

Кривцов В. В., к.т.н., доцент (Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне)

ПРО ДОЦІЛЬНІСТЬ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДЕЯКИХ ЗАДАЧ НАРИСНОЇ ГЕОМЕТРІЇ ЗА ДОПОМОГОЮ РОДИННИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ

В статті показано, як за допомогою родинних перетворень можна розв'язувати задачі з нарисної геометрії, коли точки або лінії перетину геометричних фігур знаходяться за межами креслення.

Ключові слова: нарисна геометрія, родинні перетворення, розв'язування задач.

Закріплення теоретичних положень нарисної геометрії відбувається під час розв'язування задач. Геометричні фігури, які входять в початкові умови задачі, можуть займати, в загальному випадку, довільне місце в просторі. В задачниках з нарисної геометрії завдання підібрано таким чином, що точки або лінії перетину геометричних фігур знаходяться переважно в межах креслення. Проте на практиці у більшості задач, що ґрунтуються на положеннях нарисної геометрії, зазначені перетини відбуваються за межами креслення.

В таких випадках розв'язок задачі традиційними способами є або неможливим, або дуже ускладнюється. Застосування родинних перетворень дозволяє стиснути задані геометричні фігури до таких розмірів, що їх перетин відбувається в межах креслення. Це дозволяє, по-перше, розв'язати задачу, яку традиційними способами вирішити було неможливо, по-друге, використати для перетворення фігур звичні способи, що значно спрощує розв'язок і робить більш точним його результат порівняно з розв'язком задачі без застосування родинних перетворень.

Покажемо на конкретних прикладах переваги застосування родинних перетворень при розв'язуванні задач з нарисної геометрії порівняно з традиційними способами, коли перетин геометричних фігур недоступний в межах креслення. Основні положення родинних перетворень, які є частковим випадком гомологічних перетворень, висвітлено в [1-3].

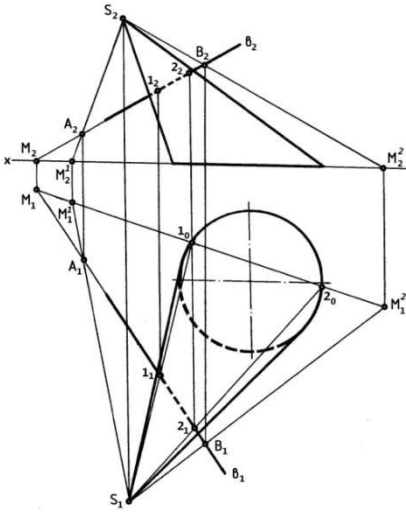


Рис. 1. Побудова точок 1 і 2 перетину прямої v з поверхнею конуса традиційним способом

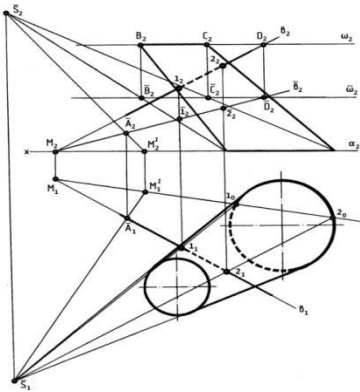


Рис. 2. Побудова точок 1 і 2 перетину прямої v з поверхнею конуса, у якого вершина недоступна, за допомогою родинних

На рис. 1 традиційним способом визначено точки 1 і 2 перетину прямої v з конічною поверхнею. Для цього через вершину S і пряму v проведено допоміжну площину, що задана або прямими SA та SB , або прямими SA і v (SB і v) за умови, що пряма v перетинає площину π_1 в межах креслення. В практичних задачах вершина конуса часто недоступна (рис. 2). Розв'язок такої задачі традиційними способами за допомогою, наприклад, січних площин веде до великої кількості побудов, що, в підсумку, зменшує точність отриманого результату. На рис. 2 побудови виконано за допомогою родинних перетворень, що дозволяє її розв'язування звести до рис. 1. Родинність задано горизонтальною площиною родинності α , що проходить через нижню основу конуса, горизонтальними родинними площинами ω і ω та напрямом подвійних прямих, перпендикулярних до цих площин. Перетворимо конус з верхньою основою, на якій лежать точки A і B , в конус з верхньою основою, що проходить через точки A і B . Нижня основа конуса розміщена в площині родинності, тому вона

перетворюється «сама в себе». Побудуємо вершину S перетвореного конуса та перетворимо пряму v в v . Точка M , що лежить в площині родинності, свого положення не змінює, а точка D перетворюється в родинну точку D . Після виконаних родинних перетворень розміщення

конуса з вершиною S і прямою σ , що перетинає поверхню перетвореного конуса, відповідає рис. 11. Проводячи через вершину S площину, що задана прямими σ і SA , знаходимо точки 1 і 2 перетину прямої σ з перетвореним конусом. Оскільки в результаті зазначених перетворень горизонтальні проекції фігур не змінили свого положення ($1_1 \equiv 1_1$ і $2_1 \equiv 2_1$), то фронтальні проекції 1_2 і 2_2 точок 1 і 2 перетину прямої σ з поверхнею конуса можна знайти за допомогою ліній проекційного зв'язку $1_2 - 1_1$ і $2_2 - 2_1$.

На рис. 3 показано визначення точок 1...4, що належать двом

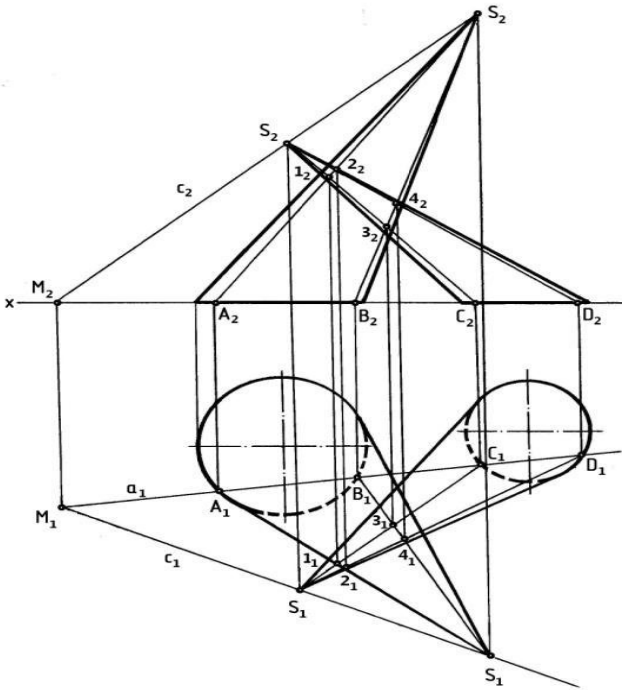


Рис. 3. Побудова спільних точок двох конічних поверхонь традиційним методом

конічним поверхням, традиційним методом за допомогою площини, яка задана прямими c і a . Пряма c проходить через вершини S^1 і S^2 конусів. Пряма a є горизонтальним слідом цієї площини і перетинає основи конусів. Через точку M можна провести стільки горизонтальних слідів інших допоміжних площин зі спільною прямою

c , скільки потрібно для побудови лінії перетину конусів. Якщо розміщення вершин конусів таке, що точка перетину прямої c з площиною π_1 (рис. 4) знаходиться за межами креслення, доцільно для зменшення кількості побудов застосовувати родинні перетворення. Проте спочатку потрібно провести одну з допоміжних площин. Для цього з вершини S^2 проводимо, наприклад, довільну пряму S^2M . Прямі c і S^2M визначають одну з допоміжних площин зі спільною прямою c .

Знаходимо лінію перетину цієї площини з площиною π_1 . Для цього через точку S^1 проводимо горизонталь h площини, що задана прямими c і S^2M , а через точку M паралельну до неї пряму h' . Пряма h' буде горизонтальним слідом ($h_1' \equiv h_1$) площини, що задана прямими c і S^2M . Якщо пряма h_1 перетинає основи конусів, то за її допомогою можна визначити спільні точки поверхонь двох конусів. Пряму h_1' разом з прямою c_1 можна використовувати для проведення інших горизонтальних слідів допоміжних площин зі спільною прямою c . Так, застосовуючи гомологічні трикутники I-II-III і IV-V-VI за способом, зображеним на рис. 7, можна побудувати пряму a_1 , що проходить через точки I і IV вершин цих трикутників і є горизонтальним слідом однієї з допоміжних площин зі спільною прямою c . Пряма a_1 разом з прямими h_1' і c_1 перетинаються в недоступній точці перетину прямої c з площиною π_1 . На рис. 4 за допомогою прямої a_1 визначено спільні точки 1...4 двох кінцевих поверхонь.

При розв'язуванні технічних задач часто зустрічаються кінчні поверхні, вершини яких розміщені за межами креслення (рис. 5). Розв'язування таких задач традиційними методами надзвичайно ускладнюється виконанням великої кількості графічних побудов.

Покажемо, як родинні перетворення значно полегшують розв'язування даної задачі, зводячи її розв'язок до умов задачі, показаної на рис. 3. Задамо родинність горизонтальною площиною α , що проходить через верхні основи конусів або утворює перерізи конусів, якщо їх поверхня не обмежується верхніми основами. Площини верхніх основ конусів паралельні до площини π_1 . Родинність задамо також горизонтальними родинними площинами ω і ω . Напрямок подвійних прямих (напрямок родинності) приймемо перпендикулярним до площин ω і ω . Конус з нижньою основою АВ перетворюється в конус з основою АВ, а конус з основою CD – в конус з основою CD. Верхні основи конусів лежать в площині родинності α і перетворюються «в самих себе», тобто не змінюють своїх розмірів та положення. Оскільки відстань від ω_2 до α_2 менша, ніж від ω_2 до α_2 , то

фронтальні проекції родинних конусів будуть стиснутими, тобто мати менші висоти, ніж в початковому положенні. Це дозволяє побудувати фронтальні проекції S_2^1 і S_2^2 родинних конусів в межах креслення, а, отже, і фронтальну проекцію c_2 прямої c . Фронтальні проекції

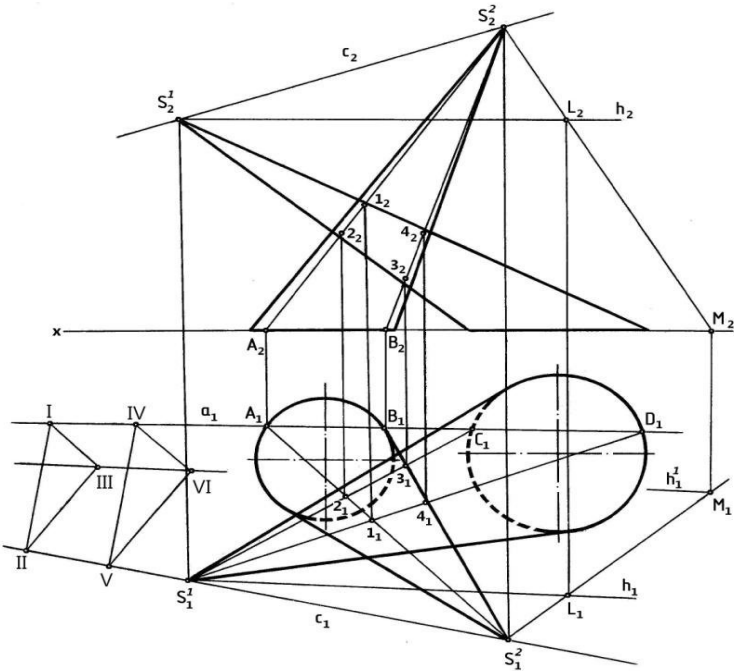


Рис. 4. Побудова спільних точок двох конічних поверхонь, коли пряма, що проходить через вершини конусів, не перетинає площину π_1 в межах креслення

родинних конусів будуть перевернутими, оскільки родинна площина ω знаходиться вище від родинної площини α . Далі знаходимо фронтальну проекцію P_2 точки P перетину прямої c з площиною верхніх основ конусів, через яку проведено площину родинності, причому $P_2 \equiv P_2$. Для того, щоб знайти горизонтальну проекцію P_1 точки P , задамо фронтальну площину родинності β та фронтальні родинні площини Δ і Δ , а також напрям подвійних прямих, перпендикулярний до площин Δ і Δ . Побудуємо за допомогою площин β і Δ горизонтальні проекції перерізів поверхонь конусів. Горизонтальними проекціями перерізів конусів з вершиною S^1 будуть

відрізки G_1N_1 і K_1L_1 , конуса з вершиною S^2 - відрізки E_1F_1 і M_1N_1 . Проведемо родинні перетворення, в результаті яких проєкції перерізів конусів переміщуються з площини Δ в площину $\bar{\Delta}$, тобто K_1L_1 перетворюється в $\bar{K}_1\bar{L}_1$, а M_1N_1 в $\bar{M}_1\bar{N}_1$. Оскільки розміри горизонтальних проєкцій родинних конусів

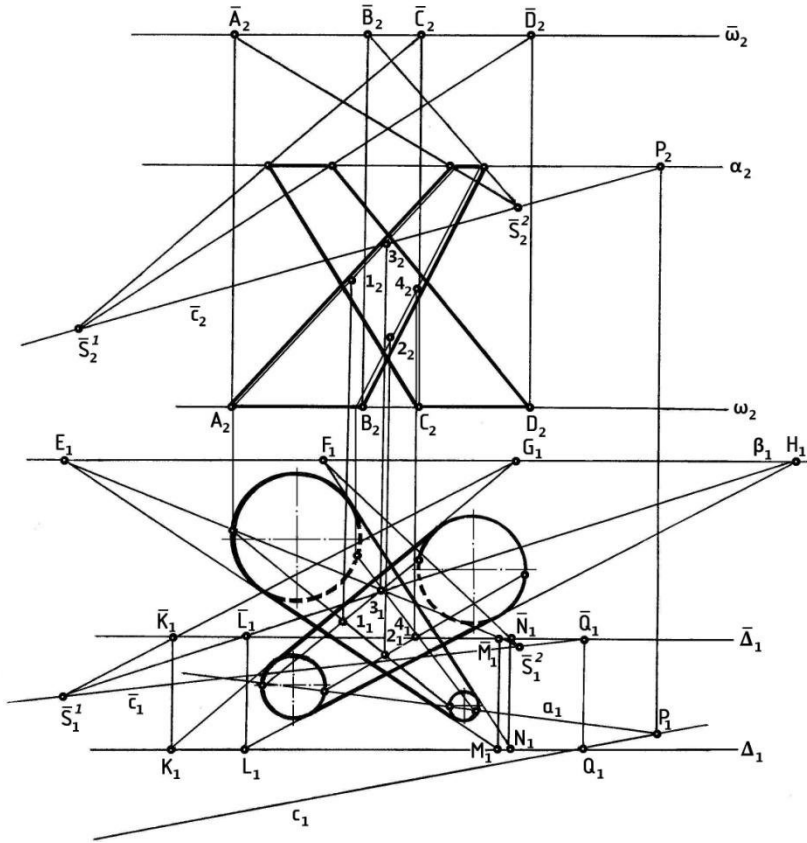


Рис. 5. Побудова спільних точок двох поверхонь зрізаних конусів за допомогою родинних перетворень

в результаті родинного перетворення зменшилися у напрямку, перпендикулярному до площини π_2 , вершини перетворених конусів проєкціюються на площину π_1 в межах креслення. Це точки S_1^1 і S_1^2 , через які проводимо пряму c_1 до перетину із слідом площини Δ_1 в точці Q_1 . Цій точці буде відповідати родинна точка Q_1 на сліді площини Δ_1 . Через цю точку буде проходити горизонтальна проєкція

c_1 прямої c , проведеної через вершини конусів. Пряму c_1 проводимо через точку Q_1 і точку S_1^2 , що є родинною проекцією точки S_1^2 . За допомогою лінії проекційного зв'язку, що проведена з точки P_2 на пряму c_1 , фіксуємо горизонтальну проекцію P_1 точки P перетину прямої c з площиною верхніх основ конусів. Через точку P_1 проводимо пряму a_1 до перетину з лініями основ верхніх конусів і визначаємо спільні точки 1...4 лінії перетину поверхонь двох конусів.

Наведені приклади показують, що застосування родинних перетворень дозволяє розв'язувати задачі з перетином геометричних фігур поза межами креслення за допомогою простих, зручних та звичних прийомів, це значно збільшує точність графічних побудов.

1. Четверухин Н. Ф. Проективная геометрия / Н. Ф. Четверухин. – М. : Просвещение, 1969. – 368 с.
2. Начертательная геометрия / Н. Ф. Четверухин, В. С. Левицкий, З. И. Прянишникова, А. М. Тевлин, Г. И. Федотов. – М. : Высш. школа, 1963. – 420 с.
3. Кузнецов Н. С. Начертательная геометрия / Н. С. Кузнецов. – М. : Высш. школа, 1969. – 501 с.

Krivtsov V. V., Engineering Sciences, Associate Professor (National University of Water Management and Nature Resorts Use, Rivne)

ABOUT THE EXPEDIENCY OF SOME PROBLEMS SOLVING IN PERSPECTIVE GEOMETRY BY MEANS OF FAMILY TRANSFORMATIONS

The article shows how to solve tasks in descriptive geometry with the help of related transformations, when points or intersection lines are outwith draught.

Keywords: descriptive geometry, related transformations, solution problems.