

Міністерство освіти і науки України  
Національний університет водного господарства та  
природокористування  
Навчально-науковий інститут агроекології та землеустрою  
Кафедра геодезії та картографії

**05-04-104М**

## **МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ**

до виконання практичних та самостійних робіт  
з навчальної дисципліни «Вища геодезія»  
для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня за  
освітньо-професійною програмою «Геодезія та землеустрій»  
спеціальності 193 «Геодезія та землеустрій»  
денної форми навчання

## **ПЕРЕТВОРЕННЯ В ПРОСТОРОВИХ СИСТЕМАХ КООРДИНАТ**

Рекомендовано науково-методичною  
радою з якості ННІАЗ  
Протокол №1 від 08.09.2020 р.

Рівне – 2020

Методичні вказівки до виконання практичних та самостійних робіт з навчальної дисципліни «Вища геодезія» для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня за освітньо-професійною програмою «Геодезія та землеустрій» спеціальності 193 «Геодезія та землеустрій» денної форми навчання. Перетворення в просторових системах координат [Електронне видання] / Тадеєв О. А. – Рівне : НУВГП, 2020. – 19 с.

Укладач: Тадеєв О. А., доцент кафедри геодезії та картографії, кандидат технічних наук, доцент.

Відповідальний за випуск: Янчук Р. М., завідувач кафедри геодезії та картографії, кандидат технічних наук, доцент.

Керівник групи забезпечення спеціальності 193 «Геодезія та землеустрій»: доктор сільськогосподарських наук, професор Мошинський В. С.

## Зміст

Вступ.....	3
1. Перетворення координат в прямокутній і полярній сферичній просторових геоцентричних системах.....	5
2. Перетворення координат в прямокутній і полярній еліпсоїдальній просторових геоцентричних системах.....	8
3. Перетворення координат в прямокутній геоцентричній екваторіальній і топоцентричній горизонтній просторових системах.....	11
Література.....	17
Додатки.....	18

## Вступ

Розв'язуванню поставлених завдань передують визначення місця системи координат у земній системі відліку.

Загалом, **система відліку**, відносно якої розглядається рух тіла, утворюється просторовою системою координат, тілом відліку, з яким вона пов'язана, його станом, а також приладами для вимірювання часу (годинниками).

Як система відліку, в геодезії використовується термін **референцна система** – це сукупність однозначно встановлених параметрів, які описують **стан Землі** (у тому числі її моделі у тій чи іншій формі), **початок відліку**, **систему координат і час**. Суть земної референцної системи в тому, що вона однозначно визначає співвідношення, що встановлюються на Землі за допомогою датуму (параметрів Землі на задану епоху) і системи координат для пунктів геодезичної мережі. Тому геодезична референцна система включає датум і систему координат. **Датум** (або геодезичні дати) – це стан земної референцної системи на задану епоху.

**Система координат** – це спосіб визначення місцеположень точок простору за допомогою чисел або інших символів, опираючись на систему відліку і датум. Кількість чисел, необхідних для однозначного визначення положення будь-якої точки простору, визначає його вимірність. Сукупність чисел, що визначають положення конкретної точки, називається **координатами** цієї точки. Обов'язковим елементом системи координат є **початок координат** – це точка, від якої ведеться відлік відстаней або кутів.

Системи координат, які використовують в геодезії, класифікують за наступними ознаками (див. організаційну діаграму на рис. 1):

- 1) за вимірністю:
  - двовимірні (поверхневі);
  - тривимірні (просторові);
- 2) за походженням:
  - природні (фізичні, небесні, зоряні);
  - модельні (пов'язані з тією чи іншою моделлю Землі);

- 3) за положенням початку відліку:
  - планетоцентричні (геоцентричні – центр мас Землі);
  - об'єктоцентричні (топоцентричні – точка на поверхні Землі);
- 4) за основною відліковою координатною площиною:
  - екваторіальні (площина екватора);
  - горизонтні (площина земного горизонту);
- 5) за одиницями міри:
  - лінійні (прямолінійні прямокутні);
  - кутові (полярні).



Рис. 1. Класифікація систем координат, які використовуються в геодезії

Положення точки простору завжди визначається однозначно незалежно від обраної системи координат. З цієї причини існують однозначні математичні зв'язки між системами координат. Перетворення координат точки з однієї системи в іншу називають перетворенням в системах координат.

# 1. ПЕРЕТВОРЕННЯ КООРДИНАТ В ПРЯМОКУТНІЙ І ПОЛЯРНІЙ СФЕРИЧНІЙ ПРОСТОРОВИХ ГЕОЦЕНТРИЧНИХ СИСТЕМАХ

Мета роботи: виконати пряме і зворотнє перетворення координат точки в прямокутній і полярній сферичній просторових геоцентричних системах.

## Теоретична частина

Просторова прямокутна геоцентрична система координат  $XYZ$  (див. рис. 2) відноситься до категорії модельних систем з положенням початку відліку в центрі мас Землі (т.  $O$ ) та основною відліковою координатною площиною – екватором.

Вісь  $X$  знаходиться у площині екватора і направлена з початку відліку в напрямі на точку  $G_e$  перетину початкового (Грінвіцького) меридіана і екватора. Вісь  $Y$  також знаходиться у площині екватора і направлена з початку відліку в напрямі, ортогональному відносно осі  $X$ . Початкова вісь  $X$  розташована в площині екватора справа у відношенні до осі  $Y$ , тому таку систему координат називають правою (правосторонньою). Вісь  $Z$  направлена з початку відліку в напрямі північного полюса  $P_0$ , співпадає з віссю обертання Землі та перпендикулярна до площини екватора.

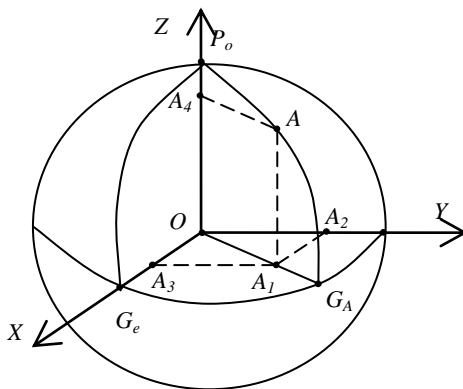


Рис. 2. Координати т.  $A$  в просторовій прямокутній геоцентричній системі координат  $XYZ$

Координати довільної точки простору (т.  $A$  на рис. 2) в системі  $XYZ$  визначають:

- проєкція точки на площину екватора (т.  $A_1$ ) у напрямі на точку  $G_A$  перетину меридіана т.  $A$  і екватора;
- проєкції точки на осі координат  $OX$  (т.  $A_3$ ),  $OY$  (т.  $A_2$ ),  $OZ$  (т.  $A_4$ ).

Тоді  $X_A = OA_3 = A_1A_2$ ;  $Y_A = OA_2 = A_1A_3$ ;  $Z_A = OA_4 = A_1A_4$ .

Просторова геоцентрична полярна сферична система координат  $r\Phi\Lambda$  (див. рис. 3) також відноситься до категорії модельних систем з положенням початку відліку в центрі мас Землі (т.  $O$ ) та основною відліковою координатною площиною – екватором. За основу взято модель Землі у формі геосфери.

Положення точки  $A$  (див. рис. 3) в системі  $r\Phi\Lambda$  визначають наступні координати:

- радіус сфери  $r = OA$  ;
- сферична широта  $\Phi = \sphericalangle G_A OA$  – гострий кут, утворений радіусом  $r = OA$  та його проекцією  $OG_A$  на площину екватора;  $G_A$  – точка перетину меридіана т.  $A$  і екватора;
- сферична довгота  $\Lambda = \sphericalangle G_e OG_A$  – двогранний кут, утворений площинами початкового меридіана та меридіана т.  $A$ ;  $G_e$  – точка перетину початкового меридіана і екватора.

На рис. 3 показано координати т.  $A$  в системі  $r\Phi\Lambda$  у відношенні до координатних осей системи  $XYZ$ .

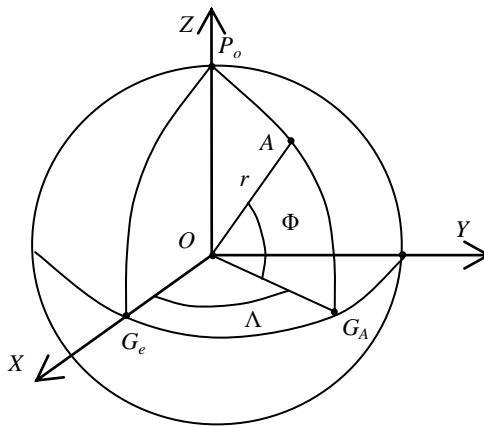


Рис. 3. Координати т.  $A$  в просторовій геоцентричній полярній сферичній системі координат  $r\Phi\Lambda$

Взаємозв'язки координат в системах  $XYZ$  та  $r\Phi\Lambda$  виражаються наступними співвідношеннями.

1. Перетворення  $X, Y, Z \Rightarrow r, \Phi, \Lambda$  :

$$r = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} ;$$

$$\Phi = \arctg \frac{Z}{D} ,$$

де  $D = \sqrt{X^2 + Y^2}$  - екваторіальна відстань;

$$\Lambda = \operatorname{arctg} \frac{Y}{X}.$$

Оцінка точності результатів обчислень за формулами середніх квадратичних похибок функцій результатів вимірів:

$$m_D^2 = \left(\frac{X}{D}\right)^2 m_X^2 + \left(\frac{Y}{D}\right)^2 m_Y^2;$$

$$m_r^2 = \left(\frac{X}{r}\right)^2 m_X^2 + \left(\frac{Y}{r}\right)^2 m_Y^2 + \left(\frac{Z}{r}\right)^2 m_Z^2;$$

$$m_\Phi^2 = \left(\frac{\rho''}{D^2 + Z^2}\right)^2 \cdot (D^2 \cdot m_Z^2 + Z^2 \cdot m_D^2);$$

$$m_\Lambda^2 = \left(\frac{\rho''}{D^2}\right)^2 \cdot (Y^2 \cdot m_X^2 + X^2 \cdot m_Y^2);$$

$$\rho'' = 206264.8''.$$

2. Перетворення  $r, \Phi, \Lambda \Rightarrow X, Y, Z$ :

$$X = r \cdot \cos \Phi \cdot \cos \Lambda;$$

$$Y = r \cdot \cos \Phi \cdot \sin \Lambda;$$

$$Z = r \cdot \sin \Phi.$$

### Хід роботи

Задано координати пункту опорної геодезичної мережі УПС-GNSS в просторовій прямокутній геоцентричній системі координат XYZ. Вхідні дані наведено в додатку 1.

1. Обчислити координати пункту в просторовій геоцентричній полярній сферичній системі  $r\Phi\Lambda$ .

2. Обчислити середні квадратичні похибки координат в системі  $r\Phi\Lambda$ .

3. Здійснити зворотне перетворення – обчислити координати пункту в просторовій прямокутній геоцентричній системі координат XYZ.

4. Контроль обчислень: відхилення результатів зворотного перетворення від вхідних даних не повинно перевищувати середніх квадратичних похибок відповідних координат, які задано в додатку 1.

### Питання для самоконтролю

1. Що називають геодезичною референчною системою?
2. Який зміст закладено в термін “геодезична референсна система”?
3. Що називають геодезичним датумом?
4. Який зміст має термін “система координат”?
5. Яке місце системи координат в геодезичній референційній системі?

6. За якими ознаками класифікують системи координат в геодезії?
7. Який зміст координат точки в просторовій прямокутній геоцентричній системі координат  $XYZ$  ?
8. Який зміст координат точки в просторовій геоцентричній полярній сферичній системі  $r\Phi\Lambda$  ?
9. Як здійснити перетворення координат з системи  $XYZ$  в систему  $r\Phi\Lambda$  ?
10. Як здійснити точність перетворення координат з системи  $XYZ$  в систему  $r\Phi\Lambda$  ?
11. Як здійснити перетворення координат з системи  $r\Phi\Lambda$  в систему  $XYZ$  ?
12. Як здійснити контроль перетворення координат з системи  $r\Phi\Lambda$  в систему  $XYZ$  ?

## **2. ПЕРЕТВОРЕННЯ КООРДИНАТ В ПРЯМОКУТНІЙ І ПОЛЯРНІЙ ЕЛІПСОЇДАЛЬНІЙ ПРОСТОРОВИХ ГЕОЦЕНТРИЧНИХ СИСТЕМАХ**

Мета роботи: виконати пряме і зворотне перетворення координат точки в прямокутній і полярній еліпсоїдальній просторових геоцентричних системах.

### **Теоретична частина**

Просторова геоцентрична полярна еліпсоїдальна система координат  $BLH$  відноситься до категорії модельних геоцентричних систем з основною відліковою координатною площиною – екватором. За основу взято модель Землі у формі еліпсоїда обертання. На рис. 4 показано координати довільної точки простору ( $t.A$ ) в системі  $BLH$  у відношенні до координатних осей прямокутної просторової геоцентричної системи  $XYZ$ . Координати  $t. A$  в системі  $XYZ$  показано на рис. 2.

Системи  $BLH$  і  $XYZ$  найчастіше використовують в практиці виконання геодезичних робіт, тому їх називають геодезичними.

На рис. 4 позначено:

$t. O$  – геометричний центр еліпсоїда обертання, що знаходиться у центрі мас Землі;

$a = OE$ ,  $b = OP_o$  – велика і мала півосі еліпсоїда;

$G_e$  – точка перетину початкового меридіана і екватора;

$G_A$  – точка перетину геодезичного меридіана  $t.A$  і екватора;

$A'n$  – нормаль до поверхні еліпсоїда;

$A'$  – проекція  $t.A$  на поверхню еліпсоїда у напрямі нормалі  $A'n$  ;

$A''$  – проекція  $t.A$  на площину екватора  $EG_AE$  у напрямі нормалі  $A'n$  ;

$OG_A$  – лінія перетину площини  $P_oA'G_AO$  меридіана  $t.A$  і площини екватора  $EG_AE$  .



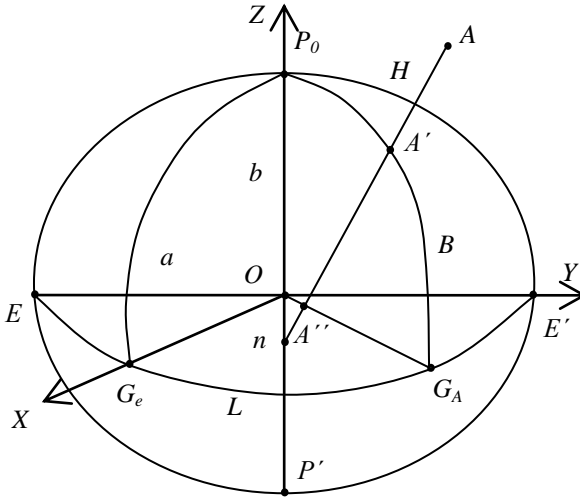


Рис. 4. Координати т.  $A$  в просторовій геоцентричній полярній еліпсоїдальній системі координат  $BLH$

Положення точки  $A$  в системі  $BLH$  визначають наступні координати:

- геодезична висота  $H = AA'$  – довжина проекції т.  $A$  на поверхню земного еліпсоїда у напрямі нормалі  $A'n$  ;
- геодезична еліпсоїдальна широта  $B = \angle G_A A' A'$  – гострий кут, утворений нормаллю  $A'n$  до поверхні в точці  $A'$  та площиною екватора  $EG_A E'$  ;
- геодезична еліпсоїдальна довгота  $L = \angle G_e O G_A$  – двогранний кут, утворений площиною  $P_0 G_e O$  початкового меридіана та площиною  $P_0 A' G_A O$  меридіана точки  $A$  .

Просторова геоцентрична полярна еліпсоїдальна система координат  $BLH$  має двовимірний різновид. У цьому випадку положення точки визначають дві координати  $BL$  і задають його виключно на поверхні земного еліпсоїда обертання. Такий різновид системи координат використовується, зокрема, при розв'язанні прикладних задач сферічної геодезії.

Взаємозв'язки координат в системах  $XYZ$  та  $BLH$  виражаються наступними співвідношеннями.

1. Перетворення  $X, Y, Z \Rightarrow B, L, H$  .

Широта  $B$  обчислюється методом послідовних наближень. Використовуються наступні ітераційні формули:

Для першого наближення під умовою  $H = 0$  :

$$B_0 = \operatorname{arctg} \frac{Z}{D(1-e^2)};$$

тут позначено  $D = \sqrt{X^2 + Y^2}$  – екваторіальна відстань. Наступні наближення:

$$B_i = \operatorname{arctg} \frac{Z + e^2 \cdot N_{i-1} \cdot \sin B_{i-1}}{D}$$

або еквівалентна формула

$$B_i = \operatorname{arctg} \frac{Z}{D - e^2 \cdot N_{i-1} \cdot \cos B_{i-1}};$$

$N_{i-1} = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_{i-1}}}$  – радіус кривини перерізу першого вертикалу в

точці на широті  $B_{i-1}$ ;  $a$ ,  $e$  – велика піввісь та перший ексцентриситет еліпсоїда. Ітерації тривають включно до досягнення результату обчислень, коли значення широти поточного результату  $B_i$  буде дорівнювати отриманому в попередньому наближенні  $B_{i-1}$ .

Довгота

$$L = \operatorname{arctg} \frac{Y}{X}.$$

Висота

$$H = \frac{D}{\cos B} - N$$

або еквівалентна формула

$$H = \frac{Z}{\sin B} - N(1 - e^2).$$

2. Перетворення  $B, L, H \Rightarrow X, Y, Z$  :

$$X = (N + H) \cdot \cos B \cdot \cos L;$$

$$Y = (N + H) \cdot \cos B \cdot \sin L;$$

$$Z = (N + H - e^2 N) \cdot \sin B.$$

### Хід роботи

Задано координати пункту опорної геодезичної мережі УПС-GNSS в просторовій прямокутній геоцентричній системі координат XYZ. Вхідні дані наведено в додатку 1.

В процесі подальших обчислень використовуються сталі параметри загального земного еліпсоїда обертання: велика піввісь  $a = 6378137$  м; квадрат першого ексцентриситету  $e^2 = 0.00669438$ .

1. Обчислити координати пункту в просторовій геоцентричній полярній еліпсоїдальній системі  $BLH$ .

2. Здійснити зворотне перетворення – обчислити координати пункту в просторовій прямокутній геоцентричній системі координат  $XYZ$ .

3. Контроль обчислень: відхилення результатів зворотного перетворення від вхідних даних не повинно перевищувати середніх квадратичних похибок відповідних координат, які задано в додатку 1.

### Питання для самоконтролю

1. Який зміст координат точки в просторовій прямокутній геоцентричній системі координат  $XYZ$  ?
2. Який зміст координат точки в просторовій геоцентричній полярній еліпсоїдальній системі  $BLH$  ?
3. З якої причини системи координат  $XYZ$  і  $BLH$  називають геодезичними?
4. Який зміст координат точки в двовимірній геоцентричній полярній еліпсоїдальній системі  $BL$  ? Яке практичне застосування такої системи?
5. Як здійснити перетворення координат з системи  $XYZ$  в систему  $BLH$  ?
6. На якому етапі перетворень використовується метод послідовних наближень?
7. Як здійснити перетворення координат з системи  $BLH$  в систему  $XYZ$  ?
8. Як здійснити контроль перетворення координат з системи  $BLH$  в систему  $XYZ$  ?

## 3. ПЕРЕТВОРЕННЯ КООРДИНАТ В ПРЯМОКУТНІЙ ГЕОЦЕНТРИЧНІЙ ЕКВАТОРІАЛЬНІЙ І ТОПОЦЕНТРИЧНІЙ ГОРИЗОНТНІЙ ПРОСТОРОВИХ СИСТЕМАХ

Мета роботи: виконати пряме і зворотне перетворення координат точки в прямокутній геоцентричній екваторіальній і топоцентричній горизонтній просторових системах.

### Теоретична частина

Просторова топоцентрична горизонтна система координат відноситься до категорії модельних об'єктоцентричних систем з положенням початку відліку в довільній точці простору  $t.A$  (найчастіше – на топографічній поверхні Землі) та основною відліковою координатною площиною земного горизонту.

Взаємне положення точок  $A$  і  $P$  у просторовій топоцентричній горизонтній системі з початком у точці  $A$  може бути визначене прямокутними координатами  $X', Y', Z'$  або полярними координатами  $s, A_{AP}, z$ .

Площина горизонту встановлюється ортогонально до напрямів визначальних прямих в основних геоцентричних системах. Внаслідок цього виокремлюють наступні **різновиди просторової топоцентричної горизонтної системи**.

1. Площина горизонту ортогональна до напрямку радіусу  $r = OA$  просторової геоцентричної екваторіальної полярної сферичної системи координат  $r\Phi\Lambda$  (див. рис. 5). Тоді  $X'Y'Z'$  – це **просторова прямокутна топоцентрична горизонтна сферична система**. Тут початкова вісь координат  $AX'$  направлена в північному напрямі вздовж меридіана т.А як дотична до нього у цій точці, вісь  $AY'$  ортогональна до неї, вісь  $AZ'$  ортогональна двом попереднім і є продовженням напрямку радіусу  $r = OA$ . Осі  $AX'$  та  $AY'$  задають площину горизонту. Отже, площина горизонту є дотичною до сфери радіусу  $r = OA$  у т.А. Початкова вісь  $AX'$  розташована зліва у відношенні до осі  $AY'$ , тому таку систему називають лівою (лівосторонньою). На рис. 5 показано розташування осей систем  $X'Y'Z'$  та  $r\Phi\Lambda$  у відношенні до осей системи  $XYZ$ .

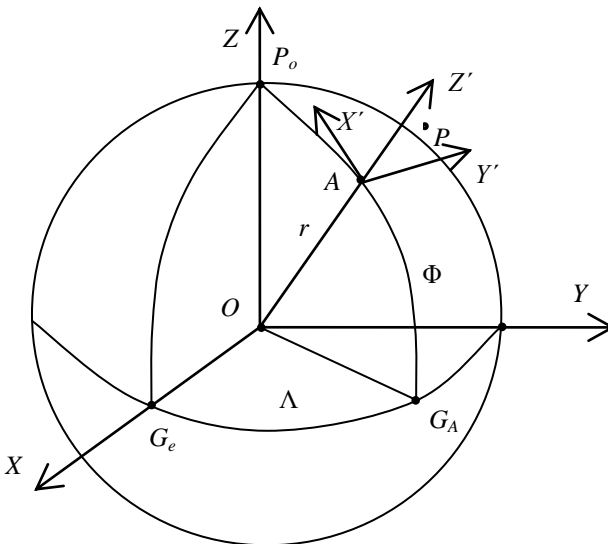


Рис. 5. Просторова прямокутна топоцентрична горизонтна сферична система координат  $X'Y'Z'$  (ліва)

2. Площина горизонту ортогональна до напрямку нормалі  $An$  до поверхні еліпсоїда в т.А в просторовій геоцентричній полярній еліпсоїдальній системі координат  $BLH$ . У цьому випадку достатньо використати двовимірний різновид системи  $BLH$  – двовимірну геоцентричну екваторіальну еліпсоїдальну полярну систему координат  $BL$  (див. рис.6). Тепер  $X'Y'Z'$  – це ліва **просторова прямокутна топоцентрична горизонтна еліпсоїдальна система**. Тут початкова вісь координат  $AX'$  розташована у площині геодезичного меридіана  $P_NAG_AO$  початкової точки відліку  $A$  ( $G_A$  – точка перетину геодезичного меридіана т.А і екватора). Вісь  $AX'$  направлена в північному напрямі вздовж геодезичного меридіана т.А як дотична до нього у цій точці. Вісь  $AY'$  ортогональна до осі  $AX'$ , вісь  $AZ'$  ортогональна двом попереднім і є продовженням напрямку нормалі  $An$ . Аналогічно попередньому випадку, осі  $AX'$  та  $AY'$  задають площину горизонту, але тут вона є дотичною до еліпсоїда у т.А. На рис. 6 показано розташування осей лівої системи  $X'Y'Z'$  та системи  $BL$  у відношенні до осей правої системи  $XYZ$ .

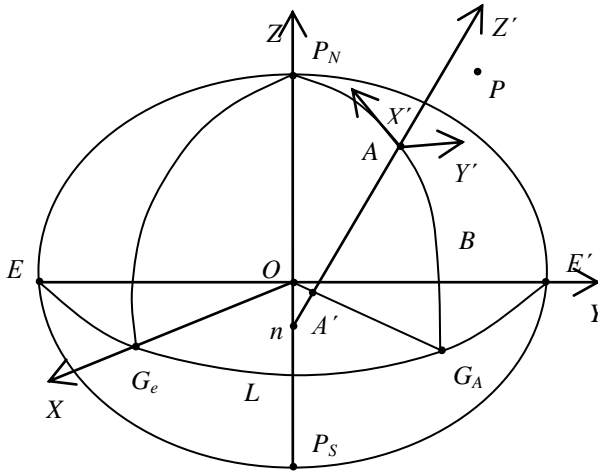


Рис. 6. Просторова прямокутна топоцентрична горизонтна еліпсоїдальна система координат  $X'Y'Z'$  (ліва)

3. Площина горизонту ортогональна до напрямку прямої виснової лінії в двовимірній геоцентричній екваторіальній полярній астрономічній системі координат  $\varphi\lambda$  ( $\varphi\lambda$  – астрономічні широта і довгота). У цьому випадку  $X'Y'Z'$  – це ліва **просторова прямокутна топоцентрична горизонтна астрономічна система**. Такий різновид відрізняється від попереднього тим, що початкова вісь координат  $AX'$  розташована у площині астрономічного меридіана

початкової точки відріку  $A$ , а вісь  $AZ'$  є продовженням напрямку прямої лінії.

Незалежно від різновиду, взаємне положення точок  $A$  і  $P$  у лівій просторовій топоцентричній горизонтній системі з початком у т. $A$  характеризують **прямокутні координати**  $X', Y', Z'$ , як це показано на рис. 7. Визначальними для координат  $X', Y', Z'$  точки  $P$  є:

- ортогональна проекція  $P_1$  точки  $P$  на площину горизонту  $AX'Y'$ ;
  - проекції точки на осі координат  $AX'$  (т.  $P_2$ ),  $AY'$  (т.  $P_3$ ),  $AZ'$  (т.  $P_4$ ).
- Тоді  $X' = AP_2 = P_1P_3$ ;  $Y' = AP_3 = P_1P_2$ ;  $Z' = AP_4 = PP_1$ .

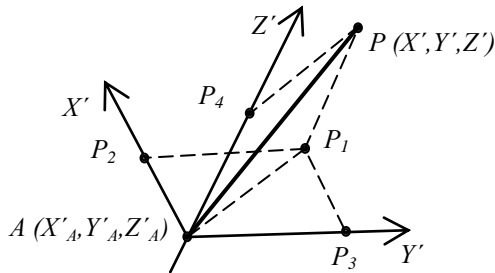


Рис. 7. Координати т. $P$  у лівій просторовій топоцентричній горизонтній прямокутній системі координат  $X', Y', Z'$  з початком у т. $A$

Взаємне положення точок  $A$  і  $P$  у лівій просторовій топоцентричній горизонтній системі з початком у т. $A$  характеризують **полярні координати**  $s, A_{AP}, z$ , як це показано на рис. 8:

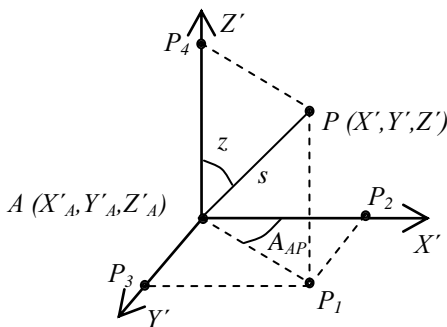


Рис. 8. Координати т. $P$  у лівій просторовій топоцентричній горизонтній полярній системі координат  $s, A_{AP}, z$  з початком у т. $A$

- топоцентрична просторова відстань  $s = AP$  ;
- геодезичний азимут  $A_{AP}$  – двограний кут, утворений площиною меридіана т.А (координатна площина  $AX'Z'$ ) і площиною  $AP_1PP_4$ . У площині горизонту  $AX'Y'$  це плоский кут  $A_{AP} = \angle P_2AP_1$  ;
- геодезична зенітна відстань  $z = \angle P_4AP$  – кут з вершиною у т.А, утворений віссю  $AZ'$  та лінією  $s = AP$  (топоцентрична відстань).

Координати  $X', Y', Z'$  чи  $s, A_{AP}, z$  для будь-якої точки простору однозначно можна обчислити через її координати у системах  $XYZ$  та  $BL$ . Взаємозв'язки координат у цих системах виражаються наступними співвідношеннями.

1. Перетворення  $X, Y, Z \Rightarrow X', Y', Z'$  та  $X', Y', Z' \Rightarrow X, Y, Z$  :

$$\begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix} = G^T \cdot \begin{bmatrix} X - X_A \\ Y - Y_A \\ Z - Z_A \end{bmatrix} ;$$

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{bmatrix} + G \cdot \begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix}$$

або еквівалентна формула

$$\begin{bmatrix} X - X_A \\ Y - Y_A \\ Z - Z_A \end{bmatrix} = G \cdot \begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix} .$$

Матриця переходу  $G$  має елементи:

$$G = \begin{bmatrix} g_{11} = -\sin B_A \cdot \cos L_A & g_{12} = -\sin L_A & g_{13} = \cos B_A \cdot \cos L_A \\ g_{21} = -\sin B_A \cdot \sin L_A & g_{22} = \cos L_A & g_{23} = \cos B_A \cdot \sin L_A \\ g_{31} = \cos B_A & g_{32} = 0 & g_{33} = \sin B_A \end{bmatrix} .$$

У поданих формулах прийнято наступні позначення:  $G^T$  – транспонована матриця до матриці  $G$ ;  $X_A, Y_A, Z_A$  – геоцентричні прямокутні координати початку відліку топоцентричної системи у т.А. Необхідно взяти до уваги, що у топоцентричній системі координати початку відліку  $X'_A = Y'_A = Z'_A = 0$  ;  $X, Y, Z$  – геоцентричні прямокутні координати заданої точки простору  $P$ , яким відповідають топоцентричні прямокутні координати  $X', Y', Z'$  відносно початку відліку в т.А ;  $B_A, L_A$  – геоцентричні еліпсоїдальні координати початку відліку топоцентричної системи у т.А . Широта  $B_A$  обчислюється методом послідовних наближень. Для першого наближення:

$$B_0 = \arctg \frac{Z_A}{D(1 - e^2)} ;$$

$D = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2}$  – екваторіальна відстань. Наступні наближення:

$$B_i = \arctg \frac{Z_A + e^2 \cdot N_{i-1} \cdot \sin B_{i-1}}{D}$$

або еквівалентна формула

$$B_i = \arctg \frac{Z_A}{D - e^2 \cdot N_{i-1} \cdot \cos B_{i-1}} ;$$

$N_{i-1} = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_{i-1}}}$  – радіус кривини перерізу першого вертикалу в

точці на широті  $B_{i-1}$ ;  $a$ ,  $e$  – велика піввісь та перший ексцентриситет еліпсоїда. Ітерації тривають включно до досягнення результату обчислень, коли значення широти поточного результату  $B_i$  буде дорівнювати отриманому в попередньому наближенні  $B_{i-1}$ .

Довгота 
$$L_A = \arctg \frac{Y_A}{X_A}.$$

2. Перетворення  $X', Y', Z' \Rightarrow s, A_{AP}, z$  та  $s, A_{AP}, z \Rightarrow X', Y', Z'$ :

$$s = \sqrt{D'^2 + Z'^2} ;$$

$$A_{AP} = \arctg \frac{Y'}{X'} ;$$

$$z = \arctg \frac{D'}{Z'} .$$

Тут позначено  $D' = \sqrt{X'^2 + Y'^2}$  – горизонтна відстань.

$$X' = s \cdot \sin z \cdot \cos A_{AP} ;$$

$$Y' = s \cdot \sin z \cdot \sin A_{AP} ;$$

$$Z' = s \cdot \cos z .$$

### Хід роботи

Задано координати пунктів опорної геодезичної мережі УПС-GNSS (в позначеннях точок  $A$  і  $P$ ) в просторовій прямокутній геоцентричній системі координат  $XYZ$ . Вхідні дані наведено в додатку 2.

В процесі подальших обчислень використовуються сталі параметри загального земного еліпсоїда обертання: велика піввісь  $a = 6378137$  м; квадрат першого ексцентриситету  $e^2 = 0.00669438$ .

1. Обчислити координати т. $A(B_A, L_A)$  в двовимірній геоцентричній полярній еліпсоїдальній системі  $BL$ .



2. Сформувати матрицю переходу  $G$ .
3. Обчислити координати т.  $P(X', Y', Z')$  за координатами  $P(X, Y, Z)$ .
4. Здійснити зворотнє перетворення – обчислити координати т.  $P(X, Y, Z)$  за координатами  $P(X', Y', Z')$ . Виконати контроль перетворення.
5. Обчислити координати т.  $P(s, A_{AP}, z)$  за координатами  $P(X', Y', Z')$ .
6. Здійснити зворотнє перетворення – обчислити координати т.  $P(X', Y', Z')$  за координатами  $P(s, A_{AP}, z)$ . Виконати контроль перетворення.

### Питання для самоконтролю

1. Який зміст координат у просторовій топоцентричній горизонтній прямокутній системі  $X'Y'Z'$  ?
2. Який принцип встановлення основної відлікової площини у просторовій топоцентричній горизонтній прямокутній системі  $X'Y'Z'$  ?
3. Яка відмінність між сферичною, еліпсоїдальною та астрономічною просторовими топоцентричними горизонтними системами координат?
4. Чому систему просторових топоцентричних горизонтних прямокутних координат  $X'Y'Z'$  називають лівою?
5. Яка відмінність між правою та лівою просторовими прямокутними системами координат?
6. Який зміст координат у просторовій топоцентричній горизонтній полярній системі  $sA_{AP} z$  ?
7. Як здійснити перетворення координат з системи  $XYZ$  в систему  $X'Y'Z'$  ?
8. Як здійснити перетворення координат з системи  $X'Y'Z'$  в систему  $XYZ$  ?
9. Як здійснити перетворення координат з системи  $X'Y'Z'$  в систему  $sA_{AP} z$  ?
10. Як здійснити перетворення координат з системи  $sA_{AP} z$  в систему  $X'Y'Z'$  ?

### Література

1. Марченко О.М. Референцні системи в геодезії : навч. посібник / О. М. Марченко, К. Р. Третяк, Н. П. Ярема. Львів : Львівська політехніка, 2013. 216 с.
2. Машимов М. М. Теоретическая геодезия : справочное пособие. Москва : Недра, 1991. 268 с. URL: <http://www.geokniga.org/bookfiles/geokniga-mashimov-mm-geodeziya-teoreticheskaya-geodeziya-1991.pdf>
3. Савчук С. Г. Вища геодезія : навч. посібник. Житомир ЖДТУ, 2005. 315 с.
4. Савчук С. Г. Вища геодезія : підручник, видання друге, доповнене. Львів : Львівська політехніка, 2005. 315 с. URL: <https://studfiles.net/preview/5198885/>

Координати пунктів опорної мережі УПС-GNSS в просторовій прямокутній геоцентричній системі координат XYZ та їх середні квадратичні похибки (вхідні дані до виконання завдань 1,2)

Варіанти завдань	Пункт	X (м) $m_X$ (м)	Y (м) $m_Y$ (м)	Z (м) $m_Z$ (м)
1	<i>GLSV</i>	3512888,954 0,001	2068979,882 0,001	4888903,200 0,001
2	<i>SULP</i>	3765296,818 0,001	1677559,349 0,002	4851297,495 0,002
3	<i>CNIV</i>	3397785,181 0,001	2066990,520 0,001	4969811,521 0,003
4	<i>DNMU</i>	3468977,261 0,002	2434669,078 0,002	4750719,996 0,002
5	<i>KHAR</i>	3312984,200 0,001	2428203,522 0,001	4863307,874 0,002
6	<i>MARP</i>	3451047,042 0,001	2647880,796 0,001	4649213,547 0,002
7	<i>KRRS</i>	3579308,775 0,002	2259514,663 0,002	4755359,945 0,004
8	<i>MIKL</i>	3698553,985 0,001	2308676,002 0,001	4639769,493 0,001
9	<i>MKRS</i>	3915409,124 0,002	1638600,229 0,002	4745087,111 0,003
10	<i>POLV</i>	3411557,346 0,001	2308676,003 0,001	4834396,887 0,001
11	<i>PRYL</i>	3425673,207 0,002	2174035,392 0,002	4904999,871 0,004
12	<i>SMLA</i>	3546267,623 0,002	2204464,002 0,002	4805379,225 0,003
13	<i>UZHL</i>	3907587,455 0,001	1602428,695 0,001	4763783,762 0,001
14	<i>ZPRS</i>	3507143,271 0,002	2470487,705 0,002	4704181,545 0,003
15	<i>VNRS</i>	3670860,523 0,002	1987087,216 0,002	4806792,862 0,004

Комбінації пунктів опорної мережі УПС-GNSS  
(вхідні дані до виконання завдання 3)

Варіанти завдань	Пункт	X (м) $m_X$ (м)	Y (м) $m_Y$ (м)	Z (м) $m_Z$ (м)
1	A : GLSV	Координати пунктів у просторовій прямокутній геоцентричній системі координат XYZ подано в додатку 1		
	P : SULP			
2	A : SULP			
	P : VNRS			
3	A : CNIV			
	P : ZPRS			
4	A : DNMU			
	P : UZHL			
5	A : KHAR			
	P : SMLA			
6	A : MARP			
	P : PRYL			
7	A : KRRS			
	P : POLV			
8	A : MIKL			
	P : MKRS			
9	A : MKRS			
	P : UZHL			
10	A : POLV			
	P : ZPRS			
11	A : PRYL			
	P : VNRS			
12	A : SMLA			
	P : CNIV			
13	A : UZHL			
	P : SULP			
14	A : ZPRS			
	P : DNMU			
15	A : VNRS			
	P : KRRS			