



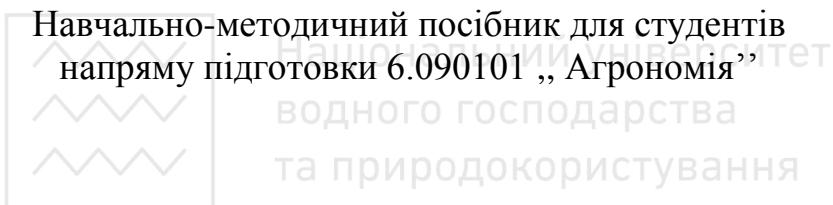
Національний університет  
водного господарства  
та природокористування

**Міністерство освіти і науки України**  
**Національний університет водного господарства**  
**та природокористування**

**Р.А. Антонюк**

## **ВИЩА МАТЕМАТИКА**

Навчально-методичний посібник для студентів  
напряму підготовки 6.090101 „Агрономія”



**Європейська кредитно-трансферна система організації  
навчального процесу**

**Рівне – 2010**

Національний університет  
УДК 510.6 (073) дарства  
ББК 22.11 (Я7-6) стування

A 64

Рецензенти: Сяський В.О. – кандидат фізико-математичних наук, доцент Національного університету водного господарства та природокористування; Тимейчук О.Ю. – кандидат технічних наук, доцент Національного університету водного господарства та природокористування.

### **Антонюк Р.А.**

**A 64** Вища математика. Навчально-методичний посібник для студентів напряму підготовки 6.090101 „Агрономія” – Рівне: НУВГП, 2010. – 42 с.

**ISBN**

Навчально-методичний посібник „Вища математика” містить загальний інформативний блок, тематичний план дисципліни, робочу програму, рекомендації щодо вивчення курсу, запитання для самоконтролю по окремих блоках робочої програми, зразки модульних контрольних робіт, методичні поради і завдання до виконання типових розрахунків, контрольних робіт студентами заочної форми навчання, питання для підготовки до екзамену і список рекомендованої літератури.

Європейська кредитно-трансферна система організації навчального процесу.

**УДК 510.6 (073)**  
**ББК 22.11 (Я7-6)**

© Антонюк Р.А., 2010

© Національний університет водного  
господарства та природокористування, 2010



## Зміст

Стор.

Передмова	4
1.Загальна інформація (інформативний блок)	4
1.1.Анотація курсу	4
1.2.Мета і завдання вивчення курсу	5
2.Зміст навчальної дисципліни	6
2.1.Тематичний план та розподіл навчального часу за структурою дисципліни	6
2.2.Структура програми курсу „Вища математика”	7
2.3.Робоча програма	8
3.Рекомендації щодо вивчення курсу	15
4.Методичні поради щодо вивчення теоретичної частини курсу	16
5.Зразки модульних контрольних робіт	19
6.Методичні поради і завдання до виконання контрольної роботи студентами заочної форми навчання	21
6.1.Методичні поради	21
6.2.Завдання до виконання контрольної роботи	28
7.Методичні поради і завдання до виконання розрахунково-графічної роботи	32
8.Самостійна робота студента	35
9.Форми підсумкового контролю	36
10.Питання до підготовки до екзамену	37
11.Методичне забезпечення	41
Рекомендована література	42



Впровадження європейської кредитно-трансферної системи організації навчального процесу є однією з передумов входження України до єдиного європейського освітянського простору.

Кредитно-трансферної система передбачає прищеплення студентам навичок самостійної роботи над матеріалом робочої програми, роботи з науковою і методичною літературою, аналізу і синтезу здобутих в процесі навчання знань.

Навчально-методичний посібник „Вища математика” допоможе студенту глибоко засвоїти ключові положення цієї дисципліни і шляхи їх застосування до вирішення прикладних задач.

### 1. Загальна інформація (інформативний блок)

#### 1.1. Анотація курсу

Призначення: підготовка бакалаврів	Напрям, спеціальність, освітньо-кваліфікаційний рівень	Характеристика навчальної дисципліни
Кількість кредитів, відповідних ECTS – 3 Модулів – 2 Змістовних модулів – 4 Типових розрахунків – 1 Загальна кількість годин – 108 Тижневих годин: • аудиторних – 4 • самостійної роботи – 5	Напрям <b>6.090101</b> <b>"Агрономія"</b> Освітньо-кваліфікаційний рівень – <b>бакалавр</b> Термін навчання – <b>4 роки</b>	Обов'язкова нормативна Рік підготовки: <b>I-й</b> Семестри: <b>I</b> Лекції – <b>24 год.</b> Практичні – <b>24 год.</b> Самостійна робота – <b>60 год.</b> Типові розрахунки на тему: основні елементарні функції, їх властивості та графіки. Індивідуальна робота за потребою Вид контролю: <b>Іспит</b>



## 1.2. Мета і завдання вивчення курсу

Головною метою викладання курсу "Вища математика" є розвиток логічного і алгоритмічного мислення студентів, оволодіння ними новими методами дослідження та розв'язування математичних задач, вироблення навичок самостійно розширювати свої знання з математики і застосовувати математичний апарат до аналізу та вирішення інженерно-економічних та природоохоронних задач. Курс вищої математики має важливе значення для успішного засвоєння студентами загальнотеоретичних і спеціальних дисциплін і є фундаментом їх професійної освіти.

Основними завданнями при вивчені навчальної дисципліни є:

- глибоко оволодіти навчальним матеріалом, передбаченим робочою програмою;
- виробити міцні навички аналізу та провадження математичних розрахунків;
- виробити навички систематичної роботи з навчальною та науковою математичною літературою;
- навчитися складати математичні моделі реальних процесів і явищ.

В результаті вивчення курсу "Вища математика" студент повинен:

- знати основні означення, теореми, формули, можливості їх застосування до вирішення конкретних інженерно-економічних, природоохоронних та інших практичних задач;
- уміти здобуті теоретичні знання застосовувати до аналізу, моделювання та розв'язування задач прикладного характеру у межах своєї майбутньої спеціальності.



## 2. Зміст навчальної дисципліни

### 2.1. Тематичний план та розподіл навчального часу за структурою дисципліни

У відповідності з освітньо-професійною програмою напряму підготовки 6.090101 "Агрономія", на вивчення курсу "Вища математика" передбачено 108 годин (3 кредити). Тематичний план дисципліни має наступний вигляд.

#### Тематичний план дисципліни та розподілу навчального часу

№ п / п	Змістовні модулі	Розподіл навчального часу			
		Всього	Лек- ції	Прак- тик-ні занят- тя	Самостійна робота
1	Елементи лінійної алгебри та аналітичної геометрії	36/36	8/1	8/1	20/30
2	Вступ до математичного аналізу	18/18	4/1	4/1	10/12
3	Диференціальнечислення функцій однієї змінної	18/18	6/2	6/2	6/30
4	Інтегральне числення функцій однієї змінної	36/36	6/2	6/2	24/30
<b>Всього</b>		<b>108/108</b>	<b>24/6</b>	<b>24/8</b>	<b>60/102</b>

**Увага!** Тут і надалі в чисельнику – кількість годин для денної форми навчання, в знаменнику – для заочної форми.



## 2.2. Структура програми курсу "Вища математика" І СЕМЕСТР

### Опис предмета навчальної дисципліни

Денна форма навчання

Призначення: підготовка бакалаврів	Напрям, спеціальність, кваліфікаційний рівень	Характеристика навчальної дисципліни
1	2	3
Кількість кредитів, відповідних ECTS-3 Модулів – 2 Змістовних модулів - 4 Загальна кількість годин – 108 Тижневих годин: аудиторних – 4, Самостійна робота–5	Напрям 6.090101 “Агрономія”; Кваліфікаційний рівень – бакалавр.	Обов’язкова, нормативна. Рік підготовки – 1, 1-й семестр Лекцій – 24 год., Практ. – 24 год., Самост.робота–60 год. Інд.роб.(РГР) на тему: “Основні елементарні функції, їх властивості та графіки”.

Вид контролю: іспит

Заочна форма навчання

Курс: підготовка бакалаврів	Напрям, спеціальність, кваліфікаційний рівень	Характеристика навчальної дисципліни
1	2	3
Кількість кредитів, відповідних ECTS-3 Модулів – 2 Змістовних модулів - 4 Загальна кількість годин – 108	Напрям 6.090101 “Агрономія”; Кваліфікаційний рівень – бакалавр.	Обов’язкова, нормативна. Рік підготовки – 1, 1-й семестр Лекцій – 6 год., Практ. – 6 год., Сам.робота–102 год. Контрольних робіт -1

Вид контролю: іспит



## 2.3. Робоча програма Лекції

### Змістовий модуль 1.

#### Елементи лінійної алгебри та аналітичної геометрії

**Тема 1.** Визначники другого і третього порядків, їх властивості та обчислення.

Мінори та алгебраїчні доповнення елементів визначника. Теореми про розклад визначника за елементами його рядка чи стовпця, про анулювання визначника.

Поняття про визначники вищих порядків, їх обчислення.

**Тема 2 .** Застосування визначників до розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Формули Крамера.

**Тема 3.** Вектори (основна термінологія). Проекція вектора на вісь, вектора на вектор. Властивості проекцій.

Декартів базис і декартова система координат. Координати вектора в декартовому базисі.

Лінійні операції над векторами в графічній і координатній формах.

**Тема 4.** Скалярний добуток двох векторів, його механічний зміст та властивості. Умова перпендикулярності двох векторів.

Скалярний добуток двох векторів в координатах.

Застосування скалярного добутку (механічна робота, кут між двома векторами, проекція вектора на вектор, умова перпендикулярності двох векторів).

**Тема 5.** Предмет аналітичної геометрії, її найпростіші задачі (віддаль між двома точками, поділ відрізка у заданому відношенні). Поняття про рівняння лінії на площині.



Пряма лінія на площині, різні види її рівнянь. Кут між двома прямими, умови паралельності і перпендикулярності двох прямих. Відстань від точки до прямої.

**Тема 6.** Криві другого порядку. Коло, різні види рівнянь кола.

Еліпс. Рівняння еліпса, його форма, ексцентриситет. Гіпербола. Рівняння гіперболи, її форма, ексцентриситет, рівняння асимптот. Парабола. Рівняння параболи, її форма.

### **Змістовий модуль №2.** Вступ до математичного аналізу

**Тема 7.** Поняття функції однієї змінної. Область визначення та множина значень функції, їх знаходження. Способи завдання і характеристики поведінки функцій.

**Тема 8.** Границя функції при  $x \rightarrow a$  та  $x \rightarrow \infty$ . Нескінченно малі та нескінченно великі функції, зв'язок між ними. Основні теореми про граници. Обчислення границь. Односторонні граници.

**Тема 9.** Неперервність функції в точці і на інтервалі. Теореми про неперервні функції. Точки розриву функції, їх класифікація.

### **Змістовий модуль №3.** Диференціальне числення функцій однієї змінної.

**Тема 10.** Похідна функції однієї змінної, її механічний та геометричний зміст.

Диференційовність функції, неперервність диференційовних функцій. Похідні основних елементарних функцій.

**Тема 11.** Похідні суми, добутку, частки. Похідні складеної, оберненої і неявно заданої функцій. Логарифмічне диференціювання. Таблиця похідних. Похідні вищого порядку. Механічний зміст похідної

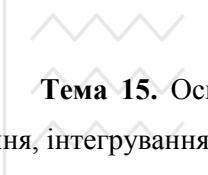


**Тема 12.** Диференціал функції, інваріантність його форми. Диференціал суми, добутку, частки. Застосування диференціала до наближених обчислень. Похідні першого і другого порядків параметрично заданої функції.

**Тема 13.** Необхідні і достатні умови монотонності функцій. Екстремум функції, необхідна і достатні умови екстремуму. Знаходження найбільшого і найменшого значень функції на відрізку.

**Змістовий модуль 4.      Інтегральнечислення функцій  
однієї змінної.**

**Тема 14.** Первісна функція. Невизначений інтеграл, його геометричний зміст та властивості. Таблиця інтегралів.



**Тема 15.** Основні методи інтегрування: безпосереднє інтегрування, інтегрування методом заміни змінної, частинами.

Поняття про інтеграли, що не виражаються через елементарну функцію.

**Тема 16.** Визначений інтеграл як границя інтегральної суми. Геометричний зміст та основні властивості визначеного інтеграла. Похідна від визначеного інтеграла за його верхньою межею. Формула Ньютона-Лейбніца.

**Тема 17.** Методи визначеного інтегрування: безпосереднє інтегрування функцій, інтегрування методом заміни змінної, частинами.

**Тема 18.** Застосування визначеного інтеграла в геометрії (обчислення площ плоских фігур, об'ємів тіл). Застосування визначеного інтеграла у фізиці (обчислення шляху, пройденого точкою при нерівномірному прямолінійному русі).



## Практичні заняття

№ з/п	Теми практичних занять	Кількість годин	
		Денна фор- ма навчання	Заочна фор- ма навчання
1	2	3	4
1.	Визначники та їх застосування до розв*язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь (формули Крамера)	2	1
2.	Скалярний добуток двох векторів, його застосування.	2	
3.	Пряма лінія на площині	2	1
4.	Криві другого порядку.	2	1
5.	Функція, її область визначення та множина значень.	2	
6.	Границя функції. Неперервність функції. Точки розриву, їх класифікація.	2	
7.	Похідна функції, її геометричний та механічний зміст. Таблиця похідних.	2	1
8.	Відпрацювання техніки диференціювання функцій. Диференціал функції, його застосування до наближених обчислень.	1	
9.	Дослідження функції на екстремум.	2	
	Знаходження найбільшого і найменшого значення функції на відрізку. Розв*язування прикладних задач.	1	
10.	Безпосереднє інтегрування функцій. Інтегрування заміною змінної і частинами.	2	1
11.	Методи визначеного інтегруван-	2	1

 12.	<p>ня: безпосереднє інтегрування функцій за формулою Ньютона-Лейбніца, інтегрування заміною змінною і частинами.</p> <p>Застосування визначеного інтеграла.</p>		
Всього:		24	6

### Структура залікового кредиту

Назви тем змістовних модулів	Кількість годин			
	Лекції	Практичні заняття	CPC та IPC	Разом
<b><u>Змістовий модуль №1</u></b>				
Елементи лінійної алгебри та аналітичної геометрії				
Тема 1_ -----	1	1	3	5
Тема 2_ -----	1	1	3	5
Тема 3_ -----	1	1	3	5
Тема 4_ -----	1	1	3	5
Тема 5_ -----	2	1	3	6
Тема 6_ -----	2	2	3	7
<b><u>Змістовий модуль №2</u></b>				
Вступ до математично-го аналізу				

Національний університет водного господарства та природокористування				
Тема 7 одного господарства та природокористування	2	2	3	7
Тема 8	1	1	3	5
Тема 9	1	1	3	5
<b>Змістовий модуль №3</b>				
Диференціальне числення функції однієї змінної				
Тема 10	1	1	3	5
Тема 11	1	2	4	7
Тема 12	1	1	3	5
Тема 13	2	2	4	8
<b>Змістовий модуль №4</b>				
Інтегральне числення функції однієї змінної				
Тема 14	1	1	3	5
Тема 15	2	2	4	8
Тема 16	1	1	4	6
Тема 17	2	2	4	8
Тема 18	1	1	4	6
Усього годин	24	24	60	108

### Розподіл балів, присвоюваних студентам

Модуль 1. Поточне	Змістовий модуль № 1	T.1	1/1
		T.2	1/1

 <b>Національний університет водного господарства та природокористування</b>	<b>тестування та ства та природокористування самостійна робота</b>	<b>16 балів</b>	T.3	1/1		
			T.4	1/1		
			T.5	2/2		
			T.6	2/2		
	<b>Змістовий модуль № 2</b>	<b>8 балів</b>	T.7	2/2		
			T.8	1/1		
			T.9	1/1		
	<b>Змістовий модуль № 3</b>	<b>12 балів</b>	T.10	1/1		
			T.11	2/2		
			T.12	1/1		
			T.13	2/2		
	<b>Змістовий модуль № 4</b>	<b>12 балів</b>	T.14	1/1		
			T.15	1/1		
			T.16	1/1		
			T.17	1/1		
			T.18	2/2		
<b>Модуль 2. Самостійна робота Індивідуальна робота (РГР)</b>			50			
			10			
<b>Форма підсумкового контролю</b>			iспит			
			40			
<b>Сума балів</b>			100			

\* В чисельнику вказана кількість балів за знання теоретичного матеріалу. В знаменнику – сума балів за модульну контрольну роботу і зао-



### 3. Рекомендації щодо вивчення курсу

Основною формою навчання студента є робота на лекціях і практичних заняттях, а також самостійна робота над навчальним матеріалом.

При вивчені передбаченого робочою програмою навчального матеріалу рекомендується вести конспект, в який записувати означення, формулювання теорем, основні формули, рівняння тощо. На полях конспекту потрібно відмічати питання, для з'ясування яких потрібна консультація викладача.

Вивчення теоретичного матеріалу за підручником (посібником) повинно супроводжуватися розв'язуванням задач, для чого рекомендується завести окремий зошит. Розв'язання задач і прикладів потрібно проводити акуратно, обчислення вести правильно і з необхідною точністю. Рисунки можна виконувати від руки, але у відповідності з даними умови задачі.

Після вивчення відповідної теми і розв'язання достатньої кількості задач студента рекомендується поновити в пам'яті основні означення, вивід формул, формулювання та доведення теорем і відповісти на запитання для самоконтролю.

В процесі вивчення курсу "Вища математика" повинен виконати чотири модульні контрольні роботи (у відповідності з кожним змістовим модулем) і типовий розрахунок, а студент заочної форми навчання повинен виконати одну контрольну роботу.

Номер варіанта контрольної роботи співпадає з останньою цифрою навчального шифру студента. Задачі для кожного варіанта вибираються так, щоб остання цифра номера задачі відповідала номеру даного варіанта.

При виконанні контрольної роботи студент повинен керуватися наступними вимогами:

- контрольну роботу потрібно виконувати в окремому зошиті чорнилом будь-якого кольору, крім червоного. На зовнішній стороні обкладинки повинні бути вказані прізвище та ініціали студента, навчальний шифр, спеціальність;

- розв'язання усіх задач і пояснення до них повинні бути короткими, але обґрутованими;

- всі обчислення і рисунки повинні бути виконані акуратно, по-



яснення до задач повинні відповідати позначенням на рисунку;

- отримавши перевірену роботу, студент в тому ж зошиті повинен виправити допущені помилки і подати роботу на повторне рецензування;

- до початку екзаменаційної сесії контрольна робота повинна отримати позитивну рецензію.

Нижче в обсязі контрольної роботи наведені зразки розв'язання задач, що повинно сприяти самостійному виконанню контрольної роботи кожним студентом.

#### **4. Методичні поради щодо вивчення теоретичної частини курсу**

Основу теоретичного курсу складають навчальні посібники Р.А.Антонюка: 1. Вища математика – Рівне: НУВГП, 2005, 246с.; 2. Лекції з вищої математики - Рівне НУВГП, 2008, 121с. При користуванні цими посібниками, крім теоретичного матеріалу, потрібно добре розібратися з наведеними в них прикладами і задачами. Це сприятиме глибокому засвоєнню математичних понять і виробленню навичок самостійної роботи студента в процесі навчання.

Матеріал змістових модулів курсу відображеного у відповідних розділах і параграфах посібника.

#### **Змістовий модуль № 1 Елементи лінійної алгебри та аналітичної геометрії**

- [1] Розділ 1, §§ 1.1; 1.2.5; 1.2.6; 1.2.10 (формули Крамера); 1.3.
- [2] Лекції 1-4.

#### **Запитання для самоконтролю**

1. Що таке визначник другого, третього порядку? Як вони обчислюються?

2. Що називається мінором і алгебраїчним доповненням елемента визначника?

3. Як формулюється теорема про розклад визначника за елементами якогось його рядка чи стовпця?

4. Який вигляд мають формулі Крамера і до розв'язання яких задач їх застосовують?



5. Що таке вектор? Модуль вектора?
6. Чому дорівнює проекція вектора на вісь? Властивості проекцій.
7. Які операції над векторами відносяться до лінійних? Як вони виконуються в графічній і координатній формах?
8. Що називається скалярним добутком двох векторів? Які його властивості?
9. Чому дорівнює скалярний добуток двох векторів в координатах?
10. Які Ви знаєте застосування скалярного добутку?
11. Які найпростіші задачі аналітичної геометрії Ви знаєте?
12. Що називається рівнянням лінії на площині?
13. Які Ви знаєте види рівнянь прямої на площині?
14. Як визначається кут між двома прямими?
15. Які умови паралельності і перпендикулярності двох прямих?
16. Як знайти відстань від точки до прямої?
17. Які криві другого порядку Ви знаєте? Дайте означення кожної з них.

### **Змістовий модуль №2 Вступ до математичного аналізу**

- [1] Розділ 2. §§ 2.1- 2.6  
[2] Лекції 5-7.

### **Запитання для самоконтролю**

1. Що називається функцією однієї змінної? Її область визначення? Множинною значень?
2. Що називається числововою послідовністю та її границею?
3. Дайте означення границі функції при  $x \rightarrow a$  та  $x \rightarrow \infty$
4. Сформулюйте основні властивості границь.
5. Які граници називаються односторонніми?
6. Дайте означення неперервності функції в точці і на інтервалі.
7. Які розриви може мати функція?

### **Змістовий модуль №3 Диференціальнечислення функцій однієї змінної**

- [1] Розділ 3 §§ 3.1 – 3.4    [2] Лекції 8-10.



### **Запитання для самоконтролю**

1. Що називається похідною функції в точці? Похідною на деякій множині значень аргумента?
2. Який зв'язок існує між неперервністю і диференційовністю функції в точці?
3. В чому полягає механічний зміст похідних першого і другого порядків?
4. Який геометричний зміст похідної функції в точці?
5. Чому дорівнює похідна суми, добутку, частки, функції від функції?
6. Чому дорівнює похідна оберненої, неявно і параметрично заданих функцій?
7. Відновіть у пам'яті таблицю похідних.
8. Що таке диференціал функції? Який його зв'язок з приростом функції?
9. Наведіть формулу застосування диференціала функції до наближених обчислень.
10. Відновіть у пам'яті схему дослідження функцій на екстремум.
11. Як знайти найбільше та найменше значення функції на відрізку?

### **Змістовий модуль №4. Інтегральне числення функцій однієї змінної**

[1] Розділ 4. § 4.1.1; 4.1.8; 4.2.1-4.2.6; 4.2.9; 4.2.10.

[2] Лекції 11-14.

### **Запитання для самоконтролю**

1. Яка функція називається первісною для заданої функції?
2. Що називається невизначеним інтегралом? Його геометричний зміст та властивості. Таблиця інтегралів.
3. Які основні методи інтегрування Ви знаєте?
4. Введіть поняття визначеного інтеграла.
5. Чи знаєте Ви формулу Ньютона – Лейбніца?
6. Які основні методи визначеного інтегрування функцій?
7. Які задачі геометрії і фізики можна розв'язувати за допомогою



## 5. Зразки модульних контрольних робіт

### Модульна контрольна робота №1 (10 балів)

1. Як визначається тангенс кута  $\Theta$  між двома прямими через їх кутові коефіцієнти?

$$1) \operatorname{tg}\Theta = \frac{k_2 + k_1}{1 - k_1 k_2}; \quad 2) \operatorname{tg}\Theta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}; \quad 3) \operatorname{tg}\Theta = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}. \quad \underline{2 \text{ бали}}$$

2. Що визначають собою числа  $a$  та  $b$  в рівнянні еліпса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 ?$$

1) Відрізки, які еліпс відтинає на осях координат.

2) Велику і малу осі.

3) Велику і малу півосі.

2 бали

3. Розв'язати рівняння:

$$\begin{vmatrix} 2x - 1 \\ 3x - 1 \end{vmatrix} = 55$$

2 балів

4. Дано: А (2;1;0), В (3;-1;1), С (-1;3;0).

Знайти:  $A\vec{B} \bullet (A\vec{C} + B\vec{C})$ .

2 балів

5. Скласти рівняння гіперболи, у якої уявна вісь дорівнює 6, а

експерцентриситет  $\varepsilon = \frac{5}{4}$ .

2 балів

### Модульна контрольна робота №2 (20 балів).

1. Знайти область визначення функції

$$y = \sqrt{\frac{x-2}{x+3}}. \quad \underline{2 \text{ бали}}$$

2. Знайти границі:

a)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9}; \quad \underline{2 \text{ бали}}$



б)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 + x + 1} - 1}{x}$

2 бали

в)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x + 1}{2 + x + 7x^2}$

2 бали

3. Дослідити на неперервність функцію

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{якщо } x \leq 0, \\ x + 1, & \text{якщо } x > 0. \end{cases}$$

2 бали

### Модульна контрольна робота №3 (10 балів).

1. Знайти похідні від функцій:

а)  $y = (1+x^2) \operatorname{arctg} x;$   $y' - ?$  2 бали

б)  $y = \sin^2 \sqrt{x};$   $y'' - ?$  2 бали

в)  $\begin{cases} x = a(t-\sin t), \\ y = a(1-\cos t). \end{cases}$   $y_x' - ?$  2 бали

2. Обчислення наближено:

$$e^{(1,2)} \approx 1,2.$$
 2 бали

3. Якими повинні бути розміри прямокутної ділянки з периметром, рівним  $2p$ , щоб її площа була максимальною?

2 бали

### Модульна контрольна робота № 4 (10балів)

1. Знайти інтеграли:

1.  $\int \frac{dx}{1 + \sqrt{x}}$  2 бали

2.  $\int x \ln(-1) dx$  2 бали

3.  $\int_1^2 \left( x^2 + \frac{1}{x^4} \right) dx;$  2 бали



4.  $\int_0^{\pi} \sin x \cos^2 x dx ;$

2 бали

5. Обчислити площину фігури, обмеженої лініями:

$$y = 4 - x^2, y = 0.$$

2 бали

**6. Методичні поради і завдання до виконання контрольної роботи  
студентами заочної форми навчання**

**6.1. Методичні поради**

**Задачі 1-10**

Якщо задано загальне рівняння кривої другого порядку, то щоб знайти положення її центра або вершини (зокрема, параболи), потрібно шляхом виділення повних квадратів звести це рівняння до канонічного виду.

Рівняння в'язки прямих, які проходять через точку  $M_0(x_0; y_0)$ , має вигляд

$$y - y_0 = k(x - x_0),$$

де  $k$  – кутовий коефіцієнт.

Якщо задано дві прямі своїми рівняннями  $y = k_1x + b_1$  та  $y = k_2x + b_2$ , то умовою їх паралельності є рівність  $k_1 = k_2$ , а умовою перпендикулярності – рівність  $k_2 = -\frac{1}{k_1}$ .

**Задача № 1.**

Скласти рівняння прямої, яка проходить через центр кола  $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 3 = 0$ : а) паралельно; б) перпендикулярно до прямої  $2x+4y-1=0$ .

**Розв'язання.**

Загальне рівняння кола зведемо до канонічного виду:



$$(x^2 - 2x + 1) - 1 + (y^2 + 4y + 4) - 4 + 3 = 0;$$

$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 2$ . Точка С(1;-2) – центр кола.

Рівняння в'язки прямих, які проходять через точку С:

$$y+2 = k(x-1).$$

Запишемо рівняння заданої прямої у вигляді

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}, \quad k_1 = -\frac{1}{2}.$$

- а) Використовуючи умову паралельності двох прямих  $\left( k = k_1 = -\frac{1}{2} \right)$ ,

з в'язки прямих, які проходять через точку С, виділимо пряму, паралельну до заданої прямої:

$$y+2 = -\frac{1}{2}(x-1); \quad 2y+4 = -x+1; \quad x+2y+3=0.$$

- б) Використовуючи умову перпендикулярності двох прямих  $\left( k = -\frac{1}{k_1} = 2 \right)$ , з в'язки прямих, які проходять через точку С, виділимо пряму, перпендикулярну до заданої прямої:

$$y+2=2(x-1); \quad 2x-y-4=0.$$

### Задачі 11-20

Нехай потрібно знайти  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ , де  $P_n(x)$  – многочлен

ни степеня відповідно n та m. Якщо при  $x = a$  отримуємо неозначеність  $\frac{0}{0}$ , то многочлени  $P_n(x)$  потрібно розкласти на прості множники і скоротити дріб на множник  $(x-a)$  стільки разів, скільки потрібно.

Якщо неозначеність  $\frac{0}{0}$  отримано при відшуканні границі ірраціонального дробу, то для розкриття цієї неозначеності потрібно чисельник і знаменник дробу помножити на вираз, спряжений або чисельнику, або знаменнику, або чисельнику і знаменнику одночасно.



**Задача № 2.** Знайти граници:

a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2-x-x^2}{2-3x+x^2}; \quad$  б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x};$

**Розв'язання.**

а) Тут має місце неозначеність виду  $\frac{0}{0}$ . Розкладаючи чисельник і знаменник дробу на прості множники, отримаємо:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2-x-x^2}{2-3x+x^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2+x)(1-x)}{(2-x)(1-x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2+x}{2-x} = \frac{2+1}{2-1} = 3.$$

б) Тут також має місце неозначеність  $\frac{0}{0}$ . Помноживши чисельник і знаменник дробу на вираз  $\sqrt{x+4} + 2$ , спряжений чисельнику, будемо мати:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)}{x(\sqrt{x+4}+2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+4-4}{x(\sqrt{x+4}+2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+4}+2} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

**Задачі 21-30**

При відшуканні похідних потрібно знати формулі і правила диференціювання:

1)  $(u \pm v)' = u' \pm v'$ ; 2)  $(uv)' = u'v + uv'$ ; 3)  $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}; \quad v \neq 0.$

4) Якщо  $y = f(u)$ , де  $u = u(x)$ ,  $y'_x = y'_u \cdot u'_x$ .

Для функції  $y=f(x)$ , заданої параметрично рівняннями

$$x = \varphi(t); \quad y = \psi(t), \text{ похідні } y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}; \quad y''_x = \frac{\psi''_t}{x'_t}.$$

**Задача № 3.**



Знайти  $y'_x$  та  $y''_{x^2}$  функцій:

a)  $y = \ln \left( 1 + \sqrt{1+x^2} \right)$ ; 6)  $\begin{cases} x = \ln t, \\ y = \frac{1}{2} \left( t + \frac{1}{t} \right). \end{cases}$

**Розв'язання**

a)  $y'_x = \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \cdot \left( 1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} \right) = \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{\sqrt{1+x^2} + x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ ;

$y''_{x^2} = -\frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = -\frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$ .

6)  $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{t^2} \right)}{\frac{1}{t}} = \frac{1}{2} \left( t - \frac{1}{t} \right);$

$y''_{x^2} = \frac{y''_t}{x'_t} = \frac{\frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{t^2} \right)}{\frac{1}{t}} = \frac{1}{2} \left( t + \frac{1}{t} \right).$

**Задачі 31-40.**

При знаходженні невизначених інтегралів потрібно, насамперед, добре знати формули і правила інтегрування, а також методи інтегрування виразів, що містять квадратний тричлен, раціональних дробів, найпростіших ірраціональних і тригонометричних виразів.

**Приклад 4.**

Знайти невизначені інтеграли:

a)  $\int \left( \sqrt{x} + \frac{5}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{\arccos^3 x}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx$  ; 6)  $\int \frac{6x-7}{\sqrt{5-4x-x^2}} dx$  ;

**Розв'язання.**

a) Інтегруємо безпосередньо:



$$\int \left( \sqrt{x} + \frac{5}{\sqrt[3]{x^2}} \cdot \frac{\arccos^2 x}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx + 5 \int x^{-\frac{2}{3}} dx + \int \arccos^3 x d(\arccos x) = \\ = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + 5 \frac{x^{\frac{1}{3}}}{3} + \frac{\arccos^4 x}{4} + C = \frac{2}{3} x \sqrt{x} + 15 \sqrt[3]{x} + \frac{1}{4} \arccos^4 x + C.$$

б) Виділимо в чисельнику похідну квадратного тричлена:

$$\int \frac{6x - 7}{\sqrt{5 - 4x - x^2}} dx = \int \frac{-3(-4 - 2x) - 19}{\sqrt{5 - 4x - x^2}} dx = \\ = -3 \int \frac{(-4 - 2x) dx}{\sqrt{5 - 4x - x^2}} - 19 \int \frac{dx}{\sqrt{5 - 4x - x^2}} = -3 \int \frac{d(-4x - x^2)}{\sqrt{5 - 4x - x^2}} - \\ - 19 \int \frac{d(-x^2 - 4x + 5)}{\sqrt{9 - (-x^2 - 4x + 5)}} = C - 6\sqrt{5 - 4x - x^2} - 19 \arcsin \frac{x+2}{3}$$

### Задачі 41-50

Запропоновані тут визначені інтеграли беруться частинами та методом заміни змінної. Основну роль в кінцевому підсумку відіграє формула Ньютона-Лейбніца.

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

**Приклад 5.** Обчислити інтеграли:

a)  $\int_0^1 x^3 \operatorname{arctg} x dx ;$

б)  $\int_{-2}^{11} \frac{(2x-3)dx}{\sqrt[3]{(2x+5)^2 + 2\sqrt[3]{2x+5} + 4}}.$

**Розв'язання.**



$$\int_0^1 x^3 \operatorname{arctg} x dx = \begin{cases} U = \operatorname{arctg} x; dU = \frac{dx}{1+x^2} \\ dV = x^3 dx; V = \frac{x^4}{4} \end{cases} = \left( \frac{x^4}{4} \operatorname{arctg} x \right)_0^1 - \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{x^4 dx}{1+x^2} = \\ = \frac{1}{4} \operatorname{arctg} 1 - \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{(x^4 + x^2) - (1 + x^2) + 1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{16} - \frac{1}{4} \int_0^1 \left( x^2 - 1 + \frac{1}{1+x^2} \right) dx = \\ = \frac{\pi}{16} - \frac{1}{4} \left( \frac{x^3}{3} - x + \operatorname{arctg} x \right)_0^1 = \frac{\pi}{16} - \frac{1}{4} \left( \frac{1}{3} - 1 + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{16} + \frac{1}{6} - \frac{\pi}{16} = \frac{1}{6}. \end{math>$$

6)

$$\int_{-2}^{11} \frac{(2x-3)dx}{\sqrt[3]{(2x+5)^2 + 2\sqrt[3]{2x+5}} + 4} = \left| \begin{array}{l} 2x+5=t^3 \\ dx = \frac{3}{2}t^2 dt \end{array} \right| = \frac{3}{2} \int_1^3 \frac{t^3 - 8}{t^2 + 2t + 4} \cdot t^2 dt = \\ = \frac{3}{2} \int_1^3 \frac{t^2(t-2)(t^2+2t+4)}{t^2+2t+4} dt = \frac{3}{2} \int_1^3 (t^3 - 2t^2) dt = \frac{3}{2} \left( \frac{t^4}{4} - \frac{2t^3}{3} \right)_1^3 = \\ = \frac{3}{2} \left( \frac{81}{4} - 18 - \frac{1}{4} + \frac{2}{3} \right) = 4.$$

### Задачі 51-60.

В запропонованих задачах – застосування визначеного інтеграла до розв’язання задач геометрії.

#### Приклад 6.

Знайти плошу фігури, обмеженої лініями:

$$y = \frac{x^2}{2} - x + 1 \text{ та } y = -\frac{x^2}{2} + 3x - 2.$$

#### Розв'язання.



Національний університет

з природокористування

$$\begin{cases} y = \frac{x^2}{2} - x + 1 \\ y = -\frac{x^2}{2} + 3x - 2 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 3.$$

При цьому  $y_1 = \frac{1}{2}$ ,  $y_2 = \frac{5}{2}$ .

$A(1; \frac{1}{2})$ ,  $B(3; \frac{5}{2})$  – точки перетину.

Побудувавши задані лінії, отримаємо фігуру, зображену на рисунку 1:

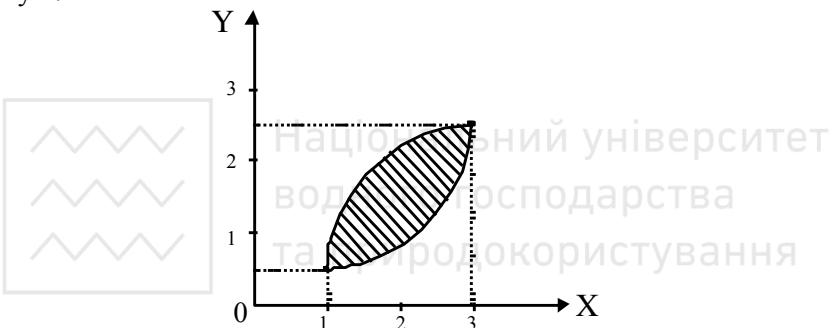


Рис.1.

Площа цієї фігури

$$S = \int_1^3 (y_2 - y_1) dx = \int_1^3 \left( -\frac{1}{2}x^2 + 3x - 2 - \frac{1}{2}x^2 + x - 1 \right) dx = \int_1^3 (-x^2 + 4x - 3) dx =$$

$$= \left( -\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 3x \right) \Big|_1^3 = -9 + 18 - 9 + \frac{1}{3} - 2 + 3 = \frac{4}{3} (\text{кв.од.}).$$

### Приклад 7.

Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі ОХ площини фігури, обмеженої астровердою  $x = 2\cos^3 t$ ,  $y = 2\sin^3 t$ .

### Розв'язання.



Вказане тіло обертання зображене на рисунку 2.

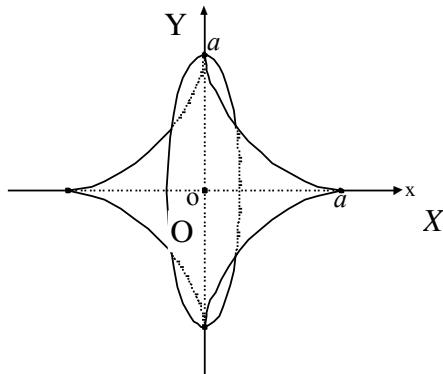


Рис.2.

Враховуючи симетрію тіла відносно площини, яка проходить через вісь  $OY$  перпендикулярно до осі  $OX$ , отримаємо:

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\sin^3 t)^2 (\cos^3 t)^2 dt = 48\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 t \cos^2 t dt = -48\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos^2 t)^3 \times \\ &\quad \times \cos^2 t d \cos t = -48\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 t - 3\cos^4 t + 3\cos^6 t - \cos^8 t) d \cos t = \\ &= -48\pi \left( \frac{\cos^3 t}{3} - \frac{3\cos^5 t}{5} + \frac{3\cos^7 t}{7} - \frac{\cos^9 t}{9} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 48\pi \left( \frac{1}{3} - \frac{3}{5} + \frac{3}{7} - \frac{1}{9} \right) = \\ &= -\frac{256}{105}\pi \text{ (уб.од.)} \end{aligned}$$

## 6.2 Завдання до виконання контрольної роботи.

### 1-10. Скласти рівняння прямої, яка проходить через:

1. центр еліпса  $x^2+2y^2-2x-8y+7=0$  паралельно до прямої  $2x+3y+5=0$ .
2. центр гіперболи  $x^2-2y^2-2x+8y-9=0$  паралельно до прямої  $5x+8y+4=0$ .
3. вершину параболи  $2x^2-12x-y+19=0$  паралельна до прямої  $2x+4y+8=0$ .
4. центр кола  $x^2+y^2-6x-8y+9=0$  паралельно до прямої  $x-2y-2=0$ .
5. центр еліпса  $x^2+4y^2+6x-8y+9=0$  перпендикулярно до прямої  $3x+4y+1=0$ .



6. центр гіперболи  $x^2 - 4y^2 + 6x + 8y + 1 = 0$  перпендикулярно до прямої  
 $4x + 8y + 1 = 0$ .
7. вершину параболи  $4x^2 + 8x - y + 8 = 0$  перпендикулярно до прямої  
 $2x + y + 6 = 0$ .
8. центр кола  $x^2 + y^2 + 10x - 2y + 1 = 0$  перпендикулярно до прямої  
 $x - 2y - 2 = 0$ .
9. центр еліпса  $4x^2 + 2y^2 - 32x - 4y + 62 = 0$  перпендикулярно до прямої  
 $2x + 6y - 1 = 0$ .
10. центр гіперболи  $4x^2 + 2y^2 - 32 - 4y + 58 = 0$  перпендикулярно до прямої  
 $2x + 4y - 9 = 0$ .

**11-20. Не користуючись правилом Лопіталя, знайти границі:**

11. а)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{2x^2 + x - 21}$ ;

12. а)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + x - 6}$ ;

б)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{x^2 - x}$ ;

13. а)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + x - 2}{3x^2 + 4x + 1}$ ;

б)  $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{2+x} - 3}{x - 7}$ ;

14. а)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 7x + 3}{x^2 - 2x - 3}$ ;

б)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x - 2}$ ;

15. а)  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{3x^2 + 8x - 3}{2x^2 + 7x + 3}$ ;

б)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x^2} - 2}{1-x}$ ;

16. а)  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{6 - 7x - 3x^2}{2x^2 + 7x + 3}$ ;

б)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{\sqrt{2x} - 2}$ ;

17. а)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 + 7x + 2}{2x^2 + x - 6}$ ;

б)  $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{x - 8}{\sqrt[3]{x} - 2}$ ;

18. а)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 5x - 2}{6 - 7x + 2x^2}$ ;

б)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x-1} - \sqrt{5}}{x - 3}$ ;

19. а)  $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 + 9x + 20}$ ;

б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+3x} - 1}$ ;



20. а)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 2x - 8}{2 + 3x - 2x^2};$

б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sqrt{x}}{x^2 - x};$

**21-30.** Знайти  $y'_x$  на  $y''_{x^2}$  функцій:

21. а)  $y = x\sqrt{1+x^2};$       б)  $x = t - \ln t, y = 3t^2 - 2t^3.$

22. а)  $y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}};$       б)  $x = 3\cos^2 t, y = 4\sin^2 t.$

23. а)  $y = \frac{\ln x}{x};$       б)  $x = 2\cos^3 t, y = 4\sin^3 t.$

24. а)  $y = x^2 \ln x;$       б)  $x = \cos t + t \sin t, y = \sin t - t \cos t.$

25. а)  $y = xe^{-x};$       б)  $x = \arcsin t, y = 3t - t^3.$

26. а)  $y = (1+x^2)\operatorname{arctg} x;$       б)  $x = 2t^3 + t, y = \ln t.$

27. а)  $y = e^x \cos x;$       б)  $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t).$

28. а)  $y = e^{-x} \sin x;$       б)  $x = a \operatorname{tg} t, y = \frac{b}{\cos t}.$

29. а)  $y = xe^{\frac{1}{x}};$       б)  $x = t^2 + \ln t, y = 2t^3 + 3t.$

30. а)  $y = xe^{-x^2};$       б)  $x = a \cos^2 t, y = b \sin^3 t.$

**31-40.** Знайти інтеграли:

31. а)  $\int \left( 5x^3 + 2\sqrt[4]{x} - \frac{\ln^2 x}{x} \right) dx;$       б)  $\int \frac{(3x-1)dx}{\sqrt{x^2+5x+7}};$

32. а)  $\int \left( 3x^4 + \frac{5}{x^3} + \sin^5 x \cos x \right) dx;$       б)  $\int \frac{(3x+2)dx}{\sqrt{9x^2+6x+2}};$

33. а)  $\int \left( 2x^7 - \frac{3}{\sqrt[5]{x^2}} + 2xe^{x^2} \right) dx;$       б)  $\int \frac{(2x+5)dx}{\sqrt{3-2x-x^2}};$

34. а)  $\int \left( 4x^5 - 3\sqrt[3]{x^2} + \frac{\operatorname{arctg}^3 x}{1+x^2} \right) dx;$       б)  $\int \frac{(3x-1)dx}{2x^2-2x+1};$



35. а)  $\int \left( 3x^2 + \frac{2}{x^4} - \frac{\operatorname{tg}^2 x + 3}{\cos^2 x} \right) dx;$  б)  $\int \frac{(5x + 2)dx}{x^2 + 3x - 1};$
36. а)  $\int \left( 5x^6 - \frac{4}{\sqrt[3]{x}} - \cos^3 x \sin x \right) dx;$  б)  $\int \frac{(x+3)dx}{2x^2 + 6x + 17};$
37. а)  $\int \left( 2x^4 - 5\sqrt[5]{x^3} - \frac{\arcsin^3 x}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx;$  б)  $\int \frac{(2x+1)dx}{\sqrt{5+4x-x^2}};$
38. а)  $\int \left( 6x^2 - \frac{5}{x^4} + x^2 e^{2x^3} \right) dx;$  б)  $\int \frac{(2x-3)dx}{9x^2 - 6x + 5};$
39. а)  $\int \left( 3x^7 - 5\sqrt{x} + x \cdot 3^{x^2} \right) dx;$  б)  $\int \frac{(5x-1)dx}{2x^2 + 2x + 5};$
40. а)  $\int \left( 3x^7 + \frac{4}{\sqrt[4]{x^3}} - \frac{ctg^4 x + 7}{\sin^2 x} \right) dx;$  б)  $\int \frac{(7x+4)dx}{\sqrt{x^2 - x + 2}};$

**41-50. Обчислити інтеграли:**

41. а)  $\int_0^1 x \operatorname{arctg} x dx;$  б)  $\int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx.$
42. а)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (3x^2 + 1) \sin x dx;$  б)  $\int_0^5 \frac{dx}{\sqrt{3x+1} + \sqrt[4]{3x+1}}.$
43. а)  $\int_0^2 \ln(x^2 + 4) dx;$  б)  $\int_1^{64} \frac{2 + \sqrt[6]{x}}{\sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x}} dx.$
44. а)  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^2 \cos 2x dx;$  б)  $\int_0^1 \frac{dx}{(2-x^2)\sqrt{2-x^2}}.$
45. а)  $\int_0^{\frac{1}{2}} \operatorname{arcsin} 2x dx;$  б)  $\int_1^4 \frac{(x-1)dx}{\sqrt[3]{(3x-4)^2} - \sqrt[3]{3x-4} + 1}.$



46. а)  $\int_0^{\frac{\pi}{6}} x \sin 3x dx ;$

б)  $\int_1^{27} \frac{(x+1)dx}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + 1} .$

47. а)  $\int_0^2 \arctg \frac{x}{2} dx;$

б)  $\int_{\frac{4}{\sqrt{3}}}^{2\sqrt{2}} \frac{dx}{(x^2 - 4)\sqrt{x^2 - 4}} .$

48. а)  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x dx}{\cos^2 x} ;$

б)  $\int_0^3 \frac{4x dx}{\sqrt[3]{(3x-8)^2} - 2\sqrt[3]{3x-8} + 4} .$

49. а)  $\int_1^2 x \ln x dx;$

б)  $\int_1^{16} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}} dx.$

50. а)  $\int_{-1}^0 (3x+3)e^{-2x} dx;$

б)  $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{(x^2+9)\sqrt{x^2+9}} .$

### 51-60. Розв'язати задачі:

51. Знайти площину фігури, обмеженої лініями  $y=4-x^2$  та  $2x+y-4=0$ .

52. Знайти довжину астроїди  $x=2\cos^3 t$ ,  $y=2\sin^3 t$ .

53. Знайти площину фігури, обмеженої кардіоїдою  $\rho = 2(1 + \cos\varphi)$ .

54. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі  $ox$  площинної фігури, обмеженої лініями  $y=2x-x^2$  та  $y=0$ .

55. Знайти площину фігури, обмеженої еліпсом  $x=3\cos t$ ,  $y=2\sin t$ .

56. Знайти довжину кардіоїди  $\rho = 3(1 - \cos t)$ .

57. Знайти площину фігури, обмеженої лініями  $xy=4$  та  $x+y-5=0$ .

58. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі  $ox$  площинної фігури, обмеженої лініями  $y=x$  та  $y = x^2$ .

59. Знайти площину фігури, обмеженої кривою  $\rho = 3\cos 2\varphi$ .

60. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі  $ox$  площинної фігури, обмеженої еліпсом  $y=2\cos t$  та  $y=3\sin t$ .

### **7. Методичні поради і завдання до виконання розрахунково-графічної роботи**



Національний університет

Успішному і глибокому засвоєнню математики та осмисленому оволодінню її методами в значній мірі сприяє самостійна робота студентів. Одним з важливих видів самостійної роботи є система розрахунково-графічних робіт (РГР).

Для студентів напряму підготовки 6.090101 "Агрономія" робочою програмою передбачено виконання РГР на тему: «Основні елементарні функції, їх властивості і графіки».

Робота складається з теоретичної частини (спільної для всіх студентів) і практичної частини (індивідуальні завдання поваріантно). Номер варіанта співпадає з останньою цифрою навчального шифру студента.

Завершальним етапом є захист РГР. При захисті студент повинен уміти правильно відповісти на теоретичні питання, дати пояснення розв'язкам задач практичної частини роботи, уміти розв'язувати задачі аналогічного типу.

РГР виконується на папері формату А-4. Рисунки бажано виконувати на міліметровому папері.

Титульна сторінка повинна мати вигляд:

Національний університет водного господарства та природокористування Кафедра вищої математики	
<b>Розрахунково-графічна робота</b>	
на тему:	_____
Варіант №	ФЕП – 1, гр. _____ Прізвище та ініці- али Дата
Рівне-201_	

**Розрахунково-графічна робота** на тему: „Основні елементарні функції, їх властивості і графіки” має на меті закріпити набуті в школі



знання про основні елементарні функції, які часто зустрічаються як в самій математиці, так і при вивченні спеціальних дисциплін, умінні будувати графіки функцій і зображати плоскі фігури, обмежені заданими лініями, в прямокутній декартовій та полярній системах координат.

### Теоретична частина РГР.

У теоретичній частині РГР студент повинен подати основні властивості та в прямокутній декартовій системі координат побудувати графіки таких функцій:

1. Степеневої  $y=x^n$ ,  $n \in R$ . Графіки при  $n=-1; \frac{1}{2}; 1; 2; 3$ .
2. Показникової  $y=a^x$  ( $a > 0, a \neq 1$ ). Графіки при  $a=\frac{1}{2}; 2; e; e^{-1}$ .
3. Логарифмічної  $y=\log_a x$  ( $a > 0, a \neq 1$ ). Графіки при  $a=\frac{1}{2}; 2; e; e^{-1}$ .
4. Тригонометричних  $y=\sin x, y=\cos x, y=\operatorname{tg} x, y=\operatorname{ctg} x$ .
5. Обернених тригонометричних  $y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\operatorname{arctg} x, y=\operatorname{arcctg} x$ .

### Практична частина РГР.

В практичній частині РГР студент повинен побудувати плоскі фігури, обмеженими вказаними лініями в прямокутній декартовій і полярній системах координат, попередньо знайшовши координати їх точок перетину. Побудовані плоскі фігури заштрихувати.

#### Варіанти індивідуальних завдань.

Варіант №	Рівняння ліній
01	a) $y=4-x^2$ ; $2x+y-4=0$ ; б) $x^2+y^2=2$ ; $y=x^2$ , $y \geq 0$ ;

 02	<p>Національний університет водного господарства</p> <p>a) <math>y = 2x - x^2</math>; <math>y = x</math>; б) <math>\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1</math>; <math>x^2 + y^2 = 16</math>, <math>x \geq 0</math>;</p>
03	<p>a) <math>y = 2x</math>; <math>y = x^2</math>; б) <math>y = \frac{1}{x}</math>; <math>y = x</math>, <math>x = 4</math>;</p>
04	<p>a) <math>y = \frac{4}{x}</math>; <math>x + y - 5 = 0</math>; б) <math>x^2 + y^2 = 2</math>; <math>y^2 = x</math>, <math>x \geq 0</math>;</p>
05	<p>a) <math>xy = 4</math>; <math>y = 0</math>; <math>x = 1</math>; <math>x = 4</math>; б) <math>y^2 = 2x + 4</math>; <math>x = 0</math>;</p>
06	<p>a) <math>y = x^2</math>; <math>y = 2 - x^2</math>; б) <math>y^2 = x^3</math>; <math>y = 8</math>, <math>x = 0</math>;</p>
07	<p>a) <math>y^2 = (4 - x)^3</math>; <math>x = 0</math>; б) <math>y = \ln x</math>; <math>y = 0</math>, <math>x = e</math>;</p>
08	<p>a) <math>y = x^2 + 4x</math>; <math>y = x + 4</math>; б) <math>y = x^3</math>; <math>y = 8</math>; <math>x = 0</math>;</p>
09	<p>a) <math>4y = x^2</math>; <math>y^2 = 4x</math>; б) <math>x^2 + y^2 = 8</math>; <math>y^2 = 2x</math>, <math>x \geq 0</math>;</p>
10	<p>a) <math>y = x^2 + 2x</math>; <math>y = x + 2</math>; б) <math>y = 3 + 2x - x^2</math>; <math>y = 0</math>;</p>

## 8. Самостійна робота студента

Самостійна робота студента включає в себе опанування теоретичної частини курсу "Вища математика" за підручниками чи посібниками, підготовку до практичних занять і розв'язання необхідної кількості задач для закріплення вивчаемого матеріалу, виконання РГР, підготовку до написання контрольних робіт і складання іспиту.

Студенту рекомендуються завдання для самостійної роботи, які знаходяться в методичному кабінеті університету:

Частина 1. Елементи лінійної алгебри та аналітичної геометрії. Вступ до математичного аналізу. Диференціальнечислення функцій. Шифр 085-114.

Частина 2. Інтегральне числення функцій однієї змінної. Звичайні диференціальні рівняння. Шифр 085-115.

Консультацію щодо розв'язання окремих задач студент може отримати у викладача.



№ з/п	Види навчальної діяльності	Навантаження, год.
	Опрацювання лекційного матеріалу	0,5 год./1 год. лекції
	Підготовка до практичних занять	0,5 год./1 год. практ. зан.
	Виконання РГР	0,5 год. на 1 студ. на семестр
	Опрацювання окремих розділів робочої програми з навчальної дисципліни, які не виносяться на лекції	до 3 год./1 год. можливої типової лекції
	Підготовка до написання контрольних модульних робіт, до складання залику, іспиту	6 год./ 1 кредит ECTS

## **9. Форми підсумкового контролю.**

Формою підсумкового контролю є іспит.

На іспиті студент отримує позитивну оцінку тоді, коли за всіма формами навчальної діяльності протягом семестру він набере не менше 60 балів.

## **УМОВИ ПЕРЕВЕДЕННЯ ДАНИХ 100-БАЛЬНОЇ ШКАЛИ ОЦІНЮВАННЯ В 4-БАЛЬНУ ТА ШКАЛУ ECTS**

Переведення даних 100-балльної шкали оцінювання в 4-балальну та шкалу за системою ECTS здійснюється в такому порядку:

Сума балів за всі форми навчальної діяльності	Оцінка в ECTS	Оцінка за національною шкалою	
		Екзамен	Залік
90-100	A	Відмінно („5”)	Зараховано

82-89	В	Дуже добре („4”)	
74-81	C	Добре („4”)	
64-73	D	Задовільно („3”)	
60-63	E	Достатньо („3”)	
35-59	FX	Незадовільно („2”)	Не зараховано
		З можливістю повторного складання	
1-34	F	Незадовільно („2”)	Не зараховано
		З обов'язковим повторним вивченням дисципліни	

## 10. Питання для підготовки до екзамену

### Змістовий модуль № 1. Елементи лінійної алгебри і аналітичної геометрії

1. Визначники другого і третього порядків, їх властивості та обчислення. Поняття про визначники вищих порядків.
2. Застосування визначників до розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь (Формула Крамера).

*Типові задачі:*

a) Розвязати рівняння  $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -x \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & x^2 - 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

б) Розвязати нерівність  $\begin{vmatrix} x+2 & 3 \\ -1 & x \end{vmatrix} \geq 3$

в) Розвязати систему рівнянь  $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5, \\ -2x_2 + x_2 + x_3 = -1, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 6 \end{cases}$

- 1.3. Вектори (основна термінологія). Проекція вектора на вісь, вектора на вектор.

- 1.4. Лінійні операції над векторами в графічній і координатній формах.

- 1.5. Скалярний добуток двох векторів, його механічний зміст та властивості.

- 1.6. Застосування скалярного добутку (обчислення косинуса кута між двома векторами проекції вектора на вектор, механічної роботи).

*Типові задачі:*



а) Дано точки  $A(2;3;-1)$ ,  $B(-2;1;3)$ ,  $C(0;-1;2)$ . Знайти  $\overrightarrow{AB} * (2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC})$ ;

б) Обчисліти роботу, яку виконує рівнодійна  $\vec{F}$  трьох сил

$F_1 = (2;3;-5)$ ,  $F_2 = (3;-4;2)$ ,  $F_3 = (-3;2;4)$  при прямолінійному переміщенні точки з положення  $M(5;-3;-7)$  в положення  $N(4;1;-4)$ .

1.7. Поняття про рівняння лінії на площині. Алгебраїчні лінії.

1.8. Пряма лінія на площині, різні види її рівнянь. Кут між двома прямих, умови паралельності і перпендикулярності двох прямих. Віддаль від точки до прямої.

*Типові задачі:*

а) Дано трикутник з вершинами в точках:  $A(2;-3)$ ,  $B(3;0)$ ,  $C(-2;5)$ .

Знайти:

1. довжину сторони  $BC$ ;
2. рівняння сторони  $BC$ ;
3. рівняння висоти, опущеної з вершини  $A$ ;
4. довжину висоти  $h_A$ ;
5. внутрішній кут при вершині  $B$ ;
6. площа трикутника.

1.9. Криві другого порядку(коло, еліпс, гіпербола, парабола), їх канонічні рівняння і форми. Ексцентриситет еліпса і гіперболи, рівняння асимптот гіперболи.

*Типові задачі:*

а) знайти положення центра і радіус кола  $x^2+y^2-2x-4y+4=0$

б) скласти рівняння прямої, що проходить через лівий фокус і нижню вершину еліпса  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

в) знайти точки перетину гіперболи  $\frac{x^2}{90} - \frac{y^2}{36} = 1$ , і прямої  $x-5y=0$

г) Знайти положення вершини, параметр, фокус та рівняння директриси параболи  $y=x^2-4x+5$ .

## Змістовий модуль № 2. Вступ до математичного аналізу



2.1. Функція однієї змінної, її область визначення та множина значень.  
Характеристики поведінки функції.

*Типові задачі:*

Знайти  $D(y)$ , якщо: а)  $y = \sqrt{1-x} + \arcsin \frac{x}{3}$ ; б)  $y = \frac{x+1}{x-4} - \ln(x^2 - 1)$ .

2.2. Означення границі функції при  $x \rightarrow a$ , та  $x \rightarrow \infty$ . Відшукання границь дробово-раціональних та ірраціональних функцій.

*Типові задачі:*

Знайти: а)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^3 - 8}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{2x-1} - 1}$ .

2.3. Односторонні граници. Неперервність функції в точці і на інтервалі. Точки розриву функції, їх класифікація.

*Типова задача:*

Дослідити на неперервність функцію  $f(x) \begin{cases} x^2, & \text{при } x \leq 1 \\ 4 - x, & \text{при } x > 1 \end{cases}$

### Змістовий модуль № 3. Диференціальнечислення функцій однієї змінної

3.1. Означення похідної функції в точці, її геометричний і механічний зміст. Рівняння дотичної і нормалі до графіка функції в заданій точці. Таблиця похідних, правила диференціювання.

3.2. Похідні складеної, оберненої і неявно заданої функції.

*Типові задачі:*

Знайти  $y'$ , якщо: а)  $y = \sqrt{1-x^2} + x \arcsin x$ ; б)  $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ .

3.3. Похідні вищих порядків.

*Типові задачі:*

Знайти: а)  $y''$ , якщо  $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ ; б)  $y^v$ , якщо  $y = \frac{1}{x-1}$ .



Типові задачі:

a)  $y = \ln \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{x}{4} \right)$ ,  $dy = ?$

б) обчислити наближено  $\operatorname{arctg} 1,04$ .

3.5. Похідні першого і другого порядків параметрично заданої функції.

Типові задачі:

Дано:  $\begin{cases} x = t(1 - \sin t), \\ y = t \cos t. \end{cases}$  Знайти:  $y'_x$ ;  $y''_{x^2}$ .

3.6. Необхідні і достатні умови монотонності функцій.

3.7. Екстремум функції, необхідна і достатні умови існування екстремуму.

3.8. Найбільше та найменше значення функції на відрізку.

Типові задачі:

а) дослідити на екстремум функцію:  $y = \frac{x^3}{3} - x^2$ ;

б) знайти найбільше та найменше значення функції  $y = \ln(x^2 + 1)$  на відрізку  $[-2; 2]$ .

#### Змістовий модуль № 4. Інтегральнечислення функцій однієї змінної

4.1 Поняття первісної функції та невизначеного інтеграла. Основні властивості невизначеного інтеграла. Таблиця інтегралів.

4.2 Безпосереднє (з використанням табличних формул та операції підведення під знак диференціала) інтегрування.

Типові задачі. Знайти інтеграли:

а)  $\int \frac{+2x^2 dx}{x^2 (+x^2)}$ ;      б)  $\int x \operatorname{tg}(1 - 3x^2) dx$ ;      в)  $\int 3^{\sqrt{x}} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ .



#### 4.3 Інтегрування заміною змінної (метод підстановки).

*Типові задачі.* Знайти інтеграли:

a)  $\int \frac{dx}{1 + \sqrt{x-1}}$ ;

б)  $\int \frac{e^{3x} dx}{\sqrt{1+e^x}}$

в)  $\int \frac{\sqrt{1 - \ln x}}{x \ln x} dx$

#### 4.4 Інтегрування частинами.

*Типові задачі.* Знайти інтеграли:

а)  $\int (2x+1) \cos 3x dx$ ;    б)  $\int x \arctg x dx$     в)  $\int e^{-x} \cos x dx$ .

#### 4.5 Інтегрування функцій, що містять квадратний тричлен.

*Типові задачі.* Знайти інтеграли:

a)  $\int \frac{(2x-1)dx}{x^2 - 2x + 5}$ ;

б)  $\int \frac{(3x+1)dx}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}}$ ;

#### 4.6 Поняття про інтеграли, які не виражаються через елементарні функції.

### 11. Методичне забезпечення

В методичному кабінеті університету є роботи Р.А. Антонюка “Короткий конспект лекцій для студентів заочників” в двох частинах (частина 1-шифр 085-98; частина 2-шифр 085-99), завдання для самостійної роботи студентів в 2-х частинах (шифри 085-114, 085-115), на кафедрі зберігаються розроблені тексти модульних контрольних робіт, є необхідні навчальні таблиці і моделі.



## Рекомендована література

1. Антонюк Р.А. Вища математика. Навчальний посібник. – Рівне: НУВГП, - 2005.
2. Антонюк Р.А. Лекції з вищої математики.-Рівне: НУВГП,2008.
3. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М. : Наука, 1976.
4. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа (для втузов). – М.: Наука, - 1971
5. Бугрі М.К. Математика для економістів. Навчальний посібник. – Тернопіль: Підручники і посібники, 1998.
6. Бугров Я.С., Никольский С.М. Елементы линейной алгебры и аналитической геометрии. – М. : Наука, 1980.
7. Михайленко В.М., Антонюк Р.А. Сборник прикладных задач по высшей математики. – К.: Выща школа, - 1990.
8. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. – М.: Наука, - 1978.
9. Мышкис А.Д. Лекции по высшей математики. – М.: Наука, - 1973.
10. Шнейдер В.Е., Слуцкий А.И., Шумов А.С. Кратний курс высшой математики. т. 1, 2. – М.: Наука, - 1980.