Товарищество печатнаго и издательскаго дѣла авторовъ-издателей „ГОЛОСЪ."
Кіевъ, Бибиковскій-Бульваръ. № 24.
Складъ изданій—книжный магазинъ „ПРОМЕТЕИ", Фундуклеевская, 8.

А. Н. Пальшау.

НАЧАЛА НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРІИ,

КРАТКАЯ ТЕОРІЯ КРИВЫХЪ

и

СПОСОБЫ ИХЪ ЧЕРЧЕНІЯ.

СЕДЬМОЕ ИЗДАНІЕ.

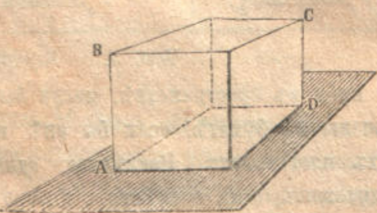
ЦѢНА 6 руб. 50 коп.

КІЕВЪ.
Типографія Губернскаго Правленія.
1919.

2269

Введеніе.

1. Всякая плоская фигура, какъ совмѣщающаяся всѣми своими точками съ плоскостію, можетъ быть изображена на бумагѣ геометрическимъ чертежемъ или въ истинную величину, или въ подобномъ и уменьшенномъ видѣ, и такой чертежъ можетъ быть названъ точнымъ, ибо онъ даетъ возможность опредѣлить истинную величину всѣхъ элементовъ фигуры и, такимъ образомъ, построить самую фигуру изъ даннаго матеріала. Иное дѣло, если фигура имѣетъ три измѣренія; въ этомъ случаѣ перспективный чертежъ ея (рисунокъ), имѣя цѣлью произвести на глазъ наблюдателя то же впечатлѣніе, какое производитъ и самая фигура, помѣщенная въ пространствѣ, не даетъ ни истинныхъ размѣровъ элементовъ фигуры, ни точнаго представленія о ея формѣ. Такъ кубъ *ABCD* на *чертежѣ 1* представляется въ видѣ неправильнаго четырехгранника, ограниченнаго неправильными четыреугольниками.



Чер. 1.

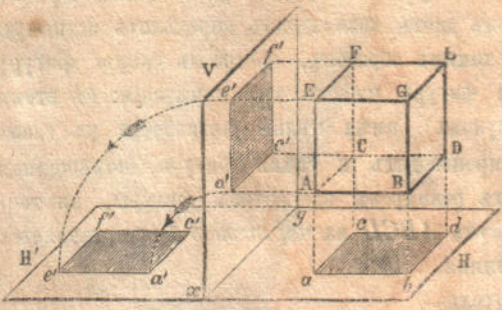
Отсюда легко видѣть, что перспективный чертежъ фигуръ, имѣющихъ три измѣренія, хотя и обладаетъ наглядностью, но не можетъ быть названъ точнымъ, ибо не позволяетъ опредѣлить истинную величину элементовъ фигуры, и не даетъ, такимъ образомъ, возможности по чертежу построить и самое тѣло.

Между тѣмъ во всѣхъ строительныхъ работахъ мы прежде всего нуждаемся въ чертежѣ предполагаемаго сооруженія, но не въ чертежѣ **перспективномъ**, а **точномъ**, который позволялъ бы обсудить со всевозможною тщательностью, какъ расположеніе частей сооруженія, такъ и ихъ точные размѣры, и тѣмъ самымъ избѣгнуть во время построенія измѣненій, всегда дорого стоющихъ и нарушающихъ цѣльность постройки. Правда, для обсужденія предполагаемаго сооруженія, казалось, могла бы служить модель сооруженія, приготовленная изъ какихъ-либо легко измѣняемыхъ матеріаловъ, напр. изъ глины, дерева, гипса, воска и т. п.; но не говоря уже о томъ, что приготовленіе моделей сопряжено съ большими трудностями, модель не достигаетъ вполнѣ своей цѣли еще и потому, что не позволяетъ точно судить о внутреннихъ размѣрахъ и формахъ тѣла, точный же чертежъ даетъ не только точные размѣры всѣхъ частей сооруженія, но и позволяетъ дѣлать быстро всѣ необходимыя въ нихъ измѣненія. Вотъ почему точный чертежъ фигуръ, имѣющихъ три измѣренія, является единственнымъ средствомъ для всесторонняго обсужденія и составленія проекта сооруженія, и въ этомъ смыслѣ можетъ быть названъ прозрачною моделью сооруженія, сдѣланною изъ такихъ легко измѣняемыхъ матеріаловъ, какъ тушь, карандашъ, краски и т. п.

2. Отсюда легко видѣть всю важность ученія, имѣющаго цѣлью дать *научныя правила,* во первыхъ, для точнаго изображенія на плоскости тѣлъ, имѣющихъ три измѣренія, во вторыхъ,—для графическаго рѣшенія, при помощи планиметріи, задачъ, относящихся къ такимъ тѣламъ. Выводъ и разработка такихъ правилъ и составляетъ предметъ *Начертательной Геометріи.*

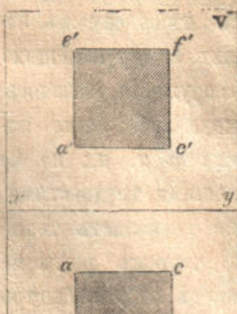
3. Ученіе Начертательной Геометріи основывается на способѣ заданія тѣлъ, находящихся въ пространствѣ, посредствомъ ихъ проекцій на двѣ взаимно перпендикулярныя плоскости.

Чтобы показать на частномъ примѣрѣ въ чемъ заключается способъ проекцій, спроектируемъ кубъ AL (*чер. 2*) на двѣ взаимно-перпендикулярныя плоскости H и V, припомнивъ (Геометрія Давыдова, § 189), что проекціей точки A (*черт. 4*) на плоскость M называется основаніе a перпендикуляра Aa, опущеннаго изъ точки на плоскость.



Чер. 2.

Въ томъ положеніи, какое въ нашемъ случаѣ занимаетъ кубъ относительно плоскостей V и H, онъ проектируется на плоскостяхъ H и V по двумъ квадратамъ $abcd$ и $a'c'e'f'$, которые, вполнѣ опредѣляя положеніе куба въ пространствѣ, могли бы быть, какъ плоскія фигуры, вполнѣ точно вычерчены на бумагѣ, если бы онѣ не находились на двухъ взаимно-перпендикулярныхъ плоскостяхъ. Послѣднее, однако, неудобство заданія тѣла проекціями легко уничтожить, если совмѣстить плоскость V съ плоскостью H, вращая V по направленію стрѣлки около прямой xy пересѣченія плоскостей V и H. Въ этомъ случаѣ плоскости обоихъ чертежей $abcd$ и $a'c'e'f'$ сольются въ одну, которую можно принять за листъ бумаги, и на немъ точно вычертить двѣ плоскія фигуры $abcd$ и $a'c'e'f'$, опредѣляющія положеніе куба въ пространствѣ. Такимъ путемъ кубъ AL въ нашемъ случаѣ представится точно на плоскости листа бумаги (*чер. 3*) двумя квадратами: однимъ $a'c'e'f'$, лежащимъ надъ прямой xy, другимъ $abcd$—подъ xy.



Чер 3.

4. Взятый нами примѣръ поясняетъ въ общихъ чертахъ тотъ путь, которымъ Начертальная Геометрія достигаетъ своей главной цѣли—изобразить точно на плоскости тѣло, расположенное въ пространствѣ, и вмѣстѣ съ тѣмъ показываетъ, что точный чертежъ Начертальной Геометріи, какъ состоящій изъ двухъ плоскихъ фигуръ, мало напоминаетъ заданное имъ тѣло въ пространствѣ, такъ что требуется нѣкоторая работа воображенія для того, чтобы по чертежу Начертальной Геометріи возстановить форму и положеніе тѣла въ пространствѣ; а именно: нужно представить себѣ, что чертежъ перегнутъ по прямой xy и что одна его часть поставлена въ положеніе перпендикулярное другой; затѣмъ, что изъ точекъ обоихъ плоскихъ чертежей возстановлены перпендикуляры до взаимнаго пересѣченія. Полученныя такимъ образомъ точки опредѣлятъ положеніе и форму тѣла въ пространствѣ.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ.

О точкѣ, прямой и плоскости.

ГЛАВА I.

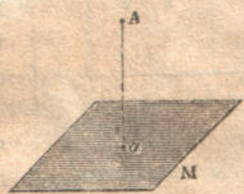
Основныя теоремы.

§ I. Опредѣленія

5. *Проекціей точки A на плоскости M (чер. 4) называется основаніе a перпендикуляра Aa, опущеннаго изъ точки на плоскость;* или иначе, *проекціей точки A на плоскость M называется точка встрѣчи перпендикуляра Aa съ плоскостью, на которую проектируютъ данную точку.*

Плоскость, на которую проектируютъ данныя точки и фигуры, называется плоскостію проекцій.

Перпендикуляръ Aa, опущенный изъ данной точки на плоскость проекцій, называется проектирующей данной точки.



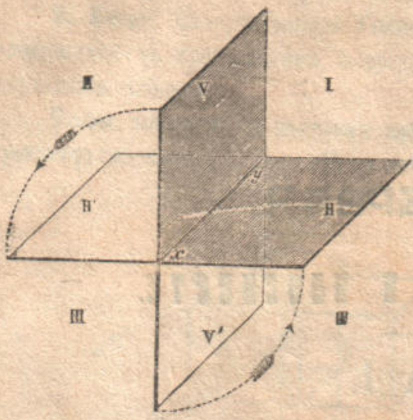
Чер 4.

6. Двѣ взаимно-перпендикулярныя плоскости, на которыя проектируютъ фигуры въ способѣ проекцій, называются: одна—*горизонтальною плоскостью проекцій,* другая—*вертикальною плоскостью проекцій* и обозначаются: горизонтальная—буквою H, вертикальная—буквою V. Обѣ плоскости проекцій предполагаются продолженными во всѣ стороны безгранично.

7. Прямая пересѣченія плоскостей проекцій называется *осью проекцій* и обозначается буквами xy.

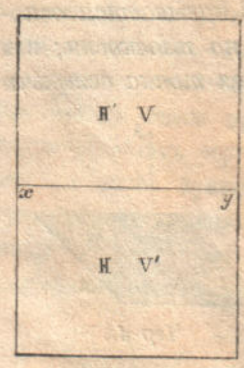
Ось проекцій xy раздѣляетъ каждую изъ плоскостей проекцій *(чер. 5)* на двѣ части; а именно: горизонтальную—на *переднюю* $xy\,H$ и *заднюю* $xy\,H'$, вертикальную—на *верхнюю* xyV и *нижнюю* xyV'. Такимъ образомъ, четыре двугранные угла, образованные плоскостями проекцій, составляются: *первый уголъ I*—передней горизонтальной H и верхней вертикальной V; *второй уголъ II*—задней горизонтальной H' и верхней вертикальной V; *третій уголъ III*—задней горизонтальной H' и нижней вертикальной V'; наконецъ, *четвертый уголъ IV*—передней горизонтальной H и нижней вертикальной V'.

8. Отсюда принимая во вниманіе заданія тѣла въ пространствѣ посредствомъ двухъ проекцій, легко видѣть, что фигура, находящаяся 1) *въ первомъ углѣ,* имѣетъ свои проекціи на передней горизонтальной *H* и верхней вертикальной *V*; 2) *во второмъ углѣ*—на задней горизонтальной *H'* и верхней вертикальной *V*; 3) *въ третьемъ*—на задней горизонтальной *H'* и нижней вертикальной *V'*; 4) *въ четвертомъ*—на передней горизонтальной *H* и нижней вертикальной *V'*.



Чер. 5.

9. Для составленія по проекціоннымъ чертежамъ, лежащимъ на двухъ взаимно-перпендикулярныхъ плоскостяхъ и опредѣляющимъ фигуру въ пространствѣ, одного плоскаго чертежа фигуры, остается, какъ мы уже видѣли, совмѣстить вертикальную плоскость проекцій съ горизонтальной; при чемъ условимся такое совмѣщеніе совершать всегда опредѣленнымъ образомъ. Именно: будемъ вращать вертикальную плоскость проекцій около оси *xy* *(чер 5)* до тѣхъ поръ, пока верхняя вертикальная ея часть *V* не совпадетъ съ задней горизонтальной *H'* и нижняя вертикальная *V'*—съ передней горизонтальной *H*. По совершеніи такого совмѣщенія плоскости проекцій представятъ одну плоскость, раздѣленную осью *xy* на двѣ части. Эта плоскость, будучи совмѣщена съ листомъ бумаги и повернута такимъ образомъ, чтобы ось *xy* была горизонтальна, представится *чертежемъ 6.*

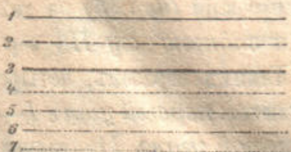


Чер 6.

10. Изъ такого способа совмѣщенія плоскостей проекцій необходимо слѣдуетъ, что надъ осью *xy* будутъ лежать слѣдующія части плоскостей проекцій: *верхняя вертикальная V* и *задняя горизонтальная H';* подъ осью—*передняя горизонтальная H и нижняя вертикальная V'*.

11. Отсюда, принимая во вниманіе положеніе проекцій фигуры, находящейся въ различныхъ углахъ (**§ 8**), легко найдемъ, что проекціи фигуры, находящейся: 1) въ первомъ углѣ, лежатъ: горизонтальная—*подъ осью,* вертикальная—*надъ осью;* 2) во второмъ углѣ—горизонтальная и вертикальная—*надъ осью;* 3) въ третьемъ углѣ: горизонтальная—*надъ осью,* вертикальная—*подъ осью;* 4) въ четвертомъ углѣ—горизонтальная и вертикальная—*подъ осью.*

12. Плоскій чертежъ проекцій фигуры, полученный послѣ совмѣщенія плоскостей проекцій, называется *эпюромъ.*



Чер. 7.

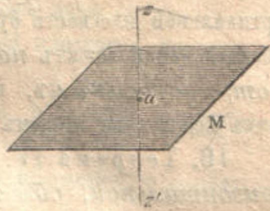
Чтобы придать эпюру большую наглядность и облегчить чтеніе эпюра, т. е. представленіе по эпюру положенія и формы фигуры въ пространствѣ, условимся различныя линіи на эпюрѣ вычерчивать различными почерками; именно *(чер. 7)*: данныя видимыя линіи будемъ чертить *тонкою чертою № 1,* геометрическія построенія—*пунктиромъ № 2*, искомыя, видимыя—*сплошною толстою чертою № 3*, проектирующія—*пунктиромъ № 4*, вспомогательныя линіи и плоскости—*пунктиромъ № 5 и 6*, невидимыя линіи—*пунктиромъ № 7*.

Кромѣ того допустимъ, что плоскости не прозрачны и что наблюдатель всегда помѣщается въ первомъ углѣ, при томъ такъ, что конецъ x оси проекцій находится относительно его слѣва, а конецъ y—справа.

§ II. О точкѣ.

13. Теорема I. *Одна проекція точки на плоскость не опредѣляетъ положенія точки въ пространствѣ.*

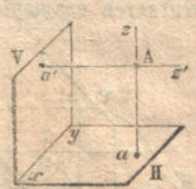
Въ самомъ дѣлѣ *(чер. 8)*, если M—плоскость проекцій, a—данная проекція точки, то, по опредѣленію (§ **5**), за искомую точку можетъ быть принята всякая точка перпендикуляра zz', возстановленнаго изъ проекціи a къ плоскости M.



Чер. 8.

14. Теорема II. *Положеніе точки въ пространствѣ вполнѣ опредѣляется двумя ея проекціями на двѣ взаимно-перпендикулярныя плоскости.*

Пусть *(чер. 9)* a—данная проекція на горизонтальной плоскости H; a'—данная проекція на вертикальной плоскости V. Искомая точка по опредѣленію (§ **5**) должна находиться гдѣ-либо и на перпендикулярѣ az, возстановленномъ къ плоскости H изъ проекціи a, и на перпендикулярѣ $a'z'$, возстановленномъ къ плоскости V изъ проекціи a'; слѣдовательно, если a и a' проекціи—одной и той же точки, то она должна находиться въ точкѣ ихъ взаимнаго пересѣченія A.

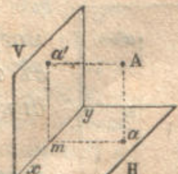


Чер. 9.

15. Проекція точки на горизонтальную плоскость проекцій H называется *горизонтальною проекціей* точки и обозначается малою буквою, наприм. a, b, c. Проекція точки на вертикальную плоскость проекцій V называется *вертикальною проекціей* точки и обозначается тою же буквою, и горизонтальная проекція, но со знакомъ; такъ: a', b', c'...

16. Теорема III. *Разстояніе точки отъ вертикальной плоскости проекцій равняется разстоянію ея горизонтальной проекціи отъ оси; разстояніе точки отъ горизонтальной плоскости проекцій равняется разстоянію ея вертикальной проекціи отъ оси.*

Пусть *(чер. 10)* A—данная точка, a и a'—ея горизонтальная и вертикальная проекція на плоскостяхъ H и V. Плоскость aAa', проведенная чрезъ проектирующія Aa и Aa', перпендикулярна къ оси xy и пересѣкаетъ плоскости H и V по прямымъ ma и ma', которыя съ проектирующими Aa и Aa' образуютъ прямоугольникъ $Aama'$. Въ самомъ дѣлѣ, плоскость aAa' перпендикулярна къ xy потому, что, проходя чрезъ проектирующія Aa и Aa', перпендикулярна къ плоскостямъ H и V, а слѣдовательно (Геометрія Давыдова, § 209), перпендикулярна и къ ихъ пересѣченію xy; фигура $Aama'$—прямоугольникъ потому, что углы $Aa'm$ и Aam прямые по опредѣленію,



Чер. 10.

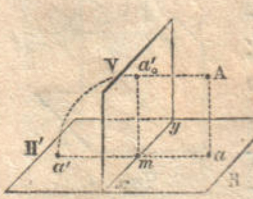
а уголъ $a'ma$ прямой, какъ мѣра прямого двуграннаго угла между плоскостями H и V.

Въ прямоугольникѣ $Aama'$, Aa—есть разстояніе точки отъ горизонтальной плоскости, $a'm$—разстояніе вертикальной проекціи точки отъ оси, Aa'—разстояніе точки отъ вертикальной плоскости, am—разстояніе горизонтальной проекціи отъ оси; по свойству же прямоугольника, имѣемъ: $Aa=a'm$ и $Aa'=am$. Что и требовалось доказать.

17. По правилу Декарта условимся считать разстояніе точки отъ горизонтальной плоскости *положительнымъ*, когда ея вертикальная проекція находится *надъ осью* (точка лежитъ или въ первомъ, или во второмъ углѣ), и *отрицательнымъ*, когда вертикальная проекція точки лежитъ *подъ* осью (точка лежитъ въ третьемъ или четвертомъ углѣ). На томъ же основаніи, разстояніе точки отъ вертикальной плоскости будемъ считать *положительнымъ*, когда горизонтальная проекція точки лежитъ *подъ* осью (точка лежитъ въ первомъ или четвертомъ углѣ), и *отрицательнымъ*, когда горизонтальная проекція точки лежитъ *надъ* осью (точка лежитъ во второмъ или третьемъ углѣ.

18. Теорема IV. *Послѣ совмѣщенія вертикальной плоскости съ горизонтальной, обѣ проекціи точки лежатъ на одномъ перпендикулярѣ къ оси.*

Замѣтимъ, съ одной стороны, что всякая точка, вращающаяся около прямой, двигается по окружности круга, лежащаго въ плоскости, перпендикулярной къ прямой, съ другой,— что совмѣщеніе плоскости V, со всѣми лежащими въ ней точками, достигается вращеніемъ ея около оси xy. Отсюда заключаемъ, что проекція a'_0 *(чер. 11)*, лежащая въ плоскости V, будетъ, во время совмѣщенія послѣдней, постоянно оставаться въ плоскости aAa'_0, перпендикулярной къ оси xy (§ **16**), и при совмѣщеніи упадетъ въ точку a', лежащую на продолженіи am на разстояніи ma' отъ оси xy, равномъ ma'_0; но am перпендикулярна къ оси xy; слѣдовательно и ma', какъ лежащая въ плоскости aa'_0a', тоже перпендикулярна къ оси; что и требовалось доказать.



Чер. 11.

19. Эпюръ заданной проекціями точки представится, такимъ образомъ, *чертежомъ 12*, на которомъ aa' перпендикулярна къ оси xy, ma выражаетъ разстояніе точки отъ вертикальной плоскости проекціи, ma' отъ горизонтальной (§ **16**).

Замѣчаніе. Впослѣдствіи мы условимся эпюръ чертить безъ рамокъ, ибо, какъ сказано, плоскости проекцій не имѣютъ границъ.

20. Теорема V. *Двѣ точки на эпюрѣ только тогда могутъ быть приняты за проекціи одной и той же точки въ пространствѣ, когда онѣ лежатъ на одномъ перпендикулярѣ къ оси.*

Ибо, по возстановленіи плоскости V въ положеніе, перпендикулярное къ H, проектирующія $A'a$ и aA только тогда пересѣкутся и опредѣлятъ точку A въ пространствѣ, когда ma и ma' лежатъ въ одной плоскости, перпендикулярной къ оси xy.

Чер. 12.

21. *Дать* или *найти* точку, значитъ дать или найти ея проекціи. Точку, данную проекціями a и a', мы будемъ записывать такъ: (a, a'); самую же проектируемую точку будемъ обозначать большою буквою одного названія съ буквами проекцій, такъ: A.

22. Точка въ пространствѣ можетъ занимать въ отношеніи плоскостей проекцій слѣдующія главнѣйшія положенія, изображенныя на *чертежѣ 13*.

1) Точка A находится въ первомъ углѣ; по § 11 горизонтальная проекція ея a находится подъ осью, вертикальная a'—надъ осью.

2) Точка B находится во второмъ углѣ; по тому же § b и b' находятся надъ осью.

3) Точка C находится въ третьемъ углѣ; по тому же § c—надъ осью, c'—подъ осью.

4) Точка D находится въ четвертомъ углѣ; d и d'—подъ осью.

5) Точка E находится на передней части горизонтальной плоскости, e—подъ осью и сливается съ точкою, e'—на оси.

6) Точка F находится на задней части горизонтальной плоскости, f—надъ осью и сливается съ точкою, f'—на оси.

7) Точка G находится на верхней части вертикальной плоскости, g'—надъ осью и сливается съ точкою, g—на оси.

8) Точка H находится на нижней части вертикальной плоскости, h'—подъ осью и сливается съ точкою, h—на оси.

9) Точка K находится на оси; k и k' на оси и сливается съ точкою.

10) Точка L находится въ плоскости биссектора перваго угла; l и l' находятся на равномъ разстояніи отъ оси; l—подъ осью, l'—надъ осью.

Чер. 13.

11) Точка M находится въ плоскости биссектора второго угла; m и m' сливается въ одну точку надъ осью.

12) Точка N находится въ плоскости биссектора третьяго угла, n и n'—на равномъ разстояніи отъ оси, n—надъ осью, n'—подъ осью.

13) Точка O находится въ плоскости биссектора четвертаго угла; o и o' сливаются въ одну точку подъ осью.

ЗАДАЧИ.

1. Построить проекціи точки, когда точка находится: a) въ первомъ углѣ на разстояніи двухъ сент. отъ горизонтальной плоскости и пяти—отъ вертикальной; b) въ плоскости биссектора второго угла на разстояніи трехъ сент. отъ плоскостей проекцій; c) въ плоскости биссектора третьяго угла на разстояніи 5 сент. отъ плоскостей проекцій; d) въ четвертомъ углѣ на разстояніи 5 сент. отъ горизонтальной плоскости и 3 отъ вертикальной; e) на задней части горизонтальной плоскости на разстояніи 3 сент. отъ вертикальной; f) на нижней части вертикальной плоскости на разстояніи 3 сент. отъ горизонтальной.

2. Построить проекціи точки по слѣдующимъ даннымъ: a) точка находится надъ горизонтальной плоскостью на разстояніи 3 сент. и за вертикальной плоскостью на разстояніи 2 сент.; b) точка находится подъ горизонтальной плоскостью на разстояніи 4 сент. и передъ вертикальной на разстояніи 6 сент.

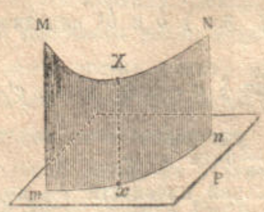
3. Пусть y обозначаетъ разстояніе точки отъ горизонтальной плоскости; x—разстояніе точки отъ вертикальной плоскости. Требуется построить проекціи точки, когда: $x=1$, $y=2$; $x=3$, $y=-5$; $x=-2$, $y=-3$; $x=-4$, $y=4$; $x=y=3$; $x=0$, $y=4$; $x=-3$, $y=0$.

4. Построить проекціи двухъ точекъ, изъ которыхъ для одной—$x=3$, $y=0$; для другой—$x=5$, $y=-2$; и при томъ, чтобы горизонтальныя проекціи данныхъ точекъ находились бы на разстояніи 3 сент. другъ отъ друга.

5. Даны проекціи точки; требуется построить проекціи точки, ей симметричной въ отношеніи: a) горизонтальной плоскости; d) вертикальной плоскости; c) оси проекцій.

§ III. О прямой.

23. Опредѣленіе. Всякую линію, напримѣръ MN (*чер. 14*), можно разсматривать какъ геометрическое мѣсто точки X, движущейся по нѣкоторому закону; во время такого движенія и проекція точки X на плоскость P, т. е. точка x, будетъ двигаться въ плоскости P и опишетъ, вообще говоря, нѣкоторую кривую mn, которая называется проекціей линіи MN на плоскость P. Отсюда: *проекціей линіи MN на плоскость P называется геометрическое мѣсто mn проекцій на ту же плоскость точекъ ее составляющихъ.*

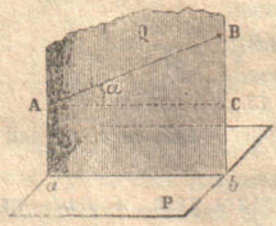


Чер. 14.

24. Проектирующія всѣхъ точекъ линіи MN, какъ перпендикулярныя къ одной и той же плоскости P, параллельны между собою и, слѣдовательно, образуютъ цилиндрическую поверхность, направляющею которой служитъ данная линія MN, а производящей—одна изъ проектирующихъ, напр. Mm; такая поверхность называется *проектирующею поверхностью.* Отсюда легко видѣть, что проекцію mn линіи MN на плоскость P можно еще разсматривать, какъ *пересѣченіе проектирующей поверхности съ плоскостью проекцій.*

25. Теорема I. *Проекція прямой на плоскость есть прямая.*

Пусть (*чер. 15*) AB—данная прямая и P—плоскость проекцій. Проектирующая поверхность въ случаѣ прямой обращается въ плоскость, ибо двѣ какія-либо проектирующія, напр. Aa и Bb, какъ перпендикулярныя къ плоскости P, параллельны между собою, и опредѣляютъ плоскость Q, содержащую какъ самую прямую AB, такъ и проектирующія всѣхъ ея точекъ. Отсюда проекція ab прямой AB, какъ пересѣченіе проектирующей плоскости Q съ плоскостью P, есть прямая.



Чер. 15.

Замѣчаніе. Говоря о прямой и ея проекціи, мы должны различать два случая: когда длина прямой ничѣмъ не ограничена, т. е. когда имѣется въ виду ея направленіе, и когда длина прямой ограничена двумя точками; въ первомъ случаѣ мы будемъ говорить просто прямая, во второмъ—отрѣзокъ прямой

26. Разсматривая отрѣзокъ прямой AB и его проекцію ab на плоскость P, замѣчаемъ:

1) Отрѣзокъ AB и его проекціи ab на плоскость P составляютъ двѣ непараллельныя стороны прямоугольной трапеціи $ABab$, двѣ другія, параллельныя стороны которой суть проектирующія Aa и Bb. Высота этой трапеціи измѣряется проекціей ab, ибо ab перпендикулярна къ проектирующимъ Aa и Bb.

2) *Проекція отрѣзка равна самому отрѣзку, умноженному на cosinus угла α, составленнаго прямою съ своею проекціею на плоскости*, ибо изъ прямоугольнаго треугольника ABC, въ которомъ AC параллельна ab, имѣ-

емъ: $AC=AB\cos\alpha$, но по параллельности AC и ab, $AC=ab$; слѣдовательно, $ab=AB\cos\alpha$. Отсюда заключаемъ, что проекція отрѣзка, вообще говоря, всегда меньше самого отрѣзка.

3) *Проекція отрѣзка равна самому отрѣзку въ томъ случаѣ, когда прямая паралельна плоскости проекцій;* ибо въ этомъ случаѣ $\angle\alpha=0$ и, слѣдовательно, $ab=AB$.

4) *Проекція прямой обращается въ точку, если сама прямая перпендикулярна къ плоскости проекцій;* ибо въ этомъ случаѣ $\angle\alpha=90^0$, и слѣд. $ab=O$.

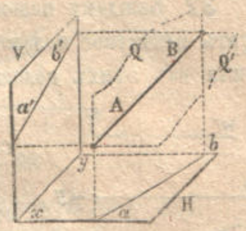
5) *Точка дѣлитъ отрѣзокъ въ томъ же отношеніи, въ какомъ проекція этой точки дѣлитъ проекцію отрѣзка,* что легко видѣть изъ подобія треугольниковъ. Отсюда, если точка дѣлитъ прямую пополамъ, то проекція этой точки дѣлитъ пополамъ проекцію отрѣзка.

27. Теорема II. *Проекція прямой на плоскости не опредѣляетъ положенія прямой въ пространствѣ.*

Если (*чер. 15*) P—плоскость проекцій и ab—данная проекція прямой, то всякая прямая, лежащая въ плоскости Q, проведенной черезъ ab перпендикулярно къ плоскости P, будетъ имѣть своей проекціей на плоскость P данную прямую ab.

28. Теорема III. *Положеніе прямой въ пространствѣ вполнѣ опредѣляется двумя ея проекціями на двѣ взаимно-перпендикулярныя плоскости.*

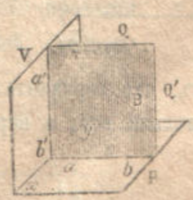
Пусть (*чер. 16*) ab—проекція прямой на горизонтальной плоскости проекцій H, $a'b'$—проекція той же прямой на вертикальной плоскости проекцій V. Искомая прямая AB должна одновременно находиться и въ проектирующей плоскости Q и въ проектирующей плоскости Q', слѣдовательно, пересѣченіе AB обѣихъ проектирующихъ плоскостей есть единственная прямая, которая можетъ имѣть своими проекціями на H и V прямыя ab и $a'b'$.



Чер. 16.

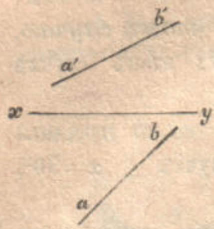
29. Эта теорема имѣетъ исключеніе въ томъ случаѣ, когда данныя проекціи ab и $a'b'$ искомой прямой лежатъ на одномъ перпендикулярѣ къ оси (*чер. 17*), ибо въ этомъ случаѣ обѣ проектирующія плоскости Q и Q' сливаются въ одну, перпендикулярную къ оси, и всякая прямая, напр. AB, взятая въ этой плоскости, будетъ имѣть своими проекціями данныя прямыя ab и $a'b'$.

30. Проекція прямой на горизонтальную плоскость проекцій называется *горизонтальной проекціей прямой* и обозначается двумя малыми буквами, напр. ab, cd, поставленными гдѣ бы то ни было, если рѣчь идетъ о направленіи прямой, и возлѣ точекъ, если рѣчь идетъ объ отрѣзкѣ. Проекція прямой на вертикальную плоскость проекцій называется *вертикальною проекціей прямой* и обозначается такимъ же образомъ, какъ и горизонтальная проекція и такими же буквами, но со значками, напр. $a'b'$, $c'd'$.



Чер. 17.

Плоскость Q, проектирующая прямую на горизонтальную плоскость, называется *горизонтально-проектирующею плоскостью*; плоскость Q', проектирующая прямую на вертикальную плоскость проекцій, называется *вертикально-проектирующею плоскостью.*

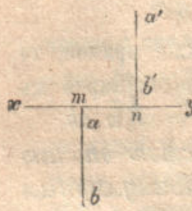


Чер. 18.

Послѣ совмѣщенія вертикальной плоскости проекцій съ горизонтальною, прямая въ пространствѣ представится на эпюрѣ (*чер. 18*) двумя проекціями, т. е. двумя прямыми ab и $a'b'$. Прямая, данная на эпюрѣ, читается своими проекціями ab, $a'b'$ и записывается такъ: (ab, $a'b'$).

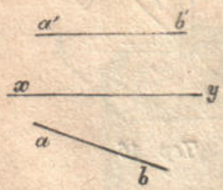
31. Теорема IV. *Двѣ какія-либо прямыя, взятыя на эпюрѣ, могутъ быть всегда разсматриваемы какъ проекціи одной и той же прямой въ пространствѣ, исключая тотъ случай, когда онѣ перпендикулярны къ оси проекцій въ различныхъ точкахъ.*

Пусть (*чер. 18*) ab и $a'b'$—двѣ прямыя, взятыя на эпюрѣ, при томъ ab—на горизонтальной плоскости, $a'b'$—на вертикальной. Для доказательства теоремы возстановимъ вертикальную плоскость (*чер 16*) и проведемъ черезъ ab и $a'b'$ проектирующія плоскости; пересѣченіе ихъ должно опредѣлить искомую прямую. Но если данныя прямыя перпендикулярны къ оси въ различныхъ точкахъ m и n (*чер. 19*), то проектирующія плоскости не пересѣкутся и, слѣдовательно, нѣтъ прямой, которая бы соотвѣтствовала проекціямъ ab и $a'b'$.



Чер 19.

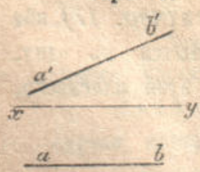
32. Каждому положенію прямой относительно плоскостей проекцій соотвѣтствуетъ извѣстное положеніе проекцій этой прямой относительно оси проекцій. Важнѣйшія изъ этихъ положеній суть слѣдующія:



Чер. 20.

1) *Прямая параллельна горизонтальной плоскости проекцій (чер. 20).*

Въ этомъ случаѣ всѣ точки прямой равно удалены отъ горизонтальной плоскости проекцій и, слѣдовательно (§ **16**), вертикальныя проекціи всѣхъ ея точекъ находятся на одинаковомъ разстояніи отъ оси. Отсюда заключаемъ, что въ разсматриваемомъ случаѣ вертикальная проекція $a'b'$ прямой AB, параллельной плоскости H, параллельна оси, горизонтальная же ab расположена какъ угодно относительно оси.



Чер. 21.

2) *Прямая параллельна вертикальной плоскости проекцій* (*чер. 21*).

Подобно тому, какъ и въ предыдущемъ случаѣ, докажемъ, что горизонтальная проекція ab прямой AB, параллельной плоскости V, параллельна оси, а вертикальная $a'b'$ лежитъ какъ угодно относительно оси.

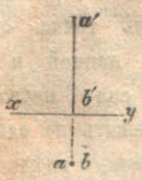
3) *Прямая параллельна оси (чер. 22).*

Чер 22.

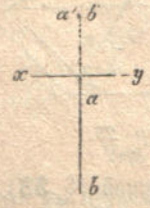
Въ этомъ случаѣ прямая параллельна обѣимъ плоскостямъ проекцій (Геометрія Давыдова, § 199) и, слѣдовательно, горизонтальныя и вертикальныя проекціи всѣхъ ея точекъ равно удалены отъ оси (§ **16**), т. е. проекціи ab и $a'b'$ прямой параллельны оси.

4) *Прямая перпендикулярна къ горизонтальной плоскости проекцій (чер. 23).*

Въ этомъ случаѣ ея горизонтальная проекція сливается въ одну точку (§ **26, 4**), а вертикальная—перпендикулярна къ оси, ибо сама прямая, какъ перпендикулярная къ горизонтальной плоскости, параллельна вертикальной плоскости и, лежащей въ ней, вертикальной своей проекціи $a'b'$ (Геометрія Давыдова, § 209, 2); отсюда и наоборотъ, проекція $a'b'$ перпендикулярна къ горизонтальной плоскости проекцій и, слѣдовательно, къ оси xy.



Чер. 23.



Чер. 24.

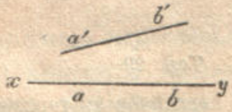
5) *Прямая перпендикулярна къ вертикальной плоскости проекцій (чер. 24).*

Какъ и въ предыдущемъ случаѣ, найдемъ, что вертикальная проекція прямой сливается въ одну точку, а горизонтальная—перпендикулярна къ оси.

6) *Прямая лежитъ въ горизонтальной плоскости проекцій (чер. 25).*

Въ этомъ случаѣ ея горизонтальная проекція ab сливается съ самой прямой, а вертикальная $a'b'$—съ осью xy.

Чер. 25.



Чер. 26.

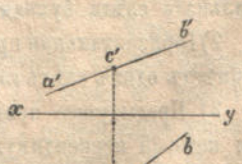
7) *Прямая лежитъ въ вертикальной плоскости проекцій (чер. 26).*

Вертикальная проекція $a'b'$ прямой сливается съ самой прямой, а горизонтальная ab—съ осью xy.

33. Теорема V. *Чтобы точка лежала на прямой, необходимо и достаточно, чтобы проекціи ея лежали на одноименныхъ проекціяхъ прямой и на одномъ перпендикулярѣ къ оси.*

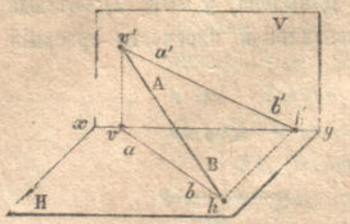
Эти условія *необходимы*, ибо если точка лежитъ на прямой, то изъ опредѣленія проекціи линіи (§ **23**) необходимо слѣдуетъ, что проекціи точки должны лежать на проекціяхъ прямой. Эти условія и *достаточны*, ибо, если проекціи точки лежатъ на проекціяхъ прямой, то сама точка лежитъ на прямой; дѣйствительно, проектирующія точки, какъ лежащія въ плоскостяхъ, проектирующихъ прямую, пересѣкутся при возстановленіи вертикальной плоскости въ точкѣ, лежащей на прямой.

34. Отсюда, чтобы взять точку на прямой AB (*чер. 27*), достаточно на одной изъ ея проекцій, напр. ab, взять точку c и изъ нея опустить перпендикуляръ на ось (§ **18**) до встрѣчи въ точкѣ c' съ другой проекціей $a'b'$ той же прямой. Точки c и c' суть проекціи точки C, принадлежащей прямой AB.



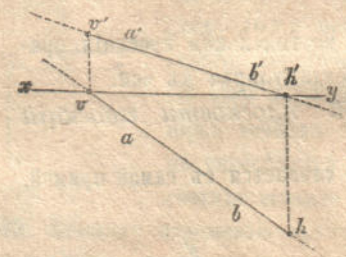
Чер. 27.

35. *Точки встрѣчи прямой съ плоскостями проекцій называются слѣдами* прямой (*чер 28*); при чемъ точка h встрѣчи прямой съ горизонтальною плоскостью проекцій называется *горизонтальнымъ слѣдомъ* прямой, точка v' встрѣчи прямой съ вертикальною плоскостью проекцій—*вертикальнымъ слѣдомъ* прямой.



Чер. 28.

Чтобы опредѣлить слѣды прямой AB по даннымъ ея проекціямъ ab и $a'b'$, замѣтимъ, что каждый слѣдъ v' и h есть точка одновременно принадлежащая и данной прямой и одной изъ плоскостей проекцій. Въ силу перваго условія проекціи слѣда должны лежать на одноименныхъ проекціяхъ прямой (§ **33**), въ силу второго—одна изъ проекцій слѣда должна лежать на оси, а именно на оси будутъ лежать горизонтальная проекція вертикальнаго слѣда (§ **22**, **7**) и вертикальная проекція горизонтальнаго слѣда (§ **22**, **5**).



Чер. 29.

На основаніи этихъ соображеній заключаемъ (*чер. 29*), что вертикальная проекція h' горизонтальнаго слѣда лежитъ въ точкѣ пересѣченія вертикальной проекціи $a'b'$ прямой съ осью xy, а горизонтальная проекція h того же слѣда, сливающаяся съ самимъ слѣдомъ,—на пересѣченіи перпендикуляра, возстановленнаго изъ h', съ горизонтальною проекціей ab прямой. На основаніи тѣхъ же соображеній заключаемъ, что горизонтальная проекція v вертикальнаго слѣда лежитъ въ точкѣ пересѣченія горизонтальной проекціи ab прямой съ осью xy, а вертикальная проекція v' того же слѣда, совпадающая съ самимъ слѣдомъ,—на пересѣченіи перпендикуляра, возстановленнаго изъ v, съ вертикальной проекціей $a'b'$ прямой.

36. Отсюда правило: *чтобы найти горизонтальный слѣдъ прямой, по даннымъ ея проекціямъ, слѣдуетъ продолжить вертикальную проекцію $a'b'$ прямой до встрѣчи съ xy въ точкѣ h'—это будетъ вертикальная проекція горизонтальнаго слѣда; затѣмъ, изъ точки h' возстановить перпендикуляръ къ оси xy до встрѣчи съ горизонтальною проекціей прямой въ точкѣ h—это будетъ горизонтальный слѣдъ.* Такимъ же образомъ найдемъ вертикальный слѣдъ (v, v').

37. Замѣчаніе. 1) Въ слѣдующемъ условимся обозначать проекціи горизонтальнаго слѣда буквами h и h', а вертикальнаго—буквами v и v'.

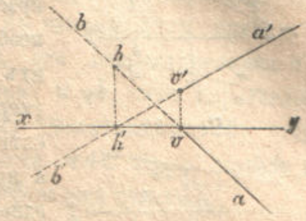
2) Горизонтальная прямая имѣетъ одинъ слѣдъ—вертикальный, вертикальная прямая имѣетъ одинъ слѣдъ горизонтальный, прямая, параллельная оси, не имѣетъ слѣдовъ.

3) Предыдущее правило не можетъ быть примѣнено въ случаѣ прямой, проекціи которой перпендикулярны къ оси (§ **29**).

38. Обратная задача. *По даннымъ слѣдамъ прямой построить проекціи ея.*

Если (*чер. 29*) h и v'—данные горизонтальный и вертикальный слѣды, или, что все равно, горизонтальная проекція горизонтальнаго слѣда и вертикальная проекція вертикальнаго слѣда, то другія ихъ проекціи лежатъ на оси въ точкахъ h' и v; и по условію искомая прямая должна проходить черезъ точки (h, h') и (v, v'); а потому горизонтальная проекція ея пройдетъ чрезъ h и v, а вертикальная—чрезъ h' и v'. Слѣдовательно, прямая (hv, $h'v'$) есть искомая.

39. Нахожденіе слѣдовъ имѣетъ весьма важное значеніе при опредѣленіи положенія прямой въ пространствѣ, ибо слѣды даютъ возможность отдѣлить части прямой, лежащія въ различныхъ углахъ.



Чер. 30.

Такъ, напр., опредѣливъ слѣды прямой (ab, $a'b'$) (*чер. 30*), найдемъ, что часть ея (av, $a'v'$) лежитъ въ первомъ углѣ (§ **11**), часть (vh, $v'h'$)—во второмъ, наконецъ, часть (hb, $h'b'$)—въ третьемъ, и такимъ образомъ увидимъ, что данная прямая проходитъ въ первомъ углѣ сверху внизъ и, пройдя чрезъ вертикальную плоскость, входитъ во второй уголъ, откуда, пройдя чрезъ горизонтальную плоскость, выходитъ въ третій.

40. Взаимное положеніе двухъ прямыхъ въ пространствѣ.

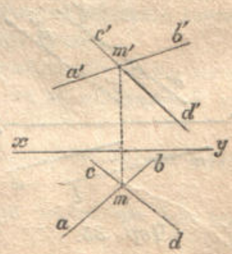
Двѣ прямыя въ пространствѣ могутъ или пересѣкаться, или быть параллельными, или скрещиваться, т. е. не пересѣкаться и не быть параллельными, или, наконецъ, быть перпендикулярными.

Эпюръ даетъ непосредственное указаніе, къ какому изъ перечисленныхъ случаевъ относятся двѣ данныя своими проекціями прямыя, за исключеніемъ послѣдняго случая.

41. Теорема I. *Для того, чтобы двѣ прямыя пересѣкались, необходимо и достаточно, чтобы одноименныя проекціи прямыхъ пересѣкались и точки ихъ пересѣченія лежали на одномъ перпендикулярѣ къ оси.*

Эти условія необходимы, ибо они всегда выполняются, коль скоро прямыя пересѣкаются. Въ самомъ дѣлѣ (*чер. 31*), пусть прямыя (ab, $a'b'$) и (cd, $c'd'$) пересѣкаются въ точкѣ M.

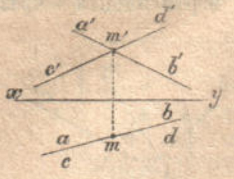
Въ такомъ случаѣ горизонтальная проекція точки M должна находиться одновременно на обѣихъ горизонтальныхъ проекціяхъ прямыхъ, а вертикальная—на обѣихъ вертикальныхъ (§ **34**). Слѣдовательно, ab и cd должны пересѣкаться въ одной точкѣ m, а $a'b'$ и $c'd'$—въ одной точкѣ m'; и обѣ точки m и m', какъ проекціи одной и той же точки въ пространствѣ, должны находиться на одномъ перпендикулярѣ къ оси (§ **18**).



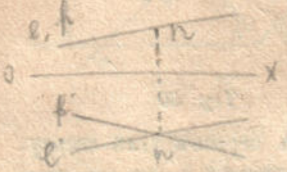
Чер. 31.

Эти условія достаточны, ибо, если они выполняются, то двѣ прямыя въ пространствѣ пересѣкаются. Въ самомъ дѣлѣ, если (*чер. 31*) точка m, пересѣченія горизонтальныхъ проекцій данныхъ прямыхъ, и точка m', пересѣченія вертикальныхъ проекцій тѣхъ же прямыхъ лежатъ на одномъ перпендикулярѣ къ оси, то точки m и m' суть проекціи одной и той же точки (§ **18**), принадлежащей при томъ каждой изъ данныхъ прямыхъ, ибо проекціи ея m и m' лежатъ на одноименныхъ проекціяхъ прямыхъ (§ **34**). Слѣдовательно, данныя прямыя пересѣкаются въ одной точкѣ M.

42. Въ частномъ случаѣ, если прямыя лежатъ въ одной и той же проектирующей плоскости и, слѣдовательно, если двѣ ихъ одноименныя проекціи сливаются въ одну прямую, то условія пересѣченія такихъ прямыхъ выразятся такъ: для того, чтобы двѣ прямыя, одноименныя проекціи которыхъ сливаются въ одну прямую, пересѣкались, необходимо и достаточно, чтобы двѣ другія одноименныя ихъ проекціи пересѣкались. Такъ, прямыя $(ab, a'b')$ и $(cd, c'd')$ (*чер. 32*), лежащія въ одной и той же горизонтально-проектирующей плоскости, пересѣкаются въ точкѣ (m, m'); а прямыя $(en\ e'n')$ и $(fn, f'n')$ (*чер. 33*), лежащія въ одной и той же вертикально-проектирующей плоскости, пересѣкаются въ точкѣ (n, n').



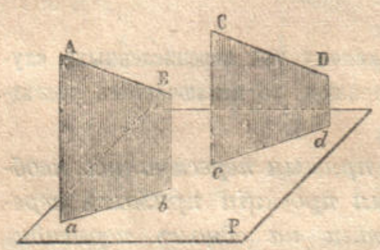
Чер. 32.



Чер 33.

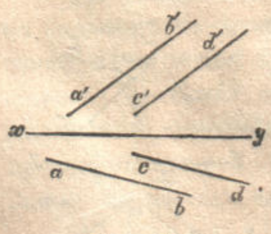
43. Теорема II. *Для того, чтобы двѣ прямыя были параллельны, необходимо и достаточно чтобы ихъ одноименныя проекціи были параллельны.*

Эти условія—*необходимы,* ибо они выполняются каждый разъ, коль скоро прямыя параллельны. Въ самомъ дѣлѣ (*чер. 34*), пусть AB и CD—параллельныя прямыя. Докажемъ, что проекція ab и cd на какую-либо плоскость P тоже параллельны. Для чего замѣтимъ, что двѣ какія-либо проектирующія Aa и Cc, какъ перпендикулярныя къ одной и той же плоскости, параллельны между собою и что, слѣдовательно, проектирующія плоскости $ABab$, и $CDcd$, какъ содержащія углы aAB и cCD, составленные параллельными прямыми, суть тоже параллельны (Геометрія Давыдова, § 202); отсюда проекціи ab и cd параллельны, какъ сѣченіе двухъ параллельныхъ плоскостей третьей плоскостью P (Геометрія Давыдова, § 201).



Чер. 34.

Эти условія и—*достаточны,* т. е. если горизонтальныя ab и cd и вертикальныя $a'b'$ и $c'd'$ проекціи прямыхъ (*чер. 35*) соотвѣтственно параллельны, то и самыя прямыя параллельны. Дѣйствительно, если возстановимъ вертикальную плоскость проекцій и проведемъ проектирующія плоскости, то плоскости, проектирующія прямую AB, будутъ соотвѣтственно параллельны плоскостямъ, проектирующимъ прямую CD, и, слѣдовательно, пересѣкутся по прямымъ, параллельнымъ между собою.



Чер. 35.

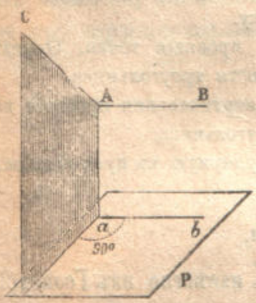
44. Теорема III. *Двѣ прямыя не лежатъ въ одной плоскости:* 1) *когда точки пересѣченія ихъ одноименныхъ проекцій не лежатъ на одномъ перпендикулярѣ къ оси;* 2) *когда одноименныя проекціи ихъ не параллельны между собою.*

Ибо въ обоихъ этихъ случаяхъ прямыя не пересѣкаются и не параллельны, и, слѣдовательно, не лежатъ въ одной плоскости.

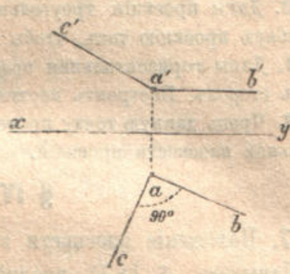
45. О перпендикулярности прямыхъ можно судить непосредственно по эпюру только въ слѣдующемъ частномъ случаѣ.

Теорема IV. *Если двѣ прямыя перпендикулярны между собою и одна изъ нихъ параллельна плоскости проекцій, то проекціи ихъ на эту плоскость тоже взаимно-перпендикулярны.*

Пусть (*чер. 36*) AB и AC—взаимно-перпендикулярныя прямыя и AB—параллельна плоскости проекцій P; пусть ab и ac—ихъ проекціи на плоскость P; требуется доказать, что ab перпендикулярна къ ac. Въ самомъ дѣлѣ, прямая AB перпендикулярна къ AC и къ Aa, слѣдовательно, она перпендикулярна и къ плоскости aAC (Геометрія Давыдова, § 188); а потому и ab, какъ параллельная AB, перпендикулярна къ той же плоскости (Геометрія Давыдова, § 196); отсюда и проекція ac, какъ прямая, проведенная въ плоскости aAC черезъ основаніе a прямой ab, перпендикулярна къ послѣдней. Что и требовалось доказать.



Чер. 36.



Чер. 37.

46. На этомъ основаніи (*чер. 37*) прямыя (ab, $a'b'$) и (ac, $a'c'$), изъ которыхъ (ab, $a'b'$) параллельна горизонтальной плоскости (§ **33**, **I**), взаимно-перпендикулярны, ибо ихъ горизонтальныя проекціи ab и ac пересѣкаются подъ прямымъ угломъ.

ЗАДАЧИ.

6. Построить проекціи прямой, которая проходитъ чрезъ двѣ данныя точки $x=-2$, $y=a$ и $x=5$, $y=-2$.

7. На прямой, перпендикулярной къ вертикальной плоскости, взять точку.

8. Узнать, лежать ли три данныя точки на данной прямой.

9. Даны горизонтальныя проекціи двухъ точекъ и вертикальныя проекціи другихъ двухъ точекъ; найти проекціи прямой, на которой лежатъ всѣ четыре точки.

10. На данной прямой взять точку на данномъ разстояніи отъ вертикальной плоскости.

11. На данной прямой взять точку на данномъ разстояніи отъ горизонтальной плоскости проекцій.

12. На данной прямой найти точку, принадлежащую плоскости биссектора I угла, II угла.

13. Построить проекціи прямой, находящейся въ плоскости биссектора 2-го угла, 3-го угла.

14. Построить проекціи прямой, параллельной плоскости биссектора I угла, II угла.

15. На данной прямой найти точку, для которой $x=2y$.

16. Черезъ точку $x=-2$, $y=-3$ провести горизонтальную прямую.

17. Изъ точки $x=3$, $y=-2$ опустить перпендикуляръ на горизонтальную плоскость проекцій.

18. Чрезъ точку въ четвертомъ углѣ провести вертикальную прямую.

19. Построить слѣды прямой, которая проходитъ чрезъ двѣ точки $x=-2$, $y=-3$ и $x=5$, $y=-4$, находящіяся другъ отъ друга на разстояніи 6, считая по оси проекцій.

20. Опредѣлить слѣды прямой: a) перпендикулярной къ одной изъ плоскостей проекцій, b) параллельной одной изъ плоскостей проекцій.

21. Оба слѣда прямой сливаются въ одну точку $x=0$, $y=-3$; $x=5$, $y=0$. Опредѣлить положеніе прямой въ пространствѣ.

22. Построить прямую, проходящую въ одномъ, въ двухъ, въ трехъ углахъ.

23. Опредѣлить углы, чрезъ которые проходитъ данная прямая.

24. Отдѣлить видимую часть данной прямой отъ невидимой.

25. Чрезъ данную точку провести прямую, которая встрѣтила бы данную прямую.

26. Чрезъ данную точку провести прямую, которая бы встрѣтила двѣ пересѣкающіяся прямыя.

27. Чрезъ данную точку провести прямую такъ, чтобы она встрѣчала двѣ данныя, пересѣкающіяся прямыя и была бы параллельна одной изъ плоскостей проекцій.

28. Чрезъ данную точку провести прямую, которая встрѣчала бы данныя двѣ параллельныя прямыя и была бы параллельна одной изъ плоскостей проекцій.

29. Даны проекціи трехъ точекъ, служащихъ вершинами треугольника. Построить проекціи треугольника и взять внутри его какую-либо точку.

30. Даны проекціи треугольника и горизонтальная проекція точки. Опредѣлить ея вертикальную проекцію такъ, чтобы точка лежала въ плоскости треугольника.

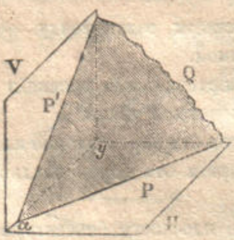
31. Даны горизонтальная проекція пятиугольника и вертикальная проекція двухъ его смежныхъ сторонъ. Построить вертикальную проекцію пятиугольника.

32. Чрезъ данную точку провести прямую, перпендикулярную къ прямой параллельной вертикальной плоскости проекцій.

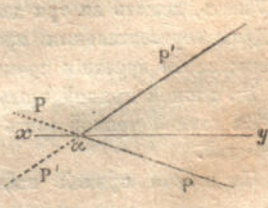
§ IV. О Плоскости.

47. Положеніе плоскости въ пространствѣ, какъ извѣстно изъ Геометріи (Геометрія Давыдова, § 187), вполнѣ опредѣляется или двумя пересѣкающимися прямыми, или двумя параллельными прямыми, или прямою и точкой, или, наконецъ, тремя точками, не лежащими на одной прямой.

Въ Начертательной Геометріи положеніе плоскости наиболѣе часто опредѣляется *двумя прямыми* пересѣкающимися или параллельными, но не произвольно взятыми, а такими прямыми, по которымъ данная плоскость пересѣкаетъ плоскости проекцій. Такія прямыя называются *слѣдами* плоскости; при чемъ прямая, по которой данная плоскость пересѣкаетъ горизонтальную плоскость проекцій, называется



Чер. 38.



Чер 39.

горизонтальнымъ слѣдомъ; прямая пересѣченія данной плоскости съ вертикальною плоскостію проекцій—*вертикальнымъ слѣдомъ* плоскости. Такимъ образомъ, плоскость Q *(чер. 38)* будетъ опредѣляться горизонтальнымъ слѣдомъ αP и вертикальнымъ $\alpha P'$, которые послѣ совмѣщенія вертикальной плоскости съ горизонтальной представятся на *чертежѣ 39.*

48. Слѣды плоскости, какъ прямыя, лежащія въ плоскостяхъ проекцій, имѣютъ одну свою проекцію на оси xy (**§ 32**); и потому проекціи вертикальнаго слѣда суть $\alpha P'$, xy, проекціи горизонтальнаго αP, xy.

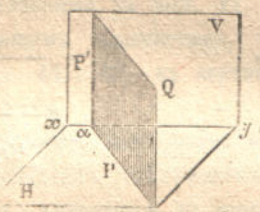
49. Различнымъ положеніямъ данной плоскости въ отношеніи плоскостей проекцій соотвѣтствуютъ и различныя положенія слѣдовъ плоскости въ отношеніи оси, и такимъ образомъ по эпюру слѣдовъ можно судить о положеніи плоскости въ пространствѣ.

1) Плоскость наклонна къ обѣимъ плоскостямъ проекцій.

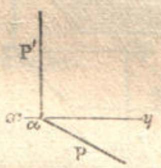
Въ этомъ случаѣ *слѣды плоскости пересѣкаютъ ось въ одной точкѣ* α (*чер. 38*); ибо три, наклонныя другъ къ другу, плоскости Q, H и V пересѣкаются въ одной точкѣ, чрезъ которую проходятъ прямыя пересѣченія плоскостей между собою, т. е. слѣды αP и $\alpha P'$ и ось xy. *Чертежъ 39* представляетъ эпюръ наклонной плоскости.

2) Плоскость перпендикулярна къ горизонтальной плоскости проекцій.

Въ этомъ случаѣ *вертикальный слѣдъ плоскости перпендикуляренъ къ оси xy, горизонтальный же лежитъ какъ угодно.*



Чер. 40.



Чер. 41.

Дѣйствительно, слѣдъ $\alpha P'$ (*чер. 40*), какъ пересѣченіе двухъ плоскостей V и Q, перпендикулярныхъ къ горизонтальной плоскости, перпендикуляренъ къ плоскости H (Геометрія Давыдова, § 209,2), а слѣдовательно, и къ лежащей въ ней прямой xy. *Чер. 41* представляетъ эпюръ плоскости, перпендикулярной къ горизонтальной плоскости проекцій.

3) Плоскость перпендикулярна къ вертикальной плоскости проекцій (*чер. 42*).

Чер. 42.

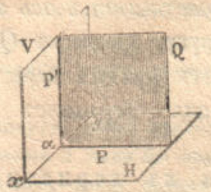
Чер. 43.

Въ этомъ случаѣ, на томъ же основаніи, какъ и въ предыдущемъ, *горизонтальный слѣдъ плоскости перпендикуляренъ къ оси, а вертикальный лежитъ какъ угодно. Чер. 43* представляетъ эпюръ плоскости, перпендикулярной и вертикальной плоскости проекцій.

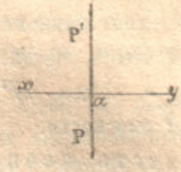
4) Плоскость перпендикулярна къ обѣимъ плоскостямъ проекцій, или плоскость профиля (*чер. 44*).

Въ этомъ случаѣ *оба слѣда плоскости, лежатъ на одной прямой, перпендикулярной къ оси проекцій*, ибо данная плоскость Q, какъ перпендикулярная къ плоскостямъ проекцій H и V, перпендикулярна и къ ихъ пересѣченію, т. е. къ оси xy, а слѣдовательно и обратно, ось xy перпендикулярна къ плоскости Q и къ слѣдамъ, въ ней лежащимъ, αP и $\alpha P'$. *Чер. 45* представляетъ эпюръ плоскости профиля.

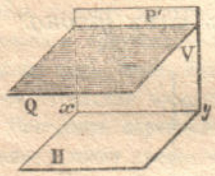
5) Плоскость параллельна горизонтальной плоскости проекцій (*чер. 46*).



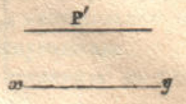
Чер. 44.



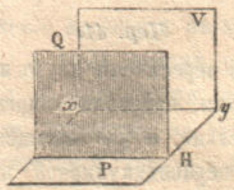
Чер. 45



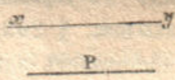
Чер. 46.



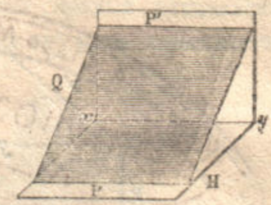
Чер. 47.



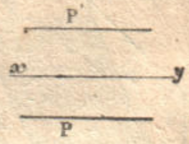
Чер. 48.



Чер. 49.



Чер. 50.



Чер. 51.

Въ этомъ случаѣ *плоскость имѣетъ одинъ вертикальный слѣдъ P', параллельный оси;* ибо вертикальный слѣдъ P' плоскости Q и ось xy можно разсматривать, какъ сѣченіе двухъ параллельныхъ плоскостей Q и H третьею—V. *Чер. 47* представляетъ эпюръ горизонтальной плоскости.

6) Плоскость параллельна вертикальной плоскости проекцій (*чер. 48*).

Въ этомъ случаѣ, на томъ же основаніи, какъ и въ предыдущемъ *плоскость имѣетъ одинъ горизонтальный слѣдъ P, параллельный оси. Чертежъ 49* представляетъ эпюръ вертикальной плоскости.

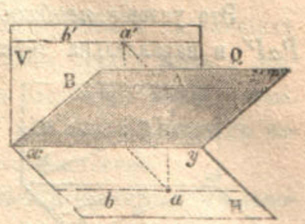
7) Плоскость параллельна оси (*чер. 50*).

Въ этомъ случаѣ *оба слѣда плоскости параллельны оси* (Геометрія Давыдова, § 199, 3). *Чертежъ 51* представляетъ эпюръ плоскости, параллельной оси.

8) Плоскость проходитъ чрезъ ось (*чер. 52*).

Въ этомъ случаѣ плоскость не можетъ быть задана слѣдами, ибо оба слѣда плоскости сливаются въ одну прямую — ось.

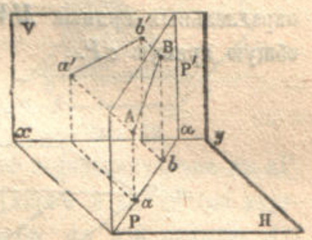
Для заданія такой плоскости необходимо дать въ плоскости или точку, напр., $(a, a',)$, или прямую, напр., $(ab, a'b')$.



Чер 52.

50. Всѣ разсмотрѣнныя нами положенія плоскости приводятъ насъ къ слѣдующему заключенію: *слѣды плоскости могутъ или встрѣчать ось въ одной точкѣ, или быть параллельными оси.*

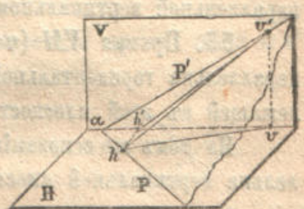
51. Всякая плоскость, перпендикулярная къ одной изъ плоскостей проекцій, можетъ быть разсматриваема, какъ проектирующая плоскость (§ **30**); и потому плоскости $P\alpha P'$, представленныя на *чер. 41, 45* и *49*, могутъ быть отнесены къ горизонтально-проектирующимъ плоскостямъ, а плоскости $P\alpha P'$ на *чер. 43, 45* и *47*—къ вертикально-проектирующимъ плоскостямъ.



Чер. 53.

Проектирующія плоскости, какъ видно изъ ихъ опредѣленія (§ **30**), обладаютъ слѣдующимъ свойствомъ: *всякая фигура, лежащая въ проектирующей плоскости, имѣетъ одну изъ своихъ проекцій на слѣдѣ плоскости.* Такъ, прямая AB, лежащая въ горизонтально-проектирующей плоскости $P\alpha P'$ (*чер. 53*), имѣетъ свою горизонтальную проекцію ab на горизонтальномъ слѣдѣ плоскости αP.

52. Теорема I. *Для того, чтобы прямая, не параллельная ни одному изъ слѣдовъ данной плоскости, лежала въ плоскости, необходимо и достаточно, чтобы слѣды прямой лежали на соотвѣтствующихъ слѣдахъ плоскости.*

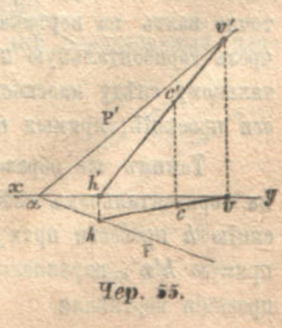


Чер. 54.

Дѣйствительно, это условіе—*необходимо*, ибо прямая hv' (*чер. 54*), находясь въ плоскости $P\alpha P'$, должна встрѣчать слѣды плоскости въ тѣхъ же точкахъ (h, h'), и (v, v'), въ которыхъ она встрѣчаетъ и плоскости проекцій.

Это условіе и—*достаточно*, ибо прямая, имѣющая свои слѣды на слѣдахъ плоскости, имѣетъ съ плоскостью двѣ общія точки и, слѣдовательно, вся совмѣщается съ плоскостью.

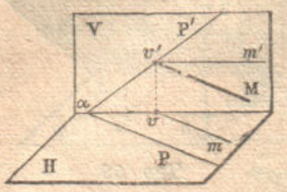
53. Отсюда, чтобы взять прямую въ данной плоскости $P\alpha P'$ *чер. 55*), достаточно взять на вертикальномъ и горизонтальномъ слѣдахъ ея по точкѣ (h, h') и (v, v') и, принявъ эти точки за слѣды прямой, соединить ихъ одноименныя проекціи прямыми: hv, $h'v'$. Эти прямыя и суть проекціи прямой, лежащей въ плоскости.



Чер. 55.

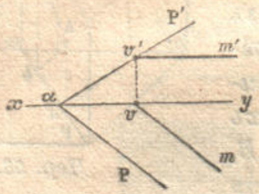
54. Теорема II. *Для того, чтобы прямая, параллельная одному изъ слѣдовъ плоскости, лежала въ плоскости, необходимо и достаточно,* *чтобы единственный ея слѣдъ лежалъ на соотвѣтствующемъ слѣдѣ плоскости.*

Это условіе *необходимо*. Пусть (*чер. 56*) прямая Mv' лежитъ въ плоскости $P\alpha P'$ и параллельна горизонтальному слѣду ея αP. Въ такомъ случаѣ, очевидно, что прямая Mv' встрѣтитъ вертикальную плоскость проекціи въ точкѣ v', лежащей на вертикальномъ слѣдѣ $\alpha P'$, плоскости $P\alpha P'$.

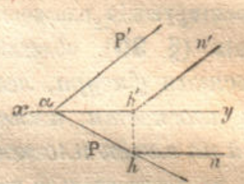


Чер. 56.

Это условіе и—*достаточно*, ибо, если имѣемъ прямую $(vm,\ v'm')$ (*чер. 57*), параллельную горизонтальному слѣду $(\alpha P, xy)$ плоскости **(§ 43, 48)** (одноименнныя проекціи ихъ параллельны) и имѣющую свой вертикальный слѣдъ $(v,\ v')$ на вертикальномъ слѣдѣ $\alpha P'$ плоскости P, то такая прямая лежитъ на плоскости $P\alpha P'$, такъ какъ плоскость, проходящая чрезъ двѣ параллельныя прямыя MV и αP, имѣетъ съ плоскостью $P\alpha P'$ общую точку v' и общую прямую αP.



Чер. 57.



Чер. 58

Эту же теорему легко доказать и въ отношеніи прямой $(hn,\ h'n')$ (*чер. 58*), параллельной вертикальному слѣду $(\alpha P',\ xy)$ плоскости.

55. Прямая VM (*чер. 57*), находясь въ плоскости $P\alpha P'$, въ то же время параллельна горизонтальной плоскости проекцій, ибо она параллельна прямой αP, лежащей въ этой плоскости (Геометрія Давыдова, § 199, 2).

На томъ же основаніи прямая HN (*чер. 58*), какъ параллельная $\alpha P'$, параллельна вертикальной плоскости проекцій и лежитъ въ плоскости $P\alpha P'$.

Вотъ почему прямую VM называютъ *горизонталью*, а прямую HN—*вертикалью* данной плоскости.

Отсюда: *горизонталью данной плоскости называется прямая, лежащая въ плоскости и параллельная горизонтальной плоскости проекцій; вертикалью плоскости называется прямая, лежащая въ плоскости и параллельная вертикальной плоскости проекцій.*

56. Изъ предыдущаго легко видѣть, что для построенія горизонтали достаточно взять на вертикальномъ слѣдѣ плоскости $P\alpha P'$ (*чер. 57*) точку $(v,\ v')$ и чрезъ горизонтальную проекцію ея v провести прямую vm, параллельную горизонтальному слѣду плоскости, а чрезъ вертикальную v'—прямую $v'm'$, параллельную оси проекцій; прямыя vm и $v'm'$—суть проекціи горизонтали.

Такимъ же образомъ для построенія вертикали (*чер. 58*) достаточно взять на горизонтальномъ слѣдѣ плоскости точку (h, h') и чрезъ горизонтальную ея проекцію h провести прямую hn, параллельную оси xy, а чрезъ вертикальную h',—прямую $h'n'$, параллельную вертикальному слѣду плоскости. Прямыя hn, $h'n'$ суть проекціи вертикали.

57. Теорема III. *Точка лежитъ въ плоскости, если проекціи ея лежатъ на одноименныхъ проекціяхъ прямой, лежащей въ плоскости.*

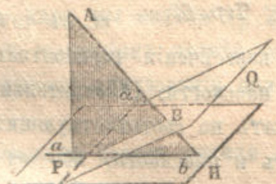
Предложеніе это очевидно. Точка (c, c') (*чер. 55*) лежитъ въ плоскости $P\alpha P'$.

58. Прямыя и плоскости могутъ находиться въ разнообразныхъ положеніяхъ относительно другъ друга, но непосредственно по эпюру можно судить лишь о перпендикулярности прямой къ плоскости и о параллельности плоскостей между собою.

Опредѣленіе же другихъ положеній требуетъ болѣе или менѣе сложныхъ построеній и лишь въ частныхъ случаяхъ опредѣляется непосредственно.

59. Теорема IV. *Чтобы прямая была перпендикулярна къ плоскости, необходимо и достаточно, чтобы проекціи прямой были перпендикулярны къ одноименнымъ слѣдамъ плоскости.*

Достаточно доказать *необходимость* этого условія относительно одного какого-либо слѣда, напр., горизонтальнаго, ибо все, что будетъ сказано о немъ, справедливо и относительно другого.

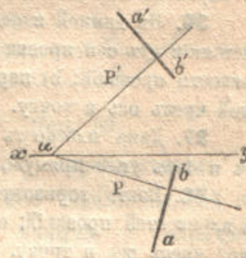


Чер. 59.

Пусть (*чер. 59*) H—горизонтальная плоскость проекцій, Q,—данная плоскость, αP—горизонтальный слѣдъ ея, AB—прямая, перпендикулярная къ плоскости Q, ab—ея горизонтальная проекція. Требуется доказать, что ab перпендикулярна къ αP.

Плоскость, проектирующая прямую AB, перпендикулярна и къ H (по опредѣленію) и къ Q, ибо проходитъ чрезъ перпендикулярную къ ней прямую AB (Геометрія Давыдова, § 209); слѣдовательно, проектирующая плоскость перпендикулярна и къ ихъ пересѣченію, или слѣду плоскости αP. Если же слѣдъ плоскости перпендикуляренъ плоскости $ABab$, то онъ перпендикуляренъ и къ лежащей въ ней горизонтальной проекціи, ab данной прямой.

Это условіе и—*достаточно*; пусть (*чер. 60*) проекціи прямой ab и $a'b'$ перпендикулярны къ слѣдамъ плоскости αP и $\alpha P'$; докажемъ, что самая прямая AB—перпендикулярна плоскости P. Плоскость P перпендикулярна къ плоскости, проектирующей прямую AB на горизонтальную плоскость, ибо содержитъ слѣдъ αP, перпендикулярный къ послѣдней. На томъ же основаніи плоскость P перпендикулярна и къ плоскости, вертикально-проектирующей прямую; слѣдовательно, плоскость, P перпендикулярна къ пересѣченію проектирующихъ плоскостей, т. е. къ прямой AB.

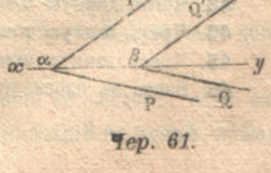


Чер. 60.

60. Теорема V. *Для того, чтобы двѣ плоскости были параллельны, необходимо и достаточно, чтоды ихъ одноименные слѣды были параллельны между собою.*

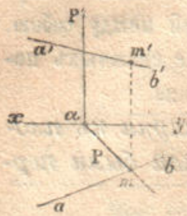
Необходимость этого условія видна изъ того, что двѣ параллельныя плоскости пересѣкаютъ третью по прямымъ, параллельнымъ между собою, и потому слѣды данныхъ параллельныхъ плоскостей, какъ сѣченія данныхъ плоскостей плоскостями проекцій, параллельны между собою.

Достаточность же этого условія, т. е. доказательство того, что плоскости параллельны, если слѣды ихъ αP и βQ, $\alpha P'$ и βQ (*чер. 61*) соотвѣт-



Чер. 61.

ственно параллельны, видна изъ того, что углы $P\alpha P'$ и $Q\beta Q'$ составлены взаимно-параллельными сторонами (Геометрія Давыдова, § 202). Вотъ почему это условіе недостаточно въ случаѣ плоскостей параллельныхъ оси.



Чер. 62.

61. Въ частныхъ случаяхъ, какъ замѣчено выше, могутъ быть опредѣлены непосредственно по эпюру и другія положенія плоскостей и прямыхъ. Такъ, напр., точка встрѣчи прямой съ плоскостью въ общемъ случаѣ опредѣляется нѣкоторымъ построеніемъ, но если данная плоскость есть одна изъ проектирующихъ то точка встрѣчи ея съ прямой видна непосредственно. Въ самомъ дѣлѣ, пусть (*чер. 62*) данная плоскость $P\alpha P'$ есть горизонтально проектирующая, въ такомъ случаѣ прямая $(ab, a'b')$ встрѣчаетъ ее въ точкѣ (m, m'), горизонтальная проекція которой лежитъ на пересѣченіи горизонтальной проекціи прямой ab съ горизонтальнымъ слѣдомъ αP плоскости. Дѣйствительно, точка (m, m') принадлежитъ прямой, ибо ея проекціи лежатъ на соотвѣтствующихъ проекціяхъ прямой (§ **33**); точка (m, m') принадлежатъ и плоскости, ибо ея горизонтальная проекція лежитъ на горизонтальномъ слѣдѣ плоскости (§ **51**).

ЗАДАЧИ.

33. Построить слѣды плоскости: a) перпендикулярной къ горизонтальной плоскости проекціи и наклоненной подъ угломъ въ 30° къ вертикальной плоскости проекцій; b) параллельной оси и одинаково наклоненной къ обѣимъ плоскостямъ проекцій; c) параллельной горизонтальной плоскости проекцій и находящейся на 5 сант. выше или ниже ея.

34. Даны двѣ точки на горизонтальной плоскости: одна на передней, другія на задней ея частяхъ, и одна точка на вертикальной; построить слѣды плоскости, проходящей чрезъ три данныя точки.

35. На слѣдахъ плоскости взять двѣ точки такъ, чтобы разстояніе одной изъ нихъ отъ вертикальной плоскости было равно разстоянію другой отъ горизонтальной.

36. Въ данной плоскости взять прямую такъ, чтобы слѣды ея находились на данномъ разстояніи отъ оси проекціи. Взять прямую въ плоскости: a) параллельной горизонтальной плоскости проекцій; b) перпендикулярной къ горизонтальной плоскости проекцій; c) проходящей чрезъ ось и точку.

37. Дана плоскость и въ ней прямая; провести въ той же плоскости, но во 2-мъ, 3-мъ и 4-мъ углѣ прямую, параллельную данной.

38. Взять горизонталь въ плоскости: a) параллельной оси; b) параллельной одной изъ плоскостей проекцій; c) перпендикулярной къ одной изъ плоскостей проекцій; d) проходящей чрезъ ось и точку.

39. Взять вертикаль въ тѣхъ же плоскостяхъ.

40. Въ горизонтально-проектирующей плоскости провести горизонталь на разстояніи 5 сант. отъ вертикальной плоскости.

41. Въ горизонтально-проектирующей плоскости взять точку, для которой $x=3$, $y=5$.

42. Взять точку въ плоскостяхъ: a) параллельной оси; b) параллельной одной изъ плоскостей проекцій; c) перпендикулярной къ одной изъ плоскостей проекцій; d) проходящей чрезъ ось и точку.

43. Чрезъ данную прямую провести одну изъ проектирующихъ плоскостей.

44. Чрезъ данную точку провести одну изъ проектирующихъ плоскостей.

45. Чрезъ данную прямую провести плоскость, параллельную оси.

46. Взять въ плоскости прямую безъ посредства слѣдовъ.

ГЛАВА II.

Основныя задачи.

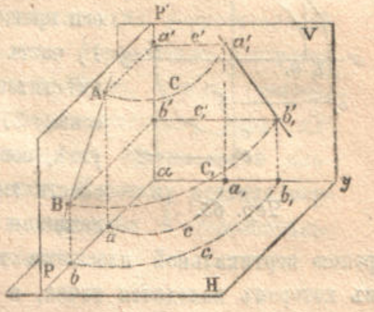
§ I. О прямыхъ, лежащихъ въ плоскости.

62. Задача. *Найти слѣды прямой, лежащей въ плоскости профиля.*

Прямая, лежащая въ плоскости профиля (§ **49,4**), какъ мы видѣли (§ **29**), не опредѣляется своими проекціями, т. е. по даннымъ ея проекціямъ нельзя опредѣлить положеніе точекъ, принадлежащихъ прямой; и потому для заданія прямой нужно *дать* проекціи *двухъ ея точекъ*.

Пусть (*чер. 63*) (a, a') и (b, b')—двѣ точки, которыми задана прямая AB въ плоскости профиля P.

Для рѣшенія задачи совмѣстимъ плоскость профиля P съ вертикальною плоскостью проекціи V, вращая плоскость P около вертикальнаго слѣда $\alpha P'$. При такомъ вращеніи, точки A и B будутъ перемѣщаться по окружностямъ C и C_1, лежащимъ въ плоскостяхъ, перпендикулярныхъ къ оси вращенія $\alpha P'$, или, что тоже, въ плоскостяхъ, параллельныхъ H, и описаннымъ радіусами, равными разстоянію точекъ A и B отъ оси вращенія, т. е. отъ вертикальной плоскости проекціи. Отсюда заключаемъ, что во время совмѣщенія a, a' b, b', точекъ A и B, будутъ перемѣщаться по соотвѣтствующимъ проекціямъ окружностей C и C_1. Но окружности C и C_1, какъ параллельныя H, проектируются на горизонтальную плоскость въ истинную величину по

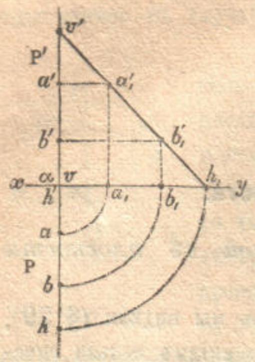


Чер. 63.

c и c_1, а на вертикальную—по прямымъ прямымъ c' и c'_1, параллельнымъ оси. Поэтому, если опишемъ дугу c радіусомъ, равнымъ разстоянію горизонтальной проекціи a, точки A, отъ оси (§ **16**) и проведемъ чрезъ a' прямую c', параллельную оси проекцій, то все время вращенія плоскости профиля, горизонтальная проекція a должна оставаться на дугѣ c, а вертикальная a'—на прямой c', и въ каждомъ новомъ положеніи проекціи a и a' должны находиться на одномъ перпендикулярѣ къ оси (§ **20**). Въ тотъ моментъ, когда плоскость профиля совмѣстится съ вертикальною плоскостью проекцій, горизонтальная проекція точки придетъ на ось въ точку a_1, а вертикальная—въ точку a'_1, которая и представитъ совмѣщеніе точки A.

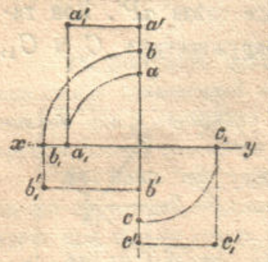
Подобнымъ образомъ опредѣлимъ совмѣщеніе точки B въ b'_1; отсюда совмѣщеніе данной прямой $(ab, a'b')$ есть прямая $a'_1b'_1$.

Зная совмѣщеніе прямой, легко найдемъ и совмѣщеніе ея слѣдовъ, если замѣтимъ, что прямая AB встрѣчаетъ вертикальную плоскость проекцій въ точкѣ, лежащей на вертикальномъ слѣдѣ $\alpha P'$, а горизонтальную—въ точкѣ, совмѣщеніе которой лежитъ на оси проекцій. Отсюда (*чер. 64*) совмѣщеніе вертикальнаго слѣда должно лежать въ точкѣ пересѣченія совмѣщенія прямой $a'_1b'_1$ съ слѣдомъ $\alpha P'$, а совмѣщеніе горизонтальнаго слѣда—въ точкѣ h_1 пересѣченія совмѣщенной прямой съ осью проекцій xy. И потому, для опредѣленія слѣдовъ прямой AB, остается привести плоскость профиля P вмѣстѣ съ совмѣщеніями v' и h_1 слѣдовъ въ первоначальное положеніе; при этомъ слѣдъ v' не измѣнитъ своего положенія, ибо лежитъ на оси вращенія $\alpha P'$, и, слѣдовательно, будетъ имѣть свою горизонтальную проекцію v на оси. Проекціи же слѣда h_1 во время приведенія плоскости въ первоначальное положеніе, будутъ перемѣщаться; горизонтальная по кругу радіуса αh_1, а вертикальная—по оси xy, и когда плоскость придетъ въ начальное положеніе, горизонтальная проекція слѣда будетъ находиться въ h, а вертикальная—въ h'.



Чер. 64.

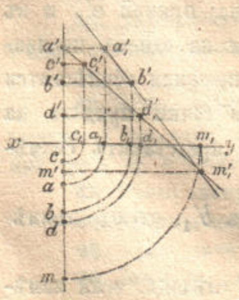
63. При совмѣщеніи плоскости профиля съ вертикальною плоскостію проекцій, нужно обращать вниманіе, во-первыхъ, на сторону, въ которую вращается плоскость профиля, а во-вторыхъ, на уголъ, въ которомъ лежитъ данная точка. Такъ, если часть плоскости профиля, лежащая въ первомъ углѣ, совмѣщается съ правою стороною (отъ оси вращенія) вертикальной плоскости, то легко понять, что 1) часть той же плоскости, лежащая во второмъ углѣ, совмѣстится съ *лѣвою* стороною вертикальной плоскости *надъ* осью, 2) часть плоскости профиля, лежащая въ третьемъ углѣ, совмѣстится съ *лѣвою* стороною вертикальной плоскости *подъ осью*, наконецъ, 3) часть плоскости профиля, лежащая въ четвертомъ углѣ, совмѣстится съ *правою* стороною вертикальной плоскости *подъ* осью. Такимъ образомъ соотвѣтственно углу, въ которомъ находится точка, и построеніе совмѣщенія этой точки должно дѣлать на соотвѣтствующей части вертикальной плоскости. Такъ (*чер. 65*), если точка (a,a') лежитъ во второмъ углѣ, точка (b, b')—въ третьемъ, точка (c, c')—въ четвертомъ, то совмѣщеніе ихъ опредѣлится въ точкахъ a'_1, b'_1, c'_1. Отсюда и обратно, зная совмѣщенія точки, легко опредѣлить уголъ, въ которомъ лежитъ точка, и построить проекціи точки.



Чер. 65.

64. Задача. *Найти точку пересѣченія двухъ прямыхъ, лежащихъ въ плоскости профиля.*

Пусть (*чер. 66*) первая прямая дана точками (a, a'), (b, b'); вторая—(c, c'), (d, d'). Найдемъ совмѣщеніе данныхъ прямыхъ $a'_1b'_1$ и $c'_1d'_1$ и продолжимъ ихъ до пересѣченія въ точкѣ m'_1. Точка m'_1 есть совмѣщеніе искомой точки. И потому, замѣтивъ, что она лежитъ въ четвертомъ углѣ, найдемъ ея проекціи m и m', поступая по § **63**.



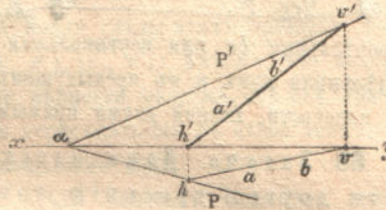
Чер. 66.

65. Задача. *Дана плоскость и одна изъ проекцій прямой; найти другую проекцію прямой подъ условіемъ, чтобы прямая лежала въ плоскости.*

Плоскость можетъ быть задана или слѣдами, или двумя пересѣкающимися прямыми, или двумя параллельными прямыми, или прямой и точкой. Послѣдній случай задания въ сущности ничѣмъ не отличается отъ второго, ибо, взявъ на данной прямой точку и соединивъ ее съ данной точкой, получимъ двѣ пересѣкающіяся прямыя. Поэтому заданную задачу мы разсмотримъ въ двухъ случаяхъ.

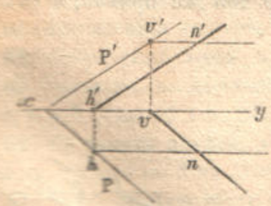
Первый случай. Плоскость дана слѣдами αP и $\alpha P'$.

1) Пусть данная (*чер. 67*), положимъ, горизонтальная проекція ab прямой пересѣкаетъ и ось xy въ точкѣ v, и горизонтальный слѣдъ (или его продолженіе) въ точкѣ h. Такъ какъ искомая прямая должна принадлежать плоскости $P\alpha P'$, то слѣды прямой должны находиться на слѣдахъ плоскости (**§ 52**), и слѣдовательно, v должно разсматривать, какъ горизонтальную проекцію вертикальнаго слѣда, а h—какъ горизонтальный слѣдъ искомой прямой. По v опредѣлимъ v' на слѣдѣ $\alpha P'$; по h опредѣлимъ h' на оси xy. Наконецъ, соединимъ точки v' и h' прямою $h'v'$, которая и представитъ искомую вертикальную проекцію прямой AB. Подобнымъ же образомъ разсуждаемъ, когда дана вертикальная проекція прямой.

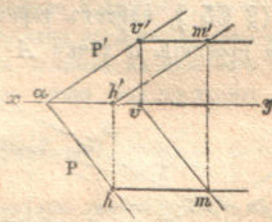


Чер. 67.

2) Пусть (*чер. 68*) данная проекція—вертикальная $v'n'$ или горизонтальная hn—параллельна оси. Въ первомъ случаѣ искомая прямая параллельна горизонтальной плоскости проекцій (**§ 32**) и, слѣдовательно, представляетъ горизонталь плоскости (**§ 55**). А потому, искомая горизонтальная проекція vn пройдетъ черезъ горизонтальную проекцію v вертикальнаго слѣда параллельно горизонтальному слѣду αP плоскости (**§ 56**). Во второмъ—искомая прямая параллельна вертикальной плоскости и, слѣдовательно, представляетъ вертикаль плоскости. И потому искомая вертикальная проекція $h'n'$ пройдетъ черезъ вертикальную проекцію h' горизонтальнаго слѣда параллельно вертикальному слѣду $\alpha P'$ плоскости.



Чер. 68.

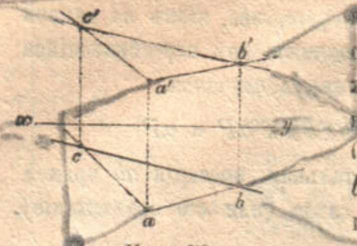


Чер. 69.

Пусть (*чер. 69*) данная проекція прямой—вертикальная $h'm'$ или горизонтальная vm параллельна одноименному съ нею слѣду плоскости. Въ первомъ случаѣ искомая прямая есть вертикаль плоскости (**§ 55**), и потому искомая горизонтальная проекція hm прямой пройдетъ черезъ горизонтальный слѣдъ h параллельно оси xy (**§ 56**). На тѣхъ же соображеніяхъ найдемъ, что искомая вертикальная проекція $v'm'$ прямой VM пройдетъ черезъ v' параллельно оси.

66. Второй случай. Плоскость дана двумя пересѣкающимися или паралельными прямыми.

Пусть (*чер. 70*) прямыя (ab, $a'b'$) и (ac, $a'c'$) — опредѣляютъ плоскость, пусть $b'c'$ данная вертикальная проекція искомой прямой. Чтобы искомая прямая принадлежала плоскости, достаточно, чтобы она имѣла съ нею двѣ общія точки. И потому точки b' и c' должно разсматривать, какъ вертикальныя проекціи точекъ встрѣчи прямой BC съ данными прямыми AB и AC. Отсюда, опредѣливъ по b' и c' горизонтальныя проекціи b и c точекъ B и C (**§ 33**), найдемъ, что искомая горизонтальная проекція прямой BC есть bc.

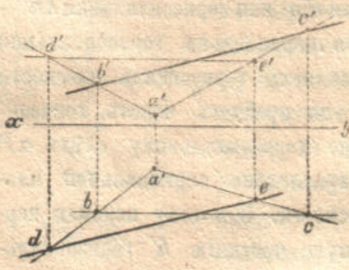


Чер. 70.

67. Если данная проекція прямой (*чер. 71*) — горизонтальная bc или вертикальная $d'e'$ — параллельна оси, то искомая прямая, опредѣленная какъ и въ предыдущемъ случаѣ, есть — въ первомъ случаѣ — вертикаль плоскости, данной двумя прямыми, во второмъ = горизонталь.

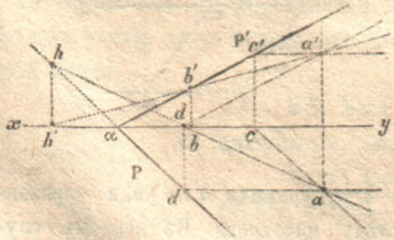
68. Задача. Дана плоскость и одна изъ проекцій точки, найти другую проекцію точки подъ условіемъ, чтобы точка лежала въ плоскости.

Точка лежитъ въ плоскости, если проекціи ея лежатъ на одноименныхъ проекціяхъ прямой, лежащей въ данной плоскости (**§ 57**). И потому для рѣшенія задачи достаточно черезъ данную проекцію точки провести произвольно проекцію вспомогательной прямой, опредѣлить по ней, на основаніи предыдущей задачи, другую проекцію той же прямой и взять, наконецъ, на послѣдней искомую проекцію точки.

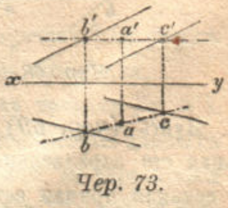


Чер. 71.

Такимъ образомъ, если плоскость дана слѣдами αP и $\alpha P'$ (*чер. 72*) и дана вертикальная проекція a' искомой точки A, то, проведя чрезъ нее произвольно вертикальную проекцію $b'a'$ вспомогательной прямой и опредѣливъ затѣмъ, ея горизонтальный и вертикальный слѣды (h, h') и (b, b') (**§ 65**), найдемъ горизонтальную проекцію hb той же прямой, и на ней — искомую проекцію a точки A (**§ 33**).



Чер. 72.



Чер. 73.

Удобнѣе въ данномъ случаѣ, вмѣсто произвольной вспомогательной прямой, проводить чрезъ точку или горизонталь AC, или вертикаль AD плоскости (**§ 56**).

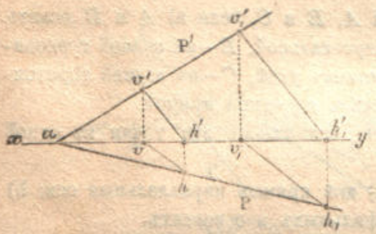
Если же плоскость дана двумя параллельными прямыми (b, b') и (c, c') (*Чер 73*) и дана горизонтальная проекція a искомой точки A, то, на основаніи тѣхъ же соображеній, проведемъ черезъ a произвольно горизонтальную проекцію bc

вспомогательной прямой, опредѣлимъ ея вертикальную проекцію $b'c'$ (**§ 66**) и на ней—вертикальную проекцію a' искомой точки A.

69. Задача. *Найти слѣды плоскости, проходящей: 1) чрезъ двѣ пересѣкающіяся или параллельныя; 2) чрезъ прямую и точку; 3) чрезъ три точки, не лежащія на одной прямой.*

Во всѣхъ данныхъ случаяхъ слѣды искомой плоскости должны проходить чрезъ слѣды (**§ 52**) или непосредственно данныхъ прямыхъ, или вспомогательныхъ прямыхъ, лежащихъ въ данной плоскости.

На этомъ основаніи, если плоскость дана, напр., двумя параллельными прямыми (vh, $v'h'$) и (v_1h_1, $v'_1h'_1$) (*чер. 74*), то, найдя слѣды этихъ прямыхъ, горизонтальные (h, h'), (h_1, h'_1) и вертикальные (v, v'), (v_1, v'_1), имѣемъ, что искомые слѣды плоскости суть прямыя $v'v_1$ и hh_1. (при вѣрности чертежа обѣ эти прямыя должны или пересѣкать ось въ одной точкѣ, или быть параллельными оси).



Чер. 74.

Если слѣды данныхъ прямыхъ лежатъ внѣ эпюра, то задача рѣшается при помощи вспомогательныхъ прямыхъ, которыя имѣютъ съ данными по двѣ общія точки, и которыя выбраны такимъ образомъ, чтобы слѣды ихъ лежали въ предѣлахъ эпюра. Всего удобнѣе въ этомъ случаѣ проводить или горизонтали или вертикали искомой плоскости.

Случаи, когда плоскость задана прямою и точкой или тремя точками ничѣмъ не отличаются отъ только что разсмотрѣннаго, ибо въ первомъ случаѣ достаточно какую-либо точку данной прямой соединить прямыми съ данною точкою, во второмъ—три точки соединить прямыми, чтобы привести ихъ къ случаю двухъ пересѣкающихся прямыхъ.

ЗАДАЧИ.

47. Найти слѣды прямой, лежащей въ плоскости профиля и заданной двумя точками, находящимися: a) одна въ 1-мъ, другая—во 2-мъ углѣ; *b*) одна во 2-мъ, другая—въ 4-мъ.

48. Найти углы, чрезъ которые проходитъ прямая, лежащая въ плоскости профиля.

49. Провести въ плоскости профиля прямую, такъ, чтобы она проходила чрезъ a) 1-й, 2-й и 4-й углы; *b*) 1-й, 2-й и 3-й; c) 1-й, 3-й и 4-й.

50. На данной прямой, лежащей въ плоскости профиля, взять точку въ a) 1-мъ углѣ; *b*) во 2-мъ углѣ; c) въ 3-мъ углѣ; *d*) въ 4-мъ углѣ.

51. Чрезъ данную точку провести прямую, параллельную данной прямой, находящейся съ данною точкою въ одной и той же профильной плоскости. Найти слѣды искомой прямой.

52. Изъ точки, данной на прямой, лежащей въ плоскости профиля, возстановить въ той же плоскости перпендикуляръ къ данной прямой. Найти его слѣды.

53. Провести чрезъ данную точку прямую, параллельную другой прямой, данной въ профильной плоскости. Опредѣлить двѣ точки искомой прямой.

54. По данной горизонтальной проекціи прямой опредѣлить ея вертикальную проекцію подъ условіемъ, чтобы прямая лежала въ плоскости: a) параллельной оси проекцій; *b*) параллельной вертикальной плоскости проекцій; c) проходящей чрезъ ось и точку; *d*) проходящей чрезъ двѣ данныя прямыя.

55. По данной вертикальной проекціи точки, найти ея горизонтальную проекцію подъ условіемъ, чтобы точка принадлежала одной изъ плоскостей, упомянутыхъ въ предыдущей задачѣ.

56. Въ данной плоскости провести горизонталь на данномъ разстояніи отъ горизонтальной плоскости проекцій.

57. Въ данной плоскости провести вертикаль на данномъ разстояніи отъ вертикальной плоскости проекцій.

58. Въ данной плоскости взять точку, которая бы находилась на данныхъ разстояніяхъ отъ плоскостей проекцій.

59. По даннымъ разноименнымъ проекціямъ двухъ точекъ опредѣлить прямую, которая бы принадлежала данной плоскости.

60. По данной горизонтальной проекціи многоугольника и плоскости, въ которой онъ лежитъ, построить вертикальную проекцію того же многоугольника.

61 Опредѣлить, принадлежитъ ли данная точка плоскости, данной: a) слѣдами, b) двумя пересѣкающимися прямыми, c) проходящей чрезъ ось и точку, d) параллельной оси.

62 Построить слѣды плоскости, проходящей чрезъ двѣ прямыя AB и CD, если a) AB - перпендикулярна къ горизонтальной плоскости; b) AB—горизонтальна, CD—вертикальна; c) обѣ прямыя горизонтальны; d) AB—параллельна оси; e) AB лежитъ въ плоскости профиля.

63. Построить слѣды плоскости чрезъ три точки A, B и C, если a) A и B лежатъ въ одной плоскости профиля; b) A лежитъ на нижней вертикальной, B—на задней горизонтальной, C—въ первомъ углѣ; c) A—на оси, B—въ третьемъ углѣ, C—на задней горизонтальной; d) вертикальныя проекціи точекъ A, B и C лежатъ на одной прямой.

64 Даны проекціи четырехъ точекъ; опредѣлить, лежатъ ли эти точки въ одной плоскости.

65. Найти слѣды плоскости, проходящей чрезъ a) двѣ прямыя параллельныя оси; b) двѣ параллельныя прямыя, лежащія въ различныхъ профильныхъ плоскостяхъ.

66. Построить слѣды плоскости, которая проходитъ чрезъ данную точку и прямую перпендикулярную къ оси проекцій и находящуюся въ плоскости биссектора перваго угла

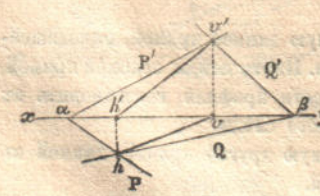
67. Построить слѣды плоскости, которая проходитъ чрезъ двѣ прямыя, имѣющія свои слѣды внѣ предѣловъ эпюра.

68. Даны прямая и точка; провести чрезъ точку прямую такъ, чтобы она встрѣчала данную прямую и ось проекцій.

§ II. О пересѣченіи плоскостей и прямыхъ между собою.

70. Пересѣченіе двухъ плоскостей есть прямая, и потому для построенія ея достаточно опредѣлить или двѣ ея точки, или одну точку и направленіе. Такое опредѣленіе въ случаѣ заданія плоскостей ихъ слѣдами дѣлается на основаніи слѣдующихъ соображеній.

I. Если одноименные слѣды плоскостей или ихъ продолженія взаимно-пересѣкаются, то точки ихъ пересѣченія суть слѣды искомой прямой, ибо прямая пересѣченія, принадлежа одновременно обѣимъ плоскостямъ, должна имѣть свой горизонтальный слѣдъ на горизонтальныхъ слѣдахъ обѣихъ плоскостей (§ **52**), т. е въ точкѣ ихъ пересѣченія; на томъ же основаніи, точка пересѣченія вертикальныхъ слѣдовъ плоскостей—есть вертикальный слѣдъ прямой; зная слѣды, построимъ и проекціи прямой пересѣченія (§ **38**). Такимъ образомъ, если даны двѣ плоскости $P\alpha P'$ и $Q\beta Q'$ (*чер. 75*), горизонтальные слѣды которыхъ пересѣкаются въ точкѣ (h, h'), а вертикальные—въ точкѣ (v, v'), то прямая пересѣченія данныхъ плоскостей есть $(hv, h'v')$.



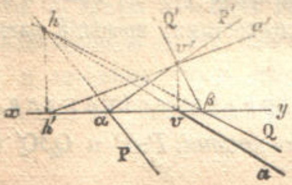
Чер. 75.

II. Если слѣды плоскостей не пересѣкаются, то опредѣленіе двухъ или одной точки прямой пересѣченія данныхъ плоскостей P и Q производится при помощи вспомогательной плоскости R, которая должна быть выбрана такимъ образомъ, чтобы легко можно было найти прямыя D и E ея пересѣченія съ плоскостями P и Q. Прямыя D и E, какъ лежащія въ одной плоскости R, пересѣкутся въ точкѣ M, которая принадлежитъ, очевидно, и искомому пересѣченію плоскости P и Q.

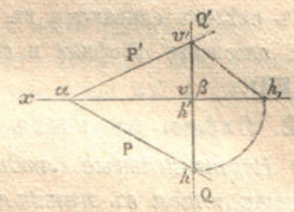
Въ поясненіе указанныхъ общихъ пріемовъ разсмотримъ нѣсколько частныхъ примѣровъ.

71. Слѣды плоскостей пересѣкаются.

1) Пусть (*чер. 76*) даны плоскости $P\alpha P'$ и $Q\beta Q'$. Вертикальные слѣды данныхъ плоскостей пересѣкаются непосредственно въ точкѣ $(v\ v')$; слѣдовательно, точка $(v,\ v')$ есть вертикальный слѣдъ искомой прямой. Горизонтальные слѣды пересѣкаются по ихъ продолженію въ точкѣ $(h,\ h')$; слѣдовательно, $(h,\ h')$ есть



Чер. 76.



Чер. 77.

горизонтальный слѣдъ искомой прямой. И потому, соединивъ горизонтальныя и вертикальныя проекціи слѣдовъ прямыми, найдемъ проекціи hv, $h'v'$ искомой прямой пересѣченія.

2) *Даны (чер. 77) наклонная къ оси плоскость* $P\alpha P'$ *и плоскость профиля* $Q\beta Q'$.

На основаніи предыдущихъ соображеній точка $(h,\ h')$ есть горизонтальный слѣдъ, точка $(v,\ v')$—вертикальный слѣдъ прямой пересѣченія; слѣдовательно, искомая прямая есть $(hv,\ h'v')$. Совмѣщеніе ея съ вертикальною плоскостью есть прямая h_1v' (§ **62**).

3) *Даны (чер. 78) плоскости* $P\alpha P'$ и $Q\beta Q'$, *горизонтальные слѣды которыхъ параллельны между собою.*

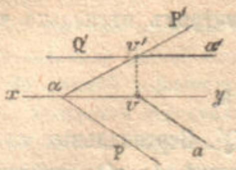
Въ этомъ случаѣ только вертикальные слѣды пересѣкаются, и точка ихъ пересѣченія $(v,\ v')$ есть вертикальный слѣдъ искомой прямой; а потому, чтобы опредѣлить прямую остается найти ея направленіе. Изъ Геометріи (Геометрія Давыдова, § 198) извѣстно, что двѣ плоскости, проходящія чрезъ двѣ параллельныя прямыя αP и βQ, пересѣкаются по прямой, параллельной этимъ прямымъ; а слѣдовательно, искомая прямая пересѣченія, какъ параллельная αP, будетъ

Чер. 78.

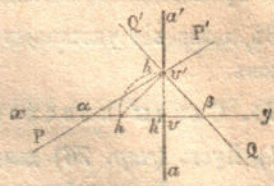
проектироваться на вертикальную плоскость по прямой $v'a'$, параллельной оси (§ **43, 48**); а на горизонтальную—по прямой va, параллельной слѣду αP, т. е. иначе говоря, искомая прямая есть общая горизонталь данныхъ плоскостей. На томъ же основаніи плоскости, вертикальные слѣды которыхъ параллельны между собою, пересѣкутся по общей вертикали.

4) *Даны (чер. 79) наклонная плоскость $P\alpha P'$ и горизонтальная плоскость Q'.*

Искомое сѣченіе есть, очевидно, горизонталь (va, $v'a'$) плоскости $P\alpha P'$.



Чер. 79.



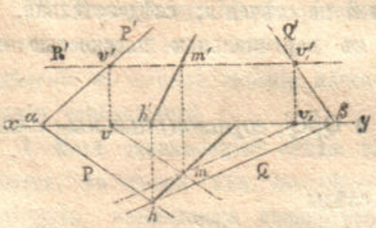
Чер. 80.

5) *Слѣды данныхъ плоскостей $P\alpha P'$ и $Q\beta Q'$ лежатъ на одной прямой (чер. 80).* Въ этомъ случаѣ точки пересѣченія вертикальныхъ и горизонтальныхъ слѣдовъ сливаются въ одну; и потому искомая прямая лежитъ во второмъ углѣ, въ плоскости профиля и составляетъ съ плоскостями проекцій равные углы **(§ 62, 63)**.

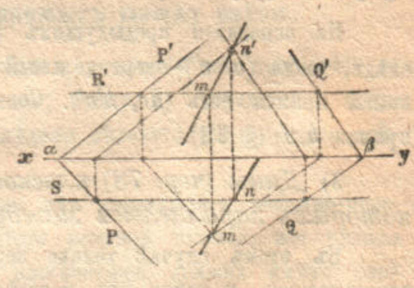
72. Слѣды данныхъ плоскостей не пересѣкаются.

1) *Вертикальные слѣды данныхъ плоскостей $P\alpha P'$ и $Q\beta Q'$ (чер. 81) не пересѣкаются въ предѣлахъ эпюра.*

Въ этомъ случаѣ непосредственно можно опредѣлить только одну точку прямой пересѣченія, именно горизонтальный слѣдъ ея (h, h'). Для опредѣленія же другой точки, пересѣчемъ данныя плоскости P и Q вспомогательною горизонтальною плоскостью R'. Плоскость R' пересѣкаетъ плоскость P по горизонтали (vm, $v'm'$), а плоскость Q—по горизонтали (v_1m, v'_1m') (**§ 71, 4**). Точка (m, m') встрѣчи прямыхъ vM и v_1M, очевидно, принадлежитъ искомому пересѣченію плоскостей P и Q, и потому искомая прямая есть (hm, $h'm'$).

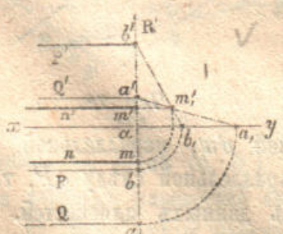


Чер. 81.



Чер. 82.

2) *Вертикальные и горизонтальные слѣды данныхъ плоскостей $P\alpha P'$ и $Q\beta Q'$ (чер. 82) не пересѣкаются въ предѣлахъ эпюра.*



Чер. 83.

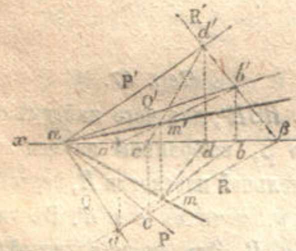
Въ этомъ случаѣ ни одна изъ точекъ искомаго сѣченія неизвѣстна, для опредѣленія ихъ необходимо употребить двѣ вспомогательныя плоскости, положимъ, одну горизонтальную—R', другую - вертикальную—S. При помощи первой плоскости опредѣлимъ точку (m, m'); при помощи второй—точку (n, n'). Слѣдовательно, искомая прямая есть (mn, $m'n'$).

3) *Плоскости PP' и QQ' (чер. 83) параллельны оси.*

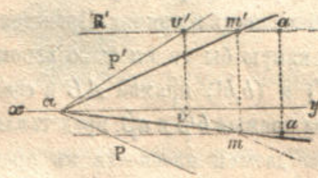
Искомое сѣченіе есть прямая, параллельная оси (Геометрія Давыдова, § 199); и потому для опредѣленія ея достаточно найти одну изъ ея точекъ. Для чего воспользуемся вспомогательною плоскостью, напр., плоскостью профиля $R\alpha R'$. Плоскость профиля пересѣчетъ плоскость P по прямой bb', совмѣщеніе которой съ вертикальною плоскостью есть прямая b_1b' (§ 62). Такимъ же образомъ найдемъ совмѣщеніе a_1a' пересѣченія плоскости профиля съ плоскостью Q. Обѣ прямыя b_1b' и a_1a', пересѣкутся въ точкѣ m'_1 (§ 64), которая есть ни что иное, какъ совмѣщеніе точки, принадлежащей пересѣченію плоскостей P и Q. А потому, найдя проекціи m и m' точки m'_1, имѣемъ, что искомая прямая есть (mn, $m'n'$).

4) *Обѣ данныя плоскости* P и Q *(чер. 84) пересѣкаютъ ось въ одной точкѣ* α.

Очевидно, точка α принадлежитъ искомому пересѣченію; и потому для построенія сѣченія остается найти еще другую его точку при помощи вспомогательной плоскости; за такую плоскость въ данномъ случаѣ всего удобнѣе принять плоскость $R\beta R'$, наклоненную къ оси. Плоскость R пересѣкаетъ плоскость Q по прямой (ab. $a'b'$) (§ 71), а плоскость P—по прямой (cb, $c'b'$). Прямыя же AB и CD пересѣкаются въ точкѣ (m, m') слѣдовательно, искомая прямая есть (αm, $\alpha m'$).



Чер 84.



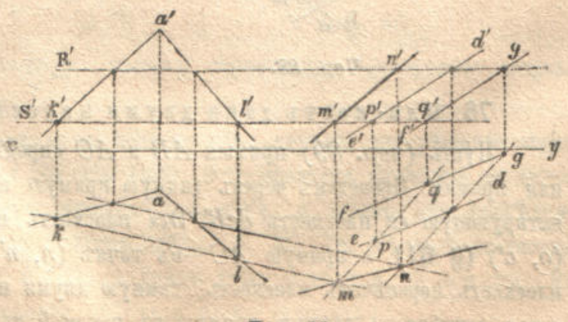
Чер. 85.

5) *Одна изъ плоскостей проходитъ чрезъ ось и точку* (a, a') *другая* $P\alpha P'$*—наклонна къ оси (чер. 85).*

Въ этомъ случаѣ точка α есть одна изъ точекъ искомаго пересѣченія. Чтобы найти другую, пересѣчемъ данныя плоскости вспомогательною горизонтальною плоскостью R', проведенною черезъ точку (a, a'). Плоскость R' пересѣкаетъ плоскость P по горизонтали (vm, $v'm'$), а плоскость черезъ ось и точку (a, a')—по прямой (am, $a'm'$) параллельной оси. Обѣ найденныя прямыя встрѣчаются въ точкѣ (m, m'); и слѣдовательно, искомая прямая есть (αm, $\alpha m'$).

73. Задача. *Найти пересѣченіе двухъ плоскостей, заданныхъ двумя пересѣкающимися параллельными прямыми.*

Пусть первая плоскость (чер. 86) опредѣляется двумя пересѣкающимися прямыми AK и AL, вторая—двумя параллельными DE и FG. Для опредѣленія двухъ точекъ искомаго сѣченія, пересѣчемъ данныя плоскости двумя всмомогательными горизонтальными плоскостями R и S. Плоскость S'

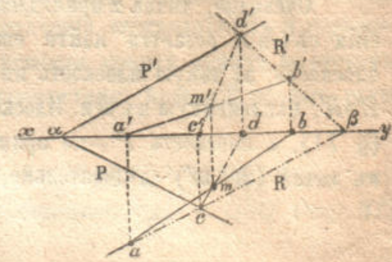


Чер. 86.

встрѣчаетъ прямую AK въ точкѣ (k, k') **(51, 61)**, прямую AL въ точкѣ (l, l'), и слѣдовательно, пересѣкаетъ первую плоскость по горизонтали KL; та же плоскость S' пересѣкаетъ прямыя ED и GF въ точкахъ (p, p') и (q, q'), и слѣдовательно, вторую плоскость—по горизонтали $(pq, p'q')$. Найденныя такимъ образомъ прямыя PQ и KL пересѣкаются въ точкѣ (m, m'), которая принадлежитъ искомому сѣченію. Подобно предыдущему употребляя вторую вспомогательную плоскость R', найдемъ вторую точку (n, n') искомаго сѣченія; и потому искомое пересѣченіе есть прямая $(mn, m'n')$.

74. Задача. *Найти точку встрѣчи прямой съ плоскостью.*

Общій способъ для опредѣленія точки встрѣчи прямой AB съ плоскостью P состоитъ въ томъ, что черезъ прямую AB проводятъ вспомогательную плоскость R, прилично выбранную, и опредѣляютъ прямую CD пересѣченія плоскостей R и P. Точка M, въ которой данная прямая AB встрѣчается съ найденной прямою CD, и есть, очевидно, искомая.



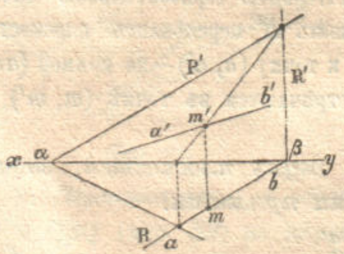
Чер. 87.

Приложимъ общій методъ къ двумъ случаямъ:

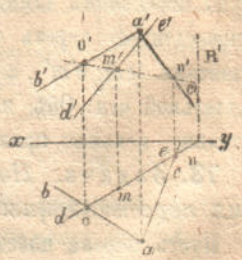
75. Плоскость дана слѣдами.

Пусть (*чер. 87*) $P\alpha P'$ и $(ab, a'b')$—данныя плоскость и прямая. Проведемъ черезъ прямую AB какую бы то ни было вспомогательную плоскость $R\beta R'$; для чего найдемъ слѣды (a, a') и (b, b') прямой AB и соединимъ ихъ съ точкою β, выбранною на оси такъ, чтобы прямыя $b'\beta$ и $a\beta$, представляющія слѣды вспомогательной плоскости R, пересѣкали слѣды данной плоскости въ предѣлахъ эпюра, напр., въ точкахъ c и d'. Въ такомъ случаѣ прямая $(cd, c'd')$ есть сѣченіе плоскостей P и R. Эта прямая встрѣчаетъ данную прямую AB въ точкѣ (m, m'), которая и есть искомая.

Вмѣсто произвольно выбранной плоскости $R\beta R$, удобнѣе брать одну изъ плоскостей, проектирующихъ данную прямую, напр., горизонтально-проектирующую плоскость $R\beta R'$ (*чер. 88*).



Чер. 88.



Чер. 89.

76. Плоскость дана двумя пересѣкающимися прямыми.

Пусть (*чер. 89*) прямыя AB и AC опредѣляютъ плоскость, пусть DE—данная прямая. Проведемъ черезъ данную прямую вспомогательную, горизонтально-проектирующую ея плоскость deR'. Эта плоскость встрѣтитъ прямую AB въ точкѣ (o, o') **(§ 61)**, а прямую AC—въ точкѣ (n, n'); слѣдовательно, вспомогательная плоскость пересѣчетъ плоскость, данную двумя прямыми, по прямой $(on, o'n')$, которая встрѣчаетъ данную прямую въ искомой точкѣ (m, m').

ЗАДАЧИ.

69. Найти пересѣченіе двухъ плоскостей въ слѣдующихъ случаяхъ: a) обѣ плоскости перпендикулярны къ одной изъ плоскостей проекцій; b) одна изъ плоскостей параллельна вертикальной плоскости проекцій, другая—горизонтальной; c) одна параллельна оси, другая—проходитъ чрезъ ось и точку; d) одна—дана двумя пересѣкающимися прямыми, другая—параллельна оси; e) одна проходитъ черезъ ось и точку, другая—дана двумя параллельными прямыми.

70. Построить пересѣченіе двухъ плоскостей, изъ которыхъ первая дана вертикальнымъ слѣдомъ и точкой, а вторая—горизонтальнымъ слѣдомъ и точкой.

71. Построить горизонтальные слѣды двухъ плоскостей по даннымъ вертикальнымъ слѣдамъ, параллельнымъ между собою, и точкѣ, принадлежащей пересѣченію данныхъ плоскостей.

72. Найти точку встрѣчи прямой съ плоскостью въ слѣдующихъ случаяхъ: a) прямая—какая бы то ни было, плоскость проходитъ черезъ ось и точку; b) прямая—перпендикулярна къ вертикальной плоскости проекцій; плоскость проходитъ черезъ ось и точку; c) прямая лежитъ въ плоскости профиля, плоскость—какая бы то ни было; d) прямая перпендикулярна къ горизонтальной плоскости проекцій, плоскость—какая бы то ни было; e) прямая—какая бы то ни было, плоскость—параллельна оси.

73. Чрезъ данную точку провести прямую, которая встрѣчаетъ двѣ другія прямыя, не лежащія въ одной плоскости.

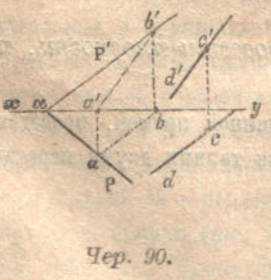
74. На пересѣченіи двухъ плоскостей найти точку, находящуюся: a) на данномъ разстояніи отъ вертикальной плоскости проекцій; b) на равныхъ разстояніяхъ отъ плоскостей проекцій.

75. Опредѣлить точку пересѣченія трехъ плоскостей.

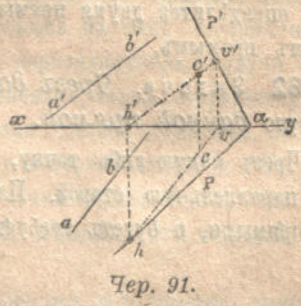
§ III. О прямыхъ и плоскостяхъ, параллельныхъ между собою

77. Задача. *Чрезъ данную точку провести прямую, параллельную данной плоскости.*

Для того, чтобы прямая была параллельна плоскости, достаточно, чтобы она была параллельна какой-либо прямой, лежащей въ плоскости (Геометрія Давыдова, § 199); и потому для рѣшенія задачи возьмемъ въ данной плоскости $P\alpha P'$ (*чер. 90*) какую-либо прямую (ab, $a'b'$) (§ **53**) и черезъ данную точку (c, c') проведемъ прямую (cd, $c'd'$), ей параллельную (§ **43**).



Чер. 90.



Чер. 91.

78. Задача. *Черезъ данную точку провести плоскость параллельную данной прямой.*

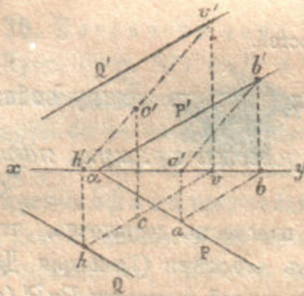
На томъ же основаніи, какъ и въ предыдущемъ случаѣ, для рѣшенія задачи достаточно черезъ данную точку (c, c') (*чер. 91*) провести параллельно данной прямой (ab, $a'b'$) вспомогательную прямую (ch, $c'h'$), и черезъ эту послѣднюю какую-либо плоскость; для чего необходимо слѣды (h, h'), (v, v') вспомогательной прямой соединить прямыми αP и $\alpha P'$ съ какою-либо точкой α на оси xy. Эти прямыя суть слѣды искомой плоскости. (Задача неопредѣленная).

79. Задача. *Черезъ данную точку провести плоскость, параллельную данной плоскости.*

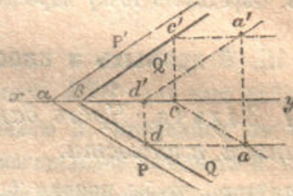
Такъ какъ слѣды искомой плоскости должны быть параллельны слѣдамъ данной (§ **60**), то для построенія искомой плоскости достаточно опредѣлить по одной точкѣ на каждомъ изъ ея слѣдовъ. Съ этою цѣлью черезъ данную точку (c, c') (*чер. 92*) проведемъ прямую (ch, $c'h'$), параллельную какой-либо прямой (ab, $a'b$), взятой въ данной плоскости $P\alpha P'$ и, такъ какъ эта прямая должна лежать въ искомой плоскости, то слѣды послѣдней должны пройти чрезъ слѣды (v, v') и (h, h') прямой CH. Слѣдовательно, прямыя Q' и Q, параллельныя $\alpha P'$ и αP и проходящія чрезъ h и v', суть слѣды искомой плоскости.

Повѣрка. Слѣды Q и Q' должны встрѣчать ось въ одной точкѣ.

80. Построеніе плоскости въ предыдущей задачѣ значительно упрощается, если вмѣсто произвольной вспомогательной прямой провести черезъ данную точку (a, a') (*чер. 93*) или прямую (ac, $a'c'$), параллельную горизонтальному слѣду данной плоскости, или прямую (ad, $a'd'$), параллельную вертикальному слѣду данной плоскости.



Чер. 92.



Чер. 93.

81. Если плоскость дана двумя пересѣкающимися прямыми, то искомая плоскость опредѣлится двумя прямыми проведенными чрезъ данную точку параллельно даннымъ прямымъ.

82 Задача. *Чрезъ данную прямую провести плоскость, параллельную данной прямой.*

Чрезъ какую-либо точку, взятую на первой данной прямой, проведемъ прямую, параллельную второй. Плоскость, опредѣленная такими двумя пересѣкающимися прямыми, и будетъ требуемая.

ЗАДАЧИ.

76. По данной горизонтальной проекціи прямой и одной изъ точекъ ея вертикальной проекціи опредѣлить эту послѣднюю подъ условіемъ, чтобы прямая была параллельна данной плоскости.

77. Провести чрезъ данную точку прямую, параллельную плоскости биссектора и наклонную къ плоскостямъ проекцій.

78. Найти условія параллельности плоскостей, параллельныхъ оси.

79. Чрезъ данную точку провести плоскость, параллельную плоскости: a) проходящей чрезъ ось и точку; b) перпендикулярной къ одной изъ плоскостей проекцій; c) имѣющей свои слѣды на одной прямой; d) параллельной оси.

80. Провести прямую, которая бы встрѣчала двѣ данныя прямыя и была бы параллельна третьей.

81. Чрезъ данную точку провести прямую, которая бы встрѣчала данную прямую и была бы параллельна данной плоскости.

82. Даны три прямыя; провести четвертую, пересѣкающую двѣ изъ нихъ и параллельную третьей.

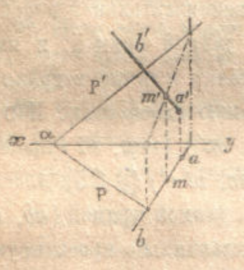
83. Въ плоскости, параллельной оси, провести прямую, параллельную горизонтальной плоскости и отстоящую отъ послѣдней на данномъ разстояніи.

84. Даны четыре точки A, B, C, D, провести чрезъ A плоскость, равноотстоящую отъ точекъ B, C, D.

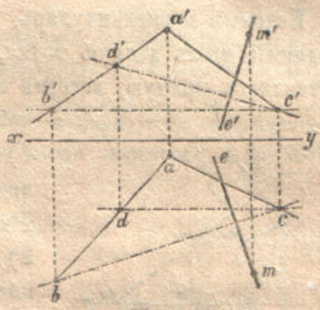
§ IV. О прямыхъ и плоскостяхъ, перпендикулярныхъ между собою.

83. Задача. *Изъ данной точки возставить перпендикуляръ къ данной плоскости.*

Если плоскость дана слѣдами, то, какъ мы видѣли (§ **59**), для рѣшенія задачи достаточно изъ горизонтальной и вертикальной проекцій a и a' данной точки (*чер. 94*) опустить перпендикуляры ab и $a'b'$ на одноименные слѣды αP и $\alpha P'$ данной плоскости $P\alpha P'$. Прямая $(ab, a'b')$ есть искомый перпендикуляръ, а точка (m, m') есть точка встрѣчи его съ плоскостью (§ **74**), или проекція точки A на плоскости P.



Чер. 94.

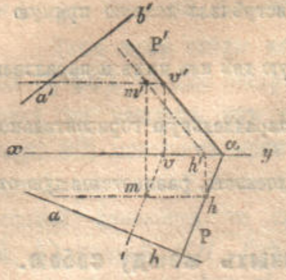


Чер. 95.

84. Если же плоскость дана двумя пересѣкающимися прямыми AB и AC (*чер. 95*), то построеніе перпендикуляра основывается на томъ соображеніи, что горизонтальная и вертикальная проекціи искомаго перпендикуляра, будучи перпендикулярны къ слѣдамъ плоскости, должны быть перпендикулярны соотвѣтствующимъ проекціямъ каждой горизонтали и каждой вертикали данной плоскости. И потому, проведя въ данной плоскости горизонталь $(bc, b'c')$ и вертикаль $(cb$ и $c'b')$ (§ **67**) и опустивъ изъ горизонтальной проекціи m данной точки перпендикуляръ me на bc, а изъ вертикальной m'—перпендикуляръ $m'e'$ на $c'd'$, найдемъ, что искомый перпендикуляръ есть прямая $(me, m'e')$.

85. Задача. *Чрезъ данную точку провести плоскость, перпендикулярную къ данной прямой.*

Слѣды искомой плоскости должны быть перпендикулярны проекціямъ ab и $a'b'$ (*чер. 96*) данной прямой, и потому, для построенія ихъ достаточно опредѣлить по одной точкѣ на каждомъ слѣдѣ. Для чего чрезъ данную точку (m, m') проведемъ горизонталь $(mv, m'v')$ и вертикаль $(mh, m'h')$ искомой плоскости, основываясь на томъ соображеніи, что горизонтальная проекція mv горизонтали, какъ параллельная горизонтальному слѣду искомой плоскости, должна быть тоже перпендикулярна горизонтальной проекціи ab данной прямой, а вертикальная проекція $m'h'$ вертикали, на томъ же основаніи, должна быть перпендикулярна вертикальной проекціи $a'b'$ данной прямой. Слѣды h и v' построенныхъ такимъ образомъ прямыхъ MH и MV, и будутъ точки, принадлежащія соотвѣтствующимъ слѣдамъ искомой плоскости; и потому проведя чрезъ h прямую hP, перпендикулярную къ ab, а чрезъ v' — прямую $v'P'$ перпендикулярную къ $a'b'$, найдемъ слѣды искомой плоскости Ph и $P'v'$. При вѣрности чертежа оба слѣда должны встрѣтить ось въ одной точкѣ α.



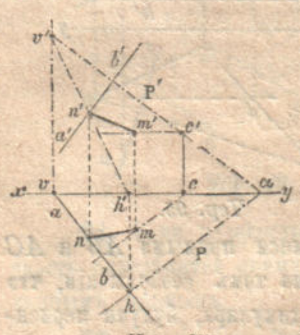
Чер. 96.

86. Задача. *Чрезъ данную точку провести плоскость, перпендикулярную къ данной плоскости.*

Для того, чтобы одна плоскость была перпендикулярна къ другой плоскости, достаточно, чтобы первая плоскость проходила чрезъ перпедикуляръ къ послѣдней (Геометрія Давыдова, § 209); и потому для рѣшенія задачи достаточно изъ данной точки опустить перпендикуляръ на данную плоскость и провести чрезъ этотъ перпендикуляръ произвольную плоскость (§ **78**).

87. Задача. *Изъ данной точки опустить перпендикуляръ на данную прямую.*

Искомый перпендикуляръ, очевидно, находится въ вспомогательной плоскости, проходящей чрезъ данную точку, и перпендикулярной къ данной прямой, и именно представляетъ прямую, которая проходитъ чрезъ данную точку и точку встрѣчи данной прямой съ вспомогательною плоскостью. Поэтому: 1) чрезъ данную точку (m, m') (*чер. 97*) проведемъ при помощи горизонтали $(mc, m'c')$ (§ **85**) плоскость $P\alpha P'$, перпендикулярную къ данной прямой $(ab, a'b')$; 2) найдемъ, при помощи горизонтально-проектирующей плоскости (§ **75**), точку (n, n') встрѣчи прямой (ab, a', b') съ плоскостью $P\alpha P'$; 3) соединимъ точки M и N прямой $(mn, m'n')$.

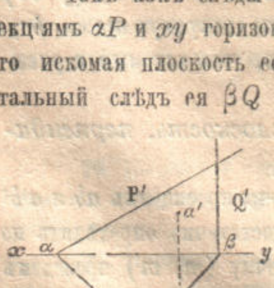


Чер. 97.

Прямая $(mn, m'n')$ есть искомый перпендикуляръ.

88. Задача. *Чрезъ данную точку провести плоскость, перпендикулярную къ горизонтальному слѣду данной плоскости.*

Такъ какъ слѣды искомой плоскости должны быть перпендикулярны къ проекціямъ αP и xy горизонтальнаго слѣда (§ **48**) данной плоскости $P\alpha P'$ (*чер. 98*), то искомая плоскость есть горизонтально-проектирующая, и слѣдовательно, горизонтальный слѣдъ ея βQ пройдетъ чрезъ горизонтальную проекцію a данной точки (a, a') (§ **61**) перпендикулярно къ αP, а вертикальный $\beta Q'$ — чрезъ точку β перпендикулярно къ xy.



Чер. 98.

89. Задача. *Чрезъ данную прямую провести плоскость, перпендикулярную къ данной плоскости.*

Изъ какой-либо точки, взятой на данной прямой, опустимъ перпендикуляръ на данную плоскость. Плоскость, проходящая чрезъ данную прямую и вспомогательный перпендикуляръ, есть очевидно искомая.

ЗАДАЧИ.

85. Изъ данной точки опустить перпендикуляръ на плоскость: a) параллельную оси; b) перпендикулярную оси; c) проходящую чрезъ ось и точку; и найти точку его встрѣчи съ плоскостью.

86. Изъ данной точки опустить перпендикуляръ на плоскость, данную двумя параллельными прямыми, и найти точку его встрѣчи съ плоскостью.

87. Изъ данной точки A опустить перпендикуляръ на данную прямую BC, если BC a) параллельна оси; b) лежитъ въ плоскости профиля; c) перпендикулярна къ одной изъ плоскостей проекцій; d) параллельна одной изъ плоскостей проекцій.

88. Чрезъ точку данную на прямой, провести къ ней перпендикулярную прямую такъ, чтобы она встрѣчала другую данную прямую.

89. На данной плоскости построить геометрическое мѣсто точекъ, равно-удаленныхъ отъ двухъ данныхъ точекъ.

90. На данной прямой найти точку, равно-отстоящую отъ двухъ данныхъ точекъ.

91. Чрезъ ось провести плоскость, перпедикулярную къ данной плоскости.

92. Чрезъ прямую, проекціи которой совпадаетъ съ слѣдами плоскости, провести плоскость, перпендикулярную къ данной плоскости, и найти ихъ пересѣченіе.

93. Чрезъ данную прямую провести плоскость, перпендикулярную къ плоскости, пропроходящей чрезъ ось и точку, и найти ихъ пересѣченіе.

94 Въ данной плоскости чрезъ точку встрѣчи ея съ данной прямой провести перпендикуляръ къ послѣдней.

95. Дана точка и двѣ плоскости: одна—параллельна оси, другая—проходитъ чрезъ ось; провести чрезъ данную точку плоскость, перпендикулярную къ пересѣченію данныхъ плоскостей.

96. Чрезъ данную точку провести плоскость, перпендикулярную къ пересѣченію плоскостей, изъ которыхъ одна перпендикулярна къ горизонтальной плоскости, а другая дана двумя параллельными прямыми.

ГЛАВА III.

Способы, употребляемые въ Начертательной Геометріи.

§. I. Опредѣленія.

90. Изъ предыдущаго легко замѣтить, что большая или меньшая простота чертежа, а слѣдовательно, и трудность рѣшенія задачъ, зависитъ въ Начертательной Геометріи отъ положенія фигуръ относительно плоскостей проекцій, и что нерѣдко существуютъ такія частныя положенія, при которыхъ искомыя задачи получаются непосредственно **(§ 61)**. Отсюда, всѣ способы рѣшенія задачъ основываются на приведеніи фигуръ, разсматриваемыхъ въ задачѣ, въ такія удобнѣйшія положенія, при которыхъ рѣшенія получаются наиболѣе простымъ чертежемъ.

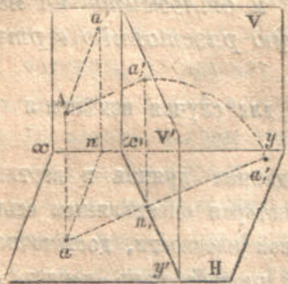
Этой цѣли можно достигнуть двоякимъ образомъ: или замѣнить данныя плоскости проекцій новыми, выбранными такъ, чтобы данныя фигуры, не измѣняя своего положенія въ пространствѣ, приняли въ отношеніи новыхъ плоскостей наиболѣе удобное положеніе, или, наоборотъ, измѣнить положеніе фигуръ въ пространствѣ такъ, чтобы онѣ въ своемъ новомъ положеніи приняли въ отношеніи данныхъ плоскостей проекцій, остающихся неизмѣненными въ пространствѣ, наиболѣе удобное положеніе. На этихъ соображеніяхъ въ Начертательной Геометріи употребляются для рѣшенія задачъ слѣдующіе три способа: 1) способъ измѣненія плоскостей проекцій, 2) способъ вращенія, 3) способъ совмѣщенія.

§ II. Способъ измѣненія плоскостей проекцій.

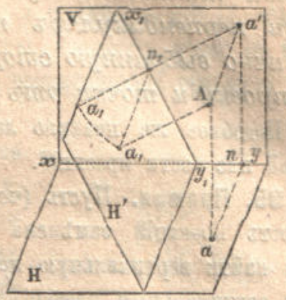
91. Способъ измѣненія плоскостей проекцій имѣетъ цѣлью дать правила для рѣшенія слѣдующаго общаго вопроса: *Зная проекціи фигуры на двухъ взаимно-перпендикулярныхъ плоскостяхъ H и V, опредѣлить проекцію той же фигуры или на новой плоскости V', перпендикулярной къ H, или на новой плоскости H', перпендикулярной къ V.*

Замѣтимъ предварительно, что въ случаѣ замѣны данной вертикальной плоскости V (*чер. 99*) новою V', перпендикулярною къ H, прежняя ось проекціи xy замѣнится новою, именно прямою пересѣченія плоскостей V' и H.

Эту новую ось мы условимся обозначать буквами $x'y'$; при чемъ съ цѣлью указать, въ какую сторону должно вращать плоскость V' для того, чтобы она, послѣ совмѣщенія съ H, лежала надъ осью, мы будемъ ставить x' влѣво отъ наблюдателя, а y'—вправо (§ 12).



Чер 99.



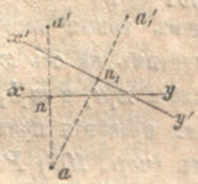
Чер 100.

Въ случаѣ замѣны данной горизонтальной плоскости H (*чер. 100*) новою H', перпендикулярною къ V, новая ось проекціи, т. е. прямая пересѣченія плоскостей H' и V, обозначается буквами x_1y_1; при чемъ, какъ и прежде, чтобы указать сторону, въ которую должно вращать новую плоскость H' для того, чтобы она при совмѣщеніи съ вертикальною находилась подъ осью, буква x_1 ставится влѣво отъ наблюдателя, а y_1—вправо.

Послѣ этихъ замѣчаній разсмотримъ рѣшеніе общей задачи въ случаѣ точки, прямой и плоскости.

92. Точка. Пусть (*чер. 99*) А—данная точка и V'—новая вертикальная плоскость проекцій.

Опредѣленіе новой вертикальной проекціи точки A вытекаетъ изъ слѣдующихъ соображеній: горизонтальная проекція a точки A и разстояніе точки A отъ горизонтальной плоскости, — разстояніе, равное $a'n$ (§ 16),—не измѣняются, если горизонтальная плоскость проекцій осталась безъ измѣненія. А потому, принимая во вниманіе, что теорема § 18 остается справедлива для всякихъ двухъ взаимно-перпендикулярныхъ плоскостей проекцій,

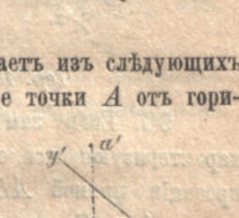


Чер. 101.

Чер. 102.

найдемъ (*чер. 101* и *102*), что искомая вертикальная проекція a'_1 будетъ находиться на одномъ перпендикулярѣ къ новой оси $x'y'$ съ проекціей a и на разстояніи n_1a_1' отъ оси $x'y'$, равномъ na' и отложенномъ въ прилично выбранную сторону.

93. На подобнаго же рода соображеніяхъ найдемъ, что въ случаѣ замѣны горизонтальной плоскости проекцій H (*чер. 100* и *103*) новою H', новая горизонтальная проекція a_1, будетъ находиться на одномъ перпендикулярѣ къ $x_1\ y_1$, съ вертикальной проекціей a' и на разстояніи n_1a_1 отъ нея, равномъ разстоянію точки A отъ вертикальной плоскости проекціи, т. е. равнымъ an.



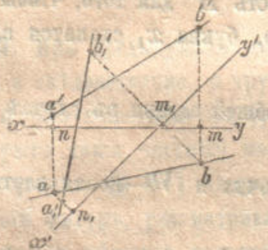
Чер. 103.

94. Отсюда можно дать слѣдующее практическое правило для [опредѣленія новой проекціи точки въ случаѣ замѣны, напр., вертикальной плоскости проекцій.

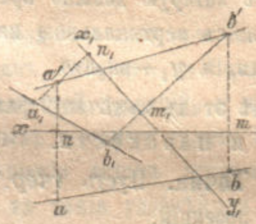
Чтобы найти вертикальную проекцію точки на новой вертикальной плоскости, нужно опустить изъ горизонтальной проекціи точки перпендикуляръ на новую ось $x'y'$ и отложить на немъ въ прилично выбранную сторону, длину, равную разстоянію вертикальной проекціи точки отъ прежней оси xy.

Подобное же правило легко формулировать и для случая измѣненія горизонтальной плоскости проекцій.

95. Прямая. Пусть (*чер. 104*) (ab, $a'b'$)—данная прямая и вертикальная плоскость проекцій замѣнена новою плоскостью, которая опредѣляется осью $x'y'$. Чтобы найти вертикальную проекцію прямой на новой плоскости, достаточно найти новыя вертикальныя проекціи двухъ точекъ данной прямой, напр., точекъ A и B; для чего, согласно правилу (**§ 94**), опустимъ изъ a и b перпендикуляры на $x'y'$ и отложилъ на нихъ отъ $x'y'$ длины $n_1a'_1$ и $m_1b'_1$, равныя na' mb'. Точки a'_1 и b'_1, суть новыя вертикальныя проекціи точекъ A и B, а прямая a'_1b_1'—искомая вертикальная проекція данной прямой на новой вертикальной плоскости.



Чер. 104.



Чер. 105.

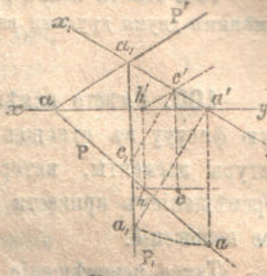
96. Если замѣнена горизонтальная плоскость проекцій новою плоскостью, характеризующеюся осью x_1y_1 (*чер. 105*), то для построенія новой горизонтальной проекціи прямой AB найдемъ новыя горизонтальныя проекціи двухъ ея точекъ, напр., A и B; для чего опустимъ на ось x_1y_1 перпендикуляры изъ a' и b' и на нихъ отъ $x'y'$ отложимъ длины n_1a_1 и m_1b_1, равныя na и mb. Прямая a_1b_1 есть искомая новая горизонтальная проекція прямой AB.

97. Плоскость. Пусть (*чер. 106*) $P\alpha P'$—данная плоскость, и вертикальная плоскость проекцій замѣнена новою V', характеризующеюся осью $x'y'$ и, слѣдовательно, имѣющею своими слѣдами прямыя $y'a$ и aa' (**§ 49**, 2). Для опредѣленія слѣда данной плоскости на новой вертикальной плоскости, достаточно найти новую вертикальную проекцію одной изъ точекъ, принадлежащихъ новому вертикальному слѣду, ибо другая точка того же слѣда, именно точка α_1, въ которой новая ось $x'y'$ пересѣкаетъ горизонтальный слѣдъ αP плоскости, очевидно, принадлежитъ искомому слѣду. Всего удобнѣй за опредѣляющую новый слѣдъ точку выбрать точку (a, a'), въ которой вертикальный слѣдъ $\alpha P'$ встрѣчаетъ новую плоскость V' (**§ 61**).

Чер. 106.

Новая вертикальная проекція точки (a, a'), по правилу (**§ 94**) будетъ находиться въ a'_1 на перпендикулярѣ къ $x'y'$ и на разстояніи $aa'_1=aa'$, и, слѣдовательно, прямая $\alpha_1a'_1$ есть искомый вертикальный слѣдъ $\alpha_1 P'_1$ данной плоскости. Но если пересѣченіе осей xy и $x'y'$ лежитъ внѣ эпюра, то выбираютъ другую точку, принадлежащую искомому слѣду, при помощи горизонтали $(vc, v'c')$ данной плоскости; а именно точку (c, c'), въ которой эта горизонталь встрѣчаетъ новую вертикальную плоскость $y'aa'$ **(§ 61)**, и затѣмъ находятъ, по правилу **(§ 94)**, новую ея вертикальную проекцію c_1'. Прямая $\alpha_1 c'_1$ есть искомый вертикальный слѣдъ $\alpha_1 P_1'$.

98. Въ случаѣ замѣны горизонтальной плоскости новою H', характеризующеюся осью x_1y_1 (*чер. 107*) и, слѣдовательно, имѣющую своими слѣдами прямыя x_1a' и $a'a$, поступаютъ подобно предыдущему. А именно, точку α_1, пересѣченія вертикальнаго слѣда $\alpha P'$ данной плоскости съ осью x_1y_1, соединяютъ съ новою горизонтальною проекціей a_1 точки A, въ которой горизонтальный слѣдъ данной плоскости встрѣчаетъ плоскость H', перпендикулярную къ вертикальной плоскости проекціи V. Прямая $\alpha_1 a_1$ есть искомый новый горизонтальный слѣдъ $\alpha_1 P_1$ плоскости.

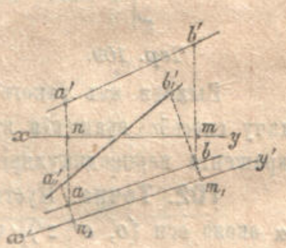


Чер 107.

Если точка пересѣченія осей xy и x_1y_1 лежитъ внѣ эпюра, то выбираютъ другую точку, принадлежащую новому горизонтальному слѣду плоскости, а именно точку (c, c'), въ которой вертикаль $(hc, h'c')$ данной плоскости встрѣчаетъ новую плоскость H', и затѣмъ находятъ, согласно правилу, ея новую горизонтальную проекцію c_1. Прямая $\alpha_1 c_1$ есть искомый новый горизонтальный слѣдъ $\alpha_1 P_1$ плоскости $P\alpha P$.

99. Задача. *Измѣнить одну изъ плоскостей проекцій такимъ образомъ, чтобы данная прямая была параллельна вертикальной плоскости проекцій.*

Прямая параллельна вертикальной плоскости проекцій, если ея горизонтальная проекція параллельна оси проекцій **(§ 32)**. На этомъ основаніи замѣняемъ данную вертикальную плоскость V новою V' характеризующеюся осью $x'y'$ (*чер. 108*), параллельной горизонтальной проекціи ab данной прямой AB, и опредѣляемъ новыя вертикальныя проекціи точекъ A и B. Для чего, слѣдуя правилу **(§ 94)**, опустимъ перпендикуляры изъ a и b на ось $x'y'$ и на нихъ отъ оси $x'y'$ отложимъ $n_1a'_1$ и $m_1b'_1$, соотвѣтственно равныя na' и mb'.



Чер. 108.

Прямая $(ab, a'_1b'_1)$ параллельна плоскости V'.

ЗАДАЧИ.

97. Измѣнить плоскость проекцій такимъ образомъ, чтобы прямая, параллельная одной изъ плоскостей проекцій, стала параллельной оси.

98. Найти проекціи даннаго треугольника, когда одна изъ плоскостей проекцій замѣнена ей параллельною.

99 Найти слѣды плоскости, проходящей чрезъ ось и точку, если вертикальная плоскость замѣнена новою.

100. Найти новыя проекціи треугольника, когда измѣнена одна изъ плоскостей проекцій.

101. Измѣнить вертикальную плоскость проекцій такимъ образомъ, чтобы точка, данная своими проекціями, находилась на плоскости биссектора новыхъ плоскостей.

102. Измѣнить послѣдовательно плоскости проекцій такимъ образомъ, чтобы данная прямая была: a) перпендикулярна къ вертикальной плоскости; b) перпендикулярна къ горизонтальной плоскости; c) въ плоскости профиля.

103. Измѣнить одну или обѣ плоскости проекцій такимъ образомъ, чтобы данная плоскость послѣ замѣны плоскостей проекцій была бы: a) перпендикулярна къ одной изъ плоскостей проекцій; b) параллельна одной изъ плоскостей проекцій: c) параллельна оси; d) плоскостью профиля.

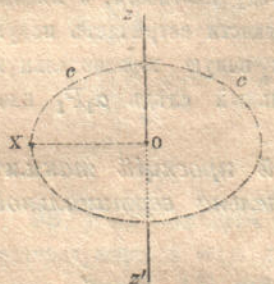
104. Найти новыя проекціи прямой и ея слѣды, когда данныя плоскости проекцій замѣнимъ двумя другими взаимно-перпендикулярными.

§ III. Способъ вращенія.

100. Вмѣсто измѣненія плоскости проекцій, иногда удобнѣе перемѣстить самую фигуру въ отношеніи плоскостей проекцій, и, найдя въ новомъ положеніи фигуры элементы, которые требуется опредѣлить по смыслу задачи, обратнымъ перемѣщеніемъ привести какъ фигуру, такъ и найденные элементы въ первоначальное положеніе.

Такое перемѣщеніе достигается двумя способами: вращеніемъ и совмѣщеніемъ.

101. Способъ вращенія имѣетъ цѣлью дать правила для рѣшенія слѣдующей общей задачи: *зная проекціи фигуры на двухъ взаимно-перпендикулярныхъ плоскостяхъ, опредѣлить проекціи той же фигуры и на тѣхъ же плоскостяхъ, когда она повернута на нѣкоторый уголъ около данной оси.*

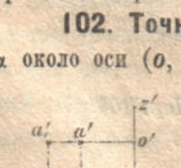


Чер. 109.

Рѣшеніе этой задачи вытекаетъ изъ опредѣленія вращательнаго движенія, какъ таковаго, при которомъ каждая точка фигуры, напр. точка X (*чер 109*), двигается въ плоскости, перпендикулярной къ оси вращенія zz', по окружности c, центръ O которой лежитъ на оси вращенія, а радіусъ OX—равенъ разстоянію точки отъ оси.

Выходя изъ такого опредѣленія вращательнаго движенія, рѣшимъ общую задачу способа вращенія въ случаѣ точки, прямой и плоскости, когда ось вращенія перпендикулярна къ одной изъ плоскостей проекцій.

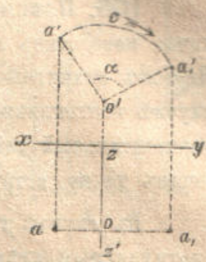
102. Точка. Пусть точку (a, a') (*чер. 110*) требуется поворотить на уголъ α около оси $(o, o'\ z')$, перпендикулярной къ горизонтальной плоскости проекцій.



Чер. 110

На основаніи предыдущаго опредѣленія вращательнаго движенія, точка A во время вращенія будетъ перемѣщаться по дугѣ окружности, лежащей въ горизонтальной плоскости и, слѣдовательно, проектирующейся въ истинную величину на горизонтальную плоскость проекцій и по прямой, параллельной оси проекцій xy, на вертикальную. Отсюда заключаемъ, что горизонтальная проекція a точки A будетъ двигаться по окружности c, описанной изъ o, какъ изъ центра, радіусомъ oa, а вертикальная проекція a'—по прямой $a'o'$, параллельной оси xy. А потому, откладывая на дугѣ c уголъ $aoa_1=\alpha$, найдемъ въ a_1 горизонтальную проекцію точки A послѣ вращенія; вертикальная же проекція той же точки будетъ находиться на одномъ перпендикулярѣ съ a_1 къ оси xy и на прямой $a'o'$, т. е. въ точкѣ ихъ пересѣченія a'_1. Точка (a_1, a'_1) есть искомая.

103. Въ случаѣ оси (oz, o') (*чер. 111*), перпендикулярной къ вертикальной плоскости проекцій, окружность, по которой перемѣщается точка A, будетъ параллельна вертикальной плоскости проекцій, и потому будетъ проектироваться на вертикальную плоскость въ истинную величину, а на горизонтальную—по прямой, параллельной оси xy. Отсюда, разсуждая, какъ и въ предшествующемъ случаѣ, найдемъ, что проекціи точки A послѣ вращенія будутъ a_1 и a'_1.

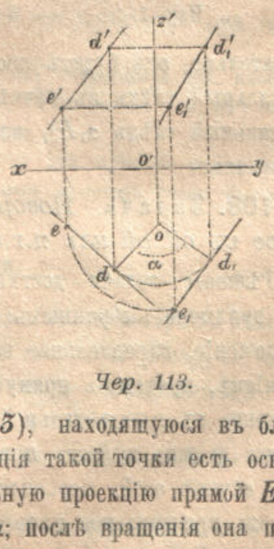


Чер. 111.

104. Прямая. Чтобы повороотить прямую на уголъ α около данной оси, достаточно повороотить на тотъ же уголъ двѣ, произвольно взятыя на ней, точки. Чертежъ значительно упрощается, если точки взяты или на одномъ и томъ же разстояніи отъ оси вращенія, или одна точка взята на кратчайшемъ разстояніи отъ оси, а другая—гдѣ-либо на прямой.

Въ самомъ дѣлѣ. Пусть (*чер. 112*) $(o, o'z')$—данная вертикальная ось и $(ab, a'b')$—данная прямая. Разстоянія различныхъ точекъ прямой AB отъ оси OZ, измѣряемыя перпендикулярами, опущенными изъ точекъ прямой AB на ось OZ, въ данномъ случаѣ будутъ параллельны горизонтальной плоскости и, слѣдовательно, будутъ проектироваться на ней въ истинную величину; а потому, чтобы на прямой AB взять двѣ точки, находящіеся на одинаковомъ разстояніи отъ оси OZ, достаточно изъ центра o описать дугу произвольнымъ радіусомъ, напр., oa; точки встрѣчи a и b этой дуги съ горизонтальной проекціей прямой ab и суть горизонтальныя проекціи искомыхъ точекъ; по горизонтальнымъ проекціямъ найдемъ ихъ вертикальныя a' и b'. Такимъ образомъ точки (a, a') и (b, b')—суть искомыя. Поворотимъ эти точки около оси OZ на уголъ α; для чего по § **102** отложимъ на дугѣ $c < aoa_1 = < bob_1 = \alpha$ и по a_1 и b_1 опредѣлимъ на прямыхъ a' и b', перпендикулярныхъ къ $o'z'$, a'_1 и b'_1. Прямыя a_1b_1 и $a'_1b'_1$ суть искомыя проекціи прямой AB послѣ вращенія ея на уголъ α.

Чер. 112.



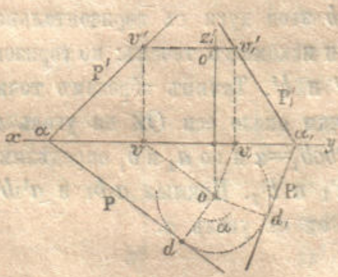
Чер. 113.

105. Возьмемъ точку на прямой ED (*чер. 113*), находящуюся въ ближайшемъ разстояніи отъ оси OZ. Горизонтальная проекція такой точки есть основаніе d перпендикуляра, опущеннаго изъ o на горизонтальную проекцію прямой ED. По d опредѣлимъ d', и поворотимъ точку D на уголъ α; послѣ вращенія она придетъ въ положеніе (d_1, d'_1). И, чтобы найти проекціи прямой, остается взять какую-либо другую точку на прямой, напр., (e, e') и поворотить ее на тотъ же уголъ. Для чего замѣтимъ, что горизонтальная проекція прямой ED, будучи до вращенія касательной въ точкѣ d къ окружности dd_1, останется касательною къ той же окружности въ точкѣ d_1 и послѣ вращенія, и что потому горизонтальная проекція e будетъ находиться послѣ вращенія въ e_1 на пересѣченіи окружности ee_1 съ касательной d_1e_1 къ окружности dd_1. По e_1 опредѣлимъ e'_1. Прямыя e_1d_1 и $e'_1d'_1$ суть проекціи прямой ED послѣ вращенія.

106. Плоскость. Чтобы повернуть на уголъ α плоскость около оси, достаточно повернуть на тотъ же уголъ двѣ, произвольно взятыя на ней, прямыя. Чертежъ значительно упрощается съ приличнымъ выборомъ прямыхъ. Такъ, въ случаѣ вертикальной оси, всего удобнѣе взять двѣ горизонтальныя прямыя; одну—горизонтальный слѣдъ плоскости, другую—горизонталь плоскости, которая проходитъ черезъ точку встрѣчи оси съ плоскостью.

Въ случаѣ горизонтальной оси всего удобнѣе взять двѣ вертикали: одну—вертикальный слѣдъ плоскости, другую—вертикаль плоскости, проходящую чрезъ точку встрѣчи оси съ плоскостью. Удобство пользоваться такими прямыми вытекаетъ изъ того соображенія, что прямыя, лежащія въ плоскостяхъ, перпендикулярныхъ къ оси вращенія, остаются въ тѣхъ же плоскостяхъ и послѣ вращенія.

107. Пусть требуется плоскость $P\alpha P'$ (*чер. 114*) повернуть на уголъ α около вертикальной оси $(o,o'z')$. Проведемъ черезъ горизонтальную проекцію o оси горизонталь $(ov,o'v')$ и найдемъ такимъ образомъ точку (o,o') встрѣчи оси съ плоскостью (**§ 68**). Затѣмъ, повотимъ слѣдъ αP и горизонталь $(ov,o'v')$ около оси на уголъ α по способу **§ 105**, для чего изъ o опустимъ перпендикуляръ od на αP и при o построимъ уголъ $dod_1=\alpha$; касательная α_1P_1 къ окружности dd_1 въ точкѣ d_1 есть горизонтальный слѣдъ плоскости $P\alpha P'$ послѣ вращенія. Горизонталь же OV послѣ вращенія останется параллельною слѣду α_1P_1 и будетъ проходить чрезъ точку (o, o');



Чер. 114.

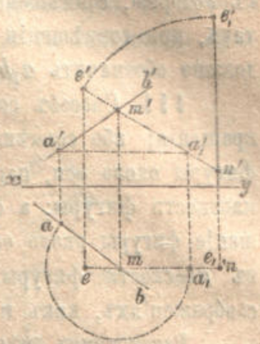
слѣдовательно, она будетъ проектироваться по прямымъ ov_1, $o'v'_1$ и будетъ имѣть вертикальный слѣдъ въ точкѣ (v_1,v'_1). А потому, соединяя α_1 съ v'_1, найдемъ вертикальный слѣдъ $\alpha_1P'_1$ плоскости $P\alpha P'$ послѣ вращенія. Плоскость $P_1\alpha_1P'_1$ есть искомая.

108. Задача. *Повернуть прямую въ положеніе, перпендикулярное къ одной изъ плоскостей проекцій*, напр., къ горизонтальной.

Рѣшеніе задачи достигается двумя послѣдовательными вращеніями около двухъ прилично выбранныхъ осей; именно, повернемъ сначала данную прямую въ положеніе, параллельное вертикальной плоскости проекцій, затѣмъ, вторичнымъ вращеніемъ, приведемъ прямую изъ послѣдняго положенія въ положеніе, перпендикулярное къ горизонтальной плоскости проекцій. Чтобы осуществить эти два вращенія должно выбрать приличнымъ образомъ оси вращенія, для чего замѣтимъ, что въ случаѣ осей, перпендикулярныхъ къ плоскостямъ проекцій, мы можемъ придавать произвольное направленіе той проекціи прямой, къ которой ось перпендикулярна. На этомъ основаніи первое вращеніе можно осуществить при помощи вертикальной оси, ибо горизонтальную проекцію прямой должно сдѣлать параллельною оси xy; второе вращеніе можно осуществить при помощи горизонтальной оси.

ибо вертикальную проекцію прямой должно сдѣлать перпендикулярною къ оси xy. Наиболѣе простое построеніе получается, когда оси проходятъ чрезъ точки, взятыя на прямой.

Пусть (*чер. 115*) $(ab, a'b')$—данная прямая. Проведемъ черезъ какую-либо точку прямой AB, напр., точку (m,m'), вертикальную ось, и около нея поворотимъ точку (a,a'), такъ, чтобы горизонтальная проекція ma_1 прямой послѣ вращенія стала параллельной оси xy. По a_1 опредѣлимъ a'_1. Прямая $(ma_1, m'a'_1)$—параллельна вертикальной плоскости. Затѣмъ, чрезъ какую-либо точку (n, n'), взятую на прямой $(ma_1, m'a'_1)$, проведемъ горизонтальную ось и поворотимъ около нея точку (e, e') прямой AM такъ, чтобы вертикальная проекція $n'e'_1$ была перпендикулярна къ оси xy. Прямая $(ne_1, n'e'_1)$ есть искомая прямая.



Чер. 115.

ЗАДАЧИ.

105. Повернуть точку около оси, перпендикулярной къ горизонтальной плоскости проекцій такъ, чтобы она совмѣстилась съ плоскостью, проходящей чрезъ ось вращенія и параллельной вертикальной плоскости проекцій.

106 Повернуть точку около вертикальной оси такъ, чтобы она совпала съ данной горизонтально-проектирующею плоскостью.

107. Данную точку повернуть около оси, перпендикулярной къ одной изъ плоскостей проекцій такъ, чтобы она совмѣстилась съ данною плоскостью.

108. Данную плоскость повернуть около оси, перпендикулярной къ одной изъ плоскостей проекцій такъ, чтобы она стала параллельной оси.

109. Повернуть точку около оси, лежащей въ горизонтальной плоскости проекцій такъ, чтобы ея разстояніе отъ горизонтальной плоскости было бы равно данной величинѣ.

110. Повернуть точку около прямой, лежащей въ вертикальной плоскости такъ, чтобы точка находилась отъ вертикальной плоскости въ данномъ разстояніи.

111. Данную плоскость повернуть около вертикальной оси такъ, чтобы она прошла въ новомъ положеніи чрезъ данную точку.

112. Даны: прямая A, вертикальная ось и точка m на горизонтальной плоскости проекцій; найти на вертикальной плоскости такую точку m', чтобы точка (m, m') посредствомъ вращенія около данной оси пришла на данную прямую.

113. Даны двѣ прямыя и вертикальная ось; повернуть эти прямыя около оси на одинъ и тотъ же уголъ, но такъ, что новыя ихъ вертикальныя проекціи были бы параллельны между собою.

§ IV. Способъ совмѣщенія.

109. Способъ совмѣщенія имѣетъ цѣлью дать правила, по которымъ рѣшается слѣдующая общая задача: *по даннымъ проекціямъ плоской фигуры, опредѣлить положеніе, которое она приметъ, когда поворотимъ плоскость фигуры или около горизонтали плоскости до совмѣщенія съ горизонтальной плоскостью, или около вертикали плоскости до совмѣщенія съ вертикальной плоскостью.*

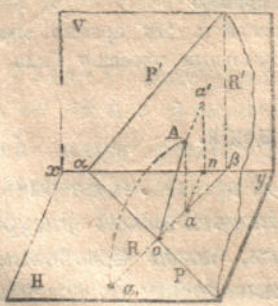
Въ частномъ случаѣ, когда фигура вращается или около горизонтальнаго слѣда ея плоскости, или около вертикальнаго, задача состоитъ въ опредѣленіи положенія фигуры при совмѣщеніи ея плоскости съ горизонтальной или вертикальной плоскости проекцій.

110. То положеніе, которое приметъ фигура, когда ея плоскость совмѣщена съ горизонтальной или вертикальной плоскостью, называется *совмѣщеніемъ фигуры*, и обозначается тѣми же буквами, какъ и проекція фигуры на плоскости, съ которою, совмѣщена ея плоскость, но съ прибавленіемъ къ нимъ знаковъ внизу; такъ, при совмѣщеніи фигуры ABC съ плоскостью горизонтальною, совмѣщеніе ея должно обозначить $a_1b_1c_1$, а съ вертикальною—$a'_1b'_1c'_1$.

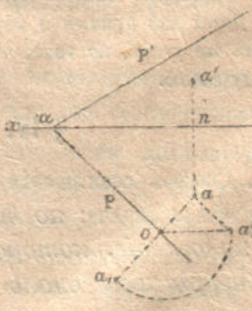
111. Способъ совмѣщенія можно разсматривать, какъ частный случай способа вращенія; ибо совмѣщеніе съ горизонтальной плоскостью есть собственно вращеніе фигуры около оси, параллельной горизонтальной плоскости проекціи и лежащей въ плоскости фигуры; а совмѣщеніе съ вертикальной плоскостью есть собственно вращеніе фигуры около оси, параллельной вертикальной плоскости проекціи и лежащей въ плоскости фигуры. А потому, способъ совмѣщенія основывается на тѣхъ же соображеніяхъ, какъ и способъ вращенія.

Разсмотримъ рѣшеніе общей задачи въ случаѣ точки, прямой и плоскости.

112. Точка. Разсмотримъ предварительно простѣйшій случай, когда требуется точку совмѣстить съ горизонтальною плоскостью проекцій и когда, слѣдовательно, плоскость, въ которой лежитъ точка, должно вращать около ея горизонтальнаго слѣда. При такомъ вращеніи точка A (*чер. 116*) будетъ перемѣщаться въ плоскости $R\beta R'$, перпендикулярной къ оси вращенія αP, по дугѣ окружности, описанной изъ o радіусомъ oA (§ **101**), и въ моментъ совмѣщенія плоскости P съ горизонтальной плоскостью проекцій, займетъ положеніе на слѣдѣ $R\beta$ на разстояніи отъ центра вращенія o, равномъ радіусу вращенія. Радіусъ же вращенія, какъ легко видѣть изъ чертежа, есть гипотенуза прямоугольнаго треугольника $A\,o\,a$, катеты котораго суть: Aa—разстояніе точки отъ горизонтальной плоскости проекціи, равное (§ **16**) $a'n$, т. е. разстоянію вертикальной проекціи a' отъ оси xy (отъ вертикальной проекціи оси вращенія) и ao—разстояніе горизонтальной проекціи точки отъ оси вращенія (отъ горизонтальной проекціи оси вращенія). Отсюда заключаемъ, что для построенія совмѣщенія точки (A) съ горизонтальной плоскостью проекцій по даннымъ: проекціямъ точки и горизонтальному слѣду αP плоскости, должно (*чер. 117*) изъ горизонтальной проекціи a опустить перпендикуляръ



Чер. 116.

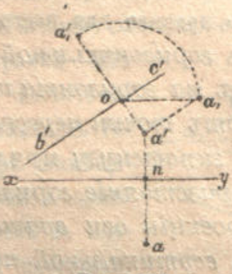


Чер. 117.

aa_1 на ось вращенія αP, и на oa, какъ на катетѣ, построить прямоугольный треугольникъ aoa'_1 съ катетомъ $aa'_1 = na'$; затѣмъ, гипотенузу oa'_1 этого треугольника отложить на перпендикулярѣ ao отъ точки o до точки a_1. Точка a_1 есть искомое совмѣщеніе точки A.

113. Изъ предыдущаго чертежа видно, что вертикальный слѣдъ $\alpha P'$ не играетъ никакой роли въ разсмотрѣнномъ построеніи совмѣщенія, и потому предыдущее построеніе представляетъ рѣшеніе слѣдующей болѣе общей задачи: *Даны прямая* (bc, xy) (*чер. 118*) *въ горизонтальной плоскости проекцій и точка* (a, a'), *найти совмѣщеніе точки съ горизонтальною плоскостью проекцій, когда данная прямая служитъ осью вращенія.*

Чер. 118.

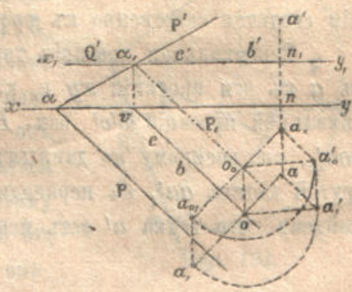


Чер. 119.

114. Основываясь на тѣхъ же соображеніяхъ, легко построить совмѣщеніе точки съ вертикальною плоскостью проекцій, когда прямая ($c'b'$, xy) (*чер. 119*), служащая осью вращенія, лежитъ въ вертикальной плоскости. Для этого достаточно изъ вертикальной проекціи a' опустить перпендикуляръ на $b'c'$, и на катетѣ oa' построить прямоугольный треугольникъ $oa'a_1$ съ катетомъ $a'a_1 = na$; затѣмъ, гипотенузу этого треугольника отложить на перпендикулярѣ $a'o$ отъ точки o до точки a'_1. Точка a'_1 есть искомое совмѣщеніе точки A.

115. Разсмотримъ болѣе общій случай, когда требуется совмѣстить точку (a, a') (*чер. 120*) съ горизонтальной плоскостью Q', вращая плоскость $P\alpha P'$, въ которой лежитъ точка, около горизонтали (bc, $b'c'$).

Для построенія совмѣщенія точки A, примемъ плоскость Q' за новую горизонтальную плоскость проекцій и опредѣлимъ на ней, по правилу **§ 94**, новую горизонтальную проекцію a_0 точки A; для чего отложить на перпендикулярѣ изъ a' къ оси x_1y_1 длину $n_1a_0 = na$, затѣмъ опредѣлимъ новый горизонтальный слѣдъ **(§ 98)** $\alpha_1 P_1$ плоскости $P\alpha P'$ и построимъ совмѣщеніе точки (a_0, a') съ плоскостью $P_1\alpha_1 P'$. Съ этою цѣлью **(§ 112)** изъ a_0 опустимъ перпендикуляръ o_0a_0 на слѣдъ $\alpha_1 P_1$ и на катетѣ a_0o_0 построимъ прямоугольный треугольникъ $a_0o_0a'_0$ съ катетомъ $a_0a'_0 = n_1a'$; гипотенузу $o_0a'_0$ этого треугольника отложимъ на a_0o_0 отъ точки o_0 до a_{01}. Точка a_{01} есть совмѣщеніе точки (a, a') съ плоскостью Q', построенное на плоскости Q'.



Чер. 120.

Чтобы перейти къ построенію на данной горизонтальной плоскости проекцій, остается найти проекціи всѣхъ точекъ предыдущаго построенія на H; для чего достаточно перенести точки a_0, o_0, a_{01}, a' въ a, o, a_1, a_1' по перпендикуляру къ xy на разстояніи, равное a_0a. Такимъ образомъ найдемъ, что a_1 есть искомое совмѣщеніе точки (a, a') съ плоскостью Q'. Отсюда, замѣчая, что фигура, построенная на H, равна фигурѣ, построенной на плоскости Q', заключаемъ, что построеніе совмѣщенія точки съ горизонтальною плоскостью Q' можетъ быть выполнено на эпюрѣ слѣдующимъ образомъ: изъ горизонтальной проекціи a данной точки (*чер. 121*) опускаемъ перпендикуляръ ao на горизонтальную проекцію cb горизонтали CB и на катетѣ ao, равномъ разстоянію горизонтальной проекціи точки отъ горизонтальной проекціи оси вращенія, строимъ прямоугольный треугольникъ съ катетомъ aa'_1, равнымъ n_1a', т. е. разстоянію вертикальной проекціи a' отъ вертикальной проекціи $b'c'$ оси вращенія; наконецъ, гипотенузу этого треугольника откладываемъ отъ o до a, на перпендикулярѣ ao.

116. Изъ обоихъ предыдущихъ случаевъ **(§ 112, 115)** можно вывести слѣдующее общее правило для построенія совмѣщеніе точки съ горизонтальною плоскостью. *Изъ горизонтальной проекціи точки должно опустить перпендикуляръ на горизонтальную проекцію оси вращенія и на продолженіи его отъ точки пересѣченія съ осью, т. е. отъ центра вращенія, отложить гипотенузу прямоугольнаго треугольника, катеты котораго суть: разстояніе горизонтальной проекціи точки отъ горизонтальной проекціи оси вращенія и разстояніе вертикальной проекціи точки отъ вертикальной проекціи оси вращенія.*

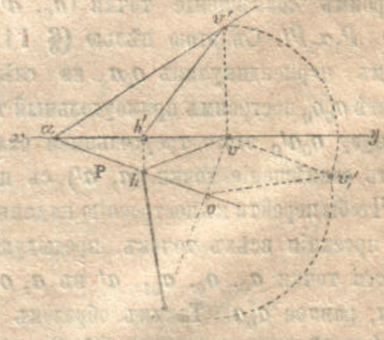
Подобное же правило легко формулировать и для случая совмѣщенія точки съ вертикальною плоскостью.

117. Рѣшеніе обратной задачи, т. е. опредѣленіе проекцій *точки въ первоначальномъ положеніи по данному ея совмѣщенію и оси вращенія* возможно лишь въ томъ случаѣ, когда даны указанія относительно положенія точки въ пространствѣ, напр., когда дана, въ случаѣ совмѣщенія съ горизонтальною плоскостью, горизонтальная проекція точки, лежащая притомъ на одномъ перпендикулярѣ къ оси вращенія. Въ самомъ дѣлѣ, пусть (*чер. 121*) BC—данная горизонтальная ось, a_1—совмѣщеніе точки A съ горизонтальною плоскостью, a—горизонтальная проекція точки A, лежащая на перпендикулярѣ a_1o къ оси bc.

Въ этомъ случаѣ построеніе проекцій точки A въ первоначальномъ положеніи сводится собственно къ построенію ея вертикальной проекціи.

Вертикальная проекція точки A должна находиться на одномъ перпендикулярѣ съ a къ оси проекціи xy и, какъ видно изъ предыдущаго, на разстояніи отъ вертикальной проекціи $b'c'$ оси BC, равномъ катету прямоугольнаго треугольника aoa'_1, построенному по даннымъ: катету oa и гипотенузѣ oa_1; а потому, отложивъ другой катетъ aa'_1 на перпендикулярѣ an_1 къ оси xy отъ точки n_1 до точки a', найдемъ, что точка a' есть искомая вертикальная проекція точки A.

Чер. 121.

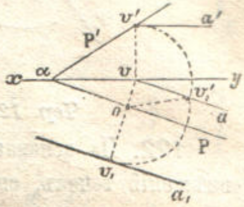


Чер. 122.

118. Прямая. *Пусть (чер. 122) даны плоскость PaP' и въ ней прямая (hv, $h'v'$); требуется построить совмѣщеніе прямой съ горизонтальной плоскостью проекцій.*

Для рѣшенія вопроса достаточно найти совмѣщеніе двухъ какихъ-либо точекъ прямой, но удобнѣе совмѣщать слѣды прямой, ибо положеніе горизонтальнаго слѣда, какъ лежащаго на оси вращенія, не измѣнится при совмѣщеніи, и потому достаточно найти лишь совмѣщеніе вертикальнаго слѣда; для чего, согласно правилу **§ 116**, опустимъ изъ v перпендикуляръ на αP и построимъ прямоугольный треугольникъ ovv'_1, въ которомъ катетъ $vv'_1=vv'$, затѣмъ гипотенузу ov'_1 этого треугольника отложимъ на vo отъ точки o до точки v_1. Точка v_1 есть совмѣщеніе вертикальнаго слѣда, и потому прямая hv_1—есть искомое совмѣщеніе данной прямой.

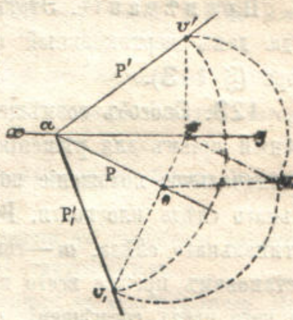
119. Въ томъ случаѣ, когда данная прямая есть горизонталь (va, $v'a'$) плоскости (*чер. 123*), достаточно найти совмѣщеніе одной ея точки, ибо параллельность горизонтали слѣду αP плоскости не измѣнится при совмѣщеніи; а потому, для рѣшенія задачи, достаточно найти совмѣщеніе v_1 вертикальнаго слѣда горизонтали и чрезъ v_1 провести прямую v_1a_1, параллельно слѣду αP плоскости. Искомое совмѣщеніе горизонтали есть прямая v_1a_1.



Чер. 123.

120. Плоскость. Чтобы совмѣстить плоскость съ горизонтальною плоскостью проекцій, достаточно найти совмѣщеніе ея вертикальнаго слѣда съ плоскостью H, и чтобы совмѣстить плоскость съ вертикальною плоскостью проекцій, достаточно построить совмѣщеніе ея горизонтальнаго слѣда съ плоскостью V.

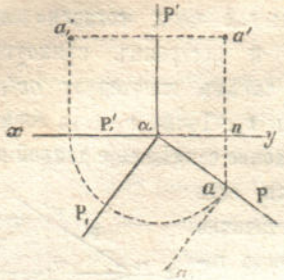
Въ свою очередь для этой послѣдней цѣли достаточно построить совмѣщеніе одной лишь точки совмѣщаемаго слѣда, ибо другая его точка—α, какъ лежащая на оси вращенія, не измѣнитъ своего положенія. Такъ, если требуется совмѣстить плоскость $P\alpha P'$ (*чер. 124*) съ горизонтальной плоскостью проекцій, то достаточно совмѣстить одну точку, напр. (v, v'), вертикальнаго слѣда. Такое совмѣщеніе можетъ быть построено или по правилу въ **§ 116**, или на основаніи слѣдующихъ соображеній. Искомое совмѣщеніе точки V должно находиться на перпендикулярѣ vo къ слѣду αP и на разстояніи $\alpha v'$ отъ точки α, ибо разстояніе точки v' отъ α не измѣняется при вращеніи плоскости $P\alpha P'$ около оси αP. А потому искомое совмѣщеніе, находясь на перпендикулярѣ ov, должно въ то же время находиться и на дугѣ, описанной изъ α радіусомъ $\alpha v'$, т. е. въ точкѣ ихъ пересѣченія v_1. Слѣдовательно, искомое совмѣщеніе вертикальнаго слѣда есть прямая $\alpha P'_1$.



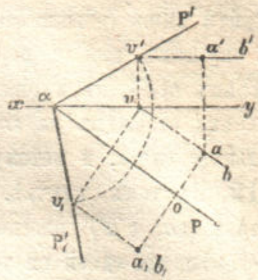
Чер. 124.

121. Въ частномъ случаѣ, когда данная плоскость будетъ одна изъ проектирующихъ, напр. горизонтально-проектирующая $P\alpha P'$, построеніе совмѣщенія вертикальнаго слѣда значительно упрощается, ибо впередъ можно видѣть, что совмѣщеніе слѣда должно составлять прямой уголъ съ слѣдомъ, играющимъ роль оси вращенія. Такъ, при совмѣщеніи горизонтально-проектирующей плоскости $P\alpha P'$ (*чер. 125*) съ горизонтальной плоскостью проекцій, совмѣщеніе αP_1 вертикальнаго слѣда будетъ перпендикулярно къ αP. При этомъ точка (a,a'), принадлежащая плоскости $P\alpha P'$, совмѣстится въ a_1 на разстояніи aa_1 отъ оси αP, равномъ na'. При совмѣщеніи той же плоскости съ вертикальной плоскостью проекцій, слѣдъ αP совмѣстится съ осью xy, а точка A съ a'_1 на разстояніи отъ оси вращенія

$\alpha P'$, равномъ гипотенузѣ aa прямоугольнаго треугольника ana (§ **116**). Подобнымъ же образомъ легко построить и совмѣщеніе вертикально-проектирующей плоскости.



Чер. 125.



Чер. 126.

122. На основаніи § **119** и **120** можно дать иной способъ построенія совмѣщеній точекъ, способъ, извѣстный подъ именемъ **совмѣщенія точекъ при помощи горизонталей.**

Пусть (*чер. 126*) $P\alpha P'$—данная плоскость и A—взятая на ней, при помощи горизонтали (vb, $v'b'$), точка. Совмѣстимъ какъ вертикальный слѣдъ $\alpha P'$ плоскости, такъ и горизонталь VB съ горизонтальною плоскостью проекцій при помощи точки (v, v'). Пусть (§ **120**) $\alpha P'_1$,—совмѣщеніе слѣда $\alpha P'$ v_1b_1—совмѣщеніе горизонтали (§ **119**).

Въ такомъ случаѣ искомая точка должна находиться одновременно и на прямой v_1b_1 и на перпендикулярѣ ao къ слѣду αP. Слѣдовательно, совмѣщеніе точки A должно находиться въ точкѣ пересѣченія прямыхъ ao и v_1b_1 т. е. въ точкѣ a_1.

Примѣчаніе. Этотъ способъ можетъ быть примѣнимъ въ томъ случаѣ, когда данъ вертикальный слѣдъ и когда точка α помѣщается въ предѣлахъ эпюра (§ **113**).

123. Способъ совмѣщенія точекъ при помощи горизонталей даетъ весьма удобный пріемъ для рѣшенія обратной задачи, т. е. для возстановленія точекъ въ первоначальное положеніе по даннымъ ихъ совмѣщеніямъ и по совмѣщенію вертикальнаго слѣда плоскости. Въ самомъ дѣлѣ, пусть $\alpha P'_1$ (*чер. 126*) совмѣщеніе вертикальнаго слѣда, a_1—совмѣщеніе точки. Для построенія проекцій точки A, возстановимъ прежде всего вертикальный слѣдъ плоскости и горизонталь точки A. Для чего чрезъ совмѣщеніе a_1, параллельно слѣду αP, проведемъ прямую a_1v_1,—совмѣщеніе горизонтали точки A, и найдемъ точку v_1, въ которой она пересѣкаетъ $\alpha P'_1$ и которая потому представитъ совмѣщеніе вертикальнаго слѣда горизонтали; затѣмъ опредѣлимъ проекціи v_1. Горизонтальная проекція слѣда v_1 должна находиться и на перпендикулярѣ къ αP и на оси xy, т. е. въ точкѣ ихъ пересѣченія v, вертикальная же v'—на перпендикулярѣ къ оси xy и на разстояніи αv_1 отъ точки α, т. е. въ точкѣ пересѣченія дуги v_1v' и перпендикуляра vv'. Зная такимъ образомъ проекціи v и v' вертикальнаго слѣда горизонтали, легко построимъ первоначальное положеніе какъ вертикальнаго слѣда $\alpha P'$ плоскости, такъ и проекціи vb, $v'b'$ горизонтали точки A (§ **56**). Затѣмъ переходимъ къ построенію проекцій точки A. Горизонтальная проекція должна одновременно находиться и на перпендикулярѣ a_1o къ оси вращенія αP и на горизонтальной проекціи vb горизонтали, т. е. въ точкѣ ихъ пересѣченія a. По a на $v'b'$ опредѣлимъ вертикальную проекцію a' точки A.

Этотъ способъ извѣстенъ подъ именемъ возстановленія точекъ при помощи горизонталей.

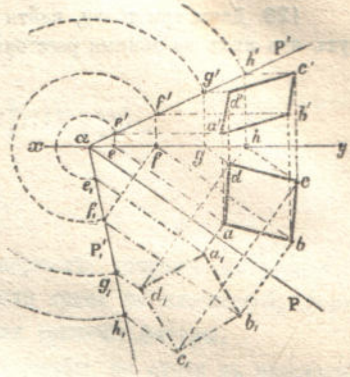
124. Задача. *Даны плоскость $P\alpha P'$ и горизонтальная проекція ab стороны квадрата $ABCD$, расположеннаго въ плоскости $P\alpha P'$. Найти проекціи квадрата (чер. 127).*

1) Опредѣляемъ вертикальную проекцію стороны AB при помощи горизонталей, проходящихъ чрезъ точки A и B (§ **68**).

2) Совмѣщаемъ при помощи горизонталей AE и BF плоскость $P\alpha P'$ и прямую AB съ горизонтальною плоскостью проекцій (§ **107**). Совмѣщеніе a_1b_1 есть истинная величина стороны квадрата.

3) Строимъ на a_1b_1 квадратъ $a_1b_1c_1d_1$, который есть не что иное, какъ совмѣщеніе искомаго квадрата.

4) Возстановляемъ точки d_1 и c_1 при помощи горизонталей DG и CH (§ **108**) и находимъ проекціи ихъ (d, d') и (c, c').



Чер. 127.

5) Соединяемъ прямыми точки a, b, c, d и точки a', b', c', d'. Параллелограммы $abcd$ и $a'b'c'd'$ суть проекціи искомаго квадрата.

ЗАДАЧИ.

114. Въ вертикально-проектирующей плоскости даны три точки. Найти истинную величину треугольника, образованнаго ими.

115. Опредѣлить элементы треугольника по даннымъ его проекціямъ.

116. Дана прямая и точка. Требуется провести чрезъ точку прямую, которая съ данною прямою составляла бы данный уголъ.

117. Опредѣлить на данной прямой точку, которая находилась бы на данномъ разстояніи отъ точки, данной внѣ прямой.

118. Чрезъ точку, данную на слѣдѣ плоскости, провести въ плоскости прямую, которая съ отрѣзками слѣдовъ образовала бы равнобедренный треугольникъ.

119 Даны двѣ параллельныя прямыя и точка, лежащая въ ихъ плоскости. Провести чрезъ эту точку прямую такъ, чтобы отрѣзокъ ея между параллельными прямыми имѣлъ бы данную величину.

120. Даны: плоскость, прямая, ей параллельная, и точка. Провести чрезъ данную точку прямую такъ, чтобы она встрѣчала данную прямую и чтобы отрѣзокъ ея между точкой и плоскостью имѣлъ бы данную величину.

121. По даннымъ сторонамъ построить треугольникъ въ вертикально-проектирующей плоскости.

122. Построить проекціи четыреугольника въ плоскости: a) проходящей чрезъ ось и точку, b) параллельной оси.

123. Зная сторону правильнаго шестиугольника и горизонтально-проектирующую плоскость, въ которой онъ расположенъ, построить проекціи этого шестиугольника.

124. Даны: горизонтальный слѣдъ плоскости, совмѣщеніе точки, принадлежащей этой плоскости, и разстояніе точки отъ горизонтальной плоскости проекціи. Найти проекціи точки и вертикальный слѣдъ плоскости.

125. Даны: двѣ точки и плоскость; найти въ плоскости точку, отстоящую отъ данныхъ точекъ на данныя разстоянія.

126. Построить геометрическое мѣсто точекъ, равноотстоящихъ отъ трехъ данныхъ точекъ.

127. Найти на данной плоскости точку, равноотстоящую отъ трехъ данныхъ точекъ.

128. Даны двѣ точки A и B и плоскость P. Построить равнобедренный треугольникъ съ основаніемъ AB и данной высотою, при томъ такъ, чтобы вершина треугольника лежала на данной плоскости.

129. Даны три точки, найти въ ихъ плоскости точку, которая отстояла бы отъ двухъ изъ нихъ на данныя разстоянія.

ГЛАВА IV.

Объ элементахъ фигуръ.

§ I. Опредѣленія.

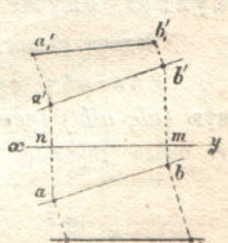
125. Элементами фигуры называются, во первыхъ, стороны фигуры, т. е. прямыя, которыми ограничена или самая фигура, или грани ея плоскостей; во вторыхъ, углы, которые составлены или сторонами, или гранями фигуры.

Задача настоящей главы заключается въ томъ, чтобы, не входя въ разсмотрѣніе самыхъ фигуръ, дать способы построенія истинной величины ихъ элементовъ. Въ этомъ смыслѣ сказанная задача распадается на двѣ: на построеніе истинной величины разстояній и на построеніе истинной величины угловъ между различными рода геометрическими элементами (точка, прямая, плоскость), заданными своими проекціями. Та и другая задачи рѣшаются при помощи способовъ, разсмотрѣнныхъ нами въ предшествующей главѣ.

§ II. О разстояніяхъ.

126. Относящіяся сюда задачи могутъ быть сгруппированны въ слѣдующіе семь случаевъ. Найти истинную величину разстоянія между: 1) двумя точками; 2) между точкой и прямой; 3) между двумя параллельными прямыми; 4) между двумя скрещивающимися прямыми; 5) между точкою и плоскостью; 6) между прямой и параллельною ей плоскостью; 7) между двумя параллельными плоскостями.

127. Разстояніе между двумя точками A и B есть длина отрѣзка прямой AB.



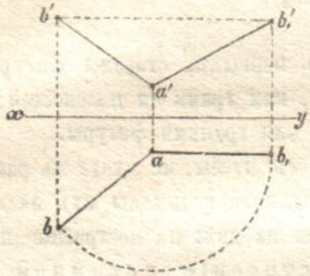
Чер. 128.

Для опредѣленія истинной величины отрѣзка AB можно пользоваться двумя способами—или способомъ совмѣщенія, или способомъ вращенія.

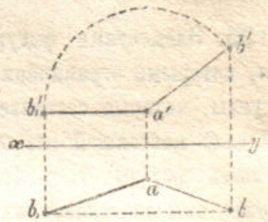
Способъ совмѣщенія. Совмѣстимъ горизонтально-проектирующую плоскость прямой AB (*чер. 128*) съ горизонтальной плоскостью проекцій, вращая ее около горизонтальнаго слѣда ab.

Въ данномъ случаѣ радіусы вращеній A и B равны ихъ разстоянію отъ горизонтальной плоскости проекцій, т. е. равны $a'n$ и $b'm$ (§ **121**), и потому совмѣщеніе a_1 точки A будетъ находиться на перпендикулярѣ къ оси вращенія ab на разстояніи $aa_1=a'n$; совмѣщеніе точки B будетъ находиться въ точкѣ b_1, взятой на перпендикулярѣ къ оси вращенія на разстояніи $bb_1=b'm$, a_1b_1 есть совмѣщеніе прямой AB и, слѣдовательно, истинная величина разстоянія между точками A и B.

128. Способъ вращенія. Прямая, параллельная плоскости проекцій, проектируется на эту послѣднюю въ истинную величину; и потому, чтобы опредѣлить истинную величину прямой, достаточно повернуть ее около прилично выбранной оси или въ положеніе, параллельное вертикальной плоскости, или въ положеніе, параллельное горизонтальной плоскости. Въ первомъ случаѣ горизонтальная проекція прямой въ новомъ ея положеніи должна быть параллельна оси, и потому вращеніе должно быть выполнено при помощи оси, перпендикулярной къ горизонтальной плоскости проекціи и, для простоты, проходящей чрезъ одну изъ данныхъ точекъ, напр. (a, a') (*чер. 129*). Въ такомъ случаѣ точка A останется неподвижной, горизонтальная проекція точки B перейдетъ въ b_1 на прямую, параллельную оси, а вертикальная b'—въ точку b'_1 (§ **102**). Вертикальная проекція прямой $a'b'_1$ въ новомъ ея положеніи и есть истинная величина разстоянія между точками A и B.



Чер. 129.



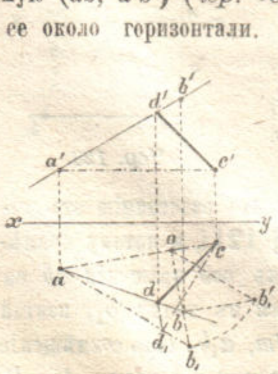
Чер. 130.

Во второмъ случаѣ для приведенія прямой въ положеніе, параллельное горизонтальной плоскости, должно употребить ось, перпендикулярную въ вертикальной плоскости проекцій и проходящую чрезъ точку (a, a') (*чер. 130*), и вращать прямую до тѣхъ поръ, пока вертикальная проекція ея въ новомъ положеніи не станетъ параллельной оси xy. Въ этомъ случаѣ точка (a, a') останется неподвижной. Вертикальная проекція точки b перейдетъ въ b'_1 на прямую параллельную xy, а горизонтальная въ—точку b_1 (§ **103**). Горизонтальная проекція ab_1 прямой въ новомъ положеніи есть истинная величина отрѣзка AB.

129. Разстояніе точки отъ прямой есть длина перпендикуляра, опущеннаго изъ точки на прямую.

Задача рѣшается двумя способами.

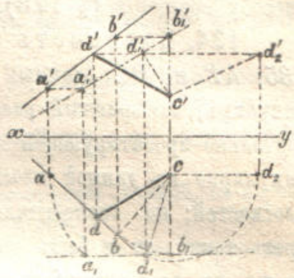
Способъ совмѣщенія. Совмѣстимъ плоскость, проходящую чрезъ прямую $(ab, a'b')$ (*чер. 131*) и точку (c, c') съ горизонтальной плоскостью, вращая ее около горизонтали. Построеніе значительно упрощается, если за ось вращенія примемъ горизонталь $(ac, a'c')$, проходящую чрезъ точку C. Въ этомъ случаѣ точка C и точка A прямой AB останутся неподвижными, и для построенія совмѣщенія прямой AB, достаточно найти совмѣщеніе одной лишь ея точки, напримѣръ, B; для чего, по правилу § **116**, опустимъ перпендикуляръ bo на ось ac и на bo построимъ прямоугольный треугольникъ obb'_1, катетъ котораго bb'_1 равенъ разстоянію b' отъ $a'c'$; затѣмъ отложимъ гипотенузу ob'_1 этого треугольника на перпендикуляръ ob отъ o до b_1; точка b_1 есть искомое совмѣщеніе; прямая же ab_1—совмѣщеніе прямой AB. А потому перпендикуляръ cd_1, опущенный изъ c на прямую ab_1 и есть искомое разстояніе точки C отъ пря-



Чер. 131.

мой AB. Чтобы найти проекціи перпендикуляра, достаточно найти проекціи точки d_1, именно горизонтальную въ точкѣ пересѣченія перпендикуляра d_1d къ оси ac съ горизонтальною проекціей прямой ab (§ **117**), а вертикальную—въ d'. Прямыя cd, $c'd'$—суть проекціи искомаго перпендикуляра.

130. Способъ вращенія. На основаніи теоремы § **45**, по которой прямой уголъ проектируется въ истинную величину, если одна изъ его сторонъ параллельна плоскости проекцій, можно построить проекціи перпендикуляра и затѣмъ опредѣлить его истинную величину по способу вращенія. Въ самомъ дѣлѣ, чрезъ данную точку (c, c') (*чер. 132*) проведемъ ось вращенія, перпендикулярную къ горизонтальной плоскости проекцій, и около этой оси повернемъ прямую AB въ положеніе $(a_1b_1, a'_1b'_1)$ (§ **105**), параллельное вертикальной плоскости проекцій, т. е. въ положеніе, въ которомъ горизонтальная проекція ея a_1b_1 параллельна оси xy. Въ такомъ случаѣ, опустивъ перпендикуляръ $c'\,d'_1$ изъ (c, c') на новую вертикальную проекцію $a'_1b'_1$, легко видѣть, что $c'd'_1$ есть вертикальная проекція искомаго перпендикуляра, а cd_1—горизонтальная. Стало быть, для рѣшенія задачи остается опредѣлить истинную величину прямой $(cd_1, c'd'_1)$ по одному изъ разсмотрѣнныхъ способовъ, наприм., приводя ее въ положеніе $(cd_2, c'd'_2)$, параллельное вертикальной плоскости проекцій (§ **128**). Прямая $c'd'_2$ есть искомое разстояніе. Наконецъ, прямая $(cd, c'd')$ есть проекція перпендикуляра въ первоначальномъ положеніи прямой.

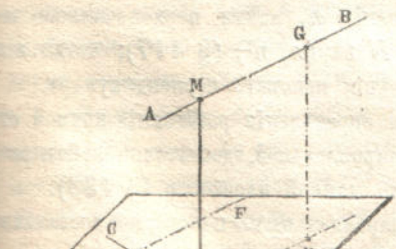


Чер. 132.

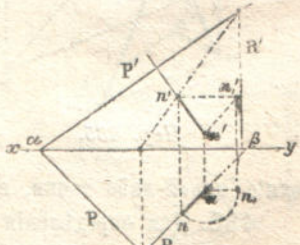
131. Для опредѣленія разстоянія между двумя параллельными прямыми, достаточно найти разстояніе между точкой, взятой на одной изъ прямыхъ, и другою прямой (§ **129**).

132. Разстояніе между двумя скрещивающимися прямыми строится на эпюрѣ на основаніи слѣдующаго опредѣленія его въ элементарной геометріи.

Пусть (*чер. 133*) AB и CD—двѣ скрещивающіяся прямыя. Проведемъ чрезъ какую-либо точку E прямой CD прямую EF, параллельную AB, и на плоскость



Чер. 133.



Чер. 134.

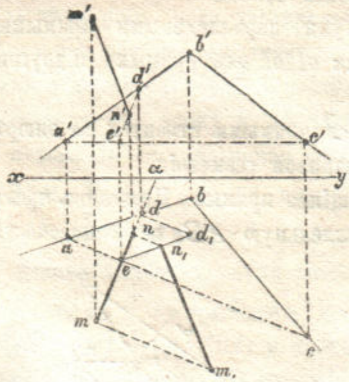
P, опредѣленную двумя пересѣкающимися прямыми CD и EF, опустимъ перпендикуляръ GH изъ какой-либо точки G прямой AB. Затѣмъ чрезъ основаніе H перпендикуляра GH проведемъ прямую HN, параллельно EF или AB, и изъ точки N, встрѣчи ея съ прямой CD, прямую NM параллельно GH до встрѣчи съ AB. Прямая MN есть искомое разстояніе.

133. *Разстояніе точки отъ плоскости измѣряется длиною перпендикуляра, опущеннаго изъ точки на данную плоскость.*

Разсмотримъ два случая.

Плоскость дана слѣдами (*чер. 134*). Пусть $P\alpha P'$ и (a,a')—данныя плоскость и точка. Опустимъ изъ A перпендикуляръ $(ab, a'b')$ на плоскость $P\alpha P'$ (§ **59**) и найдемъ точку его встрѣчи (n, n') при помощи горизонтально-проектирующей плоскости (§ **75**). Въ такомъ случаѣ искомое разстояніе опредѣлится разстояніемъ между точками A и N, истинная величина котораго, опредѣленная по способу вращенія (§ **128**), равна n'_1a'.

134. *Плоскость дана пересѣкающимися прямыми.* Пусть (*чер. 135*) AB и BC—данныя прямыя и (m, m')—данная точка. Очевидно, перпендикуляръ, измѣряющій разстояніе точки M отъ плоскости ABC, лежитъ въ горизонтально-проектирующей плоскости R, проходящей чрезъ данную точку перпендикулярно къ данной плоскости ABC, и перпендикуляренъ къ сѣченію этихъ двухъ плоскостей; но горизонтальный слѣдъ плоскости R по § **88** долженъ проходить чрезъ точку m и быть перпендикулярнымъ къ слѣду плоскости ABC, или, что то же, къ ея горизонтали. А потому проведемъ чрезъ точку A прямой AB горизонталь $(ac, a'c')$ данной плоскости, а чрезъ m—горизонтальный слѣдъ $m\alpha$ горизонтально-проектирующей плоскости R, перпендикулярно къ ac. Плоскость R пересѣчетъ данныя прямыя въ точкахъ (d, d') и (e, e') (§ **76**), а слѣдовательно, данную плоскость—по прямой DE. Для опредѣленія основанія искомаго перпендикуляра и истинной его величины, совмѣстимъ точки (d, d'), (e, e') и (m, m'), лежащія въ плоскости R, съ горизонтальною плоскостью, принявъ за ось вращенія горизонталь $(m\alpha, a'c')$ (§ **116**); точка D перейдетъ въ d_1, M—въ m_1, E какъ лежащая на оси, не измѣнитъ своего положенія; слѣдовательно, d_1e есть совмѣщеніе прямой DE, и потому перпендикуляръ m_1n_1 изъ m_1 на d_1e есть совмѣщеніе перпендикуляра изъ точки M на плоскость ABC. Чтобы найти проекціи его, остается по совмѣщенію n_1 найти первоначальное положеніе точки N въ (n, n') (§ **117**); тогда mn, $m'n'$ суть проекціи искомаго перпендикуляра.



Чер. 135.

135. Для опредѣленія разстоянія прямой отъ плоскости, ей параллельной, достаточно найти разстояніе какой-либо точки, взятой на прямой, отъ данной плоскости (§ **133**).

136. Для опредѣленія разстоянія двухъ параллельныхъ плоскостей достаточно найти разстояніе какой-либо точки, взятой на одной изъ плоскостей, отъ другой (§ **133**, **134**).

ЗАДАЧИ.

130. Найти разстояніе между двумя точками, взятыми въ двухъ различныхъ углахъ

131. Отложить на данной прямой отъ данной точки данную длину.

132. Раздѣлить прямую а) на равныя части. b) въ среднемъ и крайнемъ отношеніи

133. Зная разстояніе двухъ точекъ, ихъ горизонтальныя проекціи и вертикальную проекцію одной изъ нихъ, найти вертикальную проекцію другой.

134. Горизонтальный слѣдъ прямой находится подъ осью и на разстояніи отъ нея 10 сант., вертикальный слѣдъ—надъ осью и на разстояніи отъ нея 15 сант. Истинная величина прямой равна 20 сант. Построить проекціи прямой.

135. Опредѣлить разстояніе точки отъ прямой въ слѣдующихъ случаяхъ: a) прямая лежитъ въ одной изъ плоскостей проекцій, b) прямая параллельна горизонтальной плоскости, c) прямая совпадаетъ съ осью проекцій, d) прямая лежитъ въ плоскости профиля.

136. Дана прямая AB и горизонтальная проекція прямой CD, параллельной AB; найти вертикальную проекцію CD подъ условіемъ, чтобы разстояніе между AB и CD было равно данной величинѣ.

137. Опредѣлить разстояніе точки отъ плоскости: a) параллельной оси, b) проходящей чрезъ ось и точку, c) имѣющей свои слѣды на одной прямой.

138. Зная горизонтальную проекцію точки и разстояніе ея отъ данной плоскости, найти вертикальную проекцію точки.

139. Опредѣлить разстояніе прямой отъ плоскости, ей параллельной, если плоскость a) параллельна оси, b) проходитъ чрезъ ось и точку.

140. Зная горизонтальный слѣдъ плоскости, параллельной оси и ея разстояніе отъ оси, построить вертикальный слѣдъ.

141. Провести на данномъ разстояніи плоскость, параллельную данной, въ случаѣ, если данная плоскость: a) проходитъ чрезъ ось, b) параллельна оси.

142. Дана плоскость и прямая: найти на прямой точку, отстоящую отъ плоскости на данное разстояніе.

143. Найти кратчайшее разстояніе прямой отъ оси.

144. Найти кратчайшее разстояніе прямой, лежащей въ горизонтальной плоскости, отъ прямой, лежащей въ вертикальной плоскости.

145. Найти прямую, находящуюся на данныхъ разстояніяхъ отъ двухъ данныхъ плоскостей.

146. Даны горизонтальный слѣдъ плоскости, проекціи точки и разстояніе точки отъ плоскости. Найти другой слѣдъ плоскости.

§ II. Объ углахъ между прямыми.

137. Задачи относительно угловъ сводятся къ слѣдующимъ четыремъ: опредѣлить уголъ: 1) между двумя прямыми, 2) между прямою и плоскостію, 3) между двумя плоскостями, 4) между тремя плоскостями.

138. Угломъ между двумя какими-либо прямыми вообще называется уголъ, образованный двумя параллельными имъ прямыми, проведенными чрезъ одну и ту же точку пространства. Вслѣдствіе этого достаточно опредѣлить уголъ между двумя пересѣкающимися прямыми.

Чер. 136.

Пусть *(чер. 136)* AB и AC—двѣ пересѣкающіяся въ точкѣ (a, a') прямыя. Чтобы построить истинную величину угла BAC совмѣстимъ плоскость BAC, вращая ее около одной изъ ея горизонталей, напр., около горизонтали BC, съ горизонтальной плоскостью. Въ этомъ случаѣ точки B и C не измѣнятъ своего положенія, а точка A перейдетъ въ a_1 (§ **116**), слѣдовательно, уголъ ba_1c—есть искомый.

ЗАДАЧИ.

147. Построить уголъ между двумя прямыми, лежащими въ профильной плоскости.

148. Построить уголъ между какою-нибудь прямою и прямою, лежащею въ плоскости профиля.

149. Построить уголъ прямой съ осью.

150. Найти уголъ между двумя не пересѣкающимися прямыми, если каждая изъ нихъ параллельна одной изъ плоскостей проекцій.

151. Опредѣлить уголъ между двумя прямыми, имѣющими одинъ и тотъ же слѣдъ.

152. Опредѣлить уголъ между двумя прямыми, пересѣкающими ось въ одной и той же точкѣ.

153. Чрезъ данную точку провести прямую, которая составляетъ съ осью данный уголъ.

154. Найти уголъ между слѣдами данной плоскости и построить биссекторъ этого угла.

155. Даны: горизонтальныя проекціи и горизонтальные слѣды двухъ пересѣкающихся прямыхъ, а также уголъ, между ними заключенный. Построить вертикальныя проекціи этихъ прямыхъ.

156. Въ данной плоскости провести прямую подъ даннымъ угломъ къ горизонтальной плоскости проекцій.

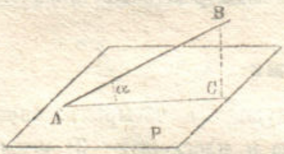
157. Чрезъ прямую, взятую на вертикальной плоскости, провести плоскость такъ, чтобы уголъ между ея слѣдами былъ бы данный.

158. Построить геометрическое мѣсто точекъ, равно отстоящихъ отъ двухъ пересѣкающихся прямыхъ.

159. Найти на данной прямой точку равно отстоящую отъ двухъ пересѣкающихся прямыхъ.

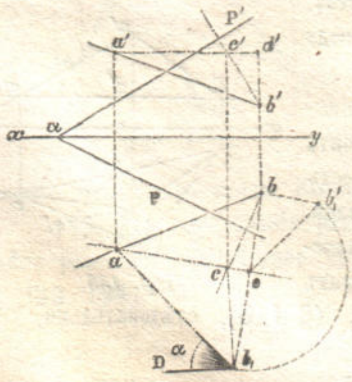
§ III. Объ углахъ между прямою и плоскостью.

139. Угломъ между прямою и плоскостью вообще называется уголъ, который данная прямая образуетъ съ своей проекціей на плоскости. Такъ (*черт. 137*), прямая AB образуетъ съ плоскостью P уголъ BAC, если AC есть проекція AB на плоскости P. Отсюда видно, что уголъ прямой съ плоскостью есть дополненіе угла ABC, образованнаго прямою AB съ перпендикуляромъ BC къ плоскости P.



Чер. 137.

На этомъ основаніи истинная величина угла прямой (ab, $a'b'$) съ плоскостью PaP' (*чер. 138*) опредѣлится на эпюрѣ слѣдующимъ построеніемъ. Изъ какой либо точки прямой AB, наприм. B, опускаемъ перпендикуляръ (bc, $b'c'$) на плоскость PaP' (§ 59) и опредѣляемъ истинную величину ab_1c угла между прямыми AB и BC совмѣщеніемъ при помощи горизонтали (ac, $a'c'$) (§ **138**). Уголъ $\alpha = ab_1D$, служащій дополненіемъ къ найденному углу ab_1c, и есть искомый.



Чер. 138.

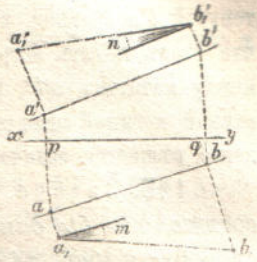
140. Задача. *Опредѣлить углы прямой съ плоскостями проекцій.*

По опредѣленію, уголъ прямой AB съ горизонтальною плоскостью проекцій есть уголъ между AB и ея горизонтальной проекціей ab; уголъ прямой AB съ вертикальной плоскостью есть уголъ AB съ ея вертикальной проекціей $a'b'$.

На этомъ основаніи построеніе истинной величины угловъ прямой съ плоскостями проекцій можетъ быть выполнено двумя способами.

141. Способъ совмѣщенія. Совмѣстимъ плоскость, горизонтально проектирующую прямую, съ горизонтальною плоскостью проекцій. AB перейдетъ въ a_1b_1 (§ **121**) (*чер. 139*), и уголъ m прямой a_1b_1 съ ab, или съ прямой, ей параллельной, есть искомый.

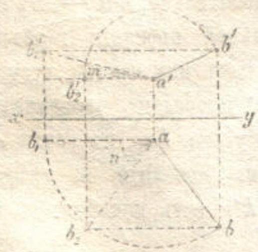
Подобнымъ же образомъ, совмѣщая плоскость вертикально-проектирующую прямую, съ вертикальной плоскостью проекцій, найдемъ, что AB перейдетъ въ $a_1'b'_1$ и что, слѣдовательно, уголъ прямой съ вертикальною плоскостью проекцій равенъ углу n между прямыми $a'_1b'_1$ и $a'b'$.



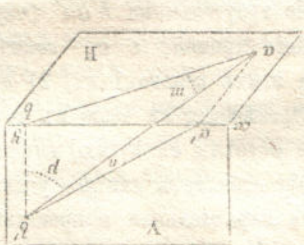
Чер. 139.

142. Способъ вращенія. Замѣтимъ предварительно, что въ случаѣ прямой, параллельной вертикальной плоскости, уголъ ея съ горизонтальной плоскостью проектируется на вертикальную плоскость въ истинную величину, и, слѣдовательно, равенъ углу, образованному вертикальной проекціей прямой съ осью, или съ прямой, ей параллельной. Въ случаѣ прямой, параллельной горизонтальной плоскости, уголъ ея съ вертикальной плоскостью проекцій проектируется на горизонтальную плоскость въ истинную величину, и слѣдовательно, равенъ углу, образованному горизонтальной проекціей прямой съ осью проекцій.

На этомъ основаніи повернемъ прямую AB (*чер. 140*) около оси, проходящей чрезъ точку A и перпендикулярной къ горизонтальной плоскости проекцій, въ положеніе, параллельное вертикальной плоскости (§ **128**). AB перейдетъ въ (ab_1, $a'b'_1$) и уголъ прямой AB съ горизонтальною плоскостью проекцій будетъ равенъ углу $b'_1a'b'_2=m$. Подобнымъ же образомъ, повернувъ прямую AB около оси, проходящей черезъ точку A и перпендикулярной къ вертикальной плоскости проекцій, въ положеніе параллельное горизонтальной плоскости проекцій, найдемъ, что прямая AB перейдетъ въ (ab_2, $a'b'_2$) и что уголъ AB съ вертикальной плоскостью проекцій равенъ углу $b_1ab_2=n$.



Чер 140.



Чер. 141.

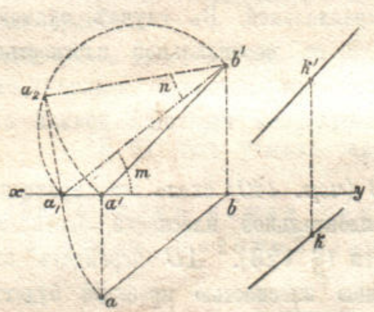
143. Углы m и n, которые прямая AB образуетъ съ плоскостями проекцій, могутъ измѣняться лишь въ нѣкоторыхъ предѣлахъ и не могутъ, слѣдовательно, имѣть произвольную величину. Въ самомъ дѣлѣ, пусть (*чер. 141*) AB—данная прямая, ab и $a'b'$—ея проекціи, m—уголъ прямой съ горизонтальной плоскостью проекцій, n—уголъ прямой съ вертикальной плоскостью проекцій. Изъ треугольника Vab имѣемъ $m+p=+90^0$; съ другой стороны, уголъ n меньше p, ибо уголъ, образованный прямою съ своей проекціей на плоскости, меньше всякаго другого угла, образованнаго той же прямою со всякою другою прямою, проведенною чрезъ ея основаніе въ той же плоскости. И потому изъ $m+p=90^0$ и $n<p$ находимъ

условіе $m+n<90^0$, которому должны удовлетворять углы, составляемые прямою съ плоскостями проекцій.

144. Кромѣ того, изъ разсмотрѣнія того же чертежа, мы замѣчаемъ, съ одною стороны, что уголъ m есть острый уголъ прямоугольнаго треугольника $b'ab$, заключенный между катетомъ ab, равнымъ горизонтальной проекціи прямой, и гипотенузой $b'a$, равной истиной величинѣ прямой между слѣдами; съ другой стороны, что уголъ n есть острый уголъ прямоугольнаго треугольника $ab'a'$, заключенный между катетомъ $a'b'$, равнымъ вертикальной проекціи прямой, и гипотенузой ab', равной истиной величинѣ прямой между слѣдами. На основаніи этихъ замѣчаній легко рѣшается задача, обратная задачѣ § **140**.

145. Задача. *Черезъ данную точку провести прямую, которая составляла бы данные углы съ плоскостями проекцій.*

Пусть (*чер. 142*) даны: точка (k, k') и углы m и n, которые искомая прямая должна составлять съ плоскостями проекцій и которые удовлетворяють условію $m+n<90^0$. Для рѣшенія задачи достаточно провести искомую прямую чрезъ какую-нибудь точку и затѣмъ чрезъ данную точку (k, k') провести прямую, параллельную найденной. Съ этой цѣлью, въ виду замѣчаній § **144**, возьмемъ точку (b, b') на вертикальной плоскости и 1) построимъ на вертикальной плоскости прямоугольный треугольникъ ba_1b' по катету bb' и противолежащему углу m. Такой треугольникъ представитъ совмѣщеніе треугольника bab' (*чер. 141*) и, слѣдовательно, гипотенуза его $b'a_1$ есть истинная величина прямой между ея слѣдами, ba_1—величина горизонтальной проекціи прямой, a_1—совмѣщеніе горизонтальнаго слѣда. 2) На той же плоскости построимъ прямоугольный треугольникъ $b'a_1a_2$ по гипотенузѣ $b'a_1$ и прилежащему углу n; такой треугольникъ представитъ совмѣщеніе треугольника $b'aa'$ (*чер 141*) и, слѣдовательно, $b'a_2$—есть вертикальная проекція прямой, а a_2—совмѣщеніе вертикальной проекціи горизонтальнаго слѣда. На этихъ основаніяхъ, 3) опишемъ изъ b' какъ изъ центра, дугу радіусомъ $b'a_2$ до пересѣченія съ осью въ точкѣ a' и изъ a' проведемъ перпендикуляръ къ оси xy до встрѣчи съ дугою, описанною изъ b радіусомъ ba_1, въ точкѣ a. Прямая $(ab, a'b')$ составляетъ данные углы съ плоскостями проекцій и, слѣдовательно, прямая, ей параллельная и проведенная чрезъ (k, k'), есть искомая.



Чер. 142.

ЗАДАЧИ.

160. Построить уголъ наклоненія оси къ данной плоскости.

161. Построить уголъ наклоненія прямой къ плоскости, если плоскость a) перпендикулярна къ оси проекцій; b) параллельна оси; c) горизонтальна.

162. Построить уголъ прямой, лежащей въ плоскости профиля, съ плоскостью, наклонной къ оси.

163. Найти уголъ наклоненія прямой къ плоскости, данной двумя пересѣкающимися прямыми.

164. Въ данной плоскости провести чрезъ данную точку прямую такъ, чтобы она составляла данный уголъ съ горизонтальною плоскостью проекцій.

165. Опредѣлить вертикальный слѣдъ плоскости, зная ея горизонтальный слѣдъ и уголъ съ осью.

166. Опредѣлить вертикальный слѣдъ плоскости, зная горизонтальный и разстояніе одной изъ точекъ оси отъ плоскости.

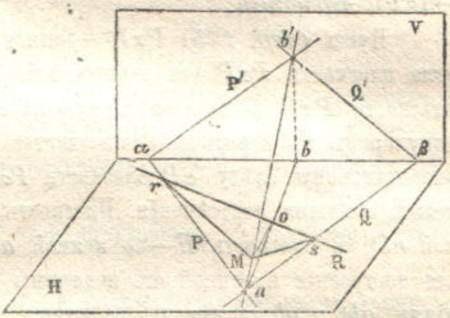
167. Зная одну изъ проекцій прямой, проекціи одной изъ ея точекъ и уголъ, который прямая составляетъ съ одной изъ плоскостей проекцій, построить другую проекцію прямой.

168. Чрезъ данную точку провести прямую такъ, чтобы она встрѣчала горизонтальную плоскость подъ даннымъ угломъ и чтобы разстояніе ея горизонтальнаго слѣда отъ оси было вдвое болѣе того же разстоянія вертикальнаго слѣда.

169. Въ данной плоскости, пересѣкающей ось въ точкѣ α, провести чрезъ точку α прямую, которая составляетъ съ осью уголъ β.

§ IV. Объ углахъ между двумя плоскостями.

146. Мѣрою угла между двумя плоскостями, или двуграннаго угла, служитъ линейный уголъ, который образуется двумя прямыми, лежащими въ данныхъ плоскостяхъ и перпендикулярными въ одной и той же точкѣ къ прямой ихъ пересѣченія, иначе говоря, который образуется пересѣченіемъ данныхъ плоскостей плоскостью, перпендикулярною къ ихъ ребру.

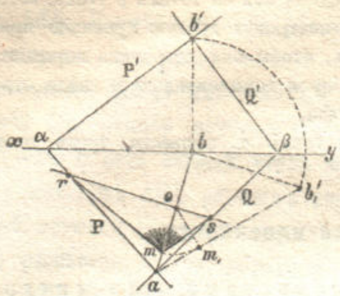


Чер 143.

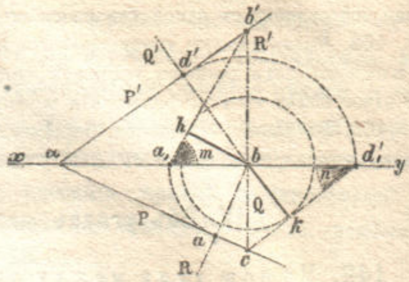
На этомъ основаніи, для построенія угла между плоскостями $P\alpha P'$ и $Q\beta Q'$ *(чер. 143)*, слѣдуетъ поступать слѣдующимъ образомъ. Построить пересѣченіе ab' плоскостей $P\alpha P'$ и $Q\beta Q'$ и чрезъ какую-либо его точку M провести плоскость R, перпендикулярную къ сѣченію ab'. Эта плоскость пересѣчетъ данныя плоскости по прямымъ Mr и Ms, а горизонтальную плоскость проекцій—по прямой sr, которая, какъ горизонтальный слѣдъ плоскости, перпендикулярной къ ab', будетъ перпендикулярна къ ab. Уголъ rMs есть искомый, и для рѣшенія задачи останется построить его истинную величину. Такое построеніе удобнѣе всего сдѣлать при помощи совмѣщенія плоскости R съ горизонтальной плоскостью проекцій, ибо въ этомъ случаѣ точки r и s не измѣнятъ своего положенія, а точка M, оставаясь въ плоскости abb', какъ перпендикулярной къ оси вращенія rs, въ моментъ совмѣщенія, упадетъ на горизонтальный слѣдъ ab этой плоскости. Такимъ образомъ для построенія совмѣщенія угла rMs достаточно найти радіусъ вращенія Mo точки M.

Съ этой послѣдней цѣлью *(чер. 144)* совмѣстимъ плоскость, горизонтально проектирующую сѣченіе (ab, $a'b'$), вмѣстѣ съ лежащими въ ней прямыми AB и Mo, съ горизонтальною плоскостью проекцій. При этомъ точки a и o не измѣнятъ своего положенія, а точка b' совмѣстится съ b'_1, (§ **116**). Слѣдовательно, прямая ab' совмѣстится съ ab'_1, а прямая oM, съ перпендикуляромъ om_1, опущеннымъ изъ o на ab'_1, такъ какъ Mo, находясь въ плоскости R, перпендикулярной къ AB, сама перпендикулярна къ AB. Отсюда заключаемъ, что перпендикуляръ om_1 есть истинная величина радіуса вращенія oM. И потому, если опишемъ изъ центра вращенія o дугу радіусомъ om_1 до пересѣченія съ ab въ точкѣ m, то уголъ rms есть искомый линейный уголъ.

Кромѣ разсмотрѣннаго способа, линейный уголъ можно еще построить на основаніи теоремы (Геометрія Давыдова, § 210), по которой линейный уголъ равенъ дополненію до двухъ прямыхъ угла, составленнаго двумя перпендикулярами, опущенными изъ точки, взятой внутри двуграннаго угла, на его плоскости (§ 138).



Чер. 144.



Чер. 145.

147. Задача. *Опредѣлить углы данной плоскости съ плоскостями проекцій.*

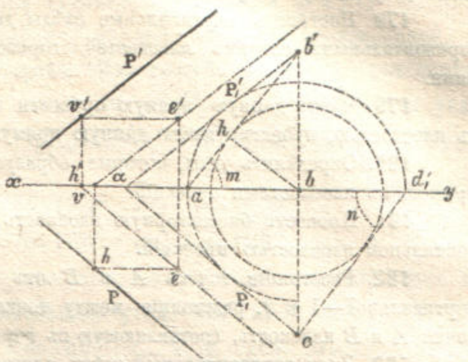
Пусть *(чер. 145)* $P\alpha P'$—данная плоскость. По опредѣленію, для построенія угла плоскости $P\alpha P'$ съ горизонтальною плоскостью проекцій, достаточно пересѣчь плоскости $P\alpha P'$ и горизонтальную плоскость проекцій H плоскостью RbR', перпендикулярною къ пересѣченію плоскостей $P\alpha P$ и H, т. е. перпендикулярною къ горизонтальному слѣду αP плоскости $P\alpha P'$, и опредѣлить истинную величину угла между прямыми пересѣченія. Плоскость RbR' пересѣчетъ плоскость $P\alpha P'$ по прямой ab', а плоскость H—по прямой ab, слѣдовательно, уголъ $b'ab$ есть искомый; для построенія истинной его величины достаточно плоскость RbR' вмѣстѣ съ сѣченіями ab' и ab совмѣстить съ одною изъ плоскостей проекцій, наприм., съ вертикальной, принявъ за ось вращенія вертикальный слѣдъ bb' плоскости RbR'. Въ этомъ случаѣ точка a совмѣстится съ a_1 на оси, и слѣдов., прямыя пересѣченія ab' и ab совмѣстятся съ a_1b' и ba_1. И потому уголъ m, который совмѣщеніе a_1b образуетъ съ совмѣщеніемъ a_1b' есть искомый. На томъ же основаніи для опредѣленія угла n, который плоскость $P\alpha P'$ образуетъ съ вертикальной плоскостью проекцій V, достаточно обѣ плоскости пересѣчь плоскостью QbQ', перпендикулярною къ пересѣченію $\alpha P'$ плоскостей $P\alpha P'$ и V, и совмѣстить плоскость QbQ' вмѣстѣ съ сѣченіями $d'c$ и bd' съ горизонтальною плоскостью проекцій. Уголъ n, который совмѣщеніе cd'_1 прямой cd' образуетъ съ совмѣшеніемъ bd'_1, прямой bd', есть искомый.

148. Замѣтимъ что плоскости RbR' и QbQ', какъ перпендикулярныя къ плоскости $P\alpha P'$, пересѣкаются взаимно по прямой, перпендикулярной какъ къ плоскости $P\alpha P'$, такъ и къ прямымъ ab' и cd', въ ней лежащимъ. Слѣдовательно, если изъ точки b опустимъ перпендикуляры bh и bk на совмѣщенія a_1b' и cd'_1 прямыхъ ab' и cd', то эти перпендикуляры, измѣряя разстояніе точки b отъ одной и той же плоскости $P\alpha P'$, должны быть равны между собою; отсюда заключаемъ, что окружность, описаанная изъ b радіусомъ $bh=bk$, должна касаться, одновременно и къ a_1b' и къ cd'_1.

149. Углы m и n, которые плоскость составляетъ съ плоскостями проекцій, удовлетворяютъ нѣкоторому условію, которое легко опредѣлить на основаніи слѣдующихъ соображеній. Углы m и n, въ случаѣ плоскости, наклонной къ плоскостямъ проекцій, суть углы острые, и слѣдовательно, $m < 90^0$ и $n < 90^0$. Кромѣ того, въ каждомъ трегранномъ углѣ сумма двугранныхъ угловъ больше двухъ прямыхъ (Геометрія Давыдова, § 217) и потому въ нашемъ случаѣ $m+n+90^0>180^0$; откула $m+n>90^0$.

150. Задача. *Чрезъ данную точку провести плоскость составляющую данные углы m и n съ плоскостями проекцій.*

Рѣшимъ предварительно задачу относительно точки (bb') (*чер. 146*), взятой на вертикальной плоскости проекцій, и затѣмъ чрезъ данную точку проведемъ плоскость, параллельную найденной.



Чер. 146.

На основанiи заключенiй предшествующей задачи, построенiя слѣдовъ вспомогательной плоскости должно вести въ слѣдующемъ порядкѣ:

1) Построить на вертикальной плоскости прямоугольный треугольникъ $b'ba$ по выбранному катету $b'b$ и противо-лежащему углу m.

2) Опустить на гипотенузу его ab' перпендикуляръ bh, и радiусомъ bh изъ центра b описать окружность.

3) Провести касательную cd'_1 къ этой окружности, составляющую съ осью xy уголъ n.

4) Радiусомъ bd'_1 описать окружность и провести къ ней касательную $\alpha P'_1$ чрезъ точку b'. $P'_1\alpha$—искомый вертикальный слѣдъ.

5) Радiусомъ ba описать изъ центра b окружность и провести къ ней касательную αP_1 чрезъ точку α. αP_1—искомый горизонтальный слѣдъ.

Построивъ такимъ образомъ вспомогательную плоскость $P_1\alpha P'_1$, составляющую данные углы съ плоскостями проекцій, остается для рѣшенія задачи провести чрезъ данную точку (e, e') или при помощи горизонтали $(ve, v'e')$, или при помощи вертикали $(he, h'e')$ плоскость $P\alpha P'$, параллельную данной.

ЗАДАЧИ.

170. Построить уголъ между двумя плоскостями въ слѣдующихъ случаяхъ: а) обѣ плоскости перпендикулярны къ вертикальной плоскости проекцiй; b) одна—перпендикулярна къ вертикальной, другая—къ горизонтальной плоскости проекцiй; c) горизонтальные слѣды плоскостей параллельны между собой; d) обѣ плоскости параллельны оси; e) одна изъ плоскостей есть плоскость профиля.

171. Чрезъ данную прямую провести плоскость, составляющую данный уголъ съ одною изъ плоскостей проекцiй.

172. Чрезъ данную точку провести плоскость, составляющую съ одною изъ плоскостей проекцiй данный уголъ и параллельную данной прямой.

173. Дана точка и плоскость, параллельная оси. Чрезъ данную точку провести плоскость параллельно оси и при томъ такъ, чтобы она составляла съ данной плоскостью данный уголъ.

174. Построить вертикальный слѣдъ плоскости по горизонтальному слѣду и углу плоскости съ одной изъ плоскостей проекцiй.

175. Опредѣлить слѣды плоскости по даннымъ: разстоянiю точки, данной на оси, отъ плоскости, углу, который эта плоскость образуетъ съ горизонтальной плоскостью проекцiй, и точкѣ данной на слѣдѣ

176. Опредѣлить уголъ между двумя плоскостями, зная ихъ горизонтальные слѣды и углы, которые они образуютъ съ горизонтальной плоскостью проекцій.

177. Чрезъ прямую, лежащую въ данной плоскости, провести вторую плоскость подъ даннымъ угломъ къ первой.

178. Построить вертикальные слѣды двухъ пересѣкающихся плоскостей по даннымъ: горизонтальнымъ слѣдамъ плоскостей, горизонтальной проекціи пересѣченія и углу между ними.

179. Чрезъ данную прямую провести плоскость, которая составляетъ данный уголъ съ плоскостью, проектирующею данную прямую на горизонтальную плоскость проекцій.

180. Опредѣлить углы, которые образуетъ плоскость, имѣющая свои слѣды на одной прямой, съ плоскостями проекцій.

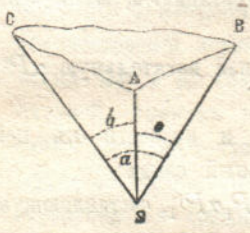
181. Провести биссекторную плоскость угла, образуемаго данной плоскостью съ горизонтальной плоскостью проекцій.

182. Разстояніе точекъ A и B отъ горизонтальной плоскости равно 3 и 1, отъ вертикальной—1 и 2, разстояніе между точками по оси равно 3; требуется провести чрезъ точки A и B плоскость, составляющую съ горизонтальной плоскостью проекцій уголъ въ 60°.

183. Зная горизонтальный слѣдъ плоскости и разстояніе плоскости отъ данной точки, построить вертикальный слѣдъ.

§ V. Построеніе треграннаго угла.

151. Три плоскости *(чер. 147)* пересѣкаясь въ одной точкѣ, образуютъ трегранный уголъ, который такимъ образомъ составляется изъ шести элементовъ именно: изъ т р е х ъ п л о с к и х ъ у г л о в ъ и т р е х ъ д в у г р а н н ы х ъ у г л о в ъ.



Чер. 147.

Условимся обозначать плоскіе углы буквами a, b, c, а противолежащіе имъ двугранные углы—соотвѣтственно буквами A, B и C.

Изъ геометріи извѣстно (Геометрія Давыдова, §§ 215, 216, 217), что плоскіе и двугранные углы только тогда образуютъ, трегранный уголъ, когда они удовлетворятъ слѣдующимъ условіемъ:

1. Каждый плоскій уголъ меньше суммы двухъ другихъ плоскихъ угловъ, т. е., напр. $a<b+c$.

2. Сумма плоскихъ угловъ меньше четырехъ прямыхъ угловъ, т. е. $a+b+c<4d$.

3. Сумма двугранныхъ угловъ больше двухъ прямыхъ и меньше шести прямыхъ, т. е. $6d>A+B+C>2d$.

4. Разность между суммою двухъ двугранныхъ угловъ и третьимъ меньше двухъ прямыхъ, $A+B-C<2d$.

152. Изъ той же геометріи извѣстно, что трегранный уголъ вполнѣ опредѣляется по тремъ даннымъ элементамъ (Геометрія Давыдова, § 219—224) и что, слѣдовательно, общая задача о построеніи треграннаго угла сводится къ слѣдующимъ шести:

	даны	требуется найти
1-я	$a,\ b,\ c$	$A,\ B,\ C$
2-я	$a,\ b,\ C$	$c\ A,\ B$
3-я	$a,\ b,\ B$	$c,\ A,\ C$
4-я	$a,\ B,\ C$	$b,\ c,\ A$
5-я	$a,\ A,\ B$	$b,\ c,\ C$
6-я	$A, B,\ C$	$a,\ b,\ c$

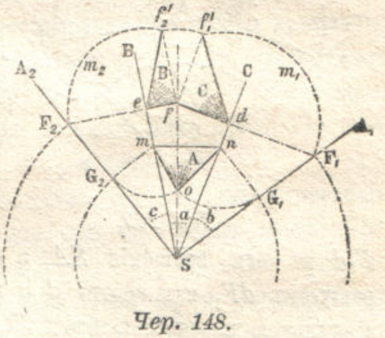
Но послѣднія три задачи легко привести къ первымъ тремъ при помощи такъ называемаго дополнительнаго угла даннаго трегланнаго. Дополнительнымъ угломъ даннаго трегланнаго называется (Геометрія Давыдова, § 218) трегранный уголъ, составленный тремя перпендикулярами, опущенными изъ произвольной, взятой внутри даннаго угла, точки на его грани. Изъ способа образованія дополнительнаго угла легко видѣть, что между его плоскими a', b', c' и двугранными углами A', B', C' и тѣми же углами даннаго трегланнаго угла существуютъ слѣдующія замѣчательныя отношенія:

$$A'+a=180^0,\quad B'+b=180^0,\quad C'+c=180^0.$$
$$a'+A=180^0,\quad b'+B=180^0,\quad c'+C=180^0.$$

На основаніи этихъ соотношеній четвертая, напр., задача можетъ быть приведена ко второй въ отношеніи дополнительнаго угла, ибо по даннымъ a, B, C найдемъ $A'=180^0-a$, $b'=180^0-B$, $c'=180^0-C$, т. е. два плоскихъ угла и одинъ двугранный, между ними заключенный, угла дополнительнаго. На томъ же основаніи 6 задача приводится къ 1-й, а 5-я—къ 3-й.

153. Первая задача. *По тремъ плоскимъ угламъ a, b и c построить трегранный уголъ и опредѣлить его двугранные углы A, B и C.*

Примемъ за горизонтальную плоскость плоскость грани SBC (*чер. 148*) съ угломъ a и допустимъ, что остальныя грани $c=ASB$ и $b=CSA$, совмѣщенныя съ этой плоскостью, приняли положеніе $c=BSA_2$ и $b=CSA_1$; въ такомъ случаѣ прямыя SA_2 и SA_1 суть совмѣщенія одного и того же третьяго ребра SA, а точки F_1 и F_2, равно удаленныя отъ S, суть совмѣщенія одной и той же точки F этого ребра. Построимъ проекціи ребра SA; для чего возстановимъ грани c и b въ первоначальное положеніе, вращая ихъ около реберъ SB и SC, и найдемъ проекціи точки F. При возстановленіи, точки F_1 и F_2 будутъ перемѣщаться по окружностямъ, въ плоскостяхъ, перпендикулярныхъ къ SB и SC, а ихъ горизонтальныя проекціи—по слѣдамъ F_2e и F_1d этихъ плоскостей (§ 112). Отсюда заключаемъ, что горизонтальная проекція f точки F будетъ находиться въ точкѣ пересѣченія прямыхъ F_2e и F_1d и что, слѣдовательно, горизонтальная проекція третьяго ребра есть прямая Sf.



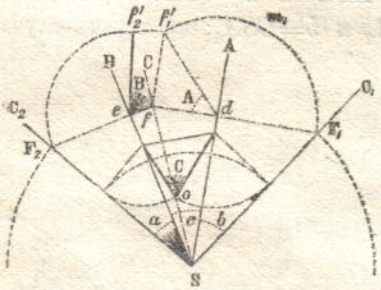
Чер. 148.

Чтобы найти разстояніе точки F отъ горизонтальной плоскости (§ 16) и чтобы вмѣстѣ съ тѣмъ опредѣлить двугранные углы B и C, совмѣстимъ плоскости, въ которыхъ перемѣщаются точки F_1, F_2, съ горизонтальною плоскостью проекцій, вращая ихъ около горизонтальныхъ слѣдовъ F_2e и F_1d. Очевидно, что совмѣщеніе точки F_2, когда она находится на ребрѣ SF, должно одновременно находиться и на дугѣ m_2, описанной изъ центра e радіусомъ F_2e и на перпендикулярѣ ff'_2, возстановленномъ изъ горизонтальной проекціи f точки F къ оси вращенія F_2f, т. е. въ точкѣ ихъ взаимнаго пересѣченія f'_2. Подобнымъ же образомъ совмѣщеніе точки F_1, когда она находится на ребрѣ SF, будемъ находиться и на дугѣ m_1 и на перпендикулярѣ ff'_1, къ F_1f, т. е. въ точкѣ f'_1. Отсюда заключаемъ, что искомое разстояніе точки F отъ горизонтальной плоскости равно $ff'_2=ff'_1$ и, что прямыя f'_2e и f'_1d суть сѣченія граней BSF и CSF плоскостями, перпендикулярными къ ребрамъ BS и CS; а потому углы f'_2ef и f'_1df, какъ линейные, суть истинныя величины двугранныхъ угловъ B и C.

Чтобы найти третій двугранный уголъ A при ребрѣ SA, достаточно провести плоскость, перпендикулярную къ ребру SA, и построить треугольникъ, который получится отъ пересѣченія такой плоскости съ плоскостями граней. Всего удобнѣе такое построеніе сдѣлать по тремъ сторонамъ треугольника. Для чего возьмемъ на ребрахъ SA_1 и SA_2 точки G_1 и G_2 равно удаленныя отъ вершины S; такія точки суть совмѣщенія одной и той же точки G ребра SA, а потому, если плоскость, перпендикулярная къ ребру SA, проведена чрезъ точку G, то прямыя пересѣченія ея съ плоскостями b и c, будучи перпендикулярными къ ребру SA, представятся въ совмѣщеніи прямыми G_2m и G_1n, перпендикулярными къ SA_2 и SA_1, третья же грань пересѣчется тою же плоскостью по mn, которая должна быть перпендикулярна къ Sf.

Опредѣливъ такимъ образомъ три стороны треугольника, построимъ и самый треугольникъ, mno, уголъ котораго mon равенъ искомому двугранному углу A.

154. Вторая задача. *Построить трегранный уголъ по даннымъ двумъ плоскимъ угламъ и одному двугранному, между ними заключенному.*



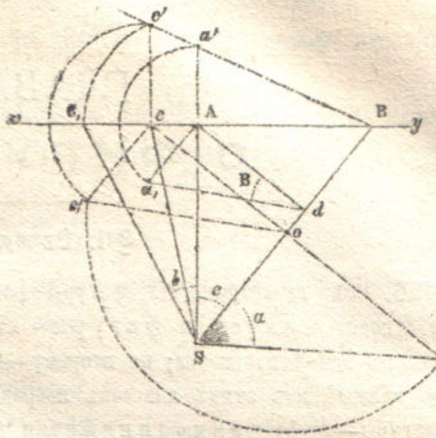
Чер 149.

Пусть (*чер. 149*) b и c—данные плоскіе углы, A—данный двугранный уголъ.

Положимъ, что плоскость грани ASB съ угломъ c совпадаетъ съ горизонтальною плоскостью проекцій и что плоскость грани ASC съ угломъ b совмѣщена съ нею. Возьмемъ на совмѣщеніи SC_1 ребра SC точку F_1 и, возстановивъ плоскость грани b, найдемъ ея проекціи. Горизонтальная проекція f точки F въ этомъ случаѣ будетъ находиться на перпендикулярѣ F_1d къ оси вращенія SA, а сама точка F—на окружности, которая описана радіусомъ dF_1 изъ центра d и которая, если совмѣстимъ ея плоскость съ горизонтальною плоскостью проекцій, при помощи оси F_1d, представится дугою m_1; чтобы найти положеніе точки F_1 на дугѣ m_1, построимъ при точкѣ d на слѣдѣ df линейный уголъ A даннаго двуграннаго угла; сторона этого угла df'_1 пересѣчетъ дугу m_1 въ точкѣ f', которая и есть совмѣщеніе точки F_1; замѣтивъ далѣе что горизонтальная проекція точки F_1 должна находиться на прямой F_1d и на перпендикулярѣ къ ней $f'f$, найдемъ ее въ точкѣ ихъ пересѣченія f. Слѣдовательно, горизонтальная проекція ребра SC есть Sf. Чтобы построить искомый плоскій уголъ a остается грань BSC совмѣстить съ плоскостью остальныхъ двухъ граней; для чего достаточно найти совмѣщеніе точки F ребра SC. Это совмѣщеніе будетъ находиться и на дугѣ, описанной изъ центра S радіусомъ SF_1 и на перпендикулярѣ fe къ оси вращенія SB грани SBA, т. е. въ точкѣ ихъ пересѣченія F_2. Уголъ F_2SB есть искомый плоскій уголъ a. Остальные два двугранныхъ угла C и B построятся какъ и въ предыдущемъ случаѣ.

155. Третья задача. *Построить трегранный уголъ, зная два плоскихъ и одинъ двугранный, противолежащій одному изъ данныхъ плоскихъ.*

Пусть (*чер. 150*) данный уголъ b совмѣщенъ съ плоскостью грани другого даннаго угла c, принятой за горизонтальную плоскость проекцій; выберемъ вертикальную плоскость проекціи перпендикулярную къ ребру SA и, слѣдовательно, проведемъ ось проекціи xy перпендикулярно къ ребру SA чрезъ какую-либо точку его A. Затѣмъ, найдемъ вертикальный слѣдъ плоскости грани BSC, которая составляетъ съ гранью ASB данный двугранный уголъ B; съ этою цѣлью проведемъ чрезъ точку A сѣкущую плоскость $a'Ad$, перпендикулярную къ ребру SB (§ 88), и совмѣстимъ эту плоскость съ горизонтальною плоскостью проекцій, вращая ее около слѣда Ad. Въ такомъ случаѣ сѣченіе плоскостей $a'Ad$ и BSC совмѣстится съ прямой da_1, составляющей съ Ad уголъ равный данному двугранному углу B; при чемъ точка a_1, въ которой перпендикуляръ Aa_1 къ оси вращенія aA встрѣчаетъ da_1, есть совмѣщеніе точки, въ которой пересѣченіе плоскостей $a'Ad$ и BSC встрѣчаетъ вертикальную плоскость. По найденному такимъ образомъ совмѣщенію a_1, оси вращенія Ad и горизонтальной проекціи A искомой точки найдемъ, по § 117, и проекцію a' точки, принадлежащей искомому слѣду. А потому слѣдъ грани BSC на вертикальной плоскости есть прямая Ba'.



Чер. 150.

Возстановимъ теперь грань ASC_1 въ первоначальное положеніе, вращая ее около ребра SA; точка C_1 при этомъ будетъ перемѣщаться по дугѣ круга, лежащаго въ вертикальной плоскости и описаннаго радіусомъ AC_1 изъ центра A, и въ первоначальномъ положеніи грани будетъ находиться на вертикальномъ слѣдѣ Ba' плоскости BSC, т. е. въ точкѣ c' пересѣченія дуги AC_1 и слѣда Ba'.

По c' опредѣлимъ c, и такимъ образомъ построимъ горизонтальную проекцію SC ребра SC. Остается найти плоскій уголъ a; для чего совмѣстимъ грань BSC съ горизонтальною плоскостью проекцій при помощи точки (c, c') и оси вращенія SB. По правилу § 116 совмѣщеніе точки (c, c') есть точка C_2 и, слѣдовательно, совмѣщеніе ребра SC есть прямая SC_2, а потому уголъ BCS_2 есть искомый. Наконецъ, по тремъ плоскимъ угламъ найдемъ двугранные, какъ въ первой задачѣ.

ГЛАВА V.

О ФИГУРАХЪ.

§ I. Опредѣленія.

156. Всѣ геометрическія фигуры раздѣляются на два класса: къ первому классу относятся плоскія фигуры имѣющія два измѣренія, и слѣдовательно, лежащія въ одной плоскости; ко второму—тѣла, имѣющія три измѣренія. Въ свою очередь каждый изъ этихъ классовъ подраздѣляется на два отдѣла; а именно: плоскія фигуры—на 1) прямолинейныя, каковы: *треугольники, четыреугольники* и вообще *многоугольники*, и на 2) криволинейныя, каковы: *кругъ, эллипсъ, парабола* и т. п.; тѣла—на 1) многогранники, т. е. тѣла, ограниченныя плоскими поверхностями, каковы: *призмы, пирамиды, правильные многогранники,* и т. п; и на 2) тѣла, ограниченныя кривыми поверхностями, каковы: *цилиндры, конусы, тѣла вращенія* и т. п. Въ настоящей главѣ мы разсмотримъ лишь плоскія фигуры и многогранники.

157. *Проекціей фигуры на плоскость вообще называется совокупность проекцій всѣхъ, принадлежащихъ ей, точекъ,* но чтобы задать прямолинейную плоскую фигуру или многогранникъ, т. е. чтобы дать возможность опредѣлить каждую точку, принадлежащую фигурѣ, достаточно дать проекціи лишь вершинъ фигуры на двѣ взаимно-перпендикулярныя плоскости; ибо, въ случаѣ прямолинейной плоской фигуры, совокупность прямыхъ, соединяющихъ въ извѣстномъ порядкѣ одноименныя проекціи вершинъ, дастъ проекціи ея сторонъ, которыми опредѣляются всѣ элементы фигуры, въ случаѣ же тѣла, проекціи его вершинъ опредѣлятъ проекціи его реберъ, а ребра опредѣлятъ грани.

158. При построеніи проекцій тѣла необходимо различать видимыя его части отъ невидимыхъ и вычерчивать первыя сплошными линіями, вторыя—точечнымъ пунктиромъ. Такое отличіе однѣхъ частей отъ другихъ на каждой изъ плоскостей проекцій вытекаетъ непосредственно изъ самаго понятія о проекціяхъ;—понятія, по которому, очевидно, горизонтальную проекцію тѣла можно разсматривать, какъ видъ его изъ точки зрѣнія, удаленной отъ тѣла на безконечно большое разстояніе и расположенной на продолженіи перпендикуляра, проектирующаго на горизонтальную плоскость одну изъ его точекъ, а вертикальную,—какъ видъ тѣла изъ точки зрѣнія, удаленной отъ вертикальной плоскости на безконечно большое разстояніе и расположенной на продолженіи перпендикуляра, проектирующаго на эту плоскость одну изъ его точекъ.

§ II. Плоскія фигуры.

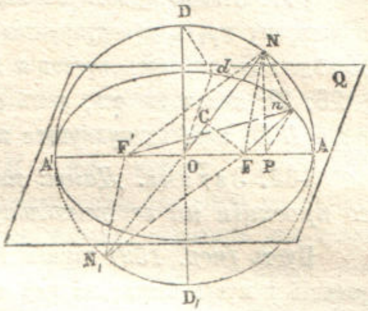
159. О плоскихъ прямолинейныхъ фигурахъ мы нечего говорить не будемъ, такъ какъ и изученіе ихъ самихъ, и рѣшенія задачъ, къ нимъ относящихся, приводится при помощи способа совмѣщенія къ вопросамъ элементарной планиметріи.

160. Изъ криволинейныхъ фигуръ мы разсмотримъ лишь кругъ.

Теорема. *Проекція круга на плоскость, къ нему наклонную, есть эллипсъ.*

Пусть (*чер. 151*) плоскость даннаго круга DD_1AA_1 совпадаетъ съ плоскостью чертежа, пусть плоскость проекцій Q проходитъ чрезъ центръ круга O и пересѣкаетъ кругъ по діаметру AA_1.

Возьмемъ на кругѣ произвольную точку N и, спроектировавъ ее на плоскость Q въ точку n, докажемъ, что геометрическое мѣсто точекъ n есть эллипсъ. Для чего проведемъ діаметръ DD_1 перпендикулярно къ AA_1, спроектируемъ точку D на плоскость Q въ точку d, отложимъ на діаметрѣ AA_1 отъ точки O въ обѣ стороны части OF и OF', равныя проектирующей Dd, и докажемъ, что сумма разстояній точки n отъ F и F' есть величина постоянная (§ **276**) и равная діаметру круга, т. е. докажемъ, что



Чер. 151.

$$nF+nF'=2r \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

гдѣ r есть радіусъ круга.

Въ самомъ дѣлѣ, опустимъ изъ точки N перпендикуляръ NP на AA_1; прямоугольные треугольники ODd и PNn, какъ имѣющіе равные углы (углы DOd и NPn равны, какъ измѣряющіе уголъ наклоненія плоскости Q къ плоскости круга), подобны, и слѣдовательно:

$$\frac{OD}{Dd}=\frac{PN}{Nn},$$

откуда

$$Nn=\frac{PN.\,Dd}{OD} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Далѣе, если соединимъ точку N съ точками O и F и опустимъ изъ F на NO перпендикуляръ FC, то легко видѣть, что площадь треугольника ONF можетъ быть измѣрена или произведеніемъ $^1/_2\ NO.FC$, или $^1/_2\ OF.NP$.

Откуда:

$$NO.FC=OF.NP,$$

и слѣдовательно:

$$FC=\frac{OF.NP}{NO} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Сравнивая между собою выраженія 2 и 3, находимъ, что вторыя ихъ части равны, ибо $Dd=OF$ по отложенію, $OD=NO$ какъ радіусы; откуда заключаемъ, что и первыя ихъ части равны, т. е, $nN=FC$. А потому, прямоугольные треугольники NFn и NCF, какъ имѣющіе общую гипотенузу NF и равные катеты $nN=FC$, тоже равны, и слѣдовательно

$$nF=NC \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4).$$

Остается доказать, что $nF'=CN_1$. Съ этою цѣлью продолжимъ радіусъ NO до встрѣчи съ окружностью въ точкѣ N_1 и, соединивъ точки N_1 и N съ точками F и F', построимъ такимъ образомъ параллелограммъ NFN_1F', ибо діагонали NN_1 и FF' фигуры NFN_1F' дѣлятся въ точкѣ O пополамъ. По свойству же параллелограмма, сторона его NF' равна противолежащей сторонѣ FN_1, и слѣд., прямоугольные треугольники $NF'n$ и CFN_1 равны, ибо, кромѣ равныхъ гипотенузъ,

$NF' = FN_1$, имѣютъ и равные катеты $Nn = FC$; отсюда заключаемъ, что и ихъ другіе катеты равны между собою, т. е.

$$nF = CN_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

Складывая 4 и 5 равенства, находимъ:

$$nF + nF' = NC + CN_1 = 2r.$$

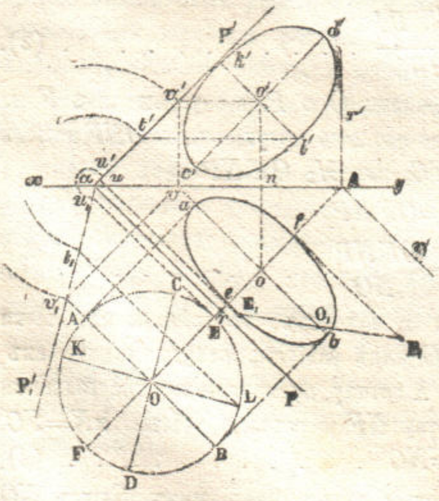
Что и требовалось доказать.

161. Отсюда вмѣстѣ съ тѣмъ заключаемъ, что большая ось эллипса **(§ 281)**, по которому кругъ проектируется на какую-либо плоскость, равна діаметру круга, и, слѣдовательно, есть проекція діаметра AA_1, параллельнаго плоскости проекцій **(§ 26, 3)**; малая же ось, какъ перпендикулярная къ большой, есть проекція діаметра D_1D, перпендикулярнаго къ первому **(§ 45)**.

162. Задача. *Даны: плоскость, центръ и радіусъ круга, найти его проекціи на вертикальную и горизонтальную плоскости проекцій.*

Пусть *(чер. 152)* данная плоскость $P\alpha P'$—наклонна къ обѣимъ плоскостямъ проекцій и пусть взятая на ней точка (o, o') есть центръ искомаго круга. При такихъ условіяхъ кругъ проектируется на обѣ плоскости проекцій по эллипсамъ которые легко вычертить по точкамъ, коль скоро опредѣлимъ ихъ оси. Для опредѣленія же осей, по **§ 161**, достаточно опредѣлить діаметры, которые проектируются по осямъ, для чего можно пользоваться двоякимъ способомъ.

Первый способъ. Совмѣстить при помощи горизонтали $(ov, o'v')$ (**§ 122**) плоскость $P\alpha P'$ и точку (oo') съ горизонтальной плоскостью проекцій; изъ точки O совмѣщенія (o, o'), какъ изъ центра, опишемъ окружность $ABCD$ даннымъ радіусомъ и въ этой окружности, представляющей совмѣщеніе искомой, построимъ, основываясь на § **161**, двѣ пары діаметровъ, изъ которыхъ одна, послѣ приведенія плоскости $P\alpha P'$ въ первоначальное положеніе, будетъ проектироваться на горизонтальную плоскость по осямъ горизонтальнаго эллипса, а другая,—на вертикальную плоскость, по осямъ вертикальнаго эллипса.



Чер. 152.

Для построенія первой пары діаметровъ, припомнимъ, что по § **161** діаметръ, который проектируется по большой оси горизонтальнаго эллипса, параллеленъ горизонтальной плоскости проекцій и что, слѣдовательно, его совмѣщеніе есть діаметръ AB, проведенный чрезъ O параллельно αP; что по тому же § діаметръ, который проектируется по малой оси того же эллипса, перпендикуляренъ къ первому и, слѣдовательно, его совмѣщеніе есть діаметръ EF, перпендикулярный къ αP. На тѣхъ же соображеніяхъ, діаметръ DC, параллельный $\alpha P'_1$, есть совмѣщеніе того діаметра, который проектируется на вертикальную плоскость по большой оси вертикальнаго эллипса, а діаметръ KL, перпендикулярный къ $\alpha P'_1$, есть совмѣщеніе того діаметра, который проектируется по малой оси того же эллипса.

Отсюда для постренія осей эллипсовъ, по которымъ проектируется заданная окружность, остается возстановить плоскость и для построенія осей горизонтальнаго эллипса, найти горизонтальныя проекціи точекъ A, B, E, F, для постоенія осей вертикальнаго эллипса, найти вертикальныя проекціи точекъ C, D, K, L. Для чего достаточно знать въ первомъ случаѣ горизонтальную проекцію лишь точки E, во второмъ—вертикальную проекцію одной лишь точки L. Въ самомъ дѣлѣ, діаметръ AB проектируется на горизонтальную плоскость по горизонтали vo въ истинную величину, и слѣдовательно, отложивъ на vo отъ точки o части $oa=ob=r$, найдемъ въ точкахъ a и b горизонтальныя проекціи точекъ A и B; діаметръ FE проектируется на горизонтальную плоскостъ по перпендикуляру ro къ горизонтали vo, и проекція его дѣлится пополамъ въ точкѣ o; а потому, найдя горизонтальную проекцію e точки E при помощи горизонтали Eu_1 и отложивъ на ro часть of, равную oe, найдемъ въ точкѣ f горизонтальную проекцію точки F. Разсуждая такимъ же образомъ относительно діаметровъ CD и KL, найдемъ, что діаметръ CD проектируется въ истинную величину на вертикальную плоскость по вертикали $c'd'$, проведенной чрезъ o' параллельно $\alpha P'$, и что потому, отложивъ отъ точки o' часть $o'c'=o'd'=r$, найдемъ въ точкахъ c' и d' вертикальныя проекціи точекъ C и D; діаметръ KL проектируется на вертикальную плоскость по перпендикуляру $k'l'$ къ $c'd'$ въ точкѣ o', и потому, найдя на немъ вертикальную проекцію l' точки L при помощи горизонтали Lt_1 и отложивъ на $o'l'$ часть $o'k'=o'l'$, найдемъ въ точкѣ k' вертикальную проекцію точки K.

Построивъ такимъ образомъ оси ab и ef горизонтальнаго эллипса и оси $c'd'$ и $k'l'$ вертикальнаго эллипса, остается самые эллипсы вычертить по точкамъ.

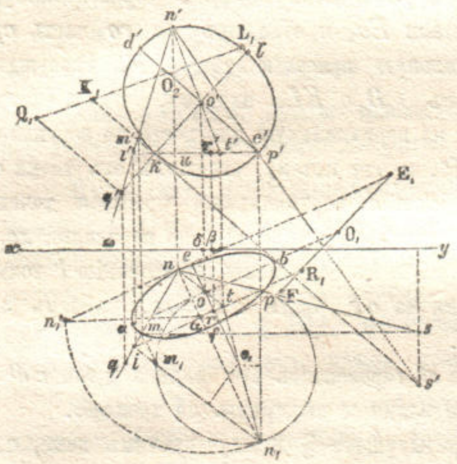
163. Второй способъ. Изъ предыдущаго § между прочимъ ясно, что для построенія большихъ осей эллипсовъ, по которымъ проектируется окружность, достаточно чрезъ центръ ея провести горизонталь ab и вертикаль $c'd'$ и на нихъ отложить діаметръ круга. Что же касается малыхъ осей, то для построенія ихъ, кромѣ разсмотрѣннаго уже способа, можно поступать еще слѣдующимъ образомъ.

Припомнимъ, что величина малой оси горизонтальнаго эллипса равна проекціи діаметра EF, перпендикулярнаго къ AB, и что этотъ діаметръ проектируется по прямой or, перпендикулярной къ ab, и потому лежитъ на пересѣченіи горизонтально-проектирующей его плоскости $r\beta r'$, и плоскости $P\alpha P'$. Совмѣстимъ плоскость $r\beta r'$ съ горизонтальною плоскостью проекцій; центръ (o, o') перейдетъ въ точку O_1, находящуюся на перпендикулярѣ oO_1 къ оси вращеніи $r\beta$ на разстояніи отъ послѣдней $oO_1=no'$ (**§ 121**), сѣченіе же плоскостей $r\beta r'$ и $P\alpha P'$ совмѣстится съ прямой rO_1; и потому, отложивъ отъ точки O_1 на прямой rO_1 въ обѣ стороны части O_1E_1 и O_1F_1 равныя радіусу круга, найдемъ совмѣщеніе искомаго діаметра $E_1\ F_1$. По совмѣщенію $E_1\ F_1$ найдемъ его горизонтальную проекцію ef, которая представитъ малую ось горизонтальнаго эллипса. Подобнымъ же образомъ опредѣляется и малая ось вертикальнаго эллипса.

164. Задча II. *Построить проекціи окружности, проходящей чрезъ три данныя точки (m, m'), (n, n') (p, p') (чер. 153).*

Совмѣстимъ плоскость MNP съ горизонтальною плоскостью при помощи горизонтали $(pi, p'i')$ (**§ 115**) и точки (n, n'). Съ этою цѣлью опустимъ изъ n перпендикуляръ на ось вращенія pi и на продолженіи его отъ точки α до точки n_1 отложимъ гипотенузу $\alpha n'_1$ треугольника $nn'_1\alpha$, въ которомъ катетъ $nn'_1=un'$.

Прямая n_1p есть совмѣщеніе прямой $(np, n'p')$, а прямая n_1i есть совмѣщеніе прямой $(ni, n'i')$; слѣдовательно, точка m_1, лежащая на пересѣченіи перпендикуляра изъ m къ pi съ n_1i, есть совмѣщеніе точки (m, m'). По точкамъ m_1, n_1 и p опредѣлимъ центръ o_1 окружности m_1n_1p, представляющей совмѣщеніе искомой, затѣмъ найдемъ проекціи его, возстановивъ плоскость въ первоначальное положеніе; для чего соединимъ центръ o_1 съ какою-либо изъ данныхъ точекъ, выбранною такъ, чтобы обѣ проекціи этой прямой были бы извѣстны; всего удобнѣе соединить o_1 съ n_1 прямою $n_1\ o_1$; ибо, продолживъ ее до встрѣчи съ осью вращенія pi въ точкѣ t, легко видѣть, что проекціи прямой n_1o_1 суть tn и $t'n'$ и что, слѣд., проекціи центра будутъ находиться на прямыхъ nt, $n't'$; а именно: горизонтальная — въ точкѣ o, на пересѣченіи tn съ перпендикуляромъ o_1o къ оси вращенія pi; вертикальная — въ o' на $t'\ n'$. Опредѣливъ такимъ образомъ проекціи o и o' центра круга, остается построить эллипсы, по которымъ проектируется искомая окружность; съ этою цѣлью воспользуемся вторымъ способомъ (**163**), по которому для опредѣленія осей горизонтальнаго эллипса слѣдуетъ провести чрезъ o прямую ab, параллельную горизонтали pi плоскости MNP и на ней отъ точки o, въ обѣ стороны, отложить части oa и ob, равныя радіусу n_1o_1 искомаго круга. Прямая ab есть большая ось горизонтальнаго эллипса.



Чер. 153.

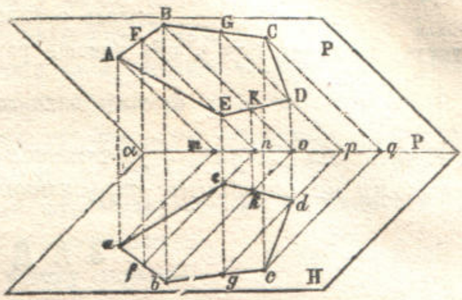
Для опредѣленія же малой оси, которая перпендикулярна въ o къ ab, и равна проекціи діаметра, перпендикулярнаго къ AB, слѣдуетъ по тому же § провести чрезъ центръ горизонтально-проектирующую плоскость, перпендикулярную къ ab, и совмѣстить эту плоскость совмѣстно съ центромъ (o, o') и точкою (r, r'), въ которой эта плоскость встрѣчается съ горизонталью $(pi, p'i')$, съ горизонтальною плоскостью проекцій. Точка (o, o') совмѣстится съ точкою O_1, лежащей по направленію ob на разстояніи oO_1 равномъ δo_1 точка (r, r') — съ R_1, лежащей на перпендикулярѣ къ ro на разстояніи rR_1, равномъ $\beta r'$, а слѣдовательно, прямая пересѣченія горизонтально-проектирующей плоскости ro съ плоскостью MNP — съ прямой R_1O_1 и потому, отложивъ на этой прямой отъ точки O_1 въ обѣ стороны O_1E_1 и O_1F_1, равныя радіусу круга и спроектировавъ точки E_1 и F_1 на or въ точки e и f, найдемъ, что малая ось равна ef. По найденнымъ такимъ образомъ осямъ остается построить горизонтальный эллипсъ.

Подобнымъ же способомъ построимъ оси вертикальнаго эллипса.

165. Теорема. *Площадь проекціи плоской фигуры равна площади самой фигуры, умноженной на cosinus угла наклоненія плоскости фигуры къ плоскости проекцій.*

Пусть (*чер. 154*) данная фигура $ABCDE$ лежитъ въ плоскости P, которая составляетъ съ плоскостью проекцій H уголъ α; пусть $abcde$ и αP — проекція данной фигуры и слѣдъ плоскости P на плоскости H.

Для доказательства теоремы, разсѣчемъ данную фигуру плоскостями Ama, Ene, Bob, Dpd, Cqc, проходящими чрезъ проектирующія Aa, Bb, Cc, Dd, Ec и перпендикулярными къ слѣду aP, на два треугольника EAF, GDC и двѣ трапеціи $EFBK$ и $BKDG$. Эти же плоскости разсѣкутъ и проекцію $abcde$ фигуры на два треугольника aef и gdc и двѣ трапеціи $efbk$ и $bkdg$, при чемъ стороны этихъ послѣднихъ, какъ легко показать, суть проекціи сторонъ соотвѣтствующихъ треугольниковъ и трапецій самой фигуры. Дѣйствительно, разсмотримъ трапецію $efbk$ и ей соотвѣтствующую $FEBK$. Точки e и b суть проекціи точекъ E и B по условію. Точка K, какъ пересѣченіе прямыхъ ED и Bo, имѣетъ свою проекцію k на пересѣченіи проекцій этихъ прямыхъ, но проекція ED, по условію, есть ed; проекція прямой Bo, какъ лежащей въ плоскости, перпендикулярной къ H, есть слѣдъ ob этой плоскости (§ 51); прямыя же eb и ob пересѣкаются въ точкѣ k. Такимъ же образомъ докажемъ, что f есть проекція точки F и что то же соотношеніе существуетъ между сторонами остальныхъ трапецій и треугольниковъ. На этомъ основаніи (§ 26, 2) $bk=BK \cos Bob$, $ef=EF \cos Fnf$ и $dg=DG \cos Gpg$, но углы Bob, Fnf, Gpg, какъ измѣряющіе одинъ и тотъ же двугранный уголъ между плоскостями P и H, равны между собою и равны α; и потому



Чер. 154.

$$\frac{bk}{BK}=\frac{ef}{EF}=\frac{dg}{DG}=\cos\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1.$$

Примемъ прямыя EF, BK, DG и ихъ проекціи ef, bk, dg за основанія трапецій и треугольниковъ, на которые раздѣлена, какъ самая фигура, такъ и проекція, и замѣтимъ, что въ такомъ случаѣ высоты соотвѣтствующихъ треугольниковъ и трапецій будутъ равны между собою, и именно равны отрѣзку слѣда αP между соотвѣтствующими сѣкущими плоскостями; такъ трапеціи $EFBK$ и $efbk$ будутъ имѣть своею высотою отрѣзокъ on, а потому площадь $ABCDE$, какъ равная суммѣ площадей EAF, $EFBK$, $KBGD$, DGC, равна

$$\square\, ABCDE={}^1/_2\, EF.\, mn+{}^1/_2\, (EF+BK)\, no+$$
$$+{}^1/_2\, (KB+DG)\, op+{}^1/_2\, DG.\, pq.$$

На томъ же основаніи:

$$\square\, abcde={}^1/_2\, ef.\, mn+{}^1/_2\, (ef+bk)\, no+{}^1/_2\, (bk+dg)\, op+{}^1/_2\, dg.\, pq$$

или въ силу равенствъ (1):

$$\square\, abcde=[{}^1/_2\, EF.\, mn+{}^1/_2\, (EF+BK)\, no+$$
$$+{}^1/_2\, (BK+DG)\, op+{}^1/_2\, DG.\, pq]\, \cos\alpha;$$

но выраженіе въ скобкахъ есть не что иное, какъ площадь $ABCDE$, и слѣдовательно,

$$\square\, abcde=\square\, ABCDE.\, \cos\alpha,$$

что и требовалось доказать.

166. На основаніи только что доказанной теоремы легко опредѣлить площадь эллипса; въ самомъ дѣлѣ, изъ треугольника DOd (*чер. 151*), въ которомъ гипотенуза OD, какъ радіусъ круга, равна большой полуоси a эллипса, катетъ Od—

малой полуоси b того же эллипса, и въ которомъ уголъ $DOd=\alpha$ измѣряетъ наклоненіе плоскости круга къ плоскости проекцій, имѣемъ:

$$Od=OD\cos DOd \text{ или } b=a\cos\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Съ другой стороны, по доказанному въ § **165**,

$$\text{площадь эллипса}=\pi r^2\cos\alpha.$$

Откуда, исключая $\cos\alpha$ при помощи равенства (1) и замѣчая, что $r=a$, имѣемъ:

$$\text{площадь эллипса}=\frac{\pi r^2 b}{a}=\pi ab,$$

т. е. *площадь эллипса равняется произведенію его полуосей, умноженному на отношеніе окружности къ діаметру.*

ЗАДАЧИ.

184. Построить проекціи квадрата, котораго одна изъ діагоналей перпендикулярна къ вертикальной плоскости; а другая—составляетъ съ горизонтальною плоскостью данный уголъ α.

185. Построить проекціи правильнаго треугольника, плоскость котораго наклонена къ вертикальной плоскости проекціи подъ даннымъ угломъ β, а одна сторона перпендикулярна къ горизонтальной плоскости проекцій. Центръ треугольника долженъ быть удаленъ отъ слѣдовъ его плоскости на разстояніе, равное радіусу описаннаго круга.

186. Найти проекціи правильнаго треугольника, котораго плоскость перпендикулярна къ оси, одинъ бокъ—перпендикуляренъ къ вертикальной плоскости проекцій, а противолежащая ему вершина находится на горизонтальной плоскости проекціи въ разстояніи, равномъ сторонѣ треугольника.

187. Найти проекціи квадрата, плоскость котораго проходитъ чрезъ данную точку и составляетъ данные углы съ плоскостями проекцій. Кромѣ того вершина квадрата находится въ данной точкѣ, а діагональ его параллельна горизонтальному слѣду.

188. Построить проекціи правильнаго треугольника по даннымъ проекціямъ одной его стороны и по направленію горизонтальной проекціи другой стороны.

189. Построить проекціи квадрата, зная проекціи его стороны и уголъ, который составляетъ плоскость квадрата съ горизонтальною плоскостью проекцій.

190. Построить проекціи квадрата, зная двѣ проекціи одной изъ его сторонъ и направленіе проекціи смежной стороны.

191. По данному центру и радіусу найти проекціи окружности, лежащей въ плоскости, перпендикулярной: 1) къ вертикальной плоскости проекцій: 2) къ горизонтальной плоскости проекцій.

192. Построить проекціи окружности по данному центру и радіусу, если плоскость окружности перпендикулярна къ прямой, которая проектируетъ центръ на ось.

193. Опредѣлить по даньому радіусу проекціи окружности, касательной къ слѣдамъ данной плоскости.

194. Построить проекціи окружности, лежащей въ плоскости, которая проходитъ чрезъ ось и точку.

195. Найти проекціи окружности, вписанной въ данный своими проекціями треугольникъ.

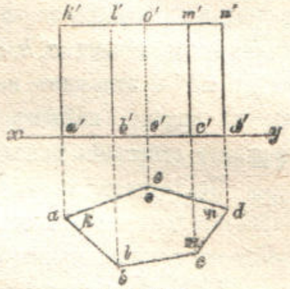
§ III. Призы и пирамиды.

167. Многогранникъ, котораго двѣ противоположныя грани, называемыя основаніями, суть равные и параллельные многоугольники, а всѣ боковыя грани—параллелограммы, называется призмою (Геометрія Давыдова, § 227). Призма называется прямою, если боковыя грани ея перпендикулярны къ плоскости основанія; въ противномъ случаѣ, т. е. когда боковыя грани наклонны къ плоскости основанія, призма называется наклонною.

Изъ только что приведеннаго опредѣлепія призмы необходимо слѣдуетъ, что и боковыя ребра призмы параллельны между собою и что, слѣдовательно, призма вполнѣ опредѣляется основаніемъ и направленіемъ ребра, т. е. что для заданія призмы, достаточно дать проекціи основанія ея и проекціи направленія ея реберъ.

168. Задача. *Построить эпюръ прямой призмы, стоящей на горизонтальной плоскости проекцій, по данному основанію и высотѣ.*

Такъ какъ призма прямая и основаніе ея лежитъ на горизонтальной плоскости, то боковыя ребра призмы, будучи перпендикулярными къ плоскости основанія призмы, будутъ проектироваться на горизонтальную плоскость въ вершинахъ основанія, и потому горизонтальныя проекціи обоихъ основаній сольются въ одну фигуру, равную истинной величинѣ основанія. На вертикальной плоскости проекцій нижнее основаніе, проектируется по оси проекцій, верхнее—по прямой, ей параллельной и отстоящей отъ нея на разстояніе, равное высотѣ призмы. На основаніи этихъ соображеній, эпюръ данной, напр., пятиугольной, прямой призы строится слѣдующимъ образомъ. На горизонтальной плоскости (*чер.* 155).

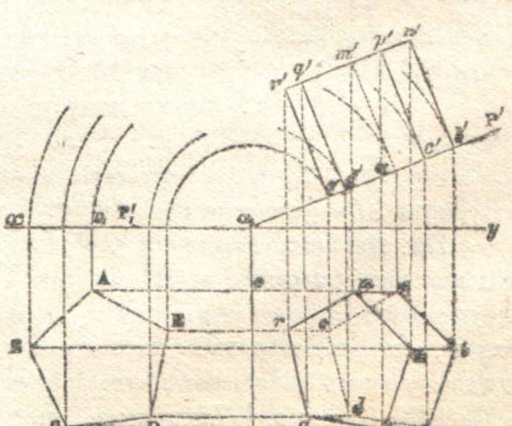


Чер. 155.

чертимъ пятиугольникъ $abcde$, равный нижнему основанію, и находимъ его вертикальную проекцію на оси въ точкахъ a', b', c', d', e'. Изъ точекъ a', b', c', d', e' возстановимъ перпендикуляры къ оси и, отложивъ на одномъ изъ нихъ, напр., на a', высоту $a'k'$ призмы, проводимъ чрезъ точку k' прямую, параллельную оси; на этой прямой находятся вертикальныя проекціи вершинъ верхняго основанія призмы, именно въ точкахъ k', l', m', n', o' встрѣчи ея съ ребрами призмы. Горизонтальныя проекціи k, l, m, n, o точекъ K, L, M, N, O находятся въ точкахъ a, b, c, d, e. При взятомъ нами положеніи призмы относительно плоскостей проекцій, ребро $(oe, o'e')$—невидимо.

169. Задача. *Построить проекціи прямой пятиугольной призмы, поставленной на данную вертикально-проектирующую плоскость.*

Данную плоскость $P\alpha P'$ (*чер.* 156) совмѣстимъ на лѣво съ горизонтальною плоскостью проекцій, принявъ αP за ось вращенія, и на совмѣщеніи ея начертимъ пятиугольникъ $A\ B\ C\ D\ E$, равный основанію призмы и представляющій совмѣщеніе его. Приведемъ затѣмъ плоскость $P\alpha P'_1$ вмѣстѣ съ точками A, B, C, D, E въ первоначальное положеніе. При этомъ (**§ 123**) горизонтальная проекція a точки A будетъ перемѣщаться по перпендикуляру Ao къ оси αP, а вертикальная a'—по дугѣ, описанной изъ центра



Чер. 156.

α радіусомъ αo_1, равнымъ разстоянію точки A отъ оси вращенія и, когда плоскость $P\alpha P'_1$ придетъ въ положеніе $P\alpha P'$, a' будетъ находиться на слѣдѣ $\alpha P'$ т. е. будетъ находиться въ точкѣ пересѣченія дуги αo_1 съ слѣдомъ $\alpha P'$, а a—на пересѣченіи перпендикуляра къ оси xy изъ a' съ Ao.

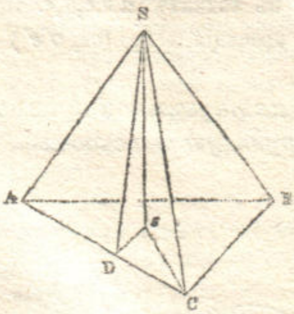
Поступая такимъ же образомъ относительно остальныхъ точекъ B, C, D, E найдемъ ихъ проекціи (b, b'), (c, c'), (d, d'), (e, e') и, слѣдовательно,—горизонтальную $abcde$ и вертикальную $a'b'c'd'e'$ проекціи основанія призмы.

Далѣе, замѣчая, что ребра призмы, какъ прямыя, перпендикулярныя къ плоскости основанія, перпендикулярны къ плоскости $P\alpha P'$ и, слѣдовательно, параллельны вертикальной плоскости проекцій, имѣемъ, что проекціи ихъ перпендикулярны къ слѣдамъ αP и $\alpha P'$ плоскости $P\alpha P'$ (§ **59**), и что вертикальныя проекціи ихъ равны истинной величинѣ (§ **26,3**) высоты призмы, а потому, проведя перпендикуляры изъ точекъ a, b, c, d, e къ слѣду αP, а изъ точекъ a', b', c', d', e',—къ слѣду $\alpha P'$ и отложивъ на послѣднихъ части $a'm'=b'n'=c'p'=d'q'=e'r'$, равныя высотѣ призмы, найдемъ въ точкахъ m', n', p', q', r' вертикальныя проекціи вершинъ верхняго основанія призмы.

По точкамъ же m', n', p', q', r' найдемъ на перпендикулярахъ къ aP ихъ горизонтальныя проекціи въ точкахъ m, n, p, q, r, и такимъ образомъ, соединивъ найденныя точки прямыми, опредѣлимъ искомыя проекціи призмы.

170. Пирамида есть многогранникъ, котораго одна изъ граней, называемая основаніемъ, есть многоугольникъ какого-либо числа сторонъ, а всѣ боковыя грани суть треугольники, сходящіеся своими вершинами въ одной точкѣ—вершинѣ пирамиды (Геометрія Давыдова, § 232). Отсюда заключаемъ, что пирамида вполнѣ опредѣляется основаніемъ и вершиной, т. е. что для заданія пирамиды достаточно дать проекціи ея основанія и проекціи вершины.

171. Высотою пирамиды называется длина перпендикуляра, опущеннаго изъ вершины на плоскость основанія.



Чер. 157.

Какъ легко видѣть изъ *чертежа 157* высота Ss пирамиды $SABC$ есть катетъ или прямоугольнаго треугольника SsC, въ которомъ гипотенуза SC есть ребро парамиды, а катетъ sC—разстояніе основанія высоты отъ одной изъ вершинъ основанія пирамиды, или прямоугольнаго треугольника SsD, въ которомъ катетъ sD есть перпендикуляръ, опущенный изъ основанія высоты на сторону основанія пирамиды, а гипотенуза SD—разстояніе вершины отъ одной изъ сторонъ основанія.

172. Пирамида называется правильной, если ея основаніе есть правильный многоугольникъ, а боковыя грани—равнобедренные и равные между собою треугольники; въ противномъ случаѣ пирамида называется неправильной. Легко видѣть, что въ правильной пирамидѣ вершина находится на перпендикулярѣ, возстановленномъ къ плоскости основанія изъ центра его.

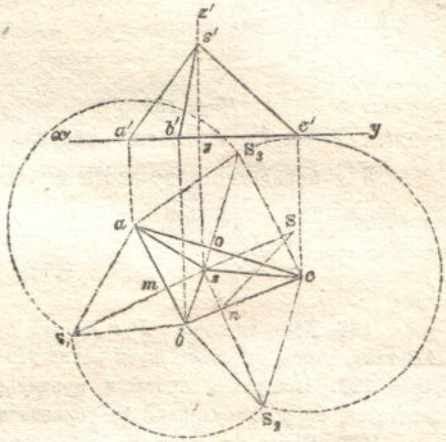
173. Задача. *Построить треугольную пирамиду, поставленную на горизонтальную плоскость проекцій по даннымъ шести ея ребрамъ.*

Построимъ (*чер. 158*) на горизонтальной плоскости треугольное основаніе abc пирамиды по тремъ изъ данныхъ реберъ и опредѣлимъ его вертикальную проекцію $a'b'c'$ на оси. Затѣмъ, для опредѣленія проекцій вершины пирамиды. совмѣстимъ боковыя ея грани съ горизонтальной плоскостью проекцій, принявъ за оси вращенія соотвѣтсвующія стороны основанія. Совмѣщеніе граней представится въ видѣ треугольниковъ aS_1b, aS_3c, bS_2c, которые вычертимъ, описавъ изъ точекъ a, b и c радіусами, соотвѣтственно равными 4-й, 5-й, 6-й линіи, дуги до ихъ взаимнаго пересѣченія въ точкахъ S_1, S_3 и S_2; точки S_1, S_2 и S_3 суть совмѣщенія одной и той же точки S—вершины пирамиды. Станемъ поднимать теперь грани, до тѣхъ поръ, пока точки S_1, S_2, S_3 не сольются въ одно S,—при этомъ горизонтальныя проекціи точекъ S_1, S_2, S_3, будутъ перемѣщаться по перпендикулярамъ S_1m, S_2n, S_3o къ осямъ вращенія ab, bc, ac, и потому, въ моментъ слiянія, горизонтальная проекція вершины S будетъ находиться въ точкѣ s пересѣченія всѣхъ трехъ перпендикуляровъ.

По найденной такимъ образомъ горизонтальной проекціи вершины и ея совмѣщенію (наприм. S_2), остается построить разстояніе вершины отъ горизонтальной плоскости проекцій, равное разстоянію вертикальной проекціи вершины отъ оси; и такимъ-образомъ, отложивъ это разстояніе на zz', найти вертикальную проекцію вершины.

По § **117** искомое разстояніе вершины отъ горизонтальной плоскости проекцій равно катету sS прямоугольнаго треугольника sSn, построеннаго по гипотенузѣ nS_2 и катету ns. А потому, отложивъ катетъ sS на перпендикулярѣ zz', возстановленномъ изъ s къ оси xy, отъ z до s', найдемъ въ точкѣ s' вертикальную проекцію вершины.

Для построенія проекцій реберъ пирамиды, остается точку (s, s') соединить съ точками (a, a'), (b, b') и (c, c').



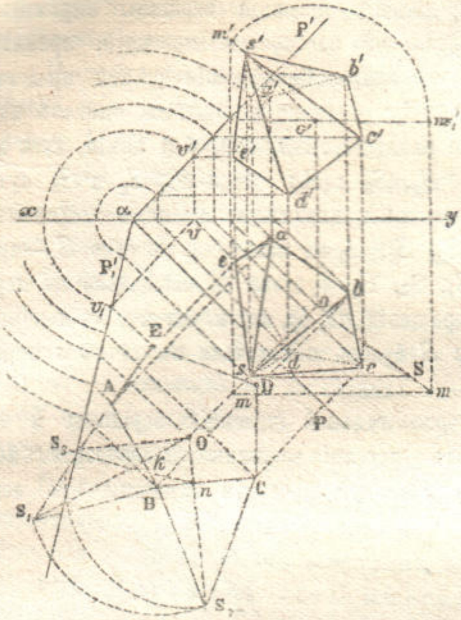
Чер. 158.

174. Задача. *По основанію и тремъ смежнымъ ребрамъ построить пятиугольную пирамиду, поставленную на наклонную къ оси плоскость $P\alpha P'$.*

Совмѣстимъ плоскость $P\alpha P'$ (*чер. 159*) съ горизонтальною плоскостью проекцій при помощи точки (v, v') и оси αP (**§ 120**), и построимъ на совмѣщеніи $P\alpha P'_1$ пятиугольникъ $ABCDE$, равный основанію пирамиды.

Затѣмъ, чтобы построить высоту пирамиды и найти точку O, въ которой она встрѣчаетъ основаніе пирамиды, предположимъ, что двѣ боковыя грани, ребра которыхъ даны, совмѣщены съ той же горизонтальною плоскостью и представляются треугольниками AS_1B и BS_2C, построенными по даннымъ сторонамъ AS_1, $BS_1=BS_2$ и CS_2. Поднимая эти грани въ первоначальное положеніе, найдемъ по § **173** въ точкѣ O, пересѣченія перпендикуляровъ S_1k и S_2n къ AB и BC, основаніе высоты пирамиды, а строя по катету On и гипотенузѣ nS_2 прямоугольный треугольникъ OnS_3, найдемъ и высоту пирамиды, равную катету OS_3 этого треугольника.

Возстановимъ теперь плоскость $P\alpha P'_1$, совмѣстно съ точками A, B, C, D, E, O, въ первоначальное положеніе и найдемъ при помощи горизонталей (§ **123**) проекціи $(a,\ a')$, $(b,\ b')$, $(c,\ c')$... вершинъ основанія пирамиды и проекціи $(o,\ o')$ основанія высоты пирамиды. Тогда $a\,b\,c\,d\,e$—есть горизонтальная проекція основанія искомой пирамиды, а $a'b'c'd'e'$—вертикальная проекція того же основанія; для построенія проекцій пирамиды остается найти проекціи ея вершины, для чего изъ точки $(o,\ o')$—основанія высоты пирамиды, возстановимъ перпендикуляръ $(om,\ o'm')$ къ плоскости $P\alpha P'$ (§ **59**) и на немъ отъ точки $(o,\ o')$ отложимъ длину, равную OS_3. Съ этою цѣлью повернемъ перпендикуляръ $(om,\ o'm')$ въ положеніе $(om_1,\ o'm'_1)$, параллельное горизонтальной плоскости проекцій (§ **128**), и, отложивъ на om_1 отрѣзокъ $oS=OS_3$, найдемъ проекціи s и s' точки S въ первоначальномъ положеніи перпендикуляра. Точка $(s,\ s')$ и есть искомая вершина.



Чер. 159.

Для опредѣленія проекцій пирамиды, остается соединить проекціи вершины съ проекціями основанія.

ЗАДАЧИ

196. Дана плоскость P и въ ней прямая AB; построить проекціи куба на прямой AB такъ, чтобы основаніе куба совпадало съ плоскостью P.

197. Построить проекціи правильной шестиугольной призмы, прикрѣпленной къ плоскости, перпендикулярной къ горизонтальной.

198. Построить проекціи куба, основаніе котораго совпадаетъ съ плоскостью, проходящею чрезъ ось и точку.

199. Построить проекціи правильной треугольной призмы, если плоскость основанія ея параллельна оси.

200. Построить проекціи прямоугольнаго параллепипеда, поставленнаго на горизонтальную плоскость проекцій такъ, чтобы одна изъ сторонъ его основанія составляла съ осью уголъ въ 45°.

201. Дана горизонтальная проекція пирамиды, основаніе которой лежитъ на плоскости, параллельной оси, и вертикальная проекція ея вершины. Построить вертикальную проекцію пирамиды.

202. Построить проекціи треугольной прямой призмы, зная: 1) что ребра ея параллельны вертикальной плоскости и составляютъ данный уголъ съ горизонтальной, 2) что основаніе ея есть равносторонній треугольникъ, одна изъ сторонъ котораго параллельна горизонтальной плоскости проекцій.

203. Дана горизонтальная проекція параллепипеда и вертикальная проекція одной изъ ея вершинъ. Построить параллепипедъ.

204. Опредѣлить длину діагонали прямоугольнаго параллепипеда и углы, которые она образуетъ съ его ребрами.

205. Взять прямую на грани данной призмы или пирамиды. Построить на грани параллепипеда квадратъ.

206. Построить проекціи треугольной пирамиды, если извѣстно по одной точкѣ на каждомъ изъ шести ея реберъ.

207. Построить параллепипедъ, который имѣлъ бы своими ребрами три данныя прямыя.

208. Построить проекціи правильной шестиугольной пирамиды, положенной боковою гранью на горизонтальную плоскость, если извѣстна ея высота и сторона основанія.

209. Построить проекціи правильной шестиугольной пирамиды, основаніе которой лежитъ на плоскости, перпендикулярной къ вертикальной и составляющей уголъ въ 30^0 съ горизонтальной.

210. Построить проекціи параллепипеда, зная его вершину (o, o'), направленіе вертикальныхъ и горизонтальныхъ проекцій двухъ сторонъ OA и OB его основанія, направленіе и величину горизонтальной проекціи бокового его OC ребра и длину ребра $OA=OB=OC$.

211. Построить проекціи пятиугольной пирамиды $SABCDE$, находящейся въ пространствѣ, зная горизонтальную проекцію $abcde$ ея основанія, проекціи (S, S') ея вершины и истинную величину трехъ реберъ SA, SB и SC.

212. Построить вертикальную проекцію треугольной пирамиды, зная ея горизонтальную проекцію S, a b c (пирамида стоитъ на горизонтальной плоскости) и двугранный уголъ при ребрѣ SA, равный прямому.

213. Построить проекціи треугольной пирамиды, поставленной на горизонтальную плоскость, зная основаніе ея ABC и углы α, β, γ, которые боковыя грани SAB, SAC, SBC составляютъ съ горизонтальною плоскостью проекціи ($\alpha=60$, $\beta=45$, $\gamma=30$).

214. Дана правильная треугольная усѣченная пирамида, высота ея равна 0,04, сторона меньшаго основанія—0,05, большаго—0,1. Пирамида поставлена на горизонтальную плоскость такъ, что одна изъ сторонъ ея основанія перпендикулярна къ оси проекцій. Повернуть пирамиду около этой стороны, какъ около оси, до совмѣщенія боковой грани съ горизонтальною плоскостью. Построить проекціи пирамиды въ новомъ положеніи.

215. Повернуть параллепипедъ около одной изъ сторонъ его основанія, какъ около оси на уголъ 30^0. Найти проекцію параллепипеда въ новомъ положеніи.

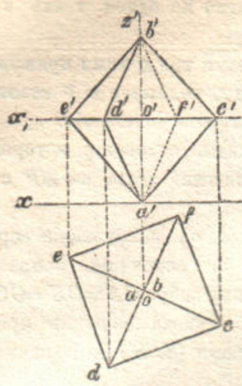
216. Дана плоскость и проекція треугольной пирамиды, стоящей на горизонтальной плоскости проекцій. Повернуть пирамиду около одной изъ сторонъ его основанія такъ, чтобы вершина ея совпала съ плоскостью.

§ IV. Правильные многогранники.

175. Многогранникъ называется правильнымъ, когда всѣ грани его представляютъ правильные и равные многоугольники, а многогранные углы при вершинахъ всѣ равны между собою. Какъ доказываетъ Геометрія (Геометрія Давыдова, § 249), многогранный уголъ можетъ быть образованъ тремя, четырьмя и пятью правильными треугольниками, тремя квадратами и тремя правильными пятиугольниками. Такимъ образомъ всѣхъ правильныхъ многогранниковъ можетъ быть пять: четырегранникъ, осьмигранникъ, двадцатигранникъ, шестигранникъ и двѣнадцатигранникъ.

176. Правильный четырегранникъ образуется четырьмя равносторонними треугольниками, соединенными по три около каждой вершины. Отсюда видно, что четырегранникъ можно разсматривать, какъ частный случай треугольной пирамиды, и слѣд., построеніе его ничѣмъ не отличается отъ построенія этой послѣдней (§ **173**).

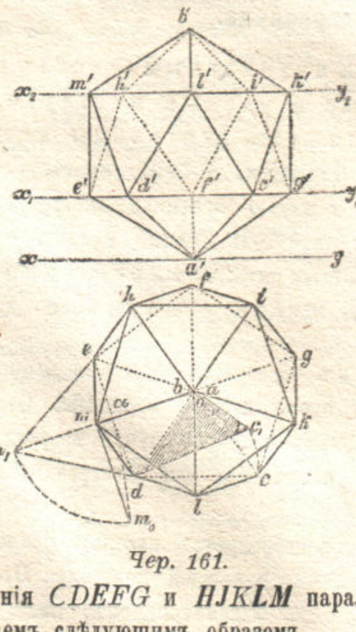
177. Правильный осьмигранникъ образуется восемью равносторонними треугольниками, соединенными по четыре около каждой вершины. Отсюда видно, что правильный осьмигранникъ можетъ быть разсматриваемъ, какъ двѣ четыреугольныя пирамиды A, $CDEF$ и B. $CDEF$, сложенныя своими квадратными основаніями $CDEF$ вмѣстѣ (*чер. 160*). На этомъ основаніи построеніе осьмигранника начинается съ построенія упомянутаго выше квадрата, какъ основанія пирамидъ.



Чер. 160.

Въ простѣйшемъ случаѣ, когда діагональ осьмигранника, соединяющая обѣ вершины пирамидъ, вертикальна, плоскость квадрата параллельна горизонтальной плоскости проекцій и, слѣдовательно, проектируется на ней въ истинную величину, а на вертикальной — по прямой, параллельной оси. А потому, вычертивъ на горизонтальной плоскости квадратъ $cdef$, сторона котораго равна ребру осьмигранника, и соединивъ центръ его o, въ которомъ проектируются вершины a и b пирамидъ, съ вершинами $cdef$, найдемъ горизонтальную проекцію осьмигранника. Для опредѣленія же вертикальной его проекціи, замѣтимъ, что всѣ діагонали осьмигранника равны между собою и что квадратъ $CDEF$ дѣлитъ вертикальную діагональ пополамъ; поэтому, если проведемъ прямую x_1y_1, параллельно xy, на разстояніе отъ нея, равномъ половинѣ одной изъ діагонали df или ec, то на этой прямой въ точкахъ c' d' e' f' будутъ находиться вертикальныя проекціи вершинъ квадрата $CDEF$. Что же касается вертикальныхъ проекцій вершинъ пирамидъ, составляющихъ осьмигранникъ, то онѣ будутъ находиться на перпендикулярѣ z' къ оси xy. возстановленномъ изъ точки o, и на разстояніи отъ x_1y_1, равномъ половинѣ діагонали, т. е. въ точкахъ a' и b'. А потому, соединяя эти точки съ c', d', f', e', найдемъ вертикальную проекцію осьмигранника.

178. Двадцатигранникъ образованъ двадцатью равносторонними треугольниками, соединенными по пяти около каждой вершины и, слѣдовательно, расположенными такъ, что двадцатигранникъ можетъ быть разсматриваемъ, какъ тѣло, состоящее изъ двухъ пятиугольныхъ пирамидъ A, $CDEFG$ и B, $HJKLM$ (*чер 161)* и промежуточнаго тѣла, ограниченнаго съ боковъ десятью равными треугольниками и имѣющаго своими основаніями основанія пирамидъ, т. е. два равныхъ и параллельныхъ пятиугольника $CDEFG$ и $HJKLM$, при чемъ вершины этихъ послѣднихъ расположены относительно другъ отъ друга такъ, что вершины верхняго основанія приходятся противъ серединъ сторонъ нижняго основанія.



Чер. 161.

На этомъ основаніи, чтобы построить по данному ребру двадцатигранникъ, когда діагональ его AB, соединяющая вершины пирамидъ, перпендикулярна къ горизонтальной плоскости проекцій и когда, слѣдовательно, пятиугольныя основанія $CDEFG$ и $HJKLM$ параллельны горизонтальной плоскости проекцій, поступаемъ слѣдующимъ образомъ.

На горизонтальной плоскости проекцій чертимъ по ребру два правильныхъ пятиугольника $cdefg$ и $hiklm$, такъ, чтобы точки $cdef...lm$ дѣлили окружность, описанную около нихъ, на 10 равныхъ частей; тогда $cdefg$ и $hiklm$ представятъ горизонтальныя проекціи основаній, какъ нижней и верхней пирамиды, такъ и промежуточнаго тѣла, а центръ o—горизонтальныя проекціи a и b вершинъ A и B обѣихъ пирамидъ.

А потому, если соединимъ полученныя такимъ образомъ точки какъ между собою, такъ и съ центромъ o описаннаго около пятиугольниковъ круга, то найдемъ горизонтальныя проекціи: нижней пирамиды a, $cdefg$, верхней — b, $hiklm$ и боковыхъ граней промежуточнаго тѣла — dem, mhe, efh и т. д.

Чтобы построить вертикальную проекцію двадцатигранника, достаточно найти высоту h обѣихъ пирамидъ и высоту h_1 промежуточнаго тѣла, ибо вертикальныя проекціи основаній пирамидъ будутъ находиться на прямыхъ, параллельныхъ оси и находящихся отъ нея на разстояніяхъ: нижнее основаніе—h, верхнее $h+h_1$. Высота h пирамиды, по **§ 171**, равна катету прямоугольнаго треугольника, построеннаго по катету, равному радіусу od круга, описаннаго около основанія, и по гипотенузѣ dc, равной ребру пирамиды, т. е. равна катету oc_1 прямоугольнаго треугольника odc_1. А потому, отложивъ $a'f'=h=oc_1$ на перпендикулярѣ $a'b'$, возстановленномъ изъ o къ оси xy, и проведя чрезъ точку f' прямую x_1y_1, параллельную оси, найдемъ на ней въ точкахъ $c'd'e'f'g'$ вертикальныя проекціи вершинъ основанія нижней пирамиды, а соединяя эти точки съ a', — вертикальную проекцію нижней пирамиды.

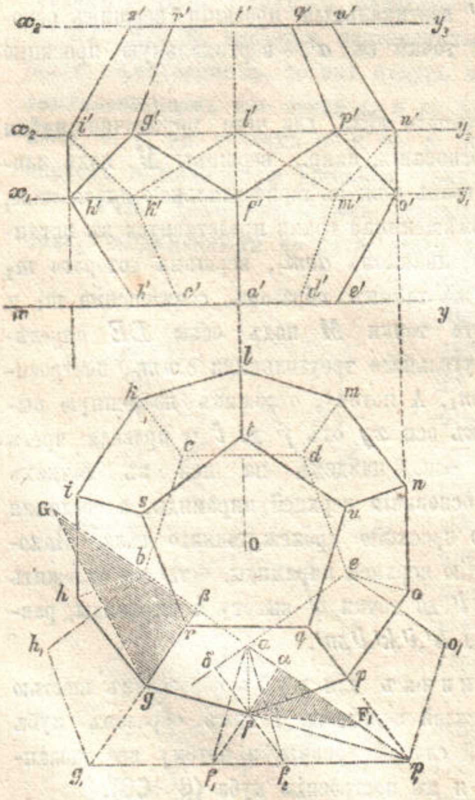
Остается найти высоту h_1 промежуточнаго тѣла, для чего достаточно найти высоту одной изъ вершинъ верхняго его основанія, напр., вершины M, надъ плоскостью x_1y_1. Съ этой цѣлью совмѣстимъ грань dem съ горизонтальною плоскостью, вращая ее около горизонтали (de, $d'e'$). Совмѣщенная грань представится въ истинную величину, т. е. равностороннимъ треугольникомъ dem_1, вершина котораго m_1 есть совмѣщеніе точки M; по найденному же такимъ образомъ совмѣщенію m_1 и горизонтальной проекціи m, искомая высота точки M надъ осью DE опредѣлится по **§ 117**, какъ катетъ mm_0 прямоугольнаго треугольника αmm_0, построеннаго на катетѣ αm и гипотенузѣ $\alpha m_0=\alpha m_1$. А потому, отложивъ найденную высоту $h_1=mm_0$ на перпендикулярѣ $a'b'$ къ оси xy отъ f' до l' и проведя чрезъ точку l' прямую x_2y_2, параллельную оси, найдемъ на ней въ точкахъ $h'k'i'l'm'$ вертикальныя проекціи вершинъ основанія верхней пирамиды, а соединяя ихъ съ точками c',d',e',f',g'—вертикальную проекцію промежуточнаго тѣла. Наконецъ, чтобы построить вертикальную проекцію верхней пирамиды, остается отложить на перпендикулярѣ $a'b'$ къ оси отъ точки l' до точки b' высоту h пирамиды, равную $a'f'$, и соединить точку b' съ точками h',i',k',l',m'.

179. П р а в и л ь н ы й ш е с т и г р а н н и к ъ и л и к у б ъ образованъ шестью квадратами, соединенными по три около каждой вершины. Такимъ образомъ кубъ можетъ быть разсматриваемъ, какъ частный случай призмы, и потому все сказанное о построеніи призмы будетъ относиться и къ построенію куба (**§ 168**).

180. П р а в и л ь н ы й д в ѣ н а д ц а т и г р а н н и к ъ образованъ двѣнадцатью правильными пятиугольниками, соединенными по три около каждой вершины и расположенными такъ, что два изъ нихъ, принятые за основаніе тѣла, лежатъ въ плоскостяхъ, параллельныхъ другъ другу, а остальные десять ограничиваютъ тѣло съ боковъ.

Построимъ проекціи двѣнадцатигранника по данному ребру, предполагая, что одною изъ своихъ граней $ABCDE$ онъ поставленъ на горизонтальной плоскости проекцій. Въ такомъ случаѣ, вычертивъ на горизонтальной плоскости правильный пятиугольникъ $abcde$ (*чер. 162*) и опредѣливъ его вертикальную проекцію $a'b'c'd'e'$ на оси, найдемъ проекціи нижняго основанія тѣла. Чтобы опредѣлить проекціи боковыхъ вершинъ двѣнадцатигранника, совмѣстимъ съ горизонтальною плоскостью проекцій двѣ смежныя грани, прилегающія къ основанію $ABCDE$, вращая ихъ около реберъ ab и ae. Совмѣщеніе этихъ граней представится въ видѣ двухъ правильныхъ пятиугольниковъ $bh_1g_1f_1a$ и $af_2p_1o_1e$; при чемъ легко видѣть, что точки f_1 и f_2 суть совмѣщенія одной и той же точки—вершины F.

Поднимемъ теперь грани въ ихъ первоначальное положеніе и найдемъ проекціи точекъ f_1, f_2 и g_1. Горизонтальныя проекціи этихъ точекъ будутъ при возстановленіи граней перемѣщаться по перпендикулярамъ къ осямъ вращенія ab и ae, и слѣдовательно, горизонтальная проекція вершины F будетъ находиться въ точкѣ f на пересѣченіи перпендикуляровъ αf_1 и δf_2, по которымъ перемѣщаются точки f_1 и f_2; что же касается до вертикальной проекціи f' точки F, то она будетъ находиться надъ осью xy на высотѣ, которая опредѣлится (§ 117) по совмѣщенію ея f_1 и ея горизонтальной проекціи f, какъ катетъ aF_1 прямоугольнаго треугольника afF_1, построеннаго по катету af и гипотенузѣ αf_1; и потому, откладывая на перпендикулярѣ, проведенномъ къ оси xy изъ f, длину $a'f'$, равную αF_1, найдемъ въ точкѣ f' вертикальную проекцію вершины F. Чтобы найти горизонтальную проекцію точки g_1, замѣтимъ, что прямая f_1g_1 встрѣчаетъ ось вращенія ab въ точкѣ p_1 и что, слѣдовательно, горизонтальная проекція точки g_1 должна находиться одновременно и на горизонтальной проекціи p_1f прямой f_1p_1 и на перпендикулярѣ $g_1\beta$ къ оси вращенія ab, т. е. въ точкѣ ихъ пересѣченія g. По g и g_1 (§ 117) опредѣлимъ высоту точки G надъ осью, какъ катетъ βG прямоугольнаго треугольника $gG\beta$, построеннаго по катету $g\beta$ и гипотенузѣ βg_1, а потому, отложивъ на перпендикулярѣ къ оси xy, проведенномъ изъ точки g, длину $b'g'$ равную βG, найдемъ въ точкѣ g' вертикальную проекцію вершины G.



Чер. 162.

Такимъ же образомъ можно было бы поступать для опредѣленія проекцій всѣхъ остальныхъ вершинъ тѣла; но, замѣчая, что, вслѣдствіе правильности двѣнадцатигранника, всѣ его вершины, подобныя G и F, расположены одинаковымъ образомъ относительно горизонтальной плоскости проекцій и симметрично относительно оси тѣла, проведенной чрезъ центры обоихъ основаній, мы заключаемъ, что вершины F, H, K, M, O лежатъ на одномъ и томъ же разстояніи отъ горизонтальной плоскости проекцій и симметрично расположены относительно центра круга, описаннаго около основанія $abcde$.

На этомъ основаніи, ихъ горизонтальныя проекціи f, h, k, m, o образуютъ вершины правильнаго пятиугольника, имѣющаго общій центръ съ основаніемъ $abcde$ и одну изъ вершинъ въ точкѣ f, а вертикальныя лежатъ на прямой x_1y_1, проведенной чрезъ f' параллельно оси xy, въ точкахъ f', h', k', m', o'.

На томъ же основаніи горизонтальныя проекціи вершинъ G, I, L, N, P образуютъ вершины g, i, l, n, p правильнаго пятиугольника, имѣющаго общій центръ съ основаніемъ $abcde$ и одну изъ вершинъ въ точкѣ g, а вертикальныя ихъ проекціи находятся на прямой x_2y_2, проведенной чрезъ точку g', параллельно оси xy, въ точкахъ g' i', l', n', p'.

Наконецъ, верхняя грань $QRSTU$, параллельная горизонтальной плоскости проекцій, имѣетъ горизонтальной проекціей правильный пятиугольникъ $qrstu$, вписанный въ одной окружности съ пятиугольникомъ $abcde$ и при томъ такъ, что вершины обоихъ многоугольниковъ раздѣляютъ окружность на десять равныхъ частей; вертикальная же ея проекція q' r' s' t' u' лежитъ на прямой x_3y_3, проведенной параллельно оси на разстояніи отъ x_2y_2, равномъ $a'f'$.

ЗАДАЧИ.

217. Построить проекціи правильнаго четырегранника, поставленнаго на плоскость параллельную оси.

218. Построить проекціи куба, діагональ котораго вертикальна.

219. Даны точка O ($x=75, y=45$) и плоскость P, проходящая чрезъ ось и точку O. Требуется построить проекціи четырегранника, поставленнаго на плоскость P такъ, чтобы точка O была центромъ его основанія. Ребро четырегранника равно 70.

220. Найти разстояніе центра тяжести, отъ плоскостей проекціи въ четырегранникѣ, разсмотрѣнномъ въ предыдущей задачѣ.

221. Дана сторона AB равносторонняго треугольника, вершина котораго C находится въ данной плоскости профиля. Построить четырегранникъ, имѣющій данный треугольникъ своимъ основаніемъ.

222. Даны плоскость P и точка S на оси. Построить проекціи четырегранника, имѣющаго точку S своей вершиной, а основаніе на плоскости P.

223. Построить четырегранникъ по даннымъ проекціямъ одного ребра и направленію горизонтальной проекціи другого, съ нимъ смежнаго.

224. Даны вершина куба, ребро и направленіе горизонтальной проекціи другого ребра, проходящія чрезъ данную вершину; построить проекціи куба.

ГЛАВА VI.

Плоскія сѣченія многогранниковъ.

§ I. Опредѣленія.

181. Плоское сѣченія многогранника получается отъ пересѣченія его какою-либо плоскостью, и представляетъ собою нѣкоторый многоугольникъ.

Задача объ опредѣленіи плоскаго сѣченія многогранника заключается собственно въ рѣшеніи слѣдующихъ трехъ вопросовъ:

1) Опредѣлить проекціи сѣченія.

2) Опредѣлить истинную величину сѣченія.

3) Найти развертку усѣченной части многогранника.

182. Общій пріемъ для рѣшенія перваго вопроса заключается въ томъ, что опредѣляютъ или точки встрѣчи реберъ многогранника съ сѣкущей плоскостью по **§ 74**, или—прямыя, по которымъ грани многогранника пересѣкаются сѣкущей плоскостью но **§ 70**. Послѣдній пріемъ, какъ требующій менѣе чертежной работы, предпочитается первому.

183. Второй вопросъ—опредѣленіе истинной величины сѣченія—рѣшается при помощи способа совмѣщенія, на основаніи **§ 109**.

184. Наконецъ, третій—опредѣленіе развертки усѣченнаго многогранника—заключается въ слѣдующемъ. Разверткой даннаго многогранника называется плоская фигура, которая получится, если всѣ грани многогранника вычертить въ истинную величину на плоскости въ томъ порядкѣ, въ какомъ онѣ слѣдуютъ на многогранникѣ. Отсюда слѣдуетъ, что построеніе развертки собственно состоитъ изъ двухъ отдѣльныхъ операцій, именно: изъ опредѣленія истинной величины граней и изъ черченія ихъ въ опредѣленномъ порядкѣ одна вслѣдъ за другою. Опредѣленіе истинной величины граней совершается обыкновенно при помощи совмѣщенія граней съ горизонтальною плоскостью проекцій по **§ 120**.

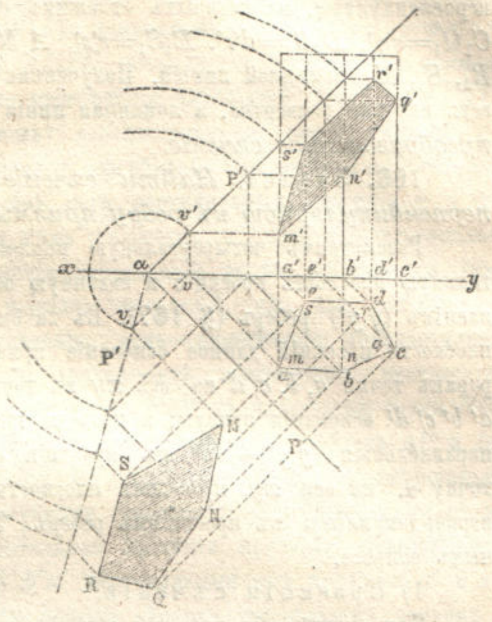
§ II. Плоскія сѣченія призмы.

185. Задача I. *Найти сѣченіе прямой пятиугольной призмы плоскостью, наклоненною къ оси.*

1) Проекціи сѣченія.

Если допустимъ, что данная прямая призма поставлена на горизонтальную плоскость проекцій (*чер. 163*), то оба ея основанія будутъ проектироваться: на горизонтальной плоскости по одному и тому же пятиугольнику $abcde$, равному основанію призмы, на вертикальной плоскости—нижнее основаніе по оси xy въ точкахъ $a'b'c'd'e'$, а верхнее—по прямой, параллельной оси и находящейся отъ нея на разстояніи, равномъ высотѣ призмы (**§ 168**); что же касается реберъ, то они на горизонтальной плоскости проекцій проектируются въ точкахъ a, b, c, d, e, а на вертикальной—по прямымъ, перпендикулярнымъ къ оси xy.

Пусть $P\alpha P'$—данная плоскость. Чтобы найти проекціи точекъ $M, N\, Q, R, S$, встрѣчи ея съ ребрами, замѣтимъ, что эти точки, какъ лежащія на прямыхъ, перпендикулярныхъ къ горизонтальной плоскости проекцій, имѣютъ свои горизонтальныя проекціи въ точкахъ a, b, c, d, e; отсюда заключаемъ, что горизонтальная проекція $mnqrs$ искомаго сѣченія сливается съ основаніемъ $abcde$ призмы и что, для опредѣленія вертикальной его проекціи, достаточно найти вертикальныя проекціи точекъ m, n, q, r, s подъ условіемъ, чтобы онѣ принадлежали плоскости $P\alpha P'$, для чего по § 68 проведемъ въ плоскости $P\alpha P'$ горизонтали такъ, чтобы ихъ горизонтальныя проекціи проходили чрезъ горизонтальныя проекціи каждой изъ точекъ тогда искомыя вертикальныя проекціи точекъ будутъ находиться на вертикальныхъ проекціяхъ, соотвѣтствующихъ горизонталей. Такъ, проведя горизонталь $(mv, m'v')$ точки M, найдемъ ея вертикальную проекцію въ точкѣ m'. Поступая подобнымъ образомъ относительно остальныхъ точекъ, найдемъ вертикальную проекцію сѣченія $m'n'q'r's'$.



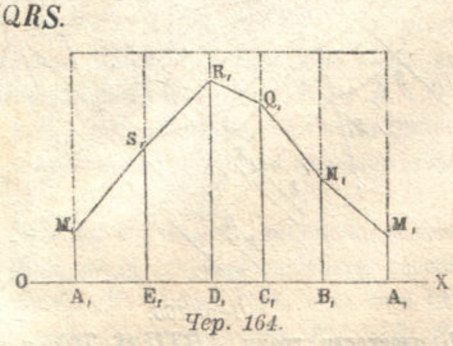
Чер. 163.

2) Истинная величина сѣченія.

Для опредѣленія истинной величины сѣченія, совмѣстимъ плоскость $P\alpha P'$ совмѣстно съ точками (m, m') (n, n') (q, q')... (s, s') съ горизонтальной плоскостью проекцій, при помощи горизонталей этихъ точекъ и оси вращенія αP. Для чего по § 122 найдемъ предварительно совмѣщеніе $\alpha P'_1$ вертикальнаго слѣда при помощи точки (v, v') и совмѣщенія горизонталей точекъ (m, m') (n, n') (s, s'), въ такомъ случаѣ искомыя совмѣщенія M, N, Q, R, S этихъ точекъ будутъ находиться на пересѣченіи этихъ послѣднихъ прямыхъ съ перпендикулярами, проведенными изъ соотвѣтствующихъ горизонтальныхъ проекцій m, n, q, r, s точекъ къ оси вращенія αP. Соединивъ точки ихъ M, N, Q, R, S прямыми, найдемъ, что истинная величина сѣченія есть пятиугольникъ $MNQRS$.

3) Развертка усѣченной призмы.

Всѣ грани данной усѣченной призмы представляютъ прямоугольныя трапеціи, высоты которыхъ равны сторонамъ ab, bc, cd... основанія призмы, а параллельныя стороны — усѣченнымъ ребрамъ призмы, которыя, какъ прямыя, параллельныя вертикальной плоскости проекцій, проектируются на эту послѣднюю въ истинную величину. Отсюда видно, что всѣ элементы граней призмы извѣстны непосредственно изъ чертежа и что поэтому можно прямо



Чер. 164.

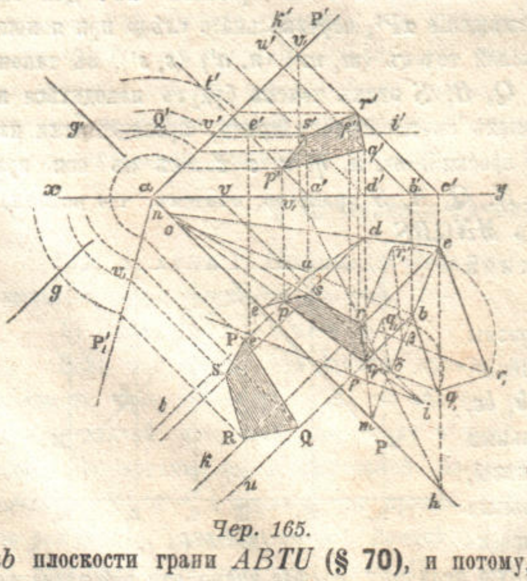
приступить къ черченію граней въ послѣдовательномъ порядкѣ. Съ этою цѣлью отложимъ на прямой OX (*чер. 164*) отъ точки A_1 части $A_1B_1=ab$, $B_1C_1=bc$, $C_1D_1=cd$, $D_1E_1=de$, и $E_1A_1=ea$, и въ точкахъ A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, A_1 проведемъ перпендикуляры, на которыхъ отложимъ соотвѣтственно $A_1M_1=a'm'$, $B_1N_1=b'n'$, $C_1Q_1=c'q'$, $D_1R_1=d'r'$, $E_1S_1=e's'$, $A_1M_1=a'm'$ и соединимъ точки M_1, N_1, Q_1, R_1, S_1, M_1 ломанной линіей. Полученная такимъ образомъ фигура $A_1M_1M_1A_1$ и есть искомая развертка, а ломанная линія $M_1N_1Q_1R_1S_1M_1$ есть, такъ называемое *преобразованное сѣченіе*.

186. Задача. *Найти сѣченіе наклонной призмы плоскостью, перпендикулярною къ ребру призмы.*

Разсмотримъ четыреугольную наклонную призму, поставленную на горизонтальную плоскость проекцій и заданную основаніемъ $ABCD$ (*чер. 165*) и направленіемъ $(g.g')$ реберъ (**§ 167**). Въ такомъ случаѣ, вычертивъ на горизонтальной плоскости проекцій данное основаніе призмы—четыреугольникъ $abcd$, и спроектировавъ точки a, b, c, d на ось xy въ точки a', b', c', d', найдемъ проекціи $abcd$ и $a'b'c'd'$ основанія призмы; а проведя чрезъ нихъ прямыя $(at, a't')$ $(bu, b'u')$....., параллельныя $(g.g')$—найдемъ проекціи ея реберъ. Затѣмъ, чрезъ какую-либо точку α, на оси xy, проведемъ плоскость $P\alpha P'$, слѣды которой соотвѣтственно перпендикулярны къ проекціямъ реберъ. Такимъ образомъ построимъ эпюръ данныхъ вопроса.

1) Проекціи сѣченія.

Для опредѣленія проекцій сѣченія, можно поступать, какъ сказано, двоякимъ способомъ. Первый способъ состоитъ въ опредѣленіи точекъ встрѣчи реберъ сѣкущею плоскостью при помощи горизонтально или вертикально-проектирующихъ плоскостей (**§ 75**); такъ, напр., для опредѣленія точки встрѣчи ребра $(ck, c'k')$ съ сѣкущею плоскостью $P\alpha P'$, проведемъ чрезъ ребро CK вертикально-проектирующую его плоскость $k'c'h$ и найдемъ пересѣченіе ея $(hv_1\ c'v'_1)$ съ плоскостью $P\alpha P'$ (**§ 71**). Прямая $(hv_1, c'v'_1)$ встрѣтитъ ребро $(ck, c'k')$ въ искомой точкѣ (r, r').


Чер. 165.

Такимъ образомъ поступая, легко найдемъ и всѣ остальныя точки встрѣчи реберъ съ плоскостью $P\alpha P'$, а слѣдовательно, и проекціи искомаго сѣченія. Но чертежъ значительно упрощается, если мы употребимъ второй способъ, состоящій въ опредѣленіи прямыхъ, по которымъ грани призмы пересѣкаются плоскостью $P\alpha P'$. Найдемъ, напр., пересѣченіе плоскости грани $ABTU$ съ плоскостью $P\alpha P'$. Одна изъ точекъ искомаго сѣченія будетъ находиться въ точкѣ o на пересѣченіи горизонтальнаго слѣда αP плоскости $P\alpha P'$ съ горизонтальнымъ слѣдомъ ab плоскости грани $ABTU$ (**§ 70**), и потому, для опредѣленія сѣченія, остается найти другую его точку. Съ этой цѣлью пересѣчемъ вспомогательной горизонтальной плоскостью Q' плоскость $P\alpha P'$ и плоскость грани $ABTU$. Плоскость Q' пересѣкаетъ плоскость $P\alpha P'$ по горизонтали $(vi, v'i')$ (§ 71, 4), а ребра $(bu, b'u')$, и $(at, a't')$ грани $ABTU$ въ точкахъ (e, e'), (f, f') (§ 73), и слѣдовательно, плоскость грани $ABTU$—по горизонтали $(ef, e'f')$. Прямыя VI и EF, какъ лежащія въ плоскости Q', пересѣкаются въ точкѣ (i, i'), принадлежащей искомому пересѣченію плоскости $P\alpha P'$ съ плоскостью грани $ABTU$. Отсюда заключаемъ, что прямая oi есть горизонтальная проекція искомаго пересѣченія плоскостей $P\alpha P'$ и $ABTU$, а часть pq этой прямой, лежащая между горизонтальными проекціями at и bu реберъ,—горизонтальная проекція искомаго пересѣченія плоскости $P\alpha P'$ съ гранью $ABTU$. По точкамъ p и q опредѣлимъ ихъ вертикальныя проекціи p' и q' на вертикальныхъ проекціяхъ $a't'$ и $b'u'$ тѣхъ же реберъ и, слѣдов.,—вертикальную проекцію $p'q'$ линіи сѣченія. Опредѣленіе пересѣченій всѣхъ остальныхъ граней съ плоскостью $P\alpha P'$ не требуетъ новыхъ построеній, ибо для каждой грани извѣстны впередъ двѣ точки пересѣченія: одна—пересѣченіе горизонтальныхъ слѣдовъ плоскостей сѣкущей и грани, другая—изъ предыдущаго построенія на ребрѣ взятой грани. Такъ, пересѣченіе плоскости $P\alpha P'$ съ плоскостью грани $BCKU$ проходитъ чрезъ точку m пересѣченія ихъ горизонтальныхъ слѣдовъ αP и bc, и точку (q, q') пересѣченія ребра $(bu, b'u')$ съ плоскостью $P\alpha P'$, и, слѣдовательно, часть qr прямой mq, заключающаяся между горизонтальными проекціями ck и bu реберъ грани $BCUK$, и есть горизонтальная проекція искомаго пересѣченія: по точкамъ q и r опредѣлимъ на $c'k'$ и $b'u'$ вертикальныя ихъ проекціи q' и r' и, слѣдовательно, вертикальную проекцію сѣченія. Такимъ же образомъ найдемъ, что пересѣченіе плоскости слѣдующей грани съ плоскостью $P\alpha P'$ есть прямая $(nr, n'r')$, часть которой $(sr, s'r')$, заключенная между ребрами C и D, ограничивающими эту грань, и есть искомое пересѣченіе. Наконецъ, грань AD пересѣкаетъ плоскость $P\alpha P'$ по прямой $(ps, p's')$. Отсюда проекціи искомаго сѣченія призмы плоскостью $P\alpha P'$ суть четыреугольники $pqrs$ и $p'q's'r'$.

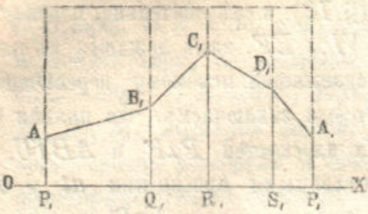
2) Истинная величина сѣченія.

Для опредѣленія истинной величины сѣченія, совмѣстимъ съ горизонтальною плоскостью проекцій какъ плоскость $P\alpha P'$, такъ и въ ней лежащія точки (p,p'), (q,q') (r,r'), (s,s'), при помощи оси вращенія αP; и, найдя ихъ совмѣщенія въ точкахъ P, Q, R, S (§ 122), соединимъ эти точки прямыми; четыреугольникъ $PQRS$ есть искомая истинная величина сѣченія.

3) Развертка усѣченной призмы.

Для построенія развертки, опредѣлимъ предварительно истинную величину усѣченныхъ граней $ABPQ$, $BCQR$, $CDRS$ и $ADSP$, вращая ихъ послѣдовательно, до совмѣщенія съ горизонтальною плоскостью проекцій, около слѣдовъ ab, bc, cq, da; такимъ путемъ по § 116, найдемъ, что, напр., точки R и Q грани $CBRQ$ совмѣстятся съ точками r_1 и q_1, находящимися на перпендикулярахъ βr и δq къ оси вращенія cb, и что, слѣдовательно, истинная величина этой грани есть прямоугольная трапеція cbq_1r_1.

Подобнымъ же образомъ можно было бы опредѣлить истинную величину и остальныхъ граней, но въ данномъ случаѣ, когда сѣкущая плоскость перпендикулярна къ ребру призмы, вопросъ упрощается. Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ сѣкущая плоскость перпендикулярна къ ребрамъ, то прямыя пересѣченія PQ, QR, RS, SP, какъ перпендикулярныя къ параллельнымъ между собою ребрамъ, составятъ на развертке одну прямую, перпендикулярную къ ребрамъ. Примемъ за такую прямую ось OX (*чер. 166*) и отложимъ на ней послѣдовательно части P_1Q_1, Q_1R_1, R_1S_1,



Чер. 166.

S_1P_1, и соотвѣтственно равныя истинной величинѣ сторонъ сѣченія PQ, QR, RS, SP. Затѣмъ въ точкахъ P_1, Q_1, R_1, S_1, P_1 возставимъ перпендикуляры къ оси и на нихъ отложимъ истинную величину соотвѣтствующихъ реберъ; для чего достаточно, построивъ истинную величину одного изъ нихъ, наприм., CR, равную cr_1, и отложивъ ее на ребрѣ R_1 отъ точки R_1 до точки C_1, засѣчь ребро S_1 изъ точки C_1 радіусомъ, равнымъ cd, въ точкѣ D_1. Очевидно, прямоугольная трапеція $R_1C_1D_1S_1$ равна истинной величинѣ грани $CDRS$. Затѣмъ, изъ точки D_1 засѣчь радіусомъ da ребро P_1 въ точкѣ A_1, и, дойдя до крайняго ребра, произвести тоже построеніе слѣва отъ ребра R_1C_1. Такимъ образомъ получимъ прямолинейную фигуру $P_1\ A_1\ P_1\ A_1$, представляющую развертку усѣченной части данной призмы. Ломанная линія $A_1B_1C_1D_1$ представляетъ преобразованное основаніе призмы.

§ III. Плоскія сѣченія пирамиды.

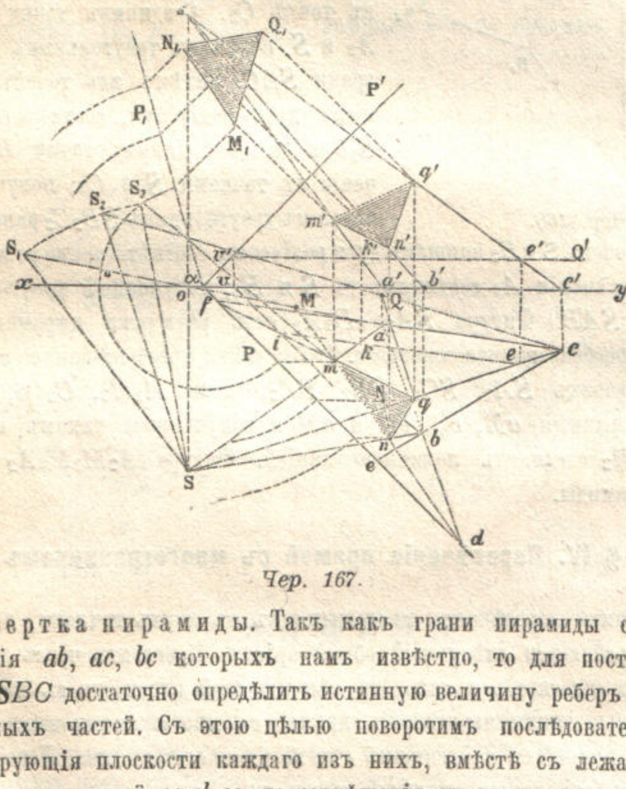
187. Задача. *Пересѣчь наклонную пирамиду какою бы то ни было плоскостью.*

Пусть (*чер. 167*) $sabc$, $s'a'b'c'$ данная треугольная пирамида, поставленная на горизонтальную плоскость своимъ основаніемъ ABC; пусть $P\alpha P'$,—сѣкущая плоскость.

1) Проекціи сѣченія. Какъ и въ случаѣ призмы (**§ 186**), проекціи сѣченія опредѣляются или послѣдовательнымъ построеніемъ точекъ встрѣчи реберъ съ сѣкущею плоскостью (**§ 75**) или, что проще, построеніемъ прямыхъ, по которымъ грани пирамиды пересѣкаются сѣкущею плоскостью. Съ этою послѣдней цѣлью опредѣляютъ двѣ точки искомаго пересѣченія, руководствуясь тѣми же соображеніями, какъ и въ случаѣ призмы. Такъ, въ случаѣ грани (sac, $s'a'c'$), одна изъ точекъ пересѣченія ея плоскости съ плоскостью $P\alpha P'$ будетъ находиться на пересѣченіи ихъ горизонтальныхъ слѣдовъ αP и ac въ точкѣ f. Для полученія другой точки сѣченія, проведемъ вспомогательную горизонтальную плоскость Q' и найдемъ пересѣчіе ея съ плоскостями $P\alpha P'$ и SAC; точка, въ которой встрѣтятся найденныя пересѣченія, и будетъ искомой. Плоскость Q' пересѣкаетъ плоскость $P\alpha P'$ по горизонтали (vi, $v'i'$), а плоскость SAC—по горизонтали (ke, $k'e'$), которая проходитъ чрезъ точки (k, k') и (e, e') встрѣчи плоскости Q' съ ребрами AS и CS.

Горизонтальныя проекціи этихъ горизонталей пересѣкаются въ точкѣ i, принадлежащей искомому пересѣченію плоскостей $P\alpha P'$ и SAB, и потому горизонтальная проекція искомаго пересѣченія есть прямая fi, часть mq которой, заключенная между ребрами SA и SC, и есть горизонтальная проекція пересѣченія грани SAC съ плоскостью PAP'; по mq опредѣлимъ ея вертикальную проекцію $m'q'$ на вертикальныхъ проекціяхъ реберъ AS и SC. Затѣмъ, чтобы найти пересѣченіе грани (sbc,$s'b'c'$) съ плоскостью $P\alpha P'$, замѣтимъ, что точка (q, q') принадлежитъ искомому сѣченію и что тому же сѣченію принадлежитъ и точка e, въ которой встрѣчаются горизонтальные слѣды $\alpha P'$ и bc обѣихъ плоскостей $P\alpha P'$ и SBC. Такимъ образомъ горизонтальная проекція искомаго пересѣченія есть прямая eq, часть которой nq есть горизонтальная проекція сѣченія грани SBC съ плоскостью $P\alpha P'$; по nq опредѣлимъ $n'q'$ на $c's'$ и $b's'$. Наконецъ, сѣченіе грани SAB съ плоскостью $P\alpha P'$, опредѣленное на тѣхъ же соображеніяхъ, есть прямая $(mn, m'n')$. Такимъ образомъ искомыя проекціи сѣченія пирамиды суть треугольники mnp, $m'n'p'$.

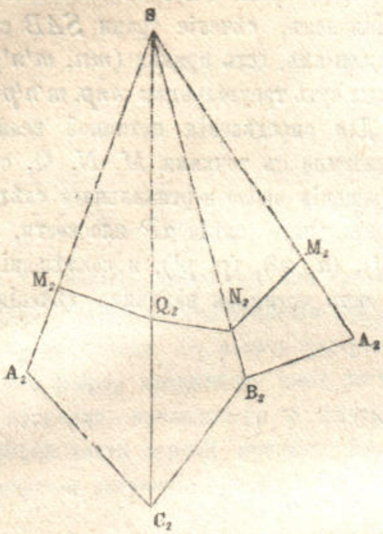
2) Истинная величина сѣченія. Для опредѣленія истинной величины сѣченія, совмѣстимъ плоскость $P\alpha P'$ совмѣстно съ точками M, N, Q, съ вертикальною плоскостью проекцій, при помощи вращенія около вертикальнаго слѣда $\alpha P'$. Для чего найдемъ совмѣщеніе αP_1 горизонтальнаго слѣда αP плоскости, а затѣмъ, при помощи вертикалей точекъ (m, m'), (n, n'), (p, p'), и совмѣщенія этихъ точекъ M_1, N_1, Q_1. Треугольникъ $M_1N_1Q_1$ есть истинная величина сѣченія.



Чер. 167.

3) Развертка пирамиды. Такъ какъ грани пирамиды суть треугольники, основанія ab, ac, bc которыхъ намъ извѣстно, то для построенія граней SAB, SAC, SBC достаточно опредѣлить истинную величину реберъ SA, SB, SC, и ихъ усѣченныхъ частей. Съ этою цѣлью поворотимъ послѣдовательно горизонтально-проектирующія плоскости каждаго изъ нихъ, вмѣстѣ съ лежащими въ нихъ ребрами, около трехъ осей sa, sb, sc, до совмѣщенія съ горизонтальною плоскостью проекцій; для этого достаточно для каждаго ребра найти лишь совмѣщеніе точки (s, s'), ибо другія точки a, b, c реберъ, какъ лежащія на осяхъ вращенія, не измѣнятъ своего положенія.

Такимъ образомъ, совмѣщая плоскость ребра SA, найдемъ по § 116, что точка (s, s') перейдетъ въ S_1, находящуюся на перпендикулярѣ sS_1 къ оси вращенія sa, на разстояніи отъ нея $sS_1 = os'$, и что, слѣдовательно, ребро SA совмѣстится съ прямой S_1a, которая и представитъ его истинную величину. Далѣе точка (m, m') этого ребра совмѣстится съ точкою M, лежащею на перпендикулярѣ mM къ оси вращенія sa и на совмѣщеніи S_1a ребра SA; слѣдовательно, Ma представитъ истинную величину отрѣзка ребра. Поступая подобнымъ образомъ относительно остальныхъ реберъ, найдемъ, что истинная величина ребра SB равна S_3b, а истинная величина ребра SC равна S_2c; что же касается ихъ отрѣзковъ, то ихъ истинная величина, на тѣхъ же соображеніяхъ, какъ и въ первомъ случаѣ, представится прямыми nN и qQ, перпендикулярными къ осямъ вращенія sb и sc. Зная такимъ образомъ всѣ элементы граней, остается построить одну грань возлѣ другой въ послѣдовательномъ порядкѣ. Для чего изъ произвольной точки S (*чер. 168*) проведемъ прямую SA_2, равную S_1a, и изъ точекъ S и A_2 опишемъ дуги радіусами, соотвѣтственно равными S_2c и ac, до ихъ взаимнаго пересѣченія въ точкѣ C_2. Соединивъ точку C_2 съ точками A_2 и S, получимъ треугольникъ SA_2C_2, равный грани SAC. Затѣмъ изъ точекъ S и C_2 опишемъ дуги радіусами, соотвѣтственно равными S_3b и bc, и соединимъ точку B_2 ихъ пересѣченія съ точками S и C_2; полученный такимъ образомъ треугольникъ SB_2C_2 равенъ грани SBC;



Чер. 168.

наконецъ, изъ точекъ S и B_2 опишемъ дуги радіусами, соотвѣтственно равными S_1a и ab и точку ихъ пересѣченія A_2 соединимъ съ S и B_2; полученный треугольникъ SA_2B_2 равенъ грани SAB. Фигура $SA_2C_2B_2A_2$ есть развертка пирамиды, а ломанная $A_2C_2B_2A_2$—преобразованное основаніе. Чтобы найти преобразованное сѣченіе, остается отложить на ребрахъ SA_2, SC_2, SB_2, SA_2, части A_2M_2, C_2Q_2, B_2N_2, A_2M_2, соотвѣственно равныя aM, cQ, bN и aM и полученныя такимъ образомъ точки M_2, Q_2, N_2, M_2 соединить ломанною линіей. Фигура $A_2M_2M_2A_2$ есть развертка усѣченной пирамиды.

§ IV. Пересѣченіе прямой съ многогранникомъ.

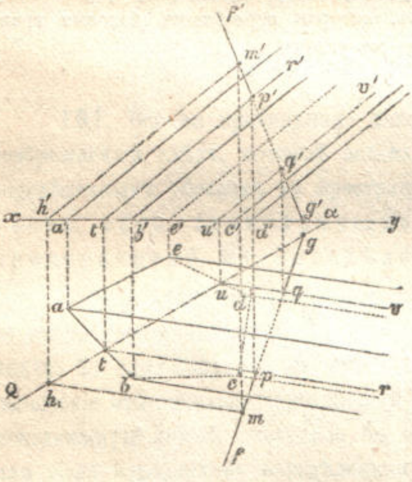
188. Прямая пересѣкаетъ многогранникъ въ двухъ точкахъ, для опредѣленія которыхъ употребляется слѣдующій общій пріемъ. Проводятъ чрезъ данную прямую вспомогательную плоскость и находятъ сѣченіе этой плоскости съ многогранникомъ; очевидно, искомыя точки пересѣченія прямой съ многогранникомъ лежатъ на пересѣченіи данной прямой съ найденнымъ сѣченіемъ многогранника. Легкость построенія зависитъ отъ выбора вспомогательной плоскости.

189. Задача. *Найти точки встрѣчи прямой съ призмой.*

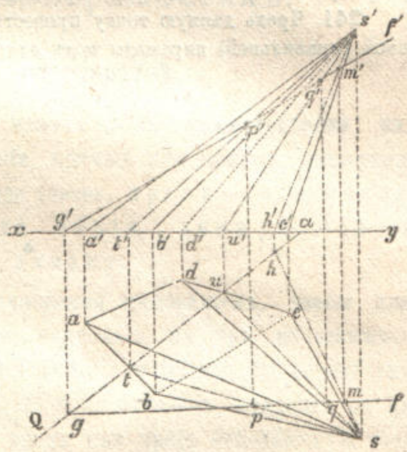
Въ случаѣ призмы за вспомогательную плоскость всего удобнѣе выбрать плоскость, которая, проходя чрезъ данную прямую, была бы параллельна ребру призмы, ибо такая плоскость пересѣчетъ призму по двумъ прямымъ параллельнымъ ребрамъ. Съ этой цѣлью, взявъ на данной прямой $(gf, g'f')$ (*чер. 169*) точку (m, m'), проведемъ чрезъ нее прямую $(mh, m'h')$, параллельную ребру призмы, и чрезъ двѣ пересѣкающіяся прямыя FG и MN—сѣкущую плоскость, горизонтальный слѣдъ которой есть прямая gh, проходящая чрезъ горизонтальные слѣды h и g прямыхъ GF и MH. Этотъ слѣдъ пересѣкаетъ основаніе призмы $abcde$ въ точкахъ t и u, а слѣдовательно, сама плоскость пересѣчетъ призму по прямымъ $(tr, t'r')$ и $(uv, u'v')$, параллельнымъ ребру призмы. Въ свою очередь прямыя **TR** и **UV** пересѣкаютъ данную прямую въ точкахъ $(q.q')$ и $(p.p')$, которыя и суть искомыя.

190. Задача. *Найти точки встрѣчи прямой съ пирамидой.*

Въ случаѣ пирамиды вспомогательную плоскость должно провести чрезъ данную прямую и вершину пирамиды, ибо такая плоскость пересѣчетъ пирамиду по двумъ прямымъ лежащимъ на граняхъ пирамиды. На этомъ основанiи для проведенiя вспомогательной плоскости возьмемъ на данной прямой $(gf, g'f')$ (*чер 170*) точку (m, m') и соединяемъ ее съ вершиною пирамиды (s, s') прямою $(ms, m's')$. Плоскость, проходящая чрезъ двѣ пересѣкающiяся прямыя GF и MS, и есть требуемая вспомогательная. Горизонтальный слѣдъ ея gh пересѣчетъ основанiе пирамиды въ точкахъ t и u, а слѣдовательно, сама плоскость пересѣчетъ пирамиду по прямымъ $(ts, t's')$ и $(us, u's')$. Въ свою очередь эти послѣднiя прямыя пересѣкаются данною прямою въ точкахъ (p, p') и (q, q'), которыя и суть искомыя.



Чер. 169.



Чер. 170.

ЗАДАЧИ.

225. Пересѣчь кубъ, поставленный на горизонтальную плоскость проекцiй плоскостью, проходящей чрезъ его центръ и средины двухъ смежныхъ реберъ.

226. Правильная пятиугольная призма положена своею боковою гранью на горизонтальную плоскость такъ, что ребра ея составляютъ съ вертикальною плоскостью проекцiй уголъ 36°. Требуется построить: 1) проекцiи призмы; 2) сѣченiе ея плоскостью, перпендикулярною къ вертикальной плоскости проекцiй и наклонною къ горизонтальной подъ угломъ 30°; 3) истинную величину сѣченiя.

227. Построить развертку пирамиды, усѣченной плоскостью, проходящею чрезъ ось проекцiй и точку, взятую на ребрѣ.

228. Построить развертку призмы, усѣченной плоскостью, проходящею чрезъ одну изъ сторонъ основанiя и составляющей данный уголъ съ горизонтальною плоскостью проекцiй.

229. Построить развертку призмы, усѣченной плоскостью, параллельною оси.

230. По данной разверткѣ призмы и пирамиды по троть ихъ проекцiи.

231. Осьмигранникъ, дiагональ котораго вертикальна, пересѣчь плоскостью, перпендикулярною къ горизонтальной плоскости проекцiй.

232. Найти точки встрѣчи прямой съ параллепипедомъ.

233. Построить развертку всѣхъ правильныхъ многогранниковъ.

234. Пересѣчь октаэдръ, діагональ котораго вертикальна, плоскостью, проходящею чрезъ ось и центръ его.

235. Дана правильная треугольная пирамида, поставленная основаніемъ своимъ ABC на горизонтальную плоскость. Пересѣчь эту пирамиду плоскостью, которая проходитъ чрезъ середину ея высоты, параллельна AB и составляетъ съ горизонтальною плоскостью уголъ въ 45°.

236. Дана правильная треугольная пирамида, поставленная основаніемъ своимъ ABC на горизонтальную плоскость проекцій. Пересѣчь эту пирамиду плоскостью биссектора двуграннаго угла, имѣющаго своимъ ребромъ сторону основанія BC.

237. Провести чрезъ данную точку плоскость, которая пересѣкаетъ данный прямой параллепипедъ по квадрату.

238. Чрезъ данную точку провести плоскость, которая пересѣкаетъ боковыя ребра данной треугольной пирамиды подъ однимъ и тѣмъ же угломъ.

239. Чрезъ точку, данную на ребрѣ треугольной пирамиды, провести плоскость такъ, чтобы она пересѣкала пирамиду по равнобедренному треугольнику съ данною стороною.

240. Дана треугольная пирамида и прямая на одной изъ ея граней; провести чрезъ эту прямую плоскость, которая пересѣкаетъ эту пирамиду по прямоугольному треугольнику.

241. Чрезъ данную точку провести плоскость, которая пересѣкаетъ боковыя грани данной (правильной) пирамиды подъ однимъ и тѣмъ же угломъ.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ.

О ПОВЕРХНОСТЯХЪ.

ГЛАВА I.

Общія понятія о поверхностяхъ.

§ I. Классификація поверхностей.

191. Всякая правильная поверхность можетъ быть разсматриваема, какъ воображаемый слѣдъ, который оставляютъ линіи, прямыя или кривыя, движущіяся опредѣленнымъ образомъ въ пространствѣ; иначе говоря, правильная поверхность есть геометрическое мѣсто линіи, движущейся въ пространствѣ по опредѣленному закону.

Законъ движенія линіи выражается обыкновенно требованіемъ, чтобы линія во время своего движенія: 1) или, постоянно опиралась на три неподвижныхъ линіи; 2) или, опираясь на двѣ неподвижныхъ линіи, сохраняла бы опредѣленное положеніе относительно неподвижной плоскости; 3) или, наконецъ, опираясь на одну неподвижную линію, проходила бы въ то же время или чрезъ неподвижную точку, или была параллельна опредѣленному направленію, ибо во всѣхъ этихъ случаяхъ линія имѣетъ въ пространствѣ только одно, вполнѣ опредѣленное, движеніе.

Движущаяся линія, которая своимъ движеніемъ образуетъ поверхность, называется *производящею;* а неподвижныя линіи, которыя управляютъ движеніемъ производящей,—*направляющими.*

192. Всѣ правильныя поверхности по виду производящей могутъ быть раздѣлены на два класса: на поверхности *линейчатыя*, производящая которыхъ есть *прямая линія,* и на поверхности *кривыя,* производящая которыхъ есть *кривая линія.*

Въ свою очередь поверхности линейчатыя раздѣляются на два разряда: на поверхности А) *развертывающіяся* и В) *косыя.*

Развертывающіяся поверхности имѣютъ своею производящей прямую, которая двигается такъ, что два ея смежныхъ положенія лежатъ въ одной плоскости, т. е. пересѣкаются въ одной точкѣ, конечной или безконечно-удаленной. Рядъ точекъ, въ которыхъ пересѣкаются послѣдовательныя производящія, образуютъ кривую двойной кривизны извѣстную подъ именемъ *кривой возврата.*

Отсюда слѣдуетъ, что въ общемъ случаѣ всѣ развертывающіяся поверхности могутъ быть произведены прямою, которая во время своего движенія остается постоянно касательной къ кривой возврата, и что всѣ развертывающіяся поверхности могутъ быть уложены на плоскость безъ разрыва и складокъ.

Косыя поверхности имѣютъ своей производящею прямую, которая двигается такъ, что каждыя два ея смежныя положенія не лежатъ въ одной плоскости. Въ общемъ случаѣ всѣ косыя поверхности могутъ быть произведены или движеніемъ прямой по тремъ направляющимъ, или движеніемъ прямой по двумъ направляющимъ, но такъ, что производящая въ каждомъ своемъ положеніи находится въ одинаковомъ положеніи въ отношеніи третьей направляющей.

193 Частные виды развертывающихся поверхностей суть поверхности *цилиндрическія* и *коническія*.

Цилиндрическія поверхности имѣютъ своею производящей прямую, которая во время движенія постоянно опирается на направляющую—сомкнутую или разомкнутую кривую—и остается въ тоже время параллельной данному направленію, не лежащему въ плоскости направляющей (въ противномъ случаѣ цилиндрическая поверхность обращается въ плоскость). Отсюда заключаемъ, что кривая возврата въ цилиндрической поверхности есть точка, лежащая на безконечности.

Коническая поверхность имѣетъ своею производящей прямую, которая во время движенія постоянно опирается на направляющую—сомкнутую или разомкнутую кривую—и въ то же время проходитъ чрезъ неподвижную точку, не лежащую въ плоскости направляющей (въ противномъ случаѣ коническая поверхность обращается въ плоскость).

Отсюда заключаемъ, что кривая возврата въ конической поверхности есть конечная точка.

При неопредѣленной длинѣ производящей коническая поверхность состоитъ изъ двухъ частей, соединяющихся между собою въ неподвижной точкѣ. Эти части называются *полами* конической поверхности, а неподвижная точка—*вершиною* ея.

194. Частные виды косыхъ поверхностей суть слѣдующіе:

1) *Однополый гиперболоидъ*, поверхность котораго образуется движеніемъ прямой по тремъ скрещивающимся прямымъ.

2) *Гиперболическій параболоидъ*, поверхность котораго образуется движеніемъ прямой параллельно постоянной плоскости по двумъ скрещивающимся прямымъ.

3) *Коноидъ*, поверхность котораго образуется движеніемъ прямой параллельно постоянной плоскости по двумъ направляющимъ: прямой и кривой.

4) *Цилиндроидъ*, поверхность котораго образуется движеніемъ прямой параллельно постоянной плоскости по двумъ кривымъ направляющимъ.

5) *Прямая винтовая поверхность* образуется движеніемъ прямой по двумъ направляющимъ—винтовой линіи и оси ея, при чемъ производящая составляетъ прямой уголъ съ осью винта.

6) *Косая винтовая поверхность* образуется движеніемъ прямой по двумъ направляющимъ—винтовой линіи и оси ея, при чемъ производящая составляетъ съ осью постоянный острый уголъ.

На основаніи предыдущаго, классификацію поверхностей можно представить слѣдующей таблицей.

ПРАВИЛЬНЫЯ ПОВЕРХНОСТИ.		
I классъ. ЛИНЕЙЧАТЫЯ ПОВЕРХНОСТИ.		II классъ.
A. Развертывающіяся поверхности.	B. Косыя поверхности.	КРИВЫЯ ПОВЕРХНОСТИ.
1. Цилиндрическія. 2. Коническія.	1. Однополый гиперболоидъ. 2. Гиперболическій параболоидъ. 3. Коноидъ. 4. Цилиндроидъ. 5 Винтовыя поверхности.	

195. Для удобства изслѣдованія, изъ правильныхъ поверхностей, только что классифицированныхъ нами, выдѣляютъ особый классъ поверхностей, образованныхъ по одному и тому же закону; именно—*поверхности вращенія.*

Поверхности вращенія производятся вращеніемъ какой-либо производящей—прямой или кривой, около неподвижной прямой, называемой *осью* поверхности.

Изъ сказаннаго видно, что каждая точка производящей описываетъ около оси окружность, лежащую въ плоскости, перпендикулярной къ этой оси (**§ 101**), и что, слѣдовательно, всякая плоскость, перпендикулярная къ оси, пересѣкаетъ поверхность вращенія по окружности. Такія окружности называются *параллелями*; при чемъ наибольшая изъ нихъ называется *экваторомъ*, наименьшая—*горломъ*.

Съ другой стороны, изъ того же опредѣленія видно, что всѣ плоскости, проходящія чрезъ ось поверхности, пересѣкаютъ поверхность по кривымъ, равнымъ между собою. Каждая изъ этихъ кривыхъ называется *меридіанальнымъ сѣченіемъ*.

196. Частные виды поверхностей вращенія получаютъ свое названіе отъ вида кривой меридіанальнаго сѣченія.

Изъ нихъ наиболѣе замѣчательные суть слѣдующіе:

1) *Шаръ.* Кривая меридіанальнаго сѣченія есть окружность, а ось поверхности—діаметръ этой окружности.

2) *Эллипсоидъ вращенія.* Кривая меридіанальнаго сѣченія есть эллипсъ, а ось поверхности—одна изъ главныхъ его осей.

3) *Гиперболоидъ.* Кривая меридіанальнаго сѣченія есть гипербола, а ось поверхности или мнимая, или дѣйствительная ось гиперболы; въ первомъ случаѣ гиперболоидъ называется однополымъ, во второмъ—двуполымъ.

4) *Параболоидъ.* Кривая меридіанальнаго сѣченія есть парабола, а ось поверхности—ось параболы.

5) *Цилиндръ вращенія.* Кривая меридіанальнаго сѣченія есть прямая, параллельная оси поверхности.

Цилиндръ вращенія есть частный случай цилиндрической поверхности, когда направляющая есть кругъ, а производящая—прямая, перпендикулярная въ плоскости этого круга.

6) *Конусъ вращенія.* Кривая меридіанальнаго сѣченія, представляетъ прямыя, пересѣкающія ось поверхности въ одной и той же точкѣ. Конусъ вращенія можно разсматривать, какъ частный случай конической поверхности, когда направляющая есть кругъ, а постоянная точка находится на перпендикулярѣ къ плоскости круга, возстановленномъ изъ центра его.

197. Всякая изъ разсмотрѣнныхъ нами поверхностей можетъ быть образована нѣсколькими способами и можетъ имѣть, слѣд., нѣсколько различныхъ производящихъ и нѣсколько различныхъ направляющихъ; ибо, если на разъ образованной поверхности, напр., цилиндрической, начертимъ произвольную кривую, то ничто намъ не мѣшаетъ принять эту кривую за новую направляющую. Выборъ того или иного способа образованія поверхности обусловливается удобствомъ рѣшенія тѣхъ или иныхъ вопросовъ.

198. *Слѣдомъ* поверхности называется линія, по которой поверхность пересѣкаетъ плоскости проекцій; такимъ образомъ, вообще говоря, каждая поверхность имѣетъ два слѣда—горизонтальный и вертикальный.

Слѣды поверхностей въ большинствѣ случаевъ выбираются за направляющія.

§ II. Заданіе поверхностей.

199. Задать поверхность значитъ дать условія, которыя даютъ возможность опредѣлить каждую точку, принадлежащую поверхности.

Съ этой цѣлью, вообще говоря, достаточно дать проекціи производящей и направляющихъ, но эти послѣднія должно выбирать такимъ образомъ, чтобы онѣ съ перваго взгляда на чертежъ опредѣляли бы по возможности видъ поверхности и были бы наиболѣе удобны при графическихъ построеніяхъ.

Такимъ образомъ поверхности, которыя подлежатъ нашему изученію, задаются обыкновенно слѣдующимъ образомъ:

1) Цилиндрическія поверхности—горизонтальнымъ слѣдомъ, разсматриваемымъ какъ направляющая, и направленіемъ производящей.

2) Коническія поверхности—горизонтальнымъ слѣдомъ, принятымъ за направляющую, и проекціями вершины.

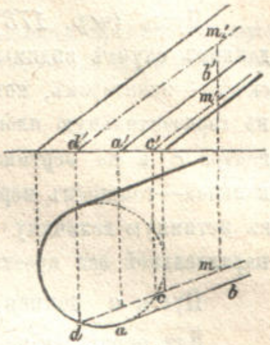
3) Поверхности вращенія въ случаѣ, когда ось поверхности перпендикулярна къ горизонтальной плоскости проекцій—осью и меридіальнымъ сѣченіемъ, параллельнымъ вертикальной плоскости проекцій, или, такъ называемымъ, *главнымъ меридіаномъ*.

200. Такого, однако, заданія бываетъ недостаточно для опредѣленія вида поверхности, и потому въ тѣхъ случаяхъ, когда поверхность не распространяется безгранично во всѣ стороны, чертятъ на каждой изъ плоскостей проекцій видимый очеркъ поверхности, т. е. тотъ видъ, который имѣетъ поверхность на плоскости проекцій для наблюдателя, удаленнаго на безконечно большое разстояніе отъ плоскости (**§ 158**).

201. Докажемъ теперь, что вышеприведенныя данныя достаточны для опредѣленія точекъ, принадлежащихъ поверхности.

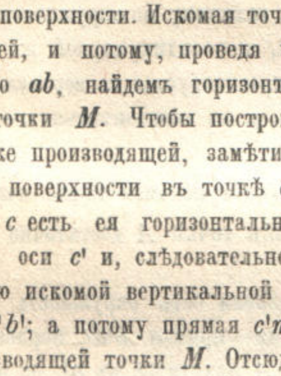
Задача. *Цилиндрическая поверхность задана горизонтальнымъ слѣдомъ и направленіемъ производящей; опредѣлить на ней точку, которая имѣетъ одною своею проекціей данную точку.*

На *чертежѣ 171* цилиндрическая поверхность представлена своимъ видимымъ очеркомъ, при чемъ кривая *adc* есть горизонтальный слѣдъ поверхности, (ab, $a'b'$)—крайнее положеніе производящей, *m* —данная точка, принятая за горизонтальную проекцію искомой точки. Задача сводится къ опредѣленію вертикальной проекціи точки *M* подъ тѣмъ условіемъ, чтобы точка *M* принадлежала поверхности. Искомая точка должна лежать на производящей, и потому, проведя чрезъ *m* прямую *mc* параллельно *ab*, найдемъ горизонтальную проекцію прозводящей точки *M*. Чтобы построить вертикальную проекцію той-же производящей, замѣтимъ, что *mc* пересѣкаетъ слѣдъ поверхности въ точкѣ *c* и что, слѣдовательно, точка *c* есть ея горизонтальный слѣдъ. По *c* опредѣлимъ на оси c' и, слѣдовательно, найдемъ точку, принадлежащую искомой вертикальной проекціи производящей направленіе которой параллельно $a'b'$; а потому прямая $c'm'$, параллельная $a'b'$ и есть вертикальная проекція производящей точки *M*. Отсюда заключаемъ, что вертикальная проекція точки *M* находится въ точкѣ m' на пересѣченіи $c'm'$ съ перпендикуляромъ mm' къ оси xy.



Чер. 171.

Задача имѣетъ два рѣшенія, ибо производящая *cm* встрѣчаетъ слѣдъ поверхности еще въ точкѣ (d, d'), которой соотвѣтствуетъ производящая (dm, $d'm'_1$) и точка (m, m'_1).



Чер. 172.

Чер. 173.

202. Задача. *Коническая поверхность задана горизонтальнымъ слѣдомъ и проекціями вершины; опредѣлить на ней точку, которая имѣла бы одною своею проекціей данную точку.*

На *чертежѣ 172* коническая поверхность представлена своимъ видимымъ очеркомъ; при чемъ кривая *ab* есть горизонтальный слѣдъ поверхности, точка (s, s')—вершина ея, *m*—данная горизонтальная проекція искомой точки поверхности.

Искомая точка должна находиться на производящей, которая имѣетъ своею горизонтальной проекціей прямую *sm*, соединяющую точку *m* съ горизонтальною проекцiею s вершины, а своимъ горизонтальнымъ слѣдомъ—точку a; по a опредѣлимъ на оси a', и такимъ образомъ найдемъ вертикальную проекцiю $s'a'$ производящей искомой точки, а потому искомая вертикальная проекцiя m' точки M будетъ находиться на пересѣченiи $s'a'$ съ перпендикуляромъ mm' къ оси.

Вопросу удовлетворяетъ еще производящая (sb, $s'b'$) и точка (m, m'_1).

203. Задача. *Поверхность вращенія, ось которой перпендикулярна къ горизонтальной плоскости, задана осью и главнымъ меридіаномъ. Опредѣлить точку на поверхности по данной одной изъ ея проекцій,*

Пусть (*чер. 173*) c—горизонтальная проекцiя оси, $o'c'$—вертикальная; въ данномъ случаѣ видимый очеркъ поверхности ограниченъ: на горизонтальной плоскости—экваторомъ, который, какъ и всякая параллель поверхности, проектируется на горизонтальную плоскость въ истинную величину по окружности, описанной изъ центра c, а на вертикальную—по прямой, перпендикулярной къ $o'c'$; на вертикальной—главнымъ меридiаномъ, который проектируется на вертикальную плоскость въ истинную величину по кривой $b'd'b_1'd'_1$, а на горизонтальную—по прямой mn, параллельной оси проекцiй.

Пусть a—данная горизонтальная проекцiя искомой точки поверхности.

Для опредѣленiя вертикальной проекцiи точки A достаточно найти проекцiи параллели, на которой лежитъ точка A.

Горизонтальная проекцiя такой параллели есть окружность abd, описанная изъ центра c радiусомъ ca, а вертикальная—прямая $b'd'$, перпендикулярная къ оси $c'o'$. А потому искомая проекцiя точки A находится въ a', на пересѣченiи $d'b'$ съ перпендикуляромъ aa' къ оси xy.

Условiю задачи удовлетворяетъ еще параллель (bd, $b'_1d'_1$) и точка (a, a'_1).

Если дана вертикальная проекцiя a' искомой точки, то, построивъ проекцiи (bd, $b'd'$) ея параллели, найдемъ тоже двѣ точки (a, a') и (a_1, a'_1), удовлетворяющiя вопросу.

ЗАДАЧИ.

242. Даны слѣдъ цилиндрической поверхности и направленiе производящей; найти другой слѣдъ поверхности.

243. Цилиндрическая поверхность задана слѣдомъ и направленiемъ производящей.

Опредѣлить—лежитъ ли точка, данная проекцiями, на поверхности.

244. Между вертикальными проекцiями крайнихъ производящихъ данной цилиндрической поверхности начерчена кривая линiя; принявъ ее за вертикальную проекцiю кривой, лежащей на поверхности, опредѣлить ея горизонтальную проекцiю.

245. Найти горизонтальный слѣдъ цилиндра вращенiя, ось котораго и радiусъ извѣстны.

246. Найти горизонтальный слѣдъ цилиндра вращенiя, ось котораго и положенiе одной производящей извѣстны.

247. Даны вершина и слѣдъ конической поверхности, найти другой слѣдъ поверхности.

248. Коническая поверхность дана слѣдомъ и проекцiями вершины; узнать, находится ли точка, данная проекцiями, на поверхности.

249. Чрезъ вершину конуса провести прямую и опредѣлить, находится ли эта прямая на поверхности.

250. Между горизонтальными проекцiями крайнихъ производящихъ данной конической поверхности начерчена кривая, принявъ ее за горизонтальную проекцiю кривой, лежащей на поверхности, найти вертикальную проекцiю кривой.

251. Найти слѣдъ конуса вращенія, если извѣстны проекціи его оси и радіусъ основанія.

252. Найти слѣдъ конуса вращенія, если извѣстны проекціи его оси и уголъ производящей съ осью.

253. Даны—кривая своими проекціями, вертикальная ось и горизонтальная проекція точки. Найти вертикальную проекцію точки подъ условіемъ, чтобы она лежала на поверхности вращенія, образованной вращеніемъ кривой около оси.

254. Направляющими поверхности служатъ окружность, лежащая въ горизонтальной плоскости, и прямая, параллельная оси xy, при чемъ производящая остается постоянно въ плоскости профиля. Взять точку на такой поверхности.

255. Дана ось, перпендикулярная къ горизонтальной плоскости проекцій, и кругъ плоскости оси. Взять точку на поверхности, которая образуется отъ вращенія круга около оси.

ГЛАВА II.

Плоскости касательныя къ поверхностямъ.

§ I. Свойства плоскостей, касательныхъ къ поверхностямъ.

204. Теорема. *Всѣ касательныя, проведенныя въ данной на поверхности точкѣ къ различнымъ кривымъ. начерченнымъ на той же поверхности чрезъ ту же точку, лежатъ въ одной и той же плоскости, называемой касательною плоскостью.*

Пусть (*чер. 174*) M—данная на поверхности точка, пусть AA', BB', CC'—кривыя, начерченныя на поверхности чрезъ точку M, MT, MQ, MP—касательныя къ нимъ. Докажемъ, что касательныя MT, MQ, MP лежатъ въ одной плоскости; для чего проведемъ чрезъ касательную MT сѣкущую плоскость V, которая пересѣчетъ кривыя CC' и BB' въ точкахъ n и m и которая, слѣдовательно, содержитъ хорды Mm и Mn; затѣмъ, станемъ вращать эту плоскость около MT до тѣхъ поръ, пока точки m и n не приблизятся безконечно близко къ точкѣ M; въ этотъ моментъ хорды Mm и Mn, находящіяся въ плоскости V во всѣхъ ея положеніяхъ, перейдутъ къ своему предѣлу и обратятся въ касательныя MQ и MP къ кривымъ CC' и BB'. Отсюда заключаемъ, что три касательныя—MT, MQ, MP, лежатъ въ одной плоскости V.

Чер. 174.

Такимъ же образомъ легко показать, что какая-либо четвертая касательная находится въ одной плоскости съ двумя изъ трехъ касательныхъ, разсмотрѣнныхъ нами, и что, слѣдовательно, четыре касательныхъ лежатъ въ одной плоскости и т. д.

205. Отсюда вытекаетъ, во-первыхъ, слѣдующее опредѣленіе касательной плоскости:

Касательная плоскость въ точкѣ данной на поверхности есть геометрическое мѣсто касательныхъ, построенныхъ въ той же точкѣ къ различнымъ кривымъ, начерченнымъ на поверхности.

Во-вторыхъ, слѣдующее общее правило для построенія плоскости, касательной къ какой бы то ни было поверхности.

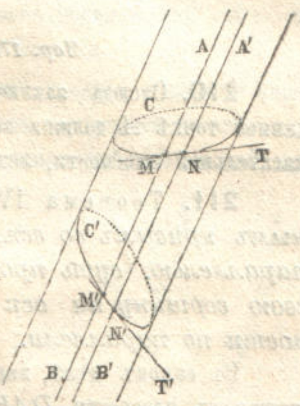
Для построенія плоскости, касательной къ поверхности въ данной точкѣ, достаточно чрезъ данную точку провести двѣ касательныя къ двумъ кривымъ, начерченнымъ чрезъ ту же точку на поверхности, и чрезъ эти касательныя провести и плоскость.

206. Это правило, примѣнимое вообще къ кривымъ поверхностямъ, упрощается въ случаѣ поверхностей линейчатыхъ. Дѣйствительно, въ линейчатыхъ поверхностяхъ чрезъ каждую точку на поверхности проходитъ прямая производящая, которая сама къ себѣ касательна, и потому для проведенія плоскостей, касательныхъ къ линейчатымъ поверхностямъ, достаточно провести чрезъ данную точку одну кривую и чрезъ касательную къ ней и прямолинейную производящую данной точки провести плоскость.

Въ свою очередь это послѣднее правило, примѣнимое въ случаѣ косыхъ линейчатыхъ поверхностей, упрощается въ случаѣ поверхностей развертывающихся. Въ самомъ дѣлѣ, докажемъ:

207. Теорема II. *Плоскость касательная въ точкѣ М, данной на развертывающейся поверхности, касается къ поверхности въ каждой точкѣ, взятой на производящей точки касанія и, слѣдовательно, касается къ поверхности по всей производящей.*

Для доказательства теоремы, очевидно, необходимо показать, что плоскость, касательная къ развертывающейся поверхности въ точкѣ M, (*чер. 175*) сливается съ плоскостью, касательною къ той же поверхности въ какой-либо точкѣ M' взятой на производящей AB точки M. По опредѣленію, касательная плоскость въ въ точкѣ M проходитъ чрезъ производящую AB и касательную MT съ кривой C, начерченной на поверхности; на томъ же основаніи, касательная плоскость въ точкѣ M' проходитъ чрезъ AB и касательную $M'F'$ къ кривой C'. И потому для доказательства теоремы достаточно показать, что касательныя MT и $M'T'$ лежатъ въ одной плоскости.



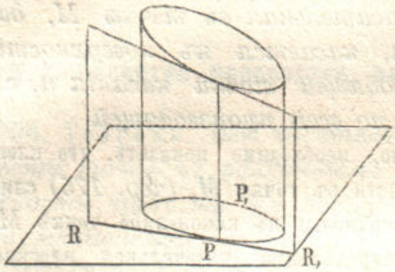
Чер. 175.

Въ самомъ дѣлѣ, если проведемъ производящую $A'B'$, безконечно близкую къ AB, и опредѣлимъ точки N и N', въ которыхъ она пересѣкаетъ C и C', то легко увидимъ, что прямолинейные элементы MN и $M'N'$ и, слѣд., опредѣляемыя ими касательныя MT и $M'T'$, лежатъ въ одной плоскости, ибо, по опредѣленію развертывающейся поверхности, производящія AB и $A'B'$ лежатъ въ одной плоскости.

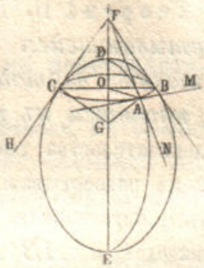
208. На основаніи доказанной теоремы, выводимъ слѣдующее правило: для построенія плоскости, касательной въ данной точкѣ къ развертывающейся поверхности, достаточно провести плоскость чрезъ производящую данной точки и касательную *къ какой-либо кривой*, начерченной на поверхности, въ точкѣ ея пересѣченія съ производящей точки касанія. Отсюда заключаемъ, что плоскость, касательная къ развертывающейся поверхности въ какой-либо точкѣ M (*чер. 176*), должна проходить чрезъ производящую MP этой точки и касательную RR_1 къ слѣду PP_1 поверхности въ точкѣ P пересѣченія его съ производящей точки касанія.

209. Теорема III. *Плоскость, касательная къ поверхности вращенія въ точкѣ А, перпендикулярна къ меридіанальной плоскости, проходящей чрезъ точку касанія.*

По правилу **§ 205**, плоскость, касательная въ A (*чер. 177*) къ поверхности вращенія, опредѣляется касательными въ этой точкѣ къ двумъ кривымъ, начерченнымъ на поверхности, и, слѣдовательно, содержитъ касательныя AM и AN, проведенныя въ точкѣ A, къ параллели CAB и меридіану DAE точки касанія. Для доказательства теоремы замѣтимъ, что касательная AM перпендикулярна къ плоскости меридіана DAE, ибо она лежитъ въ плоскости параллели CAD, перпендикулярной къ плоскости меридіана DAE (такъ какъ всѣ параллели перпендикулярны къ оси ED, лежащей въ меридіальной плоскости), и перпендикулярна къ прямой OA ихъ пересѣченія, какъ къ радіусу; а потому и касательная плоскость, какъ проходящая чрезъ перпендикуляръ AM къ плоскости DAE, сама перпендикулярна къ плоскости DAE, (Геометрія Давыдова, § 209).



Чер. 176.



Чер. 177.

210. Отсюда заключаемъ, что нормаль AG къ поверхности вращенія въ данной точкѣ A должна встрѣчать ось вращенія, ибо, будучи перпендикулярна къ касательной плоскости, лежитъ въ плоскости меридіана.

211. Теорема IV. *Касательныя, проведенныя къ меридіанальнымъ кривымъ во всѣхъ точкахъ встрѣчи ихъ съ одной и той же параллелью, суть производящія конуса вращенія, который имѣетъ свою вершину на оси поверхности и который касается къ поверхности по параллели.*

Въ самомъ дѣлѣ, касательная AN (*чер. 177*) къ меридіану DE, какъ лежащая въ плоскости DAE, встрѣчаетъ ось поверхности въ точкѣ F, а потому, при вращеніи меридіанальной плоскости около оси DE, меридіанъ DAE произведетъ поверхность вращенія, точка A опишетъ параллель CB, точка F остается неподвижной, прямая же AF, оставаясь касательной къ меридіанальному сѣченію, произведетъ конусъ вращенія, касательный къ поверхности по параллели BC.

Отсюда заключаемъ, что плоскость, касательная къ поверхности вращенія въ какой-либо точкѣ, будетъ въ то же время касательна и къ конусу, касательному къ поверхности по параллели точки касанія.

212. Теорема V. *Касательныя, проведенныя къ параллелямъ во всѣхъ точкахъ встрѣчи ихъ съ однимъ и тѣмъ же меридіанальнымъ сѣченіемъ, суть производящія цилиндрической поверхности, касающейся поверхности вращенія по данному меридіану.*

Ибо касательныя къ параллели, напр., AM (*чер. 177*), перпендикулярны къ одному и тому же меридіану.

Отсюда заключаемъ, что плоскость, касательная къ поверхности вращенія въ данной точкѣ, сливается съ плоскостью касательною къ цилиндрической поверхности, касающейся къ поверхности вращенія по меридіану данной точки.

213. Итакъ, чтобы провести плоскость, касательную къ поверхности вращенія въ данной точкѣ A, достаточно провести плоскость:

1) Перпендикулярную къ нормали AG.

2) Касательную къ конусу, касательному къ поверхности вращенія по параллели точки касанія.

3) Касательную къ цилиндру, касательному къ поверхности вращенія по меридіану точки касанія.

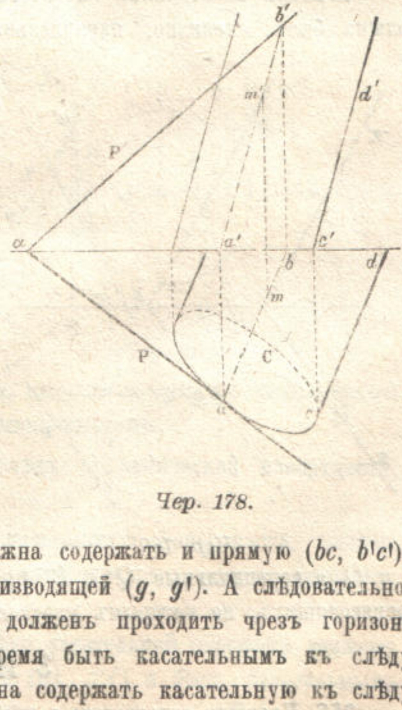
§ II. Плоскости, касательныя къ цилиндрическимъ поверхностямъ.

214. Плоскость, касательная къ цилиндрической поверхности, какъ къ поверхности развертывающейся, содержитъ **§ 208** производящую точки касанія и касательную къ слѣду поверхности въ точкѣ его пересѣченія съ производящей точки касанія. На этомъ основаніи построеніе касательныхъ плоскостей къ цилиндрическимъ поверхностямъ производится въ главнѣйшихъ частныхъ случаяхъ слѣдующимъ образомъ.

Задача I. *Провести плоскость, касательную къ цилиндрической поверхности, чрезъ точку, данную на поверхности.*

Пусть (*чер. 178*) C—горизонтальный слѣдъ поверхности и $(cd, c'd')$—ея производящая, пусть m—горизонтальная проекція точки касанія.

По **§ 201**, построимъ производящую $(ab, a'b')$ точки касанія и на $a'b'$ опредѣлимъ вертикальную проекцію m' точки касанія; затѣмъ проведемъ касательную Pa къ слѣду C въ точкѣ a, и чрезъ двѣ пересѣкающіяся прямыя $(ab, a'b')$ и (aP, xy) проведемъ плоскость; эта плоскость и будетъ требуемая. Горизонтальный слѣдъ ея αP совпадаетъ съ касательной $P\alpha$, а вертикальный $\alpha P'$ пройдетъ чрезъ точку α и вертикальный слѣдъ (b, b') производящей $(ab, a'b')$. Слѣдовательно, плоскость $P\alpha P'$ есть искомая.

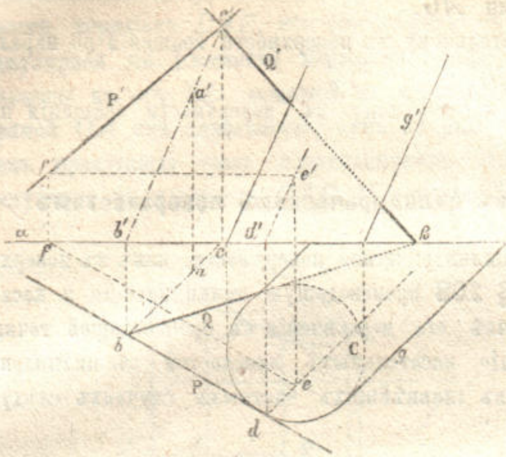


Чер. 178.

215. Задача II. *Провести плоскость, касательную къ цилиндрической поверхности, чрезъ точку данную внѣ поверхности.*

Пусть (*чер. 179*) C—слѣдъ цилиндрической поверхности, (g, g')—направленіе производящей; (a, a')—данная точка.

Такъ какъ искомая касательная плоскость должна содержать одну изъ производящихъ поверхности и проходить въ то же время чрезъ точку A, то такая плоскость должна содержать и прямую $(bc, b'c')$, проведенную черезъ точку A параллельно производящей (g, g'). А слѣдовательно, горизонтальный слѣдъ касательной плоскости долженъ проходить чрезъ горизонтальный слѣдъ b прямой BC и въ то же время быть касательнымъ къ слѣду C поверхности, ибо касательная плоскость должна содержать касательную къ слѣду цилиндрической поверхности. На этомъ основаніи найдемъ, что касательныя bP и bQ, проведенныя чрезъ точку b къ кривой C, суть горизонтальные слѣды искомыхъ плоскостей; вертикальные же ихъ слѣды должны проходить чрезъ вертикальный слѣдъ c' прямой BC. И потому плоскости $P\alpha P'$ и $Q\beta Q'$—суть искомыя.



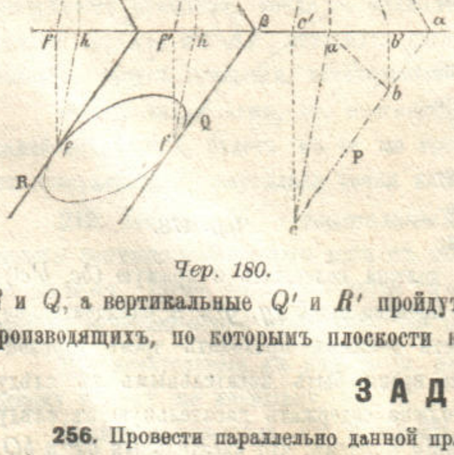
Чер. 179.

Если горизонтальный слѣдъ одной изъ касательныхъ плоскостей, напримѣръ, αP, не встрѣчаетъ ось xy въ предѣлахъ эпюра, то положеніе ея вертикальнаго слѣда можетъ быть опредѣлено при помощи горизонтали касательной плоскости. Для чего находятъ производящую (de, $d'e'$), по которой искомая плоскость касается къ поверхности, и чрезъ какую-либо точку ея, наприм., (e, e'), проводятъ горизонталь (ef, $e'f'$). Такимъ образомъ находимъ вертикальный слѣдъ f' горизонтали EF. Этотъ же пріемъ употребляютъ, когда вертикальный слѣдъ c' прямой BC лежитъ внѣ предѣловъ эпюра.

216. Задача III. *Провести плоскость, касательную къ цилиндрической поверхности и параллельную данной прямой.*

Пусть (*чер. 180*) ff—слѣдъ поверхности, (fh, $f'h'$)—направленіе производящей, (ab, $a'b'$)—данная прямая.

Искомая касательная плоскость, какъ содержащая производящую поверхности, должна быть, очевидно, параллельна плоскости $P\alpha P'$, проходящей чрезъ данную прямую (ab, $a'b'$) и прямую (ac, $a'c'$), проведенную чрезъ какую-либо точку, наприм., (a, a'), прямой AB, параллельно производящей (fh, $f'h'$) (**§ 69**).



Чер. 180.

Отсюда заключаемъ, что горизонтальный слѣдъ искомой касательной плоскости долженъ быть параллеленъ (**§ 60**) слѣду αP вспомогательной плоскости $P\alpha P'$ и въ то же время касателенъ къ слѣду поверхности ff. Но параллельно прямой αP можно провести къ кривой ff двѣ касательныхъ Q и R, и слѣдовательно, можно построить двѣ касательныхъ плоскости, горизонтальные слѣды которыхъ суть сами касательныя R и Q, а вертикальные Q' и R' пройдутъ чрезъ вертикальные слѣды h и h' тѣхъ производящихъ, по которымъ плоскости касаются поверхности.

ЗАДАЧИ.

256. Провести параллельно данной прямой плоскость, касательную къ цилиндру вращенія, ось котораго совпадаетъ съ осью проекцій; радіусъ основанія данъ.

257. Провести черезъ данную точку плоскость, касательную къ цилиндру вращенія, ось котораго лежитъ въ горизонтальной плоскости.

258. Дана плоскость своими слѣдами и въ этой плоскости окружность центромъ и радіусомъ. Принявъ эту окружность за основаніе цилиндра вращенія, провести къ нему касательную плоскость чрезъ данную точку.

259. Чрезъ данную точку провести плоскость, касательную къ цилиндру вращенія, ось котораго и радіусъ извѣстны.

260. Къ цилиндру вращенія, радіусъ котораго и проекціи оси даны, провести касательную плоскость, параллельно данной прямой.

261. Чрезъ точку, взятую на поверхности цилиндра, провести къ нему касательную линію, составляющую данный уголъ съ горизонтальною плоскостью проекцій.

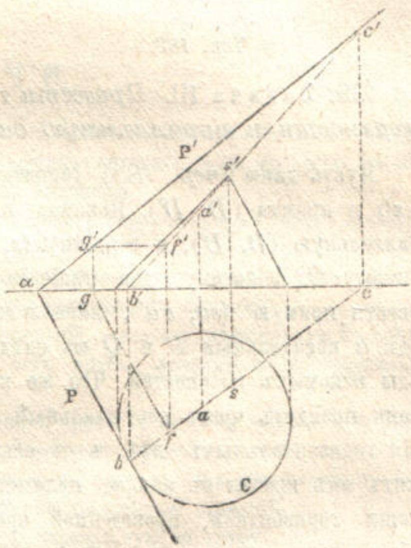
§ III. О плоскостяхъ, касательныхъ къ коническимъ поверхностямъ.

217. Задача I. *Провести плоскость, касательную къ конической поверхности, чрезъ точку, данную на поверхности.*

Пусть даны (*чер. 181*) горизонтальный слѣдъ C конической поверхности, проекціи s, и s' ея вершины и точка (a, a') на поверхности (§ **202**).

Искомая касательная плоскость, на основаніи § **209**, пройдетъ чрезъ производящую $(bs, b's')$ точки A и касательную αP въ точкѣ b къ слѣду C. Слѣдовательно, горизонтальный слѣдъ искомой плоскости есть αP а вертикальный пройдетъ чрезъ точку α и вертикальный слѣдъ c' производящей $(sb, s'b')$ точки касанія.

Если же точка α или c' лежитъ внѣ предѣловъ эпюра, то точки, принадлежащія вертикальному слѣду, опредѣляются при помощи горизонталей касательной плоскости, проведенныхъ чрезъ какую-либо точку производящей BS точки касанія, наприм., при помощи горизонтали $(fg, f'g')$.



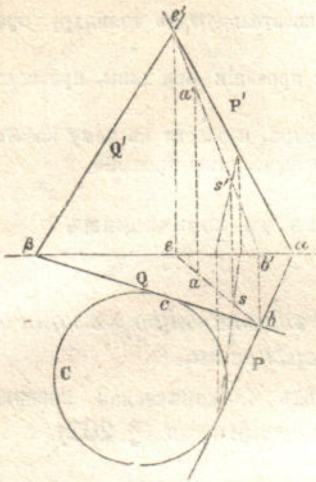
Чер. 181

218. Задача II. *Провести плоскость, касательную къ конической поверхности, чрезъ точку, данную внѣ поверхности.*

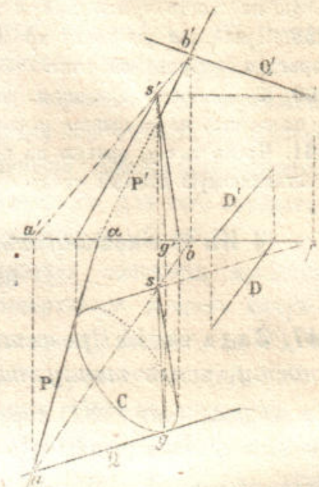
Пусть даны (*чер. 182*) горизонтальный слѣдъ C конической поверхности, вершина ея (s, s'), и точка (a, a').

Искомая плоскость, какъ содержащая производящую поверхности, должна проходить чрезъ вершину поверхности (s, s') и, слѣдовательно, должна содержать прямую $(as, a's')$.

Отсюда заключаемъ, что горизонтальный слѣдъ касательной плоскости долженъ проходить чрезъ горизонтальный слѣдъ b прямой $(as, a's')$ и быть касательнымъ къ слѣду C поверхности (§ **208**. Вслѣдствіе этого касательныя αP и βQ, проведенныя чрезъ точку b къ слѣду C, суть горизонтальные слѣды искомыхъ плоскостей. Что же касается до вертикальныхъ ихъ слѣдовъ, то они пройдутъ чрезъ точки α и β и вертикальный слѣдъ e' прямой $(as, a's')$.



Чер. 182.



Чер. 183.

219. Задача III. *Провести плоскость, касательную въ конической поверхности и параллельную данной прямой.*

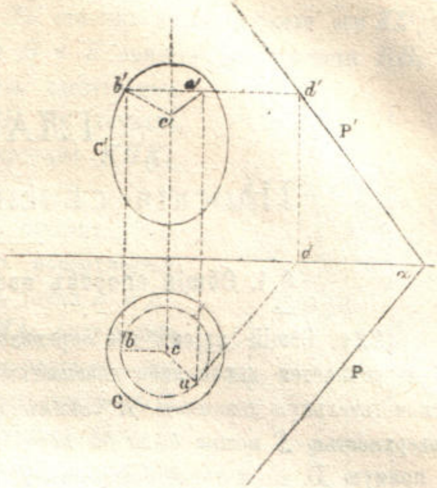
Пусть даны (*чер. 183*) горизонтальный слѣдъ C поверхности, вершина ея (s, s') и прямая (D, D'). Искомая плоскость должна проходить чрезъ прямую, параллельную (D, D'), и вершину (s, s') и въ то же время содержать касательную къ слѣду C. А потому, для рѣшенія задачи достаточно чрезъ вершину (s, s') провести прямую $(sa, s'a')$, параллельную (D, D'), и чрезъ горизонтальный ея слѣдъ a касательныя P и Q къ слѣду C. Эти послѣднія и суть горизонтальные слѣды искомыхъ плоскостей. Что же касается и вертикальныхъ слѣдовъ P' и Q', то они пройдутъ чрезъ вертикальный слѣдъ b' прямой $(sa, s'a')$ и точки пересѣченія горизонтальныхъ слѣдовъ съ осью. Въ случаѣ, если одна изъ этихъ точекъ лежитъ внѣ предѣловъ эпюра, положеніе вертикальнаго слѣда опредѣляется при помощи горизонтали, проведенной чрезъ какую-либо точку производящей точки касанія. Такъ, въ нашемъ случаѣ, слѣдъ Q пересѣкаетъ ось внѣ предѣловъ эпюра, и потому находимъ производящую точки касанія $(sg, s'g')$ и чрезъ какую-либо ея точку, напримѣръ, (s, s'), проводимъ горизонталь $(sf, s'f')$ искомой плоскости; тогда вертикальный слѣдъ Q касательной плоскости пройдетъ чрезъ точки b' и f'.

§ IV. О плоскостяхъ, касательныхъ къ поверхностямъ вращенія.

220. Задача. *Провести плоскость, касательную къ поверхности вращенія въ точкѣ, данной на поверхности.*

Пусть (*чер. 184*) поверхность вращенія дана главнымъ меридіаномъ C' и осью (c, c'). Пусть (a, a') – данная на поверхности точка **(§ 203)**.

Для рѣшенія задачи, достаточно построить въ данной точкѣ A нормаль къ поверхности и провести чрезъ точку A плоскость, къ ней перпендикулярную. Съ этой цѣлью замѣтимъ, что всѣ нормали проведенныя къ точкамъ, лежащимъ на одной и той же параллели, встрѣчаютъ ось въ одной и той же точкѣ (**§ 210**) и что, слѣдовательно, искомая нормаль встрѣтитъ ось поверхности въ той же точкѣ, какъ и нормаль, проведенная къ главному меридіану C' въ точкѣ (b, b'), взятой на параллели точки (a, a'). Но эта послѣдняя нормаль есть прямая $(bc, b'c')$, которая встрѣчаетъ ось поверхности въ точкѣ (c, c'). Слѣдовательно, $(ac, a'c')$ есть нормаль къ поверхности въ точкѣ (a, a'). И потому, остается при помощи горизонтали $(ad, a'd')$ провести плоскость $P\alpha P'$, перпендикулярную къ $(ac, a'c')$ въ точкѣ (a, a') (**§ 58**). Эта плоскость есть искомая.



Чер. 184.

ЗАДАЧИ.

262. Дана плоскость своими слѣдами и горизонтальная проекція кривой, на ней лежащей; принявъ эту кривую за направляющую конуса, вершина котораго дана, провести къ нему касательную плоскость, перпендикулярно къ данной плоскости.

263. Провести параллельно данной прямой плоскость, касательную къ конусу вращенія, ось котораго, вершина и уголъ производящей съ осью даны.

264. Конусъ вращенія заданъ проекціями оси и угломъ производящей съ осью; чрезъ взятую ни на этомъ конусѣ точку провести къ нему касательную плоскость.

265. Провести чрезъ точку, данную на оси проекцій, плоскость, касательную къ конусу, вершина котораго лежитъ на оси, а основаніе есть кругъ, лежащій въ горизонтальной плоскости.

266. Чрезъ точку, данную на конусѣ вращенія, провести къ нему касательную линію, составляющую данный уголъ съ горизонтальной плоскостью проекцій.

267. Чрезъ точку данную внѣ шара, провести къ нему касательную плоскость такъ, чтобы она составляла данный уголъ съ горизонтальною плоскостью проекцій.

268. Провести чрезъ ось проекцій плоскость, касательную къ шару

269. Чрезъ данную прямую провести плоскость касательную къ шару.

270. Даны центръ шара на оси проекцій и прямая въ плоскости профиля. Провести чрезъ эту прямую плоскость, касательную къ шару.

271. Чрезъ окружность, данную въ пространствѣ, провести шаръ, касательный къ данной плоскости.

ГЛАВА III.

Плоскія сѣченія поверхностей.

§ I. Общій способъ построенія плоскихъ сѣченій.

221. Общій пріемъ для опредѣленія кривой, по которой данная поверхность S пересѣкается какою-либо плоскостью P, заключается въ слѣдующемъ. Выбираютъ вспомогательную плоскость R такимъ образомъ, чтобы линію C ея пересѣченія съ поверхностью S можно было бы легко построить, и строятъ какъ эту линію, такъ и прямую D, по которой плоскость R пересѣкаетъ плоскость P. Линія C и прямая D, какъ лежащія въ плоскости R, вообще говоря, пересѣкаются, и точки ихъ пересѣченія M_1, M_2,...., очевидно принадлежатъ искомому сѣченію.

Отсюда видно, что вся трудность рѣшенія задачъ относительно плоскихъ сѣченій поверхностей заключается въ приличномъ выборѣ вспомогательной плоскости R. Впрочемъ, въ нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ кривая сѣченія бываетъ заранѣе извѣстна, и тогда достаточно построить лишь элементы на этой кривой.

§ II. Плоскія сѣченія цилиндрическихъ поверхностей.

222. Общій случай. *Опредѣлить сѣченіе какой-либо цилиндрической поверхности S какою-либо плоскостью P.*

Въ данномъ случаѣ за вспомогательныя плоскости R выбираютъ плоскости, проектирующія производящія поверхности на одну изъ плоскостей проекцій, напр., на вертикальную; тогда вертикальные слѣды плоскостей R будутъ направлены параллельно вертикальнымъ проекціямъ производящихъ, а горизонтальные—перпендикулярно къ оси. Каждая такая плоскость пересѣчетъ поверхность по двумъ прямолинейнымъ производящимъ C и C_1, имѣющимъ одну и ту же вертикальную проекцію, а данную плоскость—по прямой D, которая въ свою очередь пересѣчетъ прямыя C и C_1 въ точкахъ M и N, принадлежащихъ искомому сѣченію.

223. Въ случаѣ цилиндра вращенія кривая плоскаго сѣченія заранѣе извѣстна.

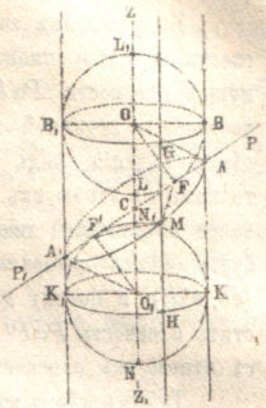
Теорема. *Плоскость, пересѣкающая всѣ производящія цилиндра вращенія, пересѣкаетъ поверхность по эллипсу.*

Примемъ (*чер. 185*) плоскость, проходящую чрезъ ось ZZ' поверхности и перпендикулярную къ сѣкущей плоскости за плоскость чертежа и пусть эта плоскость пересѣкаетъ поверхность по производящимъ BK, B_1K_1, а сѣкущую плоскость PP_1—по прямой AA_1.

Построимъ биссекторы AO и A_1O_1 угловъ BAA_1, AA_1K_1 и продолжимъ ихъ до встрѣчи съ осью ZZ' въ точкахъ O и O_1; затѣмъ, опустимъ изъ точекъ O и O_1 перпендикуляры OF и O_1F' на прямую AA_1 и опишемъ изъ O и O_1, какъ изъ центровъ, радіусами OF и O_1F' окружности BLB_1L_1 и KNK_1N_1.

Легко видѣть, что построенныя такимъ образомъ окружности будутъ одновременно касаться и производящихъ BK, B_1K_1 и прямой AA_1.

Вслѣдствіе этого, если производящую BK станемъ вращать около оси ZZ', то 1) BK произведетъ поверхность; 2) точки B и K опишутъ окружности BB_1 и KK_1; 3) полукруги L_1BL и N_1KN—сферы, касательныя одновременно и къ сѣкущей плоскости PP_1 въ точкахъ F и F' и къ поверхности цилиндра по кругамъ KHK_1, BGB_1.

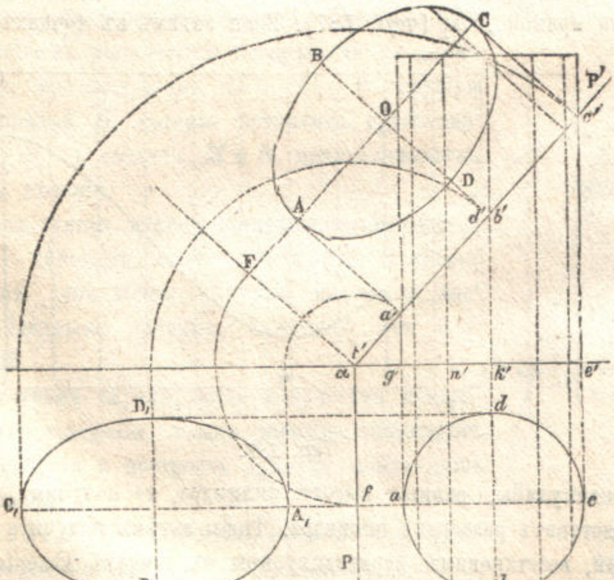


Чер. 185.

Послѣ такихъ построеній, легко уже показать, что кривая AMA_1 сѣченія плоскости PP_1 съ поверхностью цилиндра есть эллипсъ, фокусы котораго суть точки F и F'. Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ на кривой AMA_1 какую-либо точку M и чрезъ эту точку проведемъ, во-первыхъ—двѣ прямыя MF и MF_1, а во-вторыхъ,—производящую GH, которая встрѣчаетъ круги KK_1 и BB_1 въ точкахъ G и H, и докажемъ, что $MF+MF'$ есть постоянная величина (§ **176**). Прямыя MF и MG равны между собою, какъ отрѣзки касательныхъ проведенныхъ къ сферѣ изъ одной и той же точки M; на томъ же основаніи равны между собою и прямыя MF' и MH. Слѣдовательно,

$$MF+MF'=MG+MH=GH;$$

но GH есть величина постоянная для всѣхъ точекъ кривой AMA_1, ибо она представляетъ отрѣзки производящихъ, заключенные между параллельными плоскостями BGB_1 и KHK_1.



Чер. 186.

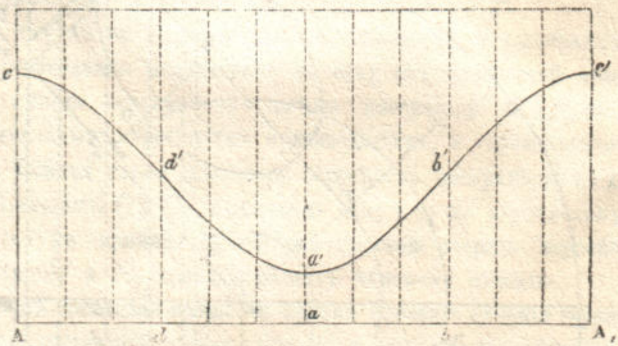
Отсюда слѣдуетъ, что кривая сѣченія есть эллипсъ, большая ось AA_1 котораго есть пересѣченіе данной сѣкущей плоскости PP_1 плоскостью, проходящей чрезъ ось и перпендикулярною къ PP_1, а малая—перпендикулярна къ AA_1 въ точкѣ C пересѣченія оси ZZ' съ AA_1 и равна діаметру цилиндра.

224. Задача. *Опредѣлить кривую пересѣченія цилиндра вращенія, ось котораго перпендикулярна къ горизонтальной плоскости проекцій плоскостью, перпендикулярною къ вертикальной плоскости проекцій.*

По условіямъ задачи искомое сѣченіе проектируется на горизонтальной плоскости по слѣду цилиндра $abcd$ (*чер 186*), а на вертикальной—по слѣду aP' сѣкущей плоскости PaP' (§ **51**). Вслѣдствіе этого, задача собственно сводится къ построенію истинной величины сѣченія; для чего можно было бы взять на проекціяхъ сѣченія рядъ точекъ и, совмѣстивъ сѣкущую плоскость вмѣстѣ съ этими точками съ одною изъ плоскостей проекцій, построить и самую кривую; но на основаніи предыдущей теоремы, можно прямо видѣть, что искомая кривая есть эллипсъ, большая ось котораго проектируется по прямой (ac, $a'c'$), а малая—по прямой (db, $b'd'$); и потому для построенія истинной величины сѣченія достаточно совмѣстить плоскость PaP' вмѣстѣ съ четырьмя точками (a, a'), (b, b') (c, c') и (d, d') съ одною изъ плоскостей проекцій.

Такимъ образомъ, какъ совмѣщенія A_1, B_1, C_1, D_1, упомянутыхъ точекъ съ горизонтальною плоскостью проекцій опредѣлятъ оси A_1C_1 и B_1D_1 искомаго эллипса, по которымъ легко построить и самую кривую; такъ и совмѣщенія A, B, C, D тѣхъ же точекъ съ вертикальною плоскостью проекцій опредѣлятъ оси AC и BD того же эллипса.

Развертка. Чтобы развернуть цилиндръ съ кривою сѣченія, разцѣлимъ основанія цилиндра на столь малыя дуги (въ нашемъ случаѣ на 12), чтобы каждую изъ нихъ безъ большой погрѣшности можно было принять равной стягивающей ее хордѣ, и отложимъ величины этихъ хордъ послѣдовательно одна за другою, начиная съ точки c, на прямой AA_1 (*чер. 187*). Если затѣмъ въ точкахъ A и A_1 возста-



Чер. 187.

новимъ перпендикуляры, равныя высотѣ цилиндра, то получимъ прямоугольникъ, который и представитъ развертку цилиндра. Чтобы затѣмъ получить преобразованную кривую сѣченія, возстановимъ перпендикуляры въ точкахъ дѣленія прямой AA_1 и на нихъ отложимъ велочины соотвѣтствующихъ имъ имъ усѣченныхъ производящихъ цилиндра. Такъ, откладывая на пенпердикулярахъ Ac, dd', aa', bb', A_1c' части $Ac=e'c'$, $dd'=k'b'$, $aa'=g'a'$, $bb'=k'b'$, $A_1c'=e'c'$, и соединяя непрерывною кривою полученныя такимъ образомъ точки, найдемъ преобразованное сѣченіе $cd'a'b'c'$.

ЗАДАЧИ.

272. Найти пересѣченіе цилиндра вращенія плоскостью, проходящей чрезъ ось и наклоненной къ горизонтальной плоскости подъ угломъ 45^{0}.

273. Даны вертикальный слѣдъ цилиндра и направленіе производящей. Найти сѣченіе цилиндра какою бы то ни было плоскостью.

274. Найти пересѣченіе какою бы то ни было плоскостью цилиндра вращенія, ось котораго совпадаетъ съ осью проекцій.

275. Найти пересѣченіе какого бы то ни было цилиндра плоскостью, проходящей чрезъ ось и точку.

276. Найти пересѣченіе цилиндра, котораго круговое основаніе лежитъ въ горизонтальной плоскости, а производящая перпендикулярна къ оси проекцій и наклонена къ горизонтальной плоскости подъ угломъ 60^{0}, плоскостью, параллельною оси.

277. Даны: прямая въ горизонтальной плоскости и плоскость. Найти точку въ пространствѣ, отстоящую отъ прямой па разстояніи a, отъ плоскости—на разстояніи b и отъ горизонтальной плоскости на разстояніи c.

278. Найти геометрическое мѣсто точекъ, находящихся на данныхъ разстояніяхъ отъ данной прямой и отъ данной плоскости.

§ III. Плоскія сѣченія коническихъ поверхностей.

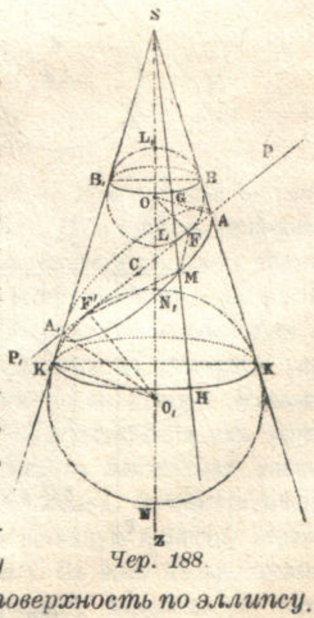
225. Общій случай. *Опредѣлить сѣченіе какой-либо конической поверхности S какою-либо плоскостью.*

Въ данномъ случаѣ за вспомогательныя плоскости R выбираютъ плоскости, проходящія чрезъ вершину поверхности и перпендикулярныя къ одной изъ плоскостей проекцій, напр., къ вертикальной. При такомъ выборѣ, вертикальные слѣды плоскостей R пройдутъ чрезъ вертикальную проекцію вершины, а горизонтальные будутъ перпендикулярны къ оси xy проекцій.

Каждая изъ построенныхъ такимъ образомъ плоскостей R пересѣчетъ коническую поверхность по двумъ прямолинейнымъ производящимъ C и C_1, а сѣкущую плоскость—по прямой D, которая встрѣтитъ производящія C и C_1 въ двухъ точкахъ M и N, принадлежащихъ искомой кривой сѣченія.

Опредѣливъ такимъ путемъ возможно большое число точекъ сѣченія, находятъ, затѣмъ, истинную величину его посредствомъ совмѣщенія сѣкущей плоскости, совмѣстно съ найденными точками, съ одною изъ плоскостей проекцій.

Но въ частномъ случаѣ, когда коническая поверхность ея конусъ вращенія, можно заранѣе предвидѣть форму кривой сѣченія и построить кривую, найдя лишь главные ея элементы.



Чер. 188.

226. Теорема. *Плоскость, которая встрѣчаетъ всѣ производящія конуса вращенія, по одну сторону отъ вершины его лежащія, пересѣкаетъ поверхность по эллипсу.*

Пусть (чер. 188) SB и SB_1—двѣ производящія конуса, по которымъ плоскость, проведенная чрезъ ось SZ поверхности перпендикулярно къ сѣкущей плоскости PP_1 и принятая за плоскость чертежа, пересѣкаетъ данный конусъ.

Пусть AMA_1—кривая пересѣченія конуса съ плоскостью PP_1.

Проведемъ биссекторъ AO угла SAA_1 и положимъ, что онъ встрѣчаетъ ось SZ, которая сама есть биссекторъ угла ASA_1, въ точкѣ O. Точка O есть, слѣдовательно, центръ окружности BL_1B_1L, вписанной въ треугольникъ A_1SA и касающейся сторонъ его SA, SA_1, A_1A въ точкахъ F, b и B_1.

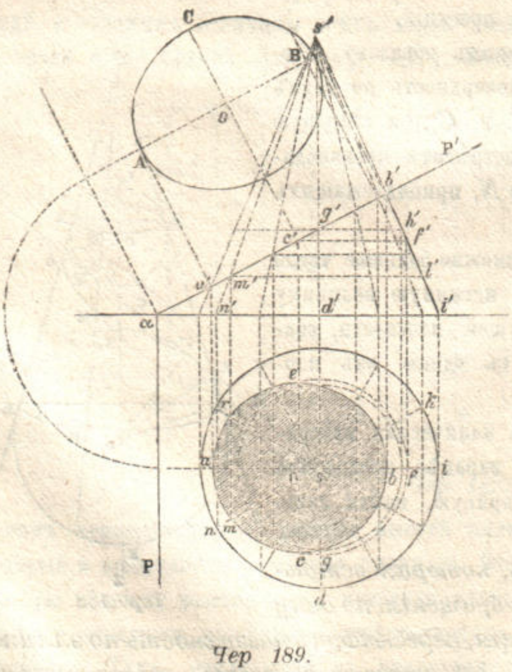
На тѣхъ же основаніяхъ, точка O_1 пересѣченія биссектора A_1O_1 угла AA_1K_1 съ осью SZ есть центръ окружности K_1N_1KN, вписанной въ тотъ же треугольникъ SAA_1 и касающейся его сторонъ въ точкахъ F' K и K_1.

Если теперь поворотимъ производящую SB около оси SZ, то 1) SB—произведетъ конусъ, 2) точки B и K опишутъ параллели BB_1 и KK_1, 3) полуокружности L_1BL и N_1KN—произведутъ шаровыя поверхности, касательныя къ конусу и къ сѣкущей плоскости въ точкахъ F и F'. Отсюда легко доказать, что кривая AMA_1 сѣченія есть эллипсъ. Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ на ней какую-либо точку M и, соединивъ ее съ точками F и F', докажемъ, что, $MF+MF'$ есть величина постоянная; для чего проведемъ производящую MS точки M и допустимъ что она пересѣкаетъ параллели BB_1 и KK_1 въ точкахъ G и H. Съ такомъ случаѣ $MF=MG$ и $MF'=MH$, какъ отрѣзки касательныхъ, проведенныхъ къ шару изъ одной точки M. И потому

$$MF+MF'=MG+MH=GH$$

но $GH=KB=K_1B_1$.... есть постоянная величина для всѣхъ точекъ сѣченія, ибо равняется отрѣзкамъ производящихъ конуса, заключеннымъ между параллелями. Что и требовалось доказать.

227. Задача. *Построить проекціи кривой, по которой конусъ вращенія пересѣкается плоскостью встрѣчающей всѣ его производящія.*

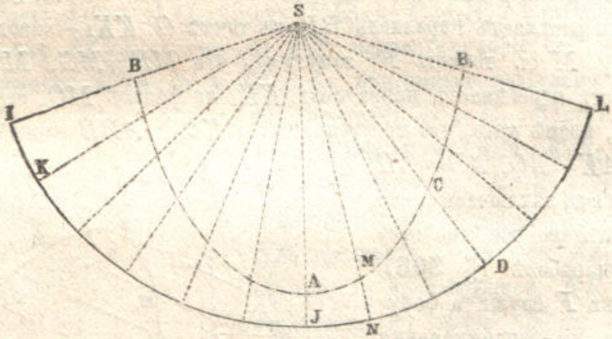


Чер 189.

Пусть (*чер. 189*) ось даннаго конуса—перпендикулярна къ горизонтальной плоскости проекцій и пусть окружность $anik$ представляетъ его горизонтальный слѣдъ, а точка (s, s'), которой горизонтальная проекція совпадаетъ съ центромъ окружности,—вершину конуса. Пусть плоскость, пересѣкающая всѣ производящія конуса, есть вертикальная проектирующая плоскость PaP.

Въ данномъ случаѣ искомое сѣченіе есть эллипсъ, котораго большая ось, по предыдущему §, равна $a'b'$, а малая, какъ перпендикулярная къ ней въ точкѣ c', дѣлящей $a'b'$ пополамъ, равна хордѣ параллели, въ плоскости которой лежитъ точка c'; всякій же эллипсъ, вообще проектируется по эллипсамъ, оси которыхъ суть проекціи осей сѣченія; въ данномъ же случаѣ сѣченіе проектируется на вертикальную плоскость по слѣду $\alpha P'$ сѣкущей плоскости, и только на горизонтальную—по эллипсу, для построенія осей котораго достаточно найти горизонтальныя проекціи прямой $a'b'$ и хорды параллели, проходящей чрезъ точку c'. Горизонтальныя проекціи точекъ a' и b' лежатъ на горизонтальныхъ проекціяхъ производящихъ SA и SB, т. е. на прямыхъ sa и sb въ точкахъ a и b; слѣдовательно, ab есть большая ось горизонтальной проекціи сѣченія. Для опредѣленія малой оси, которая будетъ направлена по перпендикуляру къ большей оси ab въ точкѣ o, дѣлящей ab пополамъ, проведемъ чрезъ точку c', вертикальную проекцію точки o, параллель $c'f'$, которая будетъ проектироваться на горизонтальную плоскость по окружности, описанной изъ центра s радіусомъ sf, и найдемъ точки e и c, въ которыхъ эта окружность засѣкаетъ направленіе малой оси. Прямая ec есть малая ось горизонтальной проекціи сѣченія. По осямъ ab и ec построимъ и самую кривую.

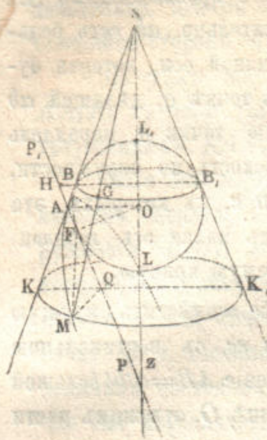
Для опредѣленія истинной величины сѣченія всего удобнѣе совмѣстить сѣкущую плоскость $P\alpha P'$, вмѣстѣ съ лежащими въ ней осями $a'b'$ и ec, съ вертикальною плоскостью проекцій. Въ этомъ случаѣ достаточно найти совмѣщеніе $AB=a'b'$ большой оси и на перпендикулярѣ къ ней, возстановленномъ къ ея срединѣ O, отложимъ части $OC=oc$ и $OE=oe$; CE есть малая ось сѣченія, ибо ce есть ея истинная величина.



Чер. 190.

Развертка конуса. Если разрѣжемъ конусъ по производящей $(si, s'i')$ и развернемъ поверхность на плоскость, то получимъ (*чер. 190*) секторъ, описанный изъ центра S радіусомъ $SI=s'i'$, дуга котораго равна окружности основанія конуса. Чтобы построить эту дугу, всего удобнѣе раздѣлить основаніе конуса на весьма малыя части (въ нашемъ случаѣ на 12) и эти части отложить послѣдовательно на дугѣ II_1. Для построенія преобразованнаго сѣченія проведемъ на разверткѣ рядъ послѣдовательныхъ производящихъ, для чего соединимъ точки дѣленія основанія конуса, наприм., (n, n'), съ вершиною его (s, s'), а соотвѣтствующія имъ точки, на дугѣ II_1, т. е. точку N,—съ точкою S, и отложимъ на найденныхъ такимъ образомъ на разверткѣ прямыхъ истинную величину отрѣзковъ соотвѣтствующихъ производящихъ конуса; такъ, на прямой SN отложимъ истинную величину отрѣзка $(nm, n'm')$ соотвѣтствующей ей производящей $(sn, s'n')$. Съ этою цѣлью производящую $(sn, s'n')$ повернемъ около оси $(s, s'd')$ въ положеніе, параллельное вертикальной плоскости; въ этомъ случаѣ $(sn, s'n')$ перейдетъ въ $(si, s'i')$, а точка m'—въ точку l', слѣдовательно, $l'i'$ есть истинная величина отрѣзка $(nm, m'n')$, которую и должно отложить на SN отъ N до M. Поступая такимъ образомъ далѣе относительно каждой производящей, получимъ рядъ точекъ A, M, C..., которыя, будучи соединены непрерывною кривою, представятъ искомое преобразованное сѣченіе.

228. Теорема. *Кривая пересѣченія конуса вращенія плоскостью, параллельною одной изъ его производящихъ, есть парабола.*



Чер. 191.

Пусть сѣкущая плоскость PP_1 параллельна производящей SB_1 (*чер. 191*) и плоскость, проходящая чрезъ SB_1 и ось поверхности SZ, принята за плоскость чертежа.

Въ такомъ случаѣ легко доказать, что биссекторъ AO угла SAP перпендикуляренъ къ оси SZ, которую онъ встрѣчаетъ въ точкѣ O, и что окружность, описанная изъ O радіусомъ OF, равнымъ перпендикуляру, опущенному изъ O на AP, будетъ касательна къ прямымъ SB, SB_1 и AP въ точкахъ B, B_1, F. Предположимъ теперь, что SB_1 вращается около оси SZ, тогда 1) SB_1 опишетъ поверхность, 2) точка B_1—параллель BB_1, 3) полуокружность L_1B_1L—сферу, касательную къ поверхности по параллели BB, а къ сѣкущей плоскости—въ точкѣ F. Отсюда легко уже вывести свойство точекъ, принадлежащихъ кривой сѣченія MAL. Въ самомъ дѣлѣ, пусть точка M—одна изъ точекъ сѣченія, SM—ея производящая, которая пересѣкаетъ параллель BB_1 въ точкѣ G, KK_1—параллель точки M; соединивъ точку M съ точкою F, замѣтимъ, что $MF=MG$, $MG=KB$ и, что сѣкущая плоскость пересѣкаетъ парраллель KK_1 по прямой MQ, перпендикулярной къ прямой PP_1, кромѣ того, что треугольники AKQ и ABH равнобедренны и что, слѣдовательно, $AK=AQ$, $AB=AH$ и $KB=QH$; отсюда заключаемъ, что $MF=QH$. Послѣднее же свойство принадлежитъ параболѣ (§ **306**), для которой точка F служитъ фокусомъ, а прямая, перпендикулярная въ точкѣ H къ PP^1—направляющей.

229. Задача. *Опредѣлить проекціи кривой, по которой конусъ вращенія пересѣкается плоскостью, параллельною одной изъ его производящихъ.*

Чер. 192.

Пусть ось конуса перпендикулярна къ горизонтальной плоскости проекцій и сѣкущая плоскость, будучи параллельна производящей главнаго меридіана, въ то же время перпендикулярна къ вертикальной плоскости проекцій (*чер* 19?)

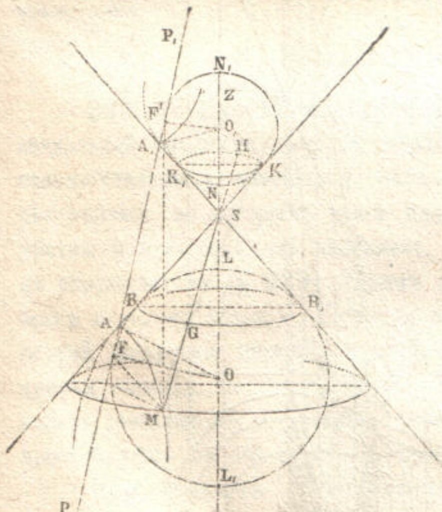
При такихъ условіяхъ кривая сѣченія есть парабола, вертикальная проекція которой лежитъ на вертикальномъ слѣдѣ $a'b'$ сѣкущей плоскости. Для опредѣленія же ея горизонтальной проекціи воспользуемся общимъ способомъ (§ **221**) и выберемъ за вспомогательныя плоскости горизонтальныя плоскости. Каждая изъ такихъ плоскостей, наприм., G', пересѣчетъ конусъ по параллели, проектирующейся на горизонтальной плоскости по окружности, наприм., G, описанной изъ центра S, а сѣкущую плоскость—по прямой, горизонтальная проекція которой перпендикулярна къ xy, напр., по прямой mm_1. Эта окружность и прямая пересѣкутся въ двухъ точкахъ, наприм., m и m_1, которыя и суть горизонтальныя проекціи точекъ искомой проекціи сѣченія. Опредѣливъ такимъ образомъ рядъ точекъ горизонтальной проекціи сѣченія и соединивъ ихъ непрерывною чертою, найдемъ кривую abc, представляющую горизонтальную проекцію сѣченія.

Для опредѣленія истинной величины сѣченія совмѣстимъ сѣкущую плоскость вмѣстѣ съ точками, принадлежащими сѣченію, съ вертикальной плоскостью проекцій. Кривая AM_1BMC—есть истинная величина сѣченія.

Для опредѣленія развертки поступаемъ такъ, какъ и въ предыдущемъ случаѣ.

230. Теорема. *Кривая, по которой конусъ вращенія пересѣкается плоскостью, встрѣчающею объ его полы, есть гипербола.*

Проведемъ чрезъ ось ZZ_1 поверхности (*чер. 193*) плоскость, перпендикулярную къ сѣщей плоскости PP_1, и примемъ эту плоскость за плоскость чертежа. Пусть эта плоскость пересѣкаетъ поверхность по производящимъ BSK и B_1SK_1; проведемъ биссекторы AO и A_1O_1 угловъ PAS и P_1A_1S и изъ точекъ O и O_1, встрѣчи ихъ съ осью ZZ_1 опустимъ на PP_1 перпендикуляры OF и O_1F'; легко видѣть, что окружности KNK_1N_1 и BLB_1L_1, описанныя радіусами OF и O_1F' изъ центровъ O и O_1, будутъ касательны къ производящимъ KB, K_1B_1 и къ слѣду PP_1 въ точкахъ K, K_1, B, B_1, F, F'. Представимъ себѣ теперь, что производящая KB вращается около оси ZZ_1; въ такомъ случаѣ: 1) производящая KB опишетъ поверхность, 2) точки K и B—параллели KK_1 и BB_1, 3) полуокружности NKN_1 и LBL_1—сферы, касательныя какъ въ поверхности по параллелямъ KK_1 и BB_1, такъ и къ сѣкущей плоскости въ точкахъ F и F'.



Чер. 193.

Теперь легко доказать, что каждая точка кривой сѣченія AM удовлетворяетъ условію гиперболы (§ **290**). Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ на кривой сѣченія точку M, соединимъ ее съ точками F и F' прямыми MF и MF' и проведемъ ея производящую MS, которая пересѣчетъ параллели BB_1 и KK_1 въ точкахъ G и H.

Въ такомъ случаѣ имѣемъ:

$$MF=MG \text{ и } MF'=MH$$

откуда

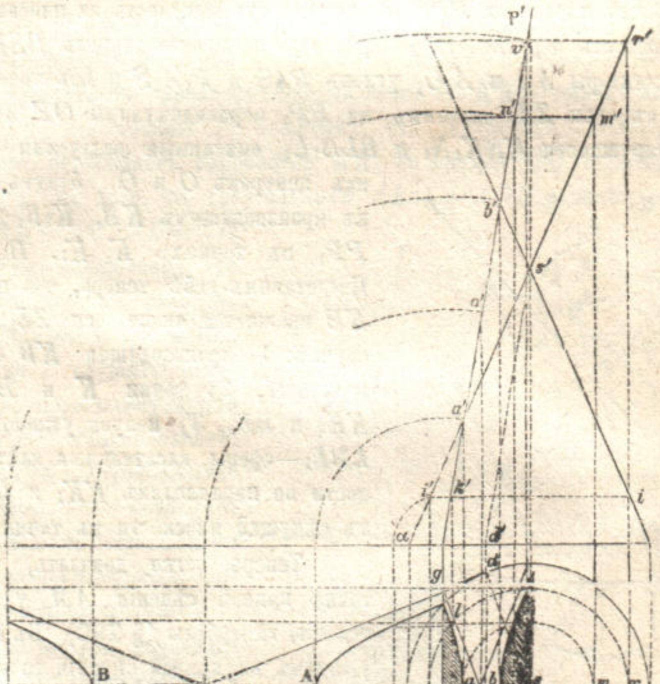
$$MF'-MF=MH-MG=GH.$$

Но GH, какъ отрѣзокъ производящей между двумя параллельными плоскостями BB_1 и KK_1 есть величина постоянная для всѣхъ точекъ кривой AM, и слѣдовательно, сама кривая есть гипербола, имѣющая своими фокусами точки F и F'.

231. Задача. *Найти проекціи кривой, которая получается отъ пересѣченія конуса вращенія плоскостью, встрѣчающей обѣ его полы.*

Положимъ, что ось конуса перпендикулярна къ горизонтальной плоскости проекцій (*чер. 194*) и что, слѣдовательно, слѣдъ его есть окружность описанная нѣкоторымъ радіусомъ sd, а вершина S проектируется на горизонтальную плоскость въ центрѣ s этой окружности. Пусть сѣкущая плоскость есть вертикально-проектирующая плоскость $P\alpha P'$.

По § **230** искомое сѣченіе есть гипербола, которая проектируется на вертикальную плоскость по вертикальному слѣду $\alpha P'$ сѣкущей плоскости, а на горизонтальную—по гиперболѣ, и чтобы опредѣлить точки, принадлежащія послѣдней, воспользуемся общимъ пріемомъ (§ **221**) и выберемъ за вспомогательныя плоскости горизонтальныя плоскости. Но предварительно замѣтимъ, 1) что точки a' и b', въ которыхъ сѣкущая плоскость встрѣчаетъ главный меридіанъ поверхности, суть вершины сѣченія, а слѣдовательно, ихъ горизонтальныя проекціи a и b суть вершины горизонтальной проекціи сѣченія; 2) что прямая $a'b'$ есть ось сѣченія (§ **294**), а слѣдовательно, ея горизонтальная проекція ab есть ось проекціи сѣченія;



Чер 194.

3) что точка o', дѣлящая $a'b'$ пополамъ есть центръ сѣченія, а слѣдовательно, ея горизонтальная проекція o есть центръ проекціи сѣченія; 4) что производящія конуса (sd, $s'd'$), (sd_1, $s'd'_1$), параллельныя сѣкущей плоскости, суть ассимптоты сѣченія (§ **301**), а слѣдовательно, прямыя of и og, параллельныя ихъ горизон-

тальнымъ проекціямъ sd и sd_1, суть ассимптоты проекціи сѣченія. Затѣмъ проведемъ рядъ вспомогательныхъ горизонтальныхъ плоскостей, наприм., $n'm'v'r'$, ii'...., которыя пересѣкутъ поверхность по параллелямъ, проектирующимся на горизонтальной плоскости по окружностямъ, описаннымъ радіусами sr, sm и т. д. изъ центра s, а сѣкущую плоскость—по прямымъ, проектирующимся на горизонтальную плоскость по прямымъ k, n,v...., перпендикулярнымъ къ оси проекцій. При этомъ точки, въ которыхъ горизонтальныя проекціи параллелей и соотвѣтствующихъ имъ прямыхъ пересѣкаются между собою, суть точки, принадлежащія искомой горизонтальной проекціи сѣченія.

Такимъ образомъ, найдемъ, что точки k, l, n, v принадлежатъ горизонтальной проекціи искомаго сѣченія; а потому кривая, соединяющая подобныя точки, есть горизонтальная проекція кривой сѣченія.

Истинная величина сѣченія опредѣляется совмѣщеніемъ сѣкущей плоскости съ горизонтальною плоскостью проекціи (§ 121).

ЗАДАЧИ.

279. Найти плоское сѣченіе конуса вращенія, ось котораго перпендикулярна къ вертикальной плоскости проекцій, плоскостью, параллельною оси.

280. Построить сѣченіе конуса вращенія какой бы то ни было плоскостью.

281. Построить сѣченіе конуса вращенія, ось котораго совпадаетъ съ осью проекцій, плоскостью, параллельною оси и наклонную къ плоскостямъ проекціи подъ угломъ 45^0.

282. На конусѣ вращенія даны двѣ точки. Найти проекціи кратчайшаго разстоянія между ними.

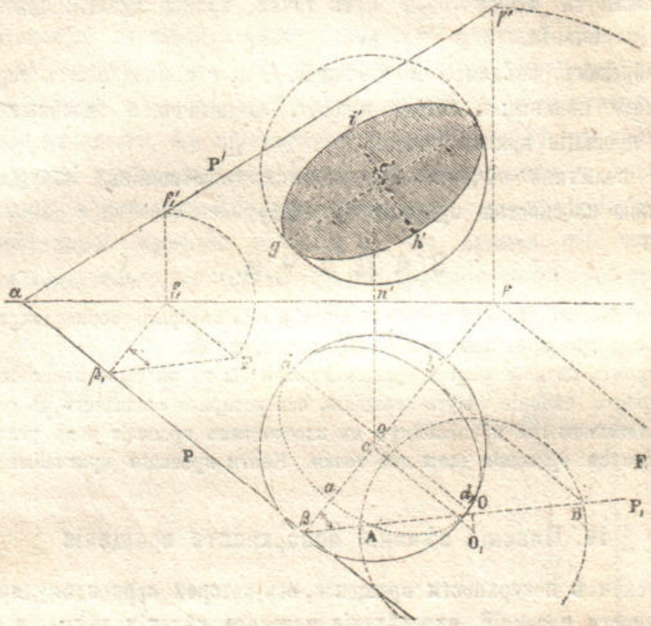
§ IV. Плоскія сѣченія поверхности вращенія.

232. Въ случаѣ поверхности вращенія, ось которой перпендикулярна къ горизонтальной плоскости проекцій, опредѣленіе плоскаго сѣченія дѣлается при помощи вспомогательныхъ плоскостей, параллельныхъ горизонтальной плоскости проекцій, ибо кривыя, по которымъ такія плоскости пересѣкаютъ поверхность, заранѣе извѣстны и представляютъ параллели, проектирующіяся на горизонтальной плоскости по окружностямъ (§ 229). Такимъ путемъ опредѣляется рядъ точекъ, принадлежащихъ искомому сѣченію. Но когда поверхность вращенія есть шаръ, то въ этомъ случаѣ построеніе проекцій кривой плоскаго сѣченія значительно упрощается, ибо кривая сѣченія шара есть кругъ (Геометрія Давыдова, § 288) и, слѣдовательно, задача сводится къ построенію проекцій осей эллипсовъ, по которымъ этотъ кругъ проектируется на обѣ плоскости проекцій (§ 162).

233. Задача. *Построить проекціи кривой, по которой шаръ пересѣкается какою-либо плоскостью.*

Геометрія доказываетъ, что всякое плоское сѣченіе шара есть кругъ, центръ котораго есть основаніе перпендикуляра, опущеннаго изъ центра шара на сѣкущую плоскость, а радіусъ—длина катета прямоугольнаго треугольника, построеннаго на гипотенузѣ, равной радіусу шара, и катету, равному разстоянію сѣкущей плоскости отъ центра шара. Опредѣливъ на этихъ основаніяхъ центръ и радіусъ окружности сѣченія, легко построить по § 162 вертикальный и горизонтальный эллипсы, по которымъ эта окружность проектируется на вертикальную и горизонтальную плоскость проекцій. Но всѣ эти отдѣльныя построенія можно отчасти совмѣстить вмѣстѣ, поступая слѣдующимъ образомъ.

Пусть (*чер. 195*) (c, c') — центръ шара, PaP' — сѣкущая плоскость. Изъ центра (c, c') опустимъ перпендикуляръ (ca, $c'i'$) на плоскость PaP' и горизонтально-проектирующую его плоскость $\beta ff'$ совмѣстимъ съ горизонтальной плоскостью проекцій, при помощи оси вращенія βf; при этомъ сѣченіе плоскостей PaP' и $\beta ff'$ совмѣстится съ βP_1 и центръ шара C — съ точкою O_1 на разстояніи $cO_1 = n'c'$. Затѣмъ изъ точки O_1 засѣчемъ радіусомъ шара пря-



Чер. 195.

мую βP_1 въ точкахъ A и B и опустимъ перпендикуляръ O_1O на βP_1; легко видѣть, что точка O, какъ совмѣщеніе основанія перпендикуляра, опущеннаго изъ центра шара на сѣкущую плоскость, есть совмѣщеніе центра искомаго сѣченія, а отрѣзокъ $OA = OB$, какъ катетъ прямоугольнаго треугольника OAO_1, имѣющаго гипотенузой O_1A, радіусъ шара, а катетомъ OO_1 разстояніе сѣкущей плоскости отъ его центра — радіусъ сѣченія; а потому, для построенія горизонтальнаго эллипса, по которому проектируется сѣченіе, достаточно по § **162** найти по совмѣщенію центра O его горизонтальную проекцію въ o; чрезъ o провести горизонталь dd_1 и на ней отложить части $od = od_1 = OA$; dd_1 — большая ось горизонтальнаго эллипса, затѣмъ спроектировать на βf точки A и B въ a и b; ab — малая ось того же эллипса и, наконецъ, по осямъ построить и самый эллипсъ.

Такимъ же образомъ поступаемъ и при построеніи осей вертикальнаго эллипса.

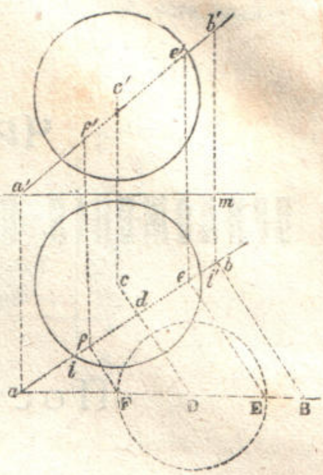
§ V. Построеніе точекъ встрѣчи прямой съ поверхностями.

234. Опредѣленіе точекъ встрѣчи прямой съ цилиндрическими и коническими поверхностями совершается, какъ и въ случаѣ призмъ и пирамидъ (§ **289, 290**), при помощи вспомогательной плоскости, которая, проходя чрезъ данную прямую, пересѣкаетъ данную поверхность по двумъ прямолинейнымъ производящимъ. На этомъ основаніи, въ случаѣ цилиндрической поверхности, вспомогательная плоскость должна быть параллельна направленію ея производящей, а въ случаѣ конической — проходить чрезъ вершину ея.

235. Задача. *Найти точки встрѣчи прямой съ шаромъ.*

Пусть (*чер. 196*) (ab, $a'b'$) и (c, c') — данная прямая и центръ шара.

Плоскость, горизонтально-проектирующая данную прямую, пересѣкаетъ данный шаръ по окружности, которая проектируется на горизонтальной плоскости по прямой ab и которая, слѣдовательно, имѣетъ своимъ діаметромъ прямую ii', а центромъ — точку встрѣчи перпендикуляра, опущеннаго изъ центра шара (c, c') на сѣкущую плоскость (§ **233**), т. е. точку d.



Чер. 196.

Совмѣстимъ эту плоскость съ горизонтальной плоскостью проекцій вмѣстѣ съ прямою AB и центромъ d при помощи оси вращенія ab. При этомъ точка a, какъ горизонтальный слѣдъ прямой, не измѣнитъ своего положенія; точка (b, b') совмѣстится съ B на разстояніи bB отъ оси вращенія, равномъ mb'; центръ сѣченія — съ D на разстояніи dD, равномъ разстоянію вертикальной проекціи c' центра шара отъ оси проекцій. Вслѣдствіе этого если изъ D, какъ изъ центра опишемъ окружность радіусомъ di, то эта окружность и есть совмѣщеніе сѣченія горизонтально-проектирующей прямую AB плоскости съ шаромъ. Это совмѣщеніе пересѣкаетъ совмѣщеніе прямой aB въ точкахъ F и E, которыя представляютъ совмѣщеніе искомыхъ точекъ, и для рѣшенія задачи остается найти ихъ проекціи (f, f') и (e, и e').

ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ.

ПРИЛОЖЕНІЯ НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРІИ.

ГЛАВА I.

Построеніе тѣней.

§ 1. Опредѣленія.

236. Понятіе о тѣни вытекаетъ изъ слѣдующихъ трехъ физическихъ положеній, независящихъ отъ гипотезъ о происхожденіи свѣта.

1) Въ однородной срединѣ свѣтъ распространяется по прямымъ линіямъ, называемымъ лучами свѣта.

2) Лучи свѣта выходятъ изъ свѣтящейся точки по всѣмъ направленіямъ.

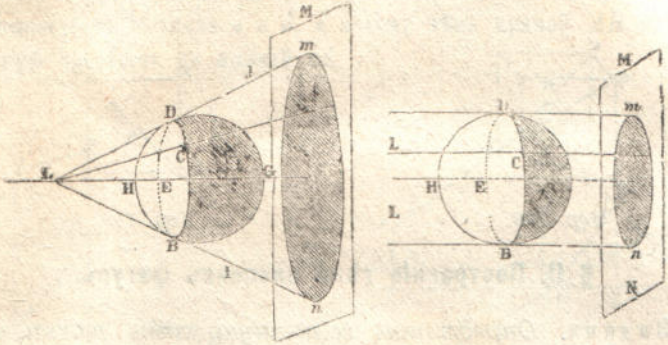
На этомъ основаніи, на какое-либо тѣло, взятое въ пространствѣ падаетъ пучекъ лучей, ограниченный коническою поверхностью, производящія которой суть касательныя, проведенныя изъ свѣтящейся точки къ данному тѣлу; но если тѣло удалено отъ свѣтящейся точки на безконечно большое разстояніе, то пучекъ падающихъ на него лучей будетъ ограниченъ цилиндрическою поверхностью, ибо касательныя, пересѣкаясь въ безконечно удаленной точкѣ, будутъ параллельны между собою.

3) Лучи свѣта проходятъ чрезъ прозрачное тѣло и поглощаются непрозрачнымъ.

На этомъ основаніи за непрозрачнымъ тѣломъ образуется темное пространство, которое и называется *тѣнью*.

237. Разсмотримъ случай, когда непрозрачное тѣло есть сфера.

Если свѣтящаяся точка находится въ L (*чер. 197*) на конечномъ разстояніи отъ сферы, то на сферу упадетъ пучекъ лучей, содержащійся въ конусѣ $LBCDE$, и поглотится сферою, какъ непрозрачнымъ тѣломъ, такъ что пространство, ограниченное усѣченнымъ конусомъ $BCDEIJ$, будетъ темнымъ и будетъ, слѣдовательно, представлять тѣнь, падающую отъ сферы. Эта тѣнь распространяется безпредѣльно въ пространствѣ и всякое тѣло, лежащее вполнѣ или отчасти въ пространствѣ, ограниченномъ тѣневымъ конусомъ, будетъ или вполнѣ темнымъ, или отчасти темнымъ, отчасти, освѣщеннымъ. На этомъ основаніи и само непрозрачное тѣло должно состоять изъ освѣщенной и темной частей. Такъ въ нашемъ случаѣ часть сферы $HBCDE$, будетъ освѣщенной, а часть $BCDEG$, какъ лежащая въ тѣневомъ конусѣ, будетъ темной. То же нужно сказать и относительно всякаго другого тѣла, напр., плоскости M, пересѣкающей тѣневой конусъ; часть этой плоскости, ограниченная кривою mn пересѣченія конуса плоскостью, будетъ темной, остальная—освѣщенной.



Чер. 197.

Если свѣтящаяся точка будетъ безконечно удалена отъ сферы, то пучекъ падающихъ на нее лучей будетъ ограниченъ цилиндрическою поверхностью и потому за сферой образуется цилиндрическое темное пространство, какъ это видно на *чертежѣ 197*.

238. Темная часть непрозрачнаго тѣла, т. е. въ случаѣ сферы часть $BCDEG$, называется *собственною тѣнью тѣла*, а кривая $BCDE$, отдѣляющая освѣщенную часть тѣла отъ темной, называется *кривою отдѣла свѣта отъ собственной тѣни*.

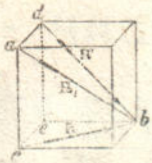
Темная часть тѣла, происходящая отъ того, что это тѣло помѣщено въ тѣни разсматриваемаго непрозрачнаго тѣла, называется *падающею тѣнью;* такъ въ нашемъ случаѣ темная часть mn плоскости M есть тѣнь сферы, падающая на плоскость M.

239. Построеніе тѣней имѣетъ цѣлью опредѣлить какъ собственную, такъ и падающую тѣнь тѣла, въ случаѣ лучей или сходящихся въ одной точкѣ, или параллельныхъ данному направленію. Въ первомъ случаѣ тѣнь обыкновенно называютъ *факельною*, во второмъ—*солнечною*.

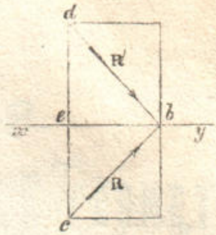
Построеніе собственной тѣни тѣла, по опредѣленію, сводится къ построенію кривой отдѣла свѣта отъ собственной тѣни, т. е. кривой, которая представляетъ геометрическое мѣсто точекъ касанія свѣтовыхъ лучей, проведенныхъ къ поверхности или изъ данной точки, или параллельно данному направленію. На многогранной поверхности кривая отдѣла свѣта отъ собственной тѣни образуется ребрами, которыя отдѣляютъ освѣщенныя грани отъ граней, лежащихъ въ тѣни.

Построеніе падающей тѣни тѣла сводится по тому же опредѣленію къ построенію кривой, которая отдѣляетъ темную часть поверхности отъ освѣщенной и которая представляетъ геометрическое мѣсто слѣдовъ на данной поверхности лучей, опредѣляющихъ собственную тѣнь тѣла.

240. Въ приложеніяхъ большею частью разсматриваютъ солнечную тѣнь, при чемъ обыкновенно принимаютъ, что направленіе луча R_1 (*чер. 198*) параллельно діагонали ab куба, грани котораго параллельны горизонтальной и вертикальной плоскостямъ. Слѣдовательно, вертикальная и горизонтальная проекція такого луча направлены слѣва направо подъ угломъ 45^o къ xy (*чер. 199*). Мы же для общности будемъ принимать направленіе луча произвольнымъ.



Чер. 198.



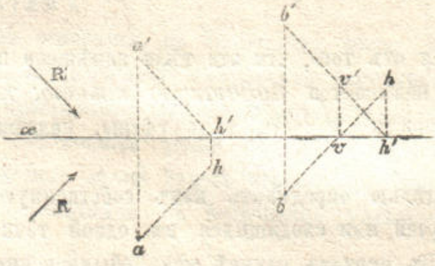
Чер. 199.

§ II. Построеніе тѣни плоскихъ фигуръ.

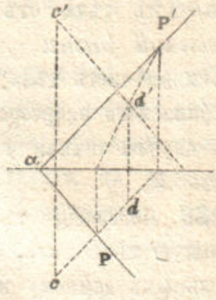
241. Задача. *Опредѣлить солнечную тѣнь точки, падающую 1) на одну изъ плоскостей проекцій, 2) на какую бы то ни было плоскость.*

1) Пусть (*чер. 200*) (R, R')—направленіе свѣтовыхъ лучей и (a, a')—данная точка.

Свѣтовой лучъ, проведенный чрезъ данную точку, встрѣчаетъ въ первомъ углѣ горизонтальную плоскость проекцій въ точкѣ h; слѣдовательно, точка h есть тѣнь точки (a, a'), падающая на горизонтальную плоскость.



Чер. 200.



Чер. 201.

Точка (b, b') бросаетъ тѣнь на вертикальную плоскость, потому что свѣтовой лучъ встрѣчаетъ въ первомъ углѣ вертикальную плоскость въ точкѣ v'.

2) Пусть (c, c') и PaP'—данная точка и плоскость (*чер. 201*). Черезъ (c, c') проведемъ лучъ $(cd, c'd')$ параллельно (R, R') и найдемъ при помощи горизонтально-проектирующей его плоскости (**§ 74**) точку (d, d'), въ которой онъ встрѣчаетъ плоскость PaP'. Эта точка и есть искомая падающая тѣнь.

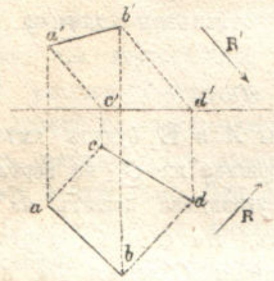
242. Задача. *Опредѣлить тѣнь прямой, падающую на плоскости проекцій.*

Лучи свѣта, проведенные чрезъ различныя точки прямой, лежатъ въ одной плоскости, проходящей чрезъ данную прямую или свѣтящуюся точку, въ случаѣ факельной тѣни, или параллельно направленію луча, въ случаѣ тѣни солнечной. Въ обоихъ случаяхъ, слѣдовательно, построеніе падающей тѣни сводится къ опредѣленію слѣдовъ этой плоскости на плоскостяхъ проекцій, т. е. къ задачѣ, разсмотрѣнной нами въ **§§ 69, 82**.

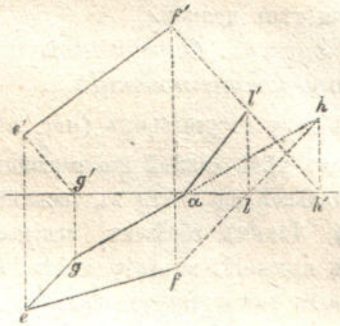
1) Пусть даны: прямая $(ab, a'b')$ и направленіе лучей (R, R') (*чер 202*).

Чрезъ конечныя точки (a, a') и (b, b') прямой AB проведемъ лучи $(ac, a'c')$ и $(bd, b'd')$, параллельные (R, R'), и найдемъ ихъ слѣды.

Въ нашемъ примѣрѣ оба луча встрѣчаютъ въ первомъ углѣ лишь горизонтальную плоскость въ точкахъ c и d, а потому тѣнь прямой AB падаетъ лишь на горизонтальную плоскость по прямой cd.

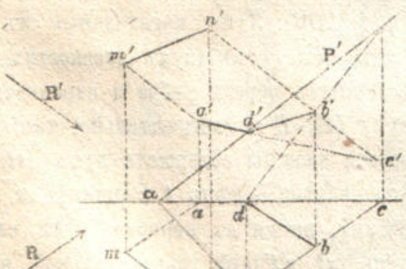


Чер. 202.

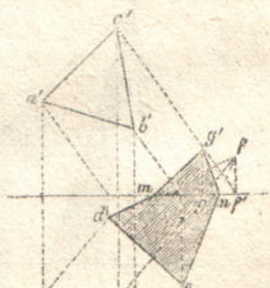


Чер. 203.

2) Въ случаѣ прямой $(ef\ e'f')$ (*чер. 203*), лучъ EG встрѣчаетъ въ первомъ углѣ горизонтальную плоскость въ точкѣ g, а лучъ FL—вертикальную въ точкѣ l'. Отсюда заключаемъ, что, тѣнь прямой EF лежитъ отчасти на горизонтальной, отчасти на вертикальной плоскостяхъ проекцій; и чтобы опредѣлить эти части, замѣтимъ, что лучъ FL встрѣчаетъ горизонтальную плоскость во второмъ углѣ въ точкѣ h и что, слѣд., прямая gh была бы тѣнью данной прямой на горизонтальной плоскости проекцій, если бы вертикальная плоскость была достаточно отодвинута: при данномъ же положеніи вертикальной плоскости α есть точка, въ которой плоскость, проведенная черезъ EG и LF, встрѣчаетъ ось; слѣдовательно, $g\alpha$ есть часть тѣни, лежащая на горизонтальной плоскости проекцій, а $\alpha l'$—часть тѣни, лежащая на вертикальной; а потому ломанная $g\alpha l'$ есть искомая тѣнь прямой.



Чер. 204.



Чер. 205.

243. Задача. *Опредѣлить тѣнь прямой, падающую на какую бы то ни было плоскость.*

Пусть $P\alpha P'$ и MN—данныя плоскость и прямая (*чер. 204*). Свѣтовой лучъ, проведенный черезъ точку (m, m'), встрѣчаетъ вертикальную плоскость въ точкѣ a', лучъ же, проведенный черезъ (n, n'), встрѣчаетъ плоскость $P\alpha P'$ въ точкѣ (b, b'). Отсюда заключаемъ, что искомая тѣнь лежитъ отчасти на вертикальной плоскости проекцій, отчасти на данной; и чтобы отдѣлить эти части, замѣтимъ, что если бы плоскость PaP' не существовала, то лучъ NB встрѣтилъ бы вертикальную плоскость въ точкѣ e', и прямая $a'c'$ была бы тѣнью прямой; въ данномъ же случаѣ, вертикальный слѣдъ aP' плоскости пересѣкаетъ тѣнь въ точкѣ d', и потому $a'd'$ есть часть тѣни, лежащая на вертикальной плоскости, а $d'b'$—часть тѣни, лежащая на данной плоскости. Слѣдовательно, ломанная $a'd'b'$ есть искомая тѣнь прямой.

244. Задача. *Опредѣлить тѣнь плоскаго многоугольника, падающую на плоскости проекцій.*

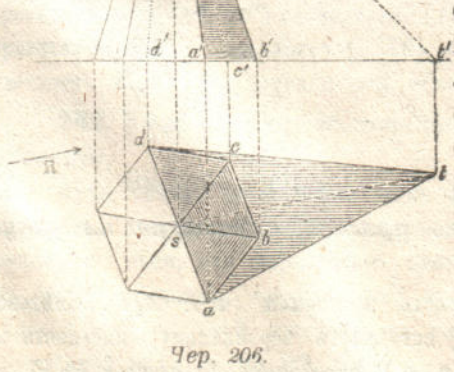
Пусть данъ треугольникъ $(abc, a'b'c')$ (*чер. 205*).

Найдемъ тѣнь каждой его вершины. Вершины A и B будутъ имѣть тѣни на горизонтальной плоскости въ точкахъ d и e, вершина же C — на вертикальной въ точкѣ g'. Такимъ образомъ, искомая тѣнь треугольника лежитъ на обѣихъ плоскостяхъ проекцій, и чтобы найти ее, замѣтимъ, что если бы вертикальная плоскость была достаточно удалена, то и тѣнь вершины C лежала бы на горизонтальной плоскости въ точкѣ f и, слѣдовательно, данный треугольникъ далъ бы тѣнь def только на горизонтальной плоскости. При данномъ же положеніи вертикальной плоскости, тѣнь эта пересѣкается вертикальной плоскостью въ точкахъ m и n, и потому только часть ея $dmne$ будетъ принадлежать искомой тѣни, а часть $mg'n$ будетъ лежать на вертикальной плоскости.

Поступаютъ подобнымъ же образомъ въ случаѣ какой бы то ни было прямолинейной или криволинейной плоской фигуры.

§ III Построеніе тѣни тѣлъ.

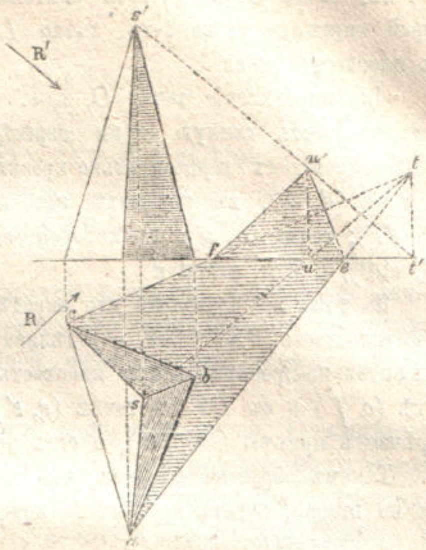
245. Задача. *Опредѣлить тѣнь пирамиды, падающую на плоскости проекцій.*



Чер. 206.

Пусть (R, R')—направленіе свѣтового луча и $SABCDE$ — данная пирамида (*чер. 206*). Лучи, касательные къ пирамидѣ, лежатъ въ двухъ плоскостяхъ, проведенныхъ черезъ ребра и параллельныхъ лучу (R, R'); слѣдовательно, такія плоскости должны содержать лучъ $(st, s't')$, опредѣляющій тѣнь t вершины (s, s'), а потому, найдя въ первомъ углѣ слѣдъ t луча $(st, s't')$ на горизонтальной плоскости, заключаемъ, что тѣнь пирамиды будетъ падать лишь на горизонтальную плоскость и что горизонтальные слѣды касательныхъ плоскостей, опредѣляющихъ эту тѣнь, пройдутъ чрезъ точку t и будутъ касательными къ основанію пирамиды, т. е. опредѣлятся прямыми ta и td. Слѣдовательно, tad есть искомая падающая тѣнь пирамиды. Отсюда же видно, что собственная тѣнь пирамиды ограничена на горизонтальной плоскости многоугольникомъ *abcd*, а на вертикальной, на видимой части пирамиды,—$s'a'b'$.

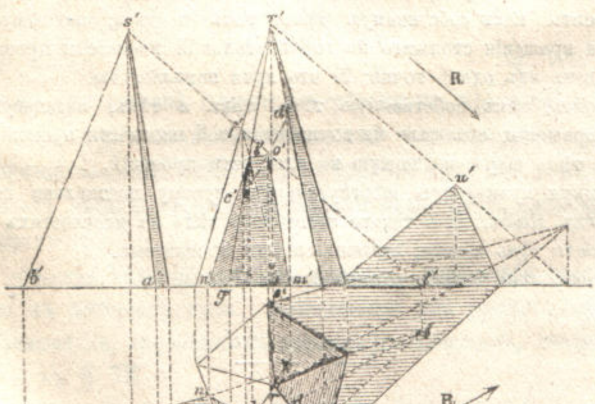
Если свѣтовой лучъ (st, $s't'$) (*чер. 207*) встрѣчаетъ въ первомъ углѣ вертикальную плоскость проекцій въ точкѣ u', то тѣнь пирамиды будетъ отчасти находиться на вертикальной плоскости проекцій, и чтобы опредѣлить эту часть допустимъ, что вертикальная плоскость проекцій удалена настолько, что тѣнь падаетъ только на горизонтальную плоскость; въ такомъ случаѣ прямыя *ta* и *tc* ограничатъ такую тѣнь. При данномъ же положенiи вертикальной плоскости, когда она пересѣкаетъ, тѣнь *act* по прямой *fe*, только часть *cfea* будетъ лежать на горизонтальной плоскости, а остальная часть $fu'e$—на вертикальной плоскости.



Чер. 207.

246. Задача. *Опредѣлить тѣнь пирамиды, падающую на другую пирамиду.*

По предыдущему § опредѣлимъ падающую тѣнь каждой изъ разсматриваемыхъ пирамидъ (*чер. 208*) и найдемъ точки (n, n') и (m, m'), въ которыхъ прямыя *ta* и *tb*, ограничивающiя тѣнь первой пирамиды, встрѣчаютъ основанiе второй пирамиды.



Чер. 208.

Такимъ образомъ найдемъ, что только часть *bngma* тѣни первой пирамиды будетъ лежать на горизонтальной плоскости; а остальная часть тѣни той же пирамиды будетъ лежать на граняхъ *RGM* и *RGN* второй пирамиды. Для опредѣленiя этой послѣдней части, очевидно, достаточно найти пересѣченіе граней RGM и RGN съ плоскостями тѣни SAT и SBT, что въ свою очередь сводится къ опредѣленію, во 1-хъ, точки O, въ которой свѣтовой лучъ ST встрѣчаетъ одну изъ граней второй пирамиды и, во 2-хъ, точки L, въ которой ребро RG встрѣчаетъ одну изъ плоскостей тѣни.

Для опредѣленія точки O, т. е. точки, въ которой прямая $(st, s't')$ встрѣчаетъ плоскость, данную двумя пересѣкающимися прямыми GR и DR, согласно § 76, проведемъ горизонтально-проектирующую плоскость st и найдемъ точки (c, c') и (d, d'), въ которыхъ эта плоскость пересѣчетъ прямыя $(gr, g'r')$ и $(dr, d'r')$; точка (o, o'), въ которой свѣтовой лучъ $(st, s't')$ встрѣчаетъ прямую $(cd, c'd')$, и есть искомая.

На томъ же основаніи для опредѣленія точки, въ которой ребро RG встрѣчаетъ плоскость RST тѣни, опредѣляемую двумя прямыми ST и BT, проведемъ горизонтально-проектирующую плоскость gr и найдемъ пересѣченіе ея съ ST въ точкѣ (c, f') и съ BT въ точкѣ (e, e'); точка (l, l'), въ которой ребро $(gr, g'r')$ встрѣчаетъ прямую $(ce, f'e')$, и есть искомая.

Такимъ образомъ найдемъ, что искомая часть тѣни первой пирамиды, лежащая на второй, будетъ ограничена ломанной линіей $(nlomg, n'l'o'm'g')$.

ЗАДАЧИ.

283. Построить тѣнь прямой шестиугольной призмы, стоящей на горизонтальной плоскости проекцій.

284. Построить тѣнь куба, стоящаго на горизонтальной плоскости такъ, что однимъ ребромъ онъ касается вертикальной плоскости проекцій. Лучи выходятъ изъ свѣтящейся точки, находящейся вправо отъ куба.

285. Построить тѣнь призмы, стоящей на данной плоскости.

286. Построить, какъ собственную тѣнь, такъ и тѣнь, падающую на плоскости проекцій, цилиндра вращенія стоящаго на горизонтальной плоскости проекцій, предполагая: 1) что лучи выходятъ изъ одной точки; 2) что лучи параллельны.

287. Построить, какъ собственную тѣнь, такъ и тѣнь, падающую на плоскости проекцій, конуса вращенія, стоящаго на горизонтальной плоскости проекцій.

288. Найти тѣнь шара, падающую на плоскости проекцій.

289. На данную правильную шестиугольную призму поставлена шестиугольная же правильная пирамида. Найти тѣнь такого составного тѣла на плоскостяхъ проекцій.

290. Построить тѣнь креста, даннаго своими проекціями.

291. Построить тѣнь восьмигранной башни.

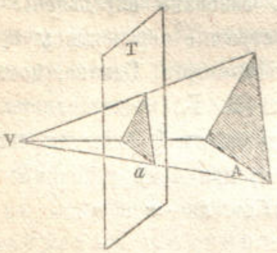
ГЛАВА II.

Линейная перспектива.

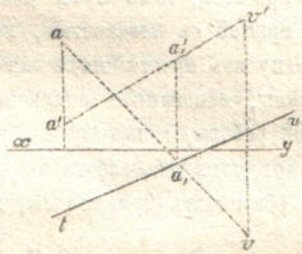
§ I. Опредѣленіе.

247. Линейная перспектива есть изображеніе контуровъ и главныхъ линій предмета на плоскости въ томъ видѣ, къ какомъ они представлялись бы наблюдателю на прозрачной плоскости, помѣщенной опредѣленнымъ образомъ между глазомъ наблюдателя и самимъ предметомъ.

Такимъ образомъ, если V (*чер. 209*)—есть глазъ наблюдателя, T—плоскость, на которой строится перспектива, и A—предметъ, то геометрическое мѣсто точекъ a, въ которыхъ плоскость T пересѣкается лучами, проведенными изъ различныхъ точекъ предмета A къ глазу наблюдателя, есть линейная перспектива предмета A.



Чер. 209.



Чер. 210.

248. Плоскость, на которой строится перспектива предмета и которая обыкновенно предполагается вертикальною, называется *картинною плоскостью* и задается своимъ горизонтальнымъ слѣдомъ относительно тѣхъ же плоскостей проекцій, относительно которыхъ заданы своими проекціями какъ глазъ наблюдателя, такъ и разсматриваемый предметъ.

При такомъ способѣ заданія данныхъ вопроса, построеніе перспективы, т. е. опредѣленіе точекъ, въ которыхъ лучи, проведенные изъ различныхъ точекъ предмета къ глазу наблюдателя, пересѣкаютъ картинную плоскость, сводится къ задачѣ, разсмотрѣнной нами въ § **75**.

Такъ (*чер. 210*), если xy—ось выбранныхъ нами плоскостей проекцій, ut—горизонтальный слѣдъ картины, (a, a')—проекціи точки, перспективу которой ищемъ, (v, v')—проекціи глаза наблюдателя, то искомая перспектива есть точка a'_1, въ которой лучъ $(av, a'v')$ встрѣчаетъ плоскость картины.

249. Положеніе плоскостей проекцій по отношенію къ картинной плоскости, глазу наблюдателя и предмету, перспективу котораго строимъ, зависитъ отъ нашего выбора, и потому приличнымъ выборомъ плоскостей проекцій можно значительно упростить построеніе перспективы. Съ этою цѣлью, обыкновенно, за горизонтальную плоскость проекцій выбираютъ ту горизонтальную плоскость, на которой расположенъ предметъ и въ этомъ случаѣ горизонтальную плоскость проекцій называютъ *основной*.

Вертикальную же плоскость проекцій выбираютъ или совпадающей съ плоскостью картины, или параллельной ей, при томъ расположенной такъ, чтобы разсматриваемый предметъ находился въ первомъ углѣ.

Въ первомъ случаѣ, когда вертикальная плоскость сливается съ плоскостью картины, разсматриваемый предметъ будетъ находиться во второмъ углѣ (предполагая, что глазъ наблюдателя находится въ первомъ), и слѣдовательно, обѣ проекціи предмета, равно какъ и перспектива его, будетъ совмѣщаться другъ съ другомъ, и такимъ образомъ дѣлать чертежъ крайне неяснымъ, хотя и занимающимъ мало мѣста. Вотъ почему такое расположеніе вертикальной плоскости употребляется лишь въ томъ случаѣ, когда контуры предмета не сложны, но когда онъ занимаетъ слишкомъ много мѣста. Вообще же предпочитается второе расположеніе, когда вертикальная плоскость проекцій параллельна плоскости картины и расположена такимъ образомъ, чтобы предметъ находился въ первомъ углѣ; въ этомъ случаѣ лишь вертикальная проекція предмета совмѣщается съ перспективой, и потому этотъ способъ особенно удобенъ для перспективы плоскихъ фигуръ, лежащихъ въ основной плоскости.

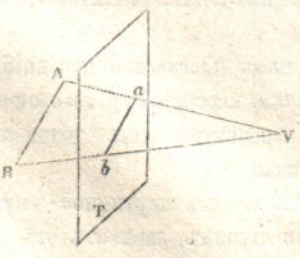
250. Принимая во вниманіе какъ эти замѣчанія относительно выбора плоскостей проекцій, такъ и тѣ теоремы, на которыхъ основано опредѣленіе точки встрѣчи прямой съ плоскостью, легко видѣть, что построеніе перспективы представляетъ одну изъ простѣйшихъ задачъ Начертательной Геометріи. Однако, построеніе перспективы, основанное исключительно на теоремахъ Н. Г., представляетъ много чертежной работы, и потому мы разсмотримъ въ слѣдующемъ § рядъ теоремъ, при помощи которыхъ эта работа значительно сокращается; при чемъ условимся слѣдъ картины обозначать буквами tu, проекціи глаза наблюдателя—v и v'.

§ II. Основныя теоремы.

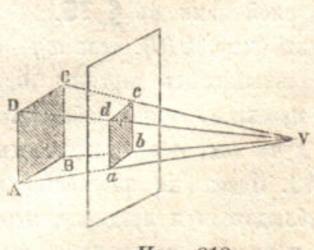
251. Теорема I. *Перспектива прямой есть прямая.*

Ибо лучи, проведенныя изъ точки зрѣнія V ко всѣмъ точкамъ прямой AB (*чер. 211*), лежатъ въ одной плоскости VAB, которая съ плоскостью картины T пересѣкается по прямой ab—перспективѣ прямой AB.

Если прямая параллельна картинѣ, то ея перспектива параллельна самой прямой (Геометрія Давыдова, § 199). На этомъ основаніи перспектива фигуры, напр., квадрата $ABCD$ (*чер. 212*), составленной прямыми, параллельными плоскости



Чер. 211.



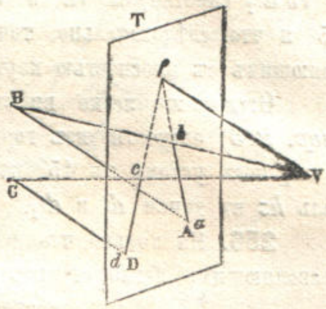
Чер. 212.

картины, подобна самой фигурѣ, ибо представляетъ собою ни что иное, какъ сѣченіе пирамиды $V\,ABCD$ плоскостью картины, параллельною ея основанію.

Примѣчаніе. Отсюда легко видѣть, что перспектива фигуры уменьшается по мѣрѣ удаленія фигуры отъ картины.

252. Теорема II. *Перспектива безконечной прямой AB, наклонной къ плоскости картины, заключается между двумя точками, въ которыхъ картинная плоскость встрѣчается, во-первыхъ, самой прямой, а во-вторыхъ, лучемъ зрѣнія V, параллельнымъ прямой AB.*

Въ самомъ дѣлѣ, пусть (*чер. 213*) T—картинная плоскость, V—глазъ наблюдателя, AB—данная прямая, наклонная къ плоскости T, a—слѣдъ прямой, т. е. точка, въ которой прямая AB встрѣчаетъ плоскость картины. Первая часть предложенія очевидна, ибо точка a, какъ лежащая въ плоскости картины, сама себѣ служитъ перспективою и, слѣдовательно, лежитъ на перспективѣ данной прямой.



Чер. 213.

Для доказательства второй части, проведемъ лучъ Vf параллельно прямой AB, и пусть точка f есть точка встрѣчи его съ плоскостью картины. Прямыя AB и Vf, какъ параллельныя между собою, пересѣкаются въ точкѣ, удаленной на безконечно большое разстояніе отъ плоскости картины, и потому прямую Vf должно разсматривать какъ лучъ зрѣнія, идущій изъ безконечно удаленной точки прямой AB, а точку f, въ которой она встѣчаетъ картинную плоскость, какъ перспективу этой точки. Слѣдовательно прямая af, какъ соединяющая перспективы a и f двухъ точекъ прямой AB, есть перспектива самой прямой AB.

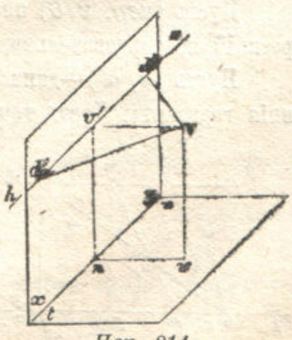
253 Точка f называется *точкою схода* прямой AB; слѣдовательно, точка схода прямой есть точка встрѣчи параллельнаго ей луча съ плоскостью картины.

Отсюда, прямыя, параллельныя плоскости картины, не имѣютъ точекъ схода.

254. Теорема III. *Перспективы двухъ параллельныхъ прямыхъ, наклонныхъ къ плоскости картины, пересѣкаются.*

Дѣйствительно, изъ опредѣленія точки схода необходимо слѣдуетъ, что прямыя AB и CD (*чер. 213.*), какъ парраллельныя между собою, имѣютъ одну и ту же точку схода f, чрезъ которую, по § **252**, проходятъ ихъ перспективы ab и cd.

255. Наиболѣе важную роль по отношенію къ плоскости картины играютъ прямыя, параллельныя основной плоскости, т. е. горизонтали (въ частномъ случаѣ прямыя, лежащія въ основной плоскости).



Чер. 214.

Изъ предыдущаго легко видѣть, что всѣ горизонтальныя прямыя имѣютъ свои точки схода на горизонтали картины hz (*чер. 214*), проведенной чрезъ вертикальную проекцію v' точки зрѣнія V. Въ самомъ дѣлѣ, всѣ прямыя, проведенныя чрезъ точку V, параллельно горизонталямъ, лежатъ въ горизонтальной плоскости P, проходящей чрезъ V и содержащей проектирующую Vv', а слѣдовательно, геометрическое мѣсто точекъ ихъ встрѣчи съ картиною, т. е. точекъ схода, есть горизонтальная прямая zh, по которой плоскость P пересѣкаетъ плоскость картины.

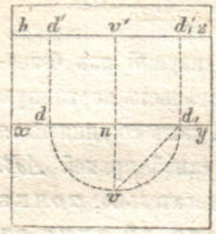
На горизонтали zh, называемой *линіей горизонта*, лежатъ три важныя точки: главная точка и двѣ точки разстоянія.

Главная точка, или *центръ картины* v' есть точка встрѣчи перпендикуляра, опущеннаго изъ точки зрѣнія V, съ плоскостью картины. Главная точка v' есть, очевидно, точка схода всѣхъ линій, перпендикулярныхъ къ плоскости картины.

Точки разстояній d'_1 и d' находятся по обѣ стороны отъ главной точки v' на разстояніи, равномъ разстоянію горизонтальной проекціи v точки зрѣнія отъ слѣда картины, т. е. $d'v'=d'_1v'=vn$. Отсюда видно, что въ треугольникахъ $Vv'd'$ и $Vv'd'_1$ гипотенузы Vd' и Vd'_1 составляютъ съ плоскостью картины углы въ 45^0 и что, слѣдовательно, точки разстояній суть точки схода горизонталей, составляющихъ съ плоскостью картины углы въ 45^0.

Отсюда же легко видѣть, что для построенія точекъ разстояній слѣдуетъ (*чер. 215*) провести изъ горизонтальной проекціи v точки зрѣнія двѣ прямыя vd и vd_1 подъ угломъ въ 45^0 къ оси xy и точки d и d_1 спроектировать на горизонталь hz въ точки d' и d'_1.

256. На только что разсмотрѣнныхъ свойствахъ горизонталей, свойствахъ, позволяющихъ легко строить ихъ перспективы, основанъ общій пріемъ построенія перспективы точекъ въ тѣхъ случаяхъ, когда пріемъ указанный въ § **243**, не можетъ быть примѣненъ; напр., когда точка зрѣнія слишкомъ удалена отъ плоскости картины и ея горизонтальная проекція не можетъ быть задана на чертежѣ, но даны точки разстояній.



Чер. 215

Опредѣленіе перспективы точекъ при помощи горизонталей вообще состоитъ въ томъ, что чрезъ данную точку проводятъ двѣ горизонтали, опредѣляютъ ихъ перспективы и такимъ образомъ находятъ въ точкѣ ихъ пересѣченія перспективу искомой точки.

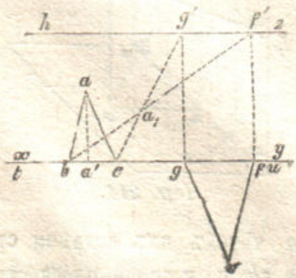
Слѣдующіе частные примѣры всего лучше пояснятъ употребленіе этого пріема.

§ III. Построеніе перспективы плоскихъ фигуръ.

257. Задача: *Найти перспективу точки, лежащей въ основной плоскости.*

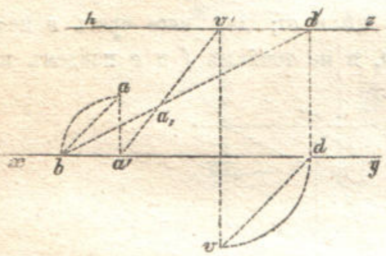
Пусть (*чер. 216*) плоскость картины совпадаетъ съ вертикальною плоскостью проекцій и, слѣдовательно, слѣдъ картины ut сливается съ осью проекцій xy.

Пусть (a, a')—данная точка, v—горизонтальная проекція точки зрѣнія; hz—линія горизонта. Чрезъ точку a проводимъ въ основной плоскости двѣ произвольныя прямыя ab и ac, а чрезъ точку v—имъ параллельные лучи зрѣнія vg и vf и въ точкахъ g и f, пересѣченія ихъ съ слѣдомъ картины, находимъ горизонтальныя проекціи g и f точекъ схода прямыхъ ab и ac; а по g и f находимъ на линіи горизонта hz и самыя точки схода—g' и f'. Замѣтивъ кромѣ того, что прямыя ab и ac встрѣчаютъ картинную плоскость въ точкахъ b и c, заключаемъ, по § **252**, что прямыя cg' и bf' суть перспективы прямыхъ ac и ab; а потому точка ихъ пересѣченія a_1 есть перспектива искомой точки.

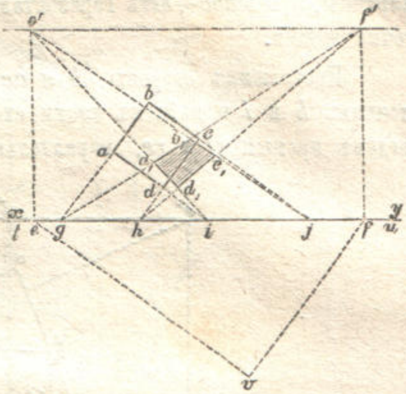


Чер. 216.

258. Вмѣсто двухъ произвольныхъ прямыхъ ab и ac, удобнѣе пользоваться прямой ab (*чер. 217*), составляющей съ плоскостью картины уголъ въ 45° и имѣющей точку схода въ точкѣ разстоянія d', и прямой aa', перпендикулярной къ плоскости картины и имѣющей точку схода въ главной точкѣ v'; такимъ образомъ искомая перспектива точки (a, a') будетъ находиться въ точкѣ a_1 на пересѣченіи перспективы bd' и $a'v'$ прямыхъ ab и aa'.



Чер. 217.



Чер. 218.

259. Задача. *Построить перспективу квадрата, лежащаго въ основной плоскости.*

Пусть (*чер. 218*) плоскость картины совпадаетъ съ вертикальною плоскостью проекцій и, слѣдовательно, слѣдъ ut картины сливается съ осью xy проекцій; пусть $abcd$—горизонтальная проекція квадрата, v—горизонтальная проекція точки зрѣнія, $f'e'$—линія горизонта. Продолжимъ стороны квадрата до пересѣченія со слѣдомъ картины и найдемъ перспективу прямыхъ bg, ch, ai, bj. Такъ какъ стороны bg и ch взаимно-параллельны, то имѣютъ одну и ту же точку схода, которую найдемъ, если чрезъ точку зрѣнія проведемъ прямую vf, параллельную bg и по f опредѣлимъ точку схода f' прямыхъ bg и ch. По § **252** прямыя gf' и hf' суть перспективы прямыхъ bg и ch. На основаніи тѣхъ же соображеній построимъ перспективы je' и ie' прямыхъ ai и bj и найдемъ точки a_1, b_1, c_1, d_1, въ которыхъ онѣ пересѣкаютъ прямыя gf' и hf'. Четыреугольникъ $a_1b_1c_1d_1$ есть искомая перспектива даннаго квадрата.

260. Въ томъ случаѣ, когда одна изъ сторонъ квадрата перпендикулярна къ слѣду картины, построеніе перспективы его значительно упрощается. Въ самомъ дѣлѣ, пусть (*чер. 219*) сторона квадрата ba перпендикулярна къ слѣду картины, пусть v'—главная точка, d'—точка разстояній. Продолжимъ перпендикулярныя стороны ba и cd до пересѣченія со слѣдомъ картины въ точкахъ g и h и, припомнивъ, что прямыя bg и ch,

Чер. 219.

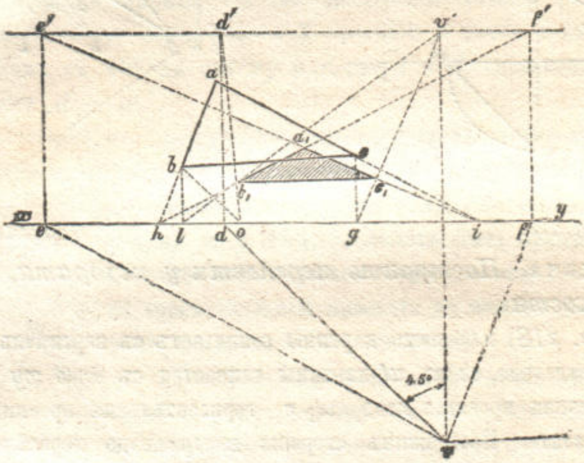
какъ перпендикулярныя къ плоскости картины, имѣютъ точкою схода главную точку v', найдемъ, что перспективы прямыхъ bg и ch суть прямыя gv' и hv'. Съ другой стороны, діагональ bd квадрата, какъ прямая, составляющая уголъ 45° съ плоскостью картины, имѣютъ точкою схода точку разстояній d', а слѣдовательно—своею перспективою прямую ld', которая пересѣкаетъ gv' и hv' въ точкахъ b_1 и d_1—перспективахъ точекъ b и d, а потому, проведя чрезъ b_1 и d_1 прямыя b_1c_1 и d_1a_1

(§ **251**), параллельныя слѣду картины, найдемъ, что четыреугольникъ $a_1b_1c_1d_1$ есть перспектива даннаго квадрата.

261. Задача. *Найти перспективу какого-либо треугольника, лежащаго въ основной плоскости.*

Пусть (*чер. 220*) вертикальная плоскость проекцій совпадаетъ съ плоскостью картины, пусть abc—есть горизонтальная проекція даннаго треугольника, а (v, v')—точка зрѣнія.

Продолжимъ стороны ab и ac до пересѣченія ихъ съ слѣдомъ картины въ точкахъ h и i и найдемъ точки схода прямыхъ ah и ai; для чего чрезъ v проведемъ прямыя vf и ve, параллельныя ah и ai, и по точкамъ f и e найдемъ на

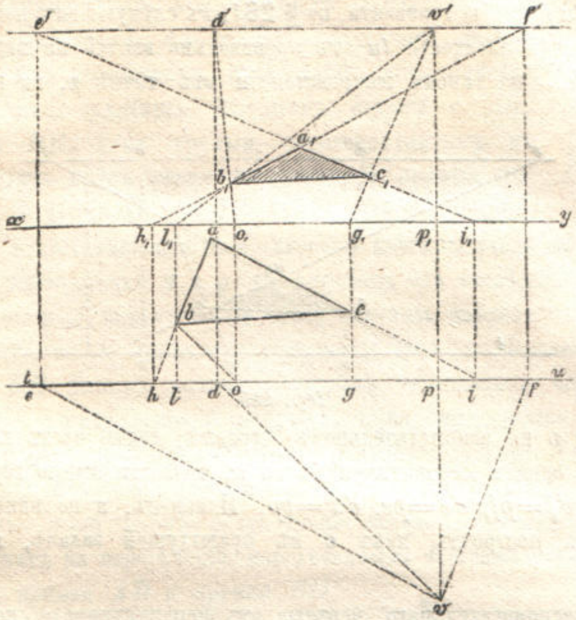


Чер. 220.

линіи горизонта точки схода f' и e' прямыхъ ah и ai. Прямыя hf' и ie' суть перспективы прямыхъ ah, ai, а точка ихъ пересѣченія a_1—перспектива вершины a даннаго треугольника. Для опредѣленія перспективы точекъ b и c неудобно пользоваться перспективою прямой bc, такъ какъ слѣдъ ея лежитъ внѣ предѣловъ эпюра, а потому построимъ перспективу точекъ b и c при помощи прямыхъ bl и cg, перпендикулярныхъ къ плоскости картины и, слѣдовательно, имѣющихъ своею перспективою прямыя lv' и gv'. Эти прямыя пересѣкаются съ прежде найденными перспективами ie' и hf' въ точкахъ b_1 и c_1, которыя и представляютъ перспективы точекъ b и c. Построенный такимъ образомъ треугольникъ $a_1b_1c_1$ есть искомая перспектива даннаго треугольника.

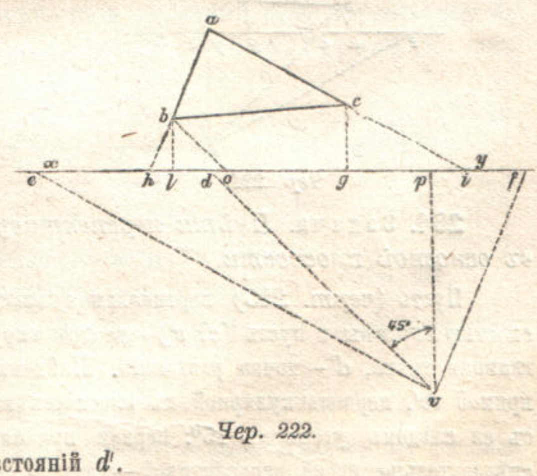
262. При рѣшеніи предыдущихъ задачъ, вертикальная плоскость проекцій сливалась съ плоскостью картины, и горизонтальная проекція фигуры накладывалась на его перспективу; отсюда происходила неясность чертежа, и, слѣдовательно, неудобство такого выбора вертикальной плоскости, особенно если приходится пользоваться еще и вертикальной проекціей фигуры; чтобы устранить это неудобство, необходимо вертикальную плоскость проекцій расположить такъ, чтобы она, будучи параллельна плоскости картины, лежала за разсматриваемой фигурой, т. е., чтобы фигура находилась въ первомъ углѣ и, слѣдовательно, имѣла свою горизонтальную проекцію подъ осью. Рѣшимъ предыдущую задачу при такомъ выборѣ вертикальной плоскости.

Пусть (*чер. 221*) xy—ось проекцій, ut—слѣдъ картины, abc—горизонтальная проекція треугольника, находящаяся между осью и слѣдомъ картины, (v, v')—точка зрѣнія.



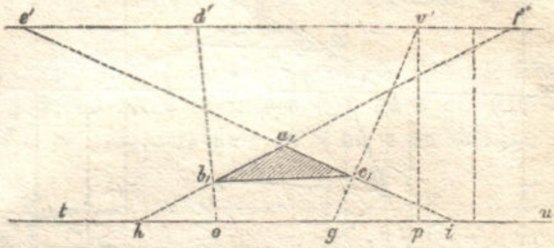
Чер. 221.

Продолжимъ стороны ab и ac треугольника до встрѣчи въ точкахъ h и i съ слѣдомъ картины и найдемъ вертикальныя проекціи точекъ h и i въ точкахъ h_1 и i_1 на оси xy; затѣмъ, проведемъ чрезъ точку v прямыя ve и vf, параллельныя ah и ai, и найдемъ вертикальныя проекціи точекъ f и e въ точкахъ f' и e' на линіи горизонта; по **§ 252**, h_1f'—есть перспектива стороны ab; i_1e'—перспектива стороны ac, точка a_1, пересѣченія перспективъ i_1e' и h_1f', есть перспектива вершины a. Для построенія перспективъ вершины b и c проведемъ чрезъ нихъ прямыя bl и cg, перпендикулярныя къ слѣду картины, и найдемъ на оси xy вертикальныя проекціи l_1 и g_1 ихъ слѣдовъ l и g. Прямыя l_1v' и g_1v' суть перспективы прямыхъ bl и cg, и слѣдовательно, точки b_1 и c_1, въ которыхъ эти прямыя встрѣчаютъ найденныя прежде перспективы h_1f' и i_1e', суть перспективы вершинъ b и c. Для опредѣленія перспективы точки b можно было бы еще воспользоваться прямою bo, составляющею съ осью картины уголъ въ 45^0 и имѣющею точку схода въ точкѣ разстояній d'.



Чер. 222.

263. Предыдущее построеніе удобно не только въ томъ отношеніи, что горизонтальная проекція фигуры не наложена на ея перспективу, но еще и въ томъ, что ничто вамъ не мѣшаетъ вычерчивать нижнюю часть чертежа до оси xy отдѣльно отъ перспективнаго чертежа и, опредѣливъ на такомъ вспомогательномъ чертежѣ (*чер.* 222) точки p, f, i, g, o, d, l, h, e, нанести ихъ затѣмъ на слѣдъ картины tu и линію горизонта, по § **261**, въ слѣдующемъ порядкѣ (*чер.* 223). На слѣдѣ картинной плоскости tu отъ произвольно взятой на немъ точки p, взять точки i, g, o, h,... на такомъ же разстояніи отъ точки p, на какомъ онѣ нахо-

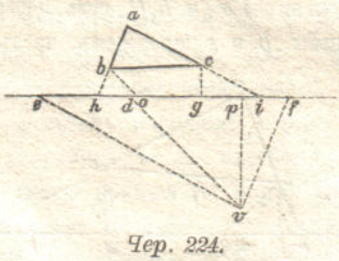


Чер. 223.

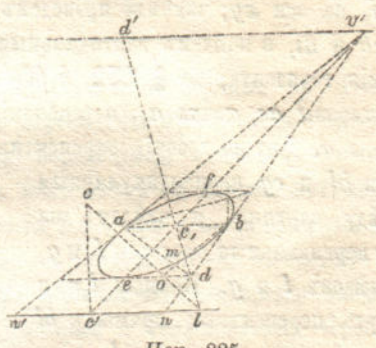
дятся отъ точки p на вспомогательномъ чертежѣ, далѣе чрезъ главную точку v', находящуюся на одномъ перпендикулярѣ съ p, провести линію горизонта и на ней отложить части $v'f'=pf$, $v'e'=pe$, $v'd'=vp$. Наконецъ, и по нанесеннымъ такимъ образомъ точкамъ построить, какъ и въ предыдущей задачѣ, перспективу треугольника abc.

Отдѣленіе вспомогательнаго чертежа отъ перспективнаго позволяетъ дѣлать первый въ уменьшенномъ масштабѣ, и такимъ образомъ сократить чертежную работу.

Такъ *чертежъ* 224 представляетъ собою вспомогательный чертежъ для построенія перспективы треугольника, сдѣланный въ половину натуральной величины.



Чер. 224.

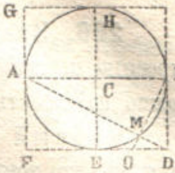


Чер. 225.

264. Задача. *Найти перспективу окружности, расположенной въ основной плоскости.*

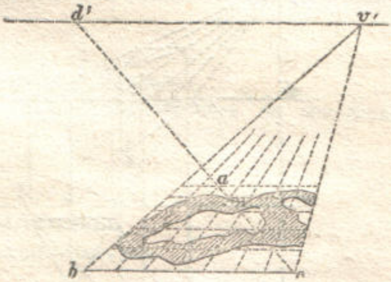
Пусть (*черт.* 225) вертикальная плоскость проекцій совпадаетъ съ плоскостью картины и пусть (c, c')—центръ окружности, $c'n=c'n'$—радіусъ ея, v'—главная точка, d'—точка разстояній. Найдемъ перспективу центра при помощи прямой cc', перпендикулярной къ плоскости картины, и прямой cl, составляющей съ ея слѣдомъ уголъ въ 45°; первая прямая имѣетъ точкою схода точку v' и, слѣдовательно, своей перспективой—прямую $c'v'$; вторая прямая имѣетъ точкою схода точку d' и, слѣдовательно, своею перспективой—прямую ld'. Прямыя $c'v'$ и ld' пересѣкаются въ точкѣ c_1—перспективѣ центра окружности.

Построеніе же перспективы окружности ведется при помощи построенія перспективы сѣти квадратовъ, покрывающихъ данную окружность. Съ этой цѣлью изъ точки C (*чер. 226*), какъ изъ центра, опишемъ окружность радіусомъ $c'n=c'n'$ и построимъ, описанный около нея, квадратъ DFG, который раздѣлимъ двумя діаметрами AB и EH на четыре равные квадрата. Найдемъ ихъ перспективу, предполагая, что діаметръ AB параллеленъ слѣду картины. Въ этомъ случаѣ стороны квадратовъ FG и DB, какъ прямыя, перпендикулярныя къ слѣду картины, будутъ имѣть своею перспективой прямыя $n'v'$ и nv' (*чер. 225*), а діагональ его DG, какъ прямая, проходящая чрезъ центръ и составляющая съ плоскостью картины уголъ 45^0—прямую ld'; а потому, проведя чрезъ точки d и g, въ которыхъ эта послѣдняя прямая встрѣчаетъ $n'v'$ и nv', прямыя, параллельныя слѣду картины, найдемъ какъ перспективу квадратовъ, покрывающихъ данную окружность, такъ и перспективу ab и ef діаметровъ AB и EH. Такимъ путемъ построимъ перспективу четырехъ точекъ a, b, e, f, принадлежащихъ искомой окружности; по нимъ можно было бы отъ руки вычертить кривую, представляющую перспективу окружности, но, для большей точности слѣдуетъ найти точно перспективы еще промежуточныхъ точекъ.



Чер. 226.

Съ этою цѣлью всего удобнѣе брать точки, которыя, принадлежа окружности, въ то же время лежатъ на пересѣченіи, опредѣленнымъ образомъ построенныхъ, прямыхъ, такъ, напр., прямая AD и прямая BO, соединяющія точку B съ срединою стороны ED, пересѣкаются въ точкѣ M, принадлежащей окружности. А потому перспективы ихъ ad и bo пересѣкаются въ точкѣ m, принадлежащей перспективѣ окружности. Поступая такимъ образомъ для каждаго квадрата, найдемъ новыхъ четыре точки искомой перспективы и вычертимъ перспективу отъ руки по восьми точно построеннымъ точкамъ.



Чер. 227.

265. Способъ, только что примѣненный нами къ построенію перспективы окружности и извѣстный подъ именемъ способа построенія перспективы при помощи сѣти квадратовъ, какъ это видно изъ предыдущаго §, состоитъ въ томъ, что данную фигуру покрываютъ сѣтью квадратовъ, одна изъ сторонъ которыхъ перпендикулярна къ слѣду картины, затѣмъ чертятъ перспективу этой сѣти (**§ 260**) и на ней отъ руки вычерчиваютъ части фигуры, соотвѣтствующія каждому отдѣльному квадрату. Способъ этотъ особенно часто примѣняется въ тѣхъ случаяхъ, когда данная фигура ограничена неправильными кривыми; такъ, *чертежъ 227* представляетъ перспективу фигуры *228*, вычерченную при помощи сѣти квадратовъ.

Чер. 228.

ЗАДАЧИ.

292. Построить перспективу правильнаго шестиугольника, лежащаго въ основной плоскости.

293. Построить перспективу паркетнаго пола, состоящаго изъ ромбическихъ плашекъ, когда діагональ плашекъ составляетъ съ основаніемъ картины уголъ въ 45^0.

294. Начертить планъ горизонтальной мѣстности, на которой проходитъ дорога, протекаетъ рѣка, расположены огороды и т. д. Построить перспективу мѣстности.

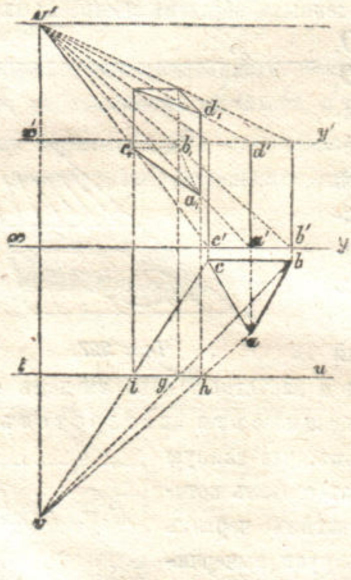
§ IV. Построеніе перспективы тѣлъ.

266. Задача о построеніи перспективы тѣлъ собственно сводится къ построенію перспективы точекъ, лежащихъ надъ основной плоскостью. Съ этою цѣлью можно пользоваться однимъ изъ слѣдующихъ пріемовъ.

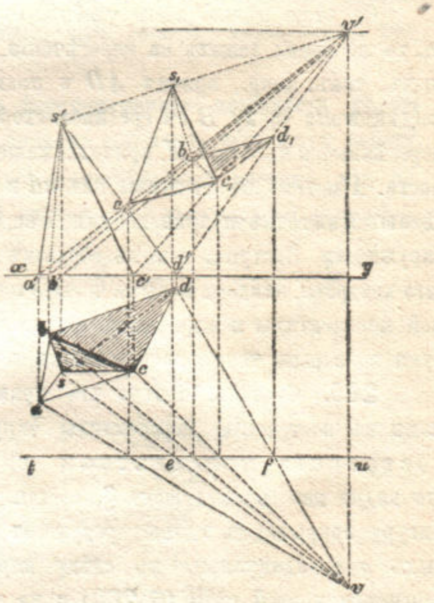
Первый пріемъ вытекаетъ изъ опредѣленій перспективы точки и состоитъ въ томъ, что точку, данную своими проекціями, положимъ (*чер. 210*) (a, a'), соединяютъ съ точкою зрѣнія (v, v') прямою $(av, a'v')$ и находятъ точку (a_1, a'_1), въ которой эта прямая встрѣчаетъ плоскость картины, данную своимъ слѣдомъ ut.

Этотъ пріемъ удобенъ въ томъ случаѣ, если горизонтальная проекція v точки зрѣнія лежитъ въ предѣлахъ эпюра; въ противномъ же случаѣ, когда даны лишь вертикальная проекція v' точка зрѣнія и точки разстояній, опредѣляютъ перспективу точки, лежащей надъ основной плоскостью, пользуясь вторымъ пріемомъ.

Второй пріемъ состоитъ въ томъ, что чрезъ данную точку проводятъ горизонтальную плоскость и, принявъ ее за основную, опредѣляютъ перспективу точки, пользуясь соображеніями, разсмотрѣнными въ предыдущихъ задачахъ.



Чер. 229.



Чер. 230.

267. Задача. *Построить перспективу прямой треугольной призмы поставленной на основную плоскость.*

Пусть (*чер. 229*) xy—ось проекцій, ut—слѣдъ картины, (v, v')—точки зрѣнія, $(abc, a'b'c')$—проекціи нижняго основанія призмы, $a'd'$—высота призмы.

Найдемъ перспективу нижняго основанія призмы; для чего проведемъ лучи зрѣнія $(cv, c'v')$, $(av, a'v')$, $(bv, b'v')$ и найдемъ точки (i, c_1), (g, b_1), (h, a_1), въ которыхъ эти лучи встрѣчаютъ картинную плоскость; треугольникъ $a_1b_1c_1$—есть перспектива нижняго основанія. Для опредѣленія перспективы верхняго основанія, которое проектируется на горизонтальную плоскость по треугольнику abc, проведемъ чрезъ одну изъ его точекъ, напр., (a, d'), горизонтальную плоскость $x'y'$ и опредѣлимъ перспективу точекъ abc, принявъ плоскость $x'y'$ за основную; для чего проведемъ лучъ зрѣнія $(av, d'v')$ и найдемъ точку (h, d_1), въ которой онъ встрѣчаетъ плоскость картины ut.

Точка d_1 есть перспектива вершины верхняго основанія. Поступая подобнымъ же образомъ относительно всѣхъ другихъ вершинъ того же основанія, найдемъ его перспективу, а соединяя перспективы обоихъ основаній прямыми, построимъ перспективу призмы.

268. Задача. *Построить перспективу треугольной пирамиды.*

Пусть *(чер. 230)* xy—ось проекцій, ut— слѣдъ картины $(s\ a\ b\ c,\ s'a'b'c')$—проекціи данной пирамиды, dbc—тѣнь пирамиды на горизонтальной плоскости проекцій. Построимъ перспективу основанія $(abc,\ a'b'c')$ пирамиды и вершины ея, (s, s'), опредѣливъ точки, въ которыхъ лучи зрѣнія $(av, a'v')$, $(bv, b'v')$... $(sv, s'v')$, $(dv, d'v')$ встрѣчаютъ плоскость картины ut. Такимъ же образомъ, найдемъ перспективу $a_1b_1c_1$ основанія, перспективу s_1 вершины и перспективу $b_1c_1d_1$ тѣни.

ЗАДАЧИ.

295. Построить перспективу квадрата, лежащаго въ горизонтальной плоскости выше основной на h единицъ.

296. Построить перспективу правильнаго шестиугольника, лежащаго въ горизонтальной плоскости выше основной на h единицъ.

297. Построить перспективу куба.

298. Построить перспективу правильной шестиугольной призмы.

299. Построить перспективу параллепипеда и тѣни, бросаемой имъ на основную плоскость.

300. Построить перспективу цилиндра.

301. Построить перспективу конуса.

302. Построить перспе тиву правильнаго восьмиугольника.

303. Построить перспективу правильнаго двѣнадцатигранника.

304. Построить перспективу креста.

ГЛАВА III.

Проектированіе сооруженій.

§ I. Опредѣленія.

269. Все предыдущее въ достаточной мѣрѣ ясно показываетъ, что проекціонный чертежъ тѣла не только даетъ возможность точно опредѣлить всѣ его элементы, но и рѣшить графически всевозможныя задачи, къ такому тѣлу относящіяся; и потому во всѣхъ тѣхъ случаяхъ, когда требуется составить точное представленіе о формахъ, размѣрахъ и расположеніи составныхъ частей какого-либо предмета, напр., зданія, машины и т. п., изображаютъ предметъ посредствомъ проекцій на горизонтальную и вертикальную плоскости; при чемъ горизонтальная проекція предмета вообще называется его *планомъ*, вертикальная—*фасадомъ*.

270. Для того, чтобы проекціонный чертежъ предмета вполнѣ достигалъ своей цѣли, пользуются слѣдующими средствами.

Во-первыхъ, для ознакомленія съ внѣшнимъ видомъ предмета вертикальную плоскость проекцій помѣщаютъ параллельно различнымъ сторонамъ его, и такимъ образомъ получаютъ нѣсколько фасадовъ, при чемъ одинъ изъ нихъ принимается за главный.

Во-вторыхъ, для ознакомленія съ внутреннимъ устройствомъ предмета чертятъ сѣченія его плоскостями или параллельными плоскостямъ проекцій, или перпендикулярными къ оси проекцій. Въ послѣднемъ случаѣ сѣченія носятъ названія *профилей*.

Въ третьихъ, наконецъ, нерѣдко изображаютъ на одномъ эпюрѣ только часть (деталь) предмета, такъ что для изображенія всего предмета требуется нѣсколько отдѣльныхъ эпюровъ, сдѣланныхъ нерѣдко въ различныхъ масштабахъ, смотря по важности детали.

271. Пользуясь этими средствами, всегда есть возможность точно изобразить посредствомъ ряда чертежей предметъ, какъ бы ни былъ онъ сложенъ, но при этомъ нужно стремиться, чтобы число необходимыхъ чертежей было возможно меньше. И съ этой цѣлью, если предметъ симметриченъ, строятъ сѣченіе одной лишь его половины, на другой же половинѣ чертежа чертятъ или наружный видъ предмета, или же сѣченіе его плоскостью, параллельною первой, но проходящей чрезъ другое мѣсто предмета; если же предметъ не симметриченъ; то вырѣзываютъ части его, наиболѣе удобныя для раскрытія внутренняго его устройства и въ то же время не мѣшающія изображенію его наружнаго вида.

Кромѣ того при составленіи проекціонныхъ чертежей зданій, машинъ и т. п. должно имѣть въ виду слѣдующія установившіяся правила:

1) Ось проекцій и проектирующія не вычерчиваются.

2) Сплошными линіями вычерчиваются лишь видимыя части предмета; при чемъ тѣ изъ нихъ, которыя находятся въ тѣни (§ 240), вычерчиваются болѣе толстою чертою, чѣмъ тѣ, которыя освѣщены. Невидимыя линіи, если необходимо ихъ показать, вычерчиваются пунктиромъ.

3) Разрѣзы покрываются или штрихами, или красками, съ тѣмъ разсчетомъ чтобы указать матеріалъ, изъ котораго должны быть приготовлены разрѣзныя части; при этомъ обычаемъ установлено покрывать: дерево—желто-бурой краской (terre-besienne), песокъ—красной (сурикъ), кирпичъ и камень—карминомъ, чугунъ—нейтралатиномъ, желѣзо—голубой, мѣдь—желтой.

Умѣнье пользоваться всѣми этими правилами при составленіи новаго чертежа и при чтеніи готоваго пріобрѣтается лишь практикой и хорошо составленный чертежъ является весьма важной работой въ строительномъ дѣлѣ, такъ какъ его не можетъ замѣнить никакое подробное описаніе предмета.

§ II. Проектъ жилого дома.

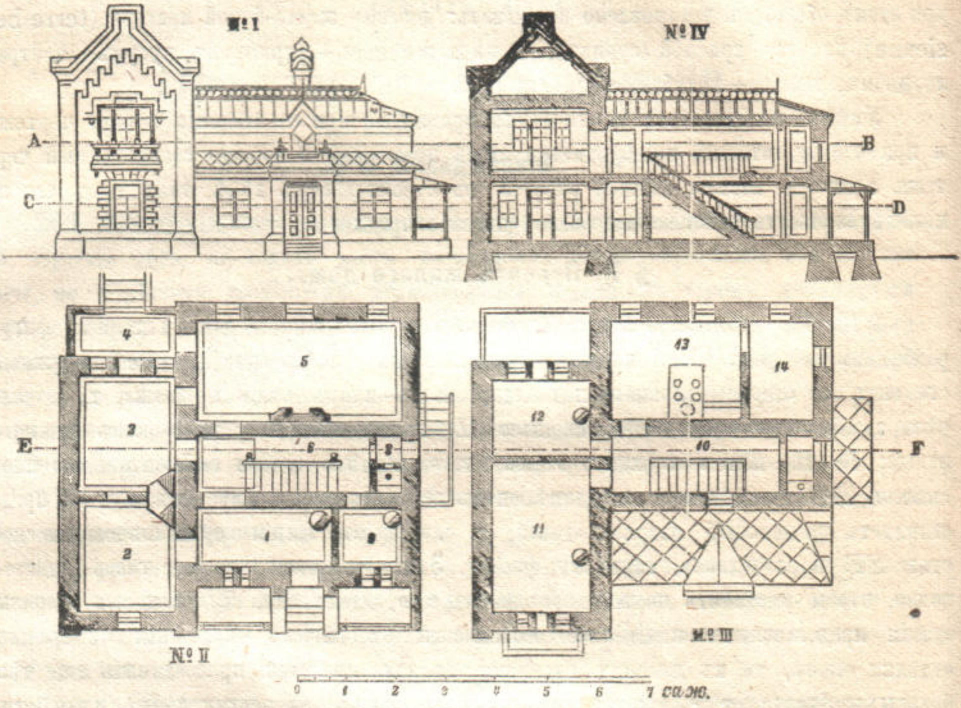
272. На *чертежѣ 231* представленъ проектъ жилого дома четырьмя фигурами, изъ которыхъ № I представляетъ главный фасадъ зданія, т. е. наружный его видъ со стороны главнаго подъѣзда; № II—планъ нижняго этажа, т. е. разрѣзъ зданія горизонтальною плоскостью CD, проведенною посрединѣ оконъ нижняго этажа; № III—планъ верхняго этажа, т. е. разрѣзъ зданія горизонтальною плоскостью AB, проведенною посрединѣ оконъ верхняго этажа, наконецъ, № IV представляетъ продольный разрѣзъ зданія, т. е. разрѣзъ зданія вертикальною плоскостью EF, параллельною главному фасаду. Этихъ чертежей, вообще говоря, достаточно, чтобы составить полное представленіе о зданіи. Но, если боковыя стороны зданія представляютъ какія-либо особенности въ смыслѣ украшенія стѣнъ или отдѣлки оконъ, то къ данному главному фасаду придется присоединить еще три боковыхъ фасада, т. е. три наружныхъ вида зданія на вертикальной плоскости. Кромѣ того, если внутри зданія расположены лѣстницы, въ направленіи, перпендикулярномъ къ главному фасаду, то къ продольному разрѣзу № IV нужно присоединить еще разрѣзъ поперечный, т. е. разрѣзъ вертикальною плоскостью, перпендикулярною къ главному фасаду; наконецъ, если крыша зданія имѣетъ очень сложную форму, то, кромѣ всѣхъ вышепоименованныхъ чертежей, чертятъ еще планъ крыши, т. е. видъ зданія на горизонтальной плоскости. Всѣ такого рода чертежи, въ количествѣ необходимомъ для полнаго представленія о всѣхъ частяхъ зданія, называются главными чертежами зданія, въ отличіе отъ такъ называемыхъ детальныхъ, на которыхъ въ большомъ масштабѣ вычерчиваются отдѣльныя части зданія, чѣмъ либо замѣчательныя и неподробно вычерченныя, по малости масштаба, на главныхъ чертежахъ.

Такимъ образомъ на детальныхъ чертежахъ обыкновенно чертятъ формы карнизовъ, рѣшетки балконовъ, украшеній оконъ, дверей и т. п.

Изъ предыдущаго перечисленія фигуръ чертежа легко усмотрѣть и роль каждаго изъ нихъ.

Главный фасадъ, какъ и боковые, представляютъ видъ зданія на вертикальную плоскость, и такимъ образомъ опредѣляютъ изящность, красоту, пропорціональность зданія.

Планы опредѣляютъ внутреннее расположеніе комнатъ, оконъ, дверей, лѣстницъ, печей, и горизонтальные ихъ размѣры. Слѣдовательно, по планамъ главнымъ образомъ судятъ объ удобствахъ зданія, какъ жилища. Такъ, по плану № II, мы видимъ, что въ первомъ этажѣ имѣются слѣдующія комнаты: *1*—передняя съ главнымъ подъѣздомъ, *2*—кабинетъ, *3*—гостиная съ выходомъ въ садъ *(4)*, *5*—столовая, *6*—корридоръ съ чернымъ ходомъ *(8)* и лѣстницей на верхній этажъ, *9*—комната для лакея подлѣ передней.



Чер. 231.

По плану № III мы видимъ расположеніе комнатъ во второмъ этажѣ, именно: *10*—корридоръ, *11*—дѣтская съ выходомъ на балконъ, *12*—спальня съ выходомъ на балконъ, *13*—кухня, *14*—комната для прислуги.

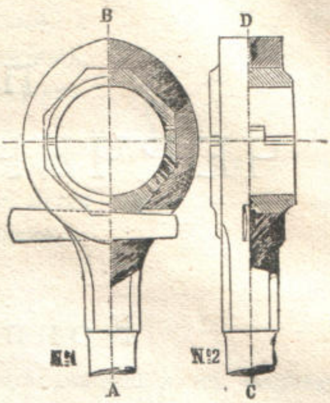
Тѣ же планы показываютъ расположеніе оконъ и дверей. Такъ, мы видимъ по плану № II, что въ передней одно окно и три двери: парадная, въ кабинетъ и въ корридоръ; въ кабинетѣ—одно окно и двѣ двери: въ переднюю и гостиную и т. д.

Разрѣзы вертикальными плоскостями показываютъ высоты комнатъ, дверей и оконъ, а также расположеніе лѣстницъ, глубину фундамента, устройство стропилъ, половъ, потолковъ и т. п.

273. Принимая во вниманіе эти замѣчанія, легко видѣть, что при совмѣстномъ обсужденіи всѣхъ главныхъ чертежей, является возможность составить полное представленіе о зданіи и вычертить отдѣльно, если потребуется, какъ его боковые фасады, такъ и разрѣзы вертикальными плоскостями въ данныхъ направленіяхъ. Такъ, въ нашемъ случаѣ, лѣвый боковой фасадъ представитъ голую стѣну безъ оконъ; на заднемъ фасадѣ должны быть изображены ходъ въ садъ, надъ нимъ балконъ, три окна для нижняго этажа и три окна меньшихъ для верхняго этажа. На правомъ боковомъ фасадѣ—крыльцо задняго хода и два окна для верхняго этажа.

§ III. Проекты головки шатуна.

274. На *чертежѣ 232* представлена головка шатуна двумя фигурами, изъ которыхъ каждая, если предположимъ, что ось шатуна вертикальна, есть проекція головки на вертикальную плоскость, а именно лѣвая—есть проекція головки на плоскость, перпендикулярную къ оси вкладыша, а правая—на плоскость, параллельную той же оси. При чемъ, такъ какъ головка шатуна есть тѣло симметрическое относительно плоскостей, проходящихъ чрезъ ось шатуна и параллельныхъ плоскостямъ проекцій, и такъ какъ, слѣдовательно, проекціи головки суть фигуры симметричныя, то проекціи наружнаго вида головки сдѣланы лишь на одной половинѣ каждой фигуры—именно на лѣвой, правыя же половины представляютъ сѣченія головки плоскостями симметріи.



Чер. 232.

Такимъ путемъ достигается возможность составить точное понятіе о видѣ и размѣрахъ головки по двумъ чертежамъ. А именно, разсматривая чертежъ, мы видимъ, что представляемая имъ головка составляетъ одно цѣлое со штангой шатуна и можетъ быть разсматриваема какъ полая шестигранная призма, сдѣланная въ его уширенномъ концѣ, въ которую вставленъ такой же шистигранный вкладышъ, состоящій изъ двухъ половинокъ. Верхняя и нижняя половинки вкладыша соединены какъ между собою выступомъ (виденъ на правой фигурѣ), такъ и съ тѣломъ головки натяжнымъ клиномъ, который проходитъ чрезъ прорѣзъ, сдѣланный въ тѣлѣ головки и отчасти во вкладышѣ.

ЗАДАЧИ.

305. Начертить планъ чертежнаго класса и построить его перспективу.

306. Построить планъ и фасадъ ученической скамьи.

307. Построить планъ и фасадъ чертежнаго шкапа.

308. Построить точные чертежи какого-либо физическаго прибора.

309. Начертить планъ и фасадъ сарая и построить его перспективу.

310. Начертить планъ и фасадъ кузницы; построить перспективу наружнаго вида и внутренняго помѣщенія.

311. Начертить планъ и фасадъ небольшого одноэтажнаго дома и построить его перспективу.

ПРИБАВЛЕНІЕ.

ЧЕРЧЕНІЕ КРИВЫХЪ.

ГЛАВА I.

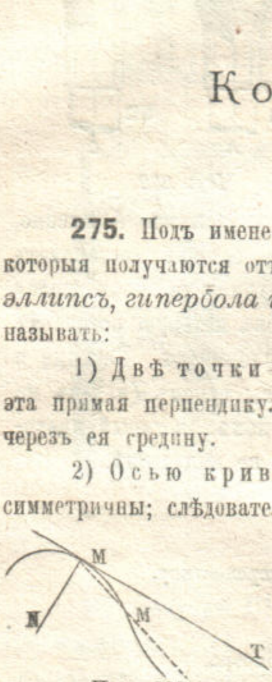
Коническія сѣченія.

§ I. Опредѣленія.

275. Подъ именемъ коническихъ сѣченій извѣстны плоскія кривыя, которыя получаются отъ сѣченія конуса вращенія плоскостью. Сюда принадлежатъ: *эллипсъ, гипербола и парабола*. Но прежде изученія этихъ кривыхъ условимся называть:

1) Двѣ точки—симметричными относительно прямой, когда эта прямая перпендикулярна къ хордѣ, соединяющей данныя точки и проходитъ черезъ ея средину.

2) Осью кривой—прямую, въ отношеніи которой точки кривой попарно симметричны; слѣдовательно, ось дѣлитъ кривую на двѣ равныя части, при томъ такія, что вращая около оси на 180° одну изъ нихъ, она совпадаетъ съ другою.



Чер. 233.

3) Вершиною кривой—точку, въ которой ось встрѣчаетъ кривую.

4) Двѣ точки—симметричными относительно одной точки, когда эта послѣдняя лежитъ на срединѣ прямой, соединяющей данныя точки.

5) Центромъ кривой—точку, въ отношеніи которой точки кривой попарно симметричны; слѣдовательно, центръ кривой дѣлитъ на двѣ равныя части всѣ хорды, проведенныя чрезъ него.

6) Касательною къ кривой—предѣлъ MT (*чер. 233*), къ которому стремится сѣкущая MM', вращаясь около одной изъ точекъ пересѣченія, напримѣръ, M, пока вторая точка M' не приблизится безконечно близко къ первой.

7) Нормалью—перпендикуляръ къ касательной въ точкѣ касанія.

§ II. Эллипсъ.

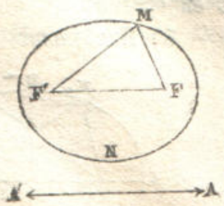
276. Опредѣленіе. *Эллипсъ есть такая плоская кривая, сумма разстояній каждой точки которой отъ двухъ постоянныхъ точекъ, лежащихъ въ той же плоскости, есть величина постоянная*

Такъ, если (*чер. 233*) AA', есть постоянная величина, F и F'—постоянныя точки и если каждая точка кривой MN, напр., точка M, удовлетворяетъ условію:

$$MF+MF'=AA',$$

то кривая MN есть эллипсъ.

277. Постоянныя точки называются *фокусами*, а разстояніе между ними—*фокуснымъ разстояніемъ*. Прямыя, соединяющія какую-либо точку кривой съ фокусами, называются *радіусами векторами*.



Чер. 234.

Постоянная сумма радіусовъ векторовъ, т. е. длина AA', полагается равной $2a$, фокусное разстояніе—$2c$. Легко видѣть, что $c<a$, ибо треугольникъ MFF' возможенъ, когда удовлетворяется условіе:

$$FF'<MF+MF',$$

т. е. когда $c<a$.

Отношеніе c къ a, т. е. отношеніе фокуснаго разстоянія къ постоянной суммѣ радіусовъ векторовъ, называется *эксцентриситетомъ* эллипса. Величина эксцентриситета, т. е. $\frac{c}{a}$, можетъ имѣть значеніе всѣхъ правильныхъ дробей, и слѣдов., измѣняться отъ 0 до 1. При $\frac{c}{a}=0$ эллипсъ обращается въ окружность, ибо $c=0$, и слѣдовательно, оба фокуса сливаются въ одну точку; при $\frac{c}{a}=1$ эллипсъ обращается въ прямую. Отсюда заключаемъ, что эллипсъ является переходною кривою между прямою и окружностью и что величина эксцентриситета служитъ указаніемъ, насколько эллипсъ приближается къ прямой или къ окружности.

278. Черченіе эллипса. Для начертанія эллипса непрерывнымъ движеніемъ, по даннымъ фокусамъ и суммѣ радіусовъ векторовъ $2a$, закрѣпляютъ неподвижно въ фокусахъ концы нити, длина которой равна $2a$; затѣмъ натягиваютъ нить карандашемъ (или перомъ) и въ такомъ положеніи ведутъ карандашъ по бумагѣ. Начерченная такимъ образомъ кривая есть, очевидно, эллипсъ.

Но обыкновенно вычерчиваютъ эллипсъ по точкамъ, по даннымъ фокусамъ F, F' и $AA'=2a$. Для чего (*чер. 235*):

a) Отъ средины O фокуснаго разстоянія откладываютъ $OA=OA'=a$.

b) Берутъ между фокусами какую-либо точку D.

c) Радіусами AD и $A'D$, сумма которыхъ равна $2a$, описываютъ изъ фокусовъ, какъ изъ центровъ, дуги.

d) Точка пересѣченія M дугъ принадлежитъ эллипсу.

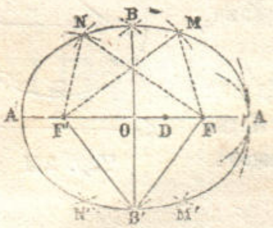
Замѣчаніе. 1) Точка D должна быть выбрана между точкою O, срединою фокуснаго разстоянія, и фокусомъ F, ибо для возможности пересѣченія дугъ $A'D$ и AD необходимо, чтобы $FF'>A'D-AD$; но $A'D-AD=2OD$, и слѣдовательно, $FF'>2OD$ или $2c>2OD$; откуда $OD<c$.

2) Каждой точкѣ D соотвѣтствуютъ четыре точки на эллипсѣ; именно двѣ точки M и M' опредѣляются пересѣченіемъ дугъ, описанныхъ изъ фокусовъ F и F' соотвѣтственно радіусами AD и $A'D$; двѣ другія—N и N'—пересѣченіемъ дугъ, описанныхъ изъ фокусовъ F и F' соотвѣтственно радіусами $A'D$ и AD.

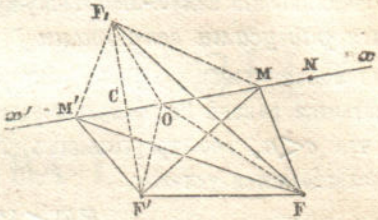
3) Если точка D совпадаетъ съ фокусомъ, то разность радіусовъ равна FF', и дуги, описанныя изъ F и F', будутъ касаться въ точкахъ A и A'.

4) Если точка D совпадаетъ съ O то радіусы равны и точки пересѣченія дугъ B и B' будутъ лежать на перпендикулярѣ къ линіи FF', возстановленномъ въ ея срединѣ.

5) Наибольшій радіусъ $F'A$ равенъ $a+c$, наименьшій $FA=a=c$.



Чер. 235.



Чер. 236.

279. Теорема I. *Прямая можетъ встрѣтить эллипсъ только въ двухъ точкахъ.*

Пусть F и F' (*чер. 236*)—фокусы эллипса, xx'—прямая, двѣ точки M и M' которой удовлетворяютъ условію;

$$FM+F'M=FM'+F'M'=2a;$$

нужно доказать, что для всякой другой точки, напр., O, прямой xx', сумма разстояній отъ фокусовъ, т. е. $OF+OF'$, будетъ больше или меньше $2a$.

Съ этою цѣлью найдемъ точку симметріи F_1 фокуса F относительно прямой xx'; для чего опустимъ перпендикуляръ $F'C$ на xx' и отложимъ на немъ $F_1C=F'C$. Затѣмъ соединимъ точку F_1 съ точками M и M'.

Изъ равнобедренныхъ треугольниковъ $M'F'F_1$ и $OF'F_1$ имѣемъ:

$$OF'=OF_1,\ M'F'=M'F_1;$$

слѣдовательно

$$FM'+M'F'=FM+M'F_1 \text{ и } OF+OF'=OF+OF_1,$$

но объемлемая линія меньше объемлющей, слѣдовательно

$$FO+OF_1<FM'+M'F_1,$$

или

$$FO+OF'<2a,$$

что и требовалось доказать.

Такимъ же образомъ докажемъ, что для всякой точки N прямой xx_1, взятой внѣ части MM', сумма разстояній отъ фокуса больше $2a$. Слѣдовательно, прямая не можетъ встрѣтить эллипсъ больше, чѣмъ въ двухъ точкахъ.

280. Теорема II. *Для точки, взятой внутри эллипса, сумма разстояній отъ фокусовъ меньше 2a; для точки, взятой внѣ эллипса, та же сумма—больше 2a.*

Соединимъ (*чер. 237*) фокусы съ какой-либо внутренней точкой C и продолжимъ $F'C$ до пересѣченія съ кривою въ точкѣ M; наконецъ, соединимъ M съ F; имѣемъ:

$$CF+CF'<MF+MF',$$

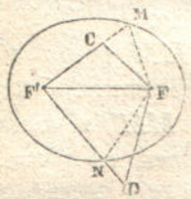
т. е. $CF+CF'$ меньше $2a$.

Соединимъ фокусы съ внѣшней точкой D и проведемъ NF; имѣемъ:

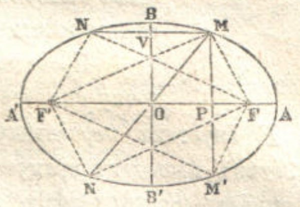
$$DF+DF'>MF+MF',$$

т. е. больше $2a$.

281. Теорема III. *Эллипсъ имѣетъ своими осями двѣ прямыя: во 1-хъ, прямую, которая соединяетъ фокусы, во 2-хъ, перпендикуляръ, возстановленный изъ средины фокуснаго разстоянія. Точка пересѣченія осей есть центръ эллипса.*



Чер. 237.



Чер. 238.

Для доказательства возьмемъ точку M (*чер. 238*) на эллипсѣ и, построивъ точки ей симметричныя (**§ 275**) относительно прямой $A'A$, проходящей чрезъ фокусы F и F', прямой BB', перпендикулярной къ AA' въ срединѣ O фокуснаго разстоянія, и точки O, докажемъ, что эти послѣдняя точки принадлежатъ кривой. Съ этой цѣлью опустимъ изъ точки M перпендикуляры MP и MV на прямыя AA' и BB' и соединимъ точку M съ O и на продолженіи прямыхъ MP, MV и MO отложимъ части $M'P=MP$, $NV=MV$, $ON'=OM$. Точки M', N, N' суть искомыя точки симметріи точки M. Для доказательства принадлежности точки M' кривой, соединимъ ее съ фокусами F и F' и, замѣтивъ, что

$$M'F'=MF',\ M'F=MF,$$

заключаемъ, что

$$M'F'+M'F=MF'+MF;$$

но по условію

$$MF+MF'=2a,$$

слѣдовательно

$$M'F'+M'F=2a.$$

Для доказательства принадлежности точки N кривой, замѣтимъ, что прямоугольныя трапеціи $OFMV$ и $OF'NV$ равны между собою и что, слѣдовательно, равны, какъ стороны ихъ MF и $F'N$, такъ и углы $NF'F$ и MFF'; отсюда заключаемъ, что и треугольники $NF'F$ и MFF', какъ имѣющіе по двѣ стороны и углу между ними равными, тоже равны, а изъ равенства треугольниковъ имѣемъ:

$$NF=MF';$$

присоединивъ же къ нему равенство

$$NF'=MF,$$

находимъ

$$NF+NF'=MF'+MF=2a.$$

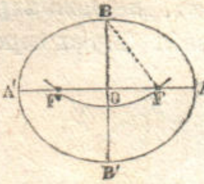
Принадлежность точки N' кривой видна изъ того, что четыреугольникъ $MFN'F'$ есть параллелограммъ, ибо діагонали его MN' и FF' дѣлятся въ точкѣ O пополамъ; по свойству же параллелограмма имѣемъ:

$$N'F'+N'F=MF'+MF+2a.$$

Что и требовалось доказать.

Слѣдствія. 1) Эллипсъ имѣетъ четыре вершины A, A', B, B'.

2) Ось AA' называется *большою осью,* длина ея равна $2a$, ось BB' — *малою осью,* ибо, если длину ея обозначимъ $2b$, то изъ треугольника BFB' (*чер. 239*), въ которомъ $BF=B'F=a$, имѣемъ $2b<2a$, т. е. $b<a$.

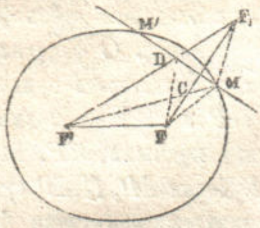


Чер. 239.

3) Изъ прямоугольнаго треугольника BFO находимъ соотношеніе между a, b и c; именно $a^2=b^2=c^2$.

282. Теорема. IV. *Касательная къ эллипсу есть биссекторъ внѣшняго угла между радіусами векторами точки касанія.*

Проведемъ сѣкущую MM' (*чер. 240*) и построимъ точку симметріи фокуса F относительно сѣкущей; для чего изъ фокуса F опустимъ перпендикуляръ FC на MM' и отложимъ на немъ $F_1C=FC$. Затѣмъ проведемъ прямую $F'F_1$ и докажемъ, что точка D, встрѣчи ея съ сѣкущею, удовлетворяетъ условію $DF+DF'<2a$, т. е. лежитъ внутри эллипса между точками M и M'.



Чер. 240.

Въ самомъ дѣлѣ, соединивъ точку D съ фокусомъ F, а точку M — съ тремя точками F', F и F_1, имѣемъ:

$$MF_1=MF,\ DF_1=DF,$$

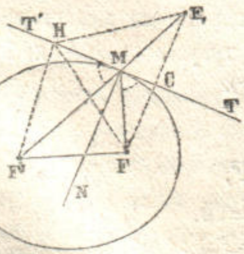
а потому
$$DF'+DF=F'F_1$$

и
$$MF'+MF=MF'+MF_1=2a;$$

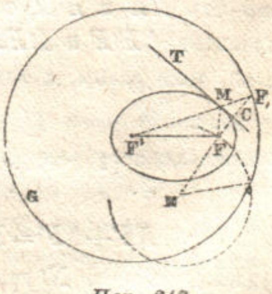
но изъ треугольника $F'\ F_1\ M$ находимъ:

$$F'F_1<MF'+MF_1;$$

т. е. меньше $2a$, и слѣд., точка D лежитъ внутри эллипса, при чемъ это свойство принадлежитъ точкѣ D независимо отъ положенія сѣкущей; вслѣдствіе этого, точка D останется между точками M и M' и при предѣлѣ сѣкущей; а слѣдовательно, когда сѣкущая обратится въ касательную, всѣ три точки M, D, M' сольются въ одну. Съ другой стороны углы MDF и MDF_1, равные между собой для какого-либо положенія сѣкущей, будутъ равны и при ея предѣлѣ, когда точки M' и D совпадутъ съ M и сѣкущая MM' обратится въ касательную MT (*чер. 241*); отсюда заключаемъ, что уголъ F_1MT равенъ углу TMF. Что и требовалось доказать.



Чер. 241.



Чер. 242.

283. Замѣчаніе. 1) Всѣ точки касательной, за исключеніемъ точки касанія, лежатъ внѣ эллипса; такъ для точки H имѣемъ (*чер. 241*):

$$HF'+HF=HF'+HF_1;\ MF+MF'=MF'+MF_1=F'F_1=2a;$$

но изъ треугольника $F'HF_1$ имѣемъ:

$$F'N+HF_1>F'F_1.$$

2) Касательная TM есть перпендикуляръ къ FF_1 и проходитъ чрезъ средину FF_1.

3) Прямая EF_1, которая соединяетъ фокусъ съ точкою симметріи другого фокуса относительно касательной, проходитъ чрезъ точку касанія.

4) Нормаль MN есть биссекторъ внутренняго угла образуемаго радіусами векторами точки касанія, ибо углы, которые нормаль образуетъ съ MF и MF', имѣютъ своими дополненіями до прямого равные углы.

284. Теорема V. *Точки симметріи фокуса относительно произвольной касательной лежатъ на направляющемъ кругѣ, описанномъ изъ другого фокуса.*

Замѣтимъ, что направляющимъ кругомъ эллипса называется окружность, описанная изъ фокуса радіусомъ, равнымъ большой оси, и что, слѣдовательно, эллипсъ имѣетъ двѣ направляющихъ окружности.

Для доказательства теоремы построимъ точку симметріи F_1 фокуса F относительно касательной MT и соединимъ F_1 съ F'. Прямая F_1F' по предыдущему проходитъ чрезъ точку касанія M и, слѣдовательно,

$$F_1F'=MF_1+MF'=MF'+MF=2a.$$

Отсюда заключаемъ, что разстояніе точки F_1 отъ фокуса F' есть постоянная величина, равная $2a$, и что, слѣдовательно, геометрическое мѣсто точекъ F_1 есть окружность, описанная изъ фокуса F' радіусомъ равнымъ $2a$. т. е. направляющая окружность фокуса F.

285. Изъ предыдущей теоремы заключаемъ, что эллипсъ есть геометрическое мѣсто точекъ M, одинаково удаленныхъ и отъ круга F_1F' и отъ точки F, взятой внутри круга, и что, слѣдовательно, если опишемъ окружность изъ какой-либо точки N, радіусомъ NE, то (*чер. 242*):

1) Эта окружность не встрѣчаетъ направляющаго круга, если точка N взята внутри эллипса.

2) Эта окружность касается направляющаго круга, если точка N взята на эллипсѣ.

3) Эта окружность пересѣкаетъ направляющій кругъ въ двухъ точкахъ, если точка N взята внѣ эллипса.

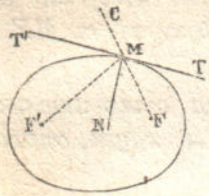
286. Теорема VI. *Геометрическое мѣсто проекцій фокуса на касательныя есть окружность, описанная на большой оси, какъ на діаметрѣ.*

Чер. 243.

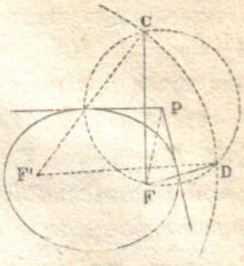
Проведемъ касательную MT (*чер. 243*) и направляющій кругъ фокуса F' и соединимъ точку C, проекцію фокуса F на касательную, съ центромъ O. Треугольники COF и $F_1F'F$ подобны, ибо по условію $FC=\frac{1}{2}FF_1$, $OF=\frac{1}{2}FF'$; изъ подобія же треугольниковъ находимъ, что $OC=\frac{1}{2}F'F_1=a$; отсюда заключаемъ, что точка C находится на постоянномъ разстояніи отъ точки O, равномъ a, и что, слѣдовательно геометрическое мѣсто точекъ C есть окружность, описанная изъ центра O радіусомъ a. Эта окружность называется главнымъ кругомъ эллипса.

287. Задача I. *Провести касательную къ эллипсу чрезъ точку, данную на кривой.*

Пусть (*чер. 244*) M—данная точка; проведемъ ея радіусы векторы MF' и MF' и, продолживъ MF, построимъ биссекторъ TT' внѣшняго угла FMC. Этотъ биссекторъ и есть искомая касательная.



Чер. 244.

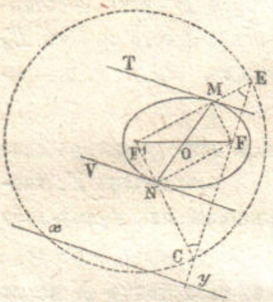


Чер. 245.

288 Задача II. *Построить касательную къ эллипсу чрезъ точку, данную внѣ кривой.*

Пусть P (*чер. 245*)—данная внѣшняя точка и CD—направляющій кругъ фокуса F'.

Изъ теоремы **§ 284** необходимо слѣдуетъ, что искомая касательная есть высота равнобедреннаго треугольника, вершины котораго при основаніи находятся: одна въ фокусѣ F, другая—на направляющемъ кругѣ, а потому, если изъ точки P радіусомъ PF засѣчемъ направляющій кругъ въ двухъ точкахъ C и D и средины прямыхъ CF и DF соединимъ съ точкою P, то эти послѣднія прямыя и суть искомыя касательныя; при чемъ радіусы CF' и DF' пересѣкутъ эти касательныя въ точкахъ касанія.



Чер. 246.

289. Задача III. *Провести касательную къ эллипсу, параллельно данной прямой.*

Опишемъ (*чер. 246*) направляющій кругъ относительно фокуса F' и чрезъ другой фокусъ F проведемъ прямую CE, перпендикулярную къ данной прямой xy.

Перпендикуляры MT и NV, возстановленные къ прямымъ FC и FE въ ихъ срединахъ и суть искомыя касательныя. Радіусы $F'C$ и $F'E$ опредѣлятъ точки касанія.

§ III. Гипербола.

290. Опредѣленіе. *Гипербола есть такая плоская кривая, разность разстояній каждой точки которой отъ двухъ постоянныхъ точекъ есть величина постоянная.*

Такъ, если AA' (*чер. 247*) есть постоянная длина, F и F'—двѣ постоянныя точки, то точки M и N принадлежатъ гиперболѣ, если

$$MF'-MF=AA' \text{ и } NF-NF'=AA'.$$

Постоянныя точки называются *фокусами*, а разстояніе между ними—*фокуснымъ разстояніемъ*. Прямыя, которыя соединяютъ фокусы съ какою либо точкою кривой, называются *радіусами векторами*. Постоянная разность AA' полагается равной $2a$, а фокусное разстояніе—$2c$, при чемъ $c>a$; ибо, чтобы треугольники MFF' и NFF' были возможны, нужно, чтобы

Чер. 247.

$$FF'>MF'-FM \text{ и } FF'>NF-NF',$$

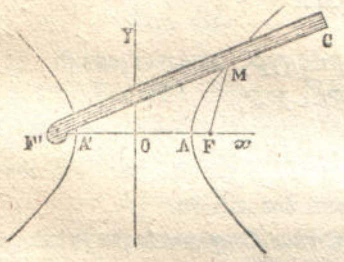
т. е. $2c>2a$, или $c>a$.

Отношеніе $\frac{c}{a}$ называется *эксцентриситетомъ* гиперболы; эксцентриситетъ гиперболы всегда больше единицы.

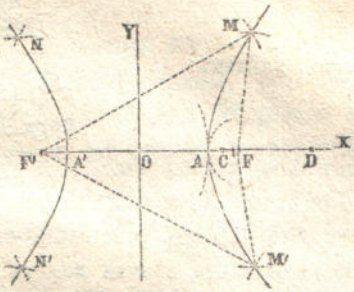
Направляющимъ кругомъ гиперболы называется кругъ, описанный изъ фокуса, какъ изъ центра, радіусомъ равнымъ $2a$.

Гипербола имѣетъ два направляющихъ круга.

291. Черченіе гиперболы. Чтобы начертить гиперболу непрерывнымъ движеніемъ по даннымъ фокусамъ и постоянной разности радіусовъ векторовъ $2a$ берутъ линейку (*чер. 248*), длина которой больше $2c$, и нить длины, равной длинѣ линейки безъ $2a$.



Чер. 248.



Чер. 249.

Одинъ конецъ линейки утверждаютъ въ фокусѣ F' такъ, чтобы линейка могла вращаться около точки F', какъ около центра. Къ другому свободному концу C прикрѣпляютъ конецъ нити, закрѣпленной другимъ концомъ въ фокусѣ F. Если карандашемъ натягивать нить по длинѣ линейки, заставляя въ то же время послѣднюю вращаться около F', то конецъ карандаша M опишетъ гиперболу, ибо для какого-либо положенія его M имѣемъ:

$$MF'-MF=2a$$

Перемѣняя положеніе нити и линейки, опишемъ вторую вѣтвь кривой.

Удобнѣе, однако, по тѣмъ же даннымъ вычертить гиперболу по точкамъ (*чер. 249*). Для чего:

a) отъ средины O, фокуснаго разстоянія, отложимъ $OA=OA'=a$;

b) возьмемъ на прямой FF' какую-либо точку D за фокусомъ;

c) радіусами AD и $A'D$, разность которыхъ$=2a$, опишемъ изъ фокусовъ, какъ изъ центровъ, двѣ окружности;

d) точки ихъ пересѣченія M и M' принадлежатъ гиперболѣ.

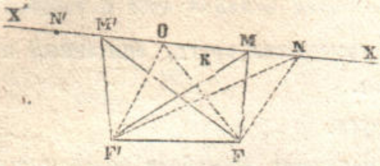
Замѣчаніе. 1) Чтобы окружности, описанныя радіусами AD и $A'D$, пересѣкались, необходимо, чтобы $FF<DA+DA'$; но $AD+A'D=2OD$; откуда заключаемъ, что $2c<2OD$ или $c<OD$, т. е., что точка D должна быть взята за фокусомъ.

2) Каждой точкѣ D соотвѣтсвуетъ четыре точки на кривой: M, M', N, N'.

3) Когда точка D лежитъ въ F, сумма радіусовъ равна FF', и окружности, описанныя изъ F и F', касаются другъ друга въ A и A'.

4) Гипербола состоитъ изъ двухъ отдѣльныхъ вѣтвей, распространяющихся неопредѣленно далеко; ибо, какъ, при непрерывномъ черченіи, линейка можетъ имѣть какую угодно длину, такъ и при черченіи по точкамъ, точка D можетъ какъ угодно далеко удалиться отъ точекъ F и F'.

292. Теорема I. *Прямая можетъ встрѣтить гиперболу не болѣе, какъ въ двухъ точкахъ.*



Чер. 250.

Пусть (*чер. 250*) F и F—фокусы, XX'—прямая, M и M'—двѣ точки, которыя удовлетворяютъ условію $F'M-MF=FM'-M'F=2a$ и которыя, слѣдовательно, лежатъ на кривой.

Нужно доказать, что для всякой иной точки разность разстояній отъ фокусовъ будетъ больше или меньше $2a$.

Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ точку O между точками M и M'. Изъ треугольниковъ OKF' и MFK имѣемъ:

$$F'O<F'K+OK$$
$$MF<KF+MK$$

складывая, найдемъ:

$$F'O+MF<MF'+OF:$$

откуда

$$F'O-OF<MF'-MF,$$

слѣдовательно, меньше $2a$.

Для точки N, взятой за точками M и M', такимъ же образомъ легко доказать, что разность разстояній отъ фокусовъ больше $2a$.

Слѣдовательно, прямая можетъ встрѣтить гиперболу не болѣе, чѣмъ въ двухъ точкахъ.

293. Теорема II. *Для каждой точки, взятой внутри гиперболы (внутренней) разность разстояній отъ фокусовъ больше $2a$, для точки же, взятой внѣ гиперболы (внѣшней), та же разность—меньше $2a$.*

1) Соединимъ внутреннюю точку C (*чер. 251*) съ обоими фокусами и проведемъ MF; имѣемъ изъ треугольника CMF:

$$CF<CM+MF;$$

Откуда, вычитая обѣ части наравенства изъ CF', найдемъ;

$$CF'-CF>CF'-(CM+MF),$$

или

$$CF'-CF>MF'=MF,$$

т. е.

$$CF'-CF<2a.$$

2) Соединимъ внѣшнюю точку D съ обоими фокусами и проведемъ $F'N$; имѣемъ изъ треугольника $DF'N$:

$$F'D<NF'+ND.$$

Откуда, вычитая изъ обоихъ частей неравенства FD, найдемъ:

$$F'D-FD<NF'+ND-FD,$$

или

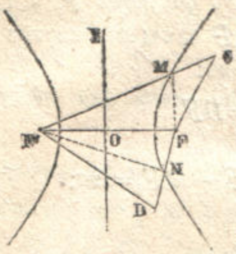
$$FD-FD<NF'-NF<2a.$$

294. Теорема III. *Гипербола имѣетъ своими осями двѣ прямыя, изъ которыхъ одна проходитъ чрезъ фокусы, другая—перпендикулярна къ этой послѣдней прямой и проходитъ черезъ ея средину. Центръ гиперболы лежитъ въ точкѣ пересѣченія осей.*

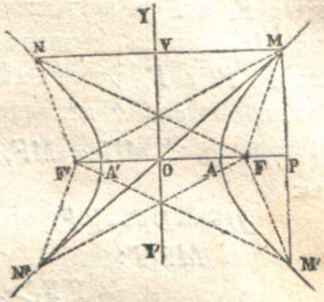
Пусть M (*чер. 252*)—какая-либо точка на гиперболѣ. Проведемъ перпендикуляры MP, MV и прямую MO и на ихъ продолженіи отложимъ $PM'=PM$, $VN=VM$, $ON'=OM$. Точки M', N и N' суть точки симметріи M относительно прямыхъ AA', YY' и точки O.

Слѣдуетъ доказать, что эти точки лежатъ на гиперболѣ.

1) FF'—перпендикулярна къ линіи MM' и проходитъ черезъ ея средину, слѣдовательно, $MF=M'F$ и $M'F'=MF'$; откуда: $M'F'=M'F=MF'-MF=2a$; слѣдовательно, точка M' лежитъ на гиперболѣ.



Чер. 251.



Чер. 252.

2) Прямоугольныя трапеціи $OFMV$, $OF'NV$—равны, ибо по условію $MV=VN$, $OF=OF'$. Отсюда $NF'=MF$ и углы при F и F' равны; а потому и треугольники $FF'N$ и $FF'M$, какъ имѣющіе по двѣ стороны и углу между ними равными, тоже равны; слѣдовательно,

$$NF=MF'; \text{ а потому } NF-NF'=MF'-MF=2a,$$

т. е. точка N принадлежитъ гиперболѣ.

3) Прямые MN' и FF' пересѣкаются въ ихъ рединѣ O, слѣдовательно четыреугольникъ $MFN'F'$ есть параллелограммъ; и потому разность двухъ сходящихся сторонъ равна разности двухъ другихъ сторонъ, т. е.

$$N'F-N'F'=MF'-MF=2a$$

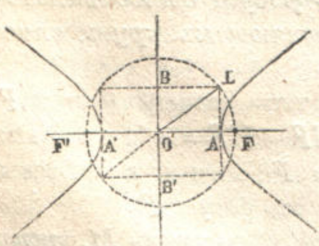
и точка N' принадлежитъ гиперболѣ.

295. Замѣчаніе. 1). Ось AA' называется *дѣйствительной* осью гиперболы, другая же ось YY', какъ не встрѣчающая кривой,—*мнимой* осью. Если возстановимъ перпендикуляръ къ дѣйствительной оси въ точкѣ A (*чер.* 253), и изъ центра O кривой засѣчемъ его въ точкѣ L дугою радіуса c, то длину AL, отложенную на мнимой оси отъ O, принимаютъ за длину b мнимой полуоси. Изъ прямоугольнаго треугольника OAL находимъ

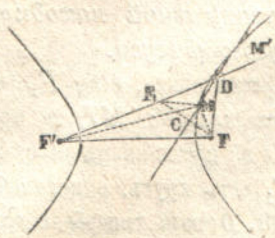
$$OL^2=AO^2+AL^2, \text{ или } c^2=a^2+b^2$$

соотношеніе между длинами полуосей и фокуснымъ разстояніемъ.

2) Гипербола имѣетъ двѣ вершины A и A'.



Чер. 253.



Чер. 254.

296. Теорема IV. *Касательная къ гиперболѣ есть биссекторъ внутренняго угла между радіусами векторами точки касанія.*

Проведемъ какую-либо сѣкущую MM' (*чер.* **254**) и, опустивъ на нее изъ фокуса F перпендикуляръ FC, отложимъ на продолженіи его $CF_1=CF$, т. е. построимъ точку симметріи F_1 фокуса F относительно сѣкущей MM'. Затѣмъ соединимъ точки F_1 и F' и продолжимъ прямую F_1F' до пересѣченія съ сѣкущей MM' въ точкѣ D; наконецъ, соединимъ точку D съ фокусомъ F, а точку M съ тремя точками F, F' и F_1 и докажемъ, что точка D находится внутри гиперболы. Дѣйствительно, по свойству точки симметріи, имѣемъ:

$$MF_1=MF, \qquad DF_1=DF$$

слѣдовательно:

$$DF'-DF=F'F_1 \quad \text{и} \quad MF'-MF_1=2a;$$

но изъ треугольника MF_1F':

$$F'F_1>MF'-MF_1$$

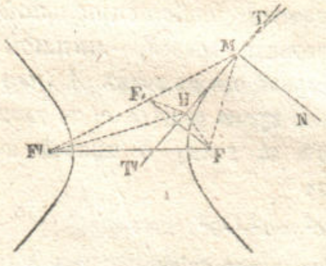
и, слѣдовательно, точка D лежитъ внутри гиперболы, т. е. находится между точками M и M'; кромѣ того уголъ F_1DC равенъ углу FDC. Оба эти свойства справедливы и при предѣлѣ, когда точки M, M' и D сольются въ одну и когда, слѣд., сѣкущая перейдетъ въ касательную.

Замѣчаніе. 1) Всѣ точки касательной, кромѣ точки касанія, лежатъ внѣ кривой; ибо (*чер.* 255) $HF'-HF<F'F_1$, т. е. меньше $2a$.

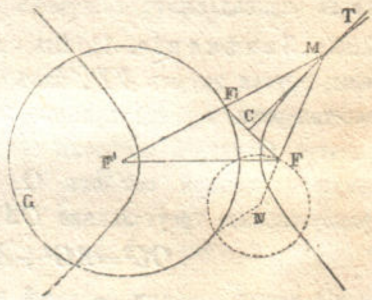
2) Касательная TT' перпендикулярна къ линіи FF_1 и проходитъ черезъ ея средину.

3) Прямая $F'F_1$, которая соединяетъ фокусъ съ точкой симметріи другого фокуса относительно касательной, проходитъ чрезъ точку касанія.

4) Нормаль MN гиперболы есть биссекторъ внѣшняго угла, образуемаго радіусами векторами точки касанія; ибо она перпендикулярна къ биссектору внутренняго угла.



Чер. 255.



Чер. 256.

297. Теорема V. *Точка симметріи фокуса относительно какой-либо касательной находится на направляющемъ кругѣ, описанномъ изъ другого фокуса.*

Дѣйствительно, если F_1 (*чер.* 256) есть точка симметріи фокуса F относительно касательной MT, то прямая $F_1F'=MF'-MF=2a$, и слѣдовательно, F_1 находится на постоянномъ разстояніи отъ фокуса F'; а потому геометрическое мѣсто точки F_1 есть кругъ, описанный радіусомъ $2a$ изъ фокуса F'.

298. Отсюда гипербола есть геометрическое мѣсто точекъ M, одинаково удаленныхъ отъ круга F_1G и точки E, лежащей внѣ его. Вслѣдствіе этого, если какая-либо окружность проходитъ чрезъ точку E, то

1) она не встрѣчаетъ направляющаго круга, когда центръ ея N лежитъ внутри гиперболы;

2) она касается направляющаго круга, когда центръ ея N лежитъ на гиперболѣ.

3) она пересѣкаетъ направляющій кругъ въ двухъ точкахъ, когда центръ ея N лежитъ внѣ гиперболы.

299. Замѣчаніе. Предыдущей теоремой можно воспользоваться для черченія гиперболы по точкамъ, когда извѣстны фокусы и $2a$. Для этого *(чер. 256)*:

a) описываемъ изъ фокуса F' окружность радіусомъ, равнымъ $2a$;

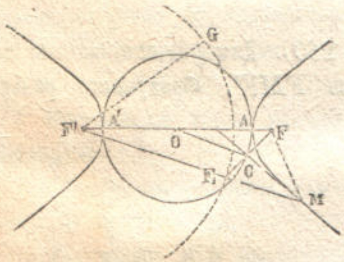
b) беремъ на ней какую-либо точку F_1 и соединяемъ ее съ фокусомъ F прямою FF_1,

c) изъ средины ея C возстановляемъ перпендикуляръ CM;

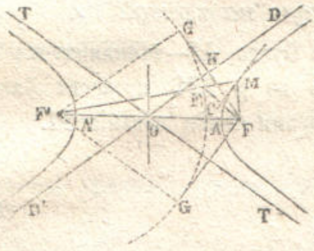
d) опредѣляемъ точку M пересѣченія этого перпендикуляра съ прямой F_1F'.

300. Теорема VI. *Геометрическое мѣсто проекцій фокуса на касательныя есть кругъ, описанный на дѣйствительной оси, какъ на діаметрѣ.*

Проведемъ произвольную MC (*чер. 257*) и опустимъ на нее изъ фокуса F перпендикуляръ FC до пересѣченія съ направляющимъ кругомъ фокуса F' въ точкѣ F_1. Наконецъ, соединимъ точку C съ O прямою OC. Треугольники FOC и $FF'F_1$ подобны, ибо $\dfrac{FC}{FF_1}=\dfrac{OF}{FF'}={}^1/_2$; слѣдовательно, и $\dfrac{OC}{F'F_1}={}^1/_2$, но $F'F_1=2a$, и потому $OC=a$, т. е. проекція C фокуса F на касательную находится на постоянномъ разстояніи отъ точки O; и потому геометрическое мѣсто точекъ C есть окружность, описанная изъ O радіусомъ a.



Чер. 237.



Чер. 238.

301. Опредѣленіе. *Ассимптотами гиперболы* называются касательныя, точки касанія которыхъ безконечно удалены отъ вершины кривой.

Теорема VII. *Гипербола имѣетъ двѣ ассимтоты, которыя проходятъ чрезъ ея центръ.*

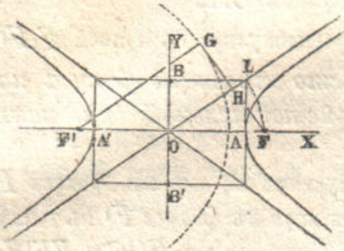
Прямая FF_1 (*чер. 258*), которая соединяетъ фокусъ F съ какой-либо точкою F_1 направляющаго круга фокуса F', можетъ перейти въ касательную къ этому послѣднему; и пусть FG будетъ такимъ ея положеніемъ. Перпендикуляръ HD къ этой касательной въ ея срединѣ есть касательная къ гиперболѣ, точка касанія которой опредѣлится пересѣченіемъ его съ продолженіемъ радіуса $F'G$. Но прямыя $F'G$ и HD какъ перпендикулярныя къ FG, параллельны между собой, и слѣдовательно, точка ихъ пересѣченія лежитъ на безконечности; отсюда, прямая HD есть ассимптота вѣтви AM. Кромѣ того, такъ какъ прямая HD параллельна $F'G$ основанію треугольника FGF', и проходитъ чрезъ точку H, средину стороны FG, то она проходитъ и чрезъ точку O, средину третьей стороны.

Вслѣдствіе симметріи точекъ кривой относительно центра O, прямая DOD', есть вмѣстѣ съ тѣмъ ассимптота и лѣвой вѣтви кривой. Такимъ же образомъ докажемъ, что прямая TOT', перпендикулярная къ касательной $F'G'$ и проходящая чрезъ точку O, есть тоже ассимптота гиперболы.

Замѣчаніе. 1) Оси гиперболы суть биссекторы угловъ, образованныхъ ассимптотами.

2) Уголъ HOF есть наименьшій изъ угловъ, которые касательныя могутъ составлять съ FF'.

302. Теорема VIII. *Ассимптоты направлены по діагонали прямоугольника, построеннаго на осяхъ.*



Чер. 259.

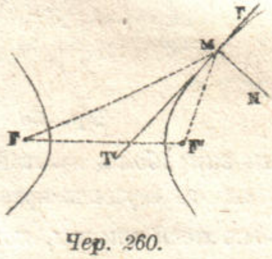
Изъ вершины A (*чер. 259*) возстановимъ перпендикуляръ до встрѣчи съ ассимптотою въ точкѣ L и докажемъ, что AL равняется мнимой полуоси, т. е. b. Въ самомъ дѣлѣ, прямоугольные треугольники HOF и AOL равны, ибо имѣютъ общимъ острый уголъ LOF и равныя $OA=OH$, такъ какъ $OH=\frac{1}{2}F'G=a$. Изъ равенства треугольниковъ слѣдуетъ, что $OL=OF=c$. Слѣдовательно, въ прямоугольномъ треугольникѣ AOL:

$$AL^2=OL^2-OA^2=c^2-a^2.$$

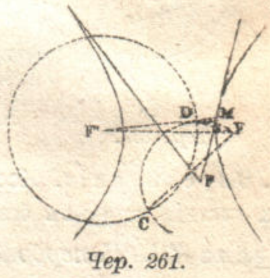
но по **§ 295** $c^2-a^2=b_2$, слѣдовательно, $AL=b$.

303. Задача I. *Провести касательную къ гиперболѣ чрезъ точку, взятую на кривой.*

Пусть M—данная точка на кривой (*чер. 260*). Для рѣшенія задачи достаточно по **§ 296** провести биссекторъ $T'T$ угла FMF', образуемаго радіусами векторами точки касанія M.



Чер. 260.



Чер. 261.

304. Задача II. *Провести касательную къ гиперболѣ чрезъ точку, данную внѣ кривой.*

На основаніи теоремы **§ 297** заключаемъ, что искомая касательная есть высота равнобедреннаго треугольника, одна изъ вершинъ при основаніи котораго лежитъ на направляющемъ кругѣ фокуса F', а другая—въ фокусѣ F. И потому, если P—данная внѣшняя точка (*чер. 261*), то для рѣшенія задачи:

a) Проведемъ направляющій кругъ CD фокуса F'.

b) Опишемъ окружность радіусомъ FP.

c) Найдемъ точки C и D ея пересѣченія съ направляющимъ кругомъ.

d) Соединимъ эти точки прямыми FC и FD съ фокусомъ F.

e) Возстановимъ перпендикуляры къ этимъ послѣднимъ прямымъ въ ихъ срединахъ. Эти перпендикуляры и суть искомыя касательныя.

f) Точки касанія находятся въ точкахъ встрѣчи прямыхъ $F'D$ и $F'C$ съ касательными.

305. Задача. III. *Провести къ гиперболѣ касательную, параллельно данной прямой*

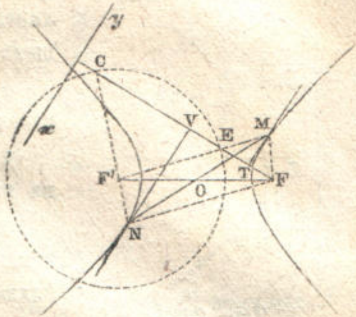
Пусть (*чер. 262*) xy—данная прямая.

a) Опишемъ направляющій кругъ фокуса F.

b) Изъ фокуса F опустимъ перпендикуляръ FFC на данную прямую xy и найдемъ точки C и F встрѣчи его съ направляющимъ кругомъ.

c) Перпендикуляры, возстановленные къ прямымъ FC и FE, въ ихъ срединахъ, суть искомыя касательныя.

Замѣчаніе. Чтобы задача была возможна, нужно, чтобы прямая xy составляла съ FF' уголъ большій того, который ассимптота образуетъ съ той же линіей.



Чер. 262.

§ IV. Парабола.

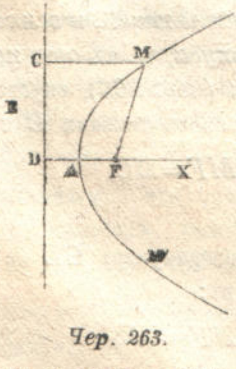
306. Опредѣленіе. *Парабола есть плоская кривая, каждая точка которой одинаково удалена отъ прямой и отъ точки, данныхъ въ ея плоскости.*

Слѣдовательно, если F есть постоянная точка (*чер. 263*), а CD—постоянная прямая, то точка M, удовлетворяющая условію $MF=MC$, принадлежитъ параболѣ MAM'. На этомъ основаніи точка A, средина перпендикуляра FD, тоже принадлежитъ кривой.

Постоянная точка называется *фокусомъ*, а постоянная прямая—*направляющей*.

Радіусомъ векторомъ точки M называется прямая, которая соединяетъ точку M съ фокусомъ.

Разстояніе FD фокуса отъ направляющей называется *параметромъ* параболы, а точка A—вершиною параболы.

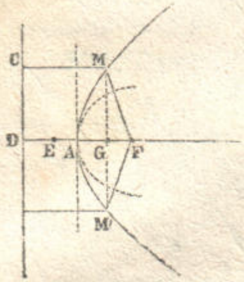


Чер. 263.

Чер. 264.

Парабола не распространяется въ той части плоскости, считая отъ направляющей, въ которой не лежитъ фокусъ, ибо всякая точка E, взятая въ этой части лежитъ ближе къ прямой, чѣмъ къ фокусу.

307. Для вычерчиванія параболы непрерывнымъ движеніемъ по даннымъ—направляющей ED и фокусу F (*чер. 264*), приставляютъ катетъ EC прямоугольнаго треугольника ECG къ линейкѣ ED, установленной по направляющей, и, укрѣпивъ нить, равную по длинѣ катету CG, однимъ концомъ въ фокусѣ F, другимъ—въ вершинѣ G, натягиваютъ ее карандашомъ къ катету GC, и въ такомъ положеніи ведутъ карандашъ, заставляя въ то же время скользить треугольникъ на линейкѣ. Конецъ карандаша M, очевидно, при этомъ опишетъ параболу, ибо для каждаго его положенія $MF=MC$.



Чер. 265.

Но по тѣмъ же даннымъ удобнѣе вычерчивать параболу по точкамъ. Для этого (*чер. 265*):

a) Изъ фокуса F опустимъ перпендикуляръ FD на направляющую CD.

b) Чрезъ какую-либо точку G, взятую на перпендикулярѣ FD, проведемъ параллель MM' направляющей.

c) Затѣмъ, опишемъ изъ фокуса F, какъ изъ центра, радіусомъ, равнымъ разстоянію DG, окружность.

d) Точки M и M' встрѣчи этой окружности съ прямою MM' принадлежатъ параболѣ.

Замѣчаніе. 1) Для того, чтобы окружность пересѣкала параллель MM', нужно чтобы $DG>GF$; откуда слѣдуетъ, что точка G не должна лежать между вершиною параболы A и направляющей.

2) Когда точка G находится въ A, окружность касается параллели въ той же точкѣ; ибо $AF=AD$.

3) Парабола есть не замкнутая кривая, ибо при непрерывномъ черченіи параболы необходимо только, чтобы катетъ прямоугольника и нить были бы равны между собою, но ничто не ограничиваетъ ихъ длину; точно также при черченіи по точкамъ, параллель, расположенная всегда по одну сторону съ фокусомъ отъ направляющей, можетъ быть удалена какъ угодно далеко отъ послѣдней. Слѣдовательно, парабола распространяется безпредѣльно и при томъ только въ той сторонѣ плоскости, въ которой лежитъ фокусъ.

308. Теорема I. *Всякая точка, взятая внутри параболы, находится ближе къ фокусу, чѣмъ къ направляющей, и всякая точка, взятая внѣ параболы болѣе удалена отъ фокуса, чѣмъ отъ направляющей.*

I. Изъ точки B, взятой внутри параболы (*чер. 266*), опустимъ перпендикуляръ BC на направляющую, и соединимъ фокусъ съ точками B и M; имѣемъ:

$$BF<MB+MF, \text{ но } MF=MC;$$

слѣдовательно

$$BF<BC.$$

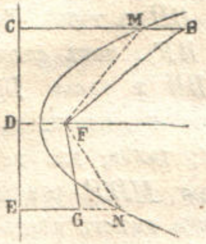
2) Изъ внѣшней точки G опустимъ перпендикуляръ GE на направляющую и соединимъ фокусъ съ точками N и G; имѣемъ:

$$GF>NF-NG, \text{ но } NF=NE;$$

слѣдовательно, $GF>GE$, что и требовалось доказать.

309. Теорема II. *Парабола имѣетъ своею осью перпендикуляръ—опущенный изъ фокуса на направляющую.*

Пусть M—какая-либо точка на кривой *(чер. 267)*. Найдемъ точку ея симметріи M' относительно перпендикуляра FD; для чего на послѣдній опустимъ перпендикуляръ MP и на продолженіи его отложимъ $PM'=PM$. Докажемъ, что точка M' принадлежитъ кривой.



Чер. 266.

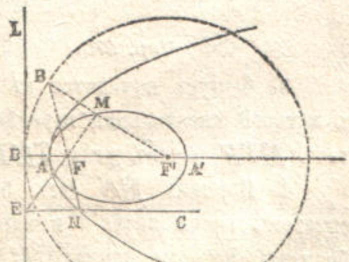
Чер. 267.

Въ самомъ дѣлѣ, соединимъ точки M и M' съ фокусомъ F прямыми FM и FM' и опустимъ перпендикуляры $M'C'$ и MC на направляющую; изъ равенства прямоугольныхъ треугольниковъ MFP и $M'FP$ и трапеціи $CMFD$ и $C'M'FD$ имѣемъ $MF=M'F$ и $CM=C'M'$, но по условію $MF=MC$, слѣдовательно, $FM'=C'M'$, и точка M' принадлежатъ параболѣ.

Замѣчаніе. Парабола не имѣетъ центра.

310. Теорема III. *Парабола есть предѣлъ, къ которому стремится эллипсъ, когда одна его вершина и сосѣдній съ нею фокусъ остаются неподвижными, а другая вершина съ своимъ фокусомъ удаляется въ безконечность; иначе говоря, когда ось возрастаетъ безгранично.*

Возьмемъ какую-либо точку M (*чер. 268*) на эллипсѣ и опишемъ направляющій кругъ относительно фокуса F'. Пусть точки A и F, а слѣд. и точка D, остаются неподвижными, въ то время какъ F' и A' удаляются въ безконечность по мѣрѣ увеличенія оси. При такомъ удаленіи, направляющій кругъ стремится къ своему предѣлу—перпендикуляру DL къ оси AA', а нормаль MB къ направляющему кругу,—къ прямой NE перпендикулярной къ LD; но при всякомъ положеніи точекъ F' и A' $MB=MF$ (§ **285**); слѣдовательно, это равенство сохраняется и при предѣлѣ, и потому $NE=NF$.



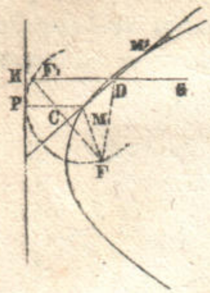
Чер. 268

Откуда заключаемъ, что точка N при предѣлѣ лежитъ на параболѣ, вершина которой и фокусъ совпадаютъ съ вершиной и фокусомъ перемѣннаго эллипса.

311. Теорема IV. *Касательная къ параболѣ составляетъ равные углы съ радіусомъ векторомъ точки касанія и прямою, проведенной чрезъ ту же точку, параллельно оси.*

Проведемъ какую-либо сѣкущую MM' и постр имъ относительно ея точку симметріи фокуса F; для чего изъ фокуса опустимъ на нее перпендикуляръ FC

и на продолженіи его отложимъ $F_1C=CF$; чрезъ точку симметріи F_1 проведемъ параллель оси DH и докажемъ, что точка D, встрѣчи ея съ сѣкущей, лежитъ внутри параболы.

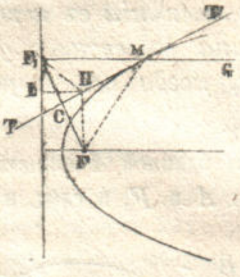


Чер. 269.

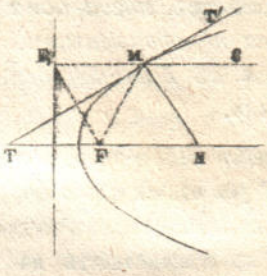
Въ самомъ дѣлѣ, окружность, описанная изъ точки M радіусомъ MF или MP, касается къ направляющей въ точкѣ P и встрѣчаетъ DH въ точкѣ F_1; слѣдовательно, $DF_1<DH$; но DF и DF_1, какъ равно наклоненныя, равны; и потому $DF<DH$ и точка D всегда лежитъ внутри кривой, а слѣдовательно, параллель F_1D проходитъ между точками M и M'; далѣе, для всякаго положенія сѣкущей, углы MDF_1 и MDF равны между собою; слѣдовательно, это равенство имѣетъ мѣсто и при предѣлѣ, когда точки M', D и M сольются въ одну M и когда, слѣдовательно, сѣкущая обратится въ касательную.

312. Замѣчаніе. 1) Касательная въ точкѣ M къ параболѣ (*чер. 270*) перпендикулярна и проходитъ чрезъ средину прямой FF_1, которая соединяетъ фокусъ съ проекціей точки касанія на направляющую, ибо въ треугольникѣ MFF_1, двѣ стороны равны и касательная есть биссекторъ угла при вершинѣ.

2) Всѣ точки касательной, кромѣ точки касанія, лежатъ внѣ кривой; ибо, по предыдущей теоремѣ, для какой-либо точки H касательной имѣемъ $HF=HF_1$; но HF_1 больше HL.



Чер. 270.



Чер. 271.

3) Фокусъ находится въ равномъ разстояніи отъ точки касанія и отъ точки, въ которой касательная пересѣкаетъ ось; ибо въ треугольникѣ MFT (*чер. 271*) уголъ MTF равенъ углу TMF.

4) Нормаль MN есть биссекторъ внѣшняго угла, образуемаго радіусомъ векторомъ точки касанія и параллелью MC къ оси, проведенной чрезъ точку M; ибо углы, которые нормаль MN образуетъ съ MF и MC имѣютъ равныя дополненія до прямого.

313. Теорема V. *Геометрическое мѣсто точекъ симметріи фокуса относительно касательныхъ есть направляющая параболы.*

Дѣйствительно, если изъ точки касанія M (*чер. 272*) опустимъ перпендикуляръ на направляющую и соединивъ точку F_1 съ F, то по условію $MF_1=MF$, а по доказанному MT перпендикулярна къ FF_1. Слѣдовательно, точка F_1, лежащая на направляющей, есть точка симметріи фокуса F относительно касательной.

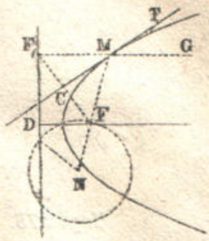
Отсюда заключаемъ, что парабола есть геометрическое мѣсто точекъ, равно удаленныхъ отъ прямой DF_1 и точки F; и что, слѣдовательно, если изъ какой либо точки N опишемъ окружность радіусомъ NF, то эта окружность: 1) не пересѣкаетъ направляющую, когда точка N лежитъ внутри параболы, 2) касается направляющей, когда точка N лежитъ на параболѣ, 3) пересѣкаетъ направляющую, когда точка N лежитъ внѣ параболы.

Слѣдствіе. Этой же теоремой можно воспользоваться для вычерчиванія кривой по точкамъ. Для этого:

a) соединимъ фокусъ F съ какою-либо точкою F_1 на направляющей;

b) изъ средины прямой FF_1 возставимъ къ ней перпендикуляръ CT;

c) точка встрѣчи CT съ параллелью F_1G къ оси принадлежитъ кривой.



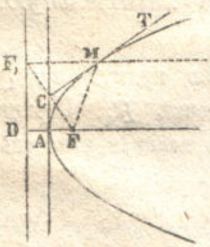
Чер. 272.

314. Теорема VI. *Геометрическое мѣсто проекцій фокуса на касательныя къ параболѣ есть касательная въ вершинѣ параболы.*

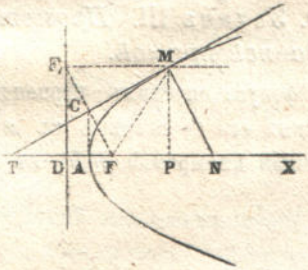
Опустимъ изъ фокуса F перпендикуляръ FC на касательную MT (*чер. 273*) и найдя въ C проекцію фокуса на касательную, продолжимъ его до пересѣченія съ направляющей въ точкѣ F_1. Въ треугольникѣ DF_1F имѣемъ $AD=AF$, $FC=CF_1$. Отсюда заключаемъ, что геометрическое мѣсто проекцій фокуса на касательную есть прямая AC, параллельная направляющей и касательная въ вершинѣ кривой.

315. Опредѣленія. *Подкасательной* называется проекція на ось той части касательной, которая заключается между точкой касанія и точкой встрѣчи касательной съ осью.

Поднормалью называется проекція на ось той части нормали, которая заключается между точкой касанія и точкой встрѣчи нормали съ осью.



Чер. 273.



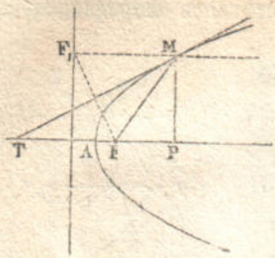
Чер. 274

316. Теорема VII. *1) Подкасательная дѣлится вершиной параболы на двѣ равныя части. 2) Поднормаль равна постоянной величинѣ—параметру.*

1) Пусть P—проекція точки M на ось и, слѣдовательно, TP=подкасательная. Докажемъ, что $AT=AP$. Проекція C фокуса F на касательную дѣлитъ MT въ точкѣ C на двѣ равныя части (*чер 274*); ибо треугольникъ MFT—равнобедренный; кромѣ того, касательная въ вершинѣ A встрѣчаетъ касательную MT въ той же точкѣ C и параллельна MP. Отсюда $AP=AT$.

2) Прямоугольные треугольники F_1DF и MPN равны; ибо $F_1D=MP$ и $FF_1=MN$, какъ параллельныя между параллельными; слѣдовательно, $PN=DF$; но DF есть параметръ параболы, а PN—поднормаль.

317. Задача I. *Провести касательную къ параболѣ черезъ точку, взятую на кривой (чер. 275).*



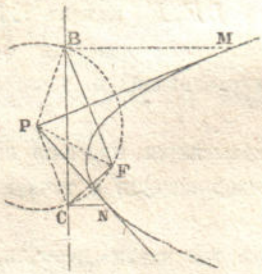
Чер. 275.

1-й способъ. Спроектируемъ M на направляющую и соединимъ M съ фокусомъ. Биссекторъ угла FMF_1 искомая касательная.

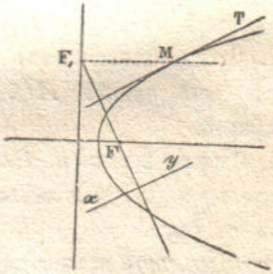
2-й способъ. Если неизвѣстенъ фокусъ, то откладываютъ $AT=AP$ и соединяютъ точки T и M. Прямая MT есть касательная.

318. Задача II. *Провести касательную къ параболѣ чрезъ точку P, данную внѣ кривой.*

Искомая касательная есть высота равнобедреннаго треугольника, одна изъ вершинъ основанія котораго лежитъ въ фокусѣ а другая на направляющей. Вслѣдствіе этого изъ точки P *(чер. 276)*, какъ изъ центра, опишемъ окружность радіусомъ PF и найдемъ двѣ точки B и C пересѣченія ея съ направляющей. Перпендикуляры, возстановленные къ прямымъ BF и CF, въ ихъ срединахъ, суть искомыя касательныя.



Чер. 276.



Чер. 277.

319. Задача III. *Провести къ параболѣ касательную, параллельно данной прямой.*

Изъ фокуса опустимъ перпендикуляръ на данную прямую xy *(чер. 277)* и продолжимъ его до встрѣчи съ направляющей въ точкѣ F_1. Перпендикуляръ, возставленный къ прямой FF_1 въ ея срединѣ и есть искомая касательная.

ГЛАВА II.

Циклоидальныя кривыя.

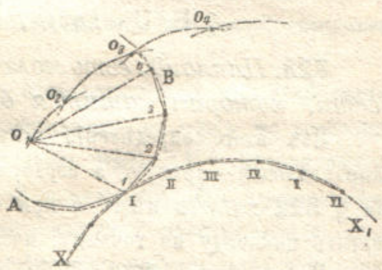
§ I. Опредѣленіе.

320. Циклоидальныя кривыя принадлежатъ къ обширному классу кривыхъ, извѣстныхъ подъ именемъ рулеттъ.

Рулеттой вообще называется плоская кривая, которая образуется одною изъ точекъ какой-либо кривой, катящейся безъ скольженія по другой неподвижной кривой; иначе говоря, рулетта есть геометрическое мѣсто точки, взятой на кривой, которая катится безъ скольженія по другой неподвижной кривой.

Неподвижная кривая называется *направляющей кривой;* катящаяся—*образующей кривой*; точка на катящейся кривой—*производящей точкой*

321. Теорема I. *Нормаль въ какой-либо точкѣ рулетты проходитъ чрезъ точку касанія образующей кривой къ направляющей въ положеніи первой, соотвѣтствующемъ данной точкѣ*



Чер. 278

Для доказательства разсмотримъ катаніе многоугольника AB (*чер. 278*) по многоугольнику XX_1 съ соотвѣтственно равными сторонами—1 2=I II, 2 3=II III, 3 4=III IV... Очевидно, процессъ катанія есть ни что иное, какъ послѣдовательный рядъ вращеній подвижнаго многоугольника около вершинъ неподвижнаго многоугольника. Такъ, если въ какой-либо моментъ катанія оба многоугольника соприкасаются вершинами 1 и I, то послѣдующее катаніе будетъ состоять изъ конечнаго вращенія подвижнаго многоугольника около вершины I неподвижнаго многоугольника до тѣхъ поръ, пока сторона 1 2 не совпадетъ со стороною I II и, по равенству сторонъ, вершина 2 не сольется съ вершиною II; далѣе, изъ вращенія около вершины II до совпаденія стороны 2 3 съ стороною II III и т. д. Отсюда заключаемъ, что какая-либо точка O_1, неизмѣняемо соединенная съ подвижнымъ многоугольникомъ, во время вращенія около вершины I, перейдетъ въ точку O_2, лежащую на дугѣ, описанной изъ центра I, радіусомъ 1 O_1; во время вращенія около вершины II—въ точку O_3, лежащую на дугѣ, описанной изъ II радіусомъ 2 O_1 и т. д., и такимъ образомъ точка O во время катанія многоугольника опишетъ линію $O_1O_2O_3$..., состоящую изъ конечныхъ дугъ, центры которыхъ лежатъ въ вершинахъ неподвижнаго многоугольника.

Если теперь перейдемъ къ предѣлу многоугольниковъ и разсмотримъ катаніе кривой AB по неподвижной кривой XX_1, то легко видѣть, что такое катаніе состоитъ изъ безконечно малыхъ вращеній около послѣдовательныхъ точекъ касанія образующей кривой къ направляющей, и что, слѣдовательно, геометрическое мѣсто точки O_1, неизмѣняемо соединенной съ образующей кривою AB, т. е. рулетта, состоитъ изъ безконечно малыхъ дугъ, имѣющихъ свои центры на направляющей кривой. Отсюда заключаемъ, что нормаль къ рулеттѣ, какъ прямая, перпендикулярная къ кривой, должна совпадать съ радіусомъ той безконечно малой дуги, на которой лежитъ данная точка, т. е. должна проходить чрезъ точку касанія образующей кривой къ направляющей въ положеніи первой, соотвѣтствующимъ данной точкѣ.

322. Изъ предыдущаго разсмотрѣнія образованія рулеттъ заключаемъ, что черченіе ихъ по точкамъ должно состоять, во-первыхъ, въ построеніи послѣдовательнаго ряда положеній образующей кривой, во-вторыхъ, въ опредѣленіи на нихъ положенія производящей точки. Первая цѣль достигается на основаніи опредѣленія катанія безъ скольженія, какъ таковаго, при которомъ дуги образующей и направляющей кривой, заключенныя между двумя послѣдовательными точками касанія, равны между собою; вторая, т. е. опредѣленіе положенія производящей точки на образующей кривой, основывается на неизмѣняемости во время катанія разстояній производящей точки отъ всякой другой точки данной на образующей кривой.

Рулеттъ можно представить себѣ безчисленное множество, но мы разсмотримъ важнѣйшія изъ нихъ, именно ц и к л о и д а л ь н ы я к р и в ы я и р а з в е р т к у к р у г а.

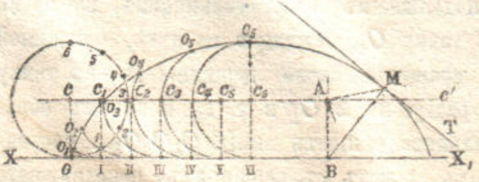
§ II. Циклоида, эпициклоида и гипоциклоида.

323. *Циклоида есть геометрическое мѣсто точки, взятой на окружности, которая катится безъ скольженія по неподвижной прямой.*

Изъ этого опредѣленія заключаемъ, что циклоида есть рулетта, имѣющая направляющей—прямую, а образующей окружность, и что, слѣдовательно, соображенія § **322** имѣютъ мѣсто и при черченіи циклоиды. Вслѣдствіе этого, чтобы вычертить циклоиду по точкамъ, поступаемъ слѣдующимъ образомъ.

Пусть (*чер. 279*) XX_1—направляющая прямая, c—центръ образующаго круга, O—производящая точка.

Раздѣлимъ образующую окружность на столь малыя и равныя между собою дуги $O1$, 12, 23, 34.. чтобы стягивающія ихъ хорды безъ особенной погрѣшности можно было принять равными дугамъ, и отложимъ эти хорды на прямой XX_1 отъ точки O до точки I, II, III, IV, V.... По § **322** точки 1, I; 2, II; 3, III.... при катаніи безъ скольженія будутъ послѣдовательно приходить въ соприкосновеніе, и слѣдовательно, на перпендикулярахъ, возстановленныхъ изъ точекъ I, II, III, IV... къ направляющей прямой, будутъ лежать центры образующей окружности въ положеніяхъ ея, соотвѣтствующихъ этимъ точкамъ.



Чер. 279.

Если кромѣ того замѣтимъ, что тѣ же центры должны лежать и на прямой cc' параллельной XX_1, то такимъ образомъ найдемъ, что, когда точка 1 находится въ соприкосновеніи съ точкою I, то центръ образующей окружности находится въ точкѣ c_1, когда точка 2 находится въ соприкосновенiи съ точкою II, то центръ окружности находится въ точкѣ c_2 и т. д.

А потому, описавъ изъ c_1, c_2, c_3... окружности радiусомъ Oc, найдемъ последовательный рядъ положенiй образующей кривой.

Остается найти на этихъ окружностяхъ положенiе точки O, для чего напомнимъ (**§ 322**), что разстоянiе точки O отъ точекъ 1, 2, 3.. остается неизмѣннымъ, и что, слѣдовательно, если на окружности c_1 отложимъ отъ точки I до точки O_1 дугу равную $1 O$, то точка O_1 есть положенiе производящей точки O на окружности c_1, на томъ же основанiи, если на окружности c_2 отъ точки II до точки O_2 отложимъ дугу II $O_2 = 2O$, то точка O_2 есть положенiе производящей точки на окружности c_2 и т. д. Кривая, соединяющая точки O, O_1, O_2, O_3, O_4... и есть циклоида.

324. Задача. *Въ точкѣ M, данной на циклоидѣ, построить къ ней нормаль и касательную.*

Для построенiя нормали къ циклоидѣ, слѣдуетъ по **§ 321** найти положенiе образующаго круга, соотвѣтствующее точкѣ M (*чер. 279*), и соединить точку его касанiя къ направляющей съ точкою M. Съ этой цѣлью изъ точки M, какъ изъ центра, засѣчемъ прямую cc' въ точкѣ A радiусомъ образующей окружности и изъ точки A опустимъ перпендикуляръ AB на направляющую XX_1; очевидно, A—есть центръ, а B—точка касанiя образующей окружности въ положенiи ея соотвѣтствующемъ точкѣ M. А потому прямая BM есть искомая нормаль, а перпендикуляръ къ ней TM касательная къ кривой.

325. *Эпициклоида есть геометрическое мѣсто точки, взятой на окружности, которая катится безъ скольженiя по внѣшней сторонѣ другой неподвижной окружности.*

Эпициклоида, какъ частный случай рулеттъ, обладаетъ всѣми ихъ свойствами, а потому и черченiе этой кривой по точкамъ основывается на тѣхъ же соображенiяхъ, какъ и черченiе циклоиды. А именно: пусть (*чер.* **280**) XX_1—направляющая окружность, c_0—центръ ея, c—центръ образующей окружности, O—производящая точка. Раздѣлимъ образующую окружность на столь малыя и равныя между собою части $O1$, 12, 23, 34,.... чтобы безъ особенной погрѣшности стягивающiя ихъ хорды можно было принять равными дугамъ, и отложимъ эти части на направляющей окружности XX_1 отъ точки O до точекъ I, II, III, IV... Очевидно, точки 1, 2, 3, 4... I, II, III, IV... будутъ приходить попарно, въ соприкосновенiе во время катанiя безъ скольженiя образующей окружности по направляющей, и, слѣдовательно, центры образующей окружности въ положенiхъ ея, соотвѣтствующихъ этимъ точкамъ, будутъ находиться на прямыхъ соединяющихъ точки I, II, III, IV съ центромъ c_0; именно въ точкахъ c, c_1, c_2, c_3.... пересѣченiя этихъ прямыхъ съ окружностью cc', описанною изъ c_0 радiусомъ $c_0\ c$, ибо эта последняя окружность представляетъ геометрическое мѣсто центровъ образующей окружности. А потому,

Чер. 280.

описавъ изъ центровъ $c_1\ c_2\ c_3$ окружности, остается для построенiя кривой найти на нихъ положенiе производящей точки O, пользуясь тѣмъ, что разстоянiе точки O

отъ точекъ 1, 2, 3, 4... не измѣняется во время катанія. На этомъ основаніи отъ точки I на окружности c_1 откладываемъ хорду IO_1 равную $O1$, точка O_1 есть положеніе производящей точки, соотвѣтствующее положенію образующей окружности c_1; такимъ же образомъ отъ точки II на окружности c_2 откладываемъ хорду II O_2 равную $O2$; точка O_2 принадлежитъ кривой, и т. д. Непрерывная кривая, соединяющая точки O, O_1, O_2... есть эпициклоида.

326. Задача. *Въ точкѣ M, данной на эпициклоидѣ, провести къ кривой нормаль и касательную.*

На основаніи **§ 321** изъ точки M, какъ изъ центра, засѣчемъ въ точкѣ A окружность cc' радіусомъ образующей окружности и соединимъ точку A съ центромъ c_0. Точка B, въ которой прямая Ac_0 пересѣкаетъ направляющую окружность, есть точка касанія образующаго круга въ положеніи его, соотвѣтствующемъ точкѣ M, и слѣдовательно, прямая BM есть нормаль, а перпендикулярная къ ней MT—касательная къ кривой въ точкѣ M.

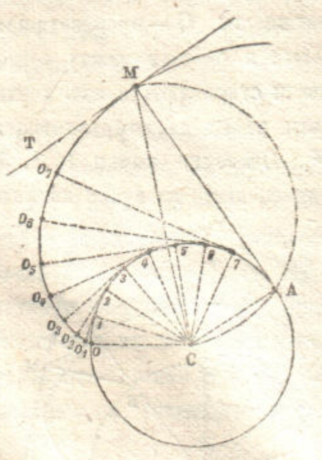
327. *Гипоциклоида есть геометрическое мѣсто точки, взятой на кругѣ, который катится безъ скольженія по внутренней сторонѣ окружности другого неподвижнаго круга.*

Черченіе гипоциклоиды по точкамъ ведется въ томъ же порядкѣ, какъ и черченіе эпициклоиды.

§ III. Развертка круга.

328. *Развертка круга есть геометрическое мѣсто конца прямой, которая катится безъ скольженія по неподвижной окружности.*

Отсюда, по **§ 321** для построенія развертки, слѣдуетъ поступать слѣдующимъ образомъ. На направляющей окружности *(чер. 281)* взять рядъ точекъ O 1, 2, 3... (удобнѣе на равныхъ другъ отъ друга разстояніяхъ), на столько близкихъ другъ къ другу, чтобы безъ достаточной погрѣшности можно было бы принять дуги между ними равными хордамъ, и провести въ этихъ точкахъ касательныя къ окружности. Такія касательныя суть послѣдовательныя положенія образующей прямой; затѣмъ, чтобы опредѣлить на нихъ положенія производящей точки O, очевидно, достаточно отложить на каждой касательной дугу, пройденную точкой касанія отъ начала движенія. Для чего, при нашемъ условіи, что дуги между точками касанія равны хордамъ и что хорды равны между собою, достаточно отложить на каждой касательной длину, равную столько разъ взятой хордѣ, какое мѣсто занимаетъ касательная. Такъ, напримѣръ, на третьей касательной въ точкѣ 3 слѣдуетъ хорду O_1 отложить три раза отъ точки 3 до точки O_3 и т. п.



Чер. 281

Кривая, которая соединяетъ такимъ образомъ полученныя точки O, O_1, O_2, O_3..., и есть искомая развертка.

329. Задача. *Въ точкѣ, данной на разверткѣ, провести касательную и нормаль къ кривой.*

Замѣтимъ, что образующая прямая есть нормаль къ разверткѣ (§ 321) и что та же прямая есть касательная къ направляющей окружности; легко видѣть, что предложенная задача сводится къ проведенію касательной къ окружности черезъ данную внѣшнюю точку. Для чего соединяемъ данную точку M (*чер. 281*) съ центромъ C окружности прямою MC и на этой прямой опишемъ полуокружность. Прямая MA, которая соединяетъ данную точку M съ точкою A пересѣченія полуокружности съ данною окружностью, и есть искомая нормаль, а прямая MT, перпендикулярная къ ней,—искомая касательная.

ГЛАВА III.

СПИРАЛИ.

§ I. Определеніе.

330. *Спиралью вообще называется такая плоская кривая, которая образуется точкой, движущейся по прямой въ то время, когда сама прямая вращается около нѣкоторой постоянной точки.*

Постоянная точка, около которой вращается прямая, называется *полюсомъ*, а сама прямая—*векторомъ спирали*.

Смотря по закону, которому подчинено какъ движеніе производящей точки по вектору, такъ и вращеніе вектора около полюса, спираль получаетъ тотъ или другой частный видъ, и такимъ образомъ, вообще говоря, спиралей можно вообразить себѣ безчисленное множество, но изъ нихъ мы разсмотримъ лишь двѣ.

§ II. Архимедова спираль.

331. *Архимедова спираль есть геометрическое мѣсто точки, которая двигается равномѣрно по прямой въ то время, какъ сама прямая вращается равномѣрно около полюса.*

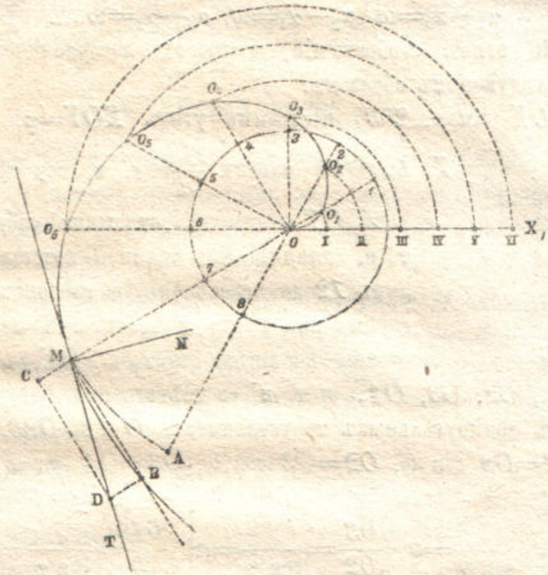
Изъ этого опредѣленія вытекаетъ слѣдующій способъ построенія архимедовой спирали по точкамъ.

Положимъ *(чер. 282)*, что O—полюсъ спирали, прямая OX_1—векторъ въ начальномъ положеніи, O—образующая точка, и допустимъ, что когда векторъ дѣлаетъ полъ оборота около полюса O, производящая точка O проходитъ по вектору путь OX_1. Опишемъ изъ полюса O окружность радіусомъ, равнымъ единицѣ, и раздѣлимъ эту окружность въ точкахъ *1, 2, 3, 4...* на нѣсколько равныхъ частей, положимъ на 12, затѣмъ на половину этого числа частей т. е. на 6, раздѣлимъ въ точкахъ I, II, III, IV... и векторъ OX_1. Легко видѣть, что каждая дуга *12, 23...* пропорціональна угловой скорости вращенія ω, а каждый отрѣзокъ OI, I II, II, III, III IV вектора пропорціоналенъ скорости v движенія точки.

На этомъ основаніи заключаемъ, что когда O, двигаясь по вектору, придетъ въ точку I, самъ векторъ OX, совмѣстится съ радіусомъ $O1$ и, слѣдовательно, точка O будетъ находиться въ O_1 на пересѣченіи дуги, описанной изъ полюса O радіусомъ OI, съ радіусомъ $O1$. Такимъ же образомъ, когда O придетъ въ точку II, векторъ совмѣстится съ радіусомъ $O2$ и, слѣдовательно, точка O будетъ находиться въ точкѣ O_2, на пересѣченіи дуги, описанной изъ полюса O радіусомъ OII, съ радіусомъ $O2$ и т. д. Соединяя найденныя такимъ образомъ точки O, O_1, O_2, O_3... непрерывною чертою, построимъ спираль.

332. Задача. *Въ точкѣ данной на спирали провести къ ней касательную.*

Проведеніе касательныхъ къ спиралямъ основывается на разсмотрѣніи спирали, какъ траекторіи точки, имѣющей движеніе, составленное изъ двухъ равномѣрныхъ движеній: движенія прямолинейнаго и движенія вращательнаго. Съ этой точки зрѣнія касательная къ спирали имѣетъ направленіе скорости составного движенія и, слѣдовательно, совпадаетъ съ діагональю параллелограмма, построеннаго на скоростяхъ, или величинахъ имъ пропорціональныхъ, движеній составляющихъ.



Чер. 282

На этомъ основаніи, на продолженіи вектора данной точки M отложимъ часть MC=I II, а къ окружности MA, описанной изъ O радіусомъ OM, проведемъ въ точкѣ M касательную и на ней отложимъ часть MB, пропорціональную линейной скорости вращенія данной точки и, слѣдов., равную дугѣ MA; затѣмъ построимъ на MB и MC параллелограммъ, діагональ котораго MD и есть направленіе искомой касательной MT.

§ III. Логариѳмическая спираль.

333. *Логариѳмическая спираль есть геометрическое мѣсто точки которая двигается по прямой и законъ движенія опредѣляется уравненіемъ $s=a^t$, въ то время, какъ сама прямая вращается равномѣрно около полюса*

Изъ уравненія движенія точки по прямой видно, что пространства, проходимыя точкой въ послѣдовательные промежутки времени, возрастаютъ въ геометрической прогрессіи въ то время, какъ углы, составляемые векторомъ съ начальнымъ положеніемъ,—въ ариѳметической. Въ самомъ дѣлѣ, раздѣлимъ промежутокъ времени, въ которой векторъ дѣлаетъ полный оборотъ около оси, напр., на 12 равныхъ частей и каждую эту часть времени примемъ за единицу; въ такомъ случаѣ изъ уравненія $s=a^t$ для $t=0, 1, 2, 3, 4$.. находимъ:

$$s_0=a^0=1,\ s_1=a,\ s_2=a^2,\ s_3=a^3, ..$$

и слѣд. $\frac{s_1}{s_0}=a,\ \frac{s_2}{s_1}=a,\ \frac{s_3}{s_2}=a$ . . . . (1).

Откуда заключаемъ, что рядъ количествъ s_0, s_1, s_2, s_3... составляетъ геометрическую прогрессію, знаменатель которой равенъ основанію a.

Съ другой стороны, при равномѣрномъ вращеніи вектора около полюса, угловое перемѣщеніе α точки равно угловой скорости ω, умноженной на время t, т. е. $\alpha=\omega.\ t$. Откуда, для $t=0$, 1, 2, 3,... находимъ:

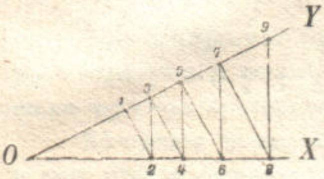
$$\alpha_0=0,\ \ \alpha_1=\omega,\ \ \alpha_2=2\omega,\ \ \alpha_3=3\omega.....$$

и

$$\alpha_1-\alpha_0=\omega,\ \alpha_2-\alpha_1=\omega,\ \alpha_3-\alpha_2=\omega.....$$

На основаніи этихъ соображеній, построеніе логариѳмической спирали по точкамъ ведется слѣдующимъ образомъ.

На прямой OX (*чер.* 283) построимъ уголъ $XOY=\varphi$, cosinus котораго былъ бы равенъ $\frac{1}{a}$, т. е. $\cos\omega=\frac{1}{a}$, и на сторонѣ OY этого угла отложимъ часть 01, равную s_0, т. е. единицѣ. Изъ точки 1 возставимъ перпендикуляръ 12 до пересѣченія со стороною OX въ точкѣ 2, затѣмъ изъ точки 2 возставимъ перпендикуляръ 23 до пересѣченія со стороною OY въ точкѣ 3 и т. д.



Чер. 283.

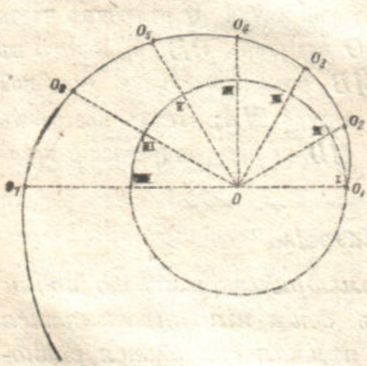
Отрѣзки 01, 02, 03, 04... и т. п. соотвѣтственно равны s_0, s_1, s_2, s_3... Дѣйствительно, изъ прямоугольныхъ треугольниковъ $O\,12$. 023, 034... имѣемъ:

$$01=02\cos\omega,\ 02=03\cos\omega,\ 03=04\cos\omega...$$

откуда

$$\frac{02}{01}=\frac{1}{\cos\varphi}=a,\ \frac{03}{02}=\frac{1}{\cos\varphi}=a,\ \frac{04}{03}=\frac{1}{\cos\varphi}=a..$$

Сравнивая же послѣдній рядъ съ рядомъ (1) и замѣчая, что $01=s^0=1$, находимъ, что $02=s_1$, $03=s_2$... т. е., что отрѣзки 01, 02, 03, 04... представляютъ пространства, пройденныя въ послѣдовательные промежутки времени. А потому, если изъ полюса O (*чер.* 284) опишемъ окружность радіусомъ, равнымъ единицѣ, т. е. равнымъ $O\,1$, и раздѣлимъ ее въ точкахъ I, II, III, IV... на 12 равныхъ частей, то въ началѣ перваго промежутка времени образующая точка будетъ находиться въ O_1, въ началѣ второго—на векторѣ, O II въ точкѣ O_2 на разстояніи отъ полюса $OO_2=02$; въ началѣ третьяго—на векторѣ OO_3 въ точкѣ O_3 на разстояніи отъ полюса $OO_3=03$, и т. д. Соединяя точки O_1, O_2, O_3... непрерывною кривою, построимъ логариѳмическую спираль.



Чер. 284.

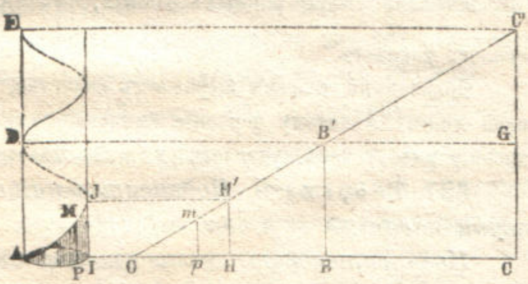
ГЛАВА IV.

ВИНТОВАЯ ЛИНІЯ.

§ 1. Опредѣленіе.

334. Если на плоскости начертимъ двѣ прямыя линіи OC и OC' (*чер. 285*) неопредѣленной длины и станемъ навертывать эту плоскость на цилиндръ вращенія такъ, чтобы точки прямой OC послѣдовательно совмѣщались съ окружностью его основанія AI, то точки прямой OC' совмѣстятся съ послѣдовательнымъ рядомъ точекъ, лежащихъ на самой поверхности и образующихъ непрерывную кривую $AJDE$, которая и называется винтовою линіею. Отсюда ясно, что *винтовая линія есть такая кривая, начерченная на поверхности цилиндра вращенія, которая на разверткѣ цилиндрической поверхности преобразуется въ прямую линію.*

335. Винтовую линію можно разсматривать какъ состоящую изъ нѣсколькихъ одинаковыхъ частей, соотвѣтствующихъ одному полному обороту плоскости. Каждая такая часть винтовой линіи называется *виткомъ винтовой линіи*. Такимъ образомъ, если на прямой OC отложимъ части $OB=BC$, равныя окружности основанія цилиндра, и возставимъ въ точкахъ B, C.... перпендикуляры къ прямой OC до встрѣчи съ OC' въ точкахъ B', C' то при первомъ полномъ оборотѣ плоскости, точки O и B совмѣстятся съ одною и тою же точкою основанія цилиндра, положимъ A, а точка B'—съ точкою D, слѣд., часть AD винтовой линіи будетъ представлять витокъ; при слѣдующемъ полномъ оборотѣ точки B' и G совмѣстятся съ одной точкой D, а точка C'—съ E, слѣд., DE есть второй витокъ и т. д.



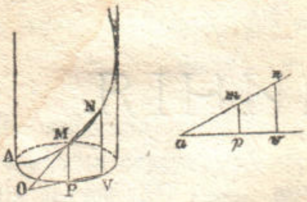
Чер. 285.

Отсюда легко видѣть, что начало и конецъ витка лежатъ на одной и той же производящей цилиндра и что, слѣдовательно, вообще виткомъ можно назвать часть винтовой линіи, содержащуюся между двумя послѣдовательными точками ея встрѣчи съ одною и тою же производящею. Въ свою очередь часть этой производящей между началомъ и концомъ витка называется *шагомъ* винтовой линіи.

Условимся называть *ординатою* какой-либо точки M, взятой на винтовой линіи, разстояніе точки M отъ основанія цилиндра, т. е. длину MP производящей точки M. *Абсциссою* той же точки будемъ называть дугу AP окружности основанія, заключенную между началомъ витка и точкою P.

§ II. Черченіе винтовой линіи.

336. Теорема. *Отношеніе ординаты къ абсциссѣ какой бы то ни было точки, взятой на винтовой линіи, есть величина постоянная и равная отношенію шага винтовой линіи къ окружности основанія цилиндра.*



Чер. 286.

Возьмемъ на винтовой линіи двѣ точки M и N (*чер. 286*). Ордината первой точки равна MP, абсцисса—дугѣ AP, ордината второй точки равна NV, абсцисса—дугѣ AV. Требуется доказать, что

$$\frac{MP}{\smile AP}=\frac{NV}{\smile AV}=\text{пост.}=\frac{h}{2\pi r},$$

гдѣ h—шагъ винтовой линіи, $2\pi r$—окружность основанія.

Для доказательства, развернемъ цилиндрическую поверхность на плоскость, и пусть основаніе цилиндра преобразуется въ прямую av, винтовая линія—въ прямую an; точка M совмѣстится съ точкою m, точка N—съ точкою n; въ такомъ случаѣ, опустивъ перпендикуляры mp и nv, по свойству развертки, имѣемъ, что

$$ap=\smile AP,\ av=\smile AV,\ mp=MP,\ nv=NV.$$

Но изъ подобія треугольниковъ map и nav находимъ $\frac{mp}{ap}=\frac{nv}{av}=\frac{h}{2\pi r}$

или, вставляя вмѣсто равныхъ равныя, имѣемъ: $\frac{MP}{\smile AP}=\frac{NV}{\smile AV}=\frac{h}{2\pi r}$; что и требовалось доказать.

Доказанная теорема выражаетъ свойство, принадлежащее всѣмъ точкамъ винтовой линіи, а потому черченіе винтовой линіи по точкамъ заключается въ построеніи ряда точекъ, удовлетворяющихъ такому свойству.

337. Теорема II. *Подкасательная винтовой линіи равна абсциссѣ точки касанія.*

Подкасательною называется проекція на плоскость основанія цилиндра отрѣзка касательной, заключающагося между точкою касанія и слѣдомъ касательной на плоскости основанія цилиндра. Такимъ образомъ, если въ точкѣ M (*чер. 287*), взятой на винтовой линіи, проведемъ касательную и найдемъ точку O, въ которой она встрѣчаетъ плоскость основанія цилиндра, то OP, какъ проекція отрѣзка OM, и есть подкасательная. Требуется доказать, что $OP=\smile AP$.

Чер. 287.

Съ этою цѣлью возьмемъ на винтовой линіи двѣ точки M и N (*чер. 286*) и проведемъ сѣкущую MN, которая, находясь въ плоскости, проведенной чрезъ производящія MF и NV, встрѣтитъ слѣдъ VPO этой плоскости къ какой-либо точкѣ O. Такимъ образомъ составится два треугольника MPO и NVO, изъ подобія которыхъ имѣемъ:

$$\frac{OV}{OP}=\frac{NV}{MP}\ \text{или}\ \frac{OV-OP}{OP}=\frac{NV-MP}{MP},$$

но по § **336**

$$\frac{NV}{MP}=\frac{\smile AV}{\smile AP}$$

и слѣдовательно

$$\frac{PV}{OP}=\frac{\smile AV-\smile AP}{\smile AP}=\frac{\smile PV}{\smile AP};$$

откуда
$$\frac{\smile AP}{OP}=\frac{\smile PV}{PV}$$

Но при предѣлѣ, когда точки M и N сливаются въ одну и сѣкущая MN переходитъ къ касательную, отношеніе $\frac{\smile PV}{PV}=1$, и слѣдовательно, $\smile AP=OP$; что и требовалось доказать.

На основаніи доказанной теоремы, для построенія касательной къ винтовой линіи въ какой-либо ея точкѣ M (*чер. 287*), достаточно провести чрезъ основаніе P, ординаты этой точки, касательную къ основанію цилиндра, на ней отложить отъ точки P до точки O абсциссу точки M, равную $\smile AP$, и соединить точку O съ точкою M.

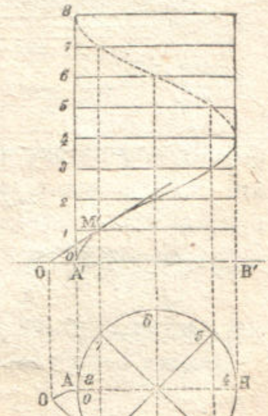
338. Задача. *Вычертить винтовую линію по точкамъ.*

Такъ какъ винтовая линія не есть плоская кривая, то она можетъ быть изображена на чертежѣ только при помощи двухъ проекцій на двѣ взаимно-перпендикулярныя плоскости проекцій, такъ что предложенная задача собственно сводится къ опредѣленію на цилиндрической поверхности проекцій такихъ точекъ, отношенія между ординатами и абсциссами которыхъ есть величина постоянная.

Пусть ось цилиндра вращенія (*чер. 288*), на поверхности котораго должна быть начерчена винтовая линія, перпендикулярна къ горизонтальной плоскости проекціи. Въ этомъ случаѣ основаніе цилиндра проектируется на горизонтальной плоскости по окружности AH, а на вертикальной—по оси проекціи, производящія же поверхности проектируются на горизонтальной плоскости по точкамъ окружности AH, а на вертикальной—по прямымъ, перпендикулярнымъ къ оси проекцій.

Пусть точка (A, A^1)—начало винтовой линіи; 08 шагъ винта.

На горизонтальной плоскости винтовая линія, очевидно, проектируется по окружности основанія цилиндра. Для опредѣленія же вертикальной ея проекціи, раздѣлимъ окружность основанія и шагъ витка на одно и то же число частей, положимъ на 8, съ тѣмъ, чтобы отношенія между ординатой и абсциссой каждой точки дѣленія было равно отношенію шага винта къ окружности основанія цилиндра (§ **336**), и, принявъ точки дѣленія окружности за горизонтальныя проекціи точекъ винтовой линіи, опредѣлимъ ихъ вертикальныя проекціи на томъ соображеніи, что если точка, положимъ M, принадлежитъ винтовой линіи, то ея вертикальная проекція M^1 должна находиться на параллели проведенной чрезъ соотвѣтственную точку (1) дѣленія шага, и на перпендикулярѣ къ оси, ибо только въ такомъ случаѣ отношеніе абсциссы $\smile AM$ взятой точки къ ординатѣ ея 01 равно отношенію окружности основанія къ шагу витка. Такимъ образомъ, точка пересѣченія параллелей, проведенныхъ чрезъ точки дѣленія шага, съ перпендикулярами, возстановленными изъ соотвѣтствующихъ точекъ дѣленія основанія цилиндра, и суть вертикальныя проекціи точекъ винтовой линіи. Соединивъ найденныя точки непрерывной линіей, построимъ вертикальную проекцію винтовой линіи.

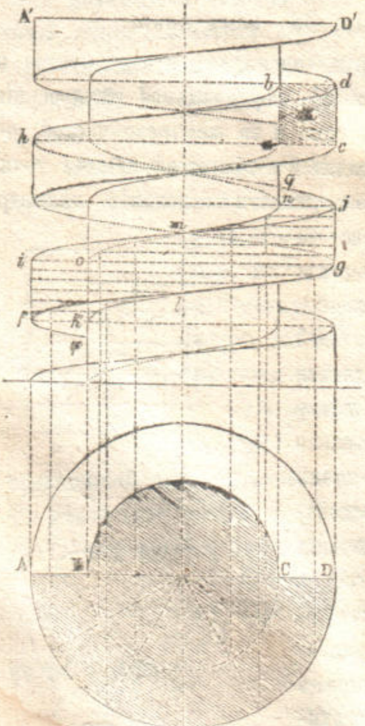


Чер. 288.

Чтобы провести касательную къ винтовой линіи въ какой-либо ея точкѣ *(M, M')*, на основаніи § **337**, слѣдуетъ поступить слѣдующимъ образомъ: въ точкѣ *M* проведемъ касательную къ основанію цилиндра и на ней отложимъ часть *MO*, равную $\smile AM$. Прямая *MO* есть горизонтальная проекція касательной, а точка *O*—горизонтальный ея слѣдъ, по *O* найдемъ ея вертикальную проекцію *O'* и, соединивъ ее съ точкою *M'*, построимъ вертикальную проекцію искомой касательной.

§ III. Построеніе проекцій винта съ квадратною и треугольною нарѣзкою.

339. Квадратная винтовая нарѣзка можетъ быть розсматриваема, какъ воображаемый слѣдъ квадрата *R* *(чер. 289)*, движущагося по винтовой линіи, такимъ образомъ, что плоскость его проходитъ чрезъ ось цилиндра, сторона его *ab* совпадаетъ съ производящей цилиндра, а точка *a* постоянно остается на данной винтовой линіи, шагъ которой долженъ удовлетворять условію $\overline{h > 2ba}$. При такомъ движеніи, точки *a* и *b* квадрата произведутъ на даннномъ (внутреннемъ) цилиндрѣ двѣ винтовыя линіи одного и того же шага *h*, имѣющія свои начала на одной и той же производящей на разстояніи *ab* другъ отъ друга. Точки *c* и *d* квадрата *R* произведутъ тоже двѣ винтовыя линіи того же шага *h*, но на (внѣшнемъ) цилиндрѣ, радіусъ котораго больше радіуса даннаго цилиндра на сторону квадрата; при чемъ эти послѣднія линіи будутъ имѣть свои начала на разстояніи *cd* другъ отъ друга и на той производящей внѣшняго цилиндра, которая лежитъ съ производящей началъ первыхъ двухъ винтовыхъ линій въ одной плоскости, проходящей чрезъ ось цилиндра.

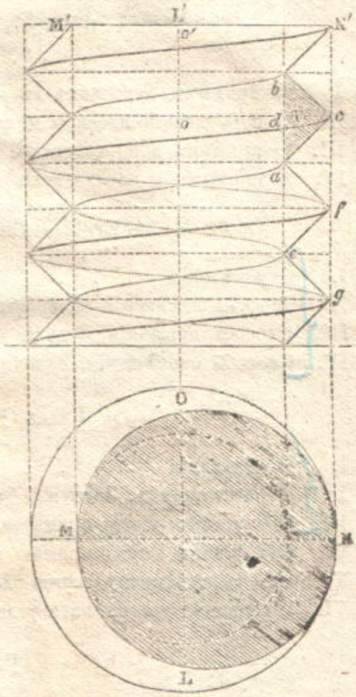


Чер. 289.

Отсюда для построенія проекцій винта съ квадратной нарѣзкой слѣдуетъ поступать слѣдующимъ образомъ.

На горизонтальной плоскости проекцій описать двѣ концентричныхъ окружности *BC* и *AD*, радіусы которыхъ различались бы между собою на ширину нарѣзки *AB*, и, принявъ эти окружности за основанія цилиндровъ, построить вертикальныя проекціи цилиндровъ. Затѣмъ, выбрать шагъ винта равнымъ или большимъ *2ab* (на чертежѣ шагъ равенъ *2ab*) и вычертить по § **338** вертикальныя проекціи четырехъ винтовыхъ линій въ слѣдующемъ порядкѣ: 1) первую винтовую линію на внутреннемъ цилиндрѣ съ шагомъ *2ab* и съ началами въ точкѣ *B*; 2) вторую винтовую линію на томъ же цилиндрѣ и съ тѣмъ же шагомъ, но на разстояніи отъ первой равномъ *ab*; 3) третью винтовую линію на внѣшнемъ цилиндрѣ съ шагомъ *2ab* и началомъ въ *A*; 4) четвертую винтовую линію на томъ же внѣшнемъ цилиндрѣ и съ тѣмъ же шагомъ, но на разстояніи отъ первой равномъ *ab*. Послѣ вычерчиванія такихъ четырехъ винтовыхъ линій остается отдѣлить видимыя ихъ части отъ невидимыхъ на слѣдующихъ соображеніяхъ. Части обѣихъ внѣшнихъ винтовыхъ линій, лежащія на передней сторонѣ цилиндра, видимы на всемъ протяженіи, напр. *fg*, *y*, и т. п.; части тѣхъ же линій, лежащія на задней сторонѣ цилиндра, только отчасти видимы до внутренняго цилиндра, а именно съ лѣвой стороны видны лишь части нижнихъ линій, подобныя *pf*..., съ правой — части верхнихъ линій, подобныя *jg*... Внутреннія винтовыя линіи только отчасти видимы на передней сторонѣ внутренняго цилиндра, а именно нижнія линіи видны слѣва до оси, напр. *kl*; верхнія — справа отъ оси, напр. *mn*. Такія видимыя линіи вычерчиваются сплошною кривою, а не видимыя — или пунктиромъ, или вовсе не обозначаются.

340. Треугольная винтовая нарѣзка можетъ быть разсматриваема какъ слѣдъ равнобедреннаго треугольника *T* (*чер. 290*), движущагося по винтовой линіи такимъ образомъ, что плоскость треугольника проходитъ чрезъ ось даннаго цилиндра, сторона его *ab* совпадаетъ съ производящей цилиндра, а точка *a* постоянно остается на винтовой линіи, шагъ которой равенъ основанію *ab* треугольника *T*.



Чер. 290.

Отсюда легко видѣть, что во время движенія треугольника точка *b* будетъ двигаться по винтовой линіи, описываемой точкою *a*, а точка *c* — по винтовой линіи, начерченной на цилиндрѣ радіуса $od+dc$, гдѣ *cd* есть высота даннаго треугольника; при чемъ шагъ этой винтовой линіи равенъ шагу первой винтовой линіи, а начало ея лежитъ на той же производящей, какъ и начало первой винтовой линіи, но на разстояніи отъ него равномъ *ad*, т. е половинѣ шага.

Отсюда заключаемъ, что для построенія проекцій винта съ треугольной нарѣзкой, слѣдуетъ начертить на горизонтальной плоскости проекцій двѣ концентричныхъ окружности радіусами *od* и *oc* и, принявъ эти окружности за основаніе цилиндровъ, построить ихъ вертикальныя проекціи; затѣмъ, на внутреннемъ цилиндрѣ начертить согласно § **338** винтовую линію съ шагомъ, равнымъ основанію *ab* треугольника *T*, а на внѣшнемъ — вторую винтовую линію того же шага, но съ началомъ, отстоящимъ отъ начала первой на половину шага. Эти линіи ограничатъ входящія и выходящія ребра нарѣзки и на передней сторонѣ цилиндра будутъ видимы по всей своей длинѣ. Съ боковъ же нарѣзка будетъ ограничена прямыми *eg*, *ef*, *af*, *ac*, *bc* и т. д.

Заштрихованная кривая *LMON* представляетъ сѣченіе винта горизонтальною плоскостью $M'N'$; эта кривая состоитъ изъ двухъ вѣтвей архимедовой спирали.

Конецъ.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

Стр.

Глава II. Плоскости, касательныя къ поверхностямъ.

Глава III. Плоскія сѣченія поверхностей.

Часть третья. Приложенія Начертательной Геометріи.

Глава I. Построеніе тѣней.

Глава II. Линейная перспектива.

Глава III. Проектированіе сооруженій.

Прибавленіе. Черченіе кривыхъ.

Глава I. Коническія сѣченія.

Глава II. Циклоидальныя кривыя.

Глава III. Спирали.

Глава IV. Винтовая линія.

Замѣченныя опечатки.

Напечатано: Стран.	Строка.		Должно быть:
7.	8 снизу—	части	части.
22.	24 снизу—	приходящей	проходящей.
74.	6 снизу—	**Призы**	**Призмы.**
158.	5 снизу—	соединивъ	соединимъ.

На стран. 14 не отпечатался чертежъ 33.