Міністерство освіти і науки України

Національний університет водного господарства та природокористування

О. М. Кондратюк

НАРИСНА ГЕОМЕТРІЯ

Навчальний посібник

Рівне
Видавець О. Зень
2021

УДК 514.18(075.8)
К-642

Рецензенти:

Ляшук О.Л., доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри автомобілів Тернопільського національного технічного університету ім.Івана Пулюя, м.Тернопіль;

Кристопчук М.Є., кандидат технічних наук, доцент, завідувач кафедри транспортних технологій і технічного сервісу Національного університету водного господарства та природокористування, м. Рівне.

Рекомендовано вченою радою Національного університету водного господарства та природокористування. Протокол №2 від 25 лютого 2021р.

Кондратюк О. М.

Нарисна геометрія **:** навч. посіб. / О. М. Кондратюк. – Рівне : Видавець О. Зень, 2021. – 71 с.

ISBN 978-617-601-352-5

В посібнику розглянуто основні розділи нарисної геометрії. Складений відповідно програм з нарисної геометрії для студентів технічних спеціальностей, вміщає необхідні теоретичні положення курсу з їх практичною спрямованістю. Матеріали розділів проілюстровано віповідними задачами, які супроводжуються докладними поясненнями. Завдання в кожній частині курсу розділені на певні етапи, що дає можливість досконало оволодіти матеріалом студентами різних спеціальностей і різної форми навчання.

УДК 514.18(075.8)

ISBN 978-617-601-352-5

Передмова

Майбутнім спеціалістам народного господарства, враховуючи прискорення науково-технічного прогресу, інтенсивний характер розвитку сучасних технологій і підвищення вимог до якості виробництва, потрібно удосконалювати інженерно-графічну підготовку до європейського і світового рівнів. Нарисна геометрія за своїм змістом займає особливе місце серед навчальних дисциплін, які вивчаються у вищих технічних учбових закладах. Вона є найкращим засобом розвитку у фахівця просторової уяви, без якої неможлива інженерна творча діяльність. Позитивний результат вивчення нарисної геометрії полягає в систематичному оволодінні теоретичного матеріалу і виконанню практичних задач, прив'язаних до реальної діяльності внародному господарстві. Для успішного оволодіння цією дисципліною слід пам'ятати, що будь-яка задача з нарисної геометрії спочатку розв'язується уявно в просторі і тільки потім переноситься на креслення.

Вступ

Нарисна геометрія є одним із розділів геометрії, в якому просторові фігури, які являють собою сукупність точок, ліній, поверхонь, вивчаються по їх проекційних зображеннях на площинах. Основними задачами нарисної геометрії є: а) створення методу зображення геометричних фігур на площині ; б) розробка способів рішення позиційних і метричних задач, зв'язаних з цими фігурами, при допомозі їх зображень на площині; в) способи перетворення проекцій просторових об'єктів; г) дослідження просторових об'єктів за допомогою їх відображень.

Дана дисципліна є, таким чином, теоретичною основою побудови зображень в усіх сферах виробництва та практичної діяльності людини. В першу чергу це стосується технічної, наукової, науково–методичної, методичної і навчальної документації та літератури. Ось чому нарисну геометрію образно характеризують як граматику мови інженера, якою є інженерна графіка. Сама історія виникнення дисципліни підтверджує її практичне спрямування.

Нарисна геометрія є теоретичною базою для створення кресленика – геніального винаходу луцького мислення. Кресленник – це своєрідна мова, при допомозі якої, використовуючи тільки точки, лінії і обмежене число геометричних знаків, букв і цифр, людство має можливість відобразити на площині, чи поверхні, геометричні фігури або їх поєднання (машин, агрегатів, інженерних споруд і т.д.). При цьому графічна мова є інтернаціональною, вона зрозуміла всім технічно грамотним людям незалежно від того, на якій мові вони розмовляють.

Основи нарисної геометрії і метод прямокутного проектування розробив в 1798 році відомий французький вчений Гаспар Монж, виконуючи проектну документацію для побудови фортифікаційних споруд у Парижі. Більше як два століття використовуються та досліджуються теоретичні основи нарисної геометрії, але до сьогоднішнього дня немає підстав вважати дисципліну завершеною, оскільки не існує найголовніша філософська умова такої завершеності – відсутня єдина повна класифікація поверхонь.

Дослідження поверхонь та способів використання відображень поверхонь є одним із найважливіших напрямків розвитку та практичного застосування нарисної геометрії, можливості якої бурхливо зростають із застосуванням комп'ютерної графіки та новітніх програм для обчислення спеціальних функцій.

Вивчення та успішне засвоєння методів нарисної геометрії за програмою вищих навчальних закладів передбачає необхідний вступний конкурсний рівень підготовки із математики, особливо із геометрії та стереометрії, а також відповідний рівень інтелекту з відчуттям логіки та вмінням виконувати ручні геометричні побудови в рамках вимог середньої школи.

Зауважимо, що для успішного вивчення нарисної геометрії не обов'язково володіти особливою або надзвичайно розвинутою просторовою уявою – часто такий аргумент використовують як виправдання у той час, коли справжньою причиною відсутності успіхів є невміння працювати або неприпустимо низький рівень шкільної підготовки з фундаментальних дисциплін. Сказане легко аргументується тим, що в сучасній нарисній геометрії використовуються алгоритмічні методи розв’язку основних задач, які вимагають чітке запам’ятовування означень без особливих вимог до володіння просторовою уявою. В деяких випадках спроба використати просторову уяву без глибокого логічного аналізу та без застосування алгоритму розв’язку задачі навіть дає негативні результати. Послідовне, без прогалин, вивчення основ нарисної геометрії з використанням алгоритмів, виконання розрахунково–графічних робіт та розв’язування елементарних задач розвивають просторову уяву та логічне мислення, які є потужними інструментами творчої діяльності спеціаліста з вищою освітою.

Рішення задач методом нарисної геометрії здійснюється графічним шляхом. Можливість розділення процесу рішення задач на виконання елементарних, однотипних операцій дозволяє отримати ітерактивні методи рішення задач, які легко можуть бути автоматизовані при допомозі вичислюваної техніки. Використання нарисної геометрії є раціональним при конструюванні складних поверхонь, технічних форм з наперед заданими параметрами (авіа і суднобудуванні, двигунів та в інших областях техніки.

Методи нарисної геометрії дозволяють розв’язувати математичні задачі в їх графічній інтерпитації. Як і інші види математики, нарисна геометрія розвиває логічне і аналітичне мислення.

Приведений далеко не повний перелік питань, які складають предмет дослідження в нарисній геометрії є доказом, що нарисна геометрія входить число фундаментальних дисциплін, що складають основу інженерної освіти.

П о з н а ч е н н я :

– точок – А,Б,В...; A,B,C … ;

– ліній – а,б,в... ; a,b,c… ;

– площин – Δ, Σ,W, Ω... ;

– твірної – t ;

– напрямної – d ;

– геометричних ознак – Г;

– алгоритмічних ознак – А;

– площин проекцій – П;

– площини аксонометричних проекцій – По;

– координатних осей – x , y , z;

– координат точок – X, Y, Z;

– центра проектування – S;

– октантів простору – I, II,...VIII;

– трикутника – Δ ;

– слідів прямої – Ha, Fa, Pa ;

– горизонталі, фронталі та профільні прямі площини відповідно – h, f, p ;

– дійсної величини відрізка прямої, трикутника – /АБ/ ; /АБВ/ ;

– радіуса обертання – r;

– осі обертання – i;

– центра обертання – O;

– плоскопаралельного переміщення – ППП;

– заміни площини проекцій – ЗПП;

– обертання – ОБР;

– здійснення заміни площин проекцій – $П_1П_4$;

– заміненої осі системи координат – x_{14}, x_{45},... .

i, j – порядковий номер елемента, точки і т. і.;

n – порядок лінії або поверхні;

k – номер площини проекцій, тобто індекс проекцій елементів простору;

k=1 – для горизонтальної, k=2– для фронтальної, k=3– для профільної площин проекцій.

Позначення символів:

// – паралельність;

b– перпендикулярність;

v– належність точки до множини;

1. Способи проектування

Для здійснення проектування об’єкт (елемент простору) розташовується між площиною проекцій П та центром проектування (спостерігачем) S, отже необхідні такі категорії:

- об’єкт проектування;
- площина проекцій;
- центр та механізм проектування.

Сутність механізму проектування в тому, що проектуючий промінь проходить через точку та центр проектування, а перетин проектуючого променя з площиною проекцій дає проекцію точки на цю площину.

Елементи простору

Із безлічі точок геометричного простору формуються елементи простору (геометричні образи) : точки, лінії, площини, поверхні і т. і. Сукупність елементів простору, які представляють собою виділену в просторі множину точок, формують геометричний образ (фігуру). При цьому простір розглядується та кваліфікується з точки зору його вимірності:

- нульвимірний - точка R0;
- одновимірний - пряма R1;
- двовимірний - площина R2;
- тривимірний - реальний простір R3;
- n-вимірний - Rn.

Відношення між елементами простору визначаються особливостями взаємної належності, взаємного перетину, порядку розташування, неперервності, безмежності, паралельності, конгруентності і т. і. Безмежними вважаються пряма, площина, деякі поверхні і т. і., тому для них неможливо відобразити найбільш віддалену точку.

1.1.Центрове (конічне) проектування

Центр проектування S є дійсною точкою. Механізм проектування довільних точок А,Б,В прямої l та кривої a зображено на рис. 1. Існує умова для здійснення проектування – S   П, при цьому точка S не має проекції.

Постановка задачі для точки А:

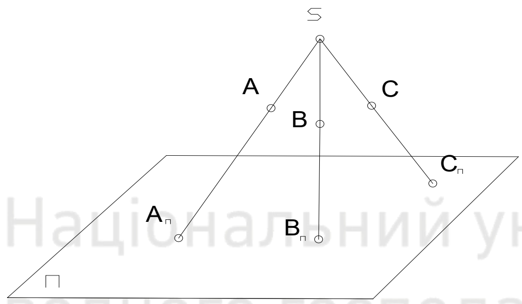
–задано центр проекцій S, точка А та площина проекцій П;

–знайти проекцію точки А на площину П.

Алгоритм розв’язку:

1. З’єднуємо прямою точки А та S.

2. Перетин прямої АS з площиною П дає проекцію точки А на площину П, тобто А $_п$.



Національний університет
водного господарства
та природокористування

Рис. 1. Центрове проектування.   S, A, П; ?A $_п$; 1. A È S = AS; 2. AS Ç П= A $_п$.

Таким способом записуються алгоритми розв’язків всіх задач, при цьому після знака (?) завжди першим записується позначення шуканого параметра.

1.2. Паралельне і ортогональне проектування

Сутність механізму паралельного проектування в тому, що проектуючий промінь проходить через точку та центр проектування S, який знаходиться на безмежності. В такому випадку проектуючі промені p стають паралельними до напрямку проектування.

Залежно від напрямку проектуючого променя визначаються види паралельного проектування: – ортогональне (прямокутне), якщо промінь перпендикулярний до площини проекцій; – косокутне – в усіх інших випадках.

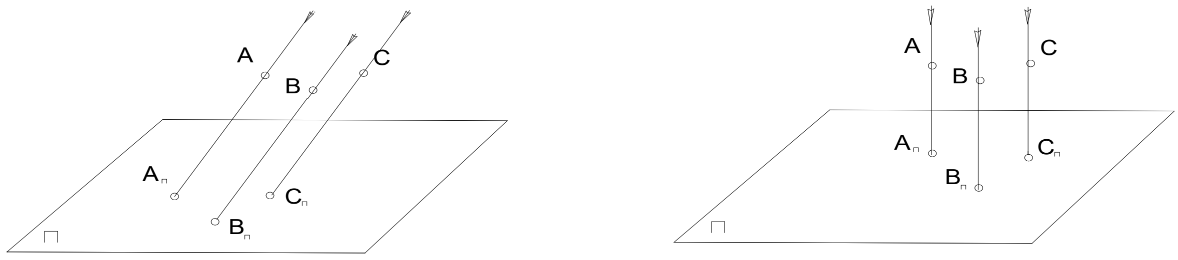


Рис. 2. Паралельне і ортогональне проектування.

Властивості центрового (конічного) та паралельного проектування

1. Проекцією точки є точка.
2. Проекцією прямої лінії є пряма.
3. Проекцією кривої лінії є крива.
4. Кожна точка і лінія мають свою єдину проекцію.
5. Кожна точка на площині проекцій може бути проекціями необмеженої множини точок, розташованих на проектуючому промені.
6. Проекція прямої однозначно задається проекціями будь-яких двох точок.
7. Якщо точка належить до прямої або кривої, то всі проекції цієї точки належать до одноіменних проекцій цих елементів простору.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Властивості параллельного і ортогонального проектування

1. Проекції паралельних прямих є паралельними.
2. Відношення відрізків, які належать до однієї прямої або до двох паралельних прямих, зберігається і для проекцій цих відрізків.
3. Якщо пряма паралельна до напрямку проектування, то вона проектується в точку.
4. Якщо пряма паралельна до площини проекцій, то відрізок цієї прямої проектується в дійсну величину.
5. Якщо плоска фігура паралельна до площини проекцій, то вона проектується на цю площину в дійсну величину.
6. Точка перетину двох прямих, які перетинаються, має проекції, в яких перетинаються проекції цих прямих.

1.3. Застосування центрового та паралельного проектування

Центрове проектування знаходить практичне застосування в будівельному кресленні та архітектурі як метод побудови перспективи. В нашому курсі таке проектування не застосовується.

Паралельне прямокутне проектування знаходить широке практичне застосування в машинобудівному та будівельному кресленнях як основний метод побудови зображень в технічній та виробничій документації, а також в методичній та науковій літературі. Ось чому метод прямокутного проектування є основою курсу нарисної геометрії і використовується у всіх наступних розділах.

2. Прямокутні проекції. Проекції точки

В цьому та наступних розділах прямокутне проектування є основою методу Монжа, який вивчає реальні об'єкти за допомогою їх відображень на площинах проекцій просторової прямокутної системи координат.

Для графічного визначення або однозначного задання точки в прямокутній декартовій системі координат необхідно задати не менше двох її проекцій. В загальному випадку точка задається трьома координатами X,Y,Z таким способом: A(X,Y,Z).

2.1. Проекції точки

Декартова просторова система координат утворена трьома безмежними площинами проекцій (рис. 3), де:

$П_1$ – горизонтальна; $П_2$ – фронтальна; $П_3$ – профільна.

Ця система координат розділяє весь простір на вісім кутів – октантів, які позначуються римськими цифрами. Перетин між собою площин проекцій дає координатні осі x, y, z. Розглянемо (рис. 3) особливості побудови проекцій довільної точки A та відображення самої точки A в просторовій системі координат за заданими координатами X, Y, Z. Очевидно, що кожна із осей x, y, z має свою шкалу розмірних одиниць координат X, Y, Z, але при цьому всі три шкали ідентичні та базуються на одній розмірній одиниці. В якості такої розмірної одиниці в графічних роботах вибрано міліметри.

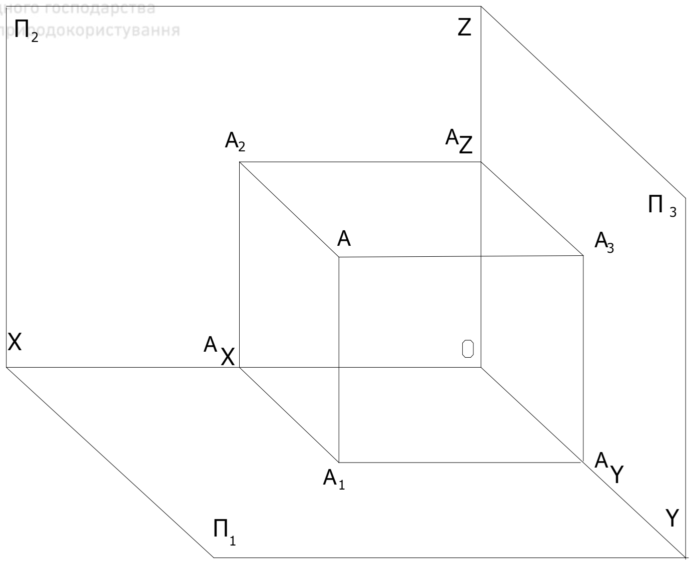
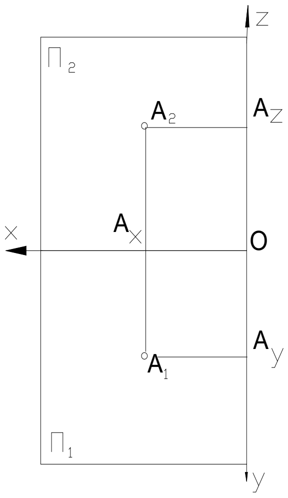


Рис. 3. Проекції точки А в декартовій системі координат.

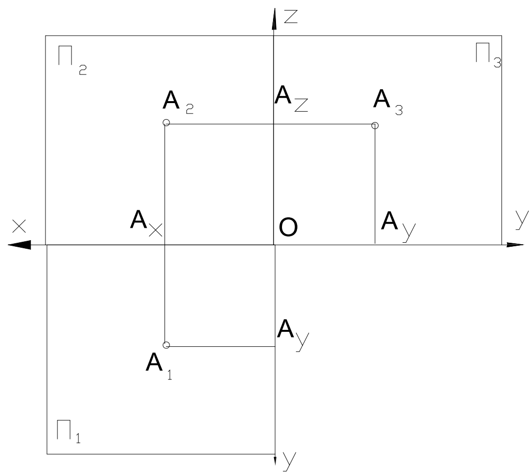
Значення координат X, Y, Z відкладаємо відносно початку О вздовж відповідних координатних осей та будуємо паралелепіпед О Х A_1 Y Z A_2 A A_3 , в якому A_1 Y , Z A_2 та A A_3 паралельні до осі x; X A_1, A_2 A та Z A_3 паралельні до осі y; X A_2, A_1 A та Y A_3 паралельні до осі z. Тепер A_1 є горизонтальною, A_2 - фронтальною, а A_3 - профільною проекціями точки А. Із аналізу побудов рис. 3 стає очевидною властивість наочного зображення просторової декартової системи координат: три взаємно перпендикулярні осі зображуються в площині рисунка під довільними кутами, а тому не можуть зображуватися в дійсну величину, оскільки їх масштабні одиниці спотворені і тому не можуть бути однаковими за величиною.

Така властивість наочного зображення просторової системи координат створює значні труднощі при його використанні для об'єктів з реальними розмірами. Цього недоліку позбавлений епюр Монжа, в якому всі три площини проекцій суміщуються з площиною рисунка, як це показано на фрагментах рис

4, де побудова проекцій довільної точки А здійснюється так, як і на рис. 3.



(а)



(б)

Рис. 4. Трансформація просторової системи координат в епюр Монжа де: а – епюр після суміщення площин $П_1$ і $П_2$ обертанням $П_1$ відносно осі х; б – епюр після суміщення площин $П_2$ і $П_3$ обертанням $П_3$ відносно осі z

Особливість епюра Монжа в тому, що на ньому існують дві осі у: одна для горизонтальної, а друга для профільної площин проекцій. Така особливість появляється внаслідок одночасних перетворень на рис. 4,а,б, хоча в просторовій системі існує тільки одна вісь у !

2.2. Побудова профільної проекції точки за двома заданими

Побудова профільної проекції точки за двома відомими показана на рис. 5. Точки знаходяться в октантах: А – в I– му; В – в VII– му; С– в II– му. Точки мають координати А(X, Y, Z), В(-X, -Y, -Z), С(X, -Y, Z). Епюр Монжа має властивості, які не залежать від знаків перед координатами х, у ,z.

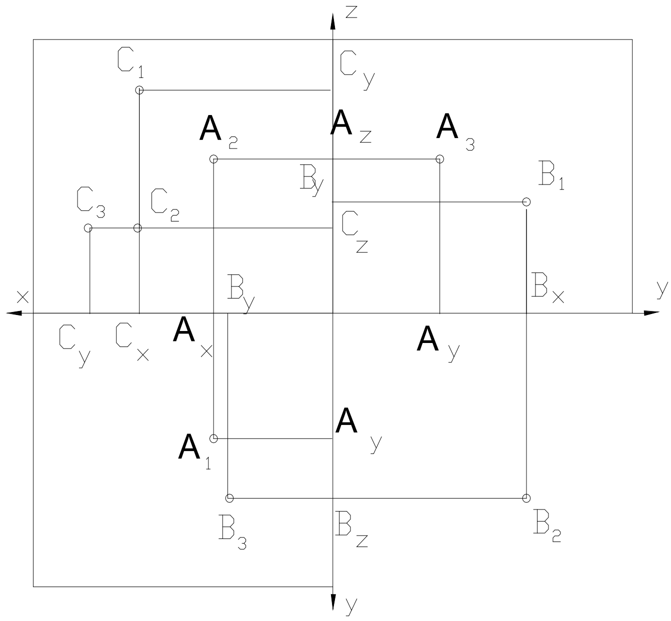


Рис. 5. Проекції точок

3. Пряма. Відображення прямої

Пряма задається графічно напрямком або відрізком, обмеженого двома точками (рис. 6). Точка належить до прямої, якщо її проекції розташовані на відповідних проекціях прямої (рис. 6). Точка В належить до прямої a , точка С не належить до прямої d.

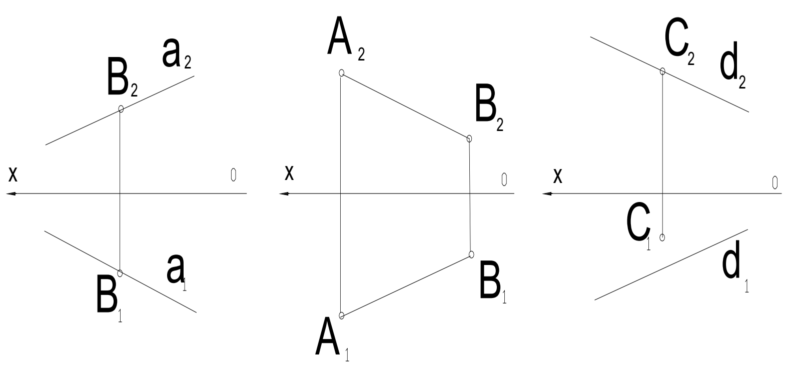


Рис. 6. Задання прямої. Належність точки В до прямої a

3.1. Розташування прямої відносно площин проекцій

Властивості проекцій прямої залежать від її розташування відносно площин проекцій.

Пряма загального положення

Така пряма та її проекції не паралельні і не перпендикулярні ні до однієї із площин проекцій (рис. 6).

Пряма рівня

Такі прямі паралельні до однієї з площин проекцій (рис. 7), тому всі їхні точки розташовані на одному рівні відносна цієї площини проекцій.

Прямі рівня бувають:

- горизонтальна, для якої фронтальна проекція завжди паралельна до осі x, а профільна - до осі y;
- фронтальна, для якої горизонтальна проекція завжди паралельна до осі x, а профільна - до осі z;
- профільна, для якої горизонтальна та профільна проекції завжди паралельні до осі z.

Національний університет водного господарства та природокористування

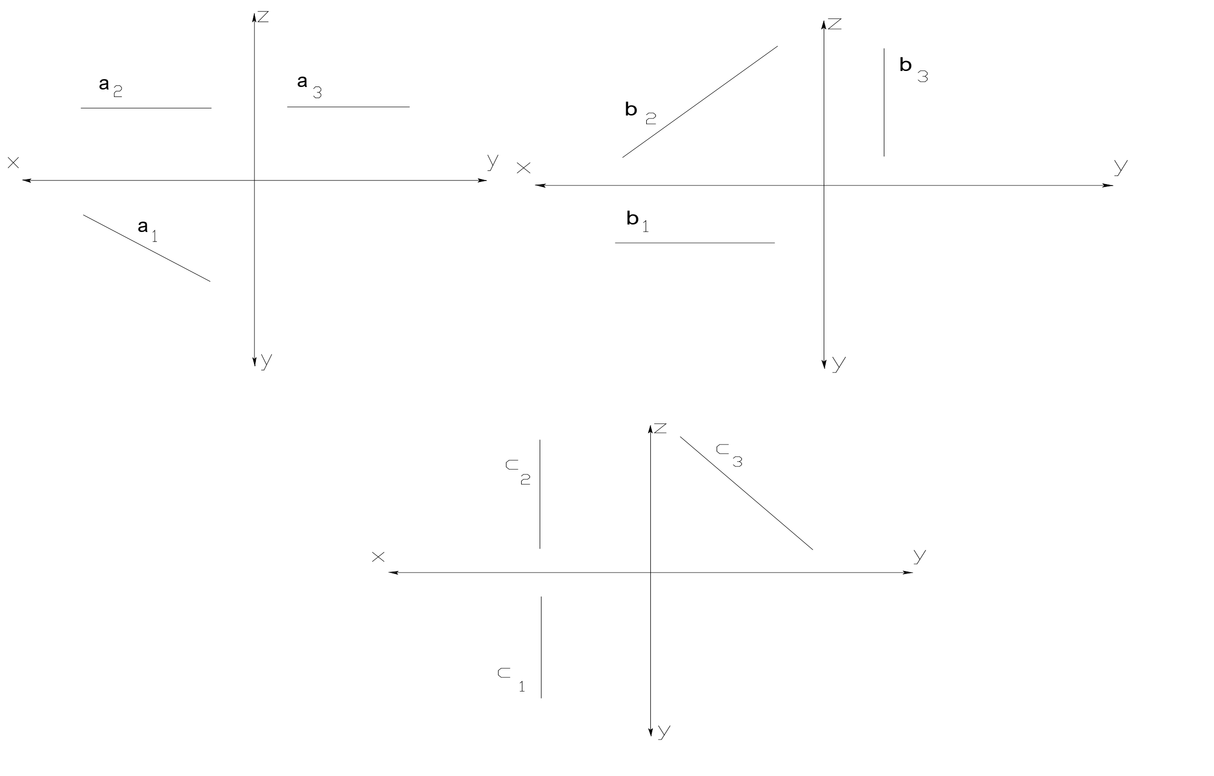


Рис. 7. Прямі рівня: $a//П_1$; $b//П_2$; $c//П_3$: a – горизонтальна пряма; b –фронтальна пряма; c – профільна пряма

Пряма проектуюча

Проектуючі прямі перпендикулярні до однієї із площин проекцій (рис. 8), де l b $П_1$; c b $П_2$; q b $П_3$, тому на цю площину проекцій вони (вся множина їх точок) завжди проектуються в точку.

Для горизонтально-проектуючої прямої фронтальна та профільна проекції завжди перпендикулярні до осей x та y відповідно.

Для фронтально-проектуючої прямої горизонтальна та профільна проекції завжди перпендикулярні до осей x та z відповідно.

Для профільно-проектуючої прямої фронтальна та горизонтальна проекції завжди перпендикулярні до осей z та y відповідно.

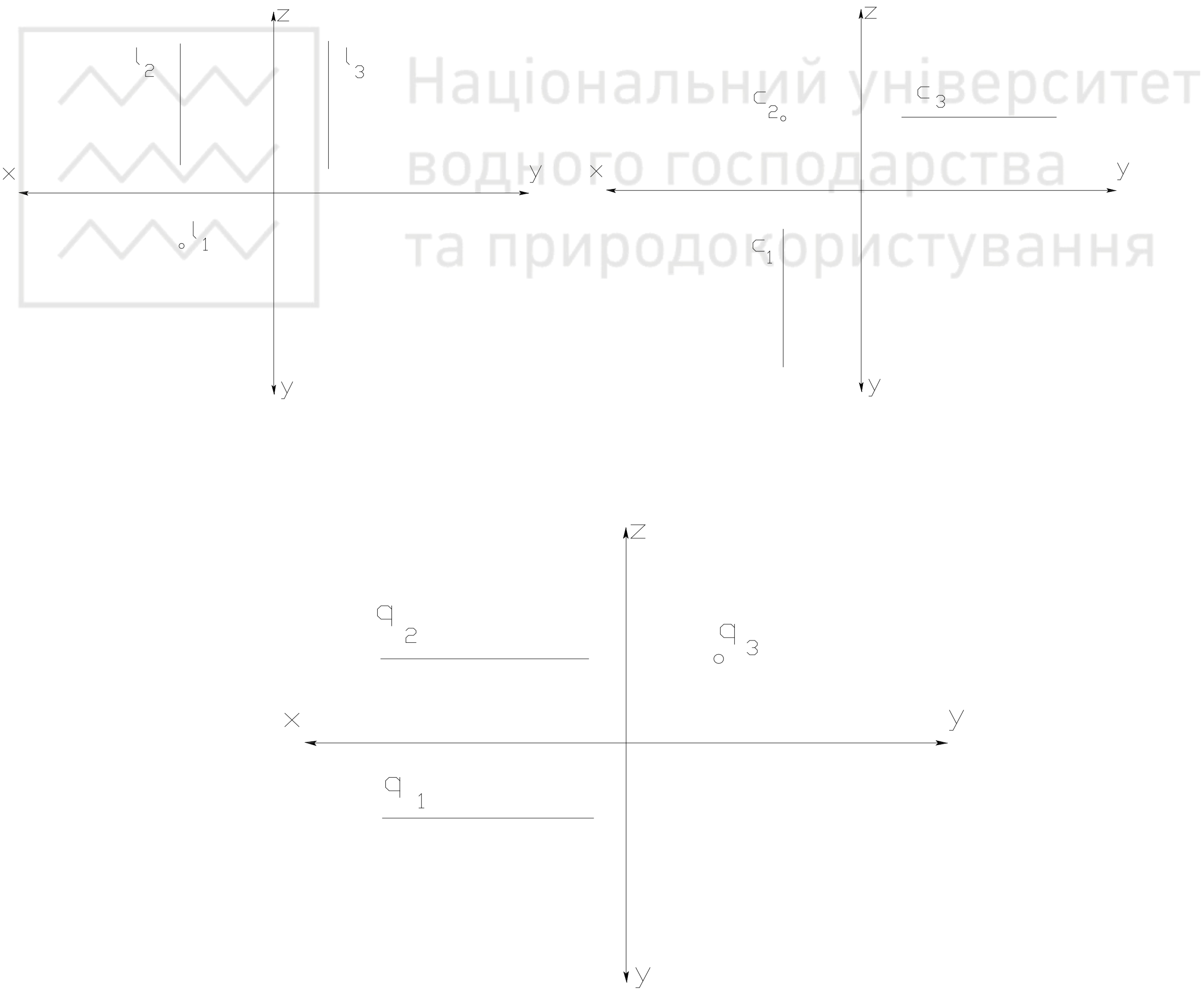


Рис. 8. Проектуючі прямі: l – горизонтально–проектуюча; c – фронтально–проектуюча; q – профільно–проектуючи

3.2. Сліди прямої

Слідами прямої називаються точки її перетину з площинами проекцій, при цьому:

– H – горизонтальний слід, наприклад $Ha = a \cap \Pi_1$, тобто точка перетину прямої a з горизонтальною площиною;

– F – фронтальний слід, наприклад $Fa = a \cap \Pi_2$, тобто точка перетину прямої a з фронтальною площиною;

– P – профільний слід, наприклад $Pa = a \cap \Pi_3$, тобто точка перетину прямої a з профільною площиною.

Сліди прямої, як і будь–які точки, можна відобразити трьома проекціями.

Основні особливості слідів прямої:

– співпадання (тотожність) сліду із однією своєю ж проекцією, тобто $H \equiv H_1$, $F \equiv F_2$, $P \equiv P_3$, що виникає внаслідок належності сліду до площини проекції;

– на відповідних проекціях прямої знаходяться проекції слідів із такими ж індексами.

Кількість слідів для конкретної прямої залежить від її розташування відносно площин проекцій. Для прямих загального положення існує три сліди. Для прямих рівня таких слідів два, для проектуючих прямих - один. Горизонтальна пряма може мати тільки фронтальний та профільний сліди, фронтальна пряма - тільки горизонтальний та профільний сліди. Горизонтально-проектуюча пряма має тільки горизонтальний слід, фронтально-проектуюча - фронтальний, профільно-проектуюча - профільний. На рис. 9 зображено в просторовій системі координат пряму загального положення a, при цьому відображено проекції прямої та проекції слідів. Штриховими лініями зображено невидимі, закриті площинами проекцій, ділянки прямої a. Ця ж пряма a із слідами та проекціями зображена на епюрі Монжа (рис. 10), де зберігаються описані вище властивості слідів. Римськими цифрами показані октанти простору, через які проходять ділянки такої прямої.

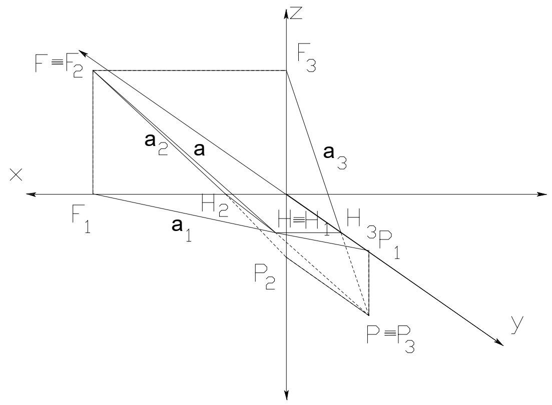


Рис. 9. Сліди прямої а в просторовій системі координат

Проекції слідів прямої будуються за правилами побудови проекцій звичайних точок, використовуючи додаткові умови, тобто:

перетин фронтальної проекції прямої з віссю х дає фронтальну проекцію горизонтального сліду H_2, а перетин цієї ж проекції прямої з віссю z – фронтальну проекцію профільного сліду P_2;

перетин горизонтальної проекції прямої з віссю х дає горизонтальну проекцію фронтального сліду F_1, а перетин цієї ж проекції прямої з віссю у – горизонтальну проекцію профільного сліду P_1;

горизонтальна проекція горизонтального сліду H_1 знаходиться лінією зв'язку 1 на горизонтальній проекції прямої;

фронтальна проекція фронтального сліду F_2 знаходиться лінією зв'язку 2 на фронтальній проекції прямої;

інші проекції слідів знаходяться звичайним способом за відомими двома проекціями.

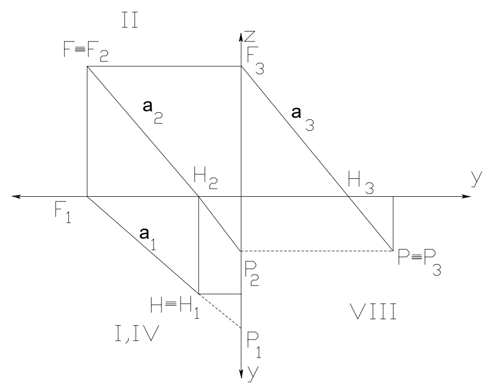


Рис. 10. Сліди прямої та октанти простору, через які вона проходить

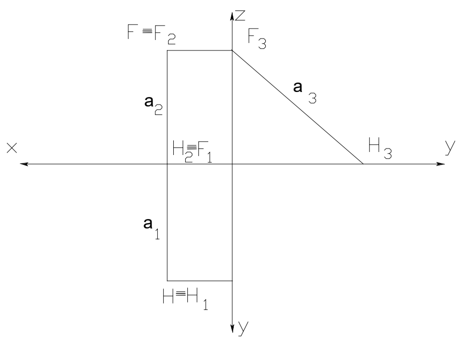


Рис. 11. Сліди профільної прямої

Для профільної прямої рівня межі октантів вказуються лініями, паралельними до осі z. Така пряма може мати тільки горизонтальний та фронтальний сліди (рис. 11).

Крім розглянутих вище прямих існують прямі, які перетинають одну або декілька осей, тобто сліди таких прямих розташовані на координатних осях. У частковому випадку такі прямі можуть належати до однієї із площин проекцій.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

3.3. Дійсна величина відрізка прямої

Якщо відрізок прямої AB є прямою загального положення, то дійсна величина відрізка не співпадає з жодною проекцією цього відрізка. Для знаходження дійсної величини відрізка користуються правилом: дійсна величина відрізка AB є гіпотенузою прямокутного трикутника, одним катетом якого є проекція відрізка на площину проекцій (будь–яку), а довжина другого катета дорівнює різниці відстаней кінців відрізка AB від цієї ж площини проекцій.

Такий спосіб знаходження дійсної величини відрізка називають способом трикутника.Δy, Δz, Δx. На рис. 12 знайдено дійсну величину відрізка $|AB|$, використовуючи його горизонтальну проекцію A_1B_1 (в такому випадку $|AB|= A^*B_1$) , фронтальну проекцію A_2B_2 (тоді $|AB|=A^*B_2$) та профільну проекцію A_3B_3 (тоді $|AB|=A^*B_3$).

Одночасно знаходиться дійсна величина кутів між прямою та площинами проекцій:

α – між прямою та площиною $П_1$;

β – між прямою та площиною $П_2$;

γ – між прямою та площиною $П_3$.

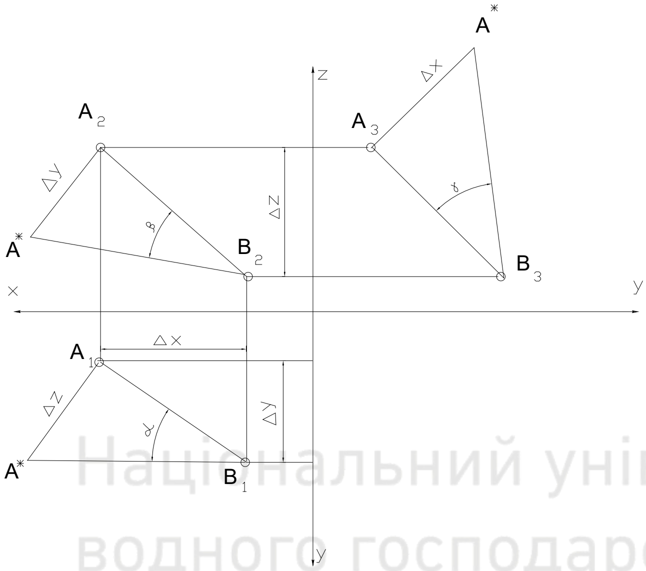
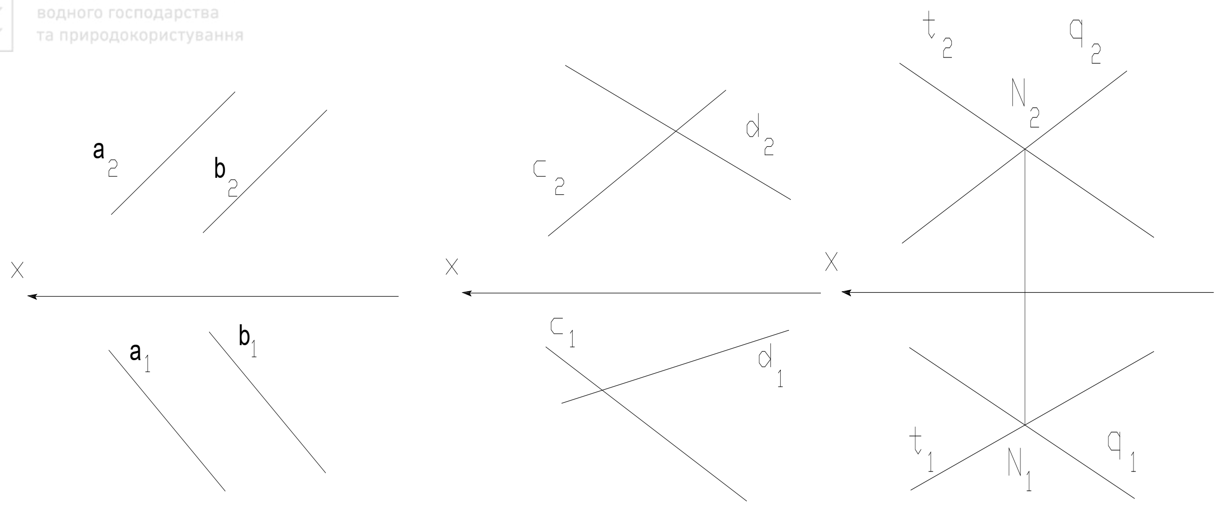


Рис. 12. Дійсна величина відрізка |AB| та кути між прямою AB і площинами проекцій

Для прямих рівня, паралельних до однієї із площин проекцій, дійсна величина відрізка дорівнює проекції відрізка на цю площину проекцій. Це частковий випадок. який виникає із способу трикутника (рис. 12) при наявності однієї або двох із умов $\Delta x=0$, $\Delta y=0$, $\Delta z=0$. Дійсна величина відрізка дорівнює проекції відрізка на площину проекцій і у випадку, коли пряма належить до цієї площини проекцій.

3.4. Відносне розташування прямих

Дві прямі взаємно паралельні. якщо паралельні між собою одноіменні проекції цих прямих (рис. 13,а).



(а) (б) (в)

Рис. 13. Прямі: a, b – паралельні; c, d – мимобіжні; t, q – прямі, що перетинаються в точці N

Дві прямі перетинаються в точці N, якщо проекції цієї точки розташовані на одній лінії зв’язку, перпендикулярній до осі x (рис. 13,в). Дві прямі мимобіжні, якщо вони не паралельні та не перетинаються (рис. 13,б), тобто не мають точки перетину. Практичне використання приведеного матеріалу навено в представленій задачі з алгоритмом її рішення: – визначити взаємну видимість сторін піраміди, – розділити ревро AB в співвідношенні 2:3, – через отриману точку провести пряму рівня до перетину з BC, – визначити дійсну величину BC і кути нахилу до Π_1 і Π_2, – через точку Д провести пряму паралельну AB.

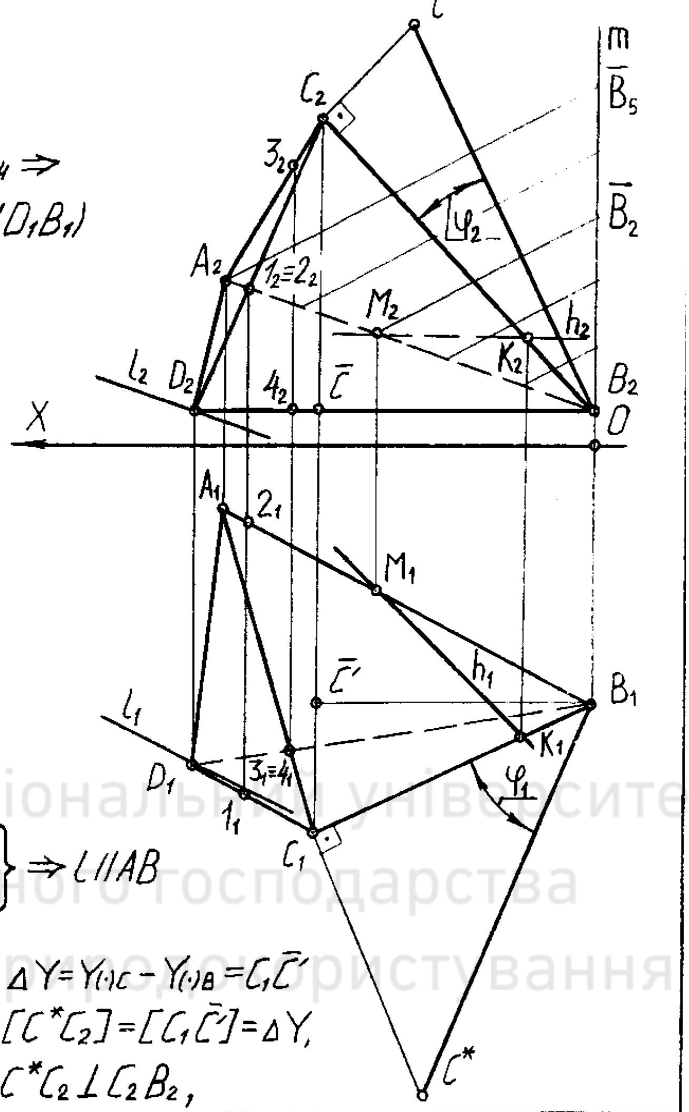
$1 \in DC$ $\quad$ $3 \in AC$

$2 \in AB$ $\quad$ $4 \in DB$

$1_2 \equiv 2_2$ $\quad$ $3_1 \equiv 4_1$

$Y_{(\cdot)1} > Y_{(\cdot)2} \Rightarrow$ $\quad$ $Z_{(\cdot)3} > Z_{(\cdot)4} \Rightarrow$

$\Rightarrow (2_2) \Rightarrow (A_2B_2)$ $\quad$ $\Rightarrow (4_1) \Rightarrow (D_1B_1)$



$m \ni B$

$B_2 \in m,\ B_5 \in m$

$$\left.\begin{array}{l}[B_2\bar{B}_2]=3\\ [B_5\bar{B}_2]=2\\ M\bar{B}_2 \parallel A\bar{B}_5\\ M_2 \in A_2B_2\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{A_2M_2}{M_2B_2}=\frac{2}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{AM}{MB}=\frac{2}{3}$$

$M \in h:\ h \parallel Ox;\ h \cap CB \Rightarrow$

$h_2 \cap C_2B_2 = K_2;$

$h_1 \cap C_1B_1 = K_1$

$l \ni D$

$$\left.\begin{array}{l} l_1 \parallel A_1B_1\\ l_2 \parallel A_2B_1\end{array}\right\} \Rightarrow l \parallel AB$$

$\Delta Z = Z_{(\cdot)C} - Z_{(\cdot)B} = C_2\bar{C}$ $\quad$ $\Delta Y = Y_{(\cdot)C} - Y_{(\cdot)B} = C_1\bar{C}'$

$[C^*C_1]=[C_2\bar{C}]=\Delta Z$ $\quad$ $[C^*C_2]=[C_1\bar{C}']=\Delta Y,$

$C^*C_1 \perp B_1C_1,$ $\quad$ $C^*C_2 \perp C_2B_2,$

$B_1 \cup C^* = [B_1C^*] = |BC|$ $\quad$ $B_2 \cup C^* = [B_2C^*] = |BC|$

$\varphi_1 = [B_1C_1]\widehat{\ }[B_1C^*] =$ $\quad$ $\varphi_2 = [B_2C_2]\widehat{\ }[B_2C^*] =$

$= [BC]\widehat{\ }\pi_1$ $\quad$ $= [BC]\widehat{\ }\pi_2$

	X	Y	Z
A	60	10	25
B	0	40	5
C	45	60	50

4. Площини

4.1. Способи задання площин

Найпростішим способом утворення площини є переміщення прямої твірної по двох прямих напрямних, які можуть бути паралельними або перетинатися. Звідси виникають найпростіші випадки задання площин (рис. 14):

а) трьома точками (трикутником) α(ABC);

б) точкою і прямою β(D,k);

в) паралельними прямими γ(t//g);

г) прямими, що перетинаються e(m∩ n).

Рис. 14. Найпростіші способи задання площини

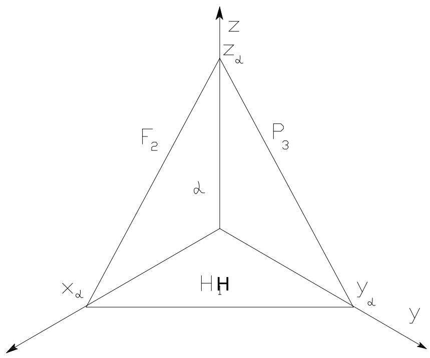
Сліди площини

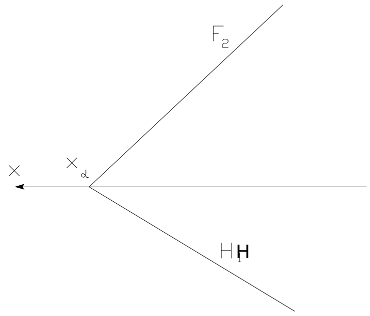
Сліди площини утворені її перетином з площинами проекцій та є прямими, що перетинаються (рис. 15). Сліди площини:

-h- горизонтальний, утворений перетином з площиною $П_1$;

-f- фронтальний, утворений перетином з площиною $П_2$;

-p- профільний, утворений перетином з площиною $П_3$.





(а) (б)

Рис. 15. Сліди площини: а- трикутник слідів у просторовій системі, де Xα, Yα, Zα - точки сходження слідів; б- задання площини слідами на епюрі

Площини загального положення завжди мають три сліди. Сліди площини мають властивості прямої та її слідів, оскільки проходять через відповідні сліди прямих, що належать до площини. Тому площини можна задавати слідами. Площини можна задавати і довільними плоскими фігурами, але з доказом належності всіх точок фігури до площини. Так, наприклад, для однозначного задання площини звичайним чотирикутником необхідно доказати належність будь-якої четвертої точки до площини, утвореної першими трьома точками. Найпростіше це зробити, задавши площину двома довільними паралельними відрізками (рис. 16).

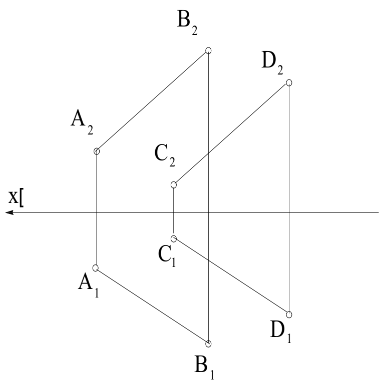


Рис. 16. Задання площини чотирма точками

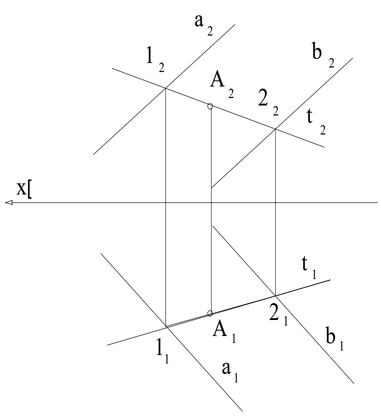


Рис. 17. Належність точки A до площини α (a//b) та до прямої t

4.2. Належність точок та прямих до площини

Пряма належить до площини, якщо вона має дві спільні точки з площиною. Точка належить до площини, якщо вона розташована на прямій, що належить до площини (рис. 17). Тут пряма t має з площиною спільні точки 1,2.

4.3. Розташування площин відносно площин проекцій

Особливості розташування площин відносно площин проекцій надають площинам та їх проекціям важливих властивостей, які використовуються для спрощення розв'язків задач нарисної геометрії.

Ось чому площини класифікуються залежно від їх розташування відносно площин проекцій, а особливості та властивості таких площин обов'язково вивчаються. Без цього неможливе елементарне засвоєння курсу дисципліни.

Площина загального положення

Така площина не паралельна і не перпендикулярна ні до однієї із площин проекції (рис. 14). Геометричні фігури в цій площинні не проектуються на площини проекцій в дійсну величину.

Площина рівня

Площина рівня паралельна до однієї із площин проекції, тобто:

- горизонтальна площина рівня паралельна до площини Π_1;
- фронтальна площина рівня паралельна до площини Π_2;
- профільна площина рівня паралельна до площини Π_3.

Кожна з цих площин перпендикулярна до не вказаних двох інших площин проекцій. Геометричні фігури в такій площині проектуються в дійсну величину на площину проекцій, до якої вказана площина паралельна. На дві інші площини проекцій така площина (вся множина її точок !!) проектується в прямі лінії – свої сліди, паралельні до відповідних координатних осей (рис. 18). Такі площини мають тільки два сліди. Важливі особливості проектування площин рівня ілюструються побудовами на рис. 18.

Горизонтальна площина рівня разом із всією множиною своїх прямих проектується на фронтальну площину проекцій у свій фронтальний слід, а на профільну – у профільний, при цьому фронтальний слід завжди паралельний до осі x, а профільний до осі y.

Фронтальна площина рівня разом із всією множиною своїх прямих проектується на горизонтальну площину проекцій у свій горизонтальний слід, а на профільну – у профільний, при цьому фронтальний слід завжди паралельний до осі x, а профільний до осі z.

Профільна площина рівня разом із всією множиною своїх прямих проектується на фронтальну площину проекцій у свій фронтальний слід, а на горизонтальну – у горизонтальний, при цьому ці сліди завжди співпадають та перпендикулярні до осі x і паралельні до осі z .

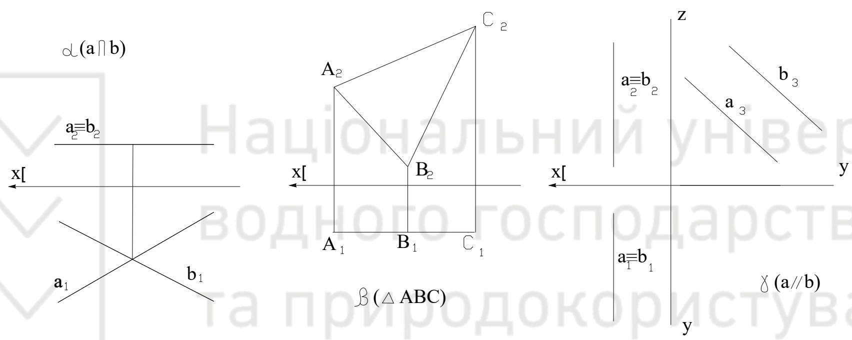


Рис. 18. Площини рівня: α - горизонтальна; ß - фронтальна; γ - профільна

Площина проектуюча

Проектуючі площини перпендикулярні до однієї із площин проекцій, на яку вони із всією множиною своїх прямих проектуються в лінію – свій слід, при цьому два інших сліди перпендикулярні до згаданої площини проекцій.

Горизонтально-проектуюча площина перпендикулярна до площини $П_1$, фронтально-проектуюча – до площини $П_2$, профільно-проектуюча - до площини $П_3$ (рис. 19).

Особливості відображення проектуючих площин на епюрі:

- для горизонтально-проектуючої площини фронтальний та профільний сліди завжди перпендикулярні до осей x та y відповідно;
- для фронтально-проектуючої площини горизонтальний та профільний сліди завжди перпендикулярні до осей x та z відповідно;

- для профільно-проектуючої площини горизонтальний та фронтальний сліди завжди перпендикулярні до осей y та z відповідно.

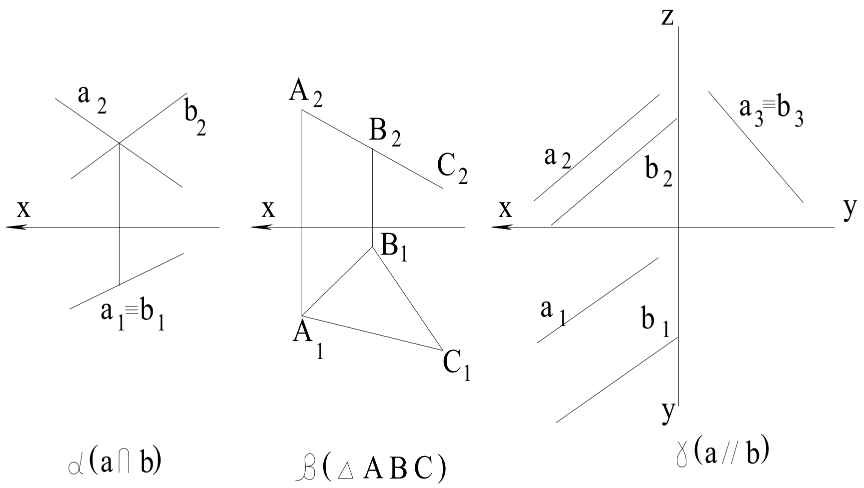


Рис. 19. Площини проектуючі: α - горизонтально; β -фронтально; γ - профільно

4.4. Особливі прямі площини

На особливі прямі площини накладаються дві умови: вони повинні належати до довільної площини та бути особливо розташованими відносно площин проекцій.

Горизонталь площини – пряма h, яка належить до довільної площини та паралельна до площини Π_1, при цьому $h_2 // x$. Фронталь площини – пряма f, яка належить до довільної площини та паралельна до площини Π_2, при цьому $f_1 // x$. Профільна пряма площини – пряма p, яка належить до довільної площини та паралельна до площини Π_3 , при цьому $p_2 // z$, $p_1 // y$.

Лінія найбільшого схилу s до однієї із площин проекцій - пряма, яка належать до довільної площини та перпендикулярна до однієї із трьох особливих прямих цієї площини.

Лінія найбільшого схилу до фронтальної площини проекцій перпендикулярна до фронталі своєї площини. Лінія найбільшого схилу до горизонтальної площини проекцій перпендикулярна до горизонталі своєї площини. Лінія найбільшого схилу до профільної площини проекцій перпендикулярна до профілі своєї площини.

При виконанні проекцій особливих прямих площини на рис. 20, 21 використано правило належності прямої до площини, тобто точки 1,2 належать до площин ΔABC, ΔDEF, ΔMNR. Крім того, використано властивості особливих прямих, які описані в п. 3.1.

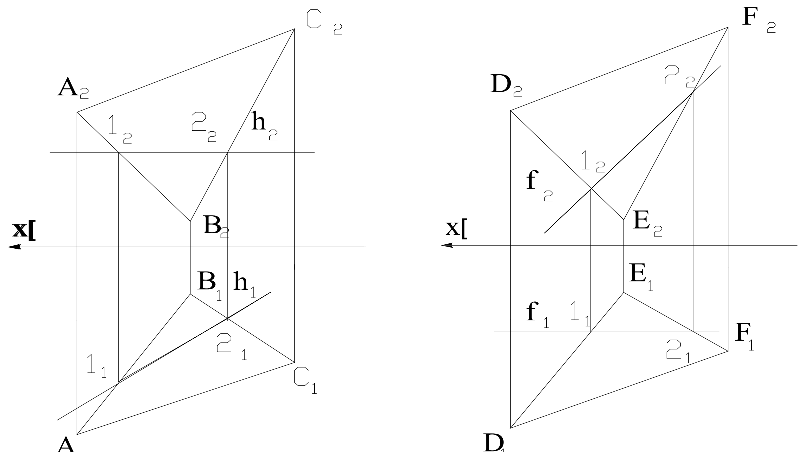
Фронтальну проекцію горизонталі h_2 площини ΔABC проводимо через точки 1,2 паралельно до осі x , після чого за горизонтальними проекціями цих точок знаходимо горизонтальну проекцію горизонталі h_1 (рис. 20,а).

Горизонтальну проекцію фронталі f_1 площини ΔDEF проводимо довільно, але паралельно до осі x, при цьому фронталь f проходить через точки 1,2, тому фронтальна проекція фронталі f_2 проходить через фронтальну проекцію цих точок (рис. 20,б).

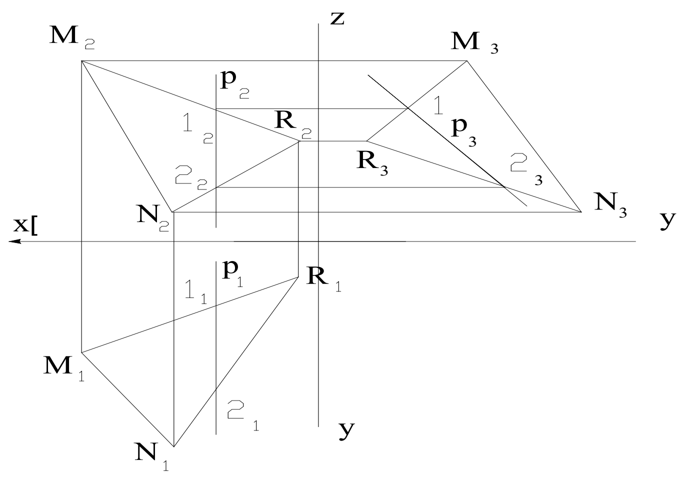
Для побудови профільної прямої p в площині ΔMNR проводимо перпендикулярну до осі x лінію, проекції точок 1,2 якої будуть належати до відповідних проекцій профільної прямої p (рис. 20,в). Така лінія задовольняє усі вимоги до профільної прямої площини ΔMNR.

Для побудови лінії найбільшого схилу s до горизонтальної площини проекцій в площині ΔABC (рис. 21,а) проводимо перпендикулярну лінію горизонталі h. Фронтальна проекція лінії найбільшого схилу s_2 пройде через фронтальні проекції точок 3,4.

Для побудови лінії найбільшого схилу s до фронтальної площини проекцій в площині ΔDEF (рис. 21,б) проводимо перпендикулярну до фронтальної проекції фронталі f_2 лінію s_2. Горизонтальна проекція лінії найбільшого схилу s_1 пройде через горизонтальні проекції точок 3 та 4.

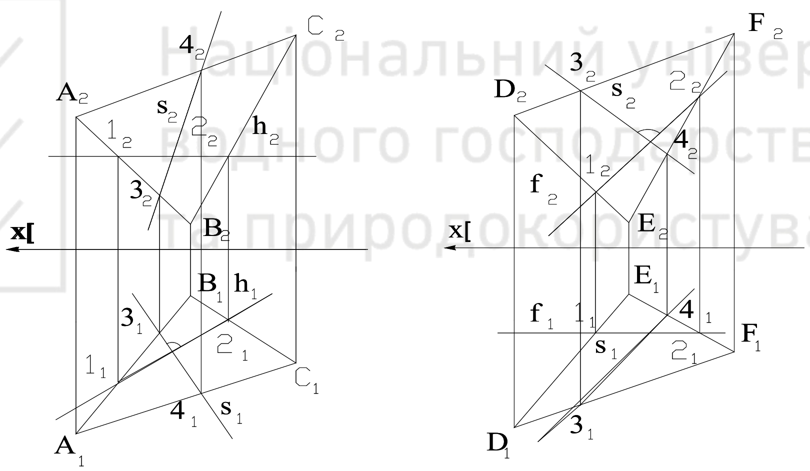


(а) (б)



(в)

Рис. 20. Особливі прямі площини: h- горизонталь, f- фронталь, p- профільна пряма



(а) (б)

Рис. 21. Лінії найбільшого схилу: S_1- до горизонтальної площини проекцій, S_2 - до фронтальної площини проекцій

4.5. Паралельність елементів простору

Взаємне розташування двох площин, прямої і площини

Дві площини можуть перетинатися або бути паралельними. Дві площини паралельні між собою, якщо в кожній із них розташовано по дві прямі, що перетинаються, при цьому такі прямі однієї площини паралельні до аналогічних відповідних прямих другої площини (рис. 22).

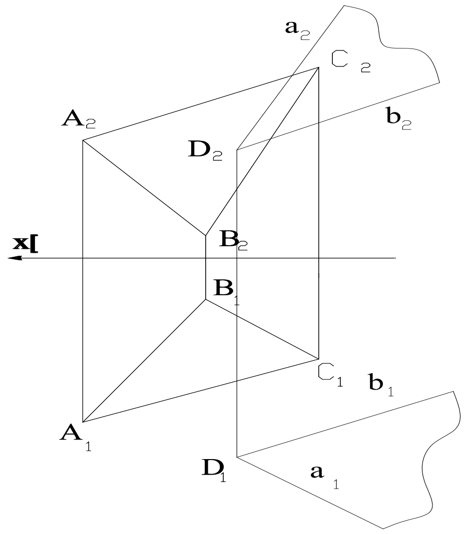


Рис. 22. Паралельність площин

Взаємне розташування прямої відносно площини може бути таким:

- пряма перетинає площину;
- пряма розташована в площині, площина проходить через пряму;
- пряма паралельна до площини.

Пряма паралельна до площини, якщо вона паралельна до будь-якої прямої в площині (рис. 23).

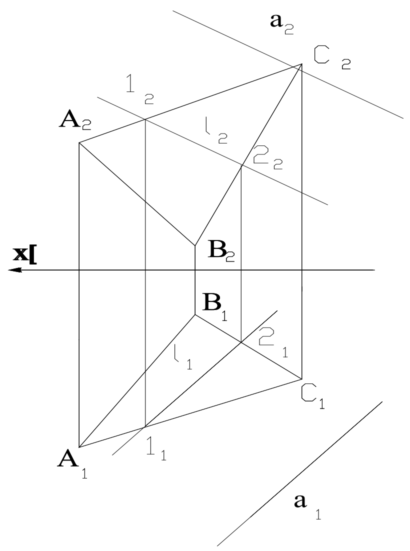


Рис. 23. Паралельність прямої та площини

Для побудови прямої, паралельної до заданої площини, необхідно попередньо в площині побудувати пряму. На цю пряму можуть накладатися свої умови або вона може бути довільною.

На рис.23 попередньо побудована довільна пряма l, яка належить до площини ΔABC та проходить через точки 1,2. Паралельно до прямої 1 проводимо проекції довільної прямої а, яка буде паралельною до площини ΔABC .

Запитання для самоперевірки

1.Як задається площина в просторі?

2.Що таке площина загального положення?

3.Описати особливі положення площини в просторі.

4.Що таке сліди площини, як вони називаються?

5.У якому випадку точка та пряма належать до площини?

6.Яким буває взаємне розташування площин?

7.Яким буває взаємне розташування прямої та площини?

8.Що таке особливі прямі площини?

5. Основні позиційні задачі

Основними позиційними задачами називають такі, в яких знаходяться спільні для двох множин однина або множина точок, або, іншими словами, знаходяться елементи перетину двох множин.

До таких задач належать задачі на знаходження:

лінії перетину двох площин, площини та поверхні, двох поверхонь;

точки перетину лінії з площиною та поверхнею.

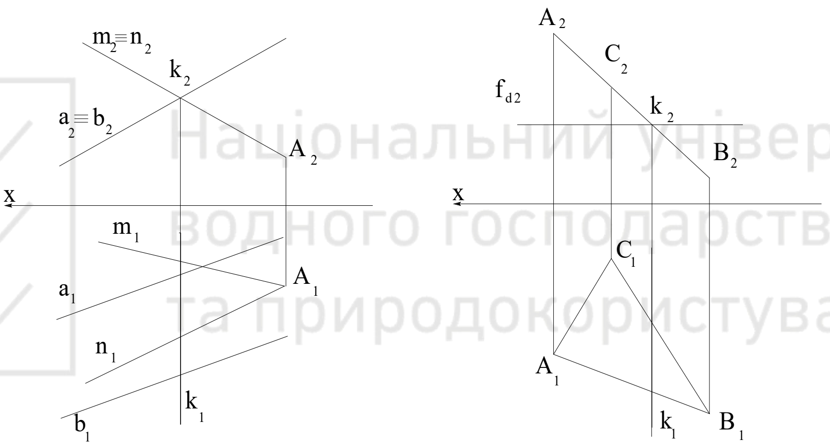
5.1. Перетин двох площин

Лінія перетину двох площин визначається за двома точками, які належать до цих площин. Всі питання про перетин площин будемо розглядати в порядку зростання складності задач.

5.1.1. Перетин проектуючих площин

Проекції лінії перетину проектуючих площин належать до проекцій цих площин (ліній) на такі площини проекцій, до яких задані площини перпендикулярні.

На рис. 24,а зображено лінію перетину k двох, $m \cap n$ та $a//b$, фронтально-проектуючих площин, при цьому фронтальна проекція k_2 знаходиться в точці перетину фронтальних слідів площин. Фронтальна проекція лінії перетину с фронтально-проектуючої площини ΔABC та горизонтальної площини рівня d теж знаходиться в точці перетину фронтальних слідів.



(а) (б)

Рис. 24. Перетин площин: а – проектуючих, б – рівня та проектуючої

Якщо обидві задані площини перпендикулярні до однієї площини проекцій, то на цю площину проекцій лінія їх перетину проектується в точку, тобто вона є проектуючою прямою k, при цьому (на рис. 24, б) площина Fd має властивості проектуючої, оскільки вона є площиною рівня $d //\Pi_1$.

5.1.2. Перетин площин, заданих слідами

Для знаходження лінії перетину площин, заданих слідами, найпростіше знайти дві точки, спільні для обох площин. Лінія перетину площин пройде через ці точки. В якості таких точок доцільно вибрати сліди лінії перетину, які повинні одночасно належати до одноіменних слідів обох площин (див.п. 4.1, рис. 15,б), оскільки сама лінія перетину належить до обох площин. Найчастіше знаходять два сліди лінії перетину – дві точки: точку перетину фронтальних та точку перетину горизонтальних слідів площин.

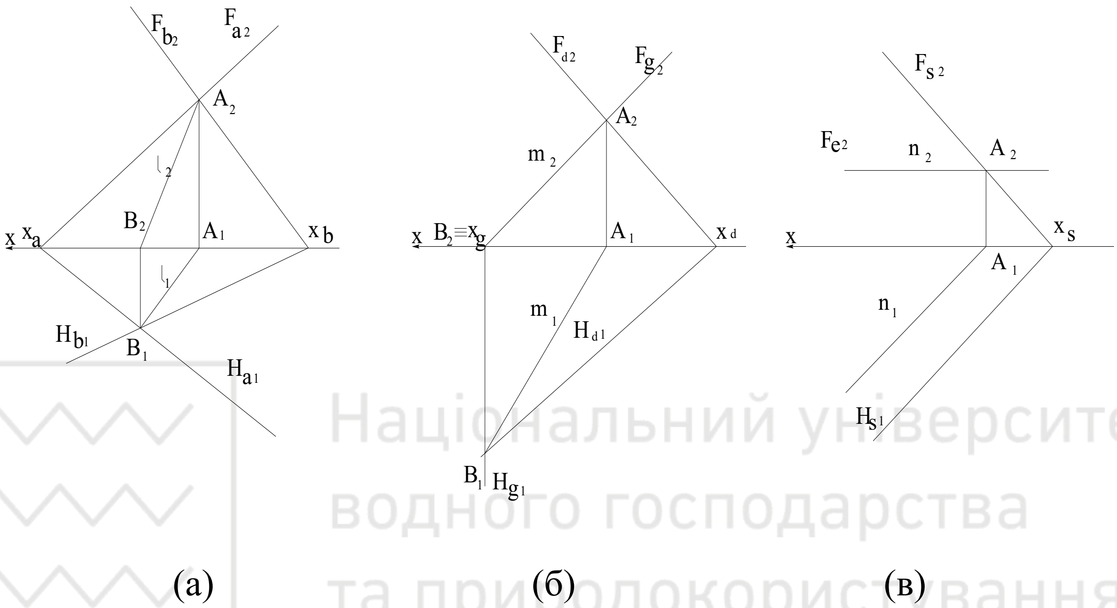


Рис. 25. Перетин площин: а –загального положення (пряма l); б –проектуючої та загального положення (пряма m); в –рівня і загального положення (прямі n)

В точці перетину фронтальних слідів площин буде фронтальна проекція точки лінії перетину A_2, а в точці перетину горизонтальних слідів буде горизонтальна проекція точки лінії перетину B_1 (рис. 25,а).

Проекції точок лінії перетину слідів A_1, B_2 знаходяться на осі x. Аналогічно знаходиться лінія перетину площин, одна із яких є проектуючою (рис. 25, б).

На рис. 25,а перетин площин α та b дає лінію l; перетин (рис. 25,б) площин g та d - лінію m; перетин площин (рис. 25,в) s та e - лінію n.

5.1.3. Перетин площин рівня та площин загального положення

Лінія перетину площини загального положення площиною рівня має особливості прямої рівня та належить до заданої площини загального положення. Отже (див. п. 4.4), така лінія перетину є по своїй сутності особливою прямою площини загального положення. Звідси, дві проекції такої лінії є відомими - вони співпадають із відповідними слідами площини рівня. Для площин, заданих слідами, описане явище ілюструють побудови на рис. 25, де в прикладі (в) лінія перетину n співпадає із горизонталлю h площини s.

Якщо площина загального положення не задана слідами, то лінія перетину знаходиться за двома точками (рис. 26). На рисунку (а) перетин проекцій прямих a_2, b_2 площиною α_2 дає точки 1_2,2_2, горизонтальні проекції яких 1_1,2_1 знаходяться на проекціях прямих a_1,b_1 відповідно. Лінія перетину l проходить через точки 1,2, а її фронтальна проекція належить до проекції площини рівня α_2. На рисунку (б) фронтальна площина γ перетинає площину ΔABC в точках A,1. Лінія перетину t проходить через ці точки.

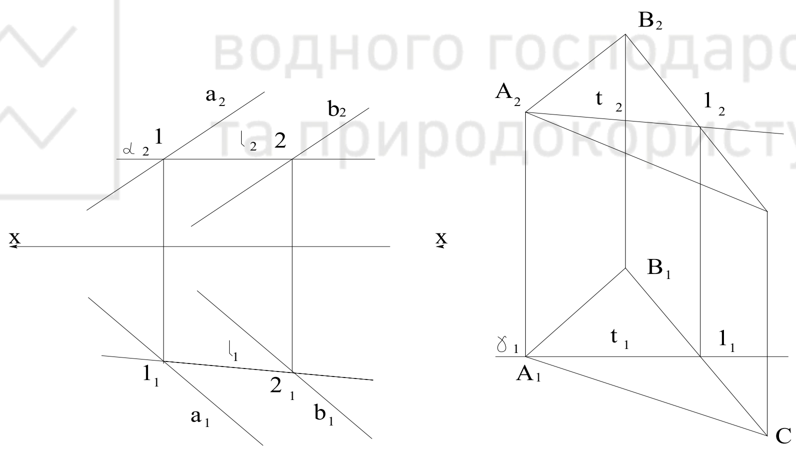


Рис. 26. Перетин площин загального положення площинами рівня α // $П_1$ та γ // $П_2$

5.1.4. Загальний випадок знаходження лінії перетину

У загальному випадку лінія перетину площин знаходиться за допомогою алгоритму, наведеного в таблиці 1.

	A	B	C	D	E	S
X	0	20	105	60	95	10
Y	70	5	50	85	20	20
Z	65	0	85	0	15	85

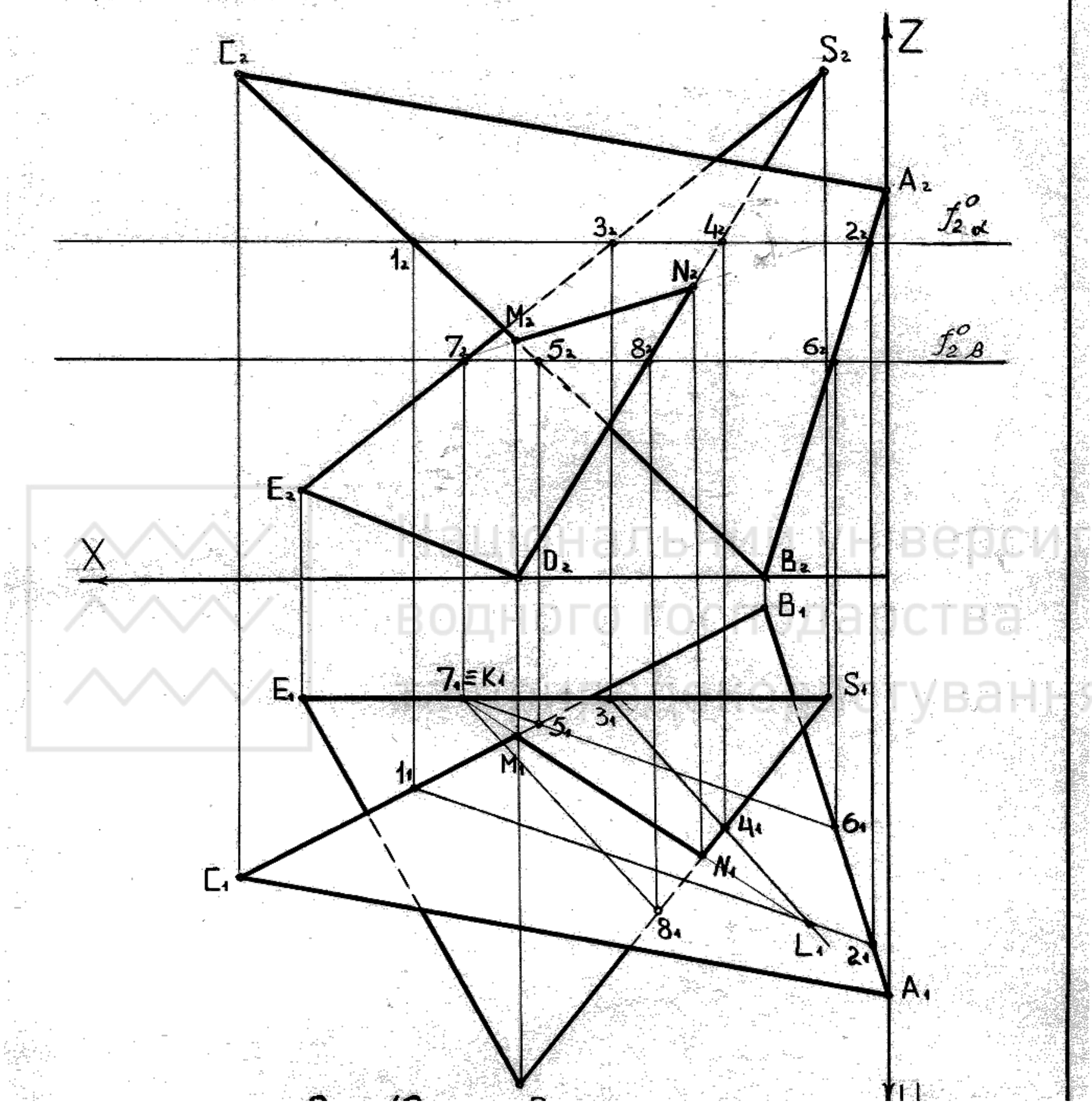


Рис. 27. Взаємний перетин площин

Таблиця 1

Алгоритм знаходження лінії перетину площин

№ п/п	Текст алгоритму	Формалізований запис

	Задано дві площини ΔABC та ΔDES. Необхідно знайти лінію їх перетину.	ΔABC , ΔDES ? MN = ΔABC ∩ΔDES
1	Вибирають допоміжну площину α, як правило проектуючу або рівня.	α
2	Знаходять лінію перетину допоміжної площини α та заданої площини ΔABC .	1,2 = α ∩ ΔABC
3	Знаходять лінію перетину допоміжної площини α та заданої площини βΔDES.	3,4 = α ∩ ΔDES
4	Знаходять точку L перетину прямих 1,2 та 3,4.	L =1,2 ∩ 3,4
5	Ця точка належить до прямої MN. Аналогічним способом знаходять ще одну точку K та наводять пряму MN.	L є MN K є MN LK є MN

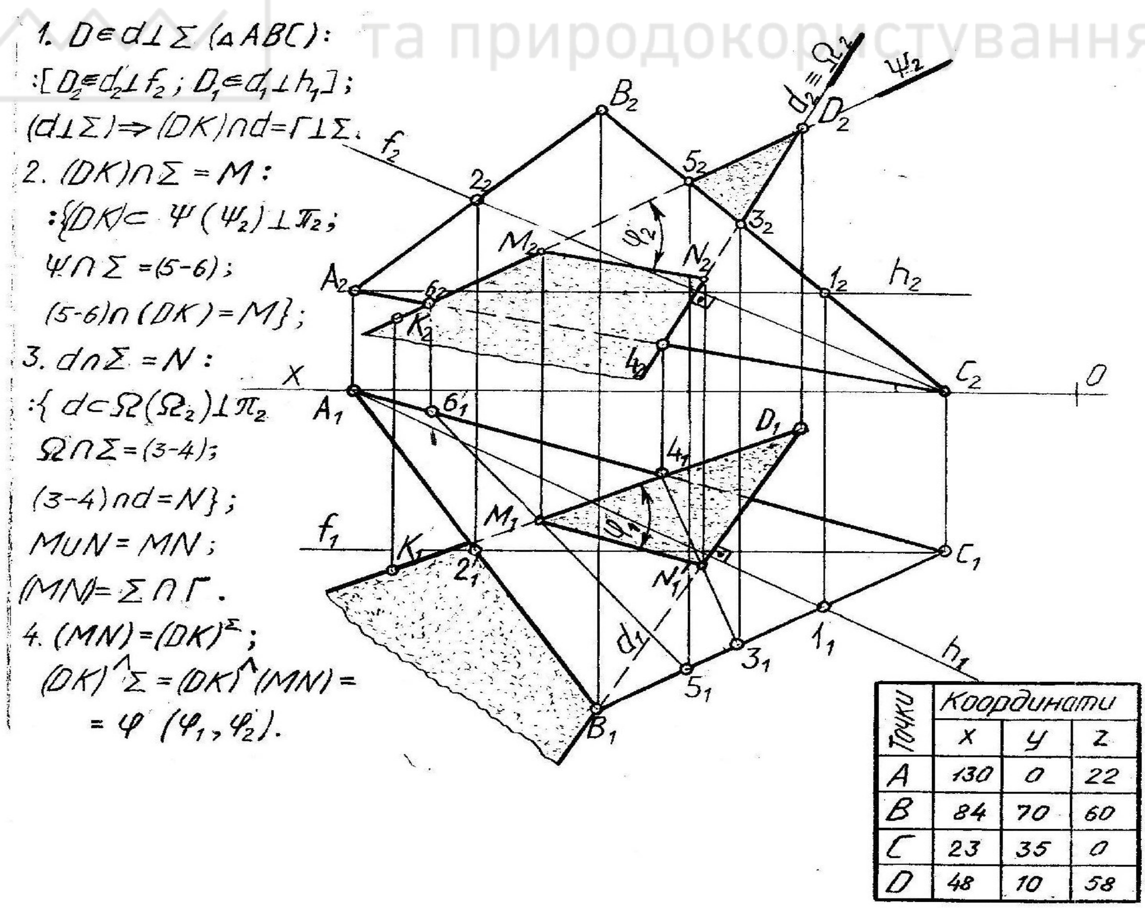


Рис. 28. Перетин двох площин загального положення – пряма MN

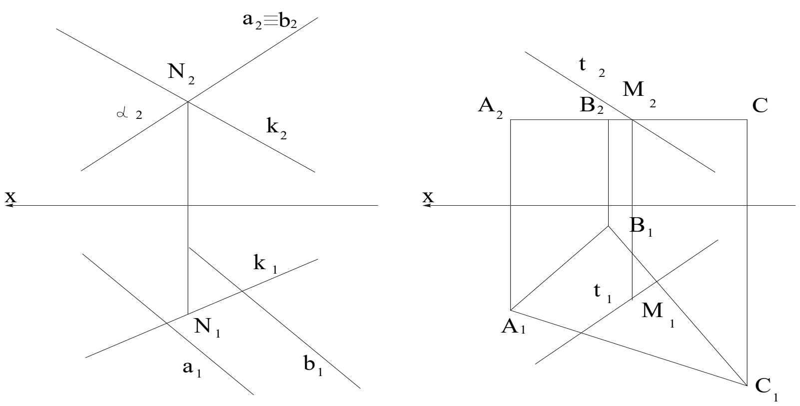
Геометрична сутність алгоритму зображена на рис. 27. За наведеним алгоритмом розв'язана задача на рис. 28, де в якості допоміжних площин використані проектуючі площини $\Omega_2 \perp \Pi_2$, $\Psi_2 \perp \Pi_2$. Перетин допоміжної площини Ω_2 ($\Omega_2 \in d_2$) з площиною ΔABC дає пряму 3,4, а з площиною Ψ_2 ($\Psi_2 \in DK$) і ΔABC - пряму 5,6. Перетин знайдених прямих 3,4 5,6 дають точки N,M через яку проходить шукана пряма лінія перетину заданих площин.

5.2. Перетин прямої з площиною

Задача про знаходження точки перетину прямої з площиною має найпростіший розв'язок, якщо площина є проектуючою, або площиною рівня (має властивості проектуючої).

Площина, перпендикулярна до площини проекцій, проектується всією множиною своїх точок на цю площину проекцій в пряму. Тому перетин проекції такої площини з відповідною проекцією заданої прямої дає таку ж проекцію точки перетину цієї прямої з площиною.

Площини α та β (рис. 29) проектуються на фронтальну площину проекцій в прямі лінії. Перетин цих ліній з фронтальними проекціями заданих прямих k (рис. 29, а) та t (рис 29, б) дає фронтальні проекції точок перетину N_2 та M_2 відповідно. Горизонтальні проекції цих точок знаходяться на горизонтальних проекціях прямих k та t.



(а) (б)

Рис .29. Перетин прямої з площинами: а - проектуючою, б - рівня

5.2.1. Перетин прямої з площиною загального положення

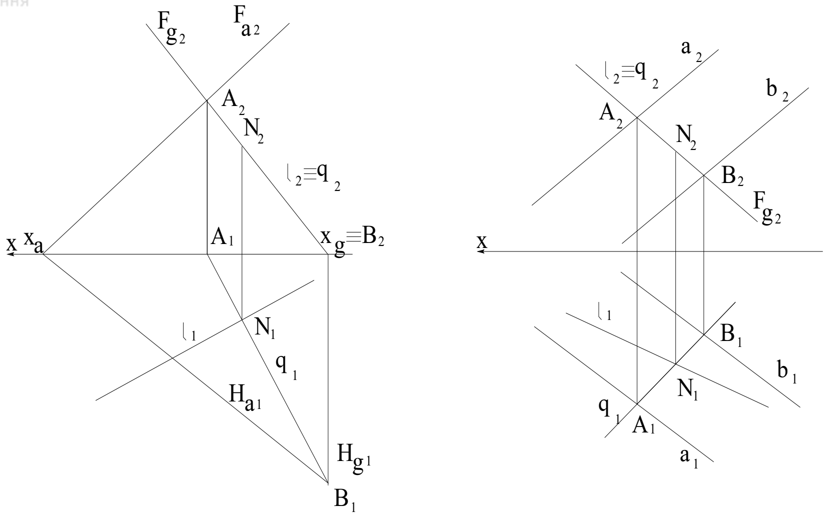
У загальному випадку задачі розв’язок знаходять за алгоритмом, наведеним у таблиці 2.

Таблиця 2

Алгоритм знаходження точки перетину прямої і площини

№ п/п	Текст алгоритму	Формалізований запис
	Задано пряму l та площину α. Необхідно знайти їх точку перетину N.	l, α $?\ N = l \cap \alpha$
1	Вибираємо допоміжну проектуючу площину γ, яка проходить через пряму l.	$l \in \gamma,\ \gamma \perp \Pi_2$
2	Знаходимо лінію q перетину площин γ та α.	$q = \gamma \cap \alpha$
3	Знаходимо точку перетину знайденої прямої q та заданої прямої l. Ця точка є шуканою.	$N = q \cap l$

Наведений алгоритм із ідентичним позначенням застосований для розв’язку задач про знаходження точки перетину прямої з площиною на рис. 30 а,б. На рис. 30а через пряму l проведена допоміжна проектуюча площина g, перетин якої із заданою площиною a дає лінію q. Перетин знайденої лінії q та заданої l дає шукану точку перетину N. На рис. 30б через пряму l проведена допоміжна проектуюча площина g, перетин якої із заданою площиною α (a//b) дає лінію q, а перетин ліній q та l дає точку перетину N. Цей же алгоритм застосовується також тоді, коли пряма l є проектуючою. У цьому випадку допоміжні площини g доцільно проводити перпендикулярно до площини проекцій, на яку пряма l проектується в точку (рис. 31), де на рис. 31а через l_2 проходить $Fg \equiv l_2$, при цьому $N_2 \equiv l_2$. На рис. 31б через l_2 проходить $Fg \equiv l_2$, а горизонтальна проекція q проходить через точки A,B.



(а) (б)

Рис. 30. Перетин прямої з площиною, заданою : а – слідами, б –паралельними прямими

Національний університет
водного господарства
та природокористування

(а) (б)

Рис. 31. Перетин проектуючої прямої з площиною, заданою : а – слідами, б –паралельними прямими

5.3. Видимість прямої та площини

Для визначення видимості прямої, площини і т.і. застосовується спосіб конкуруючих точок. Із двох точок, які на одній із площин проекцій мають одну спільну проекцію, видимою на цій же площині проекцій буде точка, яка більш віддалена від цієї площини проекцій.

Аналізуючи видимість точок елемента простору, визначають видимість самого елемента. Наприклад, на рис. 32 на горизонтальній проекції пряма l буде в точці 4 невидимою, а пряма AB в точці 5 - видимою. На фронтальній проекції пряма l є видимою в точці 3, а пряма BC в точці 2 - невидимою. Інша частина цієї лінії знаходиться за площиною ΔABC , а тому до точки K є невидимою, або видимою і закритою цією площиною.

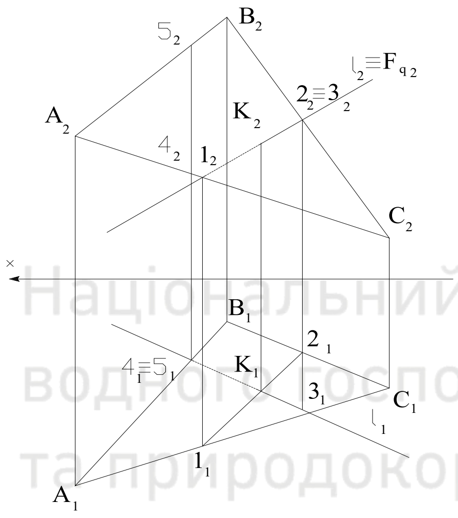


Рис. 32. Видимість прямої l відносно площини ΔABC

6. Перетворення проекцій

Всі відомі способи перетворення проекцій розділяються на такі різновиди:

- перетворення, при якому елементи простору змінюють своє розташування відносно незмінної нерухомої системи координат;
- перетворення, при якому для нерухомих елементів простору замінюється, або змінює своє розташування їх координатна система;
- інші перетворення, в основі яких не лежать ортогонально-проектуючі методи, наприклад, спосіб косокутного проектування, гомологічні перетворення поверхонь і т.і.

Розглянемо перші два різновиди перетворень, які найчастіше зустрічаються в практиці креслення.

6.1. Плоскопаралельне переміщення

Перетворення належить до першого різновиду і його сутність в тому, що всі точки елемента простору переміщуються в паралельних між собою площинах. Одна проекція елемента простору, в площині переміщення, не змінює свою форму і розміри, зате інша змінює ці параметри. Для однієї точки одне плоскопаралельне переміщення еквівалентне зміні її двох координат, які утворюють площину переміщення. Для виконання переміщення на рис. 38 переносимо відрізок A_1B_1 з фіксованою довжиною в положення $A_1'B_1'$ прямої рівня. Фронтальні проекції точок $A_2'B_2'$ знаходимо за допомогою ліній зв'язку, оскільки для цих точок координати Z не змінилися.

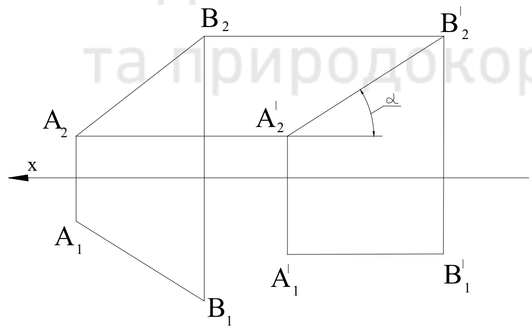


Рис. 38. Плоскопаралельне переміщення прямої для знаходження дійсної величини відрізка |AB|

Для розв'язку багатьох задач необхідно застосувати не менше двох перетворень. Так, наприклад, для знаходження дійсної величини трикутника необхідно здійснити два послідовних переміщення. Перше переміщення перетворює площину загального положення трикутника в проектуючу. Друге переміщення перетворює площину трикутника із проектуючої в площину рівня. Точки першого переміщення позначуються штрихом – ('), другого - (").

Розглянемо приклад розв'язку такої задачі на рис. 39. Першим переміщенням на горизонтальній площині проекція трикутника $A_1B_1C_1$

розташовується так, щоб горизонтальна проекція горизонталі h_1, що є її дійсною величиною, стала перпендикулярною до осі x. Це визначає нове положення трикутника $A'_1B'_1C'_1$. Фронтальні проекції точок $A_2'B_2'C'_2$ знаходимо за допомогою ліній зв'язку, оскільки для цих точок координати Z не змінилися. Друге переміщення здійснюється на фронтальній площині проекцій. Переміщена проекція площини трикутника $A'_2B'_2C'_2$ стає паралельною до осі x, що відповідає новому положенню трикутника $A''_2B''_2C''_2$. Горизонтальні проекції точок $A''_1B''_1C''_1$ знаходимо за допомогою ліній зв'язку, оскільки для цих точок координати Y не змінилися. Знайдена проекція $A''_1B''_1C''_1$ визначає дійсну величину трикутника.

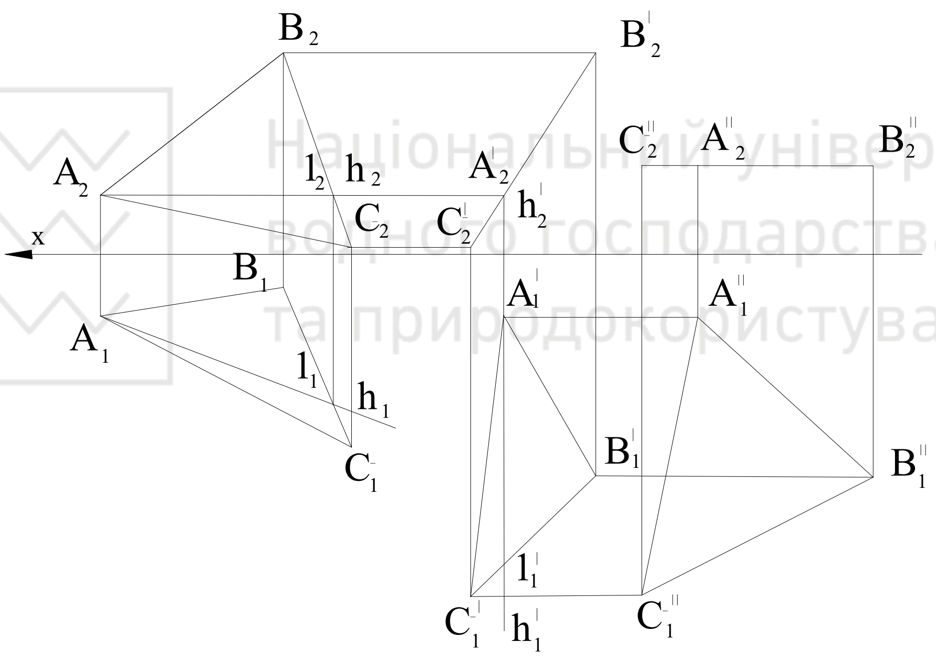


Рис. 39. Знаходження дійсної величини трикутника |ABC| плоскопаралельним переміщенням

6.2. Перетворення проекцій способами обертання

Обертання належить до першого різновиду перетворення проекцій і його сутність в тому, що точки елемента простору обертаються навколо осі, яка може бути прямою рівня або проектуючою.

Для здійснення обертання необхідно мати:

об’єкт обертання (точку);

механізм обертання;

кінцеві умови, умови обертання.

До механізму обертання любої точки належать:

вісь обертання; площина обертання; центр обертання О; радіус r.

До умов обертання належать:

- напрямок обертання;

- кінцеві координати точки, кут обертання φ, особливості і розташування елемента простору після обертання і т. і.

6.2.1. Обертання навколо проектуючої прямої

В даному випадку вісь обертання є проектуючою прямою, перпендикулярною до однієї із площин проекцій.

Приклад

Задано точку А та вісь і, яка перпендикулярна до площини проекцій $П_1$. Необхідно повернути точку на кут φ. Умови обертання: напрямок - проти годинникової стрілки, величина кута $φ = 90^0$. Розв’язок задачі наведено на рис. 40. Площина обертання проходить через проекцію точки A_2 .Обертання здійснюється на горизонтальній проекції радіусом $r = O_1A_1$. При цьому кут φ проектується в дійсну величину на горизонтальну площину проекцій. Радіус обертання r є прямою рівня і теж проектується в дійсну величину.

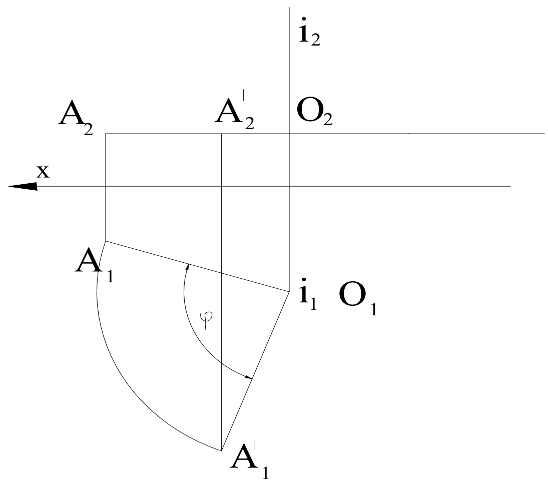


Рис. 40. Обертання точки А навколо проектуючої прямої

6.2.2. Обертання навколо прямої рівня

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Віссю обертання є пряма, паралельна до однієї із площин проекцій.

Обертання точки

Приклад

Задано точку А та пряму рівня h. Необхідно здійснити обертання точки А відносно осі $i \vee h$. Умова обертання: сумістити точку А з площиною рівня G_2 (G_2 проходить через горизонталь h). Для суміщення точки А з площиною рівня G_2 знаходимо центр обертання О, який визначається перетином площиною обертання з дійсною величиною горизонталі h_1. Способом трикутника знаходять дійсну величину радіуса обертання $r = O_1A^*$. Дійсною величиною радіуса r переносять точку А* в точку A'_1 площини обертання. Фронтальна проекція точки A'_2 знаходиться на горизонтальній площині суміщення G_2 при допомозі лінії зв’язку. Задача розв’язана на рис. 41.

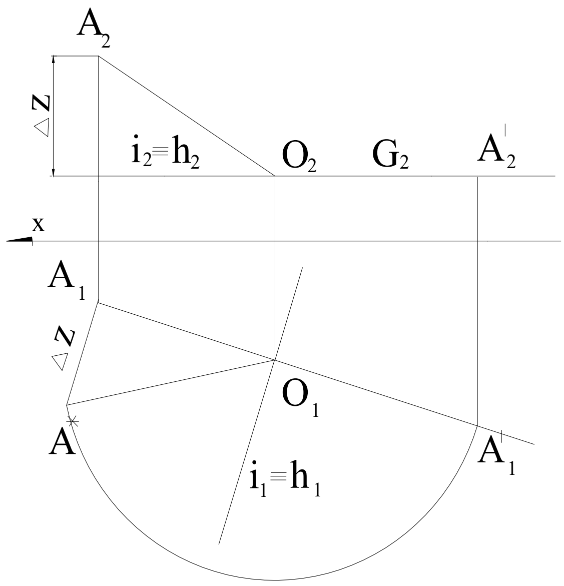


Рис. 41. Обертання точки навколо горизонталі h

Обертання площини

Приклад

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Задано трикутник АВС. Знайти його дійсну величину обертанням навколо горизонталі h.

Розв’язок задачі наведений на рис. 42. Для знаходження дійсної величини трикутника необхідно перетворити його в площину рівня , яка проходить через горизонталь h, тобто всі три точки АВС необхідно сумістити з площиною рівня, тоді трикутник проектується на горизонтальну площину проекції в дійсну величину. Точки А та 1 знаходяться на осі, тому після обертання не змінюють свого розташування. Об’єктом обертання виберемо точку В, через проекцію якої B_1 проводимо проекцію площини обертання. Центром обертання O_1 є точка перетину площини обертання з горизонтальною проекцією горизонталі h_1, що одночасно буде віссю обертання всіх точок ∆ АВС. Дійсна величина радіуса обертання r (O_1B^*)є дійсною величиною відрізка ОВ і знаходиться способом трикутника на горизонтальній проекції. Сумістивши точку В* з площиною рвіня, одержимо проекцію точки B'_1 після обертання. Немає потреби застосовувати аналогічний спосіб для одержання точки C'_1. Ця точка знаходиться простіше: вона буде точкою перетину прямої $B'_1 1_1$ з площиною обертання точки C. З'єднавши точки C'_1, B'_1, одержимо горизонтальну проекцію трикутника ABC, розташованого в площині рівня. Це і є його дійсна величина. Одночасно знаходяться дійсні величини внутрішніх кутів трикутника, тобто цей спосіб може застосовуватися для визначення дійсної величини кута між двома прямими.

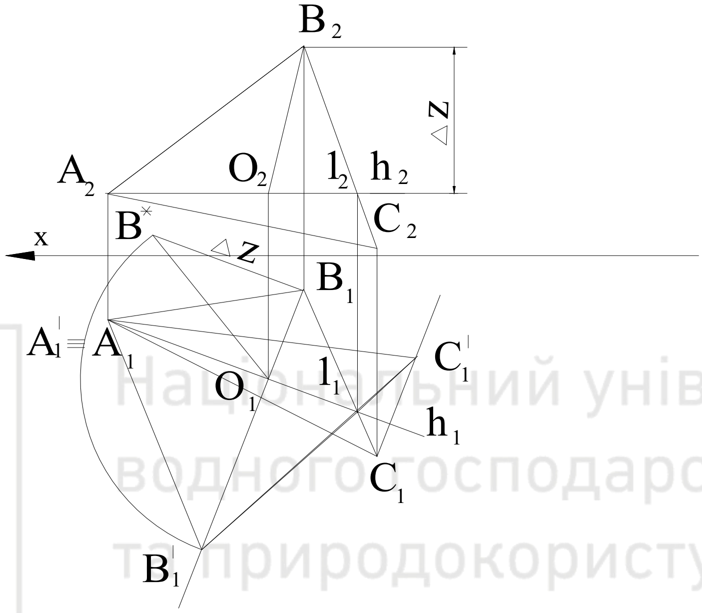
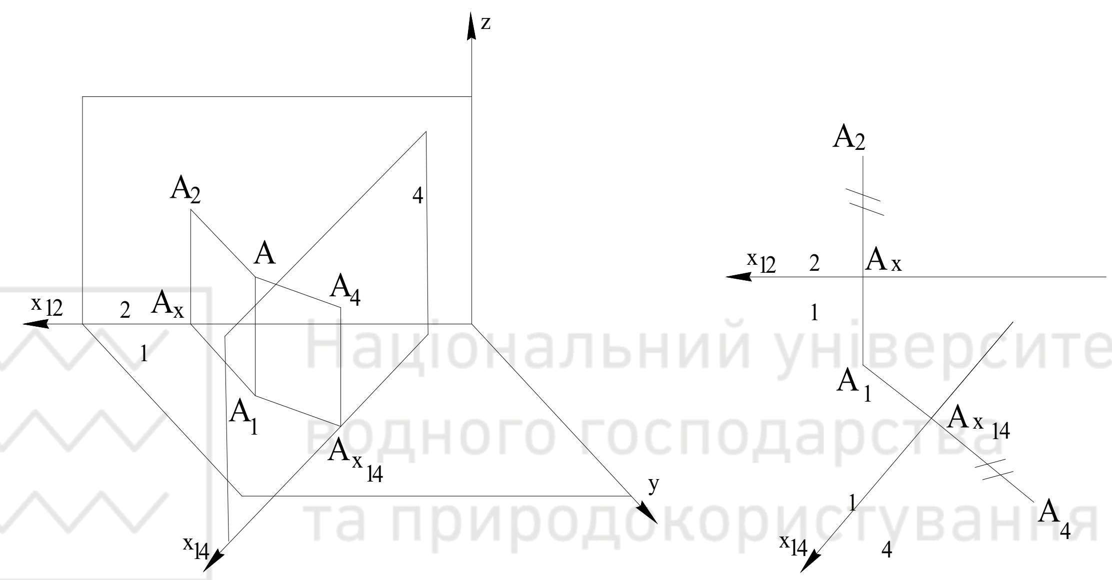


Рис. 42. Знаходження дійсної величини трикутника |ABC|

6.3. Заміна площин проекцій

Перетворення відноситься до другого різновиду; його сутність в тому, що для нерухомого елемента простору замінюється його система координат новою системою взаємно перпендикулярних площин проекцій.

Вибір нової системи координат обумовлюється, як правило, метою або умовами задачі. Перетворення здійснюються поступово, тобто одним перетворенням замінюється одна із двох площин проекцій. Часто таким способом до основної системи площин $П_1$, $П_2$ вводяться додаткові площини, які утворюють з першою або другою, або між собою, системи двох взаємно перпендикулярних площин. Оскільки існує три основних площини проекцій, то індекси для додаткових починаються із 4, тобто додаткові площини позначаються $П_4$, $П_5$ і т. і. Координатні осі позначаються двома індексами, наприклад, x_{14} є новою віссю між площинами $П_1$ та $П_4$, де $П_4$ замінює фронтальну площину $П_2$ (рис. 43, а). На рис. 43, б показано цю ж заміну на епюрі, де обов'язково $A_2A_X = A_4A_{X14}$.



(а) (б)

Рис. 43. Заміна площини проекцій $П_2$ площиною $П_4$: а – наочне зображення; б – епюр точки А

Приклад.

Знайти дійсну величину трикутника заміною площин проекцій.

Для знаходження дійсної величини трикутника необхідно здійснити дві заміни. Першою заміною площина трикутника перетворюється в проектуючу. Другою заміною - в площину рівня.

Розв'язок задачі наведений на рис. 44. Попередньо в площині трикутника будуємо горизонталь h, перпендикулярно до якої проводимо вісь x_{14}. Із точок A_1,B_1,C_1 проводимо лінії зв'язку, на яких від осі x_{14} до точок A_4,B_4,C_4

відкладаємо відстані, позначені відповідно одною, двома та трьома тонкими штрихами на фронтальній проекції трикутника. Площина трикутника проектується в пряму лінію на площину $П_4$, тобто до цієї площини вона є проектуючою.

Для здійснення другої заміни вісь x_{45} проводимо паралельно до лінії A_4,B_4,C_4. Тепер, в системі площин $П_4$, $П_5$, площина трикутника стає площиною рівня. Відклавши на лініях зв'язку відстані, позначені точками на горизонтальній проекції трикутника A_1,B_1,C_1 відносно осі x_{14}, одержимо точки $A_5B_5C_5$. Ці точки визначають натуральну фігуру трикутника і його дійсну величину.

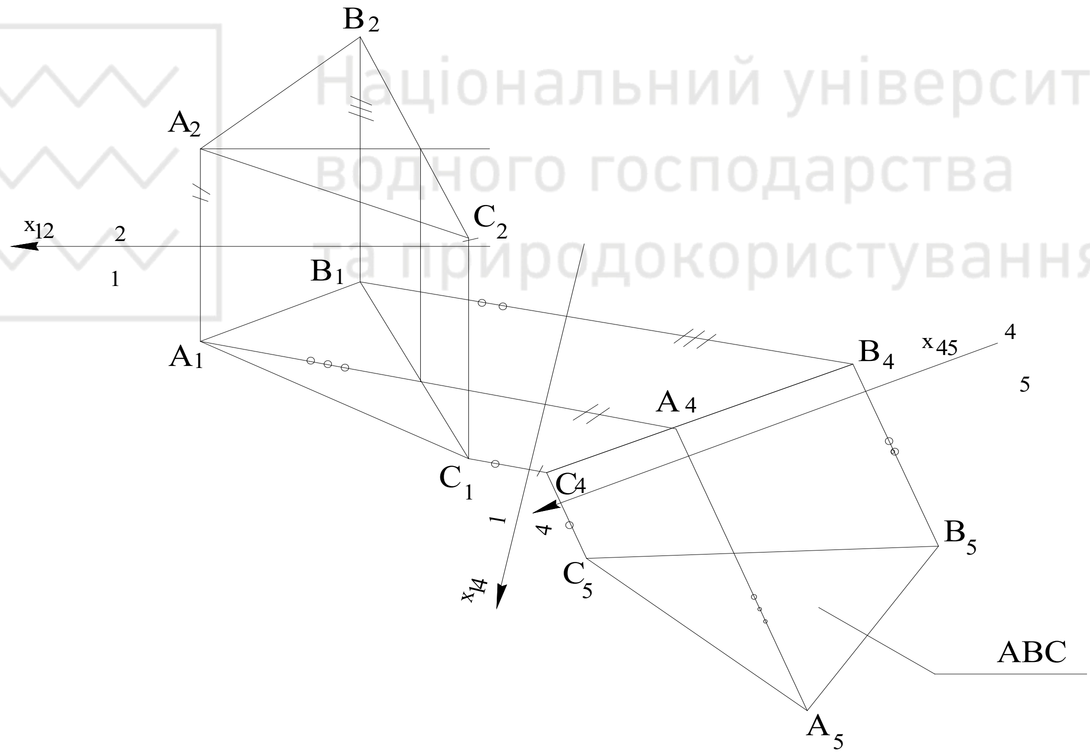


Рис. 44. Знаходження дійсної величини трикутника |ABC| заміною площин проекцій

7. Гранні поверхні та багатогранники

Гранні поверхні утворюються двома і більше площинами, перетин яких дає прямі – ребра поверхні, а взаємний перетин ребер – вершини.

Найчастіше зустрічаються призматичні та пірамідальні поверхні загального виду, які утворюються переміщеннями твірної t по напрямній d, при цьому твірна t проходить через вершину S, яка (для призматичної поверхні) може бути невласною точкою (рис.45). Ці поверхні мають пряму або ламану напрямну d.

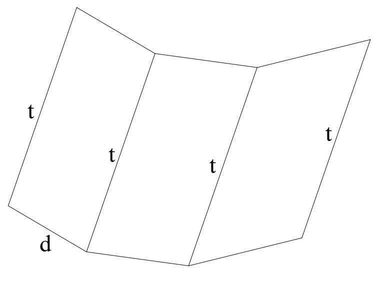
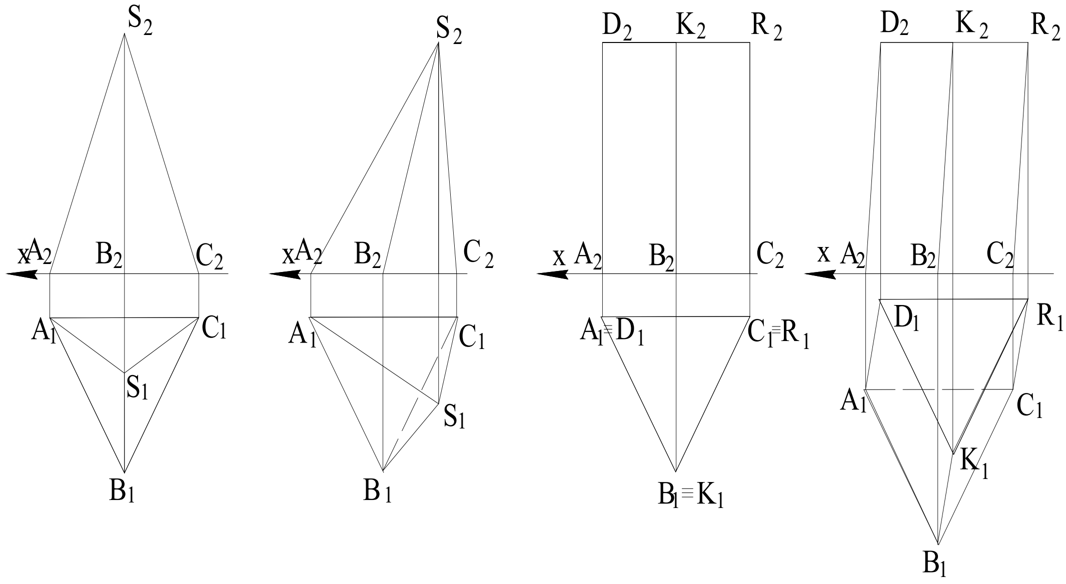


Рис. 45. Призматичні та пірамідальні поверхні загального виду

Обмеження частини простору замкненими гранними поверхнями дає багатогранники. Так, наприклад, обмеження замкненої пірамідальної поверхні площиною дає піраміду, а замкненої призматичної поверхні двома площинами – призму (рис.46). Прямими прийнято називати піраміди та призми, якщо їх висота проходить через центр основи.



(а) (б) (в) (г)

Рис. 46. Піраміда пряма (а), піраміда похила (б), призма пряма (в), призма похила (г)

Якщо всі грані багатогранника є правильними (рівносторонніми, вписаними в коло) багатокутниками, то такий багатогранник називається правильним.

Правильні багатогранники – тіла Платона – є не просто цікавими просторовими фігурами: вони знаходять широке застосування в практиці та науці, в тому числі у вищій математиці.

Таблиця 3

Правильні багатогранники – тіла Платона

№ п/п	Назва	Кількість граней	Форма граней
1	Тетраедр (правильна трьохгранна піраміда)	4	рівносторонній трикутник
2	Гексаедр (куб)	6	квадрат
3	Октаедр	8	рівносторонній трикутник
4	Додекаедр	12	правильний п'ятикутник
5	Ікосаедр	20	рівносторонній трикутник

Теорема Ейлера:

Для всякого випуклого багатогранника існує рівність:

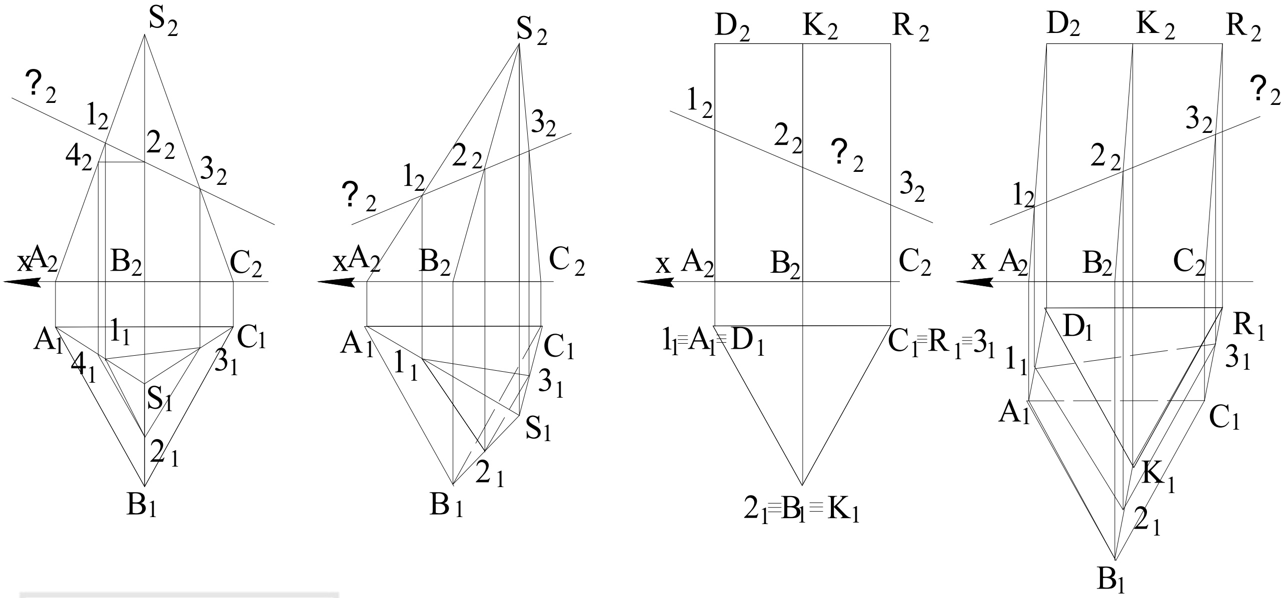
$$Г + В = Р + 2, \quad (1)$$

де Г – кількість граней, В – вершина, Р – ребер.

Під випуклою розуміють поверхню без западин.

7.1. Перетин багатогранників площиною та прямою

Перетин багатогранника площиною дає багатокутник, перетин гранної поверхні площиною дає плоску ламану лінію, замкнену або розімкнену, прямі ділянки якої утворюються перетином граней, а вершини – перетином ребер. Для побудови лінії перетину спочатку знаходять точки перетину площиною ребер гранної поверхні, як це показано на (рис. 47, а), або безпосередньо лінії перетину площиною граней (рис. 47, б).



(а) (б)

Рис. 47. Перетин проектуючими площинами поверхонь: а – піраміди, б – призми

Для знаходження точок перетину прямої з гранною поверхнею застосовують метод перетину проектуючими площинами поверхонь. Через пряму проводять допоміжну січну площину, перетин якої із заданою поверхнею дає замкнену ламану лінію. Перетин прямої із ламаною лінією дає шукані точки перетину - це видно із побудов на горизонтальних проекціях. Проектуюча площина проходить через задану пряму. Отримані точки перетину фігури перетину проектуючої площини і поверхні з прямою, будуть точками перетину заданої прямої з площинами граней гранної поверхні (рис. 48).

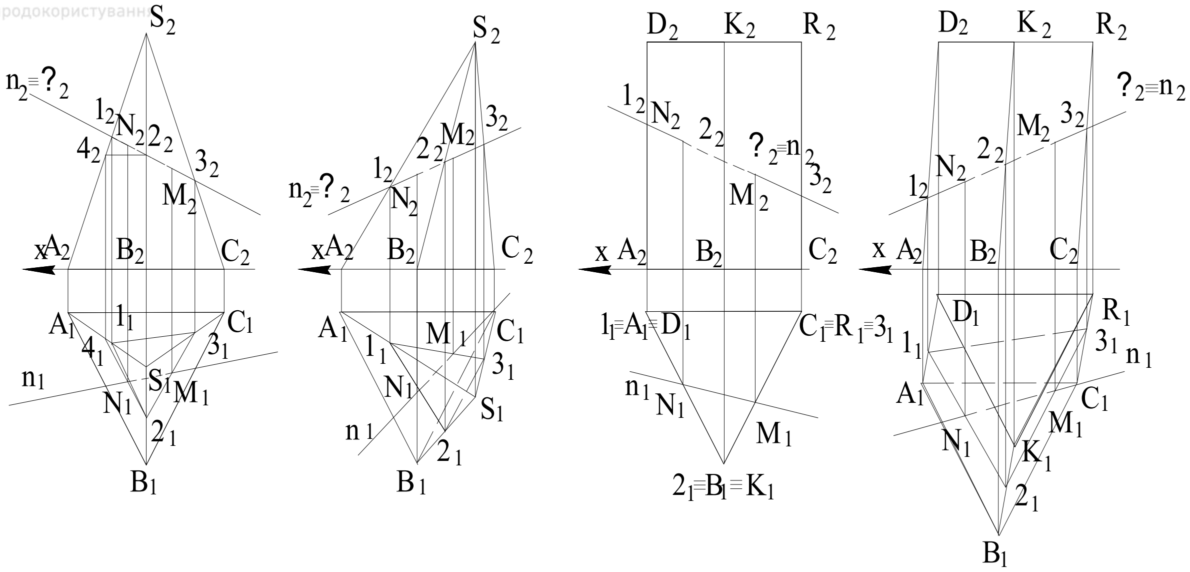


Рис. 48. Перетин прямої з площинами граней гранної поверхні

Для знаходження точок перетину площини з гранною поверхнею застосовують алгоритм, наведений в таблиці 4 (рис. 49).

Таблиця 4

Алгоритм знаходження лінії перетину поверхні площиною

№ п/п	Текст алгоритму	Формалізований запис
	Задано поверхню α та площину β. Знайти лінію їх перетину.	α, β ? е = α β
1	Проводимо допоміжну січну площину γі.	1. γі
2	Знаходимо лінію перетину поверхні α та площини γі.	2. аі = α γі
3	Знаходимо лінію перетину площин β та γі.	3. bі = β γі
4	Знаходимо точки перетину двох ліній аі та bі.. Множина таких точок утворює лінію перетину е.	4. Nij = аі bі е= Σ Nij

Як правило, для спрощення розв'язку, необхідно вибирати різновидні допоміжні січні площини для знаходження необхідної кількості точок. Використовуючи спосіб конкуруючих точок, показують видимість лінії перетину на проекціях поверхні.

Рис. 49. Перетин площини з гранною поверхнею

Для розглянутої задачі доцільно застосувати розв'язок основної позиційної задачі про перетин прямої з площиною (таблиця 2). Використання фронтально-проектуючої допоміжної січної площини Δ_2, яка проходить через пряму SA (ребро гранної поверхні), допомагає визначити точку N (точка перетину лінії перетину $1_1 2_1$ площини Δ і заданої площини Ω (m//n) з S_1A_1), спільну точку заданої площини і гранною поверхнею. Для знаходження інших точок фігури перетину використовуємо фронтально-проектуючу допоміжну січну площину $\sum_2$. Перетин площини $\sum$ з заданою площиною Δ ($1_1 3_1$) і площини $\sum$ з гранною поверхнею ($4_1 5_1 6_1$) дадуть спільні точки фігури перетину 7_1 і 8_1, при допомозі яких знаходимо точки M і R, точки перетину відповідних ребер SC і SB. Поетапно з'єдпавши точки MRN, отримаємо фігуру перетину заданої площини з гранною поверхнею.

7.2. Взаємний перетин гранних поверхонь

Взаємний перетин двох гранних поверхонь дає просторову ламану лінію, замкнену або розімкнену, вершини якої утворюються перетином ребер першої поверхні з гранями другої та навпаки. Для знаходження вершин застосовують розв'язок позиційної задачі (таблиця 4) кратну кількість разів.

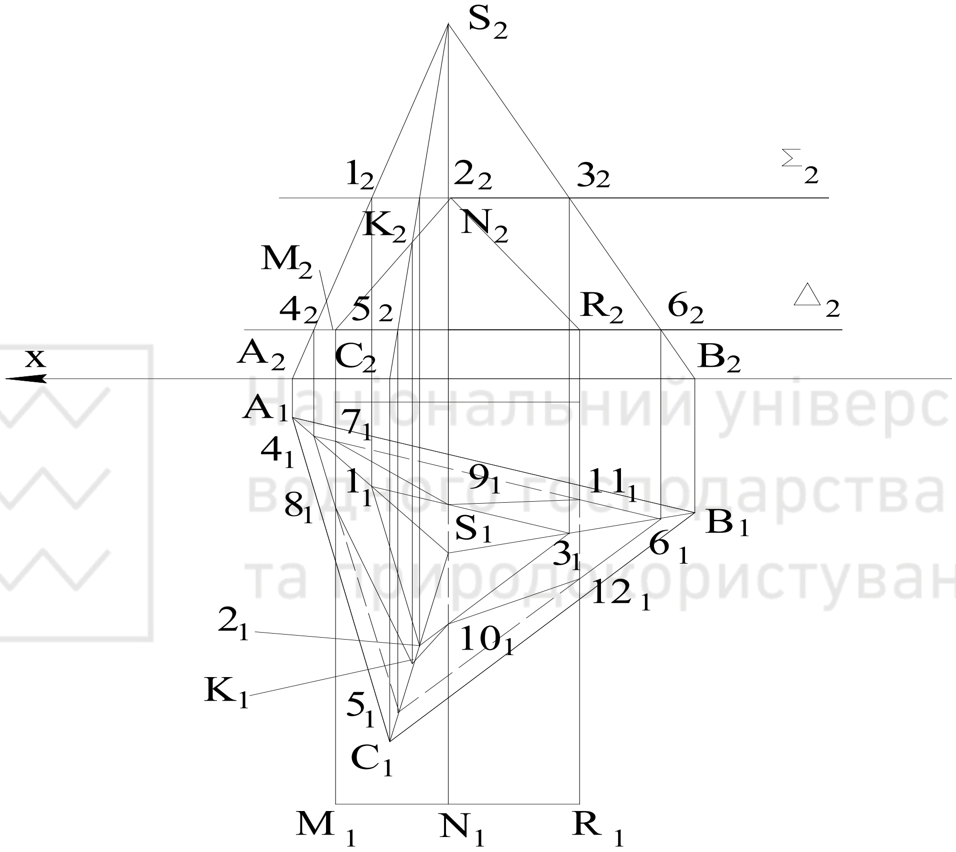


Рис. 50. Взаємний перетин гранних поверхонь

Для знаходження фігури перетину піраміди SABC і призми MNR використовуємо фронтально-проектуючі (площини рівня) допоміжні січні площини Δ_2 і $\sum_2$. Так як призма MNR займає фронтально-проектуюче положення, то на фронтальній площині проекцій вже існує фігура перетину двох гранних поверхонь, яка співпадає з проекцією самої призми. Тому фігуру перетину потрібно знаходити на горизонтальній площині проекцій. Площина $\sum_2$ проходить через ребро N призми. Отримана фігура перетину $1_1 2_1 3_1$ піраміди з площиною $\sum_2$ і ребром N визначають точки перетину 9_1 і 10_1 фігури двох тіл. Площина Δ_2 проходить через грань MR призми. Отримана фігура перетину

$4_1 5_1 6_1$ піраміди з площиною Δ_2 грані MR визначають точки перетину $5_1, 7_1, 8_1, 11_1, 12_1$ фігури двох тіл. Точка К фігури перетину двох тіл, є результатом перетину грані призми MN і ребра SC. З'єднавши відповідні точки фігури перетину двох тіл, отримаємо її на кожній грані піраміди SAB (7,9,11), SBC (К,10,12,5), SAC (5,8,К) (рис. 50). Для побудови видимості прямолінійних ділянок ламаної використано спосіб конкуруючих точок.

8. Криві поверхні

Основні властивості та означення

Крива лінія – це геометрична множина точок, утворена послідовним переміщенням точки в просторі за певною закономірністю.Закономірності утворення кривих можуть бути: аналітичними; графічними; кінематичними. Порядок кривої лінії визначається ступінню рівняння кривої. Криві можуть бути плоскими – розташованими в одній площині – та просторовими.

Для побудови проекції кривої необхідно побудувати проекції необхідної кількості її точок, які однозначно визначатимуть характер кривої. Для задання дуги кола достатньо побудувати три точки. Графічно задати плоску довільну криву з невідомими властивостями можна тільки необхідною та достатньо великою кількістю точок.

Проекція кривої зберігає порядок кривої, або стає на порядок нижче. Дотична до кривої проектується в дотичну до проекції кривої. Лінія, яка проходить через точку дотику дотичної перпендикулярно до останньої, називається нормаллю. Для такої точки існує радіус кривизни r, центр якого О розташований на нормалі. Точка належить до кривої лінії, якщо її проекції розташовані на відповідних проекціях кривої (рис. 51).

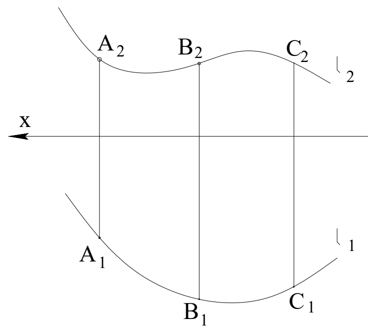


Рис. 51. Належність точок А, В, С, до прямої l

Найчастіше в практиці зустрічаються плоскі криві другого порядку: коло; еліпс; гіпербола; парабола.

Коло, розташоване в площинах рівня, проектується на площину проекцій, до якої паралельна площина рівня, в дійсну величину.

Коло, розташоване в площинах, перпендикулярних до площини проекцій, проектується на цю площину в пряму лінію.

Коло, розташоване в площинах загального положення, проектується на всі три площини проекцій в еліпс.

З математичної точки зору крива поверхня – це неперервна множина точок, які задаються в просторі аналітичним виразом – рівнянням, степінь якого визначає порядок поверхні.

Існують і інші означення поверхонь, які описують різні способи утворення поверхонь. В нарисній геометрії поверхня розглядається як неперервна множина послідовних розташувань лінії, яка переміщується в просторі із заданою закономірністю. Такий спосіб утворення поверхонь називають кінематичним.

Графічно може бути задана поверхня (або її фрагмент) довільно деякою кількістю ліній або точок, які утворюють лінійний або точковий каркаси поверхонь. При лінійному каркасному заданні поверхня може задаватися сіткою або топографічним способом.

Для всіх без винятку способів задання поверхні вона вважається заданою коректно, якщо відносно будь-якої точки простору однозначно розв'язується питання про належність цієї точки до поверхні.

Точка належить до поверхні, якщо вона належить до будь-якої лінії поверхні. Це правило виступає в якості алгоритму для побудови точки на поверхні.

Наведена в підручниках існуюча класифікація, як правило, описує поверхні, задані кінематичним способом та каркасом. Незначне розширення класу кінематичних поверхонь тезою про змінність твірної поверхні не забезпечує повноту класифікації поверхонь. Адже можливі і інші різноманітні способи утворення поверхонь. У цьому напрямку ведуться серйозні наукові дослідження, що підтверджує незавершеність розвитку дисципліни та її перспективність.

Визначник поверхні – це необхідна і достатня сукупність геометричних ознак поверхні та зв'язків між ними для однозначного визначення поверхні. Визначник прийнято записувати в формалізованому вигляді

$$(Г); [А] \tag{2}$$

де Г – сукупність геометричних ознак, параметрів, елементів;

А – алгоритмічна частина, яка описує зв'язки між ознаками, параметрами і т.і

8.1. Лінійчасті поверхні

Конічні поверхні

Конічні поверхні утворюються переміщенням прямої твірної t по напрямній d, при цьому твірна проходить через точку S (рис. 52).

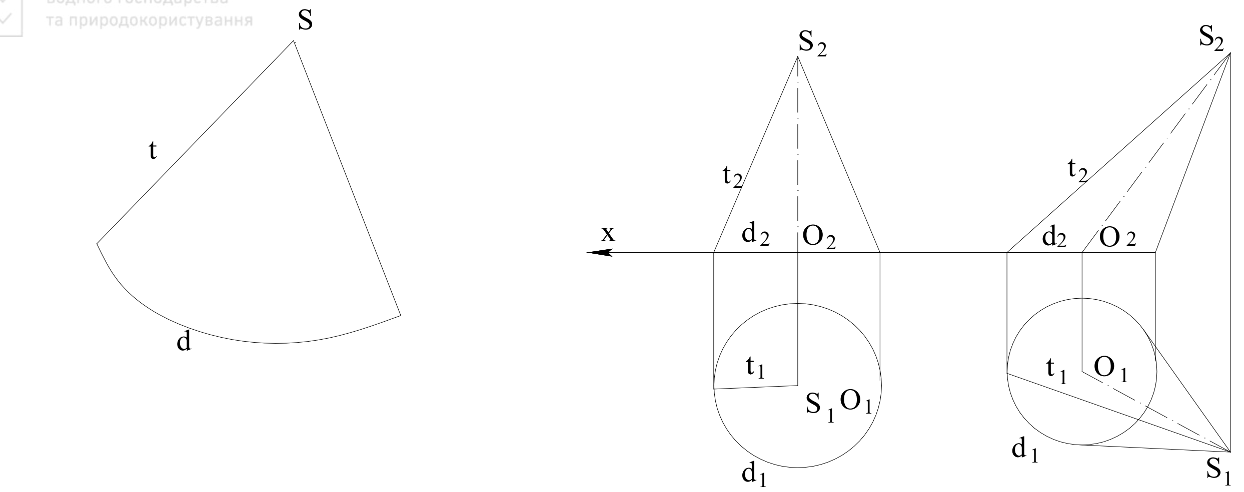


Рис. 52. Конічна поверхня загального вигляду

Циліндричні поверхні

Циліндричні поверхні утворюються переміщенням прямої твірної t по напрямній d, при цьому твірна паралельна до напрямку p (рис. 53).

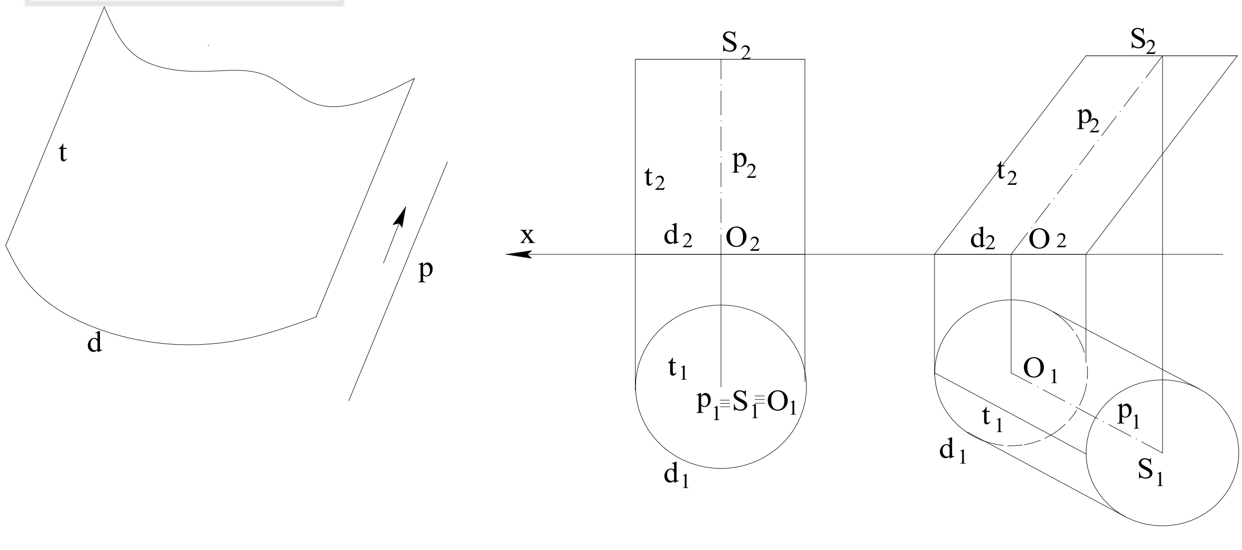


Рис. 53. Циліндрична поверхня

Поверхні з площинами паралелелізму

Такі поверхні утворені переміщенням прямої твірної t по двох напрямних d і b, при цьому твірна залишається паралельною до заданої площини Δ (рис. 54).

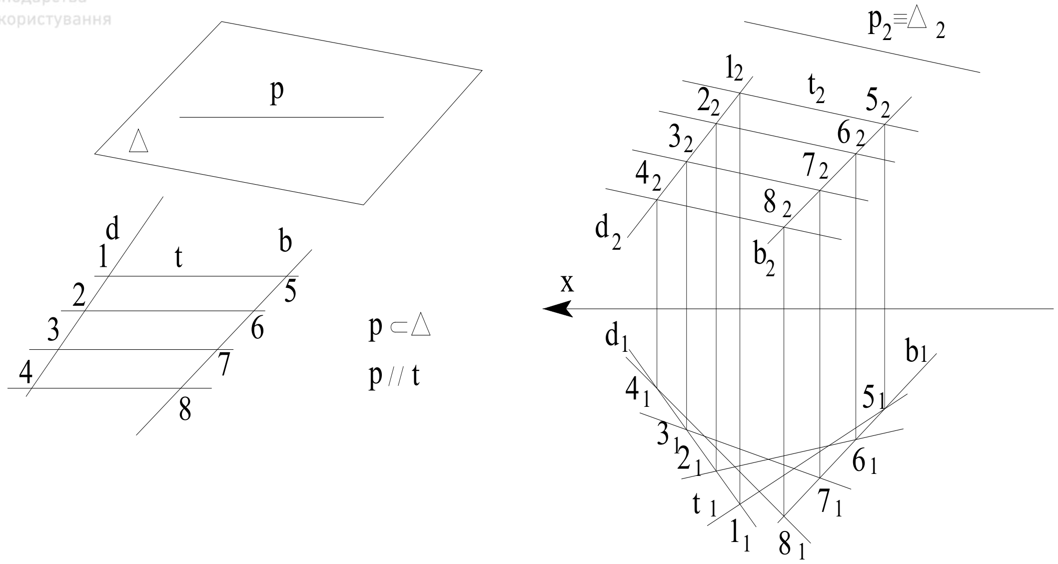


Рис. 54.Поверхні з площиною паралелелізму

Якщо напрямні є кривими лініями, то поверхня називається циліндроїдом. Якщо кривою є одна напрямна – одержуємо коноїд. І якщо обидві напрямні є мимобіжними прямими – одержуємо скісну площину.

8.2. Поверхні обертання

Поверхні обертання утворюються обертанням твірної t (прямої або кривої) навколо осі i. Визначник поверхні має простий вигляд ∑(t, i). До таких поверхонь відносяться: поверхня обертання загального вигляду (твірна є довільною кривою, рис.55);

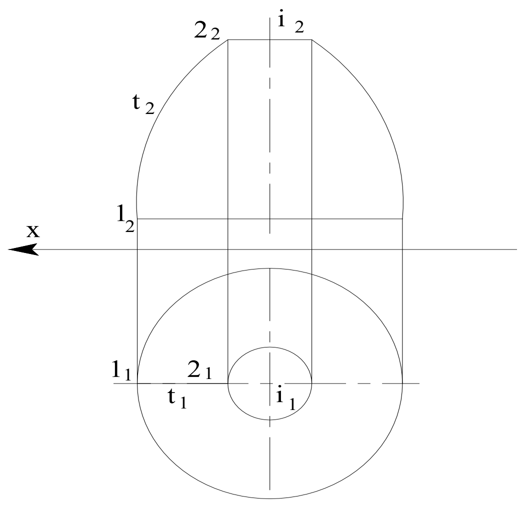


Рис. 55. Поверхня обертання загального вигляду

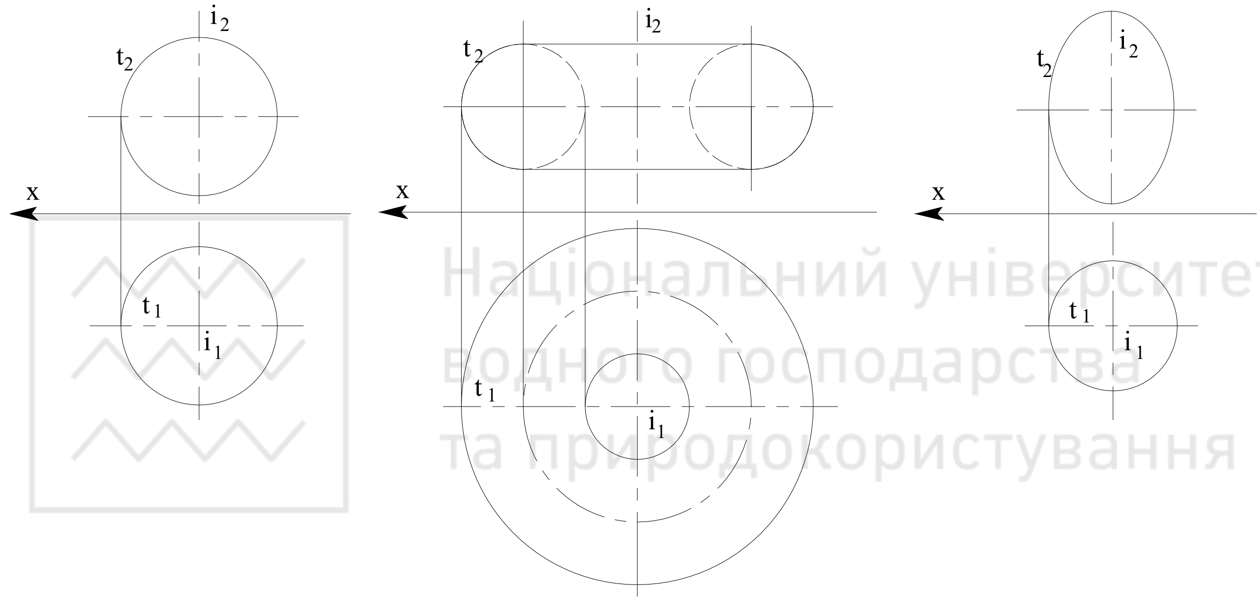
сферична поверхня (утворюється обертанням кола навколо своєї осі (рис. 56, а);

торова поверхня (утворюється обертанням кола відносно осі i , яка не співпадає з віссю кола, рис. 56, б);

еліпсоїд обертання (твірною є еліпс, рис. 56, в);

гіперболоїд або параболоїд обертання (твірною є гіпербола або парабола);

циліндрична та конічна поверхні (твірною є пряма).



(а) (б) (в)

Рис. 56. Поверхні обертання: а - сферична; б - торова; в - еліпсоїд обертання

Властивості поверхонь обертання. Лінії та точки поверхонь.

В будь-якому поперечному перерізі (паралельному, або перепендикулярному до осі і) поверхні одержуємо криву лінію – коло з конкретним радіусом R (рис. 57). Якщо точка належить до кривої поверхні, то вона належить до лінії цієї поверхні.

Особливі лінії утворюються в перетині поверхонь обертання площинами:

- перпендикулярними до осі і (паралелі);

- які проходять через вісь і (меридіани).

Паралель з найбільшим радіусом називається екватором, з найменшим – горловиною. Меридіан, який проектується в дійсну величину, називається головним.

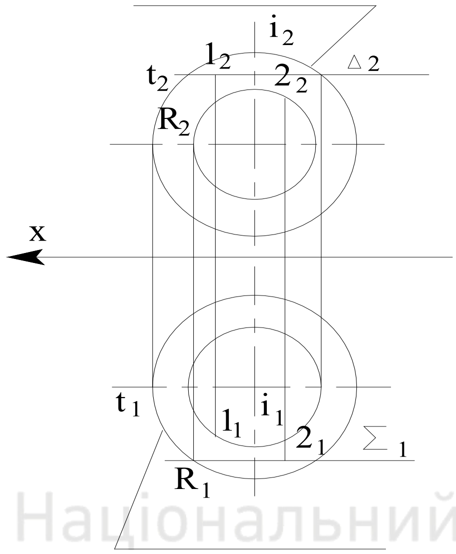


Рис. 57. Належність точки до поверхні обертання

8.3. Перетин криволінійних поверхонь площиною

Перетин кривої поверхні площиною дає криву лінію, порядок якої дорівнює порядку площини. В часткових випадках ця лінія розпадається на лінії меншого порядку. Якщо площина проходить через твірну лінійчастої поверхні, то лінія перетину стає прямою. Для вірного відображення лінії перетину та її характерних властивостей обов'язково знаходять і зображують особливі точки лінії, до яких відносяться точки, що визначають півосі еліпсів, спряжені діаметри, крайні праві та ліві, нижні та верхні і т. і. Для знаходження лінії перетину застосовують спосіб допоміжних січних площин, при цьому одна допоміжна січна площина дозволяє знайти декілька точок. Алгоритм розв'язку задач наведений в таблиці 4. Для спрощення розв'язку, необхідно вибирати різновидні допоміжні січні площини для знаходження необхідної кількості точок. Використовуючи спосіб конкуруючих точок, показують видимість лінії перетину на проекціях поверхні.

8.3.1. Перетин площиною поверхонь обертання

Перетин циліндричної поверхні

Перетин такої поверхні площиною дає:

- перпендикулярно до осі обертання - коло;

- паралельно до осі і- дві прямі;

- під довільним кутом до осі і – еліпс.

Проекції лінії перетину залежать від розташування осі обертання поверхні (рис. 58), де e, k та b - лінії перетину. Горизонтальна проекція лінії (перетин циліндричної поверхні з площиною ∑) e_1 співпадає із горизонтальною проекцією циліндричної поверхні. Горизонтальна проекція лінії перетину b_1 аналогічна, але перетин циліндричної поверхні площиною Δ формує лінію перетину у еліптичну криву, фронтальна проекція якої проектується в саму площину Δ ($\Delta_2 \equiv b_2$), а профільна – в еліпс b_3. Півосі еліпса b_3 визначаються точками 1_3,3_3,2_3,4_3, які проектуються із фронтальної проекції. Площина W перетинає циліндричну поверхню, проходячи паралельно до осі обертання і, тому утворюється прямокутник k, в якого прямі лінії перетину 5 та 6, є горизонтально-проектуючими.

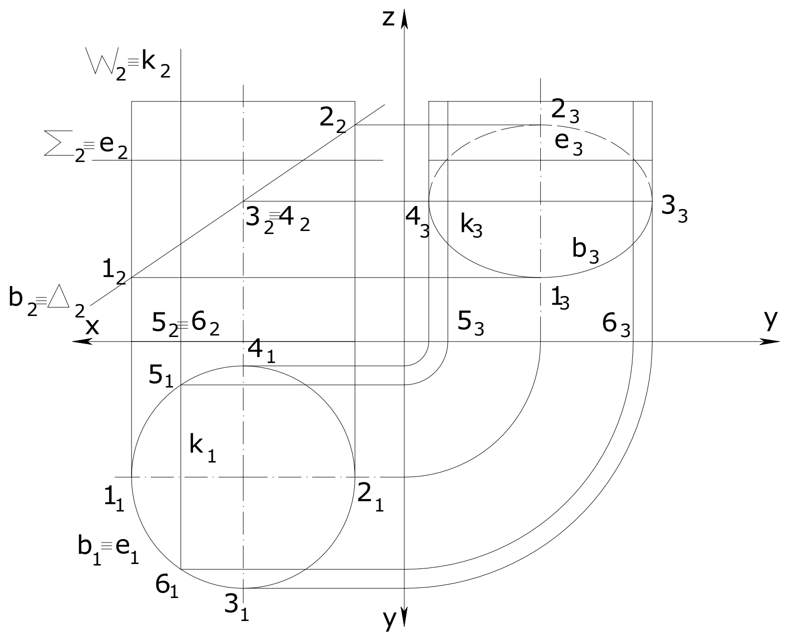


Рис. 58. Перетин циліндричної поверхні площиною

Перетин такої поверхні площиною завжди дає коло, яке може проектуватися в пряму, коло або еліпс. Якщо січна площина є площиною рівня, то коло проектується на одну з площин в дійсну величину, а на дві інші в пряму (рис. 59). Якщо січна площина є проектуючою, то коло проектується в еліпс, де сферу по колу перетинає фронтально-проектуюча площина Δ . Особливі точки поверхні 1,2,3,4 визначають лінії перетину b. Точки 1,2 та 3,4 визначають півосі еліпса b. Штриховими лініями показано невидимі ділянки лінії b. Якщо січна площина W є профільною площиною рівня, то коло проектується в пряму k_2 на фронтальній і k_1 на горизонтальній площині проекцій, в коло k_3 на профільній площині проекцій. Всі проекції лінії перетину k визначаються точками 5,6. Якщо січна площина $\sum$ є горизонтальною площиною рівня, то коло проектується в пряму e_2 на фронтальній і e_3 на профільній площині проекцій, в коло e_1 на горизонтальній площині проекцій. Всі проекції лінії перетину k визначаються точками 7,8.

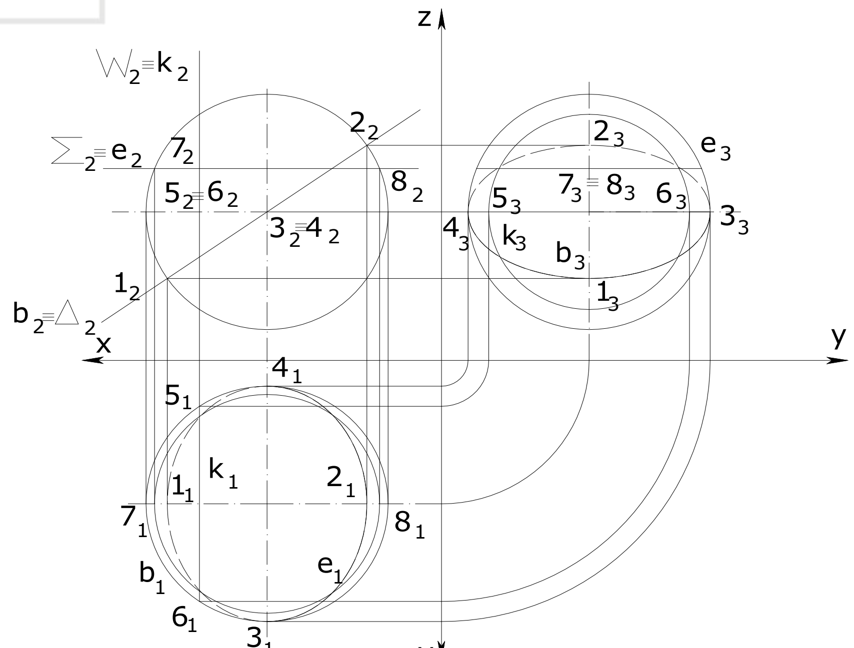


Рис. 59. Перетин сферичної поверхні площинами рівня і проектуючою площиною

Коли січна площина є проектуючою і не проходить через центр сфери (рис. 60), то коло фігури перетину проектується в еліпс, де сферу по колу перетинає фронтально-проектуюча площина Δ. Особливі точки поверхні 1,2,3,4 і додаткові точки 5,6 визначають лінії перетину b. Точки 5,6 отимують при перетині сфери допоміжною січною площиною ∑ особого положення (горизонтальна площина рівня). Фігура перетину сфери допоміжною січною площиною ∑ є коло e, яке визначається точками 7,8. Цьому колу e також належать точки 5,6 лінії перетину b. Поетапно з'єднуємо всі точки лінії перетину b, враховуючи точки дотику 9,10 до контура сфери. Штриховими лініями показано невидимі ділянки лінії b.

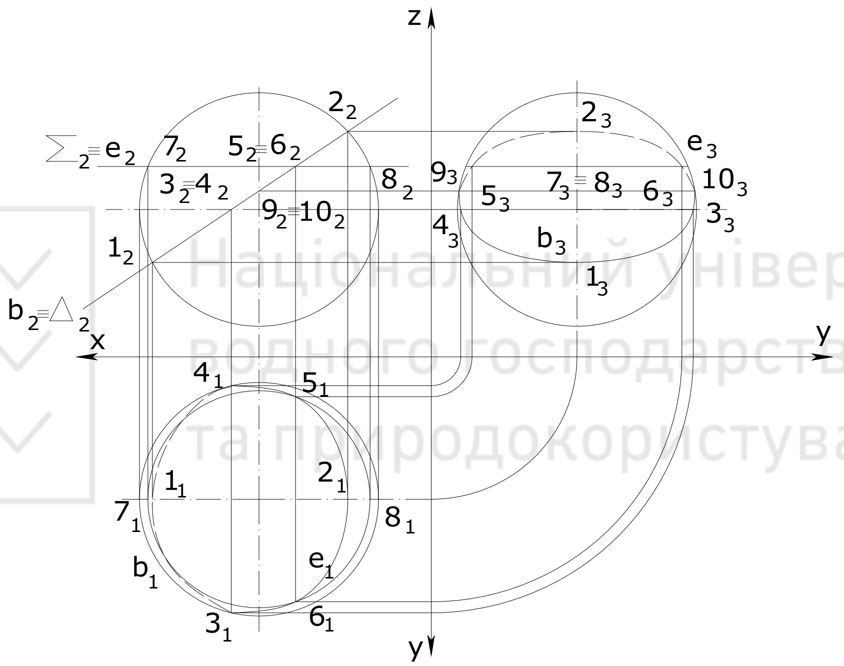


Рис. 60. Перетин сферичної поверхні проектуючою площиною

Перетин конічної поверхні

Перетин конічної поверхні площинами дає лінії, які часто називають конічними перерізами. Площини перетину з конусом дають такі типи лінії перетину:

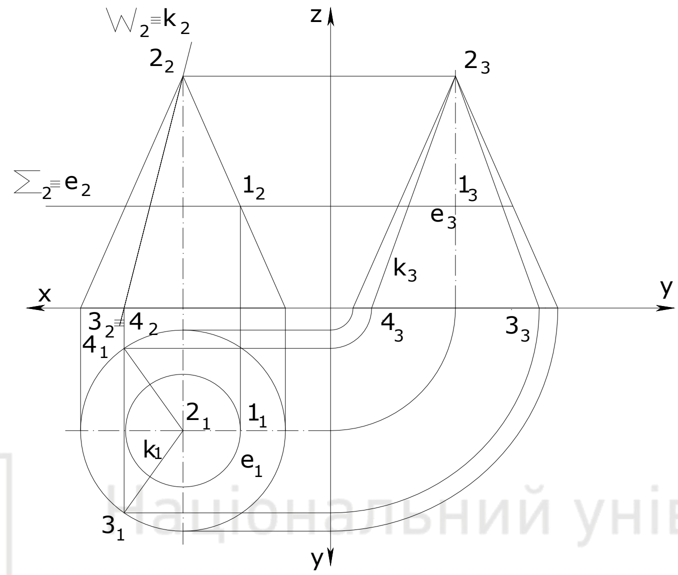
- α – коло (α b i);

- β - еліпс (β ^ i);

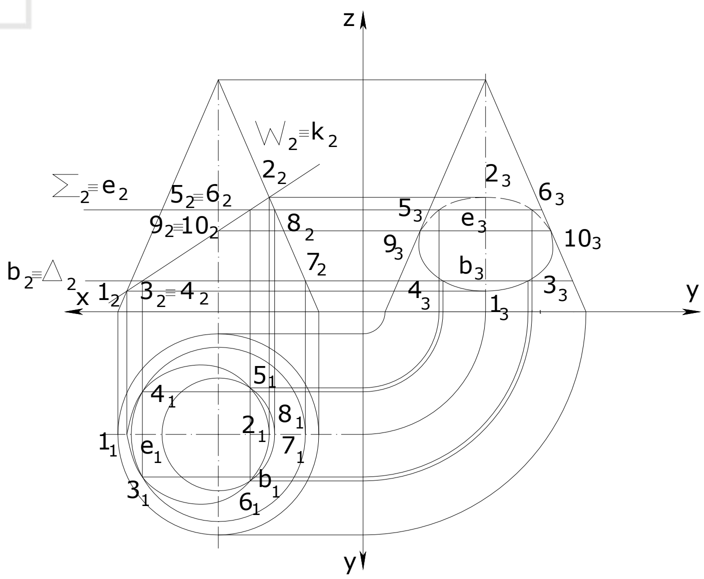
- γ – параболу, γ || t;

- δ - гіперболу (δ || i);

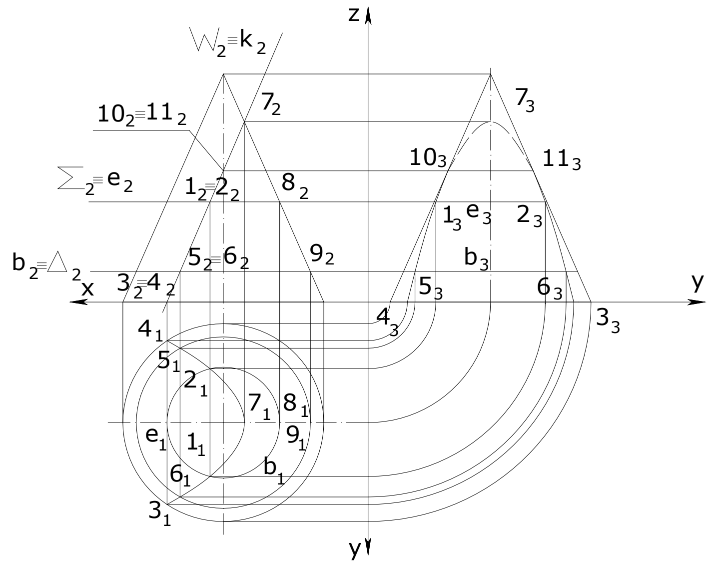
- к- прямі лінії, S ∨ к.



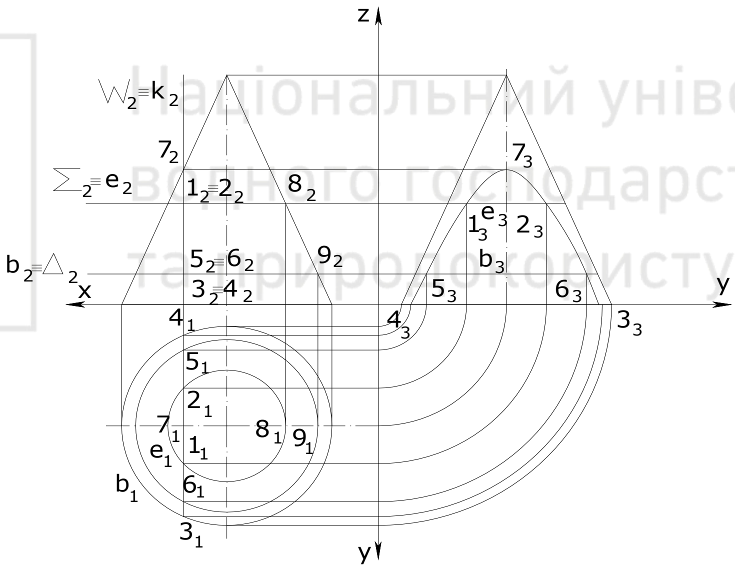
(а)



(б)



(в)



(г)

Рис. 61. Перетин конічної поверхні площинами рівня

На рис. 61а знайдено лінію перетину е конічної поверхні проектуючою площиною ∑. Ця лінія є кривою другого порядку – колом, який на фронтальній проекції конуса проектується в пряму. Точка 1 находиться в перетині твірної конуса площиною ∑, при цьому вона розташована на дійсній величині твірної, тому для знаходження їх проекцій не потрібні допоміжні площини. На рис. 61а знайдено лінію перетину k конічної поверхні проектуючою площиною W. Ця лінія є прямолінійною – трикутником, який на фронтальній проекції конуса проектується в пряму. Точки 2,3,4 находяться відповідно на вершині і основі конічної поверхні, тому для знаходження їх проекцій не потрібні допоміжні площини.

На рис. 61б знайдено лінію перетину k конічної поверхні проектуючою площиною W. Ця лінія є кривою другого порядку – еліпсом, який на фронтальній проекції конуса проектується в пряму. Точки 1,2 находяться в перетині твірних конуса площиною W, при цьому вони розташовані на дійсних величинах твірних, тому для знаходження їх проекцій не потрібні допоміжні площини. Інші точки 3,4 лінії перетину знаходимо при допомозі допоміжної січної площини особого положення Δ ($\Delta_2 \equiv b_2$), при цьому лінія перетину b конічної поверхні проектуючою площиною Δ, є крива лінія другого порядку – коло, на якому розміщення отримані точки і тока 7 побудованого кола. Точки 5,6 лінії перетину знаходимо при допомозі допоміжної січної площини особого положення $\sum$ ($\sum_2 \equiv e_2$), при цьому лінія перетину e конічної поверхні проектуючою площиною $\sum$, є крива лінія другого порядку – коло, на якому розміщення отримані точки і тока 8 побудованого кола. Отримані точки 1,2,3,4, 5,6 поетапно з'єднуємо, з врахуванням точок 9,10 границі видимості, знаходимо лінію перетину k – еліпс. Штриховими лініями показані невидимі лінії при умові, що конічна поверхня непрозора.

На рис. 61в знайдено лінію перетину k конічної поверхні проектуючою площиною W. Ця лінія є кривою другого порядку – параболою, яка на фронтальній проекції конуса проектується в пряму. Точки 3,4,7 находяться в перетині твірної і основи конуса площиною W, при цьому вони розташовані на дійсних величинах твірної і основи, тому для знаходження їх проекцій не потрібні допоміжні площини. Інші точки 1,2 лінії перетину знаходимо при допомозі допоміжної січної площини особого положення $\sum$ ($\sum_2 \equiv e_2$), при цьому лінія перетину e конічної поверхні проектуючою площиною $\sum$, є крива лінія другого порядку – коло, на якому розміщення отримані точки і тока 8 побудованого кола. Точки 5,6 лінії перетину знаходимо при допомозі допоміжної січної площини особого положення Δ ($\Delta_2 \equiv b_2$), при цьому лінія перетину b конічної поверхні проектуючою площиною Δ, є крива лінія другого порядку – коло, на якому розміщення отримані точки і тока 9 побудованого кола. Отримані точки 1,2,3,4,5,6,7 поетапно з'єднуємо, з врахуванням точок 10,11 границі видимості, знаходимо лінію перетину k – парабола. Штриховими лініями показані невидимі лінії при умові, що конічна поверхня непрозора.

На рис. 61г знайдено лінію перетину k конічної поверхні проектуючою площиною W. Ця лінія є кривою другого порядку – гіперболою, яка на фронтальній проекції конуса проектується в пряму. Точки 3,4,7 находяться в перетині твірної і основи конуса площиною W, при цьому вони розташовані на дійсних величинах твірної і основи, тому для знаходження їх проекцій не потрібні допоміжні площини. Інші точки 1,2 лінії перетину знаходимо при допомозі допоміжної січної площини особого положення ∑ ($\sum_2 \equiv e_2$), при цьому лінія перетину e конічної поверхні проектуючою площиною ∑, є крива лінія другого порядку – коло, на якому розміщення отримані точки і тока 8 побудованого кола. Точки 5,6 лінії перетину знаходимо при допомозі допоміжної січної площини особого положення Δ ($\Delta_2 \equiv b_2$), при цьому лінія перетину b конічної поверхні проектуючою площиною Δ, є крива лінія другого порядку – коло, на якому розміщення отримані точки і тока 9 побудованого кола. Отримані точки 1,2,3,4,5,6,7 поетапно з'єднуємо і знаходимо лінію перетину k – гіпербола.

8.4. Перетин криволінійних поверхонь

Взаємний перетин двох криволінійних поверхонь дає просторову криву лінію, порядок якої дорівнює порядку площини, замкнену або розімкнену, складність якої утворюється перетином першої поверхні з другою та навпаки. Для знаходження точок фігури перетину застосовують розв'язок позиційної задачі (таблиця 4) кратну кількість разів.

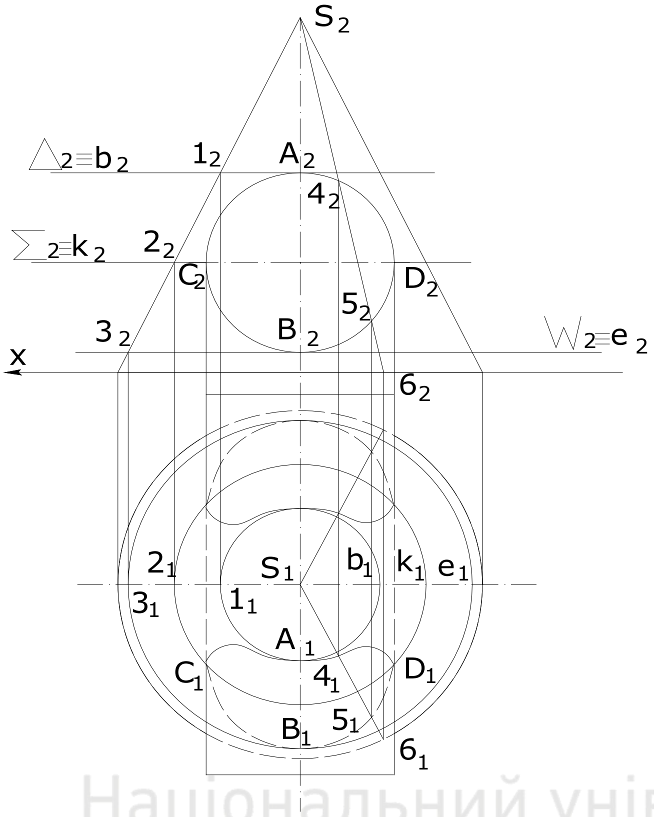


Рис. 62. Взаємний перетин криволінійних поверхонь

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Для знаходження фігури перетину конуса і циліндра використовуємо фронтально-проектуючі (площини рівня) допоміжні січні площини Δ, $\sum$ і W. Так як циліндр займає фронтально-проектуюче положення, то на фронтальній площині проекцій вже існує фігура перетину двох криволінійних поверхонь, яка співпадає з проекцією самого циліндра. Тому фігуру перетину потрібно знаходити на горизонтальній площині проекцій. Площини Δ_2, $\sum_2$ і W_2, проходитячи через конус, отримують лінію перетину b,k,e ($\Delta_2 \equiv b_2$), ($\sum_2 \equiv k_2$) і ($W_2 \equiv e_2$), в вигляді кола. Отримані фігури перетину b_1,k_1,e_1 ($b_1 \vee 1_1$, $k_1 \vee 2_1$, $e_1 \vee 3_1$) конуса перетинаючись з крайніми твірними циліндра, визначають точки перетину A_1,B_1,C_1,D_1 фігури двох тіл з видимої частини фронтальної проекції конуса. Аналогічно знаходяться точки фігури перетину двох тіл з невидимої частини фронтальної проекції конуса. Чим більше буде використано допоміжних січних площин, тим точніше буде побудовано фігуру перетиу двох тіл. Альтернатива допоміжним січним площинам, використання твірних криволінійних поверхонь. Тому через вершину конічної поверхні проводимо твірну S,6. На ній находяться точки 4,5 перетину двох тіл з видимої частини фронтальної проекції конуса. Тобто $S_1 6_1 \vee 4_1$, $S_1 6_1 \vee 5_1$.Аналогічно знаходяться точки фігури перетину двох тіл з невидимої частини фронтальної проекції конуса. Отримані точки $A_1, B_1, C_1, D_1, 4_1, 5_1$ поетапно з'єднуємо і знаходимо фігуру перетину двох тіл четвертого порядку з видимої частини фронтальної проекції конуса. Аналогічно з'єднуються точки фігури перетину двох тіл з невидимої частини фронтальної проекції конуса. Штриховими лініями показані невидимі лінії при умові, що конічна і циліндрична поверхні непрозорі. Для побудови видимості ділянок використовують спосіб конкуруючих точок.

Зміст

Передмова 3
Вступ 3
1.Способи проектування 7
1.1.Центрове (конічне) проектування 7
1.2. Паралельне і ортогональне проектування 8
1.3. Застосування центрового та паралельного проектування 10
2. Прямокутні проекції. Проекції точки 10
2.1. Проекції точки 10
2.2. Побудова профільної проекції точки за двома заданими 12
3.Пряма. Відображення прямої 13
3.1. Розташучвання прямої відносно площин проекцій 14
3.2. Сліди прямої 16
3.3. Дійсна величина відрізка прямої 18
3.4. Відносне розташування прямих 19
4. Площини 21
4.1. Способи задання площин 21
4.2. Належність точок та прямих до площини 24
4.3. Розташування площин відносно площин проекцій 24
4.4. Особливі прямі площини 26
4.5. Паралельність елементів простору 28
5. Основні позиційні задачі 30
5.1. Перетин двох площин 30
5.1.1. Перетин проектуючи площин 31
5.1.2. Перетин площин, заданих слідами 31
5.1.3. Перетин площин рівня та площин загального положення 32
5.1.4. Загальний випадок знаходження лінії перетину 33
5.2. Перетин прямої з площиною 36
5.2.1. Перетин прямої з площиною загального положення 37
5.3. Видимість прямої та площини 38
6. Перетворення проекцій 40
6.1. Плоскопаралельне переміщення 40
6.2 Перетворення проекцій способами обертання 41
6.2.1 Обертання навколо проектуючої прямої 42
6.2.1 Обертання навколо прямої рівня 43
6.3 Заміна площин проекцій 45
7. Гранні поверхні та багатогранники 47
7.1. Перетин багатогранників площиною та прямою 49
7.2 Взаємний перетин гранних поверхонь 53
8. Криві поверхні 54
8.1. Лінійчасті поверхні 56
8.2. Поверхні обертання 58
8.3. Перетин криволінійних поверхонь площиною 60
8.3.1. Перетин площиною поверхонь обертання 61
8.4. Перетин криволінійних поверхонь 67

Література

1. Гордон В.О., Семенов-Огиевский М.А., Курс начертательной геометри. М; Наука, 1988. 272 с.
2. Фролов С.А. Начертательная геометрия. М.: Машиностроение, 1983, 240 с.
3. Единая система конструкторской документации. Общие правила выполнения чертежей /ГОСТ 2.301-68...ГОСТ 2.320-82/. М.: 1991.
4. Крівцов В.В., Дєєв С.С. Нарисна геометрія: Навч. посібник. – Київ: НМК ВО, 1992. – 244 с.
5. Нарисна геометрія: Підручник / В.Є. Михайленко, М.Ф.Євстіфєєв, С.М. Ковальов, О.В. Кащенко: За ред. В.Є. Михайленко. – К.: Вища шк., 2004 – 303 с.
6. Михайленко В.Є., Ванін В.В., Ковальов С.М. Інженерна та комп'ютерна графіка: підруч. для студ. вищих закл. освіти / За ред. В.Є. Михайленка. – К.: Каравела, 2003. – 344 с.
7. Крівцов В.В., Дєєв С.С. Нарисна геометрія: контрольні запитання та відповіді. Навч. посібник. – Рівне: НУВГП, 2010. – 162 с.
8. Інженерна та комп'ютерна графіка: Підручник / В.Є. Михайленко, В.М. Найдиш, А.М. Підкоритов, І.А. Скидан. – К.: Вища шк., 2001. – 350 с.
9. Збірник задач з інженерної та комп'ютерної графіки: Навч. посіб. / В.Є. Михайленко, В.М. Найдиш, А.М. Підкористов, І.А. Скидан. – К.: Вища шк., 2002. – 199 с.
10. Кириченко А.Ф. Теоретичні основи інженерної графік: Підручник для вищих технічних навчальних закладів. – Київ: ВД «Професіонал», 2004. – 496 с.

Навчальне видання

О. М. Кондратюк

НАРИСНА ГЕОМЕТРІЯ

Навчальний посібник

Підп. до др. 04.03.2021.
Формат 60x84 1/16.
Папір офсетний.
Друк цифровий.
Ум. друк. арк. 6,7.
Гарнітура Time New Roman Cyr.
Наклад 300 прим.
Зам. 5. Ціна вільна.

Видавець: О. Зень
Свідоцтво РВ № 26 від 6 квітня 2004 р.
вул. Кн. Романа, 9/24, м. Рівне, 33022
тел.: 068-0250-674; olegzen@ukr.net

ВіддрукованоVPM-поліграф
вул. Київська, 36, м. Рівне, 33027,
097-426-64-44