…ОВОДСТВА И ПОСОБ…
ДЛЯ ТЕХНИКУМОВ … ТУЗ…

А. Н. ПАЛЬШАУ

НАЧАЛА НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКВА 1924

РУКОВОДСТВА И ПОСОБИЯ ДЛЯ ТЕХНИКУМОВ
И ВЫСШИХ ТЕХНИЧЕСКИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

А. Н. ПАЛЬШАУ

НАЧАЛА НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

ИЗДАНИЕ ВОСЬМОЕ
ЗАНОВО ПЕРЕРАБОТАННОЕ
ПОД РЕДАКЦИЕЙ И С ДОПОЛНЕНИЯМИ
Н. Ф. ЧЕТВЕРУХИНА
ПРЕПОД. МОСКОВСКОГО ГОС. УНИВЕРСИТЕТА

С 330 ЧЕРТЕЖАМИ В ТЕКСТЕ

Научно-Технической Секцией Государственного Ученого Совета допущено в качестве руководства для ВТУЗ'ов и Техникумов

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКВА

НАСТОЯЩЕЕ ИЗДАНИЕ
ОТПЕЧАТАНО В ТИПОГРАФИИ
«КРАСНЫЙ ПЕЧАТНИК»
ЛЕНИНГРАД, МЕЖДУНАРОДНЫЙ, 75
В КОЛИЧЕСТВЕ 6.200 ЭКЗ.
ПОД НАБЛЮДЕНИЕМ
ТЕХНИЧЕСКОГО РЕДАКТОРА
С. С. ПЭНА
ЛЕНИНГРАДСКИЙ ГУБЛИТ 11217.
1924. ГИЗ 7049.

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА НОВОГО (ВОСЬМОГО) ИЗДАНИЯ

Труд А. Н. Пальшау, „Начала начертательной геометрии, краткая теория кривых и способы их черчения,“ является у нас в России одним из самых распространенных учебников по начертательной геометрии и выдержал уже семь изданий. Настоящее (восьмое) издание, заново переработанное, содержит ряд дополнений. Наиболее значительные из этих дополнений следующие.

Добавлены два новых отдела: Проекции с числовыми отметками (§§ 309—327, задачи 310—322) и Аксонометрия (§§ 328—346, задачи 333—348), составившие вместе с Линейной перспективой вторую часть книги. Первая часть ее пополнена: Условиями видимости точек (§ 158), Пересечением многогранников (§ 191), Пересечением поверхностей (§§ 237—238, задачи 287—291), Приближенным построением эллипса (§ 246) и другими менее значительными примечаниями и дополнениями.

Главы о циклоидальных кривых и спиралях опущены, как не имеющие большого значения. Наконец, расположение материала построено по следующей схеме.

Часть первая: Ортогональные проекции на две плоскости (содержащая также теорию кривых и применения к построению теней и проектированию сооружений).

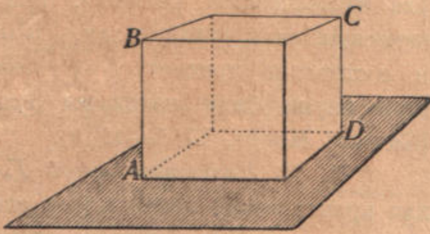
Часть вторая: Проекции на одну плоскость. Отдел первый: Ортогональные проекции (с числовыми отметками). Отдел второй: Параллельные проекции (аксонометрия). Отдел третий: Центральные проекции (линейная перспектива).

Н. Четверухин.

Москва.
15 января 1924 г.

ВВЕДЕНИЕ

§ 1. Всякая плоская фигура, как совмещающаяся всеми своими точками с плоскостью, может быть изображена на бумаге геометрическим чертежом или в истинную величину, или в подобном и уменьшенном виде, и такой чертеж может быть назван точным, ибо он дает возможность определить истинную величину всех элементов фигуры и, таким образом, построить самую фигуру из данного материала. Иное дело, если фигура имеет три измерения: в этом случае перспективный чертеж ее (рисунок), имея целью произвести на глаз наблюдателя то же впечатление, какое производит и самая фигура, помещенная в пространстве, не дает ни истинных размеров элементов фигуры, ни точного представления об ее форме. Так, куб $ABCD$ на *чертеже 1* представляется в виде неправильного четырехгранника, ограниченного неправильными четыреугольниками.



Черт. 1.

Отсюда легко видеть, что перспективный чертеж фигур, имеющих три измерения, хотя и обладает наглядностью, но не позволяет определить истинную величину элементов фигуры и не дает, таким образом, возможности по чертежу построить самое тело.

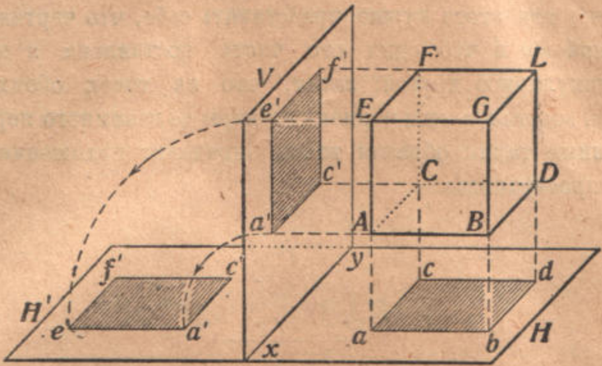
Между тем, при постройке различного рода сооружений и машин мы прежде всего нуждаемся в чертеже предполагаемого сооружения, притом не в чертеже *перспективном*, а *точном*, который давал бы полное представление как о расположении частей сооружения, так и об их точных размерах. По такому чертежу строитель может до постройки всесторонне обсудить все детали сооружения, внести необходимые исправления и тем самым избегнуть изменений во время постройки, всегда дорого стоющих и нарушающих цельность сооружения. Правда, для обсуждения деталей предполагаемого сооружения, казалось, могла бы служить модель сооружения, приготовленная из каких-либо легко изменяемых материалов, напр., из глины, дерева, гипса, воска и т. п.; но, не говоря уже о том, что приготовление моделей сопряжено с большими трудностями, модель не достигает вполне своей цели еще и потому, что не позволяет точно судить о *внутренних* размерах и формах тела; точный же чертеж не только дает точные размеры всех частей сооружения, но и позволяет быстро делать все необходимые в них изменения. Вот почему точный чертеж фигур, имеющих три измерения, является единственным средством для предварительного обсуждения и составления проекта сооружения, и в этом смысле является как бы прозрачною моделью сооружения, сделанною из материалов (тушь, карандаш, краски и т. п.), легко допускающих внесение изменений.

§ 2. Отсюда легко видеть всю важность учения, имеющего целью дать *научные правила*, во-первых, для точного изображения на плоскости тел, имеющих три измерения, во-вторых,— для графического решения, при помощи планиметрии, задач, относящихся к таким телам. Вывод и разработка таких правил и составляет предмет *Начертательной Геометрии*. Основы этой науки были положены французским геометром Г. Монжем (Gaspard Monge, 1746—1818).

§ 3. В *Начертательной Геометрии* наибольшее значение для практических целей имеет способ задания тел, находящихся в пространстве, посредством их проекций на две взаимно-перпендикулярные плоскости. Этому способу посвящена большая часть книги (часть первая, *§§ 5—308*).

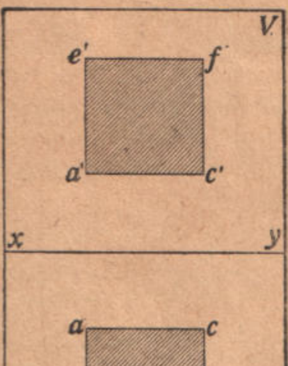
Чтобы показать на частном примере, в чем заключается способ проекций, спроектируем куб AL [*черт. 2*] на две взаимно-перпендикулярные плоскости H и V, припомнив, что проекцией точки A на плоскость называется основание a перпендикуляра Aa, опущенного из точки на плоскость (*§ 5*).

В том положении, какое в нашем случае занимает куб относительно плоскостей V и H, он проектируется на плоскостях H и V по двум квадратам $abcd$ и $a'c'e'f'$, которые, вполне определяя положение куба в пространстве, могли бы быть, как плоские фигуры, вполне точно вычерчены на бумаге, если бы они



Черт. 2.

не находились на двух взаимно-перпендикулярных плоскостях. Это неудобство задания тела проекциями легко, однако, уничтожить, если совместить плоскость V с плоскостью H, вращая V по направлению стрелки около прямой xy пересечения плоскостей V и H. В этом случае плоскости обоих чертежей $abcd$ и $a'c'e'f'$ сольются в одну, которую можно принять за лист бумаги, и на нем точно вычертить две плоские фигуры $abcd$ и $a'c'e'f'$, определяющие положение куба в пространстве. Таким путем куб AL в нашем случае представится на плоскости листа бумаги [*черт. 3*] двумя квадратами: одним $a'c'e'f'$, лежащим над прямой xy, другим $abdc$ — под xy.



Черт. 3.

§ 4. Взятый нами пример поясняет в общих чертах тот путь, которым *Начертательная Геометрия* достигает своей главной цели — изобразить точно на плоскости тело, расположенное в пространстве, и вместе с тем показывает, что точный чертеж *Начертательной Геометрии*, как состоящий из двух плоских фигур мало напоминает заданное им пространственное тело, так что требуется некоторая работа воображения для того, чтобы по этому чертежу восстановить форму и положение тела в пространстве; для этого нужно представить себе, что чертеж перегнут по прямой xy и что одна его часть поставлена в положение, перпендикулярное другой; затем, что из точек обоих плоских чертежей восстановлены перпендикуляры до взаимного пересечения. Полученные таким образом точки определят положение и форму тела в пространстве.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

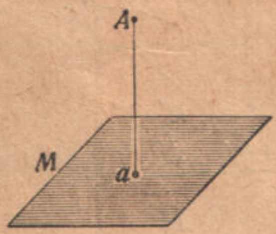
ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПРОЕКЦИИ НА ДВЕ ПЛОСКОСТИ

ОТДЕЛ ПЕРВЫЙ
О ТОЧКЕ, ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

ГЛАВА I.
ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ.

I. Определения

§ 5. *Проекцией точки A на плоскости M* [*черт. 4*] *называется основание a перпендикуляра Aa, опущенного из точки на плоскость*, или, иначе, *проекцией точки A на плоскость M называется точка встречи перпендикуляра Aa с плоскостью, на которую проектируют данную точку.*



Черт. 4.

Плоскость, на которую проектируют данные точки и фигуры, называется плоскостью проекций.

Перпендикуляр Aa, опущенный из данной точки на плоскость проекций, называется проектирующей данной точки [1]).

§ 6. Две взаимно-перпендикулярные плоскости, на которые проектируют фигуры в способе проекций, называются: одна — *горизонтальною плоскостью проекций*, другая — *вертикальною плоскостью проекций* и обозначаются: горизонтальная — буквою H, вертикальная — буквою V. Обе плоскости проекций предполагаются продолженными во все стороны безгранично.

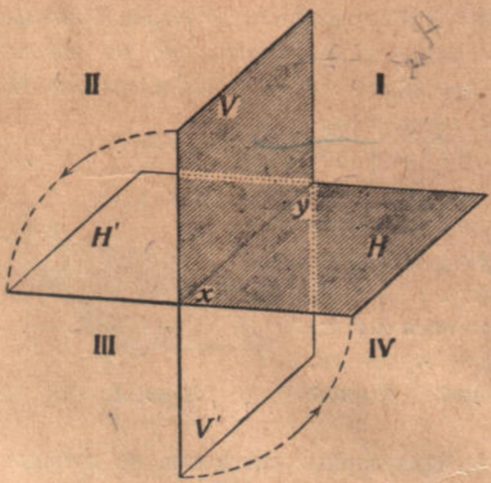
§ 7. Прямая пересечения плоскостей проекций называется *осью проекций* и обозначается буквами xy.

---

[1]) Так как в этом определении проектирующие всегда перпендикулярны (ортогональны) к плоскости проекций, то и самый метод получил название *метода ортогональных проекций.*

Ось проекций xy разделяет каждую из плоскостей проекций [*черт. 5*] на две части, а именно: горизонтальную — на *переднюю* $xy\,H$ и *заднюю* $xy\,H'$, вертикальную — на *верхнюю* $xy\,V$ и *нижнюю* $xy\,V'$. Таким образом, четыре двугранные угла, образованные плоскостями проекций, составляются: *первый угол* I—передней горизонтальной H и верхней вертикальной V; *второй угол* II—задней горизонтальной H' и верхней вертикальной V; *третий угол* III—задней горизонтальной H' и нижней вертикальной V'; наконец, *четвертый угол* IV — передней горизонтальной H и нижней вертикальной V'.

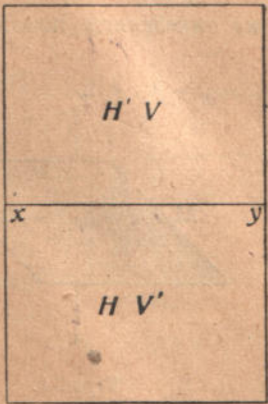
§ 8. Отсюда, принимая во внимание задание тела в пространстве посредством двух проекций, легко видеть, что фигура, находящаяся 1) *в первом угле*, имеет свои проекции на передней горизонтальной H и верхней вертикальной V; 2) *во втором угле*—на задней горизонтальной H и верхней вертикальной V; 3) *в третьем*—на задней горизонтальной H' и нижней вертикальной V'; 4) *в четвертом* — на передней горизонтальной H и нижней вертикальной V'.



Черт. 5.

§ 9. Для составления по проекционным чертежам, лежащим на двух взаимно - перпендикулярных плоскостях и определяющим фигуру в пространстве, одного плоского чертежа фигуры остается, как мы уже видели, совместить вертикальную плоскость проекций с горизонтальной. При этом условимся такое совмещение совершать всегда определенным образом: будем вращать вертикальную плоскость проекций около оси xy [*черт. 5*] до тех пор, пока верхняя вертикальная ее часть V не совпадет с задней горизонтальной H' и нижняя вертикальная V'—с передней горизонтальной H. По совершении такого совмещения, плоскости проекций представят одну плоскость, разделенную осью xy на две части. Эта плоскость, будучи совмещена с листом бумаги и повернута таким образом, чтобы ось xy была горизонтальна, представится *чертежом 6*.

§ 10. Из такого способа совмещения плоскостей проекций необходимо следует, что *над* осью xy будут лежать следующие части плоскостей проекций: *верхняя вертикальная* V и *задняя горизонтальная* H'; *под* осью—*передняя горизонтальная* H *и нижняя вертикальная* V'.



Черт. 6.

§ 11. Отсюда, принимая во внимание положение проекций фигуры, находящейся в различных углах [*§ 8*], легко найдем, что проекции фигуры, находящейся: 1) в *первом угле*, лежат: горизонтальная — *под осью*, вертикальная — *над осью;* 2) во *втором угле*: горизонтальная и вертикальная—*над осью;* 3) в *третьем угле:* горизонтальная — *над осью*, вертикальная — *под осью;* 4) в *четвертом угле*—горизонтальная и вертикальная – *под осью.*

§ 12. Плоский чертеж проекций фигуры, полученный после совмещения плоскостей проекций, называется *эпюром.*

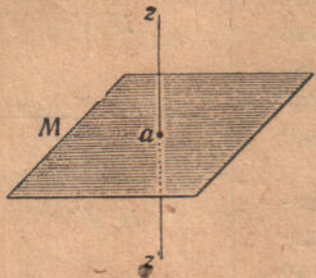
Чтобы придать эпюру большую наглядность и облегчить чтение эпюра, т.-е. представление по эпюру положения и формы фигуры в пространстве, условимся различные линии на эпюре вычерчивать различными способами [*черт. 7*]: *данные видимые линии* будем чертить *тонкою чертою № 1, геометрические построения—пунктиром № 2, искомые видимые—сплошною толстою чертою № 3, проектирующие—пунктиром № 4, невидимые линии—пунктиром № 5.*

Черт. 7.

Кроме того допустим, что плоскости непрозрачны и что наблюдатель всегда помещается в первом угле, притом так, что конец x оси проекций находится относительно наблюдателя слева, а конец y—справа.

II. О точке.

§ 13. Теорема I. *Одна проекция точки на плоскость не определяет положения точки в пространстве.*

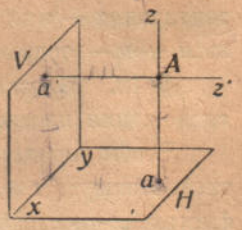


Черт. 8.

В самом деле [*черт. 8*], если M—плоскость проекций, a — данная проекция точки, то, по определению [*§ 5*], за искомую точку может быть принята всякая точка перпендикуляра zz', восстановленного из проекции a к плоскости M.

§ 14. Теорема II. *Положение точки в пространстве вполне определяется двумя ее проекциями на две взаимно-перпендикулярные плоскости.*

Пусть [*черт. 9*] a—данная проекция на горизонтальной плоскости H; a' — данная проекция на вертикальной плоскости V. Искомая точка, по определению *§ 5*, должна находиться где-либо и на перпендикуляре az, восстановленном к плоскости H из проекции a, и на перпендикуляре $a'z'$, восстановленном к плоскости V из проекции a'; следовательно, если a и a' — проекции одной и той же точки, то они должны находиться в точке их взаимного пересечения A.

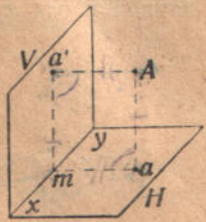


Черт. 9.

§ 15. Проекция точки на горизонтальную плоскость проекций H называется *горизонтальной проекцией* точки и обозначается малою буквою, напр.: a, b, c... Проекция точки на вертикальную плоскость проекций V называется *вертикальною проекцией* точки и обозначается тою же буквою, как и горизонтальная проекция, но со знаком. напр.: a', b', c'...

§ 16. Теорема III. *Расстояние точки от вертикальной плоскости проекций равняется расстоянию ее горизонтальной проекции от оси; расстояние точки от горизонтальной плоскости проекций равняется расстоянию ее вертикальной проекции от оси.*

Пусть [*черт. 10*] A—данная точка, a и a'—ее горизонтальная и вертикальная проекции на плоскости H и V. Плоскость aAa', проведенная через проектирующие Aa и Aa', перпендикулярна к оси xy и пересекает плоскости H и V по прямым ma и ma', которые с проектирующими Aa и Aa' образуют прямоугольник $Aama'$. В самом деле, плоскость aAa' перпендикулярна к xy, потому что, проходя через проектирующие Aa и Aa', перпендикулярна к плоскостям H и V, а следовательно, перпендикулярна и к линии их пересечения xy; фигура $Aama'$ — прямоугольник, потому что углы $Aa'm$ и Aam—прямые по определению, а угол $a'ma$—прямой, как мера прямого двугранного угла между плоскостями H и V.



Черт. 10.

В прямоугольнике $Aama'$, Aa есть расстояние точки от горизонтальной плоскости, $a'm$—расстояние вертикальной проекции точки от оси, Aa'—расстояние точки от вертикальной плоскости, am—расстояние горизонтальной проекции от оси; по свойству же прямоугольника имеем: $Aa = a'm$ и $Aa' = am$, что и требовалось доказать.

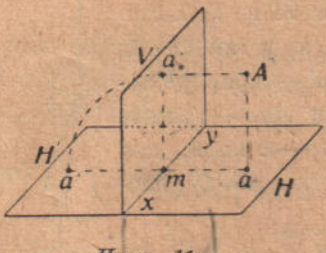
§ 17. По правилу Декарта[1]) условимся считать расстояние точки от горизонтальной плоскости *положительным*, когда ее вертикальная проекция находится *над осью* (точка лежит или в первом, или во втором угле), и *отрицательным*, когда вертикальная проекция точки лежит *под* осью (точка лежит в третьем или четвертом угле). На том же основании расстояние точки от вертикальной плоскости будем считать *положительным*, когда горизонтальная проекция точки лежит *под* осью (точка лежит в первом или четвертом угле), и *отрицательным*, когда горизонтальная проекция точки лежит *над* осью (точка лежит во втором или третьем угле).

§ 18. Теорема IV. *После совмещения вертикальной плоскости с горизонтальной обе проекции точки лежат на одном перпендикуляре к оси.*

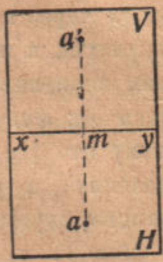
Заметим, с одной стороны, что всякая точка, вращающаяся около прямой, двигается по окружности круга, лежащего в пло-

[1]) Descartes (1596—1650)—знаменитый французский геометр, основоположник *аналитической геометрии*.

скости, перпендикулярной к прямой, с другой,—что совмещение плоскости V со всеми лежащими в ней точками достигается вращением ее около оси xy. Отсюда заключаем, что проекция a'_0 [*черт. 11*], лежащая в плоскости V, будет, во время совмещения последней, постоянно оставаться в плоскости aAa'_0, перпендикулярной к оси xy [*§ 16*], и при совмещении упадет в точку a',



Черт. 11.



Черт. 12.

лежащую на продолжении am на расстоянии ma' от оси xy, равном ma'_0; но am перпендикулярна к оси xy; следовательно, и ma', как лежащая в плоскости aa'_0a', тоже перпендикулярна к оси, что и требовалось доказать.

§ 19. Эпюр заданной проекциями точки представится, таким образом, *чертежом 12*, на котором aa' перпендикулярна к оси xy, ma выражает расстояние точки от вертикальной плоскости проекций, ma' — от горизонтальной [*§ 16*].

Замечание. Впоследствии мы условимся чертить эпюр без рамок, ибо, как сказано, плоскости проекций не имеют границ.

§ 20. Теорема V. *Две точки на эпюре только тогда могут быть приняты за проекции одной и той же точки в пространстве, когда они лежат на одном перпендикуляре к оси.*

Ибо, по восстановлении плоскости V в положение перпендикулярное к H, проектирующие $a'A$ и aA только тогда пересекутся и определят точку A в пространстве, когда ma и ma' лежат в одной плоскости, перпендикулярной к оси xy.

§ 21. *Дать* или *найти* точку значит дать или найти ее проекции. Точку, данную проекциями a и a', мы будем записывать так: (a, a'); самую же проектируемую точку будем обозначать большою буквою одного названия с буквами проекций, так: A.

§ 22. Точка в пространстве может занимать в отношении плоскостей проекций следующие положения, изображенные на *чертеже 13*.

1) Точка A находится в первом угле; по *§ 11* горизонтальная проекция ее a находится под осью, вертикальная a' — над осью.

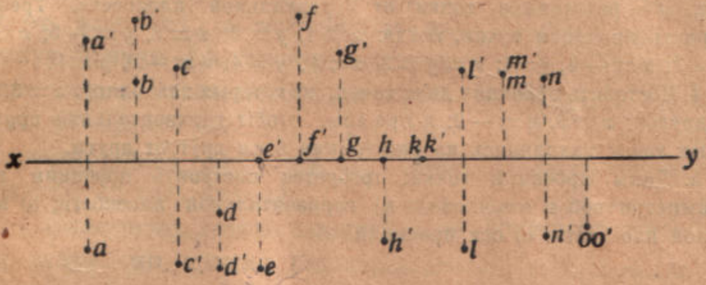
2) Точка B находится во втором угле; по тому же §, b и b' находятся над осью.

3) Точка C находится в третьем угле; по тому же §, c — над осью, c' — под осью.

4) Точка D находится в четвертом угле; d и d' — под осью.

5) Точка E находится на передней части горизонтальной плоскости, e — под осью и сливается с E, e' — на оси.

6) Точка F находится на задней части горизонтальной плоскости, f — над осью и сливается с F, f' — на оси.



Черт. 13.

7) Точка G находится на верхней части вертикальной плоскости, g' — над осью и сливается с G, g — на оси.

8) Точка H находится на нижней части вертикальной плоскости, h' — под осью и сливается с H, h — на оси.

9) Точка K находится на оси; k и k' — на оси и сливаются с K.

10) Точка L находится в плоскости биссектора первого угла; l и l' находятся на равном расстоянии от оси; l — под осью, l' — над осью.

11) Точка M находится в плоскости биссектора второго угла: m и m' сливаются в одну точку над осью.

12) Точка N находится в плоскости биссектора третьего угла; n и n' — на равном расстоянии от оси, n — над осью, n' — под осью.

13) Точка O находится в плоскости биссектора четвертого угла; o и o' сливаются в одну точку под осью.

Задачи.

1. Построить проекции точки, когда точка находится: a) в первом угле на расстоянии 2 *см* от горизонтальной плоскости и 5 *см*— от вертикальной; b) в плоскости биссектора второго угла на расстоянии 3 *см* от плоскостей проекций; c) в плоскости биссектора третьего угла на расстоянии 5 *см* от плоскостей проекций; d) в четвертом угле на расстоянии 5 *см* от горизонтальной плоскости и 3 — от вертикальной; e) на задней стороне горизонтальной плоскости на расстоянии 3 *см* от вертикальной; f) на нижней стороне вертикальной плоскости на расстоянии 3 *см* от горизонтальной.

2. Построить проекции точки по следующим данным: a) точка находится над горизонтальной плоскостью на расстоянии 3 *см* и за вертикальной плоскостью на расстоянии 2 *см*; b) точка находится под горизонтальной плоскостью на расстоянии 4 *см* и перед вертикальной на расстоянии 6 *см*.

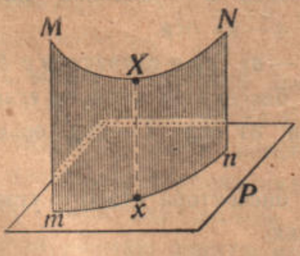
3. Пусть y обозначает расстояние точки от горизонтальной плоскости; x — расстояние точки от вертикальной плоскости. Требуется построить проекции точки, когда: $x=1$, $y=2$; $x=3$, $y=-5$; $x=-2$, $y=-3$; $x=-4$, $y=4$; $x=y=3$; $x=0$, $y=4$; $x=-3$, $y=0$.

4. Построить проекции двух точек, из которых для одной: $x=3, y=0$, для другой: $x=5$, $y=-2$; и при том, чтобы горизонтальные проекции данных точек находились на расстоянии 3 *см* друг от друга.

5. Даны проекции точки; требуется построить проекции точки, ей симметричной в отношении: a) горизонтальной плоскости; b) вертикальной плоскости; c) оси проекций.

III. О прямой.

§ 23. Определение. Всякую линию, например, MN [*черт. 14*], можно рассматривать как геометрическое место точки X, движущейся по некоторому закону; во время такого движения и проекция точки X на плоскость P, т.-е. точка x, будет двигаться в плоскости P и опишет, вообще говоря, некоторую кривую mn, которая называется проекцией линии MN на плоскость P. Таким образом, *проекцией линии MN на плоскость P называется геометрическое место mn проекций (на ту же плоскость) точек, ее составляющих.*

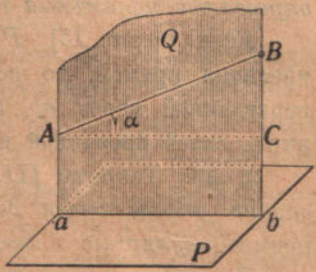


Черт. 14.

§ 24. Проектирующие всех точек линии MN, как перпендикулярные к одной и той же плоскости P, параллельны между собою и, следовательно, образуют цилиндрическую поверхность, направляющей которой служит данная линия MN, а производящей—любая из проектирующих, напр., Mm; такая поверхность называется *проектирующею поверхностью.* Отсюда легко видеть, что проекцию mn линии MN на плоскость P можно еще рассматривать, как *пересечение проектирующей поверхности с плоскостью проекций.*

§ 25. Теорема 1. *Проекция прямой на плоскость есть прямая.*

Пусть [*черт. 15*] AB—данная прямая и P—плоскость проекций. Проектирующая поверхность в случае прямой обращается в плоскость, ибо две какие-либо проектирующие, напр., Aa и Bb, как перпендикулярные к плоскости P, параллельны между собою и определяют плоскость Q, содержащую как самую прямую AB, так и проектирующие всех ее точек. Отсюда проекция ab прямой AB, как пересечение проектирующей плоскости Q с плоскостью P, есть прямая.



Черт. 15.

Замечание. Говоря о прямой и ее проекции, мы должны различать два случая: когда длина прямой ничем не ограничена, т.-е. когда имеется в виду ее направление, и когда длина прямой ограничена двумя точками: в первом случае мы будем говорить просто прямая, во втором—отрезок прямой.

§ 26. Рассматривая отрезок прямой AB и его проекцию ab на плоскость P, замечаем:

1) Отрезок AB и его проекция ab на плоскость P составляют две непараллельные стороны прямоугольной трапеции $ABab$, две другие, параллельные стороны которой суть проектирующие Aa и Bb. Высота этой трапеции измеряется проекцией ab, ибо ab перпендикулярна к проектирующим Aa и Bb.

2) *Проекция отрезка равна самому отрезку, умноженному на cosinus угла* α, *составленного прямою со своею проекциею на плоскости*, ибо из прямоугольного треугольника ABC, в котором AC параллельна ab, имеем: $AC = AB \cdot \cos\alpha$, но, по параллельности AC и ab, $AC = ab$; следовательно, $ab = AB \cdot \cos\alpha$. Отсюда заключаем, что проекция отрезка, вообще говоря, всегда меньше самого отрезка.

3) *Проекция отрезка равна самому отрезку в том случае, когда прямая параллельна плоскости проекций;* ибо в этом случае $\angle \alpha = 0$ и, следовательно, $ab = AB$.

4) *Проекция прямой обращается в точку, если сама прямая перпендикулярна к плоскости проекций;* ибо в этом случае $\angle \alpha = 90^\circ$ и, следовательно, $ab = 0$.

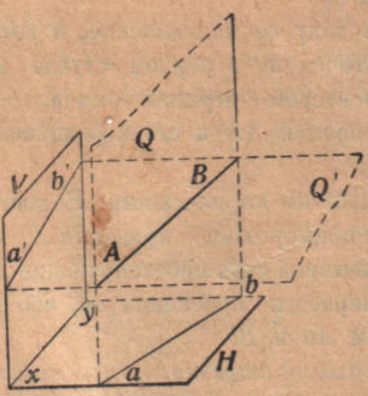
5) *Точка делит отрезок в том же отношении, в каком проекция этой точки делит проекцию отрезка,* что легко видеть из подобия треугольников. Отсюда, если точка делит отрезок пополам, то проекция этой точки делит пополам проекцию отрезка.

§ 27. Теорема II. *Проекция прямой на плоскость не определяет положения прямой в пространстве.*

Если [*черт. 15*] P — плоскость проекций и ab — данная проекция прямой, то всякая прямая, лежащая в плоскости Q, проведенной через ab перпендикулярно к плоскости P, будет иметь своей проекцией на плоскость P данную прямую ab.

§ 28. Теорема III. *Положение прямой в пространстве вполне определяется двумя ее проекциями на две взаимно-перпендикулярные плоскости.*

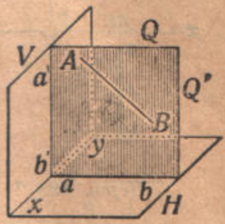
Пусть [*черт. 16*] ab — проекция прямой на горизонтальную плоскость проекций H, $a'b'$—проекция той же прямой на вертикальную плоскость проекций V. Искомая прямая AB должна одновременно находиться и в проектирующей плоскости Q, и в проектирующей плоскости Q'; следовательно, пересечение AB обеих проектирующих плоскостей есть единственная прямая, которая может иметь своими проекциями на H и V прямые ab и $a'b'$.



Черт. 16.

§ 29. Эта теорема имеет исключение в том случае, когда данные проекции ab и $a'b'$ искомой прямой лежат на одном перпендикуляре к оси [*черт. 17*], ибо в этом случае обе проектирующие плоскости Q и Q' сливаются в одну, перпендикулярную к оси, и всякая прямая, например AB, взятая в этой плоскости, будет иметь своими проекциями данные прямые ab и $a'b'$.

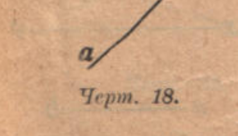
§ 30. Проекция прямой на горизонтальную плоскость проекций называется *горизонтальной проекцией прямой* и обозначается двумя малыми буквами, например ab, cd, поставленными где бы то ни было, если речь идет о направлении прямой, и возле определенных точек, если речь идет об отрезке. Проекция прямой на вертикальную плоскость проекций называется *вертикальною проекцией прямой* и обозначается таким же образом, как и горизонтальная проекция и такими же буквами, но со значками, например: $a'b'$, $c'd'$.



Черт. 17.

Плоскость Q, проектирующая прямую на горизонтальную плоскость, называется *горизонтально-проектирующею плоскостью*; плоскость Q', проектирующая прямую на вертикальную плоскость проекций, называется *вертикально-проектирующею плоскостью.*

После совмещения вертикальной плоскости проекций с горизонтальною, прямая в пространстве представится на эпюре [*черт. 18*] двумя проекциями, т.-е. двумя прямыми ab и $a'b'$. Прямая, данная на эпюре, читается своими проекциями ab, $a'b'$ и записывается так: $(ab, a'b')$.

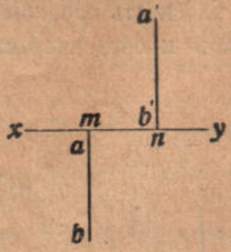


Черт. 18.

§ 31. Теорема IV. *Две какие-либо прямые, взятые на эпюре, могут быть всегда рассматриваемы как проекции одной и той же прямой в пространстве, исключая тот случай, когда они перпендикулярны к оси проекций в различных точках.*

Пусть [*черт. 18*] ab и $a'b'$ — две прямые, взятые на эпюре, притом ab—на горизонтальной плоскости, $a'b'$—на вертикальной. Для доказательства теоремы восстановим вертикальную плоскость [*черт. 16*] и проведем через ab и $a'b'$ проектирующие плоскости; пересечение их должно определить искомую прямую. Но если данные прямые перпендикулярны к оси в различных точках m и n [*черт. 19*], то проектирующие плоскости не пересекутся и, следовательно, нет прямой, которая бы соответствовала проекциям ab и $a'b'$.

§ 32. Каждому положению прямой относительно плоскостей проекций соответствует известное положение проекций этой прямой относительно оси проекций. Важнейшие из этих положений суть следующие:



Черт. 19.

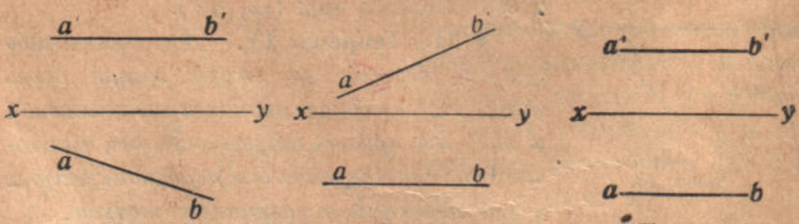
1) *Прямая параллельна горизонтальной плоскости проекций* [*черт. 20*].

В этом случае все точки прямой равно удалены от горизонтальной плоскости проекций и, следовательно [*§ 16*], вертикальные проекции всех ее точек находятся на одинаковом расстоянии от оси. Отсюда заключаем, что в рассматриваемом случае вертикальная проекция $a'b'$, прямой AB, параллельной плоскости H, параллельна оси, горизонтальная же ab расположена как угодно относительно оси.

2) *Прямая параллельна вертикальной плоскости проекций* [*черт. 21*].

Подобно тому, как и в предыдущем случае, докажем, что горизонтальная проекция ab прямой AB, параллельной плоскости V, параллельна оси, а вертикальная $a'b'$ лежит как угодно относительно оси.

3) *Прямая параллельна оси* [*черт. 22*].



Черт. 20 *Черт. 21.* *Черт. 22.*

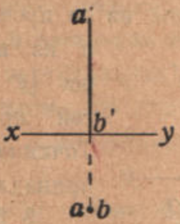
В этом случае прямая параллельна обеим плоскостям проекций и, следовательно, горизонтальные и вертикальные проекции всех ее точек равно удалены от оси [*§ 16*], т.-е. проекции ab и $a'b'$ прямой параллельны оси.

4) *Прямая перпендикулярна к горизонтальной плоскости проекций* [*черт. 23*].

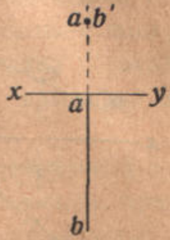
В этом случае ее горизонтальная проекция сливается в одну точку [*§ 26, 4*], а вертикальная — перпендикулярна к оси, ибо сама прямая, как перпендикулярная к горизонтальной плоскости, параллельна вертикальной плоскости и, лежащей в ней, вертикальной своей проекции $a'b'$; отсюда, и обратно, проекция $a'b'$ перпендикулярна к горизонтальной плоскости проекций и, следовательно, к оси xy.

5) *Прямая перпендикулярна к вертикальной плоскости проекций* [*черт. 24*].

Как и в предыдущем случае, найдем, что вертикальная проекция прямой сливается в одну точку, а горизонтальная — перпендикулярна к оси.



Черт. 23.



Черт. 24.

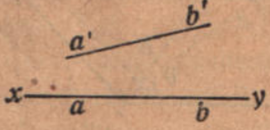
6) *Прямая лежит в горизонтальной плоскости проекций* [*черт. 25*].

В этом случае ее горизонтальная проекция ab сливается с самой прямой, а вертикальная $a'b'$ — с осью xy.

7) *Прямая лежит в вертикальной плоскости проекций* [*черт. 26*].

Вертикальная проекция $a'b'$ прямой сливается с самой прямой, а горизонтальная ab — с осью xy.

Черт. 25.

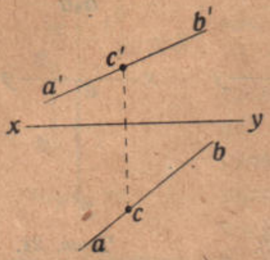


Черт. 26.

§ 33. Теорема V. *Чтобы точка лежала на прямой, необходимо и достаточно, чтобы проекции ее лежали на одноименных проекциях прямой и на одном перпендикуляре к оси.*

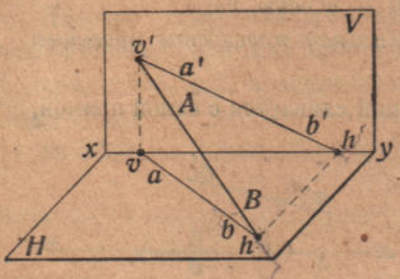
Эти условия *необходимы*, ибо, если точка лежит на прямой, то из определения проекции линии [*§ 23*] необходимо следует, что проекции точки должны лежать на проекциях прямой. Эти условия и *достаточны*, ибо, если проекции точки лежат на проекциях прямой, то сама точка лежит на прямой; действительно, проектирующие точки, как лежащие в плоскостях, проектирующих прямую, пересекутся при восстановлении вертикальной плоскости в точке, лежащей на прямой.

§ 34. Отсюда, чтобы взять точку на прямой AB [*черт. 27*], достаточно на одной из ее проекций, например ab, взять точку c и из нее опустить перпендикуляр на ось [*§ 18*] до встречи в точке c' с другой проекцией $a'b'$ той же прямой. Точки c и c' суть проекции точки C, принадлежащей прямой AB.

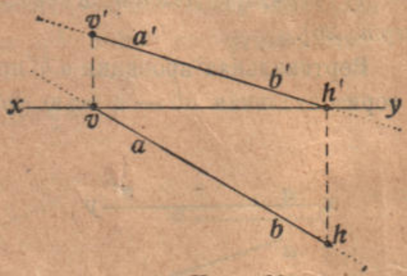


Черт. 27.

§ 35. *Точки встречи прямой с плоскостями проекций называются следами* прямой [*черт. 28*]; при этом точка h встречи прямой с горизонтальною плоскостью проекций называется *горизонтальным следом* прямой, точка v' встречи прямой с вертикальною плоскостью проекций—*вертикальным следом* прямой.



Черт. 28.



Черт. 29.

Чтобы определить следы прямой AB по данным ее проекциям ab и $a'b'$, заметим, что каждый след v' и h есть точка одновременно принадлежащая и данной прямой, и одной из плоскостей проекций. В силу первого условия проекции следа должны лежать на одноименных проекциях прямой [*§ 33*], в силу второго—одна из проекций следа должна лежать на оси, а именно на оси будут лежать горизонтальная проекция вертикального следа [*§ 22, 7*] и вертикальная проекция горизонтального следа [*§ 22, 5*].

На основании этих соображений заключаем [*черт. 29*], что вертикальная проекция h' горизонтального следа лежит в точке пересечения вертикальной проекции $a'b'$ прямой с осью xy, а горизонтальная проекция h того же следа, сливающаяся с самим следом,—на пересечении перпендикуляра, восстановленного из h', с горизонтальною проекцией ab прямой. На основании тех же соображений заключаем, что горизонтальная проекция v вертикального следа лежит в точке пересечения горизонтальной проекции ab прямой с осью xy, а вертикальная проекция v' того же следа, совпадающая с самим следом,—на пересечении перпендикуляра, восстановленного из v, с вертикальной проекцией $a'b'$ прямой.

§ 36. Отсюда **правило**: *чтобы найти горизонтальный след прямой, по данным ее проекциям, следует продолжить вертикальную проекцию $a'b'$ прямой до встречи с xy в точке h' — это будет вертикальная проекция горизонтального следа; затем, из точки h' восстановить перпендикуляр к оси xy до встречи с горизонтальною проекцией прямой в точке h — это будет горизонтальный след.* Таким же образом найдем вертикальный след (v, v').

§ 37. *Замечание.* 1) В дальнейшем условимся обозначать проекции горизонтального следа буквами h и h', а вертикального — буквами v и v'.

2) Горизонтальная прямая имеет один след — вертикальный, вертикальная прямая имеет один след—горизонтальный; прямая, параллельная оси, не имеет следов.

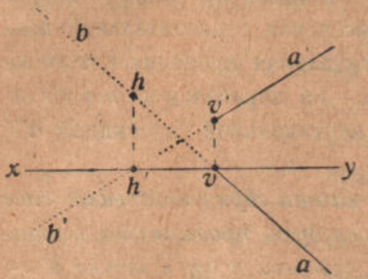
3) Предыдущее правило не может быть применено в случае прямой, проекции которой перпендикулярны к оси [*§ 29*].

§ 38. Обратная задача. *По данным следам прямой построить проекции ее.*

Если [*черт. 29*] h и v' — данные горизонтальный и вертикальный следы, или, что все равно, горизонтальная проекция горизонтального следа и вертикальная проекция вертикального следа, то другие их проекции лежат на оси в точках h' и v; и, по условию, искомая прямая должна проходить через точки (h, h') и (v, v'); а потому горизонтальная проекция ее пройдет чрез h и v, а вертикальная—чрез h' и v'. Следовательно, прямая $(hv, h'v')$ есть искомая.

§ 39. Нахождение следов имеет весьма важное значение при определении положения прямой в пространстве, ибо следы дают возможность отделить части прямой, лежащие в различных углах.

Так, напр., определив следы прямой (ab, $a'b'$) [*черт. 30*], найдем, что часть ее (av, $a'v'$) лежит в первом угле [*§ 11*], часть (vh, $v'h'$)—во втором, наконец, часть (hb, $h'b'$)—в третьем, и таким образом увидим, что данная прямая проходит в первом угле сверху вниз и, пройдя через вертикальную плоскость, входит во второй угол, откуда, пройдя через горизонтальную плоскость, выходит в третий.



Черт. 30.

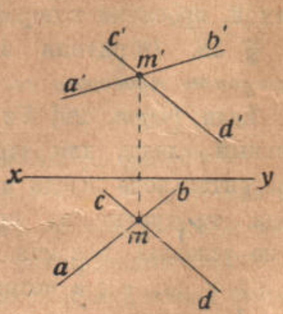
§ 40. *Взаимное положение двух прямых в пространстве.*

Две прямые в пространстве могут или пересекаться, или быть параллельными, или скрещиваться, т.-е. не пересекаться и не быть параллельными, или, наконец, быть взаимно-перпендикулярными.

Эпюр дает непосредственное указание, к какому из перечисленных случаев относятся две данные своими проекциями прямые, за исключением последнего случая.

§ 41. Теорема I. *Для того, чтобы две прямые пересекались, необходимо и достаточно, чтобы одноименные проекции прямых пересекались и точки их пересечения лежали на одном перпендикуляре к оси.*

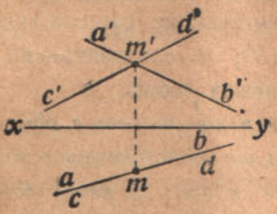
Эти условия *необходимы*, ибо они всегда выполняются, коль скоро прямые пересекаются. В самом деле [*черт. 31*], пусть прямые (ab, $a'b'$) и (cd, $c'd'$) пересекаются в точке M. В таком случае горизонтальная проекция точки M должна находиться одновременно на обеих горизонтальных проекциях прямых, а вертикальная—на обеих вертикальных [*§ 34*]. Следовательно, ab и cd должны пересекаться в одной точке m, а $a'b'$ и $c'd'$—в одной точке m'; и обе точки m и m', как проекции одной и той же точки в пространстве, должны находиться на одном перпендикуляре к оси [*§ 18*].



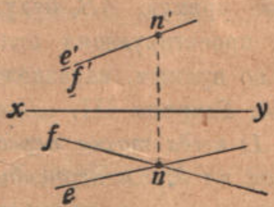
Черт. 31.

Эти условия *достаточны*, ибо, если они выполняются, то две прямые в пространстве пересекаются. В самом деле, если [*черт. 31*] точка m пересечения горизонтальных проекций данных прямых, и точка m' пересечения вертикальных проекций тех же прямых лежат на одном перпендикуляре к оси, то точки m и m' суть проекции одной и той же точки [*§ 18*], принадлежащей притом каждой из данных прямых, ибо проекции ее m и m' лежат на одноименных проекциях прямых [*§ 34*]. Следовательно, данные прямые пересекаются в одной точке M.

§ 42. В частном случае, если прямые лежат в одной и той же проектирующей плоскости и, следовательно, если две их одноименные проекции сливаются в одну прямую, то условия пересечения таких прямых выразятся так: для того, чтобы две прямые, одноименные проекции которых сливаются в одну прямую, пересекались, необходимо и достаточно, чтобы две другие одноименные их проекции пересекались. Так, прямые (ab, $a'b'$) и (cd, $c'd'$) [*черт. 32*], лежащие в одной и той же горизонтально-проектирующей плоскости, пересекаются в точке (m, m'); а прямые (en, $e'n'$) и (fn, $f'n'$) [*черт. 33*], лежащие в одной и той же вертикально-проектирующей плоскости, пересекаются в точке (n, n').



Черт. 32.



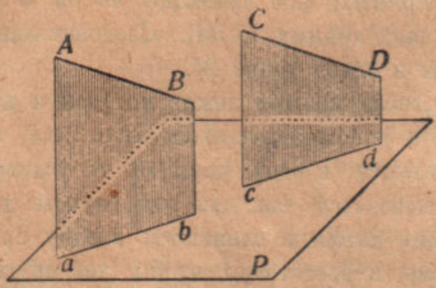
Черт. 33.

§ 43. Теорема II. *Для того, чтобы две прямые были параллельны, необходимо и достаточно, чтобы их одноименные проекции были параллельны.*

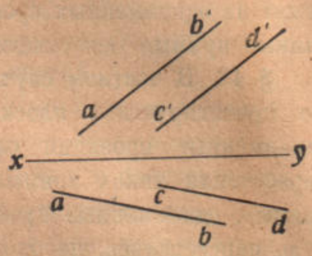
Эти условия — *необходимы*, ибо они выполняются каждый раз, коль скоро прямые параллельны. В самом деле [*черт. 34*], пусть AB и CD — параллельные прямые. Докажем, что проекции ab и cd на какую-либо плоскость P тоже параллельны. Для этого заметим, что две какие-либо проектирующие Aa и Cc, как перпендикулярные к одной и той же плоскости, параллельны между собою, и что, следовательно, проектирующие плоскости

ABab и *CDcd*, как содержащие углы *aAB* и *cCD*, составленные параллельными прямыми, —тоже параллельны; отсюда проекции *ab* и *cd* параллельны, как сечение двух параллельных плоскостей третьей плоскостью *P*.

Эти условия и — *достаточны*, т.-е. если горизонтальные *ab* и *cd* и вертикальные $a'b'$ и $c'd'$ проекции прямых [*черт. 35*]



Черт. 34.



Черт. 35.

соответственно параллельны, то и самые прямые параллельны. Действительно, если восстановим вертикальную плоскость проекций и проведем проектирующие плоскости, то плоскости, проектирующие прямую *AB*, будут соответственно параллельны плоскостям, проектирующим прямую *CD*, и, следовательно, пересекутся по прямым, параллельным между собою.

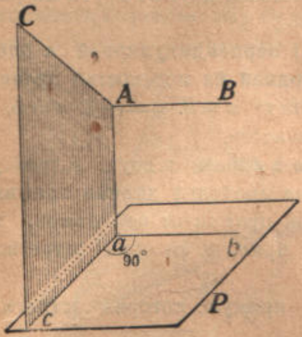
§ 44. Теорема III. *Две прямые не лежат в одной плоскости: 1) когда точки пересечения их одноименных проекций не лежат на одном перпендикуляре к оси; 2) когда одноименные проекции их не параллельны между собою.*

Ибо в обеих этих случаях прямые не пересекаются и не параллельны, и, следовательно, не лежат в одной плоскости.

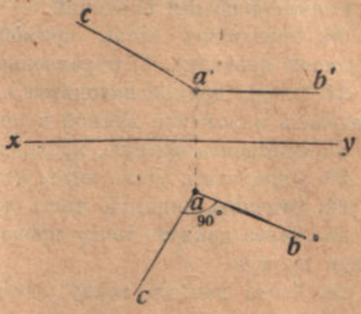
§ 45. О перпендикулярности прямых можно судить непосредственно по эпюру только в следующем частном случае.

Теорема IV. *Если две прямые взаимно-перпендикулярны, и одна из них параллельна плоскости проекций, то проекции их на эту плоскость тоже взаимно-перпендикулярны.*

Пусть [*черт. 36*] *AB* и *AC*—взаимно-перпендикулярные прямые и *AB*—параллельна плоскости проекций *P*; пусть *ab* и *ac*—их проекции на плоскость *P*; требуется доказать, что *ab* перпендикулярна к *ac*. В самом деле, прямая *AB* перпендикулярна к *AC* и к *Aa*, следовательно, она перпендикулярна и к плоскости aAC, а потому и ab, как параллельная AB, перпендикулярна к той же плоскости; отсюда и проекция ac, как прямая, проведенная в плоскости aAC через основание a прямой ab, перпендикулярна к последней, что и требовалось доказать.



Черт. 36.



Черт. 37.

§ 46. На этом основании [*черт.* 37] прямые (ab, $a'b'$) и (ac, $a'c'$), из которых (ab, $a'b'$) параллельна горизонтальной плоскости [*§ 33, 1*], взаимно-перпендикулярны, ибо их горизонтальные проекции ab и ac пересекаются под прямым углом.

Задачи.

+ **6.** Построить проекции прямой, которая проходит через две данные точки $x = -2$, $y = 5$ и $x = 5$, $y = -2$.

+ **7.** На прямой, перепендикулярной к вертикальной плоскости, взять точку.

+ **8.** Узнать, лежат ли три данные точки на одной прямой.

+ **9.** Даны горизонтальные проекции двух точек и вертикальные проекции других двух точек; найти проекции прямой, на которой лежат все четыре точки.

+ **10.** На данной прямой взять точку на данном расстоянии от вертикальной плоскости проекций.

+ **11.** На данной прямой взять точку на данном расстоянии от горизонтальной плоскости проекций.

12. На данной прямой найти точку, принадлежащую плоскости биссектора I угла, II угла.

13. Построить проекции прямой, находящейся в плоскости биссектора II угла, III угла.

14. Построить проекции прямой, параллельной плоскости биссектора I угла, II угла.

15. На данной прямой найти точку, для которой $x = 2y$.

16. Через точку $x = -2$, $y = -3$ провести горизонтальную прямую.

17. Из точки $x = 3$, $y = -2$ опустить перпендикуляр на горизонтальную плоскость проекций.

18. Через точку в четвертом угле провести вертикальную прямую.

19. Построить следы прямой, которая проходит через две точки $x = -2$, $y = -3$ и $x = 5$, $y = -4$, находящиеся друг от друга на расстоянии 6, считая по оси проекций.

20. Определить следы прямой: a) перпендикулярной к одной из плоскостей проекций, b) параллельной одной из плоскостей проекций.

21. Следы прямой находятся в точках: $x = 0$, $y = -3$; $x = 5$, $y = 0$. Определить положение прямой в пространстве.

22. Построить прямую, проходящую в одном, в двух, в трех углах.

23. Определить углы, через которые проходит данная прямая.

24. Отделить видимую часть данной прямой от невидимой.

25. Через данную точку провести прямую, которая встретила бы данную прямую.

26. Через данную точку провести прямую, которая встретила бы две непересекающиеся прямые.

27. Через данную точку провести прямую так, чтобы она встречала данную прямую и была параллельна одной из плоскостей проекций.

28. Построить прямую, которая встречала бы данные две параллельные прямые и была бы параллельна одной из плоскостей проекций.

29. Даны проекции трех точек, служащих вершинами треугольника. Построить проекции треугольника и взять внутри его какую-либо точку.

30. Даны проекции треугольника и горизонтальная проекция точки. Определить ее вертикальную проекцию так, чтобы точка лежала в плоскости треугольника.

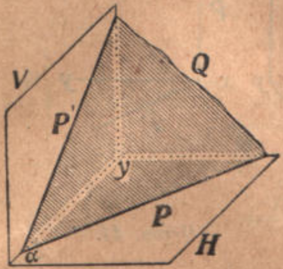
31. Даны горизонтальная проекция пятиугольника и вертикальная проекция двух его смежных сторон. Построить вертикальную проекцию пятиугольника.

32. Через данную точку провести прямую, перпендикулярную к прямой, параллельной вертикальной плоскости проекций.

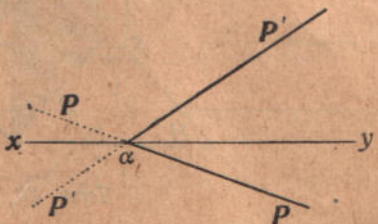
IV. О плоскости.

§ 47. Положение плоскости в пространстве, как известно из геометрии, вполне определяется или двумя пересекающимися прямыми, или двумя параллельными прямыми, или прямою и точкой, или, наконец, тремя точками, не лежащими на одной прямой.

В начертательной геометрии положение плоскости наиболее часто определяется *двумя прямыми*, пересекающимися или параллельными, но не произвольно взятыми, а такими прямыми, по которым данная плоскость пересекает плоскости проекций. Такие прямые называются *следами* плоскости; при этом прямая, по которой данная плоскость пересекает горизонтальную плоскость проекций, называется *горизонтальным следом*; прямая пересечения данной плоскости с вертикальною плоскостью проекций — *вертикальным следом* плоскости. Таким образом, плоскость Q [*черт. 38*] будет определяться горизонтальным следом



Черт. 38.



Черт. 39.

αP и вертикальным $\alpha P'$, которые после совмещения вертикальной плоскости с горизонтальной представятся так, как показано на *черт. 39*.

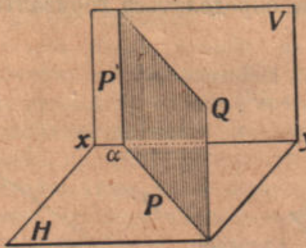
§ 48. Следы плоскости, как прямые, лежащие в плоскостях проекций, имеют одну свою проекцию на оси xy [*§ 32*], и потому проекции вертикального следа суть $\alpha P'$, xy, проекции горизонтального-αP, xy.

§ 49. Различным положениям данной плоскости в отношении плоскостей проекций соответствуют и различные положения следов плоскости в отношении оси, и таким образом по эпюру следов можно судить о положении плоскости в пространстве.

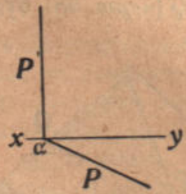
1) *Плоскость наклонена к обеим плоскостям проекций.* В этом случае *следы плоскости пересекают ось в одной точке* α [*черт. 38*], ибо три, наклонные друг к другу, плоскости Q, H и V пересекаются в одной точке, через которую проходят прямые пересечения плоскостей между собою, т.-е. следы αP и $\alpha P'$ и ось xy. *Черт. 39* представляет эпюр наклонной плоскости.

2) *Плоскость перпендикулярна к горизонтальной плоскости проекций.* В этом случае *вертикальный след плоскости перпендикулярен к оси xy, горизонтальный же лежит как угодно.*

Действительно, след $\alpha P'$ [*черт. 40*], как пересечение двух плоскостей V и Q, перпендикулярных к горизонтальной плоскости, перпендикулярен к плоскости H, а следовательно, и к лежащей в ней прямой xy. *Черт. 41* представляет эпюр плоскости, перпендикулярной к горизонтальной плоскости проекций.



Черт. 40

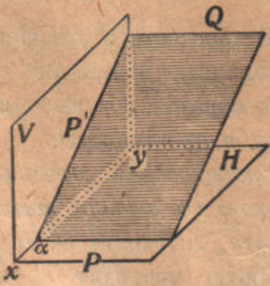


Черт. 41.

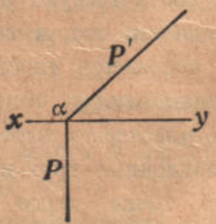
3) *Плоскость перпендикулярна к вертикальной плоскости проекций* [*черт. 42*], или *боковая плоскость*. В этом случае, на том же основании, как и в предыдущем, *горизонтальный след плоскости перпендикулярен к оси, а вертикальный лежит как угодно*. *Черт. 43* представляет эпюр плоскости, перпендикулярной к вертикальной плоскости проекций.

4) *Плоскость перпендикулярна к обеим плоскостям проекций* или *плоскость профиля* [*черт. 44*].

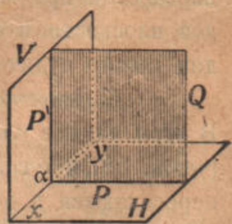
В этом случае *оба следа плоскости лежат на одной прямой, перпендикулярной к оси проекций*, ибо данная



Черт. 42.



Черт. 43.



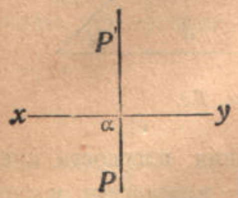
Черт. 44.

плоскость Q, как перпендикулярная к плоскостям проекций H и V, перпендикулярна и к их пересечению, т.-е. к оси xy, а следовательно и обратно, ось xy перпендикулярна к плоскости Q

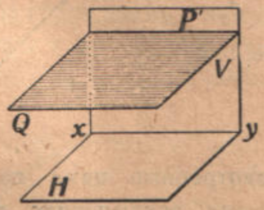
и к следам, в ней лежащим, αP и $\alpha P'$. *Черт. 45* представляет эпюр плоскости профиля.

5) *Плоскость параллельна горизонтальной плоскости проекций* [*черт. 46*].

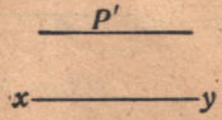
В этом случае *плоскость имеет один вертикальный след P', параллельный оси;* ибо вертикальный след P' плоскости Q и ось xy можно рассматривать, как сечение двух параллельных



Черт. 45.



Черт. 46.



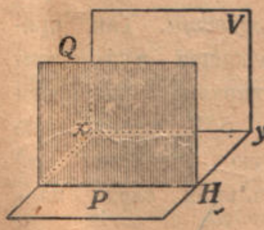
Черт. 47.

плоскостей Q и H третьею — V. *Черт. 47* представляет эпюр горизонтальной плоскости.

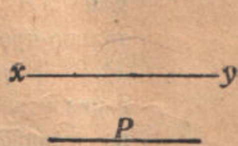
6) *Плоскость параллельна вертикальной плоскости проекций* [*черт. 48*].

В этом случае, на том же основании, как и в предыдущем, *плоскость имеет один горизонтальный след P, параллельный оси.* *Черт. 49* представляет эпюр вертикальной плоскости.

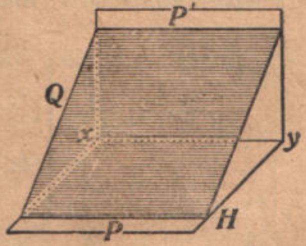
7) *Плоскость параллельна оси* [*черт. 50*].



Черт. 48.



Черт. 49.



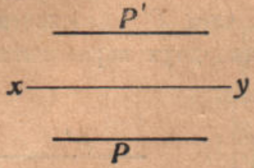
Черт. 50.

В этом случае *оба следа плоскости параллельны оси.* *Черт. 51* представляет эпюр плоскости, параллельной оси.

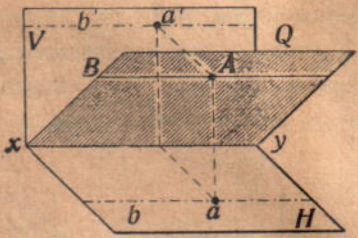
8) *Плоскость проходит через ось* [*черт. 52*].

В этом случае плоскость не может быть задана следами, ибо оба следа плоскости сливаются в одну прямую — ось xy.

Для задания такой плоскости необходимо дать в плоскости или точку, напр. (a, a'), или прямую, напр. $(ab, a'b')$.



Черт. 51.

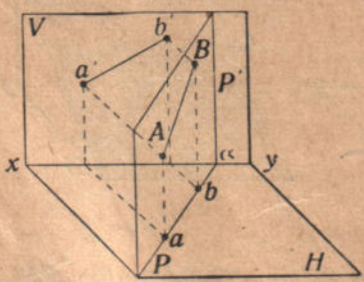


Черт. 52.

§ 50. Все рассмотренные нами положения плоскости приводят нас к следующему заключению: *следы плоскости могут или встречать ось в одной точке, или быть параллельными оси.*

§ 51. Всякая плоскость, перпендикулярная к одной из плоскостей проекций, может быть рассматриваема, как проектирующая плоскость [*§ 30*]; и потому плоскости $P\alpha P'$, представленные на *черт. 41, 45* и *49*, могут быть отнесены к горизонтально-проектирующим плоскостям, а плоскости $P\alpha P'$ на *черт. 43, 45* и *47*—к вертикально-проектирующим плоскостям.

Проектирующие плоскости, как видно из их определения [*§ 30*], обладают следующим свойством: *всякая фигура, лежащая в проектирующей плоскости, имеет одну из своих проекций на следе плоскости.* Так, прямая AB, лежащая в горизонтально-проектирующей плоскости $P\alpha P'$ [*черт. 53*], имеет свою горизонтальную проекцию ab на горизонтальном следе плоскости αP.



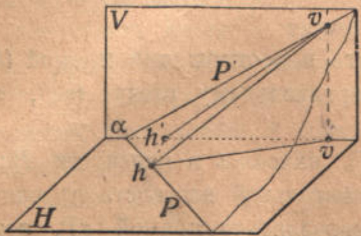
Черт. 53.

§ 52. Теорема I. *Для того, чтобы прямая, не параллельная ни одному из следов данной плоскости, лежала в плоскости, необходимо и достаточно, чтобы следы прямой лежали на соответствующих следах плоскости.*

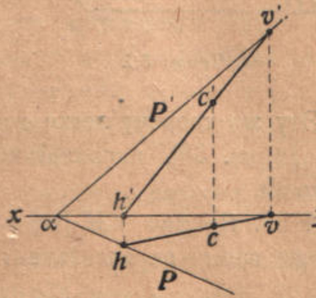
Действительно, это условие — *необходимо*, ибо прямая hv' [*черт. 54*], находясь в плоскости $P\alpha P'$, должна встречать следы плоскости в тех же точках (h, h'), и (v, v'), в которых она встречает и плоскости проекций.

Это условие и—*достаточно*, ибо прямая, имеющая свои следы на следах плоскости, имеет с плоскостью две общие точки и, следовательно, вся совмещается с плоскостью.

§ 53. Отсюда, чтобы взять прямую в данной плоскости $P\alpha P'$, [*черт. 55*], достаточно взять на вертикальном и горизонтальном



Черт. 54.



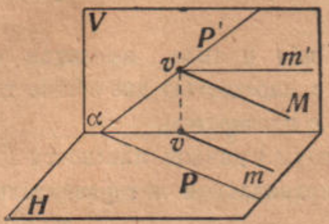
Черт. 55.

следах ее по точке (h, h') и (v, v') и, приняв эти точки за следы прямой, соединить их одноименные проекции прямыми: hv, $h'v'$. Эти прямые и суть проекции прямой, лежащей в плоскости.

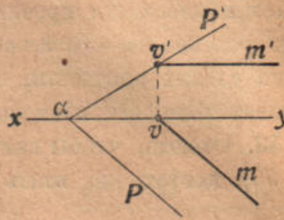
§ 54. Теорема II. *Для того, чтобы прямая, параллельная одному из следов плоскости, лежала в плоскости, необходимо и достаточно, чтобы единственный ее след лежал на соответствующем следе плоскости.*

Это условие *необходимо*. Пусть [*черт. 56*] прямая Mv' лежит в плоскости $P\alpha P'$ и параллельна горизонтальному следу ее αP. В таком случае очевидно, что прямая Mv' встретит вертикальную плоскость проекций в точке v', лежащей на вертикальном следе $\alpha P'$, плоскости $P\alpha P'$.

Это условие и—*достаточно*, ибо, если имеем прямую $(vm, v'm')$ [*черт. 57*], параллельную горизонтальному следу $(\alpha P, xy)$ плоскости [*§§ 43, 48*] (одноименные проекции их параллельны) и имеющую свой вертикальный след (v, v') на вертикальном следе $\alpha P'$ плоскости P, то такая прямая лежит на плоскости $P\alpha P'$, так как плоскость, проходящая чрез две параллельные прямые MV и αP, имеет с плоскостью $P\alpha P'$ общую точку v' и общую прямую αP.



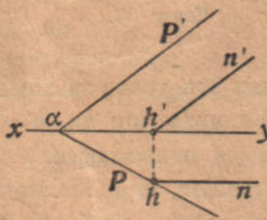
Черт. 56.



Черт. 57.

Эту же теорему легко доказать и в отношении прямой (hn, $h'n'$) [*черт. 58*], параллельной вертикальному следу ($\alpha P'$, xy) плоскости.

§ 55. Прямая VM [*черт. 57*], находясь в плоскости $P\alpha P'$, в то же время параллельна горизонтальной плоскости проекций, ибо она параллельна прямой αP, лежащей в этой плоскости.



Черт. 58.

На том же основании прямая HN [*черт. 58*], как параллельная $\alpha P'$, параллельна вертикальной плоскости проекций и лежит в плоскости $P\alpha P'$.

Прямую VM называют *горизонталью*, а прямую HN—*фронталью* данной плоскости $P\alpha P'$.

Отсюда: *горизонталью данной плоскости называется прямая, лежащая в плоскости и параллельная горизонтальной плоскости проекций; фронталью плоскости называется прямая, лежащая в плоскости и параллельная вертикальной плоскости проекций.*

§ 56. Из предыдущего легко видеть, что для построения горизонтали достаточно взять на вертикальном следе плоскости $P\alpha P'$ [*черт. 57*] точку (v, v') и чрез горизонтальную проекцию ее v провести прямую vm, параллельную горизонтальному следу плоскости, а чрез вертикальную v'—прямую $v'm'$, параллельную оси проекций; прямые vm и $v'm'$—суть проекции горизонтали.

Таким же образом для построения фронтали [*черт. 58*] достаточно взять на горизонтальном следе плоскости точку (h, h')

и чрез горизонтальную ее проекцию h провести прямую hn, параллельную оси xy, а через вертикальную h'.—прямую $h'n'$, параллельную вертикальному следу плоскости. Прямые hn, $h'n'$ суть проекции фронтали.

§ 57. **Теорема III**. *Точка лежит в плоскости, если проекции ее лежат на одноименных проекциях прямой, лежащей в плоскости.*

Предложение это очевидно. Точка (c, c') [*черт. 55*] лежит в плоскости $P\alpha P'$.

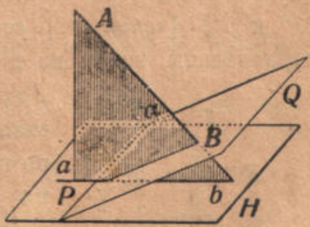
§ 58. Прямые и плоскости могут находиться в разнообразных положениях относительно друг друга, но непосредственно по эпюру можно судить лишь о перпендикулярности прямой к плоскости и о параллельности плоскостей между собою.

Определение же других положений требует более или менее сложных построений и лишь в частных случаях находится непосредственно.

§ 59. **Теорема IV**. *Чтобы прямая была перпендикулярна к плоскости, необходимо и достаточно, чтобы проекции прямой были перпендикулярны к одноименным следам плоскости.*

Достаточно доказать *необходимость* этого условия относительно одного какого-либо следа, напр., горизонтального, ибо все, что будет сказано о нем, справедливо и относительно другого.

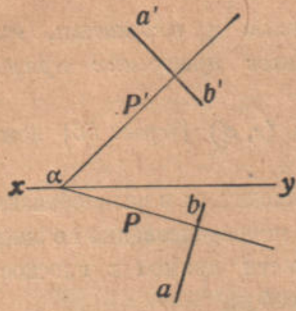
Пусть [*черт. 59*] H — горизонтальная плоскость проекций, Q—данная плоскость, αP — горизонтальный след ее, AB—прямая, перпендикулярная к плоскости Q, ab—ее горизонтальная проекция. Требуется доказать, что ab перпендикулярна к αP.



Черт. 59.

Плоскость, проектирующая прямую AB, перпендикулярна и к H (по определению) и к Q (ибо проходит через перпендикулярную к ней прямую AB), следовательно, проектирующая плоскость перпендикулярна и к их пересечению, или к следу плоскости αP. Если же след плоскости перпендикулярен плоскости $ABab$, то он перпендикулярен и к лежащей в ней горизонтальной проекции ab данной прямой.

Это условие и—*достаточно;* пусть [*черт. 60*] проекции прямой ab и $a'b'$ перпендикулярны к следам плоскости αP и $\alpha P'$; докажем, что самая прямая AB — перпендикулярна плоскости P. Плоскость P перпендикулярна к плоскости, проектирующей прямую AB на горизонтальную плоскость, ибо содержит след αP, перпендикулярный к последней. На том же основании плоскость P перпендикулярна и к плоскости, вертикально-проектирующей прямую; следовательно, плоскость P перпендикулярна к пересечению проектирующих плоскостей, т.-е. к прямой AB.

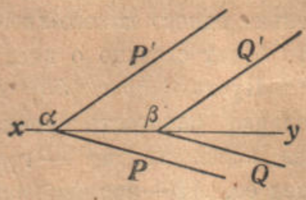


Черт. 60.

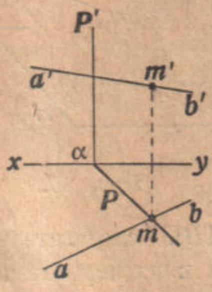
§ **60. Теорема V.** *Для того, чтобы две плоскости были параллельны, необходимо и достаточно, чтобы их одноименные следы были параллельны между собою.*

Необходимость этого условия видна из того, что две параллельные плоскости пересекают третью по прямым параллельным между собою, и потому следы данных параллельных плоскостей, как сечения данных плоскостей плоскостями проекций, параллельны между собою.

Достаточность же этого условия, т.-е. доказательство того, что плоскости параллельны, если следы их αP и βQ, $\alpha P'$ и $\beta Q'$ [*черт. 61*] соответственно параллельны, видна из того, что углы $P\alpha P'$ и $Q\beta Q'$ составлены взаимно параллельными сторонами. Отсюда же ясно, что это условие недостаточно в случае плоскостей параллельных оси.



Черт. 61.



Черт. 62.

§ **61.** В частных случаях, как замечено выше, могут быть определены непосредственно по эпюру и другие положения плоскостей и прямых. Так, напр., точка встречи прямой с плоскостью в общем случае определяется некоторым построением, но если данная плоскость есть одна из проектирующих, то точка встречи ее с прямой видна непосредственно. В самом деле, пусть [*черт. 62*] данная плоскость $P\alpha P'$ есть горизонтально проектирующая, в таком случае прямая $(ab, a'b')$ встречает ее в точке (m, m'), горизонтальная проекция которой лежит на пересечении горизонтальной проекции прямой ab с горизонтальным следом αP плоскости. Действительно, точка (m, m') принадлежит прямой, ибо ее проекции лежат на соответствующих проекциях прямой [*§ 33*]; точка (m, m') принадлежит и плоскости, ибо ее горизонтальная проекция лежит на горизонтальном следе плоскости [*§ 51*].

Задачи.

33. Построить следы плоскости: a) перпендикулярной к горизонтальной плоскости проекций и наклоненной под углом в 30° к вертикальной плоскости проекций; b) параллельной оси и одинаково наклоненной к обеим плоскостям проекций; c) параллельной горизонтальной плоскости проекций и находящейся на 5 *см* выше или ниже ее.

34. Даны две точки на горизонтальной плоскости: одна на передней, другие на задней ее частях и одна точка на вертикальной; построить следы плоскости, проходящей через три данные точки.

35. На следах плоскости взять две точки так, чтобы расстояние одной из них от вертикальной плоскости было равно расстоянию другой от горизонтальной.

36. В данной плоскости взять прямую так, чтобы следы ее находились на данном расстоянии от оси проекций. Взять прямую в плоскости: a) параллельной горизонтальной плоскости проекций; b) перпендикулярной к горизонтальной плоскости проекций; c) проходящей через ось и точку.

37. Дана плоскость и в ней прямая: провести в той же плоскости, но во II, III и IV угле прямую, параллельную данной.

38. Взять горизонталь в плоскости: a) параллельной оси; b) параллельной одной из плоскостей проекций; c) перпендикулярной к одной из плоскостей проекций; d) проходящей через ось и точку.

39. Взять фронталь в тех же плоскостях.

40. В горизонтально-проектирующей плоскости провести горизонталь на расстоянии 5 *см* от вертикальной плоскости.

41. В горизонтально-проектирующей плоскости взять точку, для которой $x = 3$, $y = 5$.

42. Взять точку в плоскостях: a) параллельной оси; b) параллельной одной из плоскостей проекций; c) перпендикулярной к одной из плоскостей проекций; d) проходящей через ось и точку.

43. Через данную прямую провести одну из проектирующих плоскостей.

44. Через данную точку провести одну из проектирующих плоскостей.

45. Через данную прямую провести плоскость, параллельную оси.

46. Взять в плоскости прямую без посредства следов.

ГЛАВА II.

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ.

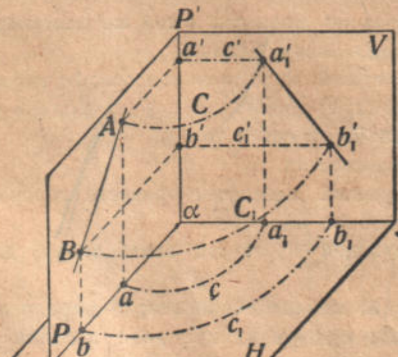
I. О прямых, лежащих в плоскости.

§ 62. Задача. *Найти следы прямой, лежащей в плоскости профиля.*

Прямая, лежащая в плоскости профиля [*§ 49. 4*], как мы видели [*§ 29*], не определяется своими проекциями, т.-е. по данным ее проекциям нельзя определить положение точек, принадлежащих прямой; и потому для задания прямой нужно *дать* проекции *двух ее точек.*

Пусть [*черт. 63*] (a, a') и (b, b')—две точки, которыми задана прямая AB в плоскости профиля P.

Для решения задачи совместим плоскость профиля P с вертикальною плоскостью проекций V, вращая плоскость P около вертикального следа $\alpha P'$. При таком вращении точки A и B будут перемещаться по окружностям C и C_1, лежащим в плоскостях, перпендикулярных к оси вращения $\alpha P'$, или, что то же, в плоскостях, параллельных H и описанным радиусами, равными расстоянию точек A и B от оси вращения, т.-е. от вертикальной плоскости проекций. Отсюда заключаем, что во время вращения проекции a, a', b, b' точек A и B будут перемещаться по соответствующим проекциям окружностей C и C_1. Но окружности C и C_1, как параллельные H, проектируются на горизонтальную

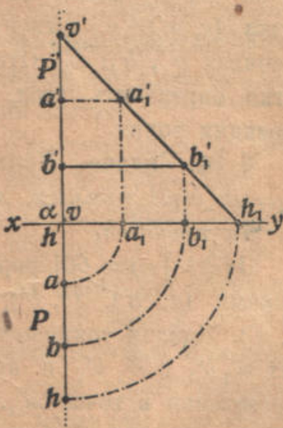


Черт. 63.

плоскость в истинную величину по c и c_1, а на вертикальную — по прямым c' и c'_1, параллельным оси. Поэтому, если опишем дугу с радиусом, равным расстоянию горизонтальной проекции a, точки A, от оси [§ 16] и проведем через a' прямую c', параллельную оси проекций, то, во все время вращения плоскости профиля, горизонтальная проекция a должна оставаться на дуге c, а вертикальная a'—на прямой c', и в каждом новом положении проекции a и a' должны находиться на одном перпендикуляре к оси [§ 20]. В тот момент, когда плоскость профиля совместится с вертикальною плоскостью проекций, горизонтальная проекция точки придет на ось в точку a_1, а вертикальная—в точку a'_1, которая и представит совмещение точки A.

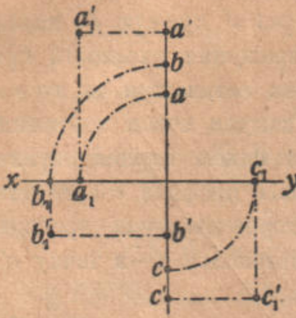
Подобным образом определим совмещение точки B в b'_1; отсюда совмещение данной прямой (ab, $a'b'$) есть прямая $a'_1b'_1$.

Зная совмещение прямой, легко найдем и совмещение ее следов, если заметим, что прямая AB встречает вертикальную плоскость проекций в точке, лежащей на вертикальном следе $\alpha P'$, а горизонтальную—в точке, совмещение которой лежит на оси проекций. Отсюда [*черт. 64*] совмещение вертикального следа должно лежать в точке пересечения совмещенной прямой $a'_1b'_1$ с следом $\alpha P'$, а совмещение горизонтального следа—в точке h_1 пересечения совмещенной прямой с осью проекций xy. И потому, для определения следов прямой AB, остается привести плоскость профиля P вместе с совмещениями v' и h_1 следов в первоначальное положение; при этом след v' не изменит своего положения, ибо лежит на оси вращения $\alpha P'$ и, следовательно, будет иметь свою горизонтальную проекцию v на оси. Проекции же следа h_1 во время приведения плоскости в первоначальное положение будут перемещаться: горизонтальная по кругу радиуса—αh_1, а вертикальная—по оси xy, и когда плоскость придет в начальное положение, горизонтальная проекция следа будет находиться в h, а вертикальная—в h'



Черт. 64.

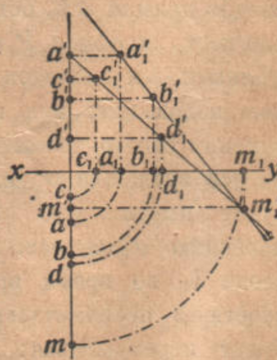
§ 63. При совмещении плоскости профиля с вертикальною плоскостью проекций, нужно обращать внимание, во-первых, на сторону, в которую вращается плоскость профиля, а во-вторых, на угол, в котором лежит данная точка. Так, если часть плоскости профиля, лежащая в первом угле, совмещается с правою стороною (от оси вращения) вертикальной плоскости, то легко понять, что 1) часть той же плоскости, лежащая во втором угле, совместится с *левою* стороною вертикальной плоскости *над* осью, 2) часть плоскости профиля, лежащая в третьем угле, совместится с *левою* стороною вертикальной плоскости *под осью*, наконец, 3) часть плоскости профиля, лежащая на четвертом угле, совместится с *правою* стороною вертикальной плоскости *под* осью. Таким образом соответственно углу, в котором находится точка, и построение совмещения этой точки должно делать на соответствующей части вертикальной плоскости. Так [*черт. 65*], если точка (a, a') лежит во втором угле, точка (b, b')—в третьем, точка (c, c') - в четвертом, то совмещение их определяется, в точках a'_1, b'_1, c'_1. Отсюда и обратно, зная совмещение точки, легко определить угол, в котором лежит точка, и построить проекции точки.



Черт. 65.

§ 64. Задача. *Найти точку пересечения двух прямых, лежащих в плоскости профиля.*

Пусть [*черт. 66*] первая прямая дана точками (a, a'), (b, b'); вторая—(c, c'), (d, d'). Найдем совмещение данных прямых $a'_1 b'_1$ и $c'_1 d'_1$ и продолжим их до пересечения в точке m'_1. Точка m'_1 есть совмещение искомой точки. И потому, заметив, что она лежит в четвертом угле, найдем ее проекции m и m', поступая по *§ 63*.



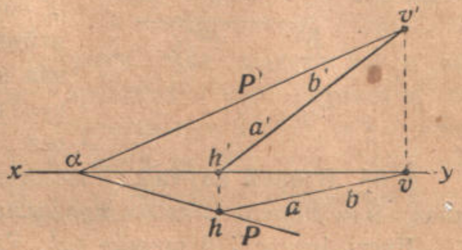
Черт. 66.

§ 65. Задача. *Дана плоскость и одна из проекций прямой; найти другую проекцию прямой под условием, чтобы прямая лежала в плоскости.*

Плоскость может быть задана или следами, или двумя пересекающимися прямыми, или двумя параллельными прямыми, или прямой и точкой. Последний случай задания в сущности ничем не отличается от второго, ибо, взяв на данной прямой точку и соединив ее с данной точкой, получим две пересекающиеся прямые. Поэтому заданную задачу мы рассмотрим в двух случаях.

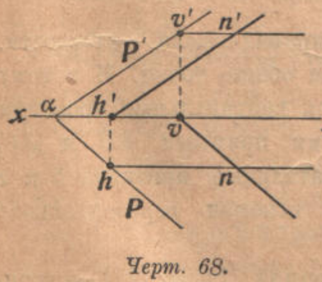
Первый случай. *Плоскость дана следами* αP *и* $\alpha P'$.

1) Пусть данная [*черт. 67*], положим, горизонтальная проекция ab прямой пересекает и ось xy в точке v, и горизонтальный след (или его продолжение) в точке h. Так как искомая прямая должна принадлежать плоскости $P\alpha P'$, то следы прямой должны находиться на следах плоскости [*§ 52*], и, следовательно, v должно рассматривать, как горизонтальную проекцию вертикального следа, а h—как горизонтальный след искомой прямой. По v определим v' на следе $\alpha P'$; по h определим h' на оси xy. Наконец, соединим точки v' и h' прямою $h'v'$, которая и представит искомую вертикальную проекцию прямой AB. Подобным же образом рассуждаем, когда дана вертикальная проекция прямой.



Черт. 67.

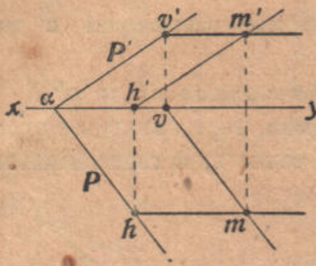
2) Пусть [*черт. 68*] данная проекция—вертикальная $v'n'$ или горизонтальная hn—параллельна оси. В первом случае искомая прямая параллельна горизонтальной плоскости проекций [*§ 32*] и, следовательно, представляет горизонталь плоскости [*§ 55*]. А потому *искомая горизонтальная* проекция vn пройдет через горизонтальную проекцию v вертикального следа параллельно горизонтальному следу αP плоскости [*§ 56*]. Во втором—искомая прямая параллельна вертикальной плоскости и, следовательно, представляет фронталь плоскости. И потому искомая вертикальная проекция $h'n'$ прой-



Черт. 68.

дет через вертикальную проекцию h' горизонтального следа параллельно вертикальному следу $\alpha P'$ плоскости.

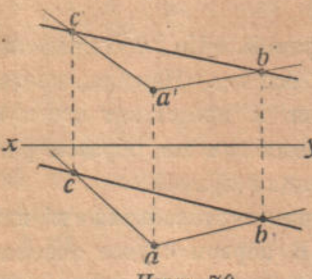
Пусть [*черт. 69*] данная проекция прямой—вертикальная $h'm'$ или горизонтальная vm—параллельна одноименному с нею следу плоскости. В первом случае искомая прямая есть фронталь плоскости [*§ 55*] и потому искомая горизонтальная проекция hm прямой пройдет через горизонтальный след h параллельно оси xy [*§ 56*]. Из тех же соображений найдем, что искомая вертикальная проекция $v'm'$ прямой VM пройдет через v' параллельно оси.



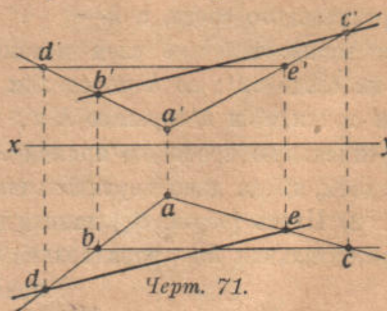
Черт. 69.

§ 66. Второй случай. *Плоскость дана двумя пересекающимися или параллельными прямыми.*

Пусть [*черт. 70*] прямые (ab, $a'b'$) и (ac, $a'c'$) определяют плоскость, пусть $b'c'$ — данная вертикальная проекция искомой



Черт. 70.



Черт. 71.

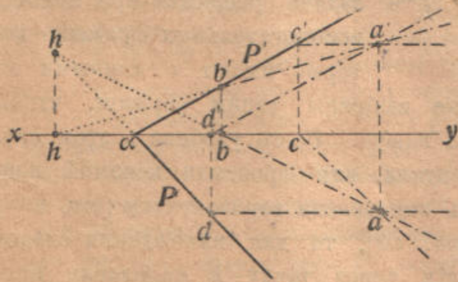
прямой. Чтобы искомая прямая принадлежала плоскости, достаточно, чтобы она имела с нею две общие точки. И потому точки b' и c' должно рассматривать, как вертикальные проекции точек встречи прямой BC с данными прямыми AB и AC. Отсюда, определив по b' и c' горизонтальные проекции b и c точек B и C [*§ 33*], найдем, что искомая горизонтальная проекция прямой BC есть bc.

§ 67. Если данная проекция прямой [*черт. 71*] — горизонтальная bc или вертикальная $d'e'$ — параллельна оси, то искомая прямая, определенная как и в предыдущем случае, есть—в первом случае—фронталь плоскости, данной двумя прямыми, во втором—горизонталь.

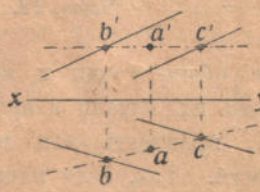
§ 68. Задача. *Дана плоскость и одна из проекций точки, найти другую проекцию точки под условием, чтобы точка лежала в плоскости.*

Точка лежит в плоскости, если проекции ее лежат на одноименных проекциях прямой, лежащей в данной плоскости [*§ 57*]. И потому для решения задачи достаточно через данную проекцию точки провести произвольно проекцию вспомогательной прямой, определить по ней, на основании предыдущей задачи, другую проекцию той же прямой и взять, наконец, на последней искомую проекцию точки.

Таким образом, если плоскость дана следами αP и $\alpha P'$ [*черт. 72*] и дана вертикальная проекция a' искомой точки A, то, проведя через нее произвольно вертикальную проекцию $b'a'$ вспомогательной прямой и определив затем ее горизонтальный и вертикальный следы (h, h') и (b, b') [*§ 65*], найдем горизонтальную



Черт. 72.



Черт. 73.

проекцию hb той же прямой, и на ней — искомую проекцию a точки A [*§ 33*].

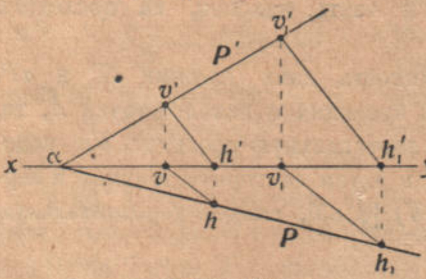
Удобнее в данном случае, вместо произвольной вспомогательной прямой, проводить через точку или горизонталь AC, или фронталь AD плоскости [*§ 56*].

Если же плоскость дана двумя параллельными прямыми (b, b') и (c, c') [*черт. 73*] и дана горизонтальная проекция a искомой точки A, то, на основании тех же соображений, проведем через a произвольно горизонтальную проекцию bc вспомогательной прямой, определим ее вертикальную проекцию $b'c'$ [*§ 66*] и на ней— вертикальную проекцию a' искомой точки A.

§ 69. Задача. *Найти следы плоскости, проходящей: 1) через две пересекающиеся или параллельные прямые, 2) чрез прямую и точку; 3) через три точки, не лежащие на одной прямой.*

Во всех данных случаях следы искомой плоскости должны проходить через следы [*§ 52*] или непосредственно данных прямых, или вспомогательных прямых, лежащих в данной плоскости.

На этом основании, если плоскость дана, напр., двумя параллельными прямыми (vh, $v'h'$) и (v_1h_1, $v_1'h'_1$) [*черт. 74*], то, найдя следы этих прямых, горизонтальные (h, h'), (h_1 h'_1) и вертикальные (v, v'), (v_1, v'_1), имеем, что искомые следы плоскости суть прямые $v'v_1'$ и hh_1 (при верности чертежа обе эти прямые должны или пересекать ось в одной точке, или быть параллельными оси).



Черт. 74.

Если следы данных прямых лежат вне эпюра, то задача решается при помощи вспомогательных прямых, которые имеют с данными по две общие точки и которые выбраны таким образом, чтобы следы их лежали в пределах эпюра. Всего удобнее в этом случае проводить или горизонтали, или фронтали искомой плоскости. Так, если плоскость определена горизонталью (mv, $m'v'$) и фронталью (mh,$m'h'$) [*черт. 69*], то для нахождения следов плоскости достаточно провести через точку h параллель прямой mv и через точку v' параллель прямой $m'h'$. Полученные таким образом, прямые hP и $v'P'$ встретятся в точке α оси xy и будут следами плоскости.

Случаи, когда плоскость задана прямою и точкой или тремя точками, ничем не отличаются от только-что рассмотренного, ибо в первом случае достаточно какую-либо точку данной прямой соединить прямыми с данною точкою, во втором — три точки соединить прямыми, чтобы привести их к случаю двух пересекающихся прямых.

Задачи.

47. Найти следы прямой, лежащей в плоскости профиля и заданной двумя точками, находящимися: a) одна в I, другая — во II угле; b) одна во II, другая — в IV.

48. Найти углы, через которые проходит прямая, лежащая в плоскости профиля.

49. Провести в плоскости профиля прямую, так, чтобы она проходила через: a) I, II и IV углы; b) I, II и III; c) I, III и IV углы.

50. На данной прямой, лежащей в плоскости профиля, взять точку в a) I угле; b) во II угле; c) в III угле; d) в IV угле.

51. Чрез данную точку провести прямую, параллельную данной прямой, находящейся с данною точкою в одной и той же профильной плоскости. Найти следы искомой прямой.

52. Из точки, данной на прямой, лежащей в плоскости профиля восстановить в той же плоскости перпендикуляр к данной прямой Найти его следы.

53. Провести чрез данную точку прямую, параллельную другой прямой, данной в профильной плоскости. Определить две точки искомой прямой.

54. По данной горизонтальной проекции прямой определить ее вертикальную проекцию под условием, чтобы прямая лежала в плоскости: a) параллельной оси проекций; b) паралелльной горизонтальной плоскости проекций; c) проходящей чрез ось и точку; d) проходящей чрез две данные пересекающиеся прямые.

55. По данной вертикальной проекции точки найти ее горизонтальную проекцию под условием, чтобы точка принадлежала одной из плоскостей, упомянутых в предыдущей задаче.

56. В данной плоскости провести горизонталь на данном расстоянии от горизонтальной плоскости проекций.

57. В данной плоскости провести фронталь на данном расстоянии от вертикальной плоскости проекций.

58. В данной плоскости взять точку, которая находилась бы на данных расстояниях от плоскостей проекций.

59. По данным разноименным проекциям двух точек определить прямую, которая принадлежала бы данной плоскости.

60. По данной горизонтальной проекции многоугольника и плоскости, в которой он лежит, построить вертикальную проекцию того же многоугольника.

61. Определить, принадлежит ли данная точка плоскости данной: a) следами, b) двумя пересекающимися прямыми, c) проходящей чрез ось и точку, d) параллельной оси.

62. Построить следы плоскости, проходящей чрез две данные пересекающиеся прямые AB и CD, если: a) AB — перпендикулярна к горизонтальной плоскости; b) AB — горизонтальна, CD — вертикальна; c) обе прямые горизонтальны; d) AB — параллельна оси; e) AB лежит в плоскости профиля.

63. Построить следы плоскости, проходящей чрез три точки A, B и C, если: a) A и B лежат в одной плоскости профиля; b) A лежит на нижней вертикальной, B — на задней горизонтальной, C — в первом угле; (c A — на оси, B — в третьем угле, C — на задней горизонтальной; d) вертикальные проекции точек A, B и C лежат на одной прямой.

64. Даны проекции четырех точек; определить, лежат ли эти точки в одной плоскости.

65. Найти следы плоскости, проходящей чрез: a) две прямые параллельные оси; b) две параллельные прямые, лежащие в различных профильных плоскостях.

66. Построить следы плоскости, которая проходит чрез данную точку и прямую перпендикулярную к оси проекций и находящуюся в плоскости биссектора первого угла.

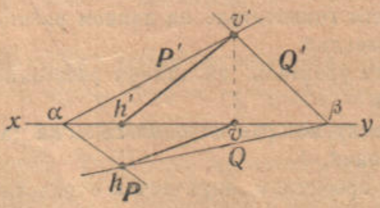
67. Построить следы плоскости, которая проходит чрез две прямые, имеющие свои следы вне пределов эпюра.

68. Даны прямая и точка; провести чрез точку прямую так, чтобы она встречала данную прямую и ось проекций.

II. О пересечении плоскостей и прямых между собою.

§ 70. Пересечение двух плоскостей есть прямая, и потому для построения ее достаточно определить или две ее точки, или одну точку и направление. Такое определение в случае задания плоскостей их следами делается на основании следующих соображений.

I. Если одноименные следы плоскостей или их продолжения взаимно-пересекаются, то точки их пересечения суть следы искомой прямой, ибо прямая пересечения, принадлежа одновременно обеим плоскостям, должна иметь свой горизонтальный след на горизонтальных следах обеих плоскостей [*§ 52*], т.-е. в точке их пересечения; на том же основании точка пересечения вертикальных следов плоскостей есть вертикальный след прямой; зная следы, построим и проекции прямой пересечения [*§ 38*]. Таким образом, если даны две плоскости $P\alpha P'$ и $Q\beta Q'$ [*черт. 75*), горизонтальные следы которых пересекаются в точке (h, h'), а вертикальные — в точке (v, v') то прямая пересечения данных плоскостей есть $(hv, h'v')$.



Черт. 75.

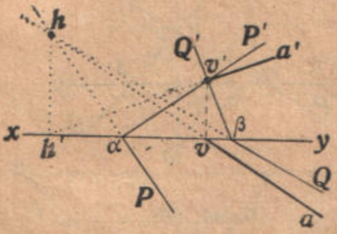
II. Если следы плоскостей не пересекаются, то определение двух или одной точки прямой пересечения данных плоскостей P и Q производится при помощи вспомогательной плоскости R, которая должна быть выбрана таким образом, чтобы легко можно было найти прямые D и E ее пересечения с плоскостями P и Q. Прямые D и E, как лежащие в одной плоскости R, пересекутся в точке M, которая принадлежит, очевидно, и искомому пересечению плоскостей P и Q.

В пояснение указанных общих приемов рассмотрим несколько частных примеров.

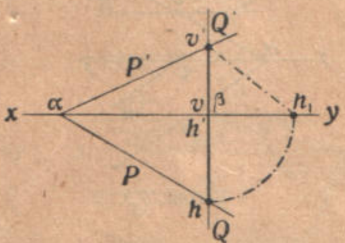
§ 71. *Следы плоскостей пересекаются.*

1) Пусть [*черт. 76*] *даны плоскости* $P\alpha P'$ *и* $Q\beta Q'$. Вертикальные следы данных плоскостей пересекаются непосредственно в точке (v, v'); следовательно, точка (v, v') есть вертикальный след искомой прямой. Горизонтальные следы пересекаются по их продолжению в точке (h, h'); следовательно, (h, h') есть горизонтальный след искомой прямой. И потому, соединив горизонтальные и вертикальные проекции следов прямыми, найдем проекции hv, $h'v'$ искомой прямой пересечения.

2) *Даны* [*черт. 77*] *плоскость* $P\alpha P'$, *наклонная к оси, и плоскость профиля* $Q\beta Q'$. На основании предыдущих соображений



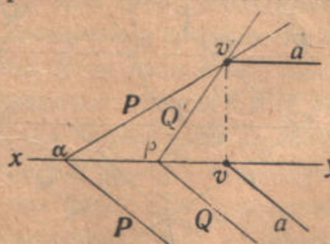
Черт. 76.



Черт. 77.

точка (h, h') есть горизонтальный след, точка (v, v')—вертикальный след прямой пересечения; следовательно, искомая прямая есть $(hv, h'v')$. Совмещение ее с вертикальною плоскостью есть прямая h_1v' [*§ 62*].

3) *Даны* [*черт. 78*] *плоскости* $P\alpha P'$ *и* $Q\beta Q'$, *горизонтальные следы которых параллельны между собою.* В этом случае только вертикальные следы пересекаются, и точка их пересечения (v, v') есть вертикальный след искомой прямой; а потому, чтобы определить прямую, остается найти ее направление. Из геометрии известно, что две плоскости, проходящие через две параллельные прямые αP и βQ, пересе-

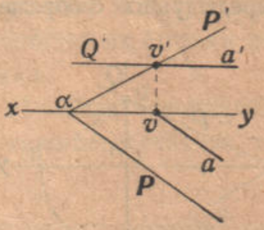


Черт. 78.

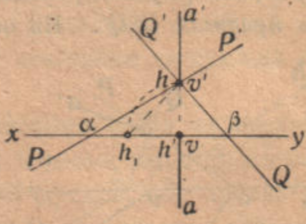
каются по прямой, параллельной этим прямым; а следовательно, искомая прямая пересечения, как паралелльная αP, будет проектироваться на вертикальную плоскость по прямой $v'a'$, параллельной оси [*§§ 43, 48*]; а на горизонтальную — по прямой va, параллельной следу αP, т.-е., иначе говоря, искомая прямая есть общая горизонталь данных плоскостей. На том же основании плоскости, вертикальные следы которых параллельны между собою, пересекутся по общей вертикали.

4) *Даны* [*черт. 79*] *наклонная плоскость* $P\alpha P'$ *и горизонтальная плоскость* Q'. Искомое сечение есть, очевидно, горизонталь (va, $v'a'$) плоскости $P\alpha P'$.

5) *Следы данных плоскостей* $P\alpha P'$ *и* $Q\beta Q'$ *лежат на одной прямой* [*черт. 80*]. В этом случае точки пересечения вертикаль-



Черт. 79.



Черт. 80.

ных и горизонтальных следов сливаются в одну; и потому искомая прямая лежит (во втором угле) в плоскости профиля и составляет с плоскостями проекций равные углы [*§ 62, 63*].

§ 72. *Следы данных плоскостей не пересекаются.*

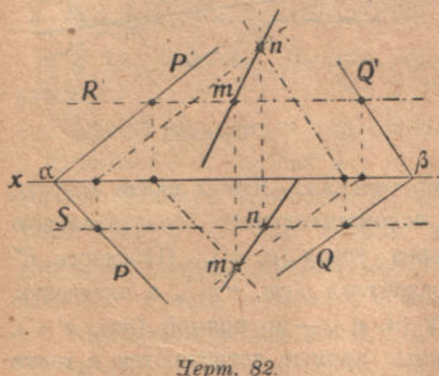
1) *Вертикальные следы данных плоскостей* $P\alpha P'$ *и* $Q\beta Q'$ [*черт. 81*] *не пересекаются в пределах эпюра.* В этом случае непосредственно можно определить только одну точку прямой пересечения, именно горизонтальный след ее (h, h'). Для определения же другой

Черт. 81.

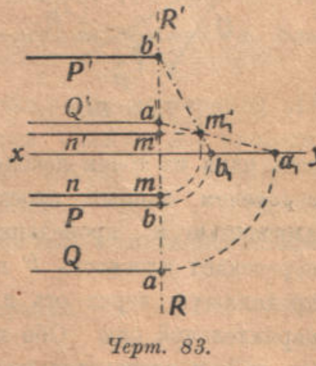
точки пересечем данные плоскости P и Q вспомогательною горизонтальною плоскостью R'. Плоскость R' пересекает плоскость P по горизонтали $(vm, v'm')$, а плоскость Q—по горизонтали (v_1m, v'_1m') [§ 71, 4]. Точка (m, m') встречи прямых vM и v_1M, очевидно, принадлежит искомому пересечению плоскостей P и Q, и потому искомая прямая есть $(hm, h'm')$.

2) *Вертикальные и горизонтальные следы данных плоскостей $P\alpha P'$ и $Q\beta Q'$* [*черт. 82*[*не пересекаются в пределах эпюра.* В этом случае ни одна из точек искомого сечения неизвестна, для определения их необходимо употребить две вспомогательные плоскости, положим, одну горизонтальную — R', другую—вертикальную — S. При помощи первой плоскости определим точку (m, m'); при помощи второй — точку (n, n'). Следовательно, искомая прямая есть $(mn, m'n')$.

3) *Плоскости PP' и QQ'* [*черт. 83*] *параллельны оси.* Искомое сечение есть прямая, параллельная оси и потому для определения



Черт. 82.



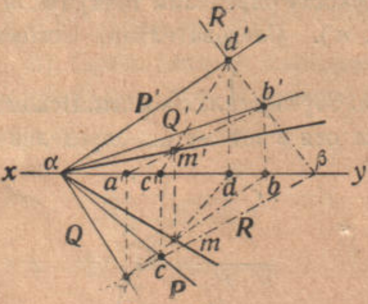
Черт. 83.

ее достаточно найти одну из ее точек. Для чего воспользуемся вспомогательною плоскостью, напр., плоскостью профиля $R\gamma R'$. Плоскость профиля пересечет плоскость P по прямой bb', совмещение которой с вертикальною плоскостью есть прямая b_1b' [§ 62]. Таким же образом найдем совмещение a_1a' пересечения плоскости профиля с плоскостью Q. Обе прямые b_1b' и a_1a' пересекутся в точке m'_1 [§ 64], которая есть не что иное, как совмещение точки, принадлежащей пересечению плоскостей P и Q. А потому, найдя проекции m и m' этой точки, имеем, что искомая прямая есть $(mn, m'n')$.

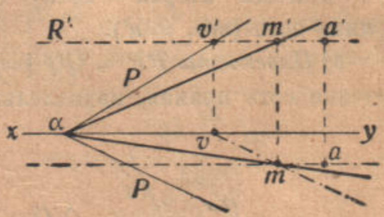
4) *Обе данные плоскости P и Q* [*черт. 84*] *пересекают ось в одной точке α.* Очевидно, точка α принадлежит искомому

пересечению; и потому для построения сечения остается найти еще другую его точку при помощи вспомогательной плоскости; за такую плоскость в данном случае всего удобнее принять плоскость $R\beta R'$, наклоненную к оси. Плоскость R пересекает плоскость Q по прямой $(ab, a'b')$ [§ 71], а плоскость P — по прямой $(cd, c'd')$. Прямые же AB и CD пересекаются в точке (m, m'), следовательно, искомая прямая есть $(\alpha m, \alpha m')$.

5) *Одна из плоскостей проходит через ось и точку* (a, a'), *другая* $P\alpha P'$ — *наклонна к оси* [*черт. 85*]. В этом случае точка α



Черт. 84.

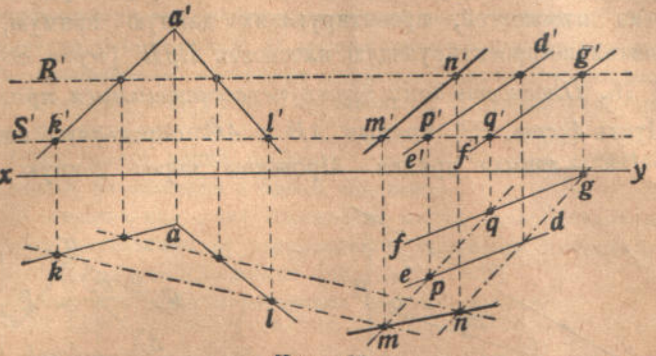


Черт. 85.

есть одна из точек искомого пересечения. Чтобы найти другую, пересечем данные плоскости вспомогательною горизонтальною плоскостью R', проведенною через точку (a, a'). Плоскость R' пересекает плоскость P по горизонтали $(vm, v'm')$, а плоскость, проходящую через ось и точку (a, a'), — по прямой $(am, a'm')$, параллельной оси. Обе найденные прямые встречаются в точке (m, m'); и следовательно, искомая прямая есть $(\alpha m, \alpha m')$.

§ 73. Задача. *Найти пересечение двух плоскостей, заданных двумя пересекающимися или параллельными прямыми.*

Пусть первая плоскость [*черт. 86*] определяется двумя пересекающимися прямыми AK и AL, вторая — двумя параллельными DE и FG. Для определения двух точек искомого сечения пересечем данные плоскости двумя вспомогательными горизонтальными плоскостями R' и S'. Плоскость S' встречает прямую AK в точке (k, k') [§§ 51, 61], прямую AL в точке (l, l') и, следовательно, пересекает первую плоскость по горизонтали KL; та же плоскость S' пересекает прямые ED и GF в точках (p, p') и (q, q'), и. следовательно, вторую плоскость — по горизонтали $(pq, p'q')$. Найденные таким образом прямые PQ и KL пересекаются в точке (m, m'), которая принадлежит искомому пересечению. Подобно предыдущему, употребляя вторую вспомогательную плоскость R', найдем вторую точку (n, n') искомого пересечения; следовательно, искомое пересечение есть прямая $(mn, m'n')$.



Черт. 86.

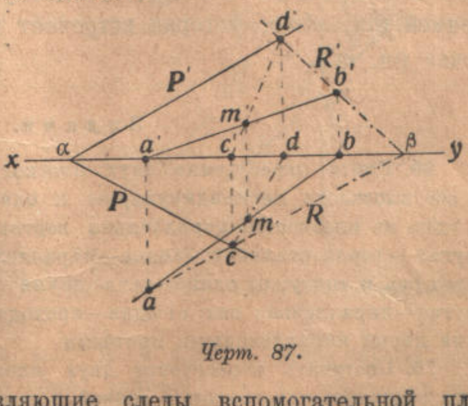
§ 74. Задача. *Найти точку встречи прямой с плоскостью.*

Общий способ для определения точки встречи прямой AB с плоскостью P состоит в том, что через прямую AB проводят вспомогательную плоскость R, прилично выбранную, и определяют прямую CD пересечения плоскостей R и P. Точка M, в которой данная прямая AB встречается с найденной прямою CD, и есть, очевидно, искомая.

Приложим общий метод к двум случаям:

§ 75. *Плоскость дана следами.*

Пусть [*черт.* 87] $P\alpha P'$ и $(ab, a'b')$—данные плоскость и прямая. Проведем через прямую AB какую бы то ни было вспомогательную плоскость $R\beta R'$; для чего найдем следы (a,a') и (b,b') прямой AB и соединим их с точкою β, выбранною на оси так, чтобы прямые $b'\beta$ и $a\beta$, представляющие следы вспомогательной плоскости R, пересекали следы данной плоскости в пределах



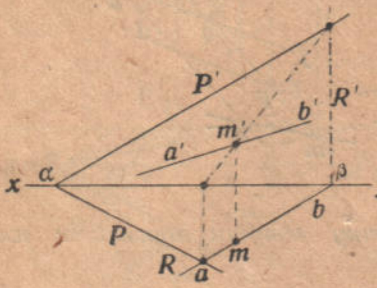
Черт. 87.

эпюра, напр., в точках c и d'. В таком случае прямая $(cd, c'd')$ есть пересечение плоскостей P и R. Эта прямая встречает данную прямую AB в точке (m, m'), которая и есть искомая.

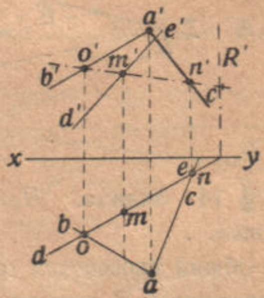
Вместо произвольно выбранной плоскости $R\beta R'$, удобнее брать одну из плоскостей, проектирующих данную прямую, напр., горизонтально-проектирующую плоскость $R\beta R'$ [*черт. 88*].

§ 76. *Плоскость дана двумя пересекающимися прямыми.*

Пусть [*черт. 89*] прямые AB и AC определяют плоскость, пусть DE — данная прямая. Проведем через данную прямую



Черт. 88.



Черт. 89.

вспомогательную, горизонтально-проектирующую ее плоскость deR'. Эта плоскость встретит прямую AB в точке (o, o') [*§ 61*], а прямую AC — в точке (n, n'); следовательно, вспомогательная плоскость пересечет плоскость, данную двумя прямыми, по прямой $(on, o'n')$, которая встречает данную прямую в искомой точке (m, m').

Задачи.

69. Найти пересечение двух плоскостей в следующих случаях: a) обе плоскости перпендикулярны к одной из плоскостей проекций; b) одна из плоскостей параллельна вертикальной плоскости проекций, другая — горизонтальной; c) одна — параллельна оси, другая — проходит через ось и точку; d) одна — дана двумя пересекающимися прямыми, другая — параллельна оси; e) одна — проходит через ось и точку, другая — дана двумя параллельными прямыми.

70. Построить пересечение двух плоскостей, из которых первая дана вертикальным следом и точкой, а вторая — горизонтальным следом и точкой.

71. Построить горизонтальные следы двух плоскостей по данным вертикальным следам, параллельным между собою, и точке, принадлежащей пересечению данных плоскостей.

72. Найти точку встречи прямой с плоскостью в следующих случаях: a) прямая—произвольна, плоскость проходит через ось и точку; b) прямая перпендикулярна к вертикальной плоскости проекций; плоскость проходит через ось и точку; c) прямая лежит в плоскости профиля, плоскость—произвольна; d) прямая перпендикулярна к горизонтальной плоскости проекций, плоскость – произвольна; e) прямая—произвольна, плоскость—параллельна оси.

73. Через данную точку провести прямую, которая встречает две другие прямые, не лежащие в одной плоскости.

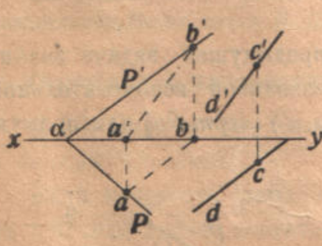
74. На пересечении двух плоскостей найти точку, находящуюся: a) на данном расстоянии от вертикальной плоскости проекций; b) на равных расстояниях от плоскостей проекций.

75. Определить точку пересечения трех плоскостей.

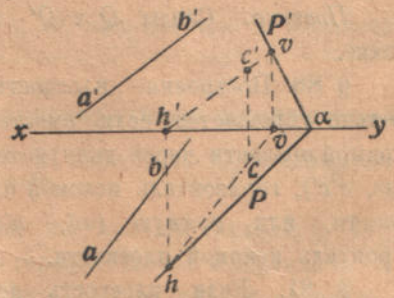
III. О прямых и плоскостях, параллельных между собою.

§ 77. Задача. *Через данную точку провести прямую, параллельную данной плоскости.*

Для того, чтобы прямая была параллельна плоскости, достаточно, чтобы она была параллельна какой-либо прямой, лежащей в плоскости; и потому для решения задачи возьмем в данной плоскости $P\alpha P'$ [*черт. 90*] какую-либо прямую $(ab, a'b')$ [*§ 53*] и через данную точку (c, c') проведем прямую $(cd, c'd')$, ей параллельную [*§ 43*].



Черт. 90.



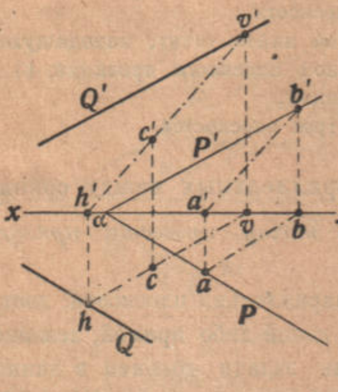
Черт. 91.

§ 78. Задача. *Через данную точку провести плоскость, параллельную данной прямой.*

На том же основании, как и в предыдущем случае, для решения задачи достаточно через данную точку (c, c') [*черт. 91*] провести параллельно данной прямой $(ab, a'b')$ вспомогательную прямую (ch, $c'h'$), и через эту последнюю какую-либо плоскость; для чего достаточно следы (h, h'), (v, v') вспомогательной прямой соединить прямыми αP и $\alpha P'$ с какою-либо точкой α на оси xy. Эти прямые суть следы искомой плоскости. (Задача неопределенная) [1]).

§ 79. Задача. *Через данную точку провести плоскость, параллельную данной плоскости.*

Так как следы искомой плоскости должны быть параллельны следам данной [*§ 60*], то для построения искомой плоскости достаточно определить по одной точке на каждом из ее следов. С этою целью через данную точку (c, c') [*черт. 92*] проведем прямую (ch, $c'h'$), параллельную какой-либо прямой (ab, $a'b'$), взятой в данной плоскости $P\alpha P'$, и так как эта прямая должна лежать в искомой плоскости, то следы последней должны пройти через следы (v, v') и (h, h') прямой CH. Следовательно, прямые Q' и Q, параллельные $\alpha P'$ и αP и проходящие чреез h и v', суть следы искомой плоскости.

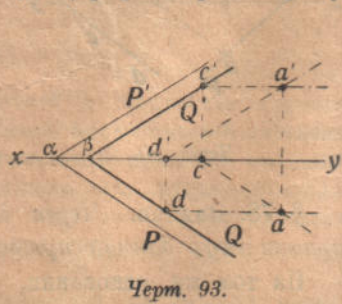


Черт. 92.

Поверка. Следы Q и Q' должны встречать ось в одной точке.

§ 80. Построение плоскости в предыдушей задаче значительно упрощается, если вместо произвольной вспомогательной прямой провести через данную точку (a, a') [*черт. 93*] или прямую (ac, $a'c'$), горизонталь искомой плоскости, или прямую (ad, $a'd'$), фронталь искомой плоскости.

§ 81. Если плоскость дана двумя пересекающимися прямыми, то искомая плоскость определится двумя прямыми, проведенными через данную точку параллельно данным прямым.



Черт. 93.

1) Плоскости, удовлетворяющие условиям задачи, образуют пучок плоскостей, осью которого служит прямая (ch, $c'h'$).

§ 82. Задача. *Через данную прямую провести плоскость, параллельную данной прямой.*

Через какую-либо точку, взятую на первой данной прямой, проведем прямую, параллельную второй. Плоскость, определенная такими двумя пересекающимися прямыми, и будет требуемая.

Задачи.

76. По данной горизонтальной проекции прямой и одной из точек ее вертикальной проекции определить эту последнюю под условием, чтобы прямая была параллельна данной плоскости.

77. Провести чрез данную точку прямую, параллельную плоскости биссектора и наклонную к плоскостям проекций.

78. Найти условия параллельности плоскостей, параллельных оси.

79. Через данную точку провести плоскость, параллельную плоскости: a) проходящей чрез ось и точку; b) перпендикулярной к одной из плоскостей проекций; c) имеющей свои следы на одной прямой; d) параллельной оси.

80. Провести прямую, которая встречала бы две данные прямые и была бы параллельна оси проекций.

81. Через данную точку провести прямую, которая встречала бы данную прямую и была бы параллельна данной плоскости.

82. Даны три прямые; провести четвертую, пересекающую две из них и параллельную третьей.

83. В плоскости, параллельной оси, провести прямую, параллельную горизонтальной плоскости и отстоящую от последней на данном расстоянии.

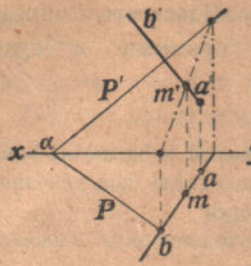
84. Даны четыре точки A, B, C, D, провести чрез A плоскость равноотстоящую от точек B, C, D.

IV. О прямых и плоскостях, перпендикулярных между собою.

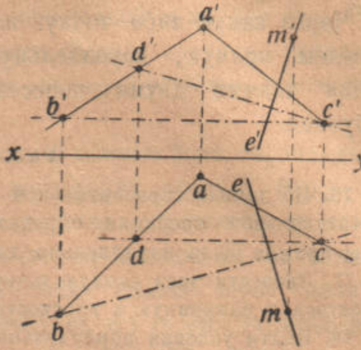
§ 83. Задача. *Из данной точки опустить перпендикуляр на данную плоскость.*

Если плоскость дана следами, то, как мы видели [*§ 59*], для решения задачи достаточно из горизонтальной и вертикальной проекций a и a' данной точки [*черт. 94*] опустить перпендикуляры ab и $a'b'$ на одноименные следы αP и $\alpha P'$ данной плоскости $P\alpha P'$. Прямая $(ab, a'b')$ есть искомый перпендикуляр, а точка (m, m') есть точка встречи его с плоскостью [*§ 74*], или проекция точки A на плоскость P.

§ 84. Если же плоскость дана двумя пересекающимися прямыми AB и AC [*черт. 95*], то построение перпендикуляра основывается на том соображении, что горизонтальная и вертикальная проекции искомого перпендикуляра, будучи перпендикулярны к следам плоскости, должны быть перпендикулярны



Черт. 94.

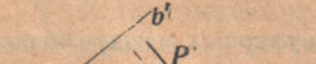


Черт. 95.

соответствующим проекциям каждой горизонтали и каждой фронтали данной плоскости. И потому, проведя в данной плоскости горизонталь (bc, $b'c'$) и фронталь (cd, $c'd'$) [§ 67] и опустив из горизонтальной проекции m данной точки перпендикуляр me на bc, а из вертикальной m' — перпендикуляр $m'e'$ на $c'd'$, найдем, что искомый перпендикуляр есть прямая (me, $m'e'$).

§ 85. Задача. *Через данную точку провести плоскость, перпендикулярную к данной прямой.*

Следы искомой плоскости должны быть перпендикулярны проекциям ab и $a'b'$ [*черт. 96*] данной прямой, и потому, для построения их достаточно определить по одной точке на каждом следе. Для чего чрез данную точку (m, m') проведем горизонталь ($mv, m'v'$) и фронталь (mh, $m'h'$) искомой плоскости, основываясь на том соображении, что горизонтальная проекция mv горизонтали, как параллельная горизонтальному следу искомой плоскости, должна быть тоже перпендикулярна горизонтальной проекции ab данной прямой, а вертикальная проекция $m'h'$ фронтали, на том же основании, должна быть перпендикулярна



Черт. 96.

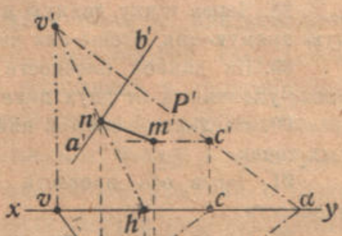
вертикальной проекции $a'b'$ данной прямой. Следы h и v построенных таким образом прямых MH и MV и будут точки, принадлежащие соответствующим следам искомой плоскости; и потому, проведя чрез h прямую hP, перпендикулярную к ab, а через v'—прямую $v'P'$, перпендикулярную к $a'b'$, найдем следы искомой плоскости Ph и $P'v'$. При верности чертежа оба следа должны встретить ось в одной точке α.

§ 86. Задача. *Через данную точку провести плоскость, перпендикулярную к данной плоскости.*

Для того, чтобы одна плоскость была перпендикулярна к другой плоскости, достаточно, чтобы первая плоскость проходила чрез перпендикуляр к последней; и потому для решения задачи достаточно из данной точки опустить перпендикуляр на данную плоскость и провести чрез этот перпендикуляр произвольную плоскость [*§ 78*].

§ 87. Задача. *Из данной точки опустить перпендикуляр на данную прямую.*

Искомый перпендикуляр, очевидно, находится в вспомогательной плоскости, проходящей чрез данную точку и перпендикулярной к данной прямой, а именно представляет прямую, которая проходит чрез данную точку и точку встречи данной прямой с вспомогательною плоскостью. Поэтому: 1) чрез данную точку (m, m') [*черт. 97*] проведем при помощи горизонтали $(mc, m'c')$ [*§ 85*] плоскость $P\alpha P'$, перпендикулярную к данной прямой $(ab, a'b')$; 2) найдем, при помощи горизонтально-проектирующей плоскости [*§ 75*] точку, (n, n'), встречи прямой $(ab, a'b')$ с плоскостью $P\alpha P'$; 3) соединим точки M и N прямой $(mn, m'n')$.

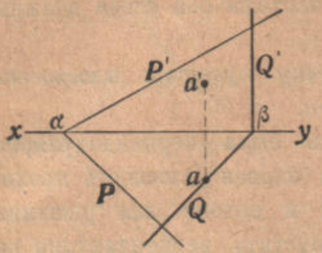


Черт. 97.

Прямая $(mn, m'n')$ есть искомый перпендикуляр.

§ 88. Задача. *Чрез данную точку провести плоскость, перпендикулярную к горизонтальному следу данной плоскости.*

Так как следы искомой плоскости должны быть перпендикулярны к проекциям αP и xy горизонтального следа [*§ 48*] данной плоскости $P\alpha P'$ [*черт. 98*], то искомая плоскость есть горизонтально-проектирующая, и, следовательно, горизонтальный след ее βQ пройдет чрез горизонтальную проекцию a данной точки (a, a') [*§ 61*] перпендикулярно к αP, а вертикальный $\beta Q'$— чрез точку β перпендикулярно к xy.



Черт. 98.

§ 89. Задача. *Через данную прямую провести плоскость, перпендикулярную к данной плоскости.*

Из какой-либо точки, взятой на данной прямой, опустим перпендикуляр на данную плоскость. Плоскость, проходящая через данную прямую и вспомогательный перпендикуляр, есть, очевидно, искомая.

Задачи.

85. Из данной точки опустить перпендикуляр на плоскость: a) параллельную оси; b) перпендикулярную оси; c) проходящую через ось и точку найти точку его встречи с плоскостью.

86. Из данной точки опустить перпендикуляр на плоскость, данную двумя параллельными прямыми, и найти точку его встречи с плоскостью.

87. Из данной точки A опустить перпендикуляр на данную прямую BC, если BC a) параллельна оси; b) лежит в плоскости профиля; c) перпендикулярна к одной из плоскостей проекций; d) параллельна одна из плоскостей проекций.

88. Через точку, данную на прямой, провести к ней перпендикулярную прямую так, чтобы она встречала другую данную прямую.

89. На данной плоскости построить геометрическое место точек, равно-удаленных от двух данных точек.

90. На данной прямой найти точку, равноотстоящую от двух данных точек.

91. Через ось провести плоскость, перпендикулярную к данной плоскости.

92. Через прямую, проекции которой совпадают со следами плоскости, провести плоскость, перпендикулярную к данной плоскости, и найти их пересечение.

93. Через данную прямую провести плоскость, перпендикулярную к плоскости, проходящей через ось и точку, и найти их пересечение.

94. В данной плоскости через точку встречи ее с данной прямой провести перпендикуляр к последней.

95. Дана точка и две плоскости: одна — параллельна оси, другая — проходит через ось; провести через данную точку плоскость, перпендикулярную к пересечению данных плоскостей.

96. Через данную точку провести плоскость, перпендикулярную к пересечению плоскостей, из которых одна перпендикулярна к горизонтальной плоскости, а другая дана двумя параллельными прямыми.

ГЛАВА III.

СПОСОБЫ, ПРИМЕНЯЕМЫЕ В НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ.

I. Определения.

§ 90. Из предыдущего легко заметить, что большая или меньшая простота чертежа, а следовательно, и трудность решения задач, зависит в *Начертательной Геометрии* от положения фигур относительно плоскостей проекций, и что нередко существуют такие частные положения, при которых искомые элементы задачи получаются непосредственно [*§ 61*]. Отсюда, все способы решения задач основываются на приведении фигур, рассматриваемых в задаче, в такие удобнейшие положения, при которых решения получаются простым чертежом.

Этой цели можно достигнуть двояким образом: или заменить *данные плоскости проекций новыми*, выбранными так, чтобы данные фигуры, не изменяя своего положения в пространстве, приняли в отношении новых плоскостей наиболее удобное положение, или, наоборот, *изменить положение фигур в пространстве* так, чтобы они в своем новом положении приняли в отношении данных плоскостей проекций, остающихся неизмененными в пространстве, наиболее удобное положение. По этим соображениям в *Начертательной Геометрии* употребляются для решения задач следующие три способа: 1) *способ изменения плоскостей проекций*, 2) *способ вращения*, 3) *способ совмещения*.

II. Способ изменения плоскостей проекций.

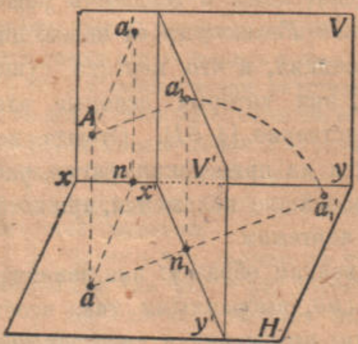
§ 91. Способ изменения плоскостей проекций имеет целью дать правила для решения следующего общего вопроса:

Зная проекции фигуры на двух взаимно-перпендикулярных плоскостях H и V, определить проекцию той же фигуры или на *новой плоскости* V', *перпендикулярной к* H, *или на новой плоскости* H', *перпендикулярной к* V.

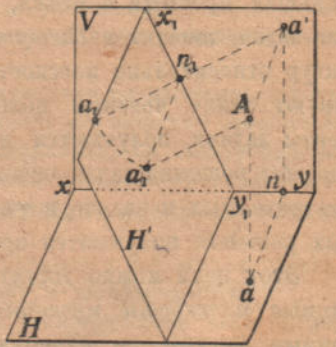
Заметим предварительно, что в случае замены данной вертикальной плоскости V [*черт. 99*] новою V', перпендикулярною к H, прежняя ось проекций xy заменится новою, именно прямою пересечения плоскостей V' и H.

Эту новую ось мы условимся обозначать буквами $x'y'$, при чем, с целью указать, в какую сторону должно вращать плоскость V (для того, чтобы она, после совмещения с H, лежала над осью), мы будем ставить x' влево от наблюдателя, а y'—вправо [*§ 12*].

В случае замены данной горизонтальной плоскости H [*черт. 100*] новою H', перпендикулярною к V, новая ось проек-



Черт. 99.



Черт. 100.

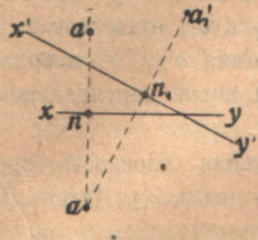
ций, т.-е. прямая пересечения плоскостей H' и V, обозначается буквами x_1y_1, при чем, как и прежде, чтобы указать сторону, в которую должно вращать новую плоскость H' (для того, чтобы она при совмещении с вертикальною находилась под осью), буква x_1 ставится влево от наблюдателя, а y_1 — вправо.

После этих замечаний рассмотрим решение общей задачи в случае *точки*, *прямой* и *плоскости*.

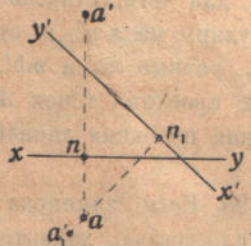
§ 92. Точка. Пусть [*черт. 99*] A—данная точка и V' — новая вертикальная плоскость проекций.

Определение новой вертикальной проекции точки A вытекает из следующих соображений: горизонтальная проекция a точки A и расстояние точки A от горизонтальной плоскости, —

расстояние, равное $a'n$ [*§ 16*], — не изменяются, если горизонтальная плоскость проекций осталась без изменения. А потому, принимая во внимание, что теорема *§ 18* остается справедлива для всяких двух взаимно-перпендикулярных плоскостей проекций, найдем [*черт. 101* и *102*], что искомая вертикальная проекция a'_1



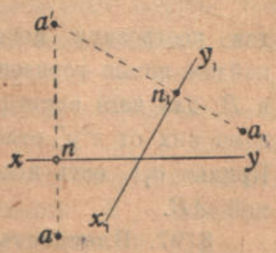
Черт. 101.



Черт. 102.

будет находиться на одном перпендикуляре к новой оси $x'y'$ с проекцией a и на расстоянии n_1a_1' от оси $x'y'$, равном na' и отложенном в прилично выбранную сторону.

§ 93. Из подобного же рода соображений найдем, что в случае замены горизонтальной плоскости проекций H [*черт. 100* и *103*] новою H', новая горизонтальная проекция a_1 будет находиться на одном перпендикуляре к x_1y_1 с вертикальной проекцией a' и на расстоянии n_1a_1 от нее, равном расстоянию точки A от вертикальной плоскости проекции, т.-е. равном an.



Черт. 103.

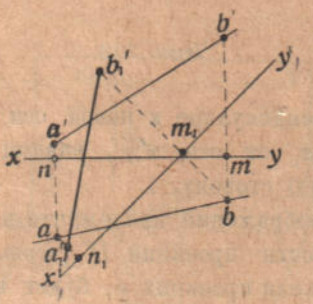
§ 94. Отсюда можно дать следующее практическое правило для определения новой проекции точки в случае замены, напр., вертикальной плоскости проекций.

Чтобы найти вертикальную проекцию точки на новой вертикальной плоскости, нужно опустить из горизонтальной проекции точки перпендикуляр на новую ось $x'y'$ и отложить на нем, в прилично выбранную сторону, длину, равную расстоянию вертикальной проекции точки от прежней оси xy.

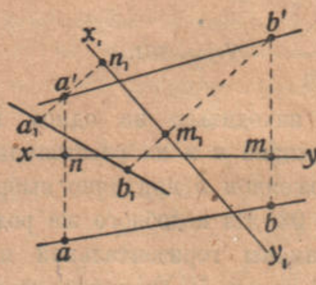
Подобное же правило легко формулировать и для случая изменени горизонтальной плоскости проекций.

§ 95. Прямая. Пусть [*черт. 104*] (ab, $a'b'$)—данная прямая, и пусть вертикальная плоскость проекций заменена новою плоскостью, которая определяется осью $x'y'$. Чтобы найти вертикальную проекцию прямой на новой плоскости, достаточно найти новые вертикальные проекции двух точек данной прямой, напр., точек A и B; для чего, согласно правилу [*§ 94*], опустим из a и b перпендикуляры на $x'y'$ и отложим на них от $x'y'$ длины $n_1a'_1$ и $m_1b'_1$, равные na' и mb'. Точки a'_1 и b'_1 суть новые вертикальные проекции точек A и B, а прямая a'_1b_1' — искомая вертикальная проекция данной прямой на новой вертикальной плоскости.

§ 96. Если заменена горизонтальная плоскость проекций новою плоскостью, характеризующеюся осью x_1y_1 [*черт. 105*], то



Черт. 104.

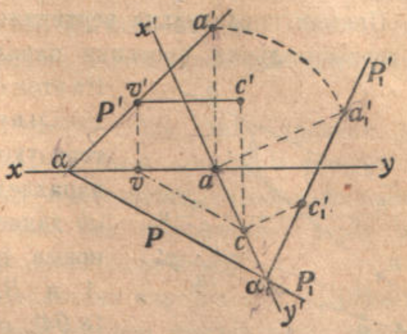


Черт. 105.

для построения новой горизонтальной проекции прямой AB найдем новые горизонтальные проекции двух ее точек, напр., A и B: для чего опустим на ось x_1y_1 перпендикуляры из a' и b' и на них от $x'y'$ отложим длины n_1a_1 и m_1b_1, равные na и mb. Прямая a_1b_1 есть искомая новая горизонтальная проекция прямой AB.

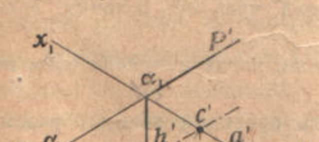
§ 97. Плоскость. Пусть [*черт. 106*] $P\alpha P'$ — данная плоскость, и вертикальная плоскость проекций заменена новою V', характеризующеюся осью $x'y'$ и, следовательно, имеющею своими следами прямые $y'a$ и aa' [*§ 49, 2*]. Для определения следа данной плоскости на новой вертикальной плоскости достаточно найти новую вертикальную проекцию одной из точек, принадлежащих новому вертикальному следу, ибо другая точка того же следа, именно точка α_1, в которой новая ось $x'y'$ пересекает горизонтальный след αP плоскости, очевидно, принадлежит искомому следу. Всего удобней за определяющую новый след точку выбрать точку (a, a'), в которой вертикальный след $\alpha P'$ встречает новую плоскость V' [§ 61].

Новая вертикальная проекция точки (a, a'), по правилу [§ 94] будет находиться в a'_1 на перпендикуляре к $x'y'$ и на расстоянии $aa'_1 = aa'$, и, следовательно, прямая $\alpha_1 a_1'$ есть искомый вертикальный след $\alpha_1 P'_1$ данной плоскости. Если пересечение осей xy и $x'y'$ лежит вне эпюра, то выбирают другую точку, принадлежащую искомому следу, при помощи горизонтали $(vc, v'c')$ данной плоскости; а именно точку (c, c'), в которой эта горизонталь встречает новую вертикальную плоскость $y'aa'$ [§ 61], и затем находят, по правилу [§ 94], новую ее вертикальную проекцию c_1'. Прямая $a_1 c'_1$ есть искомый вертикальный след $\alpha_1 P_1'$.



Черт. 106.

§ 98. В случае замены горизонтальной плоскости новою H', характеризующеюся осью $x_1 y_1$ [*черт.107*] и, следовательно, имеющею своими следами прямые $x_1 a'$ и $a'a$, поступают подобно предыдущему. А именно, точку α_1, пересечения вертикального следа $\alpha P'$ данной плоскости с осью $x_1 y_1$, соединяют с новою горизонтальною проекцией a_1 точки A, в которой горизонтальный след данной плоскости встречает плоскость H', перпендикулярную к вертикальной плоскости проекций V. Прямая $\alpha_1 a_1$ есть искомый новый горизонтальный след $\alpha_1 P_1$ плоскости.

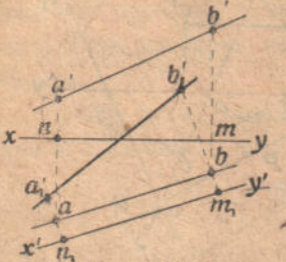


Черт. 107.

Если точка пересечения осей xy и $x_1 y_1$ лежит вне эпюра, то выбирают другую точку, принадлежащую новому горизонтальному следу плоскости, а именно точку (c, c'), в которой фронталь $(hc, h'c')$ данной плоскости встречает новую плоскость H', и затем находят, согласно правилу, ее новую горизонтальную проекцию c_1. Прямая $\alpha_1 c_1$ есть искомый новый горизонтальный след $\alpha_1 P_1$ плоскости $P\alpha P'$.

§ 99. Задача. *Изменить одну из плоскостей проекций таким образом, чтобы данная прямая была параллельна вертикальной плоскости проекций.*

Прямая параллельна вертикальной плоскости проекций, если ее горизонтальная проекция параллельна оси проекций [*§ 32*].



Черт. 108.

На этом основании заменяем данную вертикальную плоскость V новою V', характеризующеюся осью $x'y'$ [*черт. 108*], параллельной горизонтальной проекции ab данной прямой AB, и определяем новые вертикальные проекции точек A и B. Для чего, следуя правилу [*§ 94*], опустим перпендикуляры из a и b на ось $x'y'$ и на них от оси $x'y'$ отложим $n_1 a'_1$ и $m_1 b'_1$, соответственно равные na' и mb'.

Прямая $(ab,\ a'_1 b'_1)$ параллельна плоскости V'.

Задачи.

97. Изменить плоскость проекций таким образом, чтобы прямая, параллельная одной из плоскостей проекций, стала параллельной оси.

98. Найти проекции данного треугольника, когда одна из плоскостей проекций заменена ей параллельною.

99. Найти следы плоскости, проходящей чрез ось и точку, если вертикальная плоскость заменена новою.

100. Найти новые проекции треугольника, когда изменена одна из плоскостей проекций.

101. Изменить вертикальную плоскость проекций таким образом, чтобы точка, данная своими проекциями, находилась на плоскости биссектора новых плоскостей.

102. Изменить последовательно плоскости проекций таким образом чтобы данная прямая была: a) перпендикулярна к вертикальной плоскости; b) перпендикулярна к горизонтальной плоскости; c) в плоскости профиля

103. Изменить одну или обе плоскости проекций таким образом, чтобы данная плоскость после замены плоскостей проекций была: a) перпендикулярна к одной из плоскостей проекций; b) параллельна одной из плоскостей проекций; c) параллельна оси; d) плоскостью профиля.

104. Найти новые проекции прямой и ее следы, когда данные плоскости проекций заменим двумя другими взаимно-перпендикулярными.

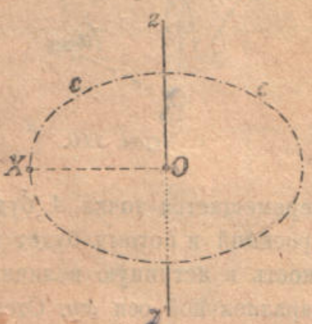
III. Способ вращения.

§ 100. Вместо изменения плоскости проекций, иногда удобнее переместить самую фигуру в отношении плоскостей проекций, и, найдя в новом положении фигуры элементы, которые требуется определить по смыслу задачи, обратным перемещением привести как фигуру, так и найденные элементы в первоначальное положение.

Такое перемещение достигается двумя способами: *вращением* и *совмещением*.

§ 101. *Способ вращения* имеет целью дать правила для решения следующей общей задачи: *зная проекции фигуры на двух взаимно-перпендикулярных плоскостях, определить проекции той же фигуры и на тех же плоскостях, когда она повернута на некоторый угол около данной оси.*

Решение этой задачи вытекает из определения вращательного движения, как такого, при котором каждая точка фигуры, напр., точка X [*черт. 109*], двигается в плоскости, перпендикулярной к оси вращения zz', по окружности c, центр O которой лежит на оси вращения, а радиус OX — равен расстоянию точки от оси.



Черт. 109.

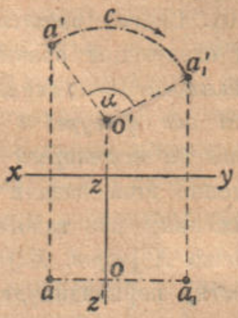
Исходя из такого определения вращательного движения, решим общую задачу способа вращения в случае *точки*, *прямой* и *плоскости*, когда ось вращения перпендикулярна к одной из плоскостей проекций.

§ 102. Точка. Пусть точку (a, a') [*черт. 110*] требуется повернуть на угол α около оси $(o, o'z')$, перпендикулярной к горизонтальной плоскости проекций.

На основании предыдущего определения вращательного движения точка A во время вращения будет перемещаться по дуге окружности, лежащей в горизонтальной плоскости и, следовательно, проектирующейся в истинную величину на горизонтальную плоскость проекций и по прямой, параллельной оси проекций xy, на вертикальную. Отсюда заключаем, что горизонтальная проекция a точки A будет двигаться по окружности c, описанной из o, как из центра, радиусом oa, а вертикальная проекция a' — по прямой $a'o'$, параллельной оси xy. А потому, откладывая на дуге c угол $aoa_1 = \alpha$, найдем в a_1 горизонтальную проекцию точки A после вращения; вертикальная же проекция той же точки будет находиться на одном перпендикуляре с a_1 к оси xy и на прямой $a'o'$, т.-е. в точке их пересечения a'_1. Точка (a_1, a'_1) есть искомая.

§ 103. В случае оси (oz, o') [*черт. 111*], перпендикулярной к вертикальной плоскости проекций, окружность, по которой

Черт. 110.



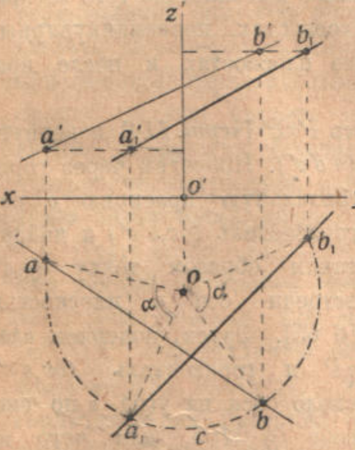
Черт. 111.

перемещается точка A, будет параллельна вертикальной плоскости проекций и потому будет проектироваться на вертикальную плоскость в истинную величину, а на горизонтальную — по прямой, параллельной оси xy. Отсюда, рассуждая, как и в предшествующем случае, найдем, что проекции точки A после вращения будут a_1 и a'_1.

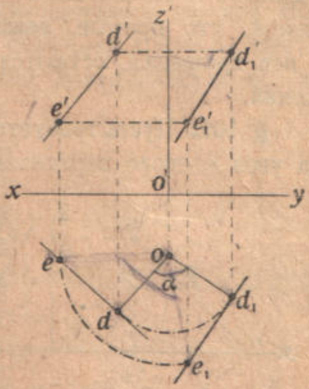
§ 104. Прямая. Чтобы повернуть прямую на угол α около данной оси, достаточно повернуть на тот же угол две, произвольно взятые на ней, точки. Чертеж значительно упрощается, если точки взяты или на одном и том же расстоянии от оси вращения, или одна точка взята на кратчайшем расстоянии от оси, а другая—где-либо на прямой.

В самом деле. Пусть [*черт. 112*] $(o, o'z')$—данная вертикальная ось и $(ab, a'b')$ — данная прямая. Расстояния различных точек прямой AB от оси OZ, измеряемые перпендикулярами, опущенными из точек прямой AB на ось OZ, в данном случае будут параллельны горизонтальной плоскости и, следовательно, будут проектироваться на ней в истинную величину; а потому, чтобы на прямой AB взять две точки, находящиеся на одинаковом расстоянии от оси OZ, достаточно из центра o описать дугу произвольным радиусом, напр., oa; точки встречи a и b этой дуги с горизонтальной проекцией прямой ab и суть горизонтальные проекции искомых точек; по горизонтальным проекциям найдем их вертикальные a' и b'. Таким образом, точки (a,a') и (b,b')— суть искомые. Повернем эти точки около оси OZ на угол α; для чего по *§ 102* отложим по дуге c угол aoa_1=углу $bob_1=\alpha$ и по a_1 и b_1 определим на прямых a' и b', перпендикулярных к $o'z'$, a'_1 и b'_1 Прямые a_1b_1 и $a'_1b'_1$ суть искомые проекции прямой AB после вращения ее на угол α.

§ 105. Возьмем точку на прямой ED [*черт. 113*], находящуюся ближайшем расстоянии от оси OZ. Горизонтальная проекция



Черт. 112



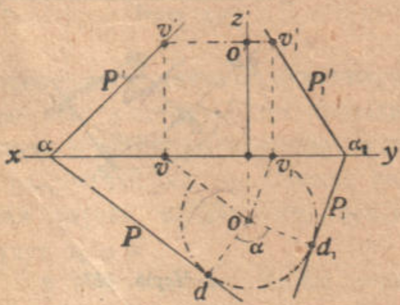
Черт. 113.

такой точки есть основание d перпендикуляра, опущенного из o на горизонтальную проекцию прямой ED. По d определим d' и повернем точку D на угол α; после вращения она придет в положение (d_1,d'_1). И, чтобы найти проекции прямой, остается взять какую-либо другую точку на прямой, напр., (e,e') и повернуть ее на тот же угол. Для чего заметим, что горизонтальная проекция прямой ED, будучи до вращения касательной в точке d к окружности dd_1, останется касательною к той же окружности в точке d_1 и после вращения, и что поэтому горизонтальная проекция e будет находиться после вращения в e_1 на пересечении окружности ee_1 с касательной d_1e_1 к окружности dd_1. По e_1 определим e'_1. Прямые e_1d_1 и $e'_1d'_1$ суть проекции прямой ED после вращения.

§ 106. Плоскость. Чтобы повернуть на угол α плоскость около оси, достаточно повернуть на тот же угол две, произвольно взятые на ней, прямые. Чертеж значительно упрощается с приличным выбором прямых. Так, в случае вертикальной оси вращения, всего удобнее взять две горизонтальные прямые; одну—горизонтальный след плоскости, другую—горизонталь плоскости, которая проходит через точку встречи оси с плоскостью.

В случае горизонтальной оси вращения всего удобнее взять две фронтали: одну—вертикальный след плоскости, другую—фронталь плоскости, проходящую через точку встречи оси с плоскостью. Удобство пользоваться такими прямыми вытекает из того соображения, что прямые, лежащие в плоскостях, перпендикулярных к оси вращения, остаются в тех же плоскостях и после вращения.

§ 107. Пусть требуется плоскость $P\alpha P'$ [*черт. 114*] повернуть на угол α около вертикальной оси $(o,o'z')$. Проведем через горизонтальную проекцию o оси горизонталь $(ov,o'v')$ и найдем таким образом точку (o,o') встречи оси с плоскостью [*§ 68*]. Затем, повернем след αP и горизонталь $(ov,o'v')$ около оси на угол α по способу *§ 105*, для чего из o опустим перпендикуляр od на αP и при o построим угол $dod_1 = \alpha$; касательная $\alpha_1 P_1$ к окружности dd_1 в точке d_1



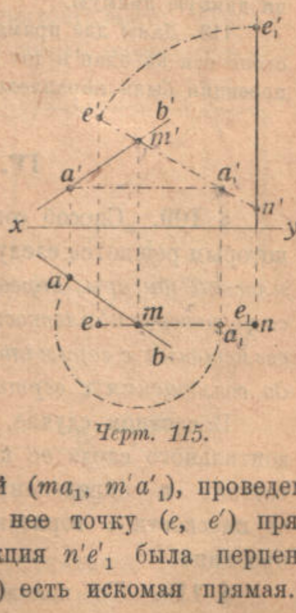
Черт. 114.

есть горизонтальный след плоскости $P\alpha P'$ после вращения. Горизонталь же OV после вращения останется параллельною следу $\alpha_1 P_1$ и будет проходить через точку (o,o'); следовательно она будет проектироваться по прямым ov_1, $o'v'_1$ и будет иметь вертикальный след в точке (v_1,v'_1). А потому, соединяя α_1 с v'_1, найдем вертикальный след $\alpha_1 P'_1$ плоскости $P\alpha P'$ после вращения. Плоскость $P_1\alpha_1 P'_1$ есть искомая.

§ 108. Задача. *Повернуть прямую в положение, перпендикулярное к одной из плоскостей проекций,* напр., к горизонтальной.

Решение задачи достигается двумя последовательными вращениями около двух прилично выбранных осей; именно, повернем сначала данную прямую в положение, параллельное вертикальной плоскости проекций, затем, вторичным вращением, приведем прямую из последнего положения в положение, перпендикулярное к горизонтальной плоскости проекций. Чтобы осуществить эти два вращения, должно выбрать приличным образом оси вращения, для чего заметим, что в случае осей, перпендикулярных к плоскостям проекций, мы можем придавать произвольное направление той проекции прямой, к которой ось перпендикулярна. На этом основании первое вращение можно осуществить при помощи вертикальной оси, ибо горизонтальную проекцию прямой должно сделать параллельною оси xy; второе вращение можно осуществить при помощи горизонтальной оси, ибо вертикальную проекцию прямой должно сделать перпендикулярною к оси xy. Наиболее простое построение получается, когда оси проходят через точки, взятые на прямой

Пусть [*черт. 115*] (ab, $a'b'$)—данная прямая. Проведем через какую либо точку прямой AB, напр., точку (m, m'), вертикальную ось и около нее повернем точку (a, a') так, чтобы горизонтальная проекция ma_1 прямой после вращения стала параллельной оси xy. По a_1 определим a'_1. Прямая (ma_1, $m'a'_1$)—параллельна вертикальной плоскости. Затем, через какую-либо точку (n, n'), взятую на прямой (ma_1, $m'a'_1$), проведем горизонтальную ось и повернем около нее точку (e, e') прямой AM так, чтобы вертикальная проекция $n'e'_1$ была перпендикулярна к оси xy. Прямая (ne_1, $n'e'_1$) есть искомая прямая.



Черт. 115.

Задачи.

105. Повернуть точку около оси, перпендикулярной к горизонтальной плоскости проекций, так, чтобы она совместилась с плоскостью, проходящей через ось вращения и параллельной вертикальной плоскости проекций.

106. Повернуть точку около вертикальной оси так, чтобы она совпала с данной горизонтально-проектирующею плоскостью.

107. Данную точку повернуть около оси, перпендикулярной к одной из плоскостей проекций, так, чтобы она совместилась с данною плоскостью.

108. Данную плоскость повернуть около оси, перпендикулярной к одной из плоскостей проекций, так, чтобы она стала параллельной оси проекций.

109. Повернуть точку около оси, лежащей в горизонтальной плоскости проекций, так, чтобы ее расстояние от горизонтальной плоскости было равно данной величине.

110. Повернуть точку около прямой, лежащей в вертикальной плоскости, так, чтобы точка находилась от вертикальной плоскости на данном расстоянии.

111. Данную плоскость повернуть около вертикальной оси так, чтобы она прошла в новом положении через данную точку.

112. Даны: прямая A, вертикальная ось и точка m на горизонтальной плоскости проекций; найти на вертикальной плоскости такую точку m', чтобы точка (m, m') посредством вращения около данной оси пришла на данную прямую.

113. Даны две прямые и вертикальная ось; повернуть эти прямые около оси на один и тот же угол, но так, чтобы новые их вертикальные проекции были параллельны между собою.

IV. Способ совмещения.

§ 109. Способ совмещения имеет целью дать правила, по которым решается следующая общая задача: *по данным проекциям плоской фигуры определить положение, которое она примет, если повернем плоскость фигуры или около горизонтали до совмещения с горизонтальной плоскостью, или около фронтали до совмещения с вертикальною (фронтальною) плоскостью.*

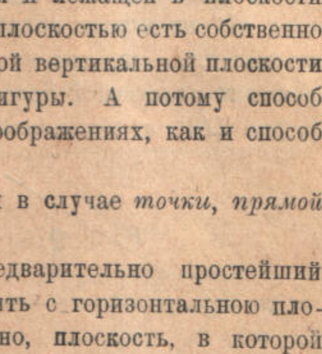
В частном случае, когда фигура вращается или около горизонтального следа ее плоскости, или около вертикального, задача состоит в определении положения фигуры при совмещении ее плоскости с горизонтальной или вертикальной плоскостями проекций.

§ 110. То положение, которое примет фигура, когда ее плоскость совмещена с горизонтальной или вертикальной плоскостью, называется *совмещением фигуры* и обозначается теми же буквами, как и проекция фигуры на плоскости, с которою совмещена ее плоскость, но с прибавлением к ним знаков внизу; так, при совмещении фигуры ABC с плоскостью горизонтальною, совмещение ее должно обозначить $a_1b_1c_1$, а с вертикальною—$a'_1b'_1c'_1$.

§ 111. Способ совмещения можно рассматривать как частный случай способа вращения: ибо совмещение с горизонтальной плоскостью есть собственно вращение фигуры около оси, параллельной горизонтальной плоскости проекции и лежащей в плоскости фигуры; а совмещение с вертикальной плоскостью есть собственно вращение фигуры около оси, параллельной вертикальной плоскости проекции и лежащей в плоскости фигуры. А потому способ совмещения основывается на тех же соображениях, как и способ вращения.

Рассмотрим решение общей задачи в случае *точки*, *прямой* и *плоскости*.

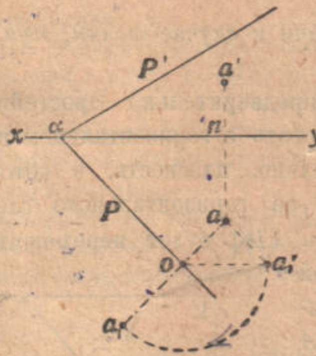
§ 112. Точка. Рассмотрим предварительно простейший случай, когда требуется точку совместить с горизонтальною плоскостью проекций и когда, следовательно, плоскость, в которой лежит точка, должно вращать около ее горизонтального следа. При таком вращении точка A [*черт. 116*] будет перемещаться в плоскости $R\beta R'$, перпендикулярной к оси вращения αP, по дуге окружности, описанной из o радиусом oA [*§ 101*], и, в момент совмещения плоскости P с горизонтальной плоскостью проекций, займет положение на следе $R\beta$ на расстоянии от центра вращения o, равном радиусу вращения. Радиус же вращения, как легко видеть из чертежа, есть гипотенуза прямоугольного треугольника Aoa, катеты которого суть: Aa расстояние точки от горизонтальной плоскости проекции, равное [*§ 16*] $a'n$, т.-е. расстоянию вертикальной проекции a' от оси xy (от вертикальной проекции оси вращения) и ao—расстояние горизонтальной проекции точки от оси вращения (от горизонтальной проекции оси вращения). Отсюда заключаем, что для построения совмещения точки A с горизонтальной плоскостью проекций по данным проекциям точки и горизонтальному следу αP плоскости следует [*черт. 117*]:



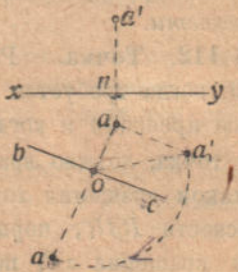
Черт. 116.

из горизонтальной проекции a опустить перпендикуляр aa_1 на ось вращения αP, и на oa, как на катете, построить прямоугольный треугольник aoa'_1 с катетом $aa'_1 = na'$; затем, гипотенузу oa'_1 этого треугольника отложить на перпендикуляре ao от точки o до точки a_1. Точка a_1 есть искомое совмещение точки A.

§ 113. Из предыдущего чертежа видно, что вертикальный след $\alpha P'$ не играет никакой роли в рассмотренном построении совмещения, и потому предыдущее построение представляет решение следующей более общей задачи. *Даны прямая* (bc, xy) [*черт. 118*] *в горизонтальной плоскости проекций и точка*

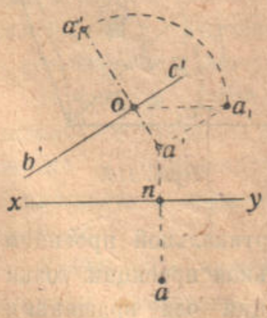


Черт. 117.



Черт. 118.

(a, a'), *найти совмещение точки с горизонтальною плоскостью проекций, когда данная прямая служит осью вращения.*

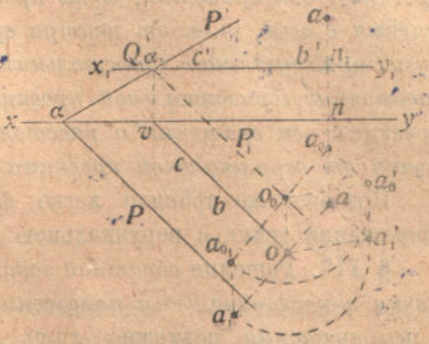


Черт. 119.

§ 114. Основываясь на тех же соображениях, легко построить совмещение точки с вертикальною плоскостью проекций, когда прямая ($c'b'$,xy) (*черт. 119*), служащая осью вращения, лежит в вертикальной плоскости. Для этого достаточно из вертикальной проекции a' опустить перпендикуляр на $b'c'$ и на катете oa' построить прямоугольный треугольник $oa'a_1$ с катетом $a'a_1 = na$; затем гипотенузу этого треугольника отложить на перпендикуляре $a'o$ от точки o до точки a'_1. Точка a'_1 есть искомое совмещение точки A.

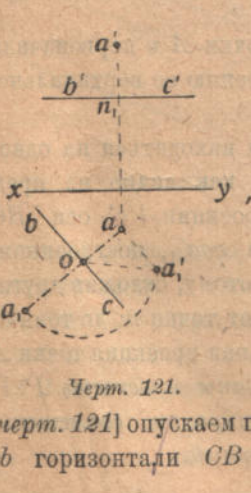
§ 115. Рассмотрим более общий случай, когда требуется совместить точку (a, a') [*черт. 120*] с горизонтальной плоскостью Q', вращая плоскость $P\alpha P'$, в которой лежит точка, около горизонтали $(bc, b'c')$.

Для построения совмещения точки A примем плоскость Q' за новую горизонтальную плоскость проекций и определим на ней, по правилу [*§ 94*], новую горизонтальную проекцию a_0 точки A; для чего отложить на перпендикуляре из a' к оси x_1y_1 длину $n_1a_0 = na$, затем определим новый горизонтальный след [*§ 98*] α_1P_1 плоскости $P\alpha P'$, и построим совмещение точки (a_0, a') с плоскостью Q'. С этой целью [*§ 112*] из a_0 опустим перпендикуляр o_0a_0 на след α_1P_1 и на катете a_0o_0 построим прямоугольн. треугольник $a_0o_0a'_0$ с катетом $a_0a'_0 = n_1a'$; гипотенузу $o_0a'_0$ этого треугольника отложим на a_0o_0 от точки o_0 до a_{01}. Точка a_{01} есть совмещение точки (a, a') с плоскостью Q', построенное на плоскости Q'.



Черт. 120.

Чтобы перейти к построению на данной горизонтальной плоскости проекций, остается найти проекции всех точек предыдущего построения на H; для чего достаточно перенести точки a_0, o_0, a_{01}. a'_0 в a, o, a_1, a_1' по перпендикуляру к xy на расстояние, равное a_0a. Таким образом найдем, что a_1 есть искомое совмещение точки (a, a') с плоскостью Q'. Отсюда, замечая, что фигура, построенная на H, равна фигуре, построенной на плоскости Q', заключаем, что построение совмещения точки с горизонтальною плоскостью Q' может быть выполнено на эпюре следующим образом: из горизонтальной проекции a данной точки [*черт. 121*] опускаем перпендикуляр ao на горизонтальную проекцию cb горизонтали CB и на катете ao строим прямоугольный тре-



Черт. 121.

угольник с катетом aa'_1, равным n_1a', т.-е. расстоянию вертикальной проекции a' от вертикальной проекции $b'c'$ оси вращения; наконец, гипотенузу этого треугольника откладываем от o до a_1 на перпендикуляре ao.

§ 116. Из предыдущих случаев [*§§ 112, 115*] можно вывести следующее правило для построения совмещения точки с горизонтальною плоскостью. *Из горизонтальной проекции точки должно опустить перпендикуляр на горизонтальную проекцию оси вращения, и на продолжении его от точки пересечения с осью, т.-е. от центра вращения, отложить гипотенузу прямоугольного треугольника, катеты которого суть: расстояние горизонтальной проекции точки от горизонтальной проекции оси вращения и расстояние вертикальной проекции точки от вертикальной проекции оси вращения.*

Подобное же правило легко формулировать и для случая совмещения точки с вертикальною плоскостью.

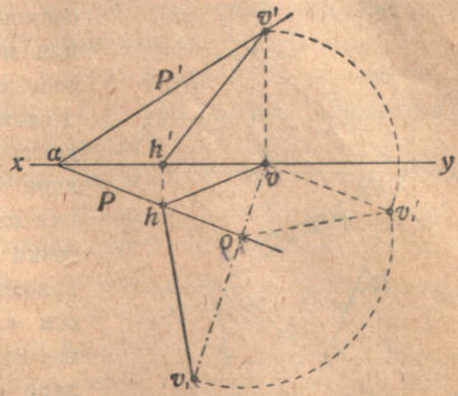
§ 117. Решение *обратной задачи*, т.-е. определение проекций *точки в первоначальном положении по данному ее совмещению и оси вращения* возможно лишь в том случае, когда даны указания относительно положения точки в пространстве, напр., когда дана, в случае совмещения с горизонтальною плоскостью, горизонтальная проекция точки, лежащая притом на одном перпендикуляре к оси вращения. В самом деле, пусть [*черт. 121*] BC— данная горизонтальная ось, a_1—совмещение точки A с горизонтальною плоскостью, a—горизонтальная проекция точки A, лежащая на перпендикуляре a_1o к оси bc.

В этом случае построение проекций точки A в первоначальном положении сводится собственно к построению ее вертикальной проекции

Вертикальная проекция точки A должна находиться на одном перпендикуляре с a к оси проекций xy и, как видно из предыдущего, на расстоянии от вертикальной проекции $b'c'$ оси BC, равном катету прямоугольного треугольника aoa'_1, построенному по данным: катету oa и гипотенузе oa_1; а потому, отложив другой катет aa'_1 на перпендикуляре an_1 к оси xy от точки n_1 до точк a', найдем, что точка a' есть искомая вертикальная проекция точки A.

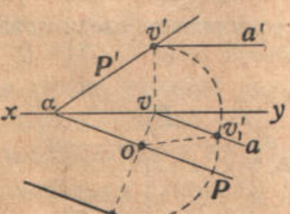
§ 118. Прямая. *Пусть* [*черт. 122*] *даны плоскость PaP' и в ней прямая (hv, $h'v'$); требуется построить совмещение прямой с горизонтальной плоскостью проекций.*

Для решения вопроса достаточно найти совмещение двух каких-либо точек прямой, но удобнее совмещать следы прямой, ибо положение горизонтального следа, как лежащего на оси вращения, не изменится при совмещении, и потому достаточно найти лишь совмещение вертикального следа; для чего, согласно правилу § *116*, опустим из v перпендикуляр на αP и построим прямоугольный треугольник ovv'_1, в котором катет $vv'_1 = vv'$, затем гипотенузу ov'_1 этого треугольника отложим на vo от точки o до точки v_1. Точка v_1 есть совмещение вертикального следа, и потому прямая hv_1 есть искомое совмещение данной прямой.



Черт. 122.

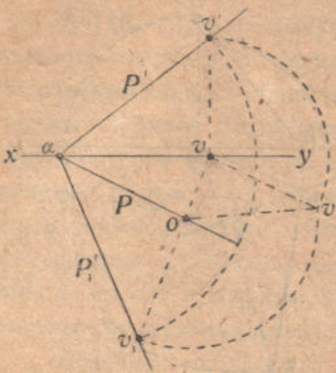
§ 119. В том случае, когда данная прямая есть горизонталь $(va, v'a')$ плоскости [*черт. 123*], достаточно найти совмещение одной ее точки, ибо параллельность горизонтали следу αP плоскости не изменится при совмещении; а потому, для решения задачи, достаточно найти совмещение v_1 вертикального следа горизонтали и чрез v_1 провести прямую v_1a_1, параллельно следу αP плоскости. Искомое совмещение горизонтали есть прямая v_1a_1.



Черт. 123.

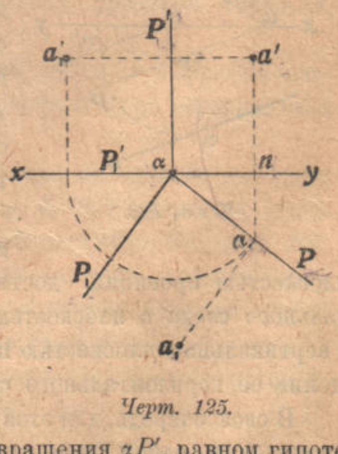
§ 120. Плоскость. Чтобы совместить плоскость с горизонтальною плоскостью проекций, достаточно найти совмещение ее вертикального следа с плоскостью H, и чтобы совместить плоскость с вертикальною плоскостью проекций, достаточно построить совмещение ее горизонтального следа с плоскостью V.

В свою очередь, для этой последней цели достаточно построить совмещение одной лишь точки совмещаемого следа, ибо другая его точка — α, как лежащая на оси вращения, не изменит своего положения. Так, если требуется совместить плоскость $P\alpha P'$ [*черт. 124*] с горизонтальной плоскостью проекций, то достаточно совместить одну точку, напр. (v, v'), вертикального следа. Такое совмещение может быть построено или по правилу в *§ 116*, или на основании следующих соображений. Искомое совмещение точки V должно находиться на перпендикуляре vo к следу αP и на расстоянии $\alpha v'$ от точки α, ибо расстояние точки v' от α не изменяется при вращении плоскости $P\alpha P'$ около оси αP. А потому искомое совмещение, находясь на перпендикуляре ov, должно в то же время находиться и на дуге, описанной из α радиусом $\alpha v'$, т.-е. в точке их пересечения v_1. Следовательно, искомое совмещение вертикального следа есть прямая $\alpha P'_1$.



Черт. 124.

§ 121. В частном случае, когда данная плоскость будет одна из проектирующих, напр., горизонтально-проектирующая $P\alpha P'$, построение совмещения вертикального следа значительно упрощается, ибо вперед можно видеть, что совмещение следа должно составлять прямой угол со следом, играющим роль оси вращения. Так, при совмещении горизонтально-проектирующей плоскости $P\alpha P'$ [*черт. 125*] с горизонтальной плоскостью проекций, совмещение αP_1 вертикального следа будет перпендикулярно к αP. При этом точка (a,a'), принадлежащая плоскости $P\alpha P'$, совместится в a_1 на расстоянии aa_1 от оси αP, равном na'. При совмещении той же плоскости с вертикальной плоскостью проекций, след αP совместится с осью xy, а точка A с a'_1 на расстоянии от оси вращения $\alpha P'$, равном гипотенузе αa прямоугольного треугольника ana [*§ 116*]. Подобным же

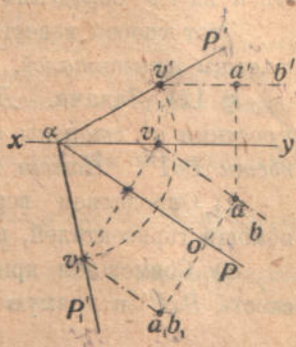


Черт. 125.

образом легко построить и совмещение вертикально-проектирующей плоскости.

§ 122. На основании *§§ 119* и *120* можно дать иной способ построения совмещений точек, способ, известный под именем *совмещения точек при помощи горизонталей.*

Пусть [*черт. 126*] $P\alpha P'$ — данная плоскость и A — взятая на ней при помощи горизонтали (vb, $v'b'$) точка. Совместим как вертикальный след $\alpha P'$ плоскости, так и горизонталь VB с горизонтальною плоскостью проекций при помощи точки (v, v'). Пусть [*§ 120*] $\alpha P'_1$, — совмещение следа $\alpha P'$; $v_1 b_1$ — совмещение горизонтали [*§ 119*].



Черт. 126.

В таком случае искомая точка должна находиться одновременно и на прямой $v_1 b_1$, и на перпендикуляре ao к следу αP. Следовательно, совмещение точки A должно находиться в точке пересечения прямых ao и $v_1 b_1$, т.-е. в точке a_1.

Примечание. Этот способ применим в том случае, когда дан вертикальный след и когда точка α помещается в пределах эпюра [*§ 113*].

§ 123. Способ совмещения точек при помощи горизонталей дает весьма удобный прием для решения обратной задачи, т.-е. для восстановления точек в первоначальное положение по данным их совмещениям и по совмещению вертикального следа плоскости. В самом деле, пусть $\alpha P'_1$ [*черт. 126*] — совмещение вертикального следа, a_1 — совмещение точки. Для построения проекций точки A восстановим прежде всего вертикальный след плоскости и горизонталь точки A. Для чего чрез совмещение a_1, параллельно следу αP, проведем прямую $a_1 v_1$, — совмещение горизонтали точки A, и найдем точку v_1, в которой она пересекает $\alpha P'_1$, и которая потому представит совмещение вертикального следа горизонтали; затем определим проекции v_1. Горизонтальная проекция следа v_1 должна находиться и на перпендикуляре к αP, и на оси xy, т.-е. в точке их пересечения v, вертикальная же v' — на перпендикуляре к оси xy и на расстоянии αv_1 от точки α, т.-е. в точке пересечения дуги $v_1 v'$ и перпендикуляра vv'. Зная таким образом проекции v и v' вертикального следа горизонтали, легко построим первоначальное положение как вертикального следа $\alpha P'$ плоскости, так и проекций vb, $v'b'$ горизонтали точки A [*§ 56*]. Затем переходим к построению проекций точки A. Горизонтальная проекция должна одновременно находиться и на перпендикуляре a_1o к оси вращения αP и на горизонтальной проекции vb горизонтали, т.-е. в точке их пересечения a. По a на $v'b'$ определим вертикальную проекцию a' точки A.

Этот способ известен под именем *восстановления точек при помощи горизонталей.*

§ 124. Задача. *Даны плоскость $P\alpha P'$ и горизонтальная проекция ab стороны квадрата $ABCD$, расположенного в плоскости $P\alpha P'$. Найти проекции квадрата* [*черт. 127*].

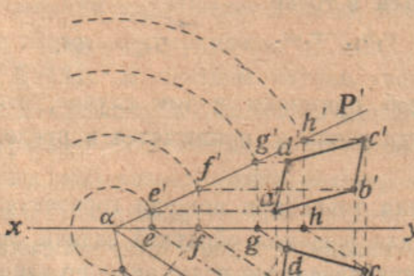
1) Определяем вертикальную проекцию стороны AB при помощи горизонталей, проходящих чрез точки A и B [*§ 68*].

2) Совмещаем при помощи горизонталей AE и BF плоскость $P\alpha P'$ и прямую AB с горизонтальною плоскостью проекций [*§ 122*]. Совмещение a_1b_1 есть истинная величина стороны квадрата.

3) Строим на a_1b_1 квадрат $a_1b_1c_1d_1$, который есть не что иное, как совмещение искомого квадрата.

4) Восстановляем точки d_1 и c_1 при помощи горизонталей DG и CH [*§ 123*] и находим проекции их (d, d') и (c, c').

5) Соединяем прямыми точки a, b, c, d и точки a', b', c', d'. Параллелограммы $abcd$ и $a'b'c'd'$ суть проекции искомого квадрата.



Черт. 127.

Задачи.

114. В вертикально-проектирующей плоскости даны три точки. Найти истинную величину треугольника, образованного ими.

115. Определить элементы треугольника по данным его проекциям.

116. Дана прямая и точка. Требуется провести чрез точку прямую, которая пересекалась бы с данною прямою и составляла с ней данный угол.

117. Определить на данной прямой точку, которая находилась бы на данном расстоянии от точки, данной вне прямой.

118. Чрез точку, данную на следе плоскости, провести в плоскости прямую, которая с отрезками следов образовала бы равнобедренный треугольник.

119. Даны две параллельные прямые и точка, лежащая в их плоскости. Провести чрез эту точку прямую так, чтобы отрезок ее между параллельными прямыми имел данную величину.

120. Даны: плоскость, прямая, ей параллельная, и точка. Провести чрез данную точку прямую так, чтобы она встречала данную прямую и чтобы отрезок ее между точкой и плоскостью имел данную величину.

121. По данным сторонам построить треугольник в вертикально-проектирующей плоскости.

122. Построить проекции четыреугольника в плоскости: a) проходящей чрез ось и точку, b) параллельной оси.

123. Зная сторону правильного шестиугольника и горизонтально-проектирующую плоскость, в которой он расположен, построить проекции этого шестиугольника.

124. Даны: горизонтальный след плоскости, совмещение точки принадлежащей этой плоскости, и расстояние точки от горизонтальной плоскости проекций. Найти проекции точки и вертикальный след плоскости.

125. Даны: две точки и плоскость; найти в плоскости точку, отстоящую от данных точек на данные расстояния.

126. Построить геометрическое место точек, равноотстоящих от трех данных точек.

127. Найти на данной плоскости точку, равноотстоящую от трех данных точек.

128. Даны две точки A и B и плоскость P. Построить равнобедренный треугольник с основанием AB и данной высотою, притом так, чтобы вершина треугольника лежала на данной плоскости.

129. Даны три точки, найти в их плоскости точку, которая отстояла бы от двух из них на данные расстояния.

ГЛАВА IV.

ОБ ЭЛЕМЕНТАХ ФИГУР.

I. Определения.

§ 125. Элементами фигуры называются, во-первых, стороны фигуры, т.-е. отрезки прямых, которыми ограничена или самая фигура, или грани ее плоскостей; во-вторых, углы, которые составлены или сторонами, или гранями фигуры.

Задача настоящей главы заключается в том, чтобы, не входя в рассмотрение самых фигур, дать способы построения истинной величины их элементов. В этом смысле указанная задача распадается на две: на построение *истинной величины расстояний* и на построение *истинной величины углов* между различного рода геометрическими элементами (прямыми плоскостями), заданными своими проекциями. Та и другая задачи решаются при помощи способов, рассмотренных нами в предшествующей главе.

II. О расстояниях.

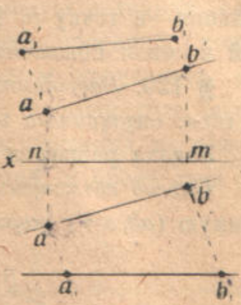
§ 126. Относящиеся сюда задачи могут быть сгруппированы в следующие семь случаев. Найти истинную величину расстояния между: 1) двумя точками; 2) между точкой и прямой; 3) между двумя параллельными прямыми; 4) между двумя скрещивающимися прямыми; 5) между точкою и плоскостью; 6) между прямой и параллельною ей плоскостью; 7) между двумя параллельными плоскостями.

§ 127. *Расстояние между двумя точками A и B есть длина отрезка прямой AB.*

Длı определения истинной величины отрезка AB можно пользоваться двумя способами — или способом совмещения, или способом вращения.

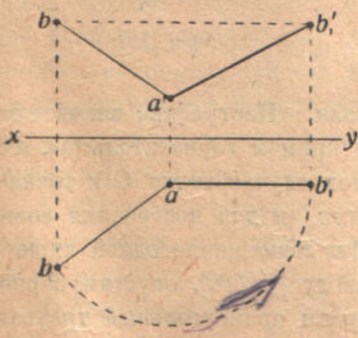
Способ совмещения. Совместим горизонтально-проектирующую плоскость прямой AB [*черт. 128*] с горизонтальной плоскостью проекций, вращая ее около горизонтального следа ab.

В данном случае радиусы вращений A и B равны их расстоянию от горизонтальной плоскости проекций, т.-е. равны $a'n$ и $b'm$ [*§ 121*], и потому совмещение a_1 точки A будет находиться на перпендикуляре к оси вращения ab на расстоянии $aa_1 = a'n$; совмещение точки B будет находиться в точке b_1, взятой на перпендикуляре к оси вращения на расстоянии $bb_1 = b'm$; a_1b_1 есть совмещение прямой AB и, следовательно, истинная величина расстояния между точками A и B.



Черт. 128.

§ 128. *Способ вращения.* Прямая, параллельная плоскости проекций, проектируется на эту последнюю в истинную величину; и потому, чтобы определить истинную величину отрезка прямой, достаточно повернуть его около прилично выбранной оси или в положение, параллельное вертикальной плоскости, или в положение, параллельное горизонтальной плоскости. В первом случае горизонтальная проекция прямой в новом ее положении должна быть параллельна оси, и потому вращение должно быть выполнено при помощи оси, перпендикулярной к горизонтальной плоскости проекций и, для простоты, проходящей через одну из данных точек, напр. (a, a') [*черт. 129*]. В таком случае точка A останется неподвижной, горизонтальная проекция точки B перейдет в b_1 на прямую, параллельную оси, а вертикальная b' — в точку b'_1 [*§ 102*]. Вертикальная проекция прямой $a'b'_1$ в новом ее положении и есть истинная величина расстояния между точками A и B.



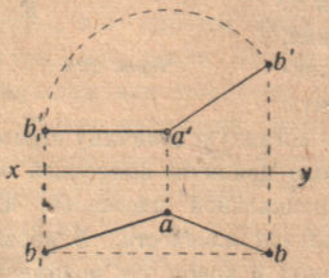
Черт. 129.

Во втором случае для приведения прямой в положение, параллельное горизонтальной плоскости, должно употребить ось, перпендикулярную к вертикальной плоскости проекций и проходящую через точку (a, a') [*черт. 130*], и вращать прямую до тех пор, пока вертикальная проекция ее в новом положении не станет параллельной оси xy. В этом случае точка (a, a') останется неподвижной. Вертикальная проекция точки b перейдет в b'_1 на прямую, параллельную xy, а горизонтальная—в точку b_1 [*§ 103*]. Горизонтальная проекция ab_1 прямой в новом положении есть истинная величина отрезка AB.

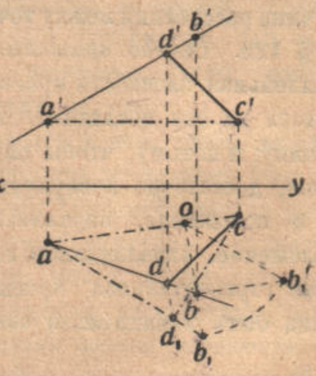
§ 129. *Расстояние точки от прямой есть длина перпендикуляра, опущенного из точки на прямую.*

Задача решается двумя способами.

Способ совмещения. Совместим плоскость, проходящую через прямую $(ab, a'b')$ [*черт. 131*] и точку (c, c'), с горизонтальной пло-



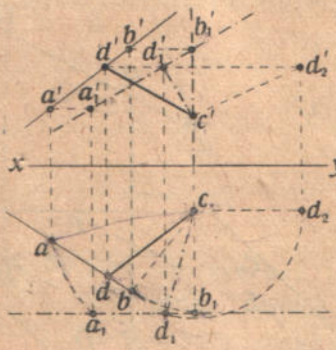
Черт. 130.



Черт 131.

скостью вращая ее около горизонтали. Построение значительно упрощается, если за ось вращения примем горизонталь $(ac, a'c')$, проходящую через точку C. В этом случае точка C и точка A прямой AB останутся неподвижными, и для построения совмещения прямой AB достаточно найти совмещение одной лишь ее точки, напр., B; для чего, по правилу [*§ 116*], опустим перпендикуляр bo на ось ac и на bo построим прямоугольный треугольник obb'_1, катет которого bb'_1 равен растоянию b' от $a'c'$; затем отложим гипотенузу ob'_1 этого треугольника на перпендикуляре ob от o до b_1; точка b_1 есть искомое совмещение; прямая же ab_1 — совмещение прямой AB А потому перпендикуляр cd_1, опущенный из c на прямую ab_1, и есть искомое расстояние точки C от прямой AB. Чтобы найти проекции перпендикуляра, достаточно найти проекции точки d_1, именно горизонтальную в точке пересечения перпендикуляра d_1d к оси ac с горизонтальною проекцией прямой ab [§ 117], а вертикальную—в d'. Прямые cd, $c'd'$—суть проекции искомого перпендикуляра.

§ 130. *Способ вращения.* На основании теоремы § 45, по которой прямой угол проектируется в истинную величину, если одна из его сторон параллельна плоскости проекций, можно построить проекции перпендикуляра и затем определить его истинную величину по способу вращения. В самом деле, через данную точку (c,c') [*черт. 132*] проведем ось вращения, перпендикулярную к горизонтальной плоскости проекций, и около этой оси повернем прямую AB в положение $(a_1b_1, a'_1b'_1)$ [§ 105], параллельное вертикальной плоскости проекций, т.-е. в положение, в котором горизонтальная проекция ее a_1b_1 параллельна оси xy. В таком случае, опустив перпендикуляр $c'd'_1$ из (c,c') на новую вертикальную проекцию $a'_1b'_1$, заметим, что $c'd'_1$ есть вертикальная проекция искомого перпендикуляра, а cd_1 — горизонтальная. Стало-быть, для решения задачи остается определить истинную величину прямой $(cd_1, c'd'_1)$ по одному из рассмотренных способов, например, приводя ее в положение $(cd_2, c'd'_2)$, параллельное вертикальной плоскости проекций [§ 128]. Прямая $c'd'_2$ есть искомое расстояние. Наконец, $(cd, c'd')$ есть проекция перпендикуляра в первоначальном положении прямой.



Черт. 132.

§ 131. Для определения расстояния между двумя параллельными прямыми, достаточно найти расстояние между точкой, взятой на одной из прямых, и другою прямой [§ 129].

§ 132. Расстояние между двумя скрещивающимися прямыми строится на эпюре на основании следующего определения его в элементарной геометрии.

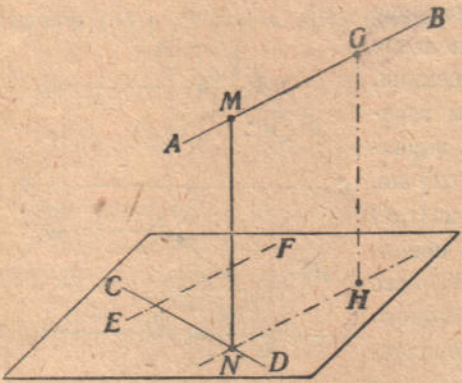
Пусть [*черт. 133*] AB и CD — две скрещивающиеся прямые Проведем через какую-либо точку E прямой CD прямую EF, параллельную AB, и на плоскость P, определенную двумя пересекающимися прямыми CD и EF, опустим перпендикуляр GH

из какой-либо точки G прямой AB. Затем через основание H перпендикуляра GH проведем прямую HN, параллельно EF или AB, и из точки N, встречи ее с прямой CD, прямую NM параллельно GH до встречи с AB. Прямая MN есть искомое расстояние.

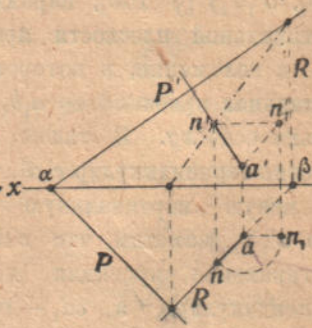
§ 133. *Расстояние точки от плоскости измеряется длиною перпендикуляра, опущенного из точки на данную плоскость.*

Рассмотрим два случая.

Плоскость дана следами [*черт. 134*]. Пусть $P\alpha P'$ и (a, a') — данные плоскость и точка. Опустим из A перпендикуляр $(ab, a'b')$



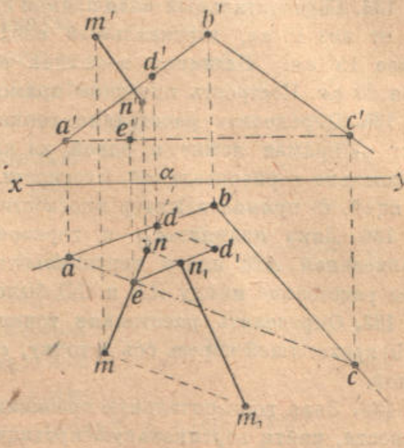
Черт. 133.



Черт. 134.

на плоскость $P\alpha P'$ [*§ 59*] и найдем точку его встречи (n, n') при помощи горизонтально - проектирующей плоскости [*§ 75*]. В таком случае искомое расстояние определится расстоянием между точками A и N, истинная величина которого, определенная по способу вращения [*§ 128*], равна n'_1a'.

§ 134. *Плоскость дана пересекающимися прямыми.* Пусть [*черт 135*] AB и BC — данные прямые и (m, m') — данная точка. Очевидно, перпендикуляр, измеряющий расстояние точки M от плоскости ABC, лежит в горизонтально - проектирующей плоскости R, проходящей через данную точку перпендикулярно к данной плоскости ABC, и перпендикулярен к сечению этих двух плоскостей; но горизонтальный след плоскости R по *§ 88* должен проходить через точку m и быть перпендикулярным к следу плоскости ABC, или, что то же, к ее горизонтали. А потому проведем через точку A прямой AB горизонталь $(ac, a'c')$ данной плоскости, а через m — горизонтальный след $m\alpha$ горизонтально-проектирующей плоскости R, перпендикулярно к ac. Плоскость R пересечет данные прямые в точках (d, d') и (e, e') [*§ 76*], а следовательно, данную плоскость — по прямой DE. Для определения основания искомого перпендикуляра и истинной его величины, совместим точки (d, d'), (e, e') и (m, m'), лежащие в плоскости R, с горизонтальною плоскостью, приняв за ось вращения горизонталь $(m\alpha, a'c')$ [*§ 116*]; точка D перейдет в d_1; M — в m_1, E, как лежащая на оси, не изменит своего положения; следовательно, d_1e есть совмещение прямой DE, и потому перпендикуляр m_1n_1 из m_1 на d_1e есть совмещение перпендикуляра из точки M на плоскость ABC. Чтобы найти проекции его, остается по совмещению n_1 найти первоначальное положение точки N в $(n'n')$ [*§ 117*]; тогда mn, $m'n'$ суть проекции искомого перпендикуляра.



Черт. 135.

§ 135. Для определения расстояния прямой от плоскости, ей параллельной, достаточно найти расстояние какой-либо точки, взятой на прямой, от данной плоскости [*§ 133*].

§ 136. Для определения расстояния двух параллельных плоскостей достаточно найти расстояние какой-либо точки, взятой на одной из плоскостей, от другой [*§§ 133, 134*].

Задачи.

130. Найти расстояние между двумя точками, взятыми в двух различных углах.

131. Отложить на данной прямой от данной точки отрезок данной длины.

132. Разделить отрезок прямой a) на равные части, b) в среднем и крайнем отношении.

133. Зная расстояние двух точек, их горизонтальные проекции и вертикальную проекцию одной из них, найти вертикальную проекцию другой.

134. Горизонтальный след прямой находится под осью и на расстоянии от нее 10 *см*, вертикальный след — над осью и на расстоянии от нее 15 *см*. Истинная величина отрезка прямой между следами равна 20 *см*. Построить проекции прямой.

135. Определить расстояние точки от прямой в следующих случаях: a) прямая лежит в одной из плоскостей проекций, b) прямая параллельна горизонтальной плоскости, c) прямая совпадает с осью проекций, d) прямая лежит в плоскости профиля.

136. Дана прямая AB и горизонтальная проекция прямой CD, параллельной AB; найти вертикальную проекцию CD под условием, чтобы расстояние между AB и CD было равно данной величине.

137. Определить расстояние точки от плоскости: a) параллельной оси, b) проходящей черезь ось и точку, c) имеющей свои следы на одной прямой.

138. Зная горизонтальную проекцию точки и расстояние ее от данной плоскости, найти вертикальную проекцию точки.

139. Определить расстояние прямой от плоскости, ей параллельной, если плоскость a) параллельна оси, b) проходит через ось и точку.

140. Зная горизонтальный след плоскости, параллельной оси, и ее расстояние от оси, построить вертикальный след.

141. Провести на данном расстоянии плоскость, параллельную данной, в случае, если данная плоскость: a) проходит через ось, b) параллельна оси.

142. Дана плоскость и прямая: найти на прямой точку, отстоящую от плоскости на данное расстояние.

143. Найти кратчайшее расстояние прямой от оси.

144. Найти кратчайшее расстояние прямой, лежащей в горизонтальной плоскости, от прямой, лежащей в вертикальной плоскости.

145. Найти прямую, находящуюся на данных расстояниях от двух данных плоскостей.

146. Даны: горизонтальный след плоскости, проекции точки и расстояние точки от плоскости. Найти другой след плоскости.

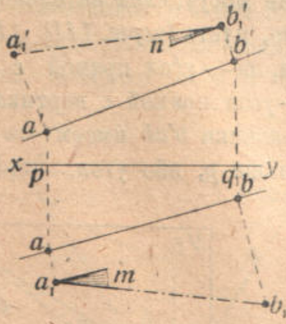
III. Об углах между прямыми.

§ 137. Задачи относительно углов сводятся к следующим четырем: определить угол: 1) между двумя прямыми, 2) между прямою и плоскостью, 3) между двумя плоскостями, 4) между тремя плоскостями.

§ 138. *Углом между двумя какими-либо прямыми называется угол*, образованный двумя параллельными им прямыми, проведенными чрез одну и ту же точку пространства.

проекций. AB перейдет в a_1b_1 [*§ 121*] [*черт. 139*], и угол m прямой a_1b_1 с ab или с прямой, ей параллельной, есть искомый.

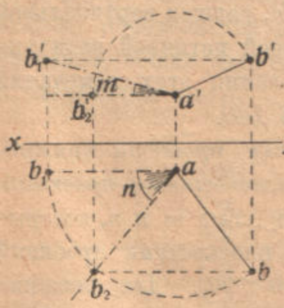
Подобным же образом, совмещая плоскость вертикально-проектирующую прямую с вертикальной плоскостью проекций, найдем, что AB перейдет в $a'_1b'_1$ и что, следовательно, угол прямой с вертикальною плоскостью проекций равен углу n между прямыми $a_1'b'_1$ и $a'b'$.



Черт. 139.

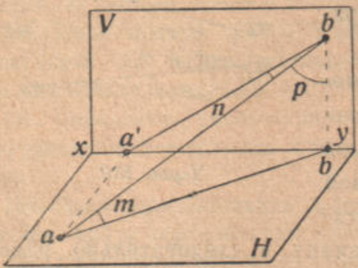
§ 142. *Способ вращения.* Заметим предварительно, что в случае прямой, параллельной вертикальной плоскости, угол ее с горизонтальной плоскостью проектируется на вертикальную плоскость в истинную величину, и, следовательно, равен углу, образованному вертикальной проекцией прямой с осью, или с прямой, ей параллельной. В случае прямой, параллельной горизонтальной плоскости, угол ее с вертикальной плоскостью проекций проектируется на горизонтальную плоскость в истинную величину, и, следовательно, равен углу, образованному горизонтальной проекцией прямой с осью проекций.

На этом основании повернем прямую AB [*черт. 140*] около оси, проходящей через точку A и перпендикулярной к горизонтальной плоскости проекций, в положение, параллельное вертикальной плоскости [*§ 128*]. AB перейдет в $(ab_1, a'b'_1)$ и угол прямой AB с горизонтальною плоскостью проекций будет равен углу $b'_1a'b'_2 = m$. Подобным же образом, повернув прямую AB около оси, проходящей через точку A и перпендикулярной к вертикальной плоскости проекций, в положение параллельное горизонтальной плоскости проекций, найдем, что прямая AB перейдет в $(ab_2, a'b'_2)$, и что угол AB с вертикальной плоскостью проекций равен углу $b_1ab_2 = n$.



Черт. 140.

§ 143. Углы m и n, которые прямая AB образует с плоскостями проекций, могут изменяться лишь в некоторых пределах и не могут, следовательно, иметь произвольную величину. В самом деле, пусть [*черт. 141*] AB данная прямая, ab и $a'b'$—ее проекции, m — угол прямой с горизонтальной плоскостью проекций, n—угол прямой с вертикальной плоскостью проекций. Из треугольника $b'ab$ имеем $m+p=90°$; с другой стороны, угол n меньше p, ибо угол, образованный прямою с своей проекцией на плоскости, меньше всякого другого угла, образованного той же прямою со всякою другою прямою, проведенною чрез ее основание в той же плоскости. И потому из $m+p=90°$ и $n<p$ находим условие $m+n<90°$, которому должны удовлетворять углы, составляемые прямою с плоскостями проекций.



Черт. 141.

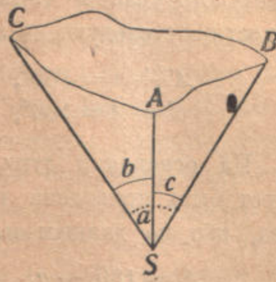
§ 144. Кроме того, из рассмотрения того же чертежа мы замечаем, с одной стороны, что угол m есть острый угол прямоугольного треугольника $b'ab$, заключенный между катетом ab, равным горизонтальной проекции прямой, и гипотенузой $b'a$, равной истинной величине прямой между следами; с другой стороны, что угол n есть острый угол прямоугольного треугольника $ab'a'$, заключенный между катетом $a'b'$, равным вертикальной проекции прямой, и гипотенузой ab', равной истинной величине отрезка прямой между следами. На основании этих замечаний легко решается задача, обратная задаче *§ 140*.

§ 145. **Задача.** *Через данную точку провести прямую, которая составляла бы данные углы с плоскостями проекций.*

Пусть [*черт. 142*] даны: точка (k, k') и углы m и n, которые искомая прямая должна составлять с плоскостями проекций и которые удовлетворяют условию $m+n<90°$. Для решения задачи достаточно провести искомую прямую через какую-нибудь точку и затем через данную точку (k, k') провести прямую, параллельную найденной. С этой целью, в виду замечаний *§ 144*, возьмем точку (b, b') на вертикальной плоскости и 1) построим на вертикальной плоскости прямоугольный треугольник ba_1b'

VI. Построение трехгранного угла.

§ 151. Три плоскости [*черт. 147*], пересекаясь в одной точке, образуют трехгранный угол, который таким образом составляется из шести элементов—именно: из *трех плоских углов и трех двугранных углов.* Условимся обозначать плоские углы буквами a, b, c, а противолежащие им двугранные углы — соответственно буквами A, B и C.



Черт. 147.

Из геометрии известно, что плоские и двугранные углы только тогда образуют трехгранный угол, когда они удовлетворяют следующим условиям:

1) Каждый плоский угол меньше суммы двух других плоских углов, т.-е., напр. $a<b+c$.

2) Сумма плоских углов меньше четырех прямых углов, т.-е. $a+b+c<4d$.

3) Сумма двугранных углов больше двух прямых и меньше шести прямых, т. е. $6d>A+B+C>2d$.

4) Разность между суммою двух двугранных углов и третьим меньше двух прямых, т. е. $A+B+C<2d$.

§ 152. Из геометрии же известно, что трехгранный угол вполне определяется по трем данным элементам, и что, следовательно, общая задача о построении трехгранного угла сводится к следующим шести:

	Даны.	Требуется найти.
1-я	a, b, c	A, B, C
2-я	a, b, C	c, A, B
3-я	a, b, B	c, A, C
4-я	a, B, C	b, c, A
5-я	a, A, B	b, c, C
6-я	A, B, C	a, b, c

Но последние три задачи легко привести к первым трем при помощи так называемого дополнительного угла данного трехгранного. *Дополнительным углом* данного трехгранного называется трехгранный угол, составленный тремя перпендикулярами, опущенными из произвольной, взятой внутри данного угла, точки на его грани. Из способа образования дополнительного угла следует, что, если второй угол дополнителен к первому, то и обратно— первый дополнителен ко второму. Далее легко видеть, что между плоскими углами a', b', c' и двугранными углами A', B', C' дополнительного угла и теми же углами данного трехгранного угла существуют следующие замечательные соотношения:

$$A'+a=180^\circ,\quad B'+b=180^\circ,\quad C'+c=180^\circ,$$
$$a'+A=180^\circ,\quad b'+B=180^\circ,\quad c'+C=180^\circ.$$

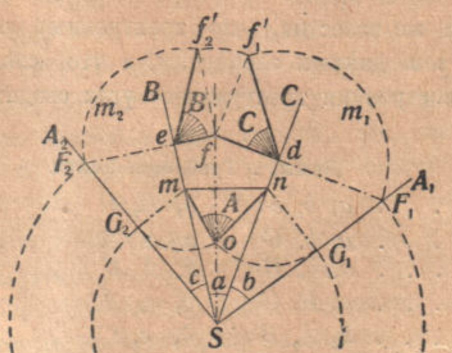
На основании этих соотношений четвертая, напр., задача может быть приведена ко второй в отношении дополнительного угла, ибо по данным a, B, C найдем:

$$A'=180^\circ-a,\quad b'=180^\circ-B,\quad c'=180^\circ-C,$$

т.-е. два плоских угла и один двугранный, между ними заключенный, угла дополнительного. На том же основании 6-я задача приводится к 1-й, а 5-я—к 3-й.

§ 153. Первая задача. *По трем плоским углам a, b и c построить трехгранный угол и определить его двугранные углы A, B и C.*

Примем за горизонтальную плоскость грани SBC [1]) [*черт. 148*] с углом a и допустим, что остальные грани $c=ASB$ и $b=CSA$, совмещенные с этой плоскостью, приняли положение $c=BSA_2$ и $b=CSA_1$; в таком случае прямые SA_2 и SA_1 суть совмещения одного и того же третьего ребра SA, а точки F_1 и F_2, равноудаленные от S, суть совмещения одной и той же точки F этого ребра. Построим проекции ребра SA; для чего восстановим



Черт. 148.

[1]) На чертежах ребра обозначены теми же буквами, что и соответствующие им двугранные углы, т.-е. буквами A, B и C.

грани c и b в первоначальное положение, вращая их около ребер SB и SC, и найдем проекции точки F. При восстановлении точки F_1 и F_2 будут перемещаться по окружностям в плоскостях, перпендикулярных к SB и SC, а их горизонтальные проекции— по следам F_2e и F_1d этих плоскостей [*§ 112*]. Отсюда заключаем, что горизонтальная проекция f точки F будет находиться в точке пересечения прямых F_2e и F_1d, и что, следовательно, горизонтальная проекция третьего ребра есть прямая Sf.

Чтобы найти расстояние точки F от горизонтальной плоскости [*§ 16*] и чтобы вместе с тем определить двугранные углы B и C, совместим плоскости, в которых перемещаются точки F_1, F_2, с горизонтальною плоскостью проекций, вращая их около горизонтальных следов F_2e и F_1d. Очевидно, что совмещение точки F_2, когда она находится на ребре SF, должно одновременно находиться и на дуге m_2, описанной из центра e радиусом F_2e и на перпендикуляре ff_2', восстановленном из горизонтальной проекции f точки F к оси вращения F_2f, т.-е. в точке их взаимного пересечения f_2'. Подобным же образом совмещение точки F_1, когда она находится на ребре SF, будет находиться и на дуге m_1 и на перпендикуляре ff'_1, к F_1f, т.-е. в точке f'_1. Отсюда заключаем, что искомое расстояние точки F от горизонтальной плоскости равно $ff'_2=ff'_1$, и что прямые f_2e и f'_1d суть сечения граней BSF и CSF плоскостями, перпендикулярными к ребрам BS и CS; а потому углы $f_2'ef$ и $f_1'df$, как линейные, суть истинные величины двугранных углов B и C.

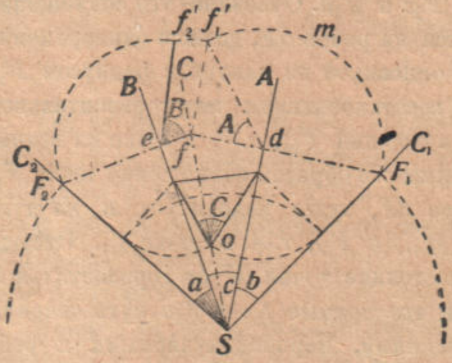
Чтобы найти третий двугранный угол A при ребре SA, достаточно провести плоскость, перпендикулярную к ребру SA, и построить треугольник, который получится от пересечения такой плоскости с плоскостями граней. Всего удобнее такое построение сделать по трем сторонам треугольника, для чего возьмем на ребрах SA_1 и SA_2 точки G_1 и G_2 равно удаленные от вершины S; такие точки суть совмещения одной и той же точки G ребра SA, а потому, если плоскость, перпендикулярная к ребру SA, проведена через точку G, то прямые пересечения ее с плоскостями b и c, будучи перпендикулярными к ребру SA, представятся в совмещении прямыми G_2m и G_1n, перпендикулярными к SA_2 и SA_1, третья же грань пересечется тою же плоскостью по mn, которая должна быть перпендикулярна к Sf.

Определив таким образом три стороны треугольника, построим и самый треугольник, *mno*, угол которого *mon* равен искомому двугранному углу A.

§ 154. Вторая задача. *Построить трехгранный угол по данным двум плоским углам и одному двугранному, между ними заключенному.*

Пусть [*черт. 149*] b и c — данные плоские углы, A — данный двугранный угол.

Положим, что плоскость грани ASB с углом c совпадает с горизонтальною плоскостью проекций и что плоскость грани ASC с углом b совмещена с нею. Возьмем на совмещении SC_1 ребра SC точку F_1 и, восстановив плоскость грани b, найдем ее проекции. Горизонтальная проекция f точки F в этом случае будет находиться на перпендикуляре F_1d к оси вращения SA, а сама точка F—на окружности, которая описана радиусом dF_1 из центра d и которая, если совместим ее плоскость с горизонтальною плоскостью проекций, при помощи оси F_1d, представится дугою m_1; чтобы найти положение точки F_1 на дуге m_1 построим при точке d на следе df линейный угол A данного двугранного угла; сторона этого угла df'_1 пересечет дугу m_1 в точке f_1, которая и есть совмещение точки F_1; заметив далее, что горизонтальная проекция точки F_1 должна находиться на прямой F_1d и на перпендикуляре к ней $f'_1\ f$, найдем ее в точке их пересечения f. Следовательно, горизонтальная проекция ребра SC есть Sf. Чтобы построить искомый плоский угол a, остается грань BSC совместить с горизонтальной плоскостью; для чего достаточно найти совмещение точки F ребра SC. Это совмещение будет находиться и на дуге, описанной из центра S радиусом SF_1 и на перпендикуляре fe к оси вращения SB грани SBA, т.-е. в точке их пересечения F_2. Угол F_2SB есть искомый

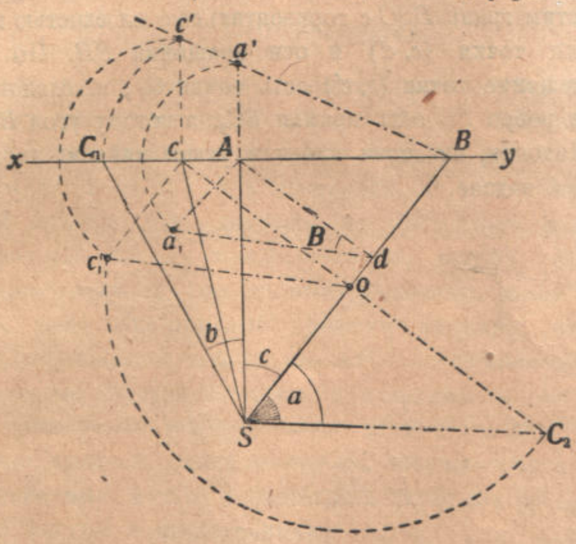


Черт. 149.

плоский угол a. Остальные два двугранные угла C и B построятся как и в предыдущем случае.

§ 155. Третья задача. *Построить трехгранный угол, зная два плоских и один двугранный, противолежащий одному из данных плоских.*

Пусть [*черт. 150*] данный угол b совмещен с плоскостью грани другого данного угла c, принятой за горизонтальную плоскость проекций; выберем вертикальную плоскость проекций, перпендикулярную к ребру SA, и, следовательно, проведем ось проекций xy перпендикулярно к ребру SA через какую-либо точку его A. Затем найдем вертикальный след плоскости грани BSC, которая составляет с гранью ASB данный двугранный угол B;



Черт. 150.

с этою целью проведем через точку A секущую плоскость $a'Ad$, перпендикулярную к ребру SB [§ 88], и совместим эту плоскость с горизонтальною плоскостью проекций, вращая ее около следа Ad. В таком случае пересечение плоскостей $a'Ad$ и BSC совместится с прямой da_1, составляющей с Ad угол, равный данному двугранному углу B, при чем точка a_1, в которой перпендикуляр Aa_1 к оси вращения aA встречает da_1, есть совмещение точки, в которой пересечение плоскостей $a'Ad$ и BSC встречает вертикальную плоскость. По найденному таким образом совмещению a_1, оси вращения Ad и горизонтальной проекции A искомой точки найдем, по § *117*, и проекцию a' точки, принадлежащей искомому следу. А потому след грани BSC на вертикальной плоскости есть прямая Ba'.

Восстановим теперь грань ASC_1 в первоначальное положение, вращая ее около ребра SA; точка C_1 при этом будет перемещаться по дуге круга, лежащего в вертикальной плоскости и описанного радиусом AC_1 из центра A, и в первоначальном положении грани будет находиться на вертикальном следе Ba' плоскости BSC, т.-е. в точке c' пересечения дуги AC_1c' и следа Ba'.

По c' определим c, и таким образом построим горизонтальную проекцию Sc ребра SC. Остается найти плоский угол a; для чего совместим грань BSC с горизонтальною плоскостью проекций при помощи точки (c, c') и оси вращения SB. По правилу § *116* совмещение точки (c, c') есть точка C_2, и, следовательно, совмещение ребра SC есть прямая SC_2, а потому угол BSC_2 есть искомый. Наконец, по трем плоским углам найдем двугранные как в первой задаче.

ГЛАВА V.

О ФИГУРАХ.

I. Определения.

§ 156. Все геометрические фигуры разделяются на два класса: к первому классу относятся *плоские фигуры*, имеющие два измерения и, следовательно, лежащие в одной плоскости; ко второму—*тела*, имеющие три измерения. В свою очередь, каждый из этих классов подразделяется на два отдела, а именно: плоские фигуры—на 1) *прямолинейные*, каковы: *треугольники*, *четыреугольники* и вообще *многоугольники*, и на 2) *криволинейные*, т.-е. образованные кривыми линиями, каковы: *круг*, *эллипс*, *парабола*, и т. п.; тела—на 1) *многогранники*, т.-е. тела, ограниченные плоскими поверхностями, каковы: *призмы*, *пирамиды*, *правильные многогранники*, и т. п.; и на 2) тела, *ограниченные кривыми поверхностями*, каковы: *цилиндры*, *конусы*, *тела вращения*, и т. п. В настоящей главе мы рассмотрим лишь плоские фигуры и многогранники.

§ 157. *Проекцией фигуры на плоскость вообще называется совокупность проекций всех принадлежащих ей точек*, но, чтобы задать прямолинейную плоскую фигуру или многогранник, т.-е. чтобы дать возможность определить каждую точку, принадлежащую фигуре, достаточно дать проекции лишь вершин фигуры на две взаимно-перпендикулярные плоскости; ибо, в случае прямолинейной плоской фигуры, совокупность прямых, соединяющих в известном порядке одноименные проекции вершин, даст проекции ее сторон, которыми определяются все элементы фигуры, в случае же тела, проекции его вершин определяют проекции его ребер, а ребра определят грани.

II. Условия видимости.

§ 158. *При построении проекций тела необходимо различать видимые его части от невидимых и вычерчивать первые сплошными линиями, вторые—точечным пунктиром* [1]). Такое отличие одних частей от других на каждой из плоскостей проекций вытекает непосредственно из самого понятия о проекциях,—понятия, по которому, очевидно, горизонтальную проекцию тела можно рассматривать, как вид его из точки зрения, удаленной от тела на бесконечно большое расстояние и расположенной на продолжении перпендикуляра, проектирующего на горизонтальную плоскость одну из его точек, а вертикальную,—как вид тела из точки зрения, удаленной от вертикальной плоскости на бесконечно большое расстояние и расположенной на продолжении перпендикуляра, проектирующего на эту плоскость одну из его точек.

Благодаря этому приему, изображение тела при помощи его проекций сильно выигрывает в наглядности.

Рассмотрим условия видимости точки по отношению к горизонтальной плоскости проекций. В этом случае глаз зрителя находится в бесконечно-удаленной точке по вертикальному направлению. Луч зрения перпендикулярен к горизонтальной плоскости. Если на одном и том же луче зрения находится не одна, а две или более точек нашего тела, то видимой будет только верхняя из них.

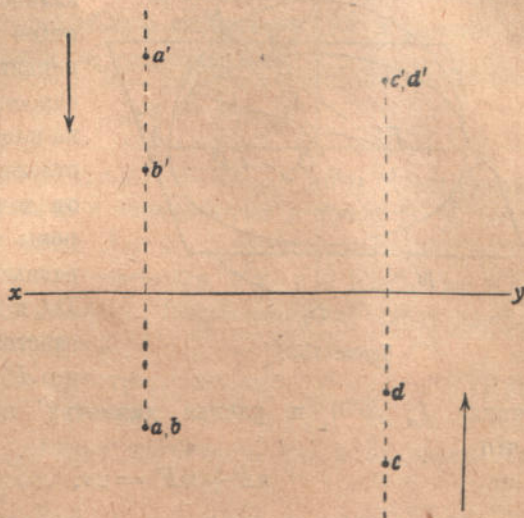
Эту верхнюю точку луч зрения встречает первой. Все остальные точки тела, расположенные на том же луче, закрыты первой точкой и потому оказываются уже невидимыми. Пусть, например, на луче зрения находятся две точки A и B нашего тела [*черт. 151*]. Их горизонтальные проекции сливаются в одной точке (a, b), вертикальные же проекции a' и b' различны. По вертикальной проекции мы видим, что точка (a, a') находится выше точки (b, b'), следовательно, луч зрения встречает ее первой. Таким образом, видимой будет точка A, а точка B—невидима.

Подобно этому определяется и видимость точек относительно горизонтального проектирования на вертикальную плоскость.

---

[1]) Или даже вовсе опускать их.

Для двух точек C и D, находящихся на одном и том же горизонтальном луче зрения [*черт. 151*], их вертикальные проекции c' и d' сливаются в одну точку, горизонтальные же проекции c и d различны. Видимой будет только передняя точка C, что мы узнаем из сравнения горизонтальных проекций точек (проекция c дальше от оси xy, чем проекция d). Точка D невидима, так как она закрыта точкой C.



Черт. 151.

Приведенные соображения совершенно достаточны также и для определения видимости линий и поверхностей. Так, например, мы по одной только точке какой-либо грани многогранника часто можем заключить, будет ли она видима или невидима [см. *черт. 155* и др.].

III. Плоские фигуры.

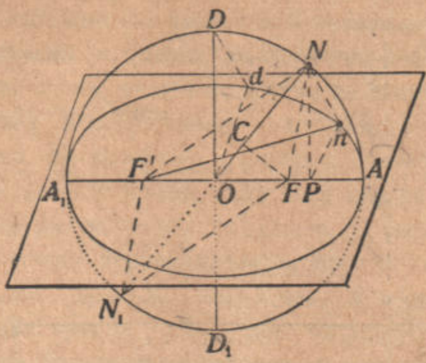
§ 159. О плоских прямолинейных фигурах мы ничего говорить не будем, так как и изучение их самих, и решения задач, к ним относящихся, приводится при помощи способа совмещения к вопросам элементарной планиметрии.

§ 160. Из криволинейных фигур мы рассмотрим лишь круг.

Теорема. *Проекция круга на плоскость, к нему наклонную, есть эллипс.*

Пусть [*черт. 152*] плоскость данного круга DAD_1A_1 совпадает с плоскостью чертежа, пусть плоскость проекций Q проходит чрез центр круга O и пересекает круг по диаметру AA_1.

Возьмем на круге произвольную точку N и, спроектировав на плоскость Q в точку n, докажем, что геометрическое место точек n есть эллипс. Для чего проведем диаметр DD_1 перпендикулярно к AA_1, спроектируем точку D на плоскость Q в точку d, отложим на диаметре AA_1 от точки O в обе стороны части OF и OF', равные проектирующей Dd, и докажем, что сумма расстояний точки n от F и F' есть величина постоянная [§ 270] и равная диаметру круга, т.-е. докажем, что



Черт. 152.

$$nF + nF' = 2r, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

где r есть радиус круга.

В самом деле, опустим из точки N перпендикуляр NP на AA_1; прямоугольные треугольники ODd и PNn, как имеющие равные углы (углы DOd и NPn равны, как измеряющие угол наклонения плоскости Q к плоскости круга), подобны, и, следовательно,

$$\frac{OD}{Dd} = \frac{PN}{Nn},$$

откуда

$$Nn = \frac{PN \,.\, Dd}{OD} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Далее, если соединим точку N с точками O и F и опустим из F на NO перпендикуляр FC, то легко видеть, что площадь треугольника ONF может быть измерена или произведением $^1/_2 NO \,.\, FC$, или $^1/_2 OF \,.\, NP$.

Откуда:

$$NO \,.\, FC = OF \,.\, NP,$$

и, следовательно,

$$FC = \frac{OF \,.\, NP}{NO} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Сравнивая между собою выражение (2) и (3), находим, что вторые их части равны, ибо $Dd = OF$ по отложению, $OD = NO$ как радиусы; откуда заключаем, что и первые их части равны, т.-е. $Nn = FC$. А потому прямоугольные треугольники NFn и NCF, как имеющие общую гипотенузу NF и равные катеты $nN = FC$, тоже равны, и, следовательно,

$$nF = NC \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Остается доказать, что $nF' = CN_1$. С этою целью продолжим радиус NO до встречи с окружностью в точке N_1 и, соединив точки N_1 и N с точками F и F', построим таким образом параллелограмм NFN_1F', ибо диагонали NN_1 и FF' фигуры NFN_1F' делятся в точке O пополам. По свойству же параллелограмма, сторона его NF' равна противолежащей стороне FN_1 и, следовательно, прямоугольные треугольники $NF'n$ и CFN_1 равны, ибо, кроме равных гипотенуз, $NF' = FN_1$, имеют и равные катеты $Nn = FC$; отсюда заключаем, что и их другие катеты равны между собою, т.-е.

$$nF = CN_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Складывая равенства (4) и (5), находим:

$$nF + nF' = NC + CN_1 = 2r,$$

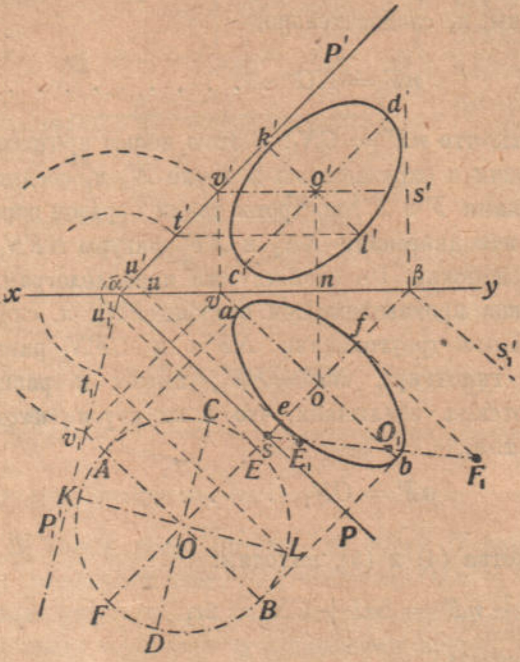
что и требовалось доказать.

§ 161. Отсюда вместе с тем заключаем, что большая ось эллипса [*§ 245*], по которому круг проектируется на какую-либо плоскость, равна диаметру круга, и, следовательно, есть проекция диаметра AA_1, параллельного плоскости проекций (*§ 26, 3*); малая же ось, как перпендикулярная к большой, есть проекция диаметра D_1D, перпендикулярного к первому [*§ 45*].

§ 162. Задача 1. *Даны плоскость, центр и радиус круга; найти его проекции на вертикальную и горизонтальную плоскости проекций.*

Пусть [*черт. 153*] данная плоскость PaP' наклонна к обеим плоскостям проекций и пусть взятая на ней точка (o, o') есть центр искомого круга. При таких условиях круг проектируется на обе плоскости проекций по эллипсам, которые легко вычертить по точкам, коль скоро определим их оси. Для определения же осей, по *§ 161*, достаточно определить диаметры, которые проектируются по осям, для чего можно пользоваться двояким способом.

Первый способ. Совместить при помощи горизонтали (ov, $o'v'$) [*§ 122*] плоскость $P\alpha P'$ и точку (o,o') с горизонтальной плоскостью проекций; из точки O совмещения (o,o'), как из центра, опишем окружность $ABCD$ данным радиусом, и в этой окружности, представляющей совмещение искомой, построим, основываясь на *§ 161*, две пары диаметров, из которых одна, после приведения плоскости $P\alpha P'$ в первоначальное положение, будет проектироваться на горизонтальную плоскость по осям горизонтального эллипса, а другая — на вертикальную плоскость, по осям вертикального эллипса.



Черт. 153.

Для построения первой пары диаметров припомним, что по *§ 161* диаметр, который проектируется по большей оси горизонтального эллипса, параллелен горизонтальной плоскости проекций, и что, следовательно, его совмещение есть диаметр AB, проведенный чрез O параллельно αP; что по тому же *§* диаметр, который проектируется по малой оси того же эллипса, перпендикулярен к первому, и, следовательно, его совмещение есть диаметр EF, перпендикулярный к αP. Из тех же соображений диаметр DC, параллельный $\alpha P'_1$, есть совмещение того диаметра, который проектируется на вертикальную плоскость по большой оси вертикального эллипса, а диаметр KL, перпендикулярный к $\alpha P'_1$, есть совмещение того диаметра, который проектируется по малой оси того же эллипса.

Отсюда, для построения осей эллипсов, по которым проектируется заданная окружность, остается восстановить плоскость и, для построения осей горизонтального эллипса, найти горизонтальные проекции точек A, B, E, F; для построения же осей вертикального эллипса—найти вертикальные проекции точек C, D, K, L. Для этого достаточно знать в первом случае горизонтальную проекцию лишь точки E, во втором — вертикальную проекцию одной лишь точки L. В самом деле, диаметр AB проектируется на горизонтальную плоскость по горизонтали vo в истинную величину, и, следовательно, отложив на vo от точки o части $oa = ob = r$, найдем в точках a и b горизонтальные проекции точек A и B; диаметр FE проектируется на горизонтальную плоскость по перпендикуляру so к горизонтали vo, и проекция его делится пополам в точке o; а потому, найдя горизонтальную проекцию e точки E при помощи горизонтали Eu_1 и отложив на продолжении so часть of, равную oe, найдем в точке f горизонтальную проекцию точки F. Рассуждая таким же образом относительно диаметров CD и KL, найдем, что диаметр CD проектируется в истинную величину на вертикальную плоскость по вертикали $c'd'$, проведенной чрез o' параллельно $\alpha P'$, и что потому, отложив от точки o' часть $o'c' = o'd' = r$, найдем в точках c' и d' вертикальные проекции точек C и D; диаметр KL проектируется на вертикальную плоскость по перпендикуляру $k'l'$ к $c'd'$ в точке o', и потому, найдя на нем вертикальную проекцию l' точки L при помощи горизонтали Lt_1 и отложив на продолжении $o'l'$ часть $o'k' = o'l'$, найдем в точке k' вертикальную проекцию точки K.

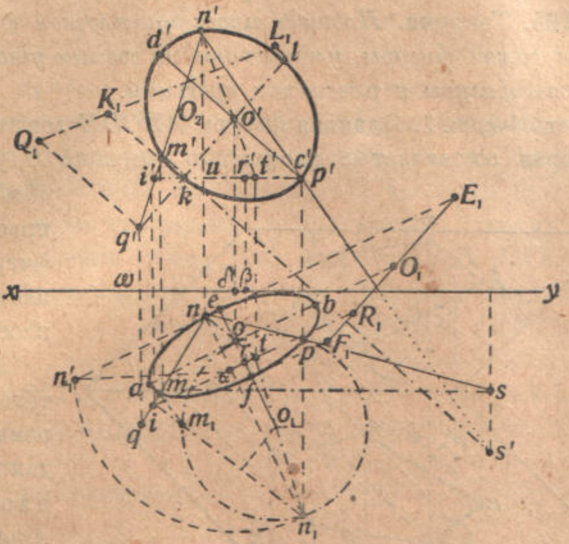
Построив таким образом оси ab и ef горизонтального эллипса и оси $c'd'$ и $k'l'$ вертикального эллипса, остается вычертить самые эллипсы.

§ 163. *Второй способ.* Из предыдущего § между прочим ясно, что для построения больших осей эллипсов, по которым проектируется окружность, достаточно чрез центр ее провести горизонталь ab и вертикаль $c'd'$ и на них отложить диаметр круга. Что же касается малых осей, то для построения их, кроме рассмотреннаго уже способа, можно поступать еще следующим образом.

Припомним, что величина малой оси горизонтального эллипса равна проекции диаметра FF, перпендикулярного к AB, и что этот диаметр проектируется по прямой os, перпендикулярной к ab, и потому лежит на пересечении горизонтально-проектирующей его плоскости $s\beta s'$, и плоскости $P\alpha P'$. Совместим плоскость $s\beta s'$ с горизонтальною плоскостью проекций; центр (o, o') перейдет в точку O_1, находящуюся на перпендикуляре oO_1 к оси вращения $s\beta$ на расстоянии от последней $oO_1 = no'$ [*§ 121*], сечение же плоскостей $s\beta s'$ и $P\alpha P'$ совместится с прямой sO_1; и потому, отложив от точки O_1 на прямой sO_1 в обе стороны части O_1E_1 и O_1F_1, равные радиусу круга, найдем совмещение искомого диаметра E_1F_1. По совмещению E_1F_1 найдем его горизонтальную проекцию ef, которая представит малую ось горизонтального эллипса. Подобным же образом определяется и малая ось вертикального эллипса.

§ 164. Задача II. *Построить проекции окружности, проходящей через три данные точки* (m, m'), (n, n'), (p, p') [*черт. 154*].

Совместим плоскость MNP с горизонтальною плоскостью при помощи горизонтали $(pi, p'i')$ [*§ 115*] и точки (n, n'). С этою целью опустим из n перпендикуляр на ось вращения pi и на продолжении его, от точки α до точки n_1 отложим гипотенузу $\alpha n'_1$ треугольника $nn'_1\alpha$, в котором катет $nn'_1 = un'$. Прямая n_1p есть совмещение прямой $(np, n'p')$, а прямая n_1i есть совмещение прямой $(ni, n'i')$; следовательно, точка m_1, лежащая на пересечении перпендикуляра из m к pi с n_1i, есть совмещение точки (m, m'). По точкам m_1, n_1 и p определим центр o_1 окружности m_1n_1p, представляющей совмещение искомой, затем найдем проекции его, восстановив плоскость в первоначальное положение; для чего соединим центр o_1 с какою-либо из данных точек, выбранною так, чтобы обе проекции этой прямой были известны; всего удобнее соединить o_1 с n_1 прямою o_1n_1; ибо, продолжив ее до встречи с осью вращения pi в точке t, легко видеть, что проекции прямой n_1o_1 суть tn и $t'n'$, и что, следовательно, проекции центра будут находиться на прямых nt, $n't'$; а именно: горизонтальная—в точке o, на пересечении tn с перпендикуляром o_1o к оси вращения pi; вертикальная — в o' на $t'n'$. Определив таким образом проекции o и o' центра круга, остается построить эллипсы, по которым проектируется искомая окружность; с этою целью воспользуемся вторым способом [*§ 163*], по которому для определения осей горизонтального эллипса следует провести чрез o прямую ab, параллельную горизонтали pi пло-



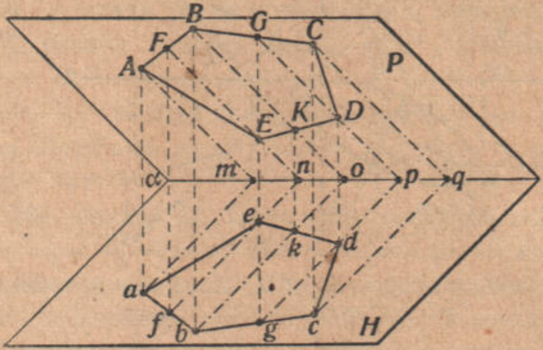
Черт. 154.

скости MNP и на ней от точки o, в обе стороны, отложить части oa и ob, равные радиусу o_1n_1 искомого круга. Прямая ab есть большая ось горизонтального эллипса. Для определения же малой оси, которая перпендикулярна в o к ab, и равна проекции диаметра, перпендикулярного к AB, следует по тому же § провести чрез центр горизонтально-проектирующую плоскость, перпендикулярную к ab, и совместить эту плоскость совместно с центром (o, o') и точкою (r, r'), в которой эта плоскость встречается с горизонталью $(pi, p'i')$, с горизонтальною плоскостью проекций. Точка (o, o') совместится с точкою O_1, лежащей по направлению ob на расстоянии oO_1, равном $\delta o'$, точка (r, r') — с R_1, лежащей на перпендикуляре к ro на расстоянии rR_1, равном $\beta r'$, а, следовательно, прямая пересечения горизонтально проектирующей плоскости ro с плоскостью MNP совместится с прямой E_1O_1 и потому, отложив на этой прямой от точки O_1 в обе стороны O_1E_1 и O_1F_1 равные радиусу круга и спроектировав точки E и F_1 на or в точки e и f, найдем, что малая ось равна ef. По найденным таким образом осям остается построить горизонтальный эллипс.

Подобным же способом построим оси вертикального эллипса.

§ 165. Теорема. *Площадь проекции плоской фигуры равна площади самой фигуры, умноженной на cosinus угла наклонения плоскости фигуры к плоскости проекций.*

Пусть [*черт. 155*] данная фигура $ABCDE$ лежит в плоскости P, которая составляет с плоскостью проекций H угол α; пусть $abcde$ и αP — проекция данной фигуры и след плоскости P на плоскости H.



Черт. 155.

Для доказательства теоремы рассечем данную фигуру плоскостями Ama, Ene, Bob, Dpd, Cqc, проходящими через проектирующие Aa, Bb, Cc, Dd, Ee и перпендикулярными к следу αP, на два треугольника EAF, GDC и две трапеции $EFBK$ и $BKDG$. Эти же плоскости рассекут и проекцию $abcde$ фигуры на два треугольника aef и gdc и две трапеции $efbk$ и $bkdg$, при чем стороны этих последних, как легко показать, суть проекции сторон соответствующих треугольников и трапеций самой фигуры. Действительно, рассмотрим трапецию $efbk$ и ей соответствующую $EFBK$. Точки e и b суть проекции точек E и B по условию. Точка K, как пересечение прямых ED и Bo, имеет свою проекцию k на пересечении проекций этих прямых, но проекция ED, по условию, есть ed; проекция прямой Bo, как лежащей в плоскости, перпендикулярной к H, есть след ob этой плоскости [*§ 51*]; прямые же ed и ob пересекаются в точке k. Таким же образом докажем, что f есть проекция точки F, и что то же соотношение существует между сторонами остальных трапеций и треугольников. На этом основании [*§ 26, 2*] $bk = BK$, cos Bob, $ef = EF$. cosFnf и $dg = DG$. cosGpg но углы Bob, Fnf, Gpg, как измеряющие один и тот же двугранный угол между плоскостями P и H, равны между собою и равны α; и потому

$$\frac{bk}{BK} = \frac{ef}{EF} = \frac{dg}{DG} = \cos\alpha \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Примем прямые EF, BK, DG и их проекции ef, bk, dg за основания трапеций и треугольников, на которые разделена как самая фигура, так и проекция, и заметим, что в таком случае высоты соответственных треугольников и трапеций будут равны между собою, и именно равны отрезку следа αP между соответствующими секущими плоскостями; так, трапеции $EFBK$ и $efbk$ будут иметь своею высотою отрезок on, а потому площадь $ABCDE$, как равная сумме площадей EAF, $EFBK$, $KBGD$, DGC, равна

$$\square\, ABCDE = {}^1/_2\, EF \,.\, mn + {}^1/_2\, (EF + BK) . no + \\ + {}^1/_2\, (KB + DG) . op + {}^1/_2\, DG \,.\, pq.$$

На том же основании:

$$\square\, abcde = {}^1/_2\, ef \,.\, mn + {}^1/_2\, (ef + bk) \,.\, no + {}^1/_2\, (bk + dg) \,.\, op + \\ + {}^1/_2\, dg \,.\, pq$$

или в силу равенств (1):

$$\square\, abcde = [{}^1/_2\, EF \,.\, mn + {}^1/_2\, (EF + BK) . no + \\ + {}^1/_2\, (BK + DG) \,.\, op + {}^1/_2\, DG \,.\, pq] . \cos\alpha;$$

но выражение в скобках есть не что иное, как площадь $ABCDE$, и, следовательно,

$$\square\, abcde = \square\, ABCDE \,.\, \cos\alpha,$$

что и требовалось доказать [1]).

§ 166. На основании только-что доказанной теоремы легко определить площадь эллипса: в самом деле, из треугольника DOd [*черт. 152*], в котором гипотенуза OD, как радиус круга, равна большой полуоси a эллипса, катет Od — малой полуоси b того же

[1]) Теорема доказана для площади любого многоугольника, но она верна также и для криволинейной площади, так как последнюю можно рассматривать как предел площадей многоугольников, вписанных в ее криволинейный контур (при неограниченном возрастании числа сторон многоугольников).

эллипса, и в котором угол $DOd = \alpha$ измеряет наклонение плоскости круга к плоскости проекций, имеем:

$$Od = OD.\cos \dot{D}Od \text{ или } b = a\cos\alpha \quad . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

С другой стороны, по доказанному в § *165*,

$$\text{площадь эллипса} = \pi r^2.\cos\alpha.$$

Откуда, исключая $\cos\alpha$ при помощи равенства (1) и замечая, что $r = a$, имеем:

$$\text{площадь эллипса} = \frac{\pi r^2 b}{a} = \pi ab,$$

т.-е. *площадь эллипса равняется произведению его полуосей, умноженному на отношение окружности к диаметру.*

Задачи.

184. Построить проекции квадрата, которого одна из диагоналей перпендикулярна к вертикальной плоскости; а другая составляет с горизонтальною плоскостью данный угол α.

185. Построить проекции правильного треугольника, плоскость которого наклонена к вертикальной плоскости проекций под данным углом β, а одна сторона перпендикулярна к горизонтальной плоскости проекций. Центр треугольника должен быть удален от следов его плоскости на расстояние, равное радиусу описанного круга.

186. Найти проекции правильного треугольника, которого плоскость перпендикулярна к оси, одна из сторон перпендикулярна к вертикальной плоскости проекций, а противолежащая ей вершина находится на горизонтальной плоскости проекций в расстоянии, равном стороне треугольника.

187. Найти проекции квадрата, плоскость которого проходит через данную точку и составляет данные углы с плоскостями проекций. Кроме того, вершина квадрата находится в данной точке, а диагональ его параллельна горизонтальному следу

188. Построить проекции правильного треугольника по данным проекциям одной его стороны и по направлению горизонтальной проекции другой стороны.

189. Построить проекции квадрата, зная проекции его стороны и угол, который составляет плоскость квадрата с горизонтальною плоскостью проекций.

190. Построить проекции квадрата, зная две проекции одной из его сторон и направление проекции смежной стороны.

191. По данному центру и радиусу найти проекции окружности, лежащей в плоскости, перпендикулярной: 1) к вертикальной плоскости проекций, 2) к горизонтальной плоскости проекций.

192. Построить проекции окружности по данному центру и радиусу, если плоскость окружности перпендикулярна к прямой, которая проектирует центр на ось.

193. Определить по данному радиусу проекции окружности, касательной к следам данной плоскости.

194. Построить проекции окружности, лежащей в плоскости, которая проходит через ось и точку.

195. Найти проекции окружности, вписанной в данный своими проекциями треугольник.

196. Построить проекции двух пересекающихся треугольных пластинок, вычертив лишь видимые их части.

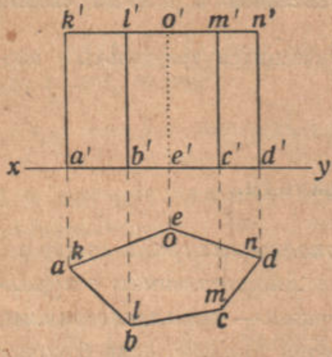
IV. Призмы и пирамиды.

§ 167. *Многогранник, две противоположные грани которого, называемые основаниями, суть равные многоугольники с параллельными сторонами, а все боковые грани — параллелограммы, называется призмою.* Призма называется *прямою*, если боковые грани ее перпендикулярны к плоскости основания; в противном случае, т.-е. когда боковые грани наклонны к плоскости основания, призма называется *наклонною*.

Из только-что приведенного определения призмы необходимо следует, что и боковые ребра призмы параллельны между собою, и что, следовательно, призма вполне определяется основанием и направлением ребра, т.-е. что для задания призмы достаточно дать проекции основания ее и проекции направления ее ребер.

§ 168. Задача. *Построить эпюр прямой призмы, стоящей на горизонтальной плоскости проекций, по данному основанию и высоте.*

Так как призма прямая и основание ее лежит на горизонтальной плоскости, то боковые ребра призмы, будучи перпендикулярными к плоскости основания призмы, будут проектироваться на горизонтальную плоскость в вершинах основания, и потому горизонтальные проекции обоих оснований сольются в одну фигуру, равную истинной величине основания. На вертикальной плоскости проекций нижнее основание проектируется по оси проекций, верхнее — по прямой, ей параллельной и отстоящей от нее на расстояние, равное высоте призмы. На основании этих соображений эпюр данной, напр., пятиугольной прямой призмы, строится следующим образом. На горизонтальной плоскости [*черт. 156*] чертим пятиугольник $abcde$, равный нижнему основанию, и находим его вертикальную проекцию на оси в точках a', b', c', d', e'. Из точек a', b', c', d', e' восстановим перпендикуляры к оси и, отложив на одном из них, напр., на a', высоту $a'k'$ призмы, проводим через точку k' прямую, параллельную оси; на этой прямой находятся вертикальные проекции вершин верхнего основания призмы, именно в точках k', l', m', n', o' встречи ее с ребрами призмы. Горизонтальные проекции k, l, m, n, o точек K, L, M, N, O находятся в точках a, b, c, d, e. При взятом нами положении призмы относительно плоскостей проекций ребро (oe, $o'e'$) — невидимо [см. *§ 158*].



Черт. 156.

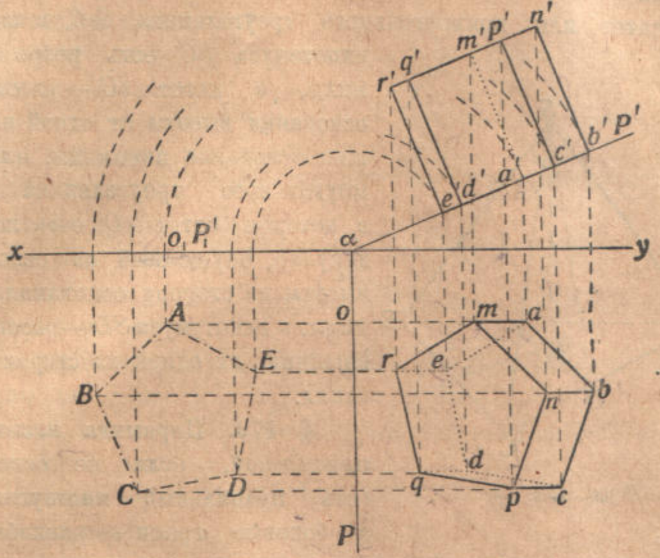
§ 169. Задача. *Построить проекции прямой пятиугольной призмы, поставленной на данную вертикально-проектирующую плоскость.*

Данную плоскость $P\alpha P'$ [*черт. 157*] совместим налево с горизонтальною плоскостью проекций, приняв αP за ось вращения, и на совмещении ее начертим пятиугольник $A\,B\,C\,D\,E$, равный основанию призмы и представляющий совмещение его. Приведем затем плоскость $P\alpha P'_1$ вместе с точками A, B, C, D, E в первоначальное положение. При этом [*§ 123*] горизонтальная проекция a точки A будет перемещаться по перпендикуляру Ao к оси aP, а вертикальная a' — по дуге, описанной из центра α радиусом αo_1, равным расстоянию точки A от оси вращения и, когда плоскость $P\alpha P'_1$ придет в положение $P\alpha P'$, a' будет находиться на следе $\alpha P'$, т.-е. будет находиться в точке пересечения дуги $o_1\alpha$ с следом aP', а α — на пересечении перпендикуляра к оси xy из a' с Ao.

Поступая таким же образом относительно остальных точек B, C, D, E, найдем их проекции (b, b'), (c, c'), (d, d'), (e, e') и, следовательно, горизонтальную $abcde$ и вертикальную $a'b'c'd'e'$ проекции основания призмы.

Далее, замечая, что ребра призмы, как прямые, перпендикулярные к плоскости основания, перпендикулярны к плоскости $P\alpha P'$

и, следовательно, параллельны вертикальной плоскости проекций имеем, что проекции их перпендикулярны к следам αP и $\alpha P'$



Черт. 157.

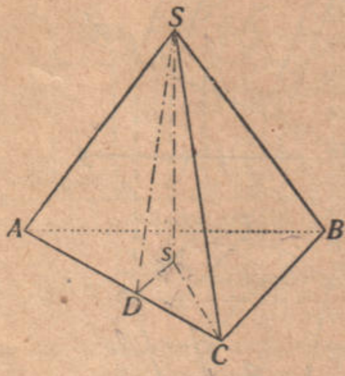
плоскости $P\alpha P'$ [§ 59], и что вертикальные проекции их равны истинной величине [§ 26, 3] высоты призмы, а потому, проведя перпендикуляры из точек a, b, c, d, e к следу αP, а из точек a', b', c', d', e' – к следу $\alpha P'$ и отложив на последних части $a'm' = b'n' = c'p' = d'q' = e'r'$, равные высоте призмы, найдем в точках m', n', p', q', r' вертикальные проекции вершин верхнего основания призмы.

По точкам же m', n', p', q', r' найдем на перпендикулярах к αP их горизонтальные проекции в точках m, n, p, q, r, и таким образом, соединив найденные точки прямыми, определим искомые проекции призмы.

§ 170. *Пирамида есть многогранник, одна из граней которого, называемая основанием, есть многоугольник какого-либо числа сторон, а все боковые грани суть треугольники, сходящиеся своими вершинами в одной точке — вершине пирамиды.* Отсюда заключаем, что пирамида вполне определяется основанием и вершиной, т.-е. что для задания пирамиды достаточно дать проекции ее основания и проекции вершины.

§ 171. Высотою пирамиды называется длина перпендикуляра, опущенного из вершины на плоскость основания.

Как легко видеть из *черт. 158*, высота Ss пирамиды $SABC$ есть катет или прямоугольного треугольника SsC, в котором гипотенуза SC есть ребро пирамиды, а катет sC — расстояние основания высоты от одной из вершин основания пирамиды, или прямоугольного треугольника SsD, в котором катет sD есть перпендикуляр, опущенный из основания высоты на сторону основания пирамиды, а гипотенуза SD—расстояние вершины от одной из сторон основания.

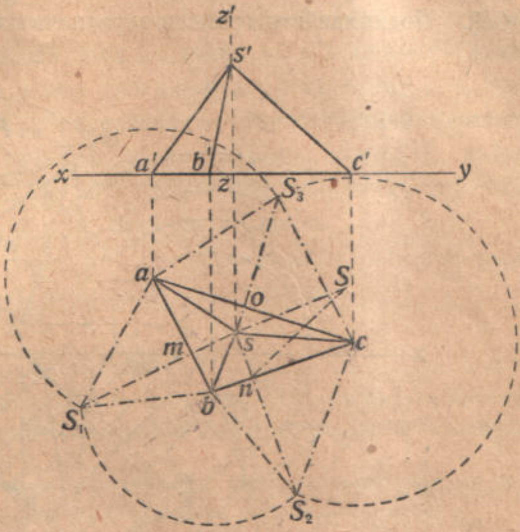


Черт. 158.

§ 172. Пирамида называется *правильной*, если ее основание есть правильный многоугольник, а боковые грани — равнобедренные и равные между собою треугольники; в противном случае пирамида называется *неправильной*. Легко видеть, что в правильной пирамиде вершина находится на перпендикуляре, восстановленном к плоскости основания из центра его.

§ 173. Задача. *Построить треугольную пирамиду, поставленную на горизонтальную плоскость проекций по данным шести ее ребрам.*

Построим [*черт. 159*] на горизонтальной плоскости треугольное основание abc пирамиды по трем из данных ребер и определим его вертикальную проекцию $a'b'c'$ на оси. Затем, для определения проекций вершины пирамиды, совместим боковые ее грани с горизонтальной плоскостью проекций, приняв за оси вращения соответствующие стороны основания. Совмещение граней представится в виде треугольников aS_1b, aS_3c, bS_2c, которые вычертим, описав из точек a, b и c радиусами, соответственно равными 4-му, 5-му, 6-му ребру, дуги до их взаимного пересечения в точках S_1, S_3 и S_2; точки S_1, S_2 и S_3 суть совмещения одной и той же точки S—вершины пирамиды. Станем поднимать теперь грани, до тех пор, пока точки S_1, S_2, S_3 не сольются в одно S,—при этом горизонтальные проекции точек S_1, S_2, S_3 будут перемещаться по перпендикулярам S_1m, S_2n, S_3o к осям вращения ab, bc, ac; и потому в момент слияния горизонтальная проекция вершины S будет находиться в точке s пересечения всех трех перпендикуляров.



Черт. 159.

По найденной таким образом горизонтальной проекции вершины и ее совмещению (напр., S_2) остается построить расстояние вершины от горизонтальной плоскости проекций, равное расстоянию вертикальной проекции вершины от оси; и таким образом, отложив это расстояние на zz', найти вертикальную проекцию вершины.

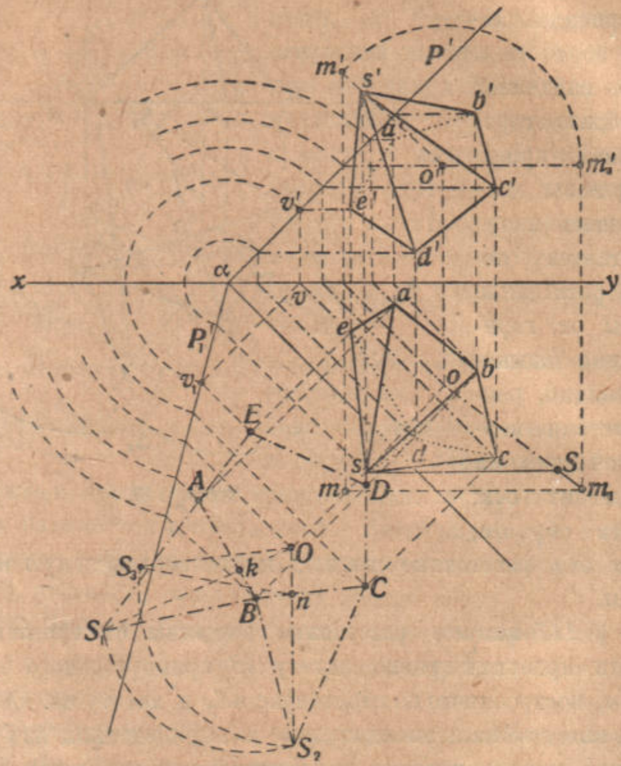
По *§ 117* искомое расстояние вершины от горизонтальной плоскости проекций равно катету sS прямоугольного треугольника sSn, построенного по гипотенузе nS_2 и катету ns. А потому, отложив катет sS на перпендикуляре zz', приведенном из s к оси xy, от z до s', найдем в точке s' вертикальную проекцию вершины.

Для построения проекций ребер пирамиды остается точку (s, s') соединить с точками (a, a'), (b, b') и (c, c').

§ 174. Задача. *По основанию и трем смежным ребрам построить пятиугольную пирамиду, поставленную на наклонную к оси плоскость PaP'.*

Совместим плоскость PaP' [*черт. 160*] с горизонтальною плоскостью проекций при помощи точки (v, v') и оси aP [*§ 120*], и построим на совмещении PaP'_1 пятиугольник $ABCDE$, равный основанию пирамиды.

Затем, чтобы построить высоту пирамиды и найти точку O, в которой она встречает основание пирамиды, предположим, что две боковые грани, ребра которых даны, совмещены с той же горизонтальною плоскостью и представляются треугольниками AS_1B и BS_2C, построенными по данным сторонам AS_1, $BS_1 = BS_2$ и CS_2. Поднимая эти грани в первоначальное положение, найдем



Черт. 160.

по *§ 173,* в точке O пересечения перпендикуляров S_1k и S_2n к AB и BC, основание высоты пирамиды, а строя по катету On и гипотенузе nS_2 прямоугольный треугольник OnS_3, найдем и высоту пирамиды, равную катету OS_3 этого треугольника.

Восстановим теперь плоскость PaP'_1, совместно с точками A, B, C, D, E, O, в первоначальное положение и найдем при помощи горизонталей [*§ 123*] проекции (a, a'), (b, b'), (c, c')... вершин основания пирамиды и проекции (o, o') основания высоты пирамиды. Тогда $abcde$ есть горизонтальная проекция основания искомой пирамиды, а $a'b'c'd'e'$ — вертикальная проекция того же основания; для построения проекций пирамиды остается найти проекции ее вершины, для чего из точки (o, o')—основания высоты пирамиды — восстановим перпендикуляр $(om, o'm')$ к плоскости PaP' [§ 59] и на нем от точки (o, o') отложим длину, равную OS_3. С этою целью повернем перпендикуляр $(om, o'm')$ в положение $(om_1, o'm'_1)$, параллельное горизонтальной плоскости проекций [§ 128], и, отложив на om_1 отрезок $oS = OS_3$, найдем проекции s и s' точки S в первоначальном положении перпендикуляра. Точка (s, s') и есть искомая вершина.

Для определения проекций ребер пирамиды остается соединить проекции вершины с проекциями основания.

Задачи.

197. Дана плоскость P и в ней прямая AB; построить проекции куба, сторона которого лежит на прямой AB, а основание куба совпадает с плоскостью P.

198. Построить проекции правильной шестиугольной призмы, прикрепленной к плоскости, перпендикулярной к горизонтальной.

199. Построить проекции куба, основание которого совпадает с плоскостью, проходящей через ось и точку.

200. Построить проекции правильной треугольной призмы, если плоскость основания ее параллельна оси.

201. Построить проекции прямоугольного параллелепипеда, поставленного на горизонтальную плоскость проекций так, чтобы одна из сторон его основания составляла с осью угол в 45°.

202. Дана горизонтальная проекция пирамиды, основание которой лежит на данной плоскости, параллельной оси, и вертикальная проекция ее вершины. Построить вертикальную проекцию пирамиды.

203. Построить проекции треугольной прямой призмы, зная: 1) что ребра ее параллельны вертикальной плоскости и составляют данный угол с горизонтальной, 2) что основание ее есть равносторонний треугольник, одна из сторон которого параллельна горизонтальной плоскости проекций.

204. Дана горизонтальная проекция параллелепипеда и вертикальная проекция одной из его вершин. Построить параллелепипед.

205. Определить длину диагонали прямоугольного параллелепипеда и углы, которые она образует с его ребрами.

206. Взять прямую на грани данной призмы или пирамиды. Построить на грани параллелепипеда квадрат.

207. Построить проекции треугольной пирамиды, если известно по одной точке на каждом из шести ее ребер.

208. Построить параллелепипед, который имел бы своими ребрами три данные отрезка.

209. Построить проекции правильной шестиугольной пирамиды, положенной боковою гранью на горизонтальную плоскость, если известна ее высота и сторона основания.

210. Построить проекции правильной шестиугольной пирамиды, основание которой лежит на плоскости, перпендикулярной к вертикальной и составляющей угол в 30° с горизонтальной.

211. Построить проекции параллелепипеда, зная его вершину (o, o'), направление вертикальных и горизонтальных проекций двух сторон OA и OB его основания, направление и величину горизонтальной проекции бокового ребра OC и длину ребра $OA = OB = OC$.

212. Построить проекции пятиугольной пирамиды $SABCDE$, находящейся в пространстве, зная горизонтальную проекцию $abcde$ ее основания, проекции (S, S') ее вершины и истинную величину трех ребер SA, SB и SC.

213. Построить вертикальную проекцию треугольной пирамиды, зная ее горизонтальную проекцию $Sabc$ (пирамида стоит на горизонтальной плоскости) и двугранный угол при ребре SA, равный прямому.

214. Построить проекции треугольной пирамиды, поставленной на горизонтальную плоскость, зная основание ее ABC и углы α, β, γ, которые боковые грани SAB, SAC, SBC составляют с горизонтальною плоскостью проекций ($\alpha = 60°$, $\beta = 45°$, $\gamma = 30°$).

215. Дана правильная треугольная усеченная пирамида, высота ее равна 0,04, сторона меньшего основания —0,05, большего 0,1. Пирамида поставлена на горизонтальную плоскость так, что одна из сторон ее основания перпендикулярна к оси проекций. Повернуть пирамиду около этой стороны, как около оси, до совмещения боковой грани с горизонтальной плоскостью. Построить проекции пирамиды в новом положении.

216. Повернуть параллелепипед около одной из сторон его основания как около оси, на угол 50°. Найти проекцию параллелепипеда в новом положении.

217. Дана плоскость и проекции треугольной пирамиды, стоящей на горизонтальной плоскости проекций. Повернуть пирамиду около одной из сторон ее основания так, чтобы вершина ее совпала с плоскостью.

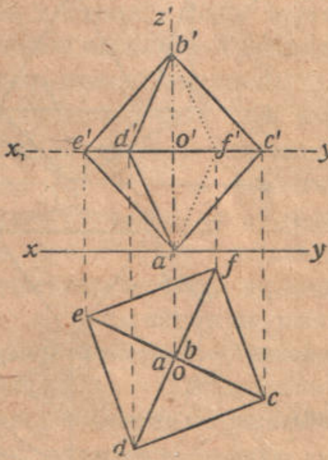
V. Правильные многогранники.

§ 175. *Многогранник называется правильным, когда все грани его представляют правильные и равные многоугольники, а многогранные углы при вершинах все равны между собою.* Как доказывает геометрия, всех правильных многогранников может быть пять: *четырегранник*, *восьмигранник*, *двадцатигранник*, *шестигранник* и *двенадцатигранник*.

§ 176. *Правильный четырегранник* или *тетраэдр* образуется четырьмя равносторонними треугольниками, соединенными по три около каждой вершины. Отсюда видно, что четырегранник можно рассматривать как частный случай треугольной пирамиды, и, следовательно, построение его не чем ни отличается от построения этой последней [*§ 173*].

§ 177. *Правильный восьмигранник* или *октаэдр* образуется восемью равносторонними треугольниками, соединенными по четыре около каждой вершины. Отсюда видно, что правильный восьмигранник может быть рассматриваем как две четыреугольные пирамиды A, $CDEF$ и B, $CDEF$, сложенные своими квадратными основаниями $CDEF$ вместе [*черт. 161*]. На этом основании построение восьмигранника начинается с построения упомянутого выше квадрата, как основания пирамид.

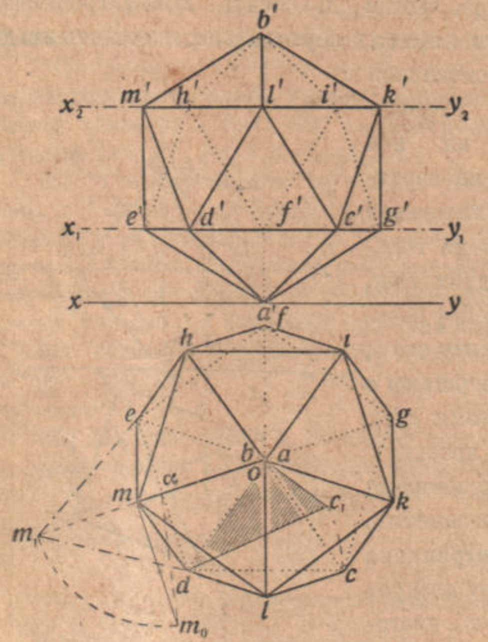
В простейшем случае, когда диагональ восьмигранника, соединяющая обе вершины пирамид, вертикальна, плоскость квадрата параллельна горизонтальной плоскости проекций и, следовательно, проектируется на ней в истинную величину, а на вертикальной—по прямой, параллельной оси. А потому, вычертив на горизонтальной плоскости квадрат $cdef$, сторона которого равна ребру восьмигранника, и соединив центр его o, в котором проектируются вершины a и b пирамид, с вершинами $cdef$, найдем горизонтальную проекцию восьмигранника. Для определения же вертикальной его проекции заметим, что все диагонали восьмигранника равны между собою и что квадрат $CDEF$ делит вертикальную диагональ пополам; поэтому, если проведем прямую x_1y_1, параллельно xy, на расстояние от нее, равном половине одной из диагоналей df или ec, то на этой прямой в точках c' d' e' f' будут находиться вертикальные проекции вершин квадрата $CDEF$. Что же касается вертикальных проекций вершин пирамид, составляющих восьмигранник, то они будут находиться на перпендикуляре z' к оси xy, восстановленном из точки o, и на рассстоянии от x_1y_1, равном половине диагонали, т.-е. в точках



Черт. 161.

a' и b'. А потому, соединяя эти точки с c', d', f', e', найдем вертикальную проекцию восьмигранника.

§ 178. *Правильный двадцатигранник* или *икосаэдр* образован двадцатью равносторонними треугольниками, соединенными по пяти около каждой вершины и, следовательно, расположенными так, что двадцатигранник может быть рассматриваем как тело, состоящее из двух пятиугольных пирамид A, $CDEFG$ и B, $HIKLM$ [*черт. 162*] и промежуточного тела, ограниченного с боков десятью равными треугольниками и имеющего своими основаниями основания пирамид, т.-е. два равных и параллельных пятиугольника $CDEFG$ и $HIKLM$, при чем вершины этих последних расположены относительно друг друга так, что вершины верхнего основания приходятся против середин сторон нижнего основания.



Черт. 162.

На этом основании, чтобы построить по данному ребру двадцатигранник, когда диагональ его AB, соединяющая вершины пирамид, перпендикулярна к горизонтальной плоскости проекций и когда, следовательно, пятиугольные основания $CDEFG$ и $HIKLM$ параллельны горизонтальной плоскости проекций, поступаем следующим образом.

На горизонтальной плоскости проекций чертим по ребру два правильных пятиугольника $cdefg$ и $hiklm$ так, чтобы точки $cdef...lm$ делили окружность, описанную около них, на 10 равных частей; тогда $cdefg$ и $hiklm$ представят горизонтальные проекции оснований как нижней и верхней пирамиды, так и промежуточного тела, а центр o—горизонтальные проекции a и b вершин A и B обеих пирамид

А потому, если соединим полученные таким образом точки как между собою, так и с центром o описанного около пятиугольников круга, то найдем горизонтальные проекции: нижней пирамиды a, $cdefg$, верхней — b, $hiklm$ и боковых граней промежуточного тела—dem, mhe, efh и т. д.

Чтобы построить вертикальную проекцию двадцатигранника, достаточно найти высоту h обеих пирамид и высоту h_1 промежуточного тела, ибо вертикальные проекции оснований пирамид будут находиться на прямых, параллельных оси и находящихся от нее на расстояниях: нижнее остнование—h, верхнее—$h+h_1$. Высота h пирамиды, по § 171, равна катету прямоугольного треугольника, построенного по катету, равному радиусу od круга, описанного около основания, и по гипотенузе dc, равной ребру пирамиды, т.-е. равна катету oc_1 прямоугольного треугольника odc_1. А потому, отложив $a'f' = h = oc_1$ на перпендикуляре $a'b'$, восстановленном из o к оси xy, и проведя через точку f' прямую x_1y_1, параллельную оси, найдем на ней в точках $c'd'e'f'g'$ вертикальные проекции вершин основания нижней пирамиды, а соединяя эти точки с a',—вертикальную проекцию нижней пирамиды.

Остается найти высоту h_1 промежуточного тела, для чего достаточно найти высоту одной из вершин верхнего его основания, напр., вершины M, над плоскостью x_1y_1. С этой целью совместим грань dem с горизонтальною плоскостью, вращая ее около горизонтали (de,$d'e'$). Совмещенная грань представится в истинную величину, т.-е. равносторонним треугольником dem_1, вершина которого m_1 есть совмещение точки M; по найденному же таким образом совмещению m_1 и горизонтальной проекции m, искомая высота точки M над осью DE определится по § 117 как катет mm_0 прямоугольного треугольника amm_0, построенного на катете am и гипотенузе $am_0 = am_1$. А потому, отложив найденную высоту $h_1 = mm_0$ на перпендикуляре $a'b'$ к оси xy от f' до l' и проведя через точку l' прямую x_2y_2, параллельную оси, найдем на ней в точках $h'k'i'l'm'$ вертикальные проекции вершин основания верхней пирамиды, а соединяя их с точками $c'd'e'f'g'$, — вертикальную проекцию промежуточного тела. Наконец, чтобы построить вертикальную проекцию верхней пирамиды, остается отложить на перпендикуляре $a'b'$ к оси от точки l' до точки b' высоту h пирамиды, равную $a'f'$, и соединить точку b' с точками h',i',k',l',m'.

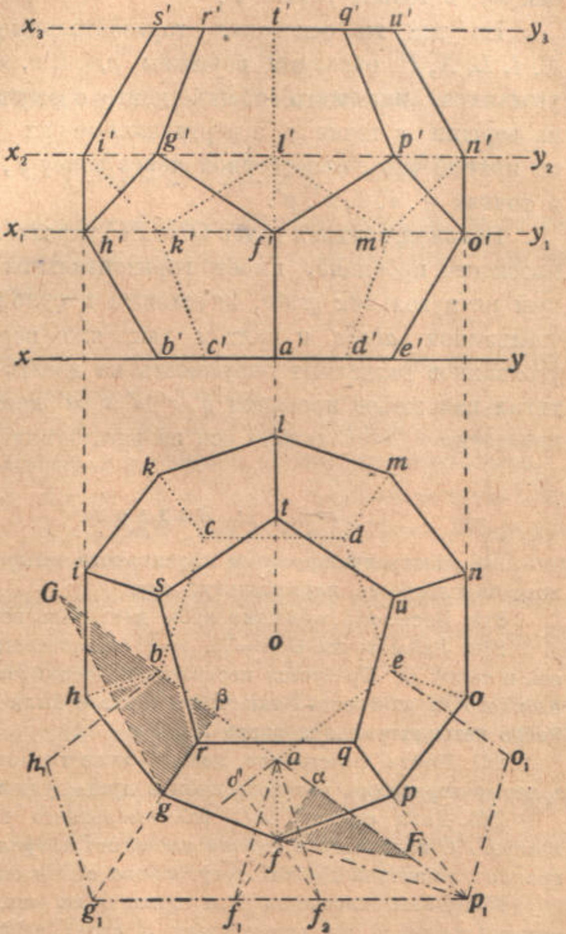
§ 179. *Правильный шестигранник (гексаэдр)* или *куб* образован шестью квадратами, соединенными по три около каждой вершины. Таким образом, куб может быть рассматриваем как частный случай призмы, и потому все сказанное о построении призмы будет относиться и к построению куба [*§ 168*].

§ 180. *Правильный двенадцатигранник* или *додекаэдр* образован двенадцатью правильными пятиугольниками, соединенными по три около каждой вершины и расположенными так, что два из них, принятые за основание тела, лежат в плоскостях, параллельных друг другу, а остальные десять ограничивают тело с боков.

Построим проекции двенадцатигранника по данному ребру, предполагая, что одною из своих граней $ABCDE$ он поставлен на горизонтальной плоскости проекций. В таком случае, вычертив на горизонтальной плоскости правильный пятиугольник $abcde$ [*черт. 163*] и определив его вертикальную проекцию $a'b'c'd'e'$ на оси, найдем проекции нижнего основания тела. Чтобы определить проекции боковых вершин двенадцатигранника, совместим с горизонтальною плоскостью проекций две смежные грани, прилегающие к основанию $ABCDE$, вращая их около ребер ab и ae. Совмещение этих граней представится в виде двух правильных пятиугольников $bh_1g_1f_1a$ и $af_2p_1o_1e$, при чем легко видеть, что точки f_1 и f_2 суть совмещения одной и той же точки — вершины F.

Поднимем теперь грани в их первоначальное положение и найдем проекции точек f_1, f_2 и g_1. Горизонтальные проекции этих точек будут при восстановлении граней перемещаться по перпендикулярам к осям вращения ab и ae, и, следовательно, горизонтальная проекция вершины F будет находиться в точке f на пересечении перпендикуляров af_1 и δf_2, по которым перемещаются точки f_1 и f_2; что же касается до вертикальной проекции f' точки F, то она будет находиться над осью xy на высоте, которая определится [*§ 117*] по совмещению ее f_1 и ее горизонтальной проекции f, как катет aF_1 прямоугольного треугольника afF_1, построенного по катету af и гипотенузе af_1; и потому, откладывая на перпендикуляре, проведенном к оси xy из f, длину $a'f'$, равную aF_1, найдем в точке f' вертикальную проекцию вершины F. Чтобы найти горизонтальную проекцию g по совмещению g_1, заметим, что прямая f_1g_1 встречает ось вращения ab в точке p_1

и что, следовательно, горизонтальная проекция точки g_1 должна находиться одновременно и на горизонтальной проекции p_1f прямой f_1p_1 и на перпендикуляре $g_1\beta$ к оси вращения ab, т. е. в точке их пересечения g. По g и g_1 [§ 117] определим высоту точки G над осью, как катет βG прямоугольного треугольника $gG\beta$, построенного по катету $g\beta$ и гипотенузе βg_1, а потому, отложив на перпендикуляре к оси xy, проведенном из точки g, длину $b'g'$, равную βG, найдем в точке g' вертикальную проекцию вершины G.



Черт. 163.

Таким же образом можно было бы поступать для определения проекций всех остальных вершин тела; но, замечая, что, вследствие правильности двенадцатигранника, все его вершины, подобные G и F, расположены одинаковым образом относительно горизонтальной плоскости проекций и симметрично относительно оси тела, проведенной через центры обоих оснований, мы заключаем, что вершины F, H, K, M, O лежат на одном и том же расстоянии от горизонтальной плоскости проекций и симметрично расположены относительно центра круга, описанного около основания $abcde$.

На этом основании, их горизонтальные проекции f, h, k, m, o образуют вершины правильного пятиугольника, имеющего общий центр с основанием $abcde$ и одну из вершин в точке f, а вертикальные лежат на прямой x_1y_1, проведенной через f' параллельно оси xy, в точках $f'h'k'm'o'$.

На том же основании горизонтальные проекции вершин G, I, L, N, P образуют вершины g, i, l, n, p правильного пятиугольника, имеющего общий центр с основанием $abcde$ и одну из вершин в точке g, а вертикальные их проекции находятся на прямой x_2y_2, проведенной через точку g', параллельно оси xy, в точках g', i', l', n', p'.

Наконец, верхняя грань $QRSTU$, параллельная горизонтальной плоскости проекций, имеет горизонтальной проекцией правильный пятиугольник $qrstu$, вписанный в одной окружности с пятиугольником $abcde$ и притом так, что вершины обоих многоугольников разделяют окружность на десять равных частей; вертикальная же ее проекция $q'\ r'\ s'\ t'\ u'$ лежит на прямой x_3y_3, проведенной параллельно оси на расстоянии от x_2y_2, равном $a'f'$.

Задачи.

218. Построить проекции правильного четырехгранника, поставленного на плоскость, параллельную оси.

219. Построить проекции куба, диагональ которого вертикальна.

220. Даны точка O (x=75, y=45) и плоскость P, проходящая через ось и точку O. Требуется построить проекции четырехгранника, поставленного на плоскость P так, чтобы точка O была центром его основания. Ребро четырехгранника равно 70.

221. Найти расстояние центра тяжести от плоскостей проекций в четырехграннике, рассмотренном в предыдущей задаче.

222. Дана сторона AB равностороннего треугольника, вершина которого C находится в данной плоскости профиля. Построить четырехгранник, имеющий данный треугольник своим основанием.

223. Даны плоскость P и точка S на оси. Построить проекции четырехгранника, имеющего точку S своей вершиной, а основание на плоскости P.

224. Построить четырехгранник по данным проекциям одного ребра и направлению горизонтальной проекции другого, с ним смежного.

225. Даны вершина куба, ребро и направление горизонтальной проекции другого ребра, проходящие через данную вершину; построить проекции куба.

ГЛАВА VI.

СЕЧЕНИЯ МНОГОГРАННИКОВ.

I. Определение.

§ 181. Плоское сечение многогранника получается от пересечения его какою-либо плоскостью и представляет собою некоторый многоугольник.

Задача об определении плоского сечения многогранника заключается собственно в решении следующих трех вопросов:

1) *Определить проекции сечения.*

2) *Определить истинную величину сечения.*

3) *Найти развертку усеченной части многогранника.*

§ 182. Общий прием для решения первого вопроса заключается в том, что определяют или точки встречи ребер многогранника с секущей плоскостью по *§ 74*, или—прямые, по которым грани многогранника пересекаются секущей плоскостью по *§ 70*. Последний прием, как требующий менее чертежной работы, предпочитается первому.

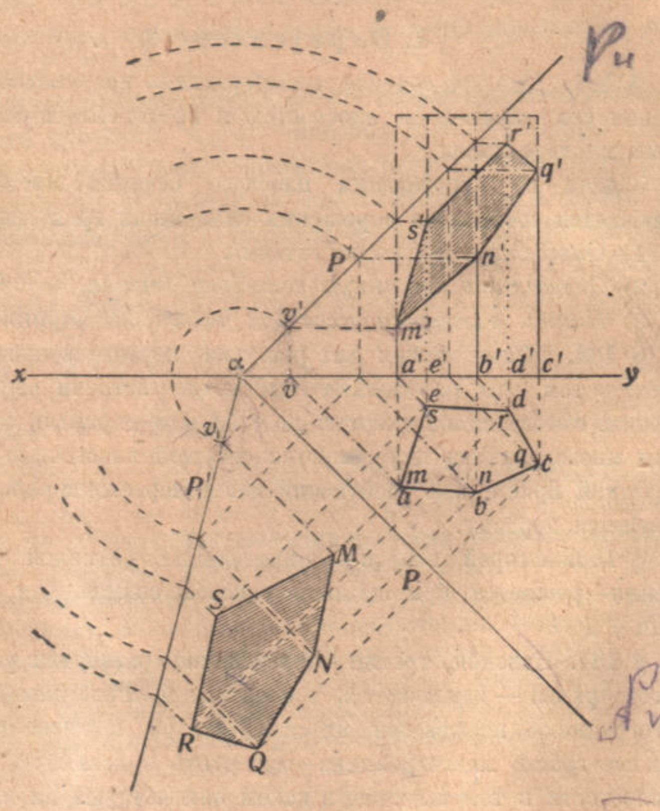
§ 183. Второй вопрос — определение истинной величины сечения—решается при помощи способа совмещения, на основании *§ 100*.

§ 184. Наконец, третий—определение развертки усеченного многогранника — заключается в следующем. *Разверткой* данного многогранника называется плоская фигура, которая получится, если все грани многогранника вычертить в истинную величину на плоскости в том порядке, в каком они следуют на многограннике. Отсюда следует, что построение развертки собственно состоит из двух отдельных операций, именно: из определения истинной величины граней и из черчения их в определенном порядке одна вслед за другою. Определение истинной величины граней совершается обыкновенно при помощи совмещения граней с горизонтальною плоскостью проекций по *§ 120*.

II. Плоские сечения призмы.

§ 185. Задача I. *Найти сечение прямой пятиугольной призмы плоскостью, наклоненною к оси.*

1) *Проекции сечения.* Если допустим, что данная прямая призма поставлена на горизонтальную плоскость проекций [*черт. 164*], то оба ее основания будут проектироваться: на горизонтальной плоскости по одному и тому же пятиугольнику *abcde*, равному основанию призмы, на вертикальной плоскости—нижнее основание



Черт. 164.

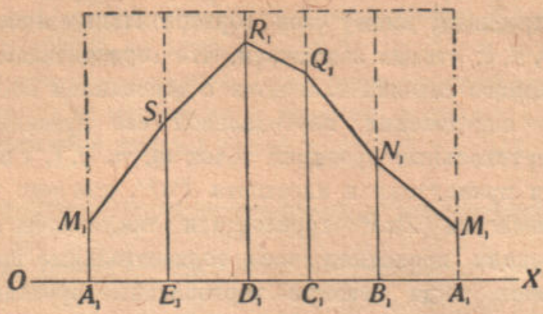
по оси xy в точках $a'b'c'd'e'$, а верхнее—по прямой, параллельной оси и находящейся от нее на расстоянии, равном высоте призмы [*§ 168*]; что же касается ребер, то они на горизонтальной плоскости проекций проектируются в точках a, b, c, d, e, а на вертикальной—по прямым, перпендикулярным к оси xy.

Пусть PaP'—данная плоскость. Чтобы найти проекции точек M, N, Q, R, S, встречи ее с ребрами, заметим, что эти точки, как лежащие на прямых, перпендикулярных к горизонтальной плоскости проекций, имеют свои горизонтальные проекции в точках a, b, c, d, e; отсюда заключаем, что горизонтальная проекция $mnqrs$ искомого сечения сливается с основанием $abcde$ призмы и что, для определения вертикальной его проекции, достаточно найти вертикальные проекции точек m, n, q, r, s под условием, чтобы они принадлежали плоскости PaP', для чего по *§ 68* проведем в плоскости PaP' горизонтали так, чтобы их горизонтальные проекции проходили чрез горизонтальные проекции каждой из точек, тогда искомые вертикальные проекции точек будут находиться на вертикальных проекциях соответствующих горизонталей. Так, проведя горизонталь $(mv, m'v')$ точки M, найдем ее вертикальную проекцию в точке m'. Поступая подобным образом относительно остальных точек, найдем вертикальную проекцию сечения $m'n'q'r's'$.

2) *Истинная величина сечения.* Для определения истинной величины сечения совместим плоскость PaP' вместе с точками (m, m') (n, n') (q, q')...(s, s') с горизонтальной плоскостью проекций, при помощи горизонталей этих точек и оси вращения aP. Для чего по *§ 122* найдем предварительно совмещение aP'_1 вертикального следа при помощи точки (v, v') и совмещения горизонталей точек (m, m') (n, n').... (s, s'), в таком случае искомые совмещения M, N, Q, R, S этих точек будут находиться на пересечении этих последних прямых с перпендикулярами, проведенными из соответствующих горизонтальных проекций m, n, q, r, s точек к оси вращения aP. Соединив точки их M, N, Q, R, S прямыми, найдем, что истинная величина сечения есть пятиугольник $MNQRS$.

3) *Развертка усеченной призмы.* Все грани данной усеченной призмы представляют прямоугольные трапеции, высоты которых равны сторонам ab, bc, cd... основания призмы, а параллельные стороны — усеченным ребрам призмы, которые, как прямые, параллельные вертикальной плоскости проекций, проектируются на эту последнюю в истинную величину. Отсюда видно, что все элементы граней призмы известны непосредственно из чертежа, и что поэтому можно прямо приступить к черчению граней в последовательном порядке. С этою целью отложим на

прямой OX [*черт. 165*] от точки A_1 части $A_1B_1=ab$, $B_1C_1=bc$. $C_1D_1=cd$, $D_1E_1=de$ и $E_1A_1=ea$, и в точках A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, A_1 проведем перпендикуляры, на которых отложим соответственно



Черт. 165.

$$A_1M_1=a'm',$$
$$B_1N_1=b'n',$$
$$C_1Q_1=c'q',$$
$$D_1R_1=d'r',$$
$$E_1S_1=e's',$$
$$A_1M_1=a'm,$$

и соединим точки $M_1, N_1, Q_1, R_1, S_1, M_1$ ломаной линией. Полученная таким образом фигура $A_1M_1M_1A_1$ и есть искомая развертка, а ломаная линия $M_1N_1Q_1R_1S_1M_1$ есть так называемое *преобразованное сечение*.

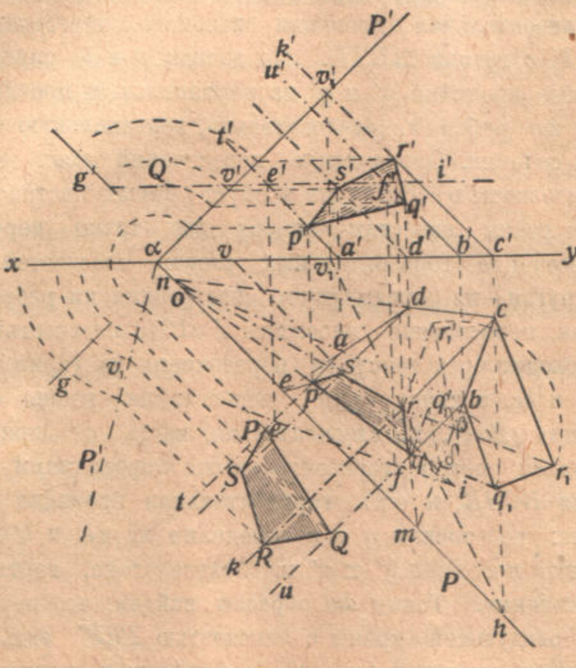
§ 186. Задача II. *Найти сечение наклонной призмы плоскостью, перпендикулярною к ребру призмы.*

Рассмотрим четыреугольную наклонную призму, поставленную на горизонтальную плоскость проекций и заданную основанием $ABCD$ [*черт. 166*] и направлением (g, g') ребер [*§ 167*]. В таком случае, вычертив на горизонтальной плоскости проекций данное основание призмы—четыреугольник $abcd$ и спроектировав точки a, b, c, d на ось xy в точки a', b', c', d', найдем проекции $abcd$ и $a'\,b'\,c'\,d'$ основания призмы; а проведя чрез них прямые $(at, a't')$ $(bu, b'u')$..., параллельные (g,g')—найдем проекции ее ребер. Затем, чрез какую-либо точку a, на оси xy проведем плоскость PaP', следы которой соответственно перпендикулярны к проекциям ребер. Таким образом построим эпюр данных задачи.

1) *Проекция сечения.* Для определения проекций сечения можно поступать, как сказано, двояким способом. Первый способ состоит в определении точек встречи ребер секущею плоскостью при помощи горизонтально или вертикально-проектирующих плоскостей [*§ 75*]; так, напр., для определения точки встречи ребра $(ck, c'k')$ с секущею плоскостью PaP', проведем чрез ребро CK вертикально-проектирующую его плоскость $k'\,c'\,h$ и найдем пересечение ее $(hv_1, c'v'_1)$ с плоскостью PaP' [*§ 71*].

Прямая (hv_1, $c'v'_1$) встретит ребро (ck, $c'k'$) в искомой точке (r, r') [*черт. 166*].

Таким же образом легко найдем и все остальные точки встречи ребер с плоскостью PaP', а следовательно, и проекции искомого сечения. Но чертеж значительно упрощается, если мы употребим второй способ, состоящий в определении



Черт. 166.

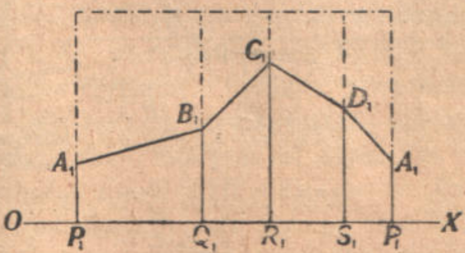
прямых, по которым грани призмы пересекаются плоскостью PaP'. Найдем, напр., пересечение плоскости грани $ABTU$ с плоскостью PaP'. Одна из точек искомого сечения будет находиться в точке o на пересечении горизонтального следа aP плоскости PaP' с горизонтальным следом ab плоскости грани $ABTU$ [§ 70], и потому, для определения сечения, остается найти другую его точку. С этой целью пересечем вспомогательной горизонтальной плоскостью Q' плоскость PaP и плоскость грани $ABTU$. Плоскость Q' пересекает плоскость PaP' по горизонтали (vi, $v'i'$)

[*§ 71, 4*], а ребра (bu, $b'u'$) и (at, $a't'$) грани $ABTU$ в точках (e, e'), (f, f') [*§ 73*], и, следовательно, плоскость грани $ABTU$— по горизонтали (ef, $e'f'$). Прямые VI и EF, как лежащие в плоскости Q', пересекаются в точке (i, i'), принадлежащей искомому пересечению плоскости PaP' с плоскостью грани $ABTU$. Отсюда заключаем, что прямая oi есть горизонтальная проекция искомого пересечения плоскостей PaP' и $ABTU$, а часть pq этой прямой, лежащая между горизонтальными проекциями at и bu ребер,—горизонтальная проекция искомого пересечения плоскости PaP' с гранью $ABTU$. По точкам p и q определим их вертикальные проекции p' и q' на вертикальных проекциях $a'\,t'$ и $b'\,u'$ тех же ребер и, следовательно, вертикальную проекцию $p'q'$ линии сечения. Определение пересечений всех остальных граней с плоскостью PaP' не требует новых построений, ибо для каждой грани известны вперед две точки пересечения: одна—пересечение горизонтальных следов плоскостей секущей и грани, другая—из предыдущего построения на ребре взятой грани. Так, пересечение плоскости PaP' с плоскостью грани $BCKU$ проходит чрез точку m пересечения их горизонтальных следов aP и bc, и точку (q, q') пересечения ребра (bu, $b'u'$) с плоскостью PaP', и, следовательно, часть qr прямой mq, заключающаяся между горизонтальными проекциями ck и bu ребер грани $BCUK$, и есть горизонтальная проекция искомого пересечения: по точкам q и r определим на $c'k'$ и $b'u'$ вертикальные их проекции q' и r' и, следовательно, вертикальную проекцию сечения. Таким же образом найдем, что пересечение плоскости следующей грани с плоскостью PaP' есть прямая (nr, $n'r'$), часть которой (sr, $s'r'$), заключенная между ребрами C и D, ограничивающими эту грань, и есть искомое пересечение. Наконец, грань AD пересекает плоскость PaP' по прямой (ps, $p's'$). Отсюда проекции искомого сечения призмы плоскостью PaP' суть четыреугольники $pqsr$ и $p'q's'r'$.

2) *Истинная величина сечения.* Для определения истинной величины сечения совместим с горизонтальною плоскостью проекций как плоскость PaP', так и лежащие в ней точки (p,p'), (q,q'), (r,r'), (s,s') при помощи оси вращения aP; и, найдя их совмещения в точках P, Q, R, S [*§ 122*], соединим эти точки прямыми, четыреугольник $PQRS$ есть искомая истинная величина сечения.

3) *Газвертка усеченной призмы.* Для построения развертки определим предварительно истинную величину усеченных граней $ABPQ$, $BCQR$, $CDRS$ и $ADSP$, вращая их последовательно, до совмещения с горизонтальною плоскостью проекций, около следов ab, bc, cq, da; таким путем по § 116 найдем, что, напр., точки R и Q грани $CBRQ$ совместятся с точками r_1 и q_1, находящимися на перпендикулярах βr и δq к оси вращения cb, и что, следовательно, истинная величина этой грани есть прямоугольная трапеция cbq_1r_1.

Подобным же образом можно было бы определить истинную величину и остальных граней, но в данном случае, когда секущая плоскость перпендикулярна к ребру призмы, вопрос упрощается. В самом деле, так как секущая плоскость перпендикулярна к ребрам, то прямые пересечения PQ, QR, RS, SP, как перпендикулярные к параллельным между собою ребрам, составят на развертке одну прямую, перпендикулярную к ребрам. Примем за такую прямую ось OX [*черт. 167*] и отложим на ней последовательно части P_1Q_1, Q_1R_1, R_1S_1, S_1P_1, и соответственно равные истинной величине сторон сечения PQ, QR, RS, SP. Затем в точках P_1, Q_1, R_1, S_1, P_1 восставим перпендикуляры к оси и на них отложим истинную величину соответствующих ребер; для



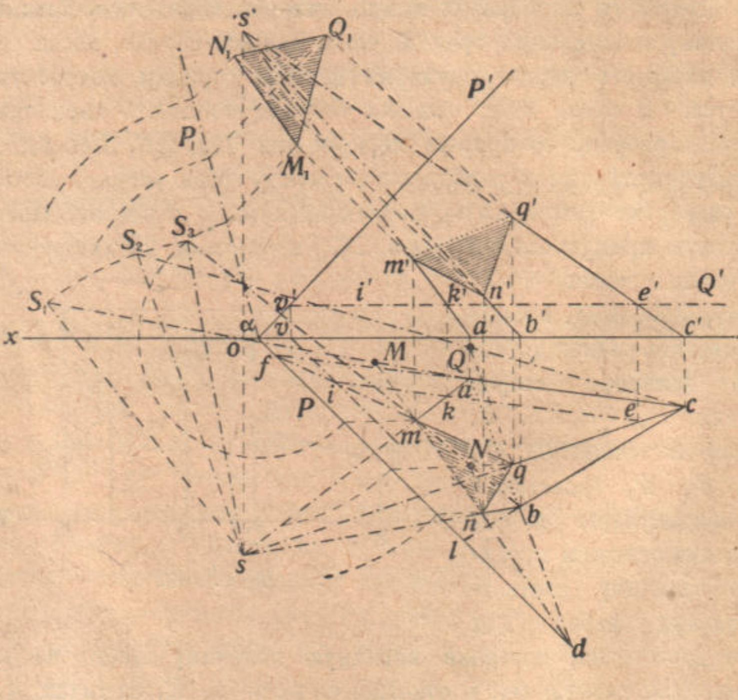
Черт. 167.

чего достаточно, построив истинную величину одного из них, напр., CR, равную cr_1, и отложив ее на ребре R_1 от точки R_1 до точки C_1 засечь ребро S_1 из точки C_1 радиусом, равным cd, в точке D_1. Очевидно, прямоугольная трапеция $R_1C_1D_1S_1$ равна истинной величине грани $CDRS$. Затем, из точки D_1 засечь радиусом da ребро P_1 в точке A_1 и, дойдя до крайнего ребра, произвести то же построение слева от ребра R_1C_1. Таким образом получим прямолинейную фигуру P_1 A_1 P_1 A_1, представляющую развертку усеченной части данной призмы. Ломаная линия $A_1B_1C_1D_1A_1$ представляет преобразованное основание призмы.

III. Плоские сечения пирамиды.

§ 187. Задача. *Пересечь наклонную пирамиду произвольной плоскостью.*

Пусть [*черт. 168*] $sabc$, $s'a'b'c'$ данная треугольная пирамида, поставленная на горизонтальную плоскость своим основанием ABC; пусть PaP'—секущая плоскость.



Черт. 168.

1) *Проекции сечения.* Как и в случае призмы [*§ 186*] проекции сечения определяются или последовательным построением точек встречи ребер с секущею плоскостью [*§ 75*] или, что проще, построением прямых, по которым грани пирамиды пересекаются секущею плоскостью. С этою последней целью определяют две точки искомого пересечения, руководствуясь теми же соображениями, как и в случае призмы Так, в случае грани

$(sac, s'a'c')$, одна из точек пересечения ее плоскости с плоскостью PaP' будет находиться на пересечении их горизонтальных следов αP и ac в точке f. Для получения другой точки сечения проведем вспомогательную горизонтальную плоскость Q' и найдем пересечение ее с плоскостями PaP' и SAC; точка, в которой встретятся найденные пересечения, и будет искомой. Плоскость Q' пересекает плоскость PaP' по горизонтали $(vi, v'i')$, а плоскость SAC — по горизонтали $(ke, k'e')$, которая проходит через точки (k, k') и (e, e') встречи плоскости Q' с ребрами AS и CS.

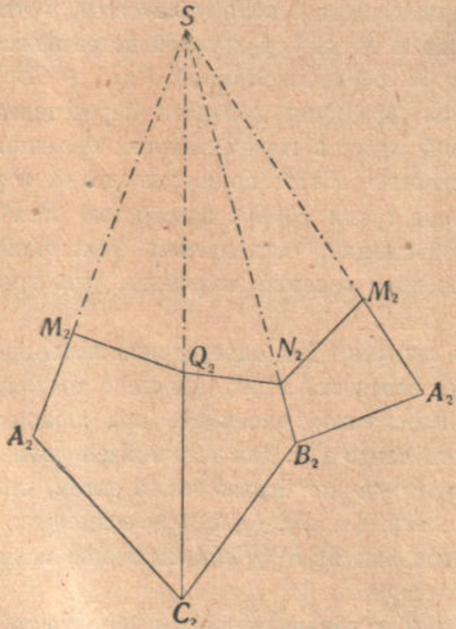
Горизонтальные проекции этих горизонталей пересекаются в точке i, принадлежащей искомому пересечению плоскостей PaP' и SAB, и потому горизонтальная проекция искомого пересечения есть прямая fi, часть mq которой, заключенная между ребрами SA и SC, и есть горизонтальная проекция пересечения грани SAC с плоскостью PAP'; по mq определить ее вертикальную проекцию $m'q'$ на вертикальных проекциях ребер SA и SC. Затем, чтобы найти пересечение грани $(sbc, s'b'c')$ с плоскостью PaP', заметим, что точка (q, q') принадлежит искомому сечению, и что тому же сечению принадлежит и точка l, в которой встречаются горизонтальные следы aP' и bc обеих плоскостей PaP' и SBC. Таким образом горизонтальная проекция искомого пересечения есть прямая lq, часть которой nq есть горизонтальная проекция сечения грани SBC с плоскостью PaP'; по nq определим $n'q'$ на $c's'$ и $b's'$. Наконец, сечение грани SAB с плоскостью PaP', определенное из тех же соображений, есть прямая $(mn, m'n')$. Таким образом, искомые проекции сечения пирамиды суть треугольники mnq, $m'n'q'$.

2) *Истинная величина сечения.* Для определения истинной величины сечения совместим плоскость PaP' вместе с точками M, N, Q, с вертикальною плоскостью проекций, при помощи вращения около вертикального следа aP'. Для чего найдем совмещение aP_1 горизонтального следа aP плоскости, а затем, при помощи фронталей точек (m, m'), (n, n'), (q, q'), и совмещения этих точек M_1, N_1, Q_1. Треугольник $M_1N_1Q_1$ есть истинная величина сечения.

3) *Развертка пирамиды.* Так как грани пирамиды суть треугольники, основания ab, ac, bc которых нам известны, то для построения граней SAB, SAC, SBC достаточно определить истинную величину ребер SA, SB, SC и их усеченных частей.

С этой целью повернем последовательно горизонтально-проектирующие плоскости каждого из них, вместе с лежащими в них ребрами, около трех осей sa, sb, sc, до совмещения с горизонтальною плоскостью проекций; для этого достаточно для каждого ребра найти лишь совмещение точки (s, s'), ибо другие точки a, b, c ребер, как лежащие на осях вращения, не изменят своего положения.

Таким образом, совмещая плоскость ребра SA, найдем по *§ 116*, что точка (s, s') перейдет в S_1, находящуюся на перпендикуляре sS_1 к оси вращения sa, на расстоянии от нее $sS_1 = os'$, и что, следовательно, ребро SA совместится с прямой S_1a, которая и представит его истинную величину. Далее точка (m, m') этого ребра совместится с точкою M, лежащею на перпендикуляре mM к оси вращения sa и на совмещении S_1a ребра SA; следовательно, Ma представит истинную величину отрезка ребра. Поступая подобным образом относительно остальных ребер, найдем, что истинная величина ребра SB равна S_3b, а истинная величина ребра SC равна S_2c; что же касается их отрезков, то их истинная величина, по тем же соображениям, как и в первом случае, представится прямыми nN и qQ, перпендикулярными к осям вращения sb и sc. Зная таким образом все элементы граней, остается построить одну грань возле другой в последовательном порядке, для чего из произвольной точки S [*черт. 169*] проведем прямую SA_2, равную S_1a, и из точек S и A_2 опишем дуги радиусами, соответственно равными S_2c и ac, до их взаимного пересечения в точке C_2. Соединив точку C_2 с точками A_2 и S, получим треугольник SA_2C_2, равный грани SAC. Затем из точек S



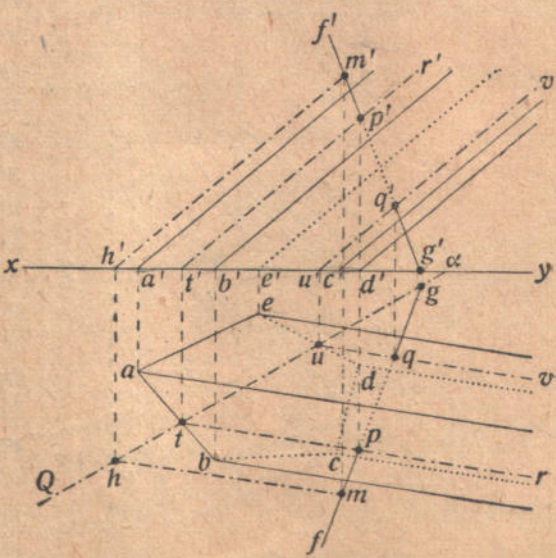
Черт. 169.

и C_2 опишем дуги радиусами, соответственно равными S_3b и bc, и соединим точку B_2 их пересечения с точками S и C_2; полученный таким образом треугольник SB_2C_2 равен грани SBC, наконец, из точек S и B_2 опишем дуги радиусами, соответственно равными S_1a и ab и точку их пересечения A_2 соединим с S и B_2; полученный треугольник SA_2B_2 равен грани SAB. Фигура $SA_2C_2B_2A_2$ есть развертка пирамиды, а ломаная $A_2C_2B_2A_2$— преобразованное основание. Чтобы найти преобразованное сечение, остается отложить на ребрах SA_2, SC_2, SB_2, SA_2 части A_2M_2, C_2Q_2, B_2N_2, A_2M_2, соответственно равные aM, cQ, bN и aM и полученные таким образом точки M_2, Q_2, N_2, M_2 соединить ломаною линией. Фигура $A_2M_2M_2A_2$ есть развертка усеченной пирамиды.

IV. Пересечение прямой с многогранником.

§ 188. Прямая пересекает многогранник в двух точках, для определения которых употребляется следующий общий прием. Проводят через данную прямую вспомогательную плоскость и находят сечение этой плоскости с многогранником; очевидно, искомые точки пересечения прямой с многогранником лежат на пересечении данной прямой с найденным сечением многогранника. Легкость построения зависит от выбора вспомогательной плоскости.

§ 189. Задача. *Найти точки встречи прямой с призмой.*

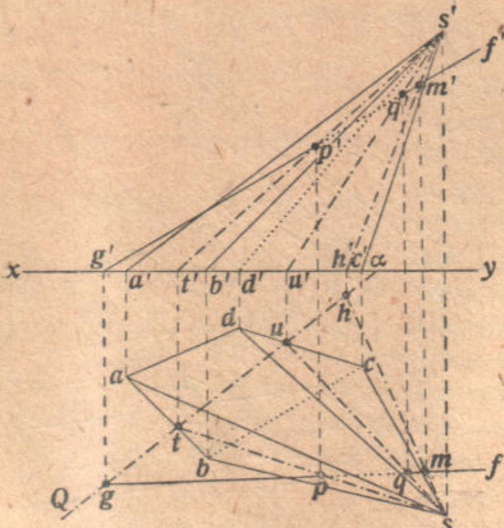


Черт. 170.

В случае призмы за вспомогательную плоскость всего удобнее выбрать плоскость, которая, проходя через данную прямую, была бы параллельна ребру призмы, ибо такая плоскость пересечет призму по двум прямым параллельным ребрам. С этой целью, взяв на данной прямой $(gf, g'f')$ [*черт.* 170] точку (m, m'), проведем через нее прямую $(mh, m'h')$, параллельную ребру призмы, и через две пересекающиеся прямые FG и MH—секущую плоскость, горизонтальный след которой есть прямая gh, проходящая через горизонтальные следы h и g прямых GF и MH. Этот след пересекает основание призмы $abcde$ в точках t и u, а, следовательно, сама плоскость пересечет призму по прямым $(tr, t'r')$ и $(uv, u'v')$, параллельным ребру призмы. В свою очередь, прямые TR и UV пересекают данную прямую в точках (q, q') и (p, p'), которые и суть искомые.

§ 190. Задача. *Найти точки встречи прямой с пирамидой.*

В случае пирамиды вспомогательную плоскость должно провести через данную прямую и вершину пирамиды, ибо такая плоскость пересечет пирамиду по двум прямым, лежащим на гранях пирамиды. На этом основании для проведения вспомогательной плоскости возьмем на данной прямой $(gf, g'f')$ [*черт.* 171] точку (m, m') и соединяем ее с вершиною пирамиды (s, s') прямою $(ms, m's')$. Плоскость, проходящая через две пересекающиеся прямые GF и MS, и есть требуемая вспомогательная. Горизонтальный след ее gh пересекает основание пирамиды в точках t и u, а, следовательно, сама плоскость пересечет пирамиду по прямым $(ts, t's')$ и $(us, u's')$. В свою очередь, эти последние прямые пересекаются данною прямою в точках (p, p') и (q, q'), которые и суть искомые.

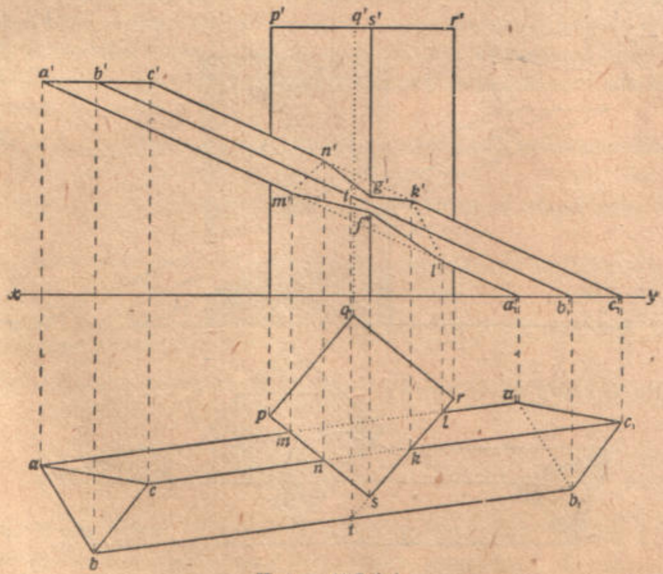


Черт. 171.

V. Пересечение двух многогранников.

§ 191. Задача определения пересечения двух многогранников сводится к *разысканию точек пересечения ребер одного многогранника с гранями другого* и, обратно,—ребер второго с гранями первого. При этом, так как плоскость каждой грани задана ребрами грани, особенно полезным является метод, указанный в *§ 76*. Применяют также и другие методы, значительно упрощающие построение и основанные на частных особенностях данных тел и их расположении по отношению к плоскостям проекций. После того как точки пересечения найдены, их последовательно соединяют, вычерчивая ломаную линию, которая и представляет собою линию пересечения многогранников. При этом полезно иметь в виду следующие очевидные соображения:

1) Если хотя бы в одной из проекций (горизонтальной или вертикальной) ребро не пересекает грани, то и в пространстве они не встречаются.

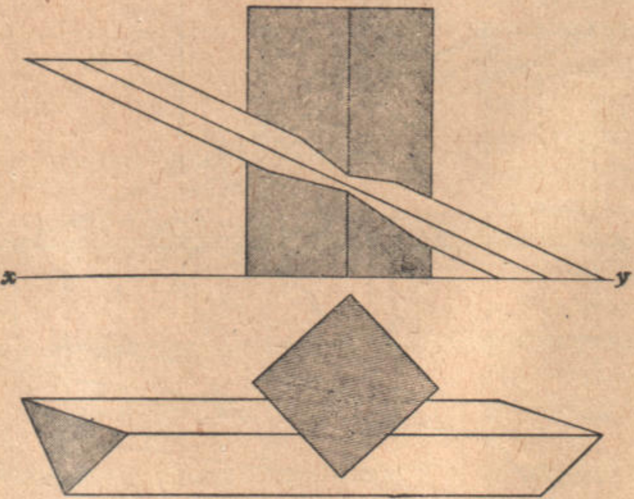


Черт. 172 (а).

2) Соединяются только те точки пересечения, которые лежат в одной и той же грани, как по отношению к первому, так и ко второму многограннику.

Задача. *Построить пересечение прямой призмы с квадратным основанием и косой треугольной призмы.*

Пусть на черт. *172*(*a*) имеем прямую квадратную призму ($pqrs$, $p'q'r's'$) и косую треугольную призму (abc, $a'b'c'$), ($a_1b_1c_1$, $a'_1b'_1c'_1$). Рассматривая горизонтальные проекции призм, замечаем, что вертикальные ребра p, q и r вовсе непересекают проекций треугольной призмы и, следовательно, точки пересечения остается искать лишь на ребре s. Проходящая через это ребро вертикальная плоскость (SR) пересекает грань ABA_1B_1 треугольной призмы по линии (lt, $l't'$), которая встречает ребро (s) прямой призмы в точке (s', f'). Аналогичным образом находим, что вертикальная плоскость (SR) пересекается с гранью BCB_1C_1 по линии (tk, $t'k'$), которая определяет на ребре (s) вторую точку пересечения (s, g'). Переходя к ребрам треугольной призмы, замечаем, что ребро BB_1 вовсе не пересекает прямой призмы, ребро AA_1 пересекает ее в точках (m, m') и (l, l'), а ребро CC_1 — в точках (n, n') и (k, k'). Наконец, соединяя найденные точки пересечения в последовательном порядке ломаной линией, получим проекции



Черт. 172 (b).

линии пересечения призм, вертикальную — $f'm'n'g'k'l'f'$ и горизонтальную — $smnskls$. На чертеже *172*(*b*) изображены лишь видимые части пересекающихся призм.

Задачи.

226. Пересечь куб, поставленный на горизонтальную плоскость проекций, плоскостью, проходящей через его центр и середины двух смежных ребер. Найти истинный вид сечения.

227. Правильная пятиугольная призма положена своею боковою гранью на горизонтальную плоскость так, что ребра ее составляют с вертикальною плоскостью проекций угол в 36°. Требуется построить: 1) проекции призмы; 2) сечение ее плоскостью, перпендикулярною к вертикальной плоскости проекций и наклонною к горизонтальной под углом в 30°; 3) истинную величину сечения.

228. Построить развертку пирамиды, усеченной плоскостью, проходящею через ось проекций и точку, взятую на ребре.

229. Построить развертку призмы, усеченной плоскостью, проходящею через одну из сторон основания и составляющей данный угол с горизонтальною плоскостью проекций.

230. Построить развертку призмы, усеченной плоскостью, параллельною оси.

231. По данной развертке призмы и пирамиды построить их проекции.

232. Восьмигранник, диагональ которого вертикальна, пересечь плоскостью, перпендикулярною к горизонтальной плоскости проекций.

233. Найти точки встречи прямой с параллелепипедом.

234. Построить развертку всех правильных многогранников.

235. Пересечь октаэдр, диагональ которого вертикальна, плоскостью, проходящею через ось и центр его.

236. Дана правильная треугольная пирамида, поставленная основанием своим ABC на горизонтальную плоскость. Пересечь эту пирамиду плоскостью, которая проходит через середину ее высоты, параллельна AB и составляет с горизонтальною плоскостью угол в 45°.

237. Дана правильная треугольная пирамида, поставленная основанием своим ABC на горизонтальную плоскость проекций. Пересечь эту пирамиду плоскостью биссектора двугранного угла, имеющего своим ребром сторону основания BC.

238. Провести через данную точку плоскость, которая пересекает данный прямой параллелепипед по квадрату.

239. Через данную точку провести плоскость, которая пересекает боковые ребра данной треугольной пирамиды под одним и тем же углом.

240. Через точку, данную на ребре треугольной пирамиды, провести плоскость так, чтобы она пересекала пирамиду по равнобедренному треугольнику с данною стороною.

241. Дана треугольная пирамида и прямая на одной из ее граней: провести через эту прямую плоскость, которая пересекает эту пирамиду по прямоугольному треугольнику.

242. Через данную точку провести плоскость, которая пересекает боковые грани данной (правильной) пирамиды под одним и тем же углом. Найти сечение.

243. Построить пересечение двух прямых правильных призм, лежащих на горизонтальной плоскости своими боковыми гранями так, что их параллельные ребра образуют угол в 30°.

244. Найти пересечение куба с пирамидой, вершина которой находится в центре куба, а основание в плоскости одной из его граней.

245. Построить пересечение крыши с дымовою трубою, рассматривая их как горизонтальную и вертикальную призмы, или как пирамиду и призму. Вычертить развертки той и другой.
