Инженеръ-Технологъ С. П. ШЕНБЕРГЪ.

Штатный преподаватель Кiевскаго Политехническаго Института
Императора Александра II.

ГИДРОМЕХАНИКА ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

и

ГИДРАВЛИЧЕСКIЯ ФРИКЦIОННЫЯ МАШИНЫ.

Въ двухъ частяхъ:

Часть I. Гидромеханика.
Часть II. Дисковыя машины.

Съ 20-ю фигурами и чертежами въ текстѣ.

КIЕВЪ.
Типографiя „С. В. Кульженко“, Пушкинская № 4.
1915.

Инженеръ-Технологъ С. П. ШЕНБЕРГЪ.

Штатный преподаватель Кіевскаго Политехническаго Института
Императора Александра II.

ГИДРОМЕХАНИКА ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

И

ГИДРАВЛИЧЕСКІЯ ФРИКЦІОННЫЯ МАШИНЫ.

Въ двухъ частяхъ:

Часть I. Гидромеханика.

Часть II. Дисковыя машины.

Съ 20-ю фигурами и чертежами въ текстѣ.

КІЕВЪ.
Типографія „С. В. Кульженко", Пушкинская № 4.
1915.

Предисловіе.

Вопросы о вредныхъ сопротивленіяхъ и разсѣяніи энергіи, являющіеся едва ли не самыми важными въ гидравликѣ, привели авторовъ, занимающихся ими и считающихся съ современнымъ состояніемъ этого отдѣла прикладной механики, къ использованію наиболѣе сложныхъ методовъ классической гидродинамики.

Эти вопросы, ввиду нѣкоторыхъ особенностей представляемыхъ ими, наталкиваютъ на рядъ непреодолимыхъ аналитическихъ трудностей, съ которыми чистые теоретики мирятся и оставляютъ ихъ въ сторонѣ, практикамъ же, нуждающимся въ ихъ рѣшеніи хотя-бы съ извѣстной точностью, приходится изыскивать приближенные способы рѣшенія поставленной задачи.

Не вдаваясь въ подробности мы напомнимъ, что движеніе жидкости подчиняется двумъ режимамъ, рѣзко другъ отъ друга отличающимся. Границу между ними, какъ извѣстно, установилъ англійскій ученый O. Reynolds, доказавъ своими классическими опытами надъ теченіемъ жидкости въ трубахъ существованіе такъ называемой „критической скорости", ниже которой теченіе жидкости „струйное" и подчиняется основнымъ уравненіямъ Navier, а выше — наступаетъ „турбулентное", неупорядоченное движеніе, для котораго французскій ученый Boussinesq ввелъ понятіе о „средней мѣстной скорости" потока.

Кореннымъ отличіемъ перваго рода теченій отъ второго является зависимость потерь, при струйномъ движеніи, отъ большей или меньшей вязкости жидкости, т. е. отъ степени проявляемаго ими внутренняго и внѣшняго тренія, между тѣмъ какъ турбулентное движеніе не прямо связано съ вязкостью и проявляется въ видѣ образованія вихрей, возникающихъ тѣмъ скорѣе, чѣмъ удобоподвижнѣе частицы жидкости; кромѣ того, при турбулентномъ режимѣ значительную роль играетъ вопросъ объ устойчивости движенія жидкости. Источникомъ вихрей въ данномъ случаѣ служатъ границы, двигаясь вдоль которыхъ жидкость получаетъ вихревое движеніе, распространяющееся вглубь ея. Работы въ этомъ направленіи L. Prandtl'я, а затѣмъ и H. Blasius'a K. Hiemenz'a, Káramán'a, H. Lorenz'a, Boltze и др. въ значительной мѣрѣ уясняютъ вопросъ.

Однако всѣ эти авторы, рѣшавшіе вопросъ о теченіи жидкости аналитически, исходятъ изъ основныхъ уравненій движенія, установленныхъ Navier на основаніи гипотезы Newton'а о внутреннихъ силахъ тренія въ несовершенной жидкости.

Такимъ образомъ, теорія струйнаго движенія вязкой жидкости ложится въ основу всей современной технической гидромеханики, пытающейся аналитически обосновать явленія турбулентнаго движенія.

Существующіе въ русской научной литературѣ курсы гидродинамики излагаютъ основы движенія вязкой жидкости съ нѣкоторыми недочетами, не допускаюшими пользованіе изложенной теоріей въ чисто практическихъ случаяхъ. Такъ, почти во всѣхъ, примѣрахъ, иллюстрирующихъ примѣненіе теоріи, скорости принимаются настолько малыми, что произведеніями и квадратами ихъ въ уравненіяхъ движенія можно пренебречь, между тѣмъ въ реальныхъ случаяхъ практики величина скоростей не допускаетъ пользованія этими приближенными уравненіями движенія.

Вопросъ о силахъ, дѣйствующихъ внутри вязкой жидкости, излагается такъ-же недостаточно полно: ограничиваются ссылкой на теорію упругости; между тѣмъ нѣкоторыя детали, какъ напр. вопросъ о давленіи, заслуживаютъ, какъ намъ кажется, болѣе внимательнаго отношенія.

Отсутствуютъ такъ же таблицы съ численными значеніями коэффиціентовъ для разныхъ жидкостей.

Имѣя ввиду указанныя обстоятельства, мы рѣшили изложить основы гидромеханики вязкой жидкости въ объемѣ, необходимомъ всякому желающему въ дальнѣйшемъ болѣе подробно ознакомиться съ работами, затрагивающими главнымъ образомъ, техническую сторону этой области и иллюстрировать ее нѣкоторыми примѣрами, имѣющими непосредственно прикладной характеръ.

Темой для примѣровъ избранъ вопросъ объ использованіи тренія жидкости какъ движущей силы или средства для ея перемѣщенія. Рѣчь идетъ о машинахъ, работающихъ треніемъ жидкости, т. е. о „гидравлическихъ фрикціонныхъ машинахъ", являющихся въ данномъ случаѣ аналогіей обычнымъ машинамъ, работающимъ треніемъ твердыхъ тѣлъ.

Этотъ вопросъ впервые обслѣдованъ экспериментально проф. Н. Е. Жуковскимъ на скороходной норіи (мы назвали ее „шнуровымъ насосомъ"), въ которой жидкость подается шнуромъ (или цѣпью) быстро движущимся вдоль оси трубы. Результаты своихъ опытовъ проф. Н. Е. Жуковскій сообщилъ V-му водопроводному съѣзду въ г. Кіевѣ въ 1901 г. Впослѣдствіи, въ 1912—1913 г.г. онъ вернулся къ этой темѣ, въ своемъ докладѣ XIII-му съѣзду естествоиспытателей и врачей въ г. Тифлисѣ въ 1913 г. подъ названіемъ: „Подача нефти помощью скороходной норіи". Къ сожалѣнію проф. Н. Е. Жуковскій до сихъ поръ не далъ какихъ-либо теоретическихъ соображеній о результатахъ своихъ опытовъ.

Въ 1911 г. американскій физикъ N. Tesla, использовавъ ту-же идею, примѣнилъ въ качествѣ рабочаго органа не шнуръ, а вращающіеся диски и построилъ на этомъ принципѣ паровую турбину и насосъ, по характеру работы соотвѣтствующіе современной паровой турбинѣ и центробѣжному насосу; эти машины названы нами „дисковыми“.

Задачи о шнуровомъ насосѣ и его обращеніи разобрана нами до конца и рѣшены съ точки зрѣнія струйной теоріи; такъ же точно и для дисковыхъ машинъ мы указали аналитическій путь рѣшенія задачи и дали окончательный результатъ для простѣйшаго частнаго случая.

Наша работа по существу касается лишь вопроса о струйномъ теченіи жидкости, но считаясь съ значительнымъ интересомъ, представляемымъ дисковыми машинами, а также и съ тѣмъ, что отвѣчающая дѣйствительности теорія дисковыхъ машинъ строится въ предположеніи турбулентнаго движенія, мы заканчиваемъ первую часть книги небольшой главой объ этомъ движеніи, содержащей самыя необходимыя свѣдѣнія по этому вопросу.

Вторая часть работы посвящена теоретическому изслѣдованію дисковыхъ машинъ и экспериментальному изслѣдованію одного изъ видовъ дисковыхъ машинъ—дисковаго насоса. Теорія этихъ машинъ, въ предположеніи турбулентнаго движенія, данная H. Lorenz'омъ, нами нѣсколько пополнена и исправлена; экспериментальное же изслѣдованіе дисковаго насоса, насколько намъ извѣстно, появляется въ технической литературѣ впервые.

Въ заключеніе укажемъ на нѣкоторые выводы и положенія, къ которымъ мы пришли въ нашей работѣ.

Интегралъ живыхъ силъ [(32) § 11], для неустановившагося движенія жидкости въ общемъ случаѣ, данъ съ добавочнымъ членовъ въ видѣ опредѣленнаго интеграла, зависящаго отъ скорости теченія *).

Совпаденіе главныхъ осей деформацій съ главными осями напряженій для однородной изотропной вязкой жидкости является слѣдствіемъ вывода выраженій для напряженій [(86) § 31], но не вводится какъ основная гипотеза для вывода этихъ выраженій.

Въ § 34 устанавливается понятіе объ обобщенномъ давленіи и подчеркивается существенная разница между истиннымъ гидрадинамическимъ давленіемъ въ вязкой жидкости и фиктивнымъ, входящимъ въ выраженія для напряженій.

Въ § 38 данъ полный выводъ общаго выраженія для разсѣянной энергіи (114, a).

Глава X даетъ преобразованіе всѣхъ основныхъ формулъ и уравненій къ цилиндрическимъ координатамъ.

---

*) Элементарный выводъ этого интеграла, для частнаго случая, можно найти у проф. Д. П. Рузскаго: „Гидравлика“. Кіевъ, 1910 г.

Глава XI §§ 51—58 представляетъ полную теорію шнурового насоса и его обращенія—шнурового двигателя.

Въ §§ 59—64 той же главы разсматривается вращательное движеніе вязкой жидкости между параллельными плоскостями. Приводится теоретическая схема дисковой машины и указывается путь рѣшенія задачи въ самомъ общемъ видѣ. Затѣмъ дается рѣшеніе частнаго случая. Въ §§ 65—66 разсмотренъ болѣе общій случай движенія вязкой жидкости между соосными цилиндрами.

Вторая часть работы содержитъ теоретическое и экспериментальное изслѣдованіе дисковыхъ машинъ. Во II главѣ въ § 7 показывается невозможность обоснованія теоріи на принципѣ струйнаго движенія.

Въ § 9 той же главы дается полный интегралъ (12), въ Бесселевыхъ функціяхъ, основного уравненія $(8, b)$, представляющій выраженіе для тангенціальной скорости w_t въ функціи остальныхъ параметровъ.

Въ § 14 для полной энергіи $H(r)$ на единицу вѣса, развиваемой колесомъ турбины, приведено выраженіе (37), не соотвѣтствующее данному H. Lorenz'омъ выраженію, съ указаніемъ причинъ несовпаденія.

Глава III содержитъ опытное изслѣдованіе дисковаго насоса съ приложеніемъ всѣхъ численныхъ результатовъ.

Какъ слѣдствіе изъ опытовъ въ § 27 установлено два режима работы насоса: подчиняющійся теоретическому уравненію состоянія и отклоняющійся отъ него.

Параллельно съ этимъ дается выраженіе (62, 63) для критической скорости $(v_{rk})_1$, выше которой насосъ работаетъ по теоретическому уравненію состоянія, а ниже—не удовлетворяетъ ему.

Опыты показываютъ, что дисковые насосы могутъ работать съ довольно высокимъ гидравлическимъ коэффиціентомъ полезнаго дѣйствія. Въ нашемъ случаѣ, при произвольно выбранныхъ размѣрахъ насоса, онъ достигъ 0,60.

Декабрь, 1914 г.

С. Шенбергъ.

Списокъ источниковъ.

Ahlborn, Fr. *Über den Mechanismus des hydrodynamischen Widerstandes.* Hamburg, 1902.

Appell, P. *Traité de mécanique rationelle.* t. III, Paris, 1903.

Астровъ, А. И. *Гидравлика.* Москва, 1911.

Auerbach, F. *Die theoretische Hydrodynamik.* Braunschweig, 1881.

Basset, A. B. *A treatise on hydrodinamics.* V. I *a.* II. Cambridge, 1888.

Бачинскій, А. І. *Изслѣдованіе о внутреннемъ треніи жидкостей. I.* „Временникъ" общ. им. Х. С. Леденцова. № 3, 1913.

Biel, R. *Über den Druckhöhenverlust bei der Fortleitung tropfbarer und gasförmiger Flüssigkeiten.* Mitteil. über Forschungsarb. H. 44.

Die Wirkungsweise der Kreiselpumpen und Ventilatoren. Mitteil. über Forchungsarb. H. 42.

Blasius, H. *Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung.* Zeitschr. für Math. und Phys. B. 56, H. 1.

Laminare Strömung in Kanälen wechselender Breite. Zeitschr. für Math. und Phys. B. 58, H. 3.

Бобылевъ, Д. *Гидродинамика и теорія упругости.* Петроградъ, 1886.

Очеркъ теоріи водяныхъ теченій, выработанный Буссинекомъ. Петроградъ, 1897.

Boltze, E. *Grenzschichten an Rotationskörpern in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung.* Göttingen, 1908.

Boulanger, A. *Hydraulique générale.* t. I et II. Paris, 1909.

Boussinesq, J. *Essai sur la théorie des aux courantes.* Mem. prés. par div. sav. a l'Academie des sc. t. XXIII, 1877.

Brillouin, M. *Leçons sur la viscosité des liquides et des gaz.* Paris, 1907.

Couette, M. *Etudes sur le frottement des liquides.* Annal. de chim. et de phys. t. XXI, 1890.

Détrait, M. R. *Recherches expérimentales sur le glissement des liquides a la paroi.* Journ. de Phys. 5-e série, t. III.

Ермаковъ, В. *Общая теорія равновѣсія и колебанія упругихъ твердыхъ тѣлъ.* Кіевъ, 1871.

Föppl, A. *Vorlesungen über technische Mechanik.* B. VI, Leipzig, 1910.

Forschheimer, Ph. *Hydraulik.* Leipzig und Berlin, 1914.

Förzter, E. *Vergleichende Untersuchungen von Kreiselpumpen.* Breslau, 1905.

Gaede, W. *Die äussere Reibung der Gaze und ein neues Princip für Luftpumpen: Die Molekularluftpumpe.* Physikalische Zeitschr. Sept. № 18, 1912.

Graetz, L. *Über die Bewegung von Flüssigkeiten in Röhren.* Zeitschr. für Math. und. Phys. XXV Jahr. 1880.

Grashof, F. *Theoretische Maschinenlehre.* B. I, Leipzig, 1875.

Grünebaum, E. *Zur Theorie der Zentrifugalpumpen.* Berlin, 1905.

Hahn, E., Herglotz, G. und Schwarzschild, K. *Über das Strömen des Wassers in Röhren und Kanälen.* Zeitschr. für Math. und. Phys. B. 51, 1904.

Helmholtz v. H. und Piotrovscki v. G. *Über Reibung tropfbarer Flüssigkeiten.* H. v. Helmholtzs Wissenschaft. Abh. B. I. Leipzig, 1882.

Hopf, L. *Turbulenz bei einem Flusse.* Annal. der Phys. B. 32, № 9, 1910.

Hochschild, H. *Versuche über Strömungsvorgänge in erweiterten und verengten Kanälen.* Mitteil. über Forschungsarb., H. 112.

Жуковскій, Н. Е. *Кинематика жидкаго тѣла.* Москва, 1876.

О треніи жидкостей при большой разности скоростей ея струй. Докл. V водопр. съѣзду въ г. Кіевѣ въ 1901 г. Москва, 1902.

Káramán v. Th. *Über den Mechanismus des Widerstandes den ein bewegter Körper in einer Flüssigkeit erfährt.* Nachr. von der königl Gesellsch. der Wissensch. su Göttingen. Math.—phys. Klasse. H. 5, 1911.

Kempf, G. *Neuere Anschauungen und Forschungen auf dem Gebiete der Schiffsschraube.* Zeitschr. fur das gesamt. Turbinenwesen, №№ 10, 11, 12, 1914.

Kirchhoff, G *Vorlesungen über mathematische Physik. Mechanik.* Zweite Auflage. Leipzig, 1877.

Кирпичевъ, В. Л. *Бесѣды о механикѣ.* Петроградъ, 1907.

Klein, F. *Über die Bildung von Wirbeln in reibungslosen Flüssigkeiten* Zeitschr. für. Math. und Phys. B. 58, H. 3.

Куколевскій, И. *Къ исторіи центробѣжнаго насоса.* Бюллет. Политехн. Общ. № 7, 1912.

Lamb, H. *Lehrbuch der Hydrodynamik.* N. d. 3. engl. Auflage deutsch von J. Friedel. Leipzig u. Berlin, 1907.

Laval de, C. G. *Centrifugal pumping machinery.* Nev York, 1912.

Lorenz, H. *Lehrbuch der technischen Physik. B. III. Technische Hydromechanik.* München u. Berlin, 1910.

Neue Theorie und Berechnung der Kreiselräder. II. Aufl. München u. Berlin, 1911.

Turbulente Flüssigkeitsbewegungen und Strömung durch Röhren. Abhandl. über theoretische Phys. B. I, Leipzig und Berlin, 1907.

Theorie und Berechnung der Tesla-Kreiselräder. Zeitschr. für das ges. Turbinenwesen, №№ 6, 7, 1912.

Theorie der Gaede-Kreiselräder. Zeitschr. für das ges. Turbinenwesen. № 12, 1912.

Love, A. E. H. *Lehrbuch der Elasticität.* Deutsch von. A. Timpe, Leipzig u. Berlin. 1907.

Martienssen, O. *Die Gesetze des Wasser-und Luftwiderstandes und ihre Anwendung in der Flugtechnik.* Berlin, 1913.

Meyer, O. E. *Über Reibung der Flüssigkeiten.* Crelle's J. B. 59, 1861 u. B. 62.

Zur Theorie der inneren Reibung. Crelle's. J. B. 78.

Mises, v., R. *Elemente der technischen Hydromechanik.* T. I. Leipzig u. Berlin, 1914.

Theorie der Wasserräder. Zeitschr. für Math. und Phys. B. 57, 1 u. 2. H. 1909.

Navier, E. *Memoire sur les lois du mouvement des fluides.* Memoires de l'Academie des sc. t. VI.

Петровъ, Н. *Тренiе въ машинахъ и влiянiе на него смазывающей жидкости.* Петроградъ, 1883.

Практическiе результаты опытовъ и гидрадинамической теорiи и т. д. Петроградъ, 1887.

Poiseuille. *Sur le mouvement des liquides dans les tübes capillaires.* Mem. prés par div. sav. a l'Academ. des sc. t. LX, 1842.

Prandtl, L. *Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung.* Verh. des 3. intern. Mathemat. Kongress. Heidelberg, 1904.

Prášil, F. *Technische Hydrodynamik.* Berlin, 1913.

Reynolds, O. *An experimental Investigations of the Circumstances which determine whether the Motion of water shall be Direct or Sinuous, and of the Law of Resistance in Parallele Channels.* Proceedings of the Royal Society of London. t. XXXV, 1883.

Riemann-Weber. *Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik.* B. I u. II, Braunschweig, 1901.

Рузскiй. Д. П. *Гидравлика.* Кiевъ, 1910.

Саткевичъ, А. *Гидромеханика.* Петроградъ, 1904.

Sommerfeld, A. *Ein Beitrag zur hydrodynamischen Erklährung der turbulenten Flüssigkeitsbewegung.* Atti de IV congresso internationale dei Matematici. Roma, 1909.

Stokes, G. G. *On the theories on the internal friction of fluids in motion and of the equilibrium and motion of elastic solids.* Math. and phys. papers by Stokes. V. I, Cambridge, 1880.

Сусловъ, Г. К. *Теорія потенціала и гидродинамика.* Т. II, Кіевъ 1910.

Тимошенко, С. П. *Курсъ теоріи упругости.* ч. I. Кіевъ, 1909.

Voigt, W. *Kompendium der theoretischen Physik.* B. I. Leipzig, 1895.

Wagner, P. *Strömungsenergie und mechanische Arbeit.* Berlin, 1914.

Wagner, R. *Versuche mit Schiffschrauben und deren praktische Ergebnisse.* Jahrbuch der Schiffbautechn. Gesellsch. B. VII. Berlin, 1906.

Вейнбергъ, Б. П. *Изученіе явленія въ жидкостяхъ при однородномъ сдвигѣ.* Журн. русскаго физико-хим. общ. Вып. 9, 1912.

Wien, W. *Lehrbuch der Hydrodynamik.* Leipzig, 1900.

Winkelmann, A. *Handbuch der Physik.* Zweite Aufluge. B. I, 2 Hälfte. Leipzig, 1908.

Wetzstein, G. *Über Abweichungen vom Poiseuille'schen Gesetz.* Ann. der Phys. und Chem. B. 68, № 7, 1899.

Христіансенъ, С. *Основы теоретической физики.* ч. I. Петроградъ, 1895.

Encyclopädie der Mathematischen Wissenschaften. B. IV, 3. Teilband. Mechanik der deformierbarer Körper.

New invention by Tesla.

Tesla's new method of and apparatus for fluid propulsion.

The Tesla turbine. „Electrical Review and Western Electrician". Chicago, v. LXII, № 20; v. LIX, №№ 11, 14; 1911.

The Tesla Steam Turbine. „Scientific American". v. CV, № 14, 1911.

Оглавленіе.

Часть I. Гидромеханика.

Глава I.

Глава II.

Глава III.

Глава IV.

Глава V.

Часть I.

ГИДРОМЕХАНИКА.

ГИДРОМЕХАНИКА.

Глава I.

Общія положенія. Напряженія въ сплошно-деформирующихся тѣлахъ.

1. Гидромеханика исходитъ изъ слѣдующихъ основныхъ положеній:

сплошно-деформирующимся тѣломъ называется такое, въ которомъ разстояніе между двумя безконечно близкими точками остается безконечно-малымъ и послѣ деформаціи;

жидкостью называется такое сплошно-деформирующееся тѣло, въ которомъ, въ состояніи равновѣсія, не могутъ существовать не только касательныя напряженія, но и нормальныя натяженія; послѣднія должны отсутствовать и при движеніи жидкости.

Другими словами, изъ всѣхъ жидкостей разсматриваются лишь тѣ, въ которыхъ *сцѣпленіе между частицами равно нулю,* что практически для такихъ жидкостей, какъ, напр., вода, можетъ быть принято съ большимъ приближеніемъ.

Изъ приведеннаго выше опредѣленія вытекаетъ, что въ жидкости, въ состояніи покоя, могутъ существовать лишь нормальныя давленія, т. е. такія силы, которыя стремятся измѣнить, выдѣленный въ жидкости, элементарный объемъ, сжимая его. Съ этой точки зрѣнія жидкости раздѣляются на *несжимаемыя,* т. е. жидкости съ неизмѣннымъ объемомъ, а, слѣдовательно, и плотностью (капельныя, какъ ихъ иногда называютъ) и жидкости *сжимаемыя* съ перемѣннымъ объемомъ и плотностью.

Что же касается касательныхъ напряженій, то здѣсь придется говорить о жидкостяхъ двоякаго рода:

1) несжимаемыя жидкости, подчиняющіяся вышеуказанному опредѣленію и обладающія тѣмъ добавочнымъ свойствомъ, что въ нихъ, и въ состояніи движенія, не существуетъ касательныхъ напряженій, называются *идеальными.*

2) тѣ же жидкости, въ которыхъ при движеніи возникаютъ касательныя напряженія, называются *вязкими* жидкостями; онѣ, конечно, могутъ быть несжимаемыми и сжимаемыми.

Гидромеханика занимается только идеальными и несжимаемыми вязкими жидкостями.

2. Если въ сплошно-деформирующемся тѣлѣ, отнесенномъ къ какой-либо неподвижной прямоугольной системѣ координатъ X, Y, Z, выдѣлимъ элементарный параллелопипедъ объема dv съ ребрами параллельными осямъ, то на него дѣйствуютъ, въ общемъ случаѣ, силы двухъ категорій: къ первой относятся силы объемныя и силы, расчитанныя на единицу массы; ко второй—силы, расчитанныя на единицу поверхности.

Обозначая черезъ dP равнодѣйствующую силъ, приложенныхъ къ массѣ dm разсматриваемаго элементарнаго объема (считая всѣ силы приложенными въ центрѣ тяжести этого объема), получаемъ для *силы расчитанной на единицу массы*, приложенной въ центрѣ тяжести объема выраженіе

$$F_m = \lim_{dm=0} \frac{dP}{dm} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Обозначая плотность въ центрѣ тяжести нашего элементарнаго объема черезъ ρ, имѣемъ

$$dm = \rho dv,$$

отсюда F_v — *сила на единицу объема* выразится такъ:

$$F_v = \lim_{dv=0} \frac{dP}{dv} = \rho F_m \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Послѣднее уравненіе даетъ связь между объемной силой и силой, расчитанной на единицу массы.

На каждую грань ds со стороны жидкости, окружающей нашъ параллелопипедъ, дѣйствуютъ силы. Предполагая, что всѣ онѣ приложены въ центрѣ тяжести элементарной площадки ds, и что ихъ равнодѣйствующая равна dP_1, имѣемъ для *поверхностной силы* такое выраженіе:

$$F_s = \lim_{ds=0} \frac{dP_1}{ds} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

Силы F_s и F_m (или F_v) по существу отличны другъ отъ друга: первыя являются результатомъ дѣйствія жидкости, окружающей разсматриваемый элементарный объемъ, на жидкость внутри его лежащую; вторыя, т. е., F_m и F_v возникаютъ вслѣдствіе силъ, подобныхъ силѣ тяжести, магнитнымъили электрическимъ силамъ. Сюда же должно быть причислено взаимодѣйствіе между отдѣльными частицами жидкости, источникомъ котораго является притяженіе по закону Ньютона.

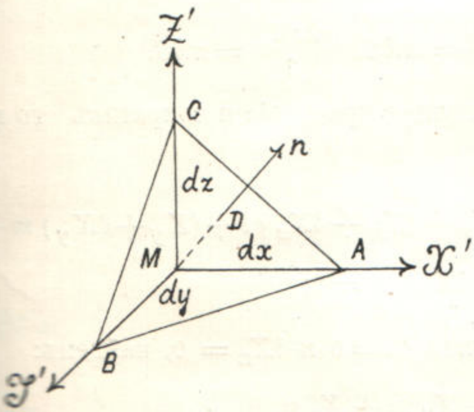
Поверхностныя и объемныя силы, вообще говоря, являются функціями координатъ точки и времени. Изъ предыдущихъ разсужденій мы видимъ, что для поверхностной силы, кромѣ координатъ точки, играетъ роль оріентировка той элементарной площадки, на которую эта сила расчитана, при чемъ для жидкостей невязкихъ сила эта, на основаніи опредѣленія, можетъ быть лишь давленіемъ (т. е. силой, направленной нормально къ площадкѣ внутрь элемента).

3. Въ дальнѣйшемъ мы введемъ слѣдующія обозначенія:

$$X_n\,,\ Y_n\,,\ Z_n \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (4)$$

будутъ обозначать составляющія по осямъ X, Y, Z, поверхностной силы, на площадку съ нормалью n, дѣйствующей со стороны положительной нормали къ площадкѣ на сторону отрицательной. Если вмѣсто n стоитъ соотвѣтственно x, y или z, то (4) обозначаютъ составляющія поверхностной силы на площадки перпендикулярныя къ соотвѣтствующимъ осямъ; направленія положительныхъ нормалей къ нимъ совпадаютъ съ направленіемъ координатныхъ осей.

Можно показать, что *поверхностная сила*, или, какъ мы дальше будемъ говорить, ***напряженіе въ данной точкѣ на какую-либо площадку съ нормалью n***, вполнѣ опредѣляется напряженіями на три взаимно перпендикулярныя площадки, черезъ эту точку проходящія.



Черт. 1.

Для этого черезъ разсматриваемую точку M проведемъ три плоскости, параллельныя координатнымъ плоскостямъ, и плоскость, перпендикулярную къ направленію нормали n на безконечно маломъ разстояніи отъ M (черт. 1). Получимъ тетраэдръ съ ребрами MA, MB, MC, соотвѣтственно равными dx, dy, dz. Составляющія силы на единицу массы въ точкѣ M обозначимъ черезъ:

$$X,\ Y,\ Z \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (5)$$

Составляющія напряженія на площадку ABC будутъ

$$X_n + \delta X_n\,,\ Y_n + \delta Y_n\,,\ Z_n + \delta Z_n\,,$$

если для площадки съ той же нормалью въ точкѣ M принять выраженія (4).

Обозначая площадку ΔABC черезъ ∂S, высоту MD тетраэдра черезъ ∂h, получимъ для объема нашего элементарнаго тетраэдра слѣдующія выраженія:

$$\partial v = \frac{dx\,dy\,dz}{3} = \frac{\partial S.\partial h}{3};$$

если ρ плотность въ центрѣ тяжести тетраэдра, то масса его выразится такъ:

$$\partial m = \rho \partial v = \rho \frac{dx\,dy\,dz}{3} = \rho \frac{\partial S.\partial h}{3}.$$

Примѣнимъ теперь къ нашему тетраэдру принципъ Даламбера. Примемъ, что сила, дѣйствующая на грань, получается какъ произведеніе изъ площади грани на силу, приложенную въ центрѣ тяжести ея; аналогично для массы и объемной силы. Въ такомъ случаѣ для оси X равенство нулю потерянной силы даетъ:

$$\rho \frac{\partial S.\,\partial h}{3} j_x - \rho \frac{\partial S.\,\partial h}{3}(X + \partial X) - (X_n + \partial X_n)\,\partial S + (X_x + \partial X_x)\frac{dydz}{2} +$$

$$+ (X_y + \partial X_y)\frac{dx\,dz}{2} + (X_z + \partial X_z)\frac{dx\,dy}{2} = 0$$

гдѣ j_x составляющая ускоренія центра тяжести по оси X.

Если l, m, n — косинусы угловъ нормали n съ осями, то имѣютъ мѣсто равенства:

$$\frac{dy\,dz}{2} = l.\partial S,\quad \frac{dx\,dz}{2} = m.\partial S,\quad \frac{dx\,dy}{3} = n.\partial S.$$

Дѣлая подстановку въ предыдущее уравненіе и сокративъ его на ∂S, получимъ:

$$\frac{\rho\,\partial h j_x - \rho\,\partial h\,(X + \partial X)}{3} - X_n - \partial X_n + (X_x + \partial X_x)\,l + (X_y + \partial X_y)\,m +$$

$$+ (X_z + \partial X_z)\;n = 0;$$

переходя къ предѣлу, т. е. принимая $\partial h = 0$ и $\partial X_n = 0$, найдемъ:

$$X_n = X_x\,l + X_y\,m + X_z\,n.$$

Примѣняя тѣ же разсужденія къ осямъ Y и Z, можемъ для X_n, Y_n, Z_n написать:

$$X_n = X_x\,l + X_y\,m + X_z\,n,$$

$$Y_n = Y_x\,l + Y_y\,m + Y_z\,n, \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

$$Z_n = Z_x\,l + Z_y\,m + Z_z\,n.$$

Для идеальной жидкости, на основаніи ея опредѣленія, имѣемъ:

$$X_y = X_z = Y_x = Y_z = Z_x = Z_y = 0;$$

кромѣ того, напряженіе F_s на площадку ∂S совпадаетъ по направленію съ нормалью n къ ней, т. е.

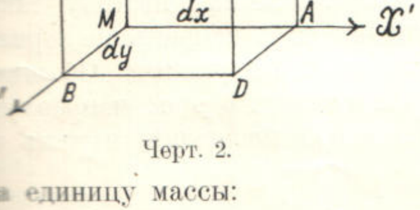
$$X_x = F_s\, l,\ \ Y_y = F_s\, m,\ \ Z_z = F_s\, n;$$

равенства (6) обратятся поэтому въ такія:

$$F_s = X_x = Y_y = Z_z = -p, \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

т. е. въ идеальной жидкости напряженіе на площадку въ данной точкѣ нормально къ ней и не зависитъ отъ положенія этой площадки (т. е. направленія нормали къ ней). Это напряженіе обычно называется давленіемъ; обозначимъ его черезъ $-p$.

4. Уравненія (6) показываютъ, что напряженіе въ данной точкѣ на произвольно выбранную площадку зависитъ отъ напряженій на три взаимно перпендикулярныя площадки, черезъ эту точку проходящія. Переходъ отъ одной системы трехъ взаимно перпендикулярныхъ площадокъ къ другой, въ данной точкѣ, представляетъ простую задачу аналитической геометріи. Между составляющими этихъ напряженій существуетъ весьма простая зависимость, получающаяся примѣненіемъ закона моментовъ количествъ движенія къ элементарному параллелопипеду, грани котораго параллельны координатнымъ плоскостямъ (см. черт. 2).



Черт. 2.

Пусть въ точкѣ M на три взаимноперпендикулярныхъ площадки, параллельныхъ координатнымъ плоскостямъ, дѣйствуютъ напряженія (пользуясь обозначеніями 4 и 5)

$$\begin{array}{lll} X_x, & Y_x, & Z_x, \\ X_y, & Y_y, & Z_y, \\ X_z, & Y_z, & Z_z, \end{array} \quad \ldots \quad (4,\text{a})$$

а на единицу массы:

$$X,\ Y,\ Z \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5,\text{a})$$

На площадки DAA_1E, BB_1ED, и CA_1EB_1 дѣйствуютъ напряженія

$$X_x + \partial X_x,\ \ Y_x + \partial Y_x,\ \ Z_x + \partial Z_x \quad \text{и т. д.,}$$

причемъ поверхностныя силы приложены въ центрахъ тяжести граней параллелопипеда, а сила, дѣйствующая на массу, въ центрѣ тяжести самаго параллелопипеда. Напишемъ уравненіе моментовъ количествъ движенія для случая вращенія нашего параллелопипеда вокругъ оси Z', получимъ:

$$\rho\, dx\, dy\, dz\, \frac{(dx^2+dy^2)}{12}\,\frac{d\omega}{dt} = X_x\,\frac{dy^2\,dz}{2} - Y_y\,\frac{dx^2\,dz}{2} -$$

$$-(X_x+\delta X_x)\frac{dy^2dz}{2}+(Y_y+\delta Y_y)\frac{dx^2dz}{2}+(Y_x+\delta Y_x)\,dy\,dz\,dx -$$

$$-(X_y+\delta X_y)\,dz\,dx\,dy+X_z\,\frac{dy^2dx}{2}-Y_z\,\frac{dx^2dy}{2}-(X_z+\delta X_z)\frac{dy^2dx}{2}+$$

$$+(Y_z+\delta Y_z)\frac{dx^2dy}{2}+\rho\, dx\, dy\, dz\left[(Y+\delta Y)\,\frac{dx}{2}-(X+\delta X)\,\frac{dy}{2}\right].$$

ω — угловая скорость вращенія параллелопипеда вокругъ оси Z'.

Раскрывая скобки, произведя сокращенія и пренебрегая безконечно малыми выше третьяго порядка, получимъ:

$$(Y_x - X_y)\,dxdydz = 0.$$

Поэтому, составивъ по аналогіи подобныя уравненія для осей X' и Y', получимъ:

$$X_y = Y_x\,,\quad X_z = Z_x\,,\quad Y_z = Z_y\,. \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (8)$$

На основаніи приведеннаго выше вывода заключаемъ, что эти соотношенія имѣютъ всегда мѣсто: какъ для случая равновѣсія, такъ и движенія сплошно-деформирующагося тѣла. Для жидкости въ покоѣ, всѣ касательныя напряженія, на основаніи опредѣленія, равны нулю.

5. Изъ уравненія (6) вытекаетъ, что напряженія вообще не нормальны къ соотвѣтственнымъ площадкамъ. Рѣшимъ поэтому такую задачу: найти для данной точки площадку (т. е. направленіе нормали къ ней), чтобы напряженіе на нее было къ ней нормально. Обозначая величину этого напряженія черезъ p и помня что p по направленію совпадаетъ съ нормалью къ соотвѣтственной площадкѣ, можемъ написать (см. обозначенія 4)

$$X_n = p.l,\quad Y_n = p.m,\quad Z_n = p.n;$$

уравненія (6) въ этомъ случаѣ перепишутся такъ:

$$\begin{aligned}(X_x - p)\,l + X_y\,m + X_z\,n &= 0,\\ Y_x\,l + (Y_y - p)\,m + Y_z\,n &= 0, \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (9)\\ Z_x\,l + Z_y\,m + (Z_z - p)\,n &= 0.\end{aligned}$$

Для возможности опредѣленія отсюда неизвѣстныхъ l, m, n, должно имѣть мѣсто условіе:

$$\begin{vmatrix} X_x - p, & X_y, & X_z \\ Y_x, & Y_y - p, & Y_z \\ Z_x, & Z_y, & Z_z - p \end{vmatrix} = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (10)$$

Въ анализѣ доказывается, что это, кубическое относительно p, уравненіе имѣетъ всѣ три корня p_1, p_2, p_3 дѣйствительными. Подставляя каждый изъ нихъ въ систему уравненій (9), найдемъ изъ нихъ величины пропорціональныя косинусамъ нормалей съ осями координатъ къ искомымъ площадкамъ. Такимъ образомъ, вообще говоря, для каждой точки сплошно-деформирующейся среды существуетъ три взаимно-перпендикулярныхъ направленія, по которымъ дѣйствуютъ одни лишь нормальныя напряженія. Мы не будемъ останавливаться на тѣхъ частныхъ случаяхъ, когда въ уравненіи (10) появляются кратные корни, или корни равные нулю.

Эти нормальныя напряженія называются главными напряженіями въ данной точкѣ среды, а направленія ихъ — главными направленіями.

Выводъ дифференціальныхъ уравненій движенія точки сплошно-деформирующейся среды.

6. Обозначая составляющія скорости точки по осямъ координатъ X, Y, Z черезъ

$$u, \; v, \; w, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (11)$$

для составляющихъ ускоренія по тѣмъ же осямъ, получимъ:

$$\frac{du}{dt}, \; \frac{dv}{dt}, \; \frac{dw}{dt} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (12)$$

Здѣсь берутся полныя производныя по времени, какъ независимому перемѣнному, имѣя ввиду, что u, v и w суть вообще функціи координатъ x, y, z и времени t; причемъ x, y, z сами являются функціями времени t (и параметровъ). Т. е. можно написать:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt},$$

но по опредѣленію

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dy}{dt} = v, \quad \frac{dz}{dt} = w,$$

поэтому:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\,\frac{\partial u}{\partial x} + v\,\frac{\partial u}{\partial y} + w\,\frac{\partial u}{\partial z} \quad \ldots\ldots \quad (13)$$

Два аналогичныхъ выраженія получается для

$$\frac{dv}{dt} \quad \text{и} \quad \frac{dw}{dt}\,.$$

Дифференціальное уравненіе движенія нашего элементарнаго параллелопипеда по оси x получится, приравнивая составляющую ускорительной силы по этой оси, суммѣ составляющихъ силъ, приложенныхъ къ нему, по той же оси. Если плотность въ точкѣ M—ρ, то масса его будетъ:

$$(\rho + \delta\rho)\, dxdydz,$$

ускорительная сила представится въ видѣ:

$$(\rho + \delta\rho)\, dx\, dy\, dz.\, \frac{du}{dt};$$

сила, дѣйствующая на массу параллелопипеда:

$$(X + \delta X)\ (\rho + \delta\rho)\ dx\, dy\, dz.$$

Результирующая на грани $CMBB_1$ и A_1ADE по оси x напишется такъ:

$$-\left(X_x + \frac{\partial X_x}{\partial y}\frac{dy}{2} + \frac{\partial X_x}{\partial z}\frac{dz}{2}\right)dydz + \left(X_x + \frac{\partial X_x}{\partial x}dx + \frac{\partial X_x}{\partial y}\frac{dy}{2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial X_x}{\partial z}\frac{dz}{2}\right)dydz,$$

или, послѣ сокращеній:

$$\frac{\partial X_x}{\partial x}\, dx\, dy\, dz\,.$$

Совершенно также для граней CA_1AM и BB_1ED получимъ:

$$\frac{\partial X_y}{\partial y}\, dy\, dx\, dz\,,$$

а для граней $MADB$ и CA_1EB_1:

$$\frac{\partial X_z}{\partial z}\, dz\, dx\, dy\,.$$

Приравнивая ускорительную силу суммѣ предыдущихъ силъ, найдемъ:

$$(\rho + \delta\rho)\, dx\, dy\, dz\, \frac{du}{dt} = (X + \delta X)\,(\rho + \delta\rho)\, dx\, dy\, dz + \frac{\partial X_x}{\partial x}\, dxdydz +$$

$$+ \frac{\partial X_y}{\partial y}\, dydxdz + \frac{\partial X_z}{\partial z}\, dz\, dx\, dy\,;$$

сокращая на $dxdydz$ и пренебрегая безконечно малыми (переходя къ предѣлу), получимъ:

$$\rho\frac{du}{dt}=\rho X+\frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}+\frac{\partial X_z}{\partial z}.$$

Поступая аналогично и по отношенію къ остальнымъ осямъ и принимая во вниманіе (13), найдемъ, по раздѣленіи на ρ, *три дифференціальныхъ уравненія движенія сплошно-деформирующейся среды:*

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=X+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}+\frac{\partial X_z}{\partial z}\right),\\
&\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}=Y+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial Y_x}{\partial x}+\frac{\partial Y_y}{\partial y}+\frac{\partial Y_z}{\partial z}\right),\;.\;.\;(14)\\
&\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}=Z+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial Z_x}{\partial x}+\frac{\partial Z_y}{\partial y}+\frac{\partial Z_z}{\partial z}\right).
\end{aligned}$$

Изъ предыдущихъ уравненій вытекаетъ, что выраженія вида:

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}+\frac{\partial X_z}{\partial z}\right)\ \text{и т. д.}$$

могутъ быть разсматриваемы, какъ силы, дѣйствующія на единицу массы, источникомъ которыхъ являются поверхностныя напряженія.

Условіе сплошности.

7. Въ дополненіе къ предыдущимъ уравненіямъ должно быть выведено еще одно, выражающее такъ называемое свойство сплошности движенія. Для этого подсчитаемъ измѣненіе массы нашего элементарнаго параллелопипеда за безконечно малый промежутокъ времени dt.

Это измѣненіе, съ одной стороны, равно:

$$\left[(\rho+\delta\rho)+\frac{\partial(\rho+\delta\rho)}{\partial t}dt\right]dx\,dy\,dz-(\rho+\delta\rho)\,dx\,dy\,dz,$$

или, удерживая безконечно малыя не выше четвертаго порядка:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}dt\,dx\,dy\,dz,\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(15)$$

съ другой стороны, количество матеріи, вступающее въ параллелопипедъ черезъ грань B_1CMB за время dt, будетъ:

$$\left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial y}\frac{dy}{2} + \frac{\partial \rho}{\partial z}\frac{dz}{2}\right)\left(U + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{2} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{dz}{2}\right) dt\, dy\, dz,$$

а выходящее черезъ грань A_1ADE:

$$\left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial x}dx + \frac{\partial \rho}{\partial y}\frac{dy}{2} + \frac{\partial \rho}{\partial z}\frac{dz}{2}\right)\left(U + \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{2} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{dz}{2}\right) dt dy dz;$$

отсюда приращеніе массы нашего элементарнаго параллелопипеда въ направленіи оси x будетъ, вычитая изъ предпослѣдняго выраженія послѣднее и пренебрегая безконечно малыми выше четвертаго порядка:

$$-\frac{\partial \rho u}{\partial x}\, dt\, dx\, dy\, dz;$$

аналогично въ направленіи оси Y получимъ:

$$-\frac{\partial \rho v}{\partial y}\, dt\, dx\, dy\, dz,$$

и по оси Z:

$$-\frac{\partial \rho w}{\partial z}\, dt\, dx\, dy\, dz.$$

Складывая эти выраженія, найдемъ полное приращеніе массы за время dt въ видѣ:

$$-\left(\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z}\right) dt\, dx\, dy\, dz \quad \ldots\ldots \quad (16)$$

Такъ какъ (15) и (16) должны быть равны, то по сокращеніи на $dt\, dx\, dy\, dz$ получаемъ окончательно

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left(\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z}\right) = 0. \quad \ldots\ldots \quad (17)$$

Это и есть уравненіе или условіе непрерывности (или сплошности) движенія сплошно-деформирующагося тѣла. Замѣчая, что

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial z}\frac{dz}{dt} =$$

$$= \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x} u + \frac{\partial \rho}{\partial y} v + \frac{\partial \rho}{\partial z} w,$$

опредѣляемъ отсюда $\frac{d\rho}{dt}$ и подставляя въ (17), найдемъ окончательно

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0 \quad \ldots\ldots \quad (17,a)$$

Дл янесжимаемаго тѣла, т. е. если $\rho = const$, (17) обращается въ

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (17, b)$$

Уравненія (17), (17,a) и (17,b) являются *условіями сплошности* для сплошно-деформирующагося тѣла.

Глава II.

Дифференціальныя уравненія движенія идеальной жидкости. Ихъ интегралы. Условія на границахъ.

8. Давая въ уравненіяхъ (14) частныя значенія составляющимъ поверхностныхъ напряженій и силъ, дѣйствующихъ на единицу массы, а также плотности ρ, получимъ дифференціальныя уравненія движенія сплошно-деформирующагося тѣла, обладающаго извѣстными частными свойствами, проявляющимися при дѣйствіи на него внѣшнихъ силъ.

Вышеуказанныя частныя значенія вводятся на основаніи спеціальныхъ гипотезъ относительно строенія разсматриваемаго тѣла и представляютъ собой связь между силами и перемѣщеніями. Этимъ гипотезамъ подчиняются поверхностныя напряженія; что же касается силъ, дѣйствующихъ на единицу массы, то онѣ подчиняются общимъ законамъ механики.

Поэтому для идеальной жидкости, для которой имѣютъ мѣсто равенства (7) и $\rho = const.$, уравненія (14) перепишутся въ такомъ видѣ:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} &= X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \\
\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} &= Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}, \quad . \; . \; . \; . \; (18) \\
\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + w\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} &= Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}.
\end{aligned}$$

Сюда должно быть присоединено условіе сплошности (17, b) въ видѣ:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (17, \mathrm{b})$$

Четыре уравненія (18) и (17, b) представляютъ систему совокупныхъ дифференціальныхъ уравненій съ частными производными относительно четырехъ неизвѣстныхъ функцій u, v, w, p, зависящихъ отъ перемѣнныхъ x, y, z, t. Для нахожденія этихъ функцій должны быть даны начальныя условія для момента t_0 и условія на границахъ. Подробнѣе объ этомъ будетъ сказано дальше.

Въ случаѣ сжимаемой жидкости, должна быть добавлена зависимость

$$\rho = f(p) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (19)$$

Уравненія (18) называются *дифференціальными уравненіями Эйлера для движенія идеальной жидкости*. Помощью ихъ опредѣляется состояніе движущейся жидкости въ данной точкѣ пространства, отнесенной къ какой-либо неподвижной системѣ координатъ.

Лагранжъ написалъ тѣ же уравненія въ иномъ видѣ. Онъ задался цѣлью прослѣдить за измѣненіями въ обстоятельствахъ движенія опредѣленной частицы жидкости, т. е. если координаты начальнаго положенія частицы жидкости для момента t_0 будутъ a, b, c, то искомыми функціями у него являлись координаты x, y, z и давленіе p для этой частицы въ какой-либо моментъ t, въ видѣ:

$$x = f_1(t, a, b, c), \quad y = f_2(t, a, b, c), \quad z = f_3(t, a, b, c), \quad p = \Psi(t, a, b, c) \quad . \; . \; (20)$$

Выводомъ этихъ уравненій мы здѣсь не будемъ заниматься.

Въ томъ случаѣ, когда обстоятельства движенія въ какой-либо неподвижной точкѣ пространства не зависятъ отъ времени—движеніе называется установившимся. Аналитически это выразится такъ:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial t} = 0, \quad \ldots \ldots (21).$$

т. е. u, v, w, p суть явныя функціи однѣхъ лишь координатъ.

Въ противномъ случаѣ движеніе называется ***неустановившимся.***

9. Геометрическое мѣсто точекъ въ жидкости, касательныя къ которому по направленію совпадаютъ со скоростями точекъ въ данный моментъ на немъ лежащихъ, называется *линіей тока*. Система совокупныхъ дифференціальныхъ уравненій, опредѣляющихъ ее, напишется такъ:

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (22)$$

Интегралы этой системы представятся въ видѣ

$$\Psi_1(x, y, z, t) = C_1, \quad \Psi_2(x, y, z, t) = C_2 \quad \ldots \ldots \ldots (23)$$

Здѣсь t играетъ роль параметра и входитъ лишь въ случаѣ неустановившагося движенія; двѣ поверхности (23) даютъ искомую линію тока.

Произвольныя постоянныя C_1 и C_2 опредѣляются, задавая моментъ времени и точку, черезъ которую должна проходить линія тока, т. е. $t = t_0, x = x_0, y = y_0, z = z_0$.

Если же мы хотимъ опредѣлить траекторію какой-либо частицы жидкости или такъ называемую *линію теченія*, то придется интегрировать систему совокупныхъ дифференціальныхъ уравненій вида:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = u, \quad \frac{\partial y}{\partial t} = v, \quad \frac{\partial z}{\partial t} = w \quad \ldots\ldots\ldots (24).$$

Интегралы этой системы имѣютъ видъ:

$$\chi_1(x, y, z, t) = C'_1, \quad \chi_2(x, y, z, t) = C'_2, \quad \chi_3(x, y, z, t) = C'_3 \ . \ (25),$$

причемъ произвольныя постоянныя опредѣляются какъ и въ предыдущемъ случаѣ.

Изъ уравненія (25) x, y, z найдутся въ функціи t и произвольныхъ постоянныхъ, т. е. уравненія линіи теченія находятся въ явной формѣ.

Для нахожденія уравненій линіи тока достаточно изъ (25) исключить t. Роль параметра t въ (23) будетъ играть одно изъ произвольныхъ постоянныхъ въ (25).

Ясно, что для установившагося движенія линіи теченія и тока совпадаютъ.

Въ томъ случаѣ, когда существуетъ такая функція $\varphi(x, y, z, t)$, отъ координатъ и времени, для которой имѣютъ мѣсто зависимости:

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \ v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \ w = \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad \ldots\ldots\ldots (26)$$

говорятъ, что *скорости точекъ жидкости имѣютъ потенціалъ;* другими словамы имѣетъ мѣсто соотношеніе:

$$d\varphi = udx + vdy + wdz,$$

для чего необходимо и достаточно, чтобы:

$$2\omega_1 = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \ 2\omega_2 = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \ 2\omega_3 = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \ \ldots (27)$$

Если послѣдняя зависимость не удовлетворяется, то потенціала скоростей не существуетъ; въ такомъ случаѣ *движеніе называется вихревымъ*.

10. Если въ пространствѣ, занятомъ движущейся жидкостью, взять безконечно-малый замкнутый контуръ (неподвижный относительно осей координатъ) и черезъ всѣ его точки провести линіи тока, то получится такъ называемая *трубка тока;* если же провести линіи

теченія, то получится *струя*. Въ установившемся движеніи тѣ и другія совпадаютъ.

Двумя безконечно близкими сѣченіями, нормальными къ линіямъ теченія, образующимъ струю (ихъ можно считать въ первомъ приближеніи въ каждой точкѣ взаимно параллельными), выдѣлимъ изъ нея безконечно малый объемъ; обозначая площадь сѣченія въ данной точкѣ черезъ F (величина безконечно малая), скорость черезъ $\mathfrak{v}$, разстояніе между взятыми сѣченіями черезъ ds и предполагая въ общемъ случаѣ сжимаемую жидкость, можемъ считать, что за безконечно малый промежутокъ времени dt черезъ сѣченіе F протекла масса жидкости равная:

$$F\mathfrak{v}\rho dt,$$

а вытекла въ то же время черезъ другое сѣченіе масса

$$\left(F+\frac{\partial F}{\partial s}\,ds\right)\left(\mathfrak{v}+\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial s}\,ds\right)\left(\rho+\frac{\partial \rho}{\partial s}\,ds\right)dt$$

Черезъ боковую поверхность разсматриваемаго элементарнаго объема жидкость не протекаетъ, такъ какъ эта поверхность все время состоитъ изъ линій теченія, которыхъ скорости точекъ жидкости касаются.

Вычитая изъ предпослѣдняго выраженія послѣднее, и пренебрегая безконечно малыми выше второго порядка, найдемъ, послѣ упрощеній:

$$-\frac{\partial\,(F\mathfrak{v}\rho)}{\partial s}\,ds\;dt,$$

выраженіе, представляющее собой измѣненіе массы нашего безконечно малаго объема за время dt. Съ другой стороны оно равно:

$$\frac{\partial\;(Fds\rho)}{\partial t}\,dt \text{ или } \frac{\partial\,(F\rho)}{\partial t}\,dsdt;$$

отсюда, сравнивая эти выраженія, находимъ:

$$\frac{\partial\,(F\rho)}{\partial t}\,ds\,dt+\frac{\partial\,(F\rho\mathfrak{v})}{\partial s}\,ds\,dt=0 \quad \ldots\ldots \quad (17,c)$$

или сокращая на $ds\,dt$:

$$\frac{\partial\,(F\rho)}{\partial t}+\frac{\partial\,(F\mathfrak{v}\rho)}{\partial s}=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17,d)$$

Полученное условіе представляетъ собой условіе сплошности для сжимаемой жидкости, отнесенное къ элементу струи въ данной точкѣ пространства, въ противоположность условію (17) отнесенному къ точкѣ пространства, какъ геометрическому образу.

Для несжимаемой жидкости, т. е. при $\rho = const$, (17, d) можно сократить на ρ, получится

$$\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{\partial\,(F\mathfrak{v})}{\partial s}=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17,e)$$

Для установившагося движенія, для котораго струи и трубки тока совпадають

$$\frac{\partial (F\rho)}{\partial t} = 0,$$

а потому:

$$F\mathfrak{v}\rho = C, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17, f)$$

гдѣ C постоянная вдоль струи, мѣняющая свое значеніе отъ одной струи къ другой.

Лѣвая часть послѣдняго равенства есть такъ называемый расходъ въ единицахъ массы въ единицу времени черезъ сѣченіе струи.

Въ случаѣ $\rho = const$, т. е. жидкость несжимаема, имѣемъ:

$$F\mathfrak{v} = \frac{C}{\rho} = C_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17, g)$$

Мы видимъ, что въ установившемся движеніи расходъ вдоль струи (или трубки тока) постояненъ, такъ что въ этомъ случаѣ струю можно разсматривать какъ трубку съ твердыми стѣнками.

Условіе постоянства расхода по струѣ приводитъ насъ къ заключенію, что струя нигдѣ внутри жидкости не можетъ начинаться, ни кончаться; она можетъ образовывать лишь замкнутые контуры или простираться изъ безконечности въ безконечность. Все это вѣрно при наличности условія сплошности теченія; если же въ жидкости есть мѣста, черезъ которыя она притекаетъ или утекаетъ, то предыдущія положенія становятся невѣрными.

11. Для уравненій (18) можетъ быть найденъ одинъ интегралъ въ весьма общей формѣ. Предварительно сдѣлаемъ для этого нѣкоторыя преобразованія въ этихъ уравненіяхъ.

Замѣтимъ, что почти всегда, силы, дѣйствующія на единицу массы, имѣютъ потенціалъ, т. е. существуетъ функція U (отъ координатъ x, y, z и времени t), для которой:

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z}; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (28)$$

кромѣ того, пользуясь (19), введемъ такую функцію P:

$$P = \int \frac{dp}{f(p)} \cdot \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (29)$$

Помня, что p функція координатъ x, y, z и времени t, имѣемъ:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{f(p)} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{f(p)} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{1}{f(p)} \frac{\partial p}{\partial z} \quad \ldots \quad (29, a)$$

Поэтому уравненія (18) перепишутся такъ:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{\partial (U-P)}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} &= \frac{\partial (U-P)}{\partial y}, \quad \ldots\ldots \quad (30) \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{\partial (U-P)}{\partial z}. \end{aligned}$$

Принимая во вниманіе обозначенія (27), получимъ:

$$\frac{\partial(U-P)}{\partial x}-\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial x}+w\frac{\partial w}{\partial x}\right)=\frac{\partial u}{\partial t}+2(\omega_2 w-\omega_3 v),$$

$$\frac{\partial(U-P)}{\partial y}-\left(u\frac{\partial u}{\partial y}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial y}\right)=\frac{\partial v}{\partial t}+2(\omega_3 u-\omega_1 w), \quad . \; . \; . \; (31)$$

$$\frac{\partial(U-P)}{\partial z}-\left(u\frac{\partial u}{\partial z}+v\frac{\partial v}{\partial z}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)=\frac{\partial w}{\partial t}+2(\omega_1 v-\omega_2 u);$$

или, помня, что

$$\mathfrak{v}^2=u^2+v^2+w^2,$$

гдѣ $\mathfrak{v}$ скорость точки по величинѣ, можемъ написать:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(U-P-\frac{\mathfrak{v}^2}{2}\right)=\frac{\partial u}{\partial t}+2(\omega_2 w-\omega_3 v),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(U-P-\frac{\mathfrak{v}^2}{2}\right)=\frac{\partial v}{\partial t}+2(\omega_3 u-\omega_1 w), \quad . \; . \; . \; . \; (31, a)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(U-P-\frac{\mathfrak{v}^2}{2}\right)=\frac{\partial w}{\partial t}+2(\omega_1 v-\omega_2 u).$$

Возьмемъ какую либо линію теченія и на ней точку; положеніе этой точки будемъ опредѣлять длиной s дуги линіи теченія отъ какой либо начальной точки до разсматриваемой въ данный моментъ.

Скорость точки, по величинѣ, обозначена нами черезъ $\mathfrak{v}$, направленіе ея совпадаетъ съ направленіемъ касательной къ линіи теченія въ этой точкѣ, косинусы его съ осями координатъ будутъ:

$$\frac{dx}{ds}, \quad \frac{dy}{ds}, \quad \frac{dz}{ds}.$$

Мы можемъ написать слѣдующее равенство:

$$\frac{dx}{ds}=\frac{dx}{dt}\,\frac{dt}{ds}=\frac{u}{\mathfrak{v}},$$

такъ какъ $\mathfrak{v}=\dfrac{ds}{dt}$.

Слѣдовательно:

$$\frac{dx}{ds}ds=\frac{u}{\mathfrak{v}}ds, \quad \frac{dy}{ds}ds=\frac{v}{\mathfrak{v}}ds, \quad \frac{dz}{ds}ds=\frac{w}{\mathfrak{v}}ds.$$

Помножимъ уравненія (31, a) почленно на послѣднія равенства, получимъ:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(U-P-\frac{\mathfrak{v}^2}{2}\right)\frac{dx}{ds}ds=\frac{1}{\mathfrak{v}}u\frac{\partial u}{\partial t}ds+2\frac{u}{\mathfrak{v}}(\omega_2 w-\omega_3 v)\,ds,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(U-P-\frac{\mathfrak{v}^2}{2}\right)\frac{dy}{ds}ds=\frac{1}{\mathfrak{v}}v\frac{\partial v}{\partial t}ds+2\frac{v}{\mathfrak{v}}(\omega_3 u-\omega_1 w)\,ds,$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(U-P-\frac{\mathfrak{v}^2}{2}\right)\frac{dz}{ds}ds=\frac{1}{\mathfrak{v}}w\frac{\partial w}{\partial t}ds+2\frac{w}{\mathfrak{v}}(\omega_1 v-\omega_2 u)\,ds.$$

Складывая эти уравненія, найдемъ:

$$\frac{d}{ds}\left(U - P - \frac{\mathfrak{v}^2}{2}\right) ds = \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t}\, ds,$$

интегрируя вдоль линіи тока отъ 0 до s, имѣемъ:

$$U - P - \frac{\mathfrak{v}^2}{2} = \left(U - P - \frac{\mathfrak{v}^2}{2}\right)_{a,\,b,\,c} + \int_o^s \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t}\, ds. \quad . \; . \; (32)$$

Здѣсь a, b, c координаты начальной точки, такъ что справа окажется функція одного лишь времени t. Для установившагося движенія эта функція обратится въ постоянную величину, мѣняющуюся отъ одной линіи теченія (совпадающей съ линіей тока) къ другой (интегралъ, стоящій въ правой части, обращается въ нуль, такъ какъ $\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} = 0$). Этотъ случай соотвѣтствуетъ извѣстной *теоремѣ Бернулли*.

Въ случаѣ если скорости имѣютъ потенціалъ, пользуясь обозначеніями (26) для перваго изъ уравненій (30), получимъ:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t\, \partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial z} = \frac{\partial\,(U-P)}{\partial x};$$

или:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right\} - (U-P)\right] = 0.$$

Такъ какъ въ данномъ случаѣ

$$\mathfrak{v}^2 = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2,$$

то можно написать:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\mathfrak{v}^2}{2} - U + P\right) = 0.$$

Изъ двухъ другихъ уравненій (30) тѣмъ же путемъ найдемъ:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}\,\mathfrak{v}^2 - U + P\right) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}\,\mathfrak{v}^2 - U + P\right) = 0.$$

Отсюда заключаемъ, что выраженія въ скобкахъ могутъ быть функціями одного лишь времени. Слѣдовательно:

$$\frac{1}{2}\,\mathfrak{v}^2 - U + P = \Psi(t) - \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

Правая часть можетъ быть принята за произвольную функцію $\Phi(t)$, слѣдовательно

$$\frac{1}{2}\,\mathfrak{v}^2 - U + P = \Phi(t) \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (33)$$

Въ случаѣ установившагося движенія эта произвольная функція обратится въ произвольную постоянную:

$$\frac{1}{2}\,\mathfrak{v}^2 - U + P = C \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (34)$$

Эта постоянная сохраняетъ свое значеніе для всей области жидкости, движущейся съ потенціаломъ скоростей; чѣмъ этотъ случай и отличается отъ движенія вихревого, гдѣ на основаніи (32) постоянная мѣняется отъ одной линіи тока къ другой.

Уравненіе (33) носитъ названіе *интеграла Коши.* Лѣвая часть уравненій (32), (33) и (34) есть, какъ легко замѣтить, полная энергія на единицу массы частицы жидкости въ данной точкѣ, въ данный моментъ; поэтому мы можемъ ихъ считать интегралами живыхъ силъ для движенія жидкости, сжимаемой, но не вязкой. Въ случаѣ несжимаемой и идеальной жидкости, $\rho = const.$, поэтому, на основаніи (29):

$$P = \frac{p}{\rho}\;;\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (35)$$

на основаніи чего предыдущіе интегралы значительно упрощаются.

12. Уравненія (17), (18) и (19), въ связи съ условіями на границахъ и начальными условіями, являются, какъ это раньше было указано, достаточными для опредѣленія пяти величинъ:

$$u,\ v,\ w,\ p \text{ и } \rho.$$

По существу вопроса функціи эти должны быть однозначными. Функціи u, v, w вообще говоря непрерывны, хотя могутъ существовать поверхности на которыхъ они претерпѣваютъ разрывъ; такъ напримѣръ на поверхностяхъ раздѣла двухъ жидкостей, или въ струяхъ.

Давленіе p для жидкостей необходимо величина конечная, непрерывная и положительная (пренебрегая сцѣпленіемъ); въ тѣхъ случаяхъ, гдѣ p становится отрицательнымъ, жидкость претерпѣваетъ разрывъ, или образуется поверхность раздѣла на которой характеръ движенія совершенно измѣняется.

Плотность ρ всюду конечна и положительна, но не должна быть обязательно непрерывной.

Скажемъ теперь объ условіяхъ на границахъ, необходимыхъ для окончательнаго опредѣленія искомыхъ пяти величинъ.

Движущаяся жидкость можетъ быть ограничена со всѣхъ сторонъ, или можетъ простираться въ безконечность по нѣкоторымъ направленіямъ или, наконецъ, по всѣмъ направленіямъ. Въ тѣхъ мѣстахъ, гдѣ жидкость ограничена, задается или видъ самой поверхности или величина внѣшняго давленія на нее. Тѣ части пограничной поверхности, видъ которыхъ задается для каждаго момента движенія, называются стѣнками; онѣ могутъ, напримѣръ, образовываться поверхностями тѣлъ, движущихся или покоющихся въ жидкости. Давленіе на стѣнки, для каждой точки ихъ, въ любой моментъ, становится извѣстнымъ послѣ окончательнаго рѣшенія вопроса о движеніи разсматриваемой жидкости. Тѣ части поверхности на которыхъ задается величина внѣшняго давленія, называются свободными поверхностями жидкости; опредѣленіе вида ихъ является, иногда, рѣшеніемъ поставленной задачи.

Во все время движенія, въ силу условія неразрывности, жидкость не должна отдѣляться отъ стѣнокъ, другими словами нормальныя составляющія скорости какой либо точки стѣнки и точки жидкости, съ ней совпадающей, должны быть равны; въ противномъ случаѣ имѣло бы мѣсто протеканіе жидкости черезъ стѣнки, что противорѣчитъ условію налагаемому на нихъ.

Если уравненіе стѣнки (подвижной, въ самомъ общемъ случаѣ) будетъ:

$$f(x,\ y,\ z,\ t) = 0, \quad \dots \dots \dots \dots \quad (36)$$

и составляющія скорости по нормали къ ней въ какой либо точкѣ (съ координатами x, y, z) на ней ν, то черезъ безконечно малый промежутокъ времени δt, координаты этой точки будутъ:

$$x + \nu l\delta t, \quad y + \nu m\delta t, \quad z + \nu n\delta t,$$

гдѣ l, m, n косинусы нормали къ поверхности (36) въ разсматриваемой точкѣ въ данный моментъ t.

По условію точка должна остаться на поверхности, т. е.

$$f(x + \nu l\delta t, \quad y + \nu m\delta t, \quad z + \nu n\delta t, \quad t + \delta t) = 0.$$

Или, разлагая въ рядъ и принимая во вниманіе (36):

$$\nu\left(l\frac{\partial f}{\partial x} + m\frac{\partial f}{\partial y} + n\frac{\partial f}{\partial z}\right) + \frac{\partial f}{\partial t} = 0,$$

Но

$$l = \frac{1}{R}\frac{\partial f}{\partial x}, \qquad m = \frac{1}{R}\frac{\partial f}{\partial y}, \qquad n = \frac{1}{R}\frac{\partial f}{\partial z},$$

гдѣ

$$R = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2},$$

поэтому

$$\nu = -\frac{1}{R}\frac{\partial f}{\partial t} \quad \dots \dots \dots \dots \quad (37)$$

Таково выраженіе для нормальной составляющей скорости какой-либо точки подвижной стѣнки.

Съ другой стороны, на основаніи предыдущихъ разсужденій, должно быть:

$$\nu = lu + mv + nw,$$

т. е. ν должно быть равно проэкціи скорости точки жидкости, имѣющей тѣ же начальныя координаты, на ту же нормаль. Сравнивая съ (37), и подставляя вмѣсто l, m, n ихъ значенія, найдемъ:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} u + \frac{\partial f}{\partial y} v + \frac{\partial f}{\partial z} w = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

Это и есть дополнительное условіе для отысканія величинъ u, v, w, p и ρ.

Если въ жидкости существуетъ поверхность на которой скорости мѣняются скачкомъ, то какъ съ одной такъ и съ другой стороны ея должно выполняться условіе (38).

Если составляющія скорости точекъ жидкости, по другую сторону поверхности раздѣла, обозначимъ черезъ u_1, v_1, w_1, то должно удовлетворяться условіе:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} u_1 + \frac{\partial f}{\partial y} v_1 + \frac{\partial f}{\partial z} w_1 = 0,$$

или, вычитая это уравненіе изъ (38):

$$(u - u_1) \frac{\partial f}{\partial x} + (v - v_1) \frac{\partial f}{\partial y} + (w - w_1) \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \quad . \quad . \quad (39)$$

Въ случаѣ неподвижной стѣнки $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$, и (38) принимаетъ видъ

$$\frac{\partial f}{\partial x} u + \frac{\partial f}{\partial y} v + \frac{\partial f}{\partial z} w = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38,a)$$

другими словами скорости точки жидкости все время касаются неподвижной стѣнки, т. е. стѣнка состоитъ изъ линій теченія.

Поэтому, въ случаѣ если неподвижная стѣнка есть замкнутая поверхность, внутри которой движется жидкость, то ея касаются все время однѣ и тѣ же частицы жидкости.

Можно показать, что стѣнки въ движущейся жидкости находятся всегда въ соприкосновеніи съ однѣми и тѣми же частицами жидкости.

Пусть мы имѣемъ жидкость въ движеніи и въ ней подвижную стѣнку (36). Въ такомъ случаѣ имѣетъ мѣсто условіе (38):

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} u + \frac{\partial f}{\partial y} v + \frac{\partial f}{\partial z} w = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

Считая движеніе жидкости извѣстнымъ, можно сказать, что функція f есть интегралъ линейнаго дифференціальнаго уравненія съ частными производными перваго порядка. Какъ извѣстно, для интегрированія этого уравненія составляется вспомогательная система совокупныхъ уравненій вида:

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} = dt. \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (24,a)$$

Полная система интеграловъ ея можетъ быть написана въ видѣ:

$$x = \varphi_1(a, b, c, t), \quad y = \varphi_2(a, b, c, t), \quad z = \varphi_3(a, b, c, t), \ . \ . \ . \ . \ (40)$$

гдѣ a, b, c координаты начальнаго положенія частицы жидкости; сами же интегралы представляютъ линію теченія, проходящую черезъ это начальное положеніе.

Для полученія интеграла уравненія (38, a) нужно изъ уравненій (40) опредѣлить a, b и c и взять произвольную зависимость между ними:

$$\Psi(a, b, c) = 0.$$

Съ другой стороны, на основаніи (38), $f(x, y, z, t) = 0$ есть общій интегралъ этого уравненія, слѣдовательно:

$$f(x, y, z, t) = \Psi_1(a, b, c) = 0,$$

гдѣ Ψ_1 нѣкоторая функція; a, b, c суть функціи x, y, z, t. Здѣсь x, y, z на основаніи (40) представляютъ координаты точекъ линіи теченія въ любой моментъ времени, проходящей въ начальный моментъ черезъ точку съ координатами a, b, c.

Отсюда мы видимъ, что вся поверхность

$$f(x, y, z, t) = 0$$

образована линіями теченія, проходящими въ начальный моментъ черезъ точки лежащія на этой поверхности, т. е. наша подвижная стѣнка все время находится въ соприкосновеніи съ однѣми и тѣми-же частицами жидкости.

Глава III.

Кинематика жидкаго тѣла.

14. Подъ дѣйствіемъ силъ частицы жидкости деформируются; изученіемъ этихъ деформацій мы и займемся въ настоящей главѣ.

Для этого возьмемъ въ жидкости элементарный шарикъ, безконечно малаго радіуса r и отнесемъ его къ новой координатной системѣ X', Y', Z', оси которой параллельны нашимъ неподвижнымъ осямъ, а начало совпадаетъ все время съ центромъ шарика.

Координаты точекъ шарика, отнесенныхъ къ новой системѣ, обозначимъ черезъ ξ, η, ζ (величины безконечно малыя); координаты центра шарика въ какой либо моментъ, по отношенію къ неподвижной системѣ, пусть будутъ x, y, z; составляющія сторости его по осямъ для того же момента u, v, w. Въ такомъ случаѣ составляющія скорости какой либо точки шарика, по осямъ неподвижныхъ координатъ будутъ:

$$u + du = u + \xi \frac{\partial u}{\partial x} + \eta \frac{\partial u}{\partial y} + \zeta \frac{\partial u}{\partial z},$$

$$v + dv = v + \xi \frac{\partial v}{\partial x} + \eta \frac{\partial v}{\partial y} + \zeta \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (41)$$

$$w + dw = w + \xi \frac{\partial w}{\partial x} + \eta \frac{\partial w}{\partial y} + \zeta \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Отсюда видимъ, что всѣ точки шарика имѣютъ одну, общую съ центромъ его, скорость, составляющія по неподвижнымъ осямъ которой въ данный моментъ равны u, v, w; другими словами весь шарикъ перемѣщается поступательно какъ твердое тѣло. Къ этому общему поступательному движенію присоединяются относительныя перемѣщенія точекъ шарика.

Составляющія относительной скорости какой-либо точки шарика, съ координатами ξ, η, ζ, по отношенію къ разсматриваемой относительной системы координатъ, будутъ на основаніи (41):

$$du = \xi \frac{\partial u}{\partial x} + \eta \frac{\partial u}{\partial y} + \zeta \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$dv = \xi \frac{\partial v}{\partial x} + \eta \frac{\partial v}{\partial y} + \zeta \frac{\partial v}{\partial z} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (42)$$

$$dw = \xi \frac{\partial w}{\partial x} + \eta \frac{\partial w}{\partial y} + \zeta \frac{\partial w}{\partial z}$$

15. Для изслѣдованія дальнѣйшихъ движеній шарика примѣнимъ къ нему законъ моментовъ количествъ движенія вокругъ трехъ относительныхъ осей координатъ.

Моментъ количества движенія вокругъ оси параллельной оси X будетъ:

$$M_x = \rho \iiint \left[\eta \left(\xi \frac{\partial w}{\partial x} + \eta \frac{\partial w}{\partial y} + \zeta \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \zeta \left(\xi \frac{\partial v}{\partial x} + \eta \frac{\partial v}{\partial x} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \zeta \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right] d\omega, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (43)$$

гдѣ $d\omega$ элементъ объема нашего шарика.

Здѣсь интегрированіе распространяется по всему объему шарика, причемъ функціи $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, и т. д. представляютъ постоянныя величины для всей области интегрированія,—величины, которыя они принимаютъ при подстановкѣ въ нихъ абсолютныхъ координатъ центра шарика въ данный моментъ.

Поэтому тройной интегралъ (43), какъ легко видѣть, сведется къ такому:

$$\mathrm{M}_x = \rho \left[\frac{\partial w}{\partial y} \iiint \eta^2 d\omega - \frac{\partial v}{\partial z} \iiint \zeta^2 d\omega \right];$$

причемъ остальные интегралы исчезнутъ въ виду того, что для каждой точки шарика съ координатами ξ, η, ζ есть точка съ координатами $-\xi$, $-\eta$, $-\zeta$; поэтому для интеграловъ, подобныхъ приведенному, можемъ написать:

$$\rho \iiint \eta\xi \frac{\partial w}{\partial x} d\omega = \rho \frac{\partial w}{\partial x} \iiint \eta\xi \, d\omega = 0.$$

Замѣтимъ теперь, что ввиду полной симметріи шарика по отношенію къ координатнымъ осямъ, имѣемъ:

$$\rho \iiint \eta^2 d\omega = \rho \iiint \zeta^2 d\omega = \frac{1}{2} T,$$

гдѣ T моментъ инерціи шарика относительно оси параллельной оси X, выражающійся такъ:

$$T = \rho \iiint (\eta^2 + \zeta^2) \, d\omega.$$

Слѣдовательно имѣемъ:

$$M_x = \frac{1}{2} T \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (44)$$

Съ другой стороны, моментъ количества движенія равенъ моменту инерціи на угловую скорость относительно разсматриваемой оси, т. е.

$$M_x = T\omega_1;$$

если черезъ ω_1, ω_2, ω_3 обозначимъ мгновенныя угловыя скорости вращенія шарика вокругъ относительныхъ осей X', Y', Z'.

Сравнивая съ (44), находимъ:

$$\omega_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right).$$

На основаніи полученныхъ результатовъ мы можемъ сказать, что кромѣ поступательнаго движенія шарикъ, въ каждый моментъ времени, имѣетъ и вращальное движеніе, которое онъ совершаетъ подобно твердому тѣлу вокругъ мгновенныхъ осей, проходящихъ черезъ его центръ.

Составляющія угловой скорости этого вращенія по осямъ координатъ будутъ:

$$\omega_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right),$$

$$\omega_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right), \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (45)$$

$$\omega_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Обращаясь къ сказанному относительно формулъ (26), приходимъ къ слѣдующему существенно важному выводу: *если жидкость движется съ потенціаломъ скоростей то частицы ея не могутъ имѣть вращательнаго движенія, и наоборотъ наличность вращательнаго двпженія исключаетъ возможность движенія съ потенціаломъ скоростей.*

16. Если точка съ координатомъ ξ, η, ζ имѣетъ относительно осей три мгновенныхъ угловыхъ скорости ω_1, ω_2, ω_3, то, какъ извѣстно изъ механики, проэкціи вектора вращательной скорости ея на тѣ же оси координатъ будутъ:

$$dr_1 = \omega_2\zeta - \omega_3\eta,$$

$$dr_2 = \omega_3\xi - \omega_1\zeta, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (45)$$

$$dr_3 = \omega_1\eta - \omega_2\xi.$$

Если изъ скоростей (42) вычесть послѣднія выраженія, то въ результатѣ получимъ составляющія относительной скорости точекъ шарика, обуславливающія деформацію его.

Принимая во вниманіе (45), получимъ для этихъ составляющихъ слѣдующія выраженія:

$$ds_1 = a\xi + p_3\eta + p_2\zeta = \frac{\partial F}{\partial \xi},$$

$$ds_2 = p_3\xi + b\eta + p_1\zeta = \frac{\partial F}{\partial \eta}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (47)$$

$$ds_3 = p_2\xi + p_1\eta + c\zeta = \frac{\partial F}{\partial \zeta}.$$

гдѣ

$$F = \frac{1}{2}\left(a\xi^2 + b\eta^2 + c\zeta^2 + 2p_1\eta\zeta + 2p_2\xi\zeta + 2p_3\xi\eta\right), \quad . \; . \; . \; . \; . \; (48)$$

т. е. точки разсматриваемаго шарика имѣютъ движеніе съ потенціаломъ скоростей по отношенію къ осямъ, которымъ сообщено, общее для всѣхъ точекъ, поступательное и вращательное движенія.

Причемъ для уравненій (47) приняты слѣдующія обозначенія:

$$a = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad b = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad c = \frac{\partial w}{\partial x},$$

$$p_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right),\; p_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right),\; p_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) . \; (49)$$

Эти шесть величинъ называются *скоростями деформацій по осямъ.*

17. Обратимся теперь къ нашему шарику. Для него имѣемъ:

$$r^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2,$$

или, дифференцируя:

$$r\frac{dr}{dt} = \xi\frac{d\xi}{dt} + \eta\frac{d\eta}{dt} + \zeta\frac{d\zeta}{dt}.$$

Обозначая косинусы угловъ радіуса r съ осями черезъ l, m, n, имѣемъ:

$$l = \frac{\xi}{r},\ m = \frac{\eta}{r}, n = \frac{\zeta}{r}, \quad \ldots\ldots\ldots (50)$$

поэтому:

$$\frac{1}{r}\frac{dr}{dt} = l\frac{1}{r}\frac{d\xi}{dt} + m\frac{1}{r}\frac{d\eta}{dt} + n\frac{1}{r}\frac{d\zeta}{dt}.$$

Замѣтимъ теперь, что $\frac{d\xi}{dt}, \frac{d\eta}{dt}, \frac{d\zeta}{dt}$ суть скорости точекъ шарика по осямъ координатъ, т. е. на основаніи (47) они равны соотвѣтственно ds_1, ds_2, ds_3. Подставляя поэтому эти значенія въ предыдущія уравненія, найдемъ:

$$\frac{1}{r}\frac{dr}{dt} = \frac{l}{r}\left(a\xi + p_3\eta + p_2\zeta\right) + \frac{m}{r}\left(p_3\xi + b\eta + p_1\zeta\right) + \frac{n}{r}\left(p_2\xi + p_1\eta + c\zeta\right),$$

или, раскрывая скобки и пользуясь (50):

$$\frac{1}{r}\frac{dr}{dt} = al^2 + bm^2 + cn^2 + 2p_1mn + 2p_2ln + 2p_3lm \quad \ldots (51)$$

Лѣвая часть послѣдняго равенства представляетъ, какъ извѣстно, *скорость относительнаго удлиненія* радіуса сферы ($\frac{dr}{r}$ относительное удлиненіе). Мы видимъ, что эта скорость зависитъ лишь отъ первоначальнаго направленія радіуса. Обозначимъ ее черезъ λ и помножимъ обѣ части послѣдняго равенства на r_1^2, гдѣ r_1, радіусъ векторъ того же направленія что и r, а ξ_1, η_1, ζ_1 координаты его конца, слѣдовательно:

$$l = \frac{\xi_1}{r_1},\ m = \frac{\eta_1}{r_1},\ n = \frac{\zeta_1}{r_1}.$$

Въ такомъ случаѣ получимъ:

$$\lambda r_1^2 = a\xi_1^2 + b\eta_1^2 + c\zeta_1^2 + 2p_1\eta_1\zeta_1 + 2p_2\xi_1\zeta_1 + 2p_3\xi_1\eta_1.$$

Приравнивая обѣ части нѣкоторой постоянной k, имѣемъ:

$$\lambda r_1^2 = k$$

и

$$a\xi_1^2 + b\eta_1^2 + c\zeta_1^2 + 2p_1\eta_1\zeta_1 + 2p_2\xi_1\zeta_1 + 2p_3\xi_1\eta_1 = k \quad \ldots (52)$$

Полученная поверхность второго порядка называется *поверхностью удлиненія* и есть одна изъ *поверхностей равнаго потенціала скоростей удлиненія*. Для нея, какъ мы видимъ, скорости удлиненія радіусовъ векторовъ шарика обратно пропорціональны ихъ квадратамъ. Постоянная k можетъ принимать значенія большія, меньшія или равныя нулю.

Если равенства (47) почленно умножимъ на dt, то слѣва окажутся деформаціи за этотъ промежутокъ времени, равныя какъ мы выше указали $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$; слѣдовательно:

$$d\xi = (adt)\xi + (p_3dt)\eta + (p_2dt)\zeta,$$

$$d\eta = (p_3dt)\xi + (b\,dt)\eta + (p_1dt)\zeta, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (53)$$

$$d\zeta = (p_2dt)\xi + (d_1dt)\eta + (c\,dt)\zeta.$$

18. Для уясненія смысла коэффиціентовъ a, b, c, p_1, p_2, p_3, вошедшихъ въ послѣднія уравненія и въ уравненіи (51), найдемъ сперва скорости удлиненія радіусовъ векторовъ совпадающихъ съ относительными координатными осями. Для этого нужно послѣдовательно положить: $l=1$, $m=n=0$; $l=n=0$, $m=1$; $l=m=0$, $n=1$. Получимъ, что скорости удлиненія будутъ соотвѣтственно a, b, c. Если принять во вниманіе однѣ лишь эти деформаціи, то параллелопипедъ съ ребрами, параллельными осямъ координатъ, деформируется въ параллелопипедъ съ измѣненными по величинѣ, но не по направленію ребрами. Это вытекаетъ изъ уравненій (53), если въ нихъ положить $p_1 = p_2 = p_3 = 0$.

Ребра деформированнаго параллелопипеда будутъ:

$$\xi(1+adt),\ \eta(1+bdt),\ \zeta(1+cdt).$$

Объемъ первоначальнаго параллелопипеда

$$V = \xi\eta\zeta,$$

объемъ деформированнаго

$$V_1 = \xi\eta\zeta\ (1+adt)\ (1+bdt)\ (1+cdt);$$

или, произведя дѣйствія и пренебрегая безконечно-малыми выше четвертаго порядка:

$$V_1 = \xi\eta\zeta\Big[1+(a+b+c)\,dt\Big].$$

Отсюда, *коэффиціентъ кубическаго расширенія, отнесенный къ единицѣ времени, (или скорость кубическаго расширенія)*, имѣющій видъ:

$$\Theta = \frac{1}{V}\ \frac{V_1 - V}{dt},$$

будетъ:

$$\Theta = a+b+c, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (54)$$

Если возьмемъ радіусъ векторъ r', направленный по биссектрисѣ осей Ξ и Η (черт. 3), для которой $l = m = \frac{1}{\sqrt{2}}$ и $n = 0$, то изъ (51) получимъ:

$$\frac{1}{r'}\frac{dr'}{dt} = p_3;$$

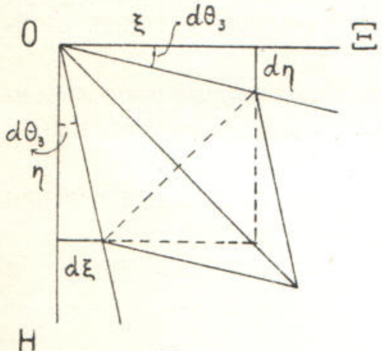
т. е. p_3 есть скорость удлиненія радіуса вектора, направленнаго по этой биссектрисѣ. Аналогичныя значенія найдемъ для p_1 и p_2.

Можно дать и другое толкованіе этимъ величинамъ.

Пренебрегая всѣми деформаціями, кромѣ зависящей отъ p_3, получимъ изъ (53):

$$d\xi = (p_3 dt)\eta, \quad d\eta = (p_3 dt)\xi.$$

Разсмотримъ ось Ξ, для которой $\eta = 0$. Получимъ:



Черт. 3.

$$d\eta = (p_3 dt)\xi \text{ или } p_3 dt = \frac{d\eta}{\xi};$$

Такимъ же образомъ для оси Η, для которой $\xi = 0$, найдемъ:

$$p_3 dt = \frac{d\xi}{\eta}.$$

Обращаясь къ чертежу, видимъ, что $p_3 dt$ есть тангенсъ угла $d\theta_3$ поворота осей Ξ и Η послѣ деформаціи. Такъ какъ этотъ уголъ безконечно малъ, то можемъ написать:

$$p_3 dt = d\theta_3, \text{ или } \frac{d\theta_3}{dt} = p_3,$$

т. е. p_3 есть скорость поворота осей Ξ и Η вокругъ оси Z.

Мы видимъ, что прямой уголъ деформируется въ $\frac{\pi}{2} - 2d\theta_3$, и прямоугольникъ, съ площадью $\xi.\eta$, обращается въ параллелограммъ, площадь котораго:

$$\frac{\xi.\eta}{\cos^2 d\theta_3}.\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2d\theta_3\right) \text{ или } \frac{\xi.\eta}{\cos^2 d\theta_3}\cos 2d\theta_3 = \xi.\eta\,(1 - tg^2 d\theta_3),$$

что, въ виду малости $d\theta_3$ обращается въ $\xi.\eta$, т. е. разсматриваемая деформація не вліяетъ на величину площади.

Если бы вмѣсто прямоугольника мы взяли параллелопипедъ съ высотою ζ (по оси Z), имѣющій въ основаніи разсматриваемый прямоугольникъ, то убѣдились бы, что объемъ его не измѣнился, т. е. разсматриваемая деформація не вліяетъ на измѣненіе элементарнаго объема. Тѣ же разсужденія примѣнимы къ величинамъ p_1 и p_2.

Такимъ образомъ значеніе шести вышеуказанныхъ коэффиціентовъ вполнѣ выяснено. Мы видимъ, что три взаимно-перпендикулярныхъ радіуса вектора послѣ деформацій удлиняются и углы между ними перекашиваются.

Спрашивается, имѣются ли три такихъ взаимно-перпендикулярныхъ направленія, для которыхъ существуетъ одна лишь деформація удлиненія, углы же между ними остаются неизмѣнно прямыми. Легко показать, что такія направленія существуютъ.

Для этого замѣтимъ, что скорости удлиненія радіусовъ векторовъ, концы которыхъ расположены на поверхности удлиненій, направлены по нормали къ этой поверхности; это вытекаетъ изъ свойствъ движенія съ потенціаломъ скоростей. Тамъ гдѣ нормаль къ поверхности совпадаетъ съ направленіемъ радіуса вектора изъ начала, имѣютъ мѣсто, очевидно, однѣ лишь удлиненія; скорости перекашиванія обращаются въ нуль. Для поверхностей второго порядка существуетъ три взаимно-перпендикулярныхъ направленія, обладающихъ этимъ свойствомъ (главныя оси).

Поэтому для частицы въ данной точкѣ *существуетъ три взаимно ортогональныхъ направленія (оси), называемыхъ главными, по которымъ деформаціи сводятся къ однимъ лишь удлиненіямъ.*

Для отысканія этихъ направленій нужно найти главныя оси для поверхности (52).

Принявъ эти направленія за новыя оси, перепишемъ уравненія (53) въ такомъ видѣ:

$$d\xi = Adt\,\xi,$$
$$d\eta = Bdt\,\eta, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (53,a)$$
$$d\zeta = Cdt\,\zeta.$$

Здѣсь
$$A = \frac{\partial U}{\partial x} = U'_x\,, \; B = \frac{\partial V}{\partial y} = V'_y\,, \; C = \frac{\partial W}{\partial z} = W'_z\,, \quad \ldots \quad (53,b)$$

гдѣ U, V, W проложеніе скорости точки на главныя направленія. Между U, V, W и прежними u, v, w существуютъ такія соотношенія:

$$u = l_x\,U + m_x\,V + n_x\,W,$$
$$v = l_y\,U + m_y\,V + n_y\,W, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (53,c)$$
$$w = l_z\,U + m_z\,V + n_z\,W;$$

l, m, n суть косинусы какой либо изъ прежнихъ осей (обозначенной индексомъ) съ главными направленіями.

Обратимъ вниманіе еще на одно свойство деформацій. На основаніи (54) мы видимъ, что деформаціи являются ничѣмъ инымъ, какъ линейнымъ преобразованіемъ отъ одной системы координатъ къ другой. При такихъ преобразованіяхъ плоскость остается плоскостью, двѣ параллельныхъ плоскости остаются параллельными, прямая деформируется въ прямую. Такая деформація называется *однородной*.

19. Вернемся теперь къ выраженіямъ (53). Мы видимъ, что координаты какой либо точки ξ, η, ζ обратятся въ ξ_1, η_1, ζ_1, причемъ:

$$\xi_1 = \xi + d\xi, \quad \eta_1 = \eta + d\eta, \quad \zeta_1 = \zeta + d\zeta;$$

или на основаніи (53):

$$\begin{aligned} \xi &= \xi_1 \ (1 - adt) - p_3 \eta_1 \ dt - p_2 \zeta_1 \ dt, \\ \eta &= - \xi_1 p_3 \, dt + \eta_1 \ (1 - bdt) - \zeta_1 \, p_1 \, dt, \\ \zeta &= - \xi_1 \, p_2 \, dt - \eta_1 \, p_1 \, dt + \zeta_1 \ (1 - cdt). \end{aligned} \quad \ldots\ldots (55)$$

Посмотримъ какъ расположатся точки нашей безконечно малой сферы радіуса r послѣ деформаціи. Для этого возвысимъ въ квадратъ равенства (55) и сложимъ ихъ почленно. Замѣчая, что

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = r^2,$$

пренебрегая въ правой части безконечно малыми выше третьяго порядка, найдемъ:

$$r^2 = \xi_1^2 (1 - 2adt) + \eta_1^2 (1 - 2bdt) + \zeta_1^2 (1 - cdt) - 4p_1 dt \, \zeta_1 \eta_1 - 4p_2 dt \xi_1 \, \zeta_1 - \\ - 4p_3 dt \xi_1 \eta_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (56)$$

Мы видимъ, что сфера деформировалась въ поверхность второго порядка, которая должна быть эллипсоидомъ. Это вытекаетъ изъ того, что наши деформаціи предполагаются безконечно-малыми; поэтому сфера должна деформироваться въ замкнутую поверхность второго порядка, которая въ общемъ случаѣ есть эллипсоидъ, называемый *эллипсоидомъ деформацій*.

Уравненіе эллипсоида деформаціи, отнесенное къ главнымъ осямъ будетъ:

$$\xi_1^2 (1 - 2Adt) + \eta_1^2 (1 - 2Bdt) + \zeta_1^2 (1 - 2 \ Cdt) = r^2.$$

На основаніи сказаннаго относительно скорости кубическаго расширенія (54), можемъ написать:

$$\theta = A + B + C = a + b + c;$$

или, на основаніи обозначеній (49):

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (57)$$

Для несжимаемой жидкости послѣднее выраженіе должно обратиться въ нуль, такъ какъ для нея $\theta = 0$. Это было показано раньше, исходя изъ соображеній о сплошности движенія.

Глава IV.

Вихревое движеніе.

20. Въ настоящей главѣ мы подробнѣе остановимся на случаѣ движенія безъ потенціала скоростей, т. е. на вихревомъ движеніи. Въ этомъ случаѣ, какъ видно изъ выраженій (45) и (27), величины ω_1, ω_2, ω_3, представляющія собой проэкціи на оси координатъ вектора угловой скорости или вихря частицъ жидкости, отличны отъ нуля; другими словами частицы жидкости имѣютъ вращательное движеніе вокругъ осей, проходящихъ черезъ ихъ центры.

Составляющія вихря ω по осямъ координатъ имѣютъ видъ:

$$\omega_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right),$$

$$\omega_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right), \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (45)$$

$$\omega_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Дифференцируя, найдемъ:

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial x} + \frac{\partial \omega_2}{\partial y} + \frac{\partial \omega_3}{\partial z} = 0. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (58)$$

Обратимся теперь къ уравненіямъ (31,a). Они имѣютъ слѣдующій видъ:

$$X = \frac{\partial}{\partial x}\left(P + \frac{1}{2}\mathfrak{v}^2\right) + \frac{\partial u}{\partial t} + 2(\omega_2 w - \omega_3 v),$$

$$Y = \frac{\partial}{\partial y}\left(P + \frac{1}{2}\mathfrak{v}^2\right) + \frac{\partial v}{\partial t} + 2(\omega_3 u - \omega_1 w), \quad \ldots \quad (31,a)$$

$$Z = \frac{\partial}{\partial z}\left(P + \frac{1}{2}\mathfrak{v}^2\right) + \frac{\partial w}{\partial t} + 2(\omega_1 v - \omega_2 u).$$

Продифференцируемъ первое уравненіе по y, второе по x и вычтемъ первый результатъ изъ второго, получимъ:

$$\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) - 2\omega_3\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x}\right) + 2\left(\omega_2\frac{\partial w}{\partial y} + \omega_1\frac{\partial w}{\partial x}\right) -$$

$$-2\left(v\frac{\partial \omega_3}{\partial y} + u\frac{\partial \omega_3}{\partial x}\right) + 2w\left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x} + \frac{\partial \omega_2}{\partial y}\right).$$

Изъ условія сплошности для жидкости (17,a), имѣемъ:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}-\frac{\partial w}{\partial z};$$

кромѣ того изъ (58) слѣдуетъ:

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial x}+\frac{\partial \omega_2}{\partial y}=-\frac{\partial \omega_3}{\partial z};$$

поэтому послѣднее уравненіе перепишется такъ:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial X}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial x}\right)=-\frac{\partial \omega_3}{\partial t}-u\frac{\partial \omega_3}{\partial x}-v\frac{\partial \omega_3}{\partial y}-w\frac{\partial \omega_3}{\partial z}+\frac{\omega_3}{\rho}\frac{d\rho}{dt}+$$
$$+\left(\omega_1\frac{\partial w}{\partial x}+\omega_2\frac{\partial w}{\partial y}+\omega_3\frac{\partial w}{\partial z}\right).$$

Замѣчая, что

$$\frac{\partial \omega_3}{\partial t}+u\frac{\partial \omega_3}{\partial x}+v\frac{\partial \omega_3}{\partial y}+w\frac{\partial \omega_3}{\partial z}-\frac{\omega_3}{\rho}\frac{d\rho}{dt}=\frac{\partial \omega_3}{\partial t}+\frac{\partial \omega_3}{\partial x}\frac{dx}{dt}+$$
$$+\frac{\partial \omega_3}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial \omega_3}{\partial z}\frac{dz}{dt}-\frac{\omega_3}{\rho}\frac{d\rho}{dt}=\frac{d\omega_3}{dt}-\frac{\omega_3}{\rho}\frac{d\rho}{dt},$$

и

$$\frac{d\omega_3}{dt}-\frac{\omega_3}{\rho}\frac{d\rho}{dt}=\rho\cdot\frac{d\,\frac{\omega_3}{\rho}}{dt},$$

получимъ окончательно:

$$\frac{d\,\frac{\omega_3}{\rho}}{dt}=\frac{\omega_1}{\rho}\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\omega_2}{\rho}\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\omega_3}{\rho}\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{1}{2\rho}\left(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right).$$

Поступая подобнымъ образомъ съ уравненіями (31,a) можно получить еще два аналогичныхъ уравненія. Поэтому имѣемъ:

$$\begin{aligned}
\frac{d\,\frac{\omega_1}{\rho}}{dt}&=\frac{\omega_1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\omega_2}{\rho}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\omega_3}{\rho}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{1}{2\rho}\left(\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z}\right),\\
\frac{d\,\frac{\omega_2}{\rho}}{dt}&=\frac{\omega_1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\omega_2}{\rho}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\omega_3}{\rho}\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{1}{2\rho}\left(\frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x}\right), \quad . \; . \; (59)\\
\frac{d\,\frac{\omega_3}{\rho}}{dt}&=\frac{\omega_1}{\rho}\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\omega_2}{\rho}\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\omega_3}{\rho}\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{1}{2\rho}\left(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right).
\end{aligned}$$

Если силы на единицу массы имѣютъ потенціалъ, то выраженія въ скобкахъ въ правыхъ частяхъ уравненій обращаются въ нули, т. е.

$$\frac{d\frac{\omega_1}{\rho}}{dt}=\frac{\omega_1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\omega_2}{\rho}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\omega_3}{\rho}\frac{\partial u}{\partial z},$$

$$\frac{d\frac{\omega_2}{\rho}}{dt}=\frac{\omega_1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\omega_2}{\rho}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\omega_3}{\rho}\frac{\partial v}{\partial z}, \quad \ldots\ldots \quad (59, a).$$

$$\frac{d\frac{\omega_3}{\rho}}{dt}=\frac{\omega_1}{\rho}\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\omega_2}{\rho}\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\omega_3}{\rho}\frac{\partial w}{\partial z}.$$

Для несжимаемой жидкости, для которой $\rho = Const.$, эти уравненія перепишутся такъ:

$$\frac{d\omega_1}{dt}=\omega_1\frac{\partial u}{\partial x}+\omega_2\frac{\partial u}{\partial y}+\omega_3\frac{\partial u}{\partial z},$$

$$\frac{d\omega_2}{dt}=\omega_1\frac{\partial v}{\partial x}+\omega_2\frac{\partial v}{\partial y}+\omega_3\frac{\partial v}{\partial z}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (59,b)$$

$$\frac{d\omega_3}{dt}=\omega_1\frac{\partial w}{\partial x}+\omega_2\frac{\partial w}{\partial y}+\omega_3\frac{\partial w}{\partial z}.$$

Полныя производныя по времени отъ $\frac{\omega_1}{\rho}$, $\frac{\omega_2}{\rho}$, $\frac{\omega_3}{\rho}$, стоящія въ лѣвыхъ частяхъ уравненій (59, a), представляютъ собой измѣненія вихревыхъ составляющихъ, дѣленныхъ на плотность въ данной точкѣ, отнесенныхъ не къ точкѣ пространства, а къ элементу жидкости, перемѣщающемуся со временемъ. Поэтому, если для какого-либо момента времени, для какой-либо частицы жидкости

$$\omega_1=\omega_2=\omega_3=0,$$

то для нея и

$$\frac{d\frac{\omega_1}{dt}}{dt}=\frac{d\frac{\omega_2}{\rho}}{dt}=\frac{d\frac{\omega_3}{\rho}}{dt}=0,$$

т. е. *если въ жидкости силы на единицу массы имѣютъ потенціалъ то частицы ея двигавшіяся съ потенціаломъ скоростей, будутъ во все время движенія обладать потенціаломъ скоростей, а частицы, пришедшія разъ во вращеніе, останутся во все время движенія вращающимися.*

Это положеніе, называемое *закономъ сохраненія вихрей,* принадлежитъ *Гельмгольцу*, впервые установившему понятіе о вихрѣ и давшему основныя теоремы вихревого движенія.

21. Для дальнѣйшаго введемъ понятіе о *вихревой линіи* и *вихревой трубкѣ*.

Линія, проведенная для даннаго момента времени въ жидкости такъ, что касательная въ каждой точкѣ ея совпадаетъ съ векторомъ мгновенной скорости вращенія частицы жидкости, совпадающей съ этой точкой, называется *вихревой линіей*.

Если черезъ точки безконечно малаго замкнутаго контура, построеннаго для даннаго момента времени въ жидкости, провести вихревыя линіи, то въ жидкости выдѣлится *вихревая трубка*.

Черезъ каждую точку жидкости можетъ быть въ любой моментъ проведена вихревая линія; при установившемся движеніи эта линія расположена неизмѣнно въ пространствѣ, при неустановившемся—она деформируется. Тоже относится и къ вихревымъ трубкамъ.

Система дифференціальныхъ уравненій, опредѣляющихъ вихревую линію будетъ:

$$\frac{dx}{\omega_1} = \frac{dy}{\omega_2} = \frac{dz}{\omega_3} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (60)$$

22. Докажемъ теперь три *теоремы Гельмгольца* для несжимаемой жидкости.

Возьмемъ въ жидкости двѣ безконечно близкихъ точки A и B, координаты которыхъ въ моментъ времени t суть x, y, z и $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$.

Примемъ точку A за центръ, содержащаго ее, безконечно-малаго объема. Пусть точка B въ моментъ t лежитъ на оси вращенія этого объема. Слѣдовательно, разстояніе ds между этими точками есть элементъ вихревой линіи, проходящей въ моментѣ t черезъ точки A и B. Для этой вихревой линіи имѣемъ:

$$\frac{dx}{\omega_1} = \frac{dy}{\omega_2} = \frac{dz}{\omega_3} = \frac{ds}{\omega} \ldots \ldots \ldots \ldots (60,a)$$

Для момента $t+dt$ координаты точекъ A и B пусть будутъ x', y', z' и $x+dx'$, $y'+dy'$, $z+dz'$. Найдемъ:

$$x' = x + udt,\ y' = y + vdt,\ z' = z + wdt;$$

откуда:

$$dx' = dx + \left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz\right)dt,$$

$$dy' = dy + \left(\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy + \frac{\partial v}{\partial z}dz\right)dt,$$

$$dz' = dz + \left(\frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz\right)dt.$$

Замѣняя въ послѣднихъ трехъ уравненіяхъ dx, dy, dz ихъ величинами изъ $(60, a)$, найдемъ:

$$dx' = \frac{ds}{\omega}\left\{\omega_1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\omega_1 + \frac{\partial u}{\partial y}\omega_2 + \frac{\partial u}{\partial z}\omega_3\right)dt\right\},$$

$$dy' = \frac{ds}{\omega}\left\{\omega_2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\omega_1 + \frac{\partial v}{\partial y}\omega_2 + \frac{\partial v}{\partial z}\omega_3\right)dt\right\},$$

$$dz' = \frac{\partial s}{\omega}\left\{\omega_3 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\omega_1 + \frac{\partial w}{\partial y}\omega_2 + \frac{\partial w}{\partial z}\omega_3\right)dt\right\},$$

или, на основаніи уравненій $(59, b)$:

$$\frac{dx'}{\omega_1 + d\omega_1} = \frac{dy'}{\omega_2 + d\omega_2} = \frac{dz}{\omega_3 + d\omega_3} = \frac{ds}{\omega} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (61)$$

Но dx', dy', dz' суть проекціи на оси координатъ разстоянія ds' точекъ A и B въ ихъ новомъ положеніи, съ другой стороны $\omega_1 + d\omega_1$, $\omega_2 + d\omega_2$, $\omega_3 + d\omega_3$ суть проекціи на тѣ же оси угловой скорости $\omega_1 = \omega + d\omega$ частицы A въ ея новомъ положеніи; отсюда заключаемъ, что если двѣ безконечно близкія точки жидкости въ какой-либо моментъ времени лежали на вихревой линіи, то въ слѣдующій моментъ, а слѣдовательно и вообще всегда, онѣ будутъ лежать на одной и той жа вихревой линіи. Такъ какъ это вѣрно для произвольно взятыхъ точекъ, то отсюда и вытекаетъ *первая теорема Гельмгольца*:

Частицы жидкости, лежащія въ какой-либо моментъ времени на одной и той же вихривой линіи, двигаются, оставаясь на одной вихревой линіи. Понимать это надо такъ, что частицы, двигаясь, переходятъ одновременно съ одной вихревой линіи на другую (представляемую интегралами уравненій (59)).

На основаніи (60) и $(59, a)$ можемъ написать:

$$\frac{ds}{\omega} = \frac{ds'}{\omega'} = \quad . \quad . \quad . = c_1, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (62)$$

т. е. разстояніе между двумя безконечно близкими точками на вихревой линіи измѣняется обратно-пропорціонально угловымъ скоростямъ вращенія.

23. Возьмемъ теперь вихревую трубку въ положеніи ея для момента t, и разобьемъ на элементы нормальными сѣченіями.

Элементы трубки будутъ мѣнять со временемъ свое положеніе и форму, но такъ какъ каждый элементъ состоитъ изъ однихъ и тѣхъ же точекъ жидкости, то объемы ихъ мѣняться не будутъ.

Обозначимъ черезъ F и ds площадь поперечнаго сѣченія трубки и длину элемента ея оси (ось—средняя вихревая линія трубки). Объемъ элемента трубки выразится произведеніемъ Fds. Такъ какъ объемъ этотъ со временемъ не мѣняется, то

$$Fds = C_2,$$

гдѣ C_2 постоянная для разсматриваемаго сѣченія трубки.

На основаніи (61) послѣднее уравненіе можетъ быть такъ переписано:

$$F\omega = C, \dots\dots\dots\dots\dots \quad (63)$$

т. е. произведеніе площади поперечнаго сѣченія трубки, (проходящей черезъ тѣ же частицы) на угловую скорость со временемъ не мѣняется.

Это *вторая теорема Гельмгольца.*

24. Возьмемъ уравненіе (58):

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial x} + \frac{\partial \omega_2}{\partial y} + \frac{\partial \omega_3}{\partial z} = 0 \dots\dots\dots \quad (58)$$

Помножимъ это уравненіе на элементъ объема $dx\,dy\,dz$, и проинтегрировавъ полученный результатъ, для опредѣленнаго момента времени, по какому либо объему, получимъ:

$$\iiint \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x} + \frac{\partial \omega_2}{\partial y} + \frac{\partial \omega_3}{\partial z} \right) dx\,dy\,dz = 0.$$

Разбивъ на три интеграла и произведя одно интегрированіе, найдемъ:

$$\int\int \Big(\omega_1 dydz + \omega_2 dxdz + \omega_3 dxdy \Big) = 0;$$

но

$$dydz = dS.cs\,(n, x), \;\; dxdz = dS.cs\,(n, y), \;\; dxdy = dS.cs\,(n, z),$$

гдѣ dS элементъ поверхности, ограничивающей объемъ, по которому производится интеграція; n—внѣшняя нормаль къ ней; поэтому:

$$\int\int \Big\{ \omega_1\, cs\,(n, x) + \omega_2\, cs\,(n, y) + \omega_3\, cs\,(n, z) \Big\}\, dS = 0,$$

или

$$\int\int \omega\, cs\,(\omega, n)\;\, dS = 0.$$

Примѣнимъ это уравненіе къ части силовой трубки, заключающейся между двумя произвольными нормальными сѣченіями. Площадь перваго сѣченія, гдѣ вихревыя линіи входятъ въ трубку, обозначимъ черезъ F_1; площадь второго сѣченія, гдѣ онѣ выступаютъ изъ нея, назовемъ черезъ F_2. Для всѣхъ точекъ боковой поверхности $cs\,(\omega, n) = 0$.

Для перваго сѣченія $dS = F_1$, $cs(\omega, n) = -1$; для второго $dS = F_2$, $cs\,(\omega, n) = 1$. Слѣдовательно:

$$F_2\, \omega_2 - F_1\, \omega_1 = 0.$$

Отсюда вытекаетъ, что *въ каждый данный моментъ произведеніе площади поперечнаго сѣченія нити на скорость вращенія вдоль всей нити одно и тоже.*

Это *третья теорема Гельмгольца.*

Выраженіе $F\omega$ называется *напряженіемъ вихря*

Послѣднія двѣ теоремы показываютъ, что для всѣхъ частицъ, расположенныхъ въ данный моментъ времени на какой либо вихревой линіи, напряженіе вихря во все время движенія остается неизмѣннымъ.

Три теоремы Гельмгольца были нами доказаны для случая несжимаемой жидкости, ввиду простоты доказательствъ. Эти же теоремы могутъ быть распространены и на сжимаемыя жидкости, но ввиду сложности доказательствъ мы здѣсь ихъ не приводимъ.

Вихревыя трубки (слѣдовательно и линіи) не могутъ начинаться и кончаться внутри жидкости, а могутъ лишь итти отъ границы до границы, или же образовывать замкнутые контуры.

Глава V.

Движеніе вязкихъ жидкостей.

25. Перейдемъ теперь къ разсмотрѣнію вязкихъ жидкостей. Изъ основного опредѣленія жидкости, даннаго въ началѣ, мы видимъ, что въ состояніи равновѣсія, касательныя напряженія, присущія вязкимъ жидкостямъ, не должны себя проявлять; дѣйствіе ихъ должно обнаруживаться лишь при движеніи жидкостей. Слѣдовательно, касательныя напряженія должны быть функціей скорости точекъ жидкости, функціей обращающейся въ нуль вмѣстѣ со скоростями.

Свойство вязкости жидкости называется иногда *внутреннимъ треніемъ* ея. Это внутреннее треніе въ основѣ отличается отъ тренія твердыхъ тѣлъ тѣмъ, что проявляется лишь въ движеніи,—т. е. *для какихъ бы то ни было жидкостей (слѣдовательно и вязкихъ) тренія покоя не существуетъ.*

Иными словами: *съ возникновеніемъ въ жидкости касательныхъ напряженій (въ случаѣ вязкой жидкости) необходимо нарушается ея равновѣсіе.*

Подобно тому какъ это сдѣлано для идеальныхъ жидкостей, дадимъ здѣсь выводъ дифференціальныхъ уравненій движенія вязкой жидкости. Для этого должна быть установлена связь между напряженіями X_x, X_y, ... и скоростями въ какой либо точкѣ жидкости. Связь эта можетъ быть дана на основаніи какихъ либо болѣе или менѣе достовѣрныхъ гипотезъ, подтвержденныхъ опытомъ.

Ньютонъ первый установилъ *основные гипотетическіе законы для силъ внутренняго тренія жидкостей.* Изъ этихъ законовъ слѣдуетъ, что *сила внутренняго тренія:*

1) *прямо пропорціональна первой степени скорости относительнаго движенія частицъ,*

2) *прямо пропорціональна величинѣ поверхности соприкосновенія, вдоль которой происходитъ это относительное движеніе частицъ,*

3) *зависитъ отъ свойства жидкости,*

4) *не зависитъ отъ внутренняго давленія жидкости.*

Вліянія температуры на силу внутренняго тренія Ньютонъ не касался.

Дальнѣйшіе изслѣдователи, какъ то *Дюбюо, Герстнеръ, Жираръ* и главнымъ образомъ *Пуазейль* нашли, что сила внутренняго тренія

5) *уменьшается съ возвышеніемъ температуры.*

Наконецъ опыты нѣкоторыхъ изслѣдователей показали, что сила внутренняго тренія

6) *измѣняется съ увеличеніемъ давленія; для нѣкоторыхъ жидкостей возрастая (спиртъ, скипидаръ, ...), а для другихъ убывая (вода, глицеринъ).*

Главнымъ образомъ приходится считаться съ первыми четырьмя законами внутренняго тренія, данными Ньютономъ.

Навье въ 1822 г.)* первый ввелъ въ дифференціальныя уравненія движенія идеальной жидкости силы внутренняго тренія, подчиняя ихъ вышеуказаннымъ четыремъ законамъ, и получилъ такимъ образомъ уравненія движенія вязкой жидкости. Къ выводу ихъ мы и приступимъ. Замѣтимъ, что условія сплошности движенія и зависимость между давленіемъ и плотностью остаются тѣми же.

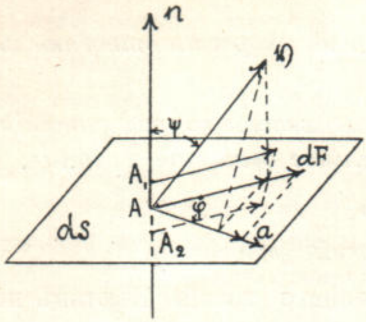
Дѣйствіе вязкости выразится тѣмъ, что къ нормальному напряженію, дѣйствующему въ данной точкѣ пространства на элементарную площадку ds, произвольно расположенную въ жидкости (т. е. къ усилію $-pds$, если за положительное направленіе считать внѣшнюю нормаль къ разсматриваемой сторонѣ площадки), присоединяется нѣкоторое касательное напряженіе, дѣйствующее вдоль площадки въ направленіи относительной скорости движенія частицъ, расположенныхъ съ обѣихъ сторонъ ея.

26. Найдемъ аналитическое выраженіе этого касательнаго напряженія.

---

*) Mémoires de l'Academie des Sciences t. VII, p. 389. Navier. Mémoire sur les lois du mouvement des fluides.

Возьмемъ въ жидкости какую либо площадку ds и на ней точку A (черт. 4). Пусть n будетъ нормаль въ этой точкѣ къ площадкѣ, $\mathfrak{v}$—скорость въ той же точкѣ, ψ—уголъ между $\mathfrak{v}$ и положительнымъ направленіемъ нормали. Выберемъ на нормали двѣ безконечно-близкія точки A_1 и A_2 такъ, чтобы $A_2A = AA_1 = \frac{dn}{2}$, лежащія по обѣ стороны площадки.



Черт. 4.

Найдемъ теперь относительную скорость движенія вдоль площадки частицы A_1 по отношенію къ A_2; для этого мы должны составить тангенціальныя составляющія скоростей точекъ A_1 и A_2 и вычесть одну изъ другой. Тангенціальная составляющая скорости точки $A_1 - \mathfrak{v}_{1t}$ будетъ:

$$\mathfrak{v}_{1t} = \mathfrak{v}\, sin\, \psi + \frac{dn}{2} \frac{d\mathfrak{v} sin \psi}{dn} + \ldots\ldots\ldots ,$$

аналогично для точки A_2 имѣемъ:

$$\mathfrak{v}_{2t} = \mathfrak{v}\, sin\, \psi - \frac{dn}{2} \frac{d\mathfrak{v} sin \psi}{dn} + \ldots\ldots$$

Искомая относительная скорость получится вычитаніемъ одного выраженія изъ другого;

$$\mathfrak{v}'_t = \frac{d\mathfrak{v} sin \psi}{dn} dn + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$\mathfrak{v}'_t$ можно разсматривать какъ скорость относительнаго движенія частицъ жидкости, расположенныхъ въ плоскости параллельной нашему элементу и проходящей черезъ точку A_1, по отношенію къ частицамъ расположеннымъ въ такой же плоскости но проходящей черезъ точку A_2. При этомъ мы предполагали, что $\mathfrak{v}_{1t}$ параллельна $\mathfrak{v}_{2t}$ что при малости разстоянія A_1A_2 допустимо. Обозначая черезъ $\mathfrak{v}_r$ относительную скорость, расчитанную на единицу разстоянія для частицъ, расположенныхъ по обѣ стороны элементарной площадки и непосредственно на ней лежащихъ (т. е. со стороны положительной нормали и ей противоположной стороны), принимая въ предѣлѣ $dn = 0$, найдемъ:

$$\mathfrak{v}_r = lim \frac{\mathfrak{v}'_t}{dn} = \frac{d\mathfrak{v} sin \psi}{dn}, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (64)$$

или такъ

$$\mathfrak{v}_r = \frac{d\mathfrak{v}_t}{dn}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (64, a)$$

гдѣ $\mathfrak{v}_t$ — составляющая скорости по элементу площадки.

Сила внутренняго тренія, дѣйствующая на элементарной площадкѣ ds со стороны частицъ жидкости, лежащихъ на положительной сторонѣ площадки на частицы, лежащія на отрицательной сторонѣ можетъ быть выражена (по законамъ тренія Ньютона) такъ:

$$dF = \mu \frac{d\mathfrak{v}_t}{dn} ds. \qquad (65)$$

Здѣсь μ называется *коэффиціентомъ вязкости*, или *коэффиціентомъ внутренняго тренія жидкости*.

Возьмемъ на нашей площадкѣ какое либо направленіе a и найдемъ проэкцію силы тренія dF на это направленіе. Обозначая эту проэкцію черезъ dF_a, уголъ между a и $\mathfrak{v}_t$ черезъ φ, можемъ написать:

$$dF_a = dF\, cs\, \varphi = \mu \frac{d\mathfrak{v}_t}{dn} ds\, cs\, \varphi = \mu \frac{d\mathfrak{v}_t\, cs\, \varphi}{dn} ds,$$

замѣчая, что:

$$\mathfrak{v}_t\, cs\, \varphi = \mathfrak{v}\, cs(\mathfrak{v}, a),$$

находимъ:

$$dF_a = \mu \frac{d\,[\mathfrak{v}\, cs\, (\mathfrak{v}, a)]}{dn} ds \qquad (65, a)$$

Мы видимъ, что μ есть не что иное, какъ коэффиціентъ сдвига для жидкаго тѣла.

Глава VI.

Связь между касательными напряженіями и деформаціями.

27. Обратимся теперь къ уравненіямъ (14), переписаннымъ въ такомъ видѣ:

$$\begin{aligned}
\frac{du}{dt} &= X + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}\right),\\
\frac{dv}{dt} &= Y + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z}\right), \qquad (14, a)\\
\frac{dw}{dt} &= Z + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z}\right).
\end{aligned}$$

Посмотримъ, какъ выразятся для вязкой жидкости напряженія X_x, X_y, ... Y_x, ... черезъ величины, управляющія деформаціями, т. е. черезъ u, v, w.

Касательныя напряженія:

$$X_y, \ Y_z, \ Z_x,$$

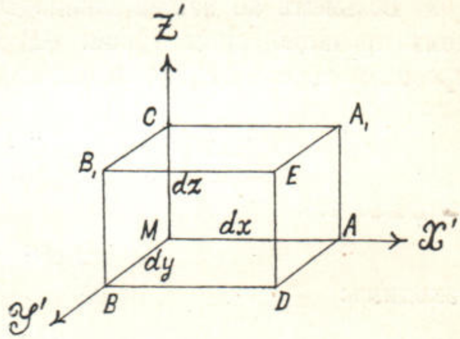
и соотвѣтственно равныя имъ

$$Y_x, \ Z_y, \ X_z,$$

найдутся непосредственно на основаніи законовъ Ньютона. Для этого обратимся къ нашему элементарному параллелопипеду, которымъ мы пользовались при выводѣ уравненій (14) (черт. 5).

Напряженіе X_y или равное ему Y_x получится, пользуясь формулой (65, a), исходя изъ слѣдующаго разсужденія: на площадку $MCAA_1$, равную по величинѣ $dxdz$, въ направленіи оси X дѣйствуетъ, на основаніи вышеуказанной формулы, касательная сила:

$$\mu \frac{\partial u}{\partial y} dxdy,$$



Черт. 5.

или напряженіе

$$X'_y = \mu \frac{\partial u}{\partial y}.$$

На томъ же основаніи, для площадки $MCBB_1$ найдемъ въ направленіи оси Y напряженіе

$$Y''_x = \mu \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Но для всякаго касательнаго напряженія Y''_x, какъ показано раньше, имѣется ему равное напряженіе X''_y, дѣйствующее на площадку MCA_1A въ направленіи оси X, поэтому искомое напряженіе X_y, представится въ такомъ видѣ:

$$X_y = X'_y + X''_y$$

или такъ:

$$X_y = Y_x = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right).$$

Подобнымъ образомъ для нахожденія напряженія Y_z (или что тоже Z_y) разсматриваемъ площадку $BMAD$ и $MCAA_1$. На первую, въ направленіи оси Y дѣйствуетъ касательное напряженіе

$$Y'_z = \mu \frac{\partial v}{\partial z},$$

на вторую, въ направленіи оси Z, касательное напряженіе:

$$Z''_y = \mu \frac{\partial w}{\partial y}.$$

Замѣчая, что $Z''_y = Y''_z$, какъ въ предыдущемъ случаѣ, имѣемъ:

$$Y_z = Y'_z + Y''_z$$

или

$$Y_z = Z_y = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right).$$

Такимъ же способомъ, разсматривая площадки $BMAD$ и $BMCB_1$, и касательныя напряженія, дѣйствующія на нихъ соотвѣтственно въ направленіяхъ осей X и Z, найдемъ:

$$Z_x = X_z = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right).$$

Итакъ для касательныхъ напряженій, дѣйствующихъ на грани разсматриваемаго параллелопипеда, имѣемъ выраженія:

$$Y_z = Z_y = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right),$$

$$X_z = Z_x = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad \ldots \ldots \ldots (66)$$

$$X_y = Y_x = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right),$$

Обращаясь къ обозначеніямъ (49) и полагая:

$$Y_z = Z_y = T_x, \quad X_z = Z_x = T_y, \quad X_y = Y_x = T_z, \quad \ldots \ldots (67)$$

можемъ равенства (66) представить въ такомъ видѣ:

$$T_x = 2\mu p_1, \quad T_y = 2\mu p_2, \quad T_z = 2\mu p_3 \ldots \ldots \ldots (68)$$

Намъ нужно найти еще выраженія для нормальныхъ напряженій:

$$X_x, \; Y_y, \; Z_z,$$

черезъ деформаціи; но, какъ оказывается, для этой цѣли однихъ законовъ Ньютона не достаточно; необходимы болѣе общія соображенія изъ теоріи упругости, рѣшающей этотъ вопросъ въ окончательномъ видѣ.

Зависимости между проекціями скоростей деформацій на оси двухъ системъ координатъ. Тоже для напряженій.

28. Введемъ предварительно нѣкоторыя обозначенія. Пусть точки элемента жидкости, съ центромъ тяжести O, отнесены сперва къ прямоугольной системѣ, координатъ X, Y, Z, а затѣмъ къ системѣ X', Y', Z'. Для нормальныхъ напряженій въ точкѣ O на координатныя плоскости въ первой системѣ введемъ обозначенія (взамѣнъ прежнихъ X_x, Y_y, Z_z):

$$N_x, \; N_y, \; N_z, \qquad (69)$$

а во второй системѣ:

$$N'_x, \; N'_y, \; N'_z, \qquad (69, a)$$

Точно также, на основаніи (68) примемъ обозначенія:

$$T_x, \; T_y, \; T_z \text{ и } T'_x, \; T'_y, \; T'_z, \qquad (70)$$

Косинусы угловъ осей второй системы съ первой будутъ опредѣляться изъ слѣдующей таблички:

	X	Y	Z
X'	l_x	m_x	n_x
Y'	l_y	m_y	n_y
Z'	l_z	m_z	n_z

. . . . . . (71)

причемъ имѣютъ мѣсто слѣдующія шесть условій:

$$\begin{aligned} &l_x^2 + m_x^2 + n_x^2 = 1, \qquad && l_x l_y + m_x m_x + n_x n_y = 0, \\ &l_y^2 + m_y^2 + n_y^2 = 1, && l_x l_z + m_x m_y + n_x n_z = 0, \\ &l_z^2 + m_z^2 + n_z^2 = 1, && l_y l_z + m_y m_z + n_y n_z = 0. \end{aligned} \qquad (72).$$

Координаты какой либо точки преобразуются по слѣдующимъ формуламъ:

$$\begin{aligned} x' &= l_x x + m_x y + n_x z, \\ y' &= l_y x + m_y y + n_y z, \\ z' &= l_z x + m_z y + n_z z. \end{aligned} \qquad (73).$$

Для проекцій скоростей на указанныя оси имѣемъ такія соотношенія:

$$u = l_x\, u' + l_y\, v' + l_z\, w'$$

$$v = m_x\, u' + m_y\, v' + m_z\, w', \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (74)$$

$$w = n_x\, u' + n_y\, v' + n_z\, w'.$$

Замѣтимъ здѣсь, что для какой либо функціи $f(x, y, z)$, мы можемъ написать:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial x},$$

или, на основаніи (73), присоединяя сюда частныя производныя по y и z:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x'} l_x + \frac{\partial f}{\partial y'} l_y + \frac{\partial f}{\partial z'} l_z,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x'} m_x + \frac{\partial f}{\partial y'} m_y + \frac{\partial f}{\partial z'} m_z, \quad \ldots\ldots\ldots (75)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x'} n_x + \frac{\partial f}{\partial y'} n_y + \frac{\partial f}{\partial z'} n_z$$

Поэтому, пользуясь (74), найдемъ:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u'}{\partial x'} l^2_x + \frac{\partial v'}{\partial x'} l_x l_y + \frac{\partial w'}{\partial x'} l_x l_z + \frac{\partial u'}{\partial y'} l_x l_y + \frac{\partial v'}{\partial y'} l^2_y +$$

$$\frac{\partial w'}{\partial y'} l_y l_z + \frac{\partial u'}{\partial z'} l_x l_z + \frac{\partial v'}{\partial z'} l_y l_z + \frac{\partial w'}{\partial z'} l^2_z.$$

Аналогичныя выраженія мы получимъ для $\frac{\partial v}{\partial y}$ и $\frac{\partial w}{\partial z}$. Дѣлая приведеніе подобныхъ членовъ и обращаясь къ обозначеніямъ (49), можемъ написать:

$$a = a' l_x^2 + b' l_y^2 + c' l_z^2 + 2p'_1 l_y l_z + 2p'_2 l_x l_z + 2p'_3 l_x l_y,$$

$$b = a' m_x^2 + b' m^2_y + c' m_z^2 + 2p'_1 m_y m_z + 2p'_2 m_x m_z + 2p_3 m_x m_y, \quad \ldots (76)$$

$$c = a' n_x^2 + b' n_y^2 + c' n_z^2 + 2p_1' n_y n_z + 2p'_2 n_x n_z + 2p'_3 n_x n_y.$$

Подобнымъ образомъ можно дифференцированіемъ уравненій (74) и сложеніемъ получить выраженія для p_1, p_2 и p_3. Послѣ простыхъ передѣлокъ найдемъ:

$$p_1 = a' m_x n_x + b' m_y n_y + c' m_z n_z + p_1'(m_y n_z + m_z n_y) + p_2'(m_x n_z + m_z n_x) +$$
$$+ p_3'(m_x n_y + m_y n_x),$$

$$p_2 = a' l_x n_x + b' l_y n_y + c' l_z n_z + p'_1(l_y n_z + l_z n_y) + p'_2(l_x n_z + l_z n_x) +$$
$$+ p_3'(l_x n_y + l_y n_x), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (77)$$

$$p_3 = a' l_x m_x + b' l_y m_y + c' l_z m_z + p_1'(l_y m_z + l_z m_y) + p_2'(l_x m_z + l_z m_x) +$$
$$+ p_3'(l_x m_y + l_y m_x).$$

Формулы (76) и (77) представляютъ весьмо важныя зависимости между скоростями деформацій по отношенію къ какимъ либо двумъ системъ координатъ,

Для полученія зависимостей a', b', c', p'_1 p'_2 p'_3 отъ a, b, c p_1, p_2, p_3 достаточно въ (71) горизонтальныя строки косинусовъ замѣнить вертикальными и на основаніи этой подстановки измѣнить косинусы въ (76) и (77), переставивъ значки у вышеуказанныхъ скоростей деформацій.

Складывая равенства (76), и пользуясь зависимостями (72), найдемъ:

$$a + b + c = a' + b' + c', \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (78)$$

или, на основаніи обозначеній (49):

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} + \frac{\partial w'}{\partial z'}, \quad \ldots \ldots (78,a)$$

что представляетъ собой нѣкоторую инваріатную зависимость, имѣющую, на основаніи (57), вполнѣ опредѣленное физическое толкованіе: скорость объемнаго расширенія въ какой либо точкѣ сплошно-деформирующагося тѣла не зависитъ отъ системы координатъ къ которой отнесена частица тѣла въ этой точкѣ.

29. Найдемъ теперь зависимости, между напряженіями N_x, N_y, N_z, T_x, T_y, T_z и N'_x, N'_y, N'_z, T'_x, T'_y, T'_z.

Проекціи на оси X', Y', Z' напряженія на площадку, лежащую въ плоскости YOZ, на основаніи выраженій (6), пользуясь (71), будутъ:

$$\begin{aligned} X' &= N'_x l_x + T'_z l_y + T'_y l_z, \\ Y' &= T'_z l_x + N'_y l_y + T'_x l_z, \quad \ldots \ldots \ldots (79) \\ Z' &= T'_y l_x + T'_x l_y + N'_z l_z. \end{aligned}$$

Для полученія N_x, т. е. проекцій этого напряженія на ось X, нужно полученныя выраженія помножить соотвѣтственно на l_x, l_y, l_z, и сложить; найдемъ:

$$N_x = N'_x l^2_x + N'_y l^2_y + N'_z l_z^2 + 2 T'_z l_x l_y + 2T'_y l_x l_z + 2T'_x l_y l_z.$$

Подобнымъ образомъ для нахожденія проекціи того же напряженія на ось Y, т. е. T_z нужно выраженіе (79) помножить соотвѣтственно на m_x, m_y, m_z, и сложить; помножая, наконецъ, тѣ же выраженія на n_x, n_y, n_z, и складывая найдемъ T_y. Такимъ образомъ имѣемъ:

$$\begin{aligned} T_z = N'_x l_x m_x + N'_y l_y m_y + N'_z l_z m_z + T'_x (l_z m_y + l_y m_z) + \\ + T'_y (l_z m_x + l_x m_z) + T'_z (l_x m_y + l_y m_x), \end{aligned}$$

$$T_y = N'_x l_x n_x + N'_y l_y n_y + N'_z l_z n_z + T'_x (l_z n_y + l_y n_z) + $$
$$+ T'_y (l_x n_z + l_z n_x) + T'_z (l_x n_y + l_y n_x).$$

Примѣняя тѣ же соображенія къ напряженіямъ, дѣйствующимъ на площадки XOZ и YOZ, можемъ въ результатѣ дать слѣдующія шесть зависимостей между проэкціями напряженій на оси X, Y, Z и X', Y', Z':

$$N_x = N'_x l_x^2 + N'_y l_y^2 + N'_z l_z^2 + 2T'_z l_x l_y + 2T'_y l_x l_z + 2T'_x l_y l_z ,$$

$$N_y = N'_x m_x^2 + N'_y m_y^2 + N'_z m_z^2 + 2T'_z m_x m_y + 2T'_y m_x m_z + 2T'_x m_y m_z,$$

$$N_z = N'_x n_x^2 + N'_y n_y^2 + N'_z n_z^2 + 2T'_z n_x n_y + 2T'_y n_x n_z + 2T'_x n_y n_z,$$

(80)

$$T_x = N'_x m_x n_x + N'_y m_y n_y + N'_z m_z n_z + T'_x (m_y n_z + m_z n_y) + T'_y (m_z n_x +$$
$$+ m_x n_z) + T'_z (m_x n_y + m_y n_x),$$

$$T_y = N'_x l_x n_x + N'_y l_y n_y + N'_z l_z n_z + T'_x (l_z n_y + l_y n_z) + T'_y (l_x n_z + l_z n_x) +$$
$$+ T'_z (l_x n_y + l_y n_x),$$

$$T_z = N'_x l_x m_x + N'_y l_y m_y + N'_z l_z m_z + T'_x (l_z m_y + l_y m_z) + T'_y (l_z m_x +$$
$$+ l_x m_z) + T'_z (l_x m_y + l_y m_y).$$

Зависимости N'_x, N'_y, N'_z, T'_x, T'_y, T'_z, отъ N_x, N_y, N_z, T_x, T_y, T_z, находятся также какъ и зависимости a', b', ... и т. отъ a, b . . . . и т. д.

Складывая первыя три зависимости изъ (80), на основаніи (72), можемъ написать:

$$N_x + N_y + N_z = N'_x + N'_y + N'_z \, , \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (81)$$

т. е. *сумма нормальныхъ напряженій на три взаимно-перпендикулярныхъ площадки въ какой-либо точкѣ сплошно-деформирующагося тѣла, не зависитъ отъ ихъ положенія въ пространствѣ.*

Связь между напряженіями и деформаціями.

30. Для установленія зависимости напряженій отъ деформацій приходится прибѣгнуть къ какой либо гипотезѣ. Этой гипотезой является обобщеніе *закона Гука*, утверждающаго что:

для всякой сплошно-деформирующейся среды, въ которой внѣшнія силы производятъ безконечно малыя деформаціи, напряженія пропорціональны деформаціямъ.

Обобщая, мы примемъ, что при тѣхъ же условіяхъ, напряженія суть линейныя функціи шести деформацій по осямъ: adt, bdt, cdt, p_1dt, p_2dt p_3dt.

Для жидкостей, какъ видимъ, эти деформаціи пропорціональны скоростямъ деформацій; поэтому первыя могутъ быть замѣнены вторыми. Кромѣ того, нормальныя напряженія N_x, N_y, N_z должны имѣть видъ:

$$N_x = -p + F_1, \qquad T_x = \Theta_1,$$
$$N_y = -p + F_2, \qquad T_y = \Theta_2, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (82)$$
$$N_z = -p + F_3, \qquad T_z = \Theta_3,$$

гдѣ p нѣкоторая функція координатъ и времени, а F_1, F_2, F_3, Θ_1, Θ_2, Θ_3 однородныя линейныя функціи шести скоростей деформацій.

Дѣйствительно, выраженія для нормальныхъ напряженій должны имѣть видъ, примѣнимый для всѣхъ частныхъ случаевъ покоя и движенія. Для состоянія покоя скорости деформацій обращаются вмѣстѣ со скоростями въ нуль, а нормальныя напряженія N_x, N_y, N_z обращаются въ гидростатическое давленіе въ данной точкѣ. Касательныя напряженія T_x, T_y, T_z для покоя должны быть нулями.

Этимъ условіямъ выраженія (82) удовлетворяютъ, поэтому шесть напряженій въ данной точкѣ жидкости могутъ быть выражены черезъ шесть скоростей деформаціи a, b, c, p_1, p_2, p_3 такъ:

$$\begin{aligned}
N_x &= -p + A_{11}a + A_{12}b + A_{13}c + A_{14}p_1 + A_{15}p_2 + A_{16}p_3,\\
N_y &= -p + A_{21}a + A_{22}b + A_{23}c + A_{24}p_1 + A_{25}p_2 + A_{26}p_3,\\
N_z &= -p + A_{31}a + A_{32}b + A_{33}c + A_{34}p_1 + A_{35}p_2 + A_{36}p_3,\\
T_x &= A_{41}a + A_{42}b + A_{43}c + A_{44}p_1 + A_{45}p_2 + A_{46}p_3,\\
T_y &= A_{51}a + A_{52}b + A_{53}c + A_{54}p_1 + A_{55}p_2 + A_{56}p_3,\\
T_z &= A_{61}a + A_{62}b + A_{63}c + A_{64}p_1 + A_{65}p_2 + A_{66}p_3.
\end{aligned} \quad \ldots (83)$$

Мы видимъ, что въ написанныя зависимости вошло *36 коэффиціентовъ, называемыхъ коэффиціентами упругости въ данной точкѣ упругаго тѣла (въ нашемъ случаѣ жидкости).*

Если коэффиціенты *A суть числа постоянныя*, не зависящія отъ координатъ точекъ тѣла, то тѣло называется *однороднымъ*.

Для разныхъ частныхъ случаевъ число коэффиціентовъ упругости можетъ быть и меньше.

Имѣя зависимости (83), мы можемъ найти связь между напряженіями и деформаціями для любой системы прямоугольныхъ координатъ въ данной точкѣ тѣла. Для этого помощью зависимостей (76), (77) и (80) исключаемъ изъ (83) N_x, N_y, N_z, T_x, T_y, T_y, a, b, c, p_1, p_2, p_3. Изъ полученной системы шести уравненій первой степени относительно N'_x, N'_y, N'_z, T'_x, T'_y, T'_z эти напряженія опредѣляются какъ линейныя функціи деформацій a', b', c', p'_1, p'_2, p'_3. Коэффиціенты въ этихъ новыхъ линейныхъ функціяхъ будутъ отличаться отъ коэффиціентовъ въ (83); въ выраженіяхъ же для N'_x, N'_y, N'_z, какъ легко показать, появятся члены—p. Другими словами въ общемъ случаѣ коэффиціенты упругости зависятъ отъ направленій осей деформацій (осей координатной системы), т. е. упругія свойства тѣла въ данной точкѣ различны въ разныхъ направленіяхъ. Такія тѣла называются *анизотропными*.

Въ отличіе отъ анизотропныхъ тѣлъ, *изотропными* называются такія въ которыхъ упругія свойства въ данной точкѣ одинаковы по всѣмъ направленіямъ.

Аналитическимъ условіемъ изотропіи будетъ независимость коэффиціентовъ A отъ координатной системы, т. е. инваріатность формулъ (83). Для этого случая число кеэффиціентовъ получается значительно меньше, такъ какъ между ними устанавливаются зависимости, получающіяся сравненіемъ новыхъ коэффиціентовъ съ прежними.

Рѣшеніе вопроса въ общемъ видѣ черезчуръ громоздко; указанныя зависимости найдутся исходя изъ нѣкоторыхъ частныхъ расположеній новой координатной системы X', Y', Z' по отношенію къ прежней X, Y, Z.

Положимъ, что ось X' прямо противоположна оси X, а оси Y' и Z' совпадаютъ съ осями Y и Z.

Для этого случая косинусы въ (71) примутъ слѣдующія частныя значенія:

$$l_x = -1,\ m_x = 0,\ n_x = 0;\ l_y = 0,\ m_y = 1,\ n_y = 0;\ l_z = 0,\ m_z = 0,\ n_z = 1.$$

Изъ зависимостей (76), (77) и (80) найдемъ:

$$a = a',\ b = b',\ c = c';\ p_1 = p'_1,\ p_2 = -p'_2,\ p_3 = -p_3';$$

$$N_x = N_x',\ N_y = N_y',\ N_z = N_z';\ T_x = T_x',\ T_y = -T_y',\ T_z = -T_z'.$$

Подставляя всѣ эти значенія въ (83), получимъ для ихъ инваріатности слѣдующія условія:

$$A_{15} = A_{16} = A_{25} = A_{26} = A_{35} = A_{36} = A_{45} = A_{46} = A_{51} = A_{52} = A_{53} = A_{54} =$$
$$= A_{61} = A_{62} = A_{63} = A_{64} = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (84).$$

Если принять, что ось Y' прямо противоположна Y, а оси X' и Z' совпадаютъ съ осями X и Z, то для вышеприведенныхъ девяти косинусовъ получимъ значенія:

$$l_x = 1,\ m_x = 0,\ n_x = 0;\ l_y = 0,\ m_y = -1,\ n_y = 0;\ l_z = 0,\ m_z = 0,\ n_z = 1;$$

а потому

$$a = a',\ b = b',\ c = c';\ p_1 = -p_1',\ p_2 = p_2'.\ p_3 = -p_3';$$

$$N_x = N'_x,\ N_y = N'_y,\ N_z = N'_z;\ T_x = -T'_x,\ T_y = T'_y,\ T_z = -T'_z.$$

Подставка въ (83) дастъ для инваріантности слѣдующія дополнительныя условія:

$$A_{14} = A_{24} = A_{34} = A_{41} = A_{42} = A_{43} = A_{56} = A_{65} = 0 \quad \ldots \quad (84,a).$$

Если ось Y' совпадаетъ съ осью Z, ось Z' съ осью Y и ось X' съ осью X, то косинусы получатъ слѣдующія значенія:

$$l_x = 1,\ m_x = 0,\ n_x = 0;\ l_y = 0,\ m_y = 0,\ n_y = 1;\ l_z = 0,\ m_z = 1,\ n_z = 0;$$

откуда

$$a = a',\ b = c',\ c = b';\ p_1 = p_1',\ p_2 = p'_3,\ p_3 = p'_2;$$

$$N_x = N'_x,\ N_y = N'_z,\ N_z = N'_y;\ T_x = T'_x\ T_y = T'_z,\ T_z = T'_y.$$

Подставляя эти значенія въ (83), дополнимъ условія инваріантности слѣдующими:

$$A_{12} = A_{13},\ A_{21} = A_{31},\ A_{22} = A_{33},\ A_{23} = A_{32},\ A_{55} = A_{66} \quad \ldots \quad (84,b)$$

Примемъ наконецъ, что ось X' совпадаетъ съ осью Z, ось Z' съ осью X, а ось Y' съ осью Y. Въ такомъ случаѣ для косинусовъ получатся такія значенія:

$$l_x = 0,\ m_x = 0,\ n_x = 1;\ l_y = 0,\ m_y = 1,\ n_y = 0;\ l_z = 1,\ m_z = 0,\ n_z = 0.$$

Слѣдовательно:

$$a = c',\ b = b',\ c = x';\ p_1 = p_3',\ p_2 = p'_2,\ p_3 = p_1';$$

$$N_x = N'_z,\ N_y = N'_y,\ N_z = N'_x;\ T_x = T'_z,\ T_y = T'_y,\ T_z = T'_x.$$

Подстановка въ (83) дополнитъ, наконецъ, условія инваріантности слѣдующими:

$$A_{11} = A_{33},\ A_{12} = A_{32},\ A_{13} = A_{31},\ A_{21} = A_{23},\ A_{44} = A_{66} \quad \ldots \quad (84,c)$$

Сводя условія (84), (84, a), (84, b) (84, c), найдемъ что

$$\begin{aligned} A_{21} &= A_{22} = A_{33} = A, \\ A_{12} &= A_{13} = A_{23} = A_{21} = A_{31} = A_{32} = B, \quad \ldots \quad (85) \\ A_{44} &= A_{55} = A_{66} = C, \end{aligned}$$

т. е. 36 коэффиціентовъ упругости свелись для однороднаго изотропнаго тѣла къ тремъ. Зависимости (83) перепишутся такъ:

$$\begin{aligned} N_x &= -p + Aa + B\ (b + c), \\ N_y &= -p + Ab + B\ (a + c), \\ N_z &= -p + Ac + B\ (a + b), \quad \ldots \quad (86) \\ T_x &= Cp_1,\ T_y = Cp_2,\ Tz = Cp_3. \end{aligned}$$

Полученныя выраженія для шести напряженій показываютъ, что нормальныя напряженія зависятъ лишь отъ коэффиціентовъ скоростей удлиненія по координатнымъ осямъ, а тангенціальныя напряженія— отъ коэффиціентовъ скоростей перекашиванія угловъ между ними.

Кромѣ того, для главныхъ осей деформаціи, для которыхъ

$$p_1 = p_2 = p_3 = 0,$$

и

$$T_x = T_y = T_z = 0,$$

т. е. въ *однородномъ изотропномъ тѣлѣ (въ нашемъ случаѣ—жидкости) главныя оси деформаціи совпадаютъ съ главными осями напряженій.*

Нѣкоторые авторы*) принимаютъ это свойство какъ одну изъ гипотезъ, опредѣляющихъ однородное изотропное тѣло; между тѣмъ данный выше выводъ показываетъ, что оно есть аналитическое слѣдствіе инваріатности выраженій (83) при преобразованіяхъ по формуламъ (76), (77), (80).

Сравнивая съ (68), можемъ положить:

$$C = 2\mu.$$

Мы видимъ, что гипотеза Ньютона и позднѣйшія гипотезы даютъ для касательныхъ напряженій въ изотропномъ тѣлѣ одни и тѣ-же выраженія.

Здѣсь будетъ умѣстно обратить вниманіе на структуру коэффиціента внутренняго тренія μ. Дѣло въ томъ, что основная формула (65)

$$dF = \mu \frac{dv_t}{dn} ds, \ldots \ldots \ldots \ldots (65).$$

изъ которой получена формула (65,a), а изъ нея и основныя выраженія для касательныхъ напряженій (66) по своему построенію прямо не соотвѣтствуютъ гипотезѣ Ньютона; по этой гипотезѣ *касательное усиліе*, дѣйствующее на элементарную площадку ds, должно быть

*) См.: M. Brillouin, Leçons sur la viscosité des liquides et des gaz. Paris, 1907, стр. 28, § 23.

С. П. Тимошенко, Курсъ теоріи упругости. Часть I. Кіевъ, 1909, стр. 52, 53. § 14.

Horace Lamb, Lehrbuch der Hydrodynamik. Deutsch von I. Friedel. Leipzig, 1907, стр. 659, § 312.

G. Kirchhoff, Vorlesungen über mathematische Physik. Leipzig, 1877, стр. 121, § 7.

Г. Сусловъ. Теорія потенціала и гидродинамика. Томъ II. Кіевъ. 1910, стр. 184, § 156.

пропорціонально ds и относительной скорости dv_t безконечно близкихъ частицъ A_1 и A_2 (черт. 4 стр. 38), т. е.

$$dF = \mu' dv_t \, ds,$$

а *напряженіе* въ точкѣ A на разсматриваемую площадку будетъ:

$$F_A = \frac{dF}{ds} = \mu' dv_t.$$

Напряженіе F_A для вязкой жидкости должно быть величиной конечной, а такъ какъ dv_t въ сплошномъ, непрерывномъ движеніи есть величина безконечно малая (стремящаяся въ предѣлѣ къ нулю), то μ' получается безконечно большой величичиной, утрачивающей физическій смыслъ. Поэтому мы переписываемъ F_A въ такомъ видѣ:

$$F_A = \mu' dn \frac{dv_t}{dn},$$

гдѣ dn безконечно малая величина (элементъ нормали); здѣсь уже $\frac{dv_t}{dn}$ конечная величина, а $\mu' dn$ — произведеніе безконечно большой на безконечно малую величину должно обратиться въ конечную величину μ, т. е.

$$\mu' dn = \mu.$$

Мы видимъ, что введенный такимъ образомъ коэффиціентъ μ, даетъ возможность утверждать, что выраженіе (65) для касательнаго усилія соотвѣтствуетъ гипотезѣ Ньютона о внутреннемъ треніи жидкости *).

Выраженія (86) могутъ быть переписаны въ такомъ видѣ:

$$N_x = -p + A\,(a + b + c) + (A - B)\,a,$$

$$N_y = -p + A\,(a + b + c) + (A - B)\,b, \quad . \; . \; . \; . \; . \; (86, a)$$

$$N_z = -p + A\,(b + b + c) + (A - B)\,c,$$

$$T_x = 2\mu p_1, \quad T_y = 2\mu p_2, \quad T_z = 2\mu p_3.$$

Коэффиціентъ A, считается, нѣкоторыми авторами, вторымъ коэффиціентомъ вязкости. Онъ характеризуетъ собой явленія, сопровождающія деформацію сжатія и расширенія; и требуетъ чтобы $\theta \gtreqless 0$.

32. Между коэффиціентами A, B и μ можетъ быть установлена еще одна зависимость, исходя изъ слѣдующихъ соображеній:

---

*) См. O. E. Meyer, Crelle's Journal. T. 59, стр. 229, 1861 г.

Возьмемъ, напримѣръ, выраженіе для N_x. Если пожелаемъ выразить N_x черезъ скорости деформаціи по осямъ X', Y', Z', т. е. черезъ a', b', c', p'_1, p'_2, p'_3, то это можетъ быть сдѣлано двоякимъ путемъ. Можно въ (86, a) вмѣсто a, b, c, подставить ихъ выраженія изъ (76), получимъ:

$$N_x = -p + A\,(a' + b' + c') + (A - B)\,(a'l_x{}^2 + b'l_y{}^2 + c'l_z{}^2) +$$

$$+ 2\,(A - B)\,(p'_1 l_y l_z + p'_2 l_x l_z + p_3' l_x l_y).$$

Съ другой стороны, пользуясь зависимостями (80) и подставляя въ нихъ N'_x, N'_y и т. д. изъ (86,a) (замѣнивъ соотвѣтственно a, b и т. д. на a', b' и т. д.), найдемъ:

$$N_x = -p + A\,(a' + b' + c') + (A - B)\,(al_x{}^2 + bl_y{}^2 + cl_z{}^2) + 4\mu(p'_1 l_y l_z +$$

$$+ p_2' l_x l_z + p'_3 l_y l_z).$$

Такъ какъ эти выраженія для N_x должны быть тождественны, то:

$$A - B = 2\mu \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (87)$$

На основаніи этого, замѣняя A черезъ λ, напишемъ:

$$N_x = -p + \lambda\,(a + b + c) + 2\mu a,$$

$$N_y \lambda = -p + (a + b + c) + 2\mu b, \quad \ldots\ldots \quad (88)$$

$$N_z = -p + \lambda\,(a + b + c) + 2\mu c,$$

$$T_x = 2\mu p_1,\ T_y = 2\mu p_2,\ T_z = 2\mu p_3.$$

Для несжимаемой жидкости, на основаніи (17,b), (49) и (57) имѣемъ:

$$\theta = a + b + c = 0,$$

или

$$N_x = -p + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x}, \qquad T_x = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right),$$

$$N_y = -p + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y}, \qquad T_y = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right), \quad \ldots\ldots \quad (88,a)$$

$$N_z = -p + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z}, \qquad T_z = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right).$$

Мы видимъ, что напряженія въ вязкой, изотропной, однородной и несжимаемой жидкости зависятъ отъ одного лишь коэффиціента внутренняго тренія μ.

Но и для сжимаемой жидкости можно дать зависимость между λ и μ, и такимъ образомъ исключить λ изъ выраженій (88).

Для этого воспользуемся гипотезой *Стокса**), предложенной имъ для упругихъ жидкостей, но выраженной въ нѣсколько иной формѣ. Она состоитъ въ слѣдующемъ:

Если вязкая, упругая, изотропная, однородная жидкость расширяется (или сжимается) равномѣрно, то во всѣхъ точкахъ ея нормальныя напряженія на площадку подчиняются законамъ гидростатики, т. е. равны между собой и равны давленію—p.

Обращаемся теперь къ зависимостямъ (88), и замѣчая, что для равномѣрной деформаціи

$$a = b = c,$$

кромѣ того, по предположенію,

$$N_x = N_y = N_z = -p,$$

найдемъ изъ (88), что

$$3\lambda + 2\mu = 0, \text{ или } \lambda = -\frac{2}{3}\mu.$$

Откуда, пользуясь обозначеніями (57) и (49):

$$\left.\begin{aligned}
N_x &= -p - \frac{2}{3}\mu\Theta + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x},\\
N_y &= -p - \frac{2}{3}\mu\Theta + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y},\\
N_z &= -p - \frac{2}{3}\mu\Theta + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z},\\
T_x &= \mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right),\\
T_y &= \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right),\\
T_z &= \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right).
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ (88,b)$$

*) См. Stokes, On the theories of the internal friction of fluids in motion and of the equilibrium and motion of elastic solids. Math. and Phys. Papers by Stokes. T. I, стр. 87.

Для (88, a) и для послѣднихъ зависимостей находимъ:

$$N_x + N_y + N_z = -3p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (89)$$

т. е. давленіе—p есть среднее ариѳметическое изъ нормальныхъ напряженій на три взаимно перпендикулярныхъ площадки.

Это вообще вѣрно для несжимаемыхъ жидкостей, а для сжимаемыхъ—въ предположеніи гипотезы Стокса.

Глава VII.

Дифференціальныя уравненія движенія вязкой жидкости. Условія на границахъ.

33. На основаніи найденныхъ въ предыдущей главѣ выраженій для напряженій, дѣйствующихъ на грани элементарнаго параллелопипеда, мы можемъ написать дифференціальныя уравненія движенія вязкой жидкости.

Для этого въ общія уравненія (14,a), пользуясь обозначеніями (66) и (67), подставляемъ вмѣсто X_x, X_y и т. д. ихъ выраженія изъ (88), причемъ величинамъ a, b и т. д. даемъ ихъ значенія (49).

Такимъ образомъ первое уравненіе приметъ слѣдующій видъ:

$$\frac{du}{dt} = X + \frac{1}{\rho}\left\{-\frac{\partial p}{\partial x} + \lambda\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + 2\mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \right.$$

$$\left. + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right) + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}\right)\right\}.$$

Легко замѣтить, что послѣднее уравненіе можетъ быть такъ переписано:

$$\frac{du}{dt} = X + \frac{1}{\rho}\left\{-\frac{\partial p}{\partial x} + (\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\right\};$$

или, пользуясь (57):

$$\frac{du}{dt} = X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{(\lambda+\mu)}{\rho}\frac{\partial\Theta}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho}\Delta^2 u,$$

гдѣ Δ^2 извѣстный символъ Лагранжа:

$$\Delta^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Аналогичные результаты мы получимъ для двухъ другихъ уравненій. Поэтому, на основаніи (14), дифференціальныя уравненія движенія вязкой жидкости напишутся такъ:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{(\lambda+\mu)}{\rho}\frac{\partial\theta}{\partial x}+\frac{\mu}{\rho}\Delta^2 u,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}=Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{(\lambda+\mu)}{\rho}\frac{\partial\theta}{\partial y}+\frac{\mu}{\rho}\Delta^2 v, \quad (90)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}=Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{(\lambda+\mu)}{\rho}\frac{\partial\theta}{\partial z}+\frac{\mu}{\rho}\Delta^2 w.$$

Возвращаясь къ гипотезѣ Стокса, по которой

$$\lambda=-\frac{2}{3}\mu,$$

можемъ наши уравненія представить въ видѣ:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{1}{3}\frac{\mu}{\rho}\frac{\partial\theta}{\partial x}+\frac{\mu}{\rho}\Delta^2 u,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}=Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{1}{3}\frac{\mu}{\rho}\frac{\partial\theta}{\partial y}+\frac{\mu}{\rho}\Delta^2 v, \quad (90,a)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}=Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{1}{3}\frac{\mu}{\rho}\frac{\partial\theta}{\partial z}+\frac{\mu}{\rho}\Delta^2 w.$$

Для несжимаемыхъ жидкостей, т. е. при условіи

$$\theta=0,$$

получимъ:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\mu}{\rho}\Delta^2 u,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}=Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\mu}{\rho}\Delta^2 v, \quad \ldots \quad (90,b)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}=Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\mu}{\rho}\Delta^2 w.$$

Мы видимъ, что въ двухъ послѣднихъ случаяхъ коэффиціентъ вязкости μ не входитъ прямо, а въ видѣ $\frac{\mu}{\rho}$. Обозначая

$$\frac{\mu}{\rho}=k, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (91)$$

будемъ въ дальнѣйшемъ пользоваться этимъ коэффиціентомъ. По Максвеллю k называется *кинематическимъ коэффиціентомъ вязкости* или *кинематическимъ коэффиціентомъ внутренняго тренія*.

Замѣтимъ здѣсь, что уравненія въ видѣ $(90,a)$ и $(90,b)$ найдены впервые Стоксомъ и даны имъ въ статьѣ, указанной въ предыдущемъ параграфѣ.

Сравнивая уравненія (18) съ уравненіями (90) можемъ сказать, что сжимаемость и вязкость вводятъ въ дифференціальныя уравненія движенія идеальной жидкости новыя силы на единицу массы. Сжимаемость даетъ силу, проэкціи которой на оси координатъ будутъ:

$$\frac{(\lambda+\mu)}{\rho}\frac{\partial\theta}{\partial x},\quad \frac{(\lambda+\mu)}{\rho}\frac{\partial\theta}{\partial y},\quad \frac{(\lambda+\mu)}{\rho}\frac{\partial\theta}{\partial z};\ \ldots\ldots \quad (92)$$

а составляющія по осямъ координатъ силы отъ вязкости имѣютъ видъ:

$$k\Delta^2 u,\ k\Delta^2 v,\ k\Delta^2 w\ \ldots\ldots \quad (93)$$

Для несжимаемой жидкости, т. е. при $\theta=0$, составляющими добавочной силы на единицу массы будутъ лишь послѣднія силы.

34. Уравненіямъ движенія вязкой сжимаемой жидкости (90) легко придать видъ $(90,b)$, соотвѣтствующій случаю несжимаемой жидкости, вводя функцію P_1, гдѣ:

$$P_1=p-(\lambda+\mu)\,\theta;\ \ldots\ldots \quad (94)$$

получимъ:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}&=X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P_1}{\partial x}+k\Delta^2 u,\\
\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}&=Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P_1}{\partial y}+k\Delta^2 v,\ \ldots \quad (90,c)\\
\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}&=Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P_1}{\partial z}+k\Delta^2 w.
\end{aligned}$$

Для несжимаемой жидкости мы имѣли, на основаніи (19), что

$$\rho=f\,(p),\ \ldots\ldots \quad (19)$$

отсюда:

$$p=\varphi\,(\rho);$$

присоединяя сюда условія сплошности $(17,a)$ въ видѣ:

$$\frac{d\rho}{dt}+\rho\theta=0,$$

или

$$\frac{d\,lg\rho}{dt}+\theta=0,\ \ldots\ldots \quad (17,a)$$

и подставляя въ (94), найдемъ:

$$P_1=\varphi(\rho)+(\lambda+\mu)\,\frac{dlg\,\rho}{dt}\ \ldots\ldots \quad (95)$$

Изъ этого дифференціальнаго уравненія находится зависимость

$$\rho = f_1(P_1 t), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (96)$$

аналогичная зависимости (19).

P_1 можно назвать *обобщеннымъ давленіемъ.*

Обращаемъ здѣсь вниманіе еще на одно обстоятельство. Въ самомъ началѣ (гл. I, § 1) было дано опредѣленіе идеальной жидкости, причемъ ей было приписано свойство несжимаемости, т. е. $\rho = const.$ Въ главѣ II, § 8 данъ выводъ дифференціальныхъ уравненій движенія такихъ жидкостей (18), причемъ тамъ указывалось, что для сжимаемыхъ жидкостей (не вязкихъ) имѣютъ мѣсто тѣ-же уравненія, но съ введеніемъ добавочнаго условія:

$$\rho = f(p).$$

Мы видимъ, что идеальная жидкость можетъ быть характеризована свойствами:

$$\mu = 0, \quad \theta = 0;$$

и дѣйствительно, при этихъ предположеніяхъ, уравненія (90) прямо переходятъ въ уравненія (18).

Это не имѣетъ мѣста для сжимаемыхъ не вязкихъ жидкостей. Для нихъ имѣемъ лишь

$$\mu = 0.$$

Въ этомъ предположеніи уравненія (90) перепишутся такъ:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} &= X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial(p-\lambda\theta)}{\partial x},\\
\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} &= Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial(p-\lambda\theta)}{\partial y}\\
\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} &= Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial(p-\lambda\theta)}{\partial z}.
\end{aligned}\right\} \quad \ldots (90,d)$$

Такимъ образомъ вмѣсто p въ уравненіяхъ (18) стоитъ функція p_1, гдѣ

$$p_1 = (p - \lambda\theta), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (97)$$

причемъ p_1 и будетъ гидродинамическимъ давленіемъ въ томъ смыслѣ въ какомъ оно разсматривалось въ главахъ I и II.

Полученный результатъ объясняется тѣмъ, что для послѣдняго случая p, *входящее въ уравненія* (90) *не есть давленіе въ физическомъ смыслѣ, которое можетъ быть измѣрено соотвѣтствующими приборами, а есть аналитическая фикція, введенная нами для возможности непрерывнаго перехода отъ уравненій гидростатики къ уравненіямъ гидродинамики.*

Въ вязкой жидкости, будь она сжимаема или несжимаема, на основаніи (88), *давленія на три взаимно-перпендикулярныя площадки, при движеніи жидкости, различны.* Если же жидкость не вязка, т. е. $\mu = 0$, то изъ тѣхъ же выраженій вытекаетъ, что эти давленія становятся равными между собой и приводятся къ выраженію (97).

Если бы между коэффиціентами λ и μ существовала зависимость такого свойства, что при $\mu = 0$ и $\lambda = 0$, то невязкія несжимаемыя или сжимаемыя жидкости ничѣмъ не отличались бы; въ этомъ случаѣ, для $\mu = 0$, изъ (88) имѣли бы:

$$N_x = N_y = N_z = -p,$$

т. е. p было бы истиннымъ давленіемъ.

Такой случай представляетъ гипотеза Стокса, о которой сказано выше (§ 32). Дѣйствительно, уравненія (90,a) прямо переходятъ въ уравненія (18) положеніемъ $\mu = 0$, независимо отъ того сжимаема ли жидкость или нѣтъ.

35. Для окончательнаго рѣшенія вопроса о движеніи вязкой жидкости, къ полученнымъ выше дифференціальнымъ уравненіямъ должны быть прибавлены условія на границахъ и начальныя условія, подобно тому какъ это сдѣлано въ § 12, гл. II для идеальныхъ жидкостей.

Общее кинематическое условіе, выражающее невозможность протеканія жидкости черезъ твердыя границы, останется тѣмъ же, т. е.

$$(u - u_1) \frac{\partial f}{\partial x} + (v - v_1) \frac{\partial f}{\partial y} + (w - w_1) \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \quad . \quad . \quad (39)$$

гдѣ

$$f(x, y, z, t) = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (36)$$

есть уравненія одной изъ подвижныхъ границъ.

Но кромѣ этого, для вязкихъ жидкостей, должны быть введены еще и динамическія условія.

Во первыхъ, на какой либо безконечно малой пограничной площадкѣ нормальныя напряженія X_n, Y_n, Z_n должны быть равны съ обѣихъ сторонъ ея.

Кромѣ того нужно положить, что составляющая напряженія на какую либо безконечно малую площадку пограничной поверхности, лежащая въ касательной къ этой поверхности плоскости, должна быть параллельна и прямо-противоположна относительной скорости, а по своей величинѣ этой скорости пропорціональна.

Высказанное положеніе содержитъ въ себѣ понятіе о такъ называемомъ *внѣшнемъ треніи* жидкости и требуетъ введенія новаго коэффиціента.

Для аналитическаго выраженія этого положенія возьмемъ нормальную составляющую N_n напряженія на стѣнку въ какой либо точкѣ ея. Имѣемъ:

$$N_n = X_n\, cs\,(n,x) + Y_n\, cs\,(n,y) + Z_n\, cs\,(n,z), \quad . \; . \; . \; . \; . \qquad (98)$$

гдѣ n положительное направленіе нормами въ разсматриваемой точкѣ.

Проэкціи на координатныя оси X, Y, Z касательной къ стѣнкѣ составляющей того же напряженія будутъ:

$$X_n - N_n\, cs(n,x), \quad Y_n - N_n\, cs\,(n,y), \quad Z_n - N_n\, cs\,(n,z);$$

отсюда аналитическое выраженіе нашего положенія приметъ такой видъ:

$$X_n - \{X_n\, cs\,(n,x) + Y_n\, cs\,(n,y) + Z_n\, cs\,(n,z)\}\, cs\,(n,x) = \nu\,(u_1 - u),$$

$$Y_n - \{X_n\, cs\,(n,x) + Y_n\, cs\,(n,y) + Z_n\, cs\,(n,z)\}\, cs\,(n,y) = \nu\,(v_1 - v), \; . \qquad (99)$$

$$Z_n - \{X_n\, cs\,(n,x) + Y_n\, cs\,(n,y) + Z_n\, cs\,(n,z)\}\, cs\,(n,z) = \nu\,(w_1 - w).$$

Здѣсь ν *есть коэффиціентъ внѣшняго тренія* жидкости, зависящій какъ отъ свойствъ жидкости, такъ и тѣла съ ней соприкасающагося.

Для случая $\nu = 0$, находимъ изъ (99), что

$$\frac{X_n}{cs\,(n,x)} = \frac{Y_n}{cs\,(n,y)} = \frac{Z_n}{cs\,(n,z)},$$

т. е. если коэффиціентъ внѣшняго тренія нуль, другими словами жидкость скользитъ вдоль стѣнокъ, то напряженія на стѣнкахъ направлены по нормалямъ къ нимъ.

Если же $\nu = \infty$, то по раздѣленіи на ν равенствъ (99) и положенія $\nu = \infty$, находимъ:

$$u = u_1, \quad v = v_1, \quad w = w_1,$$

т. е. частицы жидкости, соприкасающіяся со стѣнками, движутся вмѣстѣ съ ними. Мы имѣемъ случай прилипанія жидкости къ стѣнкѣ, вдоль которой она движется. Гидромеханика, обычно, пользуется предположеніемъ $\nu = \infty$.

Глава VIII.

Работа деформаціи сплошно-деформирующагося тѣла. Разсѣяніе энергіи.

36. Выдѣлимъ въ сплошно-деформирующемся тѣлѣ элементарный параллелопипедъ съ ребрами dx, dy, dz, параллельными координатнымъ осямъ. Пусть составляющія по осямъ скорости $\mathfrak{v}$ центра параллелопипеда будутъ u, v, w, а составляющія напряженій въ той же точкѣ соотвѣтствуютъ обозначеніямъ $(4, a)$.

За безконечно малый промежутокъ времени dt элементарный параллелопипедъ перемѣщается поступательно со скоростью $\mathfrak{v}$, вращается вокругъ оси, проходящей черезъ его центръ съ угловой скоростью ω и деформируется. Источникомъ всѣхъ этихъ движеній являются внѣшнія силы, приложенныя къ разсматриваемому тѣлу, какъ на поверхности его, такъ и силы дѣйствующія на единицу массы. Эти же силы порождаютъ и внутреннія напряженія $(4, a)$.

По отношенію къ разсматриваемому параллелопипеду напряженія на граняхъ его, а также сила на единицу массы, приложенная въ центрѣ тяжести его, представляютъ внѣшнія силы.

Вычислимъ работу всѣхъ вышеуказанныхъ силъ за безконечно малый промежутокъ времени dt.

Центръ параллелопипеда за время dt перемѣщается по осямъ на

$$udt, \quad vdt, \quad wdt,$$

поэтому работа силы на единицу массы, приложенной въ центрѣ тяжести будетъ:

$$\rho\,(Xu + Yv + Zw)\,dx\,dy\,dz\,dt; \quad \ldots \ldots \quad (100)$$

это работа поступательнаго движенія.

Для нахожденія работы вращательнаго движенія нужно моменты всѣхъ силъ вокругъ направленій, параллельныхъ координатнымъ осямъ, проведеннымъ черезъ центръ тяжести, помножить соотвѣтственно на

$$\omega_1 dt, \quad \omega_2 dt, \quad \omega_3 dt.$$

Вычислимъ моментъ относительно оси, проходящей черезъ центръ тяжести параллельно оси X.

На грани, перпендикулярныя оси Y, дѣйствуютъ параллельно оси Z двѣ силы, приложенныя соотвѣтственно въ центрахъ этихъ граней. Проэкціи ихъ на ось Z будутъ:

$$\left(Z_y + \frac{\partial Z_y}{\partial y}\frac{dy}{2}\right) dx\,dz \text{ и } -\left(Z_y - \frac{\partial Z_y}{\partial y}\frac{dy}{2}\right) dx\,dz;$$

плечи этихъ силъ равны $\frac{dy}{2}$; отсюда результирующій моментъ этихъ силъ, вращающій по часовой стрѣлкѣ вокругъ оси X, равенъ:

$$Z_y\,dx\,dy\,dz.$$

Въ свою очередь на грани перпендикулярныя оси Z, параллельно оси Y дѣйствуютъ двѣ силы, приложенныя въ центрахъ этихъ граней; ихъ проекціи на ось Y будутъ:

$$\left(Y_z + \frac{\partial Y_z}{\partial z}\frac{dz}{2}\right) dx\,dy \text{ и } -\left(Y_z - \frac{\partial Y_z}{\partial z}\frac{dz}{2}\right) dx\,dy,$$

плечи ихъ $\frac{dz}{2}$; результирующій моментъ (вращающій противъ часовой стрѣлки) равенъ:

$$-\,Y_z\,dx\,dy\,dz;$$

остальныя силы даютъ относительно оси X моменты равные нулю.

Итакъ результирующій моментъ относительно оси X будетъ

$$(Z_y - Y_z)\,dx\,dy\,dz.$$

Аналогично моменты относительно осей Y и Z будутъ:

$$(X_z - Z_x)\,dx\,dy\,dz \text{ и } (Y_x - X_y)\,dx\,dy\,dz.$$

На основанія (8) всѣ три момента равны нулю, т. е. работа вращенія элементарнато параллелопипеда за время dt равна нулю.

Перейдемъ теперь къ вычисленію работы деформаціи.

Разсмотримъ двѣ грани, перпендикулярныя къ оси X. Центры ихъ, за безконечно малый промежутокъ времени dt, перемѣщаются въ направленіи осей координатъ на

$$\left(u + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{2}\right) dt,\quad \left(v + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{dx}{2}\right) dt,\quad \left(w + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{2}\right) dt,$$

и

$$\left(u - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{2}\right) dt,\quad \left(v + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{dx}{2}\right) dt,\quad \left(w - \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{2}\right) dt.$$

Проэкціи силъ, соотвѣтственно приложенныхъ къ этимъ центрамъ и соотвѣтствующихъ указаннымъ перемѣщеніямъ, будутъ:

$$\left(X_x + \frac{\partial X_x}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)dy\,dz, \left(Y_x + \frac{\partial Y_x}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)dy\,dz, \left(Z_x + \frac{\partial Z_x}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)dy\,dz,$$

и

$$-\left(X_x - \frac{\partial X_x}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)dy dz, -\left(Y_x - \frac{\partial Y_x}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)dy\,dz,$$

$$-\left(Z_x - \frac{\partial Z_x}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)dy\,dz.$$

Перемножая силы на соотвѣтственныя перемѣщенія и на косинусы угловъ между ними, послѣ сложенія получимъ:

$$\left(X_x\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial X_x}{\partial x} + Y_x\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial Y_x}{\partial x} + Z_x\frac{\partial w}{\partial x} + \right.$$
$$\left. + w\frac{\partial Z_x}{\partial x}\right)dx\,dy\,dz\,dt + R'_5, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (101)$$

гдѣ R'_5 сумма членовъ порядка малости выше четвертаго.

Аналогичныя выраженія для работъ деформаціи при перемѣщеніи граней перпендикулярныхъ къ осямъ Y и Z будутъ:

$$\left(X_y\frac{\partial u}{\partial y} + u\frac{\partial X_y}{\partial y} + Y_y\frac{\partial v}{\partial y} + v\frac{\partial Y_y}{\partial y} + Z_y\frac{\partial w}{\partial y} + \right.$$
$$\left. + w\frac{\partial Z_y}{\partial y}\right)dx\,dy\,dz\,dt + R''_5, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (102)$$

$$\left(X_z\frac{\partial u}{\partial z} + u\frac{\partial X_z}{\partial z} + Y_z\frac{\partial v}{\partial z} + v\frac{\partial Y_z}{\partial z} + Z_z\frac{\partial w}{\partial z} + \right.$$
$$\left. + w\frac{\partial Z_z}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz\,dt + R'''_5 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (103)$$

Складывая выраженія (100), (101), (102), (103), получимъ работу при перемѣщеніи и деформаціи разсматриваемаго параллелопипеда за время dt. Въ результатѣ находимъ:

$$\left[\rho\left(Xu + Yv + Zw\right) + u\left(\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}\right) + v\left(\frac{\partial Y_x}{\partial x} + \right.\right.$$
$$+ \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z}\Big) + w\left(\frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z}\right) + X_x\frac{\partial u}{\partial x} + X_y\frac{\partial u}{\partial y} +$$
$$+ X_z\frac{\partial u}{\partial z} + Y_x\frac{\partial v}{\partial x} + Y_y\frac{\partial v}{\partial y} + Y_z\frac{\partial v}{\partial z} + Z_x\frac{\partial w}{\partial x} + Z_y\frac{\partial w}{\partial y} +$$
$$\left. + Z_z\frac{\partial w}{\partial z}\right]dx\,dy\,dz\,dt + R\,dx\,dy\,dz\,dt, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (104)$$

гдѣ R безконечно малая перваго порядка.

Сумма первыхъ четырехъ членовъ въ предыдущемъ выраженіи можетъ быть легко преобразована, для чего помножаемъ уравненія (14) на u, v, w и складываемъ; въ такомъ случаѣ получимъ въ лѣвой части

$$\rho\left(u\frac{du}{dt}+v\frac{dv}{dt}+w\frac{dw}{dt}\right),$$

а въ правой сумму вышеуказанныхъ членовъ. Но очевидно, что

$$\rho\left(u\frac{du}{dt}+v\frac{dv}{dt}+w\frac{dw}{dt}\right)=\rho\frac{d}{dt}\frac{(u^2+v^2+w^2)}{2}=\rho\frac{d}{dt}\frac{\mathfrak{v}^2}{2}.$$

Обозначая сумму послѣднихъ девяти членовъ въ прямыхъ скобкахъ черезъ Q, можемъ работу силъ приложенныхъ къ нашему параллелепипеду представить такъ:

$$\rho\, dx\, dy\, dz\, d\frac{\mathfrak{v}^2}{2}+(Q+R)\, dx\, dy\, dz\, dt;$$

замѣчая что $\rho\, dx\, dy\, dz=\delta m$ есть величина постоянная для даннаго элементарнаго параллелепипеда, равная его массѣ, не измѣняющаяся при деформаціи, можемъ написать, что вышеуказанная работа равна:

$$d\frac{\delta m\, \mathfrak{v}^2}{2}+(Q+R)\, dx\, dy\, dz\, dt.$$

Если проинтегрировать послѣднее выраженіе по всему объему, занятому нашимъ сплошно-деформирующимся тѣломъ, то должны получить работу всѣхъ внѣшнихъ силъ, приложенныхъ къ разсматриваемому тѣлу, которая составится изъ работы поверхностныхъ силъ и работы силъ на единицу массы. Въ наиболѣе общемъ случаѣ сюда долженъ быть прибавленъ механическій эквивалентъ извнѣ приведеннаго тепла. Въ дальнѣйшемъ мы предположимъ, что нѣтъ ни привода извнѣ, равно какъ и отдачи тѣломъ тепла.

Съ другой стороны эта сумма должна быть равна полному измѣненію энергіи за взятый промежутокъ времени.

37. Мы видимъ, что работа всѣхъ силъ, приложенныхъ къ разсматриваемому элементу за безконечно малый промежутокъ времени dt, слагается изъ приращенія живой силы его, т. е. кинетической энергіи, и изъ работы поверхностныхъ силъ, дающихъ, слѣдовательно, измѣненіе потенціальной энергіи.

Обратимъ вниманіе на эту работу поверхностныхъ силъ, т. е. на членъ:

$$(Q+R)\, dx\, dy\, dz\, dt;$$

Отнеся ее къ единицѣ объема и времени и переходя къ предѣлу, когда $R=0$, получимъ, что она равна Q, и слагается изъ вышеуказанныхъ девяти членовъ.

Помня, что

$$X_y = Y_x, \quad X_z = Z_x, \quad Y_z = Z_y,$$

и обращаясь къ обозначенiямъ (49), можемъ написать на основанiи (104):

$$Q = aX_x + bY_y + cZ_z + 2X_y p_1 + 2Y_z p_2 + 2Z_x p_3. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (105)$$

Для однороднаго, изотропнаго тѣла, пользуясь выраженiями (88) для напряженiй, найдемъ:

$$Q = -p(a+b+c) + \lambda(a+b+c)^2 + 2\mu(a^2+b^2+c^2+2p_1^2+ \\ + 2p_2^2 + 2p_3^2). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (106)$$

Первый членъ полученнаго выраженiя, на основанiи (57), представляетъ работу деформацiи (отнесенную къ единицѣ времени и объема), подъ дѣйствiемъ равномѣрнаго со всѣхъ сторонъ давленiя p, при скорости деформацiи θ, или что тоже $(a+b+c)$; съ измѣненiемъ знака у деформацiи мѣняется и знакъ этой работы, т. е. энергiя затраченная при сжатiи, при расширенiи въ прежнее состоянiе возстановляется сполна, другими словами разсматриваемый членъ представляетъ работу нѣкотораго обратимаго процесса; это есть потенцiальная энергiя деформацiи. Здѣсь предполагается, конечно, что p зависитъ лишь отъ ρ, т. е. отъ удѣльнаго объема; въ такомъ лишь случаѣ выраженiе $-p\theta dv$ можетъ быть полнымъ дифференцiаломъ, т. е. представлять работу обратимаго процесса.

Остальные два члена выраженiя (106) остаются всегда положительными и представляютъ собой потерянную механическую энергiю обращенную (вообще говоря) въ тепло. Эта часть работы представится функцiей

$$\Phi = \lambda(a+b+c)^2 + 2\mu(a^2+b^2+c^2+2p_1^2+2p_2^2+2p_3^2) \quad . \quad . \quad . \quad (107)$$

Функцiя Φ есть, по терминологiи лорда Rayleigh'а, *„функцiя разсѣянiя“*.

Введемъ обозначенiе

$$F = -p\theta + \frac{1}{2}\Phi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Сравнивая съ формулами (88) находимъ что:

$$N_x = \frac{\partial F}{\partial a}, \; N_y = \frac{\partial F}{\partial b}, \; N_z = \frac{\partial F}{\partial c}, \\ T_x = \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial p_1}, \; T_y = \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial p_2} \; N_z = \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial p_3}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (109)$$

Слѣдовательно F есть *какъ бы потенціальная функція напряженій,* считая за параметры, характеризующіе ихъ для данной точки: a, b, c, $2p_1$, $2p_2$, $2p_3$.

Такимъ образомъ функція F принимаетъ слѣдующій видъ:

$$F = N_x a + N_y b + N_z c + 2T_x p_1 + 2T_y p_2 + 2T_z p_3 \quad . . . (108,a)$$

38. Функціи разсѣянія Φ можетъ быть просто разложена на сумму шести квадратовъ*). Не приводя выкладокъ пишемъ:

$$\Phi = 2\mu \left\{ \left[a + \left(\sqrt{\frac{3\lambda + 2\mu}{2\mu}} - 1 \right) \frac{\theta}{3} \right]^2 + \left[b + \left(\sqrt{\frac{3\lambda + 2\mu}{2\mu}} - 1 \right) \frac{\theta}{3} \right]^2 + \right.$$

$$\left. + \left[c + \left(\sqrt{\frac{3\lambda + 2\mu}{2\mu}} - 1 \right) \frac{\theta}{3} \right]^2 + 2p_1^2 + 2p_2^2 + 2p_3^2. \quad . . (110).$$

Такъ какъ подкоренныя количества въ послѣднемъ выраженіи должны быть всегда положительными для сжимаемаго тѣла, то отсюда находимъ, что

$$3\lambda + 2\mu \geqq 0 \quad . . . . (111)$$

Мы видимъ, что гипотеза Стокса (§ 32) есть предѣльный случай послѣдней зависимости.

Функція разсѣянія Φ можетъ быть также выражена черезъ напряженія въ данной точкѣ. Для этого изъ равенства (88) опредѣляемъ p_1, p_2, p_3 черезъ T_1, T_2, T_3.

Затѣмъ складываемъ первыя три равенства (88), откуда находимъ:

$$(a + b + c) = \frac{N_x + N_y + N_z + 3p}{3\lambda + 2\mu} = \frac{3}{3\lambda + 2\mu}(N + p),$$

гдѣ

$$N = \frac{N_x + N_y + N_z}{3}.$$

Отсюда, подставляя значеніе $(a + b + c)$ въ выраженія для N_x, N_y, N_z, имѣемъ:

$$a = \frac{1}{2\mu}\left[N_x + p - \frac{3\lambda}{3\lambda + 2\mu}(N + p) \right], b = \frac{1}{2\mu}\left[N_y + p - \frac{3\lambda}{3\lambda + 2\mu} N + p) \right],$$

$$c = \frac{1}{2\mu}\left[N_z + p - \frac{3\lambda}{3\lambda + 2\mu}(N + p) \right].$$

---

*) См. M. Brillouin. Leçons sur la viscosité des liquides et des gaz. Paris 1907. § 26, стр. 34.

Найденныя выраженія для a, b, c, p_1, p_2, p_3 подставляемъ въ (110); послѣ простыхъ передѣлокъ получимъ:

$$\Phi = \frac{1}{2\mu}\left\{\left[N_x + p + \left(\sqrt{\frac{2\mu}{3\lambda+2\mu}} - 1\right)(N+p)\right]^2 + \left[N_y + p + \right.\right.$$

$$\left. + \left(\sqrt{\frac{2\mu}{3\lambda+2\mu}} - 1\right)(N+p)\right]^2 + \left[N_z + p + \left(\sqrt{\frac{2\mu}{3\lambda+2\mu}} - 1\right)\right.$$

$$\left.\left.(N+p)\right]^2 + 2T_x^2 + 2T_y^2 + 2T_z^2\right\}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (112)$$

Дадимъ теперь другое преобразованіе функціи Φ, имѣющее значеніе въ дальнѣйшемъ.

Для этого прибавимъ и отнимемъ отъ правой части равенства (107) $2\mu\Theta^2$; помня, что $\Theta = (a + b + c)$, найдемъ:

$$\Phi = (\lambda + 2\mu)\Theta^2 + 4\mu(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 - ab - ac - bc). \quad . \quad . \quad (107,a)$$

Обращаясь къ обозначеніямъ (45) и (49), можемъ написать, что

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Замѣчая, что

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 = \omega^2,$$

гдѣ ω угловая скорость вращенія частицы (вихрь), имѣемъ:

$$\Phi = (\lambda + 2\mu)\Theta^2 + 4\mu\omega^2 + 4\mu\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial z} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right]. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (113)$$

Для нахожденія энергіи D, разсѣянной внутри нѣкотораго объема, занятаго движущейся жидкостью, нужно взять интегралъ отъ функціи Φ, распространенный на этотъ объемъ. Имѣемъ:

$$D = \iiint \Phi dxdydz = (\lambda + 2\mu)\iiint \Theta^2 dxdydz + 4\mu \iiint \omega^2 dxdydz +$$

$$+ 4\mu \iiint (U_1 + U_2 + U_3)\, dxdydz, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (114)$$

гдѣ черезъ U_1, U_2, U_3, сокращенно обозначены слагаемыя, стоящія въ прямыхъ скобкахъ въ (113). Послѣдній тройной интегралъ легко можетъ быть преобразованъ въ двойной, распространенный по поверхности разсматриваемаго объема. Очевидно, что:

$$\iiint \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \, dxdydz = \iint dxdz \int \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} dy = \iint dx\, dz \Big(u \frac{\partial v}{\partial x} -$$

$$- \int u \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} dy \Big) = \iint u \frac{\partial v}{\partial x} dxdz - \iiint u \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} dx\, dy\, dz;$$

аналогично найдемъ:

$$\iiint \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} dx\, dy\, dz = \iint u \frac{\partial v}{\partial y} \, dy\, dz - \iiint u \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \, dx\, dy\, dz.$$

Замѣчая, что:

$$dy\, dz = l dS, \; dxdz = m dS, \; dx\, dy = n dS,$$

гдѣ l, m, n косинусы съ осями координатъ внутренней нормали къ поверхности, ограничивающей нашъ объемъ, а dS — элементъ этой поверхности, и вычитая изъ перваго результата второй, получимъ:

$$\iiint \Big(\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} \Big) dx\, dy\, dz = \iiint U_1 \, dx\, dy\, dz = \iint \Big[u \frac{\partial v}{\partial x} m -$$

$$- u \frac{\partial v}{\partial y} l \Big] dS.$$

Распространяя этотъ результатъ на U_2 и U_3, можемъ написать:

$$\iiint U_2 dx\, dy\, dz = \iint \Big(w \frac{\partial u}{\partial z} l - w \frac{\partial u}{\partial x} n \Big) d\, S,$$

$$\iiint U_3 dx\, dy\, dz = \iint \Big(v \frac{\partial w}{\partial y} n - v \frac{\partial w}{\partial z} m \Big) d\, S.$$

Поэтому находимъ для D, окончательно, такое выраженіе:

$$D = (\lambda + 2\mu) \iiint \theta^2 dx\, dx\, dz + 4\mu \iiint \omega^2 dx\, dy\, dz + 4\mu \iint \Big[l \Big(w \frac{\partial u}{\partial z} -$$

$$- u \frac{\partial v}{\partial y} \Big) + m \Big(u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial w}{\partial z} \Big) + n \Big(v \frac{\partial w}{\partial y} - w \frac{\partial u}{\partial x} \Big) \Big] d\, S. \; . \; . \; . \; (115)$$

Послѣдній тройной интегралъ въ (114) можетъ быть преобразованъ и по другому, пользуясь соображеніемъ, что къ подъинтегральной функціи въ тройномъ интегралѣ можно прибавить любую функцію, тройной интегралъ отъ которой, въ тѣхъ же предѣлахъ, равенъ нулю.

Въ дальнѣйшемъ мы будемъ пользоваться обобщенной формулой Грина въ видѣ:

$$\iiint\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz=-\iint(Pl+Qm+Rn)\,dS, \;.\;.\;(116)$$

гдѣ P, Q и R функціи, каждая, отъ x, y, z; а l, m, n—косинусы съ осями внутренней нормали къ пограничной поверхности; и теоремой Грина, выражающей, что:

$$\iint\left(U\frac{\partial V}{\partial n}-V\frac{\partial U}{\partial n}\right)dS=\iiint(V\Delta^2U-U\Delta^2V)\,dx\,dy\,dz, \;.\;.\;.\;.\;(117)$$

гдѣ Δ^2 символъ Лагранжа, n—внутренняя нормаль.

На основаніи вышесказаннаго можемъ написать, что:

$$2\iiint(U_1+U_2+U_3)\,dx\,dy\,dz=2\iiint(U_1+U_2+U_3)\,dx\,dy\,dz+\iiint\left(\frac{\partial u\Theta}{\partial x}+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial v\Theta}{\partial y}+\frac{\partial w\Theta}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz=\iiint\left[2\,(U_1+U_2+U_3)+\frac{\partial u\Theta}{\partial x}+\frac{\partial v\Theta}{\partial y}+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial w\Theta}{\partial z}\right]dx\,dy\,dz. \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(118)$$

Дѣйствительно, пользуясь (116), находимъ:

$$\iiint\left(\frac{\partial u\Theta}{\partial x}+\frac{\partial v\Theta}{\partial y}+\frac{\partial w\Theta}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz=-\iint(ul+vm+wn)\,\Theta dS.$$

Разсматривая двойной интегралъ правой части послѣдняго равенства, замѣчаемъ, что для несжимаемой жидкости, т. е. для $\Theta=0$, онъ всегда равенъ нулю, независимо отъ поверхности, на которую распространенъ, т. е. независимо отъ того будутъ ли это дѣйствительныя границы жидкости, или геометрическая поверхность, заданная въ ея потокѣ. Если жидкость сжимаема, т. е. $\Theta\gtreqless 0$, то для неподвижныхъ границъ, на основаніи условія (38, *a*) § 13, имѣемъ:

$$ul+vm+wn=0,$$

т. е. двойной интегралъ опять обращается въ нуль. Въ случаѣ поверхности смачиваемой жидкостью, т. е. при коэффиціентѣ внѣшнаго тренія $\nu=\infty$, при неподвижныхъ стѣнкахъ $u=0$, $v=0$, $w=0$, значитъ и въ этомъ случаѣ двойной интегралъ обращается въ нуль.

Поэтому, имѣя ввиду вышеуказанныя условія, можемъ считать равенство (118) вѣрнымъ. Подъинтегральная функція, стоящая въ правой части (118) въ прямыхъ скобкахъ, послѣ дифференцированія, перепишется такъ:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + v\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial z} + w\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x} +$$

$$+ \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} + u\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + v\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z} + w\frac{\partial^2 w}{\partial z\partial y}$$

$$+ \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial x} + u\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial y} + v\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial z} + w\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2.$$

Каждая строка можетъ быть замѣнена соотвѣтствующими слагаемыми слѣдующаго выраженія:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(u\frac{\partial w}{\partial x} + \right.$$

$$\left. + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (119)$$

Для дальнѣйшихъ преобразованій разсмотримъ выраженіе, стоящее въ скобкахъ перваго слагаемаго.

На основаніи уравненій (14) § 6, можемъ написать:

$$X + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}\right) - \frac{\partial u}{\partial t} = u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z};$$

съ другой стороны, сравнивая съ уравненіемъ (31, a) § 11, имѣемъ

$$X + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}\right) - \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\mathfrak{v}^2}{2} + 2(w\omega_2 - v\omega_3).$$

На основаніи этого

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\mathfrak{v}^2}{2} + 2\,(w\omega_2 - v\omega_3).$$

Произведя аналогичныя преобразованія въ (119) для двухъ другихъ слагаемыхъ, перепишемъ (118) такъ:

$$2\iiint (U_1 + U_2 + U_3)\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{2}\iiint\left(\frac{\partial^2\mathfrak{v}^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\mathfrak{v}^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\mathfrak{v}^2}{\partial z^2}\right)dx\,dy\,dz +$$

$$+ 2\iiint\left[\frac{\partial(w\omega_2 - v\omega_3)}{\partial x} + \frac{\partial\,(u\omega_3 - w\omega_1)}{\partial y} + \frac{\partial\,(v\omega_1 - u\omega_2)}{\partial z}\right]dx\,dy\,dz,$$

или, обращаясь къ преобразованіямъ (116) и (117), и полагая въ последнемъ изъ нихъ $V=1$ и $U=\mathfrak{v}^2$, найдемъ:

$$2\iiint (U_1+U_2+U_3)\,dx\,dy\,dz = -\frac{1}{2}\iint \frac{\partial \mathfrak{v}^2}{\partial n}\,dS - 2\iint\Big[(w\omega_1 - v\omega_3)\,l +$$

$$+(u\omega_3 - w\omega_1)\,m + (v\omega_1 - u\omega_2)\,n\Big]dS. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (120)$$

Такимъ образомъ (114) приметъ такой видъ:

$$D=(\lambda+2\mu)\iiint \Theta^2\,dx\,dy\,dz + 4\mu\iiint \omega^2 dx\,dy\,dz - \mu\iint \frac{\partial \mathfrak{v}^2}{\partial n}\,dS +$$

$$+4\mu\iint \begin{vmatrix} l, & m, & n \\ u, & v, & w \\ \omega_1, & \omega_2, & \omega_3 \end{vmatrix} dS \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (114,a)$$

39. Теперь мы можемъ сдѣлать нѣкоторыя заключенія о потеряхъ энергіи при движеніи жидкости.

Для невязкой жидкости, т. е. при $\mu=0$, вся потеря зависитъ отъ Θ, т. е. отъ сжимаемости ея, такъ что въ идеальной жидкости, для которой и $\Theta=0$, разсѣяніе энергіи не имѣетъ мѣста.

Въ томъ случаѣ, когда между λ и μ существуетъ зависимость, по которой для $\mu=0$ и $\lambda=0$, какъ напр. по гипотезѣ Стокса (§ 32), гдѣ

$$3\lambda+2\mu=0,$$

разсѣяніе энергіи не будетъ и при $\Theta \gtreqless 0$, лишь бы жидкость была невязка, т. е. $\mu=0$.

Если жидкость несжимаема (т. е. $\Theta=0$), но вязка, то, какъ указано выше, послѣднее выраженіе для D имѣетъ мѣсто для любого объема, выбраннаго внутри жидкости, причемъ въ нуль обращается лишь первое слагаемое (передъ остальными стоитъ множителемъ μ). Если при этомъ объемъ ограниченъ твердыми стѣнками, на которыхъ нѣтъ скольженія, т. е. $\mathfrak{v}=0$ (а слѣдовательно и $u=v=w=0$), то и два послѣднихъ интеграла по поверхности обращаются въ нуль, и вся потеря D сведется къ

$$D=4\mu\iiint \omega^2\,dx\,dy\,dz \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (121)$$

Отсюда заключаемъ, что въ вязкой несжимаемой жидкости, движущейся внутри замкнутаго объема безъ скольженія по стѣнкамъ, разсѣянная энергія зависитъ исключительно отъ вихревого состоянія движущейся жидкости; если жидкость можетъ двигаться съ потенціаломъ скоростей, т. е. $\omega = 0$, то разсѣянія энергіи нѣтъ *).

Къ тѣмъ же результамъ можно было бы прійти, пользуясь выраженіемъ (115) для D, выведеннымъ нами.

Глава IX.

Вихревое движеніе вязкой жидкости.

40. Въ главѣ IV, §§ 20, 21, 22, 23, 24 приведены законы вихревого движенія идеальныхъ жидкостей. Посмотримъ теперь, какими свойствами обладаетъ вихревое движеніе вязкой жидкости.

Мы ограничимся вязкими, несжимаемыми жидкостями, уравненія движенія которыхъ (90, b) имѣютъ видъ:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + k\Delta^2 u,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} = Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + k\Delta^2 v, \quad . \quad (90,b)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} = Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + k\Delta^2 w.$$

Такъ какъ въ данномъ случаѣ $\Theta = 0$, то выраженіе $\Delta^2 u$ можетъ быть представлено въ видѣ:

$$\Delta^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} - \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

---

*) Замѣтимъ здѣсь, что выраженіе для D въ видѣ (114, a) приведено въ вышеуказанной работѣ M. Brillouin'a (§ 26, стр. 34, 35), но данъ невѣрный выводъ его. Для частнаго случая, $\Theta = 0$, см. H. Lamb, Lehrbuch der Hydrodynamik, 1907 г. § 317, (11).

Обращаясь къ обозначеніямъ (45), и примѣняя то-же преобразованіе къ $\Delta^2 v$ и $\Delta^2 w$ можемъ написать:

$$\Delta^2 u = 2\left(\frac{\partial\omega_2}{\partial z} - \frac{\partial\omega_3}{\partial y}\right),\ \Delta^2 v = 2\left(\frac{\partial\omega_3}{\partial x} - \frac{\partial\omega_1}{\partial z}\right),\ \Delta^2 w = 2\left(\frac{\partial\omega_1}{\partial y} - \frac{\partial\omega_2}{\partial x}\right). \quad (122)$$

Если изъ уравненій (90, b) опредѣлимъ X, Y, Z и сравнимъ съ уравненіемъ (31, a), полученнымъ для идеальныхъ жидкостей, то замѣтимъ, что результаты будутъ отличаться на члены вида:

$$-k\Delta^2 u,\ -k\Delta^2 v,\ -k\Delta^2 w;$$

поэтому, пользуясь (122) мы можемъ уравненія (90, b) переписать въ такомъ видѣ:

$$X = \frac{\partial}{\partial x}\left(P + \frac{1}{2}\mathfrak{v}^2\right) + \frac{\partial u}{\partial t} + 2(\omega_2 w - \omega_3 v) - 2k\left(\frac{\partial\omega_2}{\partial z} - \frac{\partial\omega_3}{\partial y}\right),$$

$$Y = \frac{\partial}{\partial y}\left(P + \frac{1}{2}\mathfrak{v}^2\right) + \frac{\partial v}{\partial t} + 2(\omega_3 u - \omega_1 w) - 2k\left(\frac{\partial\omega_3}{\partial x} - \frac{\partial\omega_1}{\partial z}\right), \quad \ldots (123)$$

$$Z = \frac{\partial}{\partial z}\left(P + \frac{1}{2}\mathfrak{v}^2\right) + \frac{\partial w}{\partial t} + 2(\omega_1 v - \omega_2 u) - 2k\left(\frac{\partial\omega_1}{\partial y} - \frac{\partial\omega_2}{\partial x}\right).$$

Продифференцировавъ первое уравненіе по y, а второе по x и вычтя первый результатъ ихъ второго, получимъ:

$$\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial t} + 2\left(\omega_2\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial\omega_2}{\partial y} - \omega_3\frac{\partial v}{\partial y} - v\frac{\partial\omega_3}{\partial y} -\right.$$

$$\left. - \omega_3\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial\omega_3}{\partial x} + \omega_1\frac{\partial w}{\partial x} + w\frac{\partial\omega_1}{\partial x}\right) - 2k\left(\frac{\partial^2\omega_2}{\partial z\,\partial y} - \frac{\partial^2\omega_3}{\partial y^2} -\right.$$

$$\left. - \frac{\partial^2\omega_3}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\omega_1}{\partial z\,\partial x}\right).$$

Въ нашемъ случаѣ имѣютъ мѣсто зависимости (17, b) и (58):

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad \ldots\ldots\ldots (17,b)$$

$$\frac{\partial\omega_1}{\partial x} + \frac{\partial\omega_2}{\partial y} + \frac{\partial\omega_3}{\partial z} = 0; \quad \ldots\ldots\ldots (58)$$

обращаясь, кромѣ того, къ обозначеніямъ (45) можемъ написать:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) = -2\,\frac{\partial \omega_3}{\partial t};$$

на основаніи (54) имѣемъ:

$$\frac{\partial^2 \omega_1}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 \omega_2}{\partial z\, \partial y} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x} + \frac{\partial \omega_2}{\partial y}\right) = -\frac{\partial^2 \omega_3}{\partial z^2},$$

на томъ же основаніи:

$$w\frac{\partial \omega_1}{\partial x} + w\frac{\partial \omega_2}{\partial y} = -w\frac{\partial \omega_3}{\partial z};$$

кромѣ того изъ $(17, b)$ вытекаетъ, что

$$-\omega_3\frac{\partial u}{\partial x} - \omega_3\frac{\partial v}{\partial y} = \omega_3\frac{\partial w}{\partial z}.$$

Воспользовавшись этими преобразованіями мы можемъ предыдущій результатъ дифференцированія представить въ такомъ видѣ:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right) = -\frac{\partial \omega_3}{\partial t} - u\frac{\partial \omega_3}{\partial x} - v\frac{\partial \omega_3}{\partial y} - w\frac{\partial \omega_3}{\partial z} + \omega_1\frac{\partial w}{\partial x} +$$

$$+ \omega_2\frac{\partial w}{\partial y} + \omega_3\frac{\partial w}{\partial z} + k\left(\frac{\partial^2 \omega_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_3}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega_3}{\partial z^2}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; (124)$$

Первые четыре члена правой части равны, какъ легко замѣтить, $-\frac{d\omega_3}{dt}$; предполагая, кромѣ того, что силы на единицу массы имѣютъ потенціалъ, перепишемъ послѣдній результатъ въ слѣдующемъ видѣ:

$$\frac{d\omega_3}{dt} = \omega_1\frac{\partial w}{\partial x} + \omega_2\frac{\partial w}{\partial y} + \omega_3\frac{\partial w}{\partial z} + k\left(\frac{\partial^2 \omega_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_3}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega_3}{\partial z^2}\right).$$

Дифференцируя въ (123) первое уравненіе по z, а третье по x, и вычитая одинъ результатъ изъ другого, потомъ второе уравненіе по z, а третье по y и вычитая опять, найдемъ въ концѣ концовъ еще двѣ зависимости, аналогичныхъ послѣдней.

Такимъ образомъ мы имѣемъ:

$$\frac{d\omega_1}{dt} = \omega_1\frac{\partial u}{\partial x} + \omega_2\frac{\partial u}{\partial y} + \omega_3\frac{\partial u}{\partial z} + k\left(\frac{\partial^2 \omega_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial z^2}\right),$$

$$\frac{d\omega_2}{dt} = \omega_1\frac{\partial v}{\partial x} + \omega_2\frac{\partial v}{\partial y} + \omega_3\frac{\partial v}{\partial z} + k\left(\frac{\partial^2 \omega_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega_2}{\partial z^2}\right), \quad . \; . \; . \; (125)$$

$$\frac{d\omega_3}{dt} = \omega_1\frac{\partial w}{\partial x} + \omega_2\frac{\partial w}{\partial y} + \omega_3\frac{\partial w}{\partial z} + k\left(\frac{\partial^2 \omega_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_3}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega_3}{\partial z^2}\right).$$

Эти выраженіе подобны выраженіямъ (59, b), приведеннымъ въ главѣ IV, гдѣ рѣчь шла объ идеальныхъ жидкостяхъ. И дѣйствительно, полагая въ (125) $k = 0$, т. е. жидкость не вязкую, находимъ, что выраженія (125) переходятъ въ (59, b).

Полныя производныя по времени отъ ω_1, ω_2, ω_3, стоящія въ лѣвыхъ частяхъ послѣднихъ равенствъ, представляютъ собою скорости измѣненія составляющихъ по осямъ координатъ вихря ω, принадлежащаго какой-либо вполнѣ опредѣленной частицѣ жидкости.

41. Послѣднія выраженія даютъ возможность сдѣлать нѣкоторыя важныя заключенія о вихревомъ движеніи всякой жидкости.

Если въ какой либо моментъ времени для какой либо точки жидкости $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0$, то выраженія (125) примутъ видъ:

$$\frac{d\omega_1}{dt} = k\left(\frac{\partial^2\omega_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\omega_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\omega_1}{\partial z^2}\right),$$

$$\frac{d\omega_2}{dt} = k\left(\frac{\partial^2\omega_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\omega_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\omega_2}{\partial z^2}\right), \quad \ldots\ldots\ldots \quad (126)$$

$$\frac{d\omega_3}{dt} = k\left(\frac{\partial^2\omega_3}{dx^2} + \frac{\partial^2\omega_3}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\omega_3}{\partial z^2}\right),$$

при чемъ правыя части могутъ не обращаться одновременно въ нули для разсматриваемой точки въ данный моментъ времени; другими словами точка жидкости, двигавшаяся въ данный моментъ съ потенціаломъ скоростей въ слѣдующій моментъ будутъ двигаться вихревымъ движеніемъ.

Мы видимъ, что законъ сохраненія вихрей Гельмгольца для всякой жидкости въ общемъ случаѣ, не имѣетъ мѣста.

Если бы для какого либо момента времени для всѣхъ точекъ внутри объема, занятаго движущейся жидкостью, мы имѣли $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0$, то правыя части должны тоже обратиться въ нуль для точекъ внутри объема, но не для поверхности его, т. е. и въ слѣдующій моментъ внутри объема не будетъ вихревого движенія, съ поверхности же внутрь жидкости вихри могутъ распространяться.

Послѣднее заключеніе сдѣлано на основаніи извѣстныхъ свойствъ функціи.

Если какая либо функція трехъ независимыхъ перемѣнныхъ x, y, z и параметра t, для какого либо частнаго значенія t обращается въ нуль внутри какой либо замкнутой поверхности, то внутри той же поверхности и для того же значенія t, обратятся въ нули и всѣ частныя производныя этой функціи; для точекъ же поверхности, ограничивающей разсматриваемый объемъ послѣдиее обстоятельство, вообще говоря, мѣста не имѣетъ. Указанная выше функція имѣетъ аналитическое продолженія и за предѣлами поверхности, не имѣющее физическаго значенія въ разсматриваемомъ вопросѣ.

Примѣромъ можетъ служить функція

$$\Psi(x,y,z,t)=a\left(1-e^{(t-t_0)\sqrt{r^2-x^2-y^2-z^2+(t-t_0)^2}}\right),$$

обращающаяся при $t=t_0$ въ нуль со всѣми частными производными внутри объема, ограниченной сферой радіуса r; для точекъ же поверхности этой сферы эти частныя производныя отличны отъ нуля (нѣкоторыя обращаются даже въ ∞).

Такимъ образомъ мы видимъ, что въ вязкой жидкости, находящейся подъ дѣйствіемъ силъ на единицу массы имѣющихъ потенціалъ, и движущейся въ какой либо моментъ съ потенціаломъ скоростей должно возникнуть вихревое движеніе, источникомъ котораго являются поверхности ограничивающія жидкость.

Эти вихри, распространяясь въ жидкости, являются причиной неизбѣжныхъ потерь энергіи, сопровождающихъ движеніе вязкой жидкости. Для простѣйшаго случая эта потеря дается выраженіемъ (121).

Является вопросъ — можетъ-ли вязкая жидкость двигаться съ потенціаломъ скоростей. Обращаясь къ выраженіямъ (122), мы видимъ, что существованіе потенціала скоростей, т. е.

$$\omega_1=\omega_2=\omega_3=0,$$

приводитъ насъ къ условіямъ:

$$\Delta^2 u=0,\ \Delta^2 v=0,\ \Delta^2 w=0.$$

Эти условія обращаютъ уравненія движенія вязкой жидкости (90, b) въ уравненія движенія идеальной жидкости, такъ какъ равносильны положенію $k=0$. Другими словами: движеніе вязкой жидкости съ потенціаломъ скоростей ничѣмъ не отличается отъ движенія идеальной жидкости при прочихъ равныхъ условіяхъ.

Но какъ выше было указан0, такое движеніе въ вязкой жидкости будетъ неустановившимся и непрочнымъ, такъ какъ стѣнки являются источникомъ вихрей, которые и разрушаютъ движеніе съ потенціаломъ скорости.

42. Въ заключеніе этой главы разсмотримъ одинъ интегралъ уравненій движенія вязкой, сжимаемой жидкости, являющійся обобщеніемъ интеграла (32), т. е. теоремы Бернулли.

Для этого предположимъ, что силы на единицу массы, дѣйствующія на нашу жидкость, имѣютъ потенціалъ и произведемъ надъ уравненіями (90) тѣ же преобразованія, которыя произведены надъ уравненіями (30) на стр. 16, удерживая обозначеніе (28) и (29). Уравненія (90) ъъ результатѣ дадутъ слѣдующую зависимость:

$$\frac{d}{ds}\left(U-P-\frac{\mathfrak{v}^2}{2}\right)ds=\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t}ds-\frac{(\lambda+\mu)}{\rho}d\theta-\frac{\mu}{\rho}(\Delta^2 u\,dx+$$
$$+\Delta^2 v\,dy+\Delta^2 w\,dz),$$

сюда вмѣсто ρ должно быть подставлено его значенiе изъ (17,*a*) стр. 55. Интегрируя вдоль линiи тока отъ 0 до s, найдемъ такой интегралъ движенiя:

$$U-P-\frac{\mathfrak{v}^2}{2}=\left(U-P-\frac{\mathfrak{v}^2}{2}\right)_{a,\,b,\,c}+\int_0^s\frac{\partial\mathfrak{v}}{\partial t}\,ds-(\lambda+\mu)\int_0^s\frac{d\Theta}{\rho}-$$

$$-\mu\int_0^s\frac{(\Delta^2u\,dx+\Delta^2v\,dy+\Delta^2w\,dz)}{\rho}\,\ldots\ldots\ldots\quad(32,a)$$

Для случая несжимаемой жидкоети, т. е. $\rho=const$, на основанiи (17,*b*), (19) и (29) можемъ написать:

$$U-\frac{p}{\rho}-\frac{\mathfrak{v}^2}{2}=\left(U-\frac{p}{\rho}-\frac{\mathfrak{v}^2}{2}\right)_{a,\,b,\,c}-k\int_0^s(\Delta^2u\,dx+\Delta^2v\,dy+\Delta^2w\,dz)+$$

$$+\int_0^s\frac{\partial\mathfrak{v}}{\partial t}\,ds\,\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(32,b)$$

Первый интегралъ въ правой части послѣдняго уравненiя есть разсѣянная энергiя (потеря) на разсматриваемой части линiи тока, разсчитанная на единицу массы и отнесенная къ единицѣ времени.

Въ дальнѣйшемъ мы разсмотримъ нѣкоторые частные случаи движенiя вязкой жидкости.

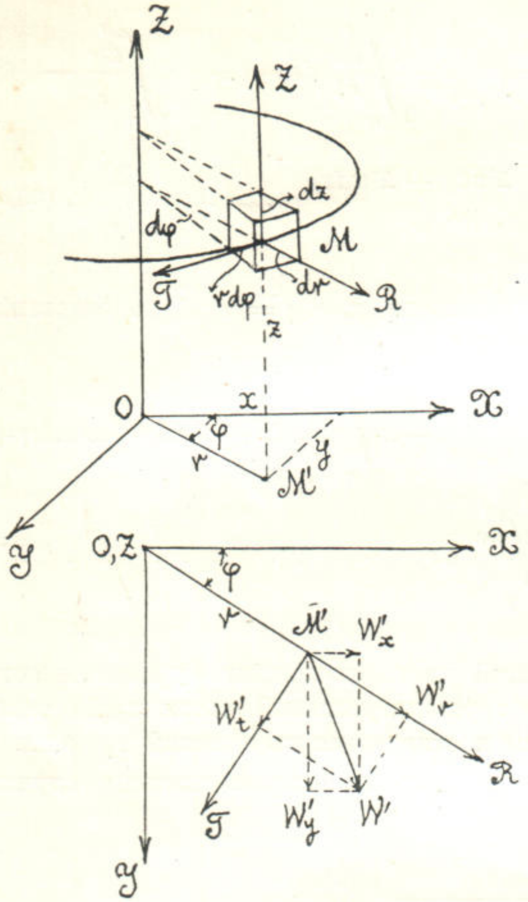
Глава X.

Цилиндрическiя координаты.

43. Въ значительномъ числѣ весьма важныхъ вопросовъ прикладного характера теченiе жидкости приходится разсматривать какъ движенiе симметричное вокругъ нѣкоторой постоянной оси. Такъ напр.: движенiе воды въ колесахъ турбинъ и центробѣжныхъ насосовъ, въ трубахъ и т. д.

Въ этихъ случаяхъ вмѣсто прежнихъ декартовыхъ координатъ гораздо удобнѣе пользоваться цилиндрическими координатами, въ которыхъ положенiе какой либо точки опредѣляется ея разстоянiемъ z

отъ нѣкоторой опредѣленной плоскости (черт. 6) и полярными координатами r и φ проэкціи этой точки на ту-же плоскость.



Черт. 6.

Формулы преобразованія отъ декартовой къ цилиндрической системѣ координатъ будутъ

$$x = r\,cs\varphi, \quad y = r\sin\varphi,$$

$$z = z\ .\ .\ .\ (127)$$

Полагая одну изъ координатъ постоянной, мы получаемъ такъ называемую координатную поверхность; такъ $r = const.$ даетъ круговую цилиндрическую поверхность съ осью z; $\varphi = const.$ — плоскость, проходящую черезъ ось Z; $z = const.$ — плоскость перпендикулярную оси Z. Черезъ каждую точку пространства проходитъ три взаимно-ортогональныхъ координатныхъ поверхности, попарно пересѣкающіяся по тремъ, такъ же взаимно-ортогональнымъ, координатнымъ линіямъ.

Координатная линія $z = const.$, $\varphi = const.$ есть прямая, перпендикулярная къ оси Z, пересѣкающая ее; координатная линія $r = const.$, $z = const.$ есть кругъ, плоскость котораго перпендикулярна оси Z, съ центромъ на той же оси; координатная линія $\varphi = const.$ $r = const.$ есть прямая, параллельная оси Z.

Проведя въ разсматриваемой точкѣ пространства прямыя, касательныя къ координатнымъ линіямъ, проходящимъ черезъ эту точку, получимъ три взаимно перпендикулярныхъ прямыхъ, называемыхъ координатными осями системы въ данной точкѣ. Мы видимъ, что координатныя оси нашей системы перемѣщаются съ перемѣщеніемъ точки.

44. Преобразуя уравненія движенія къ нашей новой системѣ координатъ, мы должны не только вмѣсто прежнихъ координатъ

x, y, z, ввести новыя r, φ, z, но и спроектировать всѣ силы, скорости и ускоренія на новыя координатныя оси.

Замѣтимъ, что за положительныя направленія координатныхъ осей считаются тѣ направленія, по которымъ координаты, соотвѣтствующія этимъ осямъ возрастаютъ.

Элементъ объема въ цилиндрической системѣ координатъ, какъ это легко замѣтить изъ чертежа, будетъ:

$$dV = rdr\, dz\, d\varphi \quad \ldots\ldots\ldots \quad (127,a)$$

Мы ставимъ себѣ задачей преобразовать къ цилиндрическимъ координатамъ дифференціальныя уравненія движенія вязкой несжимаемой жидкости въ видѣ (90,b). Для этого найдемъ сперва проекціи на координатныя оси R, T, Z, ускоренія точки M, а затѣмъ и силъ (на единицу массы) дѣйствующихъ на эту точку. Замѣтимъ, что для новой и старой системъ координатъ проекціи на оси Z равны, поэтому въ нихъ остается произвести лишь замѣну перемѣнныхъ. Для проекцій же на оси R и T мы воспользуемся слѣдующимъ соображеніемъ.

Изъ чертежа (черт. 6) легко получаются слѣдующія зависимости между проекціями вектора W' на оси R, T, Z и X, Y, Z

$$\begin{aligned} W'_r &= W'_x cs\varphi + W'_y sn\varphi, \\ W'_t &= W'_y cs\varphi - W'_x sn\varphi, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (128) \\ W'_z &= W'_z. \end{aligned}$$

Обозначимъ проекціи скорости точки M на новыя оси черезъ w_r, w_t, w_z. На основаніи послѣднихъ зависимостей имѣемъ:

$$\begin{aligned} w_r &= \frac{dx}{dt} cs\,\varphi + \frac{dy}{dt} sn\,\varphi, \\ w_t &= \frac{dy}{dt} cs\,\varphi - \frac{dx}{dt} sn\,\varphi, \\ w_z &= \frac{dz}{dt}. \end{aligned}$$

Пользуясь значеніями для x, y, z (127), находимъ;

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= cs\varphi \frac{dr}{dt} - rsn\,\varphi \frac{d\varphi}{dt}, \\ & \quad \ldots\ldots\ldots \quad (129) \\ \frac{dy}{dt} &= sn\varphi \frac{dr}{dt} + rcs\,\varphi \frac{d\varphi}{dt}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$w_r = \frac{dr}{dt}, \quad w_t = r\,\frac{d\varphi}{dt}, \qquad w_z = \frac{dz}{dt} \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; (130)$$

На основаніи этого равенства (129) могутъ быть такъ переписаны:

$$\begin{aligned} u &= w_r cs\,\varphi - w_t sn\,\varphi, \\ v &= w_r sn\,\varphi + w_t cs\,\varphi, \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; (131) \\ w &= w_z. \end{aligned}$$

Для нахожденія проекцій ускоренія на новыя оси, нужно въ равенство (128) вмѣсто W'_x, W'_y, W'_z вставить соотвѣтственно $\frac{du}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$, $\frac{dw}{dt}$. Предварительно преобразуемъ эти производныя, пользуясь (131) и (130), къ новымъ перемѣннымъ.

Имѣемъ:

$$\frac{du}{dt} = cs\,\varphi\,\frac{dw_r}{dt} - w_r sn\,\varphi\,\frac{d\varphi}{dt} - sn\,\varphi\,\frac{dw_t}{dt} - w_t\,cs\,\varphi\,\frac{d\varphi}{dt} = \Big(\frac{dw_r}{dt} -$$

$$- \frac{w_t^2}{r}\Big)\,cs\,\varphi - \Big(\frac{dw_t}{dt} + \frac{w_r w_t}{r}\Big)\,sn\,\varphi, \; \ldots\ldots \; (132)$$

$$\frac{dr}{dt} = sn\,\varphi\frac{dw_r}{dt} + w_r sn\,\varphi\,\frac{d\varphi}{dt} + cs\,\varphi\,\frac{dw_t}{dt} - w_t sn\varphi\frac{d\varphi}{dt} = \Big(\frac{dw_r}{dt} - \frac{w_t^2}{r}\Big) sn\,\varphi +$$

$$+ \Big(\frac{dw_t}{dt} + \frac{w_r w_t}{r}\Big)\,cs\,\varphi,$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{dw_z}{dt}.$$

На основаніи (130) можемъ написать:

$$\frac{dw_t}{dt} + \frac{w_r w_t}{r} = \frac{dw_t}{dt} + \frac{w_t}{r}\,\frac{dr}{dt} = \frac{1}{r}\,\frac{r dw_t + w_t dr}{dt} = \frac{1}{r}\,\frac{d\,(w_t r)}{dt}.$$

Обозначая проекціи ускоренія на новыя оси черезъ j_r, j_t, j_z и подставляя послѣднія выраженія въ (128), находимъ:

$$
\begin{aligned}
j_r &= \frac{dw_r}{dt} - \frac{w_t^2}{r}, \\
j_t &= \frac{1}{r}\,\frac{d\,(w_t r)}{dt}, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (133) \\
j_z &= \frac{dw_z}{dt}.
\end{aligned}
$$

Это и суть искомыя выраженія проекціи ускоренія матеріальной точки на координатныя оси цилиндрической системы координатъ.

45. Для нахожденія проекціи на тѣ же оси силъ на единицу массы нужно въ (128) вмѣсто W_x', W_y', W_z', подставить соотвѣтственно правыя части уравненій (90,b), предварительно преобразованныя къ цилиндрическимъ координатамъ.

Замѣтимъ сперва, что

$$
r^2 = x^2 + y^2, \qquad tg\,\varphi = \frac{y}{x}; \qquad \ldots\ldots\ldots (134)
$$

откуда, беря отъ обѣихъ частей этихъ равенствъ частныя производныя по x и y и пользуясь (127), находимъ:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{x}{r} = cs\,\varphi, \; \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{y\,cs^2\varphi}{x^2} = -\frac{sn\,\varphi}{r}, \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad \ldots\ldots (135) \\
\frac{\partial r}{\partial y} &= \frac{y}{r} = sn\,\varphi, \; \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{cs^2\varphi}{x} = \frac{cs\,\varphi}{r}.
\end{aligned}
$$

Поэтому:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial p}{\partial r}\,\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial \varphi}\,\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial r}\,cs\,\varphi - \frac{\partial p}{\partial \varphi}\,\frac{sn\,\varphi}{r}, \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots (136) \\
\frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\partial p}{\partial r}\,\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial \varphi}\,\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial r}\,sn\,\varphi + \frac{\partial p}{\partial \varphi}\,\frac{cs\,\varphi}{r}, \\
\frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{\partial p}{\partial z}\,.
\end{aligned}
$$

Обозначая, затѣмъ, проекціи силъ на единицу массы на оси R, T, Z, черезъ R, T, Z и имѣя ввиду обозначенія (5), на основаніи (128) пишемъ:

$$R = X\,cs\,\varphi + Y\,sn\,\varphi,$$

$$T = Y\,cs\,\varphi - X\,sn\,\varphi, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (137)$$

$$Z = Z.$$

Остается преобразовать къ цилиндрическимъ координатамъ выраженія:

$$\Delta^2 u, \quad \Delta^2 v, \quad \Delta^2 w.$$

Для большей ясности дадимъ сперва общія формулы преобразованія, а затѣмъ примѣнимъ ихъ къ нашему частному случаю.

Если ϕ есть функція отъ координатъ x, y, z, то, пользуясь (135), можемъ написать:

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\phi}{\partial r}\,\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\phi}{\partial r}\,cs\,\varphi - \frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\,\frac{sn\,\varphi}{r},$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{\partial\phi}{\partial r}\,\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\,\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\phi}{\partial r}\,sn\varphi + \frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\,\frac{cs\,\varphi}{r}, \quad \ldots \quad (138)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = \frac{\partial\phi}{\partial z}$$

Отсюда, дифференцируя еще разъ соотвѣтственно по x, y и z:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial\phi}{\partial r}\,cs\,\varphi - \frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\,\frac{sin\,\varphi}{r}\right)cs\,\varphi - \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial\phi}{\partial r}\,cs\,\varphi - \frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\,\frac{sn\,\varphi}{r}\right)\frac{sn\varphi}{r} =$$

$$= \frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}\,cs^2\varphi - 2\,\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi\,\partial r}\,\frac{sn\,\varphi\,cs\,\varphi}{r} + 2\,\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\,\frac{sn\,\varphi\,cs\,\varphi}{r^2} + \frac{\partial\phi}{\partial r}\,\frac{sn^2\,\varphi}{r} + \frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}\,\frac{sn^2\,\varphi}{r^2}$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial\phi}{\partial r}\,sn\,\phi + \frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\,\frac{cs\,\varphi}{r}\right)sn\,\varphi + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial\phi}{\partial r}\,sn\,\varphi + \frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\,\frac{cs\,\varphi}{r}\right)\frac{cs\,\varphi}{r} =$$

$$= \frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}\,sn^2\,\varphi + 2\,\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi\,\partial r}\,\frac{cs\,\varphi\,sn\,\varphi}{r} - 2\,\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\,\frac{cs\,\varphi\,sn\,\varphi}{r^2} + \frac{\partial\phi}{\partial r}\,\frac{cs^2\varphi}{r} +$$

$$+ \frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}\,\frac{cs^2\,\varphi}{r^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (139)$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}.$$

Складывая послѣднія три равенства, находимъ:

$$\Delta^2\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2},$$

или такъ:

$$\Delta^2\psi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (140)$$

Для нахожденія $\Delta^2 u$, $\Delta^2 v$, $\Delta^2 w$ вмѣсто ψ сюда должны быть подставлены послѣдовательно u, v, w изъ (131), выраженные черезъ w_r, w_t, w_z. Послѣ простыхъ передѣлокъ найдемъ:

$$\Delta^2 u = \left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w_r}{\partial r}\right) - \frac{w_r}{r^2} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2 w_r}{\partial\varphi^2} - 2\frac{\partial w_t}{\partial\varphi}\right) + \frac{\partial^2 w_r}{\partial z^2}\right] cs\,\varphi -$$

$$-\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w_t}{\partial r}\right) - \frac{w_t}{r^2} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2 w_t}{\partial\varphi^2} + 2\frac{\partial w_r}{\partial\varphi}\right) + \frac{\partial^2 w_t}{\partial z^2}\right] sn\,\varphi,$$

$$\Delta^2 v = \left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w_r}{\partial r}\right) - \frac{w_r}{r^2} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2 w_r}{\partial\varphi^2} - 2\frac{\partial w_t}{\partial\varphi}\right) + \frac{\partial^2 w_r}{\partial z}\right] sn\,\varphi +$$

$$+\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w_t}{\partial r}\right) - \frac{w_t}{r^2} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2 w_t}{\partial\varphi^2} + 2\frac{\partial w_r}{\partial\varphi}\right) + \frac{\partial^2 w_t}{\partial z^2}\right] cs\varphi, \quad \ldots \quad (141)$$

$$\Delta^2 w = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w_z}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w_z}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 w_z}{\partial z^2}.$$

Подставляя послѣднія выраженія и (136) въ правыя части уравненій (90, b) мы найдемъ проекціи силъ на единицу массы на оси X, Y, Z, преобразованныя къ цилиндрическимъ координатамъ. Для нахожденія ихъ проекцій на оси R, T, Z нужно правыя части первыхъ двухъ уравненій, преобразованныя къ новымъ перемѣннымъ, подставить соотвѣтственно вмѣсто W_x' и W_y' въ равенства (128).

Замѣчая, что

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w_r}{\partial r}\right) - \frac{w_r}{r^2} = \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial(w_r r)}{\partial r}\right] \text{ и } \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w_t}{\partial r}\right) -$$

$$-\frac{w_t}{r^2} = \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial(w_t r)}{\partial r}\right],$$

и пользуясь зависимостями (137), найдемъ окончательно искомыя проекціи въ видѣ:

$$W_r = R - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + k\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial (w_r r)}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2 w_r}{\partial \varphi^2} - 2\frac{\partial w_t}{\partial \varphi}\right) + \frac{\partial^2 w_r}{\partial z^2}\right],$$

$$W_t = T - \frac{1}{\rho}\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \varphi} + k\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial (w_t r)}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2 w_t}{\partial \varphi^2} + 2\frac{\partial w_r}{\partial \varphi}\right) + \frac{\partial^2 w_t}{\partial z^2}\right],$$

$$\ldots (142)$$

$$W_z = Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + k\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w_z}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w_z}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 w_z}{\partial z^2}\right].$$

Приравнивая эти выраженія соотвѣтственно проекціямъ j_r, j_t, j_z ускоренія точки на тѣ же оси, на основаніи (133), получимъ дифференціальныя уравненія движенія вязкой, несжимаемой жидкости въ цилиндрическихъ координатахъ въ видѣ:

$$\frac{dw_r}{dt} - \frac{w^2_t}{r} = R - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + k\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial (w_r r)}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2 w_r}{\partial \varphi^2} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - 2\frac{\partial w_t}{\partial \varphi}\right) + \frac{\partial^2 w_r}{\partial z^2}\right],$$

$$\frac{1}{r}\frac{d(w_t r)}{dt} = T - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{r\partial \varphi} + k\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial (w_t r)}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2 w_t}{\partial \varphi^2} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + 2\frac{\partial w_r}{\partial \varphi}\right) + \frac{\partial^2 w_t}{\partial z^2}\right], \ldots \ldots (143)$$

$$\frac{dw_z}{dt} = Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + k\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w_z}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w_z}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 w_z}{\partial z^2}\right].$$

Для сжимаемой жидкости нужно было бы, на основаніи (92), къ правымъ частямъ послѣднихъ уравненій прибавить силы на единицу массы:

$$\frac{\lambda + \mu}{\rho}\frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad \frac{\lambda + \mu}{\rho}\frac{\partial \theta}{\partial y}, \quad \frac{\lambda + \mu}{\rho}\frac{\partial \theta}{\partial z},$$

преобразованныя, подобно предыдущимъ, къ новымъ перемѣннымъ и спроектированныя на новыя координатныя оси.

Пользуясь (135), пишемъ:

$$\frac{\partial\theta}{\partial x}=\frac{\partial\theta}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial\theta}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\theta}{\partial r}cs\varphi-\frac{1}{r}\frac{\partial\theta}{\partial\varphi}sn\,\varphi,$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial y}=\frac{\partial\theta}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial\theta}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{\partial\theta}{\partial r}sn\,\varphi+\frac{1}{r}\frac{\partial\theta}{\partial\varphi}cs\,\varphi.$$

Помножая эти выраженія на $\frac{\lambda+\mu}{\rho}$ и подставляя въ (128), соотвѣтственно вмѣсто W_x' и W_y' получимъ:

$$W_{1,r}=\frac{\lambda+\mu}{\rho}\frac{\partial\theta}{\partial r},$$

$$W_{1,t}=\frac{\lambda+\mu}{\rho}\frac{1}{r}\frac{\partial\theta}{\partial\varphi}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (142,a)$$

$$W_{1,z}=\frac{\lambda+\mu}{\rho}\frac{\partial\theta}{\partial z}.$$

Преобразованіе θ, т. е.

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}$$

къ цилиндрическимъ координатамъ будетъ дано далѣе.

Для идеальной жидкости, т. е. при $k=0$, эти уравненія перепишутся такъ:

$$\frac{dw_r}{dt}-\frac{w^2{}_t}{r}=R-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r},$$

$$\frac{1}{r}\frac{d(w_t r)}{dt}=T-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{r\partial\varphi}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (143,a)$$

$$\frac{dw_z}{dt}=Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}.$$

46. Въ дальнѣйшемъ намъ понадобятся выраженія для частныхъ производныхъ отъ u, v, w по x, y, z, преобразованныя къ новымъ перемѣннымъ r, φ, z. Для этого воспользуемся зависимостями (138), въ которыя вмѣсто ϕ послѣдовательно подставимъ u, v, w изъ (131). Выполнивъ дифференцированіе, найдемъ:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial w_r}{\partial r}cs^2\varphi-\frac{\partial w_t}{\partial r}sn\,\varphi\,cs\,\varphi-\frac{\partial w_r}{\partial\varphi}\frac{sn\,\varphi\,cs\,\varphi}{r}+w_r\frac{sn^2\varphi}{r}+$$

$$+\frac{\partial w_t}{\partial\varphi}\frac{sn^2\varphi}{r}+w_t\frac{sn\,\varphi\,cs\,\varphi}{r},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial w_r}{\partial r} sn\,\varphi\, cs\varphi - \frac{\partial w_t}{\partial r} sn^2\varphi + \frac{\partial w_r}{\partial \varphi}\, \frac{cs^2\varphi}{r} - w_r\, \frac{sn\varphi\, cs\varphi}{r} -$$

$$- \frac{\partial w_t}{\partial \varphi}\, \frac{sn\varphi\, cs\varphi}{r} + w_t\, \frac{cs^2\varphi}{r},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w_r}{\partial z} cs\,\varphi - \frac{\partial w_t}{\partial z} sn\varphi, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (144)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial w_r}{\partial r} sn\varphi\, cs\varphi + \frac{\partial w_t}{\partial r} cs^2\varphi - \frac{\partial w_r}{\partial \varphi}\, \frac{sn^2\varphi}{r} - w_r\, \frac{sn\varphi\, cs\varphi}{r} -$$

$$- \frac{\partial w_t}{\partial \varphi}\, \frac{sn\varphi\, cs\varphi}{r} + w_t\, \frac{sn^2\varphi}{r},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial w_r}{\partial r}\, sn^2\varphi + \frac{\partial w_t}{\partial r} sn\varphi\, cs\varphi + \frac{\partial w_r}{\partial \varphi}\, \frac{sn\varphi\, cs\varphi}{r} + w_r\, \frac{cs^2\varphi}{r} +$$

$$+ \frac{\partial w_t}{\partial \varphi}\, \frac{cs^2\varphi}{r} - w_t\, \frac{sn\varphi\, cs\varphi}{r},$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w_r}{\partial z}\, sn\,\varphi + \frac{\partial w_t}{\partial z}\, cs\varphi,$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w_z}{\partial r}\, cs\varphi - \frac{\partial w_z}{\partial \varphi}\, \frac{sn\varphi}{r},$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w_z}{\partial r}\, sn\,\varphi + \frac{\partial w_z}{\partial \varphi}\, \frac{cs\varphi}{r},$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w_z}{\partial z}.$$

47. Пользуясь выраженіями предыдущаго параграфа мы можемъ условіе сплошности написать въ новыхъ координатахъ. Въ декартовыхъ координатахъ оно имѣло видъ:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17,b)$$

Подставляя сюда значенія частныхъ производныхъ изъ (144), получимъ

$$\frac{\partial w_r}{\partial r} + \frac{w_r}{r} + \frac{1}{r}\, \frac{\partial w_t}{\partial \varphi} + \frac{\partial w_z}{\partial z} = 0 \quad \ldots\ldots \quad (145)$$

или

$$\Theta = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(w_r r)}{\partial r} + \frac{\partial w_t}{\partial \varphi} + \frac{\partial(w_z r)}{\partial z}\right] = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (145,a)$$

Средняя часть этого равенства должна быть вставлена вмѣсто Θ въ выраженія $(142, a)$.

48. Найдемъ теперь проекціи на оси R, T, Z вихря ω, которыя обозначимъ теперь черезъ ω_r, ω_t, ω_z. Для этого преобразуемъ его составляющія ω_1, ω_2, ω_3 по осямъ X, Y, Z къ новымъ координатамъ, а затѣмъ подставимъ эти выраженія въ (128). На основаніи (45) имѣемъ:

$$\omega_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right),$$

$$\omega_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (45)$$

$$\omega_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Подставляя сюда соотвѣтственныя выраженія изъ (144) находимъ:

$$\omega_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial w_t}{\partial z}\right) cs\varphi - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_r}{\partial z} - \frac{\partial w_z}{\partial r}\right) sn\,\varphi,$$

$$\omega_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial w_t}{\partial z}\right) sn\varphi + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_r}{\partial z} - \frac{\partial w_z}{\partial r}\right) cs\,\varphi \quad . \quad . \quad . \quad (146)$$

$$\omega_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_t}{\partial r} + \frac{w_t}{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial w_r}{\partial \varphi}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{r}\left(\frac{\partial(w_t r)}{\partial r} - \frac{\partial w_r}{\partial \varphi}\right).$$

Уравненія (128) даютъ намъ окончательно:

$$\omega_r = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial w_t}{\partial z}\right) = \frac{1}{2r}\left(\frac{\partial w_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial(w_t r)}{\partial z}\right),$$

$$\omega_t = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_r}{\partial z} - \frac{\partial w_z}{\partial r}\right), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (147)$$

$$\omega_z = \frac{1}{2r}\left(\frac{\partial(w_t r)}{\partial r} - \frac{\partial w_r}{\partial \varphi}\right).$$

49. Въ заключеніе найдемъ проекціи на оси R, T, Z напряженій на три взаимно перпендикулярныхъ плоскости RT, RZ и ZT, проходящихъ черезъ какую либо точку M (черт. 6).

Въ декартовыхъ координатахъ для этихъ напряженій мы имѣли въ гл. VI выраженія (88), которыя могутъ быть такъ переписаны:

$$N_x = -p + \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x},\quad T_x = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right),$$

$$N_y = -p + \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y},\quad T_y = \mu\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right), \quad . \ (88)$$

$$N_z = -p + \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z},\quad T_z = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right).$$

Искомыя напряженія, которыя мы обозначимъ черезъ

$$N_r,\ N_t,\ N_z,\ T_r,\ T_t,\ T_z, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (148)$$

могутъ быть выражены черезъ

$$N_x,\ N_y,\ N_z,\ T_x,\ T_y,\ T_z,$$

на основаніи зависимостей (80) § 29. Для этого, пользуясь чертежомъ (6) составимъ табличку косинусовъ, аналогичную (71):

	R	T	Z
X	$cs\varphi$	$-sn\varphi$	0
Y	$sn\varphi$	$cs\,\varphi$	0
Z	0	0	1

. . . . (149)

Подставляя соотвѣтственно эти косинусы въ зависимости (80), найдемъ:

$$N_r = N_x\, cs^2\varphi + N_y\, sn^2\varphi + 2T_z\, sn\varphi\, cs\varphi,$$

$$N_t = N_x\, sn^2\varphi + N_y\, cs^2\varphi - 2T_z\, sn\varphi\, cs\varphi,$$

$$N_z = N_z \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (150)$$

$$T_r = T_x\, cs\varphi - T_y\, sn\varphi,$$

$$T_t = T_x\, sn\varphi + T_y\, cs\varphi,$$

$$T_z = (N_y - N_x)\, sn\varphi\, cs\varphi + T_z\,(cs^2\varphi - sn^2\varphi).$$

Замѣняя въ правыхъ частяхъ напряженія N_x, N_y и т. д. ихъ выраженіями изъ (88), можемъ написать:

$$N_r = -p + \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + 2\mu\left[\frac{\partial u}{\partial x}\, cs^2\varphi + \frac{\partial v}{\partial y}\, sn^2\varphi + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) sn\varphi\; cs\varphi\right],$$

$$N_t = -p + \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + 2\mu\left[\frac{\partial u}{\partial x}\, sn^2\varphi + \frac{\partial v}{\partial y}\, cs^2\varphi - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) sn\varphi\; cs\varphi\right],$$

$$N_z = -p + \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + 2\mu\,\frac{\partial w}{\partial z}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (151)$$

$$T_r = \mu\left[\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) cs\varphi - \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) sn\,\varphi\right],$$

$$T_t = \mu\left[\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) sn\,\varphi + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) cs\,\varphi\right],$$

$$T_z = \mu\left[2\left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x}\right) sn\varphi\; cs\varphi + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)(cs^2\varphi - sn^2\varphi)\right].$$

Если въ эти выраженія подставить частныя производныя вь функціи отъ r, φ, z, пользуясь зависимостями (144), то получимъ окончательное рѣшеніе нашего вопроса. Такимъ образомъ, послѣ простыхъ передѣлокъ находимъ:

$$N_r = -p + \lambda\,\frac{1}{r}\left[\frac{\partial(w_r r)}{\partial r} + \frac{\partial w_t}{\partial \varphi} + \frac{\partial(w_z r)}{\partial z}\right] + 2\mu\,\frac{\partial w_r}{\partial r},$$

$$N_t = -p + \lambda\,\frac{1}{r}\left[\frac{\partial(w_r r)}{\partial r} + \frac{\partial w_t}{\partial \varphi} + \frac{\partial(w_z r)}{\partial z}\right] + 2\mu\,\frac{1}{r}\left(w_r + \frac{\partial w_t}{\partial \varphi}\right),$$

$$N_z = -p + \lambda\,\frac{1}{r}\left[\frac{\partial(w_r r)}{\partial r} + \frac{\partial w_t}{\partial \varphi} + \frac{\partial(w_z r)}{\partial z}\right] + 2\mu\,\frac{\partial w_z}{\partial z}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (152)$$

$$T_r = \mu\left(\frac{\partial w_t}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial w_z}{\partial \varphi}\right),$$

$$T_t = \mu\left(\frac{\partial w_r}{\partial z} + \frac{\partial w_z}{\partial r}\right),$$

$$T_z = \mu\left(\frac{\partial w_t}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial w_r}{\partial \varphi} - \frac{w_t}{r}\right).$$

Для несжимаемой жидкости, на основанiи (145, a) въ выраженiяхъ для N_r, N_t, N_z, множитель въ прямыхъ скобкахъ, при λ, обращается въ нуль.

50. Интегралы (32, a) и (32, b) § 42 преобразуются просто къ цилиндрическимъ координатамъ. Для этого беремъ выраженiя для Θ, $\Delta^2 u$, $\Delta^2 v$, $\Delta^2 w$ изъ (145) и (141), затѣмъ, пользуясь формулами преобразованiя (127), вводимъ вмѣсто dx, dy, dz ихъ выраженiя черезъ $dr, d\varphi, dz$.

Въ (32, b) измѣнится лишь первый интегралъ въ правой части. Послѣ преобразованiй онъ приметъ слѣдующiй видъ:

$$k\int_0^s \left\{\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w_r}{\partial r}\right) - \frac{w_r}{r^2} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2 w_r}{\partial \varphi^2} - 2\frac{\partial w_t}{\partial \varphi}\right) + \frac{\partial^2 w_r}{\partial z^2}\right] dr + \right.$$

$$+\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w_t}{\partial r}\right) - \frac{w_t}{r^2} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2 w_t}{\partial \varphi^2} + 2\frac{\partial w_r}{\partial \varphi}\right) + \frac{\partial^2 w_t}{\partial z^2}\right] r\,d\varphi +$$

$$\left. +\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w_z}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w_z}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 w_z}{\partial z^2}\right] dz\right\} ds.$$

Глава XI.

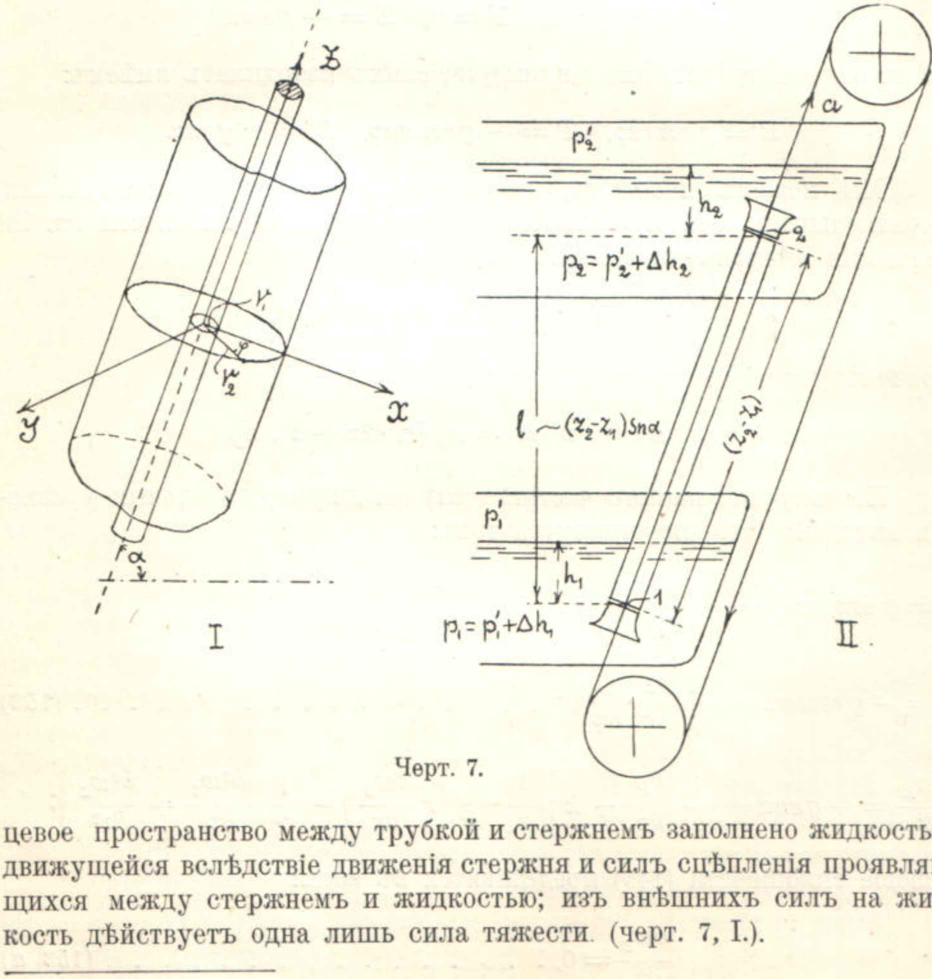
Приложенiя предыдущей теорiи.

51. Въ настоящей главѣ мы разсмотримъ рѣшенiя нѣкоторыхъ частныхъ вопросовъ, представляющихъ теоретическiя схемы практически уже осуществленныхъ приспособленiй для использованiя энергiи жидкостей и подъема ихъ.

Шнуровой насосъ и его обращенiе.

Въ введенiи къ нашей работѣ было уже указано, что прiоритетъ въ вопросѣ объ использованiи внутренняго тренiя жидкости, какъ средства для перемѣщенiя ея, долженъ считаться за профессоромъ Н. Е. Жуковскимъ, осуществившемъ и экспериментально изслѣдовавшему эту идею въ видѣ шнурового насоса *). Мы дадимъ здѣсь теорiю этого насоса и обращенiя его, т. е. шнурового двигателя, основываясь на изложенномъ выше ученiи о движенiи вязкой жидкости.

Пусть вдоль оси цилиндрической трубки радiуса r_2 движется поступательно съ постоянной скоростью a цилиндрическiй стержень, или шнуръ, радiуса r_1 такъ, что ось его все время совпадаетъ съ осью трубки; ось трубки наклонена къ горизонту подъ угломъ α. Коль-



Черт. 7.

цевое пространство между трубкой и стержнемъ заполнено жидкостью, движущейся вслѣдствiе движенiя стержня и силъ сцѣпленiя проявляющихся между стержнемъ и жидкостью; изъ внѣшнихъ силъ на жидкость дѣйствуетъ одна лишь сила тяжести. (черт. 7, I.).

---

*) См. Проф. Н. Е. Жуковскiй. О тренiи жидкости при большой разности скоростей ея струй. Докладъ пят. водопровод. съѣзду въ г. Кiевѣ, въ1901 г.

Примемъ ось трубки за ось Z, причемъ за положительное направленіе ея возьмемъ направленіе движенія стержня. Ось X помѣстимъ въ вертикальной плоскости, проведенной черезъ ось Z, ось Y будетъ перпендикулярна къ этой плоскости.

Разсматриваемое нами движеніе будемъ изслѣдовать въ цилиндрическихъ координатахъ, ось Z которыхъ совпадаетъ съ вышеуказанной осью Z, плоскость же полярныхъ координатъ r и φ есть плоскость xy, причемъ ось X будетъ полярной осью, а углы φ будутъ отсчитываться отъ положительнаго направленія оси X противъ часовой стрѣлки.

Имѣя все вышеуказанное ввиду мы можемъ написать дифференціальныя уравненія движенія жидкости въ трубкѣ.

Такъ какъ въ нашемъ случаѣ силы на единицу массы въ декартовыхъ координатахъ представятся такъ:

$$X = g\, cs\, \alpha, \quad Y = 0, \quad Z = -g\, sn\, \alpha,$$

то на основанiи (137) для цилиндрическихъ координатъ имѣемъ:

$$R = g\, cs\alpha\, cs\varphi, \quad T = -g\, cs\alpha\, sn\varphi, \quad Z = -g\, sn\alpha.$$

Мы можемъ положить, что движеніе происходитъ струйками, параллельными оси Z, симметрично относительно плоскости xz. На основанiи этого предположенія имѣемъ:

$$w_r = w_t = 0 \quad \text{и} \quad w_z = f(r, \varphi),$$

причемъ условіе симметріи даетъ:

$$w_z\,(r, \varphi, z) = w_z\,[r, (2\pi - \varphi), z].$$

Поэтому для нашего частнаго случая дифференціальныя уравненія движенія (143) перепишутся такъ:

$$0 = g\, cs\alpha\, cs\varphi - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r},$$

$$0 = -g\, cs\alpha sn\varphi - \frac{1}{\rho}\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \varphi}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (153)$$

$$\frac{dw_z}{dt} = -g\, sn\alpha - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + k\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w_z}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w_z}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 w_z}{\partial z^2}\right];$$

условіе сплошности (145) представится въ видѣ:

$$\frac{\partial w_z}{\partial z} = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (153, a)$$

т. е. w_z есть функція лишь отъ r и φ.

Теперь мы должны установить условія на границахъ. Концы трубки мы полагаемъ отрѣзанными плоскостями $z = z_1$ и $z = z_2$, причемъ для точекъ

$$r = r_2,\ \varphi = \frac{\pi}{2}, z = z_1 \text{ имѣемъ } p = p_1, \qquad (154)$$

$$r = r_2,\ \varphi = \frac{\pi}{2}, z = z_2 \text{ имѣетъ } p = p_2, \qquad (155)$$

въ остальныхъ точкахъ начальной и конечной окружности трубки мы полагаемъ давленіе распредѣленнымъ по законамъ гидростатики.

Такимъ образомъ для окружности $z = z_1$, $r = r_2$ должны имѣть:

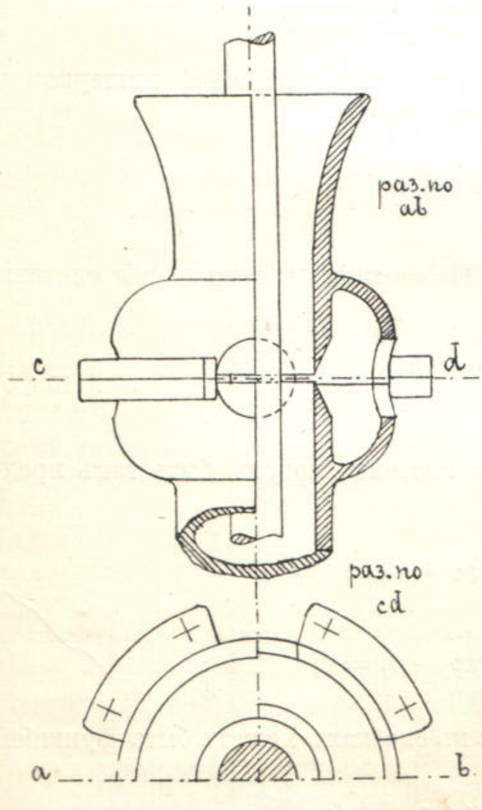
$$p' = p_1 + \rho\, g\, r_2\, cs\varphi\, cs\alpha, \qquad (154, a)$$

а для окружности $z = z_2$, $r = r_2$:

$$p'' = p_2 + \rho\, g\, r_2\, cs\varphi\, cs\alpha \qquad (155, a)$$

Чтобы осуществить такое распредѣленіе давленій мы присоединяемъ къ началу и концу трубки раструбы (черт. 8 и черт. 7, II), дающіе жидкости возможность плавно втекать въ трубку и вытекать изъ нея. Между раструбами и краями трубки устроены капиллярныя круговыя щели, отдѣленныя отъ всей массы жидкости кольцевыми камерами, сообщающимися съ жидкостью нѣсколькими отверстіями. Условія (154), (155) мы можемъ назвать гидростатическими условіями на границахъ.

Черт. 8.



Условія на внутренней поверхности трубки и поверхности стержня напишутся пользуясь уравненіями (99) § 35 и выраженіемъ (152) для касательнаго напряженія N_t. Предполагая для общности матеріалы и состоянія поверхностей трубки и стержня разными, найдемъ условіе на поверхности стержня въ видѣ

$$\nu_1(w_z - a) - \mu \frac{\partial w_z}{\partial r}\bigg|_{r=r_1} = 0, \qquad (156)$$

гдѣ ν_1 коэффиціентъ внѣшняго тренія жидкостн о стержень; условіе на внутренней поверхности цилиндра напишется такъ:

$$\nu_2 w_z + \mu \left.\frac{\partial w_z}{\partial r}\right|_{r=r_2} = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (157)$$

гдѣ ν_2 коэффиціентъ внѣшняго тренія жидкости о внутреннюю поверхность трубы. Условія (156) и (157) являются гидродинамическими условіями на границахъ.

52. Приступимъ топерь къ интегрированію системы дифференціальныхъ уравненій (153) при соблюденіи условій (154, 155, 156, 157).

Лѣвая часть третьяго уравненія системы (153) можетъ быть такъ представлена:

$$\frac{dw_z}{dt} = \frac{\partial w_z}{\partial t} + \frac{\partial w_z}{\partial r}\frac{dr}{dt} + \frac{\partial w_z}{\partial \varphi}\frac{d\varphi}{dt} + \frac{\partial w_z}{\partial z}\frac{dz}{dt},$$

или, полагая движеніе установившимся, т. е. $\frac{\partial w_z}{\partial t} = 0$, на основаніи выраженій (130) пишемъ:

$$\frac{dw_z}{dt} = \frac{\partial w_z}{\partial r} w_r + \frac{\partial w_z}{\partial \varphi}\frac{w_t}{r} + \frac{\partial w_z}{\partial z} w_z;$$

на основаніи условія сплошности въ видѣ (153, a) и вышеуказанныхъ зависимостей $w_r = w_t = 0$, находимъ:

$$\frac{dw_z}{dt} = 0.$$

Такимъ образомъ послѣднее дифференціальное уравненіе системы (153) перепишется въ видѣ:

$$0 = -g\, sn\, a - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + k\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w_z}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w_z}{\partial \varphi^2}\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (153, b)$$

Первыя два уравненія той же системы могутъ быть такъ представлены:

$$\frac{\partial}{\partial r}(\rho\, g\, cs a r cs\varphi - p) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi}(\rho\, g\, cs a r cs\varphi - p) = 0;$$

откуда заключаемъ, что выраженіе въ скобкахъ можетъ быть функціей одного лишь z, т. е.:

$$p = \rho\, g\, cs a\, r\, cs\varphi + \psi(z).$$

Подставляя это выраженіе для p въ уравненіе (153, b) и помня, что w_z отъ z не зависитъ, приходимъ къ заключенію, что $\psi'(z)$ не зависитъ отъ z, поэтому можетъ лишь быть нѣкоторой постоянной величиной c_1, т. е. $\psi'(z) = c_1$, откуда:

$$\psi (z) = c_1 z + c_2;$$

такимъ образомъ

$$p = \rho g c s \alpha r c s \varphi + c_1 z + c_2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (158)$$

Опредѣленіе произвольныхъ постоянныхъ c_1 и c_2 производится на основаніи условій (154), (155). Имѣемъ:

$$p_1 = c_1 z_1 + c_2,$$

$$p_2 = c_1 z_2 + c_2.$$

Найдя отсюда c_1 и c_2 и подставивъ въ (158) находимъ для давленія p выраженіе въ окончательномъ видѣ:

$$p = \rho\, g c s \alpha r c s \varphi + \frac{p_1 - p_2}{z_1 - z_2}(z - z_1) + p_1 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (159)$$

Полученное выраженіе для давленія p удовлетворяетъ и болѣе общимъ условіямъ на границахъ (154, a) и (155, a). Кромѣ того изъ (159) ясно, что во всемъ потокѣ жидкости давленіе распредѣляется по законамъ гидростатики.

Въ дальнѣйшемъ мы введемъ слѣдующія обозначенія: удѣльный вѣсъ жидкости обозначимъ черезъ Δ, т. е.

$$\rho\ g = \Delta;$$

замѣчая, что длина трубки будетъ $z_2 - z_1$, примемъ:

$$z_2 - z_1 = l; \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (160)$$

кромѣ того ясно, что $(z_2 - z_1)\, sn\alpha$ есть разстояніе по вертикали между начальной и конечной точками оси трубки; обозначимъ:

$$(z_2 - z_1)\, sn\alpha = H_1 \quad \text{и} \quad \frac{p_2 - p_1}{\Delta} = H_2, \quad \ldots \quad (161)$$

въ такомъ случаѣ высота H_u, гдѣ

$$H_u = (z_2 - z_1)\, sn\alpha + \frac{p_2 - p_1}{\Delta} = H_1 + H_2 \quad \ldots \ldots \quad (162)$$

будетъ полный полезный напоръ, на который работаетъ нашъ шнуровой насосъ.

53. Вернемся теперь къ нашему дифференціальному уравненію (153, b). Замѣчая, что на основаніи (159) $\frac{dp}{dz} = c_1$, перепишемъ его въ такомъ видѣ:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w_z}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w_z}{\partial \varphi^2} = c', \quad \ldots\ldots (153, c)$$

гдѣ

$$c' = \frac{\rho\, g\, sn\alpha + c_1}{k\,\rho},$$

или, на основаніи (159), (160) и (162)

$$c' = \frac{\Delta(z_2 - z_1)\ sn\alpha + (p_2 - p_1)}{k\,\rho\,(z_2 - z_1)} = \frac{\Delta H_u}{\mu l}; \quad \ldots\ldots (163)$$

Замѣтимъ, что c' есть постоянная величина.

Произведя дифференцированіе въ (153, c) приводимъ уравненіе къ виду:

$$\frac{\partial^2 w_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w_z}{\partial \varphi^2} = c' \quad \ldots\ldots (164)$$

Интегралъ его содержитъ двѣ независимыхъ перемѣнныхъ r и φ, причемъ относительно перемѣннаго φ онъ будетъ періодической функціей съ періодомъ 2π; поэтому можемъ предположить его разложеннымъ въ рядъ Фурье по измѣняемости φ и представить такъ:

$$w_z = A_o + \sum_{m=1}^{m=\infty} (A_m cs m\varphi + B_m sn m\varphi), \quad \ldots\ldots (165)$$

гдѣ A_o, A_m и B_m функціи одного лишь r.

На основаніи условія симметріи движенія относительно плоскости XZ, функція w_z не должна мѣняться ири измѣненіи φ на $2\pi - \varphi$, что возможно лишь при $B_m = 0$; такимъ образомъ:

$$w_z = A_o + \sum_{m=1}^{m=\infty} A_m cs m\varphi. \quad \ldots\ldots (165, a)$$

Подставляя это выраженіе для w_z въ (164), имѣемъ:

$$\sum_{m=1}^{m=\infty}\left(\frac{d^2 A_m}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dA_m}{dr} - \frac{m^2}{r^2}Am\right) cs m\varphi + \frac{d^2 A_o}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dA_o}{dr} - c' = 0.$$

Такъ какъ это равенство имѣетъ мѣсто при произвольномъ φ, то должно быть:

$$\frac{d^2A_m}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dA_m}{dr}-\frac{m^2}{r^2}A_m=0, \quad \ldots\ldots \text{(I)}$$

$$\frac{d^2A_o}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dA_o}{dr}-c'=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(II)}$$

Интегрируемъ сперва уравненіе (I). Полагая частный интегралъ въ видѣ

$$A_m=Mr^k$$

и подставляя въ (I), получаемъ:

$$Mk\,(k-1)r^{k-2}+Mkr^{k-2}-Mm^2r^{k-2}=0,$$

откуда

$$k\,(k-1)+k-m^2=0, \text{ т. е. } k^2-m^2=0 \text{ или } k=\pm m.$$

Отсюда полный интегралъ уравненія (I) напишется въ видѣ:

$$A_m=M_mr^m+N_mr^{-m} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(III)}$$

Интегрируемъ теперь второе уравненіе (II). Переписываемъ его такъ:

$$\frac{d^2}{dr^2}\left(A_o-\frac{c'r^2}{4}\right)+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(A_o-\frac{c'r^2}{4}\right)=0;$$

полагая

$$\frac{d}{dr}\left(A_o-\frac{c'r^2}{4}\right)=\psi,$$

имѣемъ

$$\frac{d\psi}{dr}+\frac{\psi}{r}=0, \text{ или } \frac{d\psi}{\psi}+\frac{dr}{r}=0, \text{ т. е. } dlg\psi r=0,$$

отсюда

$$\psi r=B_1 \text{ или } \psi=\frac{B_1}{r},$$

поэтому

$$\frac{d}{dr}\left(A_o-\frac{c'r^2}{4}\right)=\frac{B_1}{r};$$

интегрируя, находимъ окончательно:

$$A_o=B_1lgr+\frac{c'r^2}{4}+B_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(IV)}$$

Такимъ образомъ полный интегралъ дифференціальнаго уравненія въ частныхъ производныхъ второго порядка (164) будетъ:

$$w_z = \sum_{m=1}^{m=\infty} (M_m r^m + N_m r^{-m}) \, cs m\varphi + B_1 lgr + \frac{c' r^2}{4} + B_2 \, . \; . \; . \; . \; (166)$$

Произвольныя постоянныя M_m, N_m, B_1 и B_2 находится на основаніи условій на границахъ (156) и (157).

Вводя обозначенія $\frac{\mu}{\nu_1} = \phi_1$ и $\frac{\mu}{\nu_2} = \phi_2$ и подставляя въ (156), (157) найденное выше выраженіе для w_z, имѣемъ:

$$\sum_{m=1}^{m=\infty} \left[M_m (r^m - m\phi_1 r_1{}^{m-1}) + N_m (r_1{}^{-m} + m\phi_1 r_1{}^{-(m+1)}) \right] cs m\varphi +$$

$$+ B_1 \left(lgr_1 - \frac{\phi_1}{r_1} \right) + B_2 + \frac{c' r_1}{2} \left(\frac{r_1}{2} - \phi_1 \right) - a = 0,$$

$$\sum_{m=1}^{m=\infty} \left[M_m (r_2{}^m + m\phi_2 r_2{}^{m-1}) + N_m (r_2{}^{-m} - m\phi_2 r_2{}^{-(m+1)}) \right] cs m\varphi +$$

$$+ B_1 \left(lgr_2 + \frac{\phi_2}{r_2} \right) + B_2 + \frac{c' r_2}{2} \left(\frac{r_2}{2} + \phi_2 \right) = 0.$$

Такъ какъ послѣднія уравненія должны удовлетворяться при произвольныхъ значеніяхъ φ, то должно быть:

$$\left. \begin{aligned} & M_m (r_1{}^m - m\phi_1 r_1{}^{m-1}) + N_m (r_1{}^{-m} + m\phi_1 r_1{}^{-(m+1)}) = 0, \\ & M_m (r_2{}^m + m\phi_2 r_2{}^{m-1}) + N_m (r_1{}^{-m} - m\phi_2 r_2{}^{-(m+1)}) = 0, \end{aligned} \right\} \; . \; . \; . \; (V)$$

и

$$B_1 \left(lgr_1 - \frac{\phi_1}{r_1} \right) + B_2 + \frac{c' r_1}{2} \left(\frac{r_1}{2} - \phi_1 \right) - a = 0,$$

$$B_1 \left(lgr_2 + \frac{\phi_2}{r_2} \right) + B_2 + \frac{c' r_2}{2} \left(\frac{r_2}{2} + \phi_2 \right) = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (VI)$$

Легко показать, что корни системы (V) не могутъ быть отличны отъ нуля. Въ противномъ случаѣ должна была бы существовать зависимость

$$(r_1{}^m - m\phi_1 r_1{}^{m-1}) \; (r_2{}^{-m} - m\phi_2 r_2{}^{-(m+1)}) - (r_2{}^m + m\phi_2 r_2{}^{m-1})$$
$$(r_1{}^{-m} + m\phi_1 r_1{}^{-(m+1)}) = 0,$$

откуда легко получается:

$$\frac{\psi_1}{r_1} + \frac{\psi_2}{r_2} = 0,$$

что невозможно, такъ какъ, вообще говоря, величины ψ_1, ψ_2, r_1 и r_2 существенно положительны.

Въ томъ же случаѣ, если напр. $\psi_1 = 0$, то и ψ_2 должно быть нулемъ, и вышеуказанное условіе должно принять видъ:

$$\frac{r_1^m}{r_2^m} = \frac{r_2^m}{r_1^m},$$

что тоже невозможно, такъ какъ $r_2 > r_1$.

Такимъ образомъ мы приходимъ къ заключенію, что всѣ $M_m = 0$ и $N_m = 0$, т. е.

$$w_z = B_1 lgr + \frac{c' r^2}{4} + B_2 \qquad (166, a)$$

Опредѣляя постоянныя B_1 и B_2 изъ системы (VI), находимъ:

$$\left.\begin{aligned} B_1 &= \frac{c'[r_2^2 - r_1^2 + 2(\psi_1 r_1 + \psi_2 r_2)] + 4a}{4\left(lg\frac{r_1}{r_2} - \frac{\psi_1}{r_1} - \frac{\psi_2}{r_2}\right)}, \\ B_2 &= \frac{\left\{c'[r_2^2 - r_1^2 + 2(\psi_1 r_1 + \psi_2 r_2)] + 4a\right\}\left(lgr_2 + \frac{\psi_2}{r_2}\right)}{4\left(lg\frac{r_1}{r_2} - \frac{\psi_1}{r_1} - \frac{\psi_2}{r_2}\right)} - \frac{c' r_2}{2}\left(\frac{r_2}{2} + \psi_2\right). \end{aligned}\right\} \qquad (VII)$$

Въ предположеніи отсутствія скольженія жидкости вдоль стѣнки трубки и стержня, т. е. при $\psi_1 = 0$ и $\psi_2 = 0$ найдемъ:

$$\left.\begin{aligned} B_1' &= \frac{c'(r_2^2 - r_1^2) + 4a}{4lg\frac{r_1}{r_2}}, \\ B_2' &= \frac{c'(r_1^2 lgr_2 - r_2^2 lgr_1) - 4algr_2}{4lg\frac{r_1}{r_2}}. \end{aligned}\right\} \qquad (VIII)$$

На основаніи выраженій (VII) w_z приметъ теперь окончательно слѣдующій видъ:

$$w_z = \frac{c'(r_2^2 - r_1^2 + 2\psi_1 r_1 + 2\psi_2 r_2) + 4a}{4\left(lg\frac{r_1}{r_2} - \frac{\psi_1}{r_1} - \frac{\psi_2}{r_2}\right)}\left(lg\frac{r}{r_2} - \frac{\psi_2}{r_2}\right) + \frac{c'(r^2 - r_2^2 - 2\psi_2 r_2)}{4} \qquad (166, b)$$

т. е. w_z есть функція одного лишь r.

54. Вычислимъ теперь расходъ Q жидкости, подаваемой разсматриваемымъ насосомъ въ единицу времени. Легко замѣтить, что

$$Q=\int_o^{2\pi}\int_{r_1}^{r_2} w_z d\sigma=\int_o^{2\pi}\int_{r_1}^{r_2} w_z r dr d\varphi,$$

гдѣ $d\sigma$ элементъ площади поперечнаго кольцевого сѣченія въ полярныхъ координатахъ. На основаніи (166, a)

$$Q=\int_o^{2\pi}\int_{r_1}^{r_2}\left(B_1 lgr+\frac{c'r^2}{4}+B_2\right)rdrd\varphi, \quad . \; . \; . \; . \; (167)$$

или, послѣ интеграціи

$$Q=\pi\left[B_1(r_2^2 lgr_2-r_1^2 lgr_1)+\frac{c'}{8}(r_2^4-r_1^4)+\frac{(2B_2-B_1)}{2}(r_2^2-r_1^2)\right]. \; (167, a)$$

Подставляя сюда значенія для B_1, B_2 и c' изъ (VII) и (163), можемъ написать:

$$Q=MH_u+Na, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (168)$$

гдѣ

$$M=\frac{\pi\Delta}{8\mu l}\Big\{2(r_2^2-r_1^2+2\psi_1 r_1+2\psi_2 r_2)\left[(r_2^2 lgr_2-r_1^2 lgr_1)-\left(lgr_2+\frac{\psi_2}{r_2}+\frac{1}{2}\right)(r_2^2-r_1^2)\right]+$$

$$. \; . \; . \; (IX)$$

$$+(r_2^2-r_1^2)(r_1^2-r_2^2-4r_2\psi_2)\left(lg\frac{r_1}{r_2}-\frac{\psi_1}{r_1}-\frac{\psi_2}{r_2}\right)\Big\}:\left(lg\frac{r_1}{r_2}-\frac{\psi_1}{r_1}-\frac{\psi_2}{r_2}\right),$$

$$N=-\frac{\pi\left[(r_2^2 lgr_2-r_1^2 lgr_1)-\left(lgr_2+\frac{\psi_2}{r_2}+\frac{1}{2}\right)(r_2^2-r_1^2)\right]}{\left(lg\frac{r_1}{r_2}-\frac{\psi_1}{r_1}-\frac{\psi_2}{r_2}\right)}.$$

Въ случаѣ отсутствія скольженія жидкости вдоль трубки и стержня, т. е. при $\psi_1=0$ и $\psi_2=0$, имѣемъ:

$$M_1=\frac{\pi\Delta(r_2^2-r_1^2)}{8\mu l}\left[\frac{r_2^2-r_1^2}{lg\frac{r_2}{r_1}}-(r_2^2+r_1^2)\right],$$

$$. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (X)$$

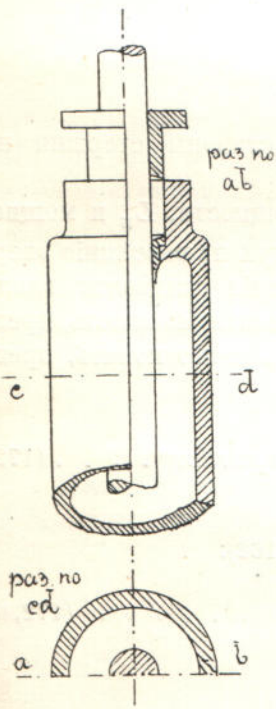
$$N_1=\pi\left(\frac{r_2^2-r_1^2}{2lg\frac{r_2}{r_1}}-r_1^2\right).$$

Легко показать, что при условіи $r_2\geqq r_1$, имѣютъ мѣсто неравенства:

$$M_1\leqq 0, \quad N_1\geqq 0.$$

Поэтому, обращаясь къ выраженію для Q въ видѣ (168) находимъ, что съ измѣненіемъ скорости a отъ 0 до ∞, Q, переходя черезъ нуль, мѣняетъ знакъ съ отрицательнаго на положительный. Причемъ для положительной скорости $a = -\dfrac{M_1 H_u}{N_1}$, расходъ $Q = 0$, т. е. затрачиваемая энергія идетъ на поддержаніе разности напоровъ на концахъ трубки.

Расходъ Q можетъ обратиться въ 0 еще и въ другомъ случаѣ. Представимъ себѣ, что трубка на выпускномъ концѣ закрыта и черезъ нее пропущенъ стержень подобно тому какъ это представлено на черт. 9. Въ такомъ случаѣ расходъ будетъ равенъ нулю и изъ (168) вытекаетъ, что



Черт. 9.

$$H_u = -\frac{N_1 a}{M_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (169)$$

Пользуясь выраженіями (159) и (162) для p и H_u, найдемъ для распредѣленія давленія вдоль трубки такое выраженіе:

$$p = \Delta c s a r c s \varphi + \frac{\Delta[H_u - (z_2 - z_1) s n \alpha]}{z_2 - z_1}(z - z_1) + p_1, \quad (170)$$

гдѣ вмѣсто H_u должно быть поставлено данное выше значеніе. Отсюда легко замѣтить, что вдоль прямой, паралелльной оси трубки приращенія давленія пропорціональны длинѣ. Изъ послѣдняго выраженія вытекаетъ, что при

$$H_u - (z_2 - z_1) s n \alpha = 0,$$

$$p_2 = p_1,$$

т. е. давленіе вдоль трубки не мѣняется, а при

$$H_u - (z_2 - z_1) s n \alpha < 0$$

давленіе вдоль трубки убываетъ. Написавъ (169) въ видѣ:

$$(z_2 - z_1) s n \alpha + \frac{p_2 - p_1}{\Delta} = -\frac{N_1 a}{M_1},$$

опредѣлимъ отсюда предѣльную длину трубки $(z_2 - z_1)$. Если длина трубки будетъ больше найденной, то вся энергія расходуется на поддержаніе разности напоровъ на концахъ трубки, въ предположеніи, что p_1 и p_2 намъ заданы.

Обратно, при $a = 0$, располагаемая разность напоровъ H_u, противъ которой мы работаемъ, даетъ отрицательный расходъ

$$Q = M_1 H_u,$$

т. е. жидкость движется въ отрицательномъ направленіи.

При $H_u = 0$, для любого значенія $a > 0$, будетъ создаваться нѣкоторый положительный расходъ Q.

55. Обратимся теперь къ составленію баланса энергіи разсматриваемаго нами движенія жидкости. Энергію будемъ относить къ единицѣ времени, т. е. разсмотримъ мощности.

Вся затраченная мощность L выразится такъ:

$$L = -2\pi r_1 (z_2 - z_1)\mu \left|\frac{dw_z}{dr}\right|_{r=r_1} a, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (171)$$

гдѣ $2\pi r_1 (z_2 - z_1)$ рабочая поверхность стержня,

$$-\mu \left|\frac{dw_z}{dr}\right|_{r=r_1}$$

касательное усиліе на единицу площади со стороны стержня на жидкость.

Мощность L составляется изъ полезной мощности, L_u и мощности противъ вредныхъ сопротивленій, расходуемую на разсѣяніе энергіи, т. е. внутреннее треніе и работу скольженія жидкости вдоль стержня и внутренней поверхности трубки. Полезная мощность, представляющая работу перемѣщенія жидкости, какъ легко понять, представится такъ:

$$L_u = \int_{z_1}^{z_2}\int_{o}^{2\pi}\int_{r_1}^{r_2} (\Delta sn\alpha dz + dp) w_z r dr d\varphi, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (172)$$

или, на основаніи выраженія для расхода Q и (162):

$$L_u = \Delta Q H_u. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (172, a)$$

Въ (172) интегралъ

$$\int_{z_1}^{z_2}\int_{o}^{2\pi}\int_{r_1}^{r_2} dp w_z r dr d\varphi$$

есть работа въ единицу времени противъ давленій, а интегралъ

$$\int_{z_1}^{z_2}\int_{o}^{2\pi}\int_{r_1}^{r_2} \Delta sn\alpha dz w_z r dr d\varphi$$

работа въ единицу времени противъ силы тяжести.

Мощность $L_{s,1}$, затраченная на скольженіе стержня вдоль жидкости представится въ такомъ видѣ:

$$L_{s,1} = -2\pi r_1 (z_2 - z_1)\mu \left|\frac{dw_z}{dz}\left(a - w_z\right)\right|_{r=r_1}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (173)$$

гдѣ $(a - w_z)_{r=r_1}$ скорость стержня относительно жидкости; въ остальномъ выраженіе для $L_{s,1}$ сходно съ выраженіемъ для L.

Работа въ единицу времени скольженія жидкости относительно внутренней поверхности трубки будетъ:

$$L_{s,2} = -2\pi r_2 (z_2 - z_1)\mu \left| \frac{dw_z}{dr} w_z \right|_{r=r_2} \quad \dots\dots\dots \quad (174)$$

Наконецъ аналогичная работа, затраченная на разсѣяніе энергіи внутри жидкости, на основаніи (107), напишется такъ:

$$D = \int_0^{2\pi}\int_{r_1}^{r_2}\int_{z_1}^{z_2} \Phi r dr d\varphi dz, \quad \dots\dots\dots\dots \quad (175)$$

гдѣ интегрированіе распространяется на весь объемъ трубки, занятый движущейся жидкостью. Такъ какъ жидкость несжимаема, то $(a + b + c) = 0$ и

$$\Phi = 2\mu(a^2 + b^2 + c^2 + 2p_1^2 + 2p_2^2 + 2p_3^2).$$

Въ нашемъ случаѣ $u = v = 0$, а w есть функція лишь отъ x и y, поэтому, на основаніи (49), пишемъ:

$$a = b = c = 0,\ \ p_1 = \frac{1}{2}\frac{\partial w}{\partial y},\ \ p_2 = \frac{1}{2}\frac{\partial w}{\partial x},\ \ p_3 = 0.$$

Пользуясь (135) и имѣя ввиду, что w въ данномъ случаѣ зависитъ лишь отъ r, имѣемъ:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{dw}{dr}\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{dw}{dr} cs\varphi,$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{dw}{dr}\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{dw}{dr} sn\varphi.$$

Отсюда:

$$\Phi = \mu\left(\frac{dw}{dr}\right)^2,$$

или

$$D = \mu \int_0^{2\pi}\int_{r_1}^{r_2}\int_{z_1}^{z_2} \left(\frac{dw_z}{dr}\right)^2 r dr d\varphi dz;$$

пользуясь выраженіемъ (166, a) для w_z, послѣ интегрированія найдемъ:

$$D = 2\pi\mu (z_2 - z_1)\left\{ B_1^2(lgr_2 - lgr_1) + \frac{c'^2}{16}(r_2^4 - r_1^4) + \frac{B_1 c'}{2}(r_2^2 - r_1^2)\right\}. (176)$$

На основанiи условiй на границахъ (156) и (157) пишемъ:

$$\left| w_z \right|_{r=r_2} = -\psi_2 \left| \frac{dw_z}{dr} \right|_{r=r_2},$$

$$\left| a - w_z \right|_{r=r_1} = -\psi_1 \left| \frac{dw_z}{dr} \right|_{r=r_1}.$$

Отсюда, на основанiи (173) и (174):

$$L_{s,1} = 2\pi r_1 (z_2 - z_1)\mu\psi_1 \left| \frac{dw_z}{dr} \right|^2_{r=r_1} = 2\pi\mu\psi_1(z_2 - z_1)r_1 \left(\frac{B_1}{r_1} + \frac{c' r_1}{2} \right)^2, \quad (173, a)$$

$$L_{s,2} = 2\pi r_2 (z_2 - z_1)\mu\psi_2 \left| \frac{dw_z}{dr} \right|_{r=r_2} = 2\pi\mu\psi_2(z_2 - z_1)r_2 \left(\frac{B_1}{r_2} + \frac{c' r_2}{2} \right)^2, \quad (174, a)$$

Пользуясь выраженiемъ (167, a) для Q, на основанiи (172,a) имѣемъ:

$$L_u = \pi\Delta H_u \left\{ B_1(r_2^2 lgr_2 - r_1^2 lgr_1) + \frac{c'}{8}(r_2^4 - r_1^4) + \frac{(2B_2 - B_1)}{2}(r_2^2 - r_1^2) \right\}.$$

Исключая B_2 при помощи второго уравненiя системы (IV), найдемъ:

$$L_u = \frac{\pi\Delta H_u}{8} \left\{ 8B_1 (r_2^2 lgr_2 - r_1^2 lgr_1) - (r_2^2 - r_1^2) \left[c'(r_2^2 - r_1^2 + 4r_2\psi_2) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + B_1\left(4 + lgr_2 + \frac{\psi_2}{r_2} \right) \right] \right\} \quad \ldots \ldots \ldots (172, b)$$

Исключая a въ выраженiи (171) для L помощью выраженiя для B_1 въ (VII) и (166, a), получаемъ:

$$L = 2\pi\mu(z_2 - z_1)\left(B_1 + \frac{c' r_1^2}{2} \right) \left\{ B_1 \left(lg\frac{r_2}{r_1} + \frac{\psi_1}{r_1} + \frac{\psi_2}{r_2} \right) + \frac{c'}{4}(r_2^2 - r_1^2 + \right.$$

$$\left. + 2r_1\psi_1 + 2r_2\psi_2) \right] \quad \ldots \ldots \ldots (171, a)$$

Другое выраженiе для L получимъ, подставляя въ (171) значенiе $\left| \frac{dw_z}{dr} \right|_{r=r_1}$, вычисленное изъ (166, b), именно:

$$L = \frac{\pi[\Delta H_u k + 4a\mu(z_2 - z_1)]\, a}{2P}, \quad \ldots \ldots \, 171, b)$$

гдѣ

$$k = r_2^2 - r_1^2 + 2\psi_2 r_2 + 2r_1^2 \left(lg\frac{r_1}{r_2} - \frac{\psi_2}{r_2} \right), \quad \ldots \ldots (XI)$$

$$P = lg\frac{r_2}{r_1} + \frac{\psi_1}{r_1} + \frac{\psi_1}{r_1}.$$

При отсутствіи скольженія, т. е. при $\psi_1 = \psi_2 = 0$

$$k_1 = r_2^2 - r_1^2 - 2r_1^2\, lg\, \frac{r_2}{r_1},$$

$$P_1 = lg\, \frac{r_2}{r_1} \qquad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(XII)}$$

Пользуясь полученными выраженіями легко провѣрить балансъ энергіи, который нипишется такъ:

$$L = L_u + L_{s,1} + L_{s,2} + D.$$

56. Гидравлическій коэффиціентъ η_h полезнаго дѣйствія шнурового насоса напишется въ видѣ:

$$\eta_h = \frac{L_u}{L} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (177)$$

Воспользовавшись значеніями L_u и L изъ (172, b) и (171,b) и подставивъ значенія B_1, B_2 и c', найдемъ для η_h такое выраженіе

$$\eta_h = \frac{\Delta H_u\left[M_2 \Delta H_u + N_2 \mu a (z_2 - z_1)\right]}{\mu a (z_2 - z_1)\left[\Delta H_u k + 4 a \mu (z_2 - z_1)\right]}, \quad \ldots\ldots \quad (178)$$

гдѣ

$$M_2 = \frac{1}{4}\left\{2(r_2^2 - r_1^2 + 2\psi_1 r_1 + 2\psi_2 r_2)\left[(r_1^2 lg r_1 - r_2^2 lg r_2) + \left(lg r_2 + \frac{\psi_2}{r_2} + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + \frac{1}{2}\right)(r_2^2 - r_1^2)\right] + (r_2^2 - r_1^2)(r_1^2 - r_2^2 - 4r_2\psi_2)\left(lg\, \frac{r_2}{r_1} + \frac{\psi_1}{r_1} + \frac{\psi_2}{r_2}\right)\right\},$$

$$N_2 = 2\left\{(r_1^2 lg r_1 - r_2^2 lg r_2) + \left(lg r_2 + \frac{\psi_2}{r_2} + \frac{1}{2}\right)(r_2^2 - r_1^2)\right\} \ldots \quad \text{(XIII)}.$$

Въ случаѣ отсутствія скольженія вдоль стѣнокъ трубки и стержня, т. е. $\psi_1 = \psi_2 = 0$, предыдущія выраженія сведутся къ:

$$M_2' = \frac{(r_2^2 - r_1^2)}{4}\left[r_2^2 - r_1^2 - (r_2^2 + r_1^2)\, lg\, \frac{r_2}{r_1}\right],$$

$$N_2' = r_2^2 - r_1^2 - 2r_1^2\, lg\, \frac{r_2}{r_1}. \qquad \ldots \quad \text{(XIV)}$$

Если считать данными полный полезный напоръ H_u, на который долженъ работать нашъ насосъ и расходъ Q, то придется отыскивать скорость стержня a; предполагается, конечно, что остальныя величины, какъ-то: r_1, r_2, l, α, μ, ψ_1, ψ_2, Δ даны. Искомая величина a опредѣлится сразу изъ уравненія (168).

57. Полученными результатами мы можемъ воспользоваться для рѣшенія вопроса о движеніи вязкой жидкости по трубкѣ кольцевого или обыкновеннаго кругового сѣченія.

Для этого достаточно въ выраженіяхъ для w_z и Q положить $a=0$; кромѣ того, полезнымъ напоромъ, создающимъ теченіе, въ этомъ случаѣ нужно считать H'_u, гдѣ

$$H_u' = - H_u.$$

Такимъ образомъ изъ (166, b) и (168) находимъ для кольцевого сѣченія:

$$w_z = \frac{\Delta H'_u}{4\mu l}\left[(r_2{}^2 - r_1{}^2 + 2\psi_1 r_1 + 2\psi_2 r_2)\left(lg\frac{r}{r_2} - \frac{\psi_2}{r_2}\right) + (r^2 - r_2{}^2 - 2\psi_2 r_2)\right.$$

$$\left.\left(lg\frac{r_1}{r_2} - \frac{\psi_1}{r_1} - \frac{\psi_2}{r_2}\right)\right] : \left(lg\frac{r_2}{r_1} + \frac{\psi_1}{r_1} + \frac{\psi_2}{r_2}\right),$$

$$Q = - MH'_u. \qquad \ldots (179)$$

Для трубки кругового сѣченія нужно положить $r_1 = 0$. Найдемъ:

$$w_z = \frac{\Delta H'_u}{4\mu l}(r_2{}^2 - r^2 + 2\psi_2 r_2),$$

$$Q = \frac{\pi\Delta H'_u}{8\mu l}\, r_2{}^3(r_2 + 4\psi_2). \qquad \ldots\ldots (179, a)$$

Полагая въ послѣднемъ выраженіи $\psi_2 = 0$, получимъ:

$$Q = \frac{\pi\Delta H'_u}{8\mu l}\, r_2{}^4,$$

извѣстную формулу, выведенную Пуазейлемъ эмпирически изъ опытовъ при изслѣдованіи теченія воды по капиллярнымъ трубкамъ. Этой формулой можно пользоваться для опредѣленія коэффиціента вязкости μ.

Шнуровой двигатель.

58. Рѣшимъ теперь обратную задачу: предположимъ существующимъ нѣкоторый полный (рабочій) напоръ H'_u и будетъ разсматривать наше устройство какъ двигатель, требуя чтобъ протекающая жидкость дала по оси стержня нѣкоторое усиліе σ на единицу рабочей поверхности, т. е. $2\pi r_1 l\sigma$ по всей поверхности его.

Полный рабочій напоръ H'_u, въ данномъ случаѣ, какъ легко понять, будетъ связанъ съ напоромъ H_u слѣдующимъ образомъ:

$$H'_u = -H_u$$

т. е.

$$H'_u = (z_1 - z_2) sn\alpha + \frac{p_1 - p_2}{\Delta}$$

Дифференціальныя уравненія движенія будутъ тѣ-же, что и въ предыдущемъ случаѣ, такъ что для давленія p получимъ выраженіе (159), условія же на границахъ (156) и (157) представятся такъ:

$$\mu \frac{\partial w_z}{\partial r}\Big|_{r=r_1} = r_1(w_z - a)\Big|_{r=r_1} = \sigma,$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad \ldots\ldots \quad (180)$$
$$r_2 w_z + \mu \frac{\partial w_z}{\partial r}\Big|_{r=r_2} = 0.$$

Произвольныя постоянныя интегрированія B_1 и B_2 опредѣлятся изъ уравненій (IV'), причемъ первое уравненіе этой системы, на основаніи приведенныхъ условій на границахъ, можетъ быть нѣсколько измѣнено. Такимъ образомъ система (IV') замѣнится такой:

$$\mu\left(\frac{B_1}{r_1} + \frac{c'r_1}{2}\right) - \sigma = 0,$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad \ldots\ldots \quad (XV')$$
$$B_1\left(lgr_2 + \frac{\psi_2}{r_2}\right) + B_2 + \frac{c'r_2}{2}\left(\frac{r_2}{2} + \psi_2\right) = 0.$$

Откуда находимъ:

$$B_1 = \frac{r_1(2l\sigma + \Delta H'_u r_1)}{2l\mu}, \quad \ldots\ldots \quad (XVI)$$

$$B_2 = -\frac{1}{4\mu l r_2}\Big[2r_1(2l\sigma + \Delta H'_u r_1)(r_2\, lgr_2 + \psi_2) - \Delta H'_u r_2^2 (r_2 + 2\psi_2)\Big].$$

Подставляя эти значенія въ (166) и (167, a) найдемъ выраженія для w_z и Q.

Полезная мощность L_u нашего двигателя въ данномъ случаѣ выразится такъ:

$$L_u = 2\pi r_1 l\sigma a, \quad \ldots\ldots \quad (181)$$

гдѣ a скорость стержня находится изъ (180) въ видѣ:

$$a = \frac{r_1 |w_z|_{r=r_1} - \sigma}{r_1} \quad \ldots\ldots \quad (182)$$

Вся затраченная мощность L будетъ:

$$L = H'_u Q \qquad (183)$$

Отсюда коэффиціентъ полезнаго дѣйствія нашего двигателя будетъ:

$$\eta_h = \frac{L_u}{L} = \frac{2\pi r_1 l\sigma a}{H'_u Q}.$$

Балансъ энергіи напишется подобно предыдущему случаю въ видѣ:

$$L = L_u + L_{s,1} + L_{s,2} + D,$$

гдѣ

$$L_{s,1} = 2\pi r_1 l\sigma (w_z - a)$$

работа тренія жидкости о стержень; L и L_u даны выше; $L_{s,2}$ и D имѣютъ прежнія значенія (176) и (174, a).

Вращательное движеніе вязкой жидкости.

59. Въ настоящемъ параграфѣ мы разсмотримъ такой вопросъ: въ вязкой жидкости равномѣрно вращается система параллельныхъ, равноудаленныхъ плоскостей вокругъ нѣкоторой оси, перпендикулярной къ нимъ; плоскости предполагаются безграничными. Опредѣлить движеніе жидкости.

Здѣсь въ общемъ случаѣ допускается скольженіе жидкости относительно плоскостей; для простоты предположимъ, что коэффиціентъ внѣшняго тренія относительно всѣхъ плоскостей одинаковъ, причемъ изъ силъ внѣшнихъ, дѣйствующихъ на массу жидкости пусть существуетъ лишь одна сила тяжести.

Изъ дальнѣйшаго будетъ ясно, что для рѣшенія вопроса достаточно разсмотрѣть движеніе жидкости между парой парой плоскостей. Какъ и въ предыдущемъ случаѣ будемъ пользоваться цилиндрическими кординатами. Ось вращенія примемъ за ось Z, направленную вертикально вверхъ. Начало O помѣстимъ на серединѣ разстоянія между двумя плоскостями, въ остальномъ будемъ придерживаться черт. 6. Примемъ разстояніе между плоскостями равними $2h$; уравненія ихъ будутъ: $z = +h$, $z = -h$.

Движеніе жидкости предположимъ установимшимся и совершающимся въ плоскостяхъ перпендикулярныхъ къ оси вращенія. На этомъ основаніи

$$\frac{\partial w_r}{\partial t} = \frac{\partial w_t}{\partial t} = \frac{\partial w_z}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial t} = 0;$$

кромѣ того $w_z = 0$ и $R = T = 0$, $z = -g$.

Въ общемъ случаѣ жидкость благодаря вязкости и внѣшнему тренію о плоскости будетъ двигаться отъ центра къ периферіи по криволинейнымъ плоскимъ траекторіямъ, лежащимъ въ горизонтальныхъ плоскостяхъ. Мы можемъ принять траекторіи всѣхъ частицъ, лежащихъ въ одной и той же плоскости тождественными, т. е. движеніе жидкости симметричнымъ относительно оси вращенія. Это обстоятельство позволяетъ утверждать, что

$$\frac{\partial w_r}{\partial \varphi} = \frac{\partial w_t}{\partial \varphi} = \frac{\partial p}{\partial \varphi} = 0,$$

т. е. w_r, w_t и p суть функціи одного лишь r и z

60. Обратимся теперь къ дифференціальнымъ уравненіямъ движенія (143). На основаніи (130) лѣвыя части первыхъ двухъ уравненій перепишутся такъ:

$$\frac{dw_r}{dt} - \frac{w^2{}_t}{r} = \frac{\partial w_r}{\partial t} + \frac{\partial w_r}{\partial r} w_r + \frac{\partial w_r}{\partial r}\frac{w_t}{r} + \frac{\partial w_r}{\partial z} w_z - \frac{w_t^2}{r},$$

$$\frac{1}{r}\frac{d(w_t r)}{dt} = \frac{1}{r}\left\{\frac{\partial (w_t r)}{\partial t} + \frac{\partial (w_t r)}{\partial r} w_r + \frac{\partial (w_t r)}{\partial \varphi}\frac{w_r w_t}{r} + \frac{\partial (w_t r)}{\partial z} w_z\right\}.$$

Поэтому, на основаніи всего вышесказаннаго, дифференціальныя уравненія движенія въ данномъ случаѣ представляется въ видѣ:

$$\frac{\partial w_r}{\partial r} w_r - \frac{w_t^2}{r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + k\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial (w_r r)}{\partial r}\right] + \frac{\partial^2 w_r}{\partial z^2}\right\},$$

$$\frac{w_r}{r}\frac{\partial (w_t r)}{\partial r} = k\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial (w_t r)}{\partial r}\right] + \frac{\partial^2 w_t}{\partial z^2}\right\}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (184)$$

$$0 = -g - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}.$$

Условіе сплошности $(145, a)$ приметъ видъ:

$$\frac{\partial (w_r r)}{\partial r} = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (185)$$

откуда заключаемъ, что $w_r r$ есть функція одного лишь z, т. е.

$$w_r r = \psi(z) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (185,a)$$

Кромѣ того изъ (185) вытекаетъ, что

$$r\frac{\partial w_r}{\partial r} + w_r = 0. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (185, b)$$

Послѣднее уравненіе системы (184), послѣ интегрированія, даетъ:

$$p = -\Delta z + \rho\Phi(r), \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (186)$$

причемъ нужно замѣтить, что $\varphi(z)$ и $\Phi(r)$ пока произвольныя функціи, опредѣляемыя изъ дальнѣйшихъ условій.

На основаніи (185, a), (185, b) и (186), первое уравненіе системы (184) перепишется такъ:

$$-\frac{w_r^2 + w_t^2}{r} = -\Phi'(r) + k\frac{\partial^2 w_r}{\partial z^2},$$

или

$$-(w_r^2 + w_t^2) = -r\Phi'(r) + k\frac{\partial^2 w_r r}{\partial z^2},$$

откуда

$$w_r^2 + w_r^2 = r\Phi'(r) - k\varphi''(z). \quad \ldots \ldots \quad (187)$$

Замѣчая, что

$$w_r^2 + w_t^2 = v^2,$$

можемъ сказать, что квадратъ скорости въ каждой точкѣ жидкости есть сумма двухъ функцій: функціи отъ r и функціи отъ z. Помножая (187) на r^2 и принимая во вниманіе (185, a), найдемъ:

$$(w_t r)^2 = r^3\Phi'(r) - kr^2\varphi''(z) - \varphi^2(z) \quad \ldots \ldots \quad (188)$$

61. Мы можемъ сказать, что (185, a), (186) и послѣднее уравненіе рѣшаютъ нашу задачу вполнѣ, если будутъ опредѣлены функціи $\Phi(r)$ и $\varphi(z)$. Для этого воспользуемся вторымъ уравненіемъ системы (184), и кромѣ того введемъ условія на границахъ.

Послѣ дифференцированія въ правой части второго уравненія (184), легко придать ему такой видъ:

$$\frac{w_r r}{r^2}\frac{\partial(w_t r)}{\partial r} = k\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial^2(w_t r)}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial(w_t r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial(w_t r)}{\partial z^2}\right\}.$$

Принимая во вниманіе (185, a) послѣ упрощеній, получимъ:

$$\frac{\partial^2(w_t r)}{\partial r^2} + \frac{\partial^2(w_t r)}{\partial z^2} = \left\{\frac{\varphi(z) + k}{kr}\right\}\frac{\partial(w_t r)}{\partial r} \quad \ldots \ldots \quad (189)$$

Этому дифференціальному уравненію въ частныхъ производныхъ второго порядка должна удовлетворять функція $w_t r$. Подставляя сюда значеніе этой функціи изъ (188) получимъ одну дифференціальную зависимость между функціями $\Phi(r)$ и $\varphi(z)$.

62. Обратимся теперь къ условіямъ на границахъ. Принимая скольженіе жидкости относительно движущихся плоскостей, мы воспользуемся условіями (99) § 35, примѣнительно къ цилиндрическимъ координатамъ. Такъ какъ для нашего случая на основаніи (152)

$$T_r = \mu \frac{\partial w_t}{\partial z}, \quad T_t = \mu \frac{\partial w_r}{\partial z},$$

и обозначая черезъ ω угловую скорость вращенія плоскостей, получимъ для плоскости $z = +h$ искомыя условія въ видѣ:

$$\nu_1(\omega r - w_t)\Big|_{z=+h} = \mu \frac{\partial w_t}{\partial z}\Big|_{z=+h}, \quad \nu_1 w_r \Big|_{z=+h} = -\mu \frac{\partial w_r}{\partial z}\Big|_{z=+h} \quad (190,a)$$

а для плоскости $z = -h$

$$\nu_1(\omega r - w_t)\Big|_{z=+h} = -\mu \frac{\partial w_t}{\partial z}\Big|_{z=-h}, \quad \nu_1 w_r \Big|_{z=-h} = \mu \frac{\partial w_r}{\partial z}\Big|_{z=-h}. \quad (190,b)$$

Эти же условія могутъ быть переписаны и такъ:

$$\nu_1(\omega r^2 - w_t r)\Big|_{z=+h} = \mu \frac{\partial (w_t r)}{\partial z}\Big|_{z=+h}, \quad \nu_1(\omega r^2 - w_t r)\Big|_{z=-h} = -\mu \frac{\partial (w_t r)}{\partial z}\Big|_{z=-h},$$

$$\nu_1(w_r r)\Big|_{z=+h} = -\mu \frac{\partial (w_r r)}{\partial z}\Big|_{z=+h}, \quad \nu_1(w_r r)\Big|_{z=-h} = \mu \frac{\partial (w_r r)}{\partial z}\Big|_{z=-h} \quad . \; . \quad (190,c)$$

Теперь мы можемъ сдѣлать нѣкоторыя заключенія о видѣ функціи $\Phi(r)$, входящей въ (186). Для этого, на основаніи (188), пишемъ:

$$w_t r = \sqrt{R - kr^2 Z'' - Z^2}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (191)$$

гдѣ для сокращенія принято $r^3 \Phi'(r) = R$ и $\psi(z) = Z$; кромѣ того обозначимъ $\frac{\mu}{\nu_1} = \lambda$ и

$$Z_{z=+h} = a_0, \; Z'_{z=+h} = a_1, \; Z''_{z=+h} = a_2, \; Z'''_{z=+h} = a_3,$$
$$Z_{z=-h} = a'_0, \; Z'_{z=-h} = a_1', \; Z''_{z=-h} = a_2', \; Z'''_{z=-h} = a_3'. \quad . \; (192)$$

Имѣя все вышесказанное ввиду, на основаніи первыхъ двухъ условій на границахъ (190, c) и выраженія для $w_t r$ (191), пишемъ:

$$\omega r^2 - \sqrt{R - kr^2 a_2 - a_0^2} = -\lambda \frac{kr^2 a_3 + 2a_0 a_1}{2\sqrt{R - kr^2 a_2 - a_0^2}}$$
$$\omega r^2 - \sqrt{R - kr^2 a_2' - a'^2_0} = \lambda \frac{kr^2 a_3' + 2a_0' a_1'}{2\sqrt{R - kr^2 a_2' - a'^2_0}} \quad . \; . \; . \; (193)$$

Условія симметріи движенія относительно плоскости $z=0$ приводятъ насъ къ заключенію, что $(w_t r)_{z=+h} = (w_t r)_{z=-h}$ при произвольномъ r, т. е.

$$R - kr^2 a_2 - a_0^2 = R - kr^2 a'_2 - a_0'^2.$$

Такъ какъ это должно быть вѣрно при произвольномъ r, то отсюда прямо слѣдуетъ, что

$$a_0 = a_0' \text{ и } a_2 = a_2'.$$

Отсюда находимъ, что правыя части въ равенствѣ (193) должны быть тоже равны при произвольныхъ значеніяхъ r, слѣдовательно:

$$a_3 = -a_3' \text{ и } a_1 = -a_1'.$$

Такимъ образомъ, имѣя ввиду обозначенія (192), функція Z должна подчиняться слѣдующимъ условіямъ:

$$a_0 = a_0',\ a_1 = -a_1',\ a_2 = a_2',\ a_3 = -a_3'; \quad \ldots\ldots\ldots (194)$$

кромѣ того, обращаясь къ послѣднимъ двумъ условіямъ $(190, c)$ мы можемъ ихъ такъ представить:

$$a_0 = -\lambda a_1, \quad a_0' = \lambda a_1',$$

поэтому, замѣчая, что второе уравненіе (194) есть слѣдствіе послѣднихъ двухъ и системы (194), можемъ систему (194) замѣнить такой:

$$a_0 = a_0',\ a_0 = -\lambda a_1,\ a_0' = \lambda a'_1,\ a_2 = a_2',\ a_3 = -a_3' \quad \ldots (194, a)$$

Отсюда восемь неизвѣстныхъ могутъ быть опредѣлены черезъ три какихъ-нибудь изъ нихъ. Напримѣръ, если

$$a_0 = \alpha,\ a_2 = \beta,\ a_3 = \gamma,$$

то $\quad \ldots\ldots\ldots\ldots (195)$

$$a_0' = \alpha,\ a_1 = -\frac{\alpha}{\lambda},\ a_1' = \frac{\alpha}{\lambda},\ a_2' = \beta,\ a_3' = -\gamma.$$

Изъ всего этого вытекаетъ, что условія (193) могутъ быть сведены къ одному, имѣющему видъ:

$$\omega r^2 - \sqrt{R - kr^2 a_2 - a_0^2} = \lambda \frac{kr^2 a'_2 + 2a_0 a_1'}{2\sqrt{R - kr^2 a_2 - a_0^2}}, \quad \ldots\ldots (196)$$

Такъ какъ это равенство должно имѣть мѣсто при произвольныхъ значеніяхъ r, то оно является уравненіемъ для опредѣленія вида функціи R въ предположеніи, что функція Z, т. е. $\psi(z)$ намъ извѣстна. Изъ (196) легко находимъ, что

$$R = \frac{\omega^2}{2} r^4 + k\left(a_2 - \frac{1}{2}\lambda a_3\right) r^2 + \frac{1}{2}\omega r^2 \sqrt{\omega^2 r^4 - 2\lambda(kr^2 a_3 + 2a_0 a_1)} +$$

$$+ a_0^2 - \lambda a_0 a_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (197)$$

Замѣтимъ, что здѣсь вошелъ одинъ лишь знакъ, между тѣмъ, при нахожденіи радикала $\sqrt{R - kr^2 a_2 - a_0^2}$ изъ квадратнаго уравненія (196) получается два знака. Но дѣло въ томъ, что если положить $\lambda = 0$ (т. е. отсутствіе скольженія) этотъ радикалъ, представляющій величину $w_t r\,|_{z=\pm h}$, долженъ обратиться въ ωr^2, что возможно лишь въ томъ случаѣ, если взять корень квадратнаго уравненія со знакомъ плюсъ.

Зная видъ функціи R, мы тѣмъ самымъ находимъ распредѣленіе давленій въ разсматриваемомъ случаѣ. Дѣйствительно, изъ соотношенія принятаго для (191)

$$r^3 \Phi'(r) = R$$

находимъ, что

$$\Phi(r) = \int \frac{R dr}{r^3} + C \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (198)$$

Подставляя сюда изъ (197) значеніе функціи R, найдемъ, послѣ интеграціи, $\Phi(r)$. Эта функція, подставленная въ (186)

$$p = -\Delta z + \rho\,\Phi(r), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (186)$$

рѣшаетъ вопросъ о распредѣленіи давленій. Мы уже указали, что въ R входитъ три произвольныхъ постоянныхъ, C будетъ четвертая. Двѣ изъ нихъ можно опредѣлить задавая давленія на окружностяхъ: $z = 0$, $r = r_1$ и $z = 0$, $r = r_2$; остается двѣ произвольныхъ постоянныхъ.

63. Теперь мы можемъ въ общихъ чертахъ указать путь къ интегрированію уравненія (189) при соблюденіи условій на границахъ (190, c) *). Видъ интеграла нами уже найденъ:

$$w_t r = \sqrt{R - kr^2 Z'' - Z^2}\,; \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (191)$$

---

*) Подробное рѣшеніе и изслѣдованіе этого вопроса, ввиду его сложности и громоздкости, мы предполагаемъ дать въ отдѣльной статьѣ. Здѣсь мы ограничимся нѣкоторыми частными случаями.

подставляя это выраженіе въ (189) и произведя упрощенія получимъ:

$$2\frac{d^2R}{dr^2}R-2\frac{d^2R}{dr^2}kr^2Z''-2\frac{d^2R}{dr^2}Z^2-\left(\frac{dR}{dr}\right)^2+6krZ''\frac{dR}{dr}-2kr^2Z^{IV}R-$$

$$-4Z'^2R-2\frac{Z}{rk}\frac{dR}{dr}R+2Z\frac{dR}{dr}rZ''+2\frac{Z^3}{kr}\frac{dR}{dr}-2\frac{1}{r}\frac{dR}{dr}R+$$

$$+2\frac{Z^2}{r}\frac{dR}{dr}+2k^2r^4Z^{IV}Z''+2kr^2Z^{IV}Z^2+4Z'^2kr^2Z''-k^2r^4Z'''^2-$$

$$-4kr^2Z'''ZZ'-4k^2r^2Z''^2=0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (199).$$

Подставляя сюда выраженіе для R (197), освобождаясь отъ радикаловъ и располагая результатъ по степенямъ r, получимъ въ лѣвой части цѣлый полиномъ относительно r, коэффиціенты котораго будутъ зависѣть отъ функціи Z и ея производныхъ до четвертой включительно. Такъ какъ этотъ полиномъ долженъ быть нулемъ при произвольныхъ значеніяхъ r, то, приравнивая его коэффиціенты нулю, мы найдемъ цѣлый рядъ обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій и задача сведется къ отысканію функцій Z, удовлетворяющей одновременно всѣмъ этимъ дифференціальнымъ уравненіямъ.

64. Для примѣра разсмотримъ частный случай: предположимъ, что нѣтъ скольженія жидкости относительно вращающихся плоскостей, т. е. $\nu_1=\infty$ или $\lambda=0$. Въ такомъ случаѣ изъ (197) получается, что

$$R=\omega^2r^4+ka_2r^2+a_0^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (200)$$

Подставивъ это выраженіе для R въ (199) и расположивъ по степенямъ r, получимъ полиномъ шестой степени относительно r.

Приравнявъ коэффиціенты его нулю, сразу найдемъ, что $Z=0$, т. е.

$$a_0=a_1=a_2=a_3=a_0'=a_1'=a_2'=a_3'=0.$$

Отсюда $R=\omega^2\, r^4$, или, на основаніи (191):

$$w_t=\omega r, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (201)$$

т. е. радіальнаго движенія жидкости нѣтъ и вся жидкая масса вращается вокругъ оси Z какъ твердое тѣло съ угловой скоростью w. Подставляя полученное выше значеніе для R въ (198), найдемъ, что

$$\Phi(r)=\frac{\omega^2r^2}{2}+C,$$

откуда, на основаніи (186)

$$p=\frac{\rho\omega^2r^2}{2}-\Delta z+C_1, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (202)$$

т. е. поверхности равнаго давленія суть параболоиды вращенія вокругъ оси Z; результатъ извѣстный изъ гидравлики.

Разсмотримъ теперь обратный случай: рѣшимъ вопросъ о возможности вращательнаго движенія нашей жидкости въ разсматриваемомъ случаѣ (т. е. $w_r = 0$) при наличности скольженія относительно плоскостей, т. е. $\lambda > 0$.

Мы видѣли, что предположеніе $w_r = 0$ равносильно положенію $Z = 0$, т. е. на основаніи (197) $R = \omega^2 r^4$, или на основаніи (191), $w_t = \omega r$; другими словами результатъ получился тотъ же, что и при предположеніи $\lambda = 0$. Т. е. жидкость можетъ имѣть чисто вращательное движеніе лишь въ случаѣ отсутствія скольженія ея относительно вращающихся плоскостей; въ этомъ случаѣ она движется какъ твердое тѣло.

65. Обратимся къ разсмотрѣнію болѣе общаго случая. Откажемся отъ поставленныхъ нами пограничныхъ условій (190,c); въ такомъ случаѣ мы имѣемъ вообще дѣло съ нѣкоторымъ симметричнымъ относительно оси Z теченіемъ вязкой жидкости, въ смыслѣ указанномъ выше. Для него имѣютъ мѣсто полученныя выше уравненія и соотношенія:

$$w_r r = Z, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (185, a).$$

$$w_t r = \sqrt{R - kr^2 Z'' - Z^2}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (191)$$

$$\frac{\partial^2(w_t r)}{\partial r^2} + \frac{\partial^2(w_t r)}{\partial z^2} = \frac{Z + k}{k}\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial(w_t r)}{\partial r}, \quad \ldots \quad (189)$$

$$p = -\Delta z + \rho\Phi(r). \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (186)$$

Предположимъ теперь $w_r = w = const$ для $r = r_1$. Въ такомъ случаѣ

$$w_r r = w r_1 = a, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (203)$$

т. е. $Z = a$, и изъ (191) слѣдуетъ, что $w_t r$ есть функція одного лишь r, причемъ

$$w_t r = \sqrt{R - a^2}; \quad \ldots \ldots \ldots \quad (204)$$

дифференціальное уравненіе (189) перепишется такъ:

$$\frac{\partial^2(w_t r)}{\partial r^2} = \frac{A}{r}\,\frac{\partial(w_t r)}{\partial r},$$

гдѣ $\dfrac{a + k}{k} = A$. Представивъ это уравненіе въ видѣ:

$$\frac{d\left[\dfrac{\partial(w_t r)}{\partial r}\right]}{\dfrac{\partial(w_t r)}{\partial r}} = A\frac{dr}{r},$$

находимъ, что:

$$dlg\,\frac{\partial(w_t r)}{\partial z} = d\,lgr^A,$$

отсюда, послѣ интегрированія

$$\frac{\partial(w_t r)}{\partial r} = C_1' r^A,$$

или, окончательно

$$w_t r = C_1 r^{A+1} + C_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (205)$$

Произвольныя постоянныя C_1 и C_2 опредѣляются заданіемъ w_t на двухъ какихъ либо цилиндрическихъ поверхностяхъ $r = r_1$ и $r = r_2$.

Траекторія какой либо частицы жидкости можетъ быть легко опредѣлена на основаніи соотношеній:

$$w_r = \frac{dr}{dt}, \quad w_t = r\,\frac{d\varphi}{dt};$$

дѣля первое на второе, находимъ:

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{w_r r}{w_t},$$

или, на основаніи (203) и (205):

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{a}{C_1 r^A + C_2 r^{-1}},$$

отсюда, послѣ интегрированія, находимъ уравненіе траекторіи въ полярныхъ координатахъ въ видѣ:

$$a\varphi = \frac{C_1 r^{A+1}}{A+1} + C_2 lg\, C_3 r, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (206)$$

гдѣ постоянная C_3 опредѣляется по начальной точкѣ, черезъ которую проходитъ разсматриваемая траекторія.

Опредѣливъ изъ (204) функцію R, мы находимъ на основаніи (198) функцію $\Phi(r)$, а слѣдовательно, пользуясь (186), распредѣленіе давленій въ разсматриваемомъ случаѣ.

66. Полученные результаты даютъ возможность разсмотрѣть случай, изслѣдованный *M. Couette* въ его работѣ, посвященной опредѣленію коэффиціента внутренняго тренія жидкостей *).

Вопросъ сводился къ изслѣдованію движенія жидкости между двумя концентрическими цилиндрами, изъ которыхъ каждый въ общемъ случаѣ вращался съ нѣкоторой постоянной угловой скоростью.

Полагая общую ось цилиндровъ вертикальной и дѣлая вполнѣ допустимое предположеніе, что $w_r = 0$, мы сразу приходимъ къ случаю, разсмотрѣнному въ предыдущемъ параграфѣ, причемъ здѣсь $A = 1$, такъ какъ $a = 0$. Такимъ образомъ имѣемъ:

$$w_t = C_1 r + C_2 r^{-1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (207)$$

См. M. Couette. Etudes sur le frottement des liquides. Annales de chimie et de physique. 1890 г. стр. 436.

Постоянныя C_1 и C_2 найдутся на основаніи условій на границахъ. Предположимъ, что цилиндръ радіуса r_1 вращается съ угловой скоростью ω_1, а цилиндръ радіуса r_2—съ угловой скоростью ω_2, и что $r_1 < r_2$. Касательное напряженіе T_z, на основаніи (152) представляется такъ:

$$T_z = \mu\left(\frac{\partial w_t}{\partial r} - \frac{w_t}{r}\right),$$

что для нашего случая даетъ:

$$T_z = -\frac{2\mu C_2}{r^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (208)$$

Условія на границахъ, на основаніи (99), пишутся въ видѣ:

$$\nu_1(w_t - \omega_1 r_1)\Big|_{r=r_1} = \mu\left(\frac{\partial w_t}{\partial r} - \frac{w_t}{r}\right)_{r=r_1},$$

$$\nu_2(w_t - \omega_2 r_2)\Big|_{r=r_2} = -\mu\left(\frac{\partial w_t}{\partial r} - \frac{w_t}{r}\right)\Big|_{r=r_2}.$$

Поэтому для опредѣленія постоянныхъ C_1 и C_2 получатся такія уравненія:

$$\nu_1\left(C_1 r_1 + C_2 r_1^{-1} - \omega_1 r_1\right) = -\mu\frac{2C_2}{r_1^2},$$

$$\nu_2\left(C_1 r_2 + C_2 r_2^{-1} - \omega_2 r_2\right) = \mu\frac{2C_2}{r_2^2}.$$

Предполагая наружный цилиндръ неподвижнымъ и пренебрегая скольженіемъ жидкости, получимъ эти условія въ такомъ видѣ:

$$C_1 r_1 + C_2 r_1^{-1} = \omega_1 r_1,$$

$$C_1 r_2 + C_2 r_2^{-1} = 0.$$

Рѣшая эти уравненія относительно C_1 и C_2, находимъ:

$$C_1 = \frac{\omega_1 r_1^2}{r_1^2 - r_2^2}, \qquad C_2 = \frac{\omega_1 r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}.$$

Источникомъ движенія жидкости будетъ теперь внутренній вращающійся цилиндръ, къ которому долженъ быть приложенъ моментъ M, выражающійся такъ:

$$M = -2\pi r_1 h\, T_z r_1, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (209)$$

гдѣ h высота по оси цилиндра разсматриваемаго слоя жидкости. Пользуясь полученнымь выше выраженіемъ для T_z, имѣемъ:

$$M = 4\pi h\, \mu\, C_2$$

или
$$M = \frac{4\pi h \mu \omega_1 r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (210)$$

На этомъ мы закончимъ главу о приложеніяхъ вышеизложенной теоріи *).

Глава XII

Численныя значенія коэффиціентовъ, входящихъ въ основныя уравненія.

67. Въ настоящей главѣ мы дадимъ значенія коэффиціентовъ, введенныхъ нами въ основныя уравненія. Не вдаваясь въ подробное разсмотрѣніе методовъ ихъ нахожденія, что завело бы насъ оченъ далеко, мы приведемъ рядъ чиселъ, характеризующихъ разныя жидкости; числа эти дадутъ возможность, въ случаѣ надобности, производить реальные подсчеты. Коэффиціенты, входящіе въ предыдущіе формулы, слѣдующіе: μ—коэффиціентъ внутренняго тренія (или вязкости), η—коэффиціентъ внѣшняго тренія, λ—такъ называемый второй коэффиціентъ вязкости. Этотъ послѣдній коэффиціентъ тѣсно связанъ съ сжимаемостью жидкости, съ которой теперь все больше и больше начинаютъ считаться на практикѣ, такъ какъ такое явленіе какъ напримѣръ гидравлическій ударъ всецѣло зависитъ отъ этого свойства жидкости. Поэтому мы дадимъ значенія коэффиціента сжимаемости c для нѣкоторыхъ жидкостей. Замѣтимъ еще, что въ остальныя уравненія движенія вязкой жидкости входитъ кинематическій коэффиціентъ трѣнія $k = \frac{\mu}{\rho}$, гдѣ ρ плотность жидкости Такъ какъ значенія для ρ могутъ быть найдены всюду, то мы здѣсь ихъ приводить не будемъ.

68. Изъ основного соотношенія (65) размѣрность коэффиціента μ представится такъ:
$$[\mu] = [L^{-1} M T^{-1}] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (211)$$

Таблица I даетъ значенія этого коэффиціента для разныхъ жидкостей и газовъ при разныхъ температурахъ (по Цельсію) въ абсолютной системѣ единицъ [*C. G. S.*]. Кромѣ того въ этой же таблицѣ даны значенія коэффиціента $k_1 = \frac{\mu}{\Delta}$, гдѣ Δ удѣльный вѣсъ жидкости**). Такъ какъ въ абсолютной системѣ единицъ $\Delta = g\rho = 981\,\rho$, то отсюда $k = 981\,k_1$.

---

*) Нѣкоторые вопросы, разобранные здѣсь въ иномъ изложеніи можно найти въ курсахъ:

W. Wien. Lehrbuch der Hydrodynamik. Leipzig 1900 стр. 269.

H. Lorenz. Lehrbuch der technischen Physik. III т. стр. 426.

**) См. R. Biel. Ueber den Druckhöhenverlust bei der Fortleitung tropfbarer und gasförmiger Flüssigkeiten. Berlin, 1907. Mitteil. über Forschungs. Heft 44

Таблица I.

		0°		5°		10°		20°		30°		100°		1200°	
		μ	$\frac{\mu}{\Delta}$	μ	$\frac{\mu}{\Delta}$	μ	$\frac{\mu}{\Delta}$	μ	$\frac{\mu}{\Delta}$	μ	$\frac{\mu}{\Delta}$	μ	$\frac{\mu}{\Delta}$	μ	$\frac{\mu}{\Delta}$
Рѣпное масло		25,3	27,7	~6,27	~6,8	3,7	4,07	1,8	1,98	0.99	1,1	—	—	—	—
Вода		0,01775	0,01775	0,01515	0,01515	0,0131	0,0131	0,0101	0,0101	0,00805	0,0081	~0,00298	~0,0031	—	—
Эфиръ		—	—	—	—	—	—	0,0026	0,00353	—	—	—	—	—	—
Ртуть		—	—	—	—	—	—	0,016	0,00118	—	—	—	—	—	—
Жидкая углекислота при $p = 59$ kg./cm.²		—	—	—	—	—	—	0,000712	0,000862	—	—	—	—	—	—
одяной паръ .		—	—	—	—	—	—	0,0000975	0,135	—	—	—	—	—	—
оздухъ		0,0001714	0,137	0,000173	0,141	0,000176	0,146	0,000188	0,161	0,000186	0,165	0,0002113	0,23	0,0005481	2,36
ислородъ . . .	при $p = 1$ kgr./cm.²	—	—	—	—	—	—	0,000198	0,153	—	—	—	—	—	—
зотъ		—	—	—	—	—	—	0,000174	0,153	—	—	—	—	—	—
одородъ		0,0000864	1,07	—	—	—	—	0,000097	1,21	—	—	0,0001075	1,7	0,000302	18,8

O. E. Meyer *) для воды при разныхъ температурахъ далъ такую элементарную зависимость:

$$\mu = \frac{0,01775}{1 + 0,0331t + 0,000244t^2}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (212)$$

гдѣ t въ градусахъ Цельсія, μ въ абсолютной системѣ единицъ $[C. \, G. \, C]$.

Изъ приведенной таблицы замѣчаемъ, что для жидкостей коэффиціентъ внутренняго тренія μ съ возрастаніемъ температуры убываетъ, для газовъ наоборотъ—возрастаетъ.

Коэффиціентъ μ для воды почти не зависитъ отъ давленія, тоже имѣетъ мѣсто и для газовъ при давленіяхъ достаточно удаленныхъ отъ точекъ сжиженія ихъ. Кромѣ того нужно замѣтить, что для газовъ, для которыхъ плотность прямо-пропорціональна давленію, коэффиціентъ k обратно—пропорціоналенъ давленію; этимъ отчасти и объясняются необычайно большія потери въ трубопроводахъ для разрѣженныхъ газовъ.

69. Перейдемъ теперь къ разсмотрѣнію коэффиціента λ. Если вспомнимъ сказанное въ § 32, то на основаніи зависимостей (88) заключаемъ, что размѣрность λ должна быть та же, что и μ, т. е.

$$[\lambda] = [L^{-1} MT^{-1}]; \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (213).$$

кромѣ того, пользуясь гипотезой Стокса, по которой

$$3\lambda + 2\mu = 0,$$

имѣемъ $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$, такъ что особыхъ вычисленій дял нахожденія λ производить не приходится.

Если бы мы отказались отъ гипотезы Стокса, то опредѣленіе λ пришлось бы производить изъ опытовъ аналогичныхъ опытамъ для опредѣленія μ, т. е. изъ опытовъ кинематическаго и динамическаго характера. Для твердыхъ тѣлъ λ опредѣляется довольно просто. Изъ соображеній теоріи упругости

$$\lambda = c^{-1} - \frac{2}{3}\mu,$$

гдѣ c коэффиціентъ сжимаемости. Нужно замѣтить, что для твердыхъ тѣлъ размѣрность λ и μ иная:

$$[\lambda] = [\mu] = [L^{-1} MT^{-2}], \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (213, a)$$

гдѣ μ—модуль сдвига. Такъ напримѣръ для стали

$$\mu = 0,819. \; 10^{12} \frac{\text{din.}}{\text{cm.}^2}, \quad c^{-1} = 1,841. \; 10^{12} \frac{\text{din.}}{\text{cm.}^2}.$$

*) См. Wiedemanns Annalen. 1877, стр. 387.

откуда

$$\lambda = 1{,}295.\ 10^{12}\ \frac{\text{din.}}{\text{cm.}^2}.$$

Значеній λ для жидкостей намъ не удалось найти *).

70. Коэффиціентъ сжимаемости c представляется такъ:

$$c = \frac{1}{V}\,\frac{V - V'}{p' - p}, \qquad (214)$$

гдѣ V и V' первоначальный и конечный объемы, p и p' первоначальное и конечное давленіе. Отсюда размѣрность c будетъ:

$$[c] = [LM^{-1}T^2] \qquad (215)$$

Ниже приводимъ таблицу II, дающую значеніе коэффиціента сжимаемости (по Квинке) для разныхъ жидкостей.

Таблица II.

	$c.\ 10^7$		t'.	Температ. коэффиціентъ m.
	$t = 0$.	$t = t'$.		
Глицеринъ	252,4	251,0	19,0	—0,000292
Рѣпное масло	480,2	581,8	17,8	+0,01189
Миндальное масло	482,1	563,0	19,7	0,008519
Оливковое масло	485,9	617,4	18,3	0,01479
Вода	503,0	456,3	22,9	—0,004049
Сѣрнистый углеродъ	539,2	637,8	17,0	+0,01076
Скипидаръ	581,7	779,3	18,6	0,01830
Бензолъ	585,3	628,4	16,1	0,004581
Алкоголь	828,2	959,5	17,5	0,01113
Эфиръ	1155,7	1342,3	14,3	0,01127
„	—	1477,2	21,4	0,01302
Ртуть	39,2	—	—	—

*) См. С. Христіансенъ. Основы теоретической физики. СПБ., 1895, I ч. На стр. 122 данъ выводъ и численное значеніе λ для воды, разсматриваемой какъ твердое тѣло. На основаніи этого вывода размѣрность λ не соотвѣтствуетъ размѣрности (213) для жидкихъ тѣлъ.

Температура измѣряется въ C^0, давленіе въ атмосферахъ. Для пересчета въ абсолютныя единицы, а именно въ мегадины, достаточно приведенныя число подѣлить на 1,0137. Кромѣ того нужно замѣтить, что числа эти получены въ предѣлахъ 50—75 атмосферъ давленія. Вообще относительно коэффиціента сжатія для жидкостей можно сказать слѣдующее:

Съ возрастаніемъ температуры сжимаемость жидкостей значительно возрастаетъ за исключеніемъ воды и глицерина, у которыхъ она убываетъ.

Наименьшая сжимаемость наблюдается у ртути, наибольшая—у эфира.

Сжимаемость зависитъ отъ тѣхъ предѣловъ давленій, въ которыхъ она наблюдается. Такъ напр. по Amagat для воды при 0^0 C въ предѣлахъ 1—25 атм. коэффиціентъ сжимаемости равенъ $52{,}5 \,.\, 10^{-6}$, а въ предѣлахъ 2500—3000 атм.—$26{,}1 \,.\, 10^{-6}$.

Tait для прѣсной воды даетъ такую эмпирическую формулу:

$$c.\ 10^7 = (520 - 17\,p + p^2) - 10^{-2}(355 + p)t + 10^{-2}(3 + p)t^2, \quad . \quad . \quad (216)$$

гдѣ p давленіе въ тоннахъ на дм.² Для морской воды приближенно имъ дается:

$$c = \frac{0{,}00179}{38 + p}\left(1 - \frac{t}{150} + \frac{t^2}{10000}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (217)$$

71. Переходимъ теперь къ коэффиціенту внѣшняго трѣнія μ. Размѣрность его будетъ:

$$[\mu] = [L^{-2}MT^{-1}] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (218).$$

Нужно сказать, что вопросъ о внѣшнемъ треніи жидкостей до сихъ поръ не вполнѣ ясно и точно рѣшенъ. Всѣ числа, добытыя въ этомъ направленіи, носятъ чисто спеціальный характеръ, имѣющій значеніе для данной опытной постановки. Прежде чѣмъ разыскивать численныя значенія коэффиціента ν приходилось рѣшать принципіальный вопросъ о томъ скользитъ ли жидкость вдоль разсматриваемаго твердаго тѣла или нѣтъ, и очень часто получались самые противорѣчивые результаты. Нѣкоторые авторы, какъ напр. Couette, утверждали, что скольженія, вообще, не существуетъ. Другіе же полагали, что жидкости, не смачивающія стѣнокъ, обязательно скользятъ. Не нужно забывать, что коэффиціентъ ν не имѣетъ такого абсолютнаго значенія для разсматриваемой жидкости какъ коэффиціентъ внутренняго тренія μ, такъ какъ онъ зависитъ отъ вещества твердой стѣнки относительно которой происходитъ скольженіе, — другими словами коэффиціентъ внѣшняго тренія данной жидкости можетъ имѣть цѣлый рядъ значеній.

Вмѣсто коэффиціента ν очень часто разсматриваютъ коэффиціентъ ϕ, введенный нами раньше, гдѣ

$$\phi = \frac{\mu}{\nu};$$

размѣрность его будетъ:

$$[\phi] = [L].$$

Изъ опытовъ Гельмгольца и Піотровскаго *) съ полымъ, вызолоченнымъ внутри, шаромъ, наполненнымъ испытуемой жидкостью получились такіе результаты:

Таблица III.

	ϕ
Вода	0.23534
Алкоголь	0,01096
Эфиръ	0,01243
Сѣрнистый углеродъ .	0,04430

Приведенныя числа выражены въ абсолютной системѣ единицъ и вѣрны для скольженія вышеуказанныхъ жидкостей вдоль гладкой вызолоченной металлической стѣнки при средней комнатной температурѣ.

72. Мы видимъ, что размѣрность ϕ есть линейная величина; легко дать геометрическое толкованіе этой величинѣ.

Пусть V будетъ относительная скорость жидкости относительно стѣнки въ какой-либо точкѣ ея. Примемъ эту точку за начало координатъ, направленіе скорости за ось X и направленіе нормали внутрь жидкости за ось Z. Сила съ которой стѣнка дѣйствуетъ на соприкасающуюся жидкость, расчитанная на единицу поверхности будетъ

$$-\nu V.$$

Разсмотримъ очень тонкій слой жидкости, прилегающій къ стѣнкѣ. На элементарную площадку его ds со стороны стѣнки дѣйствуетъ сила

$$-\nu V ds,$$

*) См. H. v. Helmholtz und G. v. Piotrowski. Ueber Reibung tropfbarer Flüssigkeiten. H. v. Helmhotzs Wissensch. Abh. I, стр. 172.

а со стороны жидкости на него дѣйствуетъ сила

$$Tds;$$

остальныя дѣйствующія силы будутъ пропорціональны объему, а потому ими можно пренебречь. Имѣя ввиду равномѣрное движеніе пишемъ:

$$(T - \nu V)\, ds = 0, \text{ т. е. } T = \nu V.$$

Такъ какъ вдоль стѣнки скорость не имѣетъ нормальной составляющей, то

$$T = \mu \frac{\partial V}{\partial z},$$

откуда

$$\nu V = \mu \frac{\partial V}{\partial z}.$$

Если черезъ v обозначимъ относительную скорость для какой либо точки жидкости весьма близкой къ стѣнкѣ, то

$$v = V + z \frac{\partial V}{\partial z},$$

или, на основаніи предыдущей зависимости:

$$v = V\left(1 + z \frac{\nu}{\mu}\right).$$

Изъ послѣдней зависимости мы заключаемъ, что въ точкѣ, у которой

$$z = -\frac{\mu}{\nu} = -\varphi,$$

относительная скорость будетъ 0, т. е. предполагая стѣнку отодвинутой на величину φ вглубь самой стѣнки, можемъ сказать, что скольженія вдоль этой новой границы уже не будетъ.

Такимъ образомъ величина φ пріобрѣтаетъ вполнѣ реальное значеніе.

Въ одной изъ новѣйшихъ работъ M. R. Détrait *) при изученіи скольженія жидкостей пользовался методомъ Пуазейля, т. е. истеченіемъ черезъ копиллярныя трубки, причемъ величина φ опредѣлялась методомъ сравненія. Изслѣдуя теченіе воды, керосина и алкоголя по капиллярнымъ трубкамъ изъ стекла и сѣры онъ нашелъ, что для воды, не смачивающей сѣры, φ равно почти одному микрону. Алкоголь и керосинъ смачивали какъ стекло такъ и сѣру и для нихъ оказалось $\varphi = 0$.

---

*) См. M. R. Détrait. Recherches expérimentales sur le glissement des liquides a la paroi. Jour. de Physique 5-e série, t, III (Oktobre 1913).

Глава XIII.

Струйное и турбулентное движеніе жидкостей.

73. Положенія, развитыя въ гл. II, показываютъ намъ, что въ основу представленія о характерѣ движенія жидкостей въ томъ видѣ, какъ мы это до сихъ поръ разсматривали, положено понятіе о *трубкѣ тока* и *струѣ*. Изъ этихъ понятій прямо вытекаетъ, что любой разсматриваемый нами потокъ жидкости можетъ быть заполненъ непрерывной системой каналовъ (безконечно малаго или конечнаго сѣченія), деформирующихся или недеформирующихся въ зависимости отъ того имѣемъ ли мы дѣло съ установившимся или неустановившимся движеніемъ, стѣнки которыхъ могутъ считаться непроницаемыми для жидкости. Непроницаемость должна пониматься здѣсь въ томъ смыслѣ, что частицы жидкости, протекающія по какой либо струѣ (или трубкѣ тока), не могутъ проникнуть въ сосѣднія струи. Такое упорядоченное движеніе жидкости мы будемъ называть *струйнымъ движеніемъ* ея.

Но опытъ показываетъ, что въ громадномъ большинствѣ, дѣйствительно наблюдаемыхъ на практикѣ движеній жидкости, явленія протекаютъ совершенно не такъ. Частицы жидкости пріобрѣтаютъ такія движенія, при которыхъ всякое представленіе о струѣ, въ точномъ смыслѣ этого слова, утрачивается; движеніе частицъ жидкости представляется безпорядочнымъ, т. е. скорость любой точки потока мѣняется весьма быстро безъ всякой видимой закономѣрности. Легкія частицы какого либо твердаго тѣла, плавающаго въ жидкости, или краска, введенныя въ потокъ, сразу показываютъ, что при такомъ движеніи частицы жидкости перемѣшиваются, сталкиваются и какъ будто движутся въ совершенномъ безпорядкѣ.

Къ движенію только что описаннаго характера уже не примѣнимы всѣ, до сихъ поръ полученные, результаты; требуются особые методы изслѣдованія, дающіе возможность установить законы такого движенія и написать его дифференціальныя уравненія. Движеніе послѣдняго рода мы будемъ называть *турбулентнымъ*..

Въ дальнѣйшемъ постараемся кратко представить развитіе ученія о турбулентномъ движеніи жидкости въ связи съ струйнымъ движеніемъ ея

74. То обстоятельство, что дѣйствительныя теченія жидкостей не подчиняются результатамъ, вытекающимъ изъ уравненій Навье, данныхъ для движенія вязкихъ жидкостей, было извѣстно и учтено уже многими авторами прошлаго столѣтія, какъ то: Беланже, Каріолисомъ,

Дюпюи и другими, работавшими надъ вопросомъ о движенiи воды въ рѣкахъ, каналахъ и трубахъ. Но эти авторы не стремились установить причины такихъ отклоненій отъ основныхъ законовъ движенія жидкостей, а просто удовлетворялись выводомъ ряда эмпирическихъ формулъ, дававшихъ въ среднемъ достаточно точные для практики результаты.

Первымъ пытавшимся рѣшить вопросъ точно, былъ французскій ученый Буссинекъ (Boussinesq), разработавшій этотъ вопросъ въ своемъ трудѣ: „Essai sur la théorie des eaux courantes". Буссинекъ, желая подчинить анализу турбулентное движеніе, воспользовался понятіемъ о *средней мѣстной скорости* (vitesse moyene locale), даннымъ еще раньше Сенъ-Венаномъ.

Дѣло въ томъ, что при турбулентномъ движенiи, какъ мы уже сказали, скорость въ данной точкѣ пространства непрерывно мѣняется такъ, что величина и направленіе истинной скорости $\mathfrak{v}$ подвергаются весьма быстрымъ и частымъ колебаніямъ. Буссинекъ полагаетъ, что эти колебанія происходятъ вокругъ нѣкотораго средняго положенія за нѣкоторый періодъ времени. Обозначая этотъ періодъ черезъ T, среднюю величину скорости черезъ $\mathfrak{v}_m$ и составляющія ея по осямъ черезъ u_m, v_m, w_m можемъ среднюю мѣстную скорость опредѣлить такими равенствами:

$$u_m = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} u dt,$$

$$v_m = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} v dt, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (219)$$

$$w_m = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} w dt.$$

Къ этимъ составляющимъ скорости Буссинекъ прилагаетъ всѣ тѣ же разсужденія, которыя были приложены къ прежнимъ величинамъ u, v, w и вводитъ ихъ въ основныя уравненія Навье. Но кромѣ того онъ добавляетъ еще двѣ гипотезы, которыми старается сдѣлать переходъ отъ струйнаго движенія къ турбулентному непрерывнымъ и вполнѣ естественнымъ. Онъ допускаетъ, что коэффиціенты внутренняго и внѣшняго тренія жидкости зависятъ не только отъ свойствъ жидкости и стѣнокъ съ которыми она приходитъ въ соприкосновеніе, но и координатъ точки относительно границъ. Эти два допущенія сдѣланы имъ на томъ основанiи, что источникомъ турбулентнаго движенія жидкости служатъ главнымъ образомъ стѣнки, благодаря неровностямъ которыхъ на нихъ возникаетъ безпорядочное движеніе и водовороты распространяющіеся внутрь жидкости.

Воспользовавшись этими допущеніями Буссинекъ въ указанномъ выше трудѣ даетъ рѣшеніе нѣкоторыхъ вопросовъ, связанныхъ съ движеніемъ воды въ каналахъ и трубахъ разнаго поперечнаго сѣченія; причемъ результаты, достигнутые имъ, могутъ считаться вполнѣ удовлетворительными для практики.

75. Но все же рѣшеніе Буссинека не даетъ намъ отвѣта на основные вопросы: каковъ механизмъ турбулентнаго движенія? Можетъ ли жидкость при однихъ и тѣхъ же геометрическихъ условіяхъ двигаться струйнымъ и турбулентнымъ движеніемъ? Если можетъ, то каковы условія перехода одного рода движенія въ другой? Кромѣ того нужно замѣтить, что наличность струйнаго движенія не даетъ еще возможности утверждать, что дла вязкой жидкости имѣетъ мѣсто движеніе, подчиняющееся гипотезѣ Ньютона о внутреннемъ треніи, т. е. имѣютъ мѣсто дифференціальныя уравненія Навье; мы можемъ лишь сказать, что допуская гипотезу Ньютона—возможно струйное движеніе. Такимъ образомъ является еще вопросъ: имѣютъ ли мѣсто, при наличности струйнаго движенія, законы внутренняго и внѣшняго тренія, которыми мы до сихъ поръ пользовались.

На послѣдній вопросъ мы можемъ дать положительный отвѣтъ. Изслѣдованіе Пуазейля (Poiseuille) *) надъ теченіемъ воды по капиллярнымъ трубкамъ ($d = 0{,}0293$ до $d = 0{,}65$ mm.) вполнѣ подтвердили правильность зависимости (179,a) для расхода Q, данной въ § 57, другими словами подтвердили правильность основаній на которыхъ она была выведена—т. е. гипотезу Ньютона. Пользуясь опытными данными Пуазейля былъ опредѣленъ коэффиціентъ внутренняго тренія воды съ температурной поправкой въ видѣ (212). Нужно замѣтить, что Пуазейль, исключительно на основаніи своихъ опытовъ, далъ законъ теченія воды по трубамъ въ видѣ:

$$Q = K\frac{(p_1 - p_0)}{l}\, d^4, \qquad \ldots\ldots\ldots\ (220)$$

т. е. расходъ прямо пропорціоналенъ паденію давленія на единицу длины и четвертой степени діаметра, что вполнѣ соотвѣтствуетъ формулѣ (179,a) при отсутствіи скольженія по стѣнкамъ, т. е. $\phi_2 = 0$. Теоретически формулы (179,a) впервые выведены Гагенбахомъ значительно позже.

76. Отвѣтомъ на всѣ остальные вопросы можетъ, до извѣстной степени, служить работа О. Рейнольдса (Osborne Reynolds) **).

---

*) См. Dr. Poiseuille. Sur le mouvement des liquides dans les tubes capillaires (Mem. prés. par div. sav. etr. a l'Academie des sc. t. LX; 1842, p. 438).

**) См. O. Reynolds. Papers on mechanical and physical subjects. II, p. 71.

О. Рейнольдсъ поставилъ себѣ задачей провѣрку *закона Пуазейля* для трубъ сравнительно большого діаметра, причемъ параллельно изучалъ характеръ теченія въ испытуемой трубѣ Для этого былъ взятъ большой ящикъ, изъ котораго вода поступала въ подвергавшіеся изслѣдованію, горизонтально поставленныя, стекляныя трубы. У входа въ трубу устанавливалась пипетка, помощью которой въ текущую струю воды вводилась тонкая струйка окрашенной жидкости; эти струйки направлялись строго по оси трубы. Въ ящикѣ поддерживался постоянный напоръ, а скорость истеченія регулировалась краномъ на концѣ трубы. Окрашенная струйка давала возможность сразу судить о характерѣ теченія по трубѣ: пока струйка оставалась тонкой и прямолинейной можно было утверждать, что въ трубѣ имѣетъ мѣсто правильное струйное движеніе; если же наблюдался размывъ окрашенной струйки, обуславливавшій окрашиваніе всего потока въ трубѣ, то это, очевидно, обозначало наступленіе турбулентнаго движенія, при которомъ частицы жидкости во всемъ потокѣ перемѣшивались.

О. Рейнольдсъ дѣлалъ двѣ серіи опытовъ: въ первой серіи вода въ питающемъ ящикѣ поддерживалась въ возможномъ покоѣ и вступала въ трубу по плавному раструбу, чѣмъ достигалось струйное движеніе въ началѣ трубы; во второй серіи искусственно создавалось турбулентное движеніе въ началѣ трубы торможеніемъ при помощи дроссельклапана.

Первая серія опытовъ показала, что при всѣхъ прочихъ равныхъ условіяхъ, съ возрастаніемъ средней скорости движенія въ трубѣ наступалъ моментъ когда окрашенная струйка на нѣкоторомъ разстояніи отъ входа въ трубу разрывалась, завихрялась и окрашивала весь дальнѣйшій потокъ, т. е. струйное движеніе переходило въ турбулентное. Скорость v, при которой одинъ родъ движенія переходилъ въ другой О. Рейнольдсъ называлъ *критической скоростью*. Изъ соображеній о динамическомъ подобіи *) имъ выведено для v_k такое общее выраженіе:

$$v_k = R\frac{\mu}{\rho d}, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (221)$$

гдѣ μ коэффиціентъ внутренняго тренія, ρ плотность, d діаметръ трубы, R коэффиціентъ, зависящій отъ температуры. Для воды (въ предѣлахъ 5^0-22^0 С.) получилось изъ опытовъ:

$$v_k = \frac{1}{43{,}79\,(1+0{,}0336t+0{,}000221t^2)\,d}\ {}^{m}/_{sc}, \quad \ldots \ldots (222)$$

*) См. В. Л. Кирпичевъ. Бесѣды о механикѣ. С.П.Б. 1907 г. ст. 134.

гдѣ d въ *mtr.*, t въ C^0. Для 12^0C эта формула приметъ видъ:

$$v_k = \frac{0{,}0159}{d} \ {}^{m}/_{sc} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (222,a)$$

Вторая серія опытовъ показала, что при очень малой средней скорости турбулентное движеніе, созданное въ началѣ трубы распространяется на нѣкоторомъ разстояніи отъ начала и затѣмъ переходитъ въ правильное струйное движеніе; съ возрастаніемъ же этой скорости наступалъ моментъ, когда турбулентное движеніе захватывало всю трубу.

Скорость, при которой происходитъ такого рода разрушеніе струйнаго движенія, можно назвать *нижней критической скоростью;* обозначимъ ее череръ v_{ku}. Для воды О. Рейнольдсъ нашелъ такое выраженіе для v_{ku};

$$v_{ku} = \frac{1}{278\,(1 + 0{,}0336t + 0{,}000221t^2)\,d} \ {}^{m}/_{sc} \quad \ldots \quad (223)$$

Для 12^0C имѣемъ:

$$v_{ku} = \frac{0{,}00246}{d} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (223,a)$$

Всѣ опыты производились надъ трубами совершенно гладкими внутри причемъ матеріалъ трубъ не вліялъ на результаты. Существеннымъ является состояніе стѣнокъ трубъ: напр. проволочная спираль, расположенныя внутри трубы по ея стѣнкѣ, значительно понижала величины критическихъ скоростей.

Результаты полученные для воды *Couette* *) обобщилъ для любыхъ жидкостей въ видѣ:

$$v_k = \frac{1{,}29}{d} \frac{\mu}{\Delta}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (224)$$

$$v_{ku} = \frac{0{,}204}{d} \frac{\mu}{\Delta}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (225)$$

гдѣ d въ *mtr.*, $\frac{\mu}{\Delta}$ по таб. I.

77. Несмотря на то, что результаты, полученные О. Рейнольдсомъ, имѣютъ лишь частное значеніе для трубъ кругового сѣченія, тѣмъ не менѣе они даютъ намъ отвѣты на вопросы поставленные въ началѣ § 75.

Существованіе критической скорости v_k показываетъ, что переходъ отъ струйнаго движенія къ турбулентному есть переходъ отъ

---

*) См. M. Couette. Etudes sur le frottement des liquides. Annales de chimie et de phys. 1890 г. XXI Т.

одного рода устойчиваго движенія къ другому, обусловленный какъ свойствами жидкости, такъ и расположеніемъ границъ ея.

Если скорость теченія менѣе нижней критической скорости v_{ku}, то струйное движеніе вполнѣ устойчиво, а турбулентное—неустойчиво. Если же скорость теченія больше критической скорости v_k, то наоборотъ. Интервалъ между нижней критической скоростью v_{ku} и критической скоростью v_k есть область неустойчивой формы движенія: при плавномъ втеканіи жидкости въ трубу въ этой области будетъ струйное теченіе, въ противномъ случаѣ движеніе становится турбулентнымъ.

Пользуясь пьезометрами, поставленными въ извѣстныхъ точкахъ испытуемой трубы, О. Рейнольдсъ убѣдился, что пока имѣло мѣсто струйное движеніе (окрашенная струя не размывалась) потеря давленія вполнѣ подчинялась формулѣ Пуазейля (220), при наступленіи же турбулентнаго движенія потеря давленія становилась больше.

Замѣтимъ, что кромѣ этой работы О. Рейнольдса есть еще изслѣдованіе L. Hopf'а *) надъ теченіемъ воды въ открытомъ лоткѣ прямоугольнаго сѣченія постоянной ширины. Результаты достигнутые имъ вполнѣ совпадаютъ съ результатами О. Рейнольдса. Приведенныя выше, экспериментально открытыя, формы движенія жидкости и обстоятельства перехода одного рода движенія въ другой подвергались также теоретической обработкѣ со стороны многихъ авторовъ.

Самъ О. Рейнольдсъ, исходя изъ соображеній объ энергіи движенія, пытался дать теоретическое толкованіе своимъ результатамъ, но эту попытку нельзя признать удачной. H. Lorenz, лордъ Kelvin, Rayleigh, Sommerfeld, Karaman, Noeter, R. v. Mises, Blumenthal продолжали эти теоретическія изысканія придя къ весьма сложнымъ, но вмѣстѣ съ тѣмъ довольно ненадежнымъ результатамъ.

Для насъ до сихъ поръ трудъ О. Рейнольдса остается единственной классической работой, указывающей на существованіе двухъ режимовъ въ теченіи жидкости: одинъ, подчиняющійся уравненіямъ Навье, можно назвать *гидродинамическимъ*, другой,—который назовемъ *гидравлическимъ*, подчиняется законамъ, установленнымъ чисто экспериментальнымъ путемъ. Переходъ отъ одного режима къ другому управляется критической скоростью:

$$v_k = R\frac{\mu}{\rho\, l},$$

гдѣ l какая либо линейная величина, характеризующая границы; напр. для трубъ l есть діаметръ, для прямоугольнаго лотка—глубина потока и т. п.

---

*) См. L. Hopf. Turbulenz bei einem Flusse. Annalen der Physik, 1910 г. № 9, стр. 777.

78. Особое значенiе приведенные выше результаты имѣютъ для прикладной части гидромеханики т. е. для гидравлики. Въ основу ея кладется уравненiе Бернулли (32) § 11. Но это уравненiе не учитываетъ вредныхъ потерь на пути потока и практически нуждается поэтому въ поправкахъ на вязкость жидкости, шероховатость стѣнокъ и разныя мѣстныя сопротивленiя (внезапныя измѣненiя сѣченiй, колѣна и т. п.).

Для вязкой несжимаемой жидкости для случая неустановившагося движенiя мы имѣли уравненiе (32, b) § 42, которое представимъ въ видѣ:

$$\frac{\mathfrak{v}_1^2}{2g}+\frac{p_1}{\Delta}-U_1'=\frac{\mathfrak{v}_2^2}{2g}+\frac{p_2}{\Delta}-U_2'-\frac{\mu}{\Delta}\int_1^2(\Delta^2 u dx+\Delta^2 v dy+\Delta^2 w dz)+$$

$$+\frac{1}{g}\int_1^2\frac{\partial\mathfrak{v}}{\partial t}\,ds,$$

гдѣ $U'=\frac{U}{g}\cdot$ 1 и 2 обозначаютъ начальную и конечную точки линiй тока между которыми разсматривается теченiе жидкости.

Для установившагося теченiя послѣднее уравненiе можемъ переписать такъ:

$$\frac{\mathfrak{v}_1^2}{2g}+\frac{p_1}{\Delta}-U_1'=\frac{\mathfrak{v}_2^2}{2g}+\frac{p_2}{\Delta}-U_4'+H_r \quad . \; . \; . \; . \; (226)$$

гдѣ

$$H_r=-\frac{\mu}{\Delta}\int_1^2(\Delta^2 u dx+\Delta^2 v dy+\Delta^2 w dz) \quad . \; . \; . \quad (227).$$

H_r есть потерянный напоръ на протяженiи 1 — 2. Эта потеря обусловлена вредными сопротивленiями на пути (въ данномъ случаѣ вязкостью жидкости) въ предположенiи струйнаго теченiя.

Для простѣйшаго случая,—горизонтальной цилиндрической трубы и дѣйствiя одной лишь силы тяжести, имѣемъ:

$$\mathfrak{v}_1=\mathfrak{v}_2,\quad U_1'=U_8'=z_1=z_2.$$

Откуда (226) приметъ видъ:

$$\frac{p_1-p_2}{\Delta}=H_r, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (228)$$

т. е. избытокъ начальнаго надъ конечнымъ давленiемъ идетъ на преодоленiе вредныхъ сопротивленiй.

Для струйнаго движенія H_r легко опредѣляется на основаніи зависимостей (162) и (174, *a*) § 57. Предполагая ось трубы горизонтальной, имѣемъ:

$$H_u' = \frac{p_1 - p_2}{\Delta} = H_r;$$

считая $\phi_2 = 0$:

$$Q = \frac{\pi \Delta H_u'}{8\mu l} r_2^4.$$

Отсюда легко найдемъ:

$$H_r = K \frac{v_m l}{S}, \quad \dots\dots\dots\dots \quad (229)$$

гдѣ $v_m = \frac{Q}{\pi r_2^2}$ средняя скорость теченія, S площадь поперечнаго сѣченія трубы, K — коэффиціентъ пропорціональности, гдѣ

$$K = \frac{8\mu\pi}{\Delta} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (230)$$

Мы видимъ, что потерянный напоръ для случая струйнаго движенія прямо-пропорціоналенъ первой степени средней скорости и длинѣ трубы и обратно-пропорціоналенъ площади поперечнаго сѣченія ея.

79. На практикѣ мы исключительно имѣемъ дѣло съ турбулентнымъ движеніемъ, для котораго, какъ указано выше, даже для цилиндрическихъ трубъ нѣтъ теоретическихъ данныхъ о потерянномъ напорѣ; эмпирически же выведенъ цѣлый рядъ формулъ для трубъ и каналовъ, имѣющихъ такой общій видъ:

$$H_r = K \frac{L\varphi(v)}{R}, \quad \dots\dots\dots\dots \quad (231)$$

гдѣ v—средняя скорость теченія, L—длина трубы, R—гидравлическій радіусъ сѣченія, т. е. отношеніе площади поперечнаго сѣченія къ смоченному периметру, K—коэффиціентъ зависящій отъ разныхъ величинъ, какъ то: діаметра или гидравлическаго радіуса, средней скорости и т. п. Для $\varphi(v)$ большинство авторовъ принимаетъ

$$\varphi(v) = v^2,$$

такъ что формулы отличаются видомъ коэффиціента K.

Въ послѣднее время Biel *) вывелъ выраженіе для K, имѣющее видъ

$$K = a + \frac{f}{\sqrt{R}} + \frac{b}{v\sqrt{R}} \frac{\mu}{\Delta}, \quad \dots\dots\dots \quad (232)$$

---

*) R. Biel. Ueber den Druckhöhenverlust bei der Fortleitung tropfbarer und gasförmiger Flüssigkeiten. Mitteil. über Forschungsarb. Heft 44.

дающее хорошіе результаты не только для жидкостей, но и для газовъ. Въ этой формулѣ R берется въ *mtr.*, L въ *kmtr.*, v—въ ${}^{mtr.}/_{sc.}$, $\frac{\mu}{\Delta}$ въ абсолютной системѣ единицъ (табл. I); H_r получается въ *mtr.* водяного столба. Коэффиціентъ a имѣетъ постоянное значеніе; $a = 0{,}12$. f называется коэффиціентомъ шереховатости, b—коэффиціентомъ вязкости. Значеніе этихъ коэффиціентовъ зависитъ отъ состоянія и ствойствъ стѣнокъ трубъ или каналовъ.

Изъ числа всѣхъ, до сихъ поръ предложенныхъ формулъ для потеряннаго напора, формула Биля единственная учитываетъ вязкость жидкости. Биль считаетъ, что и при турбулентномъ движеніи вязкость, въ томъ видѣ какъ ее разсматривали Навье и Стоксъ, играетъ нѣкоторую роль, вопреки существовавшему до сихъ поръ предположенію, что вязкость проявляется лишь въ струйномъ движеніи, при турбулентномъ же движеніи все теченіе управляется съ одной стороны величиной скоростей, а съ другой геометрическими свойствами стѣнокъ, ограничивающихъ потокъ.

80. Все изложенное до сихъ поръ приводитъ къ заключенію, что на практикѣ, гдѣ мы имѣемъ дѣло съ турбулентнымъ движеніемъ жидкостей, приходится при изслѣдованіяхъ какихъ либо вопросовъ сложнаго характера разсматривать каждый случай въ отдѣльности и устанавливать для него соотвѣтствующіе формулы и коэффиценты.

Нами выбранъ для изслѣдованія дисковой насосъ Тесла (N. Tesla), представляющій интересъ какъ съ теоретической такъ и съ практической стороны. Простота устройства его даетъ возможность написать, хотя и приближенно, уравненія движенія воды въ насосѣ и приближенно проинтегрировать ихъ, что до сихъ поръ не удавалось для другихъ гидравлическихъ машинъ съ вращательнымъ движеніемъ. Экспериментальная повѣрка даетъ возможность установить правильность теоретическихъ соображеній. Вторая часть нашей работы посвящена этому изслѣдованію.

Часть II.

ДИСКОВЫЯ МАШИНЫ.

ДИСКОВЫЯ МАШИНЫ.

Глава I.

Дисковыя машины Н. Тесла. Ихъ конструктивное осуществленіе. Общія соображенія.

1. Американскій физикъ Н. Тесла (Dr. Nikola Tesla) въ докладѣ, сдѣланномъ въ маѣ 1911 г. National Electric Light Association въ Нью-Іоркѣ, предложилъ новый, по его словамъ, принципъ утилизаціи энергіи движущихся жидкостей, паровъ и газовъ, основанный на использованіи силъ возникающихъ при движеніи ихъ вдоль подвижныхъ поверхностей, являющихся въ данномъ случаѣ рабочими органами, отбирающими располагаемую энергію *).

Другими словами рѣчь идетъ объ использованіи, въ обычномъ смыслѣ понимаемыхъ, вредныхъ сопротивленій, проявляемыхъ жидкостями и газами при ихъ теченіи, причемъ сопротивленія возникаютъ либо вслѣдствіе вязкости въ точномъ смыслѣ этого слова, либо вслѣдствіе турбулентнаго движенія. Такимъ образомъ мы имѣемъ дѣло съ новымъ типомъ фрикціонныхъ машинъ, дѣйствующихъ треніемъ жидкостей и газовъ о твердыя тѣла; интереснымъ является здѣсь то обстоятельство, что факторъ, отъ котораго мы до сихъ поръ во всѣхъ случаяхъ движенія жидкостей старались избавиться, является въ данномъ случаѣ полезнымъ, движущимъ усиліемъ.

Здѣсь умѣстно будетъ напомнить, что принципъ этотъ не новъ, и что въ 1901 году профессоръ Н. Е. Жуковскій впервые облекъ его въ техническую форму въ видѣ шнурового насоса, о которомъ говорилось въ первой части нашей работы.

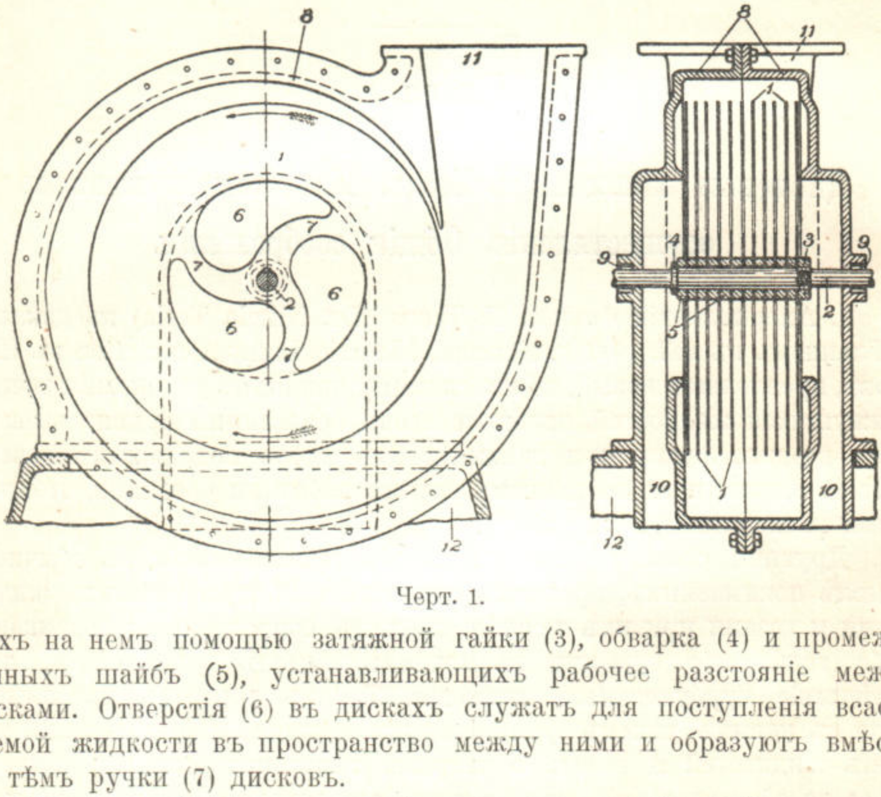
---

*) См. „Electrical Review and Western Electrician“, vol. 58, № 20 и vol. 59, №№ 11 и 14. Chicago 1911 г.

„Engineering News“, vol. 66, № 15, 1911 г.

„Scientific American“, vol. 105, № 14, New York, 1911 г.

2. Конструктивныя схемы, которыя придалъ этому принципу Н. Тесла, являются болѣе современными и представлены на черт. 1 и 2. Какъ видно изъ чертежей Н. Тесла избралъ за рабочіе органы простые диски, вращающіеся вокругъ общей оси и дѣйствующіе силами тренія, возникающими между рабочимъ веществомъ и дисками вслѣдствіе ихъ относительнаго движенія. Черт. 1 представляетъ дисковой центробѣжный насосъ и въ такомъ случаѣ вращеніе его должно происходить по верхней стрѣлкѣ. Конструкція его весьма проста. Колесо (1) состоитъ изъ ряда дисковъ, насаженныхъ на валъ (2) и укрѣплен-



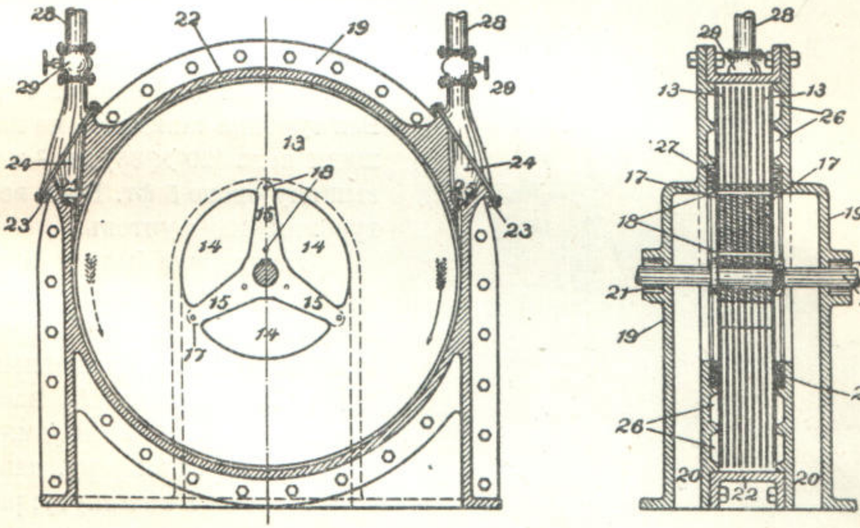
Черт. 1.

ныхъ на немъ помощью затяжной гайки (3), обварка (4) и промежуточныхъ шайбъ (5), устанавливающихъ рабочее разстояніе между дисками. Отверстія (6) въ дискахъ служатъ для поступленія всасываемой жидкости въ пространство между ними и образуютъ вмѣстѣ съ тѣмъ ручки (7) дисковъ.

Колесо работаетъ въ разрѣзномъ кожухѣ (8), ничѣмъ не отличающемся отъ гладкихъ, спиральныхъ диффузоровъ обыкновенныхъ центробѣжныхъ насосовъ, съ сальниковыми уплотненіями вала (9), двустороннимъ всасываніемъ (10) жидкости, и коническимъ нагнетательнымъ штуцеромъ (11). Весь насосъ монтированъ на рамѣ (12).

Процессъ работы такого насоса, на основаніи всего вышесказаннаго, вполнѣ ясенъ: жидкость, находящаяся между дисками, благодаря тренію объ нихъ приходитъ во вращательное движеніе и подъ дѣйствіемъ развивающейся силы инерціи, въ данномъ случаѣ центробѣжной силы, описываетъ относительно дисковъ спиральную траекторію, попадаетъ въ диффузоръ, затѣмъ въ нагнетательную трубу и преодолѣваетъ требуемый напоръ. Если бы рабочее вещество, въ данномъ случаѣ вода, поступала подъ давленіемъ въ штутцеръ (11) и, отработавъ, уходила въ пространство (10), мы имѣли бы случай обращенія насоса, т. е. водяную турбину, причемъ вращеніе происходило бы по нижней стрѣлкѣ. Пуская вмѣсто воды паръ или газъ, получимъ паровую или газовую турбину.

3. Конструктивная схема спеціально паровой или газовой турбины представлена на черт. 2. Рабочимъ органомъ и здѣсь является дисковое колесо (13); но ввиду большого числа оборотовъ, въ промежуткахъ между дисками, для жесткости, вставлены трехконечныя прокладки (17), стянутыя со спицами дисковъ (15) болтами (18) въ одну сплош-



Черт. 2.

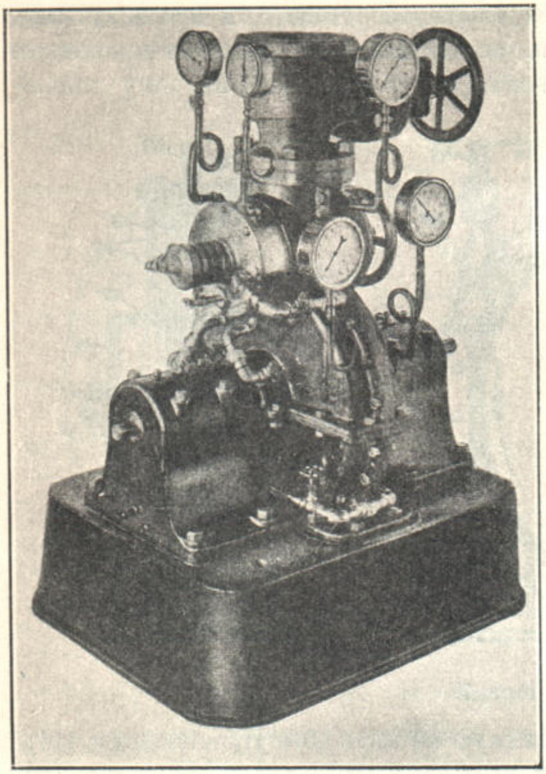
ную трехконечную втулку, насаженную на валъ (16). Пространства (14), образованныя соотвѣтствующими вырѣзами въ дискахъ, служатъ для отвода отработаннаго пара или газа.

Кожухъ турбины состоитъ изъ двухъ боковыхъ симметричныхъ крышекъ (19) съ обводными каналами (20) для отработаннаго пара или газа, сальниковыми коробками (21) для уплотненія вала, и средней кольцевой камеры (22) съ подводящими паръ или газъ натрубками (23). Въ этихъ натрубкахъ устроены коническіе сходящіеся каналы (24), переходящіе въ узкія сопла (25), непосредственно подводящія рабочее вещество въ почти тангенціальномъ направленіи къ периферіи колеса. Для лучшей изоляціи подводящаго отъ отводящаго паръ пространствъ въ боковыхъ крышкахъ (19) устроены кольцевые каналы (26) и лабиринтныя уплотненія (27). Особенностью турбинъ этого рода является ихъ нейбычайно простая реверсивность, имѣющая особое значеніе въ судовомъ турбиностроеніи. Дѣйствительно, открывая вентиль на одной изъ паропроводныхъ трубъ (28) и прикрывая на другой, мы можемъ вращать турбинный валъ въ любую сторону.

Расширяющійся насадокъ (29) переходитъ въ суживающійся (24) для того, чтобы всю потенціальную энергію давленія пара обратить плавно, безъ потерь въ соплѣ (25), въ кинетическую энергію, заставляя его вступать съ возможно большей скоростью на колесо.

4. По принципу Н. Тесла была построена паровая турбина, общій видъ которой изображенъ на фиг. 3. Фиг. 4 представляетъ ту-же турбину со снятой верхней половиной кожуха и даетъ представленіе о видѣ рабочаго колеса, состоящаго изъ 25 стальныхъ дисковъ діаметромъ 18 дм. и толщиною каждый въ $^{1}/_{32}$ дм., насаженныхъ на валъ съ разстояніями около $2{,}8^{m}/_{m}$. Вся турбина занимаетъ по площади пола (20×35) дм.^{2} и въ вышину около 5 фт. Вѣсъ всей турбины 400 фунтовъ.

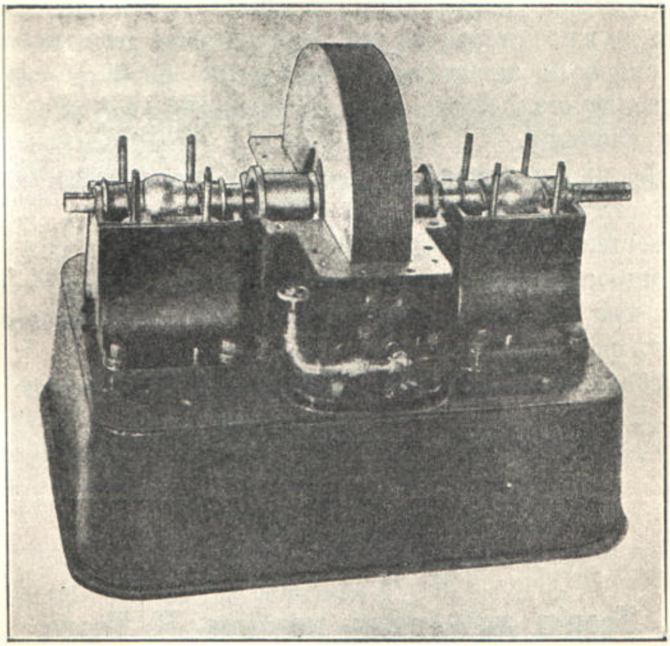
Эта турбина была установлена на электрической станціи New York Edison Comp. и развивала 200 H. P. эффективныхъ при рабочемъ давленіи насыщеннаго пара 125 фн./дм.^{2} и выпускѣ въ атмосферу, давая 9000 оборотовъ въ минуту; расходъ пара при этомъ оказался 38 фнт. на лошадиную силу—часъ. При умѣренномъ перегрѣвѣ и конденсаціи расходъ пара можетъ быть доведенъ до 10—12 фнт. на лошадину силу—часъ. Какъ видимъ, условія соотвѣтствующія обыкновеннымъ паровымъ турбинамъ этой мощности.



Фиг. 3.

Н. Тесла утверждаетъ, что при использованіи полнаго давленія котельной установки станціи, при вакуумѣ около 28—29,5 дм. и компаундированіи, можно мощность турбины довести до 600 H. P., увеличивъ втрое число дисковъ, на колесѣ, что въ общемъ незначительно отзовется на увеличеніи размѣровъ самой турбины.

Кромѣ этой турбины была испытана еще одна маленькая паровая турбина, построенная по типу черт. 1. Относительно ея особо подробныхъ свѣдѣній въ литературѣ не имѣется. Извѣстно только, что она развивала около 110 H. P. эффективныхъ, при работѣ въ атмосферу, и потребляла около 36 фунтовъ пара на лошадиную силу—часъ; кромѣ того указывается, что эта турбина могла бы развить большую мощность, препятствіемъ чему являлся слабо сконструированный валъ. Обращаютъ на себя вниманіе малые размѣры турбины: рабочее колесо съ валомъ вѣситъ около 20 фнт., а кожухъ съ подшипниками не болѣе 30 фнт. такъ что на 1 фнт. вѣса машины приходится болѣе 2 H. P. полезныхъ. Эта же турбина работала очень хорошо какъ двигатель внутренняго сгоранія смѣсью паровъ нефти и воды.



Фиг. 4.

Изъ полученныхъ практическихъ результатовъ видно, что идея Н. Тесла въ своемъ осуществленіи дала прекрасные результаты. Если экономическія преимущества этого рода машинъ, благодаря недостатку въ опытномъ матеріалѣ, не совсѣмъ выяснены, то о конструктивныхъ преимуществахъ спорить не приходится; съ этой точки зрѣнія эти машины являются простѣйшими и наиболѣе удобными для реверсированія и регулированія.

Здѣсь умѣстно будетъ указать, что нѣмецкій физикъ В. Гэдэ (W. Gaede) одновременно съ Н. Тесла*) сообщилъ о новомъ воздушномъ насосѣ, построенномъ на томъ же принципѣ и давшемъ, еще до сихъ поръ не достугнутыя, степени разрѣженія, выразившіяся числомъ 0,0000002 $^{m.}/_{m.}$ ртутнаго столба.

---

*) Докладъ W. Gaede 83-му съѣзду естествоиспытателей въ Карлсруэ въ сентябрѣ 1911 г. Патентъ взятъ въ январѣ 1909 г.

См. также: „Physikalische Zeitschrift", W. Gaede, Die äussere Reibung der Gaze und ein neues Prinzip für Luftpumpen: Die Molekularluftpumpe. № 18 (380), 1912 г.

5. Въ своемъ докладѣ, о которомъ сказано въ началѣ этой главы, Н. Тесла, приводитъ нѣкоторыя общія соображенія относительно основныхъ размѣровъ и производительности этихъ машинъ. Онъ указываетъ, что полезная работа насосовъ пропорціональна первой степени числа дисковъ и квадрату діаметра ихъ. Что касается разстоянія между дисками, то оно находится въ прямомъ отношеніи съ плотностью и вязкостью подаваемой жидкости и обратномъ отношеніи съ относительной скоростью скольженія этой жидкости по рабочимъ дискамъ. Кромѣ того нужно стараться, по возможности, достигнуть равенства выходной скорости жидкости и окружной скорости колеса и если этому препятствуетъ высокое давленіе въ диффузорѣ, то разбить насосъ на ступени давленія.

При обращеніи насоса въ двигатель оказывается, что полезный моментъ на валу пропорціоналенъ квадрату скорости скольженія рабочаго вещества по дискамъ. При 50% скольженія получается наибольшая мощность, наибольшій же коэффиціентъ полезнаго дѣйствія достигается при значительно меньшей скоростн скольженія и зависитъ отъ свойствъ рабочаго вещества и размѣровъ колеса.

Въ слѣдующей главѣ мы постараемся дать теорію дисковыхъ машинъ Н. Тесла.

Глава II.

Теорія дисковыхъ машинъ Н. Тесла.

6. Обращаясь къ построенію теоріи дисковой машины, приходится рѣшить основной вопросъ: по какому закону движется жидкость между рабочими дисками машины? т. е. подчиняется ли это движеніе законамъ чистой вязкости (струйнаго движенія) или имѣетъ мѣсто турбулентное движеніе.

Отвѣчая на эти вопросы, приходится указать, что, вообще говоря, можно ожидать и тотъ и другой родъ движеній—все зависитъ отъ разстояній между рабочими дисками и скорости относительнаго движенія жидкости по нимъ; такъ какъ и здѣсь, для случая движенія жидкости между параллельными стѣнками, должна существовать своя критическая скорость, аналогично существующей для трубъ (см. гл. XIII ч. I), ниже которой движеніе будетъ упорядоченное, струйное, т. е. подчиняющееся законамъ чистой вязкости, выше же наступаетъ турбулентное движеніе.

7. Имѣя ввиду практическое приложеніе предлагаемой теоріи, нужно замѣтить, что до настоящаго времени не существуетъ опытныхъ изслѣдованій, дающихъ критическія скорости движенія жидкости между параллельными плоскостями. Кромѣ того соображеніе чисто

аналитическаго характера, которое мы приводимъ ниже, не позволяетъ намъ въ данномъ случаѣ использовать теорію движенія вязкой жидкости какъ таковую.

Дѣло въ томъ, что въ центробѣжныхъ насосахъ нормальная составляющая абсолютной скорости къ входной поверхности въ колесо, а въ турбинахъ—къ выходной поверхности, принимается по всей поверхности постоянной, а касательная составляющая—равной нулю. Имѣя это ввиду, и желая использовать струйную теорію движенія вязкой жидкости, мы должны были бы, въ нашемъ случаѣ, обратиться къ результатамъ §§ 59—66 ч. I, гдѣ собственно говоря и разобрана теоретическая схема дисковой машины. Въ этомъ случаѣ входныя и выходныя поверхности (въ ихъ практическомъ осуществленіи) будутъ цилиндрическими поверхностями нѣкотораго опредѣленнаго радіуса r_1 и r_2. На основаніи вышесказаннаго $w_r \Big|_{r=r_1} = const.$, а отсюда, пользуясь уравненіемъ (185,a) ч. I, приходимъ къ заключенію, что функція $\phi(z)$ обращается въ постоянную C, т. е.

$$w_r r = C.$$

Значеніе этой постоянной опредѣлится изъ условій на границахъ (190,c). Эти условія показываютъ, что въ данномъ случаѣ

$$\nu_1 C \Big|_{z=\pm h} = 0,$$

что возможно при условіи $\nu_1 = 0$ или $C = 0$.

Первое условіе недопустимо, такъ какъ при $\nu_1 = 0$ жидкость свободно скользитъ по дискамъ, т. е. нѣтъ взаимодѣйствій между дисками и жидкостью (см. § 35 ч. I), слѣдовательно машина не работаетъ. Второе же условіе приводитъ къ заключенію, что расходъ жидкости въ машинѣ равенъ нулю, такъ какъ $w_r = 0$, иными словами машина не подаетъ и не расходуетъ жидкости, т. е. жидкость находится въ простомъ вращательномъ движеніи, что для насъ не имѣетъ значенія.

Для примѣненія теоріи развитой въ §§ 59—66 ч. I нужно задаться закономъ распредѣленія радіальной составляющей w_r по входной или выходной поверхности, удовлетворяющимъ уравненію (199), изъ котораго опредѣляется функція Z, т. е. $\phi(z)$, но это съ одной стороны очень сложно, а съ другой—практически почти не осуществимо.

8. Такимъ образомъ намъ остается принять существованіе турбулентнаго движенія между дисками машины *). Допустимъ кромѣ того, что частица жидкости движется между дисками какъ одно цѣлое, т. е. движеніе плоское и происходитъ въ плоскостяхъ перпендикулярныхъ къ оси вращенія; наконецъ отъ дѣйствія силы тяжести отка-

*) См. H. Lorenz, Theorie und Berechnung der Tesla—Kreiselräder. Zeitschr. für das gesamte Turbinenwesen. №№ 6, 7. 1912 г.

жемся, какъ это обыкновенно дѣлается въ теоріи турбинъ и центробѣжныхъ насосовъ при разсмотрѣніи движенія жидкости черезъ рабочее колесо.

Принявъ эти допущенія можемъ написать дифференціальныя уравненія абсолютнаго движенія жидкости въ дисковой машинѣ. Эти уравненія легко получатся изъ уравненій (184) § 59 ч. I. Въ данномъ случаѣ (плоское движеніе) w_r, w_t и p не зависятъ отъ z и будутъ функціями одного лишь r, g должно быть принято равнымъ 0; кромѣ того проекціи силы отъ вязкости, на единицу массы, на оси r и t должны быть замѣнены силами R_1 и T_1 отъ турбулентнаго движенія. Такимъ образомъ получимъ:

$$w_r \frac{dw_r}{dr} - \frac{w_t^2}{r} = R_1 - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz},$$

$$w_r \frac{d(w_t z)}{dr} = T_1 r. \quad \ldots \ldots \ldots (1)$$

Остается найти выраженія для R_1 и T_1. Для турбулентнаго движенія примемъ силу dF, дѣйствующую на элементъ жидкости, пропорціональной поверхности соприкосновенія этого элемента со стѣнками дисковъ и квадрату скорости $\mathfrak{v}_0$ относительнаго движенія жидкости по дискамъ.

Такъ какъ мы пользуемся цилиндрическими координатамя, то для dF получимъ выраженіе:

$$dF = k_1 \mathfrak{v}_0^2 (2rd\varphi\, dr),$$

гдѣ k_1 коэффиціентъ пропорціональности, множитель же 2 вошелъ потому, что каждый элементъ жидкости соприкасается съ двухъ сторонъ съ рабочими дисками. Масса элемента жидкости dm выразится такъ:

$$dm = \rho\, rd\varphi\, drs,$$

гдѣ s разстояніе между дисками. Отсюда сила на единицу массы жидкости будетъ:

$$F_1 = \frac{dF}{dm} = \frac{2k_1\mathfrak{v}_0^2}{\rho s} \quad \ldots \ldots \ldots (2)$$

Направленіе этой силы совпадаетъ съ направленіемъ относительной скорости $\mathfrak{v}_0$, поэтому:

$$R_1 = F_1 \cos(r, \mathfrak{v}_0), \quad T_1 = F_1 \cos(t, \mathfrak{v}_0). \quad \ldots \ldots \ldots (3)$$

Если ω угловая скорость вращенія дисковъ, то радіальная составляющая скорости $\mathfrak{v}_0$ будетъ w_r, а касательная составляющая $(w_t - \omega r)$, отсюда

$$\mathfrak{v}_0^2 = w_r^2 + (w_t - \omega r)^2, \quad \ldots \ldots \ldots (4$$

и

$$\cos(r, v_0) = \frac{w_r}{v_0}, \quad \cos(t, v_0) = \frac{w_t - \omega r}{v_0} \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

Поэтому, пользуясь (2), (3) и (5), находимъ:

$$R_1 = k_2 v_0 w_r, \quad T_1 = k_2 v_0 (w_t - \omega r), \quad \ldots\ldots\ldots (6)$$

гдѣ $k_2 = \frac{2k_1}{\rho s}$.

Уравненія движенія (1) примутъ такой видъ:

$$w_r \frac{dw_r}{dr} - \frac{w_t^2}{r} = k_2 v_0 w_r - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r},$$

$$\ldots\ldots\ldots (1, a)$$

$$w_r \frac{d(w_t r)}{dr} = k_2 v_0 (w_t - \omega r) r.$$

Условіе сплошности получится довольно просто. Обозначая объемный расходъ, въ едииицу времени, дисковой машины черезъ Q, число дисковъ черезъ $(n_1 + 1)$, можемъ написать, что

$$Q = (2\pi r s n_1) w_r,$$

гдѣ выраженіе въ скобкахъ есть цилиндрическая поверхность радіуса r, черезъ которую протекаетъ жидкость съ нормальной къ ней скоростью w_r. Послѣднее равенство перепишемъ такъ:

$$w_r r = \frac{Q}{2\pi s n_1} = C, \quad \ldots\ldots\ldots (7)$$

что и будетъ условіемь сплошности въ нашемъ случаѣ.

9. Обращаясь къ интегрированію системы (1, a), разсмотримъ второе изъ этихъ уравненій. Помножая его на r, и пользуясь зависимостями (4) и (7), послѣ простыхъ преобразованій перепишемъ его такъ:

$$\frac{d(w_t r)}{dr} = a(w_t r - \omega r^2) \sqrt{(w_t r - \omega r^2)^2 + C^2}, \quad \ldots\ldots\ldots (8)$$

гдѣ $a = \frac{4\pi n_1 k_1}{\rho Q}$.

Послѣднее уравненіе можно представить еще въ такой формѣ:

$$\frac{d(w_t r - \omega r^2)}{dr} = a(w_t r - \omega r^2) \sqrt{(w_t r - \omega r^2)^2 + C^2} - 2\omega r;$$

полагая $(w_t r - \omega r^2) = u$, находимъ:

$$\frac{du}{dr} = au\sqrt{u^2 + C^2} - 2\omega r, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (8,a)$$

уравненіе не поддающееся непосредственному интегрированію. Мы можемъ его нѣсколько упростить принимая во вниманіе, что въ разсматриваемыхъ случаяхъ движенія относительная тангенціальная скорость $w_t - \omega r$ должна быть значительно больше соотвѣтствующеі радіальной скорости w_r, что подтверждается опытами Г. Кэмпфа (G. Kempf) надъ гребными винтами*). Эти опыты показываютъ, что относительныя траекторіи частицъ жидкости по лопастямъ винта въ областяхъ не близкихъ къ оси вращенія наклонены къ радіусамъ подъ углами мало отличными отъ прямого. Такъ какъ въ дисковыхъ машинахъ активной частью является кольцевая поверхность съ достаточно большимъ внутреннимъ діаметромъ, то для частей этой поверхности, не находящихся въ непосредственной близости къ внутреннему краю, съ значительной степенью точности можно пренебречь членомъ C^2 по сравненію съ $(w_t r - \omega r^2)^2$; такъ напр. въ нашихъ опытахъ наибольшее значеніе C^2 равнялось 0,05. Принявъ это, приходимъ къ уравненію типа *Рикатти* слѣдующаго вида:

$$\frac{du}{dr} = a\, u^2 - 2\omega r, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (8,b)$$

которое подстановкой

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{(a\omega)^{1/3}}{a(3x)^{2/3}}\left(\frac{3x}{y}\frac{dy}{dx} + 1\right), \\ r &= -\frac{(3x)^{2/3}}{2(a\omega)^{1/3}}, \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (9)$$

преобразуется къ такому дифференціальному уравненію второго порядка:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + \left[1 - \frac{(1/3)^2}{x^2}\right]y = 0, \quad \ldots \ldots \ldots (10)$$

что представляетъ собой каноническую форму Бесселева уравненія, полный интегралъ котораго въ Бесселевыхъ функціяхъ J перваго рода, напишется такъ:

$$y = c_1 J_{1/3}(x) + c^2 J_{-1/3}(x), \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (11)$$

гдѣ c_1 и c_2 произвольныя постоянныя.

---

*) См. G. Kempf, Neuere Anschauungen und Forschungen auf dem Gebiete der Schiffsschraube. Zeitschr. für das gesamt. Turbinenwesen. №№ 10, 11, 12, 1914 г.

Переходя отъ перемѣнныхъ y и x помощью подстановки (9) обратно къ u и r и замѣчая, что $u = w_t r - \omega r^2$, послѣ простыхъ передѣлокъ, на основаніи фундаментальныхъ свойствъ Бесселевыхъ функцій, получимъ:

$$w_t = \omega r - i\sqrt{\frac{2\omega}{ar}}\left[\frac{J_{-2/3}\left(\frac{2}{3}\sqrt{-2\omega a}\, r^{3/2}\right) + c' J_{-4/3}\left(\frac{2}{3}\sqrt{-2\omega a}\, r^{3/2}\right)}{J_{1/3}\left(\frac{2}{3}\sqrt{-2\omega a}\, r^{3/2}\right) + c' J_{-1/3}\left(\frac{2}{3}\sqrt{-2\omega a}\, r^{3/2}\right)}\right], \quad . \; . \; (12)$$

гдѣ c' произвольная постоянная, опредѣляемая изъ условій на границахъ. Такъ, для насосовъ обыкновенно принимаютъ, что w_t обращается въ нуль на входной поверхности въ колесо, т. е. для $r = r_1$, а для турбинъ значеніе w_t на входной поверхности будетъ извѣстно.

10. Зависимость (12) есть полный интегралъ уравненія (8, b) и въ связи съ (7) даетъ рѣшеніе кинематической стороны вопроса. Дѣйствительно, обозначая дробь въ правой части (12) черезъ $-F(r)$, находимъ для w_t и w_r два уравненія вида:

$$w_t = \omega r + F(r), \quad w_r = \frac{C}{r} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (13)$$

Такъ какъ $w_t = r\dfrac{d\varphi}{dt}$ и $w_r = \dfrac{dr}{dt}$ (см. § 44, ч. I), то, подѣливъ первое равенство на второе, найдемъ

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{1}{C}\Big[\omega r + F(r)\Big],$$

откуда уравненіе абсолютной траекторіи частицы жидкости напишется такъ:

$$\varphi = \frac{\omega r^2}{2C} + \frac{1}{C}\int F(r)\,dr + C'', \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (14)$$

гдѣ квадратура можетъ быть найдена съ любой степенью приближенія.

11. Для насъ представляютъ большой интересъ динамическія соотношенія, имѣющія мѣсто при движеніи жидкости черезъ колесо дисковой машины. Для вывода этихъ соотношеній составимъ балансъ энергіи для частицы жидкости въ предѣлахъ рабочаго колеса. Напишемъ работу внѣшнихъ силъ, приложенныхъ къ элементу жидкости на элементарномъ пути абсолютной траекторіи, расчитанную на единицу массы.

Для этого изъ уравненія (1) опредѣляемъ составляющія R_1 и T_1 этихъ силъ по координатнымъ осямъ. Находимъ:

$$R_1 = w_r\frac{dw_r}{dr} - \frac{w_t^2}{r} + \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dr},$$

$$. \; . \; . \; . \; . \; . \; (1, b)$$

$$T_1 = \frac{w_r}{r}\,\frac{d(w_t r)}{dr};$$

составляющія по тѣмъ же осямъ элемента абсолютной траекторіи ds будутъ:

$$ds_r = dr; \quad ds_t = rd\varphi;$$

или, на основаніи выраженій для w_r и w_t, приведенныхъ въ предыдущемъ параграфѣ, эти составляющія перепишутся такъ:

$$ds_r = dr, \ \ ds_t = \frac{w_t}{w_r} dr = rd\varphi. \qquad (15)$$

Помножая R_1 и T_1 соотвѣтственно на эти проекціи, послѣ простыхъ преобразованій получимъ:

$$R_1\, dr + T_1\, rd\varphi = w_r\, dw_r + w_t\, dw_t + \frac{dp}{\rho}. \qquad (16)$$

Правую часть этого равенства мы можемъ такъ представить:

$$w_r\, dw_r + w_t\, dw_t + \frac{dp}{\rho} = gd\left(\frac{w_r^2 + w_t^2}{2g} + \frac{p}{\Delta}\right) = gd\left(\frac{v_a^2}{2g} + \frac{p}{\Delta}\right),$$

гдѣ v_a абсолютная скорость движенія частицы жидкости, а Δ удѣльный вѣсъ ея. Замѣчая, что выраженіе $\frac{v_a^2}{2g} + \frac{p}{\Delta}$ есть полная энергія частицы, расчитанная на единицу вѣса, размѣрность которой есть длина, перепишемъ (16) въ видѣ:

$$R_1\, dr + T_1\, rd\varphi = gdH, \qquad (17)$$

гдѣ H, полная энергія въ колесѣ, будетъ функціей отъ r.

Обозначая черезъ χ полярный уголъ относительной траекторіи частицы (относительно вращающагося диска), отсчитанный отъ своей подвижной полярной оси, можемъ написать, что

$$\varphi = \chi + \omega t + c, \qquad (18)$$

или

$$d\varphi = d\chi + \omega dt; \qquad (18,a)$$

подставивъ это выраженіе для $d\varphi$ въ (17), найдемъ:

$$(R_1\, dr + T_1\, rd\chi) + T_1\, r\omega dt = gd\,H;$$

пользуясь выраженіемъ для T_1 изъ $(1,b)$ и замѣчая, что $dt = \frac{dr}{w_r}$, перепишемъ послѣднее равенство такъ:

$$(R_1\, dr + T_1\, rd\chi) + \omega d\,(w_t r) = gdH.$$

Такъ какъ

$$dr = d\sigma cs\,(r, dt) \text{ и } rd\chi = d\sigma\, cs\,(t, d\sigma),$$

гдѣ $d\sigma$ элементъ относительной траекторіи, совпадающій по направленію съ относительной скоростью $\mathfrak{v}_0$, то, на основаніи (3), имѣемъ:

$$R_1\, dr + T_1\, rd\chi = F_1\, d\sigma,$$

поэтому послѣднее равенство перепишется такъ:

$$F_1\, d\sigma + \omega d\,(w_t\, r) = gdH; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

это уравненіе и представляетъ собой балансъ энергіи въ дифференціальной формѣ для дисковой машины.

12. Для болѣе подробнаго выясненія механическаго смысла послѣдняго уравненія, помножимъ второе уравненіе въ $(1,b)$ на

$$2\pi\, n_1 s r^2\, \rho\, dr,$$

послѣ чего оно приметъ слѣдующій видъ:

$$(2\pi\, rn_1\, sw_r\, \rho)\, d\,(w_t\, r) = [T_1(2\pi\, rn_1 sdr\rho)]\, r.$$

Множитель въ скобкахъ слѣва есть масса M жидкости, протекающей въ единицу времени черезъ рабочее колесо; справа въ прямыхъ скобкахъ стоитъ выраженіе касательной силы, приложенной къ массѣ элементарнаго кольца внутренняго радіуса r, ширины $n_1 s$ и толщины dr, слѣдовательно все выраженіе справа есть элементарный моментъ $d\mathfrak{M}$ силъ, приложенныхъ къ этому кольцу. Такимъ образомъ имѣемъ:

$$Md\,(w_t\, r) = d\,\mathfrak{M}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

или

$$d\,(w_t\, r) = \frac{d\mathfrak{M}}{M} = d\,\mathfrak{M}_1,$$

гдѣ $d\mathfrak{M}_1$ — элементарный моментъ, расчитанный на единицу массы, протекающей въ единицу времени. Такимъ образомъ уравненіе (19) перепишется въ видѣ:

$$F_1\, d\sigma + \omega\, d\mathfrak{M}_1 = gdH. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (19,a)$$

Первое слагаемое слѣва представляетъ работу силы на единицу массы, приложенной къ частицѣ жидкости, на элементѣ относительной траекторіи. Это есть работа противъ вредныхъ сопротивленій въ колесѣ дисковой машины, представляющая собой затрату энергіи на турбулентное движеніе; причемъ нужно замѣтить, что другихъ вредныхъ сопротивленій, въ данномъ случаѣ, въ колесѣ не будетъ.

Второе слагаемое въ лѣвой части есть элементарная работа на единицу массы, извнѣ приводимая къ валу—въ случаѣ машины орудія (насоса), или получаемая съ вала—въ случаѣ машины двигателя (турбины).

Въ правой части стоитъ полная энергія на единицу массы, получаемая въ первомъ случаѣ и располагаемая во второмъ.

Въ томъ и другомъ случаѣ работа на валу по знаку противоположна работѣ $F_1 d\sigma$. Кромѣ того, если элементарный моментъ $d\mathfrak{M}$, приложенный извнѣ считать для насоса положительнымъ, то для двигателя онъ будетъ отрицателенъ, такъ какъ двигатель есть обращеніе насоса.

Поэтому помножая уравненіе (19,a) на M—массу жидкости, протекающую въ единицу времени черезъ колесо, получимъ:

$$\mp dL_r \pm \omega d\mathfrak{M} = \Delta Q dH;$$

интегрируя въ предѣлахъ колеса, найдемъ для насоса

$$\omega \mathfrak{M}_p = \Delta Q H_p + L_{rp},$$

гдѣ $\Delta Q = Mg$; или, на основаніи (20):

$$\frac{\Delta Q}{g}\,\omega\Big\{(w_t r)_2 - (w_t r)_1\Big\}_p = \Delta Q H_p + L_{rp}; \quad \ldots \ldots \quad (21)$$

для двигателя аналогично получимъ:

$$\frac{\Delta Q}{g}\,\omega\Big\{(w_t r)_1 - (w_t r_2)\Big\}_m = \Delta Q H_m - L_{rm}. \quad \ldots \ldots \quad (22)$$

Отсюда гидравлическіе коэффиціенты полезнаго дѣйствія η_{hp} и η_{hm} дискового насоса и двигателя напишутся такъ:

$$\left.\begin{aligned} \eta_{hp} &= \frac{gH_p}{\omega\{(w_t r)_2 - (w_t r)_1\}_p}, \\ \eta_{hm} &= \frac{\omega\{(w_t r)_1 - (w_t r)_2\}_m}{gH_m}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (23)$$

Нужно замѣтить, что здѣсь гидравлическіе коэффиціенты полезнаго дѣйствія относятся только къ потерямъ энергіи въ колесѣ, такъ какъ $H(r)$ есть энергія созданная или потраченная въ одномъ лишь колесѣ. Поэтому потери энергіи въ направляющихъ кожухахъ или лопаткахъ и другихъ мѣстахъ внѣ колеса этими коэффиціентами не учитываются.

13. Два послѣднихъ выраженія (21) и (22) ничѣмъ не отличаются отъ основныхъ уравненій Эйлера для турбинъ и центробѣжныхъ насосовъ, работающихъ лопатками.

Присоединяя сюда уравненія (7) и (12), мы могли бы рѣшать любой вопросъ относительно дисковой машины, если бы сложность уравненія (12) не являлась значительной помѣхой. Можно, конечно, пользуясь рядами для Бесселевыхъ функцій, правую часть въ (12) представить въ видѣ ряда, но, остановившись даже на второмъ членѣ разложенія, мы получили бы очень сложную зависимость между ω и Q. Для практическихъ примѣненій гораздо удобнѣе пріемъ, предложенный Г. Лоренцомъ, который мы здѣсь и изложимъ.

Для этого вернемся къ уравненію (19):

$$F_1 d\sigma + \omega d(w_t r) = g dH, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (19)$$

въ которомъ элементъ относительной траекторіи $d\sigma$ можетъ быть такъ представленъ:

$$d\sigma = \mathfrak{v}_0 \, dt,$$

или, такъ какъ $w_r = \dfrac{dr}{dt}$

$$d\sigma = \frac{\mathfrak{v}_0 dr}{w_r} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (24)$$

Кромѣ того, на основаніи (2) и (4), приближенно можемъ написать

$$F_1 = \frac{2k_1}{\rho s}(w_t - \omega r)^2, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (25)$$

что соотвѣтствуетъ отбрасыванію въ выраженіи для $\mathfrak{v}_0^2$ члена w_r^2. Мы это дѣлаемъ на основаніи тѣхъ же соображеній, по которымъ въ уравненіи (8, a) пренебрегли членомъ C^2. Другими словами мы полагаемъ

$$\mathfrak{v}_0 = w_t - \omega r. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (26)$$

Подставляя (24), (25) и (26) въ (19), и пользуясь основнымъ уравненіемъ сплошности (7), имѣемъ:

$$a(w_t - \omega r)^3 r dr + \omega d(w_t r) = g dH; \quad \ldots \ldots \ldots \quad (27)$$

отбрасывая въ уравненіи (8) C найдемъ, что

$$d(w_t r) = a(w_t r - \omega r^2)^2 dr, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (28)$$

на основаніи чего (27) приметъ видъ:

$$a(w_t - \omega r)^2 w_t r dr = g dH \quad \ldots \ldots \ldots \quad (29)$$

Помножая это уравненіе на r^2, на основаніи (28) перепишемъ его такъ:

$$(w_t r)\, d\,(w_t r) = g r^2 H. \qquad (30)$$

Интегрируя въ предѣлахъ колеса, находимъ:

$$(w_t r)^2 - (w_t r)_1^2 = 2g \int_{r_1}^{r} r^2\, dH; \qquad (31)$$

съ другой стороны, уравненіе (29) помноженное на r^2, представится въ видѣ:

$$a\,(w_t r - \omega r^2)^2\, w_t r = g r^2 \frac{dH}{dr} \qquad (32)$$

14. Уравненія (31) и (32) весьма просты и удобны для подсчетовъ, но въ нихъ является неизвѣстной функція $H(r)$—энергія пріобрѣтаемая или отдаваемая въ колесѣ (на единицу вѣса).

Для функціи $H(r)$ можно вывести приближенное выраженіе, примѣнительно къ дисковымъ насосамъ, исходя изъ слѣдующихъ соображеній. Разлагая $H(r)$ въ рядѣ, напишемъ:

$$H(r) = H(r_1) + (r - r_1)\, H'(r_1) + \frac{(r-r_1)^2}{2}\, H''(r_1) + \ldots .$$

Замѣчая, что r_1 есть радіусъ цилиндрической поверхности, на которой рабочая жидкость вступаетъ въ колесо, а r_2—на которой оставляетъ его, можемъ утверждать, что для всѣхъ дисковыхъ машинъ

$$H(r_1) = 0 \qquad (A).$$

Кромѣ того, въ насосахъ жидкость вступаетъ въ колесо въ радіальномъ направленіи, т. е.

$$(w_t r)_1 = 0,$$

поэтому изъ (32)

$$H'(r_1) = 0; \qquad (B)$$

обозначая полный напоръ въ колесѣ черезъ H_k, т. е.

$$H_k = H(r_2), \qquad (33)$$

и останавливаясь въ разложеніи на третьемъ членѣ, получимъ для функціи $H(r)$ выраженіе:

$$H(r) = H_k \left(\frac{r - r_1}{r_2 - r_1}\right)^2 \qquad (34)$$

Подставляя въ уравненія (31) и (32), найдемъ окончательно:

$$(w_t r)^2 - (w_t r)_1{}^2 = \frac{4gH_k}{(r_2 - r_1)^2}\left(\frac{r^4}{4} - \frac{r^3 r_1}{3} + \frac{r_1{}^4}{12}\right),$$
$$a\,(w_t r - \omega r^2)^2\, w_t r = \frac{2gH_k}{(r_2 - r_1)^2}\, r^2 (r - r_1). \quad \ldots . (35)$$

Эти уравненія и (34) имѣютъ мѣсто для дисковыхъ насосовъ. Лоренцъ пользуется функціей $H(r)$ въ видѣ (34) и для турбинъ, что не согласуется съ сдѣланными имъ заключеніями, приведенными ниже. Принимая ихъ, какъ намъ кажется, нужно итти слѣдующимъ путемъ.

Считаясь съ тѣмъ, что въ турбинѣ жидкость движетъ колесо, должно имѣть мѣсто соотношеніе:

$$w_t \geqq \omega r,$$

такъ какъ относительная скорость въ тангенціальномъ направленіи во всякомъ случаѣ совпадаетъ съ направленіемъ вращенія; при скольженіи жидкости относительно дисковъ абсолютная скорость больше переносной и въ предѣльномъ случаѣ (отсутствіе скольженія) наступаетъ равенство ихъ. Если бы оказалось, что на части диска относительная скорость по касательной отрицательна, т. е.

$$w_t < \omega r,$$

то на этомъ участкѣ колеса жидкость тормозила бы вращеніе и его пришлось бы отбросить.

Такимъ образомъ, для лучшаго использованія энергіи жидкости, мы должны допустить, что на *выходной* поверхности, для $r = r_2$, абсолютная и переносная тангенціальныя скорости равны, т. е.

$$\left(w_t - \omega r\right)_{r = r_2} = 0, \text{ или } (w_t)_2 = \omega r_2. \quad \ldots\ldots\ldots (36)$$

Дѣйствительно, въ этомъ случаѣ абсолютная скорость, съ которой жидкость покидаетъ колесо будетъ наименьшей. Имѣемъ:

$$(\mathfrak{v}_a)_2{}^2 = (w_t)_2{}^2 + \left(\frac{Q}{2\pi r_2 s n_1}\right)^2,$$

откуда, на основаніи вышеприведенныхъ неравенствъ, наименьшая величина для $(\mathfrak{v}_a)_2$ будетъ:

$$min.\,(\mathfrak{v}_{a2})^2 = (\omega r_2)^2 + \left(\frac{Q}{2\pi r_2 s n_1}\right)^2,$$

а слѣдовательно и уносимая изъ колеса энергія будетъ minimum. Замѣтимъ, что при этихъ условіяхъ *относительная траекторія частицы жидкости на выходной поверхности будетъ направлена радіально.*

Положеніемъ (36) для *выходной* поверхности пользуется и Лоренцъ.

На основаніи (36) и (32) находимъ:

$$H'(r_2) = 0; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (B')$$

присоединяя сюда условіе

$$H(r_1) = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (A')$$

найдемъ видъ функціи $H(r)$ для дисковой турбины.

Для этого воспользуемся разложеніемъ:

$$H(r) = H(r_2) + (r - r_2)\, H'(r_2) + \frac{(r - r_2)^2}{2} H''(r_2) + \ . \ . \ . \ ;$$

полагая въ немъ $r = r_1$, на основаніи (A'), (B') и (33) получимъ (останавливаясь на третьемъ членѣ);

$$H''(r_2) = -\frac{2H_k}{(r_1 - r_2)^2},$$

откуда, послѣ передѣлокъ:

$$H(r) = \frac{H_k}{(r_1 - r_2)^2}(r + r_1 - 2r_2)(r_1 - r). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$

Уравненія (31) и (32) перепишутся такъ:

$$\left.\begin{aligned} (w_t r)^2 - (w_t r)_1^2 &= \frac{4g\, H_k}{(r_1 - r_2)^2}\left\{\frac{r_2(r^3 - r_1^3)}{3} - \frac{(r^4 - r_1^4)}{4}\right\}, \\ a\,(w_t r - \omega r^2)^2\, w_t r &= \frac{2g\, H_k}{(r_1 - r_2)^2}\, r^2(r_2 - r). \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (35,a)$$

Мы видимъ, что какъ для функціи $H(r)$, такъ и для основныхъ уравненій дисковыхъ турбинъ, получаются другія выраженія по сравненію съ уравненіями (35).

Замѣтимъ здѣсь, что всюду въ предшествовавшихъ выводахъ черезъ r_1 обозначался радіусъ внутренней поверхности колеса, по которой жидкость въ него вступаетъ, а черезъ r_2 — радіусъ внѣшней выходной поверхности изъ него, причемъ $r_2 > r_1$ и уравненія (35, a) написаны для турбины съ внутреннимъ подводомъ воды (подобной турбины Фурнейрона). Замѣняя въ (37) и (35,a) r_1 на r_2 и наоборотъ получили бы уравненія для турбинъ съ внѣшнимъ подводомъ воды (подобно турбинѣ Фрэнсиса).

Г. Лоренцъ оставляетъ и для турбинъ функцію $H(r)$ въ прежнемъ видѣ, принимая условіе (36) на *выходной* поверхности т. е. полагаетъ

$$H(r) = H_k\left(\frac{r - r_1}{r_2 - r_1}\right)^2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

гдѣ r_2 считается входнымъ, а r_1 выходнымъ радіусомъ.

Принимая для $H(r)$ выражепіе (34), и считая r_1 *выходнымъ* радіусомъ, мы можемъ, конечно, положить

$$(w_t)_1 = \omega r_1,$$

но не имѣемъ права считать на выходной поверхности турбины

$$H(r_1) = 0,$$

такъ какъ въ данномъ случаѣ $H(r_1) = H_k$. Между тѣмъ функція (34) удовлетворяетъ именно этому невѣрному условію.

Оставляя для турбины уравненія (35), т. е. функцію $H(r)$ въ видѣ (34), нужно добавить, что на *входной* поверхности имѣетъ мѣсто условіе (36), т. е. *относительная траекторія направлена радіально.*

Принимая же положеніе Г. Лоренца, т. е.

$$(w_t)_2 = \omega r_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (36)$$

для *выходной* поверхности придется уравненія для турбинъ писать въ видѣ $(35,a)$.

Изъ всего предыдущаго вытекаетъ, что считая для *насосовъ* направленіе *входной абсолютной* скорости радіальнымъ, а для *турбинъ* то же для *входной относительной* скорости, можемъ пользоваться уравненіями (35) какъ для турбинъ, такъ и для насосовъ. Въ дальнѣйшемъ мы такъ и поступимъ.

15. Для $r = r_2$ уравненія (35) примутъ видъ:

$$(w_t r)_2^2 - (w_t r)_1^2 = \frac{4gH_k}{(r_2 - r_1)^2}\left(\frac{r_2^4}{4} - \frac{r_2^3 r_1}{3} + \frac{r_1^4}{12}\right),$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad (35,b)$$

$$\left[(w_t r)_2 - \omega r_2^2\right]^2 (w_t r)_2 = \frac{2g\, H_k r_2^2}{a(r_2 - r_1)},$$

причемъ изъ второго уравненія находимъ:

$$\omega = \frac{(w_t r)_2}{r_2^2} \pm \frac{1}{r_2}\sqrt{\frac{2g\, H_k}{a(w_t r)_2 (r_2 - r_1)}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

Знакъ плюсъ берется въ случаѣ насосовъ, для которыхъ

$$\omega r > w_t,$$

знакъ минусъ—для турбинъ, гдѣ

$$\omega r < w_t;$$

кромѣ того для насосовъ мы приняли

$$(w_t r)_1 = 0,$$

а для турбинъ

$$(w_t r)_1 = \omega r_1^2 .$$

Останавливаясь на насосѣ, исключимъ $(w_t r)_2$ изъ перваго уравненія (35,b) и (38); замѣчая что $a = \frac{4\pi n_1 k_1}{\rho Q}$, найдемъ:

$$\omega r_2^2 = A H_k^{1/2} + B Q_1^{1/2} H_k^{1/4}, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (39)$$

гдѣ

$$A^2 = \frac{4g}{(r_2 - r_1)^2}\left(\frac{r_2^4}{4} - \frac{r_2^3 r_1}{3} + \frac{r_1^4}{12}\right), \; AB^2 = \frac{r_2^2}{2\pi n_1 k_1 (r_2 - r_1)},$$

$$Q_1 = \Delta Q. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (40)$$

Такимъ образомъ (34) есть уравненіе состоянія дисковаго насоса, связывающее расходъ (въ вѣсовыхъ единицахъ), полный напоръ колеса и число оборотовъ.

На основаніи (23) гидравлическій коэффиціентъ полезнаго дѣйствія насоса напишется въ видѣ:

$$\eta_{hp} = \frac{g H_k}{\omega (w_t r)_2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (41)$$

Пользуясь (35,b) и (40) и имѣя въ виду, что для насоса

$$(w_t)_1 = 0,$$

находимъ, что

$$(w_t r)_2 = A \sqrt{H_k}, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (42)$$

откуда гидравлическій коэффиціентъ полезнаго дѣйствія дисковаго насоса приметъ видъ:

$$\eta_{hp} = \frac{g \sqrt{H_k}}{\omega A}$$

или

$$\eta_{hp} = K \frac{\sqrt{H_k}}{n}, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (43)$$

гдѣ

$$K = \frac{30\, g}{\pi A} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (44)$$

Замѣтимъ здѣсь, что теорія обыкновенныхъ центробѣжныхъ насосовъ даетъ для гидравлическаго коэффиціента полезнаго дѣйствія выраженіе

$$\eta_{hp} = K_1 \frac{H_m}{n^2}, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (45)$$

гдѣ

$$K_1 = \frac{900g\left(1 - \frac{tg\,\delta_a}{tg\,\beta_a}\right)}{\pi^2 r_2^2}.$$

Здѣсь δ_a и β_a углы абсолютной и относительной выходныхъ скоростей жидкости изъ колеса съ его окружностью; r_2—радіусъ этой окружности. H_m—манометрическій напоръ, создаваемый насосомъ.

Уравненіе состоянія для турбины получится исключеніемъ $(w_t r)_2$ изъ тѣхъ же уравненій (35,b) и (38), но при условіи

$$(w_t r)_1 = \omega r_1^2,$$

что значительно усложнитъ видъ уравненія.

Гидравлическій коэффиціентъ полезнаго дѣйствія турбины представится такъ:

$$\eta_{hm} = \frac{\omega\left[\omega r_1^2 - (w_t r)_2\right]}{gH_k} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (46)$$

Во всѣхъ предыдущихъ уравненіяхъ отсутствуетъ радіальная составляющая w_r, что понятно, такъ какъ мы съ самаго начала пренебрегли величиной C, гдѣ

$$C = \frac{Q}{2\pi s n_1} = w_r r \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

При подсчетахъ входной поверхности колеса мы должны будемъ вернуться къ этой величинѣ. Для колеса насоса мы можемъ прямо задаться w_r, и отсюда по данному Q опредѣлять остальные размѣры. Въ турбинахъ намъ долженъ быть данъ уголъ α наклона лопатки направляющаго аппарата къ радіусу, въ такомъ случаѣ

$$(w_r)_1 = (w_t)_1\, ctg\, \alpha,$$

или:

$$(w_r r)_1 = (w_t r)_1\, ctg\, \alpha;$$

но $(w_t r)_1 = \omega r_1$, поэтому уравненію (7), для турбины, можно придать видъ

$$\omega r_1\, ctg\, \alpha = \frac{Q}{2\pi s n_1} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (47)$$

Этими соображеніями мы и закончимъ главу о теоріи дисковыхъ машинъ.

Глава III.

Опытное изслѣдованіе дисковаго насоса.

16. До сихъ поръ въ технической литературѣ не имѣется указаній на какіе либо, систематически поставленные, опыты съ дисковыми машинами; это обстоятельство, конечно не даетъ возможности практически оцѣнить пригодность вышеприведенной теоріи. Имѣя это ввиду, мы произвели рядъ опытовъ съ дисковымъ насосомъ, описаніе и результаты которыхъ мы приводимъ ниже.

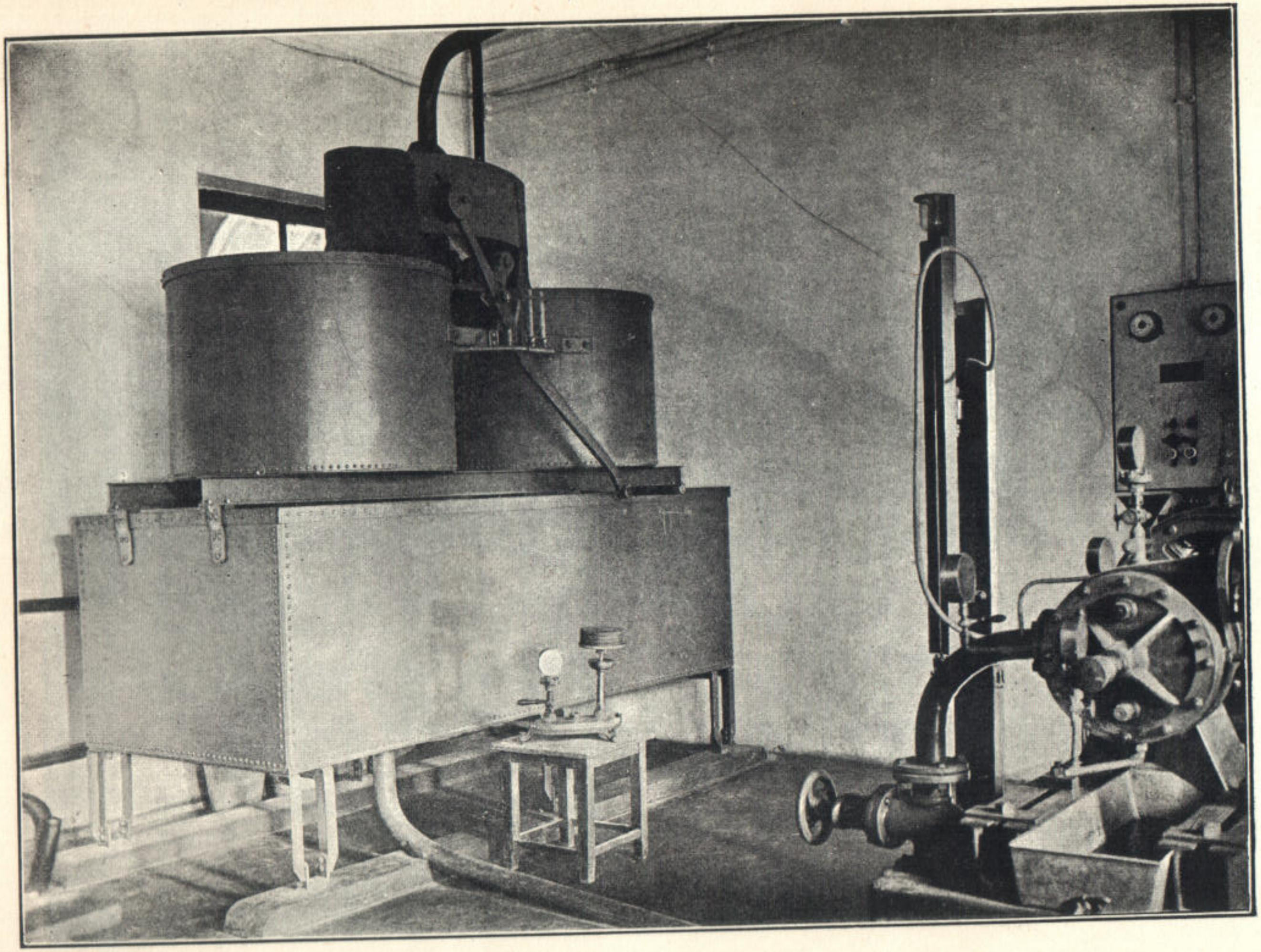
Лабораторныя средства *) не позволяли построить спеціальный насосъ, поэтому для опытовъ былъ приспособленъ имѣвшійся въ лабораторіи центробѣжный насосъ. Фиг. 5 и 6 даютъ представленіе о всей установкѣ, а на черт. 7 данъ конструктивный чертежъ насоса, подвергавшагося испытанію.

17. Рабочее колесо состоитъ изъ гладкихъ желѣзныхъ дисковъ, толщиной $2^{m}/_{m}$., работающихъ кольцевой поверхностью наружнаго радіуса $r_2 = 160^{m}/_{m}$. и внутренняго $r_1 = 80^{m}/_{m}$., удерживаемыхъ на валу тремя ручками шириной въ $24^{m}/_{m}$.. Для измѣненія разстояній между дисками, между ними помѣщались желѣзныя прокладки наружнаго діаметра $50^{m}/_{m}$. и толщиной въ $1^{m}/_{m}$..

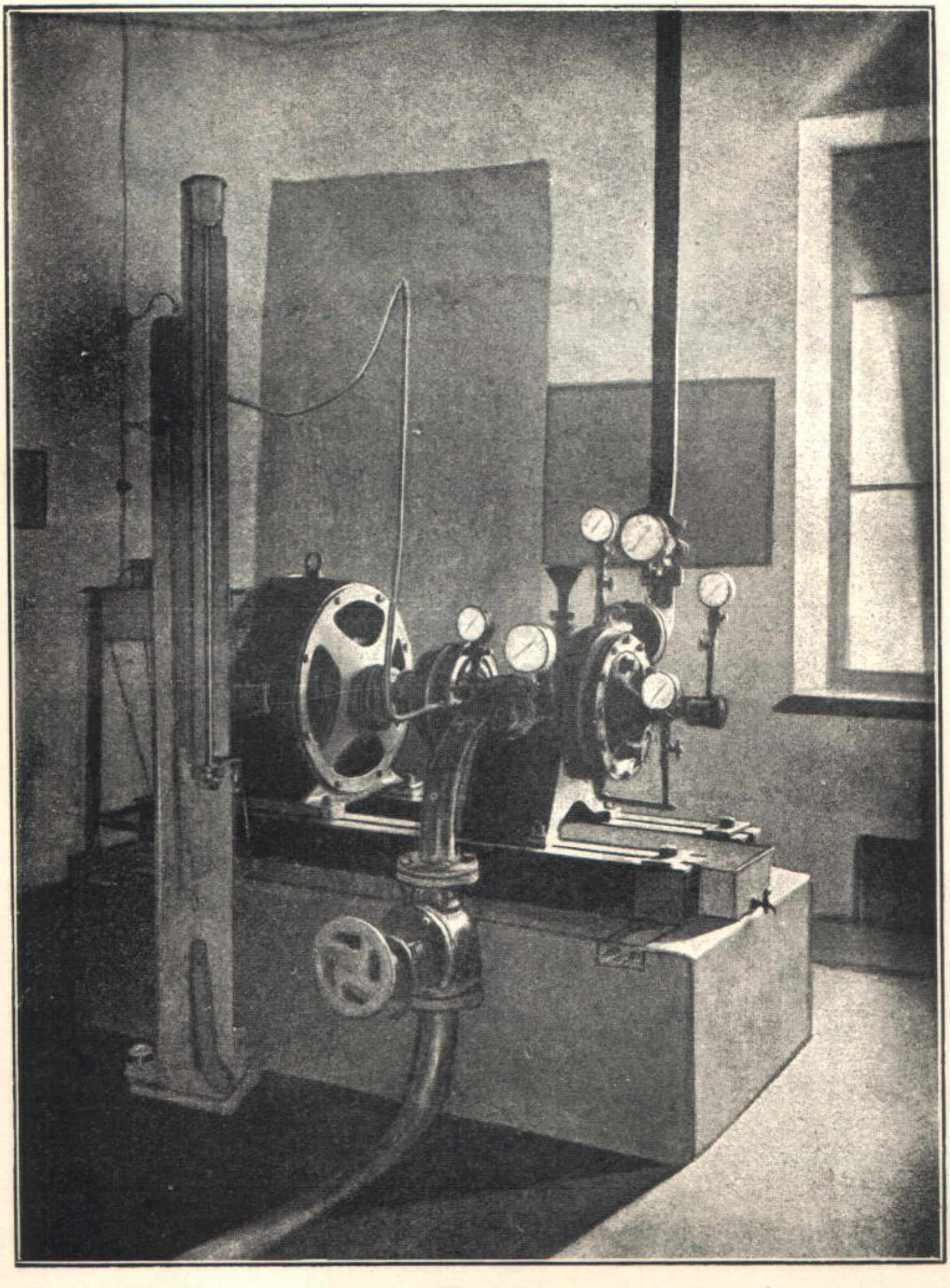
У наружнаго и внутренняго краевъ диски на протяженіи $5^{m}/_{m}$. заостривались для болѣе плавнаго вступленія воды въ колесо и выхода изъ него. Диски зажимаются на валу между двумя установочными кольцами и образуютъ такимъ образомъ рабочее колесо, съ тѣмъ или инымъ числомъ дисковъ, въ зависимости отъ числа прокладочныхъ шайбъ между ними. Для устраненія осевыхъ перемѣщеній вала на наружномъ подшипникѣ устроенъ шариковый подпятникъ (на чертежѣ опорная часть удалена). Остальныя детали ясны изъ черт. 7.

18. Насосъ приводится въ движеніе электромоторомъ постояннаго тока завода А. Е. G., работающимъ нормально при $E = 250$ и $J = 36$ (около 10 *H. P.*), съ перемѣннымъ числомъ оборотовъ отъ $n = 800$ до $n = 1500$, регулируемыхъ реостатомъ. Полезная мощность N_{em}, отдаваемая на валъ насоса, опредѣлялась по кривымъ, составленнымъ для

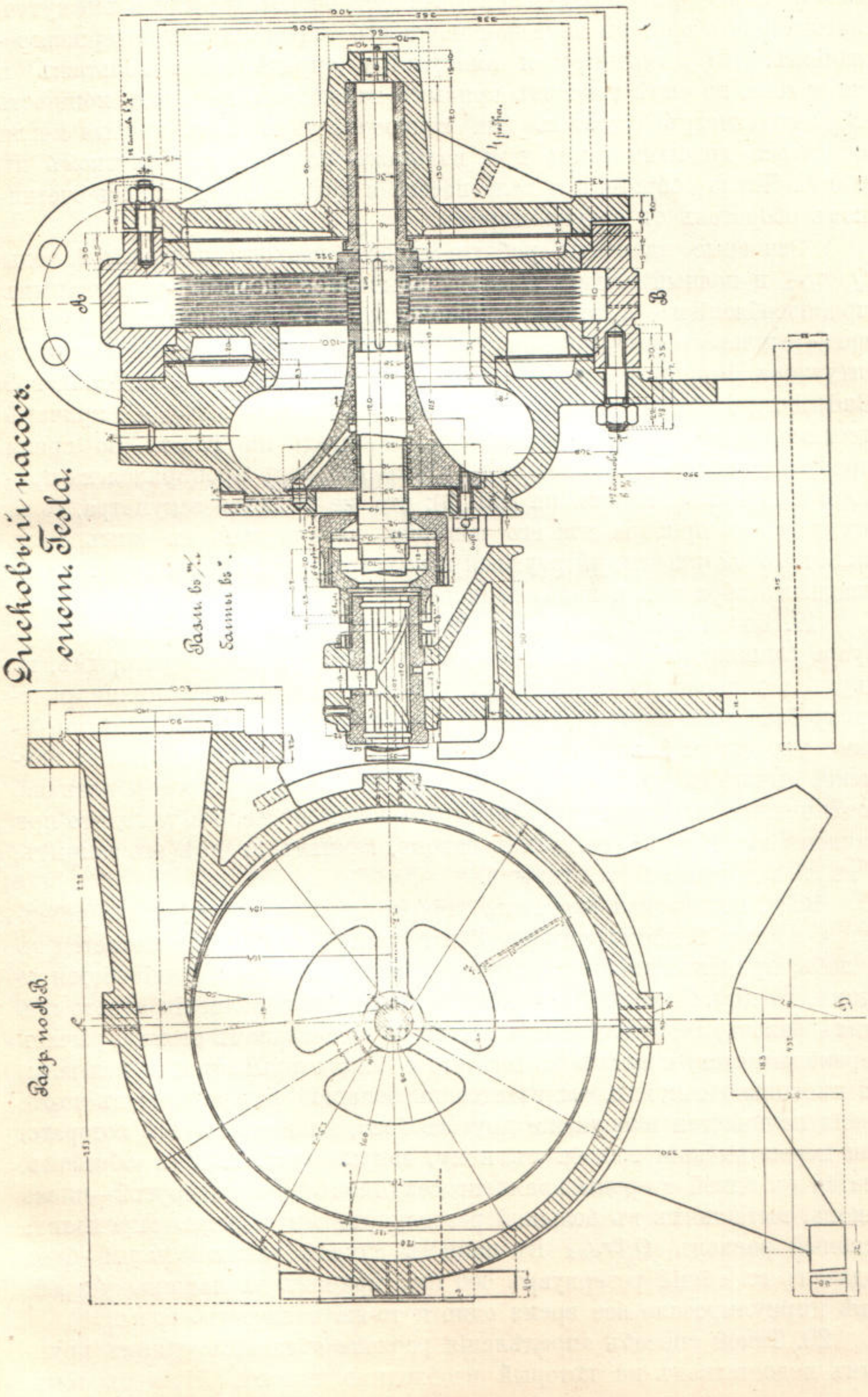
*) Опыты производились въ гидравлической лабораторіи Кіевскаго Политехническаго Института Императора Александра II.



Фиг. 5.



Фиг. 6.



Черт. 7.

этого мотора при вышеуказанномъ числѣ оборотовъ; для промежуточнаго числа оборотовъ полезная мощность опредѣлялась интерполированіемъ. По вольтметру и амперметру опредѣлялись вольтажъ и сила тока, по силѣ тока изъ кривыхъ находилась полезная мощность N_{em}; вольтметръ служилъ для контроля, такъ какъ кривыя могли считаться годными лишь при вольтажѣ равномъ или близкомъ къ 250 *E*. Число оборотовъ *n* вала насоса и мотора опредѣлялось счетчикомъ оборотовъ съ секундомѣромъ.

Основные элементы работы насоса: расходъ подаваемой воды $Q_1 {}^{ltr.}/_{sc.}$ и полный напоръ $H\,mtr.$ учитывались: первый—водомѣрнымъ приспособленіемъ, а второй — манометромъ поставленнымъ у флянца нагнетательнаго штутцера и вакуметромъ у флянца всасывающаго штутцера. Манометръ и вакуметръ обыкновенной системы „Schäffer & Budenberg“; по манометру отсчеты производились въ $^{\text{фн.}}/_{\text{дм.}^2}$, причемъ десятыя доли фунта приходилось оцѣнивать на глазъ. Во время производства опытовъ манометръ нѣсколько разъ провѣрялся на приборѣ Рухгольца (виденъ на фиг. 5); что же касается вакуметра, то за отсутствіемъ прибора для его повѣрки, параллельно съ нимъ былъ включенъ обыкновенный ртутный вакуметръ, показаніями котораго мы главнымъ образомъ и пользовались.

19. Водомѣрное устройство (фиг. 5) состоитъ изъ большого резервуара (ящика), размѣромъ $2805 \times 1210 \times 905 {}^{m.}/_{m.}$, надъ которымъ, на двухъ двутавровыхъ балкахъ, помѣщаются два малыхъ цилиндрическихъ бака діаметромъ въ $1090 {}^{m.}/_{m.}$ и высотой $800 {}^{m.}/_{m.}$; между этими баками укрѣплена ось на которой качается желобъ, приводимый въ движеніе рычагомъ съ противовѣсомъ. На днѣ баковъ устроены клапана, соединенные шарнирными звеньями съ концами желоба такъ, что при наклонѣ желоба къ одному изъ баковъ, клапанъ въ днѣ его закрытъ, а въ днѣ другого бака открытъ.

Вода, подаваемая насосомъ, забирается изъ дна большого резервуара по трубѣ діаметромъ въ 3″ и по такой-же трубѣ нагнетается въ желобъ, причемъ, въ зависимости отъ наклона желоба, наполняется то одинъ, то другой малый бакъ. Когда во время наполненія одного изъ этихъ баковъ, вода достигнетъ мѣтки на водомѣрномъ стеклѣ, рычагъ перекидывается, клапанъ въ днѣ этого бака открывается, и вся вода, въ нѣсколько секундъ, выливается въ большой резервуаръ; въ то-же время начинается наполненіе другого бака, клапанъ въ днѣ котораго, при перекидываніи желоба къ нему, закрывается. Такимъ образомъ, считая съ одной стороны время по секундомѣру, а съ другой—число баковъ, вытекшихъ въ большой резервуаръ, мы можемъ опредѣлить искомый расходъ $Q_1 {}^{ltr.}/_{sc.}$ Въ нашемъ случаѣ каждый малый бакъ подавалъ въ общій резервуаръ 600 *ltr.*, причемъ въ нашемъ устройствѣ циркулировало все время одно и то-же количество воды.

20. Такой способъ опредѣленія расхода обладаетъ однимъ крупнымъ недостаткомъ на который необходимо указать. Дѣло въ томъ,

что за время наполненія одного изъ верхнихъ баковъ, вода изъ нижняго резервуара непрерывно отсасывается насосомъ, такъ, что уровень въ немъ все время понижается, т. е. статическая высота всасыванія непрерывно растетъ; исключеніе составляютъ тѣ нѣсколько секундъ (около 10) въ теченіе которыхъ вода изъ другого верхняго бака выливается въ нижній резервуаръ. Въ нашемъ случаѣ это пониженіе за время наполненія одного бака будетъ:

$$\frac{600}{12{,}1 \, . \, 28{,}05} \backsim 177^{\text{m}\cdot}/_{\text{m}}.$$

Такъ какъ уровень воды въ большомъ резервуарѣ находился всегда на высотѣ $355^{\text{m}\cdot}/_{\text{m}}.$ надъ осью колеса, при верхнихъ пустыхъ бакахъ (т. е. статистическая высота всасыванія была отрицательна), то во время работы насоса эта высота постепенно убывала, достигая половины ея, а затѣмъ, при перекидываніи желоба, вода устремлялась изъ верхняго бака въ нижній резервуаръ съ большой скоростью, увлекая съ собой воздухъ и нарушая этимъ, въ значительной мѣрѣ, вакуумъ.

Всѣ эти явленія, вмѣстѣ взятыя, создавали неустановившійся процессъ работы насоса, особенно вліявшій на показанія вакуметра; насколько значительны были колебанія ртутнаго столба видно изъ численныхъ результатовъ опытовъ, приложенныхъ въ концѣ главы.

На показанія манометра неустановившійся ходъ насоса не оказывалъ столь рѣзкаго вліянія.

Всѣ эти обстоятельства показываютъ, что опыты производились въ довольно грубой технической обстановкѣ; поэтому мы считаемся, главнымъ образомъ, съ качественной но не количественной стороной ихъ. Примѣненіе болѣе точныхъ методовъ обработки результатовъ наблюденій (по теоріи наименьшихъ квадратовъ) было бы здѣсь нецѣлесообразнымъ ввиду ряда побочныхъ обстоятельствъ, аналитически не поддававшихся учету. Съ своей стороны лабораторныя средства не позволяли создать болѣе благопріятной обстановки для опытовъ.

21. Такъ какъ насъ интересуетъ главнымъ образомъ индикаторная работа колеса насоса, а не всего насоса какъ машины въ цѣломъ, то для нахожденія ея мы опредѣляли полный напоръ H (въ теоріи H_k) развиваемый въ колесѣ, другими словами полную энергію колеса, расчитанную на 1 kgr. подаваемой воды. Эта энергія можетъ быть опредѣлена слѣдующимъ образомъ: обозначая давленіе, скорость и высоту центра всасывающаго флянца надъ нѣкоторымъ уровнемъ черезъ p_1, v_1 и z_1, а черезъ p_2, v_2, z_2 тѣ-же величины у нагнетательнаго флянца, можемъ написать:

$$H = \left(\frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\Delta} + z_2\right) - \left(\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\Delta} + z_1\right) \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, (47)$$

По манометру опредѣлялось избыточное надъ атмосферой давленіе въ фн./дм.², а по вакуметру—недостающее до атмосферы въ m/m ртутнаго столба. Поэтому, если p_m отсчетъ по манометру въ фн./дм.², а p_a давленіе атмосферы, то

$$\frac{p_2}{\Delta} = \frac{p_a}{\Delta} + \frac{10{,}33 p_m}{14{,}7} = \left(\frac{p_a}{\Delta} + h_d\right) mtr., \quad \ldots\ldots \quad (48)$$

гдѣ

$$h_d = \frac{10{,}33 \, . \, p_m}{14{,}7} \backsim 0{,}703 \, p_m \, mtr \quad \ldots\ldots\ldots \quad (49)$$

Для открытаго ртутнаго вакуметра, обозначая черезъ p_v отсчеты въ m/m. имѣемъ:

$$\frac{p_1}{\Delta} = \frac{p_a}{\Delta} - \frac{10{,}33 \, . \, p_v}{760} = \left(\frac{p_a}{\Delta} - h_s\right) mtr, \quad \ldots\ldots \quad (50)$$

гдѣ

$$h_s = \frac{10{,}33 \, . \, p_v}{760} \backsim 0{,}0136 \, p_v \, mtr. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (51)$$

Если теперь обозначимъ превышеніе центра нагнетательнаго флянца надъ центромъ всасывающаго черезъ h_m, то изъ (47) найдемъ:

$$H = h_d + h_m + h_s + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g}; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (52)$$

въ нашемъ случаѣ $h_m = 0{,}18$ mtr.

Такъ какъ діаметръ всасывающаго штутцера 0,07 *mtr.*, а нагнетательнаго 0,09 *mtr.*, то членъ, представляющій скоростной напоръ, не обращается въ нуль. Чтобы упростить расчеты мы вставили въ нагнетательный штутцеръ коническую втулку внутренняго діаметра 0,07 *mtr.* и такимъ образомъ обратили въ нуль скоростной напоръ. Конечно этимъ путемъ мы понизили манометрическій напоръ, что въ обыкновенныхъ центробѣжныхъ насосахъ избѣгается, но въ нашемъ случаѣ не имѣетъ значенія, такъ какъ насъ интересуетъ полная энергія, создаваемая колесамъ. Такимъ образомъ для колеса насоса будетъ:

$$H = H_k = (h_d + h_s + 0{,}18) \, mtr. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (53)$$

Необходимо замѣтить, что на самомъ дѣлѣ

$$H_k > H,$$

такъ какъ

$$H_k = H + R,$$

гдѣ R гидравлическія потери на путяхъ отъ всасывающаго флянца до входа въ колесо и отъ выхода изъ колеса до нагнетательнаго флянца. Ввиду сложной формы насосной камеры намъ не удалось опредѣлить эти потери даже теоретически.

Такимъ образомъ эффективная мощность колеса въ $H.P.$ будетъ:

$$N_{ep} = \frac{Q_1 . H}{75} \qquad (54)$$

гдѣ Q_1 измѣрено въ $^{ltr.}/_{sc.}$ помощью водомѣрнаго устройства.

Утечка черезъ зазоръ, существующая въ обыкновенныхъ центробѣжныхъ насосахъ, въ данномъ случаѣ не поддается учету. Наоборотъ—при малыхъ размѣрахъ пространства между наружными поверхностями крайнихъ дисковъ и боковыми стѣнками насосной камеры, возможенъ даже нѣкоторый положительный расходъ.

22. Изъ кривой для электромотора опредѣляется для даннаго числа оборотовъ полезная мощность N_{em} въ $H. P.$, отданная на валъ насоса, такъ что полный коэффиціентъ полезнаго дѣйствія колеса насоса представится въ видѣ:

$$\eta_p = \frac{N_{ep}}{N_{em}} \qquad (55)$$

Въ обыкновенныхъ центробѣжныхъ насосахъ полный коэффиціентъ полезнаго дѣйствія имѣетъ нѣсколько иной видъ, такъ какъ въ немъ вмѣсто полнаго напора H, стоитъ манометрическій напоръ H_m, въ которомъ отсутствуетъ членъ, характеризующій скоростной напоръ. Въ нашемъ случаѣ эти два напора, а слѣдовательно и коэффиціенты полезнаго дѣйствія совпадаютъ, такъ какъ входная и выходная скорости у штутцеровъ насоса равны.

23. Гидравлическій коэффиціентъ полезнаго дѣйствія колеса представится такъ:

$$\eta_{hp} = \frac{N_{ep}}{N_{em} - N_r}, \qquad (56)$$

гдѣ N_r мощность, затраченная на механическія потери. Эти механическія потери, въ нашемъ случаѣ, двоякаго рода: потери на треніе въ опорахъ насоснаго вала и потери на треніе о воду наружныхъ поверхностей двухъ крайнихъ дисковъ колеса.

Потери перваго рода могли бы быть опредѣлены чисто опытнымъ путемъ, но для этого необходимъ былъ моторъ мощностью около 0,5 $H. P.$ съ перемѣннымъ числомъ оборотовъ отъ 800 до 1500 и соотвѣтствующими кривыми къ нему, такъ какъ такого мотора въ нашемъ распоряженіи не было, то оцѣнка этихъ потерь произведена теоретически.

Обозначая удѣльное давленіе на вкладышъ подшипника черезъ p, имѣемъ

$$p = \frac{P}{ld},$$

гдѣ P полная нагрузка на вкладышъ, l длина, а d діаметръ его. Въ такомъ случаѣ мощность, потерянная на треніе будетъ:

$$L_r = ldp\,\mu v\,\frac{kgr.mtr.}{sc.},$$

гдѣ l и d берутся въ см., а v въ $^{\mathrm{mtr.}}/_{\mathrm{sc.}}$, μ коэффиціентъ тренія.

Такъ какъ наибольшая скорость на окружности цапфы не превосходила въ нашихъ опытахъ 3 $^{\mathrm{mtr.}}/_{\mathrm{sc.}}$, то мы пользуемся формулой Лаше *).

$$p\,\mu\,t = 2,$$

гдѣ t температура вкладыша въ C^0. Поэтому

$$L_r = 2\,\frac{ldv}{t},$$

или, такъ какъ $v = \dfrac{\pi dn}{60.100}$ $^{\mathrm{mtr.}}/_{\mathrm{sc.}}$, гдѣ d въ см.

$$L_r = \frac{\pi n}{3000}\,\frac{ld^2}{t}.$$

Отсюда, для многоопорнаго вала потерянная на треніе мощность въ лошадиныхъ силахъ будетъ:

$$N'_r = \left[\frac{\pi}{75.3000}\sum\frac{ld^2}{t}\right]n \;. \;. \;. \;. \;. \;. \;. \;. \;. \;. \qquad (57)$$

Въ нашемъ случаѣ валъ расположенъ на трехъ опорахъ, для которыхъ, считая слѣва на право (черт. 7), имѣемъ:

$l = 12$ см., $d = 3{,}5$ см., $t = 30^0$; $l = 11{,}5$ см., $d = 4$ см., $t = 20^0$; $l = 12$ см.,

$d = 3$ см., $t = 20^0$.

Приведенныя здѣсь температуры взяты какъ среднее изъ нѣсколькихъ наблюденій.

Такимъ образомъ находимъ:

$$N'_r = 0{,}000272\,n \;. \;. \;. \;. \;. \;. \;. \;. \;. \;. \;. \;. \;. \qquad (58)$$

Ввиду незначительности осевыхъ усилій мы пренебрегаемъ треніемъ въ подпятникѣ.

Потери на треніе дисковъ о воду мы опредѣлимъ, пользуясь предположеніемъ, что сила тренія въ какой либо точкѣ диска, расчитанная на единицу площади, пропорціональна квадрату скорости диска въ этой точкѣ, т. е. равна

$$k_1\,(\omega r)^2,$$

---

*) См. М. Н. Берловъ. Детали машинъ. Вып. VIII. Подшипники. Рига. 1905 г.

гдѣ r разстояніе точки диска до оси. Относя силу къ 1 *mtr.*^{2} и считая ее въ *kgr.*, примемъ $k_1 = 0{,}15$. Число это заимствовано изъ приведенной выше статьи Г. Лоренца; приблизительно такое же значеніе для k_1 находимъ и изъ опытовъ Унвина*).

Моментъ силы тренія для элементарной площадки диска напишется въ цилиндрическихъ координатахъ такъ:

$$[k_1 (\omega r)^2]\ (r d\varphi\, dr) r,$$

откуда для полной мощности, потерянной на треніе, въ Н. Р. находимъ выраженіе вида:

$$N''_r = \frac{2}{75}\int_{r_1}^{r_2}\int_{o}^{2\pi} [k_1 (\omega r)^2]\,(r d\varphi\, dr)\, r\omega = \frac{4\pi\, k_1\, \omega^3}{5.75}\,(r_2^5 - r_1^5),$$

или, такъ $\omega = \frac{\pi n}{30}$

$$N''_r = \left[\frac{4\pi^4\, k_1}{75.5.30^3}\,(r_2^5 - r_1^5)\right] n^3 \ldots\ldots\ldots\ldots (59)$$

Подставляя въ эту формулу численныя значенія, находимъ:

$$N''_r = 58636\,.\,10^{-14}\, n^3 \ldots\ldots\ldots\ldots (60)$$

Такимъ образомъ полная мощность въ *H. P.*, расходуемая на механическія потери, на основаніи (58) и (60) будетъ:

$$N_r = 0{,}000272\, n + 58636\,.\,10^{-14}\, n^3 \ldots\ldots\ldots\ldots (61)$$

24. Опыты были разбиты на четыре группы, различавшіяся числомъ дисковъ въ колесѣ. Въ первой группѣ было 12 дисковъ съ разстояніями въ $1^{m}/_{m}$.; во второй—10 дисковъ съ разстояніями въ $2^{m}/_{m}$.; въ третьей—8 дисковъ съ разстояніями въ $3^{m}/_{m}$.; въ четвертой—7 дисковъ съ разстояніями въ $4^{m}/_{m}$..

Каждая группа состояла изъ четырехъ серій опытовъ. Серіи отличались установками задвижки на всасывающей трубѣ и крана на нагнетательной трубѣ. Въ первой (I) установкѣ кранъ и задвижка совершенно открыты; во второй (II)—кранъ открытъ, задвижка прикрыта на половину; въ третьемъ (III)—кранъ прикрытъ до мѣтки, задвижка — открыта; въ четвертой (IV)—кранъ прикрытъ до мѣтки, задвижка прикрыта на половину.

Этими установками создавались разныя геометрическія условія въ насосной сѣти при неизмѣнномъ числѣ оборотовъ, другими словами мѣнялся напоръ и расходъ при постоянномъ n.

---

*) См. проф. Д. П. Рузскій. Общая теорія машинъ. Кіевъ, 1910 г. Стр, 65.

Каждая серія содержитъ 10 или 11 испытаній, при разныхъ установкахъ на кнопки реостата, т. е. при перемѣнномъ числѣ оборотовъ.

Результаты каждаго испытанія выводились какъ среднее изъ четырехъ или пяти наблюденій. Все остальное выясняется таблицами опытовъ, приложенными въ концѣ главы.

25. Для сопоставленія теоріи съ опытными результатами мы воспользовались уравненіемъ состоянія (39) для насоса:

$$\omega r_2^2 = AH_k^{1/2} + BQ_1^{1/2} H_k^{1/4}, \ldots \ldots \ldots \ldots (39)$$

гдѣ

$$A^2 = \frac{4g}{(r_2 - r_1)^2}\left(\frac{r_2^4}{4} - \frac{r_2^3 r_1}{3} + \frac{r_1^4}{12}\right),\ AB^2 = \frac{r_2^2}{2\pi n_1 k_1 (r_2 - r_1)},\ Q_1 = \Delta Q, \quad (40)$$

и выраженіемъ для гидравлическаго коэффиціента полезнаго дѣйствія (43)

$$\eta_{hp} = K\frac{\sqrt{H_k}}{n}, \ldots \ldots \ldots \ldots (43)$$

гдѣ

$$K = \frac{30g}{\pi A}. \ldots \ldots \ldots \ldots (44)$$

Изъ каждой группы опытовъ выбрано четыре установки реостата: на 0, 6, 9 и 11 кнопки, изъ которыхъ каждая должна была давать постоянное число оборотовъ; но вслѣдствіе колебанія вольтажа въ сѣти число оборотовъ мотора нѣсколько колебалось. Такъ какъ каждая установка повторяется въ группѣ четыре раза, то для четырехъ испытаній группы, отличающихся лишь геометрическими условіями сѣти, принято одно и то-же число оборотовъ, среднее для этихъ испытаній. Такимъ образомъ изъ нашихъ таблицъ опытовъ получилось четыре сводныхъ таблицы, которыя приводимъ ниже.

26. Для сопоставленія теоріи съ результатами опытовъ построены для каждой группы теоретическія кривыя (39) и (43), представляющія зависимости Q_1 и η_{hp} отъ H_k.

Въ нашемъ случаѣ для всѣхъ кривыхъ

$$A = 0{,}595\,, B = \frac{0{,}758}{\sqrt{n_1}};$$

или, обозначая индексамъ число дисковъ колеса, получимъ:

$$B_{12} = 0{,}219, \quad B_{10} = 0{,}239, \quad B_8 = 0{,}268, \quad B_7 = 0{,}286,$$

гдѣ для числа k_1 взято прежнее значеніе 0,15.

Таблица I,

число дисковъ $n_1 = 12$.

Число оборотовъ n	Угловая скорость ω	Полный напоръ $H_{mtr.}$	Расходъ $Q_1 ltr./sc.$	Полезн. работа насоса N_{ep}	Вольты E	Амперы J	Полезн. работа мотора N_{em}	Полный коэф. пол. дѣйствія η_p	Механ. потери N_r	Гидравл. коэф. полезн. дѣйствія η_{hp} опыт.	Гидравл. коэф. полезн. дѣйствія η_{hp} теор.	Установка реостата.
844	88,37	4,62	9,31	0,57	249,75	10,13	1,98	0,29	0,56	0,40	0,41	0 к.
		4,54	8,09	0,49	251,25	8,75	1,46	0,34	0,59	0,56	0,39	
		5,43	3,56	0,26	250,25	7,75	1,19	0,22	0,58	0,43	0,43	
		5,44	3,24	0,23	250,00	8,38	1,35	0,17	0,58	0,30	0,43	
1046	109,52	6,92	11,43	1,05	250,00	15,25	3,55	0,30	0,93	0,40	0,40	6 к.
		6,66	10,57	0,94	251,00	14,31	3,22	0,29	1,01	0,43	0,38	
		7,74	4,55	0,47	249,50	11,25	2,30	0,20	0,95	0,35	0,42	
		7,82	4,48	0,47	250,25	11,80	2,41	0,20	0,94	0,32	0,42	
1201	125,74	8,84	14,06	1,66	250,00	21,55	5,46	0,30	1,38	0,41	0,38	9 к.
		8,42	12,50	1,40	247,50	19,94	4,95	0,28	1,36	0,39	0,38	
		9,59	5,16	0,66	249,25	15,59	3,54	0,19	1,28	0,29	0,41	
		10,24	5,30	0,72	251,25	15,75	3,59	0,20	1,34	0,32	0,42	
1335	139,77	11,15	15,00	2,23	249,25	30,38	8,10	0,26	1,87	0,36	0,38	11 к.
		10,01	13,49	1,80	248,50	26,31	6,83	0,26	1,82	0,36	0,37	
		11,50	5,70	0,87	250,00	19,38	4,69	0,19	1,64	0,28	0,41	
		12,19	5,83	0,95	249,50	20,19	4,96	0,19	1,70	0,28	0,42	

Таблица II,

число дисковъ $n_1 = 10$.

Число оборотовъ n	Угловая скорость ω	Полный напоръ $H_{mtr.}$	Расходъ $Q_1 ltr./sc.$	Полезн. работа насоса N_{ep}	Вольты E	Амперы J	Полезн. работа мотора N_{em}	Полный коэф. пол. дѣйствія η_p	Механ. потери N_r	Гидравл. коэф. полезн. дѣйствія η_{hp} опыт.	теор.	Установка реостата.
844	88,37	4,71 4,57 5,66 5,61	7,84 8,33 3,85 3,75	0,49 0,51 0,29 0,28	251,75 251,50 251,25 249,75	8,50 9,06 7,94 3,54	1,41 1,58 1,24 1,76	0,35 0,32 0,23 0,16	0,59 0,58 0,59 0,56	0,59 0,51 0,45 0,23	0,40 0,40 0,44 0,44	0 к.
1039	108,78	6,91 6,58 7,77 8,37	10,31 10,81 4,80 4,95	0,95 0,95 0,50 0,55	251,50 249,00 249,75 250,00	13,75 14,80 11,75 13,16	3,05 3,43 2,41 2,84	0,31 0,28 0,21 0,19	0,95 0,92 0,90 0,98	0,45 0,38 0,33 0,30	0,40 0,39 0,43 0,43	6 к.
1190	124,59	8,77 8,55 10,19 10,22	12,24 12,64 5,62 5,61	1,43 1,44 0,76 0,76	250,00 250,25 249,75 249,50	19,94 19,81 15,31 16,25	4,96 4,92 3,46 3,77	0,29 0,29 0,22 0,20	1,34 1,33 1,29 1,29	0,40 0,40 0,35 0,31	0,39 0,38 0,43 0,42	9 к.
1316	138,10	10,53 10,51 12,02 12,09	13,63 14,53 6,19 6,22	1,91 2,04 0,99 1,00	250,50 250,00 249,50 249,75	25,81 29,25 19,50 20,50	6,70 7,73 4,75 5,07	0,28 0,26 0,21 0,20	1,73 1,80 1,63 1,66	0,38 0,34 0,32 0,29	0,38 0,38 0,42 0,42	11 к.

Таблица III,

число дисковъ $n_1 = 8$.

Число оборотовъ n	Угловая скорость ω	Полный напоръ $H mtr.$	Расходъ $Q_1 ltr./sc.$	Полезн. работа насоса N_{ep}	Вольты E	Амперы J	Полезн. работа мотора N_{em}	Полный коэф. пол. дѣйствія η_p	Механ. потери N_r	Гидравл. коэф. полезн. дѣйствія η_{hp} опыт.	теор.	Установка реостата.
830	86,90	3,94 4,25 5,06 5,03	7,93 7,42 3,22 3,21	0,42 0,42 0,22 0,22	249,75 249,50 251,25 250,25	8,58 8,29 7,55 7,50	1,43 1,36 1,10 1,09	0,29 0,31 0,20 0,20	0,56 0,55 0,56 0,56	0,48 0,52 0,41 0,41	0,38 0,39 0,43 0,42	0 к.
1050	109,94	6,39 6,66 7,67 7,71	10,85 10,17 4,70 4,73	0,92 0,90 0,48 0,49	250,50 251,50 248,50 251,25	13,31 12,74 11,24 11,00	2,90 2,70 2,23 2,12	0,32 0,33 0,22 0,23	0,96 0,98 0,95 0,96	0,47 0,52 0,41 0,42	0,38 0,38 0,42 0,42	6 к.
1199	125,54	8,05 8,27 9,91 10,06	12,69 11,79 5,46 5,52	1,36 1,30 0,72 0,74	248,75 248,75 249,50 251,50	18,63 17,94 15,10 15,00	4,53 4,31 3,39 3,34	0,30 0,30 0,21 0,22	1,35 1,34 1,32 1,32	0,43 0,44 0,35 0,37	0,37 0,38 0,42 0,42	9 к.
1317	137,89	9,60 10,04 11,51 11,56	14,21 13,22 5,98 6,02	1,82 1,77 0,92 0,93	250,00 251,75 248,50 248,75	25,94 23,34 19,06 18,56	6,73 5,95 4,60 4,43	0,27 0,30 0,20 0,21	1,77 1,72 1,65 1,65	0,37 0,42 0,31 0,34	0,37 0,38 0,41 0,41	11 к.

Таблица IV,

число дисковъ $n_1 = 7$.

Число оборотовъ n	Угловая скорость ω	Полный напоръ $H\,mtr.$	Расходъ $Q_1\,ltr./sc.$	Полезн. работа насоса N_{ep}	Вольты E	Амперы J	Полезн. работа мотора N_{em}	Полный коэф. пол. дѣйствія η_p	Механ. потери N_r	Гидравл. коэф. полезн. дѣйствія η_{hp} опыт.	теор.	Установка реостата.
827	86,59	3,58	7,54	0,36	249,50	8,50	1,42	0,25	0,56	0,42	0,36	0 к.
		3,80	6,90	0,35	248,75	8,14	1,30	0,27	0,55	0,47	0,37	
		4,48	2,92	0,17	250,00	7,25	1,02	0,17	0,55	0,36	0,40	
		4,57	3,21	0,20	250,75	7,50	1,10	0,18	0,56	0,37	0,41	
1047	109,62	5,48	10,56	0,77	249,75	13,38	2,92	0,26	0,96	0,39	0,35	6 к.
		6,03	9,61	0,77	250,00	12,25	2,54	0,30	0,95	0,42	0,37	
		7,03	4,42	0,41	249,50	10,50	1,97	0,21	0,95	0,40	0,40	
		7,19	4,90	0,47	249,00	10,75	2,03	0,23	0,96	0,44	0,40	
1194	125,01	7,02	12,24	1,15	249,00	18,53	4,51	0,25	1,33	0,36	0,35	9 к.
		7,63	11,32	1,15	247,75	16,81	3,95	0,29	1,31	0,44	0,37	
		8,98	5,15	0,62	251,75	14,00	3,03	0,20	1,31	0,36	0,40	
		9,08	5,71	0,69	249,75	14,53	3,20	0,22	1,33	0,37	0,40	
1305	136,63	8,43	13,73	1,54	249,50	24,13	6,20	0,25	1,72	0,34	0,34	11 к.
		9,04	12,63	1,52	250,25	21,31	5,33	0,29	1,64	0,41	0,36	
		10,55	5,65	0,79	250,00	16,84	3,89	0,20	1,62	0,35	0,40	
		10,84	6,30	0,91	248,00	17,63	4,15	0,22	1,65	0,36	0,40	

Такимъ образомъ уравненія кривыхъ состоянія, расположенныя по группамъ, напишутся въ видѣ:

$$\left.\begin{aligned}
2{,}262 &= 0{,}595\, H_k{}^{1/2} + 0{,}219\, Q_1{}^{1/2} H_k{}^{1/4},\\
2{,}804 &= 0{,}595\, H_k{}^{1/2} + 0{,}219\, Q_1{}^{1/2} H_k{}^{1/4},\\
3{,}219 &= 0{,}595\, H_k{}^{1/2} + 0{,}219\, Q_1{}^{1/2} H_k{}^{1/4},\\
3{,}578 &= 0{,}595\, H_k{}^{1/2} + 0{,}219\, Q_1{}^{1/2} H_\kappa{}^{1/4}.
\end{aligned}\right\} n_1 = 12$$

$$\left.\begin{aligned}
2{,}262 &= 0{,}595\, H_k{}^{1/2} + 0{,}239\, Q_1{}^{1/2} H_k{}^{1/4},\\
2{,}785 &= 0{,}595\, H_k{}^{1/2} + 0{,}239\, Q_1{}^{1/2} H_k{}^{1/4},\\
3{,}189 &= 0{,}595\, H_k{}^{1/2} + 0{,}239\, Q_1{}^{1/2} H_k{}^{1/4},\\
3{,}535 &= 0{,}595\, H_k{}^{1/2} + 0{,}239\, Q_1{}^{1/2} H_k{}^{1/4}.
\end{aligned}\right\} n_1 = 10$$

$$\left.\begin{aligned}
2{,}225 &= 0{,}595\, H_k{}^{1/2} + 0{,}268\, Q_1{}^{1/2} H_k{}^{1/4},\\
2{,}814 &= 0{,}595\, H_k{}^{1/2} + 0{,}268\, Q_1{}^{1/2} H_k{}^{1/4},\\
3{,}214 &= 0{,}595\, H_k{}^{1/2} + 0{,}268\, Q_1{}^{1/2} H_k{}^{1/4},\\
3{,}530 &= 0{,}595\, H_k{}^{1/2} + 0{,}268\, Q_1{}^{1/2} H_k{}^{1/4}.
\end{aligned}\right\} n_1 = 8$$

$$\left.\begin{aligned}
2{,}217 &= 0{,}595\, H_k{}^{1/2} + 0{,}286\, Q_1{}^{1/2} H_k{}^{1/4},\\
2{,}806 &= 0{,}595\, H_k{}^{1/2} + 0{,}286\, Q_1{}^{1/2} H_k{}^{1/4},\\
3{,}200 &= 0{,}595\, H_k{}^{1/2} + 0{,}286\, Q_1{}^{1/2} H_k{}^{1/4},\\
3{,}498 &= 0{,}595\, H_k{}^{1/2} + 0{,}286\, Q_1{}^{1/2} H_k{}^{1/4}.
\end{aligned}\right\} n_1 = 7$$

Для кривыхъ (43)

$$K = 157{,}55;$$

уравненія ихъ для группъ получились одинаковыми ввиду незначительныхъ колебаній числа оборотовъ при одной и той-же установкѣ реостата. Для четырехъ основныхъ установокъ уравненія этихъ кривыхъ напишутся такъ:

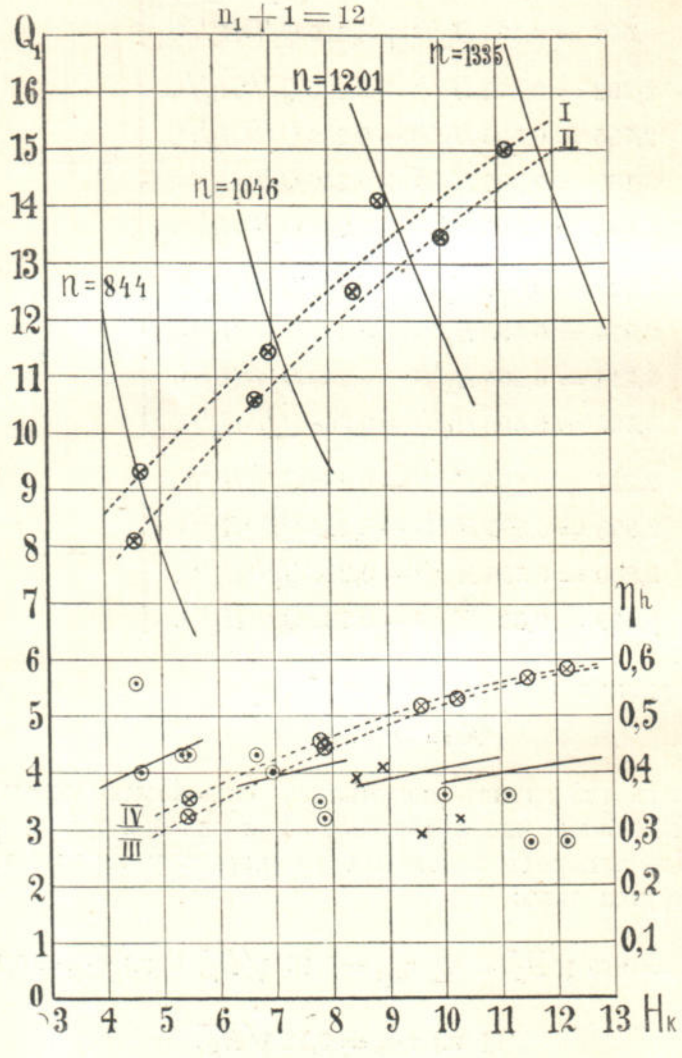
$$0 \text{ к.) } \eta_{hp} = 0{,}19 \sqrt{H_k},\quad 6 \text{ к.) } \eta_{hp} = 0{,}15 \sqrt{H_k},\quad 9 \text{ к.) } \eta_{hp} = 0{,}13 \sqrt{H_k},$$

$$11 \text{ к.) } \eta_{hp} = 0{,}12 \sqrt{H_k}.$$

Всѣ кривыя нанесены на прилагаемые графики (черт. 8, 9, 10, 11) параллельно съ опытными результатами. Кружками съ крестиками обозначены опытныя точки, принадлежащія кривымъ состоянія, а кружками или крестиками—кривымъ коэффиціентовъ полезнаго дѣйствія.

27. Разсмотрѣніе теоретическихъ кривыхъ состоянія и соотвѣтствующихъ имъ опытныхъ точекъ приводитъ къ нѣкоторымъ заключеніямъ.

Мы видимъ, что для каждой кривой имѣются двѣ пары точекъ, изъ которыхъ первая пара, соотвѣтствующая группѣ большихъ расходовъ, въ общемъ довольно хорошо удовлетворяетъ уравненію кривой, вторая же пара уже очевидно не подчиняется ему; при этомъ общей границей между наименьшими расходами для первыхъ паръ и наибольшими для вторыхъ является расходъ $Q_1 \backsim 6{,}75\,ltr./sc.$

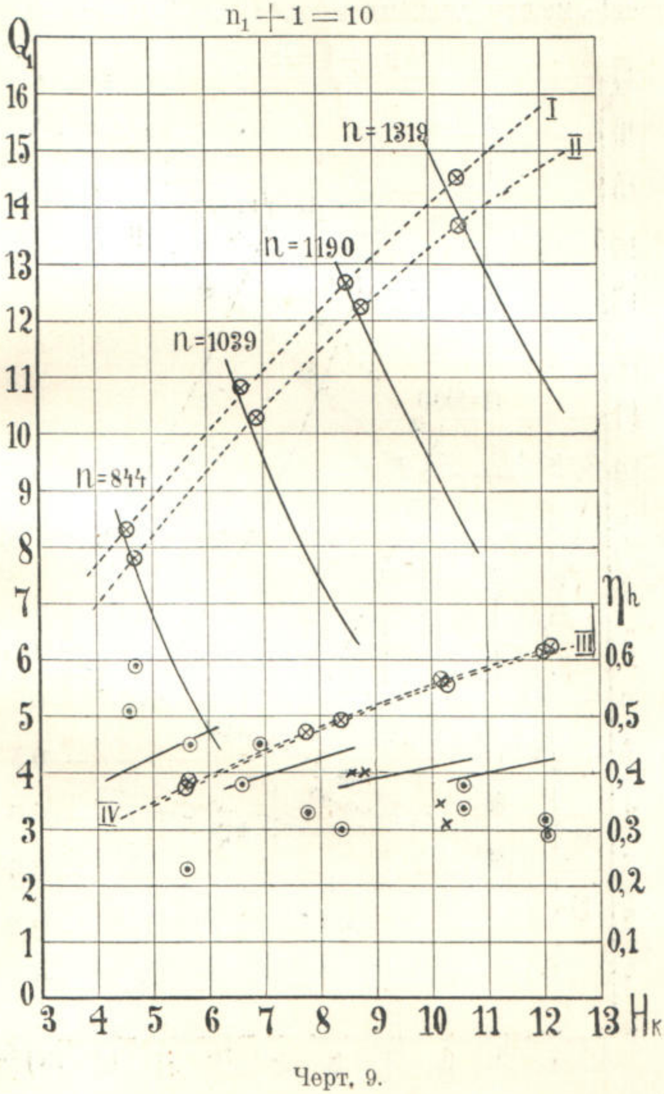


Черт. 8.

Замѣтимъ теперь, что движеніе воды въ колесѣ насоса есть теченіе жидкости между параллельными стѣнками, подчиняющееся, конечно, законамъ, изложеннымъ въ гл. XIII (ч. I), т. е. до извѣстныхъ скоростей, а слѣдовательно и расходовъ, движеніе будетъ струйное, а при большихъ скоростяхъ—турбулентное.

Въ нашемъ случаѣ это и имѣетъ мѣсто: первыя пары точекъ, т. е. большіе расходы и скорости, удовлетворяютъ теоретическимъ кривымъ, выведеннымъ въ предположенiи турбулентнаго движенiя; при малыхъ же расходахъ относительныя скорости теченiя воды между дисками оказываются повидимому ниже критическихъ скоростей и движенiе воды подчиняется струйному режиму.

Такимъ образомъ для всѣхъ колесъ нашего насоса, при данномъ



Черт. 9.

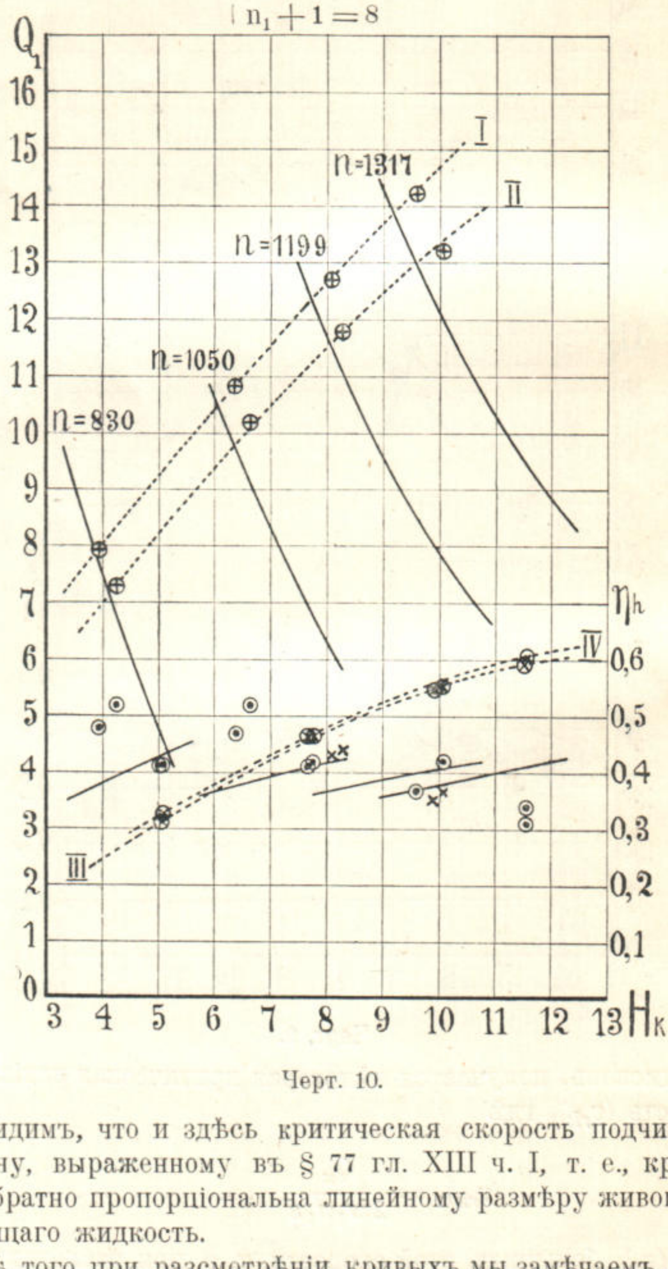
размѣрѣ дисковъ, получается нѣкоторая критическая радiальная входная скорость $(v_{rk})_1$ гдѣ

$$(v_{rk})_1 = \frac{Q_k}{2\pi r_1 n_1 s} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (62)$$

При $(v_r)_1$ большихъ этой скорости, т. е. при расходахъ большихъ Q_k, изложенная выше теорiя примѣнима, а при меньшихъ расходахъ пришлось бы пользоваться соображеніями, изложенными въ гл. XI § 59, ч. I. Для нашего случая $Q_k = 6{,}75\ ltr./sc.$ и $r_1 = 0{,}08\ mtr.$ Поэтому

$$(v_{rk})_1 = \frac{0{,}0134}{n_1 s}\, mtr./sc. \qquad (63)$$

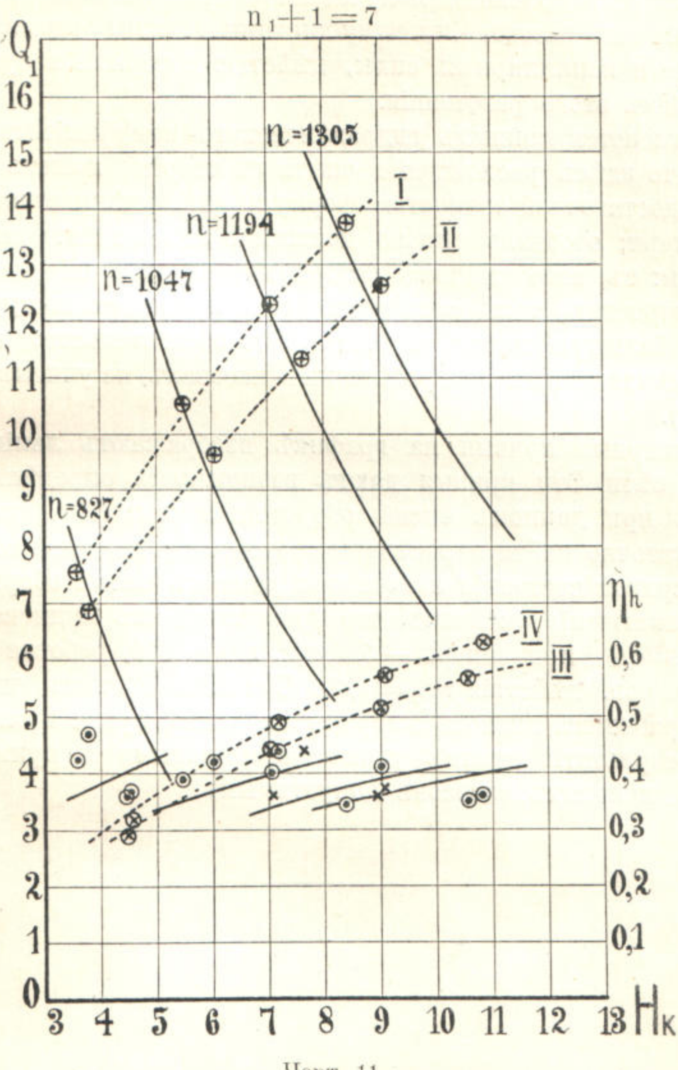
гдѣ s разстояніе между дисками въ $mtr.$, (n_1+1)—число дисковъ.



Черт. 10.

Мы видимъ, что и здѣсь критическая скорость подчиняется общему закону, выраженному въ § 77 гл. XIII ч. I, т. е., критическая скорость обратно пропорціональна линейному размѣру живого сѣченія, пропускающаго жидкость.

Кромѣ того при разсмотрѣніи кривыхъ мы замѣчаемъ, что колеса съ 10 и 7 дисками лучше удовлетворяютъ высказанному положенію, чѣмъ колеса съ 12 и 8 дисками. Это обстоятельство можетъ быть объяснено вліяніемъ зазоровъ между наружными поверхностями дисковъ колеса и стѣнками насосной камеры.



Черт. 11.

Въ нашемъ случаѣ эти зазоры будутъ:

$$z_{12} = \frac{40 - (2.12 + 1.11)}{2} = 2{,}5^{m\cdot}/_{m.}, \quad z_{10} = \frac{40 - (2.10 + 2.9)}{2} = 1^{m\cdot}/_{m.},$$

$$z_8 = \frac{40 - (2.8 + 3.7)}{2} = 1{,}5^{m\cdot}/_{m.}, \quad z_7 = \frac{40 - (2.7 + 4.6)}{2} = 1^{m\cdot}/_{m.},$$

гдѣ индексы обозначаютъ число дисковъ колеса.

Такимъ образомъ для колеса съ 12 и 8 дисками зазоры больше чѣмъ при 10 и 7 дискахъ; въ особенности ненормаленъ этотъ зазоръ у колеса съ 12 дисками, гдѣ рабочее разстояніе всего $1^{m}/_{m}$. Очевидно что при большихъ зазорахъ возникаетъ обратная утечка воды, такъ что теоретическій расходъ получается больше наблюдаемаго; кромѣ того при маломъ разстояніи между дисками должны оказывать извѣстное вліяніе и капиллярныя силы, дѣйствіе которыхъ возрастаетъ съ уменьшеніемъ этого разстоянія.

Что касается кривыхъ гидравлическаго коэффиціента полезнаго дѣйствія, то здѣсь расхожденіе опыта съ теоріей можетъ быть объяснено недостаточной точностью формулы (61), оцѣнивающей механическія потери; особенно сильно должны и здѣсь вліять вышеуказанные зазоры: съ возростаніемъ зазора потеря на треніе диска о воду должна возростать, такъ какъ приходится приводить въ турбулентное состояніе большую массу жидкости. Это обстоятельство, замѣченное и при обыкновенныхъ центробѣжныхъ насосахъ, не учитывается формулой (61).

Пунктирныя кривыя на графикѣ изображаютъ линіи равныхъ состояній сѣти. Эти кривыя даютъ возможность опредѣлять напоръ и расходъ при данномъ числѣ оборотовъ и открытіи вентилей. Для этого достаточно найти пересѣченіе соотвѣтствующей кривой состоянія сѣти съ кривой состоянія насоса при данномъ числѣ оборотовъ.

Въ заключеніе замѣтимъ, что при колесѣ изъ 10 дисковъ насосъ давалъ — $9\,ltr./sc.$ при напорѣ — 5,4 *mtr.* и $n = 900$, работая съ гидравлич. коэф. пол. дѣйствія $\eta_{hp} = 0{,}60$. Считаясь съ тѣмъ, что размѣры насоса и рабочихъ дисковъ выбраны случайно, нужно признать полученные результаты вполнѣ удовлетворительными и примѣненіе на практикѣ дисковыхъ насосовъ допустимымъ.

Численные результаты опытовъ съ дисковымъ насосомъ.

Первая группа опытовъ. Рабочее колесо состоитъ изъ 12 дисковъ съ разстояніями въ 1 $^{m.}/_{m.}$.

Установка вентилей.	Установка реостата на кнопки.	№ испытанія.	Нагнетаніе.			Всасываніе.			Полн. напоръ	Расходъ	Полез. работа насоса	Вольты.		Амперы.		Число оборот.		Полезная работа мотора	Полный коэф. полез. дѣйст. насоса	Механическія потери	Гидравл. коэф. пол. дѣйствія насоса η_{hp}	
			p_m	Среднее значеніе p_m	h_d mtr.	p_v	Среднее значеніе p_v	h_s mtr.	Hmtr.	$Q_1{}^{lt.}/_{sc.}$	N_{ep}	E	Среднее значеніе E	J	Среднее значеніе J	n	Среднее значеніе n	N_{em}	η_p	N_r	опытн.	теорет.
I	0	1	5,70 5,75 5,75 5,80	5,75	4,04	25 30 30 33	29,50	0,40	4,62	$\frac{21.600}{1354} = 9{,}31$	0,57	249 250 250 250	249,75	10,00 10,25 10,00 10,25	10,13	830 835 838 830	833	1,98	0,29	0,56	0,40	0,41
„	2	2	5,70 6,00 5,90 6,00 6,10	5,94	4,18	30 28 30 33 28	29,80	0,41	4,77	$\frac{11.600}{678} = 9{,}82$	0,62	250 250 249 250 250	249,80	9,50 9,75 9,75 9,75 9,75	9,70	861 867 862 866 867	865	1,80	0,34	0,61	0,52	0,40
„	3	3	7,00 7,00 7,00 7,10 7,10	7,04	4,95	52 48 50 48 51	49,80	0,68	5,81	$\frac{21.600}{1233} = 10{,}22$	0,79	249 250 250 250 249	249,60	12,00 12,00 12,00 11,75 12,00	11,95	904 918 920 923 916	916	2,56	0,31	0,70	0,42	0,41
„	4	4	7,00 7,00 7,10 7,10 7,10	7,06	4,96	45 43 43 45 43	43,80	0,60	5,74	$\frac{12.600}{656} = 10{,}98$	0,84	250 249 251 249 249	249,60	11,50 11,50 11,25 11,50 11,25	11,40	961 954 954 955 954	956	2,34	0,36	0,77	0,53	0,39
„	6	5	8,50 8,30 8,40 8,40	8,40	5,91	60 58 62 65	61,25	0,83	6,92	$\frac{10.600}{525} = 11{,}43$	1,05	250 250 250 250	250,00	15,25 15,50 15,25 15,00	15,25	1030 1033 1034 1033	1033	3,55	0,30	0,93	0,40	0,40
„	7	6	8,90 9,00 9,10 9,20 [illegible]	[illegible]	[illegible]	60 63 60 65 [illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	$\frac{10.600}{507}$ [illegible]	[illegible]	250 250 248 250 [illegible]	[illegible]	16,50 16,50 16,25 16,25 [illegible]	[illegible]	1093 1099 1097 1102 [illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

„	8	7	10,00 9,80 9,80 10,10 10,10	9,96	7,00	80 77 82 80 80	79,80	1,09	8,27	$\frac{20.600}{933}$ = 12,86	1,42	250 250 250 250 250	250,00	19,00 19,00 19,50 19,50 19,00	19,20	1142 1146 1143 1138 1144	1143	4,76	0,30	1,19	0,40	0,39
„	9	8	10,75 10,70 10,60 10,70 10,60	10,67	7,50	85 83 85 88 84	85,00	1,16	8,84	$\frac{21.600}{896}$ = 14,06	1,66	250 249 248 252 251	250,00	21,50 21,75 21,50 21,50 21,50	21,55	1210 1212 1218 1217 1218	1215	5,46	0,30	1,38	0,41	0,38
„	10	9	11,50 11,80 11,60 11,50 11,60	11,60	8,15	95 100 102 98 100	99,00	1,35	9,68	$\frac{16.600}{654}$ = 14,68	1,89	250 250 250 250 250	250,00	26,00 25,00 25,00 25,00 25,00	25,20	1267 1272 1272 1277 1271	1272	6,56	0,29	1,55	0,38	0,38
„	11	10	13,25 13,25 13,40 13,50	13,35	9,39	115 118 115 118	116,50	1,58	11,15	$\frac{12.600}{480}$ = 15,00	2,23	250 249 250 248	249,25	30,50 30,00 30,00 31,00	30,38	1369 1363 1363 1368	1366	8,10	0,26	1,87	0,36	0,38
II	0	11	5,00 5,20 5,20 5,30	5,18	3,64	48 55 55 55	53,25	0,72	4,54	$\frac{10.600}{741}$ = 8,09	0,49	249 252 252 252	251,25	8,50 8,75 8,75 9,00	8,75	849 843 848 847	847	1,46	0,34	0,59	0,56	0,39
„	2	12	5,20 5,20 5,30 5,30 5,30	5,26	3,70	48 53 52 51 49	50,60	0,69	4,57	$\frac{9.600}{651}$ = 8,29	0,51	250 250 250 250 250	250,00	9,25 9,25 9,25 9,25 9,25	9,25	850 862 862 869 867	862	1,66	0,31	0,61	0,48	0,39
„	3	13	6,00 6,00 6,00 6,00	6,00	4,22	65 63 62 65	63,75	0,87	5,27	$\frac{8.600}{531}$ = 9,04	0,64	252 252 252 252	252,00	10,50 10,25 10,25 10,50	10,38	935 924 929 933	930	2,00	0,32	0,72	0,50	0,39
„	4	14	6,00 6,10 6,20 6,10	6,10	4,29	70 70 70 70	70,00	0,95	5,42	$\frac{9.600}{578}$ = 9,34	0,67	248 250 250 250	249,50	11,25 11,00 11,00 11,00	11,06	955 954 955 954	955	2,20	0,31	0,77	0,47	0,38

Установка вентилей.	Установка реостата на кнопки.	№ испытанія.	Нагнетаніе.			Всасываніе.			Полн. напоръ	Расходъ	Полез. работа насоса	Вольты.		Амперы.		Число оборот.		Полезная работа мотора	Полный коэф. полез. дѣйст. насоса	Механическія потери	Гидравл. коэф. пол. дѣйствія насоса η_{hp}	
			p_m	Среднее значеніе p_m	h_d mtr.	p_v	Среднее значеніе p_v	h_s mtr.	$H mtr.$	$Q_1 lt./sc.$	N_{ep}	E	Среенее значеніе E	J	Среднее значеніе J	n	Среднее значеніе n	N_{em}	η_p	N_r	опытн.	теорет.
II	6	15	7,50 7,40 7,20 7,30	7,35	5,17	95 95 100 95	96,25	1,31	6,66	$\frac{9.600}{511}$ = 10,57	0,94	250 252 252 250	251,00	14.50 14,25 14,00 14,50	14,31	1069 1071 1071 1067	1070	3,22	0,29	1,01	0,43	0,38
„	7	16	7,60 7,60 7,70 7,90	7,70	5,41	107 108 110 108	108,25	1,47	7,06	$\frac{10.600}{540}$ = 11,11	1,05	248 250 250 250	249,50	15,50 15,75 15,25 15,25	15,44	1091 1096 1092 1099	1095	3,59	0,29	1,07	0,41	0,38
„	8	17	8,30 8,30 8,30 8,30	8,30	5,83	122 122 120 120	121,00	1,65	7,66	$\frac{10.600}{524}$ = 11,45	1,17	250 250 251 250	250,25	17,75 17,50 17,50 17,50	17,56	1168 1163 1166 1163	1165	4,24	0,28	1,24	0,39	0,38
„	9	18	9,00 8,80 9,20 9,00	9,00	6,33	135 140 144 142	140,25	1,91	8,42	$\frac{15.600}{720}$ = 12,50	1,40	246 247 247 250	247,50	20,00 20,00 20,00 19,75	19,94	1201 1202 1209 1210	1207	4,95	0,28	1,36	0,39	0,38
„	10	19	10,00 10,00 9,80 9,80	9,90	6,96	150 158 153 153	153,5	2,09	9,23	$\frac{10.600}{468}$ = 12,82	1,58	249 250 248 250	249,25	23,50 23,25 23,25 23,25	23,31	1288 1290 1294 1292	1291	5,96	0,27	1,61	0,36	0,37
„	11	20	10,70 10,60 10,70 10,80	10,70	7,52	170 172 168 168	169,5	2,31	10,01	$\frac{11.600}{489}$ = 13,49	1,80	249 248 249 248	248,50	26,25 26,25 26,25 26,50	26,31	1354 1359 1356 1350	1355	6,83	0,26	1,82	0,36	0,37

III	0	21	7,80 7,75 7,80 7,75	7,78	5,46	—15 —18 —16 —12	— 15,25	— 0,21	5,43	$\frac{3.600}{505}$ = 3,56	0,26	252 250 249 250	250,25	7,75 7,75 7,75 7,75	7,75	848 845 846 849	847	1,19	0,22	0,58	0,43	0,43
„	2	22	8,50 8,40 8,40 8,40	8,43	5,93	—15 —15 —7 —8	— 11,25	— 0,15	5,96	$\frac{4.600}{638}$ = 3,76	0,30	250 250 250 251	250,25	8,25 8,25 8,25 8,25	8,25	887 887 888 888	888	1,37	0,22	0,65	0,42	0,43
„	3	23	8,70 8,75 8,75 8,60	8,70	6,12	—12 —13 —13 —13	— 12,75	— 0,17	6,13	$\frac{3.600}{467}$ = 3,85	0,31	252 252 352 248	251,00	8,75 8,75 8,75 8,75	8,75	909 909 901 895	904	1,43	0,22	0,68	0,41	0,43
„	4	24	9,20 9,30 9,20 9,30	9,25	6,50	—11 —13 —12 —11	— 11,75	— 0,16	6,52	$\frac{1.600}{150}$ = 4,00	0,35	250 249 250 249	249,50	9,75 9,25 9,25 9,25	9,38	934 937 941 941	938	1,61	0,22	0,74	0,40	0,43
„	6	25	10,80 10,90 10,90 10,90	10,83	7,65	—3 —9 —7 —8	— 6,75	— 0,09	7,74	$\frac{3.600}{396}$ = 4,55	0,47	250 250 250 248	249,50	11,25 11,25 11,25 11,25	11,25	1040 1041 1041 1044	1042	2,30	0,20	0,95	0,35	0,42
„	7	26	11,75 11,80 11,60 11,80	11,74	8,25	—3 —8 —4 —4	— 4,75	— 0,06	8,37	$\frac{3.600}{378}$ = 4,76	0,53	250 250 248 250	249,50	12,50 12,50 12,25 12,25	12,38	1084 1098 1087 1089	1090	2,53	0,21	1,06	0,36	0,42
„	8	27	12,75 12,90 12,80 13,00	12,86	9,04	—2 —6 —5 —5	— 4,50	— 0,06	9,16	$\frac{3.600}{362}$ = 4,97	0,61	250 250 250 250	250,00	14,00 14,00 13,75 14,00	13,94	1138 1139 1134 1144	1139	3,06	0,20	1,18	0,32	0,42
„	9	28	13,50 13,50 13,25 13,50	13,44	9,45	—4 —1 0 —7	— 3,00	— 0,04	9,59	$\frac{3.600}{349}$ = 5,16	0,66	250 249 248 250	249,25	15,75 15,75 15,60 15,25	15,59	1176 1178 1181 1184	1180	3,54	0,19	1,28	0,29	0,41

Установка вентилей.	Установка реостата на кнопки.	№ испытанія.	Нагнетаніе.			Всасываніе.			Полн. напоръ	Расходъ	Полез. работа насоса	Вольты.		Амперы.		Число оборот.		Полезная работа мотора	Полный коэф. полез. дѣйст. насоса	Механическія потери	Гидравл. коэф. пол. дѣйствія насоса η_{hp}	
			p_m	Среднее значеніе p_m	h_d mtr.	p_v	Среднее значеніе p_v	h_s mtr.	H mtr.	Q_1 lt./sc.	N_{ep}	E	Среднее значеніе E	J	Среднее значеніе J	n	Среднее значеніе n	N_{em}	η_p	N_r	опытн.	теорет.
III	10	29	14,60 14,70 14,60 14,60	14,63	10,28	3 0 2 0	1,25	0,02	10,48	$\frac{5.600}{550}$ = 5,45	0,76	251 251 250 250	250,50	16,80 16,75 16,75 16,60	16,72	1236 1232 1235 1233	1234	3,90	0,19	1,44	0,31	0,41
„	11	30	16,00 16,10 16,00 16,00	16,03	11,27	2 6 2 4	3,50	0,05	11,50	$\frac{5.600}{526}$ = 5,70	0,87	250 250 250 250	250,00	19,25 19,50 19,25 19,50	19,38	1302 1301 1302 1296	1300	4,69	0,19	1,64	0,28	0,41
„	12	31	17,80 17,80 17,75 17,00	17,59	12,37	10 5 0 0	3,75	0,05	12,60	$\frac{5.600}{495}$ = 6,06	1,02	250 250 249 249	249,50	22,75 22,75 22,70 22,50	22,68	1375 1377 1368 1384	1376	5,69	0,18	1,90	0,27	0,41
IV	0	32	7,60 7,60 7,60 7,70	7,63	5,36	—12 —3 —5 —8	— 7,00	— 0,10	5,44	$\frac{3.600}{556}$ = 3,24	0,23	250 250 249 251	250,00	8,50 8,50 8,25 8,25	8,38	843 846 848 850	847	1,35	0,17	0,58	0,30	0,43
„	2	33	8,40 8,20 8,30 8,25	8,24	5,79	—7 —2 —1 —3	— 3,25	— 0,04	5,93	$\frac{4.600}{652}$ = 3,68	0,29	250 249 249 250	249,50	8,75 8,25 8,30 8,30	8,40	883 887 886 892	887	1,36	0,21	0,65	0,41	1,43
„	3	34	9,00 9,00 8,90 8,90	8,95	6,29	—3 —6 —6 +1	— 3,50	— 0,05	6,42	$\frac{4.600}{606}$ = 3,96	0,34	250 250 249 249	249,50	9,25 9,25 9,25 9,25	9,25	928 930 928 933	930	1,67	0,20	0,72	0,36	0,43

„	4	35	9,25 9,10 9,25 9,20	9,20	6,47	—3 0 —2 0	— 1,25	— 0,02	6,63	$\frac{3.600}{451} = 3{,}99$	0,35	251 251 251 250	250,75	9,75 9,75 9,75 9,75	9,75	944 944 947 945	945	1,77	0,20	0,75	0,34	0,43
„	6	36	10,75 10,80 10,80 10,75	10,78	7,58	3 4 3 8	4,50	0,06	7,82	$\frac{3.600}{402} = 4{,}48$	0,47	250 250 251 250	250,25	11,75 12,00 11,75 11,70	11,80	1036 1041 1043 1042	1041	2,41	0,20	0,94	0,32	0,42
„	7	37	11,80 11,80 11,75 11,80	11,79	8,29	5 5 6 8	6,00	0,08	8,55	$\frac{5.600}{630} = 4{,}76$	0,54	250 250 250 250	250,00	12,75 12,75 12,75 12,75	12,75	1092 1084 1088 1095	1089	2,69	0,20	1,04	0,33	0,42
„	8	38	13,00 12,90 12,80 12,80	12,87	9,05	7 10 10 11	9,50	0,13	9,36	$\frac{5.600}{600} = 5{,}00$	0,62	250 249 250 250	249,75	14,25 14,25 14,25 14,25	14,25	1140 1141 1141 1138	1140	3,22	0,19	1,18	0,30	0,42
„	9	39	14,00 14,00 14,00 14,20	14,05	9,88	13 15 15 11	13,50	0,18	10,24	$\frac{6.600}{679} = 5{,}30$	0,72	251 251 252 251	251,25	15,75 15,75 15,75 15,75	15,75	1202 1201 1204 1203	1202	3,59	0,20	1,34	0,32	0,42
„	10	40	15,40 15,30 15,40 15,20 15,30	15,32	10,77	13 16 16 18 14	15,40	0,21	11,16	$\frac{5.600}{541} = 5{,}55$	0,82	251 250 250 250 250	250,20	18,25 18,00 18,00 18,00 17,75	18,00	1252 1258 1245 1251 1247	1255	4,30	0,19	1,50	0,29	0,42
„	11	41	16,80 16,60 16,75 16,75	16,72	11,75	18 22 18 19	19,25	0,26	12,19	$\frac{5.600}{515} = 5{,}83$	0,95	250 250 249 249	249,50	20,00 20,25 20,25 20,25	20,19	1320 1315 1317 1318	1318	4,95	0,19	1,70	0,28	0,42

Вторая группа опытовъ. Рабочее колесо состоитъ изъ 10 дисковъ съ разстояніями въ 2 m./m..

Установка вентилей.	Установка реостата на кнопки.	№ испытанія.	Нагнетаніе. p_m	Нагнетаніе. Среднее значеніе p_m	Нагнетаніе. h_d mtr.	Всасываніе. p_v	Всасываніе. Среднее значеніе p_v	Всасываніе. h_s mtr.	Полн. напоръ H mtr.	Расходъ Q_1 lt./sc.	Полез. работа насоса N_{ep}	Вольты. E	Вольты. Среднее значеніе E	Амперы. J	Амперы. Среднее значеніе J	Число оборот. n	Число оборот. Среднее значеніе n	Полезная работа мотора N_{em}	Полный коэф. полез. дѣйст. насоса η_p	Механическія потери N_r	Гидравл. коэф. пол. дѣйствія насоса η_{hp} опытн.	Гидравл. коэф. пол. дѣйствія насоса η_{hp} теорет.
I	0	1	6,30 6,10 6,00 6,25	6,16	4,33	12 14 13 20	14,75	0,20	4,71	$\frac{7.600}{536} = 7,84$	0,49	251 252 252 252	251,75	8,50 8,50 8,50 8,50	8,50	846 846 852 855	850	1,41	0,35	0,59	0,59	0,40
„	2	2	6,60 6,70 6,80 6,60	6,68	4,70	21 20 20 26	21,75	0,30	5,18	$\frac{8.600}{562} = 8,54$	0,57	249 249 252 250	250,00	9,25 9,25 9,25 9,25	9,25	880 894 889 886	887	1,62	0,35	0,65	0,60	0,40
„	3	3	7,30 7,25 7,20 7,30	7,26	5,10	24 25 25 28	25,50	0,35	5,63	$\frac{10.600}{664} = 9,04$	0,68	250 250 250 250	250,00	10,00 10,00 10,00 10,25	10,06	930 926 926 930	927	1,88	0,36	0,72	0,60	0,40
„	4	4	7,10 7,25 7,40 7,50	7,31	5,14	33 26 27 30	29,00	0,39	5,71	$\frac{11.600}{730} = 9,04$	0,69	248 251 250 250	249,75	11,20 11,00 11,20 11,00	11,10	948 942 947 949	946	2,24	0,31	0,75	0,46	0,40
„	6	5	8,75 8,70 8,60 8,70	8,69	6,11	41 45 48 48	45,50	0,62	6,91	$\frac{9.600}{524} = 10,31$	0,95	250 252 252 252	251,50	13,75 13,75 13,75 13,75	13,75	1046 1041 1045 1043	1044	3,05	0,31	0,95	0,45	0,40
„	7	6	9,40 9,25 9,40 9,50	9,39	6,60	53 52 50 53	52,00	0,71	7,49	$\frac{9.600}{495} = 10,91$	1,09	248 248 250 250	249,00	15,50 15,50 15,50 15,60	15,52	1090 1086 1093 1093	1090	3,59	0,30	1,06	0,43	0,40

„	8	7	10,00 10,00 9,80	9,95	6,99	61 58	57,50	0,78	7,95	= 11,45	1,21	249 249	249,00	17,00 17,25	17,31	1139 1132	1138	4,16	0,29	1,17	0,40	0,39
„	9	8	10,80 10,80 11,11 10,80	10,88	7,65	68 70 68 69	68,75	0,94	8,77	10.600 / 490 = 12,24	1,43	250 250 250 250	250,00	20,00 20,00 20,00 19,75	19,94	1205 1199 1197 1200	1200	4,96	0,29	1,34	0,40	0,39
„	10	9	11,80 11,80 11,90 11,60	11,78	8,28	75 75 73 76	74,75	1,02	9,48	10.600 / 467 = 12,42	1,57	250 250 249 249	249,50	22,25 22,25 22,25 22,25	22,25	1257 1255 1253 1258	1256	5,63	0,28	1,50	0,39	0,39
„	11	10	13,00 13,10 13,00 13,00	13,03	9,16	88 90 88 85	87,75	1,19	10,53	10.600 / 440 = 13,63	1,91	250 250 251 251	250,50	25,50 25,75 25,75 26,25	25,81	1324 1326 1327 1332	1327	6,70	0,28	1,73	0,38	0,38
II	0	11	5,25 5,25 5,25 5,25	5,25	3,69	52 50 53 52	51,75	0,70	4,57	8.600 / 576 = 8,33	0,51	252 252 251 251	251,50	9,00 9,00 9,25 9,00	9,06	846 843 844 852	846	1,58	0,32	0,58	0,51	0,40
„	2	12	5,75 5,80 5,80 5,75	5,78	4,06	58 60 60 60	59,50	0,81	5,05	8.600 / 538 = 8,92	0,60	251 252 250 250	250,75	9,75 9,75 9,75 9,75	9,75	885 882 884 884	884	1,80	0,33	0,64	0,52	0,40
„	3	13	6,00 6,00 6,10 6,10	6,05	4,25	71 73 72 72	72,00	0,98	5,41	9.600 / 573 = 9,42	0,68	250 250 250 250	250,00	10,50 10,70 9,60 10,50	10,33	926 923 926 923	925	1,98	0,34	0,71	0,53	0,40
„	4	14	6,60 6,60 6,70 6,60	6,63	4,66	78 81 82 84	81,25	1,11	5,95	10.600 / 601 = 9,98	0,79	250 250 250 250	250,00	11,50 11,70 11,75 11,75	11,68	968 970 968 966	968	2,42	0,33	0,79	0,48	0,40

Установка вентилей.	Установка реостата на кнопки.	№ испытания.	Нагнетаніе.			Всасываніе.			Полн. напоръ	Расходъ	Полез. работа насоса	Вольты.		Амперы.		Число оборот.		Полезная работа мотора	Полный коэф. полез. дѣйст. насоса	Механическія потери	Гидравл. коэф. пол. дѣйствія насоса η_{hp}	
			p_m	Среднее значеніе p_m	h_d mtr.	p_v	Среднее значеніе p_v	h_s mtr.	H mtr.	Q_1 lt./sc.	N_{ep}	E	Среднее значеніе E	J	Среднее значеніе J	n	Среднее значеніе n	N_{em}	η_p	N_r	опытн.	теорет.
II	6	15	7,25 7,25 7,20 7,20	7,23	5,08	98 95 98 98	97,25	1,32	6,58	$\frac{10.600}{555} = 10{,}81$	0,95	249 249 249 249	249,00	15,20 14,75 14,50 14,75	14,80	1030 1030 1034 1031	1031	3,43	0,28	0,92	0,38	0,39
„	7	16	7,80 7,80 7,80 7,80	7,80	5,48	116 111 116 110	113,25	1,54	7,20	$\frac{10.600}{523} = 11{,}28$	1,08	250 252 250 252	251,00	16,00 16,25 16,00 16,00	16,06	1089 1088 1089 1092	1090	3,79	0,29	1,06	0,40	0,39
„	8	17	8,60 8,30 8,40 8,50	8,45	5,94	131 127 132 129	129,75	1,76	7,88	$\frac{10.600}{498} = 12{,}05$	1,27	251 251 251 250	250,75	17,25 17,25 17,25 17,00	17,19	1133 1142 1139 1139	1138	4,11	0,31	1,17	0,43	0,39
„	9	18	9,10 9,10 9,00 9,20	9,10	6,40	143 140 148 148	144,75	1,97	8,55	$\frac{11.600}{522} = 12{,}64$	1,44	249 252 250 250	250,25	19,75 19,75 19,75 20,00	19,81	1203 1191 1191 1197	1196	4,92	0,29	1,33	0,40	0,38
„	10	19	9,80 10,00 9,80 9,90	9,88	6,95	165 167 163 165	165,00	2,24	9,37	$\frac{10.600}{444} = 13{,}51$	1,69	250 250 250 250	250,00	23,25 23,50 23,25 23,25	23,31	1266 1257 1256 1251	1258	5,97	0,28	1,51	0,38	0,38
„	11	20	10,80 11,00 11,00			200 195 190				$\frac{4.600}{413}$		250 250 250		28,75 29,75 29,25		1345 1348 1348						

III	0	21	[illegible] 8,00 7,90 8,00	7,98	5,61	[illegible] —11 —7 —8	— 9,50	— 0,13	5,66	$\frac{[illegible]}{780} = 3,85$	0,29	[illegible] 251 252 252	251,25	[illegible] 8,25 8,00 7,75	7,94	[illegible] [illegible] 846 852	849	1,24	0,23	0,59	0,45	0,44
„	2	22	8,75 8,75 8,75 8,75	8,75	6,15	—15 —10 —11 —10	— 11,50	— 0,16	6,17	$\frac{4.600}{590} = 4,07$	0,34	251 251 251 252	251,25	8,50 8,50 8,50 8,50	8,50	883 893 887 890	888	1,39	0,24	0,65	0,46	0,44
„	3	23	9,50 9,40 9,25 9,30	9,36	6,58	— 11 —7 —8 —6	— 8,00	— 0,11	6,65	$\frac{4.600}{558} = 4,30$	0,38	252 252 250 250	251,00	9,00 9,20 9,00 9,25	9,11	926 930 922 926	926	1,56	0,24	0,72	0,43	0,44
„	4	24	10,00 10,10 10,20 10,20	10,13	7,12	—10 —10 —9 —11	— 10,00	— 0,14	7,16	$\frac{4.600}{525} = 4,57$	0,44	248 248 252 252	250,00	10,00 10,00 10,00 10,00	10,00	973 975 978 977	976	1,82	0,24	0,81	0,43	0,43
„	6	25	10,90 10,90 11,00 11,00	10,95	7,70	—9 —7 —8 —8	— 8,00	— 0,11	7,77	$\frac{4.600}{500} = 4,80$	0,50	250 250 250 249	249,75	12,00 11,75 11,75 11,50	11,75	1016 1022 1025 1028	1023	2,41	0,21	0,90	0,33	0,43
„	7	26	12,20 12,10 12,10 12,10	12,13	8,53	—9 —8 —7 —4	— 7,00	— 0,10	8,61	$\frac{4.600}{473} = 5,07$	0,58	249 249 250 250	249,50	12,75 12,75 12,75 12,50	12,69	1071 1080 1081 1082	1079	2,67	0,22	1,03	0,35	0,43
„	8	27	13,20 13,25 13,20 13,20	13,21	9,29	—3 —2 —1 0	— 1,50	— 0,02	9,45	$\frac{4.600}{450} = 5,33$	0,67	250 251 251 250	250,50	13,70 13,75 13,75 13,75	13,74	1133 1131 1131 1136	1133	2,98	0,22	1,16	0,37	0,43
„	9	28	14,40 14,25 14,20 14,20	14,26	10,02	—5 0 0 +1	— 1,00	— 0,01	10,19	$\frac{5.600}{534} = 5,62$	0,76	250 250 250 249	249,75	15,50 15,25 15,25 15,25	15,31	1182 1180 1183 1181	1182	3,46	0,22	1,29	0,35	0,43

Установка вентилей.	Установка реостата на кнопки.	№ испытанія.	Нагнетаніе.			Всасываніе.			Полн. напоръ	Расходъ	Полез. работа насоса	Вольты.		Амперы.		Число оборот.		Полезная работа мотора	Полный коэф. полез. дѣйст. насоса	Механическія потери	Гидравл. коэф. пол. дѣйствія насоса η_{hp}	
			p_m	Среднее значеніе p_m	h_d mtr.	p_v	Среднее значеніе p_v	h_s mtr.	$H mtr.$	$Q_1 lt./sc.$	N_{ep}	E	Среднее значеніе E	J	Среднее значеніе J	n	Среднее значеніе n	N_{em}	η_p	N_r	опытн.	теорет.
III	10	29	15,60 15,50 15,40 15,50	15,50	10,90	+0 +3 +6 −3	+ 1,50	+ 0,02	11,10	$\frac{6.600}{609}$ = 5,91	0,87	251 250 251 250	250,50	17,00 17,00 17,00 17,00	17,00	1240 1242 1240 1245	1242	3,98	0,22	1,46	0,34	0,42
„	11	30	16,75 16,80 16,80 16,90	16,81	11,82	1 6 0 0	1,75	0,02	12,02	$\frac{9.600}{872}$ = 6,19	0,99	250 250 249 249	249,50	19,25 19,50 19,50 19,75	19,50	1296 1293 1298 1296	1296	4,75	0,21	1,63	0,32	0,42
„	12	31	19,00 19,10 19,00 19,10	19,05	13,39	9 2 7 3	5,25	0,07	13,64	$\frac{8.600}{726}$ = 6,61	1,20	250 250 250 250	250,00	23,70 23,00 23,00 23,75	23,36	1382 1381 1376 1410	1387	5,95	0,20	1,94	0,30	0,42
IV	0	32	7,60 7,90 8,00 7,80	7,83	5,50	0 −8 −6 −6	− 5,00	− 0,07	5,61	$\frac{4.600}{640}$ = 3,75	0,28	250 248 250 251	249,75	9,40 9,50 9,75 9,50	9,54	828 828 840 836	833	1,76	0,16	0,56	0,23	0,44
„	2	33	8,40 8,40 8,40 8,40	8,40	5,91	−6 −7 −5 −5	− 5,75	− 0,08	6,01	$\frac{4.600}{609}$ = 3,92	0,31	250 250 250 250	250,00	10,00 10,00 9,75 10,00	9,94	873 878 878 878	877	1,88	0,16	0,63	0,25	0,44
„	3	34	9,00 9,00 9,20 [illegible]	[illegible]	[illegible]	−1 −3 −1 [illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	$\frac{3.600}{431}$ [illegible]	[illegible]	249 249 252 [illegible]	[illegible]	10,50 10,25 10,50 [illegible]	[illegible]	915 921 922 [illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

"	4	35	9,80 10,00 9,80 9,90	9,88	6,95	0 0 +1 —4	—0,75	— 0,01	7,12	$\frac{5.600}{675} = 4,44$	0,42	250 251 249 250	250,00	11,00 11,00 11,00 10,75	10,94	969 962 963 962	964	2,16	0,19	0,78	0,30	0,44
"	6	36	11,50 11,60 11,50 11,60	11,55	8,12	10 3 2 6	5,25	0,07	8,37	$\frac{5.600}{606} = 4,95$	0,55	250 250 250 250	250,00	13,00 13,25 13,40 13,00	13,16	1053 1060 1063 1061	1059	2,84	0,19	0,98	0,30	0,43
"	7	37	12,50 12,50 12,50 12,50	12,50	8,79	10 5 6 8	7,25	0,10	9,07	$\frac{5.600}{580} = 5,17$	0,63	250 250 249 250	249,75	14,25 14,00 14,25 14,00	14,13	1104 1102 1108 1102	1104	3,13	0,20	1,09	0,31	0,43
"	8	38	13,10 13,20 13,10 13,10	13,13	9,23	13 8 10 11	10,50	0,14	9,55	$\frac{5.600}{555} = 5,41$	0,69	252 251 251 251	251,25	16,25 16,25 15,75 15,75	16,00	1128 1132 1131 1131	1131	3,74	0,18	1,16	0,27	0,43
"	9	39	14,00 14,00 14,00 14,00	14,00	9,84	12 14 15 18	14,75	0,20	10,22	$\frac{5.600}{535} = 5,61$	0,76	250 249 249 250	249,50	16,25 16,25 16,25 16,25	16,25	1180 1180 1182 1187	1182	3,77	0,20	1,29	0,31	0,42
"	10	40	15,25 15,20 15,30 15,25	15,25	10,72	20 22 15 20	19,25	0,26	11,16	$\frac{5.600}{509} = 5,90$	0,88	250 250 250 250	250,00	17,25 17,25 17,00 17,00	17,13	1244 1243 1246 1245	1245	4,01	0,22	1,47	0,35	0,42
"	11	41	16,80 16,75 17,00 16,80	16,59	11,66	18 22 16 18	18,50	0,25	12,09	$\frac{5.600}{482} = 6,22$	1,00	249 250 250 250	249,75	20,50 20,50 20,50 20,50	20,50	1303 1305 1306 1305	1305	5,07	0,20	1,66	0,29	0,42
"	12	42	18,80 18,90 19,20 19,00	18,98	13,34	28 25 26 31	27,50	0,37	13,89	$\frac{5.600}{453} = 6,62$	1,23	252 250 250 251	250,75	25,50 25,00 25,25 25,00	25,19	1396 1393 1397 1396	1396	6,47	0,19	1,97	0,27	0,42

Третья группа опытовъ. Рабочее колесо состоитъ изъ 8 дисковъ съ разстояніями въ 3$^{m.}/_{m.}$.

Установка вентилей.	Установка реостата на кнопки.	№ испытанія.	Нагнетаніе. p_m	Нагнетаніе. Среднее значеніе p_m	Нагнетаніе. h_d mtr.	Всасываніе. p_v	Всасываніе. Среднее значеніе p_v	Всасываніе. h_s mtr.	Полн. напоръ H mtr.	Расходъ Q_1 lt./sc.	Полез. работа насоса N_{ep}	Вольты. E	Вольты. Среднее значеніе E	Амперы. J	Амперы. Среднее значеніе J	Число оборот. n	Число оборот. Среднее значеніе n	Полезная работа мотора N_{em}	Полный коэф. полез. дѣйст. насоса η_p	Механическія потери N_r	Гидравл. коэф. пол. дѣйствія насоса η_{hp} опытн.	Гидравл. коэф. пол. дѣйствія насоса η_{hp} теорет.
I	0	1	5,00			12				7.600		249		8,75		823						
			5,00			16				542		250		8,75		829						
			5,10			17						250		8,40		832						
			5,10	5,05	3,55	17	15,50	0,21	3,94	= 7,93	0,42	250	249,75	8,40	8,58	834	830	1,43	0,29	0,56	0,48	0,38
„	2	2	5,60			22				7.600		249		9,20		864						
			5,50			23				498		249		9,00		870						
			5,60			22						249		9,00		869						
			5,60	5,58	3,92	20	21,75	0,29	4,39	= 8,43	0,49	249	249,00	9,00	9,05	870	868	1,57	0,31	0,62	0,51	0,38
„	3	3	6,20			28				7.600		252		9,75		918						
			6,20			28				462		252		10,00		918						
			6,20			29						252		9,80		922						
			6,20	6,20	4,36	29	28,50	0,39	4,93	= 9,09	0,60	252	252,00	9,80	9,84	918	919	1,80	0,33	0,70	0,54	0,38
„	4	4	6,75			33				5.600		252		10,75		961						
			6,75			35				308		252		10,75		959						
			6,80			33						252		10,75		963						
			6,80	6,78	4,77	33	33,50	0,46	5,41	= 9,74	0,70	252	252,00	10,75	10,75	960	961	2,11	0,33	0,78	0,53	0,38
„	6	5	7,80			52				10.600		250		13,50		1051						
			7,90			50				553		251		13,25		1049						
			7,90			50						251		13,25		1053						
			7,80	7,85	5,52	52	51,00	6,69	6,39	= 10,85	0,92	250	250,50	13,25	13,31	1050	1051	2,90	0,32	0.96	0,47	0,38
„	7	6	8,40			55				10.600		252		14,75		1105						
			8,50			58				521		252		15,00		1101						
			8,40			60						252		14,75		1104						
			8,30	8,40	5,91	55	57,00	0,78	6,87	= 11,52	1,06	252	252,00	14,50	14,75	1150	1104	3,33	0,32	1,09	0,47	0,37

„	8	7	9,10 9,20 9,10 9,00	9,10	6,40	69 65 65 62	65,25	0,89	7,47	$\frac{10.600}{495} = 12,12$	1,22	252 252 249 249	250,50	16,50 16,50 16,75 16,50	16,56	1150 1154 1147 1148	1150	3,89	0,31	1,21	0,46	0,37
„	9	8	9,80 9,75 9,80 9,75	9,78	6,88	70 78 73 71	73,00	0,99	8,05	$\frac{10.600}{473} = 12,69$	1,36	248 249 249 249	248,75	18,50 18,75 18,75 18,50	18,63	1206 1205 1204 1206	1205	4,53	0,30	1,35	0,43	0,37
„	10	9	10,60 10,70 10,50 10,50	10,58	7,44	83 85 82 85	83,75	1,14	8,76	$\frac{10.600}{447} = 13,42$	1,55	249 249 249 249	249	21,50 21,50 22,25 22,25	21,88	1262 1266 1263 1268	1265	5,52	0,28	1,53	0,39	0,37
„	11	10	11,50 11,50 11,50 11,40	11,48	8,07	100 98 98 100	99,00	1,35	9,60	$\frac{10.600}{423} = 14,21$	1,82	250 250 250 250	250,00	26,00 26,00 26,00 25,75	25,94	1338 1345 1339 1329	1338	6,73	0,27	1,77	0,37	0,37
II	0	11	5,00 5,00 5,00 5,00	5,00	3,52	39 39 42 41	40,25	0,55	4,25	$\frac{6.600}{485} = 7,42$	0,42	251 250 249 248	249,50	8,40 8,25 8,25 8,25	8,29	826 828 826 828	827	1,36	0,31	0,55	0,52	0,39
„	2	12	5,40 5,50 5,50 5,40	5,45	3,83	48 48 48 51	48,75	0,66	4,67	$\frac{7.600}{510} = 8,23$	0,51	252 252 252 252	252,00	8,80 8,80 8,80 8,80	8,80	878 873 877 876	876	1,47	0,35	0,63	0,60	0,39
„	3	13	5,90 6,00 5,90 5,90	5,93	4,17	53 53 59 60	56,25	0,77	5,12	$\frac{7.600}{491} = 8,55$	0,58	251 251 251 250	250,75	9,50 9,40 9,50 9,50	9,48	913 911 915 913	913	1,69	0,34	0,69	0,58	0,39
„	4	14	6,20 6,30 6,30 6,20	6,25	4,39	63 60 65 65	63,25	0,86	5,43	$\frac{8.600}{531} = 9,04$	0,65	248 248 249 249	248,50	10,25 10,25 10,25 10,25	10,25	953 965 955 953	957	2,00	0,33	0,77	0,53	0,38

Установка вентилей.	Установка реостата на кнопки.	№ испытанія.	Нагнетаніе.			Всасываніе.			Полн. напоръ	Расходъ	Полез. работа насоса	Вольты.		Амперы.		Число оборот.		Полезная работа мотора	Полный коэф. полез. дѣйст. насоса	Механическія потери	Гидравл. коэф. пол. дѣйствія насоса η_{hp}	
			p_m	Среднее значеніе p_m	h_d $mtr.$	p_v	Среднее значеніе p_v	h_s $mtr.$	$H mtr.$	$Q_1 lt./sc.$	N_{ep}	E	Среенее значеніе E	J	Среднее значеніе J	n	Среднее значеніе n	N_{em}	η_p	N_r	опытн.	теорет.
II	6	15	7,40 7,50 7,50 7,60	7,50	5,27	85 90 92 88	88,75	1,21	6,66	$\frac{12.600}{708} = 10,17$	0,90	248 252 253 253	251,50	12,70 12,75 12,75 12,75	12,74	1046 1057 1061 1056	1055	2,70	0,33	0,98	0,52	0,38
"	7	16	7,90 8,00 8,00 8,00	7,98	5,61	102 98 100 97	99,25	1,35	7,14	$\frac{10.600}{561} = 10,70$	1,02	250 250 250 251	250,25	14,20 14,00 14,00 14,00	14,05	1099 1099 1097 1099	1099	3,12	0,33	1,08	0,50	0,38
"	8	17	8,50 8,50 8,50 8,50	8,50	5,98	111 115 110 108	111,00	1,51	7,67	$\frac{9.600}{481} = 11,85$	1,21	248 251 250 250	249,75	15,75 15,75 16,00 15,75	15,81	1147 1141 1141 1146	1144	3,65	0,33	1,19	0,49	0,38
"	9	18	9,20 8,90 9,20 9,10	9,10	6,40	125 121 123 128	124,25	1,69	8,27	$\frac{9.600}{458} = 11,79$	1,30	248 249 249 249	248,75	18,00 18,00 17,75 18,00	17,94	1200 1198 1198 1203	1200	4,31	0,30	1,34	0,44	0,38
"	10	19	9,80 10,00 10,00 10,00	9,95	6,99	140 145 146 146	144,25	1,96	9,13	$\frac{10.600}{482} = 12,45$	1,52	248 252 252 252	251,00	20,00 20,50 20,50 20,25	20,31	1265 1264 1263 1265	1264	5,03	0,30	1,53	0,43	0,38
"	11	20	10,80 10,80 11,00 10,90	10,88	7,65	160 166 162 161	162,25	2,21	10,04	$\frac{10.600}{454} = 13,22$	1,77	251 252 252 252	251,75	23,25 23,00 23,60 23,50	23,34	1323 1323 1326 1324	1324	5,95	0,30	1,72	0,42	0,38

III	0	21	7,20 7,25 7,20 7,25	7,23	5,08	—18 —18 —10 —13	— 14,75	— 0,20	5,06	$\frac{4.600}{746}$ = 3,22	0,22	250 252 252 251	251,25	7,60 7,50 7,50 7,60	7,55	833 828 836 831	832	1,10	0,20	0,56	0,41	0,43
„	2	22	8,00 7,75 7,75 7,90	7,85	5,52	—15 — 8 — 8 —11	— 10,50	— 0,14	5,56	$\frac{3.600}{488}$ = 3,69	0,27	250 250 250 250	250,00	8,00 8,00 8,00 8,00	8,00	866 865 868 868	867	1,21	0,22	0,62	0,46	0,43
„	3	23	8,50 8,60 8,50 8,50	8,53	6,00	—12 —11 — 7 — 6	— 9,00	— 0,12	6,06	$\frac{3.600}{453}$ = 3,97	0,32	248 250 250 250	249,50	8,50 8,50 8,50 8,50	8,50	907 913 913 912	911	1,36	0,24	0,69	0,48	0,43
„	4	24	9,25 9,20 9,20 9,25	9,23	6,49	—11 — 9 —11 —12	— 10,75	— 0,15	6,52	$\frac{4.600}{569}$ = 4,22	0,37	250 250 250 250	250,00	9,30 9,50 9,40 9,40	9,40	956 955 959 957	957	1,63	0,23	0,77	0,43	0,42
„	6	25	10,80 10,80 10,80 10,80	10,80	7,59	—9 —7 —7 —5	— 7,00	— 0,10	7,67	$\frac{4.600}{511}$ = 4,70	0,48	249 248 249 248	248,50	11,25 11,25 11,25 11,20	11,24	1044 1044 1045 1046	1045	2,23	0,22	0,95	0,41	0,42
„	7	26	11,90 11,80 11,60 11,80	11,78	8,28	—5 —4 —2 —7	— 4,50	— 0,06	8,40	$\frac{4.600}{485}$ = 4,95	0,55	248 248 248 248	248,00	12,50 12,50 12,40 12,40	12,45	1093 1091 1098 1095	1094	2,58	0,21	1,07	0,36	0,42
„	8	27	12,75 12,75 12,70 12,80	12,75	8,96	—2 +3 —8 —6	— 3,25	— 0,04	9,10	$\frac{5.600}{578}$ = 5,19	0,63	250 249 250 249	249,50	13,75 13,75 13,75 13,60	13,71	1140 1148 1146 1137	1143	2,97	0,21	1,19	0,35	0,42

Установка вентилей.	Установка реостата на кнопки.	№ испытанія.	Нагнетаніе. p_m	Нагнетаніе. Среднее значеніе p_m	Нагнетаніе. h_d mtr.	Всасываніе. p_v	Всасываніе. Среднее значеніе p_v	Всасываніе. h_s mtr.	Полн. напоръ H mtr.	Расходъ Q_1 lt./sc.	Полез. работа насоса N_{ep}	Вольты. E	Вольты. Среднее значеніе E	Амперы. J	Амперы. Среднее значеніе J	Число оборот. n	Число оборот. Среднее значеніе n	Полезная работа мотора N_{em}	Полный коэф. полез. дѣйст. насоса η_p	Механическія потери N_r	Гидравл. коэф. пол. дѣйствія насоса η_{hp} опытн.	Гидравл. коэф. пол. дѣйствія насоса η_{hp} теорет.
III	9	28	13,90 13,90 13,75 13,80	13,84	9,73	−3 −3 +3 +3	0,00	0,00	9,91	$\frac{5.600}{549} = 5,46$	0,72	249 250 249 250	249,50	15,20 15,20 15,00 15,00	15,10	1196 1194 1193 1198	1195	3,39	0,21	1,32	0,35	0,42
„	10	29	15,00 15,00 15,00 14,80	14,95	10,51	−1 +2 +3 −2	+ 0,50	0,01	10,70	$\frac{5.600}{525} = 5,71$	0,81	249 249 248 249	248,75	16,75 16,80 16,75 16,75	16,76	1246 1247 1244 1253	1248	3,88	0,21	1,48	0,34	0,41
„	11	30	16,20 16,00 16,10 16,00	16,05	11,28	2 4 8 0	3,50	0,05	11,51	$\frac{5.600}{502} = 5,98$	0,92	248 249 248 249	248,50	19,00 19,00 19,25 19,00	19,06	1299 1300 1305 1305	1302	4,60	0,20	1,65	0,31	0,41
IV	0	31	7,10 7,10 7,00 7,10	7,08	4,98	−12 −12 − 6 − 9	− 9,75	− 0,13	5,03	$\frac{3.600}{561} = 3,21$	0,22	250 251 250 250	250,25	7,50 7,50 7,50 7,50	7,50	831 831 832 827	830	1,09	0,20	0,56	0,41	0,42
„	2	32	7,60 7,60 7,40 7,50	7,53	5,29	−7 −8 0 −2	− 4,25	− 0,06	5,41	$\frac{3.600}{487} = 3,70$	0,27	250 249 249 249	249,25	7,60 7,60 7,40 7,50	7,53	870 863 864 868	866	1,09	0,25	0,61	0,56	0,42
„	3	33	8,30 8,40 8,30 8,40	8,35	5,87	−2 −4 −2 −5	− 3,25	− 0,04	6,01	$\frac{4.600}{600} = 4,00$	0,32	253 252 251 251	251,75	8,50 8,50 8,50 8,50	8,50	918 911 919 918	917	1,36	0,24	0,70	0,48	0,42

"	4	34	9,00 9,00 9,10 9,10	9,05	6,36	—3 —2 —5 —5	— 3,75	— 0,05	6,49	$\frac{3.600}{422} = 4,27$	0,37	251 250 251 252	251,00	9,25 9,25 9,25 9,25	9,25	954 961 958 960	958	1,59	0,23	0,77	0,45	0,42
"	6	35	10,60 10,60 10,70 10,75	10,66	7,49	2 0 5 4	2,75	0,04	7,71	4.600 507 = 4,73	0,49	250 252 251 252	251,25	11,00 11,00 11,00 11,00	11,00	1046 1049 1046 1050	1048	2,12	0,23	0,96	0,42	0,42
"	7	36	11,60 11,60 11,60 11,60	11,60	8,15	5 6 8 8	6,75	0,09	8,42	4.600 478 = 5,02	0,56	251 251 250 250	250,50	12,25 12,25 12,25 12,25	12,25	1099 1090 1100 1102	1098	2,50	0,22	1,08	0,39	0,42
"	8	37	12,60 12,40 12,30 12,60	12,48	8,77	8 13 13 15	14,75	0,20	9,15	5.600 570 = 5,26	0,64	249 250 248 252	249,75	13,50 13,50 13,50 13,50	13,50	1145 1140 1140 1150	1144	2,90	0,22	1,19	0,37	0,42
"	9	38	13,80 13,80 13,70 13,80	13,78	9,69	14 11 17 13	13,75	0,19	10,06	$\frac{5.600}{543} = 5,52$	0,74	252 254 250 250	251,50	15,00 15,00 15,00 15,00	15,00	1200 1191 1190 1198	1195	3,34	0,22	1,32	0,37	0,42
"	10	39	14,75 14,80 14,60 14,75	14,73	10,36	19 15 18 20	18,00	0,24	10,78	$\frac{5.600}{519} = 5,78$	0,83	249 248 249 249	248,75	16,75 16,50 16,50 16,50	16,56	1245 1255 1250 1251	1250	3,81	0,22	1,48	0,36	0,41
"	11	40	15,80 15,75 15,70 15,90	15,79	11,10	20 22 21 19	20,50	0,28	11,56	$\frac{5.600}{498} = 6,02$	0,93	248 249 249 249	248,75	18,50 18,75 18,50 18,50	18,56	1307 1305 1303 1297	1303	4,43	0,21	1,65	0,34	0,41

Четвертая группа опытовъ. Рабочее колесо состоитъ изъ 7 дисковъ съ разстояніями въ $4^{m}/_{m}$.

Установка вентилей.	Установка реостата на кнопки.	№ испытанія.	Нагнетаніе. p_m	Нагнетаніе. Среднее значеніе p_m	Нагнетаніе. h_d mtr.	Всасываніе. p_v	Всасываніе. Среднее значеніе p_v	Всасываніе. h_s mtr.	Полн. напоръ $H_{mtr.}$	Расходъ $Q_1 lt./sc.$	Полез. работа насоса N_{ep}	Вольты. E	Вольты. Среднее значеніе E	Амперы. J	Амперы. Среднее значеніе J	Число оборот. n	Число оборот. Среднее значеніе n	Полезная работа мотора N_{em}	Полный коэф. полез. дѣйст. насоса η_p	Механическія потери N_r	Гидравл. коэф. пол. дѣйствія насоса η_{hp} опытн.	Гидравл. коэф. пол. дѣйствія насоса η_{hp} теорет.
I	0	1	4,50			12				5.600		250		8,50		827						
			4,50			17				398		250		8,50		829						
			4,60			17						250		8,50		827						
			4,50	4,53	3,18	18	16,00	0,22	3,58	= 7,54	0,36	248	249,50	8,50	8,50	828	828	1,42	0,25	0,56	0,42	0,36
„	2	2	5,00			21				5.600		252		9,25		875						
			5,00			21				366		252		9,20		873						
			5,00			20						252		9,10		875						
			5,00	5,00	3,52	22	21,00	0,28	3,98	= 8,20	0,44	251	251,75	9,10	9,16	875	875	1,62	0,27	0,63	0,44	0,36
„	3	3	5,25			25				7.600		251		10,00		910						
			5,20			24				481		251		10,00		912						
			5,25			25						251		9,80		915						
			5,25	5,24	3,69	31	26,25	0,36	4,23	= 8,73	0,49	251	251,00	9,80	9,90	909	912	1,82	0,27	0,69	0,43	0,36
„	4	4	5,75			31				10.600		251		10,80		956						
			5,75			32				640		251		10,75		949						
			5,80			33						252		10,80		958						
			5,75	5,76	4,05	35	32,75	0,45	4,68	= 9,38	0,59	254	252,00	10,80	10,79	955	955	2,10	0,28	0,77	0,44	0,36
„	6	5	6,75			45				10.600		249		13,30		1050						
			6,60			49				568		250		13,40		1047						
			6,60			45						250		13,40		1051						
			6,60	6,64	4,67	47	46,50	0,63	5,48	= 10,56	0,77	250	249,75	13,40	13,38	1052	1050	2,92	0,26	0,96	0,39	0,35
„	7	6	7,20			55				10.600		249		15,00		1095						
			7,10			51				639		250		15,00		1094						
			7,10			55						249		14,80		1096						
			7,10	7,13	5,01	56	54,25	0,74	5,93	= 9,39	0,74	249	249,25	14,75	14,89	1098	1096	3,38	0,22	1,07	0,32	0,35

„	8	7	7,60 7,70 7,80 7,80	7,73	5,43	60 62 62 66	62,50	0,85	6,46	$\frac{10.600}{512} = 11,72$	1,01	250 249 250 250	249,75	16,50 16,50 16,50 16,40	16,48	1141 1146 1146 1145	1145	3,87	0,26	1,19	0,38	0,35
„	9	8	8,30 8,30 8,40 8,30	8,33	5,86	71 72 72 72	71,75	0,98	7,02	$\frac{10.600}{490} = 12,24$	1,15	249 249 249 249	249,00	18,50 18,50 18,50 18,60	18,53	1197 1199 1196 1200	1198	4,51	0,25	1,33	0,36	0,35
„	10	9	9,00 9,00 9,00 9,00	9,00	6,33	76 78 81 82	79,25	1,08	7,59	$\frac{10.600}{460} = 13,04$	1,32	248 248 248 248	248,00	21,00 21,00 21,00 21,00	21,00	1256 1260 1250 1250	1254	5,28	0,25	1,50	0,35	0,35
„	11	10	10,00 9,90 10,00 10,00	9,98	7,02	91 92 90 95	92,00	1,23	8,43	$\frac{10.600}{437} = 13,73$	1,54	251 250 248 249	249,50	24,50 24,00 24,00 24,00	24,13	1327 1330 1324 1320	1325	6,20	0,25	1,72	0,34	0,34
II	0	11	4,50 4,50 4,30 4,50	4,45	3,13	33 35 38 37	35,75	0,49	3,80	$\frac{5.600}{435} = 6,90$	0,35	249 248 250 248	248,75	8,25 8,20 8,00 8,10	8,14	821 831 824 826	826	1,30	0,27	0,55	0,47	0,37
„	2	12	4,80 4,80 4,80 4,80	4,80	3,37	45 42 48 42	44,25	0,60	4,15	$\frac{6.600}{484} = 7,44$	0,41	252 252 252 249	251,25	8,40 8,45 8,50 8,40	8,44	869 872 870 873	871	1,38	0,30	0,62	0,54	0,37
„	3	13	5,20 5,20 5,20 5,25	5,21	3,66	52 52 55 52	52,75	0,72	4,56	$\frac{5.600}{379} = 7,91$	0,48	251 251 251 250	250,75	9,00 9,10 9,00 9,00	9,03	912 909 910 909	910	1,53	0,31	0,69	0,57	0,37
„	4	14	5,60 5,60 5,70 5,60	5,63	3,96	65 65 64 67	65,25	0,89	5,03	$\frac{6.600}{423} = 8,51$	0,57	250 250 250 250	250,00	10,00 10,00 9,80 10,00	9,95	949 954 950 956	952	1,82	0,31	0,76	0,54	0,37

Установка вентилей.	Установка реостата на кнопки.	№ испытанія.	Нагнетаніе. p_m	Нагнетаніе. Среднее значеніе p_m	Нагнетаніе. h_d mtr.	Всасываніе. p_v	Всасываніе. Среднее значеніе p_v	Всасываніе. h_s mtr.	Полн. напоръ $H_{mtr.}$	Расходъ $Q_1 lt./sc.$	Полез. работа насоса N_{ep}	Вольты. E	Вольты. Среднее значеніе E	Амперы. J	Амперы. Среднее значеніе J	Число оборот. n	Число оборот. Среднее значеніе n	Полезная работа мотора N_{em}	Полный коэф. полез. дѣйст. насоса η_p	Механическія потери N_r	Гидравл. коэф. пол. дѣйствія насоса η_{hp} опытн.	Гидравл. коэф. пол. дѣйствія насоса η_{hp} теорет.
II	6	15	6,60 6,60 6,70 6,60	6,63	4,66	85 89 87 88	87,25	1,19	6,03	$\frac{7.600}{437} = 9,61$	0,77	250 250 250 250	250,00	12,00 12,00 12,50 12,50	12,25	1041 1048 1047 1039	1044	2,54	0,30	0,95	0,42	0,37
„	7	16	7,00 7,20 7,25 7,10	7,14	5,02	98 99 100 98	98,75	1,34	6,54	$\frac{7.600}{413} = 10,17$	0,89	249 250 250 250	249,75	13,50 13,50 13,50 13,25	13,44	1091 1095 1089 1095	1093	2,90	0,31	1,06	0,48	0,37
„	8	17	7,70 7,50 7,70 7,60	7,63	5,36	113 108 112 117	112,50	1,53	7,07	$\frac{8.600}{448} = 10,71$	1,01	250 250 249 348	249,25	15,00 15,20 15,25 15,25	15,18	1136 1131 1141 1137	1136	3,45	0,29	1,17	0,44	0,37
„	9	18	8,00 8,20 8,20 8,20	8,15	5,73	123 127 130 126	126,50	1,72	7,63	$\frac{10.600}{530} = 11,32$	1,15	248 248 248 247	247,75	17,00 16,75 16,75 16,75	16,81	1188 1188 1189 1186	1188	3,95	0,29	1,31	0,44	0,37
„	10	19	9,00 8,90 8,90 9,00	8,95	6,29	145 143 140 149	144,25	1,96	8,43	$\frac{10.600}{497} = 12,07$	1,36	252 252 251 252	251,75	19,25 19,25 19,50 19,25	19,31	1248 1260 1251 1251	1253	4,71	0,29	1,49	0,42	0,36
„	11	20	9,50 9,50 9,50 [illegible]	9,50	6,68	159 162 160 160	160,25	2,18	9,04	$\frac{10.600}{475} = 12,63$	1,52	250 250 250 251	250,25	21,50 21,50 21,00 21,25	21,31	1302 1301 1303 1299	1301	5,33	0,29	1,64	0,41	0,36

III	0	21	6,50 6,50 6,50 6,40	6,48	4,56	—30 —12 —18 —16	— 19,00	— 0,26	4,48	$\frac{3.600}{617} = 2,92$	0,17	250 250 250 250	250,00	7,25 7,25 7,25 7,25	7,25	823 827 824 825	825	1,02	0,17	0,55	0,36	0,40
„	2	22	7,10 7,00 7,20 7,20	7,15	5,03	—18 —11 —11 —15	— 13,75	— 0,19	5,02	$\frac{2.600}{567} = 3,17$	0,21	248 248 250 250	249,00	7,50 7,50 7,60 7,60	7,55	859 860 871 870	865	1,08	0,19	0,61	0,45	0,40
„	3	23	7,80 7,60 7,75 7,80	7,74	5,44	—16 — 8 —10 —11	— 11,25	— 0,15	5,47	$\frac{3.600}{505} = 3,56$	0,26	250 250 250 250	250,00	8,00 8,00 8,00 8,00	8,00	908 903 911 906	907	1,22	0,21	0,68	0,48	0,40
„	4	24	8,50 8,50 8,50 8,40	8,48	5,96	—13 —15 —14 — 5	— 11,75	— 0,16	5,98	$\frac{4.600}{611} = 3,93$	0,31	250 249 250 250	249,75	8,75 9,00 8,75 8,75	8,81	950 947 951 951	950	1,42	0,22	0,76	0,47	0,40
„	6	25	9,90 10,00 10,00 9,90	9,95	6,99	—10 —10 —11 — 9	— 10,00	— 0,14	7,03	$\frac{4.600}{543} = 4,42$	0,41	248 250 250 250	249,50	10,50 10,50 10,50 10,50	10,50	1043 1045 1046 1046	1045	1,97	0,21	0,95	0,40	0,40
„	7	26	10,75 10,75 10,60 10,70	10,70	7,52	—9 —8 —7 —8	— 8,00	— 0,11	7,59	$\frac{4.600}{517} = 4,64$	0,47	249 249 249 249	249,00	11,50 11,50 11,50 11,50	11,50	1083 1088 1086 1086	1086	2,30	0,20	1,05	0,38	0,40
„	8	27	11,60 11,60 11,60 11,60	11,60	8,15	—8 —6 —7 —5	— 6,50	— 0,09	8,24	$\frac{4.600}{491} = 4,89$	0,54	251 252 251 252	251,50	12,60 12,50 12,50 12,50	12,53	1140 1134 1140 1140	1139	2,57	0,21	1,18	0,39	0,40

Установка вентилей.	Установка реостата на кнопки.	№ испытанія.	Нагнетаніе. p_m	Нагнетаніе. Среднее значеніе p_m	Нагнетаніе. h_d mtr.	Всасываніе. p_v	Всасываніе. Среднее значеніе p_v	Всасываніе. h_s mtr.	Полн. напоръ $H mtr.$	Расходъ $Q_1 lt./sc.$	Полез. работа насоса N_{ep}	Вольты. E	Вольты. Среднее значеніе E	Амперы. J	Амперы. Среднее значеніе J	Число оборот. n	Число оборот. Среднее значеніе n	Полезная работа мотора N_{em}	Полный коэф. полез. дѣйст. насоса η_p	Механическія потери N_r	Гидравл. коэф. пол. дѣйствія насоса η_{hp} опытн.	Гидравл. коэф. пол. дѣйствія насоса η_{hp} теорет.
III	9	28	12,60 12,60 12,50 12,65	12,61	8,86	—4 0 —9 —6	—4,75	—0,06	8,98	$\frac{5.600}{582} = 5,15$	0,62	251 252 252 252	251,75	14,25 14,00 14,00 13,75	14,00	1187 1187 1193 1195	1191	3,03	0,20	1,31	0,36	0,40
„	10	29	13,90 13,80 13,80 13,80	13,83	9,72	—4 0 —1 +1	—1,00	—0,01	9,89	$\frac{5.600}{553} = 5,42$	0,71	251 252 252 252	251,75	15,50 15,50 15,50 15,50	15,50	1250 1244 1245 1239	1245	3,48	0,20	1,47	0,35	0,40
„	11	30	14,75 14,75 14,75 14,75	14,75	10,37	—2 +3 —1 0	0,00	0,00	10,55	$\frac{5.600}{531} = 5,65$	0,79	250 250 250 250	250,00	17,00 16,80 16,80 16,75	16,84	1299 1286 1291 1297	1293	3,89	0,20	1,62	0,35	0,40
IV	0	31	6,50 6,30 6,30 6,40	6,38	4,47	—10 —9 0 —5	—6,00	—0,08	4,57	$\frac{3.600}{560} = 3,21$	0,20	252 251 250 250	250,75	7,50 7,40 7,60 7,50	7,50	832 826 830 830	830	1,10	0,18	0,56	0,37	0,41
„	2	32	7,00 7,00 6,80 6,90	6,93	4,87	—6 —8 —6 +1	—4,75	—0,06	4,99	$\frac{3.600}{484} = 3,72$	0,25	250 250 250 250	250,00	7,80 7,80 7,80 7,80	7,80	866 867 868 872	868	1,15	0,22	0,62	0,47	0,41
„	3	33	7,80 7,70 7,60 7,60	7,68	5,40	0 0 +1 +2	+0,75	+0,01	5,59	$\frac{5.600}{727} = 4,13$	0,31	252 251 250 250	250,75	8,40 8,40 8,40 8,40	8,40	922 916 916 918	918	1,33	0,23	0,70	0,49	0,41

"	4	34	8,30 8,30 8,40 8,40	8,35	5,87	+3 +3 +3 +2	+ 2,75	0,04	6,09	4.600 / 548 = 4,38	0,36	250 250 250 250	250,00	9,00 9,00 9,00 9,00	9,00	955 956 962 957	958	1,49	0,24	0,77	0,50	0,41
"	6	35	9,75 9,80 9,80 9,80	9,79	6,88	8 10 10 10	9,50	0,13	7,19	4.600 / 490 = 4,90	0,47	249 249 249 249	249,00	10,75 10,75 10,75 10,75	10,75	1050 1047 1050 1046	1048	2,03	0,23	0,96	0,44	0,40
"	7	36	10,50 10,50 10,50 10,60	10,53	7,40	11 16 12 13	13,00	0,18	7,76	5.600 / 580 = 5,17	0,53	250 249 249 249	249,25	11,75 11,75 11,75 11,75	11,75	1094 1094 1097 1099	1096	2,34	0,23	1,07	0,42	0,40
"	8	37	11,25 11,20 11,30 11,40	11,29	7,94	13 20 15 15	15,75	0,21	8,33	5.600 / 552 = 5,43	0,60	249 249 250 250	249,50	12,80 13,20 13,00 13,00	13,00	1142 1144 1147 1141	1144	2,74	0,22	1,19	0,39	0,40
"	9	38	12,25 12,25 12,20 12,30	12,25	8,61	20 24 20 20	21,00	0,29	9,08	5.600 / 525 = 5,71	0,69	249 249 251 250	249,75	14,60 14,50 14,50 14,50	14,53	1197 1198 1201 1192	1197	3,20	0,22	1,33	0,37	0,40
"	10	39	13,60 13,50 13,40 13,50	13,50	9,49	23 26 21 26	24,00	0,33	10,00	5.600 / 498 = 6,02	0,80	250 252 252 253	251,75	16,20 16,50 15,75 16,00	16,11	1255 1255 1245 1258	1253	3,68	0,22	1,49	0,37	0,40
"	11	40	14,60 14,60 14,60 14,60	14,60	10,26	26 30 32 30	29,50	0,40	10,84	5.600 / 476 = 6,30	0,91	248 248 248 248	248,00	17,25 17,75 17,75 17,75	17,63	1305 1297 1302 1305	1302	4,15	0,22	1,65	0,36	0,40

Замѣченныя опечатки.

Страница.	Строка сверху	Строка снизу	Напечатано:	Должно быть:
5	5	—	$X_x, \quad Y_y, \quad Z_z$	$X_n, \quad Y_n, \quad Z_n.$
„	—	6	(5, a)	$(5, a)$
„	—	9	(4, a)	$(4, a)$
10	3	—	U	u
„	5	—	U	u
11	—	3	(17, b)	$(17, b)$
„	—	5	(17, b)	$(17, b)$
20	—	15	Въ случаѣ....	13. Въ случаѣ....
23	—	12	$\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}$	$\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}$
24	3	—	$\frac{\partial v}{\partial x}$	$\frac{\partial v}{\partial z}$
„	17	—	(45)	(46)
„	—	3	$\frac{\partial w}{\partial x}$	$\frac{\partial w}{\partial z}$
29	—	2	θ	Θ
„	—	4	θ	Θ
„	—	6	θ	Θ
32	—	6	$\frac{d\frac{\omega_1}{dt}}{dt}$	$\frac{d\frac{\omega_1}{\rho}}{dt}$
34	18	—	вихривой	вихревой
37	—	2	VII	VI
46	—	6	Имѣя зависимости...	31. Имѣя зависимости...
50	—	4	...и расширенія; и...	...и расширенія и...
51	—	9	$N_y \lambda = -p + (a+b+c) + 2\mu b,$	$N_y = -p + \lambda(a+b+c) + + 2\mu b,$
58	5	—	...нормами...	...нормали...
„	—	11	$cz(n,z)$	$cs(n,z)$
64	9	—	$\ldots\Big]^2 + 2p_1^2 + \ldots$	$\ldots\Big]^2\Big\} + 2p_1^2 + \ldots$

Страница.	Строка. сверху.	снизу.	Напечатано:	Должно быть:
64	—	6	N_a	N_x
91	—	12	границахъ.	границахъ.
„	17	—	...капи- ллярныя...	...капил- лярныя...
103	12	—	η_m	η_h
106	—	12	...между парой парой плоскостей...	...между парой плоскостей...
107	1	—	...жидкость благодаря...	...жидкость, благодаря...
„	2	—	...о плоскости будетъ...	...о плоскости, будетъ..
„	—	2	изь	изъ
109	10	—	$\nu_1(\omega r - w_t)\Big\vert_{z=+h} = \ldots$	$\nu_1(\omega r - w_t)\Big\vert_{z=-h} = \ldots$
110	—	1	$= \lambda \dfrac{kr^2 a'_2 + 2a_0 a_1'}{\ldots\ldots}$	$= \lambda \dfrac{kr^2 a'_3 + 2a_0 a_1'}{\ldots\ldots}$
111	5	—	Въ форм. (197) стоятъ: a_1 и a_3	a_1' и a_3'
112	—	5	...скоростью w.	...скоростью ω.
116	14	—	η	ν
„	—	18	...трѣнія...	...тренія...
118	—	14	... дял ...	...для...
120	—	17	$[\mu]$	$[\nu]$
„	—	19	... трѣнія μ...	тренія ν.
123	—	8	турбулентнымъ..	турбулентнымъ.
„	19	—	...цри...	...при...
125	12	—	...дла...	...для...
129	—	5	... $= U_8'$...	...$=U_2'=$...
„	—	13	... $- U_4' +$ ...	...$-U_2'+$...

5-00