Національний університет
водного господарства
та природокористування

Міністерство освіти і науки України
Національний університет водного господарства
та природокористування

Кафедра обчислювальної техніки

04-04-182

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до виконання лабораторних робіт
з дисципліни "Інформаційні системи реального часу"
студентами напряму підготовки
6.050102 "Комп'ютерна інженерія"
денної форми навчання
Частина 1

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Рекомендовано методичною
комісією за напрямом
підготовки "Комп'ютерна
інженерія"
Протокол № 3 від 06.02.2015р.

Рівне 2015

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Методичні вказівки до виконання лабораторних з дисципліни “Інформаційні системи реального часу” студентами напряму підготовки 6.050102 “Комп’ютерна інженерія” денної форми навчання / Л.В. Зубик. - Рівне: НУВГП, 2015. - 33 с.

Упорядник: Л.В. Зубик, старший викладач кафедри обчислювальної техніки

Відповідальний за випуск: Б.Б.Круліковський, к.т.н., завідувач кафедри обчислювальної техніки

Національний університет
водного господарства
та природокористування

ЗМІСТ

© Зубик Л.В., 2015
© НУВГП, 2015

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Передмова

Мета цих методичних вказівок - проілюструвати методи теорії автоматичного управління на прикладах і навчити застосовувати математичні програмні системи для розв’язування практичних задач у межах дисциплін “Електротехніка та електроніка”, “Комп'ютерна електроніка”, “Методи та системи штучного інтелекту”, “Моделювання електронних схем”, “Проектування систем моніторингу”, “Теорія управління” тощо.

Сучасні обчислювальні засоби дозволяють швидко і якісно розв’язувати достатньо складні задачі управління в технічних системах не інженерними методами, а із використанням математичного апарату. При цьому не обов’язково вивчати мову програмування для реалізації методів і візуалізації досліджень, що проводяться. Запропоновані задачі можна реалізувати у середовищі MatLab із використанням пакета прикладних програм (ППП) Control System Toolbox або інших пакетів.

Методичні вказівки містять кілька розділів, кожен з яких передбачає наявність: мети роботи, постановки задачі, необхідних теоретичних основ, прикладу розв’язування задачі і варіантів завдань для виконання лабораторної роботи.

Звіт до кожної виконаної лабораторної роботи виконується відповідно до вимог, що висуваються до оформлення документації у ВНЗ, і повинен містити:

- титульний аркуш,
- формулювання мети роботи,
- постановку задачі відповідно до варіанта завдання,
- результати роботи,
- висновки.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Лабораторна робота № 1

Тема: Динамічні і частотні характеристики САУ

Мета: Ознайомлення з динамічними і частотними характеристиками систем автоматичного управління (САУ) і отримання навичок дослідження лінійних динамічних моделей.

Постановка задачі

У якості об'єкта дослідження виступають лінійні динамічні стаціонарні системи управління з одним входом і одним виходом. Модель одновимірної САУ задана у вигляді комплексної передатної функції, записаної у вигляді

$$W(s) = \frac{b_m s^m + \ldots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \ldots + a_1 s + a_0}$$

Необхідно:

1. Встановити полюси і нулі передатної функції
$$s_i^p, i = \overline{1,n}, \quad s_j^0, j = \overline{1,m}.$$
2. Записати диференціальне рівняння, яке визначає функціонування САУ.
3. Побудувати графіки перехідної та імпульсно-перехідної функції
$$h(t) \text{ і } w(t).$$
4. Побудувати логарифмічні частотні характеристики (ЛЧХ)
$$L(\omega).$$
5. Побудувати частотний годограф Найквіста
$$W(i\,\omega),\ \omega=[0,\infty].$$
6. Подати вихідну систему у вигляді послідовного з'єднання типових ланок. Побудувати характеристики цих ланок.

Послідовність виконання роботи

Для виконання лабораторної роботи можна використати пакет прикладних програм (ППП) **Control System Toolbox**. ППП призначений для роботи з **LTI**-моделями (Linear Time Invariant)

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Національний університет
водного господарства
та природокористування

систем управління. У Control System Toolbox є тип даних, який визначає динамічну систему у вигляді комплексної передатної функції. У наведеній нижче таблиці подається синтаксис та опис команд, які можуть бути використані для реалізації поставленої задачі.

Таблиця 1

Деякі команди Control System Toolbox

Синтаксис команди	Опис команди
bode(LTI-об'єкт)	Побудова логарифмічних частотних характеристик (діаграми Боде)
impulse(LTI-об'єкт)	Побудова графіка імпульсної перехідної функції
nyquist(LTI-об'єкт)	Побудова частотного годографа Найквіста
pole (LTI-об'єкт)	Обчислення полюсів передатної функції
roots(P)	Встановлення коренів полінома P
step(LTI-об'єкт)	Побудова графіка перехідного процесу
tf([b_m,…b_1,b_0],[a_n,…a_1,a_0])	Створення системи з одним входом і одним виходом у вигляді комплексної передатної функції
zero(LTI-об'єкт)	Обчислення нулів передатної функції

Отже, виконання лабораторної роботи складається із наступних кроків:

1. Опрацювати теоретичні відомості.
2. Запустити систему MatLab.
3. Створити tf-об'єкт відповідно до варіанта.
4. Скласти диференціальне рівняння, яке визначає функціонування САУ.
5. Встановити полюси і нулі передатної функції.

Національний університет водного господарства та природокористування

Національний університет
водного господарства
та природокористування

6. Отримати динамічні і частотні характеристики системи.
7. Отримати подання вихідної функції у вигляді набору типових ланок.
8. Відповісти на контрольні запитання.
9. Скласти звіт.
10. Виконати захист лабораторної роботи.

Приклад виконання лабораторної роботи

Нехай передатна функція САУ має вигляд:

$$W = \frac{s+2}{3s^3 + 4s^2 + 5s + 3}$$

Знайдемо її динамічні і частотні характеристики.

Роботу будемо виконувати у командному режимі системи MatLab.

1. Створимо LTI-об’єкт з іменем w, для цього виконаємо команду:

```
>> w=tf([1 2],[3 4 5 3])
```

2. Знайдемо полюси і нулі передатної функції:

```
>> pole(w)
>> zero(w)
```

3. Побудуємо перехідну функцію командою:

```
>> step(w)
```

4. Побудуємо імпульсну перехідну функцію командою:

```
>> impulse(w)
```

5. Отримаємо діаграму Боде:

```
>> bode(w)
```

6. Визначимо частотний годограф Найквіста, виконавши команду:

```
>> nyquist(w)
```

Аналогічні результати можна отримати, виконавши команду: **ltiview(w)** з відповідними налаштуваннями в меню **Plot Configuration**.

Кожна окрема характеристика однозначно ідентифікує розглядувану систему управління.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Контрольні запитання

1. Подайте схему у вигляді послідовного з'єднання типових ланок.
2. Дайте визначення передатної функції та поясніть її фізичний зміст.
3. Подайте вихідну схему у просторі станів.
4. Знайдіть передатну функцію замкнутої системи.
5. Побудуйте динамічні характеристики типових ланок.
6. Встановіть вигляд ЛЧХ для пропорційно-інтегрально-диференціального регулятора.

Таблиця 2

Варіанти завдань до лабораторної роботи 1

Вигляд передатної функції	Варіант	Коефіцієнти поліномів						
		a_4	a_3	a_2	a_1	a_0	b_1	b_0
$W(p)=\dfrac{b_1p+b_0}{a_4p^4+a_3p^3+a_2p^2+a_1p+a_0}$	1.	1	0	3	2	1	3	0
	2.	1	5	1	0	4	6	2
	3.	1	2	0	2	5	-3	0
	4.	1	3	5	4	3	2	4
	5.	0	-2	-3	-2	-2	1	0
		a_3	a_2	a_1	a_0	b_2	b_1	b_0
$W(p)=\dfrac{b_2p^2+b_1p+b_0}{a_3p^3+a_2p^2+a_1p+a_0}$	6.	9	3	2	4	2	-3	0
	7.	-1	-4	-6	-4	-3	0	8
	8.	1	0	5	5	-2	6	-4
	9.	-1	-3	-6	0	-7	-8	6
	10.	-2	-7	0	-1	-3	-1	2
		a_4	a_3	a_1	a_0	b_2	b_1	b_0
$W(p)=\dfrac{b_2p^2+b_1p+b_0}{a_4p^4+a_3p^3+a_1p+a_0}$	11.	1	-7	7	-3	8	2	0
	12.	-6	-1	-2	-8	3	0	-5
	13.	9	2	5	0	2	1	-7
	14.	3	6	0	1	-4	4	-6
	15.	9	0	3	5	-1	-2	2

Національний університет
водного господарства
та природокористування

продовження табл.2

		a_4	a_3	a_2	a_1	a_0	b_2	b_0
$W(p)=\dfrac{b_2p^2+b_0}{a_4p^4+a_3p^3+a_2p^2+a_1p+a_0}$	16.	1	9	7	3	4	-5	0
	17.	2	2	8	5	0	-6	7
	18.	3	3	4	0	2	-8	-2
	19.	2	4	0	9	6	-1	-7
	20.	1	0	5	4	-4	7	-3
		a_4	a_3	a_2	a_1	a_0	b_3	b_2
$W(p)=\dfrac{b_3p^3+b_2p^2}{a_4p^4+a_3p^3+a_2p^2+a_1p+a_0}$	21.	1	9	7	3	4	-5	0
	22.	2	2	8	5	0	-6	7
	23.	3	3	4	0	2	-8	-2
	24.	2	4	0	9	6	-1	-7
	25.	1	0	5	4	-4	7	-3

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Лабораторна робота № 2

Тема: Аналіз і синтез САУ методом кореневого годографа

Мета: Ознайомлення з методикою побудови кореневих годографів для аналізу і синтезу лінійних (лінеаризованих) систем автоматичного управління (САУ).

Постановка задачі

Дано модель розімкнутої системи, записана у вигляді відношення типових ланок:

$$W(s)=\frac{K\cdot s^{\alpha_1}\prod_{j=1}^{\beta_1}(T_js+1)\prod_{j=1}^{\gamma_1}(T_j^{\,2}s^2+2T_j\zeta s+1)}{s^{\alpha_2}\prod_{i=1}^{\beta_2}(T_is+1)\prod_{i=1}^{\gamma 2}(T_i^{\,2}s^2+2T_i\zeta s+1)}$$

Необхідно:

1. Побудувати кореневий годограф.
2. Встановити значення коефіцієнта підсилення $K^{кр}$, при якому система знаходиться на межі стійкості.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

3. Обчислити частоту $\omega^{кр}$, при якій у системі виникають незатухаючі коливання.
4. Нанести на гілки кореневого годографа значення полюсів замкнутої системи, які відповідають $0{,}5 \cdot K^{кр}$ і $0{,}25 \cdot K^{кр}$.
5. Подати вираз для $W_з(s)$ у вигляді добутку типових ланок. Вказати значення параметрів типових ланок.

Послідовність виконання роботи

Для виконання завдання можна використати **GUI**-інтерфейс **SISO-Design Tool** з ППП **Control System Toolbox (CST).** Графічний інтерфейс призначений для аналізу і синтезу одномірних лінійних (лінеаризованих) систем автоматизованого управління (**Single Input/ Single Output**).

У **CST** є тип даних, що визначає динамічну систему у вигляді набору полюсів, нулів і коефіцієнта підсилення передатної функції. Синтаксис команди, що створює **LTI**-систему **(Linear Time Invariant)** у вигляді об’єкта **ZPK (Zero-Pole-Gain)** з одним входом і одним виходом

$\mathbf{zpk([s_1^0,\ldots, s_m^0],[s_1^p,\ldots, s_n^p],K)}$

Запуск графічного середовища **SISO-Design Tool** здійснюється командою:

sisotool

або вибором відповідного пункта у вікні **Launch Pad**.

Для виконання лабораторної роботи необхідно вибрати в меню **View** пункт **Root Locus** (кореневий годограф), для відображення редактора **Root Locus Editor.** У правому верхньому куті можна змінювати тип оберненого зв’язку (кнопка “+/-“) і структурну схему САУ. У лабораторній роботі передбачається наявність від’ємного оберненого зв’язку і відповідної структурної схеми.

Для завантаження даних з робочого простору MatLab необхідно виконувати пункт меню **File / Import**. В результаті з’явиться схема САУ. Використовуючи **Root Locus Editor** і значення коефіцієнта підсилення (C – Current Compensator), виконати завдання. Зміну динамічних і частотних характеристик

Національний університет
водного господарства
та природокористування

замкнутої системи при зміні К можна прослідкувати, використовуючи меню **Tools / Loop Response.**

Отже, виконання лабораторної роботи складається із наступних кроків:

1. Ознайомитися з основними елементами теорії методу кореневого годографа.
2. Намалювати структурну схему САУ відповідно до заданого варіанта.
3. Запустити систему MatLab.
4. Створити zpk-об’єкт у відповідності із заданим варіантом.
5. Встановити значення полюсів і нулів розімкнутої системи $W_p(s)$.
6. Запустити SISO-Design Tool і побудувати кореневий годограф.
7. Відповідно до теорії проаналізувати розміщення гілок кореневого годографа.
8. Визначити умови нестійкості замкнутої САУ. Встановити $K^{кр}$ і $\omega^{кр}$.
9. Встановити значення полюсів, що відповідають $0.5K^{кр}$ *і0.25* $K^{кр}$.
10. Проаналізувати вплив віддалених полюсів і нулів на величини $K^{кр}$ *і* $\omega^{кр}$.
11. При $K=1$ навести вираз для $W_з(s)$ у вигляді добутку типових ланок. Вказати значення параметрів типових ланок.
12. Оформити звіт.
13. Виконати захист лабораторної роботи.

Приклад виконання лабораторної роботи

Нехай необхідно дослідити САУ з передатною функцією розімкнутої системи:

$$W(s) = \frac{(0.2s+1)}{s(0.1s+1)(0.04s^2+2\cdot 0.2\cdot 0.3s+1)}$$

1. Створимо zpk-об’єкт, знайдемо полюси і нулі розімкнутої системи:

Національний університет
водного господарства
та природокористування

```
>>s=zpk('s'); W=(0.2*s+1)/(s*(0.1*s+1)*(0.2^2*s^2+2*0.3*s+1))
>>pole(W)
>>zero(W)
```

2. Запустимо **SISO-Design Tool**, налаштуємо параметри і імпортуємо **zpk**-об'єкт з робочого простору MatLab. У вікні **Root Locus Editor** інтерфейсу **SISO-Design Tool** побудується кореневий годограф.
3. Встановимо значення $K^{кр}$, змінюючи за допомогою миші положення червоного курсору на кореневому годографі до перетину гілок з уявною віссю. Підбір $K^{кр}$ можна виконувати також шляхом зміни значення коефіцієнта підсилення С у верхній частині вікна GUI-інтерфейсу. Для даного випадку $K^{кр}=3$. Значення $\omega^{кр}$ дорівнює уявній координаті перетину кореневим годографом уявної осі. Переглянути його можна у нижній частині інтерфейсу або вибравши пункт **View / Closed-Loop Poles**.
4. Встановимо значення полюсів при $0.5K^{кр}$ і $0.25K^{кр}$.
5. Побудуємо перехідну функцію замкнутої системи для $C=0.5K^{кр}$. Для цього скористаємося командою меню **Tools / Loop Responses / Closed-Loop Step**. З графіка побачимо, що система стійка. Змінюючи С, можна спостерігати динаміку перехідної функції та інших параметрів системи. Оновлення характеристик замкнутої системи буде відбуватися автоматично відразу після зміни її параметра. Таким чином, використовуючи метод кореневого годографа, отримаємо ділянки значень коефіцієнта підсилення, у яких САУ залишається стійкою.

Зауваження: Під час складаня звіту у випадку стійкості САУ, при довільному К>0, обмежитися побудовою КГ, віддаленого від початку координат на подвійний модуль найбільш віддаленого від початку координат полюсу розімкнутої системи.

Контрольні запитання

1. Дати визначення передатної функції, полюсів, нулів, кореневого годографа. Назвати типові ланки САУ. Що таке

Національний університет водного господарства та природокористування

від'ємний обернений зв'язок?

2. Пояснити вплив розміщення нуля на поведінку гілок кореневого годографа.
3. Показати на прикладі, що при поступовому віддаленні гілки кореневого годографа від початку координат, рух гілки, залежно від К, уповільнюється.
4. Встановити залежність для малого переміщення гілок кореневого годографа від вихідного полюса залежно від зміни К.
5. Виконати аналіз впливу змін розміщення полюса або нуля на величини $K^{кр}$ *і* $\omega^{кр}$.

Таблиця 3

Варіанти завдань до лабораторної роботи 2

Вид передатної функції $W_p(s)$	Варіант	Значення параметрів
$\frac{K(T_1 s+1)}{s(T_2 s+1)}$	1.	T_1=0.5; T_2=0.1
	2.	T_1=0.1; T_2=0.01
	3.	T_1=0.1; T_2=0.9
	4.	T_1=0.01; T_2=0.1
	5.	T_1=0.15; T_2=0.2
$\frac{K}{s(T^2 s^2+2T\zeta s+1)}$	6.	T=0.1; ζ=1
	7.	T=0.05; ζ=0.7
	8.	T=0.03; ζ=0.1
	9.	T=0.08; ζ=0.5
	10.	T=0.01; ζ=0.15
$\frac{K(T_1 s+1)}{s(T_2 s+1)(T_3 s+1)(T_4 s+1)}$	11.	T_1=0.03; T_2=0.5 T_3=0.1; T_4=0.05
	12.	T_1=0.05; T_2=0.4 T_3=0.08; T_4=0.033
	13.	T_1=0.2; T_2=0.45 T_3=0.1; T_4=0.05

Національний університет
водного господарства
та природокористування

продовження табл. 3

	14.	T1=0.5; T2=0.25 T3=0.1; T4=0.02
	15.	T1=0.1; T2=0.25 T3=0.1; T4=0.05
$\dfrac{K(T_1 s+1)}{s(T_2 s+1)(T_3 s+1)(T_4{}^2 s^2+2T_4\zeta s+1)}$	16.	T1=0.2; T2=0.1 T3=0.05; T4=0.07; ζ=0.5
	17.	T1=0.07; T2=0.1 T3=0.05; T4=0.07; ζ=0.5
	18.	T_1=0.3; T_2=0.1; T_3=0.05; T_4=0.07; ζ=0.5
	19.	T_1=0.01; T_2=0.1 T_3=0.1; T_4=0.07; ζ=0.5
	20.	T_1=0; T_2=0.1 T_3=0.1; T_4=0.07; ζ=0.5
$\dfrac{K(T_1{}^2 s^2+2T_1\zeta_1 s+1)}{s(T_2{}^2 s^2+2T_2\zeta_2 s+1)(T_3 s+1)(T_4 s+1)^2}$	21.	T_1=0.05; T_2=0.1 T_3=T_4=0.01; ζ_1=0.3; ζ_2=0.3
	22.	T_1=0.05; T_2=0.1 T_3=T_4=0.05; ζ_1=0.3; ζ_2=0.3
	23.	T_1=0.05; T_2=0.07 T_3=T_4=0.1; ζ_1=0.7; ζ_2=0.3
	24.	T_1=0.05; T_2=0.07 T_3=T_4=0.05; ζ_1=0.7; ζ_2=0.3
	25.	T_1=0.05; T_2=0.05 T_3=T_4=0.1; ζ_1=0.3; ζ_2=0.3

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Лабораторна робота № 3

Тема: Опис систем у просторі станів

Мета: Ознайомлення з описом і дослідженням динамічних систем управління у просторі станів.

Постановка задачі

Дано математичні моделі трьох систем і структурна схема, яка є з'єднання цих систем.

Необхідно:

1. Отримати модель результуючої системи у просторі станів.
2. Дослідити спостережність і керованість трьох підсистем окремо одна від одної і у їх з'єднанні відповідно до схеми.

Послідовність виконання роботи

В **Control System Toolbox** є тип даних, який визначає динамічну систему у просторі станів. Синтаксис команди, яка створює неперервну LTI-систему у вигляді ss-об'єкта з одним входом і одним виходом:

ss (A,B,C,D)

Параметри функції – матриці з рівнянь станів і виходів

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t); \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t); \end{aligned} \qquad (3.1)$$

Для виконання роботи можна використати команди, наведені у таблиці 4.

Таблиця 4

Деякі команди Control System Toolbox

Синтаксис команди	Опис команди
ctrb(LTI-об'єкт) **ctrb** (A,B)	Формування матриці керованості
obsv(LTI-об'єкт) **obsv**(A,C)	Формування матриці спостережності

Національний університет
водного господарства
та природокористування

продовження табл.4

parallel(<LTI1>,<LTI2>)	Паралельне з’єднання
series(<LTI1>,<LTI2>)	Послідовне з’єднання
feedback(<LTI1>,<LTI2>)	З’єднання оберненим зв’язком
append(<LTI1>,…,<LTIN>)	Об’єднання систем
connect(<sys>,<Con>,<in>,<out>)	Встановлення зв’язків у з’єднанні

Для отримання результатів обчислення матриць, результуючої системи, відповідно до структурної схеми скористаємося останніми двома командами.

Append створює об’єкт **sys**, що є об’єднанням всіх підсистем. При цьому, перший вхідний сигнал першої системи стає входом номер 1, другий вхідний сигнал першої системи – номер 2 тощо, потім ідуть сигнали другої системи і так далі. Виходи визначаються аналогічно.

У **connect** параметр **Con** визначає матрицю зв’язків за структурною схемою. Матриця формується за наступним правилом: кожен рядок є одним входом системи **sys**, перший елемент – номер входу (відповідно до порядку у команді **append**), потім ідуть номери виходів, які додаються і подаються на розглядуваний вхід. Параметри <in>, <out> - рядки з номерів входів і виходів з’єднання, що є зовнішніми.

Наприклад, для послідовного з’єднання двох систем:

sys1 = ss (A1,B1,C1,D1)

sys1 = ss (A2,B2,C2,D2)

sys = append (sys1,sys2)

sysc = connect (sys,[2 1],[1],[2])

У цьому випадку на вхід другої системи (загальний вхід номер 2), надходить вихід першої (загальний вхід номер 1). Вхід першої системи (номер 1) і вихід другої системи (номер 2) є зовнішніми.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Отже, виконання лабораторної роботи складається із наступних кроків:

1. Ознайомитися з елементами теорії.
2. Привести всі системи до форми (3.1).
3. Запустити систему MatLab.
4. Створити три ss-об’єкти відповідно до заданого варіантf.
5. Встановити керованість і спостережність кожної системи.
6. Відповідно до структурної схеми отримати матриці A, B, C з’єднання.
7. Встановити керованість і спостережність з’єднання.
8. Оформити звіт.
9. Виконати захист лабораторної роботи.

Приклад виконання лабораторної роботи

Нехай дано три лінійні стаціонарні системи:

(1)
$$\dot{x}^1 = \begin{pmatrix}7 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}x^1 + \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}u^1;$$
$$y^1 = \begin{pmatrix}3 & -2\\ 2 & 1\end{pmatrix}x_1;$$

(2)
$$\dot{x}^2 = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{pmatrix}x^2 + \begin{pmatrix}1 & 5\\ 2 & 1\end{pmatrix}u^2;$$
$$y^2 = \begin{pmatrix}4 & 3\end{pmatrix}x^2;$$

(3)
$$\ddot{x}^3 - 3\dot{x}^3 - 2x^3 = 4u^3;$$
$$y^3 = x^3;$$

Відома структурна схема з’єднання систем:

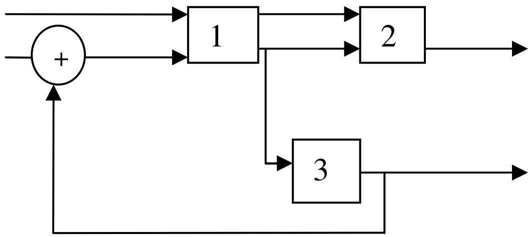


Рис. 2. Схема з’єднання

Приведемо систему 3 до виду (3.1) для цього введемо змінні

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$x_1^3 = x^3$$

$$x_2^3 = \dot{x}_1^3 = \dot{x}^3$$

і, підставляючи їх у початкові рівняння, отримаємо:

$$\begin{cases} \dot{x}_1^3 = x_2{}^3 \\ \dot{x}_2^3 - 3x_2^3 - 2x_1^3 = 4u^3 \\ y^3 = x_1^3 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x}_1^3 = x_2{}^3 \\ \dot{x}_2^3 = 2x_1^3 + 3x_2^3 + 4u^3 \\ y^3 = x_1^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} x^3 + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} u^3 \\ y^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x^3 \end{cases}$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Створимо послідовно матриці усіх трьох систем та їх ss-об'єкти:

```
>>A1=[7 3;2 1]
>>B1=[1 0;0 2]
>>C1=[3 -2;2 1]
>>s1=ss(A1,B1,C1,0)
>>A2=[1 2;3 2]
>>B2=[1 5;2 1]
>>C2=[4 3]
>>s2=ss(A2,B2,C2,0)
>>A3=[0 1;2 3]
>>B3=[0;4]
>>C3=[1;0]
```

Національний університет
водного господарства
та природокористування

>>s3=ss(A3,B3,C3,0)

Дослідимо спостережність і керованість кожної системи, для чого побудуємо відповідні матриці і підрахуємо їх ранги:

>>rank(ctrb(A1,B1))

>>rank(obsv(A1,C1))

>>rank(ctrb(A2,B2))

>>rank(obsv(A2,C2))

>>rank(ctrb(A3,B3))

>>rank(obsv(A3,C3))

Видно, що у всіх випадках ранги матриць керованості і спостережності співпадають з розмірностями простору станів.

Отримаємо систему, яка визначається з'єднанням. Для коректного використання функції connect введемо додаткову систему, передатна функція якої рівна 1.

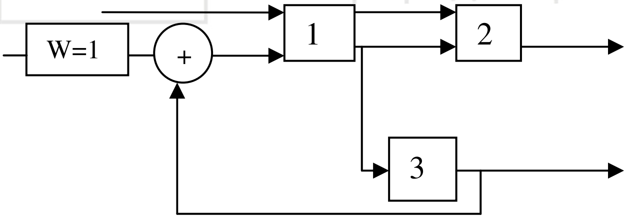


Рис. 3. Еквівалентна система

>>s4=tf(1)

>>sys=append(s1,s2,s3,s4);

>>Q=[2 -4 5; 3 1 0; 4 2 0; 5 2 0];

>>in=[1 5];

>>out=[3 4];

>>s_com=connect(sys,Q,in,out);

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Дослідимо спостережність і керованість результуючої системи, для цього отримаємо відповідні матриці з самого об’єкта і підрахуємо їх ранги:

```
>>A=s_com.A;
>>B=s_com.B;
>>C=s_com.C;
>>rank(ctrb(A,B))
>>rank(obsv(A,C))
```

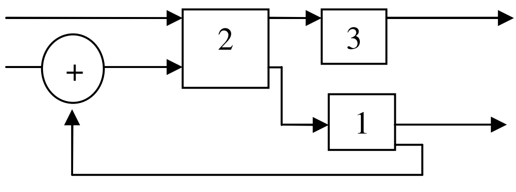
Результати показують, що система керована і спостережна.

Контрольні запитання

1. Дати визначення і приклади станів керованої системи.
2. Пояснити на прикладі принцип суперпозиції.
3. Вивести рівняння у просторі станів для заданої схеми з’єднання трьох систем.
4. Отримати опис одномірної системи у канонічній формі Коші.
5. Виконати аналіз впливу розмірності векторів управління і виходів на керованість і спостережність системи.

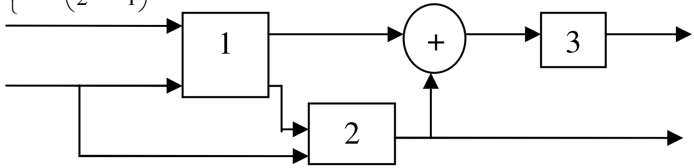
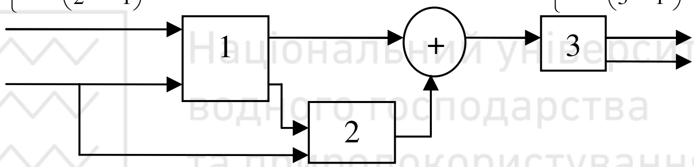
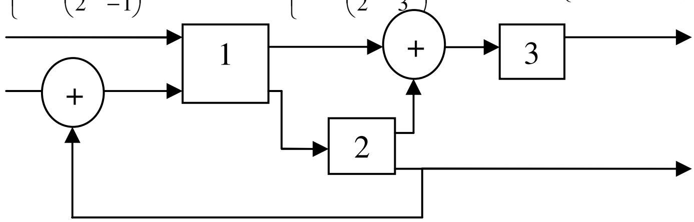
Таблиця 5

Варіанти завдань до лабораторної роботи 3

Вар.	Рівняння систем і структурна схема
1.	$\begin{cases}\dot{x}^1 = \begin{pmatrix}5 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}x^1 + \begin{pmatrix}-1\\ 3\end{pmatrix}u^1\\ y^1 = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}x^1\end{cases}$ $\begin{cases}\dot{x}^2 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}x^2 + \begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}u^2\\ y^2 = \begin{pmatrix}5 & -2\\ 2 & 3\end{pmatrix}x^2\end{cases}$ $\begin{cases}\dot{x}^3 = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{pmatrix}x^3 + \begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}u^3\\ y^3 = \begin{pmatrix}-1 & 2\end{pmatrix}x^2\end{cases}$ 

Національний університет
водного господарства
та природокористування

продовження табл.5

2.	$\begin{cases} \dot{x}^1 = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} x^1 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} u^1 \\ y^1 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} x^1 \end{cases}$ $\begin{cases} \dot{x}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} u^2 \\ y^2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \end{pmatrix} x^2 \end{cases}$ $\begin{cases} \dot{x}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} x^3 + \begin{pmatrix} 14 \\ 1 \end{pmatrix} u^3 \\ y^3 = \begin{pmatrix} 5 & 2 \end{pmatrix} x^2 \end{cases}$ 
3.	$\begin{cases} \dot{x}^1 = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} x^1 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} u^1 \\ y^1 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} x^1 \end{cases}$ $\begin{cases} \dot{x}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} u^2 \\ y^2 = \begin{pmatrix} -4 & 3 \end{pmatrix} x^2 \end{cases}$ $\begin{cases} \dot{x}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} x^3 + \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} u^3 \\ y^3 = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} x^2 \end{cases}$ 
4.	$\begin{cases} \dot{x}^1 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} x^1 + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} u^1 \\ y^1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} x^1 \end{cases}$ $\begin{cases} \dot{x}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} u^2 \\ y^2 = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} x^2 \end{cases}$ $\begin{cases} \dot{x}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} x^3 + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} u^3 \\ y^3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} x^2 \end{cases}$ 

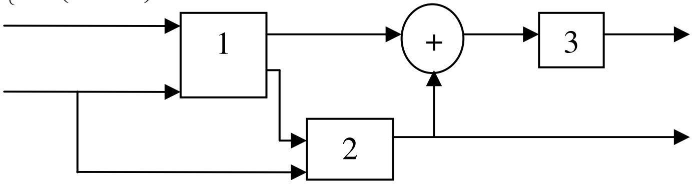
Національний університет
водного господарства
та природокористування

Національний університет
водного господарства
та природокористування

продовження табл.5

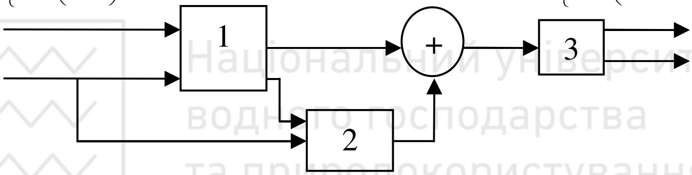
5.

$$\begin{cases}\dot{x}^1 = \begin{pmatrix}5 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}x^1 + \begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}u^1\\ y^1 = \begin{pmatrix}-3 & -2\\ -4 & 1\end{pmatrix}x^1\end{cases} \quad \begin{cases}\dot{x}^2 = \begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 2\end{pmatrix}x^2 + \begin{pmatrix}1 & 5\\ 2 & -3\end{pmatrix}u^2\\ y^2 = \begin{pmatrix}-20 & 3\end{pmatrix}x^2\end{cases} \quad \begin{cases}\dot{x}^3 = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{pmatrix}x^3 + \begin{pmatrix}-4\\ 1\end{pmatrix}u^3\\ y^3 = \begin{pmatrix}-3 & 2\end{pmatrix}x^2\end{cases}$$



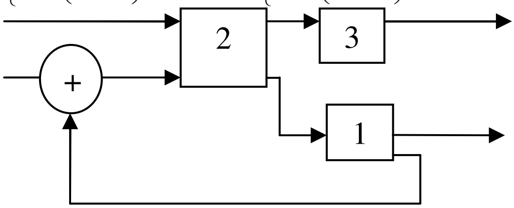
6.

$$\begin{cases}\dot{x}^1 = \begin{pmatrix}4 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}x^1 + \begin{pmatrix}1 & -1\\ 3 & 2\end{pmatrix}u^1\\ y^1 = \begin{pmatrix}3 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}x^1\end{cases} \quad \begin{cases}\dot{x}^2 = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & -2\end{pmatrix}x^2 + \begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & -1\end{pmatrix}u^2\\ y^2 = \begin{pmatrix}-3 & 3\end{pmatrix}x^2\end{cases} \quad \begin{cases}\dot{x}^3 = \begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & -2\end{pmatrix}x^3 + \begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix}u^3\\ y^3 = \begin{pmatrix}-5 & -1\\ -3 & 1\end{pmatrix}x^2\end{cases}$$



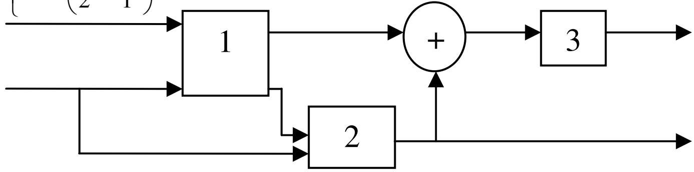
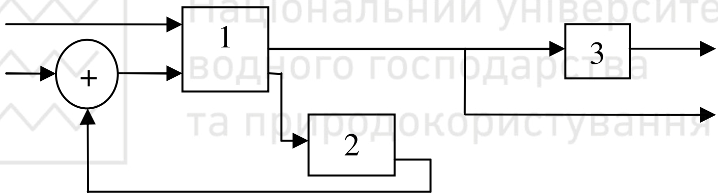
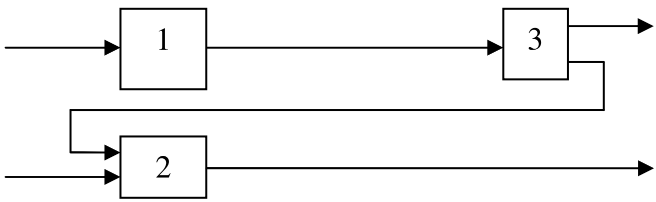
7.

$$\begin{cases}\dot{x}^1 = \begin{pmatrix}3 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}x^1 + \begin{pmatrix}-1\\ 3\end{pmatrix}u^1\\ y^1 = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}x^1\end{cases} \quad \begin{cases}\dot{x}^2 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -2\end{pmatrix}x^2 + \begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}u^2\\ y^2 = \begin{pmatrix}5 & -2\\ 2 & 3\end{pmatrix}x^2\end{cases} \quad \begin{cases}\dot{x}^3 = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & -2\end{pmatrix}x^3 + \begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}u^3\\ y^3 = \begin{pmatrix}-1 & 2\end{pmatrix}x^2\end{cases}$$



Національний університет
водного господарства
та природокористування

продовження табл.5

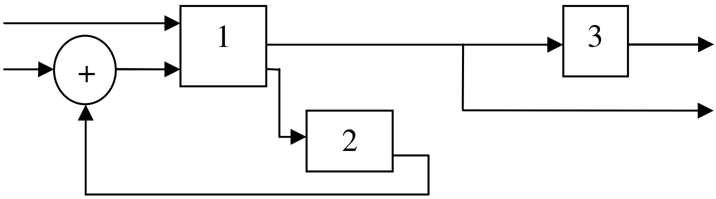
8.	$\begin{cases} \dot{x}^1 = \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} x^1 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} u^1 \\ y^1 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} x^1 \end{cases}$ $\begin{cases} \dot{x}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} u^2 \\ y^2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \end{pmatrix} x^2 \end{cases}$ $\begin{cases} \ddot{x}^3 + 3\dot{x}^3 - x^3 = 5u \\ y^3 = x^3 \end{cases}$ 
9.	$\begin{cases} \dot{x}^1 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} x^1 + \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} u^1 \\ y^1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} x^1 \end{cases}$ $\begin{cases} -2\ddot{x}^2 + 3\dot{x}^2 - x^2 = 5u \\ y^2 = x^2 \end{cases}$ $\begin{cases} \dot{x}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} x^3 + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} u^3 \\ y^3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} x^3 \end{cases}$ 
10.	$\begin{cases} \ddot{x}^1 + 3\dot{x}^1 - x^1 = -2u \\ y^1 = x^1 \end{cases}$ $\begin{cases} \dot{x}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} u^2 \\ y^2 = \begin{pmatrix} -4 & 3 \end{pmatrix} x^2 \end{cases}$ $\begin{cases} \dot{x}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} x^3 + \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} u^3 \\ y^3 = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} x^3 \end{cases}$ 

Національний університет
водного господарства
та природокористування

продовження табл.5

<table>
<tr><td>11.</td><td>

$$\begin{cases}\dot{x}^1 = \begin{pmatrix}5 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}x^1 + \begin{pmatrix}-1\\ 3\end{pmatrix}u^1\\ y^1 = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}x^1\end{cases}\qquad \begin{cases}-\ddot{x}^2 + 3\dot{x}^2 - 2x^2 = 2u\\ y^2 = x^2\end{cases}\qquad \begin{cases}\dot{x}^3 = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{pmatrix}x^3 + \begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}u^3\\ y^3 = \begin{pmatrix}-1 & 2\end{pmatrix}x^2\end{cases}$$

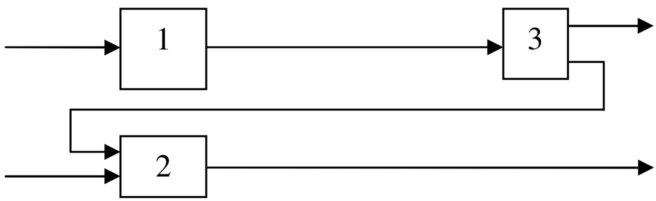


</td></tr>
<tr><td>12.</td><td>

$$\begin{cases}-\ddot{x}^3 + 2\dot{x}^3 - x^3 = 4u\\ y^3 = x^3\end{cases}\qquad \begin{cases}\dot{x}^2 = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{pmatrix}x^2 + \begin{pmatrix}1 & 5\\ -2 & 1\end{pmatrix}u^2\\ y^2 = \begin{pmatrix}4 & 3\end{pmatrix}x^2\end{cases}\qquad \begin{cases}\dot{x}^3 = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{pmatrix}x^3 + \begin{pmatrix}14\\ 1\end{pmatrix}u^3\\ y^3 = \begin{pmatrix}5 & 2\end{pmatrix}x^2\end{cases}$$

</td></tr>
<tr><td>13.</td><td>

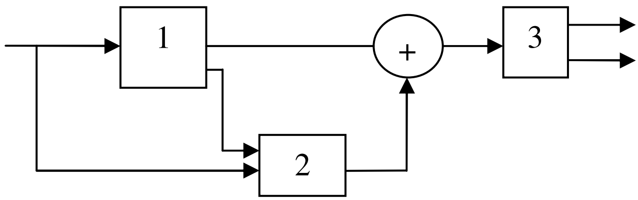
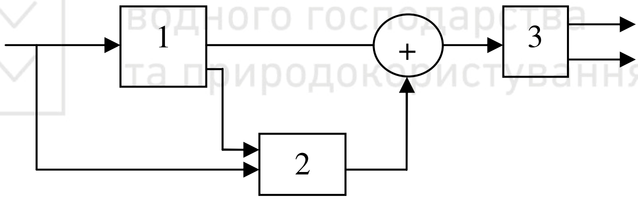
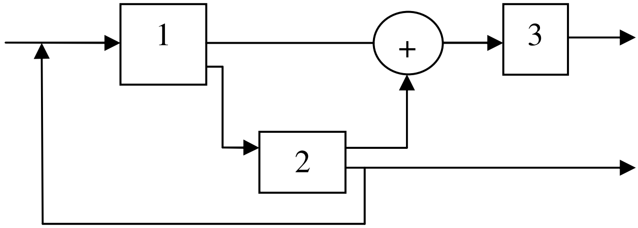
$$\begin{cases}\dot{x}^3 + 2\dot{x}^3 - x^3 = -2u\\ y^3 = x^3\end{cases}\qquad \begin{cases}\dot{x}^2 = \begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & 2\end{pmatrix}x^2 + \begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}u^2\\ y^2 = \begin{pmatrix}-2 & 3\end{pmatrix}x^2\end{cases}\qquad \begin{cases}\dot{x}^3 = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & -2\end{pmatrix}x^3 + \begin{pmatrix}-4\\ 1\end{pmatrix}u^3\\ y^3 = \begin{pmatrix}5 & -1\\ 3 & 1\end{pmatrix}x^2\end{cases}$$



</td></tr>
</table>

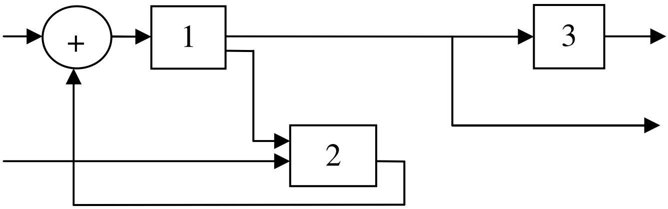
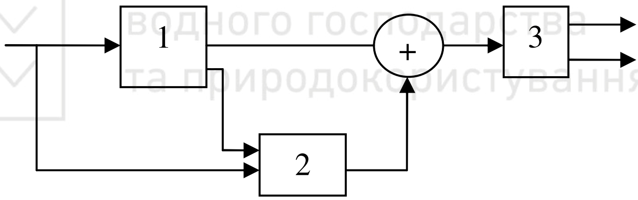
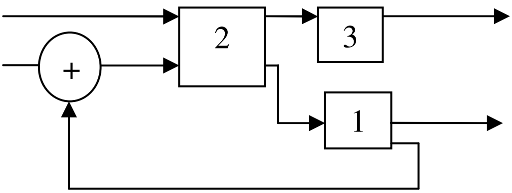
Національний університет
водного господарства
та природокористування

продовження табл.5

14.	$\begin{cases} \dot{x}_1^1 = 2x_2^1 + u \\ \dot{x}_2^1 = -x_1^1 + 3x_2^1 - u \end{cases}$ $\begin{cases} y_1^1 = x_1^1 \\ y_1^2 = x_1^2 - 2x_2^1 \end{cases}$ $\begin{cases} \dot{x}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} u^2 \\ y^2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \end{pmatrix} x^2 \end{cases}$ $\begin{cases} \dot{x}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} x^3 + \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} u^3 \\ y^3 = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} x^2 \end{cases}$ 
15.	$\begin{cases} \dot{x}_1^1 = 2x_2^1 + 2u \\ x_2^1 = -x_1^1 + 3x_2^1 - u \end{cases}$ $\begin{cases} \dot{x}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} u^2 \\ y^2 = \begin{pmatrix} -4 & 3 \end{pmatrix} x^2 \end{cases}$ $\begin{cases} \dot{x}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} x^3 + \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} u^3 \\ y^3 = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} x^3 \end{cases}$ 
16.	$\begin{cases} \dot{x}^1 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} x^1 + \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} u^1 \\ y^1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} x^1 \end{cases}$ $\begin{cases} \dot{x}_1^2 = 3x_1^2 - 2x_2^2 + 3u \\ \dot{x}_2^2 = -x_1^2 + 3x_2^2 - u \end{cases}$ $\begin{cases} y_1^1 = -x_1^1 \\ y_1^2 = x_1^2 - x_2^1 \end{cases}$ $\begin{cases} \dot{x}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} x^3 + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} u^3 \\ y^3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} x^3 \end{cases}$ 

Національний університет
водного господарства
та природокористування

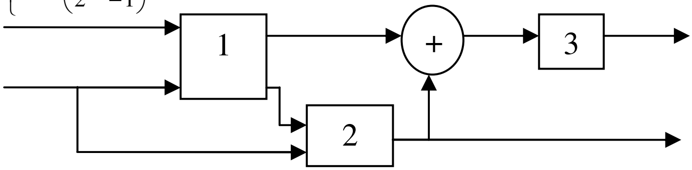
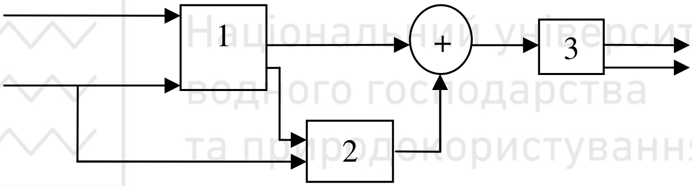
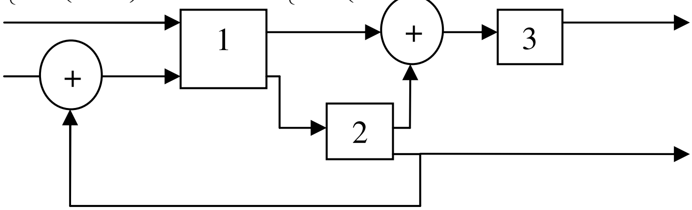
продовження табл.5

17.	$\begin{cases}\dot{x}_1^1 = x_1^1 + 4x_2^1 + 3u \\ \dot{x}_2^1 = -x_1^1 + 3x_2^1 - 2u\end{cases}$ $\begin{cases}y_1^1 = -x_1^1 + 2x_2^1 \\ y_1^2 = -x_2^1 - x_2^1\end{cases}$ $\begin{cases}\dot{x}^2 = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{pmatrix}x^2 + \begin{pmatrix}1 & 5\\ -2 & 1\end{pmatrix}u^2 \\ y^2 = \begin{pmatrix}4 & 3\end{pmatrix}x^2\end{cases}$ $\begin{cases}\dot{x}^3 = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{pmatrix}x^3 + \begin{pmatrix}14\\ 1\end{pmatrix}u \\ y^3 = \begin{pmatrix}5 & 2\end{pmatrix}x^2\end{cases}$ 
18.	$\begin{cases}\dot{x}_1^1 = x_1^1 - 4x_2^1 + 3u \\ \dot{x}_2^1 = -x_1^1 + 3x_2^1 - 4u\end{cases}$ $\begin{cases}y_1^1 = -x_1^1 + 5x_2^1 \\ y_1^2 = x_1^2 - x_2^1\end{cases}$ $\begin{cases}\dot{x}^2 = \begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & 2\end{pmatrix}x^2 + \begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}u^2 \\ y^2 = \begin{pmatrix}-2 & 3\end{pmatrix}x^1\end{cases}$ $\begin{cases}\dot{x}^3 = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & -2\end{pmatrix}x^3 + \begin{pmatrix}-4\\ 1\end{pmatrix}u^3 \\ y^3 = \begin{pmatrix}5 & -1\\ 3 & 1\end{pmatrix}x^2\end{cases}$ 
19.	$\begin{cases}\dot{x}^1 = \begin{pmatrix}5 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}x^1 + \begin{pmatrix}-1\\ 3\end{pmatrix}u^1 \\ y^1 = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}x^1\end{cases}$ $\begin{cases}\dot{x}^2 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}x^2 + \begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}u^2 \\ y^2 = \begin{pmatrix}5 & -2\\ 2 & 3\end{pmatrix}x^2\end{cases}$ $\begin{cases}\dot{x}^3 = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{pmatrix}x^3 + \begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}u^3 \\ y^3 = \begin{pmatrix}-1 & 2\end{pmatrix}x^2\end{cases}$ 

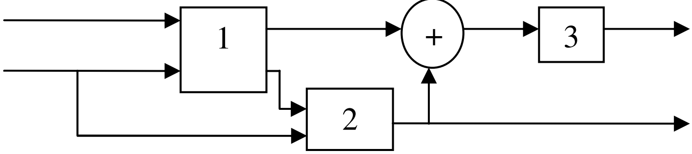
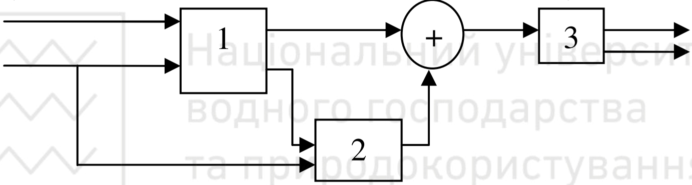
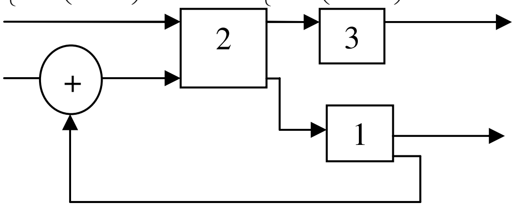
Національний університет
водного господарства
та природокористування

Національний університет
водного господарства
та природокористування

продовження табл.5

20.	$\begin{cases}\dot{x}^1=\begin{pmatrix}7&3\\2&1\end{pmatrix}x^1+\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}u^1\\ y^1=\begin{pmatrix}3&-2\\2&-1\end{pmatrix}x^1\end{cases}$ $\begin{cases}\dot{x}^2=\begin{pmatrix}1&2\\3&2\end{pmatrix}x^2+\begin{pmatrix}1&5\\2&1\end{pmatrix}u^2\\ y^2=\begin{pmatrix}4&3\end{pmatrix}x^2\end{cases}$ $\begin{cases}\dot{x}^3=\begin{pmatrix}1&2\\3&2\end{pmatrix}x^3+\begin{pmatrix}14\\1\end{pmatrix}u^3\\ y^3=\begin{pmatrix}5&2\end{pmatrix}x^2\end{cases}$ 
21.	$\begin{cases}\dot{x}^1=\begin{pmatrix}7&3\\2&1\end{pmatrix}x^1+\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}u^1\\ y^1=\begin{pmatrix}3&-2\\2&-1\end{pmatrix}x^1\end{cases}$ $\begin{cases}\dot{x}^2=\begin{pmatrix}1&2\\3&2\end{pmatrix}x^2+\begin{pmatrix}1&-1\\2&1\end{pmatrix}u^2\\ y^2=\begin{pmatrix}-4&3\end{pmatrix}x^2\end{cases}$ $\begin{cases}\dot{x}^3=\begin{pmatrix}1&2\\3&-2\end{pmatrix}x^3+\begin{pmatrix}-4\\1\end{pmatrix}u^3\\ y^3=\begin{pmatrix}5&-1\\3&1\end{pmatrix}x^2\end{cases}$ 
22.	$\begin{cases}\dot{x}^1=\begin{pmatrix}5&3\\2&1\end{pmatrix}x^1+\begin{pmatrix}1&3\\3&-1\end{pmatrix}u^1\\ y^1=\begin{pmatrix}1&2\\2&-1\end{pmatrix}x^1\end{cases}$ $\begin{cases}\dot{x}^2=\begin{pmatrix}1&0\\-1&2\end{pmatrix}x^2+\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}u^2\\ y^2=\begin{pmatrix}5&-2\\2&3\end{pmatrix}x^2\end{cases}$ $\begin{cases}\dot{x}^3=\begin{pmatrix}1&2\\3&2\end{pmatrix}x^3+\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}u^3\\ y^3=\begin{pmatrix}-1&2\end{pmatrix}x^2\end{cases}$ 

Національний університет
водного господарства
та природокористування

23.	$\begin{cases}\dot{x}^1=\begin{pmatrix}5&3\\2&1\end{pmatrix}x^1+\begin{pmatrix}1&1\\-1&2\end{pmatrix}u^1\\ y^1=\begin{pmatrix}-3&-2\\-4&1\end{pmatrix}x^1\end{cases}$ $\begin{cases}\dot{x}^2=\begin{pmatrix}1&-2\\3&2\end{pmatrix}x^2+\begin{pmatrix}1&5\\2&-3\end{pmatrix}u^2\\ y^2=\begin{pmatrix}-20&3\end{pmatrix}x^2\end{cases}$ $\begin{cases}\dot{x}^3=\begin{pmatrix}1&2\\3&2\end{pmatrix}x^3+\begin{pmatrix}-4\\1\end{pmatrix}u^3\\ y^3=\begin{pmatrix}-3&2\end{pmatrix}x^2\end{cases}$ 
24.	$\begin{cases}\dot{x}^1=\begin{pmatrix}4&3\\2&1\end{pmatrix}x^1+\begin{pmatrix}1&-1\\3&2\end{pmatrix}u^1\\ y^1=\begin{pmatrix}3&0\\2&1\end{pmatrix}x^1\end{cases}$ $\begin{cases}\dot{x}^2=\begin{pmatrix}1&2\\3&-2\end{pmatrix}x^2+\begin{pmatrix}1&-1\\2&-1\end{pmatrix}u^2\\ y^2=\begin{pmatrix}-3&3\end{pmatrix}x^2\end{cases}$ $\begin{cases}\dot{x}^3=\begin{pmatrix}1&-2\\3&-2\end{pmatrix}x^3+\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}u^3\\ y^3=\begin{pmatrix}-5&-1\\-3&1\end{pmatrix}x^2\end{cases}$ 
25.	$\begin{cases}\dot{x}^1=\begin{pmatrix}3&3\\2&1\end{pmatrix}x^1+\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}u^1\\ y^1=\begin{pmatrix}1&2\\2&-1\end{pmatrix}x^1\end{cases}$ $\begin{cases}\dot{x}^2=\begin{pmatrix}1&0\\1&-2\end{pmatrix}x^2+\begin{pmatrix}1&1\\2&1\end{pmatrix}u^2\\ y^2=\begin{pmatrix}5&-2\\2&3\end{pmatrix}x^2\end{cases}$ $\begin{cases}\dot{x}^3=\begin{pmatrix}1&2\\3&-2\end{pmatrix}x^3+\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}u^3\\ y^3=\begin{pmatrix}-1&2\end{pmatrix}x^2\end{cases}$ 

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Лабораторна робота № 4

Тема: Стійкість лінійних систем

Мета: Ознайомлення з критеріями стійкості і виявлення у заданої керованої лінійної системи з повним зворотним зв'язком властивості асимптотичної стійкості.

Постановка задачі

Дано систему управління, яка описується кінцево-різницевими рівняннями у просторі станів

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k),\ (k=0,N) \qquad (4.1)$$

і відома матриця K, що визначає закон управління $u=Kx$.

Потрібно встановити асимптотичну стійкість системи з повним зворотним зв'язком.

Послідовність виконання роботи

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Для визначення асимптотичної залежності лінійних стаціонарних систем у **Control System Toolbox** є команди, наведені у таблиці 6.

Таблиця 6

Команди Control System Toolbox

Синтаксис команди	Опис команди
lyap(A,C)	Розв'язок неперервних рівнянь Ляпунова
lyap(A,X,Y)	Розв'язок неперервних узагальнених рівнянь Ляпунова (рівнянь Сільвестра)
dlyap(A,H)	Розв'язок дискретних рівнянь Ляпунова

Q=lyap(A,C) знаходить розв'язок системи рівнянь Ляпунова виду $A^TQ+QA+C=0$.

Q=lyap(A,X,Y) знаходить розв'язок системи рівнянь Сільвестра (узагальнених рівнянь Ляпунова) виду $A\Gamma+ G\ X-Y=0$,

де G – розв'язок рівняння Ляпунова $(A+BL)^T\ G\ (A+BL)-\ G\ +H=0.$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Функції розв'язку неперервних рівнянь Ляпунова видають відповідь тільки у випадку єдності рішення, тобто у випадку, коли власні значення $\lambda_1^1, \dots, \lambda_n^1$ матриці A і власні значення $\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2$ матриці X для всіх *(i,j)* задовольняють умові $\lambda_i^1+\lambda_j^2 \neq 0$.

G=dlyap(A,H) знаходить розв'язок системи рівнянь Ляпунова виду $(A+BL)^T\Gamma(A+BL)-\Gamma+H=0$. Результат розв'язку рівнянь Ляпунова для дискретних систем видається тільки у випадку єдиності рішення, тобто коли власні значення $\lambda_1^1, \dots, \lambda_n^1$ матриці A для всіх *(i,j)* задовольняють умові $\lambda_i^1\lambda_j^2 \neq 1$.

Отже, виконання лабораторної роботи складається із наступних кроків:

1. Вивчити теоретичні відомості.
2. Запустити систему MatLab.
3. Створити ss-об'єкт відповідно до заданого варіанта.
4. Встановити стійкість системи.
5. Встановити стійкість системи з повним оберненим зв'язком.
6. Побудувати графіки системи при ненульових початкових умовах.
7. Оформити звіт.
8. Виконати захист лабораторної роботи.

Приклад виконання лабораторної роботи

Нехай дано систему управління, яка описується кінцево-різницевими рівняннями у просторі станів

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k), \ (k=0,N),$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

і відома матриця *K*, що визначає закон управління $u=Kx$,

$$K = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Задамо матриці, які визначають систему:

>>A=[1 2; -3 4]
>>B=[1 2]'

Національний університет
водного господарства
та природокористування

```
>>L=[2 1]
```

2. Визначимо рішення рівняння Ляпунова:

```
>>G=dlyap(A,eye(2))
```

3. Обчислимо головні мінори:

```
>>det(G(1:1,1:1))
>>det(G)
```

За критерієм Сильвестра рішення не є додатньо-визначеною матрицею, відповідно, система не є асимптотично стійкою. Графік вільного руху системи при початкових умовах $x=(x_1,x_2)=(2,1)$

4. Аналогічно можна встановити властивість асимптотичної стійкості у керованій системі:

```
>>G=dlyap(A+BL,eye(2))
>>det(G)
>>det(G(1:1,1:1))
```

За критерієм Сильвестра рішення дискретного рівняння Ляпунова не є додатньо-визначеною матрицею, отже система не є асимптотично стійкою.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Контрольні запитання

1. Дати визначення стійкості Ляпунова і асимптотичної стійкості.
2. Покажіть, що для лінійних систем завжди можна знайти функцію Ляпунова.
3. Побудуйте матрицю Гурвиця і застосуйте критерій Рауса-Гурвиця для визначення стійкості типових ланок САУ.
4. З'ясуйте, чи існує зв'язок між перехідною характеристикою системи і властивістю асимптотичної стійкості.
5. Використовуючи техніку приведення матриць до канонічної форми Фробеніуса, отримайте критерій Рауса-Шура.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Таблиця 7

Варіанти завдань до лабораторної роботи 4

Варі-ант	Рівняння систем	L
1.	$\dot{x}=\begin{pmatrix}5 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}-1\\ 3\end{pmatrix}u$	(2 2)
2.	$\dot{x}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}1 & 5\\ 2 & 1\end{pmatrix}u$	$\begin{pmatrix}4 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}$
3.	$\dot{x}=\begin{pmatrix}7 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}u$	$\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$
4.	$\dot{x}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}1\\ -2\end{pmatrix}u$	(2 1)
5.	$\dot{x}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}-4\\ 1\end{pmatrix}u$	(-2 1)
6.	$\dot{x}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & -2\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix}u$	(-0.2 -1)
7.	$\dot{x}=\begin{pmatrix}3 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}-1\\ 3\end{pmatrix}u$	(-4 -3)
8.	$\dot{x}=\begin{pmatrix}-7 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}u$	$\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$
9.	$\dot{x}=\begin{pmatrix}5 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}-1\\ -3\end{pmatrix}u$	(32 10)
10.	$\dot{x}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & -2\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}-4\\ 1\end{pmatrix}u$	(7 9)
11.	$\dot{x}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 2\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}u$	(3 -8)
12.	$\dot{x}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 9 & 2\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}1 & 5\\ -2 & 1\end{pmatrix}u$	$\begin{pmatrix}-7 & 0\\ 0 & -7\end{pmatrix}$
13.	$\dot{x}=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 7 & -2\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}-4\\ 1\end{pmatrix}u$	(5 -1)

Національний університет водного господарства та природокористування

Національний університет
водного господарства
та природокористування

продовження табл.7

14.	$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_2 + u \\ \dot{x}_2 = -x_1 + 3x_2 - u \end{cases}$	(-1 10)
15.	$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_2 + 2u \\ \dot{x}_2 = -x_1 + 8x_2 - 2u \end{cases}$	(2 9)
16.	$\begin{cases} \dot{x}_1 = 3x_1 - 2x_2 + 7u \\ \dot{x}_2 = -x_1 + 3x_2 - u \end{cases}$	(4 4)
17.	$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + 4x_2 + 3u \\ \dot{x}_2 = -x_1 + 3x_2 - 2u \end{cases}$	(21 -1)
18.	$\dot{x} = \begin{pmatrix} -4 & 12 \\ 18 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} u$	(12 -8)
19.	$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} u$	(-4 8)
20.	$\dot{x} = \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ -7 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} u$	(-2 -3)
21.	$\dot{x} = \begin{pmatrix} -9 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} u$	(3 -8)
22.	$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 9 & 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -8 \end{pmatrix} u$	$\begin{pmatrix} -7 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$
23.	$\dot{x} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 7 & -3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix} u$	(5 -1)
24.	$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 + 2u \\ \dot{x}_2 = -x_1 + 3x_2 - 6u \end{cases}$	(-1 10)
25.	$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - 3x_2 + 7u \\ \dot{x}_2 = -2x_1 + 4x_2 - 8u \end{cases}$	(2 9)

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Національний університет
водного господарства
та природокористування

ЛІТЕРАТУРА

1. Современные системы управления / Р.Дорф, Р.Бищоп. Пер с англ. Б.И.Копылова. – М.: Лаборатория Базовых знаний, 2002. 832 с.: ил. ISBN 5-93208-119-8
2. Математические пакеты расширения MatLab. Специальный справочник / Дьяконов В., Круглов В. СПб.: Питер, 2001. – 480 с.:ил. ISBN 5-318-00004-5
3. Избранные главы теории автоматического управления с примерами в системе MatLab / Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л. СПб.: Наука, 2000. – 475 с.: ил. ISBN 5-02-024873-8
4. Никульчев Е.В. Практикум по теории управления в среде MatLab. Учебное пособие. – М.: МАПИ, 2002. – 88 с. ISBN 5-8068-0274-4
5. Шапкарин А.В., Кулло И.Г. Лабораторный практикум по курсу “Теория автоматического управления”. Линейные непрерывные динамические системы. М.: МИФИ, 2007. 84 с.
6. Методы классической и современной теории автоматического управления: Учебник в 3-х т. / Под ред. Н.Д.Егупова – М.: МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2000
7. Методы робастного, нейро-нечеткого и адаптивного управления: Учебник / Под ред. Егупова. М.: МГТУ им. Баумана, 2001. – 744с., ил.

Національний університет
водного господарства
та природокористування