Міністерство освіти і науки України
Національний університет водного господарства та природокористування
Кафедра комп'ютерних технологій та економічної кібернетики

04-05-45М

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

з навчальної дисципліни

«Системний Аналіз»

для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня
за освітньо-професійною програмою «Інформаційні системи та технології»
спеціальності 126 «Інформаційні системи та технології»
денної та заочної форми навчання

Рекомендовано науково-методичною радою
з якості ННІ АКОТ
Протокол № 1 від 08.10.2020 р.

Рівне – 2020

Конспект лекцій з навчальної дисципліни «Системний аналіз» для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня за освітньо-професійною програмою «Інформаційні системи та технології» спеціальності 126 «Інформаційні системи та технології» денної та заочної форми навчання [Електронне видання] / Грицюк П. М. – Рівне : НУВГП, 2020. – 83 с.

Укладач: Грицюк П. М., доктор економічних наук, професор, завідувач кафедри комп'ютерних технологій та економічної кібернетики.

Відповідальний за випуск: Грицюк П. М., д.е.н., професор, завідувач кафедри комп'ютерних технологій та економічної кібернетики.

Керівник групи забезпечення спеціальності Гладка О. М.

З М І С Т

ПЕРЕДМОВА

Сьогодні ми є свідками тісної інтеграції в усіх сферах людської діяльності. Сучасні економічні, політичні, соціальні та інформаційні процеси активно взаємодіють між собою; більш взаємозалежними стають держава і суспільство, виробництво і наука, культура та побутова сфера. Більшість сучасних фірм, організацій, підприємств, корпорацій інтегровані в системи міжнаціональних економічних зв’язків, у транснаціональні компанії, в інформаційні системи, що обслуговують світовий ринок.

Можна говорити про настання епохи наукового, системно-міждисциплінарного підходу до проблем науки, освіти, техніки і технологій, епохи, що концентрує увагу не тільки на матеріально-енергетичних, але і на системно-міждисциплінарних аспектах, побудові та дослідженні системно-інформаційної картини світу, про настання епохи системних парадигм.

За таких умов при вивченні економічних процесів недостатнім є застосування лише традиційних аналітичних методів дослідження, необхідні цілісні, комплексні та всебічні підходи, що акцентують увагу не тільки на певному економічному об’єкті, а й на дослідженні навколишнього середовища, в якому він функціонує. Одним із таких методів є системний підхід, що розглядає економіку як складну цілісну систему в різних аспектах: як сукупність елементів різних рівнів агрегування (макрорівень, галузі та сектори економіки, мікрорівень), у розрізі сфер діяльності (виробнича і невиробнича) та функцій (маркетинг, фінанси, аудит тощо).

Для фахівців з інформаційних систем та технологій важливим є вирішення проблеми ефективного управління великими інформаційними системами, до складу яких входять сотні комп'ютерів, терабайти інформації і різноманітного системного та прикладного програмного забезпечення. Для таких складних систем використання класичних аналітичних методів є неможливим, а натурні експерименти дуже обмежені. Тому як основні для дослідження і проектування таких систем використовуються методи системного аналізу, а експерименти реалізуються в комп'ютерному варіанті шляхом побудови та використання системних імітаційних моделей.

Головною метою вивчення дисципліни «Системний аналіз» є формування системного мислення, усвідомлення необхідності застосування системного підходу до завдань управління та прийняття рішень, до дослідження складних явищ і процесів у соціально-економічних та інформаційних системах.

В рамках дисципліни «Системний аналіз» вивчаються основні поняття та методології системного аналізу складних взаємопов'язаних об'єктів різної природи, які функціонують у відповідності до множини суперечливих критеріїв і цілей, за наявності суттєвих ризиків та невизначеностей. В даному посібнику розглядаються засади теорії систем, методологія системних досліджень, методи представлення даних, інформаційні аспекти вивчення систем, методи аналізу і прогнозування часових рядів, статистичні методи обробки даних, системний аналіз транспортних мереж, умови стійкості систем, моделювання та прогнозування систем методами нелінійної динаміки, методи прийняття рішень за умов невизначеності та підходи до управління системами.

Метою даної дисципліни є надати практичні навички застосування системної методології для аналізу, моделювання та прогнозування складних об’єктів, побудови комп'ютерних інформаційних систем; розвинути практичні навички логіко-фізичного моделювання та проектування інформаційних систем; ознайомити здобувача з методологією дослідження систем при обмеженому обсягу інформації.

Теоретичним фундаментом для вивчення дисципліни «Системний аналіз» є вища математика, дискретний аналіз, теорія ймовірностей і математична статистика, економічна кібернетика, дослідження операцій і математичне програмування, теорія графів тощо. Технічні засоби системного аналізу і управління – сучасна комп’ютерна техніка та інформаційні системи.

Тема 1. СИСТЕМИ

1.1.Поняття системи

1.2. Аналіз і синтез систем

1.3.Прямі та зворотні зв'язки

1.4.Кібернетичні системи

1.5.Структура зв'язків типової економічної системи

1.1. Поняття системи

Під **системою *S*** розуміють множину взаємозв'язаних елементів, які поєднані за деякими системотвірними ознаками та підпорядковані спільній меті.

Зовнішнє середовище E даної системи складають елементи, які не належать цій системі. Система взаємодіє із зовнішнім середовищем за допомогою «входів» і «виходів».

Вхід системи — це канали, через які у систему S надходить речовина, енергія, фінанси, інформація. Вхід системи відображає зміни навколишнього середовища і їх вплив на функціонування системи.

Речовина, енергія чи інформація зазнають у системі деяких перетворень і після цього надходять у зовнішнє середовище через «вихід». Позначивши перетворюючі відношення $\boldsymbol{R}$, запишемо систему у символьному вигляді: $Y\boldsymbol{R}X$. Тобто систему розглядають як перетворювач входів на виходи: $Y = \boldsymbol{R}X$.

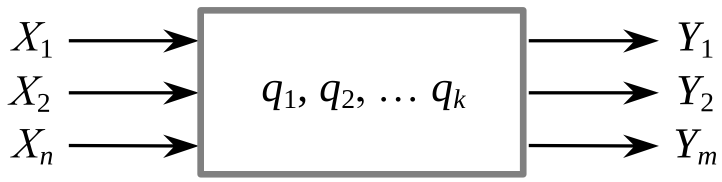


Рис. 1.1. Графічна схема системи

Вихід системи — це канали впливу системи S на зовнішнє середовище. Вихід системи – це результуючі значення параметрів системи, які є наслідком процесів, які відбулися у системі. Функціонування системи – це переробка вхідних параметрів при заданих умовах зовнішнього середовища в результуючі значення параметрів системи.

Стан системи характеризується значеннями її основних показників $q_1, q_2, \dots, q_k$. Ці показники відображають найбільш суттєві властивості системи на даний момент часу.

Функціонування системи як єдиного цілого забезпечується зв'язками між її елементами. Зв'язки можуть бути енергетичними, речовинними, інформаційними; внутрішніми і зовнішніми; прямими і зворотними.

1.2. Аналіз і синтез системи

При аналізі систем вирішують два основних завдання: **ідентифікація структури системи та ідентифікація динаміки системи**. Більшість систем є динамічними, тобто змінюють свій стан з бігом часу. Динаміка системи може бути детермінованою (визначеною, прогнозованою) або стохастичною (випадковою).

Структура системи – це внутрішня організація системи, яка відображає спосіб взаємодії утворюючих елементів. Для визначення структури системи необхідно провести її послідовну декомпозицію (аналіз), тобто виділити в ній підсистеми всіх рівнів та їх елементи. При дослідженні систем над ними виконують операції **аналізу та синтезу**.

Для визначення структури системи необхідно провести її послідовну декомпозицію, тобто виділити в ній підсистеми всіх рівнів та їх елементи. **Аналіз** – це фактичне, або умовне (мислене) розділення системи на складові елементи з метою вивчення структури системи. Після виділення окремих елементів вивчаються способи взаємодії між ними. Це допомагає зрозуміти принципи організації та функціонування системи. Після завершення аналізу виконують операцію синтезу – об'єднання окремих компонентів в єдину систему. **Синтез** може здійснюватися або як фізичне об'єднання елементів, або ж мислено. Мислений синтез системи може бути виконаний у вигляді математичної моделі, яка описує взаємодію елементів системи математичним способом. Будуючи математичну модель системи у вигляді рівнянь, ми відтворюємо логіку поведінки цієї системи, тобто здійснюємо теоретичний синтез системи.

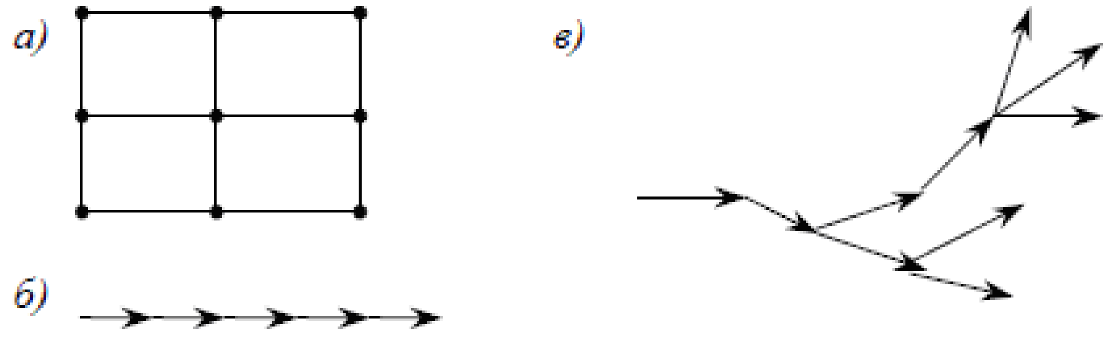


Рис. 1.2. Графи, що відповідають матричній (а), лінійній (б) та деревоподібній (в) структурам

Структура системи — це сукупність її елементів і зв’язків між ними, по яких можуть проходити сигнали і впливи. Функціонування системи як єдиного цілого забезпечується зв’язками між її елементами. Зв'язки можуть бути енергетичними, речовинними, інформаційними та фінансовими. Найчастіше використовують графічне зображення структури систем, використовуючи для цього структурні та функціональні схеми.

Прості системи містять небагато елементів і мають лінійну структуру. Більш складні системи мають ієрархічну структуру або ж вигляд мережі. В останньому випадку ефективним способом описання структури системи є матриця зв’язків (матриця інцидентності). Якщо структура системи невідома, використовують модель «чорний ящик». Це означає, що досліднику невідома внутрішня структура системи, але є деякі відомості про механізм дії системи.

1.3. Прямі та зворотні зв’язки

Управління системою пов’язане з поняттями прямого і зворотного зв’язку.

Прямий зв'язок відображає перетворення вхідних сигналів на результуючі в процесі функціонування системи.

Прямі зв'язки поділяються на: прямий послідовний зв'язок (а); паралельний розподільчий зв'язок (b); паралельний з'єднуючий зв'язок (с) (рис. 2.3).

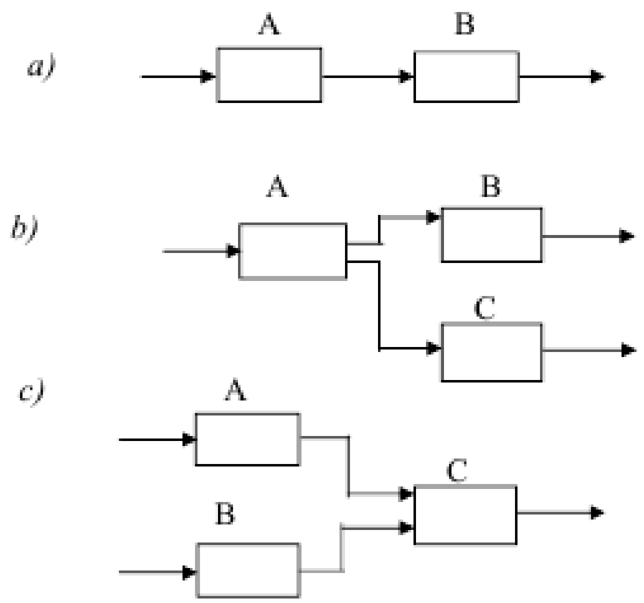


Рис.1.3. Приклади системи прямих зв’язків

Зворотний зв'язок – це зв'язок між виходом і входом системи. Він може здійснюватись безпосередньо або через інші елементи системи. Якщо зворотний зв'язок зменшує дію вхідного впливу на вихідну величину, його називають негативним; якщо зворотний зв'язок збільшує цей вплив – позитивним. Негативний зворотний зв'язок сприяє відновленню рівноваги в системі, порушеної зовнішньою дією. Приклади: регулюючий отвір у ванні, кількість хижаків та жертв, збільшення банківської ставки та активність економіки.

Схема дії зворотного зв'язку:

1. Порівняння даних на вході з результатами на виході і порівняння з плановими показниками.
2. Оцінювання величини відхилення від плану та вияснення причин.
3. Виробка рішення, метою якого є ліквідація відхилень.
4. Коректуюча дія на вхід.

Позитивний зворотний зв'язок підсилює відхилення від рівноважного стану. Приклад: банківський відсоток на депозити. Позитивні зворотні зв'язки можуть відігравати як позитивну, так і негативну роль. Наприклад, зі зростанням інвестицій зростає ефективність виробництва, а це сприяє залученню нових інвестицій, які стимулюють подальше зростання виробництва. Прикладом небажаної дії позитивних зворотних зв'язків є механізм розгортання гіперінфляційної спіралі, коли в нерівноважному стані економіки зростання цін через механізм причинно-наслідкових зв'язків спричиняє подальший виток зростання цін. Інші приклади – біржова та банківська паніка.

Важливим елементом управління є обмеження. **Обмеження** задає очікувані значення виходів, та узгоджує діяльність системи з вимогами споживачів. Для виконання обмежень необхідно здійснювати **контроль і управління.**

1.4. Складні системи

Системи можна розділити на **абстрактні** та **матеріальні**. Матеріальні системи **за походженням** можна поділити на **створені природою** (природні) і **створені людиною (штучні)**. Системи, створені людиною, поділяють на **формальні** (мови, математичні моделі) та **неформальні**. Неформальні системи поділяються на технічні та системи за участю людини (людино-машинні, соціально-економічні).

З точки зору взаємодії із зовнішнім середовищем системи поділяють на **відкриті та ізольовані (автономні)**. Ізольовані системи майже не взаємодіють із зовнішнім середовищем і з часом досягають стану рівноваги.

За рівнем складності системи поділяють на:

Прості - системи, що не мають розгалуженої структури, з невеликою кількістю взаємодіючих елементів.

Складні - системи з розгалуженою структурою і значною кількістю взаємодіючих елементів. Складні системи неможливо скомпонувати з окремих підсистем. Її можна зрозуміти лише аналізуючи різними методами – фізичними, хімічними, математичними. Приклад: людський мозок.

Властивість складності є однією з головних властивостей систем. Існують різні підходи до оцінки **складності системи**:

1. **алгоритмічна концепція**, що визначає складність як довжину алгоритму відтворення системи;
2. **теоретико-множинна концепція**, що ототожнює складність системи з числом її елементів;
3. **теоретико-інформаційна** концепція, що пов'язує складність системи з її ентропією.

У рамках теоретико-інформаційної концепції У.Р. Ешбі запропонував оцінювати складність через різноманітність системи, що кількісно оцінюється числом можливих станів системи n

$$H_m = \log n. \tag{1.1}$$

Оцінка складності Ешбі за числом станів не враховує ймовірність, з якою система може перебувати в даному стані. Нехай P_i є імовірність того, що система знаходиться в і-тому стані. Тоді для оцінки складності системи можна використовувати формулу К. Шеннона:

$$H = -\sum_{i=1}^{n} P_i \cdot \log_2 P_i. \tag{1.2}$$

Складні системи мають наступні властивості.

Властивість **взаємної автономності** елементів системи проявляється в тому, що кожному її елементу притаманні властивості системи в цілому.

Завершеність системи виявляється в тому, що вона не допускає приєднання нових елементів без руйнування цієї системи.

Емерджентність. Складна система має такі властивості, які не притаманні жодному з її елементів. Наприклад: колеса + двигун = рух транспортного засобу.

Синергізм. Ефективність спільного функціонування елементів системи є вищою, ніж сумарна ефективність ізольованого функціонування цих же елементів.

Системність. Кожну систему можна розглядати як підсистему іншої більш крупної системи. Кожен елемент системи в свою чергу є системою.

Історичність. Система не є незмінною. Вона виникає, функціонує, розвивається і гине.

Для складних систем притаманні властивості **системи до самозбереження**:

1. Здатність зберігати **рівноважний стан** незалежно від умов зовнішнього середовища (температура тіла людини).
2. Здатність самостійно утримувати основні параметри **в допустимих межах** (**гомеостаз**).
3. Здатність пристосовуватись до змін середовища за рахунок структурних перебудов.

Для складних систем може бути притаманна властивість лінійності (або нелінійності).

Лінійність чи нелінійність системи визначається її статичною характеристикою. Під статичною характеристикою системи розуміють зв'язок між величиною зовнішнього впливу $x(t)$ на систему (величиною вхідного сигналу) і максимальною величиною (амплітудою) вихідної характеристики y_m . Якщо функція $y_m = f(x)$ лінійна, то і система лінійна. Поняття «лінійності» означає наявність пропорційності між вхідним та вихідним сигналом. Прикладом лінійної системи є депозит у банку. Нехай банківський відсоток становить 20%. Якщо покласти у банк 1 000 гривень, то через рік вклад збільшиться до 1200 гривень, через два роки до 1400 гривень (формула простих відсотків). Тобто вклад буде зростати за законом

$$P = P0 * (1+0.2 * t). \quad (1.3)$$

Нелінійність характеристик і наявність запізнювання в реагуванні є ознакою нелінійності системи. Прикладом нелінійної системи є формула складних відсотків

$$P = P0 * (1+0.2)^t. \quad (1.4)$$

Різниця між простими та складними відсотками представлена на рис. 1.4.

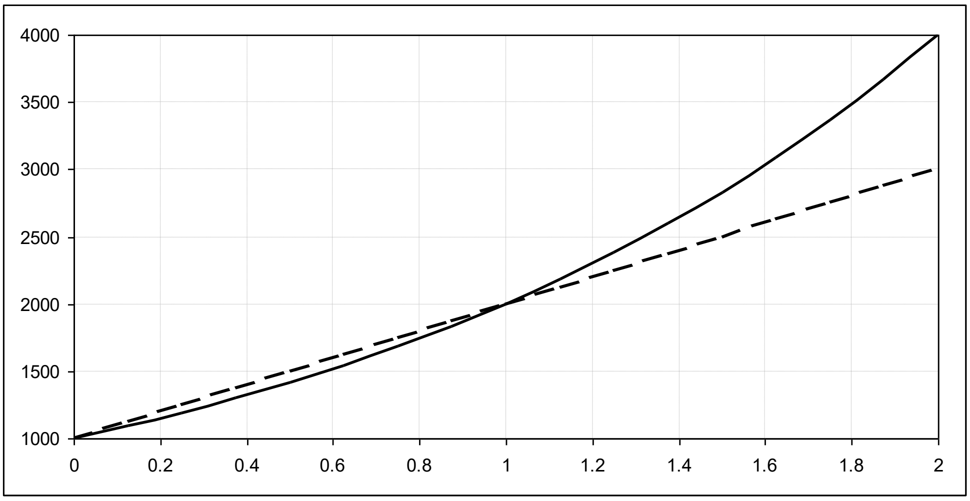


Рис.1.4. Приріст грошових коштів за формулою простих (штрихова лінія) та складних (суцільна лінія) відсотків

1.5. Синергетика

Синергетикою називають міждисциплінарний науковий напрямок, що вивчає закономірності процесів самоорганізації, еволюції та кооперації у складних системах. Мета синергетики полягає в побудові загальної теорії складних систем.

Особливе місце в синергетиці займають питання **спонтанного утворення впорядкованих структур** при умові, що вихідні системи знаходяться в нестійких станах. Згідно з висловом І. Пригожина, синергетика – це **«комплекс наук про виникаючі системи»**.

Синергетика вчить, що розвиток системи - це поетапне проходження **точок біфуркації (роздвоєння)**. Поблизу точок біфуркації спостерігається різке посилення **флуктуацій (коливань)** показників системи. Зона біфуркації характеризується принциповою непередбачуваністю - невідомо, чи стане подальший розвиток системи хаотичним, чи народиться нова, більш впорядкована структура.

Можливість спонтанного виникнення порядку з хаосу - найважливіший момент процесу самоорганізації у складній системі. Системи, що самоорганізуються – це системи, здатні протистояти ентропійним тенденціям, здатні адаптуватися до мінливих умов, перетворюючи при необхідності свою структуру.

Головні принципи синергетики

1) Принцип додатковості Н. Бора. У складних системах виникає необхідність поєднання раніше несумісних моделей і методів опису. Приклад: квантово-хвильовий дуалізм елементарних частинок (електрон).

2) Принцип спонтанного виникнення І. Пригожина. У складних системах можливі критичні стани, коли найменші відхилення можуть призвести до появи нових структур, повністю відмінних від попередніх (зокрема, катастрофи - ефекти «снігової кулі», «купа піску»).

3) Принцип несумісності Л. Заде. При зростанні складності системи зменшується можливість її точного описання. Точність і змістова зв'язність інформації стають несумісними характеристиками. Приклад: неможливість одночасного визначення координати і швидкості електрона.

4) Принцип відповідності. Мова опису складної системи повинна відповідати характеру наявної інформації (рівню знань або невизначеності). Точні логіко-математичні моделі не є універсальним підходом, часто необхідні наближені моделі та неформальні методи (приклад – нечітка логіка).

5) Принцип різноманітності шляхів розвитку. Розвиток складної системи є багатоваріантним. Розвиток складної системи пов'язаний з наявністю зон біфуркації - «розгалуження» можливих шляхів еволюції системи.

6) Принцип пульсуючої еволюції. Процес еволюції складної системи носить не поступальний, а циклічний характер: він поєднує етапи зростання різноманітності та етапи згортання різноманітності, фази зародження порядку, підтримки порядку та зменшення порядку. Відкриті складні системи пульсують: розбігання змінюється зближенням, послаблення зв'язків - їх посиленням тощо.

7) Закон простоти складних систем

Реалізується і виживає той варіант складної системи, який володіє найменшою складністю.

8) Теорема Геделя про неповноту. У багатьох теоріях (включають арифметику) завжди існують істинні твердження, які неможливо довести логічним шляхом опираючись на систему аксіом. Оскільки складні системи включають в себе елементарну арифметику, то при виконанні обчислень в них можуть виникнути тупикові ситуації (зависання).

9) Закон еквівалентності варіантів побудови складних систем. З ростом складності системи частка варіантів її побудови, близьких до оптимального варіанту, зростає.

Тема 2. МЕТОДИ ПРЕДСТАВЛЕННЯ ТА ОБРОБКИ ДАНИХ

2.1. Класифікація вимірювальних шкал
2.2. Неметричні шкали
2.3. Метричні шкали
2.4. Невизначеність даних
2.5. Проблеми, які виникають при обробці даних

2.1. Класифікація вимірювальних шкал

Для визначення стану системи необхідно оцінити (виміряти) значення її основних параметрів. В основі аналізу систем лежать вимірювання. Позначимо через $x_i, i = 1,\ldots,m$ спостережені властивості системи, а через $y_i, i = 1,\ldots,m$ - позначення для цих властивостей. Множина позначень, що використовуються для реєстрації станів об'єкта називається вимірювальною шкалою. Вимірювальні шкали в залежності від допустимих операцій розрізняються по їх силі. Найслабшими є номінальні шкали, а найсильнішими - абсолютні. **Виділяють три основні атрибути** вимірювальних шкал:

1. **впорядкованість даних** означає, що один пункт шкали, є більшим або меншим від іншого пункта;
2. **інтервальність пунктів шкали** означає, що інтервал між одною парою чисел є більшим або меншим інтервалу між іншою парою чисел;
3. **нульова точка** (точка відліку) означає, що шкала має точку відліку яка відповідає повній відсутності вимірюваної властивості.

Всі шкали поділяють на дві групи:

- якісні (неметричні) шкали, в яких відсутні одиниці вимірювань (номінальна і порядкова шкали);
- кількісні (метричні) - шкала інтервалів, шкала відношень і абсолютна шкала.

2.2. Неметричні шали

Шкала найменувань (**номінальна шкала**) - це скінченний набір позначень для різних станів об'єкта. При цьому відсутні головні атрибути вимірювальних шкал, а саме впорядкованість, інтервальність, нульова точка. Вимірювання полягає в тому, щоб визначити належність об’єкта до того чи іншого стану і запи-

сати це за допомогою символу, що позначає даний стан. Це найпростіша шкала, яка використовується лише з метою відрізнити один об'єкт від іншого.
Приклади:

- географічні назви, власні імена людей і т. д.;
- номери автомобілів, офіційних документів, номери на майках спортсменів.

Необхідність класифікації виникає і в тих випадках, коли класифіковані стани утворюють неперервну множину. Всю множину розбивають на декілька підмножин, які позначають деякими символами. Приклад. На олімпіаді з математики 5 учасників розділили перше місце, наступні 5 учасників розділили друге місце тощо. При обробці даних в номінальній шкалі, з даними можна виконувати тільки операцію перевірки їх співпадання чи неспівпадання.

Наступна за силою після номінальної шкали - **порядкова шкала**. У цій шкалі присутня упорядкованість, але відсутні атрибути інтервальності та нульової точки. Вимірювання в шкалі порядку може застосовуватися у таких ситуаціях:

- коли необхідно впорядкувати об'єкти в часі або просторі.
- коли потрібно впорядкувати об'єкти відповідно до якоїсь якості.

Між значеннями порядкової шкали існують такі типи відношень як: а) рівність або нерівність значень; б) відношення «більше» або «менше» між різними значеннями змінних.
Порядковою шкалою користуються при оцінці виступів гімнастів, оцінці фігурного катання. Але тут не можна говорити про те, що спортсмен, який одержав 10 балів, в 2 рази краще виступав від того, котрий одержав 5 балів.

Типові види порядкових шкал

Позначивши класи символами й установивши між цими символами відносини порядку, ми отримаємо **шкалу простого порядку**. Приклади: призові місця в змаганнях («золото», «срібло», «бронза»), соціальний статус («незаможні», «середній клас», «еліта»).

Різновидом шкали простого порядку є **опозиційні шкали**. Вони утворюються з пар антонімів, що стоять на різних кінцях шкали. (сильний-слабкий, теплий-холодний).

Іноді виявляється, що деякі пари не можна впорядкувати і вони вважаються рівними A ≥ B і B ≤ A, тобто A = B. Відповідна шкала називається **шкалою слабкого порядку**.

Приклад: родинні зв'язки (мати = батько > син = дочка, дядько = тітка < брат = сестра тощо).

Якщо у множині є об'єкти, які неможливо порівняти між собою, тобто ні A ≥ B, ні B ≤ A, у такому випадку говорять про **шкалу часткового порядку**. Наприклад, людина не в змозі оцінити, який саме з двох товарів йому більше подобається (мобільний телефон або плеєр); який вид улюблених занять (футбол чи слухання музики).

Модифіковані порядкові шкали

Інколи використовують модифікації порядкової шкали, які її посилюють.

Приклади:

1. **Шкала твердості.** У 1811 р. німецький мінералог Ф. Моос запропонував встановити шкалу твердості, ввіши десять її градацій. За еталони прийнято такі мінерали за зростанням твердості: 1 - тальк, 2 - гіпс, 3 - кальцій, 4 - флюорит, 5 - апатит, б - ортоклаз, 7 - кварц, 8 - топаз, 9 - корунд, 10 - алмаз. З двох мінералів твердішим є той, який залишає на іншому подряпини або вм'ятини при досить сильному зіткненні. Однак номери градацій алмазу і апатиту не дають підстав стверджувати, що алмаз є в два рази твердішим від апатиту.

2. Шкала сили вітру за Ботфортом. У 1806 р. Ф. Ботфорт запропонував умовну 12-бальну шкалу для оцінки сили вітру за його дією на наземні предмети та за хвилюванням моря: 0 - штиль (затишшя), 4 - помірний вітер, 6 - сильний вітер, 10 - буря (шторм), 12 балів - ураган.

3. Шкала магнітуд землетрусів за Ріхтером. Американський сейсмолог Ч. Ріхтер у 1935 р. запропонував 12-бальну шкалу землетрусів за магнітудами, що базується на оцінці енергії сейсмічних хвиль, які виникають під час землетрусів.

4. Бальні шкали оцінки знань учнів. 5-бальна, 100-бальна.

2.3. Метричні шкали

Наступна за силою шкала - **інтервальна** шкала, яка на відміну від попередніх є кількісною шкалою. У шкалі інтервалів присутні упорядкованість та інтервальність, але немає нульової точки. У шкалі інтервалів тільки інтервали мають значення справжніх чисел і з ними можна виконувати арифметичні операції. Самі значення не є справжніми числами і результати операцій над ними можуть не мати сенсу. Наприклад, неправильно стверджувати, що температура води збільшилася в два рази при нагріванні від 10°C до 20°C.

Для інтервальної шкали є справедливою наступна властивість:

$$\frac{x_1 - x_2}{x_3 - x_4} = \frac{y_1 - y_2}{y_3 - y_4} = const \qquad (2.1)$$

Для інтервальної шкали початок відліку може бути вибраний довільно, як, наприклад, для температури чи висоти місцевості.

Температура, час, висота місцевості - величини, які по фізичній природі або не мають абсолютного нуля, або допускають свободу вибору у встановленні початку відліку.

Приклад 1 – температури (шкала Цельсія і шкала Кельвіна).

Нагріємо воду від 10°C до 20°C за шкалою Цельсія. По шкалі Кельвіна це відповідає температурам від 283°K до 293°K. В обох шкалах різниця температур однакова - 10°.

Приклад 2 – календарі.

· Григоріанський - літочислення ведеться від дня народження Ісуса Христа (нова ера);

· Юліанський – літочислення ведеться від створення світу 5506 року до народження Ісуса Христа (до нової ери);

· Іудейський – створення Адама – 3696 рік до народження Ісуса Христа (до нової ери);

· Магометанський – втеча Магомета з Мекки в Медину – 622 рік після народження Ісуса Христа (нової ери).

Тривалість життя людини у всіх календарях є однаковою.

Періодичні шкали

Частковим випадком інтервальних шкал є періодичні шкали. У такій шкалі значення не змінюється при додаванні деякого числа (періоду). Приклади. шкала компаса, циферблат годинника.

Шкала відношень

Наступною за силою шкалою є шкала відношень. Для вимірювань такої шкали можна виконувати будь-які арифметичні дії. У цій шкалі присутні всі атрибути: упорядкованість, інтервальність, нульова точка.

Приклади шкали відношень: вага, довжина, гроші. Порівнюючи два об’єкти бачимо, у скільки разів властивість одного об'єкта перевершує таку ж властивість іншого об'єкта.

Абсолютна (метрична) шкала має і абсолютний нуль (b = 0), і абсолютну одиницю (a = 1).

Приклади: 1. Числова вісь OX; 2. Шкала температур за Кельвіном.

2.4. Невизначеність даних

При проведенні вимірювань часто стикаються з поняттям невизначеності. Одним з видів невизначеності є **випадковість**. В*ипадковість – це вид невизначеності, який підкоряється лише закону розподілу.* Знаючи розподіл імовірностей *p(x),* можна відповісти на більшість запитань про випадкову величину: якому інтервалу належать її можливі значення; навколо якого значення вони розсіюються (середнє вибіркове); наскільки сильно розкидані ці значення (дисперсія або стандартне відхилення) тощо. Зазвичай достатньо знати не весь розподіл, а лише деякі його параметри (середнє вибіркове, дисперсія).

Іншим видом невизначеності є **нечіткість** даних. Найчастіше ситуація нечіткості зустрічається при користуванні мовними (лінгвістичними) конструкціями. Так, у виразі: "Висока молода людина" – названо клас, до якого належить людина, але невідомо який у неї зріст та скільки їй років? Інші приклади “гарячий”, ”дешевий”, ”розумний”.

Л**інгвістична змінна** – це змінна, значення якої розпливчасте за своєю природою. Для операцій з лінгвістичними змінними створено математичний апарат – теорію **нечітких множин**. Для встановлення належності об’єкта до нечіткої множини використовують поняття **функції належності** $\mu_A(x)$. Для кожного елемента *x* можна задати число $\mu_A(x)$, $0 \le \mu_A(x) \le 1$, яке виражає ступінь належності цього елемента до нечіткої множини *A.* Якщо $\mu_A(x) = 0$, то елемент *x* не належить множині *A,* якщо $\mu_A(x) = 1$ – належить. **Нечітку множину *A*** означають як сукупність упорядкованих пар вигляду

$$A = \{x, \mu_A(x)\}, x \in X \quad . \tag{2.2}$$

Приклад 1: “студент добре вчиться” $\{(2,0.0);(3,0.2);(4,0.8);(5,1.0)\}$.

Приклад 2: “теплий день” $\{(15,0.4);(20,0.7);(25,1.0);(30,0.4);(35,0.1)\}$.

2.5. Проблеми, які виникають при обробці даних

Велика розмірність. У багатьох дослідженнях кількість об'єктів N та кількість їх ознак n великі, тому добуток N х n має декілька десяткових порядків. Врахування часу призводить до ще більшого зростання розмірності блоку даних N х n х t. Застосування ПК істотно розширює можливості обробки даних, але "прокляття розмірності" залишається серйозною проблемою.

Для зменшення розмірності моделі використовують різні прийоми. Наприклад, маємо такі економічні показники: ВВП, бюджетний дефіцит, зовнішній борг, рівень інфляції, коефіцієнт монетизації, коефіцієнт доларизації. Якщо декілька ознак корелюють між собою, з них залишають лише одну, відкидаючи інші. Інший підхід – це факторний аналіз. Вводять декілька нових штучних факторів, які не корелюють між собою і повністю відображають вплив усіх вхідних даних.

Різнотипність даних. Різні ознаки вимірюють в різних шкалах та одиницях. Більшість алгоритмів призначено для обробки однотипних змінних, тому потрібно зводити дані до однієї шкали та розмірності, або ж будувати алгоритм обробки різнотипних даних. Класичним підходом є стандартизація ознак. Для кожної ознаки x визначають середнє значення x_c та стандартне відхилення σ_x. Стандартизацію виконують за співвідношенням

$$z = \frac{x - x_c}{\sigma_x} . \qquad (2.3)$$

В результаті стандартизації всі змінні стають безрозмірними, а їх числові значення знаходяться в інтервалі від -2 до +2.

Пропущені значення. Часто зустрічаються незаповнені комірки таблиці даних. Найпростішим способом відновлення пропущеного значення є обчислення середнього між попереднім та наступним значеннями.

Зашумленість. Зазвичай результати вимірювання відрізнюється від фактичних значень на деяку випадкову величину - похибку. Якщо статистичні властивості похибки не залежать від вимірюваної величини, похибку називають **адитивним шумом**. Для видалення шуму використовують фільтрування сигналів.

Тема 3. СТРУКТУРНИЙ АНАЛІЗ СИСТЕМ І ПРОЦЕСІВ

3.1. Дерева рішень

3.2. Структурний аналіз дерева подій

3.3. Структурний аналіз дерева відмов

3.4. Задача про видачу кредиту

3.1. Дерева рішень

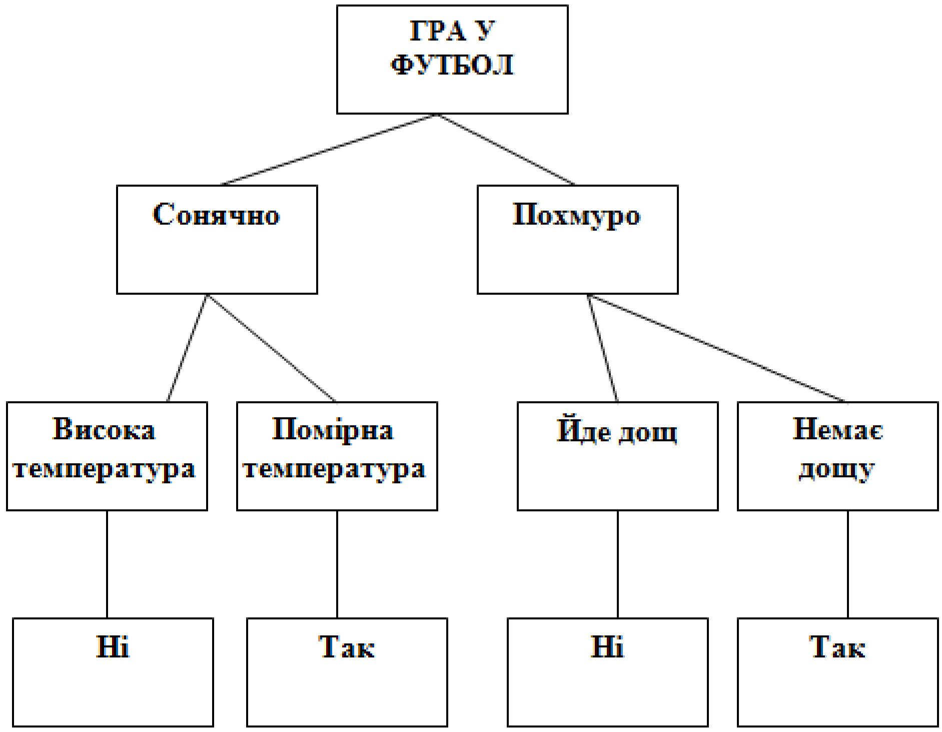
Метод дерев рішень (decision trees) є одним з найбільш популярних методів вирішення задач класифікації та прогнозування складних систем. Якщо залежна змінна приймає дискретні значення, за допомогою методу дерева рішень вирішуються задачі класифікації. Якщо залежна змінна приймає неперервні значення, то дерево рішень вирішує задачу чисельного прогнозування. Вперше дерева рі**шень були запропоновані Ховілендом і Хантом (Hoveland, Hunt) наприкінці** 50-х років минулого століття.

У найбільш простому вигляді дерево рішень - це спосіб представлення правил у вигляді ієрархічної структурі. Основа такої структури - відповіді "Так" або "Ні" на ряд уточнюючих питань.

Приклад 1. Розглянемо приклад дерева рішень, задача якого - відповісти на питання: "Грати чи не грати у футбол?" Щоб прийняти рішення, чи грати у футбол, слід віднести поточну ситуацію до одного з відомих класів (в даному випадку - "грати" або "не грати"). Для цього потрібно відповісти на ряд питань, які знаходяться у вузлах цього дерева, починаючи з його кореня.

При позитивній відповіді на питання здійснюється перехід до лівої гілки дерева, при негативному - до правої гілки дерева. Далі йде наступне питання і т.д., поки не буде досягнутий кінцевий вузол дерева, що є вузлом рішення. Можливі ланцюжки прийняття рішень будуть такими.

1. Корінь дерева: "Сонячно?".
   Відповідь – “Так”.
   Внутрішній вузол дерева: "Температура повітря висока?". Відповідь – “Так”.
   Рішення - "Не грати".
2. Корінь дерева: "Сонячно?".
   Відповідь – “Ні”.
   Внутрішній вузол дерева: "Чи йде дощ?". Відповідь – “Ні”.
   Рішення - "Грати".



У розглянутому прикладі вирішується задача бінарної класифікації. У вузлах бінарних дерев розгалуження може вестися тільки в двох напрямках (відповіді "так" і "ні"). У загальному випадку відповідей і, відповідно, гілок дерева, що виходять з його внутрішнього вузла, може бути більше двох.

Приклад 2.

Побудувати дерево рішень для ситуації ”Чи йти мені на дискотеку?”

Вирішуючі питання:

Чи вмію я танцювати?

Чи я не втомлений?

Чи готовий я до завтрашніх занять?

Чи йде на дискотеку мій товариш (подружка)?

Приклад 3. Аналіз кредитоспроможності. База даних, на основі якої повинно здійснюватися прийняття рішення, містить такі дані про клієнтів банку: вік, наявність нерухомості, освіта, середньомісячний дохід, чи повернув клієнт вчасно кредит, виданий раніше. Завдання полягає в тому, щоб на підставі перелічених вище даних визначити, чи варто видавати кредит новому клієнтові.

Задача вирішується в два етапи: побудова класифікаційної моделі і її використання. На етапі побудови моделі будується дерево класифікації або створюється набір якихось правил. На етапі використання моделі побудоване дере-

во, яке є експертною системою для перевірки конкретного клієнта, використовується для відповіді на поставлене запитання "Чи видавати кредит?"
Класифікаційні правила будуються у вигляді конструкцій "якщо - то".
Приклади правил:

Якщо **Вік < 35** то слід видати кредит.

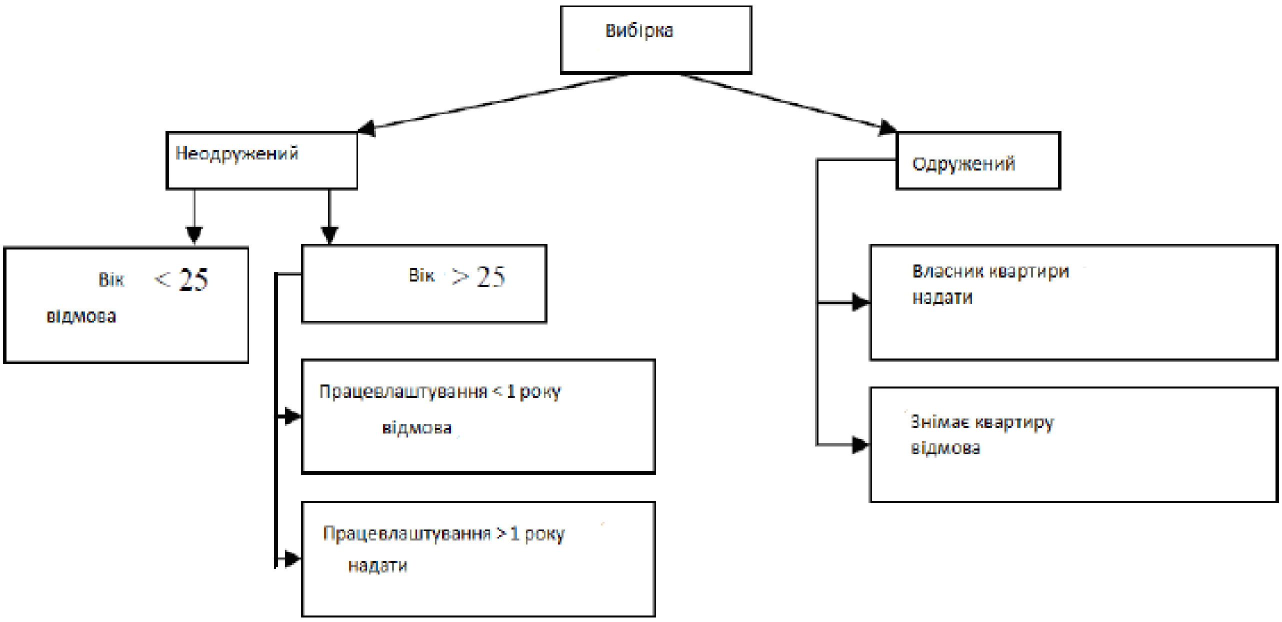
Якщо **Вік** > **35** і **Дохід > 7000**, то слід видати кредит.

Якщо **Вік** > **60** і **Є нерухомість,** то слід видати кредит.

Якщо **Вік** > **60** і **Немає нерухомості** кредит видавати не слід.

Якщо **Попередній кредит повернутий невчасно** - кредит видавати не слід.

Ще одна система правил представлена на рисунку.



Переваги дерев рішень.

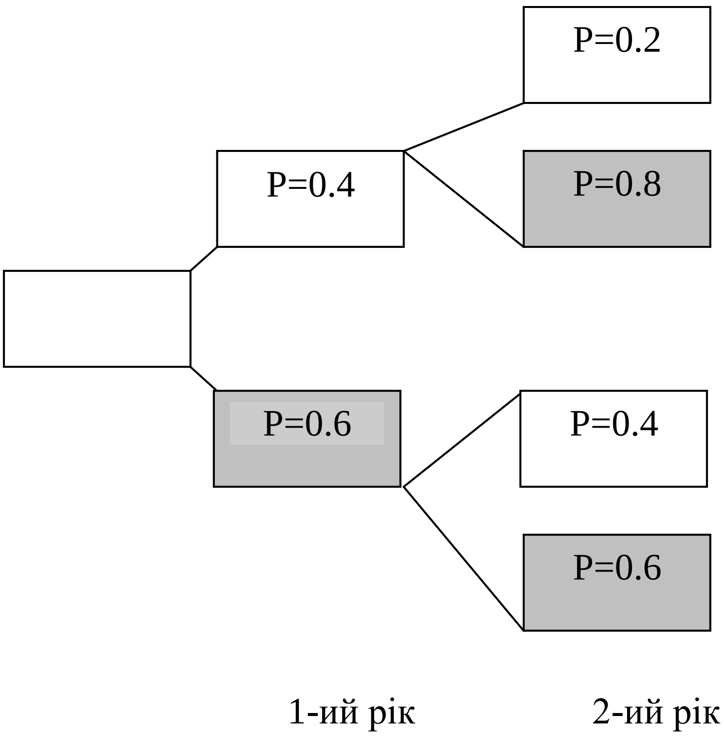
- Класифікаційна модель, представлена у вигляді дерева рішень, розбиває рішення на взаємовиключні варіанти і спрощує розуміння розв'язуваної задачі.
- На побудову класифікаційних моделей за допомогою алгоритмів конструювання дерев рішень потрібно значно менше часу, ніж на навчання нейронних мереж.
- Дерева рішень дають можливість будувати правила з бази даних на природній мові.
- Дерева рішень працюють як з числовими, так і з номінальними типами даних.

3.2. Структурний аналіз дерева подій

Складна система має багато варіантів поведінки. Якщо система добре вивчена, кожен варіант можна охарактеризувати певною ймовірністю реалізації та очікуваним фінансовим результатом. Детальний аналіз усіх можливих варіантів поведінки дозволяє приймати оптимальні управлінські рішення.

При аналізі бізнес-проектів розглядають так зване ”дерево подій”, утворене в результаті аналізу альтернативних варіантів розвитку ситуації. Розглянемо деякі приклади побудови дерева подій, які ілюструють методику оцінювання різних варіантів поведінки системи.

Приклад 1. Аналіз дохідності бізнес проекту



Розглянемо схему деякого бізнес-процесу. Процес може розвиватися за двома варіантами: позитивний варіант – збільшення продаж (світлий прямокутник, прибуток 200 тис. грн.) та негативний варіант – зменшення продаж (темний прямокутник, прибуток 100 тис. грн.). Ймовірність кожного варіанту, визначена експертами, вказана всередині прямокутника. Очікуваний прибуток дорівнює добутку ймовірності відповідного варіанту на його прибутковість.

Розрахуємо очікуваний прибуток за перший рік реалізації проекту:

$$Z = p_1 \cdot z_1 + p_2 \cdot z_2 = 200 \cdot 0.4 + 100 \cdot 0.6 = 80 + 60 = 140 \text{ (тис. грн.)}$$

На другому році реалізації проекту можливі 4 варіанти. Їх ймовірність визначається за правилом ймовірності складних подій.

Складна подія – це подія *B*, яка відбулася за умови, що перед нею відбулася інша подія *A*. Відомо, що події *A* і *B* є незалежними. Позначимо $P(A)$ - ймовірність реалізації події *A,* $P(B)$ - ймовірність реалізації події *B,* $P(B|A)$ - умовна ймовірність реалізації події *B,* у випадку, що перед нею мала місце подія *A*. Тоді має місце співвідношення

$$P(B|A) = P(A) \cdot P(B). \tag{3.1}$$

Формулу (1) називають **формулою ймовірності складної події**.
Таким чином, ймовірність першого варіанту подій дорівнює P = 0.4 · 0.2 = 0.08;
Ймовірність другого варіанту подій дорівнює P = 0.4 · 0.8 = 0.32;
Ймовірність третього варіанту подій дорівнює P = 0.6 · 0.4 = 0.24;
Ймовірність четвертого варіанту подій дорівнює P = 0.6 · 0.6 = 0.36.
Сума ймовірностей дорівнює 1, тобто розглянуті нами 4 варіанти розвитку події утворюють повну групу подій.

Повна група подій, це такий перелік можливих подій, одна з яких має обов'язково відбутися. Наприклад: моя оцінка з економічної кібернетики – ”2”, ”3”, ”4”, ”5”, ”н”.

Нехай система може перебувати в n різних несумісних станах $S_1, S_2, \ldots, S_n$. Ймовірність кожного із станів $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Якщо виконується рівність

$$P_1 + P_2 + \ldots + P_n = 1 \tag{3.2}$$

група станів $S_1, S_2, \ldots, S_n$ називається повною.
Розрахуємо очікуваний прибуток за другий рік реалізації проекту:
$Z = p_1 \cdot z_1 + p_2 \cdot z_2 + p_3 \cdot z_3 + p_4 \cdot z_4 = 400 \cdot 0.08 + 300 \cdot 0.32 + 300 \cdot 0.24 + 200 \cdot 0.36 = 32 + 96 + 72 + 72 = 272$ (тис. грн.)

Приклад 2. Аналіз можливих варіантів здобуття вищої освіти.

Випускник школи планує поступати в університет або у коледж. Відповідні ймовірності становлять 0.7 (університет) та 0.3 (коледж). Після закінчення коледжу випускник планує працювати референтом (зарплата 1 500 грн).

У разі вступу до університету випускник планує навчатися за напрямом “Економічна кібернетика” (ймовірність 0.6) або ж за напрямом “Документознавство” (ймовірність 0.4). Після закінчення навчання за напрямом “Документознавство” випускник планує працювати у відділі кадрів (зарплата 2 500 грн).

У разі закінчення навчання за напрямом “Економічна кібернетика” випускник планує влаштуватися на роботу у страхову компанію (зарплата 4 000 грн, ймовірність 0.45) або ж у банк (5 000 грн, ймовірність 0.4), або ж працювати програмістом (ймовірність 0.15).

У разі роботи програмістом розглядаються два варіанти: робота в Україні (зарплата 10 000 грн, ймовірність 0.75) та робота за кордоном (зарплата 35 000 грн, ймовірність 0.25).

Для економічної оцінки перспектив розглянутих варіантів слід враховувати як економічну вигоду так і ймовірність відповідного варіанту. Якщо подія є результатом ланцюжка попередніх подій, то це – складна подія і її ймовірність оцінюють як добуток ймовірностей всіх попередніх подій. На кожному рівні еволюції процесу слід перевіряти формулу повної групи подій (сума ймовірностей дорівнює одиниці).

Етап 1. Економічна оцінка перспективності варіанту "вступ до коледжу" визначається як добуток ймовірності та очікуваного доходу

$$Z = p_1 \cdot z_1 = 1500 \cdot 0.3 = 450 \text{ (грн)}$$

Етап 2. З використанням формули складної ймовірності визначаємо економічну оцінку перспективності варіанту «університет» + «Документознавство»

$$Z = p_2 \cdot z_2 = 2500 \cdot 0.7 \cdot 0.4 = 700 \text{ (грн)}$$

Етап 3. Визначаємо економічну оцінку перспективності варіанту «університет» + «Економічна кібернетика» + «Страхова компанія»

$$Z = 4000 \cdot 0.7 \cdot 0.6 \cdot 0.45 = 756 \text{ (грн)}$$

Визначаємо економічну оцінку перспективності варіанту «університет» + «Економічна кібернетика» + «Банк»

$$Z = 5000 \cdot 0.7 \cdot 0.6 \cdot 0.4 = 840 \text{ (грн)}$$

Етап 4. Визначаємо економічну оцінку перспективності варіанту «університет» + «Економічна кібернетика» + «Програміст» + «Україна»

$$Z = 10\,000 \cdot 0.7 \cdot 0.6 \cdot 0.15 \cdot 0.7 = 441 \text{ (грн)}$$

Визначаємо економічну оцінку перспективності варіанту «університет» + «Економічна кібернетика» + «Програміст» + «за кордон»

$$Z = 35\,000 \cdot 0.7 \cdot 0.6 \cdot 0.15 \cdot 0.3 = 661 \text{ (грн)}$$

Висновок. З усіх переглянутих варіантів найбільш економічно перспективним є варіант «університет» + «Економічна кібернетика» + «Банк».

3.3. Структурний аналіз дерева відмов

Аналіз дерева відмов (АДВ) вважається одним з найбільш корисних аналітичних інструментів у процесі оцінювання безпеки експлуатації складних систем. Цей метод використовує дедуктивний логічний метод (рух від загального до часткового). Зазвичай, небажані події відбуваються під впливом різних чинників. Дерево відмов дозволяє проаналізувати дію цих чинників на різних етапах роботи системи. При аналізі дерева відмов небажану подію (аварія, банкрутство) вважають кінцевою точкою схеми. Розглядаючи окремі події, які передували кінцевій події, будують дерево відмов. Прикладом дерева відмов є аналіз перевезень на автобусі з урахуванням імовірності поломок автобуса.

Приклад 3. Системний аналіз пасажирських перевезень

Методику системного аналізу розглянемо на прикладі аналізу системи міжміських пасажирських перевезень.

Основні характеристики маршруту.

Орієнтовний річний дохід – 700 тис. грн.

Ціна нового автобуса – 300 тис. грн.   Ціна б/в автобуса – 150 тис. грн.

Вартість ремонту двигуна – 40 тис грн.

Встановлення нового двигуна – 100 тис. грн.

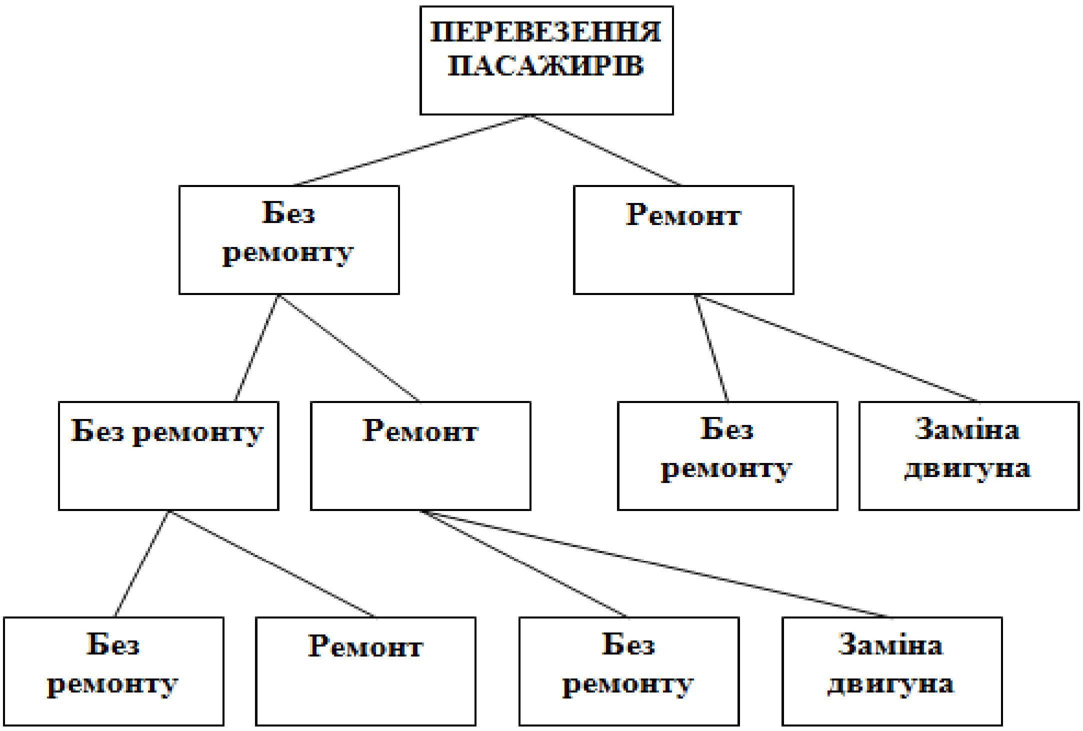
Після 2-ої поломки двигуна (або б/в після 1 поломки) - заміна двигуна.

Річні експлуатаційні витрати: новий автобус – 300 тис. грн.   БВ автобус – 450 тис. грн.

Стартовий капітал підприємця – 300 тис. грн.

Таблиця 1. Ймовірність поломки двигуна

	1-ий рік	2-ий рік	3-ий рік
Новий	0	0.1	0.3
Після ремонту (або б/в)	0.1	0.3	0.6



Задача. Скласти бізнес-план роботи на 3 роки, підрахувавши очікуваний прибуток для кожного року.

Система може перебувати у двох станах: S_1 – двигун працює; S_2 – двигун не працює. Ймовірність першого стану позначимо p, ймовірність другого q. Оскільки події S_1 і S_2 утворюють повну групу подій, маємо рівність $p+q=1$.

Наприклад, ймовірність безаварійної роботи нового двигуна на другому році експлуатації $P(A)=0.9$, ймовірність безаварійної роботи нового двигуна на третьому році експлуатації $P(S_1)=0.7$. Якщо розглядати ці події як незалежні, то ймовірність безаварійної роботи двигуна на третьому році експлуатації за умови безаварійної роботи на другому році становить

$$P(S_i \mid A) = P(A)\cdot P(S_i) = 0.9\cdot 0.7 = 0.63.$$

Ймовірність варіанту, при якому на другому році експлуатації була поломка двигуна, а третій рік пройшов без аварій становить

$$P(S_i \mid \overline{A}) = P(\overline{A})\cdot P(S_i) = 0.1\cdot(1-0.1) = 0.09.$$

Звертаємо увагу на те, що після ремонту двигуна ймовірність поломки слід розрахувати за даними другого рядка табл.1 (двигун після ремонту).

Варіант 1. Новий автобус.

При аналізі експлуатації нового автобуса на протязі 3-х років необхідно розглянути різні варіанти, які можуть скластися у залежності від надійності роботи його двигуна. При цьому слід використовувати поняття складної події та її ймовірності. Слід також пам’ятати, що на першому році експлуатації поломка нового двигуна практично виключена. У залежності від надійності роботи двигуна на 2-му та 3-му році експлуатації можливі 4 варіанти експлуатації:

1. БР2 + БР3. Двигун служить без ремонту на протязі трьох років експлуатації. Ймовірність такого варіанту становить Р1 = 0.9 x 0.7 = 0.63. Затрати при цьому варіанті дорівнюють 300 x 3 = 900 тис. грн.
2. БР2 + Р3. Другий рік без ремонту, третій рік – ремонт. Ймовірність такого варіанту становить Р2 = 0.9 x 0.3 = 0.27. Затрати при даному варіанті становлять 300 x 3 + 40 = 940 тис. грн.
3. Р2 + БР3. Ремонт на другому році і безремонтний третій рік. Ймовірність такого варіанту становить Р3 = 0.1 x 0.9 = 0.09. Затрати при даному варіанті становлять 300 x 3 + 40 = 940 тис. грн.

4. Р2 + Р3. Ремонт на другому році та заміна двигуна на третьому році. Ймовірність такого варіанту становить Р4 = 0.1 х 0.1 = 0.01. Затрати при даному варіанті становлять 300 х 3 + 40 + 100 = 1040 тис. грн. Звертаємо увагу, що оскільки повторний ремонт двигуна не рекомендується, на третьому році необхідно встановити новий двигун.

Середньоімовірні затрати трьохрічної експлуатації становлять:

Z = P1 x Z1 + P2 x Z2 + P3 x Z3 + P4 x Z4 = 0.63 x 900 + 0.27 x 940 + 0.09 x 940 + 0.01 x 1040 = 567.0 + 253.8 + 84.6 + 10.4 = 915.8 (тис. грн.)

Очікуваний дохід становить 700 х 3 = 2100 тис. грн.

Очікуваний прибуток становить 2100 – 915.8 = 1184.2 тис. грн.

Отже, як показали розрахунки очікуваний прибуток від експлуатації нового автобуса за 3 роки становить **1184.2 тис. грн.**

Варіант 2. Автобус, бувший у вжитку.

Експлуатація двигуна автобуса, який вже був у використанні прирівнюється до експлуатації двигуна після першого ремонту. Тому, вже після першої поломки такого двигуна необхідно встановлювати новий двигун. Після заміни двигуна, двигун вважається новим і ймовірність його поломки розрахувається з використанням першого рядка табл. 1. Ймовірність безвідмовної роботи такого двигуна на першому році експлуатації становить 0.9, на другому році – 0.7, на третьому році – 0.4. За початковий капітал 300 тис. грн. можна купити 2 автобуси БВ. При аналізі експлуатації автобуса БВ на протязі 3-х років необхідно розглянути різні варіанти, які можуть скластися у залежності від надійності роботи двигуна (табл. 1). Всього можливі 8 варіантів експлуатації:

1. БР1 + БР2 + БР3. Двигун служить без ремонту на протязі трьох років експлуатації. Ймовірність такого варіанту становить Р1 = 0.9 х 0.7 х 0.4 = 0.252. Затрати при цьому варіанті дорівнюють 450 х 3 = 1350 тис. грн.
2. БР1 + БР2 + Р3. Перший і другий рік без ремонту, третій рік – ремонт (заміна двигуна). Ймовірність такого варіанту становить Р2 = 0.9 х 0.7 х 0.6 = 0.378. Затрати при цьому варіанті дорівнюють 450 х 3 + 100 = 1450 тис. грн.
3. БР1 + Р2 + БР3. Ремонт на 2-му році і безремонтні 1-ий і 3-ій роки. Ймовірність такого варіанту становить Р3 = 0.9 х 0.3 х 1 = 0.27. Затрати при цьому варіанті дорівнюють 450 х 3 + 100 = 1450 тис. грн. Звертаємо ува-

гу на те, що ймовірність поломки двигуна на третьому році дорівнює нулю, оскільки двигун перед цим був замінений.

4. БР1 + Р2 + Р3. Ремонт на 2-му році і поломка на 3-му році. Ймовірність такого варіанту дорівнює нулю (ймовірність поломки двигуна на третьому році дорівнює нулю, оскільки двигун перед цим був замінений) Р4 = 0.9 х 0.3 х 0 = 0.
5. Р1 + БР2 + БР3. Заміна двигуна на першому році і безремонтні 2-ий і 3-ій роки. Ймовірність такого варіанту становить Р5 = 0.1 х 1 х 0.9 = 0.09. Затрати при цьому варіанті дорівнюють 450 х 3 + 100 = 1450 тис. грн.
6. Р1 + БР2 + Р3. Заміна двигуна на першому році і ремонт на 3-му році. Ймовірність такого варіанту становить Р6 = 0.1 х 1 х 0.1 = 0.01. Затрати при цьому варіанті дорівнюють 450 х 3 + 40 + 100 = 1490 тис. грн.
7. Р1 + Р2 + БР3. Заміна двигуна на першому році і ремонт двигуна на 2-му році. Ймовірність такого варіанту становить 0. Р7 = 0.
8. Р1 + Р2 + Р3. Ймовірність даного варіанту також нульова. Р8 = 0.

Середньоімовірні затрати трьохрічної експлуатації становлять:
Z = P1 x Z1 + P2 x Z2 + P3 x Z3 + P4 x Z4 + P5 x Z5 + P6 x Z6 + P7 x Z7 + P8 x Z8 = 0.252 x 1350 + 0.378 x 1450 + 0.270 x 1450 + 0.000 x 1490 + 0.090 x 1450 + 0.010 x 1490 + 0.000 x 1550 + 0.000 x 1650 = 340.2 + 548.1 + 391.5 + 130.5 + 14.9 = 1425.2 (тис. грн.)

Очікуваний дохід становить 700 х 3 х 2 = 4200 тис. грн.

Очікуваний прибуток становить (2100 – 1425.2) х 2 = **1349.6 тис. грн.**

Висновок. Другий варіант бізнес-плану є більш вигідним.

4. Задача про видачу кредиту.

Бізнесмен просить банк про кредит $15 000. Банк приймає рішення з двох альтернатив:

1. Видати кредит під 15% річних. Статистика свідчить, що 4% таких кредитів не повертаються (останній рядок таблиці 1).
2. Вкласти ці гроші ($15 000) у інший бізнес-проект з гарантованим поверненням під 9% річних.
3. Перед видачею кредиту можна перевірити кредитоспроможність клієнта в аудиторській фірмі. Це коштує $80.

Статистика раніше виданих кредитів наведена в наступній таблиці 3.1.

Таблиця 3.1. Статистика виданих кредитів

Рекомендація після перевірки	Фактичний результат		
	Кредит повернуто	Кредит не повернуто	Всього
Давати кредит	735	15	750
Не давати кредит	225	25	250
Всього	960	40	1000

Побудова дерева рішень. Побудуємо дерево рішень. Пунктирні лінії з'єднують квадрати можливих рішень. Суцільні лінії з'єднують круги можливих результатів. Квадратні вузли позначають моменти прийняття рішень. Круглі вузли позначають отримані результати. Для кожної вітки дерева необхідно прорахувати її ймовірність та очікуваний фінансовий результат.

Розрахунок ймовірностей. Спочатку розрахуємо ймовірності всіх варіантів, використовуючи статистичні дані.

1. Фірма рекомендувала, кредит повернуто. P = 735/750 = 0.98.
2. Фірма рекомендувала, кредит не повернуто. P = 15/750 = 0.02.
3. Фірма не рекомендувала, кредит повернуто. P = 225/250 = 0.90.
4. Фірма не рекомендувала, кредит не повернуто. P = 25/250 = 0.10.

Аналіз дерева рішень.

1. Спочатку розглянемо вітки B і C, які є наслідками рішення 2 (Рекомендувати видати кредит).

Дохід при результаті B: (15 000 + 2 250) x 0.98 – 15 000 x 0.02 = 16 605.

Чистий дохід : 16 605 – 15 000 = 1 605.

Дохід при результаті C: (15 000 + 1 350) x 1.00 = 16 350.

Чистий дохід : 16 350 – 15 000 = 1 350.

Отже, перебуваючи у квадраті 2 слід вибрати варіант B, оскільки він має більший очікуваний дохід. Отже, приймаємо рішення: варіант C відхилити (перекреслити вітку). Квадрату 2 присвоїти очікуваний дохід 1 605.

2. Тепер розглянемо вітки D і E, які є наслідками рішення 3.

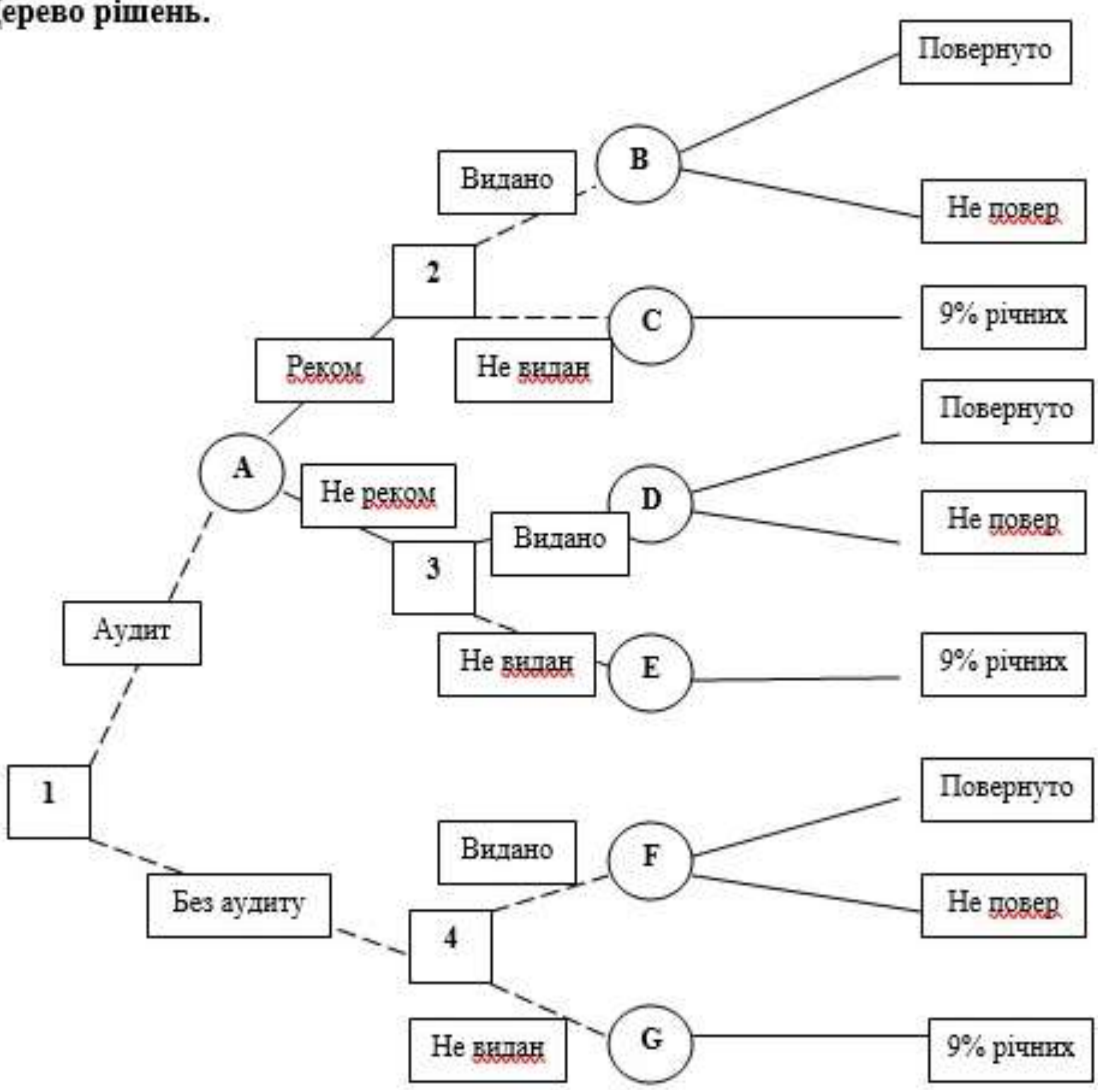
Дохід при результаті D: 17 250 x 0.90 – 15 000 x 0.10 = 14 025.

Чистий дохід : 14 025 – 15 000 = -975.

Дохід при результаті E: 16 350.

Чистий дохід : 16 350 – 15 000 = 1 350.

Дерево рішень.



Отже, перебуваючи у квадраті 3 слід вибрати варіант Е, оскільки він має більший очікуваний дохід. Отже, приймаємо рішення: варіант D відхилити (перекреслити вітку). Квадрату 3 присвоїти очікуваний дохід 1 350.

1. Тепер розглянемо вітки F і G, які є наслідком рішення 4 (без аудиту).

Дохід при результаті F: 17 250 x 0.96 – 15 000 x 0.04 = 15 960.

Чистий дохід : 15 960 – 15 000 = 960.

Дохід при результаті G: 16 350.

Чистий дохід : 16 350 – 15 000 = 1 350.

Отже, перебуваючи у квадраті 4 слід вибрати варіант G, оскільки він має більший очікуваний дохід. Отже, приймаємо рішення: варіант F відхилити (перекреслити вітку). Квадрату 4 присвоїти очікуваний дохід 1 350.

2. Тепер розглянемо вузли А і 4. Розрахуємо математичне сподівання для варіанту А: 1 605 x 0.75 + 1 350 x .25 = 1 541.25

Чистий дохід: 1 541.25 – 80 = 1 461.25.

Отже, перебуваючи у квадраті 1 слід вибрати варіант А, оскільки він має більший очікуваний дохід, ніж варіант 4 (1 461.25 > 1 350). Отже, приймаємо рішення: варіант 4 відхилити (перекреслити вітку). Квадрату 1 присвоїти очікуваний дохід 1 461.25.

3. Будуємо оптимальний шлях по дереву рішень: 1 – А – (якщо аудитор рекомендує, то видати позику, інакше не видавати, а інвестувати у інший проект)

Тема 4. СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ ТРАНСПОРТНИХ МЕРЕЖ

4.1. Основні поняття теорії графів

4.2. Знаходження найкоротшого шляху у мережі

4.3. Задача про оптимальну дорожну мережу

4.4. Задачі про розміщення

4.1. Основні поняття теорії графів

Найпростіші системи мають лінійну нерозгалужену структуру. Більш складні системи організуються у вигляді ієрархічних структур. Поряд з цими двома видами організації систем поширений інший вид структури, який характеризується великою кількістю горизонтальних (однорівневих) зв'язків. Такі системи відомі під назвою **мереж**. Найпростішою системою є **граф**.

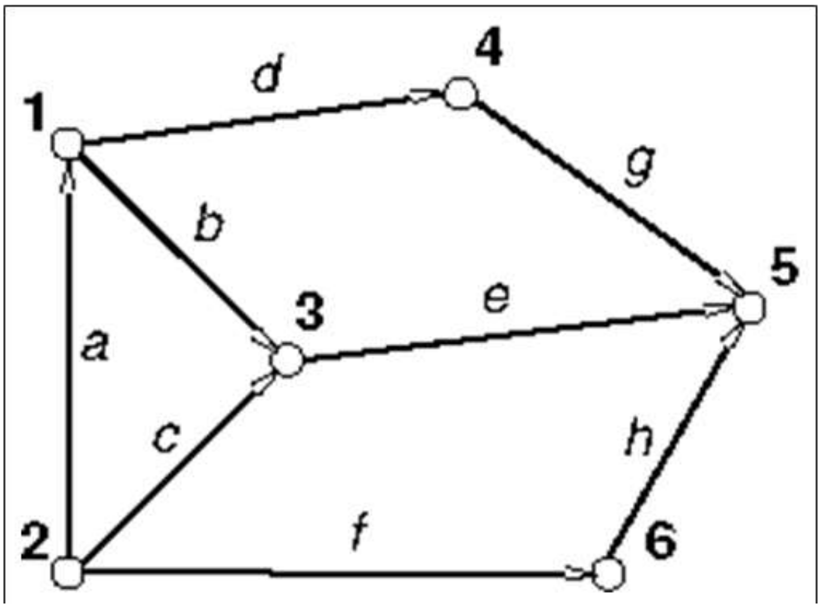


Рис. 4.1. Приклад орієнтованого графа

Графом **G(V,E)** називається система, яка складається з двох множин: вершин (Vertices) і ребер, що їх з'єднують (Edges). Вершина і ребро називають інцидентними, якщо ця вершина є одним з кінців ребра. Дві вершини, які з'єднані ребром, називають суміжними. Ребра, які мають спільну вершину, теж називають суміжними. Скінченна послідовність суміжних ребер називають маршрутом. Маршрут, у якому всі ребра різні називається ланцюгом. Ланцюг, у якого всі вершини різні, називається простим ланцюгом. Граф G називається зв'язним, якщо будь-які дві його вершини можна сполучити хоча б одним ланцюгом. Ланцюг, у якого початкова і кінцева вершини збігаються називається циклом. Зв'язний граф, який не має циклів називається деревом. Для кожного з графів можна побудувати дерево, яке містить всі його вершини. Таке дерево називають покриваючим, або покриттям графа. Якщо кожне ребро графа має напрямок, граф називають орієнтованим (орграфом). Напрямлене ребро називають дугою. Мережею називають орграф, кожна дуга якого має певне числове значення (вагу).

Граф можна задавати у вигляді рисунка чи переліком вершин і ребер. Проте найзручніший спосіб задання графа в плані комп'ютерної обробки є задання за допомогою матриць. Розглянемо граф, представлений на рис. 4.1. Він може бути заданий за допомогою наступної матриці інцидентності

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Кожен рядок цієї матриці відповідає вершині, а стовпець – дузі. У кожному стовпці такої матриці є одна 1 (вхід), одна –1 (вихід), а решта елементів дорівнюють нулю.

4.2. Знаходження найкоротшого шляху у мережі.

Моделювання структури систем у вигляді графів дозволяє розв'язувати багато прикладних задач. Продемонструємо можливості графів та мереж у сфері оптимізації транспортних мереж. Аналогічний підхід можна використати для аналізу трафіка комп'ютерних мереж, організації будівельних робіт тощо.

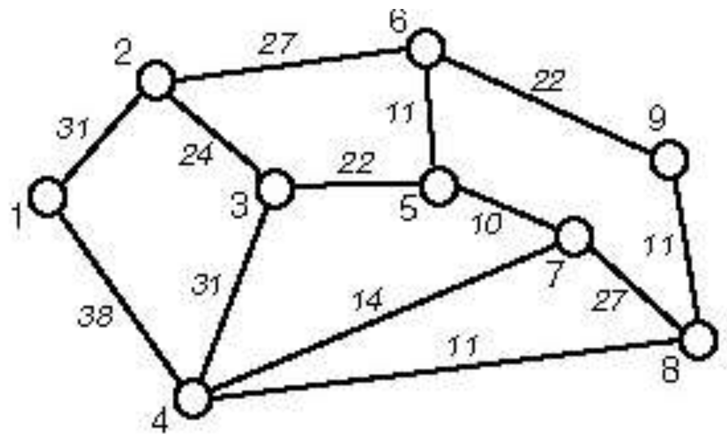


Рис. 4.2. Дорожна мережа

Нехай нам задана дорожна мережа, яка складається з дев'яти вершин (населених пунктів), з'єднаних ребрами (дорогами) так, як це показано на Рис.2. Необхідно знайти найкоротший шлях від вершини 1 до вершини 8.

Одним із методів розв'язування задачі є *алгоритм Дейкстри*. Алгоритм задачі використовує три масиви з n (n - кількість вершин) чисел кожний.

Перший масив ***a*** містить мітки з двома значеннями: 0 (вершина ще не розглянута) і 1 (вершина уже розглянута).

Другий масив ***b*** містить відстані - біжучі найкоротші відстані від початкової вершини V_i до іншої вершини V_k.

Третій масив ***c*** містить номери вершин - k-ий елемент c_k є номером передостанньої вершини на біжучому найкоротшому шляху з V_i до V_k. Матриця відстаней D_{ik} задає довжини ребер d_{ik}; якщо такого ребра немає, то d_{ik} присвоюється значення дуже великого числа ***M***, яке дорівнює "машинній нескінченності".

Алгоритм знаходження найкоротших шляхів у мережі вперше був описаний Дейкстрою (1959). Він складається з трьох кроків і має вигляд:

1. *Ініціалізація*. Всім елементам масиву ***a*** крім a_i (початок маршруту) присвоїти значення ***0***. $a_i := 1$. Всім елементам масиву ***b*** присвоїти значення відстаней з ***i***-го рядка матриці D_{ik}. Всім елементам масиву ***c*** (крім c_i) присвоїти значення ***i*** (номер початкової вершини). $c_i := 0$.

2. *Основна частина*. Знайти найменшу відстань b_j серед непомічених стовпців (тобто для тих ***j***, для яких ***a[j]=0***). Присвоїти ***a[j]:=1*** (помітити вершину). Розглянути всі маршрути, які проходять з вершини ***i*** через вершину ***j*** до вершини ***k***. Обчислити їх довжини b_k. Якщо $b_k > b_j + d_{jk}$ (довжина нового маршруту менша від довжини старого), то присвоюємо $b_k:=b_j+d_{jk}$; $c_k:=j$. Якщо $b_k < b_j + d_{jk}$ (новий маршрут довший за старий) – ніяких змін у ***k***-ий стовпець не вносимо. Основна частина повторюється до того часу, поки в масиві ***a*** залишається один нуль. Процес розв'язування можна представити у вигляді наступних таблиць.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**Min bk**
a	1	0	0	0	0	0	0	0	0	31
b	0	31	M	38	M	M	M	M	M	
c	0	1	1	1	1	1	1	1	1	
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**Min bk**
a	1	1	0	0	0	0	0	0	0	38
b	0	31	**55**	38	M	**58**	M	M	M	
c	0	1	2	1	1	2	1	1	1	
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**Min bk**
a	1	1	0	1	0	0	0	0	0	49
b	0	31	55	38	M	58	**52**	**49**	M	

c	0	1	2	1	1	2	4	4	1	
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**Min bk**
a	1	1	0	1	0	0	0	1	0	52
b	0	31	55	38	62	58	52	49	60	
c	0	1	2	1	7	2	4	4	8	
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**Min bk**
a	1	1	1	1	0	0	1	1	0	55
b	0	31	55	38	62	58	52	49	60	
c	0	1	2	1	7	2	4	4	8	
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**Min bk**
a	1	1	0	1	0	1	1	1	0	58
b	0	31	55	38	62	58	52	49	60	
c	0	1	2	1	7	2	4	4	8	
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**Min bk**
a	1	1	0	1	0	1	1	1	1	60
b	0	31	55	38	62	58	52	49	60	
c	0	1	2	1	7	2	4	4	8	

3. *Висновок*. Довжина найкоротшого шляху від вершини V_i до вершини V_k дорівнює b_k. Тепер потрібно перерахувати вершини, які входять в найкоротший шлях від V_i до V_k. Для цього служить масив c. Остання вершина – V_k, їй передує вершина з номером c_k, перед нею буде вершина, номер якої знаходиться у масиві c на місці c_k і т.п.

Для виконання алгоритму потрібно n раз переглянути масив b з n елементів, тобто алгоритм Дейкстри має квадратичний рівень складності.

4.3. Задача про оптимальну дорожну мережу.

Є декілька міст, які необхідно з'єднати мережею доріг. Для кожної пари міст відома проектна вартість будівництва дороги, що їх з'єднує. Задача полягає в тому, щоб побудувати найдешевшу з можливих дорожніх мереж. Аналогічні задачі можна сформулювати для мереж водо- або газопроводів.

Якщо розглядати мережу доріг як граф, а вартість будівництва вважати пропорційною до довжини ребра, що з'єднує відповідні вершини, то приходимо до задачі про побудову графа мінімальної довжини. Граф мінімальної довжини завжди є деревом, бо якби граф містив цикл, то можна було б видалити одне з ребер циклу не порушивши зв'язності графа. Отже нам необхідно побудувати покриваюче дерево мінімальної довжини. Розв'язок задачі дає алгоритм Пріма – Краскала (жадібний алгоритм).

Алгоритм Пріма – Краскала.

1. Вибираємо ще не розглядуване ребро мінімальної довжини.
2. Приєднуємо його до раніше вибраних ребер при умові, що не утвориться цикл.
3. Після перегляду всіх ребер утворюється покриваюче дерево, яке і буде деревом мінімальної довжини.

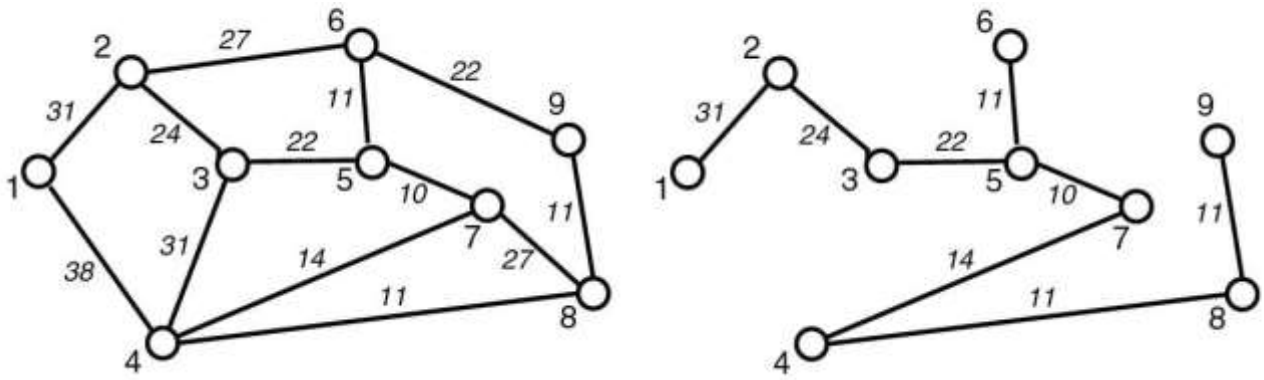


Рис.4.3. Мінімальне покриття графа.

Загальна довжина покриваючого дерева становить 134 км.

Задача Пріма. Близькою до розглянутої вище задачі є задача Пріма. Є N населених пунктів заданих декартовими координатами на площині (**x_i, y_i**). Відстань між пунктами визначається за формулою

$$D_{ij} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}\ . \qquad (4.1)$$

Вартість будівництва дороги вважається пропорційною до її відстані **D_{ij}**. Необхідно побудувати дорожну мережу мінімальної вартості. Алгоритм розв’язування має наступний вигляд.

			1	2	3	4	5	6	7	8	9
		X	5	36	43	14	17	35	19	12	21
	X	Y	29	24	11	28	8	38	23	39	12
1	5	29	0.0	31.4	42.0	9.1	24.2	31.3	15.2	12.2	23.3
2	36	24	31.4	0.0	14.8	22.4	24.8	14.0	17.0	28.3	19.2
3	43	11	42.0	14.8	0.0	33.6	26.2	28.2	26.8	41.8	22.0
4	14	28	9.1	22.4	33.6	0.0	20.2	23.3	7.1	11.2	17.5
5	17	8	24.2	24.8	26.2	20.2	0.0	35.0	15.1	31.4	5.7
6	35	38	31.3	14.0	28.2	23.3	35.0	0.0	21.9	23.0	29.5
7	19	23	15.2	17.0	26.8	7.1	15.1	21.9	0.0	17.5	11.2
8	12	39	12.2	28.3	41.8	11.2	31.4	23.0	17.5	0.0	28.5
9	21	12	23.3	19.2	22.0	17.5	5.7	29.5	11.2	28.5	0.0

1. Будуємо матрицю відстаней, використовуючи формулу (4.1).
2. Використовуючи алгоритм Пріма – Краскала будуємо мінімальне покриваюче дерево.

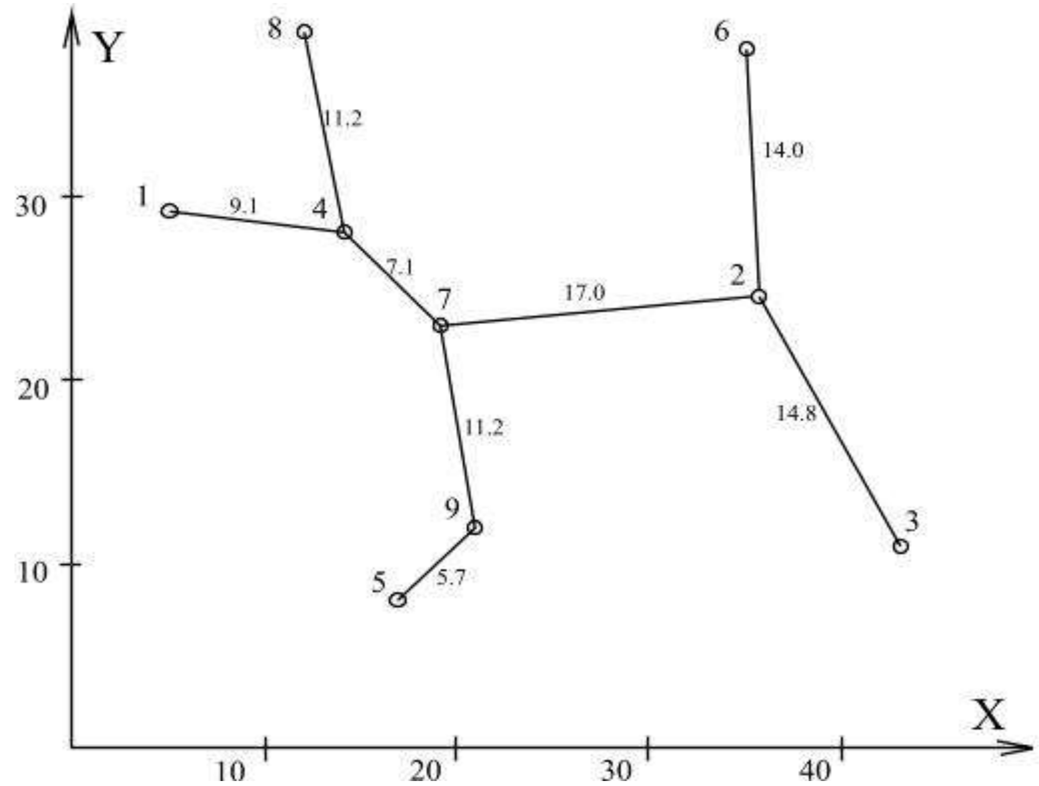


Рис.4.4. Найкоротша дорожна мережа загальною довжиною 154 км

4.4. Задачі про розміщення

Важливим застосуванням системного аналізу просторових мереж є задачі про розміщення. Вирішуючи задачу про включення нового об’єкта до сформованої системи аналогічних об’єктів необхідно вирішити питання перерозподілу сфер впливу об’єктів з мінімальними затратами для існуючої системи. Класичними прикладами задач про розміщення об’єктів на мережі є задачі про розміщення школи та розміщення пожежної частини.

Задача про розміщення школи. Задана дорожна мережа, яка з’єднує дев’ять населених пунктів (рис.4.2). Кількість учнів у населених пунктах відома і становить: 20, 40, 60, 80, 10, 30, 50, 70, 90. Необхідно оптимальним чином вибрати місце для розміщення нової школи.

В основу розв’язування задачі покладено міркування: сумарний шлях, пройдений всіма учнями по дорозі до школи повинен бути мінімальним. Доведена теорема, яка твердить, що школа повинна бути розміщена у населеному пункті.

Перш за все необхідно побудувати матрицю найкоротших відстаней, тобто матрицю, яка містить довжини найкоротших ланцюгів, які зв'язують всі пункти мережі один з одним. Для цього використовується *алгоритм Флойда*, в основу якого покладена операція трикутника: якщо d[i, k] + d[k, j] < d[i, j] то d[i, j]:=d[i, k]+d[k, j]. Ця операція заміняє маршрут [i j] на маршрут [i k j] , якщо він є коротшим.

Алгоритм Флойда. ***for k := 1 to n do***

for i := 1 to n do

for j := 1 to n do

d [i,j] := min (d [i,j], d [i,k] + d [k,j]);

Матриця d[i, j] ініціалізується наступним чином. Якщо вершини і та j безпосередньо зв'язані, d[i, j] дорівнює відстані між вершинами, інакше d[i, j] дорівнює M (машинна нескінченність). Після завершення роботи алгоритму матриця d[i, j] містить шукані значення довжини найкоротших ланцюгів.

У випадку невеликих мереж найкоротші маршрути між вершинами можна визначити вручну шляхом перебору варіантів. Розрахуємо матрицю найкоротших маршрутів для мережі, зображеної на рис. 4.2.

Таблиця 4.1. Задача про розташування школи.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	к-сть учнів
1	0	31	55	38	62	58	52	49	60	20
2	31	0	24	55	38	27	48	60	49	40
3	55	24	0	31	22	33	32	42	53	60
4	38	55	31	0	24	35	14	11	22	80
5	62	38	22	24	0	11	10	37	33	10
6	58	27	33	35	11	0	21	33	22	30
7	52	48	32	14	10	21	0	27	38	50
8	49	60	42	11	37	33	27	0	11	70
9	60	49	53	22	33	22	38	11	0	90
	21370	18660	15060	9560	12390	12470	12040	10480	11760	

До отриманої матриці приєднаємо ще один стовпчик, який містить кількості учнів p_j у населених пунктах. Приєднаємо також додатковий рядок, який містить суми виду

$$f_i = \sum_{i=1}^{n} d_{ij} p_j \ . \qquad (4.2)$$

Найменша з цих сум (четвертий населений пункт) і вказує оптимальне місце для розташування нової школи. Оскільки у формулі (4.2) мінімізується сума, задача про розміщення школи називається мінісумною.

Задача про розміщення пожежної частини.

Необхідно розмістити пожежну частину (підрозділ охорони), яка виїжджає за викликом в один з пунктів мережі (рис. 4.2). Головною метою є: дістатися до найбільш віддаленого пункту за мінімально можливий час. Є два варіанти розв'язування задачі: а) пожежна частина в населеному пункті; б) пожежна частина поза населеним пунктом. Розглянемо лише перший варіант.

Таблиця 4.2. Задача про розташування пожежної частини.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1	0	31	55	38	62	58	52	49	60	62
2	31	0	24	55	38	27	48	60	49	60
3	55	24	0	31	22	33	32	42	53	55
4	38	55	31	0	24	35	14	11	22	55
5	62	38	22	24	0	11	10	37	33	62
6	58	27	33	35	11	0	21	33	22	58
7	52	48	32	14	10	21	0	27	38	52
8	49	60	42	11	37	33	27	0	11	60
9	60	49	53	22	33	22	38	11	0	60

Спочатку будуємо матрицю найкоротших маршрутів. Справа від матриці розташовуємо стовпець, в якому виписуємо найбільше з чисел біжучого рядка (відстань до найбільш віддаленого пункту). Знаходимо найменше серед цих чисел. Це і буде оптимальний варіант розташування пожежної частини. Для нашої задачі це буде пункт 7. Оскільки в розглянутому алгоритмі знаходиться мінімум серед максимальних відстаней, задача про розміщення пожежної частини називається мінімаксною.

Алгоритм розв'язування задачі у випадку, коли пожежна частина розміщується поза населеним пунктом є значно складнішим.

Задача про розміщення пожежної частини поза населеним пунктом.

Розглянемо тепер другий варіант розв'язування задачі: розміщення пожежної частини поза населеним пунктом. Спочатку необхідно вияснити, які з ребер мережі є найбільш перспективними для розміщення пожежної частини (виконати нижню оцінку віддаленості ребер від найдальшої вершини).

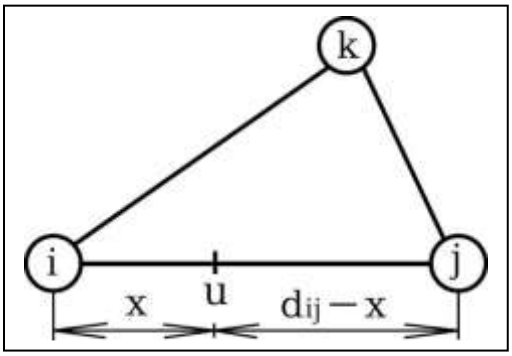


Рис.4.5. Розміщення пожежної частини на ребрі мережі

Нижня оцінка віддаленості ребер від найдальшої вершини.

Розглянемо ребро (ij), що з'єднує вершини i та j, а також деяку іншу вершину k (рис. 4.5). Нехай x – координата (відстань від вершини i) пожежної частини u на ребрі (ij). Відстань від вершини j до пожежної частини дорівнює d_{ij} – x (d_{ij} – довжина ребра (ij)). Оптимальний маршрут від u до k визначається з умови d_{uk} = min ($x+d_{ik}$, $d_{ij}-x+d_{jk}$). Нижня оцінка найбільш віддаленого пункту визначається з умови

$$\delta_{uk} = \max_k \min(d_{ik}, d_{jk}) . \tag{4.3}$$

Отже, ми повинні переглянути всі вершини k ≠ i,j. Для кожної з них необхідно визначити величину δ_{uk} і потім вибрати найбільшу з них. Це і буде нижня оцінка найбільш віддаленого пункту у випадку розташування пожежної частини на ребрі (i,j). Розглянуту операцію необхідно повторити для всіх ребер і вибрати з усіх нижніх оцінок найменшу. Це і буде ребро, на якому найдоцільніше розташувати пожежну частину.

Для ілюстрації вищенаведених міркувань розглянемо приклад. У якості мережі розглянемо ту саму мережу, про яку ми говорили на початку цього параграфа. Використовуючи матрицю найкоротших відстаней побудовану вище, побудуємо таблицю нижніх оцінок (табл. 4.3).

Таблиця 4.3

Таблиця нижніх оцінок віддаленості ребра від найдальшої вершини

Ребро	(1,2)	(1,4)	(2,3)	(2,6)	(3,4)	(3,5)	(4,7)	(4,8)	(5,6)	(5,7)	(6,9)	(7,8)	(8,9)
δ_{uk}	49	35	49	35	38	55	48	55	58	52	58	49	49

Покажемо, наприклад, як було отримано перша оцінка ребра (1,2) – число 49. Порівнюємо пари чисел, одне з яких належить першому, а друге – другому рядку матриці найкоротших відстаней між вершинами графа, побудованої нами раніше. У розгляд не включаються пари, які відповідають першому і другому стовпцю. Знаходимо

δ_{12} = *max(min(55,24), min(38,55), min(62,38), min(58,27), min(52,48), min(49,60), min(49,60))= max(24,38,38,27,48,49,49) = 49.*

Аналогічно були знайдені нижні оцінки всіх ребер мережі. Аналіз таблиці показує, що найбільш перспективними ребрами для розташування пожежної частини є ребра (1,4) і (2,6), нижня оцінка віддаленості яких дорівнює 35 км. Тепер необхідно проводити аналіз обох ребер на предмет доцільності розміщення пожежної частини.

Алгоритм Хакімі

Завершальним етапом розв'язування задачі про розміщення пожежної частини на ребрі мережі є визначення оптимальної координати розміщення пожежної частини на ребрі з мінімальною нижньою оцінкою віддаленості. Розв'язати цю задачу дозволяє алгоритм Хакімі. Нехай пожежна частина u розташована на ребрі (i,j) на відстані x від вершини i (рис. 4.6). Розрахуємо відстані від пожежної частини до всіх вершин мережі. У нашому випадку оптимальним місцем розташування для пожежної частини виступають ребра (1,4) і (2,6). Проаналізуємо другий випадок. Довжина ребра становить 27 км. Отже, якщо відстань від вершини 2 до пожежної частини становить x км, то відстань від вершини 6 до пожежної частини становить 27 – x км.

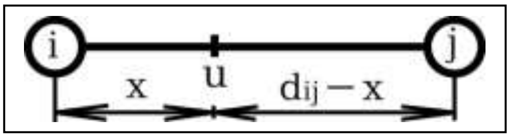


Рис. 4.6. Розміщення пожежної частини на ребрі (i,j)

Позначимо du_i – мінімальна відстань від пожежної частини до i-ої вершини. Тоді, наприклад, відстань до першої вершини буде визначатися з умови

du_1 = min ($x+d_{21}$, $d_{26}-x+d_{61}$) = min (31+ x, 58+27–x) = min(31+x, 85-x). Враховуючи, що $0 \le x \le 27$, отримаємо $du_1 = 31 + x$. Аналогічні міркування необхідно провести і для всіх інших вершин мережі. В результаті такого аналізу отримуємо:

$du_2 = x$;

du_3 = min (24+ x, 33+27-x) = 24 + x ;

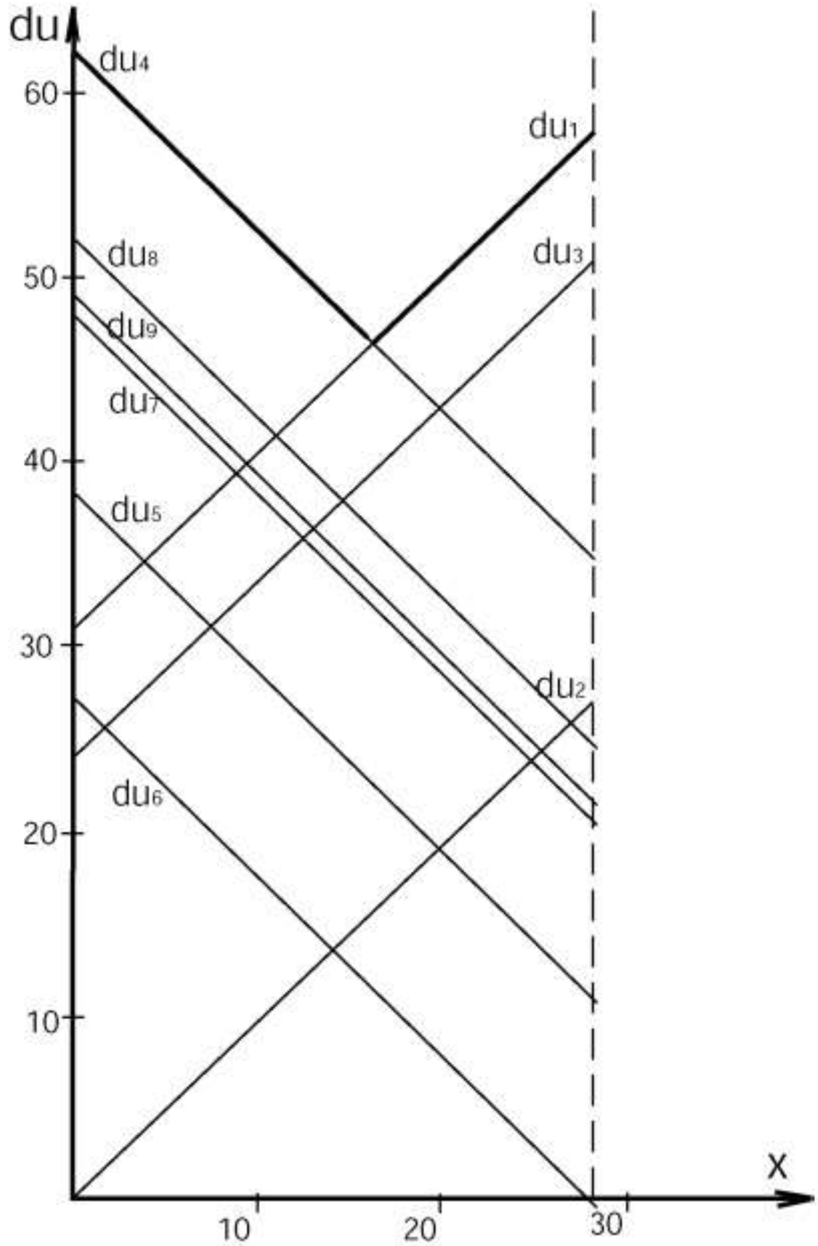


Рис. 4.7. Діаграма Хакімі

du_4 =min(55+x, 35+27-x) = 62 - x;

du_5 = min (38+x, 11+27-x) = 38 – x;

du_6 = 27– x;

du_7 = min (48+ x, 21+27-x) = 48 – x;

du_8 = min(60+x,25+27 – x) = 52 - x ;

du_9 = min (49+x,22+27-x) = 49 – x.

Будуємо графіки ліній du_1 – du_9. В результаті отримуємо так звану **діаграму Хакімі** (рис. 4.7). Її аналіз показує, що оптимальне місцерозташування пожежної частини є точкою перетину ліній du_1 і du_4. Розв'яжемо рівняння для визначення невідомої координати x: $31 + x = 62 - x$.

Отримуємо: **$x = 15.5$; $\min du_i = 46.5$ км.**

Аналогічний аналіз, проведений для ребра (1,4) дає результат $\min du_i$ = 52 км. Це означає, що дане ребро не дає виграшу у порівнянні з вибраним раніше сьомим населеним пунктом.

Висновок. При розміщенні пожежної частини у населеному пункті оптимальним варіантом буде сьомий населений пункт. При цьому віддаль до найбільш віддаленого пункту становитиме 52 кілометри. При розміщенні пожежної частини поза населеним пунктом оптимальним варіантом буде ребро (2,6). Пожежну частину слід розмістити в 15.5 кілометрах від 2-го пункта. При цьому віддаль до найбільш віддаленого пункту (1-го або 4-го) становитиме 46.5 кілометрів. Таким чином, у порівнянні з першим варіантом розв'язку ми отримали виграш у 5.5 кілометри. Розміщення пожежної частини на ребрі (1,4) не дає виграшу у порівнянні з розміщенням її у населеному пункті 7.

Зауваження. Слід мати на увазі, що не завжди розміщення пожежної частини на ребрі є більш вигідним від розміщення у вершині графа. У кожному конкретному випадку відповідний висновок можна зробити лише після повного аналізу обох варіантів розв'язування. У випадку, якщо декілька ребер мають однакову мінімальну нижню оцінку віддаленості, слід виконувати аналіз по алгоритму Хакімі для всіх таких ребер.

Тема 5. МЕТОДИ ПРИЙНЯТТЯ УПРАВЛІНСЬКИХ РІШЕНЬ

5.1. Проблема прийняття рішень
5.2. Прийняття управлінських рішень в умовах визначеності
5.3. Критерії вибору альтернатив
5.4. Метод голосування
5.5. Експертні методи вибору рішень

5.1. Проблема прийняття рішень

У процесі управління керівнику (особа, яка приймає рішення – ОПР) доводиться приймати рішення в умовах багатоваріантності розвитку системи. Послідовність прийняття рішень та принципи, за якими вони приймаються – це і є управління системою. Мета управління системою – підвищення ефективності її функціонування. Для забезпечення ефективності рішень необхідне експертне, логічне, або математичне їх обґрунтування.

Однією з умов ефективності прийняття рішень є наявність достатньої інформації. У залежності від забезпечення інформацією відрізняють ситуації з повним інформаційним забезпеченням, частковим інформаційним забезпеченням та повною відсутністю інформації. Недостатня кількість інформації збільшує невизначеність процесу прийняття рішень.

Хто володіє інформацією – той володіє світом (Уїнстон Черчіль). Часто в процесі економічної діяльності для здобуття необхідної інформації вдаються до не зовсім чесних прийомів (промислове шпигунство). Тому важливим аспектом діяльності підприємства є забезпечення недоступності особливо важливої інформації для сторонніх осіб.

Враховуючи великі обсяги інформації у сучасній економіці, для її обробки були створені автоматичні пристрої – комп'ютери. Сьогодні кількість інформації є настільки великою, що навіть комп'ютерні технології не вирішують проблеми обробки всієї вхідної інформації. Кожен керівник повинен володіти основними прийомами обробки інформації на комп'ютері: побудова таблиць та графіків, побудова найпростіших моделей (регресія, перебір та оцінка варіантів, оцінка ймовірності кожного варіанту), побудова найпростіших прогнозів (екстраполяція тренду, модель ковзного середнього). Більш складну обробку інформації повинен виконувати фахівець з питань обробки та аналізу інформації.

Проблема прийняття рішення передбачає наявність декількох можливих варіантів дій **(альтернатив)**. Процедура прийняття рішення включає такі етапи: описання проблеми, постановка задачі, аналіз наявної інформації, розробка альтернатив, вибір оптимальної альтернативи. Під альтернативою розуміють один з можливих варіантів прийняття рішення.

5.2. Прийняття управлінських рішень в умовах визначеності

Одним з основних методів кібернетики є розгляд системи як об’єкта, який може почергово перебувати в декількох несумісних станах. Перехід від одного стану до іншого здійснюється миттєво. У процесі прийняття рішень необхідно враховувати стан навколишнього середовища: погодні умови, економічна ситуація, політична ситуація тощо. Якщо інформація про майбутній стан середовища відома, кажуть про прийняття рішень в умовах визначеності. Якщо стан навколишнього середовища невідомий, рішення приймаються в умовах невизначеності. Якщо інформація про стан середовища має імовірнісний характер – рішення приймаються в умовах часткової невизначеності.

Розглянемо першу ситуації, коли майбутній стан середовища вважається відомим і суттєво не впливає на процес прийняття рішень. Для цього випадку існують добре розроблені математичні процедури оцінювання альтернатив такі як методи математичного програмування, методи дослідження операцій тощо.

Безумовна оптимізація (задача управління виробництвом).

Класичним прикладом найпростішої задачі системного аналізу в умовах визначеності є задача про оптимальну технологію виробництва і поставок товару. Деяка фірма повинна виробляти і постачати продукцію клієнтам однаковими партіями загальною кількістю ***N = 24 000*** одиниць на рік. У випадку зриву поставок фірма виплачує дуже великий штраф. Згідно з умовами технології запускати у виробництво доводиться відразу всю партію. Вартість запуску однієї партії (незалежно від розміру) становить ***Cp = 40 000*** гривень. Вартість зберігання одиниці продукції на складі ***Cx = 120*** гривень на рік. Таким чином, запускати в рік багато партій невигідно, бо будуть великі витрати на запуск партій. Але невигідно і випускати мало партій, бо тоді обсяг партій стане дуже великим і витрати на зберігання сильно зростуть. Необхідно знайти "золоту середину" - яку кількість партій в рік найвигідніше випускати?

Побудуємо модель системи. Позначимо через N - кількість виробів, випущених за рік, n - розмір партії. Знайдемо кількість випущених партій за рік **p**:

$$p = N / n. \tag{5.1}$$

Підготовка до запуску **p** партій по **n** одиниць продукції у кожній буде коштувати

$$E_1 = C_p \cdot N / n. \qquad (5.2)$$

Середній запас виробів на складі становить n/2 штук. Складські витрати будуть коштувати

$$E_2 = C_x \cdot n / 2. \qquad (5.3)$$

Загальні річні витрати складають

$$E = C_x \cdot n / 2 + C_p \cdot N / n \to \min. \qquad (5.4)$$

Необхідно знайти таке значення $\boldsymbol{n = n_0}$, при якому сума E досягає мінімуму. Для вирішення цього завдання необхідно взяти похідну від $\boldsymbol{E}$ по $\boldsymbol{n}$ і прирівняти її до нуля. Отримаємо

$$\frac{dE}{dn} = \frac{1}{2} C_x - \frac{C_p N}{n^2} = 0. \qquad (5.5)$$

Звідси знаходимо розв'язок

$$n = \sqrt{\frac{2 C_p N}{C_x}}. \qquad (5.6)$$

Для нашого прикладу n = 4000 одиниць в одній партії і відповідає інтервалу випуску між партіями 2 місяці. Мінімальні витрати становлять 4800 гривень на рік.

Порівняємо ці витрати з витратами при випуску 2000 виробів в партії або випуску партії один раз на місяць: E1 = 0.1 • 12 • 2000/2 + 400 • 24 000/2000 = 6000 гривень в рік.

Як бачимо, витрати для цього варіанту суттєво більші.

А тепер візьмемо розмір партії 8000 виробів. Витрати становлять … (*розрахувати самостійно*)

Задачі математичного програмування.

Існує цілий клас задач системного аналізу у яких необхідно мінімізувати деяку цільову функцію наступного типу:

$$F = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \to \max\ (\min)$$

де Xi - шукані змінні, c_i - відповідні їм коефіцієнти і при цьому мають місце обмеження, які називаються обмеженнями ресурсів. Задачі такого класу вивчаються в спеціальному розділі математики - лінійному програмуванні. Математиками були розроблені алгоритми пошуку екстремумів таких функцій, які вивчають в курсі математичного програмування.

Класичним прикладом задач математичного програмування є задачі розподілу ресурсів. У цих задачах використовується декілька видів ресурсів (робоча сила, фінанси, сировина), кожен з яких є обмеженим. Метою системного аналізу є знайти найбільш економічно вигідний спосіб виконання операцій з урахуванням обмежень на ресурси. У загальному вигляді задача розподілу ресурсів формулюється так:

знайти мінімум цільової функції (витрати)

$$F = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \to \min \tag{5.7}$$

при наступних умовах:

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1; \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2; \\ &\ldots \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m; \\ &x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0; \ldots ; x_n \ge 0; \\ &m \le n. \end{aligned} \tag{5.8}$$

Теоретичне обгрунтування і практичні методи вирішення задач лінійного програмування були розроблені Д. Данцігом та Л.В. Канторовичем. Задача лінійного програмування ілюструє метод прийняття оптимального рішення в умовах визначеності.

5.3. Критерії вибору альтернатив

Часто трапляються ситуації, коли особа, яка приймає рішення (ОПР) може реалізувати тільки одну дію з декількох можливих, після чого уже неможливо повернутися до попереднього стану системи. Можливі варіанти дій називають **альтернативами**. Серед всіх альтернатив можна вибрати найкращу, якщо є спосіб порівняння альтернатив (**критерій переваги).**

Позначимо x – деяку альтернативу з множини X. Вважають, що для всіх $x \in X$ можна задати функцію $q(x)$, яка називається **критерієм переваги** і має таку властивість: якщо альтернатива x_1 переважає альтернативу x_2, то $q(x_1) > q(x_2)$, і навпаки. Найкращою вважається альтернатива x* – така, за якої критерій набуває свого найбільшого значення:

$$x^* = \arg\max_{x \in X} q(x). \tag{5.9}$$

Інколи для більш об'єктивної оцінки альтернатив необхідно використовувати декілька критеріїв $q_1, q_2, \ldots q_n$ (багатокритеріальна задача). Кожному з критеріїв можуть відповідати різні найкращі альтернативи. Наприклад: критерій 1 – вибрати найшвидший варіант дістатися до мети; критерій 2 – вибрати найдешевший шлях дістатися до мети. Виникає питання – як вибрати найкращу альтернативу у цьому випадку? Розглянемо способи прийняття рішень у **багатокритеріальних задачах**.

Перший спосіб вибору найкращої альтернативи - зведення багатокритеріальної задачі до однокритеріальної. Можливий варіант узагальненого критерію – це адитивна функція

$$Q(x) = w_1 q_1 + w_2 q_2 + \ldots + w_n q_n \tag{5.10}$$

Співвідношення (9) називають **згорткою критеріїв**, w_i називають вагами різних критеріїв.

Зазвичай критерії нерівнозначні між собою (одні з них важливіші, ніж інші). **Другий спосіб** вибору найкращого рішення передбачає максимізацію головних критеріїв при умові, що менш важливі критерії не будуть знижуватися нижче за деякі встановлені межі.

Третій спосіб визначення оптимальної альтернативи використовують, якщо відомі оптимальні значення всіх параметрів $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0$. Розглядаючи параметри поточного стану як координати точки у фазовому просторі знайдемо відстань між поточним та оптимальним станом

$$D = \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + \ldots + (x_m - x_m^0)^2} \tag{5.11}$$

Ідея оптимізації рішення полягає у побудові такої фазової траєкторії, кожна наступна точка якої буде ближчою до оптимальної точки $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0$.

Вибір найкращої альтернативи можна описувати за допомогою **бінарних відношень.** Бінарне відношення R на множині X визначають як деяку множину пар $(x, y), x, y \in X$. Найпростіший метод задання бінарного відношення R полягає в тому, що матриця відношення R складається лише з нулів і одиниць:

$$a_{ij}(R) = \begin{cases} 1, \textit{якщо } x_i \, R \, y_j, \\ 0, \textit{якщо } x_i \, \overline{R} \, y_j \end{cases} \tag{5.12}$$

Прикладом такого представлення відношень є спортивні турнірні таблиці (програші позначають нулями, виграші – одиницями, нічиї неможливі).

5.4. Метод голосування

Один з найрозповсюдженіших методів прийняття рішень – **метод голосування:** приймають альтернативу, яка одержала найбільшу кількість голосів. Це правило приваблює своєю простотою та демократичністю, але застосовувати його треба обережно. Адже не всі особи, які приймають участь у голосуванні однаково обізнані з ситуацією. Інколи правило більшості не спрацьовує: наприклад, поділ голосів порівно в разі парної кількості тих, хто голосував. Частина експертів може не проголосувати. Це породжує варіанти: "голова має два голоси", "відносна більшість (більше 51 %)", "переважна більшість (більше 2/3)", "принцип одностайності (консенсус, право вето)".

Розглянемо основні варіанти голосування.

Правило 1 (простої більшості). Кожен виборець вибирає лише одну альтернативу. Перемагає та з них, яка набирає найбільшу кількість голосів. Інколи до цього правила вводять додаткову умову: переможець повинен набрати 50% відсотків голосів + 1 голос. Якщо ця умова не виконується, вибори проходять у 2 тури. У другий тур виходять два кандидати, які набрали найбільше голосів у першому турі. У другому турі працює правило простої більшості. Приклад: вибори президента в Україні.

Правило 2. Перемагає альтернатива, яка переважає будь-яку іншу за правилом відносної більшості (бінарні відношення 1 – 0). Проте, при використанні цього методу можлива така конфігурація переваг, за якої не буде переможця **(парадокс Кондорсе).** Наприклад: Порту – Шахтар 1:0, Шахтар – Зеніт 1:0, Зеніт – Порту 1:0.

Правило 3 (правило де Борда, або ранжування). Кожен виборець ранжує альтернативи від найкращої до найгіршої. Альтернатива отримує 1 бал за перше місце, 2 бали — за друге, …, ***n*** балів – за останнє місце. Перемагає альтернатива з найменшою сумою балів.

5.5. Експертні методи вибору

Якщо у процесі прийняття рішень недостатньо інформації щодо попередньої поведінки системи, звертаються до послуг експертів – досвідчених спеціалістів, які можуть оцінити варіанти функціонування системи.

Експертам роздають анкети з проханням оцінити пропоновані альтернативи. Експерти можуть оцінювати альтернативи у числовій або порядковій шкалі. Розглянемо перший випадок – **числова шкала оцінювання**. Нехай

$q_j(x_i)$ – оцінка i-ї альтернативи j-м експертом $(i=1,n, j=1,k;$ *n альтернатив, k експертів).* За остаточну характеристику кожної альтернативи вибирають вибіркове середнє всіх експертних оцінок для даної альтернативи

$$\bar{q}(x_i) = 1/k\sum_{j=1}^{k} q_j(x_i). \tag{5.13}$$

Узгодженість думок експертів вимірюють за допомогою величини

$$s_i = 1/k\sum_{j=1}^{k}\left[q_j(x_i) - \bar{q}(x_i)\right]^2. \tag{5.14}$$

Якщо експерти лише впорядковують альтернативи (**порядкова шкала оцінювання**), арифметичні операції неможливі. Розглянемо методи обробки експертної інформації у цьому випадку.

Результати опитування експертів зводять у таблицю, рядки якої відповідають альтернативам, стовпці – експертам. В i-му рядку записують місця (ранги) a_{ij}, дані експертами i-ій альтернативі. В останній стовпець записують суми рангів, отриманих об'єктами від усіх експертів

$$r_i = \sum_{j=1}^{k} a_{ij}. \tag{5.15}$$

Об'єкти впорядковують відповідно до сум рангів. На перше місце ставлять об'єкт, у якого сума рангів найменша ($R_i = 1$), і т. д. Ступінь узгодженості думок експертів визначають за допомогою **коефіцієнта конкордації**

$$W = \frac{12\sum_{i=1}^{k} D_i^2}{k^2(n^3 - n)}. \tag{5.16}$$

Тут

$$D_i = r_i - 0.5k(n+1), \tag{5.17}$$

n - кількість об'єктів, k - кількість експертів, r_i - сума рангів i-го об'єкта. При опитуванні експертів може виникнути проблема низько кваліфікованого експерта. Наприклад: розглянемо результати експертизи товарів Таблиця 5.1 ($n = 6$; $k = 4$).

Коефіцієнт конкордації дуже низький $W = 12*90/(16*210) = 0.32$, Це свідчить про те, що думки експертів неузгоджені. Для оцінювання фахового рівня експертів можна до таблиці 1 додати ще один рядок "Оцінка експерта", який розраховують за формулою

$$b_j = \sum_{i=1}^{n} (a_{ij} - R_i)^2 . \quad (5.18)$$

Тут a_{ij} - ранг i-го об'єкта на думку j-го експерта; R_i - підсумковий ранг i-го об'єкта, узгоджений всіма експертами. Чим менша оцінка, розрахована за формулою (18), тим вищий рівень експерта.

Таблиця 5.1. Обробка результатів експертного оцінювання

Зразок	Експерт				Сума рангів			Ранг
	1	***2***	***3***	***4***	ΣR_{ij}	D_i	D_i^2	R_i
1. Тойота	1	2	1	5	9	-5	25	**1**
2. Фольксваген	2	1	3	4	10	-4	16	**2**
3. Шкода	4	5	3	6	18	4	16	**5**
4. Форд	5	4	6	1	16	2	4	**4**
5. Міцубісі	3	3	3	3	12	-2	4	**3**
6. Рено	6	6	5	2	19	5	25	**6**
b_j	**2**	**2**	**10**	**46**		0	90	

Розглянувши оцінки експертів, відмічаємо низький фаховий рівень четвертого експерта. Виключаємо четвертого експерта з процедури голосування. Отримуємо нову таблицю 2. Знову розраховуємо коефіцієнт конкордації

$$W = 12 \cdot 129.5 / 9 / (216 - 6) = 0.82$$

Високе значення коефіцієнта конкордації свідчить про високу узгодженість думок експертів. Як видно з табл.2, перший експерт виявився найближчим до загального рішення. Це свідчить про його високу кваліфікацію.

Таблиця 5.2. Обробка результатів експертного оцінювання

Зразок	Експерт			Сума рангів			Ранг
	1	***2***	***3***	ΣR_{ij}	D_i	D_i^2	
1. Тойота	1	2	1	4	-6.5	42.25	**1**
2. Фольксваген	2	1	3	6	-4.5	20.25	**2**
3. Шкода	4	5	3	12	1.5	2.25	**5**
4. Форд	5.5	4	6	15	4.5	20.25	**4**
5. Міцубісі	3	3	3	9	-1.5	2.25	**3**
6. Рено	5.5	6	5	17	6.5	42.25	**6**
b_j	0	4	4	63	0	129.5	

Інколи деяким об'єктам приписують однакові ранги, тобто вони "ділять між собою місця" (нестроге ранжування). Такі ранги називають зв'язаними, а їх група - зв'язкою. Для зв'язаних рангів здійснюють усереднення і кожному зв'язаному рангу приписують усереднене значення. **Коефіцієнт конкордації для нестрогого ранжування** визначають за формулою

$$W = \frac{12\sum_{i=1}^{k} D_i^2}{k^2(n^3 - n) - k\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k_i}(t_{ij}^3 - t_{ij})}. \quad (5.19)$$

де k_i – кількість груп однакових рангів за оцінкою i-го експерта; t_{ij} — кількість однакових рангів у j-й групі за оцінкою i-го експерта (у наведеному вище прикладі $k_i = 1, t_{i1} = 3$. Наприклад 2, 3 і 5 об'єкти на думку 3 - го експерта однакові, тоді кожному з них приписується ранг 3. Значення коефіцієнта конкордації у цьому випадку $W = 0.85$. При розрахунку ми врахували дві зв'язки: для першого експерта $\sum_{j=1}^{k_i}(t_{ij}^3 - t_{ij})$ = 8 – 2 = 6; для третього експерта $\sum_{j=1}^{k_i}(t_{ij}^3 - t_{ij})$ = 27 – 3 = 24. Розрахунок коефіцієнта конкордації ведеться за формулою

$$W = \frac{12 \cdot 42.25}{9 \cdot 210 - 3 \cdot (24 + 6)} = 0.853.$$

Тема 6. ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

6.1. Схема матричної гри з природою
6.2. Прийняття рішень в умовах часткової невизначеності
6.3. Прийняття рішень в умовах повної невизначеності

6.1. Схема матричної гри з природою.

Розглянемо проблему прийняття рішень в умовах повної або часткової невизначеності. Який саме з можливих станів середовища буде реалізованим невідомо, або відомо з певною ймовірністю. Прийняття рішення у такій ситуації характеризується невизначеністю середовища. Невизначеність середовища породжує ризик матеріальних втрат.

Як приклад розглянемо взаємодію людини з навколишнім середовищем у вигляді моделі матричної гри з природою. Фермер вирощує овочі в степовій зоні України. Навколишнє середовище може перебувати в наступних станах: C_1 – дуже сухе літо, C_2 – сухе літо, C_3 – нормальне за вологістю літо, C_4 – вологе літо, C_5 – дуже вологе літо. Стратегії особи, яка приймає рішення (ОПР), полягають у виборі розміру інвестицій у полив овочів: S_1 – кошти не інвестуються; S_2 – інвестується 50% планових коштів; S_3 – повна планова інвестиція. Інвестицію (плату за воду для поливу) слід вносити як передоплату. Вибираючи одну із можливих стратегій, ОПР отримує в результаті деякий фінансовий виграш (програш) $F_{ij} = F(S_i, C_j)$, величина якого залежить від стану навколишнього середовища. Ця матриця характеризує виграш гравця у разі, якщо він вибере рішення S_i, а середовище перебуватиме у стані C_j.

$$F = \begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} S_1 & S_2 & & S_N \\ F_{11} & F_{12} & \dots & F_{1N} \\ F_{21} & F_{22} & \dots & F_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_{m1} & F_{m2} & \dots & F_{mN} \end{bmatrix}\begin{array}{l} \\ C_1 \\ C_2 \\ \\ C_m \end{array}$$

У залежності від ситуації, інформація про імовірності станів може бути відомою, або ж невідомою. Необхідно надати рекомендації щодо вибору оптимальної стратегії.

Оптимальна стратегія гравця в умовах невизначеності обирається на основі зведення стохастичної задачі прийняття рішень до детермінованої задачі на оптимізацію. Відповідно до кількості наявної інформації про навколишнє середовище вибирають ті чи інші критерії прийняття рішень. На прийняття рішень впливає і відношення до ризику особи, яка приймає рішення (обережна стратегія, ризикована стратегія, зважена стратегія).

6.2. Прийняття рішень в умовах часткової невизначеності

Розглянемо першу інформаційну ситуацію, яка характеризується частковою невизначеністю середовища. Це означає, що кожному стану середовища відповідає певна імовірність реалізації цього стану. Існує декілька підходів до вибору найкращої альтернативи у такій ситуації. Найбільш поширеними з них є **критерії Байєса** (середньостатистичного доходу) та **мінімальної дисперсії** (мінімального ризику). Ці критерії використовуються у тих випадках, коли відомі імовірності станів навколишнього середовища, які розраховуються на підставі тривалих спостережень за станом економіки.

а. Критерій Байєса.

Позначимо p_1 - імовірність настання дуже сухого літа, p_2 - імовірність настання сухого літа, p_3 - імовірність настання нормального за вологістю літа, p_4 - імовірність настання вологого літа, p_5 - імовірність настання дуже вологого літа. Повинна виконуватися умова $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 1$ (події утворюють повну групу). Критерій Байєса оцінює стратегії за максимальним значенням середнього за імовірністю виграшу ($N = 5$ - кількість можливих станів середовища)

$$F_{Bi} = \sum_{j=1}^{N} F_{ij} \cdot p_j \to \max . \qquad (6.1)$$

Приклад. Нехай матриця виграшів має наступний вигляд (Таблиця 1):

Таблиця 1. Матриця виграшів та імовірності станів

	Дуже сухе	Сухе	Нормальне	Вологе	Дуже вологе
S_1	50	70	110	130	110
S_2	80	110	120	90	60
S_3	100	130	110	80	60
P	0.10	0.30	0.30	0.20	0.10

Розраховуємо значення критерію Байєса (середньозважений виграш) для кожної із стратегій за формулою (1):

$F_{B1} = 50*0.10 + 70*0.30 + 110*0.30 + 130*0.20 + 110*0.10 = 96$;

$F_{B2} = 80*0.10 + 110*0.30 + 120*0.30 + 90*0.20 + 60*0.10 = 101$;

$F_{B3} = 100 * 0.10 + 130 * 0.30 + 110 * 0.30 + 80 * 0.20 + 60 * 0.10 = 104$.

Згідно з критерієм Байєса оптимальною стратегією є стратегія 3.

b. Багатьох керівників відлякують ситуації у яких ступінь ризику є високим. Для оцінки ступеня ризику використовують дисперсію – середньостатистичне відхилення від середнього виграшу. Розглянемо приклад, наведений у наступній таблиці.

	Низька	Середня	Висока	**B**	**Disp**
S_1	50	100	150	100	1630
S_2	80	100	120	100	**132**
	0.33	0.34	0.33		

Як бачимо, критерій Байєса дає однакову оцінку обох стратегій. Але зрозуміло, що перша стратегія, є більш ризикованою, у порівнянні із другою.

Критерій мінімальної дисперсії відповідає типу поведінки – "максимальна обережність" (мінімальний ризик) і розраховується за мінімальним значенням виразу

$$F_{md_i} = \sum_{j=1}^{N} \left[F_{ij} - F_{b_i}\right]^2 \cdot p_j \to \min . \qquad (6.2)$$

Розраховуємо значення критерію мінімальної дисперсії для кожної із стратегій за даними табл.1.

$$F_{md1} = (50-96)^2 * 0.10 + (70-96)^2 * 0.30 + (110-96)^2 * 0.30 +$$
$$+ (130-96)^2 * 0.20 + (110-96)^2 * 0.10 = 724;$$

$$F_{md2} = (80-101)^2 * 0.10 + (110-101)^2 * 0.30 + (120-101)^2 * 0.30 +$$
$$+ (90-101)^2 * 0.20 + (60-101)^2 * 0.10 = 369;$$

$$F_{md3} = (100-104)^2 * 0.10 + (130-104)^2 * 0.30 + (110-104)^2 * 0.30 +$$
$$+ (80-104)^2 * 0.20 + (60-104)^2 * 0.10 = 524.$$

Згідно з критерієм мінімальної дисперсії оптимальною є стратегія 2.

6.3. Прийняття рішень в умовах повної невизначеності

Друга інформаційна ситуація полягає у тому, що ймовірності настання станів середовища невідомі – ситуація повної невизначеності. У такій ситуації використовують методи оцінки альтернатив, які враховують психологічні мотиви прийняття рішень.

6.2. **Критерій Вальда**. Розглянемо другу інформаційну ситуацію, при якій розподіл імовірностей станів природного середовища є невідомим. Якщо в сільськогосподарському виробництві можлива орієнтація на середній ризик, то в деяких інших ситуаціях, які загрожують великими втратами доцільну обирати найобережнішу стратегію. Такими, наприклад є задачі про розрахунок ризику повені, землетрусу, аварії атомної електростанції. У таких задачах для вибору стратегії поведінки ОПР використовують максимінний критерій (критерій Вальда), орієнтований на найнесприятливіші умови середовища

$$Fw_i = \min_j F_{ij} \to \max \tag{6.3}$$

Розрахуємо значення критерію Вальда для кожної із стратегій за даними табл.1.

$$F_{W1} = \min(50,70,110,130,110) = 50;$$

$$F_{W2} = \min(80,110,120,90,60) = 60;$$

$$F_{W3} = \min(100,130,110,80,60) = 60.$$

Згідно з критерієм Вальда оптимальними є стратегія 2, або стратегія 3.

6.3. **Критерій Севіджа**. Критерій Севіджа є антиподом критерію Вальда. Якщо критерій Вальда орієнтується на найнесприятливіші стани середовища, то критерій Севіджа орієнтується на найсприятливіші стани середовища. Тому його часто називають оптимістичним критерієм. Остання колонка таблиці заповнюється максимальними значеннями кожного рядка. Потім з них вибирається максимальне. Згідно з таким максимаксним критерієм, оптимальною є перша стратегія, оскільки вона дозволяє отримати максимальний виграш.

$$Fs_i = \max_j F_{ij} \to \max \tag{6.4}$$

Обчислимо значення критерію Севіджа для кожної із стратегій.

$$F_{S1} = \max(50,70,110,130,110) = 130;$$

$$F_{S2} = \min(80,110,120,90,60) = 120;$$

$$F_{S3} = \min(100,130,110,80,60) = 130.$$

Згідно з критерієм Севіджа оптимальними є стратегія 1, або стратегія 3.

6.4. **Критерій Гурвіца**. Припустимо тепер, що ОПР має певну інформацію про співвідношення оптимізму і песимізму при прийнятті рішення. Інформаційна ситуація третього типу. Вона є проміжною між першою ІС і другою ІС. Суть критерію Гурвіца полягає у визначенні зваженої комбінації розв'язків Вальда і Севіджа . Використовується зважуючий коефіцієнт λ, ($\lambda < 1$)

$$Fh_i = \lambda \min_j F_{ij} + (1-\lambda) \max_j F_{ij} \to \max . \tag{6.5}$$

При $\lambda = 0$ ми приходимо критерію Севіджа, при $\lambda = 1$ - до критерію Вальда. Виберемо значення $\lambda = 0.5$ і розрахуємо критерії Гурвіца для кожної із стратегій (дані табл.1):

$F_{H1} = 0.5 * \min(50,70,110,130,110) + 0.5 * \max(50,70,110,130,110) = 90$;

$F_{H2} = 0.5 * \min(80,110,120,90,60) + 0.5 * \max(80,110,120,90,60) = 90$;

$F_{H3} = 0.5 * \min(100,130,110,80,60) + 0.5 * \max(100,130,110,80,60) = 95$.

Згідно з критерієм Гурвіца оптимальною є стратегія 3.

6.5. **Критерій Бернуллі – Лапласа**. В умовах повного незнання про поведінку середовища (інформаційна ситуація типу I_4) доцільно використати критерій Бернуллі-Лапласа. Суть його зводиться до того, що оскільки немає підстав віддавати перевагу одному із можливих сценаріїв, то всі вони вважаються рівноможливими. Тоді в якості математичного сподівання при стратегії S_i беруть середнє арифметичне всіх варіантів станів середовища. Потім з них вибирають максимальне

$$Fbl_i = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} F_{ij} \to \max \tag{6.6}$$

Розраховуємо значення критерію Бернуллі-Лапласа для кожної із стратегій.

$F_{BL1} = (50 + 70 + 110 + 130 + 110) / 5 = 94$;

$F_{BL2} = (80 + 110 + 120 + 90 + 60) / 5 = 92$;

$F_{BL3} = (100 + 130 + 110 + 80 + 60) / 5 = 96$.

Згідно з критерієм Бернуллі-Лапласа оптимальною стратегією є стратегія 3.

Тема 7. МЕТОДИ ІДЕНТИФІКАЦІЇ СКЛАДНИХ СИСТЕМ

7.1. Визначення ступеня випадковості системи
7.2. Дослідження автокореляцій часового ряду
7.3. Описання стану системи у фазовому просторі
7.4. Модель Лоренца
7.5. Дослідження систем методами хаотичної динаміки

7.1. Визначення ступеня випадковості системи.

Результати діяльності економічних систем відображаються у вигляді часових рядів їх параметрів. Досліджуючи специфіку часового ряду ми можемо зробити висновки щодо характеру системи, яка його породила. Зокрема, на підґрунті дослідження часових рядів роблять висновки щодо розмірності системи, можливості її прогнозування та максимального горизонту прогнозування, характеру динаміки системи (трендостійка, випадкова, реверсивна). Тому обов'язковим етапом, який передує моделюванню та прогнозуванню економічної системи є **передпрогнозний аналіз часових рядів**, який дозволяє здійснити часткову **ідентифікацію системи**. Обов'язковим елементом ідентифікації системи є визначення характеру її динаміки. Динаміка системи може бути **детермінованою** (строго визначеною, передбачуваною) або **випадковою** (стохастичною, непередбачуваною). Деякі системи на певних часових проміжках ведуть себе детерміновано, а на інших часових проміжках – випадковим чином. Багато інформації про характер динаміки системи може дати часовий ряд значень одного з показників, які характеризують дану систему.

Розглянемо методи визначення **ступеня випадковості** системи за її часовим рядом. Розглянемо часовий ряд $\{x_i\}, \quad i=\overline{1,n}$ у якому кожна трійка послідовних значень є різними числами. Поворотною точкою називають значення ряду x_t для якого виконується одна з двох умов: $x_{t-1} < x_t; \quad x_{t+1} < x_t$ або $x_{t-1} > x_t; \quad x_{t+1} > x_t$ (М. Кендал). Позначимо мінімальне число з довільної трійки послідовних елементів ряду x_{i-1}, x_i, x_{i+1} символом a, проміжне – символом b, максимальне – символом c. При випадковому розміщенні розглянутих чисел є можливими 6 конфігурацій $a,b,c; \quad a,c,b; \quad b,a,c; \; b,c,a; \; c,a,b; \; c,b,a$. Якщо ряд є випадковим, кожна із цих конфігурацій є рівноймовірною, тобто ймовірність їх появи у випадковому ряду становить $1/6$. Чотири з шести виписаних вище конфігурацій (крім першої та останньої) відповідають поняттю «поворотної точки", введеному Кендалом. Перша і остання конфігурація відповідають трендоподібній динаміці ряду. Таким чином, ймовірність появи поворотної точки у випадковому ряду становить $2/3$, ймовірність трендової тріади - $1/3$. Таким чином М. Кендал показав, що для випадкового (стохастичного) ряду довжиною n середнє значення кількості поворотних точок становить

$$P_c = 2/3 \cdot (n-2)$$

при стандартному відхиленні

$$\sigma_P = \sqrt{(16n-29)/90}\,.$$

Введемо наступні позначення

$$P_L = P_c - 2\sigma_P\,; \quad P_U = P_c + 2\sigma_P\,. \qquad (7.1)$$

Якщо фактична кількість поворотних точок P_f задовільняє співвідношення $P_L \le P_f \le P_U$, ряд вважають *випадковим (стохастичним).* У випадковому ряду в розумінні Кендела після приросту (спаду) слідує спад (приріст) з імовірністю $2/3$, а ймовірність ще одного приросту (спаду) становить $1/3$.

Якщо фактична кількість поворотних точок $P_f < P_L$ це означає, що для ряду характерні трендові ділянки. Такий ряд називають *персистентним (трендостійким)*.

Якщо $P_f > P_U$, це означає надмірну кількість коливань, викликану деяким зовнішнім фактором. Такий ряд називають *антиперсистентним (реверсивним)*. Ідентифікація часового ряду як трендостійкого чи реверсивного має важливе значення для вибору методу прогнозування. У першому випадку використовують методи екстраполяції трендових моделей, у другому використовують гармонічні або авторегресійні моделі, які здатні відтворити коливання випадкової величини.

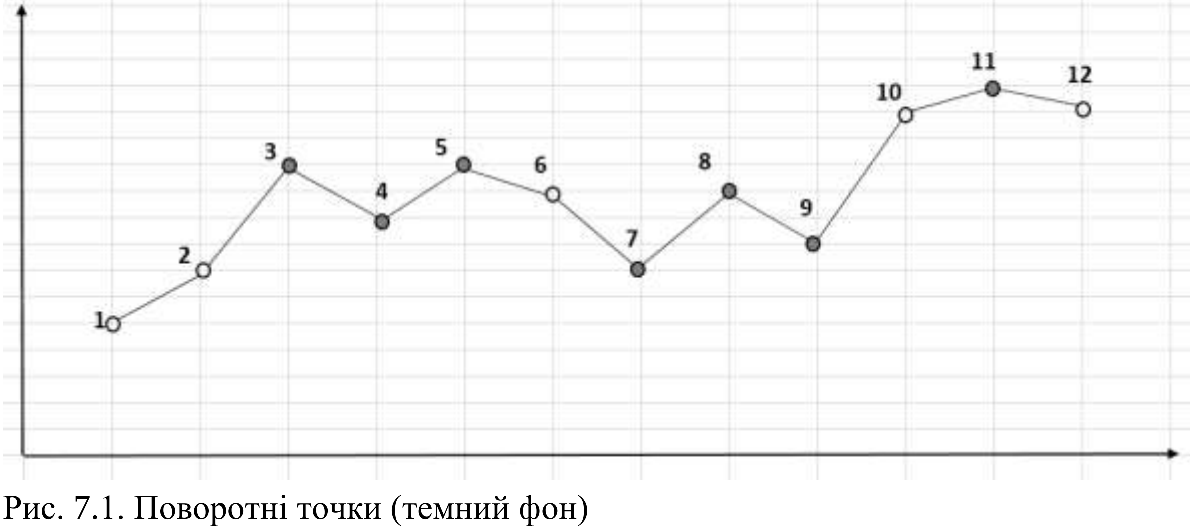


Рис. 7.1. Поворотні точки (темний фон)

7.2. Дослідження автокореляцій часового ряду

Потужним інструментом дослідження характеру динаміки системи є кореляційний аналіз. Застосовуючи кореляційний аналіз до часового ряду, який представляє досліджувану систему, можна отримати відповіді на наступні питання: чи має ряд тренд? чи присутня циклічна компонента ряду? Перша відповідь описує спрямованість динаміки системи (зростаюча, спадна, стабільна), друга відповідь визначає наявність (відсутність) коливань.

Кореляційну залежність між двома різними відрізками часового ряду, зміщеними на часовий інтервал L (лаг), називають **автокореляцією** з лагом L. **Лагом** називається часовий проміжок між двома відрізками часового ряду.

Введемо поняття **автокореляційної функції** (АКФ) $\rho(\tau)$ для часового ряду $\{y_t\}$

$$\rho(\tau)=\frac{\operatorname{cov}(y_t, y_{t+\tau})}{D(y_t)}. \tag{7.2}$$

Тут $\operatorname{cov}(y_t, y_{t+\tau})$- коефіцієнт коваріації часового ряду для лагу τ, $D(y_t)$ - дисперсія. Значення АКФ характеризує тісноту статистичного зв'язку між рівнями часового ряду, розділеними $\boldsymbol{\tau}$ часовими лагами. Всі значення АКФ є безрозмірними і задовільнять умову

$$|\rho(\tau)| \leq 1. \tag{7.3}$$

Графік АКФ відображає залежність коефіцієнта автокореляції від лагу і називається **корелограма**. При визначенні кількості коефіцієнтів АКФ дотримуються правила

$$\tau \leq n/4. \tag{7.4}$$

Таким чином, послідовність коефіцієнтів автокореляції першого, другого і т.д. порядків утворює автокореляційну функцію часового ряду. Аналіз автокореляційної функції та її графіка (*корелограми*) дозволяє визначити лаг, за якого автокореляція найбільш висока, тобто лаг, за якого зв'язок між поточними і попередніми рівнями ряду є найбільш тісним. Таким чином, за допомогою аналізу автокореляційної функції і корелограми можна виявити особливості динаміки системи, яка його породила. Є декілька правил, які описують найбільш характерні приклади корелограм.

1. Якщо найбільш високим виявляється *додатній* коефіцієнт автокореляції першого порядку, досліджуваний ряд містить тільки тренд (тенденцію до зростання чи спадання).

2. Якщо найбільш високим виявляється *від'ємний* коефіцієнт автокореляції першого порядку, досліджуваний ряд є реверсивним (схильним до коливань).
3. Якщо найбільш високим виявляється *додатній* коефіцієнт автокореляції порядку T, ряд містить циклічні коливання з періодичністю T.

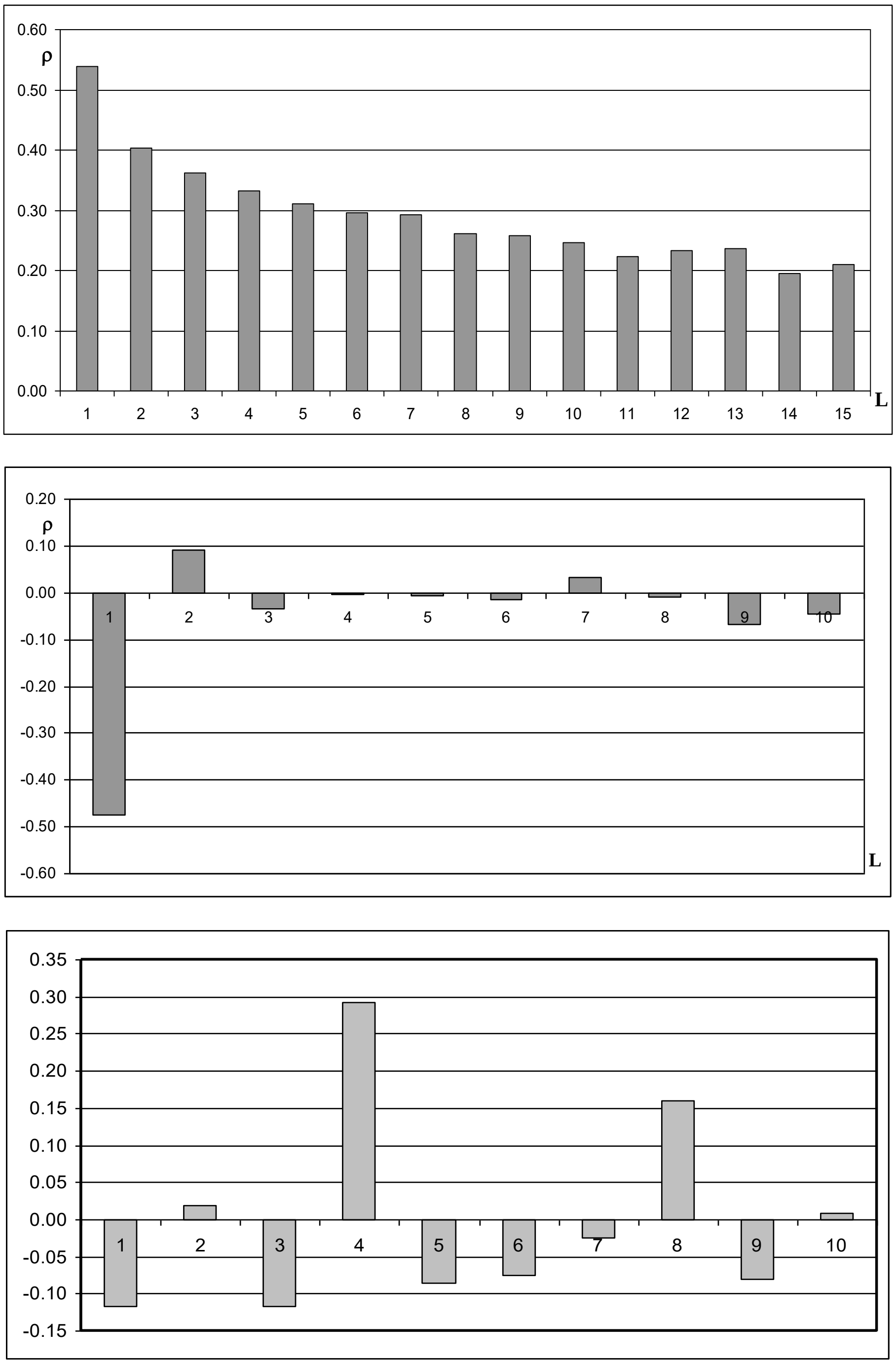


Рис.7.2. Корелограми ЧР. А – ряд з довгою пам'яттю (розливи річки Ніл); Б – ряд з короткою пам'яттю (зміни врожайності ОП - США); В – циклічний ряд (річні суми опадів Рівненська область)

4. Якщо жоден з коефіцієнтів автокореляції не є статистично значущим, можна зробити припущення, що даний ряд не містить тенденції та циклічних коливань і має структуру схожу до структури випадкового процесу.

У практичних дослідженнях значущим вважають коефіцієнт автокореляції, модуль якого перевищує значення 0.2.

Розглянемо декілька прикладів корелограм, виконаних для реальних часових рядів.

1. АКФ містить багато значущих елементів. Ряд схильний до трендів і має довгу пам'ять (Рис.7.2 А). Часовий ряд описує статистику величини розливу р. Ніл (Єгипет).
2. АКФ містить 1 значущий елемент. Ряд є реверсивним і має коротку пам'ять (Рис.7.2 Б). Ряд врожайності озимої пшениці (США).
3. Більшість значень АКФ є незначущими, але один з них є великим позитивним –свідчення наявність циклу з періодом 4 роки (див. Рис.7.2 В). Ряд річної суми опадів для Рівненської області.
4. Для побудови корелограми в середовищі MS Excel можна використовувати функцію Коррел. Наприклад, функція "коррел(b4 : b50; b5 : b51)" дозволяє отримати значення першого коефіцієнта автокореляції ρ_1 для ряду довжиною 56 елементів, розміщеного в комірках b4 : b59; функція "коррел(b4 : b50; b6 : b52)" – значення другого коефіцієнта автокореляції ρ_2 і т.п.

   Але, описаний метод є не зовсім точним. Іншим методом побудови корелограми є програма Statistica. При цьому використовують послідовність команд: Statistics, Advanced Linear/Nonlinear Models, Time Series/Forecasting, Arima & autocorrelation functions, Number of lags, Autocorrelations.

7.3. Описання стану системи у фазовому просторі

Стан системи характеризується сукупністю значень основних параметрів системи в даний момент часу. Наприклад, для описання економічного стану підприємства необхідно задати числа, що оцінюють валовий випуск продукції, дохід, прибуток, рентабельність, кількість працівників, фонд заробітної плати, продуктивність праці, обсяги кредиторської та дебіторської заборгованості, обсяги інвестицій, коефіцієнт зносу обладнання. Позначимо ці параметри символами q_1, q_2, q_3, … q_k. Дані числа називають координатами стану системи в k-розмірному просторі станів або у фазовому просторі. При зміні стану системи змінюються її параметри, тобто координати стану є змінними величинами залежними від часу $q_1(t), q_2(t), \ldots, q_k(t)$.

Найважливішою характеристикою фазового простору є його **розмірність**, тобто мінімальна кількість параметрів, які необхідно задати для визначення стану системи. Розмірність фазового простору, яка забезпечує однозначне представлення всіх можливих станів системи, є числовою оцінкою складності системи.

Системи, стан яких змінюється з часом, називають **динамічними**. Кожному стану системи відповідає певна **точка** фазового простору $P(q_1, q_2, \ldots q_k)$. Зміну станів динамічної системи з часом називають **процесом**. Будь-який процес у економічній системі характеризується зміною параметрів, тому йому відповідає рух точки у **фазовому просторі**. Процесу зміни станів відповідає ***траєкторія*** – лінія, яка з'єднує сусідні точки фазового простору. Фазова траєкторія відображає поведінку системи під впливом деяких факторів. Множину усіх фазових траєкторій, яким відповідають різні початкові умови, називають ***фазовим портретом системи.*** Фазовий портрет являє собою сім'ю неперетинних кривих. Це означає, що динамічна система може перебувати в кожному стані лише один раз.

Більшість економічних систем відносяться до класу відкритих нелінійних систем, які називають дисипативними. Такі системи є нерівноважними завдяки розсіюванню ресурсів (речовина, енергія, фінанси), отримуваних ззовні. Для таких систем сукупність фазових траєкторій притягується до деякої скінченновимірної підмножини фазового простору, називаної **атрактором**. Скінченновимірний атрактор визначає властивості усталеного з часом коливного процесу у системі. Коливання в економічних системах є неперіодичними і зумовлені кризами перевиробництва, недосконалістю фінансових механізмів, відсутністю еквівалентності між масою товарів та грошовою масою, перевиробництвом або недовиробництвом продовольства, військовими та політичними конфліктами тощо. Для деяких динамічних систем є характерним **дивний атрактор** (рис. 7.4). Це означає, що невеликі зміни початкових умов системи можуть привести до кардинальних змін через певний проміжок часу. Змах крил метелика в одному місці земної кулі може викликати ураган і іншому її місці (Б. Мандельброт – ефект метелика).

Зміна параметрів стану описується функціями, які неперервні або ж дискретні. Коли ці функції є неперервні, поведінку динамічної системи описують за допомогою системи диференціальних рівнянь:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, y), \quad \frac{dy}{dt} = g(t, x, y), \cdots . \tag{7.5}$$

Розрізняють три характерних типи поведінки, або три режими, в яких може перебувати динамічна система: рівноважний, періодичний, перехідний. **Рівновага системи** — це здатність її зберігати свій стан як завгодно довго (як за відсутності, так і за наявності зовнішніх впливів). Згідно із другим законом термодинаміки, при відсутності керуючих впливів складна ізольована система прямує до стану рівноваги, для якого є характерними дезорганізація та хаос.

При **циклічному режимі функціонування** система через деякі проміжки часу приходить до одного і того ж стану (потрапляє в одну точку фазового простору). Циклічність є одним з видів стійкості. Приклади: циклічність виробництва сезонних товарів, циклічність транспортних перевезень.

Процес переходу системи з одного стійкого стану в інший називають **перехідним процесом**. Зміна стану об'єкта неминуче пов'язана з переносом речовини, енергії чи фінансів, і не може відбуватись миттєво. Швидкість перехідного процесу характеризує інерційність системи. Перехідні процеси описуються за допомогою логістичної функції.

7.4. Модель Лоренца

Лінійний підхід не дозволяє проаналізувати нерегулярну поведінку, яку демонструють сучасні фінансові ринки. До початку 60-х років у нелінійних дисипативних динамічних системах в стаціонарному режимі спостерігали тільки періодичні і квазіперіодичні рухи. Проте в 1963 році у динамічній системі Лоренцем був знайдений дуже складний рух, який сприймався як хаотичний. Для характеристики таких рухів ввели поняття «динамічний хаос». Слово «динамічний» означає, що відсутні джерела флуктуацій. Слово «хаос» означає, що поведінку системи можна прогнозувати лише на дуже короткий відрізок часу.

Система Лоренца описує процес конвекції в шарі рідини між двома горизонтальними пластинами, температура яких є постійною, причому нижня гарячіша від верхньої на ΔT. Експериментальне дослідження ситуації при різних ΔT показало, що при малих перепадах температур рідина знаходиться у спокої і працює лише механізм теплопровідності, температура лінійно спадає від дна до поверхні. Потім при досягненні деякого критичного перепаду температур ΔT_c стан стає нестійким. З'являються шестигранні осередки на поверхні рідини, або конвективні вали. При подальшому збільшенні ΔT вали починають коливатися, потім коливання стають усе більш складними і розвивається турбулентний рух (рис. 7.3).

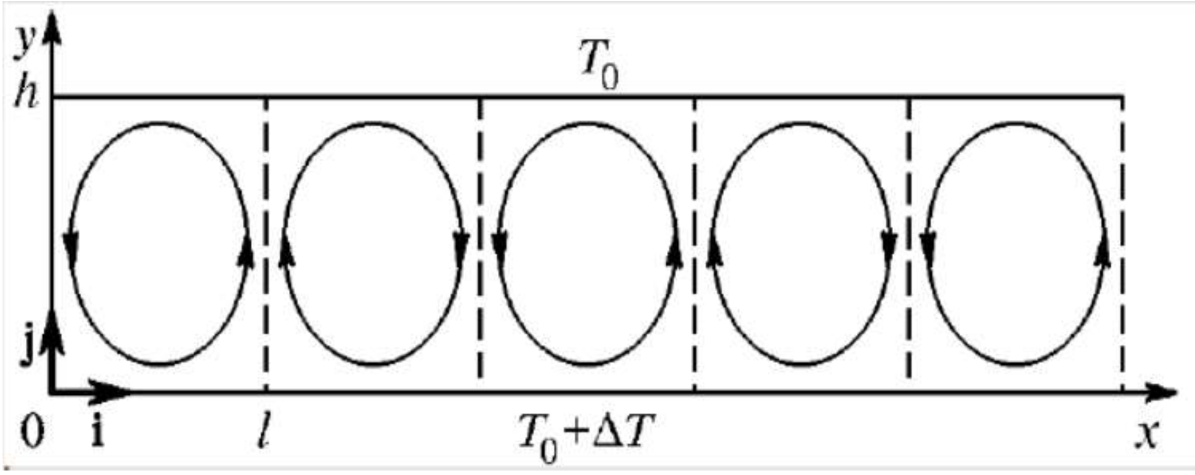


Рис. 7.3. Турбулентний рух в системі Лоренца.

У статті математиків Рюеля і Такенса, опублікованої в 1971 році, був введений новий математичний образ динамічного хаосу - *дивний атрактор*. Слово "дивний" підкреслює дві властивості атрактора. Це, по-перше, незвичність його геометричної структури. Розмірність дивного атрактора є дробовою (фрактальною). По-друге, дивний атрактор - це притягуюча область для траєкторій з навколишніх областей. При цьому всі траєкторії усередині дивного атрактора динамічно нестійкі, що виражається у сильній (експоненціальній) розбіжності близьких у початковий момент траєкторій.

Математична модель системи Лоренца має вигляд:

$$\begin{aligned} dx/dt &= \sigma(y-x) \\ dy/dt &= rx - y - xz. \\ dz/dt &= xy - bz \end{aligned} \quad (7.6)$$

Тут змінна x залежить від температури, змінні y і z залежать від проекцій швидкості рідини у горизонтальному та вертикальному напрямах. Плоска проекція фазового портрета системи Лоренца представлена на рис.7.4.

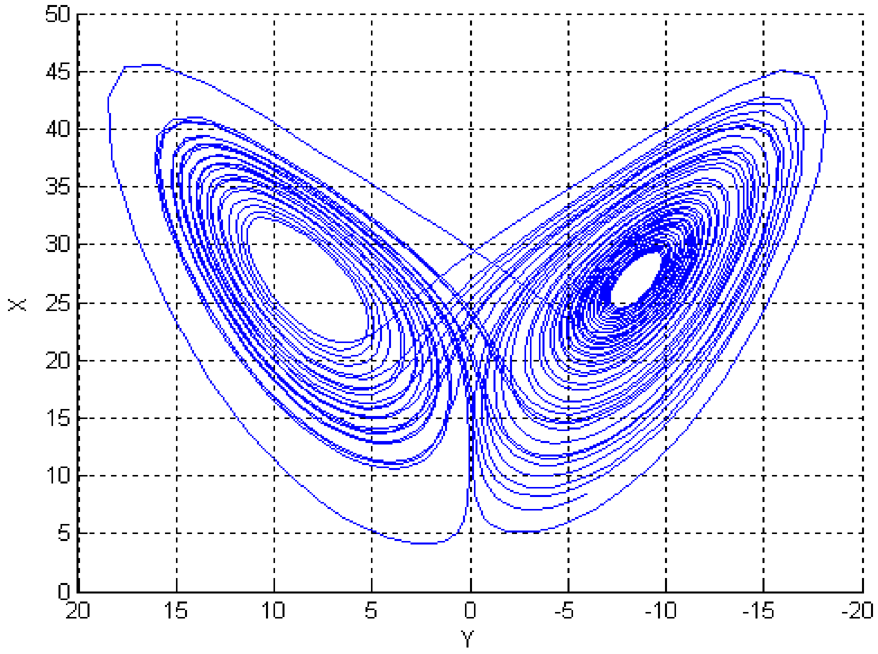


Рис. 7.4. Фазовий портрет системи Лоренца (двовимірна проекція)

Фазовий портрет представляє дві групи циклічних траєкторій розміщених у двох різних площинах, розміщених під кутом одна до іншої. Перехід траєкторії з однієї площини в іншу здійснюється випадково, непередбачувано. В цьому і полягає хаотичність системи. Ознакою динамічності є майже періодичні повторення витків траєкторії.

7.5. Дослідження систем методами хаотичної динаміки.

Найпростішим типом динамічної поведінки системи є лінійна динаміка, яка характеризується рівномірним зростанням чи спаданням характеристичного показника. Більш складною є періодична динаміка, для якої є характерними регулярні періоди зростання та спадання показника. Періодична динаміка є характерною для нелінійних систем. Найбільш складним типом динаміки є хаотична динаміка. При цьому параметри системи також мають регулярні періоди зростання і спадання, але при цьому тривалість та амплітуда коливань є змінними. На невеликих проміжках часу системи хаотичної динаміки є детермінованими, але горизонт прогнозування таких систем завжди обмежений, оскільки їх поведінка сильно залежить від початкових умов. Для систем хаотичної динаміки існує можливість моделювання з використанням диференціальних (різницевих) рівнянь. Для встановлення типу динаміки, яка є характерною для досліджуваної системи, було розроблено низку методів, більшість з яких ґрунтуються на аналізі часових рядів. Більшість часових рядів є нестаціонарними, тому на першому етапі досліджень необхідно змоделювати та вилучити з ряду його тренд та циклічну компоненту. Отриманий після цього ряд називається рядом залишків. Якщо тренд часового ряду має складний характер і його неможливо виділити стандартними методами (елементарні функції), ряд залишків може містити детерміновану компоненту, пов'язану з цим трендом. Для виділення детермінованої компоненти з ряду залишків необхідно виконати згладжування ряду залишків. Дослідження згладженого ряду залишків дозволяє побудувати фазовий портрет системи, обчислити розмірність системи, оцінити ступінь її прогнозованості.

Побудова фазового портрета. Використання методів хаотичної динаміки вимагає довжини досліджуваного ряду 10^2 - 10^3 елементів. У випадку, якщо досліджувані ряди є коротшими, використовують ергодичну гіпотезу і моделюють один довгий ряд низкою більш коротких рядів, для яких виконується **властивість однорідності** (стабільність середнього значення і дисперсії). Наприклад, при дослідженні динаміки врожайності зернових і Україні довжина часових рядів складає 60 елементів. Однак, наявність циклів приблизно однакової тривалості дозволяє розглядати кожен ряд як декілька витків фазової траєкторії. Такі ряди містять три цикли (три витки фазової траєкторії) середньою тривалістю 19 років. Тоді, розглянувши групу 12 областей з однорідною динамікою врожайності, отримаємо 36 витків фазової траєкторії з довжиною 19 років. Згідно з ергодичним принципом такий набір часових рядів можна розглядати як аналог одного часового ряду протяжністю 684 елементи.

Вигляд атрактора динамічної системи визначає характер динаміки цієї системи. Атрактор у вигляді точки відповідає стабільному стаціонарному стану системи (параметри системи не змінюються). Атрактор у вигляд замкнутої кривої описує регулярні циклічні коливання системи. Дивний атрактор описує складні неперіодичні коливання системи.

Важливою задачею є реконструкція атрактора системи за даними часового ряду. Згідно з теорією Такенса-Мане задовільну геометричну картину атрактора системи можна отримати, якщо замість змінних, які характеризують поведінку системи (але значення яких нам невідомі), використати так звані вектори затримок $z_i = \{x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+m-1}\}$ для одного виміряного параметра. Вперше даний підхід до аналізу часових рядів був математично обґрунтований в роботах Такенса. Теорія Такенса дозволяє встановити динамічний характер системи.

Для дослідження динамічних характеристик системи необхідно виконати занурення системи у фазовий простір. Для цього використовують метод часових затримок (лагів). Фазовий простір розмірності D будують, використовуючи один часовий ряд $\{x\}=(x_1,x_2,\ldots x_n)$. При значенні лагу $L=1$ перший вектор-стовпець має вигляд $\{X_1\}=(x_1,x_2,\ldots x_{n-D+1})$, другий стовпець має вигляд $\{X_2\}=(x_2,x_3,\ldots x_{n-D+2})$, останній стовпець має вигляд $\{X_D\}=(x_{1+D},x_{2+D},\ldots,x_n)$.

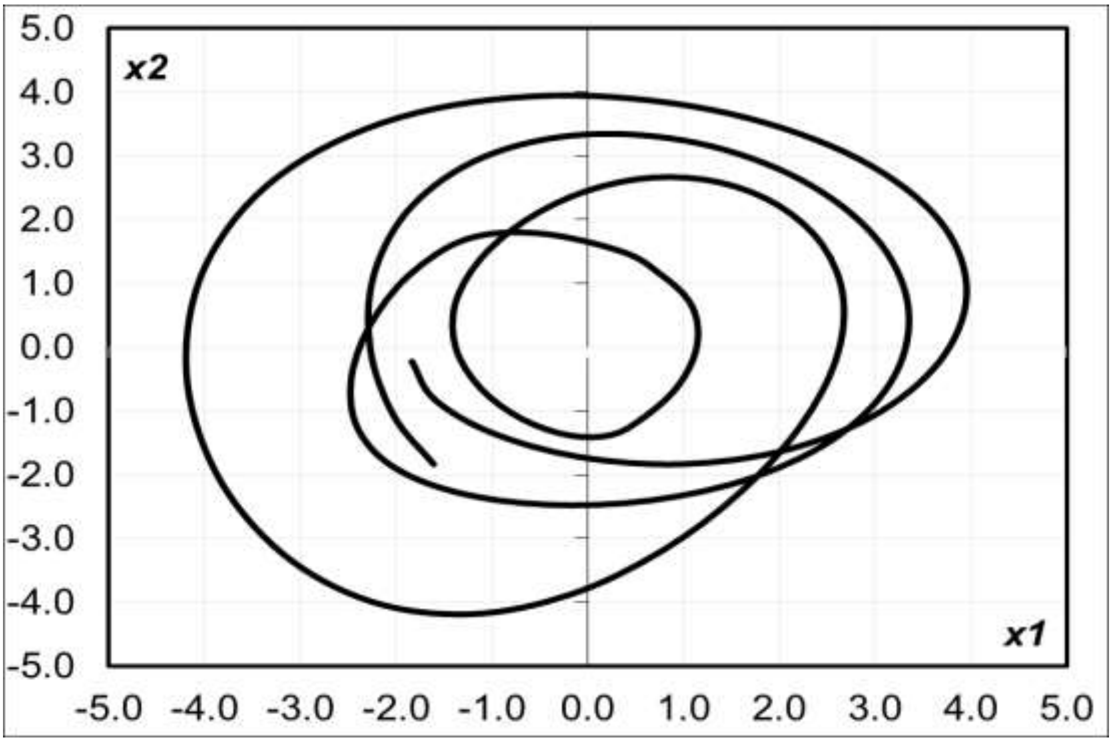


Рис. 7.5. Двовимірна проекція фазового портрету системи зерновиробництва України

Два відрізки часового ряду, зміщені один відносно одного на деякий лаг τ можна розглядати як різні параметри x_1 і x_2. Розглянемо площину x_1Ox_2, координатами якої виступають елементи рядів X_1 і X_2. Графік залежності $x_2(x_1)$ утворює фазову траєкторію системи. **D** відрізків часового ряду, зміщених на лаг τ, утворюють **D**-вимірну модель (реконструкцією) фазового портрета системи. Перед побудовою фазового портрета на підставі реальних часових рядів їх необхідно згладжувати. На рис. 7.5 зображена двовимірна проекція фазового портрета системи зерновиробництва України, отриманого із сукупності згладжених рядів залишків. Поведінка фазової траєкторії системи демонструє яскраво виражену циклічність.

Визначення розмірності системи.

Для аналізу системи необхідно насамперед встановити її розмірність, тобто мінімальну кількість параметрів, необхідну для описання системи. Мале значення розмірності вказує на детермінованість системи, велике – на її випадковість. При розмірності, яка не перевищує 5 – 6, добре працюють різноманітні методи аналізу і прогнозу еволюції системи. Зазвичай явний вигляд математичної моделі системи є невідомим і, тому, необхідно мати можливість оцінювати розмірність системи безпосередньо за спостереженнями. Для визначення розмірності використовують метод "фальшивих сусідів" та метод власних значень.

В методі "фальшивих сусідів" використовують поняття близькості фазових векторів. Для визначення відстані між векторами $(x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{iD})$ та $(x_{j1}, x_{j2}, \ldots, x_{iD})$ використовують евклідове визначення відстані

$$d_{ij} = \sqrt{(x_{i1} - x_{j1})^2 + (x_{i2} - x_{j2})^2 + \ldots + (x_{iD} - x_{jD})^2}\,. \tag{7.7}$$

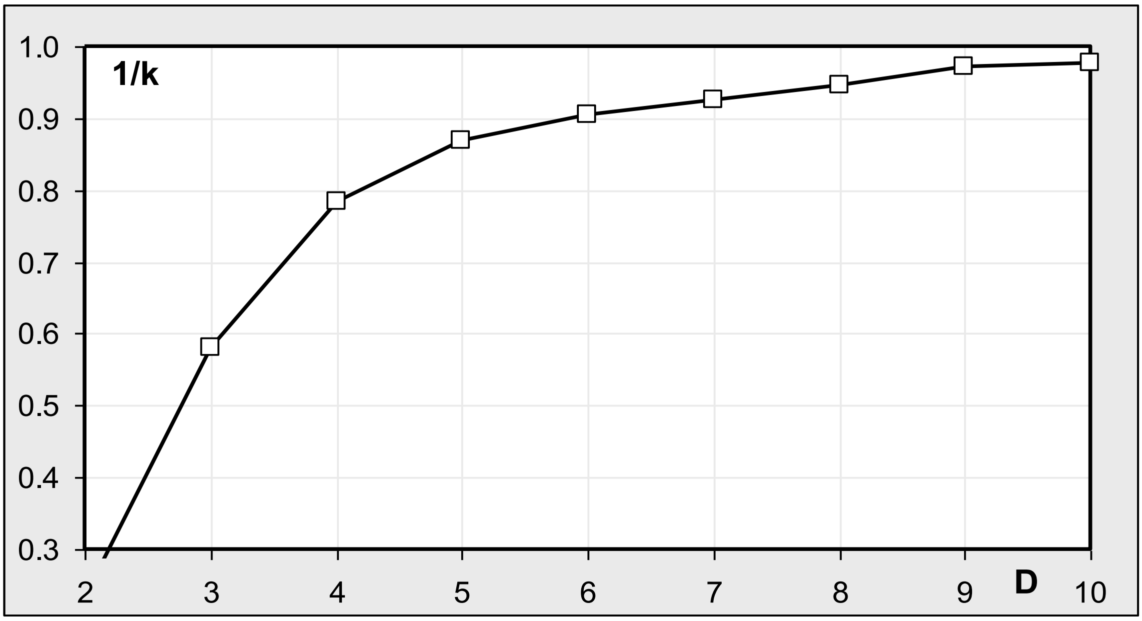


Рис. 7.6. Визначення мінімальної розмірності вкладення D

При збільшенні розмірності фазового простору D в результаті появи нових ненульових координат відбувається збільшення відстані між двома точками простору – ефект "розтягування фазового простору". Процедура оцінювання розмірності системи починається з розмірності 2. Вибирається група векторів фазового простору, відстань між якими є найменшою – "найближчі сусіди". Потім розмірність збільшується на 1 і розраховується коефіцієнт **k** збільшення відстані між векторами - "найближчими сусідами". За розмірність системи вибирають таке число D, щоб при переході до розмірності $D+1$ відстань між "найближчими сусідами" збільшувалась незначним чином (менше 10%). Наприклад, на рис. 7.6 видно, що при $D > 4$ зростання відстані між "векторами-сусідами" є незначним. Тому розмірність вкладення системи зерновиробництва України можна оцінити значенням 4.

Метод власних значень. Для реалізації методу спочатку приведемо ряд до нульової середньої, тобто проведемо заміну

$$x_i \to x_i - \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} x_j \; . \qquad (7.8)$$

Після цього сформуємо із отриманого ряду матрицю спостережень M за наступним правилом:

$$M = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_D \\ x_2 & x_3 & \dots & x_{D+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{N-D+1} & x_{N-D+2} & \dots & x_N \end{bmatrix} . \qquad (7.9)$$

У рядках цієї матриці стоять компоненти реконструйованих за часовим рядом векторів. Розмірність реконструкції ($D = 8$) виберемо завідомо більшою від очікуваної розмірності системи. На основі матриці M сформуємо матрицю коваріації C:

$$C = M^T M \, , \qquad (7.10)$$

і обчислимо її власні значення $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_D$. Розрахунки власних значень можна виконати в Matlab з використанням функції **eig(C)**, яка повертає вектор власних значень квадратної матриці C.

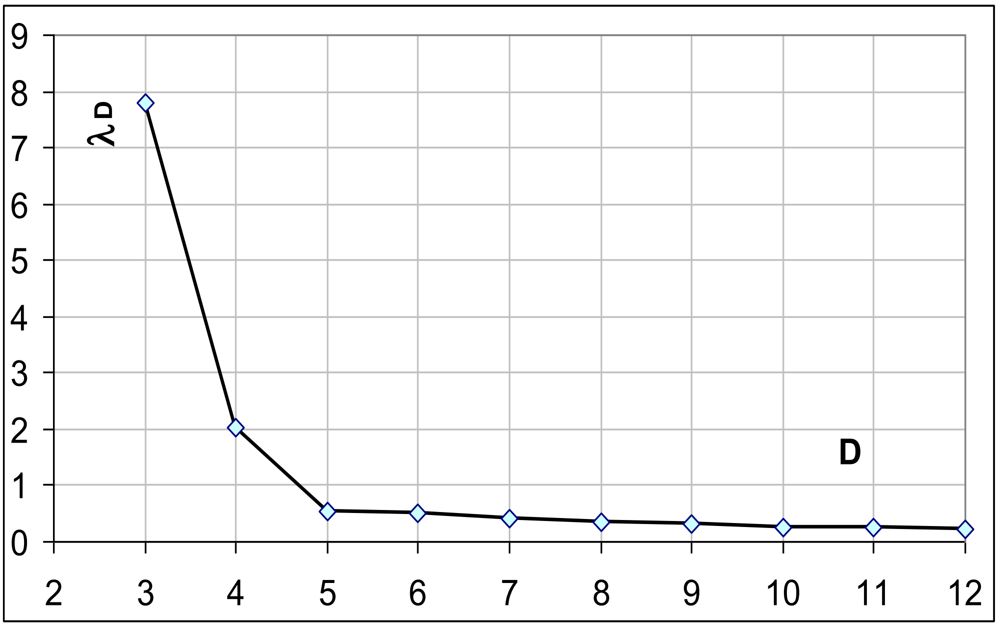


Рис. 7.7. Визначення розмірності вкладення методом власних значень

Як правило, декілька перших власних значень будуть помітно більшими від інших, які є приблизно однаковими. При деякому номері власного значення величини власних значень стабілізуються (“виходять на плато”). Цей номер і буде розмірністю системи. Результати розрахунків методом власних значень наведені на рис. 7.7. Як видно з рисунка, при $D > 5$ величини власних значень стабілізуються. Отже значення $D = 5$ і є значенням розмірності досліджуваної системи.

Визначення максимального показника Ляпунова. Фундаментальною характеристикою динамічної системи є набір *показників Ляпунова*, які описують поведінку траєкторій у фазовому просторі. Показники Ляпунова позначаються символами $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_D$ і можуть бути від’ємними, додатними і нульовими. Кількість показників Ляпунова дорівнює розмірності системи. Кожний показник відображає середню швидкість розбігання ($\lambda > 0$) або сходження ($\lambda < 0$) початково близьких фазових траєкторій в деякій площині. Значення максимального показника Ляпунова дозволяє ідентифікувати тип динаміки системи: при $\lambda_{\max} < 0$ система еволюціонує до стану рівноваги, при $\lambda_{\max} = 0$ динаміка системи є циклічною, у випадку, коли $\lambda_{\max} > 0$, динаміка системи є хаотичною.

Знання максимального показника Ляпунова системи є дуже важливим, оскільки він визначає можливість прогнозування розвитку системи. У перших двох випадках система є прогнозованою, причому ми можемо прогнозувати її розвиток на довільно великий проміжок часу. При наявності хаотичної динаміки в системі максимальний час прогнозування обмежений внаслідок швидкого розбігання фазових траєкторій. Значення максимального прогнозного горизонту $T_{\max}$ визначається із співвідношення $T_{\max} = 1/\lambda_{\max}$. Наприклад, для системи зерновиробництва України $\lambda_{\max} = 0.05$ і максимальний горизонт прогнозування становить $T_{\max} = 20$ років.

Тема 8. ОПТИМІЗАЦІЯ СИСТЕМ З ВРАХУВАННЯМ РИЗИКУ

8.1. Задача лінійного програмування

8.2. Невизначеність і ризик у економіці

8.3. Модель Марковіца

8.4. Приклади застосування моделі Марковіца

8.1. Задача лінійного програмування

Оптимізація систем – це комплекс методів, які дозволяють вибрати з багатьох можливих варіантів використання ресурсів один – найкращий з точки зору отримання економічного результату з найменшими витратами.

Продемонструємо методику оптимізації на прикладі економічних систем. Кожна економічна система має мету свого функціонування. Найчастіше - це отримання максимального прибутку або ж мінімальні затрати. Існує деяка функція F, яка описує ступінь досягнення мети і виражена через вхідні змінні та параметрами системи:

$$F = f\,(x_1, x_2, ..., x_n;\ \ y_1, y_2, ..., y_m;\ \ c_1, c_2, ..., c_l). \qquad (8.1)$$

Тут x_j (j=1,2,...,n) - керовані змінні, які піддаються управлінню; y_i (i=1,2, ..., m) - некеровані змінні, значення яких визначаються зовнішнім середовищем; $c_1, c_2, \ldots, c_l$ - параметри системи, які є незмінними. Наприклад, посівна площа – керована змінна, а температура повітря – некерована змінна; якісний склад ґрунту – параметр системи.

У загальному вигляді задача економіко-математичного моделювання формулюється так:

Знайти такі значення керованих змінних x_j, при яких цільова функція F набуває максимального чи мінімального значення :

$$\max_{x_j}(\min) F^* = f\,(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ y_1, y_2, \ldots, y_m;\ c_1, c_2, \ldots, c_l). \qquad (8.2)$$

Цільова функція *F* визначає ефективність функціонування системи.

Можливості вибору x_j завжди обмежені зовнішніми умовами. Наприклад, площа посіву обмежена наявністю ріллі та інших ресурсів. Ці процеси можна описати системою математичних нерівностей (або рівнянь) виду:

$$q_i(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_m; c_1, c_2, \ldots, c_l) \le 0; \qquad (8.3а)$$

або

$$q_i(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_m; c_1, c_2, \ldots, c_l) \ge 0; \qquad (8.3б)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, S).$$

Система (8.3а) – (8.3б) називається ***системою обмежень*** задачі. Для економічних систем змінні x_j мають бути невід'ємними:

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1,\ 2,\ ...,\ n). \tag{8.4}$$

Залежності (8.2) - (8.4) утворюють ***економіко-математичну модель*** задачі лінійного програмування для економічної системи.

Будь-який набір змінних x_1, x_2, ..., x_n, що задовольняє умови (8.3) і (8.4), називають ***допустимим планом***. Кожен допустимий план визначає деяку стратегію поведінки економічної системи. Кожному допустимому плану відповідає значення цільової функції, яке обчислюється за формулою (8.2).

Сукупність усіх розв'язків системи обмежень (8.3) і (8.4) утворює ***область допустимих планів***.

План, для якого цільова функція набуває екстремального значення, називається ***оптимальним***. Оптимальний план є ***розв'язком задачі лінійного програмування*** (8.2) - (8.4).

Розв'язок задачі лінійного програмування шукають за допомогою симплекс-методу. Цей метод реалізований у пакеті Excel – Данные, Поиск решения.

8.2. Невизначеність і ризик у економіці

Економічні системи перебувають в умовах невизначеності. Це означає, що нам невідомо, у якому стані буде система у майбутній момент часу. Така невизначеність завжди породжує ризик. Це може бути ризик недоотримання прибутку, ризик втрат, ризик невикористаних можливостей тощо.

Прийняття рішень в умовах невизначеності характеризується тим, що неможливо однозначно передбачити їхні наслідки. В результаті прибуток стає випадковою чи нечіткою величиною, яку можна максимізувати лише за умови врахування ймовірності різних варіантів розвитку подій, ступеня визначеності різних ознак, врахування схильності до ризику особи, яка приймає рішення.

Причини виникнення невизначеності й зумовленого нею ризику поділяються на три групи.

Перша група. Більшість пов'язаних з економікою процесів є випадковими. Важко передбачити різні природні явища, зміни клімату, політичні події, зміни кон'юнктури світового ринку, появу нових технологій, зміни смаків споживачів тощо.

Друга група. Можна говорити про економічно оптимальну неповноту інформації, бо нерідко більш доцільно працювати з неповною інформацією, ніж збирати дуже дорогу практично повну інформацію. Неповнота інформації може бути зумовлена також неповним її розумінням або невмінням обробити її на комп'ютері. Крім того, всяка інформація завжди є неточною (статистика, вибіркові спостереження, експертні оцінки).

Третя група. Існує, так звана, асиметрія інформації. Крупні гравці економічного ринку вважають доцільним приховувати від споживачів деяку частину інформації з економічних, політичних чи з інших причин.

Роль інформації у процесі прийняття рішень є надзвичайно великою. Особливу ціну має релевантна (правдива, важлива) інформація, яка доступна вузькому колу осіб. Після опублікування такої інформації широкі маси підприємців використовують її для прийняття бізнесових рішень і дана інформація швидко втрачає свою цінність.

Нестача інформації (невизначеність) завжди породжує ризик.

З ризиком доводиться стикатися у повсякденній практичній діяльності. Його неможливо уникнути в жодному з видів ділової активності. Ризик присутній під час прийняття рішень щодо розміщення грошей у банку, при купівлі акцій та інших цінних паперів, при інвестуванні коштів у нове виробництво тощо. Бездіяльність у сфері бізнесу пов'язана з ризиком невикористаних можливостей. Зауважимо, що ризик існує лише тоді, коли є різні варіанти розвитку подій.

Існують різні підходи до визначення ризику. За визначенням В. Маршалла, ризик – це ймовірність реалізації несприятливої події. Е. Дж. Хенлі, Х. Кумамото розглядають ризик як імовірність матеріальних збитків чи ушкоджень. Часто ризик розуміють не лише як можливість настання збитків, а й як можливість відхилення від цілі, відсутність очікуваних результатів.

Узагальнюючи, можна сказати, що **ризик — це усвідомлена небезпека настання подій з небажаними наслідками. Ризик — величина кількісна і визначається множенням імовірності негативної події на величину можливого збитку від неї.**

У 60-х роках XX століття розвинулися такі напрямки науки, як теорія випадкових процесів, теорія нечітких множин, теорія ігор, теорія статистичних рішень. Ці наукові дисципліни дали змогу оптимізувати управління економічними системами з врахуванням, притаманних їм, невизначеності та ризику.

8.3. Модель Марковіца.

Більшість інвесторів інвестують зазвичай кілька об'єктів реального або фінансового сектору, формуючи сукупність активів (інвестиційний портфель). Портфельний підхід передбачає максимізацію корисності від активів, тобто зростання їх дохідності за умови диверсифікації (урізноманітнення) з метою зниження інвестиційних ризиків. Зниження ризиків шляхом комбінації активів реалізує принцип, який відповідає прислів'ю «не неси всі яйця в одному кошику» (ймовірність упустити два кошики значно менша, ніж ймовірність упустити один). У такий спосіб досягають компромісу таких на перший погляд несумісних цілей, як максимізація доходу і мінімізація ризику.

Лауреат Нобелівської премії Гаррі Марковіц вперше вказав на те, що при формуванні портфелю цінних паперів необхідно враховувати не лише їх дохідність а і ступінь ризику. Основними параметрами моделі Марковіца є дохідність та ризикованість цінних паперів, які входять у портфель. Модель Марковіца ґрунтується на наступних припущеннях:

- дохідності цінних паперів розподілені за нормальним законом;
- минулі значення, використані при розрахунках дохідності і ризику, повністю відображають майбутні значення дохідності та ризику.

Дохідність портфеля цінних паперів — це середньозважена дохідність паперів, які входять у портфель, визначається за формулою:

$$R_p = \sum_{i=1}^{N} x_i \times r_i \,, \tag{8.5}$$

де: N – кількість цінних паперів, які входять у портфель; x_i – процентна частка даного паперу в портфелі ($\sum_i x_i = 1$); r_i – дохідність даного паперу. Дохідність даного виду акцій r_i на мінімальному часовому проміжку (1 день або 1 тиждень) зазвичай розраховується за співвідношенням

$$r_t = 100 \cdot (P_t / P_{t-1}) \,. \tag{8.6}$$

Тут P_{t-1} - ціна акції в попередній момент часу, P_t - ціна акції в наступний момент часу. При тривалих спостереженнях дохідність цінного паперу оцінюють як середнє значення за період спостережень

$$r_i = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} r_{it} \,, \tag{8.7}$$

де T — кількість часових проміжків.

Ризик фінансових операцій напряму залежить від мінливості зовнішніх умов та вартості цінних паперів. Чим більшою є ця мінливість, тим більшим є ризик фінансових операцій. В моделі Марковіца ризик цінного паперу розглядається як середньоквадратичне відхилення дохідності від її математичного сподівання

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}(r_{it} - r_i)^2}. \tag{8.8}$$

Для оцінки ризику портфеля необхідно врахувати як ризики окремих акцій так і кореляційні ризики. Останні пов'язані з тим, що втрати можуть зрости, якщо ціни акцій будуть вести себе корельовано і можуть одночасно впасти. Коефіцієнт кореляції між двома цінними паперами розраховують за формулою

$$\rho_{ij} = \frac{1}{(T-1)\sigma_i\sigma_j}\sum_{t=1}^{T}[(r_{it} - r_i)(r_{jt} - r_j)], \tag{8.9}$$

де: r_{it}, r_{jt} — дохідність цінних паперів i та j в період t. Тоді загальний ризик портфеля цінних паперів σ_p визначається функцією середньоквадратичного відхилення:

$$\sigma_p = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left(x_i \times \sigma_i \times x_j \times \sigma_j \times \rho_{ij}\right)}, \tag{8.10}$$

де: x_i, x_j – процентна частка даних паперів у портфелі; σ_i, σ_j – ризики даних паперів (середньоквадратичні відхилення); ρ_{ij} – коефіцієнт лінійної кореляції між дохідностями r_{it} та r_{jt}.

Неможливо одночасно добитися максимального доходу і мінімального ризику. Тому задачу розв'язують поетапно: обмежують один параметр і оптимізують інший. Таким чином розглядають два підходи до розв'язування задачі про оптимізацію портфельних інвестицій. Перший (**пряма задача Марковіца**) полягає в тому, що накладається деяке обмеження на ступінь ризику – ризик не повинен перевищувати деякого допустимого рівня σ_{req}. Дохідність портфеля при цьому повинна бути максимальною. Математичне описання моделі Марковіца для задачі на максимум дохідності буде мати вигляд:

$$\begin{cases} R_p = x_i \times r_i \to \max; \\ \sigma_p = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left(x_i \times \sigma_i \times x_j \times \sigma_j \times \rho_{ij}\right)} \le \sigma_{req}; \\ x_i \ge 0; \\ \sum x_i = 1. \end{cases} \tag{8.11}$$

Тут x_i - відносна частка i-го активу у портфелі банку, r_i - дохідність, розрахована, як середнє значення дохідності за досліджуваний період, σ_i - ризик i-го активу, розрахований як його стандартне відхилення за досліджуваний період, σ_{req} - максимально допустиме значення ризику, яке встановлюється експертом, ρ_{ij} - коефіцієнт лінійної кореляції між дохідностями двох видів активів. Задача (8.11) є нелінійною і не може бути розв'язана в рамках симплекс методу. Для розв'язування таких задач використовують методи нелінійного програмування і, зокрема можливості Microsoft Ecsel (Поиск решений).

Другий підхід до вирішення проблеми Марковіца (**обернена задача Марковіца**) полягає в мінімізації ризику при збереженні деякого гарантованого рівня дохідності. Математичне описання моделі Марковіца для задачі на мінімум ризику буде мати вигляд:

$$\begin{cases} \sigma_p = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left(x_i \times \sigma_i \times x_j \times \sigma_j \times \rho_{ij}\right)} \to \min; \\ R_p = x_i \times r_i \ge R_{req}; \\ x_i \ge 0; \\ \sum x_i = 1. \end{cases} \tag{8.12}$$

8.4. Приклади застосування моделі Марковіца

Приклад 1. Як показано вище, при формуванні портфеля цінних паперів слід дотримуватися принципу диверсифікації. Згідно з цим принципом до портфеля включають цінні папери, які не корелюють між собою, або ще краще – мають негативну кореляцію. Розглянемо портфель, який складається з акцій двох типів. Норма прибутку портфеля розраховується за формулою

$$r_p = x_1 r_1 + x_2 r_2, \quad x_1 + x_2 = 1, \quad 0 \le x_1, x_2 \le 1. \tag{8.13}$$

Тут x_i - частка і-го цінного паперу у структурі портфеля; r_i - очікуване значення прибутку акції і-го типу. При нестаціонарному характері поведінки ціни акцій очікуване значення прибутку часто оцінюють як нахил тренду ціни акцій на деякій базовій ділянці.

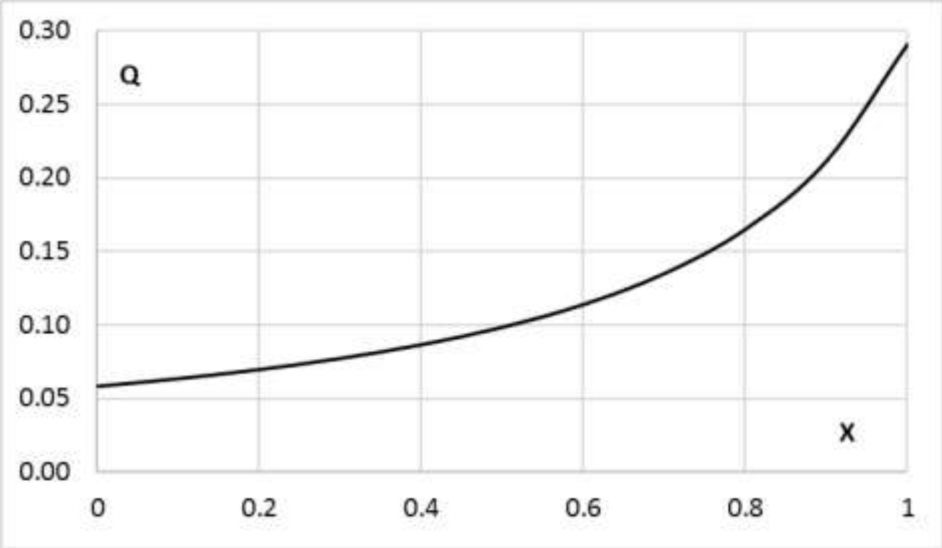


Рис. 8.1. Залежність фінансової привабливості Q пари акцій від її формули x.

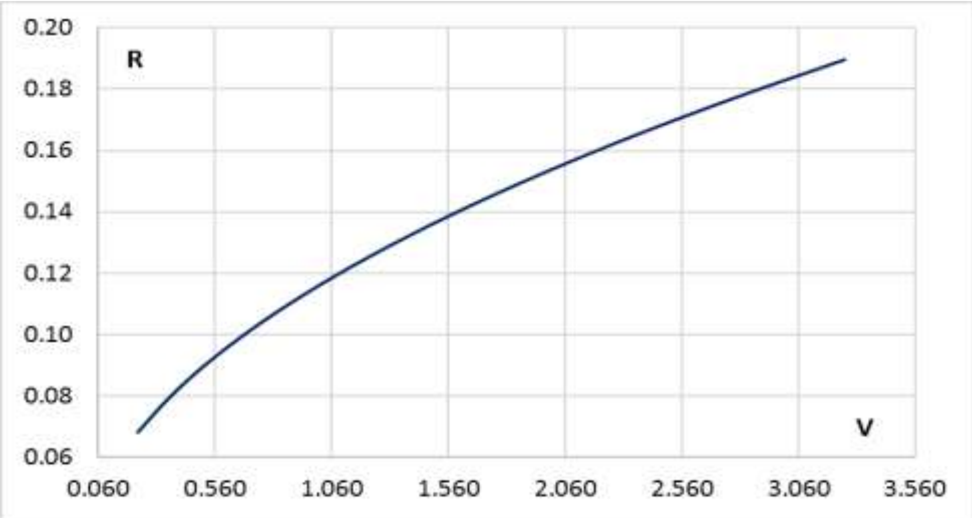


Рис. 8.2. Залежність прибутковості R від ризику V для пари акцій

Ризик портфеля з двох акцій визначається за формулою

$$V_p = x_1^2\sigma_1^2 + x_2^2\sigma_2^2 + 2x_1\sigma_1 x_2\sigma_2\rho_{12}\,. \tag{8.14}$$

Тут σ_i - середньоквадратичне відхилення ціни акції і-го типу; ρ_{12} - коефіцієнт кореляції обох акцій. Фінансова привабливість Q пари акцій оцінюється як відношення очікуваного прибутку до ризику портфеля

$$Q = \frac{r_p}{V_p}. \qquad (8.15)$$

Задача полягає у максимізації фінансової привабливості пари акцій. Залежність фінансової привабливості пари акцій від її формули представлена на рис.8.1.

Залежність прибутковості портфеля від його ризику представлена на рис. 8.2. Як бачимо, **вища прибутковість супроводжується більшим ризиком**. Цей висновок можна вважати загальним законом економіки.

Приклад 2. Модель Марковіца можна застосувати до оптимізації аграрного виробництва. Розглянемо аграрне підприємство, яке вирощує 3 сільськогосподарські культури: пшеницю, цукрові буряки і картоплю. Відома статистика рентабельності цих культур за останніх 10 років. В ролі прибутку будемо розглядати середню рентабельність культур відповідно r_1, r_2, r_3. Ризик кожної культури будемо оцінювати через середньоквадратичне відхилення відповідної рентабельності $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

Середньозважена рентабельність трьох культур розраховується за формулою

$$r_p = x_1 r_1 + x_2 r_2 + x_3 r_3, \quad x_1 + x_2 + x_3 = 1, \quad 0 \le x_1, x_2, x_3 \le 1. \qquad (8.16)$$

Тут x_i - частка і-ї культури у загальному масиві посівів; r_i - середня рентабельність відповідної культури.

Ризик портфеля з трьох культур визначається за формулою

$$V_p = x_1^2\sigma_1^2 + x_2^2\sigma_2^2 + x_3^2\sigma_3^2 + 2x_1\sigma_1 x_2\sigma_2\rho_{12} + 2x_1\sigma_1 x_3\sigma_3\rho_{13} + 2x_2\sigma_2 x_3\sigma_3\rho_{23}. \qquad (8.17)$$

Тут σ_i - середньоквадратичне відхилення рентабельності і-ї культури; ρ_{ij} - коефіцієнт кореляції рентабельностей двох культур. Задача полягає у максимізації прибутку (зваженої рентабельності) при обмеженому ризику.

Математична модель для сформульованої задачі аграрного виробництва буде мати вигляд:

$$\begin{cases} R_p = x_1 r_1 + x_2 r_2 + x_3 r_3 \to \max; \\ \sigma_p = x_1^2\sigma_1^2 + x_2^2\sigma_2^2 + x_3^2\sigma_3^2 + 2x_1\sigma_1 x_2\sigma_2\rho_{12} + 2x_1\sigma_1 x_3\sigma_3\rho_{13} + 2x_2\sigma_2 x_3\sigma_3\rho_{23} \le \sigma_{req}; \\ x_i \ge 0; \\ \sum x_i = 1. \end{cases} \qquad (8.18)$$

Залежність прибутковості портфеля трьох культур від його ризику представлена на рис.8.3. Знову бачимо, що максимальне значення прибутковості пов’язане з максимальним значенням ризику і навпаки.

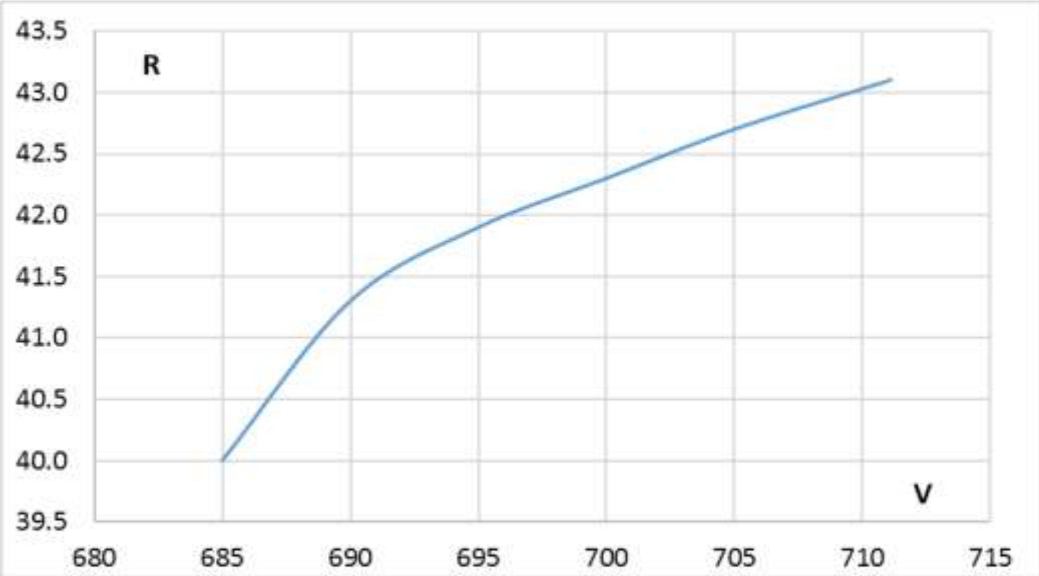


Рис. 8.3. Залежність прибутковості R від ризику V для портфеля трьох культур

ЛІТЕРАТУРА

1. Горбань О. М., Бахрушин В. Є. Основи теорії систем і системного аналізу : Навчальний посібник. Запоріжжя : ГУ "ЗІДМУ", 2004. 204 с.
2. Згуровський М. З., Панкратова Н. Д. Основи системного аналізу : підручник. Київ : Видавнича група BHV, 2007. 544 с.
3. Мартинюк П. М., Федорчук Н. А. Теорія систем та математичне моделювання : навч. посібн. Рівне : Вид-во НУВГП, 2010. 225 с.
4. Роїк О. М. Системний аналіз : навчальний посібник / О. М. Роїк, А. А. Шиян, Л.О. Нікіфорова. Вінниця: ВНТУ, 2015. 83 с.
5. Шарапов О. Д., Дербенцев В. Д., Семьонов Д. Є. Системний аналіз : навч.-метод. посібник для самост. вивч. дисц. К. : КНЕУ, 2003. 154 с.
6. Грицюк П. М. Методичні вказівки та завдання до лабораторних робіт з дисциплін «Економічна кібернетика» та «Системний аналіз» для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня за спеціальністю 051 «Економіка» спеціалізації «Економічна кібернетика» денної та заочної форми навчання. URL: http://ep3.nuwm.edu.ua/15373/ (дата звернення 08.10.2020).