Міністерство освіти і науки України

Національний університет водного господарства та природокористування

Кафедра гідроінформатики

01-02-174

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до самостійної роботи та виконання практичних завдань з навчальної дисципліни «Надійність водогосподарських систем (на основі гідроінформатики)» для здобувачів вищої освіти другого (магістерського) рівня за освітньо-професійною програмою «Гідроінформатика» спеціальності 194 «Гідротехнічне будівництво, водна інженерія та водні технології» денної та заочної форм навчання

Рекомендовано науково-методичною
радою з якості
ННІ водного господарства та
природооблаштування
Протокол № 1
від 24 вересня 2019 р.

Рівне – 2019

Методичні вказівки до самостійної роботи та виконання практичних завдань з навчальної дисципліни «Надійність водогосподарських систем (на основі гідроінформатики)» для здобувачів вищої освіти другого (магістерського) рівня за освітньо-професійною програмою «Гідроінформатика» спеціальності 194 «Гідротехнічне будівництво, водна інженерія та водні технології» денної та заочної форм навчання [Електронне видання] / Пінчук О. Л., Герасімов Є. Г. – Рівне : НУВГП, 2019. – 37 с.

Укладачі: Пінчук О. Л., к.т.н., доцент кафедри гідроінформатики; Герасімов Є. Г., к.т.н., доцент, доцент кафедри гідротехнічного будівництва та гідравліки.

Відповідальний за випуск: Клімов С. В., к.т.н., доцент, завідувач кафедри гідроінформатики.

Керівник групи забезпечення спеціальності 194 Гідротехнічне будівництво, водна інженерія та водні технології Хлапук М. М.

ВСТУП

Основна мета дисципліни – ознайомити студентів з теорією надійності, її можливостями та методами з метою передбачення можливих негативних наслідків при функціонуванні водогосподарських систем і споруд та їх запобігання з точки зору забезпечення цих систем і споруд необхідним рівнем надійності, захисту природного оточуючого середовища; формування у студентів системного, аналітичного мислення для оцінки ситуацій, що виникають та прийняття необхідних інженерних та управлінських рішень.

Основним завданням вивчення дисципліни є підготовка студентів до застосування теорії надійності для потреб водогосподарської галузі, а саме:

- ознайомлення з особливостями і можливостями сучасної теорії надійності для потреб водогосподарської галузі;
- навчання вмінню застосовувати ймовірнісний математичний апарат для розрахунку показників теорії надійності;
- застосування методів теорії надійності для оцінки надійності технічних та організаційно-технологічних структур;
- оцінювання, аналізу стану надійності водогосподарських систем і споруд;
- прогнозування можливих негативних наслідків при функціонуванні таких систем і споруд.
- пошук оптимальних шляхів забезпечення необхідного рівня надійності водогосподарських систем і споруд.

В результаті вивчення дисципліни фахівець повинен ***знати***:

- поняття про теорію надійності, її особливості і сферу застосування;
- математичний апарат, методи теорії ймовірностей та математичної статистики для потреб теорії надійності;
- методологію проведення експериментів з оцінки надійності водогосподарських систем та її елементів;
- системний підхід щодо застосування теорії надійності і методів математичного моделювання;
- поняття складної організаційно-технологічної системи та її ознаки, поняття надійності управління;
- методи оцінки, аналізу, оптимізації надійності водогосподарських систем і споруд та прогнозування їх можливого стану.

Підготовлений студент повинен ***вміти***:

- визначати вид сполучення елементів водогосподарських систем і споруд, здійснювати їхній морфологічний аналіз із застосуванням теорії надійності;
- моделювати відмови водогосподарських систем та її об’єктів, прогнозувати їх стани;
- використовувати математичний апарат та методи теорії надійності для оцінки, аналізу та оптимізації надійності водогосподарських систем та її елементів;
- розробляти програми забезпечення надійності водогосподарських систем та визначати стратегії технічного обслуговування і ремонтів.

Тема 1 «РОЗРАХУНОК ЙМОВІРНОСТІ ПОЯВИ ПОДІЇ ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ ПОНЯТЬ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТІ ТА МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ ПРИ ОЦІНЦІ НАДІЙНОСТІ ВОДОГОСПОДАРСЬКИХ СИСТЕМ»

Теоретичні відомості

1. Додавання ймовірностей

Сумою кількох подій називається подія появи хоч би однієї з них. Так, якщо подія А – відмова одного елемента системи, а В – відмова двох елементів тієї ж системи, то подія С=А+В є відмовою взагалі елементів одного чи двох разом, тобто подія «не менше за одну відмову».

Теорема додавання ймовірностей. Імовірність суми двох несумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій:

$$P(A+B)=P(A)+P(B) \tag{1.1}$$

Якщо події А1, А2…An утворюють повну групу несумісних подій (в результаті досліду обов'язково має з'явитись хоч би одна з них), то

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1 \tag{1.2}$$

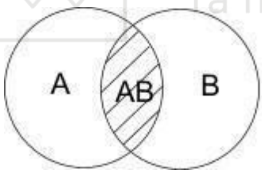
Оскільки протилежні події є несумісними, то

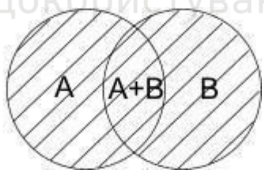
$$P(A)+P(A/)=1 \tag{1.3}$$

де P(A/) – імовірність події А/, протилежної події А.

Якщо події А і В сумісні, то імовірність їх суми

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB) \tag{1.4}$$





де АВ – добуток подій А та В.

Для трьох сумісних подій

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC) \tag{1.5}$$

Імовірність добутку двох сумісних подій

$$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A+B) \tag{1.6}$$

Імовірність добутку трьох сумісних подій

$$P(ABC)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A+B)-P(A+C)-P(B+C)+P(A+B+C) \tag{1.7}$$

2. Добуток ймовірностей

Добутком кількох подій називається подія, яка можлива при сумісній появі усіх цих подій. Якщо В1 – відмова першого елемента системи, В2 – відмова другого, то В=В1•В2 – сумісна відмова обох елементів.

Теорема множення імовірностей.

Імовірність добутку, або сумісної появи кількох подій дорівнює добутку імовірності однієї з них на умовні імовірності решти подій, визначених з припущення, що всі попередні події відбулись.

Наслідок 1. Якщо подія А не залежить від події В, то і подія В не залежить від події А.

Наслідок 2. Імовірність добутку незалежних подій дорівнює добутку імовірностей цих подій

$$P(A_1A_2\ldots A_n)=P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_n) \tag{1.8}$$

3. Ймовірність при повтореннях показників незалежних дослідів (часткова теорема)

Якщо проводиться n незалежних дослідів, у кожному із яких подія A з'являється з імовірністю P, то імовірність того, що подія A з'явиться рівно m разів становить

$$P_{m,n}=C_n^m P^m q^{n-m} \tag{1.9}$$

де $q=1-P$.

Приклад 1

Імовірність припинення роботи елементів складає: першого – 0,07, другого – 0,15, третього - 0,1. Відмови всіх елементів не можуть трапитись одночасно. Визначити імовірність зменшення ефективності роботи системи, яка складається з цих трьох елементів, порівняно з максимальною.

Розв'язок

Так як, причини зменшення ефективності роботи кожного елемента системи являються несумісними подіями, то імовірність визначаємо як:

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)=0{,}07+0{,}15+0{,}1=0{,}32.$$

Приклад 2

Підйомник затворів шлюза-регулятора складається з трьох основних елементів: трос *А1*, підйомний механізм *А2*, електродвигун *А3*. Відмова хоч би одного з цих елементів приводить до відмови всього підйомного пристрою. За час t імовірність безвідмовної роботи *А1* - 0,98, *А2* – 0,96, *А3* – 0,95. Кожний з них незалежно від інших може протягом часу t вийти з ладу. Визначити імовірність безвідмовної роботи підйомника.

Розв'язок

Імовірність відмови підйомника визначається:

$$P(A)=P(A_1)P(A_2)P(A_3)=0{,}98\bullet 0{,}96\bullet 0{,}95=0{,}89.$$

За формулою протилежних подій знаходимо імовірність безвідмовної роботи підйомника:

$$P(A^{/})=1-P(A)=1-0{,}89=0{,}11.$$

Приклад 3

На насосній станції встановлено чотири витратоміри. Ймовірність безвідмовної роботи кожного з них протягом періоду t становить 0,96. Витратоміри відмовляють незалежно один від одного. Знайти ймовірність того, що за час t: а) всі витратоміри будуть працювати справно; б) відмовить один витратомір в) відмовлять два витратоміри; г) відмовлять три витратоміри; д) відмовлять чотири витратоміри.

Розв'язок

n=4; m=0, 1, 2, 3, 4; P=1-0,96=0,04; q=0,96.

а) ймовірність того, що за час t всі витратоміри будуть працювати справно

$$P_{0,4}=C_4^0P^0q^{4-0}=0,96^4=0,85;$$

б) ймовірність того, що за час t відмовить один витратомір

$$P_{1,4}=C_4^1P^1q^{4-1}=4*0,04*0,96^3=0,14;$$

в) ймовірність того, що за час t відмовлять два витратоміри

$$P_{2,4}=C_4^2P^2q^{4-2}=4*0,04^2*0,96^2=0,006;$$

г) ймовірність того, що за час t відмовлять три витратоміри

$$P_{3,4}=C_4^3P^3q^{4-3}=4*0,04^3*0,96^3=0,00025;$$

д) ймовірність того, що за час t відмовлять чотири витратоміри

$$P_{4,4}=C_4^4P^4q^{4-4}=4*0,04^4*0,96^4=2,56*10^{-6}.$$

Тема 2 «ОЦІНКА НАДІЙНОСТІ ВОДОГОСПОДАРСЬКИХ СИСТЕМ ЗА РЕЗУЛЬТАТАМИ ВИПРОБУВАНЬ».

Теоретичні відомості

1. За результатами повних випробувань

Об'єкт, для якого проведення ремонтів не передбачено в нормативно-технічній і конструкторській документації, називається таким, що не підлягає ремонту (неремонтнопридатним).

Показник надійності - кількісна характеристика однієї або декількох властивостей, що складають надійність об'єкта.

Для неремонтованих об'єктів знаходять застосування наступні показники надійності:

• середній наробіток до відмови T ;

• імовірність безвідмовної роботи $R(t)$;

• гамма-процентний ресурс t_γ .

Для визначення показників надійності необхідний статистичний матеріал про відмови в експлуатації розглянутого класу об'єктів.

Відомо, що закон розподілу ресурсу t (наробітку неремонтованих об'єктів до відмови) добре описується універсальним двохпараметричним законом Вейбулла-Гнеденко, для якого щільність розподілу визначається за виразом:

$$f(t) = \frac{b}{a}\left(\frac{t}{a}\right)^{b-1} \exp\left[-\left(\frac{t}{a}\right)^{b}\right], \qquad (2.1)$$

а функція розподілу має вигляд:

$$F(t) = 1 - exp\left[-\left(\frac{t}{a}\right)^{b}\right], \qquad (2.2)$$

де a та b - параметри закону.

Невідомі параметри a і b можуть бути визначені аналітично або графічно за допомогою імовірнісного листка.

Параметри a і b зв'язані із середнім наробітком до відмови T , середнім квадратичним відхиленням σ і коефіцієнтом варіації v залежностями:

$$T = a \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{b}\right) \qquad (2.3)$$

$$\sigma = a \cdot \sqrt{\Gamma\left(1 + \frac{2}{b}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{b}\right)} \qquad (2.4)$$

$$v = \frac{\sigma}{T} \qquad (2.5)$$

У формулах (2.3) і (2.4) $\Gamma(x)$ - гамма-функція, що визначається за таблицями (додаток 1).

Імовірність безвідмовної роботи $R(t)$ в інтервалі від 0 до t

$$R(t) = 1 - F(t) \tag{2.6}$$

де $F(t)$ - функція розподілу ресурсу, обумовлена у випадку закону Вейбулла-Гнеденко співвідношенням (2.2).

Гамма-процентний ресурс t_γ знаходять графічним рішенням трансцендентного рівняння

$$R(t_\gamma) = 0{,}01 \cdot \gamma \tag{2.7}$$

де γ - задана імовірність (у %).

Довірчі границі для середнього наробітку до відмови T та імовірності безвідмовної роботи $R(t)$ обчислюють зі співвідношень:

$$T_{\substack{\max\\ \min}} = T \pm t_\beta \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \tag{2.8}$$

$$R_{\substack{\max\\ \min}}(t) = R(t) \pm t_\beta \cdot \sqrt{\frac{R(t)\cdot(1 - R(t))}{N}} \tag{2.9}$$

де t_β - квантиль нормального розподілу, що відповідає імовірності

$$\alpha = \frac{1+\beta}{2}, \text{ тобто}$$

$$t_\beta = U_\alpha = U_{\frac{1+\beta}{2}}$$

де β - довірча імовірність; N - обсяг вибірки; U_α - квантиль, значення якого визначають по таблиці (додаток 2).

Довірчі границі для гамма-процентного ресурсу визначають графічно після побудови графіка $R(t)$ з довірчими границями.

Послідовність розв'язування задачі.

Під час повних випробувань всі об'єкти доводяться до відмови, і результатом випробування є вибірка наробітків до відмови - t_i, $i = 1, 2, \ldots, N$.

Для знаходження апроксимуючого закону розподілу наробітку до відмови необхідне знання емпіричної функції розподілу F^*. Із цією метою весь діапазон значень випадкової величини t_i, розбивають на K інтервалів однакової довжини h. Число інтервалів вибирають залежно від обсягу вибірки N. Число інтервалів, що рекомендується, $K \cong 5 \lg N$, округлене до цілого значення.

Далі визначають розмах вибірки R і довжину інтервалу h:

$$R = t_{\max} - t_{\min} \tag{2.10}$$

$$h = \frac{R}{K}$$

Отримане значення h заокруглюють до більшого цілого, а потім обчислюють ліві t_i' і праві t_i'' границі кожного з K інтервалів по формулах:

$$\begin{aligned} t_1' &= t_{\min}; & t_1'' &= t_1' + h; \\ t_2' &= t_1''; & t_2'' &= t_2' + h; \\ t_3' &= t_2''; & t_3'' &= t_3' + h, \end{aligned} \tag{2.11}$$

і т. д., та підраховують кількість відмов n_i, наробітки до яких потрапили в кожен інтервал.

Перевіркою правильності визначення границь інтервалів є попадання всередину останнього інтервалу максимального $t_{\max}$ наробітку. Сумарна кількість попадань повинна бути рівною обсягові вибірки:

$$\sum_{i=1}^{k} n_i = N \tag{2.12}$$

Далі визначають значення відносної частоти W_i попадання наробітків у i -й інтервал:

$$W_i = \frac{n_i}{N}, \tag{2.13}$$

а потім емпіричну функцію розподілу $F_i *$:

$$F_i * = W_1 + W_2 + \ldots + W_i \tag{2.14}$$

при цьому наприкінці останнього k -го інтервалу $F_k * = 1$.

При графічному вписуванні теоретичного закону Вейбулла-Гнеденко і визначенні його параметрів a і b на спеціальному імовірнісному листку по осі абсцис відкладають значення правих границь інтервалу t_i'', а по осі ординат - відповідному даному інтервалу значення емпіричної функції розподілу $F_i *$, в результаті одержують K точок, через які проводять пряму таким чином, щоб вона проходила по можливості ближче до всіх точок. Побудована пряма є графіком теоретичного розподілу $F(t)$. Відповідність теоретичного закону розподілу емпіричному розподілові перевіряють за критерієм А.Н. Колмогорова Для цього в кожному інтервалі підраховують модуль різниці між значеннями емпіричної і теоретичної функцій розподілу, вибирають з них максимальний

$$D_{\max} = \max|F_i - F_i^*| \tag{2.15}$$

і визначають величину критерію

$$\lambda = D_{\max} \cdot \sqrt{N} \tag{2.16}$$

Якщо $\lambda < 1{,}0$, то прийнятий теоретичний закон Вейбулла-Гнеденко не суперечить емпіричному. Шукані параметри a і b теоретичного закону визначають (рис. 1.1) у такий спосіб:

a - безпосередньо з графіка;

$$b = 1{,}3 \cdot tg\varphi$$

де φ - кут нахилу прямої до осі абсцис.

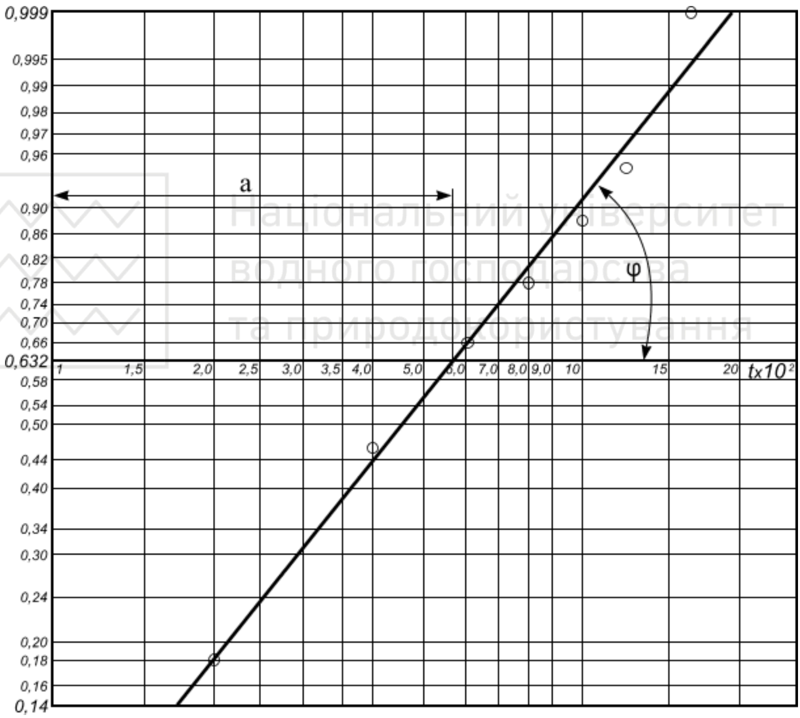


Рис. 2.1. Імовірнісний листок для закону розподілу Вейбулла-Гнеденко і графічне визначення параметрів a і b.

Після визначення середнього наробітку до відмови T і значень імовірності $R(t)$ за формулами (2.3) і (2.6) відповідно, проводять розрахунок цих же величин із довірчими границями, використовуючи залежності (2.8) і (2.9), і будують графік $R(t)$. Гамма-процентний ресурс t_γ знаходять графічно.

2. За результатами скорочених випробувань

Випробування на надійність не завжди проводяться до відмови усіх випробовуваних об'єктів. В багатьох випадках, особливо в експлуатаційних умовах, випробування припиняються ще до настання відмов у частини об'єктів. Якщо кількість відмов під час таких скорочених випробуваннях складає не менше 50% від загального числа випробовуваних зразків, то, як показує практика, за такими даними можна із достатньою імовірністю оцінювати (відновлювати) показники надійності, що могли б бути визначені під час проведенні повних випробувань всіх об'єктів до відмов.

За результатами скорочених випробувань одержана вибірка даних містить наробітки до відмов і наробітки до припинення (призупинки) випробувань. На відміну від повних вибірок, що містять тільки наробітки до відмов, такі вибірки називають цензурованими. Якщо припинення випробувань відбувається в різні моменти часу за випадкових причин, то вибірка даних є випадково цензурованою.

Групуючи випадково цензуровану вибірку за інтервалом, одержимо, що у будь-який i-й інтервал потрапить деяка кількість n_{oi} наробітків до відмови і n_{ni} наробітків до припинення випробувань. Якщо загальне число об'єктів, що випробувалися - N, то нижньою границею для оцінювання емпіричної функції розподілу наробітку до відмови в i-му інтервалі є відношення:

$$F_{oi} = \frac{\sum_{j=1}^{i} n_{oj}}{N} \tag{2.17}$$

так, як при цьому передбачається, що об'єкти, випробування яких припинені, надалі відмовляти не можуть. У цьому випадку оцінка надійності об'єкта буде завищеною.

Верхньою границею при оцінюванні функції розподілу може служити відношення:

$$F_{ci} = \frac{\sum_{j=1}^{i} n_{oj} + \sum_{j=1}^{i} n_{nj}}{N} \tag{2.18}$$

використання якого припускає, що в моменти припинення випробувань відбуваються відмови. Під час такого оцінювання надійність випробовуваного об'єкта занижується. Вираз (2.18) одночасно є оцінкою емпіричної функції розподілу фактичної тривалості скорочених випробувань.

Істинне значення емпіричної функції розподілу наробітку до відмови F_i^* буде знаходитися в інтервалі:

$$F_{oi} < F_i^* < F_{ci} \tag{2.19}$$

Ширина цього інтервалу збільшується при збільшенні числа об'єктів, випробування яких не доведені до відмови.

Для точкової оцінки (відновлення) за цензурованими даними функції розподілу F_i* всередині інтервалу її можливих значень (2.19) при незалежних випадкових наробітках до відмови і цензурування застосовується наступний метод.

Оцінимо емпіричну імовірність безвідмовної роботи об'єкта в першому інтервалі групування R_1, як відношення кількості об’єктів, що не відмовили в цьому інтервалі зразків до числа випробуваних в ньому об'єктів. Під час визначення числа випробуваних об'єктів N_1 врахуємо, що в першому інтервалі випробування n_{n1} зразків були припинені при різному наробітку, меншому, чим права границя першого інтервалу. Припускаючи напрацювання призупинених зразків розподіленими симетрично відносно середини інтервалу, можна вважати, що умовне число об'єктів, що випробувалися в першому інтервалі, складає:

$$N_1 = N - \frac{1}{2} n_{n1}.$$

Кількість об'єктів, що не відмовили в першому інтервалі дорівнює $N_1 - n_{o1}$, а імовірність безвідмовної роботи до кінця першого інтервалу

$$R_1 = \frac{N_1 - n_{o1}}{N_1} = 1 - \frac{n_{o1}}{N_1}.$$

За цим же принципом оцінимо умовну імовірність безвідмовної роботи в другому інтервалі $\tilde{R}_2$ для об'єктів, що не відмовили в першому інтервалі. Умовне число об'єктів, що випробувалися у другому інтервалі, дорівнює

$$N_2 = N - n_{o1} - n_{n1} - \frac{1}{2} n_{n2},$$

а кількість об’єктів, що не відмовили складає $N_2 - n_{o2}$. Їх відношення дає оцінку для умовної імовірності

$$\tilde{R}_2 = \frac{N_2 - n_{o2}}{N_2} = 1 - \frac{n_{o2}}{N_2}$$

Безумовну імовірність безвідмовної роботи об'єкта R_2 у першому і другому інтервалах (тобто від початку випробувань і до правої границі другого інтервалу) можна оцінити як добуток імовірностей R_1 та $\tilde{R}_2$:

$$R_2 = R_1 \cdot \tilde{R}_2 = \left(1 - \frac{n_{o1}}{N_1}\right)\left(1 - \frac{n_{o2}}{N_2}\right)$$

Аналогічно в третьому інтервалі умовна імовірність безвідмовної роботи $\tilde{R}_3$ для об'єктів, що не відмовили в перших двох інтервалах, визначається з виразу:

$$\tilde{R}_3 = 1 - \frac{n_{o3}}{N_3},$$

де $N_3 = n_{o1} - n_{o2} - n_{n1} - n_{n2} - \frac{1}{2} n_{n3}$.

Безумовна імовірність безвідмовної роботи об'єкта R_3 від початку випробувань до правої границі третього інтервалу рівна добутку:

$$R_3 = R_2 \cdot \tilde{R}_3 = \left(1 - \frac{n_{o1}}{N_1}\right)\left(1 - \frac{n_{o2}}{N_2}\right)\left(1 - \frac{n_{o3}}{N_3}\right),$$

Отже, для будь-якого i-го інтервалу групування випадково цензурованої вибірки емпірична імовірність безвідмовної роботи R_i може бути визначена як добуток, (вважаючи $R_0 \equiv 1$),

$$R_i = R_{i-1} \cdot \tilde{R}_i = \prod_{j=1}^{i} \left(1 - \frac{n_{oj}}{N_j}\right), \tag{2.20}$$

де $N_j = N - \sum_{k=1}^{j-1} \left(n_{ok} + n_{nk}\right) - \frac{1}{2} n_{nj}$.

Відповідні значення відновленої емпіричної функції розподілу наробітку до відмови $F_i{*}$ визначаються з відомого співвідношення

$$F_i{*} = 1 - R_i \tag{2.21}$$

Далі, як і у випадку повної вибірки, значення відновленої емпіричної функції розподілу можуть бути нанесені на імовірнісний листок, після чого графічно визначені параметри теоретичного закону розподілу і показники надійності об'єкта.

Послідовність розв'язування задачі

Вирішуючи дану задачу, використовують ті ж вихідні дані про наробітки до відмов при випробуваннях, що й у прикладі 1, причому, попередньо повна вибірка даних, узята за шифром задачі 1 з табл. 2.3, піддається випадковому цензуруванню. Цензурування даних проводиться за допомогою табл. 2.1 наступним чином.

Кожному рядку даних про наробітки до відмов з табл. 2.2 ставиться у відповідність кожен з рядків наробітків до припинення випробувань з табл. 2.3. Потім суміщені наробітки попарно порівнюються між собою, і в цензуровану вибірку відбирається менший наробіток із двох порівнюваних.

Таким чином формується випадково цензурована вибірка даних обсягом $N = 50$, що містить наробітки до відмов і наробітки до припинення випробувань. Усі наробітки отриманої вибірки, групуються по інтервалах, границі яких приймаються такими ж, якими вони були під час групування повної вибірки в прикладі 1. При цьому підраховується кількість попадань напрацювань до відмов - n_{oi} і напрацювань до призупинення - n_{ni} у кожен інтервал.

За формулою (2.17) оцінюються значення нижньої границі F_{oi}, для емпіричної функції розподілу напрацювання до відмови. Їх наносять на імовірнісний листок і, потім графічно визначають параметри закону Вейбулла a_0 та b_0.

Таблиця 2.1

Напрацювання до призупинки випробувань

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
1	202	750	168	1980	256	1322	622	1706	1272	1476
2	1466	410	538	1806	1600	1150	22	1956	664	1292
3	676	112	1064	584	1416	348	110	40	702	1060
4	1040	1790	1290	754	314	146	1144	1138	650	1060
5	718	860	1860	144	1230	1370	482	1492	1410	956
6	1970	236	1669	1774	1992	1310	1602	200	1398	198
7	35	1010	599	1080	934	235	870	355	1254	641
8	1343	628	681	7	978	1483	703	805	73	103
9	1811	1616	578	1015	1035	937	1454	104	504	451
0	1721	1546	1616	1680	994	190	1603	1442	1829	1702

За допомогою виразу (2.18) визначаються значення функції розподілу тривалості випробувань F_{ci}, що також наносять на імовірнісний листок і графічно визначають відповідні параметри a_c та b_c.

Визначають середню тривалість скорочених випробувань за формулою:

$$T_c = a_c \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{b_c}\right) \qquad (2.22)$$

Величину середньої тривалості скорочених випробувань T_c порівнюють з величиною середньої тривалості повних випробувань, що співпадає із середнім ресурсом T об'єкта, обчисленим у задачі 1, і визначають коефіцієнт скорочення випробувань за формулою:

$$K_c = \frac{T_c}{T} \qquad (2.23)$$

Використовуючи вирази (4.20) і (4.21), послідовно, починаючи з першого інтервалу, відновлюють значення емпіричної функції розподілу напрацювання до відмови F_i*. Процедура відновлення F_i* закінчується на інтервалі, у якому зафіксовані останні відмови. Відповідні результати розрахунків зводяться в таблицю 2.2 (див. приклад). Значення F_i* наносять на імовірнісний листок, і за ним графічно визначають параметри теоретичного закону $a_в$ та $b_в$.

За результатами оцінки параметрів теоретичного закону визначають показники надійності: значення середнього ресурсу $T_в = a_в \cdot Г\left(1+\frac{1}{b_в}\right)$, а також значення гамма-процентного ресурсу $t_\gamma^в$ (при γ = 80%) за формулою:

$$t_\gamma^в = a_в \cdot \left(\ln\frac{100}{\gamma}\right)^{1/b_в} \quad (2.24)$$

Отримані за результатами скорочених випробувань величини середнього і гамма-процентного ресурсу порівнюються з відповідними показниками, визначеними за повними даними у задачі 1.

Визначаються відносні похибки при оцінці середнього Δ_T і гамма-процентного ресурсу Δ_γ за формулами:

$$\Delta_T = \frac{|T - T_в|}{T}\cdot 100\%\,; \quad \Delta_{t_\gamma} = \frac{|t_\gamma - t_\gamma^в|}{t_\gamma}\cdot 100\%\,. \quad (2.25)$$

Приклад 1

За результатами повних випробувань до відмови 50 деталей побудувати графік імовірності безвідмовної роботи $R(t)$, знайти середній T та 80%-ий ресурси з довірчими границями (β = 90% і t_β = 1,645) вихідних даних, що відповідають наробіткам до відмов: 350; 570; 490; 1080; 250; 1540; 340; 550; 930; 370; 350; 410; 510; 180; 1190; 290; 610; 380; 530; 120; 1150; 830; 930; 370; 510; 150; 660; 190; 420; 1350; 310; 880; 10; 270; 640; 790; 1360; 150; 540; 500; 190; 320; 300; 260; 540; 180; 980; 580; 740; 260.

Розв'язок

Із приведеного ряду значень знаходимо мінімальне $t_{\min} = 10$ годин і максимальне $t_{\max} = 1540$ годин значення наробітків.

Розмах вибірки:

$R = t_{\max} - t_{\min} = 1540 - 10 = 1530$ год.

Приймаємо число інтервалів $K = 8$.

Довжина інтервалу $h = \frac{R}{K} = \frac{1530}{8} = 192{,}5$ годин, приймаємо $h = 200$ год.

Результати подальших розрахунків приведені в табл. 2.2, за матеріалами якої побудований графік (див. рис. 2.1) і розраховані:

параметри закону розподілу Вейбулла-Гнеденко

$a = 580$ год.; $\quad b = 1{,}3 \cdot tg\varphi = 1{,}3 \cdot 1{,}27 = 1{,}65$;

середній ресурс $T = 580 \cdot Г\left(1+\frac{1}{1{,}65}\right) = 519$ год.;

середнє квадратичне відхилення

$$\sigma = 519 \cdot \sqrt{\Gamma\left(1+\frac{2}{1,65}\right) - \Gamma^2\left(1+\frac{1}{1,65}\right)} = 322 \text{ год.;}$$

коефіцієнт варіації $v = \frac{\sigma}{T} = \frac{322}{519} = 0,62$;

середній ресурс із довірчими границями при $\beta = 0,9$ та $t_\beta = 1,645$:

$T_{\substack{\max\\ \min}} = 519 \pm 1,645 \cdot \frac{322}{\sqrt{50}} = 519 \pm 75$ год.; $T_{\max} = 594$ год.; $T_{\min} = 444$ год.

80%-ий ресурс із довірчими границями (за графіком):

$t_{80} = 240$ год.; $t_{80\max} = 310$ год.; $t_{80\min} = 170$ год.

Перевірка за критерієм А.Н. Колмогорова проводиться за максимальною величиною відхилення $\left|F_i - F_i^*\right|_{\max} = 0,04$, (табл. 2.2):

$$\lambda = 0,04 \cdot \sqrt{50} = 0,283 < 1.$$

Отже, емпіричний розподіл добре узгоджується з теоретичним розподілом Вейбулла-Гнеденко. За отриманими даними побудований (рис. 2.2) графік імовірності безвідмовної роботи деталей, на якому показані довірчі границі $R_{\max(\min)}$, 80%-й ресурс t_{80} і його довірчі границі $t_{80\max}$ та $t_{80\min}$.

Таблиця 2.2.

Результати розрахунків до прикладу №1

№	Границі інтервалів $t_i' \div t_i''$	Серед. інтервал t_i	Число величин в інтервалі n_i	Частота W_i	Емпір. функція F_i^*	Теор. функція F_i	Відхил. $\left\|F_i^* - F_i\right\|$	Імов. безвідм. роботи	$R_{\substack{\max\\ \min}}(t)$
1	0÷200	100	9	0,18	0,18	0,16	0,02	0,84	0,76÷0,93
2	200÷400	300	14	0,28	0,46	0,42	0,04	0,58	0,47÷0,70
3	400÷600	500	11	0,22	0,68	0,65	0,03	0,35	0,24÷0,46
4	600÷800	700	5	0,10	0,78	0,82	0,04	0,18	0,09÷0,27
5	800÷1000	900	5	0,10	0,88	0,91	0,03	0,09	0,02÷0,15
6	1000÷1200	1100	3	0,06	0,94	0,964	0,024	0,036	0,00÷0,08
7	1200÷1400	1300	2	0,04	0,98	0,986	0,006	0,014	0,00÷0,04
8	1400÷1600	1500	1	0,02	1,00	0,995	0,005	0,005	0,00÷0,02
Σ			50	1,00					

Таблиця 2.3.

Вихідні дані до виконання практичної роботи за темою №1

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
1	310	880	10	270	640	790	1360	150	540	500
2	190	320	300	260	540	180	980	580	740	260
3	1150	830	930	370	510	150	660	190	420	1350
4	350	570	490	1080	250	1540	340	550	930	370
5	626	624	622	493	816	619	496	600	1059	997
6	831	310	620	688	436	530	137	940	564	151
7	285	416	349	1014	663	652	639	788	461	708
8	165	480	275	345	552	538	570	673	130	566
9	202	324	634	244	776	379	289	496	632	136
0	350	110	510	180	1190	290	610	380	530	120

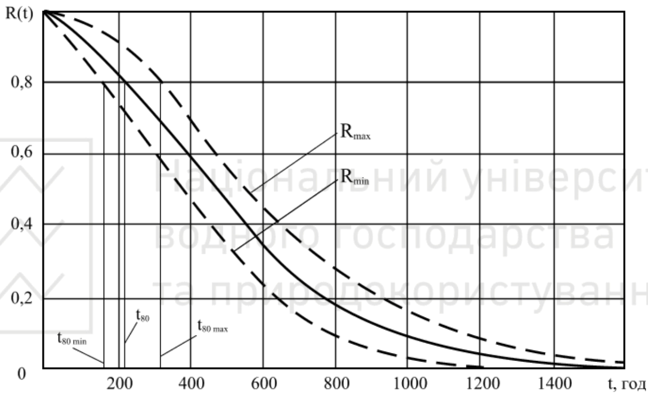


Рис. 2.2. Графік імовірності безвідмовної роботи $R(t)$ із довірчими границями

Приклад 2

За даними про повні випробування з прикладу 1 сформована випадково цензурована вибірка результатів скорочених випробувань:

202*; 570; 168*; 1080; 250; 1322*; 340; 550; 930; 370; 350; 110; 510; 180; 1190; 290; 22*; 380; 530; 120; 676*; 112*; 930; 370; 510; 150; 110*; 40*; 420; 1060*; 310; 880; 10; 270; 314*; 146*; 1144*; 104*; 540; 500; 190; 320; 300; 144*; 540; 180; 482*; 580; 740; 260.

Примітка: Зірочкою позначені наробітки до припинення випробувань.

Розв'язок

Групуємо цензуровану вибірку по інтервалах з тими ж границями, що були обрані для повної вибірки. При цьому підрахунок кількостей попадань наробітків до відмов n_{oi} і наробітків до призупинки випробувань n_{ni} у кожен інтервал проводимо окремо і результати заносимо в табл. 2.4.

У кожному інтервалі визначаємо значення нижньої границі F_{oi} для функції розподілу F_i*:

$$F_{o1} = \frac{7}{50} = 0{,}14; \qquad F_{o2} = \frac{7+12}{50} = 0{,}38, \text{ і т. д.}$$

Результати заносимо в табл. 2.4 і наносимо на імовірнісний листок (див. рис. 2.3). Будуємо графік функції F_0 і визначаємо значення її параметрів:

$a_0 = 800$ годин; $b_0 = 1{,}3 \cdot 1{,}07 = 1{,}4$.

У кожному інтервалі визначаємо значення функції розподілу тривалості випробувань F_{ci}:

$$F_{c1} = \frac{7+8}{50} = 0{,}30; \qquad F_{c2} = \frac{7+12+8+2}{50} = 0{,}58, \text{ і т. д.}$$

Таблиця 2.4

Результати розрахунків до прикладу №2

№	$t_i' \div t_i''$	n_{oi}	n_{ni}	F_{oi}	F_{ci}	N_i	$\tilde{R}_i$	R_i	F_i*
1	0÷200	7	8	0,14	0,30	46	0,848	0,848	0,152
2	200÷400	12	2	0,38	0,58	34	0,647	0,549	0,451
3	400÷600	10	1	0,58	0,80	20,5	0,512	0,281	0,719
4	600÷800	1	1	0,60	0,84	9,5	0,895	0,251	0,749
5	800÷1000	3	0	0,66	0,90	8	0,625	0,157	0,843
6	1000÷1200	2	2	0,70	0,98	4	0,5	0,079	0,921
7	1200÷1400	0	1	-	1,00	-	-	-	-

Результати розрахунків заносимо в табл. 2.4, наносимо на імовірнісний листок (рис. 2.3) і будуємо графік функції F_c. Графічно визначаємо параметри: $a_c = 440$ годин; $b_c = 1{,}3 \cdot 1{,}27 = 1{,}65$. Середня тривалість скорочених випробувань складає: $T_c = 440 \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{1{,}65}\right) = 394$ години.

Коефіцієнт скорочення випробувань:

$$K_c = \frac{394}{519} = 0{,}759.$$

У кожному інтервалі (до шостого включно) визначаємо умовне число деталей, що випробовувалися:

$$N_1 = 50 - \frac{1}{2} \cdot 8 = 46; \quad N_2 = 50 - 7 - 8 - \frac{1}{2} \cdot 2 = 34;$$

$$N_3 = 50 - 7 - 12 - 8 - 2 - \frac{1}{2} \cdot 1 = 20{,}5, \text{ і т. д.}$$

Результати розрахунків заносимо в табл. 2.2.

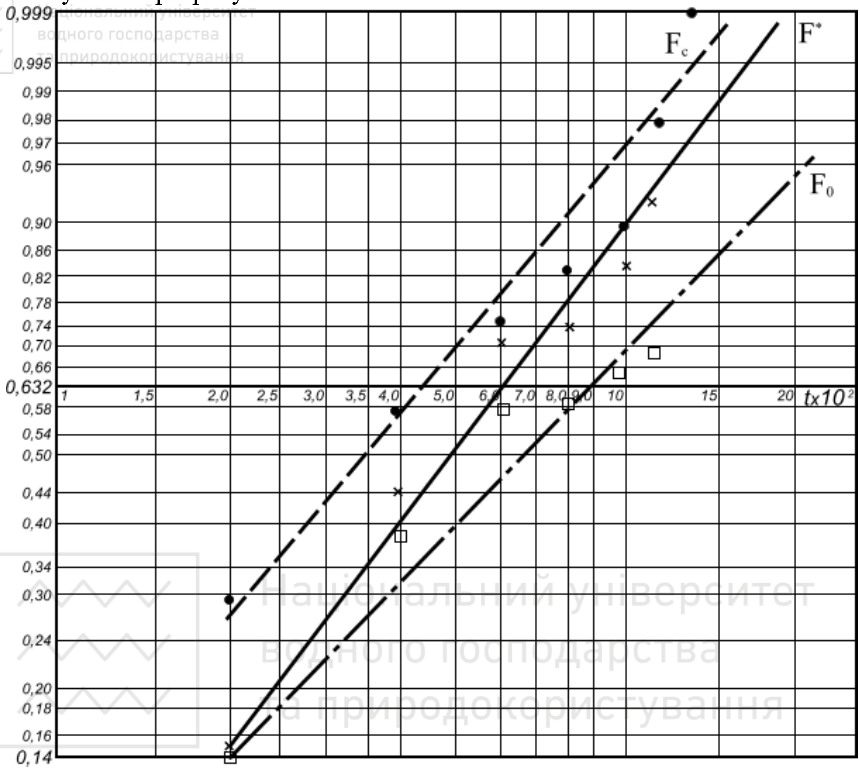


Рис. 2.3. Графіки для визначення параметрів функцій розподілу F_o, F_c, і $F*$

Визначаємо імовірність безвідмовної роботи в першому інтервалі

$$R_1 = 1 - \frac{7}{46} = 0{,}848 .$$

Умовна імовірність безвідмовної роботи $\tilde{R}_2$ у другому інтервалі складає

$$\tilde{R}_2 = 1 - \frac{12}{34} = 0{,}647 .$$

Безумовна імовірність безвідмовної роботи R_2 визначається як добуток

$$R_2 = 0{,}848 \cdot 0{,}647 = 0{,}549 .$$

Умовна імовірність $\tilde{R}_3$ у третьому інтервалі

$$\tilde{R}_3 = 1 - \frac{10}{20{,}5} = 0{,}512 .$$

Безумовна імовірність R_3 у третьому інтервалі

$$R_3 = 0{,}549 \cdot 0{,}512 = 0{,}281.$$

Результати розрахунків імовірності безвідмовної роботи R_i, для всіх інтервалів до шостого (у якому зафіксовані останні відмови) наведені в табл. 2.4.

Визначаємо значення відновленої емпіричної функції розподілу в кожному інтервалі:

$$F_1{*} = 1 - 0{,}848 = 0{,}152;$$

$$F_2{*} = 1 - 0{,}549 = 0{,}451;$$

$$F_3{*} = 1 - 0{,}281 = 0{,}719, \text{ і т. д.}$$

Результати заносимо в табл. 4.4, наносимо їх на імовірнісний листок, будуємо графік відновленої функції $F*$ (рис. 2.3) і визначаємо її параметри:

$a_в = 600$ годин; $b_в = 1{,}3 \cdot 1{,}37 = 1{,}8$.

Визначаємо середній ресурс:

$$T_в = 600 \cdot Г\left(1 + \frac{1}{1{,}8}\right) = 534 \text{ години.}$$

Визначаємо 80%-ий ресурс:

$$t_{80}^{в} = 600 \cdot \left(\ln \frac{100}{80}\right)^{1/1{,}8} = 261 \text{ година.}$$

Визначаємо похибки оцінки показників надійності за цензурованою вибіркою даних:

- за середнім ресурсом:

$$\Delta_T = \frac{|519 - 534|}{519} \cdot 100\% = 2{,}9\%;$$

- за 80%-м ресурсом:

$$\Delta_{t_{80}} = \frac{|240 - 261|}{240} \cdot 100\% = 8{,}8\%.$$

Із отриманих результатів маємо, що при скороченні тривалості випробувань у середньому на 24% вдалося оцінити показники довговічності випробовуваних деталей з досить високою точністю.

Тема 3 «ОБРОБКА СТАТИСТИЧНИХ ДАНИХ З ОЦІНКИ НАДІЙНОСТІ»

Теоретичні відомості

1. Оцінка достовірності результатів експерименту на надійність

Результати експерименту не можуть бути точними і завжди в собі містять деяку експериментальну похибку. Величина помилки виміру характеризується величиною абсолютної і відносної похибки.

Абсолютна помилка (похибка) *Δ* являє собою різницю між вимірюваним $x_в$ і істинними X значеннями вимірювальної величини x

$$\Delta = x_в - X \qquad (3.1)$$

Більш наочно експериментальна похибка характеризується відносною похибкою виміру δ_x

$$\delta_x = \frac{\Delta_{max}}{X} \cdot 100\% \qquad (3.2)$$

У математичній статистиці для визначення точності й надійності математичного сподівання m_x і дисперсії $D(X)$ користуються довірчими інтервалами й довірчими ймовірностями.

Довірчим інтервалом для певного параметру генеральної сукупності називається такий числовий інтервал, в межах якого знаходиться цей параметр. Ймовірність, з якою довірчий інтервал покриє істинне значення параметра, називається довірчою ймовірністю або рівнем надійності.

Імовірність того, що математичне очікування знайдене з помилкою, що не перевищує деяку величину Δ, можна представити в такому вигляді:

$$P(m_x - \Delta < m_x < m_x + \Delta = \beta \qquad (3.3)$$

тобто невідоме значення m_x із імовірністю β накривається інтервалом

$$I_{\beta m} = (m_x - \Delta; m_x + \Delta) \qquad (3.4)$$

де $\tilde{m}_x$ – точкова оцінка математичного сподівання випадкової величини X, тобто значення математичного сподівання при обмеженій кількості дослідів; Δ - помилка, що виникає при визначенні математичного сподівання, якщо кількість дослідів обмежена.

Імовірність β називають довірчою ймовірністю, а інтервал $I_{\beta m}$ – довірчим інтервалом.

Помилку Δ при наближеній оцінці представляють як

$$\Delta = t_\beta \sigma_m \qquad (3.5)$$

де t_β – величина , яка дорівнює для нормального закону кількості середніх квадратичних значень σ_m , яке потрібно відкласти вправо й вліво від центру розсіювання для того, щоб імовірність влучення в отриману ділянку була рівна β; σ_m - середнє квадратичне відхилення математичного сподівання

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{D_x}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - m_x)^2}{n(n-1)}} \qquad (3.6)$$

Для точного знаходження довірчих інтервалів необхідно заздалегідь знати вид закону розподілу величини X. Якщо випадкова величина розподілена за нормальним законом, то довірчі інтервали для математичного сподівання можна представити в такому вигляді:

$$I_{\beta m} = \left(m_x - t_\beta \sqrt{D(X)/n}; m_x + t_\beta \sqrt{D(X)/n}\right) \qquad (3.7)$$

де $t_\beta = f(n\text{-}1; \beta)$ – параметр розподілу Стьюдента, який визначається залежно від двосторонньої довірчої ймовірності β та *n-1*; *n* - кількість дослідів.

Значення довірчої ймовірності обирає дослідник залежно від того, яку ступінь точності розрахунків вимагає дослідження. Зазвичай це значення знаходиться в інтервалі від 0,9 до 0,999. Якщо вимоги точності дуже високі, то для довірчої ймовірності обирається значення 0,999; якщо підвищенні – 0,99; звичайні – 0,95; знижені 0,9. Виходячи з економічних або інших міркувань значення довірчої ймовірності може прийматись і на рівні 0,8. Довірчі інтервали розраховуються з урахуванням певних вимог до генеральної сукупності. Зазвичай це вимога нормального розподілу її даних.

При визначені показників надійності й, особливо, при подальшому прогнозуванні їхньої мінливості з побудовою модельних залежностей важливо мінімізувати вплив «грубих» похибок (появу аномальних числових значень).

Якщо експериментатор отримав вибірку з невеликим обсягом (n<25), то можна визначити максимальне відносне відхилення

$$\frac{x_{max(min)} - x}{S_x} \le \tau_{1-p} \qquad (3.8)$$

де $x_{\max(\min)}$– крайній (найбільший або найменший) елемент вибірки, по якій підраховувалися x, x і S_x:

$$x = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n} \text{ (n - кількість вимірів);} \qquad (3.9)$$

$$S_x = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x)^2} \text{ при n≤20;} \qquad (3.10)$$

$$S_x = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x)^2} \text{ при n>20} \qquad (3.11)$$

де τ_{1-p} – табличне значення статистики для τ, яке обчислене при довірчій імовірності $q=1-p$.

Таким чином, для подальшого вилучення аномального значення обчислюють величину максимального відносного відхилення τ_{max} і порівнюють його з табличним τ_{1-p}. Таким чином, якщо нерівність $\tau \le \tau_{1-p}$ дотримується, то спостереження не виключаються з вибірки, якщо не дотримується, то спостереження відсівають. На практиці, звичайно, використовують рівень значущості *p=0.05*, результат виходить із 95% довірчою ймовірністю. Процедуру відсіювання можна повторити і для наступного (по абсолютній величині) максимального відносного відхилення, але попередньо необхідно перерахувати x і S_x для вибірки нового обсягу *n-1*.

2. Оцінка достовірності різниці між групами за критерієм Фішера.

Критерій Фішера дозволяє порівнювати величини вибіркових дисперсій двох незалежних вибірок. Для обчислення необхідно знайти відношення дисперсій двох вибірок, причому так, щоб більша за величиною дисперсія знаходилась би в чисельнику, а менша – у знаменнику.

Формула обчислення критерія Фішера:

$$F_{\text{емп}} = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2} \tag{3.12}$$

де σ_x^2, σ_y^2 дисперсії першої та другої вибірки відповідно.

Так як, за умовою критерія, величина чисельника повинна бути більша або рівна величині знаменника, то значення $F_{\text{емп}}$ завжди буде більше або рівна одиниці.

Число степенів свободи $k_1 = n_1 - 1$ для першої вибірки (тобто для тієї вибірки, величина дисперсії якої більша) і $k_2 = n_2 - 1$ для другої вибірки (n_1, n_2 - відповідно, кількість експериментальних значень у першій та другій вибірці).

Критичні значення критерію Фішера $F_{\text{таб}}$ знаходяться за величинами k_1 (верхній рядок таблиці) та k_2 (лівий стовбець таблиці).

Якщо $t_{\text{емп}} > t_{\text{крит}}$, то нульова гіпотеза приймається, в іншому випадку приймається альтернативна (тобто, різниця в однорідності двох вибірок суттєва або є несуттєвою).

Середньоквадратичне відхилення у вибірках визначається

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{(x-x_i)^2}{n_1-1}}, \sigma_2 = \sqrt{\frac{(y-y_i)^2}{n_2-1}} \tag{3.13}$$

де x, y - середні арифметичні значення по групах;

n_1, n_2 - кількість вимірів в групах;

3. Встановлення коефіцієнта кореляції

Кореляція- це статистична залежність між величинами.

Коефіцієнт кореляції знаходимо за формулою:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i-X)(Y_i-Y)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i-X)^2 \cdot \sum_{i=1}^{n}(Y_i-Y)^2}} \tag{3.14}$$

Приклад 1

Визначити експериментальну похибку при проведенні досліджень, якщо відомо, що за результатами досліджень ми отримали 10, 12, 13, а істинне значення величини дорівнює 11.

Перевірити експериментальні дані на аномальність.

Розв'язок

Знайдемо абсолютну похибку

$$\Delta_1 = x_{\text{в}} - X = 10 - 11 = -1$$
$$\Delta_2 = x_{\text{в}} - X = 12 - 11 = 1$$
$$\Delta_3 = x_{\text{в}} - X = 13 - 11 = 2$$

Тоді експериментальна похибка буде рівна:

$$\delta_x = \frac{\Delta_{max}}{X} \cdot 100\% = \frac{2}{11} \cdot 100\% = 18{,}2\%$$

З таблиці встановлюємо значення $\tau_{1-0{,}05} = 1{,}41$ і порівнюємо з максимальним значенням $\tau_{max,3} = 2$. Так як $\tau \succ \tau_{1-p}$, то третє значення дослідних даних відсіваємо (вибраковуємо).

Приклад 2

Знайти критерій Фішера системи, якщо вона складається з двох груп по 3 виміри в кожній, і встановити однорідність цих вибірок.

x	4	8	5	7
y	12	11	8	10

Розв'язок

Знайдемо середнє квадратичне відхилення першої групи

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{(x - x_i)^2}{n_1 - 1}} = \sqrt{\frac{(8-4)^2 + (8-8)^2 + (8-5)^2 + (8-7)^2}{4-1}} = 2.89$$

Другої групи

$$\sigma_2 = \sqrt{\frac{(y - y_i)^2}{n_2 - 1}}$$

$$= \sqrt{\frac{(13{,}67-12)^2 + (13{,}67-11)^2 + (13{,}67-8)^{20} + (13{,}67-10)^2}{4-1}} = 3{,}74$$

Критерій Фішера знаходимо за формулою:

$$F_{\text{емп}} = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2} = \frac{3.74}{2.89} = 1.30$$

Табличне критичне значення критерія Фішера знаходимо з довідника $F_{\text{таб}} = 9.28$. Так як $F_{\text{емп}} = 1.30 < F_{\text{таб}} = 9.28$, то вибірки є однорідними.

Приклад 3

Знайти коефіцієнт кореляції, якщо маємо такі статистичні дані:

X	9	12	10	9
Y	20	19	19	22

Розв'язок

Коефіцієнт кореляції визначаємо за формулою (3.14):

Знайдемо середні арифметичні значення:

$$X = \frac{9 + 12 + 10 + 9}{4} = 10$$

$$Y = \frac{20 + 19 + 19 + 22}{4} = 20$$

Розрахунок робимо в табличній формі

№ з/п	$X_i - X$	$Y_i - Y$	$(X_i - X)^2$	$(Y_i - Y)^2$	$(X_i - X)(Y_i - Y)$
1	-1	0	1	0	0
2	2	-1	4	1	-2
3	0	-1	0	1	0
4	-1	2	1	4	-2
Сума			6	6	-4

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - X)(Y_i - Y)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i - X)^2 \cdot \sum_{i=1}^{n}(Y_i - Y)^2}} = \frac{-4}{\sqrt{6 \cdot 6}} - 0.67$$

ТЕМА 4 «ОЦІНКА І ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ НАДІЙНОСТІ ВОДОГОСПОДАРСЬКИХ СИСТЕМ НА СТАДІЇ ТЕХНІЧНОЇ ЕКСПЛУАТАЦІЇ»

Теоретичні відомості

Об'єкт, для якого проведення заходів з технічної експлуатації передбачено в нормативно-технічній або конструкторській документації, називається таким, що підлягає ремонту.

Для ремонтованих об'єктів знаходять застосування наступні показники надійності:

- середній наробіток на відмову T_o;

- середній час відновлення працездатного стану $T_в$;

- коефіцієнт готовності $K_г$.

Перший показник надійності характеризує безвідмовність об’єкта і може бути визначений як відношення повної тривалості роботи об’єкта $\sum_{i=1}^{n_0} t_{oi}$ до повної кількості зареєстрованих відмов n_o:

$$T_o = \frac{\sum_{i=1}^{n_0} t_{oi}}{n_o}; \tag{4.1}$$

Другий показник характеризує ремонтнопридатність об’єкта; його визначають як відношення сумарного часу, затраченого на відновлення $\sum_{i=1}^{n_0} t_{вi}$, до загального числа відновлень, чисельно рівних кількості виниклих відмов n_o:

$$T_в = \frac{\sum_{i=1}^{n_0} t_{вi}}{n_o} \tag{4.2}$$

Коефіцієнт готовності $K_г$ - комплексний показник надійності. Він кількісно характеризує властивості як безвідмовності об'єкта, так і ремонтопридатності, і визначається як імовірність того, що об'єкт виявиться в працездатному стані в довільний момент часу:

$$K_г = \frac{T_o}{T_o + T_в} \tag{4.3}$$

Надійність водогосподарської системи залежить від її структури. Більшість складових ВГС - це підсистеми з послідовною структурою, при якій відмова підсистеми настає в випадку відмови будь-якого її елемента.

Вид такої структури з трьох елементів представлений на рис. 4.1. У цьому випадку говорять про послідовне з'єднання елементів у системі, а імовірність безвідмовної роботи системи при незалежних відмовах елементів визначають за формулою:

$$R_c = R_1 \cdot R_2 \cdot R_3 \,. \tag{4.4}$$

Де R_1, R_2, R_3 - імовірності безвідмовної роботи елементів.

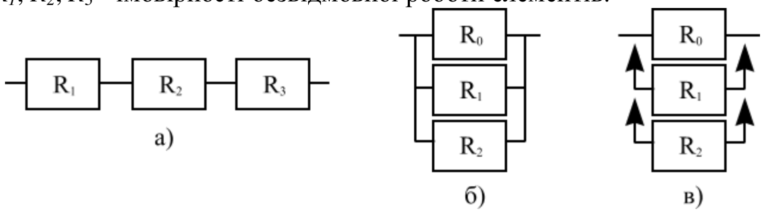


Рис. 4.1. Структурні схеми з трьох елементів: а) послідовне з'єднання; б) паралельне з'єднання (постійне резервування); в) резервування заміщенням.

У випадку незалежності відмов імовірність безвідмовної роботи системи з паралельним з'єднанням трьох елементів (рис. 4.1, б) визначається за формулою

$$R_c = 1-(1-R_0)\cdot(1-R_1)\cdot(1-R_2) \tag{4.5}$$

де R_0, R_1 і R_2 - імовірності безвідмовної роботи основного і резервного елементів.

В мобільних машинах постійне резервування використовується значно рідше, ніж резервування заміщенням. При резервуванні заміщенням середній наробіток до відмови системи, що складається з одного основного (працюючого) і K таких же резервних елементів, визначається за формулою

$$T_c = (1+K)\cdot T_e \tag{4.6}$$

де T_e - середній наробіток до відмови елемента.

Середнє квадратичне відхилення σ_c наробітку до відмови цієї системи визначається за виразом

$$\sigma_c = \sigma_e \cdot \sqrt{1+K} \tag{4.7}$$

де σ_e - середнє квадратичне відхилення наробітку до відмови елемента.

З (4.6) і (4.7) випливає, що коефіцієнти варіації наробітку до відмови системи v_c і елемента v_e при резервуванні заміщенням зв'язані співвідношенням:

$$v_c = \frac{v_e}{\sqrt{1+K}} \,. \tag{4.8}$$

При розподілі наробітку до відмови системи за законом Вейбулла його параметр форми b_c однозначно визначається величиною коефіцієнта варіації v_c. Ця залежність при $0{,}1 < v_c < 1$ з достатньою для практичного використання точністю описується наближеним виразом:

$$b_c = \frac{1,126}{v_c} + \frac{0,011}{v_c^2} - 0,137\,, \tag{4.9}$$

звідки (з врахуванням 4.8) випливає, що

$$b_c = \frac{1,126}{v_e}\sqrt{1+K} + \frac{0,011}{v_c^2}(1+K) - 0,137 \tag{4.10}$$

Параметр масштабу розподілу наробітку до відмови системи, виходячи з (46..6) визначається по формулі:

$$a_c = \frac{T_c}{\Gamma\left(1+\frac{1}{b_c}\right)} = \frac{(1+K)\cdot T_e}{\Gamma\left(1+\frac{1}{b_c}\right)} \tag{4.11}$$

При зроблених припущеннях імовірність безвідмовної роботи системи з одного працюючого і K резервних (запасних) елементів, що включаються послідовно в роботу при настанні відмови на заданому інтервалі наробітку T, визначається за виразом

$$R_c(T) = \exp\left\{-\left[\frac{T\cdot\Gamma\left(1+\frac{1}{b_c}\right)}{T_e(1+K)}\right]^{b_c}\right\} \tag{4.12}$$

у якому параметр b_c визначається за формулою (4.10).

Імовірність безвідмовної роботи елемента $R_e(T)$ на інтервалі T можна також визначати по формулі (4.12). Поклавши в ній K=0, одержимо вираз:

$$R_e(T) = \exp\left\{-\left[\frac{T\cdot\Gamma\left(1+\frac{1}{b_e}\right)}{T_e}\right]^{b_e}\right\} \tag{4.13}$$

в якому параметр форми b_e відповідно до (4.10) визначається за формулою:

$$b_e = \frac{1,126}{v_e} + \frac{0,011}{v_c^2} - 0,137 \tag{4.14}$$

Величина $R_c(t)$ визначає імовірність того, що за період T не наступить стан, при якому подальше відновлення працездатності системи стане вже неможливим через відсутність резервних елементів. Імовірність того, що в будь-який момент часу система не буде знаходитися в стані відновлення при наявності резервних елементів, визначається величиною коефіцієнта готовності $K_г$.

Імовірність того, що ще не витрачені резервні елементи і система не знаходиться в стані відновлення, визначається добутком зазначених вище імовірностей і є комплексним показником надійності резервованих способом заміщення систем, що називають коефіцієнтом оперативної готовності $K_{ог}(T)$:

$$K_{ог}(T) = K_г \cdot R_c(T) \,. \tag{4.15}$$

Величина цього показника відповідає заданому інтервалу часу роботи T, зі збільшенням якого коефіцієнт оперативної готовності монотонно зменшується. За його допомогою можна визначити середнє число працездатних машин до кінця періоду *T*:

$$N_p(T) = N \cdot K_{ог}(T)$$

де *N* - загальна кількість машин.

Послідовність розв’язування задачі.

Вихідні статистичні дані про наробіток між відмовами t_i і часу відновлення $t_{вi}$ системи (машини), що складається з трьох умовних елементів (агрегатів) із послідовним з'єднанням (рис. 4.1. а) вибирають із табл. 4.1. Вони повинні містити задану кількість наробітків системи між відмовами t_i, і таку ж кількість значень часу відновлення $t_{вi}$.

Далі, використовуючи обрані статистичні дані, за формулами (4.1), (4.2) і (4.3) визначають показники надійності системи: середній наробіток на відмову T_0, середній час відновлення $T_в$, і коефіцієнт готовності $K_г$. Коефіцієнт готовності $K_г$ припускає можливість необмеженого числа відновлень (або запасних елементів).

На наступному етапі проводять оцінку надійності системи на заданий період часу *T* у випадку, коли число можливих відновлень обмежено кількістю наявних резервних елементів. Вихідні дані для такої оцінки вибирають з табл. 4.2.

Таблиця 4.1

Статистичні дані про наробітки між відмовами і часу відновлення системи

№	Наробіток між відмовами t_{oi}, годин					Час відновлення $t_{вi}$, годин				
0	41	20	97	104	53	2,1	2,4	8,6	5,6	4,3
1	88	76	302	176	12	6,3	7,0	2,3	2,8	8,2
2	34	84	168	28	96	5,5	3,6	7,0	5,0	3,7
3	205	72	28	136	173	3,4	5,4	10,2	3,3	4,7
4	44	80	35	192	306	2,5	5,6	6,4	6,9	7,7
5	67	224	111	260	79	1,3	3,4	10,2	2,2	3,9
6	93	224	319	188	56	1,9	4,9	2,8	5,8	12,1
7	133	216	107	32	39	7,5	3,4	9,4	1,5	11,0
8	84	360	148	248	16	3,5	1,1	13,4	3,9	8,7
9	37	112	49	196	201	6,6	1,8	1,6	11,6	5,4

Таблиця 4.2

Вихідні дані про надійність об’єктів

№ п/п	Коефіцієнти варіації наробітку до відмови			Середні наробітки до відмови, годин		
	v_{e1}	v_{e2}	v_{e3}	T_{e1}	T_{e2}	T_{e3}
0	0,4	0,5	0,6	200	500	300
1	0,5	0,4	0,7	400	200	300
2	0,6	0,5	0,8	500	400	200
3	0,4	0,7	0,5	200	300	500
4	0,5	0,8	0,4	400	500	200
5	0,6	0,4	0,7	300	200	400
6	0,4	0,6	0,8	500	300	200
7	0,5	0,6	0,8	300	500	400
8	0,6	0,4	0,5	500	200	400
9	0,8	0,4	0,7	200	400	500

За допомогою цих даних по формулі (4.14) визначають параметри b_{e1}, b_{e2}, b_{e3}, а потім по формулі (4.13) для заданого періоду T=100 годин визначають імовірності безвідмовної роботи елементів системи $R_{e1}(T)$, $R_{e2}(T)$, $R_{e3}(T)$ і по формулі (4.4) - імовірність безвідмовної роботи нерезервованої системи $R_{yc}(T)$.

Потім з урахуванням знайдених значень $R_{e1}(T)$, $R_{e2}(T)$, $R_{e3}(T)$ відбирають найбільш раціональні варіанти (не менше двох) резервування системи заміщенням за допомогою трьох резервних елементів зі схем, приведених на рис. 4.2 таким чином, щоб забезпечити максимальну імовірність безвідмовної роботи системи. Під час вибору раціональних варіантів резервування слід розглядати в першу чергу схеми, що забезпечують резервування найменш надійних елементів системи.

Для відібраних варіантів схем, використовуючи формули (4.4) і (4.5), розраховують величини імовірності безвідмовної роботи системи, спочатку вважаючи, що резервні елементи утворять паралельне з'єднання з основними (постійне резервування). Порівнюючи альтернативні варіанти схем, вибирають остаточний варіант із найбільшою імовірністю безвідмовної роботи системи з постійним резервуванням і потім за формулами (4.10), (4.12) і (4.4) для обраного варіанта схеми резервування визначають імовірність безвідмовної роботи системи $R_c(T)$ при резервуванні заміщенням. Цей показник характеризує надійність системи при миттєвій заміні елементів, що відмовили - резервними.

За формулою (4.15) розраховують коефіцієнт оперативної готовності $K_{ог}(T)$, що враховує реальний час заміни елементів і обмеженість їх числа, і будують графіки зміни $K_{ог}(T)$ і $R_c(T)$ при збільшенні T. За графіком функції $K_{ог}(T)$ визначають період роботи $\tilde{T}$, що відповідає заданому значенню коефіцієнта оперативної готовності $\tilde{K}_{ог}$.

Приклад

Таблиця 4.3

Вихідні дані до розрахунку коефіцієнта готовності

Напрацювання											
Наробіток між відмовами t_{oi}, годин	41	76	168	136	306	67	244	107	248	201	$\sum t_i = 1594$
Час відновлення t_{ei}, годин	2,1	7,0	5,0	4,7	3,6	3,4	6,9	10,2	5,8	1,8	$\sum t_{ei} = 50{,}5$

Розв'язок

Відповідно до формул (4.1), (4.2), (4.3):
середній наробіток на відмову системи

$$T_o = \frac{\sum_{i=1}^{n_0} t_i}{n_o} = \frac{1594}{10} = 159{,}4 \text{ години;}$$

середній час відновлення

$$T_e = \frac{\sum_{i=1}^{n_0} t_{ei}}{n_o} = \frac{50{,}5}{10} = 5{,}05 \text{ годин}$$

Коефіцієнт готовності

$$K_г = \frac{T_o}{T_o + T_e} = \frac{159{,}4}{159{,}4 + 5{,}05} = 0{,}969 \cdot$$

Таблиця 4.4

Вихідні дані та результати розрахунків імовірності безвідмовної роботи елементів

№ елемента	T_e, год	v_e	b_e	$\Gamma\left(1+\frac{1}{b_e}\right)$	$R_e(100)$
1	450	0,5	2,16	0,8856	0,9706
2	200	0,7	1,49	0,9033	0,7364
3	400	0,6	1,77	0,8900	0,9324

Імовірність безвідмовної роботи нерезервованої системи

$$R_{нс}(100) = 0{,}9706 \cdot 0{,}7364 \cdot 0{,}9324 = 0{,}6664 \,.$$

Альтернативні варіанти постійного резервування

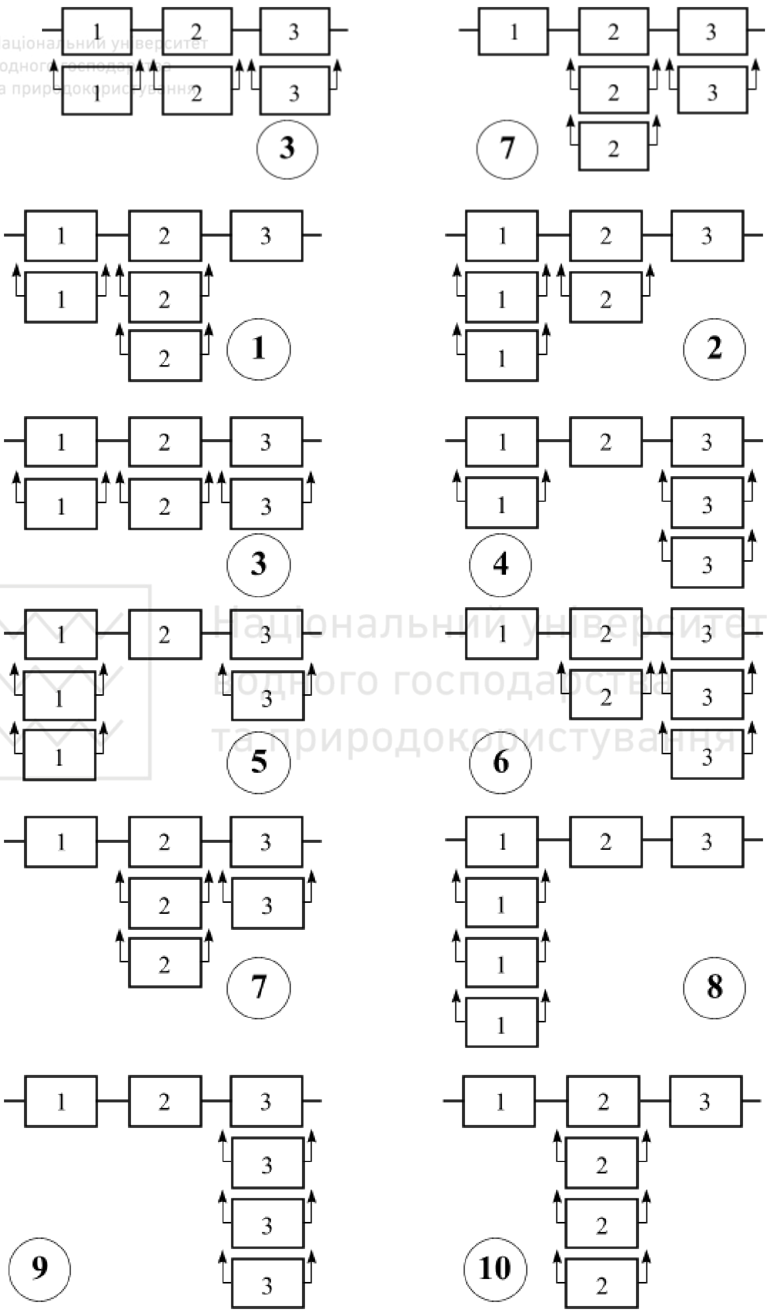


Рис. 4.2. Варіанти резервування елементів у системі

Імовірність безвідмовної роботи за варіантом 3:

$$R_{C1} = 1 - (1 - 0{,}9706)^2 = 0{,}9991;$$

$$R_{C2} = 1 - (1 - 0{,}7364)^2 = 0{,}9305;$$

$$R_{C3} = 1 - (1 - 0{,}9324)^2 = 0{,}9954;$$

$$R_C^* = 0{,}9991 \cdot 0{,}9305 \cdot 0{,}9954 = 0{,}9254.$$

Імовірність безвідмовної роботи за варіантом 7:

$$R_{C2} = 1 - (1 - 0{,}7364)^3 = 0{,}9817;$$

$$R_C^* = 0{,}9706 \cdot 0{,}9817 \cdot 0{,}9954 = 0{,}9485.$$

Для варіанту 7, у якого R_C^* вище, розраховуємо імовірність безвідмовної роботи при резервуванні заміщенням.

Для другого елемента при *К*=2 по формулі (4.10) визначаємо параметр форми:

$$b_2 = \frac{1{,}126}{0{,}7}\sqrt{3} + \frac{0{,}011}{0{,}49} \cdot 3 - 0{,}137 = 2{,}72.$$

Значення гамма-функції з таблиці (додаток 1):

$$\Gamma\left(1 + \frac{1}{2{,}72}\right) = 0{,}8893.$$

Імовірність безвідмовної роботи з формули (4.12):

$$R_{c2}(100) = \exp\left\{-\left[\frac{100 \cdot 0{,}8893}{200 \cdot 3}\right]^{2{,}72}\right\} = 0{,}9945.$$

Для третього елемента при *К*=1 маємо

$$b_3 = \frac{1{,}126}{0{,}6}\sqrt{2} + \frac{0{,}011}{0{,}36} \cdot 2 - 0{,}137 = 2{,}58;$$

$$\Gamma\left(1 + \frac{1}{2{,}58}\right) = 0{,}8879;$$

$$R_{c2}(100) = \exp\left\{-\left[\frac{100 \cdot 0{,}8879}{400 \cdot 2}\right]^{2{,}58}\right\} = 0{,}9966.$$

Імовірність безвідмовної роботи системи при *Т* = 100 годин:

$$R_c(100) = 0{,}9706 \cdot 0{,}9945 \cdot 0{,}9966 = 0{,}962.$$

Коефіцієнт оперативної готовності

$$K_{ог}(100) = 0{,}969 \cdot 0{,}962 = 0{,}9322$$

Величини R_c і $K_{ог}$ при значеннях *Т* = 150 годин і *Т* = 200 годин розраховуємо аналогічно і заносимо в табл. 4.5.

Таблиця 4.5

Результати розрахунків R_c і $K_{ог}$ до прикладу

T, год	0	100	150	200
R_{c1}	1	0,9706	0,9308	0,8751
R_{c2}	1	0,9945	0,9834	0,9640
R_{c3}	1	0,9966	0,9903	0,9796
R_c	1	0,9620	0,9065	0,8264
$K_{ог}$	0,969	0,9322	0,8784	0,8008

Будуємо графіки R_c і $K_{ог}$ у функції T и визначаємо період роботи, що відповідає заданому значенню $\tilde{K}_{ог} = 0{,}9$: T = 130 год (рис. 4.3). На графіку наносимо постійний рівень $K_г = 0{,}969$.

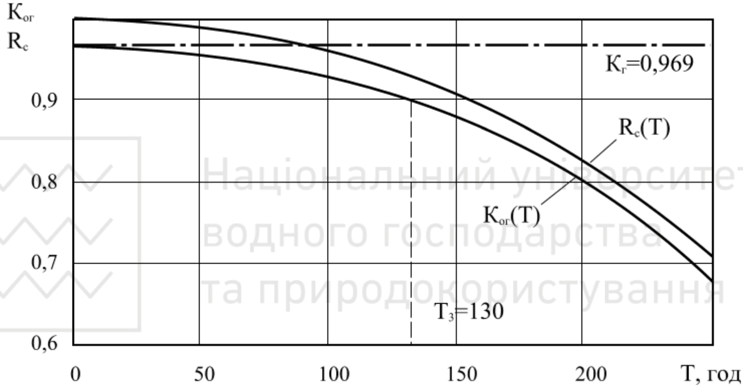


Рис. 4.3. Графіки імовірності безвідмовної роботи системи і коефіцієнта оперативної готовності.

Одержані показники комплексно характеризують надійність системи, що ремонтується.

При виконанні практичної роботи вибрати вихідні дані з таблиць 4.1 і 4.2 (по рядках) і використовувати варіанти резервування з рис. 4.2.

Література

1. Анілович В. Я., Грінченко О. С., Литвиненко В. Л. Надійність машин в завданнях та прикладах / За редакцією В. Я. Аніловича. Харків: Око, 2001. 320 с.

2. Науменко І. І. Оцінки надійності водогосподарських об'єктів : монографія. Рівне : НУВГП, 2006. 182 с.

3. Науменко І. І. Надійність споруд гідромеліоративних систем : навч. посібник для студентів спеціальностей «Гідромеліорація» та «Гідротехнічне будівництво». К. : ІСДО,1994. 424 с.

4. Сухарев Э.А. Общая теория капитального ремонта машин. Ровно : Ровенский гос. техн. ун-т, 2000. 202 с.

5. 01-02-113 Методичні вказівки до практичних занять та самостійної роботи із дисципліни «Надійність інженерних систем та споруд» для студентів спеціальності 263 «Цивільна безпека» освітньо-кваліфікаційного рівня «спеціаліст» та освітнього ступеня «магістр» всіх форм навчання / В. М. Кір'янов, І.Б. Дацишина. Рівне : НУВГП, 2016. 44 с.

6. 02-01-340 Методичні вказівки до виконання практичних робіт з дисципліни «Теорія експлуатаційної надійності машин» для студентів спеціальності 8.05050308 «Підйомно-транспортні, дорожні, будівельні, меліоративні машини і обладнання» денної та заочної форм навчання / М. В. Голотюк, В. Д. Кирикович. Рівне : НУВГП, 2015. 28 с.

Додаток 1

Значення гамма-функції Γ (x)

X	Γ(x)	X	Γ (x)	X	Γ(x)	X	Γ(x)
1,00	1,00	1,23	0,91	1,46	0,89	1,69	0,91
1,01	0,99	1,24	0,91	1,47	0,89	1,70	0,91
1,02	0,99	1,25	0,91	1,48	0,89	1,71	0,91
1,03	0,98	1,26	0,90	1,49	0,89	1,72	0,91
1,04	0,98	1,27	0,90	1,50	0,89	1,73	0,92
1,05	0,97	1,28	0,90	1,51	0,89	1,74	0,92
1,06	0,97	1,29	0,90	1,52	0,89	1,75	0,92
1,07	0,96	1,30	0,90	1,53	0,89	1,76	0,92
1,08	0,96	1,31	0,90	1,54	0,89	1,77	0,92
1,09	0,96	1,32	0,90	1,55	0,89	1,78	0,93
1,10	0,95	1,33	0,89	1,56	0,89	1,79	0,93
1,11	0,95	1,34	0,89	1,57	0,89	1,80	0,93
1,12	0,94	1,35	0,89	1,58	0,89	1,81	0,93
1,13	0,94	1,36	0,89	1,59	0,89	1,82	0,94
1,14	0,94	1,37	0,89	1,60	0,89	1,83	0,94
1,15	0,93	1,38	0,89	1,61	0,90	1,84	0,94
1,16	0,93	1,39	0,89	1,62	0,90	1,85	0,95
1,17	0,93	1,40	0,69	1,63	0,90	1,86	0,95
1,18	0,92	1,41	0,89	1,64	0,90	1,87	0,95
1,19	0,92	1,42	0,89	1,65	0,90	1,88	0,96
1,20	0,92	1,43	0,89	1,66	0,90	1,89	0,96
1,21	0,92	1,44	0,89	1,67	0,90	1,90	0,96
1,22	0,91	1,45	0,89	1,68	0,91	1,91	0,97
1,92	0,97	1,96	0,98	2,00	1,00	4,00	6,00
1,93	0,97	1,97	0,99	2,50	1,33		
1,94	0,98	1,98	0,99	3,00	2,00		
1,95	0,98	1,99	0,99	3,50	3,32		

Додаток 2

Значення квантилів нормального розподілу

α	U_{α}	α	U_{α}	α	U_{α}
0,50	0	0,68	0,486	0,86	1,080
0,51	0,025	0,69	0,496	0,87	1,126
0,52	0,050	0,70	0,524	0,88	1,175
0,53	0,075	0,71	0,553	0,89	1,226
0,54	0,100	0,72	0,583	0,90	1,282
0,55	0,126	0,73	0,613	0,91	1,341
0,56	0,151	0,74	0,643	0,92	1,405
0,57	0,176	0,75	0,674	0,93	1,476
0,58	0,202	0,76	0,706	0,94	1,555
0,59	0,228	0,77	0,739	0,95	1,645
0,60	0,253	0,78	0,772	0,96	1,751
0,61	0,279	0,79	0,806	0,97	1,8881
0,62	0,306	0,80	0,842	0,975	1,960
0,63	0,332	0,81	0,878	0,98	2,054
0,64	0,358	0,82	0,915	0,99	2,326
0,65	0,385	0,83	0,954	0,995	2,572
0,66	0,412	0,84	0,994	0,999	3,100
0,67	0,440	0,85	1,036		