

518

С-21

В. С. Н. Х.

УПРАВЛЕНИЕ ИРРИГАЦИОННЫХ РАБОТ В ТУРКЕСТАНЕ.

ОПЫТНО-СТРОИТЕЛЬНОЕ ДЕЛО.

Выпуск 3.

Проф. А. А. Саткевич

Консультант Опытного-Строительного Отдела

ПРИЕМЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ЭМПИРИЧЕСКИХ КРИВЫХ

**I. НОМОГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД
ПАРАЛЛЕЛЬНОГО КООРДИНИРОВАНИЯ
В ЕГО ПРИМЕНЕНИИ
К АНАЛИЗУ ЭМПИРИЧЕСКИХ ЗАВИСИМОСТЕЙ**

П
О
ПЕТЕРБУРГ.
1919.

1485

В. С. Н. Х.

УПРАВЛЕНИЕ ИРРИГАЦИОННЫХ РАБОТ В ТУРКЕСТАНЕ.

ОПЫТНО-СТРОИТЕЛЬНОЕ ДЕЛО.

Выпуск 3.

Проф. А. А. Саткевич

Консультант Опытного-Строительного Отдела

ПРИЕМЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ЭМПИРИЧЕСКИХ КРИВЫХ

I. НОМОГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД
ПАРАЛЛЕЛЬНОГО КООРДИНИРОВАНИЯ
В ЕГО ПРИМЕНЕНИИ
К АНАЛИЗУ ЭМПИРИЧЕСКИХ ЗАВИСИМОСТЕЙ

1485.

Гидрометеорологический
Институт им. В. В. Коваленко

проверено
1966 г.

ПЕТЕРБУРГ.
1919.

Печатается по распоряжению Технического Директора Управления Ирригационных работ в Туркестане.

Оглавление.

	Стр.
От автора	1
1. Основные понятия о методе параллельного (номографического) координирования	3
2. Применение метода параллельных координат к исследованию систем опытных линий, прямых или приводимых к прямым	25
3. Пример составления эмпирических формул при посредстве метода параллельного координирования	31
4. Замечание об анализе, при посредстве параллельных координат, зависимостей между большим, чем три, числом переменных, иллюстрируемое частным примером	37
5. Определение, на основании опытных данных, значений постоянных параметров, входящих в формулу, общий вид которой предугазан (Метод Vatailler)	44
А. Случай двух постоянных, входящих в формулу линейным образом, (двух числовых коэффициентов)	45
В. Случай двух постоянных, входящих линейным образом, (двух числовых коэффициентов) и кроме того третьего постоянного, входящего как-угодно (напр. показателем)	52
а. Применение математических преобразований для приведения постоянных формулы к виду коэффициентов	58
б. Введение вспомогательных функций основных переменных с целью исключения некоторых из постоянных, т. е. уменьшения общего их числа	58
Введение производных функций 1-го порядка	59
Введение производных функций 1-го и 2-го порядков	61
С. Определение по экспериментальным данным отдельных зависимостей, входящих в формулу предназначаемого типа	73
6. Составление, при посредстве построения номограмм прямолинейной связи, эмпирических формул особого, соответствующего этим номограммам, типа (Метод Láska)	79

От автора.

Мною приготовлено к печати специальное исследование, в форме руководства, посвященное вопросу о методах составления эмпирических формул и содержащее в двух частях: в первой — различные приемы математического анализа кривых, получаемых от объединения плавной линией рядов точек опытных диаграм, во второй — математические способы наилучшего приближения прочерчиваемых на диаграммах плавных кривых к упомянутым совокупностям опытных точек чертежа. К сожалению, условия времени задерживают печатание труда в полном его объеме. С другой стороны, Опытно-Строительный Отдел Управления Ирригационных работ в Туркестане, заинтересованный в разработке приемов анализа опытных данных, предложил мне изложить частично некоторые отделы из моего исследования, в целях возможности практического использования сообщаемых в них сведений при опытных работах. Охотно согласившись на такое предложение, я нашел наиболее целесообразным подготовить к отдельному изданию прежде всего главы, касающиеся применения к обработке опытного материала метода номографического — параллельного координирования, как приема, вероятно наименее известного специалистам-практикам. Новизна нетолько применения метода параллельных координат к задачам изучения эмпирических зависимостей, но и самого этого метода, почти не проникшего еще в обязательные курсы даже высших технических учебных заведений, придает особый интерес опубликованию излагаемых здесь сведений, попутно затрагивающих в общих чертах и основные понятия параллельных номографических представлений. К тому же, приему использования метода в целях исследования опытных зависимостей группового характера (обнимающих три переменные), придается здесь несколько более законченный, систематический характер, по сравнению с имеющимися в различных литературных источниках, довольно разрозненными, не приведенными в методологическую систему, указаниями.

Чтобы представить вопрос о применении метода параллельного координирования к составлению эмпирических зависимостей с возможной полнотой, в содержание этой брошюры включено еще изложение особого приема определения по данным опыта числовых параметров, входящих в эмпирическую формулу, в случае предуказания общего ее типа. Прием этот весьма целен разработан Н. Batailler, но помещен им в журнале „Révue d'artillerie“, сравнительно мало распространенном; передача же идеи способа Batailler в изданной в русском переводе книге американского проф. Peddle'a является значительно сокращенной по сравнению с первоисточником. Обстоятельства эти подсказывали необходимость включения метода Batailler в число приемов, охватываемых содержанием этой брошюры.

В конце статьи помещено еще несколько переработанное изложение особого приема чешского автора V. Láška, представляющее практическую ценность, но опубликованное в малоизвестном специальном журнале на чешском языке.

В заключение считаю приятным долгом высказать свою благодарность Заведывающему Опытно-Строительным Отделом инженеру Путей Сообщения Н. Н. Павловскому за инициативу в издании и содействие к напечатанию исполненной мною работы.

1. Основные понятия о методе параллельного (номографического) координирования.

Номограмму вообще именуется всякая графическая таблица, всякая диаграмма, воплощающая в геометрических формах связь, существующую между какими-либо переменными количествами. За последние четыре десятилетия этот способ исследования вопросов получил возможность идти еще по новому пути, благодаря особой форме координатных представлений, предложенной К. Schwering'ом и независимо от того, несколько позже, получившей в ряде работ Maurice d'Ocagne'я научно-законченную и практически-изысканную обработку.

Первые работы Шверинга, касающиеся нового способа координирования, относятся к 1874 и 1876 годам. Статья Karl Schwering'a 1874 г. помещена в малодоступном литературном источнике—Jahresbericht (für 1874) des Westfälischen Provincialvereines (p. 149); поэтому даже сам Шверинг начальным литературным выражением своей идеи считает работу, напечатанную в Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. 21, за 1876 г. (p. 278—286, „Ueber ein besonderes Liniencoordinatensystem“); более-же разработанное изложение вопроса дано им в отдельной книге „Theorie und Anwendung der Liniencoordinaten an der analytischen Geometrie der Ebene“, Leipzig, 1884. Первая в той-же области работа Maurice d'Ocagne относится лишь к 1884 году („Procédé nouveau de calcul graphique“, Annales des ponts et chaussées, 1884, nov., p. 531). За эту небольшую заметку последовал целый ряд статей Оканя, перечисляемых им в начале прекрасного, систематического и вообще—наиболее полного в настоящее время исследования по номографии—его книги „Traité de pomographie“ (Paris, 1899 г., стр. XIII+480). Из позднейших работ Ocagne в этом направлении можно указать на его книжку „Calcul graphique et pomographie“, 1908 года (стр. XXVI+392) 2-е изд. 1914 г). На русском языке часть исследований Оканя компилятивно изложена К. М. в „Морском Сборнике“ за 1901 г. №№ 5, 6 и 7 (в общем 73 стр.+54 фиг. на 32 лист. черт.) Кроме того на русском языке имеется самостоятельно разработанное изложение Н. Герсевича „Основания номографического исчисления с приложением их к инженерному делу“ в двух выпусках 1906 и 1908 гг., перевод очень ясно и интересно написанной американской брошюры Дж. Б. Педла „Построение и применение номограмм“ (Ориг. сочин. 1910 г., перевод 1913 г., стр. VIII+132) и ряд более популярных или более кратких изложений. На ряду с Ocagne'ем во Франции-же подробно разрабатывает новый метод координирования Rodolphe

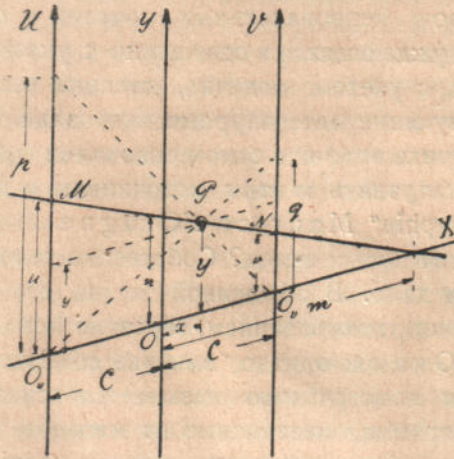
Soreau, основная работа которого "Contribution à la théorie et aux applications de la pomographie" относится к 1901 году („Mémoires de la Société des Ingénieurs civils de France, 1901, p. 191—512; поступивший в продажу отдельный оттиск помечен 1902 годом); после того, им-же помещены крупные работы в том-же журнале за 1906 и 1914 годы. Общий характерный очерк вопроса можно найти в статье R. Mehmke „Numerisches Rechnen" в „Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften, Bd 1, Heft 6, p. 1038—1079, или в дополненной переработке той-же статьи, помещенной D'Ocagne'ем во французском издании названной энциклопедии (tome 1, vol 4, p. 196—452,—собственно, метод выровненных точек со стр. 379). По указанию Rudie в посвященном Moritz Cantory Festschrift (Leipzig, 1899, p. 386 и след.) еще ранее Schwering'a и Ocagne'я параллельными координатами планомерно пользовался Unversagt (Osterprogr. des Realgymn. Wiesbaden, 1871).

Сущность предложенного Шверингом и Оканем нового метода координирования, как это выяснится в дальнейшем, заключается в замене обыкновенного координирования, путем пар прямых, параллельных координатных осей, способом координирования строго прямолинейного, ведущего свое начало еще со времени Plücker'a (См. Jul. Plücker—Analytisch-geometrische Entwicklungen“, Bd. 2. Essen, 1831). Некоторым преобразованием основной мысли, отвлечением ее от обыкновенных координатных представлений и вообще построением вполне законченной научной системы Шверинг и Окань дали вообще весьма ценное новое средство геометрического анализа, оказывающееся чрезвычайно приспособленным к изысканиям эмпирических формул. Обстоятельство это требует прежде всего ознакомления с самим существом нового метода, который однако еще почти не проник в учебные программы технических—даже высших школ, почему не может быть здесь передан в виде конспективных справок, а требует изложения, хотя и в краткой, но все-же в достаточно систематичной, последовательной форме. Систематичного изложения вопрос этот требует здесь еще и потому, что в существующих передачах последнего времени все яснее отражается стремление по возможности отвлечь основные его представления от установившихся привычек координирования, сделать метод возможно самодовлеющим, независимым, идейно-свободным. Между тем, применение метода к целям исследования эмпирических зависимостей особенно выигрывает именно от поддержания постоянной связи новых представлений и приемов с представлениями и приемами прежних типов, что требует несколько своеобразного развития идей. Что касается вообще применения нового метода к задаче построения эмпирических зависимостей, то попытки такого применения уже имеются (Soreau, Batailler, Rateau, Láska, Peddle),

и их можно назвать весьма удачными, но все же они являются пока несколько разрозненными, разрабатываемыми каждая в сравнительно-узких пределах идей отдельных авторов, почему объединение этих попыток на почве систематического изложения методологических оснований становится очень существенным. Однако, изложение и в этой части, ради краткости, гарантирующей практическую полезность, приходится сделать довольно сжатым, ограничиваемым сферою первоначальных понятий и основных идей, непосредственно нуждающихся в освещении с указанной специальной точки зрения, с учетом, конечно, степени возможности опираться на существующие литературные источники. Во всяком случае желающих изучить вопрос в самом основании возможно детальнее приходится направить к этим источникам и прежде всего к „Traité de pomographie“ Maurice d'Osagne.

Как называется новый метод? Собственно говоря, настоящего имени ему еще не дано. В обыденной жизни его часто именуют номографическим координированием, вероятно исходя из названия указанной книги О каня; однако, имя это совершенно ничего не выражает, так как номограммою называется всякая графическая таблица или диаграмма, независимо от методов представления. Schwering свою мысль окрестил именем „Linienkoordinaten“, но это название, не вполне удачное и само-по-себе, к тому-же уже было занято идеей Plücker'a. Osagne называет свой метод—методом выровненных точек („méthode des points alignés“) и получающиеся графические изображения—абаксами линейного выравнивания („abaques á alignement“), что правильно характеризует идею, но плохо укладывается в терминологию, особенно в отношении самой координатной системы. Это отчасти заставляет немецких авторов сохранять часто за координатами просто название „Schweringsche Koordinaten“ (Шверинговы); Mehmke за последние годы рекомендует метод именовать „методом прямолинейнорасположенных точек“ („Methode der fluchtrechten Punkte“). Мне представляется, что по-русски удобнее всего называть новую координатную систему общим именем „координат прямолинейной связи“, или „координат коллинеарных“, применяя иностранный, тоже предлагавшийся, термин, сохранив быть может за самим методом данное ему О канем имя „метода выровненных точек“. Нам предстоит однако ознакомиться с более простым выражением метода, достаточно удачно характеризуемым присвоенным ему именем „параллельных координат“, к чему теперь и перейдем.

Положим, что мы имеем две параллельных координатных оси U и V , (фиг. 1), на которых откладываются пары взаимно соответствующих значений количеств u и v , от намеченных произвольно нулевых точек O_u и O_v , причем направление от этих точек, скажем, вверх считается положительным и в таком случае направление вниз—отрицательным, что отметим на чертеже стрел-



Фиг. 1.

ками. Получаемые при таком отложении точки M и N соединим прямой и выберем на этой прямой какую-либо точку P .

Прежде всего мы можем отметить, что положение на чертеже прямой MN вполне определяется знанием пары значений u и v . Стало-быть, если u и v рассматривать как параллельные координаты, то задание величин обеих координат при таком способе координирования определяет собою не точку, как в координатах обыкновенных, а прямую.

Вместе с тем, положение точки P на прямой MN заданием частных значений координат u и v , т. е. указанием прямой MN , еще не определяется. Ищем-же такие условия, которые определенным образом характеризовали-бы точку P . С этой целью воспользуемся привычным методом представлений, отнеся весь чертеж одновременно и к обыкновенной системе координат, для чего проведем прямую через нулевые точки O_u и O_v параллельных координат, приняв ее за ось OX абсцис и другую прямую OY —ось ординат—паралельно обеим параллельным осям, посредине

между ними. Такая система осей получится вообще косоугольной, если нулевые точки O_u и O_v не лежат так сказать на одной высоте, но это не повлияет на справедливость дальнейших рассуждений. Пусть x и y обозначают косоугольные координаты начерченной точки P относительно осей OX и OY . Постараемся в дальнейшем, где это будет возможно, сохранять вообще обозначения x и y для координат обыкновенного типа, X и Y большие — соответственно для их каких-либо функций; координатам же нового типа будем присваивать обозначения u и v и их функциям — соответственно U и V .

Проведя через точку P прямую, параллельную оси OX , и обозначив длину $O_u O = O O_v$ буквою C , из подобия треугольников получим, что

$$\frac{u-y}{y-v} = \frac{C+x}{C-x}$$

т. е. $Cu - Cy - xu = Cy - Cv - xv$

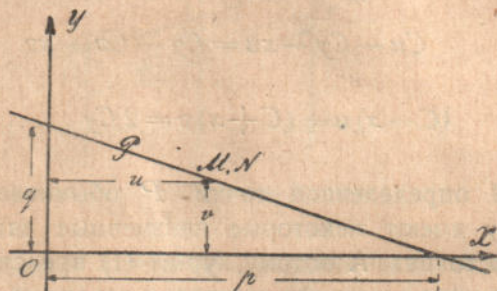
или $(C-x)u + (C+x)v = 2Cy \dots \dots \dots (1)$

Для выбранной определенной точки P обыкновенные ее координаты x и y имеют некоторые неизменные значения; величина C тоже постоянна. А потому, ур-ие (1) представляет собою аналитическую зависимость, связывающую переменные параллельные координаты u и v условием прохождения отвечающей им соединительной прямой MN через определенную точку P . Итак, одно ур-ие (1) с двумя переменными, характеризующее в обыкновенных координатах прямую линию, в координатах параллельных определяет собою точку P , и стало-быть можно говорить, что это есть ур-ие точки в параллельных координатах или, наоборот, что прямая обыкновенного координирования выражается в параллельных координатах точкой.

К тому-же заключению можно подойти и путем несколько-иных рассуждений: Если, откладывая на параллельных осях от начальных точек O_u и O_v пары соответствующих значений u и v , поставить себе задачей выяснить геометрический характер построения формулы $v = au$, то нетрудно прийти к заключению, что при постоянном коэффициенте a пропорциональности двух переменных количеств u и v концы изображающих эти количества отрезков должны лежать на прямых, проходящих через одну и ту-же точку на начальной линии отсчетов $O_u O_v$; точка эта может приходиться между нулевыми точками O_u и O_v или вне

них, смотря по тому, является a отрицательной или положительной величиной. Если затем анализировать геометрический смысл формулы $v = au + b$ в параллельных координатах, то придется усмотреть различие такого построения от только что ранее указанного в том, что все величины v окажутся увеличенными против прежних на одну и ту-же (положительную или отрицательную) величину b ; а такое увеличение достигается простым перемещением вверх или вниз (параллельно осям) на определенную длину упоминавшейся общей точки схода прямых. Итак, действительно ур-ие $v = au + b$, изображающееся в декартовых координатах прямою линией, в координатах параллельных характеризуется общою точкою пересечения всех прямых, отвечающих парам значений u и v , которыми удовлетворяется ур-ие, причем величина a связана с расположением этой точки относительно параллельных опор, так сказать—в поперечном направлении, а b зависит от высоты размещения точки над нулевою линией.

Для того, чтобы включенные нами в рассуждение вспомогательные обыкновенные оси координат VOX не ввели случайно в заблуждение относительно декартовых изображений, соответствующих построенным прямой MN и точке P в координатах параллельных, на фиг. 2 представлено специально изображение в пря-



Фиг. 2.

моугольной обыкновенной системе прямой P , отвечающей точке P в параллельных координатах, и точки, обозначенной M, N , соответствующей прямой MN в параллельных координатах. При этом, место точки (M, N) определяется знанием координат u и v ; положение-же прямой P можно найти, подставляя в ур-ие (1) сначала $v = 0$, причем u дает отрезок на оси OX ($= p$); затем $u = 0$, причем получается отрезок на оси OY ($= q$). Те-же отрезки p и q можно найти и в параллельных координатах, как указывает фиг. 1, проведением через точку P прямых, проходящих перекрестно через нулевые деления координат.

Сопоставим ур-ие (1) с общим типом линейного ур-ия с двумя переменными

$$Au + Bv = K \dots \dots \dots (2)$$

Если мы хотим по заданному ур-ию типа (2) судить, какой именно точке P оно отвечает в параллельных координатах, надлежит превратить ур-ие (2) в ур-ие (1). А чтобы ур-ия (1) и (2) были идентичны, должны быть соблюдены соотношения:

$$\frac{C-x}{A} = \frac{C+x}{B} = \frac{2Cy}{K};$$

стало быть:

$$CB - Bx = CA + Ax,$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} x &= C \frac{B-A}{B+A} \\ y &= \frac{K}{2BC} (C+x) = \frac{K}{B+A} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

и

Если ур-ие (2) задается в сокращенной форме:

$$v = au + b \dots \dots \dots (4)$$

где $a = -\frac{A}{B}$ есть tg угла наклонения отвечающей этому ур-ию прямой в обыкновенной координатной системе и $b = \frac{K}{B}$ отрезок, отделяемый ею от оси ординат, то формулы (3) преобразуются (делением и числителей, и знаменателей на B) в такие:

$$\left. \begin{aligned} x &= C \frac{1+a}{1-a} \\ y &= \frac{b}{1-a} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

Зависимости (3) и (5) позволяют определить (по координатам x и y относительно вспомогательных осей) положение точки P , отвечающей линейному ур-ию вида (2) или (4), или, говоря иначе, позволяют найти положение точки в параллельных координатах, соответствующей прямой в координатах обыкновенных.

Составим здесь еще две пары так сказать—перекрестных зависимостей, дающих иногда возможности некоторых удобных преобразований при составлении эмпирических формул.

1) Пользуясь фиг. 1-й, легко напишем из подобия треугольников, что:

$$\frac{y}{p} = \frac{C-x}{2C} \quad \text{и} \quad \frac{y}{q} = \frac{C+x}{2C}$$

Следовательно:

$$\frac{p}{q} = \frac{C+x}{C-x}, \text{ т.е. } Cp - px = Cq + qx,$$

а потому:

$$\left. \begin{aligned} x &= C \frac{p-q}{p+q} \\ y &= \frac{pq}{p+q} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6)$$

II) Пользуясь также подобием треугольников, содержащихся на фиг. 1-й, найдем, что

$$\frac{u}{m+C} = \frac{n}{m} = \frac{v}{m-C},$$

откуда

$$mu - Cu = mv + Cv$$

и кроме того:

$$\left. \begin{aligned} m+C &= \frac{m}{n} u \\ m-C &= \frac{m}{n} v \end{aligned} \right\} 2m = \frac{m}{n} (u+v)$$

Стало быть:

$$\left. \begin{aligned} m &= C \frac{u+v}{u-v} \\ n &= \frac{u+v}{2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (7)$$

Вот—тот комплект основных формул, которыми вообще приходится пользоваться при рассмотрении вопросов, касающихся параллельного координирования, кроме конечно случаев так сказать—криволинейных зависимостей, о которых будет сказано дальше. Надо однако сразу-же обратить внимание на то, что все написанные формулы приспособлены лишь к условию положительного направления осей U , Y и V вверх, что условно уговоримся отмечать знаком $\uparrow\uparrow$.

Необходимо выяснить, какие перемены вносит в эти формулы изменение выбора положительного течения осей, к чему иногда прибегают на практике. Рассмотрим следующие случаи:

Случай $\downarrow\uparrow$: Положительная ось U направлена вниз; оси Y и V имеют положительное направление вверх. Отличие этого

случая от основного $\uparrow\uparrow\uparrow$ в том, что u заменяется $-u$ и вместе с тем p заменяется $-p$. При этом надлежит заменить A на $-A$ и a на $-a$, что придает составленным только-что формулам такой вид:

$$\left. \begin{aligned} x &= C \frac{B+A}{B-A} & x &= C \frac{1-a}{1+a} \\ y &= \frac{K}{B-A} & y &= \frac{b}{1+a} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (8)$$

$$\left. \begin{aligned} x &= C \frac{p+q}{p-q} & m &= C \frac{u-v}{u+v} \\ y &= \frac{pq}{p-q} & n &= \frac{v-u}{2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (9)$$

Случай $\uparrow\downarrow$. Вверх направлены положительные оси U и Y ; вниз—ось V . Изменения против основного случая: V на $-V$, q на $-q$, и потому B на $-B$, a на $-a$ и b на $-b$. При этом:

$$\left. \begin{aligned} x &= C \frac{B+A}{B-A} & x &= C \frac{1-a}{1+a} \\ y &= \frac{K}{A-B} & y &= -\frac{b}{1+a} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (10)$$

$$\left. \begin{aligned} x &= C \frac{p+q}{p-q} & m &= C \frac{u-v}{u+v} \\ y &= \frac{pq}{q-p} & n &= \frac{u-v}{2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (11)$$

Случай $\downarrow\downarrow$. Положительные течения обеих параллельных осей вниз, положительная ось U вверх. Изменения сравнительно с основным случаем: u на $-u$, v на $-v$, p на $-p$, q на $-q$, и потому K на $-K$ и b на $-b$. При этом:

$$\left. \begin{aligned} x &= C \frac{B-A}{B+A} & x &= C \frac{1+a}{1-a} \\ y &= -\frac{K}{A+B} & y &= \frac{b}{a-1} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (12)$$

$$\left. \begin{aligned} x &= C \frac{p-q}{p+q} & m &= C \frac{u+v}{u-v} \\ y &= -\frac{pq}{p+q} & n &= -\frac{u+v}{2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (13)$$

Можно было бы дать еще обратное течение осям X и Y ; но так как эти вспомога тельные оси нами самими привносятся в исследование, т.-е. мы ими распоряжаемся, то ограничимся случаем течений нами принятых, тем более, что распространить указанный

метод изменения формул при перемещении положительного и отрицательного течения любой из осей не представляет особых затруднений.

Бросая общий взгляд на полученные уже нами представления из области параллельного координирования, отметим, что координирование это требует прежде всего установления двух взаимно-параллельных осей U и V , именуемых также опорами или опорными масштабами, и нулевых точек O_u и O_v или начал отсчетов на этих осях. Нулевые точки могут быть для ясности соединены прямой $O_u O_v$, являющейся основанием, базой чертежа, началом координат, но, вообще говоря, прямая эта является излишней и ради уменьшения числа линий на чертеже может быть опускаема. Вот и все основные линии чертежа в параллельных координатах. База предпочтительно выбирается перпендикулярной к осям, т.е. нулевые точки располагаются по возможности одна против другой; но удобство помещения опорных масштабов в границах, захватываемых исполняемым исследованием, заставляет иногда смещать масштабы один относительно другого. Описывая способы построений, авторы руководств по номографии обыкновенно вводят в формулы еще множители, представляющие величину графической единицы каждого масштаба и именуемые модулями; однако для первоначального ознакомления с идеями координирования выгодно, ради облегчения усвоения, эти множители пропускать, помня лишь постоянно, что масштабы отложений на разных осях в дальнейшем могут вводиться различными.

Иногда при составлении эмпирических формул приходится пользоваться еще перегруппировкой членов ур-ия (1). Выпишем поэтому само ур-ие (1) и требующиеся нам, его преобразования:

$$\begin{aligned} \text{для случая } \uparrow\uparrow \quad & (C-x)u + (C+x)v = 2Cy, \text{ т. е.} \\ & (u-v)x + 2Cy = C(u+v) \\ \text{„ — „ } \downarrow\uparrow \quad & (x-C)u + (x+C)v = 2Cy, \text{ т. е.} \\ & -(u+v)x + 2Cy = C(v-u) \\ \text{„ — „ } \uparrow\downarrow \quad & (C-x)u - (C+x)v = 2Cy, \text{ т. е.} \\ & (u+v)x + 2Cy = C(u-v) \end{aligned}$$

для случая $\downarrow\uparrow$ $(C-x)u + (C+x)v = -2Cy$, т. е.
 $(u-v)x - 2Cy = C(u+v)$

В такой формулировке все 4 случая очень просто могут быть объединены в одном ур-ии, а именно:

$$(C-x) \cdot (\pm u) + (C+x) \cdot (\pm v) = 2 Cy \dots (14)$$

при том условии, что знаки плюс при u или v отвечают выбору положительного течения соответствующих осей, одинаковому с положительным течением средней оси Y , а знаки минус отвечают выбору течения обратного с осью \bar{Y} .

Остается привести еще одну формулу, выделяемую особо в виду того, что она не зависит от выбора положительного течения делений на параллельных осях. Зависимость эту весьма полно использовал чешский ученый V. L á s k a („O sestrojování vsorců empirických“ „Časopis math. a fys.“, 40 (1910), p. 9—15, 142—152, именующий ее „основной номографической зависимостью“. Получается она непосредственно из подобия длин на чертеже фиг. 1-й, а именно:

$$\frac{p}{u} = \frac{q}{q-v}, \text{ т. е. } pq - pv = uq$$

Отсюда и получается искомое ур-ие:

$$\frac{u}{p} + \frac{v}{q} = 1 \dots (15)$$

Оно не меняет свой формы, потому что, при изменении течения делений на любой из осей или на обеих сразу, одновременно меняют знак и числитель, и знаменатель соответствующей дроби. По форме оно аналогично подобному-же ур-ию для обыкновенной координатной системы, что объясняется тем, что при построении в такой системе точек по координатам u и v (фиг. 2) отрезки на осях p и q получаются соответственно равными отрезкам p и q параллельной системы.

Обратимся теперь к исследованию различных случаев взаимного расположения систем точек и систем прямых, отвечающих определенным системам прямых и точек в обыкновенных координатных осях. Исследование это, весьма важное для ознакомления со свойствами изображений, получающихся в параллельных координатах, не представляет никаких затруднений в исполнении. По-

этому приведем его возможно кратко, собирая все сопоставление в таблицу, в первой (левой) графе которой будем отмечать характеристику системы в обыкновенных координатах, во второй (средней) графе—свойства, которые при этом получают те или другие из количеств, входящих в составленные выше зависимости, и в третьей (правой)—характеристику соответствующих систем в параллельных координатах, причем, так как для последних будут получаться не всегда вполне одинаковые результаты при выборе различного положительного течения отсчетов на осях, уговоримся для краткости отмечать лишь знаками $\uparrow\uparrow, \uparrow\downarrow, \downarrow\uparrow, \downarrow\downarrow$ положительные течения параллельных осей U и V . Термины „прямая“ и „точка“ будем понимать в их действительном геометрическом смысле безотносительно к типам характеризующих их ур-ий. Поэтому, прямым в обыкновенных координатах будут отвечать точки в координатах параллельных и точкам в обыкновенных координатах будут отвечать в параллельных координатах прямые; здесь слово „отвечать“ обозначает одинаковость аналитической (формульной) характеристики. Для сопоставления систем прямых в обыкновенных координатных осях с системами точек в осях параллельных будем пользоваться формулами (2), (3), (4) и (5) для случая $\uparrow\uparrow$ и соответствующими формулами (8), (10) и (12) для прочих случаев. Ур-ие (2): $Au + Bv = K$ или (4): $v = au + b$, при $a = -\frac{A}{B}$ и $b = \frac{K}{B}$, одновременно выражают сопоставляемые элементы в обоих типах координат, что и облегчает сопоставление.

В обыкновенных прямоугольных прямо- или косоугольных координатах.	Общие аналитические условия		В параллельных координатах
А. Различные системы прямых.			Соответствующие системы точек.
Параллельные прямые вообще и притом—эквиливантные (равноотстоящие)	$a = -\frac{A}{B} = \text{пост.}$	след. по (3) и (5): $x = \text{пост.}$	Точки на прямой, параллельной осям
	Прибавок к b постояннен $b_i = b_0 + i\delta$	Прибавок к y постояннен $y = \frac{b_i}{1-a} = \frac{b_0}{1-a} + i \frac{\delta}{1-a}$	тоже на равных расстояниях одна от другой

В обыкновенных прямолинейных прямо- или косоугольных координатах.	Общие аналитические условия.		В параллельных координатах.
с прогрессивно изменяющимся расстоянием	$b_i =$ $= b_0(1 + \delta)^i$	$y_i =$ $= \frac{b_0}{1-a}(1+\delta)^i$	и тоже на расстояниях, изменяющихся по тому-же закону.
Системы параллельных прямых:			Системы точек:
а) параллельных оси X	$A = 0$	$x = +C$ $y = \pm \frac{K}{B} =$ $= \pm b$	а) на оси v ($\uparrow\uparrow$ и $\downarrow\uparrow$ $y = +b$; $\uparrow\downarrow$ и $\downarrow\downarrow$ $y = -b$)
б) параллельных оси Y	$B = 0$	$x = -C$ $y = \frac{K}{A}$	б) на оси V
с) равнонаклонных к осям при отрезках p и q одного знака	$a = \operatorname{tg} \alpha = -1$	$x = 0$ при $\uparrow\uparrow$ и $\downarrow\downarrow$	с) на прямой, параллельной осям и лежащей посредине между ними
	" — "	$x = \infty$ при $\downarrow\uparrow$ и $\uparrow\downarrow$	на бесконечно-далекой прямой, параллельной осям
при отрезках p и q противоположных знаков	$a = \operatorname{tg} \alpha = +1$	наоборот:	
		$x = \infty$ при $\downarrow\uparrow$ и $\uparrow\downarrow$	на бесконечно-далекой прямой, параллельной осям
	" — "	$x = 0$ при $\uparrow\uparrow$ и $\downarrow\downarrow$	на срединной прямой, параллельной осям.
д) идущих сверху слева вправо вниз	$a = \operatorname{tg} \alpha < 0$ A и B одного знака	абс. в. $(x) < C$ при $\uparrow\uparrow$ и $\downarrow\downarrow$	д), на прямой параллельной осям—между ними
		абс. в. $(x) > C$ при $\downarrow\uparrow$ и $\uparrow\downarrow$	—вне них
е) идущих сверху справа влево вниз	$a = \operatorname{tg} \alpha > 0$ A и B разных знаков	наоборот: абс. в. $(x) > C$ при $\uparrow\uparrow$ и $\downarrow\downarrow$	е) на прямой параллельной осям—вне них
		абс. в. $(x) < C$ при $\downarrow\uparrow$ и $\uparrow\downarrow$	—между ними

В обыкновенных прямолинейных прямо- или косугольных координатах.	Общие аналитические условия.	В параллельных координатах.
<p>Системы прямых, проходящих через одну точку—полюс. (Пучок лучей).</p> <p>при положении полюса</p> <p>а) где-либо на плоскости</p> <p>б) на оси X</p> <p>с) на оси Y</p> <p>д) в начале координат</p>	<p>u и v удовлетворяют все условия систем (2) или (4)</p> <p>$u = 0$</p> <p>$v \neq 0$</p> <p>$v = 0$</p> <p>$u \neq 0$</p> <p>$u = 0$</p> <p>$v = 0$</p>	<p>Системы точек, лежащих на одной прямой, наклонной к осям, и</p> <p>а) пересекающей нулевую линию при $\uparrow\uparrow$ или $\downarrow\downarrow$ — вне осей при $\downarrow\uparrow$ или $\uparrow\downarrow$ — между осями.</p> <p>б) проходящей через начало O_u оси U</p> <p>с) проходящей через начало O_v оси V</p> <p>д) совпадающей с нулевой линией (базой)</p>
<p>В. Системы точек, лежащих на одной прямой</p>		<p>Системы прямых, сходящихся в одной точке—полюсе.</p>
<p>а) отсекающей на оси Y отрезок v_0</p> <p>б) параллельной оси X</p> <p>с) параллельной оси Y</p> <p>д) проходящей через начало координат равнонаклонно к осям и идущей в квадрантах: с различными знаками координат</p> <p>с одинаковыми знаками координат</p> <p>е) совпадающей с осью X</p> <p>ф) совпадающей с осью Y</p>	<p>$\frac{v - v_0}{u} = \text{пост.}$</p> <p>$v = \text{пост.}$</p> <p>$u = \text{пост.}$</p> <p>$\frac{u}{v} = \text{пост.}$</p> <p>$u = -v$</p> <p>$u = v$</p> <p>$v = 0$</p> <p>$u = 0$</p>	<p>Этот полюс лежит:</p> <p>а) на прямой проходящей через $u = 0$ и $v = v_0$</p> <p>б) на оси V</p> <p>с) на оси U</p> <p>д) на нулевой линии</p> <p>и притом—</p> <p>посредине между двумя нулевыми точками O_u и O_v</p> <p>в бесконечном удалении от осей, т. е.—система прямых параллельна нулевой линии.</p> <p>е) в нулевой точке O_v оси V</p> <p>ф) в нулевой точке O_u оси U.</p>

Примечание. Для лучшего усвоения этих соотношений рекомендуется зачертить взаимно соответствующие графические схемки.

Дальше остановим свое внимание на очень кратком замечании о перемещении начала координат. Перенос начала в обыкновенной (декартовой) системе вводит в уравнения положительные или отрицательные добавки к координатам x и y . Те же добавки в параллельных координатах достигаются перемещением нулей O_u и O_v и стало быть нулевой линии—базы. Следовательно, это перемещение базы и соответствует переносу начала координат. На перемещении положения опор останавливаться не будем.

Чтобы еще отчетливее ознакомиться со свойствами изображений в параллельных координатах, остановимся еще на следующем способе определения положения прямых в декартовых координатах по их изображениям (точкам) в координатах параллельных. Этот способ, дающий несколько более простой переход в воображении от одних координатных представлений к другим, а также некоторые попутные заключения, приводится здесь еще в виду того, что он впервые предлагается и потому отсутствует в других литературных источниках. Для простоты, однако, ограничимся лишь случаем перпендикулярности базы (нулевой линии) к параллельным осям координат.

Сначала определим наклон прямой в декартовых координатах по ее изображению в координатах параллельных.

Связующее уравнение (2): $Au + Bv = K$ или в сокращенном виде (4): $v = au + b$, причем $a = -\frac{A}{B} = \operatorname{tg} \alpha$, т. е. tg искомого угла наклона прямой к декартовой оси X , и $b = \frac{K}{B}$, есть отрезок на декартовой оси Y .

Для случая $\uparrow\uparrow\uparrow$ параллельных координат, на основании формулы (5), запишем, что:

$$x = C \frac{1+a}{1-a} = C \frac{1+\operatorname{tg} \alpha}{1-\operatorname{tg} \alpha} = C \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \cdot \operatorname{tg} \alpha} = C \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right)$$

Здесь вместо 1 в двух местах введено равное единице количество $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$.

Кстати отметим, что формуле:

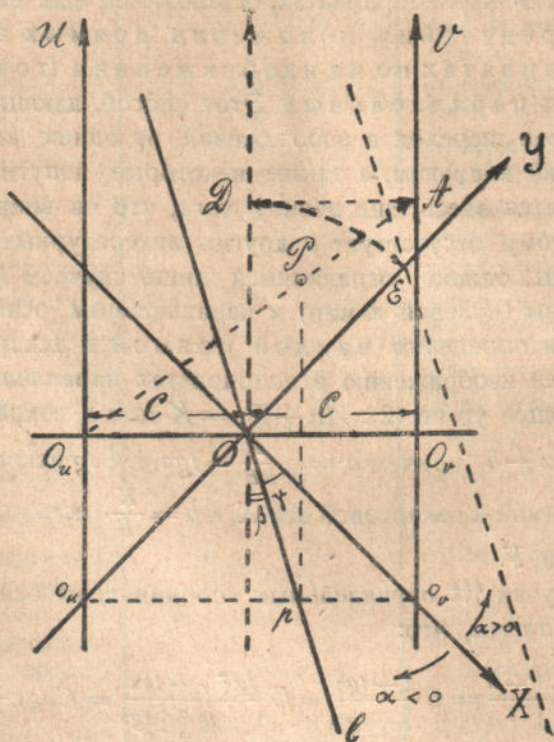
$$x = C \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right) \text{ или } \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right) = \frac{x}{C} \dots (16)$$

отвечает такая табличка взаимно—соответствующих значений $\angle \alpha$ и x :

при $\alpha = -180^\circ - 135^\circ - 90^\circ - 45^\circ \quad 0^\circ + 45^\circ + 90^\circ + 135^\circ + 180^\circ$
 $x = +C \quad -\infty \quad -C \quad 0 \quad +C + \infty \quad -C \quad 0 \quad +C$

Исполним затем такое построение:

Имея параллельные оси U и V и перпендикулярную к ним базу (нулевую линию) $O_u O_v$, проведем через среднюю точку O последней две декартовых оси OX и OY , равнонаклонные к осям U и V (фиг. 3) и имеющие положительные течения осей в на-



Фиг. 3.

правлении стрелок. Прочертив кроме того прямую $o_u o_v$, параллельную базе и лежащую ниже ее на длину C (на полурасстояние между осями U и V), спроектируем на эту подбазу $o_u o_v$ фигуративную точку P , задаваемую в параллельных координатах. Через получаемую ее проекцию p и через среднюю точку O проведем прямую l , углы которой с вертикальной прямой и с декар-

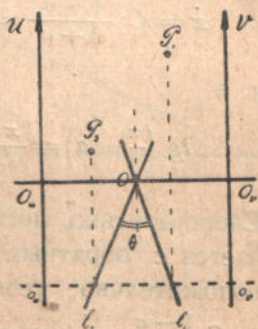
товой осью X обозначим буквами β и γ , как показано на чертеже. Легко убедимся, что, так как по формуле (16) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \frac{x}{c}$,

то
$$\frac{\pi}{4} + \alpha = \beta$$

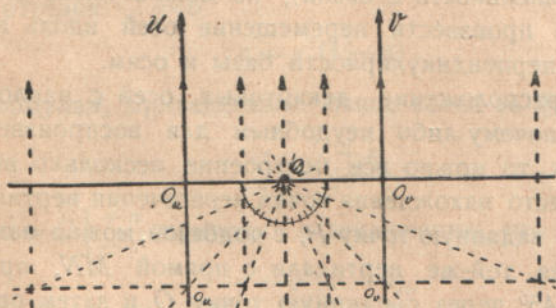
и след. $\alpha = \beta - \frac{\pi}{4} = -\gamma$ (или $= \pi - \gamma$) (17)

т. е. $\angle \alpha$ по величине $= \angle \gamma$, но с обратным знаком. Это показывает, что прямая в декартовых координатах XOY должна располагаться параллельно линии l . Все построение легко себе вообразить не проводя линий, и след. можно сразу же судить по положению точки P о наклоне отвечающей ей прямой.

Полученный вывод дает попутно и некоторые другие следствия: Так (фиг. 4), проводя подбазу $o_u o_v$ и проектируя на нее две фигуративные точки P_1 и P_2 , непосредственно определим угол θ между соответствующими прямыми в декартовых координатах; или, проводя через центр O пучек лучей, наклоненных друг к другу под углами в 45° , (фиг. 5) и через точки пересечения этих лучей с подбазой $o_u o_v$ — прямые, параллельные осям U и V , можем



Фиг. 4.



Фиг. 5.

утверждать, что точки, расположенные на этих прямых, на любой высоте, соответствуют в декартовых координатах прямым, наклоненным к осям под углами, кратными 45° . Вместе с тем еще раз подчеркивается тот факт, что параллельным прямым декар-

товой системы ($\angle \alpha = \text{const.}$) должен отвечать в параллельных координатах ряд точек, располагающихся на одной прямой, параллельной осям. Нетрудно исполнить этим путем и приведенное выше сравнительное исследование.

Надо, однако, обратить внимание на то, что в случаях иных положительных течений осей U и V в выводах получается маленькое изменение, а именно:

В случае $\downarrow\uparrow$ по форм. (8)

$$\dot{x} = C \frac{1-a}{1+a} = C \frac{1-tg \alpha}{1+tg \pi} = C \frac{tg \frac{\pi}{4} - tg \pi}{1 + tg \frac{\pi}{4} tg \pi} = C \cdot tg \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right),$$

т. е.

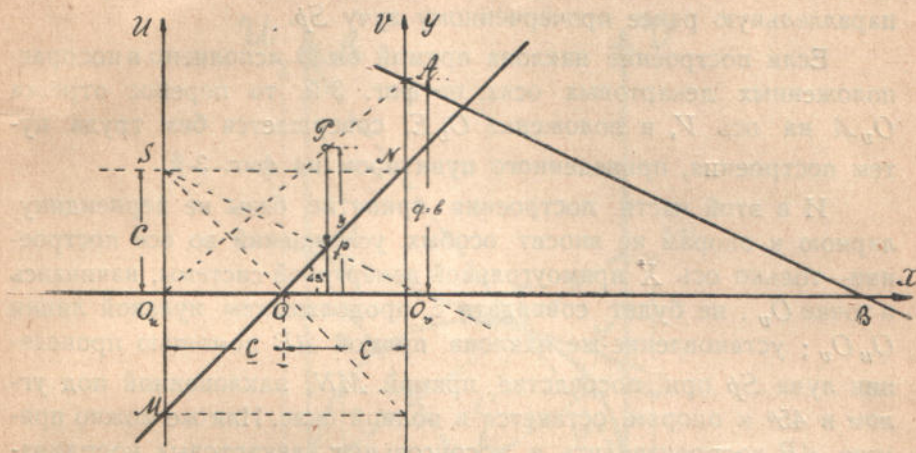
$$tg \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) = \frac{x}{C} \dots \frac{\pi}{4} - \alpha = \beta \dots \alpha = \frac{\pi}{4} - \beta = + \gamma.$$

Следовательно, построение остается тем-же самым, но угол получается с обратным знаком, т. е. как-бы оси U дается обратное положительное течение. В случае $\uparrow\downarrow$ по форм. (10) тоже $x = C \frac{1-a}{1+a}$, и потому результат получается одинаковый с случаем только-что рассмотренным. Случай $\downarrow\downarrow$, наоборот, идентичен в рассматриваемом отношении с основным.

Для случая косою расположением базы само построение почти не изменяется (подбаза, оставаясь перпендикулярной осям U и V , теряет параллельность с базой); но можно также для соображений раньше произвести перемещение осей вдоль их длины до достижения перпендикулярности базы к осям.

Если расположение декартовых осей с наклоном в 45° признается почему-либо неудобным для воспроизведения его в воображении, то можно все построение несколько видоизменить (фиг. 6): Вместо нахождения точки пересечения вертикали, проходящей через заданную точку P , с подбазой, можно находить точку p пересечения той-же вертикали с прямой MN , проведенной с наклоном в 45° через срединную точку O , и затем определяемую таким образом точку p соединять с полюсом S , избираемым на оси $O_u U$ на высоте равной C от начала отсчетов. В таком случае луч Sp будет всегда определять наклон отвечающий точке P прямой в декартовых прямоугольных осях, если эти оси расположены прямо, т. е. ось X по линии $O_u O_v$ вправо и ось Y по одной из прямых параллельным опорам, напр. по опоре $O_v V$, как

это отмечено на чертеже 6-м. В справедливости такого утверждения нетрудно убедиться, заметив, что построение фигуры 6-й воспроизводит построение фигуры 3-й повернутым на 45° влево и притом в масштабе, увеличенном в $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ раз.



Фиг. 6.

Научившись определять наклон прямой, взглянем теперь, как можно графически находить отрезок b , отделяемый той-же прямой от декартовой оси V ординат. Из формулы (5) видим, что этот отрезок $\frac{B}{K} = b$

$$b = y (1 - a)$$

Но по формулам, приведенным выше, вслед за формулой (5):

$$\frac{y}{q} = \frac{C+x}{2C},$$

что при $x = C \frac{1+a}{1-a}$ приводит к заключению, что и

$$q = y (1 - a),$$

т. е., что

$$b = q.$$

Стало быть, для нахождения верхнего конца A искомого отрезка достаточно соединить прямою точку P с началом отсчетов O_u на оси U ; эта прямая и отсечет на оси V отрезок, равный $q = b$. То-же заключение получится и иначе, если заметить, что b (по ур-ию $v = au + b$) равно значению v при $u = 0$.

Если декартовы координаты выбраны таким образом, что ось U совпадает с опорю V параллельных координат, как это помечено на фиг. 6, то для получения прямой, воспроизводящей в таких координатах точку P параллельного координирования, достаточно будет провести через найденную точку A прямую AB , параллельную ранее прочерченному лучу Sp .

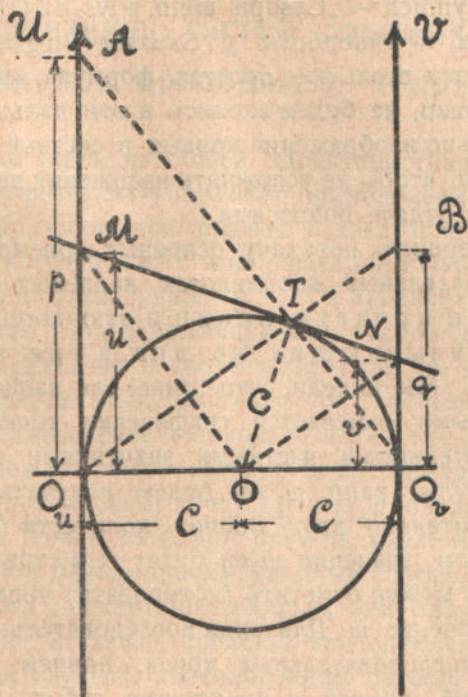
Если построение наклона прямой было исполнено в косо расположенных декартовых осях, по фиг. 3-й, то перенос отрезка $O_v A$ на ось V , в положение $O_v E$, совершается без труда путем построения, приведенного пунктиром на фиг. 3-й.

И в этой части построения принятие базы не перпендикулярно к опорам не вносит особых усложнений во все построение—только ось X прямоугольной декартовой системы, начинаясь в точке O_v , не будет совпадать с продолжением нулевой линии $O_u O_v$; установление же наклона прямой AB помощью проведения луча Sp при посредстве прямой MN , наклоненной под углом в 45° к опорам, останется в полной силе. Или же можно прямую AB воспроизводить в косоугольных декартовых координатах, совмещая ось U с нулевой линией; но в таком случае прямую MN надо проводить не под 45° к опорам, а через точку N , отрезающую длину C на опоре V .

Нетрудно распространить все рассуждение и на случаи иных, чем принятые, положительных течений отсчетов на опорах.

Изложенные выше рассуждения исчерпывают необходимые нам сведения относительно понятий и приемов координирования при параллельных координатных осях. Можно было бы остановиться еще на вопросе об изображении в этой системе ур-ий второго и высших порядков и вообще—относительно криволинейных изображений. Однако, эта часть вопросов, касающихся излагаемого нами метода, не имеет особого значения для преследуемых нами в дальнейшем целей. Поэтому, здесь можно ограничиться лишь общими замечаниями, что для изображения кривых Schering принял Plücker'ovu систему представления кривых, а именно—определил кривую, как геометрическое место касаний последовательных касательных к ней прямых. Кривая очерчивается, так сказать, объемлющими ее касательными прямыми. Так как прямые имеют свое геометрическое выражение в параллельных координатах, то этим путем устанавливается способ изображения и кривых.

Так напр., для круга с диаметром C , расположенным на перпендикулярной к осям базе $O_u O_v$, можно найти такое общее свойство координат u и v , определяющих каждую из касательных MN (фиг. 7): Из легко доказываемого равенства Δ -ков $MO_u O$ и MTO находим, что $MT = u$; так же доказывается, что



Фиг. 7.

и $TN = v$. А в таком случае, пользуясь известным свойством перпендикуляра из вершины на гипотенузу прямоугольного треугольника, напишем для ΔMON , что $MT \cdot TN = TO^2$, т. е., что

$$u \cdot v = C^2 = \text{const.} \dots \dots \dots (18)$$

Стало-быть, это ур-ие и есть уравнение начерченного круга в параллельных координатах.

Láska несколько видоизменяет определение ур-ия кривых, вводя для характеристики последовательных точек кривой перекрестные координаты p и q . На примере изображенного на фиг. 7 круга нетрудно убедиться, что координаты Láska вдвое больше Plüскеговых. В самом деле, из подобия прямоугольных треугольников $AO_u O_v$ и MTO находим, что $p : u = 2C : C = 2$. Введение та-

ких парных координат точки вообще по идее не согласуется с приемами параллельных координат (возвращая их отчасти ко временам Plücker'овым). Однако, Láska его способ дает почву для разработки новых графических приемов построения целого ряда плоских кривых (См. статью V. Láska — „O sestrojování tečen jistých krivek rovinných“ — „Časopis math. a fys, 42 (1912), p. 13—20).

Для эллипса и гиперболы у Schwinging'a, а с ним и у Láska, получается столь же простая формула, как и для круга ($w = \pm b^2$). Однако, не будем входить в эти дальнейшие подробности относительно изображения кривых в системе параллельного координирования, чтобы не усложнять изложения не относящимися к нашей прямой задаче вопросами.

Чтобы завершить передачу основных приемов изображения функций в параллельных координатах, надлежит лишь добавить несколько слов о представлении в этих координатах зависимостей, связывающих не два, а три количества, скажем u , v и w . Мы видели, что линейная зависимость между двумя переменными отмечается графически точкой. Если, задаваясь последовательными частными значениями одного из трех количеств формулы, напр. w , мы будем получать эту формулу линейною относительно двух прочих количеств (u и v), то при каждом отдельном значении w ей будет геометрически отвечать точка. Точку эту можно отметить (котировать) числом, указывающим принятое значение w . Для ряда последовательных значений w получится ряд последовательных точек, причем объединяющая их линия, вообще—кривая, и представит собою геометрическое выражение для количества w , связанного с количествами u и v заданною формулой. Геометрическая связь u , v и w будет выражаться тем, что взаимно-соответствующие значения этих количеств должны приходиться всегда на одной прямой, пересекающей две осевых опоры U и V в точках, отвечающих значениям u и v и, новую, третью, может быть—криволинейную, опору для w в точке, котированной значением w . Это изображение функций 3-х переменных отвечает представлению тех же функций в декартовых координатах в виде ряда линий (прямых), каждая из которых соответствует значению 3-ей переменной и должна быть котирована этим значением. Особенность, вносимая в разрешение задачи новым методом координирования, представляется, как увидим ниже, в высшей степени полезной для достижения наших целей.

2. Применение метода параллельных координат к исследованию систем опытных линий, прямых или приводимых к прямым.

Как мы уже знаем из общей характеристики метода параллельных номографических координат прямолинейной связи, всякая зависимость, выражающаяся прямой в декартовых координатах, в координатах параллельных изображается точкой. Ряд, система прямых декартового изображения дает в параллельных координатах систему точек. При закономерности расположения прямых в декартовых координатах и соответствующая им система точек в координатах параллельных располагается закономерно, по некоторой кривой, более или менее плавной. В частности—прямым линиям, параллельным между собою, отвечают точки, лежащие все на одной прямой параллельной осям; пучку прямых, проходящих через одну точку, отвечают точки на одной прямой, наклонной к осям. Эти соотношения дают, между прочим, удобный способ проверки параллельности прямых в декартовом изображении или сходимости всех их в одной точке, а также—средство для определения координат последней, в тех случаях, конечно, когда прямые близки к параллельности между собою и непосредственно по декартовому изображению трудно составить соответствующее суждение. Системы прямых, иначе взаимно расположенные, дают в параллельных координатах линии криволинейного начертания.

Приведем здесь формулировку, которую дает последнему утверждению V. Láska в статье „O sestrojování vsoreu empirických“ (Časopis pro pěstování Matematiky a Fysiky, 40, 1910, p. 152), высказывая общее правило: Если в обыкновенных координатах прямые объемлются кривой, то в номографических координатах изображающие их точки также лежат на кривой“. Положение, высказанное в такой форме, представляет собою удобный путь для перехода к вопросу об аналитическом выражении в номографических координатах прямолинейной связи линий криволинейного начертания.

Конечно, легче подвергнуть исследованию вид и положение кривой, а тем более прямой, линии, чем целой системы прямых. Этим определенно устанавливается значение метода координат прямолинейной связи для преследуемых нами целей. Мало того,

применимость метода не ограничивается лишь случаями исследования эмпирических зависимостей, выражающихся при обыкновенном декартовом координировании системами прямых линий, так как он непосредственно распространяется и на такие системы изображений в декартовых координатах, которые приводятся к системам изображений прямолинейных при посредстве введения неравномерных масштабов для отложения координат, т. е. при помощи так называемого способа анаморфирования, в частности, сразу же распространяется на системы прямых, получающихся в координатах логарифмических и полулогарифмических.

Высказываемые выше идеи вполне отчетливо сформулированы были Rudolphe Soreau в статье „*Contribution à la théorie et aux applications de la nomographie*“, Paris, 1902 (Extrait des *Mémoires de la Soc. des Ing. civ. de France*, 1901, août) на стр. 492 (§ 220 см. также стр. 218 § 27). Еще, вероятно, определеннее высказаны они им были в докладе Обществу гражд. инженеров Франции 18 мая 1906 г. на тему „*Quelques nouveaux types d'abaques. Applications des procédés nomographiques à la recherche des formules et des lois*“. К сожалению, помещенная в мемуарах названного Общества за тот же год (*Mémoires et comptes rendu des travaux de la Société des Ingénieurs civils de France*, 1906, p. 821—880) статья Soreau воспроизводит лишь первую часть доклада, о второй же интересующей нас его части, за непоявлением в печати обещанного автором (стр. 821) особого мемуара, приходится судить лишь по весьма краткому отчету заседания, на стр. 740—741 того же тома трудов Общества.

Maurice d'Ocagne, давая в своем прекрасном руководстве по номографии („*Traité de nomographie*“, Paris, 1899, на стр. 203—213) примеры применения метода выровненных точек к составлению эмпирических законов, не подчеркивает существа метода с такой определенностью, как это делает Soreau. Даже в позднейшей книге „*Calcul graphique et nomographie*“, Paris, 1908, Ocagne исполняет это в очень общих выражениях (стр. 277—281).

Излагая идею метода и иллюстрируя его примерами, Soreau, к сожалению, не облакает своих мыслей в форму определенных указаний относительно порядка практического применения метода. Приводимые им примеры решаются не вполне сравнимыми путями, так сказать — неоднородно, и тоже не дают возможности усмотреть в них устойчивый способ действий, вложить их в форму законченного для практики приема.

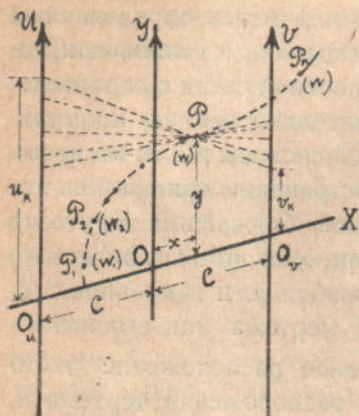
Ocagne в книге „*Calcul graphique et nomographie*“, 1908, на стр. 277—278 намечает некоторый путь действий, но в очень общей форме, не связанной непосредственно с приводимыми затем примерами.

В виду того, что вопрос, являвшийся для Soreau, а тем более для Osagne, приводящим, побочным, для нас представляет центральное значение, нам надлежит остановиться на нем внимательнее, стремясь создать прием, возможно законченный и легко приложимый к каждому частному случаю, поддающемуся его воздействию. Ради выработки при этом более или менее определенных аналитических схем для исследований, ограничимся лишь описанною выше системою координат прямолинейной связи с параллельными осями (опорами), учитывая сравнительно редкую применимость более сложных разновидностей этой системы и в то-же время уже малую затруднительность в распространении приема и на эти усложненные условия. Ограничивая свой ближайший кругозор параллельным расположением опор или осей номографического координирования, сохраним, однако, для общности наклонное расположение нулевой линии $O_u O_v$ — базы чертежа или его начала координат, во внимание к тому, что такое расположение часто вызывается существенными удобствами расположения чертежа и, в сущности говоря, не вносит никаких усложнений в общую аналитическую формулировку задач.

Сохраняя введенный нами выше способ обозначений, своим переменным, откладываемым на параллельных опорах, изображение их буквами u и v , а также третьему переменному, входящему под видом отметок, обозначение w , в отличие от изображения координат x , y и z тех-же анализируемых геометрических мест, но относимых к одновременно участвующей в анализе декартовой системе. Это позволит нам легче использовать полученные выше формулы, оградит от смешения элементов разного характера и в то-же время едва-ли внесет какое-либо затруднение в ход мысли. Придется лишь временно, в течение производимых операций, основные переменные видеть отмеченными буквами u , v и w , и лишь по окончании действий присвоить им привычное обозначение x , y и z . Впрочем, при составлении эмпирических формул весьма часто основные переменные имеют свои специальные буквенные обозначения (давление p , температура t , электродвижущая сила e , высота h и т. п.), не препятствующие использованию x , y и z для декартова координирования.

Если зависимость между двумя переменными, приводящую в декартовых координатах к прямолинейному изображению, строить в координатах параллельных, откладывая на параллельных опорах U и V частные значения переменных u и v , то все прямые, соединяю-

щие пары соответствующих значений u и v , должны проходить через одну точку P , которая и является изображением в параллельных координатах выстраиваемой зависимости (фиг. 8). Отчетливость прохождения всех соединяющих координаты прямых через одну точку



Фиг. 8.

служит при этом одновременно и мерилom справедливости предположения о прямолинейном законе для исследуемой зависимости. Если данная для изучения зависимость содержит в себе еще 3-е переменное w , то построение точки P производится при придании количеству w некоторого частного числового значения; изменяя это значение w , получаем и различные положения точки P , причем каждому ее положению отвечает определенное значение переменного w , подписываемое при такой точке в виде ее числовой отметки или котировки. По-

лучающаяся таким образом совокупность точек P_1, P_2, \dots, P_n и создает собою ту систему точек, которая соответствует системе прямых в декартовых координатах.

Каждую получающуюся точку P можно одновременно считать занимающей определенное положение в отношении некоторых обыкновенных декартовых координатных осей OX и OY , располагаемых, как указано на фиг. 8, т. е. первая — на нулевой линии $O_u O_v$ параллельных координат и вторая — посредине между параллельными опорами. Обозначая буквами x и y координаты точки P по отношению к этим декартовым осям, мы можем, на основании приведенных выше соображений (ур. 1, стр. 7) считать существующей такую связь между этими координатами x и y и координатами u и v (значения C см. на фиг. 8):

$$(C - x)u + (C + x)v = 2Cy \dots \dots \dots (19)$$

Если, по удобствам расположения чертежа или другим соображениям, положительные отсчеты на опоре U или на опоре V или, наконец, на той и другой производятся в обратном указанному стрелками направлении, то в написанной формуле прихо-

дится лишь изменить знак при соответствующем переменном на обратный (ур. 14, стр. 13), что для памяти запишем так:

$$(C - x) (\pm u) + (C + x) (\pm v) = 2Cy \dots (19bis)$$

При построении функций 3-х переменных u , v и w , как было пояснено, получается система, ряд точек P_1, P_2, \dots, P_n , отвечающая системе прямых, если-бы построение производить по методу Декарта. Если взаимное расположение таких прямых имело-бы некоторую закономерность, то и расположение получающихся точек должно также обнаруживать закономерное распределение; закономерность-же в расположении точек выражается возможностью объединить их одною более или менее плавною кривою, в частности—даже прямою линией. Получающуюся объединительную линию можно исследовать по общим приемам, относя ее к привнесенным в чертеж (фиг. 8) декартовым координатам XOY . Положим, что нам удалось, путем такого анализа, составить ур-ие полученной линии точек P в форме зависимости между двумя координатами x и y кривой:

$$f(x, y) = 0$$

Ур-ие это явится в таком случае дополнительным к ур-ию (19) и позволит исключить из последнего одно из побочных переменных x или y .

Остается еще исключить и другое из этих переменных. Достичь такого результата можно, обращая внимание на еще неиспользованные сведения об отметках при точках P значений третьего переменного—параметра w . Чтобы вложить и этот фактический материал в аналитическую форму, удобнее всего построить графически связь между значениями w и величинами одной из координат x или y соответствующих точек P , откладывая, напр., x или y по абсцисам, и соотв. z по ординатам и затем определяя ур-ие кривой, соединяющей получающиеся так точки:

$$\varphi(x, z) = 0 \text{ или } \psi(y, z) = 0$$

Ур-ие это позволит ввести в основное ур-ие (19) и вместо другой из вспомогательных координат (x или y) основное переменное z , которому был придан характер параметра. В результате ур-ие (19) превратится в ур-ие между 3-мя основными переменными задачи u , v и w , т. е. и явится отыскиваемой нами зависимостью. В ней придется лишь заменить буквы u , v и w теми обо-

значениями, какие присваиваются основным переменным задачи, и быть может произвести желательные преобразования алгебраического или тригонометрического свойства.

С какою именно из координат x или y связывать параметр w , составляя третье ур-ие, зависит от удобства исследования получающейся кривой. Придется иногда пробовать подойти к решению с обеих сторон. В некоторых случаях можно значение w попытаться связать с другими геометрическими элементами линии, объединяющей точки P , напр. с длиной l , отмеряемой по этой линии до всякой из точек P от некоторой начальной точки; последний прием является удобным при прямолинейном расположении точек P , но все-же он вызывает еще необходимость поставить в зависимость вводимую длину l от координат x и y , т. е. ввести в решение вместо одного 3-го, еще два ур-ия $\varphi(w, l) = 0$ и $l = \psi(x, y)$.

В тех частных случаях, когда линия, объединяющая точки P , является прямою, ур-ие $f=0$ можно написать в таком виде:

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1,$$

если буквами m и n обозначить отрезки, отсекаемые прямой на осях OX и OY , или в форме:

$$y = ax + n$$

если буквою a назвать угловой коэффициент прямой, равный, как нетрудно видеть, $-\frac{n}{m}$

Подставляя выражение для y из такого ур-ия в ур-ие (19), получим последнее в виде:

$$(u - v + 2Ca)x = C(u + v - 2n) \dots \dots \dots (20)$$

Из последнего ур-ия и останется лишь исключить x введением переменного w по его отметкам.

Бросая общий взгляд на изложенный способ, нельзя не признать, что он обладает весьма большой общностью в смысле приложения к различным задачам практики. Способ действий в каждом частном случае им вполне определенно намечается. Надлежит при этом помнить, что отложение u и v на номографических опорах может исполняться и не по равномерному масштабу, а по закону нарастания какой-либо функции переменного u или v (ради получения пересечения в одной точке P для каждого значения w , чем до известной степени и подсказывается характер необхо-

димой функции); в таких условиях придется лишь анормировать переменные временно отметить, напр., большою буквою U или V вместо соответствующей малой u или v и лишь затем в составленном ур-ии заменить в свое время эту большую букву введенной в построение функцией от малой буквы.

Заметим еще, что решение всей задачи можно было бы обосновать и на иных формах зависимостей, связывающих элементы параллельного координирования с декартовыми координатами x и y (ур-ия 3—13, стр. 9—11); но повидимому предлагаемый здесь путь является самым удобным и прямым.

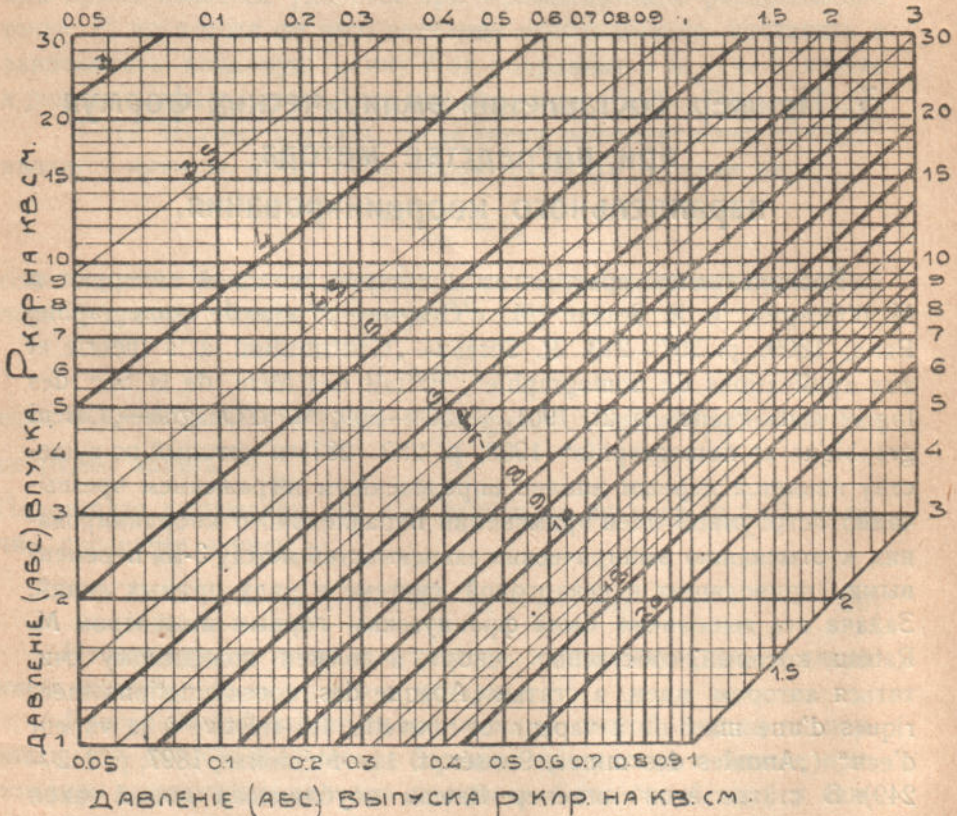
3. Пример составления эмпирических формул при посредстве метода параллельного координирования.

Воспользуемся прекрасным примером, который цитируют и M. d'Ocagne, и R. Soreau (M. d'Ocagne—„Traite de nomographie, Paris, 1899, p. 207—213. R. Soreau—„Contribution à la théorie et aux applications de nomographie“, Extrait des Mém. de la Soc. des Ing. civ. de France, août, 1901, p. 504—509; M. d'Ocagne—„Calcul graphique et nomographie“ 1908, p. 280—281) и который по существу является первым вполне определенным выражением чрезвычайно остроумной идеи применения параллельного координирования к отысканию эмпирических зависимостей между 3-мя переменными, приводящих в декартовой системе к ряду прямых линий. Задача эта выполнена была французским горным инженером M. Rateau, который, собственно говоря, и должен повидимому считаться автором идеи, в статье „Abaque des consommations théoriques d'une machine à vapeur et nouvelle loi relative à la vapeur d'eau“ („Annales des mines, 9-e sér., t. 11—Mémoires, 1897, p. 242—249). В статье этой инженер Rateau опубликовал новый закон теоретического потребления пара паровой машиной, который годом позже был дан также германским проф. R. Mollier в статье в Zeits. des Ver. deuts. Ing. (Bd. 142, 18 Juni 1898, p. 685—689: „Ueber die Beurteilung der Dampfmaschine“ von Richard Mollier). Сам Rateau осуществленного им решения частной задачи не возводит в метод и потому не придает ему соответствующей фор-

мальной обработки. Наиболее отчетливо о методологическом значении способа высказывается Soreau (указ. соч., стр. 492), но и он приводит этот пример в ряду других, менее рельефно выражающих идею, тоже не вырабатывая общих приемов действий. Такой общий прием указан нами в предыдущей главе, и именно применительно к нему мы и перефразируем вывод Rateau.

Пример I. Закон теоретического потребления пара паровой машиной, данный М. Rateau.

Обозначим буквою N энергию, которую можно извлечь из 1-го килограмма сухого насыщенного пара при посредстве совер-

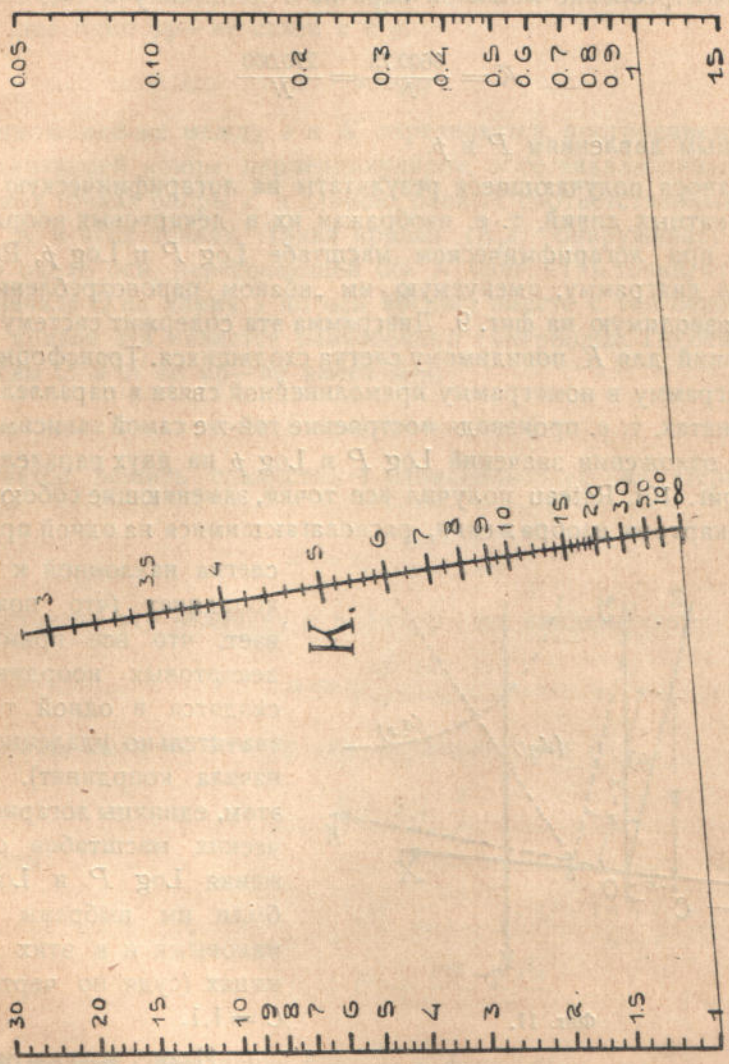


Фиг. 9.

шенной паровой машины, работающей между давлением впуска пара P (абс.) и давлением его выпуска p (абс.) с полным (доводимым до давления p) адиабатическим расширением, т. е. по циклу Rankine'a. В таком случае:

$$N = 425 \left[r \frac{T - T_0}{T} - \int_{T_0}^T c \frac{T - T_0}{T} dT \right]$$

P



Фиг. 10.

P:

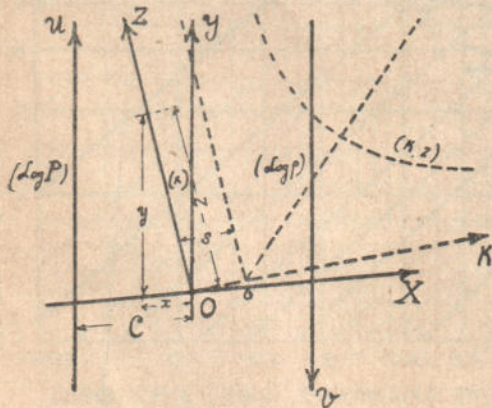
если T и T_0 суть абсолютные температуры впуска и выпуска

пара, отвечающие абсолютным давлениям P и p , и c и r —теплоемкость и полная теплота парообразования для жидкости при температуре T . По этой теоретически составляемой формуле можно, пользуясь таблицами Regnault, вычислить N для паровой машины, поршневого или турбинного типа, а по N определить теоретическое потребление машиной пара на 1 лош. силу в час, т. е.

$$K = \frac{3600.75}{N} = \frac{270.000}{N}$$

по данным давлениям P и p .

Нанося получающиеся результаты на логарифмическую сеть координатных линий, т. е. изображая их в декартовых координатах, но при логарифмическом масштабе $\text{Log } P$ и $\text{Log } p$, Rateau получил диаграмму, именуемую им „абаком паропотребления“ и воспроизводимую на фиг. 9. Диаграмма эта содержит систему прямых линий для K , повидимому слегка сходящихся. Трансформируя эту диаграмму в номограмму прямолинейной связи в параллельных координатах, т. е. производя построение той-же самой зависимости, но при отложении значений $\text{Log } P$ и $\text{Log } p$ на двух параллельных осях (фиг. 10), Rateau получил все точки, заменяющие собою прямые декартова изображения, располагающимися на одной прямой



Фиг. 11.

слегка наклонной к осям координат (что показывает, что все прямые в декартовых координатах сходятся в одной точке, значительно удаленной от начала координат). При этом, единицы логарифмических масштабов отложения $\text{Log } P$ и $\text{Log } p$, были им выбраны одинаковыми и в этих единицах (судя по чертежу) $C = 1,1$.

Итак, в диаграмме Rateau мы имеем случай направления осей параллельного координирования, обозначаемый нами символом $\uparrow\downarrow$. Применительно к этому случаю ур—ие 19 bis напишется в виде: $(C' - x)u -$

-- $(C + x)v = 2Cy$. К написанному ур—ию присоединяется ур—ие прямой линии—средней опоры Z (фиг. 11)

$$y = -ax$$

Наконец, остается еще установить закон распределения числовых значений K на опоре Z . При этом придется ввести в исследование еще одно ур—ие связи z с y :

$$z = by$$

Соотношение-же между z и K определяется построением кривой, соединяющей концы перпендикуляров, восстанавливаемых в различных точках опоры Z и длиной равных соответственным отметкам K в этих точках. Такая кривая (K, z) обнаруживает симметрию около оси, пересекающей ось K (фиг. 11) в точке, отстоящей от начала O на длину s по оси абсцисс; вместе с тем оказывается, что кривая эта является равнобочной гиперболой. По отношению к осям Z и K ее ур—ие имеет вид:

$$z(K - s) = \text{const.} = S$$

Остается решить совместно 4 написанных ур—ия. Первые два дают

$$x = \frac{C(u - v)}{u + v - 2aC}$$

Подставляя эту величину x в 3-е ур—ие, найдем, что:

$$z = \frac{abC(u - v)}{2aC - (u + v)}$$

Наконец, имея из 4-го ур—ия выражение для K :

$$K = s + \frac{S}{z},$$

найдем:

$$\begin{aligned} K &= s + \frac{S}{abC} \frac{2aC - (u + v)}{u - v} = s + P \frac{Q - 2u + (u - v)}{u - v} = \\ &= (s + P) + \frac{PQ - 2Pu}{u - v}, \end{aligned}$$

если примем обозначения $P = \frac{S}{abC}$ и $Q = 2aC$

По измерению и подсчетам: $a = 6,85$; $b = 1$; $C = 1,1$; $s = 0,39$. и $S = 3,48$.

$$\text{След.: } P = \frac{S}{abC} = \frac{3,48}{6,85 \cdot 1,1 \cdot 1} = 0,46; \quad Q = 2 aC = 2,6,85 \cdot 1,1 = 15,1;$$

$$s + P = 0,85; \quad P \cdot Q = 0,46 \cdot 15,1 = 6,95 \quad \text{и} \quad 2P = 0,92.$$

Вводя эти величины, найдем в результате:

$$K = 0,85 + \frac{6,95 - 0,92 \text{ Log } P}{\text{Log } P - \text{Log } p},$$

каковая зависимость и представляет собою найденный инж. Rateau закон.

Обратим в заключение внимание на то, что в приведенном примере имеется некоторое облегчение для анализа, которое заключается в том, что обе координаты $u = \text{Log } P$ и $v = \text{Log } p$ отложены в одной и той-же масштабной единице, причем эту единицу можно было ввести и как единицу для измерения s , z , x и y . Бывают однако случаи, когда, ради удобства размещения чертежа, приходится избирать для u и для v единицы меры различными, напр. для u равной m_u каких-то масштабных единиц и для v таких-же m_v единиц. В таких условиях графически на опорах являются отложенными не величины u и v (т. е. в данном случае не $\text{Log } P$ и $\text{Log } p$), а произведения um_u и vm_v , каковые и приходится ввести в ур-ия вместо u и v (во все зависимости, составляемые на основании геометрических соотношений, свойственных изображениям в координатах прямолинейной связи).

Вводимые множители m_u и m_v носят название масштабных модулей. При изложении принципов номографических представлений эти модули обыкновенно все время включаются в формулы. Однако, своим присутствием они несколько затрудняют усвоение основных теоретических положений, почему нами, в предыдущей передаче основ номографического координирования, и выпускались. Конечно, если-бы масштабные модули для u и v не были оба равными 1, то числовые значения входящих в формулу количеств были-бы иными, но конечно все-же такими, что окончательное выражение получилось-бы тем-же самым, что и сейчас.

В работе Soreau „Contribution à la théorie et aux applications de la pomographie“ (1901—2, р. 499 — 504) приведен еще и другой пример применения параллельных координат к составлению эмпирической зависимости, а именно — к выяснению термоэлектрических свойств различных металлов. К сожалению, не говоря уже о том, что пример этот является попыткой, не доведенной до

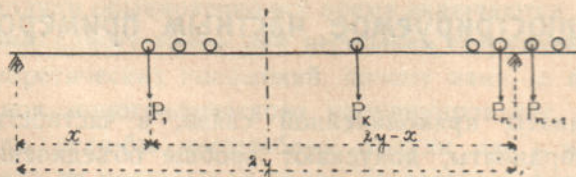
логического конца, он в своих обоснованиях оставляет место для сомнений. С одной стороны — числовые данные Tait'a не вполне согласуются с результатами позднейших экспериментальных работ, например с исследованиями Noll'я, Steele'a и др. (см. напр. Felix Auerbach — „Physik in graphischen Darstellungen, 1912, Bl. 150) и кривая Soreau, объединяющая и при данных Tait'a не все металлы, при введении более новых данных совершенно изменяет свой характер, утрачивая даже видимую общую закономерность; с другой-же стороны — основное положение Tait'a о линейном выражении термоэлектрической способности металлов в зависимости от температуры, существенно необходимое для возможности перенесения исследования на почву параллельного координирования, также не свободно от возражений. Учитывая эти обстоятельства, ограничимся здесь изложенным выше, прекрасно иллюстрирующим идею, примером, данным Rateau, отсылая лиц, желающих ознакомиться и с другим приводимым Soreau примером того-же характера, к указанному выше его сочинению.

4. Замечание об анализе, при посредстве параллельных координат, зависимостей между большим чем три, числом переменных, иллюстрируемое частным примером.

Координаты прямолинейной связи, в частности — параллельные координаты, допускают вообще объединение в одном чертеже зависимостей между большим, чем три, числом переменных. В предыдущем изложении эти приемы расширения емкости метода не были специально затронуты, потому что для цели составления эмпирических формул они оказываются мало полезными. Быть может, при дальнейшем развитии метода и удастся найти способы их использования; пока-же из них удастся извлечь полезные результаты лишь косвенным, полуслучайным путем. Поясним эту мысль одним примером, заимствуемым из только-что цитированного труда R. Soreau „Contribution...“, p. 493 — 499.

Пример II. Инженер М. Duplaix (M. Duplaix — „Abaques donnant par une simple lecture les valeurs maximums des efforts tranchants et des moments de flexion produits par les surcharges du règlement du 29 août 1891, dans les poutres reposants librement sur deux appuis de niveau, jusqu'à 80 mètres de portée“ — Mémoires et compte rendu des travaux de la Société des Ingénieurs civils de France, 1896, I, Paris, p. 204—247 + Pl. 157 et 158; и М. Duplaix — Abaques des efforts tranchants et des moments de flexion développés dans les poutres à une travée par les surcharges du Règlement du 29 août 1891, Carré et Naud édit., 1899), составил ряд диаграмм для быстрого определения наибольших перерезывающих усилий T и наибольших изгибающих моментов M в различных сечениях однопролетного балочного перекрытия при прохождении по нему поезда, типового в смысле нагрузки. Эти диаграммы, представляющие собою сочетание взаимно-пересекающихся систем прямых линий, Soreau искусно воспроизвел в параллельных координатах, причем получил значительно более компактную форму изображения тех-же зависимостей. Воспользуемся этим примером, изложив его с некоторыми сокращениями.

Duplaix показал, что за исключением двух районов, занимающих незначительную часть диаграммы, наибольшее перерезывающее усилие при нагрузке нормальным поездом — типом, имеет место в тот момент, когда головной груз располагается как-раз над исследуемым сечением и поезд приходится со стороны более удаленной опоры. Вводя при этом обозначения (фиг. 12): x — рас-



Фиг. 12.

стояние сечения (и головного груза) от ближней опоры, $2y$ — пролет, P_k — величина k -го груза, и a_k — его удаление от головного груза, Duplaix составляет такую основную расчетную формулу:

$$2T_y = (2y - x) \Sigma a_n - \Sigma P_n a_n,$$

справедливую (за исключением двух упоминаемых выше районов)

при условии, что общая длина нагрузки больше длины полупролета, почему занятая нагрузкой длина перекрытия $2y - x$ может быть заключена в пределы a_n и a_{n+1} расстояний от головы поезда до двух следующих одна за другой нагрузок, n -ой и $(n + 1)$ -ой:

$$a_n < 2y - x < a_{n+1}$$

Для принимаемой Duplax типовой нагрузки при широкой колее длины пролетов мостов $2y$ достигают 80 метров, а общая длина нагрузки 82,5 метра, т. е. всегда больше загруженной части пролета $2y - x$.

Так как написанная выше основная расчетная формула линейна относительно x и y , то в декартовых координатах она приводит к ряду прямых для различных значений T , допуская вместе с тем изображение в координатах параллельных — в виде ряда точек. Мало того: основное уравнение при всяком значении T для

$y = 0$ дает $x = \frac{\sum P_n a_n}{\sum a_n}$, т. е. в декартовых координатах все

прямые разных T проходят через одну общую точку с координатами

$x = \frac{\sum P_n a_n}{\sum a_n}$ и $y = 0$, а в координатах параллельных, стало

быть, все точки лежат на одной прямой, отсекающей на одной

опоре $x = \frac{\sum P_n a_n}{\sum a_n}$ и на другой $y = 0$. Необходимо при этом отметить,

что постоянство x обусловливается неизменностью числа грузов P , перешедших на пролет, т. е. все эти рассуждения справедливы лишь в определенных пределах передвижений грузов от расположения над дальней опорой груза P_n до расположения над той-же опорой следующего груза P_{n+1} . В условиях-же перемены самого числа грузов на пролете нельзя уже ограничиться одной диаграммой, а надо вычертить по отдельной диаграмме для каждого числа перешедших на пролет грузов. Так как в декартовой системе каждая такая диаграмма многолинейна, то конечно это создает необходимость нескольких отдельных чертежей. Но в координатах параллельных всякому из случаев отвечает лишь одна прямая, и ничто не мешает всю совокупность прямых, сколько бы их ни было, вычертить на одной общей диаграмме. Прямые эти располагаются одна относительно другой довольно удобно, так как, если точки встречи их с одной из опор (координата x)

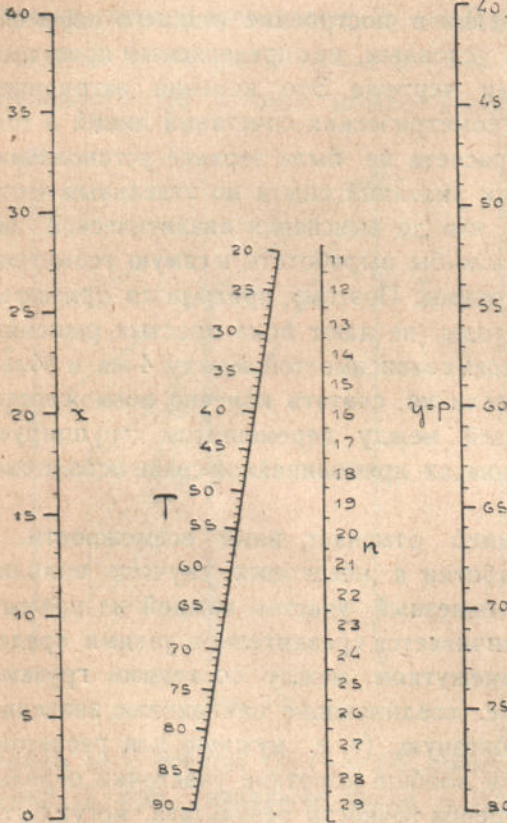
ния исследуемого сечения, отложить это x вверх от точки O_n по оси U -до точки M . Соединением M с P отделить на средней прямой то число n грузов, которое отвечает отложенным $2y$ и x . По n выбрать отвечающую ему прямую прочерченного на номограмме пучка. В месте пересечения выбранной прямой с прямою MP прочесть отметку T , чем решение задачи и закончится.

Если оценить всю совокупность этих действий, нельзя не признать, что способ введения в построение лишнего переменного (n) является довольно условным, не определяемым простыми геометрическими свойствами чертежа. Это конечно затрудняет аналитическое выражение геометрических сочетаний линий в том случае, если-бы формула расчета не была заранее установлена, а строилась-бы на основании указаний опыта по отдельным частным решениям, кроме того, что до выяснения аналитической зависимости затруднительно было-бы выработать и самую геометрическую конструкцию номограммы. Поэтому, приходится признать, что и номографические методы не дают пока простых решений задачи отыскания эмпирических зависимостей между 4-мя и большим числом переменных, если не считать конечно возможности раздельного сочетания связей между переменными, группируемыми по три, что в координатах прямолинейной связи исполнимо даже на одном чертеже.

Но приведенный пример отмечает иные возможности, а именно—возможность выработки в некоторых случаях приближенных формул. Так как полезный участок каждой из прямых прочерченного пучка ограничивается сравнительно узкими пределами (определяемыми промежутком между соседними грузами всей нагрузки), то и кривые, соединяющие одинаковые значения T имеют весьма малую полезную, (т. е. нужную для расчетов) длину (фиг. 13). А при этом вообще короткие участки отдельных кривых, без особого ущерба точности результата, могут быть заменены одной общей прямой XX' , размеченной значениями T . Пользование номограммой в таких условиях значительно упрощается: нет необходимости выбирать определенную прямую пучка, а стало быть и нет необходимости отыскивать значение n , так как пересечение прямой XX' прямою MP с достаточным приближением определяет отметкою на XX' искомую величину T . Путем такого упрощения и получена Soreau номограмма (фиг. 14), сопоставление которой с диаграммой Duplaix в декартовых координатах (часть последней воспроизведена в уменьшенном масштабе

на фиг. 15) подчеркивает сравнительную простоту первой. Вот эту-то упрощенную номограмму (фиг. 14) можно уже без особого труда вложить в аналитическую формулировку приближенной зависимости.

Попробуем это исполнить, не преследуя впрочем особой



Фиг. 14.

числовой точности, ввиду довольно грубого выполнения даваемой Soreau номограммы. Для составления приближенного у-рия послужат следующие формулы:

1) Основная номографическая зависимость:

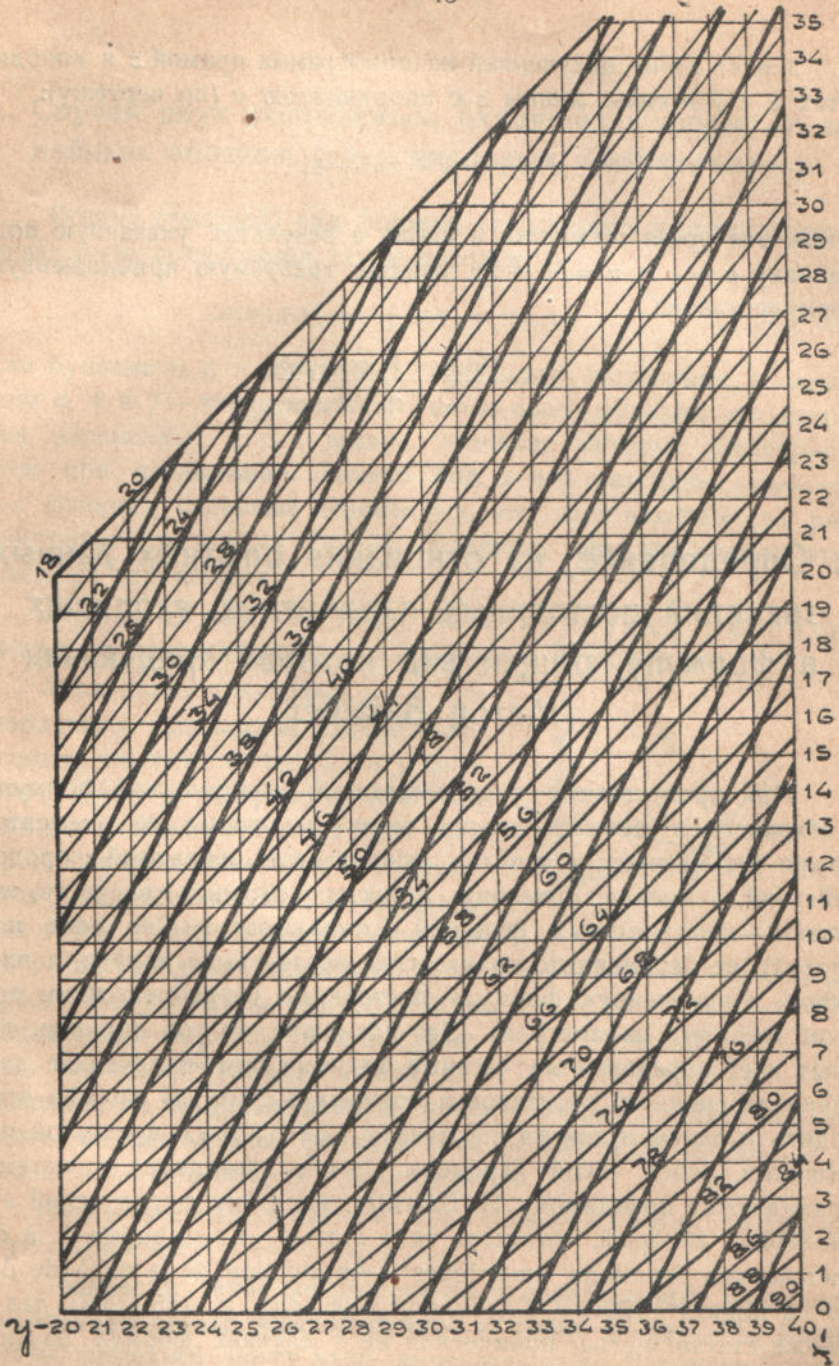
$$(C-x)u + (C+x)v = 2Cu,$$

отвечающая u и v имеющим положительное течение отсчетов вверх. При этом, по окончании вычисления придется заменить u через x и v через $80 - 2y$, где x и y имеют значение основных переменных задачи, а уже не вспомогательных координат, входящих в написанное основное у-рие. При измерении тою же единицею, $C = 13,5$.

2) У-рие связи между T и z , при течении положительных отсчетов z тоже вверх:

$$2,5z = 91 - T$$

Здесь 2,5 есть модуль масштаба для T (считая этот масштаб равномерным), а 91—отметка T , приходящаяся на начальной прямой $u = 0$ и $v = 0$ (т. е. $2y = 80$)



Фиг. 15.

3 и 4) Ур-ие полученной на номограмме прямой z в координатах x и y и связь длины z с координатою y (по чертежу):

$$z = 1.01 y = 6x + 41$$

Решая эти ур-ия совместно и вводя в результат указанную подстановку $u = x$ и $v = 80 - 2y$, найдем требуемую приближенную формулу такую:

$$T = \frac{191.2y - 214x - 700}{2y + x + 80}$$

5. Определение, на основании опытных данных, значений постоянных параметров, входящих в формулу, общий вид которой предугазан (Метод Batailler).

При предугазании вида ожидаемой эмпирической формулы с сохранением невыясненности лишь некоторых ее элементов можно весьма часто с успехом использовать обратный порядок действий, а именно: присвоить характер основных количеств, так сказать—координатных функций (откладываемых на осях или опорах), не переменным количествам исследуемой задачи, а входящим в намеченную формулу постоянным (приобретающим при этом характер параметров). Это возможно по той причине, что опыт дает определенные частные взаимно-соответствующие значения переменных, подстановка которых в формулу должна приводить к одним и тем-же величинам содержимых формулой постоянных. Идея такой перемены ролей, возводимая в систему, принадлежит повидимому Н. Batailler, капитану французской артиллерии, который, высказав ее в статье „Contribution à la recherche des fonctions empiriques“—Application de la méthode des points alignés“ (Revue d'Artillerie, 1906, dec., p. 185—203), дал в той-же статье метод применения ее в случаях формул различного вида. Фактически метод Баталье сводится к применению одного из двух следующих приемов (преимущественно первого):

А. Случай двух постоянных, входящих в формулу линейным образом (двух числовых коэффициентов).

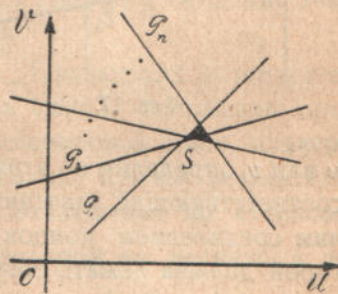
Общий (типовой) вид формул, относящихся к этому случаю, может быть представлен таким образом:

$$u \cdot \varphi(x, y) + v \cdot \psi(x, y) = f(x, y). \dots \dots \dots (21)$$

если буквами u и v обозначить некоторые постоянные, а символами φ , ψ и f — характеристиками каких-либо функций от основных переменных x и y задачи, значения которых регистрируются при наблюдении. Можно под x и y разуметь *определённые* функции основных переменных, что даёт возможность распространить метод на случай большего, чем два, числа этих основных переменных.

Применение метода в декартовых координатах (не затрагиваемое предложением Batailler).

Уговоримся трактовать u и v как координаты. Для всякой данной совокупности опытных значений x и y формула (21) даёт уравнение прямой P (фиг. 16). Если все отдельные прямые (для всех пар совокупных значений x и y) пересекутся в одной точке S , то координаты этой точки и дадут искомые величины u и v . Несовпадение отдельных точек пересечения укажет на непригодность предлагаемой формулы или, в случае лишь некоторой расплывчатости пересечения, на её приближённую применимость. Попутно можно судить, не пригодна ли формула хотя бы для части прямых, т. е. в некоторых пределах, и в каких именно.



Фиг. 16.

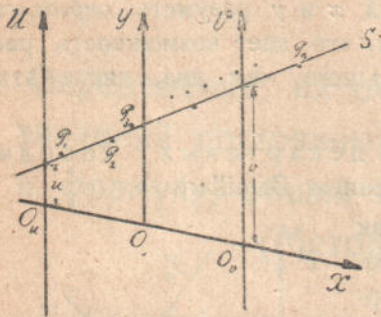
Применение метода в параллельных координатах (Batailler).

Производя такое же построение в параллельных координатах, получим вместо каждой прямой P точку P (фиг. 17). Координаты последней могут напр. вычисляться по формулам (уравнение 3 стр. 11):

$x = C \frac{B-A}{B+A}$ и $y = \frac{K}{B+A}$ (для случая $\uparrow\uparrow$), в которые вместо A , B и K надо подставлять соответствующие значения функций φ , ψ и f , так как основное ур-ие имеет вид не $Au + Bv = K$ (ур. 3), а $\varphi \cdot u + \psi \cdot v = f$; стало быть: (при замене обозначения координат x и y точек P обозначением X и Y , во избежание смешения с основными переменными x и y задачи, входящими в функции φ , ψ и f):

$$X = C \frac{\psi - \varphi}{\psi + \varphi} \text{ и } Y = \frac{f}{\psi + \varphi} \text{ (для случая } \uparrow\uparrow)$$

Задаваясь парами соответствующих значений основных переменных задачи x и y и вычисляя по ним φ , ψ и f , будем определять координаты X и Y отдельных точек P .



Фиг. 17.

Можно, и это пожалуй даже проще, построение точек P производить пользуясь непосредственно лишь ур-ием (21), которое при каждой данной паре частных значений переменных x и y принимает вид: $Au + Bv = K$ с постоянными количествами A , B и K . Задаваясь затем значением одного из количеств

u или v , определим по этому ур-ию другое и, откладывая найденные соответствующие значения u и v на параллельных опорах, получим соединением концов отложенных отрезков прямую, на которой должна лежать соответственная точка P . Вторая пара определяемых таким же образом значений u и v дает вторую прямую, проходящую через ту-же точку P и стало быть определяющую пересечением с первой прямой место точки P . В большом числе практических случаев удобно выбирать сначала $u=0$ и вычислять по ур-ию соответственное v , потом брать $v=0$ и вычислять отвечающее ему u . Откладывая эти значения u и v на опорах, останется лишь соединить свободный конец каждого из получаемых отрезков с начальной точкою отсчетов другой из опор (условно говоря, соединить накрест — если отложение, следуя знакам, приходится произвести в одну сторону от начальной прямой $O_u O_v$); пересечение двух прочерчиваемых прямых и дает искомую точку P (см. фиг. 1 на стр. 6 — отрезки p и q). Прием

этот несколько удобнее первого, ввиду его независимости от выбора того или другого случая течения отсчетов на опорах.

Если через все выстраиваемые тем или другим образом точки P можно будет с достаточным приближением провести прямую линию S , то последняя и даст на опорах U и V отрезки u и v , определяющие искомые значения постоянных, так как эти, все время одни и те-же, количества будут действительно удовлетворять каждой из точек P . Если-же провести через всю совокупность точек P прямую не удастся, то придется притти к заключению, что выбранная формула не может быть удовлетворена постоянными значениями u и v . Можно попутно судить о том, не приложима-ли формула хотя-бы в некоторых границах и в каких именно.

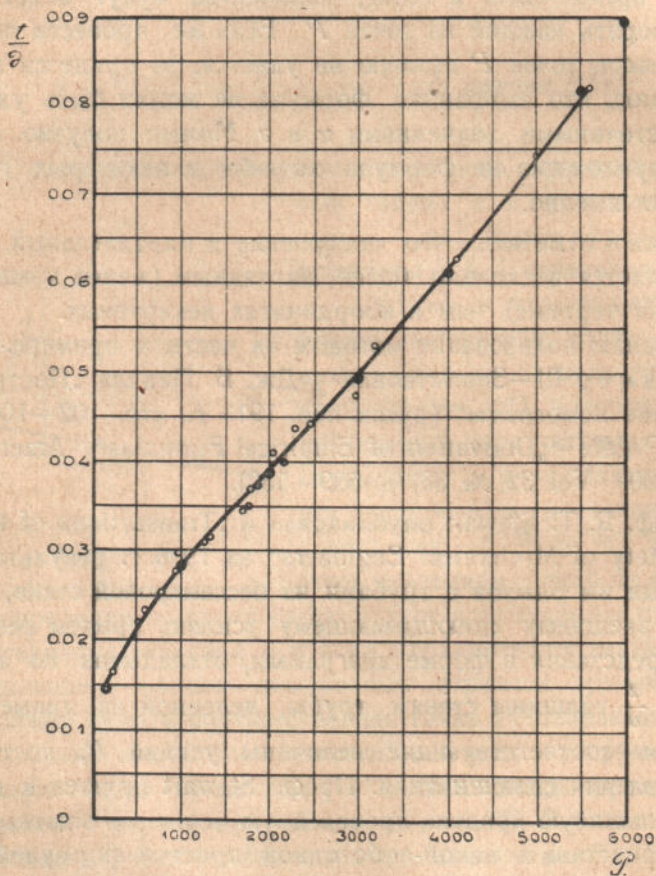
Можно отметить, что построение в параллельных координатах является несколько более наглядным (менее концентрированным на чертеже), чем в координатах декартовых.

Поясним пользование методом на частном примере.

Пример III—Заимствован у Дж. Б. Педдла „Построение и применение номограмм“ (русск. пер. 1913 г., стр. 102—104; также John B. Paddle — „Derivation of Empirical Formulas“—American Machinist, 1909, Vol 32, № 38, p. 529—530).

Проф. R. T. Stewart опубликовал в „Transactions of the American Society of Mechanical Engineers“ за 1906 г. результаты произведенных им опытов с трубами из бессемеровой стали, подвергаемыми внешнему сплющивающему усилию, причем результаты эти он представил в форме диаграммы, откладывая по абсциссам значения $\frac{t}{d}$ толщины стенки трубы, деленной на диаметр, а по ординатам—соответствующие величины усилий P , достаточных для проявления сплющивания. Проф. Stewart пришел к заключению, что плавную кривую, проведенную через все опытные точки, трудно представить какой-либо одной простой формулой; вследствие этого, он разделил всю кривую на две части и определил по формуле для каждой из этих частей. Это—очень обычное и вполне целесообразное средство, применяемое в тех случаях, когда экспериментальная кривая не поддается изображению ее в виде одной простой формулы. Проф. Paddle, цитируя данные Stewart'a, делает однако попытку воссоздать их в форме одного ур-ия. С этою целью он проводит на диаграмме (фиг. 18) одну плавную кривую и, оценивая ее с точки зрения аналитической формули-

ровки, рассуждает таким образом: „Проф. Stewart принял, что большая часть кривой есть линия прямая, с крутым изгибом в сторону начала координат при приближении к низшим значениям координат. Быть может, он был и прав в таком своем суждении — малое число наблюдений при высших значениях переменных делает направление кривой в этой области несколько неопределен-



Фиг. 18.

ным. В моей (Peddle'a) диаграмме я прочертил кривую с перегибом, чтобы дать ей возможность пройти ближе к наблюдаемым высшим значениям и получить при этом более близкое совпадение с действительными испытаниями. В нижней части кривой сплюсчивающие усилия, согласно с проф. Stewart'ом, показывают изменения по закону $\left(\frac{t}{\sigma}\right)^3$, т. е. $\frac{t}{\sigma}$ пропорционально корню ку-

бичному из давления сплющивания. Применительно к этому введем в наше ур-ие $\sqrt[3]{P}$ «. (Проф. Педдл обозначает здесь временно усилие P буквою x , что для нас является излишним). „Кривая, проведенная мной (Peddle'm), изменяет в некотором удалении от начала направление кривизны. Такой эффект может быть достигнут введением в ур-ие некоторой степени P в дополнение к корню. Степень будет иметь малое влияние на форму кривой при малых значениях P , где преобладающим окажется влияние корня, но по мере перехода к высшим значениям степень будет брать перевес над влиянием корня и вызовет желаемый нами перегиб. Высокую степень, очевидно, брать не приходится, так как изгиб вверх сравнительно мал, почему (ради легкости вычислений) испробуем вторую степень“.

Основываясь на таком рассуждении, проф. Peddle придает ур-ию форму.

$$\frac{t}{\sigma} = A\sqrt[3]{P} + BP^2$$

Чтобы завершить решение задачи останется лишь вычислить величины числовых коэффициентов A и B . Определение их исполним, пользуясь числовым материалом, приводимым проф. Педдлом в виде следующей таблички, в которой значения для давления P выражены в тысячах фунтов, т. е. численно уменьшены против диаграммы в 1000 раз.

$\frac{t}{\sigma}$	P	$\sqrt[3]{P}$	P^2
0,015	0,15	0,531	0,0225
0,0215	0,5	0,794	0,25
0,0284	1,0	1,0	1,0
0,0392	2,0	1,26	4,0
0,05	3,0	1,44	9,0
0,0616	4,0	1,59	16,0
0,074	5,0	1,71	25,0
0,0808	5,5	1,77	30,25

Заметим, попутно, вместе с Педдлом, что значения координат,

вносимые в эту табличку, можно было-бы брать непосредственно из числовых указаний опыта, что было-бы вполне логичным и наиболее правильным. Имея однако в виду воплотить в аналитическую формулу кривую, уже проведенную достаточно близко через всю совокупность опытных точек, можно эти значения координат брать с чертежа по кривой, что позволяет величины одной из координат выбирать произвольно, не придерживаясь непременно значений наблюдаемых, в частности—через равные промежутки. Составленная Педдлом табличка, которая помещена выше, дает значения, снятые с прочерченной им кривой.

Для определения постоянных коэффициентов A и B проф. Педдл пользуется только-что описанным приемом Баталье, причем вычисляет координаты точек P по формулам:

$$X = C \frac{\psi - \varphi}{\psi + \varphi} \quad \text{и} \quad Y = \frac{f}{\psi + \varphi},$$

которые в условиях данной задачи принимают вид:

$$X = C \frac{P^2 - \sqrt[3]{P}}{P^2 + \sqrt[3]{P}} \quad \text{и} \quad Y = \frac{t}{P^2 + \sqrt[3]{P}}.$$

Самое исполнение числовых подсчетов не представляет особых затруднений. Так, при первом из значений $P=0,15$:

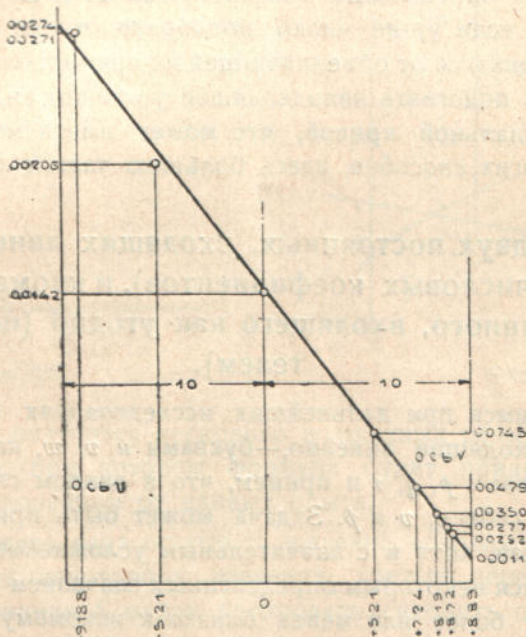
$$X = C \frac{0,0225 - 0,531}{0,0225 + 0,531} = C \frac{-0,5085}{0,5535} = -0,9188C \quad \text{и} \quad Y = \frac{0,015}{0,5535} = 0,0271$$

Путем таких вычислений получается табличка:

При $P=0,15$	$X = -0,9188C$	и $Y = 0,0271$
0,5	$-0,521C$	0,020 60
1,0	0	0,014 20
2,0	$0,521C$	0,007 45
3,0	$0,724C$	0,004 79
4,0	$0,819C$	0,003 50
5,0	$0,872C$	0,002 77
5,5	$0,889C$	0,002 52

По этим координатам построены последовательные точки в параллельных осях (фиг. 19), причем начальная прямая (база $O_u O_v$) диаграммы выбрана перпендикулярной к опорам (осям) и расстояние $2C$ между опорами взято равным (в некоторых масштабных единицах) 20-ти; след. $C=10$, и значения X ранее их отложения

надо умножать на это число. Значения U можно вообще откладывать в любом удобном масштабе,—таком, который дает возможность ясных отсчетов; но уже и измерение u и v придется исполнять тем-же масштабом. Получающиеся при построении точки, за исключением первых двух, выравниваются весьма удачно, что позволяет утверждать, что выбранная формула хороша. Проведенная через всю их совокупность прямая пересекает ось U в точке, отстоящей от начала отсчетов в расстоянии 0,0274, и ось



Фиг. 19.

V в точке с координатою 0,0011; эти числа и являются, стало быть, нужными нам значениями A и B . Подстановка найденных значений в принимаемую формулу придает ей такой вид:

$$\frac{t}{\partial} = 0,0274 \sqrt[3]{P} + 0,0011 P^2$$

в условиях измерения P , как это принято было при составлении первоначальной таблички, тысячами фунтов. Если P измерять фунтами, формула изменяется в такую:

$$\frac{t}{\partial} = 0,00274 \sqrt[3]{P} + 0,000\,000\,0011 P^2$$

Проф. Педдл вычислил по этой формуле значения $\frac{t}{\delta}$ для ряда значений P и результат отметил на первоначальной диаграмме (фиг. 18) двойными кружками. Самая кривая через эти двойные кружки не проведена, ввиду очень близкого совпадения их с первоначально прочерченной кривой. Эта близость расположения подтверждает успешность применения метода.

В заключение проф. Педдл замечает, что примененный метод графического определения коэффициентов A и B очень чувствителен и что, если ур-ие плохо подобрано, точки будут весьма заметно уклоняться от объединяющей их прямой; благодаря этому, возможность подогнать неподходящее ур-ие под видимое соответствие оригинальной кривой, что может иметь место при большинстве других способов, здесь большею частью исключена.

В. Случай двух постоянных, входящих линейным образом (двух числовых коэффициентов), и кроме того третьего постоянного, входящего как угодно (напр. показателем).

Уговоримся при дальнейших исследованиях обозначать постоянные, входящие линейно,—буквами u, v, w , как-угодно входящие—буквами p, q, r и примем, что в данном случае формула содержит в себе u, v и p . Задача может быть при этом сведена к предыдущей, хотя и с значительным усложнением.

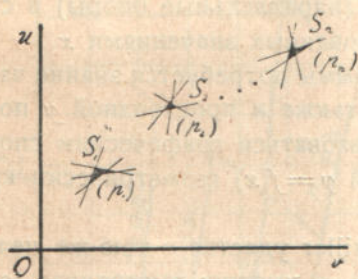
Зададимся некоторым определенным значением постоянного p , подходящим более или менее близко к искомому его значению. При этом получим ур-ие типа, относящегося к ранее разобранному, так сказать—первому, случаю, так как для отыскания останутся лишь коэффициенты u и v .

В декартовых координатах, как уже было разъяснено, требуется определить, насколько близко в одной общей точке S приходится точка пересечения прямых, отвечающих данным отдельных опытных измерений. Стало быть, придется, задаваясь некоторыми последовательными значениями p , попытаться установить, при каком из значений получается наиболее полное совпадение точек пересечения (фиг. 20).

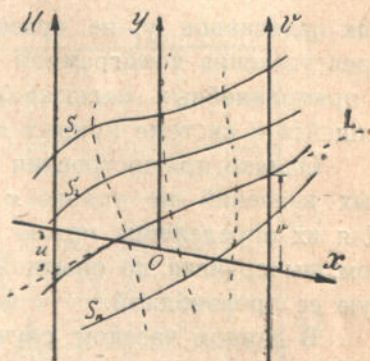
Та-же операция в параллельных координатах (Batailler) получается значительно более наглядною. Каждому выбранному значению p отвечает ряд точек P , определяющих собирающую их

линию S . Различным последовательным p соответствуют последовательные линии S . Среди этих линий, говоря вообще—кривых, надо подыскать такую, которая ближе всего подходит к прямой (может быть заменена прямой). Проводя такую возможно-совпадающую с линией S прямую L , и определим нужные нам значения u и v в виде отрезков на опорах U и V , причем p надо будет дать значение, отвечающее выбранной линии S (фиг. 21).

Может случиться, что несколько кривых S будут одновременно допускать замену их прямыми. В



Фиг. 20.



Фиг. 21.

таком случае получится несколько возможных решений. Наилучшим будет то, при котором формула будет приводить к наименьшим отклонениям от данных опыта.

Если каждая пара опытных значений основных переменных x и y отвечает некоторому значению третьей переменной z , то точки P на линиях S можно котировать (снабдить отметками величин z). Соединяя точки равных отметок на линиях S , получим дополнительную сеть линий z (на фиг. 21-й пунктир).

Для иллюстрации описанного метода воспользуемся примером, приводимым самим Batailler (из артиллерийской практики):

Пример IV. Требуется компенсировать обобщающей формулой значительное число экспериментальных точек, определенных с большою точностью и размещающихся на кривой непрерывного характера. Теория подсказывает форму описываемой зависимости такого рода:

$$y = K \frac{x^n}{(1 - px)^v},$$

и определению подлежат параметры A , p , u и v .

Первое, что попытаемся сделать, это—перевести два из перечисленных параметров в роль коэффициентов, что достигается непосредственно логарифмическим дифференцированием (логарифмированием ур-ия и последующим взятием производной от обеих его частей), приводящим, формулу к виду:

$$\frac{y'}{y} = \frac{u}{x} + \frac{vp}{1-px}$$

Так написанное ур-ие сразу-же указывает на возможность его представления номограммой прямолинейной связи, выстраиваемой в прямолинейных масштабах p и q (параллельные опоры) и сводящейся к системе кривых p , котируемых значениями x .

Однако, при построении номограммы потребуются знание частных значений не только x и y , а также и производной y по x . Для их определения можно воспользоваться графическим способом, вычерчивая по опытной кривой $y=f(x)$ геометрически кривую ее производной.

В данном частном случае Batailler удается с тою-же целью применить прием полуаналитический, а именно: выстраивая зависимость $y=f(x)$ по опытным значениям x и y , но в координатах не x и y , а x и $\text{Log } y$, он получает слабо-изогнутую линию, к которой подбирает компенсирующее ее ур-ие:

$$\text{Log } y = A + 1,32 \left(x - \frac{2}{3}\right) + 1,767 \left(x - \frac{2}{3}\right)^3$$

Логарифмическое дифференцирование этого ур-ия (при обозначении буквою M модуля Неперовых логарифмов) дает:

$$M \frac{y'}{y} = 1,32 + 5,301 \left(x - \frac{2}{3}\right)^2$$

или, по разделении на M ($= 0,43429$):

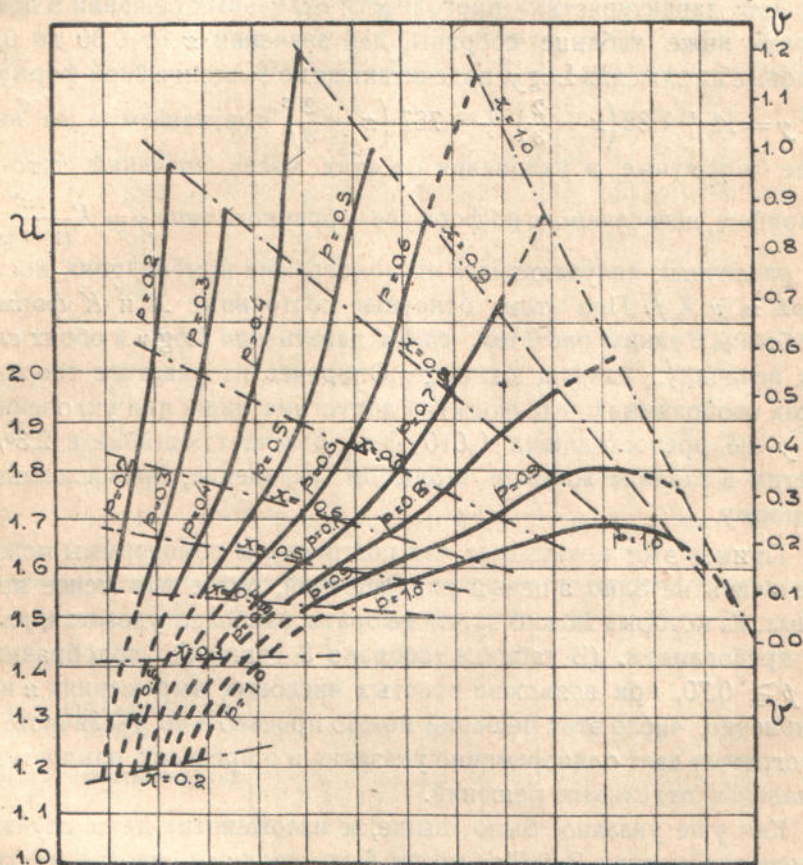
$$\frac{y'}{y} = 3,04 + 12,21 \left(x - \frac{2}{3}\right)^2$$

Пользуясь этим выражением, можно написать зависимость, подлежащую нанесению на номограмму, в таком виде:

$$3,04 + 12,21 \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 = u \frac{1}{x} + v \frac{p}{1-px}$$

Полученное ур-ие Batailler и изображает графически в параллельных координатах u и v (фиг. 22.) причем получает сеть кривых p ,

котированных по x . На основании изложенных выше соображений для возможности представления совокупности опытных числовых данных у-и-ем выбранного типа, необходимо и достаточно среди этой серии кривых иметь хотя-бы одну такую, которая с достаточным приближением может быть заменена прямою. Отсекаемые такую прямою отрезки на опорах определяют требуемые значения u и v , а отметка заменяемой кривой даст соответствующую величину p .



Фиг. 22.

При взгляде на номограмму (фиг. 22) можно заметить, что для исполняемой задачи может быть предложен целый ряд решений, несколько различных по точности, по пределам применимости

и по числовой простоте, между которыми практически можно делать выбор. Отметим два из них: первое—в виду простоты числовых выражений:

$$u = 1, v = 1 \text{ и } p = 0,77$$

и второе — в виду точности:

$$u = 1,15, v = 0,75 \text{ и } p = 0,82$$

Для характеристики пригодности отдельных решений в помещаемой ниже таблице собраны, для значений x от 0,30 до 0,90 числовые выражения $\text{Log } y$, подсчитанные по эмпирической формуле $\text{Log } y = A + 1,32 \left(x - \frac{2}{3}\right) + 1,767 \left(x - \frac{2}{3}\right)^3$, признаваемые за наиболее вероятные, и отклонения от этих чисел значений того-же

логарифма, исчисляемого по формуле избранного типа $y = K \frac{x^u}{(1 - px)^v}$

при различных получающихся по номограмме комбинациях постоянных u , v и p . При этом, основные постоянные A и K формул подобраны с таким расчетом, чтобы давать для $\text{Log } y$ в обоих случаях величину, равную единице. Опираясь на указание теоретических соображений, что формула допустима лишь при отклонениях $\text{Log } y$, не превосходящих 0,010 (что отвечает ошибке в 2,3%), отметим в таблице жирным шрифтом отклонение, превосходящие эту норму.

Пример этот показывает, что построением номограммы можно определить не одно, а целый ряд решений, более или менее пригодных, из которых можно затем выбрать наиболее удовлетворяющее требованиям. (В таблице собрано 8 решений, подобранных для $p \geq 0,70$, при возможно-простых числовых выражениях u и v ; но, конечно, число этих решений можно произвольно увеличивать). Номограмма дает одновременно указания и о пределах наилучшего совпадения отдельных решений.

Как уже указано было выше, к изложенным двум случаям применения метода Batailler могут быть сводимы многие другие, более сложные случаи. Такое сведение основывается на применении двух операций: 1) преобразование постоянных, входящих в выбранную формулу не в качестве коэффициентов,—в таковые коэффициенты, и 2) уменьшение общего числа входящих в формулу постоянных. Первая операция может осуществляться путем математических преобразований выбранной формулы, напр.—ее логарифмирования.

Значения x	По эмпирич. форм.	По теорет. формуле $\text{Log } y = \text{Log } K + u \text{Log } x - v \text{Log } (1 - px)$, при								
	$\text{Log } y = A +$									
	$+ 1,32 \left(x - \frac{2}{3}\right) +$ $+ 1,767 \left(x - \frac{2}{3}\right)^3$	$u=1,35$	1,33	1,25	1,22	1,15	1,10	1,00	1,00	
		$v=0,35$	0,33	0,50	0,61	0,75	1,10	1,25	1,00	
		$p=1,00$	1,02	0,92	0,85	0,82	0,70	0,68	0,77	
			Уклонения в тысячных долях:							
0,90	0,352	+ 29	+ 39	+ 9	- 9	- 2	- 10	- 13	0	
0,85	0,274	+ 12	+ 26	+ 4	- 6	0	- 4	- 5	+ 2	
0,80	0,202	+ 4	+ 5	+ 3	- 3	0	+ 3	- 1	+ 2	
0,75	0,133	+ 2	+ 1	+ 2	- 1	+ 1	+ 2	+ 1	+ 2	
0,70	0,066	+ 1	+ 1	0	- 1	+ 2	+ 2	+ 1	+ 1	
0,65	0,000	0	0	0	0	0	0	0	0	
0,60	$\bar{1},933$	- 1	+ 1	- 1	0	0	- 1	0	0	
0,55	$\bar{1},865$	- 2	0	- 1	0	- 1	- 3	0	0	
0,50	$\bar{1},793$	- 1	+ 2	+ 1	+ 2	0	- 3	+ 2	+ 3	
0,45	$\bar{1},717$	- 2	+ 2	+ 1	+ 2	+ 1	- 3	+ 5	+ 7	
0,40	$\bar{1},635$	- 1	+ 3	+ 3	+ 4	+ 3	0	+ 11	+ 13	
0,35	$\bar{1},546$	- 3	+ 3	+ 4	+ 7	+ 6	+ 3	+ 17	+ 20	
0,30	$\bar{1},449$	- 8	+ 1	+ 3	+ 7	+ 8	+ 4	+ 23	+ 28	
Сумма уклонений		66	84	32	42	24	38	79	78	
Среднее уклонение		5,1	6,5	2,5	3,2	1,8	2,9	6,1	6,0	
Число приемлемых значений (из 13-ти):		11	11	13	13	13	13	9	10	
Среднее уклонение этих значений		2,3	1,7	2,5	3,2	1,8	2,9	1,7	1,7	

рифмированием: вторая—введением в исследование вспомогательных функций от основных переменных, частные значения каких функций возможно определить по результатам опытных измерений. Остановимся детальнее на этих двух категориях вспомогательных действий.

а. Применение математических преобразований для приведения постоянных формулы к виду коэффициентов.

Наиболее часто-применимым с этой целью является метод логарифмирования — по крайней мере в тех случаях, когда в основную формулу постоянные входят в качестве показателей степени или корня. Такого рода преобразование применено было между прочим в только-что рассмотренном примере. Приведем для пояснения еще один такой-же случай:

Положим, что выбранная формула имеет вид $y = \frac{(1+x)^u}{(1-x)^v}$.

Логарифмируя обе части равенства, получим сразу-же $\text{Log } y = u \text{Log } (1+x) - v \text{Log } (1-x)$, т. е. типовую форму, относящуюся к случаю первоначальному, для которого способ дальнейших действий уже указан.

Могут, конечно, иметь место и некоторые иные способы математических преобразований, напр. переход к функциям, обратным данным. Так, если основное ур-ие дано в виде $y = \text{Sin } (ax + b)$, его можно тотчас-же привести к форме $ax + b = \arcsin y$, т. е. тоже к основному 1-му случаю (А). Так-же $(ax + b)^y = c$ непосредственно преобразуется в $(ax + b) = \sqrt[y]{c}$, причем отыскание постоянных придется исполнить по способу 2-му (В), задаваясь частными значениями c . Трудно предугадать все способы возможных преобразований этого рода, но едва-ли в том встречается и надобность, в виду того, что соответствующие решения напрашиваются почти-что сами-собой. Как нетрудно видеть, способ этот распространяет приведенные выше 2 способа на формулы, содержащие свыше трех постоянных.

б. Введение вспомогательных функций основных переменных с целью исключения некоторых из постоянных, т. е. уменьшения общего их числа.

Вводимые вспомогательные функции могут быть различного рода. Так, в качестве общего метода, имеющего значительный круг применений, Batailler рекомендует пользование производными, т. е. применение дифференцирования. Познакомимся с таким приемом.

Введение производных функций 1-го порядка.

Сущность приема заключается в следующем: имея основную формулу в виде некоторого ур-ия, содержащего две переменные x и y , и взяв от обеих его частей производные, напр. по x , получим в дополнение к данному еще другое ур-ие. Оба ур-ия — первоначальное и вновь составленное — будут содержать вообще одни и те-же постоянные, а потому из двух ур-ий можно будет какое-либо из постоянных совместным решением исключить, чем общее число постоянных на одно уменьшится. Однако, зато в окончательную формулу войдет величина производной одного из переменных по другому, напр. y'_x . Необходимо, стало быть, уметь находить ее частные значения, отвечающие данным опытным величинам x и y . Достигнуть этого можно графическим изображением опытной зависимости между x и y — в виде некоторой кривой, соединяющей точки с абсциссами и ординатами, равными одне x -м, другие соответствующим y -м, и графическим-же построением после того производной от переменного, откладываемого по ординатам, по аргументу, принимаемому за абсциссы (Напр., если первый график дает кривую для y в зависимости от x , второй даст кривую зависимости y'_x от x -же). Построенная таким образом вторая кривая и даст возможность графически определять частные значения производной для частных значений аргумента.

Приведем сразу-же небольшой пример для пояснения сказанного:

Пусть, основное ур-ие имеет форму: $uX_1 + vX_2 + wX_3 = V$, в которой символами X_1 , X_2 и X_3 обозначены некоторые определенные функции переменного x , буквою V — определенная функция переменного y и буквами u , v и w постоянные коэффициенты. Взяв от обеих частей ур-ия производные по x , напишем:

$$uX'_1 + vX'_2 + wX'_3 = V'_x$$

Чтобы из двух ур-ий исключить постоянное w , умножим 1-ое ур-ие на X'_3 , второе на X_3 и вычтем их затем одно из другого; так найдем:

$$u(X_1X'_3 - X_3X'_1) + v(X_2X'_3 - X_3X'_2) = (VX'_3 - X_3V'_x)$$

Получается, как видим, тип формулы, относящейся к 1-му случаю.

Для определения значений количеств в скобках при частных опытных значениях x и y придется взять аналитически производ-

ные по x от известных функций X_1, X_2, X_3 и кроме того графически построить зависимость функции Y от переменной x и по ней графически-же определить кривую для Y'_x в зависимости от x , которая и даст частные значения Y'_x при введенных в опыт частных значениях x .

Чтобы наконец определить значения u и v , останется воспользоваться способом, отнесенным выше к случаю 1-му (лит. А), а именно: взяв какую-либо пару опытных значений x и y , определим соответствующие значения количеств в скобках, которые для краткости обозначим символами $()_1, ()_2$ и $()$, и затем выстроим в параллельных координатах точку P , изображающую линейную зависимость $()_1 u + ()_2 v = ()$. Построим таким образом точки P для всех пар опытных значений x и y (фиг. 17, стр. 46). Если через все построенные точки P удастся провести прямую, то отсекаемые ею отрезки на опорах и определяют значения постоянных u и v . Останется в заключение вычислить значение w из равенства $w = \frac{Y - uX_1 - vX_2}{X_3}$; при этом, для различных пар опытных значений x и y получатся вероятно несколько разнящиеся между собой величины для w и за окончательное значение последнего придется принять некоторое среднее из всех величин, напр. среднее арифметическое.

Для упрощения математических выкладок при совместном решении ур-ий, а также в виду необходимости получить в окончательной формуле постоянные в виде коэффициентов, иногда полезно заранее преобразовать первоначальное ур-ие, чаще всего — логарифмированием. Так, если формула имеет вид $Y^w = X_1^u \cdot X_2^v$, то логарифмированием она приводится к форме: $w \text{ Log } Y = u \text{ Log } X_1 + v \text{ Log } X_2$, с которой и придется оперировать как только-что было указано (т. е. брать производную и исключать одно из постоянных).

В некоторых случаях необходимость совместного решения двух ур-ий отпадает сама собой, вследствие того, что при взятии производной одно из постоянных автоматически выпадает (если оно входит в форме дробка). Так напр., ур-ие $Y = AX_1^u \cdot X_2^v$, приводимое логарифмированием в виду $\text{Log } Y = \text{Log } A + u \text{ Log } X_1 + v \text{ Log } X_2$, обращается после взятия производной непосредственно в ур-ие $\frac{Y'}{Y} = u \frac{X_1'}{X_1} + v \frac{X_2'}{X_2}$, содержащее всего два постоянных u и v (См. также приведенный выше пример).

Описанный метод имеет один существенный недостаток, это — неточность графического построения кривой для производной по кривой для первообразной функции, особенно — если определенные опытом точки располагаются относительно редко, так что кривая в промежутках между ними может иметь различное начертание и кривизну, что и делает затруднительным сколько-нибудь точное определение касательных в этих точках к кривой. К тому же, на результате чувствительно отражаются неточности опытного определения отдельных значений основных переменных. В отдельных случаях, однако, построение может получаться достаточно надежным.

В приведенном выше примере Batailler обходит необходимость графического определения производных, предлагая способ частично-аналитического характера, иногда действительно приводящий к желаемым результатам (если удастся подыскать аналитическую формулу, хотя-бы сложного вида, для выражения совокупности опытных данных); способ этот достаточно разъяснен в упомянутом примере, почему здесь можно ограничиться лишь этою краткою ссылкой.

Введение производных 1-го и 2-го порядков.

Batailler идет и еще дальше, пользуясь вторичным дифференцированием, точнее — введением и второй производной, т. е. присоединением к основному ур-ию двух добавочных, а потому и исключением двух постоянных из общего числа последних. При этом, кроме кривой для первой производной приходится выстраивать по ней кривую для второй производной, точность получения которой может подвергаться еще бóльшим сомнениям.

Приведем несколько типовых примеров и для этого более сложного случая, заимствуя их у самого Batailler.

1) Основное ур-ие имеет вид

$$Y = ux^p + vx^q,$$

где Y есть некоторая определенная функция y , а u , v , p и q — постоянные.

Вторая часть ур-ия имеет уже вид суммы, а потому логарифмирование здесь непригодно. Чтобы исключить два из четырех постоянных, составим два дополнительных ур-ия, дифференцируя данное два раза по x .

Получим систему трех ур-ий:

$$\begin{array}{ll}
 Y = ux^p + vx^q & \text{или:} \quad Y = ux^p + vx^q \\
 Y_x' = upx^{p-1} + vqx^{q-1} & Y_x' = upx^{p-1} + vqx^{q-1} \\
 Y_{x^2}'' = u(p-1)x^{p-2} + & Y_{x^2}'' = u(p-1)x^{p-2} + \\
 + vq(q-1)x^{q-2} & + vq(q-1)x^{q-2}
 \end{array}$$

Чтобы исключить часть параметров, умножим 2-ое ур-ие на ξ , 3-ье на η и оба их вычтем из 1-го:

$$\begin{aligned}
 Y - \xi x Y' - \eta x^2 Y'' &= ux^p [1 - \xi p - \eta p(p-1)] - \\
 &- vx^q [1 - \xi q - \eta q(q-1)]
 \end{aligned}$$

Введя две величины ξ и η , можно подчинить их и двум условиям, произвольно выбираем. Выберем эти два дополнительных условия такими, чтобы оба выражения в скобках в правой части равенства обратить в нуль; при этом, вся правая часть, а с нею и левая, также обратятся в нуль. Стало быть, получим:

$$1 - p\xi - p(p-1)\eta = 0 \quad \text{и} \quad 1 - q\xi - q(q-1)\eta = 0$$

или, что то-же:

$$p\xi + p(p-1)\eta = 1 \quad \text{и} \quad q\xi + q(q-1)\eta = 1$$

и при этом одновременно:

$$Y - xY'\xi - x^2Y''\eta = 0, \quad \text{т. е.} \quad xY'\xi + x^2Y''\eta = Y$$

Тот-же результат несколько скорее получается помощью теории определителей. Записав совокупность трех основных ур-ий в форме:

$$\begin{vmatrix}
 Y & ux^p & vx^q \\
 Y' & upx^{p-1} & vqx^{q-1} \\
 Y'' & u(p-1)x^{p-2} & vq(q-1)x^{q-2}
 \end{vmatrix} = 0,$$

разделим 2-й столбец определителя на ux^p и 3-ий на vx^q

$$\begin{vmatrix}
 Y & 1 & 1 \\
 Y' & px^{p-1} & qx^{q-1} \\
 Y'' & p(p-1)x^{p-2} & q(q-1)x^{q-2}
 \end{vmatrix} = 0$$

и умножим затем 2-ую строку на x и 3-ю на x^2

$$\begin{vmatrix}
 Y & 1 & 1 \\
 xY' & p & q \\
 x^2Y'' & p(p-1) & q(q-1)
 \end{vmatrix} = 0$$

Приняв после того элементы всех 3-х столбцов определителя за коэффициенты 3-х ур-ий, напишем:

$$\begin{cases} Y = xY'\xi + x^2Y''\eta \\ 1 = p\xi + p(p-1)\eta \\ 1 = q\xi + q(q-1)\eta \end{cases}$$

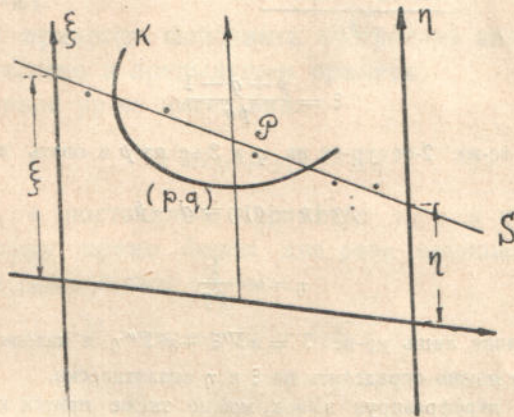
т. е. те-же полученные выше 3 ур-ия.

Как-же теперь эти ур-ия перенести в параллельныя координаты?

При каждом опытном значении x и отвечающем ему значении y ур-ие

$$Y = xY'\xi + x^2Y''\eta,$$

линейное относительно координат ξ и η , изобразится точкой P ; при этом, конечно, потребуется уметь вычислить значения $Y_{x'}$ и Y_{x^2} , отвечающие заданным значениям x и y ($Y_{x'} = Y_{y'} \cdot y_{x'}$; $Y_{x^2} = Y_{y^2} (y_{x'})^2 + Y_{y'} y_{x^2}$), чего можно достигнуть построением графиков для $y_{x'}$ и y_{x^2} . Если точки P , отвечающие всем опыт-



Фиг. 23.

ным значениям x , окажется возможным объединить с достаточным приближением одной прямой S , то количества ξ и η существуют как постоянные (фиг. 23). Строим после того в тех-же параллельных координатах два остальных ур-ия

$$p\xi + p(p-1)\eta = 1 \quad \text{и} \quad q\xi + q(q-1)\eta = 1$$

по точкам, задаваясь частными значениями p и, что то-же, q , даю-

щими ξ и η близкими к найденным. При этом получится кривая 2-го порядка K (так как ур-ия 2-й степени), общая для обеих ур-ий. Кривая эта дает две точки пересечения с прямой S , которым отвечают те-же значения ξ и η , какие получены с помощью 1-го из ур-ий. Стало быть, эти две точки и будут решениями 3-х составленных совокупных ур-ий. Замечая значения p и q для этих двух точек, получим искомые величины постоянных для заданного ур-ия. (Если-бы для обеих величин p и q принять одно и то-же значение, что принципиально возможно, то основная формула не получилась-бы желаемого вида).

Вместо построения 3-х ур-ий

$$\begin{cases} V = xV'\xi + x^2V''\eta \\ 1 = p\xi + p(p-1)\eta \\ 1 = q\xi + q(q-1)\eta \end{cases}$$

можно из двух последних ур-ий определить аналитически (их совместным решением) ξ и η . Умножая с этою целью 2-ое ур-ие на $q(q-1)$ и 3-ье на $p(p-1)$ и почленно вычитая их одно из другого, получим:

$$pq \underbrace{[(q-1)\xi - (p-1)\eta]}_{(q-p)\xi} = (q^2 - p^2) - (q-p)$$

и след.

$$\xi = \frac{p+q-1}{pq}$$

Затем, умножая те-же 2-ое ур-ие на q и 3-ье на p и опять почленно вычитая, найдем:

$$pq(p-q)\eta = q-p,$$

т. е.

$$\eta = -\frac{1}{pq}$$

Поэтому, выстраивая лишь ур-ие $V = xV'\xi + x^2V''\eta$ и находя по нему ξ и η , после того p и q можно определить по ξ и η аналитически.

Несколько перефразируя вывод, можно также прийти к заключению, что ξ и η определяются по двум корням квадратного ур-ия:

$$p^2\eta + p(\xi - \eta) - 1 = 0$$

После определения p и q не представит особого труда найти значения для u и v .

Ниже приведен будет конкретный пример, иллюстрирующий практическое применение только-что описанного метода.

2) Основное ур-ие дано в виде:

$$Y = ue^{px} + ve^{qx}$$

Опять 2-я часть ур-ия имеет вид суммы; поэтому, не логарифмируя, берем два раза производную по x . Получим систему 3-х ур-ий:

$$\begin{cases} Y = ue^{px} + ve^{qx} \\ Y' = up^2e^{px} + vqe^{qx} \\ Y'' = up^3e^{px} + vq^2e^{qx} \end{cases}$$

Умножая затем 2-ое уравнение на ξ и 3-ье на η и вычитая оба эти ур-ия из 1-го, напишем:

$$Y - Y'\xi - Y''\eta = ue^{px}(1 - p\xi - p^2\eta) + ve^{qx}(1 - q\xi - q^2\eta)$$

Введя две новых величины ξ и η , поставим для их определения и два дополнительных условия:

$$1 - p\xi - p^2\eta = 0 \quad \text{и} \quad 1 - q\xi - q^2\eta = 0$$

причем и

$$Y - Y'\xi - Y''\eta = 0$$

(Можно тот-же вывод получить и посредством определителя, как и в случае 1-м).

Дальше придется выполнить построение аналогично с тем, как было выяснено в предыдущем примере.

3) Основное ур-ие имеет вид:

$$Y = u + v(x - a)^p$$

Опять здесь 4 постоянных параметра u , v , a и p и опять вид суммы. Поэтому прямо берем два раза производную, приводя задачу к 3-м совокупным ур-м:

$$\begin{aligned} Y &= u + v(x - a)^p \\ Y' &= vp(x - a)^{p-1} \\ Y'' &= vp(p-1)(x - a)^{p-2} \end{aligned}$$

В данном случае исключение двух из числа постоянных можно провести различно, напр.:

Один способ: Взяв непосредственно отношение Y' к Y'' , исключим этим v , а u в этих ур-х уже исключено. Таким образом получим:

$$\frac{Y'}{Y''} = \frac{x-a}{p-1}, \quad \text{т.е.} \quad x-a = (p-1) \frac{Y'}{Y''}$$

или:

$$a + \frac{Y'}{Y''} p = x + \frac{Y'}{Y''}$$

Выстраивая это ур-ие в параллельных координатах a и p и проводя через систему выстраиваемых точек прямую, отрезем ее на опорах (осях) искомые значения для a и p . После того, простым построением формулы $Y = u + v(x-a)^p$ в координатах u и v определим значения последних.

Другой способ: Можно исключить из ур-ий постоянные v и a , напр. так:

$$\begin{aligned} Y Y''' &= u Y'' + v(x-a)^p \cdot Y'' = u Y'' + v^2 p(p-1)(x-a)^{2p-2} Y'' = \\ &= u Y'' + \frac{[v p(x-1)^{p-1}]^2}{p} (p-1) Y'' = u Y'' + \frac{p-1}{p} Y'^2 Y'' \end{aligned}$$

След.: $Y Y''' = Y'' u + Y'^2 Y'' - \frac{Y'^2 Y''}{p}$

или: $(Y'^2 - Y) Y''' p + Y'' u = Y'^2 Y''$

Построение этого ур-ия в параллельных координатах p и u определит значения этих постоянных (Можно строить и прямо ур-ие

$$Y Y'' = u Y'' + \frac{p-1}{p} Y'^2 Y''$$

в координатах u и $\frac{p-1}{p}$).

Зная u и p , найдем v и a построением ур-ия:

$$(Y-u)^{1/p} = \sqrt[p]{v} \cdot x - a \sqrt[p]{v} = \xi x - \eta$$

4) Основное ур-ие имеет вид:

$$Y = u \left(\frac{a+x}{b+x} \right)^p$$

Ур-ие, заданное в таком виде, удобнее предварительно логарифмировать:

$$\text{Log } Y = \text{Log } u + p \text{Log } (a+x) + p \text{Log } (b+x)$$

и после того уже два раза дифференцировать:

$$\frac{Y'}{pY} = \frac{1}{a+x} - \frac{1}{b+x} \quad (\text{Модуль логарифмов сокращается})$$

$$\frac{Y Y'' - Y'^2}{p Y^2} = - \frac{1}{(a+x)^2} + \frac{1}{(b+x)^2}$$

Из двух полученных ур-ий исключим p . Для этого разделим 2-ое ур-ие на 1-ое, заметив предварительно, что правая часть 2-го ур-ия представляет собою разность квадратов количеств, разность первых степеней которых составляет правую часть 1-го ур-ия. След.

$$\frac{1}{a+x} + \frac{1}{b+x} = \frac{y'^2 - y y''}{y y'} = \text{обозначим } Q$$

Отсюда:

$$a + b + 2x = Q[ab + (a + b)x + x^2],$$

т. е.

$$-Q.ab + (1 - xQ)(a + b) + x(2 - xQ) = 0$$

Это ур-ие можно строить непосредственно в координатах ab и $(a + b)$ и затем, найдя значение произведения и суммы, вычислить отдельно a и b . Или-же можно заранее ввести обозначения:

$$-ab = \xi, \quad a + b = \eta$$

Множа 2-ое равенство сначала на a и затем на b и оба раза складывая с 1-м, найдем:

$$\xi + a\eta + a^2 = 0, \quad \xi + b\eta + b^2 = 0.$$

и кроме того, после подстановки ξ и η в общее ур-ие, перепишем его таким образом:

$$Q\xi + (1 - xQ)\eta + x(2 - xQ) = 0$$

К составленным трем ур-м применим метод построения, подобный тому, каким мы пользовались при решении предыдущих примеров, причем определим количества a и b . Зная a и b и вводя для краткости обозначение $\frac{a+x}{b+x} = X$, перепишем данное нам основное ур-ие так: $Y = uX^p$, т. е. $\text{Log } Y = \text{Log } u + p \text{Log } X$. Построение этой последней формулы в параллельных координатах дает значения $\text{Log } u$ и p .

Ограничиваясь этими (приводимыми Batailler) типовыми образчиками решений, поместим здесь обещанную более конкретную иллюстрацию практического применения метода, заимствуя ее из книги проф. Педдла: „Построение и применение номограмм“ (1913, стр. 108—117; также: „J. B. Peddle—„The Derivation of Empirical Formulas“—American Machinist, 1909, Vol 32, № 38, p. 531—533).

Пример V. На прилагаемой диаграмме (фиг. 24) воспроизведена кривая истечения воздуха через отверстие в тонкой

стенке по опытам Hirn'a, помещенная на таблице IV-й мемуара A. Rateau—„Recherches expérimentales sur l'écoulement de la vapeur d'eau par des tuyères et des orifices etc.“, Paris, 1902, 69 p. + IV pl. (Extrait des „Annales des Mines“, Janvier, 1902). По абсциссам диаграммы отложены величины отношений конечного давления p к начальному P в пределах от 1 до 0,4; цифровку эту, однако, Педдл для упрощения рассуждений заменяет отметками дополнительными до 1, т. е. на местах делений 1; 0,9; 0,8; 0,7, и т. д. ставит 0; 0,1; 0,2; 0,3, и т. д.; по ординатам отложены отношения наблюдаемого расхода к максимальному. Обозначая эти абсциссы буквою x и ординаты буквою y , попытаемся представить результаты опытов Hirn'a ур-м:

$$y = ix^p + vy^q,$$

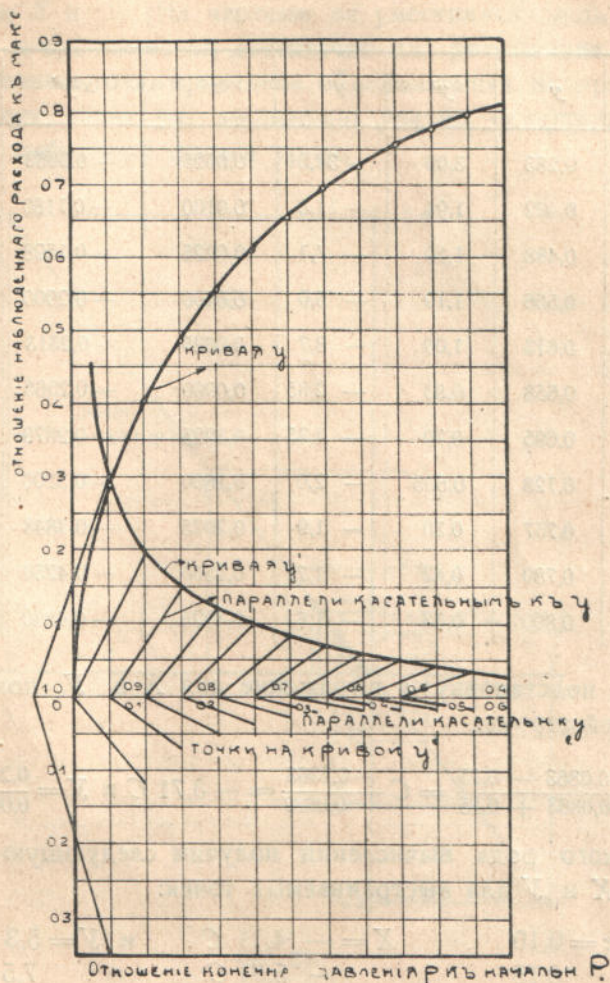
в котором подлежат определению числовые величины постоянных i , v , p и q .

Ур-ие написанного типа было нами изучено в разделе В последней главы (стр. 61—64), причем для построения на номограмме были получены 3—ур-ия:

$$\begin{cases} xy' \xi + x^2 y'' \eta = y \\ p \xi + p(p-1) \eta = 1 \\ q \xi + q(q-1) \eta = 1 \end{cases}$$

(Здесь лишь соответственно условиям задания большая буква U заменена малой y). Не повторяя приведенных уже выше рассуждений, напомним лишь, что для построения первого из ур-ий необходимо иметь ряд частных значений 1-ой и 2-ой производной y по x , для чего надлежит графически по кривой y построить кривые y' и y'' . Операция эта выполнена на диаграмме (фиг. 24) по общеизвестному способу, причем проведение линий, параллельных отдельным касательным, исполнено непосредственно у тех мест, где должны размещаться определяемые последовательные ординаты. Кривая для y'' не вычерчена сплошной линией, так как для расчета достаточно знание отдельных ее точек. Полюсное расстояние при построении выбрано, ради удобства расположения чертежа, равным не 1, а $1/10$, почему отсчеты по кривой y' необходимо ранее введения в формулы умножить на 10, а отсчеты по кривой y'' —умножить на 100 (так как для построения этой кривой масштаб $1/10$ применяется дважды).

Имея значения y , y' и y'' при ряде последовательных, входивших в границы опыта, значений x , определим, для построения 1-го из написанных выше у-ий в параллельных координатах



Фиг. 24.

тах, координаты последовательных точек, по отношению к вспомогательным декартовым осям, пользуясь известными уже нам выражениями (см. стр. 46).

$$X = C \frac{\psi - \varphi}{\psi + \varphi} \text{ и } Y = \frac{f}{\psi + \varphi},$$

которые в условиях задачи принимают вид:

$$X = C \frac{x^2 y'' - xy'}{x^2 y'' + xy'} \quad \text{и} \quad Y = \frac{y}{x^2 y'' + xy'}$$

Необходимые для вычисления числа собраны в следующей таблице:

x	y	y'	y''	x^2	$x^2 y''$	xy'
0,05	0,283	3,00	-34,5	0,0025	-0,0863	0,150
0,10	0,402	1,94	-11,8	0,0100	-0,1180	0,194
0,15	0,488	1,50	-7,1	0,0225	-0,1598	0,225
0,20	0,556	1,19	-5,0	0,0400	-0,2000	0,238
0,25	0,613	1,00	-3,7	0,0625	-0,2313	0,250
0,30	0,658	0,83	-2,85	0,0900	-0,2565	0,249
0,35	0,695	0,70	-2,35	0,1225	-0,2879	0,245
0,40	0,728	0,605	-2,0	0,1600	-0,3200	0,242
0,45	0,757	0,50	-1,9	0,2025	-0,3848	0,225
0,50	0,780	0,42	-1,7	0,2500	-0,4250	0,210
0,55	0,800	0,33	-1,6	0,3025	-0,4840	0,1815

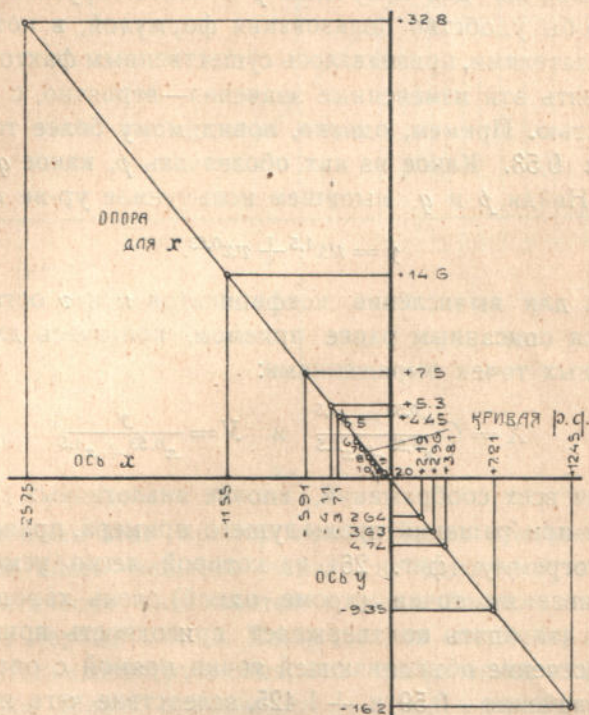
Исполняя подстановку в выражение для X и Y , получим для данных 1-ой строки:

$$X = C \frac{-0,0863 - 0,15}{-0,0863 + 0,15} = C \frac{-0,2363}{0,0637} = -3,71 C \quad \text{и} \quad Y = \frac{0,283}{0,0637} = 4,45.$$

Путем такого рода вычислений получим следующую табличку значений X и Y для выстраиваемых точек:

при $x = 0,10$	$X = -4,11 C$	и $Y = 5,3$
0,15	- 5,91 C	7,5
0,20	- 11,55 C	14,62
0,25	- 25,75 C	32,8
0,30	67,50 C	- 87,8
0,35	12,45 C	- 16,2
0,40	7,21 C	- 9,35
0,45	3,81 C	- 4,74
0,50	2,96 C	- 3,63
0,55	2,19 C	- 2,64

По этим координатам построен ряд точек на особой диаграмме (фиг. 25), на которой сами параллельные опоры опущены, так как построение точек произведено по координатам относящим точки к осям X и Y (На чертеже не уместилась лишь точка с $X=0,30$, но и прочих точек достаточно для разрешения задачи). Через полученные точки проведена объединяющая их прямая, которая проходит через них достаточно удачно, свидетельствуя о пригодности выбранной формы ур-ия.



Фиг. 25.

Затем надлежит построить 2-ю и 3-ю из числа написанных выше 3-х ур-ий. Ур-ия эти по форме идентичны и потому выражаются одною и тою-же кривою. Вид ур-ия:

$$p\xi + p(p-1)\eta = 1.$$

Стало быть, координаты выстраиваемых точек в отношении осей X и Y должны вычисляться по формулам:

$$X = C \frac{p(p-1) - p}{p(p-1) + p} = C \left(1 - \frac{2}{p} \right) \quad \text{и} \quad Y = \frac{1}{p(p-1) + p} = \frac{1}{p^2}.$$

В эти выражения были подставлены значения $p = 0,5, 0,6, 0,7, 0,8, 0,9, 1, 1,5$ и 2 , и соответствующие точки нанесены на фиг. 25. Хотя полученная при этом кривая ложится весьма близко к началу координат и вызывает желание исполнить построение в несколько большем масштабе; однако, и по ней можно определить, что точка ее пересечения с выстроенной ранее соединительной прямой (опорой для x) отвечают $p = 1,5$ и p между $0,5$ и $0,6$; примем $1,53$ (Весьма незначительное смещение опоры для x достаточно было-бы для получения p в более круглых числах $0,5$ и 2 , и если-бы удобство пользования формулой, в которую p и q входят показателями, признавалось существенным фактором, можно было-бы взять эти измененные значения—вероятно, с чуть меньшей точностью. Примем, однако, повидимому более точные значения $1,5$ и $0,53$. Какое из них обозначить p , какое q , пока безразлично). Найдя p и q , выпишем испытуемое ур-ие в виде:

$$y = ux^{1,5} + vx^{0,53}.$$

После того, для вычисления коэффициентов u и v останется воспользоваться описанным ранее приемом, пользуясь для построения отдельных точек выражениями:

$$X = C \frac{x^{0,53} - x^{1,5}}{x^{0,53} + x^{1,5}} \quad \text{и} \quad Y = \frac{y}{x^{0,53} + x^{1,5}}$$

Не повторяя всех соображений, вполне аналогичных с ранее высказанными при решении предыдущего примера, приводим лишь самую номограмму (фиг. 26), из которой легко усмотреть, что все выстраиваемые точки (кроме одной) очень хорошо ложатся на прямую, что опять подтверждает пригодность принятой формулы. Пересечение объединяющей точки прямой с опорами дает для u и v значения $-0,59$ и $+1,425$, вследствие чего исследуемое ур-ие получает вид:

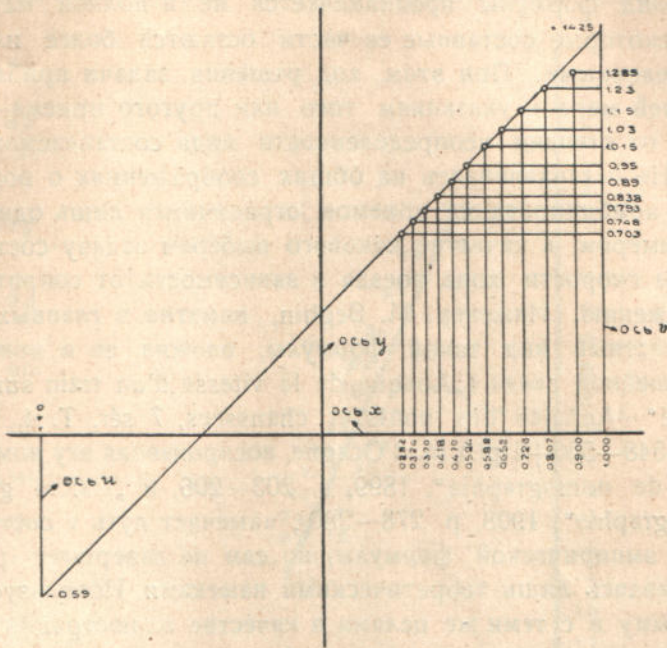
$$y = -0,59x^{1,5} + 1,425x^{0,53}$$

Для получения окончательной его формулировки остается лишь, учитывая условно введенную нумерацию для абсцис, заменить x на $1 - \frac{p}{P}$, т. е. переписать ур-ие так:

$$y = -0,59 \left(1 - \frac{p}{P}\right)^{1,5} + 1,425 \left(1 - \frac{p}{P}\right)^{0,53}$$

Ряд точек, определенных по этой формуле, показан на диа-

грамме фиг. 24 маленькими кружками, причем видно, что совпадение этих точек с опытной кривой получается весьма хорошим.



Фиг. 26.

Заканчивая этот пример, проф. Педдл отмечает, что видимая длиннотность решения задачи не должна пугать, так как метод практически оказывается гораздо более простым, чем он кажется на первый взгляд. Единственная операция, представляющая значительные затруднения, это—графическое дифференцирование, которое должно производиться с большою тщательностью,— иначе результаты будут неудачными; во всем остальном работа проста и выполняется очень быстро еравнительно с другими способами решения той же задачи.

С. Определение по экспериментальным данным отдельных функциональных выражений, входящих в формулу преднамечаемого типа.

Изложенные выше способы использования номограмм прямой связи в целях составления эмпирических формул неиз-

вестной заранее формы и формы предудказанной легко распространяются и на случаи промежуточного характера—такие, когда общий вид формулы предназначается не в полной мере, т. е. когда некоторые составные ее части остаются более или менее неопределенными. При этом, ход решения задачи приближается в большей мере к указаниям того или другого приема—в зависимости от степени неопределенности вида составляемого выражения. Не останавливаясь на общих соображениях о возможных случаях комбинирования приемов, ограничимся лишь одним частным примером, в качестве какового выберем задачу составления формулы скорости хода поезда в зависимости от сопротивлений его движению. Инженер М. Veghin, наметив в главных чертах общеизвестный вид такой формулы, вложил ее в номограмму прямолинейной связи („Abaque de la vitesse d'un train sur un profil donné“—Annales des ponts et chaussees, 7 sér, T. 4, 1892, octobre, p. 548—550+1 pl.); M. d'Ocagne, воспроизводя эту номограмму („Traite de nomographie“, 1899, p. 203—206, и „Calcul graphique et nomographie“, 1908, p. 278—280), намечает путь к составлению по ней эмпирической формулы, но сам не завершает решения, ограничиваясь лишь теоретическими намеками. Используем ту-же номограмму и с теми же целями в качестве иллюстрации к выказываемым выше общим мыслям.

Пример VI. Принимая обозначения:

	паровоза	поезда
вес в тоннах	L	W
сопротивление на 1 тонну веса в килогр.	R_L	R_W
подъем пути в промилях, т. е. в миллиметрах на метр длины	i	
и развиваемая паровозом сила тяги в килограммах	F	

напишем, на основании легко понимаемых соображений, что:

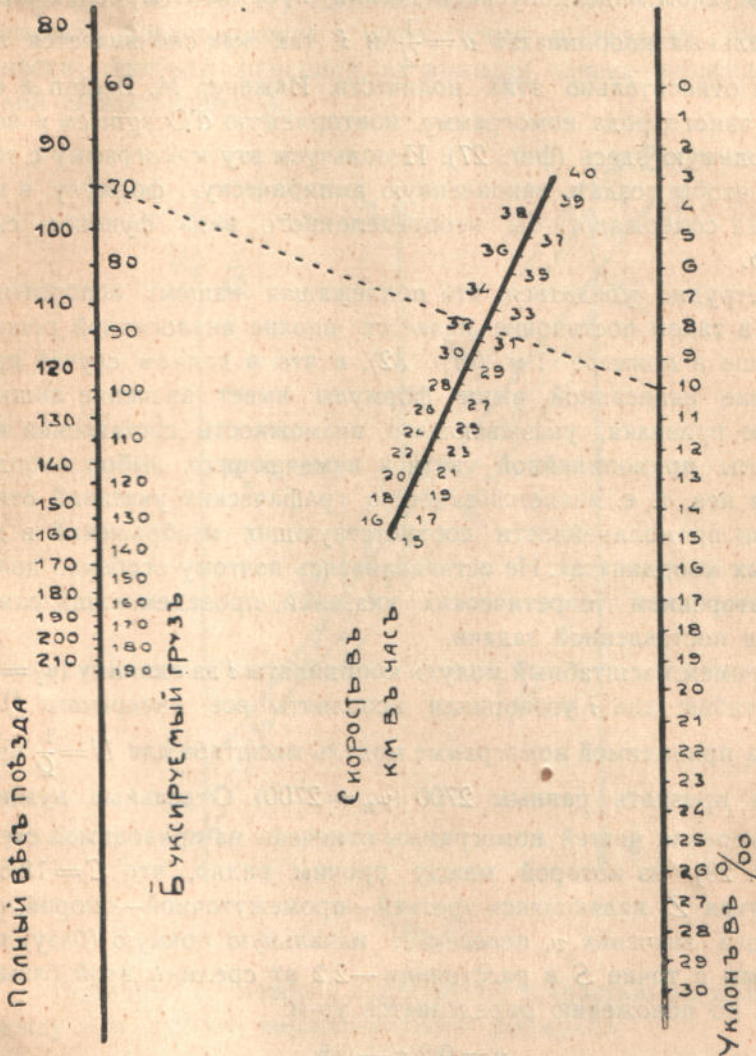
$$F = L(R_L + i) + W(R_W + i)$$

Выражение это можно переписать и так, вводя в него общий вес Q всего поезда с паровозом, равный $L + W$:

$$F = Q(R_W + i) + L(R_L - R_W)$$

В этих формулах количества F , R_L и R_W являются некоторыми

функциями скорости хода поезда v километров в час, требующими вообще опытного определения. Основываясь на эмпирических данных, инж. Beghin и мог построить свою номограмму,



Фиг. 27.

отвечающую написанным формулам. Не зная пока вида зависимости перечисленных количеств от скорости v , введем еще обозначения:

$$F - L(R_L - R_W) = V_1 \quad \text{и} \quad R_W = V_2,$$

после чего основная формула переписется таким образом:

$$i - \frac{V_1}{Q} + V_2 = 0.$$

Ур-ие в таком виде допускает весьма простое построение его в параллельных координатах $u = \frac{1}{Q}$ и i , так как оно является линейным относительно этих количеств. Инженер М. Beghin и составил такого рода номограмму, повторяемую d'Ocagne'ем и воспроизводимую здесь (фиг. 27). Используем эту номограмму с той целью, чтобы создать законченную эмпирическую формулу, в которой не содержалось-бы неопределенного вида функции скорости v .

Нетрудно убедиться, что подлежащая нашему исполнению задача в такой постановке является вполне аналогичной решенной выше в примере 1-м (стр. 32), и что в данном случае преобразование написанной выше формулы имеет значение лишь в качестве признака, указывающего возможность составления номограммы прямолинейной связи и намечающего выбор координат для нее, т. е. является заменой графических указаний относительно прямолинейности соответствующих изображений в декартовых координатах. Не останавливаясь поэтому особенно долго над повторением теоретических указаний, проведем лишь самое решение поставленной задачи.

Примем масштабный модуль координаты i за единицу ($\mu_i = 1$) и масштабом для i уговоримся исполнять все измерения. При этом, на приводимой номограмме модуль масштаба для $U = \frac{1}{Q}$ приходится признать равным 2700 ($\mu_u = 2700$). Отдельные нужные нам измерения частей номограммы отмечены на приводимой схеме ее (фиг. 28), из которой между прочим видно, что $C = 18,5$ и что прямая Z , являющаяся третьей—промежуточной—опорой, собирающей значения v , пересекает начальную прямую (базу) номограммы в точке S в расстоянии—2,2 от середины этой базы и вообще по положению определяется ур-м:

$$y = 0,2 x + 0,5.$$

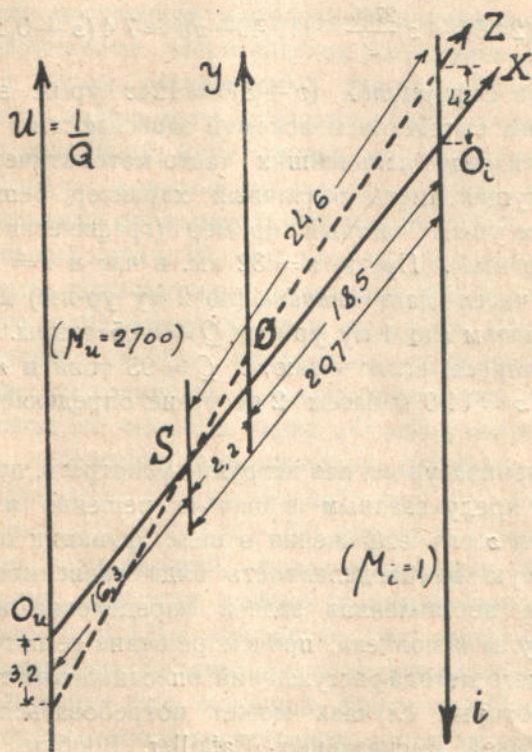
Нетрудно по этой схеме установить также, что длины z , отсчитываемые по опоре Z от точки S , находятся в таком соотношении с абсциссами x :

$$\frac{z}{x + 2,2} = \frac{24,6}{20,7} = \frac{1}{0,84},$$

т. е.

$$x = 0,84 z - 2,2$$

Наконец, выстраивая кривую зависимости отметок v от длины z , надлежит кривую эту тоже вложить в ур-ие. М. d'Osagne высказывает предположение о возможности выражения этой зависимости линейной функцией, не приводя однако численных значений ее коэффициентов.



Фиг. 28.

Повидимому, можно с достаточной точностью выразить связь между v и z такою параболическою формулой:

$$(v + 5)^2 = 124 z.$$

Прибавляя полученные 3 ур-ия к основной номографической зависимости (отвечающей случаю $\uparrow\downarrow$, см. ур. 19 bis, стр., 29)

$$(C - x) \cdot U - (C + x) i = 2Cy,$$

останется лишь исключить из последней x и y , заменив их через v . Подставляя для этого сначала $y = 0,2x + 0,5$ и затем $x = 0,84z - 2,2$ получим:

$$(20,7 - 0,84z)U - (16,3 + 0,84z)i = 7,4(0,84z + 0,3)$$

или, по разделении на 0,84 и замене U через $\frac{1}{Q}$ с модульной поправкой:

$$(24,64 - z)\frac{2700}{Q} - (19,40 + z)i = 7,4(z + 0,36).$$

В соединении с формулой $(v + 5)^2 = 124z$ ур-ие это и является аналитическим выражением искомой зависимости.

Не производя дальнейших чисто-математических преобразований, могущих иметь различный характер, решим по составленным двум ур-ям частный пример (графически исполненный и на номограмме). Пусть, $v = 32$ км. в час и $i = 10\%$. Подстановка этих чисел дает сначала (по 2-му ур-ию) для z значение $z = 11,04$ и затем (по 1-му ур-ию) $Q = 94,5$ тонны. При решении обратного вопроса, если задаются $Q = 95$ тонн и $r = 10\%$, 1-ое ур-ие дает $z = 11,0$ и затем 2-ое ур-ие определяет $v = 31,9$ км. в час.

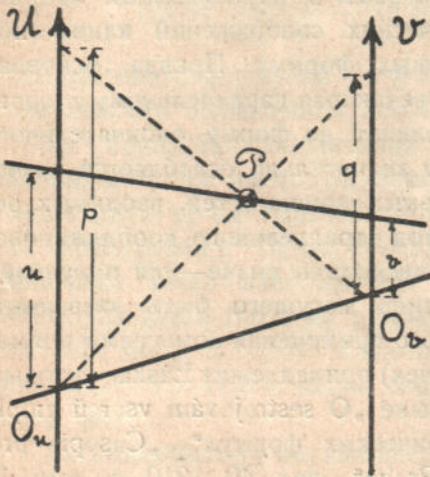
Составленное ур-ие, как нетрудно усмотреть, по своей форме идентично с предуказанным в начале решения и при подстановке вместо z его выражения в виде функции от v устраняет первоначальную неопределенность вида зависимости от v . Таким образом поставленная задача определения недосказанных частей формулы исполнена, причем решение ее потребовало применения общего метода рассуждений, описанного на стр. 29—30. Конечно, в некоторых случаях может потребоваться также и использование идей, высказанных Batailler. Вообще, частичная непредуказанность формулы может, как уже было упомянуто, иметь весьма различный характер, и удачное разрешение отдельных задач должно во многом зависеть от искусного комбинирования всех описанных выше приемов, трудно укладываемого в систематические рамки общих теоретических построений. Избегая слишком большой расплывчатости изложения, ограничимся лишь приведенным единичным примером, в некоторой мере характеризующим порядок действий в случае таких полупредрешенных формул, и предоставим дальнейшие детали исполнителям отдельных задач.

6. Составление, при посредстве построения номограмм прямолинейной связи, эмпирических формул особого, соответствующего этим номограммам, типа (Метод Láska).

Описанные выше приемы составления эмпирических формул при посредстве построения номограмм в параллельных координатах не ограничивают теоретических соображений каким-либо определенным типом составляемых формул. Правда, основная номографическая зависимость, отвечающая параллельному координированию, в некоторой мере влияет на форму окончательного результата; однако, влияние это значительно ослабляется разнообразием возможных дополнительных зависимостей, вводимых решением отдельных задач. Но метод параллельного координирования может быть использован и несколько иначе—для получения формул одного определенного типа, могущего быть названным типом гиперболическим. Идея такого применения номограмм прямолинейной связи (выровненных точек) принадлежит Láska, который в 1910 г. в статье на чешском языке „O sestrojování vsořců empirických“. (О построении эмпирических формул—„Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Praha“, год 40, 1910 г., вып. 1, стр. 9—15 и вып. 11, стр. 142—152) весьма искусно использовал одну из форм зависимостей, характерных для параллельного координирования, присвоив именно ей имя основной номографической формулы (стр. 13) и разработал, под влиянием метода Vatailler, вспомогательные приемы, допускающие некоторые видоизменения и усложнения этой основной формулы. При построении основной номографической зависимости, в виде неоднократно применявшейся нами связи параллельных координат с вспомогательными координатами декартовыми, формулы типа, пропагандируемого Láska, получаются, как в том нетрудно было-бы убедиться, при расположении основных опор номограммы не параллельном, а под углом. Последуем однако примеру Láska и дадим обоснование его предложениям, опираясь на координаты параллельного типа. Некоторая предопределенность типа получающихся формул побуждает отнести метод Láska к главе о составлении эмпирических формул более или менее предуказанного вида, хотя, правда, предуказанность эта имеет несколько иной, чем в предыдущих

случаях, характер, а именно—является не предварительным логическим обоснованием ожидаемой формулы, а рекомендацией попытки, проверки, не может-ли совокупность опытных данных быть обобщена какой-либо формулой указываемого особого типа—в виду лишь того соображения, что тип этот оказывается удобным применимым во многих практических случаях.

Начнем с повторения вывода формулы, именуемой Láska основной номографической зависимостью (см. стр. 13). Из подобия треугольников (фиг. 29) легко получить соотношение



$$\frac{p}{u} = \frac{q}{q-v}, \text{ т. е. } pq - pv = qu$$

или

$$\frac{u}{p} + \frac{v}{q} = 1, \dots (22)$$

откуда

$$q = \frac{vp}{p-u} \dots \dots (23)$$

Полученное выражение, написанное в той или другой форме, и является, по терминологии Láska, основной номографической зависимостью. Оно обладает между прочим тем свой-

Фиг. 29.

ством, что остается справедливым без всяких изменений при любых течениях положительных отсчетов на параллельных осях номограммы, в чем можно убедиться, или составляя непосредственно соотношения для этих различных случаев, или-же короче, простым общим соображением о том, что перемена положительного течения любой из опор одновременно меняет знак числителя и знаменателя одной из дробей, входящих в формулу (22).

Если в составленной зависимости, написанной в виде формулы (23), количествам p и q придавать значения основных переменных x и y , входящих в разрешаемые задачи составления эмпирических формул, или общее—значения каких-либо, но каждый раз определенных, функций этих количеств, X , как функции x , и Y , как функции y , то формула приобретает характерный вид:

$$Y = \frac{vX}{X-u}, \dots \dots \dots (24)$$

которому можно присвоить наименование гиперболического. Формула эта может получать различные выражения (сохраняющие однако гиперболический ее характер) при подстановке разных функциональных выражений вместо символов X и Y . Láska, оговариваясь, что общего правила, руководящего выбором вида этих функций при данном числовом материале экспериментального происхождения, не существует, дает лишь несколько примеров возможной подстановки, а именно:

$$\begin{array}{l} \text{при } p = ax \quad a \log \frac{x}{b} \quad ax \\ \text{соотв. } q = by \quad cy = b \log \frac{y}{c} \end{array} \quad \text{и т. п.}$$

Выбрав при данном ряде числовых значений переменных x и y тот вид зависимостей X и Y , который по каким-либо соображениям кажется наиболее обещающим удачу, останется лишь попытаться найти числовые значения входящих в формулу (24) постоянных u и v , к чему и послужит составление номограммы в параллельных координатах. С этой целью придется откладывать взаимно-соответствующие значения x и y на параллельных осях U и V , определяя каждый раз точку P пересечения лучей, соединяющих концы получаемых отрезков с начальными точками опор (условно говоря „накрест“). Если все полученные таким образом, так сказать—опытные, точки P ложатся с большей или меньшей точностью на прямую линию, то отрезки, отсекаемые последнюю на обеих опорах, и дают соответственно искомые значения постоянных u и v . Если же такой прямолинейности расположения точек P не наблюдается, то значений постоянных не может быть определено, и этот факт обнаруживает то, что числовые результаты наблюдения не могут быть удачно воспроизведены формулой намеченного типа (24) при выбранных для X и Y выражениях в зависимости от x и y .

Приведем здесь несколько исполненных Láska примеров решения практических задач, к сожалению не сопровождаемых автором метода в названной выше его статье воспроизведениями построенных им расчетных диаграмм. Правда, построение таких диаграмм по приводимым числовым данным не представляет особого труда и может быть представлено читателю.

Пример VII. Уменьшение атмосферного давления P с высотой H . Основываясь на числовом материале, приводимом в помещенной ниже таблице, Láska, путем построе-

ния номограммы в параллельных координатах при отложении значений $p = \frac{H}{100}$ и $q = 100 \text{ Log } \frac{762}{P}$ получил эмпирическую формулу:

$$q = \frac{442,6 \cdot p}{856,2 - p},$$

практическая удовлетворительность которой характеризуется числами последних столбцов таблицы.

H метр.	P мм.	$p = \frac{H}{100}$	$q = 100 \text{ Log } \frac{762}{P}$		Разность Δ
			наблюд.	вычисл.	
10.000	198	100	58,53	58,53	0,00
9.000	230	90	52,02	51,99	- 0,03
8.000	266	80	45,71	45,62	- 0,09
7.000	308	70	39,34	39,41	+ 0,07
6.000	355	60	33,17	33,35	+ 0,18
5.000	405	50	27,45	27,45	0,00
4.000	462	40	21,73	21,69	- 0,04
3.000	525	30	16,18	16,07	- 0,11
2.000	596	20	10,67	10,59	- 0,08
1.000	674	10	5,33	5,24	- 0,09
0	762	0	0	0	0

Пример VIII. Распределение температуры t и удельной влажности s атмосферного воздуха в зависимости от высоты H . Путем построения номограмм Láska составил такие эмпирические формулы:

$$10 - t = \frac{212,42 H}{44484 - H} \quad \text{и} \quad s = \frac{9240 - H}{0,53 H + 1370}$$

Удовлетворительность формул подтверждается следующей числовою таблицей:

t		Разность Δ_t	H метр.	s		Разность Δ_s
наблюд.	вычисл.			наблюд.	вычисл.	
0,0	0,0	0,0	2000	3,00	3,00	0,00
— 5,1	— 5,1	0,0	3000	2,17	2,10	— 0,07
— 10,7	— 10,9	— 0,2	4000	1,54	1,50	— 0,04
— 16,8	— 16,8	0,0	5000	1,07	1,05	— 0,02
— 23,2	— 23,1	+ 0,1	6000	0,70	0,71	+ 0,01
— 30,0	— 29,8	+ 0,2	7000	0,40	0,44	+ 0,04
— 37,0	— 36,6	+ 0,4	8000	0,18	0,22	+ 0,04
— 44,2	— 43,9	+ 0,3	9000	0,05	0,04	— 0,01
— 51,6	— 51,6	0,0	10000			

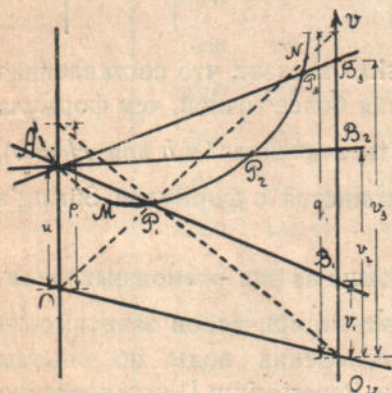
Приводя это сопоставление, Láska отмечает, что составленная им формула для температуры t является более точной, чем формула Менделеева $\frac{t+50}{t_0+50} = \frac{b}{b_0}$ (где t_0 и b_0 суть значения t и b для $H=0$), формула-же для S одинакового достоинства с формулой Süring'a

$$S = S_0 l^{-\frac{H}{9} \left(1 + \frac{H}{12}\right)}$$

Láska указывает еще на ряд возможных дальнейших примеров, как-то: составление эмпирической зависимости между давлением и температурой испарения воды по опытам Magnus'a (Pogg. Annalen, 41; также Dove-Repertorium, I), установление соотношения между показаниями анемометра при измерении скорости ветра и наблюдениями по 12-ти-ступенчатой шкале и т. д. Для водородного спектра при выражении закона Balmer'a он намечает формулу 2-й степени: $q = \frac{v\rho^2}{\rho^2 - u}$.

Хотя, как отмечает Láska, значительное число явлений природы может быть подведено под формулы рассматриваемого типа, однако все-же шанс, что при построении номограммы ряд опытных точек P ляжет с достаточной точностью на прямую линию, в общем невелик, и потому, придавая своему предложению в некоторой мере методологический характер, Láska естественно стремился расширить пределы его применимости. Дав с самого начала средство к такому расширению во введении не просто самих переменных x и y , а произвольного вида их функций X и Y , вместо количеств ρ и q , Láska указывает затем на дальнейший способ расширения емко-

сти своей основной формулы приданием свойства изменяемости и входящим в нее постоянным количествам u и v , именуемый им способом вариации параметров. В самом деле, ничто не препятствует тому, чтобы в основном ур-ии $q = \frac{vp}{p-u}$ количества u и v трактовать не как постоянные, а тоже как функции количеств p и q или определяющих их аргументов x и y ; от соблюдения такого условия не утратится справедливость формулы для каждой данной пары частных значений x и y . Поясним эту мысль геометрически. Представим себе, что выстраиваемые при посредстве количеств p и q (равных значениям функций X и Y) точки P ложатся не на прямую, а на некоторую кривую линию MN (фиг. 30). Это показывает что формула $q = \frac{vp}{p-u}$ не может быть снабжена какими-бы то ни было



Фиг. 30.

постоянными значениями u и v , при которых она объединяла-бы все опытные числовые количества x и y . Может однако оказаться, что удастся подобрать такую постоянную величину количества u которой для всех точек P отвечают значения v , хотя и различные ($v_1, v_2, v_3 \dots$), но связанные определенной функциональной зависимостью с p . Говоря иначе— может случиться, что каждая точка P будет лежать на прямой, проходящей через постоянную

точку A на опоре U и через точку B другой опоры V , отстоящую от начала отсчетов на длину v , определяемую некоторой функцией от p , напр. функцией $v = ap + b$. В таком случае придется, лишь и в основную формулу внести эту зависимость, напр. для написанного вида функции принять формулу такую $q = \frac{p(ap + b)}{p - u}$. Конечно, отыскать удачное место для точки A , т. е. значение постоянной u , представляется не всегда достаточно простым; можно к случаю отметить, что место ее в некоторой мере определяется тем соотношением, что при $p = u$ вообще $q = \infty$, т. е. кривая MN проходит через эту точку A .

В частности может оказаться, что значения v явятся связанными со значениями p зависимостью, изображаемую формулой того-же

разбираемого типа. Это выразится тем, что получаемые концы B_1, B_2, B_3, \dots отрезков v_1, v_2, v_3, \dots в сочетании с соответствующими величинами p , т.е. p_1, p_2, p_3, \dots определяют ряд точек пересечения Q_1, Q_2, Q_3, \dots (фиг. 31), лежащих на некоторую прямую L . Прямая эта отсечет на параллельных опорах отрезки m и n как значения постоянных в формуле:

$$v = \frac{np}{p - m}$$

Подставляя это выражение для v в основную формулу, получим ее в таком виде:

$$q = n \frac{p}{p - u} \cdot \frac{p}{p - m}$$

т.е. в форме:

$$q = \frac{cp^2}{p^2 + ap + b}$$

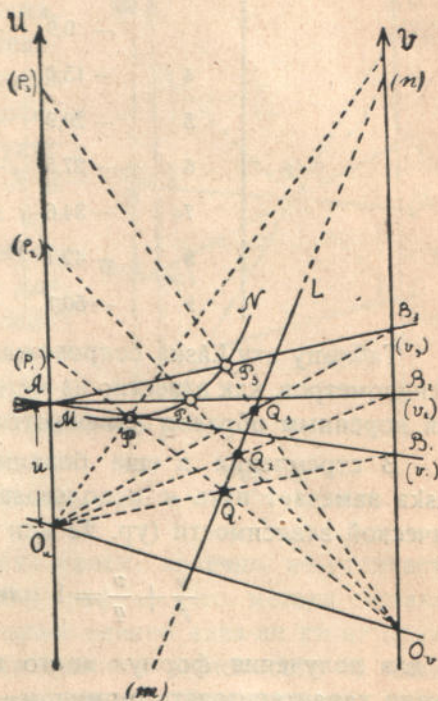
Láska приводит следующий частный пример, относящийся к этому случаю:

Пример IX. Убывание температуры t атмосферного воздуха с высотой H — другое аналитическое выражение для того-же ряда опытных числовых данных, который был использован в предыдущем примере VIII-м.

Путем графических построений (в статье не приводимых) Láska получил эмпирическую формулу:

$$t_n - t_0 = - \frac{110 H^2}{32 + 25 H - H^2}$$

Пригодность формулы характеризуется следующим сопоставлением:



Фиг. 31.

Высота H килом.	Температуры t		Разница Δ
	наблюд.	вычислен.	
1	— 1,8	— 1,8	0,0
2	— 5,4	— 5,5	— 0,2
	— 9,9	— 10,1	— 0,2
4	— 15,0	— 15,2	— 0,2
5	— 20,9	— 20,8	+ 0,1
6	— 27,5	— 27,0	+ 0,5
7	— 34,6	— 34,1	+ 0,5
8	— 42,1	— 42,0	+ 0,1
9	— 50,1	— 50,6	— 0,5

Таблицу эту Láska сопровождает примечанием, что на высоте в 9 километров, как известно из метеорологии, тепловые соотношения коренным образом изменяются.

В стремлении к еще большему обобщению своего метода Láska намечает путь к использованию той-же основной номографической зависимости (ур. 22 или 23)

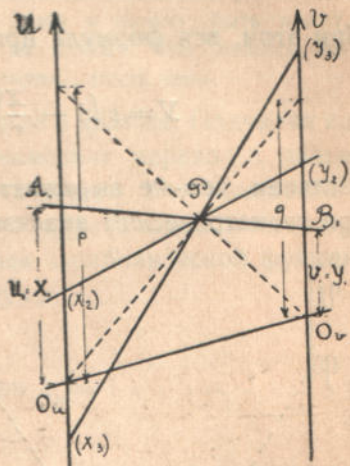
$$\frac{u}{p} + \frac{v}{q} = 1 \text{ или } q = \frac{pv}{p-u},$$

но для получения формул иного математического типа, который можно характеризовать термином — „тип параболический“. С этой целью стоит лишь поставить в непосредственную зависимость от основных переменных x и y не количества p и q , а u и v . В самом деле, принимая $u =$ функции $(x) = X$ и $v =$ функции $(y) = Y$, получим из основной формулы такое выражение для Y :

$$Y = q \left(1 - \frac{X}{p} \right) = q - \frac{q}{p} X. \dots \dots \dots (25)$$

Фактически порядок действий для графического определения численных значений постоянных p и q , в случае испытания пригодности такой формулы, будет следующим: Отложив на параллельных опорах одну пару значений $u_1 = X_1$ и $v_1 = Y_1$, отвечающих паре опытных величин x_1 и y_1 основных переменных, придется соединить концы A_1 и B_1 получаемых отрезков прямою линией (фиг. 32). Всякой точке P этой прямой $A_1 B_1$ отвечают опреде-

ленные значения отрезков p и q на опорах, получающихся от пересечения опор прямыми $O_v P$ и $O_u P$ (или их продолжениями), причем эти значения связаны с отложенными количествами X_1 и Y_1 формулой (25). Если при таком отложении вниз пар имеющихся, на основании данных эксперимента, значений X и Y все соединительные прямые AB пересекутся в одной точке P , то отвечающие этой точке величины отрезков p и q будут общими для всех пар значений X и Y или, говоря определеннее, — будут постоянными p и q в формуле (25), пригодной в таком случае для объединения собою всех опытных числовых данных. Если такого пересечения прямых AB в одной точке не наблюдается, то формула (25) оказывается не приспособленной для воспроизведения результатов опыта.



Фиг. 32.

В такой форме метод Láska ничем, конечно, не отличается от описанного ранее общего номографического метода составления эмпирических формул, который однако едва ли стоит применять в таких условиях при установлении зависимости не между 3-мя, а между 2-мя переменными, так как получающееся линейного характера ур-ие проще и точнее может быть установлено построением данных опыта в декартовых координатах, обыкновенных или с анаморфирующими масштабами, причем решение задачи сведется к проведению прямой через ряд опытных точек. Но предложение Láska интересно в том отношении, что оно и в условиях параболического типа основной формулы допускает дальнейшее развитие идеи применением метода „вариации параметров“.

Если предположить, что в формуле (25) q не постоянно, но все-же находится в некоторой определенной функциональной связи с соответствующими значениями $u = X$, то получится целый ряд разновидностей формулы (25) в зависимости от выбора формы этой связи. Среди этих разных случаев подвергнем ближайшему рассмотрению такой, когда количество q связано с переменным

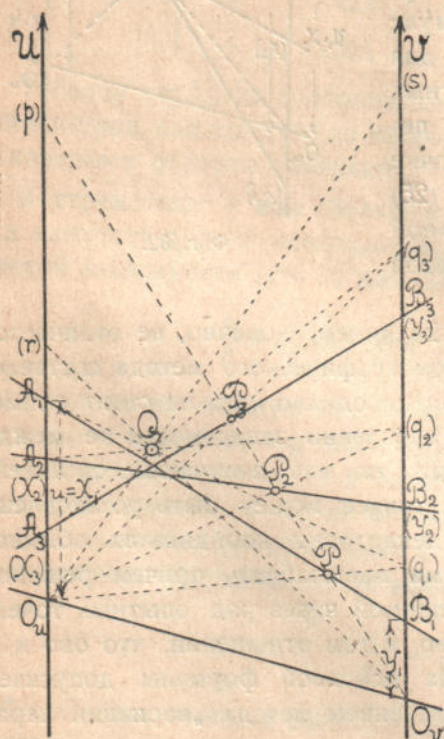
количеством X как-раз зависимостью того-же вида (25) с постоянными значениями параметров. Пусть напр.

$$q = s \left(1 - \frac{X}{r} \right)$$

При этом, вся формула приобретает вид:

$$V = s \left(1 - \frac{X}{r} \right) \left(1 - \frac{X}{p} \right) = a + bX + cX^2$$

Взглянем, чем-же выражается применимость такого вида формулы при геометрическом анализе опытного материала.



Фиг. 33.

Выстраивая в параллельных координатах ряд пар значений $u = X$ и $v = V$, получим систему пересекающихся прямых A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 , которые в предположении переменности q не дадут общей точки пересечения. Но допустим, что возможно подобрать такое значение для p , отвечающее которому точки P прямых AB (фиг. 33) определяют собою значения q , хотя и различные для разных точек, но дающие при соединении с соответственными точками A одну общую точку Q пересечения. Как нетрудно убедиться, эта графическая комбинация и представляет собою интересующий нас случай, причем точка Q дает возможность определить ве-

личины постоянных r и s формулы. Некоторым указанием для нахождения места точки Q служит то соображение, что при $X = 0, V = s$. Нельзя однако не отметить, что решение задачи таким приемом требует некоторого искусства и удачи.

Быть может, Láska удалось придумать какой-либо практический прием решения задач, проще приводящий к цели. К сожалению, о практическом исполнении решений он в своей статье совершенно умалчивает, приводя лишь теоретические обоснования общей идеи. Помещенные выше описание способов действия в различных случаях, а вместе с тем и сопровождающие изложение фиг. 31, 32 и 33, являются добавлением к содержанию статьи Láska и потому, быть может, не вполне точно воспроизводят применявшиеся им приемы, хотя кажется, что эти описания и иллюстрации строго отвечают содержанию самой идеи.

Láska продолжает свое рассуждение и дальше: Подчиняя количество s зависимости вида (25), он намечает переход к дальнейшим высшим степеням функций и заключает о возможности подойти таким путем к общему случаю параболического интерполирования (объединения опытных точек параболической функцией) любой степени, т. е. к случаю формулы:

$$Y = \sum_{k=0}^n a_k x^k \quad \text{при } a_n = 1 \dots \dots \dots (26)$$

Однако, повидимому фактическое осуществление решения подобного рода задач путем номографического координирования довольно затруднительно.

Свои соображения о таком обобщении Láska сопровождает следующими комментариями:

Пусть дан ряд точек, удовлетворяющих ур-ию:

$$y - \sum_{k=0}^n A_k x^k = 0 \quad \text{при } A_n = 1$$

Сравним эту функцию с

$$\eta - \frac{a}{a - \xi} \sum_{k=0}^n A_k \xi^k = 0, \quad \text{где } a \text{ корень ур-ия } \sum_{k=0}^n A_k \xi^k = 0$$

Подставив $\xi = x$, получим

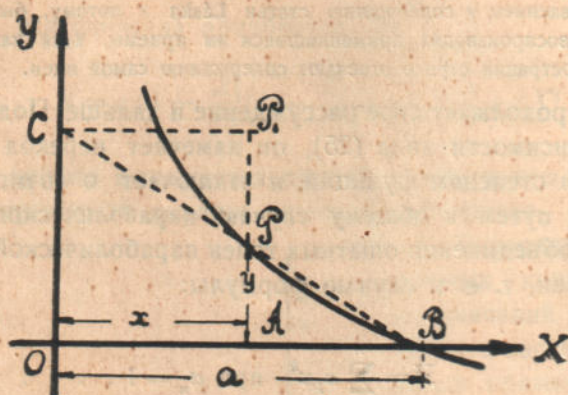
$$\eta = \frac{ay}{a - x}$$

Количество η легко определяется геометрически: Если дана кривая зависимости y от x , то, производя построение, показанное на чертеже (фиг. 34), найдем, что:

$$\frac{OC}{y} = \frac{a}{a - x}, \quad \text{т. е. } OC = \frac{ay}{a - x} (= AP_1) = \eta$$

Повторяя ту-же операцию несколько раз, получим обобщенную кривую

$$\eta - \frac{a^r}{(a-\xi)^r} \sum_0^n A_k \xi^k = 0,$$



Фиг. 34.

причем r может быть и отрицательным.

Эти обобщающие замечания Láska, относимые к координатам декартовым, не определяют в достаточной мере предлагаемого способа действий при параболическом интерполировании. Но они могут быть с успехом использованы в другом направлении, чем то видимо предлагает Láska, а именно — в целях построения специального метода для понижения порядка эмпирических кривых, каковой метод мною в основаниях разработан и будет опубликован особо.

Замеченные опечатки.

Стр.	Строка:	Напечатано:	Должно быть:
7	1 снизу	O_{ii}	O_{ii}
13	15 "	свой	своей
15	5 сверху	$= b_0(1 + \delta)^i$	$= b_0(1 + \delta)^i$
23	5 "	$MO_{ii} O$ и MTO	$MO_{ii} O$ и MTO
33	1 "	$N=425 \left[r \frac{T-T_0}{T} - \int_{T_0}^T c \frac{T-T_0}{T} dt \right]$	$N=425 \left[r \frac{T-T_0}{T} - \int_{T_0}^T c \frac{T-T_0}{T} dt \right]$
40	8 "	$O_{ii} M = x$	$O_{ii} M = x$
42	4 снизу	$2,5 z = 91 - T$	$2,5 z = 91 - T$
44	3 сверху	$z = 1,01 y = 6x + 41$	$z = 1,01 y = 6x + 41$
50	16 "	$y = \frac{\frac{t}{\partial}}{P^2 + \sqrt{P}}$	$y = \frac{\frac{t}{\partial}}{P^2 + \sqrt[3]{P}}$
51	1 снизу	$\frac{t}{\partial} = 0,00274 \sqrt[3]{P+0,0000000011 P^2}$	$\frac{t}{\partial} = 0,00274 \sqrt[3]{P+0,0000000011 P^2}$
53	2 "	$y = K \frac{x^n}{(1-px)^v}$	$y = K \frac{x^n}{(1-px)^v}$
54	8 "	$M \frac{y'}{y} = 1,32 + 5,301 \left(x - \frac{2}{3}\right)^2$	$M \frac{y'}{y} = 1,32 + 5,301 \left(x - \frac{2}{3}\right)^2$
	6 "	$\frac{y'}{y} = 3,04 + 12,21 \left(x - \frac{2}{3}\right)^2$	$\frac{y'}{y} = 3,04 + 12,21 \left(x - \frac{2}{3}\right)^2$
	3 "	$3,04 + 12,21 \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 =$	$3,04 + 12,21 \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 =$
62	11 сверху	выбираем	выбираемым
68	12 снизу	у по x,	у по x,
72	2 "	$+ 1,425 \left(1 - \frac{p}{P}\right)$	$+ 1,425 \left(1 - \frac{p}{P}\right)^{0,53}$
77	2 сверху	$x = 0,84 z - 2,2$	$x = 0,84 z - 2,2$
78	4 "	$(20,7 - 0,84 z) U -$	$(20,7 - 0,84 z) U -$

ЗАДАЧИ И РЕШЕНИЯ

№	Условие:	Решение:
1	$x^2 + 2x + 1 = 0$ $(x+1)^2 = 0$ $x+1 = 0$ $x = -1$	$x^2 + 2x + 1 = 0$ $(x+1)^2 = 0$ $x+1 = 0$ $x = -1$
2	$x^2 - 4x + 4 = 0$ $(x-2)^2 = 0$ $x-2 = 0$ $x = 2$	$x^2 - 4x + 4 = 0$ $(x-2)^2 = 0$ $x-2 = 0$ $x = 2$
3	$x^2 + 5x + 6 = 0$ $(x+2)(x+3) = 0$ $x+2 = 0 \text{ или } x+3 = 0$ $x = -2 \text{ или } x = -3$	$x^2 + 5x + 6 = 0$ $(x+2)(x+3) = 0$ $x+2 = 0 \text{ или } x+3 = 0$ $x = -2 \text{ или } x = -3$
4	$x^2 - 7x + 12 = 0$ $(x-3)(x-4) = 0$ $x-3 = 0 \text{ или } x-4 = 0$ $x = 3 \text{ или } x = 4$	$x^2 - 7x + 12 = 0$ $(x-3)(x-4) = 0$ $x-3 = 0 \text{ или } x-4 = 0$ $x = 3 \text{ или } x = 4$
5	$x^2 + 8x + 15 = 0$ $(x+3)(x+5) = 0$ $x+3 = 0 \text{ или } x+5 = 0$ $x = -3 \text{ или } x = -5$	$x^2 + 8x + 15 = 0$ $(x+3)(x+5) = 0$ $x+3 = 0 \text{ или } x+5 = 0$ $x = -3 \text{ или } x = -5$
6	$x^2 - 9x + 14 = 0$ $(x-2)(x-7) = 0$ $x-2 = 0 \text{ или } x-7 = 0$ $x = 2 \text{ или } x = 7$	$x^2 - 9x + 14 = 0$ $(x-2)(x-7) = 0$ $x-2 = 0 \text{ или } x-7 = 0$ $x = 2 \text{ или } x = 7$
7	$x^2 + 10x + 21 = 0$ $(x+3)(x+7) = 0$ $x+3 = 0 \text{ или } x+7 = 0$ $x = -3 \text{ или } x = -7$	$x^2 + 10x + 21 = 0$ $(x+3)(x+7) = 0$ $x+3 = 0 \text{ или } x+7 = 0$ $x = -3 \text{ или } x = -7$
8	$x^2 - 11x + 28 = 0$ $(x-4)(x-7) = 0$ $x-4 = 0 \text{ или } x-7 = 0$ $x = 4 \text{ или } x = 7$	$x^2 - 11x + 28 = 0$ $(x-4)(x-7) = 0$ $x-4 = 0 \text{ или } x-7 = 0$ $x = 4 \text{ или } x = 7$
9	$x^2 + 12x + 35 = 0$ $(x+5)(x+7) = 0$ $x+5 = 0 \text{ или } x+7 = 0$ $x = -5 \text{ или } x = -7$	$x^2 + 12x + 35 = 0$ $(x+5)(x+7) = 0$ $x+5 = 0 \text{ или } x+7 = 0$ $x = -5 \text{ или } x = -7$
10	$x^2 - 13x + 40 = 0$ $(x-5)(x-8) = 0$ $x-5 = 0 \text{ или } x-8 = 0$ $x = 5 \text{ или } x = 8$	$x^2 - 13x + 40 = 0$ $(x-5)(x-8) = 0$ $x-5 = 0 \text{ или } x-8 = 0$ $x = 5 \text{ или } x = 8$
11	$x^2 + 14x + 48 = 0$ $(x+6)(x+8) = 0$ $x+6 = 0 \text{ или } x+8 = 0$ $x = -6 \text{ или } x = -8$	$x^2 + 14x + 48 = 0$ $(x+6)(x+8) = 0$ $x+6 = 0 \text{ или } x+8 = 0$ $x = -6 \text{ или } x = -8$
12	$x^2 - 15x + 54 = 0$ $(x-6)(x-9) = 0$ $x-6 = 0 \text{ или } x-9 = 0$ $x = 6 \text{ или } x = 9$	$x^2 - 15x + 54 = 0$ $(x-6)(x-9) = 0$ $x-6 = 0 \text{ или } x-9 = 0$ $x = 6 \text{ или } x = 9$
13	$x^2 + 16x + 63 = 0$ $(x+7)(x+9) = 0$ $x+7 = 0 \text{ или } x+9 = 0$ $x = -7 \text{ или } x = -9$	$x^2 + 16x + 63 = 0$ $(x+7)(x+9) = 0$ $x+7 = 0 \text{ или } x+9 = 0$ $x = -7 \text{ или } x = -9$
14	$x^2 - 17x + 72 = 0$ $(x-8)(x-9) = 0$ $x-8 = 0 \text{ или } x-9 = 0$ $x = 8 \text{ или } x = 9$	$x^2 - 17x + 72 = 0$ $(x-8)(x-9) = 0$ $x-8 = 0 \text{ или } x-9 = 0$ $x = 8 \text{ или } x = 9$
15	$x^2 + 18x + 81 = 0$ $(x+9)^2 = 0$ $x+9 = 0$ $x = -9$	$x^2 + 18x + 81 = 0$ $(x+9)^2 = 0$ $x+9 = 0$ $x = -9$
16	$x^2 - 19x + 90 = 0$ $(x-10)(x-9) = 0$ $x-10 = 0 \text{ или } x-9 = 0$ $x = 10 \text{ или } x = 9$	$x^2 - 19x + 90 = 0$ $(x-10)(x-9) = 0$ $x-10 = 0 \text{ или } x-9 = 0$ $x = 10 \text{ или } x = 9$
17	$x^2 + 20x + 100 = 0$ $(x+10)^2 = 0$ $x+10 = 0$ $x = -10$	$x^2 + 20x + 100 = 0$ $(x+10)^2 = 0$ $x+10 = 0$ $x = -10$
18	$x^2 - 21x + 110 = 0$ $(x-11)(x-10) = 0$ $x-11 = 0 \text{ или } x-10 = 0$ $x = 11 \text{ или } x = 10$	$x^2 - 21x + 110 = 0$ $(x-11)(x-10) = 0$ $x-11 = 0 \text{ или } x-10 = 0$ $x = 11 \text{ или } x = 10$
19	$x^2 + 22x + 121 = 0$ $(x+11)^2 = 0$ $x+11 = 0$ $x = -11$	$x^2 + 22x + 121 = 0$ $(x+11)^2 = 0$ $x+11 = 0$ $x = -11$
20	$x^2 - 23x + 132 = 0$ $(x-12)(x-11) = 0$ $x-12 = 0 \text{ или } x-11 = 0$ $x = 12 \text{ или } x = 11$	$x^2 - 23x + 132 = 0$ $(x-12)(x-11) = 0$ $x-12 = 0 \text{ или } x-11 = 0$ $x = 12 \text{ или } x = 11$
21	$x^2 + 24x + 144 = 0$ $(x+12)^2 = 0$ $x+12 = 0$ $x = -12$	$x^2 + 24x + 144 = 0$ $(x+12)^2 = 0$ $x+12 = 0$ $x = -12$
22	$x^2 - 25x + 150 = 0$ $(x-15)(x-10) = 0$ $x-15 = 0 \text{ или } x-10 = 0$ $x = 15 \text{ или } x = 10$	$x^2 - 25x + 150 = 0$ $(x-15)(x-10) = 0$ $x-15 = 0 \text{ или } x-10 = 0$ $x = 15 \text{ или } x = 10$
23	$x^2 + 26x + 169 = 0$ $(x+13)^2 = 0$ $x+13 = 0$ $x = -13$	$x^2 + 26x + 169 = 0$ $(x+13)^2 = 0$ $x+13 = 0$ $x = -13$
24	$x^2 - 27x + 176 = 0$ $(x-16)(x-11) = 0$ $x-16 = 0 \text{ или } x-11 = 0$ $x = 16 \text{ или } x = 11$	$x^2 - 27x + 176 = 0$ $(x-16)(x-11) = 0$ $x-16 = 0 \text{ или } x-11 = 0$ $x = 16 \text{ или } x = 11$
25	$x^2 + 28x + 196 = 0$ $(x+14)^2 = 0$ $x+14 = 0$ $x = -14$	$x^2 + 28x + 196 = 0$ $(x+14)^2 = 0$ $x+14 = 0$ $x = -14$
26	$x^2 - 29x + 200 = 0$ $(x-20)(x-10) = 0$ $x-20 = 0 \text{ или } x-10 = 0$ $x = 20 \text{ или } x = 10$	$x^2 - 29x + 200 = 0$ $(x-20)(x-10) = 0$ $x-20 = 0 \text{ или } x-10 = 0$ $x = 20 \text{ или } x = 10$
27	$x^2 + 30x + 225 = 0$ $(x+15)^2 = 0$ $x+15 = 0$ $x = -15$	$x^2 + 30x + 225 = 0$ $(x+15)^2 = 0$ $x+15 = 0$ $x = -15$
28	$x^2 - 31x + 232 = 0$ $(x-16)(x-14) = 0$ $x-16 = 0 \text{ или } x-14 = 0$ $x = 16 \text{ или } x = 14$	$x^2 - 31x + 232 = 0$ $(x-16)(x-14) = 0$ $x-16 = 0 \text{ или } x-14 = 0$ $x = 16 \text{ или } x = 14$
29	$x^2 + 32x + 256 = 0$ $(x+16)^2 = 0$ $x+16 = 0$ $x = -16$	$x^2 + 32x + 256 = 0$ $(x+16)^2 = 0$ $x+16 = 0$ $x = -16$
30	$x^2 - 33x + 270 = 0$ $(x-18)(x-15) = 0$ $x-18 = 0 \text{ или } x-15 = 0$ $x = 18 \text{ или } x = 15$	$x^2 - 33x + 270 = 0$ $(x-18)(x-15) = 0$ $x-18 = 0 \text{ или } x-15 = 0$ $x = 18 \text{ или } x = 15$
31	$x^2 + 34x + 289 = 0$ $(x+17)^2 = 0$ $x+17 = 0$ $x = -17$	$x^2 + 34x + 289 = 0$ $(x+17)^2 = 0$ $x+17 = 0$ $x = -17$
32	$x^2 - 35x + 300 = 0$ $(x-20)(x-15) = 0$ $x-20 = 0 \text{ или } x-15 = 0$ $x = 20 \text{ или } x = 15$	$x^2 - 35x + 300 = 0$ $(x-20)(x-15) = 0$ $x-20 = 0 \text{ или } x-15 = 0$ $x = 20 \text{ или } x = 15$
33	$x^2 + 36x + 324 = 0$ $(x+18)^2 = 0$ $x+18 = 0$ $x = -18$	$x^2 + 36x + 324 = 0$ $(x+18)^2 = 0$ $x+18 = 0$ $x = -18$
34	$x^2 - 37x + 336 = 0$ $(x-24)(x-14) = 0$ $x-24 = 0 \text{ или } x-14 = 0$ $x = 24 \text{ или } x = 14$	$x^2 - 37x + 336 = 0$ $(x-24)(x-14) = 0$ $x-24 = 0 \text{ или } x-14 = 0$ $x = 24 \text{ или } x = 14$
35	$x^2 + 38x + 361 = 0$ $(x+19)^2 = 0$ $x+19 = 0$ $x = -19$	$x^2 + 38x + 361 = 0$ $(x+19)^2 = 0$ $x+19 = 0$ $x = -19$
36	$x^2 - 39x + 380 = 0$ $(x-20)(x-19) = 0$ $x-20 = 0 \text{ или } x-19 = 0$ $x = 20 \text{ или } x = 19$	$x^2 - 39x + 380 = 0$ $(x-20)(x-19) = 0$ $x-20 = 0 \text{ или } x-19 = 0$ $x = 20 \text{ или } x = 19$
37	$x^2 + 40x + 400 = 0$ $(x+20)^2 = 0$ $x+20 = 0$ $x = -20$	$x^2 + 40x + 400 = 0$ $(x+20)^2 = 0$ $x+20 = 0$ $x = -20$
38	$x^2 - 41x + 420 = 0$ $(x-21)(x-20) = 0$ $x-21 = 0 \text{ или } x-20 = 0$ $x = 21 \text{ или } x = 20$	$x^2 - 41x + 420 = 0$ $(x-21)(x-20) = 0$ $x-21 = 0 \text{ или } x-20 = 0$ $x = 21 \text{ или } x = 20$
39	$x^2 + 42x + 441 = 0$ $(x+21)^2 = 0$ $x+21 = 0$ $x = -21$	$x^2 + 42x + 441 = 0$ $(x+21)^2 = 0$ $x+21 = 0$ $x = -21$
40	$x^2 - 43x + 456 = 0$ $(x-24)(x-19) = 0$ $x-24 = 0 \text{ или } x-19 = 0$ $x = 24 \text{ или } x = 19$	$x^2 - 43x + 456 = 0$ $(x-24)(x-19) = 0$ $x-24 = 0 \text{ или } x-19 = 0$ $x = 24 \text{ или } x = 19$
41	$x^2 + 44x + 484 = 0$ $(x+22)^2 = 0$ $x+22 = 0$ $x = -22$	$x^2 + 44x + 484 = 0$ $(x+22)^2 = 0$ $x+22 = 0$ $x = -22$
42	$x^2 - 45x + 504 = 0$ $(x-24)(x-21) = 0$ $x-24 = 0 \text{ или } x-21 = 0$ $x = 24 \text{ или } x = 21$	$x^2 - 45x + 504 = 0$ $(x-24)(x-21) = 0$ $x-24 = 0 \text{ или } x-21 = 0$ $x = 24 \text{ или } x = 21$
43	$x^2 + 46x + 529 = 0$ $(x+23)^2 = 0$ $x+23 = 0$ $x = -23$	$x^2 + 46x + 529 = 0$ $(x+23)^2 = 0$ $x+23 = 0$ $x = -23$
44	$x^2 - 47x + 552 = 0$ $(x-24)(x-23) = 0$ $x-24 = 0 \text{ или } x-23 = 0$ $x = 24 \text{ или } x = 23$	$x^2 - 47x + 552 = 0$ $(x-24)(x-23) = 0$ $x-24 = 0 \text{ или } x-23 = 0$ $x = 24 \text{ или } x = 23$
45	$x^2 + 48x + 576 = 0$ $(x+24)^2 = 0$ $x+24 = 0$ $x = -24$	$x^2 + 48x + 576 = 0$ $(x+24)^2 = 0$ $x+24 = 0$ $x = -24$
46	$x^2 - 49x + 600 = 0$ $(x-25)(x-24) = 0$ $x-25 = 0 \text{ или } x-24 = 0$ $x = 25 \text{ или } x = 24$	$x^2 - 49x + 600 = 0$ $(x-25)(x-24) = 0$ $x-25 = 0 \text{ или } x-24 = 0$ $x = 25 \text{ или } x = 24$
47	$x^2 + 50x + 625 = 0$ $(x+25)^2 = 0$ $x+25 = 0$ $x = -25$	$x^2 + 50x + 625 = 0$ $(x+25)^2 = 0$ $x+25 = 0$ $x = -25$
48	$x^2 - 51x + 650 = 0$ $(x-26)(x-25) = 0$ $x-26 = 0 \text{ или } x-25 = 0$ $x = 26 \text{ или } x = 25$	$x^2 - 51x + 650 = 0$ $(x-26)(x-25) = 0$ $x-26 = 0 \text{ или } x-25 = 0$ $x = 26 \text{ или } x = 25$
49	$x^2 + 52x + 676 = 0$ $(x+26)^2 = 0$ $x+26 = 0$ $x = -26$	$x^2 + 52x + 676 = 0$ $(x+26)^2 = 0$ $x+26 = 0$ $x = -26$
50	$x^2 - 53x + 700 = 0$ $(x-28)(x-25) = 0$ $x-28 = 0 \text{ или } x-25 = 0$ $x = 28 \text{ или } x = 25$	$x^2 - 53x + 700 = 0$ $(x-28)(x-25) = 0$ $x-28 = 0 \text{ или } x-25 = 0$ $x = 28 \text{ или } x = 25$

ТРУДЫ

по **Опытно-Строительному Делу** Управления
Ирригационных работ в Туркестане.

- Выпуск 1. Инж. Н. Н. Павловский. Об организации Опытно-Строительного Отдела при Управлении Ирригационных работ в Туркестане.
- „ 2. Проф. С. И. Белзецкий. О расчете водоудержательных плотин и подпорных стен по методам теории упругости.
- „ 3. Проф. А. А. Саткевич. Приемы исследования эмпирических кривых. I. Номографический метод параллельного координирования в его применении к анализу эмпирических зависимостей.

ТРУДЫ

**по Опытному - Строительному Делу Управления
Ирригационных работ в Туркестане.**

- Выпуск 1. Инж. Н. Н. Павловский. Об организации Опытного Строительного Отдела при Управлении Ирригационных работ в Туркестане.
- „ 2. Проф. С. И. Белзецкий. О расчете водоудерживающих плотин и подпорных стен по методам теории упругости.
-