Міністерство освіти і науки України
Національний університет водного господарства
та природокористування
Навчально-науковий інститут автоматики,
кібернетики і обчислювальної техніки
Кафедра вищої математики

04-02-36

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

та завдання до практичних занять та самостійного вивчення навчальної дисципліни
«МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ»
для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня за освітньо-професійними програмами «Інженерія програмного забезпечення», «Комп'ютерні науки» спеціальностей 121 «Інженерія програмного забезпечення», 122 «Комп'ютерні науки» денної та заочної форм навчання

Рекомендовано
науково-методичною
радою з якості ННІАКОТ
Протокол № 3 від 04.12.2019 р.

Рівне – 2019

Методичні вказівки та завдання до практичних занять та самостійного вивчення навчальної дисципліни «Математичний аналіз» для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня за освітньо-професійними програмами «Інженерія програмного забезпечення», «Комп'ютерні науки» спеціальностей 121 «Інженерія програмного забезпечення», 122 «Комп'ютерні науки» денної та заочної форм навчання, 1 частина [Електронне видання] / Іващук Я. Г. – Рівне: НУВГП, 2019. – 58 с.

Укладач: Іващук Я. Г., канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри вищої математики.

Відповідальний за випуск: Цецик С. П., кандидат педагогічних наук, доцент, в. о. завідувача кафедри вищої математики.

Керівники групи
забезпечення спеціальностей Мартинюк П. М.
Жуковська Н. А.

Зміст

Вступ

Курс математичного аналізу є одним із способів розвитку логічного і алгоритмічного мислення студентів, оволодіння основними методами дослідження та розв'язування математичних задач, вироблення уміння самостійно розширювати свої знання з математики і застосовувати математичний апарат до аналізу та розв'язання практичних задач.

Дисципліна спрямована на формування загальнонаукових, інструментальних, загально-професійних та спеціалізовано-професійних компетенцій.

1. Вступ до математичного аналізу

Нехай функція $y=f\left(x\right)$ визначена в деякому околі X точки x_0, крім, можливо, самої точки x_0.

Число A називають границею функції $y=f\left(x\right)$ в точці x_0, якщо для довільної збіжної до x_0 послідовності $\left\{x_n\right\}$, де $x_n \in X$, $x_n \neq x_0$, послідовність $\left\{f\left(x_n\right)\right\}$ має границю, яка дорівнює числу A, і записують

$$\lim_{x\to x_0} f\left(x\right)=A.$$

Нехай функція $y=f\left(x\right)$ визначена на проміжку $\left(-\infty;+\infty\right)$.

Число A називають границею функції $y = f(x)$ при $x \to \infty$ і пишуть $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $M = M(\varepsilon) > 0$, що при $|x| > M$ виконується нерівність

$$\left| f(x) - A \right| < \varepsilon .$$

Функція $y = f(x)$ при $x \to x_0$ називається нескінченно великою функцією, якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$.

Функція $y = f(x)$ при $x \to x_0$ називається нескінченно малою функцією, якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$.

Основні теореми про границі.

Теорема 1. (про границю суми, добутку і частки). Якщо кожна з функцій $f(x)$ і $\varphi(x)$ має скінченну границю в точці x_0, то в цій точці існують також границі функцій $f(x) \pm \varphi(x)$, $f(x) \cdot \varphi(x)$, $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ (остання за умови, що $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) \neq 0$) і справедливі формули

$$\lim_{x\to x_0} \left(f(x) \pm \varphi(x) \right) = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} \varphi(x);$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \varphi(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} \varphi(x);$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x)} .$$

Наслідки з теореми 1:

1) $\lim\limits_{x\to x_0} c\, f(x) = c \lim\limits_{x\to x_0} f(x), \quad c \in R$;

2) $\lim\limits_{x\to x_0} \left[f(x) \right]^n = \left[\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \right]^n$, зокрема

$$\lim_{x\to x_0} x^n = \lim_{x\to x_0} x_0^n = x_0^n, \quad n\in N;$$

3) якщо $f(x)$ елементарна функція, то

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x\to x_0} x\right) = f(x_0).$$

Теорема 2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Теорема 3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$, де e - ірраціональне число, наближене значення якого, з точністю до 10^{-15} дорівнює 2,718281828459045.

Наслідки з теореми 3:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{k_1}{x}\right)^{k_2 x} = e^{k_1 k_2}$, де k_1 і k_2 - дійсні числа;

2) $\lim\limits_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}} = e$.

При обчисленні границь, пов'язаних з числом e, часто застосовують таке твердження: якщо існують границі $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) > 0$, $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x)$, то існує також границя

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\right)^{\varphi(x)} = \left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)^{\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)}.$$

Приклад 1.1. Знайти границі:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x^5+9x+7}{3x^6+x^3+1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^2-5x+1}{2x^2+3x-7}$;

в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2+x-10}{3x^2-5x-2}$; г) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{2x+1}}$.

Розв'язання. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x^5+9x+7}{3x^6+x^3+1}$.

Границі чисельника і знаменника існують і границя знаменника не дорівнює нулю, тому можна користуватися теоремою 1:

$$\lim_{x\to 1}\frac{4x^5+9x+7}{3x^6+x^3+1}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}\left(4x^5+9x+7\right)}{\lim\limits_{x\to 1}\left(3x^6+x^3+1\right)}=$$

$$=\frac{4\lim\limits_{x\to 1}x^5+9\lim\limits_{x\to 1}x+\lim\limits_{x\to 1}7}{3\lim\limits_{x\to 1}x^6+\lim\limits_{x\to 1}x^3+\lim\limits_{x\to 1}1}=\frac{4+9+7}{3+1+1}=4.$$

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^2-5x+1}{2x^2+3x-7}$.

При $x\to\infty$ маємо невизначеність виду $\dfrac{\infty}{\infty}$, тому поділимо чисельник і знаменник на x^2, а потім скористаємося відповідними властивостями границь. Матимемо

$$\lim_{x\to\infty}\frac{6x^2-5x+1}{2x^2+3x-7}=\lim_{x\to\infty}\frac{6-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}{2+\frac{3}{x}-\frac{7}{x^2}}=\left|\begin{matrix}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{x}=0,\\ \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=0\end{matrix}\right|=\frac{6}{2}=3.$$

в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2+x-10}{3x^2-5x-2}$.

Тут застосовувати теорему про границю частки не можна, тому що границя чисельника дорівнює нулю і границя знаменника дорівнює нулю, тобто маємо невизначеність виду $\dfrac{0}{0}$. Розкладемо чисельник і знаменник на лінійні множники, скориставшись формулою: $ax^2+bx+c=a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)$, де x_1 і x_2 - нулі квадратного тричлена.

$$2x^2+x-10=2\left(x-2\right)\left(x+\frac{5}{2}\right)=\left(x-2\right)\left(2x+5\right),$$

$$3x^2-5x-2=3(x-2)\left(x+\frac{1}{3}\right)=(x-2)(3x+1).$$

Оскільки при знаходженні границі функцій в точці $x=2$ розглядаються значення $x\neq 2$, то даний дріб можна скоротити на $x-2$, тому

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2+x-10}{3x^2-5x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(2x+5)}{(x-2)(3x+1)}=\lim_{x\to 2}\frac{(2x+5)}{(3x+1)}=\frac{9}{7}.$$

г) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{2x+1}}$.

При $x\to 4$ маємо невизначеність виду $\dfrac{0}{0}$. Помноживши чисельник і знаменник на вираз $\left(2+\sqrt{x}\right)\left(3+\sqrt{2x+1}\right)$ та скориставшись формулою $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ отримаємо:

$$\lim_{x\to 4}\frac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{2x+1}}=\lim_{x\to 4}\frac{\left(2-\sqrt{x}\right)\left(2+\sqrt{x}\right)\left(3+\sqrt{2x+1}\right)}{\left(2+\sqrt{x}\right)\left(3+\sqrt{2x+1}\right)\left(3-\sqrt{2x+1}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(4-x)\left(3+\sqrt{2x+1}\right)}{\left(2+\sqrt{x}\right)(9-2x-1)}=\lim_{x\to 4}\frac{(4-x)\left(3+\sqrt{2x+1}\right)}{\left(2+\sqrt{x}\right)(8-2x)}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(4-x)\left(3+\sqrt{2x+1}\right)}{\left(2+\sqrt{x}\right)(8-2x)}=\lim_{x\to 4}\frac{\left(3+\sqrt{2x+1}\right)}{2\left(2+\sqrt{x}\right)}=\frac{6}{2\cdot 4}=\frac{3}{4}.$$

Приклад 1.2. Знайти границі:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+3}\right)^{1-5x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6x}{arctg\,2x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}(6x+5)\left(\ln(3x+2)-\ln(3x-1)\right)$.

Розв’язання. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{x^2}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{x^2}=\left|\frac{0}{0},1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 2x}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{8\sin 2x\sin 2x}{2x\cdot 2x}=8\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^2=8\cdot 1^2=8.$$

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+3}\right)^{1-5x}$.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+3}\right)^{1-5x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x-1}{2x+3}-1\right)^{1-5x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{4}{2x+3}\right)^{1-5x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2x+3}{-4}}\right)^{\frac{2x+3}{-4}\cdot\frac{-4}{2x+3}\cdot\frac{1-5x}{1}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{20x-4}{2x+3}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{20-\frac{4}{x}}{2+\frac{3}{x}}}=e^{10}.$$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6x}{arctg 2x}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{6x}{arctg 2x}=\left|\begin{array}{l} arctg 2x=t,\quad 2x=tgt,\\ x=\frac{1}{2}tgt,\ при\ x\to 0\quad t\to 0\end{array}\right|=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{3tgt}{t}=3\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t\cos t}=3\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{1}{\cos t}=3.$$

г) $\lim\limits_{x\to\infty}(6x+5)\left(\ln(3x+2)-\ln(3x-1)\right)$.

$$\lim_{x\to\infty}(6x+5)\left(\ln(3x+2)-\ln(3x-1)\right)=\lim_{x\to\infty}(6x+5)\ln\frac{3x+2}{3x-1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{3x+2}{3x-1}\right)^{6x+5}=\ln\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-1+3}{3x-1}\right)^{6x+5}=$$

$$=\ln\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{3x-1}\right)^{6x+5}=\ln\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{3x-1}{3}}\right)^{\frac{3x-1}{3}\cdot\frac{3}{3x-1}\cdot(6x+5)}=$$

$$=\ln\left(\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{3x-1}{3}}\right)\right)^{\frac{3x-1}{3}}\right)^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{18x+15}{3x-1}}=\ln e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{18x+15}{3x-1}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{18x+15}{3x-1}\cdot\ln e=\lim_{x\to\infty}\frac{18+\frac{15}{x}}{3-\frac{1}{x}}=\frac{18}{3}=6.$$

2. Диференціальне числення функцій однієї змінної

Нехай задано неперервну функцію $y=f\left(x\right)$ з областю визначення $D\left(y\right)$. Надамо аргументу x довільного приросту Δx такого, щоб точка $x+\Delta x$ також належала $D\left(y\right)$. Знайдемо приріст функції: $\Delta y=f\left(x+\Delta x\right)-f\left(x\right)$.

Похідною функції $y=f\left(x\right)$ в точці x називається границя відношення приросту функції Δy в цій точці до приросту аргументу Δx, коли приріст аргументу прямує до нуля, тобто

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(x+\Delta x\right)-f\left(x\right)}{\Delta x}.$$

Похідну функції $y = f(x)$ в точці x позначають ще й такими символами: y'_x; $\dfrac{dy}{dx}$; $\dfrac{df}{dx}$; $f'(x)$.

Нехай аргументом функції f є функція $u(x)$, тоді $y = f(u(x))$ - складена функція з проміжним аргументом u і кінцевим аргументом x. Похідна складеної функції обчислюється за формулою: $y'_x = y'_u \cdot u'_x$.

Таблиця похідних

1. $(u^{\alpha})' = \alpha\, u^{\alpha-1} \cdot u'$

2. $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{1}{u^2} \cdot u'$

3. $\left(\dfrac{a}{u}\right)' = -\dfrac{a}{u^2} \cdot u'$

4. $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$

5. $\left(\sqrt[n]{u}\right)' = \dfrac{1}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}} \cdot u'$

6. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$

7. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$

8. $(tg\, u)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$

9. $(ctg\, u)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$

10. $(\arcsin u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$

11. $(\arccos u)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$

12. $(arctg\, u)' = \dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$

13. $(arcctg\, u)' = -\dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$

14. $(\ln u)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$

15. $(\lg u)' = \dfrac{1}{u \ln 10} \cdot u'$

16. $(\log_a u)' = \dfrac{1}{u \ln a} \cdot u'$

17. $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$

18. $(e^u)' = e^u \cdot u'$

Вважатимемо, що $u=u(x)$, $v=v(x)$ - диференційовні функції, C - стала величина.

Правила диференціювання:

1. $C'=0$; 2. $(C\cdot u)'=C\cdot u'$; 3. $(u\pm v)'=u'\pm v'$;

4. $(uv)'=u'v+uv'$; 5. $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$;

6. $y=f(x)$, обернена функція $x=\varphi(y)$, тоді $y'_x=\frac{1}{x'_y}$;

7. Функція задана параметрично: $y=y(t)$, $x=x(t)$, тоді

$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}$.

Приклад 2.1. Знайти похідні функцій:

а) $y=\sin^3 x$; б) $y=e^x\cdot tg2x$; в) $y=\frac{x^5}{2^x}$;

г) $y=\ln ctg\,x^4$; д) $x=a\cos t^2$, $y=a\sin t^2$.

Розв'язання. а) $y'=3\sin^2 x\cdot\cos x$

б) $y'=\left(e^x\right)'tg2x+e^x\cdot(tg2x)'=e^x\cdot tg2x+\frac{2e^x}{\cos^2 2x}$;

в) $y'=\frac{5x^4\cdot 2^x-x^5\cdot 2^x\ln 2}{\left(2^x\right)^2}=\frac{5x^4-x^5\ln 2}{2^x}$;

г)

$$y'=\frac{1}{ctg\,x^4}\cdot\left(-\frac{1}{\sin^2 x^4}\right)\cdot 4x^3=-\frac{4x^3}{\cos x^4\sin x^4}=-\frac{8x^3}{\sin 2x^4};$$

д) $y'_x=\frac{\left(a\cos t^2\right)'_t}{\left(a\sin t^2\right)'_t}=\frac{2at\cos t^2}{-2at\sin t^2}=-ctg\,t^2$.

Щоб продиференціювати неявно задану функцію, потрібно взяти похідну по x від обох частин рівності $F(x, y) = 0$, вважаючи y функцією від x, і одержане рівняння розв'язати відносно y'_x. Похідна неявної функції виражається через незалежну змінну x і саму функцію y.

Приклад 2.2. Знайти похідну y'_x, якщо

$$x^2 + y^2 - 2y + 3x = 1.$$

Розв'язання. $2x + 2y\,y' - 2y + 3 = 0, \;\Rightarrow$

$$y'(2y-2) = -2x - 3, \quad \Rightarrow \; y' = \frac{-2x-3}{2y-2} = \frac{2x+3}{2-2y} \; .$$

Похідні вищих порядків знаходять за формулами:

якщо функція $y = f(x)$, то $y'' = \left(y'(x)\right)'$, $y''' = \left(y''(x)\right)'$;

якщо задана параметрично, то

$$y''_{xx} = \frac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t}, \text{ або } y''_{xx} = \frac{y''_{tt} \cdot x'_t - y'_t \cdot x''_{tt}}{\left(x'_t\right)^3}, \; y'''_{xxx} = \frac{\left(y''_{xx}\right)'_t}{x'_t} .$$

З означення похідної $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ і властивостей нескінченно малих величин випливає рівність: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \alpha(x, \Delta x)$, де $\alpha(x, \Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$, звідки

$$\Delta y = y' \cdot \Delta x + \alpha(x, \Delta x) \cdot \Delta x .$$

Перший з доданків лінійний відносно Δx, а другий доданок — нескінченно мала вищого порядку, ніж Δx, тому що

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(x, \Delta x) \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(x, \Delta x) = 0 .$$

Цей доданок не є лінійним відносно Δx, тобто містить Δx в степені вищому від одиниці. Таким чином, перший доданок є головною частиною приросту функції.

Диференціалом dy функції $y = f\left(x\right)$ в точці називається головна , лінійна відносно Δx , частина приросту функції f в цій точці:

$$dy = f'\left(x\right)\cdot\Delta x\text{, або } dy = f'\left(x\right)\cdot dx\text{, оскільки } dx = \Delta x.$$

Для достатньо малих значень Δx приріст $\Delta y \approx dy$. Дістанемо формулу наближеного обчислення значень функції:

$$f\left(x+\Delta x\right) \approx f\left(x\right) + f'\left(x\right)\cdot\Delta x.$$

Приклад 2.3. Користуючись поняттям диференціала, знайти наближене значення функції

$$y = \sqrt[5]{\frac{2-x}{2+x}} \text{ в точці } x = 0,15 .$$

Розв’язання. Щоб скористатися формулою наближеного обчислення візьмемо за $x = 0$, а $\Delta x = 0,15$. Тоді

$$y' = \frac{1}{5}\left(\frac{2-x}{2+x}\right)^{-\frac{4}{5}}\cdot\left(\frac{2-x}{2+x}\right)' = \frac{1}{5}\sqrt[5]{\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^4}\cdot\frac{(-4)}{\left(2+x\right)^2};$$

$$y'\left(0\right) = -\frac{1}{5}, \qquad dy = -\frac{1}{5}\cdot 0,15 = -0,03 .$$

Остаточно, маємо

$$y\left(0,15\right) \approx y\left(0\right) + dy = 1 - 0,03 = 0,97 .$$

Точніше значення $y\left(0,15\right) \approx 0,97039$ з точністю до 10^{-5} .

Бачимо, що ми отримали результат з точністю до 10^{-3} .

Точки локального максимуму і локального мінімуму називаються точками локального екстремуму. Точки, в яких похідна $f'\left(x\right)$ дорівнює нулю або не існує, називаються критичними точками.

Необхідна умова екстремуму:

в точках екстремуму похідна $f'\left(x\right)$ дорівнює нулю або не існує.

Достатні умови екстремуму:

I. Нехай функція f неперервна в деякому околі точки x_0.

1) якщо при переході через точку x_0 похідна змінює знак з + на —, то в точці x_0 функція досягає максимуму;

2) якщо при переході через точку x_0 похідна змінює знак з — на +, то в точці x_0 функція досягає мінімуму;

3) якщо при переході через точку x_0 похідна не змінює знаку, то екстремуму немає.

II. Нехай в критичній точці x_0 функція f двічі диференційовна (це означає, що $f'(x_0)=0$) і околі точки x_0 існує друга неперервна похідна, причому $f''(x_0)\neq 0$. Якщо $f''(x_0)<0$, то x_0 — точка локального максимуму; якщо $f''(x_0)>0$, то x_0 — точка локального мінімуму.

Інтервали опуклості і вгнутості знаходять з умови.

Нехай функція $y=f(x)$ є двічі диференційовною на $(a;b)$, тоді:

1) якщо $f''(x)<0$, то крива $y=f(x)$ опукла на $(a;b)$;

2) якщо $f''(x)>0$, то крива $y=f(x)$ вгнута на $(a;b)$.

Якщо $f''(x_0)=0$ або не існує, але $f'(x_0)$ існує і при цьому, друга похідна $f''(x)$ змінює знак при переході через точку x_0, то точка $(x_0; f(x_0))$ є точкою перегину кривої .

Пряма лінія називається асимптотою для кривої $y=f(x)$, якщо відстань від точки М, що лежить на кривій, до цієї прямої прямує до нуля при русі точки М вздовж якої-небудь гілки кривої в нескінченність.

Є три види асимптот: вертикальні, горизонтальні і похилі:

1) якщо хоча б одна із односторонніх границь функції f в точці x_0 дорівнює нескінченності, то пряма $x = x_0$ — вертикальна асимптота;

2) якщо $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f\left(x\right) = A$, то пряма $y = A$ — горизонтальна асимптота (права при $x \to +\infty$ і ліва при $x \to -\infty$);

3) якщо існують границі

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f\left(x\right)}{x} = k_1, \qquad \lim_{x\to+\infty}\left(f\left(x\right) - k_1 x\right) = b_1,$$

то пряма $y = k_1 x + b_1$ — похила асимптота (права).

Якщо існують границі

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f\left(x\right)}{x} = k_2, \qquad \lim_{x\to-\infty}\left(f\left(x\right) - k_2 x\right) = b_2,$$

то пряма $y = k_2 x + b_2$ — похила асимптота (ліва).

Загальне дослідження функцій та побудову їх графіків зручно виконувати, наприклад, за такою схемою.

1. Знайти область існування функції.
2. Дослідити функцію на періодичність, парність і непарність.
3. Знайти точки розриву та дослідити їх.
4. Знайти асимптоти графіка функції.
5. Знайти інтервали монотонності, точки локальних екстремумів та значення функції в цих точках.
6. Знайти інтервали опуклості, вгнутості та точки перегину, обчислити значення функції в цих точках.
7. Знайти точки перетину графіка з координатними осями.
8. Побудувати графік функції, враховуючи дослідження.

Приклад 2.4. Дослідити та побудувати графік функції

$$y = \frac{x^3}{1 - x^2}.$$

Розв'язання. 1. Область існування – вся числова вісь, крім точок $x = \pm 1$.

2. Функція не періодична. Оскільки

$$f(-x)=\frac{(-x)^3}{1-(-x)^2}=-\frac{x^3}{1-x^2}=-f(x),$$

то функція непарна, тому досліджуватимемо її лише для $x\geq 0$.

3. Функція в точці $x=1$ має розрив другого роду і

$$\lim_{x\to 1+0} f(x)=\lim_{x\to 1+0}\frac{x^3}{1-x^2}=-\infty,\quad \lim_{x\to 1-0} f(x)=\lim_{x\to 1-0}\frac{x^3}{1-x^2}=+\infty.$$

4. З п. 3 випливає, що пряма $x=1$ – права вертикальна асимптота кривої. Аналогічно, пряма $x=-1$ буде лівою вертикальною асимптотою кривої. Дослідимо криву на наявність похилої асимптоти. Оскільки

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{\left(1-x^2\right)\cdot x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x-x^3}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{\frac{1}{x^2}-1}=-1,$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{1-x^2}-(-1)\cdot x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{1-x^2}=0,$$

то при $x\to\pm\infty$ задана крива має похилу асимптоту $y=-x$

Горизонтальних асимптот немає, оскільки

$$\lim_{x\to\pm\infty} y=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{1-x^2}=\pm\infty.$$

5. Похідна $y'=\dfrac{x^2\cdot\left(3-x^2\right)}{\left(1-x^2\right)^2}$ дорівнює нулю при $x=0$, $x=\pm\sqrt{3}$ і не існує в точках $x=\pm 1$, але останні не входять в область визначення, тому критичними точками функції є точки $x_1=-\sqrt{3}$, $x_2=0$, $x_3=+\sqrt{3}$.

На інтервалі $(0;+\infty)$ маємо:

якщо $x\in(0;1)$, то $f'(x)>0$ – функція зростає;

якщо $x\in\left(1;\sqrt{3}\right)$, то $f'(x)>0$ – функція зростає;

якщо $x \in \left(\sqrt{3}; +\infty\right)$, то $f'(x) < 0$ – функція спадає;

в точці $x_3 = +\sqrt{3}$ функція має локальний максимум: $y_{\max} = f\left(\sqrt{3}\right) \approx -2{,}6$;

відповідно в точці $x_1 = -\sqrt{3}$ функція має локальний мінімум: $y_{\min} = f\left(-\sqrt{3}\right) \approx 2{,}6$.

6. Знаходимо другу похідну: $y'' = \dfrac{2x\left(x^2+3\right)}{\left(1-x^2\right)^3}$.

Похідна $f''(x) = 0$ при $x = 0$ і не існує при $x = \pm 1$.

Оскільки точки $x = \pm 1$ не входять в область визначення, то $x = 0$ – єдина критична точка. Маємо:

якщо $x \in (-1; 0)$, то $f''(x) < 0$ – крива опукла;

якщо $x \in (0; 1)$, то $f''(x) > 0$ – крива вгнута;

якщо $x \in (1; +\infty)$, то $f''(x) < 0$ – крива опукла;

точка $O(0; 0)$ – точка перегину.

7. Якщо $x = 0$, то $y = 0$, тому графік перетинає осі координат в точці $O(0; 0)$.

8. Враховуючи проведене дослідження і непарність функції, будуємо графік (рис. 1).

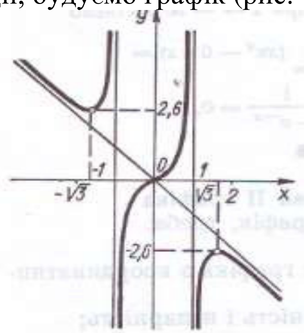

Рис. 1.

3. Диференціальне числення функцій двох змінних

Якщо кожній точці $M(x;y) \in D$ за певним законом f відповідає одне і тільки одне дійсне значення z, то кажуть, що на множині D визначено функцію від двох незалежних змінних x і y, і записують $z = f(x,y)$, або $z = z(x,y)$.

При цьому множину D називають областю визначення функції, або областю існування функції $z = f(x,y)$.

Графіком функції двох змінних є геометричне місце точок $(x;\ y;\ z(x,y))$ тривимірного простору R_3, тобто функція $z = f(x,\text{y})$, $(x;y) \in D$ визначає деяку поверхню, проекція якої на площину Oxy є областю визначення D.

Більш простою геометричною ілюстрацією функції двох змінних є лінії рівня, які визначаються рівнянням $f(x,y) = c$, де c- довільні сталі взяті з множини $E(f)$ значень функції. Дане рівняння задає деяку однопараметричну (c- параметр) сім'ю кривих на площині Oxy.

Геометрично, лінії рівня – це проекції ліній перерізу поверхні $z = f(x,y)$ площинами $z = c$ на площину Oxy.

Нехай функція $f(x,y)$ визначена в деякому околі точки $(x_0;y_0)$. Величина $\Delta f(x_0,y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0,y_0)$ називається повним приростом функції $f(x,y)$ в точці $(x_0;y_0)$.

Функція $f(x,y)$ називається неперервною в точці $(x_0;y_0)$, якщо повний приріст її в цій точці прямує до нуля, при умові, що прирости її аргументів x та y прямують до нуля, тобто $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z(x_0,y_0) = 0$.

Частинною похідною функції $z = f(x, y)$ в точці $(x_0; y_0)$ по змінній x називають границю відношення частинного приросту $\Delta_x f$ до приросту Δx при прямуванні Δx до нуля і позначають: $\dfrac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial x}$, або $\dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$, або $z'_x(x_0, y_0)$.

Таким чином

$$\frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}.$$

Частинною похідною функції $z = f(x, y)$ по змінній y в точці $(x_0; y_0)$ називається границя відношення частинного приросту $\Delta_y f$ до приросту Δy при прямуванні Δy до нуля і позначають: $\dfrac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial y}$, або $\dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}$, або $z'_y(x_0, y_0)$.

Таким чином

$$\frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y f}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

Щоб знайти частинну похідну функції $z = f(x, y)$ по x, змінну y вважаємо сталою, а при знаходженні частинної похідної по y, змінну x вважаємо сталою. $\left|\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|$ та $\left|\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|$ визначають величину швидкості з якою відбувається зміна функції z при зміні тільки x, або тільки y, а знак частинної похідної $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, або $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ вказує на характер зміни (зростання чи спадання) функції в напрямі осі Ox, або Oy.

Функція $z = f(x, y)$ називається диференційовною в точці $(x; y) \in D$, якщо в деякому околі U цієї точки її повний приріст Δz можна подати у вигляді

$$\Delta z = \frac{\partial f(\tilde{o}, \acute{o})}{\partial \tilde{o}} \Delta \tilde{o} + \frac{\partial f(\tilde{o}, \acute{o})}{\partial \acute{o}} \Delta \acute{o} + \varepsilon_1 \Delta \tilde{o} + \varepsilon_2 \Delta \acute{o},$$

де $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y)$ і $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y)$ – нескінченно малі функції при $\Delta x \to 0$ і $\Delta y \to 0$.

Лінійну (головну) відносно Δx і Δy частину повного приросту диференційовної в точці $(x; y)$ функції $z = f(x, y)$ називають повним диференціалом функції в цій точці і позначають:

$$dz = \frac{\partial f(\tilde{o}, \acute{o})}{\partial \tilde{o}} d\tilde{o} + \frac{\partial f(\tilde{o}, \acute{o})}{\partial \acute{o}} d\acute{o}.$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Диференціали незалежних змінних x та y назвемо прирости цих змінних $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$.

Геометричне тлумачення диференціала полягає в тому, що dz є приростом аплікати дотичної площини до поверхні $z = f(x, y)$ в точці дотику $(x; y)$.

Для функції $z = f(x, y)$ диференційовної в точці $(x; y)$ повний приріст $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$.

Звідси $f(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(x, y) + \Delta z$.

Для достатньо малих Δx і Δy виконується наближена рівність: $\Delta z \approx dz$,

де $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$.

Тоді отримаємо наближену рівність, яка застосовується при наближених обчисленнях.:

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

Нехай в просторі R_3 задано поверхню неявним рівнянням $F(x,y,z)=0$, і точку $P_0(x_0;y_0;z_0)$ на цій поверхні. Функція $F(x,y,z)$ є диференційовною в цій точці. Тоді рівняння дотичної площини до поверхні в цій точці матиме вигляд:

$$F_x'(P_0)(x-x_0)+F_y'(P_0)(y-y_0)+F_z'(P_0)(z-z_0)=0,$$

а рівняння нормалі :

$$\frac{x-x_0}{F_x'(P_0)}=\frac{y-y_0}{F_y'(P_0)}=\frac{z-z_0}{F_z'(P_0)}.$$

Якщо поверхню задано явним рівнянням $z=f(x,y)$, то рівняння дотичної площини буде таким:

$$f_x'(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y'(x_0,y_0)(y-y_0)-(z-z_0)=0,$$

а рівняння нормалі : $\dfrac{x-x_0}{f_x'(x_0,y_0)}=\dfrac{y-y_0}{f_y'(x_0,y_0)}=\dfrac{z-z_0}{-1}$.

Частинні похідні першого порядку $f_x'(x,y)$ і $f_y'(x,y)$ в загальному випадку також є функціями від двох змінних x і y. Якщо ці функції ще раз продиференціювати по x, або по y, то дістанемо похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=z''_{xx}, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=z''_{yy},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=z''_{xy}, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=z''_{yx}.$$

Теорема 1. (***Про рівність мішаних частинних похідних***)

Якщо функція $z=f(x,y)$ та її частинні похідні другого порядку z''_{xy} та z''_{yx} неперервні в деякому околі точки $(x;y)$, то $z''_{xy}=z''_{yx}$.

Формула диференціала другого порядку d^2z має вигляд:

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx\, dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2 .$$

Функція $z = f(x, y)$ має максимум в точці $(x_0; y_0)$, якщо $f(x_0, y_0) > f(x, y)$ для всіх точок $(x; y)$, які належать деякому околу точки $(x_0; y_0)$.

Функція $z = f(x, y)$ має мінімум в точці $(x_0; y_0)$, якщо $f(x_0, y_0) < f(x, y)$ для всіх точок $(x; y)$, які належать деякому околу точки $(x_0; y_0)$.

Теорема 2. (***Необхідні умови екстремуму***). Якщо диференційовна функція $z = f(x, y)$ має в точці $(x_0; y_0)$ екстремум, то в цій точці частинні похідні першого порядку по змінним x і y дорівнюють нулю:

$$\frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial y} = 0 .$$

Точка $M_0(x_0; y_0)$ для якої виконується необхідні умови називається стаціонарною.

Позначимо величини:

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x_0, y_0), \quad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(x_0, y_0), \quad C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x_0, y_0) .$$

Обчислимо визначник: $\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$.

Теорема 3. (***Достатні умови екстремуму***). Якщо для функції $z = f(x, y)$ виконані необхідні умови екстремуму в деякій точці $M_0(x_0; y_0)$, то в цій точці функція:

1) має екстремум якщо $\Delta > 0$, причому – має максимум, якщо $A < 0$, та мінімум, якщо $A > 0$;

2) не має екстремуму, якщо $\Delta < 0$.

Щоб знайти найбільше і найменше значення функції в замкненій області, необхідно:

1) знайти стаціонарні точки, якщо точки належать області, то обчислюють значення функції в цих точках; на екстремум ці точки досліджувати не треба;

2) знайти найбільше і найменше значення функції на межі області; якщо межа складається із кількох меж – на кожній з них;

3) порівняти знайдені значення і встановити яке з них найбільше, а яке найменше.

Область простору, кожній точці M якої поставлено у відповідність значення деякої скалярної величини $u(M)$ називають скалярним полем.

Наприклад, поле температур, поле густин речовини.

Якщо функція $u(M)$ не залежить від часу, то скалярне поле називається *стаціонарним*. Якщо функція $u(M)$ змінюється з часом, то поле називається *нестаціонарним*. Якщо функція $u(M)$ залежить від двох змінних, то поле називається *плоским*, а від трьох змінних – *просторовим*.

Геометрично плоскі поля зображаються за допомогою ліній рівня, які визначаються рівняннями $u(x, y) = c$, а просторові – поверхонь рівня $u(x, y, z) = c$, де c – стала величина.

Важливою характеристикою скалярного поля є швидкість зміни поля в заданому напрямі.

Розглянемо плоске скалярне поле визначене функцією $z = f(x, y)$ в деякій області, що містить точку $M(x; y)$.

З цієї точки M проведемо вектор $\vec{l}$, напрямні косинуси якого $\cos\alpha$, $\cos\beta$.

На векторі $\vec{l}$ на відстані Δl від його початку візьмемо точку $M_1(x + \Delta x; y + \Delta y)$. Тоді $\Delta l = MM_1 = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$. При переході від точки M до точки M_1 в напрямі вектора $\vec{l}$ функція $z = f(x, y)$ отримає приріст $\Delta z_l = z(M_1) - z(M)$.

Якщо існує границя відношення приросту функції Δz_l в даному напрямі до приросту довжини Δl, якщо Δl прямує до нуля, то цю границю називають похідною функції $f(x, y)$ в точці M за даним напрямом $\vec{l}$ і позначають $\dfrac{\partial z}{\partial l}$, тобто

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta z_l}{\Delta l} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta,$$

де $\cos\alpha = \dfrac{\Delta x}{\Delta l}$, $\cos\beta = \dfrac{\Delta y}{\Delta l}$ – напрямні косинуси вектора $\vec{l}$.

Вектор, що визначає напрям, в якому швидкість зміни скалярного поля в даній точці найбільша називається градієнтом і позначається:

$$\overrightarrow{grad}\, z = \frac{\partial z}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\vec{j}.$$

Градієнт поля в даній точці нормальний до лінії рівня поля в цій самій точці. Якщо вектор $\vec{l} \perp \overrightarrow{grad}\, z$, то $\dfrac{\partial z}{\partial l} = 0$.

Приклад 3.1. Знайти похідну функції $z = f(x, y)$ в точці $A(x_A; y_A)$ за напрямом вектора проведеного від точки A до точки $B(x_B; y_B)$. З'ясувати характер зміни поля в даному напрямі. Знайти напрям градієнта в цієї ж функції в точці A.

Дано: функція $z = 2x^2 + 3y^2 - x - 4y$, $A(1; 2)$, $B(4; 6)$.

Розв'язання. Знайдемо вектор $\vec{\ell} = \overrightarrow{AB}$ і його напрямні косинуси: $\vec{\ell} = \overrightarrow{AB} = (4-1, 6-2) = (3, 4)$, $\left|\vec{\ell}\right| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$,

$$\cos\alpha = \frac{\ell_x}{\left|\vec{\ell}\right|} = \frac{3}{5} = 0,6 , \qquad \cos\beta = \frac{\ell_y}{\left|\vec{\ell}\right|} = \frac{4}{5} = 0,8 .$$

Знайдемо частинні похідні першого порядку $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x - 1 , \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 6y - 4 .$$

Обчислимо значення частинних похідних в точці А:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(A) = 4\cdot 1 - 1 = 3 , \quad \frac{\partial z}{\partial y}(A) = 6\cdot 2 - 4 = 8 .$$

Обчислимо похідну функції z в точці А за напрямом вектора $\vec{\ell}$ за формулою:

$$\frac{\partial z}{\partial \ell}(A) = \frac{\partial z}{\partial x}(A)\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}(A)\cos\beta .$$

Отже, $\frac{\partial z}{\partial \ell}(A) = 3\cdot 0,6 + 8\cdot 0,8 = 8,2$.

Оскільки $\frac{\partial z}{\partial \ell}(A) = 8,2 > 0$, то задана функція $z = -4 + 6x - x^2 - xy - y^2$ за напрямом вектора $\vec{\ell} = (3,4)$ зростає.

Градієнт функції обчислимо за формулою

$$\overrightarrow{grad}\, z(A) = \frac{\partial z}{\partial x}(A)\cdot\vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y}(A)\cdot\vec{j} .$$

Отже, $\overrightarrow{grad}\, z(A) = 3\cdot\vec{i} + 8\cdot\vec{j}$.

Приклад 3.2. Функцію $z = -4 + 6x - x^2 - xy - y^2$ дослідити на екстремум.

Розв'язання. Знайдемо частинні похідні першого порядку $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$: $\frac{\partial z}{\partial x} = 6 - 2x - y$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -x - 2y$.

Прирівняємо їх до нуля і розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 6-2x-y=0, \\ -x-2y=0 \end{cases}.$$

Із системи знаходимо стаціонарну точку: $x_0 = 4$, $y_0 = -2$.

Отже, функція має одну стаціонарну точку $M_0(4;-2)$.

Знайдемо частинні похідні другого порядку і їх значення у точці M_0:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -1, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2.$$

Частинні похідні другого порядку є сталими величинами в будь-якій точці області визначення, в тому числі і в точці M_0, тому

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(M_0) = -2, \qquad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(M_0) = -1,$$

$$C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(M_0) = -2.$$

Визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2 = (-2)(-2) - (-1)^2 = 3 > 0.$$

Оскільки $\Delta > 0$ і одночасно $A < 0$, то в точці $M_0(4,-2)$ дана функція має максимум, причому

$$z_{\max} = z(M_0) = z(4,-2) = 8.$$

4. Інтегральне числення функцій однієї змінної

Таблиця інтегралів

1. $\int u^{\alpha} du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, $\alpha \neq -1$.
2. $\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C$.
3. $\int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + C$.
4. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$.
5. $\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{u}{a} + C$.
6. $\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + C$.
7. $\int \frac{du}{1+u^2} = arctg\, u + C$.
8. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C$.
9. $\int \frac{du}{u^2-1} = \frac{1}{2} \ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| + C$.
10. $\int \frac{du}{\sin u} = \ln\left|tg\left(\frac{u}{2}\right)\right| + C$.
11. $\int \frac{du}{\cos u} = \ln\left|tg\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$
12. $\int \frac{du}{1-u^2} = \frac{1}{2} \ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right| + C$.
13. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$.
14. $\int e^u du = e^u + C$.
15. $\int \sin u \, du = -\cos u + C$.
16. $\int \cos u \, du = \sin u + C$.
17. $\int tg\, u \, du = -\ln|\cos u| + C$.
18. $\int ctg\, u \, du = \ln|\sin u| + C$.
19. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = tg\, u + C$.
20. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -ctg\, u + C$.
21. $\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right| + C$.
22. $\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C$.
23. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a}\right| + C$.

Властивості невизначеного інтегралу

а) $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$; б) $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$;

в) $\int df(x) = f(x) + C$; г) $\int Af(x)dx = A\int f(x)dx$, A -стала.

д) $\int\left[\,f_1(x) + f_2(x)\,\right]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$;

е) $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$, де $\int f(x)dx = F(x) + C$.

Зразки знаходження невизначених інтегралів

Приклад 4.1. Знайти інтеграл $\int(2\sin x + 3^x + \frac{1}{\sqrt[3]{x}})\,dx$, скориставшись властивістю:

$$\int(k_1 f_1(x) \pm k_2 f_2(x))\,dx = k_1\int f_1(x)dx \pm k_2\int f_2(x)dx\,.$$

Розв'язання.

$$\int(2\sin x + 3^x + \frac{1}{\sqrt[3]{x}})\,dx = 2\int\sin x\,dx + \int 3^x\,dx + \int x^{-\frac{1}{3}}dx =$$

$$= -2\cos x + \frac{3^x}{\ln 3} + \frac{3x^{\frac{2}{3}}}{2} + C\,.$$

Приклад 4.2. Методом безпосереднього інтегрування знайти інтеграл $\int\cos^2\frac{x}{2}dx$.

Розв'язання. Скористаємося такою формулою тригонометрії: $\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$. Тоді

$$\int\cos^2\frac{x}{2}dx = = \frac{1}{2}\int(1+\cos x)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int\cos x\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sin x + C\,.$$

Приклад 4.3. Знайти інтеграл $\int\frac{x\,dx}{1+x^2}$ методом підстановки.

Розв'язання. Позначимо $t = 1 + x^2$, $dt = 2xdx$. Звідси $xdx = \frac{1}{2}dt$. Тоді $\int \frac{xdx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t| + C = \frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right| + C$.

Цей же інтеграл можна знайти методом підведення під знак диференціала, враховуючи, що $d\left(1+x^2\right) = 2x\,dx$, тобто $x\,dx = \frac{1}{2}d\left(1+x^2\right)$. Тоді $\int \frac{xdx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(1+x^2\right)}{1+x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right| + C$.

Приклад 4.4. Методом інтегрування частинами знайти інтеграл $\int (x+2)\sin 3x\,dx$.

Розв'язання. Запишемо формулу інтегрування частинами:

$$\int u \cdot dv = uv - \int v \cdot du$$

$$\int (x+2)\sin 3x\,dx = \left| \begin{matrix} u = x+2, & du = dx \\ dv = \sin 3x\,dx, & v = -\frac{1}{3}\cos 3x \end{matrix} \right| =$$

$$= -\frac{1}{3}(x+2)\cos 3x - \left(-\frac{1}{3}\right)\int \cos 3x\,dx =$$

$$= -\frac{1}{3}(x+2)\cos 3x + \frac{1}{9}\sin 3x + C.$$

Приклад 4.5. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{-4x^2+6x+5}}$.

Розв'язання. $\int \frac{dx}{\sqrt{-4x^2+6x+5}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-4(x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{5}{4})}} =$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{-(x^2 - 2\cdot\frac{3}{4}x + \frac{9}{16} - \frac{9}{16} - \frac{5}{4}}} = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x - \frac{3}{4}\right)}{\sqrt{\frac{29}{16} - \left(x - \frac{3}{4}\right)^2}} =$$

$$=\left|\begin{array}{l}\textit{Скористаємося} \quad \textit{табличним} \quad \textit{інтегралом} \\ \int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin\frac{u}{a}+c, /u = x-\frac{3}{4}/, /a^2=\frac{29}{16} \Rightarrow a=\frac{\sqrt{29}}{4}/\end{array}\right| =$$

$$=\frac{1}{2}\arcsin\frac{x-\frac{3}{4}}{\frac{\sqrt{29}}{4}}+C=\frac{1}{2}\arcsin\frac{4x-3}{\sqrt{29}}+C.$$

***Приклад 4.6*.** Знайти інтеграл $\int \frac{x-3}{x^2+2x+4}dx$.

Розв'язання.

$$\int \frac{x-3}{x^2+2x+4}dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x+2)+(-3-1)}{x^2+2x+1+3}dx = \frac{1}{2}\int \frac{(2x+2)\,dx}{x^2+2x+4} -$$

$$-4\int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+3} = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+4\right| - \frac{4}{\sqrt{3}}\,arctg\,\frac{x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

***Приклад 4.7*.** Знайти інтеграл $\int \frac{x\,dx}{(x-2)(x+3)}$.

Розв'язання. Підінтегральна функція $\frac{x}{(x-2)(x+3)}$ є правильним алгебраїчним дробом. Розкладемо цей дріб на суму простих алгебраїчних дробів:

$$\frac{x}{(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3)+B(x-2)}{(x-2)(x+3)}.$$

З рівності двох дробів випливає рівність:

$A(x+3)+B(x-2)=x$.

Знайдемо значення коефіцієнтів A і B:

якщо $x=2$, то $5A=2$, тобто $A=\frac{2}{5}$;

якщо $x=-3$, то $-5B=-3$, тобто $B=\frac{3}{5}$.

Таким чином, дріб $\dfrac{x}{(x-2)(x+3)} = \dfrac{\frac{2}{5}}{x-2} + \dfrac{\frac{3}{5}}{x+3}$.

Тоді

$$\int \frac{x\,dx}{(x-2)(x+3)} = \frac{2}{5}\int \frac{dx}{x-2} + \frac{3}{5}\int \frac{dx}{x+3} = \frac{2}{5}\ln|x-2| + \frac{3}{5}\ln|x+3| + C .$$

Приклад 4.8. Знайти інтеграл $\displaystyle\int \frac{dx}{2\cos x - 3\sin x + 1}$.

Розв'язання. Зведемо даний інтеграл до інтегралу від раціональної функції за допомогою універсальної підстановки $t = tg\,\dfrac{x}{2}$. Звідси $dx = \dfrac{2\,dt}{1+t^2}$, $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$.

Тоді інтеграл

$$\int \frac{dx}{2\cos x - 3\sin x + 3} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{2\frac{1-t^2}{1+t^2} - 3\frac{2t}{1+t^2} + 3} = 2\int \frac{dt}{2 - 2t^2 - 6t + 3 + 3t^2} =$$

$$= 2\int \frac{dt}{t^2 - 6t + 5} = 2\int \frac{dt}{(t-3)^2 - 4} = 2\cdot\frac{1}{2\cdot 2}\ln\left|\frac{t-3-2}{t-3+2}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-5}{t-1}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{tg\frac{x}{2} - 5}{tg\frac{x}{2} - 1}\right| + C .$$

Приклад 4.9. Знайти інтеграл $\int \sin^3 x \cos^2 x\,dx$.

Розв'язання.

$$\int \sin^3 x\cos^2 x dx = \int \sin^2 x \cos^2 x \sin x dx = -\int \left(1-\cos^2 x\right)\cos^2 x d(\cos x) =$$

$$= \left|\begin{matrix}\textit{застосуємо} \\ \textit{підстановку} \\ \cos x = t\end{matrix}\right| = -\int \left(1 - t^2\right)t^2 dt = \int \left(t^4 - t^2\right)dt =$$

$$=\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}+C=\frac{\cos^5}{5}-\frac{\cos^3 x}{3}+C.$$

***Приклад 4.10*.** Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)\sqrt{x}}$.

Розв'язання. Змінна x у підінтегральній функції стоїть у степені $1/3$ і $1/2$. Спільним знаменником цих дробів є число 6. Тому тут застосуємо підстановку $x=t^6$. Тоді $dx=6t^5dt$, $\sqrt[3]{x}=t^2$, $\sqrt{x}=t^3$, $t=\sqrt[6]{x}$. Підставляємо знайдені величини в інтеграл.

Маємо

$$\int \frac{dx}{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)\sqrt{x}}=\int \frac{6t^5dt}{\left(1+t^2\right)t^3}=6\int \frac{t^2dt}{t^2+1}=6\int \frac{t^2+1-1}{t^2+1}dt=$$

$$=6\int\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt=6\left(t-arctg\,t\right)+C=6\left(\sqrt[6]{x}-arctg\sqrt[6]{x}\right)+C.$$

Визначений інтеграл і його застосування
Зразки розв'язування завдань

***Приклад 4.11*.** Обчислити невласний інтеграл першого роду $\int_1^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}$, або встановити його розбіжність.

Розв'язання. За означенням, маємо

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{b\to+\infty} arctg\,x\Big|_1^b=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left(arctg\,b-arctg1\right)=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}.$$

Отже, інтеграл $\int_1^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}$ збігається.

Приклад 4.12. Обчислити невласний інтеграл другого роду $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$, або встановити його розбіжність.

Розв'язання. Підінтегральна функція $y=\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ має розрив другого роду в точці $x=1$, тому за означенням

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{b\to 1-0}\int\limits_0^b \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = -\lim_{b\to 1-0} 2\sqrt{1-x}\Big|_0^b =$$

$$=-2\lim_{b\to 1-0}\left(\sqrt{1-b}-1\right)=-2(-1)=2.$$

Приклад 4.13. Обчислити площу плоскої фігури, обмеженої параболою $y=\frac{1}{4}(x-2)^2$ і прямою $x+2y-14=0$.

Розв'язання. Знайдемо точки перетину даних ліній. З рівняння прямої $x+2y-14=0$ знаходимо $y=7-\frac{x}{2}$. Складаємо систему рівнянь $\begin{cases} y=\frac{1}{4}(x-2)^2, \\ y=7-\frac{x}{2}. \end{cases}$ Підставляємо в перше рівняння системи замість y різницю $7-\frac{x}{2}$, отримаємо $7-\frac{x}{2}=\frac{1}{4}(x-2)^2$, $\Rightarrow\ 28-2x=x^2-4x+4$, $\Rightarrow\ x^2-2x-24=0$.

За теоремою Вієта знаходимо корені квадратного рівняння: $x_1=-4$, $x_2=6$. Відповідно, $y_1=7-\frac{(-4)}{2}=9$, а $y_2=4$.

Таким чином, парабола і пряма перетинаються в точках $A(-4;9)$ і $B(6;4)$ (рис.2).

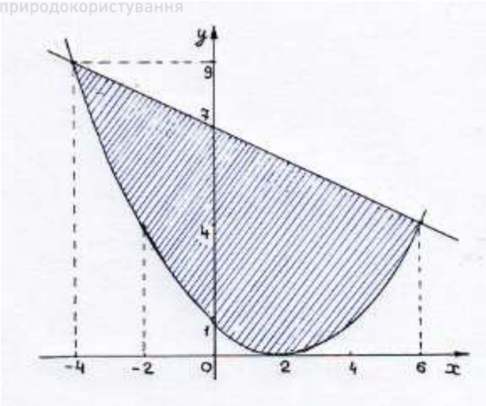

Рис. 2

Площа плоскої фігури, обмеженої зверху неперервною кривою $y=f(x)$, знизу – неперервною кривою $y=\varphi(x)$, зліва – прямою $x=a$ і справа – прямою $x=b$, обчислюється за формулою

$$S=\int_a^b\big(f(x)-\varphi(x)\big)\,dx\,.$$

Оскільки зверху фігура обмежена прямою $y=7-\dfrac{x}{2}$, а знизу – параболою $y=\dfrac{1}{4}(x-2)^2$, то площа

$$S=\int_{-4}^{6}\left(7-\frac{x}{2}-\frac{1}{4}(x-2)^2\right)dx=\int_{-4}^{6}\left(7-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{4}+x-1\right)dx=$$

$$=\int_{-4}^{6}\left(6+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{4}\right)dx=\left(6x+\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{12}\right)\Bigg|_{-4}^{6}=$$

$$=36+9-18+24-4-\frac{16}{3}=41\frac{2}{3}\ \text{(кв. од.)}\,.$$

Приклад 4.14. Знайти площу фігури, обмеженої кривою $\rho=a\cos 2\varphi$.

Розв'язання. Дана плоска фігура симетрична відносно полярної осі і відносно полюса, складається з чотирьох рівновеликих частин (рис.3), тому площа згідно формули $S=\frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta}\rho^2(\varphi)\,d\varphi$ дорівнює:

$$S=4\cdot\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}a^2\cos^2 2\varphi\,d\varphi=a^2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 4\varphi)\,d\varphi=$$

$$=a^2\left(\varphi+\frac{1}{4}\sin 4\varphi\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi a^2}{4}\text{ (кв. од.).}$$

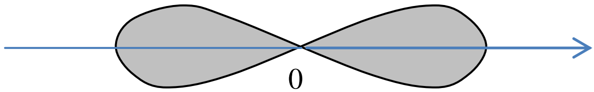

Рис. 3.

Приклад 4.15. Знайти довжину дуги кардіоїди $\rho=a(1+\cos\varphi)$.

Розв'язання. Оскільки крива симетрична відносно полярної осі і $\rho'=-a\sin\varphi$, то довжину дуги, обчислимо за формулою:

$$L=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\rho^2+\left(\rho'_{\varphi}\right)^2}\,d\varphi.$$

Вся крива, складається з двох частин, рівних за довжиною, тому довжина дуги

$$L=2\int\limits_{0}^{\pi}\sqrt{a^2(1+\cos\varphi)^2+(-a\sin\varphi)^2}\,d\varphi=$$

$$=2a\int\limits_{0}^{\pi}\sqrt{1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}\,d\varphi=$$

$$=2\sqrt{2}\,a\int\limits_{0}^{\pi}\sqrt{2}\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi=4a\,2\sin\frac{\varphi}{2}\Bigg|_0^{\pi}=8a\text{ (лін. од.).}$$

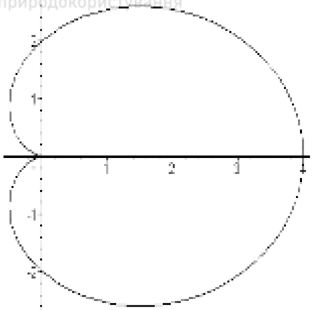

Рис. 4. Кардіоїда з параметром $a = 2$.

Приклад 4.16. Знайти центр маси однорідної плоскої фігури обмеженої параболою $y = \sqrt{2x}$, прямою $x = 2$ і віссю Ох.

Розв'язання. Координати центра маси однорідної криволінійної трапеції, що прилягає до осі Ох, знаходять за формулами:

$$x_c = \frac{M_y}{m}, \quad y_c = \frac{M_x}{m},$$

де $m = \int_a^b f(x)\, dx$ - маса плоскої фігури;

$M_y = \int_a^b x\, y\, dx$ - статичний момент плоскої фігури відносно осі Оу;

$M_x = \frac{1}{2}\int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx$ - статичний момент плоскої фігури відносно осі Ох.

Зробимо рисунок криволінійної трапеції.

Рис. 5.

Знаходимо величини m, M_y, M_x:

$$m=\int_0^2\sqrt{2x}\,dx=\frac{\sqrt{2}\cdot 2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2=\frac{2\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}}{3}=\frac{8}{3},$$

$$M_y=\int_0^2 x\sqrt{2x}\,dx=\frac{\sqrt{2}\cdot 2}{5}x^{\frac{5}{2}}\Big|_0^2=\frac{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot 4}{5}=\frac{16}{5},$$

$$M_x=\frac{1}{2}\int_0^2\left(\sqrt{2x}\right)^2dx=\frac{1}{2}\int_0^2 2x\,dx=\frac{1}{2}x^2\Big|_0^2=2.$$

Отже, координати центра маси будуть такі:

$$x_c=\frac{M_y}{m}=\frac{16}{5}\cdot\frac{3}{8}=\frac{6}{5}=1,2,\qquad y_c=\frac{M_x}{m}=\frac{2\cdot 3}{8}=\frac{3}{4}=0,75.$$

5. Завдання для самостійної роботи

Завдання 1. Знайти границі функцій, не користуючись правилом Лопіталя.

1. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+x^2-2x}{5x^3-3x^2+xx+4}$; **2.** а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^5-3x^2+5}{3x^5+4x^2-x}$;

б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{3x^2-4x-4}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-5x-3}{x^2-x-6}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$; в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{7-x}-\sqrt{7+x}}{\sqrt{7}\,x}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 3x}{x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 4x+\sin 2x}{6x}$;

д) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{x+1}{x}\right)^{2x+1}$. д) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{2x}$.

3. а) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{4x^6-x+5}{x^6+3x^2+1}$; **4.** а) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{6x^5-4x^2+x}{2x^5+2x-3}$;

б) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{3x^2-8x-3}$; б) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{3x^2-14x-5}{x^2-7x+10}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+1}-1}$; в) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 6x}{7x\sin 3x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{tg\, x-\sin x}{x^2\sin x}$;

д) $\lim\limits_{x\to \infty} x\cdot\ln\dfrac{3x-1}{3x+2}$. д) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{x+4}{x+8}\right)^{-3x}$.

5. а) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{7x^3-2x^2+4x}{2x^3+1}$; **6.** а) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{-3x^4+x^2+x}{x^4+3x+2}$;

б) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x^2-3x-2}{x^2+6x-16}$; б) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-7x+6}{2x^2+5x-7}$;

в) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{4x+1}-3}{\sqrt{3x+10}-4}$; в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+16}-4}{\sqrt{x^2+1}-1}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0} \sin 7x\, ctg\, 5x$; г) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin^2(x-1)}{3x^2-6x+3}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0} (1+3x)^{\frac{5}{x}+2}$. д) $\lim\limits_{x\to 0} (1+2\sin x)^{\frac{5}{\sin x}}$.

7. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-x^4+6x^2+5}{4x^4-5x^2+3x}$;

б) $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{3x^2-x-14}{x^2+8x+12}$;

в) $\lim\limits_{x\to5} \dfrac{\sqrt{x+4}-3}{\sqrt{x-1}-2}$;

г) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\cos x-\cos^3 x}{4x\sin x}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{2x-3}$.

8. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-3x+2}{6x^2+4x+1}$;

б) $\lim\limits_{x\to5} \dfrac{x^2-6x+5}{2x^2-11x+5}$;

в) $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{\sqrt{4x-3}-3}{x^2-9}$;

г) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x\,tg\,3x}{1-\cos 6x}$;

д) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (1+\cos x)^{\frac{3}{\cos x}}$.

9. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3+9}{7x^2+10x+5}$;

б) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2-7x+6}}$;

в) $\lim\limits_{x\to6} \dfrac{2x^2-72}{x^2-7x+6}$;

г) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\cos 2x-1}{3x\sin x}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty} 3x\left[\ln(x+4)-\ln x\right]$.

10. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^4+10x^2-3}{2x^5-x^3+8}$;

б) $\lim\limits_{x\to-3} \dfrac{3x^2+10x+3}{2x^2+5x-3}$;

в) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{2-\sqrt{x^2+4}}{3x^2}$;

г) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\cos 4x-\cos 6x}{3x\sin 6x}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x}{1+2x}\right)^{-4x}$.

11. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^5-4x^2+1}{2x^5-5x^2-x}$;

б) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{2x^2+x-3}{x^2+x-2}$;

12. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{6x^5+1}{3x^5-2x+3}$;

б) $\lim\limits_{x\to5} \dfrac{3x^2-14x-5}{x^2-6x+5}$;

в) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{5x+1}-4}{x-3}$; в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5x+4}-3}{\sqrt{2x-1}-1}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg^2 4x}{x\sin 3x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg\, 3x}{4x}$;

д) (**11**) $\lim\limits_{x\to\infty}(x+3)\left[\ln(2+4x)-\ln(1+4x)\right]$;

д) (**12**) $\lim\limits_{x\to 2}(7-3x)^{\frac{x}{2x-4}}$.

13. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^6-3x^2-2}{2x^6+4x+5}$; **14.** а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-4x^2+5}{3x^3+2x^2-x}$;

б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2-10x+3}{x^2-2x-3}$; б) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2x^2-13x-7}{x^2-9x+14}$;

в) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{2x+1}-3}$; в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{4x+1}-3}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0} x\sin 2x\cdot ctg^2 5x$; г) $\lim\limits_{x\to 0} x\, ctg\, 7x$;

д) $\lim\limits_{x\to 2}(3x-5)^{\frac{x^2}{x-2}}$; д) $\lim\limits_{x\to 3}(3x-8)^{\frac{2}{x-3}}$.

15. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+3x^2-1}{2x^3-3x+1}$; **16.** а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-3x^2+2}{5x^4-3x-2}$;

б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-3x-2}{x^2-3x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-5x-3}{x^2-5x+6}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+3x}-\sqrt{4-3x}}{7x}$; в) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{\sqrt{2x-1}-3}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{x\sin 3x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{5x}$;

д) (**15**) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x+3)\left[\ln(x+2)-\ln(x+3)\right]$;

д) (**16**) $\lim\limits_{x\to\infty}(x+5)\left[\ln(2x-3)-\ln(2x)\right]$.

17. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x^5-4x^4+2}{3x^5-2x-1}$;

б) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x^2-11x+5}{x^2-7x+10}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{9+x}-3}{x^2+x}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{x\,tg\,2x}$;

д) (**17**) $\lim\limits_{x\to 2}(2x-3)^{\frac{x^2}{x-2}}$;

18. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-4x+1}{x^3-2x^2-1}$;

б) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{2x^2-9x-18}{x^2-7x+6}$;

в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3x+10}-4}{x-2}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\sin 5x\cdot ctg\,3x$;

д) (**18**) $\lim\limits_{x\to\infty}3x\left[\ln(2x)-\ln(2x-3)\right]$.

19. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^5-3x^2+1}{2x^5-2x+3}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{arctg\,6x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{\sqrt{4x-3}-3}$;

г) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{3x^2-17x-28}{x^2-9x+14}$;

д) (**19**) $\lim\limits_{x\to\infty}(x+2)\left[\ln(x-1)-\ln(x+1)\right]$;

20. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-5x^2+2}{2x^3-5x^2-x}$;

б) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2-x+1}{2x^2+5x+3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg\,2x}{4x}$;

г) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x+3}-3}{\sqrt{x-2}-1}$;

д) (**20**) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x+1)\left[\ln(x+3)-\ln(x)\right]$.

Завдання 2. Знайти похідні $\dfrac{dy}{dx}$ заданих функцій.

1. а) $y=\sqrt[3]{x^4+5x}$; б) $y=\dfrac{1+tg\,x}{1-tg\,x}$;

в) $y=x^{\frac{2}{x}}$; г) $y=arctg\sqrt{x}-\sqrt{x}$;

д) $x\sin y-y\cos x=0$; е) $\begin{cases}x=t-\ln t,\\ y=3t^2-2t^3\end{cases}$.

2. а) $y=\dfrac{x}{\sqrt[3]{2+x^3}}-\sqrt{2+x}$; б) $y=\sin^3 2x$;

в) $y=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$; г) $y=x^{e^x}$;

д) $e^{xy}-x^2+y^2=0$; е) $\begin{cases}x=t+\ln\cos t,\\ y=t-\ln\sin t.\end{cases}$

3. а) $y=\sqrt{\dfrac{1+x^2}{1-x^2}}$; б) $y=e^{1+\ln x}$;

в) $y=arctg\,\dfrac{1}{x}$; г) $y=x^{\arcsin x}$;

д) $y\sin x+\cos x=\cos y$; е) $\begin{cases}x=2t-\sin 2t,\\ y=\sin^2 t.\end{cases}$

4. а) $y=\sqrt{\dfrac{1+x^2}{1-x}}$; б) $y=tg\ln\sqrt{x}$;

в) $y=3^{\cos x}$; г) $y=x^{e-x}$;

д) $\cos(x-y)-2x+4y=0$; е) $\begin{cases}x=t+0,5\sin 2t,\\ y=\cos^2 t.\end{cases}$

5. а) $y=x+\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}$; б) $y=\sin\sqrt{1+x^2}$;

в) $y=\ln ctg\sqrt[3]{x}$; г) $y=x^{\frac{1}{x^2}}$;

д) $xe^{y} + ye^{y} = xy$; е) $\begin{cases} x = t^3 + 2t, \\ y = t^2 + 8t - 1. \end{cases}$

6. а) $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2x-1}}$; б) $y = \cos \ln^2 x$;

в) $y = (e^{\sin x} - 1)^2$; г) $y = 2x^{\sqrt{x}}$;

д) $\cos(xy) = \dfrac{y}{x}$; е) $\begin{cases} x = 0,25t^4 + 0,5t^2 + t \\ y = 0,5t^2 + \dfrac{1}{t}. \end{cases}$

7. а) $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2x-1}} + \dfrac{5}{\sqrt[4]{(x^3+2)^3}}$; б) $y = \cos \ln^2 x$;

в) $y = (e^{\sin x} - 1)^2$; г) $y = 2x^{\sqrt{x}}$;

д) $\cos(xy) = \dfrac{y}{x}$; е) $\begin{cases} x = \arcsin(t^2 - 1), \\ y = \arccos 2t. \end{cases}$

8. а) $y = x\sqrt[3]{\dfrac{2}{1+x}}$; б) $y = \dfrac{1+\sin 3x}{1-\sin 3x}$;

в) $y = 2^{\frac{1-x}{1+x}}$; г) $y = (\ln x)^x$;

д) $xy + \ln y - 2\ln x = 0$; е) $\begin{cases} x = t^2 + t + 1, \\ y = t^3 + t. \end{cases}$

9. а) $y = \sqrt[3]{1 + x\sqrt{x+3}}$; б) $y = \sqrt{1 + \ln^2 x}$;

в) $y = e^{\frac{1}{x^2}}$; г) $y = (\sin x)^{\cos x}$;

д) $e^{x+y} = \sin \dfrac{y}{x}$; е) $\begin{cases} x = ctg\, t, \\ y = \dfrac{1}{\cos^2 t}. \end{cases}$

10. а) $y=\dfrac{\sqrt{1+3x^2}}{2+3x^2}$; б) $y=e^{x^2}\cos^3(2x+3)$;

в) $y=x\,arctg^3 5x+\ln tg\,x$; г) $y=(\sin 3x)^{\sqrt{x}}$;

д) $y\ln x-x\ln y=x+y$; е) $\begin{cases} x=\dfrac{2-t}{2+t^2}, \\ y=\dfrac{t^2}{2+t^2} \end{cases}$

11. а) $y=2\sqrt{4x+3}-\dfrac{3}{\sqrt{x^3+x+1}}$; б) $y=(e^{\cos x}+3)^2$;

в) $y=\ln\sin(2x+5)$; г) $y=x^{x^x}$;

д) $tg\left(\dfrac{y}{x}\right)=5x$; е) $\begin{cases} x=\cos\left(\dfrac{t}{2}\right), \\ y=t-\sin t. \end{cases}$

12. а) $y=x^2\sqrt{1-x^2}$; б) $y=\dfrac{4\sin x}{\cos^2 x}$;

в) $y=arctg\,e^{2x}$; г) $y=x^{\frac{1}{x}}$;

д) $x-y+arctg\,y=0$; е) $\begin{cases} x=t^3+8t, \\ y=t^5+2t. \end{cases}$

13. а) $y=x\sqrt{\dfrac{(1+x^2)}{(1-x)}}$; б) $y=\dfrac{1}{tg^2 2x}$;

в) $y=\arcsin\sqrt{1-3x}$; г) $y=x^{\ln x}$;

д) $y\sin x=\cos(x-y)$; е) $\begin{cases} x=\cos\left(\dfrac{t}{2}\right), \\ y=t-\sin t. \end{cases}$

14. а) $y=\dfrac{(3+6x)}{\sqrt{x+5x^2}}$; б) $y=x^2\cos x$;

в) $y=x^m\ln x$; г) $y=x^{-tg\,x}$;

д) $\dfrac{y}{x}=arctg\left(\dfrac{x}{y}\right)$; е) $\begin{cases}x=t-\sin t,\\ y=1-\cos t.\end{cases}$

15. а) $y=\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$; б) $y=\dfrac{\sin^2 x}{(2+3\cos^2 x)}$;

в) $y=\dfrac{(x\ln x)}{x-1}$; г) $y=(arctg\,x)^{\ln x}$;

д) $(e^x-1)(e^y-1)-1=0$; е) $\begin{cases}x=e^{2t},\\ y=\cos t.\end{cases}$

16. а) $y=\sqrt[3]{\dfrac{1+x^2}{1-x^2}}$; б) $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)tg^2x+\ln\cos x$;

в) $y=arctg\dfrac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$; г) $y=(x+x^2)^x$;

д) $x^3+y^3-3axy=0$; е) $\begin{cases}x=t+\ln\cos t,\\ y=t-\ln\sin t.\end{cases}$

17. а) $y=3\sqrt[3]{x^5+5x^4-\dfrac{5}{x}}$; б) $y=\ln\sqrt{\dfrac{(1-\sin x)}{(1+\sin x)}}$;

в) $y=\arccos\dfrac{1}{x}$; г) $y=(\sin x)^{\ln x}$;

д) $x-y+a\sin y=0$; е) $\begin{cases}x=\ln x\quad,\\ y=\left(\dfrac{1}{2}\right)\left(t+\dfrac{1}{t}\right)\end{cases}$.

18. а) $y=\sqrt[3]{\dfrac{1+x^3}{1-x^3}}$; б) $y=\sqrt{1+\ln^2 x}$;

в) $y=\ln\arcsin\sqrt{1-x^2}$; г) $y=x^{arctg\, x}$;

д) $y\sin x+\cos\left(x-y\right)=\cos y$; е) $\begin{cases} x=tg\, t+ctg\, t, \\ y=2\ln ctg\, t. \end{cases}$

19. а) $y=\sqrt{x^2+1}+\sqrt[3]{x^3+1}$; б) $y=\dfrac{1}{3}tg^3 x-tg\, x+x$;

в) $y=arctg\sqrt{\dfrac{3-x}{x-2}}$; г) $y=\left(\ln x\right)^x$;

д) $x-y+e^y\, arctg\, x=0$; е) $\begin{cases} x=at\cos t, \\ y=at\sin t. \end{cases}$

20. а) $y=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$; б) $y=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}$;

в) $y=\arccos e^x$; г) $y=x^{\arcsin x}$;

д) $\ln y=arctg\,\dfrac{x}{y}$; е) $\begin{cases} x=t^2, \\ y=\dfrac{1}{3}t^3-t. \end{cases}$

Завдання 3. Обчислити наближено за допомогою диференціала значення функції $y=f\left(x\right)$ у точці x.

1. $y=\sqrt[3]{x}$; $x=7,76$. **2.** $y=\sqrt[3]{x^2+2x+5}$; $x=0,97$.

3. $y=\dfrac{1}{2}\left(x+\sqrt{5-x^2}\right)$; $x=0,98$.

4. $y=\sqrt{x^2+x+3}$; $x=1,97$.

5. $y=\arcsin x$; $x=0,08$. **6.** $y=\sqrt[3]{x}$; $x=1,21$.

7. $y=\sqrt[3]{x}$; $x=26,46$. **8.** $y=\sqrt[3]{x^2}$; $x=1,03$.

9. $y=x^{11}$; $x=1,021$. **10.** $y=\sqrt[3]{x}$; $x=8,24$.

11. $y=x^{21}$; $x=0,998$. **12.** $y=\sqrt[3]{x}$; $x=7,64$.

13. $y=x^6$; $x=2,01$. **14.** $y=x^5$; $x=2,007$.

15. $y = \dfrac{1}{\sqrt{2x^2 + x + 1}}$; $x = 1,016$.

16. $y = x^7$; $x = 1,996$. **17.** $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$; $x = 4,16$.

18. $y = \sqrt{4x+1}$; $x = 2,06$.

19. $y = \sqrt{4x-3}$; $x = 1,08$.

20. $y = \sqrt[3]{x}$; $x = 8,36$.

Завдання 4. Дослідити функції та побудувати їхні графіки.

1. а) $y = \dfrac{x}{x^2+1}$; б) $y = \dfrac{e^x}{x}$.

2. а) $y = \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2$; б) $y = \ln\left(2x^2+3\right)$.

3. а) $y = \dfrac{x}{(x-1)^3}$; б) $y = x^3 e^{-x}$.

4. а) $y = \dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$; б) $y = \dfrac{1}{e^x - 1}$.

5. а) $y = \dfrac{x^2}{x^2-1}$; б) $y = x - \ln(x+1)$.

6. а) $y = \dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$; б) $y = e^{\frac{1}{x+2}}$.

7. а) $y = \dfrac{x^2+16}{x}$; б) $y = \dfrac{1}{e^{2x}-1}$.

8. а) $y = \left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^2$; б) $y = x^2 \ln x$.

9. а) $y = \dfrac{x^3-1}{4x^2}$; б) $y = \ln\dfrac{x+1}{x+2}$.

10. а) $y=\dfrac{2}{x^2+x+1}$; б) $y=x-\ln x$.

11. а) $y=\dfrac{x^2+1}{x}$; б) $y=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$.

12. а) $y=\dfrac{1}{1+x^2}$; б) $y=xe^{-x}$.

13. а) $y=\dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}$; б) $y=e^{\frac{1}{x}}$.

14. а) $y=\dfrac{x^3+1}{x^2}$; б) $y=\dfrac{\ln x}{x}$.

15. а) $y=\dfrac{x}{3-x^2}$; б) $y=x\ln x$.

16. а) $y=\dfrac{1}{1-x^2}$; б) $y=\ln\left(x^2-4\right)$.

17. а) $y=\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2$; б) $y=x^2-2\ln x$.

18. а) $y=\dfrac{x}{(x-1)^2}$; б) $y=(x-1)\cdot e^{3x+1}$.

19. а) $y=\dfrac{x^3}{x^2+1}$; б) $y=\left(2+x^2\right)e^{-x^2}$.

20. а) $y=\dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$; б) $y=x+\ln\left(x^2-1\right)$.

Завдання 5. Знайти напрям і значення градієнта функції $z=f(x,y)$ в точці $A(x_A;y_A)$ та похідну функції в цій точці за напрямом від точки A до точки $B(x_B;y_B)$. З'ясувати характер зміни поля в даному напрямі $\overrightarrow{AB}$.

1. $z=\ln\left(y^2+4y+x^2\right)$, $A(1;1)$, $B(4;5)$.

2. $z=x^2-2xy+2y^2$, $A(0;1)$, $B(3;5)$.

3. $z = 5\,arctg\left(x\,y\right)$, $A\left(1;0\right)$, $B\left(7;8\right)$.

4. $z = 10\,y\arccos x$, $A\left(0;-5\right)$, $B\left(4;-2\right)$.

5. $z = x^3 + x + y^3 - 16\,y$, $A\left(-2;-1\right)$, $B\left(3;11\right)$.

6. $z = \ln\left(y^2 + 5\,x^2\right)$, $A\left(1;0\right)$, $B\left(-2;-4\right)$.

7. $z = -x^2 + 3\,x\,y + 2\,y^2 + 8\,x - 5\,y$, $A\left(2;3\right)$, $B\left(-3;15\right)$.

8. $z = \arcsin\dfrac{x}{y}$, $A\left(0;-2\right)$, $B\left(4;-2\right)$.

9. $z = -x^2 + 5\,x\,y + y^2 + x - 2\,y$, $A\left(1;2\right)$, $B\left(2;2\right)$.

10. $z = arctg\,\dfrac{y}{x}$, $A\left(-1;1\right)$, $B\left(-4;5\right)$.

11. $z = \ln\left(y^2 + x\,y + x^2\right)$, $A\left(0;1\right)$, $B\left(-3;5\right)$.

12. $z = 3\,x^2\,y^4 - 2\,x^3\,y^2 - 3\,y$, $A\left(2;1\right)$, $B\left(7;-11\right)$.

13. $z = x\arcsin y$, $A\left(5;0\right)$, $B\left(1;-3\right)$.

14. $z = 2\,x^3\,y^2 - x\,y + 4\,y + x$, $A\left(1;-1\right)$, $B\left(4;3\right)$.

15. $z = \dfrac{y^2}{x}$, $A\left(1;1\right)$, $B\left(-2;-3\right)$.

16. $z = x\,y - y^2$, $A\left(1;3\right)$, $B\left(4;7\right)$.

17. $z = 2\,x^2 - 3\,y^2$, $A\left(4;2\right)$, $B\left(1;6\right)$.

18. $z = x^2\,y$, $A\left(0;2\right)$, $B\left(3;-2\right)$.

19. $z = x^2 + 4\,y^2$, $A\left(1;2\right)$, $B\left(-2;-2\right)$.

20. $z = x^2 - 3\,x\,y$, $A\left(3;1\right)$, $B\left(-1;4\right)$.

Завдання 6. Функцію $z = f\left(x, y\right)$ дослідити на екстремум.

1. $z = x^2 + y^2 - 8\,x + 6\,y + 24$.

2. $z = 4\left(x - y\right) - x^2 - y^2 - 6$.

3. $z = -2\,x^2 - y^2 + 8\,x - 4\,y - 9$.

4. $z = x^2 + y^2 - 2\,x - 5\,y - x\,y - 31$.

5. $z=-x^2-4y^2+2x-8y$.

6. $z=4x^2+y^2+16x-6y+31$.

7. $z=x^2+xy+y^2-6x-9y+14$.

8. $z=2x^2+y^2-8x+6y+9$.

9. $z=-x^2-y^2+4x-8y$.

10. $z=6(x-y)-3x^2-3y^2+4$.

11. $z=x^2+xy+y^2-2x-y$.

12. $z=-3x^2-y^2+6x+2y+8$.

13. $z=x^2+y^2+xy-3x-6y$.

14. $z=-x^2-2y^2+2xy+4x+2y+1$.

15. $z=x^2-4x+y^2-12y$.

16. $z=-x^2+2x-2y^2+4y-2$.

17. $z=x^2+6x+y^2-4y+2$.

18. $z=-x^2-2x-y^2+6y-3$.

19. $z=x^2+2x+y^2-10y+3$.

20. $z=-x^2+4x-2y^2+8y-1$.

Завдання 7. Знайти інтеграли.

1. 1. $\int arctg\sqrt{x}\,dx$. 2. $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$. 3. $\int tg^7 x\,dx$.

4. $\int\left(\sqrt{t^3}+\frac{1}{\sqrt[3]{t^2}}\right)dx$. 5. $\int\frac{(3x-1)dx}{x^2-4x+8}$. 6. $\int\frac{(x^2+1)dx}{(x-1)^2(x+3)}$.

2. 1. $\int \arccos x\,dx$. 2. $\int\frac{e^{tg\,x}}{\cos^2 x}dx$. 3. $\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$.

4. $\int\sin^2\frac{x}{2}dx$. 5. $\int\frac{(2x+5)dx}{\sqrt{x^2+3x+7}}$. 6. $\int\frac{x\,dx}{x^3+1}$.

3. 1. $\int (4x-2)\cos 2x\,dx$. 2. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1+x^3}}$. 3. $\int \frac{dx}{\sin^6 x}$.

4. $\int \frac{d\varphi}{\sqrt{16-\varphi^2}}$. 5. $\int \frac{(x-2)dx}{3x^2+5x+6}$. 6. $\int \frac{x^2+x-1}{x(x-1)(x+2)}dx$.

4. 1. $\int x\ln x\,dx$. 2. $\int \frac{2x\,dx}{\sqrt{x^4-1}}$. 3. $\int \sin^2 x\cos^4 x\,dx$.

4. $\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}dx$. 5. $\int \frac{dx}{5x^2+10x-2}$. 6. $\int \frac{x^2\,dx}{(x-1)^2(x+1)}$.

5. 1. $\int (x^2+3)\cos x\,dx$. 2. $\int \frac{x^3\,dx}{5x^4+7}$. 3. $\int \sin^{\frac{5}{7}} x\cos^3 x\,dx$.

4. $\int \frac{x-16}{\sqrt{x}+4}dx$. 5. $\int \frac{(4-3x)dx}{5x^2+6x+18}$. 6. $\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}$.

6. 1. $\int \ln(x^2+2)dx$. 2. $\int \frac{x^2\,dx}{x^6+4}$. 3. $\int \frac{\cos^3 x\,dx}{\sin^4 x}$.

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}}$. 5. $\int \frac{x\,dx}{2x^2+2x+5}$. 6. $\int \frac{dx}{(x+1)(2x-3)}$.

7. 1. $\int x^2\cos^2 x\,dx$. 2. $\int x\cdot 2^{-x^2}\,dx$. 3. $\int \sin^2 3x\cdot\cos 3x\,dx$.

4. $\int 5^{x-1}\cdot e^x\,dx$. 5. $\int \frac{(3x+2)dx}{\sqrt{x^2-4x+3}}$. 6. $\int \frac{dx}{(x^2+1)x}$.

8. 1. $\int x\cdot 5^x\,dx$. 2. $\int \sqrt{1-e^{2x}}\cdot e^{2x}\,dx$. 3. $\int \cos^5 x\,dx$.

4. $\int (3^x-2)(3^x+2)\,dx$. 5. $\int \frac{2x+5}{4x^2+2x+5}dx$. 6. $\int \frac{dx}{x^3-1}$.

9. 1. $\int \sqrt{x}\ln x\,dx$. 2. $\int \cos(7-3x^2)\,x\,dx$. 3. $\int \sin^4 2x\,dx$.

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}}$. 5. $\int \frac{dx}{3x^2+5x-1}$. 6. $\int \frac{x\,dx}{x^3+1}$.

10. 1. $\int x^2\ln x\,dx$. 2. $\int 3^{\ln x+5}\,\frac{dx}{x}$. 3. $\int \frac{2-\sin x}{2+\cos x}dx$.

4. $\int \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)}dx$. 5. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+3x+5}}$. 6. $\int \frac{(1-x^2)dx}{x(x^2+4)}$.

11. 1. $\int x\sin 4x\,dx$. 2. $\int \sqrt{\sin^5 x}\cdot\cos x\,dx$. 3. $\int \sin^4 x\,dx$.

4. $\int \frac{3^{2x}-2}{\sqrt{3^x}}dx$. 5. $\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+2x+3}}dx$. 6. $\int \frac{x^4dx}{x^2-3}$.

12. 1. $\int x\arcsin x\,dx$. 2. $\int x^2\cdot 5^{x^3}dx$ 3. $\int \frac{\cos^4 x\,dx}{\sin^2 x}$.

4. $\int \frac{x^4dx}{x^2+1}$. 5. $\int \frac{4x+7}{\sqrt{3x^2-5x+4}}dx$ 6. $\int \frac{x^2\,dx}{(x^2-4)(x+1)}$.

13. 1. $\int \arccos x\,dx$. 2. $\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}\,dx$. 3. $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$.

4. $\int \frac{x^3-1}{x-1}\,dx$. 5. $\int \frac{(3x+4)dx}{7x^2-4x+5}$. 6. $\int \frac{x\,dx}{\left(x^2-1\right)\left(x+2\right)}$.

14. 1. $\int x\cos 2x\,dx$. 2. $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{tg\,x+4}}$. 3. $\int \sin^5 x\,dx$.

4. $\int ctg^2 x\,dx$. 5. $\int \frac{x+1}{x^2+x+1}dx$. 6. $\int \frac{x\,dx}{\left(x^2+1\right)\left(x-4\right)}$.

15. 1. $\int x^2\,arctg\,x\,dx$. 2. $\int \frac{ctg^3 x}{\sin^2 x}dx$. 3. $\int \frac{dx}{3\sin x+5}$.

4. $\int tg^2 x\,dx$. 5. $\int \frac{(3x-4)dx}{\sqrt{-x^2+6x-8}}$. 6. $\int \frac{x\,dx}{x^3+8}$.

16. 1. $\int \frac{x\,dx}{\cos^2 x}$. 2. $\int e^{\sqrt[5]{x}}\frac{dx}{\sqrt[5]{x^4}}$. 3. $\int \sin 5x\sin 2x\,dx$.

4. $\int \frac{5-\cos x}{\cos x}dx$. 5. $\int \frac{(3x-1)dx}{2x^2-3x+5}$. 6. $\int \frac{dx}{\left(x^2+2\right)x}$.

17. 1. $\int \left(x^2-2x\right)\ln x\,dx$. 2. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{25-x^4}}$. 3. $\int \frac{dx}{1-3\cos x}$.

4. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx$. 5. $\int \frac{(3x-2)dx}{x^2-7x}$. 6. $\int \frac{(x+1)dx}{x^3+27}$.

18. 1. $\int x\, arctg\, 2x\, dx$. 2. $\int x 5^{4x^2}\, dx$. 3. $\int \cos^2 x \sin^4 x\, dx$.

4. $\int \frac{dx}{\sin^2 x+\cos 2x}$. 5. $\int \frac{2x-8}{\sqrt{x^2+x}}dx$. 6. $\int \frac{dx}{x\left(x^2-4\right)}$.

19. 1. $\int x^2 \cos 2x\, dx$. 2. $\int \frac{dx}{x\cos^2(\ln x)}$. 3. $\int tg^5 x\, dx$.

4. $\int \frac{1-5x^2}{x^2\left(1-x^2\right)}dx$. 5. $\int \frac{4x+3}{x^2+3x+4}dx$. 6. $\int \frac{dx}{x\left(x^2+1\right)}$.

20. 1. $\int x\cos 5x\, dx$. 2. $\int \sqrt[7]{8-2x}\, dx$. 3. $\int \frac{\cos x\, dx}{1+\cos x}$.

4. $\int \frac{\left(8-\sqrt{x}\right)dx}{\sqrt[3]{x}+2\sqrt[6]{x}+4}$. 5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-x}}$. 6. $\int \frac{5x^2-1}{x^3-1}\, dx$.

Завдання 8. Обчислити визначені інтеграли.

1. а) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$; б) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sin x\, dx$; в) $\int_0^1 x^2\sqrt{1+x^3}\, dx$.

2. а) $\int_{-1}^{5} x^5\, dx$; б) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos x\, dx$; в) $\int_0^1 \frac{x^9}{1+x^{10}}\, dx$.

3. а) $\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{5x}}$; б) $\int_1^e \ln x\, dx$; в) $\int_1^3 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\, dx$.

4. а) $\int_0^1 (4x^3-2x+1)dx$; б) $\int_0^1 x\, e^{-x}dx$; в) $\int_1^e \frac{\cos(\ln x)}{x}\, dx$.

5. а) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^2 x}$; б) $\int\limits_0^1 arctgx\, dx$; в) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^3 x\, dx$.

6. а) $\int\limits_1^8 \frac{1+2\sqrt[3]{x}}{x^3}\, dx$; б) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x\, dx}{\sin^2 x}$; в) $\int\limits_1^e \frac{dx}{x(1+\ln x)^{1,5}}$.

7. а) $\int\limits_0^1 e^{2x}\, dx$; б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} x\cos 3x\, dx$; в) $\int\limits_0^1 x^2 \sin\left(1+x^3\right) dx$.

8. а) $\int\limits_1^2 2^x\, dx$; б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2x\, dx$; в) $\int\limits_1^e x^2 \ln x\, dx$.

9. а) $\int\limits_0^2 3^{2x}\, dx$; б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 2x \cos 4x\, dx$; в) $\int\limits_0^1 x\, arctgx\, dx$.

10. а) $\int\limits_0^1 x e^x\, dx$; б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \sin 7x\, dx$; в) $\int\limits_0^{\ln 2} \sqrt{1-e^{-2x}}\, dx$.

11. а) $\int\limits_1^2 \left(3x^2-2x+1\right) dx$; б) $\int\limits_0^1 \arcsin x\, dx$; в) $\int\limits_0^1 \sqrt{1+x}\, dx$.

12. а) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$; б) $\int\limits_1^{\frac{e}{2}} \ln 2x\, dx$; в) $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+x}\, dx$.

13. а) $\int\limits_0^1 \left(e^x-1\right)^4 e^x dx$; б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\, dx$; в) $\int\limits_0^1 \frac{x\, dx}{1+\sqrt{x}}$.

14. а) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x^2+x}$; б) $\int\limits_0^1 x\, 2^{-x}\, dx$; в) $\int\limits_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\, dx$.

15. а) $\int\limits_0^1 \frac{x\,dx}{\left(x^2+1\right)^2}$; б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\cos x\,dx$; в) $\int\limits_{-1}^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{5-4x}}$.

16. а) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 3x\,dx$; б) $\int\limits_0^1 x^2 e^{2x} dx$; в) $\int\limits_0^5 \frac{x\,dx}{\sqrt{x+4}}$.

17. а) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{16}} \cos 4x\,dx$; б) $\int\limits_1^e x\ln^2 x\,dx$; в) $\int\limits_0^1 \frac{x^3 dx}{x^4+1}$.

18. а) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{12}} \sin 6x\,dx$; б) $\int\limits_0^3 \ln\left(x+3\right) dx$; в) $\int\limits_1^9 \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{x}-1}$.

19. а) $\int\limits_1^2 \left(3x^2-x+1\right) dx$; б) $\int\limits_0^1 x^2 e^{3x} dx$; в) $\int\limits_1^5 \frac{x\,dx}{\sqrt{2x-1}}$.

20. а) $\int\limits_1^6 \frac{dx}{\sqrt{3x-2}}$; б) $\int\limits_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \arcsin x\,dx$; в) $\int\limits_3^8 \frac{x\,dx}{\sqrt{x+1}}$.

Завдання 9. Обчислити невласні інтеграли або встановити їх розбіжність.

1. а) $\int\limits_e^\infty \frac{dx}{x\ln^2 x}$; б) $\int\limits_2^3 \frac{x\,dx}{\sqrt[4]{x^2-4}}$.

2. а) $\int\limits_0^\infty \frac{x\,dx}{\left(x^2+3\right)^2}$; б) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+3}}$.

3. а) $\int\limits_0^\infty x^2 e^{-x^3} dx$; б) $\int\limits_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

4. а) $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$; б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} ctgx\,dx$.

5. а) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{arctgx}{1+x^2}\,dx$; б) $\int\limits_{3}^{5} \frac{dx}{\sqrt{x^2-7x+10}}$.

6. а) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}$; б) $\int\limits_{0}^{1} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

7. а) $\int\limits_{3}^{\infty} \frac{dx}{x\ln^5 x}$; б) $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{(2-x)^2}$.

8. а) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2} e^{\frac{-1}{x}}\,dx$; б) $\int\limits_{-2}^{0} \frac{dx}{(x+2)^2}$.

9. а) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$; б) $\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}$.

10. а) $\int\limits_{\sqrt{3}}^{\infty} \frac{x\,dx}{x^4+9}$; б) $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{x^2+2x-3}$.

11. а) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{(2x-1)^3}$; б) $\int\limits_{2}^{4} \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}$.

12. а) $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{x\,dx}{(x^2+1)^2}$; б) $\int\limits_{0}^{2} \frac{x\,dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

13. а) $\int\limits_{2}^{\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^4+1}}$; б) $\int\limits_{0}^{3} \frac{dx}{(x-3)^2}$.

14. а) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x^3\,dx}{x^8+1}$; б) $\int\limits_{0}^{1} \frac{x\,dx}{(x^2-1)^{\frac{4}{5}}}$.

15. а) $\int\limits_{2}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$; б) $\int\limits_{1}^{5} \frac{dx}{x\ln x}$.

16. а) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^3}$; б) $\int\limits_{2}^{3} \frac{dx}{\sqrt{x-2}}$.

17. а) $\int\limits_{0}^{\infty} e^{-x}dx$; б) $\int\limits_{3}^{4} \frac{dx}{(x-3)^2}$.

18. а) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+1}}$; б) $\int\limits_{1}^{5} \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$.

19. а) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{x+2}$; б) $\int\limits_{3}^{4} \frac{dx}{(3-x)^2}$.

20. а) $\int\limits_{3}^{\infty} \frac{dx}{x\ln^5 x}$; б) $\int\limits_{4}^{6} \frac{dx}{x-4}$.

Завдання 10. Обчислити площу фігури, обмеженої параболою і прямою, рівняння яких задані. Зробити рисунок.

1. $y=\frac{1}{3}(x-1)^2$, $y=x+5$.

2. $y=-x^2-4x$, $y=-2x$.

3. $y=-x^2-4x-1$, $y=-x-1$.

4. $y=-x^2-2x+2$, $y=-2x+1$.

5. $y=-x^2+2x+3$, $y=2x+2$.

6. $y=x^2+4x+1$, $y=x+1$.

7. $y=x^2+2x-2$, $y=2x-1$.

8. $y=x^2-2x-3$, $y=x-3$.

9. $y=-x^2-4x$, $y=-x$.

10. $y=-x^2-4x-1$, $y=-3x-3$.

11. $y=-x^2-2x+2$, $y=x+2$.

12. $y=-x^2+2x+3$, $y=-2x+6$

13. $y=x^2+4x$, $y=-x$.

14. $y=x^2+4x+1$, $y=-x-3$.

15. $y=x^2+2x-2$, $y=3x$.

16. $y = x^2 - 2x - 3$, $\quad y = 2x - 6$.

17. $y = -x^2 - 4x$, $\quad y = x$.

18. $y = -x^2 - 4x - 1$, $\quad y = x + 3$.

19. $y = -x^2 - 2x + 2$, $\quad y = -3x$.

20. $y = -x^2 + 2x + 3$, $\quad y = x + 1$.

Список літератури

1. Шкіль М. І., Колесник Т. В., Котлова В. М. Вища математика. Аналітична геометрія з елементами алгебри. Вступ до математичного аналізу. Книга 1. К. : Либідь, 1994. 391 с.

2. Шкіль М. І., Колесник Т. В. Вища математика: Визначений інтеграл, функції багатьох змінних, диференціальні рівняння, ряди. Книга 2. К. : Вища школа, 1986. 512 с.

3. Шкіль М. І. Математичний аналіз. Частина 1. К. : Вища школа, 1978. 384 с.

4. Шкіль М. І. Математичний аналіз. Частина 2. К. : Вища школа, 1981. 456 с.

5. В. Пак, Ю. Носенко Вища математика : підручник. К. : Либідь, 1996. 440 с.

6. Рудавський Ю. К. та ін. Збірник задач з математичного аналізу. Частина 1. Львів: Видавництво Національного університету "Львівська політехніка", 2008. 352 с.

7. Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу : учеб. пособ. для вузов. 10-е изд. М. : Наука, 1990. 624 с.

8. Дубовик В. П., Юрик І. І. Вища математика : навчальний посібник. К.: А.С.К., 2006. 648 с.

9. Антонюк Р. А. Вища математика : навчальний посібник. Рівне : НУВГП, 2005. 246 с.

10. Брушковський О. Л. Вища математика : навчальний посібник. Частина 2. Рівне : НУВГП, 2008. 266 с.