Міністерство освіти і науки України
Національний університет водного господарства та природокористування
Кафедра прикладної математики

04-01-37

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання лабораторних робіт з навчальної дисципліни «Чисельні методи математичної фізики» для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня за спеціальністю 113 «Прикладна математика» денної та заочної форм навчання

Рекомендовано науково-методичною
комісією зі спеціальності
113 «Прикладна математика».
Протокол № 2 від 04.12.2018 р.

Рівне – 2019

Методичні вказівки до виконання лабораторних робіт з навчальної дисципліни «Чисельні методи математичної фізики» для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня за спеціальністю 113 «Прикладна математика» денної та заочної форми навчання / Остапчук О. П. – Рівне : НУВГП, 2019. – 38 с.

Укладач: Остапчук О. П. – к.т.н, доцент кафедри прикладної математики.

Відповідальний за випуск: Мартинюк П. М., д.т.н., доцент, завідувач кафедри прикладної математики.

Зміст

Лабораторна робота 1

Чисельне розв'язання задачі Діріхле для рівняння Пуассона

Теоретичні відомості

Знайдемо наближений розв'язок $U(x, y)$ задачі Діріхле для рівняння Пуассона:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = f(x, y),\ (x, y) \in G, \tag{1.1}$$

який задовольняє граничним умовам:

$$U\big|_{\Gamma} = \varphi(x, y), (x, y) \in \Gamma. \tag{1.2}$$

Для цього використаємо метод скінченних різниць на п'ятиточковому шаблоні "хрест". Апроксимація похідних в рівнянні (1.1) має вигляд

$$\frac{\partial^2 U(x_i, x_j)}{\partial x^2} \approx \frac{U_{i+1,j} - 2U_{ij} + U_{i-1,j}}{h_1^2}, \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial^2 U(x_i, x_j)}{\partial y^2} \approx \frac{U_{i,j+1} - 2U_{ij} + U_{i,j-1}}{h_2^2}. \tag{1.4}$$

$$\begin{cases} U_{i-1,j} + U_{i+1,j} + U_{i,j+1} - U_{i.j+1} - 4U_{ij} = h^2 f_{ij}, \\ \qquad i = \overline{1, n-1},\ j = \overline{1, m-1}. \end{cases} \tag{1.5}$$

$$\begin{cases} U_{i0} = \varphi_{i0}, U_{im} = \varphi_{im}, i = \overline{1, n-1}, \\ U_{0j} = \varphi_{0j}, U_{nj} = \varphi_{nj}, \mathrm{j} = \overline{1, m-1}. \end{cases} \tag{1.6}$$

Систему різницевих рівнянь (1.5) та граничні різницеві умови (1.6) називаються різницевою апроксимацією або різницевою схемою крайової задачі (1.1), (1.2).

Чисельні методи розв'язання різницевої схеми

Різницеву схему (1.5), (1.6) можна розв'язувати різними методами (прямими, ітераційними).

Ітераційний метод Лібмана

Знаходження значення функції на нульовій ітерації:

$$\begin{cases} U_{ij}(0) = \dfrac{1}{4}(U_{i0} + U_{im} + U_{0j} + U_{nj}), \\ i = \overline{1, n-1},\ j = \overline{1, m-1}. \end{cases} \tag{1.6}$$

$$U_{ij}^{(k+1)} = \frac{1}{4}\left(U_{i-1,j}^{(k)} + U_{i+1,j}^{(k)} + U_{i,j-1}^{(k)} + U_{i,j+1}^{(k)}\right) - \left(\frac{h}{2}\right)^2 f_{ij}, \tag{1.7}$$

$$i = \overline{1, n-1},\ \ j = \overline{1, m-1}.$$

Ітераційний метод Гауса-Зейделя

$$U_{ij}^{(k+1)} = \frac{1}{4}\left(U_{i-1,j}^{(k+1)} + U_{i+1.j}^{(k)} + U_{i,j-1}^{(k+1)} + U_{i,j+1}^{(k)}\right) - \left(\frac{h}{2}\right)^2 f_{ij}, \tag{1.8}$$

$$i = \overline{1, n-1},\ \ j = \overline{1, m-1}.$$

Ітераційний метод послідовної верхньої релаксації

$$U_{ij}^{(k+1)} = \frac{\omega}{4}\left(U_{i-1,j}^{(k+1)} + U_{i+1,j}^{(k)} + U_{i,j-1}^{(k+1)} + U_{i,j+1}^{(k)}\right) + (1-\omega)U_{ij}^{k} - \left(\frac{h}{2}\right)^2 f_{ij}, \tag{1.9}$$

$$i = \overline{1, n-1},\ \ j = \overline{1, m-1}.$$

де ω – релаксаційний параметр $\omega = \dfrac{2}{1+\sqrt{1-\rho^2}}$, $1 \le \omega \le 2$,

ρ – найбільше по модулю власне значення матриці Якобі, яке для прямокутної області обчислюється $\rho = \dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{n} + \cos\dfrac{\pi}{m}\right)$.

Для методів Гауса-Зейделя та послідовної верхньої релаксації значення функції на нульовій ітерації заходиться за формулою (1.6).

Завдання

Провести чисельний розрахунок стаціонарного розподілу температури $T(x, y)$ у внутрішніх точках пластини, який описується рівнянням Лапласа в області G

$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = f(x, y), \quad (x, y) \in G$$

і задовольняє граничним умовам $T\big|_{\Gamma} = \varphi(x, y), (x, y) \in \Gamma.$ Розрахунки проводити з точністю $\varepsilon = 0{,}1$. Область G має вигляд $G = \{(x, y) : 0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b\}.$

Граничні умови:

$$T(x,0) = T_1, \qquad T(x,b) = T_2, \qquad 0 \le x \le a,$$
$$T(0, y) = k_1 y^s + k_2, \quad T(a, y) = k_1 y^s + k_2, \quad 0 \le y \le b,$$

де
$$k_1 = \frac{T_2 - T_1}{b^s},\ k_2 = T_1,\ s = 1,2,3...$$

$$a = \begin{cases} 3, & 1 \le n \le 15, \\ 4, & 15 < n \le 30; \end{cases} \quad b = \begin{cases} 3, & 1 \le n \le 15, \\ 4, & 15 < n \le 30; \end{cases}$$

де

n – номер варіанту,

$h = 1$ – крок сітки,

T_1 – кількість букв прізвища,

T_2 – кількість букв імені студента за паспортом, що помножена на 30.

Лабораторна робота 2

Чисельне розв'язування змішаної крайової задачі для рівняння теплопровідності. Явна різницева схема

Теоретичні відомості

Процес поширення тепла в одновимірному випадку описується наступним рівнянням теплопровідності

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t}=\lambda\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+F(x,t), \tag{2.1}$$

де ρ – густина матеріалу, λ - коефіцієнт теплопровідності, T – температура, t – час, $F(x,t)$ – функція джерела, c – питома теплоємність матеріалу.

Крайові умови задаються так:

$$T(x,0)=f(x),\quad 0\le x\le l, \tag{2.2}$$

$$T(0,t)=\varphi(t),\quad 0\le t\le t_1, \tag{2.3}$$

$$T(l,t)=\psi(t),\quad 0\le t\le t_1. \tag{2.4}$$

Оскільки температурний режим досліджується протягом деякого часу t_1, то область задання рівняння (2.1) – це деяка фазова область

$$G=\left\{(x,t):\ 0<x<l,\quad 0<t<t_1\right\}.$$

Знайдемо розв'язок даної задачі методом сіток. Покриємо область G різницевою сіткою з кроками h по x та τ по часу. Таким чином маємо сіткову область

$$G_{h\tau}=\begin{cases}x_i=ih, & i=\overline{1,n-1},\\ t_k=k\tau, & k=\overline{1,m-1}.\end{cases}$$

Для побудови різницевої схеми задачі проведемо апроксимацію похідних в (2.1):

$$\frac{\partial^2 T(x_i,t_k)}{\partial x^2} \approx \frac{T_{i-1}^k - 2T_i^k + T_{i+1}^k}{h^2}, \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial T(x_i,t_k)}{\partial t} \approx \frac{T_i^{k+1} - T_i^k}{\tau} \tag{2.6}$$

або

$$\frac{\partial T(x_i,t_k)}{\partial t} \approx \frac{T_i^k - T_i^{k-1}}{\tau}. \tag{2.7}$$

Явна різницева схема

$$\frac{T_i^{k+1} - T_i^k}{\tau} = a^2 \frac{T_{i-1}^k - 2T_i^k + T_{i+1}^k}{h^2}, \tag{2.8}$$

$$\begin{cases} T_i^{k+1} = (1-2\sigma)T_i^k + \sigma(T_{i-1}^k + T_{i+1}^k), \quad i = \overline{1, n-1}, \quad k = \overline{0, m-1}, \\ T_i^0 = f_i, \quad i = \overline{0, n}, \\ T_0^k = \varphi_k, \; T_n^k = \psi_k, \quad k = \overline{1, m}, \end{cases} \tag{2.9}$$

де $\sigma = \dfrac{a^2\tau}{h^2}$.

Різницева схема є стійкою при $0 < \sigma \le 0{,}5$.

Для ручного рахунку використовують наступні значення σ:

1. $\sigma = 0{,}5$: $\quad T_i^{k+1} = 0{,}5(T_{i-1}^k + T_{i+1}^k);$ $\qquad (O(h^2))$ $\quad$ (2.10)
2. $\sigma = \dfrac{1}{6}$: $\quad T_i^{k+1} = \dfrac{1}{6}(T_{i-1}^k + 4T_i^k + T_{i+1}^k).$ $\qquad (O(h^4))$ $\quad$ (2.11)

Завдання

Розрахувати розподіл температури в однорідному стержні (за допомогою явної різницевої схеми) довжиною l, що виготовлений з певного матеріалу з теплофізичними властивостями λ, c, ρ та температурою $T(x,t)$, яка задовольняє рівнянню теплопровідності

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < y < t_1,$$

при таких крайових умовах:

- відомо розподіл температури в початковий момент часу

$$T(x,0) = f(x) = \frac{T_2 - T_1}{l^{s+1}} x^{s+1} + T_1, \quad 0 \le x \le l \ ;$$

- теплові режими (підтримується задана температура) на кінцях стержня:

$$T(0,t) = \varphi(t) = T_1 = k \ ,$$

$$T(l,t) = \psi(t) = T_2 = \begin{cases} 40k, & k \le 5, \\ 30k, & 5 < k \le 10, \\ 50k, & 10 < k \le 30, \end{cases}$$

де k – № варіанту, s – номер підгрупи.

Для розрахунків взяти: l = 0,5м; h = 0,1м; m = 3. Теплофізичні властивості λ, c, ρ задані у наступній таблиці (табл.2.1) згідно варіанту k.

Таблиця 2.1

k	*Матеріал*	ρ	λ	$\tilde{n}$
1.	Скло звичайне	2500	0,74	0,670
2.	Оргскло	1180	0,984	1,43
3.	Олово	7300	66,3	0,222
4.	Свинець	11350	35,1	0,127
5.	Цинк	7150	0,113	0,384
6	Мідь	8930	0,390	0,388
7.	Алюміній	2700	0,209	0,896
8.	Алюмінієві сплави	2800	0,163	1,13
9.	Бронза	8800	48,2	0,386
10.	Латунь	8500	0,109	0,392
11.	Дерево	825	0,20	2,39
12.	Магнітний сплав	1780	79,1	0,98
13.	Нікель	8900	67,5	0,427
14.	Шлак котельний	1000	0,29	0,76
15.	Фарфор	2400	1,04	1,09
16.	Текотоліт	1350	0,20	0,293
17.	Азбестовий картон	500	0,184	0,84
18.	Бетон з кам’яним щебнем	2000	1,28	0,84
19.	Мармур	2800	1,04	1,09
20.	Глина вогнетривка	1845	1,04	1,09
21.	Титан	4540	15,1	0,531
22.	Титанові сплави	4460	8,7	0,524
23.	Цегла червона	1800	0,77	0,878
24.	Цегла силікатна	1900	0,81	0,64
25.	Кварцове скло	2590	0,400	1,55
26.	Залізобетон	2200	1,55	0,840
27.	Залізо	7880	0,74	0,44
28.	Сталь 20	7830	51,0	0,494
29.	Сталь 45	7830	47,8	0,490
30.	Нержавіюча сталь	7860	16,8	0,494

Лабораторна робота 3

Чисельне розв’язування змішаної крайової задачі для рівняння теплопровідності. Неявна різницева схема

Теоретичні відомості

Знайдемо розв’язок задачі (2.1)-(2.4) з використанням неявної різницевої схеми:

$$\begin{cases} \dfrac{T_i^{k+1}-T_i^k}{\tau}=a^2\,\dfrac{T_{i-1}^{k+1}-2T_i^{k+1}+T_{i+1}^{k+1}}{h^2}, \quad i=\overline{1,n-1}, \quad k=\overline{0,m-1}, \\ T_i^0=f_i,\ i=\overline{0,n}, \\ T_0^k=\varphi_k,\ T_n^k=\psi_k, \quad k=\overline{0,m-1}. \end{cases} \tag{3.1}$$

де
$$a_i=b_i=\sigma=\frac{a^2\tau}{h^2},\ \ c_i=1+2\sigma. \tag{3.2}$$

Розв’язок (3.1) знаходимо методом прогонки:

$$T_i^{k+1}=\alpha_{i+1}T_{i+1}^{k+1}+\beta_{i+1}, \tag{3.3}$$

де

$$\alpha_{i+1}=\frac{b_i}{c_i-\alpha_i a_i}, \qquad \beta_{i+1}=\frac{a_i\beta_i+T_i^k}{c_i+\alpha_i a_i}, \tag{3.4}$$

$$i=\overline{0,n-1}, \quad k=\overline{0,m-1}.$$

$$\alpha_1=0, \quad \beta_1=T_0^k\ .$$

Запис різницевої схеми в більш загальному вигляді для граничних умов різного роду має вигляд

$$\begin{cases} a_iT_{i-1}^{k+1}-c_iT_i^{k+1}+b_iT_{i+1}^{k+1}=-T_i^k, \quad i=\overline{1,n-1}, \quad k=\overline{0,m-1}, \\ T_0^{k+1}=\chi_1T_1^{k+1}+\mu_1, \quad T_n^{k+1}=\chi_2T_{n-1}^{k+1}+\mu_2. \end{cases}$$

1. Граничні умови 1-го роду

$$T_0^{k+1} = \varphi((k+1)\tau), \quad T_n^{k+1} = \psi((k+1)\tau), \quad k = \overline{0, m-1},$$

$$\chi_1 = 0, \quad \mu_1 = \varphi((k+1)\tau), \quad k = \overline{0, m-1},$$

$$\chi_2 = 0, \quad \mu_2 = \psi((k+1)\tau), \quad k = \overline{0, m-1}.$$

2. Граничні умови 2-го роду

$$q_1 = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{x=0}, \qquad q_2 = \lambda \frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{x=l},$$

$$\chi_1 = 1, \qquad \mu_1 = \frac{h}{\lambda} q_1,$$

$$\chi_2 = 1, \qquad \mu_2 = \frac{h}{\lambda} q_2.$$

3. Граничні умови 3-го роду

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{x=0} = -\alpha_1 (T - T_c), -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{x=l} = -\alpha_2 (T - T_c),$$

$$\chi_1 = \frac{\lambda}{\lambda + h\alpha_1}, \qquad \mu_1 = \frac{h\alpha_1}{\lambda + h\alpha_1} T_c,$$

$$\chi_2 = \frac{\lambda}{\lambda + h\alpha_2}, \qquad \mu_2 = \frac{h\alpha_2}{\lambda + h\alpha_2} T_c,$$

$$\alpha_1 = \chi_{1,} \qquad \beta_1 = \mu_1.$$

Обернена прогонка:

$$\begin{cases} T_{n-1}^{k+1} = \alpha_n T_n^{k+1} + \beta_n, \\ T_n^{k+1} = \chi_2 T_n^{k+1} + \mu_2, \end{cases}$$

$$T_n^{k+1} = \frac{\chi_2 \beta_n + \mu_2}{1 - \chi \alpha_n}.$$

Умови застосування методу прогонки:

$$a_i \neq 0, \quad b_i \neq 0, \; |c_i| \geq |a_i| + |b_i|, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad |\chi_1| \leq 1, \quad |\chi_2| < 1.$$

Завдання: виконати завдання з лабораторної роботи 2 з використанням неявної різницевої схеми.

Лабораторна робота 4

Числовий метод розв'язання крайових задач для рівняння теплопровідності зі змінними коефіцієнтами

Теоретичні відомості

Знайдемо розв'язок крайової задачі для рівняння теплопровідності зі змінними коефіцієнтами

$$\begin{aligned} &\rho(x,t)\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(K(x,t)\frac{\partial T}{\partial x}\right) + F(x,t), \\ &U(x,0) = f(x), \\ &U(0,t) = \varphi(x), \\ &U(l,0) = \psi(x). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Для даної задачі побудуємо різні різницеві схеми:

1) при $\sigma = 0$ отримаємо явну різницеву схему

$$\frac{U_i^{k+1} - U_i^k}{\tau} = \frac{1}{h^2}\left(a(x_{i+1},t)\left(U_{i+1}^k - U_i^k\right) - a(x_i,t)\left(U_i^k - U_{i-1}^k\right)\right); \tag{4.2}$$

2) при $\sigma = 0,5$ отримаємо неявну різницеву схему

$$\frac{U_i^{k+1} - U_i^k}{\tau} = \frac{0,5}{h^2}\Big(a(x_{i+1},t)\Big(U_{i+1}^{k+1} - U_i^{k+1}\Big) - a(x_i,t)\Big(U_i^{k+1} - U_{i-1}^{k+1}\Big)\Big) + \\ + \frac{0,5}{h^2}\Big(a(x_{i+1},t)\Big(U_{i+1}^{k} - U_i^{k}\Big) - a(x_i,t)\Big(U_i^{k} - U_{i-1}^{k}\Big)\Big). \quad (4.3)$$

Прогоночний вигляд різницевої схеми (4.3) наступний:

$$aU_{i-1}^{k+1} - \left(a + b + \frac{1}{\gamma}\right)U_i^{k+1} + bU_{i+1}^{k+1} = -\frac{1}{\gamma}U_i^k - b(U_{i+1}^k - U_i^k) + a(U_i^k - U_{i-1}^k) \quad (4.4)$$

де $a_i = a(x_i,t) = 0,5(K(x_i,t) + K(x_{i-1,}t)),$

$$b_i = a(x_{i+1},t) = 0,5(K(x_{i+1},t) + K(x_{i,}t)), \;\; \gamma = \frac{0,5\tau}{h^2}.$$

Завдання

Знайти розв’язок задачі для рівняння теплопровідності зі змінними коефіцієнтами (початкові та граничні умови взяти з лабораторної роботи №2). Змінний коефіцієнт $K(x)$ вибрати згідно варіанту:

$$K(x) = a_0 \exp^{-a_1 x}, \qquad 0 < N \le 4,$$

$$K(x) = a_0 \exp^{-a_1(1-x)}, \qquad 4 < N \le 8,$$

$$K(x) = a_0 \exp^{-a_1(x-x^*)}, \qquad 8 < N \le 12,$$

$$K(x) = a_0(1 + \exp^{-a_1 x}), \qquad 12 < N \le 16,$$

$$K(x) = a_0(1 - \exp^{-a_1 x}), \qquad 16 < N \le 20,$$

$$K(x) = a_0(1 + \exp^{-a_1(1-x)}), \qquad 20 < N \le 24,$$

$$K(x) = a_0(1 - \exp^{-a_1(1-x)}), \qquad 24 < N \le 28.$$

де N - номер варіанту, $a_1 = \dfrac{1}{N}$, $a^2 = \dfrac{\lambda}{c\rho}$, $x_* = \dfrac{1}{N}$.

Лабораторна робота №5

Монотонна різницева схема для рівняння параболічного типу

Теоретичні відомості

Розглянемо крайову задачу для рівняння параболічного типу, що містить першу похідну

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} + r(x)\dfrac{\partial U}{\partial x} = \dfrac{\partial U}{\partial t}, \\ U(x,0) = U_0(x), \\ U(0,t) = U_1(t), \\ U(l,t) = U_2(t), \end{cases} \tag{5.1}$$

$$0 < x < l, \quad 0 < t \le t_1, \quad l = 1.$$

Побудуємо монотонну різницеву схему для рівняння (5.1). Монотонною схемою для $\forall \tau$ і h є чисто неявна різницева схема

$$\begin{aligned} &\frac{U_i^{k+1} - U_i^k}{\tau} = \mu_i \frac{U_{i-1}^{k+1} - 2U_i^{k+1} + U_{i+1}^{k+1}}{h^2} + \\ &r_+(x_i)\frac{U_{i+1}^{k+1} - U_i^{k+1}}{h} + r_-(x_i)\frac{U_i^{k+1} - U_{i-1}^{k+1}}{h}, \end{aligned} \tag{5.2}$$

де

$$r_+(x_i) = 0.5(r(x_i) + |\, r(x_i)\,|) \ge 0, \quad r_-(x_i) = 0.5(r(x_i) - |\, r(x_i)\,|) \le 0,$$

$$\mu_i = \frac{1}{1 + 0.5h\,|\, r(x_i)\,|}.$$

Дана схема має апроксимацію $O(h^2 + \tau)$. Щоб показати монотонність запишемо її в канонічному вигляді:

$$\left(\frac{\mu_i}{h^2}-\frac{r_-}{h}\right)U_{i-1}^{k+1}-\left(\frac{2\mu_i}{h^2}+\frac{1}{\tau}+\frac{r_+}{h}-\frac{r_-}{h}\right)U_i^{k+1}+\left(\frac{\mu_i}{h^2}+\frac{r_+}{h}\right)U_{i+1}^{k+1}=-\frac{1}{\tau}U_i^k. \tag{5.3}$$

де

$$a=\left(\frac{\mu_i}{h^2}-\frac{r_-}{h}\right)>0,\quad b=\left(\frac{\mu_i}{h^2}+\frac{r_+}{h}\right)>0,$$

$$c=\left(\frac{2\mu_i}{h^2}+\frac{1}{\tau}+\frac{r_+}{h}-\frac{r_-}{h}\right)>0,\quad \frac{1}{\tau}>0.$$

Отже, умови монотонності виконуються.
Розв'язок (5.3) знаходимо методом прогонки:

$$U_i^{k+1}=\alpha_{i+1}U_{i+1}^{k+1}+\beta_{i+1}, \tag{5.4}$$

де

$$\alpha_{i+1}=\frac{b_i}{c_i-\alpha_i a_i},\quad \beta_{i+1}=\frac{a_i\beta_i+f_i}{c_i-\alpha_i a_i},\quad \alpha_1=0,\ \beta_1=U_0^{k+1}.$$

Завдання

Знайти розв'язок задачі для рівняння параболічного типу, що містить першу похідну з використанням монотонної різницевої схеми. Початкові та граничні умови взяти згідно варіантів (m - номер варіанту).

$$U_0(x)=\begin{cases} a_0\exp^{-mx} & 0<m\le 10,\\ a_0\sin^2 mx, & 11<m\le 20,\\ a_0\cos^2 mx, & 29<m\le 30.\end{cases}$$

$$U_1(t)=\begin{cases} a_0, & 0<m\le 10,\\ a_0, & 10<m\le 20,\\ a_0, & 20<m\le 30.\end{cases}\quad U_2(t)=\begin{cases} a_0\exp^{-m}, & 0<m\le 10,\\ a_0\sin^2 m, & 10<m\le 20,\\ a_0\cos^2 m, & 20<m\le 30.\end{cases}$$

$$r(x)=m\cos\pi x,\qquad l=1,\qquad n=5,\qquad h=0.2,$$

$$\tau=1,\qquad t_1=3\tau,\qquad a_0=10,\qquad f(x)=0.$$

Лабораторна робота №6

Інтегро-інтерполяційний метод побудови різницевих схем

Теоретичні відомості

Розглянемо крайову задачу для рівняння параболічного типу із змінними коефіцієнтами:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(K(x)\frac{\partial U}{\partial x}\right), \tag{6.1}$$

$$U(x,0) = \tilde{U}_0(x), \tag{6.2}$$

$$U(0,t) = \tilde{U}_1(t), \tag{6.3}$$

$$U(l,t) = \tilde{U}_2(t). \tag{6.4}$$

Знайдемо її розв'язок з використанням інтегро-інтерполяційного методу. Після апроксимації похідних отримаємо різницеву схему:

$$\frac{U_i^{k+1} - U_i^k}{\tau} = \frac{1}{h^2}\left(K_{i-\frac{1}{2}}U_{i-1}^{k+1} - (K_{i-\frac{1}{2}} + K_{i+\frac{1}{2}})U_i^{k+1} + K_{i+\frac{1}{2}}U_{i+1}^{k+1}\right)$$

або

$$\frac{\tau}{h^2}K_{i-\frac{1}{2}}^{k+1}U_{i-1}^{k+1} - \left(\frac{\tau}{h^2}K_{i-\frac{1}{2}}^{k+1} + \frac{\tau}{h^2}K_{i-\frac{1}{2}}^{k+1} + 1\right)U_i^{k+1} + \frac{\tau}{h^2}K_{i+\frac{1}{2}}^{k+1}U_{i+1}^{k+1} = -U_i^k \tag{6.5}$$

де $a = \frac{\tau}{h^2}K_{i-\frac{1}{2}}^{k+1}$; $b = \frac{\tau}{h^2}K_{i+\frac{1}{2}}^{k+1}$; $c = \frac{\tau}{h^2}K_{i-\frac{1}{2}}^{k+1} + \frac{\tau}{h^2}K_{i-\frac{1}{2}}^{k+1} + 1$.

Розв'язок (6.5) знаходимо методом прогонки:

$$U_i^{k+1} = \alpha_{i+1}U_{i+1}^{k+1} + \beta_{i+1}. \tag{6.6}$$

де $\alpha_{i+1} = \frac{b_i}{c_i - \alpha_i a_i}$, $\beta_{i+1} = \frac{a_i\beta_i + U_i^k}{c_i - \alpha_i a_i}$, $i = \overline{0, n-1}$, $\mathrm{k} = \overline{0, m-1}$.

Завдання

Побудувати балансову різницеву схему для рівняння теплопровідності із змінними коефіцієнтами

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(K(x)\frac{\partial U}{\partial x} \right).$$

Змінний коефіцієнт $K(x)$ вибрати згідно варіанту:

$$K(x) = a_0 \exp^{-a_1 x}, \qquad 0 < N \le 4,$$

$$K(x) = a_0 \exp^{-a_1(1-x)}, \qquad 4 < N \le 8,$$

$$K(x) = a_0 \exp^{-a_1(x-x^*)}, \qquad 8 < N \le 12,$$

$$K(x) = a_0(1 + \exp^{-a_1 x}), \qquad 12 < N \le 16,$$

$$K(x) = a_0(1 - \exp^{-a_1 x}), \qquad 16 < N \le 20,$$

$$K(x) = a_0(1 + \exp^{-a_1(1-x)}), \qquad 20 < N \le 24,$$

$$K(x) = a_0(1 - \exp^{-a_1(1-x)}), \qquad 24 < N \le 28.$$

де N - номер варіанту, $a_1 = \dfrac{1}{N}$, $a^2 = \dfrac{\lambda}{c\rho}$, $x_* = \dfrac{1}{N}$.

Лабораторна робота №7

Різницевий метод розв’язування крайових задач для рівняння гіперболічного типу

Теоретичні відомості

Розглянемо крайову задачу для рівняння гіперболічного типу

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \qquad 0 < x < 1, \qquad 0 < t \le T, \tag{7.1}$$

$$\begin{cases} U(0,t) = \mu_1(x), & (7.2) \\ U(l,t) = \mu_2(x), & (7.3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} U(x,0) = \varphi(x), & (7.4) \\ \dfrac{\partial U(x,0)}{\partial t} = \psi(x). & (7.5) \end{cases}$$

Введемо рівномірну сітку з кроками h і τ

$$\omega_{h\tau} = \omega_h \times \omega_\tau,$$

$$\omega_h = \left\{ x_i = ih, \ \ i = \overline{1,n}, \ \ h = \frac{1}{n} \right\},$$

$$\omega_\tau = \left\{ t_n = k\tau, \ \ k = \overline{0,K}, \ \ \tau = \frac{T}{K} \right\},$$

та побудуємо різницеву схему для рівняння (7.1)

$$\frac{U_i^{k+1} - 2U_i^k + U_i^{k-1}}{\tau^2} = \frac{U_{i+1}^k - 2U_i^k + U_{i-1}^k}{h^2}, \ i = \overline{1, n-1}, \ \ k = \overline{1, K-1}. \qquad (7.6)$$

Явна різницева схема

$$U_i^{k+1} = 2U_i^k - U_i^{k-1} + \gamma(U_{i+1}^k - 2U_i^k + U_{i-1}^k) \qquad (7.7)$$

Крайові умови апроксимуються так:

$(7.2) \to (7.8): \ U_0^{k+1} = \mu_1(t_{k+1}) = \mu_1^{k+1}, \ \ k = \overline{0, K-1},$

$(7.3) \to (7.9): \ U_n^{k+1} = \mu_2(t_{k+1}) = \mu_2^{k+1}, \ \ k = \overline{0, K-1},$

$(7.4) \to (7.10): U_i^{k+1} = \varphi(x_i) = \varphi_i, \ \ i = \overline{0,n},$ (при $k = 0$),

$(7.5) \to (7.11): \ \dfrac{U_i^1 - U_i^0}{\tau} = \psi_i \to U_i^1 = U_i^0 + \tau\psi_i, \ i = \overline{0,n}, \ (O(\tau^2))$ (при $k = 1$)

або $$U_i^1 = U_i^0 + \tau\psi_i + \frac{\tau^2}{2} \cdot \frac{\varphi_{i+1} - 2\varphi_i + \varphi_{i-1}}{h^2}, \ \ (O(\tau^2)), \qquad (7.12)$$

Отже, $(7.7) - (7.10), (7.12) -$ явна різницева схема задачі (7.1)-(7.5).

Стійкість різницевої схеми досягається при виконанні умови

$$\tau \le h. \qquad (7.13)$$

Завдання

Використовуючи метод сіток, знайти розв'язок змішаної крайової задачі для рівняння коливання струни $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ з початковими умовами $U(x,0) = \varphi(x), (0 \le x \le 1)$ та крайовими умовами $U(0,t) = \mu_1(t),\ U(1,t) = \mu_2(t)$.

Розв'язок знайти із кроком $h = 0.1,\ \tau = 0.05$, визначаючи значення функції $U(x,t)$ з чотирма десятковими знаками, причому $0 \le t \le 0.5$.

Вигляд відповідних функцій вибрати згідно варіанту.

Варіант 1 $\varphi(x) = x(x+1)$, $\psi(x) = \cos(x)$, $\mu_1(t) = 0$, $\mu_2(t) = 2(t+1)$.	**Варіант 2** $\varphi(x) = x\cos \pi x$, $\psi(x) = x(2-x)$, $\mu_1(t) = 2t$, $\mu_2(t) = -1$.	**Варіант 3** $\varphi(x) = \cos\frac{\pi x}{2}$, $\psi(x) = x^2$, $\mu_1(t) = 1+2t$, $\mu_2(t) = 0$.
Варіант 4 $\varphi(x) = (x+0.5)(x-1)$, $\psi(x) = \sin(x+0.2)$, $\mu_1(t) = t-0{,}5$, $\mu_2(t) = 3t$.	**Варіант 5** $\varphi(x) = 2x(x+1)+0{,}3$, $\psi(x) = 2\sin(x)$, $\mu_1(t) = 0{,}3$, $\mu_2(t) = 4{,}3+t$.	**Варіант 6** $\varphi(x) = (x+0{,}2)\sin\frac{\pi x}{2}$, $\psi(x) = 1+x^2$, $\mu_1(t) = 0$, $\mu_2(t) = 1{,}2(t+1)$.
Варіант 7 $\varphi(x) = x\sin \pi$, $\psi(x) = (x+1)^2$, $\mu_1(t) = 2t$, $\mu_2(t) = 0$.	**Варіант 8** $\varphi(x) = 3x(1-x)$, $\psi(x) = \cos(x+0{,}5)$, $\mu_1(t) = 0$, $\mu_2(t) = 2t$.	**Варіант 9** $\varphi(x) = x(2x-0{,}5)$, $\psi(x) = \cos(2x)$, $\mu_1(t) = t^2$, $\mu_2(t) = 1{,}5$.

Варіант 10 $\varphi(x) = (x+1)\sin \pi x,$ $\psi(x) = x^2 + x,$ $\mu_1(t) = 0,$ $\mu_2(t) = 0,5t.$	**Варіант 11** $\varphi(x) = (1-x)\cos \dfrac{\pi x}{2},$ $\psi(x) = 2x+1,$ $\mu_1(t) = 2t+1,$ $\mu_2(t) = 0.$	**Варіант 12** $\varphi(x) = 0,5(x+1),$ $\psi(x) = x\cos(x),$ $\mu_1(t) = 2t^2,$ $\mu_2(t) = 1.$
Варіант 13 $\varphi(x) = 0,5(1^x + 1),$ $\psi(x) = x\sin 2x,$ $\mu_1(t) = 0.5 + 3t,$ $\mu_2(t) = 1.$	**Варіант 14** $\varphi(x) = (x+1)\sin \dfrac{\pi x}{2},$ $\psi(x) = 1 + x^2,$ $\mu_1(t) = 0,5t,$ $\mu_2(t) = 2.$	**Варіант 15** $\varphi(x) = x^2 \cos \pi x,$ $\psi(x) = x^2(x+1),$ $\mu_1(t) = 0.5t,$ $\mu_2(t) = t-1.$
Варіант 16 $\varphi(x) = (1-x^2)\cos \pi x,$ $\psi(x) = 2x + 0.6,$ $\mu_1(t) = 1 + 0.4t,$ $\mu_2(t) = 0.$	**Варіант 17** $\varphi(x) = (x+0,5)^2,$ $\psi(x) = (x+1)\sin(x),$ $\mu_1(t) = 0.5(0,5+t),$ $\mu_2(t) = 2,25.$	**Варіант 18** $\varphi(x) = 1,2x - x^2,$ $\psi(x) = (x+0,6)\sin x,$ $\mu_1(t) = 0,$ $\mu_2(t) = 0,2 + 0,5t.$
Варіант 19 $\varphi(x) = (x+0,5)(x+1),$ $\psi(x) = \cos(x+0,3)$ $\mu_1(t) = 0,5,$ $\mu_2(t) = 3 - 2t.$	**Варіант 20** $\varphi(x) = 0,5(x+1)^2,$ $\psi(x) = (0,5+x)\cos \pi x,$ $\mu_1(t) = 0,5,$ $\mu_2(t) = 02 - 3t.$	**Варіант 21** $\varphi(x) = (x+0,4)\sin \pi x,$ $\psi(x) = x^2 + 0,6,$ $\mu_1(t) = 0,5t,$ $\mu_2(t) = 0,2.$

Варіант 22 $\varphi(x)=(2-x)\sin\pi x,$ $\psi(x)=1+x^2,$ $\mu_1(t)=0{,}6t,$ $\mu_2(t)=0.$	**Варіант 23** $\varphi(x)=x\cos\dfrac{\pi x}{2},$ $\psi(x)=2x^2,$ $\mu_1(t)=0,$ $\mu_2(t)=t^2.$	**Варіант 24** $\varphi(x)=(x+0{,}4)\cos\dfrac{\pi x}{2},$ $\psi(x)=0{,}3(x^2+1),$ $\mu_1(t)=0{,}4,$ $\mu_2(t)=1{,}7t.$
Варіант 25 $\varphi(x)=(1-x^2)+x,$ $\psi(x)=2\sin(x+0.6),$ $\mu_1(t)=1,$ $\mu_2(t)=(t+1)^2.$	**Варіант 26** $\varphi(x)=0{,}4(x^2+0{,}5),$ $\psi(x)=x\sin(x+0.4),$ $\mu_1(t)=0{,}1+0.5t,$ $\mu_2(t)=0{,}9.$	**Варіант 27** $\varphi(x)=(1+x^2)\cos\pi x,$ $\psi(x)=(x+0.7)^2,$ $\mu_1(t)=0.4,$ $\mu_2(t)=2t-1{,}5.$
Варіант 28 $\varphi(x)=(0{,}2+x)(0{,}5x+1),$ $\psi(x)=2\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right),$ $\mu_1(t)=4.5+3t,$ $\mu_2(t)=2.$	**Варіант 29** $\varphi(x)=(1+x^2)(1-x),$ $\psi(x)=1-\sin 2x,$ $\mu_1(t)=1,$ $\mu_2(t)=0{,}5t.$	**Варіант 30** $\varphi(x)=(0{,}2+x)\sin\dfrac{\pi x}{3},$ $\psi(x)=1-2x,$ $\mu_1(t)=0.7t,$ $\mu_2(t)=1{,}5.$

Лабораторна робота №8

Різницевий метод розв'язування багатовимірних нестаціонарних задач для рівняння теплопровідності. Явна різницева схема

Теоретичні відомості

Розглянемо першу крайову задачу для двовимірного рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2}, \qquad (x_1, x_2, t) \in \Omega, \tag{8.1}$$

$$U(x_1, x_2, 0) = U_0(x_1, x_2),\ (x_1, x_2) \in G,\ \ \overline{G} = G_T \cup \tilde{A}, \tag{8.2}$$

$$U(x_1, x_2, t) = \mu(x_1, x_2, t), \quad x \in G, \quad \overline{G} = G_T \cup \mathit{\Gamma}, \tag{8.3}$$

де

$$G = \{0 < x_1 < l_1, 0 < x_2 < l_2\}, \quad \Omega = G \times (0, T],$$

$$\mathit{\Gamma} = \bigcup_{i=1}^{4} \mathit{\Gamma}_i, \quad U \in C_2^1(\Omega).$$

Для побудови різницевої схеми задачі (8.1)-(3.3) введемо різницеву сітку таким чином:

$$\Omega_{h\tau} = \Omega_h \times \omega_\tau,$$

$$\Omega_h = \{x_{ij} = (x_1^i, x_2^j),\ x_1^i = ih_1,\ \ x_2^j = jh_2\},$$

$$\text{äå}\ \ i = \overline{0, n}, \quad h_1 n = \ell_1, \quad j = \overline{0, m}, \quad h_2 m = \ell_2;$$

$$\omega_\tau = \{t_k = k\tau;\ k = 0, k;\ k\tau = T\};$$

де

ω_h - множина внутрішніх вузлів Ω_h.

γ_h - множина граничних вузлів $\mathit{\Gamma}$.

Тоді різницева схема з вагами матиме вигляд:

$$\frac{U_{ij}^{k+1}-U_{ij}^{k}}{\tau}+\sigma AU_{ij}^{k+1}+(1-\sigma)AU_{ij}^{k}=0,$$
$$i=\overline{1,n-1},\quad j=\overline{1,m-1},\quad k=\overline{0,K-1}, \tag{8.4}$$

$$U_{ij}^{0}=U_{0}(x_1^i,x_2^i),\qquad x_{ij}\in\Omega_h, \tag{8.5}$$

$$U_{ij}^{k}=\mu(x_1^i,x_2^i,t_k),x_{ij}\in\gamma_h. \tag{8.6}$$

Явна різницева схема

$$\frac{U_{ij}^{k+1}-U_{ij}^{k}}{\tau}+AU_{ij}^{k}=0,\quad i=\overline{1,n-1},\quad j=\overline{1,m-1},\quad k=\overline{0,K-1}, \tag{8.7}$$

$$AU_{ij}^{k}=-\Lambda U_{ij}^{k}=-U_{\bar{x}_1x_1ij}^{k}-U_{\bar{x}_2x_2ij}^{k}=$$
$$=-\frac{U_{i-1,j}^{k}-2U_{ij}^{k}+U_{i+1,j}^{k}}{h_1^2}-\frac{U_{i,j-1}^{k}-2U_{ij}^{k}+U_{i,j-1}^{k}}{h_1^2}, \tag{8.8}$$
$$i=\overline{1,n-1},\quad j=\overline{1,m-1},\quad k=\overline{0,K-1},$$

$$U_{ij}^{k+1}=U_{ij}^{k}+\tau\Lambda U_{ij}^{k},\quad i=\overline{1,n-1},\quad j=\overline{1,m-1},\quad k=\overline{0,K-1}, \tag{8.9}$$

$$U_{ij}^{k+1}=U_{ij}^{k}+\gamma_1(U_{i-1,j}^{k}-2U_{ij}^{k}+U_{i+1,j}^{k})+\gamma_2(U_{i,j-1}^{k}-2U_{ij}^{k}+U_{i,j+1}^{k}),$$
$$i=\overline{1,n-1},\quad j=\overline{1,m-1},\quad k=\overline{0,K-1}, \tag{8.10}$$

де $$\gamma_1=\frac{\tau}{h_1^2},\qquad \gamma_2=\frac{\tau}{h_2^2}.$$

Завдання

Знайти розв'язок багатовимірної задачі для рівняння теплопровідності. Початкові та граничні умови змінити, згідно наведених нижче вказівок.

Введемо позначення:

$$x \to x_1, \quad y \to x_2, \tag{8.11}$$

Початкові умови:

$$U(x_1, x_2, 0) = N \cdot \sin\frac{\pi x_1}{l_1} \cdot \cos\frac{\pi x_2}{l_2}, \tag{8.12}$$

де N -номер варіанту, $l_1 = a, \quad l_2 = b.$

Граничні умови вибираємо наступним чином:

$U\big|_{y=0}, U\big|_{y=l_2}$ - такі ж як і у варіантах завдань,

$U\big|_{x=0} =$ завдання згідно варіанту $+N\sin(\omega t),$

$U\big|_{x=l_1} =$ завдання згідно варіанту $+k\cos(\omega t),$

де N -номер варіанту, k -номер групи, $\omega = kN.$

На межах прямокутної області (рис. 1) і в точках розриву граничні умови брати наступним чином:

- в точках A, B використовувати умову $U\big|_{x=0}$,
- в точках C, D брати умову $U\big|_{x=l_1}$.

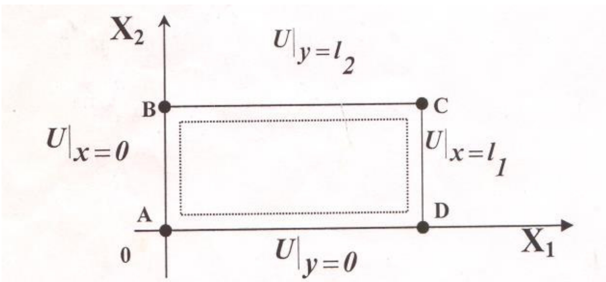

Рис.1. Прямокутна область

Варіант 1 $U\big\|_{x=0} = -y^2;$ $U\big\|_{x=4} = 16 - 8y - y^2;$ $U\big\|_{y=0} = x^2;$ $U\big\|_{y=3} = x^2 - 6x - 9;$	**Варіант 2** $U\big\|_{x=0} = -y^2;$ $U\big\|_{x=4} = 16 + 8y - y^2;$ $U\big\|_{y=0} = x^2;$ $U\big\|_{y=3} = x^2 + 6x - 9;$	**Варіант 3** $U\big\|_{x=0} = -y^3;$ $U\big\|_{x=3} = 0;$ $U\big\|_{y=0} = 48 - y^3;$ $U\big\|_{y=3} = 9x^2 - 27;$
Варіант 4 $U\big\|_{x=0} = 0;$ $U\big\|_{x=3} = 4y;$ $U\big\|_{y=0} = 0;$ $U\big\|_{y=3} = 3x;$	**Варіант 5** $U\big\|_{x=0} = 4y - 12;$ $U\big\|_{x=4} = 4y;$ $U\big\|_{y=0} = 3x - 12;$ $U\big\|_{y=3} = 3x;$	**Варіант 6** $U\big\|_{x=0} = 12 - 4y;$ $U\big\|_{x=4} = 0;$ $U\big\|_{y=0} = 12 - 3x;$ $U\big\|_{y=3} = 0;$
Варіант 7 $U\big\|_{x=0} = -y;$ $U\big\|_{x=3} = 5y;$ $U\big\|_{y=0} = 0;$ $U\big\|_{y=4} = 3x - 4;$	**Варіант 8** $U\big\|_{x=0} = y^2;$ $U\big\|_{x=3} = 4y;$ $U\big\|_{y=0} = x^3 - 27x;$ $U\big\|_{y=3} = 64 - 12x^2;$	**Варіант 9** $U\big\|_{x=0} = 0;$ $U\big\|_{x=4} = 64 - 12y^2;$ $U\big\|_{y=0} = x^3;$ $U\big\|_{y=3} = x^3 - 27x;$
Варіант 10 $U\big\|_{x=0} = -y^3;$ $U\big\|_{x=4} = 52 - y^3;$ $U\big\|_{y=0} = 0;$ $U\big\|_{y=3} = 9x^2 + 3x - 2;$	**Варіант 11** $U\big\|_{x=0} = y^2;$ $U\big\|_{x=4} = 16 + y^2 - 4y;$ $U\big\|_{y=0} = x^2;$ $U\big\|_{y=3} = x^2 - 3x + 9;$	**Варіант 12** $U\big\|_{x=0} = y^2;$ $U\big\|_{x=4} = y^2 + 14;$ $U\big\|_{y=0} = x^2 - 3x;$ $U\big\|_{y=3} = x^2 - 3x + 9;$

Варіант 13 $U\big\|_{x=0}=12-4y;$ $U\big\|_{x=4}=4y;$ $U\big\|_{y=0}=12-3x;$ $U\big\|_{y=3}=3x;$	**Варіант 14** $U\big\|_{x=0}=0;$ $U\big\|_{x=4}=16y-4y^2;$ $U\big\|_{y=0}=3x;$ $U\big\|_{y=3}=0;$	**Варіант 15** $U\big\|_{x=0}=0;$ $U\big\|_{x=4}=12-4y;$ $U\big\|_{y=0}=3x;$ $U\big\|_{y=3}=0;$
Варіант 16 $U\big\|_{x=0}=y^2;$ $U\big\|_{x=4}=y^2+8y-16;$ $U\big\|_{y=0}=-x^2;$ $U\big\|_{y=3}=9+6x-x^2;$	**Варіант 17** $U\big\|_{x=0}=y^2;$ $U\big\|_{x=4}=y^2-8y-16;$ $U\big\|_{y=0}=-x^2;$ $U\big\|_{y=3}=9-6x-x^2;$	**Варіант 18** $U\big\|_{x=0}=y^3;$ $U\big\|_{x=4}=y^3-48y;$ $U\big\|_{y=0}=0;$ $U\big\|_{y=3}=27-9x^2;$
Варіант 19 $U\big\|_{x=0}=0;$ $U\big\|_{x=4}=5y;$ $U\big\|_{y=0}=0;$ $U\big\|_{y=3}=\dfrac{20}{3}x;$	**Варіант 20** $U\big\|_{x=0}=0;$ $U\big\|_{x=4}=-4y;$ $U\big\|_{y=0}=0;$ $U\big\|_{y=3}=-3x;$	**Варіант 21** $U\big\|_{x=0}=12-4y;$ $U\big\|_{x=4}=-4y;$ $U\big\|_{y=0}=12-3x;$ $U\big\|_{y=3}=-3x;$
Варіант 22 $U\big\|_{x=0}=4y-12;$ $U\big\|_{x=4}=0;$ $U\big\|_{y=0}=3x-12;$ $U\big\|_{y=3}=0;$	**Варіант 23** $U\big\|_{x=0}=4y;$ $U\big\|_{x=4}=0;$ $U\big\|_{y=0}=0;$ $U\big\|_{y=3}=12-3x;$	**Варіант 24** $U\big\|_{x=0}=4y;$ $U\big\|_{x=4}=4y-12;$ $U\big\|_{y=0}=-3x;$ $U\big\|_{y=3}=12-3x;$

Варіант 25 $U\big\|_{x=0}=0;$ $U\big\|_{x=4}=12y^2-64;$ $U\big\|_{y=0}=-x^3;$ $U\big\|_{y=3}=27x-x^3;$	**Варіант 26** $U\big\|_{x=0}=y^3;$ $U\big\|_{x=4}=4y-16-y^2;$ $U\big\|_{y=0}=-x^2;$ $U\big\|_{y=3}=3x-x^2-9;$	**Варіант 27** $U\big\|_{x=0}=y^3;$ $U\big\|_{x=4}=y^3-52y;$ $U\big\|_{y=0}=0;$ $U\big\|_{y=3}=27-9x^2-3x;$
Варіант 28 $U\big\|_{x=0}=-y^2;$ $U\big\|_{x=4}=-14-y^2;$ $U\big\|_{y=0}=3x-x^2;$ $U\big\|_{y=3}=3x-x^2-9;$	**Варіант 29** $U\big\|_{x=0}=3y-12;$ $U\big\|_{x=4}=-3y;$ $U\big\|_{y=0}=4x-12;$ $U\big\|_{y=3}=-4x;$	**Варіант 30** $U\big\|_{x=0}=0;$ $U\big\|_{x=4}=4y^3-16;$ $U\big\|_{y=0}=0;$ $U\big\|_{y=3}=9x+24;$

Лабораторна робота №9

Економічні методи розв’язування багатовимірних нестаціонарних задач математичної фізики. Різницева схема Пісьмена-Речфорда

Теоретичні відомості

Розглянемо першу крайову задачу для двовимірного рівняння параболічного типу

$$\frac{\partial U}{\partial t}=\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2},\qquad (x_1,x_2,t)\in\Omega, \tag{9.1}$$

$$U(x_1,x_2,0)=U_0(x_1,x_2),\ (x_1,x_2)\in G,\ \ \overline{G}=G_T\cup\tilde{A}, \tag{9.2}$$

$$U(x_1,x_2,t)=\mu(x_1,x_2,t),\quad x\in G,\quad \overline{G}=G_T\cup \Gamma, \tag{9.3}$$

де

$$G=\{0<x_1<l_1, 0<x_2<l_2\},\ \ \Omega=G\times(0,T],$$

$$\Gamma=\bigcup_{i=1}^{4}\Gamma_i,\quad U\in C_2^1(\Omega).$$

Знайдемо розв'язок крайової задачі (9.1)-(9.3) з використанням різницевої схеми Пісьмена –Речфорда

$$\frac{U_{ij}^{k+\frac{1}{2}}-U_{ij}^{k}}{0{,}5\tau}=\Lambda_1 U_{ij}^{k+\frac{1}{2}}+\Lambda_2 U_{ij}^{k},\qquad x_{ij}\in\omega_h, \tag{9.4}$$

$$\frac{U_{ij}^{k+1}-U_{ij}^{k+\frac{1}{2}}}{0{,}5\tau}=\Lambda_1 U_{ij}^{k+\frac{1}{2}}+\Lambda_2 U_{ij}^{k+1},\qquad x_{ij}\in\omega_h, \tag{9.5}$$

Прогоночний вигляд для (9.4)

$$a_1U_{i-1,j}^{k+\frac{1}{2}}-c_1U_{ij}^{k+\frac{1}{2}}+b_1U_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}}=-F_{ij}^{k},\ j=\overline{1,m-1}, \tag{9.6}$$

де

$$a_1=b_1=0.5\gamma_1,\qquad c_1=1+\gamma_1,\qquad \gamma_1=\frac{\tau}{h_1^2},\qquad F_{ij}^{k}+0.5\tau\Lambda_2U_{ij}^{k}.$$

Розв'язок (9.6) знайдемо методом прогонки:

$$U_{ij}^{k+\frac{1}{2}}=\alpha_{i+1,j}^{1}U_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}}+\beta_{i+1,j}^{1}, \tag{9.7}$$

де

$$\alpha_{i+1,j}^{1}=\frac{b_1}{c_1-\alpha_{ij}^{1}a_1},\qquad \beta_{i+1,j}^{1}=\frac{a_1\beta_{ij}^{1}+F_{ij}^{k}}{c_1-\alpha_{ij}^{1}a_1},$$

$$\alpha_{1j}^{1}=0,\qquad \beta_{1j}^{1}=U_{0j}^{k+\frac{1}{2}}.$$

Прогоночний вигляд для (9.5)

$$a_2 U_{i,j-1}^{k+1} - c_2 U_{ij}^{k+1} + b_1 U_{i,j+1}^{k+1} = -\Phi_{ij}^{k+\frac{1}{2}},\ i = \overline{1, n-1}, \tag{9.8}$$

де

$$a_2 = b_2 = 0.5\gamma_2, \quad c_2 = 1 + \gamma_2, \quad \gamma_2 = \frac{\tau}{h_2^2}, \quad \Phi_{ij}^{k+\frac{1}{2}} + 0.5\tau\Lambda_1 U_{ij}^{k+\frac{1}{2}}.$$

Розв’язок (9.8) знайдемо методом прогонки:

$$U_{ij}^{k+1} = \alpha_{ij+1}^2 U_{ij+1}^{k+1} + \beta_{ij+1}^2, \tag{9.9}$$

де

$$\alpha_{i+1,j}^2 = \frac{b_2}{c_2 - \alpha_{ij}^2 a_2}, \qquad \beta_{i+1,j}^2 = \frac{a_2\beta_{ij}^2 + \Phi_{ij}^k}{c_2 - a_{ij}^2 a_2},$$

$$\alpha_{i1}^2 = 0, \quad \beta_{i1}^2 = U_{i0}^{k+1}.$$

Граничні значення для проміжних значень функції $U_{ij}^{k+\frac{1}{2}}$ обчислюються за формулами

$$i = 0 : U_{oj}^{k+\frac{1}{2}} = \frac{\mu_{0j}^{k+1} + \mu_{0j}^k}{2} - \frac{\tau}{4}\Lambda_2(\mu_{oj}^{k+1} - \mu_{oj}^k), \tag{9.10}$$

де

$$\Lambda_2(\mu_{0j}^{k+1} - \mu_{0j}^k) = \frac{(\mu_{0,j-1}^{k+1} - \mu_{0,j-1}^k) - 2(\mu_{0,j}^{k+1} - \mu_{0,j}^k) + (\mu_{0,j+1}^{k+1} - \mu_{0,j+1}^k)}{h_2^2}.$$

$$i = n : U_{nj}^{k+\frac{1}{2}} = \frac{\mu_{nj}^{k+1} + \mu_{nj}^k}{2} - \frac{\tau}{4}\Lambda_2(\mu_{nj}^{k+1} - \mu_{nj}^k), \quad j = \overline{1, m-1}, \tag{9.11}$$

де

$$\Lambda_2(\mu_{nj}^{k+1} - \mu_{nj}^k) = \frac{(\mu_{n,j-1}^{k+1} - \mu_{n,j-1}^k) - 2(\mu_{n,j}^{k+1} - \mu_{n,j}^k) + (\mu_{n,j+1}^{k+1} - \mu_{n,j+1}^k)}{h_2^2}.$$

Алгоритм розв'язку задачі

1) Знаходимо $U_{i,j}^0, \quad i=\overline{0,n}, \quad j=\overline{0,m}$

$$U(x_1,x_2,0)=N\sin\frac{\pi x_1}{l_1}*\cos\frac{\pi x_2}{l_2}.$$

2) Знаходимо граничні значення на цілих часових шарах

$$\begin{cases} U_{i0}^k=\mu_1(ih,k\tau), \\ U_{im}^k=\mu_2(ih,k\tau), \end{cases} \qquad i=\overline{0,n}, \qquad k=\overline{0,K},$$

$$\begin{cases} U_{0j}^k=\mu_3(jh,k\tau), \\ U_{nj}^k=\mu_4(jh,k\tau), \end{cases} \qquad j=\overline{0,m}, \qquad k=\overline{0,K},$$

3) Знаходимо граничні значення на півцілих часових шарах за формулами (9.10), (9.11)

4) Знаходимо значення у внутрішніх вузлах сітки $U_{ij}^{k+\frac{1}{2}}$, U_{ij}^{k+1} почергово за формулами (9.7), (9.9).

Завдання

Знайти розв'язок крайової задачі (9.1)-(9.3), використовуючи різницеву схему Пісьмена-Речфорда. Варіанти завдань взяти з лабораторної роботи №8.

Лабораторна робота №10

Економічні методи розв'язування багатовимірних нестаціонарних задач математичної фізики. Локально-одновимірна схема Самарського

Теоретичні відомості

Знайдемо розв'язок крайової задачі (9.1)-(9.3) з використанням локально-одновимірної схеми Самарського, яка має вигляд

$$\frac{U_{ij}^{k+\frac{1}{2}} - U_{ij}^{k}}{0,5\tau} = \Lambda_1 U_{ij}^{k+\frac{1}{2}}, \qquad x_{ij} \in \omega_h, \qquad (10.1)$$

$$\frac{U_{ij}^{k+1} - U_{ij}^{k+\frac{1}{2}}}{0,5\tau} = \Lambda_2 U_{ij}^{k+1}, \qquad x_{ij} \in \omega_h, \qquad (10.2)$$

Прогоночний вигляд для (10.1)

$$a_1 U_{i-1,j}^{k+\frac{1}{2}} - c_1 U_{ij}^{k+\frac{1}{2}} + b_1 U_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}} = -U_{ij}^{k}, \; j = \overline{1, m-1}, \quad (10.3)$$

де

$$a_1 = b_1 = 0.5\gamma_1, \qquad c_1 = 1 + \gamma_1, \qquad \gamma_1 = \frac{\tau}{h_1^2}.$$

Метод прогонки для (10.3)

$$U_{ij}^{k+\frac{1}{2}} = \alpha_{i+1,j}^{1} U_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}} + \beta_{i+1,j}^{1}, \qquad (10.4)$$

де

$$\alpha_{i+1,j}^{1} = \frac{b_1}{c_1 - \alpha_{ij}^{1} a_1}, \qquad \beta_{i+1,j}^{1} = \frac{a_1 \beta_{ij}^{1} + F_{ij}^{k}}{c_1 - \alpha_{ij}^{1} a_1},$$

$$\alpha_{1j}^{1} = 0, \qquad \beta_{1j}^{1} = U_{0j}^{k+\frac{1}{2}}.$$

Прогоночний вигляд для (10.2)

$$a_2 U_{i,j-1}^{k+1} - c_2 U_{ij}^{k+1} + b_1 U_{i,j+1}^{k+1} = -U_{ij}^{k+\frac{1}{2}},\ i = \overline{1, n-1}, \qquad (10.5)$$

де

$$a_2 = b_2 = 0.5\gamma_2, \qquad c_2 = 1 + \gamma_2, \qquad \gamma_2 = \frac{\tau}{h_2^2}.$$

Метод прогонки для (10.5)

$$U_{ij}^{k+1} = \alpha_{i,j+1}^2 U_{i,j+1}^{k+1} + \beta_{i,j+1}^2, \qquad (10.6)$$

де

$$\alpha_{i+1,j}^2 = \frac{b_2}{c_2 - \alpha_{ij}^2 a_2}, \qquad \beta_{i+1,j}^2 = \frac{a_2 \beta_{ij}^2 + \Phi_{ij}^k}{c_2 - a_{ij}^2 a_2},$$

$$\alpha_{1j}^2 = 0, \qquad \beta_{1j}^2 = U_{i0}^{k+1}.$$

Граничні значення для проміжних значень функції $U_{ij}^{k+\frac{1}{2}}$ обчислюються за формулами

$$i = 0: U_{oj}^{k+\frac{1}{2}} = \frac{\mu_{0j}^{k+1} + \mu_{0j}^k}{2} - \frac{\tau}{4}\Lambda_2(\mu_{oj}^{k+1} - \mu_{oj}^k), \qquad (10.7)$$

$$i = n: U_{nj}^{k+\frac{1}{2}} = \frac{\mu_{nj}^{k+1} + \mu_{nj}^k}{2} - \frac{\tau}{4}\Lambda_2(\mu_{nj}^{k+1} - \mu_{nj}^k), \quad j = \overline{1, m-1}. \qquad (10.8)$$

Завдання

Знайти розв'язок крайової задачі (9.1)-(9.3), використовуючи локально-одновимірну схему Самарського. Варіанти завдань взяти з лабораторної роботи №8.

Лабораторна робота №11

Розв’язування задачі Діріхле для рівняння Лапласа методом скінченних елементів

Теоретичні відомості

Знайдемо розв’язок задачі Діріхле для рівняння Лапласа:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=0,\ (x,y)\in G, \tag{11.1}$$

який задовольняє граничним умовам:

$$T\big|_{\Gamma}=\varphi(x,y), \qquad (x,y)\in \Gamma. \tag{11.2}$$

Рівняння методу Гальоркіна:

$$T\approx\overline{\varphi}=\sum_{m=1}^{20}\varphi_m N_m, \tag{11.3}$$

Апроксимація розв’язку:

$$\int_{\Omega}\left(\frac{\partial^2\hat{\varphi}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\hat{\varphi}}{\partial y^2}\right)Nedxdy=0, \tag{11.4}$$

де φ_m – значення у вузлах, N_m – глобальні лінійні базисні функції, які дорівнюють 1 в i-му вузлі та дорівнюють нулю в інших вузлах.

(11.3) → на основі формули Гріна запишеться так

$$\int_{\Omega}\left(\frac{\partial N_e}{\partial x}\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial x}+\frac{\partial N_e}{\partial y}\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial y}\right)dxdy=0. \tag{11.5}$$

(11.1)-(11.4)→ СЛАР : $\qquad K\varphi=f,$ (11.6) де $f=0$, K – матриця, що визначається асамблюванням (сумуванням вкладів) окремих елементів.

$$K^e\varphi^e=0,\ K^e_{im}=\int\limits_{\Omega^e}\left(\frac{\partial N_l}{\partial x}\frac{\partial N_m}{\partial x}+\frac{\partial N_l}{\partial y}\frac{\partial N_m}{\partial y}\right)dxdy,$$

де

$$\frac{\partial N_e}{\partial x}=const\to K_{1m}=\left(\frac{\partial N_l}{\partial x}\frac{\partial N_m}{\partial x}+\frac{\partial N_l}{\partial y}\frac{\partial N_m}{\partial y}\right)\cdot\Delta^e,$$

$$\Delta^e=\frac{1}{2}-\text{(площа елемента)}.$$

Вклади елементів

Вклад 1-го елемента

$$K^1\varphi^1=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_1\\\varphi_6\\\varphi_7\end{pmatrix}.$$

Вклад 2-го елемента

$$K^2\varphi^2=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_7\\\varphi_2\\\varphi_1\end{pmatrix}.$$

…………………………………………….

Вклад 24-го елемента

$$K^{24}\varphi^{24}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_{20}\\\varphi_{15}\\\varphi_{14}\end{pmatrix}.$$

Для задовільнення граничних умов покладемо:

$$\varphi_1=\varphi_2=\varphi_3=\varphi_4=\varphi_5=200;$$

$$\varphi_6=\varphi_{10}=130;\ \varphi_{11}=\varphi_{15}=60;$$

$$\varphi_{16}=\varphi_{17}=\varphi_{18}=\varphi_{19}=\varphi_{20}=-10.$$

φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	φ_7	φ_8	φ_9	φ_{10}	φ_{11}	φ_{12}	φ_{13}	φ_{14}	φ_{15}	φ_{16}	φ_{17}	φ_{18}	φ_{19}	φ_{20}	
2	-1				-1															φ_1
-1	4	-1				-2														φ_2
	-1	4	-1				-2													φ_3
		-1	2					-2												φ_4
				4	-2				-1											φ_5
-1				-2	8	-2				-1										φ_6
	-2				-2	8	-2				-2									φ_7
		-2				-2	8	-2				-2								φ_8
			-2				-2	4					-2							φ_9
				-1					4	-2				-1						φ_{10}
					-1				-2	8	-2				-1					φ_{11}
						-2				-2	8	-2				-2				φ_{12}
							-2				-2	8	-2				-2			φ_{13}
								-2				-2	4					-2		φ_{14}
									-1					-2	4					φ_{15}
										-1					2	-1				φ_{16}
											-2				-1	4	-1			φ_{17}
												-2				-1	4	1		φ_{18}
													-2				-1	4		φ_{19}
														-1				-1		φ_{20}

В результаті перетворень глобальної матриці (викреслюючи рядки, що відповідають відомим φ_i, та заміняючи відомі φ_i їхніми значеннями) отримаємо СЛАР:

$$\begin{pmatrix} 8 & -2 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 8 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 8 & 0 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 0 & 8 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 8 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_7 \\ \varphi_8 \\ \varphi_9 \\ \varphi_{12} \\ \varphi_{13} \\ \varphi_{14} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\varphi_2 + 2\varphi_6 \\ 2\varphi_3 \\ 2\varphi_4 + 2\varphi_{10} \\ 2\varphi_{11} + 2\varphi_{17} \\ 2\varphi_{18} \\ 2\varphi_{15} + 2\varphi_{18} \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_7 \\ \varphi_8 \\ \varphi_9 \\ \varphi_{12} \\ \varphi_{13} \\ \varphi_{14} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 330 \\ 200 \\ 330 \\ 50 \\ -10 \\ 50 \end{pmatrix}$$

Розв'язок цієї системи:

$$\varphi_7 = \varphi_8 = \varphi_9 = 130;$$
$$\varphi_{12} = \varphi_{13} = \varphi_{14} = 60;$$

що повністю співпадає з точним розв'язком поставленої задачі.

Завдання

Знайти розв'язок задачі Діріхде для рівняння Лапласа методом скінченних елементів. Завдання взяти з лабораторної роботи №1. Порівняти результати, отримані за методом скінченних різниць та методом скінченних елементів.

Рекомендована література

1. Калиткин Н. Н. Численные методы. Москва: Наука, 1978. 512 с.
2. Савула Я. Г. Числовий аналіз задач математичної фізики варіаційними методами. Львів: ЛНУ ім. І.Франка, 2004. 221 с.
3. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы математической физики. Москва: Наука, 2003. 316 с.
4. Воробьева Г. Н., Данилова А. Н. Практикум по вычислительной математике. Москва: Высшая школа, 1990. 208 с.
5. Годунов С. К., Рябенький В. С. Разностные схемы. Москва: Наука, 1976. 400 с.
6. Ляшко И. И., Макаров В. Л., Скоробогатько А. А. Методы вычислений. Киев: Выща школа, 1977. 408 с.
7. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. Москва: Наука, 1979. 318 с.
8. Самарский А. А. Введение в численные методы. Москва: Наука, 1982. 271 с.
9. Турчак Л. И. Основы численных методов. Москва: Наука, 1987.
10. Фельдман. Л. П., Петренко А. І., Дмитрієва О. А. Чисельні методи в інформатиці. Київ, 2006. 480 с.
11. Яненко Н. Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 1967. 195 с.