Міністерство освіти і науки України
Національний університет водного господарства та природокористування
Кафедра мостів і тунелів, опору матеріаліві будівельної механіки

03-05-64М

Національний університет водного господарства та природокористування

Методичні вказівки та завдання до самостійної роботи і лабораторних занять з навчальної дисципліни «Інформатика та комп'ютерна техніка» (ET MS Excel, матричні операції, програма «Пошук розв'язку») для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня освітньо-професійних програм спеціальності 192 «Будівництво та цивільна інженерія» всіх форм навчання

Рекомендовано науково-методичною радою з якості ННІ будівництва та архітектури
Протокол № 2 від 01.10.2020 р.

Рівне – 2020

Методичні вказівки та завдання до самостійної роботи і лабораторних занять з навчальної дисципліни «Інформатика та комп'ютерна техніка» (ET MS Excel, матричні операції, програма «Пошук розв'язку») для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня освітньо-професійних програм спеціальності 192 «Будівництво та цивільна інженерія» всіх форм навчання [Електронне видання] / Кундрат М.М. – Рівне: НУВГП, 2020. – 24 с.

Національний університет водного господарства та природокористування

Укладач: Кундрат М. М., д.т.н., професор кафедри мостів і тунелів, опору матеріалів і будівельної механіки.

Відповідальний за випуск: Трач В. М., д.т.н., професор, завідувач кафедри мостів і тунелів, опору матеріалів і будівельної механіки.

Керівник групи забезпечення
спеціальності проф. Бабич Є. М.

© Кундрат М. М., 2020
© НУВГП, 2020

З М І С Т

	стор.
Вступ	4
Формування матриць	4
Додавання матриць	5
Множення матриці на число	6
Множення матриць	7
Транспонування матриць	8
Обернена матриця	10
Обчислення визначника матриці	11
Приклад матричних обчислень	11
Питання для самоконтролю	12
Розв’язування систем рівнянь	14
Застосування оберненої матриці	14
Підпрограма «Поиск решения»	16
Приклад розв’язання системи двох нелінійних рівнянь	18
Приклад розв’язання системи рівнянь	19
Питання для самоконтролю	21
Рекомендовані завдання	22
Завдання 1	22
Завдання 2	23
Завдання 3	23
Література	24

Національний університет водного господарства та природокористування

Вступ

Метою навчального предмету є формування у майбутніх фахівців сучасного рівня інформаційної та комп'ютерної культури, набуття практичних навичок роботи із сучасним програмним забезпеченням та системного підходу до розв'язування інженерно-технічних задач з допомогою ПК, використання інформації і сучасних засобів комп'ютерного моделювання для вирішення різноманітних завдань у практичній діяльності за фахом.

Основним завданням навчальної дисципліни є теоретична та практична підготовка майбутніх фахівців з питань використання сучасного програмного забезпечення та комп'ютерного моделювання.

Електронні таблиці (ЕТ) Microsoft Excel призначені насамперед для обробки великих об'ємів даних з використанням нескладних математичних операцій. Їх широкому застосуванню сприяли насамперед простота у використанні та універсальність. У цій частині подамо декілька прикладів їх можливого застосування при розв'язанні математичних задач насамперед інженерного спрямування.

Національний університет водного господарства та природокористування

Формування матриць.

Матрицею будемо називати прямокутну таблицю чисел, наприклад,

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -5 \\ 1 & 7 & -8 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -8 \\ 3 & 2 & -3 \\ 4 & 7 & 6 \end{pmatrix}.$$

Якщо матриця має, наприклад, 3 рядки та 3 стовпці, то говорять, що вона має розмірність три на три і пишуть (3×3). Елемент матриці A, розміщений в 3-му рядку та в 5-му стовпці, позначається як a_{35}. В загальному випадку a_{ij} – це елемент матриці A, розміщений в i-му рядку та j-му стовпці.

Елементи матриці можуть задаватися безпосередньо (як вище) та можуть обчислюватися за формулами як функції своїх індексів (номерів рядків та стовпців).

Приклад. Сформувати матрицю розмірності 4×4 з елементами, які визначаються за формулою $a_{ij}=i^2+j^3$.

Розв'язання. Вводимо в клітини A2:A5 номери рядків (індекс i). Вводимо в клітини B1:E1 номери стовпців (індекс j). Вводимо в клітину B2 формулу i^2+j^3 (=$A2^2+B$1^3) і копіюємо її вправо та вниз.

A	B	C	D	E
i/j	1	2	3	4
1	=$A2^2+B$1^3	*Копіюємо вправо*		
2	*Копіюємо вниз*			
3				

Так як номери рядків і стовпців розміщені в стовпці А та рядку 1 відповідно і не повинні змінюватися при копіюванні, звертання до стовпця А та рядка 1 робимо абсолютними. Копіюємо формулу з клітини В2 вниз та вправо. Потрібна матриця знаходиться в діапазоні клітин В2:Е5.

	A	B	C	D	E
1	*i/j*	1	2	3	4
2	1	2	9	28	65
3	2	5	12	31	68
4	3	10	17	36	73
5	4	17	24	43	80

Національний університет водного господарства та природокористування

Додавання матриць

Додавати матриці можна лише у випадку, якщо вони мають однакову розмірність, тобто кількість рядків і стовпців у кожній з матриць збігається.

Сумою двох матриць $A=\left(a_{ij} \right)$ та $B=\left(b_{ij} \right)$ називають матрицю $C=\left(c_{ij} \right)$ такої ж розмірності, елементи якої c_{ij} дорівнюють сумам відповідних елементів матриць A і B, тобто $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$. Аналогічно різниця матриць: $c_{ij}=a_{ij}-b_{ij}$.

Приклад.

B12 =B4+B8

	A	B	C	D	E	F
1	**Додавання матриць**					
2	Матриці повинні мати однакову розмірність					
3						
4	A[3;2]	-3	5			
5		7	4			
6		6	10			
7						
8	B[3;2]	6	8			
9		-5	2			
10		2	0			
11						
12	C=A+B	3	13			
13		2	6			
14		8	10			

Введемо в електронну таблицю в діапазони комірок B4:C6 та B8:C10 відповідно матриці A і B розмірності 3×2. Запишемо в комірку B12 формулу для додавання вмісту комірок B4 і B8: =B4+B8. Результатом додавання буде елемент c_{11} верхнього лівого кута матриці C, обчислений як $a_{11}+b_{11}$. Скопіюємо цю формулу в діапазон комірок B12:C14. Формули матимуть вигляд

=B4+B8	=C4+C8
=B5+B9	=C5+C9
=B6+B10	=C6+C10

.

MS Excel виконає поелементне додавання матриць.

Множення матриці на число

Добутком матриці $A=\left(a_{ij} \right)$ на число α називають матрицю, елементи якої одержані множенням всіх елементів матриці *A* на число α.

Приклад.

B9 =$B$3*B5

	A	B	C	D
1	**Множення матриці на число**			
2				
3	Число	5		
4				
5	A[3;2]	-3	5	
6		7	4	
7		6	10	
8				
9	C[3;2]	-15	25	
10		35	20	
11		30	50	

Введемо в електронну таблицю число (в комірку B3) і матрицю, яку на нього потрібно помножити (в діапазон комірок B5:C7). Запишемо в комірку B9 формулу для множення вмісту комірки B3 (число) на вміст комірки B5 (верхній лівий елемент матриці a_{11}). Формула матиме вигляд =$B$3*B5.

Адреса комірки, в якій міститься число, вибрана абсолютною, про що свідчать знаки долара в адресі. При копіюванні цієї формули в діапазон B9:C11 адреса комірки $B$3 залишиться незмінною і всі формули в комірках діапазону будуть посилатися на число в цій комірці:

=$B$3*B5	=$B$3*C5
=$B$3*B6	=$B$3*C6
=$B$3*B7	=$B$3*C7

.

MS Excel виконає множення матриці на число.

Множення матриць

Нехай $A=\left(a_{ij} \right)$ та $B=\left(b_{ij} \right)$ – матриці розмірності $m\times p$ і $p\times n$ відповідно. Для цих матриць визначена матриця C розмірності $m\times n$, яку називають добутком $A\times B$ і елементи якої обчислюються за формулою

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj}\quad (i=1..m,...j=1..n).$$

Отже, щоб отримати елемент, що стоїть у i–му рядку та j–му стовпці добутку матриць, треба елементи i–го рядка першої матриці перемножити на відповідні елементи j–го стовпця другої матриці і отримані добутки додати.

Приклад.

B11 fx =$B4*B$8+$C4*B$9

	A	B	C	D	E	F
1		**Множення матриць**				
2	Кіл-ть стовпців матриці А дорівнює к-ті рядків матриці В					
3						
4	A[3;2]	-3	5			
5		7	4			
6		6	10			
7						
8	B[2;4]	3	2	4	6	
9		1	5	1	7	
10						
11	C[3;4]	-4	19	-7	17	
12		25	34	32	70	
13		28	62	34	106	

Введемо в діапазони комірок B4:C6 та B8:E9 матриці A і B розмірності 3×2 і 2×4. Запишемо в B11 формулу для обчислення елементу c_{11} матриці C як $c_{11}=a_{11}\cdot b_{11}+a_{12}\cdot b_{21}$. Формула матиме вигляд =$B4*B$8+$C4*B$9.

Дальше застосуємо копіювання клітини B11 в діапазон клітин B11:B13.

=$B4*B$8+$C4*B$9	=$B4*C$8+$C4*C$9	=$B4*D$8+$C4*D$9	=$B4*E$8+$C4*E$9
=$B5*B$8+$C5*B$9	=$B5*C$8+$C5*C$9	=$B5*D$8+$C5*D$9	=$B5*E$8+$C5*E$9
=$B6*B$8+$C6*B$9	=$B6*C$8+$C6*C$9	=$B6*D$8+$C6*D$9	=$B6*E$8+$C6*E$9

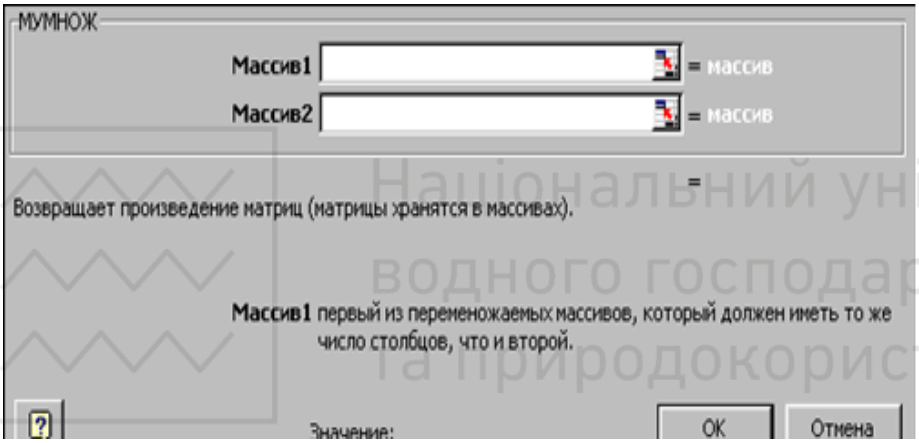
В результаті отримаємо матрицю C розмірності 3×4.

Спосіб 2. Множення матриць $A\times B=C$ виконуємо за допомогою вбудованої функції

=МУМНОЖ(масив1; масив2).

Національний університет водного господарства та природокористування

Введемо матриці A та B як подано на рис. вище. Далі виділимо діапазон клітин B11:E13, в яких буде розташована матриця результату C. Викликаємо вбудовану функцію =МУМНОЖ(масив1; масив2), яка виконає множення матриць. У додатковому вікні, що з'явиться, вказуємо діапазони комірок, в яких міститься матриця A – «*Массив*1» (B4:C6) і матриця B – «*Массив*2» (B8:E9). Для завершення множення необхідно натиснути комбінацію клавіш [Ctrl+Shift+Enter] (але не клавішу ОК)!



Така комбінація використовується для введення функції у всі комірки діапазону B11:E13. Натиснення однієї клавіші [Enter] зумовить до введення формули лише в комірку B11 і в електронній таблиці буде відображено лише один елемент матриці-добутку C (c_{11}).

Який спосіб множення матриць з поданих двох зручніший?

Транспонування матриць

Транспонуванням матриці $A=\left(a_{ij} \right)$ називаємо таке її перетворення до вигляду $B=\left(b_{ij} \right)$, при якому її рядки і стовпці міняються місцями, тобто елементи $b_{ij}=a_{ji}$. Транспонування матриці можна здійснити двома способами:

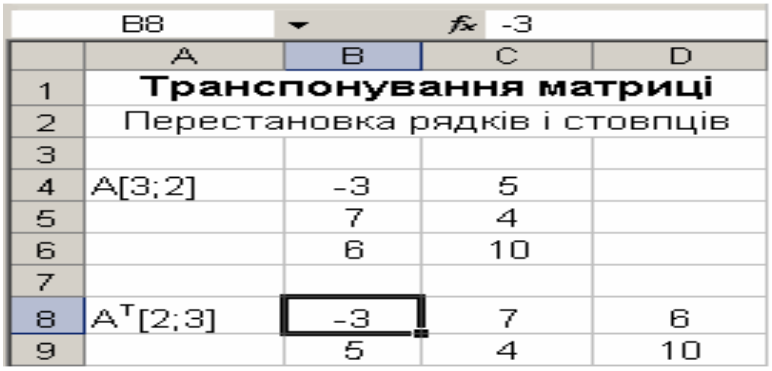
– переставляючи окремо кожне значення матриці;

– за допомогою вбудованої функції масиву ТРАНСП().

Застосуємо *перший спосіб*.

Введемо в діапазон комірок B4:C6 матрицю A розмірності 3×2. Виділимо вказаний діапазон (B4:C6) і скопіюємо його в буфер обміну через пункти меню *Правка–Копировать*. Помістимо курсор у комірку B8, де буде розташовано верхнє ліве значення транспонованої матриці і виконаємо команду *Правка–Специальная вставка.*

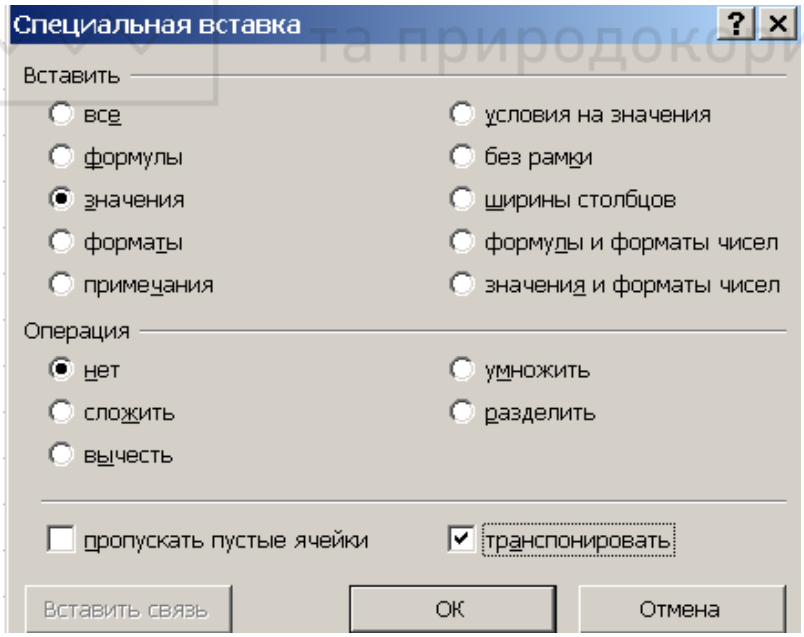
Національний університет водного господарства та природокористування



	A	B	C	D
1	**Транспонування матриці**			
2	Перестановка рядків і стовпців			
3				
4	A[3;2]	-3	5	
5		7	4	
6		6	10	
7				
8	A^T[2;3]	-3	7	6
9		5	4	10

У додатковому вікні *Специальная вставка*, що відобразиться, прилаштовуємо прапорець біля пункту *транспонировать* і перемикач *Вставить* в положення *значения*. Натискаємо кнопку ОК.

MS Excel розмістить транспоновану матрицю в комірках діапазону B8:D9.



Другий спосіб. Введемо в електронну таблицю в діапазон комірок B4:C6 матрицю A розмірності 3×2 (як і вище). Виділимо діапазон комірок B8:D9, в яких буде розміщено результат. Викликаємо функцію масиву =ТРАНСП(массив). Далі у вікні вказуємо діапазон комірок, в якому міститься задана матриця A (B4:C6). Натискаємо комбінацію клавіш [Ctrl+Shift+Enter]. У комірках B8:D9 відобразиться результат транспонування.

Який спосіб простіший?

Перший спосіб простіший, проте його використання не дає можливості виконати автоматичний перерахунок результатів при зміні елементів матриці.

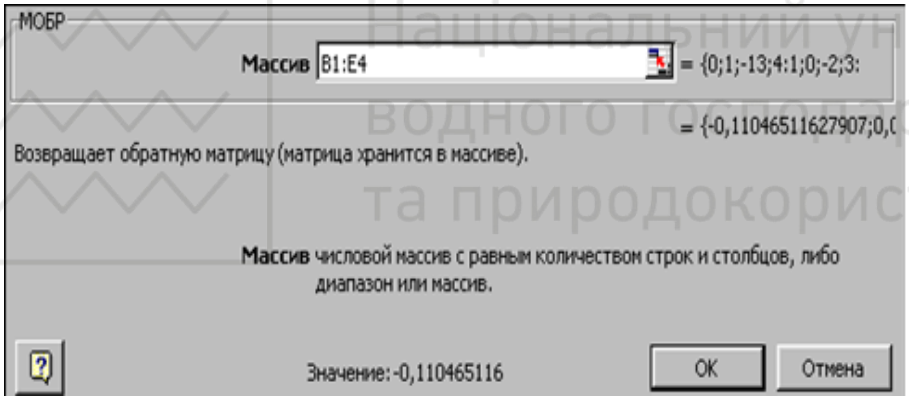
Обернена матриця

Операція обернення може бути застосована лише до квадратних неособливих (невироджених) матриць. Оберненою матрицею по відношенню до заданої називається матриця, множення на яку заданої матриці як справа так і зліва дає в результаті одиничну матрицю. За визначенням

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E,$$

де A – квадратна неособлива матриця; E – одинична матриця.

Обернення виконують за допомогою вбудованої функції МОБР().



Приклад. Введемо в таблицю в діапазон комірок B4:D6 матрицю A розмірності 3×3 (рис. нижче). Виділимо діапазон комірок B8:D10, в яких буде розміщено результат. Викликаємо функцію масиву =МОБР(массив), яка реалізує транспонування матриці. Далі у вікні, що з'явиться, вказуємо діапазон комірок матриці A, яку обертаємо (B4:D6). Натиснути комбінацію клавіш [Ctrl+Shift+Enter]. У комірках діапазону B8:D10 відобразиться обернена матриця.

B8 {=МОБР(B4:D6)}

	A	B	C	D	E	F
1	**Обернення матриць**					
2	Матриця повинна бути квадратною і неособливою					
3						
4	A[3;3]	2	5	1		
5		1	2	4		
6		8	5	6		
7						
8	A^{-1} [3;3]	-0,0777	-0,2427	0,17476		
9		0,25243	0,03883	-0,06796		
10		-0,1068	0,29126	-0,00971		

Національний університет водного господарства та природокористування

Обчислення визначника матриці

Для обчислення визначника матриці використовується вбудована функція масиву МОПРЕД().

Приклад. Введемо в діапазон комірок B4:D6 матрицю A розмірності 3×3. Переведемо курсор в комірку таблиці B7, в якій буде розміщено результат. Викликаємо функцію масиву МОПРЕД(массив), далі у вікні вказуємо діапазон комірок, в якому міститься матриця A, для якої знаходиться визначник (B4:D6).

B7 =МОПРЕД(B4:D6)

	A	B	C	D	E	F
1	**Обчислення визначника матриці**					
2	Матриця повинна бути квадратною і неособливою					
3						
4	A[3;3]	2	5	1		
5		1	2	4		
6		8	5	6		
7	Визначник:	103				
8						
9	A[3;3]	1	2	5		
10		3	7	2		
11		4	9	7		
12	Визначник:	0	-	матриця вироджена		

Національний університет водного господарства та природокористування

Зауважимо, якщо деяка комірка діапазону заданої матриці порожня або містить текст, то функції МОБР(), МОПРЕД() повертають значення помилки #ЗНАЧ!.

Окрім того, вказані функції виконують обчислення з точністю 15–16 значущих цифр. Зокрема, визначник сингулярної (особливої) матриці може відрізнятися від нуля на число 10^{-16}.

У другому прикладі на поданому вище фрагменті таблиці обчислюється визначник для матриці, розташованої в діапазоні комірок B9:D11. Оскільки рядки цієї матриці лінійно залежні (третій рядок є лінійною комбінацією перших двох), її визначник дорівнює нулю (клітина B12).

Приклад матричних обчислень

Обчислити матрицю C за формулою $C = A^2 + 2 \cdot A \cdot B$,

де $A = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -2 \\ 2 & -13 & 3 \\ 11 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 11 \\ 4 & 5 & 5 \\ 11 & 3 & 7 \end{pmatrix}$.

Перший спосіб.

– Введемо дані на робочий лист;

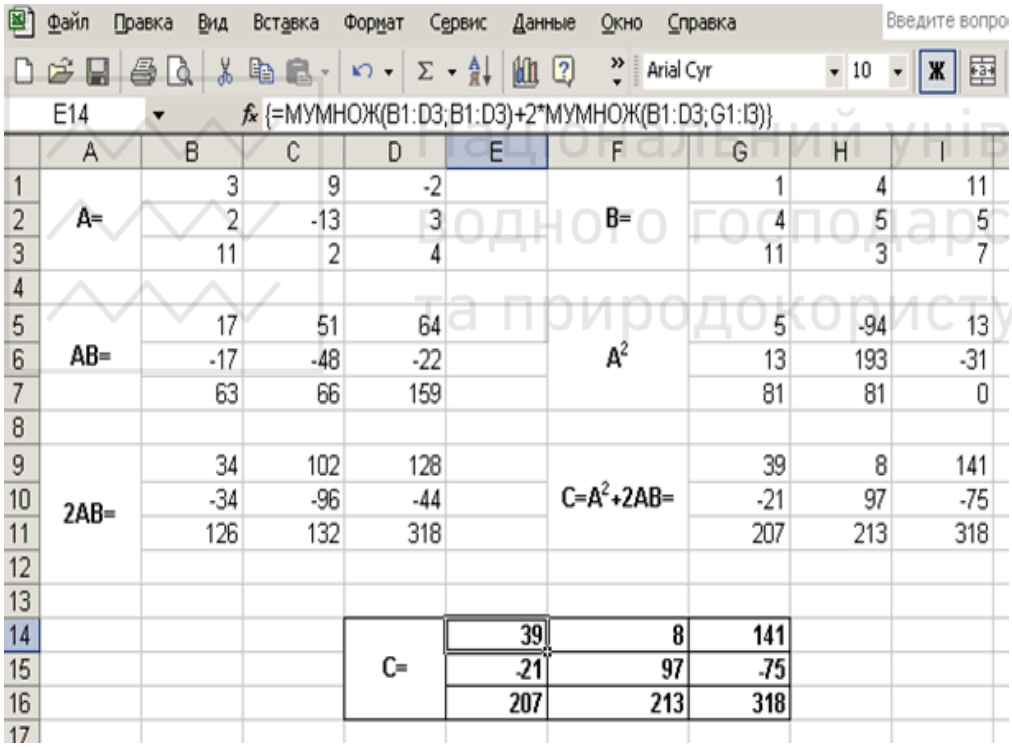
– для множення матриці A на матрицю B, виділимо діапазон B5:D7 і використаємо функцію МУМНОЖ(B1:D3;G1:I3);

– результат обчислення $A^2 = A \cdot A$ помістимо в діапазон клітин G5:I7 за формулою МУМНОЖ(B1:D3;B1:D3);

– виділимо клітини B9:D11 та введемо формулу =2*B5:D7;

– додавання матриць аналогічно. Виділимо діапазон G9:I11 і введемо формулу =B9:D11+ G5:I7.

Результат виконання.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		3	9	-2			1	4	11
2	A=	2	-13	3		B=	4	5	5
3		11	2	4			11	3	7
4									
5		17	51	64			5	-94	13
6	AB=	-17	-48	-22		A^2	13	193	-31
7		63	66	159			81	81	0
8									
9		34	102	128			39	8	141
10	2AB=	-34	-96	-44		$C=A^2+2AB=$	-21	97	-75
11		126	132	318			207	213	318
12									
13									
14					39	8	141		
15				C=	-21	97	-75		
16					207	213	318		
17									

Другий спосіб. У рядку формул робочого листа на рисунку показано як можна обчислити матрицю C одним виразом. Курсор поміщено у клітину E14, формулу читаємо у рядку формул.

Питання для самоконтролю

– Якими способами можна задавати матрицю або вектор?

– Як змінити значення елемента матриці?

– Які матриці можна додавати?

– Що розуміємо під різницею двох матриць?

– Як перемножити матрицю на число?

– Як обчислюються добуток двох матриць?

– Яку комбінацію клавіш необхідно натиснути, щоб отримати результат обчислення над матрицями?

Національний університет водного господарства та природокористування

– До чого приведе натиснення клавіші [Enter] для завершення множення матриць?

– Якими способами можна виконати транспонування матриці?

– Як перейти у додаткове вікно *Специальная вставка*?

– Який спосіб транспонування матриці на вашу думку простіший?

– До яких матриць може бути застосована операція обернення?

– За допомогою якої функції виконують обернення матриці?

– Яку комбінацію клавіш необхідно натиснути для завершення операції обернення?

– Яка функція використовується для обчислення визначника?

Національний університ
водного господарства
та природокористуванн

Розв'язування систем рівнянь

Деякі теоретичні аспекти такої задачі та використовувані позначення подано вище. Тут розглянемо два способи розв'язання задачі: перший – з використанням оберненої матриці (система лінійних рівнянь) та другий – з використанням підпрограми «*Поиск решения*» (системи лінійних та нелінійних рівнянь). При цьому окрім розв'язання поставленої задачі ми досягнемо ще двох: навичок виконання матричних операцій в MS Excel та знайомство з елементами застосування важливої надбудови «*Поиск решения*».

Застосування оберненої матриці

Приклад. Розв'яжемо систему лінійних рівнянь з трьома невідомими x_1, x_2, x_3

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 5 \\ x_1 + 5x_2 + 5x_3 &= 10 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 &= 11 \end{aligned}\right\}.$$

Подамо її в матричній формі $Ax = b$,

$$\text{де } A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 5 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

Схема розв'язання може бути наступною.

– Введемо в діапазон комірок A4:C6 матрицю A, а в діапазон D4:D6 – стовпець вільних членів b;

– з допомогою функції масиву МОПРЕД() обчислимо визначник матриці A (системи рівнянь) і результат помістимо в комірці C8. Оскільки $det\, A = 32 \neq 0$, то система має єдиний розв'язок і існує обернена матриця A^{-1};

– з допомогою функції МОБР() знайдемо обернену до матриці A і розташуємо її у комірках діапазону A11:C13;

– як результат множення матриці A на обернену матрицю A^{-1} з використанням функції масиву МУМНОЖ() отримаємо одиничну E, розміщену в діапазоні комірок A16:C18 (для перевірки);

Національний університет водного господарства та природокористування

C8 =МОПРЕД(A4:C6)

	A	B	C	D
1	**Розв'язання системи рівнянь за допомогою оберненої матриці**			
2	Матриця коефіцієнтів			Вектор правої частини
3		A[3;3]		b
4	2	2	1	5
5	1	5	5	10
6	5	1	2	11
7				
8	Визначник:		32	
9				
10		A^{-1}[3;3]		
11	0,156	-0,094	0,156	
12	0,719	-0,031	-0,281	
13	-0,750	0,250	0,250	
14				
15		E=A^{-1}*A		x= A^{-1}*b
16	1	0	0	1,563
17	0	1	0	0,188
18	0	0	1	1,500

Національний університет водного господарства та природокористування

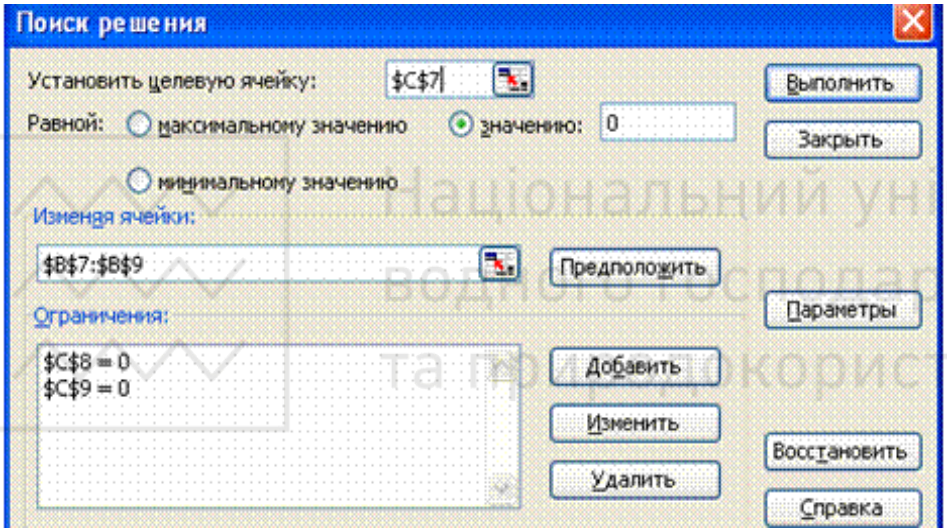
– помноживши обернену матрицю A^{-1} на вектор b, одержимо розв'язок системи лінійних рівнянь, записаний у діапазоні комірок D16:D18.

Отже, $x_1 = 1{,}563;\ x_2 = 0{,}188;\ x_3 = 1{,}500.$

Підпрограма «Поиск решения»

Зазначимо, що підпрограма дає можливість розв'язувати значно ширший клас задач аніж системи рівнянь, чим і пояснюється структура її вікна. Насамперед ця надбудова призначена для розв'язання задач оптимізації.

Області, для яких підбираються оптимальні значення і задаються обмеження, вибираються в діалоговому вікні, яке відкривають за допомогою команди *Сервис–Поиск решения*.



Задачі оптимізації передбачають пошук значень аргументів, що забезпечують функції, яку називають *функцією мети* (чи *цільовою*), мінімальне або максимальне значення при наявності додаткових обмежень. Задачу розв'язання системи рівнянь можна звести до оптимізаційної задачі. Для цього одне з рівнянь (напр., перше) розглядаємо як цільову функцію, а останні $n-1$ рівнянь, що залишаються, розглядаються як система обмежень.

Розглянемо простий *приклад*: розв'яжемо систему рівнянь

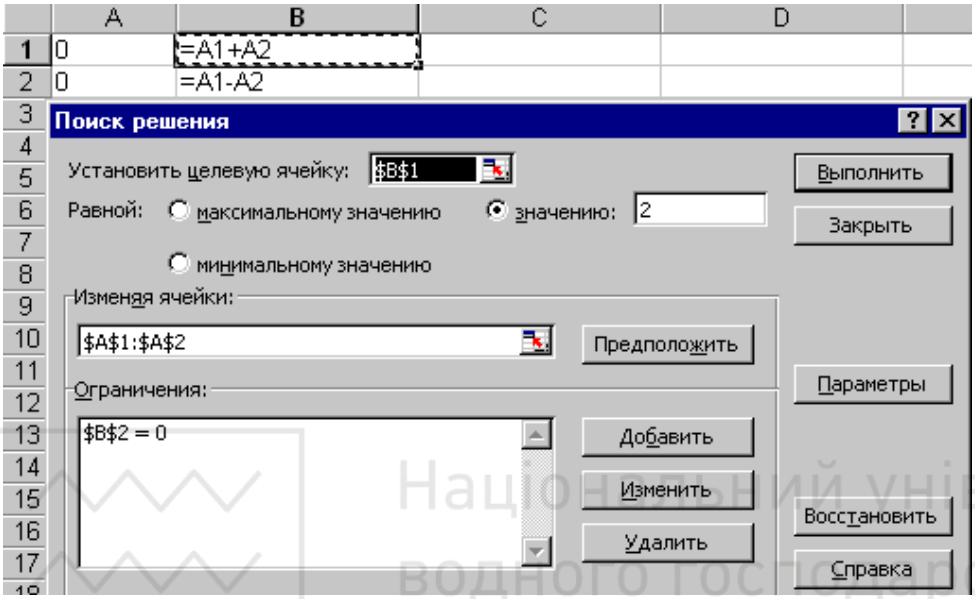
$$\left.\begin{aligned} x+y=2 \\ x-y=0 \end{aligned}\right\}.$$

– Введемо в комірки, призначені для відображення значень розв'язку (A1:A2) довільні величини, що лежать в області визначення (початкові значення);

– в комірки B1 та B2 внесемо формули, по яких повинні обчислюватися праві частини рівнянь (= A1 + A2 та = A1 – A2);

– запустимо програму *Поиск решения* (Solver) з меню *Сервис* (Tools), з'явиться додаткове вікно з яким необхідно попрацювати;

– виберемо одну з комірок, що містять формули, як цільову комірку (напр., $B$1), зробимо її рівною значенню 2;

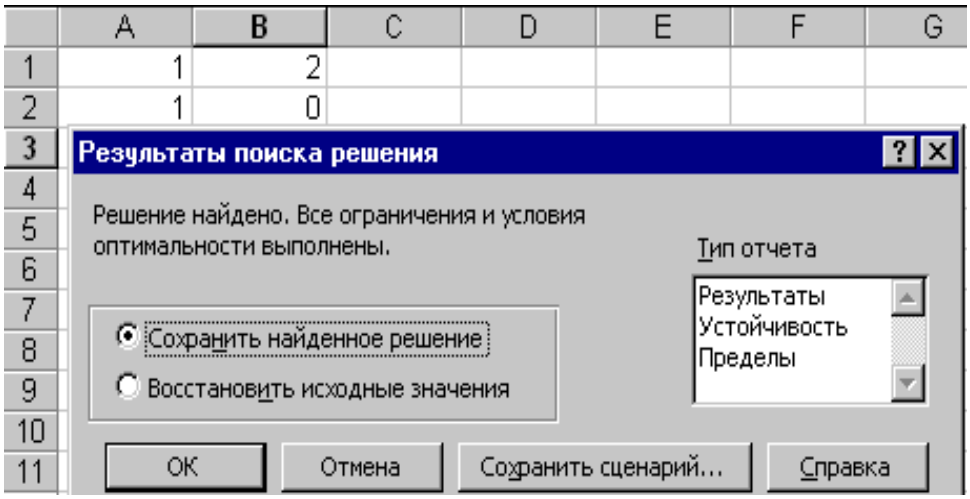


– натиснемо на кнопці *Предположить* (*Guess*) для того, щоб задати комірки A1:A2 – комірки, в яких буде результат пошуку;

– додамо обмеження $\$B\$2 = 0$ (*Добавить*);

– натиснемо на клавіші *Выполнить* (*Solve*).

Результати пошуку відобразяться в призначених для розв'язку комірках (A1:A2), звіт про результати з'явиться на екрані.



Національний університет водного господарства та природокористування

Приклад розв'язання системи двох нелінійних рівнянь

Завдання. Розв'язати систему рівнянь

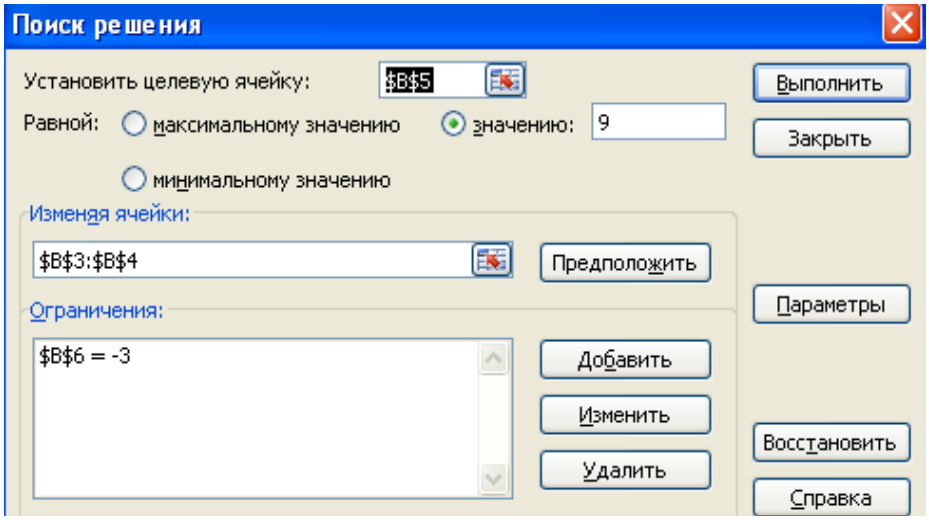
$$\begin{cases} x+4y=9, \\ x^2-2y=-3. \end{cases}$$

Введемо в електронну таблицю вихідні дані і розрахункові формули таким чином:

	A	B
1	Розв'яжіть систему	x+4y=9
2		x^2-2y=-3
3	X=	
4	Y=	
5	рівняння 1	=B3+4*B4
6	рівняння 2	=B3*B3-2*B4

Національний університет водного господарства та природокористування

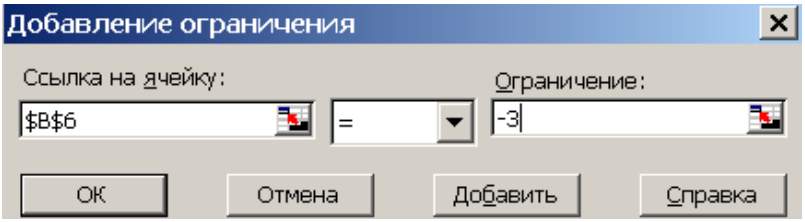
Для розв'язання скористаємося надбудовою «*Поиск решения*» і заповнимо діалогове вікно згідно введених вище формул.



– Вибрати цільову комірку в якій міститься формула, наприклад перша, B5 і задати значення, рівне значенню правої частини першого рівняння (число 9);

– у полі *Изменяя ячейки* вказати комірки, в яких хочемо побачити відповідь (B3 та B4).

– внести обмеження $\$B\$6 = -3$. Для цього натиснути на кнопці *Добавить* і в отриманому вікні внести дані;



– у полі *Ссылка на ячейку* на комірку вказати ту, в якій записана ліва частина другого рівняння, в наступному полі вибрати знак "=", в третьому (*Ограничение*) ввести число рівне значенню правої частини; натиснути ОК;

– при натисненні на кнопку *Выполнить* відбувається розв'язання системи рівнянь і у комірках B3 та B4 відображається результат.

Приклад розв'язання системи рівнянь

Розв'язати систему трьох рівнянь з трьома невідомими x, y, z

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 1, \\ x - y = 0{,}2, \\ x + 2z = -0{,}8. \end{cases}$$

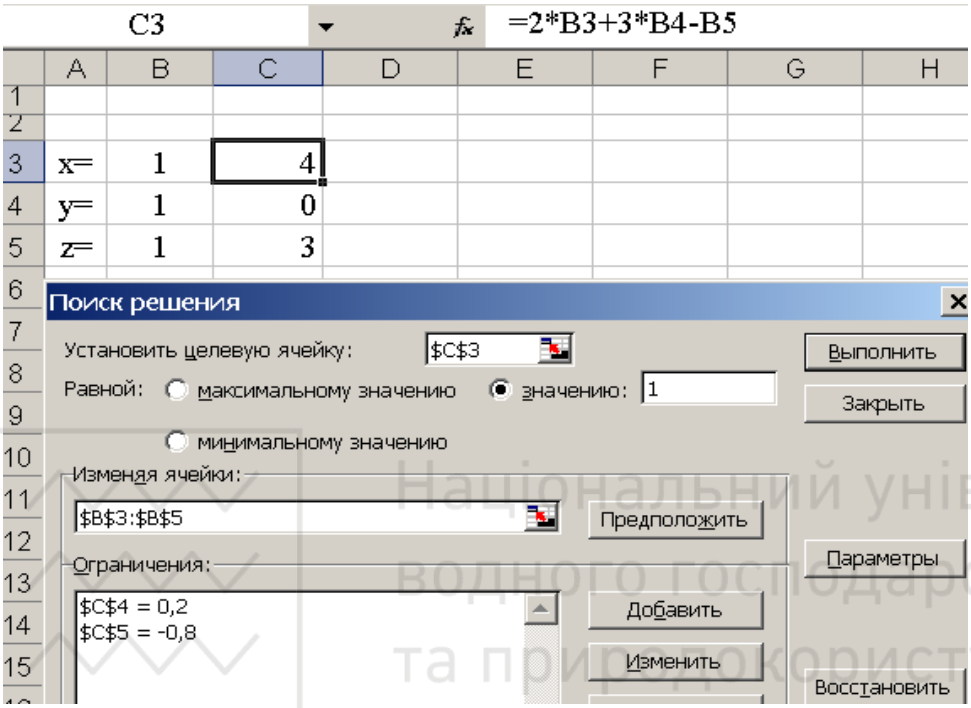
Розглянемо два способи розв'язання.

а). Використання підпрограми «*Поиск решения*».

Відкриваємо робочий лист MS Excel. Нехай результати розрахунків – значення невідомих x, y, z будуть розміщені в клітинах B3, B4, B5 відповідно, занесемо в них довільні початкові значення можливого розв'язку системи, наприклад одиниці. З врахуванням цього поряд в клітинах C3, C4, C5 записуємо ліві частини заданих рівнянь: в клітині C3 це буде формула = 2*B3+3*B4 – B5; в клітині C4 – формула = B3–B4; в клітині C5 формула = B3+2*B5.

Викликаємо підпрограму «*Поиск решения*» та заповнюємо відповідні клітини як це подано на фрагменті таблиці нижче. Ідея тут очевидна: перше рівняння подаємо як функцію мети, а два інших записуємо у систему обмежень.

Національний університет водного господарства та природокористування



Після натиску пункту *Выполнить* отримуємо результат виконання.

	A	B	C	D
1				
2				
3	x=	0,218	1	
4	y=	0,018	0,2	
5	z=	-0,51	-0,8	
6				

б). Застосування оберненої матриці. Нехай A – матриця коефіцієнтів нашої системи рівнянь, а b – стовпець її вільних членів. Тоді розв'язок системи подають у вигляді $x = A^{-1} \cdot b$, де A^{-1} – матриця, обернена до A.

Подамо результати розрахунку у вигляді таблиці.

Національний університет водного господарства та природокористування

	A	B	C	D	E	F
1						
2	Матриця коефіцієнтів			Вільні члени		
3	2	3	-1		1	
4	1	-1	0		0,2	
5	1	0	2		-0,8	
6	Обернена матриця			Розв"язок		
7	0,1818	0,54545	0,0909		0,21818	
8	0,1818	-0,4545	0,0909		0,01818	
9	-0,091	-0,2727	0,4545		-0,5091	
10						

Прокоментуємо її. Обчислення коефіцієнтів оберненої матриці виконуємо в такій послідовності:

– виділяємо область у таблиці, в якій будуть коефіцієнти оберненої матриці – A7:C9;

– викликаємо функцію МОБР і у вікні, що з'явиться, вказуємо область до якої шукаємо обернену матрицю – A3:C5 (чи відмічаємо цю область мишкою);

– натискаємо комбінацію клавіш Ctrl+Shift+Enter (кнопка *Ok* бажаного результату не дасть).

Обчислення добутку оберненої матриці та вектора вільних членів виконуємо в такій послідовності:

– виділяємо область, в якій буде результат – E7:E9;

– викликаємо функцію МУМНОЖ і у вікні, що з'явиться, вказуємо області оберненої матриці та вільних членів;

– натискаємо комбінацію клавіш Ctrl+Shift+Enter.

Інші кроки зазвичай для користувача очевидні.

Питання для самоконтролю

– Яку підпрограму використовуємо для розв'язання систем рівнянь?

– Які системи рівнянь (лінійні чи нелінійні) можна розв'язувати з використанням «*Поиск решения*»?

– Яка схема розв'язання системи рівнянь?

– Чим пояснюється структура вікна підпрограми «*Поиск решения*»?

– Для чого слугує кнопка *Предположить* вікна *Поиск решения*?

– Для чого слугує кнопка *Добавить* вікна *Поиск решения*?

– Які методи розв'язування систем рівнянь використовуються?

Національний університет водного господарства та природокористування

Рекомендовані завдання

Завдання 1. Розв'язати систему рівнянь, знайти її визначник, для матриці коефіцієнтів обернену та транспоновану матриці.

Варіант	Система рівнянь	Варіант	Система рівнянь
а	$2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 8$ $3x_1 + 3x_3 = 6$ $2x_1 - x_2 + 3x_4 = 4$ $x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4$	*з*	$2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = -4$ $x_1 - 3x_2 - 6x_4 = -7$ $2x_2 - x_3 + 2x_4 = 2$ $x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = -2$
б	$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 22$ $2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 17$ $x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 8$ $x_1 - 2x_3 - 3x_4 = -7$	*и*	$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 26$ $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 34$ $3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 26$ $4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 26$
в	$9x_1 + 10x_2 - 7x_3 - x_4 = 23$ $7x_1 - x_3 - 5x_4 = 37$ $5x_1 - 2x_3 + x_4 = 22$ $4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 26$	*і*	$2x_1 - 8x_2 - 3x_3 - 2x_4 = -18$ $x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 28$ $x_2 + x_3 + x_4 = 10$ $11x_2 + x_3 + 2x_4 = 21$
г	$6x_1 - x_2 + 10x_3 - x_4 = 158$ $2x_1 + x_2 + 10x_3 + 7x_4 = 128$ $3x_1 - 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 7$ $x_1 - 12x_2 + 2x_3 - x_4 = 17$	*к*	$2x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 = 66$ $2x_2 - 6x_3 + x_4 = -63$ $8x_1 - 3x_2 + 6x_3 - 5x_4 = 146$ $2x_1 - 7x_2 + 6x_3 - x_4 = 80$
д	$x_1 - 2x_2 + 6x_3 + x_4 = 88$ $5x_1 + 2x_3 - 3x_4 = 88$ $7x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 181$ $3x_1 - 7x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 99$	*л*	$2x_1 - 3x_3 - 2x_4 = -16$ $2x_1 - x_2 + 13x_3 + 4x_4 = 213$ $3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 72$ $x_1 - 12x_3 - 5x_4 = -159$
е	$x_1 - 2x_2 - 8x_4 = -7$ $x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = -8$ $x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = -10$ $2x_1 - x_2 + 2x_4 = 7$	*м*	$7x_1 + 7x_2 - 7x_3 - 2x_4 = 5$ $3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 8x_4 = 60$ $2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 27$ $2x_1 - 2x_3 - x_4 = -1$
є	$2x_1 + 2x_2 + 6x_3 + x_4 = 15$ $-x_2 + 2x_3 + x_4 = 18$ $4x_1 - 3x_2 + x_3 - 5x_4 = 37$ $3x_1 - 5x_2 + x_3 - x_4 = 30$	*н*	$6x_1 - 9x_2 + 5x_3 + x_4 = 124$ $7x_2 - 5x_3 - x_4 = -54$ $5x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 83$ $3x_1 - 9x_2 + x_3 + 6x_4 = 45$

Національний університет водного господарства та природокористування

ж	$4x_1 - 5x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 165$ $2x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = -15$ $9x_1 + 4x_3 - x_4 = 194$ $x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = -19$	*о*	$6x_1 - x_2 + 10x_3 - x_4 = 158$ $2x_1 + x_2 + 10x_3 + 7x_4 = 128$ $3x_1 - 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 7$ $x_1 - 12x_2 + 2x_3 - x_4 = 11$

Завдання 2. Розв'язати системи нелінійних рівнянь.

Варіант	Система нелінійних рівнянь	Варіант	Система нелінійних рівнянь
а	$\begin{cases} \sin x + 2y = 2, \\ \cos(y-1) + x = 0{,}7. \end{cases}$	*з*	$\begin{cases} \sin y + x = -0{,}4, \\ 2y - \cos(x+1) = 0. \end{cases}$
б	$\begin{cases} \sin(x+0{,}5) - y = 1, \\ \cos(y-2) + x = 0. \end{cases}$	*и*	$\begin{cases} \sin(x+2) - y = 1{,}5, \\ \cos(y-2) + x = 0{,}5. \end{cases}$
в	$\begin{cases} \cos x + y = 1{,}5, \\ 2x - \sin(y-0{,}5) = 1. \end{cases}$	*і*	$\begin{cases} \cos(x+0{,}5) - y = 2, \\ \sin y - 2x = 1. \end{cases}$
г	$\begin{cases} \cos(x+0{,}5) + y = 0{,}8, \\ \sin y - 2x = 1{,}6. \end{cases}$	*к*	$\begin{cases} \cos(x-2) + y = 0, \\ \sin(y+0{,}5) - x = 1. \end{cases}$
д	$\begin{cases} \sin(x-1) = 1.3 - y, \\ x - \sin(y+1) = 0.8. \end{cases}$	*л*	$\begin{cases} \cos(x+0{,}5) + y = 1, \\ \sin(y+0{,}5) - x = 1. \end{cases}$
е	$\begin{cases} \cos(x+0{,}5) + y = 1, \\ \sin y - 2x = 2. \end{cases}$	*м*	$\begin{cases} \sin(x) - 2y = 1, \\ \cos(y+0{,}5) - x = 2. \end{cases}$
є	$\begin{cases} -\sin(x+1) + y = 0{,}8, \\ \sin(y-1) + x = 1{,}3. \end{cases}$	*н*	$\begin{cases} 2y - \sin(x-0{,}5) = 1, \\ \cos(y) + x = 1{,}5. \end{cases}$
ж	$\begin{cases} \sin(x) - 2y = 1, \\ \sin(y-1) + x = 1{,}3. \end{cases}$	*о*	$\begin{cases} \sin(x-1) = 1.3 - y, \\ x - \sin(y+1) = 0.8. \end{cases}$

Завдання 3. Будівельній організації потрібно привезти з заводу *S* штук цегли. Для цього транспортна організація може надати вантажівки трьох типів: КРАЗ, КАМАЗ і ПЕЖО, в кожну з яких можна завантажити *n1, n2, n3* штук цегли з ціною перевезення *p1, p2* та *p3* відповідно. Спланувати замовлення автотранспорту (кількість рейсів кожного з типів вантажівок *k1, k2, k3*), щоб його вартість була мінімальною, якщо транспортна організація не може

Національний університет водного господарства та природокористування

надати вантажівок типу КРАЗ більше ніж на *k1_max* рейсів, а вантажівок типу КАМАЗ – на більше ніж *k2_max* рейсів.

Варі-ант	*S*	*n1*	*n2*	*n3*	*p1*	*p2*	*p3*	*k1_ max*	*k2_ max*
а	131000	7240	4950	1730	197	141	66	3	5
б	133000	7280	5000	1760	198	142	67	4	6
в	135000	7320	5050	1790	199	143	69	5	7
г	137000	7360	5100	1820	200	144	71	6	8
д	139000	7400	5150	1850	202	145	73	7	9
е	144000	7440	4950	1880	204	146	75	8	8
є	141000	7480	5000	1910	206	147	77	9	3
ж	143000	7240	5050	1940	197	148	78	8	7
з	141000	7280	5100	1730	198	150	79	3	5
и	143000	7320	5150	1760	199	141	66	4	6
і	145000	7360	5200	1790	200	142	67	5	7
к	147000	7400	5250	1820	202	143	69	6	8
л	149000	7440	5300	1850	204	144	71	7	9
м	131000	7480	5150	1880	206	145	73	8	8
н	133000	7320	5200	1910	202	146	75	9	3
о	135000	7360	5250	1940	204	147	77	8	5

Література

1. Кундрат А. М., Кундрат М. М. Науково-технічні обчислення засобами MathCAD та MS Excel : навч. посібник. Рівне : НУВГП, 2015. 252 с. URL: http://ep3.nuwm.edu.ua/1760/1/734733%20zah.pdf

2. Інформатика. Комп’ютерна техніка. Комп’ютерні технології : підручник. За ред. Г. А. Шинкаренко, О. В. Шишова, 2-ге вид. К. : Каравела, 2008. 640 с.

Національний університет водного господарства та природокористування