., Filipchuk V., Ivanchuk N., Martyniuk P. Computer modeling of water cleaning in wetland taking into account of suffosion and colmatation. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2018. № 1/10(91). P. 38–43.
5. Медвідь Н. В., Мартинюк П. М. Математичне моделювання впливу на надлишкові напори наявності зони вимиву в ґрунтовій греблі з водоводом. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки*. 2014. Випуск 10. С. 101–112.
6. Медвідь Н. В., Мартинюк П. М. Дослідження впливу тепло-солеперенесення на швидкість фільтрації в ґрунтовій греблі (просторова задача). *Вісник ТНТУ*. 2015. Том 80, № 4. С. 172–181.



7. Медвідь Н. В. Дослідження впливу водоводу та зони вимиву на процеси фільтраційної консолідації ґрунтової греблі методом скінченних елементів. *Вісник Національного університету водного господарства та природокористування. Серія: Технічні науки*. 2015. Випуск 4(72). С. 132–142.
8. Medvid N. V., Herus V. A., Martyniuk P. M. Modification of Kinematic Boundary Condition at Free Surfaces in Filtration Problems by means of Earth Dam. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: Технічні науки*. 2016. № 1. С. 119–124.
9. Медвідь Н. В. Комп'ютерне моделювання впливу контактної зосередженої фільтрації вздовж водоводу на положення депресійної поверхні в ґрунтовій греблі. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки*. 2016. Випуск 13. С. 99–106.
10. Медвідь Н. В., Мартинюк П. Н. Реализация алгоритма бессеточного метода радиальных базисных функций в задачах подземной гидромеханики. *Информатика*. 2016. № 4. С. 20–32.
11. Свідоцтво про реєстрацію авторського права на твір №67160 Медвідь Н.В., Мартинюк П.М. Комп'ютерна програма “Комп'ютерна програма для математичного моделювання фільтраційного руйнування ґрунтових гребель”. Дата реєстрації 11.08.2016 р.
12. Свідоцтво про реєстрацію авторського права на твір №71633 Іванчук Н. В., Лобунь В. М., Мартинюк П. М., Мічута О. Р., Герус В. А. Комп'ютерна програма “Комп'ютерна програма для математичного моделювання взаємозв'язаних фільтраційно-суфозійних процесів в ґрунтах”. Дата реєстрації 25.04.2017 р.
13. Свідоцтво про реєстрацію авторського права на твір №78432 Іванчук Н. В., Филипчук В. Л., Мартинюк П. М., Мічута О. Р. "Комп'ютерна програма для математичного моделювання очищення води в біоплато з урахуванням суфозійно-кольматаційних явищ". Дата реєстрації 19.04.2018 р.

14. Мартинюк П. М., Медвідь Н. В. Про задачу фільтрації в греблі з водоводом. *Сучасні проблеми математичного моделювання та обчислювальних методів*: матеріали Міжнародної наукової конференції (м. Рівне, 22–23 лют. 2013 р.). Рівне, 2013. С. 105.
15. Медвідь Н. В., Мартинюк П. М. Про задачу фільтраційної консолідації ґрунтових гребель з водоводами. *Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики*: матеріали XIX Всеукраїнської наукової конференції (м. Львів, 3–4 жовт. 2013 р.). Львів, 2013. С. 94–95.
16. Медвідь Н. В., Мартинюк П. М. Числове розв'язання задачі фільтраційної консолідації ґрунтових гребель з водоводами в умовах впливу техногенних факторів. *П'ятнадцята Міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука*: матеріали конференції (м. Київ, 15–17 травн. 2014 р.). Київ, 2014. С. 135–136.
17. Медвідь Н. В., Мартинюк П. М. Про вплив n-компонентного хімічного розчину на процес фільтраційної консолідації ґрунтових гребель з водоводами. *Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики*: матеріали I міжнародної XX Всеукраїнської наукової конференції (м. Львів, 7–9 квіт. 2014 р.). Львів, 2014. С. 105–106.
18. Медвідь Н. В., Мартинюк П. М. Про просторову задачу фільтрації через ґрунтову греблю в умовах впливу техногенних факторів. *Математика в сучасному технічному університеті*: матеріали III Міжнародної науково-практичної конференції (м. Київ, 25–26 груд. 2014 р.). Київ, 2015. С. 81–83.
19. Медвідь Н. В., Мартинюк П. М. Про просторову задачу нестационарної фільтрації в греблі з водоводом. *Сучасні проблеми математичного моделювання та обчислювальних методів*: матеріали Міжнародної наукової конференції (м. Рівне, 19–22 лют. 2015 р.). Рівне, 2015. С. 113.
20. Медвідь Н. В., Мартинюк П. М. Математичне моделювання фільтрації через ґрунтову греблю з водоводом та зоною вимиву в умовах впливу

техногенних факторів. *Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики*: збірник наукових праць XXI Всеукраїнської наукової конференції (м. Львів, 24–25 вер. 2015 р.). Львів, 2015. С. 223–224.

21. Медвідь Н. В., Мартинюк П. М. Про просторову задачу фільтрації в греблі з водоводом та зоною вимиву з урахуванням техногенних факторів. *Обчислювальна та прикладна математика*: матеріали VIII Міжнародної наукової конференції імені академіка І.І. Ляшка (м. Київ, 8–9 жовт. 2015 р.). Київ, 2015. С. 64.

22. Медвідь Н. В. Задача пружного режиму фільтрації в ґрунтовій греблі з водоводом в умовах впливу техногенних факторів. *Математика в сучасному технічному університеті*: матеріали IV Міжнародної науково-практичної конференції (м. Київ, 24–25 груд. 2015 р.). Київ, 2016. С. 72–74.

23. Medvid N. How the presence of water pipeline effects filtration processes in the soil dam. *Analysis and mathematical physics: abstracts of IV International Conference* (с. Kharkiv, June 13–17, 2016). Kharkiv, 2016. P. 26–27.

24. Медвідь Н. В. Про вплив контактної зосередженої фільтрації вздовж водоводу в ґрунтовій греблі на положення депресійної поверхні. *Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації*: тези VII Міжнародної наукової конференції (м. Кам'янець-Подільський, 21–22 квіт. 2016 р.). Кам'янець-Подільський, 2016. С. 143–144.

25. Медвідь Н. В., Герус В. А., Мартинюк П. М. Метод скінченних елементів в задачі фільтраційної консолідації ґрунтової греблі з водоводом та зоною вимиву. *Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики*: збірник наукових праць XXII Всеукраїнської наукової конференції (м. Львів, 5–7 жовт. 2016 р.). Львів, 2016. С. 130–132.

26. Герус В., Іванчук Н., Мартинюк П. М. Про застосування пакету freefem в нелінійних крайових задачах з вільними рухомими межами. *Комп'ютерне моделювання та програмне забезпечення інформаційних систем і*

*технологій*: збірник наукових праць III Всеукраїнської науково-практичної конференції (м. Рівне, 28–30 вер. 2017 р.). Рівне, 2017. С. 47–49.

27. Іванчук Н. В., Мартинюк П. М. Про застосування розпаралелення обчислень в пакеті FreeFem++ в задачах гео-гідродинаміки. *Актуальні задачі сучасних технологій*: тези VI Міжнародної науково-технічної конференції молодих учених і студентів (м. Тернопіль, 16–17 лист. 2017 р.). Тернопіль, 2017. С. 71–72.

28. Филипчук В. Л., Іванчук Н. В., Мартинюк П. М. Математичне та комп'ютерне моделювання очищення води в біоплато. *Сучасні проблеми математичного моделювання, обчислювальних методів та інформаційних технологій*: матеріали Міжнародної наукової конференції (м. Рівне, 2–4 бер. 2018 р.). Рівне, 2018. С. 93–95.

29. Іванчук Н. В., Мартинюк П. М., Филипчук В. Л. Математичне моделювання та прогнозування ефективності очищення води в біоплато-фільтрах модифікованої конструкції. *Комп'ютерне моделювання та оптимізація складних систем*: матеріали IV міжнародної науково-технічної конференції (м. Дніпро, 1–2 лист. 2018 р.). Дніпро, 2018. С. 67–68.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації доповідалися та обговорювалися на:

- Міжнародних наукових конференціях «Сучасні проблеми математичного моделювання та обчислювальних методів» (м. Рівне, лютий 2013 р., лютий 2015 р.), форма участі: очна;
- XIX-XXII Всеукраїнських наукових конференціях «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики» (м. Львів, жовтень 2013 р., квітень 2014 р., вересень 2015 р., жовтень 2016 р.), форма участі: очна;
- Міжнародній науковій конференції ім. акад. Михайла Кравчука (м. Київ, травень 2014 р.), форма участі: очна;

- III-IV Міжнародних науково-практичних конференціях «Математика в сучасному технічному університеті» (м. Київ, грудень 2014 р., грудень 2015 р.), форма участі: заочна;
- VIII Міжнародній науковій конференції імені академіка І.І. Ляшка «Обчислювальна та прикладна математика» (м. Київ, жовтень 2015 р.), форма участі: очна;
- IV International Conference «Analysis and mathematical physics» (с. Kharkiv, June 2016), форма участі: очна;
- VII Міжнародній науковій конференції «Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації» (м. Кам'янець-Подільський, квітень 2016 р.), форма участі: очна;
- III Всеукраїнській науково-практичній конференції «Комп'ютерне моделювання та програмне забезпечення інформаційних систем і технологій» (м. Рівне, вересень 2017 р.), форма участі: очна;
- VI Міжнародній науково-технічній конференції молодих учених і студентів «Актуальні задачі сучасних технологій» (м. Тернопіль, листопад 2017 р.), форма участі: очна;
- Міжнародній науковій конференції «Сучасні проблеми математичного моделювання, обчислювальних методів та інформаційних технологій» (м. Рівне, березень 2018 р.), форма участі: заочна;
- IV міжнародній науково-технічній конференції «Комп'ютерне моделювання та оптимізація складних систем» (м. Дніпро, листопад 2018 р.), форма участі: заочна.

В повному обсязі робота доповідалася на розширеному науковому семінарі кафедри інформатики та прикладної математики Рівненського державного гуманітарного університету (31 травня 2018 р.); розширеному науковому семінарі кафедри прикладної математики Львівського національного університету імені Івана Франка (27 червня 2018 р.);

розширеному науковому семінарі кафедри прикладної математики  
Національного університету водного господарства та природокористування  
(26 грудня 2018 р.).