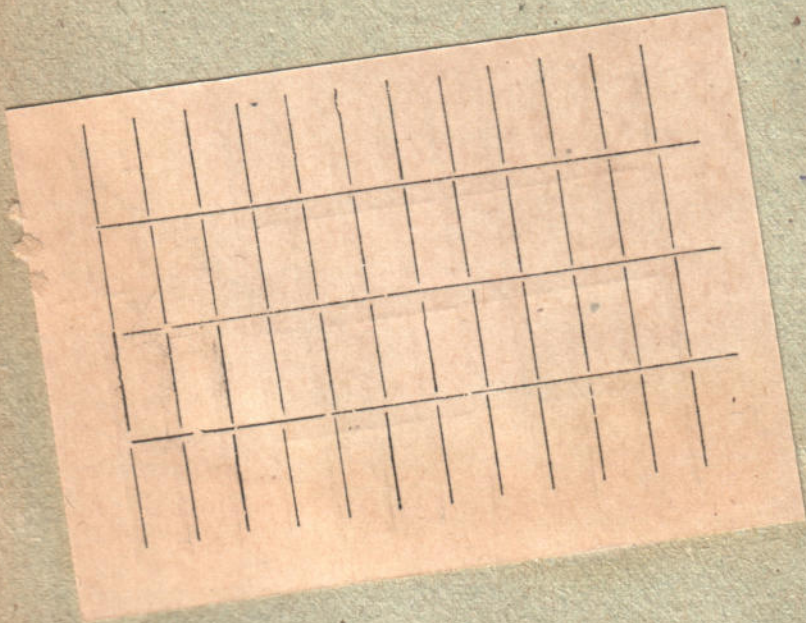


6353

~~Handwritten scribbles~~



Тимошенко у

БМ.
ТД

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ.

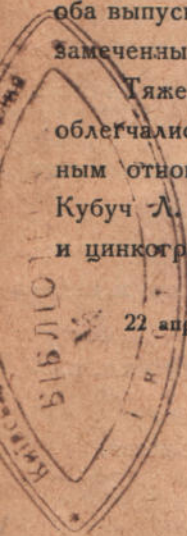
Второе издание первой части „Курса Статики Сооружений“ с согласия проф. С. П. Тимошенко выходит в свет без изменений против первого.

В этом издании все чертежи помещены в тексте, и вся первая часть—оба выпуска первого издания—дана одной книгой. А также выправлены замеченные погрешности первого издания.

Тяжелые условия наблюдения, в отсутствии автора, за изданием облегчались любезной помощью проф. Н. М. Беляева и внимательным отношением со стороны: заведующего учебн. отд. издательства Кубуч А. М. Сафроновича, ментранпажа типографии В. В. Вьюшкова и цинкографии Блэк-Уайт.

Н. Шошин.

22 апреля 1926 г.



да

проверено
1966 г.

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ.

„Курс Статики Сооружений“ написан проф. С. П. Тимошенко в 1916—17 гг.

Материальные затруднения издания в настоящих условиях заставили разделить I-ю часть курса на два выпуска и поместить чертежи не в тексте, как это предполагалось автором, а в виде отдельного атласа.

Второй выпуск пришлось напечатать раньше первого, так как не все главы рукописи сохранились в России, — II-я глава и чертежи I-й были получены от автора лишь летом 1922 г.

Настоящее издание „Курса Статики Сооружений“ выходит в свет без авторского наблюдения.

Все указанные обстоятельства дают право рассчитывать, что читатели не слишком строго отнесутся к неизбежным недостаткам и недочетам этого первого издания.

Чертежи к 1-му выпуску так же, как и ко 2-му, выполнены инж. п. с. Б. Ф. Глазуновым.

Н. Беляев.

8 декабря 1922 г.

ВВЕДЕНИЕ.

Графические приемы решения задач находят в настоящее время весьма широкое распространение в различных областях техники.

Графическим путем решают теперь не только задачи статики, но также задачи динамики, задачи кинематики механизмов. Графические приемы применяют при решении дифференциальных ур-ий¹⁾, при решении численных ур-ий высших степеней²⁾ и систем ур-ий.

Преимуществами этих приемов являются наглядность и во многих случаях простота решения. Особенно просто решаются вопросы статики на плоскости, которыми мы и будем в дальнейшем, главным образом, заниматься³⁾. Что касается точности графических решений, то при тщательном выполнении чертежа она является вполне достаточной для большинства задач, встречающихся на практике.

При решении вопросов статики графическим путем мы будем изображать силы отрезками: положение отрезка будет определять линию действия силы и точку ее приложения; длина отрезка, измеренная в определенном масштабе, представит величину силы, и, наконец, поставленная на отрезке стрелка определит направление силы.

1) См. E. Meissner. Ueber graphische Integration von totalen Differentialgleichungen. Schweiz. Bauz. 1913 г. Стр. 199.

C. Runge Graphische Lösung von Randwertaufgaben. 1911 г. Nachrichten Göttingen.

2) V. Sanden. Praktische Analysis. Leipzig. 1914.

C. Runge. Graphische Methoden. Leipzig. 1915.

3) Приемы графической статики, как мы увидим в дальнейшем основаны главным образом на применении многоугольника сил и так называемого веревочного многоугольника. P. Varignon первый занялся равновесием гибкой нити, подвергнутой действию системы сосредоточенных сил, лежащих в одной плоскости. Многоугольником P. Varignon'a пользовались С. Lamé и В. Р. Е. Clapeyron (Journal des Voies de commun., St. Pétersbourg, Jan. 1827) при определении усилий в цепях висячих мостов. Poncelet пользовался тем же многоугольником для определения центров тяжести плоских фигур. Наконец, С. Culmann использовал многоугольник P. Varignon'a для сложения сил, расположенных как угодно на плоскости. Книга С. Culmann'a „Die graphische Statik“ является первым курсом графической статики. Историю развития статики см. M. Rühlmann. Vorträge üb. d. Geschichte d. techn. Mechanik. Die Mechanik in ihrer Entwicklung. Duhem.

В основание дальнейшего изложения положим известные основные принципы статики: 1) принцип параллелограмма сил, 2) принцип действия и равного ему противодействия. Вторым принципом находит особенно широкое применение при решении технических задач: мы обыкновенно будем иметь дело с исследованием равновесия несвободных тел. Всякое инженерное сооружение под действием приходящихся на него нагрузок оказывает давление на опоры. Силы, равные и прямопротивоположные этим давлениям, представят собой опорные реакции. Присоединяя к внешним нагрузкам эти реакции, мы будем получать системы сил, взаимно уравнивающих.

Что касается третьего принципа статики о переносе точки приложения силы по линии ее действия, то этим принципом мы будем пользоваться лишь в тех случаях, когда рассчитываемое сооружение можно рассматривать, как одно твердое тело. Если же нас будут интересовать внутренние усилия в частях сооружения, то тогда перенос точки приложения силы не допустим. Подобное же замечание нужно сделать также относительно замены одной системы сил, действующих на сооружение, другой системой, статически эквивалентной первой.

ГЛАВА I.

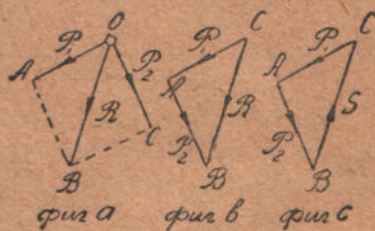
Основы графической статики на плоскости.

§ 1. Сложение и разложение сил, приложенных в одной точке.

Две силы, приложенные в одной точке, взаимно уравниваются лишь в том случае, когда они действуют по одной прямой, равны по величине и прямопротивоположны по направлению. Если две силы P_1 и P_2 , приложенные в точке O , направлены под углом (черт. 1, фиг. а), то мы всегда их можем привести к одной равнодействующей R путем построения соответствующего параллелограмма сил.

При разыскании равнодействующей построение параллелограмма заменяют обыкновенно построением треугольника, для чего откладывают по величине и направлению силу P_1 и потом силу P_2 (фиг. б). Отрезок CB , идущий от начала первой силы к концу второй, представит, очевидно, искомую равнодействующую. Если бы мы сначала отложили силу P_2 и потом P_1 , то, конечно, пришли бы к прежнему значению равнодействующей. Прилагая в точке O (фиг. а) силу S ,

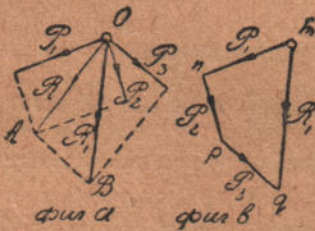
равную и прямопротивоположную силе R , мы получим систему трех сил P_1 , P_2 и S , взаимно уравнивающихся. Откладывая эти силы одну за другой по величине и направлению, получим замкнутый треугольник CAB (фиг. с), причем стрелки, поставленные на сторонах, будут соответствовать обходу контура треугольника в одном направлении. Определение равнодействующей свелось, как мы видим, к построению треугольника CAB (фиг. б). По двум сторонам AC и AB и по углу между ними мы нашли третью сторону CB , представляющую искомую равнодействующую. Тот же треугольник мог бы быть построен, если бы были даны сторона CB и направления двух других сторон, или стороны AC и CB и угол между ними. Таким образом мы приходим к решениям следующих двух задач: а) разложить данную силу на две



Черт. 1.

составляющие, имеющие заданное направление; б) разложить данную силу на две составляющие, из которых одна имеет заданную величину и заданное направление.

Если к точке O приложено несколько сил, например, силы P_1, P_2 и P_3 (черт. 2, фиг. а), то для приведения их к одной равнодействующей можно поступить так: сначала построением соответствующего параллелограмма складываем силы P_1 и P_2 в одну равнодействующую R . Далее, эту равнодействующую складываем, путем построения нового параллелограмма, с силой P_3 и таким образом получаем равнодействующую R_1 трех сил P_1, P_2 и P_3 .

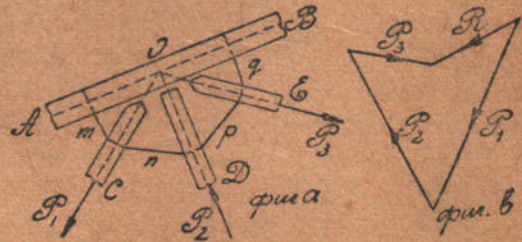


Черт. 2.

Легко видеть, что этим путем можно сложить сколько угодно сил, приложенных в одной точке O . Мы упростим построение, если вместо последовательных параллелограммов построим многоугольник $mprq$ (фиг. б), откладывая силы P_1, P_2 и P_3 по их величине и направлению. Очевидно, что отрезок mq , идущий от начала первой силы к концу последней, представит искомую равнодействующую R_1 . Многоугольник $mprq$ будем называть многоугольником сил и сторону mq , представляющую искомую равнодействующую, замыкающей стороной. Легко проверить, что величина и направление замыкающей не зависят от порядка, в котором отложены силы P_1, P_2 и P_3 . Сила qm , равная и прямопротивоположная равнодействующей R_1 , будет уравновешивающей для сил P_1, P_2 и P_3 . Если при откладывании сил P_1, P_2 и P_3 , по их величине и направлению, конец последней силы совпадает с началом первой, то многоугольник сил получается замкнутым, равнодействующая сила равна нулю, и заданные силы представляют собой систему сил взаимно уравновешивающихся. Мы можем высказать такое положение: если заданная система сил, приложенных в одной точке, находится в равновесии, то соответствующий многоугольник сил будет замкнут.

Применим перечисленные построения к решению нескольких простейших задач.

Задачи. 1. Определить усилие, передаваемое стержню AB (черт. 3, фиг. а) при посредстве листа $mprq$, если величины и направления усилий, действующих по линиям OC, OD и OE , нам известны и представляются силами P_1, P_2 и P_3 .



Черт. 3.

Для решения поставленного вопроса нужно только найти равнодействующую сил P_1 , P_2 и P_3 , проходящих через точку O . Строим соответствующий многоугольник сил, для чего откладываем силы P_1 , P_2 и P_3 одну за другой по их величине и направлению. Замыкающая этого многоугольника, идущая от начала первой силы к концу последней, представит искомое усилие, передающееся на стержень AB .

2. Каменная стена, имеющая прямоугольное поперечное сечение (черт. 4), подвергается действию собственного веса и гидростатическому давлению воды. Требуется найти давление, оказываемое на фундамент.

Два сечениями ad и ce , перпендикулярными длине стены, выделяем элемент, размер которого в направлении длины стены равен одному метру. Принимая для каменной кладки удельный вес равным 2, найдем, что вес выделенного элемента равен $2 \times 1 \times 3 \times 1,5 = 9$ т.

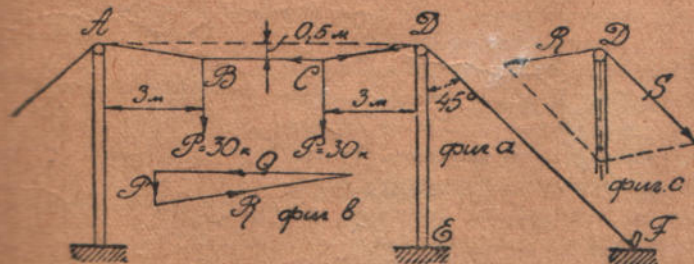
Давление воды распределяется по гидростатическому закону, и на выделенный элемент будет давить вес Q трехгранной призмы воды, причем основанием призмы будет равнобедренный прямоугольный треугольник CDE , а высота призмы будет равна 1 м. При заданных размерах

$$Q = 1 \times \frac{1}{2} \times 3 \times 3 \times 1 = 4,5 \text{ т.}$$

точка приложения давления Q совпадает с центром тяжести B треугольника CDE . Прикладывая найденные силы P и Q в точке O , где пересекаются их направления, и складывая эти силы по правилу параллелограмма, найдем искомое давление на фундамент. Величина этого давления, отнесенная к единице длины стены, очевидно, будет равна

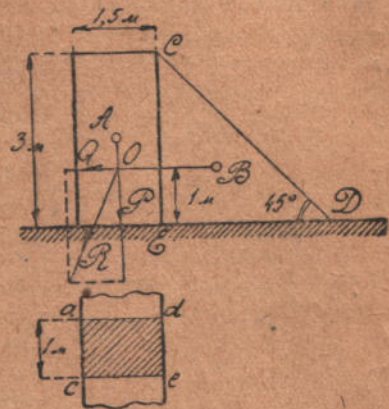
$$R = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{9^2 + 4,5^2} \approx 10,0 \text{ т.}$$

3. Требуется определить натяжение в подвеске $ABCD$, поддерживающей две равные вертикальные силы P (черт. 5).



Черт. 5.

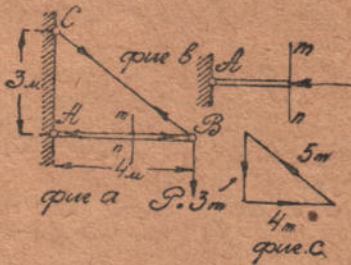
Пренебрегая собственным весом проволоки, из которой сделана подвеска, и предполагая проволоку эту совершенно гибкой, заключаем, что участки подвески AB , BC и CD будут прямолинейными. Получающиеся в этих участках растягивающие усилия мы найдем, если разложим силу $P = 30$ кг на две составляющие, имеющие направления двух участков подвески, сходящихся в точке приложения рассматриваемой силы. На фиг. б показаны силы, приложенные к точке C . Горизонтальная сила Q , соответствующая



Черт. 4.

щая натяжению подвески в участке BC , при размерах, указанных на чертеже, будет равна $P \frac{3}{0,5} = 180$ кг. После этого сейчас же находится натяжение R в наклонных участках подвески. Имея это натяжение, легко решить такой вопрос: какое нужно дать натяжение оттяжке DF , чтобы столб DE не испытывал изгиба. Для этого нужно подобрать в оттяжке такое усилие S , чтобы равнодействующая из этого усилия и только что найденного усилия R имела направление оси столба DE . На фиг. 5 пунктиром показан тот параллелограмм, которым определяется искомое натяжение S в оттяжке.

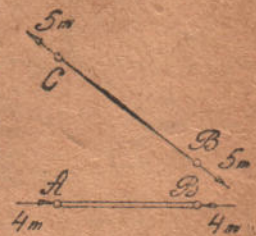
4. Кронштейн ABC , состоящий из бруска AB и наклонной тяги CB , поддерживает груз P (черт. 6). Требуется определить усилия в частях кронштейна.



Черт. 6.

Мы будем исходить из предположения, что части кронштейна соединены между собой и прикреплены к стене при помощи идеальных шарниров, допускающих вращение без трения и обозначенных на чертеже кружками. При таком условии сила P будет вызывать в бруске и тяге лишь усилия, направленные по осям стержней. В самом деле, произведем мысленно разрез бруска AB сечением mn и отбросим правую часть бруска (фиг. б). Тогда действие отброшенной правой части на оставленную левую представится силой, проходящей через центр шарнира A , так как только при этом условии возможно равновесие выделенной части

бруска ¹⁾. Всякое другое направление силы вызвало бы вращение рассматриваемой части бруска относительно шарнира A . Раз усилия в стержнях действуют по осям стержней, то определение этих усилий не встречает никаких затруднений. Мы исходим из условия равновесия шарнира B . На него действует сила P и неизвестные пока силы, имеющие направления стержней AB и CB . Соответствующий замкнутый треугольник сил представлен на фиг. с. Треугольник этот подобен $\triangle ABC$, и потому заключаем на основании размеров кронштейна, указанных на чертеже, что усилие в наклонной тяге равно 5 т и в бруске — 4 т. Стрелками оказаны действия стержней на шарнир B . Усилия, которые оказывает ненагруженный в промежуточных сечениях стержень на шарниры, расположенные по его концам, очевидно, должны представлять собой две равные и прямопротивоположные силы, действующие по оси стержня. На основании этого заключаем, что силы, передающиеся от стержней на шарниры A , B и C , имеют направления, указанные на фиг. а. Действие горизонтального бруска на шарниры направлено к шарнирам. Усилия же, производимые тягой, имеют направления от шарниров. Усилия, передаваемые от шарниров на стержни имеют, очевидно, прямопротивоположное направление, и мы можем заключить, что горизонтальный брусок и наклонная тяга подвергаются действию сил, указанных на чертеже 7; брусок испытывает сжимающие усилия, а тяга испытывает растяжение.



Черт. 7.

Мы в дальнейшем условимся на чертеже показывать направления тех сил, которые представляют действие брусков на шарниры, т. е., тех, которые получаются из условий равновесия отдельных шарниров. В таком случае можно высказать такое поло-

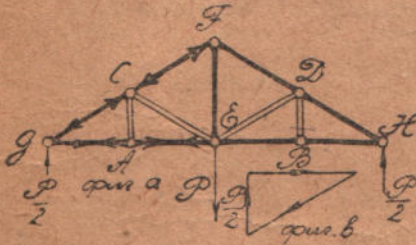
¹⁾ Собственным весом стержней мы пренебрегаем.

жение, разъясненное в только что рассмотренном примере: если действие стержня на концевые шарниры представляется силами, направленными к шарнирам, то стержень сжат; в противоположном случае он испытывает растяжение. Заметим здесь, что при решении только что рассмотренной задачи, мы без оговорок сделали еще одно допущение: мы предположили, что кронштейн под действием приложенной силы P не деформируется, и наклоны стержней к направлению силы не меняются. В действительности задача является более сложной. Под действием силы P горизонтальный брусок несколько сожмется, наклонная тяга несколько удлинится, и точка приложения силы опустится вниз. Изменятся наклоны стержней к силе P , а вместе с тем и усилия, возникающие в стержнях, будут несколько иными, чем мы получили в предположении неизменяемости формы кронштейна. На практике обыкновенно подбирают размеры брусков так, чтобы получаемые при нагрузках деформации были малы, поэтому те приближенные решения, которые получаются в предположении неизменяемости, имеют обыкновенно вполне достаточную для практических приложений точность. Гораздо большие погрешности влечет за собой предположение, что стержни соединены между собой идеальными шарнирами. На практике обыкновенно шарнирных соединений между брусками не делают. Стержни соединяются между собой жестко, и потому изменение формы системы, составленной из стержней, будет обыкновенно сопровождаться искривлениями стержней: стержни, кроме растяжения или сжатия, будут испытывать еще изгиб. В дальнейшем мы покажем, как велико может быть влияние этих изгибов, пока же будем предполагать, что изгибов нет, что стержни действительно соединены шарнирами, допускающими вращение без трения. На практике обычно ограничиваются получаемыми на основании этого предположения приближенными решениями и лишь в редких случаях делают дополнительные исследования относительно влияния жесткости соединения стержней на величину усилий.

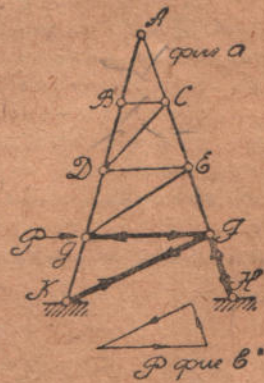
И 5. Требуется определить усилия, возникающие под действием силы P в стержнях систем, представленных на чертежах 8 и 9.

При решении задачи будем исходить из предположения, что стержни соединены между собой шарнирами. В таком

случае придется говорить лишь о растяжении или сжатии стержней под действием силы P . Далее будут показаны общие приемы для определения усилий в стержнях, пока же воспользуемся для



Черт. 8.



Черт. 9.

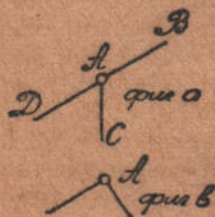
решения этой задачи приведенными выше элементарными сведениями из статики и найдем искомые усилия из условий равновесия отдельных шарниров. Мы несколько упростим решение вопроса, если воспользуемся такими элементарными соображениями:

а) Пусть к шарниру A сходятся три стержня, из которых два располагаются по одной прямой (черт. 10, фиг. а).

Если к этому шарниру никаких сил, кроме усилий в стержнях не приложено, то в стержне AC усилие должно равняться нулю. В самом деле, из условия равновесия шарнира A следует, что сумма проекций усилий в стержнях AB , AD и AC на любое

направление должна равняться нулю. Выбирая направление, перпендикулярное к BD найдем, что проекция усилия в стержне AC на это направление, а следовательно, и самое усилие равны нулю.

б) Если к шарниру A сходятся два стержня под углом (черт. 10, фиг. б), и никаких внешних сил не приложено, то из условий равновесия шарнира заключаем, что в обоих стержнях усилия должны равняться нулю, так как в противном случае эти усилия приводились бы к одной равнодействующей и равновесие шарнира A было бы невозможно.

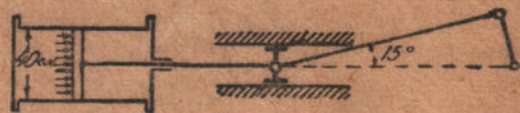


Черт. 10.

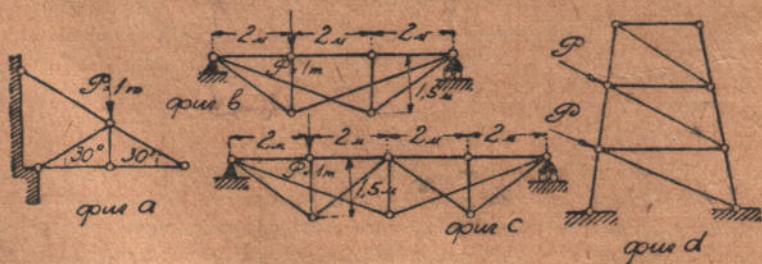
После этих двух замечаний обращаемся к чертежу 8. Применяя соображение (а) последовательно к шарнирам A, C, B и D , заключаем, что в стержнях AC, CE, DB и ED усилия равны нулю. Работать будут лишь стержни, указанные на чертеже жирными линиями. Из условий равновесия шарнира E , заключаем, что стержень FE растянут силой P . Для получения усилий в прочих стержнях нужно рассмотреть лишь условия равновесия шарнира G или H ¹⁾. На фиг. б представлен замкнутый треугольник, соответствующий условию равновесия шарнира G . Стрелками показаны усилия, действующие на шарнир. На основании высказанного в предыдущей задаче правила заключаем, что стержни GF и FH сжаты, а стержни EG и EH растянуты. Величины этих усилий в известном масштабе представлены на фиг. б.

Обращаясь к чертежу 9 и применяя соображение (б) последовательно к шарнирам A, B, C, D и E , заключаем, что отличные от нуля усилия получаются лишь в трех стержнях, указанных на чертеже жирными линиями. Для получения этих усилий строим замкнутый треугольник (фиг. б), соответствующий условию равновесия шарнира F . Стержень GF , очевидно, сжат силой P . Усилия в KF и FH получаются из фиг. б. По направлениям стрелок заключаем, что стержень FH сжат и стержень KF вытянут.

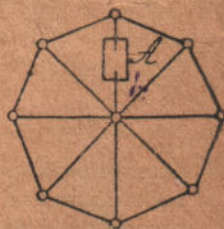
6. Для положения кривошипного механизма, указанного на чертеже 11, найти усилие в поршневом штоке и шатуне, а также давление крейцкофа на параллели, если давление пара в левой части парового цилиндра равно 6 атм. и в правой 1 атм.



Черт. 11.



Черт. 12.



Черт. 13.

¹⁾ Из условий симметрии заключаем, что нужно рассмотреть лишь одну половину системы.

7. Найти усилия в стержневых системах с идеальными шарнирами, представленных на чертеже 12.

8. Определить усилия в сторонах и диагоналях шарнирного правильного многоугольника (черт. 13), возникающие в том случае, когда при помощи гайки A вызвано в вертикальной диагонали натяжение, равное одной тонне.

§ 2. Случай трех сил.

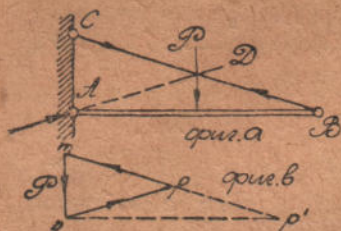
В дальнейших задачах мы часто будем встречаться с вопросом о равновесии твердого тела под действием трех сил, лежащих в одной плоскости. Если три силы P , Q и R находятся в равновесии, то они непременно должны проходить через одну точку. В самом деле, в этом случае каждая из сил должна уравниваться равнодействующей двух других сил. Например, сила P должна уравниваться с равнодействующей сил Q и R , проходящей, очевидно, через точку пересечения этих сил. Так как две силы могут уравниваться лишь в том случае, если они действуют по одной прямой, то, следовательно, сила P непременно должна проходить через точку пересечения Q и R . Таким образом случай равновесия трех сил сводится к ранее разобранным нами задаче о равновесии сил, приложенных в одной точке. Три взаимно уравнивающиеся силы должны давать нам замкнутый треугольник, и мы сможем при помощи этого треугольника разрешить целый ряд практически важных задач. Особенно часто приходится решать такую задачу: одна из трех взаимно уравнивающих сил задана по величине, направлению и точке приложения, для другой задана линия действия и для третьей — точка приложения. Требуется найти эти силы. Продолжая до пересечения линии действия первых двух сил, мы получаем общую точку для всех трех сил. Соединяя эту точку с точкой приложения третьей силы, найдем линию действия этой силы. После этого соответствующий треугольник сил может быть легко построен по величине и направлению одной стороны и направлениям двух других сторон. Поясним это примерами.

Задачи: 9. Брусок AB , прикрепленный к стене шарниром A и тягою BC , нагружен силой P (черт. 14). Требуется определить усилия, передаваемые на стену в точках A и C .

Рассматриваем брусок AB , как твердое тело, опирающееся в точках A и B . На брусок AB будут действовать три силы: известная сила P и опорные реакции

¹⁾ В действительности брусок AB под действием силы P несколько изогнется и следовательно точки A и B несколько сблизятся, но величины этих перемещений для случаев, встречающихся на практике, столь малы, что мы ими будем пренебрегать, будем считать бруски абсолютно твердыми. В дальнейшем будут показаны способы определения деформаций стержневых систем.

в точках A и B . Относительно левой реакции можно сказать, что она должна непременно проходить через центр шарнира A , так как шарнир предполагается идеальным, и его равновесие возможно лишь в случае прохождения силы через этот центр. Что касается правой опоры B , то здесь конец бруска поддерживается тягой CB . Так как эта тяга в промежуточных точках не нагружена, то действующее в ней усилие, соответствующее правой опорной реакции, направлено по оси тяги. Таким образом, задача сводится к исследованию равновесия трех сил: заданной силы P , правой реакции, действующей по линии BC , и левой реакции, проходящей через точку A . Продолжая линию действия силы P до пересечения с линией BC , получаем точку D , где должны сходиться все три силы. Направление AD

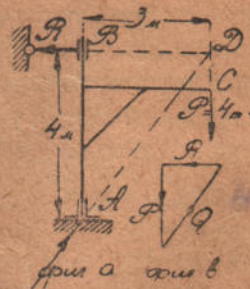


Черт. 14.

представит в таком случае направление левой опорной реакции. Величины реакции могут быть получены построением соответствующего треугольника сил mnp (фиг. b). Стрелки указывают направления сил, действующих на брусок. Чтобы получить усилия, передающиеся на стену, необходимо направление стрелок изменить на противоположное. Пользуясь треугольником mnp , легко можно проследить, как меняются усилия в тяге и в шарнире A при передвижении груза P по бруску AB . Сторона mn при этих передвижениях остается неизменной. Не меняется также направление стороны mp , параллельной тяге BC , но меняется направление третьей стороны np , параллельной левой реакции AD . При движении груза P вправо, направление AD будет приближаться к горизонтальному, соответственно меняется направление стороны np , и увеличиваются значения реакций. Наибольшие реакции получатся, когда сила P придет в точку B и сторона np займет положение np' , указанное на фиг. b пунктиром. Это положение нагрузки, очевидно, нужно принять во внимание при расчете прочности тяги BC .

10. Стойка AB подъемного крана (черт. 15), опирается в нижней точке A на подпятник и в верхней точке B на подшипник в котором она может скользить без трения. Требуется найти давления на подпятник и подшипник, получающиеся при действии груза P , равного 4 т.

Кран находится под действием трех сил: известной вертикальной силы P и двух неизвестных пока опорных реакций, возникающих в точках A и B . Так как мы пренебрегаем трением, то опорная реакция в подшипнике B должна иметь направление, перпендикулярное к направлению стойки AB . Проводя соответствующую линию до пересечения с направлением силы P в точке D , заключаем, что в ту же точку D должна идти и третья сила — опорная реакция в подпятнике A . Имея направления всех трех сил, мы сейчас же найдем величины этих сил путем построения соответствующего треугольника сил (см. фиг. b). Стрелками указаны на чертеже направления сил, действующих на кран. Для получения давлений на подпятник A и подшипник B , нужно изменить направления сил на противоположные. Величины давлений при размерах, указанных на чертеже, будут: для подшипника 3 т и для подпятника 5 т.

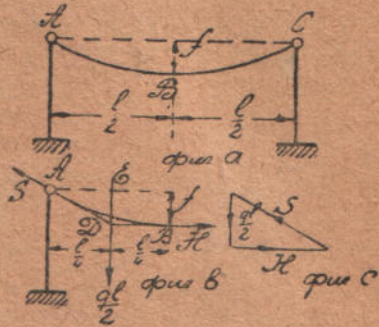


Черт. 15.

11. Определить натяжение электрического провода ABC в нижней точке B , если вес единицы длины провода равен q кг,

расстояние между точками привеса равно l и стрелка провеса равна f (черт. 16).

Для определения растягивающего усилия, возникающего в проводе под действием собственного веса, применим такой прием. Разрежем провод в точке B , отбросим правую часть и рассмотрим условия равновесия левой оставленной части. Прежде всего действие правой части на левую заменим силой H , которая из условий симметрии должна иметь горизонтальное направление. Кроме этой силы на рассматриваемую часть провода будет действовать собственный вес и реакция в точке привеса A . В случае малых стрелок провисания, с которыми приходится иметь дело на практике, мы можем принять длину дуги AB равной $\frac{l}{2}$ и собственный вес выделенной части провода равным $\frac{ql}{2}$. Равнодействующая собственного веса, при сделанных допущениях пройдет в расстоянии $\frac{l}{4}$ от точки привеса A . Продолжая эту равнодействующую до пересечения с силой H в точке D и соединяя эту точку с точкой привеса A , определяем направление опорной реакции S в точке A . Для получения величин сил S и H остается построить соответствующий треугольник сил (фиг. c). Треугольник этот, очевидно, будет подобен треугольнику ADE , полученному на фиг. b ; следовательно,

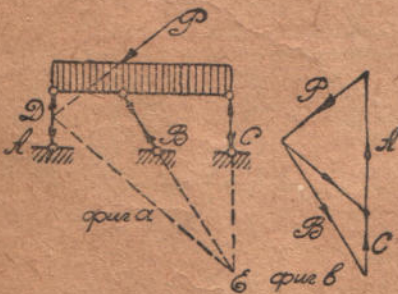


Черт. 16.

$$\frac{H}{AE} = \frac{ql}{2} \quad \text{или} \quad H = \frac{ql}{2} \cdot \frac{l}{4} = \frac{ql^2}{8f}.$$

Полученной формулой всегда пользуются при определении натяжений в телеграфных проводах.

Н 12. Сооружение прикреплено к фундаменту посредством трех стержней (черт. 17). Найти усилия, возникающие в этих стержнях при действии заданной силы P .



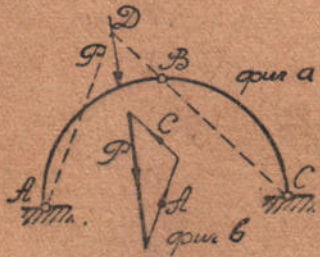
Черт. 17.

Сооружение находится в равновесии под действием силы P и трех реактивных усилий, совпадающих по линиям действия с осями опорных стержней. Чтобы привести задачу к случаю трех сил, сложим реактивные усилия, соответствующие точками B и C , в одну равнодействующую. Равнодействующая $Эв$, очевидно, пройдет через точку E , где пересекаются оси соответствующих стержней. Таким образом получаем три силы: заданную силу P , усилие в опорном стержне, укрепленном в A , и силу, проходящую через точку E . Продолжая направление силы P до пересечения с левым опорным

стержнем в точке D , заключаем, что через эту точку должна идти и третья сила. Следовательно, DE — линия действия третьей силы. Имея направления сил, сейчас же получаем их величину построением соответствующего треугольника (фиг. b). Из треугольника находим силу A , представляющую действие левого опорного стержня на сооруже-

ние, и равнодействующую двух других реактивных сил. Разлагая эту равнодействующую на составляющие, параллельные стержням, прикрепленным в точках B и C , находим соответствующие реактивные силы B и C . Из направления стрелок заключаем, что крайние стержни сжаты, и средний растянут.

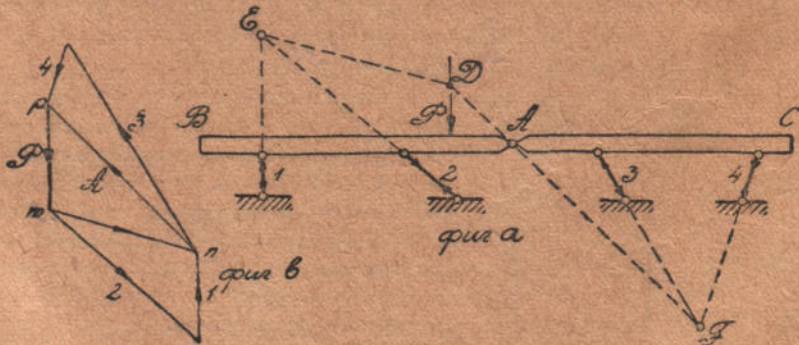
13. Трехшарнирная арка ABC (черт. 18) подвергается действию силы P . Требуется найти опорные реакции в A и C .



Черт. 18.

Сооружение в данном случае состоит из двух отдельных частей, связанных между собой средним шарниром B . На левую часть сооружения действует сила P и реактивные силы, возникающие в шарнирах A и B . Правая же часть находится лишь под действием сил, приложенных по концам, в точках B и C . Из условия равновесия правой части непосредственно следует, что силы эти должны действовать по одной прямой. Этой прямой будет, очевидно, линия BC . Итак, линия действия усилия, передаваемого левой частью сооружения на правую, есть линия BC . По этой же линии, но в прямопротивоположную сторону будет действовать реактивное усилие, передаваемое от правой

части сооружения на левую. Переходя теперь к исследованию равновесия левой части сооружения, встречаемся с случаем действия трех взаимно уравнивающих сил. Для разыскания этих сил применяем прежний прием: продолжаем линию действия силы P и линию BC до пересечения в точке D . В эту точку должна идти и третья сила, проходящая через центр шарнира A . Найдя таким образом направления реактивных сил, мы легко получим их величину путем построения соответствующего треугольника сил (фиг. b). Стрелками показаны направления сил, действующих на левую половину арки. Имея возможность определить реакции при действии одной силы P , мы путем повторения построения могли бы найти реакции и для любой системы сил, приложенных к арке.



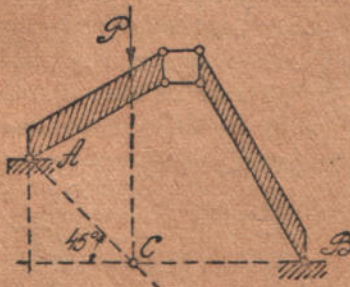
Черт. 19.

14. Сооружение, состоящее из двух балок, соединенных шарниром, прикреплено к фундаменту посредством четырех стержней (черт. 19). Найти усилия, возникающие в этих стержнях при действии силы P .

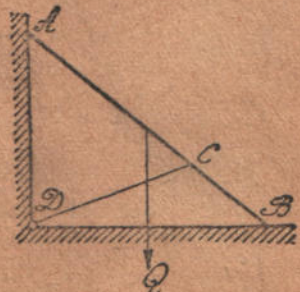
Левая балка AB , находящаяся под действием силы P , оказывает через посредство шарнира A некоторое давление на правую балку AC . Эта последняя находится, таким образом, под действием трех сил: неизвестного пока давления, проходящего через центр шарнира A , и усилий, передаваемых на балку стержнями 3 и 4. Так как стержни скреплены с балкой и фундаментом шарнирами, то соответствующие усилия по линиям действия совпадают с осями стержней. Все три силы, приложенные к балке AC , должны пересекаться в одной точке F , которую получаем, продолжая до пересечения направления 3 и 4. Линия AF представляет линию действия давления, оказываемого левой балкой на правую, и линию действия прямопротивоположной этому давлению реакции, которую правая балка оказывает на левую. Эта реакция, сила R и равнодействующая усилий, передаваемых на балку стержнями 1 и 2, представляют систему трех взаимно уравновешивающихся сил. Силы эти будут проходить через точку D , и, следовательно, DE представит линию действия равнодействующей сил 1 и 2. Замкнутый треугольник сил mnp , у которого стороны mn и np соответственно параллельны линиям DE и AF , дает нам величину реакции A и равнодействующую mn усилий, оказываемых стержнями 1 и 2 на левую балку. Дальнейшим разложением сейчас же находим усилия 1, 2, 3 и 4. На фиг. b стрелками указаны направления усилий, действующих на балки.



Черт. 20.

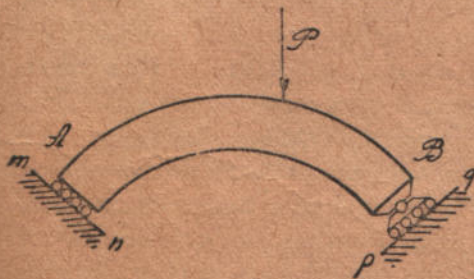


Черт. 21.



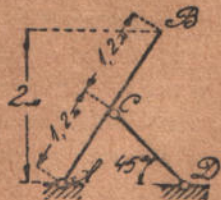
Черт. 22.

15. Найти опорные реакции, возникающие в точках A и B крана, представленного на чертеже 20, и системы, представленной на чертеже 21.



Черт. 23.

16. Призматический брусок весом Q опирается в A и B на идеально гладкие плоскости и удерживается в равновесии канатом DC . Найти натяжение этого каната (черт. 22).



Черт. 24.

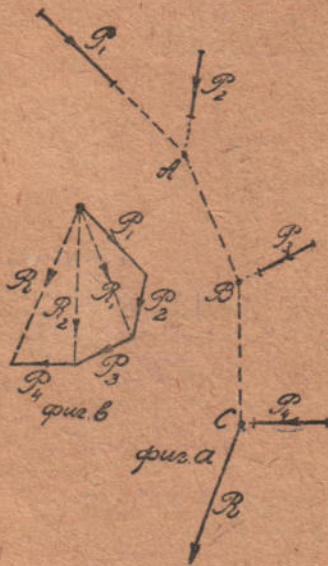
17. Левым концом арка AB опирается через посредство идеально гладких катков на плоскость mn . Правый конец арки шарнирно соединен с опорой, скользящей без трения по пло-

скости pq . Найти реакции, возникающие при действии силы P (черт. 23). Рассмотреть случай, когда сила \perp плоскости pq ¹⁾.

18. Доска AB , подвергающаяся действию гидростатического давления, опирается в точке A и C . Найти усилие в подпорке CD , если длина доски равна 24 м. и ширина ее 1 м (черт. 24).

§ 3. Силы, расположенные как угодно на плоскости.

Когда имеется несколько сил P_1, P_2, P_3, \dots , расположенных как угодно на плоскости, то сложить эти силы, привести их к одной равнодействующей, можно путем последовательного применения параллелограмма сил: мы можем сначала сложить силы P_1 и P_2 , потом их равнодействующую прибавить к силе P_3 и т. д. Это построение может быть упрощено, если мы будем пользоваться соответствующим многоугольником сил.



Черт. 25.

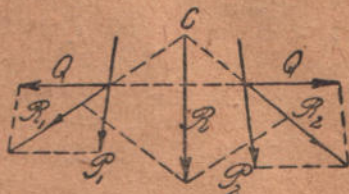
Положим, нам задали силы P_1, P_2, P_3, P_4 (черт. 25, фиг. а). Строим соответствующий многоугольник сил (фиг. б). Замыкающая R этого многоугольника дает нам величину и направление равнодействующей заданной системы сил. Чтобы определить линию действия этой равнодействующей, поступаем так: продолжаем направления P_1 и P_2 до пересечения в точке A и через эту точку проводим линию AB , параллельную R_1 (фиг. б). Эта линия действия равнодействующей первых двух сил пересекается с силой P_3 в точке B . Через эту точку проводим линию BC параллельно R_2 до пересечения с P_4 в точке C .

Через эту точку и будет идти равнодействующая всех четырех сил. Подобное построение далеко не всегда является удобоисполнимым. Лишь в исключительных случаях удастся получить все необходимые пересечения в пределах чертежа. Кроме того, намеченное построение не применимо в случае действия параллельных сил. Поэтому на практике обычно пользуются иным приемом сложения сил, основанным на построении, так называемого, веревочного многоугольника.

¹⁾ Предполагается такое устройство катков, при котором они противодействуют не только усилиям, придавливающим катки к соответствующей опорной плоскости, но также и отрывающим усилиям.

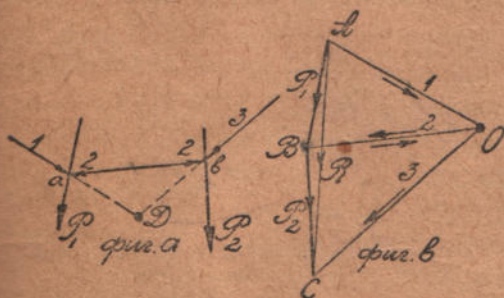
§ 4. Вербочный многоугольник.

Начнем рассмотрение задачи с простейшего случая, когда требуется сложить две силы P_1 и P_2 (черт. 26). Если точка пересечения этих сил лежит за пределами чертежа, то вопрос геометрического сложения решается обычно путем присоединения к заданным силам двух равных и прямопротивоположных сил Q произвольной величины. Получаемая таким путем система четырех сил очевидно будет эквивалентна заданной нам системе сил. Для приведения ее к одной равнодействующей, складываем предварительно силы P_1 и P_2 с соответствующими силами Q и полученные силы R_1 и R_2 приводим к одной равнодействующей R . Так как мы можем произвольно назначить величину сил Q , то построение всегда может быть выполнено так, чтобы точка пересечения C получалась в пределах чертежа.



Черт. 26.

Обратимся теперь к видоизменению этого приема, которое даст нам возможность распространить построение на любую систему сил. Предположим, что нужно сложить силы P_1 и P_2 (черт. 27). Построением соответствующего треугольника сил (фиг. б) мы определяем величину и направление равнодействующей R .

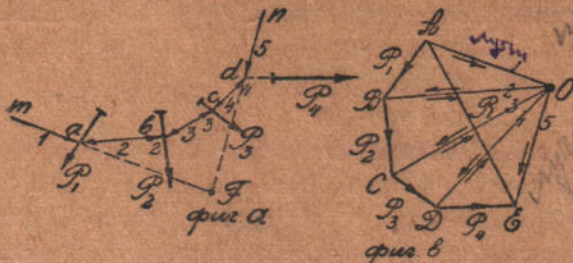


Черт. 27.

Для нахождения точки приложения этой равнодействующей, заменим каждую из заданных сил двумя силами так, чтобы новая система сил была эквивалентна прежней. Это сделаем следующим способом: выберем на многоугольнике сил (фиг. б) произвольную точку O и соединим ее с началом и концом каждой из сил; тогда силу P_1 можно заменить силами 1 и 2, направления

которых указаны стрелками, расположенными внутри треугольника AOB . Точно также сила P_2 может быть заменена силами 2 и 3. Выберем теперь на направлении P_1 (фиг. а) какую-либо точку a и приложим в ней силы 1 и 2, заменяющие силу P_1 . В точке b , где сила 2 пересекается с силой P_2 , приложим силы 2 и 3, заменяющие силу P_2 . Две силы, равные по величине, противоположные по знаку и действующие по линии ab , очевидно, взаимно уравниваются, и нам нужно будет сложить лишь силы 1 и 3. Точка пересечения этих сил D и определит линию действия искомой равнодействующей.

Применим это построение к системе четырех сил P_1, P_2, P_3 и P_4 (черт. 28). Равнодействующая этих сил R по величине и направлению получается путем построения соответствующего многоугольника сил (фиг. б). Для определения точки приложения равнодействующей поступим так: на многоугольнике сил выберем произвольную точку O , которую будем в дальнейшем называть полюсом. Эту точку соединим с вершинами многоугольника сил A, B, C, D, E . Соединяющие линии 1, 2, 3, 4, 5 будем называть лучами. На направлении силы P_1 выбираем произвольную точку a и через нее проводим линии, параллельные лучам 1 и 2. Направление 2 продолжаем до пересечения с направлением силы P_2 в точке b .



Черт. 28.

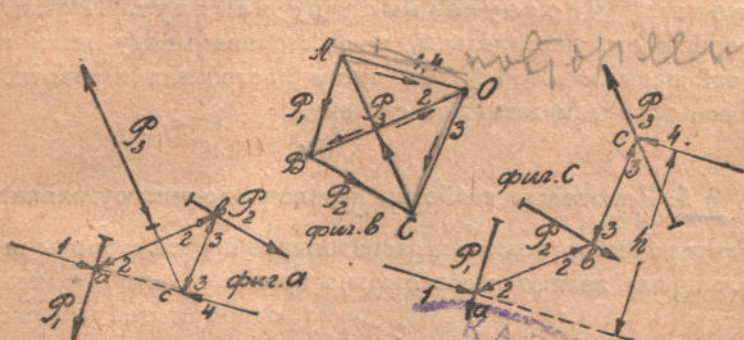
Через эту точку проводим линию параллельно направлению луча 3 до пересечения с силой P_3 в точке c . Далее проводим линию cd параллельно лучу 4 и, наконец, через точку d — линию, параллельную лучу 5. Силу P_1 заменяем приложенными в точке a

силами 1 и 2, определяемыми по величине и направлению лучами 1 и 2 и стрелками, помещенными внутри треугольника AOB (фиг. б). Силу P_2 заменяем силами 2 и 3, приложенными в точке b и определяемыми по величине и направлению лучами 2 и 3 и стрелками, поставленными внутри треугольника BOC . Таким же способом производим замену сил P_3 и P_4 . Легко видеть, что при этом преобразовании по линиям ab, bc и cd будут действовать по две равные и противоположные силы, которые взаимно уравниваются, и нам придется сложить лишь силы 1 и 5, совпадающие с первой и последней стороной построенного многоугольника $abcd$. Продолжая эти силы до пересечения, находим искомую точку приложения F равнодействующей заданной системы сил. Многоугольник $abcd$ называют веревочным многоугольником. Если взять идеально гибкую нерастяжимую нить, расположить ее вдоль сторон многоугольника $abcd$ и концами закрепить в точках m и n , то при действии системы сил P_1, P_2, P_3 и P_4 веревочный многоугольник представит собой форму равновесия нити, а длины лучей 1, 2, 3, 4 и 5, измеренные в принятом для сил масштабе, представят собой натяжения в отдельных частях нити.

Заметим, что выбор полюса O является совершенно произвольным, и мы всегда можем назначить эту точку так, чтобы все нужные нам пересечения получались в пределах чертежа. В этом заключается пре-

имущество пользования веревочным многоугольником при сложении сил в плоскости ¹⁾. Что касается порядка откладывания сил P_1, P_2, P_3, P_4 в многоугольнике сил, то он является совершенно произвольным. В каждом частном случае его приходится выбирать так, чтобы веревочный многоугольник имел по возможности простой вид. Мы отложили силы в том порядке, в каком они встречаются на нашем чертеже при движении слева направо. Такого порядка особенно выгодно придерживаться при сложении системы параллельных сил, когда многоугольник сил обращается в отрезок прямой линии.

Построением многоугольника сил и веревочного многоугольника решаются все возможные случаи сложения сил в плоскости:



Черт. 29.

а) Если многоугольник сил не замкнут, то замыкающая дает нам величину и направление равнодействующей. Точка приложения ее определяется пересечением крайних сторон веревочного многоугольника.

б) Если многоугольник сил замкнут, то заданная система или находится в равновесии, или приводится к паре сил. Так как при этом первый и последний лучи в многоугольнике сил сливаются, то первая и последняя стороны веревочного многоугольника или сольются в одну прямую, или пойдут параллельно одна другой. В первом случае будем иметь равновесие, во втором случае система приводится к паре сил.

Поясним сказанное примером. Положим нам даны три силы P_1, P_2 и P_3 (черт. 29, фиг. а), которым соответствует замкнутый треугольник сил ABC (фиг. б). Выбираем полюс O и проводим лучи 1, 2, 3 и 4. Лучи 1 и 4 сливаются в одну прямую AO , следовательно, соответствующие стороны веревочного многоугольника или параллельны, или слива-

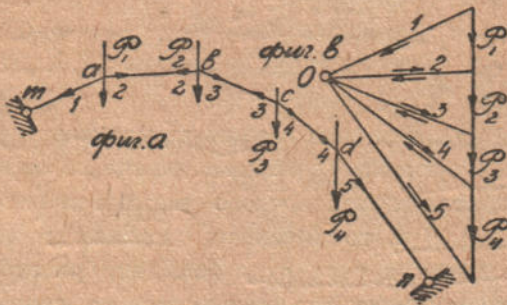
¹⁾ Кроме применения веревочного многоугольника иногда пользуются и другими способами сложения сил в плоскости. Изложение этих приемов см. L. Henneberg. Graphische Statik. 1911 г., стр. 75. Подробные литературные указания по различным отделам графической статики см. Encyclopädie d. Math. Wissensch. Bd IV, стр. 845.



ются в одну прямую. При том расположении, которое взято на фиг. а, стороны 1 и 4 веревочного многоугольника abc сливаются в одну прямую, и, так как соответствующие этим сторонам силы по величине представлены одним и тем же лучом 1,4, а по направлению прямо противоположны, то мы будем иметь в данном случае систему сил взаимно уравнивающих. При расположении тех же сил P_1, P_2 и P_3 , показанном на фиг. с, система приводится к паре сил 1 и 4, при чем плечо пары равно h , и величина сил определяется длиной луча 1,4. Итак, в случае равновесия и многоугольник сил и веревочный многоугольник замкнуты. Если же система приводится к паре, то многоугольник сил замкнут, но веревочный многоугольник не замкнут. Первая и последняя стороны его параллельны, и расстояние между ними определяет плечо той пары, к которой мы, путем построения веревочного многоугольника, приводим заданную систему.

§ 5. Некоторые свойства веревочного многоугольника.

Так как выбор полюса и расположение первой стороны веревочного многоугольника являются совершенно произвольными, то мы можем для



Черт. 30.

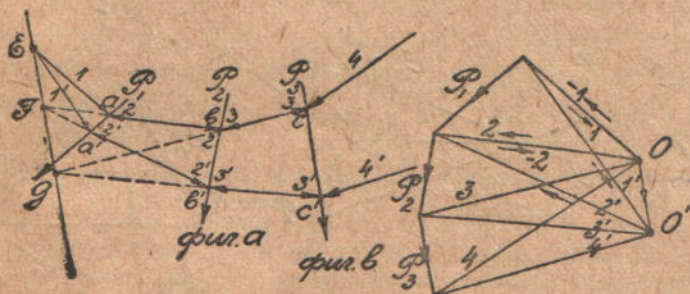
одной и той же системы сил построить, сколько угодно, веревочных многоугольников. На чертеже 28 полюс O выбран таким образом, что веревочному многоугольнику $abcd$ можно было сейчас же подыскать соответствующую механическую модель: гибкую нить, закрепленную в точках m и n . Под действием заданных сил $P_1, P_2,$

P_3, P_4 в отдельных частях нити будут действовать лишь растягивающие усилия. При другом расположении полюса тем же силам могут соответствовать в сторонах многоугольника сжимающие усилия, и нам для получения соответствующей механической модели нужно будет представить себе стороны веревочного многоугольника осуществленными в виде жестких стержней, связанных между собой идеальными шарнирами. Возьмем, например, систему параллельных сил P_1, P_2, P_3, P_4 (черт. 30). Если выбрать полюс так, как это показано на фиг. b , то соответствующий веревочный многоугольник $abcd$ расположится выпуклостью вверх. Для получения соответствующей механической модели, надо себе представить стороны веревочного многоугольника, изготовленными из стержней, свя-

занных в вершинах многоугольника шарнирами. Если концы m и n этого многоугольника шарнирно закрепить, то под действием заданных сил в стержнях возникнут сжимающие усилия, величины которых определяются длинами соответствующих лучей.

Линию $abcd$ иногда называют линией давлений. Ею пользуются для определения давлений, действующих между отдельными клиньями каменных сводов и арок.

Было показано, что, продолжая до пересечения первую и последнюю стороны веревочного многоугольника, мы получим точку приложения равнодействующей всех сил. Легко видеть, что при помощи того же многоугольника можно получить точку приложения равнодействующей отдельных групп заданной системы сил. Например, для случая, предста-



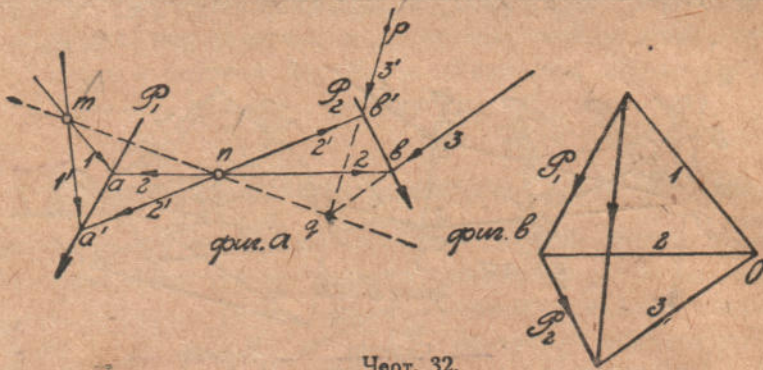
Черт. 31.

вленного на чертеже 30, продолжая стороны 1 и 3, мы получим точку приложения равнодействующей сил P_1 и P_2 . Пересечение сторон 2 и 5 определит точку приложения равнодействующей сил P_2 , P_3 и P_4 и т. д.

Докажем теперь одно свойство веревочных многоугольников, которым иногда пользуются при расчете трехшарнирных арок. Если для одной и той же системы сил P_1 , P_2 и P_3 построить два веревочных многоугольника со сторонами 1, 2, 3 и 1', 2', 3', соответствующих полюсам O и O' (черт. 31, фиг. б), то можно показать, что переход от полюса O к полюсу O' сопровождается поворотом сторон многоугольников относительно точек E , F , G , лежащих на одной прямой, параллельной OO' (фиг. а). Возьмем две какие-либо соответствующие вершины двух построенных веревочных многоугольников, например, вершины a и a' . Сходящиеся в вершине a силы 1 и 2 статически эквивалентны силе P_1 ; той же силе эквивалентны силы 1' и 2', сходящиеся в вершине a' . Отсюда следует, что силы — 1 и — 2 будут уравниваться силами 1' и 2'. Равнодействующая сил — 1 и 1' будет проходить через точку E , а равнодействующая сил — 2 и 2' через точку F , и, так как все четыре силы находятся в равновесии, то очевидно линия EF представит линию действия обеих равнодействующих. С другой стороны, из фигуры б

видим, что равнодействующая сил 1 и $1'$ представляется отрезком OO' . Отсюда следует, что $OO' \parallel EF$. Таким же точно способом доказывается, что линия $FG \parallel OO'$. Следовательно, точки пересечения E, F, G соответствующих сторон двух веревочных многоугольников действительно лежат на одной прямой, параллельной линии OO' .

Пользуясь этим свойством, мы легко можем решить задачу о построении для заданной системы сил веревочного многоугольника, стороны которого проходят через три заданные точки. Положим, например, нам даны две силы P_1 и P_2 (черт. 32). Для этих сил требуется построить веревочный многоугольник, проходящий через три заданные точки m, n и p . Начнем построение с проведения стороны 1, проходящей через



Черт. 32.

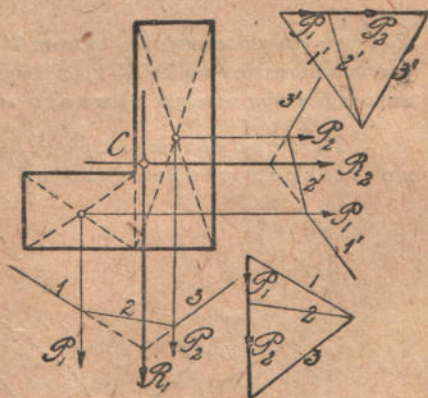
заданную точку m . Направление этой стороны выберем пока совершенно произвольно и на фиг. b отметим направление соответствующего луча 1. Продолжая сторону 1 до пересечения с силой P_1 в точке a , проводим через эту точку вторую сторону веревочного многоугольника так, чтобы она прошла через вторую заданную точку n . Соответствующий этой стороне луч 2 в пересечении с проведенным ранее лучом 1 определяет положение полюса O , к которому относится вычерчиваемый веревочный многоугольник. Через O должны идти все остальные лучи, в данном случае луч 3, и, следовательно, направление стороны 3 веревочного многоугольника является теперь вполне определенным. Мы продолжаем сторону 2 до пересечения с силой P_2 в точке b и через эту точку проводим сторону 3 параллельно лучу 3. Так как направление первой стороны взято нами совершенно произвольно, то сторона 3, вообще говоря, не пройдет через третью заданную точку p . Построенный веревочный многоугольник не будет удовлетворять поставленным условиям, но с помощью его мы сейчас же можем начертить и искомый веревочный многоугольник, если воспользуемся приведенной выше зависимостью между двумя веревочными многоугольниками, построенными для одной и той же системы сил. Искомый многоугольник должен проходить

через точки m , n и p . Первая его сторона $1'$ будет проходить через m и вторая $2'$ через n , следовательно, в m пересекутся стороны 1 и $1'$, в n — стороны 2 и $2'$. В таком случае, на основании доказанного, стороны 3 и $3'$ непременно должны пересекаться на прямой, соединяющей m и n . Сторона 3 у нас на чертеже имеется. Продолжая ее до пересечения с линией mn , получаем точку q , через которую обязательно должна проходить третья сторона искомого веревочного многоугольника. Так как та же сторона проходит и через заданную точку p , то линия pq и представит нам третью сторону искомого веревочного многоугольника. Имея ее, нам остается только провести две другие стороны через заданные точки m и n , и мы получим веревочный многоугольник, удовлетворяющий всем поставленным требованиям. Если вместо двух сил P_1 и P_2 нам будет дана более сложная система сил, то эти силы всегда можно будет разделить на две группы и каждую группу привести к одной равнодействующей. Тогда задача сведется к рассмотренному выше случаю двух сил.

§ 6. Приложения веревочного многоугольника.

Задачи. 19. Определение центра тяжести плоских фигур.

Положим требуется определить центр тяжести уголка, представленного на чертеже 33. Мы разбиваем площадь фигуры на два прямоугольника и прикладываем в центрах тяжести этих прямоугольников фиктивные вертикальные силы P_1 и P_2 , представляющие в известном масштабе площади прямоугольников. Строя для этих сил веревочный многоугольник и продолжая его крайние стороны 1 и 3 до пересечения, получаем линию действия равнодействующей R_1 , на которой обязательно должен лежать центр тяжести фигуры. Поворачивая теперь силы P_1 и P_2 , мы построим веревочного многоугольника $1' 2' 3'$ получаем новое направление равнодействующей R_2 . Пересечение направлений R_1 и R_2 даст нам, очевидно, положение искомого центра тяжести C . Если заданная фигура имеет ось симметрии, то для определения центра тяжести достаточно построить один веревочный многоугольник, так как искомая точка непременно должна лежать на оси симметрии. В случае сложных фигур с криволинейным контуром мы всегда можем заданную фигуру разделить на такие элементы, чтобы каждую элементарную площадку можно было с достаточной для практики точностью принять за прямоугольник или за трапецию. Прикладывая в центрах тяжести этих площадок систему фиктивных параллельных сил, пропорциональных соответствующим площадкам, и строя для этих сил веревочный многоугольник, мы пересечением крайних сторон этого многоугольника определяем линию действия равнодействующей фиктивных сил, которая обязательно должна проходить через искомый центр тяжести. Повторяя такое

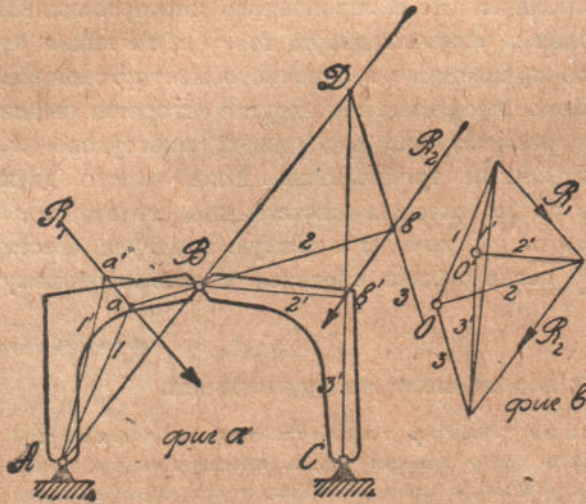


Черт. 33.

*фиктивные
силы*

же построение для другого какого-либо направления тех же фиктивных сил и определяя новое положение равнодействующей, мы в пересечении двух найденных направлений равнодействующей получим искомый центр тяжести фигуры.

20. Определить при помощи веревочного многоугольника усилия, возникающие в шарнирах трехшарнирной арки (черт. 34 фиг. а).

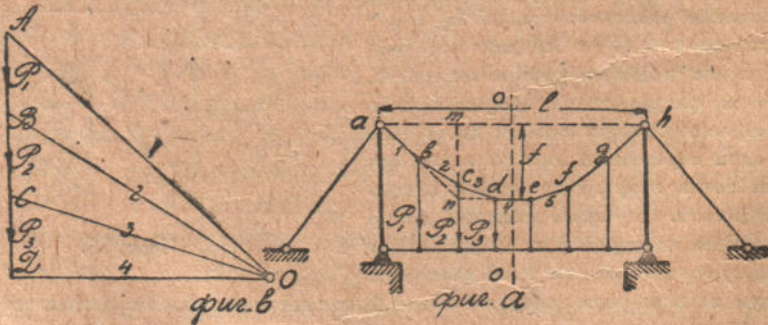


Черт. 34.

Для упрощения мы приведем силы, действующие на каждую половину арки, к одной равнодействующей. Пусть R_1 и R_2 представляют эти равнодействующие. Для определения усилий в шарнирах можно было бы с каждой из этих сил поступить так, как это было сделано в задаче 13 (см. § 2). Тот же вопрос легко решается путем построения веревочного многоугольника. Если мы для известных сил R_1 и R_2 построим веревочный многоугольник $1' 2' 3'$, стороны которого проходят через центры шарниров A, B и C , то соответствующие этим сторонам лучи $1', 2'$ и $3'$ определяют по величине и направлению искомые усилия в шарнирах. Сила

R_1 будет уравновешиваться силами $1'$ и $2'$, проходящими через точки A и B , и сила R_2 уравновесится силами $2'$ и $3'$, проходящими через B и C . На чертеже 34 нужные построения выполнены при помощи ложного многоугольника $1 2 3$, как это было описано в § 5.

21. Требуется определить усилия в звеньях цепи висящего моста, представленного на чертеже 35.



Черт. 35.

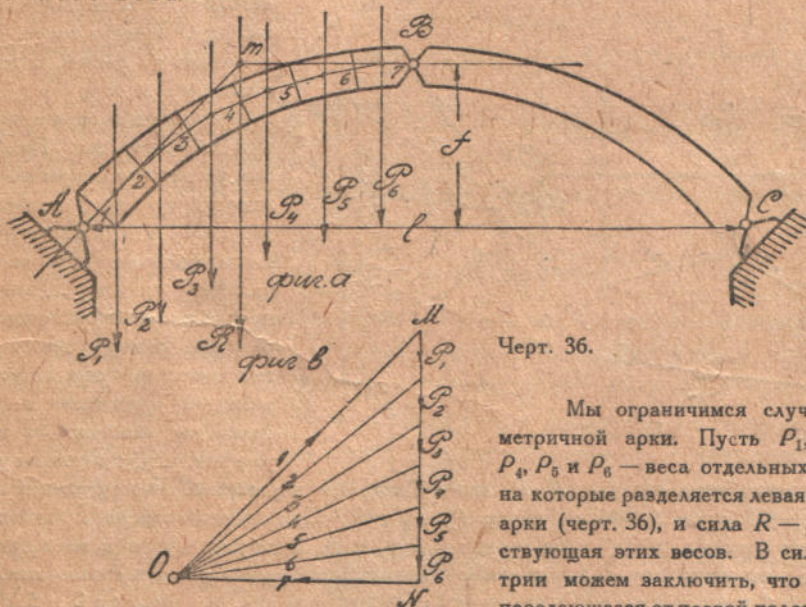
Нагрузка, лежащая на мосту, передается при посредстве вертикальных тяг цепи $abcdefgh$. Допустим, что звенья цепи соединены между собой идеальными шарнирами допускающими вращение без трения. Тогда под действием вертикальных усилий, пере-

даваемых тягами, цепь примет форму равновесия, совпадающую с одним из веревочных многоугольников для усилий P_1, P_2, \dots в тягах. Если кроме опорных точек a и b будет задано положение еще одного какого-либо шарнира, то мы путем проведения веревочного многоугольника, проходящего через три заданные точки, сейчас же можем найти положение звеньев цепи и можем определить действующие в этих звеньях усилия.

Рассмотрим случай, когда нагрузка на все тяги распределяется равномерно, и, следовательно, форма провисания цепи симметрична относительно оси oo . При этом среднее звено цепи de расположится горизонтально. Для определения направления крайнего звена ab примем во внимание, что усилия в звеньях ab и de уравнивают всю нагрузку, передающуюся на левую половину цепи. Равнодействующая усилий P_1, P_2 и P_3 при нашем предположении совпадает с направлением силы P_3 , и через точку пересечения n этой силы с направлением de непременно должно проходить и направление звена ab . Определив таким образом направление двух звеньев, мы получим расположение остальных звеньев путем построения соответствующего веревочного многоугольника. На многоугольнике сил (черт. 35, фиг. б) откладываем силы P_1, P_2, P_3 и проводим крайние лучи 1 и 4 параллельно найденным направлениям ab и de . Точка пересечения этих направлений определит нам полюс O , через который пройдут лучи 2 и 3, определяющие направления звеньев bc и cd . Натяжения в звеньях цепи определятся длинами лучей 1, 2, 3 и 4.

Если при одном и том же расстоянии между опорными точками a и b мы будем уменьшать стрелку провисания f , то это, как легко видеть, будет сопровождаться увеличением натяжения в цепи.

22. Требуется определить усилия, возникающие между клиньями каменной трехшарнирной арки при действии собственного веса.



Черт. 36.

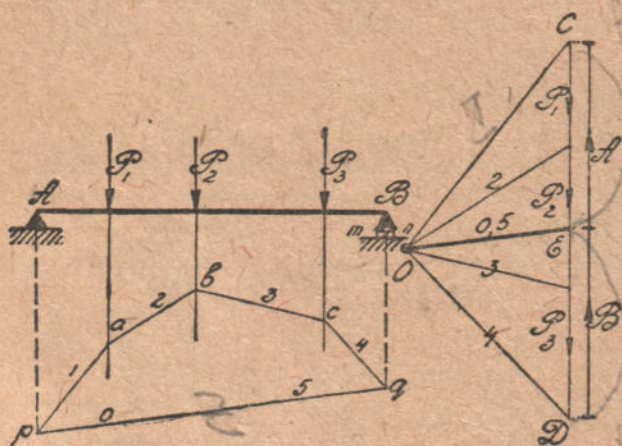
Мы ограничимся случаем симметричной арки. Пусть P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 и P_6 — веса отдельных клиньев, на которые разделяется левая половина арки (черт. 36), и сила R — равнодействующая этих весов. В силу симметрии можем заключить, что давление, передающееся от правой половины арки на левую через шарнир B , должно иметь горизонтальное направление. Проводя это направление до пересечения с равнодействующей R в точке m , заключаем, что в эту же точку непременно должна идти реакция шарнира A . Найдя таким образом направления реакций

в шарнирах A и B , мы путем построения соответствующего треугольника OMN (фиг. 6) определим также и величины этих реактивных усилий. Точку O примем за полюс, проведем лучи 2, 3, 4, 5 и 6 и построим соответствующий веревочный многоугольник 1234567.

Если представить себе этот многоугольник осуществленным из стержней, связанных шарнирами, то под действием сил P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 и P_6 в стержнях возникнут сжимающие усилия, величины которых определятся длинами соответствующих лучей. В действительности роль стержней выполняют клинья свода, и найденные нами усилия в стержнях как раз представляют собой искомые усилия, действующие между этими клиньями. Заметим здесь, что проекции всех этих усилий на горизонтальную ось одинаковы и равны усилию в шарнире B . Это усилие в дальнейшем будем называть распором арки или свода. Легко видеть, что величина распора при одних и тех же нагрузках будет тем больше, чем меньше подъем свода f по сравнению с пролетом l . Чем выше арка или свод, тем большее значение получает распор, стремящийся раздвинуть опорные шарниры A и C , тем большее внимание должно быть обращено на устойчивость опор.

Мы рассмотрели здесь случай симметричного расположения нагрузок, действующих на арку. Без всякого затруднения построение может быть распространено и на самый общий случай действия сил. Силы, приложенные к каждой половине свода, мы приводим к одной равнодействующей и потом для полученных таким путем R_1 и R_2 находим давления в шарнирах способом, указанным в задаче 20. Когда давления найдены, дальнейшее решение задачи будет идти тем же путем, что и в только что рассмотренном случае.

23. Требуется при помощи веревочного многоугольника определить опорные реакции для балки (черт. 37), подвергающейся действию системы вертикальных сил.



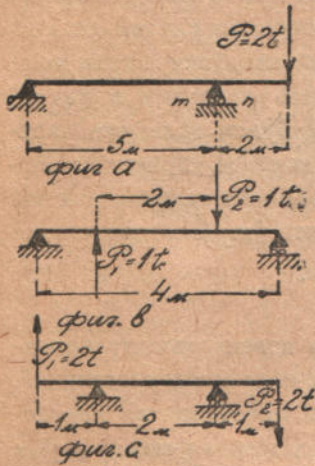
Черт. 37.

вновешивать заданные нагрузки P_1, P_2 и P_3 . Построим веревочный многоугольник abc , соответствующий трем заданным силам P_1, P_2 и P_3 . Присоединим теперь к заданным вертикальным реакциям, проходящим через точки A и B . В таком случае к нанесенным на чертеже трем вершинам a, b и c нужно присоединить еще две p и q и соответственно этому нужно к веревочному многоугольнику присоединить еще две стороны 0 и 5. Так как реакции и заданные силы взаимно уравновешиваются, то веревочный многоугольник должен быть замкнут, и стороны 0 и 5 должны слиться в одну прямую Pq , которую в дальнейшем будем называть замыкающей.

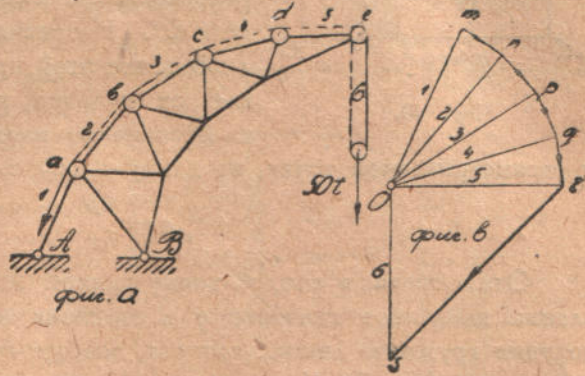
Левая опора балки представляет собой неподвижный шарнир. Правая опора расположена на катках, дающих возможность опоре без трения перемещаться по горизонтальной плоскости mn . При таком устройстве опоры правая опорная реакция, очевидно, должна быть вертикальной, и, так как внешние силы вертикальны, то вертикальной получится и левая опорная реакция. Выяснив таким путем линии действия опорных реакций, определим теперь величины этих сил из того условия, что они должны урав-

Проводя на многоугольнике сил луч 0,5, параллельный замыкающей, мы получим отрезки CE и ED , представляющие искомые реакции A и B . Направленная снизу вверх сила EC является равнодействующей усилий 1 и 0, сходящихся в точке ρ , и представляет, следовательно, реакцию A . Отрезок DE представит опорную реакцию в точке B .

24. Определить графическим путем опорные реакции для балок, представленных на чертеже 38.



Черт. 38.



Черт. 39.

25. Определить давления, передаваемые канатом подъемного крана (черт. 39) на катки a , b , c и d . Трением в катках и блоках можно пренебречь.

Многоугольник $abcde$ рассматриваем как веревочный многоугольник. Проводим из точки O (фиг. b) лучи, параллельные сторонам 1, 2, 3, 4, 5 и 6, и откладываем на них в масштабе постоянное натяжение каната, равное 25 т.

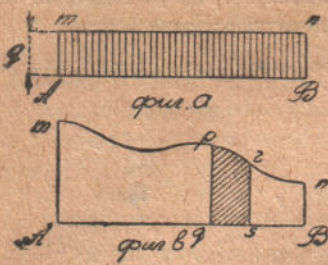
Получаемый таким путем многоугольник $mnpqrs$ представит нам многоугольник сил, действующих на катки.

§ 7. Веревочная кривая.

Во всех предыдущих построениях мы имели дело с конечным числом сосредоточенных сил. В технических задачах иногда приходится встречаться с случаями действия нагрузок, распределенных сплошным образом, например: с изгибом балок под действием собственного веса или гидростатического давления, с действием ветра, с давлением земли и т. д. Условимся прежде всего, как мы в этих случаях будем изображать нагрузки при графическом решении задач. Начнем с простейшего случая, когда по горизонтальной прямой AB равномерно распределена вертикально действующая нагрузка (стр. 40, фиг. a).

Количество нагрузки, приходящееся на единицу длины прямой, например, на 1 м, мы будем в дальнейшем называть интенсивностью нагрузки и обозначать буквой q . Если эту величину отложить в неко-

тором масштабе по вертикальному направлению от линии AB и провести линию $mn \parallel AB$, то эта линия будет представлять закон распределения



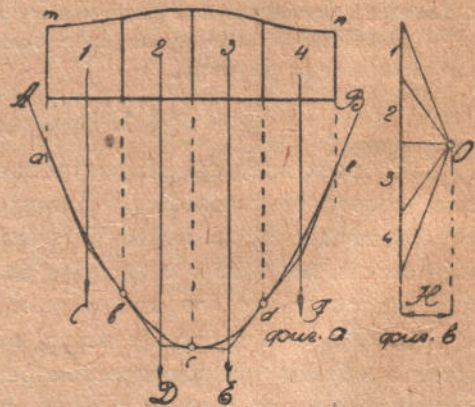
Черт. 40.

нагрузки вдоль AB . Такую линию мы в дальнейшем будем называть грузовой линией, а соответствующую площадь $AmnB$ — грузовой площадью. Подобного рода изображение можно распространить на случай любого распределения сплошной нагрузки вдоль прямой AB . Интенсивностью нагрузки в какой-либо точке этой прямой будем называть частное от деления нагрузки $\delta\rho$, приходящейся на бесконечно малый элемент длины, взятый у рассматриваемой точки, на длину этого элемента δx . Следовательно:

$$q = \frac{\delta\rho}{\delta x}.$$

Откладывая в каждой точке прямой AB по вертикальному направлению найденное значение q и соединяя концы отложенных отрезков, получим грузовую линию, которая, вообще говоря, представится некоторой кривой (фиг. b). Часть грузовой площади, заключенная между двумя какими-либо вертикальными прямыми rq и rs , представит собой, как то следует из определения, нагрузку, приходящуюся на элемент длины qs . При вычислении этой нагрузки нужно иметь в виду, что ординаты грузовой линии отложены в масштабе, принятом для q , т.-е., для величины, имеющей измерение $\frac{\text{сила}}{\text{длина}}$, абсциссы отложены в масштабе длины.

Непрерывно распределенную нагрузку можно рассматривать как систему бесконечно большого числа бесконечно малых грузов, расположенных бесконечно близко друг к другу. Вереvoчный многоугольник для такой системы сил обратится в плавную кривую, которую мы будем называть вереvoчной кривой. Построение веревочной кривой проще всего выполнить при помощи системы касательных, которые без всякого затруднения могут быть получены, раз только нам задана грузовая линия mn (черт. 41).

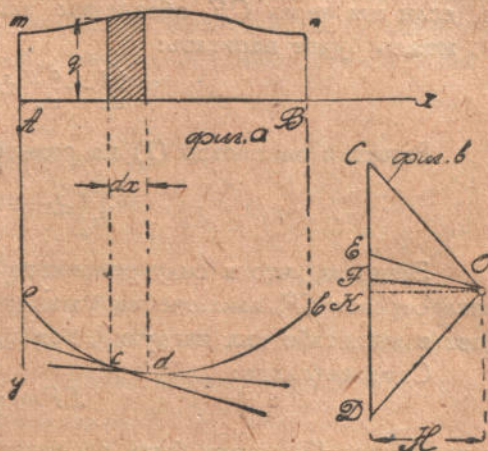


Черт. 41.

В самом деле, пусть ae — искомая веревочная кривая. Разделим заданную грузовую площадь на несколько участков 1, 2, 3 и 4 системой

вертикальных линий, которые продолжим до пересечения с веревочной кривой в точках b, c и d . Возьмем одним из отрезков веревочной кривой, например, отрезок ab , соответствующий 1-ой грузовой площади. Если мы в конечных точках a и b взятого отрезка проведем касательные к кривой, то они будут играть роль первой и последней стороны веревочного многоугольника для нагрузки участка 1, и потому точка C пересечения этих касательных непременно будет лежать на вертикали, проходящей через центр тяжести участка 1 грузовой площади. Совершенно таким же способом покажем, что касательные, проведенные в граничных точках b, c, d и e , пересекутся в точках D, E и F , лежащих в одних вертикалях с центрами тяжести участков 2, 3 и 4 грузовой площади. Система касательных образует таким образом веревочный многоугольник для сил 1, 2, 3 и 4, сосредоточенных в центрах тяжести соответствующих участков грузовой площади.

После этого мы можем дать такой порядок построения системы касательных. Заданную грузовую площадь разделяем на участки системой вертикальных линий. Определяем нагрузку, соответствующую каждому участку, и эту нагрузку откладываем в определенном масштабе на многоугольнике сил (фиг. b). Система лучей,



Черт. 42.

проведенных через произвольный полюс O к началу и концу каждого из отложенных отрезков 1, 2, 3 и 4, определит направления сторон веревочного многоугольника $aCDEFe$. Построив этот многоугольник, получим-нужную нам систему касательных к искомой веревочной кривой. Точки касания найдутся, как точки пересечения сторон веревочного многоугольника с вертикалями, разделяющими грузовую площадь на участки. Совершенно так же, как и в случае конечного числа сил, мы можем для заданной нагрузки построить сколько угодно веревочных кривых. Чем большим будет выбрано полюсное расстояние H , тем меньшими получаются углы между лучами на многоугольнике сил, тем более пологой будет соответствующая веревочная кривая.

Составим теперь дифференциальное уравнение для построенной таким образом веревочной кривой. Располагая координатные оси так, как это указано на чертеже 42, найдем, что тангенс угла наклона касательной к веревочной кривой, проведенной в какой-либо точке s , опре-

делится значением производной $\frac{dy}{dx}$. Пусть OE — луч, соответствующий этой касательной, и OK — горизонтальная линия.

Тогда:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} EOK = \frac{EK}{KO} \dots \dots \dots (1).$$

Возьмем теперь на веревочной кривой точку d , бесконечно близкую к точке c . Тангенс угла наклона касательной в этой новой точке веревочной кривой может быть представлен так:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) dx,$$

и, если мы через OF обозначим направление соответствующего луча, то можно будет написать:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{d^2y}{dx^2} dx = \frac{FK}{KO} \dots \dots \dots (2).$$

Вычитая равенство (1) из равенства (2), получаем:

$$\frac{d^2y}{dx^2} dx = - \frac{EF}{KO} \dots \dots \dots (3).$$

Заметим, что в силу основного свойства веревочного многоугольника отрезок EF , заключенный между двумя последовательными лучами, даст в масштабе сил нагрузку, лежащую на элементе dx (фиг. a).

Следовательно:

$$EF = q dx,$$

и уравнение (3) может быть переписано в таком виде:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = - \frac{q}{H} \dots \dots \dots (3').$$

Это и есть нужное нам дифференциальное уравнение веревочной кривой. Если только закон изменения интенсивности нагрузки q нам известен, мы можем, путем интегрирования ур-ия (3'), найти соответствующую веревочную кривую. Особенно просто решается задача, когда q — есть ф-ия только от x . В этом случае решение ур-ия (3') сводится к квадратурам, и мы сейчас же можем найти выражение для y . Возьмем, например, q — постоянным. Тогда интегрируя ур-ие (3') получаем:

$$H \frac{dy}{dx} = - qx + C_1 \dots \dots \dots (4);$$

$$Hy = - \frac{qx^2}{2} + C_1 x + C_2 \dots \dots \dots (5),$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Таким образом, в случае равномерного распределения сплошной нагрузки, веревочная кривая представляет собой параболу с вертикальной осью. Произвольные постоянные могут быть без труда определены

в каждом частном случае, если заданы дополнительные условия, которым должны удовлетворять веревочные кривые. Например, мы можем вполне определить веревочную кривую, если будем знать две точки, через которые она должна проходить. В самом деле, в этом случае для двух каких-то значений x мы будем знать соответствующие значения y . Вставляя в ур-ие (5) сначала одну, а потом другую пару значений y и x , получим два ур-ия, из которых и определяются значения C_1 и C_2 .

Ур-ием (5) обыкновенно пользуются при определении провисания электрических проводов, канатов подвесных дорог, цепей висячих мостов и т. д. Хотя в этих случаях нагрузка распределяется равномерно вдоль веревочной кривой, а не вдоль оси x , но при тех пологих кривых, с которыми мы обычно встречаемся на практике, получающиеся вследствие применения ур-ия (5) погрешности не имеют практического значения.

Определим в качестве примера натяжение электрического провода, точки привеса которого расположены на одной высоте (черт. 43). Располагая начало координат по середине пролета, заключаем из условий симметрии, что произвольная постоянная C_1 в ур-ии (5) должна обращаться в нуль. Что касается постоянной C_2 , то для ее определения воспользуемся условиями на концах. В точке привеса, при $x = \frac{l}{2}$, провисание y обращается в нуль, следовательно,



Черт. 43.

$$-\frac{q}{2} \left(\frac{l}{2}\right)^2 + C_2 = 0,$$

откуда

$$C_2 = \frac{ql^2}{8};$$

кривая провисания представится ур-ием

$$Hy = \frac{q}{8} (l^2 - 4x^2).$$

Наибольшее провисание будем иметь по середине пролета, где

$$(y)_{x=0} = f = \frac{ql^2}{8H}.$$

Этот результат нами уже был получен раньше (см. задачу 11) иным путем.

Если бы мы хотели учесть то обстоятельство, что при провисании проволоки нагрузка распределяется равномерно по длине дуги, а не по хорде, то нам нужно было бы в ур-ие (3) вместо EF поставить величину

$$q_0 ds,$$

где q_0 — вес единицы длины проволоки, ds — элемент дуги, определяемый формулой

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

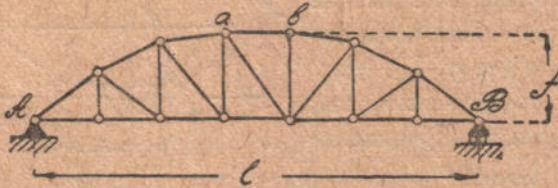
Вставляя это в ур-ие (3), получаем

$$H \frac{d^2y}{dx^2} = -q_0 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Это есть дифференциальное ур-ие для цепной линии ¹⁾.

В предыдущих примерах мы выбирали положение полюса таким образом, чтобы веревочная кривая была направлена выпуклостью вниз. В таком случае веревочной кривой соответствовала механическая модель в виде тяжелой гибкой нити. Если бы мы построили веревочную кривую, направленную выпуклостью вверх, то соответствующую ей модель можно

было бы представить себе в виде криволинейного жесткого стержня. Под действием приходящейся на него вертикальной нагрузки такой стержень испытывал бы только сжимающие напряжения. Различного рода очертания



Черт. 44.

этих веревочных кривых имеют практическое значение в связи с вопросом о выборе надлежащего очертания арок и сводов ²⁾. При равномерном распределении сплошной нагрузки вдоль горизонтальной оси получается параболическая веревочная кривая. Основываясь на этом, мы можем утверждать, что в стержневой системе (черт. 44), имеющей по верху параболическое очертание, при равномерном распределении сплошной нагрузки по l , наклонные стержни (раскосы) не будут напряжены. Все стержни верхнего очертания будут испытывать сжатие, которое для стержня ab определится по формуле

$$H = \frac{ql^2}{8f}.$$

В заключение отметим еще, что одно из самых важных технических приложений ур-ия веревочной кривой (3') основано на совпадении этого ур-ия с ур-ием изогнутой оси балки. Это обстоятельство позво-

¹⁾ Решение этого ур-ия и применение его к техническим вопросам имеется в нашем Сборнике задач по сопротивлению материалов. 7 изд. 1930 г., стр. 50.

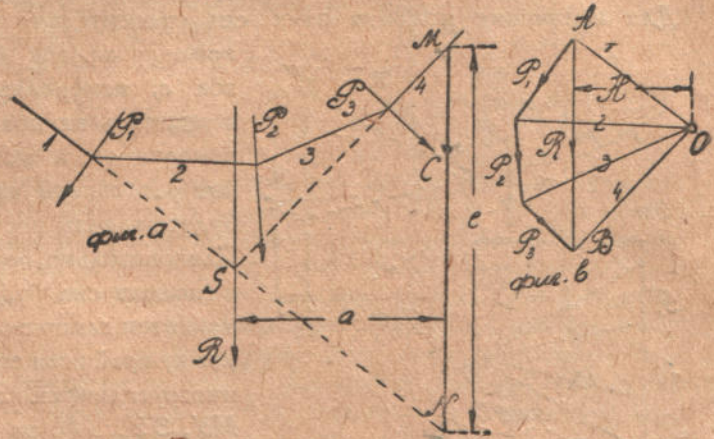
²⁾ Некоторые сведения об этих веревочных кривых имеются в курсе Ф. С. Ясинского. Собр. соч. Т. II, стр. 227. См. также W. Rankin. A manual of applied mechanics. 1870 г., стр. 162—209.

ляет строить исковленную ось изогнутой балки, как некоторую веревочную кривую¹⁾.

§ 8. Графическое изображение моментов сил.

При решении задач статики приходится иногда вычислять моменты системы сил. Задача эта без затруднения может быть выполнена аналитически; но, если для заданной системы сил построен веревочный многоугольник, то величина момента, легко находится из чертежа. Такое графическое определение момента, как мы дальше увидим, имеет особые преимущества в случае системы параллельных сил.

Начнем с любого расположения сил. Положим нам заданы силы P_1, P_2, P_3 , и требуется найти момент этих сил относительно точки C (черт. 45). Построением веревочного многоугольника 1 2 3 4 мы определяем линию действия равнодействующей R заданной системы



Черт. 45.

сил. Для вычисления искомого момента нужно величину равнодействующей R помножить на расстояние a от точки C до равнодействующей R . При этом расстояние a придется измерить в масштабе длины, который был принят для составления чертежа расположения сил (фиг. а), и равнодействующую R —в масштабе сил. Легко показать, что произведение aR равно произведению eH , где H —расстояние от полюса O до равнодействующей R (фиг. б) и e —длина отрезка MN , заключенного между крайними сторонами веревочного многоугольника и проведенного через заданную точку C параллельно равнодействующей R . В самом деле, легко видеть, что треугольник NSM подобен треугольнику AOB , так как стороны этих треугольников взаимно параллельны. На основании этого подобия можем написать:

$$\frac{e}{R} = \frac{a}{H},$$

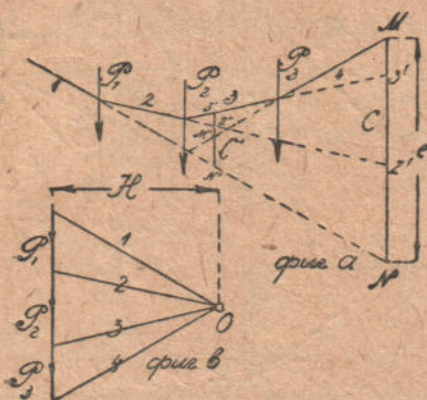
¹⁾ См. Курс сопротивления материалов. 9 изд. 1930 г., стр. 207.

откуда получим

$$eH = aR.$$

Следовательно, для получения нужного нам момента следует провести через заданную точку C линию параллельно равнодействующей R и измерить в масштабе длин величину отрезка e , заключенного между крайними сторонами веревочного многоугольника. Эту длину нужно помножить на полюсное расстояние H , измеренное в масштабе сил. Такой путь вычисления представляет преимущества, когда мы переходим к параллельным силам.

Пусть нам задана система параллельных сил P_1, P_2 и P_3 (черт. 46). Для получения момента этих сил относительно какой-либо точки C



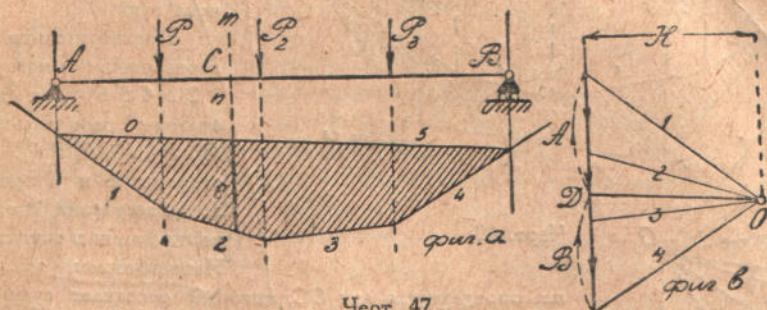
Черт. 46.

приходится, как было показано, отрезок e , измеренный в масштабе длин, помножить на полюсное расстояние H , измеренное в масштабе сил. Полюсное расстояние при всех вычислениях будет входить постоянным множителем. Следовательно, при перемещениях точки C момент сил будет меняться так, как меняется длина e отрезка, заключенного между крайними сторонами веревочного многоугольника. Заметим, что участки $MZ', Z'Z'', Z''N$, на которые разбивается отрезок MN , могут служить для определения моментов отдельных сил.

Чтобы получить, например, момент силы P_1 относительно точки C , нужно только длину соответствующего отрезка $Z'N$ умножить на полюсное расстояние H . Каждый из участков, на которые подразделяется отрезок MN продолжениями сторон веревочного многоугольника, является как бы меркой момента соответствующей силы. То обстоятельство, что точки пересечения M, Z', Z'', N идут в том же порядке, как и соответствующие стороны веревочного многоугольника 1, 2, 3 и 4, указывает на одинаковость знака моментов всех заданных сил. Если бы мы взяли вместо точки C точку C' , то для вычисления момента всех сил относительно этой точки пришлось бы взять отрезок $M'N'$. Силы P_1 и P_2 дали бы моменты такого же знака, как и прежде. Сила же P_3 дала бы момент противоположного знака. Подобный прием вычисления моментов можно, очевидно, распространить и на случай сплошной распределенной нагрузки. Вместо веревочного многоугольника нам придется лишь построить веревочную кривую. Касательные к этой кривой будут играть такую же

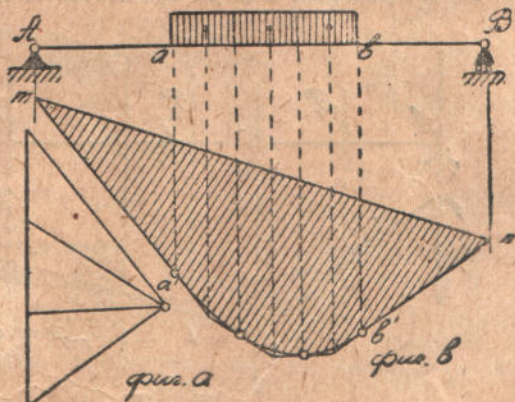
роль, как стороны веревочного многоугольника в предыдущем построении. Применим теперь эти построения к решению технических задач.

Задачи: 26. Построить при помощи веревочного многоугольника эпюру изгибающих моментов для балки с опертми концами (черт. 47) при действии системы параллельных сил.



Черт. 47.

Изгибающим моментом в каком-либо поперечном сечении mn балки называется момент всех сил, лежащих по одну сторону сечения, относительно центра тяжести этого сечения C . Для определения этого момента найдем предварительно опорные реакции, как это было указано в задаче 23 (§ 6). Луч OD , параллельный замыкающей $0,5$, даст нам величины опорных реакций. Стороны 0 и 5 , сливающиеся в одну замыкающую линию, представляют первую и последнюю стороны нашего веревочного многоугольника. Изгибающий момент в сечении mn представляет собой, по определению, момент опорной реакции A и силы P_1 относительно точки C . Для этой системы, состоящей из двух сил, первой и последней сторонами веревочного многоугольника являются стороны 0 и 2 . Для вычисления нужного нам момента придется измерить отрезок e в том масштабе, в котором отложен пролет балки, и умножить длину e на полюсное расстояние H , измеренное в масштабе сил. Таким образом изгибающие моменты по длине балки будут изменяться по тому же закону, как и длины соответствующих вертикальных отрезков e , в ятых в пределах заштрихованной на чертеже площади. Площадь эту в дальнейшем будем называть моментной площадью. Она и представит нам искомую эпюру изгибающих моментов

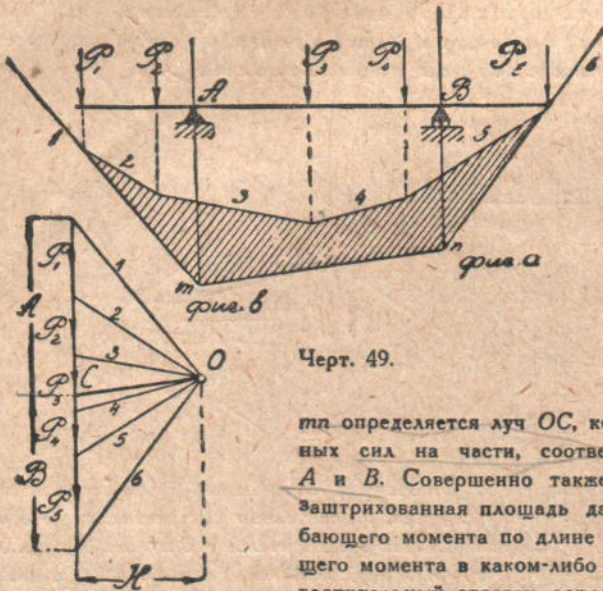


Черт. 48.

27. Эпюра изгибающих моментов при действии сплошной нагрузки (черт. 48) может быть построена таким же путем.

На протяжении $a'b'$ мы поместим вместо веревочного многоугольника веревочную кривую, в данном случае равномерной нагрузки — параболу. Касательные к этой кривой в точках a' и b' определит пересечения с крайними вертикалями замыкающую

Заштрихованная на чертеже площадь представит искомую эпюру изгибающих моментов. Максимальное значение изгибающего момента соответствует той точке, где касательная к параболе параллельна замыкающей mn .

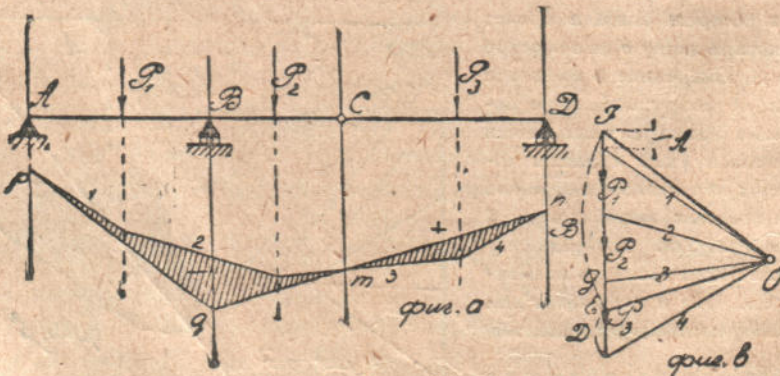


Черт. 49.

mn определяется луч OC , который рассекает сумму заданных сил на части, соответствующие опорным реакциям A и B . Совершенно также, как и в предыдущих задачах, заштрихованная площадь дает нам закон изменения изгибающего момента по длине балки. Для получения изгибающего момента в каком-либо сечении нужно соответствующий вертикальный отрезок, лежащий в пределах заштрихованной

площади, измерить в масштабе длины и умножить на полюсное расстояние H , измеренное в масштабе сил.

29. Эпюра изгибающих моментов для сложной системы, составленной из простой и консольной балок, связанных между собой шарниром C (черт. 50), получится так.



Черт. 50.

Строим сначала веревочный многоугольник 1 2 3 4 для заданных сил P_1, P_2 и P_3 . Часть веревочного многоугольника, состоящая из сторон 3 и 4, относится к нагрузке P_3 , лежащей на простой балке CD . Соединяя точки пересечения сторон 3 и 4 с вертикалями, проходящими через опорные точки C и D простой балки, замыкающей линией mn , получаем моментную площадь для простой балки. Чтобы получить теперь моментную

28. Эпюра изгибающих моментов для балки с консолями (черт. 49) может быть получена так.

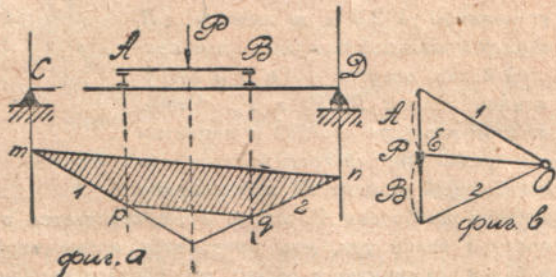
Предварительно строим веревочный многоугольник 1 2 3 4 5 6 для заданной системы параллельных сил P_1, P_2, P_3, P_4 и P_5 . Крайние стороны 1 и 6 продолжаем до пересечения с опорными вертикалями в точках m и n . Направлением замыкающей

щадь для консольной балки AC , нужно к силам P_1 и P_2 присоединить еще давление, передаваемое на консольную балку в точке C . Величина EG этого давления получена на фиг. b проведением луча OE , параллельного замыкающей mn . Веревоочный многоугольник для сил P_1, P_2 и GE будет иметь своими сторонами линии 1, 2, 3 и линию mn . Продолжая крайние стороны 1 и mn до пересечения с опорными вертикалями в точках p и q и проводя замыкающую pq , получим искомую моментную площадь для консольной балки. Проведением луча OF , параллельного замыкающей pq , мы получим опорные реакции A и B для консольной балки. Из условия равновесия следует, что опорная реакция B направлена вверх, а реакция A — вниз. То обстоятельство, что стороны 1, 2 и 3 веревочного многоугольника располагаются выше замыкающей pq , а стороны 3 и 4 ниже замыкающей mn , указывает на то, что и изгибающий момент на протяжении консольной балки имеет иной знак нежели на протяжении простой балки CD . Легко проверить, что для любого сечения консольной балки момент всех сил, лежащих слева от сечения, относительно центра сечения имеет направление противоположное часовой стрелке. Если же мы возьмем простую балку CD и составим для какого-либо сечения момент сил, приложенных к балке по левую сторону сечения, то найдем, что этот момент направлен по часовой стрелке. Сохраняя правило знаков, принятое в курсе сопротивления материалов, будем считать изгибающие моменты для простой балки положительными и для консольной балки отрицательными.

30. Эпюра изгибающих моментов при узловой передаче нагрузки.

При расчете инженерных сооружений приходится встречаться с балками, на которые нагрузки не действуют непосредственно, а передаются при посредстве промежуточных балочек в определенные точки

(узлы)¹⁾. Положим, например, что груз P передается балке CD при посредстве балочки AB (черт. 51). Выясним, как повлияет эта узловая передача нагрузки P на очертание моментной площади для балки CD . При непосредственной передаче силы для получения моментной площади нужно только провести стороны 1 и 2 веревочного многоугольника и замыкающую mn . При наличии промежуточной балочки AB на балку CD передадутся давления в точках A и B . Для получения этих давлений нужно через A и B провести вертикали до пересечения с веревочным многоугольником в точках p и q . Проводя луч OE параллельно линии pq , найдем нужные нам давления A и B , передающиеся на балку CD . Многоугольник $trpq$ будет веревочным многоугольником для этих давлений и заштрихованная на чертеже площадь — искомой моментной площадью.

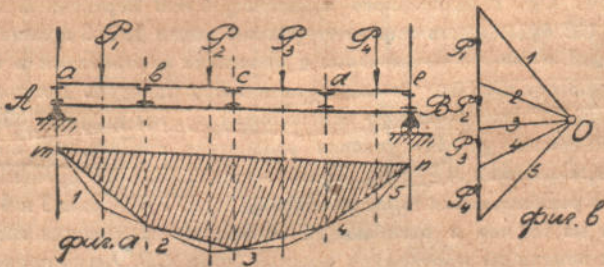


Черт. 51.

Повторяя такие же рассуждения для каждой из промежуточных балочек системы, представленной на чертеже 52, приходим к такому правилу для построения моментной площади в случае узловой передачи нагрузок. Строим сначала для заданной системы сил P_1, P_2, P_3, P_4 веревочный многоугольник 1 2 3 4 5 и замыкающую mn . После этого

¹⁾ Например, в мостах давления от движущейся по мосту нагрузки (подвижной нагрузки) передаются обыкновенно продольным балочкам. Эти последние передают при посредстве поперечных балок давления в узлы главных мостовых балок.

проводим через промежуточные узлы b , c и d вертикали до пересечения со сторонами построенного веревочного многоугольника. Соседняя полученная таким образом точки пересечения, получим нужное нам очертание моментной площади, заштрихованной на чертеже.



Черт. 52.

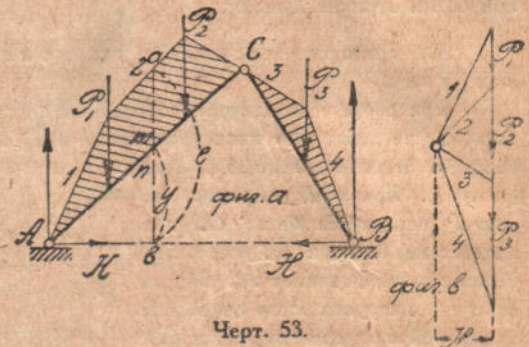
31. Построить эпюру изгибающих моментов для трехшарнирной арки, нагруженной системой вертикальных сил.

Предположим, что опорные шарниры расположены на одной высоте и система составлена из двух брусков AC и CB , связанных в вершине шарниром C (черт. 53). Строим для заданных сил P_1 , P_2 и P_3 веревочный многоугольник $1\ 2\ 3\ 4$, проходящий через центры шарниров A , C и B (см. § 5). Усилия в сторонах 1 и 4 представляют нам опорные реакции в шарнирах A и B .

Полюсное расстояние H определит горизонтальную составляющую опорных реакций. Вертикальные реакции будут, очевидно, такие же, как для простой балки, положенной на опоры A и B . Площадь, ограниченная многоугольником $1\ 2\ 3\ 4$ и линией AB , служит моментной площадью для простой балки, опертой в A и B и нагруженной силами P_1 , P_2 и P_3 . Чтобы от этой площади перейти к моментам для трехшарнирной арки, заметим, что изгибающий момент M в каком-либо сечении mn бруска AC и шпй арки отличается от соответствующего момента M_0 для простой балки тем, что приходится кроме вертикальных сил, одинаковых для арки и балки принимать в расчет еще горизонтальную составляющую H опорной реакции арки. Принимая во внимание, что для простой балки $M_0 = He$, и что момент горизонтальной реакции H относительно центра сечения mn равен $Hу$, получаем

$$M = H(e - y).$$

Следовательно, для получения изгибающих моментов для брусков трехшарнирной арки ACB , придется измерять в масштабе длин соответствующие вертикальные отрезки, лежащие в пределах заштрихованной на чертеже площади и умножать эти отрезки на полюсное расстояние H , измеренное в масштабе сил. Заштрихованная площадь представляет, таким образом, искомую моментную площадь для брусков трехшарнирной арки. То же построение моментной площади остается и в том случае, когда бруски AC и CB трехшарнирной арки имеют криволинейное очертание; из ординат веревочного многоугольника для вертикальных нагрузок, проходящего через шарниры A , C и B нужно вычесть ординаты, соответствующие оси арки. Без особых затруднений построение может быть распространено также на тот случай, когда опорные шарниры лежат не на одной высоте. В этом случае вертикальные ординаты веревочного многоугольника и



Черт. 53.

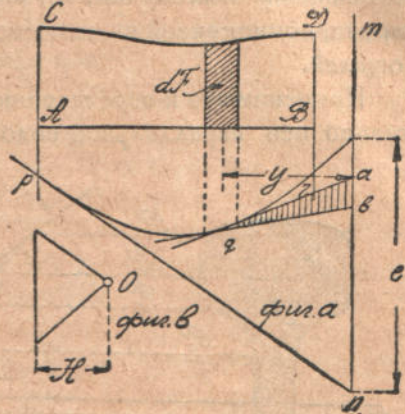
ординаты точек оси арки придется отсчитывать от наклонной линии, соединяющей центры опорных шарниров.

§ 9. Определение статических моментов и моментов инерции плоских фигур.

Веревочным многоугольником можно воспользоваться для вычисления статических моментов и моментов инерции плоских фигур. При вычислении статического момента фигуры $ABDC$ (черт. 54) относительно оси mn приходится всю площадь фигуры разбить на малые площадки dF , умножить каждую такую площадку на расстояние y до оси mn и потом составить сумму:

$$\int y dF \dots \dots (1),$$

при чем суммирование должно быть распространено на всю площадь фигуры. Указанное вычисление может быть заменено построением, если мы будем рассматривать данную фигуру $ABDC$, как грузовую площадь, и применим построение, которым мы пользовались при определении моментов от сплошной нагрузки. Выбираем определенный масштаб для площадей, выбираем произвольное полюсное расстояние H и строим соответствующую веревочную кривую pqr . Касательные, проведенные в крайних точках p и r этой кривой, играют роль первой и последней стороны веревочного многоугольника. Отрезок e , выделенный на заданной оси mn этими касательными, будет служить меркой искомого статического момента. Для получения численной его величины, нужно измерить отрезок e в масштабе длины и умножить его на полюсное расстояние, измеренное в масштабе, принятом для площадей.



Черт. 54.

Заметим здесь, что две последовательные касательные, проведенные к веревочной кривой в точках, соответствующих границам бесконечно малой площадки dF , выделяют на оси mn отрезок ab , который будет служить меркой статического момента площадки dF относительно оси mn . Для получения этого статического момента нужно только помножить длину ab на полюсное расстояние H . Следовательно:

$$y dF = ab \cdot H \dots \dots \dots (2)$$

Если обе части равенства умножить на y , то найдем

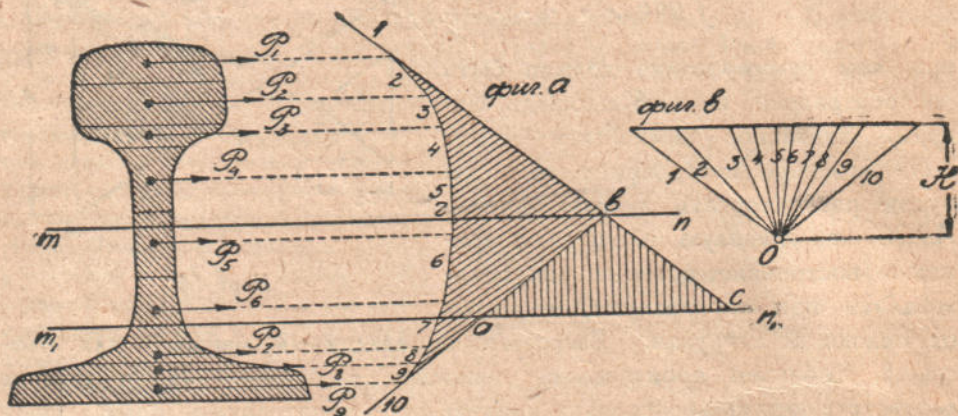
$$y^2 dF = ab \cdot H \cdot y = 2 \times \text{пл. } \triangle abq \cdot H \dots \dots \dots (3).$$

Этим равенством воспользуемся для определения момента инерции плоской фигуры ADC относительно оси mn . Вычисление момента инерции сводится, как известно ¹⁾, к нахождению интеграла

$$\int_F y^2 dF \dots \dots \dots (4).$$

На основании равенства (3) заключаем, что этот интеграл равен удвоенной площади, заключенной между веревочной кривой, крайними касательными и осью mn , относительно которой вычисляется момент инерции, помноженной на полюсное расстояние H , измеренное в масштабе площадей.

Применим это к определению момента инерции сечения рельса относительно оси параллельной подошве и проходящей через центр тяжести



Черт. 55.

фигуры (черт. 55). Для этого разделяем всю фигуру на части линиями, параллельными подошве. Число делений выбираем таким, чтобы каждая часть могла быть принята без особых погрешностей за трапецию. Вычисляем площади отдельных частей, определяем положения их центров тяжести и в этих точках прикладываем фиктивные силы P_1, P_2, \dots , представляющие в известном масштабе найденные выше площади отдельных участков. Строим для этих сил соответствующий веревочный многоугольник; пересечением крайних сторон 1 и 10 веревочного многоугольника определяется положение оси mn , относительно которой нужно найти момент инерции фигуры. Удвоенная площадь заключенная между веревочной кривой и крайними касательными 1 и 10, умноженная на полюсное расстояние H , даст нам искомый момент инерции. При вычислении нужно величину H измерить в том масштабе, в котором были отложены пло-

¹⁾ См. Курс сопротивления материалов. 9 изд. 1930 г., стр. 127.

щади ρ_1, ρ_2, \dots . Следовательно, полюсное расстояние будет представлять некоторую площадь. Площадь, заключенная между вервочной кривой и крайними касательными, должна быть измерена в том же масштабе, в каком дана площадь сечения рельса. Тогда произведение из полюсного расстояния на удвоенную площадь даст нам момент инерции действительного сечения рельса. Из чертежа сразу видно, что момент инерции фигуры относительно какой-либо оси $m_1 n_1$, параллельной mn , будет больше только что найденного момента инерции: к прежней наклонно заштрихованной площади придется присоединить площадь вертикально заштрихованного треугольника abc .

ГЛАВА II.

Статически определяемые плоские фермы.

§ 10. Условия геометрической неизменяемости плоских ферм.

Многие инженерные сооружения представляют собой системы, составленные из стержней, связанных между собой по концам. Такие стержневые системы условимся называть в дальнейшем фермами. В таком случае, когда оси всех стержней сооружения располагаются в одной плоскости, мы будем иметь плоскую ферму. Примером таких систем могут служить большинство стропильных ферм, поддерживающих кровли зданий, покрытия платформ и т. д.

Плоские фермы составляют обыкновенно главную часть мостовых сооружений. На плоские фермы иногда можно разложить и более сложные стержневые системы. Поэтому приемы расчета плоских систем представляют большой практический интерес.

Для упрощения расчетов делают обычно такие допущения:

1) Предполагают, что стержни системы связаны между собой в узлах идеальными шарнирами, допускающими свободное поворачивание концов стержней при деформации фермы. Если внешние силы сосредоточены в узлах, то при наличии шарнирных соединений отдельные стержни будут работать лишь на растяжение или сжатие: нам совершенно не придется иметь дела с изгибом стержней (см. задачу 4 § 1).

2) Предполагают, что деформации ферм, под действием внешних сил, настолько малы, что можно пренебрегать перемещением узлов фермы и связанными с этим небольшими изменениями в расположении приложенных к узлам сил. Мы будем в дальнейшем исходить из первоначального недеформированного состояния фермы и относительное расположение стержней, соответствующее этому состоянию, будем класть в основание графических расчетов.

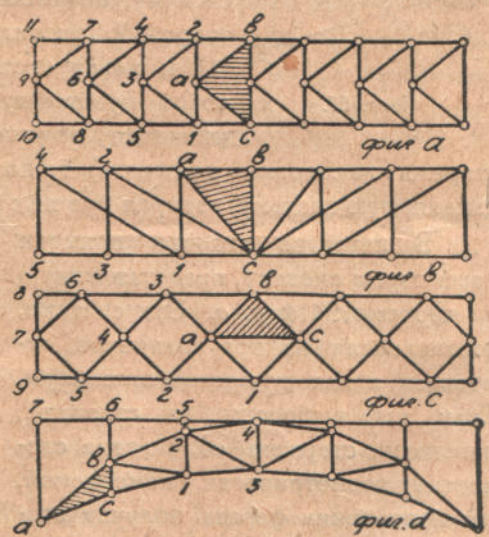
Сделанные два допущения дают возможность привести расчет многих ферм к самым элементарным построениям графической статики.

При составлении ферм большую роль играет вопрос о геометрической неизменяемости системы, и в первую очередь приходится решать

задачу, какое число стержней необходимо взять, чтобы связать в геометрически неизменяемую систему заданное число узлов. Для решения этого вопроса будем исходить сначала из такого способа образования фермы. Соединим три узла при помощи трех стержней. Таким образом мы получим жесткую геометрически неизменяемую систему — треугольник, форма которого вполне определяется длинами трех его сторон. Всякий новый узел мы можем присоединить к полученной нами жесткой системе при помощи двух стержней. Если эти стержни не будут располагаться по одной прямой, то таким путем мы будем получать жесткое присоединение каждого нового узла, будем получать жесткие, неизменяемые системы. Положим, что последовательным присоединением все новых узлов мы, в заключение, получили систему с n узлами. Какое число стержней придется взять для образования системы? На соединение первых трех узлов мы употребили три стержня, на присоединение каждого из оставшихся $n - 3$ узлов мы употребляем по два стержня. Следовательно, на образование всей системы нужно:

$$3 + 2(n - 3) = 2n - 3 \dots \dots \dots (1)$$

стержней. Системы, получаемые описанным здесь способом, очень легко могут быть рассчитаны, их часто применяют на практике для мостов и стропил. Мы в дальнейшем будем называть эти системы простейшими. Легко показать, что системы, представленные на чертеже 56, принадлежат к классу простейших¹⁾. Исходя из заштрихованного треугольника abc , мы можем получить каждую из этих систем путем последовательного присоединения каждого нового узла двумя стержнями. Порядок присоединения узлов указан для одной половины фермы соответствующими номерами.

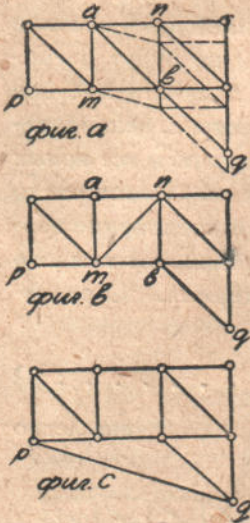


Черт. 56.

Из каждой простейшей системы мы можем получить целый ряд других систем таким путем: выбросим один из стержней простейшей системы, тогда система перестанет быть геометрически неизменяемой,

¹⁾ Шарниры отмечены кружками. В местах, где кружков нет, стержни предполагаются не соединенными друг с другом.

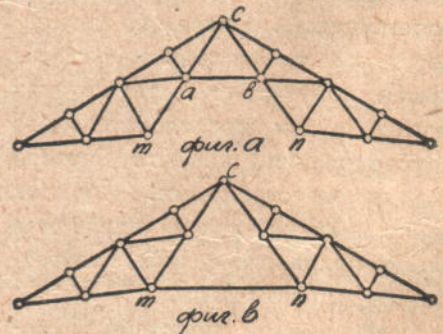
она получит возможность менять свою форму без изменения длин стержней. При таких изменениях формы расстояния между некоторыми узлами системы будут изменяться, и мы можем получить новую геометрически неизменяемую систему, если помешаем этому изменению расстояния путем вставки нового стержня между соответствующими узлами.



Черт. 57.

Возьмем, например, простейшую систему, представленную на фиг. а черт. 57. Если выбросить стержень ab , то средний прямоугольник системы, лишенный диагонали, будет представлять собой изменяемую систему. При его перекашивании система займет положение, указанное на чертеже пунктиром. Такое перемещение системы будет сопровождаться, как это легко видеть, изменением расстояния между узлами m и n . Если помешать этому изменению расстояния и вместо выброшенного стержня ab вставить новый стержень mn , то мы опять будем иметь геометрически неизменяемую систему, представленную на фиг. б. Общее число стержней, очевидно, будет удовлетворять условию (1), и новая система, как легко видеть, представит собой простейшую ферму. Если бы мы для уничтожения подвижности системы вставили вместо стержня mn стержень pq (фиг. с), то получили бы новую геометрически неизменяемую систему, которая уже не относится к классу простейших ферм.

В качестве второго примера рассмотрим систему, представленную на чертеже 58 фиг. а. Эта система, составленная из треугольников, относится к классу простейших ферм. Если мы выбросим из стержней, например, стержень ab , система делается геометрически изменяемой, одна половина фермы получит возможность перемещаться относительно другой путем вращения относительно шарнира c . При таком вращении

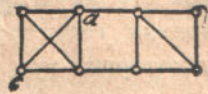


Черт. 58.

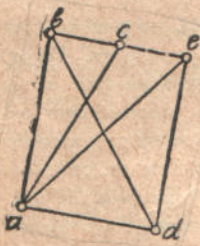
расстояния между некоторыми узлами системы меняются, и мы сможем получить новую геометрически неизменяемую систему, если помешаем указанному изменению расстояния путем введения нового стержня взамен выброшенного стержня ab . На фигуре б показана новая система, полученная из прежней путем замены стержня ab стержнем mn .

Это так называемая система Полонсо, часто применяемая для стропильных ферм. Эта новая система не принадлежит уже к классу простейших. Легко убедиться, что ее нельзя получить, исходя из треугольника, путем последовательного присоединения каждого нового узла двумя стержнями. Описанный здесь способ образования новых систем называют способом замены стержней. При этом общее число стержней остается неизменным и удовлетворяет условию (1). Условие это является необходимым для обеспечения геометрической неизменяемости системы, но оно не всегда достаточно.

При пользовании способом замены стержней необходимо наблюдать еще за тем, чтобы всякий новый заменяющий стержень, вставляемый взамен одного из отброшенных, располагался между такими узлами соответствующей изменяемой системы, расстояние между которыми может изменяться без изменения длин стержней. Если бы мы, например, в системе, представленной на чертеже 57, выбросив стержень ab , вставили, в качестве заменяющего стержня, вторую диагональ ac в левом прямоугольнике системы (см. черт. 59), то получили бы геометрически изменяемую систему, хотя условие (1) было бы соблюдено. Заменяющий стержень при этом был бы вставлен между узлами a и c , расстояние между которыми является неизменным, так как левый прямоугольник с одной диагональю представляет собой жесткую систему.



Черт. 59.



Черт. 60.

Поясним примером еще одно обстоятельство, которое нужно иметь в виду при образовании новых систем путем замены стержней. Пусть нам дана простейшая система $abcde$, составленная из семи стержней (черт. 60). Выбрасывая стержень ac , мы получим геометрически изменяемую систему: стержень bc получит возможность свободно вращаться относительно шарнира b . Мы можем уничтожить подвижность системы и снова получить жесткую ферму, если соединим точку c с точкой d и вставим, следовательно, вместо стержня ac стержень cd . Иной результат получится, если мы, в качестве заменяющего стержня, выберем стержень ce . В таком случае стержни bc и ce располагаются по одной прямой. Малым изменениям длин, которые получаются от упругих деформаций стержней bc и ce , будут соответствовать значительные перемещения точки c ¹⁾, и система получится не жесткой. Хотя в данном случае заменяющий стержень расположен между точками c и e , расстояние между которыми

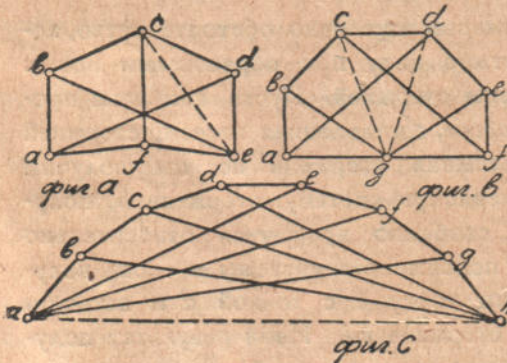
¹⁾ См. Сборник задач по сопротивлению материалов. 7 изд. 1930 г. Стр. 39. Задача 82.

не может меняться без изменения длины стержней, но при нашем расположении расстояние это имеет значение минимума. Малым отклонениям точки c , получающимся при вращении стержня bc около шарнира b , будут соответствовать изменения расстояния ce , являющиеся величинами второго порядка малости по сравнению с перемещениями точки c . Чтобы избежать получения не жесткой системы, не следует ставить заменяющий стержень между узлами, расстояние между которыми имеет значение максимума или минимума.

Если при пользовании способом замены стержней не будут допущены случаи, которые были иллюстрированы примерами черт. 59 и черт. 60, то мы всегда придем к геометрически неизменяемой системе, и число необходимых стержней будет удовлетворять условию (1). Введение в такую систему дополнительных стержней будет излишним с точки зрения геометрической неизменяемости, и в дальнейшем те системы, у которых при n узлах число стержней больше, чем $2n-3$, мы будем называть системами с лишними стержнями. Для расчета таких систем, как мы дальше увидим, недостаточно будет пользоваться уравнениями статики, придется составить еще дополнительные условия, получаемые на основании рассмотрения деформации системы.

Задача 32. Показать, что системы, представленные на чертеже 61, могут быть получены из простейших путем замены стержней.

По числу стержней все эти системы удовлетворяют условию (1), но они не принадлежат к классу простейших.



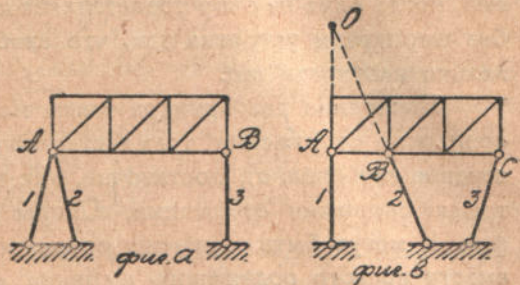
Черт. 61.

Из системы, представленной на фиг. a , мы могли бы получить простейшую систему, если бы выбросили стержень ad и заменили его стержнем ce , отмеченным на чертеже пунктиром. К простейшей системе можно было бы перейти, конечно, и другими способами. Систему, представленную на фигуре b , можно обратить в простейшую, заменив стержни ad и cf стержнями cg и dg . Наконец, система, представленная на фигуре c , обращается в простейшую, если стержень ae заменить стержнем ah .

§ 11. Прикрепление геометрически неизменяемых систем к земле.

Чтобы геометрически неизменяемую систему связать при помощи стержней с землей, обыкновенно поступают так. Один из узлов системы закрепляют неподвижно при помощи двух стержней (фиг. a , черт. 62). Таким путем исключается возможность поступательного перемещения

системы. Чтобы исключить возможность вращения системы относительно закрепленной точки A , достаточно еще один какой-либо узел B прикрепить к земле одним стержнем. Таким образом для полного прикрепления геометрически неизменяемой системы к земле необходимо иметь три опорных стержня. Эти опорные стержни можно расположить и иначе, чем то принято на фиг. *a*, например, можно прикрепить их в трех различных узлах системы (фиг. *b*). Прикрепив к земле узлы A и B стержнями 1 и 2, мы еще не лишаем нашу систему возможности перемещаться относительно земли.

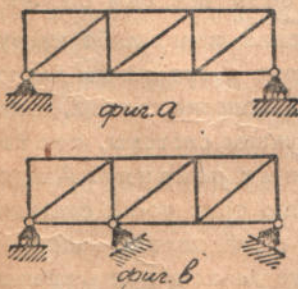


Черт. 62.

Возможные перемещения будут соответствовать вращению системы относительно мгновенного центра O . Чтобы исключить возможность такого вращения, необходимо прикрепить к земле опорным стержнем 3 еще какой-либо узел C системы.

На практике вместо опорных стержней применяют обыкновенно опорные подушки с шарнирами. Эти подушки передают давления от фермы на кладку фундамента. Различают неподвижные и подвижные опоры.

Неподвижный опорный шарнир соответствует прикреплению какого-либо узла фермы двумя опорными стержнями. Подвижная опора располагается обыкновенно на цилиндрических катках, которые обеспечивают возможность свободного движения опорной подушки параллельно некоторой плоскости. Такая опора соответствует прикреплению узла фермы одним опорным стержнем. На чертеже 63 показано устройство опор, соответствующее фигурам *a* и *b* предыдущего чертежа.



Черт. 63.

Плоскости скольжения подвижных опор располагаются, очевидно, перпендикулярно к направлениям соответствующих стержней. Случай, представленный на фиг. *a*, особенно часто встречается на практике. Здесь подвижная опора имеет возможность перемещаться по горизонтальному направлению. Пренебрегая трением, заключаем, что соответствующая опорная реакция непременно будет вертикальной. Если на такую систему действуют вертикальные нагрузки, то вызываемые ими реакции тоже будут вертикальны. Такие системы будем называть балочными системами.

Иногда применяют также опоры без шарниров. Два примера таких опор показаны на чертеже 64. На фиг. *a* представлен случай, когда сооружение закреплено всем сечением *mn*. На фигуре *b* мы имеем пример, когда одна из опор представляет подвижной шарнир. Вторая опора — без шарнира и устроена так, что свободно может перемещаться параллельно плоскости *mn*.

Последние два примера также могут быть сведены к случаю прикрепления сооружения тремя стержнями. Чтобы совершенно закрепить сечение *mn* (фиг. *a*), достаточно, как мы видели, соединить его с землей тремя опорными стержнями. Опоры сооружения, представленного на фиг. *b*, могут быть заменены опорными стержнями следующим образом: вместо правого подвижного шарнира следует поставить один опорный

стержень; его направление должно быть, очевидно, перпендикулярным к плоскости скольжения подвижной опоры. Вместо левой опоры, допускающей



Черт. 64.

свободное скольжение параллельно плоскости *mn*, нужно поставить два параллельных опорных стержня, направленных перпендикулярно к плоскости *mn*.

Итак, чтобы плоскую жесткую систему неизменно связать с землей, лишить ее трех степеней свободы, необходимо поставить три опорных стержня или применить одно из перечисленных выше опорных устройств, эквивалентное трем опорным стержням.

При таком устройстве опор легко могут быть найдены опорные реакции, возникающие при действии на сооружение каких-либо нагрузок. Число неизвестных реактивных усилий сводится к трем, и мы для их определения можем использовать три уравнения равновесия для сил, лежащих в одной плоскости. Таким образом мы получаем системы, статически определимые относительно опорных реакций. Аналитическое определение реакций сводится к решению трех ур-ий статики.

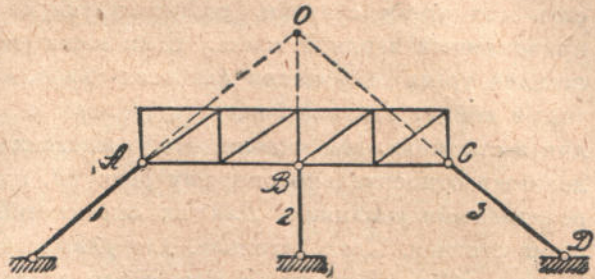
При графическом решении задача сведется к разложению заданной силы на три заданные направления, что мы уже делали при решении целого ряда задач (см. § 2 задачи 9, 10, 12, 13 и 14).

Отметим здесь один исключительный случай, когда, несмотря на наличие трех опорных стержней, соединение фермы с землей получается не жестким. Такой случай мы будем иметь, когда все три опорные стержня пересекаются в одной точке (черт. 65). В самом деле, прикрепляя сооружение двумя стержнями 1 и 2, мы его еще не лишаем возможности перемещаться относительно земли. Возможным перемеще-

нием сооружения будет в этом случае вращение около мгновенного центра O , получающегося в пересечении осей стержней 1 и 2. При этом перемещении расстояния отдельных узлов системы от земли будут изменяться.

Если мы этому изменению помешаем и какой-либо узел C прикрепим к земле стержнем 3, то, вообще говоря, мы получим жесткое соединение фермы с землей. Но если мы за направление третьего стержня выберем направление CD , проходящее через мгновенный центр O , то этому расположению стержня будет соответствовать минимум расстояния между точками O и D . Малым перемещениям точки C , перпендикулярным к направлению OD , будет соответствовать изменение

расстояния между точками C и D на величину второго порядка малости. Упругим удлинениям стержня CD будут соответствовать значительные перемещения точки C , и связь сооружения с землей получится не жесткой. Если бы мы в этом случае искали усилия в опорных стержнях



Черт. 65.

из трех уравнений статики, то получили бы для этих усилий решения или в виде неопределенности или в виде бесконечности. Неопределенность получается в том случае, когда все силы, действующие на сооружение, приводятся к силе, проходящей через мгновенный центр O , и определение усилий в опорных стержнях сводится таким образом к неопределенной задаче о разложении силы на три направления, пересекающиеся в одной точке. Когда совокупность усилий, приложенных к сооружению, сводится к силе, не проходящей через точку O , то такая сила не может быть уравновешена реакциями опорных стержней: равновесие невозможно; уравнения статики дают в этом случае бесконечные решения.

Когда все три опорные стержня параллельны, мы также будем иметь исключительный случай. Такое прикрепление допускает перемещение сооружения в направлении, перпендикулярном к опорным стержням. При действии на сооружение силы, параллельной опорным стержням, усилия в этих стержнях будут статически неопределенными. При ином направлении действующей силы сооружение может получать значительные перемещения.

§ 12. Определение усилий в стержнях фермы.

Когда нагрузки, действующие на сооружение, известны, и опорные реакции найдены, дальнейший расчет фермы будет заключаться в определении усилий в стержнях системы. Прежде всего приходится выяснить

вопрос, при каких условиях усилия в стержнях могут быть определены из уравнений статики без рассмотрения упругих деформаций системы. Предполагая, что узловые соединения фермы осуществлены в виде идеальных шарниров, и что нагрузки приложены только в узлах, заключаем, что стержни системы работают лишь на растяжение или сжатие.

Если из нагруженной фермы мысленно вырезать какой-либо узел, то действия перерезанных стержней на выделенный узел придется заменить силами, направленными по осям стержней. Силы эти, проходящие через центр выделенного нами шарнира, должны уравниваться с приложенными к шарниру внешними нагрузками, и мы для них можем написать два уравнения статики, соответствующие условиям равновесия сил, приложенных в одной точке. Если наша ферма имеет n узлов, то, составляя уравнения равновесия для всех узлов, мы получим $2n$ уравнений, в которые войдут заданные нагрузки, опорные реакции и неизвестные усилия в стержнях. Мы видели, что в жестких системах, статически определимых относительно опорных реакций, приходится иметь дело с тремя реактивными усилиями. Для их определения нужно использовать три уравнения статики. Следовательно, для разыскания усилий в стержнях у нас останется $2n - 3$ уравнений. Когда число стержней равняется этому числу уравнений, мы сможем, вообще говоря, найти усилия во всех стержнях, пользуясь только уравнениями статики. Таким образом, то число стержней, которое, как мы выяснили, необходимо для обеспечения геометрической неизменяемости системы, равняется числу уравнений, которое нам дает статика. Геометрически неизменяемые системы, заключающие только необходимые стержни, являются также и системами статически определимыми относительно усилий в стержнях ¹⁾.

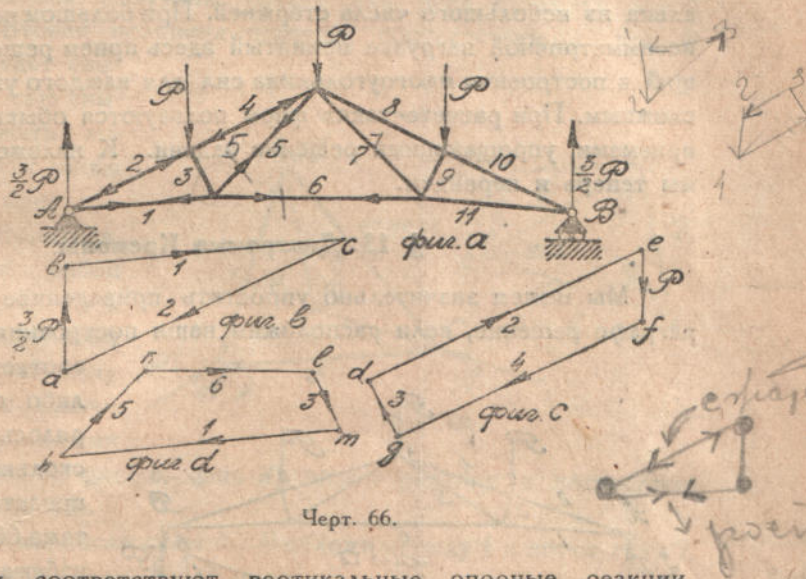
Если при n узлах число стержней будет больше, чем $2n - 3$, уравнений статики не хватит для определения усилий в стержнях, — мы будем иметь систему, статически неопределимую относительно усилий в стержнях.

Определение усилий в стержнях фермы путем решения системы $2n - 3$ уравнений, составленных на основании рассмотрения равновесия отдельных узлов фермы, является, вообще говоря, способом весьма громоздким, но в том частном случае, когда мы имеем дело с простейшей системой (см. § 10), прием этот заслуживает внимания, так как для ферм этого класса нам при определении усилий в стержнях придется для каждого узла решать весьма простую задачу статики, именно: нужно будет в каждом узле разложить силу на два заданные направления.

¹⁾ Подробное рассмотрение этого вопроса см. в книге А. Föppl'я *Graphische Statik*, 3 е изд. Стр. 210.

В самом деле, простейшие системы получаются путем последовательного присоединения каждого нового узла при помощи двух стержней, следовательно, в последнем присоединенном к ферме узле будут сходиться только два стержня. Разлагая силу, приложенную в последнем узле, на направления этих двух стержней, мы находим действующие в них усилия. Теперь эти два стержня могут быть отброшены, а действие их на оставшуюся часть формы может быть заменено соответствующими усилиями. В таком случае предпоследний присоединенный к ферме узел будет заключать только два стержня, и усилия в них могут быть найдены только что описанным путем. Переходя таким образом от узла к узлу в порядке, обратном последовательности их присоединения к форме, мы можем найти усилия во всех стержнях.

Рассмотрим в качестве примера простую стропильную форму, нагруженную в верхних узлах тремя равными силами P (черт. 66). Опоры устроены таким образом, что вертикальным нагрузкам соответствуют вертикальные опорные реакции.



Черт. 66.

Из условий симметрии заключаем, что каждая реакция равняется $\frac{3}{2} P$.

Определение усилий начнем с левого опорного шарнира, где сходятся стержни 1 и 2. Построением треугольника abc (фиг. b) находим величину и направление усилий, оказываемых стержнями 1 и 2 на опорный шарнир A .

Определив эти усилия, обращаемся к углу фермы, где сходятся стержни 2, 3 и 4. Усилие, оказываемое на этот узел стержнем 2, равно по величине и противоположно по направлению только что найденному усилию, оказываемому тем же стержнем на шарнир A . Неизвестными оказываются усилия 3 и 4, которые найдутся путем построения соответствующего замкнутого четырехугольника $defg$ (фиг. c).

Теперь переходим к углу, где сходятся стержни 1, 3, 5 и 6. Неизвестными будут лишь усилия 5 и 6. Величина их найдется путем построения четырехугольника $hklm$ (фиг. d).

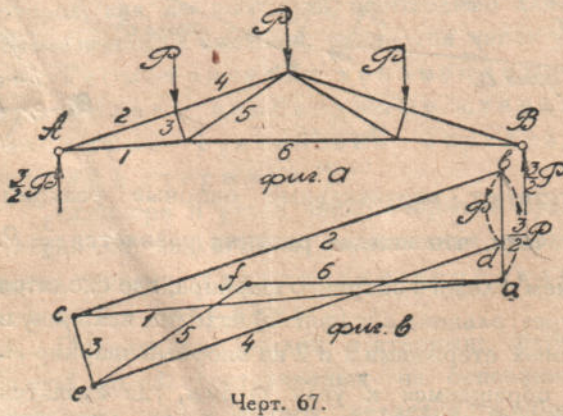
Таким образом, мы нашли усилия во всех стержнях левой половины фермы и из условий симметрии сейчас же можем получить усилия во всех остальных стержнях.

По направлениям стрелок заключаем, что в стержнях 2, 4, 8 и 10, составляющих верхний пояс фермы, действуют сжимающие усилия. В стержнях 1, 6 и 11 нижнего пояса получились растягивающие усилия. Растягивающие усилия действуют также в стержнях 5 и 7. В стержнях 3 и 9 получилось сжатие.

В данном случае мы легко нашли нужные нам усилия и получили сравнительно простой чертеж, потому что заданная нам ферма составлена из небольшого числа стержней. При большом числе стержней и при несимметричной нагрузке принятый здесь прием решения задачи, состоящий в построении многоугольника сил для каждого узла фермы, является сложным. При расчете таких ферм пользуются обыкновенно различными приемами, упрощающими решение задачи. К изложению этих приемов мы теперь и перейдем.

§ 13. Диаграмма Кремоны.

Мы можем значительно упростить приведенное в предыдущем параграфе решение, если расположим наши построения так, чтобы усилие,



соответствующее какому-либо стержню, не повторялось на чертеже несколько раз. В примере, представленном на чертеже 66, мы легко могли бы избежать повторения усилий 1 и 2. Для этого нужно только сдвинуть фигуры *c* и *d* так, чтобы сторона *de* совпала с *ac* и *ht* с *bc*. Но при этом все же останется повторение усилия 3.

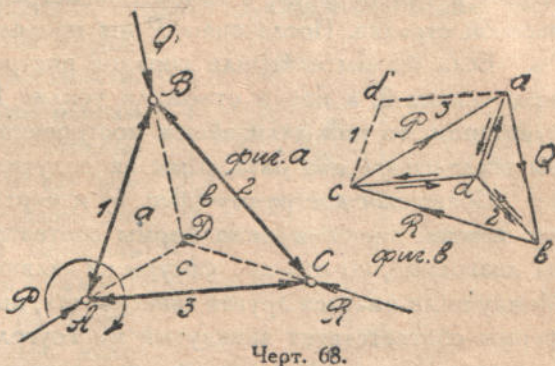
Если удастся выполнить построение так, что ни одно усилие не повторяется, то соответствующий чертеж мы будем называть диаграммой Кремоны, по имени ученого, который указал правила для такого построения¹⁾. Чтобы получить диаграмму для фермы, представленной на чертеже 66, мы начнем с узла *A* и построим для него треугольник *abc* (черт. 67, фиг. *b*).

¹⁾ Cremona, Le figure reciproche della Statica Grafica. Милан, 1872.

Далее переходим к узлу, где сходятся стержни 2, 3 и 4. Пользуемся уже отложенным на чертеже усилием 2 и от точки *b* вниз откладываем отрезок *bd*, представляющий силу *P*. Далее из точек *c* и *d* проводим линии, параллельные стержням 3 и 4. Таким образом получаем замкнутый четырехугольник *cbde*, соответствующий условию равновесия сил в рассматриваемом узле.

Теперь обращаемся к узлу, где сходятся усилия 1, 3, 5 и 6. Усилия 1 и 3 уже имеются на чертеже, и нам нужно только из точек *a* и *e* провести линии *af* и *ef* параллельно стержням 6 и 5.

Таким образом мы получили усилия для всех стержней левой половины фермы. Вторая половина чертежа, соответствующая правой половине фермы, будет симметрична первой. Осью симметрии будет служить линия *af*. В полученном таким образом чертеже ни одно усилие не будет повторяться, чертеж представит собой диаграмму Кремоны для данной нам стропильной фермы. Сравнивая диаграмму (черт. 67, фиг. *b*) с многоугольниками, построенными на чертеже 66 (фиг. *b*, фиг. *c*, фиг. *d*), видим разницу в построении первого треугольника *abc*.



Черт. 68.

На чертеже 66 мы после силы $\frac{3}{2} P$ отложили силу 1 и потом силу 2, а на чертеже 67 после силы $\frac{3}{2} P$ идет сила 2 и потом уже сила 1. Такое изменение в построении первого треугольника дало нам возможность получить чертеж, в котором ни одно усилие не повторяется.

Чтобы установить правила для построения диаграммы Кремоны, начнем с простейшей задачи, с определения усилий в системе, составленной только из трех стержней (черт. 68, фиг. *a*),

В узлах фермы приложены силы *P*, *Q* и *R*, находящиеся в равновесии. Строим соответствующий многоугольник сил (фиг. *b*) и определение усилий начинаем с узла *A*, где сходятся стержни 1 и 3. Из конца и начала силы *P* (фиг. *b*) проводим линии *ad* и *cd* параллельно стержням 1 и 3. Замкнутый треугольник *cad* будет соответствовать условию равновесия узла *A*. Стрелки, поставленные у сторон *ad* и *cd* внутри треугольника *cad*, дают направления усилий, действующих на узел *A*. Оба усилия направлены к узлу, следовательно, стержни 1 и 3 сжаты. Чтобы получить усилие в стержне 2, нужно только имеющуюся на чертеже точку *d* соединить с точкой *b*; тогда треугольник *abd* даст нам все силы, прило-

женные к узлу B . Направление силы Q нам известно, и мы сейчас же можем обозначить направление усилий, оказываемых на узел B стержнями 1 и 2. Направления эти показаны стрелками, расположенными внутри треугольника abd , и мы из направления стрелок заключаем, что стержень 2 также сжат. Таким образом, на фигуре b получены усилия во всех стержнях, при чем построение выполнено так, что ни одно усилие не повторяется, следовательно, фигура b является диаграммой Крeмoны для системы, представленной на фиг. a . Для получения диаграммы мы прежде всего построили многоугольник сил cab , при чем силы откладывали в таком порядке, в каком мы их встречаем при обходе чертежа фермы по часовой стрелке. Далее, обращаясь к узлу A , мы отложили усилия в том порядке, в каком они встречаются при обходе узла A по часовой стрелке. После силы P мы провели усилие 1 и потом усилие 3.

Если бы мы изменили порядок построения и из конца силы P провели усилие 3, а потом отложили усилие 1, как то показано на фигуре b пунктиром, то при дальнейшем построении некоторые усилия пришлось бы откладывать два раза, и мы не получили бы диаграммы.

Сравнивая диаграмму (фиг. b) и чертеж фермы (фиг. a), заключаем, что каждой линии чертежа фермы соответствует параллельная ей линия на диаграмме, но эти две фигуры не являются геометрически подобными. Между ними имеется другая зависимость, именно: каждой вершине чертежа фермы соответствует замкнутый многоугольник на диаграмме, и обратно многоугольникам на чертеже фермы соответствуют вершины на диаграмме. Так, например, на фигуре a силы P , Q и стержень 1 ограничивают треугольник a , а на диаграмме усилия P , Q и 1 сходятся в вершине a . Точно так же силы Q , R и стержень 2 ограничивают на чертеже фермы треугольник b , а на диаграмме усилия Q , R и 2 проходят через вершину b . Стержни 1, 2 и 3 на фигуре a ограничивают треугольник ABC , который мы обозначим через d , а на диаграмме соответствующие усилия проходят через вершину d .

Фигуры, находящиеся в подобной зависимости, мы будем называть взаимными фигурами. Свойством взаимности можно воспользоваться, чтобы по чертежу фермы составить соответствующую диаграмму, не входя в рассмотрение условий равновесия отдельных узлов.

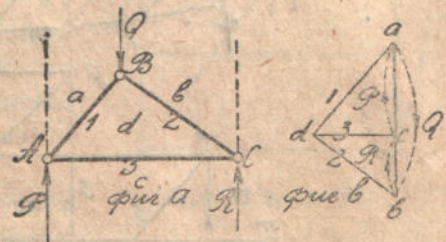
Вся диаграмма может быть построена часто геометрическим путем: сначала строим многоугольник сил и вершины этого многоугольника называем буквами, соответствующими полигонам чертежа фермы. Например, на фиг. b (черт. 68) ставим буквы a , b и c соответственно треугольникам a , b и c фигуры a . Далее, через каждую из этих вершин проводим линии, параллельные всем сторонам соответствующего полигона на чертеже фермы. Через вершину a проводим линию, параллельную стержню 1, через b —линию, параллельную стержню 2, и, наконец, через

с—линию, параллельную стержню 3. Если построение выполнено точно, то 1, 2 и 3 пересекутся в одной точке d , соответствующей треугольнику ABC , ограниченному стержнями 1, 2 и 3 на чертеже фермы.

Для выделения тех полигонов, которым должны соответствовать вершины диаграммы, полезно представить себе чертеж фермы как проекцию некоторого многогранника.

Грани такого многогранника и представят нужные нам полигоны. Обращаясь к чертежу 68, мы можем себе представить фиг. a , как проекцию трехгранной пирамиды. Треугольник ABC будет служить основанием пирамиды и точка D —ее вершиной. Соответственно четырем граням пирамиды, мы получаем четыре замкнутых полигона, в данном случае—четыре треугольника: треугольники a , b и c , соответствующие боковым граням пирамиды, и треугольник d , соответствующий основанию ее.

Диаграмма также может быть представлена, как проекция многогранника, у которого ребра параллельны ребрам первого многогранника. Соответственно зависимости, существующей между чертежом фермы и чертежом диаграммы, два такие многогранника будем называть взаимными многогранниками¹⁾.



Черт. 69.

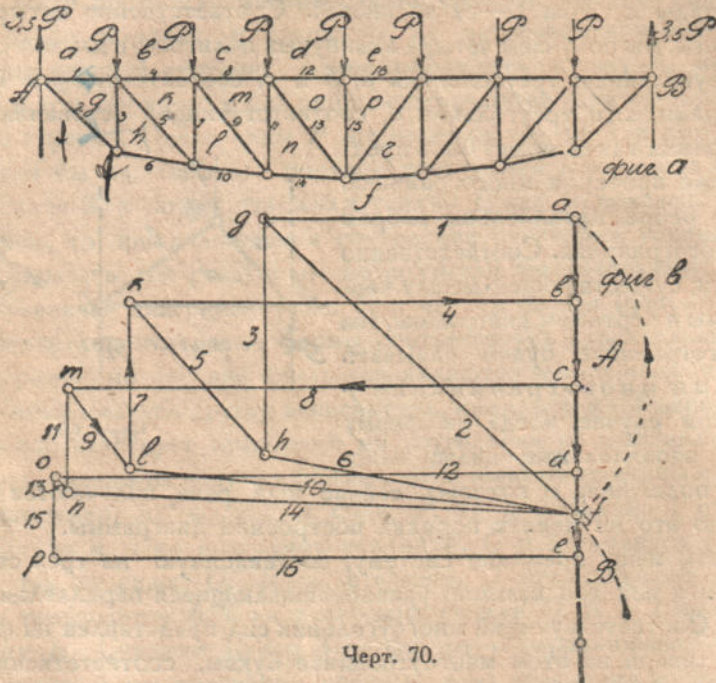
В таком случае, когда на ферму действуют параллельные силы, некоторые из полигонов, о которых сейчас шла речь, получаются не замкнутыми, но это не меняет порядка построения диаграммы.

Возьмем нашу прежнюю систему, составленную из трех стержней, и приложим к ней три взаимно уравнивающиеся параллельные силы (черт. 69). Соответствующий многоугольник сил представлен на фигуре b . Расставим теперь на этом многоугольнике буквы, соответственно полигонам чертежа фермы.

Так как направления сил P , Q и R в данном случае не пересекаются, то мы можем себе представить фигуру a , как проекцию трехгранной призмы, у которой линии P , Q и R являются ребрами и треугольник ABC основанием. Боковые грани обозначим через a , b и c и основание—через d . Соответственно этому нанесены точки a , b и c на фигуре b . Точка a поставлена между силами P и Q , так как эти силы на фигуре a ограничивают полигон a . Точка b поставлена между силами Q и R , и, наконец, c поставлено между силами P и R . Обозначив таким

¹⁾ Впервые этим представлением для построения взаимных диаграмм воспользовался Maxwell: On Reciprocal Figures and Diagrams of Forces, Philos. Mag. Vol. XXVI (1864 г.), стр. 250. Дальнейшее развитие вопроса см. F. Klein: Mathematische Annalen. Bd LXVII (1909 г.), стр. 433; F. Pfeiffer. Zeitschr. f. Math. u. Phys. Bd 53 (1910 г.), стр. 242.

образом вершины многоугольника сил, обращаемся к построению диаграммы. Через точку a проводим линию, параллельную стержню 1, так как этот стержень на фиг. a ограничивает полигон a , и через точку b проводим линию, параллельную стержню 2. Пересечение этих двух линий дает нам вершину d , соответствующую полигону d . Если построение сделано правильно, то линия, соединяющая d и c , должна получиться параллельной стержню 3. Таким образом, при построении диаграммы мы получаем возможность проверки нашего графического решения.



Черт. 70.

Рассмотрим в качестве более сложного примера построение диаграммы для фермы, представленной на чертеже 70. Все нагрузки равны по величине P и сосредоточены в верхних узлах фермы. Из условий симметрии сей же находим, что каждая из опорных реакций равна $3,5 P$. Отмечаем на чертеже фермы полигоны a, b, \dots, r , которым должны соответствовать вершины диаграммы, при этом ограничиваемся одной половиной фермы, так как усилия в стержнях другой половины легко получаются из условий симметрии.

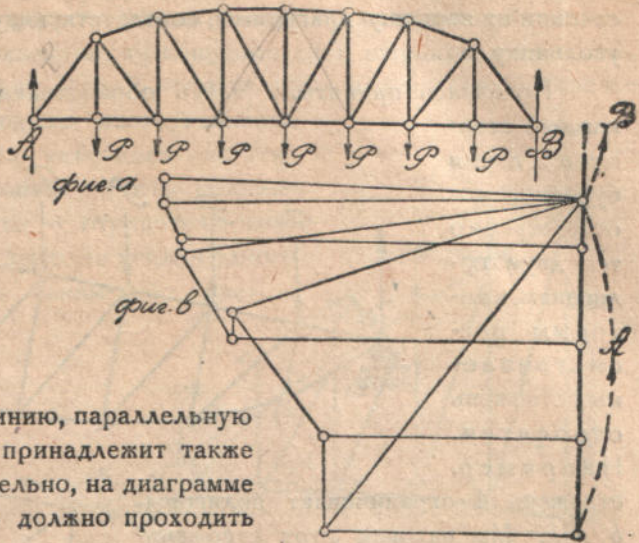
Строим для заданной системы нагрузок многоугольник сил (фиг. b) и наносим на ней буквы a, b, c, d, e и f соответственно намеченным полигонам чертежа фермы. Построение диаграммы начнем с левой опоры A , где сходятся стержни 1 и 2. Стержень 1 ограничивает полигон a , поэтому

мы на фигуре *b* проводим линию 1 через точку *a*. Линию, параллельную стержню 2, мы проводим через точку *f*, так как на фигуре *a* стержень 2 ограничивает, между прочим, полигон *f*. В пересечении линий 1 и 2 ставим букву *g*, так как стержни 1 и 2 ограничивают треугольник *g*.

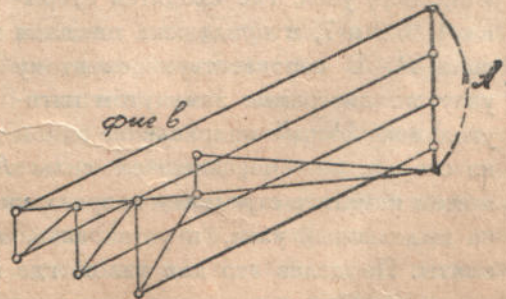
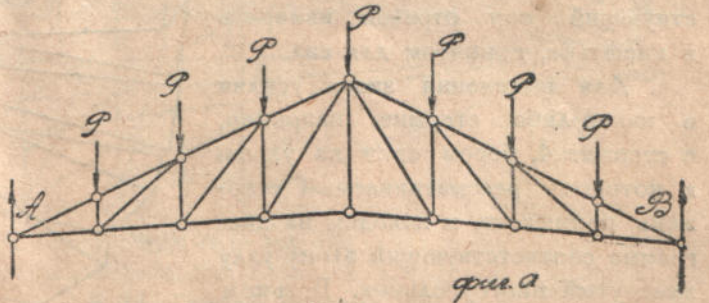
Через вершину *g* диаграммы должны проходить все усилия, ограничивающие на чертеже фермы полигон *g*. В нашем случае придется через точку *g* провести линию, параллельную стержню 3. Стержень 3 принадлежит также треугольнику *h*, следовательно, на диаграмме соответствующее усилие должно проходить через вершину *h*.

Для построения точки *h* воспользуемся тем обстоятельством, что через нее должны проходить усилия 3, 5 и 6, ограничивающие треугольник *h*. Усилие 3 нами уже проведено. Мы можем сейчас провести усилие 6, проходящее через точку *f*. Пересечение направлений 3 и 6 даст нам точку *h*, через которую пройдет также усилие 5, параллельно стержню 5.

Теперь мы можем перейти к построению вершины *k*, соответствующей треугольнику *k*, и т. д. Всякий раз, переходя к новому треугольнику, мы находим на диаграмме две вершины, через которые проходят усилия двух стерж-



Черт. 71 (к вад. 33).



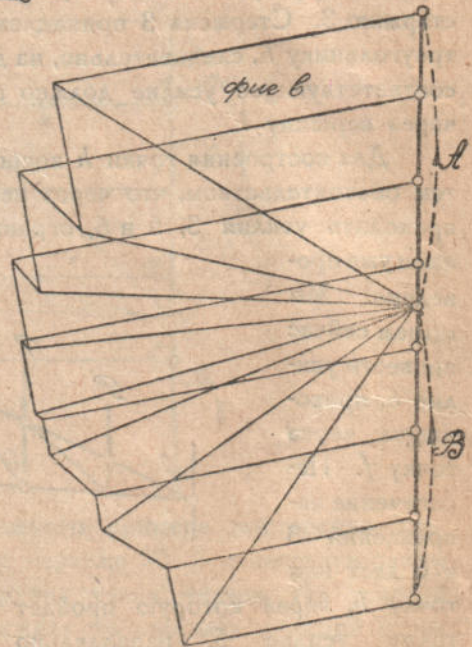
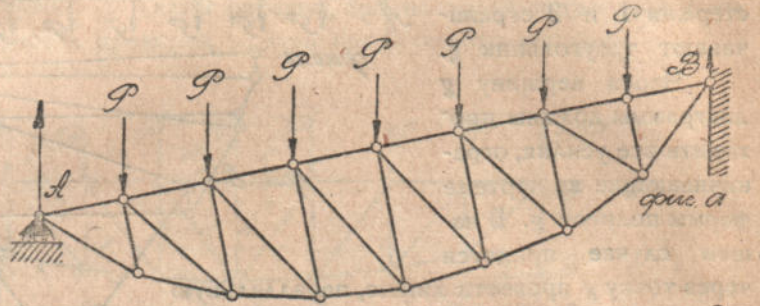
Черт. 72 (к вад. 33).

ней, ограничивающих этот треугольник на чертеже фермы. Проводя эти усилия параллельно соответствующим стержням, мы получаем в пересечении их вершину диаграммы, соответствующую рассматриваемому треугольнику.

Пользуясь принятыми здесь обозначениями, мы будем называть каждый стержень двумя буквами, соответственно тем двум полигонам, к которым рассматриваемый стержень относится.

Например, стержень 4 ограничивает полигоны b и k . Мы назовем этот стержень через bk . Соответствующее ему усилие на диаграмме соединяет вершины b и k . Для определения величины усилия нужно только соответствующий ему отрезок измерить в масштабе, принятом для сил.

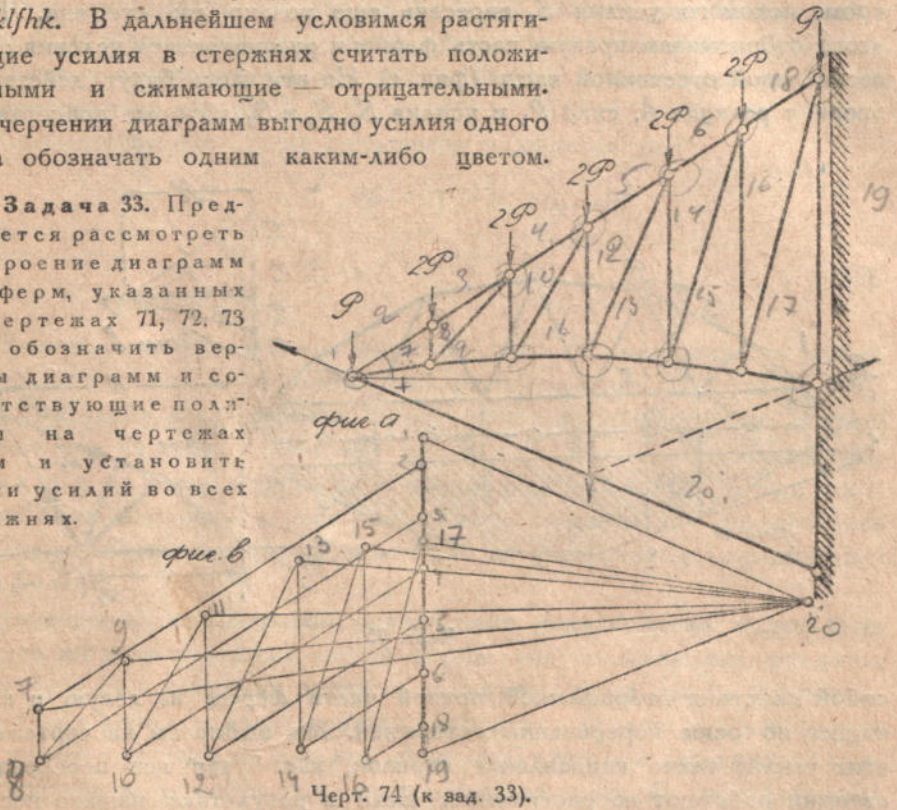
Для выяснения знака усилия в каком-либо стержне, например, в стержне 4, берем один из узлов, к которому рассматриваемый стержень примыкает, и находим на диаграмме соответствующий этому узлу замкнутый многоугольник. Возьмем например, узел, где сходятся стержни 4, 8, 9 и 7, и приложена внешняя сила P . В соответствующем этому узлу на диаграмме замкнутом пятиугольнике $kbcmlk$ направление одной из сторон, именно, внешней силы P , нам известно, и мы сейчас же можем наметить стрелками направления всех других усилий, действующих на выделенный узел, и установить, какие стержни растянуты и какие сжаты. Проделав это для узлов, где имеются внешние силы, мы можем потом перейти и к другим узлам, так как у них окажутся выясненными направления некоторых из усилий. Например, в нашей ферме после



Черт. 73 (к зад. 33).

только что рассмотренного узла, мы могли бы обратиться к нижнему узлу фермы, где сходятся стержни 6, 5, 7 и 10. Хотя здесь внешней силы не имеется, но мы из ранее рассмотренного узла могли найти направление усилий, которые оказывает на концевые свои шарниры стержень 7. Имея направление одного из усилий, мы остальные направления сейчас же находим из соответствующего многоугольника сил $klfhk$. В дальнейшем условимся растягивающие усилия в стержнях считать положительными и сжимающие — отрицательными. При черчении диаграмм выгодно усилия одного знака обозначать одним каким-либо цветом.

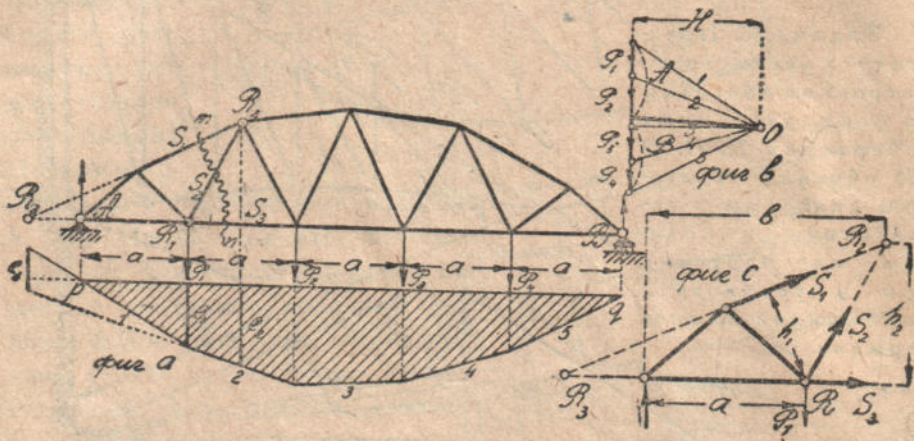
Задача 33. Предлагается рассмотреть построение диаграмм для ферм, указанных на чертежах 71, 72, 73 и 74 обозначить вершины диаграмм и соответствующие полигоны на чертежах ферм и установить знаки усилий во всех стержнях.



§ 14. Способ Риттера.

Когда для заданной системы внешних сил требуется найти усилия во всех стержнях фермы, то наиболее выгодным является обыкновенно построение диаграммы Кремоны. В тех же случаях, когда нас интересует величина усилия лишь в одном каком-нибудь стержне, быстрее ведет к цели способ Риттера. Применяя этот способ, мы разрезаем мысленно ферму на две части и исследуем условия равновесия одной из этих частей. Если при разделении фермы на две части мы перережем только три стержня, то усилия в этих стержнях легко могут быть найдены из трех уравнений статики, которые пишутся на основании условий равновесия рассматриваемой половины фермы.

Возьмем систему, представленную на чертеже 75 фиг. а. Пусть к нижним узлам приложены вертикальные нагрузки P_1, P_2, P_3 и P_4 и требуется определить усилия S_1 в указанном на чертеже стержне верхнего пояса. Построением веревочного многоугольника 1, 2, 3, 4 и 5 и проведением замыкающей pq определяем предварительно опорные реакции A и B (фиг. б). Далее производим разрез фермы сечением mn так, чтобы кроме искомого усилия S_1 пересечь еще только два стержня. После этого отбрасываем правую часть фермы и рассматриваем условия равновесия левой отсеченной части (фиг. с). На эту часть будут действовать опорная реакция A , сила P_1 и усилия S_1, S_2 и S_3 , которые представляют



Черт. 75.

собой действия отброшенной правой части фермы на левую и направлены по осям перерезанных стержней. Мы выбираем на чертеже для этих усилий такое направление стрелок, как будто все перерезанные стержни работают на растяжение. Если в результате нашего исследования мы получим для S_1 отрицательное значение, то это будет указывать нам, что выбранное для S_1 направление стрелки нужно изменить на противоположное, и, значит, стержень не растянут, а сжат. Составим теперь для левой отсеченной части фермы ур-ия равновесия, заключающие S_1, S_2 и S_3 .

Очевидно ур-ия эти будут решаться наиболее просто в том случае, если в каждое ур-ие будет входить лишь одно неизвестное усилие. Чтобы получить ур-ие, заключающее искомое неизвестное усилие S_1 , Риттер предложил пользоваться ур-ием моментов, при чем за точку, относительно которой составляется момент сил, проложенных к выделенной части фермы, он выбрал точку R_1 пересечения усилий S_2 и S_3 двух перерезанных стержней.

Тогда ур-ие равновесия напишется так:

$$A \cdot a + S_1 \cdot h_1 = 0,$$

откуда

$$S_1 = -\frac{Aa}{h_1} \dots \dots \dots (a)$$

Знак — указывает, что усилие S_1 будет сжимающим. Чтобы найти усилие S_3 в стержне нижнего пояса, нужно составить момент всех сил, приложенных к рассматриваемой части фермы, относительно точки R_3 , где пересекаются усилия S_1 и S_2 .

Соответствующее ур-ие равновесия напишется так:

$$A \cdot b - P_1 \cdot (b - a) - S_3 \cdot h_2 = 0,$$

откуда

$$S_3 = \frac{Ab - P_1(b - a)}{h_2} \dots \dots \dots (b)$$

Заметим, что числители в формулах (a) и (b) представляют собой по абсолютному значению момент сил, расположенных слева от R_1 и R_2 . Для определения этих моментов проще всего воспользоваться заштрихованной на чертеже моментной площадью: взять соответствующие отрезки e_1 и e_2 и умножить их на полюсное расстояние H . Отрезки e_1 и e_2 должны быть измерены в масштабе длины, которым мы пользовались при нанесении чертежа фермы, полюсное же расстояние измеряем в масштабе сил.

Намеченный здесь способ определения усилий легко может быть применен ко всем стержням взятой фермы. Мы показали, как находятся усилия S_1 и S_3 в стержнях верхнего и нижнего пояса. Чтобы найти усилие в каком-либо стержне решетки, например, усилие S_2 , мы можем взять прежнее сечение фермы mn . За точку, относительно которой придется составлять моменты сил, придется взять точку R_3 , где пересекаются усилия S_1 и S_3 . Момент сил, приложенных к левой отсеченной части фермы, относительно точки R_3 , определится длиной отрезка e_3 .

В качестве второго примера рассмотрим ферму с параллельными поясами (черт. 76), нагруженную силами P_1, P_2, P_3, P_4 и P_5 , приложенными к верхним узлам. Построением соответствующего веревочного многоугольника 1 2 3 4 5 6 и проведением замыкающей pq мы решаем вопрос о величине изгибающего момента в любом сечении фермы. Проведя луч Oc (фиг. б) параллельно замыкающей pq , находим опорные реакции A и B .

Чтобы найти усилия S_1, S_2 и S_3 производим разрез фермы сечением mn и рассматриваем условия равновесия левой отсеченной части (фиг. с). Чтобы найти усилие S_1 в стержне верхнего пояса, составляем момент

всех сил, приложенных к рассматриваемой части фермы, относительно точки R_1 , где пересекаются усилия S_2 и S_3 . Таким путем получаем ур-ие:

$$A \cdot 3a - P_1 \cdot 2a - P_2 \cdot a + S_1 \cdot h = 0,$$

откуда

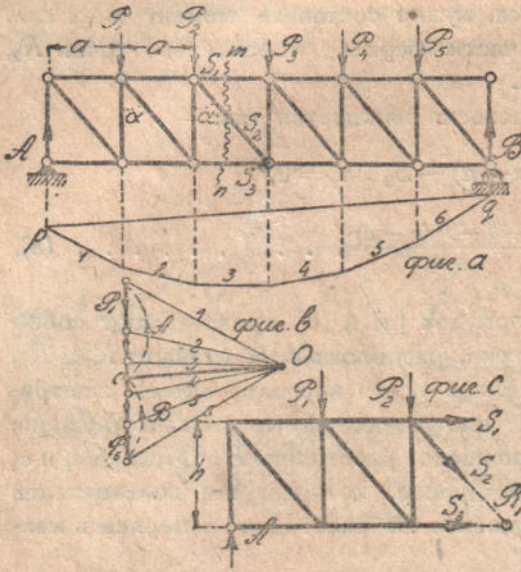
$$S_1 = - \frac{A3a - P_1 2a - P_2 a}{h} \dots \dots \dots (a).$$

Подобным же образом для усилия S_3 в стержне нижнего пояса найдем

$$S_3 = \frac{A2a - P_1 a}{h} \dots \dots \dots (b).$$

Усилия в стержнях верхнего пояса получают при нашем направлении сил сжимающимися. В стержнях нижнего пояса получают растяжения. Величины этих усилий, как видно из формул (a) и (b), будут пропорциональны изгибающим моментам, взятым в соответствующих точках Риттера.

По виду моментной площади сейчас же можем заключить, что усилия в стержнях поясов возрастают по направлению от опор к середине пролета.



Черт. 76.

Чтобы определить усилие S_2 в раскосе, мы не можем воспользоваться обычным приемом Риттера, так как направление S_1 и S_3 параллельны, и соответствующая точка Риттера уходит в бесконечность. Нужное нам ур-ие равновесия мы получим, если приравняем нулю сумму проекций на вертикальную ось всех сил, приложенных к рассматриваемой части фермы. Проекция усилий S_1 и S_2 получаются при этом равными нулю, и ур-ие равновесия напишется так:

$$A - P_1 - P_2 - S_2 \cos \alpha = 0.$$

откуда

$$S_2 = \frac{A - P_1 - P_2}{\cos \alpha}.$$

Заметим, что числитель полученной формулы представляет собой перерезывающую силу¹⁾ в сечении m . Усилия в раскосах получатся пропорциональными перерезывающей силе.

1) См. Курс сопротивления материалов, 9 изд. 1930 г., стр. 149.

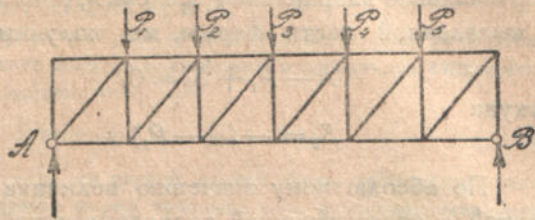
При наших нагрузках наибольшее растягивающее усилие получится в раскосе левой панели¹⁾—там перерезывающая сила имеет наибольшее положительное значение. Наибольшее сжатие получится в раскосе крайней правой панели.

Если бы мы изменили направление всех раскосов на противоположное (черт. 77), то, как легко видеть, усилия в раскосах изменили бы знак на противоположный.

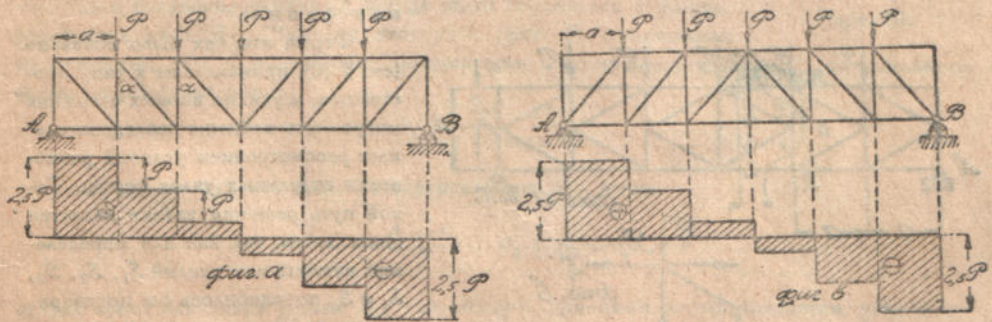
Абсолютная величина этих усилий остается при этом неизменной. Известно, что стержни, подвергающиеся действию сжимающих сил, могут при некотором значении этих сил выпучиться. Это обстоятельство заставляет усиливать сечения сжатых стержней.

Чтобы по возможности уменьшить вес сооружения, выгодно так расположить наиболее длинные стержни, в нашем случае раскосы, чтобы в них действовали лишь растягивающие усилия.

При одинаковой нагрузке силами P всех верхних узлов расположение раскосов должно быть, очевидно, таким, как указано на чертеже 78,



Черт. 77.



Черт. 78.

фиг. а. Подобное расположение будем называть случаем нисходящих раскосов. На фиг. б показан случай восходящих раскосов. При этом в раскосах получают сжимающие усилия. Величины этих усилий пропорциональны для каждого раскоса соответствующей перерезывающей силе, которая может быть взята непосредственно из чертежа, где по-

¹⁾ Длина панели соответствует расстоянию между двумя узлами пояса. Обычно это расстояние принимается постоянным по всей длине фермы.

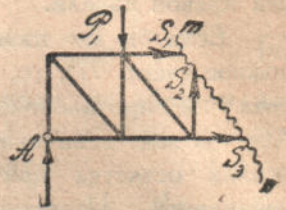
строены линии суммы сил; там, где меняется знак перерезывающей силы, меняется также и направление раскосов. Поэтому знак усилий в раскосах остается постоянным по всей длине фермы.

Чтобы найти усилие в какой либо стойке фермы, нужно разрезать ферму сечением mn так, как это показано на чертеже 79. Проектируя на вертикальное направление все силы, приложенные к выделенной части фермы, мы получим ур-ие:

$$A - P_1 + S_2 = 0,$$

откуда

$$S_2 = -(A - P_1).$$



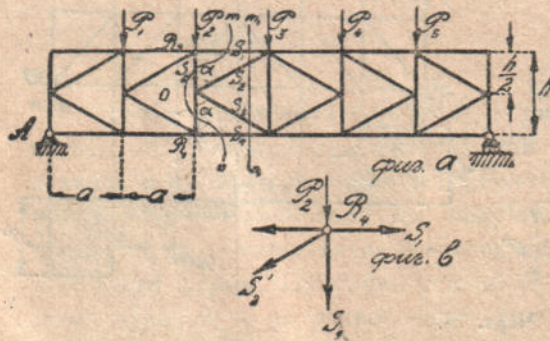
Черт. 79.

По абсолютному значению величина усилия в стойке получается равной соответствующей перерезывающей силе.

При равномерной нагрузке усилия в стойках растут по направлению от середины пролета к опорам. Для случая, представленного на фиг. *a* (черт. 78), все стойки получают сжатыми. Стойки фермы, представленной на фиг. *b* — растянуты.

Применим теперь намеченный здесь способ к решению нескольких более сложных задач.

Задачи: 34. Требуется определить усилия S_1, S_2, S_3, S_4 и S_5 в стержнях фермы, представленной на чертеже 80 (полурабская ферма).



Черт. 80.

Ферма эта, как было показано (см. § 10), принадлежит к типу простейших, и усилия во всех стержнях могут быть найдены последовательным рассмотрением условий равновесия отдельных узлов фермы. Такой путь решения задачи является длительным, так как для определения нужных нам усилий S_1, S_2, S_3, S_4 и S_5 понадобилось бы предварительно найти усилия во всех стержнях, начиная с левой или правой опорной точки. Мы можем непосредственно определить нужные нам усилия, если воспользуемся методом

Риттера. Чтобы найти усилия S_1 и S_4 , проводим сечение mn и рассматриваем условия равновесия левой отсеченной части фермы. Приравнявая нулю момент всех сил, приложенных и рассматриваемой части фермы, относительно точки R_1 , получаем ур-ие¹⁾:

$$A \cdot 2a - P_1 \cdot a + S_1 \cdot h = 0,$$

¹⁾ Хотя в рассматриваемом случае сечением mn перерезано не три, а четыре стержня, но три из перерезанных стержней пересекаются в одной точке R_1 , и это обстоятельство дает возможность сейчас же определить усилие в четвертом стержне.

откуда

$$S_1 = -\frac{A2a - P_1a}{h} \dots \dots \dots (a)$$

Подобным же образом сейчас же находится величина S_4 . Так как соответствующие точки Риттера лежат на одной вертикали, то мы найдем

$$S_4 = -S_1 \dots \dots \dots (b)$$

Усилия эти найдутся особенно просто, если предварительно построена моментная площадь для заданной системы грузов P_1, P_2, P_3, P_4 и P_5 .

Для определения усилий S_2 и S_3 рассмотрим предварительно условия равновесия узла o , где эти усилия сходятся. Выделяя этот узел из фермы и проектируя сходящиеся в нем усилия на горизонтальную ось найдем; что

$$S_2 = -S_3 \dots \dots \dots (c)$$

Если один из полураскосов растянут, то другой должен быть непременно сжат. Выяснив это, мы можем найти S_2 , рассекая ферму сечением m_1n_1 и рассматривая условия равновесия левой отсеченной половины. Проектируя все силы, приложенные к этой половине, на вертикальную ось и принимая во внимание равенство (c), получим ур-ие:

$$A - P_1 - P_2 + 2S_2 \cos \alpha = 0,$$

откуда

$$S_2 = -\frac{A - P_1 - P_2}{2 \cos \alpha} \dots \dots \dots (d)$$

Заметим, что числитель в полученной формуле представляет собой перерезывающую силу в сечении m_1n_1 .

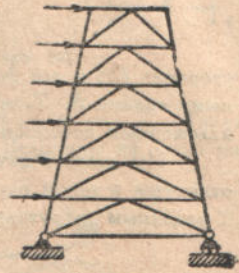
Для получения усилия S_3 проще всего обратиться к ур-иям равновесия узла R_4 . Выделяя этот узел (фиг. *b*) и принимая во внимание, что в полураскосе, подходящем к этому узлу, усилие S_2' , на основании формулы (d) будет равно

$$S_2' = -\frac{A - P_1}{2 \cos \alpha},$$

получим, проектируя все силы на вертикальную ось, ур-ие:

$$-\frac{A - P_1}{2} + P_2 + S_3 = 0,$$

откуда легко находится усилие S_3 . Указанными приемами легко находятся усилия во всех стержнях заданной нам фермы. Таким же путем может быть рассчитана также полураскосная ферма, представленная на чертеже 81.



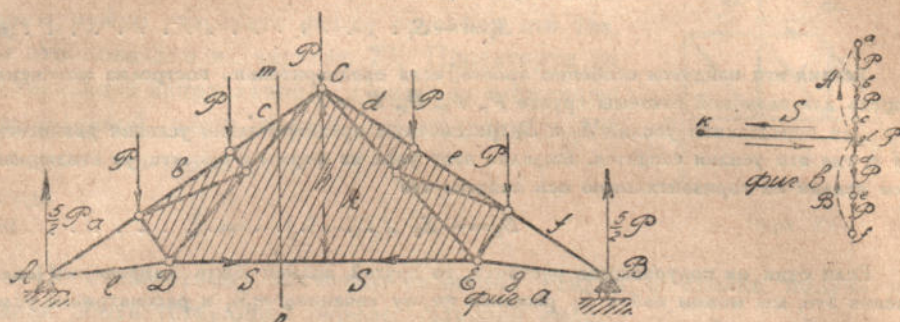
Черт. 81.

35. Определить усилия во всех стержнях фермы Полонсо, представленной на чертеже 82.

Эта сложная ферма составлена из двух простейших систем ACD и CEB соединенных между собой шарниром C и стержнем DE . Таким образом получается геометрически неизменяемая, статически определимая система, часто применяемая в стропилах. Если бы мы начали строить для этой фермы диаграмму Кремонь, то сейчас же убедились бы, что построение это не может быть выполнено так, как это было описано в предыдущем параграфе.

Начиная с левого или правого опорного узла, мы сейчас же можем найти усилия в стержнях, идущих к опоре, но определение усилий в дальнейших стержнях встречает

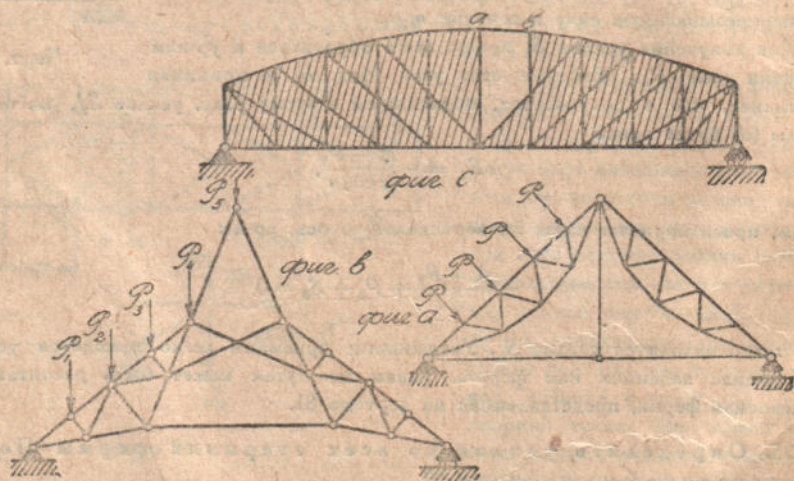
затруднение, так как вся средняя часть фермы, заштрихованная для ясности, на чертеже, не имеет узлов, в которых сходились бы меньше трех стержней. Чтобы выйти из затруднения, в данном случае проще всего применить способ Риттера. Рассекая ферму сечением mn и исследуя равновесие одной половины фермы, мы легко находим усилие S в соединительном стержне. Раз это усилие найдено, мы можем выбросить



Черт. 82.

стержень DE и его действие на ферму заменить двумя равными и прямопротивоположными силами S . Теперь возможно выполнить построение диаграммы Кремоны ранее изложенным способом.

Мы должны начать с построения многоугольника сил, причем силы должны быть отложены в таком порядке, как мы их встречаем при обходе фермы по часовой стрелке. К заданным нагрузкам и опорным реакциям придется при этом присоединить и най-



Черт. 83.

денные силы S . На многоугольнике сил эти усилия должны быть отложены так, как это указано на фигуре b . Дальнейшее построение диаграммы может быть выполнено без затруднения, и мы на нем здесь останавливаться не будем.

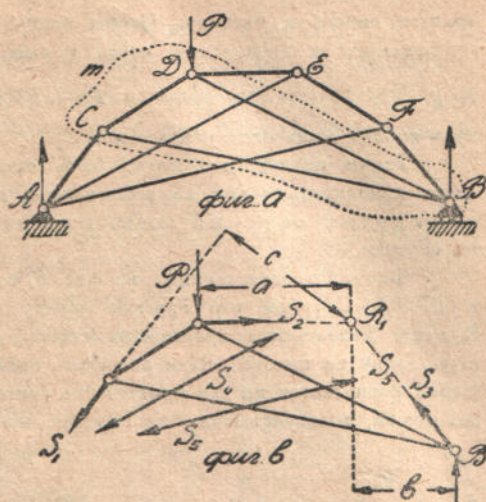
Подобным же образом рассчитываются фермы, представленные на фиг. a, b и c черт. 83: Система, представленная на фигуре c , составлена из двух простейших, заштрихованных на чертеже. Расчет начнем с определения усилия в соединительном стержне ab .

36. Требуется определить усилия в стержнях фермы, представленной на чертеже 84.

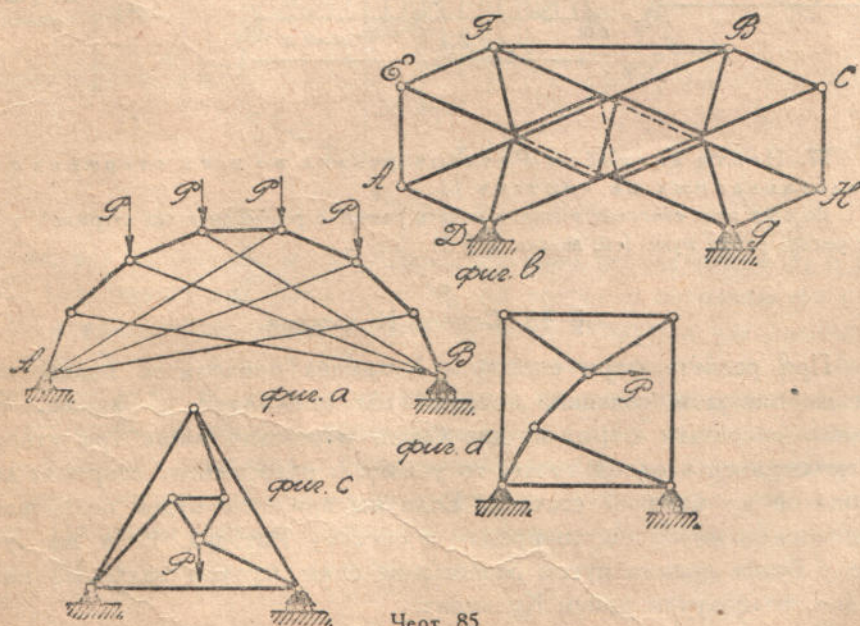
Ферму эту можно представить себе составленной из двух простейших систем, треугольников CDB и AEF , связанных между собой в одну геометрически неизменяемую и статически определимую систему при помощи трех стержней AC , BF и DE ¹⁾.

Расчет проще всего начать с определения усилий в этих соединительных стержнях. Проводим сомкнутое сечение m и рассмотрим условия равновесия средней выделенной части фермы (фиг. б).

Хотя произведенным сечением мы разрезали, кроме трех интересующих нас соединительных стержней, еще раскосы AE и AF , но эти последние перерезаны по два раза, и соответствующие им усилия войдут в рассмотрение в виде взаимно уравновешивающихся сил S_4 и сил S_5 . Таким образом, нам придется считаться лишь с усилиями S_1 , S_2 и S_3 . Величины их легко на-



Черт. 84.



Черт. 85

¹⁾ Предполагается, что в местах пересечений раскосов никаких скреплений не имеется.

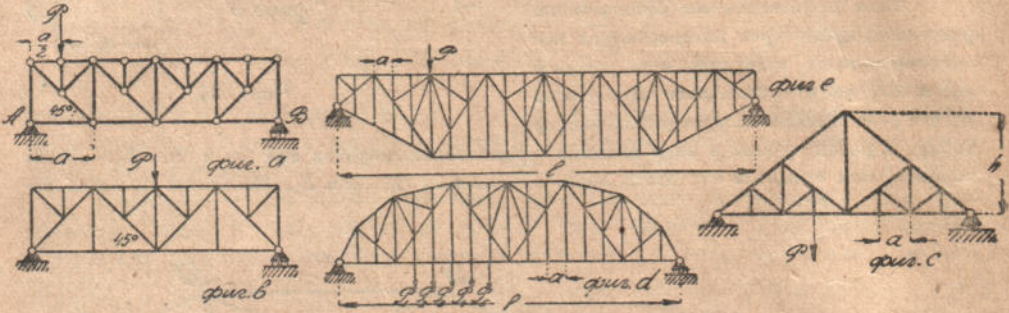
ходятся способом Риттера. Чтобы получить усилие S_1 , составляем момент всех сил, приложенных к выделенной части фермы, относительно точки R_1 . Получаем уравнение:

$$Pa + Bb + S_1c = 0,$$

куда входит лишь одна неизвестная S_1 .

Таким же образом могут быть определены также усилия S_2 и S_3 . После этого легко находятся усилия во всех прочих стержнях системы. Намеченный здесь прием с омыкнутых сечений можно применить также к расчету систем, представленных на чертеже 85.

Ферма, представленная на фиг. б, составлена из двух простейших систем $ABCD$ и $EFHG$. Системы эти связаны между собой тремя соединительными стержнями. В месте пересечения простейших систем, указанном пунктирными линиями, никаких скреплений не имеется. Если разрезать соединительные стержни AE , FB и CH , то наша ферма распадается на две простейшие системы. Рассматривая равновесие одной из них, мы можем, пользуясь способом Риттера, найти усилия в соединительных стержнях.



Черт. 86.

37. Найти способом Риттера усилия во всех стержнях ферм, представленных на чертеже 86.

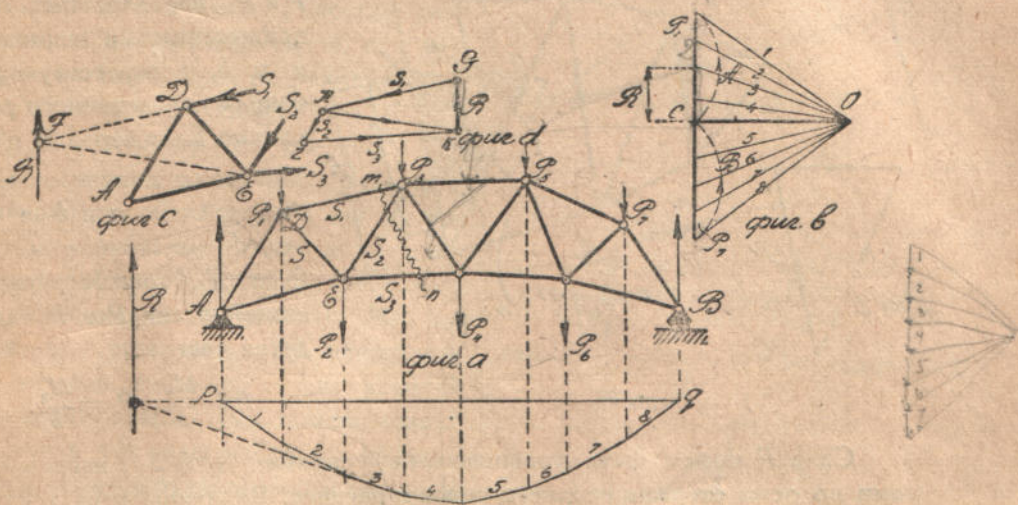
Во всех этих системах выгодно начать расчет с разыскания тех стержней, в которых усилие равно нулю (см. задача 5, § 1).

§ 15. Способ Кульмана.

При расчете ферм способом Кульмана приходится пользоваться тем же методом сечений, который мы применяли и раньше. Если удастся разрезать ферму на две части, пересекая лишь три стержня, не сходящихся в одной точке, то усилия в разрезанных стержнях легко находятся из условий статики. Если мы при этом будем пользоваться уравнениями моментов, то придем к способу Риттера. Если же ту же задачу будем решать путем разложения силы на три заданные направления, то получим прием Кульмана.

Положим, требуется найти усилия S_1 , S_2 и S_3 в стержнях фермы, представленной на чертеже 87. Рассекаем ферму сечением mn и рассматриваем равновесие левой отсеченной части (фиг. с). Если предварительно был построен многоугольник сил (фиг. б) и определены, при

помощи веревочного многоугольника 1 . . . 8, опорные реакции A и B , то продолжением стороны 3 веревочного многоугольника и замыкающей pq мы сейчас же находим точку приложения равнодействующей всех сил, приложенных к левой отсеченной части фермы. Величина R этой равнодействующей находится из многоугольника сил (фиг. b). Теперь разыскание усилий S_1 , S_2 и S_3 сводится к разложению известной по величине и положению силы R на три направления, соответствующие осям перерезанных стержней. Такое разложение нам уже приходилось выполнять (см. зад. 12, § 2). Мы продолжаем направление S_1 до пересечения с силой в точке F (фиг. c) и соединяем F с точкой E , где



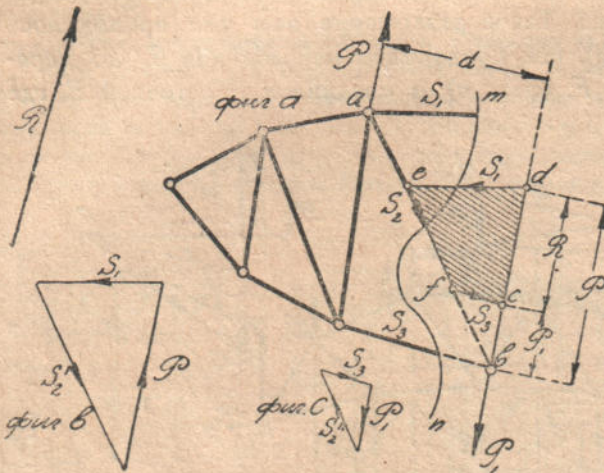
Черт. 87.

пересекаются усилия S_2 и S_3 . Соответственно направлениям S_1 и FE строим треугольник сил GHK (фиг. d), из которого определяется усилие S_1 и равнодействующая усилий S_2 и S_3 . Разлагая эту равнодействующую на направления HL и LK , находим усилия S_2 и S_3 . Имея направление силы R , сейчас же намечаем направление усилий S_1 , S_2 и S_3 так, чтобы по контуру четырехугольника $GHLK$ стрелки располагались в одном направлении. Направления стрелок соответствуют усилиям, оказываемым перерезанными стержнями на рассматриваемую часть фермы. По направлениям стрелок заключаем, что усилия S_1 и S_2 —сжимающие, а усилие S_3 —растягивающее.

§ 16. Способ Диммермана.

Этот способ представляет собой видоизменение только что описанного приема Кульмана. Когда точка приложения равнодействующей R

всех сил, приложенных к отсеченной части фермы, получается вне пределов чертежа, заменяют равнодействующую R двумя составляющими, которые выгодно приложить по концам рассекаемого раскоса. Весь ход расчета поясним на простом примере. Положим, требуется определить усилия S_1 , S_2 и S_3 в стержнях фермы, перерезанных сечением mn (фиг. а, черт. 88). Пусть R —равнодействующая всех сил, приложенных



Черт. 88.

к левой отсеченной части фермы. Силу R заменим системой, ей эквивалентной и состоящей из двух сил R и R_1 , параллельных R и приложенных в шарнирах a и b , соответствующих концам перерезанного раскоса ab . Если через M_a и M_b обозначим момент силы R относительно a и b и через d —расстояние между R и R_1 , то абсолютные значения сил R и R_1 найдутся так:

$$R = \frac{M_b}{b}; R_1 = \frac{M_a}{b}.$$

Сила R может быть уравновешена усилиями S_1 и S_2' , направленными по осям стержня верхнего пояса и раскоса. Величины этих усилий найдутся из треугольника, представленного на фиг. б. Точно также сила R_1 уравновесится усилиями S_3 в стержне нижнего пояса и S_2'' в раскосе. Величины этих усилий определятся из треугольника, представленного на фиг. в. Таким образом, мы построением находим искомые усилия S_1 и S_3 . Усилие S_2 будет равно, очевидно, $S_2' - S_2''$. Все нужные построения могут быть выполнены на одном чертеже, как то указано на фиг. а. Для этого от точки b откладываем по величине и направлению силу R и в том же направлении откладываем отрезок, равный силе R_1 . Через полученные таким путем точки d и c проводим линии, параллельные S_1 и S_3 , до пересечения с раскосом ab . Полученный таким образом четырехугольник $cdef$ определяет величины искомых усилий S_1 , S_2 и S_3 .

§ 17. Влияние сил, приложенных вне узлов.

В предыдущих случаях предполагалось, что все силы приложены в узлах фермы. Тогда, как было показано, стержни фермы при налич-

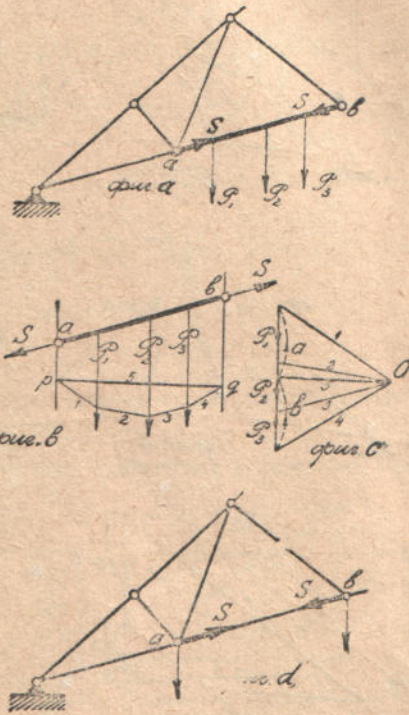
ности идеальных шарниров работают на растяжение или на сжатие. Иногда приходится встречаться с более сложной задачей, когда на стержень фермы действуют силы в промежуточных сечениях. Тогда к растяжению или сжатию присоединится еще изгиб стержня. Пусть ab — один из таких стержней (черт. 89, фиг. a). Под действием сил P_1, P_2 и P_3 стержень будет оказывать давление на шарниры a и b и в свою очередь будет подвергаться действию реакций шарниров. Каждую из этих реакций, проходящих через центры реакций

a и b , можно всегда разложить на две составляющие, при чем одну из составляющих направить параллельно равнодействующей сил P_1, P_2 и P_3 , а другую по оси стержня. Составляющие, параллельные равнодействующей сил P_1, P_2 и P_3 , мы можем

найти графически путем построения веревочного многоугольника и проведения замыкающей rq (фиг. d). Что же касается составляющих S , направленных по оси стержня, то из условий равновесия стержня мы можем только заключить, что силы эти равны по величине и прямо противоположны по знаку.

Чтобы разыскать силы S , нужно рассмотреть стержень ab совместно со всей системой. Для этого заменим действие стержня на систему найденными силами a и b и неизвестными пока силами S (фиг. c). Очевидно, что усилия S должны быть подобраны так, чтобы все узлы системы находились в равновесии.

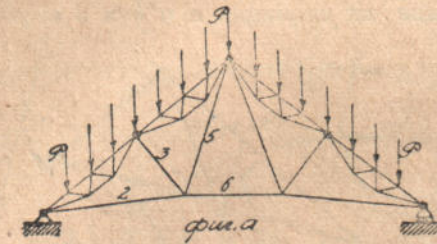
Это будут как раз те усилия, которые возникают в стержне ab системы под действием узловых нагрузок ¹⁾. Усилия эти могут быть найдены одним из указанных выше приемов расчета. Раз усилия, действующие на стержень ab , найдены, то расчет стержня на одновременное действие поперечных нагрузок и продольных сил уже не представит затруднений и может быть выполнен по правилам, изложенным в курсе сопротивления материалов.



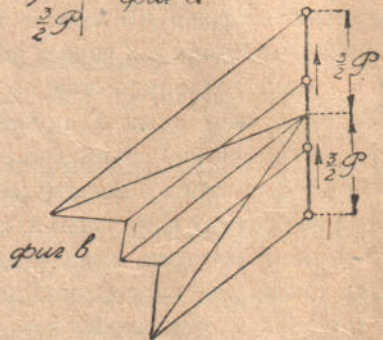
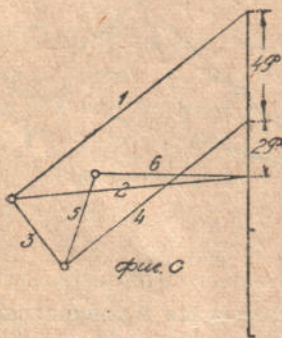
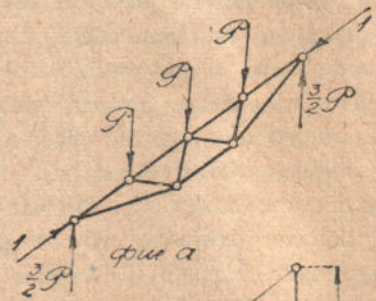
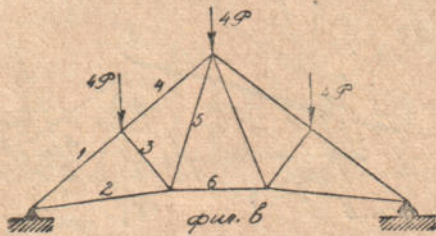
Черт. 89.

¹⁾ Т. е. нагрузок a и b и грузов, приложенных в других узлах фермы. Если имеется несколько стержней, нагруженных в промежуточных сечениях, то в каждом из них должно быть произведено то же преобразование, которое сделано для стержня ab .

Так как найденные усилия S в статически определимых системах совершенно не зависят от формы стержня ab , то намеченные выше рассуждения могут быть применены к расчету сложных ферм, в которых отдельные стержни заменены жесткими фермами. Возьмем, например, случай, представленный на фигуре a чертежа 90.



Поступая со вспомогательными фермочками нашей системы так, как это мы делаем в предыдущем случае со стержнем ab , приходим к основной системе, представленной на фигуре b . Для этой системы все усилия легко могут быть найдены путем построения соответствующей



Черт. 90.

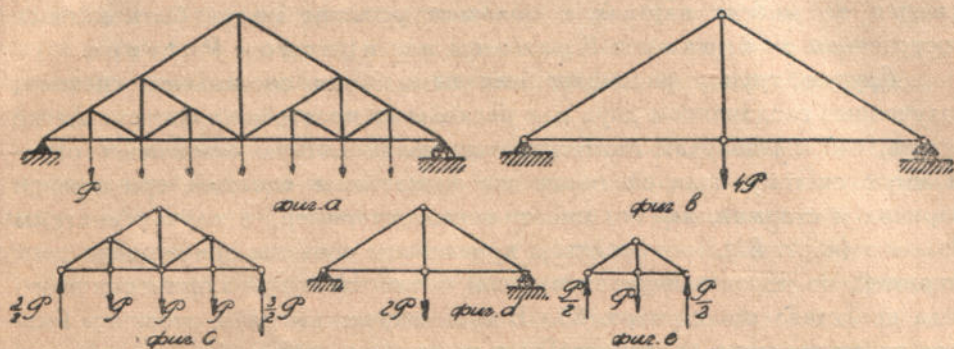
Черт. 91.

диаграммы (фиг. c). Чтобы закончить расчет, остается определить лишь усилия в стержнях вспомогательных фермочек.

Нижние фермочки будут находиться в условиях, представленных на чертеже 91¹⁾. Усилия 1 вызовут лишь равное им сжатие во всех стержнях верхнего пояса фермочки; для определения усилий от сил P проще всего построить соответствующую диаграмму (фиг. b).

¹⁾ Усилия 1 должны быть взяты из диаграммы (c) предыдущего чертежа.

Таким образом, усилия в основных стержнях 2, 3, 5 и 6 данной фермы находятся из диаграммы (фиг. с, черт. 90). Усилия в стержнях нижних вспомогательных фермочек получатся, когда мы к усилиям, найденным из диаграммы (фиг. б черт. 91), присоединим сжатие верхнего пояса, равное усилию 1 (фиг. с, черт. 90). Наконец для получения усилий в стержнях верхних вспомогательных фермочек нужно к усилиям

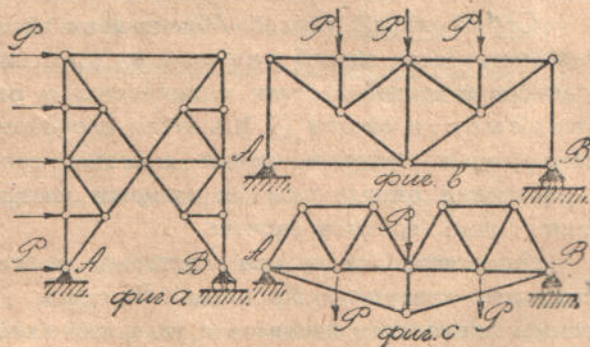


Черт. 92.

диаграммы (фиг. б, черт. 91) присоединить сжатие верхнего пояса силами 4, полученными в диаграмме (фиг. с, черт. 90).

Намеченный здесь способ расчета можно применить к системе, представленной на чертеже 92.

На фигуре б представлена основная система и на фиг. с вспомогательная фермочка. Эта последняя, в свою очередь, может быть разложена на основную и вспомогательные, как это показано на фигурах д и е.



Черт. 93.

Задача 38. Рассчитать системы, представленные на чертеже 93.

§ 18. Способ Геннеберга.

Элементарные приемы расчета статически определимых плоских систем, с которыми мы познакомились в предыдущих параграфах, не являются общими: ими нельзя рассчитать всякую статически определимую систему.

В самом деле, если мы обратимся к рассмотренным выше примерам, то увидим, что большинство рассчитанных ферм относится к числу простейших. Они получались путем последовательного присоедине-

ния к основному треугольнику узлов фермы, каждого — двумя стержнями, не лежащими на одной прямой. Для таких ферм дан был общий способ расчета — последовательное рассмотрение условий равновесия отдельных узлов в порядке, обратном порядку их присоединения к ферме. При этом приходится каждый раз разлагать известную силу на два заданные направления. Конечно, этот способ непосредственного разложения во многих случаях с большим успехом может быть заменен построением диаграммы Кремоны или приемом Риттера.

Другую группу рассмотренных нами ферм составляют системы, полученные соединением двух или нескольких простейших систем. Легко видеть, что мы получим геометрически неизменяемую статически определимую систему, если соединим две простейшие системы при помощи шарнира и стержня, как то имеет место, например, в случае системы Полонсо (черт. 82), или соединим простейшие системы при помощи трех стержней, не пересекающихся в одной точке. Несколько примеров этого рода представлено на черт. 85. В этом случае выгодно способом Риттера найти усилия в соединительных стержнях и таким образом привести задачу к расчету простейших систем.

Вставляя в простейших системах вместо отдельных стержней целые фермы простейшего типа, мы получаем сложные системы, рассмотренные в предыдущем параграфе. Расчет таких систем одним из изложенных элементарных приемов также не встречает затруднений.

Самый общий способ образования плоских статически определимых систем есть способ замены стержней, о котором нам уже приходилось говорить в связи с вопросом о геометрической неизменяемости систем (§ 10). Этим способом мы можем из простейших ферм получать новые системы, геометрически неизменяемые и статически определимые, к которым не приложим ни один из изложенных нами приемов расчета.

Например, мы можем составить систему, для которой нельзя построить диаграмму Кремоны. В самом деле, при построении диаграммы приходится начинать с узла, где сходятся только два стержня. Между тем, можно образовать сколько угодно статически определимых систем, у которых не будет ни одного узла с двумя стержнями. При n узлах общее число стержней в геометрически неизменяемой и статически определимой системе будет $2n - 3$. Так как каждый стержень прикрепляется двумя концами, то в среднем на каждый узел приходится

$$\frac{2(2n - 3)}{n} = 4 - \frac{6}{n}$$

стержней. Мы можем, следовательно, утверждать, что в статически определимой плоской системе непременно должны быть узлы, где сходятся

не более трех стержней, но, если только $n > 6$, то может случиться, что не будет в ферме ни одного узла, где бы сходилась только два стержня. В таком случае мы не можем воспользоваться ни способом непосредственного разложения, ни построением диаграммы Кремоны. Иногда подобные задачи решаются способом Риттера (черт. 85), но бывают и такие случаи, когда ни один из описанных приемов расчета не годится (см. случаи, представленные на черт. 61 фиг. *a* и *b*). Тогда следует обратиться к общему приему расчета, указанному Геннебергом¹⁾. Этот прием стоит в самой тесной связи с общим методом образования ферм путем замены стержней.

Пользуясь этим методом, мы можем любую статически определимую ферму получить из простейшей путем замены стержней. Производя замену стержней в обратном порядке, мы сумеем расчет любой статически определимой системы привести к расчету простейшей системы.

Мы начинаем преобразование с одного из узлов, где сходятся только три стержня. Выбрасываем один из этих стержней. Тогда наша ферма обратится в изменяемую систему. Расстояния между отдельными узлами будут иметь возможность меняться при неизменной длине стержней системы. Чтобы устранить эту подвижность мы можем вместо отброшенного стержня вставить новый между двумя какими-либо узлами, расстояние между которыми получило возможность меняться. Таким путем будет восстановлена геометрическая неизменяемость системы, и мы получим ферму, у которой, по крайней мере, в одном узле будут сходить только два стержня. Отбрасывая этот узел, мы приходим к системе, заключающей одним узлом меньше, чем то имелось в заданной нам ферме.

Поступая с этой новой системой выше описанным способом и продолжая и дальше замену стержней, мы в заключение придем к системе простейшего типа.

Ход расчета по способу Геннеберга поясним на простейшем примере, когда замена одного лишь стержня приводит нас к простейшей системе (см. фиг. *a* черт. 61: замена стержня *ad* стержнем *ce*).

Такая система легко может быть рассчитана одним из известных нам способов. Обыкновенно проще всего в этом случае построить диаграмму Кремоны, из которой найдутся усилия во всех стержнях получившейся после преобразования простейшей системы. Через T_i обозначим усилие в каком-либо стержне i этой системы и через T_e — усилие

¹⁾ См. Henneberg. Statik der starren Systeme. Darmstadt, 1886. В настоящее время имеется новое, значительно расширенное издание этой книги: Graphische Statik der starren Systeme, Leipzig, 1911 г. Отношение к этому способу работ Müller-Breslau выяснено в книге Schlink'a Statik der Raumbauwerke, стр. 80.

в возмещающем стержне, который мы вставили взамен отброшенного стержня заданной нам системы.

Теперь отдельно изучим влияние на систему выброшенного нами стержня. Для этого к концевым узлам этого стержня по его оси приложим две равные и прямо противоположные силы, равные единице, например, одной тонне. Усилия, вызываемые этими силами, в стержнях простейшей системы обозначим через u_i и в возмещающем стержне — через u_e .

Имея систему усилий T и усилий u , мы теперь легко можем найти усилия во всех стержнях заданной нам системы. Пусть X — усилие, возникающее в том стержне, который мы выбрасываем при преобразовании заданной нам системы в простейшую. Тогда усилие S_i в каком-либо

стержне i данной нам системы представится формулой:

$$S_i = T_i + u_i X \quad (a).$$

Для возмещающего стержня усилие найдется так:

$$S_e = T_e + u_e X.$$

Нужное нам усилие X найдется из того соображения, что в действительной, заданной нам ферме совершенно нет возмещающего стержня. Следовательно, усилие X должно быть подобрано так, чтобы соответствующее S_e обращалось в нуль. Для определения X получаем уравнение:

$$T_e + u_e X = 0,$$

откуда

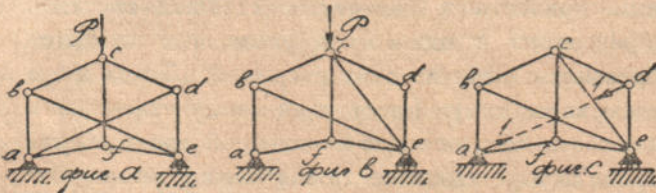
$$X = - \frac{T_e}{u_e} \dots \dots \dots (b).$$

Имея диаграммы усилий T и u , мы теперь при помощи (a) легко находим усилия во всех стержнях системы.

Таким образом, в рассмотренном простейшем случае расчет сводится к построению двух диаграмм Кремоны для простейшей системы.

Рассмотрим в качестве примера систему, представленную на чертеже 94 фиг. а.

Система эта не может быть рассчитана одним из ранее изложенных приемов, и мы применим здесь метод Геннеберга. Выбрасывая стержень ad и вставляя вместо него стержень se , получаем простейшую систему, представленную на фиг. б. Усилия T , возникающие в этой системе под действием заданной нагрузки P , легко находятся построением диаграммы



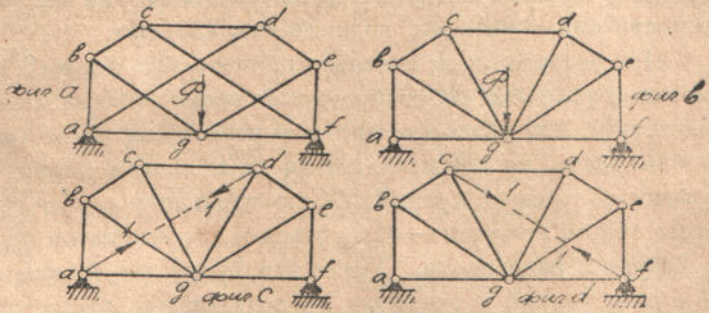
Черт. 94.

Кремоны. Теперь изучаем влияние отброшенного стержня ad , для чего отбрасываем внешние силы, прикладываем к нашей простейшей системе в узлах a и d усилия, равные единице и направленные навстречу по оси отброшенного стержня (фиг. c), и строим диаграмму для усилий u . Имея эти две диаграммы, мы легко находим усилия во всех стержнях при помощи формул (а) и (b).

Подобным же способом могут быть решены также и более сложные задачи, когда приходится делать две и более замены стержней для преобразования заданной системы в простейшую.

Например, для системы, представленной на чертеже 95 фиг. a , необходимо произвести две замены. Нужно выбросить стержни ad и sf и вставить стержни cg и gd , чтобы получить простейшую систему, представленную на фигуре b .

Для этой системы легко получить диаграмму усилий T , возникающих под действием нагрузки P .



Черт. 95.

После этого изучаем действие отброшенных стержней. Для этого строим диаграмму усилий u , возникающих под действием сил единица, приложенных по линии ad (фиг. c), и диаграмму усилий v от сил единица, приложенных по линии cf (фиг. d). Имея эти три диаграммы и обозначая через X и Y усилия, возникающие в стержнях ad и cf заданной нам системы (фиг. a), получим в любом стержне усилие S_i по такой формуле:

$$S_i = T_i + u_i X + v_i Y \dots \dots \dots (a')$$

Усилия X и Y находятся из того условия, что в заменяющих стержнях cg и gd , отсутствующих в заданной нам системе, усилия должны равняться нулю. Таким образом, приходим к уравнениям

$$\left. \begin{aligned} T_c + u_c X + v_c Y &= 0 \\ T_g + u_g X + v_g Y &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (b')$$

Отсюда могут быть найдены X и Y . После чего усилия во всех стержнях находятся из ф-лы (а'). Весь расчет сводится, таким образом, к построению трех диаграмм для простейшей системы. Легко видеть,

что намеченный прием расчета может быть применен к фермам, преобразование которых в простейшие системы требует более двух замен стержней.

Способом Геннеберга выгодно пользоваться также для оценки геометрической неизменяемости. Для системы с n узлами — необходимо иметь $2n - 3$ стержней. При таком числе стержней мы будем, вообще говоря, иметь систему статически определимую. Число ур-ий статики $2n$, которые мы можем составить, написав ур-ия равновесия для n узлов, будет равняться числу неизвестных ($2n - 3$ усилий в стержнях и 3 реактивных усилия). Однако, в некоторых исключительных случаях эта система, состоящая из $2n$ ур-ий, будет давать неопределенные или бесконечные значения усилий, что указывает на геометрическую изменяемость или некоторую подвижность системы.

При рассмотрении способов образования ферм (§ 10) мы указывали, при каких условиях могут получиться геометрически изменяемые системы, и отмечали, что подобные системы не должны применяться на практике. Чтобы судить, не представляет ли та или иная ферма, статически определимая по числу стержней, исключительного случая, можно воспользоваться общим приемом — обратиться к исследованию системы, состоящей из $2n$ ур-ий равновесия. Ур-ия эти будут линейными относительно неизвестных усилий в стержнях, и, если определитель этих ур-ий в нуль не обращается, то мы для всех усилий получим вполне определенные значения. Когда определитель ур-ий равновесия обращается в нуль, усилия получают или бесконечные, или неопределенные значения. Это покажет, что мы имеем дело с исключительным случаем: хотя система и обладает необходимым числом стержней, но расположение их таково, что геометрическая неизменяемость системы не обеспечена.

Исследование определителя системы $2n$ ур-ий представляется делом сложным, и к этому приему обыкновенно не прибегают. На практике для оценки геометрической неизменяемости обыкновенно обращаются к рассмотрению способа образования изучаемой системы. Таким путем часто удастся выяснить условия ее геометрической неизменяемости. В самом деле, при этом способе определение усилий в стержнях сводится к построению диаграмм для простейших систем и к решению системы линейных ур-ий, причем число ур-ий соответствует числу замен стержней. Если эти ур-ия дают для неизвестных определенные решения, не обращающиеся в бесконечность, мы будем иметь геометрически неизменяемую систему.

Возьмем, например, систему, где путем одной замены получается простейшая ферма (черт. 94). Если в этом случае мы получаем для u решение, отличное от нуля, то ур-ие (b) даст нам вполне определенное значение для x , и мы по ф-ле (a) найдем значение усилий во всех

стержнях системы: наша система будет геометрически неизменяемой.

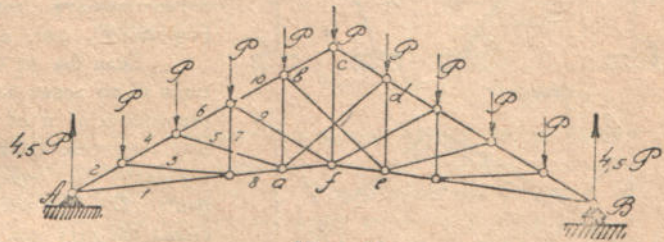
Условие

$$u_e = 0$$

будет указывать на исключительный случай. В случае двух замен стержней, мы приходим к двум ур-ям (b'). Если эти ур-ия дают для X и U определенные решения, не обращающиеся в бесконечность, то система наша будет геометрически неизменяемой. Таким образом способ Геннеберга упрощает исследование геометрической неизменяемости. Вместо $2n$ ур-ий мы будем иметь меньшее число ур-ий.

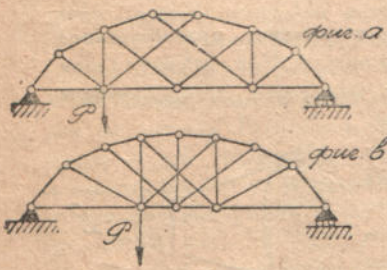
Задачи: 39. Определить усилия в стержнях стропильной фермы, представленной на чертеже 96.

Из условий симметрии заключаем, что при расчете можно ограничиться определением усилий для одной половины фермы; начиная с левого опорного стержня, мы без всякого затруднения определяем усилия в стержнях 1, . . . 10. Переходя от узла к узлу, нам придется каждый раз разлагать силу на два заданные направления. Таким образом мы дойдем до средней части фермы $abcdef$, представляющей собой шестиугольник с тремя диагоналями. Эта система, как было указано, легко рассчитывается способом Геннеберга.

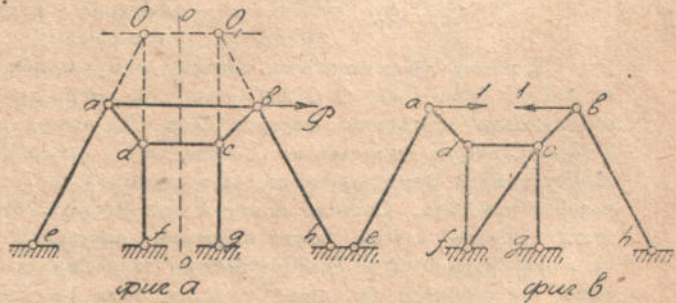


Черт. 96.

40. Определить усилия в стержнях мостовых ферм, представленных на чертеже 97.



Черт. 97.

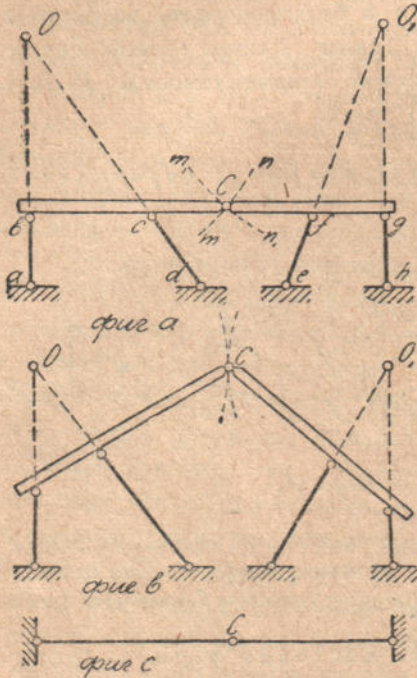


Черт. 98.

41. Показать, пользуясь методом Геннеберга, что система, представленная на чертеже 98 фиг. а, будет обладать некоторой подвижностью при условии симметрии относительно оси 00 .

При четырех узлах a, b, c и d мы можем написать 8 ур-ий равновесия, куда войдут 8 неизвестных усилий в стержнях. Таким образом, по числу стержней система

является статически определимой. Для выяснения вопроса, не представляет ли наша система исключительного случая, обратимся к приему Геннеберга. Выбросив стержень ab и вставив вместо него стержень fc , мы получаем систему (фиг. b), построенную по типу простейшей. Для выяснения действия отброшенного стержня прикладываем по линии ab две равные и прямопротивоположные силы. Вызываемые этими силами усилия в стержнях легко находятся непосредственным разложением, и мы из условий симметрии заключаем, что в заменяющем стержне fc соответствующее усилие u_e обращается в нуль.



Черт. 99.

В таком случае конечная сила P , как было показано, вызовет весьма большие усилия. Система наша будет обладать подвижностью, недопустимой на практике.

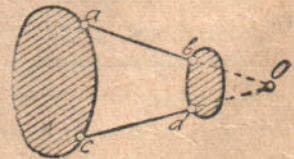
К тому же заключению мы можем прийти и иным путем, на основании геометрических соображений. Начнем с рассмотрения системы двух балок, каждая из которых прикреплена к фундаменту двумя опорными стержнями (чертеж 99, фиг. a).

Если бы не было соединительного шарнира C , то левая балка, прикрепленная к земле стержнями ab и cd , сохранила бы возможность перемещаться. Малые ее перемещения соответствовали бы вращению около мгновенного центра O . При этом правый конец балки описывал бы дугу ml .

Правая балка при отсутствии шарнира C могла бы совершать малые перемещения, вращаясь около мгновенного центра O_1 . При этом левый ее конец описывал бы дугу m_1l_1 .

Так как пути ml и m_1l_1 пересекаются между собой, то путем соединения концов балок шарниром C мы лишаем их возможности перемещений и получаем геометрически неизменяемую систему.

К иному заключению мы приходим, если возьмем расположение, представленное на фиг. b . Здесь точки O , O_1 и C располагаются на одной прямой. При вращении балок относительно мгновенных центров O и O_1 , концы их описывают дуги, имеющие в точке C общую касательную. Весьма малым изменениям длин стержней будет соответствовать значительное перемещение шарнира. Система получится не жесткой, будет соответствовать случаю двух стержней, расположенных на одной прямой (фиг. c). Совершенно такие же заключения мы получили бы, если бы балки были соединены не шарниром C , а двумя стержнями.

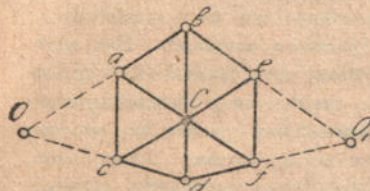


Черт. 100

В самом деле, соединяя две жесткие системы двумя шарнирно-прикрепленными стержнями (черт. 100), мы сохраняем возможность перемещения одного тела относительно другого, причем это перемещение будет соответствовать вращению около мгновенного центра O , получающегося в пересечении соединительных стержней. Соединение двух неизменяемых систем двумя стержнями соответствует соединению шарниром, помещенным в точке пересечения стержней.

Обратимся теперь к системе, представленной на фиг. а черт. 93. Если выбросить соединительные бруски ab и cd , то стержни ad и cb получат возможность совершать перемещения, соответствующие вращениям около мгновенных центров O и O_1 . Если соединительные стержни направлены так, что точка их пересечения не лежит на линии OO_1 , то система будет геометрически неизменяемой. В нашем случае эти стержни параллельны линии OO_1 . Их точка пересечения лежит в бесконечности на линии OO_1 , и мы имеем, следовательно, исключительный случай, соответствующий фиг. с черт. 99.

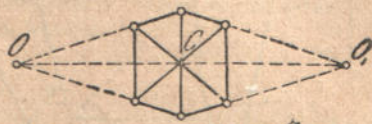
42. Применить геометрические соображения предыдущей задачи к исследованию условий геометрической неизменяемости шестиугольника с тремя диагоналями (черт. 101).



Черт. 101.



фиг а



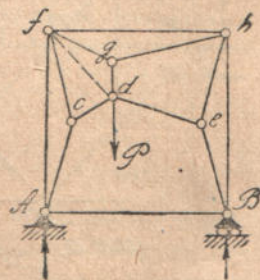
фиг. б

Черт. 102.

Если выбросить диагонали af и ce и держать неподвижно брусок ba , то бруски ac и ef сохраняют возможность перемещаться. Малые перемещения будут соответствовать вращениям около мгновенных центров O и O_1 . Соединение брусков ac и ef стержнями af и ce равносильно устройству соединительного шарнира в точке C . Если C не лежит на линии OO_1 , то можем заключить, что заданная система будет жесткой. Из тех же соображений заключаем, что системы, представленные на чертеже 102, не будут жесткими ¹⁾.

43. Найти при помощи способа Геннеберга усилия во всех стержнях системы, представленной на чертеже 103.

Система эта имеет 8 узлов и 13 стержней, следовательно, удовлетворяет условию статической определимости. Для нахождения усилий в стержнях, мы не можем в данном случае воспользоваться способом непосредственного разложения или построением диаграммы Кремоны. Нет ни одного узла, где бы сходились лишь два стержня. Способы, основанные на рассечении фермы, также не ведут к цели. Чтобы определить усилия по способу Геннеберга, мы преобразуем нашу систему в простейшую. Выбросим горизонтальный нижний стержень AB и вместо него вставим стержень fd , отмеченный на чертеже пунктиром. Диаграмму усилий T , вызываемых в полученной простейшей системе грузом P и реакциями A и B , легко построить. Так как направления сил A и B совпадают с направлениями стержней Af и Bh , то легко убеждаемся, что в возмещающем стержне fd усилие T_e равно нулю. Строим теперь диаграмму усилий u , вызываемых в системе двумя равными и прямопротивоположными силами в одну тонну, приложенными в A и B и действующими по линии AB . Если только наша система не сим-



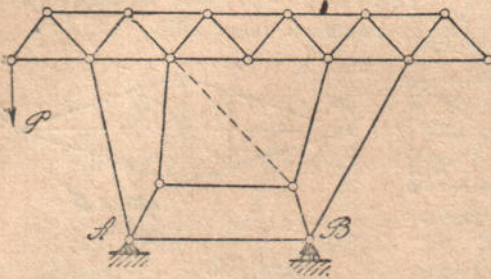
Черт. 103.

¹⁾ Противоположные стороны шестиугольника, вписанного в эллипс (шестиугольник Паскаля), пересекаются в трех точках, лежащих на одной прямой. Все такие шестиугольники будут не жесткими.

метрична относительно линии действия силы P , то легко убедимся, что получающееся при этом усилие u_e в возмещающем стержне fd будет отлично от нуля. Для стержня AB получаем

$$X = \frac{T_e}{u_e} = 0.$$

При условии симметрии будем иметь $u_e = 0$. Усилие X получит неопределенное значение. Наша система будет не жесткой.

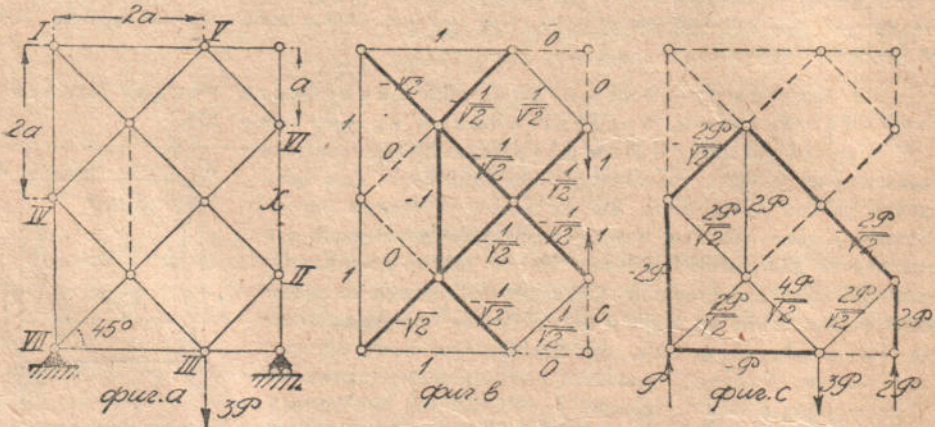


Черт. 104.

44. Определить усилия в стержнях фермы крана, представленного на чертеже 101.

Выбрасывая стержень AB и вставляя стержень, намеченный на чертеже пунктиром, мы получаем простейшую систему. Дальнейший расчет по способу Геннеберга не представит затруднений. Легко могут быть исследованы те условия, при которых мы будем иметь не жесткую систему.

45. Применить способ Геннеберга к определению усилий в стержнях решетчатой фермы, представленной на чертеже 105, фиг. а.



Черт. 105.

Выбрасывая из системы стержень X и вставляя вместо него стержень, отмеченный на фиг. а пунктиром, мы приходим к ферме простейшего типа, представленной на фигурах b и c .

Усилия T , вызываемые в этой ферме грузом $3P$, находятся непосредственным разложением. На фигуре c отмечены величины этих усилий. Ненапряженные стержни указаны пунктиром, сжатые стержни — жирными линиями. Для возмещающего стержня находим

$$T_e = 2P.$$

На фигуре *b* представлена картина усилий *u*. Из нее находим

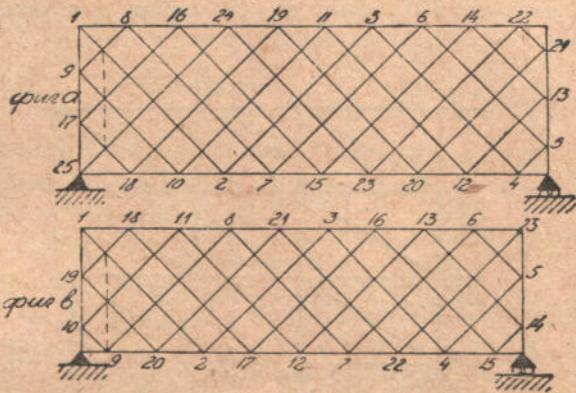
$$u_e = -1.$$

Следовательно,

$$X = -\frac{1_e}{u_e} = 2\rho.$$

Определив *X*, легко можем составить таблицу усилий во всех стержнях. Заметим, что в нашем случае система раскосов представляет одну непрерывную цепь I . . . VII. Начинаясь в узле I, соответствующем верхнему концу левой стойки, цепь заканчивается в узле VII, в нижнем конце левой стойки. Такие фермы всегда получаются статически определимыми и, следовательно, геометрически неизменяемыми. Теми же свойствами обладают и более сложные системы, представленные на чертеже 106.

Выбрасывая в системе, представленной на фигуре *a*, стержни 21—13 и 13—5 и вставляя вместо них стержни, указанные пунктиром, мы приходим к ферме простейшего типа, которая легко может быть рассчитана путем непосредственного разложения. Точно также система, представленная на фигуре *b*, обращается в простейшую путем замены стержней. Усилия в выбрасываемых брусьях найдутся из ур-ий вида (*b'*). При этом эти ур-ия для рассматриваемых ферм дают вполне определенные решения ¹⁾, что указывает на геометрическую неизменяемость систем. В обеих системах совокупность всех раскосов образует одну непрерывную цепь. На фигуре *a* эта цепь начинается узлом 1 и заканчивается узлом 25. На фигуре *b* цепь начинается узлом 1 и заканчивается узлом 23.



Черт. 106.

§ 19. Способ изображающих точек.

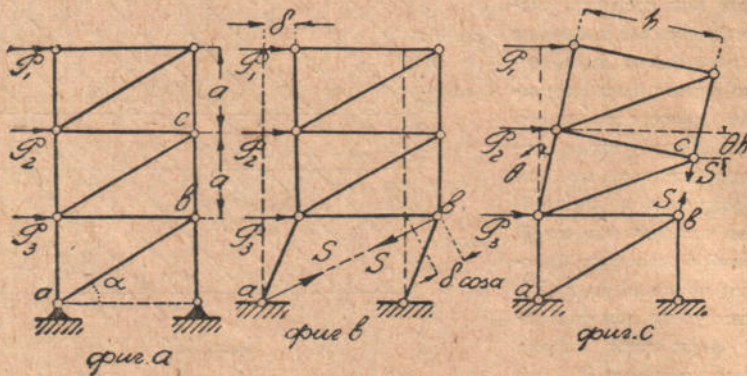
Способ изображающих точек основан на пользовании началом возможных перемещений. Если из фермы, заключающей необходимое число стержней, выбросить один стержень, усилие в котором нас интересует, то система сделается геометрически изменяемой, она обратится в механизм и будет допускать относительное перемещение узлов без изменения длин стержней. Заменим действие выброшенного стержня на систему двумя равными и прямо противоположными силами *S*, соответствующими искомому усилию, и приложим все действующие на ферму внешние силы. Мы будем иметь систему сил взаимно уравнове-

¹⁾ Подробное рассмотрение нескольких решетчатых систем имеется в Курсе графической статики Мюллер-Бреслау. Второе русское изд., т. I, стр. 382.

шивающихся. Следовательно, на всяком возможном для системы перемещении работа всех этих сил будет равняться нулю. Возможным перемещением в данном случае будет то, которое наша система получила возможность совершать благодаря удалению стержня. При этом перемещении длины всех остальных стержней не меняются, и соответствующие им усилия не совершают никакой работы. Применяя начало возможных перемещений, мы должны будем ввести в расчет лишь работу внешних заданных сил и искомого усилия S .

Таким образом, мы приходим к одному уравнению с одним неизвестным.

Возьмем в качестве простейшего примера систему, представленную на чертеже 107, фиг. а. Положим, требуется найти усилие в нижней



Черт. 107.

диагонали ab . Выбрасывая этот стержень и заменяя его действие соответствующими силами S , получаем подвижную систему, которая может совершать перемещения, указанные на фиг. б. При этом движению верхняя часть фермы совершает горизонтальное поступательное перемещение δ^1 , причем нижний прямоугольник перекашивается, и диагональ, соответствующая выброшенному стержню ab , удлиняется, как видно из чертежа, на величину $\delta \cos \alpha$. Применяя начало возможных перемещений, получим такое уравнение равновесия

$$(P_1 + P_2 + P_3) \delta - S \delta \cos \alpha = 0,$$

откуда

$$S = \frac{1}{\cos \alpha} (P_1 + P_2 + P_3).$$

¹⁾ Возможное перемещение δ бесконечно мало, и поэтому некоторым опусканием верхней части фермы, которое получается от перекашивания нижнего прямоугольника, мы пренебрегаем, как малой величиной второго порядка малости.

Результат этот, конечно, совпадает с тем, что мы получили бы, применяя, например, способ Риттера.

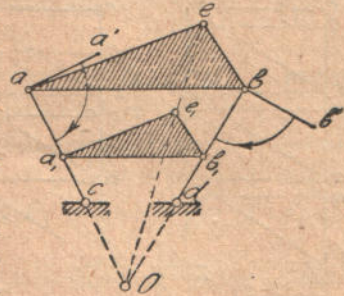
Если бы нам нужно было вычислить усилие в вертикальном стержне bc во второй панели (фиг. a), то следовало бы выбросить этот стержень и обратиться к рассмотрению соответствующего возможного перемещения (фиг. c). Перемещение это представляет собой вращение верхней части фермы около шарнира, в котором приложена сила P_3 . Обозначим через θ соответствующий бесконечно малый угол поворота. Тогда сближение точек b и c , соответствующих концам выброшенного стержня, будет очевидно равняться $h\theta$, и начало возможных перемещений приведет нас к такому уравнению:

$$2a\theta P_1 + a\theta P_2 + h\theta S = 0,$$

откуда

$$S = -\frac{(2P_1 + P_2)a}{h}.$$

Намеченный здесь прием, не представивший никаких затруднений при рассмотрении простейшего примера (черт. 107), получил практическое значение и мог быть с успехом распространен на более сложные случаи лишь тогда, когда был дан удобный способ для разыскания перемещений узлов фермы и для графического представления этих перемещений при помощи изображающих точек ¹⁾.



Черт. 108.

Способ этот основан на применении известного положения кинематики, что перемещение неизменяемой плоской фигуры в ее плоскости из одного положения в другое какое-либо положение всегда может быть осуществлено путем вращения около некоторого центра.

В случае бесконечно малых перемещений, мы будем иметь вращение около так называемого мгновенного центра. Возьмем, например, брусок ab (черт. 108), прикрепленный к земле двумя стержнями ac и bd . Брусок этот может совершать, относительно земли, некоторые перемещения. Возможным перемещением для него будет вращение около мгновенного центра O , получающегося в пересечении направлений

¹⁾ Указание на возможность применения начала возможных перемещений к расчету ферм впервые было сделано Görppl'em. Несколько задач, разрешенных таким путем имеется в статье Mohr'a: Ueber Geschwindigkeitspläne und Beschleunigungspläne Zivilingenieur 1887 г., стр. 631. Применение изображающих точек принадлежит Müller-Breslau.

Относящаяся сюда литература приведена в цитированной выше книге Schlink'a, стр. 43.

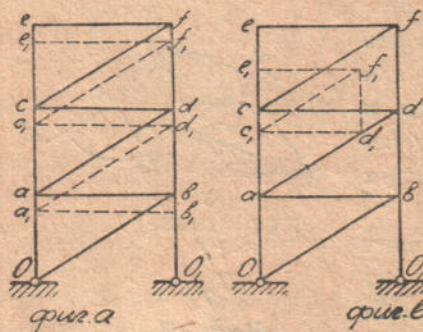
ac и bd . Если через θ обозначим малый угол поворота, соответствующий возможному перемещению, то перемещения aa' и bb' точек a и b будут направлены перпендикулярно к радиусам aO и bO и будут равны соответственно θOa и θOb . Чтобы избежать бесконечно малых величин, мы в дальнейшем вместо возможных перемещений будем откладывать соответствующие этим перемещениям скорости ¹⁾.

Построение является особенно выгодным, если откладывать эти скорости не по направлению перемещений, а повернуть их относительно перемещений на 90° по часовой стрелке. Пусть aa_1 и bb_1 представляют повернутые скорости, тогда точка a_1 и b_1 суть изображающие точки для движения стержня ab , и фигура a_1b_1O — соответствующая картина скоростей.

Было показано, что

$$aa_1 : bb_1 = aO : bO.$$

Следовательно, линия a_1b_1 параллельна ab , и картина скоростей подобна фигуре aOb . На этом основывается весьма простое



Черт. 109.

построение изображающих точек для всех точек, неизменно связанных с a и b . Если нужно, например, построить изображающую точку для точки e , связанной с a и b в неизменяемый треугольник abe , то изображающая точка e_1 находится построением треугольника $a_1b_1e_1$, подобного треугольнику abe , на стороне a_1b_1 .

Основываясь на этом геометрическом подобии, мы сразу можем построить картину скоростей (черт. 109)

для перемещений только что рассмотренного примера. Когда мы выбираем нижнюю диагональ (фиг. а), точка a и b получают возможность двигаться по дугам кругов с центрами O и O_1 .

Возможные скорости будут перпендикулярны к aO и bO_1 . Повернутые скорости совпадают с направлениями aO и bO_1 . Пусть a_1 и b_1 — соответствующие изображающие точки ²⁾. Остальные изображающие точки и всю картину скоростей мы получим, если

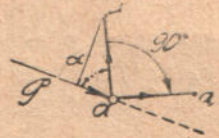
¹⁾ Эти скорости получатся делением перемещений на элемент времени δt , который можно выбрать произвольным.

²⁾ Величину отрезка aa_1 можем назначить произвольно, тогда b_1 находится из условий $a_1b_1 \parallel ab$. Изменяя отрезок aa_1 , изображающий перемещение точки a , мы в том же отношении изменяем также перемещение прочих точек. На уравнение возможных перемещений это влияния не окажет.

на a_1b_1 построим фигуру, подобную заданной нам ферме. Фигура эта на чертеже указана пунктиром.

Если выбросить брусок bd (фиг. b), то выше лежащая часть фермы получает возможность вращения около шарнира a . Пусть c_1 — изображающая точка для c . Изображающая точка для d должна, очевидно, лежать на радиусе ad , и мы получим точку d_1 в пересечении ad с линией c_1d_1 , параллельной cd . Остальные точки картины скоростей мы получим построением фигуры $c_1d_1f_1e_1$, подобной $cdfe$.

Условившись так относительно изображения перемещений, мы получаем удобный прием для вычисления работы всех сил на возможном перемещении. Пусть P сила, приложенная в узле a заданной нам фермы, и aa' соответствующее этому узлу перемещение (черт. 110). Работа силы P на возможном перемещении будет равна — $P \cdot aa' \cdot \cos \alpha$. Очевидно, мы получим тот же результат, если вместо вычисления работы, составим момент силы P относительно точки a_1 , соответствующей повернутому на 90° перемещению. Если мы за положительные моменты будем считать те, которым соответствует вращение по часовой стрелке, то знак момента также будет совпадать со знаком работы.



Черт. 110.

Уравнение возможных перемещений не нарушится, если мы вместо повернутых перемещений возьмем пропорциональные им повернутые скорости. В таком случае при составлении уравнения придется составить моменты сил, приложенных к узлам фермы, относительно изображающих точек. Кроме внешних нагрузок P , сюда войдут и силы S_i , заменяющие выброшенный стержень.

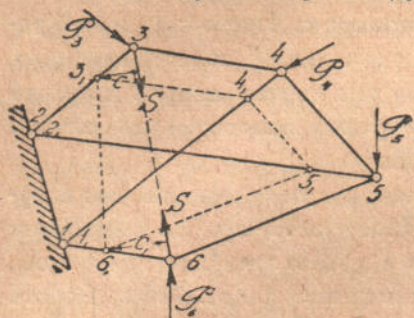
Выбирая для сил общее обозначение θ и называя через p плечи этих сил относительно соответствующих изображающих точек, напишем уравнение возможных перемещений в таком виде:

$$\sum \theta p = 0 \dots \dots \dots (a).$$

Этот удобный прием для изображения перемещений дает возможность применить способ изображающих точек к расчету таких систем, где нельзя построить диаграмму Кремоны или использовать способ Риттера. Особенно выгодно пользоваться этим способом при исследовании вопроса о геометрической неизменяемости системы.

Рассмотрим в качестве примера задачу об определении усилий в шестиугольнике с тремя диагоналями (черт. 111), которую мы решили, применяя общий метод Геннеберга. Найдем усилие, возникающее под действием сил P , в диагонали 3—6 нашей системы. Выбрасывая эту диагональ и заменяя ее соответствующими силами S_i , получим подвижную систему. Будем держать неподвижным стержень 1—2 и исследуем

движение прочих точек системы. Шарнир 3, очевидно, может совершать перемещения по дуге круга радиуса 2—3. Пусть 3₁ представляет собой соответствующую изображающую точку. Изображающая точка 4₁ будет



Черт. 111.

лежать на радиусе 1—4 и получится путем проведения линии 3₁4₁ || 34. Таким же путем получится точка 5₁, на радиусе 2—5, и, наконец, точка 6₁— на радиусе 1—6. Изображающие точки для 2 и 1, очевидно, будут совпадать с этими последними.

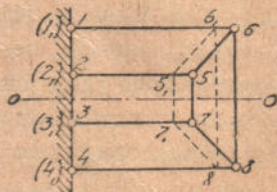
Получив таким образом все изображающие точки, мы легко напишем уравнение равновесия на основании начала возможных перемещений. Обозначая через p плечи сил P относительно соответствующих изображающих точек ¹⁾ и через c и c_1 плечи для усилий S , получаем условие равновесия

$$\sum Pp + Sc - Sc_1 = 0,$$

откуда

$$S = \frac{\sum Pp}{c - c_1} \dots \dots \dots (b).$$

Если бы линия 3₁—6₁ оказалась параллельной линии 3—6, знаменатель в формуле (b) обратился бы в нуль, и мы получили бы для S или бесконечное или неопределенное значение. Это указало бы на геометрическую изменяемость системы ²⁾. Получаем такое заключение: если при построении картины скоростей получается фигура, у которой все линии параллельны соответствующим стержням заданной системы, то система эта будет геометрически изменяемой.



Черт. 112.

Например, для системы, представленной на чертеже 112, в случае симметрии относительно оси oo , мы, выбирая стержень 5—7, сейчас же получаем картину скоростей, помеченную

¹⁾ Знаки для p выбираем согласно правилу для знаков моментов.

²⁾ Заключение это легко в случае шестиугольника проверить на опыте.

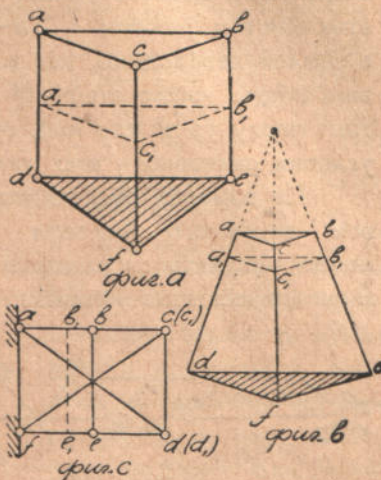
Если взять какой-либо шестиугольник, вписанный в эллипс, то он всегда будет представлять собой исключительный случай. В лаборатории Киевского Политехнического Института подобный шестиугольник был выполнен из полосового железа, причем в узлах стороны и диагонали связывались шарнирами.

Если центры шарниров все располагались по какому-либо эллипсу, то система получалась не жесткой, в чем было легко убедиться, прикладывая к шестиугольнику усилия непосредственно руками.

пунктиром. В этой картине все линии параллельны соответствующим стержням системы. Следовательно, система, как было уже ранее доказано способом Реннеберга (см. зад. 41, § 18), является геометрически изменяемой.

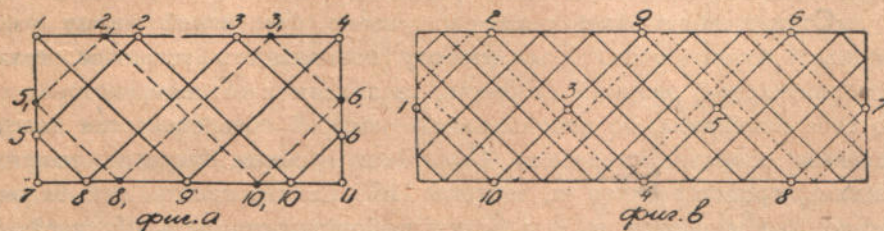
Задачи: 46. Показать, что системы, представленные на чертеже 113, являются геометрически изменяемыми.

Для систем, представленных на фигурах *a* и *b*, мы можем держать узлы *d*, *e* и *f* неподжно. Тогда, выбрасывая стержень *ab*, найдем, что точки *a*, *b* и *c* перемещаются так, как то показывают изображающие точки, *a*₁, *b*₁ и *c*₁. Все линии картины скоростей получаются параллельными стержням заданной системы. В случае системы, представленной на фигуре *c*, предполагается, что диагонали не скреплены в точке их пересечения. При этом условии стержень *be* может совершать некоторое перемещение в направлении своей длины. Перемещению этому не мешают стержни *ab*, *bc*, *fe* и *ed*, так как малым перемещениям *be* по вертикальному направлению будут соответствовать изменения длин перечисленных стержней на малые величины второго порядка малости. Выбрасывая стержень *cd* и удерживая неподжно узлы *a* и *f*, найдем, что для получения соответствующей картины скоростей, нужно только провести линию *b*₁*e*₁ параллельно линии *be*. Вершины *a*, *c*, *d* и *f* остаются при этом неподжными, и с ними совпадут соответствующие изображающие точки.



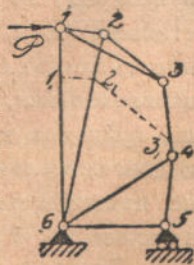
Черт. 113.

47. Показать, пользуясь способом изображающих точек, что решетчатые системы, представленные на чертеже 114, геометрически изменяемы.



Черт. 114.

Система, представленная на фигуре *a*, хотя и включает в себе необходимое число стержней, — геометрически изменяема. Мы можем, не двигая узлов 1, 4, 11, 9, и 7, переместить остальные точки так, как то показывает картина скоростей, нанесенная пунктиром. Точно также геометрически изменяема и система, представленная на фигуре *b*. Образованный раскосами многоугольник 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 1 может изменить очертание соответственно картине скоростей, намеченной пунктиром. Остальные узлы при этом остаются неподжными.



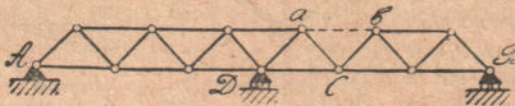
Черт. 115.

48. Определить усилие в стержне 1—3 (черт. 115), пользуясь способом изображающих точек.

§ 20. Системы, не представляющие одного жесткого целого.

Мы до сих пор рассматривали системы, которые представляли собой одно жесткое целое. При n узлах необходимое число стержней этих систем равняется $2n - 3$. Для неизменной связи такой системы с землей необходимо, как мы видели (§ 11), три стержня. Таким образом, общее число стержней равняется $2n$, т.е. как раз соответствует тому числу ур-ий статики, которое мы могли бы составить, рассматривая условия равновесия всех узлов системы.

Не изменяя общего числа стержней ($2n$) и не нарушая таким образом основного условия статической определенности, мы можем получать стержневые системы, которые сами по себе являются геометрически изменяемыми, но неподвижность которых, а следовательно,



Черт. 116.

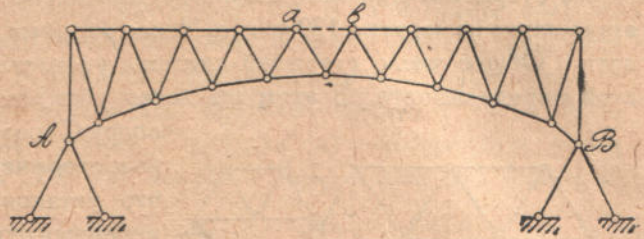
и пригодность для инженерных сооружений достигается увеличением числа опорных стержней, за счет стержней самой системы.

Наиболее общий способ образования таких систем — это способ замены стержней. Если мы в системе с необходимым числом стержней, прикрепленной к фундаменту тремя стержнями, выбросим один из стержней, то система сделается геометрически изменяемой. Расстояния между некоторыми шарнирами системы получают возможность изменяться при неизменной длине оставшихся стержней системы.

Станет возможным также изменение расстояний между узлами фермы и фундаментом. Если мы эту возможность устраним, вставив дополнительный опорный стержень, то придем к системе, которая сама по себе изменяема, но неподвижность которой обеспечивается дополнительным опорным стержнем. Подобным образом получена, например, система, представленная на чертеже 116. Если в простейшей балочной ферме, опирающейся в A и B , мы выбросим стержень ab , указанный пунктиром, то получим нежесткую систему, составленную из двух простейших ферм, связанных между собой шарниром C . Чтобы восстановить неизменяемость системы, поставлена в узле D подвижная опора, эквивалентная, как мы знаем, одному опорному стержню. Таким образом мы приходим к сложной системе, составленной из консольной балки AC и дополнительной балочки CB . Так как общее число стержней при этом не изменилось, то основное условие для статической определенности осталось не нарушенным.

Подобным же образом из простейшей балочной фермы получена трехшарнирная арка, представленная на чертеже 117. Выбрасывая стерж-

жень ab , мы получаем подвижную систему, составленную из двух жестких ферм, связанных между собой шарниром C . Чтобы уничтожить подвижность, мы делаем неподвижными обе опоры фермы, т.е. увеличиваем число опорных стержней до четырех. Общее число стержней при этом не меняется и удовлетворяет основному условию для статической определенности.

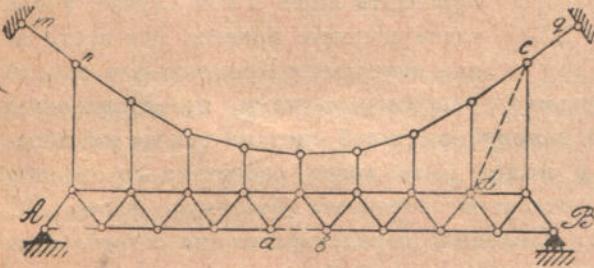


Черт. 117.

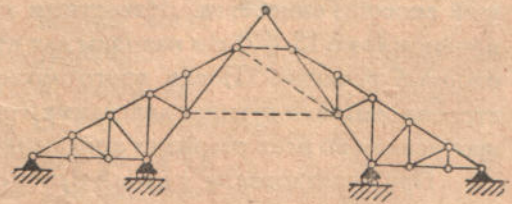
Сложная система, состоящая из цепи, усиленной жесткими фермами (черт. 118), также может быть получена из простейшей системы путем

замены стержней, нужно только представить себе, что помеченные на чертеже пунктиром стержни ab и cd простейшей системы, расположенной на опорах A и B , заменены дополнительными опорными стержнями mn и sq . При расчете подобных систем нужно прежде всего убе-

диться, удовлетворено ли основное условие статической определенности. Если число опорных стержней ¹⁾ равно p , то система должна заключать $2n - p$ стержней. При этом обыкновенно нет надобности пересчитывать все стержни, — достаточно обратить внимание лишь на способ образования системы. Например, система, представленная на чертеже 119, при указанном устройстве опор имеет шесть опорных стержней. Чтобы показать, что общее число стержней удовлетворяет основному условию статической определенности, достаточно заметить, что постановкой стержней, указанных на чертеже пунктиром, система обращается в простейшую.



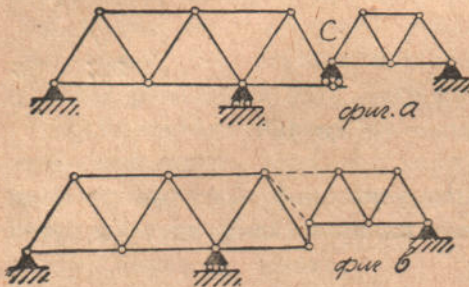
Черт. 118.



Черт. 119.

¹⁾ Неподвижная шарнирная опора соответствует двум опорным стержням и подвижная — одному опорному стержню.

Если между отдельными стержнями сложной системы устроена подвижная опора, то такую опору при счете стержней следует заменять одним стержнем. Возьмем, например, консольно балочную систему, представленную на чертеже 120 фиг. а. Число опорных стержней системы равно пяти. Общее число стержней системы удовлетворяет условию статической определимости. В этом мы легко убеждаемся, заменив подвижную опору *C* соответствующим вертикальным стержнем и приняв во внимание, что установкой двух стержней, помеченных пунктиром (фиг. б), система обращается в простейшую.



Черт. 120.

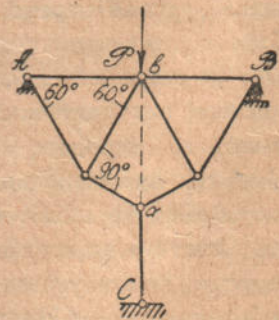
Общим приемом для определения усилий в стержнях этих сложных ферм является способ Геннеберга, но к этому способу следует прибегать лишь в том случае, когда такие простые приемы как построение диаграммы Кремоны или способ

Риттера не приложимы. Возьмем, например, систему, представленную на чертеже 116. Намеченной заменой стержней система сейчас же обращается в простейшую и может быть легко рассчитана по способу Геннеберга, но еще проще отдельно рассчитать балочную ферму *BC* и консольную балку *ADC*. Давление, передающееся на консольную балку в точке *C*, придется при расчете этой балки рассматривать, как внешнюю силу. Для обеих балок легко строится диаграмма Кремоны. Можно также воспользоваться способом Риттера.

Чтобы рассчитать трехшарнирную арку (черт. 117), также нет надобности применять общий способ Геннеберга. Известным графическим приемом (зад. 13 § 2) мы находим для этой системы опорные реакции. После этого может быть построена соответствующая диаграмма Кремоны, дающая усилия во всех стержнях трехшарнирной арки.

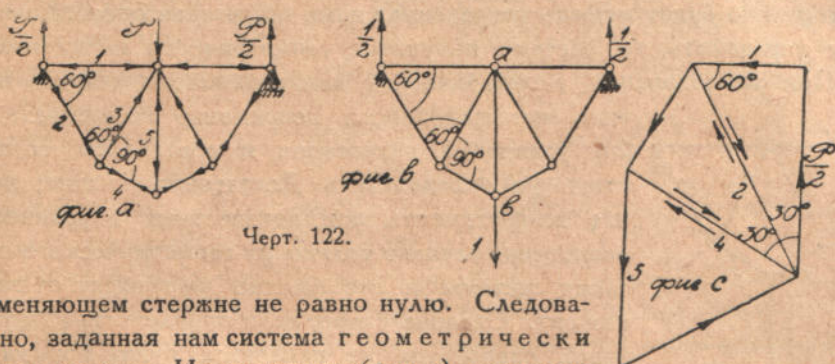
При исследовании геометрической неизменяемости сложных систем мы можем воспользоваться теми же приемами, которые применялись раньше при изучении систем, представляющих одно целое. Мы можем: 1) исследовать определитель для системы $2n$ уравнений равновесия, или 2) применить способ Геннеберга, или, наконец, 3) использовать способ изображающих точек.

Покажем порядок применения этих приемов на простейшем примере (черт. 121). Представленная на чертеже система имеет шесть узлов



Черт. 121.

и восемь стержней. Присоединяя к ним четыре опорных стержня, убеждаемся, что по числу стержней система является статически определимой. К тому же заключению мы могли бы прийти сразу, если бы приняли во внимание, что отбрасыванием стержня aC и введением стержня ab , мы получаем простейшую систему. Чтобы исследовать геометрическую неизменяемость системы способом Геннеберга, нужно построить диаграммы усилий T и u для случаев, представленных на фиг. a и фиг. b (черт. 122). Из фигуры b ясно видно, что усилие u ,



Черт. 122.

в заменяющем стержне не равно нулю. Следовательно, заданная нам система геометрически неизменяема. Из диаграммы (фиг. c), построенной для случая, представленного на фиг. a , находим, что усилие в заменяющем стержне равно

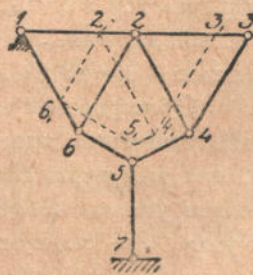
$$T_0 = -\frac{\rho}{2}.$$

Для того же стержня в случае, представленном на фиг. b , получаем $u_0 = \frac{1}{2}$. Следовательно, усилие в опорном стержне aC (черт. 121) будет

$$X = -\frac{T_0}{u_0} = \rho.$$

Усилия в остальных стержнях системы могут быть теперь получены без всяких затруднений.

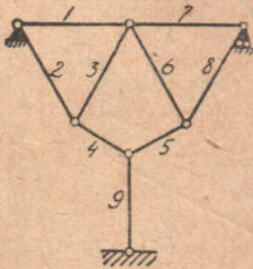
При исследовании геометрической неизменяемости заданной нам системы (черт. 121) способом изображающих точек, отбросим правую опору и исследуем возможные перемещения для полученной таким образом подвижной системы (черт. 123). Так как шарнир 1 неподвижен, то узел 2 может описывать лишь дугу круга радиусом равным 1—2. Соответствующая изображающая точка 2_1 будет лежать на линии 1—2. Отрезок 2— 2_1 выберем произвольным. Изображающая точка 6_1 будет лежать на линии 1—6 и получится в пересечении этой линии с линией 2— 6_1 , параллельной стержню 2—6. Далее изображающая точка 5_1 непременно должна лежать на линии 5—7, так как узел 5



Черт. 123.

может совершать лишь перемещения по кругу с радиусом 5—7. Для получения 5_1 нужно только через 6_1 провести линию параллельно 5—6. Для получения изображающей точки 4_1 примем во внимание, что узел 4 принадлежит как стержню 5—4, так и стержню 2—4. Проводя через 2_1 линию параллельно 2—4 и через 5_1 параллельно 5—4, находим в пересечении этих линий точку 4_1 . Проводя через 4_1 линию параллельно 3—4, находим точку 3_1 . Так как 3— 3_1 располагается горизонтально, то соответствующее возможное перемещение точки 3 будет вертикальным. Такому перемещению будет мешать устранившая нами подвижная опора. Если эту опору установить, то система получится геометрически неизменяемой.

При исследовании геометрической неизменяемости общим приемом, нет надобности непременно выписывать все $2n$ уравнений равновесия и составлять соответствующий определитель. Достаточно заметить лишь, что коэффициенты при неизвестных в уравнениях равновесия зависят только от геометрического очертания системы и совершенно не зависят от внешних сил. Следовательно, если определитель $2n$ уравнений равновесия не равняется нулю при какой-либо определенной нагрузке, то он вообще в нуль не обращается, и система геометрически неизменяема.



Черт. 124.

Чтобы убедиться, что определитель $2n$ уравнений равновесия в нуль не обращается, достаточно показать, что для одной какой-либо нагрузки усилия во всех стержнях системы имеют вполне определенные значения. При расчете, конечно, проще всего принять, что все внешние нагрузки обращаются в нуль. Если при этом можно показать, что усилия во всех стержнях равняются нулю, то это будет служить признаком геометрической неизменяемости системы.

Обращаясь к заданной нам системе (черт. 124), заключаем из условий симметрии, что усилия в стержнях 3 и 6 должны быть одинаковы, и, так как верхний узел, где оба эти стержня сходятся, не нагружен, то эти усилия непременно должны равняться нулю. Обращаясь теперь к узлу, где сходятся стержни 2, 3 и 4, заключаем, что если только усилие 3 равно нулю, то непременно должны обращаться в нуль усилия 2 и 4. Точно также покажем, что нулю равны усилия 5 и 8. Тогда в нуль обращаются усилия и остальных стержней 1, 7 и 9. Равенство нулю всех усилий указывает на геометрическую неизменяемость системы.

Если бы мы изменили очертание нашей системы так, как это показано на чертеже 125 фиг. а, то любой из перечисленных выше приемов указал бы нам на геометрическую изменяемость этой новой системы. Применяя, например, способ нулевых нагрузок, мы сейчас же убедимся,

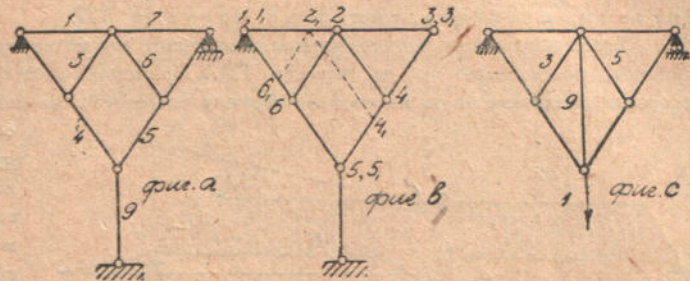
что усилия в наклонных стержнях 3 и 6 (фиг. а) равны нулю, но усилия в прочих стержнях могут быть и не нули. В самом деле, вызывая искусственным приемом ¹⁾ натяжение в вертикальном опорном стержне 9, мы можем вызвать растяжение в стержнях 4 и 5 и сжатие 1 и 7. Усилия эти будут существовать в системе при отсутствии внешних нагрузок. Это указывает на равенство нулю определителя соответствующей системы уравнений равновесия.

Применяя к новой системе способ изображающих точек, мы, устраняя правую опору, получили бы картину скоростей, указанную на фиг. б. Ясно

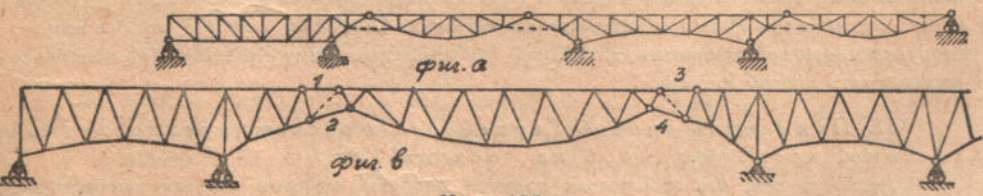
видно, что в этот случае мы можем, не двигая опорных точек 1, 3 и 5, перемещать точки 2, 4 и 6 так, как то указывается изображающими точками 2₁, 4₁ и 6₁. Следовательно, наша система — геометрически изменяема.

При пользовании способом Геннеберга нам пришлось бы строить диаграмму усилий *u* для случая, представленного на фиг. с. Сразу можно утверждать, что усилия в стержнях 3 и 5 непременно должны равняться нулю. Но в таком случае и в вертикальном заменяющем стержне 9 усилие *u*₉ обращается в нуль, что указывает на геометрическую изменяемость системы.

Задачи: 49. Показать, что системы, представленные на чертеже 126, могут быть получены из простейших путем замены стержней. Выяснить геометрическую неизменяемость этих систем



Черт. 125.



Черт. 126.

Консольно балочная система, представленная на фиг. а, обращается в простейшую систему, если вставить три стержня, намеченных пунктиром, и выбросить три подвижных опоры. Система эта геометрически неизменяема, в чем легко убедиться способом нулевых нагрузок.

Система, представленная на фиг. б, составлена из двух консольных балок и промежуточной фермы, соединенной с консолями стержнями 1, 2, 3 и 4. Такое соединение двумя

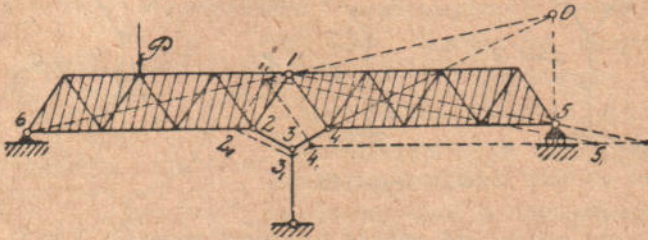
¹⁾ Можно, например, охлаждать этот стержень. Тогда при укорочении в нем появятся растягивающие напряжения.

стержнями с каждой консолью равносильно соединению воображаемыми шарнирами, помещаемыми в точках пересечения каждой пары стержней. Добавлением стержней, указанных пунктиром, и устранением двух подвижных опор мы обращаем нашу систему в простейшую.

Усилия в стержнях обеих систем, представленных в черт. 126, могут быть легко найдены. При этом придется рассчитывать лишь простейшие фермы, на которые распадаются наши сложные системы.

50. Исследовать условия геометрической неизменяемости системы, представленной на чертеже 127.

Здесь применимы все те приемы, которыми мы пользовались при рассмотрении примера, представленного на чертеже 121. Применяя способ изображающих точек, получаем представленную на чертеже картину скоростей, из которой видно, что правая опора помешает перемещению точки 5, и, следовательно, система будет геометрически неизменяемой. Если бы плоскость скольжения правой опоры мы направили перпендикулярно линии $5-5_1$, то получили бы исключительный случай, геометрически изменяемую систему.



Черт. 127.

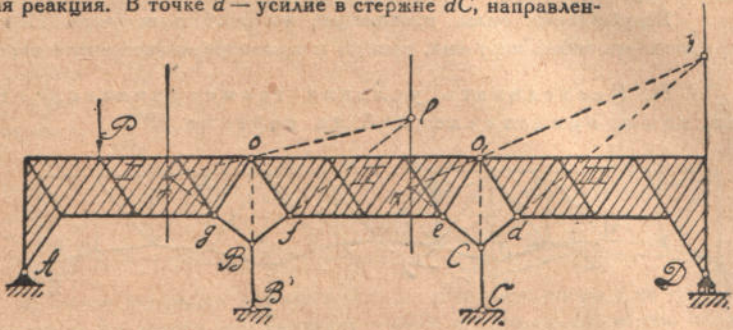
При определении усилий в стержнях нужно начать с разыскания опорных реакций. Так как правая и средняя опорные реакции имеют вертикальное направление, то левая реакция, при действии вертикальной силы P , также будет вертикальной. Обратимся теперь к правой жесткой ферме 1 4 5. На нее действуют три силы, приложенные в точках 1, 4 и 5. Сила, приложенная в узле 5 — вертикальна. Сила, действующая на узел 4, направлена по стержню 3 — 4. Продолжая эти две силы до пересечения в точке O , находим направление 1 — O давления, передающегося через шарнир 1. Имея это направление, мы можем обратиться к расчету левой жесткой фермы. Приложенная к этой ферме сила P уравновешивается тремя силами, имеющими известное направление: давлением в шарнире 1, усилием в стержне 2 — 3 и, наконец, левой реакцией, имеющей вертикальное направление. Таким образом, задача о разыскании реакций сведется к простой задаче, к разложению силы P на три заданные направления. Определив реакции, мы без всякого затруднения можем построить для нашей системы диаграмму Кремона. Можем также использовать способ Риттера.

51. Применить способ Геннеберга к расчету трехпролетной системы, представленной на чертеже 128.

Легко видеть, что отбрасывая средние опорные стержни и вводя замещающие стержни Bo и Co_1 , указанные на чертеже пунктиром, мы обращаем нашу систему в простейшую. Построение диаграмм усилий T , u и v (§ 18) не встречает никаких затруднений. Определение усилий в средних опорных стержнях сведется таким образом к решению двух линейных ур-ий. Отличие от нуля определителя этих ур-ий будет указывать на геометрическую неизменяемость системы.

Рассматриваемая система может быть рассчитана также на основании самых элементарных соображений, если мы примем во внимание, что эта система состоит из трех жестких ферм простейшего типа I, II и III, заштрихованных на чертеже. Фермы эти связаны между собой шарнирами o и o_1 и промежуточными стержнями, сходящимися к опорным узлам B и C .

Предположим сначала, что на систему действует вертикальная сила P , приложенная к одному из узлов верхнего пояса жесткой фермочки I. Рассмотрение усилий начнем с правой фермочки III. В точке D на нее будет действовать вертикальная опорная реакция. В точке d — усилия в стержне dC , направленное по оси этого стержня. Наконец, в шарнире o_1 — усилие, направление которого, очевидно, должно проходить через точку h , где пересекаются перемычки, так как только при этом условии перечисленные силы могут взаимно уравновешиваться.

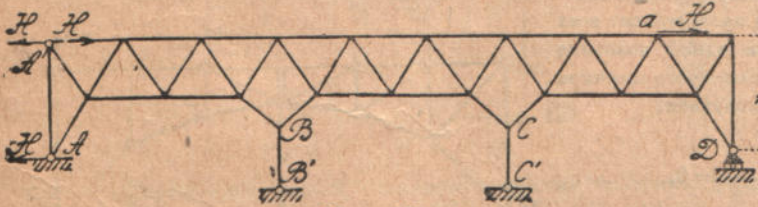


Черт. 128.

Выяснив направление усилия, передаваемого через шарнир o_1 , мы обращаемся теперь к фермочке II. На эту фермочку усилия будут передаваться в четырех точках o , o_1 , e и f . Усилия, передаваемые в точках o_1 и e , представляют действие правой части системы на среднюю. Так как внешними силами для правой части являются реакции в D и C , имеющие вертикальные направления, то, очевидно, что равнодействующая усилий, передаваемых через шарниры o_1 и e от правой части на среднюю, непременно должна иметь вертикальное направление. Линия действия этой силы должна проходить через точку k , где пересекается найденное уже направление давления, передающегося через шарнир o_1 , и усилие стержня eC .

Из условий равновесия средней фермочки II заключаем, что найденная нами вертикальная равнодействующая должна пересекаться с направлением стержня Bf и с направлением усилия, передаваемого через шарнир o , в точке l . Таким образом, определяется направление ol для давления в шарнире o .

Обращаясь теперь к фермочке I, мы путем прежних рассуждений убеждаемся, что равнодействующая усилий, передающихся на нее в шарнирах o и g , — вертикальна и проходит через точку m . Теперь видно, что разложением силы P на два вертикальные направления, идущие через точки m и A , мы можем найти опорную реакцию A . Когда эта реакция получена, то дальнейший расчет не представить никаких затруднений.



Черт. 129.

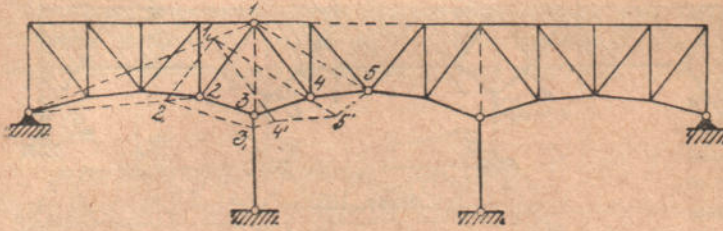
Подобным же образом может быть рассчитана система при расположении вертикальной силы P на фермочке II или III.

Чтобы иметь возможность рассчитать систему при любом направлении силы, достаточно выяснить, как могут быть определены усилия в стержнях при действии горизонтальной силы, например, силы H , приложенной в одном из верхних узлов фермочки III (черт. 129). Из условий равновесия мы сейчас же заключаем, что горизонтальная составляющая опорной реакции A должна равняться H . Тогда, прикладывая в узле A' две равные и противоположные горизонтальные силы H , мы сводим задачу к случаю

действия на сооружение двух прямопротивоположных сил H , приложенных в a и A' , и пары сил Hh , приложенной к крайней стойке AA' . Силы H вызовут лишь растяжение стержней верхнего пояса на протяжении aA' . Усилия, вызываемые парой Hh , найдутся тем же путем, как и усилия от вертикальной силы.

Вертикальные силы, проходящие через A и m (черт. 128), должны, очевидно, представлять собой пару сил, равную и прямопротивоположную паре Hh .

52. Исследовать условия геометрической неизменяемости системы, представленной на чертеже 130.



Черт. 130.

Легко показать, что отбрасыванием трех опорных стержней и установкой стержней, указанных на чертеже пунктиром, мы обращаем нашу систему в простейшую ферму. При вычислении условий геометрической неизменяемости проще всего воспользоваться способом изображающих точек. Разъединив две половины нашей системы в шарнире 5, мы построением картины скоростей выясняем направление возможного перемещения для точки 5, рассматривая ее сначала принадлежащей левой, а потом правой половине системы.

Если перемещения, полученные в этих двух предположениях, пересекаются, то система наша геометрически неизменяема.

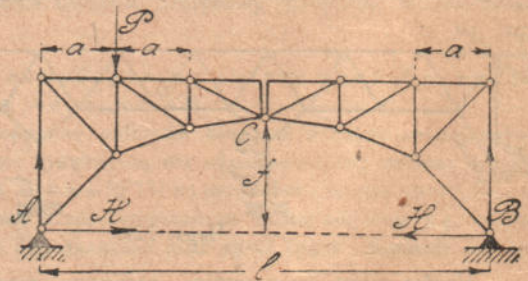
53. Требуется определить усилия во всех стержнях трех шарнирной арки (черт. 131).

Расчет начинаем с определения опорных реакций. При аналитическом решении разлагаем каждую из реакций на вертикальную и горизонтальную составляющие. Составляя моменты всех приложенных к арке сил относительно точек A и B , находим, что вертикальные составляющие этих реакций равны реакциям простой балки, положенной на опоры A и B . Что касается горизонтальных составляющих, то из условий равновесия сейчас же заключаем, что они равны по величине и противоположны по направлению. Обозначая их величину через H , находим H , приравнявая нулю момент всех сил, приложенных к одной половине арки, относительно ключевого шарнира C . Таким образом получаем:

$$H \cdot f - B \cdot \frac{l}{2} = 0,$$

откуда

$$H = \frac{Bl}{2f}.$$

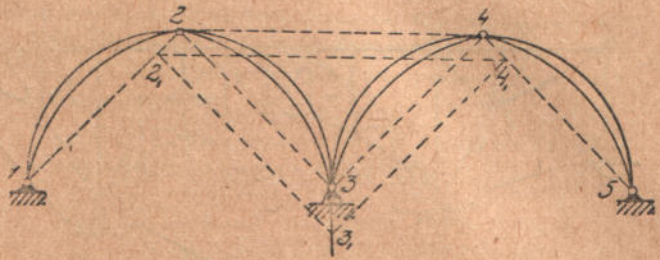


Черт. 131.

Распор H увеличивается по мере приближения силы P к середине пролета. Имея реакции, мы найдем усилия в стержнях построением диаграммы Кремоны или способом Риттера.

54. Показать, что система, составленная из двух одинаковых трехшарнирных арок (черт. 132), геометрически изменяема.

Вопрос этот проще всего решается способом изображающих точек. Взяв на линии 1—2 точку 2_1 , проводим через нее линию параллельно 2—3 до пересечения с вертикалью, идущей через 3. Таким образом получаем изображающую точку 3_1 . Проводя через 2_1 и 3_1 линии параллельно 2—4 и 3—4, находим в пересечении 4_1 , которая попадает, очевидно, на линию 4—5. Ясно, что опора 5 не мешает тому перемещению точки 4, которое изображается точкой 4_1 . Перемещение это перпендикулярно направлению 4—5 и соответствует вращению около шарнира 5. Это указывает, что наша система геометрически изменяема.



Черт. 132.

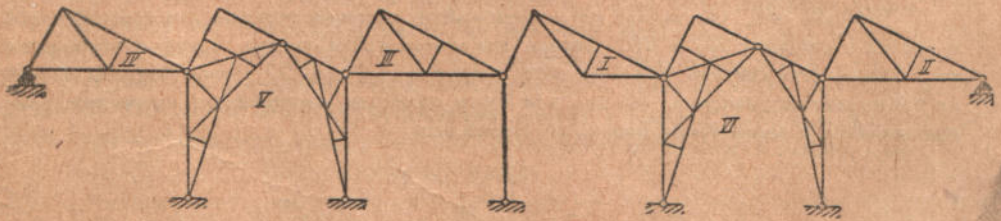


Черт. 133.

55. Показать, что система, составленная из трех одинаковых трехшарнирных арок (черт. 133), геометрически не изменяема.

Вопрос легко решается способом изображающих точек. Исследование можно продолжить на случай какого угодно четного или нечетного числа трехшарнирных арок.

56. Показать, что система, представленная на чертеже 134, статически определима.



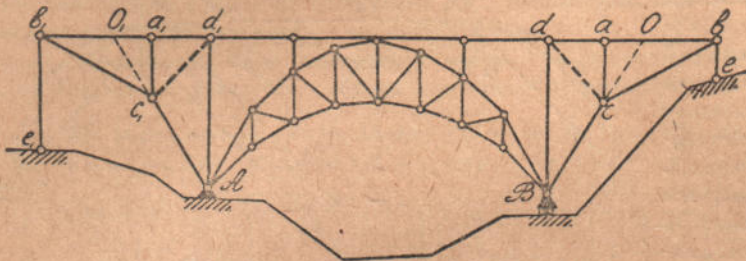
Черт. 134.

Определение усилий начинаем с простых балочных ферм I, II, III и IV. После этого нужно рассчитать две трехшарнирные арки V и VI.

57. Показать, что система, представленная на чертеже 135, статически определима.

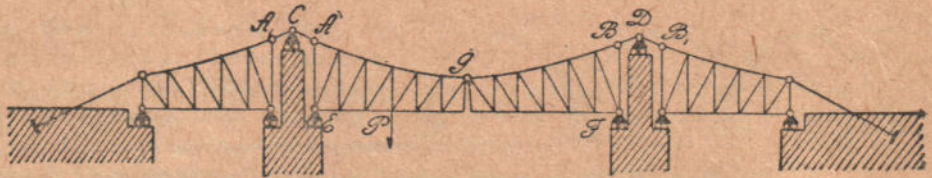
Вставляя вместо двух опорных стержней стержни cd и c_1d_1 , указанные на чертеже пунктиром, мы обращаем нашу систему в простейшую.

При суждении о геометрической неизменяемости заметим, что средняя часть Ad_1dB системы представляет собой простейшую систему, к которой присоединены два треугольника abc и a_1b_1c каждый — двумя стержнями. Если точки O и O_1 пересечения этих стержней не попадают на направления, по которым расположены опорные стержни be и b_1e_1 , то система будет геометрически неизменяемой.



Черт. 135.

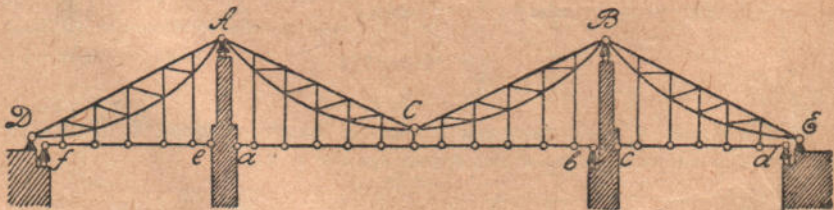
58. Определить опорные реакции и наметить способ определения усилий в стержнях для системы, представленной на чертеже 136.



Черт. 136.

Средняя часть системы представляет собой не что иное, как перевернутую трехшарнирную арку, средним шарниром которой является шарнир G . Опорными шарнирами будут точки A и B , где направления опорных стержней AC и BD пересекаются с вертикалями, проходящими через E и F .

Выяснив это, мы сейчас же можем найти опорные реакции для средней части и усилия в стержнях AC и BD . Теперь мы можем найти усилия, которые передаются на боковые части системы при посредстве стержней A_1C и B_1D . Расчет боковых частей не представит затруднений, так как эти части являются простейшими системами, прикрепленными к земле тремя опорными стержнями.

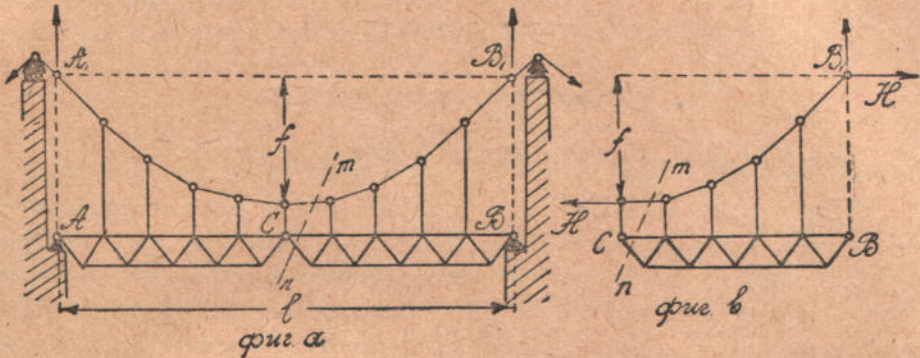


Черт. 137.

59. Наметить ход расчета по определению усилий в стержнях системы, представленной на чертеже 137.

Горизонтальная проезжая часть подвешена к перевернутой трехшарнирной арке ACB и простейшим балочным фермам DA и BE . Устройство опор в точках a, b, c, d, e и f таково, что вертикальные нагрузки через посредство тяг передаются жестким фермам, а горизонтальные силы воспринимаются каменными опорами. При определении усилий в стержнях среднюю часть ACB можно рассчитать как трехшарнирную арку и крайние части — как простые балочные фермы.

60. Определить опорные реакции и усилия в стержнях цепного моста, усиленного жесткими балками (черт. 138).



Черт. 138.

Уже было показано, что по числу стержней система эта является статически определимой. При действии на фермы AC и CB вертикальных нагрузок в точках A и B возникнут лишь вертикальные реакции. Продолжая их направления до пересечения с крайними звеньями цепи, заключаем, что все силы, действующие на цепной мост, должны уравниваться двумя силами, приложенными в точках A_1 и B_1 . Разлагая эти силы на горизонтальные и вертикальные составляющие, находим из уравнений моментов относительно точек A и B , что вертикальные составляющие будут такие же, как опорные реакции для балки так же нагруженной, как мост, и опирающейся в A и B . Горизонтальные реакции при вертикальных нагрузках будут равны по величине и противоположны по знаку. Величину их обозначим через H и найдем ее, рассекая мост сечением mn и составляя момент всех сил, приложенных к правой отсеченной части моста (фиг. б) относительно шарнира C . Обозначая через M_0 изгибающий момент в точке C для простой балки пролета l при тех нагрузках, какие расположены на мосту, мы приходим к такому уравнению

$$M_0 - H \cdot f = 0,$$

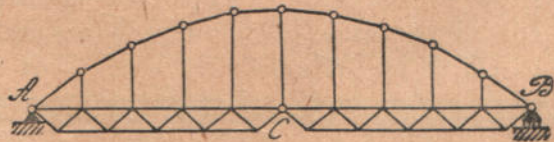
откуда

$$H = \frac{M_0}{f}.$$

Определив распор H , мы теперь легко найдем усилия во всех стержнях системы.

61. Определить усилия в стержнях в системе, составленной из шарнирной арки и жестких балок в виде затяжки (черт. 139).

Для определения распора арки может быть применен такой же прием, как и в предыдущей задаче.



Черт. 139.

ГЛАВА III.

Линии влияния.

§ 21. Общее понятие о линиях влияния.

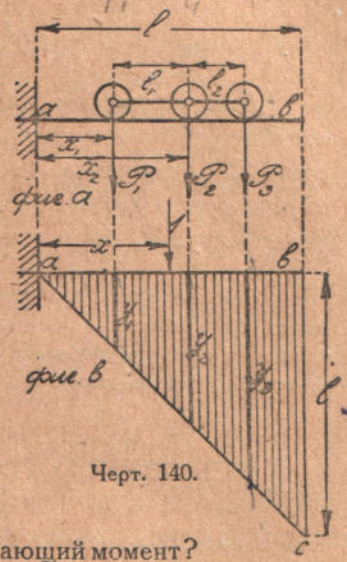
При расчете мостов, кранов и других инженерных сооружений мы встречаемся с действием подвижной нагрузки. При решении такого рода задач приходится не только определять усилия в отдельных частях сооружения при некотором определенном расположении внешних сил, но нужно также уметь надлежащим образом располагать подвижную нагрузку. Из всех возможных расположений нагрузки нужно выбрать то, которому соответствуют наиболее неблагоприятные условия для рассчитываемого элемента сооружения. Рассчитываем мы, например, опорный мостовой шарнир: нужно подвижную нагрузку расположить так, чтобы соответствующая этому шарниру опорная реакция получила наибольшее значение. При подборе размеров для какого-либо поперечного сечения балки, нужно уметь так расположить подвижную нагрузку, чтобы создать в рассматриваемом сечении максимум для изгибающего момента или получить максимум перерезывающей силы. Первому расположению будут соответствовать наибольшие нормальные напряжения в плоскости взятого сечения, второму — наибольшие касательные напряжения.

Решение задач этого рода в значительной степени облегчается тем, что при расчете инженерных сооружений мы обыкновенно имеем дело с случаями, где применим принцип сложения действия сил ¹⁾. Нам придется иметь дело с геометрически неизменяемыми системами. Перемещения узлов таких систем вследствие упругих деформаций брусьев весьма малы. Поэтому деформации, вызываемые одной какой-либо силой, не вносят изменений в действия других ранее приложенных к системе сил, и мы можем складывать действия сил. Если какая-либо сила увеличивается в несколько раз, то во столько же раз возрастают вызываемые ею усилия. Если на систему одновременно действуют две группы сил, то возникающее при этом усилие в каком-либо бруске будет равно

¹⁾ См. Курс сопротивления материалов, 9 изд. 1930 г., стр. 204.

сумме тех усилий, которые получаются при действии каждой группы сил в отдельности.

Условившись пользоваться принципом сложения действия сил и принимая во внимание, что при подвижной нагрузке приходится иметь дело с системой параллельных сил, мы можем заменить исследование действия на сооружение системы грузов рассмотрением простейшего случая, когда по сооружению движется лишь один груз, равный единице силы, например, одной тонне. Влияние перемещения груза на величину усилия в рассматриваемой части сооружения проще всего представить графически. Перемещая груз единицу по сооружению, мы отмечаем соответствующие его положения на горизонтальной прямой и по вертикальному направлению откладываем в каждом отмеченном положении отрезок, пропорциональный усилию ¹⁾ в рассчитываемом элементе сооружения. Соединяя вершины отложенных таким образом ординат, мы получим линию влияния для усилия в рассчитываемом элементе.



Черт. 140.

Предположим, например, нам нужно рассчитать балку с одним заделанным концом при действии на нее заданной системы подвижных грузов (черт. 140). Мы знаем, что опасным сечением для такой балки является плоскость заделки. Как нужно расположить грузы, чтобы получить в этой плоскости максимальный изгибающий момент? Рассмотрим предварительно случай действия на сооружение одного груза, равного единице (фиг. б). Располагая его в любом расстоянии x от плоскости заделки, мы находим, что изгибающий момент в этом сечении равен ²⁾:

$$M = -1 \cdot x \text{ т} \cdot \text{м}.$$

При построении линии влияния условимся по вертикальному направлению откладывать в известном масштабе те величины, на которые приходится множить груз единицу, чтобы получить соответствующее значение исследуемого усилия. В рассматриваемом случае мы ищем момент. Множителем при грузе единица будет некоторая длина x . Откладывая ее в том масштабе, в каком нанесен пролет

¹⁾ Усилие мы будем понимать в обобщенном смысле: это может быть сила или напряжение, или изгибающий момент, или усилие в каком-либо стержне.

²⁾ Сохраняем для изгибающих моментов то правило знаков, которым мы пользовались в Курсе сопротивления материалов.

балки, вертикально вниз, соответственно отрицательному знаку момента, мы получим линию влияния ac для опорного момента балки ab .

Пользуясь принципом сложения действия сил, мы при помощи линии влияния ac легко вычисляем опорный момент для системы грузов, расположенных согласно фигуры a . Для этого измеряем в масштабе длины ординаты y_1 , y_2 и y_3 под соответствующими грузами P_1 , P_2 и P_3 . Каждая из этих ординат, умноженная на 1 тонну, даст нам опорный момент, вызываемый 1 тонной, помещенной над этой ординатой. При одновременном действии трех грузов момент, очевидно, будет равен:

$$M = -(P_1 y_1 + P_2 y_2 + P_3 y_3).$$

Для получения наибольшего по абсолютному значению опорного изгибающего момента, нужно систему грузов перемещать так, чтобы сумма ΣPy получила наибольшее значение. Очевидно, что в нашем случае нужно перемещать систему грузов вправо до тех пор, пока передний груз P_3 не достигнет конца балки.

Заметим здесь, что вычисление ΣPy в том случае, когда линия влияния прямая, может быть заменено умножением равнодействующей R всех сил на ординату линии влияния y_c , соответствующую точке приложения равнодействующей. В самом деле пусть y -ие для линии влияния:

$$y = a + bx.$$

Тогда ординаты y_1 , y_2 . . . , соответствующие грузам P_1 , P_2 . . . , напишутся так:

$$y_1 = a + bx_1; \quad y_2 = a + bx_2; \quad \dots$$

и выражение ΣPy представится так ¹⁾:

$$\Sigma Py = P_1 (a + bx_1) + P_2 (a + bx_2) + \dots = a\Sigma P + b\Sigma Px = aR + bRx_c = R (a + bx_c),$$

Множитель при R представляет собой не что иное, как y_c — ординату линии влияния в точке приложения равнодействующей R .

Пользуясь линией влияния, мы можем вычислить нужные нам усилия не только при действии сосредоточенных грузов, но и при наличии сплошной, равномерно распределенной нагрузки. Пусть q — постоянная интенсивность сплошной подвижной нагрузки. Усилие, вызываемое элементом qdx этой нагрузки, расположенным на длине dx , определится при помощи линии влияния так же, как и в случае сосредоточенной силы. Для этого нужно величину нагрузки qdx помножить на соответствующую ординату y линии влияния. Получив величину усилия $qydx$, вызываемого одним элементом сплошной нагрузки, мы найдем полное

¹⁾ Через x_c обозначена абсцисса, соответствующая точке приложения равнодействующей.

усилие, применяя принцип сложения действия сил. При непрерывном распределении нагрузки суммирование представится интегралом

$$\int qydx,$$

в котором пределы интегрирования должны быть поставлены соответственно границам загруженного участка. При постоянном q , мы можем эту величину вынести из-под знака интеграла и тогда придем к заключению, что искомое усилие равно интенсивности равномерной нагрузки, помноженной на площадь, ограниченную линией влияния и пределами загрузки.

Обратимся к прежнему нашему примеру. Пусть по балке с одним заделанным концом перемещается равномерная нагрузка (чертеж 141). Если эта нагрузка занимает участок x пролета, и требуется найти опорный момент при помощи линии влияния ac , то для этого нужно измерить площадь треугольника ade и эту площадь помножить на интенсивность нагрузки q .

Таким образом, получаем:

$$M = -q \frac{x^2}{2} \text{ т} \cdot \text{м}.$$

При увеличении длины x загружаемого участка опорный момент возрастает по параболическому закону. Соответствующая парабола af , построенная на чертеже, будет иметь вертикальную ось и будет касательна к ab в точке a . Наибольшее значение изгибающего момента соответствует полному загрузению пролета. Она равняется $\frac{q l^2}{2}$.

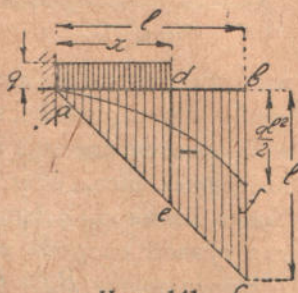
Легко видеть, что, задавая интенсивность нагрузки в $\frac{\text{т}}{\text{м}}$ и длины в метрах, мы получим моменты, измеренные в тоннометрах.

Прием, примененный нами сейчас при построении линии влияния для опорного момента, может быть использован и в том случае, когда приходится исследовать вопрос об изменении опорных реакций, перерезывающих сил, изгибающих моментов или усилий в стержнях.

§ 22. Линии влияния для опорных реакций балок.

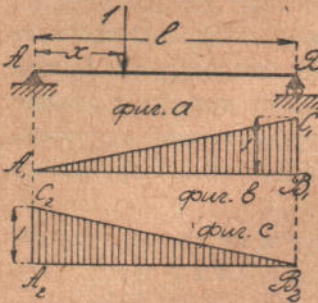
При расчете балок, подвергающихся действию подвижной нагрузки, иногда приходится выяснять то положение подвижных грузов, при котором та или другая опорная реакция приобретает свое максимальное значение. Для решения этого вопроса выгодно, как было показано, построить соответствующие линии влияния.

Положим, имеется балка, опертая по концам (черт. 142). Построим линию влияния для правой опорной реакции B . Выбираем груз, равный



Черт. 141.

единице, и располагаем его в произвольном расстоянии x от левой опоры. Линия влияния для опорной реакции B должна нам представить влияние перемещения единичного груза по балке на величину этой реакции. Составляя момент всех приложенных к балке сил относительно A , находим для правой реакции B выражение



$$B = 1 \cdot \frac{x}{l} \tau$$

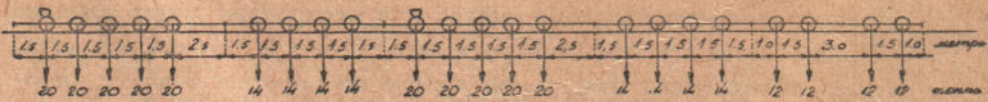
Черт. 142.

При вычислении B приходится множить единицу силы на отвлеченное число $\frac{x}{l}$. Это

число и будем в известном масштабе откладывать по ординатам для получения линии влияния. Ординаты в рассматриваемом случае растут пропорционально x , обращаются в нуль при $x = 0$ и равняются единице при $x = l$. Выбирая определенный масштаб для отвлеченных чисел, откладываем отрезок B_1C_1 , равный отвлеченной единице. Тогда линия A_1C_1 (фиг. б) будет служить искомой линией влияния для правой опорной реакции. Путем таких же рассуждений мы получим линию влияния B_2C_2 (фиг. с) для левой опорной реакции A . Линия эта указывает, что для получения максимального значения реакции A , нужно заданную систему грузов перемещать так, чтобы наиболее тяжелые грузы были по возможности ближе к левой опоре. Обозначая грузы через P_1, P_2, \dots , а соответствующие им ординаты линии влияния через y_1, y_2, \dots , мы найдем, что левая реакция равна:

$$A = \Sigma P y \dots \dots \dots (a)$$

При расчете мостов приходится иметь дело с вполне определенной системой грузов, соответствующей нормальному¹⁾ типу поезда, составлен-



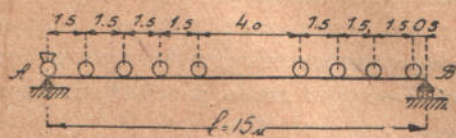
Черт. 143.

ного из двух паровозов с тендерами и из неограниченного количества груженных товарных вагонов (случай, когда паровозы обращены трубами в одну сторону, представлен на чертеже 143).

В таком случае выгодно пользоваться линией влияния лишь для надлежащей установки поезда. Вычисление же суммы, входящей в формулу (а), можно заменить аналитическим расчетом; который сильно упро-

¹⁾ По русским нормам 1907 г. В ви у подсобного иллюстрационного значения черт. 143 и таблицы на стр. 105 признано возможным не перерабатывать текст в применении к новым нашим нормам.

щается при условии пользования готовыми таблицами. Положим, например, что по мосту пролетом 15 м движется поезд, представленный на чертеже 143. Чтобы получить максимальное значение реакции A , следует взять расположение грузов, указанное на чертеже 144. При вычислении реакции A нужно взять момент всех грузов относительно точки B и разделить его на пролет l .



Черт. 144.

Вычисление это выполним при помощи таблицы.

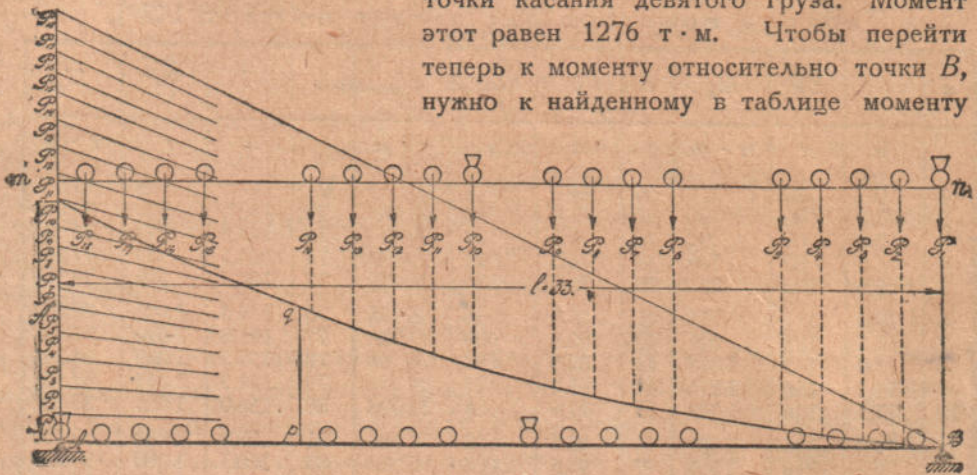
Таблица моментов для поезда по черт. 143¹⁾.

n	l	$\frac{n}{1} \Sigma P$		n	l	$\frac{n}{1} \Sigma P$		n	l	$\frac{n}{1} \Sigma P$	
		м	т · м			м	т · м			м	т · м
1	0	20	0	36	68,0	528	20 084	71	138,5	948	71 582
2	1,5	40	30	37	71,0	540	21 668	72	140,0	960	73 004
3	3,0	60	90	38	72,5	552	22 473	73	143,0	972	75 84
4	4,5	80	180	39	74,5	564	23 582	74	144,5	984	77 342
5	6,0	100	300	40	76,0	576	24 428	75	146,5	996	79 310
6	10,0	114	700	41	79,0	588	26 156	76	148,0	1 008	80 804
7	11,5	128	871	42	80,5	600	27 033	77	151,0	1 020	93 828
8	13,0	142	1 063	43	82,5	612	28 238	78	152,5	1 032	85 358
9	14,5	156	1 276	44	84,0	624	29 156	79	154,5	1 044	87 422
10	17,5	176	1 744	45	87,0	636	31 028	80	156,0	1 056	88 988
11	19,0	196	2 003	46	88,5	648	31 982	81	159,0	1 068	92 156
12	20,5	216	2 302	47	90,5	660	33 278	82	160,5	1 080	93 758
13	22,0	236	2 626	48	92,0	672	34 268	83	162,5	1 092	95 918
14	23,5	256	2 980	49	95,0	684	36 284	84	164,0	1 104	97 556
15	27,5	270	4 004	50	96,5	696	37 310	85	167,0	1 116	100 868
16	29,0	284	4 409	51	98,5	708	38 702	86	168,5	1 128	102 542
17	30,5	296	4 835	52	100,0	720	39 764	87	170,5	1 140	104 798
18	32,0	312	5 282	53	103,0	732	41 924	88	172,0	1 152	106 508
19	34,5	324	6 062	54	104,5	744	43 022	89	175,0	1 164	109 964
20	36,0	336	6 548	55	106,5	756	44 510	90	176,5	1 176	111 710
21	39,0	348	7 556	56	108,0	768	55 644	91	178,5	1 188	114 062
22	40,5	360	8 078	57	111,0	780	47 948	92	180,0	1 200	115 444
23	42,5	372	8 798	58	112,5	792	49 118	93	183,0	1 212	119 444
24	44,0	384	9 356	59	114,5	804	50 702	94	184,5	1 224	121 262
25	47,0	396	10 508	60	116,0	816	51 908	95	186,5	1 236	123 710
26	48,5	408	11 102	61	119,0	828	54 356	96	188,0	1 248	125 564
27	50,5	420	11 918	62	120,5	840	55 598	97	191,0	1 260	129 308
28	52,0	432	12 543	63	122,5	852	57 278	98	192,5	1 272	131 193
29	55,0	444	13 844	64	124,0	864	58 556	99	194,5	1 284	133 742
30	56,5	456	14 510	65	127,0	876	61 148	100	196,0	1 296	135 668
31	58,5	468	15 422	66	128,5	888	62 462	101	199,0	1 308	139 556
32	60,0	480	16 124	67	130,5	900	64 238	102	200,5	1 320	141 518
33	63,0	492	17 564	68	132,0	912	65 588				
34	64,5	504	18 302	69	135,0	924	68 324				
35	66,5	516	19 310	70	136,5	936	69 710				

¹⁾ По русским нормам 1907 г.

В первом столбце этой таблицы приведены номера грузов в том порядке, как мы их встречаем на чертеже 143. Во втором столбце даны расстояния каждого груза от первого груза. В третьем столбце приведена сумма всех грузов, начиная с первого и до рассматриваемого номера, и, наконец, в четвертом столбце приведены моменты всех грузов, лежащих левее рассматриваемого, относительно точки касания этого последнего.

Обращаясь к численному примеру, представленному на чертеже 144, мы должны будем вычислить момент указанных девяти грузов относительно точки B . В таблице имеется момент этих грузов относительно точки касания девятого груза. Момент этот равен $1276 \text{ т} \cdot \text{м}$. Чтобы перейти теперь к моменту относительно точки B , нужно к найденному в таблице моменту



Черт. 145.

присоединить произведение из равнодействующей всех девяти грузов, равной 156 т , на расстояние от девятого груза до точки B . Тогда для реакции A получим:

$$A = \frac{1276 + 156 \times 0,5}{15} \approx 90,3 \text{ т}^1).$$

Кроме этого аналитического приема вычисления, возможно применить для определения опорной реакции и графический способ, основанный на графическом приеме вычисления моментов системы параллельных сил (§ 8). Построение удобнее всего расположить так, как это указано на чертеже 145. Положим, требуется определить наибольшее значение опорной реакции A для балки пролетом $l = 33 \text{ м}$ при движении по ней поезда, представленного на чертеже 143. При этом поезд должен быть

¹⁾ Так как давление поезда обыкновенно передается поровну на две фермы пролетного строения моста, то для получения реакции, соответствующей одной ферме, нужно найденное A разделить пополам.

расположен так, как это указано на линии AB (черт. 145). При построениях повернем поезд и расположим первый груз P_1 , над опорой B , как это показано по линии mn . Для этого повернутого положения поезда строим веревочный многоугольник.

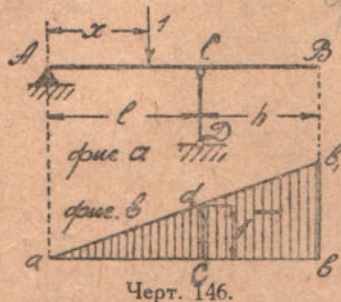
Для построения соответствующего многоугольника сил откладываем силы P_1, P_2, \dots по вертикали, идущей через A , и полюсное расстояние принимаем равным пролету балки l . Тогда первой стороной веревочного многоугольника будет ось балки AB . Отрезок крайней вертикали, заключенный между первой и последней стороной, даст нам в масштабе сил величину опорной реакции A . В самом деле, если этот отрезок умножить на полюсное расстояние l , то, как известно, мы должны получить момент сил, расположенных по линии mn , относительно точки m или, что все равно, момент грузов, расположенных по AB , относительно точки B . Следовательно, отрезок равен моменту всех грузов относительно точки B , деленному на пролет балки, т. е., равен искомой опорной реакции балки. Легко показать, что, если взять вертикальный отрезок не на крайней вертикали, а в каком-либо промежуточном сечении балки, например, отрезок pq , то он представит собой в масштабе сил ту опорную реакцию A , когда при движении поезда от B к A , передний груз P_1 достигнет точки p . Таким образом построенный веревочный многоугольник представляет собой наглядную картину нарастания левой опорной реакции A при передвижении поезда в направлении от B к A .

Задачи: 62. Построить линию влияния для сжимающего усилия в вертикальном опорном стержне CD (черт. 146).

Легко видеть, что при любом расположении груза 1 (фиг. а), опорная реакция C будет равняться

$$C = 1 \cdot \frac{x}{l} \text{ т.}$$

Она является линейной функцией от x , обращается в нуль при $x=0$ и в одну тонну при $x=l$. Выбирая определенный масштаб для отвлеченных чисел, откладываем отрезок cd , равный единице, и соединяя d с a , получаем искомую линию влияния ab_1 для сжимающего усилия в стержне CD .



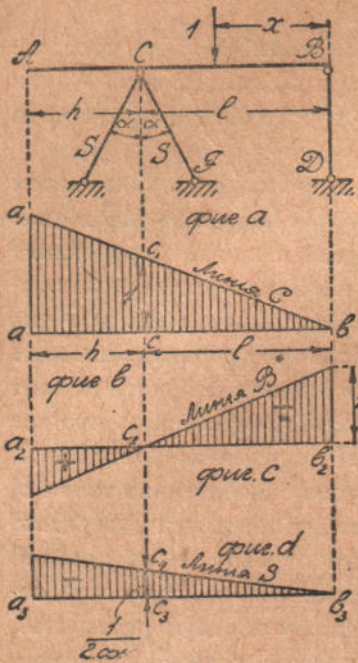
63. Построить линию влияния для усилий в опорных стержнях BD и CF (черт. 147).

Определяя положение груза единица (1 т) расстоянием x от правой опоры, найдем что вертикальная опорная реакция C равна

$$C = 1 \cdot \frac{x}{l} \text{ т.}$$

Для правой опорной реакции получаем значение

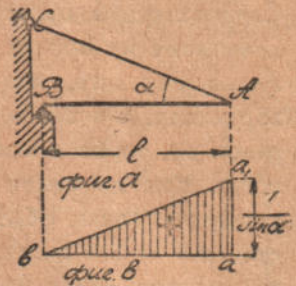
$$B = 1 - 1 \cdot \frac{x}{l} = \frac{l-x}{l} \text{ т.}$$



Черт. 147.

64. Построить линию влияния для усилия, возникающего в тяге AC (черт. 143) при движении нагрузки по балке AB .

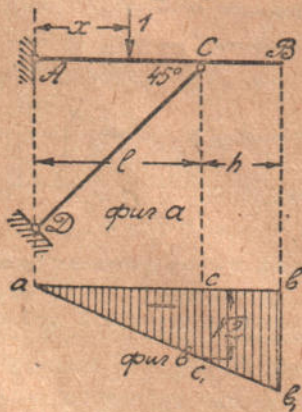
Соответствующая линия влияния указана на фигуре b .



Черт. 148.

65. Построить линию влияния для усилия в подкосе CD , поддерживающем консольную балку ACB (черт. 149).

Сжимающее усилие в подкосе равно, очевидно, опорной реакции C , деленной на $\cos 45^\circ$. При

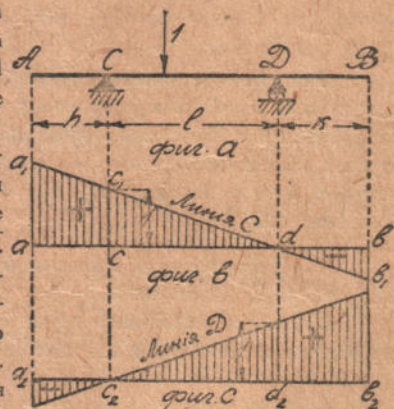


Черт. 149.

расположении груза единица в точке A усилие в подкосе равно нулю.

Когда груз единица расположен в точке C , сжатие подкоса равно $\sqrt{2}$. При изменении расстояния x это усилие меняется по линейному закону.

Соответствующая линия влияния указана на фигуре b .



Черт. 150.

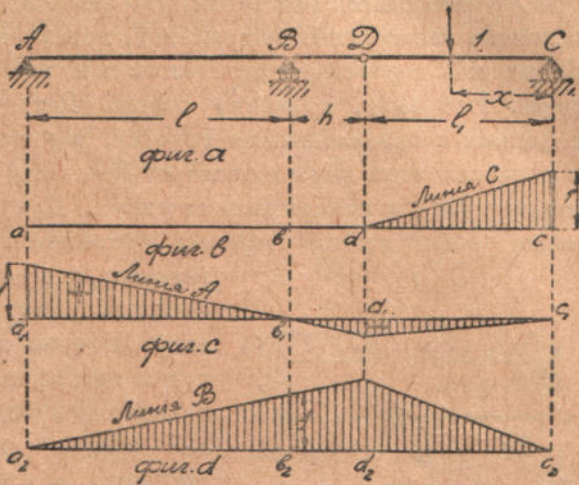
66. Построить линию влияния для опорных реакций C и D консольной балки, представленной на чертеже 150.

Соответствующие линии влияния представлены на фигурах *b* и *c*. Положительным принято направление реакций снизу вверх.

67. Построить линии влияния для опорных реакций *A*, *B* и *C* системы, представленной на чертеже 151.

Балка *CD* одним концом опирается на подвижную опору *C* и другим шарнирно связана с концом *D* консольной балки. Когда груз лежит на балке *CD*, давление распределяется между точками *D* и *C* так же, как для простой балки пролета l_1 . При расположении же груза на балке *ABD*, в точки *D* и *C* не передается никакого давления. Поэтому линия влияния для реакции *C* начертится так, как указано на фигуре *b*.

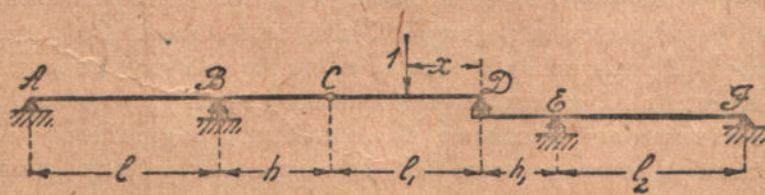
Обращаясь к построению линии влияния для опорной реакции *A*, заметим, что, пока груз единица движется по балке *AD*, линия влияния чертится так, как это было показано для консольной балки (зад. 63). Когда груз единица расположится в точке *D*, соответствующая ему опорная реакция направлена вниз и достигает наибольшего отрицательного значения. При движении груза единица по балке *CD* в шарнир *D* будет передаваться давление $1 \frac{x}{l_1}$ (фиг. *a*). Следовательно, опорная реакция *A*, оставаясь отрицательной, будет убывать с расстоянием *x* по линейному закону. Линия влияния для реакции *A* дана на фигуре *c*. На фигуре *d* представлена линия влияния для опорной реакции *B*.



Черт. 151.

68. Построить линии влияния для опорных реакций консольно-балочной системы, представленной на чертеже 152.

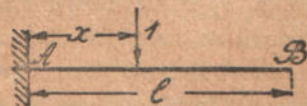
Для опорных реакций *A*, *B* и *D* линии влияния будут иметь такой же вид, как мы получили в предыдущей задаче, потому что груз



Черт. 152.

единица, расположенный на балке *DEF* не оказывает никакого влияния на балку *ABC*. Линии влияния для реакций *E* и *F* начертятся так же, как для *A* и *B*.

69. Построить линию влияния для опорной реакции балки с одним заделанным концом (черт. 153).

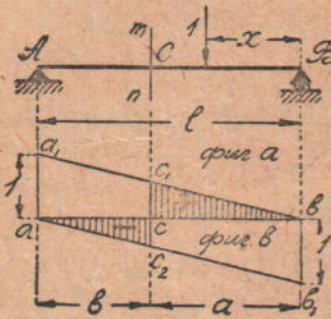


Черт. 153.

§ 23. Линии влияния для перерезывающей силы.

С определением перерезывающей силы Q приходится иметь дело при расчете балок. Мы знаем, что величиной этой силы определяется величина касательных напряжений, возникающих в балке при ее изгибе. Величиной перерезывающей силы мы пользовались также при расчете ферм. Например, применяя способ Риттера к определению усилий в фермах с параллельными поясами, мы нашли, что усилия в стойках и раскосах этих ферм зависят от величины перерезывающей силы в соответствующих поперечных сечениях. Для получения наибольшего значения усилий в этих стержнях, приходится так располагать подвижную

нагрузку, чтобы создать в соответствующих сечениях максимальную перерезывающую силу. Вопрос этот проще всего решается путем построения линии влияния для перерезывающей силы. Построение это выполним для простейшего примера. Предположим, требуется построить линию влияния для перерезывающей силы Q в сечении mn балки с опертыми концами (черт. 154). Расположим сначала груз единицу справа от сечения. Тогда перерезывающая сила в сечении mn , очевидно, будет равняться левой опорной реакции, и при движении груза на протя-



Черт. 154.

жении от B к C ординаты искомой линии влияния будут такими же, как у линии влияния для реакции A . Откладываем на левой вертикали в известном масштабе единицу и соединяем верхний конец отрезка с точкой b . Участок bc_1 (фиг. б) этой линии является частью искомой линии влияния, относящейся к участку BC заданной балки. Сохраняя для перерезывающей силы правило знаков, принятое в курсе сопротивления материалов, мы заключаем, что при движении груза на участке BC нашей балки в сечении mn возникает положительная перерезывающая сила. Соответственно этому площадь bcc_1 отмечена знаком плюс. Если груз единицу поместить по левую сторону сечения mn , то соответствующая этому сечению перерезывающая сила получится, если мы из величины опорной реакции A вычтем силу единицы. На чертеже (фиг. б) вычитанием единицы из ординат линии a_1b получена линия ab_1 . Часть ac_2 этой линии служит линией влияния для перерезывающей силы в сечении mn . Знак этой силы отрицательный, что и отмечено на чертеже. Построив таким образом линию влияния, мы заключаем, что для получения наибольшего положительного значения перерезывающей силы

в сечении mn необходимо загрузить правую часть балки так, чтобы наиболее тяжелые грузы были возможно ближе к mn . Для получения наибольшего отрицательного значения той же силы, должна быть загружена левая часть балки. В случае равномерной нагрузки q мы, загружая правую часть балки, найдем наибольшую положительную величину для Q . Величина эта получится умножением площади треугольника bcc_1 на интенсивность q . Принимая во внимание, что

$$cc_1 : 1 = a : l,$$

находим:

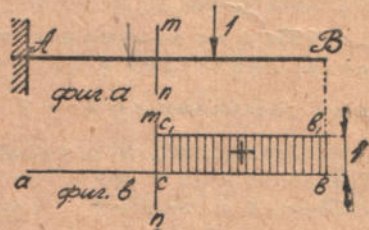
$$Q_{\max} = \frac{qa^2}{2l}.$$

Подобным же образом загружая участок AC , получаем:

$$Q_{\min} = -\frac{qb^2}{2l}.$$

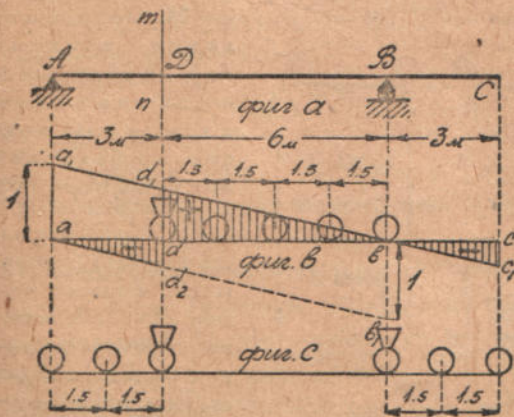
Задачи: 70. Построить линию влияния для перерезывающей силы в сечении mn балки с одним заделанным концом (черт. 155)

Если груз единица расположен справа от сечения mn , то в этом сечении возникает поперечная сила, равная $+1$. Соответствующий участок линии влияния представится линией c_1b_1 (фиг. b), параллельной ab и проходящей в расстоянии единица от нее. При расположении груза единица слева от mn перерезывающая сила в этом сечении равна нулю, линия влияния сливается с линией ab .



Черт. 155.

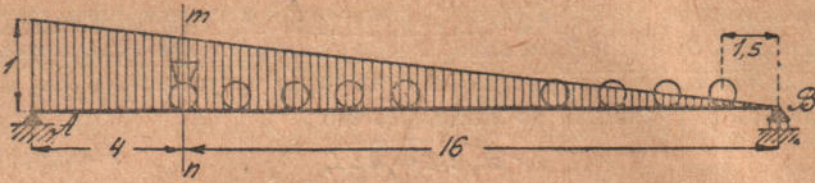
71. Построить линию влияния для перерезывающей силы в сечении mn консольной балки (черт. 156) и найти Q_{\max} и Q_{\min} от подвижной нагрузки паровозами нормального поезда.



Черт. 156.

Пока груз единица находится справа от сечения mn , поперечная сила в этом сечении будет равняться опорной реакции A . Соответствующий участок линии влияния представится прямой линией d_1c_1 , отсекающей на левой опорной вертикали отрезок единицу. При расположении груза единица слева от сечения mn , перерезывающая сила в этом сечении будет равна разности реакции A и груза единицы. Соответствующий участок ad_2 линии влияния получится, когда мы из соответствующих ординат линии d_1c_1 вычтем единицу. Расположения нагрузки, соответствующие Q_{\max} и Q_{\min} для выбранного сечения, указаны на фигурах b и c .

72. Пользуясь таблицей моментов для грузов нормального поезда (черт. 143) найти Q_{\max} от подвижной нагрузки для балки пролетом в 20 м в сечении, отстоящем от опоры на 4 м.



Черт. 157.

Наибольшему значению ¹⁾ перерезывающей силы соответствует расположение грузов, указанное на чертеже 157. При этом перерезывающая сила равна опорной реакции A. На основании таблицы заключаем, что момент всех сил относительно точки B будет

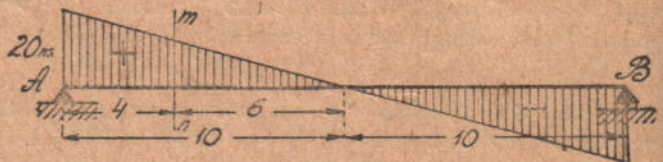
$$M_B = 1276 + 156 \cdot 1,5 = 1510 \text{ т} \cdot \text{м.}$$

Следовательно,

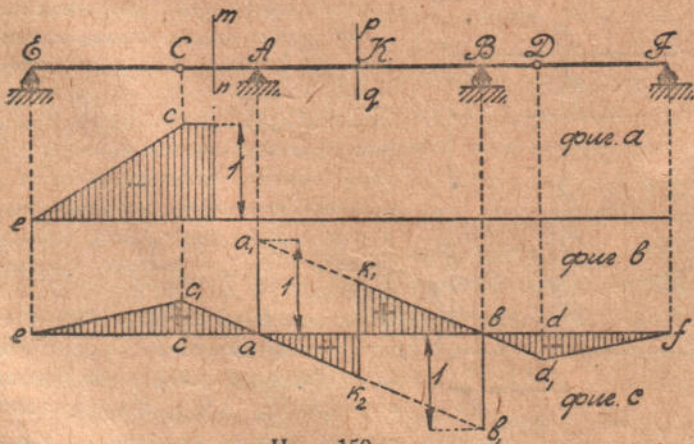
$$Q_{\max} = \frac{M_B}{l} = \frac{1510}{20} = 75,5 \text{ т.}$$

73. Как изменится величина наибольшей перерезывающей силы, найденной в предыдущей задаче, если принять собственный вес балки $q = 2 \frac{\text{т}}{\text{м}}$?

Линия суммы сил от постоянной равномерной нагрузки представлена на черт. 158. Поперечная сила в расстоянии 4 м от левой опоры равна 12 т. Эта величина должна быть прибавлена к найденной выше поперечной силе Q_{\max} от подвижной нагрузки.



Черт. 158.



Черт. 159.

74. Построить линии влияния для перерезывающих сил в сечениях mq и tn консолю-балочной системы (черт. 159).

¹⁾ Предполагается, что паровозы располагаются согласно чертежу 143. Если поставить паровозы трубами в противоположные стороны, можно получить более неблагоприятные условия.

Пока груз единица находится справа от сечения ml , перерезывающая сила в этом сечении равна нулю. При расположении груза между сечением ml и шарниром C , перерезывающая сила по величине равна одной тонне и по знаку отрицательна. Наконец, когда груз 1 тонна перейдет на балку EC , давление, передаваемое консольной балке через шарнир C , будет убывать пропорционально расстоянию от точки E . Окончательно линия влияния для перерезывающей силы в ml представится отрезком наклонной прямой ec и прямой sl , параллельной оси балки и отстоящей от оси на единицу. Обращаясь к сечению pq , заметим, что, пока груз находится на консольной балке CD справа от сечения pq , перерезывающая сила равна опорной реакции A . С переходом груза на левую половину балки из реакции A придется отнимать единицу. Соответственно этому получены участки k_1d_1 и c_1k_2 искомой линии влияния. С переходом груза на балку DF давление на шарнир D и соответствующая этому давлению перерезывающая сила в сечении pq будет убывать пропорционально расстоянию груза от опоры F , и им получим участок d_1f линии влияния. На основании таких же рассуждений получается участок es_1 для другой подвесной балки. Знаки для перерезывающей силы указаны на чертеже.

§ 24. Случай узловой передачи нагрузки.

Очень часто подвижная нагрузка не действует на балку непосредственно, а передается ей при помощи поперечных балок и системы продольных вспомогательных балочек (черт. 160). В таком случае на главную балку будут действовать усилия лишь в местах прикрепления поперечных балок. Если какой-либо груз располагается над поперечной балкой, его действие на главную балку будет такое же, как и при непосредственной передаче нагрузки. При расположении груза в промежуточном сечении вспомогательной балочки (черт. 160), давление его на две смежные поперечные балочки распределится по правилу рычага и найдется по формулам:



Черт. 160.

$$P_1 = P \frac{x}{d}; \quad P_2 = P \frac{d-x}{d} \dots \dots \dots (a).$$

Вместо силы P на главную балку будут, таким образом, действовать в местах прикрепления поперечных балок усилия P_1 и P_2 .

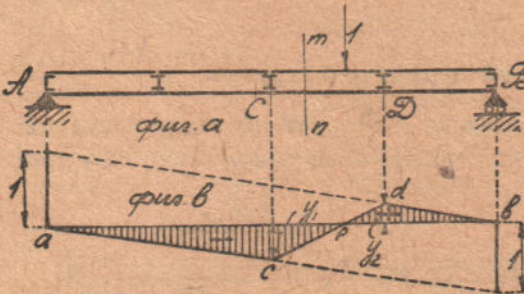
При построении линии влияния для какого-либо усилия нам нужно вместо груза P перемещать по вспомогательной балочке груз равный одной тонне (единице). Когда этот груз находится у правого конца вспомогательной балочки, давление его непосредственно передается на главную балку, и соответствующая ордината y_2 линии влияния найдется так же, как при прямой передаче нагрузки.

Точно так же найдем ординату y_1 линии влияния при положении груза единица у левого конца балочки. Посмотрим теперь, как най-

дется ордината y линии влияния при любом расположении груза единица на вспомогательной балочке. Пусть x — расстояние этого груза от правого конца балочки. Соответствующая ордината y линии влияния найдется из того условия, что усилие, вызываемое грузом единица в главной балке, будет складываться из усилий, вызываемых двумя составляющими этого груза, передаваемыми двум соседним поперечным балкам. На основании формул (а) заключаем, что составляющие эти будут:

$$1 \cdot \frac{x}{d} \quad \text{и} \quad 1 \cdot \frac{d-x}{d}.$$

Вызываемые этими составляющими значения искомого усилия получатся умножением составляющих на соответствующие ординаты y_1 и y_2 линии влияния. В таком случае ордината y при любом расположении груза на вспомогательной балочке, найдется из условия



$$1 \cdot y = 1 \cdot \frac{x}{d} \cdot y_1 + 1 \cdot \frac{d-x}{d} \cdot y_2.$$

Мы видим, что ордината y представляется линейной функцией от x . При $x=0$ находим $y = y_2$. При $x = d$ $y = y_1$.

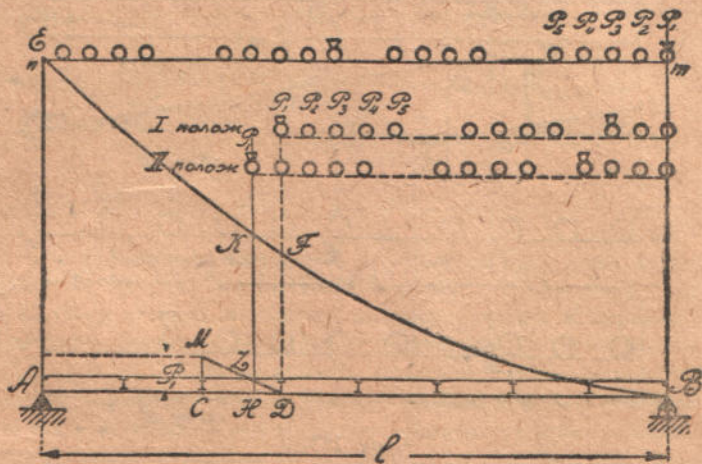
Черт. 161.

Таким образом, на протяжении рассматриваемой вспомогательной балочки линия влияния — прямая, отсекающая у концов балочки вертикальные отрезки y_1 и y_2 , определяемые так, как и при непосредственном действии нагрузки на балку.

Применим эти общие соображения к построению линии влияния для перерезывающей силы в каком-либо поперечном сечении mn балки, опертой по концам (черт. 161). Пока груз единица располагается на участке DB или AC нашей балки, перерезывающая сила в сечении mn будет совершенно такая же, как и при непосредственной передаче нагрузки на балку. Следовательно, участки bd и ac линии влияния (фиг. б) найдутся прежним способом, и сейчас же определятся нужные нам ординаты y_1 и y_2 . Соединяя вершины c и d этих ординат прямой cd , мы тем самым заканчиваем построение линии влияния. Таким образом, отличие от случая прямого действия нагрузки получается лишь на протяжении CD , т. е. на протяжении той панели, где взято сечение mn . Причина этого различия будет ясна, если мы обратимся к фиг. а. При прямом действии нагрузки перерезывающая сила в mn для взятого положения груза равна левой опорной реакции A . При узловой передаче

дело обстоит иначе: груз единица, расположенный справа от сечения ml , передает давления на главную балку в точки C и D , и, следовательно, перерезывающая сила в ml будет равняться реакции A без давления, передаваемого в точку C . Для получения Q_{\max} придется загружать правую часть bc балки. Q_{\min} соответствует расположению нагрузки на левой части ae балки. При загрузке балки нормальным поездом приходится обыкновенно для получения Q_{\max} ставить первое колесо паровоза в точке D и располагать остальные грузы вправо от этой точки. Для разыскания Q_{\min} нужно обыкновенно ставить первое колесо паровоза в точке C и располагать остальные грузы влево от C . В некоторых случаях приходится один или

два груза выдвигать также и на разрезаемую панель. Для решения вопроса, когда это нужно делать, можно воспользоваться веревочным многоугольником опорных сопротивлений (черт. 145). Повторим прежний чертеж, и пусть BE — веревочный многоугольник, соответ-



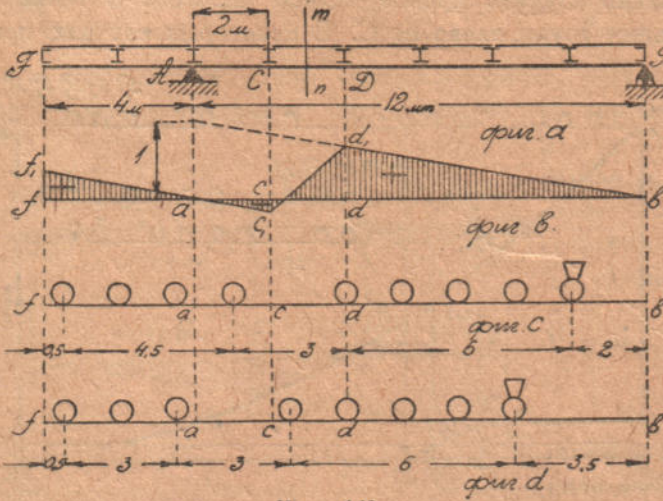
Черт. 162.

ствующий расположению нагрузки, указанному на прямой ml (черт. 162). Если мы для разыскания Q_{\max} в панели CD возьмем I-е положение поезда, когда первый груз P_1 находится над точкой D , то перерезывающая сила в панели CD ¹⁾, равная реакции A , определится вертикальным отрезком DF , измеренным в масштабе сил. Если поезд продвинуть вперед и поставить над узлом D груз P_2 (II-ое положение поезда), то перерезывающая сила в панели CD найдется, как разность опорной реакции A и того давления, которое от груза P_1 передается в узел C . Реакции A для этого положения поезда определяется отрезком HK . Для получения давления на узел C откладываем в C по вертикали груз P_1 и полученную таким образом точку M соединяем с D . Тогда LH — будет нужное нам давление, передаваемое на узел C , и LK —

¹⁾ Так как при узловой передаче на главную балку действуют лишь силы, сосредоточенные в узлах, то на протяжении одной панели величина перерезывающей силы, очевидно, будет постоянной.

искомая перерезывающая сила. Второе положение поезда придется брать в тех случаях, когда $LK > FD$, т.е. когда линия MD получается более пологой, чем соответствующая сторона веревочного многоугольника EB . Чем выбранная панель ближе к левой опоре, тем, очевидно, II-ое расположение поезда получается более вероятным. Далее мы приведем и аналитический признак для выбора надлежащего расположения поезда.

Задачи: 75. Найти Q_{\max} в сечении mn балки AB (черт. 163) при действии подвижной нагрузки, представленной на чертеже 143.

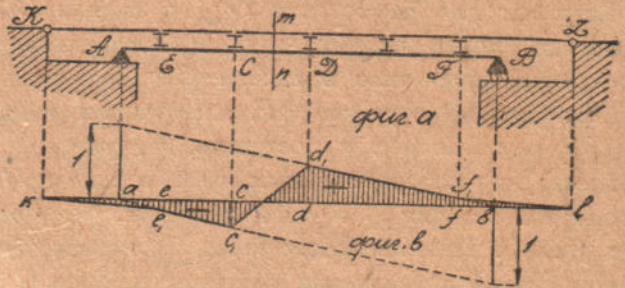


Черт. 163.

Линии d_1b и f_1c_1 строятся так же, как это было сделано в задаче 71. Отличие получается лишь в пределах разрезанной панели, где линия влияния представляется наклонной линией d_1c_1 . Теперь остается подобрать такое положение поезда, чтобы $\Sigma P y$ получила наибольшее значение. Для этого придется сравнить два положения поезда, представленные на фиг. с и d.

76. Построить линию влияния для перерезывающей силы в сечении mn балки AB (черт. 164).

Пока груз расположен на участке DF или EC нашей балки, перерезывающая сила в mn будет такой же, как и при непосредственной передаче нагрузки. Соответственно этому на фиг. b проведены наклонные линии d_1f_1 и c_1e_1 , отсекающие на вертикалях, идущих через A и B , отрезки, равные единице. На протяжении CD линия влияния должна быть прямой, и, так как c_1 и d_1 уже получены,

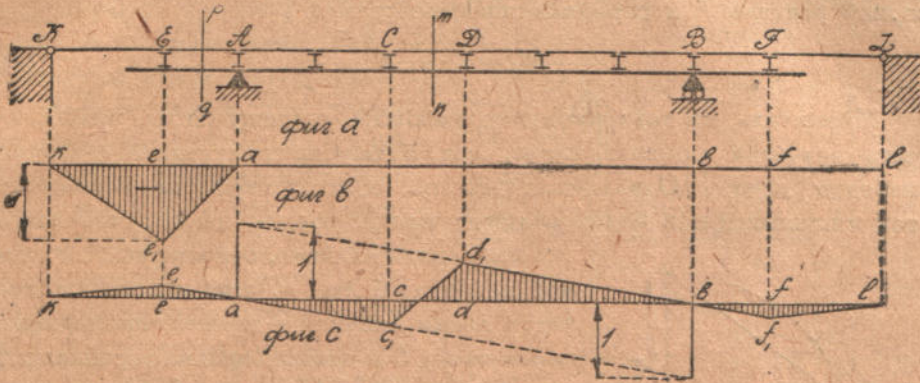


Черт. 164.

то остается провести соответствующую наклонную линию c_1d_1 . Обращаясь, наконец, к крайним вспомогательным балочкам KE и FL , заметим, что когда груз единицы стоит в E или F , то его влияние на искомую перерезывающую силу определяется ординатой ee_1 или ff_1 . При расположении груза в K или L давление целиком передается на фундамент. Следовательно, здесь ординаты искомой линии влияния обращаются в нуль,

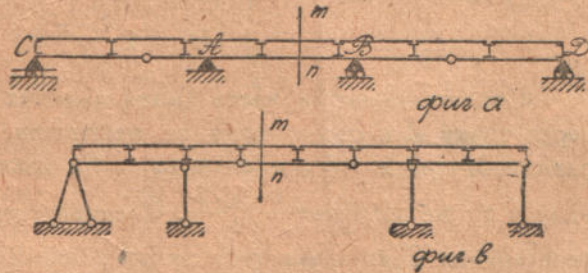
и нам остается только провести наклонные линии ke_1 и lf_1 , чтобы закончить построение нужной нам линии влияния.

77. Построить линию влияния для перерезывающей силы в сечениях rq и tl консольной балки (черт. 165).



Черт. 165.

Перерезывающая сила в сечении rq получается отличной от нуля лишь в том случае, когда груза располагается где-либо на участке KA нашей системы. Если груз единица стоит над узлом E , то он целиком передается на консоль балки, и перерезывающая сила в сечении rq будет равна единице. При передвижении груза влево или вправо давление, передаваемое на узел E , будет убывать, и, наконец, при расположении груза в A или K это давление обращается в нуль. Так как давление в E меняется пропорционально расстоянию груза от точки A или K , то соответствующая линия влияния представится двумя прямолинейными отрезками ae_1 и ke_1 (фиг. *b*) с наибольшей ординатой ee_1 , равной единице. Линия влияния для перерезывающей силы в tl представлена на фиг. *c*. Она строится так же, как это было сделано в предыдущей задаче.



Черт. 166.

78. Построить линию влияния для перерезывающей силы в сечениях tl консольно-балочных систем, представленных на чертеже 166.

§ 25. Линия влияния для изгибающего момента.

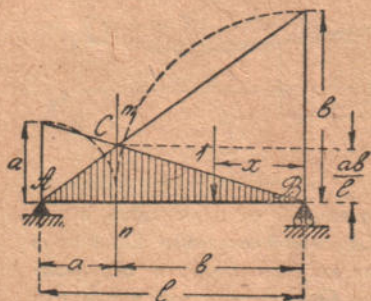
При расчете балок, подвергающихся действию подвижной нагрузки, часто приходится разыскивать то расположение грузов, грузов, при котором в рассматриваемом сечении изгибающий момент получает наибольшее значение. Вопрос этот проще всего решается путем построения

соответствующей линии влияния. Возьмем, например, балку с опертыми концами (черт. 167) и построим линию влияния для изгибающего момента в сечении mn . Когда груз единица расположен справа от сечения mn , то изгибающий момент в этом сечении равняется моменту опорной реакции A и определяется ф-лой:

$$M_b = 1 \cdot \frac{x}{l} a \quad (a).$$

Множитель, на который нужно умножать единицу силы, чтобы получить значения момента, имеет, как видно из полученной ф-лы (а), измерение длины. Откладывая его по соответствующим ординатам в том же масштабе, в каком отложен пролет балки, мы получим часть

искомой линии влияния, относящуюся к правой половине балки. Легко видеть, что эта часть линии влияния — прямая, проходящая через точку B и отсекающая на вертикали A отрезок, равный a . Из этой прямой для дальнейшего нужна лишь часть BC , относящаяся к правой половине балки.



Черт. 167.

Когда груз единица расположится слева от сечения mn , мы для составления изгибающего момента в этом сечении можем обратиться к рассмотрению правой половины балки. Справа от сечения будет действовать теперь лишь правая реакция B , искомый изгибающий момент будет равен моменту этой реакции и определится ф-лой:

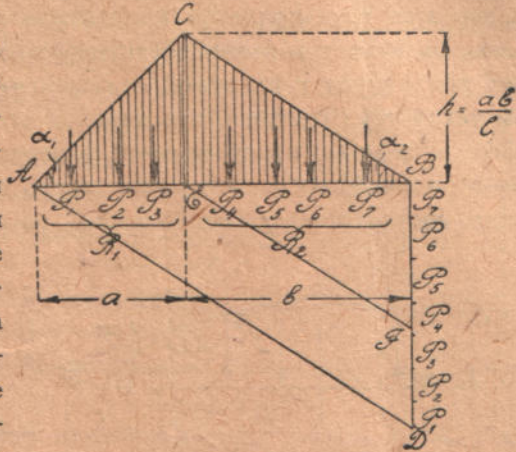
$$M_a = 1 \cdot \frac{l-x}{l} b \quad (b).$$

Соответствующая часть линии влияния будет прямая, проходящая через точку A и отсекающая на вертикали, идущей через B , отрезок, равный b . При $x=b$ обе ф-лы (а) и (б) дают для изгибающего момента одну и ту же величину $\frac{1 \cdot a \cdot b}{l}$. Следовательно, здесь получится точка пересечения C двух участков линии влияния ACB .

По поводу линии влияния заключаем, что для получения наибольшего значения изгибающего момента в сечении mn , необходимо загрузить весь пролет балки так, чтобы наиболее тяжелые грузы располагались по возможности ближе к сечению mn , где ординаты построенной линии влияния имеют наибольшее значение.

Займемся теперь более подробным выяснением вопроса о расположении подвижной нагрузки в случае треугольной линии влияния, так как с этой задачей приходится встречаться при расчетах. Возьмем произвольное расположение подвижной нагрузки, указанное на чертеже 168.

Все грузы, расположенные слева от сечения mn , приведем к равнодействующей R_1 . Точно так же грузы, расположенные справа от mn , заменим равнодействующей R_2 . Для получения изгибающего момента в сечении mn , нужно каждую из этих равнодействующих умножить на соответствующую ей ординату линии влияния, измеренную в масштабе длины, и результаты этих умножений сложить. Если мы всю систему неизменно связанных между собой грузов переместим вправо на такую величину δx , что ни один груз не перейдет сечения mn и не сойдет с балки, то величина равнодействующих R_1 и R_2 останется без изменения. Ордината линии влияния, соответствующая силе R_1 , увеличится на $\delta x \cdot \operatorname{tg} \alpha_1$, а ордината для R_2 уменьшится на величину $\delta x \cdot \operatorname{tg} \alpha_2$. Следовательно, указанное перемещение будет сопровождаться изменением изгибающего момента в сечении mn на величину



Черт. 168.

$$\delta M = \delta x (R_1 \operatorname{tg} \alpha_1 - R_2 \operatorname{tg} \alpha_2).$$

Или, принимая во внимание, что

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{ab}{l} : a = \frac{b}{l} \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{ab}{l} : b = \frac{a}{l},$$

получим

$$\delta M = \frac{ab}{l} \delta x \left(\frac{R_1}{a} - \frac{R_2}{b} \right) \quad (c).$$

Следовательно, знак изменения момента зависит от знака скобок в ф-ле (с). Если

$$\frac{R_1}{a} > \frac{R_2}{b},$$

т.-е., если среднее значение нагрузки, приходящейся на единицу длины левой части балки, больше соответствующей величины для правой части балки, перемещение системы грузов вправо сопровождается увеличением момента и влево — уменьшением момента. При

$$\frac{R_1}{a} < \frac{R_2}{b},$$

мы придем к прямо противоположным заключениям. Таким образом, пока R_1 и R_2 остаются неизменными, мы не будем иметь положения нагрузки, соответствующего M_{\max} . Положение подвижной нагрузки,

соответствующее максимуму изгибающего момента характеризуется тем, что приращение момента δM получается отрицательным независимо от знака перемещения. Для этого нужно, чтобы при положительном δx (при движении вправо) скобка (ф-ла c) имела отрицательное значение и при отрицательном δx — скобка была положительна. Этому условию можно удовлетворить, расположив один из грузов в сечении mn . При движении вправо этот груз придется присчитывать к нагрузке правой половины балки, он войдет в равнодействующую R_2 , при движении влево тот же груз приложится к нагрузке, лежащей слева от сечения. Если мы найдем такой груз системы, что переход его вправо от сечения mn делает скобку в ф-ле (c) отрицательной, а переход влево делает ту же скобку положительной, то расположение этого груза в сечении mn будет, очевидно, соответствовать наибольшему изгибающему моменту.



Черт. 169.

Мы получаем такое правило для выбора положения системы грузов, соответствующего M_{\max} в заданном сечении.

Подвижная нагрузка должна располагаться так, чтобы один из грузов находился непосредственно

над рассматриваемым сечением. При чем этот груз должен быть выбран так, чтобы в зависимости от того, к какому участку балки (правому или левому) мы его присчитываем, в этом участке среднее значение нагрузки, приходящейся на единицу длины, получилось большим, чем во втором участке.

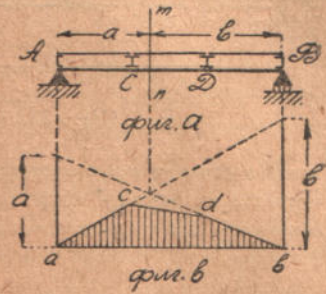
Надлежащий выбор того груза, который должен быть расположен непосредственно над сечением mn , легко решается графическим путем. Если от точки B вертикально вниз отложить все грузы в том порядке, как мы их встречаем, идя от B к A (черт. 168), соединить конец последнего груза D с точкой A и через E провести линию EF параллельно AD то легко показать, что точка F укажет на тот груз, который должен быть установлен над сечением mn . Из подобия треугольников BEF и BAD видно, что при этом выполняется высказанное выше правило.

Этим путем решается вопрос о расположении нагрузки всякий раз, когда мы имеем линию влияния треугольного очертания, независимо от того, относится ли эта линия к изгибающему моменту, или перерезывающей силе, или другому какому либо усилию.

В более сложных случаях, с которыми нам дальше придется иметь дело, когда линия влияния имеет многоугольное очертание (черт. 169),

мы тем же приемом, которым пользовались сейчас, можем показать, что максимуму усилия будет соответствовать такое расположение нагрузки, когда один из грузов приходится над одной из вершин линии влияния. Но для разыскания этого груза и соответствующей вершины нет определенных правил. Вопрос этот приходится решать путем попыток, сравнивая значения ΣPy для разных положений нагрузки и выбирая то положение, при котором ΣPy приобретает наибольшее значение.

При расчетах мостов часто пользуются линией влияния лишь для того, чтобы надлежащим образом расположить подвижную нагрузку (нормальный поезд). Вычисление же соответствующего усилия производится не путем измерения соответствующих ординат линии влияния, а аналитическим путем при помощи таблиц моментов для нормального поезда, или графически — на основании построения веровочного многоугольника для соответствующих грузов.



Черт. 170.

Все предыдущие рассуждения относительно построения линии влияния для изгибающего момента в сечении mn относились к тому случаю когда действие нагрузок на балку — непосредственное. При узловой передаче придется ввести в очертание линии влияния те изменения, о которых говорилось уже при изучении перерезывающей силы (§ 24). Пока груз единица располагается где либо на протяжении DB или AC балки (черт. 170), изгибающий момент в сечении mn получается таким же как и в случае прямого действия нагрузки. Соответственно этому проведены участки bd и ac искомой линии влияния. Участок линии влияния, соответствующий вспомогательной балочке CD , должен быть прямым, и мы его получим, соединяя уже найденные точки c и d (фиг. б) прямой cd .

Задачи: 79. Пользуясь линией влияния, найти величину изгибающего момента в сечении mn при действии на балку AB (черт. 171) равномерной нагрузки интенсивности q .



Черт. 171.

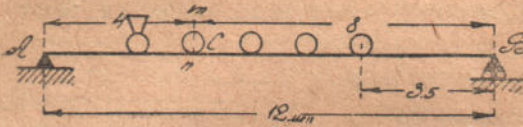
Для получения искомого момента нужно площадь треугольника ABC умножить на интенсивность нагрузки q .

Таким образом, получаем:

$$M = \frac{ab}{2} q \cdot l \cdot m.$$

80. Показать при помощи линии влияния, что, при действии на балку с опертными концами одного подвижного груза, наиболее невыгодные условия получаются при расположении этого груза по середине пролета.

На основании вида линии влияния заключаем, что при действии на балку одного груза P , наибольший изгибающий момент получается под грузом. Если a и b расстояния этого груза до опор, то момент под грузом равен $\frac{ab}{l} P$. Так как сумма отрезков a и b остается при перемещении грузов постоянной, то их произведение достигает наибольшего значения, когда они равны, т.е., когда груз располагается по середине пролета.



Черт. 172.

81. Пользуясь таблицей для нормального поезда (черт. 143) вычислить наибольшее значение изгибающего момента в сечении mn балки AB (черт. 172).
При заданных размерах балки нужно для получения M_{\max} расположить в сечении mn второе колесо паровоза. Величину момента в сечении mn получим, вычитая из момента опорной реакции A величину момента давления переднего колеса паровоза. Для реакции A на основании таблицы получаем:

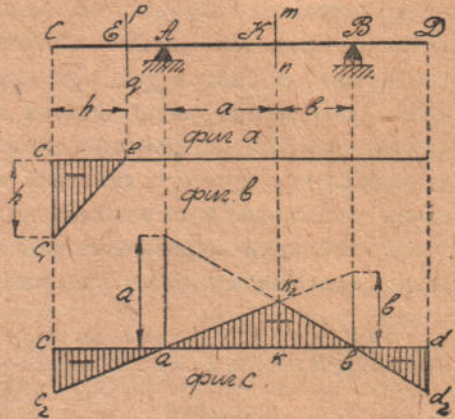
$$A = \frac{300 + 100 \times 3,5}{12} = 54,17 \text{ т.}$$

Следовательно,

$$M_c = 54,17 \times 4 - 20 \times 1,5 = 186,68 \text{ т} \cdot \text{м.}$$

82. Построить линии влияния для изгибающих моментов в сечениях mn и pq консольной балки (черт. 173).

Момент в сечении pq получается отличным от нуля лишь в том случае, когда груз единица расположится слева от сечения. Величина момента получится при этом умножением груза единица на расстояние до сечения. Когда груз займет положение в точке C , величина момента будет равна $1 \cdot h$. При расположении груза в точке E момент обращается в нуль. Линия c_1e , отсекающая на крайней вертикали отрезок h (фиг. b), будет служить линией влияния для изгибающего момента в сечении pq . Обращаясь к моменту в сечении mn , заметим, что, пока груз единица располагается справа от сечения, величина момента получится умножением реакции A на длину a . Соответствующий участок линии влияния начертится так же, как и для опорной реакции. Нужно только все ординаты умножить на a . Таким образом, получаем прямую k_2d_2 , проходящую через b и отсекающую на вертикали, идущей через A , отрезок a . Подобным же образом получаем для левой части балки прямую c_2k_2 , отсекающую на вертикали, идущей через B , отрезок b . Мы видим, что для получения M_{\max} в сечении mn нужно загрузить часть балки между опорами. Для получения M_{\min} — нужно загрузить консоли балки.



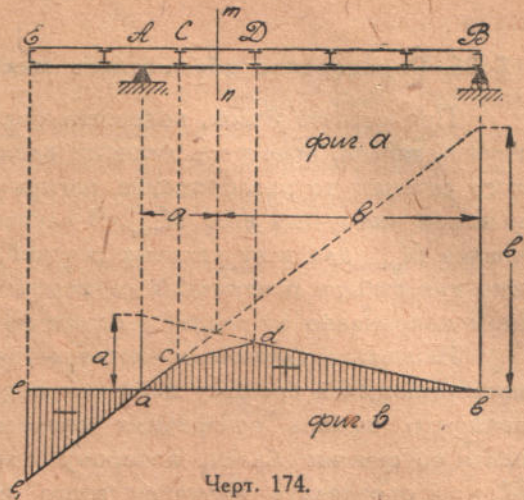
Черт. 173.

83. Построить линию влияния для изгибающего момента в сечении mn консольной балки (черт. 174) при узловой передаче нагрузки.

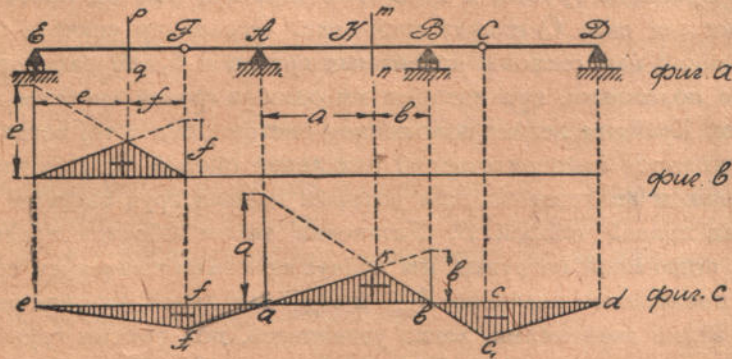
Линии db и ce_1 (фиг. b) проведены через точки b и a так, что на вертикалях, идущих через A и B , они отсекают отрезки, равные a и b . На протяжении разрезанной панели вместо выступающего угла, намеченного пунктиром, нужно провести прямую cd .

84. Построить линии влияния для изгибающих моментов в сечениях mn и pq консольно-балочной системы, представленной на чертеже 175.

Линия влияния для момента в сечении pq начертится так же, как для балки, опертой в E и F (фиг. b). При построении линии влияния для момента в mn строим сначала линии kf_1 и kc_1 , как это мы делали раньше для консольной балки (зад. 82). Когда груз единицы расположен в C , момент, вызываемый им в сечении mn , определяется ординатой cs_1 . Когда этот груз перемещается от C к D , то давление, передаваемое узлу C , убывает



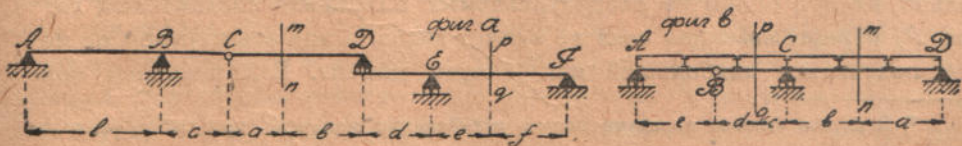
Черт. 174.



Черт. 175.

пропорционально расстоянию груза до опоры D . В том же отношении убывает и момент, вызываемый в сечении mn . Следовательно, на протяжении cd линия влияния представится наклонной прямой c_1d . Точно так же построится и участок линии влияния ef_1 .

85. Построить линии влияния для моментов в сечениях mn и pq консольно-балочных систем, представленных на чертеже 176.



Черт. 176.

§ 26. Определение абсолютного максимума изгибающего момента.

При расчете балок, подвергающихся действию системы подвижных грузов, можем, пользуясь линиями влияния, найти для каждого поперечного сечения то расположение нагрузки, которому соответствует M_{\max} и можем вычислить этот M_{\max} . В случае узловой передачи нагрузки, вычислив M_{\max} для всех узловых сечений, мы получаем необходимые данные для выбора поперечных размеров балки, так как наибольший момент непременно совпадает с одним из узлов ¹⁾.

Несколько сложнее представляется задача в случае расчета балки, подвергающейся прямому действию подвижной нагрузки. Здесь для надлежащего выбора поперечных размеров необходимо предварительно найти то сечение балки, которому соответствует наибольший из всех M_{\max} , и определить величину этого абсолютного максимума. Вопрос этот может быть разрешен как аналитическим, так и графическим путем.

При аналитическом решении задачи будем иметь в виду, что 1) абсолютный максимум изгибающего момента получается непременно под одним из грузов, и 2) в том сечении, где он имеет место, перерезывающая сила Q меняет свой знак. Ограничим сначала перемещения заданной нам системы подвижных грузов и будем рассматривать лишь такие положения, при которых ни один из грузов системы не сходит с балки. Крайним левым положением системы будет то, когда левый груз расположится непосредственно над левой опорой A . Другим крайним положением является то, при котором правый груз системы расположится над правой опорой B . Установив таким образом предельные положения подвижной нагрузки, мы сейчас же можем вычислить соответствующие предельные значения A_{\max} и A_{\min} для левой опорной реакции. Пользуясь этими значениями, легко установить, под какими грузами системы следует искать абсолютного максимума изгибающего момента. В самом деле, перерезывающая сила под каким-либо грузом P_n представится так

$$A - (P_1 + P_2 + \dots + P_{n-1}) \quad (a).$$

Если это выражение сохраняет один и тот же знак при крайних положениях системы, т.-е., при $A = A_{\max}$ и при $A = A_{\min}$, то, следовательно, ни при одном из рассматриваемых положений системы под грузом P_n перерезывающая сила не меняет знака, и под этим грузом не может получиться наибольший изгибающий момент. В дальнейшем при-

¹⁾ В случае узловой передачи эпюра изгибающих моментов, при любом расположении подвижной нагрузки, представится многоугольником, вершины которого располагаются над узлами (зад. 30 § 8).

дется рассматривать лишь те грузы, для которых выражение (а) при перемещении системы грузов по пролету балки меняет знак. Возьмем один из этих грузов и посмотрим, как должна быть расположена система, чтобы под этим грузом получился наибольший изгибающий момент. В дальнейшем будем через x обозначать расстояние рассматриваемого груза от левой опоры (черт. 177), через l — пролет балки, через R — равнодействующую всей заданной системы грузов и через c — расстояние этой равнодействующей от рассматриваемого груза.

При чем c считаем положительным, если R располагается справа от рассматриваемого груза. Наконец, через N назовем момент всех лежащих слева от рассматриваемого груза относительно точки приложения рассматриваемого груза.

В таком случае опорная реакция представится так

$$A = \frac{R(l-x-c)}{l} \quad (b),$$

и для изгибающего момента под рассматриваемым грузом получаем выражение

$$M = \frac{R(l-x-c)}{l} x - N. \quad (c).$$

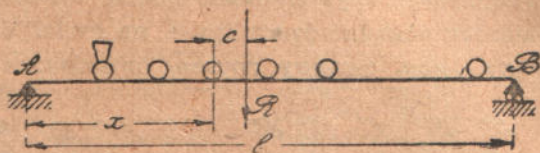
Теперь остается подобрать x таким образом, чтобы выражение (с) получило максимальное значение. Составляя производную от этого выражения по x и приравнявая эту производную нулю, получим

$$l - 2x - c = 0,$$

откуда

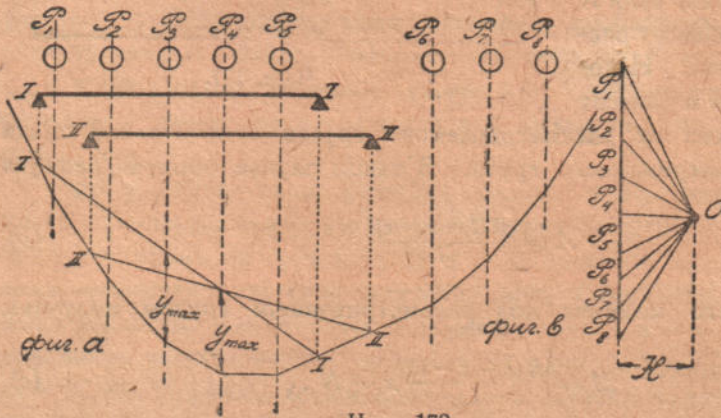
$$x = \frac{l-c}{2}, \quad \frac{l}{2} = x + \frac{c}{2} \quad (d).$$

Приходим к заключению, что для получения наибольшего изгибающего момента под рассматриваемым грузом вся система должна быть так расположена, чтобы середина пролета балки делила пополам расстояние c между рассматриваемым грузом и равнодействующей R . Если при этой установке ни один из грузов не сходит с балки, то нам остается теперь только вычислить момент под рассматриваемым грузом и мы можем перейти к установке системы для получения M_{\max} под следующим, подлежащим исследованию грузом. Перебрав, таким образом, все грузы, под которым можно ожидать максимального момента, мы можем утверждать, что наибольший из найденных M_{\max} и будет искомым абсолютный максимум изгибающего момента.



Черт. 177.

Посмотрим теперь, как нужно поступать, если при установке системы соответственно ф-ле (d) часть грузов сходит с балки. Положим, например, что систему приходится передвигать влево настолько, что часть левых грузов сходит с балки, перекатываясь через левую опору А. Если, согласно ф-ле (d), приходится передвигать систему влево, то это показывает, что при этом движении момент под рассматриваемым грузом все время возрастает. Предположим, что при таком передвижении крайний левый груз системы достиг опоры А. С этого момента прекращается влияние этого груза на изгиб балки, и нам нужно рассматривать лишь систему грузов, оставшихся на балке. Равнодействующая этой новой системы грузов расположится, очевидно, правее прежней равнодействующей R, и для выполнения условия (d) новую систему придется продолжать двигать влево, это движение будет сопровождаться дальнейшим увеличением момента под рассматриваемым грузом. Такое перемещение придется продолжать до тех пор, пока, после схода нескольких грузов, оставшаяся система грузов не установится так, что для нее будет выполнено условие (d). Для этого положения и придется вычислить момент под рассматриваемым грузом.



Черт. 178.

При графическом разыскании абсолютного максимума изгибающего момента начинаем с построения веревочного многоугольника для заданной системы сил. Если эта система представляет собой тип нормального поезда, то мы берем число грузов несколько большее, чем может вместиться на балке, и вместо того, чтобы перемещать систему грузов по балке, перемещаем балку относительно грузов, для которых построен веревочный многоугольник (черт. 178). Для последовательных положений I—I, II—II и т. д. строим соответствующие замыкающие линии I—I, II—II и т. д. Тогда непосредственно из чертежа сейчас же находим максимальную ординату y_{max} моментной площади и умножением на H получаем в каждом положении свое M_{max} . Путем пробных установок балки всегда можно найти с достаточной для практики точностью величину абсолютного максимума изгибающего момента.

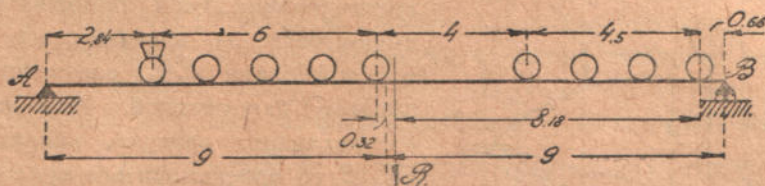
Равнодействующая этой новой системы грузов расположится, очевидно, правее прежней равнодействующей R, и для выполнения условия (d) новую систему придется продолжать двигать влево, это движение будет сопровождаться дальнейшим увеличением момента под рассматриваемым грузом. Такое перемещение придется продолжать до тех пор, пока, после схода нескольких грузов, оставшаяся система грузов не установится так, что для нее будет выполнено условие (d). Для этого положения и придется вычислить момент под рассматриваемым грузом.

Задачи: 86. По балке пролетом 18 м перемещается нормальный паровоз с тендером. Найти аналитическим и графическим путем соответствующее значение абсолютного максимума изгибающего момента.

Пользуясь таблицей для нормального поезда, находим:

$$A_{\max} = \frac{1276 + 156 \times 3,5}{18} = 101,2 \text{ т}; \quad A_{\min} = \frac{1276}{18} = 70,9 \text{ т}.$$

На основании ф-лы (а) заключаем, что перерезывающая сила может менять знак лишь под пятым или шестым грузом слева.



Черт. 179.

Займемся пятым грузом. При помощи таблицы находим, что равнодействующая R отстоит от крайнего правого груза на величину

$$\frac{1276}{156} = 8,18 \text{ м}.$$

Следовательно,

$$c = 8,50 - 8,18 = 0,32 \text{ м}.$$

На основании ф-лы (d) заключаем, что система должна быть расположена так, как указано на чертеже 179.

Соответствующая этому положению левая опорная реакция найдется при помощи таблицы и будет равна

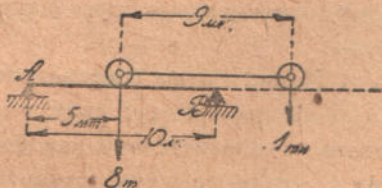
$$A = \frac{1276 + 156 \times 0,66}{18} = 76,5 \text{ т}.$$

Искомый максимум изгибающего момента под пятым грузом равняется

$$M_{\max} = 76,5 \times 8,84 - 300 = 376 \text{ м} \cdot \text{т}.$$

Вычисления дают для момента под шестым грузом значение меньше только что найденного; следовательно, найденный M_{\max} представляет собой абсолютный максимум изгибающего момента.

К такому же результату мы приходим и при графическом решении вопроса.



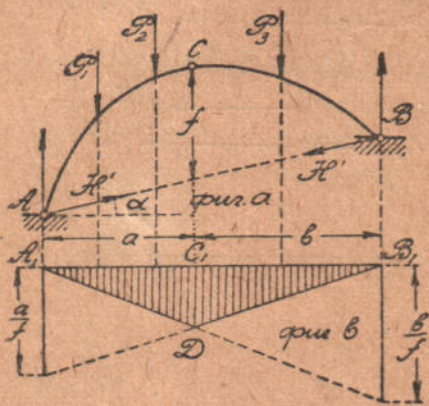
Черт. 180.

87. Найти абсолютный максимум изгибающего момента для балки пролетом в 10 м при действии на нее системы двух грузов (черт. 180) в 8 т и 1 т.

Легко доказать, что в этом случае система должна быть расположена так, как это указано на чертеже 180.

§ 27. Линия влияния для распора трехшарнирной арки.

Предположим, что трехшарнирная арка ACB (черт. 181) подвергается действию вертикальных сил P_1, P_2, \dots . Опорные шарниры A и B для общности предположим расположенными на разных высотах. Каждую из опорных реакций условимся разлагать на две составляющие. Одну из составляющих направим по вертикали, а другую по линии AB , соединяющей шарниры. Написав уравнения моментов относительно точки A и точки B , найдем, что вертикальные составляющие A и B опорных реакций имеют такие же значения, как и для простой балки A_1B_1 , соответственным образом нагруженной. Что касается составляющих реакций, направленных по AB , то проектируя все приложенные к арке силы на горизонтальную ось, убеждаемся, что эти составляющие равны и прямо противоположны. Их общую величину обозначим через H' , а их горизонтальную проекцию, называемую горизонтальным распором арки, обозначим через H .



Черт. 181.

При решении частных задач (см. зад. 31 § 8 и зад. 53 § 20) мы видели, что расчет арки приходится начинать с определения распора. При действии на арку подвижной нагрузки весьма существенно исследовать вопрос об изменении распора в зависимости от перемещения нагрузки. Исследование это проще всего произвести путем построения соответствующей линии влияния. Пусть по арке перемещается вертикальный груз, равный единице. Вызываемый этим грузом распор мы найдем, если примем во внимание, что M_c всех сил, приложенных к одной половине арки, относительно ключевого шарнира C непременно должен равняться нулю.

Момент этот составляется из двух частей: из момента M_c^0 вертикальных сил, момент этот, очевидно, равен изгибающему моменту в сечении C_1 соответствующей балки, и из момента силы H' , равного $H \cdot f$, где f — стрелка арки, измеряемая по вертикальному направлению, как указано на чертеже. Следовательно,

$$M_c = M_c^0 - Hf = 0,$$

откуда

$$H = \frac{M_c^0}{f} \quad (a).$$

Мы приходим к заключению, что при движении груза единица по арке распор арки меняется по такому же закону, как изгибающий момент в сечении C_1 простой балки A_1B_1 . Линия влияния для распора построится по такому же правилу, как для момента балки (§ 25), только все ординаты придется разделить, как видно из формулы (а), на длину f . Построение это выполнено на чертеже 181. По вертикалям, проходящим через A_1 и B_1 , в выбранном масштабе отложены отвлеченные числа $\frac{a}{f}$ и $\frac{b}{f}$. Концы отложенных ординат соединены с точками B_1 и A_1 . Тогда линия A_1DB_1 представит собой искомую линию влияния для распора арки ACB . Для получения максимального распора арки придется загрузить всю арку, причем расположить грузы так, как это было объяснено при вычислении M_{\max} (§ 25). При определении распора арки от равномерной нагрузки, покрывающей весь пролет, нужно интенсивность нагрузки $q \frac{\tau}{\text{м}}$ помножить на площадь треугольника A_1DB_1 1).

Задачи: 88. Определить максимальный распор трехшарнирной симметричной арки, имеющей пролет $l = 20$ м и стрелку $f = 2,5$ м, при действии равномерной нагрузки интенсивности $q = 1 \frac{\tau}{\text{м}}$.

В этом случае

$$\frac{a}{f} = \frac{b}{f} = \frac{10}{2,5} = 4.$$

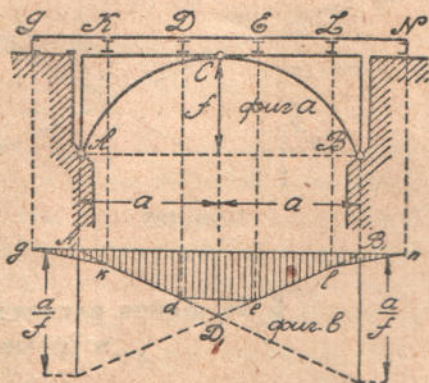
Высота $\triangle A_1DB_1$ (черт. 181) получается равной 2, и площадь равна 20 м. Следовательно,

$$H = q \cdot \triangle A_1DB_1 = 20 \text{ м} \cdot 1 \frac{\tau}{\text{м}} = 20 \text{ т.}$$

К тому же результату мы бы пришли, если бы использовали ф-лу (а).

89. Построить линию влияния для распора арки при узловой нагрузке (черт. 182).

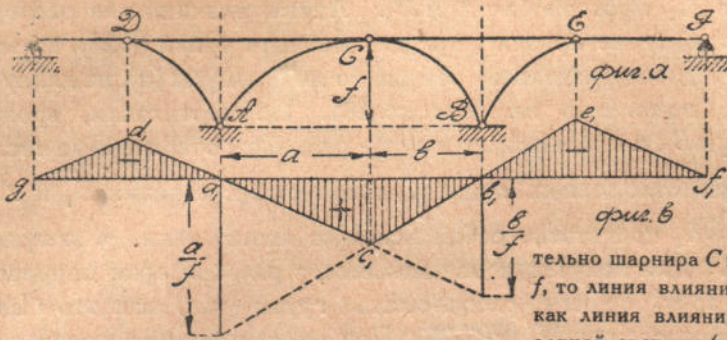
Строим сначала линию влияния $A_1D_1B_1$, как в случае прямого действия нагрузки. Потом, принимая во внимание, что при узловой передаче на протяжении каждой панели линия влияния должна быть прямой, мы, вместо выступающего угла в вершине D_1 , проводим линию de и, вместо входящих углов у точек A_1 и B_1 , проводим линии kg и ln , соответственно крайним панелям KG и LN .



Черт. 132.

1) При вычислении этой площади основание треугольника измеряется в масштабе длины и высоты—в масштабе, принятом для отвлеченных чисел.

90. Построить линию влияния для распора консольной трехшарнирной арки (черт. 183).



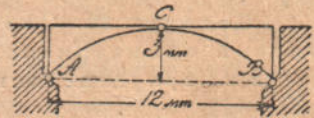
Черт. 183.

Так как распор H трехшарнирной арки получается делением момента M_c всех сил, приложенных к одной половине арки, относи-

тельно шарнира C на величину стрелки f , то линия влияния для H построится, как линия влияния для консольно-балочной системы (зад. 84 § 25). Нужно только на вертикалях, проходящих че-

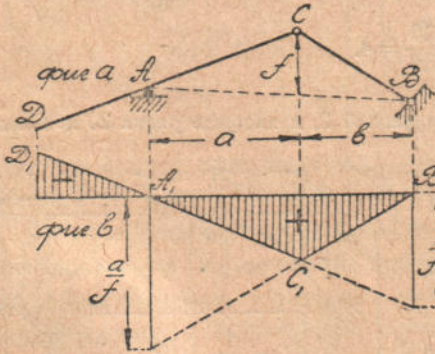
рез A и B , вместо отрезков a и b , отложить в известном масштабе отвлеченные числа $\frac{a}{f}$ и $\frac{b}{f}$.

91. На трехшарнирной арке ACB (черт. 184) расположить нормальный поезд (тип, представленный на чертеже 143) так, чтобы получить максимум распора, и вычислить этот максимум при помощи таблицы моментов.



Черт. 184.

Способ расчета такой же, как при определении M_{\max} для балки.



Черт. 185.

92. Построить линию влияния для распора системы, представленной на чертеже 185.

Линия влияния строится, как для консольной балки. Нужно только на вертикалях, идущих через A и B , отложить вместо a и b отвлеченные числа $\frac{a}{f}$ и $\frac{b}{f}$. При нагрузке консоли AD у нас получается обратный распор.

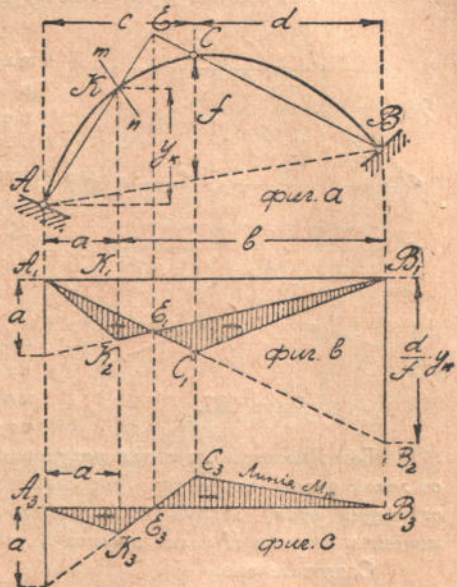
§ 28. Линия влияния для изгибающего момента в трехшарнирной арке.

При действии на арку вертикальных сил изгибающий момент M_k в каком-либо сечении mn (черт. 186) представляется, как было показано в предыдущем параграфе, в виде разности момента M_k^0 , вычисленного для балки A_1B_1 (фиг. б) в сечении K_1 , и момента $H y_k$ горизонтального распора арки. Этим мы воспользуемся при построении линии влияния для изгибающего момента в сечении mn . Строим сначала линию влияния

$A_1K_2B_1$ для изгибающего момента в сечении K_1 балки A_1B_1 и из ординат этой линии влияния вычитаем умноженные на y_k ординаты линии влияния для H . На фиг. *b* это выполнено следующим образом: от точки B_1 вертикально вниз отложен отрезок $B_1B_2 = d \cdot \frac{y_k}{f}$, и точка B_2 соединена с левой опорой A_1 . Точка пересечения этой линии с вертикалью, идущей через шарнир C , определяет вершину C_1 линии влияния $A_1C_1B_1$ для количества $H \cdot y_k$ ¹⁾. Результаты вычитания ординат двух построенных линий влияния отмечены на фиг. *b* штриховкой. Знаки на заштрихованных площадях влияния расставлены соответственно тому правилу знаков для моментов, которым мы пользовались при исследовании изгиба балок: положительным мы считаем изгибающий момент в том случае, если для левой отсеченной части балки момент всех приложенных к ней сил направлен по часовой стрелке.

Вид нужной нам линии влияния может быть несколько упрощен, если мы отложим ординаты заштрихованных на фигуре *b* площадей от горизонтальной линии A_3B_3 (фиг. *c*). Таким образом получается линия влияния $A_3K_3E_3C_3B_3$. Заметим, что эту линию можно построить сразу,

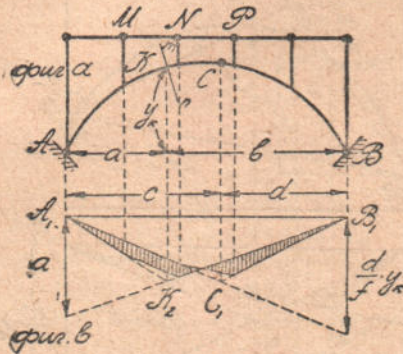
если принять во внимание: 1) что положение точки E_3 легко определяется, 2) прямая $K_3E_3C_3$ отсекает на вертикали, идущей через A_3 , отрезок a , и 3) вершины K_3 и C_3 лежат на вертикалях, проходящих через точки K и C арки. Нулевая точка E_3 соответствует тому положению груза единица, при котором изгибающий момент в K обращается в нуль. Мы это положение определим, соединяя точки A и K и продолжая линию AK до пересечения с линией BC в точке E (фиг. *a*). При расположении груза под точкой E реакция в шарнире A будет иметь направление AK и ее момент в K будет равен нулю. Обратимся теперь к ординатам площадей, заштрихованных на фигуре *b*. На протяжении E_1K_2 ординаты эти заклю-



Черт. 186.

1) Если бы мы по вертикали, идущей через B , отложили отрезок $\frac{d}{f}$, то получили бы линию влияния для H . Умножив этот отрезок на y_k , мы тем самым множим на ту же величину все ординаты линии влияния.

чены между двумя прямыми, отсекающими на крайней левой вертикали отрезок a . Следовательно, если мы на фигуре c проведем линию E_3K_3 так, чтобы она с прямой A_3B_3 вырезывала на левой вертикали отрезок a , то ординаты на протяжении E_3K_3 будут такие же, как в фигуре b на протяжении E_1K_2 . Отсюда непосредственно следует равенство ординат и во всех других частях линии влияния. Выяснив, таким образом, построение линии влияния $A_3K_3C_3B_3$, заметим, что эта линия на протяжении A_3E_3 имеет такие же ординаты, как линия влияния для изгибающего момента в сечении K балки пролетом A_3E_3 .



Черт. 187.

Было показано, что для получения M_{\max} в каком-либо сечении K , в расстоянии x от левой опоры, необходимо расположить нагрузку на протяжении от A до E . Соответствующий этому загрузению максимальный изгибающий момент будет такой же, как момент в сечении K балки пролета l_k , опирающейся в A и E_1 .

Следовательно,

$$M_{\max} = \frac{qx}{2} (l_k - x) \quad (a)$$

Теперь остается только l_k выразить через x . Для параболической арки:

$$y_k = \frac{4f}{l^2} (l - x)x.$$

Кроме того, из чертежа имеем

$$y_k : EE_1 = x : l_k;$$

$$f : EE_1 = \frac{l}{2} : (l - l_k).$$

Следовательно,

$$l_k = \frac{l^2}{3l - 2x},$$

и ф-ла (a) даст нам

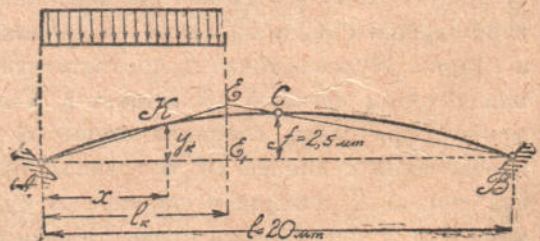
$$M_{\max} = \frac{qx}{2} \cdot \frac{l^2 - 3lx + 2x^2}{3l - 2x} \quad (b)$$

Подбирая x так, чтобы выражение (b) получило максимальное значение, найдем, что абсолютный максимум изгибающего момента получается при $x = 0,23l$. Он

Задачи: 93. Построить линию влияния для изгибающего момента в сечении mn при условии узловой передачи нагрузки (черт. 187).

Сначала строим линии $A_1K_2B_1$ и $A_1C_1B_1$ так, как это было объяснено выше и потом срезаем вершины K_2 и C_1 соответственно панелям MN и NP .

94. Определить M_{\max} от подвижной равномерной нагрузки интенсивности $q = 1,25$ т/м для трехшарнирной параболической симметричной арки, имеющей пролет $l = 20$ м и стрелку $f = 2,5$ м (черт. 188).

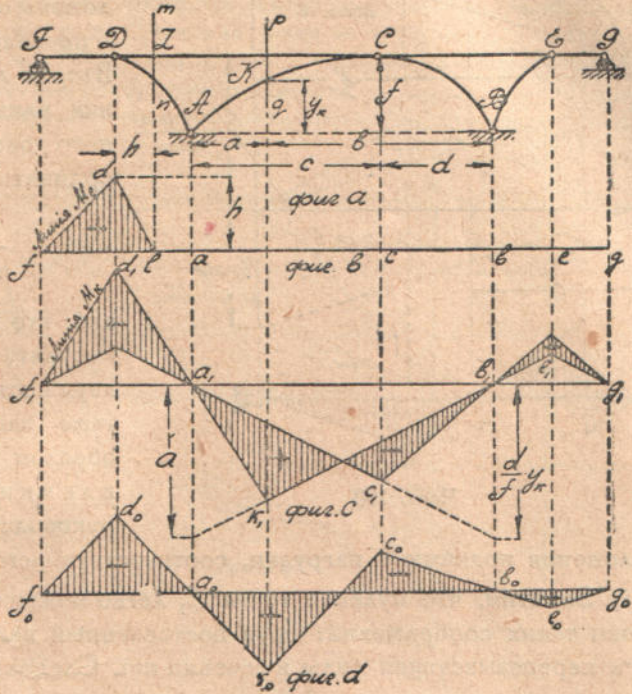


Черт. 188.

равняется $0,019q^2$. Что касается M_{\min} , то для параболической арки он по абсолютному значению равен M_{\max} . В самом деле парабола является веревочной кривой для равномерной нагрузки, и, следовательно, при полном загрузении арки в ней не будет совершенно изгиба. Момент, соответствующий загрузению участка AE , равен по величине и противоположен по знаку моменту от нагрузки на протяжении EB .

95. Построить линии влияния для изгибающих моментов M_l и M_k в сечениях mn и pq консольной трехшарнирной арки (черт. 189).

Для сечения mn , очевидно, линия влияния начертится так же, как для случая консольно-балочной системы. На протяжении от F до опорного шарнира A нам не придется иметь дело с распором арки. Линия влияния для момента в сечении pq построится на протяжении a_1b_1 (фиг. с) так же, как и для трехшарнирной арки без консолей. Далее построенные линии придется продолжить до пересечения с вертикалями, идущими через D и E , и полученные точки соединить с точками g_1 и f_1 .



Черт. 189.

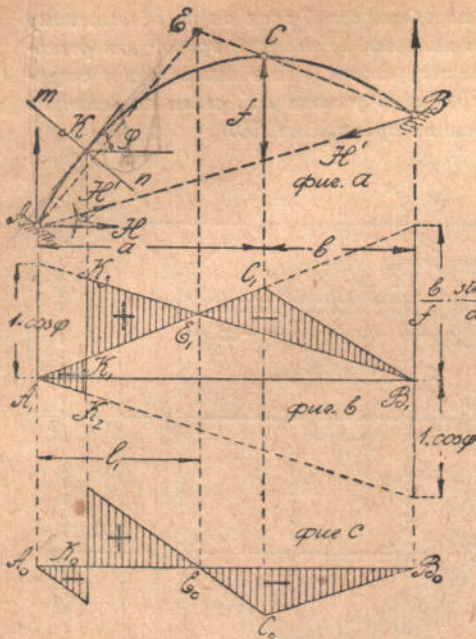
§ 29. Линия влияния для перерезывающей силы в трехшарнирной арке.

Перерезывающая сила Q в сечении mn арки (фиг. а, черт. 190) получится, если мы спроектируем на направление нормали mn геометрическую сумму всех сил, приложенных к левой отсеченной части арки. Силы эти приводятся, как мы видели, к вертикальной силе Q_0 , имеющей такое значение, как перерезывающая сила для балки A_1B_1 в сечении K_1 , и к силе H' , направленной по линии AB .

Следовательно,

$$Q = Q_0 \cos \varphi - H' \sin (\varphi - \alpha). \quad (а).$$

Для получения ординат искомой линии влияния нам нужно составить разность ординат линий влияния для количества $Q_0 \cos \varphi$ и $H' \sin (\varphi - \alpha)$. Первая из этих линий построится так же, как и линия влияния для пере-



Черт. 190.

резывающей силы балки A_1B_1 . Нужно только ординаты этой последней умножить на $\cos \varphi$. На фиг. (b) это достигнуто тем, что на вертикалях A_1 и B_1 отложены отрезки, равные $1 \cdot \cos \varphi$, и проведены линии A_1K_2 и B_1K_3 . Вторая линия строится, как линия влияния для горизонтального распора H , только все ординаты множатся на

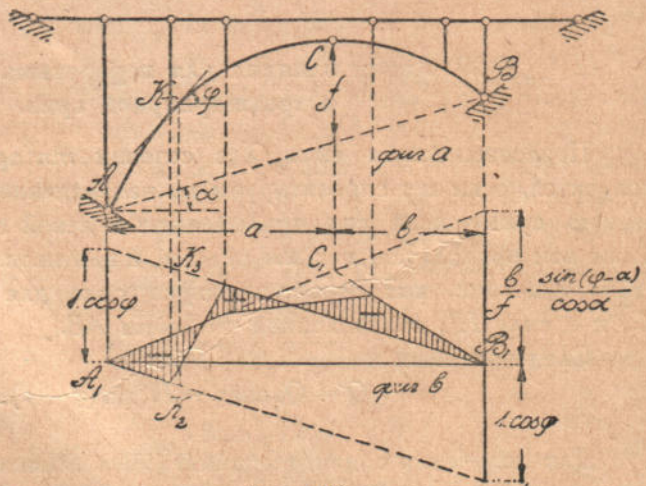
$$\frac{\sin(\varphi - \alpha)}{\cos \alpha},$$

как это указано на фиг. (b) Результаты вычитания ординат двух построенных линий на чертеже заштрихованы, и таким образом получены площади влияния, которыми нужно руководствоваться при выборе

положения подвижной нагрузки, соответствующего Q_{\max} или Q_{\min} .

Заметим, что нулевая точка E_1 легко может быть получена на основании таких соображений: груз поставленный над E_1 , не должен вызывать перерезывающей силы в сечении mn . Следовательно, соответствующая ей реакция в опоре A должна быть параллельна касательной к арке в точке K . Проводя через A линию, параллельную этой касательной до пересечения с линией CB , получим точку E , под которой располагается нулевая точка E_1 .

Задачи: 96. Как изменится линия влияния для перерезывающей силы при условии узловой передачи нагрузки (черт. 191)?

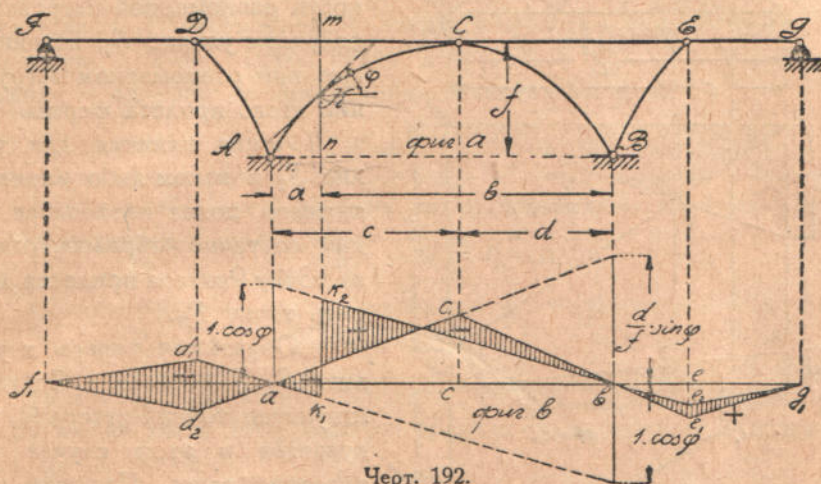


Черт. 191.

Сначала строим линию влияния в предположении непосредственной передачи нагрузки, а потом срезаем выступающие вершины K_2 , K_3 и C_1 , как указано на чертеже (фиг. б).

97. Построить линию влияния для перерезывающей силы в сечении m консольной трехшарнирной арки (черт. 192).

Для среднего пролета AB строим линию влияния так, как это было описано выше для трехшарнирной арки без консолей. Продолжая линии ak_1 и ac_1 (фиг. б) до пересечения с вертикалью, идущей через D , в точках d_1 и d_2 и соединяя эти точки с точкой f_1 , получаем линию влияния на протяжении левой консоли и левой подвесной балочки. Подобным же образом выполнено построение для правой консоли и правой подвесной балочки.



Черт. 192.

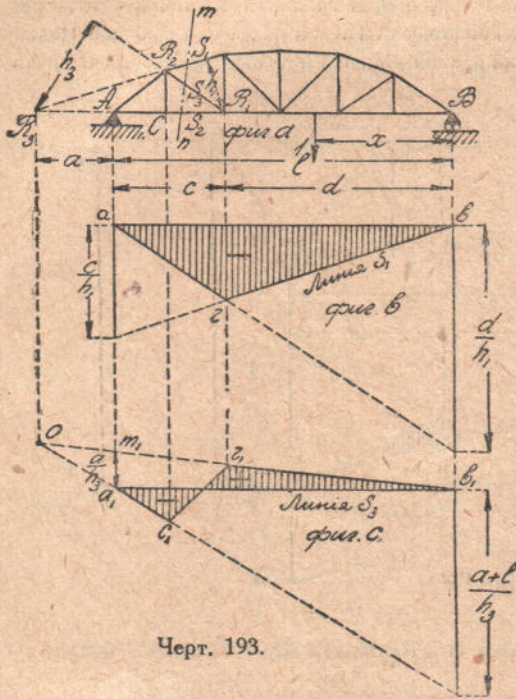
§ 30. Линии влияния для усилий в стержнях простейших ферм.

При построении линий влияния для усилий в стержнях простейших ферм пользуются обыкновенно способом Риттера. Перемещая по ферме груз, равный единице, и определяя для каждого положения груза соответствующее усилие в рассматриваемом стержне, мы получим достаточно данных для построения искомой линии влияния. Так как эта линия состоит из нескольких прямолинейных отрезков, то для построения ее обыкновенно достаточно найти лишь несколько точек. Возьмем, например, случай фермы с криволинейным верхним поясом (черт. 193). Для получения способом Риттера усилия S_1 в каком-либо стержне верхнего пояса, мы разрезаем ферму сечением mn и рассматриваем условие равновесия левой отсеченной части. Составляя момент M_1 всех сил, приложенных к этой части, относительно точки R_1 , находим¹⁾

$$S_1 = -\frac{M_1}{h_1}.$$

¹⁾ Мы пользуемся для моментов прежним правилом знаков.

Следовательно, величина S_1 меняется по тому же закону, как и величина M_1 . Для построения линии влияния S_1 нужно ординаты линии влияния для изгибающего момента в сечении R_1 балки AB разделить на длину h_1 (фиг. *b*). Таким образом, ординаты построенной линии влияния будут представлять собой отвлеченные числа, для которых нужно выбрать определенный масштаб. Измеряя в этом масштабе высоту построенного нами треугольника abr (фиг. *b*) и умножая ее на длину пролета l и интенсивность равномерной нагрузки q , получаем усилие S_1 , возникающее при равномерном загрузении всего пролета фермы.



Линия влияния для усилия S_2 в каком-либо элементе нижнего пояса построится таким же точно образом, только за точку Риттера придется принять точку R_2 .

Обратимся теперь к усилию S_3 в раскосе. Соответствующая точка Риттера R_3 получается в этом случае вне пролета фермы. Положим сначала, что груз единица располагается на правой части фермы в пределах между R_1 и B (фиг. *a*).

В таком случае на левую отсеченную часть фермы, кроме усилий в перерезанных стержнях S_1 , S_2 и S_3 , будет действовать лишь опорная реакция в точке A . Обозначая через x расстояние груза единица от правой опоры, найдем

$$A = \frac{1 \cdot x}{l},$$

и уравнение моментов всех сил, приложенных к левой отсеченной части фермы, относительно точки Риттера R_3 дает нам:

$$S_3 h_3 - Aa = 0.$$

Отсюда

$$S_3 = A \cdot \frac{a}{h_3} = 1 \cdot \frac{x}{l} \cdot \frac{a}{h_3}. \quad (a).$$

Линия влияния для S_3 может быть получена из линии влияния для реакции A . Нужно только ввести множитель $\frac{a}{h_3}$. На фигуре *c* это до-

стигается тем, что на вертикали, идущей через A , отложен отрезок a_1m_1 , представляющий в масштабе, выбранном для отвлеченных чисел величину $\frac{a}{h_3}$. Вершина этого отрезка соединена прямой m_1b_1 с правой опорной точкой b_1 . Легко видеть, что ординаты построенной таким образом прямой будут давать значения множителя при грузе, равном единице, в ф-ле (а). Часть этой линии на протяжении r_1b_1 будет служить линией влияния для усилия S_3 .

Когда груз единица переходит на левую половину фермы и располагается где-либо на протяжении AC (фиг. а), мы можем для определения усилия S_3 рассмотреть условия равновесия правой части фермы, на которую в этом случае будут действовать усилия в перерезанных стержнях и опорная реакция B , определяемая из ф-лы:

$$B = \frac{1 \cdot (l-x)}{l}.$$

Составляя момент всех этих сил относительно R_3 , получаем такое уравнение равновесия:

$$-S_3h_3 - B(a+l) = 0,$$

откуда

$$S_3 = -B \cdot \frac{a+l}{h_3} = -1 \cdot \frac{l-x}{l} \cdot \frac{a+l}{h_3} \quad (b).$$

На протяжении левой половины фермы ординаты линии влияния для S_3 могут быть получены из ординат для реакции B путем умножения их на число

$$-\frac{a+l}{h_3}.$$

На фигуре с это умножение выполнено путем такого построения: на вертикали, проходящей через B , вертикально вниз от точки b_1 отложен в масштабе, принятом для отвлеченных чисел, отрезок b_1n_1 , равный $\frac{a+l}{h_3}$, и точка n_1 соединена с левой опорной точкой a_1 . Тогда ординаты линии a_1n_1 будут представлять собой величину множителя при грузе единица в ф-ле (b). На протяжении a_1c_1 построенная линия будет служить участком искомой линии влияния.

Нам остается теперь рассмотреть расположение груза единица на протяжении разрезанной панели CR_1 . Мы предполагаем узловую передачу нагрузки. В узлах нижнего пояса к ферме прикрепляются поперечные балки, на которых располагаются вспомогательные продольные балочки, непосредственно воспринимающие нагрузку. Когда, перемещаясь по этой балочке, груз единица расположится над узлом R_1 , вызываемое им усилие S_3 определится ординатой в точке r_1 . При другом крайнем положении груза над узлом C , усилие S_3 определится ординатой в c_1 . При всех промежуточных положениях груза ординаты

линии влияния будут меняться, как было показано (§ 24), по закону прямой линии s_1r_1 , соединяющей точки s_1 и r_1 . Заметим здесь, что прямые r_1b_1 и a_1c_1 пересекаются в точке o , располагающейся на одной вертикали с R_3 . Это следует непосредственно из подобия треугольника om_1a_1 и ob_1n_1 .

Если в рассматриваемой ферме нисходящее направление раскосов заменить восходящим (черт. 194), то легко видеть, что усилие S_3 меняет свой знак. Меняется также и величина усилия, так как

вместо длины h_3 надо везде ввести новую длину h'_3 (фиг. б).

Если в рассмотренных примерах (черт. 193 и 194) изменять высоту фермы так, чтобы положение точки R_3 не менялось, то при этом будет меняться направление S_3 , длина расстояний h_3 и h'_3 , а следовательно и величина усилия S_3 ; но, если обратиться к величине вертикальной проекции усилия S_3 , то легко показать, что эта проекция остается при указанном изменении высоты неизменной. Возьмем, например, случай, представленный на чертеже 194. Вертикальная проекция усилия S_3 будет равна:

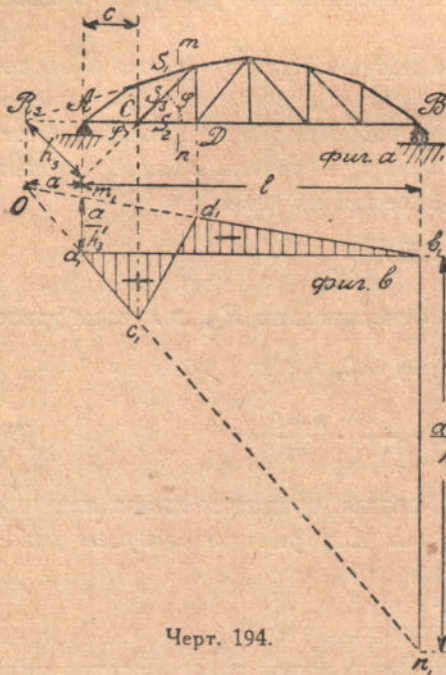
$$S_3 \sin \varphi = S_3 \frac{h'_3}{R_3C} = S_3 \frac{h'_3}{a+c}.$$

Если бы мы хотели построить линию влияния для этой проекции, то нам нужно было бы ординаты линии влияния для S_3 (фиг. б) умножить на $\frac{h'_3}{a+c}$. Следовательно, отрезки a_1m_1 и b_1n_1 нужно положить равными величинам:

$$\frac{a}{h'_3} \cdot \frac{h'_3}{a+c} = \frac{a}{a+c} \quad \text{и} \quad \frac{a+l}{h'_3} \cdot \frac{h'_3}{a+c} = \frac{a+l}{a+c}.$$

Величины эти совершенно не зависят от высоты фермы.

Обратимся теперь к построению линий влияния для стоек взятой фермы. Линии влияния для стоек и раскосов могут быть построены, если уже имеются линии влияния для усилий в элементах поясов. Возьмем, например, узел C (черт. 195, фиг. а), где, кроме стойки и раскоса, сходятся еще два элемента верхнего пояса. Линии влияния для соответствующих усилий S_1 и S_2 представлены на фигурах б и с. Если груз единица занимает положение, указанное на чертеже (фиг. а), то орди-



Черт. 194.

наты y_1 и y_2 дают нам соответствующие значения сжимающих усилий S_1 и S_2 . Чтобы получить при том же положении груза ординаты линий влияния для усилий S_3 и S_4 в стойке и раскосе, нужно только обратиться к многоугольнику сил, сходящихся в узле C (фиг. *b*). Имея S_1 и S_2 , мы сейчас же, построением многоугольника сил, находим усилия S_3 и S_4 , а, значит, и соответствующие ординаты y_3 и y_4 искомых линий влияния.

Применим этот прием к построению линии влияния для средней стойки FD (черт. 195, фиг. *a*). Из условия равновесия узла F мы заключаем, что усилие S в стойке FD определяется формулой:

$$S = -2S_2 \cos \alpha \quad (c).$$

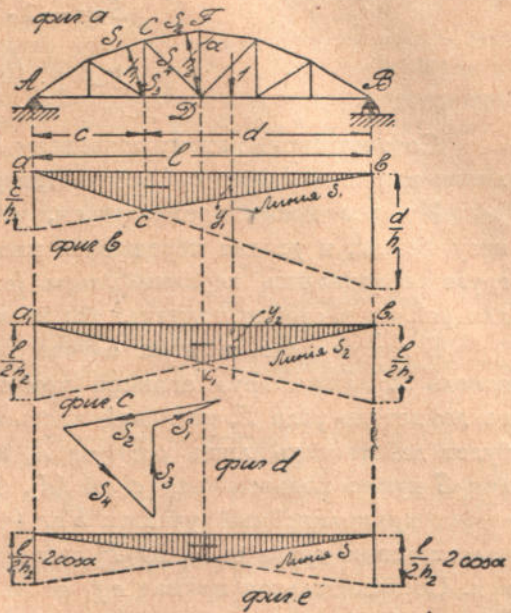
Следовательно, искомую линию влияния мы можем легко получить из линии влияния для S_2 (фиг. *c*). Нужно только все ординаты этой последней умножить на $2 \cos \alpha$, что и выполнено на фигуре *e*,

где по вертикалям, идущим через A и B , отложены отрезки, равные

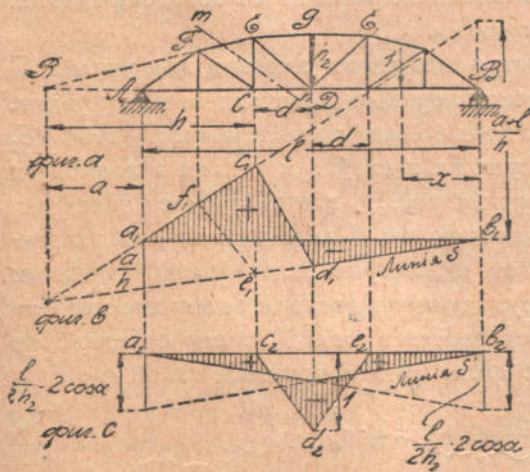
$$\frac{l}{2h_2} 2 \cos \alpha.$$

Для боковых стоек линии влияния могут быть построены также и тем приемом, который мы применяли для раскосов. Если нужно построить линию влияния для усилия S в стойке EC (черт. 196, фиг. *a*), мы производим разрез сечением mn и составляем момент всех приложенных к левой отсеченной

части фермы сил относительно точки K . Обозначая через x расстояние груза единица от правой опоры, мы найдем для искомого усилия S ,



Черт. 195.



Черт. 196.

в зависимости от расположения груза справа или слева от разрезанной панели CD , такие ф-лы:

$$S = -1 \cdot \frac{x}{l} \cdot \frac{a}{h} \quad (b);$$

$$S = 1 \cdot \frac{l-x}{l} \cdot \frac{a}{h} \quad (e).$$

Соответственно этому проведены линии b_1d_1 и a_1c_1 (фиг. b) искомой линии влияния. Линия c_1d_1 соответствует разрезанной панели CD .

Мы все время предполагаем, что движение груза происходит по низу фермы, и усилия передаются нижним узлам. Если бы давления от груза передавались верхним узлам (езда по верху), то линия влияния для усилия в стойке получила бы несколько иное очертание.

В самом деле, в этом случае разрезанной панелью являлась бы панель EF . Пока груз единица при своем движении от правой опоры не дойдет до узла E , на левую часть фермы, отрезанную сечением mn , будет действовать лишь реакция A , и при определении искомого усилия S нужно пользоваться ф-ой (d). В линии влияния этому соответствует прямолинейный участок b_1e_1 (фиг. b). Точно так же найдем, что перемещению груза от A до F соответствует участок a_1f_1 линии влияния. Соединительная прямая e_1f_1 соответствует разрезанной панели EF . Таким образом линия влияния для стойки изменяется в зависимости от того, передается ли нагрузка верхним или нижним узлам фермы. Если бы мы обратились к линиям влияния, построенным для усилий в поясах и раскосах (черт. 193 и 194), то легко убедились бы, что для рассматриваемой фермы вид этих линий не зависит от того, передается ли нагрузка верхним или нижним узлам.

Рассмотрим теперь, как построится линия влияния для усилия S' средней стойки DC в предположении передачи нагрузки верхним узлам. Пока груз единица находится где-либо на протяжении BE_1 или AE_1 в узле G будут сходиться лишь усилие в стойке и усилия в элементах верхнего пояса EG и E_1G . Величина усилия в стойке будет такая же, как и при передаче нагрузки нижним узлам. Следовательно, на указанных участках линия влияния будет иметь уже ранее полученный нами вид (черт. 195, фиг. e). Когда груз единица располагается где-либо на панели GE_1 или GE , часть его передается в узел G , и для определения усилия в стойке придется вместо ф-лы (c) пользоваться такой ф-ой:

$$S' = -2S_2 \cos \alpha - 1 \cdot \frac{\xi}{d} \quad (f),$$

где через ξ обозначено расстояние груза единицы от E или E_1 в зависимости от того, в какой панели груз располагается. Следовательно, для получения искомой линии влияния, нужно из ординат линии влияния для S , представленной на фигуре e черт. 195, вычесть на протя-

жении EE_1 ординаты соответствующие последнему члену в ф-ле (f). Это построение и выполнено на фиг. с черт. 196, при чем знаками отмечена положительная и отрицательная части площади влияния.

Остановимся теперь на некоторых частных видах криволинейного очертания верхнего пояса рассматриваемой фермы, встречающихся на практике. Начнем с того случая, когда верхний пояс представляет собой многоугольник, вписанный в параболу с вертикальной осью. Это так называемая параболическая ферма.

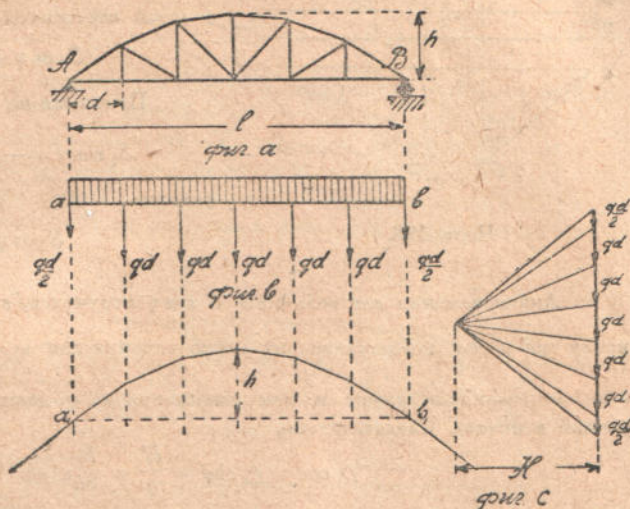
Оказывается, что при равномерной нагрузке всего пролета раскосы такой фермы не работают. Усилия в стойках одинаковы и равны нагрузке qd , лежащей на протяжении одной панели.

Горизонтальные проекции усилий во всех элементах верхнего пояса также равны между собой и равняются постоянному усилию в элементах горизонтального нижнего пояса. Чтобы убедиться в этом, мы припомним, что веревочная кривая для равномерной нагрузки — парабола с вертикальной осью (§ 7). Если мы равномерную нагрузку заменим эквивалентной ей системой сосредоточенных сил, указанной на фигуре *b* (черт. 197), то соответствующий этим силам веревочный многоугольник будет вписан в параболическую веревочную кривую.

Надлежащим выбором полюсного расстояния H и расположением полюса O , мы можем достигнуть того, что очертание нашего веревочного многоугольника вполне совпадет с очертанием верхнего пояса заданной фермы. Приняв усилия в стойках равными величинам сосредоточенных сил qd и усилия в раскосах равными нулю, мы можем рассматривать верхний пояс фермы, как веревочный многоугольник. В таком случае усилия в отдельных элементах пояса определяются длинами соответствующих лучей многоугольника сил (фиг. *c*). Усилие в нижнем поясе будет равно полюсному расстоянию H . При этом условия равновесия всех узлов фермы обеспечены, и, так как в статически определимых, геометрически неизменяемых фермах усилия во всех стержнях однозначно определяются условиями равновесия, то найденная выше система усилий, удовлетворяющая условиям равновесия, представит собой действительные усилия, возникающие в стержнях фермы при действии равномерной нагрузки интенсивности q . Чтобы найти величину усилий H в стержнях нижнего пояса, заметим, что произведение Hh (фиг. *b*) должно представлять собою величину изгибающего момента от равномерной нагрузки по середине пролета. Следовательно,

$$Hh = \frac{ql^3}{8}; \quad H = \frac{ql^3}{8h} \quad (g).$$

Имея H , мы сейчас же можем найти усилие в любом элементе верхнего пояса, делением H на \cos угла наклона этого элемента к горизонту. Так как наибольшие уси-



Черт. 197.

лия в элемент поясов соответствуют полному загрузению пролета фермы, то найденные вышеуказанным способом усилия в поясах и представляют собой те усилия, которые необходимы для расчета. Обратимся теперь к раскосам. Как видно из построенных для раскосов линий влияния (черт. 193 и 194), максимальные усилия в них получаются при загрузении одной половины фермы и минимальные при загрузении другой половины. Но, так как при полном загрузении усилие в раскосе равно нулю, то следовательно

$$S_{\max} = - (S_{\min}).$$

Для получения S_{\max} поступим так: сечением m (черт. 198) разрежем ферму; тогда, проектируя на горизонтальную ось все силы, приложенные к левой отсеченной части, получим

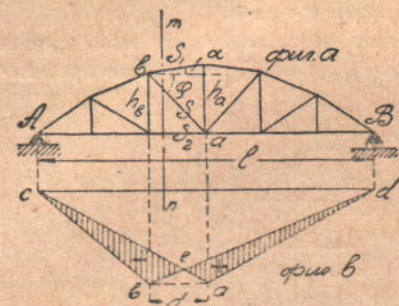
$$S \cos \varphi + S_1 \cos \alpha + S_2 = 0.$$

Принимая во внимание, что

$$S_1 \cos \alpha = - \frac{M_a}{h_a}; \quad S_2 = \frac{M_b}{h_b},$$

находим

$$S \cos \varphi = \frac{M_a}{h_a} - \frac{M_b}{h_b}.$$



Черт. 198.

Линия влияния для величины $S \cos \varphi$ получится, как разность ординат треугольников cad и cbd , представляющих линии влияния для величин $\frac{M_a}{h_a}$ и $\frac{M_b}{h_b}$. Площади этих треугольников равны и при умножении на q дают горизонтальную проекцию H усилий в поясах. Следовательно,

$$\Delta cad = \Delta cbd = \frac{H}{q} = \frac{l^2}{8h}; \quad ab \parallel cd.$$

Чтобы получить максимальное усилие в раскосе, необходимо загрузить правую часть фермы. Величина S_{\max} получится умножением на q площади треугольника ead . Δead и Δcde имеют общее основание. Следовательно,

$$\frac{\Delta ead}{\Delta cde} = \frac{ae}{ce} = \frac{d}{l},$$

откуда получаем

$$\frac{\Delta ead}{\Delta cad} = \frac{d}{l+d}, \quad \Delta ead = \Delta cad \frac{d}{l+d} = \frac{l^2}{8h} \frac{d}{l+d}.$$

Для нужного нам максимального усилия в раскосе получаем окончательно такую формулу:

$$S_{\max} = \frac{ql^2}{8h} \frac{d}{l+d} \quad (h).$$

Заметим, что полученные здесь заключения справедливы лишь в том случае, если параболическая ферма составлена из вертикальных стоек и наклонных раскосов. Если решетка фермы составлена только из наклонных стержней (черт. 199), то равномерная нагрузка всего пролета будет вызывать в раскосах усилия, отличные от нуля. Горизонтальные проекции усилий в поясах не будут постоянными по длине фермы.

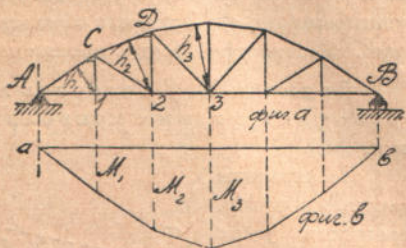


Черт. 199.

Полученные для параболической фермы ф-лы (g) и (h) легко распространяются и на те случаи, когда и нижний пояс фермы представляется многоугольником, вписанным в параболу.

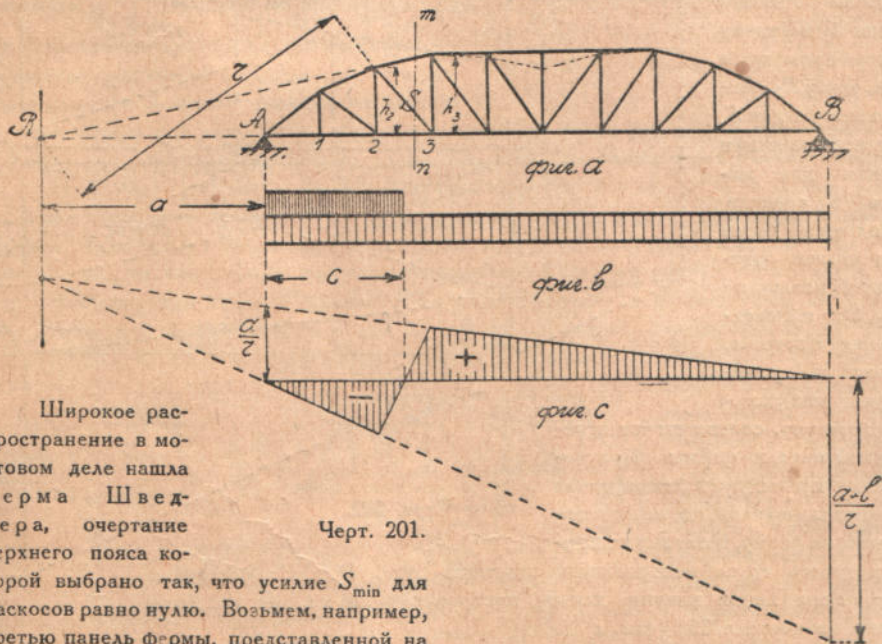
Иногда верхнее очертание фермы выбирают таким образом, чтобы при полном нагружении пролета во всех элементах верхнего пояса получились одинаковые усилия S . Если для этой нагрузки построена эпюра изгибающих моментов (фиг. b черт. 200), то величину h_m (фиг. a) в m -ой панели мы получим из условия:

$$\frac{M_m}{h_m} = C \quad (k).$$



Черт. 200.

Очертание верхнего пояса проще всего получить графически: пользуясь ф-ой (k), находим h_1 и первый элемент пояса AC проводим по касательной к кругу радиуса h_1 , описанному из точки 1. Следующий элемент CD проводим из полученной точки C по касательной к кругу радиуса h_2 , описанному из точки 2, и т. д. Ферма с полученным таким образом очертанием пояса носит название фермы Паули. Линии влияния для ее элементов строятся так, как это было рассказано выше для общего случая фермы с криволинейным верхним поясом.

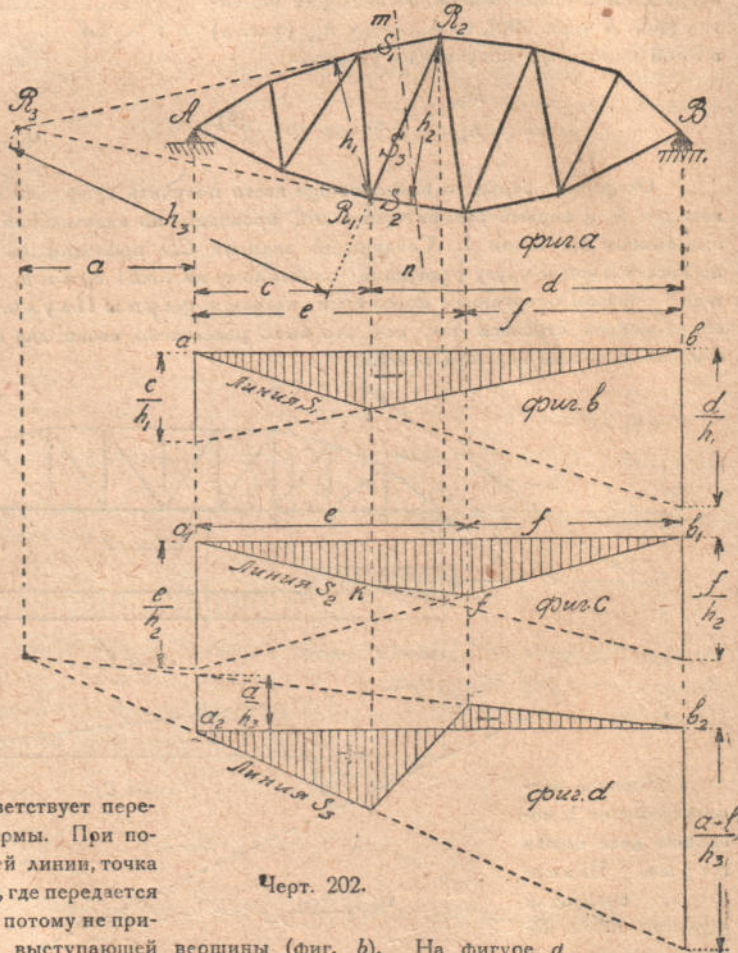


Широкое распространение в мостовом деле нашла ферма Шведлера, очертание верхнего пояса которой выбрано так, что усилие S_{\min} для раскосов равно нулю. Возьмем, например, третью панель фермы, представленной на чертеже (черт. 201, фиг. а). Чтобы получить в раскосе S_{\min} , нужно, кроме постоянной равномерной нагрузки, покрывающей весь пролет, расположить на левой части фермы на протяжении равном c (фиг. с) подвижную нагрузку. Если для каждой панели подобрать наклон элемента верхнего пояса так, чтобы точка пересечения поясов R совпала с точкой приложения равнодействующей всех сил, приложенных к левой отсеченной части фермы, то тогда, очевидно, усилие в раскосе обращается в нуль — мы получаем очертание фермы Швед-

лера. Когда интенсивность постоянной и подвижной нагрузки задана, то построение очертания фермы Шведлера может быть выполнено без всяких затруднений. В средней части этой фермы получается вогнутый верхний пояс, как то показано на чертеже пунктиром (фиг. а). Эту часть обыкновенно заменяют прямолинейным участком верхнего пояса. Расчет такой фермы производится намеченными выше общими приемами.

Задачи: 98. Построить линии влияния для усилий S_1 , S_2 и S_3 в стержнях фермы с криволинейными верхним и нижним поясами (черт. 202).

Предположим сначала, что усилия передаются узлам нижнего пояса. Тогда для усилия S_1 в элементе верхнего пояса линия влияния (фиг. b) начертится так, как это было рассказано выше (черт. 193). При определении способом Риттера усилия S_2 за точку Риттера приходится брать точку R_2 . Линия влияния для S_2 получится из линии влияния для момента в сечении, проходящем через R_2 , делением ординат этой последней на h_2 . Это и выполнено на фигуре c. Прямая kf , срезающая выступающую вершину, соответствует перерезанной панели фермы. При построении предыдущей линии, точка R_1 совпадала с узлом, где передается давление на ферму, и потому не пришлось делать среза выступающей вершины (фиг. b). На фигуре a представлена линия влияния для S_3 , построенная так же, как это было сделано на чертеже 193 (фиг. c).



Черт. 202.

99. Построить линию влияния для усилий S_1 и S_2 в раскосе и стойке фермы с параллельными поясами (черт. 203).

Рассекая ферму сечением mn и рассматривая равновесие левой отсеченной части фермы, заключаем, что при расположении груза на правой части фермы на протяжении DB , усилие S_1 найдется из ур-ния:

$$S_1 \cos \varphi - 1 \cdot \frac{x}{l} = 0.$$

Следовательно,

$$S_1 = 1 \cdot \frac{x}{l} \cdot \frac{1}{\cos \varphi} \quad (a).$$

Когда груз единица переходит на левую половину фермы, мы находим S_1 из условия равновесия правой половины фермы, на которую будет теперь действовать лишь правая опорная реакция, равная $1 \cdot \frac{l-x}{l}$.

Следовательно, в этом случае уравнения равновесия напишется так:

$$S_1 \cos \varphi + 1 \cdot \frac{l-x}{l} = 0,$$

откуда

$$S_1 = -1 \cdot \frac{l-x}{l} \cdot \frac{1}{\cos \varphi} \quad (b).$$

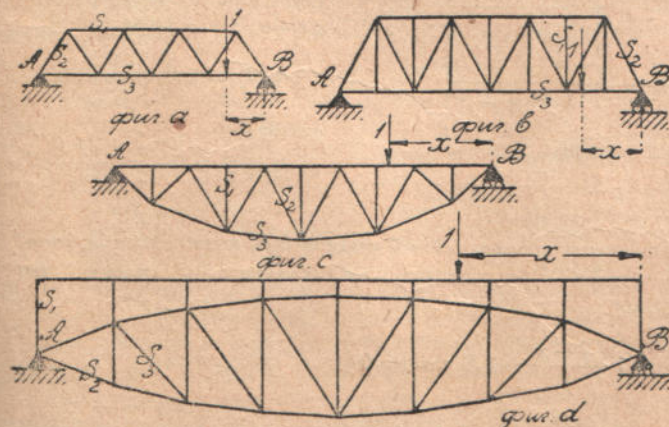
Соответственно ф-лам (a) и (b) проведены на чертеже (фиг. b) прямые линии bd и ac , отсекающие на крайних вертикалях ординаты $\frac{1}{\cos \varphi}$. Полученные при этом точки c и d соединены прямой cd , соответствующей перерезанной панели CD . Заметим, что построенная для S_1 линия влияния не зависит

от того, передается ли нагрузка верхним или нижним узлам фермы. Ферма имеет стойки, и концы панелей, перерезанных сечением mn , лежат на одних и тех же вертикалях.

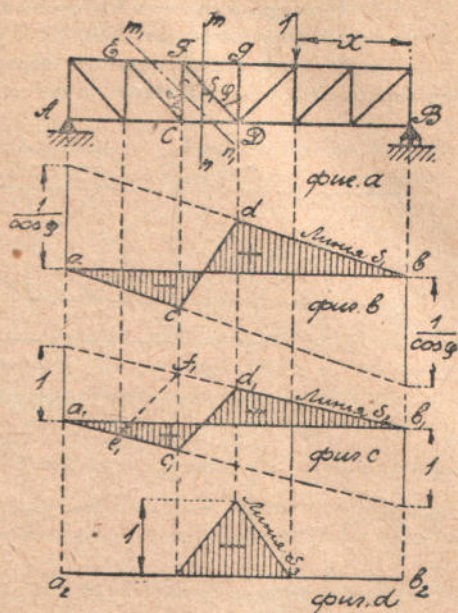
На фигуре с представлена линия влияния $a_1c_1d_1b_1$ для усилия S_2 в стойке. Она построена в предположении передачи нагрузки нижним узлам фермы. При передаче нагрузки верхним узлам линия изменится. Вместо линии c_1d_1 придется провести на чертеже пунктиром линию e_1f_1 , соответствующую перерезанной панели EF верхнего пояса.

Что касается средней стойки DG , то из условия равновесия верхнего узла C заключаем, что в ней усилие будет равняться давлению, передаваемому на узел G .

При езде по низу это усилие равно нулю. При езде по верху усилие получается отличным от нуля, когда груз единица располагается в одной из двух средних панелей. Соответствующая линия влияния для усилия S_2 в средней стойке при езде по верху представлена на фиг. d.



Черт. 204.



Черт. 203.

При езде по низу это усилие равно нулю. При езде по верху усилие получается отличным от нуля, когда груз единица располагается в одной из двух средних панелей. Соответствующая линия влияния для усилия S_2 в средней стойке при езде по верху представлена на фиг. d.

100. Построить линии влияния для усилий S_1 , S_2 , S_3 в фермах, представленных на чертеже 204.

101. Построить линии влияния для усилий в стержнях полураскосной фермы (черт. 205).

Предположим, что груз единица передает давления на верхние узлы нашей фермы. При определении усилий в стержнях поясов приходится проводить сечение $m_1 n_1$ (см. § 14

зад. 34). Применяя способ Риттера и рассматривая левую отсеченную часть фермы, заключаем, что линии влияния для усилия S разрезанных элементов верхнего и нижнего пояса получается из линии влияния для момента в точке R делением ординат последней на высоту фермы h . Так как точка R лежит на одной вертикали с узлом, где передается давление на ферму, то линия влияния получает треугольную форму $a_1 b_1 r_1$ (фиг. б). Для элемента верхнего пояса ординаты линии влияния отрицательны и для нижнего положительны. При построении линий влияния усилий S_1 и S_2 воспользуемся тем, что

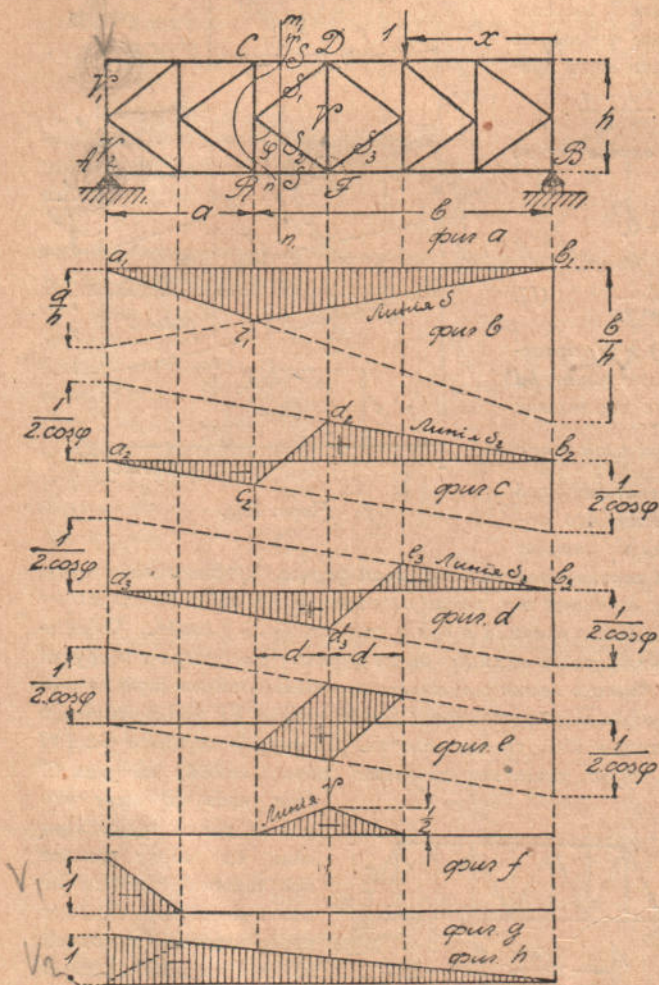
$$S_1 = -S_2.$$

Проводя сечение $m_1 n_1$ и проектируя все силы, приложенные к левой отсеченной части, на вертикальную ось, получаем, при расположении груза на правой половине фермы, такое уравнение:

$$1 \cdot \frac{x}{l} - 2 S_2 \cos \varphi = 0,$$

откуда:

$$S_2 = -S_1 = 1 \cdot \frac{x}{l} \cdot \frac{1}{2 \cos \varphi}$$



Черт. 205.

Соответственно этому проведен прямолинейный участок $b_2 d_2$ линии влияния, относящийся к правой половине фермы. При расположении груза на левой половине мы получаем такое уравнение равновесия

$$1 \cdot \frac{l-x}{l} + 2 S_2 \cos \varphi = 0$$

откуда

$$S_2 = -1 \cdot \frac{l-x}{l} \cdot \frac{1}{2 \cos \varphi}$$

Соответственно этому построен прямолинейный участок a_2c_2 . Соединяющая линия c_2d_2 (фиг. с) соответствует перерезанной панели CD . При передаче нагрузки на нижние узлы очертание построенной линии влияния не получило бы никаких изменений.

Построим теперь линию влияния для усилия V в средней стойке DF . В этом случае выгодно вместо способа Риттера воспользоваться ур-ием равновесия нижнего узла F . Вырезывая этот узел и проектируя все сходящиеся в нем усилия на вертикальную ось, получим такое ур-ие равновесия:

$$V + (S_2 + S_3) \cos \varphi = 0,$$

откуда

$$V = -(S_2 + S_3) \cos \varphi.$$

Мы можем получить ординаты искомой линии влияния суммированием ординат для S_2 и S_3 и умножением этой суммы на $\cos \varphi$. На фигуре d представлена линия влияния для S_3 и на фигуре e — результат суммирования ординат линий влияния для S_2 и S_3 . В результате суммирования мы находим, что средняя наибольшая ордината площади влияния (фиг. е) равна $\frac{1}{2 \cos \varphi}$, далее ординаты убывают в обе стороны по линейному закону и обращаются в нуль на расстоянии, равном длине одной панели. Если эти ординаты умножить на $\cos \varphi$ и переменить их знак, то получим линию влияния для V , представленную на фигуре f .

Наконец, на фигурах g и h представлены линии влияния для усилий V_1 и V_2 в верхней и нижней половине левой опорной стойки. Линии построены в предположении передачи нагрузки на верхние узлы фермы. При езде по низу $V_1 = 0$, а для V_2 линию влияния нужно изменить, как то показано на фигуре h пунктирной линией.

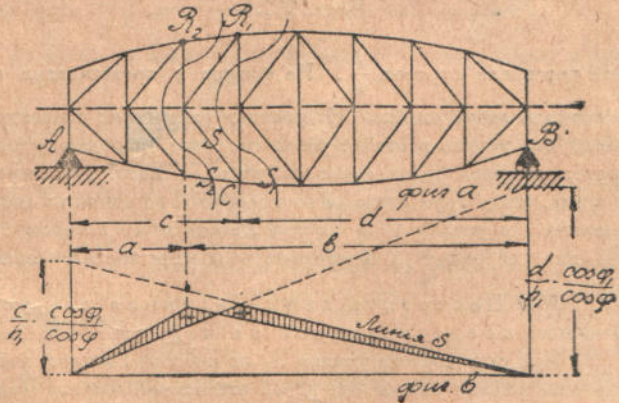
102. Построить линии влияния для стоек и раскосов полураскосной фермы с непараллельными поясами (черт. 206).

Усилие S в раскосе проще всего найдется из условий равновесия узла C . Обозначая через φ , φ_1 и φ_2 углы наклона усилий S , S_1 и S_2 к горизонтальной оси, получаем такое ур-ие равновесия:

$$S_1 \cos \varphi_1 - S_2 \cos \varphi_2 - S \cos \varphi = 0,$$

откуда

$$S = \frac{1}{\cos \varphi} (S_1 \cos \varphi_1 - S_2 \cos \varphi_2).$$



Черт. 206.

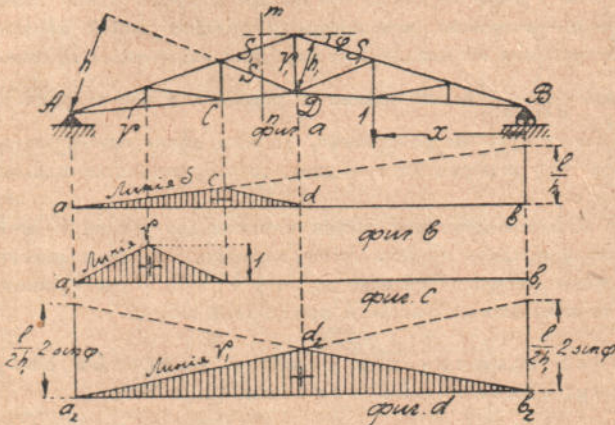
Линии влияния для S_1 и S_2 могут быть построены так, как это было рассказано

раньше. Каждая из этих линий представляет собой треугольник. Следовательно, линия влияния для S получится, как разность ординат двух треугольников (фиг. б). Подобным же образом может быть получена и линия влияния для усилия в любой стойке. Проще эти усилия можно найти, если представить себе полураскосную ферму разделенной пополам, как то указано на чертеже пунктиром. Таким образом, мы получаем

две раскосных системы половинной высоты. Разделяя нагрузку поровну между верхней и нижней фермами, мы легко убедимся, что усилие в каком-либо элементе нижнего пояса верхней фермы равно по величине и противоположно по знаку усилию в соответствующем элементе верхнего пояса нижней фермы. При сложении ферм в одну полураскосную ферму усилия по общему, указанному на чертеже пунктиром, поясу обращаются в нуль. Поэтому линии влияния для раскосов и поясов полураскосной фермы будут такие же, как и для соответствующих элементов простых раскосных ферм половинной высоты.

103. Построить линии влияния для усилий в стержнях стропильной фермы английской системы (черт. 207).

Предположим, что подвижная нагрузка передается нижним узлам фермы. Линии влияния для усилий в поясах построятся так же, как это делалось раньше. При определении усилия в раскосе S



Черт. 207.

разрезаем ферму сечением mn и пишем условие равновесия для левой отсеченной части. Составляя момент всех приложенных к левой отсеченной части сил относительно точки A , заключаем, что при расположении груза единица на правой половине фермы $S = 0$. При расположении груза на левой половине

$$S = - \frac{1 \cdot (l - x)}{h}.$$

Соответственно этому проведена прямая ac (фиг. b) отсекающая на правой опор-

ной вертикали отрезок $\frac{l}{h}$. На фигуре c представлена линия влияния для усилия V в крайней левой стойке. Из условия равновесия соответствующего нижнего узла заключаем, что усилие в стойке равно нагрузке, передающейся на этот узел. Очевидно, нагрузка на узел будет отличной от нуля лишь при передаче нагрузки нижним узлам и тогда, когда груз единица расположится на одной из смежных с узлом панелей. Линии влияния для усилия V_1 в средней стойке легко построится (фиг. d), если имеются линии влияния для усилий S_1 в средних элементах верхнего пояса.

104. Построить линию влияния для усилий S_1 и S_2 балочной фермы, представленной на чертеже 208.

При определении усилия S_1 по способу Риттера, мы рассекаем ферму сечением mn и рассматриваем равновесие левой отсеченной части. При расположении груза единица на правой половине фермы левая половина будет находиться под действием реакции A и усилий в трех перерезанных стержнях. Составляя момент всех приложенных к левой части фермы сил относительно точки Риттера R_1 , получаем такое уравнение равновесия:

$$1 \cdot \frac{x}{l} \cdot c - S_1 h_1 = 0,$$

откуда

$$S_1 = 1 \cdot \frac{x}{l} \cdot \frac{c}{h_1} \tag{a}.$$

При расположении груза единицы на левой половине фермы, уравнение равновесия правой половины напишется так:

$$S_1 h_1 - 1 \cdot \frac{l-x}{l} \cdot d = 0,$$

откуда

$$S_1 = 1 \cdot \frac{l-x}{l} \cdot \frac{d}{h_1} \quad (b).$$

Соответственно формулам (a) и (b) построены прямые линии bd и ac (фиг. b), отсекающие на опорных вертикалях отрезки, представляющие в выбранном масштабе величины $\frac{c}{h_1}$ и $\frac{d}{h_1}$. Полученные таким образом точки c и d соединены прямой cd , соответствующей перерезанной панели CD .

При построении линии влияния для усилия S_2 в стойке придется пользоваться сечением $m_1 n_1$ и прежней точкой Риттера R . Соответствующие построения выполнены на фигуре с. Линия $c_1 d_1$ соответствует панели, перерезанной сечением $m_1 n_1$. В отличие от тех случаев, когда точка Риттера получалась вне пролета, здесь все ординаты площадей влияния для S_1 и S_2 имеют один и тот же знак. Для получения наибольших значений усилий придется загружать весь пролет фермы.

105. Построить линии влияния для усилий S_1 , S_2 и S_3 в консоли, представленной на чертеже 209.

Проводя сечение mn и составляя момент всех приложенных к правой части фермы сил относительно R_1 (фиг. a), находим:

$$S_1 = \frac{1(a-x)}{h_1}.$$

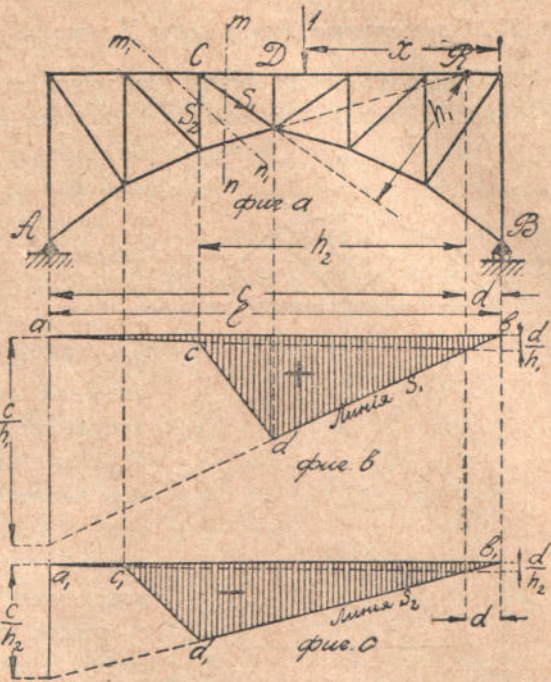
Соответственно этому на фигуре b построена линия cb_1 . При расположении груза в левой части фермы $S_1 = 0$.

При вычислении S_2 составляем момент всех приложенных к правой части сил относительно R_2 . Тогда найдем:

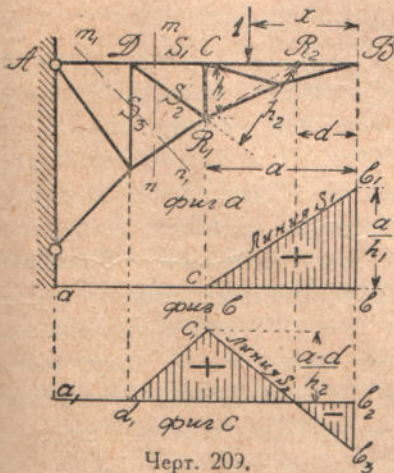
$$S_2 = 1 \cdot \frac{x-d}{h_2}.$$

Соответствующая линия влияния построена на фиг. с.

При построении линии влияния для усилия в стойке S_3 нужно будет произвести разрез фермы сечением $m_1 n_1$.



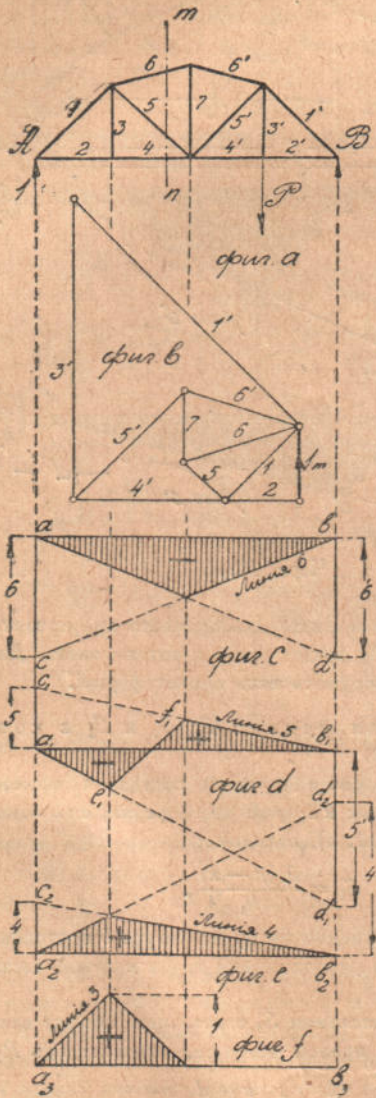
Черт. 208.



Черт. 209.

§ 31. Применение диаграммы Кремоны к построению линий влияния.

При построении линий влияния для стержней простейших ферм мы с большой выгодой можем пользоваться диаграммой. В самом деле, при определении усилий в стержнях нам каждый раз приходилось разрезать ферму и определять усилия в перерезанных стержнях из условия равновесия одной половины фермы. Мы брали обыкновенно ту половину, на которую не действует подвижной груз единица. Единственной внешней силой для этой половины является соответствующая опорная реакция, и усилия во всех стержнях рассматриваемой части фермы будут пропорциональны этой реакции. Если мы положим реакцию равной единице и найдем при помощи диаграммы Кремоны усилия во всех стержнях при действии этой реакции, то этими результатами можно воспользоваться для определения усилий в стержнях рассматриваемой части фермы при любом расположении груза единица на другой половине фермы. Повторяя построение диаграммы в предположении равенства единице второй реакции, мы при помощи построенных двух диаграмм сможем легко построить линии влияния для усилий во всех стержнях системы.

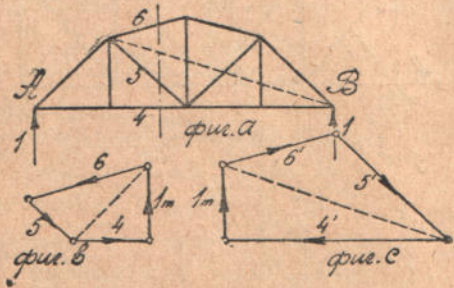


Черт. 210.

Поясним это на простом примере (черт. 210). Сначала закрепим нашу ферму в правом конце при помощи силы P и реакции B (фиг. a) и вместо левой реакции A приложим направленную снизу вверх силу, равную единице. Для этой нагрузки строим диаграмму Кремоны (фиг. b). Второй диаграммы, соответствующей случаю $B=1$, строить не нужно,

так как при симметричной ферме соответствующие усилия могут быть получены из построенной уже диаграммы. Если например, нужно для случая $B=1$ найти усилие в 5, то для этого из диаграммы следует взять только усилие $5'$ для симметрично относительно середины распо-

ложенного стержня. Построим теперь, при помощи диаграммы, линию влияния для усилий в стержнях 6, 5, и 4, перерезанных сечением mn (фиг. *a*). Пока груз единица располагается на правой половине фермы в расстоянии x от правой опоры B , на левую половину будет действовать лишь реакция A равная $\frac{x}{l}$. Мы получим нужные нам усилия в стержнях 6, 5 и 4, если диаграммные усилия (фиг. *b*) умножим на $\frac{x}{l}$. Это выполнено на фигурах *c*, *d* и *e*, где на левых опорных вертикалях отложены усилия 6, 5 и 4 и проведены линии bc , b_1c_1 и b_2c_2 . Пока груз единица находится на правой половине фермы, измеренные под грузом ординаты будут давать соответствующие усилия. Проведенные линии представляют, следовательно, участки линий влияния для правой половины фермы. Чтобы получить части линий влияния, соответствующие левой половине фермы, нужно представить себе второй случай загрузки ($B=1$) и отложить на правой опорной вертикали соответствующие усилия $6'$, $5'$ и $4'$. Положительные усилия мы откладываем вверх и отрицательные вниз. После этого могут быть проведены линии ad , a_1d_1 и a_2d_2 . При расположении груза единицы в левой половине фермы, измеренные под ним ординаты только что проведенных линий дадут, очевидно, соответствующие усилия в стержнях. Проводя теперь на фигуре *d* линию e_1f_1 , соответствующую перерезанной панели, мы заканчиваем построение искомым линиям влияния.



Черт. 211.

Относительно линий влияния для стоек 3 и 3' заметим, что усилия в них могут быть получены из условий равновесия соответствующих нижних узлов фермы. Усилия эти будут равны давлениям, передаваемым от груза единицы на эти узлы. Отличными от нуля эти давления будут лишь тогда, когда при езде по низу груз единицы располагается в одной из смежных с рассматриваемым узлом панели. На основании этих соображений на фиг. *f* построена линия влияния для стойки 3. Применение диаграммы Кремоны к построению линий влияния в более сложных случаях будет показано ниже (§ 35).

Заметим, что усилия в стержнях 6, 5 и 4, которые мы откладывали на опорных вертикалях, можно получить не из диаграммы Кремоны, а каким-либо другим графическим приемом, например, методом Кульмана или Циммермана. Чтобы построить линии влияния для усилий 6, 5 и 4 по Кульману (черт. 211), нужно определить эти усилия в пред-

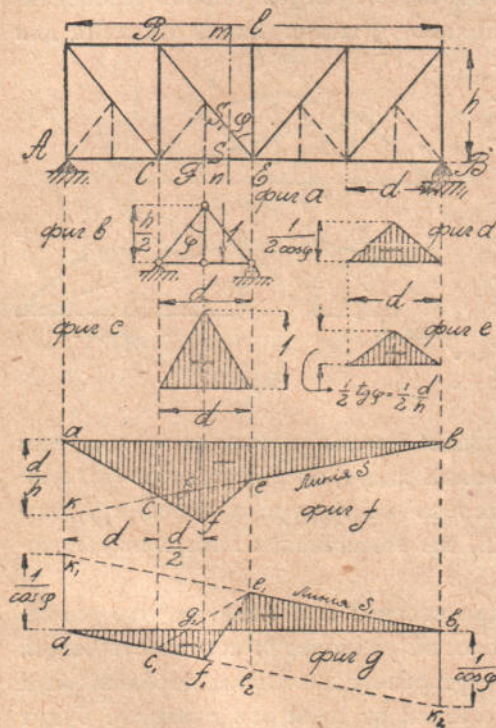
положении $A=1$ и $B=1$, что и выполнено путем построения многоугольников сил (фиг. *b* и *c*), соответствующих разложению силы $A=1$ и силы $B=1$ на три направления 6, 5 и 4. Полученные таким образом усилия и дадут нам те отрезки, которые должны быть отложены на опорных вертикалях при построении линий влияния.

§ 32. Линии влияния для сложных ферм.

При построении линий влияния для элементов сложных ферм воспользуемся тем, что было сказано

относительно расчета этих ферм (§ 16). Сначала заменим вспомогательные фермочки стержнями и построим линии влияния для полученной таким путем основной системы. На усилия основной системы должны быть наложены те усилия, которые возникают в элементах вспомогательных фермочек под действием приходящейся на них нагрузки.

Поясним это на простом примере (черт. 212). Представленная на чертеже сплошными линиями основная система является простой раскосной фермой с параллельными поясами. Элементы нижнего пояса этой системы подразделены пополам и заменены вспомогательными шпренгельными фермочками, намеченными на чертеже пунктиром. Если бы наша ферма подвергалась действию нагрузки, приложенной к верхним узлам,



Черт. 212.

то в намеченных пунктиром дополнительных стойках и раскосах усилия равнялись бы нулю, и нам пришлось бы иметь дело лишь с стержнями основной системы, для которых линии влияния могут быть построены без всяких затруднений. При действии нагрузки на нижние узлы придется принять во внимание влияние дополнительных стержней. На основании высказанного выше общего соображения относительно расчета сложных ферм заключаем, что дополнительные стержни окажут влияние лишь на усилия в нижнем поясе и нижних частях раскосов.

В этих элементах придется к усилиям, получаемым для основной фермы, прибавлять усилия, возникающие в шпренгельной системе (фиг. *b*) при движении по ней груза единица. Соответствующие линии влияния построены на фигурах *c*, *d* и *e*. На основании этого построена линия влияния для усилия *S* в элементе нижнего пояса, представленная на фигуре *f*. К ординатам линии влияния *acb* основной системы прибавлены ординаты треугольника *cfe*, равные ординатам линии влияния для горизонтальных стержней вспомогательной фермочки (фиг. *e*). Легко видеть, что при этом линия *cf* будет служить продолжением линии *ac*. В самом деле, из фиг. *e* заключаем, что

$$gf = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{h}.$$

Следовательно,

$$gf : ak = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{h} : \frac{d}{h} = \frac{d}{2} : d = \frac{1}{2}.$$

Треугольники *cfg* и *akc* (фиг. *f*) подобны, и значит линия *acf* — прямая.

Линию влияния, представленную на фигуре *f*, мы могли бы получить и иным путем, пользуясь нашими прежними приемами. Производя разрез фермы сечением *mn*, мы сейчас же находим, что линией *bk* можно пользоваться, пока груз единица располагается на протяжении *BE* правой части фермы. Как только груз переходит влево от узла *E*, часть давления передается уже на левую отсеченную половину фермы, и прямой *kb*, вообще говоря, пользоваться нельзя. Это заключение одинаково справедливо и для простой и для сложной фермы, так как узел *E* является для них общим узлом. В рассматриваемом случае точка Риттера и узел *C* лежат на одной вертикали, и потому линия *ce*, соответствующая разрезу, служит продолжением линии *be*.

Обратимся теперь к части фермы, лежащей слева от сечения *mn*. Для этой части фермы мы пользуемся прямой линией *af*. Причем, пока речь идет о расчете основной фермы, мы должны пользоваться лишь отрезком *ac* этой прямой, потому что с переходом груза вправо от точки *C* часть его уже будет передаваться правой половине фермы.

При наличности же дополнительных стоек и раскосов давление от движущегося груза единица начнет передаваться на правую половину фермы лишь тогда, когда груз расположится справа от узла *F*, т.-е. войдет на перерезанную панель *FE*. Таким образом, при сложной ферме мы можем пользоваться всей длиной *af*, как линией влияния.

Чтобы закончить построение, нам остается только по общему правилу провести соединительную прямую *ef*, соответствующую перерезанной панели *FE*.

Пользуясь подобными же соображениями, мы можем легко построить линию влияния для усилия S_1 в нижней части раскоса RE (фиг. a). Мы строим сначала линию влияния $a_1c_1e_1b_1$ (фиг. g) для соответствующего раскоса основной фермы. Участок b_1e_1 построенной линии влияния, соответствующий правой половине фермы, остается при переходе к сложной системе без изменения. Для левой половины придется ввести изменение, заключающееся в том, что, вместо участка a_1c_1 , мы будем пользоваться участком a_1f_1 прямой a_1k_2 , так как передача нагрузки на правую половину фермы начнется лишь тогда, когда груз единица перейдет вправо от узла F . Таким образом, вместо соединительной прямой c_1e_1 , соответствующей панели CE основной фермы, придется пользоваться прямой f_1e_1 , соответствующей перерезанной панели FE сложной фермы. Такое изменение равносильно наложению на ординаты линии $a_1c_1e_1b_1$ отрицательных ординат треугольника $c_1f_1e_1$. Легко показать, что эти последние равны ординатам представленной на фиг. d линии влияния для подкосов шпренгельной фермочки. В самом деле, из подобия $\triangle c_1gf_1$ и $\triangle c_1e_1e_2$ заключаем:

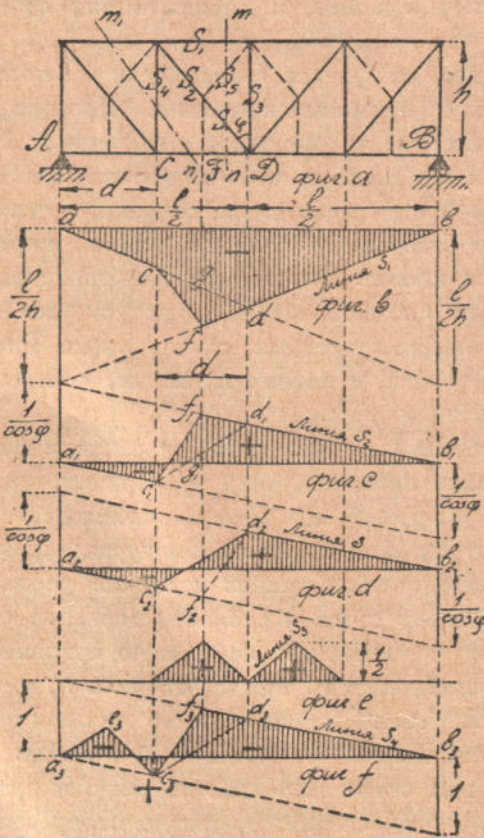
$$g_1f_1 = \frac{1}{2} e_1e_2 = \frac{1}{2 \cos \varphi},$$

что соответствует средней ординате линии влияния, представленной на фигуре d .

Что касается линии влияния для элементов верхнего пояса фермы, стоек и верхних частей раскосов, то они не изменятся от введения дополнительных стоек и раскосов. Наконец, линии влияния для дополнительных стоек и полураскосов представлены на фигурах c и d .

Задачи: 106. Построить линии влияния для усилий S_1, S_2, S_3 и S_4 в системе, представленной на чертеже 213.

Дополнительные стойки и полураскосы, показанные на чертеже (фиг. c) пунктиром, будут работать лишь в случае езды по низу. В этом предположении на фиг. b построена линия влияния для усилия S_1 в верхнем поясе. Линия влияния



Черт. 213.

отличается от соответствующей линии основной системы abd прибавкой ординат треугольника cdf , равных ординатам представленной на фиг. e (черт. 212) линии влияния для усилий в горизонтальных стержнях вспомогательной шпренгельной фермочки. На фигуре c (черт. 213) представлена линия влияния $a_1c_1f_1b_1$ для усилия S_2 в верхней части раскоса. Ординаты треугольника $c_1f_1d_1$ равны ординатам линии влияния, представленной на фигуре d предыдущего чертежа. Линия влияния для усилия (фиг. a) в нижней части раскоса остается такой же, как и в случае основной системы, потому что эта часть не входит в состав вспомогательной фермочки сложной системы. К тому же заключению мы приходим путем непосредственного рассмотрения. Разрезывая ферму сечением mn и обозначая через Q перерезывающую силу в разрезанной панели FD , мы из условия равновесия одной половины фермы заключаем, что

$$S \cos \varphi - S_3 \cos \varphi - Q = 0,$$

откуда

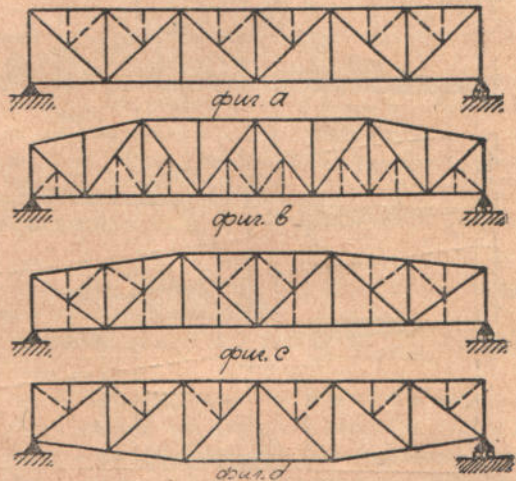
$$S = S_3 + \frac{Q}{\cos \varphi}.$$

Линия влияния для величины $\frac{Q}{\cos \varphi}$ представлена на фигуре d линией $a_2c_2d_2b_2$.

К ординатам этой линии прибавлены ординаты треугольника $c_2d_2f_2$, равные ординаты линии влияния для S_3 , представленной на фигуре d предыдущего чертежа. Таким образом мы приходим к линии $a_2c_2d_2b_2$, совпадающей с линией влияния для раскоса основной системы.

Что касается стоек, то хотя они и не входят в состав дополнительных фермочек, но некоторые изменения соответствующих линий влияния произойдут потому, что при помощи дополнительных стоек и полураскосов подвижная нагрузка будет отчасти передаваться на верхние узлы фермы. Возьмем, например, среднюю стойку. В основной ферме при езде по низу усилие в этой стойке всегда равно нулю. Когда введены дополнительные стойки и полураскосы, усилие S_3 , как легко видеть из условия равновесия верхнего узла стойки, будет равно опорным давлениям вспомогательных фермочек или, что все равно, сумме вертикальных проекций усилий в полураскосах, сходящихся в вершине стойки. На основании этих соображений построена на фигуре e линия влияния для усилия S_3 .

Наконец, на фигуре f построена линия влияния для усилия в стойке S_4 . Для этого взята линия влияния $a_3c_3d_3b_3$ для усилия в стойке основной системы, и к ее ординатам прибавлены ординаты треугольников $a_3e_3c_3$ и $c_3f_3d_3$, равные ординатам треугольника фигуры e .



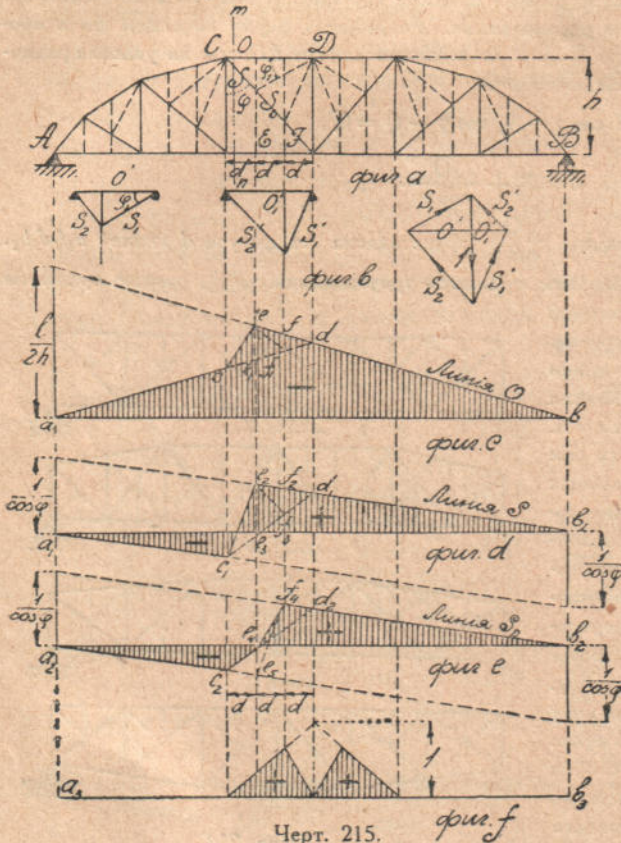
Черт. 214.

107. Построить линии влияния для усилий в стержнях ферм, представленных на чертеже 214.

107 bis. Построить линии влияния для усилий в стержнях сложной фермы, применяемой в мостах больших пролетов (черт. 215).

При построении линий влияния мы будем суммировать усилия основной фермы с усилиями вспомогательных, несимметричных шпренгельных фермочек, представленных на фигуре *b*. На той же фигуре графически построены усилия S_1, S_2, S'_1, S'_2, O' и O'_1 в наклонных и горизонтальных стержнях фермочек при действии груза-единица в нижнем их узле. Из чертежа легко находим для нужных нам усилий такие значения:

$$S_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sin \varphi_1}; \quad S_2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\cos \varphi}; \quad S'_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\cos \varphi}; \quad O' = \frac{2d}{h}; \quad O'_1 = \frac{d}{h}.$$



Черт. 215.

линия ed является продолжением bd , то из чертежа (фиг. *c*) сейчас же заключаем, что

$$f_{11} = \frac{1}{2} ee_1 = \frac{d}{h}.$$

Это равняется, как мы видели, наибольшей ординате линии влияния для O'_1 .

Линию влияния для O можно было бы получить, применяя обычный прием рассуждения. Мы разрезаем ферму сечением mn и рассматриваем равновесие левой половины. Пока груз непосредственно на эту половину не передается, т.е., пока он располагается правее узла E , мы пользуемся линией be , которая строится так же, как и для основной фермы. Точно так же для левой половины пользуемся прямой ac . Соединительная прямая ce соответствует разрезанной панели сложной фермы. Таким образом вся разница в длине разрезанной панели. Вставкой дополнительных стоек мы разделили

Пользуясь этими усилиями, мы сразу могли бы построить линии влияния для усилий в дополнительных раскосах и для дополнительных усилий в элементах верхнего пояса. Легко видеть, что все эти линии влияния представляются равнобедренными треугольниками, у которых основание будет равно длине $2d$ двух панелей, а высота — соответствующему усилию из многоугольника сил фигуры *b*. Выполнив эту предварительную работу, мы, по общим правилам для сложных ферм, построим линию влияния для усилия в любом элементе. На фигуре *c* построена линия влияния O в левом элементе верхнего пояса CD (фиг. *a*). Усилие это составляется из трех частей: из усилия в элементе CD основной фермы, которому соответствует линия adb , и из усилий O' и O'_1 вспомогательных фермочек, которым соответствуют ординаты треугольников cef_1 и ef_1d . Если

большую панель основной фермы на три части и, соответственно этому, вместо соединительной прямой cd получаем прямую ce .

Подобным же образом на фигуре d построена линия влияния для усилия S верхней части раскоса, перерезанной сечением mn . Пока груз не передается на левую часть фермы, пока он располагается правее узла E , мы пользуемся прямой b_1e_2 , которая строится так же, как для раскоса основной фермы. Точно так же для левой половины пользуемся линией a_1c_1 и, наконец, на протяжении перерезанной панели пользуемся соединительной прямой c_1e_2 . Построенная таким образом линия влияния $a_1c_1e_2b_1$ отличается от линии $a_1c_1d_1b_1$ для раскоса основной фермы прибавкой ординат треугольников $c_1e_2f_3$ и $e_2f_3d_1$. Наибольшие ординаты этих треугольников, как видно непосредственно из чертежа, соответственно равняются

$$e_2e_3 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\cos \varphi} \quad \text{и} \quad f_2f_3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\cos \varphi},$$

т.е. совпадают с найденными выше (фиг. b) усилиями S_2 и S'_2 для подкосов вспомогательных фермочек. Опять мы приходим к заключению, что ординаты линий влияния сложных ферм могут быть получены сложением ординат линий для основной фермы и для вспомогательных фермочек. На фигуре e представлена линия влияния $a_2c_2e_4f_4b_2$ для усилия S_0 средней части рассматриваемого раскоса. К ординатам линии влияния $a_2c_2d_2b_2$ для основной фермы прибавлены ординаты треугольника $e_4f_4d_2$. Наибольшая ордината его равна, как видно из чертежа, величине $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\cos \varphi}$, т.е. совпадает с величиной S'_2 для усилия в подкосе вспомогательной фермочки (фиг. b). Здесь линия влияния получена путем надлежащего суммирования ординат. При построении этой же линии на основании непосредственного рассмотрения условий равновесия, мы должны были бы произвести вертикальный разрез фермы через панель EF . Если Q перерезывающая сила в этой панели, то искомое усилие S_0 найдется из уравнения

$$S_0 \cos \varphi - Q - S_1 \sin \varphi_1 = 0,$$

откуда

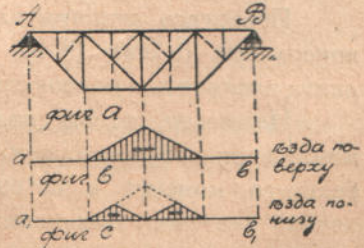
$$S_0 = \frac{Q}{\cos \varphi} + S_1 \frac{\sin \varphi_1}{\cos \varphi}.$$

Первое слагаемое правой части равенства дается нам линией $a_2e_5f_4b_2$, а второе слагаемое представляется ординатами фигуры $c_2e_4f_4e_5$.

Что касается стоек сложной фермы, то они, хотя и не входят в состав дополнительных фермочек, но усилия для них будут иными, чем для стоек основной системы, так как благодаря дополнительным стойкам, часть нагрузки передается верхним узлам. Возьмем, например, среднюю стойку нашей фермы. При отсутствии дополнительных раскосов усилие в этой стойке, как видно из условий равновесия верхнего узла D , будет равно нулю. В сложной ферме это усилие будет равняться давлению, передаваемому в узел D вспомогательными шпренгельными фермочками, и соответствующая линия влияния начертится так, как это показано на фигуре f .

108. Построить линии влияния для усилий в средней стойке (черт. 216):
 1) при условии езды по верху и
 2) при условии езды по низу.

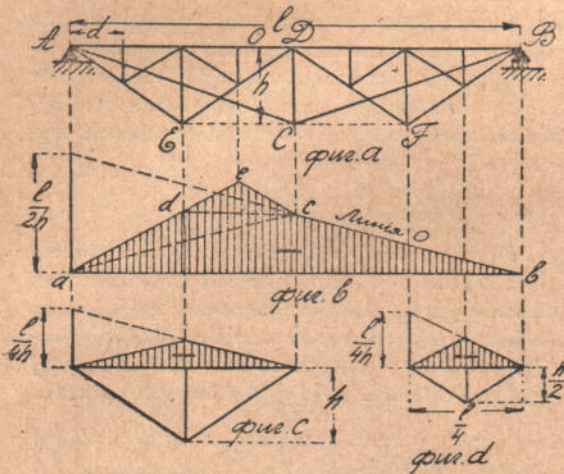
Располагая груз единица поочередно в каждом из узлов двух средних больших панелей, легко получаем ординаты искомых линий влияния, представленных на фигурах b и c .



Черт. 216.

109. Построить линии влияния для усилий в элементах фермы Фигка (черт. 217).

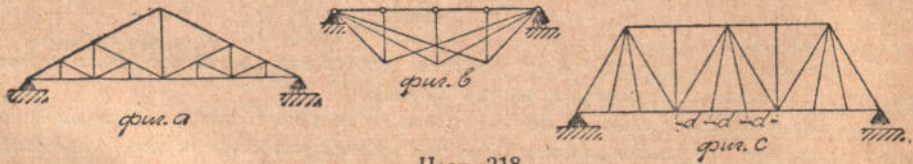
В основной ферме $ADBC$ горизонтальные стержни AD и DB заменены вспомогательными фермочками ADE и DBF . При построении линий влияния придется суммировать усилия основной фермы с усилиями вспомогательных фермочек.



Черт. 217.

На фигуре b , таким образом построена линия влияния для усилия O в верхнем поясе. Ординаты треугольника acb , представляющего линию влияния для верхнего пояса основной фермы, сложены с ординатами треугольника adc , представляющего линию влияния для усилия пояса в ферме, представленной на фигуре c . К этому прибавлены ординаты треугольника dec , соответствующего линии влияния в фермочке, представленной на фигуре d . Подобным же образом могут быть построены линии влияния и для других элементов фермы.

110. Построить линии влияния для усилий в элементах фермы, представленных на чертеже 218.



Черт. 218.

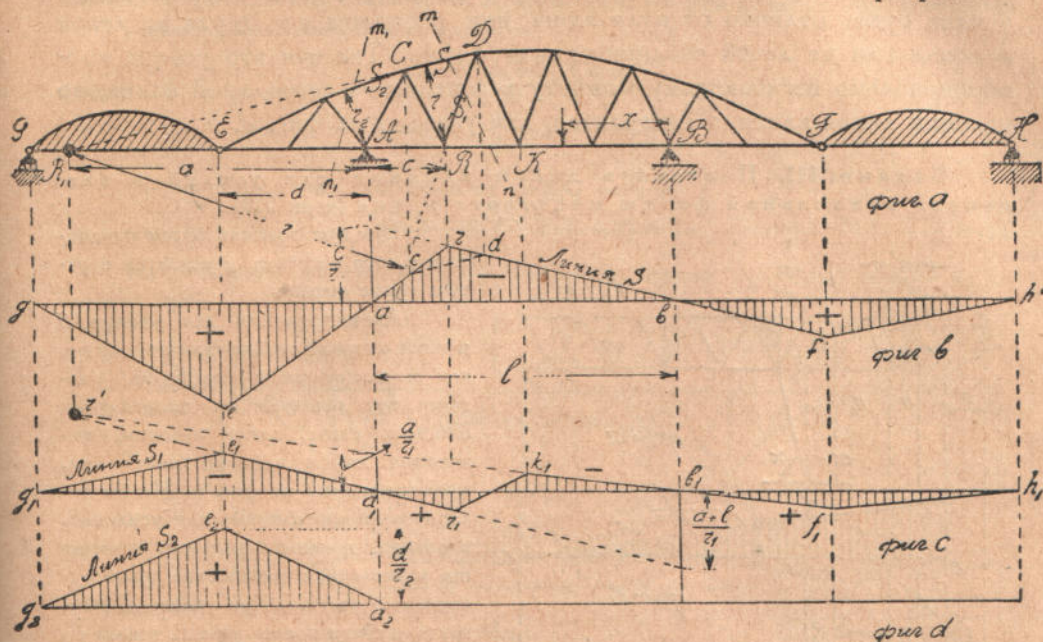
§ 33. Линии влияния для усилий в элементах консольно-балочных систем.

Пользуясь линиями влияния для изгибающих моментов в сплошных консольных балках (§ 25, задачи 82, 84), мы легко сможем построить линии влияния для поясов сквозной консольно-балочной системы (черт. 219).

Например, чтобы получить линию влияния для усилия S в элементе верхнего пояса, нужно воспользоваться линией влияния для изгибающего момента в сечении, проходящем через узел R консольно-балочной системы. Делением соответствующих ординат на длину r , получаем нужную нам линию влияния $gearbfh$. Если бы нагрузка передавалась не нижним, а верхним узлам фермы, то соответственно пере-

резанной панели CD нужно было бы провести указанную на фигуре b пунктиром линию cd .

Без особых затруднений может быть построена также линия влияния для усилия в любом раскосе. Возьмем, например, раскос S_1 в междуопорной части консольной фермы. Произведя сечение mn и рассматривая равновесие левой отсеченной части, мы заключаем, что при распо-



Черт. 219.

ложении груза единица на правой половине фермы, в расстоянии x от опоры B ¹⁾, усилие S_1 определяется такой формулой:

$$S_1 = 1 \cdot \frac{x}{l} \cdot \frac{a}{r_1}.$$

Соответственно этому проведен отрезок $k_1 f_1$ линии влияния (фиг. с).

При переходе груза на левую часть фермы, мы из условий равновесия правой части сейчас же находим:

$$S_1 = 1 \cdot \frac{l-x}{l} \cdot \frac{a+l}{r_1}$$

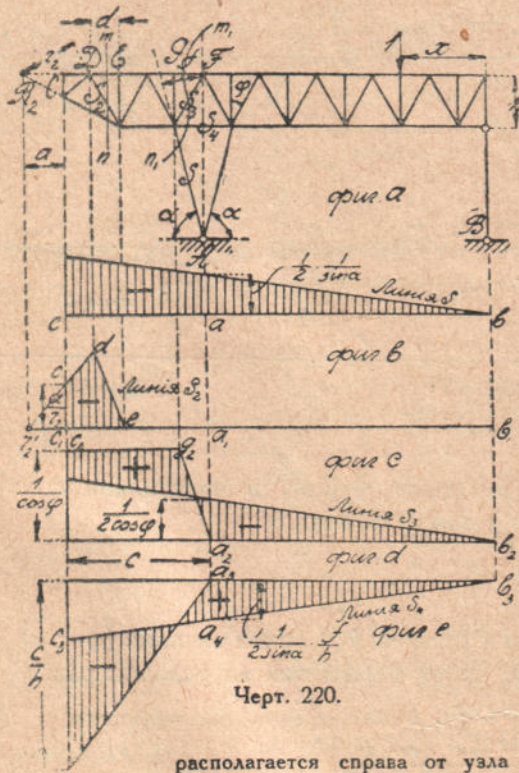
и строим соответствующий отрезок $e_1 r_1$ линии влияния. Нам остается теперь провести соединительную линию $r_1 k_1$, соответствующую перерезанной панели RK .

¹⁾ Если груз расположен слева от опоры B , x — отрицательно. Если он справа от той же опоры, то x — отрицательно.

Чтобы продолжить полученную линию влияния на соединительные балочные фермы GE и FH , нужно только полученные нами вершины e_1 и f_1 крайних ординат соединить с соответствующими опорными точками g_1 и h_1 .

При построении линии влияния для усилия S_2 в элементе верхнего пояса, относящемся к левой консоли фермы, примем во внимание, что усилии будет отлично от нуля лишь при расположении груза на левой консоли или на левой соединительной ферме. Так как это усилие пропорционально изгибающему моменту в сечении A консольной балки, то искомая линия влияния начертится, как указано на фиг. d .

Задачи: 111. Построить линии влияния для усилий в элементах консольной фермы мостового крана (черт. 220).



При построениях будем предполагать, что нагрузка передается верхним узлам фермы.

Линия влияния для усилия S в левой опорной стойке строится так же, как и для опорной реакции A . Разлагая эту реакцию на направления опорных стоек, легко находим, что искомая линия влияния имеет вид, представленный на фиг. b . Чтобы построить линию влияния для усилия S_2 в раскосе консоли, проводим сечение m_1 и исследуем равновесие левой отсеченной части. При расположении груза единица правее узла E , усилие S_2 равно нулю. Когда же груз находится слева от узла S , усилие S_2 пропорционально расстоянию груза до точки Риттера R_2 . Соответственно этому на фигуре c построена прямая cd и проведена соединительная линия de , соответствующая перерезанной панели DE . Построим теперь линию влияния для усилия в раскосе S_3 (фиг. a). Произведем сечение $m_1 n_1$ и рассматривая равновесие левой отсеченной части, заключаем, что пока груз единица

располагается справа от узла F , усилие S_3 находим из ур-ия:

$$S_3 \cos \varphi - S \sin \alpha = 0.$$

Отсюда, принимая во внимание, что

$$S = -1 \cdot \frac{x}{l} \cdot \frac{1}{2 \sin \alpha},$$

находим

$$S_3 = -1 \cdot \frac{1}{2 \cos \varphi} \cdot \frac{x}{l}.$$

Если груз единица расположится слева от узла G , таким же образом найдем:

$$S_3 = \frac{1}{\cos \varphi} - 1 \cdot \frac{x}{l} \cdot \frac{1}{2 \cos \varphi}.$$

Соответствующая линия влияния построена на фигуре d .

Для построения линии влияния для усилия S_4 в стержне нижнего пояса, возьмем прежним сечением $m_1 n_1$. Составляя момент всех сил, действующих на левую отсеченную часть, относительно точки F , заключаем, что, при расположении груза справа от F , искомое усилие найдется из ур-ния:

$$S_4 \cdot h + S \cdot f = 0,$$

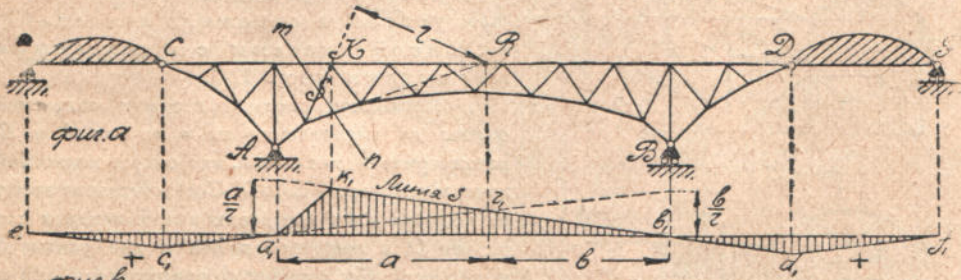
откуда

$$S_4 = -S \cdot \frac{f}{h} = 1 \cdot \frac{x}{l} \cdot \frac{1}{2 \sin \alpha} \cdot \frac{1}{h} \quad (a)$$

При расположении груза слева от узла G , найдем

$$S_4 \cdot h + S \cdot f + 1 \cdot (x - l) = 0 \quad (b).$$

На основании формул (а) и (b) построены отрезки $b_3 c_3$ и $a_3 c_3$ искомой линии влияния (фиг. e).



Черт. 221.

112. Построить линию влияния для усилий в раскосах междуопорной части консольной фермы, представленной на чертеже 221.

Чтобы построить линию влияния для усилия в раскосе S (фиг. a), производим сечение $m_1 n_1$ и пишем ур-ие равновесия одной из частей фермы, составляя момент всех сил относительно точки Риттера R . Пока груз единица находится справа от узла K , усилие найдется из такого ур-ия равновесия для левой отсеченной части:

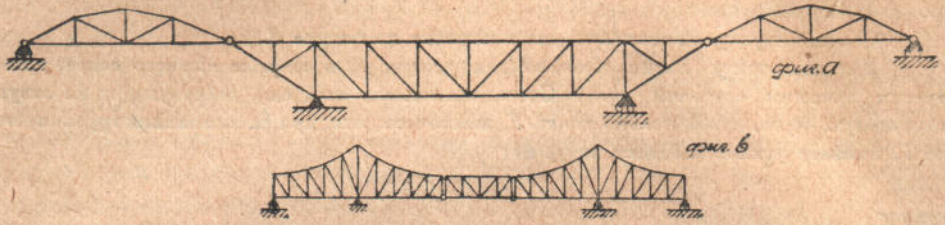
$$S \cdot r + 1 \cdot \frac{x}{l} \cdot a = 0,$$

откуда

$$S = -1 \cdot \frac{x}{l} \cdot \frac{a}{r}.$$

Соответственно этому построен отрезок $k_1 b_1 d_1$ искомой линии влияния. Подобным же образом для случая расположения груза слева от узла A найдем прямую $c_1 a_1$. Наконец, соединительная прямая $a_1 k_1$ соответств. ег перерезанной панели. На протяжении соединительных ферм отрезками линии влияния будут служить линии $e_1 c_1$ и $d_1 f_1$, соединяющие подученные уже точки c_1 и d_1 с опорными точками e_1 и f_1 . Подобным же образом построится линия влияния и для любого другого раскоса междуопорной части фермы.

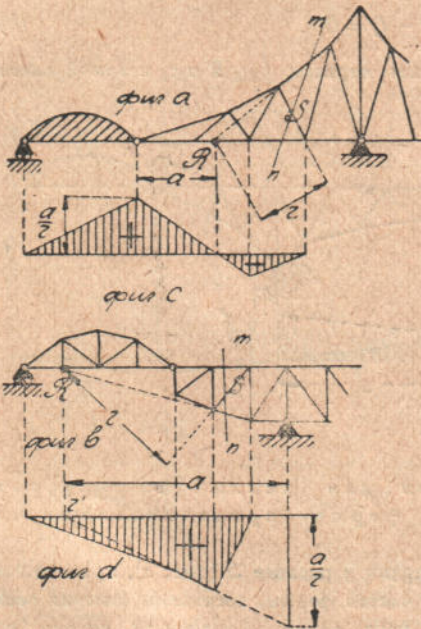
113. Построить линии влияния для усилий в элементах консольно-балочных систем, представленных на чертеже 222.



Черт. 222.

114. Построить линии влияния для усилий в решетке консолей консольно-балочных систем, представленных на чертеже 223.

115. Построить линии влияния для усилий в стержнях консольно-балочной системы с фиктивными шарнирами (черт. 224).



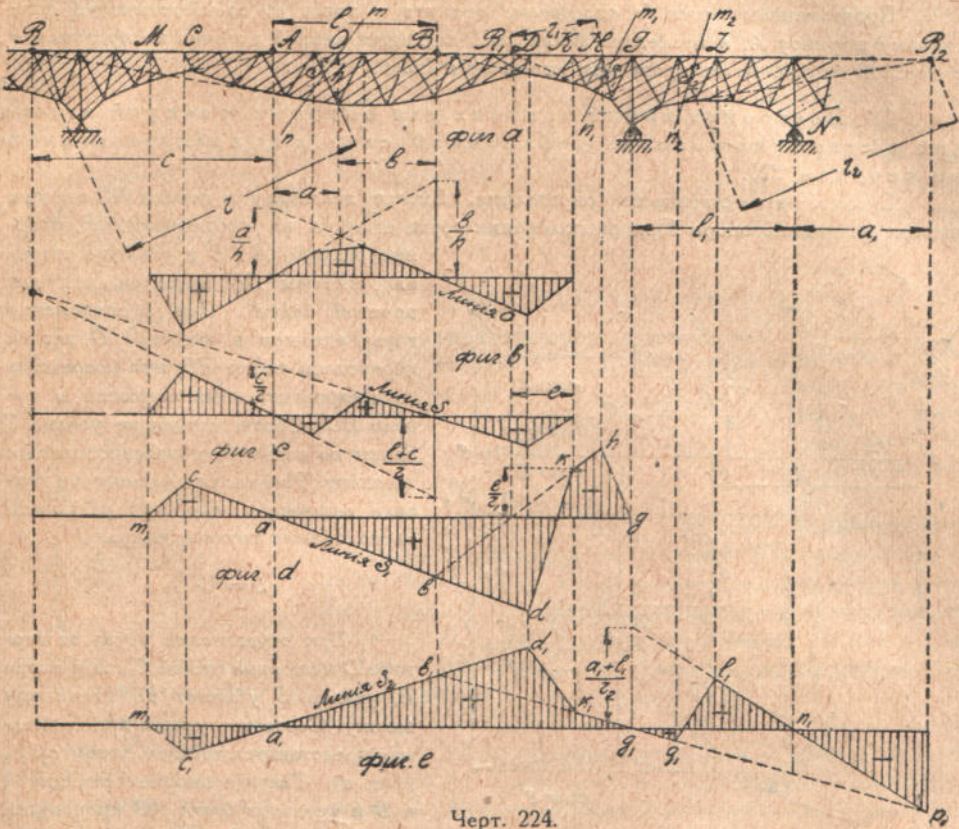
Черт. 223.

Продолжая опорные стержни подвесной фермы до пересечения их в точках A и B , рассматриваем эти точки, как опоры подвесной консольной фермы $CABD$. Соответственно этому на фигурах b и c построены линии влияния для усилия O в элементе пояса и для усилия S в раскосе. На фигуре d представлена линия влияния для усилия S_1 в раскосе консоли. Проведя сечение m_1n_1 и рассматривая равновесие левой отсеченной части консоли, заключаем, что усилие S_1 меняется пропорционально расстоянию груза единица от точки Риттера R_1 . Соответственно этому на фигуре d проведена линия bkh . Из этой линии мы воспользуемся отрезком kh , относящимся к левой части консоли, и из точки h проводим линию hg , соответствующую перерезанной панели. Выясним

теперь вид линии влияния на протяжении подвесной фермы. Когда груз единица стоит на опорной точке A , он совершенно не действует на рассматриваемую консоль, соответствующая ордината линии влияния равна нулю. При расположении груза в точке B , являющейся общей точкой для подвесной фермы и консоли (фиктивный шарнир), мы можем воспользоваться ранее проведенной прямой bkh . Определив таким образом точку b и соединив ее с опорной точкой a , получим прямую $cabd$, служащую линией влияния на протяжении подвесной фермы. Теперь остается провести только прямые mc и kd , соответствующие соединительным балочкам MC и DK .

На фигуре e представлена линия влияния для усилия S_2 в раскосе междуопорной части консольной балки. Часть $k_1q_1l_1p_1$ этой линии построена, как для простой консольной балки. Продолжением линии k_1q_1 до пересечения с вертикалью, идущей через B ,

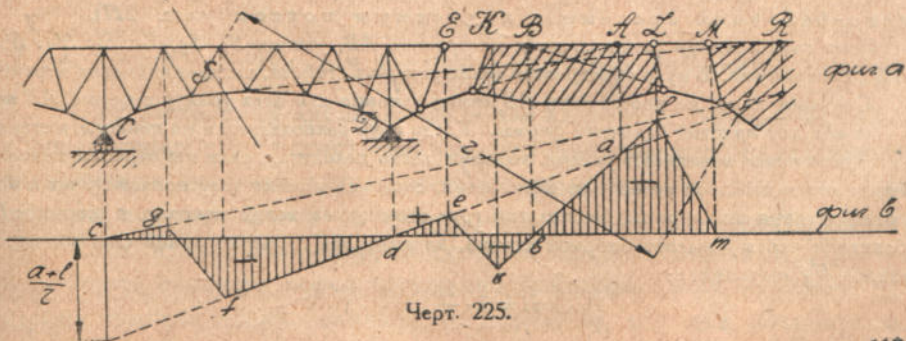
установлена ордината, соответствующая расположению груза единицы в фиктивном шарнире В. Получив таким образом точку b_1 , мы проводим линию $c_1a_1b_1d_1$, которая нам



Черт. 224.

дает ординаты искомой линии влияния на протяжении подвесной фермы. Проведением соединительных линий d_1k_1 и m_1c_1 мы заканчиваем построение искомой линии влияния.

116. Выяснить, как изменится вид только что построенной линии влияния, если фиктивные шарниры подвесной фермы расположены так, как указано на чертеже 225.



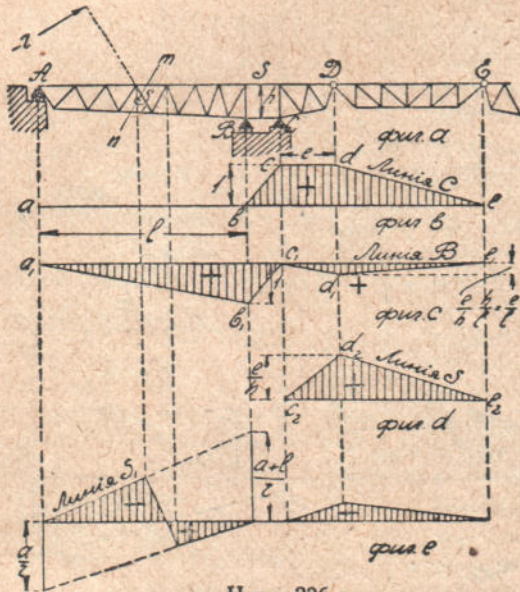
Черт. 225.

Измененная линия влияния представлена на фигуре *b*. Сначала построена, как и прежде, линия *cgfe* для консольной фермы.

Продолжением линии *fe* определена ординта в точке *a*, соответствующей фиктивному шарниру *A*, и проведена линия *kbal*, служащая линией влияния на протяжении подвесной фермы. Далее проведены линии *ek* и *lm*.

117. Построить линии влияния для опорных реакций и усилий в стержнях консольно-балочной системы, представленной на чертеже 226.

Система эта статически определима. Вместо диагонали в панели *BC* введена лишняя подвижная опора. При расположении груза единица на протяжении *AB*, опорные реакции *A* и *B* и усилия в стержнях системы *AB* найдутся, как для простой балки. При расположении груза единица в шарнире *D* усилия передаются ферме *AB* при посредстве двух горизонтальных стержней в панели *BC*. Соответствующие усилия *S* равны по величине и противоположны по знаку. Из условия равновесия консоли заключаем, что при указанном расположении груза единица



При отодвигании груза от шарнира *D* к опорной стойке *C* или к опоре *E*, усилие *S* убывает по линейному закону. Соответствующая линия влияния представится треугольником *с₁d₁e₁* (фиг. *d*). Так как опорные реакции *A* и *B* и усилия в балке *AB* пропорциональны усилию *S*, то все соответствующие линии влияния на протяжении консоли и подвесной фермы представятся треугольниками с вершиной под шарниром *D*. Таким образом на фигуре *c* построена линия влияния для опорной реакции *B*. На фигуре *e* представлена линия влияния для усилия *S₁* в раскосе. На фигуре *b* дана линия влияния для опорной реакции *C*.

$$S = 1 \cdot \frac{e}{h}$$

При отодвигании груза от шарнира *D* к опорной стойке *C* или к опоре *E*, усилие *S* убывает по линейному закону. Соответствующая линия влияния представится треугольником *с₁d₁e₁* (фиг. *d*). Так как опорные реакции *A* и *B* и усилия в балке *AB* пропорциональны усилию *S*, то все соответствующие линии влияния на протяжении консоли и подвесной фермы представятся треугольниками с вершиной под шарниром *D*.

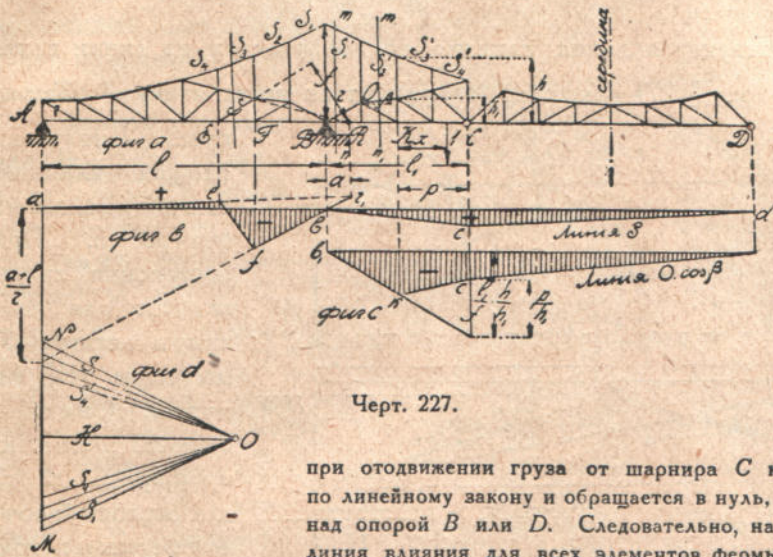
Таким образом на фигуре *c* построена линия влияния для опорной реакции *B*. На фигуре *e* представлена линия влияния для усилия *S₁* в раскосе. На фигуре *b* дана линия влияния для опорной реакции *C*.

118. Построить линии влияния для усилий в стержнях консольно-балочной системы с подвесным поясом (черт. 227).

Пока груз единица располагается на пролете *AB*, усилия *S₁*, *S₂*, *S₃*, *S₄*, *S'₁*, *S'₂*, *S'₃* и *S'₄* равны нулю. В нуль обращаются также усилия в стойках, поддерживающих верхний пояс. Следовательно, на протяжении *AB* линии влияния для всех усилий в ферме *AB* начертятся как для простой балочной фермы. Когда груз располагается на консоли, в стержнях верхнего пояса возникают усилия, которые легко находятся, если мы отрезем консоль сечением *mn* и напишем условие ее равновесия, составив момент всех приложенных к ней сил относительно шарнира *B*. Располагая груз единица на конце консоли, в шарнире *C*, и обозначая через *f* высоту опорной стойки, находим для горизонтальной составляющей *H* усилия *S'₁* выражение:

$$H = 1 \cdot \frac{l_1}{f}$$

Откладывая H и проводя систему лучей, параллельных $S_1, S_2, S_3, S_4, S'_1, S'_2, S'_3$ и S'_4 , находим все усилия в верхнем поясе (фиг. d). На вертикали $M'N$ проведенные лучи отсекут отрезки, равные соответствующим усилиям в стойках, поддерживающих верхний пояс. По этим усилиям легко находятся усилия во всех прочих стержнях фермы AB . Эти усилия дадут ординаты соответствующих линий влияния под шарниром C .



Черт. 227.

Для получения ординат линий влияния в остальных точках участка BCD , достаточно заметить, что усилие H —горизонтальная составляющая усилий верхнего пояса (как легко видеть из условия равновесия консоли) убывает

при отодвижении груза от шарнира C к точке B или D по линейному закону и обращается в нуль, когда груз стоит над опорой B или D . Следовательно, на протяжении BD линия влияния для всех элементов фермы AB имеют треугольное очертание с вершиной под шарниром C . На основании изложенных соображений построена линия влияния для усилия S в раскосе фермы AB .

Имея усилие H , мы легко можем построить также линии влияния для элементов консоли. Например, чтобы получить линию влияния для усилия O в поясе консоли, мы проводим разрез m_1n_1 и составляем момент всех сил, приложенных к отсеченной части консоли, относительно точки K . Обозначая через x расстояние груза единица от узла K , через h высоту стойки, соответствующей узлу K , и через h_1 высоту части стойки между нижним и средним поясом, мы получаем такое уравнение:

$$Hx \cdot h + O \cos \beta \cdot h_1 - 1 \cdot x = 0,$$

откуда

$$O \cos \beta = -Hx \cdot \frac{h}{h_1} + 1 \cdot \frac{x}{h_1}.$$

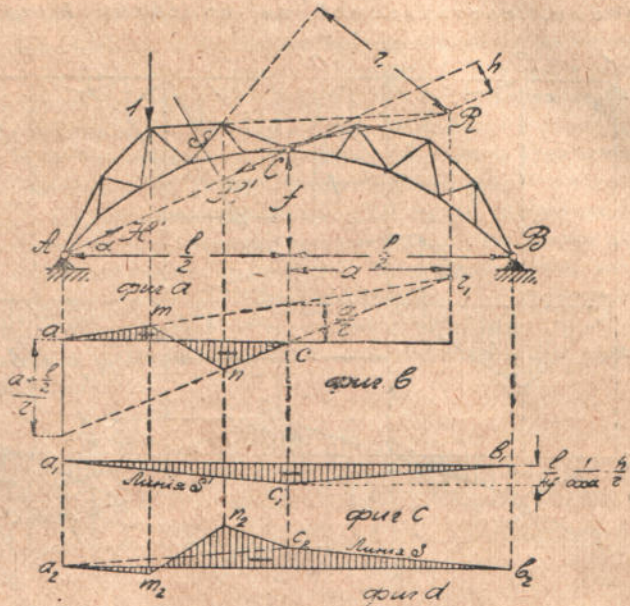
Линия влияния для величины $O \cos \beta$ представлена на фигуре c .

§ 34. Линия влияния для усилий в стержнях трехшарнирных арок.

При построении линий влияния для элементов трехшарнирной арки воспользуемся тем обстоятельством, что совокупность сил, действующих на арку при движении груза единица, отличается от соответствующей системы сил для балки того же пролета лишь наличием распора.

Если нужно, например, построить линию влияния для усилия O в элементе верхнего пояса трехшарнирной арки (черт. 228, фиг. a), мы строим сначала линию влияния adb (фиг. b), как для элемента пояса

АС, соединяющей шарниры. Из условий равновесия сейчас же заключаем, что вертикальные составляющие такие же, как реакции балки, опертой в А и С. Составляющие же H' , направленные по АС, равны по величине и противоположны по знаку. При построении линии влияния для какого-либо элемента, например, для раскоса S , мы сначала строим соответствующую линию влияния $amnc$ для балочной фермы, опирающейся в А и С. Далее оцениваем влияние сил H' на величину усилия S . При нашем расположении точки Риттера R усилие S' , вызываемое в раскосе силами H' , определится из ф-лы:



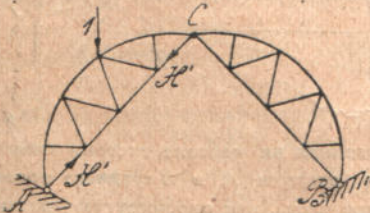
Черт. 229.

$$S' = -H' \cdot \frac{h}{r} = -H \frac{1}{\cos \alpha} \cdot \frac{h}{r},$$

где α — угол наклона прямой АС к горизонтальной оси, и H — распор трехшарнирной арки. Линия влияния для S' (фиг. с) представится треугольником $a_1c_1b_1$, высота которого равна

$$\frac{l}{4f} \cdot \frac{1}{\cos \alpha} \cdot \frac{h}{r}.$$

Суммируя надлежащим образом ординаты построенных линий, получаем искомую линию влияния $a_2m_2n_2c_2b_2$, представленную на фигуре d .



Черт. 230.

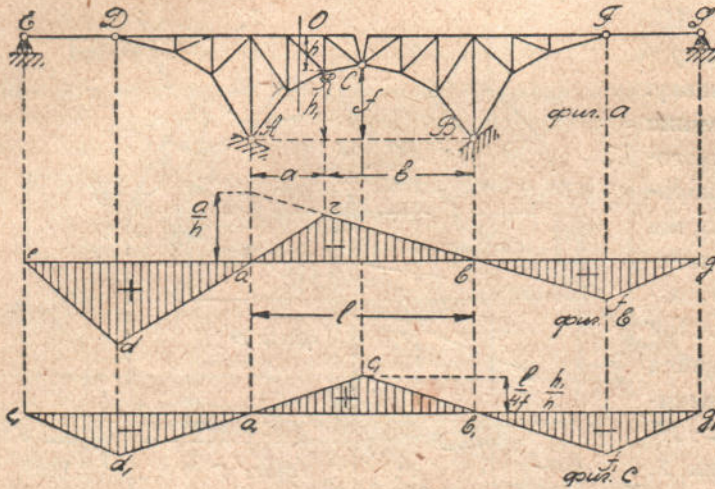
Задачи: 119. Построить линии влияния для усилий в элементах трехшарнирной арки, представленной на чертеже 230.

Принимая во внимание, что в данном случае силы H' , о которых сейчас говорилось, вызывают усилия лишь в прямом нижнем поясе полуарки АС, заключаем, что линия влияния для элементов верхнего пояса и для раскосов начертается так же, как

для балочной фермы, опертой в точках А и С. При построении линий влияния для усилий в элементах нижнего пояса придется к усилиям балочной фермы прибавлять,

с соответствующим знаком усилия H' , линия влияния которых получается из линии влияния для H .

120. Построить линии влияния для усилий в элементах системы, составленной из консольной трехшарнирной арки и соединительных балочек (черт. 231).



Черт. 231.

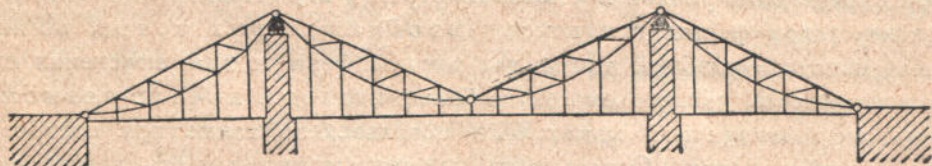
Черт. 231). Чтобы построить линию влияния для усилия O в элементе верхнего пояса (фиг. а) чертим предварительно линию влияния $edrfg$ для соответствующей консольно-балочной системы, а потом отдельно изучаем влияние на искомое усилие распора арки. Линия влияния для усилия O' , вызываемого в рассматриваемом элементе распором арки, представлена на фигуре а. Суммируя ординаты построенных таким образом линий, получаем искомую линию влияния.

121. Построить линии влияния для усилий в элементах висячего трехпролетного моста с решетчатыми фермами (черт. 232).

Черт. 232.

Мы видели уже (зад. 58. § 20), что представленная на чертеже система является статически определимой. Переноса вертикальные реакции A и B в среднюю часть, как опрокинутую трехшарнирную арку. Пока груз единица располагается на одном из боковых пролетов, усилия во всех элементах средней части равны нулю. Обращаются в нуль также усилия в соединительных брусках GA' , GD' , KB' , KF' , и усилия для боковых ферм найдутся, как

для простых балочных систем. Соответственно этому начерчена, например, часть $etnd'$ (фиг. b) линии влияния для усилия в раскосе S . При расположении груза единица в средней части системы, усилия в этой части и соответствующие участки линии влияния найдутся, как для трехшарнирной арки. Остается сказать несколько слов относительно линий влияния для стержней боковых ферм при расположении груза единица на среднем пролете. Для любого положения груза на середине пролета мы сейчас же находим соответствующие реакции арки K и K' (фиг. c), усилия в стержнях GA' и $B'K$ и распор арки H . При перемещении груза распор меняется по закону треугольника, вершина которого располагается под шарниром C . По тому же закону меняются и пропорциональные распору усилия во всех стержнях боковой фермы. Расположив груз единица в шарнире C , мы получим максимальный распор и максимальные усилия в соединительных стержнях GA' и GD' . По максимальному усилию $D'G$ путем построения диаграммы Кремонны, находим усилия во всех стержнях боковой фермы. Эти усилия дадут ординаты соответствующих линий влияния под шарниром C . Имея эти ординаты, сейчас же строим линию влияния на всем участке ab в виде треугольника с основанием ab и с вершиной под шарниром C . На фигуре b построена таким образом линия $acsb$ для усилия в раскосе S . На основании сделанных замечаний легко построим линию влияния для любого стержня заданной системы.

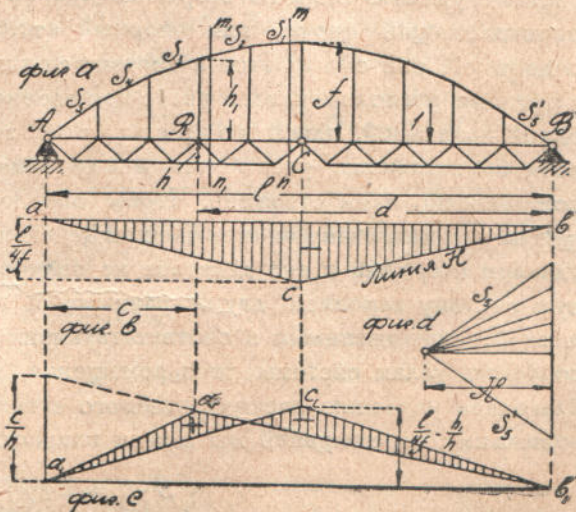


Черт. 233.

122. Пользуясь соображениями, высказанными в предыдущей задаче, построить линии влияния для усилий в висячей системе, представленной на фигуре 233.

123. Построить линии влияния для элементов шарнирной арки с жесткой балкой в виде ватяжки (черт. 234).

Рассекая систему по mn (фиг. a) и составляя момент всех сил, приложенных к левой отсеченной части, относительно шарнира C , легко находим горизонтальную составляющую усилия S_1 — распор шарнирной арки H , воспринимаемой жесткими фермами AC и CB . Линия влияния для распора представлена на фигуре b . Отложив H и проведя лучи параллельно элементам верхнего пояса $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, \dots, S'_5$



Черт. 234.

(фиг. *d*), находим усилия в стержнях арки и в подвесках. Соответствующие линии влияния будут иметь такое же треугольное очертание, как и линия влияния для распора. При построении линий влияния для усилий в элементах жестких ферм *AC* и *BC* нужно иметь в виду, что усилия эти отличаются от усилий в жесткой балочной ферме *AB* вследствие влияния шарнирной арки. Чтобы построить, например, линию влияния для усилия в элементе нижнего пояса, попадающего в сечение m_1n_1 (фиг. *a*), нужно сначала построить линию влияния $a_1d_1b_1$ для соответствующего элемента балочной фермы *AB* и потом учесть влияние попадающего в сечение m_1n_1 усилия S_2 . Момент этого усилия относительно точки Риттера *R* равняется $H \cdot h_1$. Следовательно, линия влияния для добавочного усилия в рассматриваемом стержне представится треугольником $a_1c_1b_1$ (фиг. *c*). Суммируя ординаты двух построенных треугольников, получаем площадь влияния, заштрихованную на фигуре *c*.

§ 35. Применение начала возможных перемещений к построению линий влияния.

Мы уже пользовались началом возможных перемещений при определении усилий в стержнях ферм (§ 19). Представляя перемещения узлов фермы при помощи изображающих точек, можно было наметить удобный прием для расчета ферм и для выяснения их геометрической неизменяемости. С большей выгодой начало возможных перемещений может быть использовано также при построении линий влияния. Основываясь на нем, можно сделать некоторые общие заключения относительно вида линий влияния, а также можно строить линии влияния для систем, где применявшиеся нами ранее приемы не ведут к цели. Мы все время имеем дело с системами геометрически неизменяемыми, не имеющими лишних стержней. Если у такой системы удалить один из стержней (безразлично будет ли это стержень, принадлежащий ферме, или опорный стержень), то система делается подвижной, она обращается в систему с одной степенью свободы. Относительное расположение ее узлов при перемещении вполне определяется одной величиной, одной координатой, за которую мы можем выбрать хотя бы изменение расстояния между теми узлами, которые соединял устраненный нами стержень. Чтобы определить усилие S^1 , возникающее в рассматриваемом стержне при действии заданной системы сил, мы удаляем стержень и его действие на получаемую таким образом подвижную систему заменяем двумя равными и прямопротивоположными силами S , приложенными в соответствующих узлах фермы. Если теперь сообщить узлам системы те перемещения, которые стали возможными, благодаря удалению рассматриваемого стержня, то на основании начала возможных перемещений мы можем написать:

$$S \cdot \delta_s = \sum P_i c_i \quad (a).$$

1) Мы его предполагаем растягивающим.

Здесь через δ_s обозначено увеличение расстояния между теми узлами, которые соединяют рассматриваемый стержень, и через s_i перемещение, соответствующее¹⁾ силе P_i . Понимая усилие S в обобщенном смысле, мы можем написать ур-ие вида $(a)^2)$ не только для усилий в стержнях, но также для опорных реакций, перерезывающей силы, изгибающего момента и т. д. Каждый раз δ_s будет представлять соответствующее выбранной обобщенной силе возможное перемещение. Когда мы будем пользоваться ур-ием (a) для построения линий влияния, мы будем иметь лишь одну вертикальную силу — груз, равный единице, и соответствующим ему перемещением будет вертикальная составляющая y того перемещения, которое совершает точка приложения груза. Ур-ие (a) переписется при этом так:

$$S \cdot \delta_s = 1 \cdot y \quad (a')$$

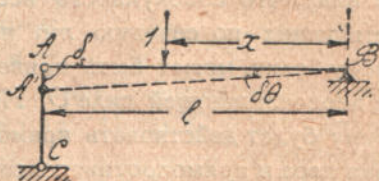
Таким образом, ординаты искомой линии влияния будут пропорциональны вертикальным перемещениям y точек рассматриваемой подвижной системы, соответствующим перемещению δ_s . Стоит только представить себе, какое перемещение системы становится возможным, после удаления рассматриваемого стержня, и у нас уже будут данные для построения искомой линии влияния. Поясним это на несколько простейших примерах.

Положим, нужно построить линию влияния для опорной реакции A балки с опертыми концами (черт. 235). Выбрасываем соответствующий опорный стержень AC . Тогда балка получает возможность вращаться вокруг шарнира B . Возможным перемещением будет поворот балки на бесконечно малый угол около точки B . Пусть $A'B$ — новое положение балки. Им определяется вид искомой линии влияния, т. к. усилие, вызываемое в опорном стержне грузом единица, будет, как видно из ур-ия (a') , пропорционально вертикальному перемещению точки приложения груза единица. Реакция A найдется из ур-ия:

$$A \cdot l \cdot \delta\theta = 1 \cdot x \cdot \delta\theta,$$

откуда

$$A = 1 \cdot \frac{x}{l}.$$



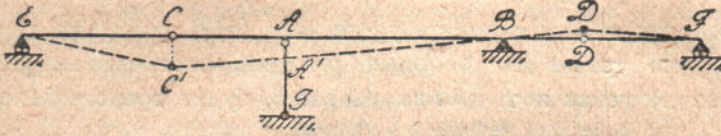
Черт. 235.

1) Этим термином мы пользуемся в том обобщенном смысле, как это было объяснено в Курсе сопротивления материалов, 9 изд. 1930 г., стр. 311.

2) Отличие будет лишь в знаке.

Чтобы представить себе вид линии влияния для опорной реакции A в более сложной системе, составленной из консольной балки и двух соединительных балочек (черт. 236),

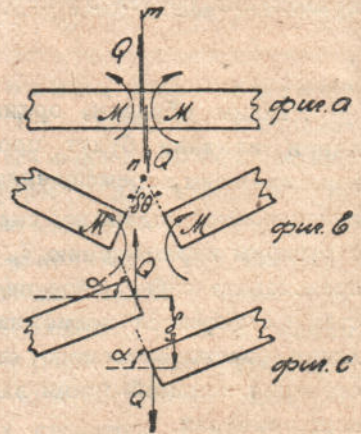
нужно только начертить то новое положение системы, которое становится



Черт. 236.

возможным, после удаления опорного стержня AG . Линия влияния будет ломаная линия, имеющая вид $EC'A'BD'F$.

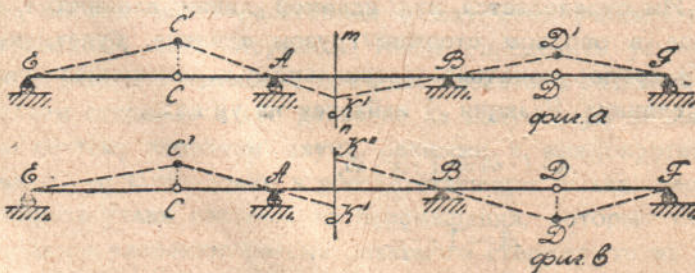
Когда нужно строить линию влияния^o для изгибающего момента или перерезывающей силы в сечении mn (черт. 237, фиг. а) балки следует иметь в виду, что совокупность всех усилий действующих по сечению mn на левую половину балки, может быть приведена к паре M и перерезывающей силе Q . На правую половину будет действовать прямопротивоположная пара и прямопротивоположная сила. При пользовании началом возможных перемещений заметим прежде всего, что перемещением, соответствующим изгибающему моменту M , будет относительный поворот $\delta\theta$ концов балки, разрезанной сечением mn (фиг. б). Соответствующим перемещением для перерезывающей силы Q будет такое смещение δ_s концов (фиг. с), при котором не получается относительного поворота концевых сечений.



Черт. 237.

После сказанного ясно, что для построения линии влияния для M

или Q в сечении mn консольно-балочной системы (черт. 238), нужно произвести разрез по mn и полученной подвижной системе дать перемещение, со-



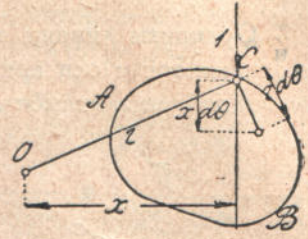
Черт. 238.

ответствующее M (фиг. а) или соответствующее Q (фиг. б). Таким образом получают на чертеже пунктиром линии, которые

представляют нам вид искомым линий влияния. Параллельность линий $C'K'$ и $K''D'$ следует из фиг. с черт. 237.

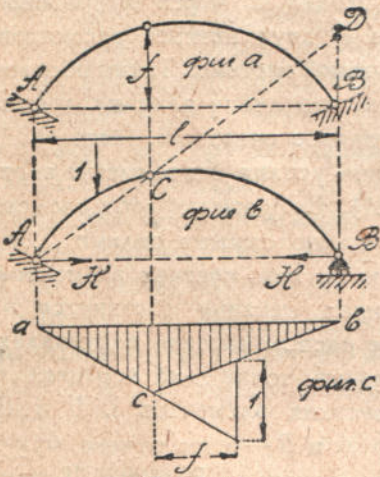
В рассматриваемых случаях линии влияния представляются ломаными линиями. Каждому жесткому элементу рассматриваемой подвижной системы соответствует свой прямолинейный участок линии влияния. Общим точкам (шарнирам) двух жестких частей подвижной системы соответствуют вершины ломаной линии. Нулевые точки линии влияния соответствуют тем точкам системы, которые при рассматриваемом возможном перемещении не совершают движения, параллельного силе единица, т.е. вертикального перемещения. В наших случаях нулевые точки соответствуют как неподвижным, так и подвижным опорам.

Что каждому жесткому элементу подвижной системы непременно должен соответствовать прямолинейный участок линии влияния, можно показать и в общем виде. В самом деле, малое перемещение плоской фигуры в ее плоскости мы всегда можем представить себе, как некоторое вращение около неподвижной точки, мгновенного центра.



Черт. 239.

Пусть O — мгновенный центр для рассматриваемого перемещения плоской фигуры AB (черт. 239). При повороте фигуры на бесконечный малый угол $d\theta$, точка C , где приложен груз единица, совершит перемещение $r \cdot d\theta$ в направлении, перпендикулярном к радиусу OC . Соответствующим перемещением для вертикального груза единица будет вертикальная составляющая перемещения $rd\theta$, т.е. величина $xd\theta$. При движении груза единица по рассматриваемому жесткому элементу AB системы, соответствующие перемещения, а, следовательно, и ординаты линии влияния меняются пропорционально горизонтальному расстоянию x линии действия груза единица от некоторой постоянной



Черт. 240.

ной точки O . Строя для отдельных жестких элементов фигуры мгновенные центры, которым соответствуют нулевые точки линии влияния, и пользуясь только что доказанным положением, что на протяжении каждого жесткого элемента линия влияния — прямая, мы легко можем представить себе вид линии влияния в отдельных частных случаях.

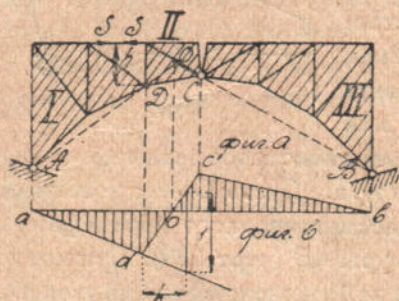
Построим, например, линию влияния для распора трехшарнирной арки (черт. 240). Перемещением, соответствующим распору H , будет

изменение горизонтального расстояния между опорными шарнирами A и B .

Чтобы применить начало возможных перемещений, нужно устранить закрепление, препятствующее раздвижению опор, и заменить его двумя равными и прямопротивоположными силами H (фиг. b). Изменяя пролет арки на величину δ_s , напишем на основании начала возможных перемещений:

$$H \cdot \delta_s = 1 \cdot y.$$

Ординаты линии влияния пропорциональны вертикальным перемещениям точек оси арки, получающимся при раздвижении опор. Далее мы подробнее займемся вопросом о коэффициенте пропорциональности,



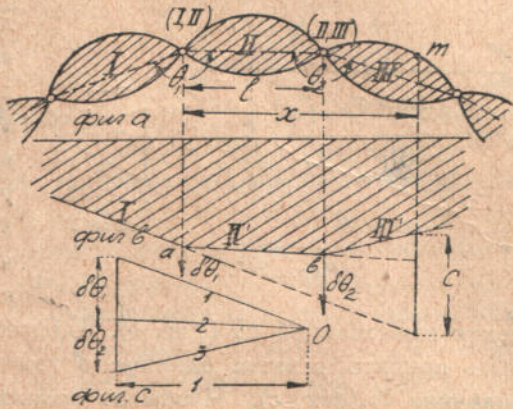
Черт. 241.

сейчас же установим лишь общий вид искомой линии влияния. Так как система, представленная на фигуре b , состоит из двух жестких частей, то искомая линия влияния составит из двух прямолинейных участков, имеющих общую вершину под шарниром C и нулевые точки на вертикалях, проходящих через мгновенные центры A и D двух звеньев рассматриваемой подвижной системы. Таким образом мы выясняем, что линия влияния должна иметь треугольное очертание (фиг. c).

Применим тот же прием к определению усилия S в элементе верхнего пояса трехшарнирной арки (черт. 241). Выбрасывая этот элемент и заменяя его двумя равными и прямопротивоположными силами S , мы получаем подвижную систему, составленную из трех жестких элементов, заштрихованных на чертеже. Искомая линия влияния составит из трех прямолинейных участков. Вершины ее расположатся на вертикалях, проходящих через шарниры D и C , и нулевые точки — на вертикалях, проходящих через мгновенные центры жестких элементов I, II и III. Жесткие элементы I и III вращаются около A и B — этим точкам будут соответствовать нулевые точки a и b линии влияния. Элемент II прикреплен к земле двумя жесткими частями I и III. Шарнир D может совершать лишь перемещения, перпендикулярные AD , и шарнир C — перемещения, перпендикулярные CB , следовательно, мгновенный центр для элемента II лежит в точке O , где пересекаются AD и CB . На вертикали, идущей через O , лежит третья нулевая точка o искомой линии влияния. Задаваясь произвольно наклоном первого участка ad , мы на основании намеченных нулевых точек, легко строим очертание искомой линии влияния $adcb$ (фиг. b).

Выяснив возможность получения общего очертания линии влияния, обратимся теперь к надлежащему выбору ординат этой линии. Эти ординаты должны нам непосредственно давать величину искомого усилия при действии груза единица. Из ур-ия (a'), составленного на основании начала возможных перемещений, мы видим, что искомое усилие получается пропорциональным вертикальным перемещениям y , которые соответствуют возможному перемещению системы. Линию, ординаты которой дают нам вертикальные перемещения y , будем называть дальше линией вертикальных перемещений.

Докажем теперь одно свойство этой линии, которым в дальнейшем воспользуемся при построении линии влияния. Пусть (черт. 242) I, II и III представляют три последовательные звена той подвижной системы, в которую мы обратили заданную ферму путем удаления одного из стержней. Пусть углы θ_1 и θ_2 определяют относительное расположение этих звеньев и $\delta\theta_1$, $\delta\theta_2$ — те изменения этих углов, которые соответствуют выбранному возможному перемещению системы. Предположим, что линия I' II' III' есть линия вертикальных перемещений, и заштрихованная площадь дает вертикальные перемещения соответствующих точек системы при выбранном нами возможном перемещении. Тогда, рассматривая перемещения звеньев II и III по отношению к звену I, мы на основании пояснений, сделанных к чертежу 239, заключаем, что отрезок c , измеренный на вертикали, проведенной через точку m , между линиями I' и III' и отстоящий от вершины a на расстоянии x , выразится так:



Черт. 242.

$c = x\delta\theta_1 + (x - l)\delta\theta_2$.

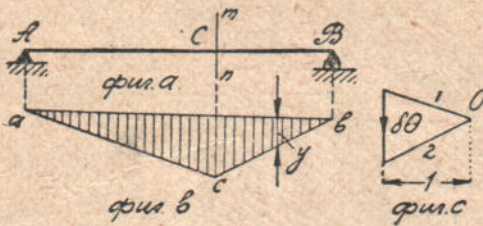
Первый член в правой части представляет собой то вертикальное перемещение выбранной нами точки m звена III, которое получается, если держать звено I неподвижным, а звенья II и III повернуть, как одно целое вокруг шарнира (I, II) на угол $\delta\theta_1$. Второй член той же части представляет вертикальное перемещение точки m , обусловленное поворотом звена III по отношению к звену II на угол $\delta\theta_2$.

Легко видеть, что отрезок c представляет значение момента фиктивных нагрузок $\delta\theta_1$ и $\delta\theta_2$, приложенных в a и b , относительно точки m .

В таком случае, на основании основного свойства веревочного многоугольника, заключаем, что линия вертикальных перемещений может быть построена как веревочный многоугольник для фиктивных грузов $\delta\theta_1, \delta\theta_2$ при полюсном расстоянии $H=1$ (фиг. с).

Покажем теперь на частных примерах, как можно воспользоваться этим свойством линии вертикальных перемещений для построения линий влияния.

Предположим, нужно построить линию влияния для изгибающего момента в сечении mn балки AB (черт. 243). Для этого разрезаем балку по mn и жесткое соединение в этом сечении заменяем шарниром.



Черт. 243.

Полученной таким образом подвижной системе, составленной из двух звеньев AC и BC , дадим возможное перемещение, при котором пусть одно звено поворачивается относительно другого на угол $\delta\theta$. Соответствующая линия вертикальных перемещений получится путем построения веревочного многоугольника acb и прове-

дения замыкающей ab (фиг. b). Полюсное расстояние при этом должно быть принято равным единице в том масштабе, в каком мы отложили величину $\delta\theta$ (фиг. с). Чтобы от ординат y линии вертикальных перемещений перейти к ординатам искомой линии влияния, воспользуемся ур-ием которое для данного случая дает нам начало возможных перемещений:

$$M \cdot \delta\theta = 1 \cdot y(b) \quad (b)$$

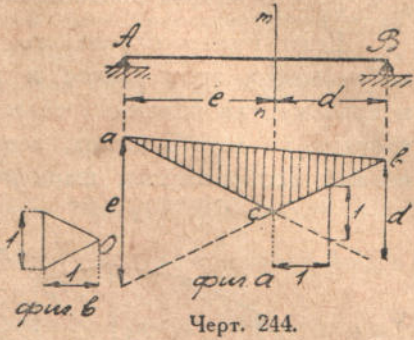
На основании его заключаем:

$$M = \frac{1 \cdot y}{\delta\theta} \quad (b')$$

Ординаты искомой линии влияния получаются из ординат линии вертикальных перемещений путем умножения этих последних на величину $\frac{1}{\delta\theta}$. Это умножение легко выполнить графическим путем, если воспользоваться тем, что ординаты y линии вертикальных перемещений равны изгибающим моментам от фиктивной нагрузки $\delta\theta$. Чтобы умножить ординаты y на какое-либо число n , нужно только построения, которые были выполнены для получения линии вертикальных перемещений (черт. 243), повторить с фиктивной нагрузкой, увеличенной в n раз.

Следовательно, для получения ординат искомой линии влияния, нужно построить веревочный многоугольник acb (черт. 244) для фиктивной нагрузки $\delta\theta \frac{1}{\delta\theta} = 1$. Все построения изменятся так.

Вместо малого угла $\delta\theta$ берем единицу (фиг. *b*). Следовательно, проводя сторону *ac* веревочного многоугольника произвольно, мы наносим сторону *cb* так, чтобы в расстоянии единица длины от вершины *c* между проведенными прямыми заключался отрезок, равный единице длины. Тогда ординаты заштрихованного треугольника, измеренные в масштабе длины и помноженные на единицу силы, дадут нам величины момента в сечении *mn* при соответствующих положениях груза единица. Легко видеть, что на опорных вертикалях стороны веревочного многоугольника вырежут отрезки, равные длинам участков *e* и *d*, что вполне совпадает с нашим прежним построением (§ 25).



В качестве второго примера рассмотрим построение линии влияния для усилия *S* в элементе нижнего пояса фермы *ACB* (черт. 245). Выбрасываем этот стержень и заменяем его двумя равными и прямопротивоположными силами *S*. Таким образом, получаем подвижную систему, составленную из двух жестких частей, заштрихованных на чертеже (фиг. *a*). Если через $\delta\theta$ обозначить относительный поворот этих частей (возрастание первоначального угла θ между жесткими частями), то соответствующее увеличение расстояния δ_s между узлами *D* и *E*, как легко показать, будет равняться $h \cdot \delta\theta$, где *h* — перпендикуляр, опущенный из шарнира *C* на направление *DE*. Начало возможных перемещений приводит нас к такому ур-ию:

$$S \cdot h \delta\theta = 1 \cdot y,$$

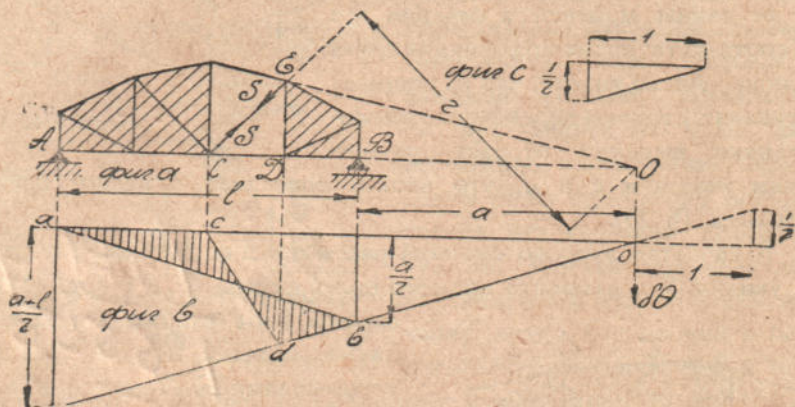
откуда

$$S = \frac{1 \cdot y}{h \cdot \delta\theta}.$$

Соответствующее построение выполнено так. На многоугольнике сил (фиг. *c*) вместо $\delta\theta$ отложена величина $\frac{\delta\theta}{h\delta\theta} = \frac{1}{h}$, и построен соответствующий веревочный многоугольник *acb*. При этом, очевидно, угол между *ac* и *cb* будет такой, что в расстоянии *h* от вершины *c* верти-

кальный отрезок, заключенный между этими прямыми, будет равен единице длины. На крайних ординатах при этом будут вырезаны отрезки $\frac{d}{h}$ и $\frac{c}{h}$, что вполне соответствует нашему прежнему построению (§ 30).

Если нужно определить усилие S в раскосе (черт. 246), то мы выбрасываем этот раскос и вместо него прикладываем две равные и прямопротивоположные силы S . Получаем подвижную систему, составленную из двух жестких, заштрихованных на чертеже частей, соединенных воображаемым шарниром O . При поворачивании одной части



Черт. 246.

относительно другой на угол $\delta\theta$, расстояние CE изменяется на величину $r\delta\theta$, и начало возможных перемещений дает нам

$$S \cdot r\delta\theta = 1 \cdot y.$$

Откладывая на многоугольнике сил (фиг. с) вместо $\delta\theta$ величину $\frac{1}{r}$ и строя стороны ao и ob веревочного многоугольника (фиг. б), получаем все нужные элементы для построения линии влияния. Точки a и b , где проведенные линии пересекаются с вертикалями, идущими через A и B , будут нулевыми точками. Мы их соединяем прямой ab и от этой прямой отсчитываем ординаты линии влияния. Участок ac будет соответствовать части AC нашей фермы, точно так же участок db соответствует жесткой части DB . Соединительная линия cd соответствует перерезанной панели фермы. Легко видеть, что построенные описанным способом прямые ac и db вырезают на опорных вертикалях отрезки

$$\frac{a}{r} \quad \text{и} \quad \frac{a+l}{r}.$$

Возвращаясь теперь к ранее рассмотренным примерам, установим и для них числовые значения ординат линии влияния. Чтобы ординаты треугольника abc на фигуре с чертежа 240 давали нам величину рас-

пора, нужно линии ac и cb провести под таким углом, при котором в расстоянии f от вершины c вертикальный отрезок, заключенный между этими прямыми, равняется единице длины. В самом деле, при увеличении угла θ между двумя жесткими элементами трехшарнирной арки на величину $\delta\theta$, расстояние между опорными шарнирами возрастает на $f\delta\theta$, и уравнение равновесия на основании начала возможных перемещений напишется так:

$$H \cdot f\delta\theta = 1 \cdot y.$$

Если вместо $\delta\theta$ взять величину $\frac{1}{f}$, т.-е. принять указанный выше угол между прямыми ac и cb , то ординаты треугольника abc будут давать нам величину искомого распора H .

При построении линии влияния для элемента пояса трехшарнирной арки (черт. 241), мы на основании таких же рассуждений заключаем, что угол между прямыми ad и dc должен быть выбран таким, чтобы в расстоянии h от вершины d между этими прямыми заключался отрезок, равный единице. Имея этот угол и зная вертикали, на которых лежат нулевые точки и вершины линии влияния, мы обладаем достаточным количеством данных для построения искомой линии влияния.

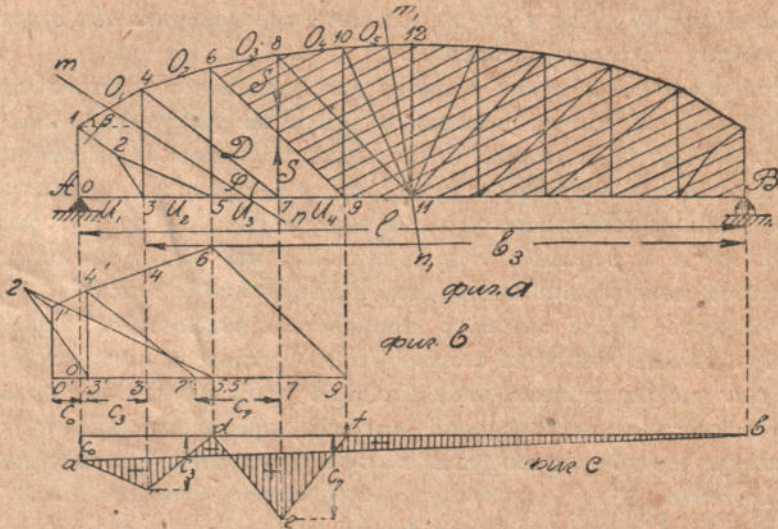
В качестве более сложного примера мы рассмотрим такую ферму, где выбрасывание одного из стержней приводит нас к подвижной системе с большим числом жестких элементов. В этом случае для применения начала возможных перемещений выгодно предварительно определить при помощи изображающих точек возможные перемещения всех узлов системы.

Пусть нам дана решетчатая ферма, представленная на чертеже 247 (фиг. а). Ферма эта, как легко убедиться, принадлежит к классу простейших. Исходя из средней стойки, мы можем получить всю систему путем последовательного присоединения узлов, каждого двумя стержнями. Применение способа Риттера к построению линии влияния в данном случае встречает затруднения, так как не везде удастся провести сквозное сечение, пересекающее лишь три стержня. Конечно, мы могли бы применить для построения линий влияния общий способ: можно было бы последовательно помещать груз единица в каждом из нижних узлов фермы (мы предполагаем езду по низу) и определять усилия во всех стержнях путем построения диаграммы Кремоны. Усилия эти дали бы ординаты линий влияния для всех стержней системы. При таком решении нам, принимая во внимание симметрию, нужно было бы построить пять диаграмм.

Покажем теперь, как та же задача может быть решена при помощи начала возможных перемещений. Положим, требуется построить линию влияния для усилия S в стойке 7—8. Мы выбрасываем эту стойку

и заменяем ее двумя равными и прямопротивоположными силами S . Таким образом приходим к подвижной системе, составленной из жесткой части, заштрихованной на чертеже, и из геометрически изменяемой части, к которой относится семь узлов (0, 1, 2, 3, 4, 5, 7) и тринадцать стержней. Жесткую часть будем держать неподвижной и устраним опору A .

Дадим теперь узлу 7 малое вертикальное перемещение c_7 , определяемое на фигуре b изображающей точкой 7'. Малому перемещению узла 7 будет соответствовать изменение расстояния узлов 5 и 9 на малую величину второго порядка малости. Следовательно, на нашем



Черт. 247.

чертеже изображающая точка $5'$ совпадает с узлом 5. Для получения точки $4'$ заметим, что стержень 4—7 соединен с жесткой частью брусками 7—9 и 4—6. Имея точку $7'$, мы проводим через нее линию параллельную 4—7 до пересечения с направлением 4—6 в точке $4'$. Имея $7'$ и $4'$, мы получаем точку $3'$, строя треугольник $7' 4' 3'$, подобный треугольнику 7 4 3. На стороне $3'—5'$ строим треугольник $2' 3' 5'$, подобный треугольнику 2 3 5. Для получения точки $1'$, изображающей перемещение узла 1, воспользуемся такими соображениями. Точка 1 соединена с точками 2 и 4, перемещения которых уже найдены, стержнями 1—2 и 1—4. Рассматривая узел 1 как точку, принадлежащую стержню 1—2, мы можем утверждать, что перемещение точки 1 состоит из двух частей: из перемещения, равного перемещению точки 2, и из перемещения соответствующего вращению стержня 1—2 около шарнира 2. Это последнее перемещение будет, очевидно, перпендикулярно направлению 1—2. Следовательно, изображающая точка $1'$ должна лежать на

прямой, проходящей через 2' и направленной параллельно стержню 1—2¹⁾. Считая точку 1 принадлежащей стержню 1—4, мы заключаем на основании таких же рассуждений, что точка 1' должна лежать на прямой, проходящей через 4' и направленной параллельно 1—4. Пересечением указанных двух прямых определяем положение точки 1'. Подобным же образом, проводя через 1' и 3' линии, параллельные 1—0 и 0—3, получаем изображающую точку 0'.

Построив все изображающие точки, мы будем иметь достаточно данных для построения искомой линии влияния. Для этого на горизонтальной прямой (фиг. с) разметим точки, соответствующие нижним узлам фермы, и от них отложим вертикальные составляющие c_0, c_3, c_7 найденных перемещений. Полученные таким образом точки соединяем ломаной линией $acdefb$, которой определяются вертикальные перемещения узлов системы, нужные при пользовании началом возможных перемещений.

Положим, что груз единица расположен в узле 3, тогда искомое усилие S найдется из ур-ия:

$$-S \cdot c_7 + 1 \cdot c_3 - A \cdot c_0 = 0,$$

откуда, обозначая расстояние узла 3 от опоры B через b_3 , получаем:

$$S = \frac{1}{c_7} (c_3 - \frac{b_3}{l} c_0).$$

Подобные же ф-лы будут получены при расположении груза единица в других узлах системы. Заключенный в скобки множитель правой части ф-лы может быть получен, если из написанных ранее вертикальных перемещений вычесть ординаты прямой ab , отсекающей на левой опорной вертикали отрезок c_0 и проходящей через точку b . Если принять $c_7 = 1$, то заштрихованная на чертеже площадь представит нам искомую линию влияния. Описанным здесь способом могут быть построены линии влияния для других стоек и для раскосов 8—11, 10—11.

Когда эта часть работы выполнена, то построение прочих линий влияния может быть сделано без всяких затруднений. В самом деле, для раскосов, подходящих к узлам 3, 5, 7 и 9, мы на основании условий равновесия соответствующих узлов заключаем, что усилие в раскосе D найдется из ур-ия:

$$D \sin \varphi + S = 0$$

при отсутствии нагрузки в рассматриваемом узле, или из ур-ия:

$$D \sin \varphi + S - 1 = 0$$

при расположении груза единица в рассматриваемом узле.

¹⁾ На нашей диаграмме все перемещения повернуты на 90°.

Теперь обращаемся к определению усилий U_1, \dots, U_5 в элементах нижнего пояса. Из условия равновесия каждого нижнего узла мы устанавливаем зависимость между двумя последовательными усилиями. Например, для узла 5 получаем уравнение:

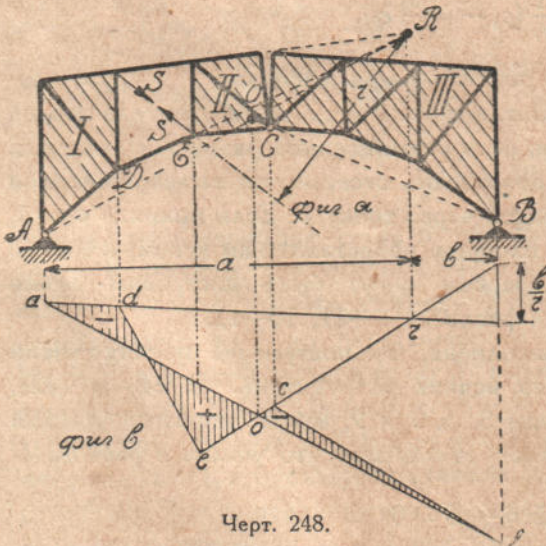
$$U_3 + D \cos \varphi - U_4 = 0.$$

Имея эти уравнения и принимая во внимание, что $U_1 = 0$, мы последовательно построим все U -линии при помощи D -линий.

Обращаясь теперь к элементам верхнего пояса и производя наклонные разрезы mn фермы (фиг. а), мы из условий равновесия левой отсеченной части фермы заключаем:

$$O_1 \cos \beta_1 + U_3 = 0; \quad O_2 \cos \beta_2 + U_4 = 0; \quad O_3 \cos \beta_3 + U_5 = 0,$$

откуда находятся O_1, O_2 и O_3 . Усилие O_5 найдется обычным способом, если произведем разрез m_1n_1 и составим момент всех приложенных к одной половине фермы сил относительно узла 11. Наконец, O_4 найдется из условий равновесия узла 11, и усилие в средней стойке — из условия равновесия узла 12. Таким образом мы можем получить линии влияния для всех элементов заданной решетчатой системы.



Черт. 248.

Задачи: 124. Построить линию влияния для усилия в раскосе трехшарнирной арки (черт. 248).

Выбрасываем раскос и вместо него прикладываем две равные и прямопротивоположные силы S . Получаем подвижную систему, составленную из трех жестких элементов I, II и III (фиг. а). Нулевые точки соответствующих прямолинейных участков искомой линии влияния расположатся на вертикалях, проходящих через мгновенные центры элементов I, II и III. Для элементов I и III такими вертикалями будут крайние опорные вертикали, идущие через A и B. Средний элемент II соединен с элементами III и I при помощи действительного шарнира C и воображаемого шарнира R. Следовательно, мгновенный центр O этого элемента лежит на пересечении линий BC и AR. Намстив таким образом вертикали, на которых лежат нулевые точки искомой линии влияния, определим угол между прямолинейными участками линии влияния, относящимися к элементам I и II так, чтобы ординаты линии влияния давали непосредственно искомое усилие S . Если элемент I повернуть относительно II по часовой стрелке на угол $\delta\theta$ (вращение будет

номинального шарнира C и воображаемого шарнира R. Следовательно, мгновенный центр O этого элемента лежит на пересечении линий BC и AR. Намстив таким образом вертикали, на которых лежат нулевые точки искомой линии влияния, определим угол между прямолинейными участками линии влияния, относящимися к элементам I и II так, чтобы ординаты линии влияния давали непосредственно искомое усилие S . Если элемент I повернуть относительно II по часовой стрелке на угол $\delta\theta$ (вращение будет

очевидно происходит около воображаемого шарнира R), то расстояние между точками приложения сил S возрастет на величину $r \cdot \theta$, и у-ие равновесия напишется так:

$$S \cdot r \dot{\theta} = 1 \cdot y.$$

Соответственно этому, прямые ad и ec (фиг. б), пересекающиеся в точке r , проведены под таким углом, что в расстоянии r от вершины между ними заключается вертикальный отрезок, равный единице. На вертикали, идущей через B , эти прямые вырежут, очевидно, отрезок $\frac{b}{r}$. Нанеся эти две прямые, мы определяем соответствующие нулевые точки a и o . Соединяем их прямой и продолжаем эту прямую до пересечения с опорной вертикалью B в точке b . Проведа теперь линию bc , соответствующую элементу III , и линию de , соответствующую перерезанной панели, получаем заштрихованную на чертеже площадь влияния.

125. Построить линии влияния для опорных реакций A и C системы, представленной на чертеже 249.

При построении линии влияния для реакции C , устраним предварительную опору C и рассмотрим полученную при этом подвижную систему, составленную из трех жестких элементов I , II и III . Соответствующая линия влияния составит из трех прямолинейных участков.

Вершины линии влияния расположатся на вертикалях, идущих через шарниры 1 и 2. Нулевые точки будут лежать на вертикалях, идущих через мгновенные центры жестких элементов I , II и III . Таким образом вопрос сводится к задаче кинематики — к построению мгновенных центров для звеньев I , II и III подвижной системы. В данном случае задача эта разрешается без всяких затруднений. Мы начнем с звена I . Опорная точка его A скользит по заданному направлению, следовательно, соответствующий мгновенный центр должен лежать на прямой, проходящей через A и перпендикулярной к плоскости скольжения. С другой стороны точка 3 элемента I прикреплена к фундаменту стержнем 3— D . Перемещение этой точки перпендикулярно 3— D , и искомый мгновенный центр должен лежать, следовательно, на направлении 3— D . В пересечении проведенных таким образом прямых найдем мгновенный центр, который обозначим через (I) . Обратимся теперь к звену II . Точка 4 этого звена связана с фундаментом стержнем D —4, и потому искомый мгновенный центр должен лежать на линии D —4. Кроме того, шарнир 1, являющийся общей точкой для звеньев I и II , будет при перемещении системы двигаться в направлении, перпендикулярном (I) —1, и потому искомый мгновенный центр должен лежать на линии (I) —1. Пересечением линий D —4 и (I) —1 определяется мгновенный центр (II) . Путем таких же рассуждений заключаем, что мгновенный центр (III) будет лежать на пересечении линий (II) —2 и перпендикуляра к плоскости скольжения в точке B . По этим данным мы можем теперь получить очертание линии влияния для опорной реакции C .

Чтобы перейти к числам, определим одну из ординат, например, ординату, соответствующую опоре C . Проще всего это сделать, пользуясь началом возможных перемещений. Поставим груз единица в шарнире 2 и дадим этому шарниру возможное перемещение. На фигуре (а) это перемещение представлено изображающей точкой $2'$. По этому перемещению сейчас же находим перемещение точек 5 и 6. Соответствующие изображающие точки $5'$ и $6'$ получатся проведением через $2'$ линий, параллельных 2—5 и 2—6 до пересечения с радиусами (II) —5 и (III) —6. Теперь для получения точки C' , определяющей перемещение опорной точки C , нужно только провести линии $5'$ — C' и $6'$ — C' , параллельные стержням 5— C и 6— C . Применяя начало возможных перемещений к вертикальной силе единица, приложенной в шарнире 2, и к опорной реакции C , направленной нормально к плоскости скольжения подвижной опоры, мы должны будем иметь в виду

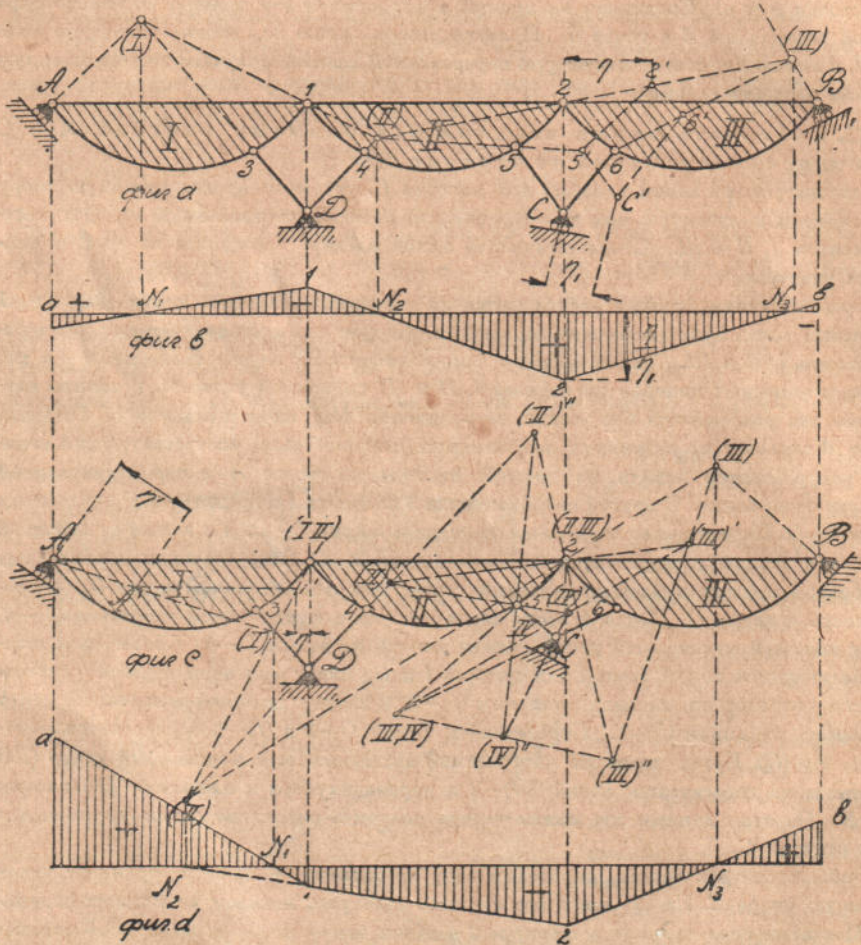
перемещения, соответствующие этим силам, т. е. вертикальную составляющую η перемещения шарнира 2 и составляющую η_{11} , нормальную к плоскости скольжения опоры, для точки C . Тогда ур-ие для определения реакции C напишется так:

$$-C \cdot \eta_{11} + 1 \cdot \eta = 0,$$

откуда

$$C = 1 \cdot \frac{\eta}{\eta_{11}}.$$

Отложив эту ординату под опорой C (фиг. *b*), мы строим остальные элементы линии влияния по нулевым точкам N_1, N_2 и N_3 .



Черт. 249.

Подобным же образом строится линия влияния и для опорной реакции A . Мы удаляем соответствующую опору и изучаем движение получаемой таким образом подвижной системы. Разыскание мгновенных центров в этом случае оказывается несколько более сложным, нежели в предыдущей задаче, и мы для решения вопроса применим такой прием. Допустим, что нам известно положение $(II)'$ (фиг. *c*) мгновенного центра для звена II. Точку $(II)'$ нужно, конечно, расположить на линии $D-4$, соединяющей

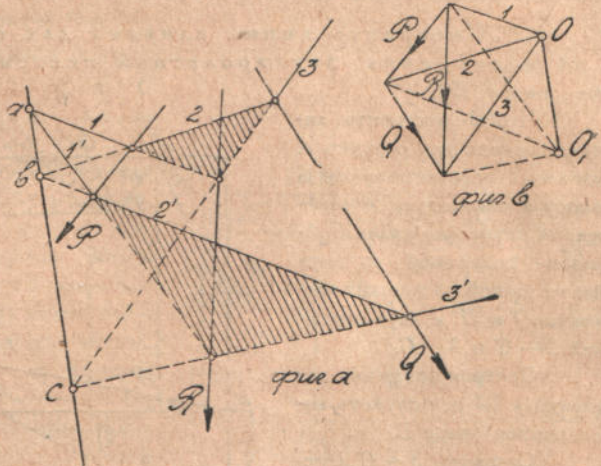
звено II с неподвижной опорой D. Задавшись таким образом мгновенным центром для звена II, мы теперь легко построим соответствующие центры для других звеньев. Начнем со стержня 5—C, который на чертеже обозначен номером IV. Мгновенный центр этого звена должен лежать на линии, проходящей через C и перпендикулярной к плоскости скольжения опоры. Кроме того, шарнир 5, общий для звеньев II и IV, будет совершать перемещения, перпендикулярные к направлению (II)'—5, следовательно, мгновенный центр (IV)' должен лежать и на линии (II)'—5. Пересечением двух намеченных направлений определяем искомый центр (IV)'. Теперь можно обратиться к звену III. Оно соединено шарниром 2 со звеном II и воображаемым шарниром (III, IV), лежащим на пересечении линий 5—2 и C—6, со звеном IV. Следовательно, линии (II)'—2 и (III, IV)—(IV)' в пересечении дадут нам искомый мгновенный центр (III)'. Зададимся теперь новым положением (II)'' мгновенного центра для звена II. Тогда путем повторения прежних построений мы получим новое положение (III)'' для мгновенного центра звена III. Легко доказать, что когда мгновенный центр (II) перемещать по прямой D—4, то соответствующий мгновенный центр для звена III будет перемещаться по прямой (III)'—(III)''.

Обратим внимание, что для каждого положения мгновенного центра (II) на линии D—4 мы путем описанных выше построений получаем треугольник, вершинами которого служат мгновенные центры для звеньев II, III и IV. Так, мы получаем треугольник (II)' (III)' (IV)', соответствующий первому ложному положению (II)' мгновенного центра для элемента II. Ложному положению (II)'' соответствует треугольник (II)'' (III)'' (IV)''.

При повторных построениях две вершины этих треугольников всегда будут оставаться на постоянных прямых: D—4 и прямой, проходящей через C и перпендикулярной плоскости скольжения опоры, а три стороны всегда будут проходить через три постоянные точки: шарнир 2, шарнир 5 и точку (III, IV), лежащие на одной прямой. В таком случае третья вершина, соответствующая мгновенному центру для элемента III, также будет оставаться на прямой.

Это проще всего доказывается на основании известного свойства веревочных многоугольников (§ 5): если для сил P и Q построить два веревочных многоугольника (черт. 250) 1' 2' 3' и 1 2 3, то соответствующие стороны их пересекутся в точках a и c, лежащих на прямой, параллельной OO₁. Когда мы будем двигать полюс по линии OO₁, то стороны заштрихованных на фигуре b треугольников всегда будут проходить через точки a, b и c, две вершины их будут скользить по направлениям P и Q. Третья вершина на основании свойства веревочного многоугольника также будет оставаться на прямой — линии действия равнодействующей R сил P и Q.

Таким образом двумя ложными положениями (II)' и (II)'' для мгновенного центра II мы установим ту прямую, на которой должен лежать центр III. Второй линией, определяющей (III), будет прямая, проходящая через B и перпендикулярная плоскости скольжения.



Черт. 250.

соответствующей опоры. Таким образом устанавливаем положение мгновенного центра (III). Соединяя его с шарниром 2 и продолжая эту линию до пересечения с $D-4$, находим действительное положение мгновенного центра (II). Для получения мгновенного центра (I) остается только соединить (II) с шарниром 1 и эту соединительную прямую продолжить до пересечения с направлением $3-D$.

Построив таким путем все мгновенные центры, мы легко получаем очертание $a-1-2-b$ искомой линии влияния (фиг. d). Для перехода к числам нужно воспользоваться изображающими точками $1'$ и A' и найти соответствующие перемещения η и η' (фиг. c).



Черт. 251.

126. Построить линии влияния для опорных реакций трехшарнирной системы, представленной на чертеже 251.

127. Построить линии влияния для опорных реакций и усилий в стержнях двухпролетной системы, представленной на чертеже 252.

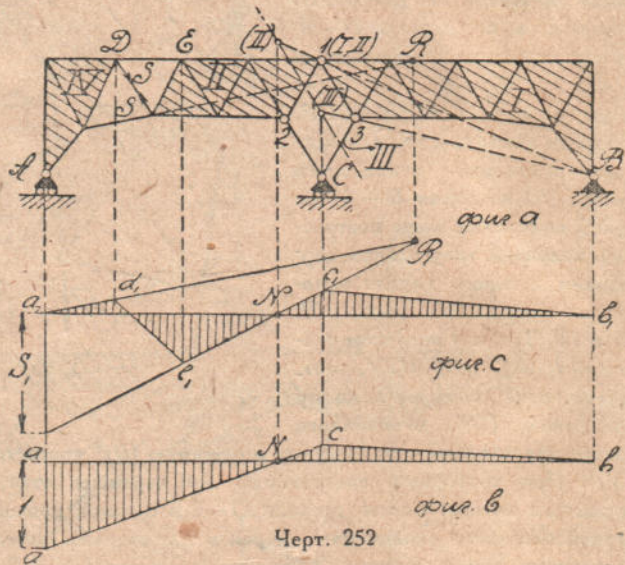
Чтобы построить линию влияния для реакции A удаляем соответствующую опору и рассмотрим перемещения получаемой таким образом подвижной системы составленной из жестких элементов I и II и двух стержней $2-C$ и $3-C$.

Центром вращения для элемента I будет служить неподвижная опора B .

Стержень $3-C$ (элемент III) в узле 3 связан с элементом I , следовательно его мгновенный центр должен лежать на линии $B-3$. Конец C того же стержня скользит по горизонтальной плоскости, следовательно, искомый мгновенный центр будет лежать также на вертикали, идущей через C . Таким образом получим в пересечении двух прямых точку (III).

Обращаемся теперь к элементу II . Шарнир 1 является у него общим с элементом I , следовательно, мгновенный центр (II) должен лежать на прямой $B-1$. Со стержнем $3-C$ элемент II имеет общую точку — воображаемый шарнир в месте пересечения стержней $1-3$ и $2-C$ ¹⁾. Искомый мгновенный центр (II) должен лежать на прямой, соединяющей этот воображаемый шарнир с центром (III). Таким образом намечен на чертеже центр (II).

После этого линия влияния для реакции A может быть начерчена сразу. Очевидно, когда груз единица располагается над опорой A , реакция равна единице. Мы откладываем соответствующую ординату (фиг. b) и первый прямолинейный участок линии



Черт. 252

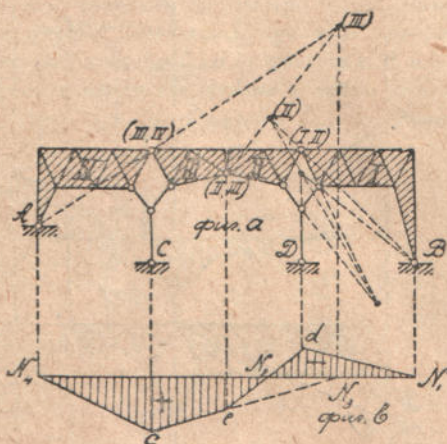
1) В случае параллельности этих стержней, общая точка уходит в бесконечность и линия, проходящая через точку (III), должна быть параллельна стержням $1-3$ и $2-C$.

влияния, соответствующий элементу II , проводим через нулевую точку N и вершину a_1 отложенной ординаты. Эту линию ведем до пересечения в точке c с вертикалью, идущей через шарнир 1. Далее, точку c соединяем с опорной точкой b .

Линия влияния для усилия S в раскосе на протяжении от правой опоры до точки E будет, очевидно, иметь такой же вид, как и линия для A , так как усилие S будет пропорционально A . Крайняя ордината в точке a_2 (фиг. с) получится, если мы по вертикали отложим усилие S_1 , возникающее в рассматриваемом раскосе при $A = 1$. Чтобы начертить линию влияния для левой половины системы, заметим, что удалением стержня S мы подразделяем жесткий элемент II на два жестких элемента, из которых правый будем продолжать называть номером II . Левый обозначим номером IV . Прямолинейный участок e_1c_1 линии влияния, соответствующий элементу II , нами уже построен. Прямолинейный участок, представляющий линию влияния на протяжении элемента IV , проходит через нулевую точку a_2 и пересекается с прямой e_1c_1 на вертикали, проходящей через воображаемый шарнир R элементов II и IV .

128. Построить линию влияния для опорной реакции C трехпролетной системы, представленной на чертеже 253.

Удаляем опорный стержень C и обращаем таким образом нашу систему в подвижную, составленную из четырех жестких элементов, заштрихованных на чертеже. Мгновенные центры элементов I и IV совпадут с опорами B и A . Центр (II) может быть построен так же, как и в предыдущей задаче. После этого центр (III) получается в пересечении линий, указанных на чертеже. По найденным центрам намечаем нулевые точки N_1, N_2, N_3 и N_4 (фиг. б). Ординату под точкой C выбираем так как, это было объяснено в задаче 125. После этого все участки линии влияния чертятся без всяких затруднений.



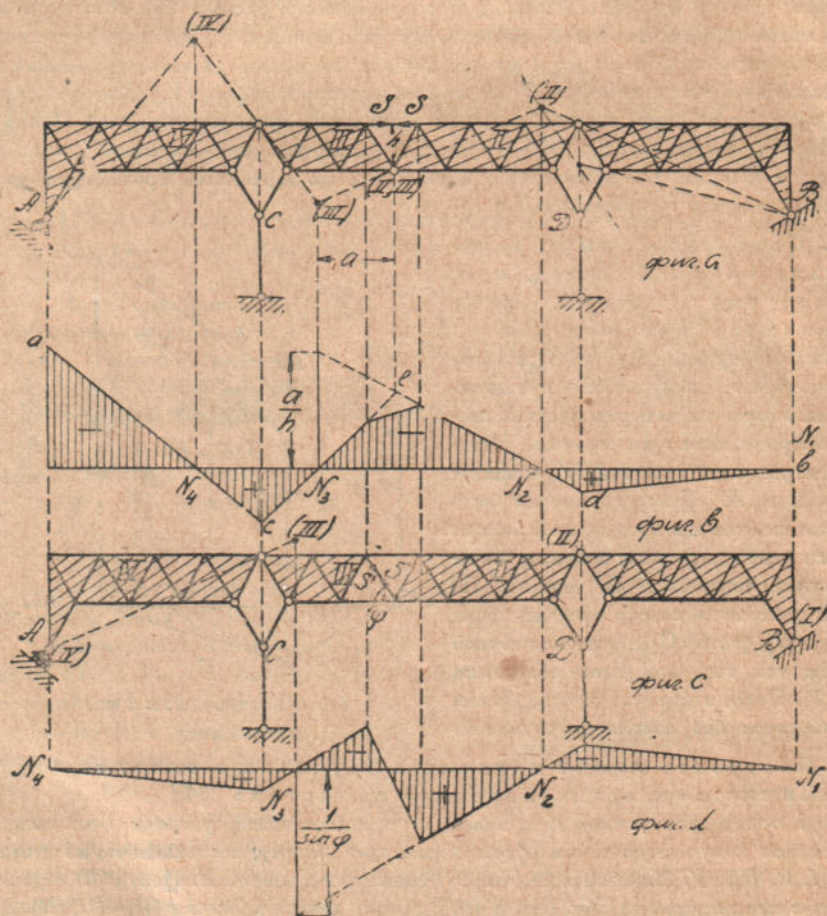
Черт. 253.

129. Построить линии влияния для усилий в стержнях трехпролетной системы, представленной на чертеже 254.

Чтобы определить усилие S в элементе верхнего пояса, удаляем этот элемент и рассматриваем полученную таким путем подвижную систему, составленную из жестких элементов I, II, III, IV . Мгновенный центр (I) совпадает с опорой B . Центр (II) строится так же, как в предыдущей задаче. Центр (III) должен лежать на линии $(II)-(II, III)$. Для получения его, задаемся двумя ложными положениями $(IV)'$ и $(IV)''$ (задача 125) центра (IV) и строим соответствующие $(III)'$ и $(III)''$. Точка пересечения линии $(III)'$ — $(III)''$ с линией $(II)' - (II, III)$ даст истинное положение (III) , и по нему сейчас же строится истинное положение (IV) . Соответственно найденным мгновенным центрам наносим нулевые точки N_1, N_2, N_3, N_4 (фиг. б). Чтобы ординаты линии влияния давали непосредственно искомое усилие S , мы проводим прямолинейные участки ce и de так, что в расстоянии a от вершины e между ними заключается вертикальный отрезок $\frac{a}{h}$, где h — высота фермы. Остальные участки линии влияния построятся на основании полученных нулевых точек.

Чтобы построить линию влияния для раскоса S' (фиг. с), рассмотрим возможные перемещения той подвижной системы, которая получается после удаления раскоса. В та-

ком случае элемент *II* и *III* оказываются связанными двумя параллельными стержнями. Угол между этими элементами, при перемещении системы, не будет меняться. Пользуясь симметрией всей системы, мы можем утверждать, что это условие будет удовлетворено, если мгновенные центры (*III*) и (*II*) будут расположены симметрично относительно середины, и, следовательно, центр (*IV*) совпадает с левой опорой *A*. К такому же заключению мы могли бы прийти, если бы шли прежним путем: построили мгновенный центр (*II*),

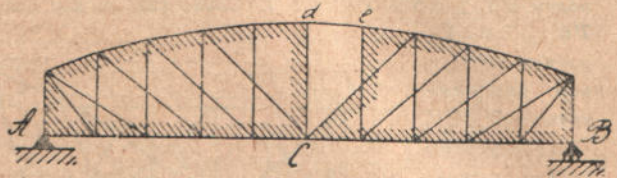


Черт. 254.

приняли во внимание, что линия (*II*) — (*III*) должна быть параллельна стержням, соединяющим элементы *II* и *III*, и нашли бы на этой линии центр (*III*) при помощи двух ложных положений центра (*IV*). Построив мгновенные центры, мы можем нанести соответствующие нулевые точки N_1 , N_2 , N_3 и N_4 линии влияния и провести прямые участки линии влияния, соответствующие жестким элементам *I*, *II*, *III* и *IV* системы (фиг. *а*). Участки, относящиеся к элементам *II* и *III*, будут параллельны. Для определения ординаты под нулевой точкой N_3 , мы можем воспользоваться той ф-дой, которой пользовались в случае не параллельных стержней, и потом перейти к пределу. Таким образом, для ординаты получается значение $\frac{1}{\sin^2}$.

130. Построить, пользуясь началом возможных перемещений, линии влияния для усилий в стержнях системы, представленной на чертеже 255.

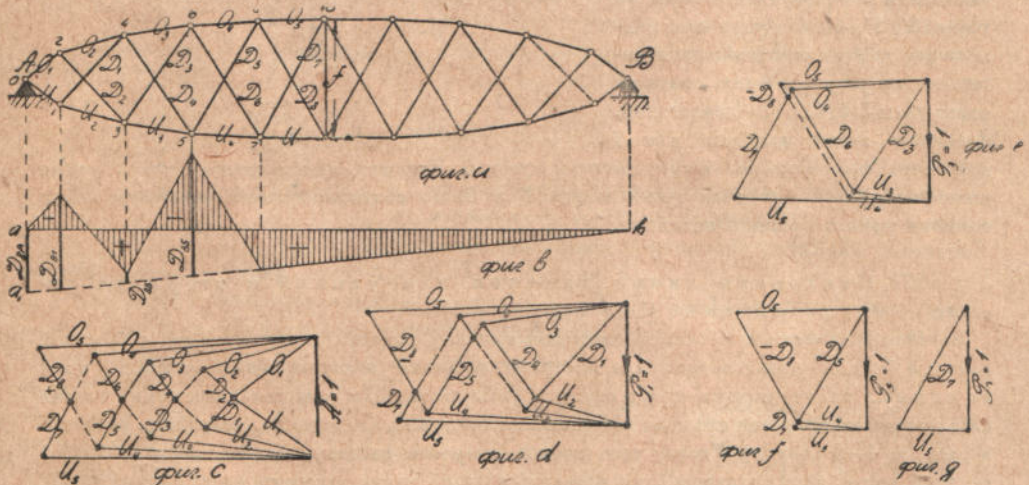
Система эта статически определимая. Она составлена из двух простейших систем, связанных между собой шарниром C и стержнем de .



Черт. 255.

131. Построить линии влияния для усилий в стержнях двухраскосной системы со стойкой по середине (черт. 256).

Для построения линий влияния мы можем в данном случае воспользоваться общим способом. Принимая во внимание симметрию, мы закрепим систему по средней стойке 10—9 и определим усилия во всех стержнях левой половины фермы при нагрузке силой единица поочередно каждого из нижних узлов фермы. Полученные при этом непосредственным разложением усилия в стержнях системы представлены на фигурах c, d, e, f, g . Имея эти усилия легко можем построить линию влияния для усилия в любом стержне. На фигуре b показано построение линии влияния для D_8 . Ордината D_{8A} , полученная



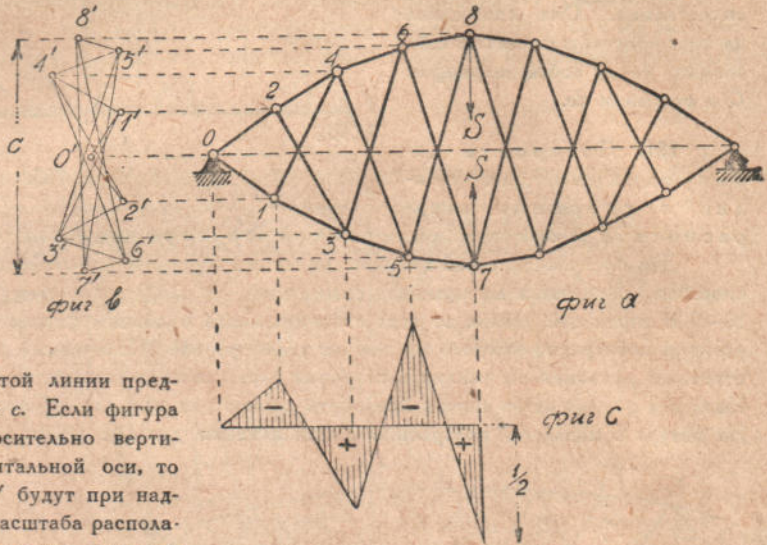
Черт. 256.

при $A=1$ (фиг. c), отложена вертикально вниз, и построена прямая a_1b , служащая искомой линией влияния для правой половины фермы. С переходом груза единицы на левую половину приходится ординаты линии a_1b суммировать с ординатами, представляющими усилие D_8 при расположении груза единицы в узлах 1, 3, 5 и 7. Результаты суммирования представлены заштрихованной площадью влияния (фиг. b).

К тому же результату мы можем прийти, пользуясь началом возможных перемещений. Поясним это на более простом примере, представленном на чертеже 257. Пусть требуется построить линию влияния для усилия S в средней стойке. Мы удаляем эту стойку и действие ее на систему заменяем силами S . Раздвинем теперь узлы 7 и 8 между

которыми была заключена стойка, на какую-либо величину c . Задавшись перемещением для узлов 7 и 8, мы сейчас же можем построить¹⁾ перемещения всех прочих узлов (фиг. b). Чтобы получить например, точку 5', определяющую перемещение 0'5' узла 5, мы проводим $8'5' \perp 85$ и $5'7'' \perp 57$. Точно так же для построения 6' проводим $8'6' \perp 86$ и $7'6' \perp 76$.

Полным же образом построены точки 4', 3', 2', 1'. При передаче нагрузки нижним узлам системы, ординаты линии влияния для S будут пропорциональны вертикальным перемещениям нижних узлов. Вид этой линии представлен на фигуре c. Если фигура симметрична относительно вертикальной и горизонтальной оси, то точки 8', 5', 4', 1' будут при надлежащем выборе масштаба располагаться на горизонталях, идущих через узлы 8, 6, 4, 2. Следовательно, ординаты линии влияния для S получатся пропорциональными высотам фермы. Так как перемещение узла 5 равно половине увеличения расстояния между 7 и 8, то соответствующая ордината линии влияния принята равной половине.



Черт. 257.

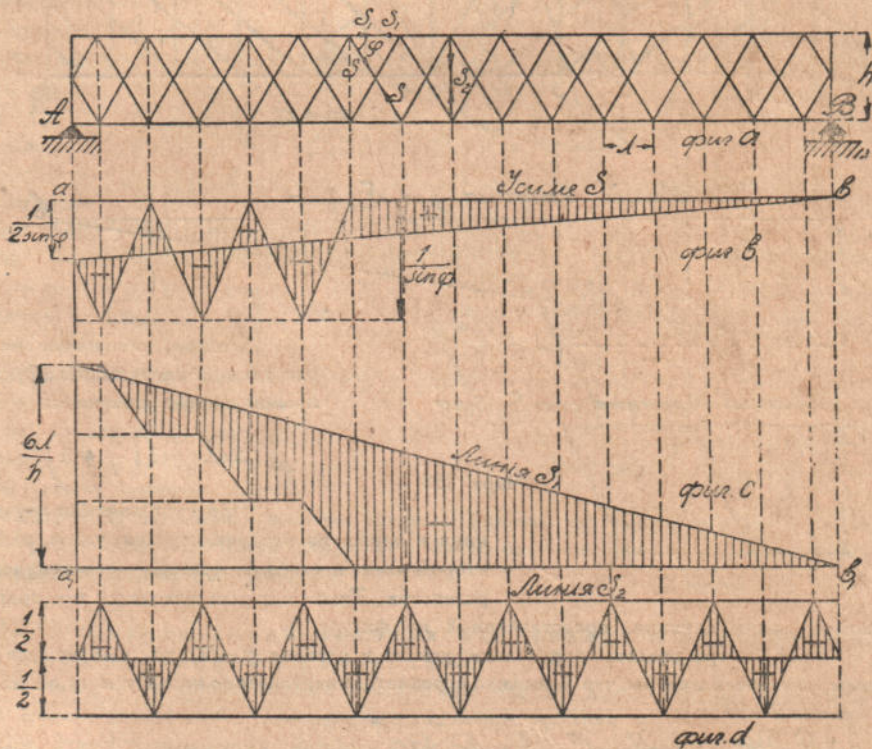
132. Построить линии влияния для усилий в стержнях системы, представленной на чертеже 258.

В случае ферм с параллельными поясами при равной длине панелей с большой выгодой можно пользоваться для построения линий влияния изображающими точками. Этими точками могут служить узлы системы, и нам для разрешения задачи совершенно не придется строить дополнительных линий. Определим, например, усилие S в раскосе 4—0 (фиг. a). Удаляя этот раскос, получаем систему, составленную из правой жесткой части, заштрихованной на чертеже, и левой части — геометрически изменяемой. Правую часть будем сохранять неподвижной, а левую будем перемещать, предполагая отсутствия опоры А. Сразу из чертежа видно, что при этом является возможным, сохраняя стойки 5—6 и 9—10 неподвижными, опустить стойки 3—4, 7—8 и 11—12 на одну и ту же величину. Это указано на чертеже соответствующим расположением изображающих точек. Приняв, например, что изображающая точка 3', определяющая перемещение узла 3, совпадает с узлом 1, мы сейчас же, из равенства перемещений указанных выше стоек, найдем, что и прочие изображающие точки совпадут с узлами фермы. Пусть c — величина общего перемещения, тогда изменение расстояния между узлами 4 и 0 будет:

$$\delta_s = c \sin \varphi.$$

¹⁾ В этой задаче мы пользуемся действительными, а не повернутыми перемещениями.

смотрим перемещения остальных узлов системы в предположении отсутствия опоры А. Узлы 1, 2, 4 остаются неподвижными. С ними, следовательно, совпадут и соответствующие изображающие точки. Узел 3, прикрепленный к неподвижной точке 2 вертикальным стержнем 2—3, может совершать лишь горизонтальные перемещения, следовательно, соответствующая изображающая точка должна лежать на направлении 2—3. Положим, что для изображения перемещений выбран такой масштаб, что 3' совпадает с узлом 2. Тогда с тем же узлом совпадает точка 6', а следовательно, и точки 7', 10', 11'. Мы получаем вращение относительно точки 2 системы, образованной стойками 2—3, 6—7,



Черт. 260.

10—11 и соответствующими им раскосами и частями поясов. Точно так же остальные стержни образуют систему, вращающуюся около точки 4, а потому с этой точкой совпадут все соответствующие изображающие точки. Таким образом, все верхние узлы системы будут совершать лишь вертикальные перемещения. Нижние же узлы, кроме вертикальных перемещений, будут совершать еще одно и то же горизонтальное перемещение, представляемое в выбранном масштабе отрезком, равным высоте фермы h .

Применим теперь начало возможных перемещений к определению ординаты линии влияния, соответствующей расположению груза единица в одном из нижних узлов фермы, например, в узле 7. При составлении ур-ия придется иметь в виду три силы:

силу S , силу единица и опорную реакцию $A = 1 \cdot \frac{b}{l}$. Принимая во внимание, что горизонтальное перемещение силы S изображено отрезком h , а вертикальные составляющие перемещений узлов 7 и 13 соответственно равны 2λ и 4λ , напишем ур-ие в таком виде:

$$S \cdot h - A \cdot 4\lambda + 1 \cdot 2\lambda = 0,$$

откуда

$$S = 1 \cdot \left(\frac{b}{l} \cdot \frac{4\lambda}{h} - \frac{2\lambda}{h} \right).$$

Подобным же образом находится усилие S при расположении груза единица в других узлах фермы. Соответствующая линия влияния изображена на фигуре b .

133. Построить линии влияния для усилий в элементах системы, представленной на чертеже 260.

Применяя начало возможных перемещений, получаем для случая езды по низу линии, представленные на фигурах b , c и d .

134. Построить линии влияния, для системы, представленной на чертеже 261.



Черт. 261.

§ 36. Расчет ферм по линиям влияния.

Когда линии влияния построены для всех элементов проектируемой системы, дальнейший расчет усилий распадается на две операции. Во-первых, по виду линии влияния нужно для каждого стержня выбрать такое положение подвижной нагрузки, например, нормального поезда, при котором в этом стержне получается наибольшее растягивающее или наибольшее сжимающее усилие. Во-вторых, для этих выбранных положений нагрузки, нужно вычислить те наиболее невыгодные усилия, которыми приходится руководствоваться при конструировании фермы, т.е. при подборе таких поперечных размеров отдельных брусков, при которых было бы соблюдено условие прочности каждого элемента фермы.

Для простейшего случая, когда площадь влияния имеет треугольное очертания, было дано общее правило (§ 25), как нужно



Черт. 262.

располагать систему подвижных грузов, чтобы получить наиболее невыгодные условия. Для более сложных случаев, когда рассматриваемая площадь влияния ограничена тремя, четырьмя и т. д. прямыми, мы можем пользоваться прежними общими соображениями.

Пусть, например, дана линия, ограниченная сверху тремя прямолинейными участками (черт. 262), составляющими с горизонтальной осью углы α_1 , α_2 и α_3 . Углы условимся считать положительными, если движению слева направо соответствует возрастание ординат линии влияния, и отрицательными — в противоположном случае. Если ни один груз не располагается под вершиной линии влияния, и R_1, R_2, R_3 обозначают

равнодействующие грузов, расположенных на I, II и III участках, то перемещение системы вправо на величину δx сопровождается изменением ΣP_y на величину

$$(R_1 \operatorname{tg} \alpha_1 + R_2 \operatorname{tg} \alpha_2 + R_3 \operatorname{tg} \alpha_3) \delta x.$$

При движении системы влево знак этого приращения, конечно, меняется.

Между тем, положение системы, соответствующее максимальному значению усилия, характеризуется тем, что независимо от направления перемещения, приращение ΣP_y должно иметь знак отрицательный. На основании этого делаем заключение, что наиболее невыгодное положение нагрузки нужно искать среди тех расположений, при которых, по крайней мере, один из подвижных грузов располагается под одной из вершин линии влияния. Пусть, например, рассматриваемому случаю соответствует расположение одного из грузов на границе I и II участков. Тогда при движении вправо этот груз должен быть присчитан к равнодействующей R_2 . При противоположном направлении перемещения тот же груз придется присчитывать к равнодействующей R_1 . Если мы расположим систему подвижных грузов так, что

$$\Sigma R \operatorname{tg} \alpha < 0 \tag{a}$$

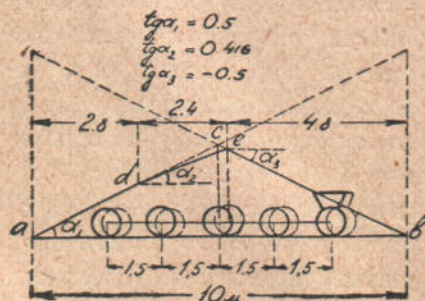
при движении системы вправо и

$$\Sigma R \operatorname{tg} \alpha > 0 \tag{a'}$$

при движении системы влево, то выбранное положение удовлетворит высказанному выше положению — при отодвижении от этого положения, как вправо так и влево, мы получаем убывание ΣP_y .

Выделяя для всех вершин линии влияния подобные расположения нагрузок, мы можем из них выбрать то, которому соответствует абсолютный максимум изучаемой величины. При изучении линий влияния сложных очертаний, бывает часто выгодно для предварительного выбора

надлежащего расположения нагрузки заменить действительное очертание линии другим, более простым, например, треугольным очертанием.



Черт. 263.

Возьмем численный пример, представленный на чертеже 263. Если мы для предварительной установки заменим линию $adeb$ более простым треугольным очертанием acb , то сейчас же заключаем, что для получения $\max \Sigma P_y$, при действии на балку давлений колес нормального паровоза, нужно среднее колесо расположить на середине пролета.

Так как вершина e нашей более сложной линии близка к вершине c , то естественно испробовать то положение поезда, при котором среднее колесо паровоза располагается под вершиной e . В таком случае при движении системы вправо получаем:

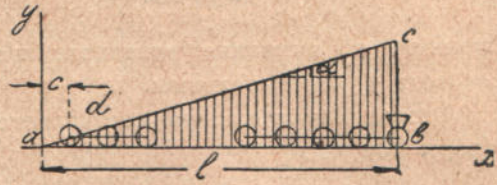
$$\Sigma R \operatorname{tg} \alpha = 10 \cdot 0,5 + 10 \cdot 0,416 - 30 \cdot 0,5 < 0.$$

При движении системы влево от выбранного положения:

$$\Sigma R \operatorname{tg} \alpha = 10 \cdot 0,5 + 20 \cdot 0,416 - 20 \cdot 0,5 > 0.$$

Основное требование удовлетворено, и мы при заданном расположении вершины d линии влияния можем легко убедиться, что выбранное расположение нагрузки действительно соответствует максимуму $\Sigma P y$.

Выбрав, на основании признака (a) и (a') надлежащее расположение нагрузки, мы должны для определения искомого расчетного усилия вычислить соответствующее значение $\Sigma P y$. Сумма эта, конечно, может быть определена на основании непосредственного измерения ординат линии влияния и умножения их на величины соответствующих грузов, но в случае нагрузки поездом мы быстрее придем к цели, если при вычислениях используем готовые таблицы моментов для различных типов нормального поезда. Способ применения этих таблиц поясним на отдельных примерах.



Черт. 264.

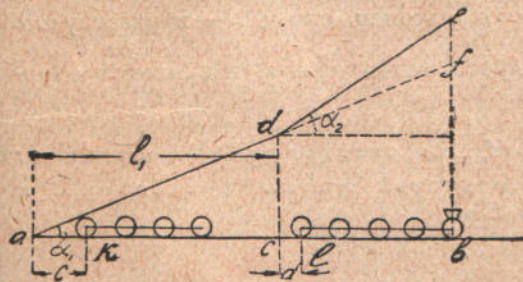
Возьмем простейший случай (черт. 264), когда линия влияния состоит из одного прямолинейного участка ac , наклоненного к горизонтальной оси под углом α .

В таком случае

$$\begin{aligned} \Sigma P y &= \Sigma P x \cdot \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \alpha \cdot M_a = \\ &= \operatorname{tg} \alpha \cdot (M_d + \Sigma P \cdot c). \end{aligned}$$

Значения M_d и ΣP могут быть взяты непосредственно из таблиц.

Когда линия влияния составлена из двух прямолиней-



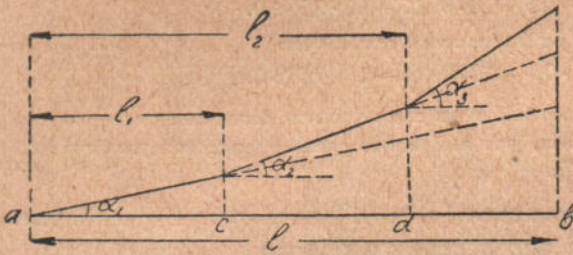
Черт. 265.

ных участков (черт. 265), то нужно принять во внимание, что на протяжении cb ординаты складываются из двух частей — из ординат линии af и ординат треугольника def .

Следовательно,

$$\begin{aligned} \Sigma P y &= \sum_1^m P x \operatorname{tg} \alpha_1 + \sum_n^m P (x - l_1) (\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1) = \\ &= \operatorname{tg} \alpha_1 \left(M_k + \sum_1^m P \cdot c \right) + (\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1) \left(M_l + \sum_n^m P \cdot d \right) \end{aligned} \quad (b).$$

Здесь через m обозначено общее число грузов, расположенных на линии ab , и через n — число грузов, лежащих на участке ac . Величины



Черт. 266.

$$M_k, M_l, \sum_1^m \rho \text{ и } \sum_n^m \rho$$

могут быть взяты непосредственно из таблиц. Полученная формула (б) применима и в том случае, когда площадь влияния имеет треугольное очертание, нужно только

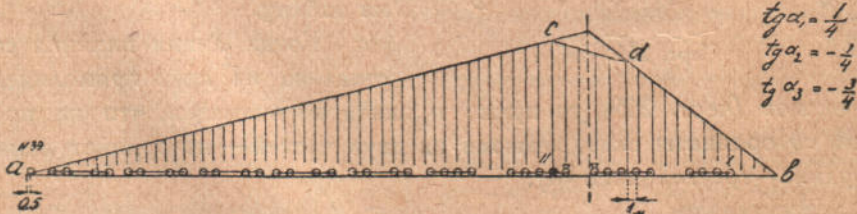
принять во внимание установленное правило знаков для углов α и считать α_2 отрицательным.

Если линия влияния составляется из трех прямолинейных участков (черт. 266), то

$$\begin{aligned} \sum \rho y &= \sum_1^m \rho x \operatorname{tg} \alpha_2 + \sum_1^m (x - l_1) (\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1) + \sum_p^m \rho (x - l_2) (\operatorname{tg} \alpha_3 - \operatorname{tg} \alpha_2) = \\ &= M_a \operatorname{tg} \alpha_1 + M_c (\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1) + M_d (\operatorname{tg} \alpha_2) \end{aligned} \quad (c).$$

Здесь через m обозначено общее число грузов, расположенных на прямой ab . Сумма \sum_1^m относится к грузам, лежащим на участке ab , сумма \sum_n^m относится к участку cb , и, наконец, сумма \sum_p^m — к участку db . Формула (с) применима и в том случае, когда углы α_2 и α_3 имеют отрицательное значение.

Задачи: 135. Определить M_{\max} в расстоянии 20 метров от правой опоры для балочной мостовой фермы пролетом 80 м при расстоянии между узлами 8 м.



Черт. 267.

Соответствующая линия влияния представлена на чертеже 267. Применяя общий признак, найдем, что для получения M_{\max} под вершиной c должен располагаться груз № 11 поезда того типа, где паровозы повернуты трубами друг к другу.

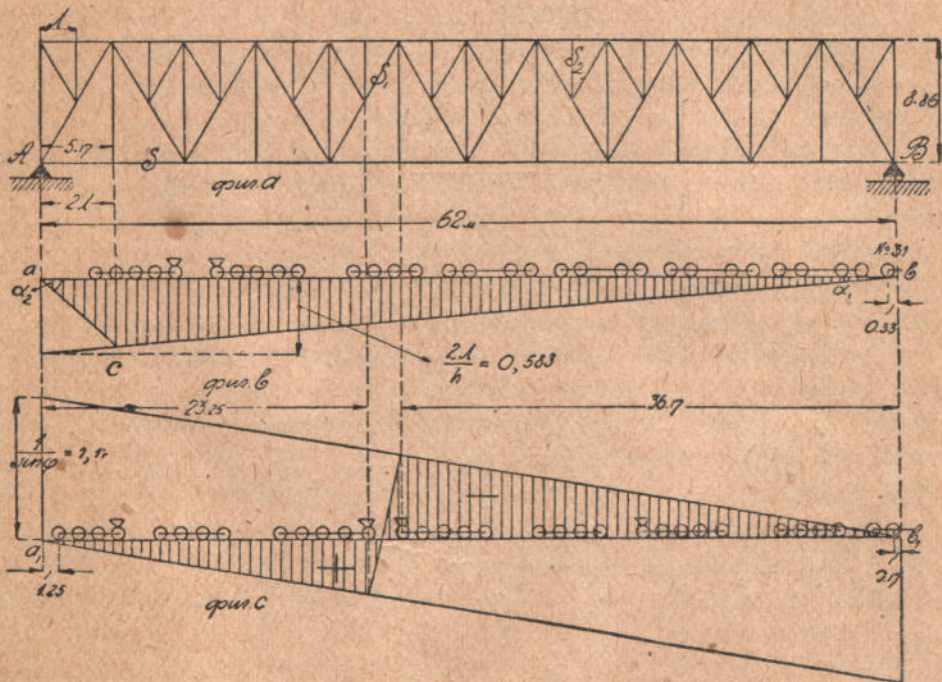
Всего на мосту расположится при этом 39 грузов, и ф-ла (с) дает нам:

$$M_{\max} = \Sigma P y = \left(M_{39} + \sum_1^{39} \rho \cdot 0,5 \right) \operatorname{tg} \alpha_1 + M_{11} (\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1) + \\ + \left(M_6 + \sum_1^6 \rho \cdot 1,0 \right) (\operatorname{tg} \alpha_3 - \operatorname{tg} \alpha_2) = (23292 + 564 \cdot 0,5) \frac{1}{4} - \\ - 1718 \cdot 0,5 - (464 + 96 \cdot 1) \frac{1}{2} \approx 4754 \text{ т} \cdot \text{м}.$$

Предполагая распределение нагрузки поровну на две фермы, получим:

$$M_{\max} \approx 2377 \text{ т} \cdot \text{м}.$$

136. Вычислить максимальные значения усилий S , S_1 , S_2 , вызываемых подвижной нагрузкой в ферме железнодорожного моста, представленной на чертеже 263.



Черт. 263.

Соответствующие линии влияния для S и S_1 и расположение нагрузки указаны на фигурах b и c . Для получения максимального значения усилия S в крайней панели нижнего пояса, выбираем то расположение нормального поезда, когда второе колесо поезда располагается под вершиной c линии влияния asc (фиг. b). Левая опорная реакция при выбранном положении поезда равна:

$$A = \left(M_{31} + \sum_1^{31} \rho \cdot 0,33 \right) \frac{1}{62} = (15422 + 153) \frac{1}{62} = 251,2 \text{ т}.$$

Следовательно, искомое усилие в нижнем поясе равно:

$$S = \left(\frac{1}{2} A \cdot 5,17 - 10 \cdot 1,5 \right) \frac{1}{8,86} \approx 71,5 \text{ т.}$$

Если бы нужно было учесть также влияние постоянной равномерной нагрузки, то для этого следовало бы к полученному усилию прибавить произведение из площади влияния на интенсивность нагрузки q . Например, при $q = 1,8 \frac{\text{т}}{\text{м}}$ получим для усилия от равномерной нагрузки:

$$q \cdot \frac{l}{2} y_c = 1,8 \cdot 31 \cdot 0,53 \approx 29,8 \text{ т.}$$

Расположения нагрузок, соответствующие наибольшим растягивающему и сжимающему напряжениям в раскосе S_1 , показаны на фигуре с. Пользуясь таблицами найдем

$$S_{1\text{min}} = -62,3 \text{ т;} \quad S_{1\text{max}} = +27,6 \text{ т.}$$

Г Л А В А IV.

О деформациях плоских стержневых систем с идеальными шарнирами.

§ 37. Общие замечания.

Во всех предыдущих задачах мы занимались определением усилий, возникающих в стержнях ферм под действием заданных нагрузок. При этом мы рассматривали фермы, как абсолютно жесткие, геометрически неизменяемые системы. В действительности стержни ферм несколько изменяют свою длину и эти изменения сопровождаются соответствующими перемещениями узлов фермы. Хотя эти перемещения при тех напряжениях, какие допускаются на практике в строительных материалах, получаются обыкновенно весьма малыми, но их вычисление в некоторых случаях представляет практический интерес. Например, важное значение имеет вопрос о прогибах мостовых ферм под действием подвижной нагрузки. Большое значение представляет вопрос о перемещениях в связи с расчетом статически неопределимых систем. Совершенно так же, как и для статически неопределимых случаев расчета сплошных балок, при расчете систем с лишними стержнями или лишними опорными закреплениями приходится к ур-ям статики присоединять дополнительные ур-я, составленные на основании рассмотрения деформаций системы.

Когда определены усилия S во всех стержнях системы и найдены на основании закона Гука удлинения

$$\delta l = \frac{S \cdot l}{FE} \quad (a)$$

всех стержней, то определение перемещений узлов фермы представляет чисто геометрическую задачу. В случае статически определимой системы с n узлами задача эта, как легко показать, может быть приведена к решению системы $2n$ ур-ий, линейных относительно $2n$ малых величин δx_i и δy_i , представляющих искомые приращения координат узловых точек рассматриваемой фермы. В самом деле, пусть l_{ik} — длина стержня, соединяющего узлы i и k , тогда

$$l_{ik}^2 = (x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2.$$

Дифференцированием мы устанавливаем такую зависимость между приращением длины стержня, которое может быть найдено на основании формулы (а), и изменениями координат соответствующих узловых точек:

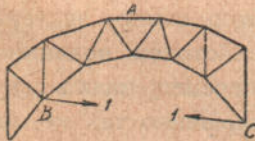
$$l_{ik} \delta l_{ik} = (x_i - x_k) \delta x_i - (x_i - x_k) \delta x_k + (y_i - y_k) \delta y_i - (y_i - y_k) \delta y_k$$

Подобных уравнений мы можем написать столько, сколько имеется стержней (считая и опорные стержни), т. е. $2n$ ур-ий, которые будут заключать $2n$ неизвестных приращений координат узловых точек.

Общий способ определения перемещений узлов фермы сводится таким образом к решению системы $2n$ линейных ур-ий с $2n$ неизвестными. Способ этот, хотя и не представляет принципиальных затруднений, но в приложениях является весьма громоздким, и на практике им не пользуются. Практика выработала ряд других приемов, которые быстрее ведут к цели. К изложению этих приемов мы теперь перейдем.

§ 33. Способ Максвелля.

В 1864 году в небольшой по объему работе Клерк Максвелль опубликовал ¹⁾ способ определения перемещений узлов фермы и общий прием



Черт. 269.

для расчета статически неопределимых стержневых систем. Геометрическую задачу об определении перемещений узлов фермы по изменениям длин стержней Максвелль решает на основании самых элементарных рассуждений. В первую очередь он рассматривает такую простую задачу: найти увеличение расстояния L между узлами B

и C фермы, получающееся вследствие удлинения стержня A на величину δl (фиг. 269). Для решения этого вопроса приложим в B и C две равные и прямопротивоположные силы единица и определим усилие S' , вызываемое этими силами в стержне A . Удалим теперь стержень A и вместо него приложим две равные и прямопротивоположные силы S' . Таким образом получаем подвижную систему, находящуюся в равновесии под действием сил S' и сил единица, приложенных в B и C . Применяя к этой системе сил начало возможных перемещений, получаем ур-ие:

$$+ S' \cdot \delta l + 1 \cdot \delta L = 0,$$

откуда

$$\delta L = - S' \cdot \delta l.$$

¹⁾ См. Philosophical Magazine, 1864 г., т. 27, стр. 294 „On the calculation of the equilibrium and stiffness of frames“. Эта работа, к сожалению, осталась неизвестной для широких кругов инженеров, и намеченный в ней способ расчета вошел в практику значительно позднее после работ Мора, опубликованных в 1874 г.

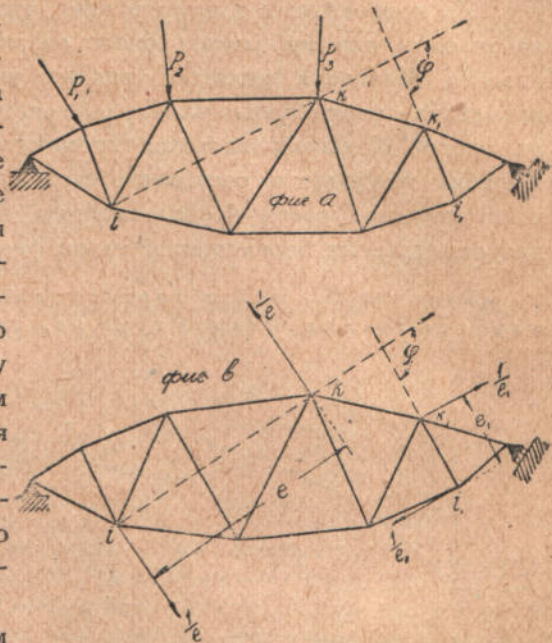
Подобным же образом может быть учтено влияние удлинения любого стержня на изменение расстояния между B и C , и полное увеличение расстояния BC , обусловленное деформацией всех стержней системы, представится так:

$$\delta L = -\sum S' \cdot \delta l \quad (b)$$

Выражение (b) может быть получено и непосредственно, если мы, применяя начало возможных перемещений, будем иметь в виду два состояния рассматриваемой системы: действительное, при котором стержни получают удлинение δl , и фиктивное, когда на систему действуют две равные и прямопротивоположные силы единица, приложенные в точках B и C . Эти силы вместе с усилиями S' , возникающими в системе, представляют систему сил взаимно уравновешивающихся, а потому работа их на всяком возможном перемещении должна равняться нулю. Выбирая в качестве возможных перемещений действительные перемещения первого состояния, мы приходим сейчас же к ур-ию (b).

Пользуясь обобщенным понятием силы и соответствующего перемещения, мы легко можем применить способ Максвелла к определению изменений всякого рода величин, определяющих форму заданной системы. Например, мы можем определять изменения расстояний между различными прямыми, принадлежащими системе, можем вычислять изменение углов между отдельными стержнями системы и т. д.

Положим, требуется найти изменение угла φ между прямыми ik и i_1k_1 , получающееся при действии заданной системы грузов (черт. 270, фиг. a). Кроме действительного состояния системы, которому соответствуют удлинения стержней δl , рассмотрим еще фиктивное состояние (фиг. b), когда все заданные нагрузки отброшены, и к ферме приложена сила, соответствующая искомому перемещению. Обобщенная сила в данном случае составит из двух равных и прямопротиво-



Черт. 270.

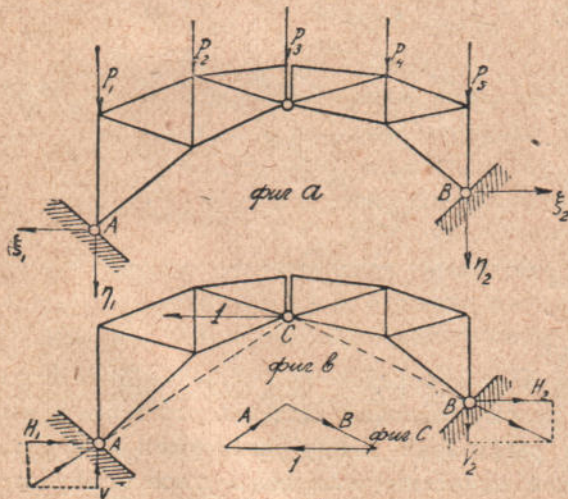
положных пар сил с моментами, равными единице, приложенных так, как это указано на фигуре *b*. Пусть S' усилия в стержнях системы для этого фиктивного состояния. Тогда, принимая за возможные перемещения действительные перемещения, соответствующие заданным нагрузкам, и, пользуясь началом возможных перемещений, получим ¹⁾:

$$1 \cdot \delta\varphi - \sum S' \cdot \delta l = 0,$$

откуда сейчас же может быть найдено искомое изменение угла $\delta\varphi$.

Из приведенных примеров ясно, что в тех случаях, когда требуется найти одно или небольшое число различных перемещений, применение способа Максвелла является вполне уместным. Когда же требуется определить перемещения всех узлов системы или большого количества их, способ Максвелла является громоздким, так как для каждого перемещения приходится составлять свою систему усилий S' . В таких случаях выгоднее всего воспользоваться одним из графических приемов для определения перемещений узлов фермы.

Задачи: 137. Найти горизонтальное перемещение среднего шарнира трехшарнирной арки под действием заданной нагрузки



Черт. 271.

(черт. 271, фиг. *a*), если при этом получаются перемещения пятовых шарниров, определяемые составляющими ξ_1, η_1, ξ_2 и η_2 , и, кроме того, температура отдельных стержней системы повышается на t градусов.

Кроме действительного состояния системы будем рассматривать фиктивное, представленное на фигуре *b*. Из треугольника сил (фиг. *c*) сейчас же находим соответствующие фиктивному состоянию опорные реакции A и B и их составляющие H_1, H_2, V_1 и V_2 . После этого легко находятся усилия S' в стержнях системы.

Обратимся теперь к действительному состоянию системы. Через S будем обозначать усилия для этого состояния. Тогда удлинение δl какого-либо стержня под действием возникающего в нем усилия и под влиянием повышения температуры на t градусов определяется так:

$$\delta l = \frac{Sl}{EF} + \alpha t l,$$

где α — коэффициент линейного расширения материала стержня.

¹⁾ Минус перед знаком суммы получается потому, что при удлинении δl усилия S' заменяющие растянутый стержень, совершают отрицательную работу.

Определив таким образом действительные удлинения стержней, будем их рассматривать как возможные перемещения для системы усилий фиктивного состояния. Тогда уравнение равновесия, принимая во внимание смещение опор для действительного состояния, напишется так:

$$1 \cdot \delta - H_1 \xi_1 - V_1 \eta_1 + H_2 \xi_2 + V_2 \eta_2 - \Sigma S' \cdot \delta l = 0,$$

откуда для искомого горизонтального перемещения шарнира C

$$\delta = \Sigma S' \left(\frac{Sl}{EF} + \alpha tl \right) + H_1 \xi_1 + V_1 \eta_1 - H_2 \xi_2 - V_2 \eta_2.$$

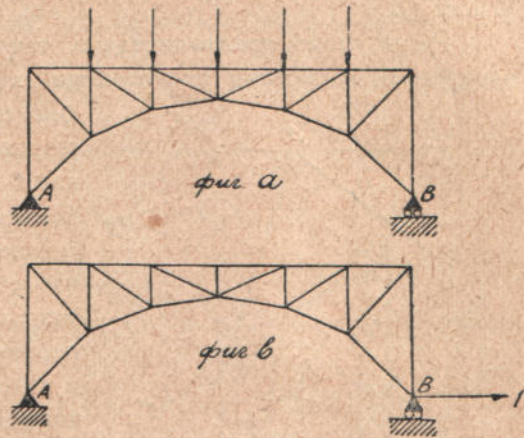
138. Определить перемещение подвижной опоры B (черт. 272, фиг. а) под действием заданной нагрузки и при условии изменения температуры отдельных стержней системы на t градусов.

Кроме действительного состояния системы придется рассмотреть фиктивное состояние, представленное на фигуре b . Определив усилия S' для фиктивного состояния и удлинения стержней

$$\delta = \frac{Sl}{EF} + \alpha tl$$

для действительного состояния, найдем искомое перемещение из уравнения

$$1 \cdot \delta = \Sigma S' \cdot \delta l.$$



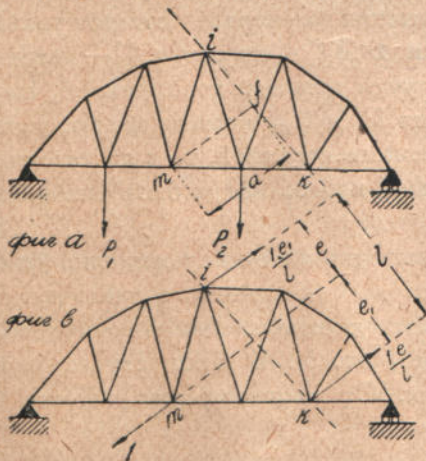
Черт. 272.

139. Найти изменение расстояния a между узлом m и прямой ik , измеренного в заданном направлении mf (черт. 273, фиг. а).

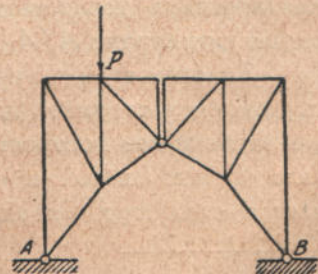
Задача заключается в подлежащем выборе типа обобщенной силы, соответствующей искомому перемещению. Такая сила, представляющая группу, составленную из трех сил, изображена на фиг. b . Работа этой группы сил, при изменении расстояния a на величину δ , будет равняться $1 \cdot \delta$. Применяя начало возможных перемещений к усилиям S' фиктивного состояния и перемещениям δl и δ действительного состояния, получим:

$$1 \cdot \delta - \Sigma S' \cdot \delta l = 0,$$

откуда находится искомое перемещение δ .



Черт. 273.



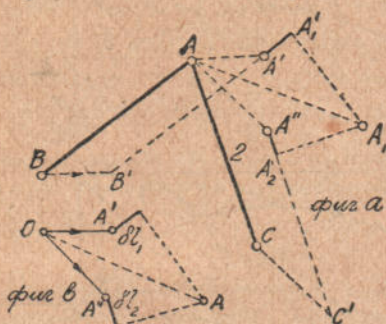
Черт. 274.

140. Найти повышение ключевого шарнира C трехшарнирной арки (черт. 27.) под действием заданной нагрузки и повышения температуры отдельных стержней системы.

§ 39. Диаграмма Виллио для простейших систем.

В случае простейших систем, составленных путем присоединения к основному треугольнику последовательно всех узлов фермы, каждого двумя стержнями, вопрос о перемещениях легко решается при помощи диаграммы перемещений, впервые построенной Williot ¹⁾.

Рассмотрим предварительно такую простейшую задачу. Узел A прикреплен к системе при помощи двух стержней AB и AC (черт. 275, фиг. а). Положим, заданы перемещения шарниров B и C , а также изменения длин δl_1 и δl_2 стержней 1 и 2. Требуется найти соответствующее перемещение узла A . Для этого предположим что соединение стержней в шарнире A устранено. После этого стержень AB перенесен параллельно самому себе в положение $A'B'$ так, что BB' по величине и направлению представляет заданное перемещение шарнира B . Точно так же стержень AC перенесен в положение $A''C'$ так, что CC' представляет заданное перемещение шарнира C .



Черт. 275.

После этого для получения нового положения шарнира A остается только из точки B' сделать засечку радиусом $B'A_1'$ и из точки C' — засечку радиусом $C'A_2'$. В пересечении мы получим искомое положение A_1 шарнира A . Так как практически удлинения δl_1 и δl_2 , а также перемещения узлов фермы малы по сравнению с длинами стержней, то с достаточной для практики точностью засечки дугами кругов могут быть заменены перпендикулярами $A_1'A_1$ и $A_2'A_1$.

Заметим еще, что при построении выгодно малые перемещения узлов и удлинения стержней для ясности чертежа откладывать в увеличенном масштабе и все построения, относящиеся к определению перемещения узла A , выполнять на особом чертеже (фиг. б). В таком случае получается следующий порядок построения. От произвольного полюса O

¹⁾ Williot, Publications scientifiques industrielles, 1877.

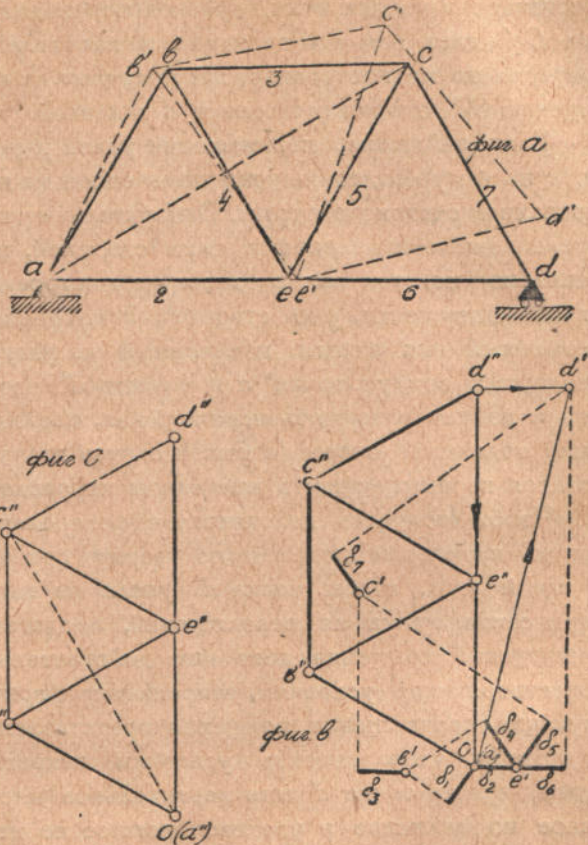
откладываем в выбранном масштабе по величине и направлению перемещения OA' и OA'' шарниров B и C . Из концов A' и A'' проведенных отрезков откладываем удлинения δl_1 и δl_2 . При этом нужно обращать внимание на направление, в котором эти отрезки должны быть отложены. Если стержень AB удлиняется, то соответствующий отрезок δl_1 откладывается от точки A' в направлении от B к A . Точно так же сжатие стержня AC соответствует откладыванию отрезка δl_2 от точки A'' в направлении от A к C . Восставив в концах отложенных отрезков перпендикуляры и получив точку их пересечения A , найдем искомое перемещение OA шарнира A .

Освоившись с этим построением, мы теперь без всяких затруднений построим перемещения узлов любой простейшей системы. Возьмем, например, систему, представленную на чертеже 276.

Предварительно вычисляем удлинение и укорочение $\delta_1, \delta_2, \dots$ всех стержней (сжаты стержни 1, 3 и 7, растянуты — 2, 4, 5 и 6). Точка a по условиям закрепления остается неподвижной. Предположим еще, что стержень ae сохраняет свое направление.

Тогда перемещение точки e направлено горизонтально и равно удлинению δ_2 . Соответственно этому на фигуре b , где построены перемещения, точка a' совпадает с полюсом O и точка e' получена откладыванием от полюса O отрезка δ_2 по горизонтальному направлению вправо, так как соответствующий стержень 2 — растянут.

Определив таким образом перемещение узлов a и e и зная приращение длин δ_1 и δ_4 , мы сейчас же можем на фигуре b найти точку b' , определяющую перемещение шарнира b . Для этого из e' проводим



Черт. 276.

отрезок δ_4 в направлении от e к b и из a' — отрезок δ_1 в направлении от b к a . Из концов отложенных таким образом отрезков восстанавливаем перпендикуляры и в пересечении их получаем точку b' . Луч Ob' по величине и направлению даст нам перемещение точки b .

Имея на фигуре b точки b' и e' , мы тем же способом можем построить точку c' . Для этого из точки e' в направлении от e к c откладываем отрезок δ_5 и из точки b' в направлении от c к b — отрезок δ_3 . Восстанавливая в концах этих отрезков перпендикуляры, получаем точку c' . Луч Oc' даст нам по величине и направлению перемещение узла c . Повторяя то же построение, мы получаем на фигуре b точку d' и перемещение Od' опорного шарнира d заданной фермы.

Если найденные перемещения узлов в уменьшенном масштабе нанести на фигуре a , то получим намеченное на чертеже пунктиром деформированное состояние фермы. Относительные перемещения узлов фермы, обусловленные изменениями длин стержней, найдены нами совершенно правильно, но, так как в основание построения было положено произвольное допущение, что стержень 2 сохраняет свое направление, то искаженный вид фермы, намеченный на фигуре a пунктиром, оказался повернутым вокруг точки a и шарнир d' , который по условиям закрепления должен совершать перемещения, параллельные плоскости скольжения подвижной опоры (в нашем случае горизонтальные перемещения), оказался перемещенным в наклонном направлении dd' .

Чтобы получить действительные перемещения узлов, нужно намеченную пунктиром искаженную ферму повернуть вокруг шарнира a на такой угол, чтобы точка d' упала на направление ad . Тогда геометрическая сумма из перемещений, представленных фигурой b , и из перемещений вращения даст нам действительные перемещения узлов, удовлетворяющие условиям закрепления фермы. Для ясности соответствующие перемещения вращения представлены отдельно на фигуре c .

Чтобы удовлетворить условиям закрепления на правой опоре фермы, нужно точке d дать вертикальное перемещение вращения $d'O$, равное по величине и противоположное по направлению вертикальной составляющей перемещения Od' , полученного на фигуре b . Наметив точки a'' и d'' , мы для получения перемещений вращения прочих узлов фермы должны будем только на вертикальном отрезке $a''d''$ построить фигуру $a''b''c''d''e''$, геометрически подобную очертанию заданной фермы.

В самом деле, если нам нужно получить перемещение вращения, соответствующее, например, узлу c , то направление перемещения придется наметить, очевидно, перпендикулярно радиусу ac , соединяющему рассматриваемый узел с центром вращения a , а величина перемещения $c''a''$ будет пропорциональна этому радиусу. Следовательно, тре-

угольник $a''c''d''$ на фигуре c получится подобным треугольнику aca' (фиг. a) и повернутым относительно этого последнего на 90° . Такое же заключение можно получить и для прочих узлов фермы. Следовательно, построенная нами фигура $a''b''c''d''e''$ действительно даст перемещения вращения для всех узлов заданной фермы.

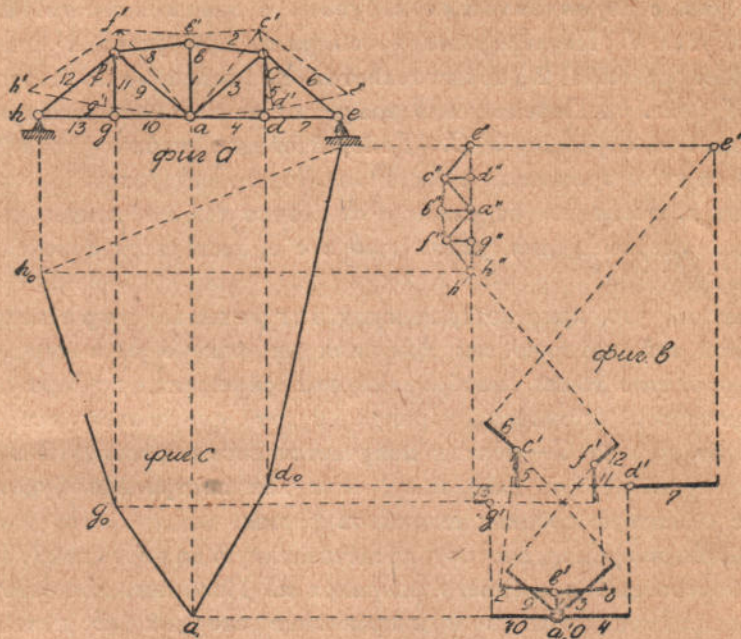
Для удобства геометрического сложения ранее полученных перемещений (фиг. b) с перемещениями вращения, мы перенесем фигуру c на фигуру b , тогда отрезки, соединяющие точки с одинаковыми буквами, сразу будут давать величину перемещения. Направление перемещений идет от букв с двумя значками к буквам с одним значком. Возьмем, например, узел d . Перемещение этого узла, при условии сохранения направления стержня 2, представляется по величине и направлению лучом Od' (фиг. b). Перемещение вращения по величине и направлению представляется отрезком $d''O$. Действительное перемещение узла d , являющееся геометрической суммой только что найденных перемещений, представится, очевидно, отрезком $d''d$. Точно так же найдем, что действительные перемещения узлов c , b и e представятся отрезками $c''c'$, $b''b'$ и $e''e'$.

Заметим, что при построении диаграммы перемещений, аналогичной той, которую мы получили на фигуре b , в случае ферм больших пролетов точки, изображающие перемещения, по мере удаления от неподвижного опорного шарнира будут получаться все дальше и дальше от полюса O —чертеж получается весьма растянутым. Мы получим менее растянутую диаграмму, если все построение будем вести начиная с одного из средних шарниров фермы.

Возьмем, например, систему, представленную на чертеже 277 (фиг. a). Начнем построение с среднего шарнира a . Положим, что этот шарнир остается неподвижным и направление стержня ab неизменным. Тогда на диаграмме перемещений (фиг. b) точка a' совпадает с полюсом O , и точка b' расположится в конце вертикального отрезка $a'b'$, равного удлинению стержня 1. Наметив точки a' и b' , мы ведем теперь дальнейшее построение так же, как это было показано раньше. Имея удлинения δ_3 и δ_2 , мы строим точку c' . По удлинениям δ_8 и δ_9 строим точку f' . Далее наносим точки d' , g' и, наконец, опорные шарниры h' и e' .

Получив таким образом перемещения всех точек и нанеся эти перемещения в уменьшенном масштабе на фигуре a , мы получим намеченное на чертеже пунктиром деформированное состояние фермы. Так как мы при построении исходили из произвольного допущения: приняли шарнир a неподвижным и стержень ab неповорачивающимся, то в результате нашего построения условия на опорах фермы оказываются не удовлетворенными. Шарниры h и e переместились в положение h' и e' .

Чтобы получить действительные перемещения шарниров, нам нужно теперь намеченную пунктиром искаженную ферму переместить как неизменяемую систему в такое положение, чтобы были удовлетворены условия на опорах. Этому мы можем достигнуть таким образом. Сначала перемещаем ферму поступательно так, чтобы точка h' совпала с точкой h (фиг. а). После этого вращаем ферму относительно h до тех пор, пока точка e' не упадет на линию he , соответствующую направлению скольжения подвижного шарнира e . Перемещения узлов, соответствующие



Черт. 277.

указанным двум движениям, должны быть геометрически сложены с перемещениями, полученными на диаграмме b . Тогда в результате этого сложения мы получим действительные перемещения узлов фермы.

Чтобы к перемещениям, найденным на фигуре b , прибавить поступательное перемещение $h'O$, нужно только полюс, от которого производится отсчет перемещений, перенести из точки O в точку h' . Легко показать, что такой перенос соответствует геометрическому сложению найденных раньше перемещений с перемещением $h'O$. Возьмем, например, узел c . Найденное для него перемещение по величине и направлению определяется лучом Oc' , имеющим направление от точки O к точке c' . К этому перемещению нужно прибавить вектор $h'O$. Геометрическая сумма этих отрезков даст нам вектор $h'c'$, имеющий направление от точки h' к точке c' . Перенос полюса из точки O в h'

соответствует, следовательно, сложению найденного раньше перемещения Os' с поступательным перемещением $h'O$. Подобное заключение справедливо и для других узлов фермы.

Выполнив поступательное перемещение фермы, мы должны будем в точке h' , с которой теперь совпадает полюс, поместить и точку h'' , так как действительное перемещение этой опорной точки равно нулю.

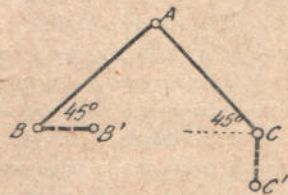
Обратимся теперь к другому опорному шарниру—шарниру e . После поступательного передвижения искаженной фермы, перемещение этого шарнира представится лучом $h'e'$ и имеет наклонное направление. Так как по условиям закрепления перемещение правой опоры должно быть горизонтальным, то после поступательного переноса фермы, ее придется повернуть вокруг h на такой угол, чтобы уничтожить вертикальную составляющую перемещения $h'e'$. Другими словами перемещение вращения шарнира e должно представиться по величине и направлению отрезком $e''h''$.

Для получения перемещений вращения других узлов фермы остается только на вертикальном отрезке $e''h''$ построить фигуру, геометрически подобную очертанию заданной фермы. Отрезки, соединяющие на фигуре b точки с одинаковыми буквами, дадут нам величины соответствующих действительных перемещений. Направления перемещений идут от букв с двумя значками к буквам с одним значком. Например, перемещение узла d по величине и направлению определится вектором $d'd''$.

На практике особое значение имеют вертикальные перемещения (прогибы) узлов пояса фермы. Для данного случая, проектируя перемещения, найденные на фигуре b , на вертикали, проведенные через узлы пояса (фиг. a), и проводя замыкающую h_0e , легко получаем прогибы узлов нижнего пояса фермы (фиг. c). Многоугольник $h_0g_0a_0d_0e$ называют многоугольником прогибов или линией прогибов.

Заметим здесь, что построение диаграммы перемещений легко может быть выполнено намеченным здесь способом и в тех случаях, когда перемещения подвижной опоры не горизонтальны, а происходят по заданному наклонному направлению.

Задача: 141. Найти перемещение узла A (черт. 278), если узел B совершает горизонтальное перемещение, равное 2 мм, а узел C перемещается вертикально вниз на 2 мм. Длина брусков AB и AC остается при этом неизменной.

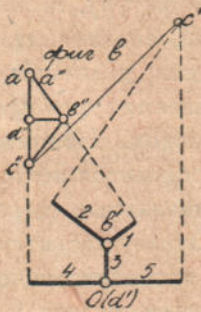
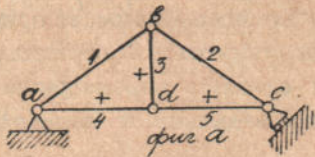


Черт. 278.

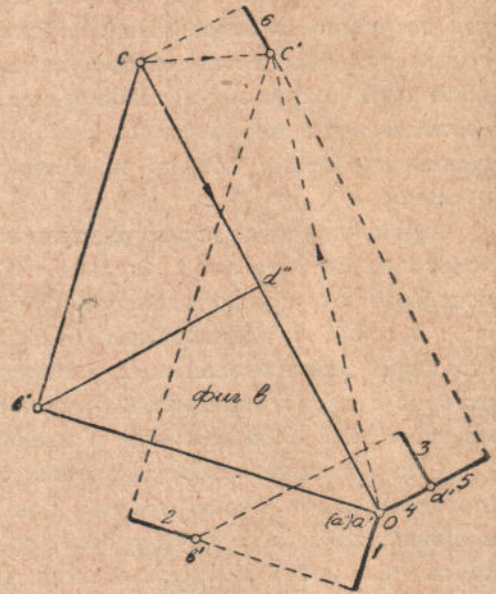
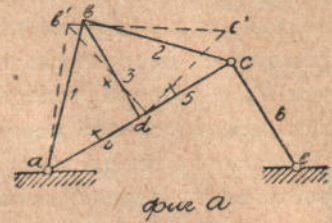
142. Построить диаграмму перемещений и найти прогиб по середине для системы, представленной на чертеже 279.

Предположим, что шарнир d остается при деформациях неподвижным и направление стержня bd неизменным. Тогда, пользуясь готовыми значениями удлинений $\delta_1, \delta_2, \dots$

(растянутые стержни отмечены на фигуре *a* знаком +), получаем на диаграмме перемещений (фиг. *b*) точки *b'*, *c'* и *a'*. Перемещения *Oa'* и *Oc'* не удовлетворяют условиям закрепления фермы на опорах. Мы должны искаженной ферме дать поступательное перемещение, равное *a'O* (шарнир *a* — неподвижен), и потом повернуть ферму около точки *a* так, чтобы перемещение *c''c'* шарнира совпало с направлением скольжения подвижной опоры. Для этого мы принимаем точку *a'* за полюс, проводим



Черт. 279.



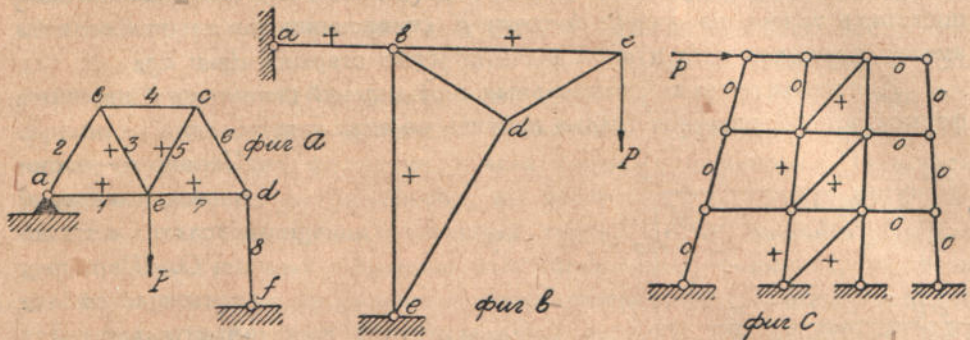
Черт. 280.

$c''c'$ параллельно направлению перемещения опоры *c* и на полученном таким образом вертикальном отрезке *a'c'* строим фигуру *a''b''c''*, подобную очертанию заданной системы. Из полученной таким образом диаграммы сейчас же могут быть найдены все перемещения по величине и направлению.

143. Построить диаграмму перемещений для системы, представленной на чертеже 280.

Предполагая точку *a* неподвижной и стержень *ad* неповорачивающимся, строим на диаграмме перемещений (фиг. *b*) точки *d'*, *b'* и *c'*. Получаемое при этом расположение искаженной фермы (см. фиг. *a*) не удовлетворяет условию закрепления точки *c*. Всю систему необходимо повернуть около шарнира *a* так, чтобы перемещение шарнира *c* соответствовало заданному укорочению δ_b стержня *b*. Для этого на фигуре *b* к найденному перемещению *Oc'* нужно геометрически прибавить такое перемещение $c''O \perp ac$, чтобы сумма этих перемещений $c''c'$ имела в направлении стержня *bc* составляющую равную δ_b . Теперь остается только на отрезке *Oc''* построить фигуру $c''b''a''d''$, геометрически подобную заданной ферме, и мы будем иметь на чертеже величины и направления перемещений всех узлов фермы.

144. Построить диаграммы перемещений для узлов систем, представленных на чертеже 281.



Черт. 231.

Нулевые усилия и усилия растяжения отмечены на чертежах. Изменения длин всех стержней предполагаются известными.

§ 40. Диаграмма Виллио для сложных ферм.

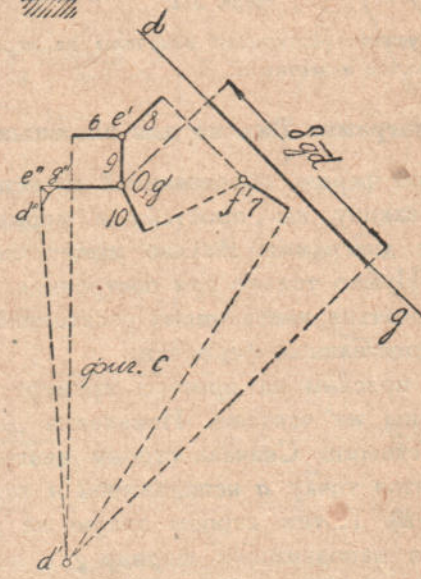
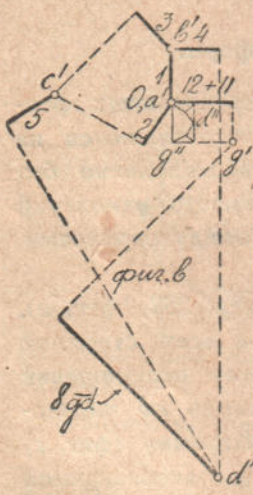
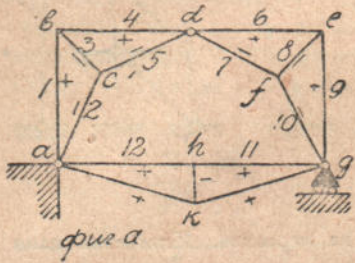
В случае сложной фермы, образованной из вспомогательных фермочек по такому же закону, как простейшие фермы составляются из стержней, построение диаграммы Виллио может быть выполнено без всяких затруднений. Нужно только при построениях вместо изменений длин стержней пользоваться изменениями расстояний между шарнирами, соединяющими вспомогательные фермочки.

Ход построения поясним на простом примере (чер. 282, фиг. а). Знаки усилий отмечены на чертеже. Изменения длин всех стержней предполагаются известными. Сначала строим диаграмму перемещений для фигуры $abcd$, считая точку a неподвижной и стержень ab неповорачивающимся (фиг. б). Потом строим такую же диаграмму (фиг. с) для части $defg$, считая неподвижным шарнир g и неповорачивающимся стержень eg . Из этой новой диаграммы мы сейчас же можем найти изменение расстояния между шарнирами d и g . Для этого нужно только отрезок $g'd'$, представляющий относительное перемещение этих шарниров, спроектировать на направление линии dg . Полученный таким образом отрезок δgd даст нам укорочение расстояния между шарнирами d и g .

Чтобы нанести на фигуре b точку g' , определяющую перемещение шарнира g , нужно еще определить изменение расстояния между шарнирами a и g . Для этого, вообще говоря, требуется построение диаграммы перемещений для фермочки $ahgk$, но в данном случае можно избежать этого построения. Стержни ah и hg расположены по одной прямой, поэтому сближение точек a и g , обусловленное поворачиванием этих стержней на малые углы, представится малой величиной высшего порядка, которой можно пренебречь. В таком случае изменение расстояния ag

определится, как сумма уже известных нам удлинений стержней ah и hg . Определив таким образом изменения расстояний dg и ag , мы можем построить теперь на фигуре b точку g' совершенно так же, как если бы вместо фермочек $defg$ и $ahgk$ были простые стержни dg и ag .

Для нахождения действительных перемещений шарнира g и шарниров фермочки $abcd$, остается только принять во внимание условия на опорах.



Черт. 282.

Шарнир a — неподвижен, поэтому a' совпадает с полюсом O . Шарнир g перемещается горизонтально. Для получения соответствующей точки g'' на фигуре b , нужно через найденную точку g' провести горизонтальную линию до пересечения с вертикалью, идущей через полюс, в точке g'' . Теперь остается только на отрезке $d'g''$ построить фигуру, геометрически подобную очертанию заданной сложной фермы. Чтобы получить перемещение

узлов фермочки $degf$, нужно на фигуре c нанести найденные уже действительные перемещения $d''d'$ и $g''g'$ шарниров d и g и по точкам d'' и g'' построить фигуру $d''e''g''f''$, подобную очертанию фермочки $degf$. Если построения выполнены правильно, то направление $d''g''$ должно получиться перпендикулярным направлению dg . Таким образом получаем все данные для определения перемещений узлов сложной фермы.

На основании сделанного примера, можно наметить такой порядок построения диаграммы Виллио для сложных систем рассматриваемого типа. Сначала выбираем одну из фермочек и все остальные фермочки заменяем стержнями, располагающимися между шарнирами, соединяющими фермочки, и между опорными шарнирами. Полученная таким

образом система из заменяющих (фиктивных) стержней будет образована по типу простейшей системы. Изменения длин фиктивных стержней получаем из частных диаграмм, которые должны быть построены для каждой вспомогательной фермочки. Пользуясь диаграммой для выбранной фермочки и изменениями длин для фиктивных стержней, строим, руководствуясь прежними правилами, перемещения всех шарниров, соединяющих фермочки, и всех опорных шарниров. Пользуясь условиями закрепления на опорах, мы после этого легко находим и действительные перемещения указанных точек. Чтобы получить перемещения промежуточных шарниров вспомогательных фермочек, остается только на построенные раньше частные диаграммы отдельных фермочек нанести уже найденные действительные перемещения соединительных шарниров. Этих точек будет достаточно для получения, путем построения геометрически подобных фигур, перемещений всех прочих узлов.

Задачи: 145. Построить диаграмму перемещений для фермы Полонсо (черт. 283).

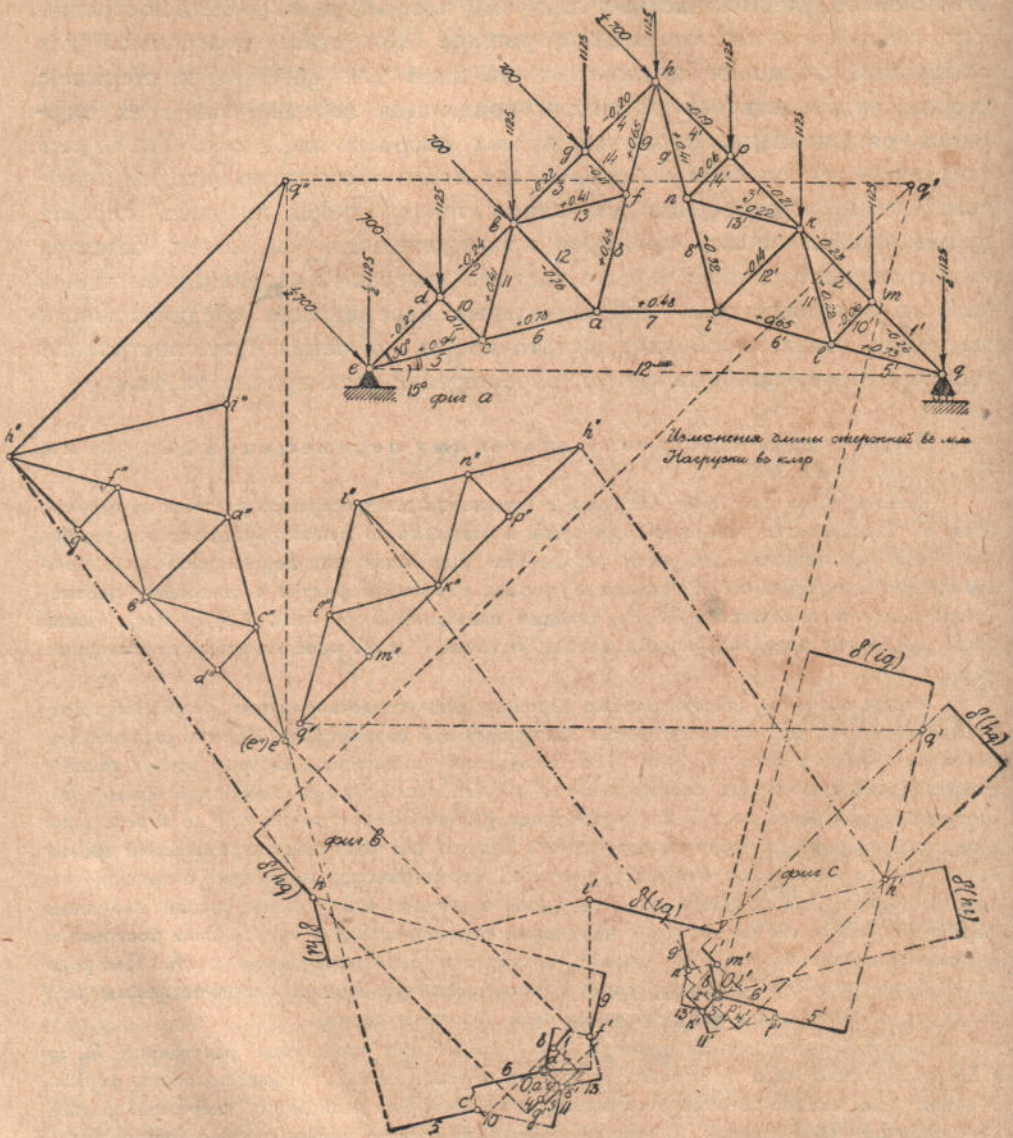
Действующие на ферму нагрузки и изменения длин стержней указаны на чертеже (фиг. *a*). Предполагая узел *a* неподвижным и стержень *ab* неповорачиваемым, строим диаграмму перемещений для части фермы *eha*. Для получения перемещений шарниров *i* и *q*, принадлежащих второй половине фермы, строим на фигуре *c* диаграмму перемещений для этой половины и из нее находим изменение длин $\delta(hi)$, $\delta(hq)$ и $\delta(iq)$. После этого, по общим правилам, строим на фиг. *b* точки *i'* и *q'*, определяющие перемещение узлов *i* и *q*.

Чтобы получить действительные перемещения, удовлетворяющие условиям закрепления на опорах, мы сообщаем ферме поступательное перемещение $e'O$, что равносильно переносу полуса в точку e' (фиг. *b*), и после этого поворачиваем ферму вокруг точки *e* с таким расчетом, чтобы перемещение $q''q'$ узла *q* получилось горизонтальным. Для этого проводим через построенную уже точку q' горизонтальную прямую до пересечения с вертикалью, идущей через e' , в точке q'' . Теперь, для получения перемещений прочих точек, строим на отрезке $e'q'$ фигуру $q''h''e'$, геометрически подобную очертанию заданной фермы. Для получения перемещений промежуточных узлов правой половины фермы мы переносим на фигуру *c* найденные перемещения $q''q'$ и $h''h'$. Если построение выполнено правильно, то $q''h''$ должно получиться перпендикулярно к *qh*. Построив на $q''h''$ фигуру $q'h''i''$ (фиг. *c*), геометрически подобную правой половине фермы *ihq*, получаем перемещения и для всех узлов этой половины фермы.

Заметим, что в данном примере, для определения изменения расстояний *hi*, *iq* и *hq* можно было бы и не строить диаграммы перемещений для второй половины фермы. В самом деле, каждое из этих расстояний составляется из нескольких стержней, расположенных по одной прямой. В таком случае, нужные нам изменения расстояний получаются как суммы изменений длин соответствующих стержней. Определив на основании этого положение точек *i'* и *q'* на диаграмме *b*, мы можем на той же диаграмме наметить *k'*, зная δ_{12}' и $\delta(hk)$, и далее *n'* — по величинам δ_8' и δ_{13}' , *p'* — по величинам δ_{14}' и δ_3' и, наконец, *l'* и *m'* — по величинам δ_6' , δ_{11}' , δ_{10}' и δ_2' , т.е. все построение выполняется независимо от диаграммы, представленной на фиг. *c*.

Повторим, что такое упрощение становится возможным лишь вследствие того, что по направлениям *hq*, *hi* и *iq* стержни располагаются в одну прямую. В противном случае.

для определения нужных нам изменений расстояний, необходимо построение диаграммы и для второй половины фермы.

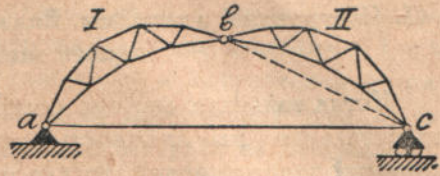


Черт. 283.

146. Построить диаграмму перемещений для трехшарнирной арки с затяжкой (черт. 281).

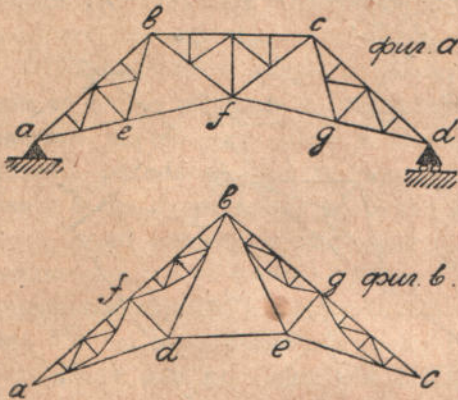
Сначала строим частные диаграммы I и II для левой и правой половины фермы. Из диаграммы II находим изменение расстояния bc . Получив это изменение и имея величину $\delta(ac)$ — приращение длины стержня ac , строим на диаграмме I точку c' . Теперь

надлежащим поворотом левой половины фермы относительно шарнира a найдем действительные перемещения узлов левой половины фермы и опорного узла c . Перенесем действительные перемещения шарниров b и c на диаграмму II, получим возможность найти действительные перемещения прочих узлов системы.



Черт. 284

147. Построить диаграммы перемещений для систем, представленных на чертеже 285.



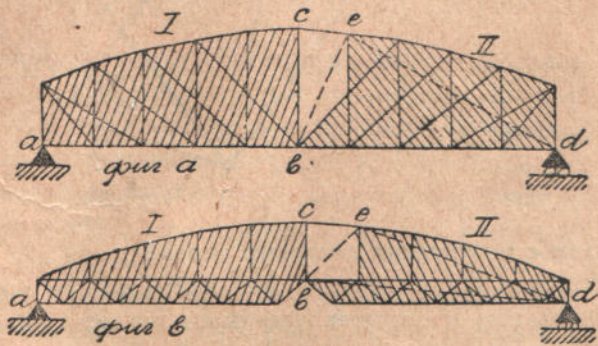
Черт. 235.

При построении диаграммы перемещений для системы, представленной на фиг. a , начинаем с фермочки abe . Далее, пользуясь тем, что пояса вспомогательных фермочек прямолинейны, мы, суммируя удлинения отдельных брусков, находим изменения расстояний bf , bc , cf , cg , gd и cd . После этого на диаграмме перемещений можно получить точки f' , c' , g' и d' и надлежащим поворотом фермы около шарнира a найти действительные перемещения шарниров фермочки abe и узлов f , c , g , d . Перемещения промежуточных шарниров фермочек bcf и cgd могут быть найдены без построения особых диаграмм, если воспользоваться замечанием, сделанным при построении диаграммы для фермы Полонсо. Намеченный здесь порядок

построения диаграммы перемещений можно применить также и к ферме, представленной на фигуре b . Для получения перемещений промежуточных узлов вспомогательных фермочек в этом случае придется строить отдельные частные диаграммы.

148. Построить диаграммы перемещений для систем, представленных на чертеже 286.

Каждая из этих ферм составлена из двух простейших систем, связанных между собой шарниром b и стержнем ce . Сначала строим отдельные диаграммы I и II для левой и правой половины ферм. Из диаграммы II находим изменения расстояний be , ed и bd . После этого на диаграмме I могут быть получены точки e' и d' , и после надлежащего поворота части acb около шарнира a будут найдены действительные перемещения

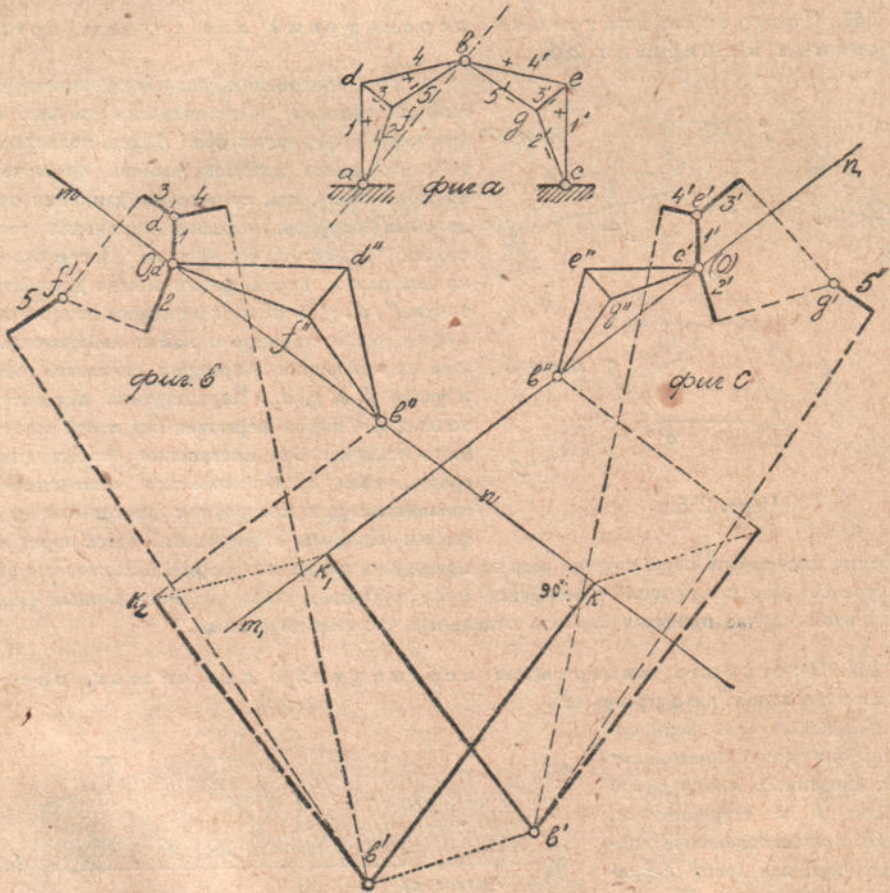


Черт. 286.

всех узлов левой половины фермы, а также шарниров e и d . Теперь, для получения действительных перемещений узлов правой половины фермы, остается только перенести на диаграмму II действительные перемещения шарниров e и d .

§ 41. Построение диаграмм Виллио для систем, не представляющих одного жесткого целого.

Когда заданная система составлена из нескольких жестких частей, относительная неподвижность которых обеспечена дополнительными опорными закреплениями, то для определения перемещений узлов начи-



Черт. 287.

наем с построения диаграмм перемещений для отдельных жестких частей системы. После этого нужно найти действительные перемещения соединительных и опорных шарниров из условий связи между жесткими частями и из опорных закреплений. Общий ход решения подобных задач поясним на простейших примерах.

В качестве простейшего примера рассмотрим трехшарнирную арку abc (черт. 287, фиг. а). Здесь две жесткие части I и II в точ-

ках a и c шарнирно скреплены с фундаментом и в точке b связаны шарниром между собой. Сначала построим частные диаграммы I и II (фиг. b и c), считая точки a и c неподвижными и направления стержней ad и ce неизменными. Таким образом из диаграммы I (фиг. b) находим для узла b перемещение $a'b'$. Для того же узла из диаграммы II (фиг. c) находим перемещение $c'b'$.

Теперь каждую половину трехшарнирной арки нужно так повернуть около соответствующего неподвижного шарнира, чтобы геометрическая сумма из найденных уже перемещений и перемещений вращения получалась для шарнира b одинаковой, независимо от того, рассматриваем ли мы этот шарнир принадлежащим левой или правой половине фермы.

Рассматривая левую половину фермы, заключаем, что при вращении ее около шарнира a , перемещение точки b будет иметь направление mn перпендикулярное к ab . Следовательно, на фигуре b точка b'' должна расположиться на линии mn . Проекция искомого перемещения $b''b'$ на направление ab будет иметь величину $b'k$ (фиг. b).

Точно так же, рассматривая правую половину трехшарнирной арки, заключаем, что на фигуре c точка b'' должна располагаться на линии m_1n_1 , перпендикулярной к направлению bc , и проекция искомого перемещения $b''b'$ на направление bc равна $b'k_1$.

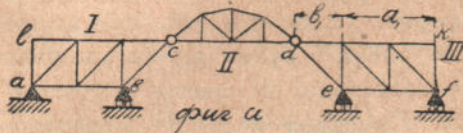
Имея две проекции $b'k$ и $b'k_1$ перемещения $b''b'$, мы легко получаем и нужное нам перемещение. Откладывая на фигуре b величину $b'k_1$, получаем точку k_2 . Перпендикуляр, восставленный в k_2 к линии $b'k_2$, даст в пересечении с mn искомую точку b'' . Подобным же образом находим точку b'' и на фигуре c . Найдя точки b'' и приняв во внимание, что точки a'' и c'' совпадают с a' и c' , находим перемещения всех прочих узлов фермы путем построения фигур $a'd''b''f''$ и $c'e''b''g''$, геометрически подобных левой и правой половине трехшарнирной арки.

К тому же результату мы могли бы прийти, если бы воспользовались приемом, применявшимся выше при рассмотрении сложных ферм. Из частных диаграмм b и c мы путем проектирования находим изменения расстояний ab и bc . Они представляются отрезками $b'k$ и $b'k_1$. По этим изменениям сейчас же может быть построено перемещение точки b . Для этого придется только начертить имеющийся на фигуре b четырехугольник $b'k_2b''k$.

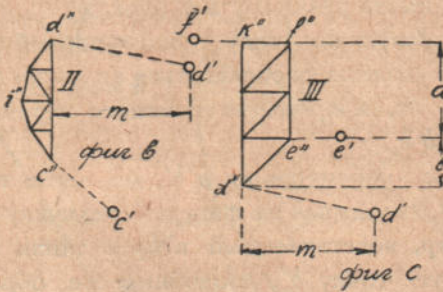
В качестве более сложного примера рассмотрим построение перемещений для консольно-балочной системы (черт. 288). Система составлена из трех геометрически неизменяемых частей, соединенных между собой шарнирами c и d . Для части I, имеющей в a неподвижную и в b подвижную опору, действительные перемещения всех узлов могут быть получены без всяких затруднений. Нам для дальнейшего понадобится

перемещение шарнира c , и мы будем считать это перемещение известным из диаграммы I, не представленной на чертеже. Теперь строим частные диаграммы II и III для подвесной фермы cd и правой консольной балки def . Чтобы не затемнять чертежа, мы даем на фигуре b лишь положение точек c' и d' частной диаграммы II и на фигуре c — положения точек d' , e' и f' частной диаграммы III.

Построив эти диаграммы, исходя из неподвижности какого-либо узла и из условия сохранения направления каким-либо стержнем, мы для получения действительных перемещений должны будем жестким частям II и III сообщить такие дополнительные перемещения, чтобы



оказались выполненными условия закрепления на опорах и условия соединения в узлах c и d .



Для части II мы из диаграммы I знаем действительное перемещение соединительного шарнира c . Это перемещение в виде отрезка $c''c'$ наносим на диаграмму II (фиг. b). Если теперь за полюс выбрать c'' , то условие в соединительном шарнире c будет удовлетворено. Теперь нужно часть II поворачивать вокруг c до тех пор, пока для точки d не получим

Черт. 288.

такого же перемещения $d''d'$, как и для узла d в ферме def . При таком поворачивании точка d будет совершать перемещение, перпендикулярное к направлению cd . На основании предыдущего мы можем заключить, что точка d'' должна лежать на вертикальной линии, идущей через c'' . Положение d'' на этой линии может быть найдено лишь после рассмотрения диаграммы III (фиг. c).

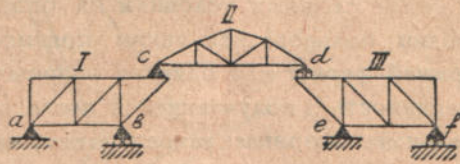
На этой диаграмме у нас пока имеются лишь точки f' , e' и d' . Так как опорные узлы e и f могут совершать лишь горизонтальные перемещения, то, следовательно, точки f'' и e'' непременно должны лежать на горизонтальных линиях, проходящих через f' и e' . Принимая во внимание, что точки e'' и f'' получаются в результате поворота фигуры III около неподвижного центра, мы сейчас же можем нанести и ту прямую, на которой лежит в диаграмме III точка d'' . Очевидно, отношение расстояний a и b между прямыми будет равно отношению соответствующих расстояний a_1 и b_1 между узлами фермы и мы будем иметь $a : b = a_1 : b_1$. Таким образом получены три параллельные прямые, идущие через f'' , e'' и d'' .

Так как перемещение соединительного шарнира d должно получиться на фигурах b и c одинаковым, то для получения точки a'' на фигуре c мы можем воспользоваться тем, что горизонтальная составляющая перемещения $d''d'$ нам уже известна из фигуры b . Эта составляющая, очевидно, равна m — расстоянию от точки d' до вертикали, идущей через c'' . Отложив от точки d' на фигуре c горизонтальный отрезок m и проведя через конец его вертикальную линию, найдем в пересечении с ранее проведенной горизонтальной прямой искомую точку d'' . Принимая во внимание, что $d''e'' \perp de$ и $e''f'' \perp ef$, мы строим теперь, при помощи ранее проведенных горизонтальных линий, фигуру $d''e''f''k''$, геометрически подобную ферме $defk$. Получив таким образом перемещения всех узлов части III, мы переносим перемещение $d''d'$ на фигуру b и на отрезке $c''d''$ строим фигуру $c''i''d''$, подобную cid . Теперь у нас будут все данные для получения действительных перемещений всех узлов части II.

На основании построенных диаграмм мы без всякого затруднения можем начертить линию прогибов для горизонтального пояса $lcdk$ нашей системы.

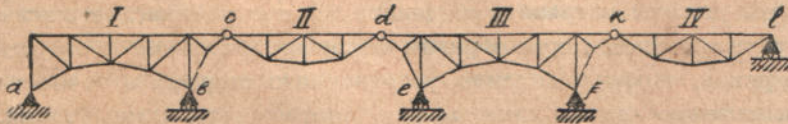
Задачи: 149. Построить диаграмму перемещений и линию прогибов для системы, представленной на чертеже 289.

От только что рассмотренного случая заданная система отличается лишь устройством опор. Мы строим сначала частные диаграммы для частей I, II и III. По условиям закрепления, сейчас же находятся перемещения всех узлов частей I и III. Таким образом найдутся действительные перемещения точек c и d . Принимая во внимание, что точка c является общей для частей I и II, и в точке d части II и III имеют одинаковое вертикальное перемещение, мы, перенося на частную диаграмму II полное перемещение точки c и вертикальное перемещение точки d , будем иметь достаточно данных для получения действительных перемещений всех прочих узлов части II.



Черт. 289.

150. Построить диаграмму перемещений и линию прогибов для консольно-балочной системы, представленной на чертеже 290.



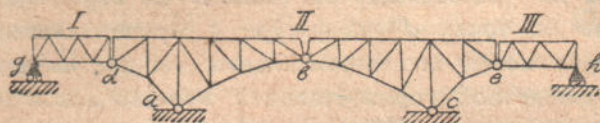
Черт. 290.

Перемещения для частей I, II и III строятся так, как это было объяснено на чертеже 288.

Найдя из диаграммы III перемещение шарнира k и приняв во внимание, что шарнир l совершает горизонтальные перемещения, мы легко находим действительные перемещения всех узлов части IV.

151. Найти диаграмму перемещений и линию прогиба верхнего пояса для консольно-арочной системы, представленной на чертеже 291.

Диаграмма перемещений для средней части системы построится так, как это было показано для трехшарнирной арки. Из этой диаграммы мы найдем действительные перемещения шарниров d и e .



Черт. 291.

По этим перемещениям и по опорным закреплениям в узлах g и h легко найдутся перемещения узлов для частей I и II.

§ 42. Диаграмма Виллио в более сложных случаях.

В предыдущих примерах приходилось строить диаграмму перемещений для простейших ферм, опертых в двух точках, или для систем, составленных из простейших ферм путем соединения их при помощи шарниров и соединительных стержней. Условия закрепления на опорах во всех случаях были таковы, что мы без затруднений могли получать действительные перемещения, удовлетворяющие условиям на опорах.

Обратимся теперь к фермам, не относящимся к типу простейших и к более сложным условиям на опорах. При решении подобных задач выгодно пользоваться таким приемом. Сначала выбрасываем один из стержней фермы или один из опорных стержней, а геометрическую неизменяемость¹⁾ получающейся после этого системы обеспечиваем дополнительным опорным закреплением, например, закреплением, обеспечивающим определенное направление перемещения какого-либо узла. Закрепление подбираем так, чтобы, введя его, можно было без затруднений построить диаграмму перемещений. Получив такую диаграмму, мы из нее легко находим изменение расстояния между теми узлами, которые были соединены выброшенным стержнем. Так как мы совершенно произвольно внесли дополнительное закрепление, то, конечно, полученное нами на диаграмме изменение указанного выше расстояния не будет, вообще говоря, равняться известному из предварительного расчета удлинению устранившего стержня.

Теперь мы должны устранить введенное при построении диаграммы закрепление и полученной таким образом подвижной системе сообщить такое перемещение, чтобы удлинение устранившего стержня в точности равнялось изменению расстояния между соответствующими узлами. Тогда геометрическая сумма из полученных таким образом переме-

¹⁾ Мы говорим, конечно, о геометрической неизменяемости в предположении неизменной длины всех стержней системы.

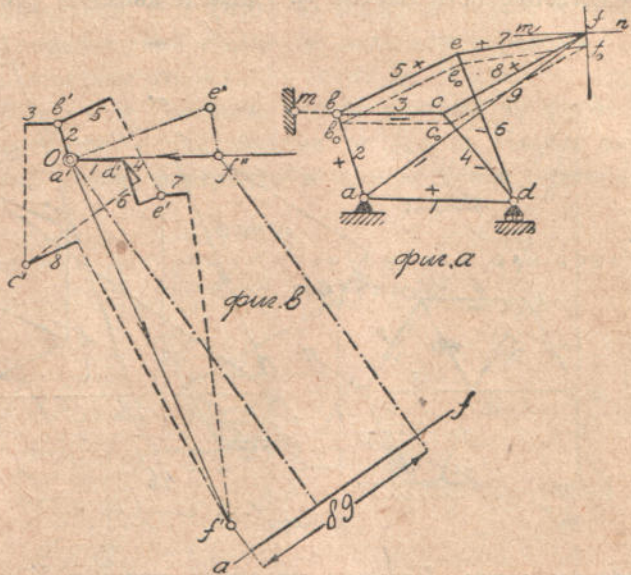
ний и из перемещений, найденных по диаграмме, даст нам нужные действительные перемещения узлов системы. При исследовании перемещений узлов подвижной системы с большой выгодой можно пользоваться как изображающими точками, так и способом, основанным на построении мгновенных центров для отдельных жестких частей системы. Поясним эти общие соображения несколькими простыми примерами.

Положим, требуется найти перемещения узлов геометрически неизменяемой статически определимой системы $abcdef$, составленной из девяти стержней (черт. 292). Удлинения всех стержней предполагаются найденными путем предварительного расчета, и знаки усилий отмечены на чертеже. Рассматриваемая система не принадлежит к типу простейших и диаграмма перемещений не может быть получена прежними приемами. Для решения вопроса воспользуемся высказанными выше общими соображениями.

Устраним стержень 9, соединяющий узлы a и f , и неизменяемость системы обеспечим тем, что заставим стержень ab сохранять свое первоначальное направление, что равносильно введению абсолютно жесткого опорного стержня bm . Преобразовав таким образом заданную нам систему, мы легко найдем перемещения всех узлов.

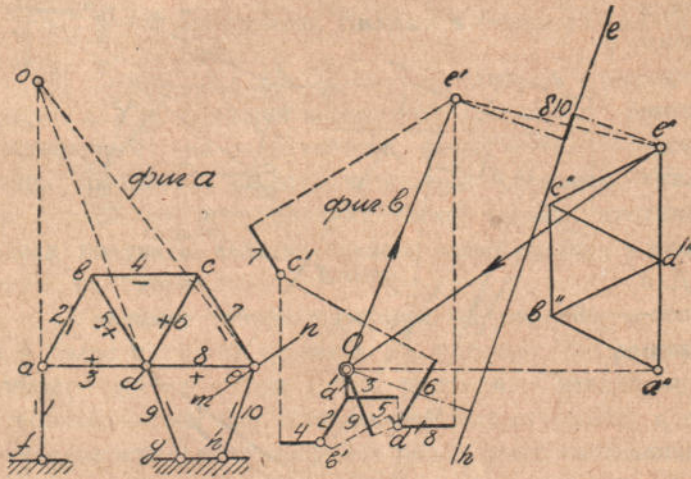
Точка a' , очевидно, совпадает с полюсом O (фиг. b). Точки b' и d' найдутся, если мы отложим δ_1 и δ_2 по направлению стержней 1 и 2. Пользуясь удлинениями δ_3 и δ_4 строим точку c' . Далее строим точки e' и f' . Теперь, проектируя на направление стержня af отрезок Of' , найдем то изменение расстояния между шарнирами a и f , которое получается, если допустить, что стержень ab сохраняет свое направление. Устраним это условие и рассмотрим перемещения получающейся таким образом подвижной системы.

Исследование этих перемещений произведем при помощи изображающих точек. Шарнир b может совершать теперь перемещения, пер-



пендикулярные к направлению ab . Соответствующая изображающая точка b_0 будет лежать на ab . Отрезок bb_0 возьмем произвольной длины. Проведением линии $b_0c_0 \parallel bc$ и $b_0e_0 \parallel be$ получаем изображающие точки c_0 и e_0 . Изображающая точка f_0 получится в пересечении линий $e_0f_0 \parallel ef$ и $c_0f_0 \parallel cf$. Направление mn , перпендикулярное к ff_0 , определит возможное перемещение точки f рассматриваемой подвижной системы.

Величину этого перемещения $f''O$ (фиг. b) выберем такой, чтобы геометрическая сумма перемещений $f''O$ и Of' давала на направление af проекцию, равную изменению длины стержня af . В нашем случае это изменение есть сжатие δ_9 . Наша подвижная система имеет одну степень



Черт. 293.

свободы, и потому, дав точке f определенное перемещение $f''O$, мы получим вполне определенные перемещения и для прочих узлов.

Эти перемещения придется геометрически сложить с перемещениями, полученными на диа-

грамме ранее. Возьмем, например, точку e . К перемещению Oe' , имеющемуся на диаграмме, придется прибавить перемещение $e''O$ точки e подвижной системы. Точка e'' найдется в пересечении прямой Oe'' , перпендикулярной ee_0 (фиг. a) и прямой $e''f''$, перпендикулярной стержню ef^1 . Таким же образом найдутся и прочие точки с двумя значками. Отрезки $f''f'$, $e''e'$ и т. д. дадут по величине и направлению искомые перемещения.

В качестве второго примера рассмотрим случай простейшей фермы, имеющей три опорных точки (черт. 293). Изменения длин всех стержней предполагаются вычисленными раньше. Знаки усилий отмечены на чертеже. Мы сначала устраним стержень he и построим диаграмму перемещений (фиг. b) в предположении, что стержень af сохраняет свое направление. Точки диаграмм получим в таком порядке a' , d' , b' , e'

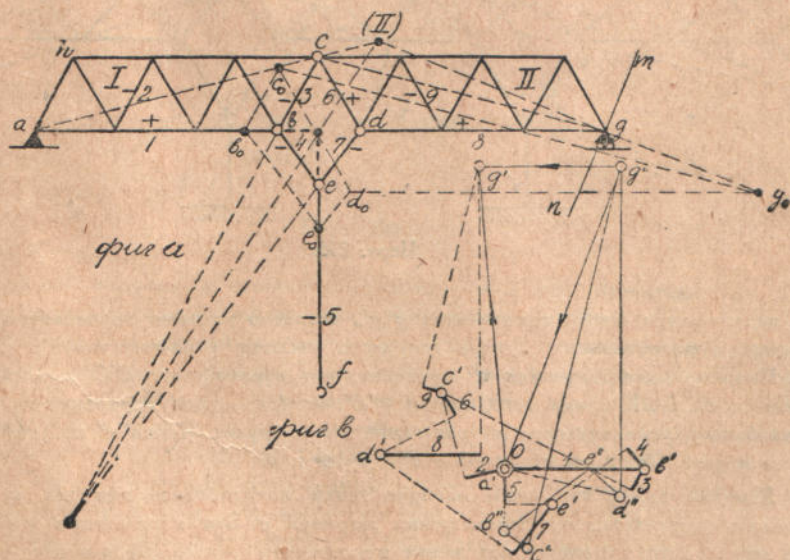
¹⁾ Мы откладываем не повернутые скорости, как это делалось при построении изображающих точек, а действительные скорости. Поэтому картина скоростей $e''f''$ будет перпендикулярна к направлению ef соответствующего стержня.

и наконец e' . Проекция перемещения Oe' на направление he получится, вообще говоря, не равной изменению длины устраненного стержня he .

Чтобы удовлетворить этому условию и получить изменение расстояния he в точности равным изменению длины устраненного стержня, мы отбросим дополнительное закрепление, которое удерживало неизменным направление стержня af . Тогда получим подвижную систему: ферма $abce$ будет иметь возможность вращаться около мгновенного центра o . При этом точка e будет перемещаться по прямой mn , перпендикулярной oe .

Величину этого перемещения $e''O$ (фиг. b) выберем такой, чтобы геометрическая сумма из перемещений $e''O$ и Oe' дала нам отрезок $e''e'$, проекция которого на направление стержня he равна δ_{10} . В данном случае изменение длины δ_{10} является сжатием, что и принято во внимание. Проекция перемещения имеет направление от e к h . Нанеся на чертеже точку e'' , мы легко можем построить и прочие точки с двумя значками.

Задачи: 152. Построить диаграмму перемещений для двухпролетной системы, представленной на чертеже 294.



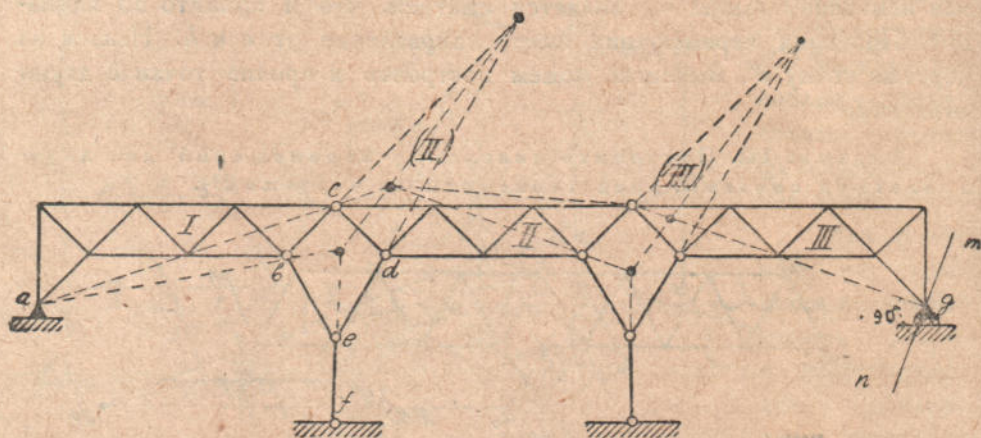
Черт. 294.

Сначала устраним опору g и для обеспечения неподвижности системы введем дополнительное закрепление, обеспечивающее неизменность направления стержня ab . Для получаемой таким образом системы, мы без затруднения строим диаграмму перемещений. Построив частные диаграммы для жестких частей I и II простейшего типа, мы из них находим изменения расстояний ab , ac , dg и cg , которые обозначим номерами 1, 2, 8 и 9 и потом строим диаграмму, представленную на фигуре b .

Получаемое при этом перемещение Og' узла g не удовлетворяет условию опорного закрепления. В точке g мы имеем подвижную опору, могущую перемещаться по горизонтальному направлению. Чтобы удовлетворить этому условию, устраним введенное нами дополнительное закрепление бруска ab и полученной таким путем подвижной системе сообщим такое движение, чтобы получаемое при этом перемещение шарнира g , сложенное с уже найденным перемещением Og' , давало в сумме горизонтальный отрезок.

Для изучения перемещений подвижной системы, можно воспользоваться способом изображающих точек. Точку b_0 наносим на бруске ab в произвольном расстоянии bb_0 от точки b . После этого проведением прямых $b_0c_0 \parallel bc$ и $b_0e_0 \parallel be$ получаем изображающие точки c_0 и e_0 . Для получения изображающей точки d_0 проводим $c_0d_0 \parallel cd$ и $e_0d_0 \parallel ed$. Наконец, для получения g_0 строим $\triangle c_0d_0g_0 \sim \triangle cdg$.

По направлению gg_0 устанавливаем перпендикулярное к нему направление mn возможного перемещения для шарнира g . На фигуре b нужно взять такую величину $g''O$



Черт. 295.

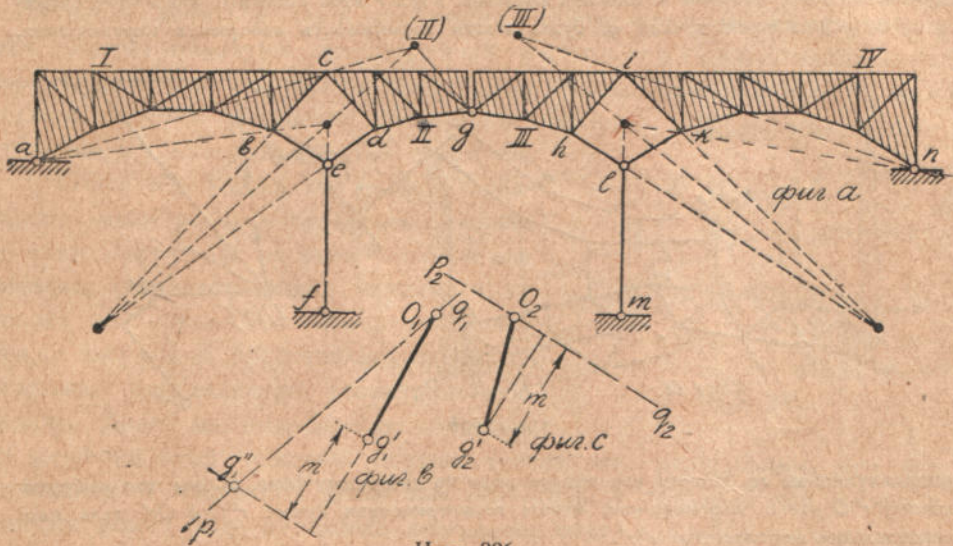
этого перемещения, чтобы направление $g'g'$, согласно условию закрепления на опоре, получилось горизонтальным. Теперь мы легко находим и прочие точки с двумя значками. Например, для получения d'' замечаем, что перемещение $d''O$ перпендикулярно направлению dd_0 , и, кроме того, линия $g''d''$, изображающая перемещения бруска gd должна быть перпендикулярна направлению этого бруска. Точка e'' получится в пересечении прямой $Oe'' \perp ee_0$ и прямой $e''d'' \perp ed$ и т. д.

Заметим здесь, что изображающие точки понадобились нам для того, чтобы определить направление mn перемещения шарнира g . Это направление мы могли бы также легко найти, определив положение мгновенного центра (II) для жесткой части II нашей системы. Построения, служащие для определения нужного мгновенного центра нами уже производились раньше. Они намечены пунктиром на фигуре a . Направление (II) g , очевидно, должно совпасть с найденным ранее направлением gg_0 .

Указанный здесь прием решения задачи применим также к системе, представленной на чертеже 295. На этом чертеже намечены построения, относящиеся к определению мгновенных центров (II) и (III) для той подвижной системы, которая получается после устранения опоры g . Направление mn , перпендикулярное к радиусу (III) g , определит направление возможного перемещения для шарнира g .

153. Построить диаграмму перемещений и линию прогибов верхнего пояса трехпролетной системы, представленной на чертеже 296.

Система эта составлена из четырех жестких частей, заштрихованных на фигуре а. Устраняя шарнир g , получаем две подвижных системы, каждая из которых составлена из двух жестких частей. Закрепляя для левой системы направление ab и для правой системы направление nk , мы легко найдем соответствующие перемещения узлов как левой, так и правой системы. На фигурах b и c даны лишь перемещения O_1g_1' и O_2g_2' шарнира g . В действительности шарнир g является общей точкой для левой и правой половины системы. Чтобы удовлетворить этому условию, мы устраним закрепления направлений ab и kn и дадим подвижным системам такие движения, чтобы соответствующие



Черт. 296.

щие перемещения шарнира g , сложенные с найденными уже перемещениями O_1g_1' и O_2g_2' , давали для левой и правой половины одну и ту же величину.

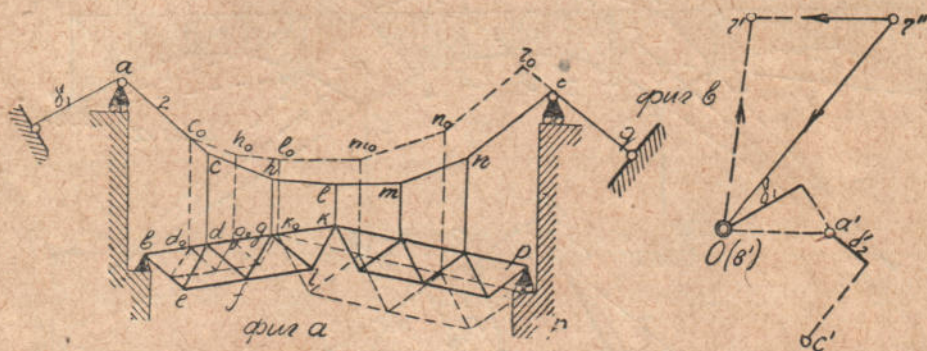
Исследование перемещений подвижных систем можно выполнить путем построения соответствующих мгновенных центров. Построения эти указаны на фигуре а. Пользуясь центрами (II) и (III), мы сейчас же можем нанести направление $p_1q_1 \perp (II)g$ и $p_2q_2 \perp (III)g$, определяющие направления возможных перемещений шарнира g . Обращаясь к фигуре с, заключаем, что действительное перемещение шарнира g имеет в направлении, перпендикулярном p_2q_2 , составляющую, равную m . Переносим эту составляющую на фигуру b, откладывая от точки g_1' отрезок m и проводя через конец этого отрезка прямую, параллельную p_2q_2 , получим в пересечении с направлением p_1q_1 искомую точку g_1'' . Теперь без затруднения могут быть найдены и прочие точки с двумя значками.

154. Построить диаграмму перемещений для цепного моста, усиленного двумя жесткими фермами I и II (черт. 297).

Удлинения всех стержней предполагаются найденными предварительным расчетом, и мы, устранив подвижную опору в шарнире r и задавшись определенным направлением для перемещения точки s (фиг. а), легко найдем перемещения всех узлов системы. Откладывая от полюса O' удлинение δ_1 и восставляя в конце его перпендикуляр, най-

дем в пересечении этого перпендикуляра с горизонтальным направлением точку a' . Далее, откладывая от a' величину δ_2 и восставляя перпендикуляр, возьмем на этом перпендикуляре в произвольном месте точку c' . Задав себе таким образом перемещение шарнира c , мы легко находим перемещение прочих узлов. Имея c' и принимая во внимание, что b' совпадает с полюсом O , мы можем построить d' . Далее получаем на диаграмме точки в таком порядке: e', f', g', h', i', k' и l' . Имея перемещение шарнира k и направление перемещения шарнира p , мы легко находим перемещения всех узлов жесткой части II и далее получаем точки m', n' и наконец $r'1$).

Так как мы произвольно задались положением точки c , то в результате построения мы получили перемещение Or' , не удовлетворяющее условию закрепления. Устраним теперь введенное нами дополнительное закрепление шарнира c и изучим перемещения полученной таким образом подвижной системы. Узел r этой системы, связанной стержнем rq с неподвижной точкой q , будет иметь возможность совершать перемещения,



Черт. 297.

перпендикулярные rq . Нанеся это направление на диаграмму (фиг. b), мы так выберем величину $r''O$ этого перемещения, чтобы геометрическая сумма $r''O + Or'$ дала нам горизонтальное перемещение $r''r'$.

Чтобы найти действительные перемещения прочих узлов нужно теперь выяснить, какие движения будут совершать узлы системы, когда узел r совершает перемещение $r''O$. Этот вопрос проще всего разрешить при помощи изображающих точек. Точку c_0 на линии ac намечаем произвольно и проведением линии $c_0d_0 \parallel cd$ находим точку d_0 . Теперь построением геометрически подобной фигуры находим изображающие точки для всех узлов жесткой части I. После этого проведя линии $c_0h_0 \parallel ch$ и $g_0h_0 \parallel gh$, находим точку h_0 и таким же образом точку l_0 . Имея изображающую точку k_0 и проведя линию $k_0\rho_0 \parallel kp$ до пересечения с опорной вертикалью, находим изображающую точку ρ_0 . Построением геометрически подобной фигуры находим изображающие точки для всех узлов жесткой части II, после чего строятся точки m_0, n_0 и наконец r_0 . Имея направления перемещений всех узлов и величину $r''O$, мы легко находим на диаграмме (фиг. b) все прочие точки с двумя знаками и, следовательно, действительные перемещения всех узлов фермы.

§ 43. Диаграмма перемещений для шарнирного многоугольника.

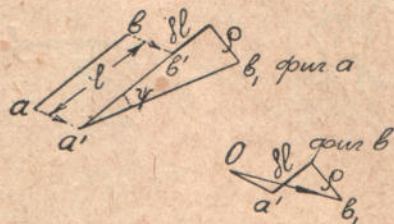
На ряде примеров мы показали, как в различных случаях может быть построена диаграмма перемещений. Из этих примеров видно, что

1) В диаграмме мы нашли лишь точки a', b', c' и r' .

построение усложняется с увеличением числа узлов. При этом точность чертежа убывает, в особенности в тех случаях, когда перпендикуляры, которые приходится восстанавливать, пересекаются под очень острыми углами. Эти обстоятельства заставляют иногда прибегать к другим приемам определения перемещений, особенно в тех случаях, когда не требуется разыскание перемещений всех узлов фермы.

Далее при рассмотрении статически неопределимых систем мы часто будем встречаться с вопросом об определении прогибов узлов, принадлежащих одному какому либо поясу фермы. В таком случае естественно заняться лишь стержнями, принадлежащими этому поясу. Эти стержни образуют шарнирный многоугольник, построение перемещений узлов которого может быть выполнено весьма просто, если только известны изменения длин всех стержней, образующих многоугольник, и углы поворота этих стержней.

Совершенно ясно, что если из предварительного расчета определены усилия во всех брусках и по этим усилиям вычислены соответствующие удлинения, то вопрос об определении изменений углов между стержнями представляет собой совершенно определенную геометрическую задачу. Далее мы подробно остановимся на решении этой основной задачи, теперь же предположим, что все удлинения и изменения углов нам известны, и покажем, как по этим данным может быть построена диаграмма перемещений для узлов шарнирного многоугольника.



Черт. 298.

Рассмотрим сначала такую элементарную задачу. Имеется брусок ab , для которого найдено удлинение δl , угол поворота ψ и перемещение узла a (черт. 298). По этим данным нужно найти перемещение узла b (фиг. а). Сначала дадим бруску поступательное перемещение aa' , соответствующее перемещению узла a . От нового положения b' узла b откладываем в надлежащую сторону изменение длины бруска δl . Теперь остается повернуть брусок около шарнира a' на известный угол ψ . Так как мы всегда будем иметь дело с малыми углами поворота, то соответствующее перемещение шарнира b можно считать направленным по перпендикуляру к $a'b'$; причем величина этого перемещения ρ определится такой формулой $\rho = l \cdot \psi$. Таким образом мы находим новое положение b_1 шарнира b .

Малые перемещения, конечно, выгоднее наносить в увеличенном масштабе и определить перемещения на особом чертеже. Для этого от некоторого полюса O (фиг. б) откладываем в выбранном масштабе перемещение Oa' узла a . Далее откладываем по величине и направлению

изменение длины стержня ab , из конца его восстанавливаем перпендикуляр в сторону, соответствующую направлению вращения бруска, и на нем откладываем отрезок ρ .

Повторяя такое построение последовательно для каждого стержня шарнирного многоугольника, мы получим нужную нам диаграмму перемещений.

Положим нужно построить диаграмму перемещений для многоугольника, представленного на чертеже 299 (фиг. а). Изменения длин стержней $\delta l_1, \delta l_2, \dots$ и изменения углов $\delta\theta_1, \delta\theta_2, \dots$ считаются найденными предварительным расчетом.

Построения начинаем с неподвижного шарнира a . Предполагаем, что брусок ab не поворачивается, тогда точка b' на фигуре b получится, если мы

от полюса O , с которым совпадает точка a' , отложим по направлению ab отрезок δ_1 . Для получения c' откладываем от b' по направлению bc удлинение δ_2 и на перпендикуляре, восстановленном в конце этого отрезка, откладываем $\rho_2 = l_2\psi_2 = l_2\delta\theta_1$ ¹⁾. Таким образом получаем точку c' . Для получения d' откладываем δ_3 , укорочение стержня cd , и далее $\rho_3 = l_3(\delta\theta_1 + \delta\theta_2)$. Тем же путем получаем и точку e' .

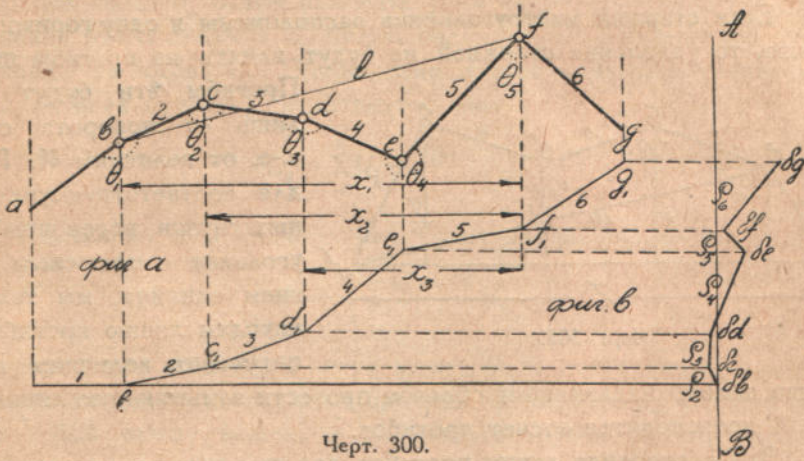


Черт. 299.

Мы видим, что, вследствие произвольного допущения относительно сохранения стержнем ab первоначального направления, мы получили перемещение Oe' , не удовлетворяющее закреплению на правой опоре. Чтобы удовлетворить этому условию и получить перемещение, совпадающее по направлению с направлением скольжения подвижной опоры e , дадим всей системе поворот относительно шарнира a . Соответствующее перемещение шарнира e будет перпендикулярно направлению ae . Величину этого перемещения $e''O$ выберем так (фиг. б), чтобы геометрическая сумма $Oe' + e''O$ давала нам вектор $e'e'$, имеющий направление скольжения опоры e . Теперь остается на отрезке $e''O$ построить фигуру $Ob''c''d''e''$, геометрически подобную заданному шарнирному многоугольнику. Тогда отрезок, идущий от какой-либо буквы с двумя значками к букве с одним значком, даст нам перемещение соответствующего узла многоугольника.

1) В нашем примере приняты $\delta\theta_1, \delta\theta_2, \dots$ отрицательными, чему соответствует уменьшение углов $\theta_1, \theta_2, \dots$ и поворот стержней по часовой стрелке. Соответственно этому повороту отложены отрезки ρ_2, ρ_3, \dots .

Как частный случай только что рассмотренной задачи, рассмотрим пример, когда удлинения всех стержней равны нулю и перемещения обусловлены лишь изменениями углов между стержнями. Легко показать, что в этом случае построением одного веревочного многоугольника сейчас же получаются проекции перемещений всех узлов многоугольника на заданное направление. Пусть задан многоугольник $abcdefg$ (черт. 300) и требуется найти проекции перемещений всех узлов на направление AB . Предположим, как и прежде, шарнир a неподвижным и стержень ab — неповорачивающимся. Пусть требуется найти перемещение шарнира f , лежащего в расстоянии l от узла b .



Черт. 300.

Вследствие изменения угла θ_1 на величину $\delta\theta_1$ точка f переместится в направлении, перпендикулярном bf , на величину $l\delta\theta_1$. Если через x_1 обозначим проекцию расстояния l на направление перпендикулярное линии AB , то для проекции найденного перемещения точки f на направление AB получим значение $x_1\delta\theta_1$. Точно так же найдем, что проекция на AB перемещения точки f , получающегося вследствие изменения угла θ_2 на величину $\delta\theta_2$, будет равна $x_2\delta\theta_2$ и т. д. Окончательно, проекция δ_f искомого перемещения шарнира f представится так:

$$\delta_f = \delta\theta_1 x_1 + \delta\theta_2 x_2 + \delta\theta_3 x_3 + \dots$$

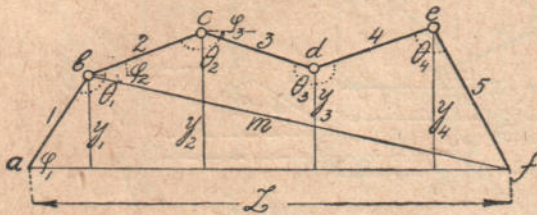
Рассматривая $\delta\theta_1, \delta\theta_2, \dots$ как фиктивные силы, приложенные в b, c, \dots и направленные параллельно AB , заключаем, что δ_f представляется моментом фиктивных сил $\delta\theta_1, \delta\theta_2, \dots$ относительно точки f . Направление фиктивных сил будут определяться знаками приращений $\delta\theta$. Если мы для фиктивных сил построим веревочный многоугольник $b_1c_1d_1e_1f_1g_1$ (фиг. b) с полюсным расстоянием единица, то расстояние от какой-либо вершины этого многоугольника до первой стороны, направленной перпендикулярно AB , будет давать, очевидно, проекцию на AB перемещения

соответствующего узла. Получив таким образом проекции перемещений $\delta_c, \delta_d, \dots, \delta_g$, мы легко построим и диаграмму перемещений, соответствующую фигуре *b* предыдущего чертежа. При этом нужно иметь в виду, что все удлинения стержней обращаются в нуль, и нам придется иметь дело лишь с отрезками ρ , направленными перпендикулярно соответствующим стержням. Начиная с точки δb и проводя отрезки $\rho_2 \perp bc, \rho_3 \perp cd$ и т. д., получаем искомую диаграмму перемещений.

Заметим, что таким образом мы можем графическим путем получить все отрезки ρ для любого шарнирного многоугольника. Нужно только сначала предположить, что все удлинения стержней нули, и выполнить только что описанное построение.

Если стержни многоугольника расположены в одну горизонтальную линию, то удлинения стержней не будут влиять на прогибы шарниров.

Прогибы эти будут зависеть лишь от поворота стержней, т.-е. от величины $\delta\theta$. Построив для соответствующих фиктивных грузов веревочный многоугольник с полюсным расстоянием единица, мы тем самым найдем линию прогибов. Для получения величины прогибов



Черт. 301.

нужно только надлежащим образом провести замыкающую линию, от которой производится отсчет прогибов.

Эти построение линии прогибов для шарнирно-соединенных стержней, расположенных на одной прямой, вполне соответствует известному построению упругой линии для изгибаемой балки. В последнем случае, как известно, приходится строить веревочный многоугольник для фиктивной нагрузки, причем на каждый элемент балки длиной δx приходится фиктивная нагрузка, равная

$$\frac{M\delta x}{EI} = y''\delta x,$$

Величина этой нагрузки есть не что иное, как относительный поворот двух поперечных сечений балки, выделяющих рассматриваемый элемент.

Остановимся здесь еще на одном практически важном вопросе, который легко решается, если нам известны для заданного шарнирного многоугольника все величины δl и $\delta\theta$. В дальнейшем нам придется решать такую задачу: по заданным изменениям длин δl и углов $\delta\theta$, найти изменение δL хорды *af* шарнирного многоугольника *abcdef* (черт. 301). Будем считать стержень *ab* неповорачивающимся, шарнир *a* неподвижным и рассмотрим отдельно, как влияют на изменение длины хорды приращения углов $\delta\theta$, и как влияют удлинения стержней.

Если угол θ_1 увеличится на величину $\delta\theta_1$, то при этом f переместится в направлении, перпендикулярном bf , на величину $m\delta\theta_1$. Проекция этого перемещения на направление хорды af равна $y_1\delta\theta_1$, где y_1 есть расстояние рассматриваемого узла b до хорды af . Принимая во внимание изменение всех углов θ , найдем, что приращение хорды δL_1 , обусловленное поворотом стержней шарнирного многоугольника с n сторонами, представится так:

$$\delta L_1 = \sum_1^{n-1} y_i \delta\theta_i \quad (a)$$

Если мы через φ_i будем называть угол наклона стержня i к хорде, то удлинение этого стержня δl_i будет, очевидно, сопровождаться увеличением хорды на $\delta l_i \cos \varphi_i$ ¹⁾. Приращение длины хорды, обусловленное удлинениями всех брусков, представится так:

$$\delta L_2 = \sum_1^n \delta l_i \cos \varphi_i \quad (b)$$

Следовательно, для полного изменения длины хорды мы получим

$$\delta L = \sum_1^{n-1} y_i \delta\theta_i + \sum_1^n \delta l_i \cos \varphi_i \quad (c)$$

Первая сумма этой ф-лы легко может быть построена при помощи веревочного многоугольника, если принять во внимание, что она представляет собой сумму моментов фиктивных грузов $\delta\theta$, параллельных хорде af и приложенных в узлах шарнирного многоугольника, относительно какой-либо точки хорды.

§ 44. Вычисление изменений углов треугольника по удлинениям его сторон.

Все предыдущие построения перемещений узлов шарнирного многоугольника предполагают, что нами заранее вычислены изменения углов между последовательными сторонами многоугольника. В тех случаях, когда ферма представляет простую треугольную решетку (черт. 302), изменение какого либо угла θ сводится к вычислению изменений углов α_1 , α_2 и α_3 треугольников, составляющих ферму. Все сводится таким образом к решению такой геометрической задачи: найти изменения углов треугольника, если на основании предварительного расчета уже

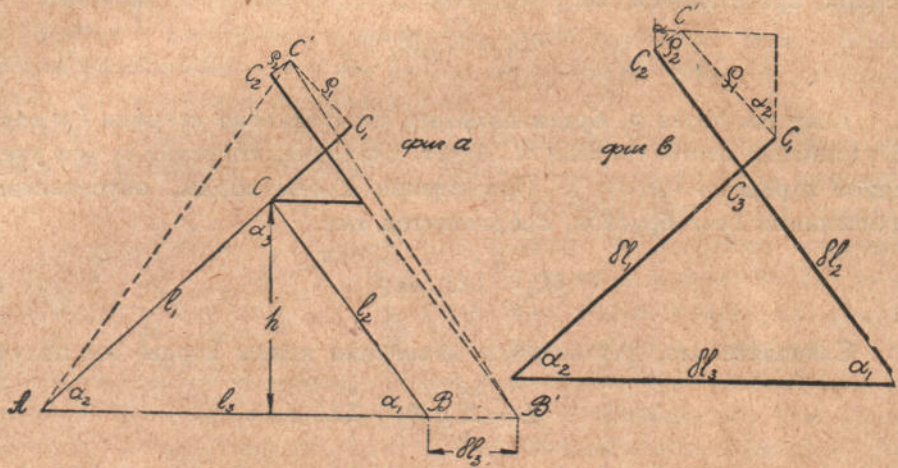


Черт. 302.

¹⁾ На чертеже 301 все φ_i меньше 90° , и потому $\cos \varphi$ положительны.

определены удлинения его сторон. Мы воспользуемся тем, что здесь приходится иметь дело с весьма малыми изменениями углов и длин, и применим построение Виллио.

Пусть для треугольника ABC (черт. 303) известны удлинения всех сторон. Будем считать стержень AB не поворачивающимся и шарнир A неподвижным. Тогда при деформации точка B переместится в B' . Для



Черт. 303.

получения точки C' придется выполнить построение, указанное в увеличенном масштабе на фигуре b . Из фигуры a сейчас же находим ¹⁾:

$$\delta\alpha_1 = \frac{\rho_2}{l_2}; \quad \delta\alpha_2 = \frac{\rho_1}{l_1} \quad (a).$$

Измеряя, следовательно, на фигуре b отрезки ρ_1 и ρ_2 , мы получаем возможность при помощи ф-л (а) вычислить нужные нам изменения углов $\delta\alpha_1$ и $\delta\alpha_2$. Приращение третьего угла найдется из условия:

$$\delta\alpha_1 + \delta\alpha_2 + \delta\alpha_3 = 0 \quad (b).$$

Заметим здесь, что горизонтальные проекции отрезков ρ_2 и ρ_1 найдутся так:

$$\begin{aligned} \rho_2 \sin \alpha_1 &= l_2 \sin \alpha_1 \delta\alpha_1 = h \delta\alpha_1, \\ \rho_1 \sin \alpha_2 &= l_1 \sin \alpha_2 \delta\alpha_2 = h \delta\alpha_2, \end{aligned}$$

где h — высота треугольника ABC .

Следовательно, если мы построим фигуру, подобную фигуре b , но только вместо δl_1 , δl_2 и δl_3 отложим величины $\frac{\delta l_1}{h}$, $\frac{\delta l_2}{h}$ и $\frac{\delta l_3}{h}$ (черт. 304), то горизонтальные проекции отрезков C_2C' и C_1C' непосредственно дадут

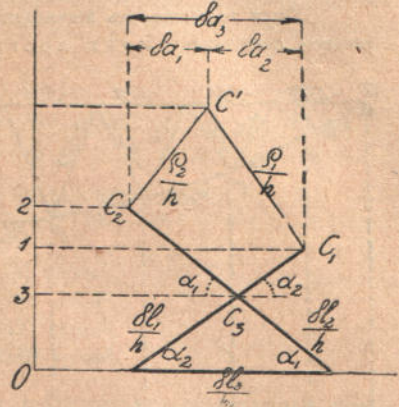
¹⁾ Малыми изменениями длин стержней при этом пренебрегаем.

нам величины $\delta\alpha_1$ и $\delta\alpha_2$ в том масштабе, который мы выберем при построении для отвлеченных чисел $\frac{\delta l_1}{h}$, $\frac{\delta l_2}{h}$ и $\frac{\delta l_3}{h}$. Пользуясь чертежом 304, мы легко составим и аналитические ф-лы для приращений углов $\delta\alpha_1$, $\delta\alpha_2$ и $\delta\alpha_3$. В самом деле, проектируя точки C_1 , C_2 и C_3 на вертикальное направление, мы находим:

$$\begin{aligned} \overline{O1} &= \frac{\delta l_1}{h} \cdot \sin \alpha_2 = \frac{\delta l_1}{h} \cdot \sin \alpha_2 \\ \overline{O2} &= \frac{\delta l_2}{h} \cdot \sin \alpha_1 = \frac{\delta l_2}{h} \cdot \sin \alpha_1 \\ \overline{O3} &= \frac{\delta l_3}{h} \cdot \sin \alpha_3 = \frac{\delta l_3}{h} \cdot \sin \alpha_3 \end{aligned} \quad (c).$$

Следовательно,

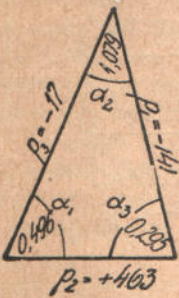
$$\begin{aligned} C_2C_3 &= \frac{\overline{23}}{\sin \alpha_1} = \left(\frac{\delta l_2}{h} - \frac{\delta l_3}{h} \right) \frac{1}{\sin \alpha_1}; \\ C_1C_3 &= \frac{\overline{31}}{\sin \alpha_3} = \left(\frac{\delta l_1}{h} - \frac{\delta l_3}{h} \right) \frac{1}{\sin \alpha_3}. \end{aligned}$$



Черт. 304.

Принимая же во внимание, что сумма горизонтальных проекций отрезков C_2C_3 и C_3C_1 равна, как видно из чертежа, — $\delta\alpha_3$, получаем:

$$\begin{aligned} \delta\alpha_3 &= - (C_2C_3 \cos \alpha_1 + C_3C_1 \cos \alpha_2) = \\ &= \left(\frac{\delta l_3}{h} - \frac{\delta l_2}{h} \right) \operatorname{ctg} \alpha_1 + \left(\frac{\delta l_3}{h} - \frac{\delta l_1}{h} \right) \operatorname{ctg} \alpha_2 \end{aligned} \quad (d).$$



Черт. 305.

Перестановкой значков подобные ф-лы получаются также для $\delta\alpha_1$ и $\delta\alpha_2$.

В тех случаях, когда удлинение является следствием только напряжений, мы, обозначая эти напряжения через ρ_1 , ρ_2 и ρ_3 , можем написать формулы для вычисления приращений углов в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} E\delta\alpha_3 &= (\rho_3 - \rho_2) \operatorname{ctg} \alpha_1 + (\rho_1 - \rho_2) \operatorname{ctg} \alpha_2 \\ E\delta\alpha_2 &= (\rho_2 - \rho_1) \operatorname{ctg} \alpha_3 + (\rho_2 - \rho_3) \operatorname{ctg} \alpha_1 \\ E\delta\alpha_1 &= (\rho_1 - \rho_3) \operatorname{ctg} \alpha_2 + (\rho_1 - \rho_2) \operatorname{ctg} \alpha_3 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (e).$$

Положим, например, что стороны треугольника, представляющие собой железные бруски, испытывают напряжения:

$$\rho_1 = -141 \text{ кг/см}^2; \rho_2 = +463 \text{ кг/см}^2; \rho_3 = -17 \text{ кг/см}^2.$$

Котангенсы углов, выписанные на чертеже 305, равны:

$$\operatorname{ctg} \alpha_1 = 0,496; \operatorname{ctg} \alpha_2 = 1,079; \operatorname{ctg} \alpha_3 = 0,295.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} \alpha_1 (\rho_2 - \rho_3) &= 0,496 (+463 + 17) = +238; \\ \operatorname{ctg} \alpha_2 (\rho_3 - \rho_1) &= 1,079 (-17 + 141) = +134; \\ \operatorname{ctg} \alpha_3 (\rho_1 - \rho_2) &= 0,295 (-141 - 463) = -178; \end{aligned}$$

Пользуясь этими данными, мы без затруднений можем построить диаграмму перемещений (фиг. с) для узлов нижнего пояса, рассматриваемого, как шарнирный многоугольник. Сначала, задаваясь величиной модуля (E положено равным $1,8 \cdot 10^6$ кг/см²), вычисляем по известным уже напряжениям величины удлинений стержней нижнего пояса. Далее на основании значений $E\delta x$ составляем величины $E\psi$, пропорциональные углам поворота стержней нижнего пояса. Мы предполагаем стержень 5 неповорачиваемым и шарнир f неподвижным. Тогда

$$E\psi_5 = 0.$$

Для стержня 4 получаем:

$$E\psi_4 = E\delta\theta_4 = 212 + 363 + 294 = 869 \text{ кг/см}^2.$$

Точно так же для стержня 3:

$$E\psi_3 = E\psi_4 + E\delta\theta_3 = 869 + (301 + 439 + 426) = 2035 \text{ кг/см}^2.$$

Далее тем же путем получаем:

$$E\psi_2 = 3435 \text{ кг/см}^2; E\psi_1 = 6531 \text{ кг/см}^2;$$

$$E\psi_6 = 850 \text{ кг/см}^2; E\psi_7 = 1754 \text{ кг/см}^2,$$

$$E\psi_8 = 2433 \text{ кг/см}^2; E\psi_9 = 3421 \text{ кг/см}^2,$$

$$E\psi_{10} = 4943 \text{ кг/см}^2; E\psi_{11} = 8389 \text{ кг/см}^2.$$

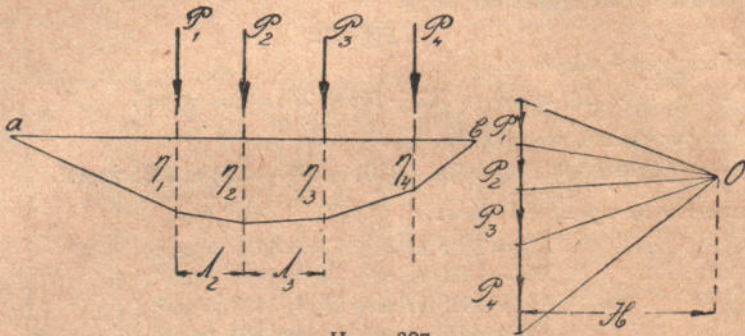
Деля эти величины на E и умножая на длины соответствующих стержней, получаем отрезки ρ , нужные для построения диаграммы перемещений. Направления этих отрезков в рассматриваемом случае определяются тем, что все стержни, лежащие левее бруска 5 вращаются по часовой стрелке. Стержни, лежащие справа от того же бруска, вращаются против часовой стрелки. Построение диаграммы перемещений начнем с неподвижного узла f . Соответствующая точка f будет совпадать с полюсом. Откладывая удлинение δ_5 стержня 5, получаем точку e' . Далее по известному правилу строим точки d' , c' , b' и a' . Переходя теперь к брускам, лежащим справа от стержня 5, строим тем же способом точки g' , h' , k' , l' , m' и n' . Чтобы удовлетворить условиям на опорах, нужно всей ферме дать поступательное перемещение $a'f'$, соответствующее неподвижности левой опоры, и далее повернуть всю ферму около левого опорного шарнира a . Перемещения, соответствующие всему повороту, мы получим обычным приемом: построением на вертикальном отрезке $a'n''$ фигуры, геометрически подобной заданной ферме.

Переноса теперь вертикальные составляющие найденных перемещений на вертикали, проходящие через узлы нижнего пояса, мы получим многоугольник прогиба $a_1b_1c_1 \dots n_1$. Из чертежа (фиг. с) видно, что в данном случае удлинения брусков, откладываемые при построении диаграммы, лишь в слабой степени влияют на прогиб. Величина прогиба определяется главным образом отрезками ρ . Если бы мы строили линию прогиба для верхнего пояса, то здесь все удлинения брусков придется при построении диаграммы откладывать по горизонтальному направлению, и потому прогибы вполне определяются отрезками ρ . Линию прогибов мы сможем при этом построить как веревочный многоугольник для фиктивных грузов $\delta\theta$.

§ 45. Линия прогибов, рассматриваемая как веревочный многоугольник.

Мы видели уже (§ 43, стр. 230), что в случае прямого горизонтального пояса можно построить линию прогиба как веревочный многоугольник. Подобное построение легко распространить и на более общий случай шарнирного многоугольника.

Предварительно установим связь между ординатами η_1, η_2, \dots вершин веревочного многоугольника, построенного для системы параллельных сил P_1, P_2, \dots (черт. 307), и величинами этих сил. Ординаты η_1, η_2, \dots , отсчитываемые от некоторой прямой ab , мы всегда



Черт. 307.

можем рассматривать как величины, пропорциональные изгибающим моментам для соответствующей балки, нагруженной силами P_1, P_2, \dots . В таком случае величина $H (\eta_2 - \eta_1)$ представит собой разность изгибающих моментов под грузами P_1 и P_2 . Если мы обозначим через λ_2

расстояния между грузами и через Q_1 — поперечную силу на протяжении λ_2 , то, очевидно,

$$H (\eta_2 - \eta_1) = Q_1 \lambda_2 \quad (a).$$

Точно так же для ординат η_2 и η_3 найдем:

$$H (\eta_3 - \eta_2) = Q_2 \lambda_3 \quad (b).$$

Принимая во внимание, что

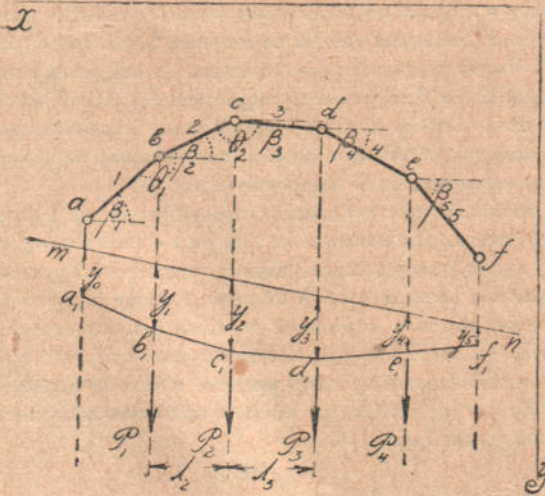
$$Q_1 - Q_2 = P_2,$$

мы получаем из (a) и (b) нужную нам формулу:

$$P_2 = H \left(\frac{\eta_2 - \eta_1}{\lambda_2} - \frac{\eta_3 - \eta_2}{\lambda_3} \right) \quad (c),$$

которой можно будет воспользоваться при построении линии прогиба.

Пусть $abc\dots$ — шарнирный многоугольник и $a_1b_1c_1\dots$ — соответствующая ему линия прогибов, отсчитываемых от mn вниз (черт. 308). Пользуясь формулой (c) выясним, каковы должны быть фиктивные



Черт. 308.

грузы P_1, P_2, \dots , для которых веревочный многоугольник совпадает с линией прогиба.

Возьмем стержень bc . Прогобы, соответствующие концам стержня, обозначим через y_1 и y_2 . Разность ординат $y_2 - y_1$ зависит как от изменения длины стержня, так и от его поворота. Обозначим эти величины через δl_2 и через $\delta \beta_2$. Удлинению стержня на величину δl_2 при неизменности направления стержня соответствует уменьшение прогиба точки c по сравнению с прогибом точки b на величину $\delta l_2 \sin \beta_2$. Вследствие возрастания угла β_2 на величину $\delta \beta_2$, прогиб точки c , по сравнению с прогибом точки b , уменьшится на величину $l_2 \delta \beta_2 \cos \beta_2 = \lambda_2 \delta \beta_2$. Так как и в том и в другом случае мы имеем уменьшение прогиба точки c по отношению к прогибу точки, b , то следовательно,

$$y_2 - y_1 = -\delta l_2 \sin \beta_2 - \lambda_2 \delta \beta_2,$$

откуда

$$\frac{y_2 - y_1}{\lambda_2} = -\frac{\delta l_2}{l_2} \operatorname{tg} \beta_2 - \delta \beta_2 \quad (d).$$

Считая угол β положительным, когда положительному изменению x соответствует положительное приращение ординаты y шарнирного многоугольника и рассматривая брусок cd , мы прежним путем найдем

$$\frac{y_3 - y_2}{\lambda_3} = -\frac{\delta l_3}{l_3} \operatorname{tg} \beta_3 - \delta \beta_3 \quad (e).$$

Обращаясь теперь к формуле (с) и полагая в ней полюсное расстояние равным единице, мы при помощи (d) и (e) получим для фиктивного груза P_2 такое выражение:

$$P_2 = -\frac{\delta l_2}{l_2} \operatorname{tg} \beta_2 - \delta \beta_2 + \frac{\delta l_3}{l_3} \operatorname{tg} \beta_3 + \delta \beta_3.$$

Принимая во внимание, что $\delta \beta_3 - \delta \beta_2 = \delta \theta_2$ ¹⁾, мы получим для фиктивного груза P_2 окончательно такое выражение:

$$P_2 = \delta \theta_2 - \frac{\delta l_2}{l_2} \operatorname{tg} \beta_2 + \frac{\delta l_3}{l_3} \operatorname{tg} \beta_3 \quad (f)$$

Тот же самый веревочный многоугольник мы получим, если все грузы P и полюсное расстояние умножим на модуль упругости E . Тогда, вводя обозначения для напряжений p , получим для фиктивного груза P_m , приложенного в m -ом узле шарнирного многоугольника, такое выражение

$$P_m = E \delta \theta_m - p_m \operatorname{tg} \beta_m + p_{m+1} \operatorname{tg} \beta_{m+1} \quad (g)$$

Если для вычисленных таким образом фиктивных грузов, имеющих измерение кг/см^2 , построить веревочный многоугольник при полюсном

¹⁾ Величины $\delta \beta_3$ и $\delta \beta_2$ положительны, если им соответствуют вращения стержней против часовой стрелки. Положительному $\delta \theta_2$ соответствует увеличение угла θ_2 .

расстоянии, равном E , то он представит собою искомую линию прогибов. Прогибы нужно отсчитывать по вертикальному направлению от замыкающей линии, которая должна быть проведена так, чтобы были удовлетворены условия на опорах. Масштаб для прогибов при этом будет тот же, который принят при построении шарнирного многоугольника.

Так как обычно приходится иметь дело с весьма малыми прогибами, то для ясности чертежа желательно их получать в преувеличенном масштабе. Мы достигнем этой цели, если вместо полюсного расстояния E возьмем величину $\frac{E}{m}$. При этом все ординаты веревочного многоугольника увеличатся в m раз. Мы можем подобрать m таким образом, чтобы получить прогибы в натуральную величину.

Применим этот способ к построению прогибов для узлов нижнего пояса фермы, представленной на чертеже 306. Для этого предварительно вычислим величины $\rho_m \operatorname{tg} \beta_m$, входящие в правую часть формулы (g). Пользуясь величинами углов наклона стержней нижнего пояса и величинами напряжений, выписанными на фигуре a , находим, идя от левой руки к правой:

$$\rho_m \operatorname{tg} \beta_m = -253, -210, -151, -98, -47, 0, +47 + 98, +151, +219, +264 \text{ кг/см}^2.$$

Точно так же при помощи величин $E\theta_a$, выписанных на фигуре b , находим для всех узлов нижнего пояса значения $E\theta$. Идя от левой опоры к правой, получим такие величины:

$$E\theta_m = 3096, 1400, 1166, 869, 850, 904, 679, 938, 1522, 3446 \text{ кг/см}^2.$$

Теперь, на основании формулы (g), получаем:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= 3096 + 253 - 210 = 3139 \text{ кг/см}^2. \\ \rho_2 &= 1400 + 210 - 151 = 1459 \text{ " } \\ \rho_3 &= 1166 + 151 - 98 = 1219 \text{ " } \\ \rho_4 &= 869 + 98 - 47 = 920 \text{ " } \\ \rho_5 &= 850 + 47 + 0 = 897 \text{ " } \\ \rho_6 &= 904 - 0 + 47 = 951 \text{ " } \\ \rho_7 &= 679 - 47 + 93 = 730 \text{ " } \\ \rho_8 &= 988 - 98 + 151 = 1041 \text{ " } \\ \rho_9 &= 1522 - 151 + 219 = 1590 \text{ " } \\ \rho_{10} &= 3446 - 219 + 264 = 3491 \text{ " } \end{aligned}$$

Приложив эти грузы к нижним узлам фермы и построив для них веревочный многоугольник, получим искомую линию прогиба. Замыкающая должна быть проведена так, чтобы прогибы на опорах получились равными нулю. Если чертеж фермы составлен в масштабе $1:n$, полюсное расстояние при построении веревочного многоугольника принято равным $E:m$, то для получения действительных прогибов нужно отрезки, получаемые из чертежа, умножать на n и делить на m .

Намеченный здесь способ построения линии прогибов становится неприменимым в тех случаях, когда шарнирный многоугольник заключает в себе вертикально направленные стержни. Для таких стержней $\operatorname{tg} \beta$ обращается в бесконечность, а вместе с тем в бесконечность обра-

щаются также и соответствующие фиктивные грузы, определяемые по формуле (g).

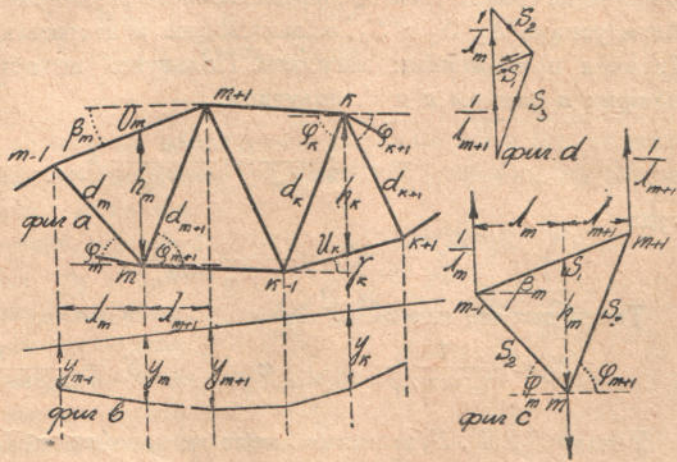
Если изменения длин стержней обусловлены не только напряжениями, но также и изменениями температуры, то к напряжениям ρ , входящим в формулу (g), нужно прибавлять величины $E\alpha t$, где α — коэффициент линейного расширения и t — повышение температуры.

Получение прогибов путем построения веревочного многоугольника является более простым и наглядным способом, чем нахождение тех же величин при помощи диаграммы Виллио, но это построение требует некоторой предварительной работы по вычислению изменений углов треугольников, составляющих решетку фермы.

В тех случаях, где вычисленные изменения углов могут быть использованы для других расчетов ¹⁾, намеченный здесь прием построения линии прогибов является особенно выгодным.

§ 46. Иной прием вычисления фиктивных грузов.

В тех случаях, когда изменения углов в ферме не вычисляются для других каких-либо целей или когда требуется дать лишь приближенные величины для прогибов, выгодно получить для фиктивных грузов ρ выражения, заключающие лишь изменения длин стержней и не содержащие угловых изменений $\delta\theta$. Покажем, как эти выражения могут быть получены в простейшем случае, когда ферма не заключает брусьев вертикального направления.



Черт. 309.

Положим, требуется найти путем построения веревочного многоугольника прогибы верхних и нижних узлов системы, представленной на чертеже 309. Пользуясь указанными

¹⁾ Далее мы увидим, что по изменениям углов можно вычислить те дополнительные напряжения, которые возникают в фермах вследствие того, что стержни соединены в узлах не идеальными шарнирами, а скреплены жестко при помощи заклепочных соединений.

на фигуре *a* обозначениями для стержней и углов наклона их к горизонту, составим выражения для фиктивного груза в каком-либо узле *m* нижнего пояса. Пусть фигура *b* представляет соответствующую линию прогиба, построенную как веревочный многоугольник при полюсном расстоянии, равном единице. Если y_{m-1} , y_m и y_{m+1} — прогибы для узлов $m-1$, m и $m+1$, то на основании формулы (с) предыдущего параграфа получаем для фиктивного груза ρ_m выражение:

$$\rho_m = \frac{y_m - y_{m-1}}{\lambda_m} - \frac{y_{m+1} - y_m}{y_{m+1}} \quad (a).$$

В это выражение входят разности прогибов двух последовательных узлов и длины λ . Постараемся выразить эти величины в зависимости от удлинений брусков. Для решения этой чисто геометрической задачи воспользуемся приемом, который применял Максвелл при вычислении перемещений (§ 38). Вычертим отдельно треугольник $m-1$, m , $m+1$ (фиг. с) и приложим к нему в верхних узлах вертикальные силы, равные

$$\frac{1}{\lambda_m} \quad \text{и} \quad \frac{1}{\lambda_{m+1}}.$$

В нижнем узле m приложена направленная вертикально вниз уравновешивающая сила. Путем непосредственного разложения (фиг. d) сейчас же найдем усилия S_1 , S_2 и S_3 , возникающие в стержнях треугольника под действием приложенных нагрузок. Пользуясь подобием треугольников, входящих в фигуры с и d, получаем:

$$-S_1 : \frac{1}{\lambda_m} = \frac{\lambda_m}{\cos \beta_m} : h_m,$$

откуда

$$S_1 = -\frac{1}{h_m \cos \beta_m}.$$

Точно так же находим:

$$S_2 = \frac{1}{h_m \cos \varphi_m} \quad \text{и} \quad S_3 = \frac{1}{h_m \cos \varphi_{m+1}}.$$

Усилия S_1 , S_2 , S_3 и вызывающие их нагрузки представляют систему взаимно уравновешивающихся сил. Работа этих сил на всяком возможном перемещении должна равняться нулю. В качестве возможных перемещений возьмем те действительные перемещения, которые соответствуют рассматриваемому треугольнику в стержневой системе, представленной на фигуре *a*. В таком случае работа внешних, приложенных к треугольнику сил, представится так:

$$\frac{1}{\lambda_m} (y_m - y_{m-1}) - \frac{1}{\lambda_{m+1}} (y_{m+1} - y_m) \quad (b).$$

Обозначая через δO_m , δd_m и δd_{m+1} действительные удлинения сторон рассматриваемого треугольника, найдем для работы усилий S_1 , S_2 и S_3 на этих перемещениях выражение:

$$-S_1 \delta O_m - S_2 \delta d_m - S_3 \delta d_{m+1} \quad (c).$$

Итак, начало возможных перемещений в применении к силам, представленным на фигуре *c*, и к действительным перемещениям дает нам:

$$\frac{1}{\lambda_m} (y_m - y_{m-1}) - \frac{1}{\lambda_{m+1}} (y_{m+1} - y_m) = S_1 \delta O_m + S_2 \delta d_m + S_3 \delta d_{m+1}.$$

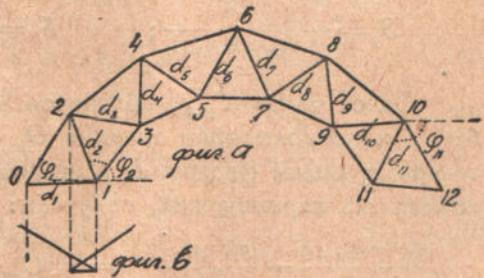
Принимая во внимание, что левая часть равенства представляет собой выражение для фиктивного груза P_m [формула (a)], и вставляя вместо S_1 , S_2 и S_3 найденные выше значения, получаем:

$$P_m = \frac{-\frac{\delta O_m}{\cos \beta_m} + \frac{\delta d_m}{\cos \varphi_m} + \frac{\delta d_{m+1}}{\cos \varphi_{m+1}}}{h_m} \quad (d).$$

Путем таких же рассуждений получаем для фиктивного груза P_k , приложенного в каком-либо узле k верхнего пояса (фиг. *a*), выражение:

$$P_k = \frac{+\frac{\delta U_k}{\cos \gamma_k} - \frac{\delta d_k}{\cos \varphi_k} - \frac{\delta d_{k+1}}{\cos \varphi_{k+1}}}{h_k} \quad (e).$$

Относительно косинусов, входящих в формулы (d) и (e), заметим что для случая, представленного на чертеже 309, все они имеют положительное значение. Если бы мы имели расположение, указанное на чертеже 310, то, например, для $\cos \varphi_2$ и $\cos \varphi_{11}$ мы получили бы отрицательные величины. При построении веревочного многоугольника для фиктивных грузов нужно держаться порядка узлов и вести построение, как то показано на фигуре *b* (черт. 310).



Черт. 310.

Рассмотрим теперь систему со стойками. Предположим, раскосы имеют нисходящее направление (черт. 311), и требуется путем построения веревочного многоугольника найти прогибы узлов нижнего пояса. Выясним, как в этом случае фиктивный груз

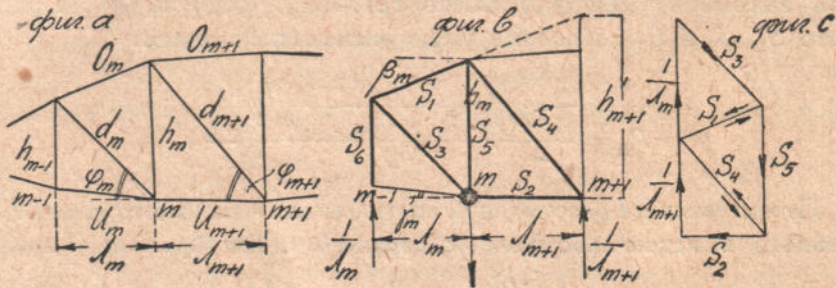
$$P_m = \frac{y_m - y_{m-1}}{\lambda_m} - \frac{y_{m+1} - y_m}{\lambda_{m+1}},$$

приложенный в узле m , может быть выражен при помощи удлинений брусков системы.

Эту геометрическую задачу, как и раньше, решаем, пользуясь началом возможных перемещений. Выделим часть системы, соответствующую трем последовательным нижним узлам (фиг. *b*), и приложим к ней в узлах $m-1$ и $m+1$ направленные вертикально вверх фиктивные силы

$$\frac{1}{\lambda_m} \quad \text{и} \quad \frac{1}{\lambda_{m+1}}.$$

В узле m приложена действующая вертикально вниз уравнивающая сила. Соответствующие этим силам усилия в стержнях S_1, S_2, \dots сейчас же могут быть найдены путем непосредственного разложения (фиг. *c*).



Черт. 311.

Из чертежа легко получаем для этих усилий выражения:

$$S_1 = -\frac{1}{h_m \cos \beta_m}; \quad S_2 = \frac{1}{h_m \cos \gamma_{m+1}}; \quad S_3 = \frac{1}{h_m \cos \varphi_m};$$

$$S_4 = -\frac{1}{h_m \cos \varphi_{m+1}}; \quad S_5 = \frac{h'_{m+1}}{\lambda_{m+1} \cdot h_m}; \quad S_6 = -\frac{1}{\lambda_m}.$$

Здесь через h'_{m+1} обозначен вертикальный отрезок между узлом $m+1$ и продолжением стержня O_m верхнего пояса (фиг. *b*). Применяя теперь к силам фигуры *b* и к действительным перемещениям начало возможных перемещений, получаем:

$$\frac{y_m - y_{m-1}}{\lambda_m} - \frac{y_{m+1} - y_m}{\lambda_{m+1}} = S_1 \delta O_m + S_2 \delta U_{m+1} + S_3 \delta d_m + S_4 \delta d_{m+1} + S_5 \delta h_m + S_6 \delta h_{m-1}.$$

Вставляя вместо S_1, S_2, \dots найденные выше значения, получим:

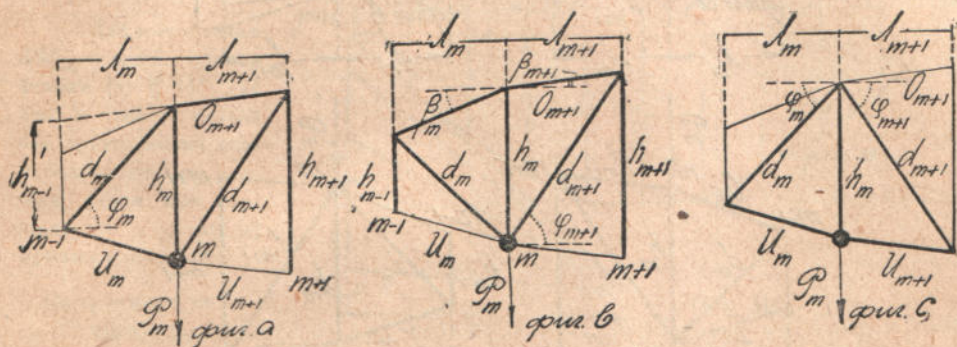
$$P_m = \frac{1}{h_m} \left\{ -\frac{\delta O_m}{\cos \beta_m} + \frac{\delta U_{m+1}}{\cos \gamma_{m+1}} + \frac{\delta d_m}{\cos \varphi_m} - \frac{\delta d_{m+1}}{\cos \varphi_{m+1}} + \frac{\delta h_m \cdot h'_{m+1}}{\lambda_{m+1}} - \frac{\delta h_{m+1} \cdot h_m}{\lambda_m} \right\}$$

(5)

Подобным же образом могут быть составлены формулы для фиктивных грузов при ином расположении раскосов, а также в тех случаях, когда требуется найти прогибы узлов верхнего пояса.

Так, например, при исследовании прогиба нижнего пояса для расположения раскосов, указанного на фигурах а, б и с (черт. 312), выражения фиктивного груза P_m напишутся так:

фиг. а:
$$P_m = \frac{1}{h_m} \left\{ -\frac{\delta O_{m+1}}{\cos \beta_{m+1}} + \frac{\delta U_m}{\cos \gamma_m} - \frac{\delta d_m}{\cos \varphi_m} + \frac{\delta d_{m+1}}{\cos \varphi_{m+1}} - \frac{\delta h_{m+1} \cdot h_m}{\lambda_{m+1}} + \frac{\delta h_m \cdot h'_{m-1}}{\lambda_m} \right\} \quad (g);$$



Черт. 312.

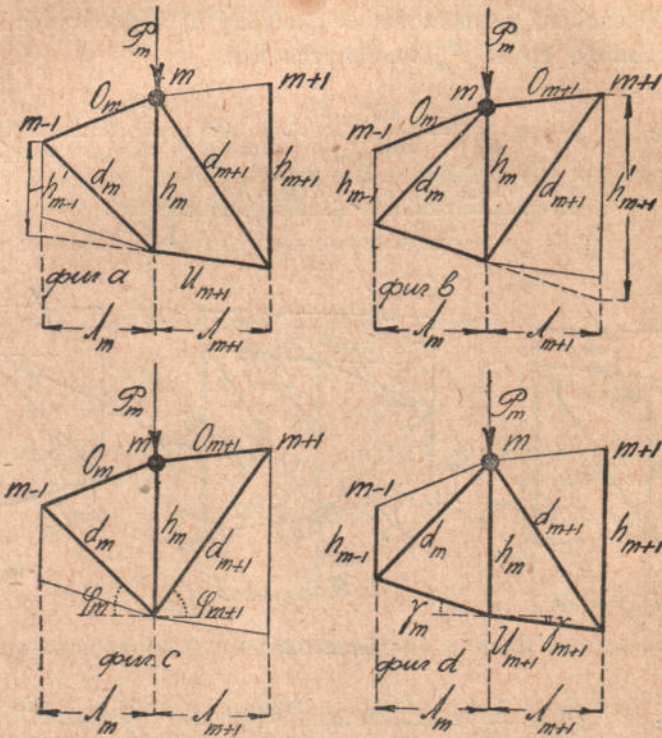
фиг. б:
$$P_m = \frac{1}{h_m} \left\{ -\frac{\delta O_m}{\cos \beta_m} - \frac{\delta O_{m+1}}{\cos \beta_{m+1}} + \frac{\delta d_m}{\cos \varphi_m} + \frac{\delta d_{m+1}}{\cos \varphi_{m+1}} - \frac{\delta h_{m-1} \cdot h_m}{\lambda_m} + \delta h_m (\operatorname{tg} \beta_m - \operatorname{tg} \beta_{m+1}) - \frac{\delta h_{m+1} \cdot h_m}{\lambda_{m+1}} \right\} \quad (h);$$

фиг. с:
$$P_m = \frac{1}{h_m} \left\{ \frac{\delta U_m}{\cos \gamma_m} + \frac{\delta U_{m+1}}{\cos \gamma_{m+1}} - \frac{\delta d_m}{\cos \varphi_m} - \frac{\delta d_{m+1}}{\cos \varphi_{m+1}} + \delta h_m (\operatorname{tg} \varphi_m + \operatorname{tg} \varphi_{m+1}) \right\} \quad (k).$$

При определении прогибов узлов верхнего пояса фиктивный груз P_m для случаев, представленных на чертеже 313, найдется из таких формул:

фиг. а:
$$P_m = \frac{1}{h_m} \left\{ -\frac{\delta O_m}{\cos \beta_m} + \frac{\delta U_{m+1}}{\cos \gamma_{m+1}} + \frac{\delta d_m}{\cos \varphi_m} - \frac{\delta d_{m+1}}{\cos \varphi_{m+1}} - \frac{\delta h_m \cdot h'_{m-1}}{\lambda_m} + \frac{\delta h_{m+1} \cdot h_m}{\lambda_{m+1}} \right\} \quad (l);$$

фиг. б:
$$\rho_m = \frac{1}{h_m} \left\{ -\frac{\partial O_{m+1}}{\cos \beta_{m+1}} + \frac{\partial U_m}{\cos \gamma_m} - \frac{\partial d_m}{\cos \varphi_m} + \frac{\partial d_{m+1}}{\cos \varphi_{m+1}} + \frac{\partial h_{m+1} \cdot h_m}{\lambda_m} - \frac{\partial h_m \cdot h'_{m+1}}{\lambda_{m+1}} \right\} \quad (m);$$



Черт. 313.

фиг. с:
$$\rho_m = \frac{1}{h_m} \left\{ -\frac{\partial O_m}{\cos \beta_m} - \frac{\partial O_{m+1}}{\cos \beta_{m+1}} + \frac{\partial d_m}{\cos \varphi_m} + \frac{\partial d_{m+1}}{\cos \varphi_{m+1}} - \partial h_m (\operatorname{tg} \varphi_m + \operatorname{tg} \varphi_{m+1}) \right\} \quad (n);$$

фиг. д:
$$\rho_m = \frac{1}{h_m} \left\{ \frac{\partial U_m}{\cos \gamma_m} + \frac{\partial U_{m+1}}{\cos \gamma_{m+1}} - \frac{\partial d_m}{\cos \varphi_m} - \frac{\partial d_{m+1}}{\cos \varphi_{m+1}} + \frac{\partial h_{m-1} \cdot h_m}{\lambda_m} - \partial h_m (\operatorname{tg} \gamma_m - \operatorname{tg} \gamma_{m+1}) + \frac{\partial h_{m+1} \cdot h_m}{\lambda_{m+1}} \right\} \quad (p).$$

Иногда требуется для предварительных расчетов лишь приближенное значение для прогибов. В таких случаях пренебрегают обыкновенно деформацией решетки. Формулы (d), (e), (f) и (g) — (p) для фиктивных грузов при этом значительно упрощаются: в них остаются лишь члены, заключающие удлинения элементов поясов.

Задачи 155. Определить прогибы узлов нижнего пояса мостовой фермы, представленной на чертеже 314.

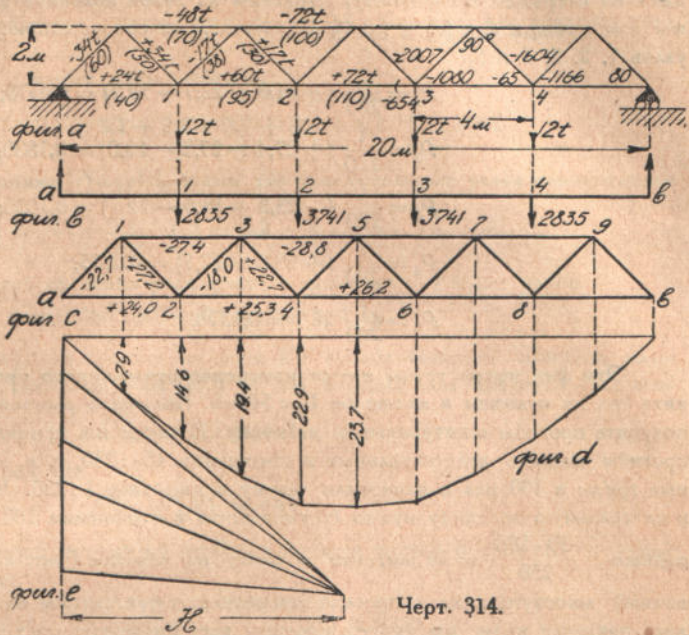
В силу симметрии мы можем ограничиться лишь одной половиной фермы. Усилия в тоннах и площади поперечных сечений в см^2 (числа в скобках) показаны на левой половине фермы (фиг. а).

Применим сначала способ, изложенный в § 45. Так как стержни нижнего пояса расположены горизонтально, то фиктивные грузы найдутся из формулы [см. ф-лу (g) § 45]:

$$P_m = E\delta\theta_m.$$

Для вычисления $E\delta\theta_m$ воспользуемся ф-лами (e) § 44. Так как в нашем случае все треугольники равнобедренные с прямым углом при вершине, то в ф-лах (e) придется положить

$$\begin{aligned} \text{ctg } \alpha_1 &= \text{ctg } \alpha_2 = 1; \\ \text{ctg } \alpha &= 0,3. \end{aligned}$$



Полученные на основании этих ф-л значения $E\delta x$ выписаны на правой половине фермы. Пользуясь этими величинами, находим

$$\begin{aligned} E\delta\theta_1 &= E\delta\theta_4 = 2835 \text{ кг/см}^2; \\ E\delta\theta_2 &= E\delta\theta_3 = 3741 \text{ кг/см}^2. \end{aligned}$$

Если мы к балке ab (фиг. б) приложим соответствующие фиктивные грузы, построим для них веревочный многоугольник с полюсным расстоянием, равным $E = 1,8 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$ ¹⁾, и проведем надлежащим образом замыкающую, то получим прогибы в том же масштабе, в каком начерчена ферма. Вместо графического определения прогибов, мы можем вычислить их аналитическим путем. Для этого нужно только составить в требуемом сечении изгибающий момент от фиктивной нагрузки, приложенной к балке ab , и этот момент разделить на полюсное расстояние E .

Например, в узле 2 прогиб y_2 найдется так:

$$y_2 = \frac{1}{1,8 \cdot 10^6} (6576 \cdot 800 - 1417 \cdot 400) = 2,29 \text{ см.}$$

Для узла 1 найдем:

$$y_1 = \frac{1}{1,8 \cdot 10^6} (6576 \cdot 400) = 1,46 \text{ см.}$$

¹⁾ При исследовании прогиба ферм обыкновенно задаются величиной E меньшей, чем то получается для мостового железа из опытов на растяжение. Таким образом учитывается увеличение прогибов, которое получается от того, что заклепки несколько сдают.

Та же задача может быть разрешена и иным путем при помощи фиктивных грузов, выраженных через удлинения брусков (§ 46).

Для этого предварительно вычисляем удлинения всех брусков.

Удлинения эти в сантиметрах, умноженные на 180 и деленные на косинусы углов наклона стержней к горизонту, выписаны на левой половине фигуры с. Пользуясь ими, мы при помощи ф-л (d) и (e) (§ 46) вычисляем соответствующие фиктивные грузы для узлов 1, 2, 3, 4 и 5;

$$P_1 = \frac{1}{200} (+ 24,0 + 22,7 - 27,2) = 0,0975;$$

$$P_2 = \frac{1}{200} (+ 27,4 + 27,2 - 18,0) = 0,1830;$$

$$P_3 = \frac{1}{200} (+ 25,3 + 18,0 - 22,7) = 0,1030;$$

$$P_4 = \frac{1}{200} (+ 28,8 + 22,7) = 0,2575;$$

$$P_5 = \frac{1}{200} 26,2 = 0,1310.$$

Эти фиктивные грузы имеют измерение отвлеченного числа, и мы на многоугольнике сил их отложим в масштабе $1 = 5$ мм. Полюсное расстояние подберем так, чтобы получить прогибы в натуральную величину. Если бы мы приняли $H = 1$, то получили бы прогибы меньше действительных в отношении $180 : 250$, т. к. мы преувеличили фиктивные грузы в 180 раз и начертили ферму в масштабе $1 : 250$. Чтобы получить прогибы в натуральную величину нужно H уменьшить в отношении $180 : 250$, т.е. положить его равным $\frac{50 \cdot 180}{250} = 36$ мм, что и взято на чертеже (фиг. e). Построив теперь веревочный многоугольник и проведя замыкающую так, чтобы на опорах прогибы получились равными нулю, мы найдем прогибы всех промежуточных шарниров фермы (фиг. d).

Конечно, мы вместо построения веревочного многоугольника могли бы определить прогибы аналитическим путем, составляя изгибающий момент от фиктивной нагрузки и деля его на полюсное расстояние. Для середины пролета прогиб получится таким:

$$f = \frac{1}{180} (0,7065 \cdot 1000 - 0,0975 \cdot 800 - 0,1830 \cdot 600 - 0,1030 \cdot 400 - 0,2575 \cdot 200) = 2,37 \text{ см}$$

Если бы мы пренебрегли деформациями раскосов и приняли в расчет лишь удлинения стержней поясов, то имели бы для фиктивных грузов значения:

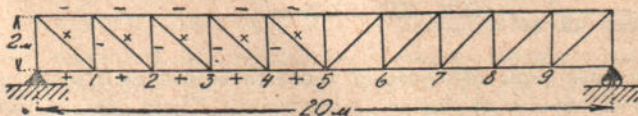
$$P_1 = 0,1200; P_2 = 0,1370; P_3 = 0,1265; P_4 = 0,1440; P_5 = 0,1310.$$

Соответственно этому получаем для середины пролета прогиб:

$$f' = \frac{1}{180} (0,5930 \cdot 1000 - 0,1200 \cdot 800 - 0,1370 \cdot 600 - 0,1265 \cdot 400 - 0,1440 \cdot 200) = 1,86 \text{ см.}$$

Пренебрежение деформацией раскосов приводит нас к ошибке в прогибе на $21,5\%$.

156. Найти прогибы узлов нижнего пояса системы с параллельными поясами (черт. 315).



Черт. 315.

Для простоты предположим, что сечения подобраны так, что напряжения во всех стержнях при рассматриваемой симметричной нагрузке одинаковы и равны $\pm 900 \text{ кг/см}^2$.

Тогда при указанных на чертеже размерах удлинения и укорочения стержней поясов и стоек будут равны 1 мм. Удлинение раскосов, деленное на косинус угла наклона к горизонту, будет равно 2 мм. Крайние панели нижнего пояса при вертикальных нагрузках не испытают удлинений.

Фиктивные грузы для узлов левой половины фермы найдутся при помощи ф-лы (f). Для правой половины пользуемся ф-лой (g). Наконец, для среднего узла имеем ф-лу (h).

Применяя эту ф-лу к нашей ферме, найдем:

$$\rho_5 = \frac{1}{200} \left\{ +0,1 + 0,1 + 0,2 + 0,2 + 0,1 + 0,1 \right\} = 0,004.$$

Пользуясь теперь ф-лами (f) и (g), находим для всех остальных узлов нижнего пояса

$$\rho_m = \frac{1}{200} \left(+0,1 + 0,1 + 0,2 - 0,2 - 0,1 + 0,1 \right) = 0,001.$$

Следовательно, прогиб среднего узла нижнего пояса фермы будет равен

$$f = 0,006 \cdot 1000 - 0,04 \cdot 500 = 4 \text{ см.}$$

К тому же результату мы пришли бы, если бы воспользовались приемом, изложенным в параграфе 45. Применяя ф-лы (e) § 44, мы находим для среднего узла нижнего пояса:

$$E\delta\theta_5 = 7200 \text{ кг/см}^2.$$

Для прочих узлов получим:

$$E\delta\theta_m = 1800 \text{ кг/см}^2.$$

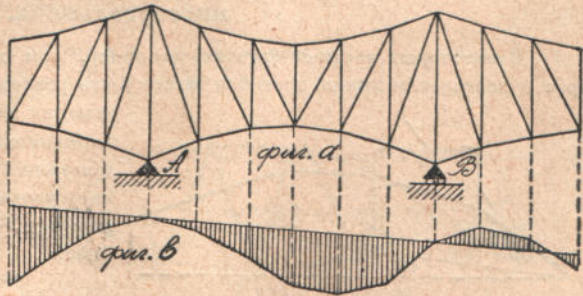
Составляя изгибающий момент по середине пролета фермы и деля его на полюсное расстояние E , найдем:

$$f = \left(\frac{10800 \cdot 1000 - 7200 \cdot 500}{1,8 \cdot 20^3} \right) = 4 \text{ см.}$$

157. Построить линию прогибов для узлов нижнего пояса консольной фермы (черт. 316).

Мы можем вычислить фиктивные грузы в узлах нижнего пояса при помощи ф-л (f), (g) и (h). Исключения составляют лишь узлы A и B , так как здесь оба соседние

раскоса идут к вершине стойки. Соответствующий фиктивный груз может быть получен без всяких затруднений по ф-ле (k). Заметим, что этим способом выгодно воспользоваться лишь в том случае, если в дальнейшем не понадобится вычислять изменения углов. Если же угловые изменения должны быть вычислены для других целей, например, для определения дополнительных напряжений, то тогда выгоднее при определении прогибов воспользоваться ф-ой (g) § 45. Найдя все фиктивные грузы и построив для них соответствующий веревочный многоугольник, мы должны будем для определения прогибов провести надлежащим образом замыкающую. Если опоры не оседают, то замыкающая должна проходить так (фиг. б), чтобы прогибы на опорах равнялись нулю.

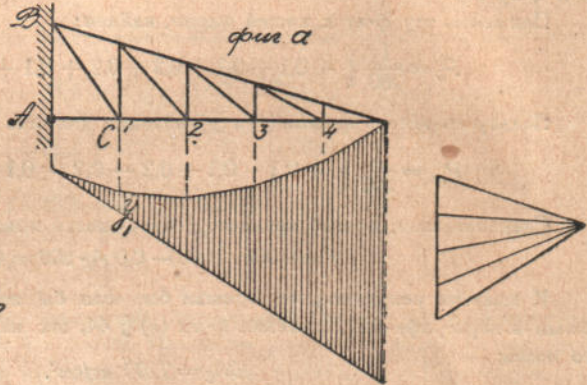
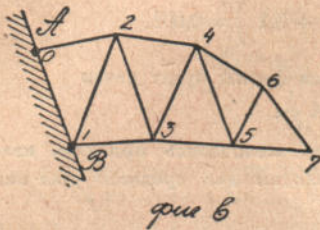


Черт. 316.

Когда прогибы узлов нижнего пояса найдены, то в фермах с стойками сейчас же могут быть найдены и прогибы соответствующих верхних узлов. К прогибам нижних узлов нужно будет прибавить сжатия соответствующих стоек. Если бы мы желали непосредственно определить прогибы верхних узлов, то нужно было бы или воспользоваться приемом параграфа 45, или же воспользоваться ф-ами (l), (m), (n), (p).

158. Построить линию прогибов для систем, представленных на чертеже 317.

Фиктивные грузы для фермы, представленной на фигуре а, вычисляем по ф-ле (f)

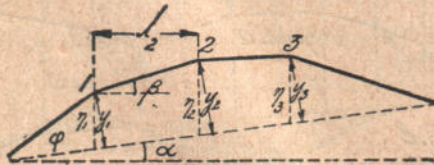


Черт. 317.

и строим для них веревочный многоугольник. Чтобы провести замыкающую, вычислим на основании удлинений сторон треугольника ABC прогиб узла 1. Замыкающая должна быть проведена так, чтобы в точке A прогиб равнялся нулю, а в точке C — найденной предварительным расчетом величине y_1 . При определении прогибов для системы, представленной на фигуре б, нужно построить веревочный многоугольник для фиктивных грузов $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ и P_7 . При вычислении этих грузов по ф-лам (d) и (e) § 46, длину AB считаем неизменной. Прогибы придется отсчитывать от первой стороны веревочного многоугольника.

§ 47. Определение изменения длины хорды шарнирного многоугольника.

В некоторых частных случаях, например, при расчетах трехшарнирных арок, вопрос о построении линии прогибов может быть разрешен лишь после предварительного решения задачи об изменении длины хорды шарнирного многоугольника. При построении диаграммы перемещений для шарнирного многоугольника (§ 43) мы дали такую общую формулу [ф-ла (e)] для приращения длины хорды:



Черт. 318.

$$\delta L = \sum_1^{n-1} y_i \delta \theta_i + \sum_1^n \cos \varphi_i \delta l_i \quad (a).$$

Здесь через φ_i обозначены углы наклона стержней многоугольника к хорде (черт. 318), через y_i — расстояние узла i до хорды, через δl_i — приращение длины стержня l_i .

Иногда, как мы уже указывали, выгоднее не вычислять изменения углов $\delta \theta_i$ и выражать фиктивные грузы, нужные при построении линии прогибов, непосредственно

через удлинения брусков. В таком случае, и изменение длины хорды выгодно представить в зависимости от уже вычисленных значений фиктивных грузов. Воспользуемся для этого ф-лой [см. § 45, ф-лу (f)]:

$$P_m = \delta l_m - \frac{\delta l_m}{l_m} \operatorname{tg}^2 \beta_m + \frac{\delta l_{m+1}}{l_{m+1}} \operatorname{tg}^2 \beta_{m+1}.$$

Из нее находим:

$$\delta l_m = P_m + \frac{\delta l_m}{l_m} \operatorname{tg}^2 \beta_m - \frac{\delta l_{m+1}}{l_{m+1}} \operatorname{tg}^2 \beta_{m+1}.$$

Ф-ла (a) может быть теперь переписана в таком виде:

$$\delta L = \sum_1^{n-1} y_i P_i + \sum_1^{n-1} y_i \left(\frac{\delta l_i}{l_i} \operatorname{tg}^2 \beta_i - \frac{\delta l_{i+1}}{l_{i+1}} \operatorname{tg}^2 \beta_{i+1} \right) + \sum_1^n \cos(\beta_i - \alpha) \delta l_i \quad (b).$$

Вторая и третья суммы в правой части этой ф-лы зависят от удлинений брусков, причем каждому бруску i будут соответствовать такие три члена:

$$y_i \frac{\delta l_i}{l_i} \operatorname{tg}^2 \beta_i - y_{i-1} \frac{\delta l_i}{l_i} \operatorname{tg}^2 \beta_i + \delta l_i \cos(\beta_i - \alpha).$$

Принимая во внимание, что $y_i = \eta_i \cos \alpha$, и, что $\eta_i - \eta_{i-1} = \lambda_i (\operatorname{tg} \beta_i - \operatorname{tg} \alpha)$, перепишем эти три члена в таком виде:

$$\begin{aligned} & \cos \alpha \cdot \frac{\delta l_i}{l_i} \operatorname{tg}^2 \beta_i \cdot \lambda_i (\operatorname{tg} \beta_i - \operatorname{tg} \alpha) + \delta l_i \cos(\beta_i - \alpha) = \\ & = \delta l_i \left[\frac{\sin^2 \beta_i \cdot \sin(\beta_i - \alpha)}{\cos^2 \beta_i} + \cos(\beta_i - \alpha) \right] = \frac{\delta l_i \cdot \cos \alpha}{\cos^2 \beta_i}. \end{aligned}$$

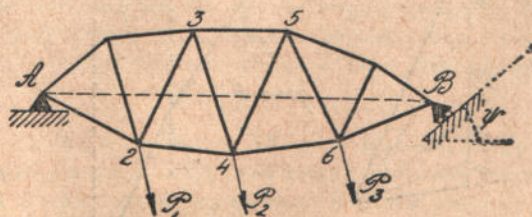
После этого преобразования, ф-ла (b) переписывается так:

$$\delta L = \cos \alpha \left[\sum_1^{n-1} \eta_i P_i + \sum_1^n \frac{\delta l_i}{\cos^2 \beta_i} \right] \quad (c).$$

Когда фиктивные грузы найдены каким-либо образом, то вычисление δL по ф-ле (c) может быть выполнено без всяких затруднений.

Задачи: 159. Построить линию прогибов для узлов нижнего пояса фермы, представленной на чертеже 319.

Пользуясь ф-лами (d) и (e) § 46, мы легко вычисляем фиктивные грузы P_m и строим для них веревочный многоугольник. Замыкающая, от которой должен производиться отсчет прогибов, должна быть проведена так, чтобы были удовлетворены условия на опорах. На левой опоре в нашем случае прогиб равен нулю. На правой опоре перемещение шарнира B



Черт. 319.

имеет заданное направление, следовательно, отношение между вертикальным и горизонтальным перемещениями определяется углом ψ . Горизонтальное перемещение равно, очевидно, приращению δL хорды AB и может быть вычислено по только что составлен-

ной ф-ле (с). Тогда для вертикального перемещения точки B будем иметь величину $\delta L \operatorname{tg} \psi$. По этим данным может быть проведена замыкающая, от которой нужно отсчитывать прогибы.



Черт. 320.

160. Построить линию прогибов для нижнего пояса фермы, представленной на чертеже 320.

В этом случае изменение длины AB равно сумме удлинений брусков нижнего пояса. Вычислив его, находим вертикальное перемещение точки B .

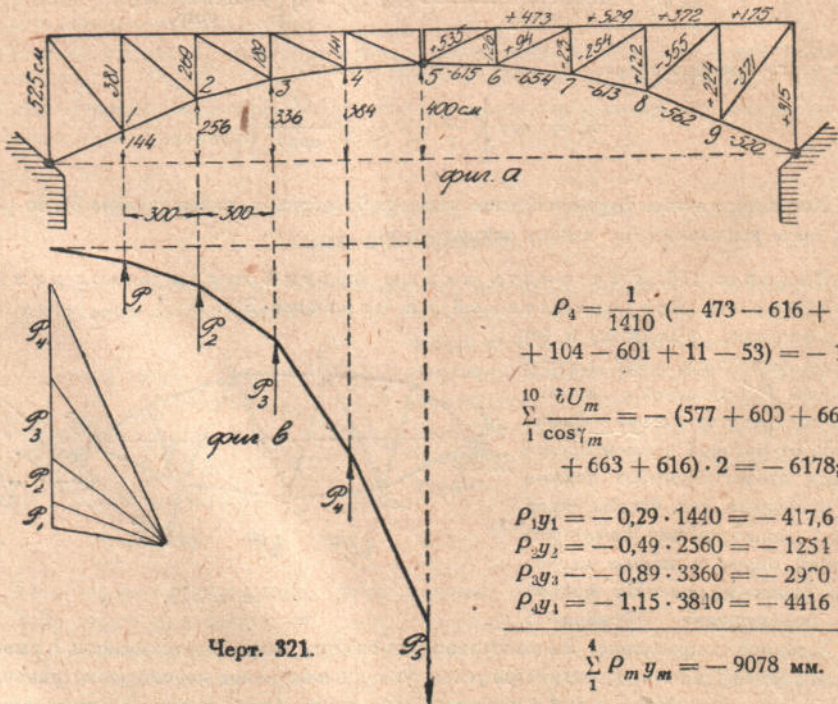
161. Построить линию прогибов для узлов нижнего пояса трехшарнирной арки (черт. 321).

На левой половине даны некоторые размеры фермы в сантиметрах, а на правой увеличенные в 10000 раз изменения длин стержней в миллиметрах. Удлинения эти вычислены для случая действия одного груза, приложенного в среднем шарнире. Для вычисления фиктивных грузов P_1, P_2, P_3 и P_4 пользуемся ф-лой (f) § 46. Тогда, принимая во внимание косинусы углов наклона стержней, получаем

$$P_1 = \frac{1}{3810} (-175 - 600 - 600 + 477 - 400 + 201) = -0,29;$$

$$P_2 = \frac{1}{2690} (-372 - 633 - 477 + 300 - 201 + 77) = -0,49;$$

$$P_3 = \frac{1}{1890} (-529 - 663 - 300 - 104 - 77 - 11) = -0,89;$$



Черт. 321.

$$P_4 = \frac{1}{1410} (-473 - 616 + 104 - 601 + 11 - 53) = -1,15;$$

$$\sum_{i=1}^{10} \frac{\delta U_m}{\cos \gamma_m} = -(577 + 600 + 663 + 663 + 616) \cdot 2 = -6178;$$

$$P_1 y_1 = -0,29 \cdot 1440 = -417,6 \text{ мм.};$$

$$P_2 y_2 = -0,49 \cdot 2560 = -1254 \text{ мм.};$$

$$P_3 y_3 = -0,89 \cdot 3360 = -2990 \text{ мм.};$$

$$P_4 y_4 = -1,15 \cdot 3840 = -4416 \text{ мм.};$$

$$\sum_{i=1}^4 P_m y_m = -9078 \text{ мм.}$$

Чтобы получить фиктивный груз P_5 , соответствующий среднему шарниру, воспользуемся ф-лой для изменения длины хорды и напишем общее выражение для изменения расстояния между нижними опорными шарнирами:

$$\delta L = 2 \sum_1^4 \rho_m y_m + P_5 y_5 + \sum_1^{10} \frac{\delta U_m}{\cos \gamma_m}.$$

Так как в нашем случае опорные шарниры предполагаются неподвижными, то $\delta L = 0$, и мы получаем:

$$P_5 = - \frac{2 \sum_1^4 \rho_m y_m + \sum_1^{10} \frac{\delta U_m}{\cos \gamma_m}}{y_5} = \frac{2 \cdot 9078 + 6178}{4000} = +6,08.$$

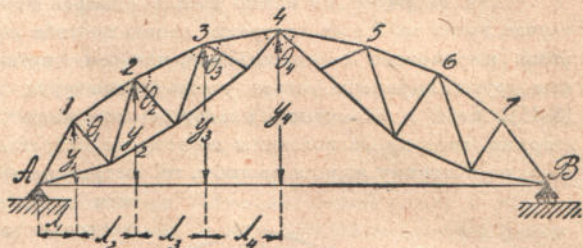
Пользуясь найденными значениями для фиктивных грузов, мы легко можем получить прогибы или графически, путем построения соответствующего веревочного многоугольника (фиг. б), или аналитическим путем, вычисляя изгибающие моменты от фиктивных грузов.

Имея прогибы нижнего пояса и зная изменение длин стоек, легко вычисляем также и прогибы узлов верхнего пояса.

162. Построить линию прогибов для узлов верхнего пояса трехшарнирной арки с затяжкой (черт. 322).

Если предварительно вычислены изменения углов $\delta\theta_1, \delta\theta_2, \delta\theta_3$, то для получения $\delta\theta_4$ можно воспользоваться ф-лой (с) § 43. Полагая, что удлинение δL затяжки AB найдено предварительным расчетом, мы определим $\delta\theta_4$ из ур-ия.

$$\delta L = \sum_1^3 y_m \delta\theta_m + \sum_5^7 y_m \delta\theta_m + y_4 \delta\theta_4 + \sum_1^8 \delta O_m \cos \beta_m$$

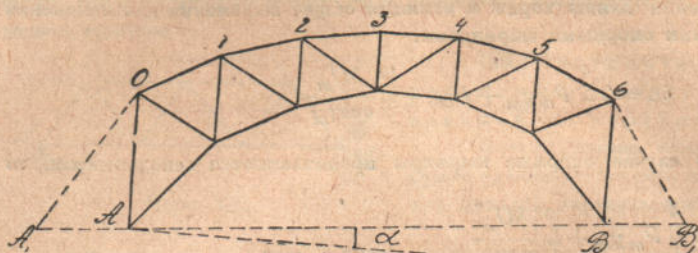


Черт. 322.

Если бы мы пожелали найти прогибы, не определяя угловых изменений, то фиктивные грузы следовало бы вычислить на основании ф-л (d) и (e) § 46. Для определения изменения длины хорды мы воспользовались бы в таком случае ф-лой (с) § 47. Вторая сумма в правой части этой ф-лы должна быть, в таком случае, распространена на все диагонали фермы, два крайние стержня верхнего пояса и два средние стержня нижнего пояса.

163. Найти изменения длины хорды AB для фермы с крайними вертикальными стойками (черт. 323), если фиктивные грузы для узлов верхнего пояса найдены предварительным расчетом.

К шарнирному многоугольнику $A0123456B$ мы не можем непосредственно применить ф-лу (с) § 47, так как крайние стержни имеют вертикальное направление. Это затруднение может быть устранено введением дополнительных стержней, указанных на чертеже пунктиром. Дополнительные стержни считаем абсолютно жесткими и бруски AA_1 и BB_1 направляем по хорде AB . В таком случае изменение расстояния A_1B_1 будет равняться искомому изменению расстояния AB .

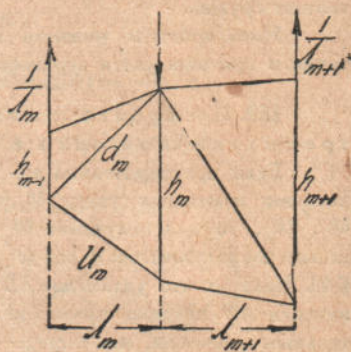


Черт. 323.

способом: нужно рассмотреть систему, представленную на чертеже 324, и в полученной таким образом общей ф-ле [см. ф-лу (ρ)] для фиктивного груза нужно принять во внимание, что для нашего случая при вычислении P_0 $\delta U_m = \delta d_m = 0$, так как присоединенные нами стержни нерастяжимы. Кроме того, $h_{m-1} = 0$.

Намеченный здесь прием, основанный на введении в систему добавочных жестких стержней, может быть с выгодой использован при решении целого ряда других задач.

Так, например, им можно воспользоваться в том случае, когда требуется построить линию прогиба для узлов шарнирного многоугольника, при чем фиктивные грузы выражены через угловые изменения $\delta\theta$ [§ 45]. Если в шарнирном многоугольнике имеются стержни, которые расположены по тому же направлению, по которому ищутся прогибы, то построение линии прогиба

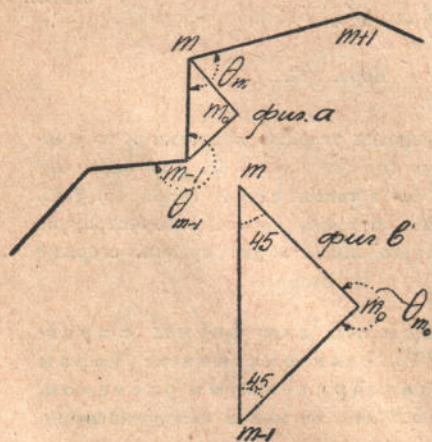


Черт. 324.

встречает затруднение, которое может быть устранено введением жестких стержней.

Если нужно начертить линию вертикальных прогибов для шарнирного многоугольника (фиг. а, черт. 325), имеющего вертикальный брусок, то мы вставляем между соответствующими узлами m и $m-1$ абсолютно жесткие стержни mm_0 и $(m-1)m_0$. Для удобства дальнейших вычислений, выберем углы наклона этих стержней так, как это указано на фигуре б. Пользуясь общими ф-лами § 44 найдем, что вследствие удлинений δl_m стержня l_m угол треугольника (фиг. б) при вершине m_0 увеличится на величину $2 \frac{\delta l_m}{l_m}$.

Два другие угла уменьшатся, и соответствующие



Черт. 325.

1) Для вычисления этих грузов нужно применить такой же прием, как при составлении ф-лы (f) § 46.

приращение будет равно $-\frac{\delta l_m}{l_m}$. На основании этого заключаем, что фиктивный груз в вершине m_0 должен равняться $\delta\theta_{m_0} = -2\frac{\delta l_m}{l_m}$. Что касается фиктивных грузов ρ_{m-1} и ρ_m , то при их вычислении нужно считаться с угловыми изменениями¹⁾:

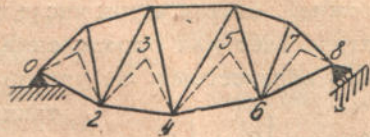
$$\delta\theta_{m-1} + \frac{\delta l_m}{l_m} \quad \text{и} \quad \delta\theta_m + \frac{\delta l_m}{l_m}.$$

При построении веревочного многоугольника нужно руководствоваться таким порядком грузов:

$$\rho_{m-1}, \rho_{m_0} \text{ и } \rho_m.$$

164. Определить при помощи дополнительных жестких стержней линию прогиба фермы, представленной на чертеже 326.

Чтобы избежать предварительного определения удлинения хорды 0—8 (задача 159), мы введем дополнительные шарниры 1, 3, 5, 7 и дополнительные нерастяжимые стержни, намеченные на чертеже пунктиром. Угловые изменения для шарнирного многоугольника 0 1 2 3 4 5 6 7 8 легко найдутся по изменениям углов фермы и углов треугольников, образованных дополнительными стержнями.



Черт. 326.

Так как стороны этого шарнирного многоугольника абсолютно не растяжимы, то фиктивные грузы, как видно из ф-лы (f) § 45, определяются угловыми изменениями и не зависят от направления, по которому ищется прогиб. Мы выбираем направление, перпендикулярное к плоскости скольжения правой опоры. Для этого направления прогибы на опорах нули, и мы без затруднений находим нужную нам замыкающую. Когда перемещения по известному направлению найдены, то в случае многоугольника с жесткими сторонами сейчас же можно найти и полные перемещения узлов (§ 43, стр. 229), а следовательно, и горизонтальные прогибы фермы.

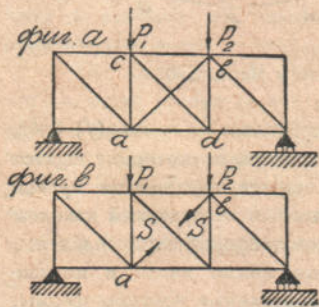
¹⁾ Изменения $\delta\theta_{m-1}$ и $\delta\theta_m$ относятся к первоначальному шарнирному многоугольнику с вертикальным бруском.

ГЛАВА V

Статически неопределимые плоские фермы.

§ 48. Выбор лишних неизвестных.

Когда плоская ферма с n узлами включает в себе более чем $2n$ стержней, считая в том числе и опорные бруски, то число ур-ий, которое статика дает для определения усилий в стержнях, будет меньше, чем число неизвестных. Задача об определении стержневых усилий является,



Черт. 327.

таким образом, с точки зрения статики неопределенной. Мы можем подобрать в этом случае сколько угодно различных систем усилий, удовлетворяющих условиям равновесия всех узлов фермы.

Возьмем, например, ферму с одним лишним стержнем (черт. 327, фиг. *a*). Выбрасывая стержень ab и заменяя его действие на остальную систему двумя неизвестными пока силами S , мы приходим к статически определимой системе (фиг. *b*), которая легко может быть рассчитана одним из известных нам приемов. Стержневые усилия в этой системе будут зависеть как от внешних нагрузок, так и от сил, представляющих усилие в лишнем стержне. Меняя эти силы, мы будем получать все новые усилия в стержнях фермы, удовлетворяющие условиям равновесия всех узлов.

Однако задача остается неопределенной лишь до тех пор, пока мы не принимаем во внимание деформации системы. Если же принять в расчет, что бруски фермы под действием возникающих в них усилий изменяют свою длину, и что эти изменения в статически неопределимых системах не являются совершенно независимыми, то мы сможем на основании условий деформации составить дополнительные ур-ия, которые совместно с ур-иями статики вполне определяют усилия во всех брусках системы.

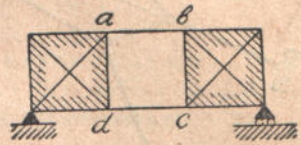
Обратимся к нашему примеру. Под действием внешних сил и усилий S система несколько деформируется, изменяется длина брусков,

расстояние между узлами. В частности изменяется также расстояние между узлами a и b (фиг. b), к которым приложены силы S . Так как в заданной нам системе (фиг. a) между этими узлами расположен брусок ab , то очевидно, что из всех возможных, с точки зрения статики, значений усилий S нужно выбрать такое, при котором изменение расстояния между узлами b и a как раз равняется удлинению

$$\delta l = \frac{Sl}{EF}$$

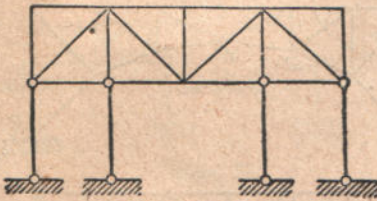
лишнего бруска ab . Это дополнительное условие совместно с уравнениями статики даст возможность найти усилия во всех брусках системы.

Подобные же дополнительные условия, основанные на рассмотрении деформаций системы, могут быть составлены и в более сложных случаях, когда приходится иметь дело с фермами, заключающими не один, а несколько лишних стержней. При решении этих задач мы будем пользоваться теми общими приемами, которые были изложены в Курсе сопротивления материалов ¹⁾. Мы будем применять способ Максвелла-Мора, основанный на начале возможных перемещений. Будем пользоваться началом наименьшей работы и теоремой о взаимности перемещений.



Черт. 328.

Для решения вопросов, связанных с перемещениями узлов, будем пользоваться приемами, изложенными в предыдущей главе. Приступая к расчету системы с лишними брусками, приходится прежде всего выяснить вопрос, является ли данная ферма геометрически неизменяемой, так как только жесткие системы могут найти практическое применение. Подвижные системы на практике не пригодны, и их мы исключим из нашего рассмотрения.



Черт. 329.

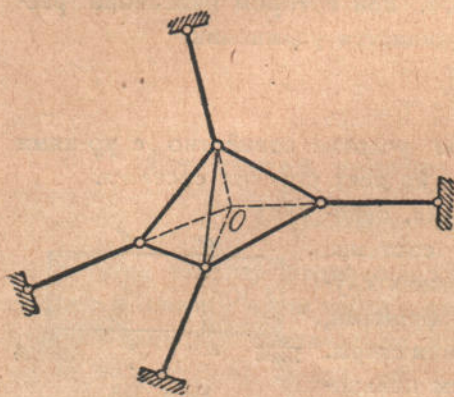
Например, система, представленная на чертеже 328, имеет один лишний стержень, но не обладает свойствами геометрической неизменяемости: две жесткие части, заштрихованные на чертеже, могут перемещаться одна относительно другой вследствие перекашивания четырехугольника $abcd$. Такая система, очевидно, не может иметь практического приложения.

То же самое нужно сказать относительно системы, представленной на чертеже 329. Система эта представляет собою ферму простейшего типа, прикрепленную к земле четырьмя вертикальными опорными

¹⁾ См. Курс сопротивления материалов, 9 изд. 1930 г., глава XIV (стр. 306—356).

стержнями. Один стержень лишний, но система подвижная, она может совершать горизонтальные перемещения.

Система, представленная на чертеже 330, также будет геометрически изменяемой. Здесь мы имеем тот исключительный случай, когда



Черт. 330.

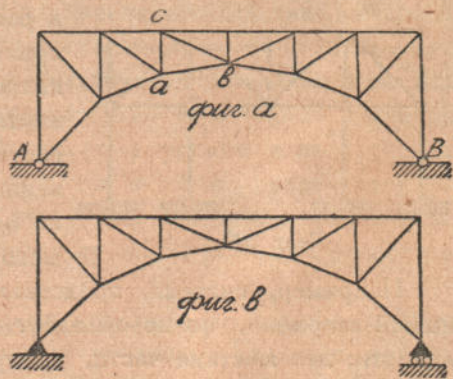
все опорные стержни пересекаются в одной точке O , и равновесие возможно лишь тогда, когда равнодействующая внешних сил проходит через точку пересечения опорных стержней. В противном случае ферма получит значительные перемещения.

При решении вопроса о том, какие стержни системы принимать за лишние, следует выбирать эти стержни так, чтобы по их устранении получалась жесткая статически определимая система по возможности более простого вида.

Такую систему мы в дальнейшем будем называть главной системой или основной системой, а соответствующие стержни необходимыми стержнями.

В ферме, представленной на чертеже 327, за лишний стержень можно принять стержень ab или стержень cd . Остальные стержни являются необходимыми. При устранении одного из этих стержней ферма становится геометрически изменяемой.

В случае двухшарнирной арки, представленной на чертеже 331, мы имеем систему с одним лишним стержнем. Принимая за лишний какой-либо брусок фермы, например, стержень ab (фиг. a), мы, выбрасывая его, получаем статически определимую жесткую систему — трехшарнирную арку с средним шарниром c . Расчет фермы будет проще,

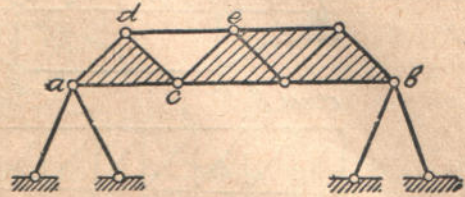


Черт. 331.

если за лишний взять один из опорных стержней. Устраняя закрепление, препятствующее правой опоре совершать горизонтальные перемещения, мы приходим к простой балочной системе (фиг. b), которую и следует в данном случае принять за главную систему.

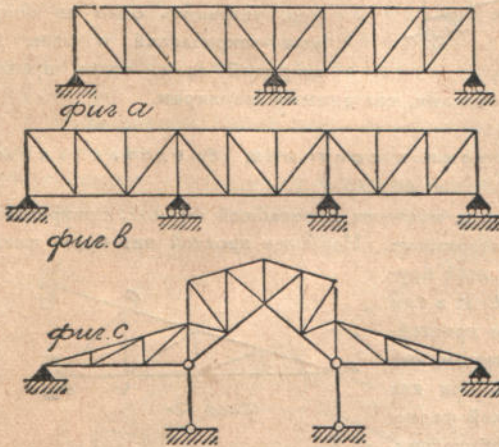
При расчете системы, представленной на чертеже 332, нельзя брать за лишнюю неизвестную какой-либо раскос или стержень верх-

него пояса, так как при удалении одного из этих стержней получается геометрически изменяемая система. Если мы удалим, например, стержень de , то получим систему, составленную из двух жестких частей, соединенных с опорами и между собой тремя шарнирами a , b и c , лежащими на одной прямой. Такая ферма не будет жесткой. Малым удлинениям участков ac и bc будут соответствовать значительные перемещения шарнира c . За лишний стержень в данном случае проще всего принять один из опорных стержней.



Черт. 332.

Задачи: 165. Определить число лишних неизвестных и наметить лишние бруски в фермах, представленных на чертеже 333.



Черт. 333.

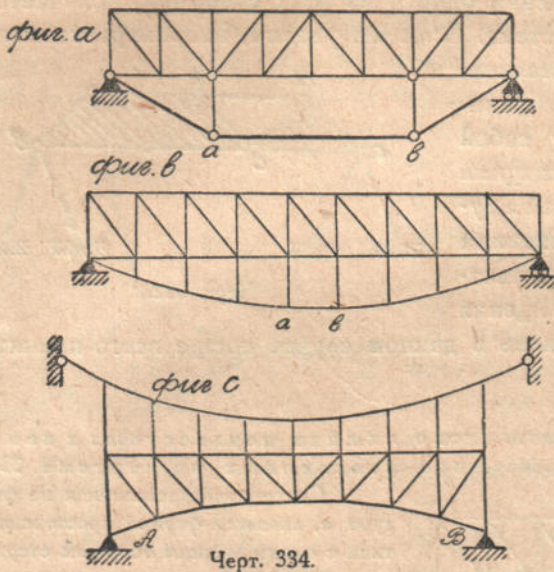
Система, представленная на фигуре a , является фермой простейшего типа с одним лишним опорным стержнем. За лишнюю неизвестную проще всего выбрать среднюю опорную реакцию. Выбрасывая среднюю опору, мы получаем главную систему в виде фермы простейшего типа, опертую по концам. Если бы мы за лишний стержень приняли правую опору, то главная система представилась бы в виде консольно-балочной фермы. Заметим, что нельзя принимать за лишний брусок то закрепление левой неподвижной опоры, которое препятствует этой опоре перемещаться в горизонтальном направлении, так как и в этом мы получили бы подвижную систему: все три

опоры допускали бы горизонтальное перемещение фермы. За лишний брусок можно было бы, конечно, принять один из брусков фермы, но тогда бы мы пришли к главной системе более сложного вида: к консольно-балочной системе или к двум балочным фермам, опертых по концам.

Фермы, представленные на фигурах b и c , имеют по два лишних бруска, так как здесь мы имеем системы простейшего типа, прикрепленные к фундаменту пятью опорными стержнями. За лишние бруска выгоднее всего принять те, которые соответствуют средним опорным закреплениям. Устраняя средние опоры, приходим к главным системам простейшего типа, опертых по концам.

166. Наметить лишние бруска в фермах, представленных на чертеже 334.

Легко видеть, что фермы, представленные на фигурах a и b , обращаются в системы простейшего типа, если выбросить один из брусков подкрепляющего шпренгеля

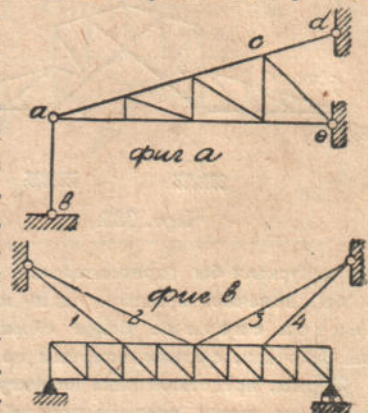


к цепи, подкрепленной двумя жесткими балками, связанными шарниром.

167. Наметьте лишние бруски в системах, представленных на чертеже 335.

Система, представленная на фигуре а, является простейшей фермой, прикрепленной к фундаменту четырьмя опорными стержнями. Наиболее простой вид будет иметь главная система, если мы за лишний брусок примем опорный стержень ab или cd . И в том и в другом случае мы приходим к ферме простейшего типа, опертая в двух точках. Заметим, что брусок ce нельзя принять за лишний, так как с его устранением мы приходим к жесткой ферме, прикрепленной к фундаменту тремя брусками, пересекающимися в одной точке a . Такая система, как мы знаем (§ 1), не обладает жесткостью. Подобное замечание относится вообще ко всем стойкам и раскосам системы фиг. а.

Система, представленная на фигуре, в обращается в простейшую ферму с опертими концами, если мы устраним опорные бруски 1, 2, 3 и 4. Эти бруски и следует принять за лишние.



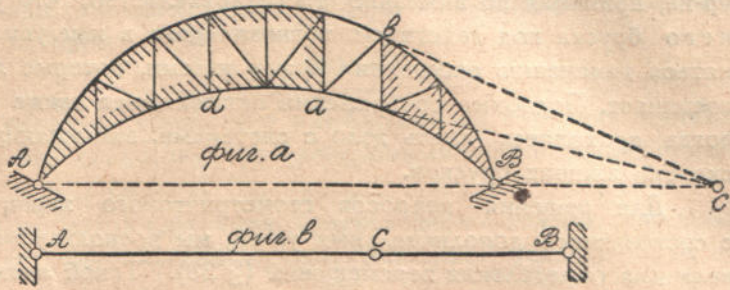
168. Показать, что в серповидной двухшарнирной арке, представленной на чертеже 336, бруски ab и cd не могут быть приняты за лишние.

В самом деле, если мы за лишний брусок примем стержень ab , то по устранении его получим систему, составленную из двух жестких частей, соединенных между собой фиктивным шарниром C . В нашем случае шарнир этот располагается на прямой AB , и вся система получается не жесткой. Она будет обладать такой же подвижностью,

или подкрепляющей цепи. За лишний брусок, и в том и в другом случае, выгодно взять брусок ab .

Система, представленная на фигуре с, состоит из двухшарнирной арки, усиленной цепью. Эта система включает два лишних бруска. Мы обратим ее в статически определимую, если выбросим одно из звеньев цепи и устраним то опорное закрепление арки, которое препятствует одной из опор совершать горизонтальные перемещения. Можно приткнуть к главной системе и иными путями. Можно, например, устранить одно из опорных закреплений и один из стержней арки, тогда придем

как представленная на фигуре *b* система, составленная из двух брусков, лежащих на одной прямой. То же замечание относится и к бруску *cd*. Если мы за лишний примем другой какой-либо брусок, то главная система представится в виде трехшарнирной арки. Проще всего, в данном случае, за лишнее закрепить то, которое препятствует горизонтальным перемещениям одной из опор арки.

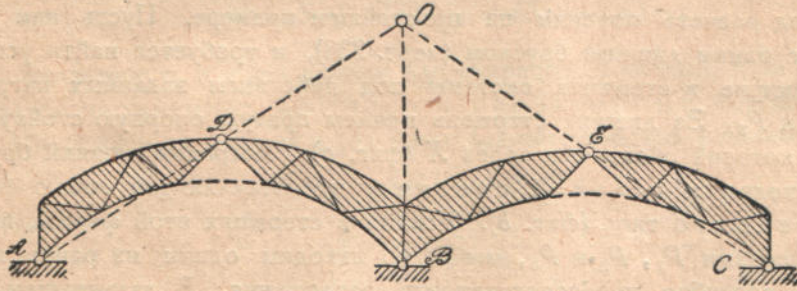


Черт. 336.

Устраняя это закрепление, получаем главную систему простейшего типа.

169. Показать, что двухпролетная симметричная арочная система, представленная на чертеже 337, имеет один лишний стержень и что за лишний стержень нельзя принимать то закрепление, которое препятствует горизонтальным перемещениям опоры *B*.

Наша система имеет шесть опорных стержней. Если два из них заменить стержнями, указанными на чертеже пунктиром, то мы получим ферму простейшего типа прикрепленную к фундаменту четырьмя опорными стержнями. Следовательно, система включает в себе один лишний стержень.



Черт. 337.

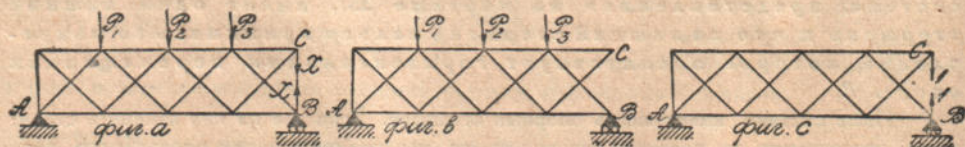
Если мы устраним закрепление, препятствующее горизонтальным перемещениям опоры *B*, то тогда реактивные силы, возникающие в шарнирах *D*, *E* и *B* при действии сил на часть *DBE*, будут пересекаться в одной точке *O*. Жесткая часть *DBE* окажется в таких условиях, как если бы она была прикреплена к земле тремя брусками, пересекающимися в одной точке. Такое прикрепление, как мы знаем, является не жестким. Устранение выбранного нами закрепления в опоре *B* приводит к подвижной системе. Следовательно, это закрепление является не необходимым.

§ 49. Способ Максвелля-Мора.

Сейчас было показано, что расчет статически неопределимых систем требует предварительного составления дополнительных ур-ий, основан-

ных на рассмотрении деформации системы. Так, например, в случае системы с одним лишним бруском мы составляем одно дополнительное уравнение, принимая во внимание то обстоятельство, что удлинение лишнего бруска под действием возникающего в нем усилия должно равняться изменению расстояния между узлами, которые лишний брусок соединяет. Подобные соображения применяются также и в тех случаях, когда приходится иметь дело с системами, заключающими в себе несколько лишних брусков.

Для решения вопросов геометрического характера, связанных с составлением дополнительных уравнений, мы воспользуемся приемом Максвелла для определения перемещений (§ 38). Такой путь расчета статически неопределимых систем впервые был намечен Максвеллом еще в 1864 г., но широкое применение в технике этот прием нашел, главным образом, благодаря трудам немецкого инженера Мора ¹⁾.



Черт. 338.

Ход расчета поясним на простейшем примере. Пусть нам дана ферма с одним лишним бруском (черт. 338), и требуется найти усилия, возникающие в стержнях системы под действием заданных нагрузок P_1 , P_2 и P_3 . За лишний стержень примем правую опорную стойку BC , усилие которой обозначим через X (фиг. а). Устраняя лишний брусок, мы приходим к главной системе, представляющей собою ферму простейшего типа (фиг. б). Усилия в стержнях этой фермы, вызываемые силами P_1 , P_2 и P_3 , мы легко находим одним из ранее изложенных способов непосредственного разложения. В дальнейшем эти усилия будем называть буквою S_0 . Величину неизвестного нам усилия в лишнем бруске найдем из того условия, что удлинение этого бруска под действием сил X должно равняться изменению расстояния между узлами B и C заданной нам фермы в ее действительном состоянии ²⁾.

¹⁾ См. Beitrag zur Theorie der Bogenfachwerksträger, „Zeitschr. d. Archit. u. Ing. Vereines Hannover“, 1874, стр. 223. Здесь дано решение задачи для случая одной лишней неизвестной. Обобщение на случай нескольких лишних неизвестных см. Beiträge zur Theorie des Fachwerk, „Zeitschr. d. Archit. u. Ing. Vereines Hannover“, 1874 г., стр. 509 и 1875 г., стр. 17. См. также Otto Mohr, Abhandlungen aus dem Gebiete d. technischen Mechanik. Berlin, 1906.

²⁾ Т.-е. при действии заданных нагрузок и сил X .

Пусть δL обозначает удлинение лишнего бруска, δl — удлинение любого другого бруска нашей фермы (фиг. *a*) и соответственно F_0 и F — площади поперечных сечений брусков. Тогда на основании ф-лы Максвелла [§ 38, ф-ла (b)], находим

$$\delta L = -\sum S' \delta l \quad (a).$$

Здесь буква S' обозначает усилия в необходимых стержнях системы при действии на нее двух прямопротивоположных сил единица, приложенных в узлах *B* и *C* (фиг. *c*).

Входящие в ур-ие (a) удлинения брусков фермы найдем, применяя закон Гука. Удлинение лишнего бруска, вызванное усилием X , будет равно

$$\delta L = X \frac{L}{EF_0} = X r_0 \quad (b).$$

Усилия в необходимых брусках заданной нам фермы мы получим если к главной системе (фиг. *b*), кроме сил ρ_1 , ρ_2 и ρ_3 , приложим силы X , заменяющие устранившийся лишний брусок. Полное усилие S в каком-либо бруске составит из двух частей: усилия S_0 , вызываемого заданными нагрузками, и усилия $S'X$, вызываемого силами X . Следовательно,

$$S = S_0 + S'X \quad (c).$$

Удлинение какого-либо из необходимых брусков представится так:

$$\delta l = (S_0 + S'X) \frac{L}{EF} = (S_0 + S'X) \cdot r \quad (d).$$

Величины r_0 и r мы вводим для сокращения письма. Ими характеризуется растяжимость лишнего и необходимых брусков.

На основании ф-л (b) и (d) ур-ие (a) переписется в таком виде:

$$X r_0 = -\sum S' (S_0 + S'X) r \quad (e),$$

откуда

$$X = -\frac{\sum S' S_0 r}{\sum S'^2 r + r_0} \quad (f).$$

Здесь суммирование должно быть распространено на все необходимые бруски системы.

Ур-ие (e) может быть написано сразу, если мы применим начало возможных перемещений к усилиям, соответствующим фигуре *c* и к действительным перемещениям заданной фермы (фиг. *a*).

В самом деле, в случае, представленном на фигуре *c*, мы имеем лишь усилия S' в необходимых брусках и силы единица, действующие по линии *BC*. Так как усилия S' и силы, равные единице, представляют собой систему сил, взаимно уравновешивающихся, то работа этой системы сил на всяком возможном перемещении будет равняться нулю.

Мы примем за возможные перемещения те малые перемещения, которые совершают узлы заданной системы при переходе от ненагружен-

ного состояния к состоянию, соответствующему действительным нагрузкам (фиг. а). Эти перемещения определяются формулами (b) и (d). Приравнявая нулю работу сил, соответствующих фигуре с, на перемещениях, соответствующих фигуре а, получим ур-ие:

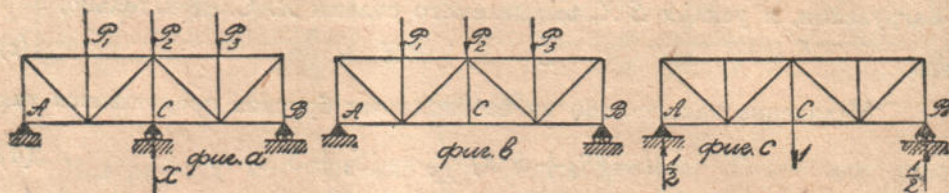
$$-1 \cdot X r_0 - \Sigma S' (S_0 + S'X) r = 0,$$

совпадающее с ур-ием (e).

Заметим, что к тому же ур-ию (e), мы пришли бы, если бы применили начало наименьшей работы ¹⁾. Потенциальная энергия системы фиг. а составит из энергии растяжения лишнего и необходимых брусков и выразится такой формулой:

$$V = \frac{X^2 L}{2EF_0} + \frac{1}{2} \Sigma \frac{(S_0 + S'X)^2 l}{EF} = \frac{1}{2} X^2 r_0 + \frac{1}{2} \Sigma (S_0 + S'X)^2 r.$$

Составляя производную от V по X и приравнявая эту производную нулю, придем к прежнему ур-ию (e).



Черт. 339.

В качестве второго примера рассмотрим случай, когда лишней неизвестной является опорная реакция. Предположим, требуется рассчитать ферму с параллельными поясами, лежащую на трех опорах (черт. 339. фиг. а). Проще всего в этом случае принять за лишней опорный стержень, соответствующий средней опоре. Устраняя его, приходим к главной системе, представляющей собой ферму простейшего типа (фиг. b). Мы легко можем найти усилия S_0 , возникающие в главной системе под действием внешних нагрузок P_1 , P_2 и P_3 (фиг. b), и усилия S' , возникающие в той же системе под действием силы единицы, приложенной вместо устраненного бруска (фиг. с).

Обозначая через X среднюю опорную реакцию ²⁾, представим действительное усилие в каком-либо стержне заданной системы (фиг. а) так:

$$S = S_0 - S'X.$$

¹⁾ См. Курс сопротивления материалов, 9 изд. 1930 г., стр. 325.

²⁾ За положительное направление реакции мы приняли направление вверх.

Применяя теперь начало возможных перемещений к усилиям, соответствующим фигуре c , и к действительным перемещениям заданной нам фермы (фиг. a), получаем ур-ие:

$$1 \cdot \delta - \Sigma S' (S_0 - S' X) r = 0 \quad (g)$$

Здесь через δ обозначено опускание средней опорной точки C фермы по отношению к прямой AB , соединяющей две крайние опорные точки. Перемещение это соответствует обобщенной силе, составленной из силы единица, приложенной в C , и реакций, приложенных в A и B (фиг. c).

Во многих случаях осадкой опор пренебрегают, тогда ур-ие (g) переписывается в более простом виде:

$$\Sigma S' (S_0 - S' X) r = 0,$$

откуда

$$X = \frac{\Sigma S_i S'_i r}{\Sigma S'^2 r} \quad (h)$$

Рассмотрим здесь на простейших примерах еще одно обстоятельство, которое оказывает влияние на усилия в стержнях статически неопределимых ферм, именно, вопрос о влиянии изменения температуры. Мы знаем, что число необходимых брусков достаточно для обеспечения геометрической неизменяемости системы. Этими брусками вполне определяется геометрическое очертание фермы, и, если мы между двумя какими-либо узлами главной системы пожелаем вставить дополнительный лишний брусок, то длина его должна в точности соответствовать расстоянию между узлами, иначе введение такого бруска в систему будет сопровождаться появлением усилий в стержнях фермы. Пусть, например, длина вставляемого бруска больше нежели расстояние между соответствующими узлами. Тогда при сборке придется лишний брусок установить на место в сжатом состоянии. Такой предварительно сжатый брусок будет, очевидно, стремиться раздвинуть те узлы, между которыми он закреплен, и вызовет при этом усилия в других брусках системы.

Подобное явление мы будем иметь при изменении температуры стержней статически неопределимой системы. Если какой-либо стержень системы, который может быть принят за лишний, нагреем, то он, удлиняясь, будет при этом раздвигать соответствующие узлы и вызовет усилия в других стержнях системы. Эти температурные усилия мы можем найти, пользуясь тем же приемом Максвелля-Мора.

Обратимся к примеру, представленному на чертеже 338. Предположим, что бруски фермы изменяют свою длину не только под действием нагрузок P_1 , P_2 и P_3 , но и вследствие изменения температуры. Пусть t_0 обозначает повышение температуры лишнего бруска и t — повышение температуры какого-либо необходимого бруска, а α — коэффициент

линейного расширения материала брусков. Тогда для удлинений брусков, соответствующих действительному состоянию системы, будем иметь выражения:

$$\delta L = Xr_0 + \alpha Lt_0, \quad \delta l = (S_0 + S'X)r + \alpha tl.$$

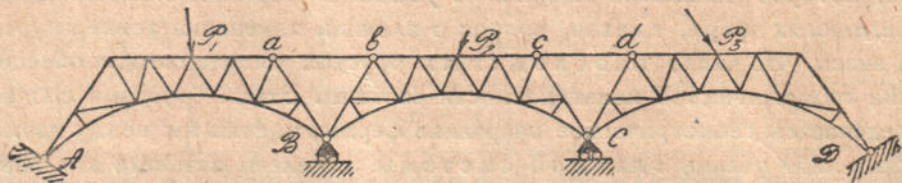
Применяя начало возможных перемещений к усилиям, соответствующим фигуре *c* (черт. 338), и к действительным перемещениям, получаем уравнение:

$$-1(Xr_0 + \alpha Lt_0) - \Sigma S' [(S_0 + S'X)r + \alpha tl] = 0,$$

отсюда

$$X = - \frac{\Sigma S' S_0 r}{\Sigma S'^2 r + r_0} - \frac{\alpha Lt_0 + \Sigma S' \alpha tl}{\Sigma S'^2 r + r_0} \quad (k)$$

Второй член в полученной формуле определяет влияние изменения температуры на величину усилия *X* в лишнем бруске. Вставляя найденное значение *X* в общую формулу (*c*), мы можем найти усилия во всех необходимых брусках системы.



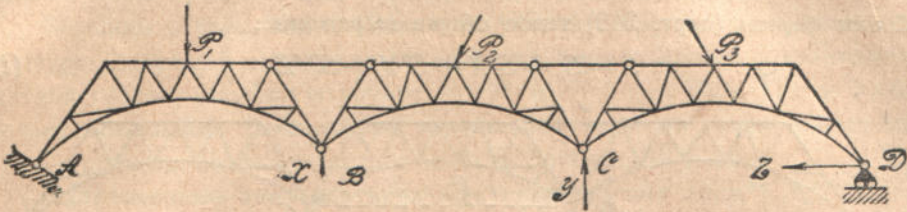
Черт. 340.

Из приведенных примеров видно, что расчет системы с одним лишним бруском по способу Максвелла-Мора сводится к определению усилий S_0 и S' в стержнях главной системы для нагрузок, указанных на фигурах *b* и *c*. Когда усилия S_0 и S' найдены, усилие *X* в лишнем бруске вычисляется по одной из составленных выше формул.

Намеченный здесь способ расчета легко может быть распространен на системы с несколькими лишними брусками, независимо от того, будут ли лишние бруска представлять собой опорные стержни или стержни фермы.

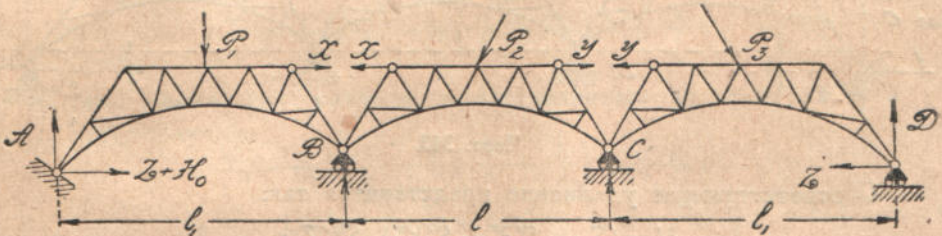
В качестве более сложного примера рассмотрим трехпролетную систему, представленную на чертеже 340. Система эта составлена из трех ферм простейшего типа, соединенных в одну ферму с необходимым числом стержней. Эта ферма прикреплена к фундаменту при помощи двух неподвижных и двух подвижных опор, что соответствует шести опорным стержням. Из этого следует, что наша система заключает в себе три лишние бруска. При выборе лишних брусков нужно стремиться к тому, чтобы получить главную систему по возможности более простого вида.

Мы можем, например, за лишние принять две промежуточные опоры и то закрепление правой опоры, которое препятствует ее горизонтальным перемещениям. Тогда, устраняя лишние бруски и заменяя их соответствующими усилиями, мы придем к главной системе, представляющей собой простую балочную ферму (черт. 341).



Черт. 341.

Другой простой вид главной системы мы получим, если примем за лишние: соединительные бруски *ad* и *cd* (черт. 340) и то закрепление, которое препятствует горизонтальным перемещениям правой опоры. Устраняя эти бруски и заменяя действие их соответствующими силами, придем к главной системе, составленной из трех балочных ферм простейшего типа (черт. 342).



Черт. 342.

Расчет начинаем с определения усилий S_0 , вызываемых в главной системе заданными нагрузками P_1 , P_2 и P_3 . Далее изучаем роль неизвестных сил X , Y и Z . Для этого устраняем эти силы и внешние нагрузки и рассматриваем три состояния главной системы, когда поочередно вместо каждой лишней неизвестной приложены силы единица (черт. 343).

Усилия в стержнях главной системы для случая $X=1$ (фиг. а) обозначим через S' . Соответствующие опорные реакции будут:

$$A_1 = -1 \frac{h}{l_1}; \quad B_1 = 1 \left(\frac{h}{l_1} + \frac{h}{l} \right); \quad C_1 = -1 \frac{h}{l}; \quad D_1 = 0.$$

Для случая, представленного на фиг. b, обозначим усилия в стержнях через S'' . Соответствующие реакции имеют такие значения:

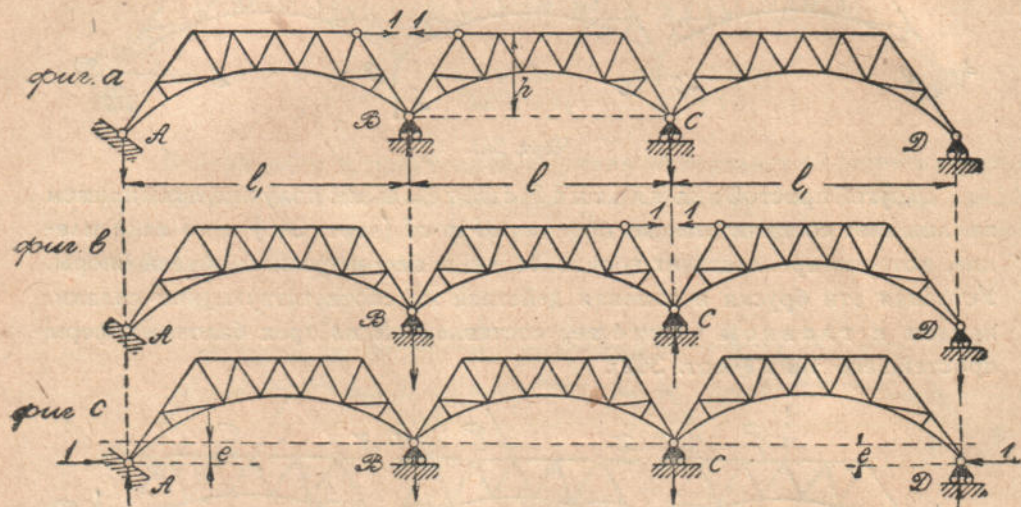
$$A_2 = 0; \quad B_2 = -1 \frac{h}{l}; \quad C_2 = 1 \left(\frac{h}{l} + \frac{h}{l_1} \right); \quad D_2 = -1 \frac{h}{l_1}.$$

В случае, представленном на фигуре с, обозначим усилия через S''' .
Опорные реакции будут иметь значения:

$$A_3 = 1 \frac{e}{l_1}; \quad B_3 = -1 \frac{e}{l_1}; \quad C_3 = -1 \frac{e}{l_1}; \quad D_3 = 1 \frac{e}{l_1}.$$

На основании этих расчетов получаем для усилий в стержнях заданной нам фермы (черт. 340) такое общее выражение:

$$S = S_0 + S'X + S''Y + S'''Z \quad (4).$$



Черт. 343.

Соответствующее удлинение представится так:

$$\delta l = (S_0 + S'X + S''Y + S'''Z)r.$$

Для удлинений лишних брусков ab и cd получим выражения:

$$\delta L_1 = Xr_1; \quad \delta L_2 = Yr_2.$$

Предположим для упрощения, что крайние опоры заданной нам системы (черт. 340) совершенно неподвижны, и промежуточные опоры под действием приходящихся на них давлений не оседают. Тогда, применяя начало возможных перемещений к усилиям, соответствующим фигурам a , b и c (черт. 343), и к действительным перемещениям, получаем такие три уравнения:

$$\left. \begin{aligned} -1Xr_1 - \Sigma S' (S_0 + S'X + S''Y + S'''Z)r &= 0 \\ -1Yr_2 - \Sigma S'' (S_0 + S'X + S''Y + S'''Z)r &= 0 \\ -\Sigma S''' (S_0 + S'X + S''Y + S'''Z)r &= 0 \end{aligned} \right\} (m).$$

Первые два из этих уравнений выражают то условие, что удлинения лишних брусков равны изменению расстояния между соответствующими

узлами. Третье уравнение является следствием неподвижности крайних опор заданной нам фермы¹⁾. В полученную систему уравнений совершенно не вошли опорные реакции, найденные выше для фиктивных случаев нагрузки (черт. 343). Произошло это потому, что соответствующие им перемещения действительной фермы (черт. 340) на основании сделанного выше предположения равны нулю.

Выясним теперь, как повлияют на усилия в брусках изменения температуры стержней и перемещения опор фермы, которые получаются под действием заданных нагрузок P_1 , P_2 и P_3 (черт. 340). Пусть t обозначает повышение температуры какого-либо стержня главной системы, t_1 и t_2 — повышение температуры лишних брусков ab и cd .

Направленные вниз вертикальные перемещения опор²⁾ A , B , C и D для действительного состояния (черт. 340) обозначим соответственно δ_a , δ_b , δ_c и δ_d и увеличение расстояния между крайними опорами — через δ_h . Тогда, удлинение какого-либо бруска главной системы представится так:

$$\delta l = (S_0 + S'X + S''Y + S'''Z)r + \alpha t l.$$

Работа опорных реакций, соответствующих фигуре a (черт. 343), на действительных перемещениях опор представится так:

$$T_1 = +\delta_a \frac{h}{l_1} - \delta_b \left(\frac{h}{l_1} + \frac{h}{l} \right) + \delta_c \frac{h}{l}.$$

Точно также для случаев, представленных на фигурах b и c (черт. 343), получим:

$$T_2 = +\delta_b \frac{h}{l} - \delta_c \left(\frac{h}{l} + \frac{h}{l_1} \right) + \delta_d \frac{h}{l_1};$$

$$T_3 = -1 \cdot \delta_h - \delta_a \frac{e}{l_1} + \delta_b \frac{e}{l_1} + \delta_c \frac{e}{l_1} - \delta_d \frac{e}{l_1}.$$

Составляя теперь выражения для работы сил, соответствующих фигурам a , b и c , на действительных перемещениях и приравнявая эти выражения нулю, получим такие уравнения для определения лишних неизвестных:

$$\left. \begin{aligned} T_1 - Xr_1 - \alpha t_1 L_1 - \Sigma S' [(S_0 + S'X + S''Y + S'''Z)r + \alpha t l] &= 0 \\ T_2 - Yr_2 - \alpha t_2 L_2 - \Sigma S'' [(S_0 + S'X + S''Y + S'''Z)r + \alpha t l] &= 0 \\ T_3 - \Sigma S''' [(S_0 + S'X + S''Y + S'''Z)r + \alpha t l] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (n).$$

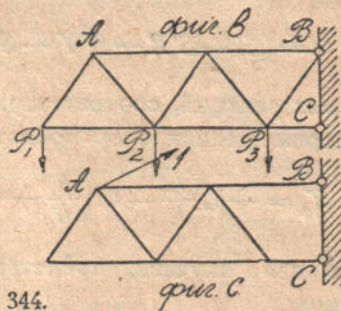
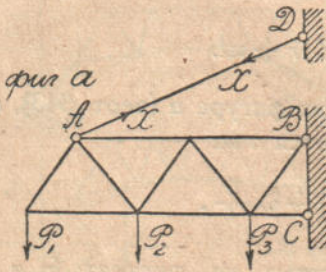
¹⁾ Конечно, те же уравнения мы получили бы, если бы сразу воспользовались формулой Максвелла [§ 38, формула (b)].

²⁾ На практике обыкновенно весьма трудно определить действительные перемещения опор, и потому при расчетах задаются для этих перемещений произвольными величинами, чтобы таким путем примерно оценить, какую роль вообще может играть в рассматриваемом случае осадка опор. Если роль осадки велика, то ферму следует принимать лишь при условии надежного устройства опор.

Знаки суммы распространяются на все необходимые бруски системы. Таким образом и в этом более сложном случае расчет статически неопределимой системы привелся к решению элементарной задачи — к расчету главной системы. Определение усилий S_0 , S' , S'' и S''' может быть выполнено одним из ранее изложенных приемов расчета статически определимых систем (глава II). Когда S_0 , S' , S'' и S''' найдены, мы определяем лишние неизвестные из уравнений (m) или (n). При этом размеры брусков, изменения температуры и осадки опор предполагаются заданными. Вставляя найденные таким образом значения X , Y и Z в формулу (l), получаем усилия во всех прочих брусках системы.

Задачи: 170. Найти усилия во всех брусках статически неопределимой системы, представленной на чертеже 344.

За лишний бр:сок примем тягу AD . Устраняя ее, получим главную систему в виде фермы простейшего типа (фиг. b). Пусть S_0 обозначает усилия, возникающие



Черт. 344.

в стержнях этой фермы под действием нагрузок P_1 , P_2 и P_3 . Теперь отдельно изучаем влияние лишнего бруска. Отбрасываем заданные нагрузки и вместо стержня AD прикладываем силу единицы (фиг. c). Пусть

S' обозначает усилия в брусках для этого случая нагрузки. Тогда удлинение какого-либо стержня заданной фермы под действием грузов P_1 , P_2 и P_3 (фиг. a) будет равно

$$\delta l = (S_0 + S'X)r.$$

Применяя начало возможных перемещений к усилиям, соответствующим фигуре c, и к действительным перемещениям (фиг. a), получаем:

$$-1 \cdot Xr_0 - \Sigma S' (S_0 + S'X)r = 0,$$

откуда

$$X = - \frac{\Sigma S' S_0 r}{\Sigma S'^2 r + r_0}.$$

Рассмотрим теперь, какие напряжения возникнут в стержнях системы при изменении температуры. Если через X_1 обозначить соответствующее усилие в лишнем бруске и через t_0 — повышение температуры, то для удлинения этого бруска получим выражение:

$$\delta L = X_1 r_0 + \alpha t_0 L.$$

Удлинение какого-либо необходимого бруска представится так:

$$\delta l = S' X_1 r + \alpha t l.$$

Применяя начало возможных перемещений к перемещениям, вызванным изменениями температуры, и к усилиям, соответствующим фигуре c, получим

$$-1 (X_1 r_0 + \alpha t_0 L) - \Sigma S' (S' X_1 r + \alpha t l) = 0,$$

откуда

$$X_1 = - \frac{at_0L + \Sigma S'atl}{\Sigma S'^2r + r_0}$$

Предположим теперь, что тяга AD , которую мы принимали за лишний брусок, изготовлена короче расстояния между узлами A и D на величину e . Тогда при сборке придется предварительно растянуть тягу на e , и потом только вставить ее на место. При соединенная в растянутом состоянии к шарнирам A и D тяга будет стремиться сблизить эти шарниры и вызовет усилия в стержнях фермы. Найдем эти усилия, пользуясь способом Максвелла-Мора. Если мы через X_2 обозначим усилие в тяге, то сближение шарниров A и D представится так:

$$\delta L = e - X_2 r_0.$$

Удлинения необходимых брусков системы найдутся по такой ф-ле:

$$\delta l = S' X_2 r.$$

Ф-ла Максвелла [§ 33, ф-ла (V) b] дает нам:

$$e - X_2 r_0 = \Sigma S'^2 X_2 r,$$

откуда находим

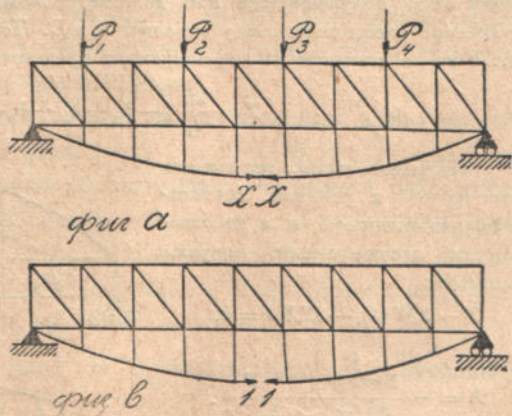
$$X_2 = \frac{e}{\Sigma S'^2 r + r_0}.$$

Тот же результат мы могли бы получить из приведенной выше ф-лы, оценивающей влияние температуры. В самом деле, установка укороченного стержня вызовет, очевидно, такие же усилия в прочих брусках системы, как и понижение температуры этого стержня. Нужно только подобрать понижение температуры так, чтобы

$$- at_0 L = e.$$

171. Определить усилия в брусках балочной фермы усиленной цепью (черт. 345).

За лишний брусок примем среднее звено цепи (фиг. а). Устранив этот стержень, мы получим ферму простейшего типа. Усилия S_0 , вызываемые в этой ферме нагрузками P_1, P_2, P_3 и P_4 , найдем одним из известных нам приемов расчета простейших систем. После этого изучаем влияние устраненного стержня. Прикладывая вместо этого стержня две равные и противоположные силы единицы (фиг. б), определяем соответствующие этим силам усилия S' . При этом для определения усилий в звеньях цепи и соответствующих стойках рассматриваем цепь, как веревочный многоугольник. Тогда, проводя из полюса лучи, параллельные звеньям цепи, и выбирая полюсное расстояние равным единице силы, получим из чертежа все усилия в звеньях цепи и в стойках. После этого остается только рассчитать простейшую ферму с параллельными поясами, на которую будут действовать только что найденные усилия в поддерживающих стойках. Действительные усилия, вызываемые в заданной нам ферме нагрузками P_1, P_2, P_3 и P_4 представятся так:



Черт. 345.

$$S = S_0 + S'X.$$

Допуская, кроме того, изменения температуры и применяя начало возможных перемещений к усилиям, соответствующим фигуре *b*, и к действительным перемещениям, получаем такое уравнение:

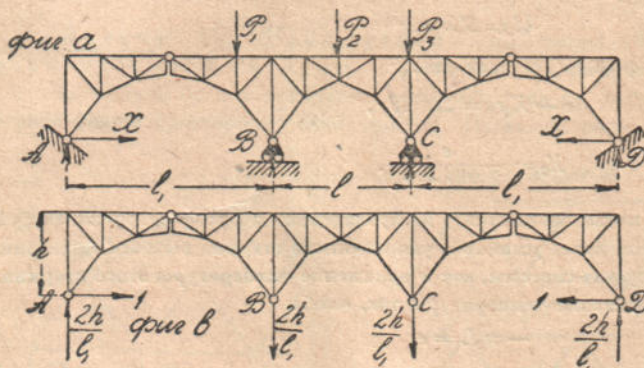
$$-1(Xr_0 + at_0L) - \Sigma S' [(S_0 + S'X)r + atl] = 0,$$

откуда

$$X = - \frac{\Sigma S' S_0 r + \Sigma S' atl + at_0L}{\Sigma S'^2 r + r_0}.$$

172. Определить усилия в стержнях трехпролетной консольно-арочной системы (черт. 346).

Легко видеть, что устранением одного опорного стержня мы обращаем заданную систему в статически определимую. Примем за лишнее то закрепление, которое препятствует изменению расстояния между опорами *A* и *D*. Соответствующее неизвестное усилие обозначим через *X* (фиг. *a*).



Черт. 346.

Устраняя это закрепление, получаем статически определимую консольно-балочную систему, для которой легко находятся усилия S_0 , вызываемые заданными нагрузками P_1, P_2 и P_3 .

Теперь выясняем влияние лишнего закрепления. Прикладывая вме-

сто лишних неизвестных *X* силы, равные единице (фиг. *b*), находим вызываемые этими силами опорные реакции и усилия *S'* в стержнях. Пусть $\delta_a, \delta_b, \delta_c$ и δ_d вертикальные осадки опор, получающиеся при действительном состоянии системы (фиг. *a*), и δ_h — увеличение расстояния между опорами *A* и *D*. Тогда работа опорных реакций состояния фиг. *b* на действительных перемещениях представится так:

$$T = \frac{2h}{l_1} (-\delta_a + \delta_b + \delta_c - \delta_d) - 1 \cdot \delta_h.$$

Применяя начало возможных перемещений к усилиям, соответствующим фигуре *b*, и к действительным перемещениям, получим уравнение:

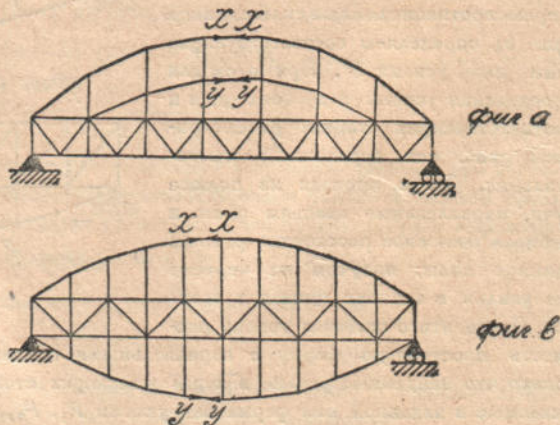
$$T - \Sigma S' (S_0 + S'X)r = 0,$$

откуда

$$X = - \frac{\Sigma S' S_0 r}{\Sigma S'^2 r} + \frac{T}{\Sigma S'^2 r}.$$

Если нужно оценить также влияние изменения температуры, то к полученной формуле нужно прибавить член

$$- \frac{\Sigma S' atl}{\Sigma S'^2 r}.$$



Черт. 347.

173. Расчитать фермы, представленные на чертеже 317.

Обе системы имеют по два лишних бруска. За лишние неизвестные проще всего принять усилия в двух звеньях подкрепляющих цепей (фиг. а и б). Устраняя эти бруски получаем системы простейшего типа.

§ 50. Теорема о взаимности перемещений.

Применяя теорему о взаимности перемещений, мы всегда сравниваем два напряженные состояния системы, которые в дальнейшем будем называть состояниями I и II. Каждому из этих состояний соответствует свое распределение внешних нагрузок, а следовательно, и свои узловые перемещения. Теорема гласит: работа сил I-го состояния на соответствующих им перемещениях II-го состояния равна работе сил II-го состояния на соответствующих перемещениях I-го состояния. Здесь мы силы и соответствующие им перемещения понимаем

в обобщенном смысле ¹⁾.

Иногда это будут отдельные сосредоточенные силы, в других же случаях группы сил; например: на практике часто встречаются две равные



Черт. 348.

и прямопротивоположные силы—пара сил; группа, составленная из силы и соответствующих ей опорных реакций, и т. д.

Высказанная теорема может быть доказана в самом общем виде ²⁾, и применима во всех тех случаях, где имеет место принцип сложения действия сил. Пользуясь началом возможных перемещений, легко доказать ее применимость к стержневым системам.

Возьмем сначала простейший случай, когда каждому напряженному состоянию соответствует лишь одна сила (черт. 348) ³⁾. Перемещения узлов в направлении приложенных к ним сил условимся обозначать буквой δ с двумя значками. Первый значок будет указывать узел, к которому перемещение относится; а второй значок—силу, которой это перемещение вызвано. Следовательно, δ_{ab} будет обозначать перемещение узла A в направлении силы P_a , вызванное силой P_b , δ_{bb} будет обозначать перемещение узла B в направлении P_b , вызванное силой P_b .

¹⁾ См. Курс сопротивления материалов, 9 изд. 1930 г., стр. 311.

²⁾ См. Курс сопротивления материалов, 9 изд. 1930 г., стр. 333.

³⁾ Строго говоря и в I-м и во II-м состоянии мы имеем группу, составленную из трех сил: заданной нагрузки и двух реакций. Мы для простоты предполагаем, что опоры абсолютно не податливы и трения в подвижной опоре нет. Тогда реакции не совершают никакой работы и в уравнение не войдут.

Произведем теперь расчет фермы для обоих состояний и обозначим через S_a и S_b усилия в стержнях, соответствующие силам P_a и P_b . Тогда удлинения брусков будут равняться $S_a r$ и $S_b r$. Перемещения узлов могут быть найдены одним из изложенных ранее способов. Так как усилия S_a и сила P_a с ее реакциями представляют систему сил, взаимно уравновешивающихся, то их работа на всяком возможном перемещении системы должна равняться нулю.

Если за возможные перемещения принять перемещения, соответствующие II-му состоянию, то мы получим такое уравнение:

$$P_a \cdot \delta_{ab} - \Sigma S_a \cdot S_b r = 0 \quad (a).$$

Применяя начало возможных перемещений к силам II-го состояния и к перемещениям I-го состояния, получим:

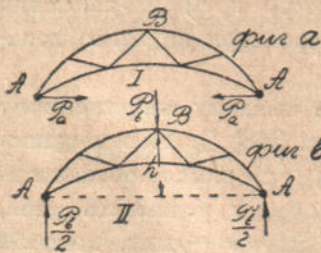
$$P_b \cdot \delta_{ba} - \Sigma S_b \cdot S_a r = 0 \quad (b).$$

Сравнивая (a) и (b), находим:

$$P_a \cdot \delta_{ab} = P_b \cdot \delta_{ba}, \quad (c).$$

Этот результат представляет собой частный случай теоремы о взаимности перемещений, доказанный Максвелем. Из формулы (c) сейчас же следует, что если $P_a = P_b$, то $\delta_{ab} = \delta_{ba}$, т.-е., когда имеются две равные силы P_a и P_b , то сила P_a вызывает такое перемещение узла B в направлении P_b , какое перемещение сила P_b вызывает в узле A в направлении P_a .

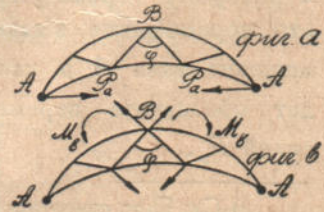
Понимая силы в обобщенном смысле, мы сейчас же можем применить результат (c) к случаю, представленному на черт. 349. Здесь мы



Черт. 349.

в I-м состоянии имеем обобщенную силу, составленную из двух равных и противоположных сил P_a . Во II-м состоянии обобщенная сила представляет собой группу трех сил: силы P_b и соответствующих ей реакций. Перемещением, соответствующим силам P_a , будет сближение точек A. Обобщенной силе P_b будут соответствовать перемещение, представляющее уменьшение расстояния h точки B от линии AA'. Если $P_a = P_b$, то на основании теоремы о взаимности перемещений заключаем, что подъем точки B, вызванный силами P_a , равен увеличению расстояния между шарнирами A при действии силы P_b .

в I-м состоянии имеем обобщенную силу, составленную из двух равных и противоположных сил P_a . Во II-м состоянии обобщенная сила представляет собой группу трех сил: силы P_b и соответствующих ей реакций. Перемещением, соответствующим силам P_a , будет сближение точек A. Обобщенной силе P_b будут соответствовать перемещение, представляющее уменьшение расстояния h точки B от линии AA'. Если $P_a = P_b$, то на основании теоремы о взаимности перемещений заключаем, что подъем точки B, вызванный силами P_a , равен увеличению расстояния между шарнирами A при действии силы P_b .



Черт. 350.

В случае, представленном на чертеже 350, мы для I-го состояния имеем обобщенную силу P_a прежнего типа. Во II-м состоянии обобщен-

ная сила составлена из двух равных и прямопротивоположных пар сил M_b . Соответствующим перемещением является изменение угла φ . Если мы обозначим через δ_{ab} уменьшение расстояния AA под действием пар сил M_b и через $\delta\varphi_a$ — уменьшение угла φ под действием сил P_a , то на основании ф-лы (с) имеем:

$$P_a \cdot \delta_{ab} = M_b \cdot \delta\varphi_a.$$

Обратимся теперь к более общему случаю, когда на систему действует целый ряд сил. Предположим, что I-му состоянию соответствуют силы P, Q, R, \dots . Во II-м состоянии силы тех же типов имеют значения P_1, Q_1, R_1, \dots . Обозначим через S и S_1 усилия в стержнях для первого и второго состояния, через ρ, q, r, \dots и ρ_1, q_1, r_1, \dots — перемещения, соответствующие силам I-го и II-го состояний. Применяя начало возможных перемещений к усилиям I-го состояния и перемещениям II-го состояния, находим:

$$P\rho_1 + Qq_1 + Rr_1 + \dots - \sum S S_1 r = 0.$$

Точно также для сил II-го состояния и перемещений I-го состояния начало возможных перемещений дает нам:

$$P_1\rho + Q_1q + R_1r + \dots - \sum S_1 S r = 0.$$

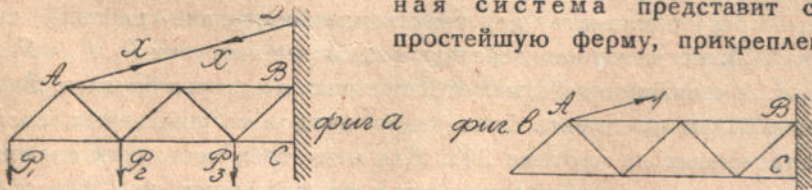
На основании этого заключаем

$$P\rho_1 + Qq_1 + Rr_1 + \dots = P_1\rho + Q_1q + R_1r + \dots \quad (d).$$

Результат этот представляет собой высказанную выше в общем виде теорему о взаимности перемещений.

Пользуясь этой теоремой и изложенными ранее (см. глава IV) приемами построения перемещений, мы легко можем решить рассмотренные нами в предыдущем параграфе задачи, относящиеся к расчету статически неопределимых систем.

Возьмем в качестве простейшего примера ферму с одним лишним брусом (черт. 351). За лишний стержень примем тягу AD . Тогда главная система представит собой простейшую ферму, прикрепленную



Черт. 351.

в B и C . За первое состояние всегда будем принимать действительное состояние главной системы, когда на нее действуют заданные нагрузки и силы, заменяющие устранимые лишние бруски.

В рассматриваемом случае I-е состояние представлено на фигуре а. На главную ферму действуют силы P_1, P_2 и P_3 и лишняя неизвестная X .

II-е состояние представлено на фигуре *b*. Внешние силы здесь устранены, а вместо лишней неизвестной приложена сила единица. Для этого второго состояния одним из известных нам приемов находим перемещение δ_a узла *A* по направлению силы единица и вертикальные прогибы δ_1, δ_2 и δ_3 точек приложения сил P_1, P_2 и P_3 .

Применим теперь к этим двум состояниям теорему о взаимности перемещений. При таком способе решения задачи внутренние усилия в стержнях главной фермы, как это видно из уравнения (*d*), исключаются. Нам придется иметь дело лишь с внешними силами, к которым присоединяется и сила *X*, заменяющая действие отброшенного бруска. Составляя работу внешних сил I-го состояния на соответствующих перемещениях II-го состояния и приравнивая ее работе сил II-го состояния ¹⁾ на перемещениях I-го состояния, получим такое уравнение:

$$X \cdot \delta_a + \sum P_m \delta_m = -1 \cdot \frac{XL}{EF_0} = -Xr_0.$$

Здесь принято во внимание, что силе единица II-го состояния соответствующим перемещением в I-м состоянии будет удлинение бруска *AD*. Полученное уравнение дает нам:

$$X = - \frac{\sum P_m \delta_m}{\delta_a + r_0}.$$

Полученный вид решения для *X* особенно выгоден в тех случаях, когда нужно изучить влияние отдельных грузов *P* на величину лишней неизвестной. Здесь сразу видно, что влияние груза P_m пропорционально прогибу δ_m . Этим обстоятельством мы дальше воспользуемся при расчете ферм, подвергающихся действию подвижной нагрузки, когда приходится строить линии влияния.

Применим теперь теорему о взаимности перемещений к более сложной задаче — к расчету трехпролетной системы (черт. 342), который был нами выполнен приемом Максвелля-Мора. За первое состояние мы будем каждый раз принимать действительное состояние главной системы (черт. 342), когда на нее действуют заданные нагрузки P_1, P_2 и P_3 и силы *X, Y, Z*, заменяющие действия отброшенных лишних брусков. За II-е состояние будем принимать поочередно каждое из фиктивных состояний, представленных на чертеже 343. Для этих трех состояний должны быть найдены узловые перемещения одним из известных нам способов, например, путем построения диаграммы Виллио.

Для состояния, представленного на фигуре *a*, обозначим через δ_{xx}, δ_{yx} и δ_{zx} перемещения, соответствующие силам *X, Y* и *Z*, т.е. сбли-

¹⁾ Во II-м состоянии придется иметь дело лишь с силой единица. Соответствующие этой силе опорные реакции в уравнение работы не войдут, так как опоры *B* и *C* предполагаются неподвижными.

жения соответствующих узлов системы. Через δ_{mx} будем обозначать перемещение, соответствующее силе ρ_m . Для состояний, представленных на фигурах *b* и *c*, будем пользоваться для перемещений обозначениями $\delta_{xy}, \delta_{yy}, \delta_{zy}, \delta_{my}$ и $\delta_{xz}, \delta_{yz}, \delta_{zz}, \delta_{mz}$. Первый значок при букве обозначает, какой силе перемещение соответствует¹⁾, а второй — какой силой это перемещение вызвано.

Применяя теперь теорему о взаимности перемещений и выбирая за I-е состояние действительное состояние системы, а за II-е поочередно каждое из фиктивных состояний, мы получим такую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma \rho_m \delta_{mx} + X\delta_{xx} + Y\delta_{yx} + Z\delta_{zx} &= -1 \cdot \frac{XL_1}{EF_1} = -Xr_1 \\ \Sigma \rho_m \delta_{my} + X\delta_{xy} + Y\delta_{yy} + Z\delta_{zy} &= -1 \cdot \frac{YL_2}{EF_2} = -Yr_2 \\ \Sigma \rho_m \delta_{mz} + X\delta_{xz} + Y\delta_{yz} + Z\delta_{zz} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (e).$$

Уравнения эти соответствуют системе уравнений (*m*), полученной путем применения способа Максвелля-Мора (§ 49). Таким образом задача сводится к решению трех линейных уравнений с тремя неизвестными.

Коэффициенты δ при этих неизвестных должны быть получены путем построения диаграмм перемещений для состояний, представленных на чертеже 343.

Мы здесь не приняли во внимание влияние осадок опор. Если эти осадки даны, то для оценки влияния их на неизвестные *X*, *Y* и *Z* нужно только к правым частям уравнений (e) присоединить работу *T* реакций соответствующего фиктивного случая на заданных перемещениях опор. Выражения для *T* были уже нами составлены (§ 49), и их можно целиком использовать здесь.

Для оценки влияния температуры будем попрежнему пользоваться способом Максвелля-Мора. Напряжения эти, как мы видели (§ 49), приходится алгебраически суммировать с напряжениями, вызванными внешними нагрузками, и напряжениями, получающимися от осадки опор. Мы уже отмечали, что полученная нами система ур-ий (e) соответствует ур-иям (*m*) (§ 49), найденным способом Максвелля-Мора. Сравнивая эти две системы, находим:

$$\delta_{xx} = \Sigma S'^2 r; \quad \delta_{yx} = \Sigma S' S'' r; \quad \delta_{zx} = \Sigma S' S''' r \quad \text{и т. д.} \quad (f).$$

Этими равенствами выгодно пользоваться в тех случаях, когда разыскание перемещений $\delta_{xx}, \delta_{yx}, \dots$ почему-либо является неудобным.

¹⁾ Соответствие между силой и перемещением мы понимаем в обобщенном смысле.

Заменяя тогда эти перемещения соответствующими суммами, перепишем систему ур-ий (e) в таком виде:

$$\begin{aligned} \Sigma \rho_m \delta_{mx} + X \Sigma S'^2 r + Y \Sigma S' S'' r + Z \Sigma S' S''' r &= -X r_1 \\ \Sigma \rho_m \delta_{my} + X \Sigma S' S' r + Y \Sigma S'^2 r + Z \Sigma S' S'' r &= -Y r_2 \quad (e') \\ \Sigma \rho_m \delta_{mz} + X \Sigma S'' S' r + Y \Sigma S'' S'' r + Z \Sigma S'' S'' r &= 0 \end{aligned}$$

Подобным же образом может быть преобразована и система ур-ий (n) § 49.

§ 51. Применение теоремы о взаимности перемещений к построению линий влияния.

Применение теоремы о взаимности перемещений является особенно выгодным в том случае, когда мы изучаем влияние на систему подвижной нагрузки. При помощи этой теоремы легко могут быть построены соответствующие линии влияния. Особенно простым получается решение в случае системы с одним лишним брусом.

Возьмем, например, двухпролетную неразрезную ферму простейшего типа (черт. 352). Предположим, что подвижная нагрузка передается нижним узлам, и построим линию влияния для средней опорной реакции, которую примем за лишнюю неизвестную. За I-е состояние примем тот случай (фиг. a), когда на систему действует груз единица в нижнем узле *m* и средняя опорная реакция *X*. Во II-м состоянии (фиг. b) средняя опора и внешняя нагрузка устранены. В узле *C* приложена сила единица, направленная вертикально вниз.

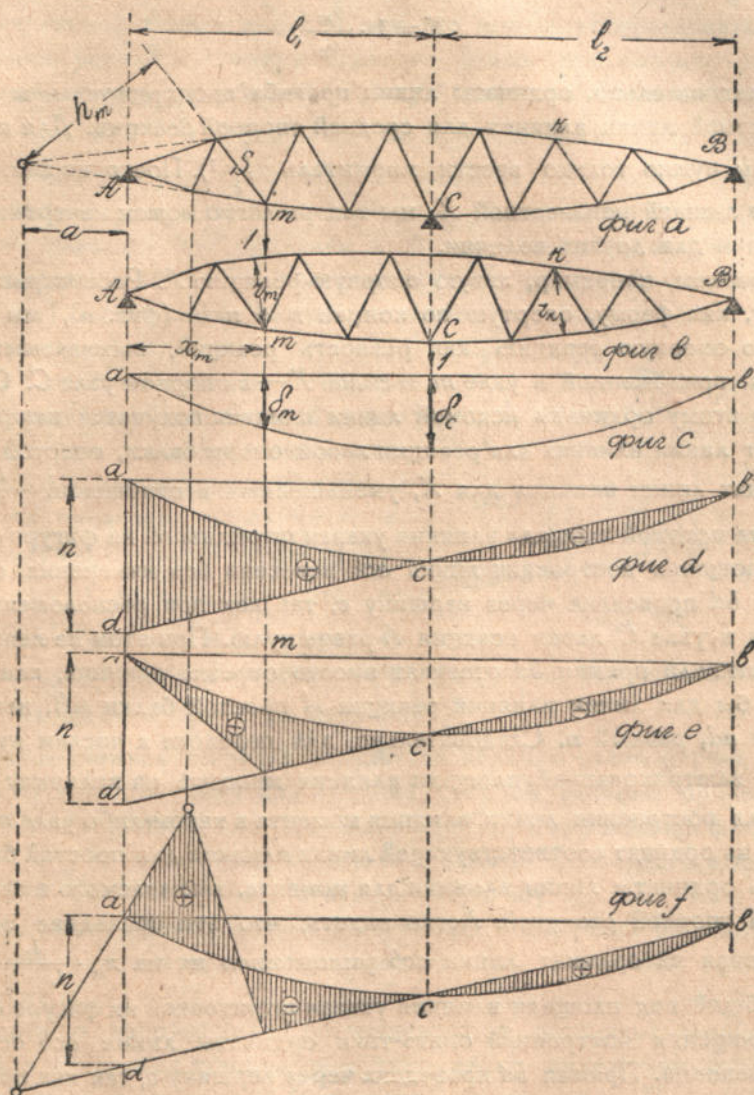
Для II-го состояния находим вертикальные прогибы δ_m нижних узлов и прогиб δ_c опорного узла *C*.

Вопрос этот проще всего решается построением линии прогиба, как веревочного многоугольника для фиктивных грузов, определяемых по ф-лам (d) и (e) § 46. Если мы ищем приближенное решение задачи, то при этом можно пренебречь деформацией решетки и принять в расчет лишь деформацию поясов. В таком случае в ф-лах (d) и (e) придется сохранить в числителе лишь первый член и фиктивные грузы представятся так:

$$\rho_m = \frac{M_m l_m}{r_m^2 \cdot EF_m}; \quad \rho_k = \frac{M_k l_k}{r_k^2 \cdot EF_k};$$

здесь M_m и M_k — изгибающие моменты для простой балки *AB*, вызываемые в сечениях *m* и *k* грузом единица, приложенным в *C*, l_m и l_k —

длины элементов поясов, F_m и F_k — соответствующие площади поперечных сечений, r_m и r_k — расстояния, указанные на фигуре *b*.



Черт. 352.

Построив веревочную кривую для фиктивных грузов P_m и P_k и найдя таким образом прогибы δ_m узлов нижнего пояса (фиг. *c*), мы тем самым получаем линию влияния для искомой средней опорной реакции. В самом деле, применяя теорему о взаимности перемещений к I-му и II-му состояниям, мы приходим ¹⁾ к такому ур-ию:

¹⁾ Мы предполагаем опоры не оседающими.

$$1 \cdot \delta_m - X \cdot \delta_c = 0,$$

откуда

$$X = 1 \cdot \frac{\delta_m}{\delta_c}.$$

Следовательно, ординаты линии прогиба пропорциональны ординатам искомой линии влияния для средней опорной реакции. Для перехода к числам нужно только ввести множитель $\frac{1}{\delta_c}$ ¹⁾. Построив линию влияния для лишней неизвестной X , мы теперь легко можем начертить линии влияния и для других величин.

Возьмем, например, левую опорную реакцию A . Рассматривая нашу систему, как ферму, опертую по концам в A и B (фиг. a), мы найдем искомую опорную реакцию как разность реакций, вызываемых силой единица, приложенной в узле m , и силой X — в опорном узле C . Соответственно этому ординаты искомой линии влияния получатся как разности ординат линии влияния для реакции левой опоры балки, опертой в A и B и ординат линии влияния для X , уменьшенных в отношении $\frac{l_2}{l_1 + l_2}$.

Вид искомой площади влияния указан штриховкой на фигуре d . Здесь для упрощения построения линия acb нанесена без изменения ординат. Прямая bd проведена через вершину c , так как при расположении груза единица в узле C левая реакция A равна нулю. При этом на левой опорной вертикали прямая bd отсекает вместо отрезка единица, как то следовало бы для линии влияния реакции A простой балки AB , некоторый отрезок ad , равный n . Следовательно, для перехода к числам нужно ординаты заштрихованной площади влияния умножить на величину $\frac{1}{n}$.

Для построения линии влияния момента в каком-либо узле m , нужно только из ординат соответствующей линии влияния для простой балки AB вычесть ординаты линии влияния для момента, вызываемого в сечении m средней опорной реакцией. Легко видеть, что эти последние ординаты получаются из ординат линии acb умножением их на $x_m \cdot \frac{l_2}{l_1 + l_2}$.

Общий вид площади влияния указан штриховкой на фигуре e . Здесь для упрощения построений опять-таки ординаты линии acb оставлены без изменения. Прямая bd проведена через вершину c , так как при расположении груза в узле C момент в m , очевидно, обращается в нуль. При таком построении на левой вертикали получается некоторый отрезок n , вместо отрезка x_m , который мы должны были бы иметь, если бы строили bd , как линию влияния для момента в сечении m простой балки AB .

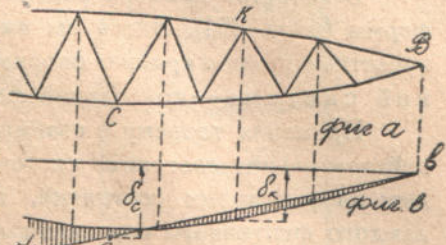
¹⁾ Заметим, что в выражение для X входит отношение прогибов $\delta_m : \delta_c$, и потому мы при построении прогибов можем вместо грузов P_m принять величины, им пропорциональные.

Для перехода к числам мы должны, следовательно, ординаты площади влияния, заштрихованной на фигуре *e*, множить на величину $\frac{x_m}{n}$.

Построенной линией влияния момента можно воспользоваться для определения усилий в стержне верхнего пояса, противолежащем рассматриваемому узлу *m*. Усилия эти будут получаться умножением величины момента на $-\frac{1}{r_m}$. Подобным же образом могут быть построены линии влияния для усилий в стержнях нижнего пояса нашей фермы.

Чтобы построить линию влияния для усилия *S* в раскосе (фиг. *a*), примем во внимание, что ординаты этой линии влияния получатся, как разности ординат линии влияния для усилия в раскосе балочной фермы, опертой в *A* и *B*, и линии влияния для усилия, вызываемого в том же раскосе реакцией *X*.

Вид соответствующей площади влияния представлен штриховкой на фигуре *f*. Здесь для упрощения построения линия *acb* оставлена без изменения, и прямая *bd* проведена через точку *c*. В таком случае на левой опорной вертикали, вместо отрезка $\frac{a}{h_m}$ (фиг. *a*) мы получим отрезок *n*, и для перехода



Черт. 353.

к числам нужно будет, следовательно, ординаты заштрихованной моментной площади множить на величину $\frac{a}{h_m} \cdot \frac{1}{n}$.

Если подвижная нагрузка передается верхним узлам фермы, то при построении линии влияния для средней опорной реакции придется на чертить линию прогиба для узлов верхнего пояса при помощи фиктивных грузов P_k, P_m и, кроме того, определить прогиб δ_c опорного шарнира *C* (черт. 353). Точка *c*, соответствующая прогибу δ_c , не будет теперь лежать на линии прогибов (фиг. *b*). Но при построении рассмотренных выше линий влияния придется проводить, как и раньше, прямую *bd* через точку *c*.

Вопрос о напряжениях, возникающих в рассматриваемой ферме вследствие изменения температуры стержней и вследствие неточности в расположении опор, может быть разрешен способом Максвелля-Мора. Эти напряжения совершенно не зависят от подвижной нагрузки.

Когда приходится иметь дело с системами, имеющими несколько лишних брусьев, то, применяя теорему о взаимности перемещений, мы получим систему ур-ий, аналогичных системам (*e*) предыдущего параграфа. При построении линий влияния нам придется вместо грузов P_m иметь дело лишь с одним грузом, равным единице, и потому суммы $\Sigma P_m \delta_{mx}, \Sigma P_m \delta_{my}, \dots$ заменятся членами $1 \cdot \delta_{mx}, 1 \cdot \delta_{my}, \dots$. Решая

эту систему линейных уравнений, мы представим лишние неизвестные в таком виде:

$$\begin{aligned} X &= \alpha_1 \delta_{mx} + \alpha_2 \delta_{my} + \dots \\ Y &= \beta_1 \delta_{mx} + \beta_2 \delta_{my} + \dots \\ &\dots \end{aligned}$$

Следовательно, линии влияния для лишних неизвестных мы получим, комбинируя линии прогибов для состояний $X=1, Y=1, \dots$, так как из этих линий прогибов сейчас же находятся величины $\delta_{mx}, \delta_{my}, \dots$ для любого узла m системы. Что же касается коэффициентов α, β, \dots , то они, как легко видеть, совершенно не зависят от расположения нагрузки.

В качестве примера рассмотрим случай неразрезной трехпролетной фермы (черт. 354). Здесь мы имеем два лишних бруска. За лишние неизвестные примем крайние опорные реакции. Устраняя их, приходим к главной системе — консольной ферме простейшего типа, опертой в A и B .

Применяя теорему о взаимности перемещений, мы будем сравнивать действительное состояние системы, представленное на фигуре a , с каждым из фиктивных состояний, представленных на фигурах b и d . Для каждого фиктивного состояния строим по известным правилам многоугольник прогиба для нижних узлов фермы, на которые передается нагрузка. Из соответствующих чертежей, фиг. c и фиг. e , получаем нужные нам величины $\delta_{xx}, \delta_{mx}, \delta_{yy}, \delta_{my}, \delta_{yx}$ и δ_{xy} .

Тогда по теореме о взаимности перемещений получаем такие два уравнения для определения лишних неизвестных¹⁾:

$$\begin{aligned} X \cdot \delta_{xx} + Y \cdot \delta_{yx} &= 1 \cdot \delta_{mx}; \\ X \cdot \delta_{xy} + Y \cdot \delta_{yy} &= 1 \cdot \delta_{my}. \end{aligned}$$

Отсюда находим:

$$\begin{aligned} X &= \alpha_1 \delta_{mx} + \alpha_2 \delta_{my}; \\ Y &= \beta_1 \delta_{mx} + \beta_2 \delta_{my}, \end{aligned}$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ и β_2 — известные числа, не зависящие от положения подвижной нагрузки.

Имея эти числа и пользуясь ординатами δ_{mx} и δ_{my} кривых прогибов (фиг. c и e), мы простым пересчетом находим ординаты линий влияния для лишних неизвестных X и Y . Вид линии влияния для левой опорной реакции представлен на фигуре f . При помощи этой линии легко строим линии влияния для всех брусков левого пролета фермы.

Чтобы построить линию влияния для изгибающего момента, соответствующего узлу m , примем во внимание, что пока груз единица рас-

¹⁾ Мы предполагаем опоры несоседствующими, и потому работа сил фиктивного состояния на перемещениях действительного состояния обращается в нуль.

залагается справа от этого узла, искомым момент получается умножением левой опорной реакции X на x_m . Мы можем, следовательно, пользоваться кривой, представленной на фиг. f , умножая ординаты этой кривой на x_m . При расположении груза слева от m придется из момента левой реакции вычитать момент груза единица. Следовательно, искомым изгибающий момент получится умножением на x_m ординат, заключенных между пунктирной линией ef и кривой левой опорной реакции. Имея линию влияния для момента в узле m , мы сейчас же можем построить линию влияния для усилия в противоположащем стержне верхнего пояса.

При построении линии влияния для перерезывающей силы в какой-либо панели левого пролета, заметим, что перерезывающая сила, при расположении груза справа от рассматриваемой панели, равна левой реакции. При расположении груза единица слева от той же панели нужно для получения перерезывающей силы из левой реакции вычесть груз, равный единице. Линия влияния для перерезывающей силы, соответствующей сечению pq (фиг. a), представлена на фигуре g .

Чтобы получить линию влияния для усилия S в раскосе, применим способ Риттера. Проводя сечение pq (фиг. a), заключаем, что, пока груз единица находится справа от узла m , искомое усилие S получается умножением левой реакции на коэффициент $\frac{a}{h}$, где a — расстояние точки O пересечения соответствующих стержней поясов от левой опоры и h — расстояние O от оси рассматриваемого раскоса. На фигуре h для упрощения кривая $eabd$ оставлена без изменения, следовательно, при расчетах должен быть введен множитель $\frac{a}{h}$. При расположении груза слева от разрезанной панели усилие S , определяемое способом Риттера, получится путем алгебраического суммирования усилия, вызываемого левой реакцией, и усилия, соответствующего грузу единица. На фигуре h соответствующие ординаты заключены между кривой левой опорной реакции и прямой oef , идущей через точку o . Эти ординаты так же должны множаться на отношение $\frac{a}{h}$.

Обратимся теперь к среднему пролету нашей фермы. При построении относящихся к этому пролету линий влияния полезно начертить предварительно линии влияния для опорных моментов, соответствующих узлам A и B . При расположении груза единица справа от опоры A момент M_A получится умножением левой опорной реакции X на длину l_1 . Ординаты нужной нам линии влияния получатся умножением на l_1 ординат линии влияния для X . С переходом груза единица на левую сторону от опоры A придется при составлении M_A из момента левой реакции вычитать момент груза единица. На фигуре k это вычитание осуществлено проведением прямой ae . Так как для упрощения построения фигуры k кривая для реакции X оставлена без изменения, то при переходе

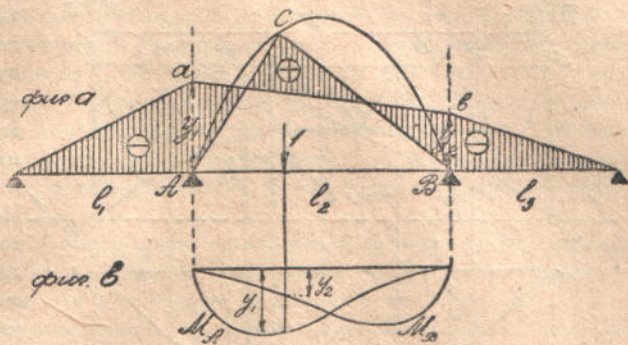
к вычислениям нужно ординаты заштрихованной моментной площади умножить на длину l_1 . Подобным же образом может быть построена и линия влияния для опорного момента M_B .

Пользуясь этими кривыми, мы сейчас же можем построить линию влияния для перерезывающей силы в любом сечении среднего пролета. В самом деле, перерезывающая сила Q для какого-либо сечения среднего пролета неразрезной балки представляется такой формулой ¹⁾:

$$Q = Q_0 + \frac{M_B - M_A}{l_2} \quad (a).$$

Здесь через Q_0 обозначена та перерезывающая сила, которая получается, если рассматривать средний пролет как самостоятельную балочную ферму, опертую по концам.

Суммируя ординаты линии влияния для Q_0 с ординатами, соответствующими второму члену в правой части формулы (a), получаем площадь влияния, представленную на фигуре I.



Черт. 355.

Так как на среднем пролете наша ферма имеет параллельные пояса, то из полученной площади влияния для Q сейчас же можно найти усилие в соответствующем раскосе фермы.

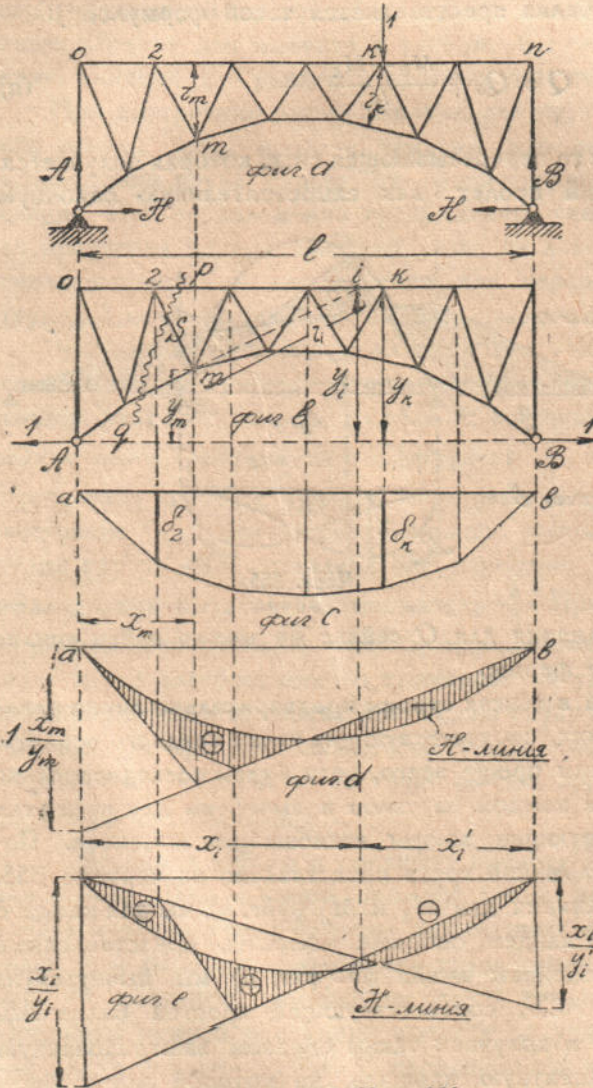
Для получения усилий в поясах строим предварительно линии влияния для моментов в сечениях, соответствующих узлам среднего пролета. Это построение мы выполним проще всего, если будем последовательно располагать груз единицу в каждом из узлов и вычертим для всех этих положений груза соответствующие эпюры изгибающих моментов. Построение для одного из положений груза представлено на чертеже 355.

Пользуясь линиями влияния для M_A и M_B (фиг. b), мы для каждого положения груза сейчас же найдем опорные моменты, представленные ординатами y_1 и y_2 . Проведением линии ab (фиг. a) мы вычитаем из ординат эпюры моментов ACB , соответствующей простой балке AB , влияние опорных моментов и получаем таким образом заштрихованную на чертеже нужную нам моментную площадь, из которой могут быть найдены ординаты в месте приложения груза для всех линий влияния M .

¹⁾ См. Курс сопротивления материалов, 9 изд. 1930 г. Теорема о трех моментах (стр. 252 — 257).

Передвигая последовательно груз единица во все узлы, мы сможем по точкам построить линии влияния для моментов во всех соответствующих сечениях. При помощи этих линий сейчас же могут быть найдены усилия в поясах фермы.

Задачи: 174. Построить линии влияния для стержней двухшарнирной арки, представленной на чертеже 356.



Черт. 356.

Здесь мы имеем дело с системой, имеющей один лишний брусок. За лишнюю неизвестную удобнее всего принять распор арки H . Тогда, применяя теорему о взаимности перемещений, мы за второе состояние будем брать тот случай, когда внешних сил нет, и вместо распора действуют две равные и противоположные силы единица (фиг. *b*). Для этого второго состояния найдем перемещения узлов, что можно сделать общим способом Виллю. Но в данном случае, когда приходится строить линии влияния для вертикальных грузов, проще всего получить прогибы верхних узлов фермы, на которые передается подвижная нагрузка, путем построения веревочного многоугольника для фиктивных грузов P_m и P_k . Величины этих грузов определяются общими ф-лами (*d*) и (*e*) § 46.

В предварительных расчетах, когда приходится определять лишь приближенное значение распора, обыкновенно при разыскании перемещений пренебрегают деформацией решетки и принимают в расчет лишь пояса фермы. В таком случае, ф-лы для фиктивных грузов P_m и P_k представляются в таком простом виде:

$$P_m = -\frac{\delta O_m}{r_m} \quad \text{и} \quad P_k = \frac{\delta U_k}{r_k},$$

где через r_m и r_k обозначены расстояния от узлов m и k до противоположащего стержня. Обозначая через y_m и y_k ординаты, соответствующие узлам m и k , мы легко полу-

чаем выражения для удлинений брусков верхнего и нижнего поясов при действии сил $H = -1$:

$$\delta O_m = -\frac{1 \cdot y_m}{r_m} \cdot \frac{l_m}{EF_m}; \quad \delta U_k = \frac{1 \cdot y_k}{r_k} \cdot \frac{l_k}{EF_k}.$$

На основании этого получаем

$$\rho_m = \frac{1 \cdot y_m}{r_m^2} \cdot \frac{l_m}{EF_m}; \quad \rho_k = \frac{1 \cdot y_k}{r_k^2} \cdot \frac{l_k}{EF_k}.$$

При расчетах обыкновенно множат эти фиктивные грузы, имеющие измерение отвлеченного числа, на величину EF_c , где F_c — некоторое среднее значение площади поперечного сечения поясов. Если мы для полученных таким образом фиктивных грузов

$$\rho_m' = \frac{1 \cdot y_m l_m}{r_m^2} \cdot \frac{F_c}{F_m} \quad \text{и} \quad \rho_k' = \frac{1 \cdot y_k l_k}{r_k^2} \cdot \frac{F_c}{F_k}$$

построим веревочный многоугольник с полюсным расстоянием EF_c , то получим неискаженную линию прогибов верхнего пояса. Прогибы получатся в том же масштабе, в каком вычерчена ферма. Уменьшая полюсное расстояние в m раз, мы во столько же раз увеличиваем прогибы и, следовательно, можем так подобрать m , чтобы получать прогибы в натуральную величину. При этом построении нам не понадобятся фиктивные грузы для крайних узлов 0 и n , и прогибы δ_k придется отсчитывать от замыкающей, которая должна быть проведена так, чтобы перемещения на опорах получились равными сжатию соответствующих опорных стоек (фиг. с).

Пренебрегая этими малыми перемещениями, мы можем получить нужные нам прогибы вычислительным путем, составляя изгибающий момент от фиктивных грузов ρ_m' и ρ_k' для простой балки AB и деля этот момент на полюсное расстояние EF_c .

Имея линию прогибов верхнего пояса, мы можем теперь определить распор H для любого положения груза единица по ф-ле:

$$H = 1 \cdot \frac{\delta_k}{\delta_h},$$

где через δ_h обозначено увеличение расстояния между опорными шарнирами для второго состояния фермы (фиг. б). Для разыскания δ_h можно применить способ, намеченный в § 46, но мы проще получим нужный результат, если примем во внимание, что

$$1 \cdot \delta_h = \Sigma S^2 r.$$

Равенство это может быть написано на основании ф-лы Максвелла [ф-ла (б), § 38]¹⁾. Здесь через S обозначены усилия в брусках для состояния $H = -1$ и через r — растяжимость брусков. Принимая в расчет только деформацию поясов и пользуясь общей ф-лой

$$S = \pm \frac{y_m}{r_m},$$

где m принимает все значения от 0 до n , знак — относится к стержням верхнего пояса и + — к стержням нижнего пояса получаем

$$\delta_h = \frac{1}{EF_c} \Sigma \left(\frac{y_m^2 l_m}{r_m^2} \cdot \frac{F_c}{F_m} \right).$$

¹⁾ К тому же результату нас приводит также применение теоремы Клапейрона. См. Курс сопротивления материалов, 9 изд. 1930 г., стр. 308.

Вычислив таким образом величину δ_h , мы можем теперь из линии прогибов (фиг. с) получить линию влияния для распора H . Нужно только все ординаты линии прогибов помножить на $\frac{1}{\delta_h}$. Имея линию влияния для H , мы легко строим линию влияния для момента M_m в любом узле m . Момент этот представится так:

$$M_m = M_{om} - H \cdot y_m = y_m \left(\frac{M_{om}}{y_m} - H \right).$$

Здесь через M_{om} обозначен соответствующий момент для простой балки, опертой в A и B .

Искомая линия влияния для M_m получится, если мы построим линию $\frac{M_{om}}{y_m}$, вычтем из нее ординаты линии H и введем множитель y_m . Соответствующая площадь влияния заштрихована на фигуре d . При переходе к числам ординаты заштрихованной площади, измеряемые в масштабе, принятом для отвлеченных чисел, нужно будет множить на длину y_m . Имея линии влияния для M_m , легко вычисляем усилия в поясах.

Построим теперь линию влияния для усилия S в каком-либо раскосе (фиг. б). Применяя способ Риттера, находим для этого усилия выражение

$$S = \frac{M_{oi}}{r_i} - \frac{Hy_i}{r_i} = \frac{y_i}{r_i} \left(\frac{r_i}{y_i} S_0 - H \right).$$

Здесь через S_0 обозначено усилие для соответствующего раскоса в простой балочной ферме. Составляя разность ординат линии $\frac{r_i}{y_i} S_0$ и линии H и вводя множитель $\frac{y_i}{r_i}$, получаем ординаты искомой линии влияния. Соответствующая моментная площадь представлена на фигуре e . При переходе к числам ординаты заштрихованной площади придется множить на коэффициент $\frac{y_i}{r_i}$.

В тех случаях, когда точка пересечения i располагается неудобно, мы можем найти нужные нам для построения линия влияния числа

$$\frac{x_i}{y_i} \quad \text{и} \quad \frac{y_i}{r_i}$$

путем определения усилий в рассматриваемом раскосе для случаев $A=1$ и $H=-1$. Обозначая соответствующие усилия через $(S)_{A=1}$ и $(S)_{H=1}$ и применяя способ Риттера, находим:

$$\frac{x_i}{y_i} = \frac{(S)_{A=1}}{(S)_{H=1}};$$

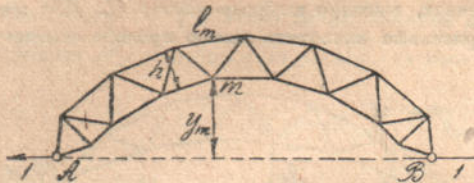
$$\frac{y_i}{r_i} = (S)_{H=1}.$$

В тех случаях, когда требуется принять во внимание дополнительные усилия, возникающие от равномерного нагревания системы на t^0 , мы получим соответствующее возрастание распора по ф-ле:

$$H_t = \frac{atl}{\delta_h},$$

где величина atl представляет увеличение пролета при нагревании в случае свободного расширения фермы, и δ_h имеет прежнее значение.

В случае арочной формы приблизительно постоянной высоты h (черт. 359), можно в общей формуле



Черт. 359.

$$\rho_m = \frac{y_m l_m}{r_m^2 EF_m}$$

положить

$$r_m = h \quad \text{и} \quad F_m = F_c,$$

тогда

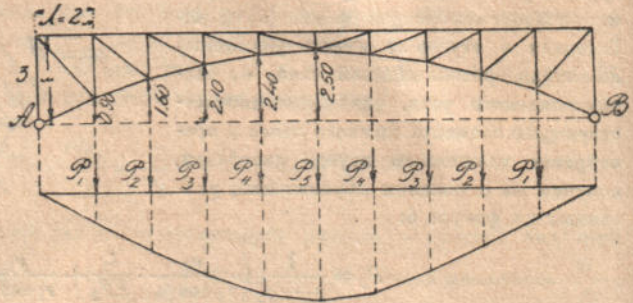
$$EF_c \rho_m = \frac{y_m l_m}{h^2}.$$

176. Найти ординаты линии влияния для H в случае фермы, представленной на чертеже 360.

Считая поперечные сечения поясов постоянными и пренебрегая углами наклона стержней нижнего пояса к горизонту, мы на основании ф-лы, полученной для чертежа 358, будем иметь

$$\begin{aligned} \rho_m' &= \frac{FE_c \cdot P_m}{\lambda} \\ &= \frac{y_{от} + y_{ит}}{h_m^2}. \end{aligned}$$

Пользуясь размерами, указанными на чертеже 360, получим:



Черт. 360.

$$\begin{aligned} \rho_1' &= \frac{3,0 + 0,9}{2,1^2} = 0,88; & \rho_2' &= \frac{3,0 + 1,6}{1,4^2} = 2,35; & \rho_3' &= \frac{3,0 + 2,1}{0,9^2} = 6,3; \\ \rho_4' &= \frac{3,0 + 2,4}{0,6^2} = 15,0; & \rho_5' &= \frac{2 \cdot 2,5}{0,5^2} = 20,0. \end{aligned}$$

Изгибающие моменты, вызываемые в балке AB фиктивными грузами $\rho_1', \rho_2', \rho_3', \rho_4'$ и ρ_5' , будут иметь для узловых сечений значения:

$$M_1 = 69,06 \text{ т}, \quad M_2 = 136,36 \text{ т}, \quad M_3 = 193,96 \text{ т}, \quad M_4 = 248,96 \text{ т}, \quad M_5 = 268,96 \text{ т}.$$

Для получения прогибов в метрах, нужно найденные изгибающие моменты разделить на величину $\frac{EF_c}{\lambda} \frac{\text{м}}{\text{т}}$.

Чтобы получить ординаты H -линии, нужно найденные таким образом прогибы разделить на величину δ_h , определяемую по ф-ле:

$$\delta_h = \frac{1}{EF_c} \Sigma \left(\frac{y_m^2 l_m}{r_m^2} \cdot \frac{F_c}{F_m} \right).$$

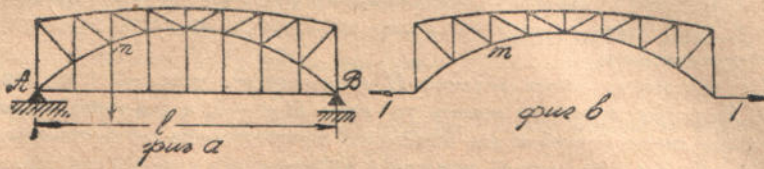
Для рассматриваемого случая

$$\begin{aligned} \frac{\delta_h \cdot EF_c}{\lambda} = \Sigma \frac{y_m^2}{r_m^2} &\approx 2 \left[\frac{3,0^2 + 0,9^2}{2,1^2} + \frac{3,0^2 + 1,6^2}{1,4^2} + \frac{3,0^2 + 2,1^2}{0,9^2} + \frac{3,0^2 + 2,4^2}{0,6^2} \right] + \\ &+ \frac{2 \cdot 2,5^2}{0,5^2} = 183,4 \text{ т}. \end{aligned}$$

Деся на это число найденные выше значения изгибающих моментов от фиктивных грузов, получим такие ординаты для H -линии:

$$H_1 = 0,38; \quad H_2 = 0,74; \quad H_3 = 1,09; \quad H_4 = 1,36; \quad H_5 = 1,47.$$

177. Построить линии влияния для стержней арки с затяжкой (черт. 361).



Черт. 361.

За лишнюю неизвестную примем усилие H в затяжке AB . В таком случае, принимая за II-ое состояние то, которое представлено на фигуре b , и пользуясь теоремой о взаимности перемещений, получаем:

$$1 \cdot \delta_m - H \cdot \delta_h = 1 \cdot \frac{Hl}{EF},$$

откуда

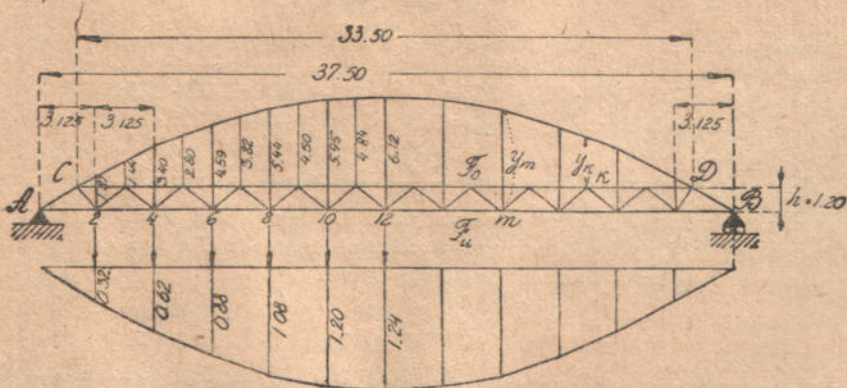
$$H_i = \frac{1 \cdot \delta_m}{\delta_h + \frac{l}{EF}}$$

Здесь величины δ_m и δ_h находят так, как это было разъяснено в предыдущих задачах¹⁾. Через F обозначена площадь сечения затяжки.

Температурных напряжений в этой ферме при равномерном нагревании всех стержней не получится, но если температура затяжки отличается от температуры прочих частей на t' , то при этом возникает распор, определяемый ф-лой:

$$H = \pm \frac{atl}{\delta_h}$$

178. Построить H -линию для арки, усиленной жесткой балкой (черт. 362).



Черт. 362.

За лишнюю неизвестную принимаем горизонтальную проекцию H усилий в элементах шарнирной арки. Если из полюса O провести лучи, параллельные звеньям арки

¹⁾ Удлинением подвесок мы при этом пренебрегаем.

то на вертикали, отстоящей на расстоянии H от O , эти лучи отсекут отрезки, равные усилиям в подвесках. Длины лучей представляют усилия в соответствующих элементах шарнирной арки. Таким образом, все силы, действующие на подкрепляющую балочную ферму, будут известны.

Для построения линии влияния H воспользуемся теоремой о взаимности перемещений. За второе состояние примем то, когда $H = -1$, и для этого второго состояния построим линию прогибов как веревочный многоугольник для фиктивных грузов ρ_m и ρ_k . Пренебрегая деформацией решетки и применяя для определений усилий в поясах способ Риттера, найдем для фиктивных грузов такие выражения:

$$\rho_m = \frac{y_m \lambda^3}{h^2 E F_o}; \quad \rho_k = \frac{y_k \lambda}{h^2 E F_u}$$

Здесь сечения верхнего и нижнего поясов приняты постоянными и соответственно равными F_o и F_u .

Для удобства вычисления мы помножим полученные выше значения фиктивных грузов на постоянную величину $\frac{E F_o h^2}{\lambda}$ и будем пользоваться фиктивными грузами:

$$\rho_m' = \frac{E F_o h^2}{\lambda} \rho_m = y_m; \quad \rho_k' = \frac{E F_o h^2}{\lambda} \rho_k = y_k \frac{F_o}{F_u}$$

В дальнейших вычислениях примем для нашего численного примера $\frac{F_o}{F_u} = 0,37$.

Кроме того, фиктивные грузы верхних узлов распределим между соседними нижними узлами. В таком случае для тех значений ординат, которые указаны на чертеже, мы легко находим, что, например, фиктивный груз ρ_4' определится ф-лой;

$$\rho_4' = y_4 + \frac{1}{2} 0,37 (y_3 + y_5) = 4,18.$$

Подобным образом находятся фиктивные грузы и для других узлов. Мы получим:

$$\rho_2' = 2,14; \quad \rho_4' = 4,18; \quad \rho_6' = 5,80; \quad \rho_8' = 6,95; \quad \rho_{10}' = 7,64; \quad \rho_{12}' = 7,88.$$

Соответствующие этим грузам изгибающие моменты в узлах балки AB будут иметь значения:

$$M_2 = 3,125 \cdot 30,7; \quad M_4 = 3,125 \cdot 59,2; \quad M_6 = 3,125 \cdot 83,5; \\ M_8 = 3,125 \cdot 102,9; \quad M_{10} = 3,125 \cdot 113,6; \quad M_{12} = 3,125 \cdot 117,5.$$

Деля эти моменты на величину $\frac{E F_o h^2}{\lambda}$, мы будем получать в метрах прогибы соответствующих узлов. Для получения ординат H -линии нужно прогибы фермы разделить на величину δ_n , представляющую сближение шарниров C и D в случае $H = -1$. При вычислении δ_n будем пользоваться общей ф-лой

$$\delta_n = \frac{\Sigma S^2 l}{E F}$$

причем суммирование распространим лишь на стержни поясов балочной фермы и на элементы арки. Деформацией подвесок и решетки фермы будем пренебрегать. В таком случае

$$\frac{E F_o h^2}{\lambda} \cdot \delta_n = \Sigma y_m^2 + 0,37 \Sigma y_k^2 + \frac{l_b \cdot h^2}{\lambda} \cdot \frac{F_o}{F_b} \quad (a)$$

Первый и второй члены в правой части равенства соответствуют верхнему и нижнему поясу фермы. Третий член относится к стержням арки. В нем через F_b обозначено

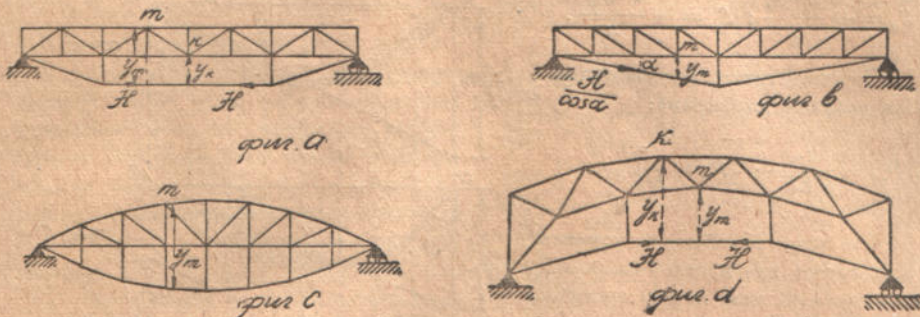
постоянное сечение этих стержней и через l_b — длина CD . При составлении третьего члена мы пренебрегли наклоном стержней арки, усилия S' для всех этих стержней приняли равными единице и длину — равной λ . Вставляя в выражение (а) размеры, указанные на чертеже, полагая $F_o : F_b = 0,40$, получим:

$$\frac{EF_o}{\lambda} \delta_h = 2 \cdot (1,87^2 + 3,40^2 + 4,59^2 + 5,44^2 + 5,95^2) + 6,12^2 + 0,37 \cdot 2(1,44^2 + 2,80^2 + 3,82^2 + 4,50^2 + 4,84^2) + \frac{33,5 \cdot 1,2^3}{3,125} \cdot 0,40 \approx 296 \text{ т} \cdot \text{м}^2.$$

Деля на эту величину найденные выше значения изгибающих моментов от фиктивной нагрузки, получим такие значения ординат H -линии:

$$H_2 = \frac{3,125 \cdot 30,7}{296} = 0,32; \quad H_4 = 0,62; \quad H_6 = 0,88; \quad H_8 = 1,08; \quad H_{10} = 1,20; \quad H_{12} = 1,24.$$

179. Построить H^2 линии для систем, представленных на чертеже 363.



Черт. 363.

Для предварительного расчета можно пренебречь деформацией решетки фермы и подвесок. Вертикальные прогибы узлов для случая $H = -1$ проще всего получить путем построения линии прогиба, как веревочного многоугольника. При этом фиктивные грузы получатся пропорциональными ординатами y_m и y_k .

180. Построить линии влияния для элементов фермы, составленной из цепи, усиленной жесткой балкой (черт. 364).

При сооружении подобных систем обыкновенно производят склепку подкрепляющей жесткой фермы только тогда, когда вес частей этой фермы уже передается на цепь моста. Поэтому при расчете фермы придется считаться лишь с усилиями, вызываемыми подвижной нагрузкой, и с температурными напряжениями. Расчет на подвижную нагрузку удобнее всего начать с построения линии влияния для горизонтальной составляющей H усилий в звеньях цепи. За второе состояние выбираем случай $H = -1$. Усилия в стержнях для этого состояния могут быть легко найдены графическим путем. Можно легко составить и соответствующие аналитические выражения: усилие в каком-либо звене цепи, наклоненном к горизонту под углом α_k , будет, очевидно, равняться $\frac{H}{\cos \alpha_k}$.

Для усилия в подвеске легко составим выражение

$$H(\operatorname{tg} \alpha_k - \operatorname{tg} \alpha_{k+1}).$$

При составлении усилия в поясах подкрепляющей фермы заметим, что изгибающие моменты для узлов m и k , представляются ф-лами¹⁾:

$$\left. \begin{aligned} M_m &= M_{om} - Hy_m = y_m \left(\frac{M_{om}}{y_m} - H \right) \\ M_k &= M_{ok} - Hy_k = y_k \left(\frac{M_{ok}}{y_k} - H \right) \end{aligned} \right\}$$

где M_{om} и M_{ok} — соответствующие значения момента для простой балки AB .

Пользуясь сечениями pq и rs , находим, что для состояния $H = -1$ усилия в элементах нижнего и верхнего поясов будут:

$$S_u = + \frac{1 \cdot y_k}{h}; \quad S_o = - \frac{1 \cdot y_m}{h}.$$

Соответственно, для фиктивных грузов получим выражения:

$$P_m = \frac{y_m \lambda}{h^2 EF_m}; \quad P_k = \frac{y_k \lambda}{h^2 EF_k}.$$

Составляя изгибающие моменты от этих грузов для простой балки AB , найдем нужную нам линию прогибов для состояния $H = -1$.

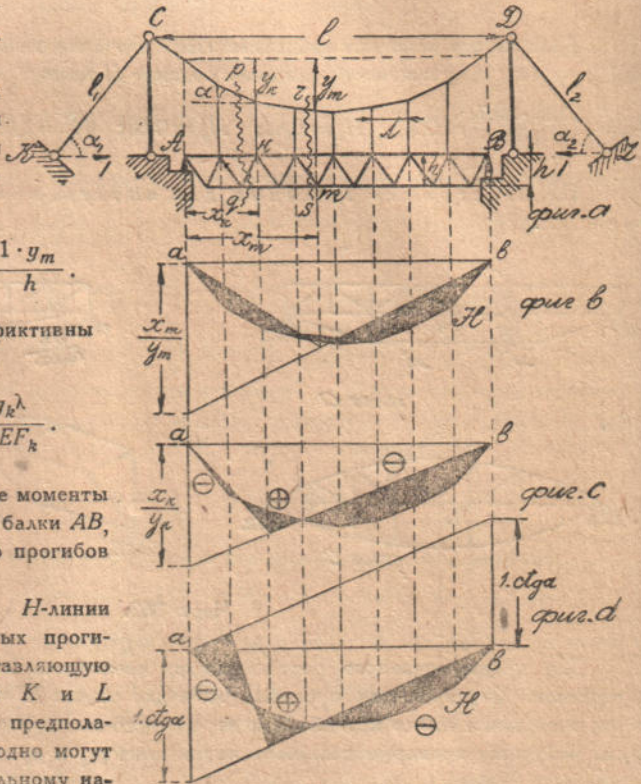
Ординаты искомой H -линии найдутся делением найденных прогибов на величину δ_h , представляющую сближение опорных точек K и L во втором состоянии, когда предполагается, что эти точки свободно могут перемещаться по горизонтальному направлению. При вычислении δ_h мы пользуемся общей ф-лой:

$$\delta_h = \Sigma S'^2 r,$$

где S' обозначает усилия в стержнях для состояния $H = -1$, и r характеризует растяжимость стержней. Применив эту формулу к нашему случаю и пренебрегая деформацией подвесок и решетки фермы, получим:

$$\delta_{h_{\text{нп}}} = \Sigma \frac{y_m^2 \lambda}{h^2 EF_o} + \Sigma \frac{y_k^2 \lambda}{h^2 EF_u} + \frac{1}{EF_b} \left(\Sigma \frac{\lambda}{\cos^2 \alpha_r} + \frac{l_1}{\cos^2 \alpha_1} + \frac{l_2}{\cos^2 \alpha_2} \right).$$

¹⁾ Соответствующие сечения pq и rs проведены через узлы m и k . Внешними силами для левой отсеченной части подкрепляющей фермы будут: 1) вертикальная сила, действующая по AC и равная реакции простой балки; 2) горизонтальная сила H , приложенная в C , и 3) усилие в разрезанном звене цепи.



Черт. 364.

Третий член этого выражения соответствует удлинению звеньев цепи CD и удерживающих цепей длины l_1 и l_2 (фиг. a). Через F_b обозначена площадь поперечного сечения цепи.

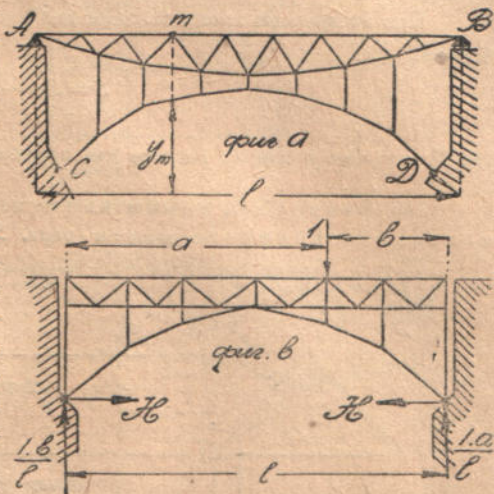
Когда линия прогибов построена и величина δ_n вычислена, мы сейчас же можем начертить H -линию. После чего можно построить линии влияния для моментов M_m и M_k (фиг. b и c). На основании ф-л (a) заключаем, что для этого нужно из ординат линии $\frac{M_{om}}{y_m}$ и $\frac{M_{ok}}{y_k}$ вычесть ординаты H -линии. При переходе к числам нужно будет ординаты полученной таким образом площади влияния, зачерненной на фигурах b и c , мисжить на величины y_m и y_k . Имея линию влияния для моментов, сейчас же можно получить усилия от подвижной нагрузки в соответствующих стержнях поясов.

Чтобы построить линию влияния для поперечной силы в сечении rq воспользуемся ф-лой:

$$Q = Q_0 - H \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \alpha (Q_0 \operatorname{ctg} \alpha - H),$$

где Q_0 — перерезывающая сила для простой балки, и α — угол наклона перерезанного звена цепи. Соответствующая моментная площадь зачернена на фигуре d . При переходе к числам ординаты должны быть умножены на $\operatorname{tg} \alpha$. Построенной линией можно воспользоваться для получения усилий в соответствующих раскосах.

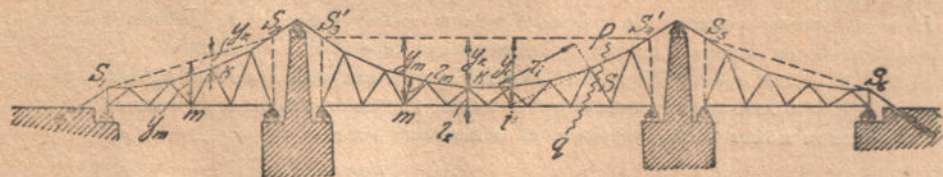
Намеченный здесь ход расчета применим также в случае шарнирной арки, усиленной сверху жесткой балкой (черт. 365).



Черт. 365.

181. Построить линии влияния для стержней трехпролетного висячего моста, представленного на чертеже 366.

Так как все опоры предполагаются подвижными и могут свободно перемещаться по горизонтальному направлению, то горизонтальная проекция H усилий в элементах



Черт. 366.

$S_1, S_2, S_3, S_1', S_2'$ и S_3' при вертикальной нагрузке остается постоянной. Ее мы примем за лишнюю неизвестную и построим для нее линию влияния, применяя теорему о взаимности перемещений и выбирая за второе состояние тот случай, когда внешней нагрузки нет, и $H = -1$.

Построив для этого состояния линии прогибов и разделив величины прогибов δ_m на величину δ_n , определяемую ф-лой:

$$\delta_n = \sum S^2 r,$$

получим ординаты искомой H -линии. Фиктивные грузы, нужные для построения линии прогибов, определяются для каждого из пролетов такими формулами:

$$\rho_m = \frac{y_m \cdot l_m}{r_m^2 E F_m}; \quad \rho_k = \frac{y_k \cdot l_k}{r_k^2 E F_k}.$$

Имея линию влияния для H , мы можем построить линию влияния для изгибающих моментов M_m и M_k , которыми определяются усилия в поясах. При этом воспользуемся ф-лами:

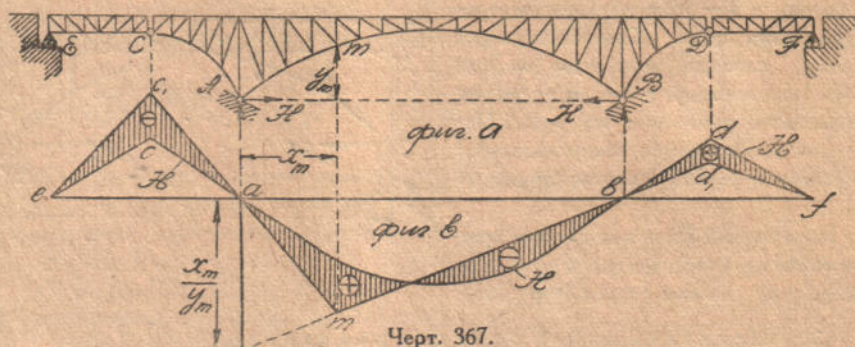
$$M_m = M_{om} - H y_m; \quad M_k = M_{ok} - H y_k.$$

При построении линии влияния для усилия S в каком-либо раскосе, воспользуемся ф-лой:

$$S = S_0 + \frac{H \cdot y_i}{r_i},$$

где S_0 — усилие в том же раскосе для простой балочной фермы.

182. Построить линии влияния для стержней трехпролетного консольно-арочного моста (черт. 367).



За лишнюю неизвестную принимаем распор H . На протяжении среднего пролета линия влияния для H начертится так же, как и в случае двухшарнирной арки. Консолям арки будут соответствовать прямолинейные участки линии влияния, так как для состояния $H = -1$ усилия в элементах консолей равны нулю, консоли не деформируются. Эти прямолинейные участки явятся продолжениями крайних сторон линии H (фиг. б)¹⁾, построенной для среднего пролета. Участки линии влияния для H на протяжении соединительных балочек будут также прямолинейны. Линия влияния для момента M_m в каком-либо узле m может быть построена на основании ф-лы:

$$M_m = M_{om} - H y_m = y_m \left(\frac{M_{om}}{y_m} - H \right).$$

Соответствующая площадь влияния заштрихована на фигуре б. Ординаты этой площади нужно множить на величину y_m .

¹⁾ При построении многоугольника прогибов, как веревочного многоугольника, крайними фиктивными грузами будут грузы, линии действия которых совпадают с опорными стойками A и B .

183. Построить линию влияния для усилия в одной из диагоналей средней панели фермы, представленной на чертеже 368.

За лишнюю неизвестную примем искомое усилие S в одной из средних диагоналей и применим теорему о взаимности перемещений. Соответствующее второе состояние системы представлено на фигуре b . Обозначая для этого состояния через δ_m прогибы узлов нижнего пояса фермы, на который передается подвижная нагрузка, и через δ_h сближение точек приложения сил единица, получим ур-ие:

$$1 \cdot \delta_m + S \cdot \delta_h = -1 \cdot S r,$$

где r определяет растяжимость диагонали. Для искомого усилия получим выражение

$$S = -\frac{1 \cdot \delta_m}{\delta_h + r}.$$

Усилия S пропорциональны δ_m , и мы получим очертание искомой линии влияния, если представим себе деформированное состояние фермы для второго состояния. Вид деформации (фиг. c) получается легко, так как искажается лишь средний прямоугольник $abcd$ (фиг. b).

Линия $acdb$, соответствующая прогибу нижнего пояса, определяет собой линию влияния для S при передаче на грузки на нижние узлы фермы. Прогиб верхнего пояса отличается от прогиба нижнего, из-за сжатия стоек в средней панели. Соответствующее очертание линии прогиба верхнего пояса представлено на фигуре с линией $a_1c_1d_1b_1$.

Для получения значений прогиба δ_m проще всего построить линию прогиба соответствующего пояса фермы, как веревочный многоугольник для фиктивных грузов.

Для нижнего пояса найдем на основании ф-л (f) и (h) § 46:

$$P_2 = \frac{1}{h} \left(\delta d - \frac{\delta e}{\cos \varphi} + \frac{\delta a \cdot h}{\lambda} \right); \quad P_3 = \frac{1}{h} \left(-\delta b + \frac{\delta e}{\cos \varphi} - \frac{\delta a \cdot h}{\lambda} \right); \quad P_1 = P_4 = 0.$$

Соответствующая линия прогиба представлена на фигуре d .

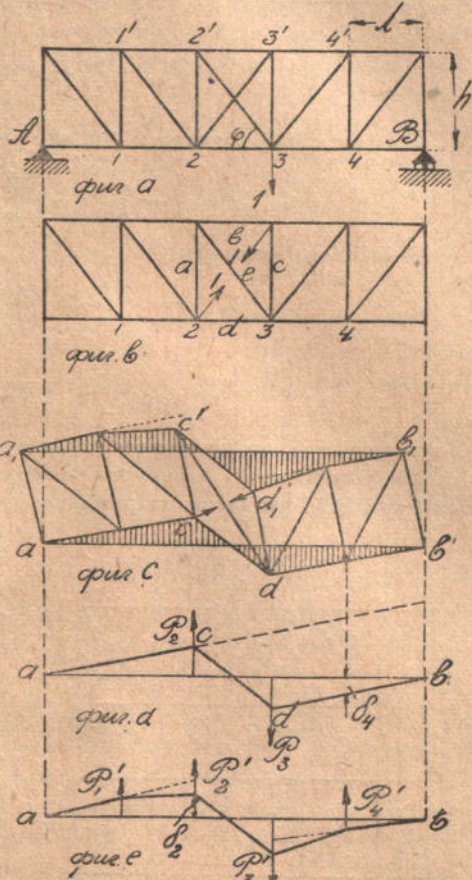
Для верхнего пояса, на основании ф-л (l) и (n) § 46, получаем:

$$P_1' = \frac{\delta a}{\lambda}; \quad P_2' = \frac{1}{h} \left(\delta d - \frac{\delta e}{\cos \varphi} - \frac{\delta a \cdot h}{\lambda} + \frac{\delta c \cdot h}{\lambda} \right); \quad P_3' = \frac{1}{h} \left(-\delta b + \frac{\delta e}{\cos \varphi} - \frac{2\delta c \cdot h}{\lambda} \right); \quad P_4' = \frac{\delta c}{\lambda}.$$

Линия прогиба представлена на фигуре e .

Чтобы получить ординаты линии влияния для S , нужно найденные нами прогибы разделить на $\delta_h + r$, где δ_h может быть определено по прежней ф-ле:

$$\delta_h = \Sigma S'^2 r.$$



Черт. 368.

Легко убедиться ¹⁾, что ординаты получаемой таким образом линии влияния в случае передачи нагрузки на нижние узлы вдвое меньше ординат той линии влияния, которая получается для S при отсутствии перекрестной диагонали. В самом деле, прогиб δ_2 , соответствующий узлу 2 и определяемый как изгибающий момент от фиктивных грузов P_2 и P_3 для балки ab , будет равен.

$$\delta_2 = -\frac{2\lambda}{5h} \left(\delta d - \frac{\delta e}{\cos \varphi} + \frac{\delta c \cdot h}{\lambda} \right).$$

Следовательно, прямая ac (фиг. d) будет отсекает на правой опорной вертикали отрезок:

$$-\frac{\lambda}{h} \left(\delta d - \frac{\delta e}{\cos \varphi} + \frac{\delta c \cdot h}{\lambda} \right).$$

Деля это на величину:

$$\delta_h + r = \frac{\lambda}{l} \left(-2 \frac{\delta c \cdot h}{\lambda} - 2 \delta d + \frac{2 \delta e \cdot l}{\lambda} \right),$$

получим

$$\frac{1}{2 \sin \varphi},$$

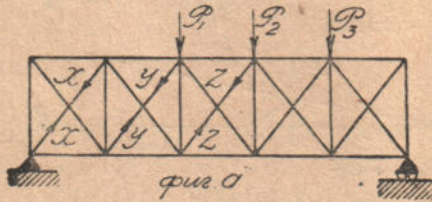
т.е. половину того, что получается при отсутствии перекрестной диагонали.

Когда приходится рассчитывать систему с большим числом перекрестных диагоналей (черт. 369), мы для предварительного подбора сечений произведем расчет в предположении существования сначала одной, а потом другой системы раскосов. Взяв полусумму получающихся при этих расчетах усилий, мы по ней подберем сечения. Полученную таким образом ферму рассчитываем теперь как систему с лишними брусками. За лишние примем усилия X, Y, Z, \dots в диагоналях одного направления (фиг. a). Величины этих усилий найдем способом Максвелла-Мора. Общая ф-ла для усилия в каком-либо стержне

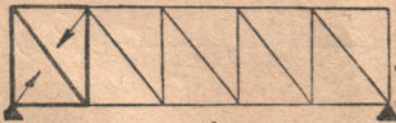
$$S = S_0 + S'X + S''Y + S'''Z + \dots$$

в данном случае значительно упрощается, так как усилие в какой-либо диагонали вызывает напряжения лишь в стержнях соответствующей панели (фиг. b и c). Поэтому, в у-рия для определения X, Y, Z, \dots будут входить не более как по три неизвестных.

Если мы будем сравнивать действительное состояние системы (фиг. a) с со-



фиг. а



фиг. б



фиг. в

Черт. 369.

стоянием $X=1$ (фиг. b), то нам придется иметь дело с удлинениями брусков первой панели. Удлинения эти вообще говоря, будут зависеть от сил X и Y . Поэтому, соответствующее ур-ие напишется так:

$$\sum S' (S_0 + S'X + S''Y)r + 1 \cdot Xr_1 = 0.$$

¹⁾ Мы предполагаем одинаковыми сечения поясов b и d , сечения обеих перекрестных диагоналей, а также сечения стоек a и c .

получим в этом случае такую систему уравнений для определения лишних неизвестных:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma \rho_m \delta_{mx} + X \delta_{xx} + Y \delta_{yx} + Z \delta_{zx} + \dots &= 0 \\ \Sigma \rho_m \delta_{my} + X \delta_{xy} + Y \delta_{yy} + Z \delta_{zy} + \dots &= 0 \\ \Sigma \rho_m \delta_{mz} + X \delta_{xz} + Y \delta_{yz} + Z \delta_{zz} + \dots &= 0 \\ \dots & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} (a)$$

Буквой δ мы обозначаем перемещения узлов системы, соответствующие фиктивным состояниям $X=1; Y=1; \dots$, причем первый значок у буквы δ обозначает, какой силе перемещение соответствует, а второй значок указывает, какого типа сила это перемещение вызвала. И силы, и соответствующие им перемещения мы, как и раньше, понимаем в обобщенном смысле. Иногда это будут отдельные силы, иногда пары сил или другие какие-либо группы сил. Оказывается, что мы всегда можем выбрать лишние неизвестные таким образом, что в уравнениях (a) пропадут все члены с неизвестными, заключающими букву δ с разными значками. Тогда для лишних неизвестных получатся такие простые выражения:

$$X = -\frac{\Sigma \rho_m \delta_{mx}}{\delta_{xx}}; \quad Y = -\frac{\Sigma \rho_m \delta_{my}}{\delta_{yy}}; \quad Z = -\frac{\Sigma \rho_m \delta_{mz}}{\delta_{zz}} \dots \quad (b)$$

Путь, которым нужно при этом идти, выясним на простых примерах ¹⁾.

Возьмем случай двух лишних неизвестных. Тогда уравнения (a) напишутся так:

$$\begin{aligned} \Sigma \rho_m \delta_{mx} + X \delta_{xx} + Y \delta_{yx} &= 0; \\ \Sigma \rho_m \delta_{my} + X \delta_{xy} + Y \delta_{yy} &= 0. \end{aligned}$$

Чтобы получить простые выражения (b), нужно выбрать лишние неизвестные таким образом, чтобы

$$\delta_{yx} = \delta_{xy} = 0,$$

т.е., чтобы одна из сил не вызвала перемещения, соответствующего другой силе. Если обе силы приложены в одной точке, то выбор надлежащего направления этих сил может быть выполнен без всяких затруднений.

Возьмем, например, случай двухпролетной арочной системы (черт. 370). Здесь мы имеем две лишние опорные реакции. За лишние примем две составляющие реакции A. Одну из составляющих, которую мы обозначим через X, направим горизонтально. Тогда другая составляющая Y должна быть направлена так, чтобы перемещение, которое получает точка A под действием горизонтальной силы X, было направлено перпендикулярно Y. В таком случае будет соблюдено условие:

$$\delta_{yx} = \delta_{xy} = 0.$$

¹⁾ Первые задачи этого рода были разрешены Krohn'ом, см. Zeitschr. f. Baukunde, 1880 г., и Mohr'ом — Zeitschr. d. Archit. u. Ing. Vereines, Hannover 1881 г. См. также Müller-Breslau, Centralblatt der Bauverwaltung, 1869 г.

Для определения величин X и Y поступаем так. Сначала устраним левую опору и вместо нее прикладываем горизонтальную силу, равную единице (фиг. б). Для этого состояния находим, путем построения диаграммы Виллио, перемещения всех узлов. Пусть aa_1 представляет найденное таким образом перемещение шарнира a , и mm_1 — перемещение какого-либо узлового шарнира m . Тогда проекции этих перемещений на направление силы X и силы, приложенной в шарнире m , дадут нам величины δ_{xx} и δ_{mx} .

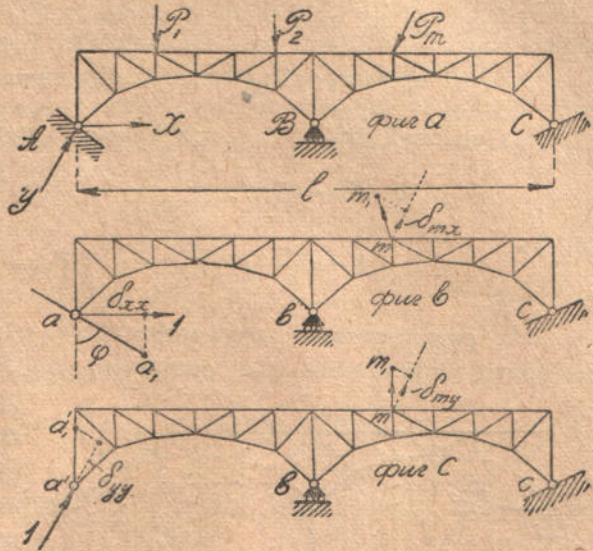
Теперь приложим в шарнире a силу единица, перпендикулярную к найденному выше перемещению aa_1 (фиг. с), и найдем перемещения узлов для этого нового состояния. На основании теоремы о взаимности перемещений заключаем, что перемещение $a'a_1'$ должно иметь направление, перпендикулярное к X , и его проекция на направление составляющей Y даст нам величину δ_{yy} . Проекция получающегося при этом перемещения mm_1 на направление силы, приложенной в узле m , даст нам величину δ_{my} .

Когда все эти величины найдены, то искомое значение лишних неизвестных определится так:

$$X = -\frac{\sum \rho_m \delta_{mx}}{\delta_{xx}}; \quad Y = -\frac{\sum \rho_m \delta_{my}}{\delta_{yy}}.$$

Следовательно, перемещения узлов фермы для случаев $X=1$ и $Y=1$ вполне определяют линии влияния для этих величин.

Пользуясь значениями δ_{xx} и δ_{yy} , мы легко можем найти величины реакций X_t и Y_t , которые возникают при повышении температуры системы на t градусов. Для этого устраним закрепление в опоре A . Тогда при расположении опорных шарниров на одной прямой повышение температуры на t градусов будет сопровождаться перемещением шарнира A по линии, соединяющей опоры на величину atl . В действительности опора A неподвижна. Следовательно, повышение температуры сопровождается появлением реактивных сил X_t и Y_t , которые и уничтожают



Черт. 370.

найденное выше перемещение от температурного расширения. Обозначая через φ угол, составляемый перемещением aa_1 с вертикалью (фиг. б), мы найдем для вертикальной и горизонтальной составляющей перемещения, вызываемого силой X_t , выражения:

$$x = \delta_{xx} X_t; \quad y = \delta_{xx} \operatorname{ctg} \varphi X_t.$$

Точно так же для силы Y_t найдем:

$$x_1 = 0; \quad y_1 = -Y_t \cdot \frac{\delta_{yy}}{\sin \varphi}.$$

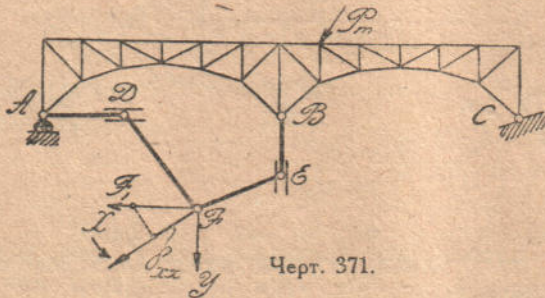
Из условий неподвижности опоры A получаем:

$$\delta_{xx} X_t = atl; \quad \delta_{xx} \operatorname{ctg} \varphi X_t = Y_t \frac{\delta_{yy}}{\sin \varphi}$$

откуда

$$X_t = \frac{atl}{\delta_{xx}}; \quad Y_t = \frac{atl \cdot \cos \varphi}{\delta_{yy}}.$$

На рассмотренном примере мы показали, как можно надлежащим выбором направлений для составляющих X и Y достигнуть того, что



урия, служащие для определения лишних неизвестных, будут заключать каждое лишь по одной неизвестной. Той же цели можно достигнуть и иными путями. Можно, например, за лишние неизвестные принять силы, входящие в выражения реактивных усилий

разных опорных узлов, но в таком случае эти узлы придется соединить дополнительными связями, при помощи которых задача опять сведется к силам, приложенным в одной точке.

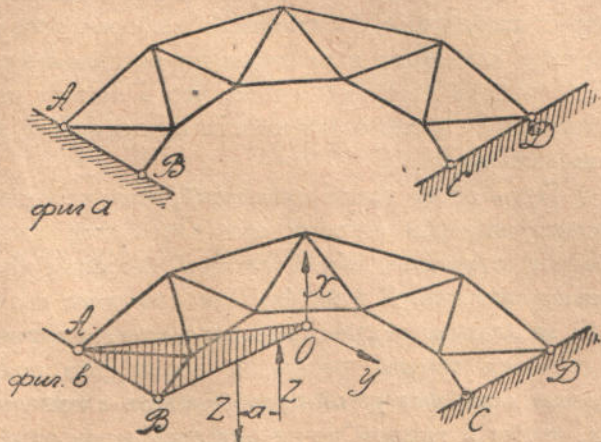
Например, в рассмотренном нами случае можно выделить вертикальное реактивное усилие, действующее в B , и горизонтальную составляющую реакции A (черт. 371). В таком случае вводим дополнительные нерастяжимые бруски AD , DF , FE и EB . Горизонтальное перемещение шарнира D и вертикальное перемещение E обеспечим особыми направлениями.

Прикладывая к точке F какую-либо силу, мы тем самым прилагаем некоторую вертикальную силу, действующую на нашу систему в узле B , и горизонтальную силу в A . Соотношение между этими силами будет определяться направлением силы, приложенной в F . При надлежащем выборе величины и направления этой силы мы сможем ею осуществить оба выделенные нами реактивные усилия, имеющие место в действительной ферме. Две составляющие X и Y этой силы и примем за лишние

неизвестные. Направление силы X выбираем произвольно. По этому направлению прикладываем силу единица и находим из известных нам способов соответствующие перемещения узлов системы, в том числе и перемещение FF_1 шарнира F . Перемещение этого шарнира в направлении приложенной нами силы дает величину δ_{xx} . Направление составляющей Y выбираем перпендикулярно к FF_1 . Вызываемое ею перемещение шарнира F должно, по теореме о взаимности перемещений, получиться перпендикулярным к выбранному направлению X . Дальнейший ход расчета остается таким же, как и в вышеразобранном случае.

Когда приходится рассчитывать системы с тремя лишними реактивными усилиями, мы всегда можем эти усилия привести к силе и паре сил, приложенных к одному жесткому элементу.

Точку приложения реактивной силы мы можем выбрать так, чтобы она оставалась неподвижной при приложении пары. Тогда соответствующее уравнение, составленное на основании теоремы о взаимности перемещений, будет заключать в себе одну лишнюю неизвестную — реактивную пару. Чтобы два другие уравнения также заключали лишь по одной неизвестной, мы выберем направления составляющих реактивной силы так, как это было показано на предыдущих примерах.



Черт. 372.

Возьмем в качестве примера случай арки без шарниров (черт. 372). Неизвестные реактивные усилия, соответствующие усилиям опорных стержней левого конца арки, мы можем заменить силой и парой, приложенными к абсолютно жесткому треугольнику AOB , заштрихованному на чертеже (фиг. b). Положение пары выбираем произвольно.

Для выбора точки O , где должны быть приложены составляющие X и Y реактивной силы, мы предварительно исследуем деформацию системы под действием пары. Для этого отбрасываем силы X , Y и Z и прикладываем к жесткому треугольнику пару сил с моментом, равным единице. Для этого случая мы без затруднения можем найти усилия во всех брусках системы и можем построить диаграмму перемещений. По перемещениям точек A и B находим мгновенный центр, относительно которого поворачивается жесткий треугольник, и этот центр примем за точку O .

в которой должны быть приложены силы X и Y . Направление силы X может быть выбрано произвольно. Тогда сила Y должна быть направлена перпендикулярно к перемещению точки O , вызываемому силой X .

Применяя теперь теорему о взаимности перемещений и выбирая за второе состояние последовательно случаи $X=1, Y=1, Z=\frac{1}{a}$, получим три ур-ия, каждое из которых будет заключать лишь по одной неизвестной.

Таким же путем мы могли бы исследовать и более сложные системы с четырьмя, пятью и т. д. неизвестными, но в этих случаях нам пришлось бы вместо одного жесткого треугольника AOB ввести соответственно систему, составленную из двух, трех и т. д. треугольников, связанных шарнирами. Надлежащим выбором точек приложения сил на этих жестких элементах и надлежащим расположением соединительных шарниров можно достигнуть того, что в каждое из ур-ий, составленных на основании теоремы о взаимности перемещений, войдет лишь одна лишняя неизвестная ¹⁾.

Путь этот, предполагающий, что искомые усилия передаются на рассматриваемую систему при посредстве особой системы абсолютно жестких стержней, является при большом числе лишних неизвестных весьма сложным. В этих случаях выгоднее сначала написать ур-ия, выбрав за лишние неизвестные отдельные реактивные силы, приложенные в опорных точках фермы, и потом уже полученную таким образом систему линейных ур-ий преобразовать с помощью линейной подстановки так, чтобы в каждом ур-ии осталась лишь одна неизвестная. Подобное преобразование, как мы дальше увидим, будет равносильно введению, вместо отдельных сил, обобщенных сил, представляющих собой группы сил, находящихся между собой в известном соотношении ²⁾.

Обозначим через A, B, C, \dots реактивные усилия заданной нам фермы, которые мы примем за лишние неизвестные. Тогда на основании теоремы о взаимности перемещений мы сможем составить систему линейных ур-ий такого вида:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma P_m \delta_{ma} + A\delta_{aa} + B\delta_{ba} + C\delta_{ca} + \dots &= 0 \\ \dots & \\ \dots & \end{aligned} \right\} \quad (c).$$

¹⁾ Несколько примеров этого рода рассмотрено в курсе Müller-Breslau Графическая статика, т. II, ч. 1-ая, 2-ое русское изд. СПб. 1910 г., стр. 141.

²⁾ Прием этот разработал S. Müller, см. Centralblatt der Bauw., 1907 г., стр. 23 и 253. Дальнейшие исследования, относящиеся к решению системы линейных ур-ий, получающихся при расчете статически неопределимых ферм, см. A. Hertwig, Zeitschrift für Bauwesen, 1910 г., стр. 110; Pirllet, Der Eisenbau, 1910 г. стр. 331; 1914 г. стр. 61; 1915 г. стр. 167.

Чтобы получить систему ур-ий, заключающих лишь по одной неизвестной, мы введем вместо A, B, C, \dots новые переменные X, Y, Z , связанными со старыми так:

$$\left. \begin{aligned} A &= \alpha_{ax} X + \alpha_{ay} Y + \alpha_{az} Z + \dots \\ B &= \alpha_{bx} X + \alpha_{by} Y + \alpha_{bz} Z + \dots \\ C &= \alpha_{cx} X + \alpha_{cy} Y + \alpha_{cz} Z + \dots \\ &\dots \end{aligned} \right\} (d).$$

Эти новые переменные представляют собой обобщенные силы, тип которых легко выясняется при помощи ур-ий (d). Если в этих ур-иях положить

$$X=1; \quad Y=Z=\dots=0,$$

то получим:

$$A=1 \cdot \alpha_{ax}; \quad B=1 \cdot \alpha_{bx}; \quad C=1 \cdot \alpha_{cx}; \dots$$

Обобщенная сила X представляет, следовательно, ту группу сил, которая составляется из сил A, B, C, \dots , пропорциональных величинам $\alpha_{ax}, \alpha_{bx}, \alpha_{cx}$. Если выбрать реактивные усилия A, B, C, \dots пропорциональными $\alpha_{ay}, \alpha_{by}, \alpha_{cy}, \dots$, то получим обобщенную силу Y и т. д. Применяя теорему о взаимности перемещений к новым переменным — обобщенным силам X, Y, Z, \dots , получим такую систему ур-ий:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma \rho_m \delta_{mx} + X \delta_{xx} + Y \delta_{yx} + Z \delta_{zx} + \dots &= 0 \\ \Sigma \rho_m \delta_{my} + X \delta_{xy} + Y \delta_{yy} + Z \delta_{zy} + \dots &= 0 \\ \Sigma \rho_m \delta_{mz} + X \delta_{xz} + Y \delta_{yz} + Z \delta_{zz} + \dots &= 0 \\ \dots &\dots \end{aligned} \right\} (e).$$

Чтобы выяснить значение величин $\delta_{xx}, \delta_{xy}, \dots$ заметим, что $1 \cdot \delta_{xx}$ представляет собой работу обобщенной силы $X=1$ на перемещениях, вызванных силой $X=1$. Точно так же $1 \cdot \delta_{xy}$ представляет собой работу силы $X=1$ на перемещениях, вызванных силой $Y=1$. Принимая во внимание, что при $X=1, A=1 \cdot \alpha_{ax}, B=1 \cdot \alpha_{bx}, C=1 \cdot \alpha_{cx}, \dots$, и обозначая через $\delta_{ax}, \delta_{bx}, \delta_{cx}, \dots$ перемещения, соответствующие силам A, B, C, \dots при $X=1$, можем написать ¹⁾:

$$1 \cdot \delta_{xx} = 1 \cdot \alpha_{ax} \cdot \delta_{ax} + 1 \cdot \alpha_{bx} \cdot \delta_{bx} + 1 \cdot \alpha_{cx} \cdot \delta_{cx} + \dots$$

Точно так же получим:

$$1 \cdot \delta_{xy} = 1 \cdot \alpha_{ax} \cdot \delta_{ay} + 1 \cdot \alpha_{bx} \cdot \delta_{by} + 1 \cdot \alpha_{cx} \cdot \delta_{cy} + \dots$$

Коэффициенты α , которыми определяется связь (d) между старыми и новыми переменными, выберем таким образом, чтобы в ур-иях (e)

¹⁾ δ_{xx} представляет собой обобщенную координату, соответствующую обобщенной силе X .

пали все величины δ с разными значками. Тогда каждое из этих ур-ий будет заключать лишь по одной неизвестной, и мы получим для этих неизвестных выражения:

$$X = -\frac{\Sigma \rho_m \delta_{mx}}{\delta_{xx}}; \quad Y = -\frac{\Sigma \rho_m \delta_{my}}{\delta_{yy}}; \quad Z = -\frac{\Sigma \rho_m \delta_{mz}}{\delta_{zz}}; \quad \dots \quad (b)$$

Т.е. при таком выборе коэффициентов α перемещения системы для $X=1; Y=1; Z=1; \dots$ будут нам давать линии влияния для обобщенных сил X, Y, Z, \dots

Множителями при этом будут величины $\frac{1}{\delta_{xx}}; \frac{1}{\delta_{yy}}; \frac{1}{\delta_{zz}}; \dots$

Если мы возьмем систему с n лишними неизвестными, то число коэффициентов α будет равно n^2 . Число же ур-ий вида:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{xy} = \delta_{yx} = 0 \\ \delta_{xz} = \delta_{zx} = 0 \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (f)$$

будет равняться $\frac{1}{2}n(n-1)$.

Мы можем, следовательно, выбрать сколько угодно различных систем значений α , удовлетворяющих условиям (f). Остановимся на таких значениях α , при которых дальнейшее решение задачи получалось бы, по возможности, проще. Прежде всего ясно, что типы сил X, Y, Z, \dots вполне определяются соотношениями между коэффициентами α , и мы можем в каждой из этих сил один из коэффициентов принять равным единице. Положим в дальнейшем

$$\alpha_{ax} = \alpha_{by} = \alpha_{cz} = \dots = 1.$$

Что касается остальных $n(n-1)$ коэффициентов, то, как мы сейчас видели, половина их может быть выбрана совершенно произвольно и тогда другая половина должна быть подобрана так, чтобы удовлетворялись условия (f). Для дальнейшего выгодно в обобщенной силе X приравнять нулю все коэффициенты, кроме α_{ax} . В обобщенной силе Y приравнять нулю все α , кроме α_{ay} и α_{by} . Для силы Z приравняем нулю все α , кроме α_{az} , α_{bz} и α_{cz} , и т. д.

Тогда система (d) переписется так:

$$\left. \begin{aligned} A &= 1 \cdot X + \alpha_{ay} Y + \alpha_{az} Z + \dots \\ B &= 0 + 1 \cdot Y + \alpha_{bz} Z + \dots \\ C &= 0 + 0 \cdot 1 \cdot Z + \dots \\ \dots & \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (g)$$

Следовательно, обобщенная сила X составит из одной силы типа A . Обобщенная сила Y представит собой группу двух сил A и B ,

соотношение между которыми определится коэффициентом α_{ay} . Сила Z представит собой группу, составленную из трех сил, и т. д.

Для определения коэффициентов α , отличных от нуля, пользуемся условиями (f). Первое из этих условий в общем виде напишется так:

$$\begin{aligned} \alpha_{ax} \delta_{ay} + \alpha_{bx} \delta_{by} + \alpha_{cx} \delta_{cy} + \dots &= \\ = \alpha_{ay} \delta_{ax} + \alpha_{by} \delta_{bx} + \alpha_{cy} \delta_{cx} + \dots &= 0. \end{aligned}$$

При сделанном нами выборе коэффициентов α , получаем:

$$\delta_{ay} = \alpha_{ay} \delta_{ax} + 1 \cdot \delta_{bx} = 0,$$

откуда

$$\alpha_{ay} = -\frac{\delta_{bx}}{\delta_{ax}} \quad (h).$$

Таким образом мы вполне определили обобщенную силу Y и выяснили, что эта сила не вызывает перемещения, соответствующего силе A . Для вычисления коэффициентов α_{az} и α_{bz} , определяющих обобщенную силу Z , обратимся к следующим ур-ям системы (f).

Составляя ур-ие:

$$\delta_{zy} = \delta_{yz} = 0,$$

получим:

$$\begin{aligned} \alpha_{az} \cdot \delta_{ay} + \alpha_{bz} \cdot \delta_{by} + \alpha_{cz} \cdot \delta_{cy} + \dots &= \\ = \alpha_{ay} \cdot \delta_{az} + \alpha_{by} \cdot \delta_{bz} + \alpha_{cy} \cdot \delta_{cz} + \dots &= 0, \end{aligned}$$

откуда, при сделанном выборе коэффициентов α , и, принимая во внимание, что $\delta_{ay} = 0$, получаем:

$$\alpha_{bz} = -\frac{\delta_{cy}}{\delta_{by}} \quad (k);$$

$$\alpha_{ay} \delta_{az} + \alpha_{by} \delta_{bz} = 0.$$

Ур-ие $\delta_{zx} = \delta_{xz} = 0$, дает нам:

$$\alpha_{ax} \cdot \delta_{az} = \alpha_{az} \cdot \delta_{ax} + \alpha_{bz} \cdot \delta_{bx} + \alpha_{cz} \cdot \delta_{cx} = 0.$$

Следовательно:

$$\begin{aligned} \alpha_{az} &= -\frac{\delta_{cx}}{\delta_{ax}} + \frac{\delta_{bx}}{\delta_{ax}} \cdot \frac{\delta_{cy}}{\delta_{by}} \\ \delta_{az} &= \delta_{bz} = 0. \end{aligned} \quad (l);$$

Таким образом мы определили обобщенную силу Z и нашли, что она не вызывает перемещений в направлении сил A и B . Этим путем мы идем и при составлении дальнейших сил. Например, для следующей обобщенной силы U мы получим такие ур-ия для определения коэффициента α_{au} , α_{bu} , α_{cu} :

$$\left. \begin{aligned} \delta_{uz} = 0 &= & + \alpha_{cu} \delta_{cz} + 1 \cdot \delta_{dz} &= 0 \\ \delta_{uy} = 0 &= & + \alpha_{bu} \delta_{by} + \alpha_{cu} \delta_{cy} + 1 \cdot \delta_{dy} &= 0 \\ \delta_{ux} = 0 &= \alpha_{au} \delta_{ax} + \alpha_{bu} \delta_{bx} + \alpha_{cu} \delta_{cx} + 1 \cdot \delta_{dx} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (m).$$

Кроме того, из условий

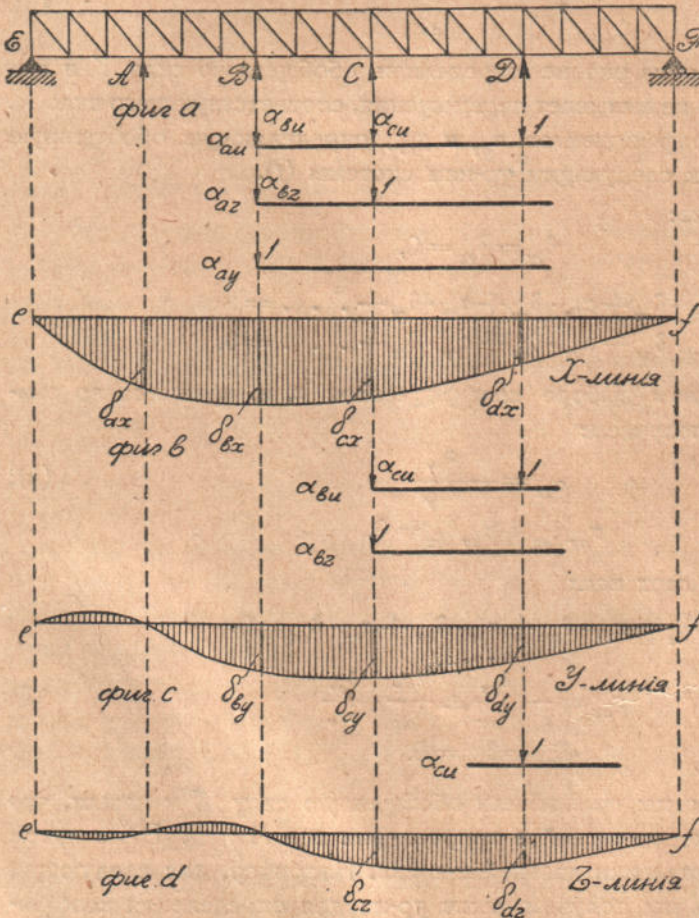
$$\delta_{xu} = \delta_{yu} = \delta_{zu} = 0$$

находим

$$\delta_{au} = \delta_{bu} = \delta_{cu} = 0.$$

Т.е. обобщенная сила U не вызывает перемещений, соответствующих силам A , B и C .

Покажем теперь, как намеченным здесь путем могут быть последовательно построены линии влияния для обобщенных сил X , Y , Z , U



Черт. 373.

в пятипролетной балочной ферме (черт. 373). Залишние неизвестные

примем сначала реакции A , B , C и D промежуточных опор (фиг. а).

Тогда обобщенная сила X представится одной силой, приложенной в опорной точке A .

Приложив здесь груз единица и построив для этого случая нагрузки линию прогиба фермы, опертой в E и F (фиг. б),

мы получаем линию влияния для обобщенной силы X . Для перехода к числам нужно будет ординаты этой

линии делить на $\delta_{xx} = \delta_{ax}$.

Измеряя ординаты δ_{bx} и δ_{ax} этой

линии, мы при помощи (h) находим α_{ay} и таким образом определяем вторую обобщенную силу Y . Нагрузке $Y=1$ будет соответствовать

вертикальная сила единица, приложенная в узле B , и прямопротивопо-

вторую обобщенную силу Y . Нагрузке $Y=1$ будет соответствовать вертикальная сила единица, приложенная в узле B , и прямопротивопо-

ложная ей сила, равная α_{ay} , приложенная в узле A . Построив линию прогибов фермы для случая действия этих двух сил, мы получаем таким образом линию влияния для обобщенной силы Y (фиг. с). Если построение сделано правильно, то прогиб δ_{ay} должен получиться равным нулю. При переходе к числам нужно будет ординаты построенной линии делить на $\delta_{xy} = \delta_{by}$.

Измеряя ординаты δ_{by} и δ_{cy} , мы на основании (k) вычисляем величину α_{az} . Далее, имея ординаты δ_{ax} , δ_{bx} , δ_{cx} линии влияния для X , мы при помощи ф-лы (l) вычисляем α_{az} . Таким образом определится обобщенная сила $Z=1$, состоящая из силы единица, приложенной в C , противоположной по направлению силы α_{bz} , приложенной в B , и силы α_{az} , приложенной в A . Построив для этих сил линию прогибов фермы, опертой в E и F , получим линию влияния для обобщенной силы Z . Ординаты этой линии придется делить на $\delta_{zz} = \delta_{cz}$.

Построенные линии влияния для X , Y и Z дают нам возможность определить следующую обобщенную силу U . В самом деле, на основании ф-л (m) получаем:

$$\alpha_{cu} = - \frac{\delta_{dz}}{\delta_{cz}};$$

$$\alpha_{bu} = - \frac{\delta_{dy}}{\delta_{by}} - \alpha_{cu} \cdot \frac{\delta_{cy}}{\delta_{by}};$$

$$\alpha_{au} = - \frac{\delta_{dx}}{\delta_{ax}} - \alpha_{cu} \frac{\delta_{cx}}{\delta_{ax}} - \alpha_{bu} \frac{\delta_{bx}}{\delta_{ax}}.$$

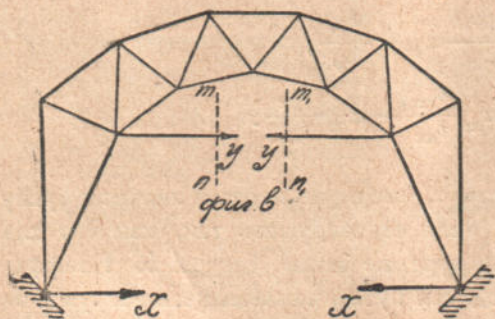
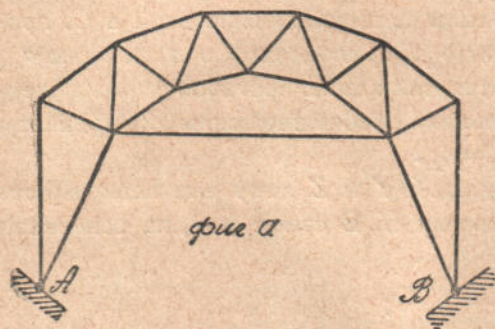
Заметим, что все коэффициенты α , имеющие первым значком букву a , находятся из линии влияния X , если ее загружать так, как это для каждого коэффициента показано на чертеже выше фигуры b . Коэффициенты α с первым значком b находятся путем надлежащего нагружения линии влияния Y и т. д.

При намеченном способе составления обобщенных сил, каждая последующая обобщенная сила не вызывает перемещений, соответствующих всем ранее введенным силам. Сила Y не вызывает перемещения, соответствующего силе X ($\delta_{ay} = 0$). Сила Z не вызывает перемещения соответствующих силам X и Y ($\delta_{az} = \delta_{bz} = 0$), и т. д.

На основании этого можно дать такой способ последовательного составления обобщенных сил. Сила $Y=1$ составитя из силы единица, приложенной в B , и такой силы, приложенной в A , при которой прогиб этой точки равен нулю. Следовательно, группу сил $Y=1$ мы найдем, рассматривая ферму, опертую в трех точках E , F и A . Сила единица, приложенная в B , и реакция A , вызванная этой силой в двухпролетной системе EAF , дадут нам группу сил $Y=1$. Точно также группа сил $Z=1$ составитя из силы единица, приложенной в C , и таких двух

сил, приложенных в A и B , при которых прогибы этих точек равны нулю. Эти силы мы найдем, рассматривая ферму, опертую в четырех точках E , A , B и F , и определяя реакции в A и B . Определение группы сил $U=1$ сведется к разысканию реакций A , B и C балки, опертой в E , A , B , C и F , и т. д.

Все предыдущие выводы построены на предположении, что величины A , B , C , . . . представляют собою реактивные силы, для которых соответствующие перемещения системы равны нулю. Все результаты легко распространяются и на тот случай, если лишние неизвестные представляют собой усилия в стержнях.



Черт. 374

Возьмем, например, двухшарнирную арку с повышенной затяжкой (черт. 374). За одну лишнюю неизвестную примем распор арки X . Второй неизвестной будет усилие Y в затяжке. Чтобы привести задачу к тому виду, который предполагался во всех предыдущих выводах, мы произведем разрез затяжки двумя бесконечно близкими сечениями mn и m_1n_1 (фиг. b). К этим сечениям приложим силы Y , заменяющие усилие в затяжке. Так как сечения mn и m_1n_1 взяты бесконечно близкими друг к другу, то сближение между точками приложения сил Y в действительной ферме равно

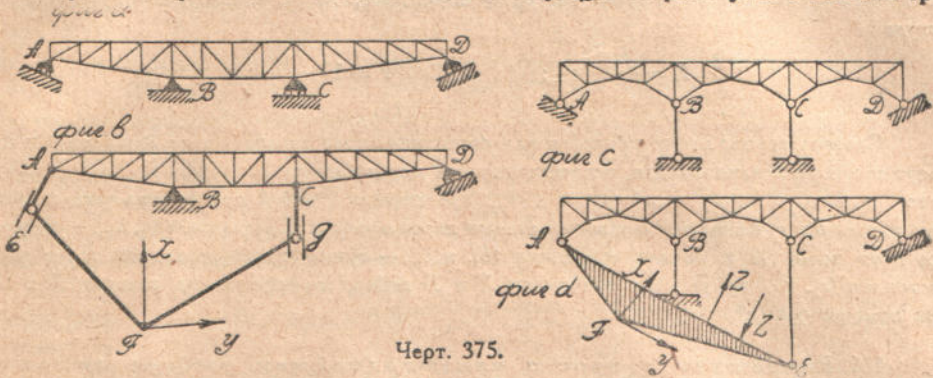
нулю, и ур-ия, которые мы сможем составить на основании теоремы о взаимности перемещений для определения X и Y будут иметь такой же вид, как и ур-ия (с).

Задачи: 184. Выбрать в трехпролетных системах, представленных на чертеже 375, лишние неизвестные так, чтобы каждое из соответствующих им ур-ий заключало лишь одну неизвестную.

Система, представленная на фигуре a , имеет две лишние неизвестных. Мы отбрасываем опоры A и C и соединяем соответствующие опорные узлы при помощи дополнительных нерастяжимых брусьев с некоторой точкой F (фиг. b). Надлежащим выбором силы, приложенной в F , мы можем при помощи направляющих, устроенных в E и G , сразу осуществить опорные реакции A и C . Составляющие X и Y второй силы мы и примем за лишние неизвестные. Направление силы X выберем произвольно. Только силу Y

придется направить перпендикулярно к тому перемещению точки F , которое получается под действием силы X .

Система, представленная на фигуре c , включает в себе три лишние неизвестные. Мы отбросим опоры A и C и соединим соответствующие опорные узлы с жестким тре-



Черт. 375.

угольником AEF (фиг. d). Реактивные силы A и C могут быть приведены к силе и паре приложенным к жесткому треугольнику. Положение пары ZZ мы выберем произвольно и для случая действия только этой пары построим перемещения узлов фермы, а также найдем перемещения вершин A и E жесткого треугольника. По этим перемещениям находим мгновенный центр F , около которого происходит соответствующий поворот треугольника. Эту точку примем за точку приложения силы, представляющей составяющими X и Y . Направление составляющей X выберем произвольно. Тогда направление Y определяется так же, как и в предыдущем примере.

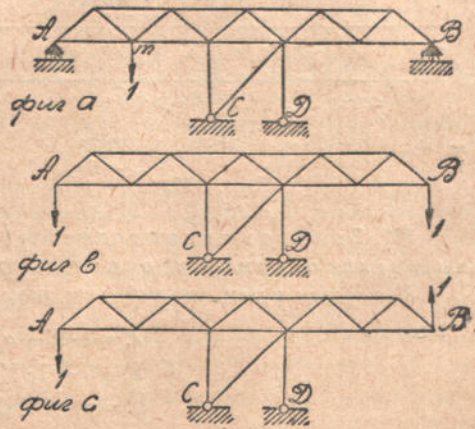
185. Выбрать лишние неизвестные для фермы, представленной на чертеже 376.

Для этой системы с двумя лишними неизвестными выгодно за неизвестные взять не вертикальные реакции A и B , а группы сил, составленные из этих реакций так: обобщенная сила X составляется из двух равных вертикальных сил, приложенных в A и B и направленных вверх; обобщенная сила Y составляется из двух равных вертикальных сил, направленных в противоположные стороны. Нагрузки, соответствующие случаям $X = -1$, и $Y = -1$, представлены на фигурах b и c .

В таком случае для опорных реакций получим выражения:

$$\left. \begin{aligned} A &= X + Y \\ B &= X - Y \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Так как мы имеем дело с симметричной фермой, то работа обобщенной силы X на перемещениях, вызванных силой Y , очевидно, будет равняться нулю, и каждое из ур-ий, составленных на основании теоремы о взаимности перемещений, будут включать лишь одну неизвестную. Применяя теорему о взаимности перемеще-



Черт. 376.

вий к действительному состоянию системы (фиг. а) и каждому из фиктивных состояний (фиг. b и с), мы получим ур-ия:

$$\begin{aligned} -X \cdot \delta_{xx} + 1 \cdot \delta_{mx} &= 0, \\ -Y \cdot \delta_{yy} + 1 \cdot \delta_{my} &= 0, \end{aligned}$$

откуда

$$X = 1 \cdot \frac{\delta_{mx}}{\delta_{xx}}; \quad Y = 1 \cdot \frac{\delta_{my}}{\delta_{yy}}.$$

Следовательно, линии прогибов для состояний, представленных на фигурах b и с, дадут нам линии влияния для искоемых лишних неизвестных. Величины δ_{xx} и δ_{yy} найдутся из того условия, что $1 \cdot \delta_{xx}$ и $1 \cdot \delta_{yy}$ представляют собой работу сил, указанных на фигурах b и с, на вызванных этими силами перемещениях. Следовательно, δ_{xx} — сумма прогибов точек A и B для состояния (b), и δ_{yy} — сумма прогибов тех же точек для состояния (с). По найденным значениям X и Y сейчас же определяем реакции A и B при помощи ф-л (а).

186. Разрешить вопрос о наивыгоднейшем выборе лишних неизвестных в случае несимметричной фермы, представленной на чертеже 377.

Следуя изложенному выше общему способу, мы примем для опорных реакций A и B такие выражения [см. ф-лы (g)]:

$$\begin{aligned} A &= 1 \cdot X + \alpha_{ay} \cdot Y; \\ B &= 0 + 1 \cdot Y. \end{aligned}$$

Соответствующие состояния $X = -1$ и $Y = -1$ представлены на фигурах b и с. Построив линию прогибов для состояния $X = -1$, найдем на основании ф-лы (h):

$$\alpha_{ay} = - \frac{\delta_{bx}}{\delta_{ax}}.$$

Линии прогибов для состояний, представленных на фигурах b и с, будут служить линиями влияния для обобщенных сил X и Y.

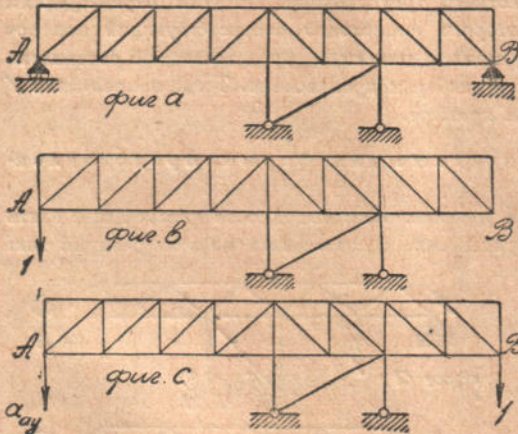
187. Выбрать наивыгоднейшим образом лишние неизвестные для трехпролетной арочной системы (черт. 378).

Идя общим путем, мы выбираем типы обобщенных сил на основании ур-ий:

$$\begin{aligned} A &= 1 \cdot X + \alpha_{ay} Y + \alpha_{az} Z; \\ B &= 0 + 1 \cdot Y + \alpha_{bz} Z; \\ C &= 0 + 0 + 1 \cdot Z. \end{aligned}$$

Величины α_{ay} , α_{az} и α_{bz} найдутся при помощи ф-л (h), (k) и (l).

В данном случае можно, воспользовавшись также симметрией, сразу выбрать такие типы обобщенных сил, чтобы каждая из сил не вызывала перемещений, соответствующих другим силам. За обобщенную силу X примем две равные и прямопротивоположные



Черт. 377.

горизонтальные силы, соответствующие распору арок. Находим перемещения δ_{ax} и δ_{bx} для случая $X = -1$ (фиг. б).

Обобщенную силу $Y = -1$ оставим из трех сил, как то показано на фигуре с. Соотношение между горизонтальной и вертикальными силами подобрано так, что точка А остается неподвижной. Следовательно, сила m не вызывает перемещений, соответствующих силе X .

Обобщенная сила $Z = -1$ составляется так, как это указано на фигуре d. Легко видеть, что при этом точка А остается неподвижной и прогибы точек В и С равны по величине и противоположны по знаку.

Следовательно, силы X и Y не совершают никакой работы на перемещениях, вызываемых силой Z . Уравнения, которые можно написать на основании теоремы о взаимности перемещений, будут заключать при таком выборе обобщенных сил лишь по одной неизвестной.

188. Выбрать лишние неизвестные в случае арки с заделанными пятнами (черт. 379).

Чтобы прийти к ур-ям, заключающим лишь по одной неизвестной, мы могли бы, выбрав за лишние неизвестные усилия, соответствующие левой плоскости закрепления, поступить так, как это было объяснено ранее (черт. 372). Покажем здесь иной путь решения задачи, особенно выгодный в случае симметричных арок.

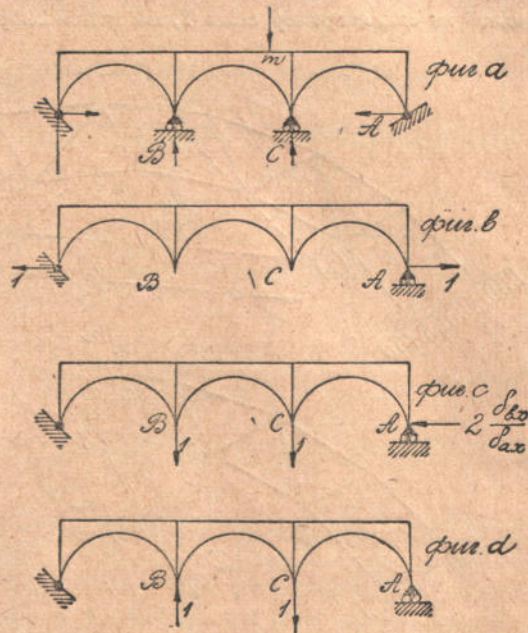
Разрежем арку сечением mn (фиг. а, черт. 379) и рассмотрим каждую половину арки отдельно. На фигуре б эти половины для ясности чертежа несколько раздвинуты. Концы разрезанных брусков как для левой, так и для правой половины арки представим себе шарнирно связанными с жесткими элементами, заштрихованными на чертеже. Тогда для каждой половины арки система усилий, соответствующих перерезанным стержням, может быть заменена эквивалентной ей системой сил X , Y и Z , приложенных к жесткому элементу.

Пары сил X мы можем расположить совершенно произвольно и для них найдем перемещения всех узлов каждой половины фермы, а также перемещения присоединенных к ним жестких элементов. Пусть точки (I) и (II) представляют собой мгновенные центры, соответствующие этим перемещениям жестких элементов. Углы поворотов τ_1 и τ_2 этих элементов найдутся по формулам:

$$\tau_1 = \sum_{\substack{\text{лев. ч.} \\ \text{арки}}} \frac{S_1^2 l}{EF}; \quad \tau_2 = \sum_{\substack{\text{прав. ч.} \\ \text{арки}}} \frac{S_1^2 l}{EF},$$

где S_1 обозначает усилия в стержнях, вызываемые парами сил X , и суммирование распространяется для каждого τ на все стержни соответствующей половины фермы¹⁾.

¹⁾ Считая в том числе и части разрезанных стержней.



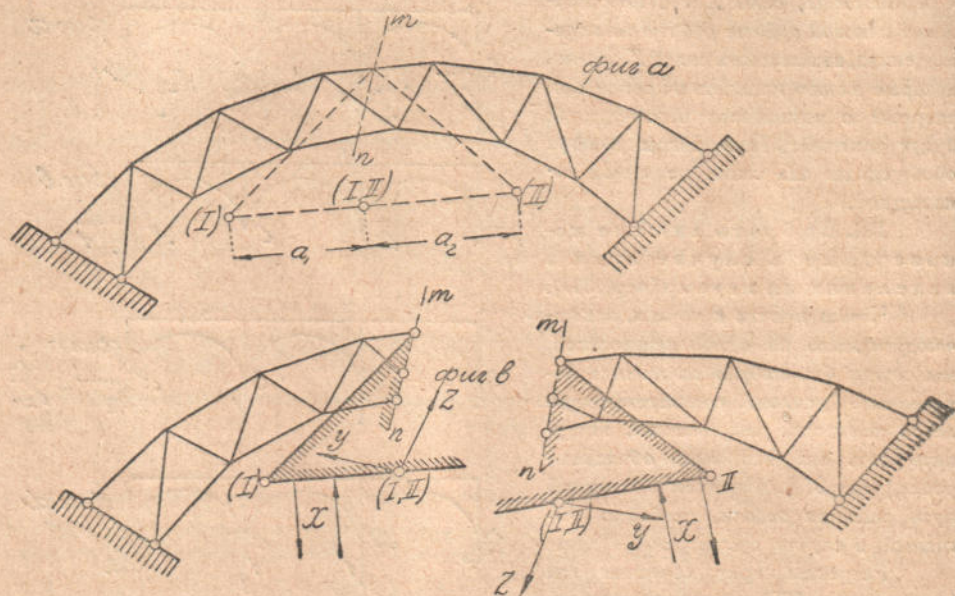
Черт. 378.

На линии, соединяющей центры (I) и (II), мы определяем точку (I, II) из условия

$$a_1 \tau_1 = a_2 \tau_2.$$

Точка эта совершает одно и то же перемещение независимо от того, считаем ли мы ее принадлежащей левому или правому жесткому элементу. В этой точке мы, не внося в систему никаких изменений, могли бы оба жесткие элемента соединить шарниром.

Точку (I, II) мы примем за точку приложения сил Y и Z . Тогда очевидно, пары сил X не будут вызывать перемещений, соответствующих силами Y и Z . Направление одной из сил, например, силы Y , мы можем выбрать произвольным, тогда силы Z должны



Черт. 379.

быть направлены перпендикулярно к перемещению¹⁾, вызванному силами Y . При таком выборе лишних неизвестных, каждое из уравнений, составляемых на основании теоремы о взаимности перемещений, будет заключать лишь одну неизвестную.

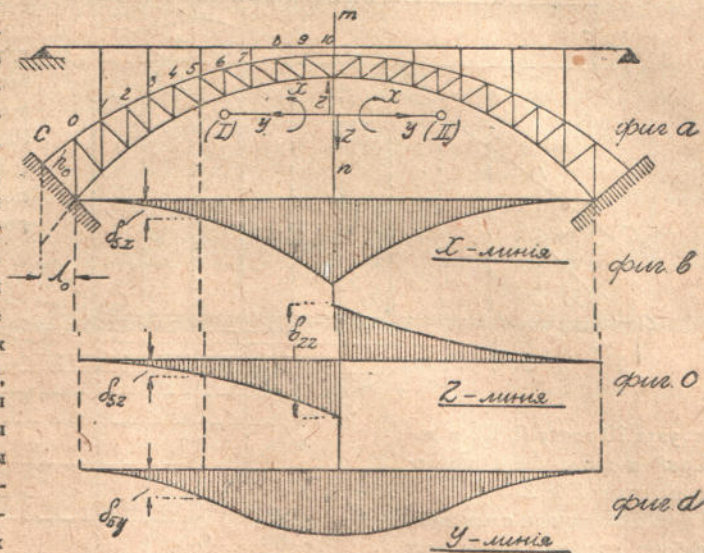
189. Пользуясь намеченным в предыдущей задаче способом, рассчитать симметричную арку с заделанными пятнами (черт. 380).

За лишние неизвестные примем моменты X и силы Y и Z в ключе арки²⁾. Из условий симметрии заключаем, что точка (I, II), в которой должны быть приложены силы Y и Z , расположится на оси симметрии mn . Из тех же условий симметрии заключаем, что две равные и прямопротивоположные горизонтальные силы Y , приложенные к двум половинам арки в сечении mn , не вызовут по этому сечению вертикального смещения одной половины арки относительно другой. Следовательно, направляя силы Z вертикально, мы достигнем того, что эти силы не будут совершать работы на перемещениях, вызываемых силами Y .

1) Перемещением является относительное смещение точек приложения сил Y . До деформации эти точки совпадают с точкой (I, II).

2) Сечение mn проходит через ось средней стойки.

Для окончательного определения тех обобщенных сил X , Y и Z , которые мы выбираем за лишние неизвестные, остается теперь лишь найти положение точки (I, II) на оси симметрии ml . Выясним для этого предварительно, какие перемещения вызывают пары сил X . Так как мы имеем дело с симметричной фермой, то при этом можем ограничиться рассмотрением лишь одной половины, например, правой. Прикладывая к этой половине пару сил $X = -1$, мы без затруднения найдем усилия S_1 , вызываемые этой парой в стержнях фермы. После этого, вертикальные прогибы верхних узлов фермы могут быть найдены путем построения веревочного многоугольника для фиктивных грузов, определяемых по ф-ле (I) § 46:



Черт. 380.

$$P_m = \frac{1}{h_m} \left(-\frac{\delta O_m}{\cos \beta_m} + \frac{\delta U_{m+1}}{\cos \gamma_{m+1}} + \frac{\delta d_m}{\cos \gamma_m} - \frac{\delta d_{m+1}}{\cos \gamma_{m+1}} - \frac{\delta h_m \cdot h'_{m-1}}{\lambda_m} + \frac{\delta h_{m+1} \cdot h_m}{\lambda_{m+1}} \right) (a)$$

При составлении фиктивного груза в опорной точке C придется считаться лишь с деформацией стойки h_0 , соответственно чему в ф-ле (a) останется лишь последний член, и мы получим

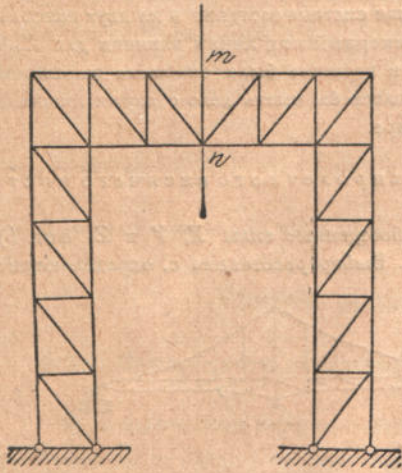
$$P_c = \frac{\delta h_0}{\lambda_0}$$

Соответствующий многоугольник прогиба представлен на чертеже 381. Первая сторона C_1C_2 веревочного многоугольника взята горизонтальной. От этой прямой придется отсчитывать вертикальные прогибы узлов $0, 1, 2, 3, \dots, 10$. По вертикальным прогибам мы легко построим полные перемещения, если воспользуемся диаграммой перемещений для шарнирного многоугольника (§ 43).

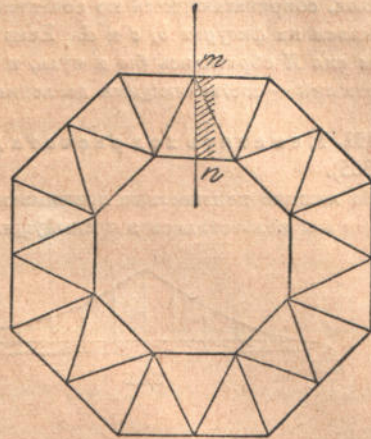
Построение начинаем с неподвижной точки C . Перемещение узла 0 обусловлено удлинением δO_0 стержня CO и вращением его. Откладывая отрезок δO_0 по направлению стержня и восстанавливая в конце его перпендикуляр, получим в пересечении этого перпендикуляра с горизонтальной линией, идущей через O_1 , точку O_2 , определяющую перемещение узла 0 . От этой точки откладываем по направлению $0-1$ отрезок δO_1 и в конце его проводим перпендикуляр до пересечения с горизонтальной линией, идущей через 1_1 . Таким образом получаем перемещение узла 1 . Это построение продолжаем до тех пор пока не получим последней точки 10_2 , определяющей перемещение C_210_2 узла 10 .

Нужный нам мгновенный центр (I) будет лежать, очевидно, на перпендикуляре опущенном из узла 10 на направление C_210_2 . Расстояние a этой точки от узла 10 мы

Производим разрез по оси симметрии mn и выбираем лишние неизвестные так, как это было сделано в предыдущей задаче для арки.



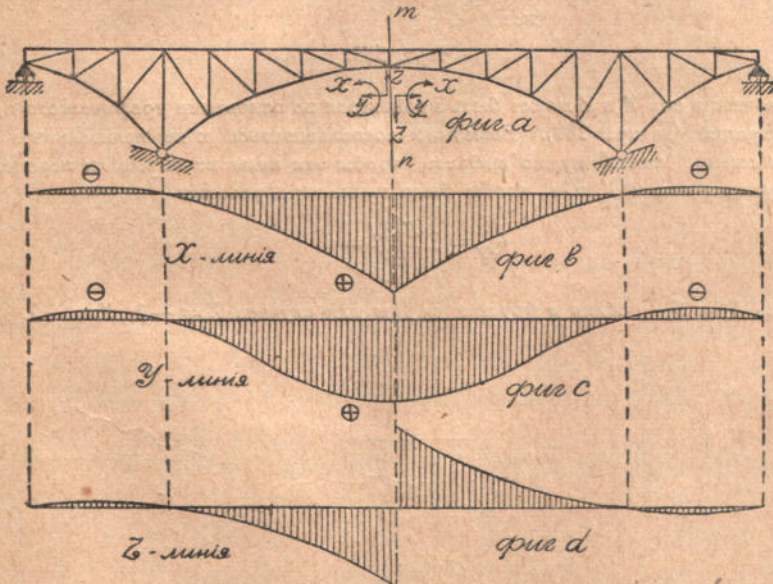
Черт. 382.



Черт. 383.

191. Наметить общий ход расчета кольца, представленного на чертеже 383.

Производим разрез mn . Сечение справа от разреза удерживаем неподвижно, а к сечению слева присоединяем жесткий элемент, на котором располагаем пару сил X и силу Z так, как это было сделано при расчете арки (черт. 372).



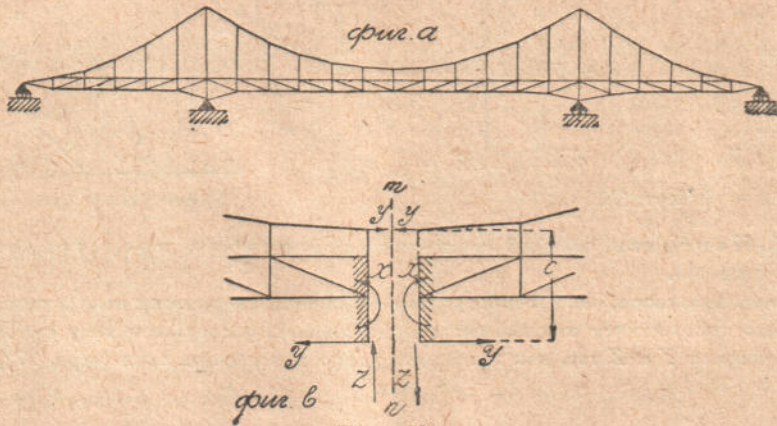
Черт. 384.

192. Выбрать лишние неизвестные для трехпролетного арочного моста, представленного на чертеже 384.

Производя разрез по оси симметрии, мы примем за лишние неизвестные те же обобщенные силы X , Y и Z , которыми мы пользовались при расчете арки (задача 189). Таким образом основная статически определимая система составит из двух консольных балок, соприкасающихся по сечению m . Примерный вид линий влияния для X , Y и Z показан на фигурах b , c и d . Если бы арка в вершине была снабжена шарниром, то пары сил X обратились бы в нуль, и нам пришлось бы иметь дело с двумя лишними неизвестными — составляющими давления в шарнире.

193. Наметить ход расчета для трехпролетного висячего моста (черт. 385).

За лишние неизвестные принимаем те же обобщенные силы X , Y и Z (фиг. b), которыми мы пользовались в предыдущих задачах. Выбор расстояния c , определяющего



точку приложения сил Y и Z может быть произведен на основании графического построения перемещений (задача 189). Возможно воспользоваться и вычислительным путем. Точку приложения сил Y нужно выбрать, чтобы эти силы не вызывали перемещений, соответствующих силам X , т. е., чтобы было выполнено условие:

$$\delta_{xy} = \Sigma \frac{S_1 S_2 l}{EF} = 0.$$

Здесь S_1 и S_2 — усилия в брусках фермы для случаев $X = -1$; $Y = -1$.

ГЛАВА VI.

Расчет пространственных систем.

§ 53. Сложение и разложение сил, сходящихся в одной точке.

При сложении сил, пересекающихся в одной точке и направленных как угодно в пространстве, мы будем пользоваться принципом параллелограмма сил. При помощи параллелограмма сил мы складываем какие-либо две из заданных сил. Полученную равнодействующую сложим, пользуясь параллелограммом сил, с третьей заданной силой. Вновь полученную равнодействующую сложим с четвертой силой и т. д. Совершенно так же, как и в случае сил, расположенных в одной плоскости, легко показать, что последовательное построение параллелограммов может быть заменено построением многоугольника сил, который мы получим, если все силы отложим одну за другой по их величине и направлению. Замыкающая такого многоугольника, идущая от начала первой к концу последней силы, представит нам равнодействующую заданной системы сил. Когда конец последней силы совпадет с началом первой, мы будем иметь замкнутый многоугольник сил. Соответствующая система сил будет находиться в равновесии.

При каком угодно направлении сил в пространстве многоугольник сил получится, вообще говоря, не плоским, и все построение придется вести в двух проекциях. В случае замкнутого многоугольника, проекции его на горизонтальную и вертикальную плоскости также будут замкнутыми многоугольниками, образованными горизонтальными и вертикальными проекциями данных сил.

Обратимся теперь к разложению силы на несколько направлений, пересекающихся с направлением данной силы в одной точке. С подобной задачей нам часто придется встречаться при расчете пространственных систем. По заданной силе, приложенной в каком-либо узле фермы, нам нужно будет определять усилия в сходящихся к этому узлу стержнях. Усилия эти, при условии соединения стержней идеальными шарнирами и при расположении нагрузок в узлах, будут направлены по осям

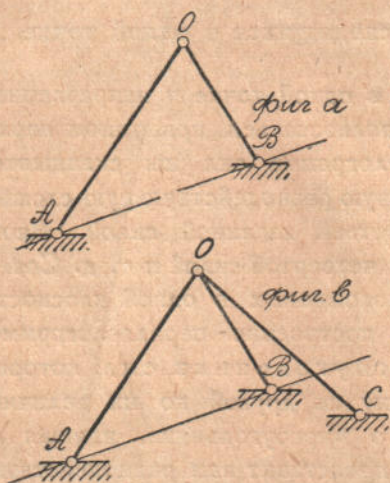
стержней. Величины усилий должны быть подобраны так, чтобы они уравнивали приложенную в узле силу.

Таким образом наша задача сводится к исследованию равновесия сил, приложенных в одной точке. Статика для этого случая дает три уравнения равновесия, и мы сможем однозначно определить все усилия, если число неизвестных равно трем. Соответственно этому задача о разложении силы получает вполне определенное решение, если имеется случай трех направлений, пересекающихся с силой в одной точке.

Если число направлений, пересекающихся с заданной силой в одной точке, больше трех, вопрос о разложении силы по этим направлениям становится задачей неопределенной, так как число неизвестных усилий будет больше числа уравнений.

При числе направлений меньше трех уравнивание будет возможно лишь при соблюдении дополнительных условий относительно разлагаемой силы. При двух направлениях сила, очевидно, должна лежать в плоскости этих направлений. При одном направлении — сила должна совпасть с этим направлением.

Заметим, что в том случае, когда три направления, пересекающиеся с заданной силой в одной точке, лежат в одной плоскости, задача о разложении становится неопределенной, если направление силы совпадает с той же плоскостью. Если же этого совпадения нет, то уравнивание становится невозможным.



Черт. 386.

Статической определенности задачи о разложении силы на три направления соответствует и геометрическая определенность в случае прикрепления какого-либо узла к геометрически неизменяемой системе при помощи трех стержней. В самом деле если бы мы какой-либо узел O (черт. 386, фиг. а) прикрепили к неизменяемой системе двумя стержнями OA и OB , то узел O мог бы совершать перемещения, соответствующие вращению треугольника AOB относительно стороны AB ¹⁾. Устанавливая третий стержень OC (фиг. б), не лежащий в плоскости AOB , мы достигнем полного закрепления узла O .

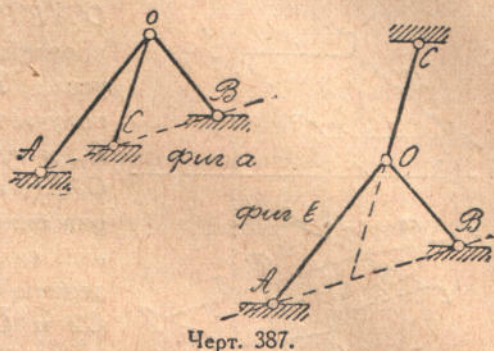
В отмеченном выше исключительном случае, когда все три стержня лежат в одной плоскости, мы будем иметь нежесткую систему. При

¹⁾ В узлах пространственных систем мы будем предполагать идеальные шаровые шарниры, допускающие вращение стержней в любом направлении.

расположении, указанном на фигуре *a* черт. 387, плоская фигура *AOBC* сохраняет возможность вращения вокруг оси *AB*.

Если стержни расположены так, как это указано на фиг. *b*, то нежесткость прикрепления узла *O* является следствием того, что малым изменениям длин стержней могут соответствовать значительные перемещения точки *O* в направлении, перпендикулярном плоскости стержней.

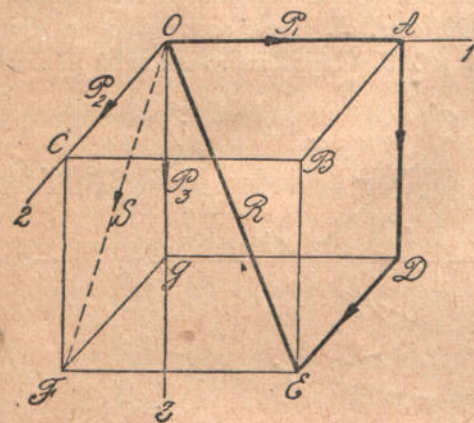
При разложении силы на три направления мы воспользуемся тем обстоятельством, что равнодействующая *R* трех сил P_1 , P_2 и P_3 , проходящих через точку *O*, представляется



диагональю *OE* параллелепипеда, ребра которого по величине и направлению представляют силы P_1 , P_2 и P_3 , (черт. 388). Соответствующий многоугольник сил на чертеже показан жирными линиями.

Когда нужно разложить силу *R* на направления 1, 2 и 3, мы можем поступить так. Сначала разлагаем силу *R* на две составляющие, одну из них P_1 направляем по линии *OA* и другую *S* — по линии *OF*, представляющей пересечение плоскости P_1R с плоскостью *o 2 3*. После этого остается разложить силу *S* на направления 2 и 3 и получить таким образом усилия P_2 и P_3 .

Иногда является более удобным вести построение следующим образом. Через точку *E*, конец равнодействующей *R*, проводим линию, параллельную направлению *OA*, и продолжаем эту линию до пересечения с плоскостью *2 3* в точке *F*. Тогда отрезок *FE* дает нам по величине и направлению силу P_1 и отрезок *OF* — равнодействующую сил P_2 и P_3 .



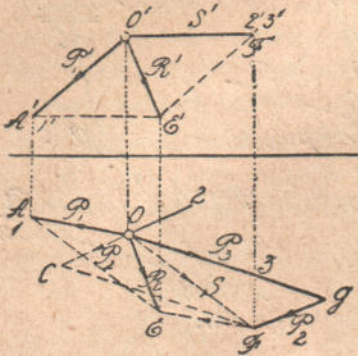
Черт. 388.

Все построение придется, конечно, вести в двух проекциях. Особенно просто решается задача в том случае, если в одной из проекций два какие-либо направления сливаются в одну прямую. Возьмем, например, случай, когда направления 2 и 3 лежат в горизонтальной плоскости (черт. 389). Сначала разлагаем силу *R* на составляющие P_1 ,

Все построение придется, конечно, вести в двух проекциях.

Особенно просто решается задача в том случае, если в одной из проекций два какие-либо направления сливаются в одну прямую. Возьмем, например, случай, когда направления 2 и 3 лежат в горизонтальной плоскости (черт. 389). Сначала разлагаем силу *R* на составляющие P_1 ,

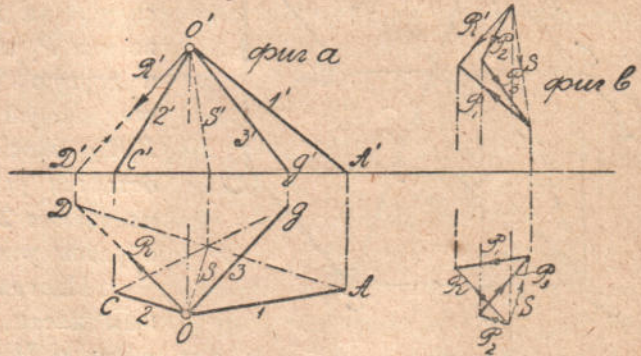
имеющую направление $\overline{O1}$, и S , направленную по линии пересечения плоскости 1 R с плоскостью 2 3. Так как эта последняя плоскость горизонтальна, то соответствующая линия пересечения в вертикальной проекции сольется с линией $O', 2', 3'$, и мы построением параллелограмма $O'A'E'F'$ найдем P_1' и S' , вертикальные проекции силы P_1 и равнодействующей S усилий P_2 и P_3 . После этого сейчас же получается горизонтальная проекция силы P_1 , и путем построения параллелограмма $OAEF$ находится горизонтальная проекция силы S . Для получения горизонтальных сил P_2 и P_3 остается только найденную силу S разложить на направления $\overline{O2}$ и $\overline{O3}$, что и выполнено в горизонтальной плоскости проекций, на которую эти силы проектируются без искажения.



Черт. 339.

Возьмем теперь более общий случай, когда силу R требуется разложить на три направления $\overline{O1}$, $\overline{O2}$ и $\overline{O3}$, составляющие какие угодно углы с плоскостями проекций (черт. 390, фиг. а). Предварительно найдем линию пересечения S плоскостей R 1 и 2 3. Одной из точек этой линии

будет, очевидно, точка O . Другую точку той же линии получим в месте пересечения горизонтальных следов AD и CC' плоскостей R 1 и 2 3. Силу R разлагаем сначала на направления $\overline{O1}$ и S , что выполнено на фигуре b в двух проекциях. После этого остается лишь силу S

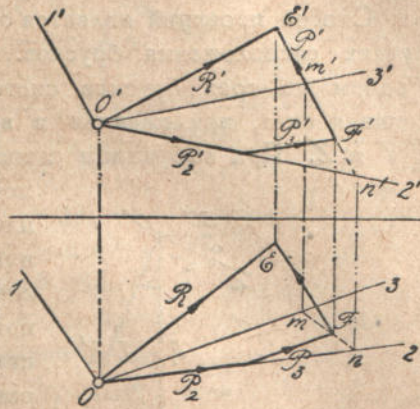


Черт. 390.

разложить на направления $\overline{O2}$ и $\overline{O3}$. Таким образом мы получаем горизонтальные и вертикальные проекции составляющих P_1 , P_2 и P_3 . По этим проекциям без затруднений могут быть найдены и действительные величины искомых усилий.

Обратимся теперь к решению задачи о разложении силы на три направления вторым из намеченных выше способов. Способ этот придется применять в тех случаях, когда встречаются затруднения при построении линии пересечения S плоскости R 1 и 2 3, например, когда следы линий $\overline{O1}$, $\overline{O2}$, $\overline{O3}$ выходят за пределы чертежа. Положим требуется

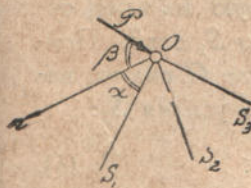
разложить силу R на три направления $\overline{O1}$, $\overline{O2}$ и $\overline{O3}$, указанные в двух проекциях на чертеже 391. Через конец силы R , точку E , проводим линию, параллельную направлению $\overline{O1}$, до пересечения с плоскостью 2 3 в точке F . Точку F мы проще всего можем найти таким образом. Проводим через направление EF вертикально проектирующую плоскость. Ее пересечение с плоскостью 2 3 определится линией \overline{mn} , $\overline{m'n'}$. На этой линии, очевидно, должна лежать и искомая точка пересечения F . Для получения горизонтальной проекции этой точки нужно только через точку E провести линию, параллельную направлению $\overline{O1}$. Пересечение ее с линией \overline{mn} и определит горизонтальную проекцию точки F . После этого сейчас же находится вертикальная проекция F' на линии $\overline{m'n'}$. Отрезком EF , как мы видели (черт. 388), определяется по величине и направлению сила P_1 . Для получения двух других составляющих нужно только разложить отрезок OF на направления $\overline{O2}$ и $\overline{O3}$, что и выполнено на чертеже. Жирными линиями показаны горизонтальные и вертикальные проекции соответствующего многоугольника сил¹⁾.



Черт. 391.

При расчете пространственных систем графическое решение вопроса далеко не всегда является наиболее простым, иногда с большой выгодой

можно пользоваться и аналитическими приемами. В частности, при разложении силы на три направления мы можем исходить из основных ур-ий равновесия, и можно составить эти ур-ия так, что в каждое из них войдет лишь одно неизвестное усилие. При этом можно воспользоваться, как способом проекций, так и способом моментов, аналогичным приему Риттера, которым мы пользовались при расчете плоских ферм.



Черт. 392.

Воспользуемся способом проекций, чтобы определить усилие S_1 , вызываемое в одном из трех брусков силою P (черт. 392). Мы получим ур-ие, заключающее лишь одну неизвестную силу S_1 , если спроектируем все сходящиеся в точке O усилия на направление нормали к /уси-

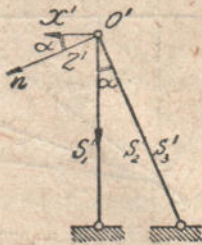
¹⁾ Описание других графических приемов разложения силы на три направления можно найти в книге П. Рабцевича, Сборник задач по пространственным системам Киев 1911 г.

лиям S_2 и S_3 . Пусть α и β углы, составленные нормалью n с направлениями P и S_1 . Тогда, предполагая усилие S_1 растягивающим, можем написать такое ур-ие:

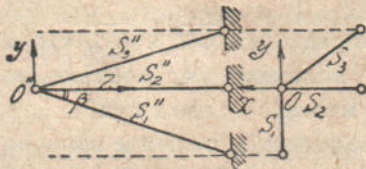
$$-P \cos\beta + S_1 \cos\alpha = 0 \quad (a),$$

откуда и определится искомое усилие S_1 .

Способ проекций является особенно удобным в некоторых частных случаях расположения брусков. Положим требуется найти усилие S_1 в одном из трех брусков системы, представленной на чертеже 393. Внешняя сила, приложенная в вершине O , задана своими проекциями X , Y и Z . При выбранном расположении брусков нормаль n и стержень S_2 будут лежать в вертикальной плоскости, перпендикулярной направлению оси Y . При составлении проекции внешней силы на направление нормали придется принять во внимание лишь составляющие X и Z , которые при проектировании дадут нам величину



$$X \cos\alpha + Z \sin\alpha.$$



Черт. 393.

Усилие S_1 , которое мы предположим растягивающим, разложим в вертикальной плоскости на составляющие по направлениям Y и Z . При проектировании на направление нормали нам придется иметь в виду лишь вторую из этих составляющих, равную, как видно из чертежа, выражению $S_1 \cos\beta$.

Приравняв нулю сумму проекций всех приложенных в узле O сил на направление n , приходим к такому ур-ию для определения усилия S_1 :

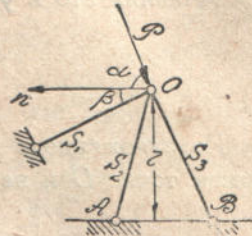
$$X \cos\alpha + Z \sin\alpha + S_1 \cos\beta \sin\alpha = 0 \quad (b).$$

Если заданы возвышение точки O над плоскостью закрепления нижних концов стержней и длины стержней, то по этим размерам мы сейчас же находим углы α и β и вычисляем при помощи ур-ия (b) соответствующее значение S_1 .

Способ проекций может быть применен и в общем случае. Выбирая прямоугольную систему координатных осей и проектируя на эти оси как заданную силу, так и неизвестные усилия в трех стержнях рассматриваемого узла, мы получим три линейных ур-ия, каждое из которых будет заключать в себе все три неизвестные усилия. Хотя ур-иям этим можно придать сравнительно простой вид, но все же такой путь опреде-

ления неизвестных усилий является более громоздким и на изложении этого способа мы здесь останавливаться не будем ¹⁾.

Применим теперь к решению задачи о разложении силы на три направления способ моментов. Если нужно найти усилие S_1 , возникающее в одном из трех брусков под действием силы P (черт. 394), то за ось, относительно которой следует составлять моменты, удобнее всего принять линию AB , пересекающую направления усилий S_2 и S_3 . В таком случае нам придется иметь дело лишь с силой P и усилием S_1 . Каждую из этих сил мы разложим на две составляющие, одну из которых направим по нормали и другую в плоскости OAB . При составлении моментов придется иметь дело лишь с первыми составляющими. Величину их придется множить на расстояние r до оси AB . Соответствующее уравнение равновесия напишется так:



Черт. 394

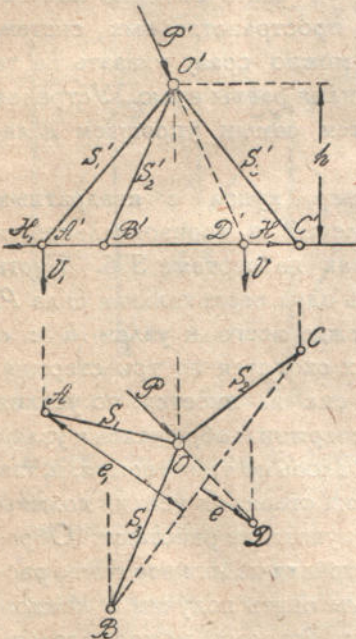
$$(P \cos \alpha - S_1 \cos \beta) r = 0.$$

Ур-ие это совпадает с ур-ием (а), составленным способом проекций.

Особенно удобно пользоваться ур-ием моментов в том случае, если нижние концы всех трех брусков, сходящихся в рассматриваемом узле O , лежат в горизонтальной плоскости (черт. 395). При вычислении усилия S_1 выбираем за ось моментов линию BC , соединяющую нижние концы двух других брусков. Силы S_1 и P , моменты которых относительно оси BC будут отличны от нуля, разложим в точках A и D на две составляющие, причем одну из составляющих направим вертикально, а другую — в горизонтальной плоскости. Только первые составляющие дадут относительно оси BC момент, отличный от нуля, и ур-ие моментов напишется так:

$$V_1 e_1 - V e = 0 \quad (c).$$

Если мы через h обозначим возвышение узла O над горизонтальной плоскостью ABC ,



Черт. 395.

¹⁾ Изложение этого способа имеется в книге Schlink'a Statik der Raumbachwerke, 1907 г., стр. 63. Там же изложен основанный на начале возможных перемещений способ Mohr'a, см. стр. 72. Тот же вопрос см. Henneberg, Die graphische Statik, 1911 г., стр. 337.

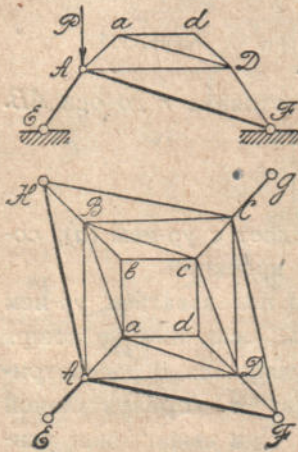
через l_1, l_2, l_3 обозначим длины брусьев и через l — длину OD , то будем иметь:

$$V_1 = S_1 \frac{h}{l_1}; \quad V = \rho \frac{h}{l}.$$

Вставляя это в уравнение (с), получим для искомого усилия выражение:

$$S_1 = \rho \frac{e}{e_1} \cdot \frac{l_1}{l}.$$

Из изложенного видно, что в случае трех стержней, сходящихся в одной точке O и не лежащих в одной плоскости, мы, пользуясь одним из перечисленных способов, всегда сможем найти усилия S_1, S_2 и S_3 , вызываемые в этих стержнях какой-либо силой P , приложенной в шарнире O . Если эта сила будет равна нулю, то в нуль обратятся и все три усилия, так как только при этом условии возможно равновесие узла O .



Черт. 396.

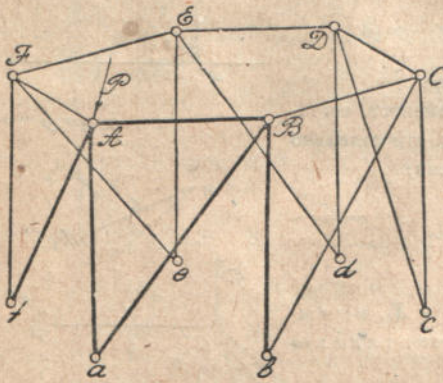
Этим соображением часто выгодно пользоваться при расчете пространственных систем. Основываясь на нем, можно сразу указать на те стержни, в которых усилия равны нулю. Устраняя их из системы, мы тем самым упрощаем дальнейший расчет.

Возьмем, например, купол с квадратным основанием, представленный в горизонтальной и вертикальной проекциях на чертеже 396. Пусть на него действует лишь одна вертикальная сила P , приложенная в узле A . Мы обращаемся прежде всего к узлам b и d верхнего кольца купола. Так как в этих узлах сходятся по три стержня, не лежащих в одной плоскости, и внешних сил не имеется, то усилия в этих стержнях равны нулю. Выбрасывая эти стержни и обращаясь к узлам a и c , мы находим, что здесь в каждом узле осталось по три стержня, и, так как внешних сил нет, то, следовательно, и в этих стержнях усилия должны равняться нулю. Все стержни верхнего яруса купола не работают. Обращаясь теперь к узлам B и D нижнего яруса и устраняя из них все ранее рассмотренные стержни с нулевыми усилиями, мы опять получим в каждом из этих узлов по три стержня, относительно которых можно сделать заключение, что они не работают. Не будут работать также и стержни, сходящиеся в узле C . Отличными от нуля будут лишь усилия в трех стержнях, сходящихся к нагруженному узлу A . На чертеже эти стержни отмечены жирными линиями. Соответствующие им усилия найдутся разложением силы на три направления AE, AF и AN .

Отметим здесь еще одно соображение, которым можно воспользоваться при расчете пространственных систем. Если в каком-либо узле системы все стержни, кроме одного, лежат в одной плоскости (черт. 397), то усилие S_1 , вызываемое в отдельно направленном стержне 1 силой P , может быть найдено из условия равновесия узла, хотя общее число стержней больше трех. Для этого нужно только спроектировать все сходящиеся в узле усилия на направление, перпендикулярное к плоскости стержней 2, 3, 4 и 5. В полученное таким образом уравнение войдет лишь неизвестное усилие S_1 и известная сила P . Если в подобного рода узле не приложено никакой силы, то мы заключаем, что в отдельно направленном стержне усилие должно равняться нулю. Этим соображением воспользуемся при выделении стержней с нулевыми усилиями.



Черт. 397.



Черт. 398.

Возьмем, например, систему, представленную на чертеже 398. Обращаясь к узлу B , где три стержня лежат в одной плоскости, заключаем, что в четвертом отдельно направленном стержне BC усилие должно равняться нулю. Такое же заключение делаем относительно стержней CD , DE , FE и AF на основании рассмотрения узлов C , D , E и F . Отбросив все эти стержни с нулевыми усилиями, найдем, что в узлах C , D , E и F останутся лишь по два стержня, и, так как внешних сил здесь не при-

ложено, то усилия во всех этих стержнях будут равны нулю. Отличные от нуля усилия действуют лишь в стержнях, отмеченных на чертеже жирными линиями.

Задачи: 194. Определить усилия в трех стержнях кронштейна, если в вершине O этого кронштейна подвешен груз 3 т (черт. 399).

При решении этой задачи графическим путем, выполняем все построение в двух проекциях (фиг. b). Так как стержни OA и OB лежат в горизонтальной плоскости, то их вертикальные проекции сливаются, и мы построением треугольника $O'D'E'$ находим сжимающее усилие S_1 , равное 5 т и горизонтальную равнодействующую усилий S_2 и S_3 , равную 4 т. Разлагая эту равнодействующую в горизонтальной плоскости проекций на направления OA и OB , найдем

$$S_2 = S_3 = \sqrt{5} \text{ т}$$

При решении той же задачи способом проекций, проектируем все приложенные в точке O усилия на вертикальное направление. Предполагая усилие S_1 растягивающим, получим соответствующее ур-ие равновесия в таком виде:

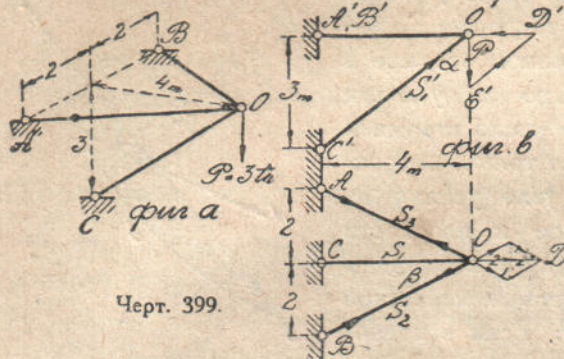
$$P + S_1 \cos \alpha = 0.$$

Или, принимая во внимание, что

$$P = 3 \text{ т} \quad \text{и} \quad \cos \alpha = \frac{3}{5},$$

получаем для S_1 найденное выше сжимающее усилие 5 т.

Для получения S_2 и S_3 проектируем все приложенные к O силы на направление биссектрисы угла AOB . Соответствующее ур-ие напишется так:



Черт. 399.

$$S_1 \sin \alpha + 2 S_2 \cos \beta = 0.$$

Вставляя вместо S_1 найденное выше значение: -5 т и принимая во внимание, что

$$\sin \alpha = \frac{4}{5} \quad \text{и} \quad \cos \beta = \frac{2}{\sqrt{5}},$$

получим для S_2 и S_3 найденное выше значение.

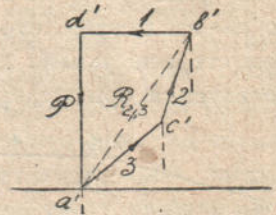
Чтобы получить усилие S_1 способом моментов, составляем момент всех приложенных в точке O сил относительно оси AB . Тогда получим такое ур-ие равновесия:

$$4(P + S_1 \cos \alpha) = 0,$$

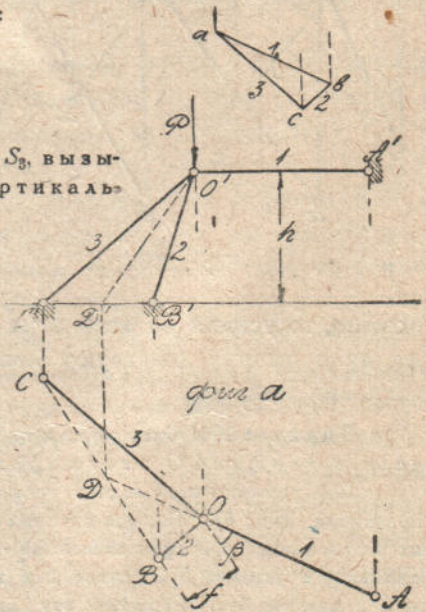
откуда и находится прежнее значение для S_1 .

195. Определить усилия S_1 , S_2 и S_3 , вызываемые в брусках 1, 2 и 3 (черт. 400) вертикальной силой P .

Сначала разлагаем силу P на направление 1 и направление OD линии пересечения вертикальной плоскости, идущей через направление 1 с плоскостью 23. Горизонтальная проекция этой линии совпадает с направлением 1. Вертикальная ее проекция построится при помощи точки D, D' . На фиг. б в вертикальной плоскости выполнено разложение силы P на направления 1 и $O'D'$, и получена вертикальная проекция $R_{2,3}$ равнодействующей усилий 2 и 3. Разлагая ее на направления 2 и 3, получаем вертикальные проекции усилий S_2 и S_3 . В горизонтальной плоскости проекции усилия S_1 , S_2 и S_3 должны составлять замкнутый треугольник, причем усилие S_1 должно по величине равняться горизонтальной проекции равно-



фиг. б



Черт. 40'.

действующей R_{23} . На основании этих соображений построен треугольник abc . Таким образом находятся все проекции искомым усилий S_1 , S_2 и S_3 .

Чтобы получить усилие S_1 способом моментов, составим момент всех приложенных в узле O сил относительно оси BC , пересекающей направления 2 и 3. При составлении этого момента выгодно разложить усилие S_1 на две составляющие: параллельную оси BC и перпендикулярную ей. Только последняя составляющая, равная $S_1 \sin \beta$, войдет в уравнение моментов, которое получит такой вид:

$$P \cdot f + S_1 \sin \beta \cdot h = 0.$$

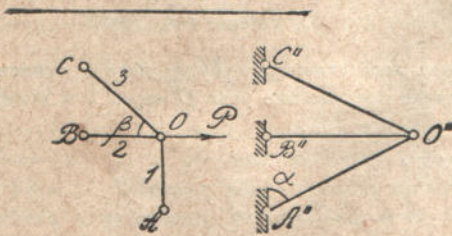
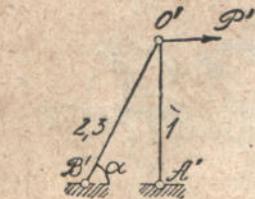
196. Определить усилия S_1 , S_2 и S_3 , возникающие в стержнях 1, 2 и 3 под действием горизонтальной силы P (черт. 401).

Решим задачу способом проекций. Сначала разложим горизонтальную силу на составляющие: N , направленную вертикально, и Q , направленную по стержню 2 (черт. 402, фиг. а). Для этих составляющих получаем значения:

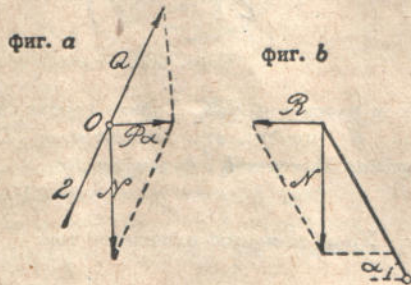
$$Q = \frac{P}{\cos \alpha}; \quad N = P \operatorname{tg} \alpha.$$

Вертикальную силу N , в свою очередь, разложим на направление стержня 1 и горизонтальное направление. Соответственно этому получим (фиг. б):

$$S_1 = -\frac{N}{\sin \alpha} = -\frac{P}{\cos \alpha}; \quad R = N \operatorname{ctg} \alpha = P.$$



Черт. 401.



Черт. 402.

Обращаясь теперь к стержням 2 и 3, заключаем, что в стержне 3 выводится сжимающее усилие составляющей R , а в стержне 2 выводится растяжение как силой R , так и ранее найденной силой Q . На основании этого находим:

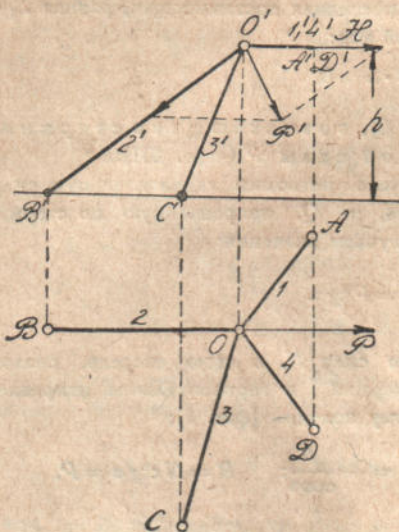
$$S_2 = Q + R \operatorname{ctg} \beta = \frac{N}{\cos \alpha} + P \operatorname{ctg} \beta; \quad S_3 = -\frac{P}{\sin \beta}.$$

197. Найти усилие S_1 , вызываемое в стержне 1 силой P (черт. 403).

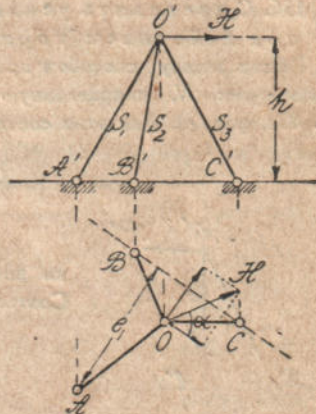
Хотя в узле O сходятся четыре стержня, но три из них лежат в одной плоскости. И потому в четвертом стержне OA , отдельно направленном, усилие может быть найдено. Сначала разлагаем силу P на направление стержня OB и горизонтальное направление H . Далее составляющую H разложим на направления 1 и 4. После такого разложения все усилия, приложенные к O , за исключением составляющей, направленной по OA , расположатся в одной плоскости BOD . Следовательно, составляющая, направленная по стержню OA , и даст нам усилие в этом стержне.

198. Определить способом моментов усилие S_1 , вызываемое в стержне OA горизонтальной силой H (черт. 404).

За ось моментов примем линию BC . Горизонтальную силу H разложим на две составляющие: одну, параллельную оси BC , и другую, ей перпендикулярную. Только последняя составляющая, равная $H \sin \alpha$, войдет в у-рие моментов. Усилие S_1 в точке A разложим на вертикальную составляющую V_1 и горизонтальную составляющую, лежа-



Черт. 403.



Черт. 404.

щую в плоскости ABC . Только первая из этих составляющих будет давать относительно BC момент, отличный от нуля. Обозначая возвышение узла O через h и длину стержня OA через l_1 , будем иметь:

$$V_1 = S_1 \cdot \frac{h}{l_1}.$$

У-рие моментов напишется так:

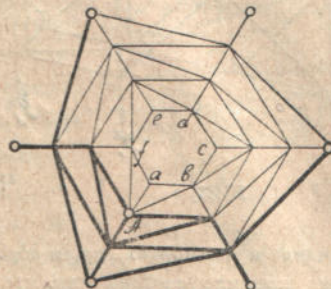
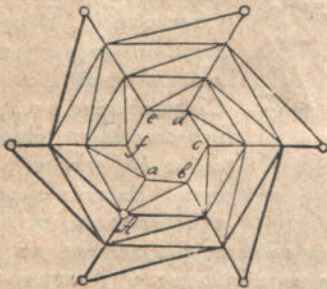
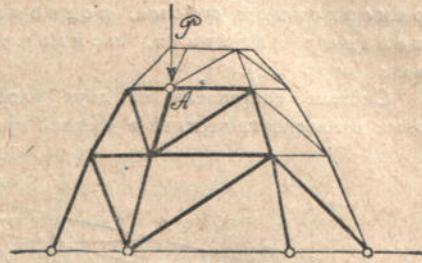
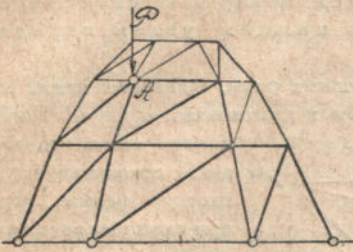
$$S_1 \frac{h}{l_1} \cdot e_1 - H \sin \alpha \cdot h = 0.$$

199. Указать для системы, представленной на чертеже 405, те стержни, которые не работают при действии вертикальной нагрузки в узле A .

Начнем рассмотрение системы с узлов a, b, c, \dots верхнего кольца. Все эти ненагруженные узлы имеют по четыре стержня, причем три из них лежат в одной плоскости, следовательно, в четвертом стержне, отдельно направленном, усилие должно равняться нулю. Таким образом мы доказываем, что все стержни верхнего кольца не работают. Устранив эти стержни, находим, что в каждом из узлов верхнего кольца остается лишь по два стержня, и, так как в этих узлах внешних сил нет, то во всех этих стержнях усилия равны нулю. Таким образом, все стержни верхнего яруса купола не работают, и мы можем устранить их из системы. После этого обращаемся к стержням второго яруса и тем же приемом показываем, что лишь в стержнях, отмеченных на чертеже жирными линиями, будут действовать усилия, отличные от нуля. Подобные же рассуждения можно применить и к стержням нижнего яруса купола.

Если в системе диагонали расположены так, как это показано на чертеже 406, то для выяснения стержней с нулевыми усилиями обращаемся к узлам a, c и e верхнего

кольца. Здесь имеется в каждом узле по три стержня, не лежащих в одной плоскости, и, так как внешней нагрузки нет, то усилия в этих стержнях равны нулю. Устраняя неработающие стержни из системы, мы находим, что и в остальных узлах верхнего кольца остается лишь по три стержня, тоже не лежащих в одной плоскости, которые при



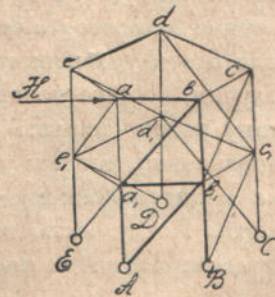
Черт. 405.

Черт. 406.

отсутствии внешних сил работать не будут. Следовательно, и при новом расположении диагоналей все стержни верхнего яруса не работают, если имеется нагрузка лишь в узле A . Устранив неработающие стержни, мы можем перейти к следующим ярусам купола и установить, что отличными от нуля будут усилия в стержнях, отмеченных на чертеже жирными линиями.

200. Отметим стержни с нулевыми усилиями в системе, представленной на чертеже 407. На систему действует лишь одна горизонтальная сила H .

В узлах b, c, d и e сходится по четыре стержня, из которых три лежат в одной плоскости, а четвертый отдельно направлен. Так как внешних сил в этих узлах нет то усилия в отдельно направленных стержнях должны равняться нулю, и мы заключаем, что стержни bc, cd, de и ae не работают при действии силы H . Отбросив эти стержни, мы видим, что в узлах c, d, e осталось лишь по два стержня, и так как внешних сил к этим узлам не приложено, то усилия в оставшихся стержнях должны равняться нулю. Нулю будет равняться и усилие ae , так как все остальные усилия в узле a и внешняя сила H лежат в одной плоскости. Таким образом, в верхнем ярусе системы будут работать лишь стержни, лежащие в плоскости передней грани, взятой нами

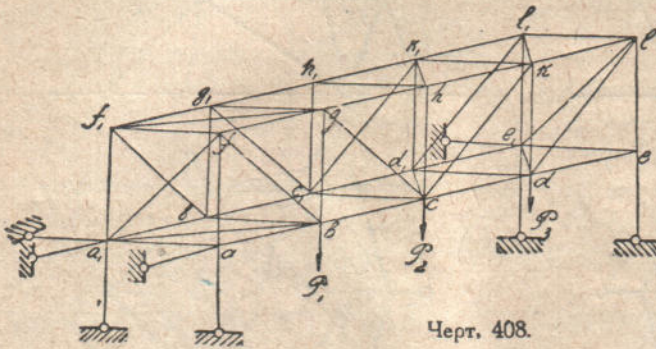


Черт. 407.

пятигранной призмы ¹⁾. Обращаясь теперь к стержням нижнего яруса, легко покажем, что и здесь отличными от нуля будут лишь усилия в стержнях передней грани, отмеченных на чертеже жирными линиями.

201. Указать стержни с нулевыми усилиями в мостовой пространственной ферме, подверженной действию системы вертикальных нагрузок, приложенных к нижним узлам передней грани (черт. 403).

Система составлена из двух плоских раскосных ферм, связанных между собой связями в плоскости верхней и нижней грани призмы и диагоналями a_1f и e_1l . Покажем



Черт. 408.

прежде всего, что в связях, соединяющих две плоские фермы, усилия, при заданных внешних нагрузках, будут равны нулю. Начнем с рассмотрения узлов c_1 и h_1 . В них все стержни, кроме одного, лежат в одной плоскости. Следовательно, в отдельно направленных стержнях cc_1 и hh_1 усилия равны нулю. Из тех же соображений находим, что равны

нулю усилия в распорках gg_1 и bb_1 . Устраняя эти стержни с нулевыми усилиями и повторяя прежние соображения, мы легко докажем равенство нулю усилий во всех распорках и диагоналях верхней и нижней грани призмы, а также в диагоналях a_1f и e_1l .

После этого система распадается на две плоские фермы, и, так как внешние силы расположены в плоскости передней грани, то только стержни передней плоской фермы и будут работать.

§ 54. Разложение силы на шесть направлений.

Когда приходится решать задачу о равновесии сил, любым образом расположенных в пространстве, в нашем распоряжении имеется шесть уравнений статики. Сумма проекций всех взаимно уравновешивающихся сил на каждую из трех координатных осей должна равняться нулю, и сумма моментов сил относительно этих осей также равняется нулю. Если в эти уравнения будут входить шесть неизвестных, то мы для них получим, вообще говоря, вполне определенные решения. Соответственно этому можно сделать заключение, что разложение заданной силы на направления, любым образом расположенные в пространстве приводят нас к определенному решению, если число этих направлений равно шести. Когда число направлений больше шести, задача становится неопределенной. При числе направлений меньшем шести уравновешивание

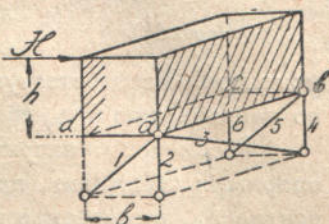
¹⁾ При выбранном направлении силы H стержень aa_1 также не работает.

заданной силы будет возможным при соблюдении некоторых дополнительных условий.

Задача о разложении силы на шесть заданных направлений, любым образом расположенных в пространстве, играет при расчете пространственных систем такую же важную роль, как вопрос о разложении на три направления при расчете плоских ферм.

Для решения этой задачи обычно пользуются способом моментов, аналогичным приему Риттера, который мы применяли при расчете плоских ферм. Для упрощения решения выгодно принимать за оси моментов линии, пересекающие возможно большее число заданных направлений. Тогда в соответствующие уравнения равновесия будут входить лишь усилия, направления которых не пересекаются с выбранной осью.

В самом общем случае мы всегда можем найти для каждого из четырех направлений по две линии, которые все эти направления пересекают ¹⁾. Выбирая эти линии за оси моментов, мы будем получать уравнения равновесия, каждое из которых включает лишь две неизвестных. Во многих частных случаях удастся достигнуть дальнейшего упрощения задачи, выбирая за оси моментов линии, пересекающие пять из шести заданных направлений. Соответствующее уравнение в таком случае будет содержать лишь одну неизвестную величину. Подобный случай мы будем, например, иметь, если три из заданных направлений пересекаются в одной точке. Через эту точку всегда можно провести прямую, пересекающую еще два из шести заданных направлений. Если эту прямую принять за ось моментов, то сейчас же получаем уравнение с одним неизвестным усилием.



Черт. 409.

Возьмем, например, представленный на чертеже 409 случай прикрепления сооружения к фундаменту при помощи шести опорных стержней. Чтобы получить усилие S_6 , вызываемое в стержне 6 силой H , нужно взять за ось моментов линию ab , пересекающую пять стержней. Соответствующее уравнение равновесия напишется так:

$$H \cdot h - S_6 \cdot b = 0.$$

Подобное же упрощение решения задачи мы будем иметь и в том случае, если три из заданных шести направлений лежат в одной плоскости. В самом деле, пусть направления 1, 2 и 3 лежат в одной плоскости. Найдем точки пересечения этой плоскости с направлениями 4 и 5. Ясно, что линия, соединяющая эти точки, пересечет все пять направлений и, если ее принять за ось моментов, то в соответствующую

¹⁾ Доказательство этого см. Föppl, Die Graphische Statik, 2 изд., стр. 172.

щее уравнение равновесия войдет лишь усилие, относящееся к направлению 6.

Возьмем, например, случай, представленный на чертеже 410. Чтобы определить усилие, вызываемое в стержне 6 силой P , мы воспользуемся тем обстоятельством, что стержни 1, 2 и 3 лежат в одной плоскости, и выберем за ось моментов линию ab , соединяющую точки пересечения этой плоскости со стержнями 4 и 5. Соответствующее уравнение равновесия будет заключать лишь одну неизвестную — усилие в стержне 6.

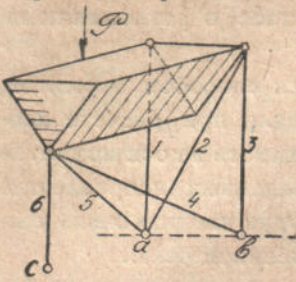
В тех случаях, когда четыре из шести направлений попарно расположены в двух плоскостях, линия пересечения которых параллельна пятому направлению, мы выбираем эту линию за ось моментов. В соответствующее уравнение равновесия войдет лишь усилие по направлению 6.

Рассмотрим, например, случай прикрепления сооружения шестью опорными стержнями, представленный на чертеже 411. Чтобы получить усилие S_6 , вызываемое в стержне 6 горизонтальной силой H , мы примем за ось моментов линию bb_1 , по которой пересекаются плоскости стержней 1, 2, 3 и 4. Эта линия в нашем случае вертикальна и параллельна стержню 5. При составлении моментов относительно этой линии придется считаться только с силой H и с горизонтальной составляющей усилия S_6 . Соответствующее уравнение равновесия напишется так:

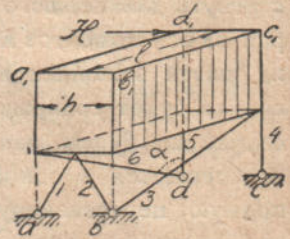
$$H \cdot l + S_6 \sin \alpha \cdot h = 0.$$

В тех случаях, когда плоскости, в которых расположены пять из шести опорных стержней параллельны, мы можем воспользоваться способом проекций для определения усилия в шестом стержне. Предположим, что сооружение (черт. 412) прикреплено к фундаменту шестью стержнями. Три из них, стержни 1, 2 и 3, лежат в плоскости bc_1c_1 , а два стержня, 4 и 5 — в параллельной ей плоскости ada_1d_1 . Чтобы найти усилие, вызываемое в стержне 6 горизонтальной силой H , направленной по a_1b_1 , проектируем все приложенные к сооружению усилия на направление ab . Соответствующее уравнение равновесия будет заключать лишь одну неизвестную S_6 и напишется так:

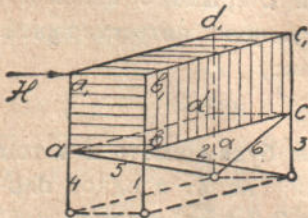
$$H - S_6 \sin \alpha = 0.$$



Черт. 410.



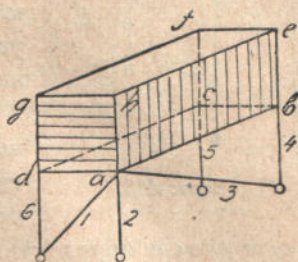
Черт. 411.



Черт. 412.

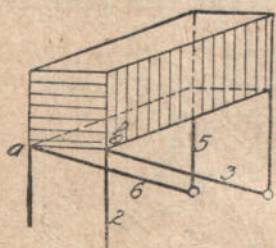
Обратимся теперь к тем исключительным случаям, когда при разложении силы на шесть направлений соответствующие шесть уравнений равновесия не дают для неизвестных определенных решений. Этот результат будет получаться всякий раз, когда определитель уравнений равновесия обращается в нуль. Ему соответствует ¹⁾ обыкновенно то расположение направлений, при котором можно найти прямую, пересекающую все шесть направлений. Такого расположения стержней, очевидно, приходится избегать на практике, и здесь мы приводим несколько простых признаков, когда можно сразу сказать, что перед нами имеется исключительный случай.

Если шесть направлений расположены так, что пересекаются по три в двух точках, то мы будем иметь исключительный случай, потому что линия, проходящая через эти две точки, будет пересекать все шесть направлений, и момент относительно этой линии соответствующих усилий будет равен нулю. Равновесие возможно лишь в том случае, если заданная сила пересекает ту же линию.



Черт. 413.

Расположение стержней, представленное на чертеже 413, относится к этому случаю. Стержни 1, 2 и 3 пересекаются в одной точке *a*, остальные три стержня параллельны между собой. Линия *ah*, параллельная стержням 4, 5 и 6, будет играть роль оси, пересекающей все шесть направлений, при чем три из них в бесконечно удаленной точке.



Черт. 414.

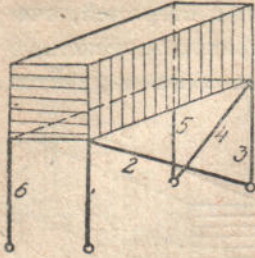
Если больше трех направлений пересекаются в одной точке, мы также будем иметь исключительный случай, потому что через эту точку пересечения можно будет провести линию пересекающую остальные направления. К этому случаю относится то расположение направлений, когда более трех из них параллельны друг другу. Например, расположение опорных стержней, принятое на чертеже 414, представляет собой исключительный случай. Проекции усилий во всех опорных стержнях на направление *ab* равны нулю, и равновесие возможно лишь в том случае, если и внешние силы дают на ту же ось проекцию нуль.

Мы получим также исключительный случай, если больше трех направлений лежит в одной плоскости. Положим, например, что в одной

¹⁾ Общее условие, определяющее исключительный случай, высказано Henneberg'ом, см. Graphische Statik, стр. 635, 429. Случай этот соответствует случаю пересечения трех направлений в одной точке при решении задачи о разложении силы в плоскости.

плоскости лежат направления 1, 2, 3 и 4. Найдем точки пересечения этой плоскости с направлениями 5 и 6, тогда линия, соединяющая эти точки пересечения, будет пересекать все шесть направлений.

Огметим еще исключительный случай, когда пять из шести направлений располагаются в двух плоскостях, пересекающихся по линии, параллельной шестому направлению (черт. 415). Если выбрать за ось моментов направление 3, то момент усилий во всех шести брусках относительно этой оси будет равняться нулю. Равновесие будет возможно только при соблюдении дополнительных условий относительно действующих на сооружение внешних сил.



Черт. 415.

Избегая на практике перечисленных здесь частных случаев расположения стержней, мы, вообще говоря, придем к таким системам, при которых вопрос о разложении силы на шесть направлений получает вполне определенное решение¹⁾. Такой статической определенности задачи будет соответствовать также и геометрическая определенность. Выбранному расположению опорных стержней будет соответствовать жесткое соединение сооружения с фундаментом.

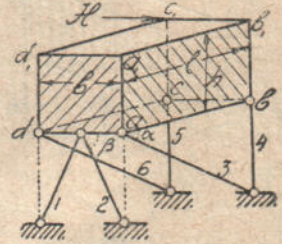
Задачи: 202. Определить усилия, вызываемые горизонтальной силой H в опорных стержнях системы, представленной на чертеже 416.

Разрезаем все шесть опорных стержней и действующие в них усилия S_1, S_2, \dots, S_6 находим из условий равновесия сооружения $abcd$. При этом проще всего воспользоваться уравнениями моментов. Выберем за ось моментов вертикальную линию aa_1 , пересекающую направления 1, 2, 3 и параллельную направлениям 4 и 5. При составлении момента всех приложенных к сооружению сил относительно этой оси придется взять лишь момент усилия S_6 и силы H . Соответствующее уравнение равновесия напишется так:

$$S_6 \cos \alpha \cdot b + H \cdot l = 0,$$

откуда

$$S_6 = - \frac{H}{\cos \alpha} \cdot \frac{l}{b}.$$



Черт. 416.

Выбирая за ось моментов линию dd_1 , мы таким же путем найдем:

$$S_3 = \frac{H}{\cos \alpha} \cdot \frac{l}{b}.$$

¹⁾ Если, конечно, нам не попадется тот редкий случай, когда направления выбраны так, что усилие, действующее по одному из направлений, может быть уравновешено пятью силами, линии действия которых совпадают с остальными пятью направлениями. См. цитированную выше книгу Henneberg'a, стр. 635.

Выберем теперь за ось моментов линию ad , пересекающую направления 1, 2, 3 и 6. Так как момент силы H относительно этой оси равняется нулю, то из соответствующего уравнения равновесия находим, что

$$S_4 = -S_5.$$

Теперь, проектируя все приложенные к сооружению силы на вертикальную ось находим:

$$S_1 = -S_2.$$

Проектируя те же силы на направление ad , получаем уравнение:

$$(S_2 - S_1) \cos \beta + H = 0.$$

откуда

$$S_2 = -S_1 = -\frac{H}{2 \cos \beta}.$$

Для получения усилия S_5 составим момент всех сил относительно оси ab . Соответствующее уравнение равновесия напишется так:

$$H \cdot h - S_5 \cdot b - S_6 \sin \alpha \cdot b = 0,$$

и мы получаем

$$S_5 = H \cdot \frac{h}{b} + H \operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{l}{b}.$$

Таким образом находятся усилия во всех опорных стержнях.

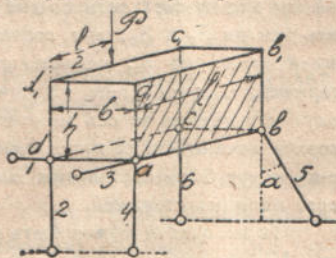
203. Определить усилия в опорных стержнях при расположении, указанном в чертеже 417.

Разрезаем все шесть опорных стержней, и соответствующие им усилия определяем из уравнений равновесия. Сопоставляя момент всех приложенных к сооружению сил относительно оси aa_1 , приходим к такому уравнению¹⁾:

$$S_5 \sin \alpha \cdot l = 0,$$

откуда

$$S_5 = 0.$$



Черт. 417.

Выбирая теперь за ось моментов линию bb_1 , пересекающую все направления, кроме направления 1, получаем:

$$S_1 \cdot l = 0,$$

откуда

$$S_1 = 0.$$

Составляя теперь момент всех сил относительно dd_1 , найдем:

$$S_3 = 0.$$

Далее, выбирая за ось моментов линию dc , найдем:

$$S_4 = 0.$$

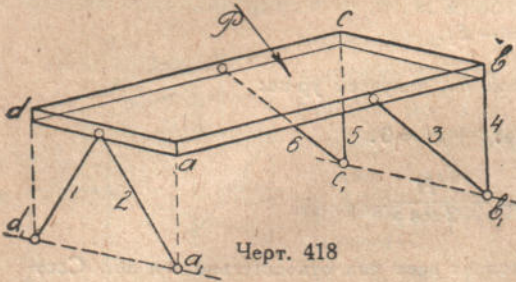
После этого легко находим, что

$$S_2 = S_6 = -\frac{P}{2}.$$

¹⁾ Стержень 5 расположен в вертикальной плоскости bc_1c_1 .

204. Прямоугольная доска $abcd$ прикреплена к фундаменту шестью стержнями. Найти усилия, вызываемые в этих стержнях силой P (черт. 418).

Разрезаем все стержни и составляем момент соответствующих им усилий и силы P относительно вертикальной оси aa_1 . Так как эта ось пересекает направления всех стержней, кроме направления b , то соответствующее уравнение равновесия будет заключать лишь одно неизвестное усилие S_6 , которое сейчас же и определяется. Подобным же образом, выбирая за ось моментов линию dd_1 , находим усилие S_3 . После этого обращаемся к определению усилий S_1 и S_2 . Сумму этих усилий найдем, составляя момент сил относительно оси c_1b_1 . Другое уравнение для определения тех же усилий получим, составляя сумму проекций всех сил на направление c_1b_1 . После этого легко находим усилия S_4 и S_5 , выбирая за оси моментов линии ab и dc .



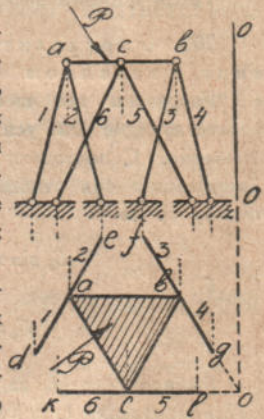
Черт. 418

Черт. 419

205. Треугольная доска abc прикреплена к земле шестью стержнями, расположенными попарно в трех вертикальных плоскостях (черт. 419). Найти усилия, вызываемые в опорных стержнях силой P .

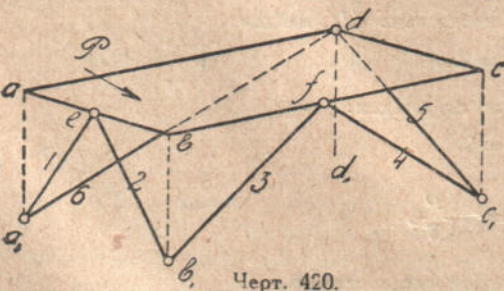
Для определения усилий в каждой паре опорных стержней мы можем составить по два ур-ия. Например, чтобы получить усилия S_1 и S_2 , мы составим одно ур-ие, выбрав за ось моментов линию bc , пересекающую оси остальных опорных стержней. Другое ур-ие, заключающее те же неизвестные, мы получим, выбирая за ось моментов линию oo пересечения плоскостей, заключающих направления 3, 4 и 5, 6. Подобные же ур-ия могут быть составлены также для усилий в двух других парах опорных стержней.

Та же задача может быть разрешена несколько иным путем. Мы можем разложить силу P и усилия в шести опорных стержнях на горизонтальные и вертикальные составляющие. Горизонтальные составляющие каждой пары стержней расположатся по одной прямой, и если мы горизонтальную проекцию силы P разложим в горизонтальной плоскости на направления de , fg и kl , то получим суммы горизонтальных проекций усилий в каждой паре опорных стержней. Для получения сумм вертикальных проекций тех же усилий нужно вертикальную проекцию силы P разложить на три вертикальные направления, проходящие через a , b и c . Имея горизонтальную и вертикальную проекции усилий в каждой паре опорных стержней, сейчас же находим и самые усилия.



Черт. 419.

Черт. 420



Черт. 420.

206. Доска $abcd$ прикреплена к земле шестью

стержнями (черт. 420). Определить усилия, вызываемые в этих стержнях силой P .

Здесь не удастся провести ось так, чтобы она пересекала направление пяти опорных стержней, и нам для определения усилий в каждой паре стержней придется составить по два ур-ия, каждое из которых будет заключать по две неизвестных. Например, чтобы определить усилия 5 и 6, выберем за ось моментов линию bb_1 , по которой пересекаются вертикальные плоскости, заключающие направления 1, 2 и 3, 4. В соответствующее ур-ие равновесия войдут лишь усилия S_5 и S_6 , не пересекающие направление bb_1 . Другое ур-ие, заключающее те же неизвестные, мы получим, выбирая за ось моментов линию ef .

§ 55. Образование геометрически неизменяемых статически определимых пространственных систем.

При исследовании пространственных систем мы сохраним в силе те предположения, которые были приняты нами в случае плоских ферм. Мы будем предполагать, что стержни пространственных систем соединены между собой в узлах идеальными шаровыми шарнирами, допускающими свободное вращение каждого из стержней около шарнира в любом направлении. Изменения длин стержней под влиянием возникающих в них усилий будем считать весьма малыми и в основание расчетов будем класть то относительное расположение стержней и узлов, которое соответствует ненапряженному состоянию системы.

Внешние силы будем предполагать сосредоточенными в узлах системы. В таком случае отдельные стержни будут работать лишь на растяжение или сжатие. Изгиб стержней совершенно исключается.

Выясним прежде всего, какое число стержней является необходимым, чтобы связать заданное число точек, любым образом расположенных в пространстве, в одну геометрически неизменяемую систему. Для решения этого вопроса будем исходить из определенного способа образования пространственной системы. Мы сначала при помощи трех стержней соединим в неизменяемую систему три узла. При неизменной длине стержней относительное расположение вершин получаемого таким образом треугольника явится вполне определенным. К полученному жесткому треугольнику присоединяем четвертый узел при помощи трех стержней. Если эти стержни не расположены в одной плоскости, то получаемое таким образом присоединение нового узла будет геометрически неизменяемым. Присоединяя к этой системе пятый, шестой и т. д. узлы, каждый — тремя стержнями, не лежащими в одной плоскости, мы можем получить геометрически неизменяемую пространственную систему с любым числом узлов. Для этого способа образования легко установить связь между числом узлов и числом стержней, необходимых для обеспечения геометрической неизменяемости. Пусть общее число узлов равно n . Для соединения в неизменяемую систему первых трех узлов понадобилось

3 стержня. Для присоединения каждого из остальных $n - 3$ узлов нужно 3 стержня. Следовательно, общее число стержней будет равняться

$$3 + 3(n - 3) = 3n - 6 \quad (a).$$

Системы, образованные намеченным здесь способом, мы будем называть простейшими системами.

Эти простейшие системы заключают в себе лишь стержни, необходимые для обеспечения геометрической неизменяемости. Если устранить один из стержней, система становится подвижной, она обращается в механизм с одной степенью свободы. При этом относительное расположение узлов получает возможность изменяться. Мы можем устранить эту подвижность и получить новую геометрически неизменяемую систему, если вместо отброшенного стержня вставим новый стержень между двумя такими узлами, расстояние между которыми получило возможность изменяться.

Применяя этот способ замены стержней, возможно получить самые разнообразные пространственные системы, общее число стержней которых будет удовлетворять условию (a). Что касается геометрической неизменяемости таких систем, то она будет обеспечена, если только перед нами не будет исключительный случай, когда заменяющий стержень вставлен между двумя узлами, расстояние между которыми находится в состоянии maximum'a или minimum'a. В этом последнем случае малым передвижениям подвижной системы будет соответствовать изменение расстояния между соединяемыми заменяющим стержнем узлами на малую величину второго порядка малости и, следовательно, тем малым изменениям длины заменяющего стержня, которые получаются при упругих деформациях, будут соответствовать значительные перемещения узлов системы. Такие системы, как геометрически изменяемые, не должны быть применимы на практике.

Рассмотрим здесь еще один способ образования пространственных систем, которым иногда пользуются на практике. Мы можем получить новую геометрически неизменяемую систему путем соединения между собой двух пространственных систем простейшего типа.

Легко выяснить то число стержней, которое необходимо для жесткого соединения между собой этих двух систем. Мы будем держать одну из этих систем неподвижной, тогда для жесткого присоединения второй системы необходимо эту последнюю лишить шести степеней свободы, чего можно достигнуть введением шести соединительных стержней.

К тому же числу соединительных стержней мы можем прийти и иным путем. Всякая сила, прикладываемая к одной из соединяемых жестких систем, должна уравниваться усилиями в соединительных стержнях. Усилия эти должны удовлетворять шести уравнениям статики

и могут быть однозначно определены при всяком расположении внешних сил, если число соединительных стержней равно шести. Пользуясь шестью соединительными стержнями, мы, конечно, должны избегать тех исключительных случаев, которые были отмечены в предыдущем параграфе. Тогда мы получим жесткое соединение двух геометрически неизменяемых систем. Если одна из них имела n , а другая m узлов, то общему числу $n + m$ узлов новой фермы будет соответствовать такое число стержней:

$$3n - 6 + 3m - 6 + 6 = 3(n + m) - 6,$$

т.е. соотношение между числом узлов и стержней новой фермы удовлетворяют условию (а):

Обратимся теперь к рассмотрению сетчатых систем, которыми пользуются при образовании различного рода куполов. Сетчатыми системами мы называем такие пространственные системы, узлы и ребра которых расположены по замкнутой поверхности, ограничивающей односвязное пространство ¹⁾. Если поверхность эта составлена из треугольников, расположенных так, что каждая из вершин является вершиной для всех ее окружающих треугольников, то, принимая ребра многоугольника за стержни пространственной системы и углы — за узлы системы, найдем, что между числом стержней и узлов имеется зависимость, определяемая формулой (а). Т.е. число стержней как раз соответствует тому, которое является необходимым для обеспечения геометрической неизменяемости системы. Для доказательства этого пользуемся теоремой Эйлера, устанавливающей для замкнутого многогранника, ограничивающего односвязное пространство, такую зависимость между числом ребер m , числом узлов n и числом граней f :

$$m = n + f - 2 \quad (b).$$

Зависимость эту можем установить на основании таких соображений. Берем сначала какую-либо грань многогранника. Этим самым мы берем определенное число ребер и такое же число узлов нашего многогранника. Присоединяя к выбранной грани многогранника новую грань, мы тем самым присоединяем новые ребра и новые узлы. Причем число новых ребер, очевидно, всегда будет на единицу больше, чем число новых узлов, так как каждое ребро заключается между двумя узлами. Это заключение можно сделать по отношению к каждой новой грани. Следовательно, число присоединяемых ребер будет равняться числу присоединяемых узлов, увеличенному на число присоединенных граней. Это сохраняется в силе пока мы не дойдем до последней грани, замыкающей

¹⁾ Сюда не будет подходить, например, поверхность, ограничивающая замкнутое кольцевое пространство.

многогранник. Присоединение этой грани не прибавляет к нашему многограннику ни новых узлов, ни новых ребер. Подсчитывая теперь все ребра, узлы и грани, мы приходим к формуле (b).

Применим теперь эту формулу к тому случаю, когда все грани многогранника являются треугольниками. Каждая грань ограничена тремя ребрами, и, так как одно и то же ребро принадлежит двум граням, то между числом ребер и числом граней получается такая зависимость:

$$m = \frac{3f}{2} \quad \text{или} \quad f = \frac{2m}{3}$$

Вставляя это в формулу (b), получаем:

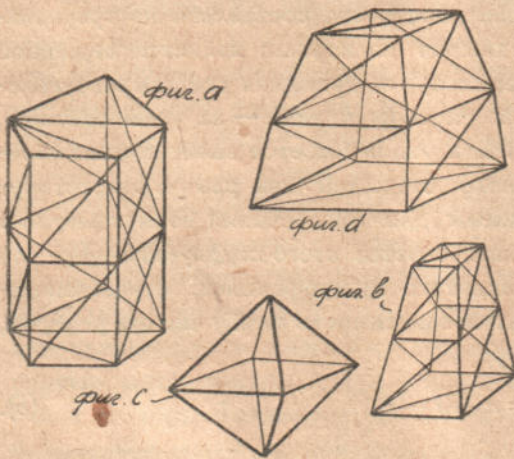
$$m = 3n - 6,$$

т. е. приходим к зависимости, устанавливаемой формулой (a). Число стержней в сетчатой системе с треугольными гранями как раз равняется

тому, какое является необходимым для обеспечения геометрической неизменяемости. Только эти системы мы и будем в дальнейшем называть сетчатыми.

Различные виды сетчатых систем представлены на чертеже 421. Непосредственным счетом мы легко убедимся, что во всех представленных на чертеже случаях между числом стержней и числом узлов имеется зависимость, определяемая формулой (a).

Если мы обратимся к системе, представленной на чертеже

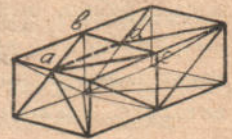


Черт. 421.

422, то здесь, хотя все грани и разбиты на треугольники, но точка *d* не является общей вершиной для всех окружающих ее треугольников.

Непосредственным счетом убеждаемся, что число стержней на единицу меньше того числа, которое является необходимым для обеспечения геометрической неизменяемости. Если бы мы вставили еще один стержень *ad*, намеченный на чертеже пунктиром, то общее число стержней было бы достаточным для обеспечения геометрической неизменяемости.

Но все же система при выбранном расположении стержней была бы не жесткой. Все стержни, сходящиеся в узле *d*, расположены в одной



Черт. 422.

плоскости. При действии силы, перпендикулярной этой плоскости, узел d будет совершать значительные перемещения.

Мы показали, что число стержней, необходимое для обеспечения геометрической неизменяемости, определяется формулой (а). При большем числе стержней мы будем иметь систему с лишними брусками. В случае меньшего числа стержней система будет подвижной, и равновесие может быть обеспечено лишь при соблюдении некоторых дополнительных условий относительно действующих сил.

Покажем теперь, что системы, удовлетворяющие условию (а) будут не только геометрически неизменяемыми, но также и статически определенными. В самом деле, при определении усилий в стержнях мы можем поочередно рассмотреть условия равновесия всех узлов системы. Для каждого узла составим три ур-ия равновесия. Таким образом, для пространственной фермы, имеющей n узлов, мы получим систему $3n$ линейных ур-ий. В эти ур-ия войдут как внешние силы, так и неизвестные усилия в стержнях. Внешние силы, действующие на систему, не могут быть выбраны произвольно, они должны удовлетворять шести условиям равновесия всей системы, рассматриваемой как твердое тело. В таком случае, для определения усилий в стержнях остается в нашем распоряжении $3n - 6$ ур-ий, из которых и могут быть найдены $3n - 6$ неизвестных усилий в стержнях.

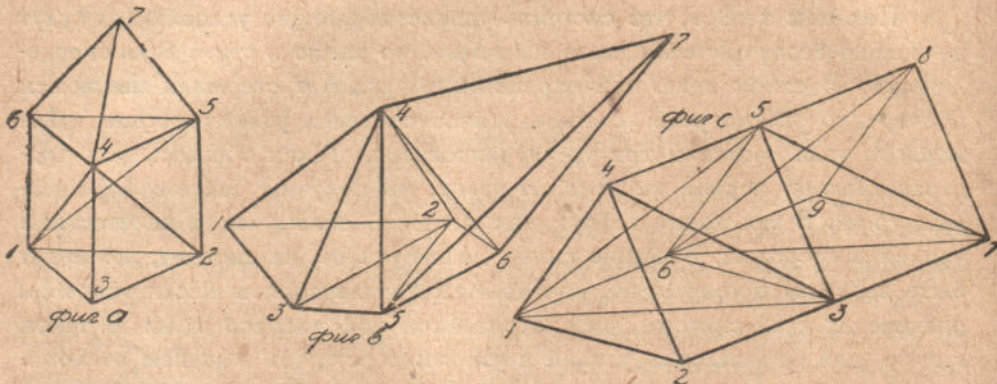
Если число стержней больше чем $3n - 6$, число неизвестных усилий будет больше числа ур-ий — система статически неопределима. Когда число стержней меньше $3n - 6$, мы для определения соответствующих им усилий используем не все ур-ия статики. Вставляя найденные усилия в неиспользованные ур-ия, мы получим дополнительные условия, которым должны удовлетворять внешние силы, чтобы была обеспечена возможность равновесия системы.

Когда число стержней системы удовлетворяет условию (а), но ур-ия равновесия, из которых определяются неизвестные усилия, таковы, что их определитель обращается в нуль, мы получим для неизвестных усилий неопределенные или бесконечные значения. Это покажет нам, что исследуемая система представляет собой один из тех исключительных случаев, на которые мы указывали выше при рассмотрении способов образования пространственных систем.

Вычисление определителя в случае большого числа ур-ий представляет большие затруднения, поэтому на практике для решения вопроса, не представляет ли заданная система исключительного случая, идут иным путем, именно: определяют усилия во всех стержнях системы для одного какого-либо случая нагрузки. Если удастся доказать, что все эти усилия имеют вполне определенные значения, то это будет показывать, что определитель соответствующих ур-ий в нуль не обращается, и наша

система является геометрически неизменяемой. Проще всего предположить, что к узлам системы не приложено никаких сил. Если для этой нулевой нагрузки можно доказать, что усилия во всех стержнях равны нулю, то это нам покажет, что рассматриваемая система геометрически неизменяема.

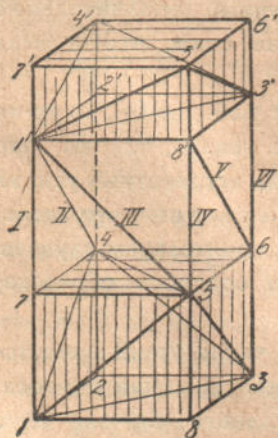
Задачи: 207. Показать, что пространственные фермы, представленные на чертеже 423, принадлежат к классу простейших систем.



Черт. 423.

Все изображенные системы мы можем образовать, исходя из основного треугольника 1 2 3 и присоединяя остальные узлы в порядке их номеров, каждый—тремя стержнями.

208. Выяснить способ образования системы, представленной на чертеже 424.



Черт. 424.

Эта пространственная система составлена из двух заштрихованных на чертеже простейших систем, соединенных между собой шестью стержнями I, II, III, IV, V и VI. Порядок образования простейших систем указан соответствующими номерами узлов.

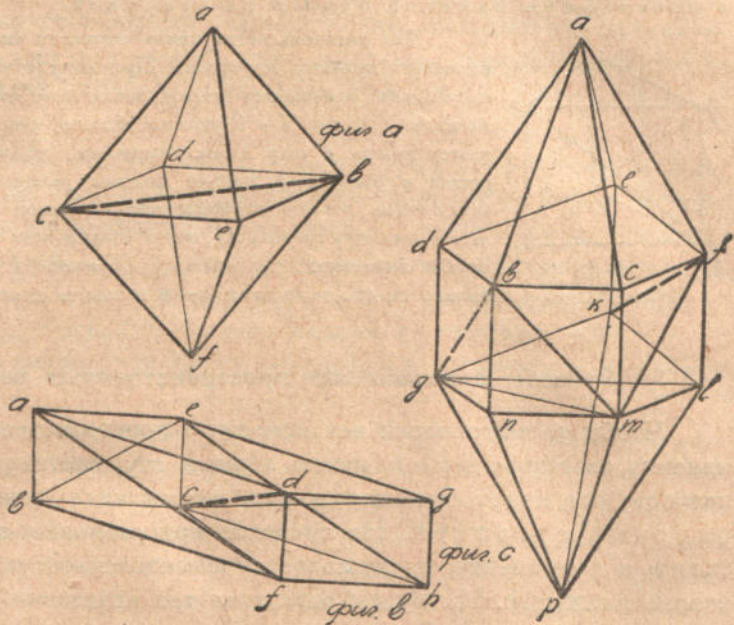
209. Пользуясь способом замены стержней, обратить представленные на чертеже 425 системы в простейшие.

Если в системе, представленной на фигуре а, выбросить стержень ab , то в узле a останется лишь три стержня. Устраняя их, приходим к системе $cdbef$, которая может быть обращена в простейшую установкой диагонали bc . Таким образом, замена стержня ab стержнем bc приводит нас к простейшей системе.

Обратимся теперь к системе, представленной на фигуре б. Устраним сначала стержень ab . После этого в узлах a и b останется по три стержня, отбрасывая которые мы придем к системе $cdefgh$, которая обращается в простейшую путем установки диагонали cd , намеченной на чертеже жирным пунктиром. Таким образом замена стержня ab стерж-

нем cd обращает заданную систему в систему простейшего типа. Того же результата можно достигнуть и иными путями. Мы можем, например, обратить заданную систему в простейшую, заменив диагональ af диагональю cd .

Чтобы обратить в простейшую систему, представленную на фигуре c , приходится произвести две замены стержней. Мы начинаем с узла a и удаляем стержни ab и ac . После этого в узле a остается лишь три стержня. Удаляя их, найдем, что в узлах d и e будет лишь по три стержня. Отбрасывая их, придем к подвижной системе, которая может быть обращена в геометрически неизменяемую систему простейшего типа путем установки диагоналей bg и fk .

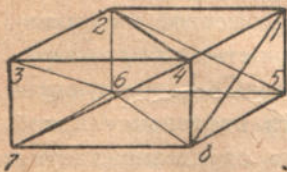


Черт. 425.

Таким образом замена стержней ab и ac стержнями bg и fk обращает заданную систему в простейшую.

210. Показать способом нулевых нагрузок, что система, представленная на чертеже 426, является геометрически неизменяемой.

Так как все грани системы разделены на треугольники, то число стержней как раз равно тому, которое необходимо для обеспечения геометрической неизменяемости.

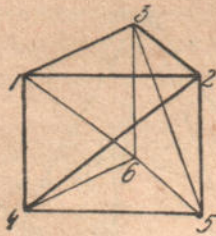


Черт. 426.

Чтобы показать, что мы здесь не имеем исключительного случая, при котором система обладает подвижностью, докажем, что при отсутствии внешних сил, усилия во всех брусках равняются нулю. Обращаясь к узлу 1 и принимая во внимание, что в нем все стержни, кроме одного, лежат в одной плоскости, заключаем, что в отдельно направленном стержне 1—2 усилие непременно равно нулю. Точно также из рассмотрения узлов 3, 5 и 7 заключаем, что равны нулю усилия в стержнях 3—4, 5—8, 6—7. Разрежем теперь нашу систему плоскостью, параллельной боковым граням 3 2 6 7 и

1 4 8 5. При этом кроме стержней 2—1 и 3—4 с нулевыми усилиями будут пересечены еще шесть стержней. Составляя момент усилий во всех перерезанных стержнях относительно оси, соединяющей узлы 5 и 7, и приравнявая этот момент нулю, найдем, что усилие в стержне 2—4 должно равняться нулю. После этого легко может быть доказано равенство нулю усилий во всех прочих стержнях системы.

211. Показать, что система, представленная на чертеже 427, геометрически неизменяема и что она может быть обращена в простейшую замечкой одной из стержней.



Черт. 427.

Для доказательства неизменяемости системы воспользуемся способом нулевых нагрузок. При отсутствии внешних сил мы из условия равновесия узла 1 заключаем, что в отдельном направленном стержне 1—2 усилие должно равняться нулю. Обращаясь теперь к узлу 2, заключаем, что во всех стержнях, сходящихся в этом узле, усилия должны равняться нулю. Такое же заключение делаем относительно стержней узла 3. После этого легко доказать равенство нулю усилий всех остальных стержней. Чтобы заданную нам систему обратить в простейшую, нужно только вместо диагонали 2—4 вставить диагональ 1—5.

§ 56. Способы прикрепления пространственных систем к земле.

Чтобы геометрически неизменяемую пространственную систему неизменно связать с землей, нужно лишить эту систему шести степеней свободы, что может быть выполнено, как мы видели, введением шести опорных стержней. На практике прикрепление пространственных систем к фундаменту осуществляется обыкновенно при помощи особых опорных подушек. Мы будем различать три категории опор: 1) неподвижную опору, 2) подвижную цилиндрическую опору и 3) подвижную шаровую опору.

Чтобы осуществить неподвижную опору, нужно себе представить закрепляемый шаровой шарнир системы вложенным в шаровую впадину неподвижной подушки. В таком случае центр закрепляемого шарнира остается совершенно неподвижным и соответствующая опорная реакция, проходящая через центр шарнира, может иметь любое направление в пространстве. Мы будем представлять такую реакцию тремя ее составляющими, для определения которых необходимо иметь три ур-ия.

Подвижную цилиндрическую опору мы осуществим, закрепив шаровой шарнир системы в подушке, расположенной на цилиндрических катках. Такая опора будет иметь возможность свободно перемещаться в направлении, перпендикулярном оси катков. Соответствующая опорная реакция будет, очевидно, лежать в плоскости, перпендикулярной к направлению скольжения опоры, и мы ее сможем определить двумя составляющими, для вычисления которых понадобятся два ур-ия.

Для осуществления подвижной шаровой опоры, нужно себе представить подушку, в которой закреплен опорный шаровой шарнир системы, расположенной на шаровых катках. В таком случае опорная подушка имеет возможность перемещаться по любому направлению в плоскости, параллельной плоскости катания шаровых катков. Опорная реакция, которая должна проходить через центр опорного шарнира системы, будет

иметь, очевидно, направление, перпендикулярное к плоскости скольжения. Для определения реакции требуется лишь одно уравнение статики.

Когда к земле прикреплена геометрически неизменяемая пространственная система, мы для определения опорных реакций будем иметь шесть уравнений статики, которые напишутся, как уравнения равновесия твердого тела.

Если опоры системы устранены так, что число неизвестных, определяющих реактивные силы равняется шести, то мы будем иметь систему статически определимую относительно опорных реакций. На основании сказанного заключаем, что, расположив геометрически неизменяемую систему на трех опорах, из которых одна опора — неподвижная, другая — подвижная цилиндрическая и третья — подвижная шаровая, мы получим пространственную ферму, статически определимую относительно опорных реакций.

Только что рассмотренные три способа закрепления мы можем осуществить также при помощи опорных стержней. Чтобы получить неподвижное закрепление какого-либо шарнира системы, нужно соединить этот шарнир с землей тремя опорными стержнями, не лежащими в одной плоскости. Устройство неподвижной опоры эквивалентно трем опорным стержням. Для получения закрепления, эквивалентного подвижной цилиндрической опоре, нужно соответствующий опорный шарнир прикрепить к земле двумя стержнями. Располагая стержни в плоскости, перпендикулярной к направлению скольжения соответствующей цилиндрической опоры, мы тем самым обеспечиваем закрепляемому шарниру возможность перемещений в надлежащем направлении¹⁾. Для получения закрепления, эквивалентного подвижной шаровой опоре, мы прикрепляем опорный шарнир к земле одним опорным стержнем. Направление этого стержня должно быть выбрано перпендикулярным к плоскости скольжения соответствующей шаровой опоры.

Всего для жесткого соединения геометрически неизменяемой системы с землей необходимо, как мы видели, шесть опорных стержней, которые должны исходить из узлов системы. Если все эти стержни распределены между тремя узлами, то один узел будет закреплен тремя стержнями, другой — двумя стержнями и третий — одним стержнем. Возможно, конечно, распределение опорных стержней и между большим числом узлов, но во всяком случае для получения жесткого соединения с землей необходимо избегать тех расположений стержней, на которые было указано при рассмотрении вопроса о разложении силы на шесть направлений.

1) Перемещения эти будут происходить по дуге круга, но, принимая во внимание малость этих перемещений, мы их можем принимать эквивалентными перемещениям по прямой, касательной к кругу.

При расчетах мы можем начинать с определения усилий в опорных стержнях. Произведя разрез этих стержней и пользуясь способом моментов, мы легко найдем усилия в опорных стержнях и эти усилия будем рассматривать, как внешние силы, приложенные к рассчитываемой пространственной системе.

До сих пор мы различали стержни пространственной системы и опорные стержни, при помощи которых система прикрепляется к земле. Для обеспечения геометрической неизменяемости системы с l узлами нужно иметь, как мы видели, $3l - 6$ стержней. Присоединяя сюда еще шесть необходимых опорных стержней, найдем, что для образования геометрически неизменяемой пространственной системы, неизменно связанной с землей, необходимо при l узлах иметь $3l$ стержней.

Теперь устраним различие между опорными стержнями и стержнями системы. Тогда можно будет обобщить способ замены стержней, которым мы пользовались для образования новых пространственных ферм. Устраняя какой-либо стержень системы с необходимым числом стержней, мы обращаем эту систему в подвижную. Для восстановления геометрической неизменяемости можно устранивший стержень системы заменить дополнительным опорным стержнем.

Таким путем из жесткой системы, заключающей в себе $3l - 6$ стержней и имевшей шесть опорных стержней, мы придем к новой пространственной системе, общее число стержней которой остается неизменным и равным $3l$, но число опорных стержней увеличено за счет числа стержней системы. Новая система, вообще говоря, будет геометрически неизменяемой и статически определимой, так как число ураний равновесия, которые мы можем составить, будет равняться числу неизвестных усилий в стержнях. Исключительные случаи будут получаться тогда, если мы вставим какой-либо заменяющий стержень между такими двумя точками, расстояние между которыми находится в состоянии maximum'a или minimum'a, или между точками, неизменность расстояния между которыми обеспечена другими стержнями системы.

Для распознавания исключительных случаев и здесь удобнее всего пользоваться способом нулевых нагрузок. Если можно показать, что при отсутствии внешних сил усилия во всех стержнях равны нулю, то это будет служить признаком того, что наша система геометрически неизменяема.

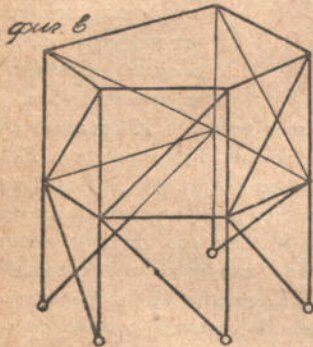
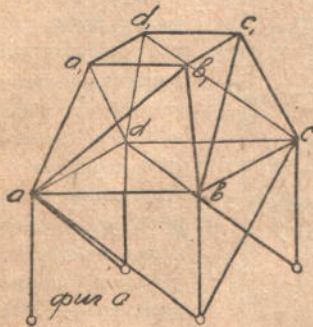
Задачи: 212. Показать, что при закреплении жесткой системы шестью опорными стержнями, из которых четыре параллельны между собой, мы всегда будем получать исключительный случай.

Это расположение опорных стержней будет соответствовать тому частному случаю, когда направления четырех опорных стержней пересекаются в одной точке. При этом,

как мы видели (§ 54), всегда возможно провести ось, пересекающую направления всех шести опорных стержней. Например, в случае, представленном на чертеже 428, такой осью будет линия bb_1 .

213. Показать способ образования систем, представленных на чертеже 429.

Система, представленная на фигуре *a*, получена из сетчатой системы заменой диагоналей верхнего и нижнего оснований двумя дополнительными опорными стержнями. Поэтому мы сразу можем сказать, что общее число



Черт. 429.

стержней равняется тому, которое является необходимым для обеспечения геометрической неизменяемости системы. Чтобы показать, что здесь мы не имеем исключительного случая, воспользуемся способом нулевых нагрузок.

Обращаемся сначала к верхним узлам системы. В каждом из этих узлов имеем по три стержня, лежащих в одной плоскости, и по одному отдельно направленному стержню. При отсутствии внешних сил, усилия в отдельно направленных стержнях будут равны нулю. Отбрасывая эти стержни, найдем, что в каждом из верхних узлов a_1 , b_1 , c_1 и d_1 останется лишь по два стержня, усилия в которых, очевидно, будут равняться нулю.

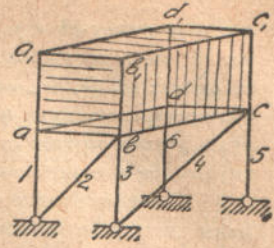
Теперь обратимся к нижним узлам a , b , c и d . После отбрасывания стержней с нулевыми усилиями, найдем, что в узле b сходятся лишь три стержня, не лежащих в одной плоскости. Так как внешняя сила в этом узле не приложена, то усилия во всех трех стержнях должны равняться нулю. Подобное же заключение мы теперь можем сделать относительно стержней узла c , далее узла d и, наконец, узла a .

Следовательно, при нулевых нагрузках усилия во всех брусках системы равны нулю и мы можем утверждать, что рассматриваемая система геометрически неизменяема.

Система, представленная на фигуре *b*, получена из сетчатой системы путем замены четырех диагоналей верхнего и нижнего оснований четырьмя дополнительными опорными стержнями. На основании этого заключаем, что заданная система имеет необходимое число стержней. Пользуясь таким же приемом, как и в предыдущем случае, мы легко покажем, что при нулевых нагрузках усилия во всех стержнях равны нулю. Следовательно, заданная система геометрически неизменяема.

214. Показать, что пространственные мостовые фермы, представленные на чертеже 430, геометрически неизменяемы и статически определимы.

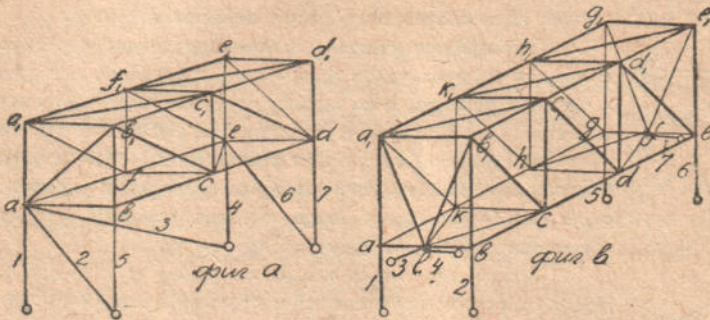
Мостовая ферма, представленная на фиг. *a*, получена из сетчатой системы заменой диагонали ac дополнительным опорным стержнем. Следовательно, наша система включает в себе лишь необходимое число стержней. Для выяснения геометрической неизменяемости системы, воспользуемся способом нулевых нагрузок. Обращаясь к узлам b и f , где все стержни, кроме одного, лежат в одной плоскости, заключаем,



Черт. 428.

что в стержнях ab и fc усилия равны нулю. После этого на основании тех же соображений последовательно может быть доказано равенство нулю усилий в следующих стержнях: ce , de , de_1 , e_1d_1 , d_1f_1 , f_1c_1 , c_1a_1 , a_1b_1 , b_1a . Отбрасывая все эти стержни, найдем, что пространственная ферма распадается на две плоские раскосные фермы. Равенство нулю усилий во всех стержнях этих ферм также легко может быть доказано. Этим доказывается и геометрическая неизменяемость заданной нам фермы.

Система, представленная на фигуре b , получена из сетчатой системы путем замены диагонали kd дополнительным опорным стержнем. Следовательно, общее число стержней удовлетворяет условию геометрической неизменяемости и статической определенности. Чтобы показать, что мы здесь не имеем дела с исключительным случаем, воспользуемся способом нулевых нагрузок. Покажем прежде всего, что при отсутствии внешних сил усилия в горизонтальных опорных стержнях 3, 4 и 7 равны нулю. Для этого разрезаем все опорные стержни и составляем момент всех соответствующих



Черт. 430.

усилий относительно вертикальной оси, проходящей через узел l . Из соответствующего уравнения равновесия найдем, что усилие в стержне 7 равно нулю. Проектируя теперь усилия в опорных стержнях на направления ab и ag , заключаем, что в стержнях 3 и 4

усилия также равны нулю. Обращаемся теперь к стержням kc и hd . Из условия их равновесия следует, что должны быть равны между собой усилия в полураскосах kl и lc , а также в полураскосах hf и fd . Из условий же равновесия узлов l и f следует, что эти усилия должны равняться нулю. После этого следует равенство нулю усилий в распорках kc и hd . Обращаясь теперь к узлам a , b , g и e , где все стержни, кроме одного, лежат в одной плоскости, заключаем, что в отдельно направленных стержнях al , lb , gf и fe усилия должны равняться нулю. После этого заключаем о равенстве нулю усилий в полураскосах a_1l , lb_1 , g_1f и fe_1 . Обращаясь к верхним узлам b_1 и g_1 , заключаем, что в верхних распорках a_1b_1 и e_1g_1 усилия равны нулю. Следовательно, равны нулю усилия и в прочих стержнях верхних горизонтальных связей. Отбрасывая все стержни с нулевыми усилиями, мы разделим нашу систему на две плоские фермы. Легко показать, что в стержнях этих ферм усилия будут равны нулю. Таким образом может быть доказано равенство нулю усилий во всех стержнях заданной пространственной системы, что указывает на геометрическую неизменяемость этой системы.

215. Показать, что купола, представленные на чертежах 405 и 406, являются геометрически неизменяемыми системами.

Способом, намеченным в задачах 199 и 200, легко показать, что при нулевых нагрузках усилия во всех стержнях равны нулю. Следовательно, эти системы геометрически неизменяемы.

216. Показать геометрическую неизменяемость системы, представленной на чертеже 431.

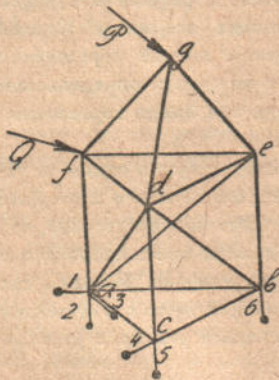
Мы пользуемся для этого способом нулевых нагрузок. В узлах b , d и f сходятся по три стержня, усилия в которых при отсутствии внешних сил будут равны нулю.

Пользуясь таким же приемом, как и в предыдущей задаче, легко покажем, что знаки усилий в стержнях ab, bc, \dots должны чередоваться. Если принять усилие стержня ab растягивающим, то в стержне bc будет сжатие, в cd — растяжение и т. д. Дойдя до последнего стержня ag , найдем в нем растягивающее усилие. Обращаясь теперь к узлу a , находим, что равновесие его возможно лишь в том случае, если растягивающие усилия в стержнях ab и ag равны нулю. В таком случае в нуль обратятся также и усилия прочих стержней, что будет указывать на геометрическую неизменяемость системы.

Сравнивая системы, представленные на чертежах 432 и 433, видим, что существенное различие между ними заключается в том, что в первом случае горизонтальные стержни образуют многоугольник с числом сторон четным, а во втором случае — нечетным. При четном числе сторон возможно подобрать усилия в стержнях так, что будет обеспечено равновесие всех узлов при отсутствии внешних сил. При нечетном числе сторон усилия во всех стержнях при отсутствии внешних сил должны равняться нулю. В первом случае имеем систему геометрически изменяемую, а во втором случае — геометрически неизменяемую.

§ 57. Расчет пространственных систем способом непосредственного разложения.

Способ определения усилий путем последовательного разложения особенно удобен в применении к расчету пространственных систем простейшего типа. В этих системах каждый новый узел присоединяется при помощи трех стержней,



Черт. 434.

поэтому последний присоединенный узел будет иметь только три стержня, и если к узлу приложена какая-либо внешняя сила, то усилия в этих трех стержнях могут быть найдены путем разложения силы на три направления, пересекающиеся с ней в одной точке. Определив эти усилия, мы отбрасываем рассмотренный узел, и действие отбрасываемых стержней заменяем соответствующими силами. После этого обращаемся к узлу, присоединенному к системе предпоследним. После отбрасывания стержней последнего узла, в предпоследнем узле останется лишь три стержня, усилия в которых

легко могут быть найдены путем разложения силы на три направления. Таким образом, рассматривая равновесие узлов в порядке, обратном порядку их присоединения при образовании рассматриваемой простейшей системы, мы для определения усилий в стержнях каждый раз должны будем решать элементарную задачу о разложении силы на три направления.

Возьмем, например, систему, представленную на чертеже 434. Определение усилий начинаем с узла g , где сходятся лишь три стержня. Разлагая силу на три соответствующие направления, найдем усилия в стержнях fg, gd и ge . Теперь переходим к узлу f . Заменяя действие стержня fg соответствующим усилием, опять будем иметь лишь три стержня, усилия

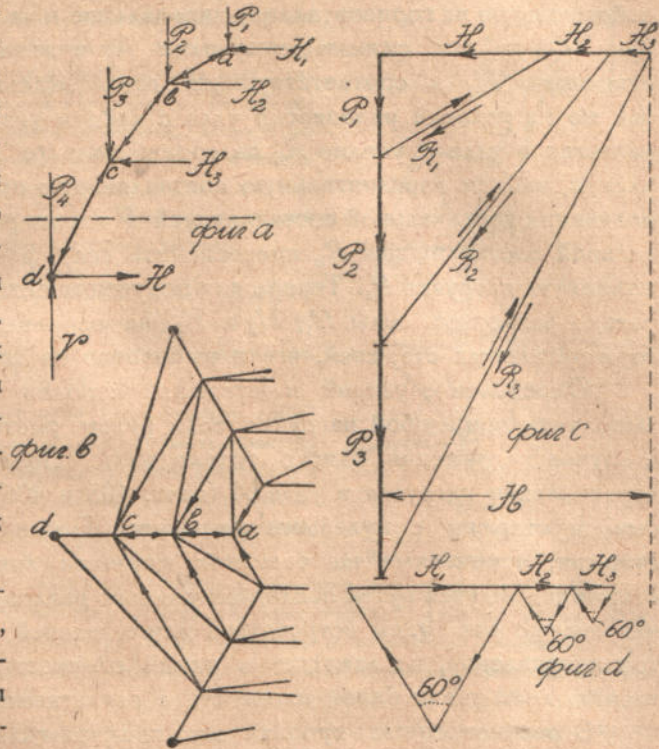
в которых найдутся путем разложения силы Q и усилия fg на соответствующие три направления. После этого переходим к узлу e и далее к узлам d , b , c и a . В каждом из узлов придется выполнить известную уже операцию разложения силы на три заданные направления.

В качестве второго примера рассмотрим определение усилий в стержнях куполов системы Шведлера, представленных на чертежах 405 и 406. Обе эти системы по числу стержней являются статически

определимыми, так как они получаются из сетчатых систем путем замены трех диагоналей верхнего шестиугольника и трех диагоналей и шести сторон нижнего шестиугольника двенадцатью дополнительными опорными стержнями. Вместо шести опорных стержней, мы имеем здесь шесть неподвижных опорных точек, каждой из которых соответствуют по три опорных стержня.

Рассмотрим сначала тот частный случай, когда во всех узлах каждого яруса приложены одинаковые вертикальные силы. При этой симметричной нагрузке усилия во всех стержнях получаются особенно просто.

Для этого достаточно рассмотреть лишь узлы, расположенные по одному какому-либо меридиану (черт. 435). Прежде всего из условий симметрии заключаем, что в диагоналях усилия будут равны нулю. Исходя из этого предположения, мы сможем определить усилия во всех стержнях так, что будут удовлетворены условия равновесия каждого узла. Так как наша система по числу стержней статически определима, то число ур-ий, которые могут быть составлены для определения усилий в стержнях, равно числу неизвестных, и то решение их, которое мы получим, исходя из предположения равенства нулю усилий в диагоналях, будет единственным возможным и, следовательно, соответствующим действительности.



Черт. 435.

Определение усилий начнем с верхнего узла a , где приложена вертикальная сила P_1 . Разлагая эту силу на направление ab и горизонтальное направление, получим усилие R_1 (фиг. c), действующее в верхнем стержне ab меридиана, и равнодействующую H_1 усилий в сходящихся к узлу a горизонтальных стержнях верхнего пояса. Теперь переходим к следующему узлу b меридиана. Для него внешними силами будут сила P_2 и усилие R_1 , передаваемое стержнем ab . Разлагая их равнодействующую на горизонтальное направление и на направление стержня bc (фиг. c), найдем сжимающее усилие R_2 в этом стержне и равнодействующую H_2 в соответствующих горизонтальных стержнях. Точно так же из условий равновесия узла c найдем усилия R_3 и H_3 . Наконец, разлагая в узле d усилие R_3 на горизонтальное и вертикальное направления, найдем горизонтальную составляющую опорной реакции H . Для получения вертикальной составляющей V той же реакции, нужно к вертикальной составляющей R_3 присоединить силу, равную и прямопротивоположную нагрузке P_4 . Теперь для получения остальных усилий остается только разложить силы H_1 , H_2 и H_3 на направления соответствующих горизонтальных стержней, что и выполнено на фигуре d .

Определение усилий в стержнях куполов Шведлера мы сможем выполнить при любой нагрузке, если будем уметь находить эти усилия в случае нагружения одного только узла. Предположим, что имеется вертикальная нагрузка в узле A (черт. 405 и 406). Прежде всего отбрасываем стержни с нулевыми усилиями. После этого останутся лишь стержни, отмеченные на чертежах жирными линиями. Усилия в этих стержнях найдутся путем последовательного разложения. Начиная с узла A , мы каждый раз будем встречаться или с задачей о разложении силы на три направления, не лежащие в одной плоскости, или — на два направления, лежащие в одной плоскости с разлагаемой силой.

В рассмотренных куполах мы предполагали лишь одну систему диагоналей. В действительности в каждой из трапеций, на которые разбита поверхность куполов, располагается обыкновенно по две взаимно перекрещивающихся диагонали. Таким образом получаются системы по числу стержней статически неопределимые. При расчете этих систем обыкновенно упрощают задачу, исходя из предположения, что диагонали обладают весьма малой жесткостью и не могут воспринимать значительных сжимающих усилий. Пренебрегая этими сжатиями, сохраняют при решении задачи лишь ту систему диагоналей, которой соответствуют растягивающие усилия. Таким образом приходят к рассмотренным выше статически определимым системам ¹⁾.

¹⁾ В случае рассмотренной выше симметричной нагрузки купола обе системы диагоналей работают на сжатие. При малой жесткости диагоналей можно пренебречь воспринимаемыми ими сжимающими усилиями, и тогда мы приходим к изложенному выше решению.

Задачи: 219. Определить усилия в стержнях крана (черт. 436), осуществленного в виде пространственной фермы.

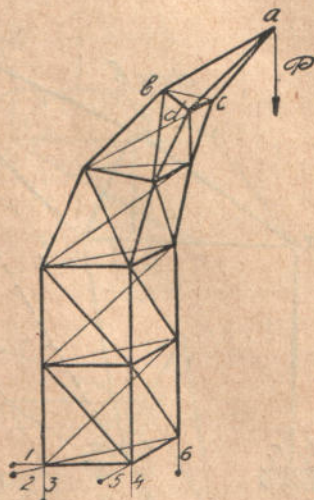
Ферма эта представляет собою сетчатую систему, и потому мы сразу можем сделать заключение, что число стержней ее равно тому, которое необходимо для обеспечения геометрической неизменяемости. Определение усилий начнем с узла a , где приложена внешняя сила P . Усилия в сходящихся к этому узлу стержнях найдутся путем разложения силы P на три направления ab , ac и ad . Обрассываем эти стержни и действие их на остальную систему заменим соответствующими силами. После этого в узлах b , c и d останется по четыре стержня, из которых три лежат в одной плоскости. В отдельно направленном стержне каждого узла усилие может быть найдено из условия равновесия, которое получается путем проектирования всех приложенных к этому узлу усилий на направление, перпендикулярное плоскости трех других стержней. Определив таким образом усилия в стержнях bc , cd и bd , мы теперь можем найти усилия прочих стержней, сходящихся в узлах b , c и d . В том же порядке может быть произведено определение усилий и в прочих стержнях системы.

220. Определить усилия в стержнях крана, представленного на чертеже 437 в аксонометрических и ортогональных проекциях.

Легко видеть, что этот кран представляет собой простейшую систему, прикрепленную к земле шестью опорными стержнями, и потому определение стержневых усилий путем последовательного разложения не встретит никаких затруднений. Особенно просто решается задача, если сила, приложенная в узле f (фиг. a), располагается в вертикальной плоскости симметрии всего сооружения. Обращаясь тогда к проекции системы на эту плоскость (фиг. b), определяем соответствующие усилия, как для плоской фермы. Таким образом найдутся усилия в стержнях gd и df , лежащих в плоскости симметрии. Для стержней, наклонных к этой плоскости, мы получим при этом значения равнодействующих усилий для каждой пары симметрично расположенных стержней, так как из условий симметрии непосредственно следует, что эти равнодействующие лежат в плоскости симметрии и проектируются без искажения. Для получения усилий останется только каждый раз разложить эти равнодействующие на два соответствующие направления. Наконец, чтобы получить усилия в стержнях, перпендикулярных к плоскости симметрии, придется сделать соответствующее разложение в горизонтальной плоскости. В диагонали bc усилие будет равно нулю.

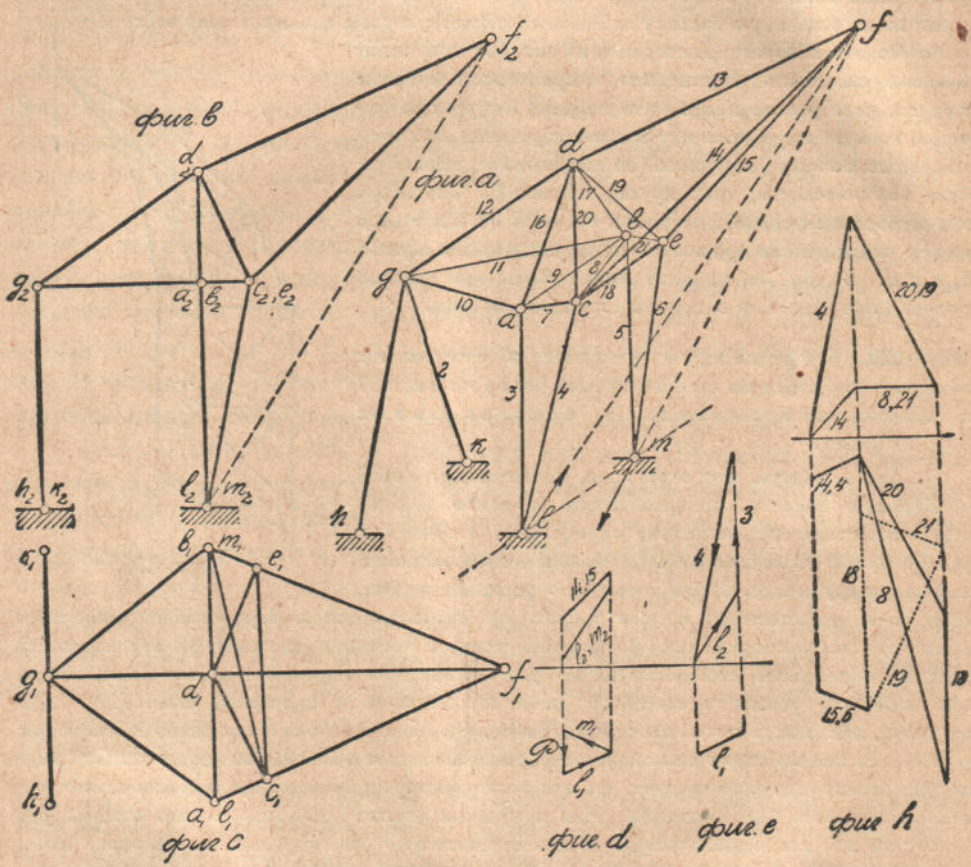
Обратимся теперь к тому случаю, когда приложенная в узле f сила имеет произвольное направление. Эту силу мы всегда можем разложить на две составляющие, из которых одна будет лежать в плоскости симметрии сооружения, а другая будет направлена перпендикулярно к этой плоскости. Усилия, вызываемые первой составляющей, найдутся способом, указанным выше, и нам остается рассмотреть лишь усилия, вызываемые в стержнях системы силой, перпендикулярной плоскости симметрии.

Начнем с выяснения тех стержней, в которых при этих условиях усилия равны нулю. Прежде всего покажем, что для рассматриваемого случая нагрузки равны нулю усилия в опорных стержнях 1 и 2 (фиг. a). Разрезаем все шесть опорных стержней и выбираем за ось моментов линию lm , пересекающую прочие опорные стержни и параллельную



Черт. 436.

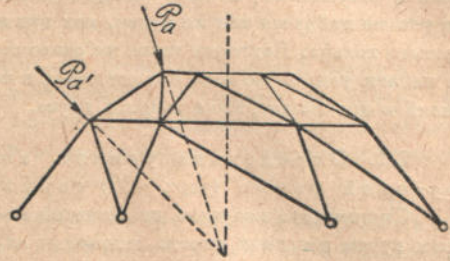
внешней силе. Из соответствующего уравнения равновесия заключаем, что если усилия 1 и 2 отличны от нуля, то их равнодействующая должна иметь направление параллельное lm . За вторую ось моментов выберем вертикальную линию, проходящую через f и представляющую собой, как это видно из фигуры с, линию пересечения плоскостей опорных стержней 3, 4 и 5, 6. Соответствующее уравнение моментов приводит нас к заключению, что равнодействующая усилий 1 и 2 должна равняться нулю, следовательно,



Черт. 437.

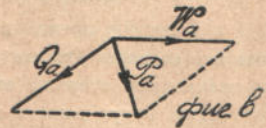
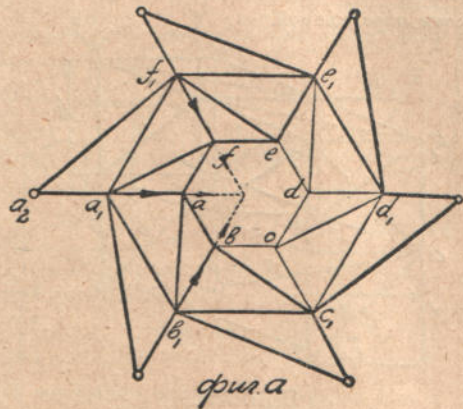
нулю равны и эти усилия. В таком случае в остальных трех стержнях 10, 11 и 12 сходящихся в узле g , усилия также должны равняться нулю. Из условия равновесия узла f , где внешняя сила лежит в одной плоскости со стержнями 14 и 15, заключаем, что усилие в отдельно направленном стержне 13 будет равно нулю. Такое же заключение сделаем относительно стержня 7 на основании рассмотрении узла a . Отбросив стержни с нулевыми усилиями, об ащаемся теперь к определению усилий в остальных стержнях системы. Сначала определим опорные реакции, возникающие в точках l и m . Реакции эти, лежащие в вертикальных плоскостях 3, 4 и 5, 6, уравнивают силу, приложенную в точке f . Очевидно, эта точка будет общей точкой пересечения всех трех сил. Таким образом определяется направление реакций l и m . Горизонтальная и вертикальная проекции этих усилий находятся из чертежа (фиг. d), где P —приложенная в f внешняя сила, перпендикуляр-

ная плоскости симметрии сооружения, и направления l_1, m_1 и l_2, m_2 параллельны направлениям l_1f_1 и m_1f_1 фигуры c и направлению l_2f_2 фигуры b . На том же чертеже, проведением линии, параллельной линии c_1f_2 фигуры b , находим проекцию усилий в стержнях 14 и 15. На фигуре e разложением реакции l найдены горизонтальная и вертикальная проекции усилий в стержнях 3 и 4. Таким же образом найдутся усилия в стержнях 5 и 6. Теперь мы можем перейти к узлам c и e , где осталось лишь по три стержня с неизвестными усилиями. Соответствующие построения выполнены на фигуре h . Вертикальная проекция соответствующего многоугольника сил является общей для обоих узлов. Горизонтальная проекция, расположенная выше, относится к узлу c , а другая — к узлу e . Направления все взяты из фигур b и c . Построение проекций соответствующего многоугольника сил здесь упрощается вследствие того, что направление стержня 18 перпендикулярно к плоскости проекций. Теперь нам остается найти лишь усилия в стержнях 16, 17 и 9, что может быть выполнено на основании рассмотрения условий равновесия узлов a и b .



221. Определить усилия, возникающие в стержнях купола Шведлера под действием сил, приложенных в трех последовательных узлах каждого кольца и направленных в одну точку (черт. 438).

Определение усилий начинаем с узла a . Приложенную в этом узле силу P_a разложим на две составляющих, одну из которых W_a направим горизонтально (фиг. b), а другую Q_a направим по стержню aa_1 . После этого горизонтальную составляющую W_a , в свою очередь, разложим на направления горизонтальных стержней ab и af . Составляющая, направленная по af даст нам непосредственно усилие в этом стержне, так как прочие силы располагаются в плоскости aa_1bb_1 , заключающей все остальные стержни. Тем же путем мы находим усилия и в прочих стержнях верхнего кольца $abcdef$. После этого сейчас же могут быть найдены усилия и в остальных стержнях верхнего яруса, так как в каждом из верхних узлов останется лишь по два стержня с неизвестными усилиями. Например, для узла a неизвестными являются усилия в aa_1 и ab_1 . Составляющая Q_a передается непосредственно стержню aa_1 . Что же касается составляющей, имеющей направление ab , и усилия в стержне ab , то при рассмотрении узла a обе эти силы придется разложить на направления ab_1 и aa_1 в плоскости грани aa_1bb_1 . Таким путем найдутся усилия в стержне aa_1 и в диагонали ab_1 .



Черт. 438.

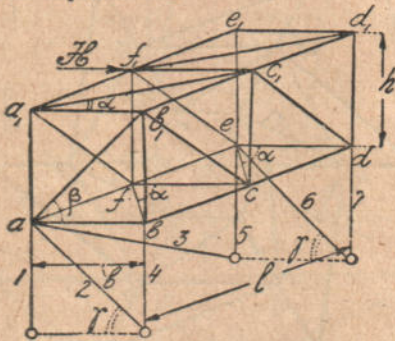
Определив усилия во всех стержнях верхнего яруса, переходим к узлам кольца $a_1b_1c_1d_1e_1f_1$. Здесь придется принять во внимание не только силы, приложенные

в этих узлах, но также и найденные уже усилия, заменяющие действие стержней верхнего яруса.

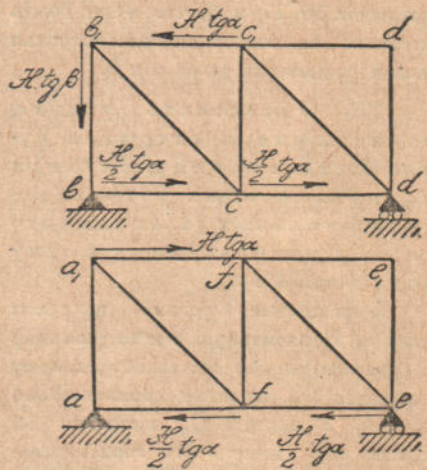
Так, например, при рассмотрении узла a_1 , кроме силы P_a , нужно принять во внимание усилия в стержне aa_1 и в диагонали a_1f . С силой P_a и усилием стержня aa_1 поступаем также, как с силой P_a в узле a . Что же касается усилия в диагонали a_1f , то его разлагаем на направление a_1f_1 и направление aa_1 . Усилие в стержне a_1f_1 кольца $a_1b_1c_1d_1e_1f_1$ составит из четырех слагаемых: из только что найденной составляющей в направлении a_1f_1 усилия диагонали a_1f и из трех усилий, вызываемых соответственно: силой P_a , усилием стержня aa_1 и составляющей усилия в диагонали a_1f по направлению aa_1 . Эти три усилия найдутся тем же путем, как это мы делали при разыскании усилия стержня af верхнего кольца. Повторяя такое же разложение во всех узлах многоугольника $a_1b_1c_1d_1e_1f_1$, мы найдем усилия во всех его стержнях и после этого можем приступить к определению усилий в прочих стержнях второго яруса.

222. Определить усилия, вызываемые в пространственной мостовой ферме (черт. 439) горизонтальной силой H .

Система эта получена из сетчатой системы путем введения вместо диагонали ed_1 дополнительного опорного стержня. По числу стержней, следовательно, система будет статически определимой.



Черт. 439.



Черт. 440.

Отметим прежде всего стержни с нулевыми усилиями. Из рассмотрения узла a , где все стержни, кроме одного, лежат в одной плоскости, заключаем, что в отдельно направленном стержне ed усилие будет равно нулю. На тех же основаниях заключаем, что нулю будут равняться усилия в стержнях e_1d_1 , dd_1 , ee_1 , ef_1 , df_1 и c_1d_1 . Обратимся теперь к усилиям в опорных стержнях 2, 3 и 6. Перерезывая опорные стержни и проектируя все приложенные к сооружению силы на направление ae , найдем что усилие в стержне 3 равно нулю.

Применяя теперь способ моментов и выбирая за оси моментов линии aa_1 и ee_1 , найдем для стержней 2 и 6 сжимающие усилия — $\frac{H}{2 \cos \gamma}$.

Определим теперь усилия в поперечных связях системы. Из условия равновесия узла f_1 найдем

для стержня f_1c_1 сжимающее усилие — H .

После этого из условий равновесия узлов c_1 , a_1 и b_1 , найдем:

в стержне a_1c_1 растяжение, равное $\frac{H}{\cos \gamma}$;

в стержне a_1b_1 — сжатие — H ;
 в стержне ab_1 — растяжение $\frac{H}{\cos\beta}$.

Из равновесия узлов e , c , f и b находим:

в стержне ce — растяжение, равное $\frac{H}{2\cos\alpha}$

в fc — сжатие, равное $\frac{H}{2}$,

в fb — растяжение $\frac{H}{2\cos\alpha}$

и, наконец,

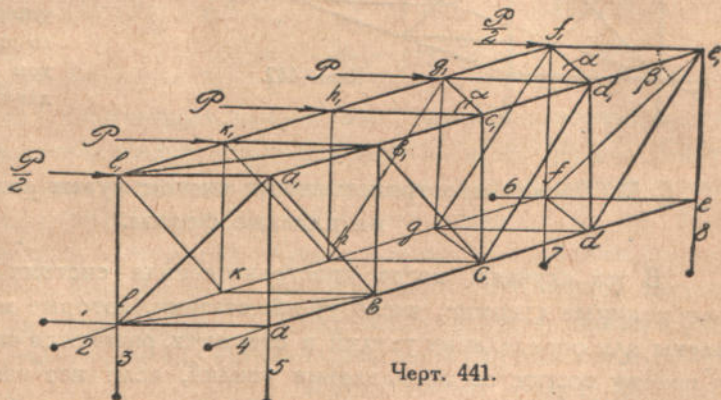
в ab — сжатие $\frac{H}{2}$.

Определив таким образом усилия в связях, мы сводим дальнейший расчет к определению усилий в двух плоских фермах под действием сил, указанных на чертеже 440. После этого могут быть найдены усилия в вертикальных опорных стержнях системы. То обстоятельство, что мы получаем для всех стержней вполне определенные усилия указывает на геометрическую неизменяемость системы.

223. Определить усилия, вызываемые в пространственной, мостовой ферме (черт. 441) горизонтальными силами, приложенными к верхним узлам.

Система эта получена из сетчатой системы путем замены двух неотвечающих диагоналей верхней и нижней граней двумя дополнительными опорными стержнями.

Расчет начинаем с определения усилий в связях



Черт. 441.

соединяющих главные мостовые фермы. На основании рассмотрения узлов k и h , где все стержни, кроме одного, лежат в одной плоскости, заключаем, что в распорках kb и he усилия должны равняться нулю. Теперь из условия равновесия узлов c , g , d , e , b и a заключаем, что нулю должны равняться усилия во всех стержнях нижних связей.

Переходим теперь к верхним связям. Из условий равновесия узлов h_1 и k_1 заключаем, что

в распорках h_1c_1 и k_1b_1 действует сжимающее усилие — P .

Рассматривая теперь узлы c_1 , g_1 , d_1 , f_1 и e_1 найдем:

в диагонали c_1g_1 — растяжение $\frac{P}{\cos\alpha}$,

в распорке g_1d_1 — сжатие $-2P$,

в диагонали d_1f_1 — растяжение $\frac{2P}{\cos\alpha}$,

в распорке f_1e_1 — сжатие $-2,5P$,

в диагонали f_1e_1 — растяжение $\frac{2,5P}{\cos\beta}$.

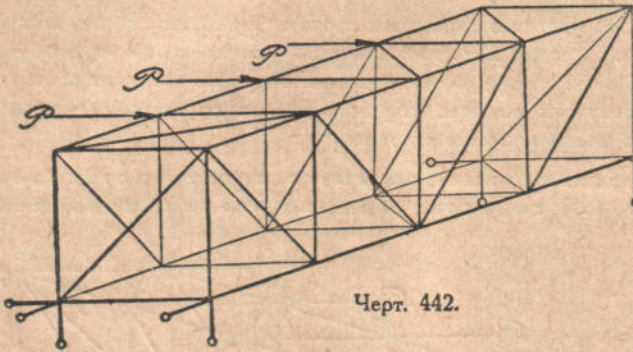
Далее из рассмотрения узлов b_1 , l_1 , a_1 заключаем, что

в диагонали b_1l_1 действует растяжение $\frac{P}{\cos\alpha}$;

в распорке $l_1 a_1$ — сжатие $-1,5\rho$,
и в диагонали $a_1 l$ — растяжение $\frac{1,5\rho}{\cos\beta}$.

Определив таким образом усилия во всех стержнях связей, мы сводим задачу к расчету двух плоских ферм усилия в стержнях которых могут быть найдены без всяких затруднений.

224. Определить усилия в стержнях пространственной мостовой фермы, представленной на чертеже 442.



Черт. 442.

Легко видеть, что эта система может быть получена из сетчатой системы и имеет число стержней, необходимое для обеспечения геометрической неизменяемости. Как и в предыдущей задаче, определение усилий следует начать со стержней связей и потом разбить систему на две плоские фермы.

§ 58. Расчет пространственных систем путем разложения их на плоские фермы.

В тех случаях, когда пространственная система включает лишь необходимые стержни, число ур-ий статики, которые могут быть составлены для определения усилий в стержнях, равняется числу неизвестных, и потому вопрос об определении усилий, если нет какого-либо исключительного случая, должен получить однозначное решение. Предположим, что нам удалось найти такую систему усилий в стержнях заданной пространственной фермы, при которой соблюдены условия равновесия всех узлов. Тогда, в силу высказанного выше соображения относительно однозначности решения, найденная нами система усилий и представит собой единственное возможное решение задачи. Особенно просто можно найти систему усилий, удовлетворяющих условиям равновесия всех узлов, в том случае, когда заданная пространственная система образована так, что плоские грани ее представляют собой статически определимые плоские фермы, узлы которых, расположенные по ребрам, являются общими для ферм двух соприкасающихся граней.

Возьмем, например, систему, представленную на чертеже 443. Система эта составлена из статически определимых плоских ферм, расположенных по граням призмы. Подобного рода системы применяются при постройке газгольдеров, лесов и т. д. Для определения усилий, возникающих в стержнях системы под действием какой-либо силы P , мы

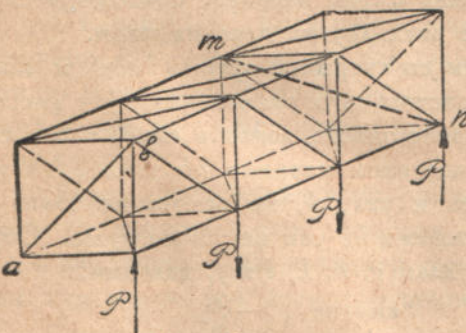
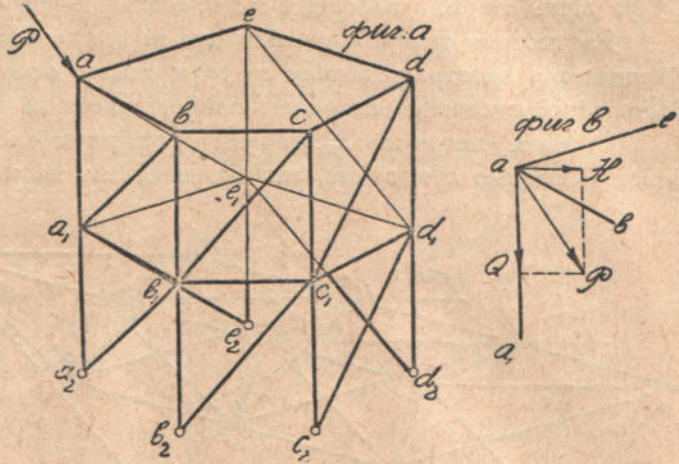
разлагаем эту силу на две составляющие. Одну из этих составляющих Q направляем по ребру призмы (фиг. *b*), а другую H — направляем горизонтально. Силу H ,

в свою очередь, разлагаем в горизонтальной плоскости на составляющие, направленные по ребрам ab и ae . Пользуясь теми элементарными соображениями, которые применялись при расчете пространственных систем непосредственным разложением, мы

легко покажем, что составляющая силы P , направленная по вертикальному ребру призмы, вызовет усилия лишь в стержнях этого ребра. Составляющая, направленная по ab , вызовет усилия лишь в стержнях плоской фермы aba_2b_2 и, наконец, составляющая, направленная по ae , будет вызывать усилия лишь в стержнях плоской фермы aea_2e_2 . Таким образом определение усилий, вызываемых в стержнях пространственной системы отдельными составляющими силы P , сводится к расчету плоских ферм и не может представить никаких затруднений. Полные усилия в стержнях вертикального ребра aa_2 получатся путем сложения усилий, вызываемых отдельными составляющими.

Подобным же образом может быть выполнен расчет и в том случае, когда на систему действует не одна, а несколько сил. Каждую из сил придется разложить на три составляющих, из которых одна направится вертикально по соответствующему ребру, а две другие горизонтально в плоскостях двух соответствующих граней.

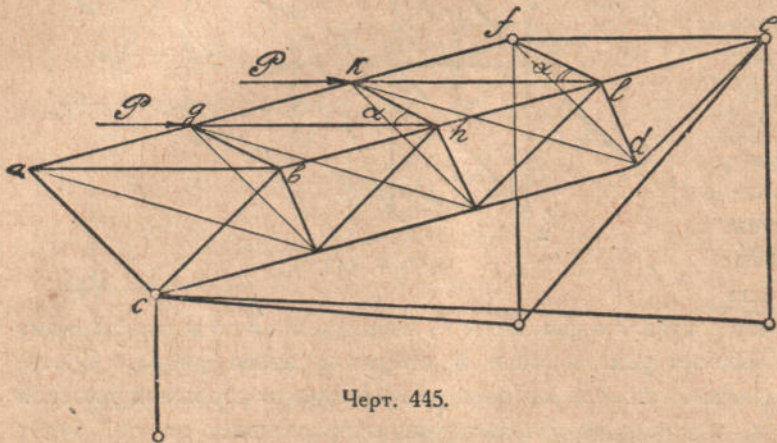
Когда все приложенные к системе силы лежат в плоскости одной из граней, которая представляет собою жесткую надлежащим образом опертую плоскую ферму, усилия, отличные от нуля, будут получаться



лишь в стержнях этой фермы. Например, для сетчатой системы, представленной на чертеже 444, при действии сил в плоскости передней грани, работать будут лишь стержни плоской фермы, совпадающей с передней гранью¹⁾.

Рассмотрим теперь случай, когда не все плоские фермы, на которые распадается пространственная система, имеют опоры, на которые могут быть непосредственно переданы приходящиеся на ферму усилия.

Возьмем, например, трехгранную сетчатую систему, прикрепленную к земле шестью стержнями, как это показано на чертеже 445.



Черт. 445.

Боковые грани *bcde* и *acdf* этой системы представляют собой жесткие плоские фермы с неподвижными опорами в точке *c* и подвижными опорами в точках *f* и *e*.

Силы, приложенные в плоскости одной из этих граней, будут вызывать усилия лишь в стержнях соответствующей плоской фермы, опертой по концам.

Обратимся теперь к случаю, когда силы лежат в плоскости верхней грани *abef*. Соответствующая плоская ферма передает приходящиеся на нее усилия опорам при посредстве двух других плоских ферм.

Определение усилий начинаем со стержней фермы *abef* и пользуемся при этом способом непосредственного разложения. Из рассмотрения узла *a*, где все стержни, кроме одного, лежат в одной плоскости, заключаем, что в отдельно направленном стержне *ab* усилие должно равняться нулю. Переходя теперь к узлу *b*, на основании таких же соображений, заключаем, что в стержне *bg* усилие равно нулю. Обращаясь теперь последовательно к узлам *g*, *h*, *k*, *l* и *f*, находим:

в распорке <i>gh</i> —	сжатие	— ρ ,	
в раскосе <i>hk</i> —	растяжение	$\frac{\rho}{\cos \alpha}$,	
в распорке <i>kl</i> —	сжатие	— 2ρ ,	

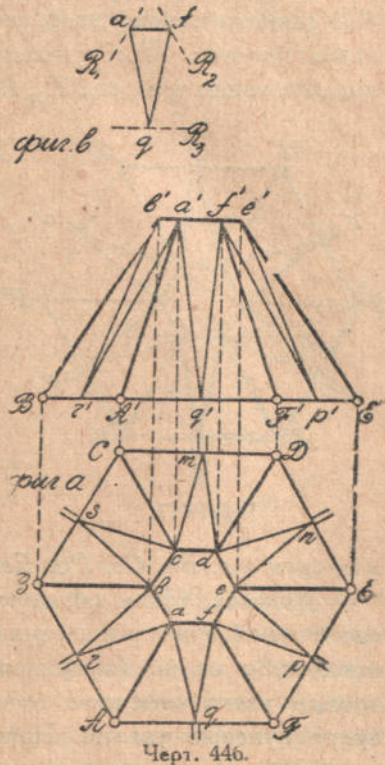
¹⁾ Что в данном случае система геометрически неизменяема, и решение, следовательно, однозначно, можно показать способом замены стержней. Вставляя вместо диагонали *ab* стержень *ml*, мы обращаем нашу систему в простейшую.

в раскосе lf — растяжение $\frac{2P}{\cos \alpha}$
 и в распорке fe — сжатие — $2P$.

Определив таким образом усилия во всех стержнях фермы $abef$ и приложив эти усилия к боковым фермам $bcde$ и $acdf$, приводим задачу по определению усилий в прочих стержнях к расчету двух плоских ферм, опертых по концам.

Рассмотрим теперь пространственное покрытие ¹⁾, представленное на чертеже 446. Система эта от купола Шведлера отличается тем, что

в каждой грани вместо диагонали помещается два раскоса, что дает возможность более выгодно устроить опоры системы. В точках A, B, C, D, E и F расположены шаровые опоры, а в точках m, n, p, q, r и s — цилиндрические, причем направления скольжения последних указано на плане черточками ²⁾. Таким образом общее число опорных стержней — 18. Двенадцать дополнительных опорных стержней введено взамен трех диагоналей верхнего шестиугольника и девяти диагоналей нижнего двенадцатиугольника. По числу стержней предлагаемая система является, следовательно, статически определимой, и нам нужно только убедиться, не имеем ли мы здесь какого-либо исключительного случая. Для этого воспользуемся способом нулевых нагрузок. Если при отсутствии внешних сил можно будет доказать, что усилия всех стержней равны нулю, то это укажет нам на геометрически неизменяемую систему.

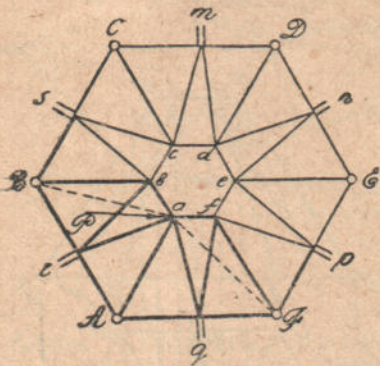


Воспользуемся для этого способом Фёрпл'я. Вырежем из системы один из треугольников, имеющих своими основаниями стороны верхнего шестиугольника, например, треугольник afq (фиг. b). У шарнира a мы перережем при этом три стержня ab, ar и aA . Равнодействующая

¹⁾ Система эта впервые была предложена А. Фёрпл'ом, см. D. Fachw. i. R., стр. 93—104. Дальнейшее развитие ее принадлежит Schlink'у, см. Ztschr. f. Arch. u. Ing., 1904 г., стр. 183.

²⁾ При таком устройстве опор горизонтальные реактивные силы могут появиться лишь в точках m, n, p, q, r и s . При указанных направлениях скольжения эти горизонтальные силы лежат в плоскостях стен, на которые опирается купол.

соответствующих усилий будет лежать в плоскости грани $abAB$. Так как эта равнодействующая должна уравниваться усилиями стержней af и aq , расположенных в плоскости грани $AafF$, то линия Aa пересечения двух смежных граней и представит собой линию действия равнодействующей R_1 трех усилий в перерезанных стержнях шарнира a . На основании таких же соображений заключаем, что в шарнире f равнодействующая R_2 усилий в трех перерезанных стержнях fe , fp и ff должна иметь направление fF . Наконец, в шарнире q , где при отсутствии внешних нагрузок опорная реакция должна иметь направление AF , равнодействующая R_3 усилий в перерезанных стержнях будет направлена также по AF . Выделенный треугольник afq находится в равновесии под действием трех сил R_1 , R_2 и R_3 , лежащих в одной плоскости и не пересекающихся в одной точке. Равновесие этой системы возможно лишь в том случае, если каждая из сил в отдельности равна нулю. Из равенства нулю силы R_1 сейчас же заключаем, что в стержнях af и aq усилия равны нулю. Точно так же усилие fq равно нулю вследствие равенства нулю силы R_2 . Таким же образом может быть доказано равенство нулю усилий в стержнях всех прочих треугольников, имеющих своими основаниями стороны верхнего шестиугольника. После этого сейчас же заключаем о равенстве нулю усилий



Черт. 447.

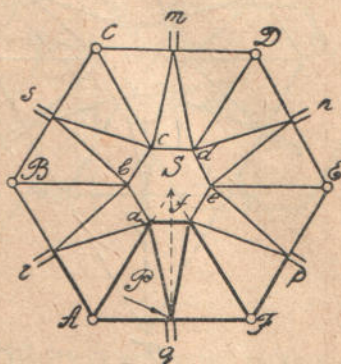
в ребрах Aa , Bb , Cc , Dd , Ee и Ff и во всех стержнях нижнего кольца.

Доказав, таким образом, геометрическую неизменяемость заданной системы, обратимся теперь к определению усилий, вызываемых в системе какой-либо силой P , приложенной в узле a (черт. 447). Для этого прежде всего отмечаем те стержни, в которых при заданной нагрузке будут нулевые усилия. Пользуясь приемом, примененным сейчас для доказательства геометрической неизменяемости системы, мы легко покажем, что отличными от нуля будут лишь усилия стержней, указанных на чертеже жирными линиями. Таким образом, задача сводится к расчету двух плоских ферм $AafF$ и $BbaA$.

Вырезывая мысленно из системы треугольник afq , мы на основании прежних рассуждений устанавливаем, что равнодействующая сил, приложенных к точке f , имеет направление fF . Точно так же равнодействующая усилий, приложенных к вершине q выделенного треугольника, будет иметь направление qF . Из условий равновесия треугольника afq заключаем, что равнодействующая усилий, приложенных к вершине a , должна проходить через точку F , где пересекаются две названные раньше равно-

действующие. Очевидно, что направление aF , намеченное на чертеже пунктиром, представит направление равнодействующей усилий в стержнях af и aq . Идя тем же путем, найдем, что равнодействующая усилий в стержнях ab и ar имеет направление aB .

Разложим теперь силу P на три направления Aa , aF и aB . Первая составляющая даст нам усилие в бруске Aa , вторая — равнодействующую усилий af и aq и третья — равнодействующую усилий ab и ar . Производя разложения силы aF на направления af и aq и силы aB на направления ab и ar , найдем усилия в соответствующих стержнях. Теперь, обращаясь к узлам f и b , мы сейчас же, путем построения соответствующих треугольников сил, найдем усилия fF , fq , br и Bb . Наконец, рассматривая нижние опорные узлы F , A и B и разлагая в них известные уже усилия стержней Ff , Aa и Bb каждое на три направления, найдем вертикальное опорное давление в соответствующем узле и усилия в сходящихся к этому узлу стержнях нижнего кольца. Разность усилий в стержнях Aq и qF даст нам величину горизонтальной составляющей реакции опоры q . Вертикальная составляющая той же реакции при ненагруженном узле q будет равняться нулю, так как все стержни узла q лежат в одной плоскости. Подобным же образом найдутся реактивные усилия опор p , r и s .



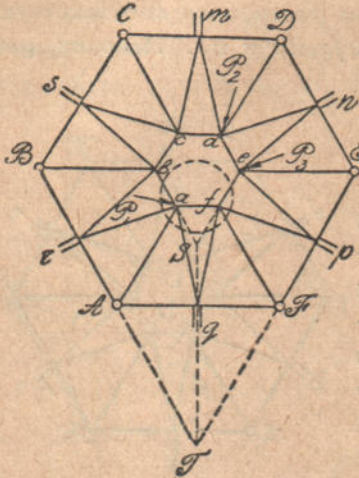
Черт. 448.

Если сила P приложена в одном из нижних узлов, соответствующих цилиндрическим опорам, например, в узле q (черт. 448), то прежним способом докажем, что во всех треугольниках, имеющих основаниями стороны верхнего шестиугольника, кроме треугольника afq , усилия в стержнях будут равны нулю. После этого легко доказывается равенство нулю усилий в целом ряде других стержней, показанных на чертеже тонкими линиями. Отличными от нуля в рассматриваемом случае будут лишь усилия в стержнях, показанных жирными линиями.

Выделяя треугольник afq , мы прежним способом покажем, что равнодействующая усилий перерезанных стержней у вершины a направлена по Aa , у вершины f — по fF . В точку S , где эти направления пересекаются, должна идти сила, приложенная к выделенному треугольнику в вершине q . Эта сила уравновешивается, очевидно, с усилиями в стержнях aq и fq . Обращаясь теперь к узлу q , мы разлагаем силу P на две составляющие, из которых одна пойдет по линии Sq , а другая расположится в вертикальной плоскости, проходящей через направление AF . Первая из этих составляющих, после надлежащего разложения, даст нам

усилия в стержнях aq и fq . Пользуясь этими усилиями мы из рассмотрения узлов a и f найдем усилия стержней aA , af и fF . Разлагая усилия aA и fF , в узлах A и F найдем соответствующие вертикальные опорные давления и усилия в горизонтальных стержнях нижнего многоугольника.

Если бы сила была приложена в одном из нижних узлов, соответствующих шаровым опорам, то при этом получилось бы лишь соответствующее опорное давление и усилия в двух сходящихся к нагруженному узлу стержнях нижнего многоугольника. В остальных стержнях усилия при этом были бы равны нулю.



Черт. 449.

Кроме намеченного здесь графического расчета купола $F\ddot{o}rpl'$ 'я, возможно решение той же задачи аналитическим путем. Предположим, что в узлах системы приложены любые нагрузки P_1, P_2, P_3, \dots (черт. 449). Для определения усилий в двух каких-либо раскосах, например, в раскосах aq и fq , мы сейчас же можем составить два ур-ия, пользуясь способом моментов.

Первое ур-ие мы получим, если вырежем из системы узел q и составим момент всех усилий в перерезанных стержнях и опорной реакции относительно оси, параллельной AF и лежащей в вертикальной плоскости, проходящей через AF . Легко видеть, что в это ур-ие войдут

лишь усилия в интересующих нас стержнях aq и fq .

Для составления второго ур-ия вырежем из системы узлы a и f сомкнутым сечением, указанным на чертеже пунктиром. Все перерезанные при этом стержни, кроме aq и fq , лежат в плоскостях граней $ABab$ и $EFef$, пересекающихся по линии ST . Если мы составим момент усилий во всех перерезанных стержнях относительно оси ST , то в соответствующее ур-ие равновесия, кроме моментов заданных нагрузок, войдут лишь искомые усилия в стержнях aq и fq .

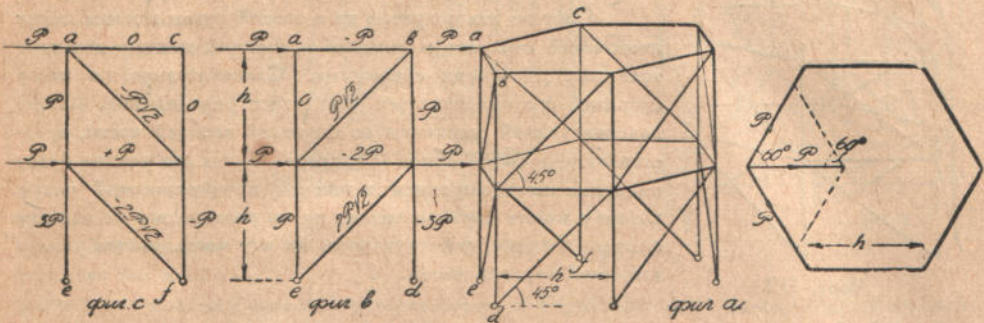
Определив таким путем усилия в раскосах, мы можем теперь найти усилия в стержнях верхнего кольца и в ребрах Aa, Bb, Cc, Dd, Ee и Ff . Для этого придется в верхних узлах a, b, c, d, e и f произвести разложение уже известных усилий на три направления: направления двух горизонтальных стержней верхнего кольца и направление соответствующего ребра. Определение усилий в стержнях нижнего кольца и реактивных усилий не представит теперь никаких затруднений.

Заметим здесь, что рассматриваемое покрытие представляет собой простейший случай купола $F\ddot{o}rpl'$ 'я. Увеличивая число раскосов в каждой

границы и число ярусов, мы можем получить более сложные покрытия той же системы. Покрытия эти рассчитываются намеченными здесь приемами ¹⁾.

В рассмотренных задачах плоские фермы, на которые распадается пространственные системы, являются геометрически неизменяемыми. Такие случаи, где некоторые из этих ферм являются по числу стержней не жесткими, рассмотрены нами в качестве задач предыдущего параграфа.

Задачи: 225. Определить усилия, вызываемые в стержнях шестигранной призматической системы горизонтальными силами P (черт. 450).

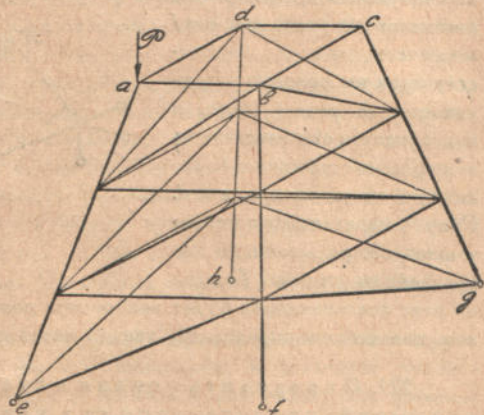


Черт. 450.

Система эта имеет двенадцать опорных стержней. Шесть из них вставлены вместо недостающих шести диагоналей верхнего и нижнего оснований призмы. Следовательно, по числу стержней система является статически определимой. Из рассмотрения равновесия узлов фермы заключаем, что отличными от нуля могут быть лишь усилия в стержнях плоских ферм $abde$ и $acfe$.

Разлагая внешние силы P на горизонтальные составляющие, расположенные в плоскостях этих ферм (фиг. а), приводим задачу к расчету плоских ферм, представленных на фигурах b и c . Получающиеся при этом усилия показаны на чертеже. Полные усилия для стержней ребра ae получаются сложением усилий, указанных на фигурах b и c .

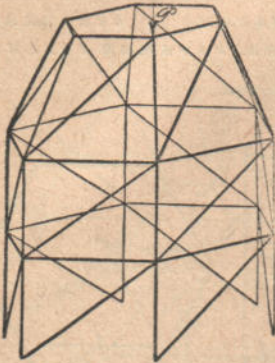
226. Определить усилия в стержнях пирамидальной пространственной системы, представленной на чертеже 451.



Черт. 451.

¹⁾ Несколько численных примеров с подробными решениями имеется в цитированной выше книжке Schink'a „Statik der Raumfachwerke“, стр. 288, 315. См. также П. Рабцевич „Купольное покрытие Коммерческого Института в Киеве“, Киев, 1914 г.

Система эта получена из сетчатой путем замены диагоналей верхнего и нижнего оснований пирамиды двумя дополнительными опорными стержнями. Следовательно, по числу стержней система статически определима. Из рассмотрения равновесия узлов системы сейчас же заключаем, что под действием силы P будут возникать усилия лишь в стержнях плоских ферм $abfe$ и $adhe$. Для нахождения этих усилий, разлагаем силу P на три составляющие. Одну из них направим по ребру ae , а две другие — по направлениям ab и ad . Первая из этих составляющих вызовет лишь сжатие в стержнях ребра ae . Для определения усилий, вызываемых двумя другими составляющими, придется рассчитать плоские фермы $abfe$ и $adhe$.



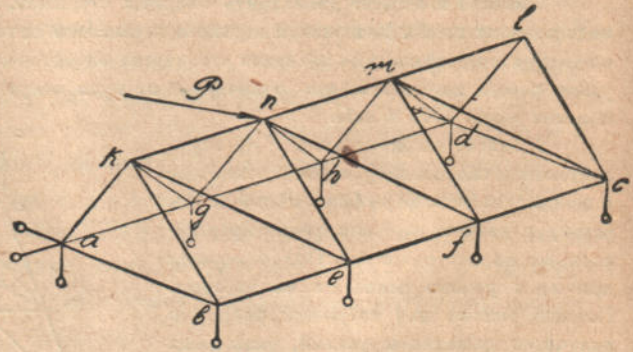
Черт. 452.

227. Определить усилия, вызываемые силой P в стержнях системы, представленной на чертеже 452.

Система эта получена из сетчатой путем замены шести диагоналей верхнего и нижнего оснований шестью дополнительными опорными стержнями. Следовательно, по числу стержней система является статически определимой. Определение усилий начинаем со стержней верхней части, представляющий собой купол Шведлера. Когда эти усилия будут найдены, мы обращаемся к нижней призматической части, которая может быть рассчитана путем разложения на плоские фермы. Силами, действующими на эту часть, являются усилия стержней верхней части.

228. Определить усилия, возникающие в стержнях двускатного покрытия (черт. 453) под действием горизонтальной силы P .

Вместо двух распорок и трех диагоналей в плоскости $abcd$ трехгранной сетчатой системы, здесь вставлено пять дополнительных опорных стержней. На основании рассмотрения узлов g, h, e и f заключаем, что в соответствующих им опорных стержнях усилия равны нулю, и нам придется считаться лишь с опорными стержнями, выходящими из узлов a, b, c и d . Силу P , параллельную направлению ab , разлагаем по направлениям gn и pe . Каждая



Черт. 453.

из этих составляющих будет воспринята соответствующей плоской фермой. Таким образом, дальнейшее определение усилий сводится к расчету плоских ферм.

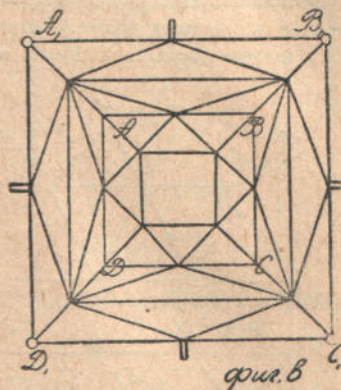
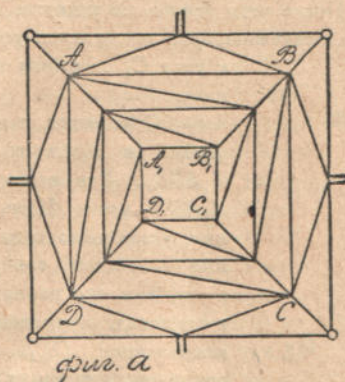
229. Определить усилия в стержнях трехъярусных купольных покрытий, представленных в плане на фигурах a и b черт. 454.

Нижний ярус купола, представленного на фиг. a , является рассмотренной ранее системой купола Förrl'я-Schlink'a.

При помощи стержней нижнего яруса узлы A, B, C и D неизменно связываются с фундаментом. К этим узлам, как к неподвижным опорным точкам, прикреплено двух-

ярусное пирамидальное покрытие $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, геометрическая неизменяемость которого, при неподвижности точек $ABCD$, является доказанной. Мы получаем таким образом геометрически неизменяемое трехъярусное покрытие расчет которого следует начинать с верхних двух ярусов. Расчитав эти два яруса способом разложения на плоские фермы, мы обращаемся к нижнему ярусу, для которого найденные усилия в стержнях, сходящихся к углам A, B, C и D , являются внешними силами. После этого нижний ярус может быть расчитан графическим или аналитическим приемами, изложенными выше.

Трехъярусный купол, представленный в плане на фигуре *a*, составлен следующим образом. Верхний ярус представляет собой покрытие системы Föppl'я-Schlink'a. Средний ярус образован опорными стержнями, поддерживающими верхний ярус. В отличие от того, что мы имели



Черт. 454.

ранее при изложении способов расчета системы Föppl'я-Schlink'a, здесь опорные стержни расположены в наклонных плоскостях¹⁾, которые не совпадают с соответствующими гранями верхнего и нижнего яруса. Но это не меняет общего хода расчета этой системы. Нижний ярус опять представляет собой геометрически неизменяемую систему Föppl'я-Schlink'a

230. Наметить ход расчета двухъярусного купола, представленного на чертеже 455.

Кружками отмечены шаровые опоры и черточками — направление скольжения цилиндрических. У нас имеется восемь шаровых и четыре цилиндрических опоры. Соответствующее число опорных стержней равно шестнадцати. Общее число стержней системы удовлетворяет условию статической определимости, так как эта система может быть получена из сетчатой системы путем замены диагонали верхнего основания и девяти диагоналей нижнего основания десятью дополнительными опорными стержнями.

Наметим теперь ход расчета системы при действии какой-либо силы P в узле A . Так как к верхним углам купола никаких сил не приложено, то в стержнях верхнего яруса, представляющего собой уже рассмотренную простейшую систему Föppl'я-Schlink'a все усилия равны нулю. Обращаясь теперь к нижнему ярусу, представляющему собой более сложную систему Föppl'я-Schlink'a, мы прежде всего, пользуясь прежним приемом, выясним в каких стержнях усилия равны нулю. На чертеже стержни с нулевыми усилиями нанесены тонкими линиями.

Чтобы доказать равенство нулю усилий в стержнях правой грани нижнего яруса, мы вырезаем часть системы так, как это указано пунктиром, и исследуем условия равновесия выделенной части (фиг. *b*). Пользуясь прежними рассуждениями, докажем, что равнодействующие R_1 и R_2 усилий в стержнях, перерезанных у вершин D и C .

¹⁾ Ранее мы предполагали, что шаровые и цилиндрические опоры располагаются на горизонтальных плоскостях скольжения.

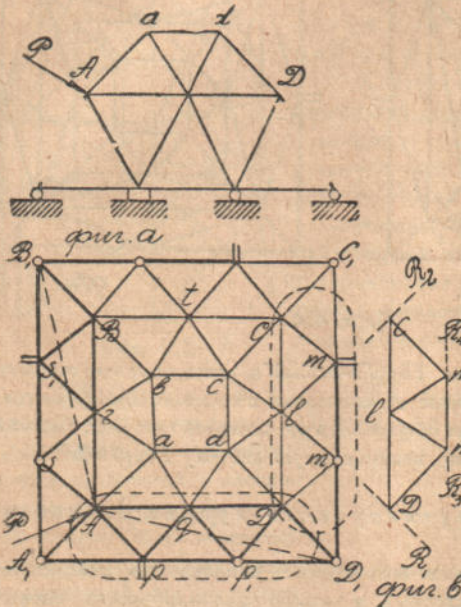
будут иметь направление DD_1 и CC_1 . В нижних опорных узлах m и m_1 направления R_3 и R_4 равнодействующих усилий в перерезанных стержнях и опорных реакций будут иметь направление D_1C_1 . Чтобы выделенная часть оставалась в равновесии, необходимо положить

$$R_1 = 0, \quad R_2 = 0, \quad R_3 + R_4 = 0.$$

Отсюда следует равенство нулю усилий во всех стержнях выделенной части, отмеченных тонкими линиями. Подобным же образом доказывается равенство нулю соответствующих усилий в стержнях верхней грани. После чего сейчас же находим, что усилие в бруске CC_1 должно равняться нулю, а следовательно, равны нулю и усилия в сходящихся

к узлу C_1 стержнях нижнего многоугольника.

Обратимся теперь к определению усилий в стержнях граней A_1ADD_1 и A_1ABB_1 . Для этого выделяем из грани A_1ADD_1 часть $ADpp_1$ при помощи сечения, указанного пунктиром. На основании известных соображений сейчас же заключаем, что равнодействующая усилий в стержнях, перерезанных у узла D , имеет направление DD_1 , а соответствующие равнодействующие в узлах p и p_1 имеют направление A_1D_1 . Из условий равновесия выделенной части заключаем, что равнодействующая усилий, приложенных к ней в узле A , должна проходить через точку D_1 , где пересекаются названные выше направления DD_1 и A_1D_1 . Путем таких же рассуждений убеждаемся, что равнодействующая усилий, приложенных к узлу A , соответствующей части левой грани, должна иметь направление AB_1 . Направление AD_1 дает нам направление равнодействующей усилий в стержнях Aq и Ap , а на-



Черт. 455.

правление AB_1 определяет линию действия равнодействующей усилий в стержнях Ar и As .

Теперь мы можем разложить силу P на три направления AA_1 , AD_1 и A_1B_1 . Первая составляющая дает нам непосредственно усилие в стержне AA_1 . Вторая составляющая после разложения даст нам усилия Aq и Ap , и, наконец, третья составляющая определит собой усилия стержней Ar и As . Обращаемся теперь к выделенной части грани ADA_1D_1 . Найденная нами сейчас сила, направленная по AD_1 , должна уравниваться с усилием DD_1 и направленной по A_1D_1 суммой усилий, приложенных к выделенной части в узлах p и p_1 . Путем соответствующего разложения мы сейчас же найдем усилие в стержне DD_1 и далее из рассмотрения узла D найдем усилия в стержнях Dq и Dp_1 . После этого из рассмотрения узла q будут найдены усилия в стержнях qr и qp_1 . Таким же образом найдутся усилия в соответствующих стержнях грани ABA_1B_1 . Определение давлений на опоры может быть также выполнено без всяких затруднений.

Если силы приложены не только в узле A , но также и в узлах B , C , D , то наметенным здесь способом можно определить усилия, вызываемые каждой из сил в отдельности, и потом получить путем суммирования полные усилия в стержнях.

При расположении сил в верхних узлах a , b , c и d придется начать расчет с определения усилий в стержнях верхнего яруса. Усилия эти явятся внешними силами для

нижнего яруса системы. Усилия, вызванные в стержнях нижнего яруса силами, приложенными в A, B, C и D , мы уже умеем находить, и нам остается рассмотреть лишь случай действия сил в таких промежуточных узлах, как l, q, r и t .

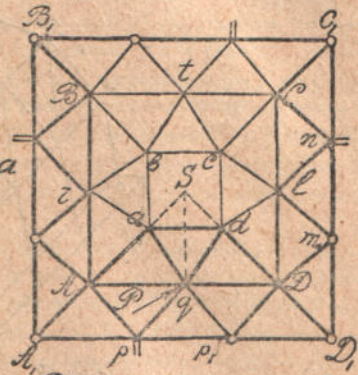
Предположим, что сила P любого направления приложена в узле q (черт. 456); эта сила должна уравновешиваться усилиями в стержнях aq и dq верхней грани и усилиями в стержнях Aq, Dq, qr и qr_1 , расположенных в плоскости нижней грани AA_1DD_1 . Выделяя из системы треугольник adq , мы путем прежних рассуждений заключаем, что усилия, приложенные к вершинам a и d , направлены по aA и dD .

В точку S , где эти направления пересекаются, должна идти равнодействующая усилий в стержнях aq и dq . Определив направление Sq , мы обращаемся теперь к узлу q и заданную силу P разлагаем на две составляющие. Одну направим по линии Sq , а другую расположим в плоскости грани AA_1DD_1 . Первая составляющая даст нам после надлежащего разложения, усилия в стержнях aq и dq , и далее из условий равновесия узлов a и d мы найдем усилия aA, aA_1 и dD, dD_1 . Усилия стержней aA и dD явятся для нижнего яруса внешними силами, приложенными в узлах A и D . Эти силы вызовут усилия во всех стержнях нижнего яруса, отмеченных жирными линиями на фигуре a . Как находить эти усилия, уже было рассказано выше.

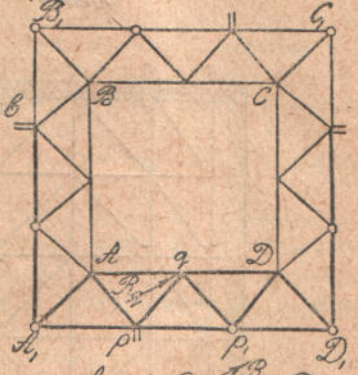
Обратимся теперь к составляющей R_q , лежащей в плоскости грани AA_1DD_1 (фиг. b). Для определения усилий, вызываемых этой составляющей, мы выделим из системы часть ADp_1r_1 (фиг. c). На основании прежних рассуждений заключаем, что равнодействующие усилий, приложенных к вершинам A и D , имеют направления AA_1 и DD_1 . Усилия же, приложенные в p и p_1 , направлены по линии A_1D_1 . Если мы силу R_q разложим обычным способом на направления AA, DD_1 и A_1D_1 (фиг. c), то составляющие, направленные по AA_1 и DD_1 , дадут нам сразу усилия в соответствующих стержнях, и мы из рассмотрения узлов A и D найдем усилия в стержнях Aq, Ap, Dq и Dp_1 . После этого из рассмотрения узла q найдем усилия в стержнях qr и qr_1 . Вычисление усилий в прочих стержнях не представит после этого никаких затруднений. Стержни, в которых при действии составляющей R_q получаются усилия, отличные от нуля, отмечены на фигуре b жирными линиями.

231. Наметьте ход расчета пространственного покрытия системы Фöррля (черт. 457).

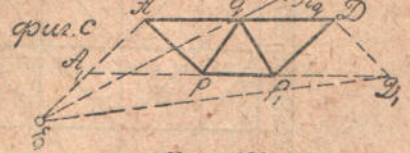
Вид этой системы в аксонометрических проекциях представлен на фигуре b . В плане та же система представлена на фиг. a . На фигурах c и d представлено устройство опор на поперечных стенах здания, причем числа, поставленные у этих опор, обозна-



фиг. а



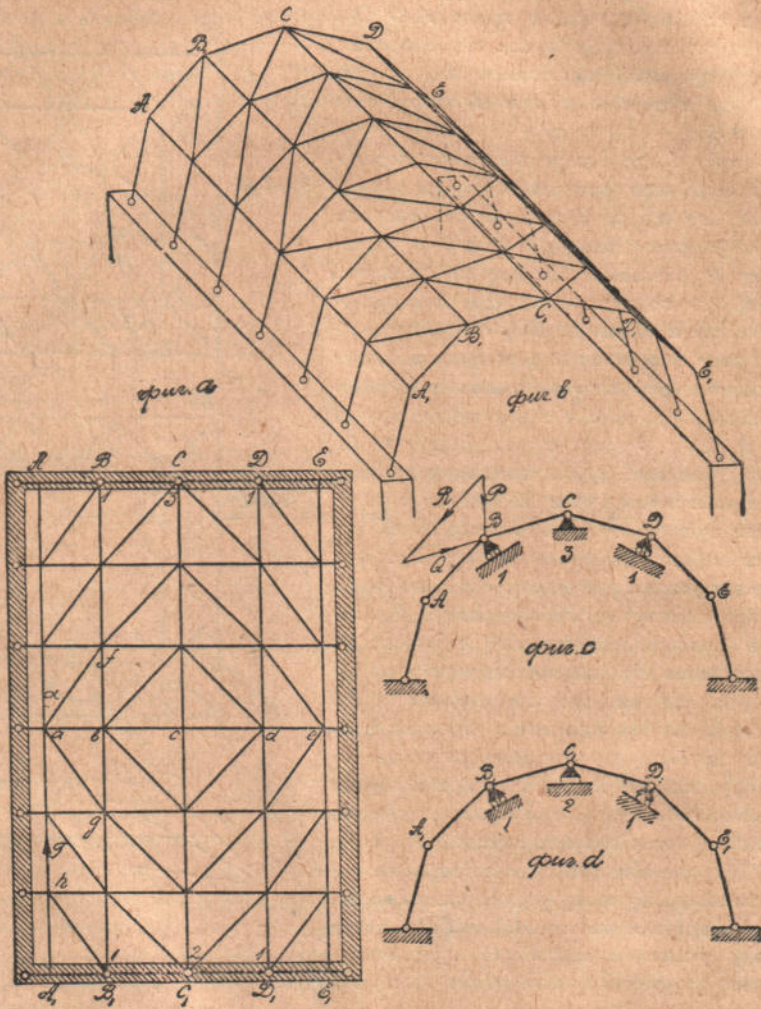
фиг. б



фиг. в

Черт. 456.

чают числа опорных стержней, могущих заменить каждую из опор. Опора C неподвижна. Опора C_1 расположена на цилиндрических катках, ось которых перпендикулярна к продольным сторонам здания. Остальные опоры расположены на шаровых катках. Число опорных стержней, соответствующих продольным стенам здания, равно 14. Общее число



Черт. 457.

опорных стержней равно $14 + 5 + 4 = 23$. Число стержней системы равно 82, следовательно, общее число всех стержней $82 + 23 = 105$ равно утроенному числу 35 узлов системы.

Покрытие составлено из жестких плоских ферм, которые вследствие указанного выше закрепления точек C и C_1 имеют у опорного многоугольника $ABCDE$ неподвижную, а у многоугольника $A_1B_1C_1D_1E_1$ — подвижную опоры. Что данная система геометрически неизменяема, проще всего доказать способом нулевых нагрузок. При отсут-

ствии внешних сил усилия в отдельно направленных брусках ab , bc , cd и de равны нулю. Нулю равны также усилия во всех опорных стержнях продольных стен. Обращаемся теперь к стержням фермы ABA_1B_1 . Исходя из условий равновесия узла a , заключаем, что сходящиеся к этому узлу раскосы должны иметь усилия, равные по величине и противоположные по знаку. Если мы через S обозначим усилие в раскосе af , принадлежащем половине фермы $abAB$, то в раскосе ag , принадлежащем части фермы abA_1B_1 , будет усилие $-S$. На основании рассмотрения других узлов фермы ABA_1B_1 заключаем, что во всех раскосах половины $abAB$ должно быть одно и то же усилие S , а в раскосах половины abA_1B_1 — усилие $-S$. Если мы теперь разрежем рассматриваемую ферму ABA_1B_1 продольным сечением и все усилия в перерезанных стержнях спроектируем на направление AA_1 , то из условия равновесия отсеченной части AA_1 заключаем, что усилие S должно равняться нулю, и, следовательно, в нуль обращаются усилия во всех брусках рассматриваемой фермы. Таким же образом докажем равенство нулю усилий всех прочих стержней пространственной системы.

Для определения усилий, вызываемых в стержнях покрытия каким-либо внешними силами, например, вертикальной силой P , приложенной в узле b , мы воспользуемся способом разложения пространственной системы на плоские фермы. Разлагая силу P на составляющие Q и R (фиг. с), лежащие в плоскостях ферм ABA_1B_1 и BCB_1C_1 , мы сводим задачу об определении стержневых усилий к расчету двух плоских ферм раскосного типа. Ферма ABA_1B_1 будет находиться под действием силы R . Соответствующие опорные давления отчасти передадутся на опоры B и B_1 , отчасти при посредстве стержней BC и B_1C_1 передадутся на опоры C и C_1 . Ферма BCB_1C_1 будет подвергаться действию силы Q . Для получения усилий в стержнях пояса BB_1 , являющегося общим для обеих ферм, придется суммировать усилия, получаемые при расчете каждой из ферм. Намеченный здесь ход расчета применим и в том случае, когда сила P не вертикальна, но лежит в плоскости перпендикулярной к продольным ребрам покрытия.

При произвольном направлении силы P мы разлагаем ее на две составляющих. Одну из этих составляющих направляем по соответствующему ребру, а другую перпендикулярно этому ребру. Тогда усилия, вызываемые второй составляющей в стержнях системы, могут быть найдены намеченным выше способом, и нам остается рассмотреть лишь усилия, вызываемые силой, направленной по ребру.

Если сила действует по ребру CC_1 , то она передается неподвижной опоре C . Отличными от нуля будут лишь усилия в стержнях ребра CC_1 , лежащих между точкой C и точкой приложения силы. При действии продольной силы по ребру BB_1 , появятся усилия лишь в стержнях плоской фермы BCB_1C_1 . Усилия эти могут быть найдены одним из тех приемов, которыми мы пользовались при расчете плоских ферм. Наконец, при действии силы по ребру AA_1 возникнут усилия в стержнях плоских ферм ABA_1B_1 и BCB_1C_1 . Пользуясь соображениями, приводимыми выше для случая нулевых нагрузок, заключаем, что усилия во всех раскосах фермы ABA_1B_1 будут по абсолютному значению равны

$\frac{T}{b \cos \alpha}$, где T — величина приложенной в узле b продольной силы (фиг. а). В части $abAB$ усилия в раскосах при выбранном направлении T будут сжимающими, а в части abA_1B_1 — растягивающими. Имея усилия в раскосах, легко находим усилия прочих стержней фермы ABA_1B_1 . Теперь остается рассчитать ферму BCB_1C_1 , для которой внешними силами являются уже найденные усилия, передаваемые стержнями фермы ABA_1B_1 .

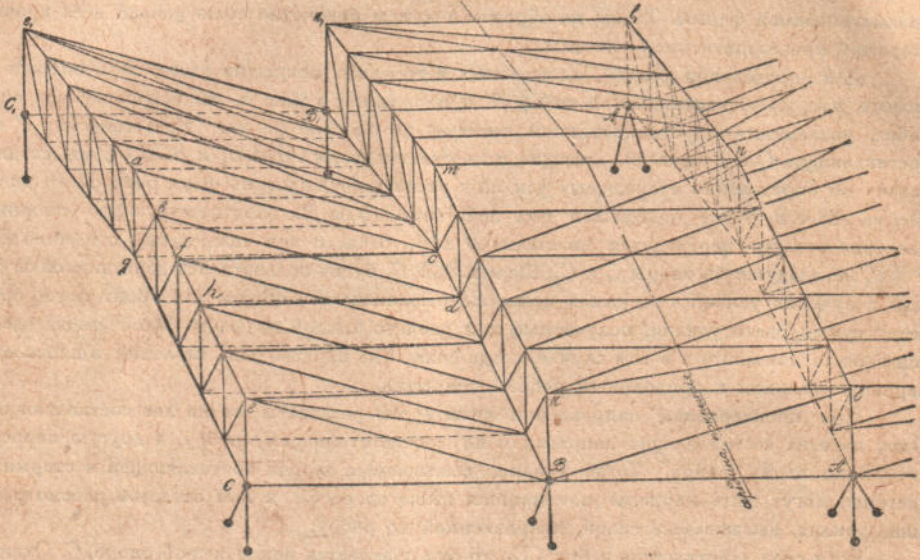
232. Доказать геометрическую неизменяемость и наметить ход расчета зубчатого пространственного покрытия системы Ясинского (черт. 458).

В точке A помещена неподвижная опора. В точках B и C помещены цилиндрические опоры, допускающие свободное перемещение в направлении ABC . В точках C_1 и B_1

помещены шаровые опоры, допускающие свободное перемещение по любому направлению в горизонтальной плоскости. Наконец, в точке A_1 помещена цилиндрическая опора, допускающая свободное перемещение в направлении, перпендикулярном к A_1C_1 . Общее число стержней равно $264 = 88 \times 3$, что удовлетворяет условию статической определенности.

Геометрическую неизменяемость системы докажем способом нулевых нагрузок. Рассматривая нижние узлы фермы CC_1e_1 заключаем, что в горизонтальных соединительных стержнях, отмеченных пунктиром, усилия равны нулю.

Теперь обращаемся к плоской грани $acVe$. Рассматривая узлы a и b , где все стержни, кроме одного, лежат в одной плоскости, заключаем, что при отсутствии внешних



Черт. 458.

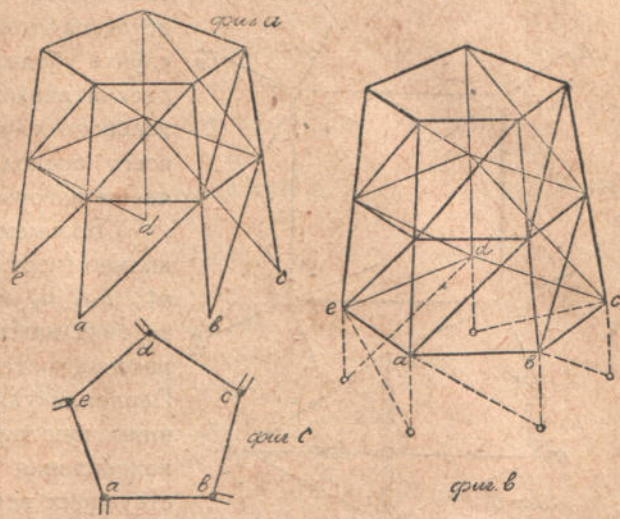
сил в отдельно направленных стержнях ac и bd усилия будут равны нулю. После этого на основании таких же рассуждений заключаем из условий равновесия узлов c и d , что в раскосах cf и hd усилия также равны нулю. Тем же путем найдем нулевые усилия для всех раскосов и распорок плоской фермы $acVe$. Применяя те же рассуждения, найдем нулевые усилия для раскосов и распорок граней acV_1e_1 , $klnm$ и $k_1l_1n_1m_1$. После этого у нас останутся плоские фермы CC_1e_1e , BB_1k_1k , имеющие в B и C опоры неподвижные и в точках V_1 и C_1 — подвижные. Очевидно, во всех стержнях этих ферм при отсутствии внешних нагрузок будут нулевые усилия. Нулевые усилия получатся также во всех опорных стержнях и соединительных стержнях AB , CB , B_1I , A_1V_1 , C_1V_1 , V_1I_1 .

Доказав таким образом геометрическую неизменяемость системы, обратимся к определению усилий, вызываемых в стержнях системы какой-либо нагрузкой, например, силой P , приложенной в узле f . Силу эту разлагаем на две составляющие, расположенные в плоскостях CC_1e_1e и $acVe$. Первая составляющая будет вызывать усилия в стержнях плоской фермы CC_1e_1e , имеющей в C неподвижную и в C_1 — подвижную опоры. Вторая составляющая будет вызывать усилия в стержнях плоской фермы $acVe$, которая будет иметь неподвижную опору в точке V и подвижную в точке e . В стержнях ребра ae усилия, найденные для обеих плоских ферм, придется суммировать.

§ 59. Расчет опорного кольца.

В тех пространственных системах, которые мы до сих пор рассматривали, обыкновенно предполагалось, что опорные стержни шарнирно прикреплены к неподвижным опорным точкам. При расположении опорных точек на стенах перекрываемого помещения такой прием закрепления невыгоден, так как при этом стены здания будут подвергаться вредному действию опрокидывающих усилий. На практике стремятся дать опорам такое устройство, чтобы стены здания не испытывали давлений, перпендикулярных к плоскости стены. Для этого неподвижные опорные подушки заменяют

цилиндрическими опорами, которые связывают между собой дополнительными стержнями, образующими опорное кольцо. Надлежащим выбором направления скольжения цилиндрических опор можно достигнуть того, чтобы горизонтальные составляющие опорных давлений оказывали по возможности менее вредные влияния на стены здания.



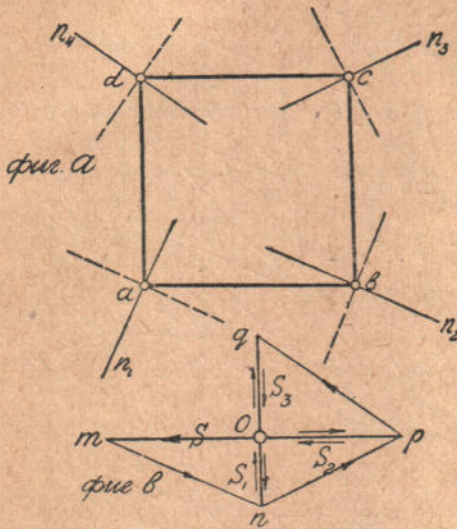
Черт. 459.

Возьмем, например, статически определимую систему, представленную на фиг. а чертежа 459. Чтобы придать горизонтальным составляющим опорных давлений определенные направления, по возможности более выгодные с точки зрения устойчивости стен, мы заменим неподвижные опорные точки *a, b, c, d, e* цилиндрическими опорами.

На фигуре *b* цилиндрические опоры заменены эквивалентными опорными стержнями, указанными пунктиром. Неподвижность системы обеспечена введением дополнительных стержней, образующих опорное кольцо. Если опорные стержни в каждой из вершин расположить в вертикальной плоскости, проходящей через одну из сторон кольца, то мы придем к расположению, указанному на фигуре *b*. При этом реактивные усилия, возникающие в вершинах *a, b, c, d, e*, будут для каждой вершины располагаться в плоскости одной из сходящихся к этой вершине стен. Направление скольжения опор отмечено на фигуре *c* черточками.

При расчете системы с опорным кольцом (фиг. *b*), мы можем пользоваться прежними способами. Начиная с верхнего кольца и переходя от узла к узлу, мы без затруднения найдем для любой внешней нагрузки усилия во всех стержнях, расположенных выше опорного кольца, и приведем таким образом, задачу к расчету кольца, вершины которого могут скользить по заданным направлениям.

Система, составленная из кольца и опорных стержней, по числу стержней будет статически определимой, так как на каждую вершину кольца придется по два опорных стержня и по одному стержню кольца, т.е. всего по три стержня. Нам остается только в каждом частном случае убедиться, не представляет ли рассматриваемая система исключительного случая. Для этого проще всего воспользоваться способом нулевых нагрузок.



Черт. 460.

Возьмем, например, квадратное кольцо (черт. 460, фиг. *a*). Линиями n_1 , n_2 , n_3 и n_4 обозначены следы вертикальных плоскостей, в которых располагаются опорные стержни. Перпендикулярные к этим направлениям пунктирные линии указывают направления скольжения соответствующих вершин квадрата. Предположим, что к кольцу никакие внешние силы не приложены. Если при этом удастся доказать, что усилия

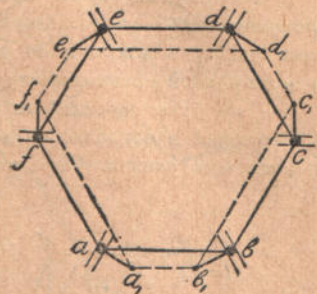
во всех стержнях кольца равны нулю, то это нам укажет на геометрическую неизменяемость системы.

Допустим, что в стержне ab действует растягивающее усилие S . Тогда из условия равновесия узла b путем построения треугольника omp (фиг. *b*) сейчас же найдем усилие S_1 в стороне bc и горизонтальную равнодействующую n_2 усилий в опорных стержнях шарнира b . Обращаясь теперь к шарниру c и пользуясь уже найденным значением усилия S_1 , мы построением треугольника opr найдем усилие S_2 в стороне cd . Наконец, из треугольника oq найдем S_3 — усилие в стержне ad . Если мы произвольно взятое усилие S изменим в каком-либо отношении, то в том же отношении изменятся также усилия S_1 , S_2 и S_3 . Следовательно, фигурой *b* можно пользоваться при всяком значении S , нужно только надлежащим образом менять масштаб чертежа. Обратимся теперь к узлу a . Хотя усилие S взято нами произвольно, но соотношение между S и S_3

найденно вполне точно, и им определяется для точки a направление равнодействующей усилий, заменяющих растянутые стержни ab и ad . Если это направление совпадет с направлением n_1 , то равнодействующая усилий S и S_3 уравнивается усилиями в опорных стержнях шарнира a , и, следовательно, в кольце возможны будут усилия, отличные от нуля при нулевых внешних нагрузках, что укажет на наличие исключительного случая.

При решении вопроса о геометрической неизменяемости опорного кольца можно пользоваться также способом изображающих точек, который мы применяли при расчете плоских ферм. Таким путем легко показать, например, что если опорное кольцо представляет собой правильный многоугольник, а линии скольжения направлены по биссекторам углов, то система будет подвижной—при четном числе сторон кольца и геометрически неизменяемой—при нечетном числе сторон.

Возьмем, например, опорное кольцо в виде правильного шестиугольника (черт. 461) с линиями скольжения, направленными по биссекторам. Изображающую точку a_1 выберем на перпендикуляре к линии скольжения шарнира a в произвольном расстоянии aa_1 . Тогда точка b_1 получится на перпендикуляре bb_1 к биссектору угла b путем проведения линии a_1b_1 , параллельной ab . Таким же путем получают точки c_1, d_1, e_1 и f_1 . То обстоятельство, что стороны фигуры $a_1b_1c_1d_1e_1f_1$ параллельны сторонам нашего шестиугольника, указывает нам на исключительный случай. Легко показать, что при нечетном числе сторон такой фигуры построить нельзя, и, следовательно, в этом случае опорный многоугольник представит собой геометрически неизменяемую систему.



Задачи: 233. Показать, что правильный шарнирный многоугольник с линиями скольжения, направленными перпендикулярно к биссекторам внутренних углов, будет представлять собой геометрически изменяемую систему.

Вопрос этот легко решается способом изображающих точек.

234. Определить усилия в стержнях опорного кольца $abcde$ при действии в шарнире a сосредоточенной силы P (черт. 462).

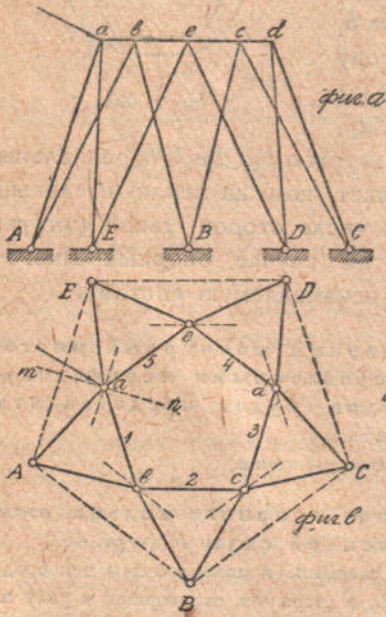
В точке приложения силы P сходятся четыре стержня, и потому путем непосредственного разложения мы не сможем найти усилий в стержнях, сходящихся к узлу a . Но если бы нам было известно направление равнодействующей усилий в двух каких-либо стержнях, то, разлагая силу P на направления этой равнодействующей и направления остальных двух стержней, мы сейчас же могли бы получить нужные нам усилия в стержнях.

Применяя способ, которым мы пользовались при исследовании неизменяемости шарнирного квадрата (черт. 460), мы можем найти направление равнодействующей тех

усилий, которые на шарнир a оказывают стержни ab и ae . Для этого выберем для усилия в стержне ab произвольное значение. Прикладывая это усилие к шарниру b и разлагая его на направление bc и направление перпендикуляра к линии скольжения шарнира b , получим усилие в стержне bc . Переходя теперь к шарниру c , мы таким же путем найдем усилие в стержне cd . Далее из рассмотрения равновесия узла d найдем усилие в стержне ed и из рассмотрения узла e — усилие в стержне ae . Так как мы избрали усилие в стержне ab совершенно произвольно, то и дальнейшие усилия, вообще говоря, не будут равняться тем действительным усилиям, которые вызывает в кольце сила P , но соотношение между усилиями будет то, которое имеет место и в действительности.

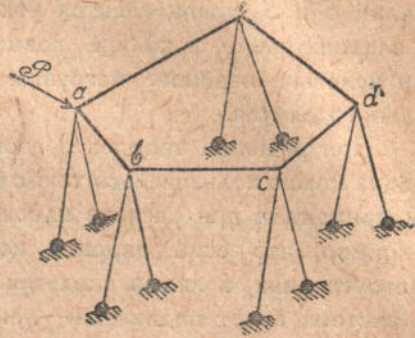
Поэтому, когда мы придем к узлу a и составим здесь равнодействующую найденного нами усилия в стержне ae и выбранного произвольно усилия в стержне ab , то хотя величина этой равнодействующей будет отличаться от действительной, но направление ее будет определено правильно, и мы, разлагая P на направление этой равнодействующей и направления двух опорных стержней, получим действительные значения нужных нам усилий. Определив усилия для одного узла, мы теперь без затруднений найдем и все прочие усилия.

Если к кольцу приложена не одна, а несколько сил, то мы наметенным здесь способом определяем усилия от каждой силы в отдельности, а потом уже суммируем найденные усилия.



Черт. 463.

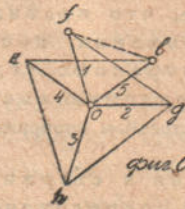
Получив эти направления, мы ведем дальнейший расчет так же, как и в предыдущей задаче. Выбираем усилие 1 в стержне ab кольца произвольным и тогда из условия равновесия узла b находим усилие 2 в стержне bc . На фигуре c построен соответствующий



Черт. 462.

235. Пользуясь наметенным способом расчета кольца, определить усилия, вызываемые в стержнях звездчатого купола (черт. 453) силою P .

В каждом из узлов a, b, c, d, e сходятся по четыре стержня, из которых два — опорные стержни и два — стержни многоугольника $abcde$. Равнодействующая усилий опорных стержней в каждом узле направится по линии пересечения плоскости этих стержней с горизонтальной плоскостью, в которой лежит многоугольник $abcde$. Соответствующие направления указаны в плане (фиг. b) пунктиром. Они, очевидно, получаютя параллельными сторонам многоугольника $ABCDD$, образованного опорными шарнирами. Получив

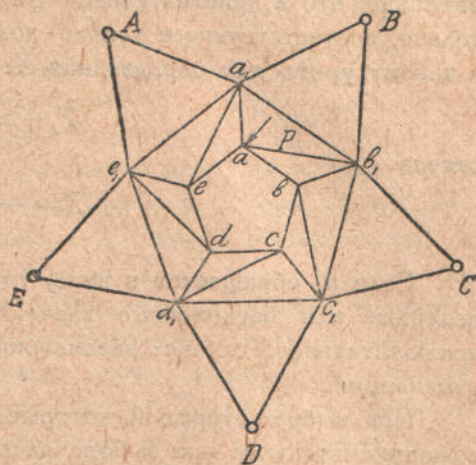


Фиг. С

щий треугольник ofg , из которого мы получаем не только усилие 2, но и равнодействующую fg усилий в опорных стержнях Ab и bB . Переходя теперь к узлу c , мы из соответствующего треугольника ogh находим усилие 3 в стержне dc и равнодействующую gh в опорных стержнях Bc и Cc . Построения для узлов d и e представлены на фигуре с треугольниками ohk и okl . Хотя усилие 1 выбрано нами произвольно, но полученные построением усилия в стержнях шарнирного многоугольника будут находиться между собой в таком же соотношении, как и действительные усилия. Поэтому, когда мы придем к шарниру a и сложим здесь усилия 1 и 5, то направление mn (фиг. b), параллельное направлению fl (фиг. c), даст нам действительное направление равнодействующей, и мы, разлагая P на направления mn , aA и aE , получим действительные значения усилий. Если бы верхнее кольцо представляло правильный многоугольник с четным числом сторон, то мы пришли бы к уже рассмотренному выше исключительному случаю. Покрытие представляло бы подвижную систему.

236. Определить усилия в стержнях купола, представленного на чертеже 464.

Нижний ярус покрытия представляет собой только что рассмотренный тип звездчатого купола, а верхний ярус образован по типу купола Шведлера. Расчет начинаем с верхнего яруса, в котором все усилия найдутся непосредственным разложением. Усилия стержней верхнего яруса являются внешними силами для нижнего яруса. Ход расчета этого последнего нами был уже изложен выше.



Черт. 464.

§ 60. Расчет пространственных систем способом замены стержней.

Общим способом для расчета пространственных систем является способ замены стержней, которым мы уже пользовались при определении усилий в стержнях плоских ферм (§ 18). Применяя этот прием, мы путем замены стержней обращаем заданную нам систему в систему простейшего типа. Если этого удастся достигнуть заменой одного только стержня, то в таком случае для определения усилий во всех стержнях нужно произвести два расчета. Первый расчет должен быть выполнен для получения усилий, вызываемых заданными внешними силами в стержнях той простейшей системы, к которой мы приходим путем замены стержня. Эти усилия мы будем вообще обозначать через T_i . Значение соответствующего усилия в заменяющем стержне обозначим через T_e . Второй расчет производим для оценки влияния удаленного стержня. Мы устраняем все внешние силы и вместо удаленного стержня прилагаем к соответствующим узлам две прямопротивоположные силы, равные

единице. Пусть u_i и u_e обозначают для этого состояния системы усилие в каком-либо стержне порядка i и в заменяющем стержне. Если теперь мы обозначим через X действительное усилие в том стержне, который мы должны удалить при замене, то на основании двух произведенных расчетов общая формула для действительного усилия S_i в каком-либо стержне напишется так:

$$S_i = T_i + X \cdot u_i \quad (a).$$

Применяя эту формулу к заменяющему стержню и принимая во внимание, что в действительной ферме этого стержня нет, и, следовательно, соответствующее усилие должно равняться нулю, мы приходим к такому уравнению для определения X :

$$T_e + u_e X = 0 \quad (b),$$

откуда

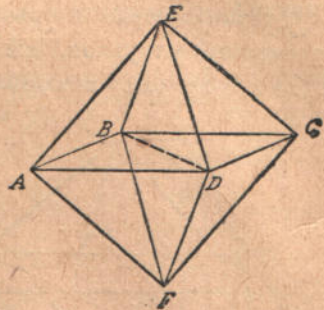
$$X = -\frac{T_e}{u_e}.$$

Если u_e обращается в нуль, то усилия в стержнях получают неопределенные или бесконечные значения, что нам укажет на наличие исключительного случая: рассматриваемая система будет геометрически изменяемой.

При выборе стержней, которые должны быть удалены при преобразовании системы, и при выборе расположения заменяющих стержней, мы будем следовать такому порядку. Прежде всего отбрасываем в заданной системе узлы с тремя стержнями, если такие узлы в системе имеются. Соответствующие отбрасываемым стержням усилия могут быть найдены непосредственным разложением. Эти усилия будут рассматриваться как внешние силы для оставленной части системы. Обращаясь теперь к этой части системы, выбираем в ней один из узлов с четырьмя стержнями или, если такого узла не имеется, один из узлов с пятью стержнями и удалением одного или двух стержней получаем узел с тремя стержнями. Удаляем этот узел, а за ним и все те узлы, в которых при последовательном удалении будет оставаться лишь по три стержня. Если в результате этого мы вновь получим систему, у которой не будет узлов с тремя стержнями, то с ней повторяем описанную выше операцию, пока в конце концов мы не придем к подвижной системе. В эту систему вводим заменяющие стержни так, чтобы получить геометрически неизменяемую систему простейшего типа.

Поясним сказанное примерами. Пусть нам дана система, стержни которой расположены по ребрам октаэдра (черт. 465). По числу стержней эта система как сетчатая является статически определимой, но она не принадлежит к классу простейших: в ней нет ни одного узла с тремя

стержнями. Преобразуем эту систему в простейшую путем замены стержней. Возьмем один из узлов с четырьмя стержнями, например, узел E и удалим из него стержень EC . Далее, устраняем три оставшиеся стержня ED , EB и EA и узел A с тремя стержнями AB , AD и AF . Таким путем мы приходим к подвижной системе, составленной из двух треугольников BCF и DCF . Чтобы обеспечить геометрическую неизменяемость этой системы, достаточно вставить стержень BD , указанный на чертеже пунктиром.

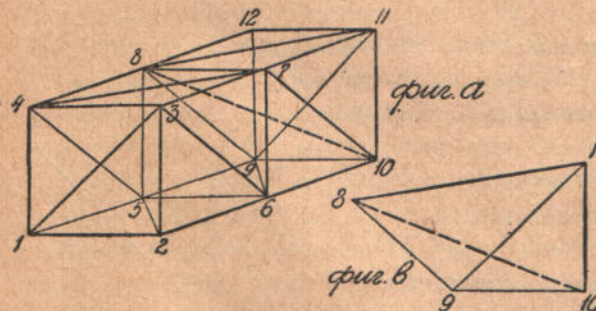


Черт. 465.

Следовательно, в данном случае мы заданную систему обращаем в простейшую путем одной замены: стержень EC заменяем стержнем BD . Конечно, нужное нам преобразование может быть выполнено различными путями. Вместо стержня EC можно устранить любой другой стержень системы. Вместо диагонали BD можно поставить диагональ AC и т. д.

Если принять сделанное выше преобразование и вместо стержня EC приложить в узлах E и C две прямопротивоположные силы, равные единице и направленные от узлов, то легко путем простых рассуждений убедиться, что в стержнях прямоугольника $ABCD$ будут действовать сжимающие усилия, и что заменяющий стержень BD испытывает растяжение. То обстоятельство, что заменяющий стержень напряжен, указывает на геометрическую неизменяемость заданной нам системы.

В качестве второго примера рассмотрим сетчатую систему, представленную на чертеже 466. Если в этой системе удалить узел 12,



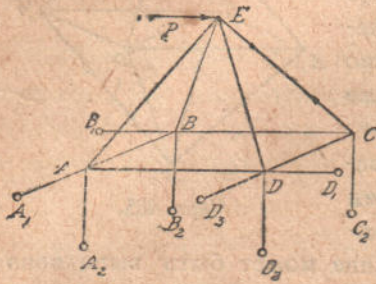
Черт. 466.

то остальные узлы будут иметь четыре или более стержней. Мы начнем преобразование с узла 1, удалив в нем диагональ 1—3. После этого может быть отброшен узел 1, как узел с тремя стержнями. Далее придется удалить узел 2, так как в нем останется лишь три стержня, потом

узел 3, 4 и т. д., пока мы не дойдем в порядке номеров до узла 8. Тогда у нас останется подвижная система, представленная на фигуре b и состоящая из двух треугольников. Установкой заменяющего стержня 8—10 мы обращаем эту систему в геометрически неизменяемую. Таким

образом и в этом случае заданная система обращается в простейшую путем одной замены: диагональ 1—3 заменена стержнем 8—10, указанным на фигуре *a* пунктиром.

Прикладывая в узлах 1 и 3 две прямопротивоположные силы, направленные от узлов, мы на основании рассмотрения узлов 1, 2, 3, 6 и 7 сейчас же заключаем, что стержень 1—2 сжат, 2—6 сжат, 3—6 сжат, 6—7 растянут, 6—10 сжат и 7—10 сжат. Теперь из рассмотрения узла 10 заключаем, что в заменяющем стержне будет действовать растягивающее усилие. Отличие от нуля усилия в заменяющем стержне укажет нам на геометрическую неизменяемость заданной системы.



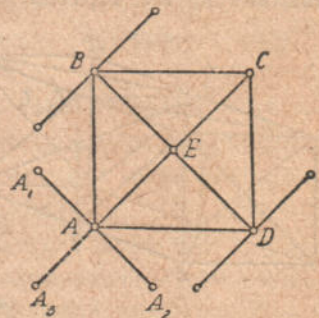
Черт. 467.

Расчитаем способом замены стержней пирамидальное покрытие с квадратным основанием, представленное на чертеже 467. Устраним стержень *EC*. Тогда

в узлах *E* и *C* останется лишь по три стержня. Удаляя их, найдем, что в узле *B* остается лишь три стержня. Удаляя эти стержни и потом стержни узла *A*, мы приходим к узлу *D*, прикрепленному к фундаменту лишь двумя стержнями. Чтобы устранить подвижность, придется вместо отброшенного стержня *EC* ввести заменяющий опорный стержень, указанный на чертеже пунктиром.

В полученной таким путем простейшей системе мы без затруднения найдем усилия T_i , вызываемые силой P . Если эта сила параллельна *AD*, то отличными от нуля будут усилия в стержнях треугольника *AED* и в опорных стержнях, сходящихся к узлам *A* и *D*.

Для получения усилий u_1 и u_2 отбрасываем силу P и вместо стержня *EC* прикладываем силы, равные единице, в узлах *E* и *C*. Сразу видно, что приложенная в узле *C* сила вызовет сжатие в стержне *DC* и в заменяющем опорном стержне *DD₃*. Следовательно, заданная система геометрически неизменяема.



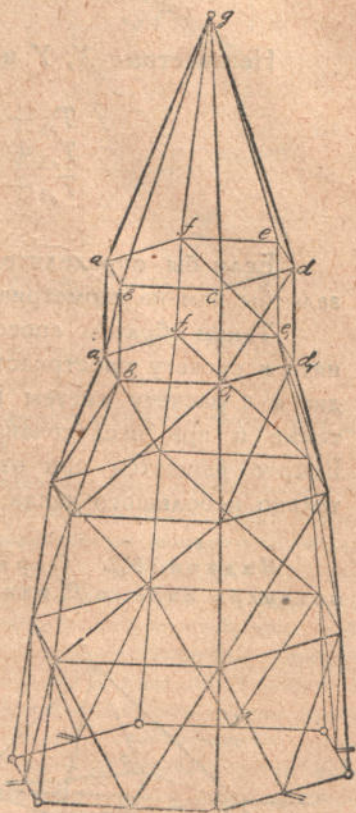
Черт. 468.

Мы расположили опорные стержни системы так, что линии скольжения опорных шарниров имеют в каждой из вершин *A*, *B* и *D* направление, совпадающее со сторонами квадрата *ABCD*. Заметим, что когда шарнирный правильный многоугольник с четным числом сторон связан как в рассматриваемом примере с ребрами пирамидального покрытия, он представляет собой геометрически неизменяемую систему и в том

случае, если направления скольжения вершин многоугольника совпадают с биссекторами соответствующих углов. Обращаясь к нашему примеру, расположим опорные стержни так, как это показано в плане на чертеже 468. Чтобы доказать геометрическую неизменяемость системы, воспользуемся способом замены стержней.

Выбросим стержень EC и взамен его вставим опорный стержень AA_3 , намеченный пунктиром. Прикладывая в узлах E и C , две противоположные силы, равные единице и направленные от узлов, мы вызовем растягивающие усилия в стержнях AE, AB и AD . В таком случае из условия равновесия узла A сейчас же заключаем, что в заменяющем стержне AA_3 , усилие не будет равно нулю, что указывает на геометрическую неизменяемость системы.

В качестве более сложного примера рассмотрим купольное покрытие, представленное на чертеже 469. Нижний ярус этого покрытия представляет собой рассмотренную ранее систему Föppl'я-Schlink'a. Вторым и третьим ярусами образованы по системе Шведлера. На основании ранее сделанных исследований заключаем, что нижние три яруса купола представляют геометрически неизменяемую систему, и нам, следовательно, нужно доказать лишь неизменяемость фонаря, составленного из шестигранной пирамиды, поставленной на шестигранную призму. Воспользуемся для этого способом замены стержней. Выбрасывая три какие-либо ребра пирамиды и вставляя вместо них три диагонали bc_1, de_1 и fa_1 , мы получим простейшую систему, порядок образования которой — следующий. Сначала к неизменяемой системе прикрепляются узлы b, d и f , каждый тремя стержнями. Потом к этим узлам и к неизменяемой системе прикрепляются узлы a, e и c , каждый тремя стержнями. Наконец, тремя оставшимися стержнями пирамиды прикрепляется узел g .



Черт. 469.

Получена простейшая система может быть расчленена способом непосредственного разложения. Пусть T_i усилие, вызываемое в каком-либо стержне i заданными внешними силами, и T_{e1}, T_{e2}, T_{e3} , соответствующие усилия в заменяющих стержнях. Обозначим через $u_i, u_{e1}, u_{e2}, u_{e3}$ усилия, вызываемые в тех же стержнях силами единица, приложен-

ными вместо удаленного стержня, действительное усилие которого равно X . Точно так же обозначим через $v_i, v_{e1}, v_{e2}, v_{e3}$ и $w_i, w_{e1}, w_{e2}, w_{e3}$ усилия, вызываемые в тех же стержнях силами единицы, приложенными вместо удаленных стержней с действительными усилиями Y и Z . Тогда действительное усилие в каком-либо стержне i представится так:

$$S_i = T_i + u_i X + v_i Y + w_i Z.$$

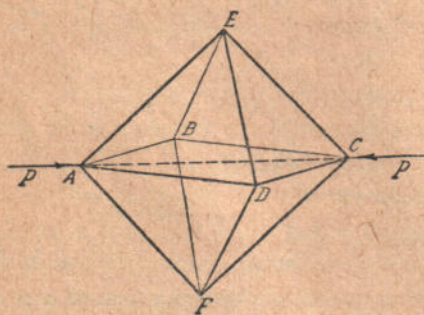
Неизвестные X, Y и Z найдутся из таких ур-ий:

$$\begin{aligned} T_{e1} + u_{e1} X + v_{e1} Y + w_{e1} Z &= 0; \\ T_{e2} + u_{e2} X + v_{e2} Y + w_{e2} Z &= 0; \\ T_{e3} + u_{e3} X + v_{e3} Y + w_{e3} Z &= 0. \end{aligned}$$

Если бы определитель этих ур-ий обратился в нуль, то это указало бы нам на геометрическую изменяемость системы.

Таким образом способ замены стержней можно с выгодой применять к расчету пространственных систем, так как при этом задача сводится к расчету систем простейшего типа. Выгодно пользоваться им также и при исследовании геометрической неизменяемости системы. Вопрос решается при этом путем составления определителя сравнительно небольшого числа ур-ий.

Задачи: 237. Определить усилия, вызываемые в стержнях октаэдра силами P , направленными по диагонали квадрата $ABCD$ (черт. 470).



Черт. 470.

Обращаем заданную систему в простейшую, заменяя стержень EC диагональю AC . Легко видеть, что в данном случае усилия T_i равны нулю и $T_e = -P$.

Прикладывая теперь в узлах E и C две прямопротивоположные силы, равные единице и направленные от узлов, найдем усилия u_i и u_e . Пусть сторона квадрата $ABCD$ равна 4 м и высота каждой из правильных пирамид $ABCDE$ и $ABCDF$ равна 3 м. При действии по линии EC сил единицы, у нас получится в стержнях AE, AF и FC растяжение, равное единице, и в стержнях BE, DE, DF и FB — сжатие, равное единице.

Произведя разложения в узлах B и D , найдем, что в сторонах квадрата действуют растягивающие усилия, равные $\frac{4}{4,12}$. Сжимающее усилие u_e в диагонали AC получится равным:

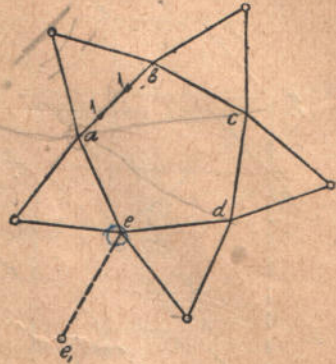
$$u_e = -\frac{4}{4,12} \cdot 2\sqrt{2} \approx -2,75.$$

Следовательно, действительное усилие в стержне EC будет равно:

$$X = -\frac{T_e}{u_e} = -\frac{\rho}{2,75}.$$

238. Рассчитать способом замены стержней звездчатый купол (черт. 471).

Легко видеть, что здесь мы приходим к простейшей системе одной заменой. Удаляя одну из сторон верхнего пояса, например, сторону ab и вводя заменяющий стержень ee_1 , мы получаем систему, образованную путем последовательного присоединения всякого нового узла тремя стержнями. Начинаем с узла e , присоединенного к земле 3 стержнями. Далее узел a присоединяем двумя стержнями к земле и третий стержнем к узлу e . Подобным же образом присоединяем узлы d , c и, наконец, узел b . Дальнейший расчет будет заключаться в определении усилий T_i и T_e , вызываемых в полученной простейшей системе внешними нагрузками, и в вычислении усилий u_i и u_e , вызываемых в той же системе силами единица, приложенными в узлах a и b .



Черт. 471.

239. Наметить ход расчета пространственного покрытия, представленного в плане на чертеже 472.

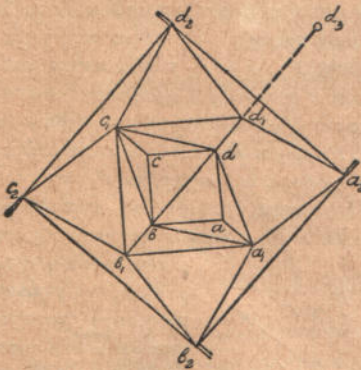
При намеченных на чертеже направлениях скольжения цилиндрических опор шарнирный квадрат $a_2b_2c_2d_2$ представляет собой геометрически неизменяемую систему. К неподвижным опорным точкам a_2, b_2, c_2 и d_2 присоединены шарниры a_1, b_1, c_1 и d_1 верхнего квадрата.

Если бы мы вставили стержень a_1d_1 , то первый ярус рассматриваемого пространственного покрытия представил бы собой рассмотренный выше тип звездчатого купола, который при квадратном основании является системой геометрически изменяемой. В нашей системе вместо стороны a_1d_1 вставлена диагональ bd в верхнем основании второго яруса, образованного по типу купола Шведлера. Чтобы обратить заданную систему в простейшую, достаточно произвести лишь одну замену, например, диагональ bd заменить опорным стержнем d_1d_3 . Определив в полученной простейшей системе усилия T_i и T_e от внешних сил и усилия

u_i, u_e — от сил единица, приложенных в b и a , мы будем иметь все величины необходимые для определения действительных усилий.

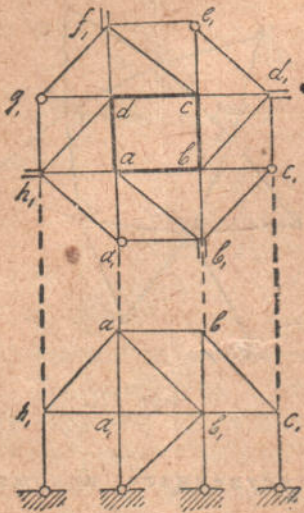
240. Доказать геометрическую неизменяемость покрытия Zimmermann'a (черт. 473).

Верхнее кольцо системы представляет собой прямоугольник, а нижнее — восьмиугольник. Вместо диагонали верхнего основания и пяти диагоналей нижнего основания

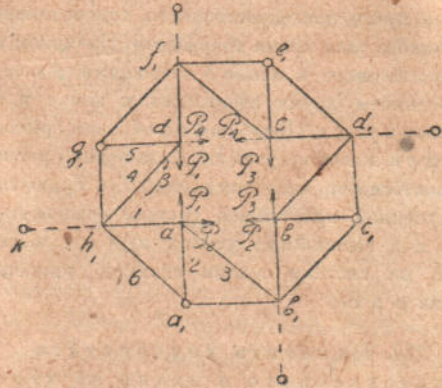


Черт. 472.

введено шесть дополнительных опорных стержней. Следовательно, по числу стержней система является статически определимой. Для выяснения геометрической неизменяемости системы воспользуемся способом Геннеберга. Выбросим все четыре стержня верхнего кольца и заменим их четырьмя дополнительными опорными стержнями, указанными пунктиром (черт. 474). Таким образом приходим к пространственной системе простейшего типа, образованной следующим образом. Сначала взяты узлы b_1 , d_1 , f_1 , h_1 нижнего кольца, и каждый из них прикреплен к земле тремя опорными стержнями. После этого присоединены остальные четыре узла нижнего кольца, каждый тремя стержнями, и, наконец, узлы a , b , c и d верхнего кольца.

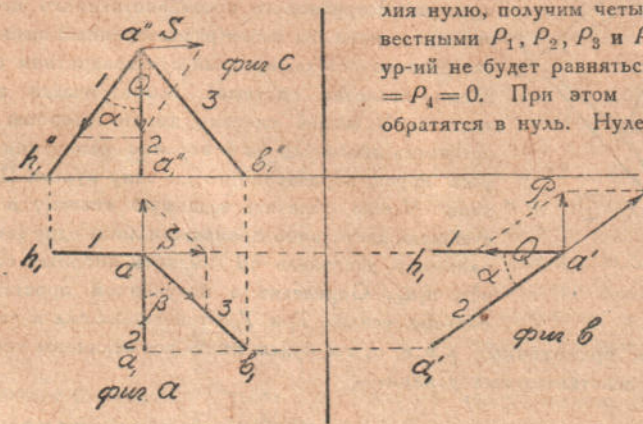


Черт. 473.



Черт. 474.

При исследовании геометрической неизменяемости системы способом Геннеберга, нужно выяснить прежде всего, какие усилия в заменяющих опорных стержнях, указанных на чертеже пунктиром, будут вызваны силами P_1 , P_2 , P_3 и P_4 , приложенными вместо удаленных стержней. Приравнявая эти усилия нулю, получим четыре уравнения с четырьмя неизвестными P_1 , P_2 , P_3 и P_4 . Если определитель этих уравнений не будет равняться нулю, то $P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = 0$. При этом усилия во всех стержнях обратятся в нуль. Нулевым нагрузкам будут соответствовать нулевые усилия, что укажет нам на геометрическую неизменяемость системы.



Черт. 475.

Разложения на соответствующие три направления, или аналитически, — способом проекций. Мы остановимся на втором способе. Пусть α обозначает угол, составляемый на-

ответствовать нулевые усилия, что укажет нам на геометрическую неизменяемость системы.

Определение усилий начнем с узла a , где сходятся три стержня 1, 2 и 3 (черт. 474). Усилия, вызываемые в этих стержнях силой P_1 , можно найти или графически — путем

правлениями стержней 1 и 2 с вертикалью и β — угол между стержнями 2 и 3. Силу P_1 разлагаем сначала на направление стержня 2 и вертикальное направление (фиг. б, черт. 475). Таким образом получим

для стержня 2 растягивающее усилие $\frac{P_1}{\sin \alpha}$
и вертикальную силу $Q = P_1 \operatorname{ctg} \alpha$.

Вертикальную силу Q , в свою очередь, разлагаем на направление стержня 1 и на горизонтальное направление (фиг. с). Получаем

в стержне 1 сжатие $-\frac{Q}{\cos \alpha} = -\frac{P_1}{\sin \alpha}$

и горизонтальную силу $S = P_1$.

Наконец, силу S разлагаем на направление 2 и 3 (фиг. а). Соответствующие усилия получают значения:

$$P_1 \operatorname{ctg} \beta \quad \text{и} \quad -\frac{P_1}{\sin \beta}.$$

Окончательно для усилий 1, 2 и 3 получаем значения:

$$-\frac{P_1}{\sin \alpha}, \quad P_1 \operatorname{ctg} \beta + \frac{P_1}{\sin \alpha}, \quad -\frac{P_1}{\sin \beta}.$$

В стержнях 4 и 5 (черт. 474) та же сила P_1 вызовет усилия:

$$-\frac{P_1}{\sin \beta} \quad \text{и} \quad P_1 \operatorname{ctg} \beta.$$

Подобным же образом могут быть найдены усилия, вызываемые в стержнях верхнего яруса силами P_2, P_3, P_4 .

Обратимся теперь к усилиям в возмещающих стержнях. Усилие S в опорном стержне kh_1 (черт. 474), мы найдем, проектируя на направление kh_1 , усилия S_4, S_1 и S_6 в стержнях 4, 1 и 6. Таким образом получаем:

$$S = S_4 \cos \beta \sin \alpha + S_1 \sin \alpha + S_6 \cos 45^\circ.$$

На основании предыдущего рассмотрения усилий, вызываемых силами P_1 , заключаем, что:

$$S_4 = -\frac{P_4}{\sin \beta} - \frac{P_1}{\sin \beta}; \quad S_1 = -\frac{P_1}{\sin \alpha};$$

$$S_6 = -S_2 \frac{\sin \alpha}{\cos 45^\circ} = -\left(P_1 \operatorname{ctg} \beta + \frac{P_1}{\sin \alpha} + P_2 \operatorname{ctg} \beta\right) \frac{\sin \alpha}{\cos 45^\circ}.$$

Следовательно,

$$S = -2P_1 (1 + \operatorname{ctg} \beta \sin \alpha) - P_2 \operatorname{ctg} \beta \sin \alpha - P_4 \operatorname{ctg} \beta \sin \alpha.$$

Подобные же выражения могут быть составлены для усилий в трех других возмещающих стержнях. Приравнявая эти усилия нулю, придем к линейным ур-ням такого вида:

$$2P_1 (1 + \operatorname{ctg} \beta \sin \alpha) + P_2 \operatorname{ctg} \beta \sin \alpha + P_4 \operatorname{ctg} \beta \sin \alpha = 0.$$

Отличие от нуля определителя этих ур-ий укажет нам на геометрическую неизменяемость исследуемой системы.

§ 61. Статически непреодолимые пространственные системы.

Когда пространственная система, заключающая в себе n узлов, имеет больше, нежели $3n$ стержней, то число ур-ий, которые нам даст

система для определения стержневых усилий, будет меньше числа неизвестных. Система является статически неопределимой. При расчете такой системы мы будем пользоваться теми общими приемами, которые были изложены в связи с расчетами плоских статически неопределимых систем.

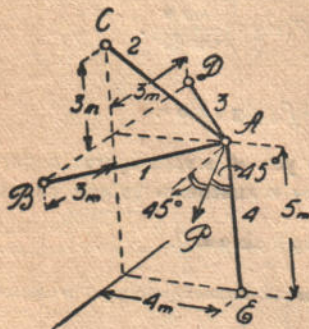
Применяя к решению этих задач способ Максвелля-Мора, мы устраняем сначала лишние бруски и определяем усилия S_0 , возникающие в стержнях основной системы под действием заданных нагрузок. Далее изучаем влияние каждого из удаленных лишних брусков. Для этого устраняем внешние нагрузки и поочередно, вместо каждого из лишних брусков, прикладываем по две прямопротивоположные силы, равные единице. Пусть S_1, S_2, \dots усилия в стержнях, соответствующие каждому из этих состояний. Тогда, обозначая через X, Y, Z, \dots действительные усилия в лишних брусках, получим для действительного усилия S в каком-либо бруске системы такое общее выражение

$$S = S_0 + S_1 X + S_2 Y + S_3 Z + \dots \quad (1)$$

Если через r обозначить величину, характеризующую растяжимость брусков, то, применяя начало возможных перемещений поочередно к каждому из напряженных состояний, соответствующих усилиям S_1, S_2, S_3, \dots и к действительным перемещениям системы, определяемым усилиями (1), мы получим систему линейных ур-ий такого вида:

$$\sum S_i (S_0 + S_1 X + S_2 Y + S_3 Z + \dots) r + 1 \cdot X r = 0 \quad (2)$$

Число этих ур-ий будет равняться числу лишних брусков, и мы из них можем найти неизвестные лишние усилия X, Y, Z, \dots . После этого по ф-ле (1) найдутся усилия и во всех прочих брусках системы.



Черт. 476.

Применим намеченный здесь общий ход расчета к решению такого простейшего примера (черт. 476). Найти усилия, возникающие в стержнях 1, 2, 3 и 4 под действием силы $P=1$ т, приложенной в узле А. Для упрощения расчетов предположим, что все стержни имеют одно и то же поперечное сечение и одну и ту же длину, равную, как видно из чертежа, 5 м. Стержни 1 и 3 располагаем в горизонтальной плоскости, а стержни 2 и 4 — в вертикальной плоскости CAE , делящей пополам угол BAD . Силу P расположим в вертикальной плоскости, параллельной BCD под углом 45° к AE . Так как узел А прикреплен к земле четырьмя стержнями, то мы имеем статически неопределимую систему с одним лишним бруском. За лиш-

мый прием вертикальный стержень AE . Устраняя его и принимая во внимание, что сила P лежит в плоскости BAC , сейчас же путем построения соответствующего треугольника сил найдем усилия S_0 , приведенные в нижеследующей таблице.

Далее устраняем внешнюю нагрузку и вместо стержня AE приложим в A направленную вертикально вниз силу, равную 1 т. Соответствующие усилия S_1 также весьма просто находятся. Они приведены в третьем столбце таблицы. Ур-ие для определения лишней неизвестной напишется в данном случае так:

$$\Sigma S_1 (S_0 + S_1 X) r + 1 \cdot X \cdot r = 0,$$

откуда

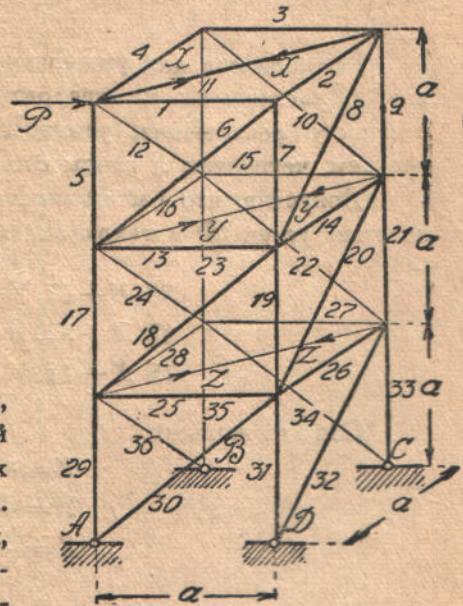
$$X = - \frac{\Sigma S_1 S_0}{\Sigma S_1^2 + 1}.$$

Пользуясь четвертым и пятым столбцами таблицы, найдем:

$$X = - \frac{2,95}{5,17} = - 0,750 \text{ т.}$$

После этого по ф-ле (1) сейчас же находятся усилия S во всех стержнях системы. Усилия эти приведены в последнем столбце нашей таблицы.

Номера стержней	S_0 т	S_1 т	$S_0 S_1$ т ²	S_1^2 т ²	S т
1	$-\frac{5}{6}\sqrt{2}$	$-\frac{10}{12}$	0,983	0,694	- 0,705
2	$+\frac{5}{6}\sqrt{2}$	$+\frac{5}{3}$	1,967	2,780	+ 0,230
3	0	$-\frac{10}{12}$	0	0,694	+ 0,475
4	0	—	0	—	- 0,570
$\Sigma =$			2,95	4,17	



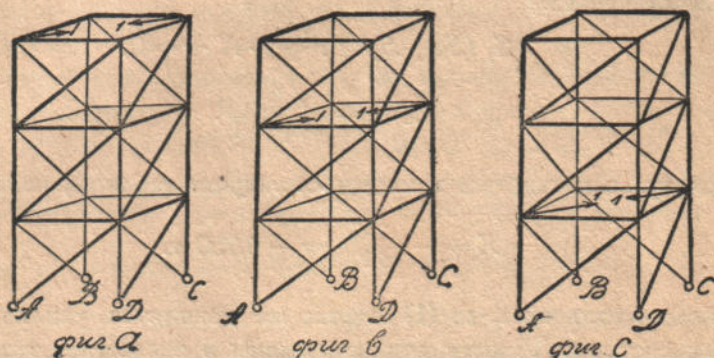
Черт. 477.

В качестве более сложной задачи, рассмотрим случай, представленный на чертеже 477. При двенадцати узлах заданная система имеет 39 стержней. За лишние стержни примем диагонали, расположенные в горизонтальных поперечных сечениях. Пусть X , Y и Z обозначают усилия, возникающие в этих диагоналях под действием силы P , равной 1 т.

Для разыскания лишних неизвестных X , Y и Z применим способ Максвелла-Мора. Пусть S_0 — усилия, вызываемые в системе P при отсут-

ствии лишних брусков, и S_1, S_2, S_3 , — усилия, соответствующие фиктивным состояниям, представленным на чертеже 478. Тогда ур-ия для определения лишних неизвестных напишутся так:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma S_1 (S_0 + S_1 X + S_2 Y + S_3 Z) r + 1 \cdot X r_x &= 0 \\ \Sigma S_2 (S_0 + S_1 X + S_2 Y + S_3 Z) r + 1 \cdot Y r_y &= 0 \\ \Sigma S_3 (S_0 + S_1 X + S_2 Y + S_3 Z) r + 1 \cdot Z r_z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3).$$



Черт. 478.

Предполагая для упрощения, что каждая из граней призмы разделяется распорками на квадраты, мы легко найдем, путем непосредственного разложения, усилия S_0, S_1, S_2 и S_3 , приведенные во втором, третьем, четвертом и пятом столбцах нижеследующей таблицы.

Допустив, что растяжимость всех брусков системы одинакова, мы получим ур-ия (3) в таком виде:

$$\begin{aligned} 88 X + 47 Y + 15 Z &= -22 \sqrt{2}; \\ 47 X + 32 Y + 11 Z &= -12 \sqrt{2}; \\ 15 X + 11 Y + 8 Z &= -4 \sqrt{2}. \end{aligned}$$

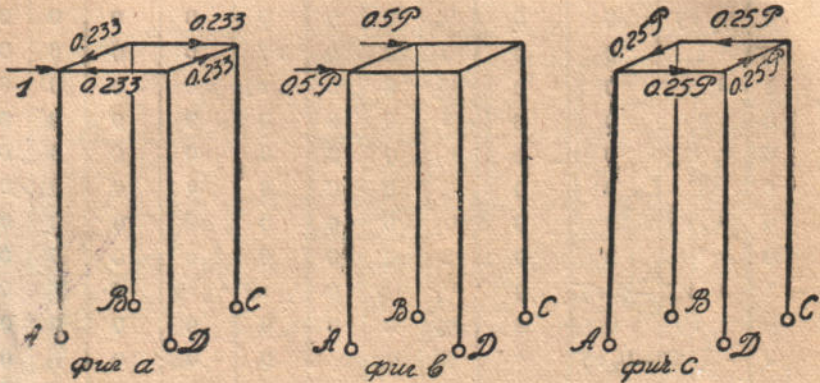
Отсюда находим:

$$\begin{aligned} X &= -0,2327 \sqrt{2}; \\ Y &= -0,0215 \sqrt{2}; \\ Z &= -0,0341 \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Прилагая к верхним узлам системы усилия, соответствующие лишней неизвестной X , получим у узлов верхнего многоугольника силы, указанные на чертеже 479 (фиг. а). Это распределение сил приблизительно соответствует тому, которое получается при сложении сил, указанных на фигурах b и c .

№№	S_0	S_1	S_2	S_3	S_1^2	S_2^2	S_3^2	$S_0 S_1$	$S_0 S_2$	$S_0 S_3$	$S_1 S_2$	$S_1 S_3$	$S_2 S_3$
1	-1	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	0	0	0
6	$\sqrt{2}$	1	0	0	1	0	0	$\sqrt{2}$	0	0	0	0	0
7	-1	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	0	0	0	0	0
8	0	-1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
11	0	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	0	0	0
12	0	-1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
13	-1	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0
14	0	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	0	0	0
15	0	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0
16	0	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	0	0	0
17	1	$\frac{3}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	0	$\frac{9}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	0	$\frac{3}{2}$	0	0
18	$\sqrt{2}$	1	1	0	1	1	0	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	0	1	0	0
19	-2	$-\frac{3}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	0	$\frac{9}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$3\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	0	$\frac{3}{2}$	0	0
20	0	-1	-1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0
21	0	$\frac{3}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	0	$\frac{9}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	$\frac{3}{2}$	0	0
22	0	1	1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0
23	0	$-\frac{3}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	0	$\frac{9}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	$\frac{3}{2}$	0	0
24	0	-1	-1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0
25	-1	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
26	0	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0
27	0	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
28	0	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0
29	2	$\frac{5}{2}\sqrt{2}$	$\frac{3}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{25}{2}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{1}{2}$	$5\sqrt{2}$	$3\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\frac{15}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$
30	$\sqrt{2}$	1	1	1	1	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1	1	1
31	-3	$-\frac{5}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{3}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{25}{2}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{15}{2}\sqrt{2}$	$\frac{9}{2}\sqrt{2}$	$\frac{3}{2}\sqrt{2}$	$\frac{15}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$
32	0	-1	-1	-1	1	1	1	0	0	0	1	1	1
33	0	$\frac{5}{2}\sqrt{2}$	$\frac{3}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{25}{2}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{15}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$
34	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1
35	0	$-\frac{5}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{3}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{25}{2}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{15}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$
36	0	-1	-1	-1	1	1	1	0	0	0	1	1	1
				$\Sigma =$	87	31	7	$22\sqrt{2}$	$12\sqrt{2}$	$4\sqrt{2}$	47	15	11

Следовательно, благодаря наличности лишних брусков сила $P=1$ т, приложенная в плоскости передней грани системы, распределится поровну на две параллельные грани (фиг. *b* черт. 479), и при этом добавится еще скручивание системы парой сил $M = \frac{Pa}{2}$. Этому кручению будут соответствовать усилия, указанные на фигуре *c* (черт. 479).



Черт. 479.

Полученное здесь распределение усилий в большой степени зависит от жесткости лишних брусков. Если допустить, что лишние диагонали легко растяжимы, то тогда, очевидно, наша система по условиям работы будет близка к системе, не имеющей лишних брусков, и сила P будет передаваться главным образом на переднюю грань. Допустим, например, что растяжимость лишних брусков в десять раз больше растяжимости необходимых брусков.

Тогда

$$r_x = r_y = r_z = 10r,$$

и ур-ия (3) получат такой вид:

$$97X + 47Y + 15Z = -22\sqrt{2};$$

$$47X + 41Y + 11Z = -12\sqrt{2};$$

$$15X + 11Y + 17Z = -4\sqrt{2}.$$

Отсюда:

$$X = -0,1900\sqrt{2};$$

$$Y = -0,0687\sqrt{2};$$

$$Z = -0,0233\sqrt{2}.$$

Если взять еще меньшую жесткость для лишних брусков и положить

$$r_x = r_y = r_z = 100 r,$$

то мы будем иметь такие ур-ия:

$$187 X + 47 Y + 15 Z = -22 \sqrt{2};$$

$$47 X + 131 Y + 11 Z = -12 \sqrt{2};$$

$$15 X + 11 Y + 107 Z = -4 \sqrt{2}.$$

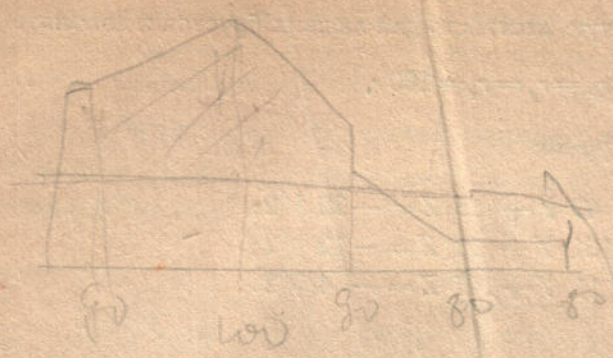
Отсюда найдем:

$$X = -0,1030 \sqrt{2};$$

$$Y = -0,0532 \sqrt{2};$$

$$Z = -0,0175 \sqrt{2}.$$

Здесь, благодаря большой растяжимости лишних диагоналей, сила P передается, главным образом передней грани системы.



1250

30

