



Національний університет  
водного господарства  
та природокористування

Міністерство освіти і науки України  
Національний університет водного господарства  
та природокористування  
Кафедра вищої математики

**04-02-06**

## **МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ТА ЗАВДАННЯ**

до виконання самостійної роботи  
з дисципліни „*Вища математика*”

на тему: „Інтегральне числення функції однієї змінної”  
для студентів I курсу напряму підготовки  
6.080101 „Геодезія, картографія та землеустрій”  
денної форми навчання

Рекомендовано  
методичною комісією  
за напрямом підготовки  
6.080101 „Геодезія,  
картографія та землеустрій”  
протокол №5 від 02.03.2015 р.

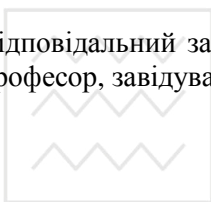
Рівне – 2015



Методичні вказівки та завдання до виконання самостійної роботи з дисципліни „Вища математика” на тему: „Інтегральне числення функції однієї змінної” для студентів I курсу напряму підготовки 6.080101 „Геодезія, картографія та землеустрій” денної форми навчання / Сяський В.О. – Рівне: НУВГП, 2015. – 41 с.

Упорядник: Сяський В.О., кандидат фізико-математичних наук,  
доцент.

Відповідальний за випуск: Тадеєв П.О., доктор педагогічних наук,  
професор, завідувач кафедри вищої математики.



Національний університет  
водного господарства  
та природокористування

## Зміст

1. Методичні рекомендації до виконання самостійної роботи.....	3
2. Рекомендована література.....	11
3. Завдання до самостійної роботи.....	12



### до виконання самостійної роботи

Перед виконанням даної роботи найбільшу увагу слід приділити таким моментам:

- розуміння понять невизначеного та визначеного інтегралів;
- зв'язок між операціями інтегрування та диференціювання;
- геометричний та фізичний зміст визначеного інтеграла і його застосування до розв'язання практичних задач.

Для успішного розв'язання задач необхідно засвоїти основні правила інтегрування (методи заміни змінної та інтегрування частинами, формула Ньютона – Лейбніца), добре володіти диференціальним численням та вміти користуватися таблицею інтегралів.

Наводимо деякий теоретичний матеріал, необхідний для виконання самостійної роботи.

Функція  $F(x)$  називається *первісною* для функції  $f(x)$  на проміжку  $[a, b]$ , якщо  $F'(x) = f(x)$ ,  $x \in [a, b]$ .

Множина всіх первісних для функції  $f(x)$  називається *невизначеним інтегралом* від функції  $f(x)$  і позначається  $\int f(x)dx = F(x) + C$ , де  $C$  – довільна стала.

Основні властивості невизначеного інтеграла:

$$1. \int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx .$$

$$2. \int C \cdot f(x) dx = C \cdot \int f(x) dx , \quad C = const.$$

3. Якщо  $\int f(x)dx = F(x) + C$ , то  $\int f(u)du = F(u) + C$ , де  $u = \varphi(x)$  – диференційовна функція.

Таблиця основних інтегралів:

$$1. \int du = u + C .$$

$$11. \int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1 .$$

$$2. \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C .$$

$$12. \int \frac{du}{\sin u} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{u}{2} \right| + C .$$



$$3. \int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C.$$

$$4. \int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + C.$$

$$5. \int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C.$$

$$6. \int e^u du = e^u + C.$$

$$7. \int \sin u du = -\cos u + C.$$

$$8. \int \cos u du = \sin u + C.$$

$$9. \int \operatorname{tg} u du = -\ln|\cos u| + C.$$

$$10. \int \operatorname{ctg} u du = \ln|\sin u| + C.$$

$$13. \int \frac{du}{\cos u} = \ln \left| \operatorname{tg} \left( \frac{u}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C.$$

$$14. \int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C.$$

$$15. \int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C.$$

$$16. \int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C.$$

$$17. \int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C.$$

$$18. \int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C.$$

$$19. \int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+u}{a-u} \right| + C.$$

$$20. \int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right| + C.$$

Основні методи інтегрування – заміна змінної та інтегрування частинами. Існують два способи заміни змінної: введення під знак диференціала і підстановка.

Метод *введення під знак диференціала* виражається формулою:

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \int f[\varphi(x)]d\varphi(x) = F[\varphi(x)] + C,$$

де  $F(u)$  – первісна для  $f(u)$ ,  $u=\varphi(x)$  – неперервно диференційовна функція.

Метод *підстановки* полягає в тому, що коли функція  $f(x)$  неперервна, то, поклавши  $x=\varphi(t)$ , де  $\varphi(t)$ ,  $\varphi'(t)$  – неперервні, отримуємо:

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$$

Метод *інтегрування частинами* виражається формулою:

$$\int u dv = uv - \int v du,$$

де  $u=u(x)$  і  $v=v(x)$  – диференційовні функції.



Якщо  $F(x)$  – первісна для  $f(x)$ , тобто  $F'(x) = f(x)$  на  $[a, b]$ , то

визначений інтеграл  $\int_a^b f(x) dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$  (формула

Ньютона-Лейбніца).

Якщо  $u(x)$  і  $v(x)$  неперервно диференційовні функції на  $[a, b]$ , то справедлива формула інтегрування частинами:

$$\int_a^b u dv = uv|_a^b - \int_a^b v du .$$

Заміна змінної у визначеному інтегралі:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt ,$$

де  $\varphi(t)$  – функція, неперервна разом зі своєю похідною  $\varphi'(t)$  на відрізку  $\alpha \leq t \leq \beta$ ;  $\varphi(\alpha) = a$ ,  $\varphi(\beta) = b$ ;  $f[\varphi(t)]$  – функція, неперервна на  $[\alpha, \beta]$ .

Важливо те, що замінюючи змінну  $x$  у визначеному інтегралі, знаходять також нові межі інтегрування для змінної  $t$  і надалі вже не повертаються до початкової змінної.

Якщо функція  $f(x)$  неперервна при  $a \leq x < \infty$ , то *невласний інтеграл* з нескінченною верхньою межею знаходять як границю

визначеного інтеграла:  $\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$ . Відповідно

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx .$$

Якщо неперервна на  $[a, b]$  функція  $f(x)$  при  $x \rightarrow b$  необмежено зростає або спадає і в точці  $x = b$  не визначена, то за означенням

*невласний інтеграл*  $\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$ .

Площа фігури, обмеженої лініями  $y = f_1(x)$  і  $y = f_2(x)$  ( $f_1(x) \leq f_2(x)$ );  $x = a$ ,  $x = b$ , ( $a < b$ ) знаходиться за формулою  $S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx$ .



Довжина дуги  $L$  гладкої кривої  $y=f(x)$ ,  $a \leq x \leq b$ , знаходиться за

формулою:  $L = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx$ . Якщо крива задана параметричними

рівняннями  $x=x(t)$ ,  $y=y(t)$ ,  $t_1 \leq t \leq t_2$ , то  $L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} dt$ . Довжина

дуги кривої  $r=r(\varphi)$ ,  $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$ , в полярних координатах:

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + r'^2} d\varphi.$$

Об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі  $OX$  криволінійної трапеції, обмеженої лініями  $y=f(x)$ ,  $x=a$ ,  $x=b$ ,  $y=0$ ,

дорівнює  $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$ .

Якщо точка рухається вздовж осі  $OX$  зі швидкістю  $v=f(t)$ ,  $t$  – час, то шлях, пройдений точкою за проміжок часу  $[t_1, t_2]$ , дорівнює

$$s = \int_{t_1}^{t_2} |f(t)| dt.$$

Обчислюючи силу тиску рідини, використовують закон Паскаля, згідно якого сила тиску рідини на площадку площею  $S$  з глибиною занурення  $h$  дорівнює  $P=\rho ghS$ , де  $\rho$  – густина рідини,  $g$  – прискорення вільного падіння.

Якщо змінна сила  $X=f(x)$  діє в напрямку осі  $OX$ , то робота сили

на відрізьку  $[x_1, x_2]$  дорівнює  $A = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$ .

Самостійна робота складається з 6 завдань. Охарактеризуємо кожне завдання та наведемо приклади розв'язання окремих задач.

Під час виконання *першого завдання* необхідно використовувати основні властивості невизначеного інтеграла та метод введення під знак диференціала (метод підстановки).

Приклади.

$$\begin{aligned}
 1. \int \left\{ \frac{2}{x-1} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + e^{2x} - \cos 4x \right\} dx &= 2 \int \frac{dx}{x-1} - \int x^{-\frac{1}{3}} dx + \int e^{2x} dx - \\
 - \int \cos 4x dx &= 2 \int \frac{d(x-1)}{x-1} - \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + \frac{1}{2} \int e^{2x} d(2x) - \frac{1}{4} \int \cos 4x d(4x) = \\
 &= 2 \ln|x-1| - \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{2} e^{2x} - \frac{1}{4} \sin 4x + C.
 \end{aligned}$$

$$2. \int \frac{dx}{\sqrt{2x^2 + 4x + 3}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2 + \frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left( x+1 + \sqrt{(x+1)^2 + \frac{1}{2}} \right) + C.$$

$$3. \int \frac{\sin 3x}{(1-2\cos 3x)^2} dx = \frac{1}{6} \int \frac{d(1-2\cos 3x)}{(1-2\cos 3x)^2} = -\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1-2\cos 3x} + C.$$

У *другому* завданні, де потрібно знайти невизначені інтеграли від виразів, що містять раціональні, тригонометричні та ірраціональні функції, слід використовувати методи інтегрування підстановкою та частинами, а також інші спеціальні методи.

Приклади.

$$\begin{aligned}
 1. \int x \operatorname{arctg} x dx &= \left. \begin{array}{l} u = \operatorname{arctg} x, \quad du = \frac{dx}{x^2+1}; \\ dv = x dx \Rightarrow v = \int x dx = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \left| \int u dv = uv - \int v du \right| = \\
 &= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1} dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \left( 1 - \frac{1}{x^2+1} \right) dx = \\
 &= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} (x - \operatorname{arctg} x) + C.
 \end{aligned}$$



$$2. \int \frac{5x-3}{x^2-8x+17} dx = \int \frac{(5x-3)dx}{(x-4)^2+1} = \left| \begin{array}{l} x-4=t \\ x=t+4 \\ dx=dt \end{array} \right| = \int \frac{5t+20-3}{t^2+1} dt =$$

$$= 5 \int \frac{tdt}{t^2+1} + 17 \int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{5}{2} \ln(t^2+1) + 17 \operatorname{arctg} t + C =$$

$$= \frac{5}{2} \ln(x^2-8x+17) + 17 \operatorname{arctg}(x-4) + C.$$

$$3. \int \frac{x+2}{x^3-2x^2} dx = \left| \frac{x+2}{x^3-2x^2} = \frac{x+2}{x^2(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-2} = \right.$$

$$= \frac{Ax(x-2) + B(x-2) + Cx^2}{x^2(x-2)} \Rightarrow x+2 = x^2(A+C) + x(B-2A) - 2B;$$

$$\left. \begin{array}{l} x^2 \left\{ \begin{array}{l} 0 = A+C \\ 1 = B-2A \\ 2 = -2B \end{array} \right\} \\ x^1 \\ x^0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} B = -1 \\ A = -1 \\ C = 1 \end{array} \right. \quad \left. \frac{x+2}{x^3-2x^2} = \frac{-1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x-2} \right| =$$

$$= \int \left( -\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x-2} \right) dx = -\ln|x| + \frac{1}{x} + \ln|x-2| + C.$$

$$4. \int \frac{dx}{\cos x + 2 \sin x + 3} = \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t, \quad x = 2 \operatorname{arctg} t, \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2}; \quad \sin x = \frac{2t}{t^2+1}; \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{2dt}{(1+t^2) \left( \frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{4t}{1+t^2} + 3 \right)} = 2 \int \frac{dt}{2t^2 + 4t + 4} = \int \frac{d(t+1)}{(t+1)^2 + 1} =$$





$$= \operatorname{arctg}(t+1) + C = \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1\right) + C.$$

$$5. \int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt[3]{x}+1)} = \left| \begin{array}{l} x = t^6, \\ dx = 6t^5 dt; \\ t = \sqrt[6]{x} \end{array} \right| = \int \frac{6t^5 dt}{t^3(t^2+1)} = 6 \int \frac{t^2+1-1}{t^2+1} dt =$$

$$= 6 \int \left(1 - \frac{1}{t^2+1}\right) dt = 6(t - \operatorname{arctg} t) + C = 6\sqrt[6]{x} - 6 \operatorname{arctg} \sqrt[6]{x} + C.$$

Під час виконання *третього* завдання необхідно використовувати формулу Ньютона-Лейбніца та методи інтегрування підстановкою і частинами у визначеному інтегралі.

Приклади.

$$1. \int_0^1 \frac{8x dx}{1+x^4} = 4 \int_0^1 \frac{d(x^2)}{1+(x^2)^2} = 4 \operatorname{arctg}(x^2) \Big|_0^1 = 4(\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0) = \pi.$$

$$2. \int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}} = \left| \begin{array}{l} 1+\sqrt{2x+1} = t, \quad dx = (t-1)dt; \\ x = \frac{(t-1)^2}{2}, \quad \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 4 \\ \hline t & 2 & 4 \end{array} \end{array} \right| =$$

$$= \int_2^4 \frac{t-1}{t} dt = \int_2^4 \left(1 - \frac{1}{t}\right) dt = (t - \ln|t|) \Big|_2^4 = 4 - \ln 4 - (2 - \ln 2) = 2 - \ln 2.$$

$$3. \int_1^e x \ln x dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x, \quad du = \frac{dx}{x}; \\ dv = x dx, \quad v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^e - \frac{1}{2} \int_1^e \frac{x^2 \cdot dx}{x} =$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^e - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_1^e = \frac{x^2}{2} \left( \ln x - \frac{1}{2} \right) \Big|_1^e = \frac{e^2 + 1}{4}.$$

У *четвертому* завданні необхідно обчислити невластні інтеграли 1-го і 2-го роду або довести їх розбіжність.



Приклад. Дослідити на збіжність інтеграли: а)  $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{(x-1)^2}$ ; б)  $\int_{-a}^a \frac{dx}{x^3}$ .

Розв'язання.

$$\text{а). } \int_2^{+\infty} \frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_2^b \frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_2^b \frac{d(x-1)}{(x-1)^2} = \lim_{b \rightarrow \infty} -\frac{1}{x-1} \Big|_2^b =$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ 1 - \frac{1}{b-1} \right] = 1. \text{ Інтеграл збігається і його значення дорівнює 1.}$$

$$\text{б). } \int_{-a}^a \frac{dx}{x^3} = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \int_{-a}^{0-\varepsilon_1} \frac{dx}{x^3} + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} \int_{0+\varepsilon_2}^a \frac{dx}{x^3} = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} -\frac{1}{2x^3} \Big|_{-a}^{0-\varepsilon_1} + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} -\frac{1}{2x^3} \Big|_{0+\varepsilon_2}^a =$$

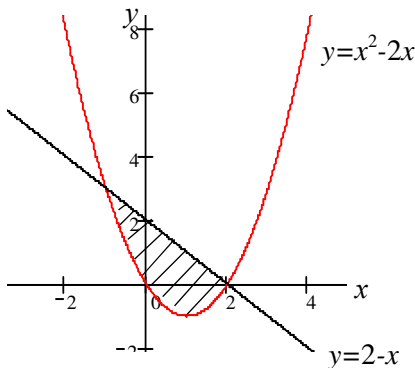
$$= \lim_{\substack{\varepsilon_1 \rightarrow 0 \\ \varepsilon_2 \rightarrow 0}} \left( \frac{1}{2\varepsilon_2^2} - \frac{1}{2\varepsilon_1^2} \right) = \infty - \infty. \text{ Оскільки границя не існує, то інтеграл}$$

розбігається.

*П'яте і шосте завдання присвячені застосуванням визначеного інтеграла до розв'язання геометричних та фізичних задач.*

Приклад 1. Обчислити площу фігури, обмеженої параболою  $y = x^2 - 2x$  і прямою  $y = 2 - x$ .

Розв'язання. Знайдемо межі інтегрування як абсциси точок перетину ліній, розв'язавши систему рівнянь:



$$\begin{cases} y = x^2 - 2x, \\ y = 2 - x \end{cases} : x^2 - 2x = 2 - x; \quad x^2 - x - 2 = 0, \quad x_1 = -1, x_2 = 2.$$



$$S = \int_{-1}^2 [(2-x) - (x^2 - 2x)] dx = \int_{-1}^2 (2+x-x^2) dx = \left( 2x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^2 =$$
$$= 2 \cdot 2 + \frac{4}{2} - \frac{8}{3} - \left( -2 + \frac{1}{2} - \frac{-1}{3} \right) = 4,5 \text{ (кв. од.)}$$

Приклад 2. Яку роботу необхідно затратити, щоб розтягнути пружину на 6 см, якщо сила величиною 1 Н розтягує її на 1 см?

Розв'язання. Згідно закону Гука сила  $X$  Н, що розтягує пружину на  $x$  м, дорівнює  $X = kx$ , де  $k$  – коефіцієнт пропорційності.

Поклавши  $x=0,01$  м і  $X=1$  Н, отримаємо  $k=100$  і, отже,  $X=100x$ .

Звідси шукана робота  $A = \int_0^{0,06} 100x dx = 50x^2 \Big|_0^{0,06} = 0,18 \text{ Дж}$ .



### Рекомендована література

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. – М.: Наука, 1978.
2. Мізюк В.Г. Вища математика: Навч. посібник. – Рівне: НУВГП, 2008.
3. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. – Ч. 1, 2. – М.: Высш. шк., 1986.



## Завдання до самостійної роботи

### Варіант 1

1. Знайти інтеграли безпосередньо, використавши таблиці диференціалів, інтегралів та правила інтегрування:

а) $\int \frac{(\sqrt[3]{x}-1)dx}{x^2}$ ;	б) $\int x^4 \cdot e^{(-x)^5} dx$ ;	в) $\int \sin^3 x \cos x dx$ ;
г) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+1}}$ ;	д) $\int x^2(3+2x^3)^4 dx$ ;	е) $\int \frac{5x^2}{\sqrt{1-x^6}} dx$ .

2. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int \frac{\sqrt{x+2}}{1+\sqrt{x+2}} dx$ ;	б) $\int \operatorname{arccot} x \cdot dx$ ;	в) $\int \frac{xdx}{x^2+2x+5}$ ;
г) $\int \frac{x^2+5x+1}{x^3+x} dx$ ;	д) $\int \sin^4 x \cos^3 x dx$ ;	е) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$ .

3. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_0^2 x(3-x) dx$ ;	б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x}$ ;	в) $\int_0^1 xe^{-2x} dx$ .
---------------------------	---	-----------------------------

4. Обчислити невластні інтеграли або довести їх розбіжність:

а) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^4}$ ;	б) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{4+x^2}$ .
-----------------------------------	---

5. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:  $y = x^3$ ,  $x+y=2$ ,  $x = -1$ .

6. Обчислити роботу, необхідну для того, щоб викачати воду із циліндричної цистерни висотою  $H=5$  м і радіусом основи  $R=2$  м.



## Варіант 2

1. Знайти інтеграли безпосередньо, використавши таблиці диференціалів, інтегралів та правила інтегрування:

а) $\int \frac{(1-3x)dx}{x}$ ;	б) $\int \frac{(5+2 \ln x)dx}{3x}$ ;	в) $\int \frac{\arctg x dx}{1+x^2}$ ;
г) $\int \frac{dx}{x^2-6x+1}$ ;	д) $\int \frac{3x dx}{\sqrt[3]{(x^2-3)^2}}$	е) $\int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} dx$

2. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int \frac{1+\ln x}{x} dx$ ;	б) $\int x \cdot e^{3x} \cdot dx$ ;	в) $\int \frac{x dx}{x^2-7x+13}$ .
г) $\int \frac{6x^2+13x+8}{x(x+2)^2} dx$ ;	д) $\int \frac{dx}{3+2\cos x}$ ;	е) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{2-x}}$ .

3. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_{-1}^0 \frac{(3x^4+3x^2+1)dx}{1+x^2}$ ;	б) $\int_0^1 \frac{\sqrt{e^x} dx}{\sqrt{e^x+e^{-x}}}$ ;	в) $\int_0^{\pi/2} x \cos x dx$ .
--	---	-----------------------------------

4. Обчислити невластні інтеграли або довести їх розбіжність:

а) $\int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}$ ;	б) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{5+2x^2}$ .
---	---

5. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:  $y = x$ ,  $xy = 4$ ,  $y = 4$ .

6. Тіло рухається прямолінійно за законом  $s = t^2$ ,  $t$  – час. Сила опору середовища пропорційна квадрату швидкості. Обчислити роботу, виконану силою опору при переміщенні тіла за 3 секунди після початку руху, якщо коефіцієнт пропорційності  $k = \frac{5}{9}$ .



### Варіант 3

1. Знайти інтеграли безпосередньо, використавши таблиці диференціалів, інтегралів та правила інтегрування:

а) $\int (3x + 1)^2 dx$ ;	б) $\int \frac{2^x dx}{4^x - 1}$ ;	в) $\int \frac{dx}{\sqrt{\arcsin x(1-x^2)}}$ ;
г) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-3-x^2}}$ ;	д) $\int \frac{5x^4 dx}{3+4x^5}$	е) $\int \frac{1}{x(1+\ln^2 x)} dx$

2. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ ;	б) $\int x \cdot 7^x \cdot dx$ ;	в) $\int \frac{xdx}{x^2+4x+8}$ .
г) $\int \frac{20}{x^3+x^2-20x} dx$ ;	д) $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$ ;	е) $\int \frac{1}{1+\sqrt[3]{x+1}} dx$ .

3. Обчислити визначені інтеграли:

а). $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(11+5x)^2}$ ;	б) $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$ ;	в) $\int_0^\pi x \sin 2x dx$ .
---	--	--------------------------------

4. Обчислити невластні інтеграли або довести їх розбіжність:

а). $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ ;	б) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{9+2x^2}$ .
--	---

5. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:  $y = x+1$ ,  $x^2+y^2=1$ ,  $y=0$ .

6. Обчислити роботу, необхідну для того, щоб викачати воду із цистерни у формі куба з ребром  $a=4$  м.



## Варіант 4

1. Знайти інтеграли безпосередньо, використавши таблиці диференціалів, інтегралів та правила інтегрування:

а) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x};$	б) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-2x-x^2}};$	в) $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt[7]{\sin^2 x}};$
г) $\int \frac{x dx}{x^4+4};$	д) $\int \frac{3\cos x dx}{\sqrt{1+2\sin x}}$	е) $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

2. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int \frac{x^2 + \ln x^2}{x} dx.$	б) $\int x \cdot \cos 2x \cdot dx;$	в) $\int \frac{7-8x}{2x^2-3x+1} dx.$
г) $\int \frac{4x^2+3x+3}{(x+1)(x^2+1)} dx;$	д) $\int \sin 5x \sin 3x dx;$	е) $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{x-1}}.$

3. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}};$	б) $\int_4^9 \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{x}-1};$	в) $\int_0^1 x e^{2x} dx.$
---	---	----------------------------

4. Обчислити невласні інтеграли або довести їх розбіжність:

а) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^6};$	б) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}.$
----------------------------------	--

5. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:  $4y = x^2$ ,  $x+y=3$ ,  $y=0$ .

6. Питома теплоємність тіла  $c(t)=0,2+0,001t$  кал/(Г·град),  $t$  – температура. Обчислити кількість тепла, необхідну для того, щоб нагріти 1 Г тіла від  $0^0\text{C}$  до  $100^0\text{C}$ .



## Варіант 5

1. Знайти інтеграли безпосередньо, використавши таблиці диференціалів, інтегралів та правила інтегрування:

а) $\int \frac{(1+x \cos x) dx}{x}$ ;	б) $\int \frac{dx}{x \ln^2 x}$ ;	в) $\int x^2 \sqrt{1-x^3} dx$ ;
г) $\int e^{\arctg x} \frac{dx}{1+x^2}$ ;	д) $\int \frac{dx}{\sqrt{8+6x-9x^2}}$ ;	е) $\int x^2 e^{x^3-2} dx$ .

2. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^4+x^2+1}}$ ;	б) $\int x \cdot 2^{x+1} \cdot dx$ ;	в) $\int \frac{xdx}{3x^2-x+1}$ .
г) $\int \frac{3x+8}{x^3-x^2+4x-4} dx$ ;	д) $\int \sin^5 x dx$ ;	е) $\int \frac{\sqrt{x-1}-1}{1+\sqrt{x-1}} dx$ .

3. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_{-3}^{-2} \frac{xdx}{x^2-1}$ ;	б) $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2} dx$ ;	в) $\int_0^1 xe^{-x} dx$ .
---	--	----------------------------

4. Обчислити невластні інтеграли або довести їх розбіжність:

а) $\int_0^2 \frac{dx}{x^3}$ ;	б) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{4+3x^2}$ .
--------------------------------	---

5. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:  $y = \ln x$ ,  $y=1$ ,  $x=0$ ,  $y=0$ .

6. Обчислити силу тиску води на вертикальну трикутну греблю з висотою 3 м і основою 6 м, занурену у воду так, що її основа знаходиться на воді.





## Варіант 6

1. Знайти інтеграли безпосередньо, використавши таблиці диференціалів, інтегралів та правила інтегрування:

а) $\int \frac{(3-\sqrt{5+x^2})dx}{5+x^2}$ ;	б) $\int \frac{ctg^3 x dx}{\sin^2 x}$ ;	в) $\int x e^{-x^2} dx$ ;
г) $\int \frac{dx}{4-x^2-4x}$ ;	д) $\int \frac{2 \sin x dx}{\sqrt{3+\cos^2 x}}$	е) $\int \frac{1}{(1+x^2) \arctg^2 x} dx$

2. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int \frac{(\arccos x)^3 - 1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ ;	б) $\int x \cdot \sin 4x \cdot dx$ ;	в) $\int \frac{3x-6}{\sqrt{x^2-4x+5}} dx$ .
г) $\int \frac{6x^2+7x+3}{(x-1)(x+1)^2} dx$ ;	д) $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x + 3}$ ;	е) $\int \frac{\sqrt{x+9} dx}{x}$ .

3. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_2^6 \sqrt{x-2} dx$ ;	б) $\int_0^1 \frac{\sqrt{e^x} dx}{\sqrt{e^x+e^{-x}}}$ ;	в) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+3) \cos x dx$ .
-------------------------------	---	---

4. Обчислити невластні інтеграли або довести їх розбіжність:

а) $\int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$ ;	б) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+x+1}$ .
------------------------------------	---

5. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:  $y^2=4x$ ,  $x+y=3$ ,  $y=0$ .

6. Тіло рухається зі швидкістю  $v = t \cdot \sqrt{5+t^2}$  м/с,  $t$  – час. Обчислити шлях, пройдений тілом за 2 секунди після початку руху.



## Варіант 7

1. Знайти інтеграли безпосередньо, використавши таблиці диференціалів, інтегралів та правила інтегрування:

а) $\int \frac{(2+x)^2 dx}{\sqrt{x}}$ ;	б) $\int \frac{2x dx}{\sqrt{x^2+2}}$ ;	в) $\int \frac{\ln^5(x+1)dx}{x+1}$ ;
г) $\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2-4x}}$ ;	д) $\int \frac{3e^{2x}dx}{\sqrt{e^{4x}+4}}$	е) $\int \frac{\sin 2x}{(1+\cos 2x)^2} dx$

2. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int \operatorname{tg} x \ln \cos x dx$ ;	б) $\int (x-2) \cdot \cos x \cdot dx$ ;	в) $\int \frac{xdx}{\sqrt{5x^2-2x+1}}$ .
г) $\int \frac{x^3+3x^2+5x+7}{x^2+2} dx$ ;	д) $\int \sin^3 x \cos^3 x dx$ ;	е) $\int \frac{1}{1+\sqrt{x+2}} dx$ .

3. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_{-3}^0 \frac{dx}{\sqrt{25+3x}}$ ;	б) $\int_3^6 \frac{(x+1)dx}{x\sqrt{x-2}}$ ;	в) $\int_0^1 x3^x dx$ .
--	---	-------------------------

4. Обчислити невластні інтеграли або довести їх розбіжність:

а) $\int_{-3}^2 \frac{dx}{(x+3)^2}$ ;	б) $\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2} dx$ .
---------------------------------------	--

5. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:  $xy=4$ ,  $x=y$ ,  $x=4$ .

6. Обчислити роботу, необхідну для того, щоб викачати воду із посудини у вигляді конуса, оберненого вершиною вниз, з висотою  $H=3$  м і радіусом основи  $R=2$  м.



## Варіант 8

1. Знайти інтеграли безпосередньо, використавши таблиці диференціалів, інтегралів та правила інтегрування:

а) $\int \frac{(1-2x)dx}{\sqrt[5]{x^3}}$ ;	б) $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{9-e^{2x}}}$ ;	в) $\int \frac{dx}{\sqrt{x} \cdot \sin^2 \sqrt{x}}$ ;
г) $\int \frac{dx}{x^2-7x+10}$ ;	д) $\int \frac{\sin \frac{1}{x}}{x^2} dx$ ;	е) $\int \frac{\operatorname{tg}^3 x dx}{\cos^2 x}$ .

2. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int \frac{\operatorname{tg}(x+1)}{\cos^2(x+1)} dx$ ;	б) $\int \frac{\ln x}{x^3} \cdot dx$ ;	в) $\int \frac{2x dx}{x^2+4x+9}$ .
г) $\int \frac{6x^2+5x-1}{(x+1)(x^2+2)} dx$ ;	д) $\int \sin 7x \cos x dx$ ;	е) $\int \frac{2-\sqrt[3]{x-1} dx}{\sqrt{x-1}}$ .

3. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(11+5x)^3}$ ;	б) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{1+\sin^2 x}$ ;	в) $\int_0^{e-1} \ln(x+1) dx$ .
--	---	---------------------------------

4. Обчислити невластні інтеграли або довести їх розбіжність:

а) $\int_0^3 \frac{dx}{(x-2)^2}$ ;	б) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1}$ .
------------------------------------	--

5. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:  $4y = x^2$ ,  $x+y=3$ ,  $x=0$ .

6. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі  $OX$  фігури, обмеженої параболою  $y = 4 - x^2$  та віссю  $OX$ .



## Варіант 9

1. Знайти інтеграли безпосередньо, використавши таблиці диференціалів, інтегралів та правила інтегрування:

а) $\int \frac{(2x^5 - 3x)dx}{x^2};$	б). $\int \frac{\sqrt{\ln x} dx}{x};$	в) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + x + 1}};$
г) $\int \frac{\cos 3x}{2 + \sin 3x} dx;$	д) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1 + \ln x}};$	е) $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}.$

2. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int \frac{x^3}{(x^2 + 1)^2} dx;$	б) $\int (x + 2) \cdot 5^x \cdot dx;$	в) $\int \frac{3x - 2}{x^2 + 6x + 9} dx.$
г) $\int \frac{x - 4}{(x + 2)^2 (x + 1)} dx;$	д) $\int \frac{\cos^3 x + 1}{\sin^2 x} dx;$	е) $\int \frac{1}{\sqrt{1 - 2x} - \sqrt[4]{1 - 2x}} dx.$

3. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}};$	б) $\int_3^{29} \frac{(x - 2)^{2/3} dx}{\sqrt[3]{(x - 2)^2 + 3}};$	в) $\int_0^{\pi} (x - 3) \sin x dx.$
---	--	--------------------------------------

4. Обчислити невластні інтеграли або довести їх розбіжність:

а) $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x - 3)^2}};$	б) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}.$
---	--

5. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:  $x^2 + y^2 = 4$ ,  $x + y = 2$ ,  $y = 0$ .

6. Обчислити роботу, необхідну для того, щоб розтягнути пружину на 4 см, якщо відомо, що для розтягування пружини на 1 см необхідно прикласти силу величиною 1 Н. Величина розтягу пружини пропорційна прикладеній силі.



## Варіант 10

1. Знайти інтеграли безпосередньо, використавши таблиці диференціалів, інтегралів та правила інтегрування:

а) $\int \frac{(3\sqrt{x}-x^2+1)dx}{x}$ ;	б) $\int \frac{\cos x dx}{\sin x - 1}$ ;	в) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt[4]{1-x^3}}$ ;
г) $\int \frac{dx}{4x^2+4x+5}$ ;	д) $\int \frac{1}{\sqrt{2-\operatorname{ctg} x \sin^2 x}} dx$ ;	е) $\int e^{3\sin x} \cos x dx$ .

2. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int \frac{1-\cos x}{(x-\sin x)^2} dx$ ;	б) $\int x^4 \cdot \ln x \cdot dx$ ;	в) $\int \frac{3x dx}{\sqrt{x^2+6x+8}}$ .
г) $\int \frac{x^3}{(x-1)(x+1)(x+2)} dx$ ;	д) $\int \frac{dx}{2\cos x + \sin x}$ ;	е) $\int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt[3]{x+2}}$ .

3. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_0^1 \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}$ ;	б) $\int_3^8 \frac{x dx}{\sqrt{x+1}+2}$ ;	в) $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x dx$ .
---	---	--

4. Обчислити невластні інтеграли або довести їх розбіжність:

а) $\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^4}$ ;	б) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5}$ .
------------------------------------	---

5. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:  $y^2=4x$ ,  $x+y=3$ ,  $x=0$ .

6. Обчислити масу стержня довжиною 100 см, якщо лінійна густина стержня  $\rho=20x+0,15x^2$  Г/см, де  $x$  – відстань від лівого кінця стержня.



## Варіант 11

1. Знайти інтеграли безпосередньо, використавши таблиці диференціалів, інтегралів та правила інтегрування:

а) $\int (\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}})^2 dx;$	б) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}};$	в) $\int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{1+\cos x}} dx;$
г) $\int \frac{xdx}{4x^2+1};$	д) $\int x^2 \sqrt{x^3+5} dx;$	е) $\int \frac{dx}{x\sqrt{3+2\ln x}}.$

2. Знайти невизначені інтеграли:

а). $\int \frac{x+1}{x^2-4x+3} dx$	б). $\int \arccos x \cdot dx;$	в). $\int \frac{\sin x - \cos x}{(\cos x + \sin x)^5} dx.$
г). $\int \frac{16}{x^4-16} dx;$	д). $\int \frac{1}{\sin^2 x - 4 \sin x \cos x} dx;$	е). $\int \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{(x+1)^3}} dx.$

3. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x};$	б). $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}};$	в) $\int_0^1 x \operatorname{arctg} x dx.$
---------------------------------------	---------------------------------------	--

4. Обчислити невластні інтеграли або довести їх розбіжність:

а) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2};$	б) $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{4x^2+1}.$
----------------------------------	--

5. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:  $y=2-x^2$ ,  $y=x$ .

6. Обчислити силу тиску води на вертикальну греблю, що має форму рівнобічної трапеції з верхньою основою 70 м, нижньою основою 50 м і висотою 20 м.



## Варіант 12

1. Знайти інтеграли безпосередньо, використавши таблиці диференціалів, інтегралів та правила інтегрування:

а) $\int \frac{(x \cdot 2^x - 1) dx}{x}$ ;	б) $\int \cos x \sqrt[3]{\sin x} dx$ ;	в) $\int \frac{\arcsin^3 x dx}{\sqrt{1-x^2}}$ ;
г) $\int \frac{dx}{2-6x-9x^2}$ ;	д) $\int \frac{2x^3}{3-x^4} dx$ ;	е) $\int \frac{tg^4 x dx}{\cos^2 x}$ .

2. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int \frac{x \cos x + \sin x}{(x \sin x)^2} dx$ ;	б) $\int x \cdot e^{2x} \cdot dx$ ;	в) $\int \frac{5x dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$ .
г) $\int \frac{9x^2 + 21x + 6}{(x+3)(x^2+3)} dx$ ;	д) $\int \sin^5 x dx$ ;	е) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{3-x}}$ .

3. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_{-3}^{-2} \frac{dx}{x^2-1}$ ;	б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+2 \cos x}$ ;	в) $\int_1^3 \ln x dx$ .
--	---	--------------------------

4. Обчислити невласні інтеграли або довести їх розбіжність:

а) $\int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^2}$ ;	б) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2-2x+5}$ .
------------------------------------	--

5. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:  $y=-x^2$ ,  $x-y=2$ ,  $y=0$ .

6. Обчислити силу тиску води на вертикальну стінку, що має форму півкруга радіусом  $R=2$  м, діаметр якого знаходиться на поверхні води.



## Варіант 13

1. Знайти інтеграли безпосередньо, використавши таблиці диференціалів, інтегралів та правила інтегрування:

а) $\int \frac{(x^2+5x-1)dx}{\sqrt[3]{x}}$ ;	б) $\int \frac{\arccos \frac{x}{2} dx}{\sqrt{4-x^2}}$ ;	в) $\int \frac{dx}{x \ln^3 x}$ ;
г) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x-x^2}}$ ;	д) $\int \cos^4 x \sin x dx$ ;	е) $\int \frac{\operatorname{ctg}^3 x dx}{\sin^2 x}$ .

2. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int \frac{x^3+x}{x^4+1} dx$ ;	б) $\int x^2 \cdot e^x \cdot dx$ ;	в) $\int \frac{2x-8}{\sqrt{1-x-x^2}} dx$ .
г) $\int \frac{1}{x^3+x^2} dx$ ;	д) $\int (\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{tg}^2 x) dx$ ;	е) $\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{x+1-\sqrt{x+1}} dx$ .

3. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^2 dx}{1+x^2}$ ;	б) $\int_0^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x-1} dx}{e^{x+3}}$ ;	в) $\int_0^{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} x dx$ .
--	---	--

4. Обчислити невластні інтеграли або довести їх розбіжність:

а) $\int_4^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x}$ ;	б) $\int_0^3 \frac{dx}{(x-3)^2}$ .
--	------------------------------------

5. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:  $y=2-x^2$ ,  $y=-x$ .

6. Обчислити величину витрати води  $Q$  через боковий прямокутний отвір висотою 3 м та шириною 2 м, якщо висота поверхні води над нижньою стороною отвору дорівнює 10 м, а швидкість витікання води  $v = 0,6\sqrt{2gh}$ , де  $h$  – висота рівня води над отвором,  $g$  – прискорення сили тяжіння.





## Варіант 14

1. Знайти інтеграли безпосередньо, використавши таблиці диференціалів, інтегралів та правила інтегрування:

а) $\int \frac{\cos 2x dx}{\sin^2 x \cos^2 x};$	б) $\int \frac{x dx}{\cos^2 x^2};$	в) $\int \frac{dx}{x^2 + 4x - 2};$
г) $\int \sqrt{1 + e^x} \cdot e^x dx;$	д) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1 - \ln^2 x}};$	е) $\int e^{3\cos x} \sin x dx.$

2. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int \frac{x dx}{\sqrt{x^4 - x^2 - 1}};$	б) $\int x \cdot 3^{3x} \cdot dx;$	в) $\int \frac{x dx}{x^2 - 4x + 7}.$
г) $\int \frac{-6x^2 + 13x + 8}{x(x-2)^2} dx;$	д) $\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 1};$	е) $\int \frac{x dx}{\sqrt[3]{x-2}}.$

3. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 \frac{x}{2} dx;$	б) $\int_0^7 \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{x+1}};$	в) $\int_1^e x \ln x dx.$
---	---	---------------------------

4. Обчислити невласні інтеграли або довести їх розбіжність:

а) $\int_{-2}^2 \frac{dx}{x^4};$	б) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 6x + 17}.$
----------------------------------	--

5. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:  $y = -x^2$ ,  $x+y = -2$ ,  $y=0$ .

6. Тіло рухається зі швидкістю  $v = t \cdot \sqrt{4 - t^2}$  м/с,  $t$  – час. Обчислити шлях, пройдений тілом від початкового моменту часу до кінця руху.



## Варіант 15

1. Знайти інтеграли безпосередньо, використавши таблиці диференціалів, інтегралів та правила інтегрування:

а) $\int \frac{(2x-1)^2 dx}{x^2}$ ;	б) $\int \frac{\arccos x dx}{\sqrt{1-x^2}}$ ;	в) $\int \frac{dx}{x \ln^3 x}$ ;
г) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-3-x^2}}$ ;	д) $\int \frac{\sin x}{1+3\cos x} dx$ ;	е) $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt[5]{\cos^3 x}}$ .

2. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+1)} dx$ ;	б) $\int x \cdot \arctg x \cdot dx$ ;	в) $\int \frac{2x-1}{x^2+2x+3} dx$ .
г) $\int \frac{1}{x^3+2x^2+x} dx$ ;	д) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx$ ;	е) $\int \frac{1}{3x+\sqrt{3x+2}} dx$ .

3. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$ ;	б) $\int_4^9 \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{x}-1}$ ;	в) $\int_0^1 (3x+5)e^{2x} dx$ .
---	--	---------------------------------

4. Обчислити невластні інтеграли або довести їх розбіжність:

а) $\int_{-3}^3 \frac{dx}{x^2}$ ;	б) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+6x+10}$ .
-----------------------------------	--

5. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:  $x^2+y^2=1$ ,  $x-y=1$ ,  $y=0$ .

6. Знайти довжину логарифмічної спіралі  $\rho=e^{a\varphi}$  між точками, що лежать на променях  $\varphi_1=0$  та  $\varphi_2 = 1/\alpha$ ,  $a$  – стала.



## Варіант 16

1. Знайти інтеграли безпосередньо, використавши таблиці диференціалів, інтегралів та правила інтегрування:

а) $\int \frac{(1-x)^2 dx}{x^3};$	б) $\int \frac{(5+3\ln x)dx}{x};$	в) $\int \frac{dx}{\arctg x \cdot (1+x^2)};$
г) $\int \frac{dx}{x^2-8x+11};$	д) $\int \cos^5 x \sin x dx$	е) $\int 4x\sqrt{x^2-4} \cdot dx$

2. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int \frac{1+\ln(x-1)}{x-1} dx;$	б) $\int x \cdot 11^x \cdot dx;$	в) $\int \frac{x-1}{x^2+4x+7} dx.$
г) $\int \frac{x^2+8x+8}{(x+2)(x^2+4)} dx;$	д) $\int \cos^4 x dx;$	е) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}} dx.$

3. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin^2 x dx;$	б) $\int_0^3 \frac{\sqrt{x+1} dx}{\sqrt{x+1}+1};$	в) $\int_1^e (3-2x) \ln x dx.$
---	---	--------------------------------

4. Обчислити невластні інтеграли або довести їх розбіжність:

а) $\int_0^2 \frac{dx}{1-x};$	б) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{3x^2+4}.$
-------------------------------	--

5. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:  $y=3-x^2$ ,  $y=x+1$ .

6. Обчислити силу тиску води на вертикальний прямокутник з висотою 6 м і основою 4 м, занурений у воду так, що його верхня основа знаходиться на глибині 2 м.



## Варіант 17

1. Знайти інтеграли безпосередньо, використавши таблиці диференціалів, інтегралів та правила інтегрування:

а) $\int \frac{(\sqrt{x}+1)^2 dx}{2x}$ ;	б) $\int x\sqrt{1-x^2} dx$ ;	в) $\int \frac{x^2 dx}{x^3+5}$ ;
г) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-2-x^2}}$ ;	д) $\int \frac{\ln x + 2}{2x} \cdot dx$ ;	е) $\int e^{5\cos x} \sin x dx$ .

2. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int \frac{(x^2 + 1) dx}{(x^3 + 3x + 1)^5}$ ;	б) $\int \arcsin x \cdot dx$ ;	в) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$ .
г) $\int \frac{1}{x^3 - x^2 + x - 1} dx$ ;	д) $\int \frac{1}{\sin^2 x \cos x} dx$ ;	е) $\int \frac{2 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}} dx$ .

3. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_1^3 \frac{dx}{(2x-1)^2}$ ;	б) $\int_0^3 \sqrt{9-x^2} dx$ ;	в) $\int_e^{e^2} \ln(2x) dx$ .
-------------------------------------	---------------------------------	--------------------------------

4. Обчислити невласні інтеграли або довести їх розбіжність:

а) $\int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(1+x^3)^2}$ ;	б) $\int_0^2 \frac{xdx}{4-x^2}$
--	---------------------------------

5. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:  $y = x^2$ ,  $y = -x^2$ ,  $x = 1$ .

6. Обчислити силу тиску води на вертикальну прямокутну греблю висотою 3 м і шириною 10 м, якщо її верхня основа знаходиться на поверхні води.



## Варіант 18

1. Знайти інтеграли безпосередньо, використавши таблиці диференціалів, інтегралів та правила інтегрування:

а) $\int \frac{2^x dx}{10^x};$	б) $\int \cos^3 x \sin x dx ;$	в) $\int 3e^{3x^2-1} \cdot x dx ;$
г) $\int \frac{dx}{x^2+4x+3};$	д) $\int \frac{\operatorname{tg} x + 1}{\cos^2 x} dx$	е) $\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin^2 x + 4}} \cdot dx$

2. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int \frac{4 \operatorname{arctg} x - x}{1 + x^2} dx;$	б) $\int x \cdot 4^x \cdot dx ;$	в) $\int \frac{1 - 2x}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}} dx.$
г) $\int \frac{6x^2 + 3x + 2}{(x + 2)x^2} dx ;$	д) $\int \frac{dx}{2 \sin x + 3 \cos x + 5};$	е) $\int \frac{\sqrt{x-7} dx}{x}.$

3. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 4x dx ;$	б) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1 + \cos^2 x};$	в) $\int_0^{e-2} x \ln(x + 2) dx.$
--	--	------------------------------------

4. Обчислити невластні інтеграли або довести їх розбіжність:

а) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}};$	б) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 4x + 13}.$
---------------------------------------	--

5. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:  $y = x^2$ ,  $y = x + 2$ .

6. Дерев'яна прямокутна балка довжиною 6 м, шириною 0,3 м і висотою 0,2 м плаває у воді. Яку роботу необхідно зробити, щоб витягнути її з води, якщо густина дерева  $\rho = 800 \text{ кГ/м}^3$ .



## Варіант 19

1. Знайти інтеграли безпосередньо, використавши таблиці диференціалів, інтегралів та правила інтегрування:

а) $\int \frac{2\cos 2x dx}{\sin^2 x - \cos^2 x};$	б) $\int x(x^2 + 5)^7 dx;$	в) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}};$
г) $\int \frac{dx}{\sqrt{8+6x-9x^2}};$	д) $\int \frac{\cos x dx}{2 - \sin x}$	е) $\int \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

2. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int \frac{x^3}{x^2 + 4} dx;$	б) $\int (x+2) \cdot 4^x \cdot dx;$	в) $\int \frac{x-3}{\sqrt{x^2 + 2x + 6}} dx.$
г) $\int \frac{x^2}{x^4 - 1} dx;$	д) $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x} dx;$	е) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x}} dx.$

3. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_0^1 \sqrt{2+x} dx;$	б) $\int_0^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x - 1} dx}{e^x + 3};$	в) $\int_0^{\sqrt{2}/2} \arccos x dx.$
------------------------------	--	--

4. Обчислити невласні інтеграли або довести їх розбіжність:

а) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}};$	б) $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{5x^2 + 3}.$
--	--

5. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:  $y = 4 - x^2$ ,  $y = 2x + 1$ .

6. Обчислити роботу, необхідну для того, щоб стиснути пружину на 8 см, якщо відомо, що для стиску пружини на 1 см необхідно прикласти силу величиною 0,5 Н. Величина стиску пружини пропорційна прикладеній силі.



## Варіант 20

1. Знайти інтеграли безпосередньо, використавши таблиці диференціалів, інтегралів та правила інтегрування:

а) $\int \frac{(x^2+3)dx}{x^2+2}$ ;	б) $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{3-5e^{2x}}}$ ;	в) $\int \sin^5 x \cdot \cos x dx$ ;
г) $\int \frac{dx}{4-x^2-4x}$ ;	д) $\int e^{\sin 3x} \cos 3x dx$ ;	е) $\int \frac{xdx}{4x^2+1}$ .

2. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int \frac{x + \cos x}{x^2 + 2 \sin x} dx$ ;	б) $\int (x-1) \cdot \ln x \cdot dx$ ;	в) $\int \frac{3x+2}{2x^2+x+5} dx$ .
г) $\int \frac{7x^2+x+1}{(x-1)(x^2+9)} dx$ ;	д) $\int \operatorname{tg}^5 x dx$ ;	е) $\int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt[3]{x-5}}$ .

3. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_1^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^4}\right) dx$ ;	б) $\int_{-4}^4 \sqrt{16-x^2} dx$ ;	в) $\int_{2\pi}^{3\pi} x \sin x dx$ .
---	-------------------------------------	---------------------------------------

4. Обчислити невласні інтеграли або довести їх розбіжність:

а) $\int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}$ ;	б) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+10}$ .
---	--

5. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:  $y = -x^2$ ,  $y = 2x$ ,  $x = 1$ .

6. Обчислити роботу, необхідну для того, щоб викачати воду із півсферичного котла радіусом  $R = 1$  м.



## Варіант 21

1. Знайти інтеграли безпосередньо, використавши таблиці диференціалів, інтегралів та правила інтегрування:

а) $\int \frac{(1-5x)dx}{3\sqrt[3]{x^2}}$ ;	б) $\int \frac{dx}{\arccos x \cdot \sqrt{1-x^2}}$ ;	в) $\int \frac{dx}{x(\ln x+5)}$ ;
г) $\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2-4x}}$ ;	д) $\int \frac{\ln(x+3)}{x+3} \cdot dx$ ;	е) $\int \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ .

2. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int \frac{2 \cos x + 3 \sin x}{(2 \sin x - 3 \cos x)^3} dx$ .	б) $\int x \ln(2x) dx$ ;	в) $\int \frac{2x-1}{\sqrt{2x^2+3x-1}} dx$ .
г) $\int \frac{x^3-x^2-4x-16}{x^2-2x-8} dx$ ;	д) $\int \frac{1}{\cos x \sin^3 x} dx$ ;	е) $\int \frac{1}{3+\sqrt[3]{x-1}} dx$

3. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^5 x dx$ ;	б) $\int_0^{26} \frac{\sqrt[3]{(x+1)^2} dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2+3}}$ ;	в) $\int_0^{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} x dx$ .
--	---	--

4. Обчислити невластні інтеграли або довести їх розбіжність:

а) $\int_{-2}^0 \frac{dx}{(x+1)^2}$ ;	б) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x+10}$ .
---------------------------------------	---

5. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:  $y=2x^2$ ,  $y=3-x$ .

6. Обчислити довжину кардіоїди  $r=1+\sin\varphi$ .





## Варіант 22

1. Знайти інтеграли безпосередньо, використавши таблиці диференціалів, інтегралів та правила інтегрування:

а) $\int 2x \left(3 + \frac{3^x}{x}\right) dx;$	б) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{3-x^3}};$	в) $\int \frac{(3\ln x - 5)^2 dx}{x};$
г) $\int \frac{dx}{x^2 - 6x + 3};$	д) $\int \frac{1}{x \cdot \ln^2 x} \cdot dx;$	е) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^8}} dx.$

2. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int \frac{8x - \operatorname{arctg} 2x}{1 + 4x^2} dx;$	б) $\int x \cdot 10^x \cdot dx;$	в) $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x-x^2}}.$
г) $\int \frac{2x^3 - 8}{x(x-2)(x+2)} dx;$	д) $\int \frac{dx}{8 - 4\sin x + 7\cos x};$	е) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{5-x}}.$

3. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}};$	б) $\int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{x+3}-1};$	в) $\int_1^e \ln x dx.$
--	--	-------------------------

4. Обчислити невластні інтеграли або довести їх розбіжність:

а) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}};$	б) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}.$
--	--

5. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:  $x=2y^2$ ,  $x=3-y$ .

6. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі  $Ox$  кривої  $y=\sin^2 x$  на проміжку  $[0, \pi]$ .



## Варіант 23

1. Знайти інтеграли безпосередньо, використавши таблиці диференціалів, інтегралів та правила інтегрування:

а) $\int \frac{(\sqrt[3]{x}-x^3)dx}{x}$ ;	б) $\int \frac{(\sqrt{x-1}+2)^2 dx}{\sqrt{x-1}}$ ;	в) $\int \frac{dx}{x(\ln x+7)}$ ;
г) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$ ;	д) $\int \frac{2\ln^2 x+3dx}{x}$	е) $\int \sqrt[3]{2-3\cos x} \sin x dx$

2. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int \frac{1/(2\sqrt{x})+1}{(\sqrt{x+x})^2} dx$ ;	б) $\int \arctg \frac{x}{2} \cdot dx$ ;	в) $\int \frac{xdx}{3x^2+2x+8}$ .
г) $\int \frac{x-6}{x^3-7x^2+6x} dx$ ;	д) $\int \frac{1-\cos x}{1+\cos x} dx$ ;	е) $\int \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}+2} dx$ .

3. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_0^1 \frac{dx}{7+5x}$ ;	б) $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1} dx$ ;	в) $\int_0^{\sqrt{2}/2} \arccos x dx$ .
---------------------------------	---------------------------------------	---

4. Обчислити невластні інтеграли або довести їх розбіжність:

а) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x+1}$ ;	б) $\int_0^4 \frac{dx}{(x-3)^3}$ .
--	------------------------------------

5. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:  $y=-x^2$ ,  $x+y=-2$ ,  $y=0$ .

6. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі  $Ox$  фігури, обмеженої лініями  $y=2-x^2$ ,  $y=x^2$ .



## Варіант 24

1. Знайти інтеграли безпосередньо, використавши таблиці диференціалів, інтегралів та правила інтегрування:

а) $\int e^x \cdot 3^x dx$ ;	б) $\int 5^{\sqrt{x}} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ ;	в) $\int \cos^7 x \cdot \sin x dx$ ;
г) $\int \frac{dx}{x^2+2x+10}$ ;	д) $\int \frac{2x^2 dx}{\sqrt[4]{3-x^3}}$	е) $\int \frac{e^{2x}}{(1+e^{2x})^2} \cdot dx$

2. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int \frac{x}{x^4+1} dx$ ;	б) $\int x \cdot 2^x \cdot dx$ ;	в) $\int \frac{5x+2}{x^2+4x+6} dx$ .
г) $\int \frac{4x^3+2x^2-x-3}{x(x-1)(x+1)} dx$ ;	д) $\int \frac{dx}{5+3\cos x-5\sin x}$ ;	е) $\int \frac{(2-x)^2 dx}{x\sqrt{x}}$ .

3. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_2^3 \left(x + \frac{1}{x^3}\right) dx$ ;	б) $\int_0^5 \sqrt{25-x^2} dx$ ;	в) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (x-1) \cos x dx$ .
---	----------------------------------	---

4. Обчислити невластні інтеграли або довести їх розбіжність:

а) $\int_0^4 \frac{dx}{(x+1) \ln(x+1)}$ ;	б) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{5 dx}{3x^2+5}$ .
---	---

5. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:  $y = x^3+2$ ,  
 $y = -x$ ,  $x=0$ .

6. Знайти довжину однієї арки циклоїди  $x = t - \sin t$ ,  $y = 1 - \cos t$ .



## Варіант 25

1. Знайти інтеграли безпосередньо, використавши таблиці диференціалів, інтегралів та правила інтегрування:

а) $\int \frac{(x^2 - 5x + 3)dx}{\sqrt{x}}$ ;	б) $\int e^{1/x} \frac{dx}{x^2}$ ;	в) $\int \frac{dx}{(2x-1) \cdot \ln(2x-1)}$ ;
г) $\int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$ ;	д) $\int \frac{3ctg x dx}{\sin^2 x}$	е) $\int \frac{\arcsin x + 1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

2. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int \frac{x + 1/x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$ ;	б) $\int x \cdot e^{-x} \cdot dx$ ;	в) $\int \frac{3x^3 - 10x^2 - 11x + 20}{x^2 - 5x + 4} dx$ ;
г) $\int \frac{2x dx}{x^2 + 6x + 11}$ ;	д) $\int \sin^4 2x dx$ ;	е) $\int \frac{1}{\sqrt{1+3x} - \sqrt[4]{1+3x}} dx$ .

3. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \frac{x}{2} dx$ ;	б) $\int_1^{16} \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}}$ ;	в) $\int_1^e (2x - 1) \ln x dx$ .
---	--	-----------------------------------

4. Обчислити невласні інтеграли або довести їх розбіжність:

а) $\int_{-\infty}^0 \frac{3 dx}{5x^2 + 4}$ ;	б) $\int_{-3}^3 \frac{dx}{(x+3)^2}$ .
---	---------------------------------------

5. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:  $y=x^2+1$ ,  $y=-1$ ,  $x=0$ ,  $x=1$ .

6. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі  $Ox$  фігури, обмеженої лініями  $y^2=9x$  і  $y=3x$ .



## Варіант 26

1. Знайти інтеграли безпосередньо, використавши таблиці диференціалів, інтегралів та правила інтегрування:

а) $\int \frac{(3-2ctg^2 x)dx}{\cos^2 x}$ ;	б) $\int \sin x \sqrt{3-\cos x} dx$	в) $\int \frac{e^{tgx}}{\cos^2 x} \cdot dx$
г) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+8x+2}}$ ;	д) $\int x(3+2x^2)^4 dx$ ;	е) $\int \frac{3x}{\sqrt{1-x^4}} dx$ .

2. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int \frac{x-1/x}{\sqrt{x^2+1}} dx$ ;	б) $\int \sqrt[3]{x} \cdot \ln x \cdot dx$ ;	в) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+4x-5}}$
г) $\int \frac{x-4}{(x+2)(x^2+2)} dx$ ;	д) $\int \frac{dx}{2+4\sin x+3\cos x}$ ;	е) $\int \frac{\sqrt{x+7}dx}{x}$ .

3. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^4 x \cos x dx$ .	б) $\int_1^3 \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} \cdot dx$	в) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin 2x dx$ .
--	--	--

4. Обчислити невласні інтеграли або довести їх розбіжність:

а) $\int_1^{+\infty} \frac{x^2 dx}{1+x^6}$ ;	б) $\int_1^2 \frac{dx}{x \ln x}$ .
--	------------------------------------

5. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:  $y=(x-1)^2$ ,  $y=3-x$ ,  $y=0$ .

6. Обчислити довжину кривої  $y = \ln \sin x$  від  $x_1 = \pi/3$  до  $x_2 = \pi/2$ .



## Варіант 27

1. Знайти інтеграли безпосередньо, використавши таблиці диференціалів, інтегралів та правила інтегрування:

а) $\int \frac{\sin 2x dx}{\cos x}$ ;	б) $\int x^2 \sqrt{1+x^3} dx$	в) $\int \frac{\cos x}{\sin^3 x} \cdot dx$
г) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+5}}$ ;	д) $\int x^3 (5+x^4)^2 dx$ ;	е) $\int \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ .

2. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int \frac{\arctg x + x}{1+x^2} dx$ ;	б) $\int x \cdot \sin 3x \cdot dx$ ;	в) $\int \frac{1-2x}{5x^2+5x+4} dx$ .
г) $\int \frac{x^2+4}{x^3-4x^2+4x} dx$ ;	д) $\int \frac{1}{\cos^4 x} dx$ ;	е) $\int \frac{1}{2+\sqrt{x+5}} dx$ .

3. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$ .	б) $\int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt[3]{x}} \cdot dx$	в) $\int_1^{e-1} \ln(x+1) dx$ .
--	--	---------------------------------

4. Обчислити невласні інтеграли або довести їх розбіжність:

а) $\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{(x^2+4)^2}$ ;	б) $\int_0^1 \frac{x^4 dx}{\sqrt{1-x^5}}$ .
--	---

5. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:  $y^3=x$ ,  $x=y=6$ ,  $y=0$ .

6. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі  $Ox$  фігури, обмеженої лініями  $y=x$  і  $y=x^2$ .



## Варіант 28

1. Знайти інтеграли безпосередньо, використавши таблиці диференціалів, інтегралів та правила інтегрування:

a) $\int (\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2})^2 dx$ ;	б) $\int \frac{dx}{(1+x^2) \operatorname{arctg} x}$	в) $\int \sqrt[4]{1+\sin x} \cos x dx$
г) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+1}}$ ;	д) $\int x^5 (3+2x^6)^4 dx$ ;	е) $\int \frac{5x^3}{\sqrt{1-x^4}} dx$ .

2. Знайти невизначені інтеграли:

a) $\int \frac{x - (\operatorname{arctg} x)^4}{1+x^2} dx$ ;	б) $\int x \cdot e^{-\frac{x}{2}} \cdot dx$ ;	в) $\int \frac{x+3}{1-x-3x^2} dx$ .
г) $\int \frac{7x^2+12x+6}{x(x^2+1)} dx$ ;	д) $\int \frac{dx}{4+3\cos x-4\sin x}$ ;	е) $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{x+4}}$ .

3. Обчислити визначені інтеграли:

a) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}}$ .	б) $\int_1^5 \frac{xdx}{\sqrt{4x+5}}$ .	в) $\int_1^e x^2 \ln x dx$ .
---	---	------------------------------

4. Обчислити невластні інтеграли або довести їх розбіжність:

a) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{4x^2+4x+5}$ ;	б) $\int_{-2}^0 \frac{dx}{(x+2)^2}$ .
--	---------------------------------------

5. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:  $x=2y^2$ ,  $x=y+3$ .

6. Знайти довжину ланцюгової лінії  $y=0,5(e^x+e^{-x})$  від  $x_1=0$  до  $x_2=\ln 3$ .



## Варіант 29

1. Знайти інтеграли безпосередньо, використавши таблиці диференціалів, інтегралів та правила інтегрування:

а) $\int \frac{(3ctg^2 x - 1)dx}{2\cos^2 x}$ ;	б) $\int \frac{\sqrt{1+2\ln x}}{x} dx$	в) $\int 3x\sqrt{x^2+2} \cdot dx$
г) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-x-2}}$ ;	д) $\int x(2+x^2)^5 dx$ ;	е) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^4}} dx$ .

2. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int \frac{x^3}{x^2+1} dx$ ;	б) $\int x \cdot \arctg 2x \cdot dx$ ;	в) $\int \frac{4x-8}{\sqrt{5x^2-2x+1}} dx$ .
г) $\int \frac{1}{(x^2-1)(x-1)} dx$ ;	д) $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx$ ;	е) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2-\sqrt{x}}} dx$ .

3. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$	б) $\int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{5-4x}} \cdot dx$	в) $\int_1^2 (2-x)e^{\frac{x}{2}} dx$ .
---	---	---

4. Обчислити невласні інтеграли або довести їх розбіжність:

а) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-6x+10}$ ;	б) $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$ .
--	--

5. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:  $y=2x^2$ ,  $y=3+x$ ,  $y=0$ .

6. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі  $Ox$  фігури, обмеженої лініями  $y=2x-x^2$  і  $y=0$ .





## Варіант 30

1. Знайти інтеграли безпосередньо, використавши таблиці диференціалів, інтегралів та правила інтегрування:

а) $\int \frac{(x^2 - 3x + 2)dx}{x - 1}$ ;	б) $\int \frac{x^2}{1 + x^6} dx$	в) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \cdot dx$
г) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 1}}$ ;	д) $\int x^5 (3 + x^6)^2 dx$ ;	е) $\int \frac{3x^2}{\sqrt{1 - 6x^6}} dx$ .

2. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int \frac{(\arcsin x)^2 + 1}{\sqrt{1 - x^2}} dx$ ;	б) $\int x \cdot e^{3x} \cdot dx$ ;	в) $\int \frac{5x - 10}{x^2 - 7x + 13} dx$ .
г) $\int \frac{x^2 - 3}{x^3 - 3x^2 + x - 3} dx$ ;	д) $\int \operatorname{tg}^3 x dx$ ;	е) $\int \frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt[3]{x^2 + x}} dx$ .

3. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_0^1 \frac{\sqrt{\arctg x}}{1 + x^2} \cdot dx$	б) $\int_5^8 \frac{\sqrt{x - 4}}{x} dx$ .	в) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x dx}{\cos^2 x}$ .
--	---	---

4. Обчислити невласні інтеграли або довести їх розбіжність:

а) $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^2 + 2x + 5}$ ;	б) $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{2 - x}}$ .
---	---

5. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:  $x = y^2$ ,  $x + y = 2$ ,  $x = 0$ .

6. Обчислити силу тиску води на вертикальну греблю, що має форму рівнобічної трапеції з верхньою основою 60 м, нижньою основою 40 м і висотою 15 м.