ОТДЕЛ ВТОРОЙ
О ПОВЕРХНОСТЯХ

ГЛАВА I.

ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ О ПОВЕРХНОСТЯХ.

Классификация поверхностей.

§ 192. Всякая правильная поверхность может быть рассматриваема, как воображаемый след, который оставляют линии, прямые или кривые, движущиеся определенным образом в пространстве; иначе говоря, *правильная поверхность есть геометрическое место линии, движущейся в пространстве по определенному закону.*

Закон движения линии выражается обыкновенно требованием, чтобы линия во время своего движения: 1) или постоянно опиралась на три неподвижных линии; 2) или, опираясь на две неподвижных линии, сохраняла бы определенное положение относительно неподвижной плоскости; 3) или, наконец, опираясь на одну неподвижную линию, проходила бы в то же время или через неподвижную точку, или была параллельна определенному направлению, ибо во всех этих случаях линия имеет в пространстве только одно, вполне определенное, движение.

Движущаяся линия, которая своим движением образует поверхность, называется *образующею или производящею*, а неподвижные линии, которые управляют движением производящей,— *направляющими.*

§ 193. Все правильные поверхности по виду образующей могут быть разделены на *два класса:* на поверхности *линейчатые,* образующая которых есть *прямая линия*, и на поверхности *кривые*, образующая которых есть *кривая линия*.

В свою очередь, поверхности линейчатые разделяются на *два разряда*: на поверхности А) *развертывающиеся* и В) *косые*.

Развертывающиеся поверхности имеют своею производящей прямую, которая двигается так, что два ее смежных положения лежат в одной плоскости, т.-е. пересекаются в одной точке, конечной или бесконечно удаленной. Ряд точек, в которых пересекаются последовательные производящие, образуют кривую двойной кривизны, известную под именем *кривой возврата*.

Отсюда следует, что в общем случае все развертывающиеся поверхности могут быть произведены прямою, которая во время своего движения остается постоянно касательной к кривой возврата, и что все развертывающиеся поверхности могут быть наложены на плоскость без разрыва и складок.

Косые поверхности имеют своею производящею прямую, которая движется так, что каждые два ее смежные положения не лежат в одной плоскости. В общем случае все косые поверхности могут быть произведены или движением прямой по трем направляющим, или движением прямой по двум направляющим, но так, что производящая в каждом своем положении находится в одинаковом положении в отношении третьей направляющей, образуя, например, с ней постоянный угол.

§ 194. Частные виды развертывающихся поверхностей суть поверхности *цилиндрические* и *конические*.

Цилиндрические поверхности имеют своею производящей прямую, которая во время движения постоянно опирается на направляющую — сомкнутую или разомкнутую кривую — и остается в то же время параллельной данному направлению, не лежащему в плоскости направляющей (в противном случае цилиндрическая поверхность обращается в плоскость). Отсюда заключаем, что кривая возврата в цилиндрической поверхности есть точка, лежащая в бесконечности.

Коническая поверхность имеет своею производящей прямую, которая во время движения постоянно опирается на направляющую—сомкнутую или разомкнутую кривую—и в то же время проходит через неподвижную точку, не лежащую в плоскости направляющей (в противном случае коническая поверхность обращается в плоскость).

Отсюда заключаем, что кривая возврата у конической поверхности есть конечная точка.

При неопределенной длине производящей коническая поверхность состоит из двух частей, соединяющихся между собою в неподвижной точке. Эти части называются *полами* конической поверхности, а неподвижная точка—*вершиною* ее.

§ 195. Частные виды косых поверхностей суть следующие:

1) *Однополый гиперболоид*, поверхность которого образуется движением прямой по трем скрещивающимся прямым.

2) *Гиперболический параболоид*, поверхность которого образуется движением прямой параллельно постоянной плоскости по двум скрещивающимся прямым.

3) *Коноид*, поверхность которого образуется движением прямой параллельно постоянной плоскости по двум направляющим прямой и кривой.

4) *Цилиндроид*, поверхность которого образуется движением прямой параллельно постоянной плоскости по двум кривым направляющим [1]).

5) *Прямая винтовая поверхность* образуется движением прямой по двум направляющим—винтовой линии и оси ее, при чем производящая составляет прямой угол с осью винта.

6) *Косая винтовая поверхность* образуется движением прямой по двум направляющим — винтовой линии и оси ее, при чем производящая составляет с осью постоянный острый угол.

На основании предыдущего, классификацию поверхностей можно представить следующей таблицей.

ПРАВИЛЬНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

I класс. Линейчатые поверхности

А. Развертывающиеся поверхности

1. Цилиндрические.
2. Конические.

Б. Косые поверхности

1. Однополый гиперболоид.
2. Гиперболический параболоид.

---

[1]) В случае гиперболического параболоида коноида и цилиндроида производящая движется по двум направляющим и образует прямой угол с перпендикуляром к той плоскости, которой она параллельна.

3. Коноид.
4. Цилиндроид.
5. Винтовые поверхности.

II класс. Кривые поверхности.

§ 196. Для удобства исследования, из правильных поверхностей, только-что классифицированных нами, выделяют особый класс поверхностей, образованных по одному и тому же закону; именно—*поверхности вращения*.

Поверхности вращения производятся вращением какой-либо производящей—прямой или кривой, около неподвижной прямой, называемой *осью* поверхности.

Из сказанного видно, что каждая точка производящей описывает около оси окружность, лежащую в плоскости, перпендикулярной к этой оси (*§ 101*), и что, следовательно, всякая плоскость, перпендикулярная к оси, пересекает поверхность вращения по окружности. Такие окружности называются *параллелями*, при чем наибольшая из них называется *экватором*, наименьшая — *горлом*.

С другой стороны, из того же определения видно, что все плоскости, проходящие чрез ось поверхности, пересекают поверхность по кривым, равным между собою. Каждая из этих кривых называется *меридианальным сечением*.

§ 197. Частные виды поверхностей вращения получают свое название от вида кривой меридианального сечения.

Из них наиболее замечательны следующие:

1) *Шар.* Кривая меридианального сечения есть окружность, а ось поверхности—диаметр этой окружности.

2) *Эллипсоид вращения.* Кривая меридианального сечения есть эллипс, а ось поверхности—одна из главных его осей.

3) *Гиперболоид.* Кривая меридианального сечения есть гипербола, а ось поверхности или мнимая, или действительная ось гиперболы; в первом случае гиперболоид называется однополым и представляет собою частный случай поверхности, рассмотренной в *§ 195* п. 1, во втором—двуполым.

4) *Параболоид.* Кривая меридианального сечения есть парабола, а ось поверхности—ось параболы.

5) *Цилиндр вращения.* Кривая меридианального сечения есть прямая параллельная оси поверхности.

Цилиндр вращения есть частный случай цилиндрической поверхности, когда направляющая есть круг, а производящая— прямая, перпендикулярная плоскости этого круга.

6) *Конус вращения.* Кривая меридианального сечения представляет прямые, пересекающие ось поверхности в одной и той же точке. Конус вращения можно рассматривать как частный случай конической поверхности, когда направляющая есть круг, а постоянная точка находится на перпендикуляре к плоскости круга, восстановленном из центра его.

§ 198. Всякая из рассмотренных нами поверхностей может быть образована несколькими способами и может иметь, следовательно, несколько различных производящих и несколько различных направляющих; ибо, если на образованной уже поверхности, напр., цилиндрической, начертим произвольную кривую, то ничто нам не мешает принять эту кривую за новую направляющую. Выбор того или иного способа образования поверхности обусловливается удобством решения тех или иных вопросов.

§ 199. *Следом* поверхности называется линия, по которой поверхность пересекает плоскости проекций; таким образом, вообще говоря, каждая поверхность имеет два следа—горизонтальный и вертикальный.

Следы поверхностей в большинстве случаев выбираются за направляющие.

II. Задание поверхностей.

§ 200. *Задать поверхность значит дать условия, которые позволяют определить каждую точку, принадлежащую поверхности.*

С этой целью, вообще говоря, достаточно дать проекции производящей и направляющих, но эти последние должно выбирать таким образом, чтобы они с первого взгляда на чертеж определяли по возможности вид поверхности и были бы наиболее удобны при графических построениях.

Таким образом поверхности, которые подлежат нашему изучению, задаются обыкновенно следующим образом:

1) *Цилиндрические поверхности — горизонтальным следом, рассматриваемым как направляющая, и направлением производящей.*

2) Конические поверхности — горизонтальным следом, принятым за направляющую, и проекциями вершины.

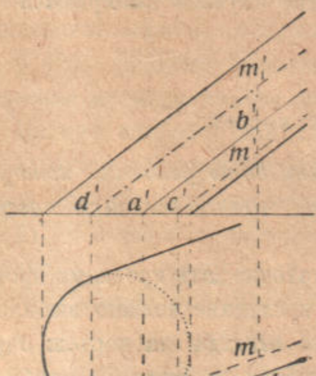
3) Поверхности вращения в случае, когда ось поверхности перпендикулярна к горизонтальной плоскости проекций, — *осью и меридианальным сечением, параллельным вертикальной плоскости проекций*, или, так называемым, *главным меридианом*.

§ 201. Такого задания бывает, однако, недостаточно для определения вида поверхности, и потому в тех случаях, когда поверхность не распространяется безгранично во все стороны, чертят на каждой из плоскостей проекций *видимый очерк* или *контур поверхности*, т.-е. тот вид, который имеет поверхность на плоскости проекций для наблюдателя, удаленного на бесконечно большое расстояние от плоскости [*§ 158*].

§ 202. Докажем теперь, что вышеприведенные данные достаточны для определения точек, принадлежащих поверхности.

Задача. *Цилиндрическая поверхность задана горизонтальным следом и направлением производящей; определить на ней точку, которая имеет одною своею проекцией данную точку.*

На *черт. 173* цилиндрическая поверхность представлена своим видимым очерком, при чем кривая *adc* есть горизонтальный след поверхности, (ab, $a'b'$) — крайнее положение производящей, m — данная точка, принятая за горизонтальную проекцию искомой точки. Задача сводится к определению вертикальной проекции точки M под тем условием, чтобы точка M принадлежала поверхности. Искомая точка должна лежать на производящей, и потому, проведя чрез m прямую mc параллельно ab, найдем горизонтальную проекцию производящей точки M. Чтобы построить вертикальную проекцию той же производящей, заметим, что mc пересекает след поверхности в точке c, и что, следовательно, точка c есть ее горизонтальный след. По c определим на оси c' и, следовательно, найдем точку, принадлежащую



Черт. 173.

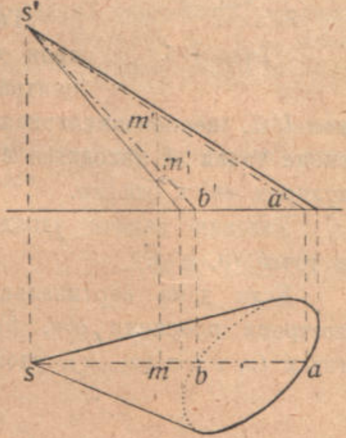
искомой вертикальной проекции производящей, направление которой параллельно $a'b'$; а потому прямая $c'm'$, параллельная $a'b'$, и есть вертикальная проекция производящей точки M. Отсюда заключаем, что вертикальная проекция точки M находится в точке m' на пересечении $c'm'$ с перпендикуляром mm' к оси xy.

Задача имеет два решения, ибо производящая cm встречает след поверхности еще в точке (d,d'), которой соответствует производящая $(dm,d'm'_1)$ и точка (m,m'_1).

§ 203. Задача. *Коническая поверхность задана горизонтальным следом и проекциями вершины; определить на ней точку, которая имела бы одною своею проекцией данную точку.*

На *черт. 174* коническая поверхность представлена своим видимым очерком, при чем кривая ab есть горизонтальный след поверхности, точка (s, s') — вершина ее, m — данная горизонтальная проекция искомой точки поверхности.

Искомая точка должна находиться на производящей, которая имеет своею горизонтальной проекцией прямую sm, соединяющую точку m с горизонтальною проекцией s вершины, а своим горизонтальным следом — точку a; по a определим на оси a', и таким образом найдем вертикальную проекцию $s'a'$ производящей искомой точки, а потому искомая вертикальная проекция m' точки M будет находиться на пересечении $s'a'$ с перпендикуляром mm' к оси.

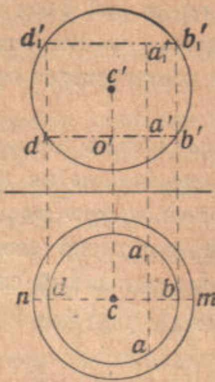


Черт. 174.

Вопросу удовлетворяет еще производящая $(sb, s'b')$ и точка (m, m'_1).

§ 204. Задача. *Поверхность вращения, ось которой перпендикулярна к горизонтальной плоскости, задана осью и главным меридианом. Определить точку на поверхности по данной одной из ее проекций.*

Пусть [*черт. 175*] c—горизонтальная проекция оси, $o'c'$—вертикальная; в данном случае видимый очерк поверхности ограничен: на горизонтальной плоскости — экватором, который, как и всякая параллель поверхности, проектируется на горизонтальную плоскость в истинную величину по окружности, описанной из центра c, а на вертикальную — по прямой, перпендикулярной к $o'c'$; на вертикальной — главным меридианом, который проектируется на вертикальную плоскость в истинную величину по кривой $b'd'b'_1d'_1$, а на горизонтальную — по прямой mn, параллельной оси проекций.



Черт. 175.

Пусть a — данная горизонтальная проекция искомой точки поверхности.

Для определения вертикальной проекции точки A достаточно найти проекции параллели, на которой лежит точка A.

Горизонтальная проекция такой параллели есть окружность abd, описанная из центра c радиусом ca, а вертикальная — прямая $b'd'$, перпендикулярная к оси $c'o'$. А потому искомая проекция точки A находится в a', на пересечении $d'b'$ с перпендикуляром aa' к оси xy.

Условию задачи удовлетворяет еще параллель $(bd,\ b'_1d'_1)$ и точка $(a,\ a'_1)$.

Если дана вертикальная проекция a' искомой точки, то, построив проекции $(bd,\ b'd')$ ее параллели, найдем тоже две точки $(a,\ a')$ и $(a_1,\ a')$, удовлетворяющие вопросу.

Задачи.

246. Даны след цилиндрической поверхности и направление производящей; найти другой след поверхности.

247. Цилиндрическая поверхность задана следом и направлением производящей. Определить, лежит ли точка, данная проекциями, на поверхности.

248. Между вертикальными проекциями крайних производящих данной цилиндрической поверхности начерчена кривая линия; приняв ее за вертикальную проекцию кривой, лежащей на поверхности, определить ее горизонтальную проекцию.

249. Найти горизонтальный след цилиндра вращения, ось которого и радиус известны.

250. Найти горизонтальный след цилиндра вращения, ось которого и положение одной производящей известны.

251. Даны вершина и след конической поверхности, найти другой след поверхности.

252. Коническая поверхность дана следом и проекциями вершины; узнать, находится ли точка, данная проекциями, на поверхности.

253. Чрез вершину конуса провести прямую и определить, находится ли эта прямая на поверхности.

254. Между горизонтальными проекциями крайних производящих данной конической поверхности начерчена кривая; приняв ее за горизонтальную проекцию кривой, лежащей на поверхности, найти вертикальную проекцию кривой.

255. Найти след конуса вращения, если известны проекции его оси[1] и радиус основания.

256. Найти след конуса вращения, если известны проекции его оси[1] и угол производящей с осью.

257. Даны—кривая своими проекциями, вертикальная ось и горизонтальная проекция точки. Найти вертикальную проекцию точки под условием, чтобы она лежала на поверхности вращения, образованной вращением кривой около оси.

258. Направляющими поверхности служат окружность, лежащая в горизонтальной плоскости, и прямая, параллельная оси xy, причем производящая остается постоянно в плоскости профиля. Взять точку на такой поверхности.

259. Дана ось, перпендикулярная к горизонтальной плоскости проекций, и круг в плоскости оси. Взять точку на поверхности, которая образуется вращением круга около оси.

---

[1] Точнее, отрезок оси от вершины до основания.

ГЛАВА II.

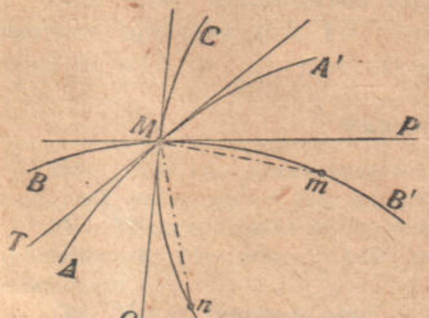
ПЛОСКОСТИ, КАСАТЕЛЬНЫЕ К ПОВЕРХНОСТЯМ.

I. Свойства плоскостей, касательных к поверхностям.

§ 205. Теорема I. *Все касательные, проведенные в данной на поверхности точке к различным кривым, начерченным на этой поверхности, лежат в одной и той же плоскости, называемой касательною плоскостью.*

В пояснение этой теоремы приведем следующие соображения.

Пусть (*черт. 176*) M—данная на поверхности точка, пусть AA', BB', CC'—кривые, проходящие на поверхности через точку M, MT, MQ, MP—касательные к ним. Покажем, что касательные MT, MQ, MP лежат в одной плоскости; для чего проведем чрез касательную MT секущую плоскость V, которая пересечет кривые CC' и BB' в точках n и m и которая, следовательно, содержит хорды Mm и Mn; затем станем вращать эту плоскость около MT до тех пор, пока точки m и n не приблизятся бесконечно близко к точке M; в этот момент хорды Mm и Mn, находящиеся в плоскости V во всех ее положениях, перейдут к своему пределу и обратятся в касательные MQ и MP к кривым CC' и BB'. Отсюда заключаем, что три касательные — MT, MQ, MP, лежат в одной плоскости V.



Черт. 176.

Таким же образом можно показать, что какая-либо четвертая касательная находится в одной плоскости с двумя из трех касательных, рассмотренных нами, и что, следовательно, четыре касательных лежат в одной плоскости и т. д.

§ 206. Отсюда вытекает, во-первых, следующее определение касательной плоскости:

Касательная плоскость в точке, данной на поверхности, есть геометрическое место касательных, построенных в той же точке, к различным кривым, начерченным на поверхности.

Во-вторых, следующее общее правило для построения плоскости, касательной к какой бы то ни было поверхности.

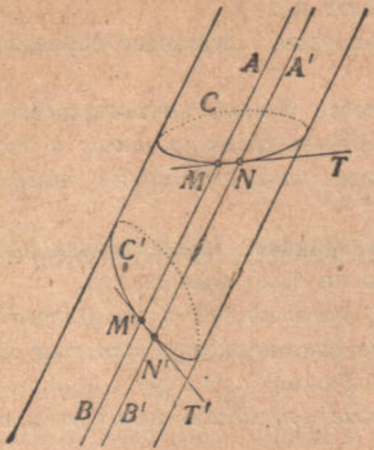
Для построения плоскости, касательной к поверхности в данной точке, достаточно через данную точку провести две касательные к двум кривым, проходящим через ту же точку на поверхности; эти касательные определят искомую плоскость.

§ 207. Это правило, применимое вообще к кривым поверхностям, упрощается в случае поверхностей линейчатых. Действительно, в линейчатых поверхностях через каждую точку на поверхности проходит прямая производящая, которая сама к себе касательна, и потому для проведения плоскостей, касательных к линейчатым поверхностям, достаточно *провести через данную точку одну кривую и через касательную к ней и прямолинейную производящую данной точки провести плоскость.*

В свою очередь, это последнее правило,применимое в случае косых линейчатых поверхностей, упрощается в случае поверхностей развертывающихся.

§ 208. Теорема II. *Плоскость касательная в точке M данной развертывающейся поверхности, касается поверхности в каждой точке, взятой на производящей точки касания и, следовательно, касается поверхности по всей производящей.*

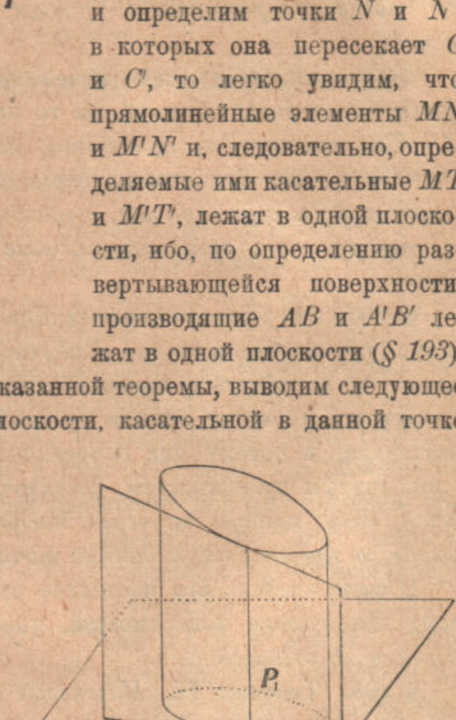
Для доказательства теоремы, очевидно, необходимо показать, что плоскость, касательная к развертывающейся поверхности в точке M [*черт. 177*], сливается с плоскостью, касательною к той же поверхности в какой-либо точке M', взятой на производящей AB точки M. По определению, касательная плоскость в точке M проходит через производящую AB и касательную MT к кривой C, начерченной на поверхности; на том же основании касательная плоскость в точке M' проходит через AB и касательную $M'T'$ к кривой C'. И потому для доказательства теоремы достаточно показать, что касательные MT и $M'T'$ лежат в одной плоскости.



Черт. 177.

В самом деле, если проведем производящую $A'B'$, бесконечно близкую к AB, и определим точки N и N', в которых она пересекает C и C', то легко увидим, что прямолинейные элементы MN и $M'N'$ и, следовательно, определяемые ими касательные MT и $M'T'$, лежат в одной плоскости, ибо, по определению развертывающейся поверхности, производящие AB и $A'B'$ лежат в одной плоскости (*§ 193*).

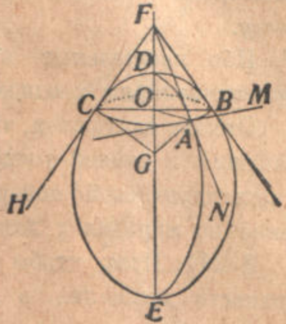
§ 209. На основании доказанной теоремы, выводим следующее правило: для построения плоскости, касательной в данной точке к развертывающейся поверхности, достаточно провести плоскость через производящую данной точки и касательную *к какой-либо кривой*, начерченной на поверхности, в точке ее пересечения с производящей точки касания. Отсюда заключаем, что плоскость, касательная к развертывающейся поверхности в какой-либо точке M [*черт. 178*], должна проходить через производящую MP этой точки и касательную RR_1 к следу PP_1 поверхности в точке P пересечения его с производящей точки касания.



Черт. 178.

§ 210. Теорема III. *Плоскость, касательная к поверхности вращения в точке A, перпендикулярна к меридианальной плоскости, проходящей через точку касания.*

По правилу § *206*, плоскость, касательная в A [*черт. 179*] к поверхности вращения, определяется касательными в этой точке к двум кривым, начерченным на поверхности, и, следовательно, содержит касательные AM и AN, проведенные в точке A к параллели CAB и меридиану DAE точки касания. Для доказательства теоремы заметим, что касательная AM перпендикулярна к плоскости меридиана DAE, ибо она лежит в плоскости параллели CAB, перпендикулярной к плоскости меридиана DAE (так как все параллели перпендикулярны к оси ED, лежащей в меридианальной плоскости), и перпендикулярна к прямой OA их пересечения, как к радиусу; а потому и касательная плоскость, как проходящая через перпендикуляр AM к плоскости DAE, сама перпендикулярна к плоскости DAE.



Черт. 179.

§ 211. Отсюда заключаем, что нормаль AG к поверхности вращения в данной точке A должна встречать ось вращения, ибо, будучи перпендикулярна к касательной плоскости, лежит в плоскости меридиана.

§ 212. Теорема IV. *Касательные, проведенные к меридианальным кривым во всех точках встречи их с одной и той же параллелью, суть производящие конуса вращения, который имеет свою вершину на оси поверхности и который касается поверхности по параллели.*

В самом деле, касательная AN [*черт. 179*] к меридиану DE, как лежащая в плоскости DAE, встречает ось поверхности в точке F, а потому, при вращении меридианальной плоскости около оси DE, меридиан DAE произведет поверхность вращения, точка A опишет параллель CB, точка F остается неподвижной, прямая же AF, оставаясь касательной к меридианальному сечению, произведет конус вращения, касательный к поверхности по параллели BC.

Отсюда заключаем, что плоскость, касательная к поверхности вращения в какой-либо точке, будет в то же время касательна и к конусу, касательному к поверхности по параллели точки касания.

§ 213. Теорема V. *Касательные, проведенные к параллелям во всех точках встречи их с одним и тем же меридианальным сечением, суть производящие цилиндрической поверхности, касающейся поверхности вращения по данному меридиану.*

Ибо касательные к параллели, напр. AM [*черт. 179*] перпендикулярны к одному и тому же меридиану.

Отсюда заключаем, что плоскость, касательная к поверхности вращения в данной точке, сливается с плоскостью, касательною к цилиндрической поверхности, касающейся поверхности вращения по меридиану данной точки.

§ 214. Итак, чтобы провести плоскость, касательную к поверхности вращения в данной точке A, достаточно провести плоскость:

1) Перпендикулярную к нормали AG.

2) Касательную к конусу, касающемуся поверхности вращения по параллели точки касания.

3) Касательную к цилиндру, касающемуся поверхности вращения по меридиану точки касания.

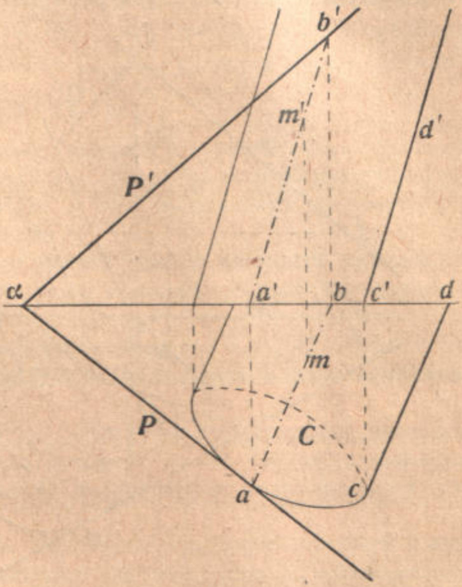
II. Плоскости, касательные к цилиндрическим поверхностям.

§ 215. Плоскость, касательная к цилиндрической поверхности, как к поверхности развертывающейся, содержит [*§ 209*] производящую точки касания и касательную к следу поверхности в точке его пересечения с производящей точки касания. На этом основании построение касательных плоскостей к цилиндрическим поверхностям производится в главнейших частных случаях следующим образом.

Задача I. *Провести плоскость, касательную к цилиндрической поверхности, через точку, данную на поверхности.*

Пусть [*черт 180*] C — горизонтальный след поверхности и $(cd, c'd')$ — ее производящая, m — горизонтальная проекция точки касания.

По *§ 202* построим производящую $(ab, a'b')$ точки касания и на $a'b'$ определим вертикальную проекцию m' точки касания; затем проведем касательную Pa к следу C в точке a, и через две пересекающиеся прямые $(ab, a'b')$ и (aP, xy) проведем плоскость; эта плоскость и будет требуемая. Горизонтальный след ее aP совпадает с касательной Pa, а вертикальный aP' пройдет через точку a и вертикальный след (b, b') производящей $(ab, a'b')$. Следовательно, плоскость PaP' есть искомая.



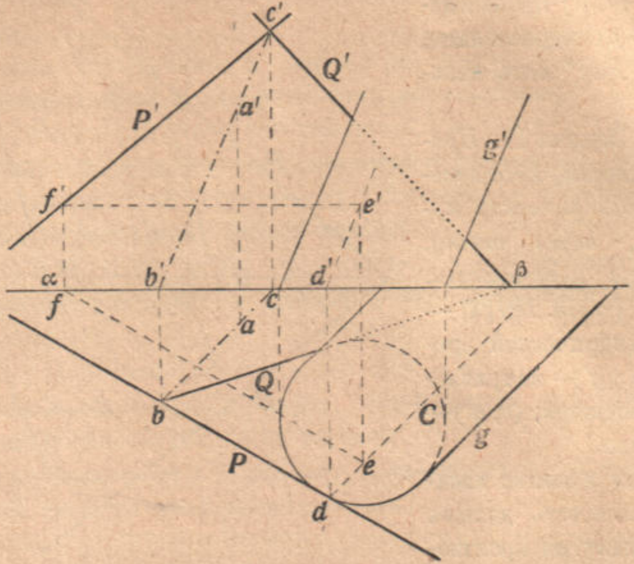
Черт. 180.

§ 216. Задача II. *Провести плоскость, касательную к цилиндрической поверхности, через точку, данную вне поверхности.*

Пусть [*черт. 181*] C — след цилиндрической поверхности, (g, g')—направление производящей; (a, a')—данная точка.

Так как искомая касательная плоскость должна содержать одну из производящих поверхности и проходить в то же время через точку A, то такая плоскость должна содержать и прямую $(bc, b'c')$, проведенную через точку A параллельно производящей (g, g'). А следовательно, горизонтальный след касательной плоскости должен проходить через горизонтальный след b прямой BC и в то же время быть касательным к следу C поверхности, ибо касательная плоскость должна содержать касательную к следу цилиндрической поверхности. На этом основании найдем, что касательные bP и bQ, проведенные через точку b к кривой C, суть горизонтальные следы искомых плоскостей; вертикальные же их следы должны проходить через вертикальный след c' прямой BC. И потому плоскости $P\alpha P'$ и $Q\beta Q'$ — суть искомые.

Если горизонтальный след одной из касательных плоскостей, например, αP, не встречает ось xy в пределах эпюра, то положение ее вертикального следа может быть определено при помощи горизонтали касательной плоскости. Для чего находят производящую $(de, d'e')$, по которой искомая плоскость касается к поверхности, и через какую-либо точку ее, наприм., (e, e'), проводят горизонталь (ef, $e'f'$). Таким образом находим вертикальный след f' горизонтали EF. Этот же прием употребляют,



Черт. 181.

когда вертикальный след c' прямой BC лежит вне пределов эпюра.

§ 217. Задача III. *Провести плоскость, касательную к цилиндрической поверхности и параллельную данной прямой.*

Пусть [*черт. 182*] ff — след поверхности, (fh, $f'h'$) — направление производящей, (ab, $a'b'$) — данная прямая.

Искомая касательная плоскость, как содержащая производящую поверхности, должна быть, очевидно, параллельна плоскости $P\alpha P'$, проходящей через данную прямую (ab, $a'b'$) и прямую (ac, $a'c'$), проведенную через какую-либо точку, наприм. (a, a'), прямой AB, параллельно производящей (fh, $f'h'$) (§ 69).

Отсюда заключаем, что горизонтальный след искомой касательной плоскости должен быть параллелен (§ 60) следу αP вспомогательной плоскости $P\alpha P'$ и в то же время касателен к следу поверхности ff. Но параллельно прямой αP можно провести к кривой ff две касательных Q и R, и, следовательно, поверхности в точке (c, c'). Следовательно $(ac, a'c')$ есть нормаль к поверхности в точке (a, a'). И потому остается при помощи горизонтали $(ad, a'd')$ провести плоскость PaP', перпендикулярную к $(ac, a'c')$ в точке (a, a') [*§ 58*]. Эта плоскость есть искомая.

Задачи.

266. Дана плоскость своими следами и горизонтальная проекция кривой, на ней лежащей; приняв эту кривую за направляющую конуса, вершина которого дана, провести к нему касательную плоскость, перпендикулярно к данной плоскости.

267. Провести параллельно данной прямой плоскость, касательную к конусу вращения, ось которого, вершина и угол производящей с осью даны.

268. Конус вращения задан проекциями оси и углом производящей с осью; через взятую на этом конусе точку провести к нему касательную плоскость.

269. Провести через точку, данную на оси проекций, плоскость, касательную к конусу, вершина которого лежит на оси, а основание есть круг, лежащий в плоскости, параллельной горизонтальной плоскости проекций.

270. Через точку, данную на конусе вращения, провести к нему касательную линию, составляющую данный угол с горизонтальной плоскостью проекций.

271. Через точку, данную вне шара, провести к нему касательную плоскость так, чтобы она составляла данный угол с горизонтальною плоскостью проекций.

272. Провести через ось проекций плоскость, касательную к шару.

273. Чрез данную прямую провести плоскость, касательную к шару.

274. Даны центр шара на оси проекций и прямая в плоскости профиля. Провести через эту прямую плоскость, касательную к шару.

275. Через окружность, данную в пространстве, провести шар, касательный к данной плоскости.

ГЛАВА III.

СЕЧЕНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ.

I. Общий способ построения плоских сечений.

§ 222. Общий прием для определения кривой, по которой данная поверхность S пересекается какою-либо плоскостью P, заключается в следующем. Выбирают вспомогательную плоскость R таким образом, чтобы линию C ее пересечения с поверхностью S можно было легко построить, и строят как эту линию, так и прямую D, по которой плоскость R пересекает плоскость P. Линия C и прямая D, как лежащие в плоскости R, вообще говоря, пересекаются, и точки их пересечения M_1, M_2,... очевидно, принадлежат искомому сечению.

Отсюда видно, что вся трудность решения задач относительно плоских сечений поверхностей заключается в удачном выборе вспомогательной плоскости R. Впрочем, в некоторых частных случаях кривая сечения бывает заранее известна, и тогда достаточно построить лишь элементы на этой кривой.

II. Плоские сечения цилиндрических поверхностей.

§ 223. Общий случай. *Определить сечение цилиндрической поверхности S какою-либо плоскостью P.*

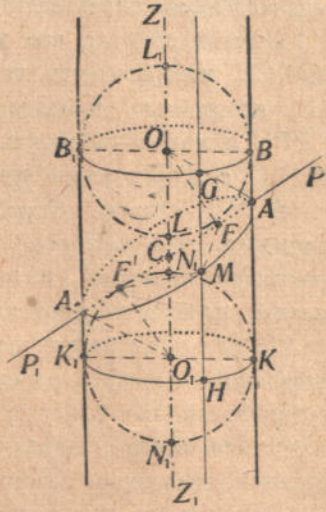
В данном случае за вспомогательные плоскости R выбирают плоскости, проектирующие производящие поверхности на одну из плоскостей проекций, напр., на вертикальную: тогда вертикальные следы плоскостей R будут направлены параллельно вертикальным проекциям производящих, а горизонтальные—

перпендикулярно к оси. Каждая такая плоскость пересечет поверхность по двум прямолинейным производящим C и C_1, имеющим одну и ту же вертикальную проекцию, а данную плоскость— по прямой D, которая, в свою очередь, пересечет прямые C и C_1 в точках M и N, принадлежащих искомому сечению.

§ 224. В случае цилиндра вращения кривая плоского сечения заранее известна.

Теорема. *Плоскость, пересекающая все производящие цилиндра вращения, пересекает поверхность по эллипсу.*

Примем [*черт. 187*] плоскость, проходящую чрез ось ZZ_1 поверхности и перпендикулярную к секущей плоскости за плоскость чертежа и пусть эта плоскость пересекает поверхность по производящим BK, B_1K_1, а секущую плоскость PP_1 — по прямой AA_1.



Черт. 187.

Построим биссекторы AO и A_1O_1 углов BAA_1, AA_1K_1 и продолжим их до встречи с осью ZZ' в точках O и O_1; затем опустим из точек O и O_1 перпендикуляры OF и O_1F' на прямую AA_1 и опишем из O и O_1, как из центров, радиусами OF и O_1F' окружности BLB_1L_1 и KNK_1N_1.

Легко видеть, что построенные таким образом окружности будут одновременно касаться и производящих BK, B_1K_1 и прямой AA_1.

Вследствие этого, если производящую BK станем вращать около оси ZZ', то 1) BK произведет поверхность; 2) точки B и K опишут окружности BB_1 и KK_1; 3) полукруги L_1BL и N_1KN—сферы, касательные одновременно и к секущей плоскости PP_1 в точках F и F' и к поверхности цилиндра по кругам KHK_1, BGB_1.

После таких построений легко уже показать, что кривая AMA_1 сечения плоскости PP_1 с поверхностью цилиндра есть эллипс, фокусы которого суть точки F и F'. В самом деле, возьмем на кривой AMA_1 какую-либо точку M и чрез эту точку проведем, во первых, две прямые MF и MF', а во-вторых—производящую GH, которая встречает круги KK_1 и BB_1 в точках G и H, и докажем, что $MF + MF'$ есть постоянная величина [*§ 240*]. Отрезки MF и MG равны между собою, как отрезки касательных, проведенных к сфере из одной и той же точки M; на том же основании равны между собою и отрезки MF' и MH. Следовательно,

$$MF + MF' = MG + MH = GH,$$

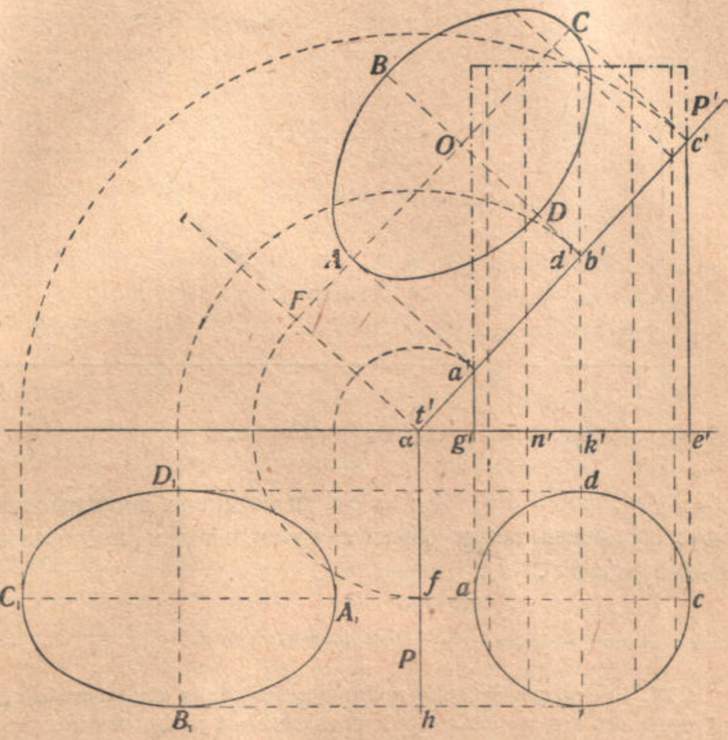
но GH есть величина постоянная для всех точек кривой AMA_1, ибо она представляет отрезки производящих, заключенные между параллельными плоскостями BGB_1 и KHK_1.

Отсюда следует, что кривая сечения есть эллипс, большая ось AA_1 которого есть пересечение данной секущей плоскости PP_1 плоскостью, проходящей через ось и перпендикулярной к PP_1, а малая—перпендикулярна к AA_1 в точке C пересечения оси ZZ' с AA_1 и равна диаметру цилиндра.

§ 225. Задача. *Определить кривую пересечения цилиндра вращения, ось которого перпендикулярна к горизонтальной плоскости проекций, плоскостью, перпендикулярною к вертикальной плоскости проекций.*

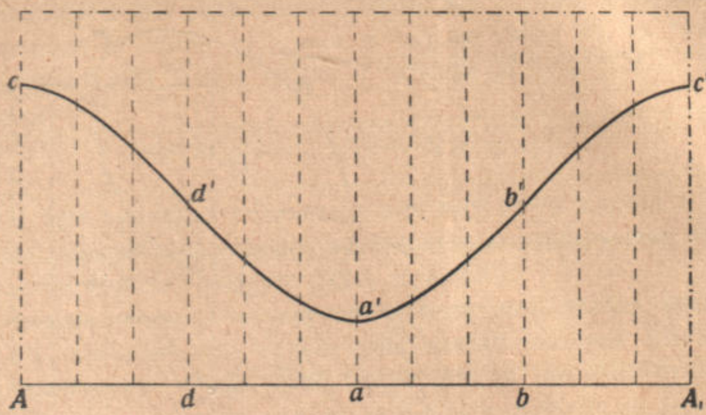
По условиям задачи искомое сечение проектируется на горизонтальной плоскости по следу цилиндра $abcd$ [*черт. 188*], а на вертикальной—по следу aP' секущей плоскости PaP' [*§ 51*]. Вследствие этого задача собственно сводится к построению истинной величины сечения; для чего можно было бы взять на проекциях сечения ряд точек и, совместив секущую плоскость вместе с этими точками с одною из плоскостей проекций, построить и самую кривую; но, на основании предыдущей теоремы, можно прямо видеть, что искомая кривая есть эллипс, большая ось которого проектируется по прямой (ac, $a'c'$), а малая—по прямой (bd, $b'd'$); и потому для построения истинной величины сечения достаточно совместить плоскость PaP' вместе с четырьмя точками (a, a'), (b, b'), (c, c') и (d, d') с одною из плоскостей проекций.

Таким образом, как совмещения A_1, B_1, C_1, D_1 упомянутых точек с горизонтальною плоскостью проекций определят оси A_1C_1 и B_1D_1 искомого эллипса, по которым легко построить и самую кривую, так и совмещения A, B, C, D тех же точек с вертикальною плоскостью проекций определят оси AC и BD того же эллипса.



Черт. 188.

Развертка цилиндра. Чтобы развернуть цилиндр с кривою сечения, разделим основание цилиндра на столь малые дуги (в нашем случае на 12), чтобы каждую из них без большой погрешности можно было принять равной стягивающей ее хорде, и отложим величины этих хорд последовательно одна за другою, начиная с точки c, на прямой AA_1 [*черт. 189*]. Если затем в точках A и A_1 восстановим перпендикуляры, равные высоте цилиндра, то получим прямоугольник, который и представит развертку цилиндра. Чтобы затем получить преобразованную кривую сечения, восстановим перпендикуляры в точках деления прямой AA_1 и на них отложим величины соответствующих им усеченных производящих цилиндра. Так, откладывая на перпендикулярах Ac, dd', aa', bb', A_1c' части $Ac = e'c'$, $dd' = k'b'$,



Черт. 189.

$aa' = g'a'$, $bb' = k'b'$, $A_1c' = e'c'$ и соединяя непрерывною кривою полученные таким образом точки, найдем преобразованное сечение $cd'a'b'c'$.

Задачи.

276. Найти пересечение цилиндра вращения плоскостью, проходящей через ось и наклоненной к горизонтальной плоскости под углом 45°.

277. Даны вертикальный след цилиндра и направление производящей. Найти сечение цилиндра какою бы то ни было плоскостью.

278. Найти пересечение какою-нибудь плоскостью цилиндра вращения, ось которого совпадает с осью проекций.

279. Найти пересечение какого бы то ни было цилиндра плоскостью проходящей через ось и точку.

280. Найти пересечение цилиндра, которого круговое основание лежит в горизонтальной плоскости, а производящая перпендикулярна к оси проекций и наклонена к горизонтальной плоскости под углом 60°, плоскостью, параллельною оси.

281. Даны: прямая в горизонтальной плоскости и плоскость. Найти точку в пространстве, отстоящую от прямой на расстоянии a, от плоскости—на расстоянии b и от горизонтальной плоскости на расстоянии c.

282. Найти геометрическое место точек, находящихся на данных расстояниях от данной прямой и от данной плоскости.

III. Плоские сечения конических поверхностей.

§ 226. Общий случай. *Определить сечение какой-либо конической поверхности S произвольной плоскостью.*

В данном случае за вспомогательные плоскости R выбирают плоскости, проходящие через вершину поверхности и перпендикулярные к одной из плоскостей проекций, напр., к вертикальной. При таком выборе вертикальные следы плоскостей R пройдут через вертикальную проекцию вершины, а горизонтальные будут перпендикулярны к оси xy проекций.

Каждая из построенных таким образом плоскостей R пересечет коническую поверхность по двум прямолинейным производящим C и C_1, а секущую плоскость по прямой—D, которая встретит производящие C и C_1 в двух точках M и N, принадлежащих искомой кривой сечения.

Определив таким путем возможно большее число точек сечения, находят затем истинную величину его посредством совмещения секущей плоскости вместе с найденными точками, с одною из плоскостей проекций.

Но в частном случае, когда коническая поверхность есть конус вращения, можно заранее предвидеть форму кривой сечения и построить кривую, найдя лишь главные ее элементы.

§ 227. Теорема. *Плоскость, которая встречает все производящие конуса вращения, лежащие по одну сторону от его вершины, пересекает поверхность по эллипсу.*

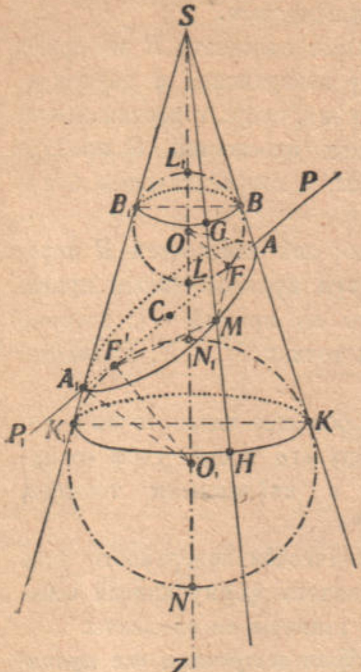
Пусть [*черт. 190*] SB и SB_1 — две производящие конуса, по которым плоскость, проведенная через ось SZ поверхности перпендикулярно к секущей плоскости PP_1 и принятая за плоскость чертежа, пересекает данный конус.

Пусть AMA_1—кривая пересечения конуса с плоскостью PP_1.

Проведем биссектор AO угла SAA_1 и положим, что он встречает ось SZ, которая сама есть биссектор угла ASA_1, в точке O. Точка O есть, следовательно, центр окружности BL_1B_1L, вписанной в треугольник A_1SA и касающейся сторон его A_1A, SA, SA_1 в точках F, B и B_1.

На тех же основаниях точка O_1 пересечения биссектора A_1O_1 угла AA_1K_1 с осью SZ есть центр окружности K_1N_1KN, вписанной в тот же треугольник SAA_1 и касающейся его сторон в точках F', K и K_1.

Если теперь повернем производящую SB около оси SZ, то 1) SB—произведет конус, 2) точки B и K опишут параллели BB_1 и KK_1. 3) полуокружности L_1BL и N_1KN произведут шаровые поверхности, касательные к конусу и секущей плоскости в точках F и F'. Отсюда легко доказать, что кривая AMA_1 сечения есть эллипс. В самом деле, возьмем на ней какую-либо точку M и, соединив ее с точками F и F', докажем, что, $MF+MF'$ есть величина постоянная, для чего проведем производящую MS точки M и допустим, что она пересекает параллели BB_1 и KK_1 в точках G и H. В таком случае $MF=MG$ и $MF'=MH$, как отрезки касательных, проведенных к шару из одной точки M. И потому:



Черт. 190.

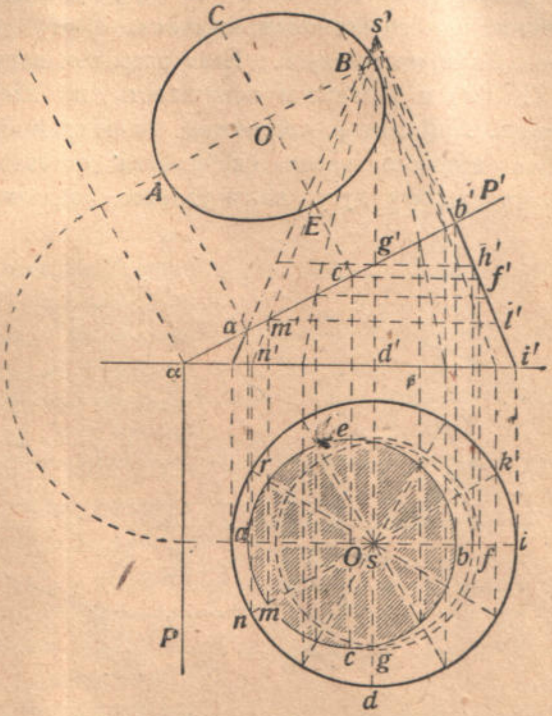
$$MF+MF'=MG+MH=GH,$$

но $GH=KB=K_1B_1$... есть постоянная величина для всех точек сечения, ибо равняется отрезкам производящих конуса, заключенным между параллелями, что и требовалось доказать.

§ 228. Задача. *Построить проекции кривой, по которой конус вращения пересекается плоскостью, встречающей все его производящие.*

Пусть [*черт. 191*] ось данного конуса перпендикулярна к горизонтальной плоскости проекций и пусть окружность $dnik$ представляет его горизонтальный след, а точка (s, s'), которой горизонтальная проекция совпадает с центром окружности,— вершину конуса. Пусть плоскость, пересекающая все производящие конуса, есть вертикальная проектирующая плоскость PaP.

В данном случае искомое сечение есть эллипс, которого большая ось, по предыдущему §, равна $a'b'$, а малая, как перпендикулярная к ней в точке c', делящей $a'b'$ пополам, равна хорде параллели, в плоскости которой лежит точка c'; всякий же эллипс вообще проектируется по эллипсам, оси которых суть проекции осей сечения; в данном же случае сечение проектируется на вертикальную плоскость по следу aP' секущей плоскости, и только на горизонтальную — по эллипсу, для построения осей которого достаточно найти горизонтальные проекции прямой $a'b'$ и хорды параллели, проходящей через точку c'. Горизонтальные проекции точек a' и b лежат на горизонтальных проекциях производящих SA и SB, т.-е. на прямых sa и sb в точках a и b; следовательно, ab есть большая ось горизонтальной проекции сечения.

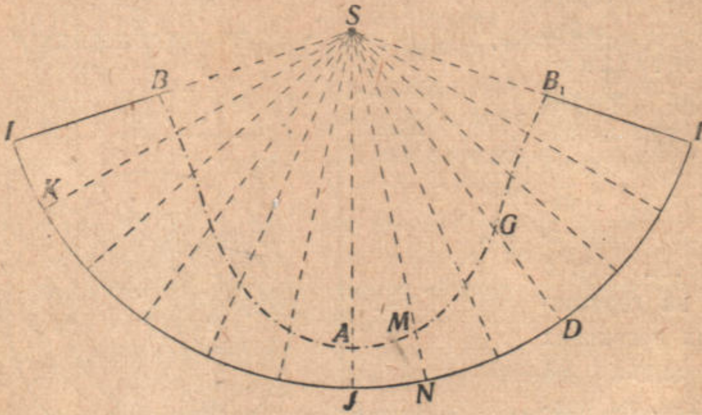


Черт. 191.

Для определения малой оси, которая будет направлена, по перпендикуляру к большой оси ab в точке o, делящей ab пополам проведем через точку c', вертикальную проекцию точки o, параллель $c'f'$, которая будет проектироваться на горизонтальную плоскость по окружности, описанной из центра s радиусом sf, и найдем точки e и c, в которых эта окружность засекает направление малой оси. Прямая ec есть малая ось горизонтальной проекции сечения. По осям ab и ec построим и самую кривую.

Для определения истинной величины сечения всего удобнее совместить секущую плоскость PaP', вместе с лежащими в ней осями $a'b'$ и ec, с вертикальною плоскостью проекций. В этом случае достаточно найти совмещение $AB = a'b'$ большой оси, и на перпендикуляре к ней, восстановленном к ее средине O, отложим части $OC = oc$ и $OE = oe$; CE есть малая ось сечения, ибо ce есть ее истинная величина.

Развертка конуса. Если разрежем конус по производящей $(si, s'i')$ и развернем поверхность на плоскость, то получим [*черт. 192*] сектор, описанный из центра S радиусом $SI = s'i'$, дуга которого равна окружности основания конуса. Чтобы построить эту дугу, всего удобнее разделить основание конуса



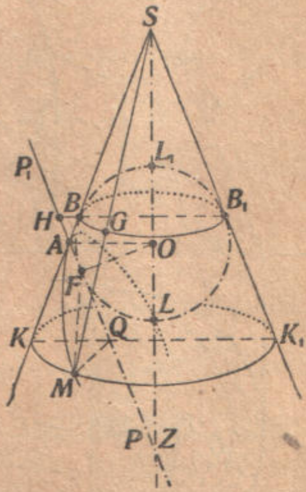
Черт. 192.

на весьма малые части (в нашем случае на 12) и эти части отложить последовательно на дуге II_1. Для построения преобразованного сечения проведем на развертке ряд последовательных производящих, для чего соединим точки деления основания конуса, напр., (n, n'), с вершиною его (s, s'), а соответствующие им точки, на дуге II_1, т.-е. точку N, — с точкою S, и отложим на найденных таким образом на развертке прямых истинную величину отрезков соответствующих производящих конуса; так, на прямой SN отложим истинную величину отрезка $(nm, n'm')$ соответствующей ей производящей $(sn, s'n')$. С этой целью производящую $(sn, s'n')$ повернем около оси $(s, s'd')$ в положение, параллельное вертикальной плоскости; в этом случае $(sn, s'n')$ перейдет в $(si, s'i')$, а точка m' — в точку l', следовательно, $l'i'$ есть истинная величина отрезка $(nm, m'n')$, которую и должно отложить на SN от N до M. Поступая таким образом далее относительно каждой производящей, получим ряд точек A, M, G..., которые, будучи соединены непрерывною кривою, представят искомое преобразованное сечение.

§ 229. Теорема. *Кривая пересечения конуса вращения плоскостью, параллельною одной из его производящих, есть парабола.*

Пусть секущая плоскость PP_1 параллельна производящей SB_1 [*черт. 193*] и плоскость, проходящая через SB_1 и ось поверхности SZ, принята за плоскость чертежа.

В таком случае легко доказать, что биссектор AO угла SAP перпендикулярен к оси SZ, которую он встречает в точке O, и что окружность, описанная из O радиусом OF, равным перпендикуляру, опущенному из O на AP, будет касательна к прямым SB, SB_1 и AP в точках B, B_1, F. Предположим теперь, что SB_1 вращается около оси SZ, тогда 1) SB_1 опишет поверхность, 2) точка B_1 — параллель BB_1, 3) полуокружность L_1B_1L — сферу, касательную к поверхности по параллели BB_1, а к секущей плоскости — в точке F. Отсюда легко уже вывести свойство точек, принадлежащих кривой сечения MAL. В самом деле, пусть



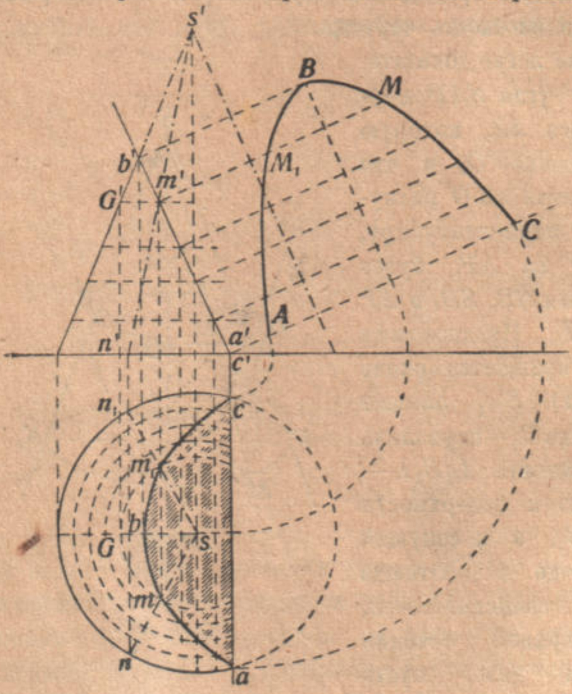
Черт. 193.

точка M — одна из точек сечения, SM — ее производящая которая пересекает параллель BB_1 в точке G, KK_1 параллель точки M; соединив точку M с точкою F, заметим, что $MF = MG$, $MG = KB$ и что секущая плоскость пересекает параллель KK_1 по прямой MQ, перпендикулярной к прямой PP_1, кроме того, что треугольники AKQ и ABH равнобедренны и что, следовательно, $AK = AQ$, $AB = AH$ и $KB = QH$; отсюда заключаем, что $MF = QH$. Последнее же свойство принадлежит параболе [*§ 271*], для которой точка F служит фокусом, а прямая, перпендикулярная в точке H к PP_1, — направляющей.

§ 230. Задача. *Определить проекции кривой, по которой конус вращения пересекается плоскостью параллельною одной из его производящих.*

Пусть ось конуса перпендикулярна к горизонтальной плоскости проекций и секущая плоскость, будучи параллельна производящей главного меридиана, в то же время перпендикулярна к вертикальной плоскости проекций [*черт. 194*].

При таких условиях кривая сечения есть парабола, вертикальная проекция которой лежит на вертикальном следе $a'b'$, секущей плоскости. Для определения же ее горизонтальной проекции воспользуемся общим способом [*§ 222*] и выберем за вспомогательные плоскости горизонтальные плоскости. Каждая из таких плоскостей, напр. G', пересечет конус по параллели, проектирующейся на горизонтальной плоскости по окружности, напр. G, описанной из центра s, а секущую плоскость — по прямой, горизонтальная проекция которой перпендикулярна к xy, напр , по прямой mm_1. Эта окружность и прямая пересекутся в двух точках, напр., m и m_1, которые и суть горизонтальные проекции точек искомой проекции сечения. Определив таким образом ряд точек горизонтальной проекции сечения и соединив их непрерывною чертою, найдем кривую abc, представляющую горизонтальную проекцию сечения.



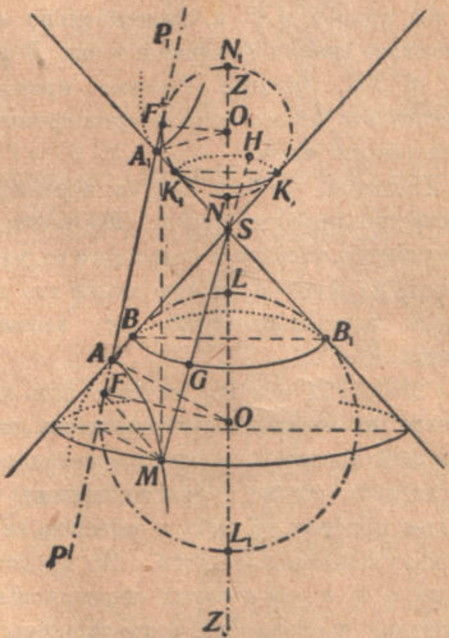
Черт. 194.

Для определения истинной величины сечения совместим секущую плоскость вместе с точками, принадлежащими сечению, с вертикальной плоскостью проекций. Кривая AM_1BMC — есть истинная величина сечения.

Для определения развертки поступаем так, как и в предыдущем случае.

§ 231. Теорема. *Кривая, по которой конус вращения пересекается плоскостью, встречающею обе его полы, есть гипербола.*

Проведем через ось ZZ_1 поверхности [*черт. 195*] плоскость перпендикулярную к секущей плоскости PP_1, и примем эту плоскость за плоскость чертежа. Пусть эта плоскость пересекает поверхность по производящим BSK и B_1SK_1; проведем биссекторы AO и A_1O_1 углов PAS и $P_1\dot{A}_1S$ и из точек O и O_1, встречи их с осью ZZ_1, опустим на PP_1 перпендикуляры OF и O_1F'; легко видеть, что окружности KNK_1N_1 и BLB_1L_1, описанные радиусами OF и O_1F' из центров O и O_1, будут касательны к производящим KB, K_1B_1 и к следу PP_1 в точках K, K_1. B, B_1, F, F'. Представим себе теперь, что производящая KB вращается около оси ZZ_1; в таком случае: 1) производящая KB опишет поверхность, 2) точки K и B — параллели KK_1 и BB_1, 3) полуокружности NKN_1 и LBL_1 - сферы, касательные как к поверхности по параллелям KK_1 и BB_1, так и к секущей плоскости в точках F и F'.



Черт. 195.

Теперь легко доказать, что каждая точка кривой сечения AM удовлетворяет условию гиперболы [§ *255*]. В самом деле, возьмем на кривой сечения точку M, соединим ее с точками F и F' прямыми MF и MF' и проведем ее производящую MS, которая пересечет параллели BB_1 и KK_1 в точках G и H.

В таком случае имеем:

$$MF = MG \text{ и } MF' = MH,$$

откуда

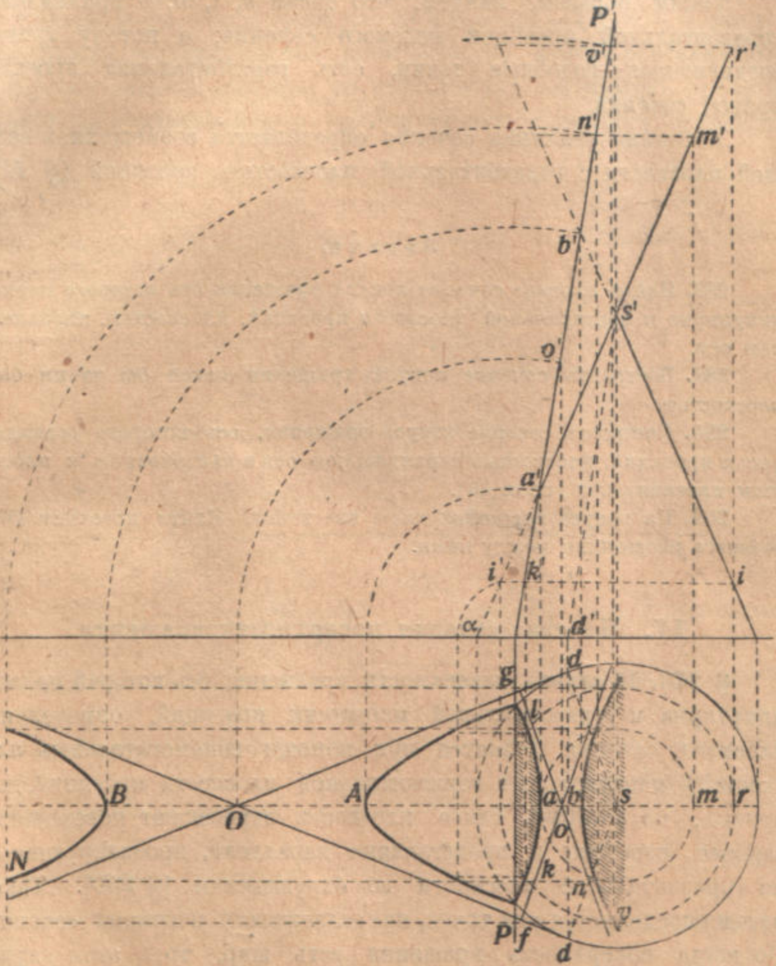
$$MF' - MF = MH - MG = GH.$$

Но GH, как отрезок производящей между двумя параллельными плоскостями BB_1 и KK_1, есть величина постоянная для всех точек кривой AM, и, следовательно, сама кривая есть гипербола, имеющая своими фокусами точки F и F'.

§ 232. Задача. *Найти проекции кривой, которая получается от пересечения конуса вращения плоскостью, встречающей обе его полы.*

Положим, что ось конуса перпендикулярна к горизонтальной плоскости проекций [*черт. 196*] и что, следовательно, след его есть окружность, описанная некоторым радиусом sd, а вершина S проектируется на горизонтальную плоскость в центре s этой окружности. Пусть секущая плоскость есть вертикально-проектирующая плоскость PaP'.

По *§ 231* искомое сечение есть гипербола, которая проектируется на вертикальную плоскость по вертикальному следу aP' секущей плоскости, а на горизонтальную — по гиперболе, и чтобы определить точки, принадлежащие последней, воспользуемся общим приемом [*§ 222*] и выберем за вспомогательные плоскости горизонтальные плоскости. Но предварительно заметим, 1) что точки a' и b', в которых секущая плоскость встречает главный меридиан поверхности, суть вершины сечения, а, следовательно их горизонтальные проекции a и b суть вершины горизонтальной проекции сечения; 2) что отрезок $a'b'$ есть ось сечения [*§ 259*], а, следовательно, ее горизонтальная проекция ab есть ось проекции сечения; 3) что точка o', делящая $a'b'$ пополам, есть центр сечения, а, следовательно ее горизонтальная проекция o есть центр проекции сечения; 4) что производящие конуса (sd, $s'd'$), (sd_1, $s'd'$), параллельные секущей плоскости, параллельна ассимптотам сечения [*§ 266*], а, следовательно, прямые of и og, параллельные их горизонтальным проекциям sd и sd_1, суть ассимптоты проекции сечения. Затем проведем ряд вспомогательных горизонтальных плоскостей, напр., $n'm'$, $v'r'$, ii'...., которые пересекут поверхность



Черт. 196.

по параллелям, проектирующимся на горизонтальной плоскости по окружностям, описанным радиусами sm, sr и т. д. из центра s, а секущую плоскость—по прямым, проектирующимся на горизонтальную плоскость по прямым n, v, k,...., перпендикулярным к оси проекций. При этом точки, в которых горизонтальные проекции параллелей и соответствующих им прямых пересекаются между собою, суть точки, принадлежащие искомой горизонтальной проекции сечения.

Таким образом, найдем, что точки k, l, n, v принадлежат горизонтальной проекции искомого сечения; а потому кривая, соединяющая подобные точки, есть горизонтальная проекция кривой сечения.

Истинная величина сечения определяется совмещением секущей плоскости с горизонтальной плоскостью проекций [*§ 121*].

Задачи.

283. Найти плоское сечение конуса вращения, ось которого перпендикулярна к вертикальной плоскости проекций, плоскостью, параллельною оси.

284. Построить сечение конуса вращения какой бы то ни было плоскостью.

285. Построить сечение конуса вращения, ось которого совпадает с осью проекций, плоскостью параллельною оси и наклоненною к плоскостям проекции под углом 45°.

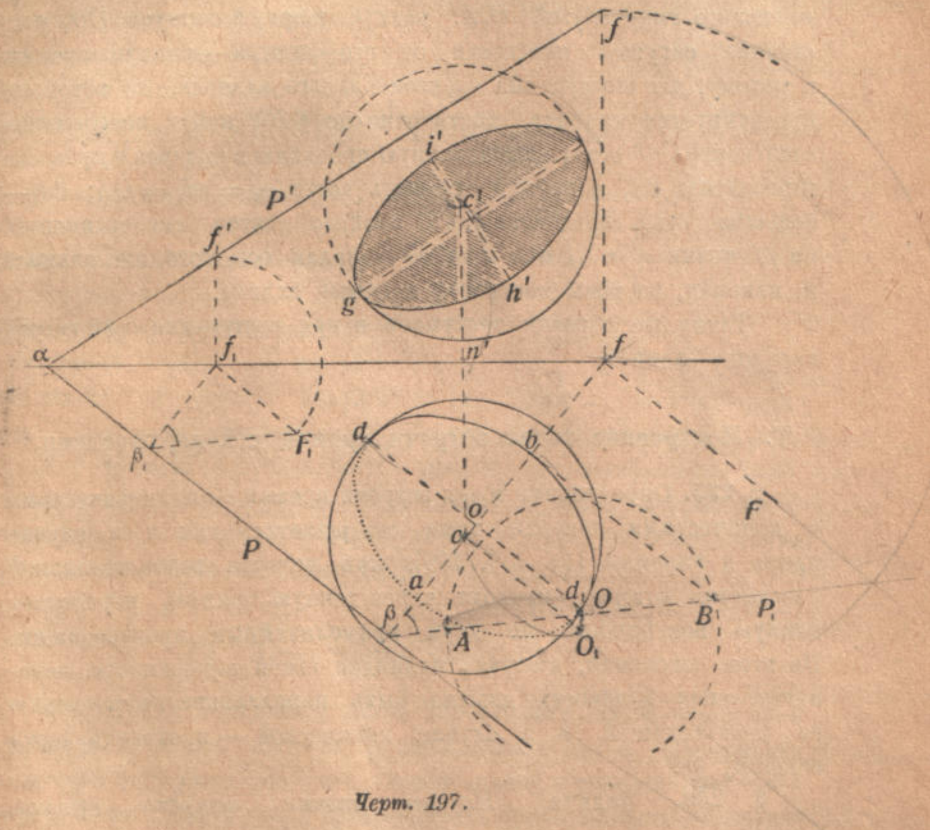
286. На конусе вращения даны две точки. Найти проекции кратчайшего расстояния между ними.

IV. Плоские сечения поверхности вращения.

§ 233. В случае поверхности вращения, ось которой перпендикулярна к горизонтальной плоскости проекций, определение плоского сечения делается при помощи вспомогательных плоскостей, параллельных горизонтальной плоскости проекций, ибо кривые, по которым такие плоскости пересекают поверхность, заранее известны и представляют параллели, проектирующиеся на горизонтальной плоскости по окружностям [§ *230*]. Таким путем определяется ряд точек, принадлежащих искомому сечению. Но когда поверхность вращения есть шар, то в этом случае построение проекций кривой плоского сечения значительно упрощается, ибо кривая сечения шара есть круг, и, следовательно, задача сводится к построению проекций осей эллипсов, по которым этот круг проектируется на обе плоскости проекций [§ *162*].

§ 234. Задача. *Построить проекции кривой, по которой шар пересекается какою-либо плоскостью.*

Геометрия доказывает, что всякое плоское сечение шара есть круг, центр которого есть основание перпендикуляра, опущенного из центра шара на секущую плоскость, а радиус — длина катета прямоугольного треугольника, построенного на гипотенузе, равной радиусу шара, и катете, равном расстоянию секущей плоскости от центра шара. Определив на этих основаниях центр и радиус окружности сечения, легко построить по *§ 162* вертикальный и горизонтальный эллипсы, по которым эта окружность проектируется на вертикальную и горизонтальную плоскость проекций.



Черт. 197.

Но все эти отдельные построения можно отчасти совместить, поступая следующим образом.

Пусть [*черт. 197*] (*c*, *c'*) — центр шара, *PaP'* — секущая плоскость. Из центра (*c*, *c'*) опустим перпендикуляр (*ca*, *c'i'*) на плоскость PaP' и горизонтально-проектирующую его плоскость $\beta f f'$ совместим с горизонтальной плоскостью проекций, при помощи оси вращения βf; при этом сечение плоскостей PaP' и $\beta f f'$ совместится с βP_1 и центр шара C—с точкою O_1 на расстоянии $cO_1 = n'c'$. Затем из точки O_1 засечем радиусом шара прямую βP_1 в точках A и B и опустим перпендикуляр $O_1 O$ на βP_1; легко видеть, что точка O, как совмещение основания перпендикуляра, опущенного из центра шара на секущую плоскость, есть совмещение центра искомого сечения, а отрезок $OA = OB$, как катет прямоугольного треугольника OAO_1, имеющего гипотенузой $O_1 A$, радиус шара, а катетом OO_1 расстояние секущей плоскости от его центра — радиус сечения; а потому, для построения горизонтального эллипса, по которому проектируется сечение, достаточно по § *162* найти по совмещению центра O его горизонтальную проекцию в o; через o провести горизонталь dd_1 и на ней отложить части $od = od_1 = OA$; dd_1— большая ось горизонтального эллипса, затем спроектировать на βf точки A и B в a и b; ab — малая ось того же эллипса и, наконец, по осям построить и самый эллипс.

Таким же образом поступаем и при построении осей вертикального эллипса.

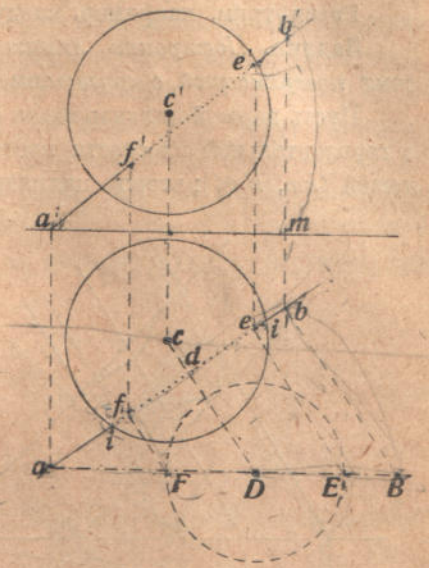
V. Построение точек встречи прямой с поверхностями.

§ 235. Определение точек встречи прямой с цилиндрическими и коническими поверхностями совершается, как и в случае призм и пирамид [*§§ 189, 190*], при помощи вспомогательной плоскости, которая, проходя через данную прямую, пересекает данную поверхность по двум прямолинейным производящим. На этом основании, в случае цилиндрической поверхности, вспомогательная плоскость должна быть параллельна направлению ее производящей, а в случае конической — проходить через вершину ее.

§ 236. Задача. *Найти точки встречи прямой с шаром.*

Пусть (*черт. 198*) $(ab, a'b')$ и (c, c') — данная прямая и центр шара.

Плоскость, горизонтально проектирующая данную прямую, пересекает данный шар по окружности, которая проектируется на горизонтальной плоскости по прямой ab и которая, следовательно, имеет своим диаметром отрезок ii', а центром — точку встречи перпендикуляра, опущенного из центра шара (c, c') на секущую плоскость [*§ 234*], т.-е. точку d.



Черт. 198.

Совместим эту плоскость с горизонтальной плоскостью проекций вместе с прямою AB и центром d при помощи оси вращения ab. При этом точка a, как горизонтальный след прямой, не изменит своего положения; точка (b, b') совместится с B на расстоянии bB от оси вращения, равном mb'; центр сечения — с D на расстоянии dD, равном расстоянию вертикальной проекции c' центра шара от оси проекций. Вследствие этого, если из D, как из центра, опишем окружность радиусом di, то эта окружность и есть совмещение сечения горизонтально-проектирующей прямую AB плоскости с шаром. Это совмещение пересекает совмещение прямой aB в точках F и E, которые представляют совмещение искомых точек, и для решения задачи остается найти их проекции (f, f') и (e, e').

VI. Пересечение поверхностей.

§ 237. Для построения точек пересечения двух поверхностей отыскивают точки встречи производящих одной поверхности со второй поверхностью, т.-е. сводят задачу к определению точек пересечения прямой (если производящие прямолинейны) и поверхности [*§§ 234, 235*]. Иногда можно с удобством пользоваться другими приемами [1]), основанными на определении точек пересечения

---

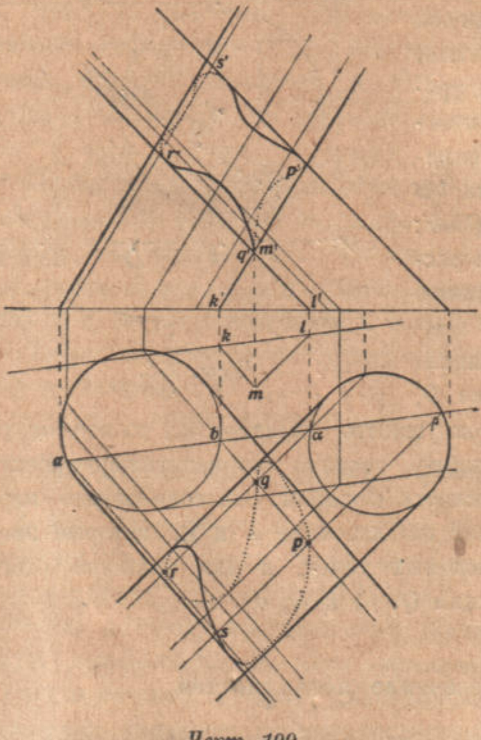
[1]) См., напр., *Рынин, Н. А.* „Ортогональные проекции". Ленинград. 1918 г.

прямолинейных производящих, когда они имеются как у одной, так и у другой поверхности.

Рассмотрим, например, следующую задачу:

Задача. *Построить линию пересечения двух цилиндрических поверхностей с круговыми основаниями.*

Пусть первый цилиндр задан своим основанием (ab), лежащим в горизонтальной плоскости проекций, и направлением производящей (km, $k'm'$); второй цилиндр — основанием ($\alpha\beta$) и направлением производящей (lm, $l'm'$) [*черт. 199*].

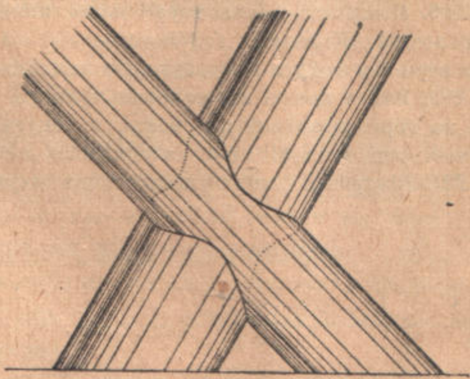


Черт. 199.

Всякая пара пересекающихся производящих данных цилиндров определяеть плоскость. Нетрудно видеть, что все эти плоскости будут параллельны между собою, как содержащие по две пересекающихся прямых данного, постоянного направления, а, следовательно, и следы их на плоскостях проекций также будут параллельны.

Построим направление горизонтального следа таких плоскостей. Для этого достаточно через произвольную точку (m, m') провести прямые (mk, $m'k'$) и (ml, $m'l'$), параллельные производящим цилиндров. Прямая kl и будет искомым горизонтальным следом. Производящие цилиндров находятся только в тех из этих параллельных плоскостей, которые пересекают основания цилиндров. Легко построить их, проводя прямые, параллельные kl, и отмечая точки пересечения последних с основаниями обоих цилиндров. В нашем случае на каждой прямой будет, вообще говоря, $2+2=4$ точки пересечения. Так, например, на *черт. 199* горизонтальный след одной из секущих плоскостей определяет 4 точки a, b, α, β, а вместе с тем 4 производящие, попарно пересекающиеся в 4 точках, горизонтальные проекции которых p, q, r и s принадлежат искомой проекции линии пересечения цилиндров. (В приведенной здесь задаче это будет пространственная кривая 4-го порядка). Изменяя параллельно положение горизонтального следа секущей плоскости, мы можем построить сколько угодно точек искомой линии пересечения в горизонтальной проекции, а затем, снося их на соответствующие вертикальные проекции производящих, и в вертикальной проекции.

На *черт. 200* представлены видимые части цилиндров в вертикальной проекции.



Черт. 200.

§ 238. Задача. *Построить линию пересечения двух конических поверхностей, заданных каждая своим горизонтальным следом и вершиной.*

Пусть S_1 и S_2 — вершины данных поверхностей. Через прямую линию S_1S_2 проведем плоскость, пересекающую обе поверхности. Эта плоскость пересекает каждую из конических поверхностей по ее производящим. Пусть, например, имеем в сечении нашей плоскости с поверхностью (S_1) — производящие: S_1A_1 и S_1B_1, а в сечении с поверхностью (S_2) — производящие S_2A_2 и S_2B_2. Все эти производящие лежат в одной плоскости и должны поэтому пересекаться. Обозначим точки пересечения производящей S_1A_1 с производящими S_2A_2 и S_2B_2 буквами K и L, а точки встречи производящей S_1B_1 с S_2A_2 и S_2B_2 буквами M и N. Четыре точки K, L, M и N суть точки пересечения данных конических поверхностей, так как они принадлежат каждой из них. Таким образом задача сводится к построению производящих данных поверхностей, лежащих в секущей плоскости, проходящей через линию их вершин (S_1S_2), и отысканию точек пересечения этих производящих. Меняя положение секущей плоскости, будем получать новые и новые точки пересечения данных поверхностей. По этим точкам можем вычертить проекции искомой линии пересечения.

Задачи.

287. Найти линию пересечения двух цилиндрических поверхностей, образующие которых параллельны горизонтальной плоскости.

288. Два конуса, имеющие общий горизонтальный след, заданы этим следом и проекциями вершин. Построить линию их пересечения.

289. Построить линию пересечения цилиндрической и конической поверхностей. (Указание: вспомогательные плоскости следует проводить через вершину конуса и образующую цилиндра).

290. Найти линию пересечения прямого, круглого цилиндра, стоящего на горизонтальной плоскости, и конуса, заданного своим вертикальным следом и вершиной, находящейся в середине высоты цилиндра.

291. Построить линию пересечения двух цилиндрических сводов.

ОТДЕЛ ТРЕТИЙ

О КРИВЫХ ЛИНИЯХ

ГЛАВА I.

КОНИЧЕСКИЕ СЕЧЕНИЯ.

I. Определения.

§ 239. Под именем *конических сечений* известны плоские кривые, которые получаются от сечения конуса вращения плоскостью. Сюда принадлежат: *эллипс, гипербола и парабола.* Но прежде изучения этих кривых условимся называть:

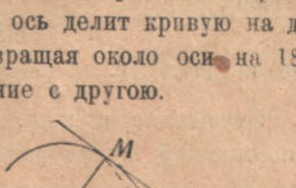
1) *Две точки—симметричными относительно прямой*, когда эта прямая перпендикулярна к хорде, соединяющей данные точки, и проходит через ее середину.

2) *Две точки—симметричными относительно одной точки*, когда эта последняя лежит на середине прямой, соединяющей данные точки.

3) *Осью кривой*—прямую, в отношении которой точки кривой попарно симметричны; следовательно, ось делит кривую на две равные части, притом такие, что, вращая около оси на 180° одную из них, приводим ее в совпадение с другою.

4) *Вершиною кривой* — точку, в которой ось встречает кривую.

5) *Центром кривой* — точку, в отношении которой точки кривой попарно симметричны; следовательно, центр кривой делит на две равные части все хорды, проведенные чрез него.



Черт. 201.

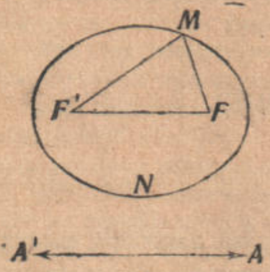
6) *Касательною к кривой*—предел MT [*черт. 201*] к которому стремится секущая MM', вращаясь около одной из точек пере-

сечения, например, M, при чем вторая точка M' стремится к совпадению с первой.

7) *Нормалью к кривой*— перпендикуляр к касательной в точке касания.

II. Эллипс.

§ 240. Определение. *Эллипс есть такая плоская кривая, сумма расстояний каждой точки которой от двух постоянных точек, лежащих в той же плоскости, есть величина постоянная.*



Черт. 202.

Так, если [*черт. 202*] AA' есть постоянная величина, F и F'—постоянные точки и если каждая точка кривой MN, например, точка M, удовлетворяет условию:

$$MF + MF' = AA',$$

то кривая MN есть эллипс.

§ 241. Постоянные точки называются *фокусами*, а расстояние между ними — *фокусным расстоянием*. Прямые, соединяющие какую-либо точку кривой с фокусами, называются *радиусами-векторами*.

Постоянная сумма радиусов векторов, т.-е. длина AA', полагается равной $2a$, фокусное расстояние — $2c$. Легко видеть, что $c < a$, ибо треугольник MFF' возможен, когда удовлетворяется условие:

$$FF' < MF + MF,$$

т.-е. когда $c < a$.

Отношение c к a, т.-е. отношение фокусного расстояния к постоянной сумме радиусов векторов, называется *эксцентриситетом* эллипса. Величина эксцентриситета, т.-е. $\frac{c}{a}$, может иметь значение всех правильных дробей, и, следовательно, изменяться от 0 до 1. При $\frac{c}{a} = 0$ эллипс обращается в окружность, ибо $c = 0$, и, следовательно, оба фокуса сливаются в одну точку; при $\frac{c}{a} = 1$ эллипс обращается в отрезок. С этой точки зрения эллипс является переходною кривою между прямою и окружностью и величина эксцентриситета может служить указанием, насколько эллипс приближается к прямой или окружности.

§ 242. *Черчение эллипса.* Для вычерчивания эллипса непрерывным движением, по данным фокусам и сумме радиусов векторов $2a$, закрепляют неподвижно в фокусах концы нити, длина которой равна $2a$, затем натягивают нить карандашом (или пером) и в таком положении ведут карандаш по бумаге. Начерченная таким образом кривая есть, очевидно, эллипс.

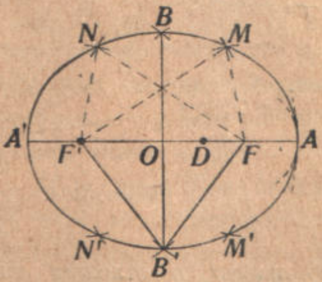
Но обыкновенно вычерчивают эллипс по точкам, по данным фокусам F, F' и $AA' = 2a$. Для чего [*черт. 203*]:

a) от середины O фокусного расстояния откладывают $OA = OA' = a$;

b) берут между фокусами какую-либо точку D;

c) радиусами AD и $A'D$, сумма которых равна $2a$, описывают из фокусов, как из центров, дуги.

Точка пересечения M дуг принадлежит эллипсу.



Черт. 203.

Замечание. 1) Точка D должна быть выбрана между точкою O, серединою фокусного расстояния, и фокусом F, ибо для возможности пересечения дуг $A'D$ и AD необходимо, чтобы $FF' > A'D - AD$; но $A'D - AD = 2OD$, и, следовательно, $FF' > 2OD$ или $2c > 2OD$; откуда $OD < c$.

2) Каждой точке D соответствуют четыре точки на эллипсе: именно две точки M и M' определяются пересечением дуг, описанных из фокусов F и F' соответственно радиусами AD и $A'D$; две другие — N и N' — пересечением дуг, описанных из фокусов F и F' соответственно радиусами $A'D$ и AD.

3) Если точка D совпадает с фокусом, то разность радиусов равна FF', и дуги, описанные из F и F', будут касаться в точках A и A'.

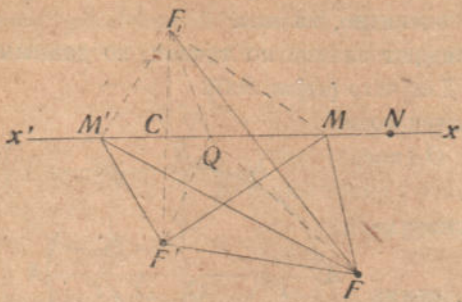
4) Если точка D совпадает с O, то радиусы равны и точки пересечения дуг B и B' будут лежать на перпендикуляре к линии FF', восстановленном в ее средине.

5) Наибольший радиус $F'A$ равен $a + c$, наименьший $FA = a - c$.

§ 243. Теорема I. *Прямая может встретить эллипс только в двух точках.*

Пусть F и F' [*черт. 204*] — фокусы эллипса; xx'—прямая, две точки M и M' которой удовлетворяют условию:

$$FM + F'M = FM' + F'M' = 2a;$$



Черт. 204.

нужно доказать, что для всякой другой точки, например, Q, прямой xx', сумма расстояний от фокусов, т.-е. $QF + QF'$, будет больше или меньше $2a$.

С этою целью найдем точку симметрии F_1 фокуса F' относительно прямой xx'; для чего опустим перпендикуляр $F'C$ на xx' и отложим на нем $F_1C = F'C$. Затем соединим точку F_1 с точками M и M'.

Из равнобедренных треугольников $M'F'F_1$ и $QF'F_1$ имеем:

$$QF' = QF_1,\ M'F' = M'F_1;$$

следовательно,

$$FM' + M'F' = FM' + M'F_1 = 2a \text{ и } QF + QF' = QF + QF_1,$$

но объемлемая линия меньше объемлющей, следовательно,

$$FQ + QF_1 < FM' + M'F_1,$$

или

$$FQ + QF' < 2a,$$

что и требовалось доказать.

Таким же образом докажем, что для всякой точки N прямой xx_1, взятой вне части MM', сумма расстояний от фокусов больше $2a$. Следовательно, прямая не может встретить эллипс больше, чем в двух точках. В силу этого свойства эллипс, а также и другие конические сечения называются *кривыми 2-го порядка.*

§ 244. Теорема II. *Для точки, взятой внутри эллипса, сумма расстояний от фокусов меньше $2a$; для точки, взятой вне эллипса, та же сумма больше $2a$.*

Соединим [*черт. 205*] фокусы с какой-либо внутренней точкой C и продолжим $F'C$ до пересечения с кривою в точке M; наконец, соединим M с F; имеем:

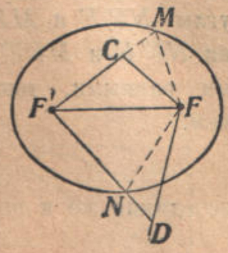
$$CF + CF' < MF + MF',$$

т.-е. $CF + CF'$ меньше $2a$.

Соединим фокусы с внешней точкой D и проведем NF; имеем:

$$DF + DF' > NF + NF',$$

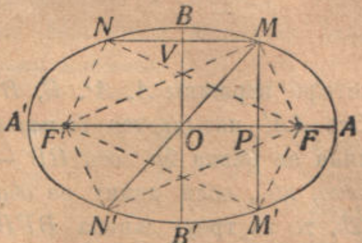
т.-е. больше $2a$.



Черт. 205.

§ 245. Теорема III. *Эллипс имеет своими осями две прямые: во-первых, прямую, которая соединяет фокусы, во-вторых, перпендикуляр, восстановленный из середины фокусного расстояния. Точка пересечения осей есть центр эллипса.*

Для доказательства возьмем точку M [*черт. 206*] на эллипсе и, построив точки ей симметричные [*§ 239*] относительно прямой $A'A$, проходящей через фокусы F и F', прямой BB', перпендикулярной к AA' в середине O фокусного расстояния, и точки O, докажем, что эти последние точки принадлежат кривой. С этой целью опустим из точки M перпендикуляры MP и MV на прямые AA' и BB' и соединим точку M с O, и на продолжении прямых MP, MV и MO отложим части $M'P = MP$, $NV = MV$, $ON' = OM$. Точки M', N, N' суть искомые точки симметрии точки M. Для доказательства принадлежности точки M' кривой, соединим ее с фокусами F и F' и, заметив, что



Черт. 206.

$$M'F' = MF',\ M'F = MF,$$

заключаем, что

$$M'F' + M'F = MF' + MF;$$

но по условию

$$MF + MF' = 2a,$$

следовательно,

$$M'F' + M'F = 2a.$$

Для доказательства принадлежности точки N кривой, заметим, что прямоугольные трапеции $OFMV$ и $OF'NV$ равны между собою и что, следовательно, равны, как стороны их MF и $F'N$, так и углы $NF'F$ и MFF'; отсюда заключаем, что и треугольники $NF'F$ и MFF', как имеющие по две стороны и углу между ними равными, тоже равны, а из равенства треугольников имеем:

$$NF = MF';$$

присоединив же к нему равенство

$$NF' = MF,$$

находим

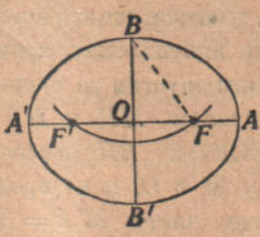
$$NF + NF' = MF' + MF = 2a.$$

Принадлежность точки N' кривой видна из того, что четыреугольник $MFN'F'$ есть параллелограмм, ибо диагонали его MN' и FF' делятся в точке O пополам; по свойству же параллелограмма имеем:

$$N'F' + N'F = MF' + MF = 2a.$$

Что и требовалось доказать.

Следствия. 1) Эллипс имеет четыре вершины A, A', B, B'.

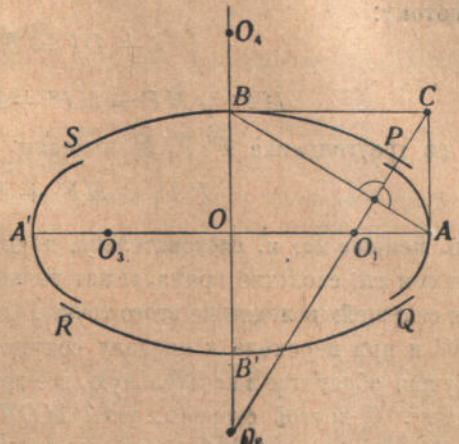


Черт. 207.

2) Ось AA' называется *большою осью*, длина ее равна $2a$, ось BB' — *малою осью*, ибо, если длину ее обозначим $2b$, то из треугольника BFB, [*черт. 207*], в котором $BF = B'F = a$, имеем $2b < 2a$, т.-е. $b < a$.

3) Из прямоугольного треугольника BFO находим соотношение между a, b и c; именно $a^2 = b^2 + c^2$.

§ 246. На практике эллипс часто заменяется приближенной кривой, которую можно получить вычерчивая дуги окружностей, наиболее подходящие к эллипсу. Если, напр., в вершинах A, A', B, B' эллипса построим такие окружности, то, вследствие симметрии эллипса, центры этих окружностей будут лежать на осях эллипса. Остается определить радиусы их так, чтобы окружности давали наилучшее приближение к эллипсу. Это делается при помощи следующего построения. На полуосях OA и OB эллипса построим прямоугольник $OBCA$ и проведем в нем диагональ BA. Затем из вершины C опускаем на диагональ BA перпендикуляр, который встречает оси эллипса в точках O_1 и O_2. Эти точки и служат центрами окружностей, в вершинах A и B, наиболее приближающихся к эллипсу [1]). Построив подобным образом четыре окружности в вершинах эллипса, их соединяют затем в местах P, Q, R и S при помощи лекала [2]) или даже от руки. Полученная кривая во многих случаях практики может быть принята взамен эллипса.



Черт. 208.

§ 247. Теорема IV. *Касательная к эллипсу есть биссектор внешнего угла между радиусами векторами точки касания.*

Черт. 209.

Проведем секущую MM' [*черт. 209*] и построим точку симметрии фокуса F относительно секущей; для чего из фокуса F опустим перпендикуляр FC на MM' и отложим на нем $F_1C = FC$. Затем проведем прямую $F'F_1$ и докажем, что точка D, встречи ее с секущею, удовлетворяет условию $DF + DF' < 2a$, т.-е. лежит внутри эллипса между точками M и M'.

---

[1]) Эти окружности называются кругами кривизны, а их радиусы — радиусами кривизны. Нетрудно вычислить величины радиусов кривизны $r_1 = \frac{b^2}{a}$, $r_2 = \frac{a^2}{b}$.

[2]) Лекалами называют кривые линейки, имеющие различные кривизны.

В самом деле, соединив точку D с фокусом F, а точку M— с тремя точками F', F и F_1, имеем:

$$MF_1 = MF,\ DF_1 = DF,$$

а потому:

$$DF' + DF = F'F_1$$

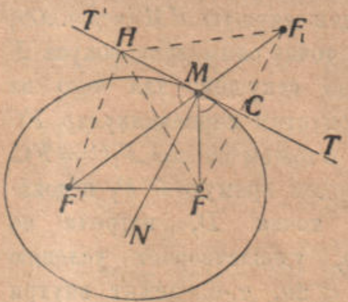
и

$$MF' + MF = MF' + MF_1 = 2a;$$

но из треугольника $F'\,F_1\,M$ находим:

$$F'F_1 < MF' + MF_1;$$

т.-е. меньше $2a$, и, следовательно, точка D лежит внутри эллипса, при чем это свойство принадлежит точке D независимо от положения секущей; вследствие этого точка D останется между точками M и M' и при переходе к пределу секущей; а, следовательно, когда секущая обратится в касательную, все три точки M, D, M' сольются в одну. С другой стороны, углы MDF и MDF_1, равные между собой для какого-либо положения секущей, будут равны и в пределе, когда точки M' и D совпадут с M и секущая MM' обратится в касательную MT [*черт. 210*]; отсюда заключаем, что угол F_1MT равен углу TMF. Что и требовалось доказать.



Черт. 210.

§ 248. *Замечание.* 1) Все точки касательной, за исключением точки касания, лежат вне эллипса; так, для точки H имеем [*черт. 210*]:

$$HF' + HF = HF' + HF_1;$$

$$MF + MF' = MF' + MF_1 = \\ = F'F_1 = 2a;$$

но из треугольника FHF_1 имеем:

$$F'N + HF_1 > F'F_1.$$

2) Касательная TM есть перпендикуляр к FF_1 и проходит через средину FF_1.

3) Прямая $F'F_1$, которая соединяет фокус с точкою симметрии другого фокуса относительно касательной, проходит через точку касания.

4) Нормаль MN есть биссектор внутреннего угла, образуемого радиусами векторами точки касания, ибо углы, которые нормаль

образует с MF и MF', имеют своими дополнениями до прямого равные углы.

§ 249. Теорема V. *Точки симметрии фокуса относительно произвольной касательной лежат на направляющем круге, описанном из другого фокуса.*

Направляющим кругом эллипса называется окружность, описанная из фокуса радиусом, равным большой оси; следовательно, эллипс имеет две направляющих окружности.

Для доказательства теоремы построим точку симметрии F_1 фокуса F относительно касательной MT и соединим F_1 с F'. Прямая F_1F' по предыдущему проходит через точку касания M и, следовательно,

$$F_1F' = MF_1 + MF' = MF' + MF = 2a.$$

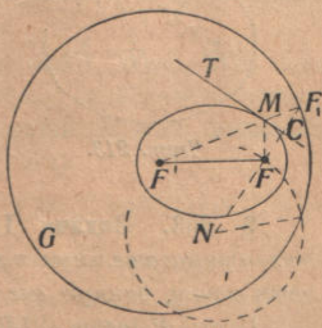
Отсюда заключаем, что расстояние точки F_1 от фокуса F' есть постоянная величина, равная $2a$, и что, следовательно, геометрическое место точек F_1 есть окружность, описанная из фокуса F' радиусом равным $2a$, т.-е. направляющая окружность фокуса F.

§ 250. Из предыдущей теоремы заключаем, что эллипс есть геометрическое место точек M, одинаково удаленных от круга F_1G и от точки F, взятой внутри круга, и что, следовательно, если опишем окружность из какой-либо точки N, радиусом NF, то [*черт. 211*]:

1) Эта окружность не встречает направляющего круга, если точка N взята внутри эллипса.

2) Эта окружность касается направляющего круга, если точка N взята на эллипсе.

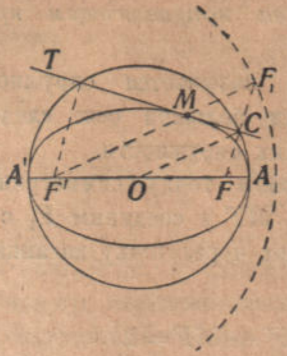
3) Эта окружность пересекает направляющий круг в двух точках, если точка N взята вне эллипса.



Черт. 211.

§ 251. Теорема VI. *Геометрическое место проекций фокуса на касательные есть окружность, описанная на большой оси, как на диаметре.*

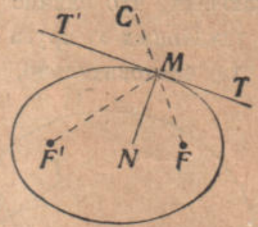
Проведем касательную MT [*черт. 212*] и направляющий круг фокуса F' и соединим точку C, проекцию фокуса F на касательную, с центром O. Треугольники COF и $F_1F'F$ подобны, ибо по условию $FC = {}^1/_2 FF_1$, $OF = {}^1/_2 FF'$; из подобия же треугольников находим, что $OC = {}^1/_2 F'F_1 = a$; отсюда заключаем, что точка C находится на постоянном расстоянии от точки O, равном a, и что, следовательно, геометрическое место точек C есть окружность, описанная из центра O радиусом a. Эта окружность называется *описанным кругом эллипса*.



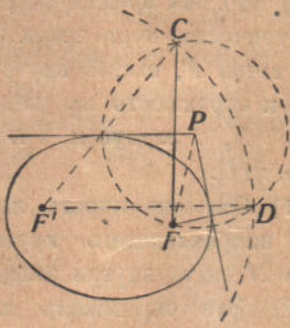
Черт. 212.

§ 252. Задача I. *Провести касательную к эллипсу через точку, данную на кривой* [1]).

Пусть [*черт. 213*] M — данная точка; проведем ее радиусы векторы MF' и MF и, продолжив MF, построим биссектор TT' внешнего угла $F'MC$. Этот биссектор и есть искомая касательная.



Черт. 213.



Черт. 214

§ 253. Задача II. *Построить касательную к эллипсу через точку, данную вне кривой.*

Пусть P [*черт. 214*] — данная внешняя точка и CD — направляющий круг фокуса F'.

Из теоремы [*§ 249*] необходимо следует, что искомая касательная есть высота равнобедренного треугольника, вершины

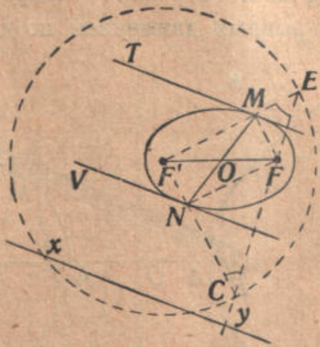
[1]) В технических чертежах построение касательной имеет большое значение, напр., при так называемом *сопряжений* (соединении) кривой линии с прямой.

которого при основании находятся: одна в фокусе F, другая — на направляющем круге, а потому, если из точки P радиусом PF засечем направляющий круг в двух точках C и D и середины отрезков CF и DF соединим с точкою P, то эти последние прямые и суть искомые касательные, при чем радиусы CF' и DF' пересекут эти касательные в точках касания.

§ 254. Задача III. *Провести касательную к эллипсу, параллельно данной прямой.*

Опишем [*черт. 215*] направляющий круг относительно фокуса F' и через другой фокус F проведем прямую CE, перпендикулярную к данной прямой xy.

Перпендикуляры MT и NV, восстановленные к отрезкам FC и FE в их серединах и суть искомые касательные. Радиусы $F'C$ и $F'E$ определят точки касания.



Черт. 215.

III. Гипербола.

§ 255. Определение. *Гипербола есть такая плоская кривая, разность расстояний каждой точки которой от двух постоянных точек есть величина постоянная.*

Черт. 216.

Так, если AA' [*черт. 216*] есть постоянная длина, F и F' — две постоянные точки, то точки M и N принадлежат гиперболе, если

$$MF' - MF = AA' \text{ и } NF - NF' = AA'.$$

Постоянные точки называются *фокусами*, а расстояние между ними — *фокусным расстоянием*. Прямые, которые соединяют фокусы с какою-либо точкою кривой, называются *радиусами векторами*. Постоянная разность AA' полагается равной $2a$, а фокусное расстояние — $2c$, при чем $c > a$; ибо, чтобы треугольники MFF' и NFF' были возможны, нужно, чтобы

$$FF' > MF' - FM \text{ и } FF' > NF - NF',$$

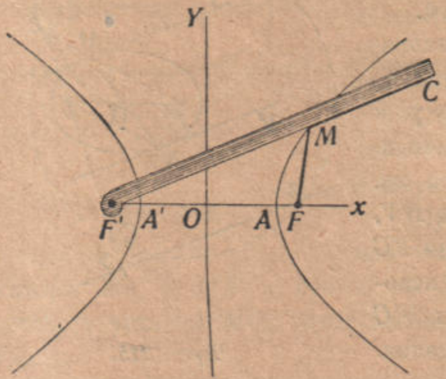
т. е. $2c > 2a$, или $c > a$.

Отношение $\frac{c}{a}$ называется *эксцентриситетом* гиперболы; эксцентриситет гиперболы всегда больше единицы.

Направляющим кругом гиперболы называется круг, описанный из фокуса, как из центра, радиусом равным $2a$.

Гипербола имеет два направляющих круга.

§ 256. *Черчение гиперболы.* Чтобы начертить гиперболу непрерывным движением по данным фокусам и постоянной разности радиусов векторов $2a$, берут линейку [*черт. 217*], длина которой больше $2c$, и нить длины, равной длине линейки без $2a$.



Черт. 217.

Один конец линейки утверждают в фокусе F' так, чтобы линейка могла вращаться около точки F', как около центра. К другому свободному концу C прикрепляют конец нити, закрепленной другим концом в фокусе F. Если карандашом натягивать нить по длине линейки, заставляя в то же время последнюю вращаться около F', то конец карандаша M опишет гиперболу, ибо для какого-либо положения его M имеем:

$$MF' - MF = 2a.$$

Переменяя положение нити и линейки, опишем вторую ветвь кривой.

Удобнее, однако, по тем же данным вычертить гиперболу по точкам [*черт. 218*]. Для чего:

a) от середины O, фокусного расстояния, отложим

$$OA = OA' = a;$$

b) возьмем на прямой FF' какую-либо точку D за фокусом;

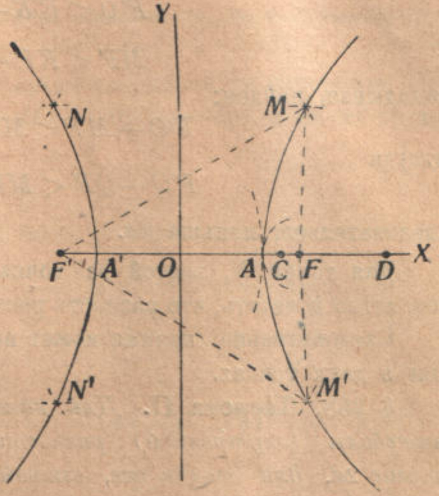
c) радиусами AD и $A'D$, разность которых $= 2a$, опишем из фокусов, как из центров, две окружности;

d) точки их пересечения M и M' принадлежат гиперболе.

Замечание. 1) Чтобы окружности, описанные радиусами AD и $A'D$, пересекались, необходимо, чтобы $FF' < DA + DA'$; но $AD + A'D = 2OD$; откуда заключаем, что $2c < 2OD$ или $c < OD$, т.-е., что точка D должна быть взята за фокусом.

2) Каждой точке D соответствует четыре точки на кривой: M, M', N, N'.

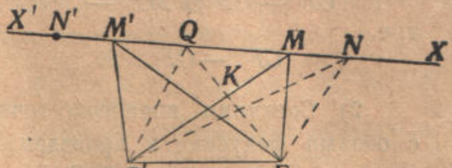
3) Когда точка D лежит в F, сумма радиусов равна FF', и окружности, описанные из F и F', касаются друг друга в A и A'



Черт. 218.

4) Гипербола состоит из двух отдельных ветвей, распространяющихся неопределенно далеко; ибо, как при непрерывном черчении, линейка может иметь какую угодно длину, так и при черчении по точкам точка D может как угодно далеко удалиться от точек F и F'.

§ 257. Теорема I. *Прямая может встретить гиперболу не более, как в двух точках.*



Черт. 219.

Пусть [*черт. 219*] F и F' — фокусы, XX' — прямая M и M' — две точки прямой, которые удовле творяют условию

$$F'M - MF = \\ = FM' - M'F' = 2a$$

и которые, следовательно, лежат на кривой.

Нужно доказать, что для всякой иной точки прямой XX' разность расстояний от фокусов будет больше или меньше $2a$.

В самом деле, возьмем точку Q между точками M и M'. Из треугольников QKF' и MFK имеем:

$$F'Q < F'K + QK,$$

$$MF < KF + MK;$$

складывая, найдем:

$$F'Q + MF < MF' + QF,$$

откуда

$$F'Q - QF < MF' - MF,$$

следовательно, меньше $2a$.

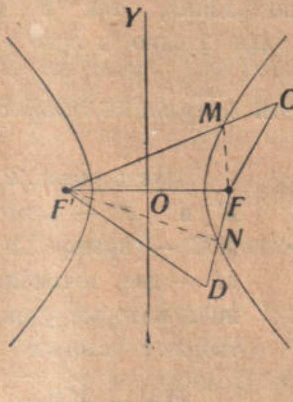
Для точки N, взятой за точками M и M', таким же образом легко доказать, что разность расстояний от фокусов больше $2a$.

Следовательно, прямая может встретить гиперболу не более, чем в двух точках.

§ 258. Теорема II. *Для каждой точки, взятой внутри гиперболы (внутренней) разность расстояний от фокусов больше $2a$, для точки же, взятой вне гиперболы (внешней), та же разность — меньше $2a$.*

1) Соединим внутреннюю точку C [*черт. 220*] с обоими фокусами и проведем MF; имеем из треугольника CMF:

$$CF < CM + MF.$$



Черт. 220.

Откуда, вычитая обе части неравенства из CF', найдем:

$$CF' - CF > CF' - (CM + MF),$$

или

$$CF' - CF > MF' - MF,$$

т.-е.

$$CF' - CF > 2a.$$

2) Соединим внешнюю точку D с обоими фокусами и проведем $F'N$; имеем из треугольника $DF'N$:

$$F'D < NF' + ND.$$

Откуда, вычитая из обеих частей неравенства FD, найдем;

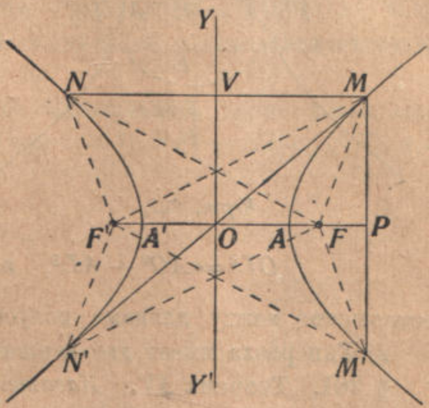
$$F'D - FD < NF' + ND - FD,$$

или

$$F'D - FD < NF' - NF < 2a.$$

§ 259. Теорема III. *Гипербола имеет своими осями две прямые, из которых одна проходит через фокусы, другая перпендикулярна к этой последней прямой и проходит через ее средину. Центр гиперболы лежит в точке пересечения осей.*

Пусть M [*черт. 221*] — какая-либо точка на гиперболе. Проведем перпендикуляры MP, MV и прямую MO и на их продолжении отложим $PM' = PM$, $VN = VM$, $ON' = OM$. Точки M' N и N' суть точки симметрии M относительно прямых AA', YY' и точки O.



Черт. 221.

Следует доказать, что эти точки лежат на гиперболе.

1) FF' — перпендикулярна к линии MM' и проходит через ее середину, следовательно, $MF = M'F$ и $M'F' = MF'$; откуда: $M'F' - M'F = MF' - MF = 2a$; следовательно, точка M' лежит на гиперболе.

2) Прямоугольные трапеции $OFMV$, $OF'NV$ — равны, ибо по условию $MV = VN$, $OF = OF'$. Отсюда $NF' = MF$ и углы при F и F' равны; а потому и треугольники $FF'N$ и $FF'M$, как имеющие по две стороны и углу между ними равными, тоже равны; следовательно,

$$NF = MF'; \text{ а потому } NF - NF' = MF' = MF = 2a,$$

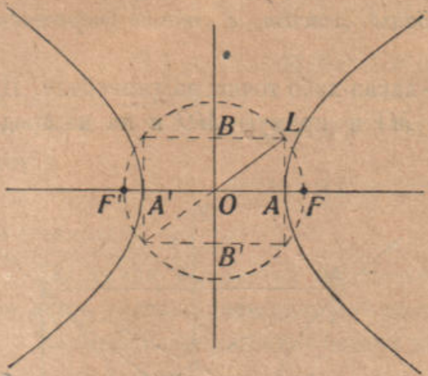
т.-е. точка N принадлежит гиперболе.

3) Прямые MN' и FF' пересекаются в их середине O, следовательно, четыреугольник $MFN'F'$ есть параллелограмм; и потому разность двух сходящихся сторон равна разности двух других сторон, т.-е.

$$N'F - N'F' = MF' - MF = 2a,$$

и точка N' принадлежит гиперболе.

§ 260. *Замечание.* 1) Ось AA' называется *действительной* осью гиперболы, другая же ось YY', как не встречающая кривой, — *мнимой* осью. Если восстановим перпендикуляр к действительной оси в точке A [*черт. 222*], и из центра O кривой засечем его в точке L дугою радиуса c, то длину AL, отложенную на мнимой оси от O, принимают за длину b мнимой полуоси. Из прямоугольного треугольника OAL находим:



Черт. 222.

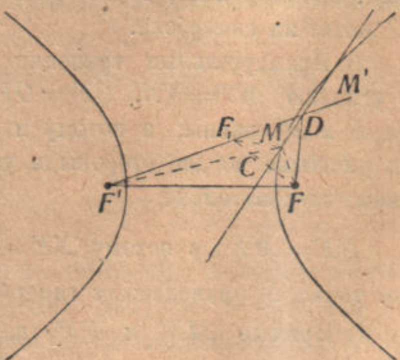
$$OL^2 = AO^2 + AL^2, \quad \text{или} \quad c^2 = a^2 + b^2$$

соотношение между длинами полуосей и фокусным расстоянием.

2) Гипербола имеет две вершины A и A'.

§ 261. Теорема IV. *Касательная к гиперболе есть биссектор внутреннего угла между радиусами векторами точки касания.*

Проведем какую-либо секущую MM' [*черт. 223*] и, опустив на нее из фокуса F перпендикуляр FC, отложим на продолжении его $CF_1 = CF$, т.-е. построим точку симметрии F_1 фокуса F относительно секущей MM'. Затем соединим точки F_1 и F' и продолжим прямую F_1F' до пересечения с секущей MM' в точке D; наконец, соединим точку D с фокусом F, а точку M с тремя точками F, F' и F_1 и докажем, что точка D находится внутри гиперболы. Действительно, по свойству точки симметрии, имеем:



Черт. 223.

$$MF_1 = MF, \qquad DF_1 = DF$$

следовательно:

$$DF' - DF = F'F_1 \quad \text{и} \quad MF' - MF_1 = 2a;$$

но из треугольника MF_1F' имеем:

$$F'F_1 > MF' - MF_1,$$

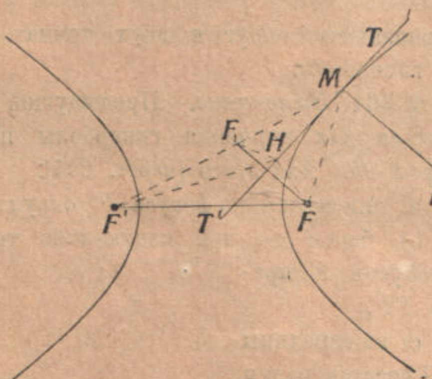
и, следовательно, точка D лежит внутри гиперболы, т.-е. находится между точками M и M'; кроме того, угол F_1DC равен углу FDC. Оба эти свойства справедливы и в пределе, когда точки M, M' и D сольются в одну и когда, следовательно, секущая перейдет в касательную.

Замечание. 1) Все точки касательной, кроме точки касания, лежат вне кривой; ибо [*черт. 224*] $HF' - HF < F'F_1$, т.-е. меньше $2a$.

2) Касательная TT' перпендикулярна к линии FF_1 и проходит через ее средину.

3) Прямая $F'F_1$, которая соединяет фокус с точкой симметрии другого фокуса относительно касательной, проходит чрез точку касания.

4) Нормаль MN гиперболы есть биссектор внешнего угла, образуемого радиусами-векторами точки касания; ибо она перпендикулярна к биссектору внутреннего угла.



Черт. 224.

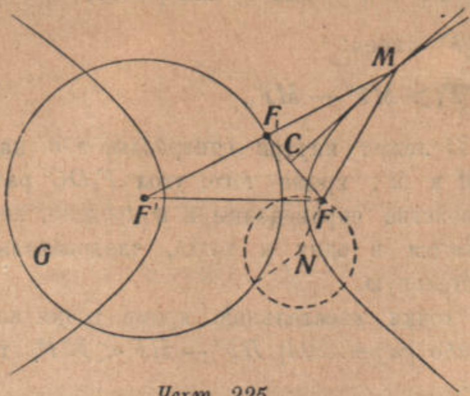
§ 262. Теорема V. *Точка симметрии фокуса относительно какой-либо касательной находится на направляющем круге, описанном из другого фокуса.*

Действительно, если F_1 [*черт. 225*] есть точка симметрии фокуса F относительно касательной MT, то прямая

$$F_1F' = MF' - MF = 2a,$$

и, следовательно, F_1 находится на постоянном расстоянии от фокуса F'; а потому геометрическое место точки F_1 есть круг, описанный радиусом $2a$ из фокуса F'.

§ 263. Отсюда гипербола есть геометрическое место точек M, одинаково удаленных от круга F_1G и точки F, лежащей вне его.



Черт. 225.

Вследствие этого, если какая-либо окружность проходит чрез точку F, то

1) она не встречает направляющего круга, когда центр ее N лежит внутри гиперболы,

2) она касается направляющего круга, когда центр ее N лежит на гиперболе;

3) она пересекает направляющий круг в двух точках, когда центр ее N лежит вне гиперболы.

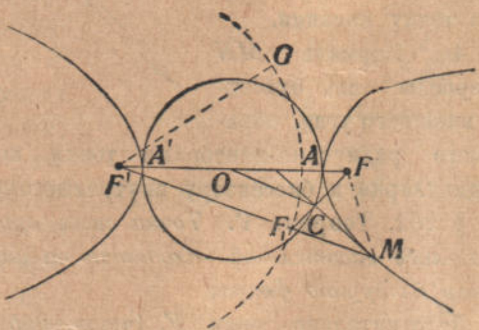
§ 264. *Замечание.* Предыдущей теоремой можно воспользоваться для черчения гиперболы по точкам, когда известны фокусы $2a$. Для этого [*черт. 225*]:

a) описываем из фокуса F' окружность радиусом, равным $2a$;

b) берем на ней какую-либо точку F_1 и соединяем ее с фокусом F прямою FF_1;

c) из середины ее C восстановляем перпендикуляр CM;

d) определяем точку M пересечения этого перпендикуляра с прямой F_1F'.



Черт. 226.

§ 265. Теорема VI. *Геометрическое место проекций фокуса на касательные есть круг, описанный на действительной оси, как на диаметре.*

Проведем произвольную касательную MC [*черт. 226*] и опустим на нее из фокуса F перпендикуляр FC до пересечения с направляющим кругом фокуса F' в точке F_1. Наконец, соединим точку C с O прямою OC. Треугольники FOC и $FF'F_1$ подобны, ибо

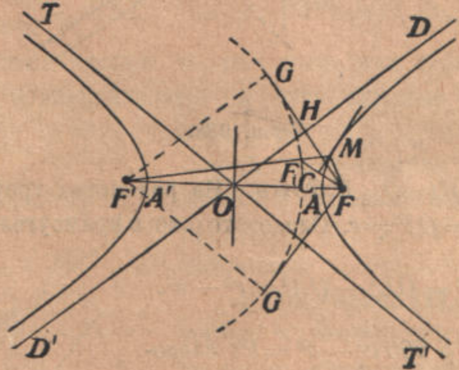
$$\frac{FC}{FF_1} = \frac{OF}{FF'} = {}^1/_2;$$

следовательно, и $\frac{OC}{F'F_1} = {}^1/_2$, но $F'F_1 = 2a$, и потому $OC = a$, т.-е проекция C фокуса F на касательную находится на постоянном расстоянии от точки O; и потому геометрическое место точек C есть окружность, описанная из O радиусом a.

§ 266. Определение. *Ассимптотами гиперболы* называются касательные, точки касания которых бесконечно удалены от вершины кривой.

Теорема VII. *Гипербола имеет две ассимптоты, которые проходят через ее центр.*

Прямая FF_1 [*черт. 227*], которая соединяет фокус F с какой-либо точкою F_1 направляющего круга фокуса F', может перейти в касательную к этому последнему; и пусть FG будет таким ее положением. Перпендикуляр HD к этой касательной в ее середине есть касательная к гиперболе, точка касания которой определится пересечением его с продолжением радиуса $F'G$. Но прямые $F'G$ и HD, как перпендикулярные к FG, параллельны между собой, и, следовательно, точка их пересечения лежит в бесконечности; отсюда прямая HD есть ассимптота ветви AM. Кроме того, так как прямая HD параллельна $F'G$, основанию треугольника FGF', и проходит через точку H, середину стороны FG, то она проходит и через точку O, середину третьей стороны.



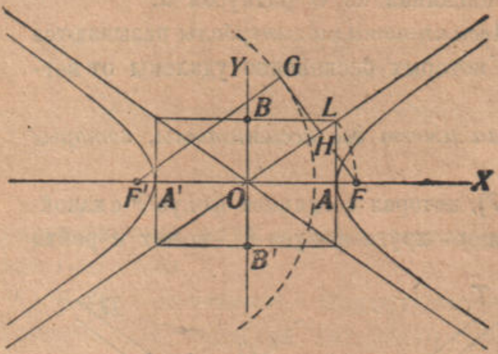
Черт. 227.

Вследствие симметрии точек кривой относительно центра O, прямая DOD', есть, вместе с тем, ассимптота и левой ветви кривой. Таким же образом докажем, что прямая TOT', перпендикулярная к касательной FG и проходящая через точку O, есть тоже ассимптота гиперболы.

Замечание. 1) Оси гиперболы суть биссекторы углов, образованных ассимптотами.

2) Угол HOF есть наименьший из углов, которые касательные могут составлять с FF'.

§ 267. Теорема VIII. *Ассимптоты направлены по диагонали прямоугольника, построенного на осях.*



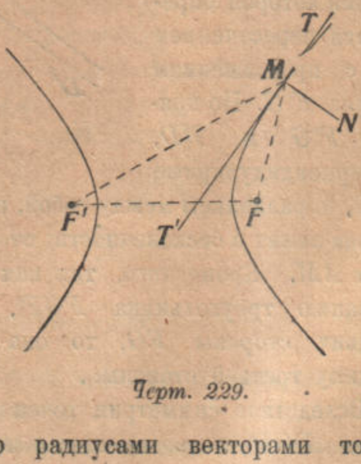
Черт. 228.

Из вершины A [*черт. 228*] восстановим перпендикуляр до встречи с ассимптотою в точке L и докажем, что AL равняется мнимой полуоси, т.-е. b. В самом деле, прямоугольные треугольники HOF и AOL равны, ибо имеют общим острый угол LOF и равные катеты $OA = OH$, так как $OH = {}^1/_2\,F'G = a$. Из равенства треугольников следует, что $OL = OF = c$. Следовательно, в прямоугольном треугольнике AOL:

$$AL^2 = OL^2 - OA^2 = c^2 - a^2.$$

но по *§ 260* $c^2 - a^2 = b^2$, следовательно, $AL = b$.

§ 268. Задача I. *Провести касательную к гиперболе через точку, взятую на кривой.*



Черт. 229.

Пусть M — данная точка на кривой [*черт. 229*]. Для решения задачи достаточно по *§ 261* провести биссектор $T'T$ угла FMF', образуемого радиусами векторами точки касания M.

§ 269. Задача II. *Провести касательную к гиперболе через точку, данную вне кривой.*

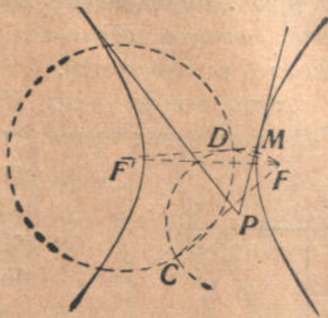
На основании теоремы § *262* заключаем, что искомая касательная есть высота равнобедренного треугольника, одна из вершин при основании которого лежит на направляющем круге фокуса F', а другая — в фокусе F. И потому, если P — данная внешняя точка [*черт. 230*], то для решения задачи:

a) проведем направляющий круг CD фокуса F';

b) опишем окружность радиусом FP;

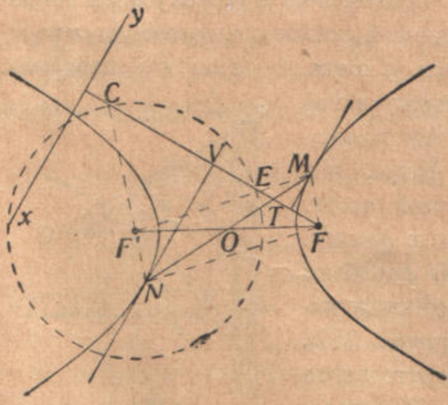
c) найдем точки C и D ее пересечения с направляющим кругом;

d) соединим эти точки прямыми FC и FD с фокусом F;



Черт. 230.

e) восстановим перпендикуляры к этим последним отрезкам в их серединах. Эти перпендикуляры и суть искомые касательные.



Черт. 231.

f) Точки касания находятся в точках встречи прямых $F'D$ и $F'C$ с касательными.

§ 270. Задача III. *Провести к гиперболе касательную, параллельно данной прямой.*

Пусть [*черт. 231*] xy — данная прямая.

a) Опишем напрявляющий круг фокуса F'.

b) Из фокуса F опустим перпендикуляр FC на данную прямую xy и найдем точки C и E встречи его с направляющим кругом.

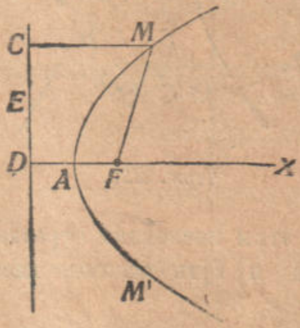
e) Перпендикуляры, восстановленные к отрезкам FC и FE, в их срединах, суть искомые касательные.

Замечание. Чтобы задача была возможна, нужно, чтобы прямая xy составляла с FF' угол больший того, который ассимптота образует с той же линией.

IV. Парабола.

§ 271. Определение. *Парабола есть плоская кривая, каждая точка которой одинаково удалена от прямой и от точки, данных в ее плоскости.*

Следовательно, если F есть постоянная точка [*черт. 232*], а CD—постоянная прямая, то точка M, удовлетворяющая условию $MF=MC$, принадлежит параболе MAM'. На этом основании точка A, средина перпендикуляра FD, тоже принадлежит кривой.



Черт. 232.

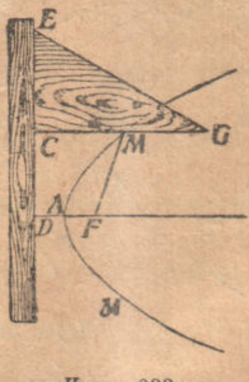
Постоянная точка называется *фокусом*, а постоянная прямая—*направляющей*.

Радиусом вектором точки M называется прямая, которая соединяет точку M с фокусом.

Расстояние FD фокуса от направляющей называется *параметром* параболы, а точка A—*вершиною* параболы.

Парабола не имеет точек в той части плоскости, считая от направляющей, в которой не лежит фокус, ибо всякая точка E, взятая в этой части, лежит ближе к прямой, чем к фокусу.

§ 272. Для вычерчивания параболы непрерывным движением по данным направляющей ED и фокусу F [*черт. 233*], приставляют катет EC прямоугольного треугольника ECG к линейке ED, установленной по направляющей, и, укрепив нить, равную по длине катету CG, одним концом в фокусе F, другим – в вершине G, натягивают ее карандашом к катету GC и в таком положении ведут карандаш, заставляя в то же время скользить



Черт. 233.

треугольник по линейке. Конец карандаша M, очевидно, при этом опишет параболу, ибо для каждого его положения $MF = MC$.

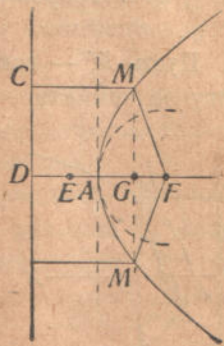
Но по тем же данным удобнее вычерчивать параболу по точкам. Для этого [*черт. 234*]:

a) Из фокуса F опустим перпендикуляр FD на направляющую CD.

b) Чрез какую-либо точку G, взятую на перпендикуляре FD, проведем параллель MM' направляющей.

c) Затем, опишем из фокуса F, как из центра, радиусом, равным расстоянию DG, окружность.

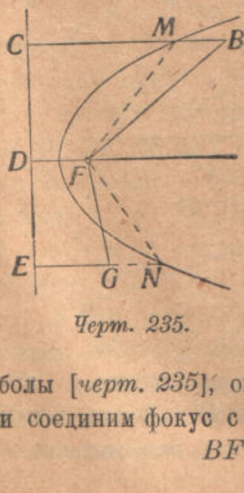
d) Точки M и M' встречи этой окружности с прямою MM' принадлежат параболе.



Черт. 234.

Замечание. 1) Для того, чтобы окружность пересекала параллель MM', нужно, чтобы $DG > GF$; откуда следует, что точка G не должна лежать между вершиною параболы A и направляющей. 2) Когда точка G находится в A, окружность касается параллели в той же точке; ибо $AF = AD$.

3) При непрерывном черчении параболы необходимо, чтобы катет прямоугольника и нить были равны между собою, но ничто не ограничивает их длину; точно также при черчении по точкам параллель, расположенная всегда по одну сторону с фокусом от направляющей, может быть удалена как угодно далеко от последней. Следовательно, парабола распространяется беспредельно, и притом только в той полуплоскости, в которой лежит фокус.



Черт. 235.

§ 273. Теорема I. *Всякая точка, взятая внутри параболы, находится ближе к фокусу, чем к направляющей, и всякая точка, взятая вне параболы, более удалена от фокуса, чем от направляющей.*

1) Из точки B, взятой внутри параболы [*черт. 235*], опустим перпендикуляр BC на направляющую и соединим фокус с точками B и M; имеем:

$$BF < MB + MF, \text{ но } MF = MC;$$

следовательно,

$$BF < BC$$

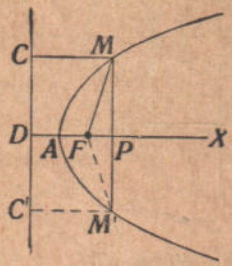
2) Из внешней точки G опустим перпендикуляр GE на направляющую и соединим фокус с точками N и G, имеем:

$$GF > NF - NG, \text{ но } NF = NE;$$

следовательно, $GF > GE$, что и требовалось доказать.

§ 274. Теорема II. *Парабола имеет своею осью перпендикуляр, опущенный из фокуса на направляющую.*

Пусть M — какая-либо точка на кривой [*черт. 236*]. Найдем точку ее симметрии M' относительно перпендикуляра FD; для чего на последний опустим перпендикуляр MP и на продолжении его отложим $PM' = PM$. Докажем, что точка M' принадлежит кривой.

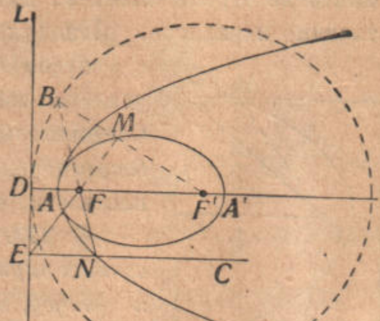


Черт. 236.

В самом деле, соединим точки M и M' с фокусом F прямыми FM и FM' и опустим перпендикуляры $M'C'$ и MC на направляющую; из равенства прямоугольных треугольников MFP и $M'FP$ и трапеций $CMFD$ и $C'M'FD$ имеем $MF = M'F$ и $CM = C'M'$, но по условию $MF = MC$, следовательно, $FM' = C'M'$, и точка M' принадлежит параболе.

Замечание. Парабола не имеет центра.

§ 275. Теорема III. *Парабола есть та предельная кривая, к которой стремится эллипс, когда одна его вершина и соседний с нею фокус остаются неподвижными, а другая вершина с своим фокусом удаляется в бесконечность; иначе говоря, когда ось возрастает безгранично.*



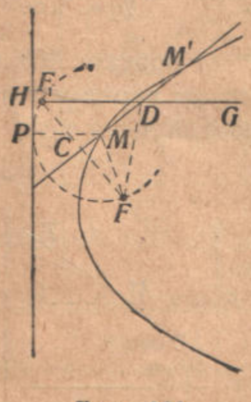
Черт. 237.

Возьмем какую-либо точку M [*черт. 237*] на эллипсе и опишем направляющий круг относительно фокуса F'. Пусть точки A и F, а, следовательно, и точка D, остаются неподвижными, в то время как F' и A' удаляются в бесконечность по мере увеличения оси. При таком удалении направляющий круг стремится к своему пределу — перпендикуляру DL к оси AA', а нормаль (MB) к направляющему кругу, — к прямой (NE), перпендикулярной к LD; но при всяком положении точек F' и A' $MB = MF$ [§ 250]; следовательно, это равенство сохраняется и в пределе, и потому $NE = NF$.

Откуда заключаем, что точка N при пределе лежит на параболе, вершина которой и фокус совпадают в вершиной и фокусом переменного эллипса.

§ 276. Теорема IV. *Касательная к параболе составляет равные углы с радиусом вектром точки касания и прямою, проведенной через ту же точку, параллельно оси.*

Проведем какую-либо секущую MM' [*черт. 238*] и построим относительно ее точку симметрии фокуса F; для чего из фокуса опустим на нее перпендикуляр FC и на продолжении его отложим $F_1C = CF$; через точку симметрии F_1 проведем параллель оси DH и докажем, что точка D, встречи ее с секущей, лежит внутри параболы.



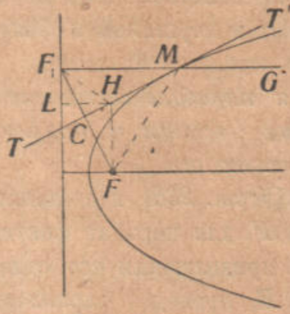
Черт. 238.

В самом деле, окружность, описанная из точки M радиусом MF или MP, касается направляющей в точке P и встречает DH в точке F_1; следовательно, $DF_1 < DH$; но DF и DF_1, как равно наклоненные, равны; и потому $DF < DH$, и точка D всегда лежит внутри кривой, а, следовательно, паралель F_1D проходит между точками M и M'; далее, для всякого положения секущей, углы MDF_1 и MDF равны между собою; следовательно, это равенство имеет место и в пределе, когда точки M', D и M сольются в одну M и когда, следовательно, секущая обратится в касательную.

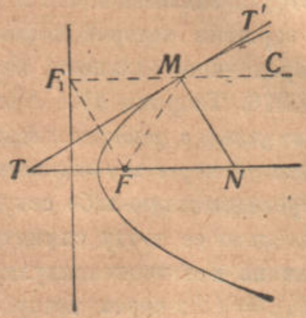
§ 277. *Замечание.* 1) Касательная в точке M к параболе [*черт. 239*] перпендикулярна и проходит через середину прямой FF_1, которая соединяет фокус с проекцией точки касания на направляющую, ибо в треугольнике MFF_1 две стороны равны и касательная есть биссектор угла при вершине.

2) Все точки касательной, кроме точки касания, лежат вне кривой; ибо, по предыдущей теореме, для какой-либо точки H касательной имеем $HF = HF_1$; но HF_1 больше HL.

3) Фокус находится в равном расстоянии от точки касания и от точки, в которой касательная пересекает ось; ибо в треугольнике MFT [*черт.* 240] угол MTF равен углу TMF.

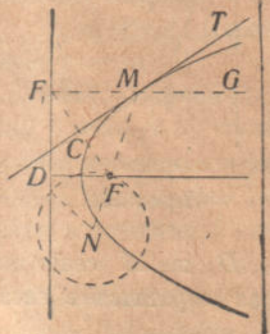


Черт. 239.



Черт. 240.

4) Нормаль MN есть биссектор внешнего угла, образуемого радиусом вектором точки касания и параллелью MC к оси, проведенной через точку M; ибо углы, которые нормаль MN образует с MF и MC, имеют равные дополнения до прямого.



Черт. 241.

§ 278. Теорема V. *Геометрическое место точек симметрии фокуса относительно касательных есть направляющая параболы.*

Действительно, если из точки касания M [*черт.* 241] опустим перпендикуляр на направляющую и соединим точку F_1 с F, то по условию $MF_1 = MF$. а по доказанному MT перпендикулярна к FF_1. Следовательно, точка F_1, лежащая на направляющей, есть точка симметрии фокуса F относительно касательной[1]).

Отсюда заключаем, что парабола есть геометрическое место точек, равно удаленных от прямой DF_1 и точки F; и, что, сле-

[1]) Сравнить с § 275.

довательно, если из какой-либо точки N опишем окружность радиусом NF, то эта окружность: 1) не пересекает направляющей, когда точка N лежит внутри параболы, 2) касается направляющей, когда точка N лежит на параболе, 3) пересекает направляющую, когда точка N лежит вне параболы.

Следствие. Этой же теоремой можно воспользоваться для вычерчивания кривой по точкам. Для этого:

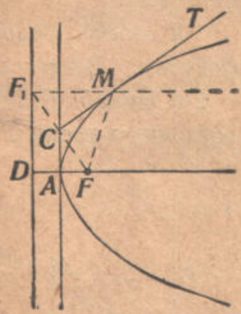
a) соединим фокус F с какою-либо точкою F_1 на направляющей;

b) из средины прямой FF_1 восстановим к ней перпендикуляр CT;

c) точка встречи CT с параллелью F_1G к оси принадлежит кривой.

§ 279. Теорема VI. *Геометрическое место проекций фокуса на касательные к параболе есть касательная в вершине параболы.*

Опустим из фокуса F перпендикуляр FC на касательную MT [*черт. 242*) и, найдя в C проекцию фокуса на касательную, продолжим его до пересечения с направляющей в точке F_1. В треугольнике DFF_1 имеем $AD = AF$, $FC = CF_1$. Отсюда заключаем, что геометрическое место проекций фокуса на касательную есть прямая AC, параллельная направляющей и касательная в вершине кривой.



Черт. 242.

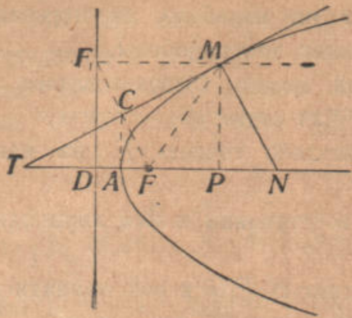
§ 280. Определения. *Подкасательной* называется проекция на ось той части касательной, которая заключается между точкой касания и точкой встречи касательной с осью.

Поднормалью называется проекция на ось той части нормали, которая заключается между точкой касания и точкой встречи нормали с осью.

§ 281. Теорема VII. *1) Подкасательная делится вершиной параболы на две равные части. 2) Поднормаль равна постоянной величине — параметру.*

1) Пусть P — проекция точки M на ось и, следовательно, TP = подкасательная. Докажем, что $AT = AP$. Проекция C

фокуса F на касательную делит MT в точке C на две равные части [*черт. 243*]; ибо треугольник MFT — равнобедренный; кроме того, касательная в вершине A встречает касательную MT в той же точке C и параллельна MP. Отсюда $AP = AT$.



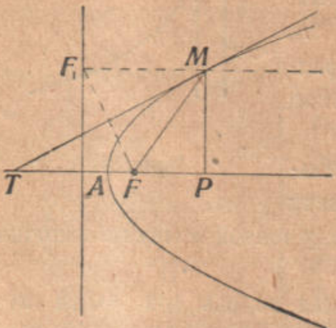
Черт. 243.

2) Прямоугольные треугольники F_1DF и MPN равны; ибо $F_1D = MP$ и $FF_1 = MN$, как параллельные между параллельными; следовательно, $PN = DF$; но DF есть параметр параболы, а PN — поднормаль.

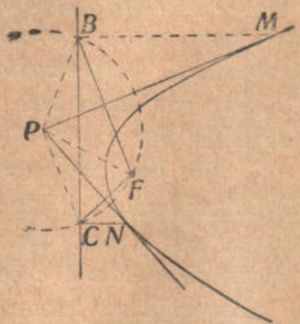
§ 282. Задача I. *Провести касательную к параболе через точку, взятую на кривой* [*черт. 244*].

1-й способ. Спроектируем M на направляющую и соединим M с фокусом. Биссектор угла FMF_1 — искомая касательная.

2-й способ. Если неизвестен фокус, то откладывают $AT = AP$ и соединяют точки T и M. Прямая MT есть касательная.



Черт. 244.



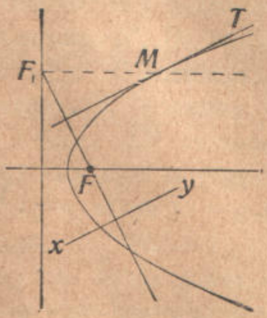
Черт. 245.

§ 283. Задача II. *Провести касательную к параболе через точку P, данную вне кривой.*

Искомая касательная есть высота равнобедренного треугольника, одна из вершин основания которого лежит в фокусе, а другая на направляющей. Вследствие этого из точки P [*черт. 245*], как из центра, опишем окружность радиусом PF и найдем две точки B и C пересечения ее с направляющей. Перпендикуляры, восстановленные к прямым BF и CF, в их серединах, суть искомые касательные.

§ 284. Задача III. *Провести к параболе касательную параллельно данной прямой.*

Из фокуса опустим перпендикуляр на данную прямую xy [*черт. 246*] и продолжим его до встречи с направляющей в точке F_1. Перпендикуляр, восстановленный к прямой FF_1 в ее середине и есть искомая касательная.



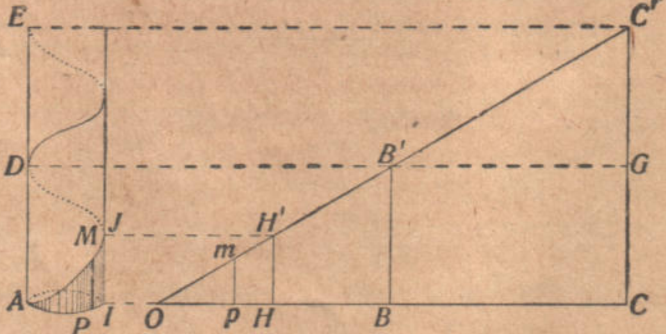
Черт. 246.

ГЛАВА II.

ВИНТОВАЯ ЛИНИЯ.

I. Определения.

§ 285. Если на плоскости начертим две прямые линии OC и OC' [*черт. 247*] неопределенной длины и станем навертывать эту плоскость на цилиндр вращения так, чтобы точки прямой OC последовательно совмещались с окружностью его основания AI, то точки прямой OC' совместятся с последовательным рядом точек, лежащих на самой поверхности и образующих непрерывную кривую $AJDE$, которая и называется *винтовою линиею.*



Черт. 247.

Отсюда ясно, что *винтовая линия есть такая кривая, начерченная на поверхности цилиндра вращения, которая на развертке цилиндрической поверхности преобразуется в прямую линию.*

§ 286. Винтовую линию можно рассматривать как состоящую из нескольких одинаковых частей, соответствующих одному полному обороту плоскости. Каждая такая часть винтовой линии называется *витком винтовой линии.* Таким образом, если на прямой OC отложим части $OB = BC$, равные окружности основания цилиндра, и восстановим в точках B, C... перпендикуляры к прямой OC до встречи с OC'' в точках B', C', то при первом полном обороте плоскости точки O и B совместятся с одною и тою же точкою основания цилиндра, положим A, а точка B' — с точкою D, следовательно, часть AD винтовой линии будет представлять виток; при следующем полном обороте точки B' и G совместятся с одной точкой D, а точка C'' — с E, следовательно, DE есть второй виток и т. д.

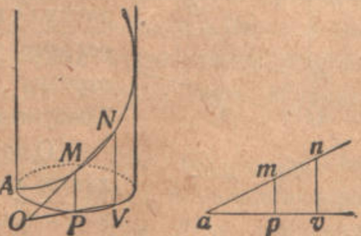
Отсюда легко видеть, что начало и конец витка лежат на одной и той же производящей цилиндра, и что, следовательно, вообще витком можно назвать часть винтовой линии, содержащуюся между двумя последовательными точками ее встречи с одною и тою же производящею. В свою очередь, часть этой производящей между началом и концом витка называется *шагом* винтовой линии.

Условимся называть *ординатою* какой-либо точки M, взятой на винтовой линии, расстояние точки M от основания цилиндра, т.-е. длину MP производящей точки M. *Абсциссою* той же точки будем называть дугу AP окружности основания, заключенную между началом витка и точкою P.

II. Черчение винтовой линии.

§ 287. Теорема. *Отношение ординаты к абсциссе какой бы то ни было точки, взятой на винтовой линии, есть величина постоянная и равная отношению шага винтовой линии к окружности основания цилиндра.*

Возьмем на винтовой линии две точки M и N [*черт. 248*]. Ордината первой точки равна MP, абсцисса — дуге AP, ордината второй точки равна NV, абсцисса — дуге AV. Требуется доказать, что



Черт. 248.

$$\frac{MP}{\smile AP} = \frac{NV}{\smile AV} = \text{пост.} = \frac{h}{2\pi r},$$

где h — шаг винтовой линии, $2\pi r$ — окружность основания.

Для доказательства, развернем цилиндрическую поверхность на плоскость, и пусть основание цилиндра преобразуется в прямую av, винтовая линия — в прямую an; точка M совместится с точкою m, точка N — с точкою n; в таком случае, опустив перпендикуляры mp и nv, по свойству развертки, имеем, что

$$ap = \smile AP,\ av = \smile AV,\ mp = MP,\ nv = NV.$$

Но из подобия треугольников map и nav находим:

$$\frac{mp}{ap} = \frac{nv}{av} = \frac{h}{2\pi r},$$

или, вставляя вместо равных равные, имеем:

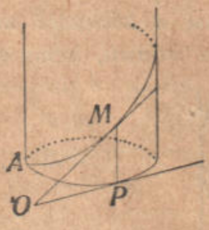
$$\frac{MP}{\smile AP} = \frac{NV}{\smile AV} = \frac{h}{2\pi r};$$

что и требовалось доказать.

Доказанная теорема выражает свойство, принадлежащее всем точкам винтовой линии, а потому черчение винтовой линии по точкам заключается в построении ряда точек, удовлетворяющих такому свойству.

§ 288. Теорема II. *Подкасательная винтовой линии равна абсциссе точки касания.*

Подкасательною называется проекция на плоскость основания цилиндра отрезка касательной, заключающегося между точкою касания и следом касательной на плоскости основания цилиндра. Таким образом, если в точке M [*черт. 249*], взятой из винтовой линии, проведем касательную и найдем точку O, в которой она встречает плоскость основания цилиндра, то OP, как проекция отрезка OM, и есть подкасательная. Требуется доказать, что $OP = \smile AP$.



Черт. 249.

С этою целью возьмем на винтовой линии две точки M и N [*черт. 248*] и проведем секущую MN, которая, находясь в плоскости, проведенной через производящие MF и NV, встретит след VPO этой плоскости к какой-либо точке O. Таким образом составится два треугольника MPO и NVO, из подобия которых имеем:

$$\frac{OV}{OP} = \frac{NV}{MP},$$

или

$$\frac{OV - OP}{OP} = \frac{NV - MP}{MP},$$

но по § 287

$$\frac{NV}{MP} = \frac{\smile AV}{\smile AP}$$

и, следовательно,

$$\frac{PV}{OP} = \frac{\smile AV - \smile AP}{\smile AP} = \frac{\smile PV}{\smile AP};$$

откуда

$$\frac{\smile AP}{OP} = \frac{\smile PV}{PV}.$$

Но при переходе к пределу, когда точки M и N сливаются в одну и секущая MN переходит в касательную, предел отношения $\frac{\smile PV}{PV} = 1$, и, следовательно, $\smile AP = OP$; что и требовалось доказать.

На основании доказанной теоремы, для построения касательной к винтовой линии в какой-либо ее точке M [*черт. 249*], достаточно провести через основание P, ординаты этой точки, касательную к основанию цилиндра, на ней отложить от точки P до точки O абсциссу точки M, равную $\smile AP$, и соединить точку O с точкою M.

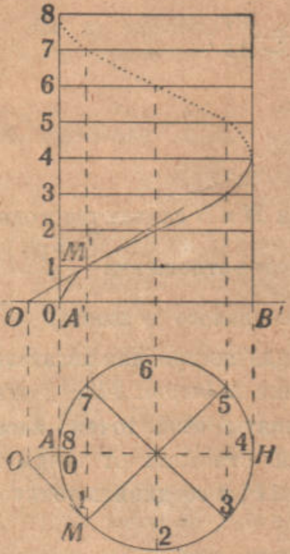
§ 289. Задача. *Вычертить винтовую линию по точкам.*

Так как винтовая линия не есть плоская кривая, то она может быть изображена на чертеже только при помощи двух проекций на две взаимно-перпендикулярные плоскости проекций, так что предложенная задача собственно сводится к определению на цилиндрической поверхности проекций таких точек, отношения между ординатами и абсциссами которых есть величина постоянная.

Пусть ось цилиндра вращения [*черт. 250*], на поверхности которого должна быть начерчена винтовая линия, перпендикулярна к горизонтальной плоскости проекций. В этом случае основание цилиндра проектируется на горизонтальной плоскости по окружности AH, а на вертикальной — по оси проекций, производящие же поверхности проектируются на горизонтальной плоскости по точкам окружности AH, а на вертикальной — по прямым, перпендикулярным к оси проекций.

Пусть точка (A, A') — начало винтовой линии; 08 — шаг винта.

На горизонтальной плоскости винтовая линия, очевидно, проектируется по окружности основания цилиндра. Для определения же вертикальной ее проекции разделим окружность основания и шаг винта на одно и то же число частей, положим на 8, с тем, чтобы отношение между ординатой и абсциссой каждой точки деления было равно отношению шага винта к окружности основания цилиндра [§ 287], и, приняв точки деления окружности за горизонтальные проекции точек винтовой линии, определим их вертикальные проекции из того осображения, что если точка, положим M, принадлежит винтовой линии, то ее вертикальная проекция M' должна находиться на параллели, проведенной через соответственную точку (1) деления шага, и на перпендикуляре к оси, ибо только в таком случае отношение абсциссы $\smile AM$ взятой точки к ординате ее 01 равно отношению окружности основания к шагу винта. Таким образом, точка пересечения параллелей, проведенных



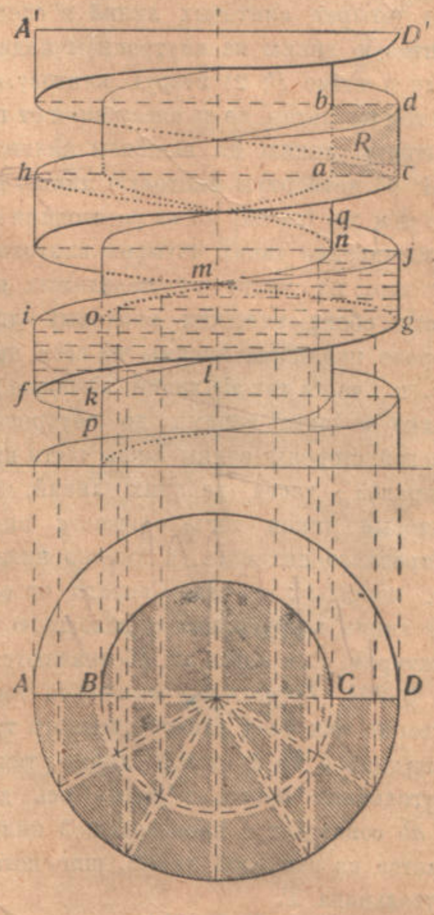
Черт. 250.

через точки деления шага, с перпендикулярами, восстановленными из соответствующих точек деления основания цилиндра, и суть вертикальные проекции точек винтовой линии. Соединив найденные точки непрерывной линией, построим вертикальную проекцию винтовой линии.

Чтобы провести касательную к винтовой линии в какой-либо ее точке (M, M'), на основании § 288, следует поступить следующим образом: в точке M проведем касательную к основанию цилиндра и на ней отложим часть MO, равную $\smile AM$. Прямая MO есть горизонтальная проекция касательной, а точка O — горизонтальный ее след, по O найдем ее вертикальную проекцию O' и, соединив ее с точкою M', построим вертикальную проекцию искомой касательной.

III. Построение проекций винта с квадратною и треугольною нарезкою.

§ 290. *Квадратная винтовая нарезка* может быть рассматриваема, как воображаемый след квадрата R [*черт. 251*], движущегося по винтовой линии таким образом, что плоскость его проходит через ось цилиндра, сторона его ab совпадает с производящей цилиндра, а точка a постоянно остается на данной винтовой линии, шаг которой должен удовлетворять условию $h \geqslant 2ab$. При таком движении, точки a и b квадрата произведут на данном (внутреннем) цилиндре две винтовые линии одного и того же шага h, имеющие свои начала на одной и той же производящей на расстоянии ab друг от друга. Точки c и d квадрата R произведут тоже две винтовые линии того же шага h, но на (внешнем) цилиндре, радиус которого больше радиуса данного цилиндра на сторону квадрата, причем эти последние линии будут иметь свои начала на расстоянии cd друг от друга и на той производящей внешнего цилиндра, которая лежит с производящей начал первых двух винтовых линий в одной плоскости, проходящей через ось цилиндра.



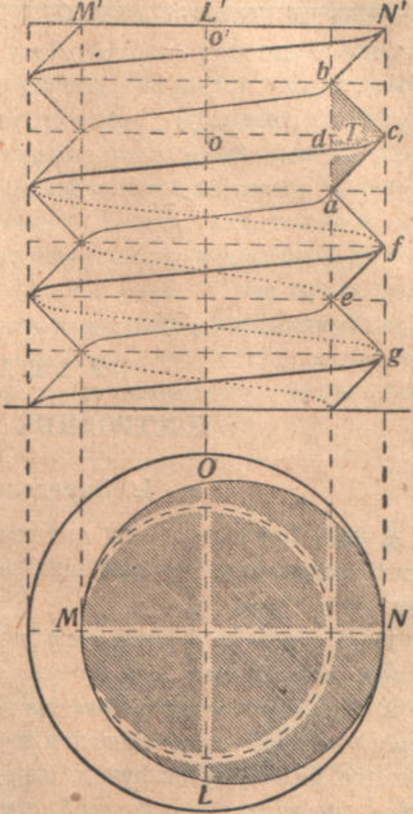
Черт. 251.

Отсюда для построения проекций винта с квадратной нарезкой следует поступать следующим образом.

На горизонтальной плоскости проекций описать две концентрических окружности BC и AD, радиусы которых различались бы между собою на ширину нарезки AB, и, приняв эти окружности за основания цилиндров, построить вертикальные проекции цилиндров. Затем выбрать шаг винта равным или большим $2ab$ (на чертеже шаг равен $2ab$) и вычертить по § *289* вертикальные проекции четырех винтовых линий в следующем порядке: 1) первую винтовую линию на внутреннем цилиндре с шагом $2ab$ и с началами в точке B; 2) вторую винтовую линию на том же цилиндре и с тем же шагом, но на расстоянии от первой равном ab; 3) третью винтовую линию на внешнем цилиндре с шагом $2ab$ и началом в A; 4) четвертую винтовую линию на том же внешнем цилиндре и с тем же шагом, но на расстоянии от первой равном ab. После вычерчивания таких четырех винтовых линий остается отделить видимые их части от невидимых из следующих соображений. Части обеих внешних винтовых линий, лежащие на передней стороне цилиндра, видимы на всем протяжении, например, fg, ij, и т. п.; части тех же линий, лежащие на задней стороне цилиндра, только отчасти видимы до внутреннего цилиндра, а именно с левой стороны видны лишь части нижних линий, подобные pf..., с правой — части верхних линий, подобные jg... Внутренние винтовые линии только отчасти видимы на передней стороне внутреннего цилиндра, а именно нижние линии видны слева до оси, напр. kl; верхние — справа от оси, напр. mn. Такие видимые линии вычерчиваются сплошною кривою, а невидимые — или пунктиром, или вовсе не обозначаются.

§ 291. *Треугольная винтовая нарезка* может быть рассматриваема как след равнобедренного треугольника T [*черт. 252*], движущегося по винтовой линии таким образом, что плоскость треугольника проходит через ось данного цилиндра, сторона его ab совпадает с производящей цилиндра, а точка a постоянно остается на винтовой линии, шаг которой равен основанию ab треугольника T.

Отсюда легко видеть, что во время движения треугольника точка b будет двигаться по винтовой линии, описываемой точкою a, а точка c — по винтовой линии, начерченной на цилиндре радиуса $od + dc$, где cd есть высота данного треугольника; причем шаг этой винтовой линии равен шагу первой винтовой линии, а начало ее лежит в той же вертикальной плоскости, как и начало первой винтовой линии, но на расстоянии (по производящей) равном *ad*, т.-е. половине шага.



Черт. 252.

Отсюда заключаем, что, для построения проекций винта с треугольной нарезкой, следует начертить на горизонтальной плоскости проекций две концентрических окружности радиусами *od* и *oc* и, приняв эти окружности за основания цилиндров, построить их вертикальные проекции; затем, на внутреннем цилиндре начертить согласно § *289* винтовую линию с шагом, равным основанию *ab* треугольника *T*, а на внешнем — вторую винтовую линию того же шага, но с началом, отстоящим от начала первой на половину шага. Эти линии ограничат входящие и выходящие ребра нарезки и на передней стороне цилиндра будут видимы по всей своей длине. С боков же нарезка будет ограничена прямыми *eg*, *ef*, *af*, *ac*, *bc* и т. д.

ОТДЕЛ ЧЕТВЕРТЫЙ.
ПРИЛОЖЕНИЯ МЕТОДА ПРОЕКЦИЙ НА ДВЕ ПЛОСКОСТИ.

ГЛАВА I.
ПОСТРОЕНИЕ ТЕНЕЙ.

I. Определения.

§ 292. Понятие о тени вытекает из следующих трех физических положений, независящих от гипотез о происхождении света.

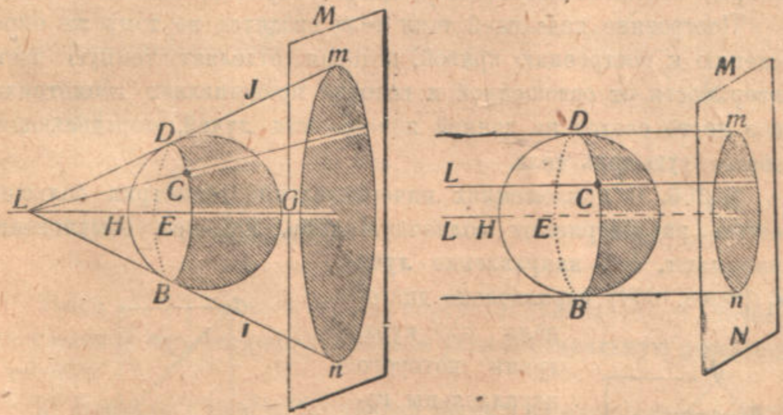
1) *В однородной среде свет распространяется по прямым линиям, называемым лучами света.*

2) *Лучи света выходят из светящейся точки по всем направлениям.* На этом основании, на какое-либо тело, взятое в пространстве, падает пучок лучей, ограниченный коническою поверхностью, производящие которой суть касательные, проведенные из светящейся точки к данному телу; но если тело удалено от светящейся точки на бесконечно большое расстояние, то пучок падающих на него лучей будет ограничен цилиндрическою поверхностью, ибо касательные, пересекаясь в бесконечно удаленной точке, будут параллельны между собою.

3) *Лучи света проходят через прозрачное тело и задерживаются непрозрачным.* На этом основании за непрозрачным телом образуется темное пространство, которое и называется *тенью*.

§ 293. Рассмотрим случай, когда непрозрачное тело есть *сфера*.

Если светящаяся точка находится в L (*черт. 253*) на конечном расстоянии от сферы, то на сферу упадет пучок лучей, содержащийся в конусе $LBCDE$, и задержится сферою, как непрозрачным телом, так что пространство, ограниченное усеченным конусом $BCDEIJ$, будет темным и будет, следовательно, представлять тень, падающую от сферы. Эта тень распространяется беспредельно в пространстве, и всякое тело, лежащее вполне или отчасти в пространстве, ограниченном теневым конусом, будет или вполне темным, или отчасти темным, отчасти освещенным. На этом основании и само непрозрачное тело должно состоять из освещенной и темной частей. Так, в нашем случае часть сферы $HBCDE$ будет освещенной, а часть $BCDEG$, как лежащая в теневом конусе, будет темной. То же нужно сказать и относительно всякого другого тела, напр., плоскости M, пересекающей теневой конус; часть этой плоскости, ограниченная кривою mn пересечения конуса плоскостью, будет темной, остальная—освещенной.



Черт. 253.

Если светящаяся точка будет бесконечно удалена от сферы, то пучок падающих на нее лучей будет ограничен цилиндрическою поверхностью, и потому за сферой образуется цилиндрическое темное пространство, как это видно на *черт. 253*.

§ 294. Темная часть непрозрачного тела, т.-е. в случае сферы часть $BCDEG$, называется *собственною тенью тела*, а кривая $BCDE$, отделяющая освещенную часть тела от темной, называется *кривою отдела света от собственной тени*.

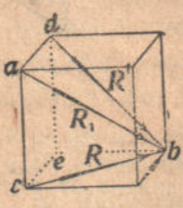
Темная часть тела, происходящая от того, что это тело помещено в тени рассматриваемого непрозрачного тела, называется *падающею тенью;* так, в нашем случае темная часть mn плоскости M есть тень сферы, падающая на плоскость M.

§ 295. Построение теней имеет целью определить как собственную, так и падающую тень тела, в случае лучей или сходящихся в одной точке, или параллельных данному направлению. В первом случае тень обыкновенно называют *факельною*, во втором—*солнечною.*

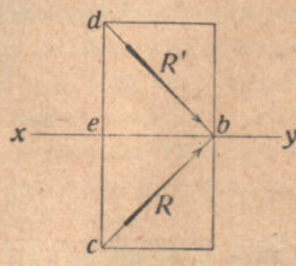
Построение собственной тени тела, по определению, сводится к построению кривой отдела света от собственной тени, т.-е. кривой, которая представляет геометрическое место точек касания световых лучей, проведенных к поверхности или из данной точки, или параллельно данному направлению. На многогранной поверхности кривая отдела света от собственной тени образуется ребрами, которые отделяют освещенные грани от граней, лежащих в тени.

Построение падающей тени тела сводится по тому же определению к построению кривой, которая отделяет темную часть поверхности от освещенной и которая представляет геометрическое место следов на данной поверхности лучей, определяющих собственную тень тела.

§ 296. В приложениях начертательной геометрии большею частью рассматривают солнечную тень, при чем обыкновенно принимают, что направление луча R_1 [*черт. 254*] параллельно диагонали ab куба, грани которого параллельны горизонтальной и вертикальной плоскостям проекций [1]). Следовательно, вертикальная и горизонтальная проекции такого луча направлены слева направо под углом $45°$ к xy [*черт. 255*]. Мы же для общности будем принимать направление луча произвольным.



Черт. 254.



Черт. 255.

---

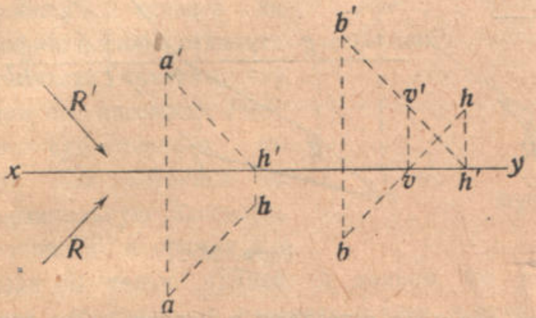
[1]) Такое освещение называют *левым, верхним и передним.*

II. Построение тени плоских фигур.

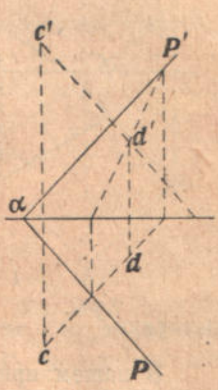
§ 297. Задача. *Определить солнечную тень точки, падающую 1) на одну из плоскостей проекций, 2) на произвольную плоскость.*

1) Пусть [*черт. 256*] (R, R')—направление световых лучей и (a, a')—данная точка.

Световой луч, проведенный через данную точку, встречает в первом угле горизонтальную плоскость проекций в точке h; следовательно, точка h есть тень точки (a, a'), падающая на горизонтальную плоскость.



Черт. 256.



Черт. 257.

Точка (b, b') бросает тень на вертикальную плоскость, потому что световой луч встречает в первом угле вертикальную плоскость в точке v'.

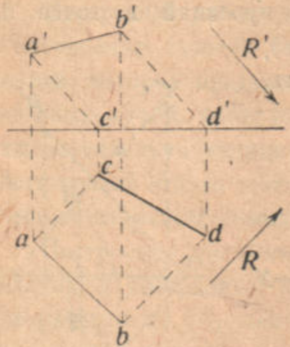
2) Пусть (c, c') и PaP'—данная точка и плоскость [*черт. 257*]. Через (c, c') проведем луч $(cd, c'd')$ параллельно (R, R') и найдем при помощи горизонтально-проектирующей его плоскости [§ 74] точку (d, d'), в которой он встречает плоскость PaP'. Эта точка и есть искомая падающая тень.

§ 298. Задача. *Определить тень прямой, падающую на плоскости проекций.*

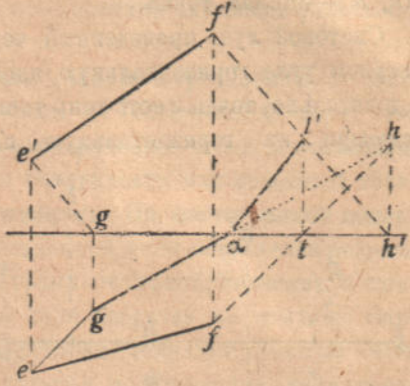
Лучи света, проведенные через различные точки прямой, лежат в одной плоскости, проходящей через данную прямую и светящуюся точку—в случае факельной тени, или параллельно направлению луча—в случае тени солнечной. В обоих случаях, следовательно, построение падающей тени сводится к определению следов этой плоскости на плоскостях проекций, т.-е. к задаче, рассмотренной нами в §§ *69, 82*.

1) Пусть даны: прямая $(ab, a'b')$ и направление лучей (R, R') [*черт. 258*].

Через конечные точки (a, a') и (b, b') прямой AB проведем лучи $(ac, a'c')$ и $(bd, b'd')$, параллельные (R, R'), и найдем их следы.



Черт. 258.



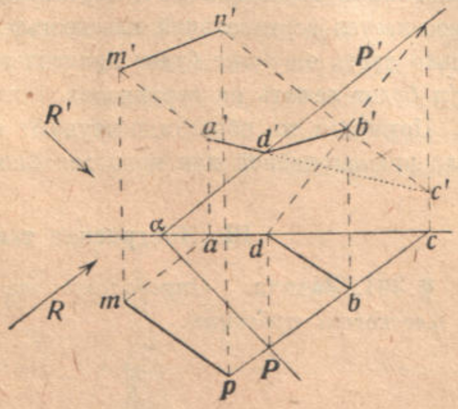
Черт. 259.

В нашем примере оба луча встречают в первом угле лишь горизонтальную плоскость в точках c и d, а потому тень прямой AB падает лишь на горизонтальную плоскость по отрезку cd.

2) В случай прямой $(ef\ e'f')$ [*черт. 259*] луч EG встречает в первом угле горизонтальную плоскость в точке g, а луч FL— вертикальную в точке l'. Отсюда заключаем, что тень прямой EF лежит отчасти на горизонтальной, отчасти на вертикальной плоскостях проекций; и, чтобы определить эти части, заметим, что луч FL встречает горизонтальную плоскость во втором угле в точке h и что, следовательно, прямая gh была бы тенью данной прямой на горизонтальной плоскости проекций, если бы вертикальная плоскость была достаточно отодвинута: при данном же положении вертикальной плоскости a есть точка, в которой плоскость, проведенная через EG и EF, встречает ось; следовательно, ga есть часть тени, лежащая на горизонтальной плоскости проекций, а al'—часть тени, лежащая на вертикальной; а потому ломаная gal' есть искомая тень прямой.

§ 299. Задача. *Определить тень прямой, падающую на произвольную плоскость.*

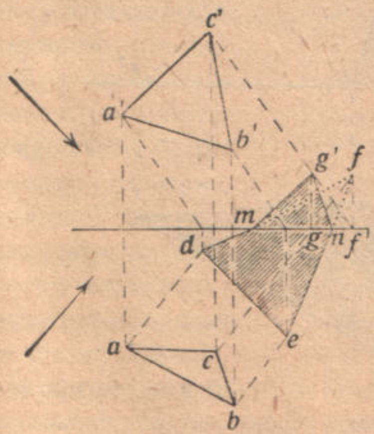
Пусть PaP' и MN—данные плоскость и прямая [*черт. 260*]. Световой луч, проведенный через точку (m, m'), встречает вертикальную плоскость в точке a', луч же, проведенный через (n, n'), встречает плоскость PaP' в точке (b, b'). Отсюда заключаем, что искомая тень лежит отчасти на вертикальной плоскости проекций, отчасти на данной; и чтобы отделить эти части, заметим, что если бы плоскость PaP' не существовала, то луч NB встретил бы вертикальную плоскость в точке c', и прямая $a'c'$ была бы тенью прямой; в данном же случае, вертикальный след aP' плоскости пересекает тень в точке d', и потому $a'd'$ есть часть тени, лежащая на вертикальной плоскости, а $d'b'$—часть тени, лежащая на данной плоскости. Следовательно, ломаная $a'd'b'$ есть искомая тень прямой.



Черт. 260.

§ 300. Задача. *Определить тень плоского многоугольника, падающую на плоскости проекций.*

Пусть дан треугольник $(abc, a'b'c')$ [*чер. 261*].



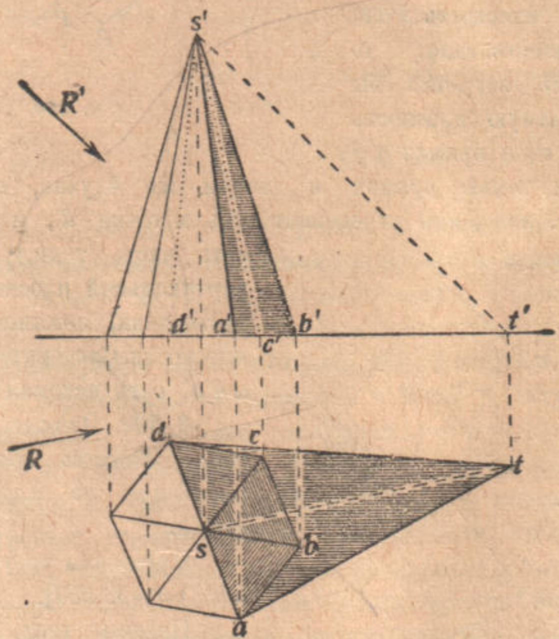
Черт. 261.

Найдем тень каждой его вершины. Вершины A и B будут иметь тени на горизонтальной плоскости в точках d и e, вершина же C—на вертикальной в точке g'. Таким образом искомая тень треугольника лежит на обеих плоскостях проекций, и, чтобы найти ее, заметим, что если бы вертикальная плоскость была достаточно удалена, то и тень вершины C лежала бы на горизонтальной плоскости в точке f, и, следовательно, данный треугольник дал бы тень def только на горизонтальной плоскости. При данном же положении вертикальной плоскости, тень эта пересекается вертикальной плоскостью в точках m и n, и потому только часть ее $dmne$ будет принадлежать искомой тени, а часть $mg'n$ будет лежать на вертикальной плоскости.

Подобным же образом поступают в случае какой бы то ни было прямолинейной или криволинейной плоской фигуры.

III. Построение тени тел.

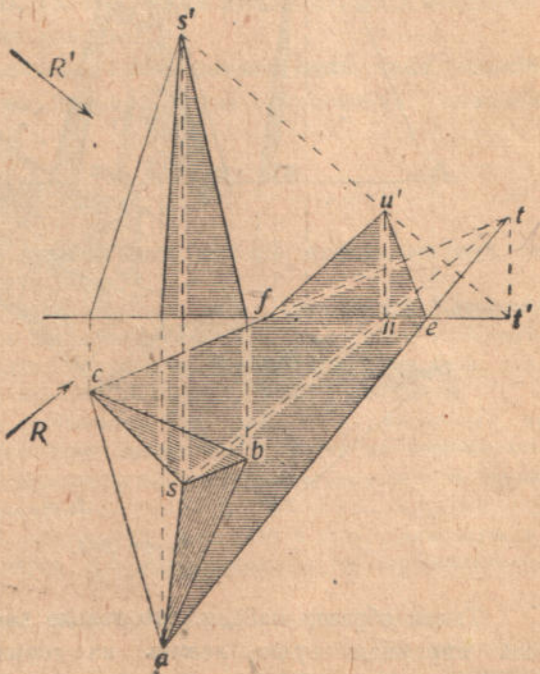
§ 301. Задача. *Определить тень пирамиды, падающую на плоскости проекций.*



Черт. 262.

Пусть (R, R')—направление светового луча и $SABCDE$—данная пирамида [*чер. 262*]. Лучи, касательные к пирамиде, лежат в двух плоскостях, проведенных через ребра и параллельных лучу (R, R'); следовательно, такие плоскости должны содержать луч $(st, s't')$, определяющий тень t вершины (s, s'), а потому, найдя в первом углу след t луча $(st, s't')$ на горизонтальной плоскости, заключаем, что тень пирамиды будет падать лишь на горизонтальную плоскость, и что горизонтальные следы касательных плоскостей, определяющих эту тень, пройдут через точку t и будут касательными к основанию пирамиды, т.-е. определятся прямыми ta и td. Следовательно, tad есть искомая падающая тень пирамиды. Отсюда же видно, что собственная тень пирамиды ограничена на горизонтальной плоскости многоугольником $abcd$, а на вертикальной, на видимой части пирамиды—$s'a'b'$.

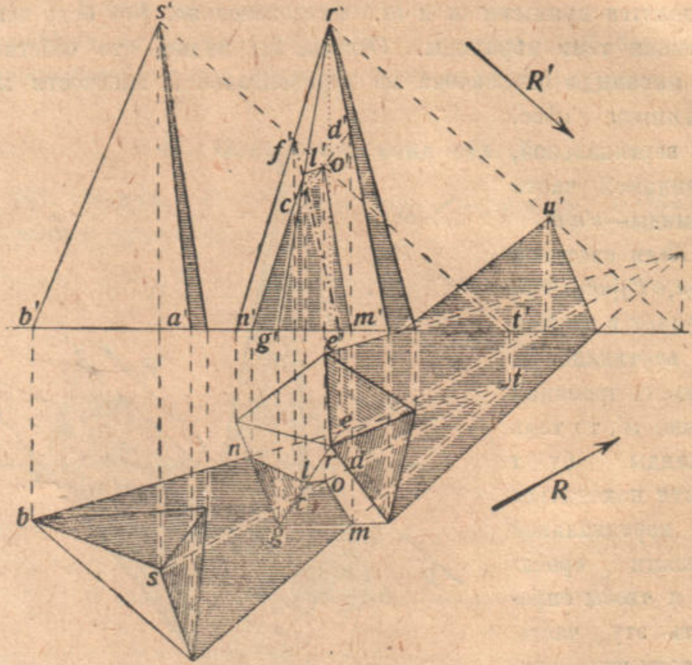
Если световой луч $(st, s't')$ [*чер. 263*] встречает в первом углу вертикальную плоскость проекций в точке u', то тень пирамиды будет отчасти находиться на вертикальной плоскости проекций, и чтобы определить эту часть, допустим, что вертикальная плоскость проекций удалена настолько, что тень падает только на горизонтальную плоскость; в таком случае прямые ta и tc ограничат такую тень. При данном же положении вертикальной плоскости, когда она пересекает тень act по прямой fe, только часть $cfea$ будет лежать на горизонтальной плоскости, а остальная часть $fu'e$ — на вертикальной плоскости.



Черт. 263.

§ 302. Задача. *Определить тень пирамиды, падающую на другую пирамиду.*

По предыдущему § определим падающую тень каждой из рассматриваемых пирамид [*чер. 264*] и найдем точки (n, n') и (m, m'), в которых прямые ta и tb, ограничивающие тень первой пирамиды, встречают основание второй пирамиды.



Черт. 264.

Таким образом найдем, что только часть $bngma$ тени первой пирамиды будет лежать на горизонтальной плоскости; а остальная часть тени той же пирамиды будет лежать в гранях RGM и RGN второй пирамиды. Для определения этой последней части, очевидно, достаточно найти пересечение граней RGM и RGN с плоскостями тени SAT и SBT, что, в свою очередь, сводится к определению, во-первых, точки O, в которой световой луч ST встречает одну из граней второй пирамиды, и, во-вторых, точки L, в которой ребро RG встречает одну из плоскостей тени.

Для определения точки O, т.-е. точки, к которой прямая (st, $s't'$) встречает плоскость, данную двумя пересекающимися прямыми GR и DR, согласно § 76, проведем горизонтально-проектирующую плоскость st и найдем точки (c, c') и (d, d'), в которых эта плоскость пересечет прямые (gr, $g'r'$) и (dr, $d'r'$); точка (o, o'), в которой световой луч (st, $s't'$) встречает прямую cd, $c'd'$), и есть искомая.

На том же основании для определения точки, к которой ребро RG встречает плоскость RST тени, определяемую двумя прямыми ST и BT, проведем горизонтально-проектирующую плоскость gr и найдем пересечение ее с ST в точке (c, f') и с BT в точке (e, e'); точка (l, l'), в которой ребро (gr, $g'r'$) встречает прямую (ce, $f'e'$), и есть искомая.

Таким образом найдем, что искомая часть тени первой пирамиды, лежащая на второй, будет ограничена ломаной линией ($nlomg$, $n'l'o'm'g'$).

Задачи.

292. Построить тень прямой шестиугольной призмы, стоящей на горизонтальной плоскости проекций.

293. Построить тень куба, стоящего на горизонтальной плоскости так, что одним ребром он касается вертикальной плоскости проекций. Лучи выходят из светящейся точки, находящейся вправо от куба.

294. Построить тень призмы, стоящей на данной плоскости.

295. Построить как собственную тень, так и тень, падающую на плоскости проекций, цилиндра вращения, стоящего на горизонтальной плоскости проекций, предполагая: 1) что лучи выходят из одной точки; 2) что лучи параллельны.

296. Построить как собственную тень, так и тень, падающую на плоскости проекций, конуса вращения, стоящего на горизонтальной плоскости проекций.

297. Найти тень шара, падающую на плоскости проекций.

298. На данную правильную шестиугольную призму поставлена шестиугольная же правильная пирамида. Найти тень такого составного тела на плоскостях проекций.

299. Построить тень креста, данного своими проекциями.

300. Построить тень восьмигранной башни.

301. Построить тень пирамиды, падающую на четырехгранную призму, положенную на горизонтальной плоскости проекций.

302. Построить тень от шара, падающую на прямой круглый цилиндр (или конус), стоящий на горизонтальной плоскости.

ГЛАВА II.

ПРОЕКТИРОВАНИЕ СООРУЖЕНИЙ.

I. Определения.

§ 303. Все предыдущее в достаточной мере ясно показывает, что проекционный чертеж тела не только дает возможность точно определить все его элементы, но и решать графически всевозможные задачи, к такому телу относящиеся; и потому во всех тех случаях, когда требуется составить точное представление о формах, размерах и расположении составных частей какого-либо предмета, напр., здания, машины и т. п., изображают предмет посредством проекций на горизонтальную и вертикальную плоскости; при чем горизонтальная проекция предмета вообще называется его *планом*, вертикальная — *фасадом*.

§ 304. Для того, чтобы проекционный чертеж предмета вполне достигал своей цели, пользуются следующими средствами.

Во-первых, для ознакомления с внешним видом предмета вертикальную плоскость проекций помещают параллельно различным сторонам его и таким образом получают несколько фасадов, при чем один из них принимается за *главный*.

Во-вторых, для ознакомления с внутренним устройством предмета чертят сечения его плоскостями или параллельными плоскостям проекций, или перпендикулярными к оси проекций. В последнем случае сечения носят названия *профилей*.

В-третьих, наконец, нередко изображают на одном эпюре только часть (деталь) предмета, так что для изображения всего предмета требуется несколько отдельных эпюров, сделанных нередко в различных масштабах, смотря по важности детали.

§ 305. Пользуясь этими средствами, всегда есть возможность точно изобразить посредством ряда чертежей предмет, как бы ни был он сложен, но при этом нужно стремиться, чтобы число необходимых чертежей было возможно меньше. И с этой целью, если предмет симметричен, строят сечение одной лишь его половины, на другой же половине чертежа чертят или наружный вид предмета, или же сечение его плоскостью, параллельною первой, но проходящей через другое место предмета; если же предмет несимметричен, то вырезывают части его, наиболее удобные для раскрытия внутреннего его устройства и в то же время не мешающие изображению его наружного вида.

Кроме того при составлении проекционных чертежей зданий, машин и т. п. должно иметь в виду следующие установившиеся правила:

1) Ось проекций и проектирующие не вычерчиваются.

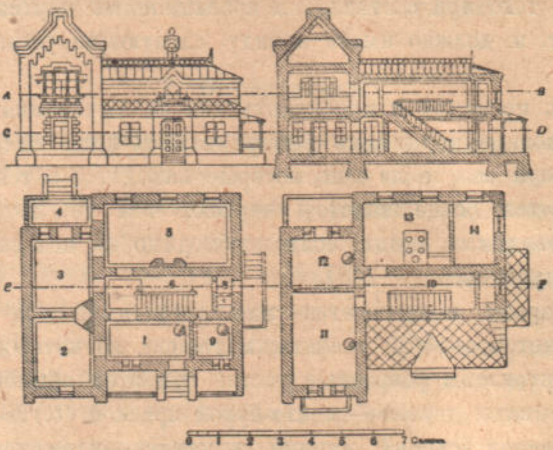
2) Сплошными линиями вычерчиваются лишь видимые части предмета; при чем те из них, которые находятся в тени (*§ 296*), вычерчиваются более толстою чертою, чем те, которые освещены. Невидимые линии, если необходимо их показать, вычерчиваются пунктиром (*§ 158*).

3) Разрезы покрываются или штрихами, или красками, с тем расчетом, чтобы указать материал, из которого должны быть приготовлены разрезные части; при этом обычаем установлено покрывать: дерево — желто-бурой краской (terre-de-sienne), песок — красной (сурик), кирпич и камень—кармином, чугун—нейтралатином, железо—голубой, медь—желтой.

Умение пользоваться всеми этими правилами при составлении нового чертежа и при чтении готового приобретается лишь практикой, и хорошо составленный чертеж является весьма важной работой в строительном деле, так как его не может заменить никакое подробное описание предмета.

II. Проект жилого дома.

§ 306. На *чертеже 265* представлен проект жилого дома четырьмя фигурами, из которых № I представляет главный фасад здания, т.-е. наружный его вид со стороны главного подъезда; № II — план нижнего этажа, т.-е. разрез здания горизонтальною плоскостью CD, проведенною посредине окон нижнего этажа, № III—план верхнего этажа, т.-е. разрез здания горизонтальною плоскостью AB, проведенною посредине окон верхнего этажа, наконец, № IV представляет продольный разрез здания, т.-е. разрез здания вертикальною плоскостью EF, параллельною главному фасаду. Этих чертежей, вообще говоря, достаточно, чтобы составить полное представление о здании. Но, если боковые стороны здания представляют какие-либо особенности в смысле украшения стен или отделки окон, то к данному главному фасаду придется присоединить еще три боковых фасада, т.-е. три наружных вида здания на вертикальной плоскости. Кроме того, если внутри здания расположены лестницы, в направлении, перпенди-



Черт. 265.

кулярном к главному фасаду, то к продольному разрезу № IV нужно присоединить еще разрез поперечный, т.-е. разрез вертикальною плоскостью, перпендикулярною к главному фасаду; наконец, если крыша здания имеет очень сложную форму, то, кроме всех вышепоименованных чертежей, чертят еще план крыши, т.-е. вид здания на горизонтальной плоскости. Все такого рода чертежи, в количестве, необходимом для полного представления о всех частях здания, называются *главными чертежами здания*, в отличие от так называемых *детальных*, на которых в большом масштабе вычерчиваются отдельные части здания, чем-либо замечательные и недостаточно подробно вычерченные, по малости масштаба, на главных чертежах.

Таким образом на детальных чертежах обыкновенно чертят формы карнизов, решетки балконов, украшений окон, дверей и т. п

Из предыдущего перечисления фигур чертежа легко усмотреть и роль каждого из них.

Главный фасад, как и боковые, представляют вид здания на вертикальную плоскость и таким образом определяют изящность, красоту, пропорциональность здания.

Планы определяют внутреннее расположение комнат, окон, дверей, лестниц, печей и горизонтальные их размеры. Следовательно, по планам, главным образом, судят об удобствах здания как жилища. Так, по плану № II, мы видим, что в первом этаже имеются следующие комнаты: *1* — передняя с главным подъездом, *2* — кабинет, *3* — гостиная с выходом в сад (*4*), *5* — столовая, *6* — коридор с чёрным ходом (*8*) и лестницей на верхний этаж, *9* — комната швейцара подле парадной.

По плану № III мы видим расположение комнат во втором этаже, именно: *10* — коридор, *11* — детская с выходом на балкон, *12* — спальня с выходом на балкон, *13* — кухня, *14* — комната для прислуги.

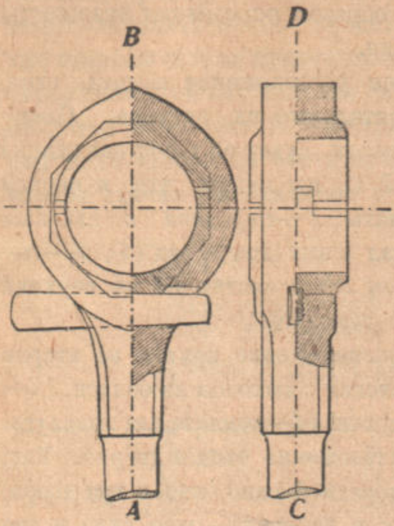
Те же планы показывают расположение окон и дверей. Так, мы видим по плану № II, что в передней одно окно и три двери: парадная, в кабинет и в коридор; в кабинете — одно окно и две двери: в переднюю и гостиную и т. д.

Разрезы вертикальными плоскостями показывают высоты комнат, дверей и окон, а также расположение лестниц, глубину фундамента, устройство стропил, полов, потолков и т. п.

§ 307. Принимая во внимание эти замечания, легко видеть, что при совместном обсуждении всех главных чертежей является возможность составить полное представление о здании и вычертить отдельно, если потребуется, как его боковые фасады, так и разрезы вертикальными плоскостями в данных направлениях. Так, в нашем случае, левый боковой фасад представит голую стену без окон; на заднем фасаде должны быть изображены: ход в сад, над ним балкон, три окна для нижнего этажа и три окна меньших для верхнего этажа. На правом боковом фасаде — крыльцо заднего хода и два окна для верхнего этажа.

III. Проекты головки шатуна.

§ 308. На *черт. 266* представлена *головка шатуна* двумя фигурами, из которых каждая, если предположить, что ось шатуна вертикальна, есть проекция головки на вертикальную плоскость, а именно левая — есть проекция головки на плоскость, перпендикулярную к оси вкладыша, а правая — на плоскость, параллельную той же оси. При чём, так как головка шатуна есть тело симметрическое относительно плоскостей, проходящих чрез ось шатуна и параллельных плоскостям проекций, и так как, следовательно, проекции головки суть фигуры симметричные, то проекции наружного вида головки сделаны лишь на одной половине каждой фигуры— именно на левой, правые же половины представляют сечения головки плоскостями симметрии.



Черт. 266.

Таким путем достигается возможность составить точное понятие о виде и размерах головки по двум чертежам. А именно, рассматривая чертеж, мы видим, что представляемая им головка составляет одно целое со штангой шатуна и может быть рассматриваема как полая шестигранная призма, сделанная в его уширенном конце, в которую вставлен такой же шестигранный вкладыш, состоящий из двух половинок. Верхняя и нижняя половинки вкладыша соединены между собою выступом (виден на правой фигуре), а с телом головки — натяжным клином, который проходит чрез прорез, сделанный в теле головки и отчасти во вкладыше.

Задачи.

303. Начертить план чертежного класса.
304. Построить план и фасад ученической скамьи.
305. Построить план и фасад чертежного шкапа.
306 Построить точные чертежи какого-либо физического прибора.
307. Начертить план и фасад сарая.
308. Начертить план и фасад кузницы.
309. Начертить план и фасад небольшого одноэтажного дома.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

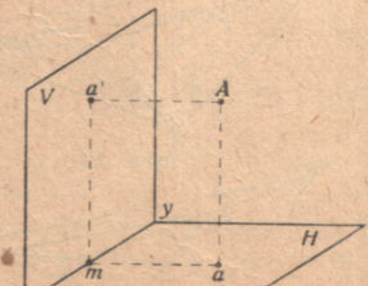
ПРОЕКЦИИ НА ОДНУ ПЛОСКОСТЬ

ОТДЕЛ ПЕРВЫЙ

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПРОЕКЦИИ С ЧИСЛОВЫМИ ОТМЕТКАМИ

I. Описание метода.

§ 309. В ортогональных проекциях на две плоскости положение точки определяется ее горизонтальной и вертикальной проекциями. Каждый предмет или фигура изображаются своим планом и фасадом. Если вертикальные размеры (высота) данного предмета невелики по сравнению с горизонтальными (длина, ширина), то вертикальная проекция его, т.-е. фасад, мало что прибавляет к горизонтальной (плану), да и построение ее оказывается неудобным. Такие затруднения встречаются, например, при изображении участка земной поверхности в ортогональных проекциях, судить о котором по плану гораздо легче, чем по его боковому виду. В этих случаях представляется целесообразным заменить вертикальные проекции точек предмета *числовыми отметками*, откуда и самый метод получил название метода проекций с числовыми отметками. Делается это следующим образом. Пусть точка A проектируется на плоскости проекций H и V точками a и a' [*черт. 267*]. Измерим расстояние aA данной точки от горизонтальной плоскости, пользуясь какой-нибудь единицей длины. Число, выражающее это расстояние, обозначим буквой α. Так, если за единицу принят 1 метр, то найдем, что расстояние точки A от горизонтальной плоскости



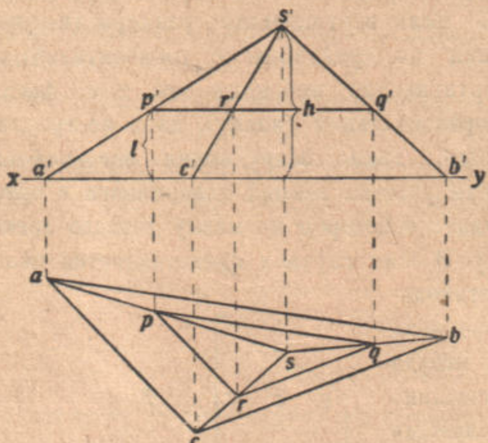
Черт. 267.

равно a метрам, или запишем: $aA = a$. Это число a выражает высоту точки A над горизонтальной плоскостью H. Зная его, мы можем построить вертикальную проекцию a' точки A. Для этого достаточно из горизонтальной проекции a опустить перпендикуляр am на ось xy и, восставив в точке m перпендикуляр к горизонтальной плоскости, отложить на нем отрезок

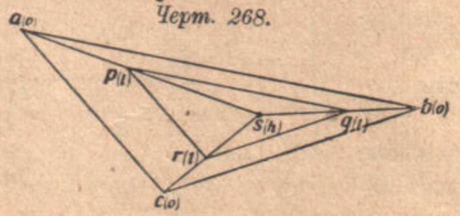
$$ma' = aA = a.$$

Таким образом число a заменяет нам вертикальную проекцию точки A и вместе с горизонтальной проекцией вполне определяет эту точку. a и называют *числовой отметкой точки* A и записывают с правой стороны около горизонтальной проекции — a — точки. Например, так: a (a). Для всех точек, лежащих выше горизонтальной плоскости, числовые отметки считаются положительными, для точек, лежащих ниже горизонтальной плоскости, — отрицательными. Числовые отметки точек самой горизонтальной плоскости равны нулю.

§ 310. Пример. На *черт. 268* даны ортогональные проекции треугольной пирамиды $sabc$, $s'a'b'c'$. Кроме того изображено сечение пирамиды pqr, $p'q'r'$ плоскостью, параллельной горизонтальной плоскости проекций и отстоящей от нее на расстоянии l. Высота пирамиды равна h. Этот эпюр в проекциях с числовыми отметками будет иметь вид, представленный *чертежом 269*.



Черт. 268.



Черт. 269.

Точки a, b и c имеют нулевые отметки; отметки точек p, q и r равны l; отметка точки s есть h.

II. Прямая.

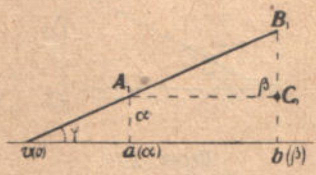
§ 311. Прямая линия может быть определена двумя своими точками или точкой и направлением. Отсюда приходим к различным способам задания прямой в проекциях с числовыми отметками. Проекции двух точек прямой вместе с их отметками вполне определяют прямую. Пусть на *черт. 270* имеем прямую, заданную точками a (α) и b (β). В пространстве им соответствуют точки A и B. Прямая AB лежит, очевидно, в горизонтально проектирующей плоскости V, проходящей через проекцию ab. Совместим плоскость V с плоскостью плана, вращая ее около оси ab. Совмещения A_1 и B_1 точек A и B должны лежать на перпендикулярах, восставленных к прямой ab в точках a и b; притом будем иметь: $aA_1 = aA = \alpha$; $bB_1 = bB = \beta$; зная *масштаб чертежа*, т.-е., имея отрезок, изображающий на плане принятую единицу длины (например, 1 сантиметр в плане равен 1 метру в пространстве), откладываем $aA_1 = \alpha$ и $bB_1 = \beta$. Найдя совмещение A_1B_1 данной прямой, можем далее определить точку встречи данной прямой с горизонтальной плоскостью или *след* ее. Это будет точка v пересечения прямых A_1B_1 и ab. Ее отметка, как и всякой точки плана, равна 0.

Угол φ, образованный прямой AB с ее проекцией ab, называется *углом наклона* прямой. Из прямоугольного треугольника vaA_1 находим:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{aA_1}{va} = \frac{\alpha}{va};$$

Проведем $A_1 C_1 \parallel ab$. Прямоугольный треугольник $A_1B_1C_1$ нам дает:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{C_1B_1}{A_1C_1} = \frac{\beta - \alpha}{ba};$$



Черт. 270.

Величина эта ($\operatorname{tg} \varphi$) носит название *уклона прямой.* Обозначим ее буквой u. Предыдущая формула показывает нам, что уклон прямой выражается отношением разности высот двух ее точек к проекции определяемого ими отрезка.

Отрезок ab называется *интервалом* прямой, если разность $\beta - \alpha$ высот точек B и A равна единице. Обозначим интервал прямой буквой i, тогда будем иметь:

$$\operatorname{tg} \varphi = u = \frac{1}{i};$$

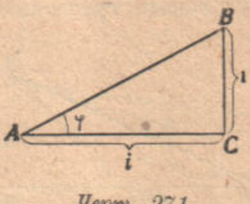
Отсюда получаем следующее предложение: *уклон есть величина обратная интервалу.*

В частном случае для прямой, параллельной горизонтальной плоскости, угол $\varphi = 0$ и, следовательно уклон ее $u = \operatorname{tg}\varphi = 0$. Интервал $i = \frac{1}{u} = \infty$. Для прямых, перпендикулярных к плоскости проекций, будем иметь обратные значения уклона и интервала. Именно, $u = \operatorname{tg}\ 90^\circ = \infty$; $i = \frac{1}{u} = 0$;

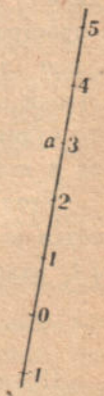
В этих границах и изменяются величины уклона и интервала.

§ 312. Прямая AB вполне определяется, если дана ее проекция ab вместе с отметкой одной из точек и уклоп u или интервал i прямой. В самом деле, построив прямоугольный треугольник ABC, катеты которого $CA = i$ и $CB = 1$[*черт. 271*], найдем угол уклона данной прямой φ. Зная же отметку одной из точек, например a (α), мы можем построить точку A_1. Затем проводим $A_1C_1 \parallel ab$ и строим угол $B_1A_1C_1 = \varphi$ [*черт. 270*]. Таким образом находим совмещение искомой прямой A_1B_1 и возвращаем ее в первоначальное положение AB.

Пусть прямая задана своей проекцией ab, точкой a (α) и интервалом i. Если α — какое-нибудь целое число, например, $\alpha = 3$, то, откладывая от точки a по прямой ab отрезок, равный интервалу, мы получим точку, отметка которой отличается на единицу [*§ 311*, опред интервала). Повторяя эту операцию, мы отметили на проекции ab данной прямой точки, высоты которых выражаются в целых числах 0, 1, 2, 3, 4, 5,...... —1,—2,—3,... [*черт. 272*].



Черт. 271.



Черт. 272.

Это называется *градуированием прямой.*

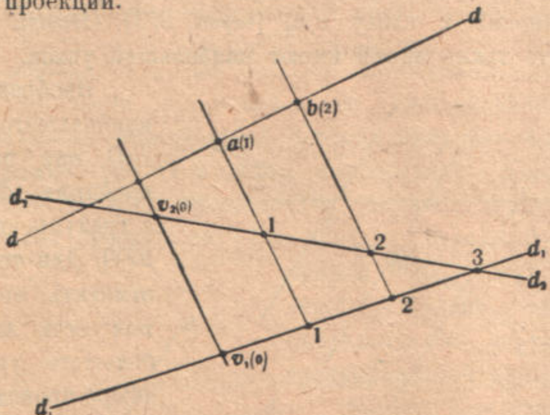
III. Плоскость.

§ 313. Точки, имеющие равные отметки, расположены в плоскости, параллельной плоскости плана. Такая плоскость называется *плоскостью уровня.* Для определения плоскости уровня достаточно знать одну ее точку (отметку этой точки). Точки, проекции которых лежат на одной прямой, расположены в вертикальной плоскости, следом которой является упомянутая прямая. Достаточно знать проекции двух точек этой плоскости для ее определения.

В общем же случае плоскость определяется тремя своими точками или двумя своими прямыми.

Пусть [*черт. 273*] имеем две пересекающиеся прямые d_1 и d_2, заданных градуировкой. Точка их встречи имеет отметку 3.

Найдя на каждой прямой ее след, т.-е. точку с отметкой 0, соединяем следы прямых линией $v_1 v_2$. Обозначим плоскость, которую определяют прямые d_1 и d_2, через Δ. Нетрудно видеть, что линия v_1 v_2 является *следом плоскости* Δ на горизонтальной плоскости проекций.



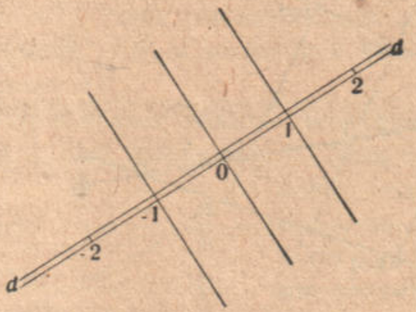
Черт. 273.

Прямая, соединяющая произвольную точку прямой d_1 с какой-нибудь точкой прямой d_2, лежит в плоскости Δ.

Если же соединим точки с одинаковыми отметками, напр. точки с отметкой 2, то соответствующая прямая 2—2, находясь одновременно в плоскости Δ и плоскости уровня, является, очевидно, линией их пересечения. Такая прямая называется *горизонталью* плоскости Δ [§ 55]. Все горизонтали параллельны между собою и параллельны следу плоскости ($v_1 v_2$).

§ 314. Пусть прямая v_1 v_2 изображает в плане след плоскости Δ [*черт. 273*]. Построим прямую DD в плоскости Δ, перпендикулярную к следу $v_1 v_2$. Проекция dd этой прямой изобразится перпендикуляром к $v_1\ v_2$. Прямая DD называется *линией наибольшего уклона* или *линией наибольшего ската*. Угол φ, который образуют прямые DD и dd, т.-е. линейный угол двугранного угла, составленного плоскостью Δ с плоскостью плана, называется *углом наибольшего уклона (или ската)*. Действительно, легко убедиться в том, что из всех прямых, лежащих в плоскости Δ, наибольшим уклоном обладают прямые, перпендикулярные к ее следу v_1v_2.

Из формулы $u=\frac{1}{i}$ заключаем, что при наибольшем значении уклона (u) мы должны иметь наименьшее значение интервала (i). Но величина интервала определяется отрезком проекции прямой между проекциями двух последовательных горизонталей. Этот отрезок (ab) имеет наименьшую величину для прямой dd, перпендикулярной к следу v_1v_2 [*черт. 273*]. Отсюда тотчас же получаем, что такие линии имеют наибольший уклон.



Черт. 274.

Изобразим линию наибольшего уклона DD при помощи ее проекции dd вместе с градуировкой [*черт. 274*]. Для того, чтобы отметить, что эта прямая есть линия наибольшего уклона, на эпюре проводят параллель прямой dd на близком расстоянии от нее. Такое изображение линии наибольшего уклона называется *масштабом уклона плоскости*.

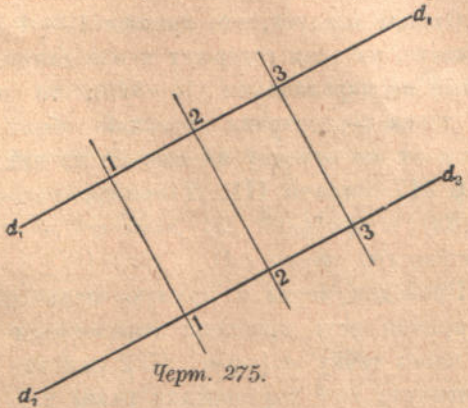
Плоскость вполне определяется масштабом уклона. В самом деле, проводя чрез точки прямой dd перпендикуляры к последней, можем построить сколько угодно горизонталей плоскости.

IV. Основные задачи на прямые и плоскости.

§ 315. Рассмотрим несколько наиболее важных задач на прямые и плоскости в проекциях с числовыми отметками.

Задача I. *Найти условия параллельности двух прямых в пространстве.*

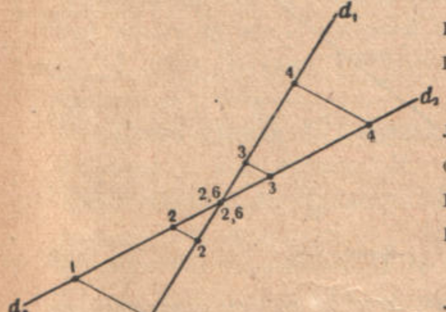
Нам уже известно [*§ 43*], что проекции двух параллельных прямых должны быть параллельны. Таким образом параллельные прямые D_1D_1 и D_2D_2 представятся в плане параллельными проекциями d_1d_1 и d_2d_2 [*черт. 275*]. Далее заметим, что уклоны таких прямых равны, а, следовательно, равны и их интервалы. Наконец, линии соединяющие точки обеих прямых с одинаковыми отметками (каковы линии: 1—1, 2—2, 3—3,...) лежат в одной плоскости и, являясь ее горизонталями, должны быть параллельны между собой. Отсюда приходим к выводу, что отметки прямых растут в одном направлении. Таким образом параллельные прямые представятся одинаково градуированными параллельными проекциями. Все прямые, параллельные данной прямой D_1D_1, могут быть получены в плане при помощи параллельного перенесения ее градуированной проекции d_1d_1.



Черт. 275.

Вопрос. Как изменяется положение прямой D_1D_1 в пространстве, если ее градуированная проекция d_1d_1 скользит сама по себе?

§ 316. Задача II. *Определить, пересекаются ли данные прямые в пространстве.*



Черт. 276.

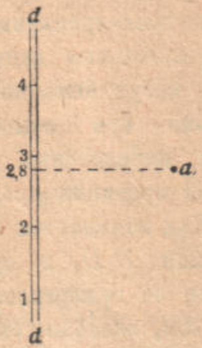
Пусть обе прямые градуированы [*черт. 276*]. Если они пересекаются в пространстве, то определяют плоскость. Прямые 1—1, 2—2,..... 4—4, 5—5 будут горизонталями этой плоскости, и, как таковые, должны быть параллельны [*§ 313*]. Это условие необходимое. Посмотрим, достаточно ли оно.

Если проекции прямых 1—1 и 2—2 параллельны, то эти прямые лежат в параллельных вертикальных плоскостях, и, будучи кроме того параллельными горизонтальной плоскости, они должны быть параллельны между собою.

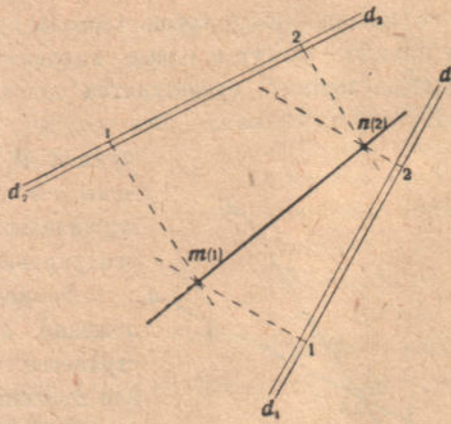
Отсюда следует, что прямые 1 — 1 и 2 — 2 лежат в одной плоскости, которая содержит и обе данных прямых. Если данные прямые не параллельны [§ *315*), то они пересекаются. При этом точка пересечения проекций обеих прямых будет иметь одну и ту же отметку на каждой из них.

§ 317. Задача III. *Даны: плоскость (Δ) масштабом уклонов (dd) и проекция (a) лежащей в ней точки (A). Найти отметку (a) точки (A).*

Проведем через a прямую, перпендикулярную к линии dd. Эта прямая есть проекция горизонтали плоскости Δ, проходящей через точку A [*черт. 277*]. Заметив (по масштабу уклонов), что отметка этой горизонтали равна 2,8, находим ответ: $a = 2{,}8$.



Черт. 277.

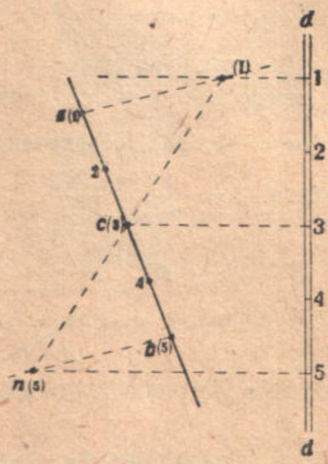


Черт. 278.

§ 318. Задача IV. *Плоскости Δ_1 и Δ_2 заданы масштабами уклонов (d_1d_1) и (d_2d_2). Построить линию их пересечения.*

Для каждой из плоскостей Δ_1 и Δ_2 проводим горизонтали с отметкой 1 [*черт. 278*]. Точка встречи их m (1), очевидно, принадлежит линии пересечения плоскостей. Найдя вторую точку линии пересечения плоскостей n (2) при помощи горизонталей с отметкой 2 и соединяя m с n, получаем проекцию искомой линии пересечения плоскостей Δ_1 и Δ_2.

§ 319. Задача V. *Даны: плоскость (Δ) масштабом уклонов и прямая (AB) градуировкой. Построить точку их встречи.* Метод решения этой задачи тот же, что и в проекциях на две плоскости [*§ 74*], а именно, через данную прямую AB проводим вспомогательную плоскость Δ', которую определим следующим образом. Через точки a (1) и b (5) данной прямой проводим по произвольному направлению, но параллельные между собой. горизонтали: a (1) m (1) и b (5) n (5) [*черт. 279*]. Эти горизонтали вместе с прямой AB и определят нам плоскость Δ'. Отыскивая по § 318..... линию пересечения m (1) n (5) плоскостей Δ и Δ', замечаем отметку точки пересечения C данной прямой с линией m (1) n (5). Эта точка c (3) и будет, очевидно, искомой точкой встречи прямой AB с плоскостью Δ.



Черт. 279.

Замечание. Прямая c (3) — 3 [*черт. 279*], являясь горизонталью плоскости Δ, должна быть перпендикулярна к прямой dd. Это может служить поверкой построения.

§ 320. Задача VI. *Найти условия перпендикулярности прямой и плоскости.*

Пусть прямая DD перпендикулярна к плоскости Δ, и пересекается с ней в точке M. Проведем через M в плоскости Δ линию наибольшего уклона $D'D'$ [*черт. 280*], прямые DD и $D'\ D'$ определяют плоскость Δ'. Но прямая $D'D'$ перпендикулярна к следу $V'V'$ плоскости Δ [*§ 314*], точно также и прямая DD перпендикулярна к этому следу, так как она перпендикулярна к горизонтали плоскости Δ, проходящей через точку M. Отсюда следует, что и плоскость Δ', как содержащая обе прямых DD и $D'D'$, должна быть перпендикулярна к следу $V'V'$, т.-е. это вертикально проектирующая плоскость; след ее dd является проекцией обеих прямых: данной прямой DD и линии наибольшего уклона $D'D'$.

Это приводит нас *к первому условию перпендикулярности:*

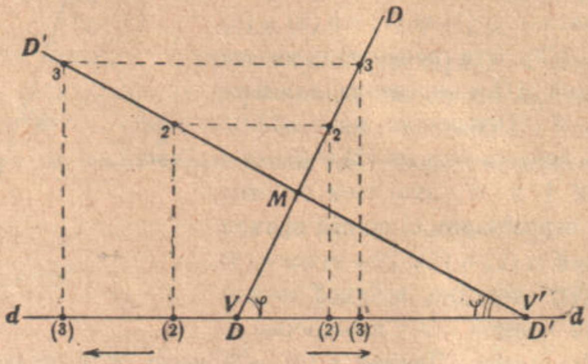
1) *Проекция прямой должна быть параллельна масштабу уклонов плоскости.*

Далее, из прямоугольного треугольника VMV' имеем:

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{ctg}\varphi' = \frac{1}{\operatorname{tg}\varphi'}.$$

А так как $\operatorname{tg}\varphi = u$ и $\operatorname{tg}\varphi' = u'$ — суть уклоны прямой и плоскости, то можно написать:

$u = \frac{1}{u'}$, или, обозначая через i и i' интервалы прямой и плоскости, $i = \frac{1}{i'}$.



Черт. 280.

Отсюда получаем *второе условие перпендикулярности*:

2) *Интервал и уклон прямой суть величины обратные интервалу и уклону плоскости.*

Наконец, рассматривая на *черт. 280* горизонтали 2—2, 3—3 и их проекции, замечаем, что:

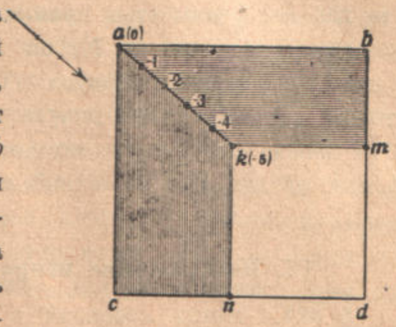
3) *Отметки градуировки прямой и масштаба уклонов плоскости возрастают в противоположных направлениях.*

Нетрудно убедится в *достаточности* этих условий.

V. Примеры построения тени.

§ 321. Пример 1. *Прямой квадратный колодец дан изображением в плане. Построить солнечную тень на дне колодца.*

Колодец проектируется на горизонтальную плоскость квадратом *abcd* [*черт. 281*], который представляет одновременно проекции нижнего основания (дна) и верхнего основания (наружной рамы) колодца. Пусть отметка нижнего основания (дна) колодца равна (—5).

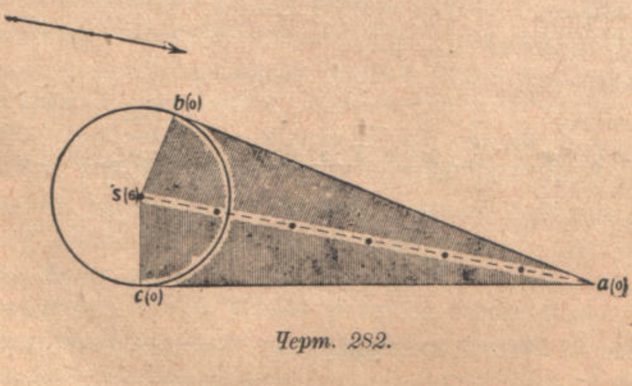


Черт. 281.

Направление лучей света задано на эпюре градуированной проекцией *rr*. Легко сообразить, что тень на дне колодца может образоваться лишь от сторон *ab* и *ac*, и, следовательно, границы этой тени должны быть параллельны прямым *ab* и *ac*. Граница тени *km* представляет собою тень от ребра *ab* верхнего основания, а граница тени *kn* — тень от ребра *ac* верхнего основания. Таким образом точка *k* является тенью от точки *a* (*o*) и задача сводится к построению точки *k*.

Проведем через *a* (*o*) луч света; он изобразится [*§ 315*] прямой *ak*, параллельной *rr* и имеющей с нею одинаковый интервал. Градуируя прямую *ak*, находим точку *k* с отметкой (—5), которая и является, очевидно, точкой встречи луча с дном колодца. Проводя затем *km* ∥ *ab* и *kn* ∥ *ac*, находим искомую тень.

§ 322. Пример II. *Построить собственную и падающую тень прямого круглого конуса, стоящего на горизонтальной плоскости.*



Черт. 282.

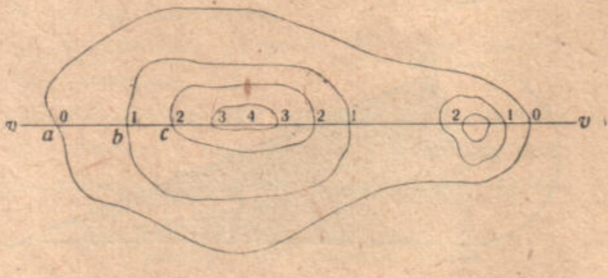
В проекциях с числовыми отметками конус можно задать окружностью основания *bc* и вершиной *s* (6) [*черт.282*]. Направление лучей света представлено проекцией *rr*. Построим тень от вершины конуса на плоскости плана. Для этого проведем луч света через вершину *s* конуса. Проекция луча $sa \parallel rr$. Так как интервалы этих прямых равны, то, градуируя прямую *sa*, находим след ее *a* (0) на плоскости плана. Точка *a* (0) и есть тень вершины конуса. Теперь уже нетрудно сообразить, что по сторонам тень конуса будет ограничена касательными *ab* и *ac* к окружности его основания. Наконец, образующие *sb* и *sc* являются *линией отдела* собственной тени конуса.

VI. Изображение неправильных поверхностей.

§ 323. Метод проекций с числовыми отметками особенно удобен при изображении неправильных поверхностей, в частности поверхности земли.

Представим себе, что для данного участка земной поверхности в ряде точек измерены их высоты (над уровнем моря).

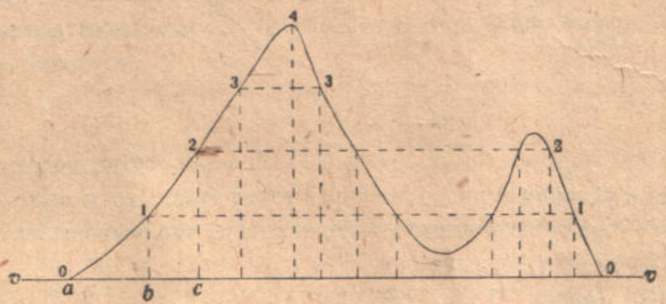
Выбираем из этих точек те, которые имеют одинаковые отметки, и соединяем их непрерывной линией. Такие линии называются *горизонталями поверхности*, они соединяют точки поверхности одинаковой высоты. Проекции горизонталей представляют собою линии, соединяющие в плане точки с равными отметками. Чем больше точек (с отметками) имеется в плане, тем точнее могут быть проведены проекции горизонталей и тем правильнее и нагляднее будет изображен данный участок земной поверхности.



Черт. 283.

Точки данной горизонтали имеют одинаковую высоту и, следовательно, лежат в плоскости уровня, параллельной плоскости плана. Таким образом, теоретически, горизонтали можно представить себе как линии пересечения земной поверхности плоскостями уровня. Обыкновенно выбирают плоскости уровня с целыми отметками (или высотами) 0, 1, 2, 3....., поэтому и в плане получают горизонтали с отметками 0, 1, 2, 3,..... [*черт. 283*].

§ 324. Пусть на *черт. 283* изображен горизонталями участок земной поверхности. Построим его вертикальный разрез (профиль). Пусть прямая vv представляет след секущей плоскости в плане. Совместим эту плоскость, вращая ее около следа vv. Точки встречи секущей плоскости с горизонталями поверхности являются точками поверхности. Найдем совмещения этих точек в плоскости плана. Для этого нужно через их



Черт. 284.

горизонтальные проекции a, b, c... провести перпендикуляры к линии vv и отложить на них высоты, равные отметкам точек. Это сделано на отдельном *чертеже 284.* Соединяя полученные совмещения точек непрерывной линией, будем иметь профильный вид (разрез) поверхности.

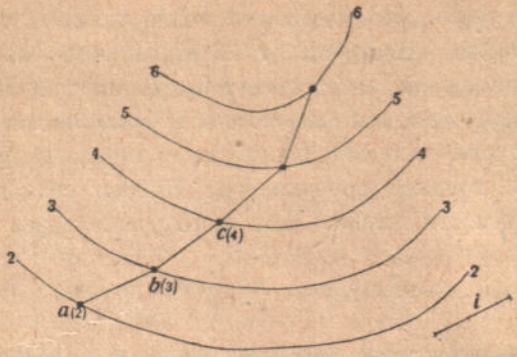
§ 325. Представим себе линию на данной поверхности. *Наклон* этой линии в какой-нибудь ее точке измеряется углом φ, образованным касательной к кривой в данной ее точке с горизонтальной плоскостью. Обозначая через u *уклон* кривой в данной точке, будем иметь: $u = \operatorname{tg}\varphi$.

В различных точках кривой уклон ее, вообще говоря, различен. Если уклон одинаков во всех точках кривой, то она называется *линией равного уклона.*

Попробуем построить линию равного уклона для поверхности, изображенной на *черт. 285.* Точного построения такой линии мы получить не можем, так как сама поверхность лишь приближенно определена горизонталями.

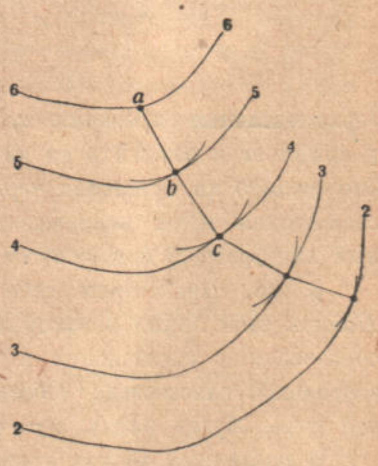
Поэтому искомую линию мы будем представлять, как ломаную, вершины которой расположены на горизонталях. Если бы число горизонталей, увеличиваясь, возрастало до бесконечности, то эта ломаная обратилась бы в пределе в линию равного уклона. Зададимся величиной уклона u и построим соответствующий интервал

$$i = \frac{1}{u}; \quad [\S\ 311].$$



Черт. 285.

Предположим, что линия с уклоном u проходит через точку a (2). Чтобы определить ее точку (b) на горизонтали (3 — 3), заметим, что разность высот этих двух последовательных точек [a(2) и b(3)] равна 1 и, следовательно, будем иметь [*§ 311*]: $ab = i$; отсюда вытекает, что точку b найдем, пересекая горизонталь (3) окружностью, описанной из a радиусом, равным i. Поступая таким же образом, найдем следующую точку (c) на горизонтали (4 — 4) и т. д. Линия abc.... будет иметь данный уклон u. Из самого построения видно, что через данную точку проходит, вообще говоря, несколько линий данного уклона.

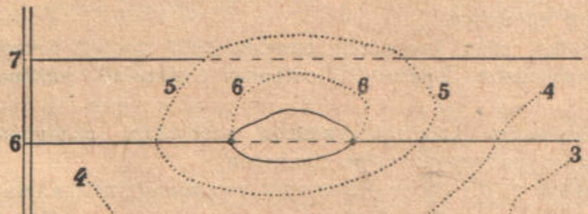


Черт. 286.

§ 326. Поставим себе вопрос, как найти на данной поверхности линию *наибольшего уклона*, проходящую через точку a(6) [*черт. 286*]. Так как наибольшему уклону u соответствует наименьший интервал i, то задача сводится к выбору того направления, для которого отрезок ab имеет наименьшую длину. Опишем из a, как центра, окружность, касающуюся горизонтали (5 — 5). Точка прикосновения b и будет, очевидно, искомой. Подобным же образом определим точку c на горизонтали (4—4) и т. д. Заметим, что каждое звено построенной ломаной пересекает соответствующую горизонталь под прямым углом (ортогонально). Отсюда приходим к следующему выводу: *Линии наибольшего уклона или ската пересекают все горизонтали под прямым углом.*

§ 327. Задача. *Даны: поверхность (горизонталями) и плоскость (масштабом уклонов). Построить линию их пересечения.*

На *черт. 287* изображены в плане горизонтали данной поверхности и плоскости. Отыскиваем точки пересечения гори-



Черт. 287.

зонталей с одинаковыми отметками, — например, горизонтали 2—2 поверхности с горизонталью 2—2 плоскости, и т. д. Найденные точки соединяем непрерывной линией, которая может состоять из нескольких частей [*черт. 287*]. Эта кривая и есть искомая линия пересечения.

Задачи.

310. Найти расстояние между двумя точками A и B, данными своими проекциями и отметками.

311. Построить проекцию точки прямой $a(1)\ b(5)$, отметка которой равнялась бы 3,5.

312. Найти отметку и проекцию точки градуированной прямой, находящейся на данном расстоянии от данной точки этой прямой.

313. Определить точку встречи двух данных прямых, лежащих в одной вертикальной плоскости.

314. Найти интервал и след прямой, заданной точками: a (3), $b(-5)$, или: a (-1), $b(4)$.

315. Через точку c (5) провести прямые, параллельные каждой из прямых предшествующей задачи. Построить след плоскости, определяемой этими прямыми.

316. Найти след плоскости, определенной данной точкой и данной градуированной прямой. Построить масштаб уклонов этой плоскости.

317. Построить масштаб уклонов плоскости, заданной двумя параллельными градуированными прямыми.

318. Найти точку пересечения трех плоскостей, каждая из которых задáна горизонталью и точкой следа.

319. В данной точке плоскости восставить перпендикуляр к последней и отложить на нем отрезок, равный 5 единицам.

320. Через данную точку плоскости провести в ней прямую, образующую данный угол со следом плоскости.

321. Найти расстояние данной точки $a(\alpha)$ от данной плоскости Δ.

322. Через данную точку плоскости провести в ней прямую, имеющую данный уклон.

323. Следы двух данных плоскостей параллельны. Найти линию пересечения плоскостей.

324. Даны масштабы уклонов боковых граней треугольной пирамиды, основание которой расположено в плоскости плана. Построить проекцию пирамиды и тень ее на горизонтальной плоскости.

325. В данной плоскости построить квадрат, зная проекцию одной из его сторон. Найти тень этого квадрата на горизонтальной плоскости.

326. Дано основание куба в горизонтальной плоскости. Построить его сечение плоскостью, заданной следом и точкой внутри куба.

327. Построить проекцию крыши с двумя и более скатами.

328. Построить линию пересечения прямого круглого конуса, заданного (в плане) окружностью основания и проекцией вершины, с данной плоскостью.

329. Найти отметку точки поверхности, заданной горизонталями, зная проекцию точки. (Указание: сделать разрез поверхности, проходящей через проекцию точки.)

330. Определить точку встречи данной градуированной прямой с поверхностью, заданной горизонталями.

331. Дана наивысшая точка поверхности, определенной горизонталями (вершина горы). Построить направление линии наибольшего ската в этой точке и провести затем линию наибольшего ската до плоскости плана (подножия горы.)

332. На поверхности, заданной горизонталями, проведена произвольная линия. Найти уклон ее в данной точке. (Указание: дуга линии между двумя последовательными горизонталями принимается за прямолинейный отрезок).

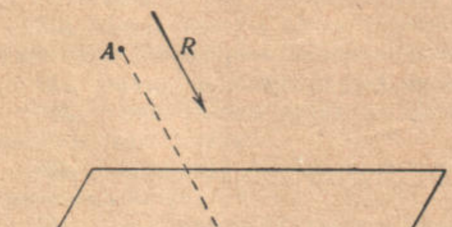
ОТДЕЛ ВТОРОЙ.
ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРОЕКЦИИ
АКСОНОМЕТРИЯ

I. Параллельное проектирование.

§ 328. Ортогональные (прямоугольные) проекции, которыми мы пользовались, являются частным случаем более общей операции *параллельного проектирования.*

Пусть дана плоскость проекций M и направление проектирования R. Тогда, чтобы построить проекцию какой-нибудь точки A пространства, проведем через A прямую, параллельную лучу R. Точка a встречи этой прямой с плоскостью проекций M и является проекцией точки A [*черт. 288*].

В частном случае, когда направление R перпендикулярно к плоскости M, мы имеем *ортогональную проекцию* [*§ 5*]. Если же R не перпендикулярна к M, — то *косоугольную проекцию.*

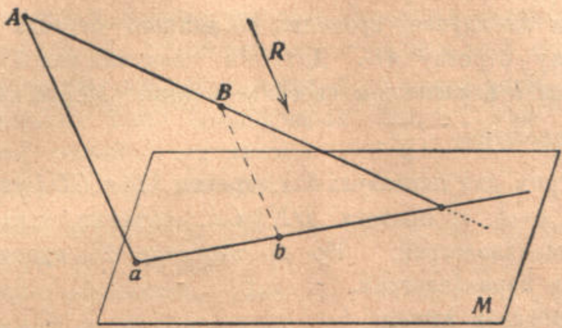


Черт. 288.

Посмотрим теперь, какими свойствами обладает параллельное проектирование в общем случае.

Условимся, как и прежде [*§ 23*], проекцией какого-либо геометрического места точек называть геометрическое место проекций этих точек.

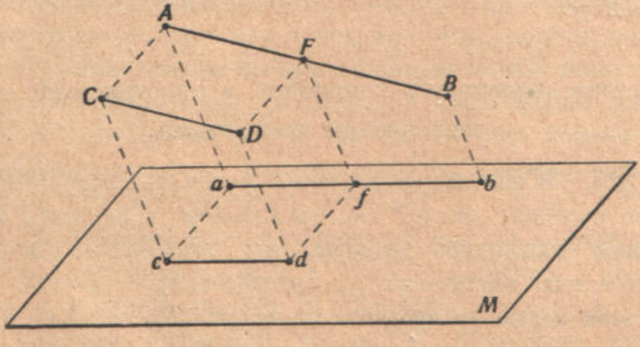
Спроектировав все точки данной прямой AB на плоскость M, мы замечаем, что проектирующие лучи лежат в одной плоскости $ABab$, которая пересекает плоскость проекций M по прямой ab. Эта прямая ab и есть, очевидно, проекция данной прямой AB на плоскость M [*черт. 289*]. Таким образом:



Черт. 289.

1° Параллельная проекция прямой есть прямая.

Вообразим теперь две параллельные прямые AB и CD [*черт. 290*] и спроектируем их на плоскость проекций M. Проектирующие плоскости будут параллельны между собою и, следовательно, пересекут плоскость M по двум параллельным прямым. Отсюда имеем:



Черт. 290.

2° Проекции двух параллельных прямых параллельны.

Пусть AB данный отрезок. Построив его проекцию ab, мы получим трапецию $AaBb$. В частном случае, когда данный отрезок AB параллелен плоскости проекций M, трапеция обращается в параллелограм и $ab = AB$. то-есть:

3° Отрезки, параллельные плоскости проекций, проектируются в натуральную величину.

В общем же случае проекция ab данного отрезка уже не равна самому отрезку AB. Другими словами: такой отрезок проектируется с искажением своей величины. Мерой искажения является отношение $\frac{ab}{AB}$.

Рассмотрим два параллельных отрезка AB и CD [*черт. 290*]. Соединяя C с A и проводя $DF \parallel CA$, заметим, что фигура $ACDF$ — параллелограм. Но по свойству 2° проекция его $acdf$ — также параллелограм.

Таким образом имеем:

$$\frac{ab}{AB} = \frac{af}{AF} = \frac{cd}{CD},$$

а это означает, что:

4° Все параллельные отрезки искажаются при проектировании в одном и том же отношении.

В частности, равные и параллельные отрезки проектируются равными и параллельными отрезками.

Если имеем три точки P, Q и S, лежащие на одной прямой, то отношение отрезков PQ и QS равно отношению их проекций pq и qs.

II. Система декартовых координат в пространстве. Аксонометрические координаты.

§ 329. В настоящей главе мы будем рассматривать параллельные проекции фигур. Но, прежде чем приступить к проектированию какой-либо фигуры, мы отнесем ее к системе прямоугольных декартовых[1]) координат в пространстве.

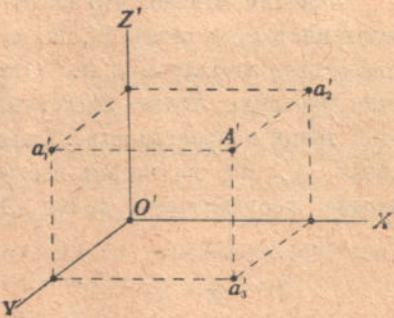
С этой целью из произвольно выбранной точки O' проводим три взаимно-перпендикулярных направления: $O'X'$, OY' и $O'Z'$ [*черт. 291*]. Эти три прямые носят название осей координат, а определяемые ими плоскости: $X'O'Y'$, $X'O'Z'$ и $Y'O'Z'$ —

---

[1]) Названной по имени изобретателя метода координат, французского математика и философа Декарта (Descartes, 1596—1650).

плоскостей координат. Плоскость $X'O'Y'$ считается обыкновенно горизонтальной, а плоскости $X'O'Z'$ и $Y'O'Z'$ — вертикальными. Точка O' называется началом координат.

Пусть имеем какую-нибудь точку пространства A'. Найдем ее ортогональные проекции на плоскости координат и обозначим их буквами a_1', a_2', a_3'. Отрезки $a_1'A'$, $a_2'A'$ и $a_3'A'$, точнее их длины, носят название координат точки A'. Каждой точке пространства соответствуют три определенных отрезка — ее координаты[1]). С другой стороны, как легко видеть, каждая пара координат определяет плоскость, параллельную соответствующей координатной плоскости. Так, отрезки $a_1'A'$, $a_2'A'$ определяют проходящую через них плоскость, параллельную плоскости $X'O'Y'$; отрезки $a_1'A'$, $a_3'A'$ определяют плоскость, параллельную плоскости $X'O'Z'$; наконец, отрезки $a_2'A$, $a_3'A'$ определяют плоскость, параллельную $Y'O'Z'$. Три эти плоскости вместе с тремя плоскостями координат образуют прямоугольный параллелепипед, противоположными вершинами которого являются — начало координат O' и данная точка A'. Таким образом, если нам даны три координаты точки A', то мы можем по ним построить самую точку A'. Для этого достаточно провести три плоскости, параллельные плоскостям координат и отстоящие от них на расстояния, равные данным координатам точки A'. Построенные плоскости пересекаются в точке A'.



Черт. 291.

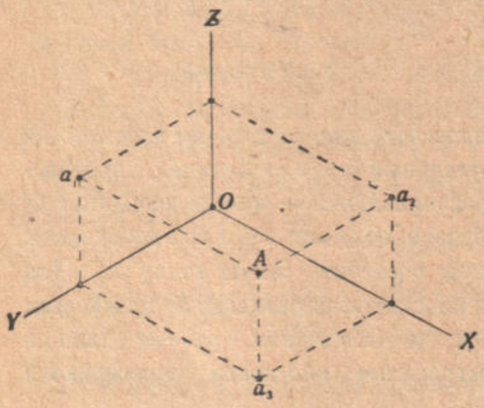
§ 330. Спроектируем (по направлению R) данную точку A' вместе с осями координат $O'X'Y'Z'$ на плоскость проекций M. Проекцию начала координат O' обозначим буквой O, проекции осей обозначим через OX, OY и OZ. Последние называются

---

[1]) Отрезки $a_1'A'$, $a_2'A'$, $a_3'A'$ координат принято считать *положительными*, если их направления совпадают с (положительными) направлениями $O'X'$, $O'Y'$ и $O'Z'$ осей; если же их направления противоположны положительным направлениям осей, то — *отрицательными*.

аксонометрическими осями. Проекцию точки A' обозначим буквой A, она называется *аксонометрической проекцией* точки A'. Проекции точек a_1', a_2' и a_3', представленные на нашем чертеже точками a_1, a_2 и a_3, называются *вторичными проекциями* [1]) точки A'. Прямоугольники, служащие гранями прямоугольного параллелепипеда, спроектируются на плоскость M в виде параллелограмов. Таким образом на плоскости M получаются аксонометрические проекции данных точек и линий пространства, являющиеся как бы их *изображением*.

Заметим, однако, что аксонометрическая проекция A изображает не только точку A', но и любую из точек, лежащих на проектирующем луче $A'A$. Отсюда следует, что аксонометрическая проекция точки недостаточна для определения положения этой точки в пространстве. Зная аксонометрическую проекцию A точки A', мы не можем построить изображения отрезков, служащие координатами точки A', то есть *аксонометрические координаты* точки A'. Это можно сделать, если (кроме аксонометрической) дана хотя бы одна вторичная проекция точки A', например a_3. В самом деле, проведя $a_3a \parallel OY$, мы, очевидно, определим аксонометрические координаты точки A'. Это будут отрезки $Oa = a_1A$; $aa_3 = a_2A$ и a_3A [*черт. 292*]. Теперь положение точки A' вполне определено, так как всякое изменение положения точки A' в пространстве обязательно изменяет хотя бы одну из ее координат, а вместе с тем, и изображение этой координаты, т.-е. аксонометрические координаты точки будут уже иные. Таким образом в аксонометрических проекциях точка



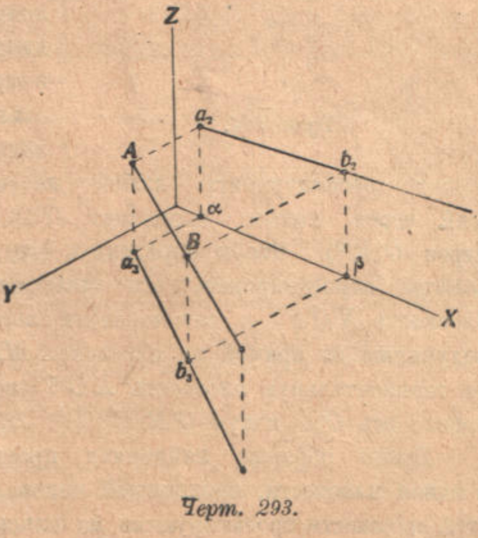
Черт. 292.

[1]) Термин введен проф. В. И. Курдюмовым („Курс начертательной геометрии". Отдел III. Проекции аксонометрические, 1905 г.).

вполне определяется: 1) тремя аксонометрическими координатами, 2) аксонометрической и вторичной проекциями и 3) двумя вторичными проекциями. Последнее следует из того, что по двум вторичным проекциям мы, очевидно, можем построить как аксонометрические координаты точки, так и ее аксонометрическую проекцию (*черт. 292*).

III. Изображение прямой и плоскости. Основные задачи.

§ 331. Прямая определяется двумя своими точками. В зависимости от того, как определены эти точки, мы будем иметь различные способы задания прямой. Пусть обе точки A' и B' определены своими аксонометрическими проекциями A и B и вторичными проекциями a_3 и b_3. Тогда прямая AB является, очевидно, аксонометрической проекцией данной прямой $A'B'$, а прямая $a_3\ b_3$—ее вторичной проекцией на горизонтальной плоскости. Если же точки A' и B' определены, каждая, двумя вторичными проекциями, например, a_2, a_3 и b_2, b_3, то, как легко видеть, прямые a_2b_2 и a_3b_3 являются вторичными проекциями прямой $A'B'$, а по ним, как мы знаем, можно построить и аксонометрическую проекцию прямой [*черт. 293*].



Черт. 293.

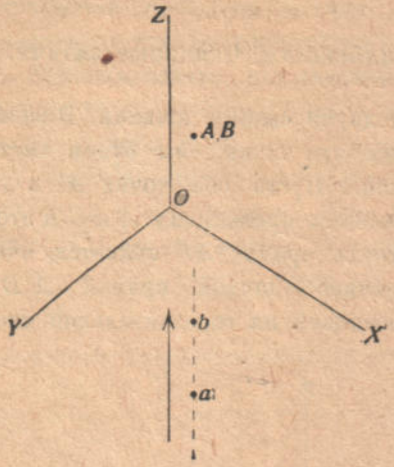
Таким образом прямая может быть задана:

1) аксонометрической и вторичной проекциями или

2) двумя вторичными проекциями.

§ 332. Посмотрим, каковы условия видимости точек, если глаз зрителя будем предполагать удаленным в бесконечность по направлению проектирования R. При этих условиях луч зрения совпадает с проектирующим лучом. Вопрос о видимости точек может возникнуть лишь в том случае, если две (или более) точки расположены на одном и том же луче зрения или проектирующем луче. Пусть на *черт. 294* имеем две такие точки (A, a) и (B, b) [1]).

Нетрудно видеть, что аксонометрические проекции A и B обеих точек сольются в одну точку (в этой точке проектирующий луч $A'B'$ встречает плоскость проекций M). Но, сравнивая вторичные проекции точек, видим, что луч зрения сперва пройдет через точку (A, a), а затем уже через точку (B, b). Следовательно, видимой будет точка A' (вторичн. проекция которой ниже), точка же B' закрыта ею и потому невидима.



Черт. 294.

Заметим, что вторичная проекция ab пойдет параллельно оси OZ. В самом деле, вторичные проекции (на одну и ту же плоскость) всех проектирующих лучей параллельны [*§ 328, п. 2°*], поэтому можем рассматривать любой из них, например, проходящий через начало координат O'. Этот луч мы обозначим через $O'R$ [2]). Чтобы определить его вторичную проекцию, мы должны спроектировать его ортогонально на горизонтальную плоскость $X'O'Y'$ и затем найти аксонометрическую проекцию получившейся прямой на плоскости M. Но проекцию луча $O'R$ на горизонтальную плоскость $X'O'Y'$ получим, проводя плоскость через ось $O'Z'$ и луч $O'R$.

Таким образом найденная проекция и ось $O'Z'$ лежат в одной плоскости, проходящей через луч $O'R$. Но все прямые этой плоскости проектируются на плоскость M по одной и той же прямой, которая является линией пересечения плоскости M

[1]) В последующих чертежах вторичные проекции точек берутся всегда на горизонтальной плоскости, поэтому мы будем обозначать их, для упрощения чертежей, малыми латинскими буквами без значков.

[2]) Его называют иногда главным лучем зрения.

с плоскостью $Z'O'R$, а, следовательно, и проекция луча $O'R$ на горизонтальную плоскость и ось $O'Z'$ изобразятся на плоскости M одной и той же прямой OZ (считая ее продолженной в обе стороны). Вторичные проекции любого проектирующего луча будут, как сказано, параллельны этой прямой OZ.

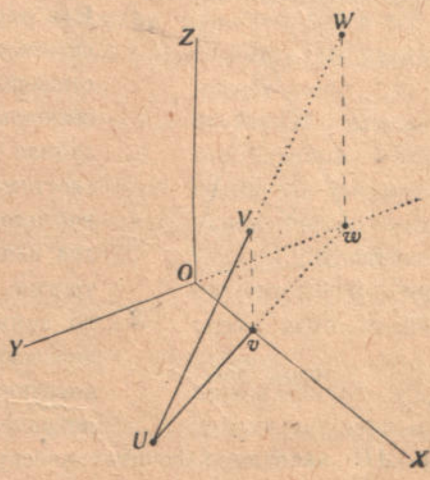
Подобным же образом можно доказать, что вертикальные вторичные проекции проектирующего луча будут параллельны двум другим аксонометрическим осям, а именно OX и OY.

При помощи изложенных здесь соображений относительно видимости точек в аксонометрических проекциях можно отличать видимые линии изображения данного тела от невидимых, вычерчивая последние пунктиром, или же вовсе опуская их на эпюре.

§ 333. Точки, в которых данная прямая встречает плоскости координат, носят название *следов* прямой на плоскостях координат.

Задача. *Найти аксонометрические проекции следов данной прямой на плоскостях координат.*

Пусть прямая задана своею аксонометрическою и вторичною (горизонтальною) проекциями [*черт. 295*]. Точка пересечения U этих двух прямых изображает точку U' встречи данной прямой со своей горизонтальной проекцией, или, что то же, с горизонтальной плоскостью $X'O'Y'$. Другими словами, точка U есть изображение следа данной прямой на плоскости $X'O'Y'$.



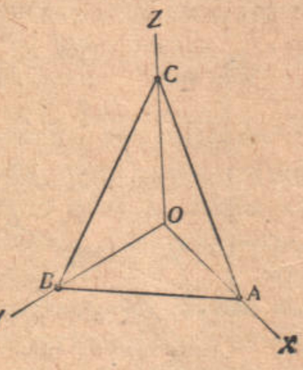
Черт. 295.

Построим теперь изображение следа нашей прямой на плоскости $X'O'Z'$. Вторичная (горизонтальная) проекция этого следа должна лежать на вторичной проекции данной прямой и на оси OX, т.-е. в точке их пересечения v. По вторичной проекции v находим аксонометрическую проекцию V этого следа. Поступая подобным же образом, найдем, что вторичная проекция третьего следа должна находиться в точке w, а его аксонометрическая проекция—в точке W. Но эта точка невидима, так как ее заслоняет плоскость $X'O'Z'$ (в аксонометрическом изображении плоскость XOZ). Таким образом данная прямая пересекает продолжение третьей плоскости координат, и след ее на этой плоскости невидим.

Итак, прямая имеет два видимых и один невидимый след. Легко убедиться в том, что и всякая прямая не может иметь более двух видимых следов.

Изображая аксонометрической проекцией след прямой на одной из плоскостей координат, мы вместе с тем задаем и вторичную проекцию следа на этой плоскости координат, которая, очевидно, совпадает с аксонометрической. Следовательно, для определения следа (как и всякой точки, лежащей в плоскости координат) достаточно одной его аксонометрической проекции. Прямая же может быть задана аксонометрическими проекциями двух своих следов.

§ 334. В зависимости от того, какими элементами определена плоскость [§ 47], получаем различные способы ее задания в аксонометрических проекциях. Наиболее употребительным является способ задания плоскости двумя пересекающимися прямыми, при чем берут обыкновенно те прямые, по которым данная плоскость пересекается с плоскостями координат, т. е. *следы данной плоскости.* В общем случае имеем три следа. Если два из них даны, то третий легко находится, принимая во внимание, что каждая пара следов пересекается на соответствующей оси координат. Так, по заданным аксонометрическим проекциям следов — AC и AB находим аксонометрическую проекцию третьего следа, соединяя B и C.

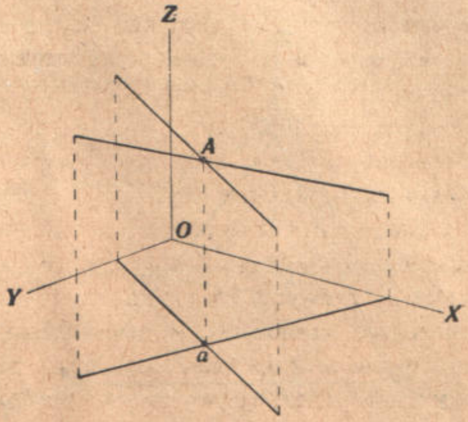


Черт. 296.

Рассмотрим теперь несколько задач на прямую и плоскость.

§ 335. Задача I. *По данным аксонометрическим и вторичным проекциям двух прямых определить, встречаются ли эти прямые в пространстве.*

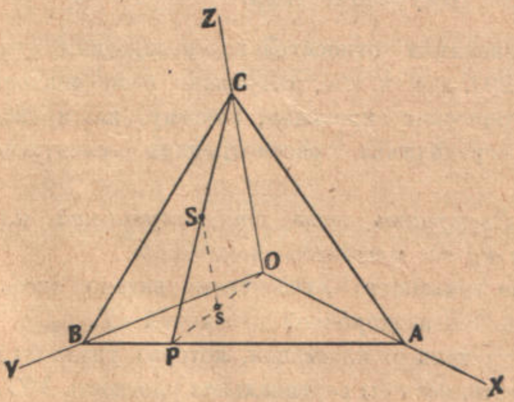
Если прямые встречаются, то точка A есть, очевидно, аксонометрическая проекция точки их встречи, а точка a—вторичная (горизонтальная) проекция точки встречи. Но аксонометрическая и вторичная горизонтальная проекции одной и той же точки должны лежать на прямой, параллельной оси OZ [§ 333]. Это и решает вопрос. Прямые, изображенные на *черт. 297*, пересекаются в пространстве, так как $aA \parallel OZ$.



Черт. 297.

§ 336. Задача II. *Даны: плоскость (ABC) и аксонометрическая проекция S лежащей в ней точки. Требуется найти вторичную проекцию точки.*

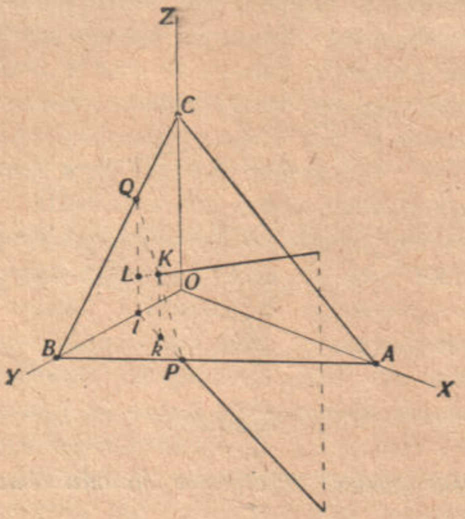
Проведем через данную точку и вертикальную ось координат плоскость, которая изобразится в проекции прямыми CO и OP. S лежит на линии пересечения построенной плоскости с данной — CP; вторичная же проекция точки — s — должна находиться на вторичной проекции линии пересечения CP, т.-е. на прямой OP. Мы найдем ее, проводя $Ss \parallel OZ$.



Черт. 298.

§ 337. Задача III. *Даны: плоскость ABC и прямая (KL, kl) аксонометрической и вторичной проекциями. Определить точку встречи прямой с плоскостью.*

Аксонометрическая и вторичная проекции прямой определяют плоскость, горизонтально проектирующую данную прямую. Нетрудно построить следы этой плоскости. На горизонтальной плоскости след изобразится прямой Pl — вторичной проекцией данной прямой. На вертикальной плоскости след должен быть параллелен вертикальной оси и потому изобразится прямой lQ. Наконец, прямая PQ изображает линию пересечения горизонтально-проектирующей плоскости с данной, а точка (K, k) — искомую точку встречи данной прямой с плоскостью ABC.



Черт. 299.

IV. Построение тени.

§ 338. Общие замечания относительно построения тени, сделанные в *§§ 292, 293, 294* и *295*, сохраняют свое значение и в случае аксонометрических проекций, поэтому, не приводя их вторично, мы ограничимся рассмотрением следующей задачи.

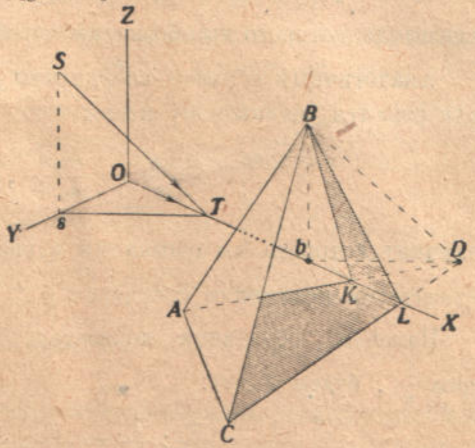
§ 339. Задача. *Построить тень от треугольной пластинки, опирающейся на две плоскости координат.*

Пусть направление падающего луча света задано аксонометрической проекцией ST и вторичной проекцией sT.

Построим сперва ту тень от пластинки, которая упала бы на горизонтальную плоскость, если бы вертикальная плоскость $X'O'Z'$ была достаточно отодвинута. Дело сведется к построению тени от точки B'. Отметим вторичную проекцию b этой точки и проведем теперь луч света через точку (B, b).

Аксонометрическая проекция этого луча представится прямой $BD \parallel ST$, а вторичная проекция прямой $bD \parallel sT$ [*§ 328,2°*].

Точка пересечения обеих проекций D изображает след луча на горизонтальной плоскости [§ 333], это и есть тень от точки B. Таким образом треугольник ADC представляет тень, которая падала бы на горизонтальную плоскость, если бы ей не препятствовала плоскость XOZ. Присутствие последней производит излом тени, которая в точках K и L переходит на вертикальную плоскость и представится на ней треугольником BKL. Общая тень от пластинки изобразится фигурой $ACKLB$ [*черт. 300*]. Часть этой тени не видна за пластинкой.



Черт. 300.

V. Виды аксонометрических проекций.

§ 340. Пусть A' произвольная точка пространства. Найдя ее проекции a_1', a_2' и a_3' на плоскостях координат, обозначим для краткости координаты точки A' [§ 329] следующим образом:

$$a_1'A' = x';\ a_2'A' = y' \text{ и } a_3'A' = z'.$$

В плоскости аксонометрических проекций M соответствующими аксонометрическими координатами точки A' будут отрезки:

$$a_1A = x;\ a_2A = y \text{ и } a_3A = z.$$

Величина:

$$\frac{x}{x'} = \frac{a_1A}{a_1'A'}$$

является мерой искажения координат, параллельных оси $O'X'$. Эту величину обозначают обыкновенно через $\frac{1}{s}$ и называют *показателем искажения* координат, параллельных оси $O'X'$. По основному свойству параллельных проекций [§ 328, *п.* 4°] мы знаем, что координата x' любой точки пространства подвергается при проектировании одному и тому же постоянному искажению, показатель которого мы обозначим через $\frac{1}{s}$.

Аналогичным образом координаты y' всех точек пространства подвергаются одинаковому искажению:

$$\frac{y}{y'} = \frac{a_2A}{a_2'A'},$$

величину которого мы обозначим через $\frac{1}{t}$ и будем называть показателем искажения координат y'.

Наконец, обозначив показатель искажения координат z' через $\frac{1}{u}$, будем иметь:

$$\frac{1}{s} = \frac{x}{x'};\ \frac{1}{t} = \frac{y}{y'};\ \frac{1}{u} = \frac{z}{z'}.$$

Отложим на осях координат в пространстве от начала O' отрезки, равные единице длины. Тогда в написанных формулах надо положить:

$$x' = 1,\ y' = 1 \text{ и } z' = 1,$$

и мы получим:

$$\frac{1}{s} = x; \frac{1}{t} = y; \frac{1}{u} = z;$$

Таким образом, *показатели искажений выражают длины аксонометрических проекций отрезка, принятого за единицу и отложенного на осях координат в пространстве.*

§ 341. Показатели искажения для различных осей координат, вообще говоря, различны, но иногда они могут совпадать. Это обстоятельство дает начало следующей классификации аксонометрических проекций:

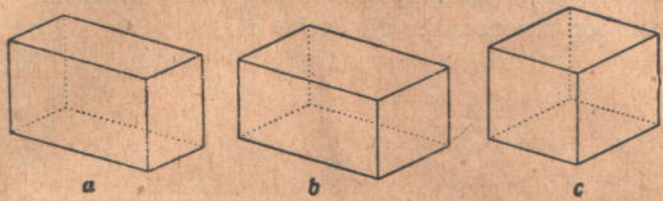
1) Проекции *триметрические*, если показатели искажения по всем осям различны, т.-е. $\frac{1}{s} \neq \frac{1}{t} \neq \frac{1}{u}$.

2) Проекции *диметрические*, если показатели искажения по двум осям одинаковы, т.-е. $\frac{1}{s} = \frac{1}{t} \neq \frac{1}{u}$.

3) Проекции *изометрические*, если показатели искажения по всем трем осям равны, т.-е. $\frac{1}{s} = \frac{1}{t} = \frac{1}{u}$.

На *черт. 301* даны изображения куба в триметрической (a), диметрической (b) и изометрической (c) проекциях.

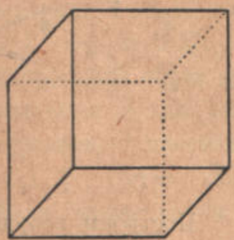
Все они недостаточно наглядны. Более наглядных изображений можно достигнуть особым выбором плоскости проекций M.



Черт. 301.

Так, например, принимая плоскость, параллельную одной из плоскостей координат, в качестве плоскости проекций, мы получим более естественные и наглядные изображения.

На *черт. 302* дано изображение того же куба в диметрической проекции на плоскость, параллельную плоскости $X'O'Z'$ (предполагая, что те три грани куба, которые невидны наблюдателю, расположены в плоскостях координат). При этом две грани куба, параллельные плоскости проекций, изобразятся без искажения, т.-е. квадратами.



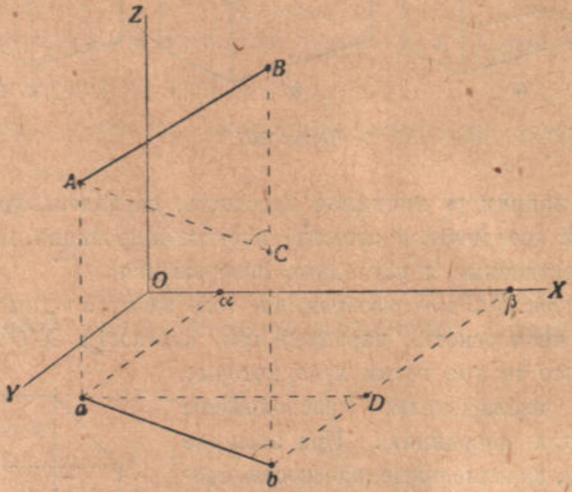
Черт. 302.

§ 342. Независимо от изложенного в предшествующем § подразделения аксонометрических проекций, эти последние различаются также по тому углу, который образует проектирующий луч с плоскостью проекций M. Если проектирующие лучи перпендикулярны к плоскости M, то проекция называется *ортогональной* или *прямоугольной*. В противном же случае—*косоугольной*.

§ 343. Задача 1. *Найти расстояние между двумя точками в косоугольной диметрической проекции на плоскость, параллельную плоскости $X'O'Z'$.*

Пусть на *черт. 303* имеем точки (A, a) и (B, b), определяющие точки A' и B' пространства. Проведем отрезок AC, равный и параллельный ab. Треугольник ABC изображает прямоугольный треугольник $A'B'C'$, с прямым углом при точке $C'A'B'$

является его гипотенузой, которая может быть построена, если будут известны размеры катетов $A'C'$ и $B'C'$, то-есть истинные размеры отрезков AC и BC. Но катет $B'C'$, как параллельный плоскости проекций, проектируется на эту плоскость без искажения ($BC = B'C'$). Поэтому задача сводится к отысканию истинных размеров катета AC. Но $AC = ab$.



Черт. 303.

Построим координаты точек a и b, для чего проводим $a\alpha$ и $b\beta$ параллельно оси OY [*черт. 303*].

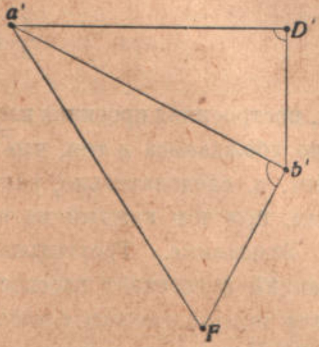
Треугольник aDb является изображением прямоугольного треугольника $a'D'b'$, с прямым углом при точке D'. Один из катетов этого треугольника ($a'D'$) параллелен оси $O'X'$ и проектируется без искажения, т.-е. $a'D' = aD$. Второй катет ($D'b'$) параллелен оси $O'Y'$, поэтому имеем:

$$\frac{Db}{D'b'} = \frac{1}{t} \text{ [§ 340], откуда: } D'b' = t \, . \, Db.$$

Зная показатель искажения по оси $O'Y'$, найдем обратную ему величину, равную t, а затем и $t \, . \, Db$.

После этого можем произвести следующее построение [*черт. 304*].

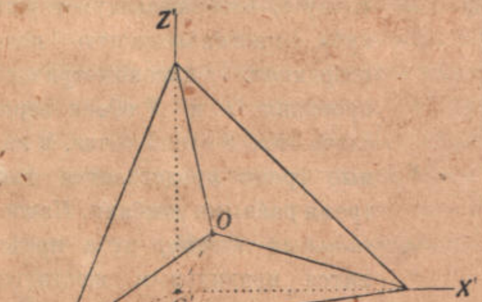
Строим прямоугольный треугольник по катетам: $a'D' = aD$ и $D'b' = t \cdot Db$. Принимая гипотенузу $a'b'$ этого треугольника за катет, строим новый прямоугольный треугольник, откладывая второй катет $b'F = CB$. Гипотенуза $a'F$ второго треугольника и будет, очевидно, искомым расстоянием между точками A' и B'.



Черт. 304.

§ 344. Задача. *Построить аксонометрические оси в случае ортогональной изометрической проекции и найти в этой проекции изображения: 1) куба, три грани которого расположены в плоскостях координат, 2) шара, описанного около начала координат.*

Определим углы между аксонометрическими осями. С этой целью отложим на осях координат в пространстве равные отрезки: $O'X' = x'$, $O'Y' = y'$ и $O'Z' = z'$ и проведем через три конечные точки этих отрезков плоскость $X'Y'Z'$ [*черт. 305*]. Если спроектируем на эту плоскость ортогонально начало координат O', то его проекция упадет в точку O, которая является началом аксонометрических координат. Аксонометрические оси представятся прямыми OX', OY' и OZ'. Показатели искажения выразятся следующими отношениями:



Черт. 305.

$$\frac{1}{s} = \frac{OX'}{O'X'}; \qquad \frac{1}{t} = \frac{OY'}{O'Y'}; \qquad \frac{1}{u} = \frac{OZ'}{O'Z'}.$$

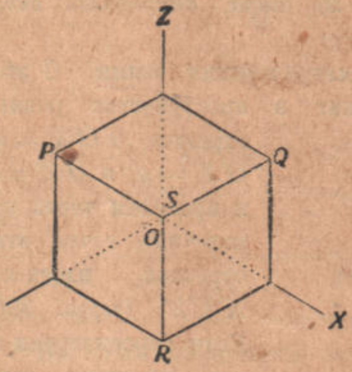
Но величины, стоящие в числителях этих отношений, равны между собою, так как они выражают собою длины проекций трех равных отрезков, одинаково наклоненных к плоскости проекций. А так как знаменатели также равны, то будем иметь:

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{t} = \frac{1}{u},$$

т.-е. построенная проекция изометрическая. Рассматривая *черт. 305*, легко убеждаемся в том, что треугольники $OX'Y'$, $OX'Z'$ и $OY'Z'$ равны, а, следовательно, равны и углы между аксонометрическими осями, при чем каждый из них содержит 120°.

Замечание. Треугольник $X'Y'Z'$, по которому плоскость проекций пересекает плоскости координат в пространстве, называется *треугольником следов.*

1) Переходим теперь к изображению куба [*черт. 306*]. Три грани куба, расположенные в плоскостях координат, очевидно изобразятся в изометрической проекции тремя равными ромбами. Проводя через вершины P, Q и R этих ромбов параллели осям координат, найдем точку S, изображающую вершину куба, противолежащую началу координат. Аксонометрические проекции O и S обеих вершин сливаются в одной точке, и видимые грани представятся также тремя равными ромбами. Наконец, *видимый контур* куба представится правильным шестиугольником.



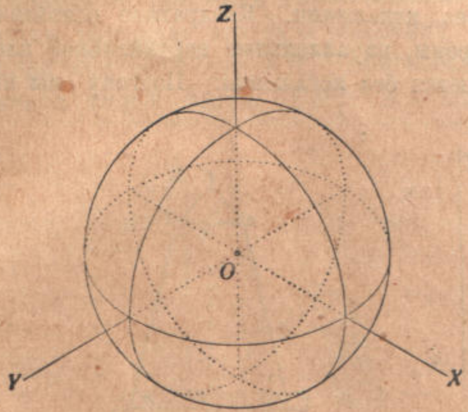
Черт. 306.

2) Сечения шара, описанного около начала O' плоскостями координат, будут три равных круга. Эти круги расположены совершенно одинаково относительно плоскости проекций и, следовательно, их прямоугольными проекциями будут три равных эллипса [*см. § 160*]. Видимый контур [1]) шара должен касаться эллипсов сечений и представится кругом с центром в точке O [*черт. 307*] и радиусом, равным радиусу шара.

---

[1]) Его называют также *абрисом.*

Замечание. Доказать, что малые оси эллипсов сечений совпадают с аксонометрическими осями.



Черт. 307.

VI. Аксонометрические эпюры и эскизы.

§ 345. В технических чертежах наиболее употребительны косоугольные проекции на плоскость, параллельную вертикальной плоскости координат. О преимуществах этих проекций мы уже говорили в предшествующих §§ [*§§ 341, 343*].

Здесь мы ограничимся рассмотрением следующей задачи.

Задача. *По данным ортогональным проекциям памятника (плану и фасаду) построить его изображение в косоугольной диметрической проекции на плоскости, параллельной плоскости $X'O'Z'$.*

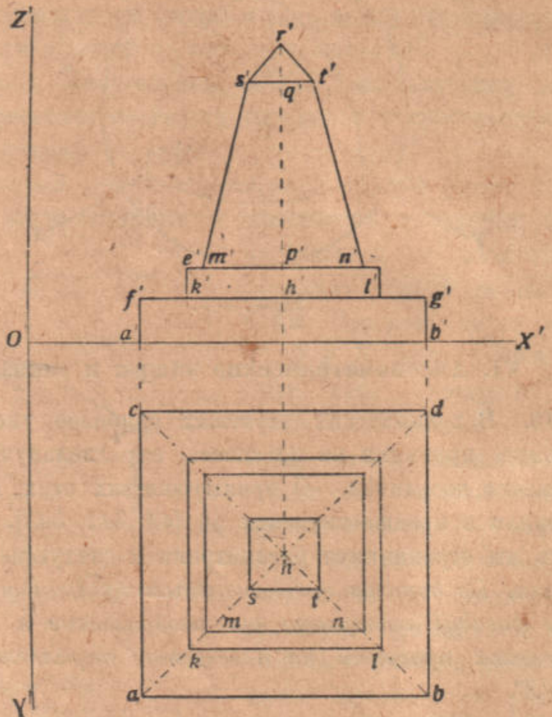
На *черт. 308(a)* даны ортогональные проекции памятника на две плоскости [1]). Приняв плоскость плана за горизонтальную плоскость $X'O'Y'$, а плоскость фасада за вертикальную плоскость $X'O'Z'$ пространственных координат, мы относим данное тело (памятник) к этой системе координат.

Переходим теперь к построению изображения [*черт. 308(b)*]. Для этого наметим направление аксонометрических осей и зададимся значением показателя искажения $\frac{1}{t}$.

---

[1]) Аналогичные сюжеты можно найти в большом количестве в „Сборнике Задач по Начерт. Геом.“ Н. Рынина. Петроград 1923 г.

Всякая фигура, расположенная в плоскости, параллельной плоскости $X'O'Z'$, изобразится без искажения. Следовательно, все ребра памятника, параллельные вертикальной плоскости, изобразятся без искажения. Квадратное основание памятника имеет две стороны, параллельные вертикальной плоскости, — обе они проектируются без искажения. Поэтому мы начнем чертеж

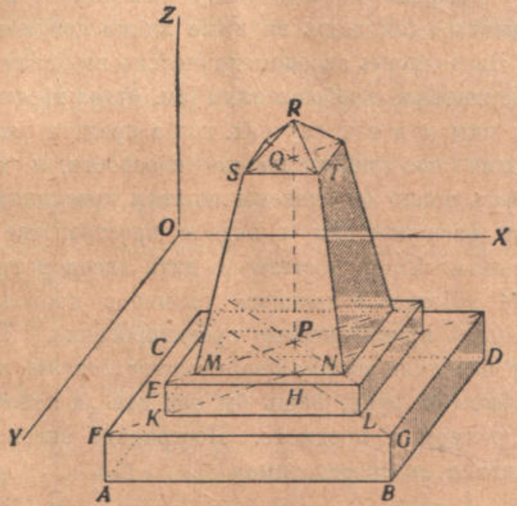


Черт. 308(а).

с построения ребра AB, равного ab и параллельного оси OX. После этого строим боковые ребра AC и BD, ведя их параллельно оси OY и откладывая отрезки $AC = BD = \frac{ac}{t} = \frac{bd}{t}$.

Таким образом, квадратное основание изобразится параллелограмом $ABCD$. После этого уже не составляет затруднений вычертить изображение всей нижней плиты памятника, помня, что вертикальное ребро этой плиты AF представляется в натуральную величину и, следовательно, прямоугольник $ABFG$ = прямоугольнику $a'b'f'g'$.

Вычертив верхнее основание первой плиты, которое изобразится параллелограмом, равным и параллельным параллелограму $ABCD$, проводим диагонали верхнего основания. Точку пересечения диагоналей обозначим буквой H. Далее переходим к построению изображения второй плиты. Ребро KL основания второй



Черт. 308(b).

плиты легко определить, помня, что, по свойству параллельных проекций, должны иметь соотношение: $\frac{FK}{KH} = \frac{fk}{kh}$; по ребру KL вторая плита вычерчивается совершенно так же, как первая по ребру AB. Отметив точку P пересечения диагоналей верхнего основания второй плиты, находим точку M из пропорции

$$\frac{EM}{MP} = \frac{km}{mh}.$$

Проводя $MN \parallel OX$, получаем ребро MN, а затем и все квадратное (в натуре) основание усеченной пирамиды. Так как высота этой пирамиды $p'q'$ проектируется без искажения, равно как и высота $q'r'$ стоящей на ней четырехугольной пирамиды, то мы можем построить их, откладывая отрезки $PQ = p'q'$ и $QR = q'r'$. Точку S верхнего основания усеченной пирамиды находим, проводя через Q прямые QS и QT параллельно PM и PN и пользуясь пропорцией:

$$\frac{SQ}{MP} = \frac{sh}{mh};$$

после этого вычерчиваем верхнее основание усеченной пирамиды. Наконец, соединяя вершины этого основания с точкой R, получаем изображение второй пирамиды, являющейся верхушкою памятника. Полученное изображение еще более выигрывает в наглядности, если изображены одни лишь видимые линии предмета.

§ 346. Наглядность аксонометрических изображений, близость их к перспективным изображениям [см. отдел третий] заставляет прибегать к ним и в тех случаях, когда предмет уже дан своими ортогональными проекциями на две плоскости, и хотя размеры его могут быть точно определены по этим проекциям, но представление о его расположении и виде в пространстве оказывается затруднительным. Тогда достаточно дать аксонометрическое изображение, не заботясь о точности размеров проводимых линий, а следя лишь за правильностью проектирования. Такие изображения носят название *аксонометрических эскизов* и могут быть выполнены даже от руки, лишь бы они давали ясное представление об изображаемом предмете. Построение аксонометрических эскизов называют *скицированием* [1]).

Задачи.

333. Определить, какой точкой проектируется (в параллельных проекциях) центр тяжести O данного треугольника ABC

334. По данным декартовым координатам точки построить ее аксонометрические координаты, задаваясь различными изображениями единицы длины на аксонометрических осях.

$$x' = 1,\ y' = 1,\ z' = 1;\ x' = 2;\ y' = -1,\ z' = 2;\ x' = 1;\ y' = 2;\ z' = 3;$$
$$x' = -2,\ y' = 5,\ z' = 0;\ x' = 0,\ y' = -2;\ z' = 4;\ x' = 0;\ y' = 3;\ z' = 0$$

335. В аксонометрической проекции изобразить прямую, проходящую через точку $x' = 2$, $y' = 5$, $z' = 3$ и через начало координат. Найти ее вторичные проекции.

336. Изобразить в аксонометрической проекции прямую, проходящую через точку $x' = 5$, $y' = 2$, $z' = 0$ и параллельную оси $O'Z'$. Найти ее вторичные проекции.

337. Прямая задана своей аксонометрической и одной вертикальной вторичной проекцией. Найти следы ее на плоскостях координат.

---

[1]) От немецкого — skizziren.

338. Даны две прямые, каждая двумя вторичными вертикальными проекциями. Определить, при каком условии эти прямые пересекаются в пространстве.

339. Даны две пересекающиеся прямые. Найти следы плоскости, проходящей через них.

340. Найти линию пересечения двух плоскостей, заданных своими следами.

341. Построить аксонометрическое изображение пирамиды, основание которой расположено в горизонтальной плоскости. Найти тень ее на плоскостях координат.

342. Построить тень вертикальной квадратной пластинки, стоящей своим ребром на горизонтальной плоскости.

343. Найти точки пересечения данной прямой и призмы, заданной направлением параллельных ребер и следом (сечением) на горизонтальной плоскости.

344. Ту же призму пересечь плоскостью, проходящей через ось $O'X'$.

345. Зная показатели искажения $\left(\frac{1}{s}:\frac{1}{t}\right)$ в общей диметрической проекции, определить угол между двумя прямыми, лежащими в горизонтальной плоскости.

346. В диметрической проекции $\left(\frac{1}{t}=0{,}5,\ \frac{1}{s}=\frac{1}{u}=1\right)$ на плоскость, параллельную вертикальной плоскости координат, изобразить проекцию куба, стоящего на горизонтальной плоскости, при чем направление одной из сторон основания куба дано.

347. По данным ортогональным проекциям на две плоскости усеченной пирамиды, стоящей на горизонтальной плоскости, изобразить ее в диметрической косоугольной проекции на плоскость, параллельную вертикальной плоскости.

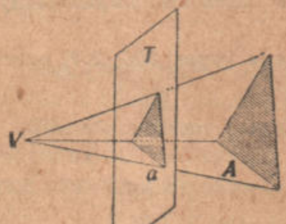
348. Скиццировать эпюры, представленные [*черт. 206, 207*] вместе с тенями, пользуясь той же проекцией.

ОТДЕЛ ТРЕТИЙ
ЦЕНТРАЛЬНЫЕ ПРОЕКЦИИ
ЛИНЕЙНАЯ ПЕРСПЕКТИВА

I. Определение.

§ 347. Линейная перспектива есть изображение контуров и главных линий предмета на плоскости в том виде, в каком они представлялись бы наблюдателю на прозрачной плоскости, помещенной определенным образом между глазом наблюдателя и самим предметом.

Таким образом, если V [*черт. 309*] есть глаз наблюдателя, T — плоскость на которой строится перспектива, и A — предмет, то геометрическое место точек a, в которых плоскость T пересекается лучами, проведенными из различных точек предмета A к глазу наблюдателя, есть линейная перспектива предмета A. Перспективу a можно рассматривать как проекцию точки A на плоскости T. Проектирующим лучом является прямая VA. Все проектирующие лучи проходят через точку V. Проекция такого рода называется *центральной*. Точка V — *центром* проекций. Таким образом *перспектива представляет собою центральную проекцию.* Легко видеть, что центральная проекция обращается в параллельную, если центр V удален в бесконечность.

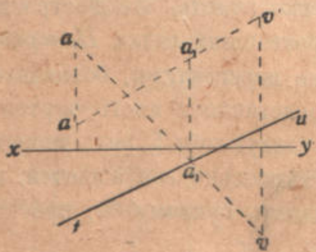


Черт. 309.

§ 348. Плоскость, на которой строится перспектива предмета и которая обыкновенно предполагается вертикальною, называется *картинною плоскостью* и задается своим горизонтальным следом относительно тех же плоскостей проекций, относительно которых заданы своими проекциями как глаз наблюдателя, так и рассматриваемый предмет.

При таком способе задания, построение перспективы, т.-е. определение точек, в которых лучи, проведенные из различных точек предмета к глазу наблюдателя, пересекают картинную плоскость, сводится к задаче, рассмотренной нами в § 75.

Так [*черт. 310*], если xy—ось выбранных нами плоскостей проекций, ut — горизонтальный след картины, (a, a') — проекции точки, перспективу которой ищем, (v, v') — проекции глаза наблюдателя, то искомая перспектива есть точка a'_1, в которой луч $(av, a'v')$ встречает плоскость картины.



Черт. 310.

§ 349. Положение плоскостей проекций по отношению к картинной плоскости, глазу наблюдателя и предмету, перспективу которого строим, зависит от нашего выбора, и потому приличным выбором плоскостей проекций можно значительно упростить построение перспективы. Сэтою целью обыкновенно за горизонтальную плоскость проекций выбирают ту горизонтальную плоскость, на которой расположен предмет и в этом случае горизонтальную плоскость проекций называют *основной.*

Вертикальную же плоскость проекций выбирают или совпадающей с плоскостью картины, или параллельной ей, притом расположенной так, чтобы рассматриваемый предмет, находился в первом углу.

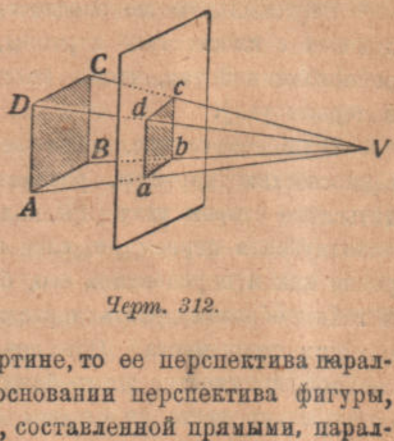
В первом случае, когда вертикальная плоскость сливается с плоскостью картины, рассматриваемый предмет будет находиться во втором углу (предполагая, что глаз наблюдателя будет находиться в первом), и, следовательно, обе проекции предмета, равно как и перспектива его, будет совмещаться друг с другом и таким образом делать чертеж крайне неясным, хотя и занимающим мало места. Вот почему такое расположение вертикальной плоскости употребляется лишь в том случае, когда контуры предмета не сложны, но когда он занимает слишком много места. Вообще же предпочитается второе расположение, когда вертикальная плоскость проекций параллельна плоскости картины и расположена таким образом, чтобы предмет находился в первом углу; в этом случае лишь вертикальная проекция предмета совмещается с перспективой, и потому этот способ особенно удобен для перспективы плоских фигур, лежащих в основной плоскости.

§ 350. Принимая во внимание как эти замечания относительно выбора плоскостей проекций, так и те теоремы, на которых основано определение точки встречи прямой с плоскостью, легко видеть, что построение перспективы представляет одну из простейших задач *Начертательной Геометрии.* Однако построение перспективы, основанное исключительно на теоремах Н. Г., представляет много чертежной работы, и потому мы рассмотрим в следующем § ряд теорем, при помощи которых эта работа значительно сокращается; при чем условимся след картины обозначать буквами tu, проекции глаза наблюдателя — v и v'.

II. Основные теоремы.

§ 351. Теорема I. *Перспектива прямой есть прямая.* Ибо лучи, проведенные из точки зрения V ко всем точкам прямой AB [*черт. 311*], лежат в одной плоскости VAB, которая с плоскостью картины T пересекается по прямой ab — перспективе прямой AB.

Черт. 311.



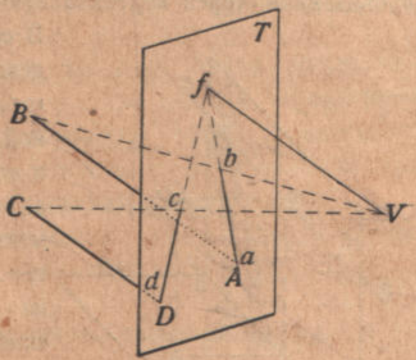
Черт. 312.

Если прямая параллельна картине, то ее перспектива параллельна самой прямой. На этом основании перспектива фигуры, напр., квадрата $ABCD$ [*черт. 312*], составленной прямыми, параллельными плоскости картины, подобна самой фигуре, ибо представляет собою не что иное, как сечение пирамиды $VABCD$ плоскостью картины, параллельною ее основанию.

Примечание. Отсюда легко видеть, что перспектива фигуры уменьшается по мере удаления фигуры от картины.

§ 352. Теорема II. *Перспектива бесконечной прямой AB, наклонной к плоскости картины, заключается между двумя точками, в которых картинная плоскость встречается, во-первых, самой прямой, а во-вторых, лучом зрения V, параллельным прямой AB.*

В самом деле, пусть [*черт. 313*] T — картинная плоскость, V—глаз наблюдателя, BA — данная прямая, наклонная в плоскости T, a — след прямой, т.-е. точка, в которой прямая AB встречает плоскость картины. Первая часть предложения очевидна, ибо точка a, как лежащая в плоскости картины, сама себе служит перспективою и, следовательно, лежит на перспективе данной прямой.



Черт. 313.

Для доказательства второй части, проведем луч Vf параллельно прямой AB, и пусть точка f есть точка встречи его с плоскостью картины. Прямые AB и Vf, как параллельные между собою. пересекаются в точке, удаленной на бесконечно большое расстояние от плоскости картины, и потому прямую Vf должно рассматривать как луч зрения, идущий из бесконечно удаленной точки прямой AB, а точку f, в которой она встречает картинную плоскость, как перспективу этой точки. Следовательно, прямая af, как соединяющая перспективы a и f двух точек прямой AB, есть перспектива самой прямой AB.

§ 353. Точка f называется *точкою схода* прямой AB; следовательно, *точка схода прямой есть точка встречи параллельного ей луча с плоскостью картины.*

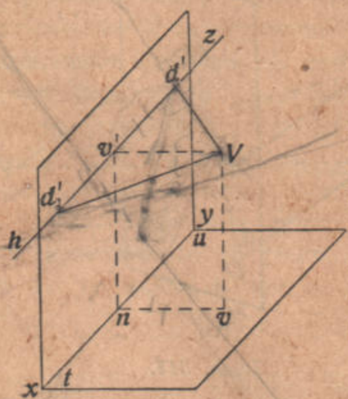
Отсюда, прямые, параллельные плоскости картины, не имеют точек схода.

354. Теорема III. *Перспективы двух параллельных прямых, наклонных к плоскости картины, пересекаются.*

Действительно, из определения точки схода необходимо следует, что прямые AB и CD [*черт. 313*], как параллельные между собою, имеют одну и ту же точку схода f, через которую, по *§ 352*, проходят их перспективы ab и cd.

§ 355. Наиболее важную роль по отношению к плоскости картины играют прямые, параллельные основной плоскости, т.-е горизонтали (в частном случае прямые, лежащие в основной плоскости).

Из предыдущего легко видеть, что все горизонтальные прямые имеют свои точки схода на горизонтали картины hz [*черт. 314*], проведенной через вертикальную проекцию v' точки зрения V. В самом деле, все прямые, проведенные через точку V параллельно горизонталям, лежат в горизонтальной плоскости P, проходящей через V и содержащей проектирующую Vv', а, следовательно, геометрическое место точек их встречи с картиною, т.-е. точек схода, есть горизонтальная прямая zh, по которой плоскость P пересекает плоскость картины.



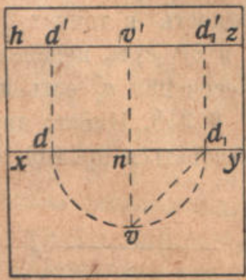
Черт. 314.

На горизонтали zh, называемой *линией горизонта*, лежат три важные точки: *главная точка и две точки расстояния.*

Главная точка или *центр картины* v' есть точка встречи перпендикуляра, опущенного из точки зрения V, с плоскостью картины. Главная точка v' есть, очевидно, точка схода всех линий, перпендикулярных к плоскости картины.

Точки расстояний d'_1 и d' находятся по обе стороны от главной точки v' на расстоянии, равном расстоянию горизонтальной проекции v точки зрения от следа картины, т.-е. $d'v' = d'_1v' = vn$. Отсюда видно, что в треугольниках $Vv'd'$ и $Vv'd'_1$ гипотенузы Vd' и Vd'_1 составляют с плоскостью картины углы в 45° и что, следовательно, точки расстояний суть точки схода горизонталей, составляющих с плоскостью картины углы в 45°.

Отсюда же легко видеть, что для построения точек расстояний следует [*черт. 315*] провести из горизонтальной проекции v точки зрения две прямые vd и vd_1 под углом в $45°$ к оси xy и точки d и d_1 спроектировать на горизонталь hz в точки d' и d'_1.



Черт. 315.

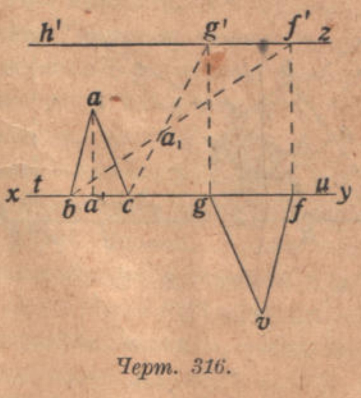
§ 356. На только-что рассмотренных свойствах горизонталей, свойствах, позволяющих легко строить их перспективы, основан общий прием построения перспективы точек в тех случаях, когда прием, указанный в *§ 348*, не может быть применен; напр., когда точка зрения слишком удалена от плоскости картины и ее горизонтальная проекция не может быть задана на чертеже, но даны точки расстояний.

Определение перспективы точек при помощи горизонталей вообще состоит в том, что через данную точку проводят две горизонтали, определяют их перспективы и таким образом находят в точке их пересечения перспективу искомой точки.

Следующие частные примеры всего лучше пояснят употребление этого приема.

III. Построение перспективы плоских фигур.

§ 357. Задача. *Найти перспективу точки, лежащей в основной плоскости.*

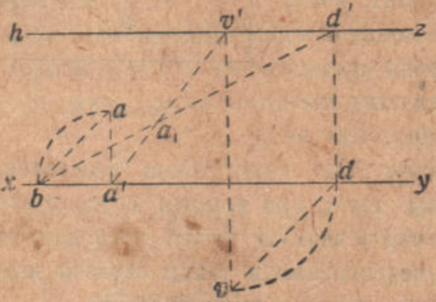


Черт. 316.

Пусть [*черт. 316*] плоскость картины совпадает с вертикальною плоскостью проекций и, следовательно, след картины ut сливается с осью проекций xy.

Пусть (a, a') — данная точка; v — горизонтальная проекция точки зрения; hz — линия горизонта. Через точку a проводим в основной плоскости две произвольные прямые ab и ac, а через точку v — им параллельные лучи зрения vg и vf и в точках g и f пересечения их с следом картины находим горизонтальные проекции g и f точек схода прямых ab и ac; а по g и f находим на линии горизонта hz и самые точки схода — g и f'. Заметив, кроме того, что прямые ab и ac встречают картинную плоскость в точках b и c, заключаем, по § *352*, что прямые cg' и bf' суть перспективы прямых ac и ab; а потому точка их пересечения a_1 есть перспектива искомой точки.

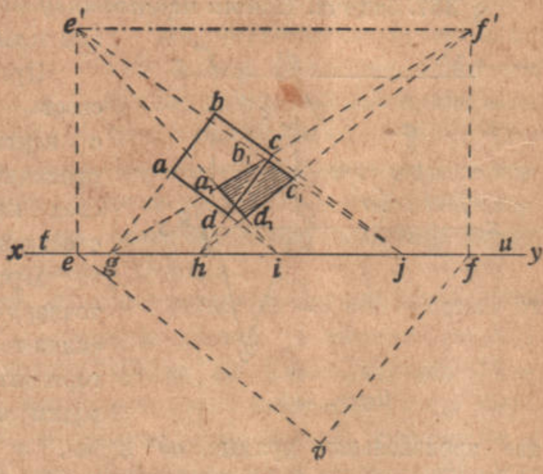
§ 358. Вместо двух произвольных прямых ab и ac, удобнее пользоваться прямой ab [*черт. 317*], составляющей с плоскостью картины угол в 45° и имеющей точку схода в точке расстояния d' и прямой aa', перпендикулярной к плоскости картины и имеющей точку схода в главной точке v'; таким образом искомая перспектива точки (a, a') будет находиться в точке a_1 на пересечении перспективы bd' и $a'v'$ прямых ab и aa'.



Черт. 317.

§ 359. Задача. *Построить перспективу квадрата, лежащего в основной плоскости.*

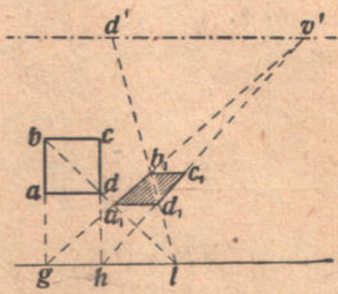
Пусть [*черт. 318*] плоскость картины совпадает с вертикальною плоскостью проекций и, следовательно, след ut картины сливается с осью xy проекций; пусть $abcd$ — горизонтальная проекция квадрата, v — горизонтальная проекция точки зрения, $f'e'$ — линия горизонта. Продолжим стороны квадрата до пересечения со следом



Черт. 318.

картины и найдем перспективу прямых bg, ch, ai, bj. Так как стороны bg и ch взаимно параллельны, то имеют одну и ту же точку схода, которую найдем, если через точку зрения проведем прямую vf, параллельную bg, и по f определим точку схода f' прямых bg и ch. По § 352 прямые gf' и hf' суть перспективы прямых bg и ch. На основании тех же соображений построим перспективые je' и ie' прямых ai и bj и найдем точки a_1, b_1, c_1 d_1, в которых они пересекают прямые gf' и hf'. Четыреугольник $a_1 b_1 c_1 d_1$ есть искомая перспектива данного квадрата.

§ 360. В том случае, когда одна из сторон квадрата перпендикулярна к следу картины, построение перспективы его значительно упрощается. В самом деле, пусть [*черт. 319*] сторона квадрата ba перпендикулярна к следу картины, пусть v'—главная точка, d'—точка расстояний. Продолжим перпендикулярные стороны ba, и cd до пересечения со следом картины в точках g и h и, припомнив что прямые bg и ch, как перпендикулярные к плоскости картины, имеют точкою схода главную точку v', найдем, что перспективы прямых bg и ch суть прямые gv' и hv'. С другой стороны, диагональ bd квадрата, как прямая, составляющая угол 45° с плоскостью картины, имеет точкою схода точку расстояний d', а, следовательно,—своею перспективою прямую ld', которая пересекает gv' и hv' в точках b_1 и d_1—перспективах точек b и d, а потому, проведя через b_1 и d_1 прямые b_1c_1 и d_1a_1 (§ 441), параллельные следу картины, найдем, что четыреугольник $a_1b_1c_1d_1$ есть перспектива данного квадрата.

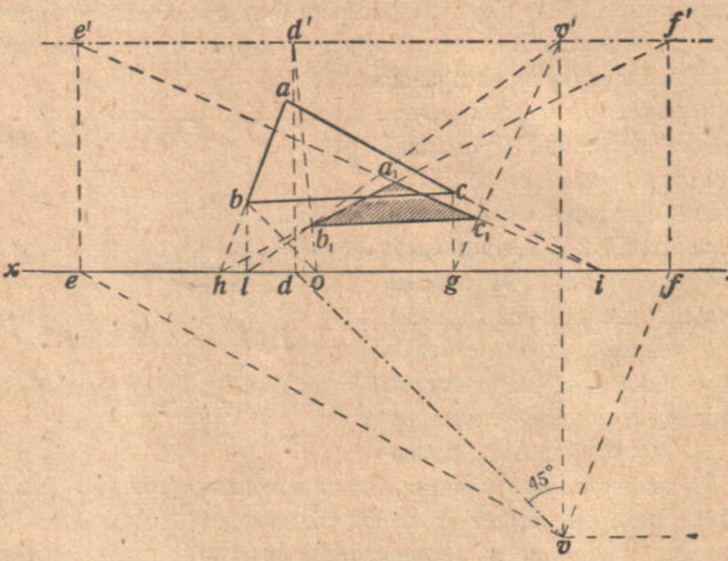


Черт. 319.

§ 361. Задача. *Найти перспективу какого-либо треугольника, лежащего в основной плоскости.*

Пусть [*черт. 320*] вертикальная плоскость проекций совпадает с плоскостью картины, пусть abc—есть горизонтальная проекция данного треугольника, а (v, v')—точка зрения.

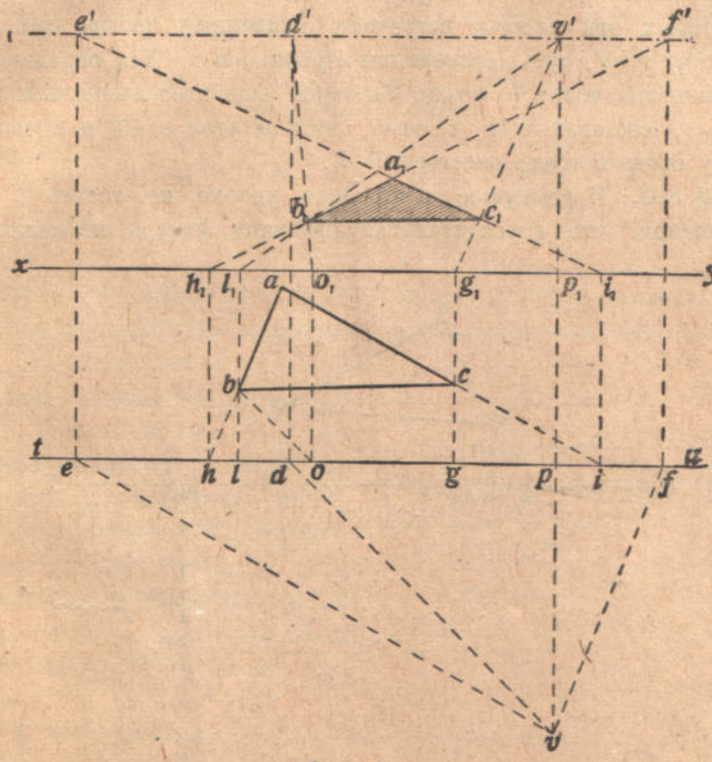
Продолжим стороны ab и ac до пересечения их с следом картины в точках h и i и найдем точки схода прямых ah и ai, для чего через v проведем прямые vf и ve, параллельные ah и ai, и по точкам f и e найдем на линии горизонта точки схода f' и e' прямых ah и ai. Прямые hf' и ie' суть перспективы прямых ah, ai, а точка их пересечения a_1—перспектива вершины a данного треугольника. Для определения перспективы точек b и c неудобно пользоваться перспективою прямой bc, так как след ее лежит вне пределов эпюра, а потому построим перспективу точек b и c при помощи прямых bl и cg, перпендикулярных к плоскости картины и, следовательно, имеющих своею перспективою прямые lv' и gv'. Эти прямые пересекаются с прежде найденными перспективами



Черт. 320.

ie' и hf' в точках b_1 и c_1, которые и представляют перспективы точек b и c. Построенный таким образом треугольник $a_1b_1c_1$ есть искомая перспектива данного треугольника.

§ 362. При решении предыдущих задач, вертикальная плоскость проекций сливалась с плоскостью картины, и горизонтальная проекция фигуры накладывалась на его перспективу; отсюда происходила неясность чертежа и, следовательно, неудобство такого выбора вертикальной плоскости, особенно если приходится пользоваться еще и вертикальной проекцией фигуры; чтобы устранить это неудобство, необходимо вертикальную, плоскость проекций расположить так, чтобы она, будучи параллельна плоскости картины, лежала за рассматриваемой фигурой, т.-е. чтобы фигура находилась в первом углу и, следовательно, имела свою горизонтальную проекцию под осью. Решим предыдущую задачу при таком выборе вертикальной плоскости.



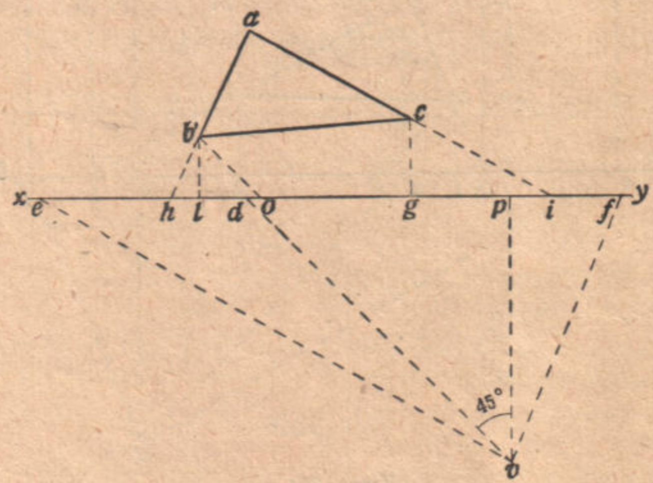
Черт. 321.

Пусть [*черт. 321*] *xy* — ось проекций, *ut* — след картины, *abc* — горизонтальная проекция треугольника, находящаяся между осью и следом картины, (v, v') — точка зрения.

Продолжим стороны *ab* и *ac* треугольника до встречи в точках *h* и *i* со следом картины и найдем вертикальные проекции точек *h* и *i* в точках h_1 и i_1 на оси *xy*; затем, проведем чрез точку *v* прямые *ve* и *vf*, параллельные *ah* и *ai*, и найдем вертикальные проекции точек *f* и *e* в точках *f'* и *e'* на линии горизонта; по § *352*, h_1f' — есть перспектива стороны *ab*; i_1e' —

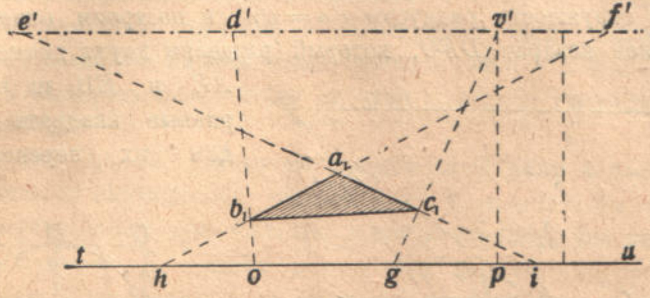
перспектива стороны ac, точка a_1, пересечения перспектив i_1e' и h_1f', есть перспектива вершины a. Для построения перспектив вершины b и c проведем чрез них прямые bl и cg, перпендикулярные к следу картины, и найдем на оси xy вертикальные проекции l_1 и g_1 их следов l и g. Прямые l_1v' и g_1v' суть перспективы прямых bl и cg, и следовательно, точки b_1 и c_1, в которых эти прямые встречают найденные прежде перспективы h_1f' и i_1e', суть перспективы вершин b и c. Для определения перспективы точки b можно было бы еще воспользоваться прямою bo, составляющею с осью картины угол в 45° и имеющею точку схода в точке расстояний d'.

§ 363. Предыдущее построение удобно не только в том отношении, что горизонтальная проекция фигуры не наложена



Черт. 322.

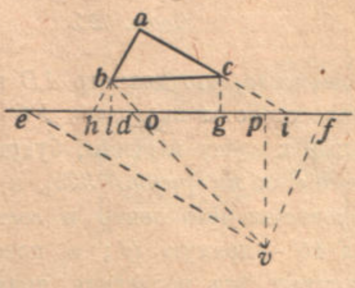
на ее перспективу, но еще и в том, что ничто нам не мешает вычерчивать нижнюю часть чертежа до оси xy отдельно от перспективного чертежа и, определив на таком вспомогательном чертеже [*черт. 322*] точки p, f, i, g, o, d, l, h, e, нанести их затем на след картины tu и линию горизонта, по *§ 361*, в следующем порядке [*черт. 323*]. На следе картинной плоскости tu от произвольно взятой на нем точки p, взять точки i, g, o, h,... на таком же расстоянии от точки p, на каком они находятся от точки p на вспомогательном чертеже; далее, чрез главную точку v', находящуюся на одном перпендикуляре с p, провести линию горизонта и на ней отложить части $v'f' = pf$, $v'e' = pe$, $v'd' = vp$.



Черт. 323.

Наконец, по нанесенным таким образом точкам построить, как и в предыдущей задаче, перспективу треугольника abc.

Отделение вспомогательного чертежа от перспективного позволяет делать первый в уменьшенном масштабе, и таким образом сократить чертежную работу.



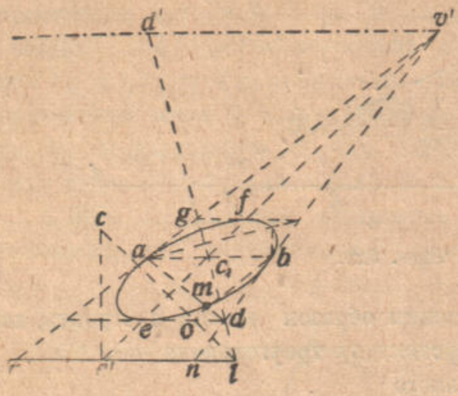
Черт. 324.

Так, *черт. 324* представляет собою вспомогательный чертеж для построения перспективы треугольника, сделанный в половину натуральной величины.

§ 364. Задача. *Найти перспективу окружности, расположенной в основной плоскости.*

Пусть [*черт. 325*] вертикальная плоскость проекций совпадает с плоскостью картины и пусть (c, c') — центр окружности, $c'n = c'n'$ — радиус ее, v' — главная точка, d' — точка расстояний. Найдем перспективу центра при помощи прямой cc', перпендикулярной к плоскости картины, и прямой cl, составляющей с ее следом угол в 45°; первая прямая имеет точкою схода точку v' и, следовательно, своей перспективой — прямую $c'v'$; вторая прямая имеет точкою схода точку d' и, следовательно, своею перспективой — прямую ld'. Прямые $c'v'$ и ld' пересекаются в точке c_1 — перспективе центра окружности.

Построение же перспективы окружности ведется при помощи построения перспективы сети квадратов, покрывающих данную окружность. С этой целью из точки C [*черт. 326*], как из центра, опишем окружность радиусом $c'n = c'n'$ и построим описанный около нее квадрат DFG, который разделим двумя диаметрами AB и EH на четыре равные квадрата. Найдем их перспективу,



Черт. 325.

Черт. 326.

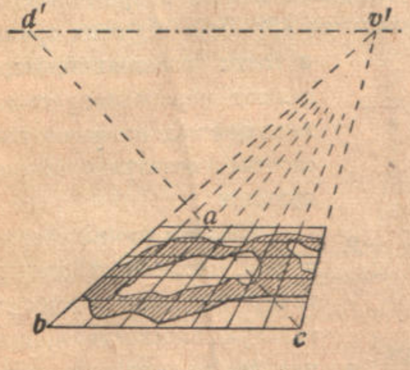
предполагая, что диаметр AB параллелен следу картины. В этом случае стороны квадратов FG и DB, как прямые, перпендикулярные к следу картины, будут иметь своею перспективой прямые $n'v'$ и nv' [*черт. 325*], а диагональ его DG, как прямая, проходящая чрез центр и составляющая с плоскостью картины угол 45°—прямую ld'; а потому, проведя чрез точки d и g, в которых эта последняя прямая встречает $n'v'$ и nv', прямые, параллельные следу картины, найдем как перспективу квадратов, покрывающих данную окружность, так и перспективу ab и ef диаметров AB и EH. Таким путем построим перспективу четырех точек a, b, e, f, принадлежащих искомой окружности; по ним можно было бы от руки вычертить кривую, представляющую перспективу окружности [1]), но, для большей точности следует найти еще перспективы промежуточных точек.

С этою целью всего удобнее брать точки, которые, принадлежа окружности, в то же время лежат на пересечении определенным образом построенных прямых; так, напр., прямая AD

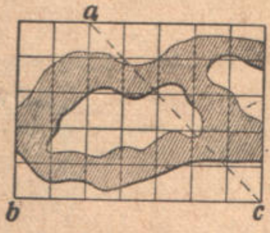
[1]) Эта кривая, представляя собою сечение проектирующей конической поверхности плоскостью, не параллельной ни одной производящей, есть эллипс.

и прямая BO, соединяющие точку B с срединою стороны ED, пересекаются в точке M, принадлежащей окружности. А потому перспективы их ad и bo пересекаются в точке m, принадлежащей перспективе окружности. Поступая таким образом для каждого квадрата, найдем новые четыре точки искомой перспективы и вычертим перспективу от руки по восьми точно построенным точкам.

§ 365. Способ, только-что примененный нами к построению перспективы окружности и известный под именем способа *построения перспективы при помощи сети квадратов,* как это видно из предыдущего §, состоит в том, что данную фигуру покрывают сетью квадратов, одна из сторон которых перпендикулярна к следу картины, затем чертят перспективу этой сети [*§ 360*] и на ней от руки вычерчивают части фигуры, соответствующие каждому



Черт. 327.



Черт. 328.

отдельному квадрату. Способ этот особенно часто применяется в тех случаях, когда данная фигура ограничена неправильными кривыми; так, *черт. 327* представляет перспективу фигуры *328*, вычерченную при помощи сети квадратов.

Задачи.

349. Построить перспективу правильного шестиугольника, лежащего в основной плоскости.

350. Построить перспективу паркетного пола, состоящего из ромбических плашек, когда диагональ плашек составляет с основанием картины угол в 45°.

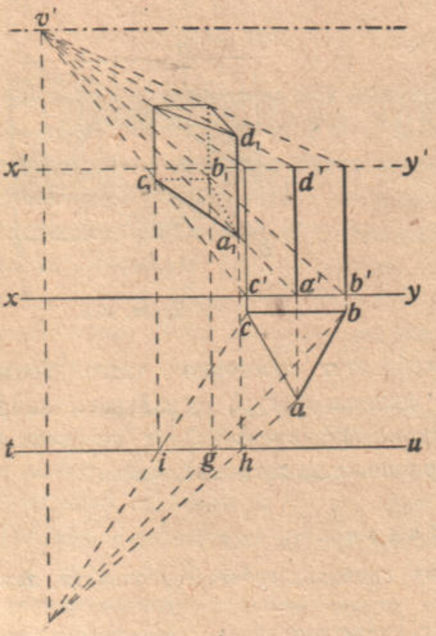
351. Начертить план местности, по которой проходит дорога, жел. дорога, протекает река, расположены огороды и т. д. Построить перспективу местности.

IV. Построение перспективы тел.

§ 366. *Задача о построении перспективы тел* собственно сводится к построению перспективы точек, лежащих над основной плоскостью. С этою целью можно пользоваться одним из следующих приемов.

Первый прием вытекает из определений перспективы точки и состоит в том, что точку, данную своими проекциями, положим [*черт. 310*] (a, a'), соединяют с точкою зрения (v, v') прямою $(av, a'v')$ и находят точку (a_1, a_1'), в которой эта прямая встречает плоскость картины, данную своим следом ut.

Этот прием удобен в том случае, если горизонтальная проекция v точки зрения лежит в пределах эпюра; в противном же случае, когда даны лишь вертикальная проекция v' точки зрения и точки расстояний, определяют перспективу точки, лежащей над основной плоскостью, пользуясь вторым приемом.



Черт. 329.

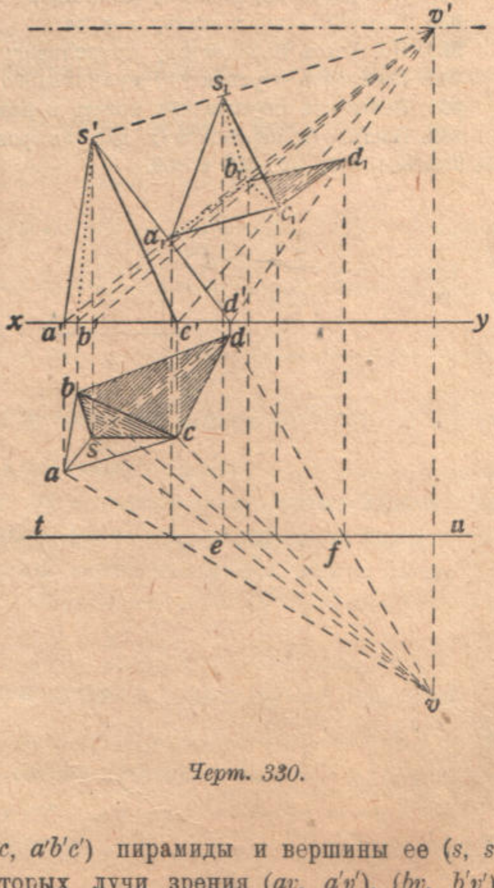
Второй прием состоит в том, что чрез данную точку проводят горизонтальную плоскость и, приняв ее за основную, определяют перспективу точки, пользуясь соображениями, рассмотренными в предыдущих задачах.

§ 367. Задача. *Построить перспективу прямой треугольной призмы, поставленной на основную плоскость.*

Пусть [*черт. 329*] xy — ось проекций, ut — след картины, (v, v') — точка зрения, $(abc, a'b'c')$ — проекции нижнего основания призмы, $a'd'$ — высота призмы.

Найдем перспективу нижнего основания призмы, для чего проведем лучи зрения (cv, $c'v'$) (av, $a'v'$), (bv, $b'v'$) и найдем точки (i,c_1), (g,b_1), (h,a_1), в которых эти лучи встречают картинную плоскость; треугольник $a_1b_1c_1$ — есть перспектива нижнего основания. Для определения перспективы верхнего основания, которое проектируется на горизонтальную плоскость по треугольнику abc, проведем чрез одну из его точек, напр., (a,d'), горизонтальную плоскость $x'y'$ и определим перспективу точек abc, приняв плоскость $x'y'$ за основную для чего проведем луч зрения (av, $d'v'$) и найдем точку (h,d_1), в которой он встречает плоскость картины ut.

Точка d_1 есть перспектива вершины верхнего основания. Поступая подобным же образом относительно всех других вершин того же основания найдем его перспективу, а соединяя перспективы обоих оснований прямыми, построим перспективу призмы.



Черт. 330.

§ 368. Задача. *Построить перспективу треугольной пирамиды.*

Пусть [*черт. 330*] xy — ось проекций, ut — след картины, ($sabc$, $s'a'b'c'$) — проекции данной пирамиды, dbc — тень пирамиды на горизонтальной плоскости проекций. Построим перспективу основания (abc, $a'b'c'$) пирамиды и вершины ее (s, s'), определив точки, в которых лучи зрения (av, $a'v'$), (bv, $b'v'$)...

(sv, $s'v'$), (dv, $d'v'$) встречают плоскость картины ut. Таким образом найдем перспективу $a_1b_1c_1$ основания, перспективу s_1 вершины и перспективу $b_1c_1d_1$ тени.

Задачи.

352. Построить перспективу квадрата, лежащего в горизонтальной плоскости выше основной на h единиц.

353. Построить перспективу правильного шестиугольника, лежащего в горизонтальной плоскости выше основной на h единиц.

354. Построить перспективу куба.

355. Построить перспективу правильной шестиугольной призмы.

356. Построить перспективу параллелепипеда и тени, бросаемой им на основную плоскость.

357. Построить перспективу цилиндра.

358. Построить перспективу конуса.

359. Построить перспективу правильного восьмиугольника.

360. Построить перспективу правильного двенадцатигранника.

361. Построить перспективу креста и памятника.

362. Построить перспективу для эпюров, помещенных в задачах №№ 303, 304, 305, 307, 308 и 309.

ОГЛАВЛЕНИЕ.

Глава IV. Об элементах фигур.

Глава V. О фигурах.

Глава VI. Сечения многогранников.

Отдел второй. О поверхностях.

Глава I. Общие понятия о поверхностях.

Глава II. Плоскости, касательные к поверхностям.

Глава III. Сечения поверхностей.

Отдел третий. О кривых линиях.

Глава I. Конические сечения.

Глава II. Винтовая линия.

Отдел четвертый. Приложения метода проекций на две плоскости.

Глава I. Построение теней.

Глава II. Проектирование сооружений.

Часть вторая. Проекции на одну плоскость.

Отдел первый. Ортогональные проекции с числовыми отметками.

Отдел второй. Параллельные проекции. Аксонометрия.

Отдел третий. Центральные проекции. Линейная перспектива.

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКВА

Чаплыгин. Механика системы. Ч. I. Ц. 85 к.

Юнкер. Повторительный конспект и сборник задач по дифференциальному исчислению. Пер. В. Степанова. 1923 г. 100 стр. Ц. 1 р. 20 к.

Юнкер. Повторительный конспект и сборник задач по интегральному исчислению. Пер. В. Степанова. Гиз. 1923 г. Ц. 60 к.

РУКОВОДСТВА ДЛЯ ТЕХНИКУМОВ И РАБФАКОВ.

Межеричер. Механика для техн. и других училищ и для самообразования, с 125 фиг. в тексте, со многими упражнениями. 292 стр. Изд. 2-е, исправленное. Гиз. 1923 г. Ц. 1 р. 75 к.

Попруженко. Начала анализа. 128 стр. Гиз. 1922 г Ц. 75 к.

Синцов. Краткий курс аналитической геометрии на плоскости. 132 стр. Гиз. 1922 г. Ц. 30 к.

Фадеев. Элементарная механика. Гиз. 1924 г. 217 стр. Ц. 2 р.

ТОРГОВЫЙ СЕКТОР ГОСУДАРСТВЕННОГО ИЗДАТЕЛЬСТВА:

Москва, Ильинка, Богоявленский пер., 4. Тел. 47-35.

ЛЕНИНГРАДСКОЕ ПРЕДСТАВИТЕЛЬСТВО:

Ленинград, Моховая, 36. Тел. 5-34-17, 1-68-75, 6-10-61.

ОТДЕЛЕНИЯ:

Армавир — ул. Троцкого, 99. **Баку** — ул. Троцкого (б. Милют.), 14. **Вологда**—Площадь Свободы. **Воронеж**—Проспект Революции. **Екатеринбург**—угол Пушкинской и Ив. Малышева. **Казань** — Гостинодворск., Гостин. Двор. **Киев** — Крещатик, 38. **Кисловодск** — ул. Карла Маркса, 7. **Кострома**—Советская, 11. **Краснодар** — Красная, 35. **Ленинград** (представ.) — Моховая, 36. **Н.-Новгород** — Б. Покровка, 12. **Одесса** — ул. Лассаля, 12. **Пенза** — Интернациональная, 39/43. **Пятигорск** — Советский пр., 48. **Ростов-на-Дону** — ул. Ф. Энгельса, 106. **Саратов** — ул. Республики, 42/30. **Тамбов** — Коммунальная, 14. **Тифлис** — Пр. Руставели, 16. **Харьков** — Московская, 20.

МАГАЗИНЫ В МОСКВЕ:

Советская площ. под бывш. гост. „Дрезден", тел. 128-94. Моховая, 17 тел. 131-50. Ул. Герцена, 13, тел. 264-95. Никольская, 3, тел. 49-51. Серпуховская пл. 1/43, тел. 379-65. Кузнецкий Мост, 12, тел. 101-36. Покровка, Лялин пер., 11, тел. 81-94. Малая Харитоньевская, 4, тел. 227-22. Ильинка, Богоявленский пер., 4, тел. 191-49.