П. К. Шмулевичъ

КУРСЪ
Теоретической Ариѳметики

Складъ Изданія
СПБ. Ивановская 6.

2259

Книгоиздательство Инженера П. К. Шмулевича.

Отдѣлъ I. По каталогу № 4.

КУРСЪ
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ АРИѲМЕТИКИ

въ объемѣ программъ вступительныхъ экзаменовъ въ спеціальныхъ высшихъ учебныхъ заведеніяхъ.

СОСТАВИЛЪ
П. К. Шмулевичъ,
ИНЖЕНЕРЪ ПУТЕЙ СООБЩЕНІЯ.

Цѣна 1 руб., перес. 20 коп.

Изданіе десятое.

ПЕТРОГРАДЪ.

Складъ изданія у автора: Ивановская ул., д. 6. Телеф. 436-85.

1917.

Типографія „Двигатель" Казначейская, 6.

Отъ автора.

При внимательномъ просмотрѣ приведенной въ концѣ настоящей книги программы вступительныхъ экзаменовъ по Ариѳметикѣ въ спеціальныхъ высшихъ учебныхъ заведеніяхъ, нетрудно убѣдиться, что ни одно изъ существующихъ на русскомъ языкѣ оригинальныхъ и переводныхъ руководствъ Ариѳметики не даетъ полнаго отвѣта на *всѣ* пункты программы. Даже лучшее и наиболѣе полное руководство Бертрана — Билибина, содержа несравненно больше матеріала, чѣмъ это требуется вышеупомянутой программой, не даетъ отвѣта на нѣсколько ея пунктовъ и поэтому не можетъ вполнѣ удовлетворить потребности молодыхъ людей, готовящихся къ поступленію въ технические Институты. Это обстоятельство, равно какъ и слабая, въ большинствѣ случаевъ, постановка преподаванія Ариѳметики въ выпускныхъ классахъ гимназій и реальныхъ училищъ, отражается весьма печально на конкурсныхъ испытаніяхъ въ спеціальныхъ учебныхъ заведеніяхъ, особенно въ Горномъ Институтѣ, гдѣ на Ариѳметику обращено особое вниманіе, и гдѣ поэтому около *трети* всѣхъ экзаменующихся получаютъ по Ариѳметикѣ неудовлетворительныя отмѣтки, и такимъ образомъ лишаются возможности продолжать экзамены.

Предлагаемый «Курсъ теоретической Ариѳметики въ объемѣ программъ вступительныхъ экзаменовъ въ спеціальныхъ высшихъ учебныхъ заведеніяхъ», какъ показываетъ само заглавіе, является полнымъ отвѣтомъ на *всѣ* вопросы, которые могутъ быть предложены экзаменующимся въ различныхъ Институтахъ. Кромѣ того, желая сдѣлать это руководство пригоднымъ для повторительнаго курса Ариѳметики въ старшихъ классахъ ср.-учебныхъ заведеній, гдѣ программа преподаванія нѣсколько обширнѣе требованій, предъявляемыхъ въ Институтахъ, пришлось вставить нѣсколько теоремъ, которыя, какъ ненужныя для конкурсныхъ экзаменовъ, отпечатаны мелкимъ шрифтомъ. Таковы, напр., теоремы объ общемъ наибольшемъ дѣлителѣ и о наименьшемъ кратномъ для *нѣсколькихъ* чиселъ, объ общемъ признакѣ дѣлимости и нѣкоторыя другія.

При составленіи этой книги были прочитаны очень многія руководства теоретической Ариѳметики, начиная съ классическихъ курсовъ Бертрана-Билибина и Серре, и кончая общеизвѣстными элементарными учебниками Киселева, Малинина и Буренина и др. Всѣ матеріалы подвергались основательной переработкѣ соотвѣтственно порядку послѣдовательнаго изложенія пунктовъ программы и общему уровню математическаго развитія учащихся, для которыхъ предназначена эта книга. Особенное вниманіе обращено на то, чтобы на всѣ пункты программы былъ данъ обстоятельный и строго доказанный отвѣтъ. Съ этой цѣлью пришлось добавить нѣсколько теоремъ, безъ которыхъ пострадала бы строгость и послѣдовательность изложенія. Таковы, напр., теоремы о равноостаточности чиселъ (§§ 48 и 49), почему-то не вошедшія въ программу, но безусловно необходимыя для строгаго изложенія теоріи періодическихъ дробей, и нѣкот. другія, менѣе важныя. Для облегченія возможности письменнаго изложенія условія теоремъ при отвѣтѣ, введены нѣкоторыя полезныя сокращенныя обозначенія, какъ-то:

ост. $(a:b)$; *част.* $(a:b)$; *о. н. д.* $(a:b)$; *н. кр.* (a, b),

обозначающія соотвѣтственно:

остатокъ отъ дѣленія a на b; частное отъ дѣленія a на b; общій наибольшій дѣлитель чиселъ a и b; наименьшее кратное чиселъ a и b. Подобныя сокращенія даютъ возможность записывать условія теоремъ нѣсколькими буквами, что представляетъ значительное удобство для экзаменующихся.

Настоящее десятое изданіе Ариѳметики перепечатано съ очень незначительными измѣненіями противъ девятаго, въ которомъ по сравненію съ прежними изд. были сдѣланы нѣкоторыя перемѣны и добавленія, соотвѣтствующія новѣйшимъ требованіямъ на экзаменѣ по Ариѳметикѣ, главнымъ образомъ, въ Горномъ Институтѣ, гдѣ попрежнему этотъ экзаменъ является роковымъ для большинства экзаменующихся. Всѣ вновь внесенные параграфы отмѣчены буквой a, чтобы не нарушать нумераціи, и, такимъ образомъ, въ книгѣ осталось попрежнему 150 параграфовъ, несмотря на увеличеніе ея объема по сравненію съ первыми изданіями. Въ теперешнемъ видѣ предлагаемая книга вполнѣ отвѣчаетъ новѣйшимъ экзаменаціоннымъ требованіямъ.

Въ виду совершенно невѣроятнаго вздорожанія бумаги (на 400 % и выше) и типографскихъ работъ (болѣе чѣмъ на 100 %) стоимость книги повышена съ 75 к. до 1 руб. Надѣюсь, что ко времени выхода слѣдующаго изданія г. г. бумажные фабриканты и торговцы будутъ сокращены и окажется возможнымъ вернуться къ прежней цѣнѣ.

Сентябрь 1916 года.

П. Шмулевичъ.

ОТДѢЛЪ I.

Ариѳметическія дѣйствія надъ цѣлыми числами.

ГЛАВА I.

Сложеніе и вычитаніе.

1. ОПРЕДѢЛЕНІЯ. Суммой двухъ или нѣсколькихъ чиселъ (слагаемыхъ) называется число, содержащее столько единицъ, сколько ихъ заключается во всѣхъ данныхъ числахъ, вмѣстѣ взятыхъ.

Сложеніе есть дѣйствіе, при помощи котораго опредѣляется сумма двухъ или нѣсколькихъ чиселъ.

Разностью двухъ чиселъ называется такое третье число, которое будучи прибавлено къ меньшему изъ данныхъ чиселъ (вычитаемому) воспроизводитъ большее (уменьшаемое).

Вычитаніе есть дѣйствіе, при помощи котораго опредѣляется разность двухъ чиселъ.

2. Дѣйствіе сложенія обозначается знакомъ $+$, который произносится *„плюсъ“*; равенство двухъ величинъ обозначается знакомъ $=$, который произносится *„равно“*.

Напр., равенство $a+b=c$ показываетъ, что сумма двухъ чиселъ a и b равна числу c.

Дѣйствіе вычитанія обозначается знакомъ —, который произносится *„минусъ“*. Такъ, напр., равенство $a-b=c$ показываетъ, что разность двухъ чиселъ a и b равна числу c.

Кромѣ знаковъ $+$, —, $=$ полезно замѣтить еще знаки *нера-*

венства $>$ и $<$, которые читаются *больше* и *меньше*. Напр., неравенства

$$a+b>c\ ;\ a-b<d$$

соотвѣтственно показываютъ, что сумма чиселъ a и b больше числа c, и что разность чиселъ a и b меньше d.

3. Если обозначить буквой c разность двухъ чиселъ a и b, то на основанiи опредѣленія понятія о разности (§ 1) можно сказать, что c, будучи прибавлено къ b, дастъ a, т. е. выводимъ заключеніе, что равенства:

$$a-b=c$$

и

$$b+c=a$$

вполнѣ *равносильны* и могутъ замѣнять другъ друга.

Изъ этихъ же равенствъ видно, что *уменьшаемое всегда равно суммѣ вычитаемаго и разности.*

Поэтому можно сказать, что вычитаніе есть дѣйствіе, обратное сложенію: въ немъ по данной суммѣ (уменьшаемому) и одному изъ слагаемыхъ (вычитаемому) находится величина другого слагаемаго (разность).

4. Начала, на которыхъ основывается теорія сложенія и вычитанія.

I. Величина суммы не зависитъ отъ порядка слагаемыхъ.

Справедливость этого начала вполнѣ очевидна, такъ какъ въ какомъ бы порядкѣ ни соединять данныя числа въ общую сумму, число единицъ, заключающихся въ каждомъ изъ слагаемыхъ, остается неизмѣннымъ, а потому и сумма ихъ измѣниться не можетъ.

2. Величина суммы не измѣнится, если разложить данныя числа на нѣсколько отдѣльныхъ частей, сложить эти части однѣ съ другими въ какомъ угодно порядкѣ и полученныя суммы соединить въ одну.

Ясно, что полученный такимъ образомъ результатъ будетъ содержать *всѣ части* данныхъ чиселъ, а потому будетъ ихъ суммой.

Примѣчаніе. Начало это даетъ возможность привести сложеніе двухъ какихъ угодно чиселъ къ сложенію чиселъ, меньшихъ десяти.

3. Если два числа разложены на одно и то-же число частей такъ, что части меньшаго числа не превышаютъ соотвѣтственныхъ частей большаго, то разность этихъ чиселъ равна суммѣ разностей соотвѣтствующихъ частей.

4. Разность двухъ чиселъ не измѣняется отъ увеличенія ихъ обоихъ на одно и то-же число.

Справедливость началъ 3 и 4 непосредственно вытекаетъ изъ сдѣланнаго выше опредѣленія вычитанія.

5. Если надъ невычисленнымъ еще результатомъ какого нибудь дѣйствія хотятъ произвести новое дѣйствіе, то выраженіе, содержащее указаніе перваго дѣйствія, заключаютъ въ скобки, передъ которыми ставятъ знакъ, выражающій второе дѣйствіе.

Такъ, напр., если къ числу a надо прибавить заранѣе вычисленную разность чиселъ b и c, то это можетъ быть обозначено такъ:

$$a + (b - c).$$

Подобнымъ же образомъ выраженіе

$$a - (b + c)$$

показываетъ, что изъ числа a надо вычесть сразу всю сумму чиселъ b и c; также

$$a + (b + c)$$

обозначаетъ, что къ числу a надо прибавить сумму чиселъ b и c и т. д.

6. ЗАМѢЧАНІЕ. Для правильнаго усвоенія дальнѣйшаго курса, очень важно умѣть различать условія, *необходимыя* для существованія какой нибудь истины, отъ условій *достаточныхъ*.

Условіе называется *необходимымъ*, если при невыполненіи его данная истина не имѣетъ мѣста. Такъ, напр.: для того, чтобы изъ числа a можно было вычесть число b, *необходимо*, чтобы a было больше b, такъ какъ въ противномъ случаѣ въ ариѳметикѣ дѣйствіе вычитанія невозможно.

Условіе называется *достаточнымъ*, если при соблюденіи его данная истина имѣетъ мѣсто *безусловно всегда*. Такъ, напр.: для того, чтобы изъ числа a можно было вычесть число b, *достаточно* условіе, чтобы a было больше b, такъ какъ при соблюденіи этого условія всегда *) можно найти разность $a - b$.

Наконецъ, условіе называется *необходимымъ и достаточнымъ*, если оно удовлетворяетъ обоимъ вышеприведеннымъ требованіямъ. Такъ, напр., разсматривая предыдущіе примѣры, можемъ

*) Очевидно рѣчь идетъ объ *отвлеченныхъ* числахъ, такъ какъ, въ случаѣ чиселъ *именованныхъ*, **необходимо** еще, чтобы числа a и b были *однородны*.

сказать: для того, чтобы изъ числа a можно было вычесть число b, *необходимо и достаточно*, чтобы a было больше b.

7. ТЕОРЕМА *). Для того, чтобы прибавить къ числу сумму двухъ или нѣсколькихъ чиселъ, достаточно прибавить послѣдовательно всѣ слагаемыя этой суммы.

Требуется доказать формулу:

$$a+(b+c)=a+b+c?$$

Справедливость этой формулы непосредственно вытекаетъ изъ 2-го начала сложенія (§ 4), такъ какъ на основаніи этого начала можно число $(b+c)$ разложить на отдѣльныя части b и c и сложить послѣдовательно эти части съ числомъ a.

Итакъ:

$$a+(b+c)=a+b+c, \text{ что и тр. док.}$$

8. ТЕОРЕМА. Для того, чтобы прибавить къ числу разность двухъ чиселъ, достаточно прибавить уменьшаемое и вычесть вычитаемое.

Требуется доказать формулу:

$$a+(b-c)=a+b-c?$$

Если-бы мы къ числу a прибавили только b, то получившаяся при этомъ сумма $a+b$ не представляла-бы требуемаго результата, такъ какъ мы къ a прибавили b единицъ, а нужно было прибавить на c единицъ меньше; чтобы исправить сдѣланную такимъ образомъ ошибку, нужно отъ $a+b$ отнять еще c единицъ, что дастъ $a+b-c$.

Итакъ:

$$a+(b-c)=a+b-c, \text{ что и тр. док.}$$

9. ТЕОРЕМА. Для того, чтобы вычесть изъ числа сумму двухъ или нѣсколькихъ чиселъ, достаточно вычесть послѣдовательно каждое изъ слагаемыхъ этой суммы.

Требуется доказать формулу:

$$a-(b+c)=a-b-c?$$

---

*) *Теоремой* называется предложеніе безусловно справедливое, но невполнѣ очевидное, а потому требующее доказательства.

Если бы требовалось изъ числа a вычесть только b, то искомая разность была бы $a-b$; но намъ нужно вычесть на c единицъ больше чѣмъ b, а потому надо отъ разности $a-b$ отнять еще c единицъ.

Итакъ:

$$a-(b+c)=a-b-c, \text{ что и тр. док.}$$

10. ТЕОРЕМА. Для того, чтобы вычесть изъ числа разность двухъ чиселъ, достаточно вычесть уменьшаемое и прибавить вычитаемое.

Требуется доказать формулу:

$$a-(b-c)=a-b+c?$$

Если бы требовалось изъ a вычесть только b, то искомая разность была-бы $a-b$; но намъ нужно вычесть не b, а $b-c$, т. е. на c единицъ меньше, чѣмъ b; поэтому разность $a-b$ будетъ на c единицъ меньше искомой, а слѣд., эта послѣдняя будетъ $a-b+c$.

Итакъ:

$$a-(b-c)=a-b+c, \text{ что и тр. док.}$$

ГЛАВА II.

Умноженіе цѣлыхъ чиселъ.

11. ОПРЕДѢЛЕНІЯ. Умножить величину на цѣлое число значитъ: повторить данную величину слагаемымъ столько разъ, сколько въ этомъ числѣ содержится единицъ и вычислить полученную сумму

Данная величина называется *множимымъ;* число—*множителемъ;* полученная сумма—*произведеніемъ.*

Множимое и множитель называются иногда *производителями* даннаго произведенія.

Умноженіе обозначается знакомъ $\times$ или просто точкой (.). Если числа выражены буквами, то знака умноженія можно и не писать. Напр., a умноженное на b можно писать $a\times b$; или $a\,.\,b$, или, наконецъ, просто ab.

На основаніи сдѣланнаго опредѣленія дѣйствія умноженія цѣлыхъ чиселъ можно написать:

$$a\times b=\underbrace{a+a+a+\,.\,.\,.\,.\,.\,.+a}_{b \text{ разъ}}.$$

12. ТЕОРЕМА. Величина произведенія двухъ чиселъ не измѣнится, если перемѣнить порядокъ производителей.

Требуется доказать, что

$$a \,.\, b = b \,.\, a?$$

Въ самомъ дѣлѣ, умножить a на b значитъ повторить b разъ слагаемымъ число a, или, что одно и то-же, каждую изъ a единицъ, образующихъ число a. Но если каждую изъ единицъ повторить слагаемымъ b разъ, то она обратится въ b; всѣхъ такихъ единицъ было a; итакъ $a \,.\, b = b \,.\, a$.

Можно эту теорему доказать и иначе.

Образуемъ таблицу, состоящую изъ единицъ, расположенныхъ въ b горизонтальныхъ строчкахъ по a единицъ въ каждой:

$$\left.\begin{array}{c} \overbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}^{a \text{ разъ}} \\ 1+1+1+\ldots\ldots+1 \\ 1+1+1+\ldots\ldots+1 \\ 1+1+1+\ldots\ldots+1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 1+1+1+\ldots\ldots+1. \end{array}\right\} b \text{ разъ.}$$

Сумму всѣхъ единицъ, заключающихся въ этой таблицѣ, можно опредѣлить двоякимъ образомъ:

1. Считая по горизонтальнымъ строчкамъ, видимъ, что въ каждой строкѣ заключается a единицъ; всего такихъ строчекъ имѣется b; итакъ, общая сумма равна $a \,.\, b$.

2. Считая по вертикальнымъ столбцамъ, видимъ, что въ каждомъ столбцѣ заключается b единицъ; всего такихъ столбцовъ имѣется a; итакъ, общая сумма равна $b \,.\, a$.

Но мы знаемъ, что величина суммы не зависитъ отъ порядка слагаемыхъ, а потому

$$a \,.\, b = b \,.\, a, \text{ что и тр. док.}$$

13. ТЕОРЕМА. Для того, чтобы умножить сумму двухъ или нѣскольких чиселъ на какое-нибудь число, достаточно каждое изъ слагаемыхъ умножить на то-же число и полученныя произведенія сложить.

Требуется доказать формулу:

$$(a+b) \,.\, c = a \,.\, c + b \,.\, c?$$

На основаніи опредѣленія умноженія (§ 11) можно написать:

$$(a+b) \,.\, c = \underbrace{(a+b)+(a+b)+\ldots\ldots+(a+b)}_{c \text{ разъ}},$$

откуда, вслѣдствіе неизмѣняемости суммы отъ перемѣны мѣстъ слагаемыхъ:

$$(a+b) \cdot c = \underbrace{a+a+\ldots+a}_{c \text{ разъ}} + \underbrace{b+b+\ldots+b}_{c \text{ разъ}},$$

или, наконецъ:

$$(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c, \text{ что и тр. док.}$$

14. Равенство, выведенное въ предыдущемъ параграфѣ:

$$(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

можетъ быть выражено словами еще такъ: *Произведеніе суммы нѣсколькихъ данныхъ чиселъ на какое-нибудь число равняется суммѣ произведеній данныхъ чиселъ на это же число.*

Это же равенство можно переписать такъ:

$$a \cdot c + b \cdot c = (a+b) \cdot c$$

и тогда оно выражаетъ, что *сумма произведеній нѣсколькихъ чиселъ на одно и то-же число равна произведенію суммы этихъ чиселъ на то-же самое число.*

15. ТЕОРЕМА. Для того, чтобы умножить число на сумму нѣсколькихъ чиселъ, достаточно умножить его отдѣльно на каждое слагаемое и результаты сложить.

Требуется доказать, что

$$c \cdot (a+b) = c \cdot a + c \cdot b?$$

Мы знаемъ, что величина произведенія двухъ чиселъ не измѣняется отъ перестановки производителей (§ 12), а потому формула

$$(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

можетъ быть переписана такъ:

$$c \cdot (a+b) = c \cdot a + c \cdot b, \text{ что и тр. док.}$$

16. ТЕОРЕМА. Для того, чтобы умножить разность на какое-нибудь число, достаточно умножить на это число отдѣльно уменьшаемое и вычитаемое и вычесть второе произведеніе изъ перваго.

Требуется доказать формулу:

$$(a-b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c?$$

Пусть $a - b = d$; тогда (§ 3) $a = b + d$.

Умножаемъ обѣ части послѣдняго равенства на c.

$$a \,.\, c = (b + d) \,.\, c = b \,.\, c + d \,.\, c;$$

отсюда заключаемъ (§ 3), что

$$d \,.\, c = a \,.\, c - b \,.\, c$$

или, подставляя вмѣсто d его значеніе $a - b$:

$$(a - b) \,.\, c = a \,.\, c - b \,.\, c, \text{ что и тр. док.}$$

17. Равенство, выведенное въ предыдущемъ параграфѣ:

$$(a - b) \,.\, c = a \,.\, c - b \,.\, c$$

можетъ быть выражено словами еще такъ: *Произведеніе разности двухъ чиселъ на какого-нибудь множителя равно разности произведеній этихъ чиселъ на того-же множителя.*

Это же равенство можетъ быть переписано такъ:

$$a \,.\, c - b \,.\, c = (a - b) \,.\, c$$

и тогда оно выражаетъ, что *разность произведеній двухъ чиселъ на одного и того же множителя равна произведенію разности этихъ чиселъ на того-же множителя.*

18. ТЕОРЕМА. Для того, чтобы умножить число на разность достаточно умножить его порознь на уменьшаемое и на вычитаемое и изъ перваго результата вычесть второй.

Требуется доказать формулу:

$$c \,.\, (a - b) = c \,.\, a - c \,.\, b?$$

Формула эта получается непосредственно изъ только что выведенной формулы:

$$(a - b) \,.\, c = a \,.\, c - b \,.\, c,$$

принимая во вниманіе теорему о неизмѣняемости произведенія двухъ чиселъ отъ перестановки производителей (§ 12).

19. *Произведеніемъ нѣсколькихъ чиселъ* называется результатъ, который получится, если умножить первое изъ чиселъ на второе, полученное произведеніе на третье, это произведеніе на четвертое и т. д., до тѣхъ поръ, пока не дойдемъ до послѣдняго числа.

Такимъ образомъ, произведеніе чиселъ a, b, c, d есть результатъ, который найдемъ, если умножимъ a на b, найденное произведенiе умножимъ на c и это новое произведенiе на d.

Обозначается это дѣйствiе слѣдующимъ образомъ:

$$a \times b \times c \times d, \text{ или } a \,.\, b \,.\, c \,.\, d$$

и читается такъ: *a, умноженное на b, умноженное на c, умноженное на d.*

Числа a, b, c, d называются *производителями* или *сомножителями* даннаго произведенiя.

Если произведенiе нѣсколькихъ сомножителей заключено въ скобки, то оно разсматривается, какъ *одинъ* множитель. Такъ напр., произведенiе

$$a \,.\, b \,.\, (c \,.\, d) \,.\, e$$

представляетъ произведенiе не пяти, а всего четырехъ множителей, причемъ вычисленный результатъ произведенiя $(c \,.\, d)$ надо считать третьимъ множителемъ.

20. Нетрудно убѣдиться, что, *если скобки стоятъ* **въ началѣ** *произведенiя, то онѣ могутъ быть отброшены безъ всякаго измѣненiя въ послѣдовательномъ ходѣ дѣйствiя.* Въ самомъ дѣлѣ, напр., каждое изъ произведенiй

$$(a \,.\, b) \,.\, c \,.\, d; \quad (a \,.\, b \,.\, c) \,.\, d; \quad a \,.\, b \,.\, c \,.\, d$$

означаетъ одно и то-же: a умножается на b, полученное произведенiе на c и это произведенiе на d.

Отсюда можно вывести слѣдующее очень важное для дальнѣйшаго изложенiя заключенiе:

Въ произведенiи какого угодно числа сомножителей можно, не нарушая послѣдовательнаго хода дѣйствiя, произвольное число множителей, **начиная съ перваго,** *заключать въ скобки, т. е. разсматривать, какъ одинъ множитель.*

И наоборотъ:

Скобки заключающiя сколько угодно сомножителей, **начиная съ перваго,** *могутъ быть отброшены безъ всякаго влiянiя на послѣдовательный ходъ дѣйствiя.*

Примѣчанiе. Нетрудно убѣдиться, что заключенiе въ скобки нѣсколькихъ множителей (**не начиная съ перваго** изъ нихъ) измѣняетъ послѣдовательный ходъ вычисленiя и потому до доказательства теоремы § 25 не можетъ быть допустимо.

Въ самомъ дѣлѣ, разсматривая, напр., произведенiя:

$$a \,.\, b \,.\, c \,.\, d \text{ и } a \,.\, (b \,.\, c) \,.\, d,$$

видимъ, что въ первомъ случаѣ a умножается сперва на b, а полученный результатъ на c, тогда какъ во второмъ случаѣ a умножается непосредственно на вычисленное уже заранѣе произведенiе $(b \,.\, c)$, что, пока не доказано противное, не можетъ считаться за одно и то-же.

21. ТЕОРЕМА. Величина произведенія какого угодно числа множителей не измѣняется отъ перестановки производителей въ каномъ угодно порядкѣ.

Доказательство этой важной теоремы раздѣляется на шесть послѣдовательныхъ частей.

I. Произведеніе **двухъ** *множителей не мѣняется отъ ихъ перестановки,*

т. е. $a \,.\, b = b \,.\, a.$

Теорема эта была уже доказана (§ 12).

Кромѣ двухъ общеизвѣстныхъ доказательствъ этой теоремы, приведенныхъ въ § 12, существуетъ еще слѣдующее, не лишенное интереса доказательство, принадлежащее извѣстному французскому геометру Лежандру:

Если a равно b, то, очевидно, что $a \,.\, b = b \,.\, a$; поэтому пусть, напр., a больше b, и пусть разность $a - b = c$, т. е. $a = b + c$.

Тогда имѣемъ:

$$a \,.\, b = (b + c) \,.\, b = b \,.\, b + c \,.\, b \qquad \text{(I)}$$
$$b \,.\, a = b \,.\, (b + c) = b \,.\, b + b \,.\, c. \qquad \text{(II)}$$

Если намъ удастся доказать, что для двухъ чиселъ b и c, *меньшихъ чѣмъ* a, произведеніе $c \,.\, b = b \,.\, c$, то изъ равенствъ (I) и (II) будетъ доказано, что $a \,.\, b = b \,.\, a$. Но при $b = 1$ и $c = 1$ произведенія bc и cb очевидно равны; слѣд., на основаніи равенствъ (I) и (II) теорема доказана для чиселъ 2 и 1; слѣд. и для чиселъ 3 и 2 . . . . и вообще для какихъ угодно чиселъ.

II. Произведеніе **трехъ** *множителей не измѣняется отъ перестановки двухъ послѣднихъ.*

Требуется доказать:

$$a \,.\, b \,.\, c = a \,.\, c \,.\, b?$$

Напишемъ такую таблицу:

$$\left.\begin{array}{c} \overbrace{}^{b\ \text{разъ}} \\ a + a + a + \ldots\ldots + a \\ a + a + a + \ldots\ldots + a \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a + a + a + \ldots\ldots + a \end{array}\right\} c\ \text{разъ}$$

Въ этой таблицѣ число слагаемыхъ въ каждой горизонтальной строкѣ равно b, а число такихъ строкъ c.

Сумму всѣхъ чиселъ, помѣщенныхъ въ этой таблицѣ, можно найти двоякимъ образомъ:

1) Складывая по горизонтальнымъ строчкамъ, находимъ, что сумма чиселъ, написанныхъ въ каждой строкѣ, равна $a \,.\, b$;

такъ какъ число всѣхъ такихъ строкъ равно c, то общая сумма всѣхъ чиселъ, написанныхъ въ этой таблицѣ, есть:

$$a \,.\, b \,.\, c.$$

2) Складывая по вертикальнымъ столбцамъ, находимъ, что сумма чиселъ, написанныхъ въ каждомъ столбцѣ, равна $a \,.\, c$; такъ какъ число всѣхъ такихъ столбцовъ есть b, то общая сумма всѣхъ чиселъ въ таблицѣ есть:

$$a \,.\, c \,.\, b.$$

На основанiи закона объ неизмѣняемости суммы отъ перемѣны порядка слагаемыхъ (§ 4) заключаемъ, что обѣ полученныя суммы равны, т. е.

$$a \,.\, b \,.\, c = a \,.\, c \,.\, b, \text{ что и тр. док.}$$

III. Произведенiе какого угодно числа множителей не измѣняется отъ перестановки двухъ послѣднихъ изъ нихъ.

Требуется доказать:

$$a \,.\, b \,.\, c \,.\, .\, .\, .\, k \,.\, l \,.\, n = a \,.\, b \,.\, c \,.\, .\, .\, .\, k \,.\, n \,.\, l?$$

Такъ какъ произведенiе сколькихъ угодно множителей, начиная съ перваго, можно заключать въ скобки, т. е. разсматривать, какъ одинъ множитель (§ 20), то этотъ случай приводится къ предыдущему слѣдующимъ образомъ:

$$a \,.\, b \,.\, c \,.\, .\, .\, .\, k \,.\, l \,.\, n = (a \,.\, b \,.\, c \,.\, .\, .\, .\, k) \,.\, l \,.\, n,$$

послѣ чего получается произведенiе трехъ множителей:

$$1)\ (a \,.\, b \,.\, c \,.\, .\, .\, .\, k),\ 2)\ l,\ 3)\ n,$$

что по предыдущему можетъ быть переписано такъ:

$$(a \,.\, b \,.\, c \,.\, .\, .\, .\, k) \,.\, n \,.\, l.$$

Итакъ:

$$a \,.\, b \,.\, c \,.\, .\, .\, .\, k \,.\, l \,.\, n = (a \,.\, b \,.\, c \,.\, .\, .\, .\, k) \,.\, n \,.\, l =$$

$$= a \,.\, b \,.\, c \,.\, .\, .\, .\, k \,.\, n \,.\, l, \text{ что и тр. док.}$$

IV. Произведенiе какого угодно числа множителей не измѣняется отъ перестановки двухъ первыхъ.

Требуется доказать:

$$a \,.\, b \,.\, c \,.\, d \,.\, .\, .\, .\, k = b \,.\, a \,.\, c \,.\, d \,.\, .\, .\, .\, k?$$

На основанiи § 20 пишемъ:

$a \,.\, b \,.\, c \,.\, d \,.\, .\, .\, .\, k = (a \,.\, b) \,.\, c \,.\, d \,.\, .\, .\, .\, k$ (или на основанiи § 12) $= (b \,.\, a) \,.\, c \,.\, d \,.\, .\, .\, .\, k = b \,.\, a \,.\, c \,.\, d \,.\, .\, .\, .\, k$, что и тр. док.

.V Произведенiе какого угодно числа множителей не измѣняется отъ перестановки двухъ смежныхъ множителей.

Требуется доказать:

$$a\,.\,b\,.\,c\,.\,.\,.\,.\,.\,k\,.\,l\,.\,m\,.\,n = a\,.\,b\,.\,c\,.\,.\,.\,.\,.\,l\,.\,k\,.\,m\,.\,n?$$

Заключаемъ въ скобки столько членовъ, начиная съ перваго (§ 20), чтобы послѣдними множителями въ этихъ скобкахъ оказались тѣ два множителя, которые требуется помѣнять мѣстами, послѣ чего на основанiи III части доказываемой теоремы, получимъ то, что требуется доказать:

$a\,.\,b\,.\,c\,.\,.\,.\,.\,.\,k\,.\,l\,.\,m\,.\,n = (a\,.\,b\,.\,c\,.\,.\,.\,.\,.\,k\,.\,l)\,.\,m\,.\,n =$ $= (a\,.\,b\,.\,c\,.\,.\,.\,.\,.\,l\,.\,k)\,.\,m\,.\,n = a\,.\,b\,.\,c\,.\,.\,.\,.\,.\,l\,.\,k\,.\,m\,.\,n$, что и тр. док.

VI. Произведенiе какого угодно числа множителей не измѣняется отъ перестановки производителей въ какомъ угодно порядкѣ.

Въ самомъ дѣлѣ, разсмотримъ произведенiе, множители котораго написаны въ нѣкоторомъ опредѣленномъ порядкѣ. Такъ какъ каждый множитель можно мѣнять мѣстами со смежнымъ, то, взявъ какого нибудь изъ множителей, можно переставить его на одно мѣсто вправо или влѣво, потомъ передвинуть его въ желаемомъ направленiи еще на одно мѣсто, потомъ еще на одно и т. д., пока, наконецъ, онъ не займетъ желаемаго мѣста; то-же можно сдѣлать со всякимъ другимъ, третьимъ и т. д. производителемъ, до тѣхъ поръ, пока всѣ они не будутъ размѣщены въ желательномъ порядкѣ.

22. ТЕОРЕМА. Для того, чтобы умножить произведенiе скольких угодно множителей на какое нибудь число, достаточно умножить одного изъ производителей на это число.

Требуется доказать:

$$(a\,.\,b\,.\,c\,.\,d)\,.\,N = (a\,.\,N)\,.\,b\,.\,c\,.\,d = a\,.\,(b\,.\,N)\,.\,c\,.\,d =$$
$$= a\,.\,b\,.\,(c\,.\,N)\,.\,d = a\,.\,b\,.\,c\,.\,(d\,.\,N)?$$

Доказательство основано на замѣчанiи § 20 и теоремѣ § 21. Въ самомъ дѣлѣ, на основанiи указанныхъ правилъ можемъ послѣдовательно писать:

$$(a\,.\,b\,.\,c\,.\,d)\,.\,N = a\,.\,b\,.\,c\,.\,d\,.\,N = a\,.\,N\,.\,b\,.\,c\,.\,d =$$
$$= (a\,.\,N)\,.\,b\,.\,c\,.\,d,$$

т. е. умножился множитель a, оставшись на своемъ первоначальномъ мѣстѣ.

Или еще такъ:

$$(a \,.\, b \,.\, c \,.\, d) \,.\, N = a \,.\, b \,.\, c \,.\, d \,.\, N = b \,.\, N \,.\, a \,.\, c \,.\, d =$$
$$= (b \,.\, N) \,.\, a \,.\, c \,.\, d = a \,.\, (b \,.\, N) \,.\, c \,.\, d,$$

т. е. умножился множитель b, оставшись на томъ же мѣстѣ.

Или, наконецъ, такъ:

$$(a \,.\, b \,.\, c \,.\, d) \,.\, N = a \,.\, b \,.\, c \,.\, d \,.\, N = c \,.\, N \,.\, a \,.\, b \,.\, d =$$
$$= (c \,.\, N) \,.\, a \,.\, b \,.\, d = a \,.\, b \,.\, (c \,.\, N) \,.\, d,$$

т. е. умножился множитель c, оставшись на своемъ первоначальномъ мѣстѣ и т. д.

23. ТЕОРЕМА. Для того, чтобы умножить число на произведеніе скольких угодно множителей, достаточно умножить его послѣдовательно на каждаго изъ нихъ.

Требуется доказать:

$$N \,.\, (a \,.\, b \,.\, c \,.\, d) = N \,.\, a \,.\, b \,.\, c \,.\, d?$$

Доказательство основано на теоремѣ § 21.

Въ самомъ дѣлѣ, разсматривая $N \,.\, (a \,.\, b \,.\, c \,.\, d)$ какъ произведеніе двухъ множителей N и $(a \,.\, b \,.\, c \,.\, d)$, можемъ писать послѣдовательно такъ:

$$N \,.\, (a \,.\, b \,.\, c \,.\, d) = (a \,.\, b \,.\, c \,.\, d) \,.\, N = a \,.\, b \,.\, c \,.\, d \,.\, N =$$
$$= N \,.\, a \,.\, b \,.\, c \,.\, d, \text{ что и тр. док.}$$

24. ТЕОРЕМА. Для того, чтобы умножить произведеніе какого угодно числа множителей на нѣкоторое другое произведеніе, достаточно составить новое произведеніе изъ всѣхъ множителей, входящихъ въ оба данныя.

Требуется доказать:

$$(a \,.\, b \,.\, c \,.\, d) \,.\, (m \,.\, n \,.\, p) = a \,.\, b \,.\, c \,.\, d \,.\, m \,.\, n \,.\, p?$$

Разсматривая $(a \,.\, b \,.\, c \,.\, d)$ какъ нѣкоторое число, можемъ на основаніи предыдущей теоремы написать:

$$(a \,.\, b \,.\, c \,.\, d) \,.\, (m \,.\, n \,.\, p) = (a \,.\, b \,.\, c \,.\, d) \,.\, m \,.\, n \,.\, p =$$
$$= a \,.\, b \,.\, c \,.\, d \,.\, m \,.\, n \,.\, p, \text{ что и тр. док.}$$

25. ТЕОРЕМА. Во всякомъ произведеніи можно сколько угодно сомножителей замѣнить вычисленной величиной ихъ произведенія.

Докажемъ, напр., что въ произведеніи

$$a \,.\, b \,.\, c \,.\, d \,.\, e \,.\, f$$

можно множители c, e, f замѣнить ихъ вычисленнымъ заранѣе произведенiемъ $(c \cdot e \cdot f)$,

$$\text{т. е. что } a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e \cdot f = a \cdot b \cdot (c \cdot e \cdot f) \cdot d?$$

Доказательство этой теоремы основано на томъ соображенiи, что если бы производители, о которыхъ идетъ рѣчь (въ данномъ случаѣ c, e, f), стояли *на первомъ мѣстѣ*, то предложенiе было бы очевидно на основанiи § 20. Но зная, что произведенiе не мѣняется отъ перестановки сомножителей въ какомъ угодно порядкѣ (§ 21), мы можемъ нужные производители поставить на первое мѣсто, заключить ихъ въ скобки (§ 20) и перенести полученное произведенiе, разсматриваемое уже, какъ одинъ множитель, на какое угодно мѣсто.

Итакъ:

$$a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e \cdot f = c \cdot e \cdot f \cdot a \cdot b \cdot d = (c \cdot e \cdot f) \cdot a \cdot b \cdot d =$$
$$= a \cdot (c \cdot e \cdot f) \cdot b \cdot d, \text{ или } = a \cdot b \cdot (c \cdot e \cdot f) \cdot d, \text{ или}$$
$$= a \cdot b \cdot d \cdot (c \cdot e \cdot f), \text{ что и тр. док.}$$

26. ОПРЕДѢЛЕНIЯ. *Квадратомъ или второй степенью* числа называется произведенiе двухъ множителей, равныхъ данному числу.

Кубомъ или третьей степенью числа называется произведенiе трехъ множителей, равныхъ данному числу.

Вообще, n-овой степенью числа называется произведенiе n множителей, равныхъ этому числу.

Число, показывающее, сколько разъ данное число умножается на самого себя, называется *показателемъ степени.*

Для изображенiя степени существуетъ особое знакоположенiе: пишутъ данное число и надъ нимъ ставятъ сверху съ правой стороны показателя степени. Такъ напр., a^5 означаетъ a *въ пятой степени* и равно на основанiи опредѣленiя произведенiю пяти множителей, равныхъ a.

27. ТЕОРЕМА. Произведенiе степеней одного и того-же числа есть степень того-же числа, показатель которой равенъ суммѣ показателей данныхъ степеней.

Требуется доказать:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}?$$

На основаніи опредѣленія степени числа и теоремы о перемноженіи двухъ произведеній (§ 24) можно написать:

$$a^m \,.\, a^n = \overbrace{(a \,.\, a \,.\, a \,.\, \ldots \,.\, a)}^{m \text{ разъ}} \,.\, \overbrace{(a \,.\, a \,.\, a \,.\, \ldots \,.\, a)}^{n \text{ разъ}} =$$

$$= \overbrace{a \,.\, a \,.\, a \,.\, a \,.\, \ldots \,.\, a}^{m+n \text{ разъ}} = a^{m+n},$$ что и тр. док.

ГЛАВА III.

Дѣленіе цѣлыхъ чиселъ.

28. ОПРЕДѢЛЕНІЯ. Раздѣлить цѣлое число на другое цѣлое значитъ: или составить изъ перваго числа столько равныхъ частей, сколько во второмъ содержится единицъ, и вычислить величину каждой части, или-же узнать, сколько разъ второе число содержится въ первомъ.

Число, которое дѣлимъ, называется *дѣлимымъ;* число, на которое дѣлимъ—*дѣлителемъ,* полученный отъ дѣленія результатъ—*частнымъ.*

Дѣленіе обозначается обыкновенно двоеточіемъ (:), которое произносится *„дѣленное на“*. Напр. $a : b$ читается: *a, дѣленное на b.*

29. Такъ какъ для дѣйствія дѣленія дано *двоякое опредѣленіе,* то необходимо разъяснить оба эти случая.

Положимъ, во-первыхъ, что требуется раздѣлить a на b равныхъ частей и опредѣлить величину каждой части *).

Въ этомъ случаѣ число a состоитъ изъ b равныхъ, но пока еще неизвѣстныхъ частей.

Если бы мы знали величину каждой части, то, очевидно, взявъ ее b разъ, мы получили бы число a. Другими словами, *умножая частное на дѣлителя, мы получимъ дѣлимое.*

Итакъ, въ первомъ случаѣ дѣленія *дѣлимое есть произведеніе, въ которомъ* **дѣлитель** *есть* **множитель,** *а искомое* **частное—множимое.**

Положимъ, во вторыхъ, что требуется опредѣлить, сколько разъ число b *содержится* **) въ числѣ a.

---

*) Задача *дѣленія на части.*

**) Задача дѣленія *въ смыслѣ содержанія.*

Въ этомъ случаѣ, число a состоитъ изъ неизвѣстнаго числа частей, каждая изъ которыхъ равна b.

Если бы число этихъ частей было найдено, то, повторивъ число b слагаемымъ столько разъ, сколько въ этомъ найденномъ числѣ содержится единицъ, мы получили бы, очевидно, опять число a.

Другими словами, *умножая дѣлителя на найденное частное, получимъ дѣлимое.*

Итакъ, во второмъ случаѣ дѣленія, *дѣлимое есть произведеніе, въ которомъ* **дѣлитель** *есть* **множимое**, *а искомое частное* — **множитель**.

30. Сопоставляя сказанное въ предыдущемъ параграфѣ относительно обоихъ случаевъ дѣленія, можно вывести заключеніе:

Дѣленіе есть дѣйствіе обратное умноженію: при помощи его по данной величинѣ произведенія двухъ чиселъ (дѣлимое) и одному изъ производителей (дѣлитель), находятъ величину другого производителя (частное).

Послѣднее опредѣленіе представляетъ то удобство, что даетъ возможность привести оба случая дѣленія къ одному.

Въ самомъ дѣлѣ, выше было уже доказано, что, не измѣняя величины произведенія двухъ чиселъ, безразлично какое изъ нихъ принять за множимое и какое за множитель (§ 12). Слѣдовательно, при дѣленіи двухъ чиселъ *всегда можно разсматривать дѣлителя, какъ множимое, а искомое частное, какъ множителя даннаго произведенія (дѣлимаго).*

Поэтому можно сказать, что *раздѣлить—значитъ всегда узнать сколько разъ дѣлитель содержится въ дѣлимомъ.*

Приводя такимъ образомъ первый случай дѣленія ко второму, мы *измѣняемъ смыслъ дѣйствія, но частное въ обоихъ случаяхъ дѣленія остается неизмѣннымъ,* а насъ только это и интересуетъ.

31. Раздѣляя одно число на другое, напр. a на b, мы не всегда найдемъ такое цѣлое число, произведеніе котораго на дѣлителя въ точности равно дѣлимому. Въ этомъ случаѣ мы будемъ искать два послѣдовательныхъ *) цѣлыхъ числа q и $q+1$, такихъ, чтобы произведеніе $q \,.\, b$ было меньше дѣлимаго a, а

*) Т. е. отличающихся одно отъ другого на одну единицу.

произведенiе $(q+1) \cdot b$ было-бы больше a, т. е. числа эти q и $q+1$ должны удовлетворять неравенству:

$$q \cdot b < a < (q+1) \cdot b.$$

Числа q и $q+1$, удовлетворяющiя такому условiю, называются *значенiями частнаго съ точностью до единицы,* причемъ число q представляетъ *недостаточное,* число же $q+1$—*избыточное* значенiе частнаго.

Недостаточное значенiе частнаго называется также *цѣлой частью частнаго отъ дѣленiя a на b.*

Итакъ, можно сдѣлать слѣдующее **опредѣленiе:**

Цѣлой частью частнаго отъ дѣленiя a на b называется наибольшее цѣлое число, произведенiе котораго на дѣлителя меньше дѣлимаго.

Напр., если требуется раздѣлить 39 на 5, то, зная, что

$$5 \cdot 7 < 39 < 5 \cdot 8,$$

заключаемъ, что *цѣлая часть частнаго* отъ искомаго дѣленiя равна 7.

Также цѣлая часть частнаго отъ дѣленiя 95 на 11 равна 8 и т. д.

32. Положимъ, требуется раздѣлить a на b, и пусть цѣлая часть частнаго отъ этого дѣленiя равна q.

То-же самое частное q мы получили-бы, если-бы требовалось раздѣлить на b не число a, а число $q \cdot b$, меньшее по условiю, чѣмъ a.

Отсюда видно, что для полученiя цѣлой части частнаго, мы дѣлимъ на дѣлителя b какъ-бы не все дѣлимое a, но лишь часть его, равную $q \cdot b$, и что нѣкоторая часть числа a, равная разности $(a-q \cdot b)$, остается не раздѣленной на b; эта часть дѣлимаго называется *остаткомъ отъ дѣленiя a на b.*

Назвавъ этотъ остатокъ буквой r, имѣемъ:

$$a-q \cdot b=r,$$

откуда, на основанiи опредѣленiя дѣйствiя вычитанiя, получаемъ (§ 3):

$$a=q \cdot b+r,$$

что даетъ слѣдующую важную зависимость:

Дѣлимое равно произведенiю дѣлителя на цѣлую часть частнаго плюсъ остатокъ *).

---

*) Въ частномъ случаѣ, когда дѣленiе a на b можетъ быть выполнено безъ остатка, говорятъ, что остатокъ *равенъ нулю.*

33. Нетрудно убѣдиться, что **остатокъ отъ дѣленія всегда меньше дѣлителя.**

Въ самомъ дѣлѣ, пусть цѣлая часть частнаго отъ дѣленія a на b равна q, и пусть остатокъ отъ этого дѣленія равенъ r.

Тогда по опредѣленію (§ 31) имѣемъ:

$$q \cdot b < a < (q+1) \cdot b.$$

Разсмотримъ двѣ разности:

$$a - q \cdot b \text{ и } (q+1) \cdot b - q \cdot b.$$

Такъ какъ вычитаемыя въ обѣихъ разностяхъ равны, то меньшей изъ нихъ будетъ та, въ которой уменьшаемое меньше, т. е.

$$a - q \cdot b < (q+1) \cdot b - q \cdot b;$$

но первая изъ этихъ разностей $(a - q \cdot b)$ равна r, вторая-же

$$(q+1) \cdot b - q \cdot b = q \cdot b + b - q \cdot b = b;$$

итакъ $r < b$, что и тр. док.

34. Принимая во вниманіе зависимости, выведенныя въ §§ 31—33, можемъ заключить, что если у насъ существуетъ равенство вида

$$M = N \cdot k + P,$$

гдѣ M, N, k, P суть произвольныя цѣлыя числа, причемъ P меньше чѣмъ N, то при дѣленіи M на N получится частное k и остатокъ отъ дѣленія P; и вообще, **если какое либо число можетъ быть представлено въ видѣ суммы двухъ слагаемыхъ, причемъ первое слагаемое дѣлится на какого-нибудь дѣлителя, а второе— меньше его, то частное отъ дѣленія даннаго числа на этого дѣлителя будетъ равно частному отъ дѣленія на него-же перваго слагаемаго, а остатокъ будетъ равенъ второму.**

35. Для удобства дальнѣйшаго изложенія введемъ слѣдующія условныя обозначенія. Будемъ сокращенно обозначать цѣлую часть частнаго отъ дѣленія a на b слѣдующимъ образомъ:

$$\textit{част.}\ (a : b);$$

остатокъ отъ того-же дѣленія:

$$\textit{ост.}\ (a : b).$$

Кромѣ того, условимся обозначать *символомъ*

$$\left(\frac{a}{b}\right)$$

частное отъ дѣленія a на b *въ томъ случаѣ, если дѣленіе это можетъ быть выполнено безъ остатка* *).

36. ТЕОРЕМА. Если дѣлимое и дѣлитель умножить на одно и то-же число, то частное не измѣнится, а остатокъ умножится на то-же число.

Пусть, напр.:

Дано: част. $(a:b)=q$; *ост.* $(a:b)=r$.

Треб. док.: част. $(ac:bc)=q$; *ост.* $(ac:bc)=r\,.\,c$?

По условію теоремы можемъ написать (§ 32):

$$a=b\,.\,q+r \qquad (1)$$

Умноживъ обѣ части равенства на число c, **) получаемъ:

$$a\,.\,c=(b\,.\,q+r)\,.\,c=(b\,.\,q)\,.\,c+r\,.\,c=(b\,.\,c)\,.\,q+r\,.\,c \qquad (2).$$

Равенство это показываетъ, что число $(a\,.\,c)$ можетъ быть разложено на два слагаемыхъ, изъ которыхъ первое $(b\,.\,c)\,.\,q$ при дѣленіи на $(b\,.\,c)$ даетъ частное q, а второе слагаемое $r\,.\,c$ меньше $b\,.\,c$, такъ какъ $r<b$; отсюда, на основаніи § 34, заключаемъ, что если $a\,.\,c$ раздѣлить на $b\,.\,c$, то получится частное q и остатокъ $r\,.\,c$, что и тр. док.

37. Какъ изъ равенства (1) предыдущаго параграфа вытекаетъ равенство (2), такъ и наоборотъ, изъ равенства (2) можно получить (1). Отсюда слѣдуетъ **ТЕОРЕМА:**

Если дѣлимое и дѣлитель раздѣлить на одно и то-же число, (предполагая, что такое дѣленіе выполняется безъ остатка), **то частное не измѣнится, а остатокъ раздѣлится на то-же число.**

38. ЛЕММА *). Для того, чтобы раздѣлить произведеніе нѣсколькихъ множителей на одного изъ нихъ, достаточно этого множителя уничтожить въ произведеніи.**

---

*) Надо имѣть въ виду, что $\left(\frac{a}{b}\right)$ означаетъ пока *только символъ выполненнаго дѣленія* a на b, и ни въ какомъ случаѣ не должно быть смѣшиваемо съ понятіемъ о дроби.

**) Очевидно, отъ этого равенство не нарушится, такъ какъ, если $A=B$, то и $A\,.\,C=B\,.\,C$, ибо, если всѣ слагаемыя одной суммы равны слагаемымъ другой суммы, то и суммы равны.

***) Такъ называется вспомогательная теорема, нужная для того, чтобы доказать другую, болѣе важную теорему. Такъ, напр., при доказательствѣ теоремы о неизмѣняемости произведенія (§ 21) можно было первыя 5 частей доказательства выдѣлить въ особыя леммы.

Требуется доказать:

$$(a\,.\,b\,.\,c\,.\,d\,.\,e):d=a\,.\,b\,.\,c\,.\,e?$$

Въ самомъ дѣлѣ, произведенiе $a\,.\,b\,.\,c\,.\,d\,.\,e$ можно представить такъ:

$$a\,.\,b\,.\,c\,.\,d\,.\,e=d\,.\,(a\,.\,b\,.\,c\,.\,e).$$

Первую часть этого равенства можно разсматривать, какъ дѣлимое, а вторую часть, какъ произведенiе дѣлителя (d) на частное ($a\,.\,b\,.\,c\,.\,e$). Итакъ:

$$(a\,.\,b\,.\,c\,.\,d\,.\,e):d=a\,.\,b\,.\,c\,.\,e,$$

что и тр. док.

39. ТЕОРЕМА. Для того, чтобы раздѣлить произведенiе на данное число, достаточно раздѣлить на это число одного изъ сомножителей. *(Предполагая, что дѣленiе выполняется безъ остатка).*

Пусть, напр., имѣемъ произведенiе $a\,.\,b\,.\,c\,.\,d\,.\,e$, причемъ извѣстно, что b дѣлится нацѣло на n; требуется доказать:

$$(a\,.\,b\,.\,c\,.\,d\,.\,e):n=a\,.\left(\frac{b}{n}\right).\,c\,.\,d\,.\,e?$$

Если частное отъ дѣленiя b на n назовемъ буквой q, такъ что

$$b:n=q,\ \text{то}\ b=q\,.\,n.$$

Слѣдовательно,

$$(a\,.\,b\,.\,c\,.\,d\,.\,e):n=(a\,.\,q\,.\,n\,.\,c\,.\,d\,.\,e):n,$$

что на основанiи предыдущей леммы $=a\,.\,q\,.\,c\,.\,d\,.\,e$.

Замѣняя здѣсь q его значенiемъ $\left(\frac{b}{n}\right)$, получаемъ:

$$(a\,.\,b\,.\,c\,.\,d\,.\,e):n=a\,.\left(\frac{b}{n}\right).\,c\,.\,d\,.\,e,\ \text{что и тр. док.}$$

40. ТЕОРЕМА. Для того, чтобы раздѣлить данное число на произведенiе нѣсколькихъ множителей, достаточно раздѣлить его на перваго множителя, цѣлую часть полученнаго частнаго на второго множителя, цѣлую часть этого частнаго на третьяго и т. д., пока не раздѣлимъ послѣдовательно на всѣхъ множителей. Частное, полученное отъ послѣдняго дѣленiя, будетъ равно цѣлой части частнаго отъ непосредственнаго раздѣленiя даннаго числа на все произведенiе.

Подраздѣлимъ доказательство этой теоремы на два случая данное произведенiе состоитъ I) всего изъ двухъ множителей, II) изъ произвольнаго числа множителей.

I. Пусть требуется раздѣлить число N на произведенiе $a \,.\, b$.

Дѣлимъ N на a, и пусть

$$\textit{част.}\ (N:a)=q_1;\ \textit{ост.}\ (N:a)=r_1;$$

тогда

$$N=a\,.\,q_1+r_1\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (1)$$

Дѣлимъ q_1 на b, и пусть

$$\textit{част.}\ (q_1:b)=q_2;\ \textit{ост.}\ (q_1:b)=r_2;$$

тогда

$$q_1=b\,.\,q_2+r_2\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (2)$$

Замѣняя въ равенствѣ (1) значенiе q_1 величиной, вычисленной изъ (2), получаемъ:

$$N=a\,.\,(b\,.\,q_2+r_2)+r_1=a\,.\,b\,.\,q_2+a\,.\,r_2+r_1.$$

Обозначая сумму $a\,.\,r_2+r_1$ буквой k, переписываемъ послѣднее равенство такъ:

$$N=(a\,.\,b)\,.\,q_2+k\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (3)$$

Разсмотримъ, каково *наибольшее* возможное значенiе числа k.

Для этого въ равенство

$$k=a\,.\,r_2+r_1$$

надо подставить вмѣсто r_2 и r_1 ихъ наибольшiя возможныя значенiя. Но r_2, какъ остатокъ отъ дѣленiя на b, всегда меньше b, такъ что наибольшее возможное его значенiе равно $b-1$; также наибольшее возможное значенiе для r_1 равно $a-1$, ибо $r_1 < a$. Итакъ, изъ всѣхъ возможныхъ значенiй k наибольшее есть:

$$k=a\,.\,(b-1)+(a-1)=a\,.\,b-a+a-1=a\,.\,b-1,$$

т. е. во всякомъ случаѣ $k < a\,.\,b$.

Равенство (3) показываетъ теперь, что число N можетъ быть разложено на два слагаемыхъ: $(a\,.\,b)\,.\,q_2$, которое дѣлится нацѣло на произведенiе $a\,.\,b$, давая въ частномъ q_2, и другое слагаемое $k < a\,.\,b$. На основанiи § 34 заключаемъ, что при дѣленiи N на произведенiе $a\,.\,b$ цѣлая часть частнаго будетъ равна q_2, т. е. равна цѣлой части частнаго отъ послѣдовательнаго дѣленiя N на a и на b, что и тр. док.

II. Пусть теперь требуется раздѣлить N на произведенiе произвольнаго числа множителей напр. $a\,.\,b\,.\,c\,.\,d$.

Разсматривая $a\,.\,b\,.\,c\,.\,d$, какъ произведенiе изъ двухъ множителей: $a \,.\, (b \,.\, c \,.\, d)$ (§ 25), мы можемъ на основанiи только что доказаннаго дѣлить сперва N на a и полученное частное q_1 на второго множителя $(b \,.\, c \,.\, d)$. Но при дѣленiи q_1 на $b \,.\, c \,.\, d$ мы можемъ $b \,.\, c \,.\, d$ разсматривать, какъ произведенiе двухъ множителей $b \,.\, (c \,.\, d)$ и слѣд., сперва дѣлить q_1 на b, а полученное частное q_2 на $c \,.\, d$, а для этого дѣленiя, какъ мы уже знаемъ изъ предыдущаго, достаточно раздѣлить q_2 на c и полученное частное q_3 на d. Итакъ, теорема доказана.

ЗАМѢЧАНIЕ. Въ частныхъ случаяхъ можетъ оказаться, что нѣсколько или даже всѣ послѣдовательныя дѣленiя могутъ быть выполнены нацѣло. Этотъ случай нисколько не умаляетъ общности приведеннаго доказательства: стоитъ только сдѣлать r_1, r_2, r_3 . . . равными нулю.

Примѣръ. Требуется раздѣлить 5722 на 210.

Дѣля непосредственно, находимъ, что цѣлая часть частнаго равна 27.

Разсматривая 210, какъ произведенiе 2 . 3 . 5 . 7, можемъ совершить дѣленiе такъ: дѣлимъ 5722 сперва на 2; дѣленiе выполняется нацѣло и частное $=$ 2861; дѣлимъ 2861 на 3; цѣлая часть частнаго оказывается равной 953; дѣлимъ 953 на 5 и цѣлую часть частнаго отъ этого дѣленiя (190) дѣлимъ на 7; получается 27, т. е. столько же, какъ отъ непосредственнаго дѣленiя 5722 на 210.

Можно поступить еще такъ: разсматриваемъ 210, какъ 10 . 21; дѣля 5722 на 10, находимъ цѣлую часть частнаго 572; дѣля 572 на 21, получаемъ опять 27. Можно также разсматривать 210 какъ 35 . 6 и т. д.

41. ЗАМѢЧАНIЕ. Поступая по указанному способу, мы получаемъ путемъ послѣдовательныхъ дѣленiй только *цѣлую часть частнаго*, что и составляетъ самую существенную часть дѣленiя. Можно, впрочемъ, вывести правило, дающее возможность опредѣлить и *окончательный остатокъ* отъ дѣленiя даннаго числа на произведенiе: *остатокъ этотъ равенъ суммѣ произведенiй каждаго изъ остатковъ отъ послѣдовательныхъ дѣленiй, на всѣхъ дѣлителей, предшествующихъ ему.*

Такъ какъ предложенiе это имѣетъ только чисто теоретическiй интересъ и не имѣетъ никакихъ практическихъ примѣненiй, то доказательство его предоставляется любознательности учащихся *).

---

*) Оно можетъ быть легко получено изъ равенства (3) предыдущаго параграфа и аналогичныхъ ему.

ОТДѢЛЪ II.

Основныя свойства чиселъ.

ГЛАВА I.

А. О дѣлимости чиселъ.

42. ОПРЕДѢЛЕНІЯ. *Если цѣлое число a дѣлится на другое цѣлое число b нацѣло* (т. е. остатокъ отъ этого дѣленія равенъ нулю), *то говорятъ, что a* **есть кратное** b. Число b въ этомъ случаѣ называется **дѣлителемъ** числа a. Такимъ образомъ слова: 1) a дѣлится на b; 2) a есть кратное b; 3) b есть дѣлитель a — выражаютъ одно и то-же понятіе.

43. ТЕОРЕМЫ. Если число дѣлитъ нацѣло всѣ слагаемыя, то оно дѣлитъ и ихъ сумму.

Если число дѣлитъ нацѣло уменьшаемое и вычитаемое, то оно дѣлитъ и разность.

Пусть, напр., a дѣлится на c, и b дѣлится на c.

Требуется доказать: $(a+b)$ и $(a-b)$ *дѣлятся на* c?

Если a нацѣло дѣлится на c, то, обозначая частное отъ этого дѣленія буквою q_a, имѣемъ: $a=c\,.\,q_a$; пусть также $b=c\,.\,q_b$.

Тогда сумма и разность чиселъ a и b на основаніи §§ 14 и 17 могутъ быть представлены такъ:

$$a+b=c\,.\,q_a+c\,.\,q_b=c\,.\,(q_a+q_b);$$
$$a-b=c\,.\,q_a-c\,.\,q_b=c\,.\,(q_a-q_b).$$

Правыя части написанныхъ равенствъ могутъ быть разсматриваемы, какъ произведенія дѣлителя (c) на частное; отсюда заключаемъ, что

$$(a+b):c=q_a+q_b$$
$$(a-b):c=q_a-q_b,$$

т. е., въ обоихъ случаяхъ дѣленіе выполняется нацѣло, что и тр. док.

44. ТЕОРЕМЫ. Если число дѣлитъ сумму двухъ слагаемыхъ и одно изъ нихъ, то оно дѣлитъ и другое слагаемое.

Если число дѣлитъ разность двухъ чиселъ и одно изъ нихъ, то оно дѣлитъ и другое число.

1. Пусть, напр., дана сумма $a+b=s$, и извѣстно, что a дѣлится на c и s дѣлится на c. *Требуется доказать*, что и b дѣлится на c?

Равенство $a+b=s$ можетъ быть замѣнено другимъ, равносильнымъ ему (§ 3) равенствомъ:

$$s-a=b,$$

откуда на основаніи предыдущей теоремы (§ 43) заключаемъ, что b, какъ разность чиселъ s и a, дѣлящихся на c, тоже дѣлится на c, что и тр. док.

2. Пусть, напр., дана разность двухъ чиселъ $a-b=d$, и извѣстно, что *одно* изъ этихъ чиселъ a или b дѣлится на c, и d дѣлится на c; *требуется доказать*, что и другое число дѣлится на c?

Равенство $a-b=d$ можетъ быть переписано (§ 3) такъ:

$$a=d+b.$$

Если дано, что, кромѣ d, дѣлится на c число b, то и a дѣлится на c, какъ сумма двухъ чиселъ, кратныхъ c (§ 43).

Если же дано, что кромѣ d дѣлится на c число a, то и b дѣлится на c, по только что доказанной части 1-ой настоящей теоремы.

45. ТЕОРЕМЫ. Если изъ двухъ слагаемыхъ одно дѣлится на какое нибудь число, а другое на него не дѣлится, то и сумма на это число не дѣлится.

Если изъ двухъ чиселъ одно дѣлится на какое нибудь число, а другое на него не дѣлится, то и разность ихъ на это число не дѣлится.

Примѣнимъ способъ *доказательства отъ противнаго.*

1. Пусть дана сумма $a+b=s$, и извѣстно, что a дѣлится на c, b не дѣлится на c; требуется доказать, что s не дѣлится на c?

Въ самомъ дѣлѣ, допустивъ, что s дѣлится на c, получимъ: сумма двухъ чиселъ дѣлится на c, одно изъ чиселъ (a) дѣлится на c, слѣд. (§ 44) и другое слагаемое b должно дѣлиться на c что противорѣчитъ условiю.

2. Пусть дана разность $a-b=d$, и извѣстно, что a дѣлится на c, b не дѣлится на c; требуется доказать. что d не дѣлится на c?

Въ самомъ дѣлѣ, допустивъ, что d дѣлится на c, получимъ: разность двухъ чиселъ дѣлится на c, одно изъ этихъ чиселъ тоже дѣлится на c, слѣд. и другое число b должно бы дѣлиться на c (§ 44), что противорѣчитъ условiю.

46. ТЕОРЕМА. Всякое число, дѣлящее другое, дѣлитъ и всѣ числа, кратныя этого послѣдняго.

Пусть a дѣлится на b, и b дѣлится на c. Требуется доказать, что a дѣлится на c?

Если a дѣлится на b, то можно положить

$$a=b\,.\,q=\underbrace{b+b+b+\,.\;.\;.\;.\,+b}_{q\text{ разъ}}.$$

Такъ какъ a состоитъ изъ q слагаемыхъ, по условiю дѣлящихся на c, то на основанiи теоремы § 43 заключаемъ, что a дѣлится на c, что и тр. док.

47. ТЕОРЕМА. Если два числа дѣлятся нацѣло на одного и того-же дѣлителя, то и остатокъ отъ раздѣленiя большаго изъ данныхъ чиселъ на меньшее тоже нацѣло дѣлится на этого дѣлителя.

Пусть a дѣлится на c, и b дѣлится на c.

Требуется доказать, что *ост.* $(a:b)$ дѣлится на c?

Предположимъ, что отъ дѣленiя a на b получается частное q и остатокъ r, такъ что

$$a=b\,.\,q+r.$$

Какъ видно изъ написаннаго равенства, число a, дѣлящееся на c по условiю, представляетъ сумму двухъ чиселъ: $(b\,.\,q)$, которое дѣлится на c на основанiи теоремы § 46, и числа r.

Заключаемъ, что и r по теоремѣ § 44 тоже дѣлится на c, что и тр. док.

48. ТЕОРЕМА. Если остатки, получающiеся отъ дѣленiя двухъ данныхъ чиселъ на одного и того-же дѣлителя, равны между собой, то разность этихъ чиселъ дѣлится нацѣло на этого дѣлителя.

Дано: ост. $(a:c)=$ *ост.* $(b:c)$.

Требуется доказать: $(a-b)$ дѣлится на c?

Пусть при дѣленіи a на c получается частное q_a и остатокъ r, такъ что

$$a = c \,.\, q_a + r,$$

пусть дѣленіе b на c даетъ частное q_b и тотъ же остатокъ r, такъ что

$$b = c \,.\, q_b + r.$$

Разность чиселъ a и b представится такъ:

$$a - b = c \,.\, q_a + r - (c \,.\, q_b + r) = c \,.\, q_a + r - c \,.\, q_b - r =$$
$$= c \,.\, q_a - c \,.\, q_b,$$

или на основаніи § 17:

$$a - b = c \,.\, (q_a - q_b),$$

откуда ясно, что разность $(a-b)$ дѣлится нацѣло на c, что и тр. док.

49. ОБРАТНАЯ ТЕОРЕМА. Если разность двухъ чиселъ дѣлится на какого-нибудь дѣлителя, то остатки, происходящіе отъ раздѣленія каждаго изъ нихъ на того-же дѣлителя, равны между собой *).

Дано: $(a-b)$ дѣлится на c.

Требуется доказать: ост. $(a : c) =$ *ост.* $(b : c)$?

Пусть частное отъ дѣленія разности $(a-b)$ на c равно q; тогда

$$a - b = c \,.\, q,$$

что равносильно (§ 3) равенству:

$$a = c \,.\, q + b \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (1)$$

Если остатокъ отъ раздѣленія b на c есть r, а частное отъ этого дѣленія $= q_1$, то

$$b = c \,.\, q_1 + r.$$

Подставляя это значеніе вмѣсто b въ равенство (1), получаемъ:

$$a = cq + (cq_1 + r) = cq + cq_1 + r = c \,.\, (q + q_1) + r.$$

Отсюда мы видимъ, что число a можетъ быть представлено въ видѣ суммы двухъ слагаемыхъ, изъ коихъ первое $c \,.\, (q + q_1)$ дѣлится

---

*) Теорема эта справедлива и тогда, когда каждое изъ данныхъ чиселъ дѣлится на этого дѣлителя нацѣло, такъ какъ каждый изъ остатковъ въ этомъ случаѣ равенъ нулю.

на c, а второе (r) меньше *) c. Слѣд., на основаніи § 34 заключаемъ, что при дѣленіи a на c получимъ остатокъ r, т. е. тотъ же, какъ и при дѣленіи b на c, что и тр. док.

50. ОПРЕДѢЛЕНІЕ. *Два числа, дающія при дѣленіи на одинъ и тотъ же дѣлитель равные остатки, называются* **равноостаточными** *относительно этого дѣлителя.*

Сопоставляя теорему, изложенную въ § 48, съ обратной ей теоремой § 49, можемъ заключить, что прямая теорема даетъ условіе **необходимое** для равноостаточности двухъ чиселъ, обратная— даетъ условіе **достаточное,** и что обѣ эти теоремы легко соединить въ одну, которую можно формулировать такъ:

Для того, чтобы два числа были равноостаточны относительно одного и того-же дѣлителя, необходимо и достаточно, чтобы разность ихъ дѣлилась на этого дѣлителя.

Б. Признаки дѣлимости чиселъ.

51. ОПРЕДѢЛЕНІЯ. Признакомъ дѣлимости иа даннаго дѣлителя называется условіе, необходимое и достаточное для того, чтобы какое-нибудь число раздѣлилось нацѣло на этого дѣлителя.

Общій способъ, при помощи котораго мы будемъ находить признаки дѣлимости чиселъ, заключается въ слѣдующемъ:

Разбиваемъ число N на два слагаемыхъ, напр. $a+b$, такъ, чтобы одно изъ нихъ (напр. a) было завѣдомо кратнымъ назначеннаго дѣлителя.

Послѣ этого, вспоминая теоремы (§§ 43 и 45):

1. Если каждое изъ слагаемыхъ дѣлится на какого-нибудь дѣлителя, то и сумма тоже дѣлится на этого дѣлителя.

2. Если изъ двухъ слагаемыхъ одно дѣлится, а другое не дѣлится на какого-нибудь дѣлителя, то и сумма не дѣлится на этого дѣлителя,—заключаемъ:

1. Если второе слагаемое (b) на даннаго дѣлителя не дѣлится, то и число N на этого дѣлителя не дѣлится.

Слѣдовательно, дѣлимость второго слагаемаго есть условіе, **необходимое** для дѣлимости числа N.

2. Если второе слагаемое (b) на даннаго дѣлителя дѣлится, то и число N тоже на него дѣлится.

---

*) Такъ какъ представляетъ остатокъ отъ дѣленія b на c.

Слѣдовательно, дѣлимость второго слагаемаго есть условіе, **достаточное** для дѣлимости числа N.

Поэтому можно сказать:

Если данное число N возможно представить въ видѣ суммы двухъ слагаемыхъ такимъ образомъ, что одно изъ нихъ дѣлится на дѣлителя d, то условіе, необходимое и достаточное для того, чтобы число N раздѣлилось на даннаго дѣлителя d, состоитъ въ дѣлимости на него-же второго слагаемаго.

Для поясненія этой теоріи на примѣрахъ, выведемъ признаки дѣлимости на 2, 4, 8, 5, 25, 3 и 9.

52. Признаки дѣлимости на 2 и на 5.

ТЕОРЕМА. Всякое число равно числу, кратному 2 или 5, увеличенному на цыфру единицъ этого числа.

Въ самомъ дѣлѣ, всякое число N можетъ быть представлено въ видѣ суммы

$$N = 10 . a + b,$$

гдѣ a есть число *десятковъ*, b—цыфра *единицъ*.

Первое изъ слагаемыхъ $(10 . a)$ на основаніи § 46 дѣлится и на 2 и на 5, такъ какъ 10 есть кратное 2 и 5.

Поэтому, если b дѣлится на 2 (или на 5), то и N дѣлится на 2 (или на 5); если же b не дѣлится, то и N не дѣлится.

Слѣдовательно:

Для того, чтобы число дѣлилось на 2, необходимо и достаточно, чтобы цыфра единицъ этого числа была четная.

Для того, чтобы число дѣлилось на 5, необходимо и достаточно, чтобы цыфра единицъ была или 0, или 5.

53. Признаки дѣлимости на 4 и на 25.

ТЕОРЕМА. Всякое число равно числу, кратному 4 или 25, увеличенному на число, изображаемое двумя послѣдними цыфрами даннаго числа.

Въ самомъ дѣлѣ, всякое число N можетъ быть представлено въ видѣ суммы

$$N = 100 . a + b,$$

гдѣ a есть число сотенъ, b—число, изображаемое двумя послѣдними цыфрами даннаго числа.

(Напр. $32715 = 100 . 327 + 15$).

Первое изъ слагаемыхъ $(100 . a)$ на основаніи § 46 дѣлится и на 4, и на 25, такъ какъ 100 есть число, кратное этихъ обоихъ дѣлителей.

Слѣд., если b дѣлится на 4 (или 25), то и N дѣлится на 4 (или 25); если же b не дѣлится на 4 (или 25) то и N не дѣлится.

Отсюда слѣдуетъ:

Для того, чтобы число дѣлилось на 4, необходимо и достаточно, чтобы число, образованное двумя послѣдними его цыфрами, дѣлилось на 4.

Для того, чтобы число дѣлилось на 25, необходимо и достаточно, чтобы послѣднія двѣ цыфры этого числа были: или два нуля, или 25, или 50, или 75.

54. Признакъ дѣлимости на 8.

ТЕОРЕМА. Всякое число равно числу, кратному 8, увеличенному на число, изображаемое тремя послѣдними цыфрами даннаго числа.

Доказательство аналогично съ предыдущими (§§ 52 и 53), такъ какъ всякое число N можно представить въ видѣ суммы

$$N = 1000 \,.\, a + b,$$

гдѣ b есть число, изображаемое тремя послѣдними цыфрами даннаго числа.

Итакъ, **для того, чтобы число дѣлилось на 8, необходимо и достаточно, чтобы число, образованное тремя послѣдними цыфрами даннаго числа, дѣлилось на 8.**

55. Признакъ дѣлимости на 9.

Для нахожденія признака дѣлимости на 9 докажемъ предварительно нѣсколько вспомогательныхъ теоремъ (леммъ).

ЛЕММА I. *Всякое число, изображаемое единицей съ однимъ или нѣсколькими нулями, выражаетъ число, кратное девяти, увеличенное на единицу.*

Въ самомъ дѣлѣ:

$$10 = 9 + 1; \quad 100 = 9 \,.\, 11 + 1; \quad 1000 = 9 \,.\, 111 + 1;$$

$$10000 = 9 \,.\, 1111 + 1,$$

$$\text{и вообще } \overbrace{1000\,.\,.\,.\,.\,0}^{n \text{ нулей}} = 9 \,.\, \overbrace{111\,.\,.\,.\,.\,1}^{n \text{ единицъ}} + 1$$

ЛЕММА II. *Всякое число, изображаемое какой-нибудь значущей* *цыфрой въ сопровожденіи одного или нѣсколькихъ нулей, выражаетъ число, кратное девяти, увеличенное на значеніе этой цыфры.*

Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ, напр., число 50000.

Изъ леммы I мы знаемъ, что

$$10000 = \text{кратн. } 9 + 1,$$

откуда: $50000 = (\text{кратн. } 9 + 1) \,.\, 5 = \text{кратн. } 9 + 5$, что и тр. док.

ЛЕММА III. *Всякое число, изображаемое какими угодно цыфрами, равно числу, кратному девяти, увеличенному на значеніе цыфръ этого числа.*

Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ произвольное число, напр. 56732. Число это можно разсматривать, какъ состоящее изъ слагаемыхъ: $50000 + 6000 + 700 + 30 + 2$.

На основаніи предыдущей леммы имѣемъ:

$$\begin{aligned} 50000 &= \text{кратн. } 9 + 5 \\ 6000 &= \text{кратн. } 9 + 6 \\ 700 &= \text{кратн. } 9 + 7 \\ 30 &= \text{кратн. } 9 + 3 \\ 2 &= 2. \end{aligned}$$

Складывая эти равенства, и замѣчая, что сумма чиселъ, кратныхъ девяти, есть тоже число кратное девяти (§ 43), имѣемъ:

$$56732 = \text{кр. } 9 + (5 + 6 + 7 + 3 + 2),$$ что и тр. док.

На основаніи послѣдней леммы заключаемъ, что всякое число N можетъ быть представлено въ видѣ суммы:

$$N = \text{кратн. } 9 + S,$$

гдѣ S есть сумма цыфръ числа N. Слѣд., вспоминая изложенное въ § 51, можемъ заключить:

Для того, чтобы число дѣлилось на 9, необходимо и достаточно, чтобы сумма его цыфръ дѣлилась на 9.

56. Признакъ дѣлимости на 3 выводится на основаніи слѣдующихъ соображеній: такъ какъ всякое число, кратное 9, есть въ то-же время и кратное 3, и такъ какъ по предыдущему всякое число можетъ быть представлено въ видѣ суммы:

$$N = \text{кратн. } 9 + S = \text{кратн. } 3 + S,$$

гдѣ S—сумма цыфръ разсматриваемаго числа, то **для того, чтобы число дѣлилось на 3, необходимо и достаточно, чтобы сумма его цыфръ дѣлилась на 3.**

57. Общій признакъ дѣлимости на произвольнаго дѣлителя.

Всѣ выведенные признаки дѣлимости можно разсматривать, какъ частные случаи слѣдующаго *общаго признака дѣлимости* на произвольнаго дѣлителя.

Возьмемъ какое нибудь число N, изображаемое слѣдующими n цыфрами

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ldots\ a_n.$$

Число это можетъ быть представлено такимъ образомъ:

$$N = a_1 + a_2 \cdot 10 + a_3 \cdot 10^2 + a_4 \cdot 10^3 + \ldots + a_n \cdot 10^{n-1}.$$

Для нахожденія признака дѣлимости на какого нибудь дѣлителя d, поступаемъ такъ: дѣлимъ на этого дѣлителя различныя степени десяти, т. е числа:

$$10,\ 10^2,\ 10^3\ \ldots\ldots\ 10^{n-1}.$$

Пусть остатки отъ этихъ дѣленій будутъ соотвѣтственно:

$$r_1,\ r_2,\ r_3\ \ldots\ldots\ r_{n-1},$$

такъ что можно написать рядъ равенствъ:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1 \\ 10 &= \text{крат. } d + r_1 \\ 10^2 &= \text{крат. } d + r_2 \\ 10^3 &= \text{крат. } d + r_3 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ 10^{n-1} &= \text{крат. } d + r_{n-} \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1 \\ a_2 \cdot 10 &= \text{крат. } d + a_2 \cdot r_1 \\ a_3 \cdot 10^2 &= \text{крат. } d + a_3 \cdot r_2 \\ a_4 \cdot 10^3 &= \text{крат. } d + a_4 \cdot r_3 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n \cdot 10^{n-1} &= \text{крат. } d + a_n \cdot r_{n-1}. \end{aligned}$$

Складывая всѣ эти равенства, находимъ:

$$N = \text{крат. } d + (a_1 + a_2 r_1 + a_3 r_2 + a_4 r_3 + \ldots\ a_n r_{n-1}).$$

Итакъ, намъ удалось представить число N въ видѣ суммы двухъ слагаемыхъ, изъ коихъ первое дѣлится на d; слѣд., на основаніи § 51 заключаемъ, что если второе слагаемое раздѣлится на d, то и N раздѣлится на d, если же второе слагаемое на d не дѣлится, то и N не дѣлится. Такимъ образомъ:

Для того, чтобы какое либо число дѣлилось на произвольнаго дѣлителя d, необходимо и достаточно, чтобы сумма произведеній цыфръ этого числа на остатки, получаемые отъ дѣленія на d соотвѣтствующихъ степеней десяти, дѣлилась на d.

ГЛАВА II.

Теорія общаго наибольшаго дѣлителя.

58. ОПРЕДѢЛЕНІЯ. Общимъ дѣлителемъ двухъ или нѣсколькихъ данныхъ чиселъ называется число, дѣлящее нацѣло всѣ данныя числа.

Самый большой по величинѣ изъ общихъ дѣлителей называется общимъ наибольшимъ дѣлителемъ заданныхъ чиселъ.

Напр., зная, что числа 30 и 18 имѣютъ общихъ дѣлителей: 1, 2, 3, 6, можемъ сказать, что общій наибольшій дѣлитель чиселъ 30 и 18 равенъ 6.

Для сокращенія письма условимся обозначать общій наибольшій дѣлитель двухъ данныхъ чиселъ a и b символомъ:

$$о\,.\,н\,.\,д\,.\,(a,\ b).$$

Теорія нахожденія общаго наибольшаго дѣлителя двухъ данныхъ чиселъ при помощи такъ называемаго *послѣдовательнаго дѣленія* основана на нижеслѣдующихъ двухъ теоремахъ.

59. ТЕОРЕМА I. Если большее изъ двухъ данныхъ чиселъ дѣлится на меньшее, то это меньшее и есть ихъ общій наибольшій дѣлитель.

Дано: a дѣлится на b.

Треб. док.: $о\,.\,н\,.\,д\,.\,(a,\ b)=b$?

Въ самомъ дѣлѣ, общій наибольшій дѣлитель двухъ данныхъ чиселъ не можетъ превышать меньшаго изъ нихъ, потому что онъ долженъ его дѣлить.

Слѣд., если меньшее изъ данныхъ чиселъ (b) дѣлитъ большее (a), то, дѣлясь еще и на самого себя, оно и будетъ общимъ наибольшимъ дѣлителемъ данныхъ чиселъ a и b, что и тр. док.

60. ТЕОРЕМА II. Если большее изъ двухъ данныхъ чиселъ не дѣлится на меньшее, то ихъ общій наибольшій дѣлитель равенъ общему наибольшему дѣлителю меньшаго изъ нихъ и остатка отъ раздѣленія большаго на меньшее.

Дано: *ост.* $(a : b) = r$.

Треб. док.: $о\,.\,н\,.\,д\,.\,(a,\ b) = о\,.\,н\,.\,д\,.\,(b,\ r)$?

Если обозначимъ буквой q частное отъ дѣленія a на b, то

$$a = b \cdot q + r.$$

Изъ этого равенства видно:

1) Всякое число, дѣлящее a и b, раздѣлитъ и r (§ 44).

2) Всякое число, дѣлящее b и r, раздѣлитъ и a (§ 43).

Слѣдовательно:

1) Любой дѣлитель пары чиселъ (a, b) есть въ то-же время и дѣлитель пары чиселъ (b, r).

2) Наоборотъ, любой дѣлитель пары чиселъ (b, r) есть въ то-же время и дѣлитель пары чиселъ (a, b).

Итакъ, *всѣ* общіе дѣлители двухъ паръ чиселъ (a, b) и (b, r) одинаковы, а потому и *наибольшіе* дѣлители обѣихъ паръ одинаковы, что и тр. док.

61. ЗАДАЧА: *Требуется найти общаго наибольшаго дѣлителя двухъ данныхъ чиселъ a и b.*

Дѣлимъ большее число (напр. a) на меньшее. Если a раздѣлится на b нацѣло, то b по § 59 будетъ общимъ наибольшимъ дѣлителемъ данныхъ чиселъ. Если же a на b не дѣлится, и остатокъ отъ этого дѣленія будетъ r_1, то по § 60:

$$о . н . д . (a, b) = о . н . д\ (b, r_1), \tag{I}$$

т. е. вопросъ сведется къ нахожденію общаго наибольшаго дѣлителя пары чиселъ b и r_1, меньшихъ чѣмъ данныя. Дѣлимъ b на r_1. Если дѣленіе это совершится нацѣло, то по § 59 r_1 будетъ общимъ наибольшимъ дѣлителемъ чиселъ (b, r_1), а слѣд. на основаніи равенства (I) и чиселъ (a, b).

Если же b на r_1 не дѣлится, и остатокъ отъ этого дѣленія будетъ r_2, то по § 60:

$$о . н . д . (b, r_1) = о . н . д . (r_1, r_2). \tag{II}$$

Далѣе, если r_1 дѣлится на r_2, то r_2 и будетъ общ. наиб. дѣлителемъ пары чиселъ r_1 и r_2, а слѣд. на основаніи равенствъ (II) и (I) и пары чиселъ (a, b); если же остатокъ отъ дѣленія r_1 на r_2 равенъ r_3, то

$$\text{(III)} \qquad о . н . д . (r_1, r_2) = о . н . д . (r_2, r_3) \text{ и т. д.}$$

Продолжая поступать такимъ же образомъ, мы образуемъ рядъ чиселъ:

$$a,\ b,\ r_1,\ r_2,\ r_3,\ r_4,\ .\ .\ .\ ,\ r_{n-1},\ r_n,\ r_{n+1}, \tag{α}$$

обладающихъ слѣдующими свойствами:

1⁰. Общій наибольшій дѣлитель произвольныхъ двухъ членовъ этого ряда равенъ общему наибольшему дѣлителю любой другой пары, въ томъ числѣ и пары чиселъ (a, b).

2⁰. Всѣ числа этого ряда суть **цѣлыя убывающія числа**, такъ какъ каждое изъ нихъ, начиная съ третьяго, представляетъ остатокъ отъ дѣленія, въ которомъ дѣлитель есть предыдущее число.

3⁰. Такъ какъ остатки r_1, r_2, r_3 . . . . представляютъ рядъ уменьшающихся *цѣлыхъ* чиселъ, то мы *непремѣнно дойдемъ до остатка, равнаго нулю,* иначе оказалось бы, что дѣйствіе можно продолжать безпредѣльно, а оно непремѣнно должно окончиться *).

Пусть, напр., въ ряду (α) остатокъ, равный нулю, будетъ r_{n+1}. Это показываетъ, что общій наибольшій дѣлитель пары чиселъ (r_{n-1}, r_n) равенъ r_n (§ 59), а слѣд., на основаніи свойства 1⁰, тотъ же общій наибольшій дѣлитель будетъ и для чиселъ a и b.

Итакъ, можно установить **правило**:

Для нахожденія общаго наибольшаго дѣлителя двухъ чиселъ, дѣлятъ большее число на меньшее, меньшее на первый остатокъ, первый остатокъ на второй остатокъ, второй на третій и т. д., до тѣхъ поръ, пока одно изъ такихъ послѣдовательныхъ дѣленій не выполнится нацѣло. **Дѣлитель этого послѣдняго дѣленія и есть искомый общій наибольшій дѣлитель.**

62. ТЕОРЕМА. Всякое число, дѣлящее нацѣло данныя числа, дѣлитъ нацѣло и ихъ общаго наибольшаго дѣлителя.

Дано: a дѣл. на c; b дѣл. на c.

Треб. док.: о . н . д . (a, b) дѣл. на c?

Въ самомъ дѣлѣ, пусть, напр., въ ряду послѣдовательныхъ остатковъ $r_4 = 0$ **); тогда общимъ наибольшимъ дѣлителемъ чиселъ a и b будетъ r_3.

Можно написать рядъ равенствъ:

$$(A) \quad \ldots\ldots \left\{ \begin{aligned} a &= b \cdot q_1 + r_1 \\ b &= r_1 \cdot q_2 + r_2 \\ r_1 &= r_2 \cdot q_3 + r_3 \\ r_2 &= r_3 \cdot q_4. \end{aligned} \right.$$

*) Въ самомъ дѣлѣ, продолжая послѣдовательныя дѣленія достаточно долго, мы *въ самомъ невыгодномъ случаѣ* получимъ одинъ изъ остатковъ, равнымъ единицѣ, которая дѣлитъ всѣ цѣлыя числа.

**) Или, въ общемъ видѣ, $r^n = 0$. Беря для сокращенія письма r_4 вмѣсто r_n мы нисколько не уменьшаемъ общности доказательства.

Изъ этихъ равенствъ заключаемъ:

Изъ перваго, что всякое число c, дѣлящее a и b, дѣлитъ и r_1 (§ 44);

Изъ второго, что c, дѣля b и r_1, раздѣлитъ и r_2 (§ 44);

Изъ третьяго, что c, дѣля r_1 и r_2, раздѣлитъ и r_3, что и тр. док.

63. ОБРАТНАЯ ТЕОРЕМА. Всякое число, дѣлящее нацѣло общаго наибольшаго дѣлителя двухъ чиселъ, дѣлитъ нацѣло и эти числа.

Дано: $о\,.\,н\,.\,д\,(a, b)$ дѣлится на c.

Треб. док.: *а дѣл. на с* и *b дѣл. на с?*

Разсматривая равенства (A) предыдущаго параграфа, начиная съ послѣдняго, заключаемъ:

Изъ послѣдняго, что c, дѣля r_3, дѣлитъ и r_2 (§ 46);

Изъ предпослѣдняго, что c, дѣля r_3 и r_2, дѣлитъ и r_1 (§ 43);

Изъ второго, что c, дѣля r_2 и r_1, дѣлитъ и b (§ 43);

Изъ перваго, что c, дѣля r_1 и b, дѣлитъ и a (§ 43), что и тр. док.

64. ТЕОРЕМА. При умноженіи данныхъ чиселъ на какое-либо число ихъ общій наибольшій дѣлитель умножается на то-же число.

Треб. док.: $о\,.\,н\,.\,д\,.\,(ac, bc) = [о\,.\,н\,.\,д\,.\,(a, b)]\,.\,c?$

Въ самомъ дѣлѣ, намъ извѣстно (§ 36), что отъ умноженія дѣлимаго и дѣлителя на одно и то-же число, остатокъ отъ ихъ раздѣленія умножается на то-же самое число.

Слѣд., если остатокъ отъ дѣленія a на b равенъ r_1, то остатокъ отъ дѣленія ac на bc равенъ r_1c; также остатокъ отъ дѣленія bc на r_1c равенъ r_2c, и вообще, если нахожденіе общ. наиб. дѣлителя пары чиселъ a и b привело къ ряду чиселъ:

$$a, b, r_1, r_2, r_3, \ldots\ldots r_{n-1}, r_n, 0, \qquad \text{(I)}$$

то нахожденіе общ. наиб. дѣлителя пары чиселъ ac и bc приведетъ къ ряду чиселъ:

$$ac, bc, r_1c, r_2c, r_3c, \ldots\ldots r_{n-1}c, r_nc, 0. \qquad \text{(II)}$$

Изъ ряда (I) ясно, что

$$о\,.\,н\,.\,д\,.\,(a, b) = r_n;$$

изъ ряда же II видно:

$$о\,.\,н\,.\,д\,.\,(ac, cb) = r_n\,.\,c, \text{ что и тр. док.}$$

65. ТЕОРЕМА. При дѣленіи данныхъ чиселъ на какое-нибудь число, ихъ общій наибольшій дѣлитель раздѣлится на то-же число.

Треб. док.: $о\,.\,н\,.\,д\,.\,(a,\,b) = [о\,.\,н\,.\,д\,.\,(ac,\,bc)] : c$?

Извѣстно (§ 37), что отъ раздѣленія дѣлимаго и дѣлителя на одно и то-же число, остатокъ отъ ихъ дѣленія раздѣлится на то-же самое число. Слѣд., если нахожденіе общ. наиб. дѣлителя чиселъ ac и bc привело къ ряду чиселъ (II) *), показывающему, что

$$о\,.\,н\,.\,д\,.\,(ac,\,bc) = r_n\,.\,c,$$

то нахожденіе общ. наиб. дѣлителя чиселъ a и b непремѣнно приведетъ къ ряду (I) *), изъ котораго видно, что

$$о\,.\,н\,.\,д\,.\,(a,\,b) = r_n, \text{ т. е.} = [о\,.\,н\,.\,д\,.\,(ac,\,bc)] : c,$$

что и тр. док.

66. ОПРЕДѢЛЕНІЯ. *Если общій наибольшій дѣлитель двухъ чиселъ равенъ единицѣ, то такія числа называются* **взаимно-простыми.**

Если дано нѣсколько чиселъ такихъ, что общій наибольшій дѣлитель **каждой пары чиселъ,** *комбинируемыхъ въ какомъ угодно порядкѣ, равенъ единицѣ, то такія числа называются* **попарно взаимно-простыми.**

Таковы, напр., числа: 16, 21, 55, 169.

67. ТЕОРЕМА. При раздѣленіи данныхъ чиселъ на ихъ общаго наибольшаго дѣлителя, въ частномъ получаются числа взаимно-простыя.

Дано: $о\,.\,н\,.\,д\,.\,(a,\,b) = d$.

Треб. док.: число $\left(\dfrac{a}{d}\right)$ вз.-прост. съ $\left(\dfrac{b}{d}\right)$?

Въ самомъ дѣлѣ, изъ теоремы § 65 слѣдуетъ, что если данныя числа раздѣлить на ихъ общаго наибольшаго дѣлителя d, то общій наибольшій дѣлитель ихъ раздѣлится на самого себя, и слѣд. обратится въ единицу, т. е. получатся числа взаимно-простыя, что и тр. док.

68. ТЕОРЕМА. Если число, дѣля произведеніе двухъ множителей, есть число взаимно-простое съ однимъ изъ нихъ, то оно непремѣнно дѣлитъ нацѣло другого множителя.

Дано: a *вз.-пр.* съ b; $a\,.\,c$ *дѣлится на* b.

---

*) См. предыдущій параграфъ.

Треб. док.: с дѣлится на b?

Такъ какъ число a простое съ b, то на основаніи опредѣленія (§ 66) имѣемъ:

$$о\,.\,н\,.\,д\,.\,(a, b) = 1;$$

слѣд. на основаніи § 64:

$$о\,.\,н\,.\,д\,.\,(ac, bc) = c.$$

Число $(a\,.\,c)$ дѣлится на b по условію; $(b\,.\,c)$ тоже дѣлится на b, такъ какъ содержитъ b множителемъ; слѣдовательно, по теоремѣ § 62, общій наибольшій дѣлитель чиселъ $a\,.\,c$ и $b\,.\,c$, т. е. c, дѣлится на b, что и тр. док.

69. ТЕОРЕМА. Число, дѣлящееся порознь на нѣсколько попарно взаимно-простыхъ чиселъ, дѣлится и на ихъ произведеніе.

Дано: числа $a, b, c, \ldots \ldots m$ попарно вз.-прост.;

N дѣл. на a; N дѣл. на b; $\ldots \ldots N$ дѣл. на m.

Треб. док.: N дѣл. на произведеніе $a\,.\,b\,.\,c\,.\,\ldots\,.\,m$?

Такъ какъ N дѣлится по условію на a, то можно положить:

$$N = a\,.\,q. \qquad \text{(I)}$$

Число $a\,.\,q$, будучи равно N, по условію должно дѣлиться на b; но a—взаимно-простое съ b; слѣд., по предыдущей теоремѣ (§ 68) q должно дѣлиться на b, такъ что можно положить

$$q = b\,.\,q_1.$$

Подставляя это значеніе q въ равенство (I), получимъ:

$$N = a\,.\,b\,.\,q_1, \qquad \text{(II)}$$

откуда видимъ, что N дѣлится на произведеніе $(a\,.\,b)$.

Далѣе разсуждаемъ точно такъ-же: произведеніе abq_1, равное N, по условію должно дѣлиться на c. Разсматривая $a\,.\,b\,.\,q_1$, какъ произведеніе двухъ множителей $a\,.\,(bq_1)$, видимъ, что a—вз.-простое съ c, а потому по теоремѣ § 68 второй множитель, т. е. bq_1, долженъ дѣлиться на c; но b—вз.-простое съ c, слѣд. q_1 должно дѣлиться на c, а потому можно положить

$$q_1 = c\,.\,q_2.$$

Подставляя это значеніе q_1 въ равенство (II), находимъ:

$$N = a\,.\,b\,.\,c\,.\,q_2,$$

откуда видно, что N дѣлится на произведеніе трехъ множителей $a\,.\,b\,.\,c$.

Продолжая подобное-же разсужденіе, докажемъ, что N дѣлится и на все произведеніе $a \,.\, b \,.\, c \,.\, d \,.\, .\, .\, .\, m$.

70. ЗАМѢЧАНІЕ. Послѣдняя теорема позволяетъ значительно *расширить число извѣстныхъ намъ признаковъ дѣлимости.*

Такъ, напр., зная признаки дѣлимости на 2 и на 3, и принимая во вниманіе, что 2 и 3 суть числа взаимно-простыя, можемъ сказать, что число, дѣлящееся порознь на 2 и 3, раздѣлится и на ихъ произведеніе, т. е. на 6.

Итакъ, *для того, чтобы число дѣлилось на* 6, *необходимо и достаточно, чтобы оно дѣлилось на* 2 *и на* 3.

Также, напр., для того, чтобы число дѣлилось на 18, необходимо и достаточно, чтобы оно дѣлилось на 2 и на 9 *).

Подобнымъ-же образомъ можно вывести признаки дѣлимости на 10, 15, 36, 45, 50, 100 и нѣкотор. друг.

71. Нахожденіе общаго наибольшаго дѣлителя нѣсколькихъ чиселъ. Положимъ, требуется найти общій наибольшій дѣлитель чиселъ a, b, c, d.

Всякій общій дѣлитель этихъ чиселъ, дѣля въ частности a и b, дѣлитъ и ихъ общаго наибольшаго дѣлителя (§ 62) k; слѣд., онъ является общимъ дѣлителемъ чиселъ:

$$k,\ c,\ d.$$

Наоборотъ, всякій общій дѣлитель чиселъ k, c, d раздѣлитъ также числа a и b, (такъ какъ они суть кратныя числа k), т. е. будетъ *общимъ дѣлителемъ всѣхъ данныхъ чиселъ.*

Такимъ образомъ, каждый изъ дѣлителей чиселъ a, b, c, d. есть въ то-же время дѣлтель чиселъ k, c, d и наоборотъ, а потому

$$о\,.\,н\,.\,д\,.\,(a,\ b,\ c,\ d) = о\,.\,н\,.\,д\,.\,(k,\ c,\ d).$$

Повторяя то-же разсужденіе, придемъ къ заключенію, что если обозначить общій наибольшій дѣлитель чиселъ k и c буквой m, то

$$о\,.\,н\,.\,д\,.\,(k,\ c,\ d) = о\,.\,н\,.\,д\,.\,(m.\ d),$$

а слѣд. и $$о\,.\,н\,.\,д\,.\,(a,\ b,\ c,\ d) = о\,.\,н\,.\,д\,.\,(m,\ d).$$

Отсюда можно вывести правило:

Чтобы найти общій наибольшій дѣлитель нѣсколькихъ чиселъ, ищемъ общій наибольшій дѣлитель двухъ первыхъ чиселъ; потомъ ищемъ общій наибольшій дѣлитель для полученнаго числа и третьяго изъ данныхъ чиселъ, потомъ общій наибольшій дѣлитель для вновь полученнаго и четвертаго числа и т. д., до тѣхъ поръ, пока не дойдемъ до послѣдняго числа. Послѣдній

---

*) Но разумѣется *нельзя* сказать такъ: чтобы число дѣлилось на 18 необходимо и достаточно, чтобы оно дѣлилось на 3 и на 6, такъ какъ 3 и 6 *не суть числа взаимно-простыя.*

изъ вычисленныхъ такимъ образомъ общихъ наибольшихъ дѣлителей и будетъ искомымъ *).

Посредствомъ разсужденій, подобныхъ вышеприведеннымъ, доказываются для общаго наибольшаго дѣлителя нѣсколькихъ чиселъ свойства, аналогичныя выведеннымъ въ §§ 62, 63, 64, 65, 67 свойствамъ общаго наибольшаго дѣлителя двухъ чиселъ.

Если общій наиб. дѣлитель нѣсколькихъ чиселъ равенъ единицѣ, то такія числа называются **взаимно-простыми въ ихъ совокупности**, что не слѣдуетъ смѣшивать съ понятіемъ о числахъ *попарно взаимно-простыхъ* (§ 66).

Напр., числа 18, 21, 35—вз.-простыя въ ихъ совокупности, но не попарно.

ГЛАВА III.

Теорія общаго наименьшаго кратнаго.

72. ОПРЕДѢЛЕНІЯ. Число, дѣлящееся нацѣло на нѣсколько данныхъ чиселъ, называется общимъ кратнымъ этихъ чиселъ.

Наименьшее изъ чиселъ, удовлетворяющихъ этому условію, называется общимъ наименьшимъ кратнымъ данныхъ чиселъ.

Для сокращенія письма условимся обозначать символомъ:

$$об.\ кр.\ (a,\ b)$$

всякое общее кратное данныхъ чиселъ a и b, и символомъ:

$$н.\ кр.\ (a,\ b)$$

общее *наименьшее* кратное тѣхъ-же чиселъ.

73. ТЕОРЕМА. Общее наименьшее кратное двухъ данныхъ чиселъ равно частному отъ раздѣленія произведенія этихъ чиселъ на ихъ общаго наибольшаго дѣлителя.

Дано: $о\ .\ н\ .\ д\ .\ (a,\ b) = d.$

Треб. док.: $н.\ кр.\ (a,\ b) = \left(\frac{a.b}{d}\right)$?

Пусть частныя отъ раздѣленія данныхъ чиселъ a и b на ихъ общаго наибольшаго дѣлителя d соотвѣтственно равны q_a и q_b, такъ что

$$a = d\ .\ q_a\ ;\ b = d\ .\ q_b.$$

---

*) Можно еще сказать такъ: *общій наибольшій дѣлитель n чиселъ равенъ общ. наиб. дѣлителю двухъ чиселъ: общаго наибольшаго дѣлителя (n—1) изъ этихъ чиселъ и n—аго числа.*

Всякое общее кратное чиселъ a и b, дѣлясь на a, должно непремѣнно заключаться въ ряду чиселъ, кратныхъ a, т. е. въ ряду:

$$1 . a;\ 2 . a;\ 3 . a;\ 4 . a;\ 5 . a; \ldots\ldots m . a; \ldots$$

Разсмотримъ, какъ должно быть выбрано m, чтобы произведеніе $m . a$ дѣлилось нацѣло также и на b.

Дѣля $m . a$, или, что одно и то-же, $m . d . q_a$ на b, или на $d . q_b$, получаемъ на основаніи §§ 40 и 38:

$$(m . d . q_a) : (d . q_b) = (m . q_a) : q_b.$$

Но такъ какъ числа q_a и q_b суть числа взаимно-простыя (§ 67), то дѣленіе произведенія $m . q_a$ на q_b можетъ быть выполнено нацѣло только въ томъ случаѣ, если m дѣлится на q_b, (§ 68), т. е., если m имѣетъ видъ:

$$m = q_b . k,$$

гдѣ k—произвольное цѣлое число.

Итакъ, для того, чтобы число вида $m . a$, т. е. кратное a, дѣлилось въ то-же время и на b, необходимо и достаточно, чтобы m было кратнымъ q_b.

Такимъ образомъ, *всякое общее кратное чиселъ a и b имѣетъ видъ:*

$$m . a = k . q_b . a, \text{ или}$$

$$k . q_b . q_a . d, \tag{1}$$

гдѣ *k—произвольное цѣлое число.* Наименьшее значеніе произведеніе $(k . q_b . q_a . d)$ имѣетъ при $k = 1$, что даетъ величину *наименьшаго* общаго кратнаго чиселъ a и b въ видѣ:

$$\text{н. кр. } (a, b) = q_b . q_a . d. \tag{2}$$

Но $q_a . d = a$; $q_b = \left(\frac{b}{d}\right)$, и слѣд. выраженіе (2) можетъ быть переписано такъ:

$$\text{н. кр. } (a, b) = \left(\frac{a . b}{d}\right), \text{ что и тр. док.}$$

74. На практикѣ, для полученія наименьшаго кратнаго двухъ чиселъ, сначала находятъ ихъ общаго наибольшаго дѣлителя и затѣмъ, раздѣливъ на него одно изъ данныхъ чиселъ, умножаютъ на полученное частное другое число.

Пусть, напр., даны два числа 420 и 792, общiй наибольшiй дѣлитель которыхъ равенъ 12.

Наименьшее кратное этихъ чиселъ равно:

$$420 \cdot \left(\frac{792}{12}\right) = 420 \cdot 66 = 27720.$$

75. Не трудно убѣдиться въ справедливости слѣдующихъ теоремъ:

Общее наименьшее кратное двухъ взаимно-простыхъ чиселъ равно ихъ произведенiю *).

Если изъ двухъ данныхъ чиселъ одно дѣлится на другое, то ихъ наименьшее кратное равно бо̀льшему изъ нихъ **).

76. ТЕОРЕМА. Всякое кратное данныхъ чиселъ есть кратное ихъ наименьшаго кратнаго.

Пусть M есть общее кратное данныхъ чиселъ a, b, c, d и m—*наименьшее* кратное тѣхъ же чиселъ. Допустимъ, что M не дѣлится нацѣло на m, и что остатокъ отъ этого дѣленiя равенъ r. Тогда

$$M = m \cdot q + r.$$

Изъ этого равенства слѣдуетъ, что каждое изъ чиселъ a, b, c, d, дѣля по условiю M и m, раздѣлитъ на основанiи § 44 и число r.

Такимъ образомъ, число r, меньшее чѣмъ m (§ 33), дѣлится на всѣ данныя числа a, b, c, d, т. е. является ихъ общимъ кратнымъ, что противорѣчитъ сдѣланному предположенiю, что m есть *наименьшее* кратное данныхъ чиселъ.

Изъ этой теоремы слѣдуетъ, что для полученiя *всѣхъ* общихъ кратныхъ для данныхъ чиселъ, достаточно найти ихъ *наименьшее* кратное и умножать его послѣдовательно на числа натуральнаго ряда:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\ldots$$

77. ПРИМѢЧАНIЕ. Послѣдняя теорема выведена въ предыдущемъ параграфѣ для *общаго* случая, т. е. для общаго кратнаго сколькихъ угодно чиселъ. Та-же теорема въ примѣненiи къ общему кратному всего *двухъ* чиселъ выводится еще проще. Въ самомъ дѣлѣ, изъ § 73 намъ извѣстно, что всякое общее кратное чиселъ a и b имѣетъ видъ:

$$k \cdot d \cdot q_a \cdot q_b,$$

*) Такъ какъ общiй наиб. дѣлитель въ этомъ случаѣ равенъ 1.

**) Такъ какъ общiй наиб. дѣлитель въ этомъ случаѣ равенъ меньшему числу.

а наименьшее кратное тѣхъ-же чиселъ равно:

$$d \cdot q_a \cdot q_b,$$

откуда непосредственно слѣдуетъ то, что треб. доказать.

78. ТЕОРЕМА. При дѣленіи наименьшаго кратнаго двухъ чиселъ на каждое изъ нихъ, въ частномъ получаются число взаимно-простыя.

Дано: н. кр. $(a, b) = m$.

Треб. док.: $\left(\frac{m}{a}\right)$ *и* $\left(\frac{m}{b}\right)$ *суть числа вз.-простыя?*

Въ самомъ дѣлѣ, мы знаемъ, что наименьшее кратное чиселъ a и b имѣетъ видъ (§ 73):

$$d \cdot q_a \cdot q_b.$$

Раздѣливъ это число на a, равное $d \cdot q_a$, получаемъ частное q_b; раздѣливъ же на b, находимъ частное q_a. Но числа q_a и q_b — вз.-простыя, какъ частныя отъ дѣленія a и b на ихъ общаго наибольшаго дѣлителя (§ 67), что и доказываетъ предложенную теорему.

79. ЗАМѢЧАНІЕ *). Нетрудно доказать послѣднюю теорему и для болѣе общаго случая, т. е. для наименьшаго кратнаго не двухъ, а сколькихъ угодно чиселъ.

Пусть общ. наим. кратное чиселъ $(a, b, c, d) = m$, и частныя отъ дѣленія m на данныя числа соотвѣтственно равны:

$$q_a, q_b, q_c, q_d,$$

такъ что

$$m = a \cdot q_a\,;\; m = b \cdot q_b\,;\; m = c \cdot q_c\,;\; m = d \cdot q_d. \qquad (1)$$

Если допустить, что общій наибольшій дѣлитель чиселъ q_a, q_b, q_c, q_d есть не единица, а какое-нибудь число k, то, дѣля каждое изъ равенствъ (1) на k, увидимъ, что m должно дѣлиться нацѣло на k, и что число $\left(\frac{m}{k}\right)$, удовлетворяющее равенствамъ:

$$\left(\frac{m}{k}\right) = a \cdot \left(\frac{q_a}{k}\right);\; \left(\frac{m}{k}\right) = b \cdot \left(\frac{q_b}{k}\right);\; \left(\frac{m}{k}\right) = c \cdot \left(\frac{q_c}{k}\right);\; \left(\frac{m}{k}\right) = d \cdot \left(\frac{q_d}{k}\right),$$

есть *общее кратное* чиселъ a, b, c, d, а это противорѣчитъ сдѣланному предположенію, что m есть *наименьшее* кратное данныхъ чиселъ.

---

*) Необходимо для Горнаго Института.

80. ТЕОРЕМА, ОБРАТНАЯ ПРЕДЫДУЩЕЙ. Если частныя отъ дѣленія общаго кратнаго данныхъ чиселъ на каждое изъ нихъ суть числа взаимно-простыя, то это общее кратное есть наименьшее.

Дано: M есть *общее* кратное чиселъ a и b; $\left(\frac{M}{a}\right)$ и $\left(\frac{M}{b}\right)$ суть числа взаимно-простыя.

Треб. док.: M есть *наименьшее* кратное чиселъ a и b?

Въ самомъ дѣлѣ, *всякое* общее кратное чиселъ a и b имѣетъ видъ (§ 73)

$$M = k \,.\, d \,.\, q_a \,.\, q_b \,.$$

Дѣля это число на a и на b, получаемъ соотвѣтственно:

$$k \,.\, q_b \text{ и } k \,.\, q_a \,.$$

Общій наибольшій дѣлитель этихъ чиселъ есть k; по условію же числа эти взаимно-простыя, что возможно только тогда, если $k = 1$; но тогда $M = d \,.\, q_a \,.\, q_b$, а это и есть формула для *наименьшаго* общаго кратнаго чиселъ a и b.

Итакъ, $M =$ *наим. кр.* (a, b), что и тр. док.

81. ЗАМѢЧАНІЕ *). Докажемъ эту-же теорему для общаго кратнаго *сколькихъ угодно чиселъ.*

Пусть M есть какое-нибудь общее кратное чиселъ a, b, c, d, и пусть частныя отъ дѣленія M на данныя числа соотвѣтственно равны q_a, q_b, q_c, q_d, причемъ общій наибольшій дѣлитель этихъ чиселъ (q_a, q_b, q_c, q_d) по условію равенъ единицѣ.

Допустимъ, что не M, а какое-нибудь другое число, напр. m, есть *наименьшее* кратное чиселъ a, b, c, d. Тогда на основаніи § 76 заключаемъ, что $M = k \,.\, m$, гдѣ k означаетъ нѣкоторое цѣлое число.

Итакъ, имѣемъ равенства:

$$k \,.\, m = a \,.\, q_a\,;\; k \,.\, m = b \,.\, q_b\,;\; k \,.\, m = c \,.\, q_c\,;\; k \,.\, m = d \,.\, q_d\,, \quad (1)$$

откуда получаемъ:

$$q_a = k \,.\, \left(\frac{m}{a}\right);\; q_b = k \,.\, \left(\frac{m}{b}\right);\; q_c = k \,.\, \left(\frac{m}{c}\right),\; q_d = k \,.\, \left(\frac{m}{d}\right) \,.\;. \quad (2)$$

Такъ какъ число m, какъ предполагаемое наименьшее кратное чиселъ a, b, c, d, дѣлится на каждое изъ нихъ, то изъ равенствъ ряда (2) слѣдуетъ, что числа q_a, q_b, q_c, q_d имѣютъ общимъ наибольшимъ дѣлителемъ число k, а это противорѣчитъ условію теоремы. Итакъ, равенства эти возможны только при $k = 1$,

---

*) Необходимо для Горнаго Института.

но тогда $M=m$, т. е. M есть дѣйствительно *наименьшее* кратное данныхъ чиселъ, что и тр. док.

81 bis. ЗАМѢЧАНІЕ *). Послѣ доказательства теоремъ §§ 79 и 81 можно дать другое, болѣе простое доказательство теоремы § 73: **).

Чтобы получить общее наименьшее кратное двухъ чиселъ a и b, достаточно произведеніе ихъ $a\,.\,b$ раздѣлить на ихъ общаго наибольшаго дѣлителя d.

Въ самомъ дѣлѣ, замѣтимъ прежде всего, что выраженіе $\left(\frac{ab}{d}\right)$ есть число несомнѣнно цѣлое, ибо какъ a, такъ и b дѣлятся на d.

Очевидно, что это число $\left(\frac{ab}{d}\right)$ есть *общее кратное* чиселъ a и b, такъ какъ при дѣленіи на a оно даетъ въ частномъ цѣлое число $\left(\frac{b}{d}\right)$, а при дѣленіи на b въ частномъ получается тоже цѣлое число $\left(\frac{a}{d}\right)$.

Кромѣ того, замѣчаемъ, что эти частныя $\frac{b}{d}$ и $\frac{a}{d}$ суть числа взаимно-простыя, такъ какъ они представляютъ результаты раздѣленія чиселъ a и b на ихъ общ. наиб. дѣлителя (См. § 67).

Слѣдовательно, по теоремѣ § 80 заключаемъ, что число $\frac{ab}{d}$ есть не только *общее*, но и **наименьшее** *кратное* чиселъ a и b, что и тр. док.

82. Нахожденіе общаго наименьшаго кратнаго нѣсколькихъ данныхъ чиселъ.

Пусть требуется найти общее наименьшее кратное чиселъ a, b, c, d. Назовемъ его буквой M.

Пусть *н. кр.* $(a, b)=m$.

Всякое число, дѣлящееся на числа c, d и m, будетъ, очевидно, дѣлиться и на числа c, d, a, b ***).

---

*) Необходимо для Горнаго Института.

**) Слѣдуетъ замѣтить, что теоремы §§ 79 и 81 доказаны совершенно самостоятельно, *независимо отъ теоремы* § 73.

***) Ибо число, дѣлящееся на кратное двухъ чиселъ, дѣлится и на каждое изъ нихъ (§ 46).

Наоборотъ, всякое число, дѣлящееся на a, b, c, d, будетъ дѣлиться и на m, c, d *).

Изъ этого слѣдуетъ, что нахожденіе наименьшаго кратнаго четырехъ чиселъ сводится къ нахожденію наименьшаго кратнаго трехъ чиселъ: двухъ данныхъ чиселъ (c и d) и наименьшаго кратнаго m двухъ другихъ данныхъ (a и b).

Пусть наименьшее кратное чиселъ m и c равно k; тогда, повторяя разсужденія, аналогичныя вышеприведеннымъ, увидимъ, что искомое наименьшее кратное чиселъ a, b, c, d будетъ:

$$M = \text{н. кр.} (k, d).$$

И вообще:

Чтобы получить общее наименьшее кратное нѣсколькихъ чиселъ, ищутъ сперва наименьшее кратное какихъ-нибудь двухъ изъ данныхъ чиселъ, потомъ наим. кратное для полученнаго числа и третьяго изъ данныхъ и т. д., пока не будутъ взяты всѣ данныя числа. Послѣднее общее наименьшее кратное, полученное такимъ образомъ, и будетъ искомымъ **).

ГЛАВА IV.

Теорія абсолютно-простыхъ чиселъ.

83. ОПРЕДѢЛЕНІЕ. Цѣлое число, не имѣющее другихъ дѣлителей, кромѣ единицы и самого себя, называется числомъ абсолютно-простымъ (или первоначальнымъ).

Напр., числа 7, 19, 31, 37—числа абс.-простыя; число же 25 не есть абс.-простое, такъ какъ оно дѣлится на 5.

84. ТЕОРЕМА. Всякое абсолютно-простое число есть число взаимно-простое со всѣми числами, которыя не суть его кратныя.

Въ самомъ дѣлѣ, всякое простое число n не имѣетъ другихъ дѣлителей, кромѣ единицы и n, поэтому всякое другое число, не дѣлящееся на n, имѣетъ съ нимъ *только одного общаго дѣлителя—единицу*, а слѣд., эти числа суть взаимно-простыя.

85. ТЕОРЕМА. Всякое число имѣетъ по крайней мѣрѣ одного абс.-простого дѣлителя, отличнаго отъ единицы.

Въ самомъ дѣлѣ, если N есть число абс.-простое, то оно имѣетъ одного простого дѣлителя, равнаго самому себѣ.

---

*) Ибо число, дѣлящееся на a и b, есть ихъ общее кратное, а потому (§ 76) оно раздѣлится и на ихъ *наименьшее* кратное.

**) Можно еще сказать такъ: *общее наименьшее кратное n данныхъ чиселъ равно общему наименьшему кратному двухъ чиселъ: наименьшаго кратнаго какихъ-нибудь $(n-1)$ изъ данныхъ чиселъ и n—аго числа.*

Если-же N не есть число абс.-простое, то оно имѣетъ одного или нѣсколькихъ дѣлителей, отличныхъ отъ единицы. Пусть *наименьшій* изъ дѣлителей числа N равенъ a.

Нетрудно показать, что a есть число непремѣнно абс.-простое. Въ самомъ дѣлѣ, если a не есть число простое, то оно имѣетъ хоть одного какого-нибудь дѣлителя, кромѣ единицы, напр. b. Тогда по теоремѣ § 46 выходитъ, что и число N должно дѣлиться на b, т. е., что число N имѣетъ дѣлителя, *меньшаго чѣмъ* a, что противорѣчитъ условію, что a есть *наименьшій* дѣлитель числа N.

86. ТЕОРЕМА. Всякія два не взаимно-простыя числа имѣютъ по крайней мѣрѣ одного ОБЩАГО простого дѣлителя.

Въ самомъ дѣлѣ, если числа a и b не суть числа взаимно-простыя, то они имѣютъ общимъ наибольшимъ дѣлителемъ какое-нибудь цѣлое число, напр. d, неравное единицѣ. Но число d, по только что доказанной теоремѣ (§ 85), имѣетъ по крайней мѣрѣ одного простого дѣлителя, который (§ 46) будетъ дѣлить также числа a и b, т. е. и будетъ ихъ **общимъ** *простымъ дѣлителемъ*.

87. ТЕОРЕМА. Рядъ абсолютно-простыхъ чиселъ безграниченъ.

Для доказательства этой теоремы достаточно показать, что какъ-бы ни было велико какое-нибудь абс.-простое число, напр., N, всегда существуетъ другое простое число, *большее чѣмъ* N.

Составимъ для этого произведеніе изъ *всѣхъ простыхъ чиселъ* отъ единицы до N включительно, не пропуская ни одного изъ нихъ, и прибавимъ къ этому произведенію единицу. Полученное такимъ образомъ число назовемъ буквой S.

Итакъ:

$$S = 1 . 2 . 3 . 5 . 7 . 11 . 13 . 17 . 19 \ldots\ldots N + 1.$$

Если S есть число абс.-простое, то теорема доказана, такъ какъ S больше N.

Если-же S не есть число простое, то наименьшій дѣлитель его, отличный отъ единицы, долженъ быть непремѣнно числомъ простымъ (§ 85).

Но этимъ дѣлителемъ не можетъ быть ни одно изъ простыхъ чиселъ

$$2, 3, 5, 7, 11, \ldots . N,$$

заключающихся въ ряду отъ 2 до N, такъ какъ, допустивши противное, т. е., что одно изъ этихъ чиселъ, напр. a, дѣлитъ N, придемъ къ абсурду: въ самомъ дѣлѣ, если число S, равное суммѣ двухъ слагаемыхъ, дѣлится на a, и первое изъ слагаемыхъ $(1 . 2 . 3 . . . N)$, содержа a множителемъ, тоже дѣлится на a, то и второе слагаемое, т. е. единица, должно дѣлиться на a (§ 44).

Итакъ, простой дѣлитель числа S не заключается въ ряду простыхъ чиселъ отъ 1 до N, т. е. онъ больше каждаго изъ чиселъ этого ряда, а потому онъ непремѣнно *больше* N, что и доказываетъ теорему.

Примѣчаніе. Не слѣдуетъ думать, что число S, составленное, какъ указано выше, будетъ непремѣнно числомъ абс. простымъ. Въ самомъ дѣлѣ, имѣемъ:

$$1 . 2+1= 3\text{—число абс.-простое.}$$
$$1 . 2 . 3+1= 7\text{—число абс.-простое.}$$
$$1 . 2 . 3 . 5+1= 31\text{—число абс.-простое.}$$
$$1 . 2 . 3 . 5 . 7+1= 211\text{—число абс.-простое.}$$
$$1 . 2 . 3 . 5 . 7 . 11+1= 2311\text{—число абс.-простое.}$$
$$1 . 2 . 3 . 5 . 7 . 11 . 13+1= 30031\text{—число } \textit{непростое}= =59 . 509$$
$$1 . 2 . 3 . 5 . 7 . 11 . 13 . 17+1=510511\text{—число } \textit{непростое}= =19 . 97 . 277.$$ И т. д.

88. ТЕОРЕМА. Если абсолютно-простое число дѣлитъ произведеніе нѣсколькихъ сомножителей, то оно дѣлитъ, по крайней мѣрѣ, одного изъ нихъ.

Докажемъ эту теорему сначала для произведенія изъ двухъ множителей, а потомъ обобщимъ ее для произвольнаго числа ихъ.

Пусть абс.-простое число n дѣлитъ произведеніе $(a . b.)$

Если n дѣлитъ a, то теорема доказана, если же n не дѣлитъ a, то на основаніи § 84 заключаемъ, что n и a суть числа взаимно-простыя, а потому непремѣнно число b дѣлится на n (§ 68). Итакъ, n должно дѣлить или то, или другое число, хотя можетъ дѣлить и оба числа совмѣстно.

Пусть теперь абс.-простое число n дѣлитъ произведеніе $(a . b . c . d . e)$. На основаніи § 25 можно произведеніе $a . b . c . d . e$ представить въ видѣ $a . (b . c . d . e)$, т. е. разсматривать, какъ произведеніе двухъ множителей a и $(b . c . d . e)$. Если n дѣлитъ a, то теорема доказана, если же n не дѣлитъ a, то второй множитель, т. е. $b . c . d . e$, долженъ дѣлиться на n по предыдущему. Разсматриваемъ $b . c . d . e$, опять какъ произведеніе двухъ множителей: $b . (c . d . e)$. Если n дѣлитъ b, то теорема доказана, въ противномъ же случаѣ второй множитель, т. е. $(c \,.\, d \,.\, e)$ долженъ дѣлиться на n. Разсматривая $c \,.\, d \,.\, e$ опять, какъ произведеніе двухъ множителей $c \,.\, (d \,.\, e)$ . . . . и т. д., придемъ къ заключенію, что непремѣнно *по крайней мѣрѣ одно* изъ чиселъ a, b, c, d, e должно раздѣлиться на n, что и тр. док.

89. СЛѢДСТВІЕ. Если абс.-простое число дѣлитъ произведеніе абс.-простыхъ множителей, то оно равно одному изъ нихъ.

Въ самомъ дѣлѣ, если простое число дѣлитъ произведеніе, то по предыдущей теоремѣ (§ 88) оно должно дѣлить одного изъ множителей этого произведенія; но каждый изъ этихъ множителей по условію есть число абсолютно-простое, а слѣд., онъ можетъ раздѣлиться, кромѣ единицы, только на самого себя.

90. ТЕОРЕМА. Если всѣ множители одного произведенія суть числа попарно взаимно-простыя со всѣми множителями другого произведенія, то и произведенія эти тоже суть числа взаимно-простыя.

Пусть $a, b, c, d, \ldots\ldots m$ суть числа попарно взаимно-простыя съ числами $\alpha, \beta, \gamma \ldots\ldots \mu$.

Требуется доказать:

$$P = a \,.\, b \,.\, c \,.\, \ldots\ldots m$$

есть число взаимно-простое съ

$$Q = \alpha \,.\, \beta \,.\, \gamma \,.\, \ldots\ldots \mu?$$

Допустимъ противное, т. е., что P и Q не суть числа взаимно-простыя. Тогда по теоремѣ § 86 заключаемъ, что P и Q имѣютъ по крайней мѣрѣ одного *общаго* абс.-простого дѣлителя, напр. n. Если произведеніе $a \,.\, b \,.\, c \,.\, \ldots\ldots m$ дѣлится на простого дѣлителя n, то по § 88 по крайней мѣрѣ одинъ изъ множителей дѣлится на n; пусть, напр., это будетъ множитель c.

Также въ произведеніи $\alpha \,.\, \beta \,.\, \gamma \,.\, \ldots\ldots \mu$ одинъ изъ множителей, напр., β, долженъ дѣлиться на n. Слѣдовательно, оказывается, что числа c и β, имѣя общаго дѣлителя n, не суть числа взаимно-простыя, что противорѣчитъ условію.

91. СЛѢДСТВІЕ. Всякія степени взаимно-простыхъ чиселъ суть также числа взаимно-простыя.

Дано: a вз.-прост. съ b.

Треб. док. : a^m вз.-прост. съ b^n?

Въ самомъ дѣлѣ, $a^m = a \,.\, a \,.\, \ldots\ldots a$; $b^n = b \,.\, b \,.\, \ldots\ldots b$, т. е.

каждое изъ чиселъ a^m и b^n можетъ быть представлено въ видѣ произведенія, причемъ всѣ множители одного произведенія суть числа взаимно-простыя съ множителями другого произведенія, а *потому на основаніи предыдущей теоремы* заключаемъ, что и произведенія, т. е. a^m и b^n суть числа взаимно-простыя, что и тр. док.

92. ТЕОРЕМА. Всякое число можетъ быть разложено на простыхъ сомножителей, и притомъ только единственнымъ образомъ.

Доказательство этой теоремы состоитъ изъ двухъ частей:

1°. Докажемъ, что всякое число **можетъ быть разложено** *на простыхъ множителей* *).

2°. Докажемъ, что разложеніе это можетъ быть произведено *только единственнымъ способомъ.*

1°. Пусть будетъ N какое нибудь непростое**) число.

На основаніи § 85 мы знаемъ, что наименьшій дѣлитель чпсла N есть число абс.-простое; пусть это будетъ, напр., a. Слѣдовательно, имѣемъ:

$$N = a\,.\,q. \qquad (1)$$

Если частное q окажется тоже простымъ числомъ, то теорема доказана, такъ какъ N уже представлено въ видѣ произведенія двухъ простыхъ чиселъ. Если же q число непростое, то наименьшій дѣлитель его, напр., b, есть число простое. Пусть

$$q = b\,.\,q_1.$$

Подставляя это значеніе въ равенство (1), получаемъ:

$$N = a\,.\,(b\,.\,q_1) = a\,.\,b\,.\,q_1. \qquad (2)$$

Если q_1 есть число простое, то теорема доказана, если-же q_1 не есть число простое, то

$$q_1 = c\,.\,q_2,$$

гдѣ c число простое; подставляя это значеніе въ равенство (2), найдемъ:

$$N = a\,.\,b\,.\,c\,.\,q_2.$$

Продолжая подобное-же разсужденіе, непремѣнно получимъ

*) Иначе говоря, *всякое непростое число равно произведенію простыхъ множителей.*

**) Для простыхъ чиселъ теорема эта не требуетъ доказательства, такъ какъ, если N есть число простое, то оно равно произведенію двухъ простыхъ множителей: $1\,.\,N$.

одно изъ частныхъ q, напр. q_n, абсолютно-простымъ *), и тогда число N представится въ видѣ произведенія простыхъ множителей:

$$N = a \,.\, b \,.\, c \,.\, d \,.\, \ldots \,.\, n \,.\, q_n.$$

2°. Допустимъ, что какимъ-нибудь образомъ намъ удалось разложить число N на простыхъ множителей двумя различными способами; пусть, напр.

$$N = a \,.\, b \,.\, c \,.\, d \,.\, e \,.\, \ldots \,.\, n \qquad (1)$$

и то-же самое число

$$N = a_1 \,.\, b_1 \,.\, c_1 \,.\, d_1 \,.\, \ldots \,.\, n_1 \,.\, p \,.\, q \,.\, r. \qquad (2)$$

Изъ разложенія (1) мы видимъ что N дѣлится на простое число a; слѣд., и произведеніе $a_1 \,.\, b_1 \,.\, \ldots \,.\, r$, равное этому же числу N, тоже должно дѣлиться на a.

Но всѣ множители этого произведенія суть числа абсолютно-простыя, а потому, если произведеніе это дѣлится на простого дѣлителя a, то одинъ изъ множителей его (§ 89) долженъ быть равенъ a. Пусть, напр., $a_1 = a$.

Число N можетъ быть теперь представлено въ двухъ видахъ:

$$N = a \,.\, (b \,.\, c \,.\, d \,.\, \ldots \,.\, n)$$
$$N = a_1 \,.\, (b_1 \,.\, c_1 \,.\, d_1 \,.\, \ldots \,.\, n_1 \,.\, p \,.\, q \,.\, r),$$

откуда слѣдуетъ, что произведенія

$$N_1 = b \,.\, c \,.\, d \,.\, \ldots \,.\, n \qquad (3)$$
$$N_1 = b_1 \,.\, c_1 \,.\, d_1 \,.\, \ldots \,.\, n_1 \,.\, p \,.\, q \,.\, r \qquad (4)$$

должны быть равны.

Изъ равенства (3) видимъ, что N_1 дѣлится на простое число b; слѣд., и произведеніе простыхъ чиселъ (4), т. е.

$$b_1 \,.\, c_1 \,.\, d_1 \,.\, \ldots \,.\, r$$

должно дѣлиться на b, т. е. одинъ изъ множителей этого произведенія, напр. b_1, долженъ быть равенъ b (§ 89).

Переписывая теперь равенства (1) и (2) такъ:

$$N = a \,.\, b \,.\, (c \,.\, d \,.\, e \,.\, \ldots \,.\, n)$$
$$N = a_1 \,.\, b_1 \,.\, (c_1 \,.\, d_1 \,.\, e_1 \,.\, \ldots \,.\, n_1 \,.\, p \,.\, q \,.\, r),$$

---

*) Числа $q, q_1, q_2, q_3 \,.\, \ldots$ суть *уменьшающіяся цѣлыя числа,* и слѣд., если бы ни одно изъ нихъ не было абс.-простымъ, то оказалось-бы, что *убывающія* числа образуютъ *безпредѣльный* рядъ чиселъ, что, очевидно, невозможно.

видимъ, что числа

$$N_2 = c \,.\, d \,.\, e \,.\, .\, .\, .\, .\, .\, n \qquad (5)$$

$$N_2 = c_1 \,.\, d_1 \,.\, e_1 \,.\, .\, .\, .\, .\, .\, n_1 \,.\, p \,.\, q \,.\, r \qquad (6)$$

должны быть равны, откуда, при помощи разсужденій, подобныхъ вышеприведеннымъ, увидимъ, что одинъ изъ множителей произведенія (6) долженъ быть равнымъ c и т. д.

Продолжая достаточно долго такія-же разсужденія, придемъ къ заключенію, что для каждаго изъ множителей $a, b, c, d, \ldots\ldots n$ произведенія (1) найдется соотвѣтственно равный множитель въ произведеніи (2). Пусть, напр.

$$a = a_1\ ;\ b = b_1\ ;\ c = c_1;\ d = d_1;\ \ldots\ldots n = n_1.$$

Переписываемъ теперь равенства (1) и (2) такъ:

$$N = (a \,.\, b \,.\, c \,.\, .\, .\, .\, .\, .\, n) \,.\, 1$$

$$N = (a_1 \,.\, b_1 \,.\, c_1 \,.\, .\, .\, .\, .\, .\, n_1) \,.\, p \,.\, q \,.\, r.$$

Отсюда видно, что произведеніе

$$p \,.\, q \,.\, r = 1,$$

что возможно только въ томъ случаѣ, если порознь каждый изъ множителей равенъ единицѣ, т. е., если

$$p = 1;\ q = 1;\ r = 1.$$

Итакъ, обѣ формы разложенія числа N *тождественны,* т. е. число можетъ быть разложено на первоначальныхъ множителей только *единственнымъ* способомъ, что и тр. док.

ГЛАВА V.

О дѣлимости чиселъ, представленныхъ въ видѣ произведенія простыхъ множителей.

93. ТЕОРЕМА. Для того, чтобы одно число дѣлилось на другое, необходимо и достаточно, чтобы каждый изъ простыхъ множителей дѣлителя входилъ въ дѣлимое, съ показателемъ, не меньшимъ того, который онъ имѣетъ въ дѣлителѣ.

Во-первыхъ, это условіе *необходимо.* Въ самомъ дѣлѣ, пусть a дѣлится нацѣло на b, такъ что

$$a = b \,.\, q. \qquad (1)$$

Разложимъ каждое изъ чиселъ a, b и q на простыхъ множителей. Такъ какъ числа a, и $(b \,.\, q)$ равны между собой, то простые множители, находящіеся въ лѣвой и правой частяхъ равенства (1), должны быть тождественны; иначе оказалось-бы, что одно и то-же число можетъ быть разложено двумя различными способами на первоначальныхъ множителей, что невозможно (§ 92). Итакъ, число a состоитъ изъ произведенія всѣхъ простыхъ множителей, входящихъ и въ дѣлителя, и въ частное, а потому ясно, что каждый изъ множителей дѣлителя входитъ и въ дѣлимое съ показателемъ степени во всякомъ случаѣ *не меньшимъ*, чѣмъ въ дѣлителѣ.

Во-вторыхъ, это условіе *достаточно*, потому что, если оно выполнено, то дѣлимое можно разложить на двѣ части, изъ которыхъ одна будетъ произведеніемъ всѣхъ простыхъ множителей, входящихъ въ дѣлитель, а другая, будучи произведеніемъ всѣхъ остальныхъ простыхъ множителей дѣлимаго, выразитъ собой *частное* отъ дѣленія; но такъ какъ всѣ эти простые множители суть числа цѣлыя, то и частное выразится тоже числомъ *цѣлымъ*, т. е. дѣленіе выполнится непремѣнно *нацѣло*, что и тр. док.

94. ТЕОРЕМА. Общій наибольшій дѣлитель двухъ или нѣсколькихъ чиселъ равенъ произведенію изъ простыхъ множителей, общихъ всѣмъ даннымъ числамъ, причемъ каждый изъ этихъ простыхъ множителей надо взять съ наименьшимъ изъ показателей, съ какими онъ входитъ въ данныя числа.

Въ самомъ дѣлѣ, на основаніи только что выведеннаго условія дѣлимости одного числа на другое (§ 93) можно сказать, что *всякій* общій дѣлитель данныхъ чиселъ не можетъ заключать въ себѣ простого множителя, не входящаго хоть въ одно изъ этихъ чиселъ, и также не можетъ имѣть простого множителя съ показателемъ, бо́льшимъ, чѣмъ показатель при немъ же въ любомъ изъ данныхъ чиселъ, а потому ясно, что общій *наибольшій* дѣлитель долженъ быть равенъ произведенію *всѣхъ* простыхъ множителей, *общихъ* даннымъ числамъ, причемъ каждый изъ этихъ множителей долженъ быть взятъ съ *наименьшимъ* его показателемъ.

Примѣръ. Положимъ, даны 4 числа:

$$5040 = 2^4 \,.\, 3^2 \,.\, 5 \,.\, 7;$$
$$600 = 2^3 \,.\, 3 \,.\, 5^2;$$
$$960 = 2^6 \,.\, 3 \,.\, 5;$$
$$3960 = 2^3 \,.\, 3^2 \,.\, 5 \,.\, 11.$$

Очевидно, что **всякій** *общій дѣлитель* этихъ чиселъ не можетъ содержать въ себѣ другихъ множителей кромѣ 2, 3 и 5, причемъ наибольшіе возможные показатели степени при этихъ множителяхъ соотвѣтственно суть 3 (при 2), 1 (при 3) и 1 (при 5); поэтому, общій *наибольшій* дѣлитель этихъ чиселъ равенъ:

$$2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120.$$

95. ТЕОРЕМА. Общее наименьшее кратное двухъ или нѣсколькихъ чиселъ равно произведенію всѣхъ простыхъ множителей, входящихъ въ данныя числа, причемъ каждый изъ этихъ множителей надо взять съ наибольшимъ изъ всѣхъ показателей, съ какими онъ входитъ въ данныя числа.

Въ самомъ дѣлѣ, на основаніи выведеннаго выше условія дѣлимости одного числа на другое (§ 93), можно сказать, что *всякое* общее кратное данныхъ чиселъ должно содержать *всѣ* простые множители, входящіе въ эти числа, съ показателями *или равными, или бóльшими*, чѣмъ показатели при этихъ множителяхъ въ данныхъ числахъ, а потому *наименьшее* кратное должно быть равно произведенію *всѣхъ* простыхъ множителей съ показателями, *равными* наибольшимъ изъ тѣхъ показателей, съ какими они входятъ въ эти числа.

Примѣръ. Положимъ, даны тѣ-же 4 числа:

$$5040 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7;$$
$$600 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2;$$
$$960 = 2^6 \cdot 3 \cdot 5;$$
$$3960 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11.$$

Очевидно, что *всякое* общее кратное этихъ чиселъ должно содержать простыхъ множителей

2, 3, 5, 7, 11

съ показателями степеней соотвѣтственно *не меньшими*, чѣмъ 6 (при 2); 2 (при 3); 2 (при 5), 1 (при 7) и 1 (при 11), а потому *наименьшее* общее кратное этихъ чиселъ равно

$$2^6 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 = 1108800.$$

ОТДѢЛЪ III.

Дроби.

ГЛАВА I.

Основныя свойства дробей.

96. ОПРЕДѢЛЕНІЯ. Дробью называется соединеніе нѣсколькихъ равныхъ частей какой-нибудь величины.

Число, показывающее, на сколько равныхъ частей данная величина раздѣлена, называется *знаменателемъ* дроби; число, показывающее, сколько такихъ частей взято для образованія дроби, называется ея *числителемъ*.

Напр., дробь $\frac{9}{11}$ показываетъ, что единица разбита на одиннадцать равныхъ частей, причемъ для образованія дроби взято такихъ частей девять.

Читаютъ дробь такъ: выговариваютъ сперва числителя, потомъ знаменателя, измѣняя окончаніе послѣдняго слова.

Можно также прочесть дробь и иначе: сперва выговариваютъ числителя, а потомъ, прибавивъ слова—*дѣленное на,*—знаменателя.

Напр., дробь

$$\frac{127}{3263}$$

можно прочитать или такъ:

сто двадцать семь три тысячи двѣсти шестьдесятъ третьихъ,

или такъ:

сто двадцать семь, дѣленное на три тысячи двѣсти шестьдесятъ три.

97. Изъ опредѣленія понятія о дроби слѣдуетъ:

1. *Если числитель дроби меньше знаменателя, то дробь меньше единицы.* Такая дробь называется *правильной дробью.*

2. *Если числитель дроби равенъ ея знаменателю, то такая дробь равна единицѣ.*

3. *Если числитель больше знаменателя, то величина дроби— больше единицы.* Такая дробь называется *неправильной.*

98. ТЕОРЕМА. Если числитель дроби умножить (раздѣлить) на цѣлое число, то величина дроби умножится (раздѣлится) на то-же число.

Сравнимъ, напр., дроби:

$$(1)\ \ldots \frac{a}{b} \text{ и } (2)\ \ldots \frac{a \cdot m}{b}.$$

Такъ какъ знаменатель и той и другой дроби равенъ b, то слѣд., число частей, на которыя раздѣлена единица для образованія дробей, а потому и величина каждой части—одинаковы. Но въ дроби (2) такихъ частей въ m разъ больше чѣмъ въ (1), а потому и вся эта дробь больше въ m разъ, т. е., она равна первой дроби, увеличенной въ m разъ, что и тр. док.

Также сравненіе дробей *)

$$\frac{a}{b} \text{ и } \frac{(a:m)}{b}$$

показываетъ, что вторая дробь меньше первой въ m разъ, такъ какъ число равныхъ частей, участвующихъ въ образованіи этой дроби въ m разъ меньше, чѣмъ въ первой, величина же каждой части въ обоихъ случаяхъ одинакова.

99. ТЕОРЕМА. Если знаменатель дроби умножить (раздѣлить) на цѣлое число, то величина дроби раздѣлится (умножится) на то-же число.

Въ самомъ дѣлѣ, сравнивъ, напр., дроби:

$$(1)\ \ldots \frac{a}{b} \text{ и } (2)\ \ldots \frac{a}{b \cdot m},$$

видимъ, что число частей, участвующихъ въ образованіи первой и второй дроби, одинаково; *величина* же каждой части во второй дроби въ m разъ меньше, чѣмъ въ первой (такъ какъ *число* такихъ

*) Предполагая, что a дѣлится нацѣло на m.

частей въ m разъ больше), а потому вторая дробь въ m разъ меньше первой, т. е. равна первой дроби, раздѣленной на m, что и тр. док.

Подобнымъ же образомъ изъ сравненія дробей *)

$$\frac{a}{b} \text{ и } \frac{a}{(b:m)}$$

нетрудно убѣдиться, что вторая дробь въ m разъ больше первой, т. е. равна первой, умноженной на m, что и тр. док.

100. ТЕОРЕМА. Если числитель и знаменатель дроби одновременно умножить (раздѣлить) на одно и то-же число, то величина дроби не измѣнится.

Теорема эта представляетъ прямое слѣдствіе двухъ предыдущихъ. Въ самомъ дѣлѣ, если, напр., числитель умножить на какое нибудь число, то величина дроби *умножится* на то-же число, если-же и знаменатель умножить на это-же число, то величина дроби на него же *раздѣлится*; очевидно, что одновременно увеличивая и уменьшая дробь въ одинаковое число разъ, мы оставляемъ величину ея безъ перемѣны.

То-же произойдетъ, понятно, и тогда, если числитель и знаменатель *раздѣлимъ* на одно и то-же число.

101. На предыдущей теоремѣ основано очень важное свойство дробей: *сократимость* ихъ.

Такъ какъ величина дроби не измѣняется отъ раздѣленія обоихъ членовъ ея на одно и то-же число, то, если числитель и знаменатель дроби имѣютъ какого-нибудь общаго дѣлителя, можно раздѣлить на этого дѣлителя оба члена дроби, и полученная такимъ образомъ дробь съ *меньшими* членами, *т. е. болѣе удобная для вычисленій*, будетъ равна данной.

Напр., раздѣливъ оба члена дроби $\frac{6}{9}$ на 3, получимъ новую дробь $\frac{2}{3}$, равную данной.

102. Если дана дробь $\frac{a}{b}$, числитель и знаменатель которой не суть числа взаимно-простыя, то, найдя общій наиболь-

---

*) Предполагая, что b дѣлится нацѣло на m.

шій дѣлитель чиселъ a и b, и раздѣливъ на него оба члена дроби, получимъ новую дробь, равную данной, но уже *несократимую*.

Итакъ, *несократимой дробью называется такая дробь, числитель и знаменатель которой суть числа взаимно-простыя.*

Привести дробь къ простѣйшему виду значитъ: найти общій наибольшій дѣлитель числителя и знаменателя дроби, и раздѣленіемъ обоихъ членовъ ея на ихъ общаго наибольшаго дѣлителя сдѣлать дробь несократимой.

Дробь называется *неприводимой*, если она не можетъ быть выражена другой дробью, равной данной, но съ меньшими членами.

103. ТЕОРЕМА. Если несократимая дробь равна нѣкоторой другой дроби, то оба члена послѣдней дроби суть числа равнократныя *) обоихъ членовъ данной.

Пусть, напр., $\frac{a}{b}$ есть несократимая дробь и пусть

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}.$$

Умножая обѣ части этого равенства на d, получимъ:

$$c=\frac{a\;.\;d}{b}\;.\;\;.\;\;.\;(1)$$

Такъ какъ c есть число цѣлое, то произведеніе $(a\;.\;d)$ должно нацѣло дѣлиться на b; но a—вз.-простое съ b по условію (ибо дробь $\frac{a}{b}$ несократима), слѣд., d дѣлится (§ 68) на b. Пусть, напр.,

$$d=b\;.\;m.$$

Подставляя это значеніе въ равенство (1), получаемъ:

$$c=\frac{a\;.\;b\;.\;m}{b}=a\;.\;m\;.$$

---

*) Чпсла A и B называются *равнократными* относительно чиселъ a и b, если частныя отъ раздѣленія A на a и B на b равны между собой, т. е., если $\left(\frac{A}{a}\right)=\left(\frac{B}{b}\right)$, такъ какъ въ этомъ случаѣ A содержитъ a столько же разъ, сколько B содержитъ b.

Итакъ, если $d = b \,.\, m$, то $c = a \,.\, m$, т. е., частныя отъ дѣленія d на b и c на a равны между собой, а потому c и d, члены второй дроби, суть числа равнократныя a и b, членовъ первой дроби, что и тр. док.

104. На основанiи послѣдней теоремы можно утверждать, что *всякая* **несократимая** *дробь есть въ то-же время дробь* **неприводимая**, такъ какъ, если она равна нѣкоторой другой дроби, то члены послѣдней суть числа, *бо́льшiя* членовъ данной *).

105. Изъ теоремы § 103 вытекаютъ слѣдствiя:

1. *Для полученiя всѣхъ дробей, равныхъ данной дроби, достаточно сдѣлать эту дробь несократимой и умножать оба ея члена послѣдовательно на числа натуральнаго ряда:*

$$1, 2, 3, 4, 5 \dots .$$

2. *Если двѣ несократимыя дроби равны, то онѣ тождественны, т. е. ихъ числители и знаменатели порознь равны между собой.*

106. Отъ прибавленiя къ числителю и знаменателю дроби одного и того-же числа, дробь всегда приближается къ единицѣ, т. е. правильная дробь увеличивается, неправильная—уменьшается.

Отъ вычитанiя изъ числителя и знаменателя дроби одного и того-же числа, дробь всегда отдаляется отъ единицы, т. е. правильная дробь уменьшается, а неправильная увеличивается.

Дана, напр., дробь $\frac{a}{b}$; прибавивъ къ обоимъ членамъ ея по c, получимъ дробь $\frac{a+c}{b+c}$. Сравнимъ величины этихъ дробей. Если оба члена первой дроби умножить на $(b+c)$, а второй—на b, то величина каждой изъ дробей не измѣнится (§ 100), но знаменатели ихъ сдѣлаются равными другъ другу:

$$(1) \dots . \frac{a \,.\, (b+c)}{b \,.\, (b+c)};\ (2) \dots . \frac{(a+c) \,.\, b}{(b+c) \,.\, b}.$$

*) Если дробь несократима, то это значитъ, что ее нельзя замѣнить другой дробью, равной ей, при помощи *дѣленiя* обоихъ членовъ на одно и то-же число; но еще не очевидно, что ее нельзя упростить при помощи какого либо *иного* прiема, напр., вычитая изъ обоихъ ея членовъ числа, надлежащимъ образомъ выбранныя, или еще какъ нибудь иначе. Только послѣ доказательства теоремы § 103, можно утверждать, что *несократимая дробь—неприводима, т. е. никоимъ образомъ не можетъ выразиться при помощи меньшихъ членовъ.*

Изъ двухъ этихъ дробей больше будетъ та, у которой бóльшій числитель, такъ что достаточно сравнить величины произведеній:

$$a\,.\,(b+c) \quad \text{и} \quad (a+c)\,.\,b, \text{ или (§§ 13 и 15)}$$

$$a\,.\,b+a\,.\,c \quad \text{и} \quad a\,.\,b+c\,.\,b.$$

Каждый изъ этихъ числителей состоитъ изъ двухъ слагаемыхъ, причемъ первыя изъ нихъ ($a\,.\,b$) одинаковы.

Что касается до вторыхъ слагаемыхъ

$$a\,.\,c \text{ и } b\,.\,c,$$

$$\text{то при } a < b \text{ очевидно } a\,.\,c < b\,.\,c,$$

т. е., первая дробь меньше второй;

$$\text{если-же } a > b, \text{ то } a\,.\,c > b\,.\,c,$$

т. е., первая дробь больше второй.

Слѣд., если данная дробь $\frac{a}{b}$ есть дробь *правильная* ($a < b$), то отъ прибавленія къ обоимъ членамъ ея поровну она *увеличивается*; если дробь *неправильная* ($a > b$), то отъ прибавленія къ обоимъ членамъ поровну она *уменьшается*, т. е. и въ томъ и другомъ случаѣ *приближается къ единицѣ*, что и тр. док.

Совершенно аналогичнымъ образомъ доказывается и вторая часть теоремы.

107. Приведеніе дробей къ общему наименьшему знаменателю. Положимъ, мы имѣемъ нѣсколько несократимыхъ *) дробей:

$$\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}, \frac{g}{h}.$$

Каждая изъ этихъ дробей на основаніи § 103 можетъ быть равна только такой дроби, члены которой суть числа, *равнократныя* членовъ этой несократимой дроби. Слѣдовательно, если мы хотимъ привести всѣ данныя дроби къ общему знаменателю, то этотъ общій знаменатель долженъ быть числомъ, *кратнымъ всѣхъ данныхъ знаменателей*; если же требуется, чтобы общій знаменатель всѣхъ этихъ дробей былъ *наименьшимъ*, то онъ долженъ быть *общимъ* **наименьшимъ** *кратнымъ* всѣхъ данныхъ знаменателей.

*) Предполагая данныя дроби несократимыми, мы нисколько не уменьшаемъ общности вопроса, такъ какъ всякая дробь, безъ измѣненія ея величины, можетъ быть приведена къ *простѣйшему виду*, т. е. сдѣлана *несократимой*.

Итакъ, пусть *об. наим. крат.* $(b, d, f, h) = M$, и пусть частныя отъ раздѣленія M на данныхъ знаменателей соотвѣтственно будутъ:

$$q_b, q_d, q_f, q_h.$$

Умножая оба члена первой дроби на q_b, второй на q_d.... и т. д., получимъ:

$$\frac{a \cdot q_b}{b \cdot q_b}, \frac{c \cdot q_d}{d \cdot q_d}, \frac{e \cdot q_f}{f \cdot q_f}, \frac{g \cdot q_h}{h \cdot q_h}, \text{ или}$$

$$\frac{a \cdot q_b}{M}, \frac{c \cdot q_d}{M}, \frac{e \cdot q_f}{M}, \frac{g \cdot q_h}{M}.$$

Такимъ образомъ, всѣ данныя дроби приведены къ общему наименьшему знаменателю; *наименьшему* потому, что M есть общее *наименьшее* кратное всѣхъ данныхъ знаменателей.

Отсюда вытекаетъ **правило**:

Для того, чтобы привести нѣсколько дробей къ общему **наименьшему** *знаменателю, надо сдѣлать всѣ данныя дроби несократимыми, найти общее* **наименьшее** *кратное всѣхъ знаменателей этихъ несократимыхъ дробей, и оба члена каждой дроби умножить на частное отъ дѣленія найденнаго наименьшаго кратнаго на знаменателя данной дроби.*

ГЛАВА II.

Дѣйствія надъ дробями.

108. Надъ дробями можно производить всѣ тѣ-же дѣйствія, какъ и надъ цѣлыми числами; только опредѣленія этихъ дѣйствій должны быть обобщены слѣдующимъ образомъ:

Сложеніе *есть дѣйствіе, при помощи котораго опредѣляется* **сумма** *данныхъ чиселъ, т. е. число, содержащее всѣ единицы* **и части единицы,** *заключающіяся во всѣхъ слагаемыхъ.*

Вычитаніе *есть дѣйствіе, при помощи котораго отъ одного изъ данныхъ чиселъ отнимаются всѣ единицы* **и части единицы,** *содержащіяся въ другомъ данномъ числѣ* *).

---

*) Можно также оставить опредѣленіе вычитанія, аналогичное прежнему (§ 1): *Вычитаніе есть дѣйствіе, при помощи котораго находится* **разность** *двухъ чиселъ (цѣлыхъ или дробныхъ), т. е. такое число, (цѣлое или дробное), которое, будучи прибавлено къ меньшему изъ данныхъ, воспроизводитъ большее.*

109. ТЕОРЕМА. Сумма или разность дробей съ однимъ и тѣмъ-же знаменателемъ равна дроби, числитель которой есть сумма или разность числителей данныхъ дробей, а знаменатель есть общій знаменатель данныхъ дробей.

Пусть даны дроби: $\frac{a}{n}$ и $\frac{b}{n}$. Первая дробь есть соединеніе a *n—овыхъ* частей единицы, вторая дробь есть соединеніе b такихъ-же частей единицы. Очевидно, что сумма a частей единицы съ b такими же частями даетъ $a+b$ такихъ же частей, т. е.:

$$\frac{a}{n}+\frac{b}{n}=\frac{a+b}{n}.$$

Также, вычтя b частей единицы изъ a такихъ же частей, найдемъ $a-b$ такихъ же частей, т. е.:

$$\frac{a}{n}-\frac{b}{n}=\frac{a-b}{n}.$$

ЗАМѢЧАНІЕ. Если даны для сложенія или вычитанія дроби съ *неравными знаменателями, то сначала приводятъ ихъ къ общему знаменателю,* а затѣмъ поступаютъ по предыдущему.

110. Опредѣленіе дѣйствія умноженія, сдѣланное въ § 11 для цѣлыхъ чиселъ:

Умножить величину на цѣлое число значитъ повторить данную величину слагаемымъ столько разъ, сколько въ цѣломъ числѣ содержится единицъ,

очевидно, не имѣетъ смысла въ примѣненіи къ числамъ дробнымъ, такъ какъ нельзя взять величину слагаемымъ дробное число *разъ*, напр., $\frac{3}{5}$ раза.

Поэтому необходимо сдѣлать другое *болѣе общее* опредѣленіе умноженія и при томъ такое, чтобы оно не только не противорѣчило сдѣланному ранѣе, но *заключало* бы его въ себѣ, какъ частный случай.

Опредѣленіе это слѣдующее:

Умножить величину (цѣлую или дробную) на какое-нибудь число (цѣлое или дробное) значитъ составить изъ данной новую величину, совершенно такимъ же образомъ, какъ множитель образуется изъ единицы.

Для вполнѣ яснаго пониманія смысла этого опредѣленія, необходимо выяснить, что именно надо понимать подъ словами: *„какъ множитель образуется изъ единицы“*.

1. Если множитель есть число цѣлое, равное, напр., a, то онъ образуется изъ единицы при помощи *сложенія* единицы, взятой a разъ.

Поэтому, умножить какую нибудь величину N (цѣлую или дробную) на число цѣлое, напр., a, значитъ повторить N слагаемымъ a разъ, *что вполнѣ соотвѣтствуетъ опредѣленію умноженія, сдѣланному раньше* (§ 11).

2. Если множитель есть дробь, равная напр. $\frac{a}{b}$, то онъ образуется изъ единицы такъ: единица дѣлится на b равныхъ частей и такихъ частей берется a.

Поэтому, чтобы умножить какую нибудь величину N (цѣлую или дробную) на дробь, напр., $\frac{a}{b}$, надо раздѣлить N на b равныхъ частей, что даетъ

$$\frac{N}{b}$$

и такихъ частей взять a, что даетъ

$$\frac{N \cdot a}{b}.$$

111. При умноженіи дробей могутъ встрѣтиться три случая:

1. Множимое есть число цѣлое, множитель—дробное.
2. Множимое есть число дробное, множитель—цѣлое.
3. Множимое и множитель суть числа дробныя.

Такъ какъ всякое цѣлое число можетъ быть разсматриваемо, какъ дробь съ знаменателемъ, равнымъ единицѣ, то достаточно вывести правило только для умноженія двухъ дробей.

112. Пусть требуется, напр., умножить $\frac{a}{b}$ на $\frac{m}{n}$.

Для этого на основаніи опредѣленія (§ 110) надо изъ $\frac{a}{b}$ составить новое число такимъ же образомъ, какъ множитель $\frac{m}{n}$ составленъ изъ единицы, т. е. надо $\frac{a}{b}$ раздѣлить на n равныхъ частей, что даетъ (§ 99)

$$\frac{a}{b \cdot n},$$

и такихъ частей взять m, что даетъ (§ 98)

$$\frac{a \cdot m}{b \cdot n}.$$

Итакъ:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{m}{n} = \frac{a \cdot m}{b \cdot n}, \text{ т. е.}$$

Произведеніе двухъ дробей равно дроби, числитель которой есть произведеніе числителей, а знаменатель—произведеніе знаменателей данныхъ дробей.

113. Если произведеніе двухъ дробей $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ умножается на третью дробь $\frac{e}{f}$, полученный результатъ—на четвертую дробь $\frac{g}{h}$ и т. д., то найденное произведеніе называется *произведеніемъ нѣсколькихъ дробей.*

Такъ какъ перемноженіе дробей сводится къ перемноженію цѣлыхъ чиселъ,—ихъ числителей и знаменателей,—то всѣ правила, выведенныя въ §§ 21—25 для цѣлыхъ чиселъ, остаются справедливыми и для того случая, когда нѣкоторые или даже всѣ множители произведенія суть числа дробныя.

Поэтому:

1. *Произведеніе произвольнаго числа множителей (цѣлыхъ или дробныхъ) не измѣняется отъ перестановки производителей въ какомъ угодно порядкѣ.*

2. *Чтобы умножить произведеніе нѣсколькихъ множителей (цѣлыхъ или дробныхъ) на какое-нибудь число (цѣлое или дробное), достаточно одного изъ сомножителей умножить на это число.*

3. *Чтобы умножить число (цѣлое или дробное) на произведеніе нѣсколькихъ множителей (цѣлыхъ или дробныхъ), достаточно умножить его на каждаго изъ нихъ.*

4. *Чтобы умножить одно произведеніе (изъ цѣлыхъ или дробныхъ множителей) на другое произведеніе (изъ цѣлыхъ или дробныхъ множителей), достаточно составить новое произведеніе изъ всѣхъ множителей обоихъ произведеній.*

5. *Во всякомъ произведеніи можно нѣсколько сомножителей (цѣлыхъ или дробныхъ) замѣнить вычисленной величиной ихъ произведенія.*

114. ДѢЛЕНІЕ ДРОБЕЙ. Дѣленіе есть дѣйствіе, посредствомъ котораго, зная произведеніе двухъ какихъ угодно чиселъ (цѣлыхъ или дробныхъ) и одно изъ нихъ, находятъ другое.

Такъ какъ произведеніе не измѣняется отъ перемѣны порядка сомножителей (цѣлыхъ или дробныхъ), то можно всегда считать, что *извѣстный производитель есть множитель, а неизвѣстный—множимое* *).

Поэтому можно сказать, что *раздѣлить одно число (цѣлое или дробное) на другое (цѣлое или дробное) значитъ найти такое число, которое, будучи умножено на дѣлителя, воспроизвело бы дѣлимое.*

Пусть требуется раздѣлить какое-нибудь число, цѣлое или дробное, напр., A, на дробь $\frac{m}{n}$. Обозначимъ искомое частное буквою x.

На основаніи опредѣленія дѣйствія дѣленія, можемъ написать:

$$x \cdot \frac{m}{n} = A.$$

Равенство это указываетъ, что m *n—овыхъ* частей величины x равны A; слѣд., *одна n—овая* часть x въ m разъ меньше A, т. е.

$$x \cdot \frac{1}{n} = \frac{A}{m},$$

а вся величина x будетъ въ n разъ больше, чѣмъ одна *n—овая* часть ея, т. е.

$$x = \frac{A \cdot n}{m}.$$

Итакъ,

$$A : \frac{m}{n} = A \cdot \frac{n}{m}.$$

Отсюда заключаемъ:

Для того, чтобы раздѣлить число (цѣлое или дробное) на дробь, достаточно умножить это число на дробь, (обратную *) данной.

---

*) Если-бы подобное предположеніе измѣнило даже *смыслъ* дѣйствія, оно тѣмъ не менѣе не можетъ измѣнить значенія искомаго частнаго, а только это насъ теперь и интересуетъ (§ 30).

*) Два числа называются *обратными*, если произведеніе ихъ равно единицѣ. Очевидно, чтобы получить дробь, обратную данной, достаточно числителя сдѣлать знаменателемъ, а знаменателя—числителемъ.

Напр.: $\frac{2}{3}$ и $\frac{3}{2}$; $\frac{5}{8}$ и $\frac{8}{5}$; 7 и $\frac{1}{7}$ и т. д.

115*). Разсмотримъ на числовыхъ примѣрахъ болѣе подробно всѣ случаи дѣленія, которыя могутъ встрѣтиться на практикѣ.

a) Дѣленіе двухъ цѣлыхъ чиселъ.

Докажемъ, что частное отъ дѣленія двухъ цѣлыхъ чиселъ равно дроби, имѣющей числителемъ дѣлимое, а знаменателемъ дѣлителя, т. е. что, напр., частное отъ дѣленія 13 на 5 равно дроби $\frac{13}{5}$.

Въ самомъ дѣлѣ, произведеніе $\frac{13}{5}$ на 5 равно 13; слѣдовательно, $\frac{13}{5}$ есть то число, которое, будучи умножено на дѣлителя (5), воспроизводитъ дѣлимое (13), а потому на основаніи опредѣленія (§ 114) заключаемъ, что $\frac{13}{5}$ есть искомое частное отъ раздѣленія 13 на 5, что и тр. док.

Если изъ неправильной дроби $\frac{13}{5}$ исключить цѣлое число, то получится $2^3/_5$; цѣлая часть этого выраженія (2) есть цѣлая часть частнаго отъ дѣленія 13 на 5 (§ 31); 3 есть остатокъ отъ этого дѣленія; дробь $^3/_5$ есть та дополнительная дробь, которую нужно прибавить къ цѣлой части частнаго, чтобы получить *полное частное* отъ дѣленія 13 на 5. Отсюда выводимъ правило: для полученія полнаго частнаго отъ дѣленія двухъ чиселъ, надо къ цѣлой части частнаго прибавить дополнительную дробь, имѣющую числителемъ остатокъ отъ дѣленія, а знаменателемъ— дѣлителя.

b) Дѣленіе дроби на цѣлое число.

Положимъ, требуется раздѣлить $\frac{7}{13}$ на 3. По опредѣленію § 114 это значитъ найти такое число, которое, будучи умножено на 3, дало бы $\frac{7}{13}$; отсюда очевидно, что искомое частное будетъ въ 3 раза меньше чѣмъ $\frac{7}{13}$, и мы можемъ получить это частное, уменьшивъ дробь $\frac{7}{13}$ въ 3 раза, для чего достаточно умножить знаменателя этой дроби на 3 (§ 99). Слѣдовательно, искомое частное будетъ равно $\frac{7}{13 \cdot 3}$. Отсюда вытекаетъ правило: *Чтобы раздѣ-*

*) Необходимо для Горнаго Института.

лить дробь на цѣлое число, достаточно знаменателя дроби умножить на это число.

Примѣчаніе. Вмѣсто умноженія знаменателя можно раздѣлить числителя дроби (§ 98), если только такое дѣленіе возможно безъ остатка. Напр., частное отъ дѣленія $\frac{15}{8}$ на 5 равно $\frac{(15:5)}{8} = \frac{3}{8}$.

c) *Дѣленіе цѣлаго числа на дробь.*

Пусть требуется раздѣлить 11 на $\frac{4}{7}$. На основаніи опредѣленія § 114 заключаемъ, что произведеніе искомаго частнаго на $\frac{4}{7}$ должно равняться 11; другими словами, $\frac{4}{7}$ искомаго частнаго составляютъ 11; слѣд., $\frac{1}{7}$ частнаго будетъ въ 4 раза меньше 11, т. е. равна $\frac{11}{4}$; если одна седьмая часть частнаго равна $\frac{11}{4}$, то все частное будетъ, очевидно, въ 7 разъ больше, т. е. $\frac{11 \cdot 7}{4}$. Итакъ, *чтобы раздѣлить цѣлое число на дробь, достаточно умножить это число на дробь, обратную данной.*

d) *Дѣленіе двухъ дробей.*

Пусть требуется $\frac{3}{5}$ раздѣлить на $\frac{7}{8}$. Это значитъ найти такое число, которое при умноженіи на $\frac{7}{8}$ даетъ $\frac{3}{5}$. Слѣдовательно, $\frac{7}{8}$ искомаго числа составляютъ $\frac{3}{5}$, а потому $\frac{1}{8}$ этого числа будетъ въ 7 разъ меньше, т. е. $\frac{3}{5 \cdot 7}$; все же число будетъ въ 8 разъ больше, чѣмъ $\frac{1}{8}$ его, т. е. $= \left(\frac{3}{5 \cdot 7}\right) \cdot 8 = \frac{3 \cdot 8}{5 \cdot 7}$.

Итакъ, $\frac{3}{5} : \frac{7}{8} = \frac{3 \cdot 8}{5 \cdot 7} = \frac{3}{5} \cdot \frac{8}{7}$, т. е. *чтобы раздѣлить одну дробь на другую, достаточно умножить дѣлимую дробь на дробь, обратную дѣлителю.*

Очевидно, всѣ эти правила представляютъ лишь частные случаи *общаго правила* дѣленія, выведеннаго въ § 114.

ГЛАВА III.

Десятичныя дроби.

116. ОПРЕДѢЛЕНІЯ. Десятичной дробью называется дробь съ цѣлыми членами, знаменатель которой равенъ 10, 100, 1000, 10000... и вообще какой-нибудь степени числа 10.

Такимъ образомъ, десятичная дробь можетъ выражать извѣстное число *десятыхъ, сотыхъ, тысячныхъ, десятитысячныхъ* и т. д. частей единицы.

Десятичнымъ числомъ называется число, состоящее изъ соединенія цѣлаго числа и десятичной дроби; въ болѣе обширномъ смыслѣ десятичнымъ числомъ называютъ также вообще всякое число, написанное по десятичной системѣ счисленія.

117. Десятичныя дроби можно писать по такому же способу, какъ цѣлыя числа, введя слѣдующія условія:

1. *Для отдѣленія цѣлой части десятичнаго числа отъ дробной, будемъ ставить запятую послѣ цифръ единицъ цѣлой части.*

2. *Каждую цифру, стоящую вправо отъ предыдущей, условимся считать выражающей единицы, въ десять разъ меньшія.*

Такимъ образомъ, первая цифра послѣ единицъ будетъ выражать *десятыя* доли единицы, вторая—*сотыя*, третья—*тысячныя* четвертая—*десятитысячныя* и т. д.

3. *Если число не имѣетъ цѣлой части, ставимъ вмѣсто нея нуль, также нулемъ замѣщаемъ всѣ тѣ десятичныя единицы разныхъ разрядовъ, которыхъ недостаетъ въ числѣ.*

На основаніи этихъ соглашеній десятичныя числа, выражающія:

$$5\frac{32}{100}\,;\ 11\,\frac{2071}{10000}\,;\ \frac{23}{10000}\,,$$

напишутся такъ:

$$5,32\,;\ 11,2071\,;\ 0,0023.$$

И наоборотъ, десятичныя дроби

$$2,371\,;\ 0,07$$

можно представить въ видѣ простыхъ дробей:

$$\frac{2371}{1000}\,;\ \frac{7}{100}\,.$$

Слѣдовательно:

Для того, чтобы десятичное число, написанное по способу простыхъ дробей, изобразить въ видѣ десятичной дроби, пишутъ сначала цѣлую часть, если она имѣется, затѣмъ пишутъ числитель, отдѣляя запятой справа отъ цѣлой части столько цифръ, сколько нулей въ знаменатель, и замѣщая нулями всѣ тѣ десятичныя единицы разныхъ разрядовъ, которыхъ недостаетъ въ числѣ.

И наоборотъ:

Для того, чтобы число, написанное въ видѣ десятичной дроби, изобразить, какъ простую дробь, уничтожаютъ запятую и пишутъ полученное цѣлое число числителемъ; знаменателемъ же будетъ единица со столькими нулями, сколько десятичныхъ знаковъ имѣется въ данной дроби.

118. Условимся обозначать цесятичныя дроби въ общемъ видѣ при помощи слѣдующаго знакоположенія:

$$A,\ a_1\ a_2\ a_3\ .\ .\ .\ .\ a_n\,,$$

гдѣ буквой A означена **вся цѣлая часть** десятичной дроби, буквы же $a_1, a_2, \ldots . \, a_n$ обозначаютъ **цифры** десятичнаго числа, причемъ значекъ n при послѣдней цифрѣ показываетъ *число десятичныхъ знаковъ.*

Напр., въ десятичной дроби

$$32,\ 574$$

имѣемъ:

$$A=32\ ;\ a_1=5\ ;\ a_2=7\ ;\ a_3=4\ ;\ n=3.$$

Если при этомъ условиться обозначать знакоположеніемъ

$$A\ a_1\ a_2\ .\ .\ .\ .\ .\ a_n$$

то цѣлое число, которое получится, если уничтожить въ десятичной дроби запятую, то выводы предыдущаго параграфа могутъ быть выражены при помощи формулы:

$$A,\ a_1\ a_2\ a_3\ .\ .\ .\ .\ .\ a_n=\frac{A\ a_1\ a_2\ a_3\ .\ .\ .\ .\ .\ a_n}{10^n}.$$

119. ТЕОРЕМА. Величина десятичной дроби не измѣнится, если приписать къ ней, или уничтожить въ ней, одинъ или нѣсколько нулей справа.

Въ самомъ дѣлѣ, взявъ равенство

$$A,\ a_1\ a_2\ .\ .\ .\ .\ .\ a_n=\frac{A\ a_1\ a_2\ .\ .\ .\ .\ .\ a_n}{10^n}$$

и умноживъ числитель и знаменатель правой части на 10^k, получаемъ (§ 100):

$$A, a_1 a_2 \ldots\ldots a_n = \frac{A a_1 a_2 \ldots\ldots a_n \overbrace{00 \ldots\ldots 0}^{k \text{ нулей}}}{10^{n+k}} =$$

$$= A, a_1 a_2 \ldots\ldots a_n \overbrace{00 \ldots\ldots 0}^{k \text{ нулей}},$$

что и тр. док.

120. ТЕОРЕМА. Величина десятичной дроби увеличится (уменьшится) въ 10, 100, 1000 . . . . разъ отъ перестановки запятой на одну, двѣ, три . . . . цифры вправо (влѣво).

Въ самомъ дѣлѣ, если въ равенствѣ

$$A, a_1 a_2 \ldots\ldots a_n = \frac{A a_1 a_2 \ldots\ldots a_n}{10^n}$$

умножить въ правой части числитель (знаменатель) на 10, 100, 1000 . . . . . , то равенство нарушится, и правая часть сдѣлается въ десять, сто, тысячу . . . . разъ больше (меньше) лѣвой; но

$$\frac{(A a_1 a_2 \ldots\ldots a_n) \cdot 10}{10^n} = \frac{A a_1 a_2 \ldots\ldots a_n}{10^{n-1}} =$$

$$= A a_1, a_2 a_3 \ldots\ldots a_n.$$

Также:

$$\frac{(A a_1 a_2 \ldots\ldots a_n) \cdot 100}{10^n} = \frac{A a_1 a_2 \ldots\ldots a_n}{10^{n-2}} =$$

$$= A a_1 a_2, a_3 \ldots\ldots a_n,$$

и т. д., что и доказываетъ теорему.

Дѣйствія надъ десятичными дробями.

121. СЛОЖЕНІЕ. Въ десятичныхъ дробяхъ, такъ же какъ и въ цѣлыхъ числахъ, различныя цифры отъ правой руки къ лѣвой выражаютъ единицы послѣдовательно въ десять разъ большія, а потому сложеніе десятичныхъ дробей производится совершенно по тѣмъ-же правиламъ, какъ и сложеніе цѣлыхъ чиселъ.

Итакъ:

Для того, чтобы сложить нѣсколько десятичныхъ дробей, пишутъ *ихъ одну подъ другой такъ, чтобы запятыя, а слѣд. и цифры, выражающія единицы одинаковыхъ разрядовъ, находились въ одномъ вертикальномъ столбцѣ, а затѣмъ складываютъ ихъ, какъ цѣлыя числа, помѣщая запятую въ полученной суммѣ подъ запятыми данныхъ чиселъ.*

122. ВЫЧИТАНІЕ десятичныхъ дробей производится совершенно такъ-же, какъ и вычитаніе цѣлыхъ чиселъ:

Для того, чтобы сдѣлать вычитаніе двухъ десятичныхъ чиселъ, пишутъ меньшее число подъ большимъ такъ, чтобы запятыя, а слѣд. и цифры, выражающія единицы одинаковыхъ разрядовъ, находились одна подъ другой, и затѣмъ поступаютъ съ дробями, какъ съ цѣлыми числами, помѣщая запятую въ полученной разности подъ запятыми данныхъ чиселъ.

123. УМНОЖЕНІЕ. Пусть, напр., требуется перемножить двѣ десятичныя дроби:

$$A, a_1\, a_2 \, . \; . \; . \; . \; . \; . \, a_n \text{ и } B, b_1\, b_2 \, . \; . \; . \; . \; . \; . \, b_k.$$

Представляя данныя десятичныя дроби подъ видомъ простыхъ дробей (§ 118)

$$\frac{A\, a_1\, a_2 \, . \; . \; . \; . \; . \; . \, a_n}{10^n} \text{ и } \frac{B\, b_1\, b_2 \, . \; . \; . \; . \; . \; . \, b_k}{10^k},$$

перемножаемъ эти дроби по общимъ правиламъ (§ 112):

$$\frac{A\, a_1\, a_2 \, . \; . \; . \; . \; . \; . \, a_n}{10^n} \cdot \frac{B\, b_1\, b_2 \, . \; . \; . \; . \; . \; . \, b_k}{10^k} =$$

$$= \frac{(A\, a_1\, a_2 \, . \; . \; . \; . \; . \; . \, a_n) \, . \, (B\, b_1\, b_2 \, . \; . \; . \; . \; . \; . \, b_k)}{10^{n+k}}.$$

Послѣднее равенство показываетъ:

Для того, чтобы перемножить двѣ десятичныя дроби, надо откинуть запятыя, перемножить образовавшіяся такимъ образомъ цѣлыя числа, и въ полученномъ произведеніи отдѣлить запятой, начиная справа, столько десятичныхъ знаковъ, сколько ихъ было въ обоихъ произведеніяхъ вмѣстѣ.

124. ДѢЛЕНІЕ. Пусть, напр., требуется раздѣлить десятичную дробь

$$A, a_1\, a_2 \, . \; . \; . \; . \; . \; . \, a_n \text{ на } B, b_1\, b_2 \, . \; . \; . \; . \; . \; . \, b_k.$$

Представляемъ данныя десятичныя числа подъ видомъ обыкновенныхъ дробей:

$$\frac{A\ a_1\ a_2 \ldots\ldots a_n}{10^n};\ \frac{B\ b_1\ b_2 \ldots\ldots b_k}{10^k}$$

и дѣлимъ эти дроби по извѣстнымъ правиламъ (§ 115):

$$\frac{A\ a_1\ a_2 \ldots\ldots a_n}{10^n} : \frac{B\ b_1\ b_2 \ldots\ldots b_k}{10^k} =$$

$$= \frac{A\ a_1\ a_2 \ldots\ldots a_n}{B\ b_1\ b_2 \ldots\ldots b_k} \cdot \frac{10^k}{10^n}.$$

Равенство это показываетъ, что если дробь

$$\frac{A\ a_1\ a_2 \ldots\ldots a_n}{B\ b_1\ b_2 \ldots\ldots b_k}$$

можетъ обратиться въ конечную десятичную дробь, то искомое частное выразится точной десятичной дробью, въ противномъ же случаѣ величину частнаго можно выразить десятичной дробью только съ извѣстнымъ приближеніемъ. (См. ниже §§ 128—133).

125. При выполненіи дѣленія на практикѣ различаютъ обыкновенно два случая:

1. *Дѣлитель есть цѣлое число.*

Пусть, напр., требуется раздѣлить 92,748 на 12.

Разсматриваемъ дѣлимое, какъ *цѣлое число тысячныхъ долей единицы* и дѣлимъ

92748 на 12.

Очевидно, полученное отъ этого дѣленія частное будетъ представлять собой *тысячныя доли единицы.*

Выполняя дѣленіе 92748 на 12, находимъ цѣлую часть частнаго 7729.

Поэтому частное отъ дѣленія 92,748 на 12 равно

$$\frac{7729}{1000} = 7{,}729.$$

Итакъ:

Для того, чтобы раздѣлить десятичную дробь на цѣлое число, выполняютъ дѣленіе, предполагая дѣлимое цѣлымъ, и въ полученномъ частномъ отдѣляютъ справа столько десятичныхъ знаковъ, сколько ихъ было въ дѣлимомъ.

2. *Дѣлитель есть десятичная дробь.*

Этотъ случай приводится къ предыдущему *посредствомъ умноженія дѣлимаго и дѣлителя на такую степень* 10, *чтобы дѣлитель сдѣлался цѣлымъ числомъ,* что не измѣнитъ частнаго (§ 36).

Пусть, напр., требуется раздѣлить

57,2432 на 0,27.

Умноживъ дѣлимое и дѣлителя на 100, мы обратимъ данныя десятичныя числа въ 5724,32 и 27, дѣленіе которыхъ выполняется по предыдущему.

ГЛАВА IV.

Обращеніе обыкновенныхъ дробей въ десятичныя.

126. Рѣшеніе вопроса о томъ, всякая ли простая дробь можетъ быть преобразована въ равную ей десятичную, т. е. способна ли величина, представленная какой-нибудь дробью, выразиться въ десятичныхъ доляхъ единицы, основано на слѣдующей теоремѣ:

ТЕОРЕМА. Для того, чтобы данная несократимая *) дробь могла точно выражаться дробью десятичной, необходимо и достаточно, чтобы ея знаменатель не содержалъ другихъ простыхъ множителей, кромѣ 2 и 5.

Во-первыхъ, условіе это необходимо.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть, напр., несократимая дробь $\frac{a}{b}$ точно выражается десятичной дробью $\frac{k}{10^n}$, такъ что

$$\frac{a}{b}=\frac{k}{10^n}.$$

На основаніи § 103 заключаемъ, что

$$k=a\,.\,q\,;\;10^n=b\,.\,q,$$

---

*) Въ этой теоремѣ, равно какъ и во всемъ послѣдующемъ изложеніи, мы предполагаемъ данную простую дробь *несократимой,* что нисколько не ограничиваетъ вопроса, такъ какъ *всякая дробь можетъ быть сдѣлана несократимой.*

гдѣ q эсть нѣкоторое цѣлое число. Разлагая обѣ части равенства

$$10^n = b \,.\, q$$

на простыхъ множителей, увидимъ, что въ лѣвую часть входятъ только множители 2 и 5, а потому и правая часть, а слѣд. и число b, не можетъ (§ 92) содержать иныхъ множителей, кромѣ 2 и 5.

Во-вторыхъ, условіе это достаточно.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть знаменатель данной несократимой дроби $\frac{a}{b}$ не содержитъ другихъ простыхъ множителей, кромѣ 2 и 5, такъ что

$$b = 2^k \,.\, 5^n \,.$$

Докажемъ, что всегда можно найти точную десятичную дробь, равную дроби $\frac{a}{b}$.

Разсмотримъ три случая:

1°. Показатели степеней при 2 и 5 равны, т. е. $k = n$. Тогда

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{2^k \,.\, 5^k} = \frac{a}{10^k}, \quad *)$$

что представляетъ десятичную дробь съ числомъ десятичныхъ знаковъ, равнымъ k.

2°. Показатель степени при 2 больше показателя при 5, т. е. $k > n$.

Въ этомъ случаѣ имѣемъ:

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{2^k \,.\, 5^n} = \frac{a \,.\, 5^{k-n}}{2^k \,.\, 5^n \,.\, 5^{k-n}} = \frac{a \,.\, 5^{k-n}}{2^k \,.\, 5^k} = \frac{a \,.\, 5^{k-n}}{10^k},$$

что представляетъ десятичную дробь съ числомъ десятичныхъ знаковъ, равнымъ k.

3°. Показатель при 2 меньше показателя при 5, т. е. $k < n$.

Въ этомъ случаѣ:

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{2^k \,.\, 5^n} = \frac{a \,.\, 2^{n-k}}{2^k \,.\, 5^n \,.\, 2^{n-k}} = \frac{a \,.\, 2^{n-k}}{2^n \,.\, 5^n} = \frac{a \,.\, 2^{n-k}}{10^n},$$

---

*) Произведеніе $2^k \,.\, 5^k$ преобразовывается такъ:

$$2^k \,.\, 5^k = \underbrace{2 \,.\, 2 \,\ldots\ldots\, 2}_{k \text{ разъ}} \,.\, \underbrace{5 \,.\, 5 \,.\, 5 \,\ldots\ldots\, 5}_{k \text{ разъ}} = \underbrace{(2 \,.\, 5) \,.\, (2 \,.\, 5) \,\ldots\ldots\, (2 \,.\, 5)}_{k \text{ разъ}} =$$

$$= \underbrace{10 \,.\, 10 \,\ldots\ldots\, 10}_{k \text{ разъ}} = 10^k \,.$$

что представляетъ десятичную дробь съ числомъ десятичныхъ знаковъ, равнымъ n.

Итакъ, во всѣхъ случаяхъ дробь $\frac{a}{2^k \cdot 5^n}$ можетъ быть выражена точной десятичной дробью, что и тр. док.

127. Изъ доказательства послѣдней теоремы видно, что если въ несократимой дроби

$$\frac{a}{2^k \cdot 5^n}$$

показатель $k > n$, то эта дробь преобразуется въ десятичную съ k десятичными знаками; если же $n > k$, то число десятичныхъ знаковъ получается равнымъ n.

Итакъ, можно дать **правило:**

Дробь, знаменатель которой не содержитъ иныхъ простыхъ множителей, кромѣ 2 и 5, можетъ быть преобразована въ конечную десятичную дробь, содержащую столько десятичныхъ знаковъ, сколько единицъ заключается въ томъ изъ показателей степеней при 2 или 5, который больше другого.

Примѣры. 1. Дана несократимая дробь $\frac{7}{40}$. Знаменатель ея $40 = 2^3 \cdot 5$; поэтому можемъ утверждать, что при обращеніи $\frac{7}{40}$ въ десятичную, получится конечная десятичная дробь *съ тремя десятичными знаками*. Дѣйствительно:

$$\frac{7}{40} = \frac{7}{2^3 \cdot 5} = \frac{7 \cdot 5^2}{2^3 \cdot 5^3} = \frac{175}{10^3} = 0{,}175.$$

2. Также дробь

$$\frac{11}{125} = \frac{11}{5^3} = \frac{11 \cdot 2^3}{5^3 \cdot 2^3} = \frac{88}{1000} = 0{,}088.$$

3. Также дробь

$$\frac{123}{80} = \frac{123}{2^4 \cdot 5} = \frac{123 \cdot 5^3}{2^4 \cdot 5^4} = 1{,}5375 \text{ и т. д.}$$

128. Теорема § 126 показываетъ, что весьма лишь немногія простыя дроби могутъ быть обращены въ точныя десятичныя, т. е., что *не всякая величина способна* **точно** *выражаться въ десятичныхъ доляхъ единицы.*

Покажемъ, что всякая дробь можетъ быть представлена десятичной дробью *съ какой угодно степенью точности.* Для этого прежде всего выяснимъ, что именно надо понимать подъ *приближеннымъ вычисленіемъ дробей съ данной степенью точности.*

129. ОПРЕДѢЛЕНІЯ. *Вычислить дробь съ точностью до единицы значитъ найти наибольшее число единицъ, содержащееся въ этой дроби.*

Вычислить дробь съ точностью до $\frac{1}{10}$ *значитъ найти наибольшее число десятыхъ, заключенныхъ въ этой дроби.*

Вычислить дробь съ точностью до $\frac{1}{100}$ *значитъ найти наибольшее число сотыхъ, заключенныхъ въ этой дроби . . . . и т. д.*

И вообще, вычислить дробь съ точностью до $\frac{1}{n}$ *значитъ найти наибольшее число n'овыхъ, заключенныхъ въ этой дроби.*

Изъ этого опредѣленія слѣдуетъ, что если какая-нибудь дробь $\left(\frac{a}{b}\right)$ больше $\frac{1}{n}$*-овой* части единицы, взятой m разъ, и меньше той-же $\frac{1}{n}$*-овой* части, взятой $m+1$ разъ, то дробь

$$\frac{m}{n}$$

и будетъ выражать приближенное значеніе данной дроби съ точностью до $\frac{1}{n}$.

Примѣръ. Дробь $\frac{3}{7}$ больше *) чѣмъ 0,4 и меньше 0,5, а потому

$$\text{значеніе дроби } \left(\frac{3}{7}\right) \text{ съ точн. до } \frac{1}{10} = 0,4.$$

130. Изъ опредѣленія предыдущаго параграфа слѣдуетъ: *Чтобы вычислить дробь съ точностью до единицы, достаточно исключить цѣлое число, содержащееся въ этой дроби.*

Пусть, напр., дана дробь $\frac{29}{13}$. Исключивъ цѣлое число найдемъ

$$\frac{29}{13} = 2\,\frac{3}{13}.$$

---

*) Въ этомъ можно убѣдиться посредствомъ вычитанія.

Такъ какъ это число больше 2 и меньше 3, то *значеніе дроби* $\frac{29}{13}$ *съ точн. до единицы* равно 2.

131. ПРАВИЛО. *Чтобы вычислить величину дроби съ точностью до $\frac{1}{n}$, достаточно найти цѣлую часть частнаго отъ дѣленія на знаменателя данной дроби произведенія числителя ея на число n и раздѣлить полученное частное на n.*

Въ самомъ дѣлѣ, пусть имѣемъ дробь $\frac{a}{b}$. Обозначимъ буквой x наибольшее число $\frac{1}{n}$ *-овыхъ*, содержащееся въ этой дроби.

Тогда, согласно опредѣленія (§ 129), можно написать:

$$\frac{x}{n} < \frac{a}{b} \quad \text{и} \quad \frac{x+1}{n} > \frac{a}{b}.$$

Изъ перваго неравенства слѣдуетъ:

$$x < \frac{a \cdot n}{b};$$

изъ второго:

$$x+1 > \frac{a \cdot n}{b},$$

откуда заключаемъ, что искомый числитель x есть цѣлая часть частнаго отъ дѣленія произведенія $(a \cdot n)$ на b, что и тр. док.

Примѣры. 1. Найти значеніе дроби $\frac{2}{3}$ съ точн. до $\frac{1}{100}$.

Цѣлая часть частнаго отъ дѣленія (2 . 100) на 3 равна 66, а потому $\frac{2}{3}$ *съ точн. до* $0,01 = 0,66$.

2. Найти значеніе дроби $\frac{4}{7}$ *съ точн. до* $\frac{1}{1000}$.

Цѣлая часть частнаго отъ дѣленія (4 . 1000) на 7 равна 571, а потому $\frac{4}{7}$ *съ точн. до* $\frac{1}{1000} = 0,571$.

3. Найти значеніе дроби $\frac{23}{9}$ *съ точн. до* $\frac{1}{10000}$.

Цѣлая часть частнаго отъ дѣленія (23 . 10000) на 9 равна 25555, и потому $\frac{23}{9}$ *съ точн. до* $0,0001 = 2,5555$.

132. Въ томъ случаѣ, если знаменатель несократимой дроби не удовлетворяетъ необходимому и достаточному условію, выведенному въ § 126, данная дробь не можетъ быть выражена точной десятичной дробью, но на основаніи §§ 129—131 мы всегда можемъ вычислить величину ея съ точностью до 0,1; 0,01; 0,001 . . . . . и т. д.

Сдѣлаемъ слѣдующее **ОПРЕДѢЛЕНІЕ**:

Обратить дробь въ десятичную значитъ вычислить ее послѣдовательно съ точностью до одной десятой, одной сотой, одной тысячной . . . . . и т. д., и составить таблицу все болѣе и болѣе приближенныхъ десятичныхъ значеній данной дроби *).

133. Пусть требуется обратить въ десятичную дробь $\frac{7}{13}$.

Для этого, на основаніи опредѣленія предыдущаго параграфа, надо вычислить значеніе $\frac{7}{13}$ съ точн. до 0,1; 0,01; 0,001 . . . . . и т. д.

Но вмѣсто того, чтобы дѣлить на 13 сперва 7, потомъ (7 . 10), потомъ (7 . 100); (7 . 1000) и т. д. (§ 131), проще поступить такъ: дѣлимъ 7 на 13, къ каждому изъ послѣдовательныхъ остатковъ приписываемъ нуль и продолжаемъ подобное дѣленіе до тѣхъ поръ, пока не получимъ достаточнаго числа десятичныхъ знаковъ.

Очевидно, что подобнаго рода дѣленіе приведетъ насъ къ тому же самому ряду дѣйствій, какъ послѣдовательное дѣленіе на 13 чиселъ: 7; (7 . 10); (7 . 100); (7 . 1000) . . . , а потому и *результаты* этихъ дѣленій, т. е. *получающіеся десятичные знаки, будутъ одинаковы*.

---

*) Опредѣленіе это *общее*, т. е. оно вѣрно и для того случая, когда данная дробь выражается *точной* десятичной, такъ какъ, если эта дробь равна, напр., нѣкоторому числу десятитысячныхъ, то мы получимъ ея точное значеніе, вычисляя ея величину съ точностью до 0,0001, а составляя всѣ дальнѣйшія приближенія, будемъ всегда получать *тотъ-же результатъ*.

Дѣйствіе располагается слѣдующимъ образомъ:

7	13
70	0,53846153 . . . . и т. д.
50	
110	
60	
80	
20	
70	
50	
. . .	
. . .	
. . . .	
и т. д.	

Итакъ, можно написать:

Значеніе дроби $\frac{7}{13}$ *съ точн. до* 1 $=0$;

" " " " " " 0,1 $=0{,}5$;

" " " " " " 0,01 $=0{,}53$;

" " " " " " 0,001 $=0{,}538$;

" " " " " " 0,0001 $=0{,}5384$ и т. д.

Отсюда вытекаетъ **правило:**

*Для того, чтобы обратить дробь въ десятичную, дѣлимъ числитель на знаменатель; цѣлая часть отъ этого дѣленія даетъ число цѣлыхъ единицъ въ десятичной дроби *); къ получившемуся остатку приписываемъ справа нуль и продолжаемъ дѣленіе, приписывая послѣдовательно нули къ каждому изъ остатковъ.*

Если одно изъ дѣленій выполнится нацѣло, то данная дробь выразится точной десятичной; въ противномъ случаѣ дѣленіе можетъ быть продолжено безконечно, и мы будемъ получать все болѣе и болѣе приближенныя десятичныя значенія данной дроби.

---

*) Если числитель меньше знаменателя, то число цѣлыхъ равно нулю, и *послѣ этого числитель разсматривается, какъ* **первый остатокъ** *отъ дѣленія;* поэтому, напр., при обращеніи $\frac{7}{13}$ въ десятичную дробь первый остатокъ равенъ 7.

ГЛАВА V.

Періодическія десятичныя дроби.

134. ОПРЕДѢЛЕНІЯ. *Если въ безконечной десятичной дроби, начиная съ нѣкотораго десятичнаго знака, совокупность нѣсколькихъ цифръ повторяется неограниченное число разъ въ одномъ и томъ-же порядкѣ, то такія десятичныя дроби называются* **періодическими,** *а повторяющаяся часть ихъ называется* **періодомъ** *данной дроби.*

Если періодъ начинается непосредственно послѣ запятой, то періодическая дробь называется **простой или чистой**; если же между запятой и началомъ перваго періода находится нѣкоторая *неперіодическая* часть, то дробь называется **смѣшанной.**

Напр. 2, 57 57 57 57 . . . . есть *чистая* періодическая дробь; 7, 23 712 712 712 712 . . . . есть *смѣшанная* періодическая дробь.

135. Для сокращенія письма введемъ слѣдующія условныя обозначенія: будемъ изображать чистую періодическую дробь, содержащую p цифръ въ періодѣ, такъ:

$A,\ a_1\ a_2\ a_3 \ldots\ldots a_p\, a_1\ a_2 \ldots\ldots a_p\, a_1\ a_2 \ldots\ldots a_p \ldots\ldots\ldots,$

или сокращенно:

$$A,\ (a_1\ a_2\ a_3 \ldots\ldots a_p).$$

Также смѣшанную періодическую дробь, состоящую изъ k цифръ до періода и p цифръ въ періодѣ, напишемъ:

$A,\ a_1\ a_2 \ldots\ldots a_k\ a_{k+1}\ a_{k+2} \ldots\ldots a_{k+p}\ a_{k+1}\ a_{k+2} \ldots\ldots a_{k+p} \ldots,$

или сокращенно:

$$A,\ a_1\ a_2 \ldots\ldots a_k\ (a_{k+1}\ a_{k+2} \ldots\ldots a_{k+p}).$$

136. ТЕОРЕМА. Всякая простая дробь при обращеніи въ десятичную даетъ или дробь конечную, или же дробь періодическую.

Пусть дана несократимая дробь $\frac{a}{b}$. Для того, чтобы обратить ее въ десятичную, поступаемъ по правилу, данному выше (§ 133), т. е. дѣлимъ на b числа:

$$a;\ a\,.\,10;\ a\,.\,10^2;\ a\,.\,10^3;\ a\,.\,10^4 \ldots\ldots a\,.\,10^n \ldots\ldots$$

Пусть соотвѣтственные остатки отъ дѣленія будутъ:

$$r_0;\quad r_1;\quad r_2;\quad r_3;\quad r_4 \ldots\ldots\ldots r_n \ldots\ldots$$

Какъ извѣстно изъ предыдущаго (§ 133), на практикѣ вмѣсто дѣленія на b чиселъ a, $a \,.\, 10$, $a \,.\, 10^2$ . . . . дѣлятъ на b числитель a, и къ каждому изъ послѣдовательныхъ остатковъ приписываютъ по нулю, такъ что обращеніе $\frac{a}{b}$ въ десятичную дробь производится такъ:

$$\begin{array}{r|l} a & b \\ \hline r_0 \,.\, 10 & Q,\ q_1\ q_2\ q_3\ q_4\ q_5 \ldots \\ \hline r_1 \,.\, 10 & \\ \hline r_2 \,.\, 10 & \\ \hline r_3 \,.\, 10 & \\ \hline r_4 \,.\, 10 & \\ \ldots & \\ \ldots & \end{array}$$

Дѣлимъ a на b; *цѣлая часть частнаго* отъ этого дѣленія, Q, есть *цѣлая часть десятичной дроби*. Къ остатку отъ дѣленія a на b, равному r_0, приписываемъ нуль, и произведеніе ($r_0 \,.\, 10$) дѣлимъ на b; получаемъ цифру десятыхъ q_1. Ко второму остатку r_1 приписываемъ нуль и дѣлимъ ($r_1 \,.\, 10$) на b, что даетъ цифру сотыхъ q_2 и третій остатокъ r_2. Приписываемъ къ r_2 нуль и дѣлимъ ($r_2 \,.\, 10$) на b, что даетъ цифру тысячныхъ q_3 и четвертый остатокъ r_3. Приписываемъ къ r_3 нуль . . . . и т. д.

Если одинъ изъ остатковъ r_0, r_1, r_2 . . . . . . r_n . . . . . окажется равнымъ нулю, то дѣленіе закончится, и дробь $\frac{a}{b}$ выразится *конечной* десятичной дробью *). Если же ни одинъ изъ послѣдовательныхъ остатковъ не будетъ равенъ нулю, то дѣйствіе дѣленія можетъ быть продолжено неопредѣленно, и получится *безконечная* десятичная дробь.

Въ этомъ случаѣ число **различныхъ** *остатковъ не можетъ быть безконечнымъ, такъ какъ каждый изъ остатковъ долженъ быть непремѣнно меньше дѣлителя* b, а потому всѣ **возможные** остатки суть:

$$1;\ 2;\ 3;\ 4;\ \ldots\ (b-1),$$

*) Это, какъ намъ извѣстно, можетъ случиться только тогда, если знаменатель b не содержитъ иныхъ множителей, кромѣ 2 и 5 (§ 126).

и слѣд., *въ самомъ невыгодномъ случаѣ*, maximum послѣ b *минусъ одного* дѣленія, мы **непремѣнно** получимъ одинъ изъ остатковъ *бывшихъ уже раньше*. Такъ какъ, начиная съ этого момента, мы будемъ находиться совершенно въ тѣхъ-же условіяхъ, какъ тогда, когда этотъ-же остатокъ встрѣтился въ первый разъ, то, очевидно, все дальнѣйшее дѣйствіе будетъ *точнымъ повтореніемъ предыдущаго*, а потому и *цифры частнаго начнутъ повторяться въ одномъ и томъ-же опредѣленномъ порядкѣ*, т. е. полученная дробь будетъ непремѣнно *періодической*.

Если-бы, напр., оказалось, что третій остатокъ (r_2) равенъ первому (r_0), то третья цифра частнаго q_3 будетъ такая же какъ первая цифра q_1, а потому получится безконечная чистая періодическая дробь:

$$Q,\ q_1\, q_2\, q_1\, q_2\, q_1\, q_2 \ldots\ldots = Q,\ (q_1\, q_2).$$

Также, если $r_4 = r_1$, то $q_5 = q_2$, и дробь будетъ:

$$Q,\ q_1\, q_2\, q_3\, q_4\, q_2\, q_3\, q_4\, q_2\, q_3\, q_4 \ldots = Q,\ q_1\, (q_2\, q_3\, q_4).$$

137. Замѣчаніе. Для яснаго усвоенія дальнѣйшаго, слѣдуетъ твердо помнить слѣдующее:

1) Что значекъ при r въ обозначеніяхъ, принятыхъ въ предыдущемъ параграфѣ и въ послѣдующемъ изложеніи, всегда на *единицу меньше* **номера** *остатка*, т. е.

первый	*остатокъ*	*обозначенъ*	r_0
второй	„	„	r_1
третій	„	„	r_2
четвертый	„	„	r_3
. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .	. . .
двадцатый	„	„	r_{19}
. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .	. . .
и вообще, $n +$ *первый*	„	„	r_n.

2) Каждый изъ этихъ остатковъ r, начиная съ r_1, есть остатокъ отъ дѣленія на b произведенія изъ a на 10 въ степени, показатель которой равенъ значку при r, т. е.

r_1	*есть*	*остатокъ*	*отъ*	*дѣленія*	*на*	b	*произведенія*	$r \cdot 10^1$
r_2	„	„	„	„	„	„	„	$r \cdot 10^2$
r_3	„	„	„	„	„	„	„	$r \cdot 10^3$
r_4	„	„	„	„	„	„	„	$r \cdot 10^4$
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
r_n	„	„	„	„	„	„	„	$r \cdot 10^n$.

3). Буква r_0 обозначаетъ *первый остатокъ*, т. е. *окончательный остатокъ отъ дѣленія всего числа a на b.*

Напр., при обращеніи $\frac{257}{7}$ въ десятичную дробь, первый остатокъ $r_0 = 5$, т. е. $=$ *ост.* (257 : 7).

4). Буквы q_1, q_2, q_3, q_4 . . . . обозначаютъ соотвѣтственно первую, вторую, третью и т. д. цифры частнаго, т. е. *цифры десятыхъ, сотыхъ, тысячныхъ* и т. д. полученной десятичной дроби и суть соотвѣтственно:

q_1 *есть цѣлая часть частнаго отъ дѣленія на b числа* $r_0 . 10$
q_2 » » » » » » » » » $r_1 . 10$
q_3 » » » » » » » » » $r_2 . 10$
q_4 » » » » » » » » » $r_3 . 10$
. . . .
q_n » » » » » » » » » $r_{n-1} . 10.$

5). Число цѣлыхъ въ десятичной дроби, обозначаемое буквой Q, есть

цѣлая часть частнаго отъ дѣленія $(a : b)$.

138. Изъ разсужденій § 136 ясно, что при обращеніи несократимой дроби $\frac{a}{b}$ въ десятичную, *число цифръ въ періодѣ всегда меньше знаменателя b;* самое большее возможное число ихъ равно $(b - 1)$.

Примѣры:

$\frac{2}{7} = 0,(285714)$ . . . . періодъ изъ 6 цифръ.

$\frac{5}{13} = 0,(384615)$ . . . . періодъ изъ 6 цифръ.

$\frac{6}{37} = 0,\ (162)$ . . . . . періодъ изъ 3 цифръ.

$\frac{29}{22} = 1,\ 3(18)$ . . . . . періодъ изъ 2 цифръ.

139. Очевидно, что при обращеніи $\frac{a}{b}$ въ десятичную дробь, получится дробь *чистая* періодическая въ томъ случаѣ, если повторится *первый остатокъ* (r_0). Въ самомъ дѣлѣ, если, напр., $r_p = r_0$, то $q_{p+1} = q_1$, и получится *чистая* періодическая дробь:

$$Q, (q_1\ q_2\ q_3 \cdot \cdot \cdot \cdot q_p).$$

Если же, напр., первые k остатковъ не будутъ повторяться, а первымъ изъ повторяющихся остатковъ окажется $k +$ *первый* (r_k), то полученная періодическая дробь будетъ *смѣшанной*, съ числомъ цифръ до періода, равнымъ k. Пусть, напр., $r_{k+p} = r_k$.

Тогда $q_{k+p+1} = q_{k+1}$, и періодическая дробь будетъ:

$$Q, q_1\ q_2\ q_3 \cdot \cdot \cdot \cdot q_k\ (q_{k+1}\ q_{k+2} \cdot \cdot \cdot \cdot q_{k+p}).$$

140. Выведемъ теперь признаки, по которымъ можно было бы судить о томъ, производитъ ли данная несократимая дробь при обращеніи въ десятичную *чистую или смѣшанную* періодическую дробь, сколько цифръ будетъ содержаться въ періодѣ той и другой дроби, и сколько цифръ будетъ до періода, въ случаѣ смѣшанной періодической.

При доказательствѣ дальнѣйшихъ теоремъ придется неоднократно ссылаться на выведенные выше необходимые и достаточные признаки равноостаточности чиселъ (§§ 48 и 49):

1. *Если два числа равноостаточны относительно какого-нибудь дѣлителя, то разность ихъ дѣлится нацѣло на этого дѣлителя.*

2. *Если разность двухъ чиселъ дѣлится на какого-нибудь дѣлителя, то данныя числа равноостаточны относительно этого дѣлителя.*

141. ТЕОРЕМА. Если знаменатель данной несократимой дроби есть число взаимно-простое съ 10, т. е. не дѣлится ни на 2, ни на 5, то эта дробь, при обращеніи въ десятичную, производитъ чистую періодическую.

Число цифръ въ періодѣ равно числу девятокъ въ наименьшемъ, дѣлящемся нацѣло на знаменателя данной дроби, числѣ ряда

9; 99; 999; 9999; 99999; . . . . и т. д.

1. Положимъ, дана несократимая дробь $\frac{a}{b}$, причемъ b есть число взаимно-простое съ десятью; требуется доказать, что при обращеніи этой дроби въ десятичную получится непремѣнно *чистая* періодическая дробь.

Такъ какъ $\frac{a}{b}$ въ точную десятичную обратиться не может (§ 126), то на основанiи теоремы § 136 заключаемъ, что $\frac{a}{b}$ обратится *непремѣнно въ перiодическую дробь*, т. е., что въ ряду остатковъ

$$r_0,\ r_1,\ r_2,\ r_3 \ldots\ldots$$

встрѣтятся *непремѣнно* **два равныхъ остатка**.

Пусть, напр., эти равные остатки будутъ:

$$r_n = r_k.$$

Такъ какъ (§ 137)

$$r_n = ост.\ (a\ .\ 10^n : b)\ ;\ \ r_k = ост.\ (a\ .\ 10^k : b),$$

то слѣд., числа

$$a\ .\ 10^n \text{ и } a\ .\ 10^k$$

равноостаточны относительно b, а потому разность ихъ должна (§ 48) раздѣлиться нацѣло на b.

Но разность эта можетъ быть представлена такъ:

$$a\ .\ 10^n - a\ .\ 10^k = a\ .\ 10^{n-k}\ .\ 10^k - a\ .\ 10^k = 10^k\ .\ (a\ .\ 10^{n-k} - a).$$

Итакъ, произведенiе

$$10^k\ .\ (a\ .\ 10^{n-k} - a)$$

дѣлится нацѣло на b; но 10^k есть по условiю теоремы число простое съ b, а потому второй множитель

$$a\ .\ 10^{n-k} - a$$

долженъ непремѣнно дѣлиться нацѣло на b (§ 68), а это показываетъ, что числа $a\ .\ 10^{n-k}$ и a равноостаточны (§ 49) относительно b, т. е., что

$$ост.\ (a\ .\ 10^{n-k} : b) = ост.\ (a : b), \text{ или}$$

$$r_{n-k} = r_0.$$

Итакъ, въ ряду остатковъ, получающихся при обращенiи дроби $\frac{a}{b}$ въ десятичную, *найдется непремѣнно одинъ изъ остатковъ, равный* r_0, т. е. **первому остатку**, *а это и показываетъ, что полученная перiодическая дробь будетъ* **чистой перiодической** (§ 139), что и тр. док.

2. Положимъ, что число цифръ въ перiодѣ при обращенiи данной несократимой дроби $\frac{a}{b}$ въ десятичную, оказалось равнымъ p.

Это показываетъ, что при обращенiи $\frac{a}{b}$ въ десятичную дробь первые p остатковъ были *всѣ различны* и что $p+$ *первый* остатокъ оказался равнымъ *первому*, т. е.

$$r_p = r_0.$$

Но (§ 137) $r_p = ост. \ (a \, . \, 10^p : b)$; $r_0 = ост. \ (a : b)$.

Слѣд., числа $a \, . \, 10^p$ и a *равноостаточны* относительно b, а потому разность ихъ, равная

$$a \, . \, 10^p - a = a \, . \, (10^p - 1)$$

дѣлится нацѣло (§ 48) на b; но a по условiю теоремы есть число вз.-простое съ b *), слѣд. (§ 68), разность

$$10^p - 1$$

дѣлится на b.

Число же

$$10^p - 1 = \overbrace{999 \, . \; . \; . \; . \, 99}^{p \text{ разъ}},$$

т. е. состоитъ изъ p девятокъ.

Докажемъ еще, что никакое число вида (999 . . . . 9), состоящее меньше чѣмъ изъ p девятокъ, *не можетъ раздѣлиться* на b, т. е. что число

$$\overbrace{999 \, . \; . \; . \; . \, 99}^{p \text{ разъ}}$$

есть дѣйствительно *наименьшее* изъ чиселъ ряда

$$9; \ 99; \ 999; \, . \; . \; . \; . \; . \, ,$$

дѣлящееся нацѣло на b.

Допустимъ противное, и пусть, напр., число

$$\overbrace{999 \, . \; . \; . \; . \, 9}^{m \text{ разъ}},$$

состоящее изъ m девятокъ, гдѣ $m < p$, дѣлится на b.

Если допустить, что число написанное m девятками, т. е. равное $10^m - 1$, дѣлится на b, то и произведенiе

$$a \, . \, (10^m - 1) = a \, . \, 10^m - a$$

---

*) Такъ какъ дробь $\frac{a}{b}$ несократима.

тоже раздѣлится на b, а это возможно только тогда (§ 49), когда числа $a \cdot 10^m$ и a будутъ равноостаточны относительно b, т. е. если

$$r_m = r_0.$$

Но если-бы это было такъ, то оказалось бы, что $q_{m+1} = q_1$, т. е., что число цифръ въ періодѣ было-бы не p, а m, т. е. меньше p, что противорѣчитъ условію.

Итакъ, если въ періодѣ получается p цифръ, то *наименьшее* изъ чиселъ ряда

$$9;\ 99;\ 999;\ 9999\ \ldots\ ,$$

дѣлящееся на b, будетъ дѣйствительно состоять изъ p девятокъ, что и тр. доказать.

142. Примѣры. Сколько цифръ въ періодѣ получится при обращеніи несократимыхъ дробей 1) $\frac{6}{37}$; 2) $\frac{2}{7}$; 3) $\frac{5}{13}$ въ десятичныя?

Беремъ числа ряда

$$9;\ 99;\ 999;\ 9999;\ 99999\ \ldots$$

и дѣлимъ послѣдовательно каждое изъ нихъ на знаменателей данныхъ дробей.

1. Первое изъ чиселъ этого ряда, дѣлящееся на 37, равно 999, т. е. состоитъ изъ трехъ девятокъ. Поэтому въ періодѣ получатся 3 цифры.

Дѣйствительно:

$\frac{6}{37} = 0,(162)\ \ldots\ldots$ періодъ изъ 3 цифръ.

2. Первое изъ чиселъ этого ряда, дѣлящееся на 7, равно 999999, т. е. періодъ долженъ состоять изъ 6 цифръ.

Дѣйствительно:

$\frac{2}{7} = 0,(285714)\ \ldots\ldots$ періодъ изъ 6 цифръ.

3. Первое изъ чиселъ этого ряда, дѣлящееся на 13, равно 999999, т. е. періодъ получится изъ 6 цифръ.

Дѣйствительно:

$\frac{5}{13} = 0,(384615)\ \ldots\ldots$ періодъ изъ 6 цифръ.

143. Изъ теоремы § 141 вытекаетъ слѣдствіе:

Всякое число, взаимно-простое съ 10, т. е. не дѣлящееся ни на 2, ни на 5, дѣлитъ нѣкоторую степень 10, уменьшенную на единицу, т. е. дѣлитъ нѣкоторое число, всѣ цифры котораго суть девятки.

Пусть b есть нѣкоторое число, простое съ 10.

Беремъ дробь $\frac{1}{b}$ и обращаемъ ее въ десятичную.

Мы знаемъ, что полученная дробь будетъ *чистая періодическая* (§ 141), т. е., что въ ряду остатковъ *непремѣнно найдется остатокъ, равный первому;* но первый остатокъ (r_0) при обращеніи $\frac{1}{b}$ въ десятичную дробь будетъ непремѣнно равенъ 1 (§ 133, выноска на стр. 78).

Итакъ, пусть напр. $r_p = r_o = 1$; слѣд., числа $1 \,.\, 10^p$ и 1 равноостаточны относительно b, а потому разность ихъ

$$10^p - 1,$$

т. е. нѣкоторое число, состоящее изъ однѣхъ девятокъ, непремѣнно раздѣлится на b (§ 48), что и тр. док.

144. ТЕОРЕМА. Если знаменатель несократимой дроби, дѣлясь или на 2, или на 5, или на 2 и на 5 совмѣстно, дѣлится еще на иныхъ простыхъ множителей, т. е. имѣетъ видъ $2^k \,.\, 5^n \,.\, c$, гдѣ c есть произведеніе всѣхъ остальныхъ простыхъ множителей, кромѣ 2 и 5, то дробь эта при обращеніи въ десятичную воспроизводитъ смѣшанную періодическую дробь.

Число цифръ до періода равно тому изъ показателей степени при 2 или 5, который больше другого; число же цифръ въ періодѣ равно числу девятокъ въ наименьшемъ, дѣлящемся нацѣло на c, числѣ ряда:

9; 99; 999; 9999; 99999; . . . . . .

Пусть дана несократимая дробь $\frac{a}{b}$, знаменатель которой имѣетъ видъ $2^k \,.\, 5^n \,.\, c$, гдѣ c есть число *взаимно-простое* съ 10.

Допустимъ, что показатель $k > n$, и положимъ, что наименьшее изъ чиселъ ряда

9; 99; 999; 9999 . . . . . ,

дѣлящееся на c, есть

$$\overbrace{999\,.\,.\,.\,.\,.\,9}^{p \text{ разъ}},$$

т. е. равно $10^p - 1$ *).

Требуется доказать:

1. Что при обращеніи $\frac{a}{b}$ въ десятичную, получится *смѣшанная* періодическая дробь;

2. Что число цифръ до періода будетъ равно *именно* k;

3. Что число цифръ въ періодѣ будетъ равно *именно* p?

Доказательство:

Обращая дробь $\frac{a}{b}$ въ десятичную, мы получимъ непремѣнно *безконечную періодическую дробь* (§ 136), такъ что въ ряду остатковъ получатся непремѣнно и равные остатки. Положимъ, что рядъ остатковъ будетъ:

$$r_0,\ r_1,\ r_2\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ r_{k-1},\ r_k,\ r_{k+1}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ r_{k+p-1},\ r_{k+p}\ .\ .\ .\ .$$

Теорема будетъ доказана, если мы покажемъ:

1) что ни одинъ изъ первыхъ k остатковъ, т. е.

$$r_0,\ r_1,\ r_2\ .\ .\ .\ .\ r_{k-1}$$

не повторится;

2) что $k+$*первый* остатокъ (r_k) непремѣнно повторится, и притомъ именно въ остаткѣ $k+p+$*первомъ* (r_{k+p}); и

3) что онъ не повторится ни въ одномъ изъ остатковъ *раньше* $k+p+$*перваго*.

1. Ни одинъ изъ первыхъ k остатковъ, т. е.

$$r_0,\ r_1,\ r_2\ .\ .\ .\ .\ r_{k-1},$$

повториться не можетъ. Въ самомъ дѣлѣ, допустимъ, что какой-нибудь изъ остатковъ, напр. r_t, оказался равнымъ какому-либо изъ первыхъ k остатковъ, напр. r_f, (гдѣ $f \leqslant k-1$). Изъ равенства

$$r_t = r_f$$

слѣдуетъ, что числа

$$a\,.\,10^t \text{ и } a\,.\,10^f$$

равноостаточны относительно b, т. е., что разность

$$a\,.\,10^t - a\,.\,10^f = a\,.\,10^f\,.\,(10^{t-f} - 1)$$

дѣлится на b (§ 48).

---

*) На основаніи § 143 мы знаемъ, что такъ какъ c есть число вз.-простое съ 10, то *непремѣнно существуетъ* число вида $10^p - 1$, дѣлящееся на c.

Но въ дѣлимое $a \cdot 10^f \cdot (10^{t-f}-1)$ множитель 2 входитъ только въ степени, равной f *); въ дѣлитель же b, равный $2^k \cdot 5^n \cdot c$, множитель 2 входитъ въ степени k; по условію $k > f$, а потому на основаніи § 93 заключаемъ, что

$$a \cdot 10^f \cdot (10^{t-f}-1) \text{ на } b$$

не дѣлится, т. е. числа $a \cdot 10^t$ и $a \cdot 10^f$ *не равноостаточны.*

Итакъ, ни одинъ изъ первыхъ k остатковъ повториться не можетъ, т. е. *число цифръ до періода* **не менѣе** k.

2. Покажемъ, что $k+p+$*первый* остатокъ равенъ остатку $k+$*первому*, т. е. что

$$r_{k+p} = r_k?$$

Въ самомъ дѣлѣ, числа эти суть остатки отъ дѣленій на b произведеній

$$a \cdot 10^{k+p} \text{ и } a \cdot 10^k.$$

Разность этихъ чиселъ

$$a \cdot 10^{k+p} - a \cdot 10^k = a \cdot 10^k \cdot (10^p - 1)$$

дѣлится **) на b, а потому числа эти равноостаточны (§ 49) относительно b, т. е. дѣйствительно $r_{k+p} = r_k$.

3. Остатокъ $k+$*первый* не можетъ повториться *раньше*, чѣмъ въ остаткѣ $k+p+$*первомъ.*

Дѣйствительно, допустимъ противное, и пусть, напр., остатокъ $r_{k+s} = r_k$, причемъ $s < p$.

Но если $r_{k+s} = r_k$, то числа $a \cdot 10^{k+s}$ и $a \cdot 10^k$ равноостаточны относительно b, а потому разность ихъ

$$a \cdot 10^{k+s} - a \cdot 10^k = a \cdot 10^k \cdot (10^s - 1)$$

должна раздѣлиться на b. Но дѣленіе

$$a \cdot 10^k \cdot (10^s - 1) \text{ на } 2^k \cdot 5^n \cdot c$$

не можетъ выполниться, такъ какъ числа a и 10^k взаимно простыя съ c по условію, число же

$$10^s - 1$$

на c раздѣлиться *не можетъ,* ибо число это состоитъ всего изъ s девятокъ, а $s < p$.

---

*) Въ самомъ дѣлѣ: въ a множитель 2 не входитъ, ибо по условію дробь $\frac{a}{b}$ несократима; число $(10^{t-f}-1)$ состоитъ изъ однѣхъ девятокъ, и слѣд., на 2 не дѣлится; а $10^f = 2^f \cdot 5^f$, т. е. содержитъ 2 въ степени f.

**) Въ самомъ дѣлѣ; $10^k = 2^k \cdot 5^k$, т. е. дѣлится на $2^k \cdot 5^n$, и кромѣ того $(10^p - 1)$ по условію дѣлится на c.

Итакъ, въ ряду остатковъ

$$r_0, r_1, r_2 \ldots \ldots r_{k-1}, r_k, \ldots \ldots r_{k+p} \ldots \ldots$$

ни одинъ изъ остатковъ

$$r_0, r_1, r_2 \ldots \ldots r_{k-1}$$

не повторится; остатокъ r_{k+p} равенъ остатку r_k; и ни одинъ изъ остатковъ

$$r_{k+1}, r_{k+2}, \ldots \ldots r_{k+p-1}$$

не равенъ остатку r_k, т. е. *при обращеніи дроби* $\frac{a}{b}$ *въ десятичную, получится смѣшанная періодическая дробь, у которой число цифръ до періода равно k, а число цифръ въ періодѣ равно p,* что и тр. док.

145. Предыдущія теоремы даютъ возможность раздѣлить всѣ несократимыя дроби, по отношенію къ обращенію ихъ въ десятичныя, на три класса:

1. Несократимыя дроби, знаменатели которыхъ имѣютъ видъ

$$2^k \cdot 5^n,$$

т. е. не содержатъ иныхъ множителей, кромѣ 2 и 5.

Эти дроби производятъ *конечныя десятичныя дроби*, причемъ число десятичныхъ знаковъ равно тому изъ показателей степеней при 2 или 5, который больше другого.

2. Несократимыя дроби, знаменатели которыхъ суть числа взаимно-простыя съ 10, т. е. не дѣлятся ни на 2, ни на 5.

Дроби эти производятъ *чистыя періодическія* дроби, причемъ число цифръ въ періодѣ равно числу девятокъ въ *наименьшемъ*, дѣлящемся на даннаго знаменателя, числѣ ряда

$$9;\ 99;\ 999;\ 9999;\ 99999 \ldots .$$

3. Несократимыя дроби, знаменатели которыхъ, дѣлясь или на 2, или на 5, или и на 2 и на 5, содержатъ еще и другихъ простыхъ множителей, отличныхъ отъ 2 и 5, т. е. имѣютъ видъ

$$2^k \cdot 5^n \cdot c,$$

гдѣ c — обозначаетъ *произведеніе* всѣхъ остальныхъ множителей, кромѣ 2 и 5.

Дроби эти производятъ *смѣшанныя періодическія* дроби съ числомъ цифръ до періода, равнымъ тому изъ показателей при 2 или 5, который больше другого, и съ числомъ цифръ въ періодѣ, равнымъ числу девятокъ въ *наименьшемъ*, дѣлящемся на произведеніе c, числѣ ряда

$$9;\ 99;\ 999;\ 9999;\ 99999 \ldots .$$

146. Примѣры. Какія дроби получатся при обращеніи

$$1)\ \frac{5}{21};\ 2)\ \frac{14}{259};\ 3)\ \frac{6}{104};\ 4)\ \frac{123}{16};\ 5)\ \frac{19}{202};\ 6)\ \frac{954}{840}$$

въ десятичныя?

1. Дробь $\frac{5}{21}$ — несократима. Знаменатель ея $21 = 3 \cdot 7$ есть число простое съ 10; слѣд., дробь эта производитъ *чистую* періодическую. Дѣля числа ряда

9; 99; 999; 9999 . . . .

на 21, находимъ, что наименьшее изъ этихъ чиселъ, дѣлящееся на 21 есть 999999, а потому число цифръ въ періодѣ должно равняться шести. Дѣйствительно:

$\frac{5}{21} = 0,(238095)$ . . . . *чист. пер. др. съ пер. въ 6 цифръ.*

2. Дробь $\frac{14}{259}$ сокращается на 7; сокративъ, находимъ $\frac{2}{37}$. Знаменатель 37 есть число простое съ десятью, а потому дробь эта произведетъ чистую періодическую. Дѣля числа

9; 99; 999 . . . .

на 37, видимъ, что первое изъ этихъ чиселъ, дѣлящееся на 37, равно 999, а потому число цифръ въ періодѣ должно равняться тремъ. Дѣйствительно:

$\frac{2}{37} = 0,(054)$ . . . . *чист. пер. др. съ пер. въ 3 цифры.*

3. Дробь $\frac{6}{104}$ сокращается на 2; сокративъ, находимъ $\frac{3}{52}$. Знаменатель $52 = 2^2 \cdot 13$; слѣд., дробь эта произведетъ смѣшанную періодическую, съ числомъ цифръ до періода, равнымъ двумъ и съ числомъ цифръ въ періодѣ, равнымъ шести *). Дѣйствительно:

$$\frac{3}{52} = 0,05\ (769230).$$

---

*) Такъ какъ наименьшее изъ чиселъ ряда 9; 99; 999 . . . , дѣлящееся на 13, есть 999999, т. е. состоитъ изъ шести девятокъ.

4. Дробь $\frac{123}{16}$ несократима. Знаменатель ея $16=2^4$, а потому дробь эта произведетъ конечную десятичную съ четыремя десятичными знаками.

Дѣйствительно:

$$\frac{123}{16}=7,6875.$$

5. Дробь $\frac{19}{202}$ несократима. Знаменатель ея $202=2\,.\,101$.

Наименьшее изъ чиселъ ряда

$$9;\ 99;\ 999;\ 9999\ .\ .\ .\ .\ ,$$

дѣлящееся на 101, равно 9999, а потому $\frac{19}{202}$ произведетъ смѣшанную періодическую съ однимъ десятичнымъ знакомъ до періода и съ 4-мя десятичными знаками въ періодѣ.

Дѣйствительно:

$$\frac{19}{202}=0,0(9405).$$

6. Дробь $\frac{954}{840}$ сокращается на 2. Сокративъ, получаемъ:

$\frac{477}{420}$. Знаменатель $420=2^2\,.\,5\,.\,3\,.\,7$. Слѣд., данная дробь произведетъ смѣшанную періодическую; число цифръ до періода будетъ равно двумъ; для опредѣленія же числа цифръ въ періодѣ, дѣлимъ на произведеніе всѣхъ простыхъ множителей, входящихъ въ знаменатель, кромѣ 2 и 5, т. е. на $3\,.\,7=21$ числа ряда

$$9;\ 99;\ 999\ .\ .\ .\ .$$

Наименьшее изъ этихъ чиселъ, дѣлящееся на 21, равно 999999, т. е. состоитъ изъ шести девятокъ. Поэтому число цифръ въ періодѣ должно быть равнымъ шести.

Дѣйствительно:

$$\frac{477}{420}=1,13(571428).$$

ГЛАВА VI.

Обращенie перiодическихъ дробей въ обыкновенныя.

147. Если имѣется перiодическая десятичная дробь, то во многихъ случаяхъ бываетъ необходимо обратить ее въ обыкновенную дробь, т. е. найти такую обыкновенную дробь, которая при обращенiи въ десятичную, воспроизвела бы данную перiодическую дробь.

При рѣшенiи этого вопроса, будемъ для простоты разсужденiя разсматривать только дроби, меньшiя единицы, т. е. такiя перiодическiя дроби, въ которыхъ цѣлая часть равна нулю. Такое ограниченiе нисколько не уменьшаетъ общности выводовъ, такъ какъ, если, напр., дробь

$$0,\ (a_1\ a_2\ a_3\ .\ .\ .\ .\ a_k)$$

окажется равной дроби $\frac{m}{n}$, то, очевидно, что дробь

$$A,\ (a_1\ a_2\ a_3\ .\ .\ .\ .\ a_k)$$

будетъ равна

$$A+\frac{m}{n}.$$

148. Пусть дана *чистая* перiодическая дробь, содержащая p цифръ въ перiодѣ, напр.

$$0,\ (a_1\ a_2\ a_3\ .\ .\ .\ .\ a_p)$$

и требуется опредѣлить, какой простой дроби она равна. Обозначимъ искомую величину данной перiодической дроби буквой x, такъ что

$$x=0,\ (a_1\ a_2\ a_3\ .\ .\ .\ .\ a_p)\ .\ .\ .\ .\ (1).$$

Умножимъ обѣ части этого равенства на такую степень десяти, чтобы одинъ перiодъ получился передъ запятой, т. е. чтобы запятая передвинулась на p десятичныхъ знаковъ вправо. Для этого, очевидно, надо умножить обѣ части на 10^p, такъ что

$$10^p\ .\ x=a_1\ a_2\ a_3\ .\ .\ .\ .\ a_p,\ (a_1\ a_2\ a_3\ .\ .\ .\ .\ a_p).$$

Послѣднее равенство можно переписать такъ:

$$10^p\ .\ x=a_1\ a_2\ a_3\ .\ .\ .\ .\ a_p+0,\ (a_1\ a_2\ a_3\ .\ .\ .\ .\ a_p),$$

или на основанiи равенства (1):

$$10^p \cdot x = a_1\ a_2\ a_3 \ldots\ldots a_p + x.$$

Вычитая изъ обѣихъ частей по x, получаемъ:

$10^p \cdot x - x = a_1\ a_2\ a_3 \ldots\ldots a_p$, или: $x\ (10^p - 1) = a_1\ a_2\ a_3 \ldots\ldots a_p$,

откуда $x = \dfrac{a_1\ a_2\ a_3 \ldots\ldots a_p}{10^p - 1}$.

Но число вида $10^p - 1$ есть число, состоящее изъ p девятокъ, а потому

$$x = \frac{a_1\ a_2\ a_3 \ldots\ldots a_p}{\underbrace{999 \ldots\ldots 9}_{p \text{ разъ}}}.$$

Замѣняя въ послѣднемъ равенствѣ x его значенiемъ изъ равенства (1), получаемъ окончательно:

$$0,\ (a_1\ a_2\ a_3 \ldots\ldots a_p) = \frac{a_1\ a_2\ a_3 \ldots\ldots a_p}{\underbrace{999 \ldots\ldots 9}_{p \text{ разъ}}}.$$

Послѣднее равенство выражаетъ **ТЕОРЕМУ:**

Всякая чистая перiодическая дробь, не имѣющая цѣлой части, равна такой обыкновенной дроби, числитель которой есть перiодъ, а знаменатель есть число, написанное столькими девятками, сколько цифръ въ перiодѣ.

148a. Итакъ, всякая чистая перiодическая дробь при обращенiи въ простую даетъ такую дробь, знаменатель которой состоитъ изъ числа, написаннаго *одними девятками,* т. е. безусловно не содержащаго множителей ни 2, ни 5. Слѣдовательно, и по приведенiи полученной дроби къ простѣйшему виду (т. е. послѣ сокращенiя ея) знаменатель не будетъ дѣлиться ни на 2, ни на 5, а потому выводимъ заключенiе: **знаменатель обыкновенной дроби, производящей чистую перiодическую, есть непремѣнно число взаимно-простое съ десятью.**

Эта теорема *обратна* доказанной въ § 141 *).

---

*) Въ § 141 доказывается, что дробь, знаменатель которой есть число вз.-простое съ 10-ью, обращается въ чистую перiодическую. Здѣсь доказано *наоборотъ,* что если дробь производитъ чистую перiодическую, то знаменатель ея есть число вз.-простое съ 10-ью. Слѣдовательно, эти теоремы *обратны* другъ другу.

149. Положимъ, дана смѣшанная періодическая дробь

$$0,\ a_1\ a_2\ .\ .\ .\ .\ .\ a_k\ (a_{k+1}\ a_{k+2}\ .\ .\ .\ .\ .\ a_{k+p}),$$

содержащая k цифръ до періода и p цифръ въ періодѣ.

Требуется обратить эту дробь въ обыкновенную.

Обозначимъ искомую обыкновенную дробь буквой x, такъ что

$$x = 0,\ a_1\ a_2\ .\ .\ .\ .\ .\ a_k\ (a_{k+1}\ a_{k+2}\ .\ .\ .\ .\ .\ a_{k+p}).$$

Умножимъ обѣ части этого равенства на такую степень десяти, чтобы періодъ начинался непосредственно послѣ запятой, т. е., чтобы въ правой части получилась *чистая* періодическая дробь. Очевидно, для этого надо умножить обѣ части равенства на 10^k, такъ что

$$x\ .\ 10^k = a_1\ a_2\ .\ .\ .\ .\ .\ a_k,\ (a_{k+1}\ a_{k+2}\ .\ .\ .\ .\ .\ a_{k+p}).$$

Такъ какъ теперь дробь, находящаяся въ правой части, есть *чистая* періодическая съ періодомъ въ p цифръ, то на основаніи § 148 имѣемъ:

$$x\ .\ 10^k = a_1\ a_2\ .\ .\ .\ .\ .\ a_k + \frac{a_{k+1}\ a_{k+2}\ .\ .\ .\ .\ .\ a_{k+p}}{10^p - 1} =$$

$$\frac{(a_1\ a_2\ .\ .\ .\ .\ .\ a_k)\ .\ 10^p + a_{k+1}\ a_{k+2}\ .\ .\ .\ .\ .\ a_{k+p} - a_1\ a_2\ .\ .\ .\ .\ .\ a_k}{10^p - 1} =$$

$$= \frac{a_1\ a_2\ .\ .\ .\ .\ a_k\ \overbrace{00\ .\ .\ .\ .\ .\ 0}^{p\text{ нулей}} + a_{k+1}\ a_{k+2}\ .\ .\ .\ .\ .\ a_{k+p} - a_1\ a_2\ .\ .\ .\ .\ .\ a_k}{10^p - 1}.$$

Но сумма двухъ чиселъ:

$$a_1\ a_2\ .\ .\ .\ .\ .\ a_k\ \overbrace{00\ .\ .\ .\ .\ .\ 0}^{p\text{ нулей}} + \overbrace{a_{k+1}\ a_{k+2}\ .\ .\ .\ .\ .\ a_{k+p}}^{\text{число въ } p \text{ цифръ}}$$

очевидно, равна числу:

$$a_1\ a_2\ a_3\ .\ .\ .\ .\ .\ a_k\ a_{k+1}\ .\ .\ .\ .\ .\ a_{k+p}.$$

Слѣдовательно:

$$x\ .\ 10^k = \frac{a_1\ a_2\ .\ .\ .\ .\ .\ a_{k+p} - a_1\ a_2\ .\ .\ .\ .\ .\ a_k}{\underbrace{999\ .\ .\ .\ .\ .\ 9}_{p\text{ девятокъ}}},$$

или, наконецъ, дѣля на 10^k:

$$x = 0,\ a_1\ a_2\ .\ .\ .\ .\ a_k\ (a_{k+1}\ .\ .\ .\ .\ a_{k+p}) = \frac{a_1\ a_2\ .\ .\ a_{k+p} - a_1\ a_2\ .\ .\ a_k}{\underbrace{999\ .\ .\ .\ 9}_{p\text{ девятокъ}}\underbrace{000\ .\ .\ .\ .\ 0}_{k\text{ нулей}}}.$$

Отсюда вытекаетъ **ТЕОРЕМА**:

Всякая смѣшанная періодическая дробь, не имѣющая цѣлой части, равна простой дроби, числитель которой есть разность числа, стоящаго между запятой и началомъ второго періода и числа, стоящаго между запятой и началомъ перваго періода; знаменатель есть число, состоящее изъ цифры 9, написанной столько разъ, сколько цифръ въ періодѣ, въ сопровожденіи стольких нулей, сколько имѣется цифръ до періода.

149a. Итакъ, всякая смѣшанная періодическая дробь, при обращеніи въ простую, даетъ дробь, знаменатель которой пишется нѣсколькими девятками въ сопровожденіи нулей.

Если, напр., этотъ знаменатель состоитъ изъ p девятокъ и k нулей, т. е. имѣетъ видъ

$$\overbrace{999\ldots.9}^{p\text{ разъ}}\overbrace{00\ldots.0}^{k\text{ разъ}},$$

то онъ дѣлится 1) на 2^k, 2) на 5^k и 3) на всѣхъ первоначальныхъ множителей, взаимно-простыхъ съ десятью, на которыхъ дѣлится число $999\ldots..9$.

Полученная отъ обращенія смѣшанной періодической обыкновенная дробь часто можетъ быть приведена къ болѣе простому виду посредствомъ сокращенія. Но во всякомъ случаѣ отъ этого сокращенія въ знаменателѣ не могутъ уничтожиться **всѣ** первоначальные множители, образующіе число $999\ldots.9$, такъ какъ въ противномъ случаѣ оказалось-бы, что въ знаменателѣ остались только двойки и пятерки, а дробь съ подобнымъ знаменателемъ, на основаніи изложеннаго въ § 126, способна произвести только конечную десятичную, а никакъ не смѣшанную періодическую.

Итакъ, знаменатель дроби, производящей смѣшанную періодическую, даже послѣ приведенія къ простѣйшему виду, кромѣ множителей 2 или 5 (или 2 и 5), содержитъ еще непремѣнно и другихъ множителей, простыхъ съ десятью.

Замѣтимъ еще слѣдующее: послѣдняя цифра непеперіодической части смѣшанной періодической дроби не можетъ равняться послѣдней цифрѣ періода, *если только при опредѣленіи періода не произошло ошибки.* Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ, напр., дробь 0,24545454 .... Въ періодѣ этой дроби стоитъ 45, а передъ періодомъ 2, т. е. 0,24545454 .... = 0,2(45). Если-бы мы предположили, что въ періодѣ данной дроби находится 54, а впереди 24, т. е., что 0,24545454 . . . = 0,24(54), то оказалось-бы, что неперіодическая и періодическая части оканчиваются одинаковой цифрой (4); но это произошло, очевидно, исключительно *изъ-за ошибки въ опредѣленіи періода*, который начинается въ дѣйствительности съ 4, а не съ 5. И вообще: *если послѣдняя цифра непеpіодической части окажется одинаковой съ послѣдней цифрой періода, то это показываетъ, что произошла ошибка въ опредѣленіи періода, который въ дѣйствительности начинается на одну цифру раньше, чѣмъ взято.*

Число, получаемое въ числителѣ при обращеніи смѣшанной періодической дроби $0, a_1 a_2 \dots a_k (a_{k+1} \dots a_{k+p})$ въ обыкновенную, равно, какъ указано въ § 149, разности

$$a_1 a_2 \dots a_{k+p} - a_1 a_2 \dots a_k \quad \dots \dots \quad (1)$$

Разность эта оканчивается той-же цифрой, какъ разность цифръ единицъ уменьшаемаго и вычитаемаго ($a_{k+p} - a_k$). Но только что доказано, что a_{k+p} (послѣдняя цифра періода) не можетъ равняться a_k (послѣдней цифрѣ неперіодической части), а потому разность (1), т. е. числитель полученной дроби, не можетъ оканчиваться нулемъ, т. е. не можетъ раздѣлиться на 10. Изъ этого слѣдуетъ, что дробь, получаемая при обращеніи смѣшанной періодической въ простую, не можетъ быть сокращена на 10, а потому, если числитель и знаменатель дѣлятся оба на 2, то они не могутъ сократиться на 5, и наоборотъ. Слѣдовательно, если полученная отъ обращенія дробь будетъ приведена въ простѣйшій видъ, то послѣ сокращенія въ знаменателѣ ея непремѣнно останутся или множитель 2 или множитель 5, повторенный k разъ (т. е. столько разъ, сколько въ знаменателѣ было нулей).

Изъ сказаннаго вытекаетъ **ТЕОРЕМА:**

Большій изъ показателей степеней при двойкѣ или пятеркѣ въ знаменателѣ дроби, получаемой отъ обращенія смѣшанной періодической въ обыкновенную, равенъ числу цифръ до періода въ обращаемой смѣшанной періодической дроби.

Очевидно, эта теорема является обратной теоремой по отношенію къ изложенному въ § 144.

150. Примѣры.

Чистая періодическая дробь

$$0, 24\ 24\ 24 \dots$$

равна

$$\frac{24}{99} = \frac{8}{33}.$$

Также дробь

$$5,\ 126\ 126\ 126\ \ldots.$$

равна

$$5+\frac{126}{999}=5\,\frac{14}{111}=\frac{569}{111}.$$

Смѣшанная періодическая дробь

$$0,\ 193\ 18\ 18\ 18\ 18\ \ldots.$$

равна

$$\frac{19318-193}{99000}=\frac{19125}{99000}=\frac{17}{88}.$$

Также дробь

$$1{,}2\ (297)=1+\frac{2297-2}{9990}=1+\frac{2295}{9990}=1+\frac{17}{74}=\frac{91}{74}.$$

Также дробь

$$1{,}13\ \ (571428)=1+\frac{13571428-13}{99999900}=1+\frac{13571415}{99999900}=$$

$$=1+\frac{57}{420}=\frac{477}{420}.$$

ПРОГРАММА

вступительнаго экзамена по Ариѳметикѣ, принятая во всѣхъ Институтахъ.

(Кромѣ Инст. Инж. Пут. Сообщ. и Лѣсного, гдѣ Ариѳметика на экзаменѣ вовсе не требуется).

Сложенiе и вычитанiе цѣлыхъ чиселъ. Доказательство формулъ:

$$a+(b+c)=a+b+c, \qquad a+(b-c)=a+b-c,$$
$$a-(b+c)=a-b-c, \qquad a-(b-c)=a-b+c.$$

Умноженiе цѣлыхъ чиселъ. Доказательство формулы:

$$(a \pm b)\ .\ c = ac \pm bc.$$

Теорема о неизмѣняемости произведенiя нѣсколькихъ чиселъ отъ перестановки сомножителей.

Умноженiе произведенiя на какое-нибудь число, умноженiе числа на произведенiе и умноженiе двухъ произведенiй. Во всякомъ произведенiи можно нѣсколько сомножителей замѣнить ихъ произведенiемъ.

Произведенiе степеней одного и того-же числа.

Дѣленiе цѣлыхъ чиселъ. Теорема: если дѣлимое и дѣлителл умножить на одно и то-же цѣлое число, то частное не измѣнится, а остатокъ умножится на это число.

Дѣленiе произведенiя на данное число. Дѣленiе даннаго числа на произведенiе и въ томъ случаѣ, когда при дѣленiяхъ получаются остатки.

Теоремы о дѣлимости чиселъ:*)

1) Если a и b дѣлятся на c, то и $a \pm b$ дѣлится на c.

---

*) Съ этого пункта начинается программа по Ариѳметикѣ въ Электротехническомъ Институтѣ. Всѣ предыдущiе вопросы изъ нея выпущены.

2) Если a дѣлится на c, а b не дѣлится на c, то $a \pm b$ не дѣлится на c.

3) Если a дѣлится на b, и b дѣлится на c, то a дѣлится на c

4) Если a и b дѣлятся на c, то и остатокъ отъ дѣленія a на b дѣлится на c.

Признаки дѣлимости на 2, 4, 8, 5, 25, 3 и 9.

Нахожденіе наибольшаго дѣлителя двухъ чиселъ при помощи послѣдовательныхъ дѣленій. Теоремы:

1) Всякій дѣлитель данныхъ чиселъ есть дѣлитель ихъ наибольшаго дѣлителя.

2) При умноженіи или дѣленіи данныхъ чиселъ на какое-нибудь число, ихъ наибольшій дѣлитель умножится или раздѣлится на то-же число.

3) При дѣленіи данныхъ чиселъ на ихъ наибольшаго дѣлителя въ частномъ получаются числа взаимно-простыя.

4) Если a простое съ b и ac дѣлится на b, то c дѣлится на b.

5) Если числа $a, b \ldots\ldots m$ попарно взаимно-простыя и n дѣлится на каждое изъ нихъ, то n дѣлится на произведеніе $ab \ldots\ldots m$.

Вычисленіе наименьшаго кратнаго двухъ чиселъ при помощи ихъ наибольшаго дѣлителя. Теоремы:

1) Всякое кратное данныхъ чиселъ есть кратное ихъ наименьшаго кратнаго.

2) При дѣленіи наименьшаго кратнаго на данныя числа въ частномъ получаются числа взаимно-простыя и обратно.

Понятіе о числѣ абсолютно-простомъ. Теоремы:

1) Всякое число имѣетъ простого дѣлителя.

2) Рядъ простыхъ чиселъ безграниченъ.

3) Если простое число дѣлитъ произведеніе, то оно дѣлитъ по крайней мѣрѣ одного изъ сомножителей.

4) Если каждое изъ чиселъ $a, b, \ldots\ldots m$ простое съ каждымъ изъ чиселъ $\alpha, \beta, \ldots\ldots \mu$, то и произведеніе $ab \ldots\ldots m$ простое съ $\alpha\beta \ldots\ldots \mu$.

5) Всякое число допускаетъ единственное разложеніе на простыхъ сомножителей.

Необходимое и достаточное условіе дѣлимости данныхъ чиселъ, представленныхъ въ видѣ произведенія простыхъ сомножителей; отысканіе наибольшаго дѣлителя и наименьшаго кратнаго данныхъ чиселъ, представленныхъ въ видѣ произведенія простыхъ сомножителей.

Приведеніе дробей къ простѣйшему виду. Теорема: если $\frac{a}{b}$ несократимая дробь и $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то $c = am$, $d = bm$.

Сравненіе дробей $\frac{a}{b}$ и $\frac{a \pm c}{b \pm c}$ по ихъ величинѣ.

Приведеніе дробей къ общему наименьшему знаменателю.

Сложеніе, вычитаніе, умноженіе и дѣленіе дробей.

Распространеніе теоремъ, относящихся къ произведеніямъ цѣлыхъ чиселъ, на случай чиселъ дробныхъ.

Дѣйствія надъ десятичными дробями.

Обращеніе обыкновенныхъ дробей въ десятичныя.

Условія, при которыхъ данная дробь обращается въ конечную десятичную. Необходимость появленія періодической десятичной дроби, если эти условія не выполнены.*) Условія, при которыхъ данная дробь обращается въ чистую или смѣшанную періодическую дробь. Число цифръ до періода.

Обращеніе періодическихъ дробей въ обыкновенныя.

---

*) Этимъ пунктомъ заканчивается программа СПБ. Технологическаго Института. Всѣ дальнѣйшіе вопросы изъ нея выпущены.

Оглавленіе.

ОТДѢЛЪ I. §§ 1—41.

Ариѳметическія дѣйствія надъ цѣлыми числами.

ОТДѢЛЪ II. §§ 42—95.

Основныя свойства чиселъ.

ОТДѢЛЪ III. §§ 96—150.

Дроби.

Цѣна 1р. 40 коп.

[redacted]