Національний університет
водного господарства
та природокористування

Загальна фізика
Частина II

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Інтерактивний комплекс навчально-методичного забезпечення

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Міністерство освіти і науки України
Національний університет водного господарства та природокористування

За редакцією Д.І.Олексина, В.Ф.Орленка

Загальна фізика

Частина II

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Інтерактивний комплекс
навчально-методичного забезпечення

Кредитно-модульна система організації навчального процесу

Рівне 2009

Національний університет водного господарства та природокористування

УДК 53 (075)
ББК 22.3Я7
О 66

Затверджено вченою радою Національного університету водного господарства та природокористування (Протокол №6 від 29 травня 2009р.)

Рецензенти:
Клепач М.І. **–** кандидат фізико-математичних наук, доцент Національного університету водного господарства та природокористування;
Колупаєв Б.С. – академік МАПСН, доктор хімічних наук, професор Рівненського державного гуманітарного університету.

Олексин Д.І., Орленко В.Ф., Вадець Д.І., Кучма М.І. та ін.
О 66 «Загальна фізика». Частина ІІ. Інтерактивний комплекс навчально-методичного забезпечення. Рівне: НУВГП, 2009. - 457 с.

Національний університет водного господарства та природокористування

Навчально-методичний комплекс «Загальна фізика» містить типову програму, вказівки щодо вивчення окремих тем, плани лабораторних занять, тематику самостійної та індивідуальної роботи, тренінгову тестову програму, список рекомендованої літератури. Навчально-методичний комплекс може бути корисним при самостійному вивченні дисципліни в умовах кредитно-модульної організації навчального процесу студентами всіх інженерно-технічних спеціальностей вищих навчальних закладів.

УДК 53 (075)
ББК 22.3Я7

© Олексин Д.І., Орленко В.Ф., 2009
© Національний університет водного господарства та природокористування, 2009

Національний університет
водного господарства
та природокористування

ВСТУП

Друга частина навчального посібника з курсу загальної фізики для інженерно-технічних спеціальностей, як і перша його частина, призначена для використання в умовах модульно-рейтингової системи навчання. При цьому в першій частині відповідний матеріал розбито на три навчальні модулі. В другій частині подано розділи: магнетизм, коливання і хвилі (четвертий модуль); оптика, елементи квантової механіки, будова атомного ядра (п'ятий модуль).

Окремо даються методичні вказівки для виконання контрольних робіт студентами заочної форми навчання. У "Вказівках" приводяться основні закони і співвідношення, таблиці варіантів контрольних робіт, приклади розв'язування задач, задачі для самостійної роботи, необхідні довідкові матеріали.

Для самостійної роботи над курсом дається список рекомендованої літератури.

Головною метою даного курсу є засвоєння студентами загальних закономірностей природних явищ, що дозволить їм застосовувати фізичні знання у майбутній виробничій діяльності.

Основні завдання навчальної дисципліни:

1. Вивчення основних понять, законів, методів, алгоритмів розв'язків задач;
2. Набуття практичних навичок роботи в фізичних лабораторіях, проведення експериментів по вивченню фізичних явищ і законів;
3. Формування здатності і вміння за допомогою набутих теоретичних та експериментальних знань вирішувати виробничі проблеми.

В результаті вивчення курсу загальної фізики студенти повинні:

- **знати** місце дисципліни в структурі інших природничих наук;
- **вміти** творчо використовувати фізичні закономірності у своїй практичній діяльності.

У розробці другої частини методичного комплексу приймали участь викладачі кафедри фізики НУВГП: Вадець Д.І., Гаєвський В.Р., Дубчак В.А., Ковалець М.О., Кучма М.І., Никонюк Є.С., Орленко В.Ф., Рибалко А.В., Рудик Б.П., Соляк Л.В.

Автори посібника бажають успіху майбутнім інженерам у вивченні курсу фізики.

I. Опис предмету навчальної дисципліни

1.1. Тематичний план та розподіл навчального часу

Відповідно до «Освітньо-професійної програми підготовки бакалавра, спеціаліста та магістра» інженерно-технічного напряму, чинної від 1997р., на вивчення навчальної дисципліни «Загальна фізика» передбачено 224 години (9 кредитів). Як приклад, представлений тематичний план напряму 6.050503 «Машинобудування» (табл.1.1).

Таблиця 1.1

Кредити, модулі	**Напрям, спеціальність освітньо-кваліфікаційний рівень**	**Характеристика навчальної дисципліни**	
		стаціонар	**заочна форма**
К-сть кредитів – 9 II сем. – 5 III сем – 4	6.050503 «Машинобудування» «Підйомно - транспортні, будівельні, дорожні, меліоративні машини і обладнання»; бакалавр	Обов'язкова Курси: 1,2 Семестри: II, III	Обов'язкова Курси: 2,3
К-сть модулів – 1 К-сть змістових модулів – 2 Загальна кількість годин – 144 К-сть тижневих годин – 4	**III семестр**	**К-сть годин:**	
		III курс	
		Лекції – 30 Лаб.роб. – 14 Практ. – 12	Лекції – 8 Лаб. роб. – 10
		Сам. роб. – 76 Інд. роб.(1 рр) – 12 Екзамен	Сам. роб. – 92 Інд. роб.(кр) – 20 Екзамен

Примітка: співвідношення обсягу аудиторного навчального навантаження та навантаження, пов'язаного з самостійною роботою студентів денної форми навчання, складає від 49% до 51%.

Національний університет водного господарства та природокористування

Структура залікового кредиту курсу

Таблиця1.2

Теми	Кількість годин, відведених на:				
	Лекції	**Лабор.**	**Практ.**	**Індив. робота**	**Самост. робота**
III семестр					
Змістовий модуль IV. Магнетизм. Коливання і хвилі					
Тема 4.1 Магнітне поле у вакуумі	4	1	1	1	3
Тема 4.2 Магнітне поле в речовині	1	1	1	-	1
Тема 4.3 Енергія магнітного поля	2	2	1	1	3
Теми 4.4-4.5 Коливання.	6	2	2	2	5
Тема 4.6 Хвильові процеси	3	2	-	1	1
Підготовка до МКР 4					**12**
Змістовий модуль V. Оптика. Елементи квантової механіки. Атомне ядро					
Теми 5.1-5.3 Класична оптика	6	2	2	3	4
Теми 5.4-5.5 Квантова оптика	5	2	2	2	4
Теми 5.6-5.7 Квантовий стан. Рівняння Шрьодінґера. Атом	4	-	1	-	4
Тема 5.8 Атомне ядро	2	2	1	2	3
Тема 5.9 Сучасна фізична картина світу	1	-	-	-	-
Підготовка до МКР 5					**12**
Підготовка до ПК					**24**
Усього годин (III сем.)	**34**	**14**	**12**	**12**	**76**
	Σ = 144				
Усього годин (курс)	**70**	**34**	**24**	**24**	**172**
	Σ = 324				

Національний університет водного господарства та природокористування

1.2. Розподіл балів, що присвоюються студентам, і шкала оцінювання

Таблиця1.3

ІІІ семестр

Поточне оцінювання			Підсумковий контроль	Сума
ЗМ IV	ЗМ V	Сума		
30	30	60	40	100

Стандартна система (100 б) і шкала оцінювання (національна і ECTS)

Таблиця1.4

Стандартна шкала, б	Оцінки	
90 ÷ 100	Відмінно	**(A)**
82 ÷ 89	Дуже добре	**(B)**
74 ÷ 81	Добре	**(C)**
64 ÷ 73	Задовільно	**(D)**
60 ÷ 63	Достатньо	**(E)**
35 ÷ 59	Незадовільно, з правом перездачі	**(FX)**
≤34	Незадовільно, повторний курс	**(F)**

Процес оцінювання завершується: в зонах A, B, C, D, E, F – на останньому тижні семестру; в зоні FX – через два тижні після закінчення семестру. Графіки завершення оцінювання по змістових модулях видає лектор на початку семестру.

1.3. Програма курсу загальної фізики

ІІІ семестр

Змістовий модуль IV. Магнетизм. Коливання і хвилі

Тема 4.1. Магнітне поле у вакуумі

Поняття про магнітне поле. Магнітний момент контура зі струмом. Вектор магнітної індукції. Закон Біо – Савара – Лапласа. Принцип суперпозиції. Магнітне поле кругового струму та прямолінійного провідника зі струмом. Вихровий характер магнітного поля. Теорема про циркуляцію вектора індукції. Магнітне поле соленоїда. Закон Ампера. Сила Лоренца. Контур зі струмом у магнітному полі. Магнітний потік. Робота переміщення контура зі струмом у магнітному полі.

Тема 4.2. Магнітне поле в речовині

Індукція магнітного поля в речовині. Мікроструми в речовині. Намагнічування речовини. Намагніченість. Вектор напруженості магнітного поля. Теорема про циркуляцію вектора напруженості.

Тема 4.3. Явище електромагнітної індукції. Енергія магнітного поля

Явище електромагнітної індукції. Закони Фарадея і Ленца. Виведення ЕРС індукції із закону збереження енергії. Самоіндукція. Індуктивність соленоїда. Енергія провідника зі струмом. Енергія магнітного поля. Густина енергії.

Тема 4.4. Кінематика гармонічних коливань

Класифікація коливань. Амплітуда, циклічна частота, фаза гармонічних коливань. Комплексна форма представлення коливань. Складання однаково направлених гармонічних коливань. Складання взаємно перпендикулярних гармонічних коливань.

Тема 4.5. Гармонічний осцилятор

Пружинний маятник. Енергія гармонічного осцилятора. Фізичний маятник. Коливальний контур. Вільні згасаючі коливання. Коефіцієнт згасання. Логарифмічний декремент згасання. Добротність. Вимушені коливання осцилятора під дією гармонічної сили. Амплітуда і фаза вимушених коливань. Резонансні криві.

Тема 4.6. Хвильові процеси

Хвилі. Плоска гармонічна хвиля. Довжина хвилі. Хвильове число. Одновимірне хвильове рівняння. Хвилі у пружних середовищах (твердих тілах, рідинах і газах) та швидкість їх поширення. Плоска електромагнітна хвиля та основні її властивості. Принцип Гюйгенса. Закони відбивання і заломлення хвиль. Повне внутрішнє відбивання.

Змістовий модуль V. Оптика. Елементи квантової механіки. Атомне ядро

Тема 5.1. Інтерференція хвиль

Інтерференція монохроматичних хвиль. Умови екстремумів. Розрахунок інтерференційної картини від двох когерентних джерел.

Інтерференція світла при відбиванні від тонких пластин або плівок. Інтерферометр.

Тема 5.2. Дифракція хвиль

Принцип Гюйгенса – Френеля. Дифракція Френеля. Дифракція на круглому отворі. Наближення Фраунгофера. Дифракція на щілині. Дифракційна решітка. Спектральний розклад. Роздільна здатність дифракційної решітки.

Тема 5.3. Електромагнітні хвилі в речовині

Дисперсія діелектричної проникності. Поширення світла в речовині. Поглинання світла. Прозорі середовища. Поляризація світла.

Тема 5.4. Протиріччя класичної фізики. Обґрунтування основних ідей квантової теорії

Проблема випромінювання абсолютно чорного тіла. Фотоелектричний ефект. Лінійчасті спектри атомів. Правило частот Бора. Принцип відповідності.

Тема 5.5. Фотон. Корпускулярно – хвильовий дуалізм

Енергія та імпульс світлових квантів. Ефект Комптона. Гіпотеза де Бройля. Дифракція мікрочастинок. Співвідношення невизначеностей.

Тема 5.6. Квантовий стан. Рівняння Шрьодінґера

Часове рівняння Шрьодінґера. Стаціонарне рівняння Шрьодінґера. Стаціонарні стани. Хвильова функція і її статистичний зміст. Суперпозиція станів у квантовій механіці. Частинка в одновимірній потенціальній ямі. Гармонічний осцилятор (квантова теорія).

Тема 5.7. Атом

Частинка у сферично – симетричному полі. Енергетичні рівні. Спектри воднеподібних атомів. Принцип Паулі. Періодична система елементів.

Тема 5.8. Атомне ядро

Будова атомних ядер. Енергія зв’язку. Ядерні сили. Радіоактивне перетворення атомних ядер. Ядерні реакції. Проблема джерел енергії.

Тема 5.9. Сучасна фізична картина світу

Практичні заняття

№ заняття	№ теми	Тема заняття	Об'єм, год.
III семестр			
1.	4.1	Магнітне поле у вакуумі	2
2.	4.2-4.3	Магнітне поле в речовині. Явище індукції	2
3.	4.4-4.5	Коливання	2
4.	5.1-5.3	Хвильова оптика	2
5.	5.4-5.5	Квантова оптика	2
6.	5.6-5.7	Квантова механіка	1
	5.8	Атомне ядро	1

Лабораторний практикум

№ лаб.роб.	Тема лабораторного заняття	Об'єм годин
	III семестр	
	ЗМІV. Магнетизм. Коливання і хвилі	
4.1	Вивчення гальванометра магнітоелектричної системи	2
4.2	Перевірка закону Ампера	2
4.3	Визначення питомого заряду електрона методом магнетрона	2
4.4	Вивчення магнітного поля соленоїда за допомогою датчика Холла	2
4.5	Визначення горизонтальної складової напруженості магнітного поля Землі	2
4.6	Визначення прискорення вільного падіння за допомогою оборотного маятника	2
4.7	Вивчення згасаючих коливань у коливальному контурі та визначення його параметрів	2
4.8	Вивчення вимушених коливань у контурі	2
4.9	Визначення швидкості звуку в повітрі	2
4.10	Вимірювання довжини хвилі і частоти електромагнітних коливань	2

	ЗМV. Оптика. Атомне ядро	2
5.1	Визначення довжини світлової хвилі за допомогою біпризми Френеля	2
5.2	Визначення радіуса кривизни лизни за допомогою кілець Ньютона	2
5.3	Вивчення дифракції світла	2
5.4	Визначення довжини світлової хвилі за допомогою дифракційної решітки	2
5.5	Перевірка закону Малюса.	2
5.6	Визначення концентрації цукру в розчині поляриметром	2
5.7	Дослідження залежності енергетичної світності абсолютно чорного тіла від його температури та перевірка закону Стефана-Больцмана	2
5.8	Дослідження зовнішнього фотоефекту	2
5.9	Вивчення залежності опору термістора від температури	2
5.10	Дослідження вольт-амперної характеристики напівпровідникового діода	2
5.11	Дослідження закону поглинання γ-променів.	2

Примітка: студентами виконується не більше 7 робіт з приведеного списку.

Національний університет
та природокористування

ІІ. Лекційний курс

Розділ 4. Магнетизм

§4.1. Магнітне поле і його характеристики. Дія магнітного поля на контур зі струмом. Принцип суперпозиції. Класифікація магнетиків

Більше як 2000 років назад була відкрита властивість магнітної стрілки встановлюватись вздовж земного меридіана. Кінець стрілки, повернутий на північ, дістав назву північного магнітного полюса, а протилежний – південного. Було також відкрито взаємодію полюсів – притягання різнойменних та відштовхування однойменних. В 1820 році Ерстед відкрив явище відхилення магнітної стрілки електричним струмом, а Ампер – взаємодію паралельних струмів; він першим зрозумів, що магнетизм провідників зі струмом і магнетизм постійних магнітів мають однакову природу. Ампер висунув гіпотезу про існування молекулярних мікрострумів (за сучасними уявленнями обумовлених рухом електронів в атомах речовини). Саме мікроструми створюють магнітні поля постійних магнітів. Отже, *магнітне поле* – це особливий вид матерії, що створюється рухомими електричними зарядами (струмами) і діє на рухомі заряди, провідники зі струмом та постійні магніти.

Вивчають магнітне поле за його дією на контур зі струмом (пробний контур). Він може мати довільну форму, але за розмірами має бути достатньо малим, щоб поле в області контура можна було вважати однорідним. Пробний контур характеризується магнітним моментом

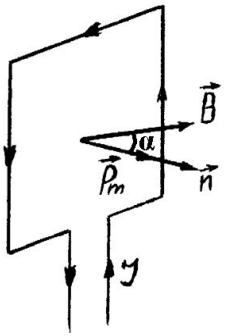


Рис. 4.1

$$\vec{P}_м = IS\vec{n}\,, \qquad (4.1)$$

де I – сила струму в контурі, S – його площа, $\vec{n}$ - одиничний вектор позитивної нормалі до площини контура, напрямок якого визначається за правилом правого гвинта (свердлика): якщо обертати ручку свердлика за напрямком струму в контурі, то напрямок поступального руху його вістря вкаже напрямок позитивної нормалі. Досліди показують, що магнітне поле повертає вміщений в нього контур зі струмом, встановлюючи його в певному рівноважному положенні. При відхиленні контура на 90° від рівноважного положення момент сили, що діє на нього, буде максимальним.

Відношення максимального моменту сили до магнітного моменту контура не залежить від його форми, а характеризує магнітне поле в даному місці простору. Ця характеристика називається *магнітною індукцією*

$$B = \frac{M_{\max}}{P_м} = \frac{M_{\max}}{IS}. \qquad (4.2)$$

За напрямок $\vec{B}$ приймається напрямок магнітного моменту контура в положенні рівноваги. Відмітимо, що у випадку довільної орієнтації контура на нього з боку поля діє момент сили

$$\vec{I} = \vec{P}_i \times \vec{B} \qquad (4.3)$$

або у скалярній формі

$$M = P_i B \sin\alpha = ISB\sin\alpha, \qquad (4.4)$$

де α – кут між $\vec{P}_м$ та $\vec{B}$ (рис. 4.1).

В СІ магнітна індукція вимірюється в теслах:

$$[B] = \frac{\text{Н}}{\text{А}\cdot\text{м}} = \text{Тл}.$$

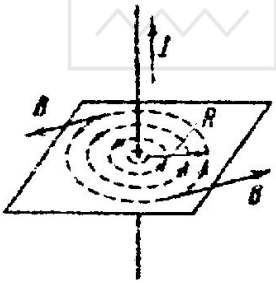


Рис. 4.2

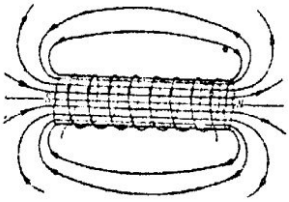


Рис. 4.3

Графічно магнітне поле зображають лініями магнітної індукції. Це такі лінії, дотичні до яких в кожній точці збігаються з напрямком $\vec{B}$ в цій точці. Лінії магнітної індукції проводять з такою густиною, щоб число ліній, які перетинають нормальну до них площадку одиничної площі, дорівнювало $|\vec{B}|$ в даному місці простору.

На відміну від ліній напруженості електростатичного поля (починаються на додатніх і закінчуються на від'ємних зарядах) лінії магнітної індукції не мають ні початку, ні кінця – вони або охоплюють провідники зі струмом, або ідуть із нескінченності у нескінченість (рис. 4.2; 4.3). Магнітне поле є вихровим, що фізично обумовлено відсутністю у природі «магнітних зарядів».

Магнітне поле називається однорідним, якщо у всіх його точках $\vec{B} = \text{const}$. Лінії

індукції однорідного поля – паралельні прямі, проведені з однаковою густиною. Однорідним є поле всередині довгого соленоїда (рис. 4.3).

Досвід показує, що для магнітних полів справджується принцип суперпозиції: індукція магнітного поля, створеного кількома струмами, дорівнює векторній сумі індукцій полів, створених в даній точці простору кожним струмом окремо, тобто

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^{n} \vec{B}_i \,. \qquad (4.5)$$

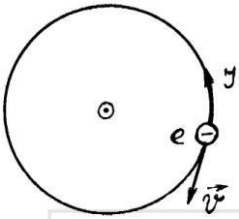


Рис. 4.4

В магнетизмі всі струми поділяються на *макроструми*, що зумовлені напрямленим рухом вільних зарядів (електронів, дірок, іонів), і *мікроструми*, зумовлені рухом електронів в атомах (рис. 4.4).

У відсутності зовнішнього магнітного поля магнітні моменти мікрострумів, завдяки тепловому руху атомів, орієнтовані хаотично, і їхні магнітні поля в середньому скомпенсовані. В зовнішньому магнітному полі (полі макроструму) магнітні моменти атомів речовини набувають певної орієнтації, сумарне поле мікрострумів стає відмінним від нуля і за принципом суперпозиції, додається до поля макроструму. Фізична величина, яка показує у скільки разів індукція магнітного поля в середовищі (B) відрізняється від індукції поля макроструму B_0, називається *магнітною проникністю середовища*

$$\mu = \frac{B}{B_0} \quad \text{або} \quad B = \mu B_0 \,, \qquad (4.6)$$

μ – величина безрозмірна; для вакууму $\mu = 1$. В залежності від величини μ всі речовини (магнетики) поділяються на:

діамагнетики	($\mu \le 1$)	(Bi, H_2)
парамагнетики	($\mu \ge 1$)	(Al, Mn, O_2)
феромагнетики	($\mu \gg 1$)	(Fe, Co, Ni, Gd).

Більш детально магнітні властивості речовин обговорюються в §4.10 даного розділу.

Історично склалось так, що поле макрострумів характеризується одночасно з $\vec{B}_0$ іншою силовою характеристикою – напруженістю поля $\vec{H}$. В СІ індукція і напруженість вимірюються в різних

одиницях: $[B_0] = \text{Тл}$, $[H] = \frac{\text{А}}{\text{м}}$, тому ці дві характеристики співпадають з точністю до постійного множника:

$$\vec{B}_0 = \mu_0 \vec{H}, \tag{4.7}$$

де $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Гн}}{\text{м}}$ – магнітна стала.

Зв'язок між індукцією і напруженості магнітного поля в середовищі встановимо, підставляючи (4.7) у (4.6),

$$\vec{B} = \mu\mu_0 \vec{H}. \tag{4.8}$$

§4.2. Закон Біо-Савара-Лапласа. Магнітне поле прямолінійного та колового струмів

В 1820 році французькі вчені Х.Біо та Ф.Савар експериментально дослідили магнітні поля струмів, що течуть по провідниках різних конфігурацій (прямолінійний, коловий, соленоїд тощо). Узагальнюючи їх експериментальні результати, Лаплас сформулював диференціальний закон, що дістав назву *закону Біо-Савара-Лапласа*:

$$d\vec{B} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{\ell} \times \vec{r}}{r^3} \tag{4.9}$$

або в скалярній формі:

$$dB = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{Id\ell \sin\alpha}{r^2}. \tag{4.10}$$

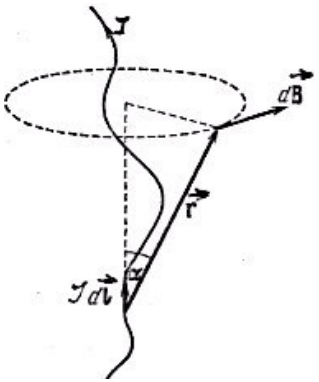


Рис. 4.5

Цей закон визначає індукцію магнітного поля, створеного елементом струму $Id\vec{\ell}$ в точці простору, що описується вектором $\vec{r}$ (проводиться від елемента струму до даної точки простору); α – кут між елементом струму $Id\vec{\ell}$ та вектором $\vec{r}$ (рис. 4.5).

Напрямок $d\vec{B}$ визначається за правилом свердлика: якщо обертати свердлик так, щоб його вістря рухалось за напрямком струму, то ручка свердлика опише лінію магнітної індукції (рис. 4.5). Індукцію поля, створеного в даній точці простору всім провідником, знаходимо за принципом суперпозиції

Національний університет
водного господарства
та природокористування

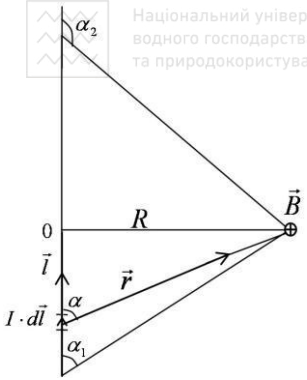


Рис. 4.6

$$\vec{B} = \int\limits_{(\ell)} d\vec{B} = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi} \int\limits_{(\ell)} \frac{d\vec{\ell} \times \vec{r}}{r^3}, \qquad (4.11)$$

Результат інтегрування виразу (4.11) залежить від форми провідника. Зокрема:

а) розрахуємо магнітне поле прямолінійного струму на відстані *R* від нього. Як видно з рис. 4.6,

$$r = \frac{R}{\sin(\pi - \alpha)} = \frac{R}{\sin\alpha},$$

$$\ell = Rctg(\pi - \alpha) = -Rctg\alpha,$$

звідки

$$d\ell = \frac{Rd\alpha}{\sin^2\alpha}.$$

Після підстановки двох останніх рівнянь у (4.10) одержимо

$$dB = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi R}\sin\alpha\, d\alpha.$$

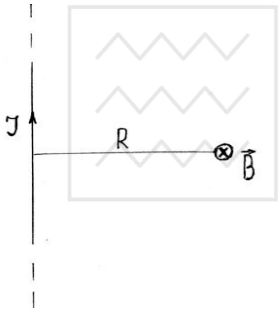


Рис. 4.7

Проінтегрувавши останній вираз, отримаємо

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi R} \int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin\alpha d\alpha = -\frac{\mu\mu_0 I}{4\pi R}\cos\alpha \Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2};$$

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi R}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2),$$

$$H = \frac{I}{4\pi R}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2); \qquad (4.12)$$

б) вираз для індукції та напруженості магнітного поля нескінченно довгого прямолінійного струму на відстані *R* від нього (рис. 4.7) одержимо після підстановки в (4.12) $\alpha_1 = 0$; $\alpha_2 = \pi$:

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi R}, \qquad H = \frac{I}{2\pi R}; \qquad (4.13)$$

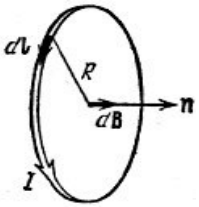


Рис. 4.8

в) магнітне поле в центрі колового струму (рис. 4.8)

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{2R}, \qquad H = \frac{I}{2R}. \qquad (4.14)$$

§4.3. Циркуляція вектора напруженості магнітного поля. Вихровий характер магнітного поля. Поле довгого соленоїда

Циркуляцією вектора $\vec{H}$ по замкненому контуру називається інтеграл $\oint_\ell \vec{H}\cdot d\vec{\ell} = \oint H_\ell d\ell$, де $d\vec{\ell}$ - вектор елементу довжини контура, напрямлений вздовж обходу контура, $H_\ell = H\cos\alpha$ – проекція $\vec{H}$ на дотичну до контура, α – кут між $\vec{H}$ та $d\vec{\ell}$ (рис. 4.9).

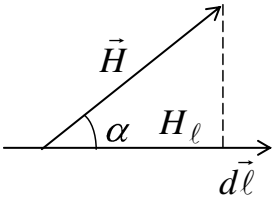


Рис. 4.9

Розглянемо найпростіший випадок – магнітне поле нескінченно довгого прямолінійного струму. Лініями напруженості цього поля є кола, центри яких лежать на осі провідника, а площини перпендикулярні до нього.

Знайдемо циркуляцію $\vec{H}$ вздовж кола радіусом *R*:

$$\oint H_\ell d\ell = H\ell = \frac{I}{2\pi r}2\pi R = I, \qquad (4.15)$$

бо $H_\ell = H = \dfrac{I}{2\pi R}$, $\oint_\ell d\ell = \ell = 2\pi R$.

В загальному випадку, коли провідник охоплений замкненою лінією довільної форми (рис. 4.10, а),

$$H_\ell d\ell = \frac{I}{2\pi R}\cdot R\cdot d\alpha = \frac{Id\alpha}{2\pi},$$

$$\oint_\ell H_\ell d\ell = \frac{I}{2\pi}\oint d\alpha = \frac{I}{2\pi}\cdot 2\pi = I. \qquad (4.16)$$

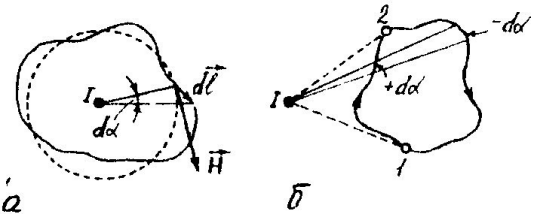


Рис. 4.10

Якщо контур не охоплює провідник зі струмом (рис. 4.10, б), то в (4.16) $\oint_\ell d\alpha = 0$, адже радіальна пряма спочатку рухається в одному напрямку (ділянка 1-2, $d\alpha > 0$), а потім – в іншому (ділянка 2-1, $d\alpha < 0$). Отже,

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$\oint_{\ell} H_{\ell} d\ell = 0 . \qquad (4.17)$$

Якщо магнітне поле створюється кількома струмами $I_1; I_2; ...; I_n$, то за принципом суперпозиції $\vec{H} = \sum_{i=1}^{n} \vec{H}_i$ і, враховуючи (4.16), остаточно одержимо

$$\oint_{\ell} H_{\ell} d\ell = \sum_{i=1}^{n} I_i . \qquad (4.18)$$

Ця формула є математичним виразом теореми про циркуляцію вектора напруженості магнітного поля: циркуляція вектора напруженості магнітного поля дорівнює алгебраїчній сумі сил струмів, охоплених даним контуром (позитивним вважається струм, що зв'язаний з напрямком обходу правилом свердлика; струм протилежного напрямку вважається негативним). Вираз (4.18) є математичною ознакою вихрового характеру магнітного поля.

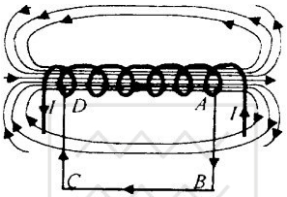


Рис. 4.11

Використаємо теорему про циркуляцію $\vec{H}$ для розрахунку магнітного поля довгого соленоїда – циліндричної котушки, на яку намотано *N* витків дроту. Виберемо контур інтегрування у вигляді прямокутника *ABCD*, в якому сторона *AD* лежить всередині соленоїда і паралельна до його осі, а сторона *BC* дуже віддалена від соленоїда (рис. 4.11).

Тоді згідно з (4.18)

$$\oint_{(ABCD)} H_{\ell} d\ell = \int_{(AB)} H_{\ell} d\ell + \int_{(BC)} H_{\ell} d\ell + \int_{(CD)} H_{\ell} d\ell + \int_{(DA)} H_{\ell} d\ell = IN . \qquad (4.19)$$

Магнітне поле соленоїда швидко зменшується при віддалені від нього, тому $\int_{(BC)} H_{\ell} d\ell \approx 0$. Крім того, $\int_{(CD)} H_{\ell} d\ell = \int_{(AB)} H_{\ell} d\ell = 0,$ оскільки проекція $\vec{H}$ на сторони *AB* і *CD* дорівнює нулю.

Отже, в лівій частині (4.19) залишається один доданок

$$\oint_{(ABCD)} H_{\ell} d\ell = \int_{(DA)} H_{\ell} d\ell = IN .$$

Національний університет водного господарства та природокористування

Проекція $\vec{H}$ на паралельний йому відрізок *DA* дорівнює модулю цього вектора: $H_\ell = H$, а $\int\limits_{(DA)} d\ell = \ell$ (довжина сторони *DA*).

Таким чином,

$$H\ell = IN \quad \text{і} \quad H = I\frac{N}{\ell} = In, \tag{4.20}$$

де $n = N/\ell$ – кількість витків на одиниці довжини соленоїда (густина витків). Отже, напруженість магнітного поля всередині довгого соленоїда дорівнює добутку сили струму на густину витків, а індукція поля

$$B = \mu\mu_0 In. \tag{4.21}$$

§4.4. Дія магнітного поля на струм; сила Ампера. Магнітна взаємодія струмів

Як відмічалося вище, магнітне поле діє на вміщений у нього провідник зі струмом. Французький фізик Ампер встановив, що на елемент провідника зі струмом $Id\vec{\ell}$, вміщений в магнітне поле індукцією $\vec{B}$, діє сила (сила Ампера)

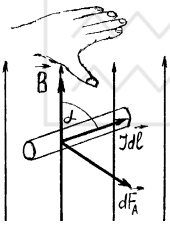


Рис. 4.12

$$d\vec{F}_A = Id\vec{\ell} \times \vec{B} \tag{4.22}$$

або в скалярній формі

$$dF_A = Id\ell B\sin\alpha, \tag{4.23}$$

де α – кут між напрямками струму та магнітної індукції. Напрямок сили Ампера можна визначити за правилом лівої руки (рис. 4.12).

Сила, що діє на провідник зі струмом скінченої довжини, знаходиться з (4.22) або (4.23) інтегруванням по всій довжині провідника:

$$F_A = I\int\limits_{\ell} B\sin\alpha\, d\ell. \tag{4.24}$$

Зокрема, для прямолінійного провідника довжиною ℓ в однорідному магнітному полі

$$F_A = I\ell B\sin\alpha. \tag{4.25}$$

Розглянемо тепер взаємодію двох довгих прямолінійних провідників, паралельних один одному і по яких протікають струми однакового напрямку. Ділянки таких провідників зображені на рис. 4.13.

Сила, з якою магнітне поле першого струму діє на ділянку другого провідника довжиною ℓ, згідно з (4.25)

$$F_{1,2} = I_2 \ell B_1 \sin\alpha .$$

Згідно з (4.13)

$$B_1 = \frac{\mu\mu_0 I_1}{2\pi d};$$

(d – відстань між провідниками).

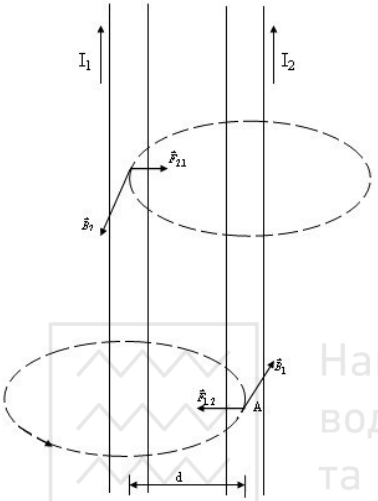


Рис. 4.13

Як видно з рис. 4.13, кут α між напрямком струму в другому провіднику і вектором магнітної індукції поля першого провідника – прямий; отже, $\sin\alpha = 1$.

Тоді одержимо

$$F_{1,2} = \frac{\mu\mu_0 I_1 I_2 \ell}{2\pi d} . \qquad (4.26)$$

Це і є вираз для сили взаємодії провідників зі струмом (адже так само можна отримати і вираз для сили $F_{2,1}$).

Напрямки сил $\vec{F}_{1,2}$, $\vec{F}_{2,1}$ знайдені за правилом лівої руки і вказані на рис. 4.13. Отже, струми однакового напрямку притягуються. Аналогічно, можна показати, що антипаралельні струми будуть відштовхуватись.

Із формули (4.26), вважаючи в ній всі величини одиничними (за винятком $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \frac{Гн}{м}$), отримаємо визначення одиниці сили струму: *ампер* – це сила такого постійного струму, який при проходженні по двох прямолінійних паралельних нескінченно довгих провідниках, розміщених на відстані 1*м* у вакуумі, викликає між ними магнітну взаємодію силою $2 \cdot 10^{-7} H$ на кожен метр довжини. Це визначення використовувалось в СІ до 90-их років минулого століття.

§4.5. Сила Лоренца. Рух електричних зарядів у магнітному полі

Досліди показують, що на електричний заряд, який рухається в магнітному полі, діє з боку поля сила (сила Лоренца), що напрямлена перпендикулярно до швидкості і пропорційна величині заряду і векторному добутку його швидкості та магнітної індукції:

Національний університет водного господарства та природокористування

$$\vec{F}_л = q\vec{\upsilon} \times \vec{B} \tag{4.27}$$

або в скалярній формі

$$F_л = q\upsilon B \sin\alpha, \tag{4.28}$$

де α – кут між $\vec{\upsilon}$ і $\vec{B}$.

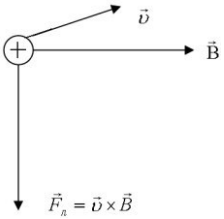


Рис. 4.14

Для додатнього заряду напрямок сили Лоренца визначається за правилом лівої руки (рис.4.14), а для від'ємного заряду цей напрямок протилежний (рис.4.15).

Окремо відмітимо, що на нерухомий заряд магнітне поле не діє; в цьому його принципова відмінність від електростатичного поля. Якщо ж на заряд q діють одночасно і електричне, і магнітне поле, то результуюча сила (що також називається *силою Лоренца*)

$$\vec{F}_ë = q\left(\vec{E} + \vec{\upsilon} \times \vec{B}\right), \tag{4.29}$$

де $\vec{E}$ – напруженість електростатичного поля. Очевидно, що (4.27) є окремим випадком (4.29) у разі, коли електростатичне поле відсутнє.

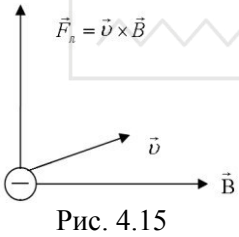


Рис. 4.15

Якщо заряджена частинка рухається вздовж ліній магнітної індукції (або у протилежному напрямку), то $\alpha = 0$ або $\alpha = \pi$. Згідно з (4.28) у цьому випадку $F_Л = 0$; магнітне поле на частинку не діє, і вона рухається рівномірно і прямолінійно. Якщо ж швидкість частинки $\vec{\upsilon} \perp \vec{B}$ $\left(\alpha = \dfrac{\pi}{2}\right)$, то $\vec{F}_ë$ – максимальна. Оскільки $\vec{F}_ë$ перпендикулярна до швидкості, то вона надає частинці нормального прискорення; отже, частинка буде рухатися по колу в площині, перпендикулярній до напрямку магнітного поля. Згідно з 2-м законом Ньютона

$$F_ë = ma_n,$$

$$q\upsilon B = m\frac{\upsilon^2}{R},$$

звідки радіус кола

$$R = \frac{m\upsilon}{qB}, \tag{4.30}$$

а період обертання

Національний університет водного господарства та природокористування

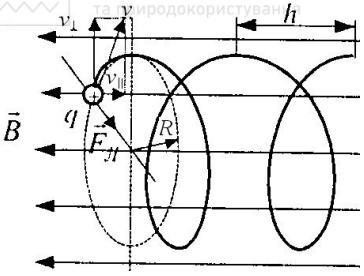


Рис. 4.16

$$T = \frac{2\pi R}{\upsilon} = \frac{2\pi m}{qB}. \qquad (4.31)$$

Якщо ж швидкість частинки $\vec{\upsilon}$ складає довільний кут α з напрямком магнітної індукції $\vec{B}$, то її рух можна розглядати (рис. 4.16) як суперпозицію рівномірного прямолінійного руху вздовж поля зі швидкістю $\upsilon_{\text{п}} = \upsilon\cos\alpha$ і рівномірного руху по колу радіуса $R = \frac{m\upsilon_\perp}{qB} = \frac{m\upsilon\sin\alpha}{qB}$ в площині, перпендикулярній до поля. Результатом суперпозиції буде рух по спіралі (рис. 4.16). Крок спіралі

$$h = \upsilon_\parallel T = \frac{2\pi m\upsilon\cos\alpha}{qB}. \qquad (4.32)$$

Напрямок, в якому закручується спіраль, залежить від знаку заряду частинки.

З попереднього розгляду видно, що сила Лоренца при русі заряду в магнітному полі роботи не виконує; вона перпендикулярна до швидкості, отже змінює лише напрямок швидкості, не змінюючи її модуля.

§4.6. Магнітний потік. Теорема Гауса для магнітного поля

Магнітним потоком через елементарну площадку dS називається фізична величина, що дорівнює скалярному добутку вектора магнітної індукції та площі площадки:

$$d\hat{O} = \hat{A}dS\cos\alpha = B_n dS, \qquad (4.33)$$

де $B_n = B\cos\alpha$ – проекція $\vec{B}$ на нормаль до площадки; α – кут між векторами $\vec{B}$ та $\vec{n}$ (рис.4.17).

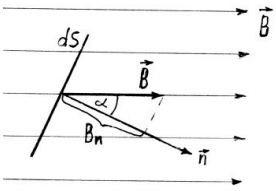


Рис. 4.17

Якщо врахувати правила побудови ліній магнітної індукції (див. §4.1), то стає очевидним фізичний зміст магнітного потоку: він чисельно дорівнює кількості ліній магнітної індукції, що перетинають дану площадку. Магнітний потік через довільну поверхню знайдемо інтегруванням (4.33) по площі поверхні:

Національний університет водного господарства та природокористування

$$\Phi = \int\limits_{(S)} B_n dS \,. \qquad (4.34)$$

Зокрема, для плоскої поверхні в однорідному магнітному полі $\vec{B} = \text{const}$

$$\Phi = B_n S = BS\cos\alpha \,. \qquad (4.35)$$

В СІ одиницею вимірювання магнітного потоку є *вебер*:

$$[\Phi] = [B]\cdot[S] = Тл\cdot м^2 = Вб \,.$$

Магнітний потік може бути як додатнім, так і від'ємним, в залежності від знаку $\cos\alpha$ (визначається позитивним напрямком нормалі $\vec{n}$).

Теорема Гауса для магнітного поля: магнітний потік через будь-яку замкнену поверхню дорівнює нулю:

$$\oint\limits_{(S)} B_n dS \equiv 0 \,. \qquad (4.36)$$

Ця теорема є наслідком того, що в природі не існує «магнітних зарядів», лінії магнітної індукції не мають ні початку, ні кінця (див. §4.1), тому число ліній, що входять в довільну замкнену поверхню, дорівнює числу ліній, що виходять з неї.

Національний університет водного господарства та природокористування

§4.7. Робота переміщення провідника та контура зі струмом в магнітному полі

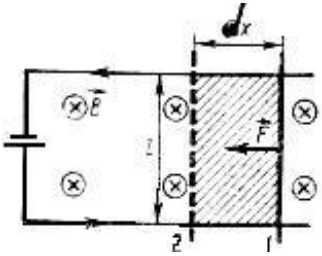


Рис. 4.18

Нехай у магнітному полі індукцією $\vec{B}$ під дією сили Ампера переміщується провідник зі струмом (рис.4.18). Робота сили Ампера на елементарному переміщенні

$$dA = Fdx = IB\ell dx = Id\Phi \,, \qquad (4.37)$$

$\ell dx = dS$ – площа, яку перетнув провідник, $BdS = d\Phi$ – магнітний потік, який перетнув провідник. Зауважимо, що фактично роботу виконує джерело струму, яке підтримує постійне значення сили струму. Повну роботу, виконану силою Ампера при русі провідника знайдемо, інтегруючи (4.37). Якщо сила струму в провіднику залишається постійною, то

Національний університет водного господарства та природокористування

$$A = I\Delta\Phi. \qquad (4.38)$$

Повна робота дорівнює добутку сили струму на величину магнітного потоку, який перетинає провідник під час свого руху.

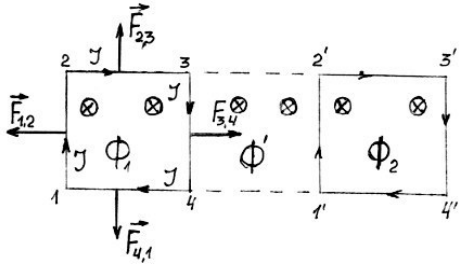


Рис. 4.19

Нехай тепер у магнітному полі переміщується контур зі струмом з положення $1-2-3-4$ у положення $1'-2'-3'-4'$, як показано на рис. 4.19.

Роботу переміщення контура можна розглядати як суму робіт по переміщенню його сторін:

$$A = A_{12} + A_{23} + A_{34} + A_{41}.$$

Очевидно, що $A_{23} = A_{41} = 0$, оскільки сили Ампера, що діють на ці сторони, перпендикулярні до їх переміщень, отже роботи не виконують. $A_{12} < 0$ (сила Ампера напрямлена проти переміщення); $A_{34} > 0$ (сила Ампера діє в напрямку переміщення).

Отже, $A = A_{34} - |A_{12}|$. З використанням (4.38) останній вираз запишемо у вигляді $A = I(\Phi' + \Phi_2) - I(\Phi' + \Phi_1)$. Після скорочення одержимо

$$A = I(\Phi_2 - \Phi_1) = I\Delta\Phi. \qquad (4.39)$$

Робота переміщення контура зі струмом в магнітному полі дорівнює добутку сили струму на зміну магнітного потоку через площу контура в його кінцевому і початковому положенні. Вираз (4.39) залишається справедливим для контура довільної форми і довільної орієнтації в магнітному полі, а, отже, і при повороті контура. При цьому сила струму в контурі має підтримуватись постійною.

§4.8. Явище електромагнітної індукції. Закон Фарадея. Правило Ленца

Як показав Ерстед (див. §4.1.), магнітне поле породжується провідниками зі струмом. Виникає питання: чи не можна створити електричний струм за допомогою магнітного поля? Це питання

експериментальним шляхом розв'язав М.Фарадей в 1837 році. Він встановив, що в замкненому контурі виникає електричний струм, якщо площину охоплену контуром, перетинає змінний магнітний потік, тобто, якщо $\Phi(t) \neq const$. Цей струм Фарадей назвав *індукційним* (наведеним), а саме явище – явищем електромагнітної індукції. Зрозуміло, що в цій ситуації виникнення струму є вторинним ефектом; первинним є виникнення електрорушійної сили індукції.

Отже, явищем електромагнітної індукції називається виникнення електрорушійної сили в контурі при зміні магнітного потоку через поверхню, обмежену контуром. Величина е.р.с. індукції дорівнює швидкості зміни магнітного потоку (закон Фарадея):

$$\mathcal{E}_{iнд} = -\frac{d\Phi}{dt}. \qquad (4.40)$$

Знак "–" в законі Фарадея відповідає *правилу Ленца*: індукційний струм завжди має такий напрямок, щоб своїм магнітним полем протидіяти зміні магнітного потоку, який викликає появу цього струму. Правило Ленца відображає закон збереження енергії стосовно явища електромагнітної індукції: якби індукований магнітний потік, всупереч правилу Ленца , сприяв зростанню швидкості зміни індукуючого потоку, то це призвело б до збільшення струму, в результаті чого збільшився б магнітний потік, знову збільшився б індукційний струм, і так – до нескінченості. Зрозуміло, що такий «саморозгін» суперечить закону збереження енергії.

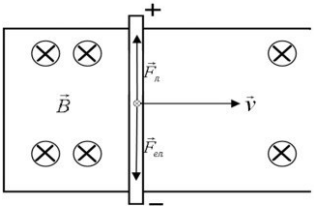


Рис. 4.20

Розглянемо тепер електронний механізм виникнення е.р.с. індукції. Із закону Фарадея $\mathcal{E}_{iнд} = -\frac{d\hat{O}}{dt} = -\frac{d(B_n S)}{dt}$ випливає, що будь-яка зміна магнітного потоку через площину контура викликає появу е.р.с. індукції і, якщо контур замкнений, індукційного струму. Можливі два випадки:

а) $B_n = const$; $S \neq const$: провідний контур, одна з сторін якого переміщується, міститься в постійному магнітному полі (рис. 4.20). Нехай одна з сторін контура рухається зі швидкістю $\vec{\upsilon}$. З такою ж швидкістю рухаються вільні заряди, що входять до складу провідника. На рухомі заряди магнітне поле діє з силою Лоренца $F_{ë} = q\upsilon B$.

Національний університет
водного господарства

Напруженість поля цієї сторонньої сили $E^B = \frac{F_л}{q} = \upsilon B$. Е.р.с. індукції, за означенням

$$\mathcal{E}_{ін} = \int_{(\ell)} E^B_\ell \, d\ell = \upsilon B \ell = \frac{dx}{dt} B\ell = \frac{d\Phi}{dt} \quad \left(dx = dS; \quad BdS = d\Phi\right),$$

що з точністю до знаку співпадає із законом Фарадея (4.40). Тобто в цьому випадку (рухомий контур в постійному магнітному полі) причиною виникнення індукційного струму є дія сили Лоренца на рухомі вільні заряди контура.

б) $S = const$; $B_n \neq const$: нерухомий контур знаходиться в змінному магнітному полі. Виникнення е.р.с. індукції в цьому випадку неможливо пояснити дією сили Лоренца – адже на нерухомі (в середньому) заряди магнітне поле не діє. Наприкінці XIX ст. Максвелл висунув гіпотезу про те, що змінне магнітне поле породжує навколо себе вихрове електричне поле, яке і діє на нерухомі електричні заряди контура, викликаючи появу індукційного струму. Докладніше це питання обговорюватиметься в §4.11.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

§4.9. Індуктивність контура. Явище самоіндукції. Енергія магнітного поля

Нехай по замкненому контуру протікає струм силою *I*. Індукція магнітного поля, створеного цим струмом, пропорційна до сили струму ($B \sim I$, див.§4.2). Величина ж магнітного потоку пропорційна до індукції магнітного поля ($\Phi \sim B$, див. §4.6). Отже, магнітний потік через площину контура пропорційний до сили струму в контурі: $\Phi \sim I$ або

$$\Phi = LI, \tag{4.41}$$

де *L* – коефіцієнт пропорційності між силою струму в контурі і магнітним потоком, що перетинає цей контур, який називається *індуктивністю* контура. Одиницею вимірювання індуктивності в СІ є *генрі*:

$$[L] = \frac{[\Phi]}{[I]} \frac{Вб}{A} = Гн.$$

Національний університет

Індуктивність контура залежить від його розмірів і форми, а також від магнітної проникливості навколишнього середовища. Як приклад, знайдемо вираз для індуктивності довгого соленоїда – котушки довжиною ℓ і площею поперечного перерізу S, що складається з N витків дроту. При проходженні через соленоїд струму в ньому виникає магнітне поле з індукцією $B = \mu\mu_0 nI$, напрямлене вздовж осі соленоїда (див. 4.21). Тоді кожен виток соленоїда перетинає магнітний потік $\Phi_0 = BS = \mu\mu_0 nIS$, а повний магнітний потік через соленоїд $\Phi = N\Phi_0 = N\mu\mu_0 nIS$. Оскільки $n = N/\ell$ – число витків на одиниці довжини соленоїда, то

$$\Phi = \mu\mu_0 \frac{N^2}{\ell} SI = \mu\mu_0 n^2 S\ell I . \qquad (4.42)$$

Прирівнюючи (4.41) і (4.42), отримаємо для індуктивності соленоїда

$$L = \mu\mu_0 n^2 \ell S = \mu\mu_0 \frac{N^2}{\ell} S , \qquad (4.43)$$

де μ – магнітна проникливість матеріалу осердя.

Національний університет водного господарства та природокористування

Якщо сила струму в контурі змінюється, то змінюється і магнітний потік через контур. Згідно з законом Фарадея (4.40) зміна магнітного потоку викликає появу е.р.с. індукції, яка в даному випадку називається *е.р.с. самоіндукції*.

Отже, явище самоіндукції полягає у виникненні е.р.с. самоіндукції в контурі, по якому тече змінний електричний струм. Вираз для е.р.с. самоіндукції одержимо, підставивши (4.41) в (4.40):

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d(LI)}{dt} = -L\frac{dI}{dt} - I\frac{dL}{dt} . \qquad (4.44)$$

Якщо в контурі немає феромагнітних матеріалів, для яких $\mu \neq const$, то $L = const$ і (4.44) спрощується:

$$\mathcal{E}_i = -L\frac{dI}{dt}, \qquad (4.45)$$

тобто е.р.с. самоіндукції пропорційна до швидкості зміни сили струму в контурі.

Таким чином, в контурі, по якому тече змінний струм, діють дві електрорушійні сили: е.р.с. джерела струму та е.р.с. самоіндукції. Якщо струм в контурі збільшується $\left(\frac{dI}{dt}>0\right)$, то $\mathcal{E}_{si}<0$. Це означає, що е.р.с. самоіндукції виконує від'ємну роботу, гальмує рух зарядів і тим самим зменшує силу струму в контурі. В даному випадку струм самоіндукції напрямлений проти основного струму. Якщо ж струм в контурі зменшується $\left(\frac{dI}{dt}<0\right)$, то $\mathcal{E}_{si}>0$ робота цієї е.р.с. буде додатньою, а збуджений нею індукційний струм матиме той же напрямок, що і основний струм. Таким чином, і при збільшенні, і при зменшенні сили основного струму е.р.с. самоіндукції протидіє його зміні, тобто тій причині, яка її викликає. В цьому полягає фізичний зміст правила Ленца для явища самоіндукції.

Індукційні струми можуть збуджуватись не тільки в тонких провідниках, які звичайно застосовують в електротехніці, а і в масивних провідниках великих розмірів: барабанах і дисках приладів, осердях котушок тощо. Струми всередині таких суцільних тіл являють собою вихровий рух вільних електронів, тому індукційні струми в масивних тілах (струми Фуко) іноді називають вихровими.

Провідник зі струмом завжди оточений магнітним полем, яке з'являється та зникає разом зі струмом. Очевидно, що енергія магнітного поля дорівнює роботі, виконаній джерелом при створенні цього струму. Розглянемо контур індуктивністю L, по якому тече струм силою I. Його перетинає власний магнітний потік $\Phi = LI$. При зміні сили струму на dI магнітний потік змінюється на $d\Phi = LdI$. При цьому, згідно з (4.37), джерело струму виконує роботу $dA = Id\Phi = ILdI$. Інтегруючи останній вираз, одержимо $A = \int_0^I LIdI = \frac{LI^2}{2}$. Отже, енергія магнітного поля, створеного струмом контура,

$$W_м = \frac{LI^2}{2}. \qquad (4.46)$$

Знайдемо тепер енергію магнітного поля всередині довгого соленоїда. Підставивши (4.43) у (4.46), отримаємо

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$W_м = \frac{\mu\mu_0 n^2 \ell S I^2}{2}.$$

Враховуючи, що об'єм магнітного поля практично співпадає з об'ємом соленоїда $V = \ell S$, а напруженість магнітного поля в соленоїді $H = In$, останній вираз запишемо у вигляді

$$W_м = \frac{\mu\mu_0 H^2}{2} V. \qquad (4.47)$$

Введемо тепер поняття *густини енергії магнітного поля* як енергії одиниці об'єму поля

$$w_м = \frac{W_м}{V}. \qquad (4.48)$$

Підставивши (4.47) у (4.48), одержимо вираз для густини енергії магнітного поля

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$w_м = \frac{\mu\mu_0 H^2}{2} = \frac{B \cdot H}{2} = \frac{B^2}{2\mu\mu_0}. \qquad (4.49)$$

Цей вираз для густини енергії магнітного поля лишається справедливим для полів, створених провідниками будь-якої форми, а також для полів постійних магнітів.

§4.10. Магнітне поле в речовині

Всі речовини складаються з атомів, в яких по замкнених траєкторіях рухаються електрони. Орбітальний рух електрона можна розглядати як коловий струм (мікрострум) з магнітним моментом

$$\vec{P}_м^{ел} = IS\vec{n} = e\nu\pi r^2 \vec{n}$$

ν – частота обертання електрона, r – радіус орбіти, $\vec{n}$ – одиничний вектор позитивної нормалі до площини орбіти. Магнітний момент атома дорівнює векторній сумі магнітних моментів усіх його електронів (магнітним моментом ядра можна знехтувати):

$$\vec{P}_i^{àò} = \sum_{i=1}^{Z} \vec{P}_i^{åë}.$$

Національний університет

В залежності від наявності чи відсутності (рівності нулю) магнітного моменту, всі атоми поділяються на діамагнітні, для яких $\vec{P}_м^{am} = 0,$ і парамагнітні, для яких $\vec{P}_м^{am} \neq 0$.

Будь-яка речовина, як система атомів, в зовнішньому магнітному полі намагнічується, тобто набуває магнітного моменту. Для кількісного опису цього явища вводять *вектор намагніченості* $\vec{J}$ – фізичну величину, що дорівнює магнітному моменту одиниці об'єму V магнетика:

$$\vec{J} = \frac{\sum_{k=1}^{N} \vec{P}_{ik}^{ad}}{V}. \qquad (4.50)$$

Встановлено, що вектор намагніченості пропорційний до вектора напруженості намагнічуючого поля:

$$\vec{J} = \chi \vec{H}, \qquad (4.51)$$

де безрозмірний коефіцієнт пропорційності χ називається *магнітною сприйнятливістю* речовини.

Національний університет водного господарства та природокористування

Таким чином, магнітне поле в речовині складається з зовнішнього (намагнічуючого) поля $\vec{B}_0$, створеного макрострумами, і власного поля $\vec{B}'$, створеного мікрострумами. В діамагнітних речовинах власне поле напрямлене проти зовнішнього, а в парамагнітних – напрямки зовнішнього і власного полів співпадають. За принципом суперпозиції магнітна індукція поля в речовині

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}' = \mu_0(\vec{H} + \vec{J}) = \mu_0(\vec{H} + \chi\vec{H}) = \mu_0(1+\chi)\vec{H}.$$

Безрозмірна величина $\mu = 1 + \chi$ називається *магнітною проникністю речовини.* Тоді остаточно запишемо

$$\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}. \qquad (4.52)$$

Тепер дамо елементарне пояснення природи діа- і парамагнетизму. У діамагнетиків сумарний магнітний момент атомів у відсутності зовнішнього поля дорівнює нулю. Досліди показують, що магнітного моменту не має атом гелію. Цей факт можна пояснити, припустивши, що два електрони атома гелію обертаються навколо ядра по орбітах

рівних радіусів, з рівними за величиною швидкостями, але в протилежних напрямках. Тому їхні магнітні моменти взаємно скомпенсовані і результуючий магнітний момент атома дорівнює нулю. Зовнішнє магнітне поле, впливаючи на рух електронів атома, індукує в ньому магнітний момент, який за правилом Ленца (див. §4.8.) напрямлений проти $\vec{B}_0$. З розглянутої моделі слід очікувати, що діамагнетиками є й інші речовини, атоми яких мають парне число електронів у зовнішній оболонці. Дійсно, до класу діамагнетиків належать інертні гази (He, Ne, Ar, Xe), а також ряд інших речовин – Bi, H_2O тощо. У діамагнетиків $\chi \le 0$ $(\chi \approx -(10^{-6} \div 10^{-5}))$, $\mu \le 1$.

Парамагнетиками є речовини, атоми або молекули яких у відсутності зовнішнього поля мають відмінний від нуля магнітний момент $p_м^{am} \neq 0$; наприклад, якщо вони мають непарне число електронів в атомі. Тепловий рух робить орієнтацію магнітних моментів атомів хаотичною, тому у відсутності зовнішнього поля парамагнетик не намагнічений $J = 0$. В зовнішньому полі магнітні моменти атомів орієнтуються вздовж поля (див.§4.1.), тому парамагнетик намагнічується в напрямку зовнішнього поля. Для парамагнетиків $\chi \ge 0$ $(\chi \sim (10^{-7} \div 10^{-3}))$; $\mu \ge 1$. Магнітна сприйнятливість парамагнетика в слабких полях і при досить високих температурах обернено пропорційна до температури (закон Кюрі): $\chi = \frac{C}{T}$, де C – стала Кюрі, що залежить від роду парамагнетика.

І діа- і парамагнетики належать до слабомагнітних речовин, оскільки для обох $\mu \approx 1$. Але існують сильномагнітні речовини – феромагнетики, у яких магнітна проникливість досягає $10^2 - 10^3$. Крім основного представника – заліза, до феромагнетиків належать Co, Ni, ряд рідкісноземельних елементів та сплавів на їх основі. Відома наступна властивість феромагнетиків: при температурі, що називається точкою Кюрі (залежить від речовини), феромагнетик стрибком втрачає свої феромагнітні властивості і переходить у парамагнітний стан. Це означає, що атом феромагнетика подібний до атома парамагнетика відмінністю від нуля магнітного моменту, а феромагнітні властивості притаманні не окремому атому, а кристалу

феромагнітної речовини в цілому при температурах, нижчих від точки Кюрі.

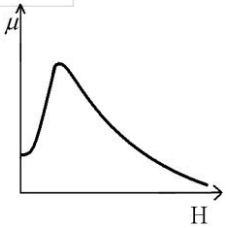


Рис. 4.21

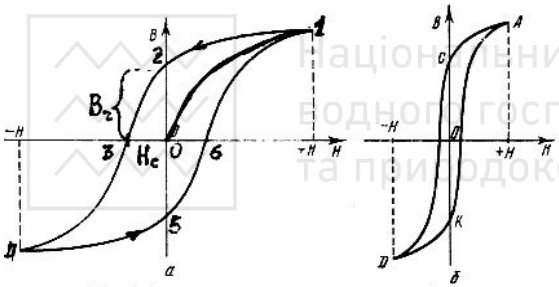
Крім великої магнітної проникливості ($\mu \gg 1$), феромагнетики відрізняються від слабомагнітних речовин рядом властивостей:

1) на відміну від парамагнетиків, феромагнетики намагнічуються до насичення вже в слабких полях;

2) магнітна проникливість феромагнетика залежить від напруженості намагнічуючого поля (рис. 4.21): спочатку швидко зростає із збільшенням Н, досягає максимуму, а потім спадає, прямуючи до одиниці в сильних полях.

3) залежність *B(H)* (рис. 4.22) має гістерезисний характер.

При розміщенні розмагніченого феромагнетика в зовнішньому полі залежність *B(H)* описується спочатку кривою 0-1. При зменшенні H до нуля *B(H)* змінюється по кривій 1-2; тобто має місце відставання зміни індукції від зміни напруженості. Це явище називається магнітним гістерезисом. Магнітна індукція, що зберігається у феромагнетику після зникнення зовнішнього поля (при $H = 0$), називається залишковою магнітною індукцією B_r (постійні магніти). Щоб розмагнітити феромагнетик, потрібно прикласти зовнішнє поле протилежного напрямку з напруженістю H_c, яка називається коерцитивною силою. При подальшому збільшенні напруженості відбувається намагнічування протилежного напрямку по кривій 3-4. Ділянка 4-5-6 знову відповідає розмагнічуванню. Надалі процес перемагнічування відбувається по замкненій кривій 6-1-2-3-4-5-6 (рис. 4.22), яка називається петлею гістерезису. В залежності від величини H_c усі феромагнітні матеріали поділяють на жорсткі (рис.4.22, а) і м'які (рис.4.22, б).



Криві гістерезису різних матеріалів: *а*) жорстка сталь; *б*) м'яка сталь.

Рис. 4.22

Властивості феромагнетиків пояснюються наявністю в них областей, які у відсутності зовнішнього поля спонтанно намагнічені до насичення; ці області називаються *доменами.* Розміри доменів ~ $(10^{-4} \div 10^{-6})$ *м*. Розташування і намагніченість доменів такі, що у відсутності зовнішнього поля сумарна намагніченість дорівнює нулю. В зовнішньому полі вектори намагніченості доменів частково повертаються в напрямку поля і феромагнетик намагнічується.

§4.11. Вихрове електричне поле

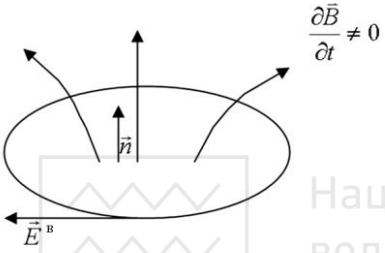


Рис. 4.23

Розглянемо замкнений провідний контур, що перебуває в змінному магнітному полі (рис 4.23). Згідно з законом Фарадея (див. §4.8), в цьому контурі індукується електрорушійна сила

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_{(S)} B_n dS \qquad (4.53)$$

і, як наслідок, виникає індукційний струм; тобто на вільні заряди контура діють сторонні сили. Оскільки контур нерухомий, то ці сили не можна ототожнити з силою Лоренца. Для відповіді на питання про природу сторонніх сил в розглянутому випадку Максвелл висунув гіпотезу про те, що змінне магнітне поле породжує в навколишньому просторі (навіть без провідного контура) вихрове електричне поле, яке і викликає появу індукційного струму. Напруженість цього поля позначають $\vec{E}^B$, на відміну від напруженості електростатичного поля (створеного електричними зарядами), яку будемо надалі позначати $\vec{E}^q$. Тоді за означенням електрорушійної сили:

$$\mathcal{E}_i = \oint_{(\ell)} E_\ell^B d\ell \,. \qquad (4.54)$$

З (4.53) і (4.54) одержимо

$$\oint_{(\ell)} E_\ell^B d\ell = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_{(S)} B_n dS \,.$$

Національний університет водного господарства та природокористування

Оскільки контур нерухомий, то в останньому рівнянні можна поміняти місцями операції інтегрування та диференціювання. І врахувавши, що в загальному $\vec{B} = \vec{B}(x, y, z, t)$, запишемо

$$\oint_{(\ell)} E_\ell^B d\ell = -\int_{(S)} \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)_n dS \qquad (4.55)$$

На відміну від електростатичного, поле $\vec{E}^B$, породжене змінним магнітним полем, є вихровим, бо його циркуляція відмінна від нуля $\left(\oint_{(\ell)} E_\ell^B d\ell \neq 0 \right)$, і тому силові лінії цього поля замкнені.

Якщо ж у просторі одночасно існують і вихрове ($\vec{E}^B$), і електростатичне($\vec{E}^q$) поля, то за принципом суперпозиції напруженість результуючого поля

$$\vec{E} = \vec{E}^B + \vec{E}^q .$$

Національний університет водного господарства та природокористування

Як було показано в розділі 3, ч.1, циркуляція напруженості електростатичного поля $\oint_{(\ell)} E_\ell^q d\ell = 0$. Тому рівняння (4.55) можна узагальнити:

$$\oint_{(\ell)} E_\ell d\ell = -\int_{(S)} \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)_n dS. \qquad (4.56)$$

Ми отримали перше рівняння Максвелла: циркуляція вектора напруженості електричного поля дорівнює взятій з протилежним знаком швидкості зміни магнітного потоку через довільну поверхню, що опирається на контур циркуляції (рис. 4.23).

§4.12. Струми зміщення. Теорема про циркуляцію вектора напруженості магнітного поля (закон повного струму)

У відповідності із законом Біо-Савара-Лапласа (див. §4.2), електричний струм завжди породжує магнітне поле. Але струм – це напрямлений рух електричних зарядів. Навколо ж заряду, як

нерухомого, так і рухомого, існує електричне поле. Можна сказати, що змінне в просторі електричне поле породжує магнітне поле, і закон Біо-Савара-Лапласа є математичним відображенням цього факту. Максвелл же висунув гіпотезу про те, що не тільки змінне в просторі, а і змінне в часі електричне поле породжує магнітне поле. На практиці змінне в часі електричне поле отримаємо, наприклад, в процесі розрядки конденсатора. Якщо обкладки конденсатора, зарядженого з поверхневою густиною заряду σ, сполучити провідником (рис. 4.24), то по провіднику потече електричний струм (струм провідності) $I_{пр} = \frac{dq}{dt} = \frac{d(\sigma S)}{dt} = S\frac{d\sigma}{dt}$, де S – площа пластини конденсатора. Густина струму провідності

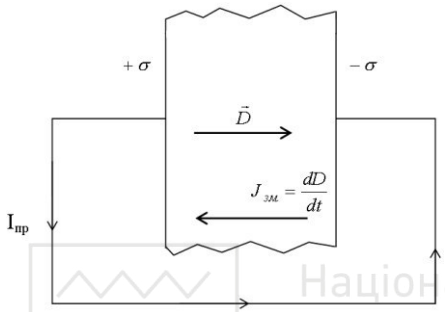


Рис. 4.24

$$j_{пр} = \frac{I}{S} = \frac{d\sigma}{dt}. \quad (4.57)$$

Але між обкладками конденсатора впорядкований рух зарядів припиняється. Виникає питання: чи зникає там і магнітне поле, яке завжди пов'язане зі струмом? Гіпотеза Максвелла (пізніше підтверджена експериментально) полягає у тому, що магнітне поле існує і між обкладками конденсатора, оскільки там існує змінне в часі електричне поле. Силовою характеристикою електричного поля в конденсаторі є вектор електричного зміщення $\vec{D}$, модуль якого, як показано в розділі 3 ч.1, дорівнює поверхневій густині вільних зарядів на обкладках конденсатора: $D = \sigma$. Оскільки в процесі розрядки конденсатора поверхнева густина заряду зменшується, існує відмінна від нуля похідна

$$\frac{dD}{dt} = \frac{d\sigma}{dt} = j_{зм}. \quad (4.58)$$

Цю похідну Максвелл і назвав *густиною струму зміщення;* цей струм не пов'язаний з рухом зарядів в просторі між обкладками конденсатора, він існує незалежно від того, чи є в конденсаторі діелектрик, чи там вакуум. Потрібно лише, щоб існувало змінне електричне поле, яке викликає струм зміщення і породжене ним

Національний університет водного господарства та природокористування

магнітне поле. З (4.57) і (4.58) видно, що $j_{зм} = j_{пр}$, тобто струм провідності в провіднику неперервно переходить в струм зміщення в діелектрику (або у вакуумі) (рис. 4.24).

Максвелл ввів також поняття повного струму, як суму струмів провідності та зміщення,

$$I_{повн} = I_{пр} + I_{зм}. \qquad (4.59)$$

В розімкненому електричному колі лінії повного струму завжди замкнені: в провідниках вони пов'язані з напрямленим рухом електричних зарядів, а в діелектриках (або вакуумі) – зі змінним електричним полем.

В §4.3 була встановлена теорема про циркуляцію вектора напруженості магнітного поля струму провідності:

$$\oint_{(\ell)} H_\ell d\ell = \sum_i I_{пр,i}. \qquad (4.60)$$

Національний університет водного господарства та природокористування

По теорії Максвелла, в правій частині (4.60) повинна стояти сила повного струму. Отже, після підстановки (4.59) в (4.60) одержимо $\oint_{(\ell)} H_\ell d\ell = I_{пр} + I_{зм}$. Або, якщо виразити силу струму через його густину, а також врахувати (4.58), останній вираз можна записати у вигляді

$$\oint_{(\ell)} H_l d\ell = \int_{(S)} (\vec{j}_{пр} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t})_n dS. \qquad (4.61)$$

Рівняння (4.61) носить назву закону повного струму або 3-го рівняння Максвелла: циркуляція вектора напруженості магнітного поля дорівнює алгебраїчній сумі сил струмів провідності та струмів зміщення через поверхню *S*, обмежену контуром циркуляції.

§4.13. Система рівнянь Максвелла. Електромагнітне поле

Узагальнивши теоретично закони електромагнетизму, що були відкриті дослідним шляхом, та доповнивши їх гіпотезою про існування струмів зміщення, Максвелл склав систему чотирьох

Національний університет
фундаментальних рівнянь електродинаміки, які описують усі явища електромагнетизму. В інтегральній формі вони мають вигляд:

$$\begin{aligned} &1.\ \oint_{(l)} E_l d\ell = -\int_{(S)} \left(\frac{\partial \vec{\mathrm{B}}}{\partial \mathrm{t}}\right)_n \cdot dS; \qquad 2.\ \oint_{(S)} D_n dS = \sum_i q_i; \\ &3.\ \oint_{(l)} H_l d\ell = \int_{(S)} \left(\vec{j}_{np} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)_n dS; \qquad 4.\ \oint_{(\mathrm{S})} B_n dS = 0. \end{aligned} \quad . \ (4.62)$$

Зміст першого і третього рівнянь обговорювався в §§4.11, 4.12, відповідно. Друге рівняння Максвелла – це теорема Гауса для електростатичного поля (див. розділ 3, ч.1). Четверте рівняння Максвелла – це теорема Гауса для магнітного поля (див. §4.6).

Систему рівнянь Максвелла слід доповнити трьома допоміжними рівняннями, які встановлюють зв'язок між фізичним величинами, що використовуються в (4.62)

$$\begin{aligned} &5)\ \vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \vec{A}; \\ &6)\ \oint_{(\mathrm{S})} \hat{A}_n dS = 0; \\ &7)\ \vec{j}_{i\partial} = \gamma \vec{A}. \end{aligned} \qquad (4.63)$$

Національний університет водного господарства та природокористування

Останнє рівняння – закон Ома в диференціальній формі.

Одним з важливих висновків з аналізу рівнянь Максвелла є той, що змінні електричне та магнітне поля не можуть існувати окремо. Змінне електричне поле збуджує в просторі змінне магнітне поле і, навпаки, змінне магнітне поле викликає появу змінного електричного поля. ***Змінне електричне і нерозривно пов'язане з ним магнітне поле утворюють єдине електромагнітне поле.***

Національний університет водного господарства та природокористування

Розділ 5. Коливання і хвилі

§5.1. Гармонічні коливання. Диференціальне рівняння гармонічних коливань та його розв'язок. Амплітуда, фаза, частота, період коливань

Коливаннями називають процеси, які повторюються з певною періодичністю. В залежності від механізму виникнення коливань розглядають механічні, електромагнітні, електромеханічні і т. п. коливання, а в залежності від характеру сил, що діють на коливну систему, – вільні (власні), згасаючі, вимушені тощо.

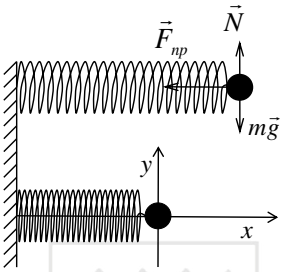


Рис. 5.1

Розгляд почнемо з власних механічних коливань горизонтального пружинного маятника, який складається з тіла масою m, закріпленого до кінця пружини, що жорстко прикріплена до стінки (рис. 5.1).

Якщо вивести тіло з положення рівноваги, то на нього почне діяти повертаюча сила пружної деформації пружини, яка задається законом Гука $F_{пр} = -kx$. Якщо знехтувати тертям і масою пружини у порівнянні з масою тіла, то при невеликих деформаціях пружини закон руху – II закон Ньютона – запишеться як

$$ma_x = -kx, \tag{5.1}$$

де k – коефіцієнт пружності (жорсткість пружини), x – зміщення тіла від положення рівноваги, a_x – прискорення вздовж осі X. В подальшому всяку силу, пропорційну до зміщення і напрямлену до положення рівноваги, будемо називати квазіпружною, незалежно від її природи.

Оскільки прискорення $a_x = \dfrac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$, то (5.1) можна переписати як

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

або

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0. \tag{5.2}$$

У рівнянні (5.2) $\dfrac{k}{m} > 0$, тому можна ввести позначення

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}, \tag{5.3}$$

де ω_0 називають власною циклічною частотою коливань.

Підставляючи (5.3) у (5.2), одержимо диференціальне рівняння коливань не тільки пружинного маятника, але усякого тіла (матеріальної точки), на яке діє квазіпружна сила:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0. \tag{5.4}$$

Легко показати, що розв'язком цього рівняння є гармонічні функції (рис. 5.2)

$$x = A\cos(\omega_0 t + \alpha) \text{ або } x = A\sin(\omega_0 t + \alpha). \tag{5.5}$$

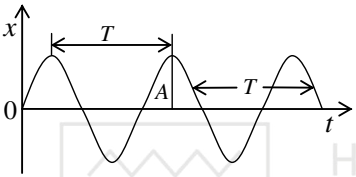


Рис. 5.2

Коливання, в яких зміна фізичної величини в залежності від часу відбувається за законом синуса або косинуса, називаються гармонічними. В (5.5): A – амплітуда коливань – найбільше значення коливної фізичної величини (у даному випадку, максимальне зміщення від положення рівноваги), $(\omega_0 t + \alpha)$ – фаза коливань, α – початкова фаза.

Проміжок часу, протягом якого здійснюється одне повне коливання, називається періодом коливань T. Зрозуміло, що $[\omega_0(t+T)+\alpha] - [\omega_0 t + \alpha] = \omega_0 T = 2\pi$, оскільки гармонічні функції повторюються через 2π. Звідси циклічна частота

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu, \tag{5.6}$$

де $\nu = \frac{1}{T}$ – лінійна частота, як кількість коливань, здійснених за одиницю часу.

Для пружинного маятника $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, тому період коливань

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \tag{5.7}$$

§5.2. Математичний маятник

Математичний маятник – це підвішена на довгій нерозтяжній невагомій нитці матеріальна точка (тіло, розмірами якого нехтують),

що здійснює коливання під дією тангенціальної складової сили тяжіння $\vec{F}_\tau$ (рис. 5.2) – повертаючої сили

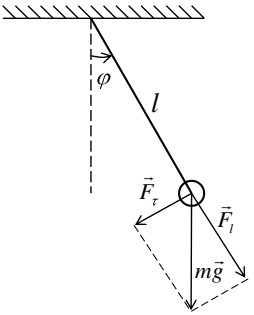


Рис. 5.3

$$F_\tau = -mg\sin\varphi,$$

напрямленої до положення рівноваги. При малих кутах відхилення $\sin\varphi \approx \varphi$ і

$$F_\tau = -mg\varphi, \qquad (5.8)$$

тобто ця сила є квазіпружною Вона забезпечує тангенціальне прискорення точки

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2} = l\frac{d^2\varphi}{dt^2} = l\ddot{\varphi}. \qquad (5.9)$$

За II законом Ньютона

$$ma_\tau = F_\tau. \qquad (5.10)$$

Підставляючи (5.8) і (5.9) у (5.10), отримаємо

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{\ell}\varphi = 0,$$

а ввівши позначення $\frac{g}{\ell} = \omega_0^2$, остаточно

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0. \qquad (5.11)$$

Зрозуміло, що це дифрівняння, як і (5.4), має розв'язки у вигляді гармонічних функцій (5.5). Отже, при малих кутах відхилень $(\varphi \le 5^\circ)$ математичний маятник здійснює гармонічні коливання з періодом

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}.$$

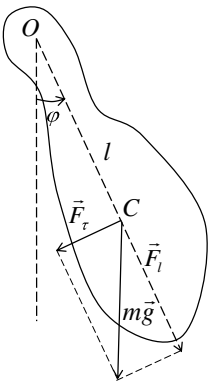


Рис. 5.4

§5.3.Фізичний маятник

Фізичний маятник – це тіло, яке може коливатись навколо осі, що не проходить через його центр мас (рис. 5.4). На рис. 5.4: O – точка підвісу маятника, через яку перпендикулярно до площини рисунка проходить вісь коливання; $OC = \ell$ – віддаль від осі до центра мас тіла. Повертаючою силою є тангенціальна складова сили тяжіння $F_\tau = -mg\sin\varphi$, яка при малих кутах відхилення $(\sin\varphi \approx \varphi)$ є квазіпружною:

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$F_\tau = -mg\varphi\,. \tag{5.12}$$

Момент цієї сили відносно осі O

$$M = F_\tau \ell = -mgl\varphi\,. \tag{5.13}$$

За основним законом динаміки обертального руху

$$M = I\varepsilon = I\ddot{\varphi}\,, \tag{5.14}$$

де I – момент інерції фізичного маятника, $\varepsilon = \ddot{\varphi}$ – кутове прискорення. Підставляючи (5.13) у (5.14), одержимо

$$I\ddot{\varphi} = -mg\ell\varphi$$

або

$$\ddot{\varphi} + \frac{mg\ell}{I}\varphi = 0\,. \tag{5.15}$$

Вираз (5.15) є диференціальним рівнянням гармонічних коливань фізичного маятника з власною циклічною частотою

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mg\ell}{I}}$$

або

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\frac{I}{m\ell}}},$$

де $\frac{I}{m\ell} = L$ – зведена довжина фізичного маятника.

Період коливань фізичного маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\,.$$

Зведена довжина фізичного маятника – це довжина такого математичного маятника, який має такий самий період коливання, як і даний фізичний.

§5.4. Енергія гармонічних коливань

Оскільки квазіпружна сила, що є причиною гармонічних коливань, є потенціальна, то у випадку механічних коливань коливне тіло має як кінетичну, так і потенціальну енергію. Повна енергія дорівнює їх сумі

$$W = W_k + W_n\,.$$

З врахуванням (5.5) для матеріальної точки отримаємо кінетичну енергію

$$W_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{m(\dot{x})^2}{2} = \frac{m}{2} A^2\omega^2 \sin^2(\omega t + \alpha). \quad (5.16)$$

Потенціальна енергія матеріальної точки, яка здійснює гармонічні коливання,

$$W_n = \frac{kx^2}{2} = \frac{m\omega^2}{2} x^2 = \frac{m}{2} A^2\omega^2 \cos^2(\omega t + \alpha). \quad (5.17)$$

Склавши (5.16) і (5.17), отримаємо повну енергію

$$W = \frac{m}{2} A^2\omega^2.$$

Отже, енергія гармонічних коливань пропорційна до квадрату амплітуди і не залежить від часу.

§5.5. Додавання однаково направлених гармонічних коливань однакової частоти

Часто матеріальна точка бере участь у двох і більше коливаннях. Наприклад, підвішена до стелі вагона на пружині кулька здійснює коливання відносно точки підвісу, яка у свою чергу коливається на ресорах вагона; таким чином, кулька буде здійснювати рух, який складається із двох коливань одного напрямку.

Нехай матеріальна точка бере участь у двох однаково направлених гармонічних коливаннях однакової частоти, але з різними амплітудами і початковими фазами:

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \alpha_1),$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \alpha_2).$$

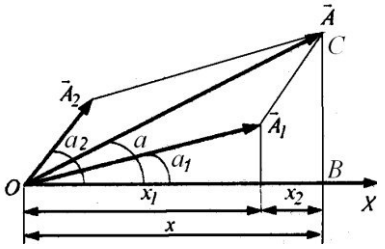


Рис. 5.5

Очевидно, результуюче коливання є також гармонічним і буде описуватись виразом

$$x = A\cos(\omega t + \alpha).$$

Одержати цей вираз можна аналітично, але легше скласти коливання векторним способом. Для цього у момент часу $t = 0$ побудуємо векторну діаграму додавання цих коливань (рис. 5.5), відклавши амплітуди як вектори під кутом α_1 та α_2 до осі x.

Національний університет
та природокористування

Оскільки вектори амплітуд обертаються з однаковою кутовою швидкістю, рівною циклічній частоті ω, то кут між векторами $\vec{A}_2$ і $\vec{A}_1$ залишається рівним $\alpha_2 - \alpha_1$. Тоді результуючий вектор

$$\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2 .$$

З рис. 5.5 за теоремою косинусів маємо

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2 \cos(180 - (\alpha_2 - \alpha_1))$$

або

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1). \quad (5.18)$$

З рис. 5.5 видно, що початкову фазу результуючого коливання можна визначити за співвідношенням

$$tg\alpha = \frac{BC}{OB} = \frac{A_1 \sin\alpha_1 + A_2 \sin\alpha_2}{A_1 \cos\alpha_1 + A_2 \cos\alpha_2} .$$

Із (5.18) випливає, що A залежить від різниці початкових фаз $\alpha_2 - \alpha_1$, тому

$$|A_2 + A_1| \geq A \geq |A_2 - A_1| .$$

Зокрема, коли $\alpha_2 - \alpha_1 = \pm 2\pi k$, де $k = 0,1,2,3\ldots$, то $A = A_1 + A_2$; коливання, що додаються, здійснюються «у фазі». Коли ж $\alpha_2 - \alpha_1 = \pm\pi(2k+1)$, то $A = |A_1 - A_2|$; коливання здійснюються «у протифазі».

Якщо ω_1 і ω_2 близькі, то результуюча частота $\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$, і амплітуда результуючого коливання повільно і періодично змінюється. Це явище називається биттям.

§5.6. Додавання взаємно перпендикулярних коливань

Нехай точка бере участь одночасно у двох взаємно перпендикулярних коливаннях однакової частоти:

$$x = A\cos(\omega t + \alpha) \quad (5.19)$$

$$y = B\cos(\omega t + \beta), \quad (5.20)$$

де A і B, α і β – відповідно амплітуди і початкові фази першого і другого коливань.

Встановимо рівняння траєкторії точки, виключивши із (5.19) і (5.20) час t. Для цього перепишемо (5.19) і (5.20) у вигляді

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$\frac{x}{A} = \cos\omega t \cdot \cos\alpha - \sin\omega t \cdot \sin\alpha, \qquad (5.21)$$

$$\frac{y}{B} = \cos\omega t \cdot \cos\beta - \sin\omega t \cdot \sin\beta. \qquad (5.22)$$

Помноживши (5.21) на $\cos\beta$ і (5.22) на $\cos\alpha$ та взявши різницю між отриманими рівняннями, одержимо

$$\frac{x}{A}\cos\beta - \frac{y}{B}\cos\alpha = \sin\omega t \cdot \sin(\beta - \alpha). \qquad (5.23)$$

Помноживши (5.21) на $\sin\beta$ і (5.22) на $\sin\alpha$ та взявши їх різницю, одержимо

$$\frac{x}{A}\sin\beta - \frac{y}{B}\sin\alpha = \cos\omega t \cdot \sin(\beta - \alpha). \qquad (5.24)$$

Складаючи квадрати рівнянь (5.23) і (5.24), знайдемо рівняння траєкторії

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{2xy}{A \cdot B}\cos(\beta - \alpha) = \sin^2(\beta - \alpha). \qquad (5.25)$$

Рівняння (5.25) є рівнянням еліпса, характеристики якого визначаються значенням різниці початкових фаз ($\beta - \alpha$).

Розглянемо частинні випадки:

1) Нехай $(\beta - \alpha) = \pm k\pi$, де $k = 0,1,2,\ldots$; тоді $\sin(\beta - \alpha) = 0$, а $\cos(\beta - \alpha) = \pm 1$ і рівняння (5.25) матиме вигляд

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} \pm \frac{2xy}{A \cdot B} = 0 \quad \text{або} \quad \frac{x}{A} \pm \frac{y}{B} = 0.$$

Ми отримали рівняння прямої

$$y = \mp\frac{B}{A}x,$$

яка проходить через початок координат і утворює з віссю *OX* кут, тангенс якого рівний $\pm\frac{B}{A}$. Таким чином, результуючий рух в цьому випадку є коливанням по заданому відрізку прямої.

2) Нехай $(\beta - \alpha) = \pm(k+1)\frac{\pi}{2}$; тоді $\cos(\beta - a) = 0, \sin(\beta - \alpha) = \pm 1$.

Траєкторією результуючого руху тепер буде еліпс, який описується рівнянням

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}=1. \qquad (5.26)$$

При $A=B$ (5.26) переходить у коло. При проміжних значеннях $\beta-\alpha$ утворюються еліпси з різною орієнтацією своїх осей відносно осей координат.

Якщо взаємно перпендикулярні коливання відбуваються з різними частотами, то результуючі траєкторії мають більш складний вигляд; ці траєкторії у випадках кратних частот називаються фігурами Ліссажу.

§5.7. Згасаючі коливання

Реальні коливання відбуваються в умовах дії сил тертя (опору). І тому реальні коливні системи є дисипативними, в яких механічна енергія частково втрачається, що призводить до поступового зменшення амплітуди, тобто до згасання коливань. Для спрощення обмежимось випадком лінійного коливання матеріальної точки у в'язкому середовищі. Якщо швидкість коливального руху невелика, то сила опору пропорційна до швидкості і напрямлена проти швидкості, тобто

$$f_{on}=-r\mathrm{v}=-r\dot{x},$$

де r – коефіцієнт опору.

Тоді за другим законом Ньютона

$$m\ddot{x}=-kx-r\dot{x}. \qquad (5.27)$$

Розділивши рівність (5.27) на m, отримаємо

$$\ddot{x}+\frac{k}{m}x+\frac{r}{m}\dot{x}=0 \quad . \qquad (5.28)$$

Введемо позначення

$$\omega_0^2=\frac{k}{m};\quad \frac{r}{m}=2\beta.$$

Рівняння (5.28) матиме вигляд диференціального рівняння згасаючих коливань:

$$\ddot{x}+\omega_0^2x+2\beta\dot{x}=0. \qquad (5.29)$$

Підстановкою

$$x=z\cdot e^{-\beta t} \qquad (5.30)$$

приведемо рівняння (5.29) до простішого вигляду (тут e – основа натурального логарифму). Заміну змінних у (5.29) проведемо за допомогою рівнянь

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$\dot{x} = e^{-\beta t} \cdot \dot{z} - \beta e^{-\beta t} \cdot z,$$
$$\ddot{x} = e^{-\beta t} \cdot \ddot{z} - 2\beta e^{-\beta t} \cdot \dot{z} + \beta^2 e^{-\beta t} \cdot z. \quad (5.31)$$

Підставляючи (5.30) і (5.31) у (5.29), отримаємо

$$\ddot{z} - 2\beta\dot{z} + \beta^2 z + \omega_0^2 z - 2\beta^2 z + 2\beta\dot{z} = 0$$

або

$$\ddot{z} = -(\omega_0^2 - \beta^2)z. \quad (5.32)$$

У випадку, коли $\omega_0^2 > \beta^2$, можна ввести заміну $\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2$. Тоді рівняння (5.32) прийме вигляд

$$\ddot{z} + \omega^2 z = 0, \quad (5.33)$$

розв'язком якого є

$$z = A_0 \cos(\omega t + \alpha). \quad (5.34)$$

У випадку, коли $\beta^2 > \omega_0^2$, рух матеріальної точки буде неперіодичним (аперіодичним).

Підставляючи (5.34) у (5.30), одержимо рівняння руху коливної точки під дією квазіпружної сили та сили опору, тобто рівняння згасаючих коливань:

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cdot \cos(\omega t + \alpha). \quad (5.35)$$

З (5.35) видно, що амплітуда коливань зменшується з часом за експоненціальним законом (рис. 5.6):

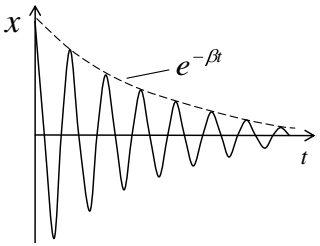


Рис. 5.6

$$A = A_0 e^{-\beta t}. \quad (5.36)$$

Фізично β характеризує швидкість зменшення амплітуди і називається коефіцієнтом згасання. Можна показати, що β чисельно дорівнює оберненій величині часу τ, протягом якого амплітуда зменшується в e раз. Дійсно, якщо $\frac{A_0}{A} = e$, то із (5.36) слідує, що

$$\frac{A_0}{A} = e^{\beta\tau} = e.$$

Звідси

$$\beta\tau = 1 \quad \text{або} \quad \beta = \frac{1}{\tau}.$$

Національний університет водного господарства та природокористування

Зручно користуватись поняттям логарифмічного декременту згасання λ, як натурального логарифму відношення двох послідовних амплітуд (через період T):

$$\lambda = \ln \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta (t+T)}} = \ln e^{\beta T} = \beta T .$$

§5.8. Вимушені коливання

Для того, щоб в реальній коливній системі забезпечити незгасаючі коливання, необхідно постійно до неї підводити енергію ззовні. І тому розглянемо коливання матеріальної точки, на яку, крім квазіпружної сили $f_{np} = -kx$ і сили опору $f_{on} = -r\dot{x}$, діє додаткова періодична змушувальна сила

$$F_{зм} = F_0 \cos \omega t ,$$

де ω –частота цієї сили.

Тоді за другим законом Ньютона маємо

$$m\ddot{x} = -r\dot{x} - kx + F_0 \cos \omega t . \qquad (5.37)$$

Перепишемо рівняння (5.37) у вигляді

$$\ddot{x} + \frac{r}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}\cos \omega t$$

або

$$\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t , \qquad (5.38)$$

де $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, $2\beta = \frac{r}{m}$, $f_0 = \frac{F_0}{m}$.

Розв'язок рівняння (5.38) будемо шукати як суму розв'язку однорідного рівняння (5.29) і часткового розв'язку неоднорідного рівняння: $x = x_{îä} + x_{íåîä}$. Для віддалених моментів часу $x_{îä} \to 0$. І тому

$$x \equiv x_{íåîä} = A\cos(\omega t + \alpha). \qquad (5.39)$$

Отже, вимушені коливання здійснюються з частотою ω. Для знаходження амплітуди A і початкової фази α продиференціюємо двічі (5.39):

$$\dot{x} = -A\omega \sin(\omega t + \alpha), \quad \ddot{x} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \alpha). \qquad (5.40)$$

Підставляючи (5.39) і (5.40) у (5.38), отримаємо:

$$-A\omega^2 \cos(\omega t + \alpha) + A\omega_0^2 \cos(\omega t + \alpha) + 2A\beta\omega \sin(\omega t + \alpha) = f_0 \cos \omega t,$$

а розкриваючи тригонометричні функції від складного аргументу:

$$-A\omega^2(\cos\omega t\cos\alpha-\sin\omega t\sin\alpha)+A\omega_0^2(\cos\omega t\cos\alpha-\sin\omega t\sin\alpha)- \quad (5.41)$$
$$-2A\beta\omega(\sin\omega t\cos\alpha-\cos\omega t\sin\alpha)=f_0\cos\omega t.$$

Щоб рівняння (5.41) перетворилося в тотожність, потрібно, щоб суми коефіцієнтів при $\cos\omega t$ в обох частинах рівності були рівні і суми коефіцієнтів при $\sin\omega t$ в обох частинах були також рівні. Це означає, що

$$A(\omega_0^2-\omega^2)\cos\alpha-2A\beta\omega\sin\alpha=f_0, \quad (5.42)$$
$$A(\omega_0^2-\omega^2)\sin\alpha-2A\beta\omega\cos\alpha=0. \quad (5.43)$$

Із рівняння (5.43) отримаємо вираз для початкової фази вимушених коливань:

$$tg\alpha=-\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2-\omega^2}. \quad (5.44)$$

Підносячи до квадрату рівняння (5.42) і (5.43) та складаючи отримані вирази, одержимо:

$$A^2\left[(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2\right]=f_0$$

Звідси амплітуда вимушених коливань

$$A=\frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}}. \quad (5.45)$$

Проаналізуємо аналітично і графічно (рис. 5.7) залежність цієї величини від частоти ω при різних значеннях коефіцієнту згасання β. Зокрема:

1) при $\omega\to 0$ $\quad A\to A_0=\dfrac{f_0}{\omega_0^2}$

2) при $\omega\to\infty$ $\quad A\to 0$

3) при $\omega\to\omega_0;\ \beta=0$ $\quad A\to\infty$

Досягнення максимального значення амплітуди вимушених коливань, коли частота ω наближається до власної частоти ω_0, називається резонансом.

Для знаходження резонансної частоти при $\beta\neq 0$ знайдемо мінімум підкореневого виразу рівняння (5.45). Для цього прирівняємо до нуля похідну від цього виразу по ω:

$$-2(\omega_0^2-\omega^2)\cdot 2\omega+8\beta^2\omega=0.$$

Оскільки $\omega \neq 0$, то знаменник (5.45) досягає мінімуму при

$$\omega^2 = \omega_0^2 - 2\beta^2.$$

Отже, резонансна частота

$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}\ .$$

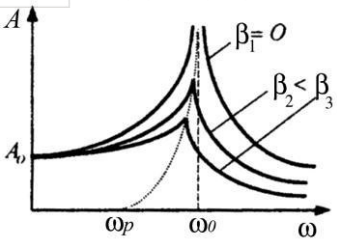


Рис. 5.7

Резонансна (максимальна) амплітуда досягає значення

$$A_{рез} = \frac{f_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}\ .$$

Зрозуміло, що резонанс тим гостріший, чим менший коефіцієнт згасання. На практиці слід враховувати явище резонансу, оскільки в техніці він в одних випадках відіграє позитивну роль, а в інших – негативну.

§5.9. Поняття хвилі, рівняння хвилі. Поздовжні і поперечні хвилі. Фронт хвилі і хвильові поверхні. Довжина хвилі, хвильове число, фазова швидкість

Хвиля – це процес поширення коливань у середовищі. Якщо коливання створити в деякій обмеженій частині середовища, то внаслідок наявності зв'язку між молекулами середовища коливання будуть охоплювати все середовище, тобто будуть поширюватись у середовищі.

Частинки середовища, в якій поширюється хвиля, не переносяться хвилею, вони лише здійснюють коливання навколо положення рівноваги. Хвилі, в яких частинки коливаються перпендикулярно до напрямку поширення хвилі, називаються *поперечними*. Хвилі, в яких частинки коливаються вздовж напрямку поширення хвилі, називаються *поздовжніми*. Поперечні хвилі поширюються в середовищах, де має місце деформація зсуву, тобто в твердих тілах. Поздовжні хвилі поширюються в середовищах, де має місце деформацію розтягу (розширення, стиску), тобто в газах, рідинах і твердих тілах.

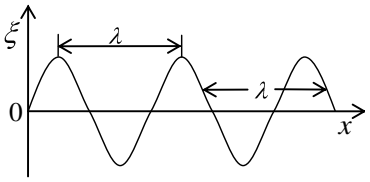


Рис. 5.8

Геометричне місце точок, до яких доходять коливання в момент часу *t*, називається фронтом хвилі. Геометричне місце точок, які коливаються в однаковій фазі, називається хвильовою поверхнею. Фронт хвилі весь

Національний університет водного господарства та природокористування

час переміщується, а хвильові поверхні залишаються нерухомими (хвильових поверхонь існує безліч). Хвильові поверхні можуть бути довільної форми. Найпростіші хвильові поверхні мають вигляд сфер або площин. Тоді такі хвилі називаються сферичними або плоскими. Сферичні хвилі поширюються від точкових джерел, плоскі – від безмежно віддалених джерел в однорідних ізотропічних середовищах.

Встановимо рівняння плоскої хвилі, що поширюється вздовж осі x. Це рівняння повинно виражати залежність змінної фізичної величини ξ (наприклад, зміщення коливної точки) від координати x і часу t:

$$\xi = \xi(x, t).$$

Знайдемо вигляд ξ у випадку плоскої хвилі. Для спрощення вісь координат направимо вздовж напрямку поширення хвилі. Нехай точки джерела, що знаходиться при $x = 0$, коливаються за законом

$$\xi(0, t) = A\cos\omega t.$$

До точки з координатою x (рис. 5.8) коливання прийдуть із запізненням на час

$$\tau = \frac{x}{\mathrm{v}},$$

де v – фазова швидкість поширення хвилі, тобто швидкість переміщення фази хвилі. Тоді рівняння коливання в точці x буде мати вигляд

$$\xi(x, t) = A\cos\omega(t - \tau) = A\cos\omega\left(t - \frac{x}{\mathrm{v}}\right). \quad (5.46)$$

Це і є рівнянням плоскої хвилі, яке часто записують у формі

$$\xi(x, t) = A\cos\left(\omega t - \frac{2\pi x}{T\mathrm{v}}\right) = A\cos\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right) = A\cos(\omega t - kx), \quad (5.47)$$

де $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$, $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ – хвильове число, $\lambda = \mathrm{v}T$ – довжина хвилі.

Довжина хвилі λ – це шлях, який проходить хвиля за час, рівний періоду коливань, або відстань між найближчими точками, що коливаються в однаковій фазі (рис. 5.8). Відмітимо, що поняття плоскої хвилі передбачає постійність амплітуди, тобто нехтується поглинанням енергії середовищем.

Можна показати, що у випадку довільного напрямку поширення хвилі (наприклад, сферичної) рівняння хвилі має вигляд

$$\xi(\vec{r}, t) = A\cos(\omega t - \vec{k}\vec{r}), \quad (5.49)$$

де $\vec{k} = k \cdot \vec{n}$ – хвильовий вектор, $\vec{n}$ – одиничний вектор нормалі до хвильової поверхні, $\vec{r}$ – радіус-вектор хвильової поверхні ($\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – орти).

У комплексній формі рівняння хвилі (5.49) можна записати як

$$\xi(x,t) = Ae^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}, \tag{5.50}$$

де $i = \sqrt{-1}$; такий запис полегшує математичні перетворення.

§5.10. Хвильове рівняння

Хвильове рівняння – це диференціальне рівняння, розв'язком якого є рівняння хвилі. Для встановлення хвильового рівняння співставимо другі частинні похідні по координатах і часу від рівняння хвилі (5.50)

$$\xi(x,t) = Ae^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} = Ae^{i[\omega t - (k_x x + k_y y + k_z z)]}.$$

Тоді:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\omega^2 Ae^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} = -\omega^2 \xi, \tag{5.51}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} &= -k_x^2 Ae^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} = -k_x^2 \xi \\ \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} &= -k_y^2 Ae^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} = -k_y^2 \xi \\ \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} &= -k_z^2 Ae^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} = -k_z^2 \xi \end{aligned}\right\} \tag{5.52}$$

Просумуємо систему рівнянь (5.52):

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = -(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)\xi = -k^2 \xi. \tag{5.53}$$

Співставляючи (5.51) і (5.53), одержимо

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{k^2}{\omega^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}. \tag{5.54}$$

Оскільки

$$\frac{k^2}{\omega^2} = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \cdot \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 = \left(\frac{T}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\mathrm{v}^2}, \tag{5.55}$$

Національний університет
та природокористування

то остаточно хвильове рівняння набуває вигляду

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}=\frac{1}{\mathrm{v}^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}. \qquad (5.56)$$

Ліву частину цього рівняння можна лаконічно записати, використовуючи позначення оператора Лапласа $\hat{\Delta}$ як суму других частинних похідних по x, y, z від функції цих змінних. Тоді хвильове рівняння матиме вигляд

$$\hat{\Delta}\xi=\frac{1}{\mathrm{v}^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}.$$

Для плоскої хвилі, що поширюється вздовж осі x, хвильове рівняння набуде вигляду

$$\frac{d^2\xi}{dx^2}=\frac{1}{\mathrm{v}^2}\frac{d^2\xi}{dt^2}. \qquad (5.57)$$

Поширення коливань у пружному середовищі зумовлене поширенням деформації середовища під дією джерела хвилі. І тому швидкість поширення хвилі повинна визначатись пружними характеристиками середовища.

Зокрема, швидкість поздовжніх хвиль в твердих тілах

$$\mathrm{v}=\sqrt{\frac{E}{\rho}}, \qquad (5.58)$$

в рідинах і газах

$$\mathrm{v}=\sqrt{\frac{K}{\rho}}, \qquad (5.59)$$

де E – модуль Юнга, K – модуль всебічного стиску.

Швидкість поперечних хвиль в твердих тілах

$$\mathrm{v}=\sqrt{\frac{G}{\rho}},$$

де G – модуль зсуву.

Швидкість звуку в газах

$$\mathrm{v}=\sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}},$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

де $\gamma = \frac{C_p}{C_V}$ – відношення молярних чи питомих теплоємностей при сталих тиску та об'єму, R – універсальна газова постійна, T – термодинамічна температура, μ – молярна маса газу.

§5.11. Енергія пружної хвилі

Енергія пружної хвилі складається з кінетичної енергії коливального руху частинок і потенціальної енергії, зумовленої деформацією. Виберемо елементарний циліндр пружного середовища ΔV настільки малим, щоб відносна деформація $\varepsilon = \frac{\partial \xi}{\partial x}$ і швидкість $\mathrm{v} = \frac{\partial \xi}{\partial t}$ у всіх точках об'єму, відповідно, були однаковими. Тоді потенціальна енергія елементарного деформованого циліндра

$$\Delta W_n = \frac{E\varepsilon^2}{2}\Delta V = \frac{E}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 \cdot \Delta V . \quad (5.60)$$

Оскільки у відповідності з (5.58)

$$E = \rho \mathrm{v}^2 ,$$

то

$$\Delta W_n = \frac{\rho \mathrm{v}^2}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 \Delta V . \quad (5.61)$$

Кінетична енергія даного об'єму ΔV буде

$$\Delta W_k = \frac{m\mathrm{v}^2}{2} = \frac{m}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 = \frac{\rho}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 \Delta V ,$$

де $m = \rho \Delta V$ – маса об'єму ΔV.

Повна енергія елемента об'єму хвилі

$$\Delta W = \Delta W_n + \Delta W_k = \frac{1}{2}\rho\left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 + \mathrm{v}^2\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2\right]\Delta V ,$$

а густина енергії – енергія одиниці об'єму

$$w = \frac{\Delta W}{\Delta V} = \frac{1}{2}\rho\left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 + v^2\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2\right]. \quad (5.62)$$

Використавши рівняння плоскої хвилі

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$\xi = A\cos\left(\omega t - kx\right),$$

отримаємо

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -\omega A \sin\left(\omega t - kx\right),$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = kA\sin\left(\omega t - kx\right) = \frac{2\pi}{\lambda} A\sin\left(\omega t - kx\right) = \frac{\omega}{V} A\sin\left(\omega t - kx\right).$$

Підставляючи ці похідні в (5.62), отримаємо для густини енергії

$$w = \rho A^2 \omega^2 \sin^2\left(\omega t - kx\right). \qquad (5.63)$$

Із (5.63) видно, що густина енергії w в кожен момент часу у різних точках простору різна. В деякій точці x густина енергії змінюється з часом за законом квадрату синуса. Оскільки усереднене по часу значення квадрату синуса дорівнює $1/2$, то середнє значення густини енергії в кожній точці буде

$$\langle w \rangle = \frac{1}{2}\rho A^2 \omega^2 .$$

Потік енергії Φ – це фізична величина, чисельно рівна енергії, яка переноситься хвилею за одиницю часу через деяку поверхню:

$$\Phi = \frac{\Delta W}{\Delta t}.$$

Під густиною потоку розуміють енергію, яка переноситься хвилею за одиницю часу через одиничну нормальну площадку, тобто

$$j = \frac{\Delta W}{\Delta S \Delta t} = \frac{\Delta \Phi}{\Delta S}.$$

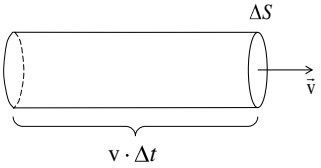


Рис. 5.9

Енергія, яка переноситься через нормальну площадку ΔS за час Δt, очевидно, рівна енергії, зосередженій в об'ємі циліндра висотою $\mathrm{v}\Delta t$ з основою ΔS (рис. 5.9), тобто

$$\Delta W = w\Delta S \cdot \mathrm{v}\Delta t .$$

Тоді вектор густини потоку енергії $\vec{j}$, який називають вектором Умова, буде рівним

$$\vec{j} = \frac{w\Delta S \cdot \vec{\mathrm{v}}\Delta t}{\Delta S \cdot \Delta t} = w\vec{\mathrm{v}}.$$

Середня енергія, що переноситься хвилею за одиницю часу через одиничну нормальну площадку, називається інтенсивністю хвилі *I*. Зрозуміло, що

$$I = \left\langle \left| \vec{j} \right| \right\rangle = \left\langle \left| w\vec{\mathrm{v}} \right| \right\rangle = \mathrm{v}\langle w \rangle = \frac{1}{2}\rho \mathrm{v} A^2 \omega^2 , \quad (5.65)$$

тобто інтенсивність хвилі пропорційна до квадрату амплітуди.

§5.12. Групова швидкість і дисперсія хвиль

Реальні хвильові (звукові) сигнали обмежені в просторі і являють собою хвильові пакети (рис. 5.10), які є суперпозицією багатьох гармонічних хвиль з різними довжинами хвиль. Оскільки енергія коливань пропорційна до квадрату амплітуди, то швидкість поширення енергії (сигналу) – це швидкість поширення центру *C* хвильового пакету, де амплітуда максимальна. Ця швидкість називається груповою швидкістю хвилі *u*:

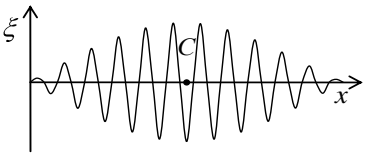


Рис. 5.10

$$u = \frac{x_C}{t}. \quad (5.66)$$

Зрозуміло, що центр пакету формується з гармонічних хвиль, фази яких дуже близькі, тобто $\varphi(\lambda) = const$, а, значить, $\frac{d\varphi}{d\lambda} = 0$. Врахувавши, що $\varphi = \omega t - kx$, отримаємо

$$t\frac{d\omega}{dx} - x_C \frac{dk}{dx} = 0,$$

а звідси

$$u = \frac{x_C}{t} = \frac{d\omega}{dk}. \quad (5.67)$$

Оскільки фазова швидкість хвиль $\mathrm{v} = \frac{\omega}{k}$, то

$$u = \frac{d(\mathrm{v}k)}{dk} = \mathrm{v} + k\frac{d\mathrm{v}}{dk} = \mathrm{v} - \lambda\frac{d\mathrm{v}}{d\lambda}, \quad (5.68)$$

бо $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, а $dk = -\frac{2\pi}{\lambda^2}d\lambda$.

Національний університет
водного господарства

Залежність фазової швидкості від довжини хвилі $\frac{d\mathrm{v}}{d\lambda}$ називається дисперсією хвиль. При наявності дисперсії групова і фазова швидкості не співпадають.

§5.13. Стоячі хвилі

Якщо на біжучу хвилю

$$\xi_1 = A\cos\omega\left(t - \frac{x}{\mathrm{v}}\right)$$

накладається відбита від перешкоди хвиля

$$\xi_2 = A\cos\omega\left(t + \frac{x}{\mathrm{v}}\right),$$

то утворюється стояча хвиля. Рівняння стоячої хвилі можна отримати аналітичним додаванням:

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = A\cos\omega t\cdot\cos\omega\frac{x}{\mathrm{v}} + A\sin\omega t\cdot\sin\omega\frac{x}{\mathrm{v}} + A\cos\omega t\cdot\cos\omega\frac{x}{\mathrm{v}} - \\ - A\sin\omega t\cdot\sin\omega\frac{x}{\mathrm{v}} = 2A\cos\omega\frac{x}{\mathrm{v}}\cdot\cos\omega t. \quad (5.69)$$

З рівняння (5.69) видно, що стояча хвиля не «біжить», а її амплітуда залежить від координати *x*:

$$A_{cm} = A(x) = 2A\cos\omega\frac{x}{\mathrm{v}}. \quad (5.70)$$

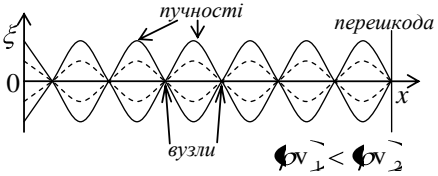


Рис. 5.11

Точки з максимальною амплітудою називаються пучностями, а точки з нульовою амплітудою – вузлами (рис. 5.11).

Умовою пучності є

$$\left|\cos\omega\frac{x}{\mathrm{v}}\right| = 1, \quad (5.71)$$

що можливо, якщо $\omega\frac{x}{\mathrm{v}} = m\pi$, де $m = 0,1,2,3,\ldots$ Тоді координати пучностей

$$x_{\max} = m\frac{\pi\mathrm{v}}{\omega} = m\frac{\lambda}{2}. \quad (5.71)$$

Умовою вузлів є

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$\left|\cos\omega\frac{x}{\mathrm{v}}\right| = 0,$$

що можливо, якщо

$$\omega\frac{x}{\mathrm{v}} = \left(m+1\right)\frac{\pi}{2}, \quad \text{де } m = 0,1,2,3,\ldots$$

Тоді координати вузлів

$$x_{\min} = \frac{\left(m+1\right)\frac{\pi}{2}\cdot\mathrm{v}}{\omega} = \left(m+1\right)\frac{\lambda}{4}. \quad (5.72)$$

Із (5.71) і (5.72) та з рис. 5.11 видно, що відстань між сусідніми пучностями і між сусідніми вузлами складає $\lambda/2$, а між сусіднім вузлом і пучністю – $\lambda/4$. На перешкоді формується пучність або вузол, в залежності від величини хвильових опорів $\rho\mathrm{v}$ середовища і перешкоди. Якщо $\rho\mathrm{v}_1 < \rho\mathrm{v}_2$, як на рис. 5.11, то на перешкоді виникає вузол. Це зумовлене зміною фази відбитої хвилі на π. Якщо ж $\rho\mathrm{v}_1 > \rho\mathrm{v}_2$, то зміна фази відсутня і на перешкоді – пучність.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

§5.14. Електромагнітні коливання

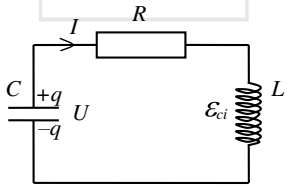


Рис. 5.12

Електромагнітними коливаннями називаються процеси, при яких періодично змінюються з часом характеристики електричних і магнітних полів (заряд, сила струму, напруженість поля тощо). Джерелом електромагнітних коливань може бути коливальний контур, який складається з конденсатора ємністю *C*, котушки з індуктивністю *L* та резистора з опором *R* (рис. 5.12).

Нехай у початковий момент часу конденсатор зарядили до різниці потенціалів *U*, після чого джерело від'єднали. Тоді по колу піде зростаючий розрядний струм. Коли потенціали обкладок конденсатора вирівняються, а в котушці індуктивності струм досягне максимального значення, е.р.с. самоіндукції в котушці $\left(\mathcal{E}_{s.i.} = -L\frac{dI}{dt}\right)$ підтримає спадаючий струм і відбудеться перезарядка конденсатора. Після цього знову виникне струм, але протилежного напрямку.

Національний університет

Оскільки перезарядка конденсатора буде відбуватися періодично, то в контурі виникнуть електромагнітні коливання.

Такі коливання подібні до механічних, наприклад, до коливань маятника. Відхилений маятник за інерцією проходитиме положення рівноваги, відхиляючись у протилежну сторону, і продовжуватиме коливальний рух. Із такого порівняння видно, що індуктивність контура відіграє роль інерції, а опір – роль сил тертя.

За II правилом Кірхгофа алгебраїчна сума спадів напруг на ділянках контура рівна алгебраїчній сумі електрорушійних сил, що зустрічаються у контурі:

$$IR + U = -L\frac{dI}{dt}. \tag{5.73}$$

Оскільки $U = \frac{q}{C}$, а $I = \frac{dq}{dt}$, то (5.73) можна переписати як

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} + L\frac{d^2q}{dt^2} = 0$$

або

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = 0,$$

чи

$$\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{LC}q = 0. \tag{5.74}$$

Ввівши позначення

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}; \quad 2\beta = \frac{R}{L},$$

отримаємо диференціальне рівняння коливань заряду на пластинах конденсатора

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0,$$

де ω_0 – власна циклічна частота коливань, β – коефіцієнт згасання.

За аналогією з механічними коливаннями розв'язок цього рівняння має вигляд

$$q = q_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \alpha), \tag{5.75}$$

де циклічна частота згасаючих коливань рівна

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

або

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}\,.$$

Величина

$$q = q_0 e^{-\beta t}$$

є амплітудою згасаючих коливань. Використавши (5.75), можна встановити вирази для коливань напруги на конденсаторі $\left(U = \frac{q}{c}\right)$ і сили струму в контурі $\left(I = \frac{dq}{dt}\right)$. Період електромагнітних згасаючих коливань

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}}.$$

Якщо опір $R = 0$ (ідеальний контур), то в контурі встановляться незгасаючі коливання величин q, U, I з періодом

$$T = 2\pi\sqrt{LC}\,. \qquad (5.76)$$

Вираз (5.76) називають формулою Томсона для гармонічних електромагнітних коливань. Відмітимо, що коливання струму зміщені в ідеальному контурі по фазі на π порівняно з коливанням заряду і напруги, оскільки $I = -q_0\omega\sin(\omega t + \alpha)$.

§5.15. Вимушені електромагнітні коливання

Якщо в коливальному контурі з ємністю *C*, індуктивністю *L*, опором *R* є періодично діюча змушувальна електрорушійна сила

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0\cos\omega t\,,$$

то в такому контурі існуватимуть вимушені електромагнітні коливання.

За II правилом Кірхгофа маємо

$$IR + U = -L\frac{dI}{dt} + \mathcal{E}_0\cos\omega t\,. \qquad (5.77)$$

Виразивши відповідні величини через заряд, отримаємо

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = \mathcal{E}_0\cos\omega t$$

Національний університет водного господарства та природокористування

або

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = \mathcal{E}_0 \cos\omega t, \qquad (5.78)$$

чи

$$\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{LC}q = \frac{\mathcal{E}_0}{L}\cos\omega t. \qquad (5.79)$$

Співвідношення (5.78) або (5.79) є диференціальними рівняннями вимушених електромагнітних коливань.

Ввівши позначення

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}; \quad 2\beta = \frac{R}{L}; \quad h = \frac{\mathcal{E}_0}{L},$$

рівняння (5.79) перепишемо у вигляді

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = h\cos\omega t. \qquad (5.80)$$

Розв'язок цього рівняння для віддалених моментів часу (див. §5.8) запишемо у вигляді

$$q = q_0 \cos(\omega t + \alpha). \qquad (5.81)$$

Отже, вимушені електромагнітні коливання – незгасаючі і здійснюються з частотою ω і амплітудою, яка залежить від параметрів контура і цієї частоти:

$$q_0 = \frac{h}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} = \frac{\mathcal{E}_0}{L\sqrt{\left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right)^2 + \frac{R^2\omega^2}{L^2}}}.$$

Початкова фаза α рівна

$$tg\alpha = -\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} = -\frac{\frac{R\omega}{L}}{\frac{1}{LC} - \omega^2} = \frac{R}{\omega L - \frac{1}{\omega C}}.$$

Зрозуміло, що в такому контурі буде мати місце резонанс як заряду, так і напруги і струму, коли вимушуюча частота наближається до власної ω_0.

З (5.81) можна отримати значення сили струму в контурі

$$I = \frac{dq}{dt} = -\omega q_0 \sin(\omega t + \alpha)$$

або

$$I = -I_0 \sin(\omega t + \alpha),$$

Національний університет водного господарства та природокористування

де

$$I_0 = \omega q_0 = \frac{\omega \mathcal{E}_0}{L\sqrt{\left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right)^2 + \frac{\omega^2 R^2}{L^2}}} = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2}}. \quad (5.82)$$

Ця формула має зміст закону Ома для кола змінного струму (при послідовному з'єднанні елементів), де повний опір кола

$$z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2}$$

є векторною сумою активного опору R, індуктивного опору ωL та ємнісного опору $\frac{1}{\omega C}$. Зрозуміло, що резонанс буде мати місце при рівності індуктивного та ємнісного опорів.

§5.16. Електромагнітні хвилі. Шкала електромагнітних хвиль

Електромагнітні хвилі – це процес поширення електромагнітних коливань у просторі. Джерелом електромагнітних хвиль може бути відкритий коливальний контур. Вперше електромагнітні хвилі були експериментально вивчені Герцем у 1888 році.

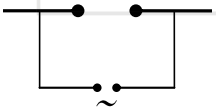


Рис. 5.13

У закритому коливальному контурі коливання електричного поля, в основному, зосереджені між обкладками конденсатора, а магнітного поля – в котушці індуктивності. Коливання в такому контурі підтримується шляхом підведення енергії до обкладок конденсатора від джерела змінної електрорушійної сили. Щоб сумістити в просторі коливання електричного і магнітного полів, необхідно перейти до вібратора Герца (рис. 5.13). Коли різниця потенціалів між кульками досягає значної величини і між ними проскакує іскра, у просторі навколо вібратора встановлюються електромагнітні коливання.

Відомо (розділ 4), що електромагнітне поле описується системою рівнянь Максвелла. Розв'язуючи ці рівняння для випадку непровідного середовища ($\sigma_{пр} = 0$) і відсутності вільних зарядів ($\rho = 0$), отримаємо:

Національний університет водного господарства та природокористування

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial z^2}&=\varepsilon_0\varepsilon\mu_0\mu\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}\\ \frac{\partial^2\vec{H}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial z^2}&=\varepsilon_0\varepsilon\mu_0\mu\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}\end{aligned}\right\}. \qquad (5.83)$$

Система (5.83), якщо порівняти її з рівнянням (5.56), є системою хвильових рівнянь для електричної і магнітної складових електромагнітного поля. Таким чином, електромагнітне поле не може бути локалізоване в точці, а поширюється в навколишньому середовищі у вигляді електромагнітних хвиль. З порівняння (5.83) і (5.56) отримаємо для фазової швидкості поширення електромагнітної хвилі

$$\mathrm{v}=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}},$$

де $c\approx 3\cdot 10^8\ м/с$ –швидкість поширення цих хвиль у вакуумі $(\varepsilon=1,\mu=1)$.

Співпадання значення c зі швидкістю світла у вакуумі дозволило Максвеллу стверджувати, що світло є електромагнітною хвилею.

Для плоскої електромагнітної хвилі, що поширюється вздовж осі x, система (5.83) набуває вигляду:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2}=\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2},$$
$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2}=\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0\frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2}.$$

Розв'язуючи цю систему, отримаємо рівняння плоскої електромагнітної хвилі (рис. 5.14)

$$\left.\begin{aligned}E&=E_{\max}\cos(\omega t-kx),\\ H&=H_{\max}\cos(\omega t-kx).\end{aligned}\right\} \qquad (5.84)$$

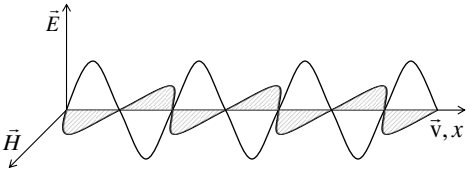


Рис. 5.14

Видно, що електромагнітна хвиля – поперечна, при цьому напрямки коливань $\vec{E}$ та $\vec{H}$ – взаємноперпендикулярні.

Електромагнітні хвилі мають широкий діапазон довжин хвиль або частот, які залежать від способу їх генерації; зокрема, радіохвилі мають довжини

$\lambda = 10^{4} \div 10^{-4}\,м$, для інфрачервоних, світлових, ультрафіолетових: $\lambda = 10^{-4} \div 10^{-6}\,м$, для рентгенівського і γ-випромінювання: $\lambda = 10^{-8} \div 10^{-13}\,м$. Радіохвилі генеруються вібраторами; світлові та рентгенівські хвилі – молекулами і атомами; γ-промені – ядрами.

§5.17. Енергія електромагнітних хвиль. Вектор Умова-Пойнтінга

Перенос енергії електромагнітною хвилею описується вектором Умова-Пойтінга, який є аналогом вектора Умова для механічних хвиль, тобто це вектор густини потоку електромагнітної хвилі:

$$\vec{j} = w\vec{v}\,. \tag{5.85}$$

Об'ємну густину енергії знайдемо як суму об'ємних густин електричної і магнітної складових:

$$w = w_{ел} + w_{маг} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} + \frac{\mu_0 \mu H^2}{2}\,. \tag{5.86}$$

З розв'язку рівнянь Максвелла випливає наступне співвідношення

$$\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon}E = \sqrt{\mu_0 \mu}H\,. \tag{5.87}$$

Об'єднавши (5.86) та (5.87), отримаємо

$$w = \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon \mu}\cdot EH = \frac{EH}{\mathrm{v}}, \tag{5.88}$$

а з урахуванням (5.85):

$$\vec{j} = \vec{E} \times \vec{H}\,. \tag{5.89}$$

Інтенсивність електромагнітної хвилі

$$I = \left\langle \left| \vec{j} \right| \right\rangle = \left\langle \left| \vec{E} \times \vec{H} \right| \right\rangle = \left\langle EH \right\rangle,$$

оскільки $\vec{E} \perp \vec{H}$.

Враховуючи (5.84), отримаємо:

$$I = E_{\max} \cdot H_{\max} \left\langle \cos^2(\omega t - kx + \alpha) \right\rangle = \frac{1}{2} E_{\max} \cdot H_{\max}\,. \tag{5.90}$$

Оскільки співвідношення (5.87) виконується і для амплітудних значень E і H, то

$$I \sim E_{\max}^2 \sim H_{\max}^2$$

Таким чином, інтенсивність електромагнітної хвилі пропорційна до квадрату амплітуди напруженості електричного (магнітного) поля хвилі.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Розділ 6. Оптика

Світло, як предмет оптики, має подвійну природу. З одного боку, це електромагнітна хвиля, а з іншого, – потік квантів, фотонів. І тому одні оптичні явища – інтерференція, дифракція, поляризація, дисперсія світла – є предметом *хвильової* (класичної) оптики, а інші – теплове випромінювання, фотоефект, тиск світла, ефект Комптона тощо – є предметом *квантової* оптики. Як окремий розділ слід виділити *геометричну* оптику, яка ґрунтується на принципі прямолінійності поширення світла в однорідних середовищах.

§6.1. Елементи геометричної оптики: закони відбивання і заломлення світла; тонкі лінзи

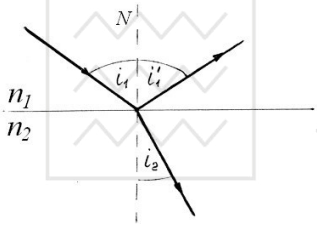


Рис. 6.1

6.1.1. В основі геометричної оптики лежать закони відбивання і заломлення світла. Закон відбивання твердить, що відбитий промінь лежить в одній площині з падаючим променем і нормаллю N, проведеною в точці падіння; при цьому кут відбивання дорівнює куту падіння $(i_1 = i_1')$. Закон заломлення: промінь падаючий, заломлений і нормаль в точці падіння лежать в одній площині; відношення синуса кута падіння до синуса кута заломлення є величина стала для даної пари двох середовищ і рівна відносному показнику заломлення другого середовища відносно першого n_{21} (рис.6.1):

$$\frac{\sin i_1}{\sin i_2} = n_{21}. \qquad (6.1)$$

Відносний показник заломлення n_{21} – це відношення абсолютних показників заломлення середовищ n_2 і n_1, де $n_1 = \frac{c}{\mathrm{v}_1}$, $n_2 = \frac{c}{\mathrm{v}_2}$ (c – швидкість світла у вакуумі, v_1 і v_2 – швидкості світла в першому і другому середовищах).

Отже,

Національний університет
водного господарства
та природокористування

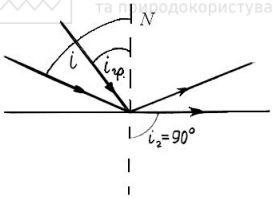


Рис. 6.2

$$n_{21} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{v_1}{v_2}. \qquad (6.2)$$

Якщо промінь поширюється з оптично більш густого середовища в менш густе $(n_1 > n_2)$, то при деякому граничному куті падіння $i_{гр}$ заломлений промінь буде ковзати вздовж межі поділу двох середовищ, тобто $i_2 = 90°$. При куті падіння $i > i_{гр}$ світловий промінь повністю відбивається. В цьому полягає суть явища повного внутрішнього відбивання (рис.6.2). Очевидно, в цьому випадку

$$\sin i_{гр} = n_{21}. \qquad (6.3)$$

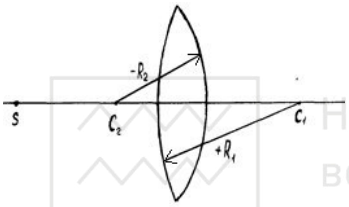


Рис. 6.3

На явищі повного внутрішнього відбивання базується робота приладів (рефрактометрів), які дозволяють визначати показник заломлення середовища.

6.1.2. Лінза називається тонкою, якщо її товщина d мала порівняно з радіусами кривизни її поверхонь R_1 і R_2 (рис. 6.3). Головною оптичною віссю лінзи називають пряму, що проходить через центри кривизни її поверхонь. Можна вважати, що в такій лінзі точки перетину головної оптичної осі з обома поверхнями лінзи співпадають. Цю точку називають центром лінзи. Промені, які проходять через центр лінзи, не зазнають заломлень.

Величину

$$\Phi = (n_{21} - 1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \qquad (6.4)$$

називають оптичною силою тонкої лінзи ($n_{21} = n_2/n_1$, n_2 і n_1 – абсолютні показники заломлення матеріалу лінзи і оточуючого середовища). Для збірної (додатної) лінзи $\Phi>0$, для розсівної (від'ємної) $\Phi<0$. Точки, що лежать на головній оптичній осі лінзи по обидві сторони від оптичного центру на відстанях f, f', називають головними фокусами лінзи (рис. 6.4): F, F'.

Для першого головного фокуса F

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$f = -\frac{1}{(n_{21}-1)(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2})}. \qquad (6.5)$$

Аналогічно, друга головна фокусна відстань

$$f' = \frac{1}{(n_{21}-1)(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2})}. \qquad (6.6)$$

Площини, які проходять через головні фокуси F і F' лінзи перпендикулярно до головної оптичної осі, називаються фокальними площинами лінзи.

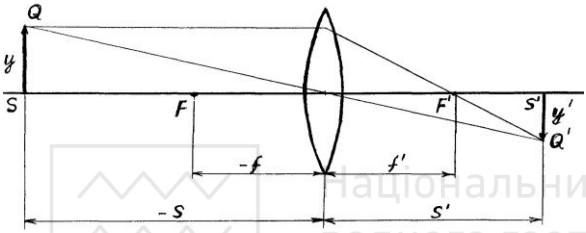


Рис. 6.4

Найчастіше буває, що речовина по обидва боки від лінзи одна й та ж (наприклад, повітря). Тоді головні фокусні відстані чисельно дорівнюють одна одній. Протилежні знаки означають, що головні фокуси лежать з різних боків від лінзи. Для збірної лінзи (оскільки $\Phi>0$) $f' > 0, f < 0$, для розсівної лінзи (оскільки $\Phi<0$) $f' < 0, f > 0.$

Для лінз справедливе основне рівняння

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'}, \qquad (6.7)$$

де всі відрізки відраховуються від центру лінзи, а радіуси кривизни завжди напрямлені від вершини поверхні до центру її кривизни. Вони вважаються додатними, якщо напрямлені в сторону поширення світла. Відрізки, перпендикулярні до оптичної осі, відраховуються від оптичної осі; вони додатні вище оптичної осі і від'ємні нижче оптичної осі.

При розв'язуванні задач основне рівняння тонкої лінзи (6.7) записують у вигляді

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{d} = \pm\frac{1}{|f|}, \qquad (6.8)$$

де $b = |s|$, $d = s'$, знак плюс відповідає збірній лінзі, знак мінус – розсівній.

Лінійне збільшення тонкої лінзи визначається як

$$\Gamma = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s}. \tag{6.9}$$

Для дійсних зображень $\Gamma < 0$, тобто вони обернені; для уявних зображень $\Gamma > 0$, тобто вони прямі.

Оптична сила Φ центрованої системи двох тонких лінз з оптичними силами Φ_1 і Φ_2 на відстані d одна від одної дорівнює

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 - \Phi_1 \Phi_2 d. \tag{6.10}$$

§6.2. Монохроматичні світлові хвилі

У відповідності з електромагнітною теорією (розділ 5) плоска світлова хвиля, що поширюється вздовж напрямку $\vec{r}$, описується системою рівнянь для електричної та магнітної складових хвилі:

$$\left.\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_0 \cos(\omega t - kr + \alpha_0) \\ \vec{H} &= \vec{H}_0 \cos(\omega t - kr + \alpha_0) \end{aligned}\right\}, \tag{6.11}$$

де $\vec{E}_0, \vec{H}_0$ – відповідні амплітуди, ω – циклічна частота хвилі, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ – хвильове число (λ – довжина хвилі), α_0 – початкова фаза.

В більшості оптичних явищ дія світла на речовину визначається електричним вектором $\vec{E}$ електромагнітного поля. Світлове випромінювання ($\nu \sim 10^{15}\,Гц$) не призводить до намагнічування середовища. Тому, саме вектор $\vec{E}$ називають світловим вектором, а перше рівняння системи (6.11) називають рівнянням плоскої світлової хвилі.

Світлова хвиля називається монохроматичною, якщо амплітуда $E_0 = const$, частота $\omega = const$, а початок і кінець хвилі жодним чином не обмежені, тобто $-\infty < r < +\infty$. Однак, оскільки тривалість процесу випромінювання електромагнітних хвиль окремими атомами є скінченною ($\approx 10^{-8} c$), то світло є сукупністю просторово обмежених хвиль (цугів). В подальшому, як правило, будемо оперувати поняттям монохроматичних світлових хвиль.

Якщо дві монохроматичні хвилі однакової частоти накладаються в певній точці простору, то їх різниця фаз

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = (k_1 r_1 - k_2 r_2) + (\alpha_{02} - \alpha_{01})$$

за рахунок випадковості і непередбачуваності початкових фаз α_0 не буде залишатись постійною в часі. Якщо ж обидві хвилі мають спільне походження $(\alpha_{01} = \alpha_{02})$, то $\Delta\varphi = const$. Хвилі однакової частоти, що мають постійну в часі різницю фаз, називають *когерентними*. Якщо врахувати, що хвильове число

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{vT} = \frac{2\pi n}{cT} = \frac{2\pi n}{\lambda_0},$$

де n – показник заломлення середовища, в якому поширюється хвиля, а λ_0 – довжина світлової хвилі у вакуумі, то

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0}(n_1 r_1 - n_2 r_2) = \frac{2\pi}{\lambda_0}\Delta .$$

Тут Δ – оптична різниця ходу когерентних світлових хвиль (променів), оскільки добуток nr називається оптичним шляхом променя. Зрозуміло, що для когерентних світлових хвиль оптична різниця ходу не залежить від часу.

§6.3. Інтерференція світла

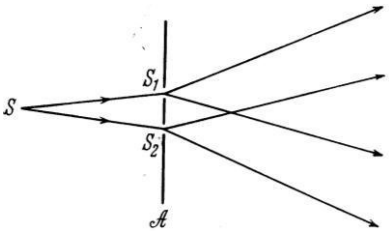


Рис. 6.5

Інтерференція світла – це явище накладання когерентних світлових хвиль, в результаті якого відбувається перерозподіл світлової енергії в просторі. В точках простору, куди когерентні хвилі приходять у фазі, вони підсилюють одна одну; в точках, куди вони попадають у протифазі, відбувається послаблення світла. На екрані спостерігається характерна інтерференційна картина у вигляді чергування темних і світлих смуг – максимумів і мінімумів освітленості, якщо падаюче світло монохроматичне. Відмітимо, що сказане має місце лише тоді, коли напрямки коливань світлового вектора обох хвиль співпадають.

У випадку максимуму інтенсивності інтерференційної картини в оптичній різниці ходу двох когерентних хвиль вкладається ціле число довжин хвиль (у вакуумі) λ_0, тобто

Національний університет водного господарства та природокористування

$$\Delta = \pm m\lambda_0, \quad (m = 0,1,2,\ldots). \qquad (6.12)$$

Мінімум інтерференції спостерігається, коли в оптичній різниці ходу вкладається непарне число півхвиль, тобто

$$\Delta = \pm (m+1)\frac{\lambda_0}{2}, \quad (m = 0,1,2,\ldots). \qquad (6.13)$$

Когерентні хвилі отримують двома способами: поділом фронту хвилі та поділом амплітуди хвилі. До поділу фронту хвилі можна віднести такі схеми утворення когерентних хвиль: дослід Юнга, дзеркала Френеля, біпризма Френеля.

У досліді Юнга світло від точкового монохроматичного джерела *S* падає на два невеликих отвори S_1 та S_2 в екрані *A*, розміщені на рівних відстанях від джерела *S* (рис. 6.5). Ці отвори діють як вторинні монохроматичні точкові синфазні джерела. Поділений таким чином фронт хвилі дозволяє спостерігати інтерференційну картину в області перекриття світлових пучків від джерел S_1 та S_2.

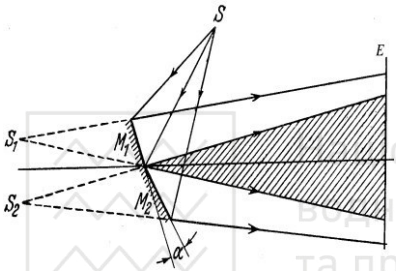


Рис. 6.6

У методі дзеркал Френеля використовують два плоскі дзеркала M_1 і M_2 (рис. 6.6), кут α між якими дуже малий. Світло від точкового джерела *S*, внаслідок відбивання від обох дзеркал утворює два уявних зображення S_1 і S_2, які діють як когерентні джерела. Хвилі від цих джерел накладаються і дають на екрані *E* інтерференційну картину.

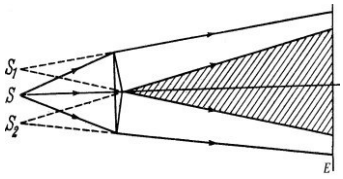


Рис. 6.7

В іншому методі спостереження інтерференції використовують біпризму Френеля, яка складається з двох однакових скляних призм з невеликим заломлюючим кутом (рис. 6.7). Світло від джерела *S* заломлюючись в призмі, ділиться на дві хвилі, які відповідають когерентним уявним джерелам S_1 і S_2. Розрахунок інтерференційної картини на екрані, яку дістають за допомогою біпризми Френеля або дзеркал Френеля, нічим не відрізняється від приведеного нижче розрахунку для досліду Юнга.

Національний університет водного господарства та природокористування

Розглянемо дві когерентні світлові хвилі, що йдуть від джерел S_1 і S_2; d – відстань між джерелами (рис. 6.8). На екрані E внаслідок інтерференції спостерігається інтерференційна картина у вигляді світлих і темних смуг. Обчислимо ширину цих смуг припускаючи, що пряма S_1S_2 паралельна до площини екрану. Позначимо координати інтерференційного максимуму чи мінімуму як x_m. З трикутника S_2PD_2 маємо

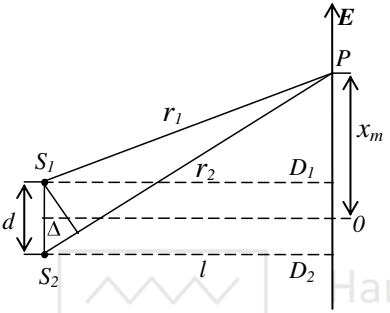


Рис. 6.8

$$r_2^2 = \ell^2 + \left(x_m + \frac{d}{2}\right)^2,$$

а з трикутника S_1PD_1 –

$$r_1^2 = \ell^2 + \left(x_m - \frac{d}{2}\right)^2.$$

Звідси $r_2^2 - r_1^2 = 2x_m d$ і тому $\Delta = r_2 - r_1 = \dfrac{2x_m d}{r_1 + r_2}$. З умов $\ell \gg d$ і $l \gg x_m$ випливає, що $r_1 + r_2 \approx 2\ell$. Отже, координата x_m пов'язана з оптичною різницею ходу Δ співвідношенням

$$x_m = \frac{\ell}{d}\Delta. \tag{6.14}$$

З врахуванням умов (6.12, 6.13), отримаємо координати максимумів

$$x_m^{\max} = \frac{m\ell\lambda_0}{d}, \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{6.15}$$

та мінімумів інтенсивності світла

$$x_m^{\min} = \frac{(m+1)\ell\lambda_0}{2d}, \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{6.16}$$

Відстань між двома сусідніми мінімумами інтенсивності визначає ширину інтерференційної смуги. Згідно з (6.15) і (6.16),

$$\Delta x = x_{m+1}^{\min} - x_m^{\min} = \frac{\ell\lambda_0}{d}. \tag{6.17}$$

Очевидно, що відстань між інтерференційними максимумами (відстань між смугами) буде така ж сама. З (6.17) видно, що відстань $\Delta\tilde{o}$ зростає при зменшенні відстані d між джерелами S_1 і S_2. Інтерференційна картина буде чіткою при умові $d \ll \ell$. Вимірюючи

Національний університет
та природокористування

ℓ, d і Δx, можна експериментально визначити довжину світлової хвилі.

§6.4. Інтерференція світла на тонких плівках

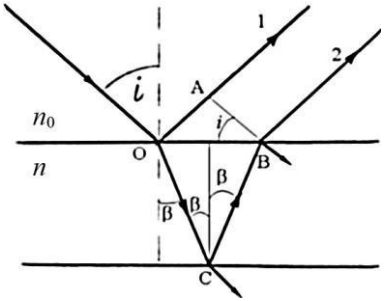


Рис. 6.9

6.4.1. При падінні світлової хвилі на тонку прозору плівку або пластину має місце відбивання від обох поверхонь плівки. В результаті виникають когерентні світлові хвилі, які зумовлюють інтерференцію світла.

Нехай на прозору плоскопаралельну плівку з показником заломлення n і товщиною d під кутом i падає плоска монохроматична хвиля (рис. 6.9). Падаюча хвиля частково відбивається від верхньої поверхні плівки (промінь 1). Заломлена хвиля, частково відбившись від нижньої поверхні плівки, на верхній поверхні знову частково відбивається, а заломлена хвиля (промінь 2) накладається на першу відбиту хвилю (промінь 1). Паралельні промені 1 і 2 когерентні між собою, вони дають локалізовану на нескінченності інтерференційну картину, яка визначається оптичною різницею ходу

$$\Delta = (OC + CB)n - \left(OAn_0 + \frac{\lambda_0}{2}\right). \quad (6.18)$$

Надалі будемо вважати показник заломлення середовища n_0 рівним одиниці. Доданок $\lambda_0/2$ зумовлений втратою півхвилі при відбиванні світла від більш густого середовища. При цьому фаза коливань світлового вектора змінюється на π. При відбиванні світлової хвилі менш густим середовищем (відбивання в точці C) такої зміни фази не відбувається.

З рис. 6.9 видно, що $OC = CB = \dfrac{d}{\cos\beta}$, $OA = OB\sin i = 2d \cdot tg\beta \cdot \sin i$.

Згідно із законом заломлення $\sin i = n\sin\beta$, тому $OA = 2dn\dfrac{\sin^2\beta}{\cos\beta}$.

Підставляючи OC, CB, і OA в (6.18), отримаємо для оптичної різниці ходу вираз

$$\Delta = 2dn\cdot\cos\beta - \frac{\lambda_0}{2},$$

Національний університет
та природокористування

або через кут падіння

$$\Delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i} - \frac{\lambda_0}{2}.$$

На екрані (при використанні збирної лінзи) буде спостерігатись максимум, якщо

$$2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i} - \frac{\lambda_0}{2} = m\lambda, \quad (m = 0,1,2,\ldots), \quad (6.19)$$

і мінімум, якщо

$$2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i} - \frac{\lambda_0}{2} = (m+1)\lambda, \quad (m = 0,1,2,\ldots). \quad (6.20)$$

Оптична різниця ходу для прохідного світла відрізняється від оптичної різниці ходу для відбитого світла на $\lambda_0/2$, бо прохідне світло не відбивається від оптично густішого середовища. Таким чином, максимумам інтерференції у відбитому світлі відповідають мінімуми інтерференції в прохідному світлі, і навпаки.

Інтерференція монохроматичного світла на плоскопаралельній пластинці визначається величинами λ_0, d, n, та i. Різним кутам падіння i відповідають різні точки інтерференційної картини (смуги). Інтерференційні смуги, які виникають внаслідок накладання хвиль, що падають на плоскопаралельну пластину під однаковими кутами, називають смугами однакового нахилу. Паралельні промені 1 і 2 (рис. 6.9) сходяться в нескінченості, тому кажуть, що смуги однакового нахилу локалізовані на нескінченості. Для їх спостереження використовують збирну лінзу і екран, розміщений у фокальній площині лінзи.

6.4.2. Розглянемо інтерференцію світла на клиноподібній плівці змінної товщини. Нехай на клин з кутом α між боковими гранями падає плоска хвиля (промені 1, 2 на рис. 6.10). Очевидно, що відбиті промені $1'$ і $1''$ від верхньої та нижньої поверхонь клина (так само як $2'$ і $2''$) когерентні між собою. Вони можуть інтерферувати. Якщо кут α малий, то оптична різниця ходу променів $1'$ і $1''$ визначається формулою

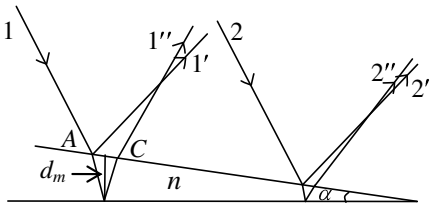


Рис. 6.10

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$\Delta = 2d_k\sqrt{n^2 - \sin^2 i} \; - \frac{\lambda_0}{2}, \qquad (6.21)$$

де d_m – середня товщина клина на ділянці AC. З рис. 6.10 видно, що інтерференційна картина локалізована біля поверхні клина. Система інтерференційних смуг виникає за рахунок відбивання від місць плівки, що мають однакову товщину. Ці смуги називаються смугами однакової товщини. Користуючись (6.21), можна визначити відстань Δy між двома сусідніми максимумами для випадку монохроматичного світла, нормального падіння променів і малого кута α:

$$\Delta y = \frac{\lambda_0}{2\alpha n}$$

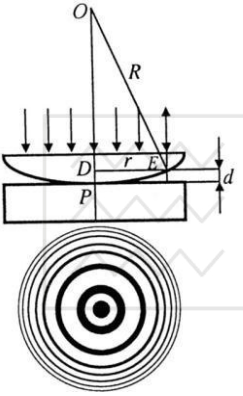


Рис. 6.11

Окремим випадком смуг однакової товщини є кільця Ньютона, що виникають у повітряному прошарку між плоскоопуклою лінзою великого радіуса кривизни R і плоскою скляною пластиною, які дотикаються в точці P (рис. 6.11). При накладанні відбитих хвиль виникають інтерференційні смуги однакової товщини, що мають при нормальному падінні світла вигляд концентричних кілець. В центрі картини міститься інтерференційний мінімум нульового порядку. Це зумовлено тим, що в точці P різниця ходу між когерентними променями визначається лише втратою півхвилі при відбиванні від поверхні пластини. Геометричним місцем точок однакової товщини повітряного прошарку між лінзою і пластиною є коло, тому інтерференційна картина спостерігається у вигляді концентричних темних і світлих кілець. У прохідному світлі спостерігається доповнююча картина – центральне коло світле, наступне кільце темне і т. д.

Знайдемо радіуси світлих і темних кілець. Нехай d – товщина повітряного прошарку на відстані r від точки P. Оптична різниця ходу Δ між променем, який відбився від пластини, і променем, який зазнав відбивання на межі поділу опукла поверхня лінзи – повітря, дорівнює

$$\Delta = 2d + \frac{\lambda_0}{2},$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

де доданок $\frac{\lambda_0}{2}$ враховує втрату півхвилі при відбиванні від більш густого середовища.

З трикутника *ODE* маємо

$$R^2 = (R-d)^2 + r^2 = R^2 - 2Rd + d^2 + r^2.$$

При $d << R$

$$r^2 = 2Rd \quad \text{і} \quad d = \frac{r^2}{2R}.$$

Тоді оптична різниця ходу променів

$$\Delta = \frac{r^2}{R} + \frac{\lambda_0}{2}.$$

Використовуючи умову максимуму ($\Delta = 2m\frac{\lambda_0}{2}$), знайдемо радіус світлого *m*–го кільця

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$r_m^{\max} = \sqrt{(2m-1)\frac{R\lambda_0}{2}}, \quad (m = 1,2,3,\ldots). \qquad (6.22)$$

Радіус *m*-го темного кільця

$$r_m^{\min} = \sqrt{m\lambda_0 R}, \quad (m = 0,1,2,\ldots). \qquad (6.23)$$

Очевидно, що в прохідному світлі формули (6.22) і (6.23) міняються місцями. Експериментальні вимірювання радіусів кілець Ньютона дозволяють розрахувати за цими формулами радіус плоскоопуклої лінзи *R*. Вивчаючи кільця Ньютона в цілому, можна давати оцінку якості обробки поверхонь лінзи та пластини. Слід зауважити, що при спостереженні інтерференції в білому світлі інтерференційна картина набуває райдужного забарвлення.

6.4.3. Явище інтерференції світла лежить в основі роботи численних оптичних приладів – інтерферометрів, за допомогою яких з великою точністю вимірюють довжину світлових хвиль, лінійні розміри тіл та їх зміну, а також вимірюють показники заломлення речовин.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

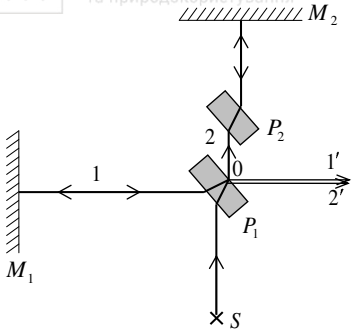


Рис. 6.12

Зокрема, на рис. 6.12 зображена схема інтерферометра Майкельсона. Світло від джерела S падає під кутом 45° на напівпрозору пластину P_1. Половина падаючого пучка світла відбивається в напрямку променя 1, половина проходить крізь пластину в напрямку променя 2. Пучок 1 відбивається дзеркалом M_1 і, повертаючись назад, знову проходить через пластину P_1 ($1'$). Пучок світла 2 йде до дзеркала M_2, відбивається від нього і, відбившись від пластини P_1, йде в напрямку променя $2'$. Оскільки промінь 1 проходить крізь пластину P_1 тричі, а промінь 2 лише один раз, то для компенсації різниці ходу на шляху променя 2 ставиться пластина P_2 (така ж сама як і P_1, але без напівпрозорого покриття).

Промені $1'$ і $2'$ когерентні і тому буде спостерігатися інтерференція. Оптична різниця ходу між ними

$$\Delta = 2n(\ell_1 - \ell_2),$$

де n – показник заломлення середовища, а ℓ_1 і ℓ_2 – відстані від точки O до дзеркал M_1 та M_2.

Інтерференційна картина залежить від положення дзеркал і геометрії пучка світла, який падає на прилад. Якщо падаючий пучок паралельний, а площини дзеркал M_1 і M_2 майже перпендикулярні, то в полі зору спостерігаються інтерференційні смуги рівної товщини. Зміщення картинки на одну смугу відповідає зміщенню одного із дзеркал на відстань $\frac{\lambda_0}{2}$. Таким чином, інтерферометр Майкельсона використовується для точних вимірювань довжини. Абсолютна похибка при таких вимірюваннях складає $\sim 10^{-11}$ (*м*). Інтерферометр Майкельсона також можна використати для вимірювання малих змін показників заломлення прозорих тіл в залежності від тиску, температури, домішок.

О.Смакула розробив спосіб просвітлення оптичних пристроїв для зменшення втрат світла, зумовлених його відбиванням від заломних поверхонь. У складних об'єктивах число відбивань велике, тому втрати світлового потоку досить значні. Щоб елементи оптичних

систем зробити просвітленими, їх поверхні покривають прозорими плівками, показник заломлення яких менший, ніж скла. При відбиванні світла на межі поділу повітря-плівка і плівка-скло виникає інтерференція відбитих хвиль. Товщину плівки d і показники заломлення скла n_c та плівки n підбирають так, щоб відбиті хвилі гасили одна одну. Для цього їх амплітуди повинні бути рівними, а оптична різниця ходу відповідати умові мінімуму. Амплітуди відбитих хвиль будуть рівними при $n = \sqrt{n_c}$. Умова мінімуму при нормальному падінні світла має вигляд

$$2dn = (2m+1)\frac{\lambda_0}{2}.$$

Для мінімальної товщини ($m = 0$)

$$d_{\min} \cdot n = \frac{\lambda_0}{4}.$$

Отже, при товщині плівки $d_{\min} = \frac{\lambda_0}{4 \cdot n}$ і показнику заломлення плівки $n = \sqrt{n_c}$ спостерігається гасіння відбитих хвиль. В цьому суть просвітлення оптики.

Національний університет водного господарства та природокористування

§6.5. Дифракція світла. Принцип Гюйгенса - Френеля. Метод зон Френеля

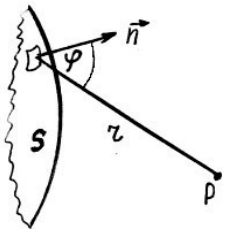


Рис.6.13

6.5.1. Дифракція світла – це сукупність явищ, які зумовлені хвильовою природою світла і спостерігаються в середовищах з різкими неоднорідностями (наприклад, при проходженні світла через отвори, поблизу границь непрозорих тіл і т.п.). Дифракція, зокрема, приводить до огинання світловими хвилями перешкод і проникання світла в область геометричної тіні. Для спостереження дифракції необхідно, щоб розміри перешкод були співмірні з довжиною хвилі світла.

Проникнення світла в область геометричної тіні пояснює принцип Гюйгенса: кожна точка фронту хвилі є джерелом вторинної сферичної хвилі; положення фронту хвилі в наступний момент визначається огинаючою фронтів усіх вторинних хвиль. Принцип Гюйгенса не дозволяє знайти інтенсивність дифрагованої хвилі. Цей недолік усунув Френель, який доповнив принцип Гюйгенса уявленням про інтерференцію вторинних хвиль.

Нехай S (рис.6.13) – хвильова поверхня світла, яке поширюється від деякого джерела. Кожен елемент поверхні служить джерелом вторинної хвилі. При цьому вважатиметься, що вторинні хвилі від усіх елементів – когерентні. Від кожного елемента поверхні dS в точку P приходить коливання

$$dE = K(\varphi)\frac{A_0 dS}{r}\cos(\omega t - kr + \alpha_0), \qquad (6.24)$$

Тут A_0, $(\omega t + \alpha_0)$ – амплітуда і фаза коливання в місці знаходження хвильової поверхні S, k – хвильове число, r – відстань від елемента dS до точки P. Коефіцієнт $K(\varphi)$ залежить від орієнтації елемента dS відносно r. Результуюче коливання в точці P, згідно з Френелем, є суперпозицією коливань усієї хвильової поверхні S:

$$E = \int_S K(\varphi)\frac{A_0}{r}\cos(\omega t - kr + \alpha_0)\,dS. \qquad (6.25)$$

Формула (6.25) є аналітичним виразом принципу Гюйгенса-Френеля.

6.5.2. В ряді дифракційних задач, що мають осьову симетрію, розрахунок інтерференції вторинних хвиль спрощується за допомогою розбиття фронту хвилі на кільцеві зони Френеля. Розбиття на зони проводиться таким чином, що оптична різниця ходу від відповідних точок кожної пари сусідніх зон до точки спостереження Р дорівнює $\lambda/2$. Вторинні хвилі від відповідних точок двох сусідніх зон приходять в точку P у протифазі і послаблюють одна одну при накладанні (рис.6.14).

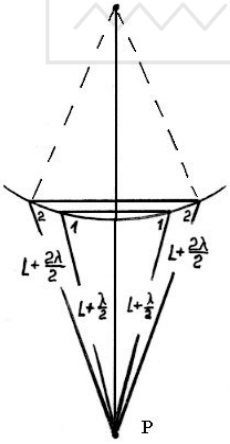


Рис.6.14

Нехай $a_1, a_2, a_3, \ldots a_N$ – величини результуючих амплітуд хвиль, які приходять в точку P від кожної зони. Сумарна амплітуда в точці P від усього фронту буде дорівнювати

$$A = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots \pm a_N. \qquad (6.26)$$

де "+" відповідає непарному числу зон, а знак "–" – парному.

За рахунок збільшення кута нахилу φ з ростом номера зони і відстані до точки Р, амплітуди хвиль монотонно зменшуються $a_1 > a_2 > a_3 > \ldots > a_N$. Можна вважати, що

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2},\ a_4 = \frac{a_3 + a_5}{2},\ \ldots \qquad (6.27)$$

Тепер результуючу амплітуду A можна записати у вигляді

$$A = \frac{a_1}{2} + \left(\frac{a_1}{2} - a_2 + \frac{a_3}{2} \right) + \left(\frac{a_3}{2} - a_4 + \frac{a_5}{2} \right) + \ldots \pm \frac{a_N}{2}.$$

Очевидно, що вирази в дужках дорівнюють практично нулю; тоді

$$A = \frac{a_1}{2} - \frac{a_N}{2} \qquad (6.28)$$

для парного числа зон Френеля. Результуюча амплітуда при цьому мінімальна, і в точці P буде мінімум освітленості. Якщо ж N – непарне, то

$$A = \frac{a_1}{2} + \frac{a_N}{2}, \qquad (6.29)$$

і в точці P спостерігається максимум освітленості. Для повністю відкритої хвильової поверхні $N \to \infty$ і $a_N = 0$, тому $A = a_1/2$, тобто дія всієї хвильової поверхні еквівалентна дії половини центральної зони Френеля.

Якщо дифракція світла відбувається на круглому непрозорому диску, який закриває N перших зон Френеля, то результуюча амплітуда в точці P буде визначатися величиною

$$A = \frac{a_{N+1}}{2}. \qquad (6.30)$$

Дифракційна картина у цьому випадку має вигляд концентричних світлих і темних кілець. В центрі картини при довільному N (парному чи непарному) спостерігається світла пляма (пляма Пуасона). При збільшенні розмірів диску величина амплітуди a_{N+1} буде зменшуватись. Врешті-решт при досить великих розмірах диску $N \to \infty$ і $a_{N+1} \to 0$. При цьому в точці P буде темна пляма – геометрична тінь.

Таким чином, закони геометричної оптики можна застосовувати у тих випадках, коли розміри перешкод і отворів великі порівняно з довжиною хвилі світла.

§6.6. Дифракція Фраунгофера

Дифракцією Фраунгофера називається дифракція плоских хвиль (паралельних променів). Дифракція Фраунгофера має більше

практичне значення, ніж дифракція Френеля (дифракція сферичних хвиль).

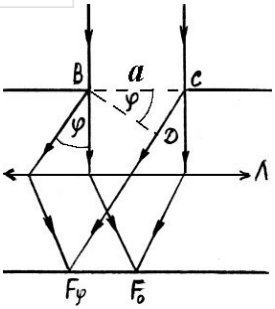


Рис.6.15

Розглянемо довгу прямокутну щілину *BC* шириною *a*, на яку нормально падає паралельний пучок монохроматичного світла (рис.6.15). Згідно з принципом Гюйгенса-Френеля, точки щілини є когерентними вторинними джерелами, що породжують коливання в одній фазі (площина щілини співпадає з фронтом хвилі).

За допомогою лінзи *Л* на екрані *E* спостерігається дифракційна картина, яка є системою максимумів і мінімумів. Знайдемо умови спостереження максимумів і мінімумів. Для цього розіб'ємо фронт хвилі *BC* на зони Френеля таким чином, щоб оптична різниця ходу від країв сусідніх зон у певному напрямку поширення дифрагованої хвилі під кутом дифракції φ складала половину довжини хвилі $\frac{\lambda}{2}$. З рис.6.15 видно, що ширина зони Френеля дорівнює $\frac{\lambda}{2\sin\varphi}$.

Якщо число зон парне, то

$$a\sin\varphi = \pm 2m\frac{\lambda}{2}, \quad (m = 1,2,3,\ldots) \qquad (6.31)$$

і під кутом φ спостерігається дифракційний мінімум. Коливання від відповідних точок сусідніх зон у точці спостереження відбуваються у протифазі, тому випромінювання від сусідніх зон в цілому взаємно компенсуються.

Якщо число зон непарне, то

$$a\sin\varphi = \pm(2m+1)\frac{\lambda}{2}, \quad (m = 1,2,3,\ldots) \qquad (6.32)$$

то спостерігається дифракційний максимум, який відповідає дії однієї нескомпенсованої зони Френеля. Величина *m* називається порядком дифракційного максимуму (мінімуму).

Амплітуда хвилі в точці спостереження одержується на основі принципу Гюйгенса-Френеля:

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$A(\varphi) = A_0 \frac{\sin\left(\frac{\pi a}{\lambda}\sin\varphi\right)}{\frac{\pi a}{\lambda}\sin\varphi}, \qquad (6.33)$$

де A_0 – амплітуда в центрі дифракційної картини при $\varphi = 0$.

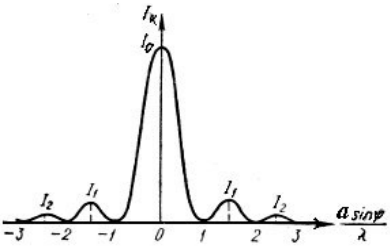


Рис. 6.16

Розподіл інтенсивностей $\sim A^2$:

$$I(\varphi) = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{\pi a}{\lambda}\sin\varphi\right)}{\left(\frac{\pi a}{\lambda}\sin\varphi\right)^2}. \qquad (6.34)$$

Цей розподіл показаний на рис. 6.16.

Перейдемо до дифракції на одновимірній дифракційній решітці, що є системою N однакових паралельних щілин шириною a, розміщених на однакових відстанях b. Величина $d = a + b$ називається періодом решітки. Сучасна дифракційна решітка має 1200 і більше щілин (штрихів) на 1мм.

Дифракційна картина після решітки складніша порівняно з картиною від однієї щілини. Це зумовлене тим, що відбувається інтерференція хвиль, які йдуть від різних щілин решітки, тому має місце підсилення максимумів і їх звуження.

Якщо світло падає нормально на решітку, то виконуються такі умови:

для головних максимумів: $d\sin\varphi = \pm m\lambda$, $(m = 0,1,2,\ldots)$; (6.35)

для головних мінімумів: $a\sin\varphi = \pm n\lambda$, $(n = 1,2,3,\ldots)$; (6.36)

для додаткових мінімумів: $$d\sin\varphi = \pm\frac{k\lambda}{N}, \qquad (6.37)$$

(k–довільні цілі додатні числа, крім 0, N, $2N$, $3N$, …).

Розподіл інтенсивності на екрані спостереження:

$$I = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{\pi a}{\lambda}\sin\varphi\right)\cdot\sin^2\left(\frac{\pi N d}{\lambda}\sin\varphi\right)}{\left(\frac{\pi a}{\lambda}\sin\varphi\right)^2\cdot\sin^2\left(\frac{\pi d}{\lambda}\sin\varphi\right)}, \qquad (6.38)$$

Національний університет
та природокористування

де I_0 – інтенсивність в напрямку $\varphi = 0$ для однієї щілини. В головних максимумах інтенсивність світла в N^2 разів більша від інтенсивності відповідних максимумів дифракційної картини від однієї щілини. При великому значенні *N* вторинні максимуми майже непомітні на екрані, їх інтенсивність не більша 5% від інтенсивності головного максимуму.

На рис.6.17 показана дифракційна картина після дифракційної решітки в білому $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ світлі (вторинні максимуми не зображені). З умови головних максимумів випливає, що для всіх порядків, крім *m* = 0, біле світло розкладається в спектр. Тому дифракційна решітка використовується як диспергуючий елемент в спектрометрах.

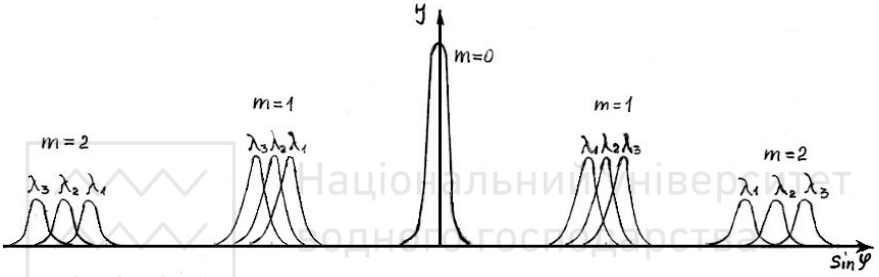


Рис.6.17

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Важливою характеристикою оптичних приладів є їхня роздільна здатність. Згідно з критерієм Релея, зображення двох близьких точок можна вважати розділеними, якщо центральний дифракційний максимум від однієї точки співпадає з першим дифракційним мінімумом для другої точки.

Для круглого отвору роздільна здатність

$$R = \frac{D}{1{,}22\lambda}, \tag{6.39}$$

де *D* – діаметр отвору, λ – довжина хвилі світла.

Мірою роздільної здатності дифракційної решітки (спектрального приладу) прийнято вважати відношення довжини хвилі λ, біля якої виконується вимірювання, до мінімального розділеного інтервалу $\delta\lambda$, тобто $R = \frac{\lambda}{\delta\lambda}$. Користуючись критерієм Релея, можна показати, що

$$R = m \cdot N, \tag{6.40}$$

де *m* – порядок спектру, *N* – кількість щілин дифракційної решітки.

Національний університет
водного господарства

§6.7. Дифракція рентгенівських променів

Відстань між атомами в кристалі ($\sim 10^{-10}$ *м*) співмірна з довжиною хвилі рентгенівського випромінювання, тому кристалічна решітка може служити просторовою дифракційною решіткою для рентгенівських променів. Якщо на кристал спрямувати потік рентгенівського випромінювання від рентгенівської трубки з неперервним спектром, то для даного кристалу знайдуться промені з такою довжиною хвилі λ, що умови дифракції будуть виконуватись.

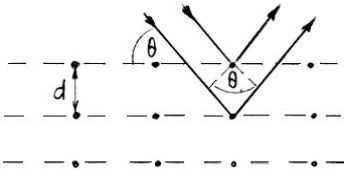


Рис.6.18

Розрахунок дифракційної картини від кристалічної решітки можна провести наступним простим способом. Проведемо через вузли кристалічної решітки паралельні рівновіддалені площини (атомні площини). Якщо падаюча на кристал хвиля – плоска, то і огинаюча вторинних хвиль, які породжені атомами даного атомного шару, також буде площиною. Плоскі вторинні хвилі, відбиті від різних атомних площин, – когерентні і будуть давати інтерференційну картину. При цьому, як і у випадку дифракційної решітки, вторинні хвилі будуть практично гасити одна одну у всіх напрямках, крім тих, для яких різниця ходу між сусідніми хвилями буде кратною λ.

З рис. 6.18 видно, що різниця ходу для хвиль, які відбились від сусідніх атомних площин, дорівнює $2d\sin\theta$, де d – період кристалічної решітки, θ – кут ковзання падаючих променів. Напрямки, в яких спостерігаються дифракційні максимуми, визначаються умовою Вульфа-Брега

$$2d\sin\theta = m\lambda, \quad (m = 1,2,3,\ldots). \qquad (6.41)$$

Наявність багатьох атомних площин призводить лише до того, що максимуми інтенсивностей стають більш гострими, як і при збільшенні числа щілин дифракційної решітки.

Дифракція рентгенівських променів від кристалів має два основних практичних застосування. Вона використовується для визначення спектрального складу рентгенівського випромінювання (рентгенівська спектроскопія). Визначаючи напрямки дифракційних максимумів досліджуваного рентгенівського випромінювання від кристалів з відомою структурою, можна обчислити (за формулою 6.41) довжини хвиль.

Друге практичне використання – вивчення структури кристалів (рентгеноструктурний аналіз). У цьому випадку за відомим спектральним складом падаючого випромінювання знаходять міжатомні відстані в кристалі. Існують різні методики рентгеноструктурного аналізу (метод Лауе, метод Дебая).

§6.8. Поляризація світла. Типи і способи поляризації

6.8.1. Світлова хвиля складається з багатьох цугів електромагнітних хвиль, що випромінюються окремими атомами. Площина коливань (площина коливань світлового вектора $\vec{E}$) для кожного цугу орієнтована випадково. Тому в природному світлі коливання різних напрямків швидко і хаотично змінюють одне одного. Світло, в якому напрямки коливань якимось чином впорядковані, називається поляризованим. Якщо коливання світлового вектора відбувається в одній площині, світло називають плоско- (або лінійно-) поляризованим. Площину, перпендикулярну до площини коливань, називають площиною поляризації (рис.6.19).

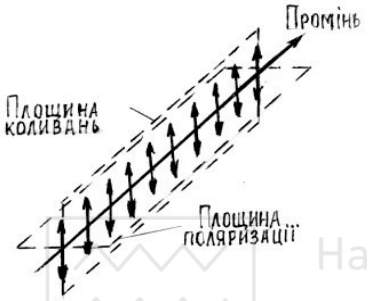


Рис.6.19

Якщо кінець світлового вектора описує еліпс, то світло називається еліптично-поляризованим. Таке світло можна представити як суму двох когерентних плоскополяризованих хвиль, площини коливань яких взаємно перпендикулярні. Проекції світлових векторів на відповідні осі змінюються по закону

$$\left.\begin{aligned} E_x &= A_1 \cos \omega t \\ E_y &= A_2 \cos(\omega t + \alpha) \end{aligned}\right\}. \qquad (6.42)$$

При різниці фаз $\alpha = \pi$ еліпс вироджується в пряму – маємо плоскополяризоване світло. При різниці фаз $\alpha = \pi/2$ і рівності амплітуд еліпс перетворюється в коло. В цьому випадку маємо циркулярно-поляризоване світло (колова поляризація). В залежності від напрямку обертання світлового вектора розрізняють праву і ліву еліптичну і колову поляризації.

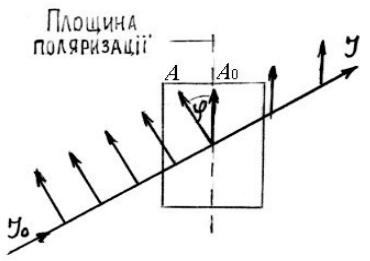


Рис.6.20

Плоскополяризоване світло можна отримати з природного за допомогою поляризаторів. Ці прилади вільно пропускають коливання, паралельні до площини поляризатора і повністю затримують коливання, перпендикулярні до цієї площини.

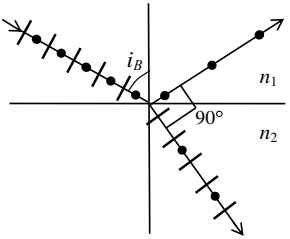


Рис.6.21

Нехай на поляризатор падає плоскополяризоване світло з амплітудою A_0 і інтенсивністю I_0 (мал.6.20). Крізь прилад пройде складова коливання з амплітудою $A = A_0 \cos\varphi$, де φ – кут між площиною коливань падаючого світла і площиною поляризатора. Інтенсивність світла, що пройшло через поляризатор,

$$I = I_0 \cos^2 \varphi . \qquad (6.43)$$

Це співвідношення носить назву закону Малюса.

Поляризоване світло можна також отримати при відбиванні світла на межі поділу двох середовищ. При куті падіння, який задовольняє умові

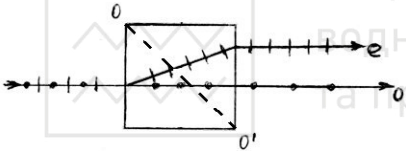


Рис.6.22

$$\mathrm{tg} i_B = n_{21} = \frac{n_2}{n_1}, \qquad (6.44)$$

(закон Брюстера) відбитий промінь – повністю поляризований. Коливання у відбитому промені відбуваються у площині, перпендикулярній до площини падіння. Ступінь поляризації заломленого променя при куті падіння i_B – максимальний, однак цей промінь лишається поляризованим лише частково (рис.6.21).

6.8.2. При проходженні світла через анізотропні кристали відбувається явище подвійного променезаломлення. Падаючий на кристал природний промінь ділиться на два плоскополяризовані – звичайний (0) і незвичайний (*e*) (рис. 6.22). Звичайний промінь підкоряється закону заломлення, незвичайний – ні; для нього показник заломлення різний в різних напрямках.

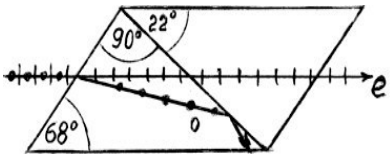


Рис.6.23

В кожному анізотропному кристалі існує напрямок (або два), вздовж якого подвійне

променезаломлення не відбувається, а звичайний і незвичайний промені поширюються з однаковою швидкістю. Такий напрямок називається оптичною віссю кристалу. Існують одноосні кристали (кварц, ісландський шпат) і двоосні (слюда, гіпс). Довільна площина, яка проходить через оптичну вісь, називається головною площиною кристалу. На рис.6.22 $00'$ – оптична вісь, тому площина малюнку є головною площиною. Якщо напрямок променя співпадає з оптичною віссю, то подвійного променезаломлення немає.

Подвійне променезаломлення лежить в основі роботи поляризаторів: поляризаційних призм і поляроїдів. Поляризаційна призма Ніколя (ніколь) являє собою призму з ісландського шпату, розрізану по діагоналі і склеєну канадським бальзамом. Показник заломлення канадського бальзаму n лежить між показниками заломлення n_0 і n_e звичайного і незвичайного променів в кристалі $(n_0 > n > n_e)$. Кут падіння такий, що звичайний промінь зазнає на прошарку клею повного внутрішнього відбивання і не проходить крізь призму. З рис.6.23 видно, що призма Ніколя пропускає лише незвичайний лінійнополяризований промінь.

В деяких кристалах один з променів поглинається сильніше іншого. Це явище називається дихроїзмом. Так, наприклад, в кристалі турмаліну звичайний промінь на довжині $1мм$ поглинається практично повністю. Таку ж властивість має целулоїдна плівка–поляроїд, в яку введена велика кількість однаково орієнтованих кристалів сульфату йодистого хініну.

§6.9. Інтерференція поляризованих променів. Обертання площини поляризації

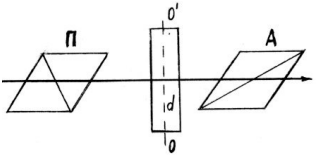


Рис.6.24

6.9.1. Звичайна і незвичайна хвилі, які поширюються в одноосному кристалі при падінні на нього природного світла, – некогерентні. Якщо ж на одноосний кристал падає лінійнополяризоване світло, то звичайна і незвичайна хвилі в кристалі будуть когерентними. Нехай плоскопаралельна пластинка, яка вирізана з одноосного кристалу паралельно його оптичній осі, розміщена між двома ніколями (рис.6.24). На виході з пластинки між звичайною і незвичайною хвилями виникає різниця фаз

Національний університет водного господарства та природокористування

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(n_0 - n_e)d\,. \qquad (6.45)$$

Хоча ці хвилі після пластинки – когерентні, однак вони не можуть давати інтерференцію через те, що вони поляризовані у взаємно перпендикулярних площинах. Для спостереження інтерференції цих хвиль необхідно за допомогою аналізатора виділити з них складові, які поляризовані в одній площині і тому здатні інтерферувати. Таким чином, якщо $\Delta\varphi = 2k\pi$, $k = 0,1,2,\ldots$, спостерігається максимум інтенсивності поляризованого світла. Якщо $\Delta\varphi = (2k+1)\pi$, спостерігається мінімум інтенсивності поляризованого світла.

Інтерференцію поляризованих променів спостерігають при штучній анізотропії, яка може бути зумовлена деформацією або електричним полем. Зеебек і Брюстер (1816) відкрили явище фотопружності, яке полягає в тому, що оптично ізотропне тверде тіло під впливом механічної деформації стає оптично анізотропним (тіло набуває властивостей одноосного кристалу, вісь якого направлена вздовж напрямку стиску або розтягу). Різниця показників заломлення $n_0 - n_e \sim \sigma$, де σ – нормальна напруга. Таким чином, помістивши деформоване тіло між поляризатором і аналізатором, можна спостерігати інтерференційну картину. По вигляду інтерференційних смуг можна судити про розподіл напруг в досліджуваному тілі (кожна ізохромата проходить через точки, в яких σ однакові). На рис. 6.25 показано вигляд деформованої пластмасової моделі між двома схрещеними поляризаторами. Оптичний метод вивчення розподілу внутрішніх напруг на прозорих моделях деталей і конструкцій широко використовується в сучасній техніці і будівництві.

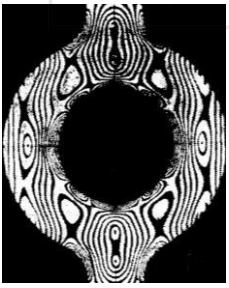


Рис.6.25

Штучна анізотропія, викликана електричним полем, була відкрита Кером (1875) і носить назву ефекту Кера. Схема його спостереження зображена на рис.6.26, де *П* і *А* – поляризатор і схрещений з ним аналізатор, *К* – комірка Кера (кювета з рідиною і плоским конденсатором). Під дією однорідного електричного поля ізотропна рідина набуває властивостей

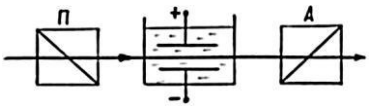


Рис.6.26

Національний університет
та природокористування
одноосного кристалу. При цьому

$$n_0 - n_e = B\lambda_0 E^2, \tag{6.46}$$

де λ_0 –довжина хвилі світла у вакуумі, B – стала Кера, E – напруженість електричного поля.

Анізотропія пояснюється тим, що рідина в електричному полі поляризується і набуває анізотропних властивостей. Орієнтація і дезорієнтація молекул відбувається на протязі 10^{-9} секунди, тому при вимиканні електричного поля практично миттєво зникає світло після аналізатора, тобто комірка Кера працює як безінерційний світловий перемикач.

6.9.2. При проходженні лінійно-поляризованого світла через оптично активні речовини (кварц, розчин цукру) площина поляризації світла обертається навколо напрямку поширення променя. Кут повороту φ пропорційний до шляху ℓ, пройденому променем в речовині:

$$\varphi = \alpha\ell. \tag{6.47}$$

Коефіцієнт α називають постійною обертання.

В розчинах кут повороту площини поляризації пропорційний до шляху променя в розчині ℓ і концентрації розчину C:

$$\varphi = \alpha' C\ell, \tag{6.48}$$

де α' – питома постійна обертання.

Залежність (6.48) використовується для вимірювання невідомої концентрації C_x за відомою концентрацією розчину C_0:

$$C_x = C_0 \frac{\varphi_x}{\varphi_0}, \tag{6.49}$$

де φ_x – кут повороту для невідомої концентрації, φ_0 – кут повороту для відомої концентрації.

Явище оптичної активності покладене в основу роботи цукрометрів – приладів для вимірювання концентрації розчинів.

§6.10. Дисперсія світла

Дисперсією світла називається залежність абсолютного показника заломлення речовини n від частоти світла ω або від довжини хвилі λ, тобто

$$n = f(\lambda) = \varphi(\omega). \tag{6.50}$$

Це явище спостерігається під час взаємодії світла з речовиною. Результатом дисперсії є розкладання в спектр білого світла, яке проходить через прозору скляну призму.

Якщо $\frac{dn}{d\omega} > 0$, то дисперсія світла в середовищі називається нормальною, тобто зі збільшенням частоти хвилі показник заломлення зростає. У випадку, коли $\frac{dn}{d\omega} < 0$, дисперсія світла називається аномальною (рис. 6.27).

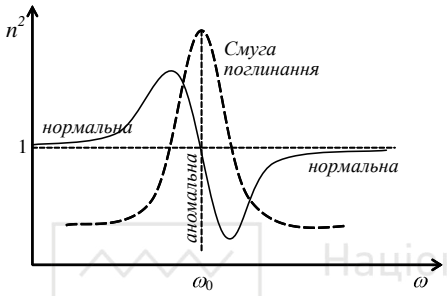


Рис.6.27

Нормальна дисперсія світла спостерігається поза смугами або лініями поглинання, аномальна – в межах смуг або ліній поглинання. Так, для скла смуги поглинання розміщені в ультрафіолетовій та інфрачервоній частинах спектру.

Класична електронна теорія пояснює дисперсію як результат взаємодії електромагнітних хвиль з електронами речовини. Нехай на прозорий діелектрик падає світлова хвиля. Тоді на його зв'язані електрони (e) з боку електричної компоненти електромагнітного поля діє сила

$$F = -eE = -eE_0 \cos \omega t, \qquad (6.51)$$

де E_0 – амплітудне значення електричної компоненти електромагнітної хвилі. Внаслідок взаємодії електронів з атомами виникає квазіпружна повертаючи сила

$$F_n = -m\omega_0^2 x,$$

де m – маса електрона, ω_0 – його власна частота коливань, x – зміщення електрона.

Електрони діелектрика здійснюють вимушені коливання, що описуються диференціальним рівнянням

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -m\omega_0^2 x - eE_0 \cos \omega t.$$

Звідси знаходиться зміщення електрона під дією електричного поля світлової хвилі

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$x = -\frac{eE}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}. \qquad (6.52)$$

З курсу «Електрики» відомо, що діелектрична проникливість середовища під час поляризації діелектрика визначається за формулою

$$\varepsilon = 1 + \chi = 1 + \frac{P_e}{\varepsilon_0 E},$$

де χ – діелектрична сприйнятливість середовища; P_e – проекція вектора поляризації на напрям вектора напруженості електричного поля. З іншого боку, показник заломлення для прозорих середовищ ($\mu \approx 1$)

$$n = \sqrt{\varepsilon}.$$

Отже,

$$n^2 = 1 + \frac{P_e}{\varepsilon_0 E}.$$

Для діелектриків, атоми яких мають лише один "оптичний" електрон, проекція вектора поляризації (поляризованість)

$$P_e = n_0 \cdot p_e = -n_0 e x,$$

де n_0 – концентрація атомів; p_e – наведений дипольний електричний момент атома.

Знак мінус показує, що вектор P_e напрямлений протилежно до зміщення x. Тоді показник заломлення діелектрика

$$n^2 = 1 - \frac{n_0 e x}{\varepsilon_0 E}. \qquad (6.53)$$

Враховуючи (6.52), дістанемо

$$n^2 = 1 + \frac{n_0 e^2}{m\varepsilon_0(\omega_0^2 - \omega^2)}. \qquad (6.54)$$

Необмежене зростання n при $\omega \to \omega_0$ фізичного змісту не має і практично нездійсненне. Такий результат дістали тому, що не взяли до уваги втрати енергії на випромінювання вторинних електромагнітних хвиль, співудари між атомами, що випромінюють. Наближено ці втрати можна врахувати, коли припустити, що на кожний електрон діє сила опору, пропорційна до його швидкості:

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$F_{on} = -r\frac{dx}{dt},$$

де r – коефіцієнт опору. Тепер диференціальне рівняння вимушених коливань оптичного електрона набуває вигляду:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -2\beta\frac{dx}{dt} - \omega_0^2 x - \frac{eE_0}{m}\cos\omega t\,.$$

Розв'язок цього рівняння веде до такого виразу для показника заломлення:

$$n^2 = 1 + \frac{n_0 e^2}{2m\varepsilon_0}\cdot\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}. \qquad (6.55)$$

Ця залежність описує криву дисперсії, зображену на рис. 6.27. Коефіцієнт згасання значно менший за ω. Тому згасання істотно впливає на залежність n від ω лише в області частот ω, близьких до ω_0. Для областей, далеких від ω_0, формули (6.54) і (6.55) еквівалентні, бо

$$4\beta^2\omega^2 << (\omega_0^2 - \omega^2)^2.$$

На явищі нормальної дисперсії (вдалині від резонансної чистоти ω_0) ґрунтується робота призмових спектрометрів, за допомогою яких вивчають спектральний склад світла. З іншого боку, поблизу резонансної частоти стають особливо інтенсивними вимушені коливання електронів. Тому в області резонансної частоти спостерігають смугу поглинання (рис. 6.27, пунктирна крива).

§6.11. Квантова природа випромінювання. Теплове випромінювання

Нагріті тіла випромінюють електромагнітні хвилі. Це відбувається внаслідок перетворення енергії теплового руху молекул тіла в енергію випромінювання. Теплове випромінювання перебуває в рівновазі з випромінюючим тілом, тобто розподіл енергії між тілом і випромінюванням лишається незмінним для кожної довжини хвилі. Таке випромінювання називається рівноважним.

Теплове випромінювання – єдиний вид випромінювання, яке може знаходитись в рівновазі з випромінюючими тілами. Рівноважність теплового випромінювання зумовлена тим, що його інтенсивність змінюється при зміні температури тіла. Нехай рівновага між світним тілом і випромінюванням порушена, і тіло випромінює енергії більше,

ніж поглинає (або навпаки). Тоді температура його буде зменшуватись (або збільшуватись), доки не встановиться рівновага. Таким чином, порушення рівноваги у системі тіло-випромінювання викликає виникнення процесів, що відновлюють рівновагу. Такий рівноважний стан є стійким. Рівноважне випромінювання однорідне і неполяризоване, напрямки його поширення рівноймовірні, а спектр суцільний.

Розглянемо закони теплового випромінювання. Введемо поняття випромінювальної здатності $E_{\nu,T}$ – як кількості енергії, яка випромінюється одиницею площі поверхні тіла за одиницю часу в одиничному інтервалі частот. Енергетична світність або інтегральна випромінювальна здатність E_T – це кількість енергії, яка випромінюється одиницею площі за одиницю часу, у всьому спектральному діапазоні, тобто

$$E_T = \frac{W}{S \cdot t} = \int_0^\infty E_{\nu,T} d\nu. \qquad (6.55)$$

Поглинальна здатність тіла $A_{\nu,T}$ визначає долю енергії $dW_{пад}$ падаючих електромагнітних хвиль за одиницю часу на одиницю площі поверхні тіла в діапазоні частот від ν до $\nu + d\nu$, яка поглинається тілом, тобто

$$A_{\nu,T} = \frac{dW_{погл}}{dW_{пад}}. \qquad (6.56)$$

Тіло називається абсолютно чорним, якщо воно при будь-якій температурі повністю поглинає всі падаючі на нього електромагнітні хвилі, тобто

$$A_{\nu,T} = 1. \qquad (6.57)$$

Для довільної частоти і температури відношення випромінювальної здатності тіла до його поглинальної здатності однакове для всіх тіл і дорівнює випромінювальній здатності $\mathsf{E}_{\nu,T}$ абсолютно чорного тіла:

$$\frac{E_{\nu,T}}{A_{\nu,T}} = \mathsf{E}_{\nu,T}. \qquad (6.58)$$

Це є закон Кірхгофа в диференціальній формі.

Інтегральна випромінювальна здатність E_T абсолютно чорного тіла:

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$E_T = \int_0^\infty E_{\nu,T}\, d\nu . \qquad (6.59)$$

Макс Планк у 1900р. на основі квантових уявлень про процеси випромінювання теоретично обґрунтував спектральні закономірності теплового випромінювання, висунувши гіпотезу, згідно з якою атоми і молекули випромінюють енергію квантами. Енергія кванта випромінювання пропорційна до частоти:

$$\varepsilon_\phi = h\nu, \left(\varepsilon_\phi = \frac{hc}{\lambda}\right), \qquad (6.60)$$

де $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж·с – стала Планка.

Формула Планка для спектрального розподілу випромінювальної здатності абсолютно чорного тіла має вигляд:

$$E_{\nu,T} = \frac{2\pi\nu^2}{\tilde{n}^2} \cdot \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} . \qquad (6.61)$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

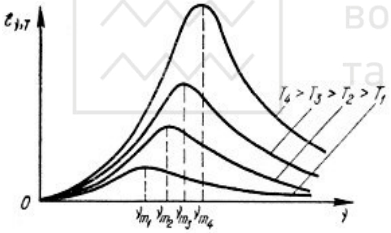


Рис. 6.28

На рис.6.28 зображені експериментальні залежності випромінювальної здатності абсолютно чорного тіла від частоти для різних температур. Обробка цих залежностей дозволили встановити експериментальні закони теплового випромінювання абсолютно чорного тіла: закон Стефана-Больцмана і закон зміщення Віна.

З формули Планка легко отримати ці закони.

Інтегральна випромінювальна здатність абсолютно чорного тіла

$$E_T = \int_0^\infty E_{\nu,T}\, d\nu = \int_0^\infty \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \cdot \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}\, d\nu .$$

Перейдемо до нової змінної

$x = \dfrac{h\nu}{kT}$, тоді $dx = \dfrac{h}{kT} d\nu$, $d\nu = \dfrac{kT}{h} dx$.

Звідси

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$E_T = \frac{2\pi k^4}{c^2 h^3} T^4 \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \sigma T^4,$$

де $\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15 c^2 h^3}$, оскільки $\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15}$.

Підрахунок дає: $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8} \frac{Вт}{м^2 К^4}$ – стала Стефана-Больцмана.

Отже, інтегральна випромінювальна здатність абсолютно чорного тіла пропорційна до четвертої степені абсолютної температури:

$$E_T = \sigma T^4. \qquad (6.62)$$

Як видно, формула Планка дає змогу не тільки встановити закон Стефана-Больцмана, але й обчислити сталу σ.

Досліджуючи формулу Планка на екстремум, знайдемо, що частота ν_m, при якій спостерігається максимум випромінювальної здатності абсолютно чорного тіла, пропорційна до температури: $\nu_m \sim T$. Перейшовши до відповідних довжин хвиль, отримаємо закон зміщення Віна

$$\lambda_m = \frac{b}{T}, \qquad (6.63)$$

де стала $b = 2{,}9 \cdot 10^{-3} м \cdot К$. Згідно з цим законом максимум випромінювальної здатності при зростанні температури тіла зміщується в короткохвильову ділянку спектра.

На законах Стефана-Больцмана і Віна базується робота пірометрів – приладів, які дозволяють вимірювати безконтактно високі температури.

§6.12. Фотоефект

Розрізняють зовнішній і внутрішній фотоефект. Внутрішній фотоефект спостерігається в напівпровідниках і полягає в тому, що під дією світла електрони відриваються від атомів, але залишаються всередині кристалу, в результаті чого збільшується провідність напівпровідника.

Зовнішній фотоефект – це явище виривання електронів з поверхні металу під дією світла. Зовнішній фотоефект був відкритий Герцем у 1887 р. і досліджений Столєтовим у 1888-89 рр. Схема дослідів Столєтова приведена на рис. 6.29. Ця схема дозволяє дослідити вольт-

амперну характеристику вакуумного фотоелемента – залежність фотоструму I від напруги U між електродами. Криві на рис. 6.29 відповідають двом різним освітленостям Φ катода. При збільшенні напруги все більша кількість вибитих електронів досягає анода, тому фотострум зростає. Максимальне значення фотоструму $I_н$ (струм насичення) відповідає таким значенням U, при яких усі електрони досягають анода. З воль-амперної характеристики видно, що при $U = 0$ фотострум не зникає. Електрони, вибиті світлом з катода, мають відмінну від нуля кінетичну енергію і можуть досягти анода без зовнішнього поля. Для припинення фотоструму необхідно прикласти затримуючу напругу $U_з$. При такій напрузі жоден з електронів не може досягнути анода. Отже, $\frac{mv^2}{2} = eU_з$, тобто вимірюючи $U_з$, можна знайти максимальне значення швидкості і кінетичної енергії фотоелектронів.

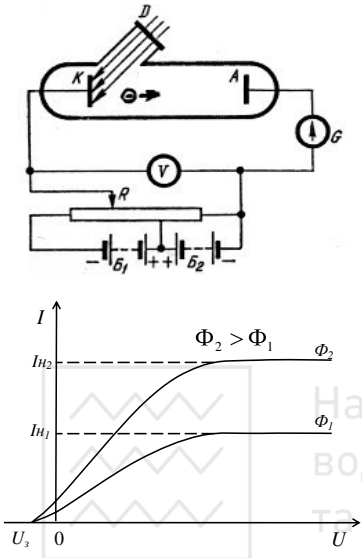


Рис. 6.29

Основні закономірності фотоефекту:

1. сила фотоструму насичення прямопропорційна до інтенсивності світла, яке падає на катод;
2. кінетична енергія вирваних електронів збільшується зі збільшенням частоти падаючого світла;
3. існує мінімальна частота, з якої починається фотоефект;
4. фотоефект – безінерційний.

Теоретичне пояснення фотоефекту дав Ейнштейн у 1905 р. Він використав гіпотезу Планка про квантову природу випромінювання світла і припустив, що енергія поглинутого кванта йде на роботу виходу електрона з метала і на надання електрону кінетичної енергії:

$$h\nu = A + \frac{mv^2}{2}. \qquad (6.64)$$

Це – рівняння Ейнштейна для фотоефекту. Воно дає можливість правильно пояснити всі закони фотоефекту. Збільшуючи світловий

потік даного спектрального складу, ми збільшуємо число квантів енергії, які падають на фотокатод. Це призводить до зростання кількості вирваних електронів, а, отже, і до зростання струму насичення (I закон фотоефекту).

Із (6.64) безпосередньо випливає, що максимальна кінетична енергія фотоелектрона лінійно зростає зі збільшення частоти падаючого випромінювання і не залежить від його інтенсивності, бо ні ν, ні A від інтенсивності світла не залежать (II закон фотоефекту).

З рівняння Ейнштейна також випливає, що найменша частота ν світла, під дією якого відбувається фотоефект, визначається з умови $h\nu_0 = A$; звідси

$$\nu_0 = \frac{A}{h}, \quad \left(\lambda_0 = \frac{ch}{A}\right). \tag{6.65}$$

Найменша частота ν_0 (найбільша довжина хвилі λ_0), при якій ще можливий фотоефект, є червоною межею фотоефекту (III закон фотоефекту). Ця частота залежить тільки від роботи виходу електрона, тобто від хімічної природи речовини і стану її поверхні.

§6.13. Тиск світла

Тиск світла можна пояснити з квантової точки зору. Кванти світла (фотони) мають імпульс

$$p = \frac{h\nu}{\tilde{n}} = \frac{h}{\lambda}. \tag{6.66}$$

При падінні фотонів на поверхню відбувається зміна імпульсу поверхні, що і визначає тиск світла.

Нехай на одиницю поверхні тіла за одиницю часу падає n фотонів. При цьому Rn – число відбитих фотонів (R – коефіцієнт відбивання), і $(1-R)\cdot n$ – число поглинутих фотонів. Тоді, за другим законом Ньютона, зміна імпульсу одиничної площадки за одиницю часу визначатиме тиск світла $\left(p = \frac{F}{S} = \frac{\Delta p}{s\Delta t}\right)$:

$$P = 2nR\frac{h\nu}{c} + (1-R)\mathrm{n}\frac{\mathrm{h}\nu}{\mathrm{c}} = n\frac{h\nu}{c}(1+R). \tag{6.67}$$

Враховуючи, що $I = nh\nu/c$ – інтенсивність світла, отримаємо

$$P = \frac{I}{c}(+R). \tag{6.68}$$

Національний університет
та природокористування

Для дзеркальної поверхні $R=1$, $P_{дз}=2I/c$, а для чорної $R=0$ $P_ч=I/c$. Таким чином, тиск на дзеркальну поверхню – вдвічі більший, ніж на чорну, що і спостерігав П.М. Лєбєдєв у своїх дослідах з вимірювання тиску світла.

§6.14. Ефект Комптона

Досліджуючи розсіяння рентгенівських променів в кристалах, Комптон (1923 р.) встановив, що в розсіяному випромінюванні, крім незміщеної компоненти з довжиною хвилі λ_0, існує зміщена компонента з довжиною хвилі $\lambda>\lambda_0$. При розсіянні легкими атомами (Li, Be, B) практично все розсіяне випромінювання має зміщену довжину хвилі. По мірі збільшення атомного номера все більша частина випромінювання розсіюється без зміни довжини хвилі.

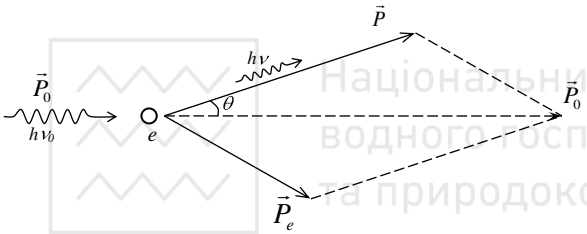


Рис. 6.30

Досліди Комптона показали, що різниця $\Delta\lambda=\lambda-\lambda_0$ не залежить від довжини хвилі λ_0 падаючого випромінювання і природи розсіючої речовини, а визначається лише величиною кута розсіяння Θ:

$$\Delta\lambda=2\lambda_c\sin^2\frac{\Theta}{2}, \qquad (6.69)$$

де стала величина $\lambda_c=2{,}43\cdot10^{-12}м$ – комптонівська довжина хвилі для електрона.

Ефект Комптона можна пояснити з квантової точки зору, як процес пружного розсіяння рентгенівських квантів на слабо зв'язаних з атомами електронах. Розглянемо пружне зіткнення рентгенівського кванта, який має імпульс $p_0=\frac{h\nu_0}{c}$ і енергію $\mathcal{E}_0=h\nu_0$, з майже вільним електроном, котрий перебуває у стані спокою (енергія спокою $w_0=m_0c^2$, m_0 – маса електрона). Квант, зітнувшись з електроном, передає йому частину своєї енергії та імпульсу. При цьому змінюється

напрямок його руху (квант розсіюється, рис. 6.30) Зменшення енергії фотона означає збільшення його довжини хвилі.

Нехай імпульс та енергія розсіяного фотона дорівнюють $p = \frac{h\nu}{c}$ і $\mathcal{E} = h\nu$. Електрон внаслідок взаємодії отримує імпульс $\vec{p}_e = m\vec{v}$ і енергію $W = mc^2 = \sqrt{p_e^2 + m_0^2 c^2}$.

При кожному такому зіткненні виконуються закони збереження енергії та імпульсу. Згідно із законом збереження енергії

$$m_0 c^2 + h\nu_0 = c\sqrt{p_e^2 + m_0^2 c^2} + h\nu .$$

Звідси

$$p_e^2 = \frac{h^2}{c^2}\left(\nu_0^2 + \nu^2 - 2\nu_0\nu\right) + 2\frac{h}{c}\left(\nu_0 - \nu\right)m_0 c . \quad (6.70)$$

Згідно із законом збереження імпульсу

$$\vec{p}_0 = \vec{p}_e + \vec{p} . \quad (6.71)$$

За теоремою косинусів для трикутника імпульсів рівняння (6.71) перепишеться у скалярному вигляді як

$$p_e^2 = \frac{h^2}{c^2}\left(\nu_0^2 + \nu^2 - 2\nu_0\nu\cos\theta\right). \quad (6.72)$$

Прирівнюючи праві частини рівнянь (6.70) і (6.72), знайдемо:

$$m_0 c\left(\nu_0 - \nu\right) = h\nu_0\nu\left(1 - \cos\theta\right).$$

Оскільки $\nu_0 = \frac{c}{\lambda_0}$, $\nu = \frac{c}{\lambda}$, то

$$\frac{c}{\lambda_0} - \frac{c}{\lambda} = \frac{h}{m_0 c^2}\frac{c}{\lambda_0}\frac{c}{\lambda}\left(1 - \cos\theta\right),$$

або

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \frac{h}{m_0 c}\left(1 - \cos\theta\right) = 2\lambda_c \sin^2\frac{\theta}{2} . \quad (6.73)$$

Формула (6.73) добре узгоджується з результатами експериментальних досліджень ефекту Комптона. При цьому знайдено вираз комптонівської довжини хвилі для довільної частинки, яка приймає участь у розсіюванні.

Таким чином, світло одночасно проявляє властивості неперервних електромагнітних хвиль (інтерференція, дифракція) і властивості дискретних фотонів (фотоефект, ефект Комптона). Воно проявляє

діалектичну єдність цих протилежних властивостей. У прояві хвильових і корпускулярних властивостей світла є закономірність: при малих довжинах хвиль більш чітко проявляються квантові властивості, і, навпаки, у довгохвильового випромінювання основну роль відіграють його хвильові характеристики. Можна зробити висновок, що корпускулярні і хвильові властивості світла не виключають, а, навпаки, взаємно доповнюють одна одну. Зв'язок між корпускулярними (імпульс фотона) і хвильовими (довжина хвилі) характеристиками світла забезпечується формулою

$$\lambda = \frac{h}{p}, \qquad (6.74)$$

де λ – довжина хвилі, p – імпульс фотона, h – стала Планка.

Квадрат амплітуди світлової хвилі в деякій точці простору є мірою імовірності попадання фотонів в цю точку. Корпускулярні властивості зумовлені тим, що енергія і імпульс випромінювання локалізовані в дискретних частинках – фотонах, хвильові – є статистичними закономірностями розподілу фотонів у просторі.

§6.15. Гальмівне рентгенівське випромінювання

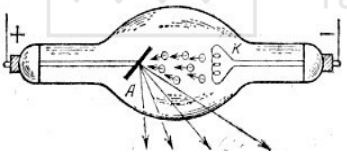


Рис.6.31

Рентгенівські промені ($\lambda = 0{,}001 - 10 нм$) виникають при бомбардуванні швидкими електронами твердих тіл. Такий процес реалізується в рентгенівських трубках. У найпростішому випадку це – двоелектродна вакуумна трубка (рис.6.31), катод K якої є джерелом електронів, що виникають внаслідок явища термоелектронної емісії. Анод A, виготовлений із важких металів (Cu, Fe, Co, W тощо), служить мішенню.

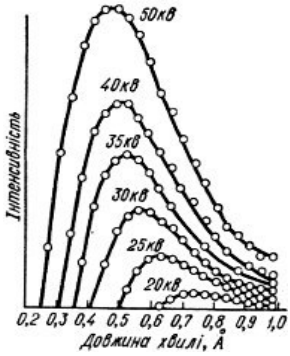


Рис. 6.32

Якщо між катодом і анодом прикладена велика напруга U, то електрони розганяються до енергій $eU = (10^4 - 10^5)\ eB$. Попадаючи в речовину анода, електрони сильно гальмуються, втрачають енергію і тому випромінюють електромагнітні хвилі – гальмівне рентгенівське випромінювання.

Відомо, що заряд, який рухається прискорено, є джерелом електромагнітних хвиль із неперервним спектром. Спектр гальмівного рентгенівського випромінювання (рис.6.32) хоч і суцільний, але обмежений з боку малих довжин хвиль так званою короткохвильовою межею $\lambda_{\min}$. З ростом прискорюючої напруги U $\lambda_{\min}$ зменшується. Класична електродинаміка не пояснює появи короткохвильової межі гальмівного випромінювання. Її існування безпосередньо випливає з квантової природи випромінювання. Якщо врахувати, що максимальна енергія рентгенівського кванта не може перевищувати кінетичної енергії електрона, то

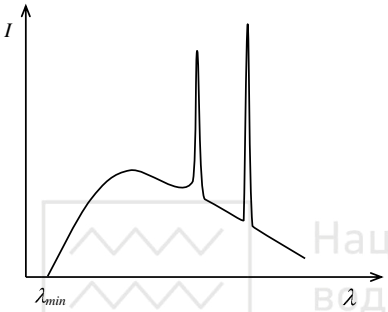


Рис. 6.33

$$h\nu_{\max} = eU \,. \qquad (6.75)$$

Звідси

$$\lambda_{\min} = \frac{hc}{eU} \,, \qquad (6.76)$$

що відповідає експериментальним вимірюванням. Оскільки електрон віддає довільну і випадкову частину своєї енергії, то поява електромагнітного випромінювання різних довжин хвиль цілком зрозуміла.

При достатньо великій швидкості електронів, крім гальмівного випромінювання, виникає також характеристичне випромінювання (див. §7.9) у вигляді окремих спектральних ліній, що накладаються на суцільний спектр випромінювання (рис. 6.33).

Розділ 7. Елементи атомної фізики, квантової механіки і фізики твердого тіла

§7.1. Ядерна модель атома. Борівський воднеподібний атом. Спектральні серії

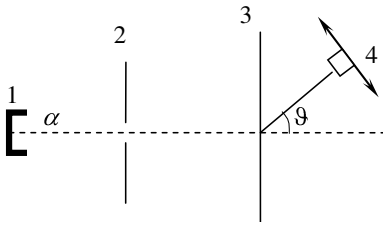


Рис.7.1

7.1.1. Оскільки світло випромінюється і поглинається атомами речовини, то виникає питання: яка структура атомів забезпечує дискретний (квантовий) характер вказаних процесів? Вперше конструктивну відповідь на це питання дав Резерфорд (1911р), досліджуючи розсіяння α-частинок на тонких (товщина ≈ 1 *мкм*) металічних плівках (фольгах) (рис.7.1).

Центрований діафрагмою 2 пучок α-частинок від джерела 1 розсіювався фольгою 3 під різними кутами ϑ від $-\pi$ до π. Кількість α-частинок (Δn), розсіяних під фіксованими кутами, реєструвалась приймачем 4, який міг переміщуватись по колу навколо центру фольги. Було встановлено (рис.7.2):

а) більшість α-частинок, проходячи через фольгу, практично не розсіюється;

б) дуже добре виконується теоретично передбачуване співвідношення $\Delta n \sin^4 \frac{\vartheta}{2} = \text{const}$;

в) певна, хоч і незначна, кількість α-частинок розсіюється під кутами, близькими до $\pm\pi$.

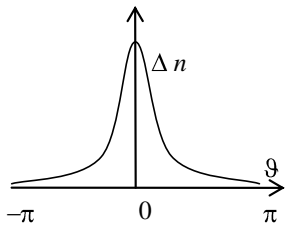


Рис.7.2

Аналіз результатів експерименту дозволив Резерфорду запропонувати *ядерну модель атома*, згідно з якою в центрі атома ($d \approx 10^{-10}$ *м*) розміщене позитивно заряджене ядро ($D \approx 10^{-15} \div 10^{-14}$ *м*), що володіє масою, приблизно рівною масі атома. Навколо ядра рухаються електрони. Якщо в нейтральному атомі Z електронів, де Z – порядковий номер

елементу в періодичній таблиці елементів Д.І. Менделєєва, то заряд ядра $q_{\text{яд.}} = +Ze$, де $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,Кл$ – елементарний заряд. В рамках цієї моделі зрозуміло, що ймовірність лобового зіткнення α-частинки з ядром, яке забезпечує розсіяння на кути $\pm\pi$, дуже мала. Електрони ж в силу незначної маси розсіювати α-частинки не можуть.

Оскільки, у відповідності з теоремою Ірншоу, неможлива стійка статична конфігурація електричних зарядів, то атом мусить бути динамічною системою, тобто електрони повинні рухатись навколо ядра по замкнених (колових чи еліптичних) орбітах. Такий рух є прискореним, і електрон з точки зору класичної фізики повинен втрачати енергію, випромінюючи електромагнітні хвилі, і тому впасти на ядро. Але, як відомо, атом – стійка конфігурація електричних зарядів. І тому, приймаючи ядерну модель атома, потрібно відмовитись від класичного опису орбітального руху електронів.

7.1.2. Розвиваючи запропоновану модель, у 1913 р. Н. Бор висунув гіпотезу у вигляді наступних постулатів: а) із усіх можливих механічних станів (орбіт) електрона в атомі здійснюються лише такі, для яких момент імпульсу орбітального руху електрона кратний до постійної Планка *h*, тобто

$$L = mvr = n\frac{h}{2\pi} = n\hbar\,, \tag{7.1}$$

де $n = 1,2,3...$ – квантове число стану (номер орбіти), а $\hbar = h/2\pi$ – постійна Дірака; такі стани називаються *стаціонарними*;

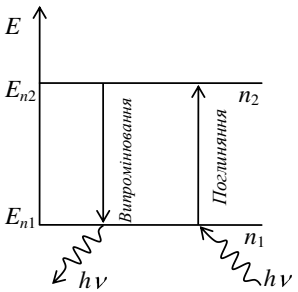


Рис.7.3

б) перебуваючи в стаціонарному стані, електрон атома не випромінює і не поглинає енергії;

в) при переході з одного стаціонарного стану на інший електрон випромінює чи поглинає квант світла з енергією, рівною різниці енергій цих станів, тобто

$$h\nu = E_{n_2} - E_{n_1}\,. \tag{7.2}$$

Отже, основна ідея постулатів Бора полягає в квантуванні (дискретності) механічних характеристик руху електронів: моменту імпульсу, енергії тощо. Рис.7.3 ілюструє наявність стаціонарних квантових станів (енергетичних рівнів) з енергіями E_{n_2} та E_{n_1} і випромінювальні та поглинальні переходи між

ними: зменшення енергії електрона супроводжується випромінюванням кванту світла (фотона) з енергією $h\nu$; поглинання кванту світла з енергією $h\nu$ забезпечує збільшення енергії електрона від E_{n_1} до E_{n_2}. В цій моделі випромінювання (поглинання) квантів світла з енергіями $h\nu < E_{n_2} - E_{n_1}$ є неможливим.

7.1.3. Запропонована теорія вперше була застосована до воднеподібних атомів (Í, Íå $^{+}$, Li^{++} тощо), в яких навколо ядра, заряд якого $+Ze$, рухається по коловій орбіті радіусом r лише один електрон. При цьому ядро вважається нерухомим. Розглядаючи електрон як класичну матеріальну точку, енергію атома запишемо як суму кінетичної і потенціальної енергій електрона в кулонівському полі ядра

$$E = E_k + E_p = \frac{m\mathrm{v}^2}{2} - \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}, \tag{7.3}$$

де m – маса електрона, ε_0 – електрична стала. Врахуємо, що в ролі доцентрової сили, яка забезпечує коловий рух електрона, виступає кулонівська сила, тобто

$$\frac{m\mathrm{v}^2}{r} = \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}. \tag{7.4}$$

Звідси випливає, що $E_{\mathrm{k}} = -\frac{E_p}{2}$, і (7.3) запишеться у вигляді

$$E = \frac{E_p}{2} = -\frac{Ze^2}{8\pi\varepsilon_0 r}. \tag{7.5}$$

Оскільки орбітальний момент імпульсу електрона

$$L = m\mathrm{v}r = n\hbar,$$

то, врахувавши (7.4), отримаємо вираз для радіуса стаціонарної орбіти електрона

$$r_n = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{me^2} \cdot \frac{n^2}{Z} = a_0 \cdot \frac{n^2}{Z}, \tag{7.6}$$

де $a_0 = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{me^2} = 0{,}529 \cdot 10^{-10}$ м має зміст радіуса першої ($n = 1$) орбіти електрона в атомі водню ($Z = 1$); ця величина називається

Національний університет водного господарства та природокористування

борівським радіусом. Отже, має місце квантування (n = 1, 2, 3, ...) радіусів стаціонарних орбіт електрона.

Підставляючи (7.6) у (7.5), отримаємо вираз для енергії атома

$$E_n = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 a_0}\cdot\frac{Z^2}{n^2} = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 a_0 hc}\cdot hc\cdot\frac{Z^2}{n^2}. \quad (7.7)$$

Введемо позначення: $R = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 a_0 \mathrm{hc}} = 1{,}097\cdot 10^7\ м^{-1}$ – постійна Рідберга. Тоді (7.7) набуде остаточного вигляду

$$E_n = -hcR\cdot\frac{Z^2}{n^2}. \quad (7.8)$$

Отже, енергія атома приймає дискретні значення, тобто квантується. Стан з найнижчою енергією (n = 1) називається *основним,* усі інші стани – *збудженими.* Стан з найвищою енергією ($n = \infty$) відповідає іонізації атома. Отже, енергія іонізації воднеподібних атомів

$$E_i = hcRZ^2 = 13{,}58Z^2,\ (eB).$$

І тому зручно інколи (7.8) записувати у вигляді

$$E_n = -\frac{E_i}{n^2}. \quad (7.9)$$

7.1.4. Зобразимо енергетичну діаграму атома водню (Z = 1) (рис.7.4). В основному стані атом може перебувати як завгодно довго. Якщо ж його перевести певним чином (теплом, світлом, бомбардуванням вільними електронами тощо) в довільний збуджений стан, то тривалість перебування в цьому стані складає $\sim 10^{-8} c$, і атом самовільно переходить в основний чи нижчі збуджені стани, як показано на рис. 7.4. При цьому, у відповідності з (7.2) та (7.8), випромінюється фотон з енергією

$$h\nu = \mathrm{h}\frac{\mathrm{c}}{\lambda} = hc\mathrm{R}Z^2\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right),$$

а довжина випромінюваної світлової хвилі розраховується за серіальною формулою Бальмера

$$\frac{1}{\lambda} = \mathrm{R}Z^2\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right), \quad (7.10)$$

де n_2 – квантове число стану, з якого відбувається перехід, n_1 – квантове число стану, в який переходить атом.

Якщо забезпечити умови "заселеності" усіх збуджених станів, то в спектрі випромінювання атомарного водню спостерігатиметься значна кількість спектральних ліній, які можна згрупувати в наступні серії:

I–серія Лаймана, для якої $n_1 = 1$, а $n_2 \geq 2$;

II–серія Бальмера, для якої $n_1 = 2$, а $n_2 \geq 3$;

III–серія Пашена, для якої $n_1 = 3$, а $n_2 \geq 4$;

IV–серії Брекета, для якої $n_1 = 4$, а $n_2 \geq 5$, тощо.

Лінії серії Лаймана лежать в ультрафіолетовій області, серії Бальмера – у видимій області, серії Пашена, Брекета – в інфрачервоній області. Відмітимо, що довжини хвиль, розраховані за формулою (7.10), дуже добре співпадають з експериментальними значеннями.

На цьому тріумф теорії Бора закінчується, бо вона виявилась нездатною пояснити спектри випромінювання складних (неводнеподібних) атомів, а також інтенсивності спектральних ліній навіть атомарного водню. Слабкість цієї теорії полягає в тому, що, ввівши нехарактерні для класичної фізики поняття про квантування фізичних величин і про квантові переходи ("стрибки"), в усьому іншому вона залишилась класичною. І тому послідовна, квантовомеханічна теорія повинна ґрунтуватись на нових (некласичних) принципах опису стану і руху мікрочастинок.

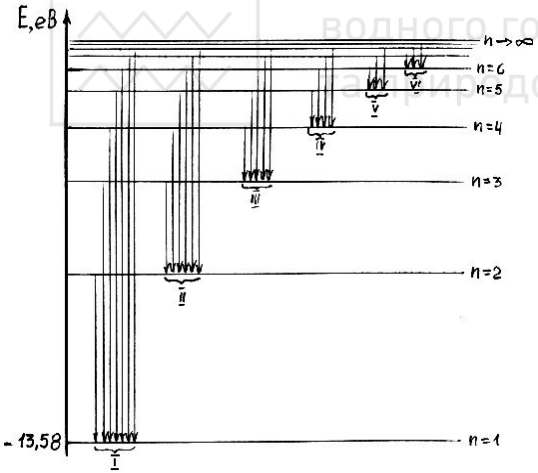


Рис. 7.4

§7.2. Корпускулярно-хвильовий дуалізм матерії; гіпотеза де Бройля. Співвідношення невизначеностей Гайзенберга

7.2.1. Як показано в розділі 6, світло володіє як хвильовими, так і корпускулярними властивостями. Луї де Бройль (1924 рік) висунув

Національний університет водного господарства та природокористування

гіпотезу (постулат) про те, що корпускулярно-хвильовий дуалізм притаманний не тільки світлу, але матерії взагалі: усяка частинка, яка має імпульс $\vec{p} = m\vec{\mathrm{v}}$ і енергію E, володіє хвильовими властивостями, її рух супроводжується хвильовим процесом з довжиною хвилі де-Бройля

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m\mathrm{v}} \tag{7.11}$$

та частотою

$$\nu = \frac{E}{h}. \tag{7.12}$$

В залежності від величини швидкості v (кінетичної енергії $E_к$) частинок, їх імпульс розраховується або за класичною формулою (при $\mathrm{v} << c, E_k << E_0$)

$$p = m\mathrm{v} = \sqrt{2mE_k}, \tag{7.13}$$

або за релятивістською формулою (при $\mathrm{v} \to c$, E_k співмірна з E_0)

$$p = \frac{1}{c}\sqrt{E_k(E_k + 2E_0)}, \tag{7.14}$$

де m – маса частинки (таблична величина), $E_0 = mc^2$ – її енергія спокою.

Зокрема, вільна частинка, що рухається вздовж осі x, описується плоскою хвилею де Бройля

$$\psi(x,t) = A_{\partial Б}\cos(\omega t - kx), \tag{7.15}$$

де $A_{\partial Б}$ – амплітуда хвилі де Бройля, $\omega = 2\pi\nu = E/\hbar$ – її циклічна частота, $k = 2\pi/\lambda = p/\hbar$ – її хвильове число. Фазова швидкість хвиль де Бройля

$$\mathrm{v} = \frac{\omega}{\kappa} = \frac{E}{p}, \tag{7.16}$$

а групова швидкість

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$u = \frac{d\omega}{d\kappa} = \frac{dE}{dp}. \qquad (7.17)$$

Борівське квантування моменту імпульсу орбітального руху електрона набуває нового змісту з врахуванням хвильових властивостей електрона. Зокрема, довжина стаціонарної орбіти

$$2\pi r = 2\pi \frac{n\hbar}{m\mathrm{v}} = \frac{nh}{p} = n\lambda,$$

тобто в межах орбіти вкладається ціле число хвиль де Бройля.

Оцінимо довжину хвилі де Бройля електрона, який прискорився електричним полем $(U = 1 \div 10^4 \text{В})$. Саме такі напруги використовуються у вакуумних електронних приладах (радіолампи, рентгенівські трубки тощо). Підставляючи в формулу (7.13) значення кінетичної енергії електронів $(1 \div 10^4)\,e\text{В}$, отримаємо за (7.11) для довжин хвиль де Бройля $\lambda = (1 \div 0{,}01)\,нм$.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Відомо, що найбільш чітко хвильові властивості світла проявляються в явищі дифракції. І тому прояв хвильових властивостей електронних (нейтронних, атомних тощо) пучків слід очікувати в цьому ж явищі. При цьому чітка дифракційна гратка спостерігається тоді, коли довжини хвиль співмірні з розміром дифракційної неоднорідності (отвори, щілини тощо).

Розміри макроприладів значно перевищують довжини хвиль де Бройля електронів, і тому в цьому випадку хвильові властивості електронів явно не відслідковуються. В цей же час розраховані значення λ співмірні з розміром ($d \approx 0{,}5\,нм$) кристалічної гратки твердих тіл. І тому така гратка повинна бути дифракційним пристроєм для електронних пучків. Дійсно, при проходженні електронних пучків через тонкі полікристалічні плівки та при їх відбиванні від монокристалів спостерігається така ж дифракційна картина, як і при взаємодії рентгенівських променів з твердими кристалічними тілами. Зокрема, виконується закон Вульфа-Бреггів (див. розділ 6), встановлений для рентгенівських променів. Дифракція нейтронних пучків також виявлена експериментально і використовується для наукових досліджень.

Відмітимо, що довжини хвиль де Бройля макроскопічних тіл, за рахунок великої маси, настільки малі, що їх хвильові властивості виявити неможливо.

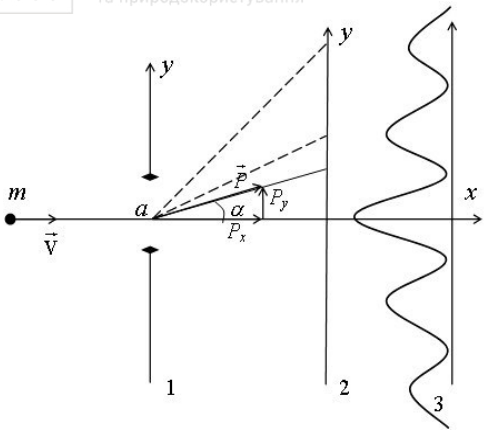


Рис. 7.5

7.2.2. Корпускулярно-хвильовий дуалізм частинок в мікросвіті накладає обмеження на можливості класичного опису їх стану. В класичній механіці стан частинки задається сукупністю точно заданих координат (x,y,z) та проекцій вектора імпульсу p_x, p_y, p_z. Якщо задані сили, що діють на частинку, то можна, користуючись законами класичної механіки, передбачити її стан в довільний момент часу – класичний принцип причинності. Для частинки, що рухається вздовж осі x, це означає, що неточності (невизначеності) координати (Δx) та імпульсу (Δp_x) рівні нулю і добуток $\Delta x \cdot \Delta p_x = 0$.

Абсолютно інша ситуація в мікросвіті. Дійсно, вільна частинка, яка рухається вздовж осі x, описується плоскою монохроматичною $(\lambda = const)$ хвилею де Бройля (7.15), де $-\infty < x < +\infty$. І тому її положення повністю невизначене, тобто $\Delta x = \infty$. З іншого боку, імпульс такої частинки $(p = h/\lambda)$ строго визначений і $\Delta p_x = 0$. А отже, добуток $\Delta x \cdot \Delta p_x$ є математично невизначеним $(\infty \cdot 0 = ?)$.

В мікросвіті можна змоделювати об'єкти (наприклад, хвильовий пакет), для яких координата точно визначена $(\Delta x = 0)$, але імпульс повністю невизначений $(\Delta p_x = \infty)$, і тому має місце математична невизначеність типу $0 \cdot \infty = ?$

Для того, щоб дещо прояснити цю ситуацію, розглянемо наступний умовний експеримент (рис. 7.5). Нехай мікрочастинки, що рухаються вздовж осі x, пролітають через щілину шириною a в непрозорому екрані (1) і фіксуються на екрані спостереження (2). Після проходження щілини розподіл мікрочастинок вздовж осі y повинен відтворювати розподіл інтенсивності в дифракційній картині (3):

Національний університет водного господарства та природокористування

центральний і бічні максимуми розділені мінімумами. До щілини невизначеності координати та імпульсу: $\Delta y = \infty$, $\Delta p_y = 0$. В момент проходження щілини: $\Delta y \approx \frac{a}{2}$, $\Delta p_y \approx p_y \approx p\sin\alpha$. Якщо розглядати лише мікрочастинки, які попадають в центральний максимум, що обмежений першими мінімумами, то $a\sin\alpha = \lambda$, і тому $\Delta p_y = p\frac{\lambda}{a} = \frac{h}{a}$. Добуток невизначеностей:

$$\Delta ó \cdot \Delta ð_ó \approx \frac{h}{2}.$$

На підставі аналізу подібних умовних експериментів Гайзенберг (1927р.) встановив співвідношення між невизначеностями координат і відповідних імпульсів у вигляді

$$\left.\begin{aligned} \Delta x \cdot \Delta p_x &\geq \hbar \\ \Delta y \cdot \Delta p_y &\geq \hbar \\ \Delta z \cdot \Delta p_z &\geq \hbar \end{aligned}\right\}. \qquad (7.18)$$

Національний університет водного господарства та природокористування

Інтерпретацію цих співвідношень дав Н. Бор у вигляді принципу доповнюваності:

1) інформація про стан мікрочастинок може бути отримана лише за допомогою макроприладів, які взаємодіють з мікрочастинками;

2) за допомогою конкретного макроприладу можна встановити точне значення або координати, або імпульсу; при цьому чим точніше задана одна характеристика, тим більш невизначена інша.

Стосовно електрона в атомі співвідношення Гейзенберга означають, що поняття орбіти втрачає зміст. Дійсно, якщо невизначеність швидкості електрона $\Delta \mathrm{v}_{\tilde{o}} \approx \mathrm{v}_{\tilde{o}} \approx 10^6$ *ì /ñ*, то невизначеність координати $\Delta x \approx 10^{-10}$ *ì*, що співмірно з розміром атома. Таким чином, електрон "розмазаний" по всьому об'ємі атома. В цей же час співвідношення невизначеностей не накладають суттєвих обмежень на класичний опис стану макротіл.

Національний університет водного господарства та природокористування

Дійсно, оскільки $p_x = m\mathrm{v}_x$, то $\Delta x \cdot \Delta \mathrm{v}_x \geq \frac{\hbar}{m} \to 0$ навіть при $m \approx 10^{-9}$ *кг*.

Пара "координата-імпульс" у співвідношенні (7.18) не є випадковою, оскільки вона входить як добуток в рівняння плоскої хвилі де Бройля (7.15), записане у вигляді

$$\psi(x,t) = A_{\partial Б} \cos(\frac{Et - xp_x}{\hbar}) . \qquad (7.19)$$

І тому слід очікувати, що і для іншої пари "енергія-час" матиме місце співвідношення невизначеностей

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar , \qquad (7.20)$$

де Δt має зміст тривалості перебування (часу життя) мікрочастинки в певному стані. Зокрема, для основного стану електрона у воднеподібному атомі $\Delta t = \infty$ і тому $\Delta E = 0$, тобто енергетичний рівень основного стану нерозмитий. Для збуджених станів $\Delta \mathrm{t} \approx 10^{-8} c$ і $\Delta E \neq 0$. За рахунок цього спектральні лінії випромінювання не є строго монохроматичними.

Національний університет водного господарства та природокористування

§7.3. Хвильова функція та її зміст. Рівняння Шрьодінгера

7.3.1. Корпускулярно-хвильовий дуалізм матерії встановлює межі застосування класичної фізики. В мікросвіті класичний спосіб опису стану частинок за допомогою координат та імпульсів перестає бути однозначним і повинен бути замінений іншим – статистичним способом, на якому грунтується механіка мікросвіту – квантова механіка.

Стан мікрочастинок в квантовій механіці задається хвильовою функцією $\psi(\vec{r},t) = \psi(x,y,z,t)$. Зокрема, для вільної одновимірної частинки хвильовою функцією є плоска хвиля де Бройля (7.19), яку представимо тут у комплексній формі:

$$\psi(x,t) = A_{\partial Б} e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - xp_x)} , \qquad (7.21)$$

де $i = \sqrt{-1}$. Помноживши ψ на комплексно спряжену функцію ψ^*, отримаємо

$$\psi\psi^* = A_{\partial Б}^2 . \tag{7.22}$$

З точки зору хвильових уявлень квадрат амплітуди хвилі визначає її інтенсивність, зокрема, інтенсивність дифракційних максимумів на рис. 7.5. З точки зору корпускулярних уявлень – це імовірність попасти мікрочастинці в ту чи іншу точку екрану спостереження після проходження щілини. Отже, фізичний зміст має не сама хвильова функція, а вираз $\psi\psi^* \equiv |\psi|^2$, який називається *густиною імовірності*. Для частинок, які не є вільними, а перебувають в силових полях, хвильова функція не може розглядатися як просторова хвиля, але її ймовірнісна інтерпретація залишається в силі. Зокрема, імовірність знайти мікрочастинку в деякій області простору, наприклад, в елементарному об'ємі $dV = dxdydz$, становить

$$dw = |\psi|^2 dV . \tag{7.23}$$

Оскільки імовірність повинна бути однозначною, неперервною і скінченою, то на хвильову функцію накладаються наступні стандартні вимоги:

1) вона повинна бути однозначною, неперервною і скінченою;
2) перші похідні по координатах і часу від хвильової функції також повинні бути неперервними, що забезпечить "гладкість" імовірності;
3) вона повинна бути інтегрованою; зокрема, $\int_{(V)} |\psi|^2 dV = 1$, як імовірність знайти частинку в будь-якій точці простору V (імовірність вірогідної події).

Знання хвильової функції дозволяє встановити середнє значення довільної фізичної величини *f*:

$$< f >= \int_{(V)} f|\psi|^2 dV . \tag{7.24}$$

Національний університет водного господарства та природокористування

Для знаходження хвильової функції конкретного квантовомеханічного об'єкту необхідно розв'язати рівняння Шрьодінгера (1926 р.)

$$\hat{H}\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}, \tag{7.25}$$

яке є аналогом II закону Ньютона класичної механіки. В цьому рівнянні

$$\hat{I} = -\frac{\hbar^2}{2m}\hat{\nabla}^2 + U(x,y,z,t) - \tag{7.26}$$

оператор Гамільтона або оператор повної енергії частинки, де m – маса частинки, $\hat{\nabla}^2$ – оператор Лапласа

$$\hat{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial\tilde{o}^2} + \frac{\partial^2}{\partial\acute{o}^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \tag{7.27}$$

U – оператор потенціальної енергії, дія якого зводиться до простого множення на хвильову функцію.

Якщо потенціальна енергія частинки явно не залежить від часу, тобто $U = U(x,y,z)$, то квантовомеханічна задача називається *стаціонарною*, і у хвильовій функції можливе розділення змінних, тобто

$$\psi(x,y,z,t) = \psi(x,y,z)\varphi(t). \tag{7.28}$$

Підставляючи (7.28) у (7.25), після нескладних перетворень отримаємо

$$\varphi = ce^{-\frac{i}{\hbar}E\mathrm{t}}, \tag{7.29}$$

$$\hat{H}\psi = E\psi, \tag{7.30}$$

де c і E – константи інтегрування, при цьому E має зміст енергії частинки.

Національний університет водного господарства та природокористування

Рівняння (7.30) називається рівнянням Шрьодінгера для стаціонарних станів. Розв'язок цього диференціального рівняння задовольняє стандартні вимоги до хвильової функції, як правило, не при усяких, а *дискретних* (дозволених) значеннях параметра E. Ці значення називаються *власними значеннями* оператора $\hat{H}$, а відповідні хвильові функції $\psi(x, y, z)$ – *власними функціями* цього оператора.

Отже, розв'язок рівняння Шрьодінгера (7.30) зводиться до знаходження власних значень і власних функцій оператора повної енергії частинки $\hat{H}$. При цьому дискретність (квантування) енергії не вимагає додаткових штучних припущень типу постулатів Бора (§7.1), а витікає з математичних властивостей самого рівняння Шредінгера. Фізична ж суть цього рівняння полягає у виборі аналітичної форми потенціальної енергії U, тобто у виборі моделі квантомеханічного об'єкту.

Національний університет водного господарства та природокористування

7.3.3. Для вільної (U=0) частинки, що рухається вздовж осі x, стаціонарне рівняння Шрьодінгера має вигляд

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} = E\psi .$$

Розв'язок цього рівняння шукається у вигляді

$$\psi(x) = Be^{\frac{i}{\hbar}x\sqrt{2mE}},$$

що легко перевірити підстановкою в рівняння Шрьодінгера.

Повна хвильова функція, з врахуванням (7.28) і (7.29),

$$\psi(x,t) = Ae^{-\frac{i}{\hbar}(Et - x\sqrt{2mE})}$$

співпадає з виразом для плоскої хвилі де Бройля (7.19), якщо покласти, що $P_x = \sqrt{2mE}$. Остання рівність є очевидною, оскільки повна енергія частинки співпадає з її кінетичною енергією

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$E_к = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2 к^2}{2m}. \qquad (7.31)$$

§7.4. Частинка в одновимірній прямокутній потенціальній ямі. Проходження частинки через потенціальний бар'єр

7.4.1. Усякий зв'язаний стан частинки (вільний електрон в металі, нуклон в ядрі тощо), тобто стан з від'ємною потенціальною енергією, можна описати, ввівши поняття потенціальної ями. Розглянемо найпростіший випадок, коли частинка масою m перебуває в одновимірній прямокутній нескінченно глибокій потенціальній ямі шириною ℓ. Оскільки початок відліку потенціальної енергії можна вибирати довільно, то задачу про "яму" замінимо задачею про "ящик", на дні якого потенціальна енергія дорівнює нулю, а стінки якого нескінченно високі (рис. 7.6). Оператор Гамільтона $\hat{H}$ (7.26) для цього випадку має вигляд

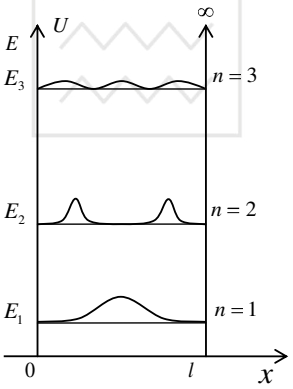


Рис.7.6

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + U(x),$$

де $$U(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } 0 \le x \le l, \\ \infty \text{ при } 0 > x > l. \end{cases}$$

Всередині ящика рівняння Шрьодінгера (7.30) запишеться як

$$\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + E\psi = 0$$

або

$$\frac{d^2\psi}{d^2x} + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi = 0. \qquad (7.32)$$

Введемо позначення

$$\frac{2mE}{\hbar^2} = k^2, \qquad (7.33)$$

де k має зміст хвильового числа, якщо врахувати (7.31). Тоді (7.32) набуде форми, подібної (формально) до диференціального рівняння власних гармонічних коливань,

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + k^2\psi = 0 .$$

Розв'язок цього рівняння шукаємо у вигляді гармонічної функції координати x:

$$\psi(x) = A\sin(kx + \alpha_0). \tag{7.34}$$

Оскільки хвильова функція повинна бути неперервною, в тому числі і на стінках ями, а вийти за межі ями частинка не може, то $\psi(0) = \psi(l) = 0$. Перша гранична умова дає $\alpha_0 = 0$, і тому

$$\psi(x) = A\sin kx . \tag{7.35}$$

Друга гранична умова дає

$$k\ell = \pm n\pi , \tag{7.36}$$

де n = 1, 2, 3, … – квантове число стану частинки.

Врахувавши, що $k = \frac{2\pi}{\lambda_{\partial Б}}$, отримаємо з (7.36) співвідношення $\ell = n\frac{\lambda_{äÁ}}{2}$, тобто в межах ширини ями повинно вкладатись ціле число півхвиль де Бройля.

Формальну амплітуду A в (7.35) знайдено з умови нормування хвильової функції до одиниці:

$$\int_0^{\ell} |\psi|^2 dx = A^2 \int_0^{\ell} \sin^2 kx = 1 .$$

Звідси $A = \pm\sqrt{\frac{2}{l}}$, і остаточно хвильова функція частинки в довільному квантовому стані n, з врахуванням (7.36), набуває вигляду

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$\psi_n(x) = \pm\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{\pi x}{l}n\,. \qquad (7.37)$$

Об'єднуючи (7.33) і (7.36), отримаємо вираз для енергії частинки в різних квантових станах

$$E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ml^2}\cdot n^2\,. \qquad (7.38)$$

Отже, енергія частинки в потенціальній ямі приймає не довільні, а дискретні значення E_1, E_2, E_3, …, зображені на рис. 7.6 відповідними енергетичними рівнями. Густина імовірності $|\psi|^2$ (на рисунку – штрихові лінії) залежить від координати частинки, при цьому по різному в кожному квантовому стані. Наприклад, для центру ями вона максимальна в стані $n = 1$ і дорівнює нулю в стані $n = 2$.

Відстань між сусідніми енергетичними рівнями

$$\Delta E_n = E_{n+1} - E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ml^2}(2n+1)\,. \qquad (7.39)$$

Розглядаючи електрон в атомі як такий, що перебуває в потенціальній ямі шириною $l \approx 10^{-10}$ *м*, отримаємо $\Delta E \approx 10eB$, що співмірно з енергією електрона. В цей же час в макросвіті, коли m і l – дуже великі, відстань між енергетичними рівнями стає зникаюче малою, і квантуванням енергії можна знехтувати.

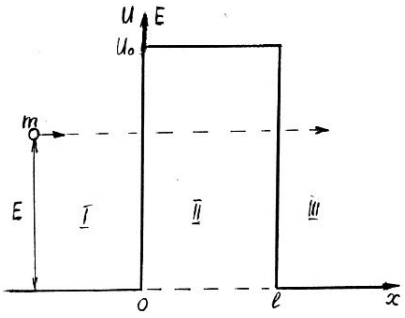


Рис. 7.7

Задача про частинку в потенціальній ямі скінченої глибини розв'язується значно складніше, але висновок про квантування енергії і в цьому випадку залишається в силі.

7.4.2. Спорідненою до описаної є задача про проходження частинки через потенціальний бар'єр. Нехай мікрочастинка з масою m і енергією E налітає на одновимірний прямокутний потенціальний

Національний університет
бар'єр шириною l і висотою U_0 (рис. 7.7). Якщо частинка класична, то вона пролітає над бар'єром, коли $E > U_0$, і відбивається від нього, коли $E < U_0$. Проникнути під бар'єр класична частинка не може, бо тоді її кінетична енергія $\mathring{A}_k = \mathring{A} - U_0$ була б меншою від нуля. Розв'язок рівняння Шредінгера для квантомеханічної мікрочастинки дає, що хвильові функції в усіх трьох областях $\psi_I, \psi_{II}, \psi_{III}$ відмінні від нуля, тобто мікрочастинка проникає під бар'єр і за бар'єр. Це явище називається *тунелюванням*. Від'ємні значення кінетичної енергії мікрочастинки в момент проходження бар'єру не можуть турбувати, бо в квантовій механіці кінетична енергія $\left(\mathring{A}_k = \frac{\eth^2}{2m}\right)$, як і потенціальна енергія, не є точно визначеними. Прозорість бар'єру, тобто імовірність тунелювання частинки, знаходиться як відношення густин імовірності в областях III та I. Розрахунок дає

$$D = \frac{|\psi_{III}|^2}{|\psi_I|^2} \approx e^{-\frac{2\ell}{\hbar}\sqrt{2m(U_0 - E)}}. \qquad (7.40)$$

Національний університет водного господарства та природокористування

Звідси видно , що бар'єр тим прозоріший, чим менші його ширина і висота. Для класичної частинки ($m \to \infty$) і макробар'єру ($l \to \infty$) прозорість бар'єру зникаюче мала.

§7.5. Квантовий лінійний гармонічний осцилятор

7.5.1. Лінійний гармонічний осцилятор – це матеріальна точка, яка здійснює одновимірний (вздовж осі x) рух під дією квазіпружної сили $f = -kx$. Потенціальна енергія осцилятора (рис. 7.8)

$$U = \frac{kx^2}{2} = \frac{m\omega_0^2 x^2}{2}, \qquad (7.41)$$

де m – маса осцилятора, ω_0 – його власна циклічна частота, x – зміщення від положення рівноваги. Отже, мова піде про мікрочастинку, яка перебуває в потенціальній ямі з параболічними стінками. Підставляючи (7.41) в рівняння Шрьодінгера (7.30), отримаємо

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2}+\left(E-\frac{m\omega_0^2x^2}{2}\right)\psi=0. \qquad (7.42)$$

Власні хвильові функції, тобто розв'язки цього рівняння, які задовольняють стандартні вимоги (§7.3), мають вигляд

$$\psi_\upsilon(x)=\frac{1}{\sqrt{x_0}}e^{-\frac{x^2}{2x_0^2}}H_\upsilon\left(\frac{x}{x_0}\right), \qquad (7.43)$$

де $x_0=\left(\frac{\hbar}{m\omega_0}\right)^{1/2}$, H_υ – поліноми Чебишева-Ерміта υ-го порядку, $\upsilon=1,2,3...$ – коливальне квантове число.

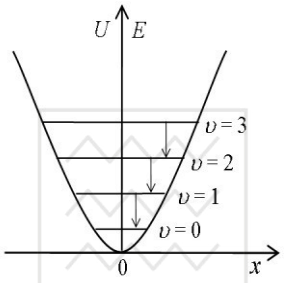


Рис. 7.8

Для класичного осцилятора зміщення x обмежене амплітудою коливань $\left(A=\sqrt{\frac{2E}{m_0\omega^2}}\right)$; для квантового осцилятора таке обмеження знімається за рахунок можливості тунелювати через стінки потенціальної ями. А це означає, що існує ненульова імовірність знайти мікрочастинку поза ямою.

Власні значення оператора Гамільтона для квантового осцилятора

$$E_\upsilon=\hbar\omega_0\left(\upsilon+\frac{1}{2}\right)=h\nu_0\left(\upsilon+\frac{1}{2}\right). \qquad (7.44)$$

Тут враховано, що $\omega_0=2\pi\nu_0$. Отже, енергія квантового осцилятора приймає дискретні значення $\left(E_0=\frac{h\nu_0}{2};\ E_1=\frac{3}{2}h\nu_0,\ldots\right)$, тобто квантується (рис.7.8). Найменша енергія квантового осцилятора, так звана *нульова енергія*, на відміну від класичного осцилятора, не дорівнює нулю. Наявність нульових коливань підтверджується експериментально в дослідах по розсіянню світла в кристалах при

Національний університет
дуже низьких температурах, коли з точки зору класичної фізики коливальний рух кристалічної гратки повинен би припинитися.

Перебуваючи в стаціонарному стані, квантовий осцилятор не поглинає і не випромінює енергії. Випромінювання (поглинання) світла відбувається при переході осцилятора між стаціонарними станами, при цьому квантова механіка дозволяє лише переходи між сусідніми енергетичними рівнями, тобто $\Delta\upsilon = \pm 1$ (правило відбору). Енергія випромінюваного (поглинутого) кванту $\Delta E = E_{\upsilon+1} - E_{\upsilon} = \hbar\omega_0 = h\nu_0$, що підтверджує квантовий постулат Планка.

§7.6. Воднеподібні атоми в квантовій механіці. Квантові числа

7.6.1. З врахуванням виразу (7.3) для потенціальної енергії електрона в кулонівському полі ядра воднеподібного атома, стаціонарне рівняння Шрьодінгера набуде вигляду

$$\hat{\nabla}^2\psi + \frac{2m}{\hbar^2}\left(\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r} + \text{Å}\right)\psi = 0\,. \qquad (7.45)$$

Національний університет водного господарства та природокористування

Оскільки кулонівське поле володіє центральною симетрією, то зручно перейти до сферичних координат (рис. 7.9), де положення довільної точки A описується трьома координатами r, φ, ϑ. В цьому випадку рівняння Шредінгера набуває вигляду, складнішого від (7.45), але з'являється можливість представити хвильову функцію як добуток радіальної функції $R(r)$ і кутової $Y(\vartheta,\varphi)$, тобто провести розділення змінних:

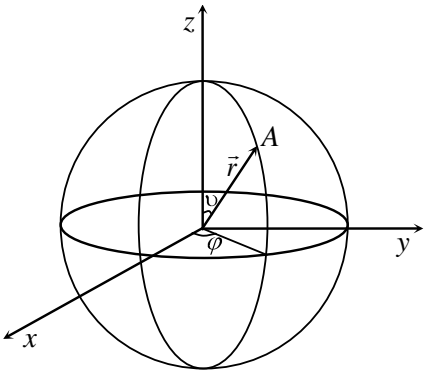


Рис. 7.9

$$\psi_{n,\ell,m_\ell}(r,\vartheta,\varphi) = R_{n,\ell}(r)Y_{\ell,m_\ell}(\vartheta,\varphi)\,. \qquad (7.46)$$

Національний університет водного господарства та природокористування

Стандартні вимоги як до хвильової функції в цілому, так і до окремих складових забезпечуються лише при певних, дискретних значеннях не тільки енергії електрона, але і квадрату моменту імпульсу його орбітального руху L_ℓ^2, а також проекції цього моменту $L_{\ell z}$ на вибраний напрямок (вісь z). Квантування вказаних характеристик визначається трьома квантовими числами: головним n, орбітальним (азимутальним) ℓ та магнітним m_ℓ наступним чином:

$$\mathring{A}_n = -hcR\frac{Z^2}{n^2}, \tag{7.47}$$

де n=1,2,3,…, тобто співпадає з (7.8) для борівського воднеподібного атома;

$$L_\ell^2 = \hbar^2 \ell(\ell+1), \tag{7.48}$$

де $\ell = 0,1,2,\ldots, (n\text{-}1)$;

$$L_{\ell z} = \hbar m_\ell, \tag{7.49}$$

де $m_\ell = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm \ell$.

Національний університет водного господарства та природокористування

Магнітне квантове число вказує на просторове квантування моменту імпульсу електрона: вектор моменту імпульсу електрона може мати лише такі орієнтації в просторі, що його проекції на вибрану вісь z (яка задається, як правило, напрямком магнітного поля) кратні $\hbar$ (рис. 7.10).

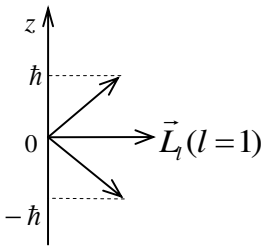


Рис.7.10

Оскільки енергія електрона E_n визначається лише головним квантовим числом n, а хвильова функція ψ_{n,ℓ,m_ℓ} – усіма квантовими числами, то декільком станам з різними ℓ та m_ℓ відповідає одне значення енергії. Така ситуація називається *квантовомеханічним виродженням*. Наприклад, енергія E_2 реалізується в чотирьох станах з хвильовими функціями ψ_{200}, ψ_{210},

Національний університет водного господарства та природокористування

ψ_{21+1}, ψ_{21-1}. В загальному, кратність виродження дорівнює n^2. Для ілюстрації приведемо вирази для радіальних і кутових функцій в декількох станах:

$$\left.\begin{aligned} R_{10} &= \frac{2}{a_0^{3/2}}\exp\left(-\frac{r}{a_o}\right); \\ R_{20} &= \frac{2}{(2a_0)^{3/2}}\exp\left(-\frac{r}{2a_0}\right)\left(1-\frac{r}{2a_0}\right); \\ Y_{00} &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}}; Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\vartheta, \end{aligned}\right\} \quad (7.50)$$

де a_0 – борівський радіус.

Для основного стану (n = 1) хвильова функція має вигляд

$$\psi_{100} = \mathrm{R}_{10}\mathrm{Y}_{00} = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}}\exp(-\frac{r}{a_0}) \quad (7.51)$$

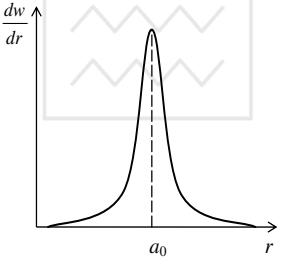


Рис.7.11

Імовірність знайти електрон в сферичному шарі товщиною dr, тобто в елементарному об'ємі $dV = 4\pi r^2 dr$, становить

$$dw = |\psi|^2 dV = \frac{4r^2}{a_0^3}\exp(-\frac{2r}{a_0})dr,$$

а в шарі одиничної товщини –

$$\frac{dw}{dr} = \frac{4r^2}{a_0^3}\exp\left(-\frac{2r}{a_0}\right). \quad (7.52)$$

Як видно з рис. 7.11, залежність $\frac{dw}{dr}(r)$ володіє різким максимумом при $r = a_0$. Отже, борівська орбіта в квантовій механіці може інтерпретуватись як геометричне місце точок, де імовірність перебування електрона – максимальна. Але, оскільки заряд електрона

Національний університет водного господарства та природокористування

“розмазаний” по усьому атомі $(0 < r < \infty)$, то в квантовій механіці, у відповідності зі співвідношенням невизначеностей Гайзенберга, поняття орбіти (траєкторії) електрона втрачає зміст.

7.6.2. Стани електрона з різними значеннями орбітального квантового числа ℓ прийнято позначати наступним чином:

ℓ	0	1	2	3	4
Стан	*s*	*p*	*d*	*f*	*g*

.

Тому енергетичні рівні з різними *n* реалізуються наступними станами:

$n = 1$ – стан $1s$;

$n = 2$ – стани $2s$, $2p$;

$n = 3$ – стани $3s$, $3p$, $3d$;

$n = 4$ – стани $4s$, $4p$, $4d$, $4f$.

Стан $1s$ є основним, усі інші стани – збуджені. Час життя електрона в збудженому стані складає $\sim 10^{-8} c$.

Енергетична діаграма квантовомеханічного атома водню має вигляд (рис.7.12), який дещо відрізняється від діаграми борівського атома (рис.7.4). Як і раніше, квантова механіка не накладає жодного обмеження на зміну головного квантового числа. В цей же час зміна ℓ і m_ℓ регламентується правилами відбору

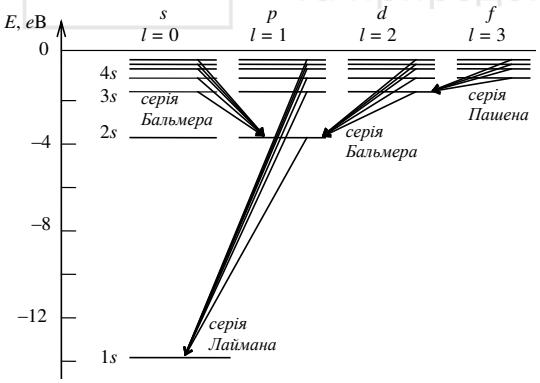


Рис. 7.12

$$\Delta \ell = \pm 1, \ \Delta m_\ell = 0, \ \pm 1 \quad . \qquad (7.53)$$

Друге правило відбору тут не проявляється, але стає важливим, коли випромінюючі атоми перебувають в магнітному полі.

§7.7. Магнітний момент атомів. Досліди Штерна і Герлаха. Власний момент електрона (спін). Ферміони і бозони

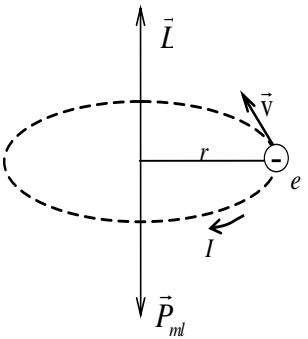


Рис.7.13

7.7.1. Користуючись формальним поняттям орбіти електрона, орбітальний рух електрона (рис.7.13) можна розглядати як коловий струм, що володіє магнітним моментом

$$P_{м\ell} = I \cdot S = ev \cdot \pi r^2 = e \cdot \frac{v}{2\pi r} \cdot \pi r^2 = \frac{evr}{2} =$$

$$= \frac{e}{2m_{ел}} mvr = \frac{e}{2m_{ел}} \cdot L_l,$$

де ν –частота обертання електрона, $m_{ел}$ – маса електрона.

Оскільки механічний і магнітний моменти, як видно з рис.7.13, напрямлені протилежно, то остаточно

$$\vec{P}_{м\ell} = -\frac{e}{2m_{ел}} \cdot \vec{L}_\ell \,. \qquad (7.54)$$

Якщо атом перебуває в магнітному полі з індукцією $\vec{B}$, то проекція магнітного моменту орбітального руху на напрямок поля, з врахуванням (7.49),

$$P_{mlB} = -\frac{e}{2m_{ел}} L_{\ell B} = -\frac{e\hbar}{2m_{ел}} \cdot m_\ell = -\mu_B m_e \,, \qquad (7.55)$$

де $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_{ел}} = 0{,}927 \cdot 10^{-23}$ *Дж/Тл* – магнетон Бора. Отже, ми приходимо до квантування проекції магнітного моменту на напрямок поля; звідси стає зрозумілою назва квантового числа m_ℓ. Магнітний момент атома шукається як векторна сила магнітних моментів усіх електронів ($\vec{P}_{àò} = \sum_з \vec{P}_{ì\ \ell^з}$) і може бути як рівним нулю (діамагнітні атоми), так і відмінним від нуля (парамагнітні атоми).

7.7.2. Для експериментального визначення магнітних моментів атомів Штерн і Герлах (1921 р.) пропускали у вакуумі вузькі атомні пучки через сильно неоднорідне магнітне поле (рис.7.14). В такому полі на атом з магнітним моментом $\vec{P}_{am.}$ діє відхиляюча сила

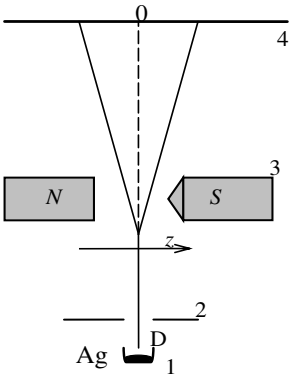


Рис.7.14
Схема дослідів Штерна і Герлаха:
1 – джерело атомів; 2 – діафрагма; 3 – електромагніт; 4 – реєструючий пристрій (РП)

$$F = P_{am.,B}\frac{dB}{dz},$$

де $\frac{dB}{dz}$ – градієнт магнітного поля вздовж осі z, а $P_{am.,B}$ – проекція магнітного моменту атома на напрямок поля. У відсутності квантування РП фіксував би неперервний розподіл атомів, оскільки значення $P_{am.,B}$ були б довільними. В дійсності спостерігається розщеплення атомних пучків на декілька, симетричних відносно осьової лінії ДО, що свідчить про наявність просторового квантування. Але деталі експерименту не зовсім узгоджувались з теорією.

Зокрема, в атомах срібла магнітний момент повинен визначатися лише одним валентним електроном, який в умовах експерименту перебуває в s-стані $(m_\ell = 0)$. А це означає, що для срібла $P_{am} = 0$, і розщеплення атомного пучка не слід очікувати, що суперечить експерименту.

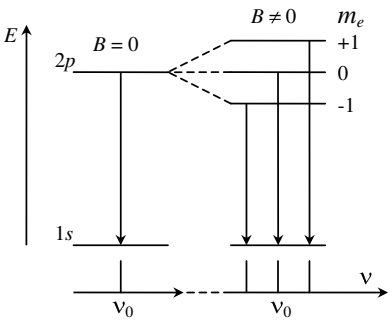


Рис.7.15

7.7.3. Додаткову інформацію про магнітні параметри електронів атомів дають дослідження впливу магнітного поля на спектри випромінювання. Для прикладу розглянемо спектральну лінію, зумовлену переходом електрона з $2p$-

Національний університет водного господарства та природокористування

стану в 1*s*-стан атома водню (рис. 7.15). Якщо випромінюючий атом перебуває в магнітному полі, то електрон набуває додаткової енергії

$$\Delta E = -\vec{P}_{m\ell}\vec{B} = -P_{m\ell B}B = \mu_B B m_\ell \,. \qquad (7.56)$$

Оскільки у 2*p*-стані $(\ell = 1)$ магнітне квантове число набуває значення 0, ± 1, то в магнітному полі енергетичний рівень цього стану розщеплюється на три рівні, тобто виродження по m_ℓ знімається. І в спектрі випромінювання замість однієї спектральної лінії з частотою ν_0 з'являються три лінії з частотами $\nu_0 - \Delta\nu$, ν_0 і $\nu_0 + \Delta\nu$, де $\Delta\nu = \dfrac{\mu_B B}{h}$ – "нормальне" лоренцове зміщення. Розщеплення спектральних ліній випромінювання атомів в магнітному полі називається *ефектом Зеемана*. Але лише для не багатьох спектральних ліній деяких атомів спостерігається "нормальний" ефект Зеемана, коли експеримент узгоджується з викладеною теорією. В більшості випадків має місце "аномальний" ефект , коли характер розщеплення як якісно, так і кількісно інший, ніж це передбачено теорією.

7.7.4 Для пояснення дослідів Штерна і Герлаха, "аномального" ефекту Зеемана, а також спектрів випромінювання складних атомів необхідно було ввести ще одне квантове число електрона. І тому Гоудсміт і Уленбек (1925 р.) висунули гіпотезу про те, що електрон володіє *власним моментом* імпульсу, не пов'язаним з його просторовим рухом,

$$L_s = \hbar\sqrt{s(s+1)}\,, \qquad (7.57)$$

де *s* – *спінове* квантове число, яке для електрона дорівнює $1/2$. З цим моментом пов'язаний *власний магнітний момент*

$$\vec{P}_{ms} = -\frac{e}{m_{ел}}\vec{L}_s \,. \qquad (7.58)$$

Проекції цих моментів на вибраний напрямок (вісь *z*)

$$L_{sz} = m_s \hbar \,,$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$P_{msz} = -\frac{e}{m_{ел}} L_{sz} = -\frac{e\hbar}{m_{ел}} m_s = -2\mu_B \cdot m_s \,, \quad (7.59)$$

де $m_s = \pm s = \pm 1/2$ – магнітне спінове квантове число електрона. Отже, в дослідах Штерна і Герлаха атоми срібла можуть мати два значення проекції магнітного моменту на напрямок магнітного поля $(\pm\mu_B)$, і тому атомний пучок розщеплюється на два симетричних , що спостерігається експериментально (рис.7.14).

7.7.5 Пізніше виявилось, що власний (спіновий) рух притаманний усім мікрочастинкам (атомам, ядрам, протонам, нейтронам тощо). Спін – така ж характеристика мікрочастинок як маса і заряд. Наявність спіну випливає з розв'язку релятивістського аналогу рівняння Шрьодінгера – рівняння Дірака. В залежності від значення квантового числа s усі мікрочастинки поділяються на ферміони – частинки з напівцілим спіном $(s = 1/2, 3/2, \ldots)$ і бозони – частинки з цілочисельним спіном $(s = 0, 1, \ldots)$. До ферміонів належать електрони, протони, нейтрони, до бозонів – фотони, π-мезони. Атоми та ядра можуть бути як ферміонами, так і бозонами. Поділ мікрочастинок на ферміони і бозони є наслідком принципу квантової нерозрізняльності тотожних частинок, що для системи з двох тотожних частинок дає $|\psi(x_1, x_2)|^2 = |\psi(x_2, x_1)|^2$, тобто густина імовірності не змінюється при перестановці частинок місцями (тут x_i–сукупність просторових і спінових координат i-тої частинки). Звідси можливі два варіанти:

$\psi(x_1, x_2) = \psi(x_2, x_1)$ – симетрична хвильова функція;

$\psi(x_1, x_2) = -\psi(x_2, x_1)$ – антисиметрична хвильова функція.

Бозони описуються симетричними, а ферміони – анти-симетричними хвильовими функціями.

§7.8. Принцип Паулі. Стани електронів в складних атомах

7.8.1. Отже, електрони в атомі описуються четвіркою квантових чисел: головне квантове число n, орбітальне квантове число ℓ, магнітне квантове число m_ℓ і магнітне спінове квантове число m_s. У воднеподібних атомів енергія електрона залежить лише від головного

Національний університет
квантового числа. В складних, багатоелектронних атомах окремий електрон перебуває в полі не тільки ядра, але і решти електронів. Це призводить до зняття виродження по ℓ, і енергія електрона залежить як від n, так і від ℓ $(E_{n\ell})$. При цьому, як правило, залежність від n сильніша.

Якщо багатоелектронний атом перебуває в незбудженому стані, то його електрони намагатимуться зайняти стани з мінімальною енергією (стан стійкої рівноваги). Таким є стан $1s$ $(n = 1;\ \ell = 0)$. Але реалізувати таку ситуацію забороняє *принцип Паулі* (1925 р.), справедливий лише для ферміонів: в системі тотожних ферміонів в певному стані може перебувати лише одна частинка. Оскільки електрони є ферміонами, то цей принцип стосовно електронів в атомі формулюється наступним чином: лише один електрон в атомі може володіти тотожним набором чотирьох квантових чисел: n, ℓ, m_ℓ, m_s. А це означає, що в стані $1s$ може перебувати лише два електрони з протилежними спінами $(m_s = \pm 1/2)$, решта електронів повинна перебувати в інших станах. Для опису розподілу Z електронів незбудженого багатоелектронного атома по станах введемо поняття *шарів і оболонок.*

Національний університет
водного господарства
та природокористування

До шару належать електрони, які мають однакове головне квантове число n. Максимальна кількість електронів в шарі – $2n^2$. Шари класифікуються як: $K(n = 1)$, $L(n = 2)$, $M(n = 3)$, $N(n = 4)$ тощо. До оболонки належать електрони, які мають однакові квантові числа n і ℓ. Максимальна кількість електронів в оболонці – $2(2\ell + 1)$. Оболонки класифікуються як: $1s(n = 1, \ell = 0)$, $2s(n = 2, \ell = 0)$, $2p(n = 2, \ell = 1)$ тощо. Електронна конфігурація, наприклад, атома міді, який має 29 електронів, представлена наступним чином:

$$1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^2\ 3p^6\ 3d^{10}\ 4s^1.$$

Тут цифри над символами оболонок вказують на кількість електронів в них. Видно, що K-шар вміщує лише одну оболонку, інші шари мають по декілька оболонок.

6.8.2. Взаємодія між електронами складних атомів зумовлена як чисто електростатичними силами, так і магнітними силами, оскільки кожен електрон володіє як орбітальним, так і спіновим магнітним моментом. Остання взаємодія називається *спін-орбітальною*.

Національний університет водного господарства та природокористування

Якщо електростатична взаємодія сильніша від спін-орбітальної, то реалізується *зв'язок Рассель-Саундерса,* при якому спочатку сумуються окремо орбітальні, окремо спінові моменти усіх електронів атома (оболонки, шару), тобто

$$\vec{L}_L = \sum_i \vec{L}_{l_i}; \quad \vec{L}_S = \sum_i \vec{L}_{s_i} .$$

А сумарний (повний) момент електронів атома (оболонки, шару) $\vec{J}$ шукається як векторна сума орбітального і спінового моментів, тобто

$$\vec{L}_J = \vec{L}_L + \vec{L}_S .$$

Квадрат цих векторів виражається через відповідні квантові числа *L*, *S*, *J* наступними співвідношеннями:

$$L_L^2 = \hbar^2 L(L+1); \quad L_S^2 = \hbar^2 S(S+1); \quad L_J^2 = \hbar^2 J(J+1), \quad (7.60)$$

де *L* – орбітальне квантове число атома (оболонки, шару), яке приймає цілочисельні значення між максимальним і мінімальним значенням алгебраїчної суми $\left|\sum_i \ell_i\right|$, S – спінове квантове число атома (оболонки, шару), яке приймає значення між максимальним і мінімальним значенням алгебраїчної суми $\left|\sum_i s_i\right|$, *J* – внутрішнє квантове число атома (оболонки, шару), яке може приймати значення від $|L-S|$ до $L+S$. Наприклад, для частково заповненої оболонки np^2 вказані квантові числа можуть приймати значення: $L = 0, 1, 2$; $S = 0, 1$; $J = 0, 1, 2$. Відмітимо, що одночасно не може реалізуватися ситуація, в якій $L = 2$ і $S = 1$, (а, отже, $J = 3$), бо при цьому порушиться принцип Паулі.

Стани з різними можливими значеннями квантових чисел *L*, *S*, *J* називаються *термами,* які позначаються символічно як ${}^{2S+1}L_J$, де замість числового значення *L* пишуть відповідну велику букву $S(L = 0)$, $P(L = 1)$, $D(L = 2)$ тощо. Для наведеного прикладу можливими є наступні терми: ${}^1S_0, {}^3S_1, {}^1P_1, {}^3P_0, {}^3P_1, {}^3P_2, {}^1D_2$. Зрозуміло, що основний стан оболонки, тобто стан з мінімальною енергією,

Національний університет
та природокористування

реалізується через один з наведених термів (в даному випадку таким є терм $^3P_0$). Усі інші терми характеризують збуджені стани.

Зв'язок Рассель-Саундерса реалізується в більшості атомів. Але для деяких великих атомів спін-орбітальна взаємодія сильніша від електростатичної. В цьому випадку реалізується зв'язок (*jj*), при якому спочатку додаються векторно орбітальний і спіновий моменти окремих електронів, утворюючи повний момент *i*-го електрона

$$\vec{L}_{ji} = \vec{L}_{\ell i} + \vec{L}_{si},$$

а сумарний повний момент атома (оболонки, шару) визначається як векторна сума повних моментів окремих електронів:

$$\vec{L}_J = \sum_i \vec{L}_{ji}; \quad L_J^2 = \hbar^2 J(J+1), \tag{7.61}$$

де J – знову ж внутрішнє квантове число атома (оболонки, шару).

Розрахунок згадуваних моментів атомів полегшується тим, що для повністю заповненої оболонки ці моменти дорівнюють нулю. Проілюструємо це для *p*-оболонки атома зі зв'язком Рассель-Саундерса, використавши сумування проекцій моментів на вісь z, тобто використовуючи квантові числа m_ℓ і m_s усіх електронів *p*-оболонки, з урахуванням принципу Паулі. Дійсно:

$$L_{Lz} = \hbar \sum_i m_{\ell i} = \hbar(-1-1+0+0+1+1) = 0,$$

$$L_{Sz} = \hbar \sum_i m_{si} = \hbar(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}) = 0.$$

В такому разі стан атома визначається електронами частково заповнених оболонок. В більшості атомів внутрішні оболонки (1*s*, 2*s*, 2*p*, …) заповнені повністю, а частково заповнена лише зовнішня оболонка (хоч і є винятки). Електрони зовнішніх оболонок найслабше зв'язані зі своїм ядром і тому забезпечують зв'язок між атомами в молекулах і в кристалічних гратках твердих тіл. Такі електрони називаються *валентними*, вони відповідальні за спектри випромінювання і поглинення атомів.

Національний університет
та природокористування

§7.9. Характеристичне рентгенівське випромінювання

З попереднього є очевидним, що переходи між енергетичними рівнями повністю заповнених шарів і оболонок є неможливими. Але ситуація змінюється, якщо певним чином вибити електрон з глибокого шару, наприклад, при бомбардуванні металічного анода (антикатода) рентгенівської трубки швидкими електронами (§6.15). Після вибивання електрона з внутрішнього шару на вакантне місце може перейти електрон з вищого шару, при цьому випромінюється квант $h\nu = E_{n2} - E_{n1}$, у відповідності з енергетичною діаграмою, зображеною на рис. 7.16. Таке випромінювання називається рентгенівським *характеристичним;* воно володіє лінійчатим спектром, характерним для матеріалу антикатода. Лінії характеристичного випромінювання накладаються на суцільний спектр гальмівного випромінювання (рис. 6.33).

Відмітимо, що на енергетичній діаграмі (мал. 7.16) зображені

Національний університет
водного господарства
та природокористування

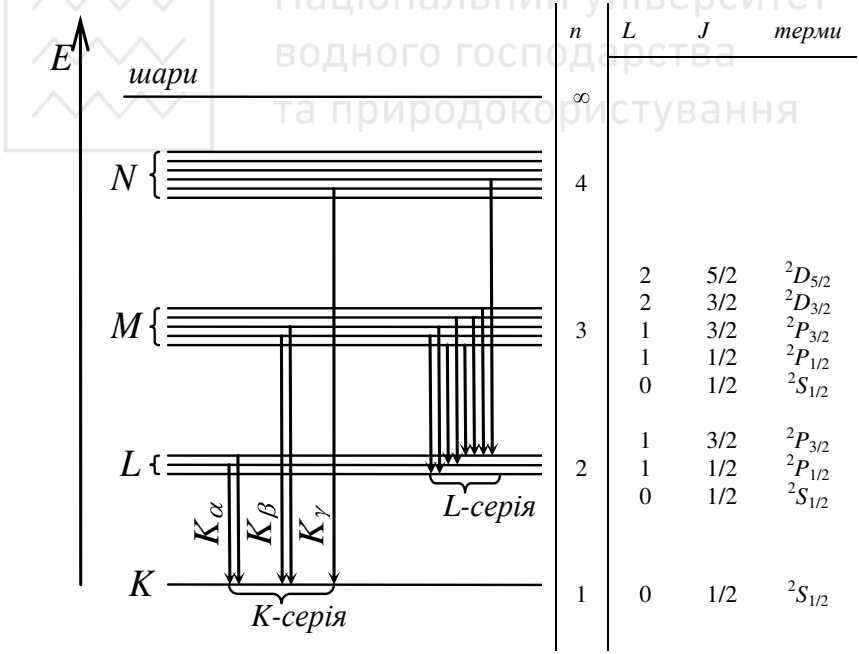


Рис.7.16

терми оболонок з вакансіями, бо лише в такому атомі можливі

переходи між шарами. При цьому можливі не усякі переходи, а лише ті, при яких виконуються наступні правила відбору: $\Delta L = \pm 1; \Delta J = 0, \pm 1,$ а для Δn обмежень немає.

Спектральні лінії характеристичного рентгенівського випромінювання групуються в серії *K*, *L*, *M*, *N* ... Зрозуміло, що *K*-серія формується при переході електронів на вакантні місця в *K*-шарі ($n_1 = 1$) з вищих шарів *L*, *M*, *N*, … ($n_2 = 2,3,4,\ldots$), при цьому випромінюються відповідно $K_\alpha, K_\beta, K_\gamma, \ldots$ лінії. Аналогічно *L*-серія формується при переході електронів на вакансії *L*-шару ($n_1 = 2$) з вищих шарів ($n_2 = 3,4,\ldots$). Для *M*-серії $n_1 = 3$, а для *N*-серії $n_1 = 4$.

Важливо зауважити, що енергетична відстань між термами різних шарів значно перевищує відстань між термами одного шару (якщо б на мал. 7.16 був дотриманий масштаб, то терми одного шару практично зливалися б). І тому в першому наближенні дискретністю термів в межах одного шару можна знехтувати і вважати, що енергія визначається лише квантовим числом *n*. Це дозволяє розраховувати довжини хвиль спектральних ліній в серіях за допомогою формули Мозлі

$$\frac{1}{\lambda} = R(Z-\sigma)^2\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right), \qquad (7.62)$$

де *R* – введена раніше постійна Рідберга (§7.1), а σ - постійна екранування. Фізичний зміст цієї постійної стає зрозумілим, якщо врахувати, що електрон, який здійснює перехід, перебуває в полі не тільки ядра з зарядом +*Ze*, як у випадку воднеподібних атомів, але і в полі електронів шару, на який відбувається перехід. Поле цих електронів послаблює (екранує) поле ядра. Зокрема, в *K*-шарі лише один електрон (другий попередньо вибитий) і тому для *K*-серії $\sigma = 1$. Для інших серій $\sigma > 1$; наприклад, для *L*-серії $\sigma = 7,5$.

Відмітимо, що поява ліній *K*-серії супроводжується завжди випромінюванням інших серій, бо заповнення вакансії в *K*-шарі приводить до виникнення вакансій у вищих шарах. Зрозуміло, що формула Мозлі є наближеною. При точних вимірюваннях виявляється, що кожна спектральна лінія розщеплена на декілька, дуже близьких. Наприклад, K_α–лінія – це дублет з двох ліній: $K_{\alpha 1}$ і $K_{\alpha 2}$ (мал. 7.16).

Національний університет
водного господарства
та природокористування

§7.10. Енергія молекул. Молекулярні спектри

Молекула, як система ядер і електронів, може здійснювати наступні рухи: поступальний, обертальний, коливальний, електронний, ядерний. Якщо в першому наближенні ці рухи вважати незалежними, то енергія молекул запишеться як

$$E = E_{пост} + E_{об} + E_{кол} + E_{ел} + E_{яд}. \qquad (7.63)$$

Оскільки енергія поступального руху не квантується, то вона нас цікавити не буде. Ядерна енергія квантується, але відстані між ядерними енергетичними рівнями настільки великі (див. розділ 8), що у звичайних умовах енергія ядерного руху залишається незмінною. І тому в подальшому $E_{пост}$ та $E_{яд}$ у виразі (7.63) опускатимемо.

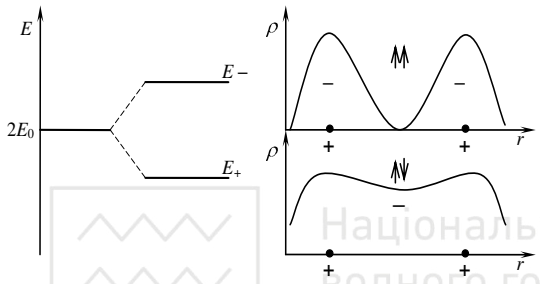


Рис.7.17

7.10.1. При утворенні молекул з окремих атомів зв'язок між ними забезпечується не всіма електронами, але лише валентними. І тому зміна електронної енергії молекул зумовлена зміною стану валентних електронів. Обмежимось розглядом двохатомних молекул (наприклад, NaCl і H_2). У випадку молекули NaCl атом Na легко іонізується і валентний електрон переходить до атома Cl. Таким чином, маємо справу з двома протилежно зарядженими іонами: Na^+ і Cl^-. Зв'язок в молекулах такого типу називають *іонним* або *гетерополярним*. Зрозуміло, що одночасно з силами кулонівського притягання існують і сили відштовхування між атомами (особливо сильні на малих відстанях). І

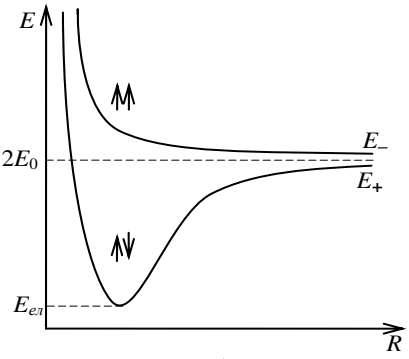


Рис.7.18

Національний університет
тому потенціальна енергія взаємодії атомів в залежності від відстані має вигляд потенціальної ями.

У випадку молекули H_2 обидва валентних електрони належать одночасно обом атомам (ядрам). Розв'язок рівняння Шредінгера для такої системи (Гайтлер і Лондон, 1927р.) дає для електронної енергії молекули вирази

$$E_+ = 2E_0 + \frac{K + A}{1 + S^2}; \quad E_- = 2E_0 + \frac{K - A}{1 - S^2}, \tag{7.64}$$

де E_0 – енергія електрона в ізольованому атомі, K – кулонівський інтеграл, який враховує попарну кулонівську взаємодію усіх частинок системи, S – інтеграл перекриття, який враховує перекриття хвильових функцій обох електронів, A – обмінний інтеграл, який враховує нерозрізняльність електронів, що ніби "належать" то одному, то іншому атому. Таким чином, електронний рівень ізольованого атому в молекулі зазнає розщеплення (рис. 7.17, а). При цьому кожному з розв'язків (7.64) відповідає свій просторовий розподіл густини електронного заряду (рис. 7.17, б).

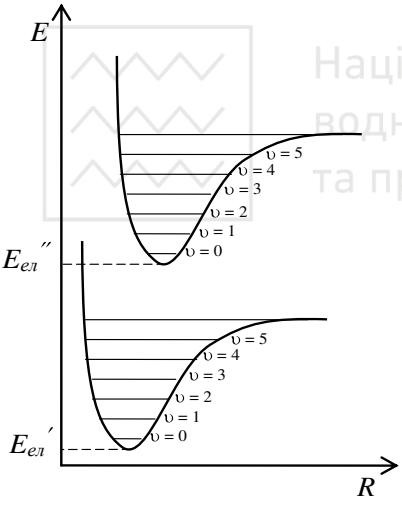


Рис.7.19

Оскільки за рахунок коливального руху атомів відстань між ними (R) змінюється, то слід очікувати залежність електронної енергії від R (рис. 7.18). Важливо відмітити, що стан з енергією E_- реалізується при паралельній (↑↑) орієнтації спінів електронів, а стан з енергією E_+ - при антипаралельній (↑↓) орієнтації спінів. Зрозуміло, що тільки залежність $E(R)$ з мінімумом відповідає стійкому стану молекули. Зв'язок в молекулах, який забезпечується антипаралельними (спареними) спінами електронів, називають *ковалентним* або *гомеополярним.*

7.10.2. Розглядаючи двохатомну молекулу як квантовий лінійний гармонічний осцилятор (§7.5), енергію коливального руху молекули запишемо як

$$E_{кол} = E_\upsilon = (\upsilon + \frac{1}{2})h\nu_0 , \tag{7.65}$$

де υ = 0,1,2, … – коливальне квантове число.

Кожний електронний рівень (електронна конфігурація) має свою сукупність коливальних рівнів (рис. 7.19). Формула (7.65) справедлива лише при малих значеннях υ, коли крива $E(R)$ близька до параболи. При великих інтенсивностях коливального руху (великих υ) потрібно врахувати відхилення від гармонічності (ангармонізм), і енергія коливального руху молекули запишеться як

$$E_\upsilon = \left[(\upsilon + \frac{1}{2}) - \gamma(\upsilon + \frac{1}{2})^2 \right] h\nu_0 ,$$

де γ – коефіцієнт ангармонічності. Зрозуміло, що в цьому випадку коливальні енергетичні рівні вже не є еквідистантними, а згущуються.

7.10.3. Енергія обертального руху двохатомної молекули

$$E_{об} = E_r = \frac{\mathrm{I}\omega_r^2}{2} = \frac{L_r^2}{2\mathrm{I}}, \tag{7.66}$$

де I – момент інерції молекули відносно осі обертання, що перпендикулярна до лінії, яка сполучає атоми, і проходить через центр молекули; ω_r - кутова швидкість обертання молекули; $L_r = I\omega_r$ – момент імпульсу молекули. Останній квантується так, як і орбітальний момент імпульсу електрона в атомі (7.48), тобто

$$L_r^2 = \hbar^2 J(J+1), \tag{7.67}$$

де J = 0,1,2,3, … – обертальне квантове число.

Підставивши (7.67) у (7.66), отримаємо

$$E_r = \frac{\hbar^2 J(J+1)}{2I} . \tag{7.68}$$

Момент інерції молекули розраховується як

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$I = \mu d^2 ,$$

де $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ – зведена маса молекули, атоми якої мають маси m_1 та m_2 ; d – відстань між центрами атомів.

7.10.4. Підставляючи у (7.63) вирази (7.65) і (7.68), отримаємо повну енергію молекули (в гармонічному наближенні):

$$E = E_{ел} + \left(\upsilon + \frac{1}{2}\right) h\nu_0 + \frac{\hbar^2 J(J+1)}{2I} . \qquad (7.69)$$

При цьому між енергіями різних форм руху молекули мають місце наступні нерівності: $E_{ел} \gg E_{кол} \gg E_{об}$. Енергетична діаграма, які відповідає виразу (7.69), для двох електронних конфігурацій представлена на рис. 7.20. Видно, що для відстаней між енергетичними рівнями різних форм руху також мають місце нерівності: $\Delta E_{åë} \gg \Delta E_{êîë} \gg \Delta E_{îá}$. Якщо певним (тепловим, оптичним тощо) чином перевести молекулу в збуджений стан, то при переході на нижчі рівні будуть випромінюватись кванти світла різної енергії. Але, як правило, досліджуються не спектри випромінювання, а спектри поглинання. Зумовлено це тим, що при помірних температурах молекули перебувають переважно у найнижчих електронних і коливальних станах. І тому спектри випромінювання мають мало ліній слабкої інтенсивності. Зрозуміло, що такі обмеження не поширюються на спектри поглинання, які формуються при переході з нижчих на вищі рівні під дією світла.

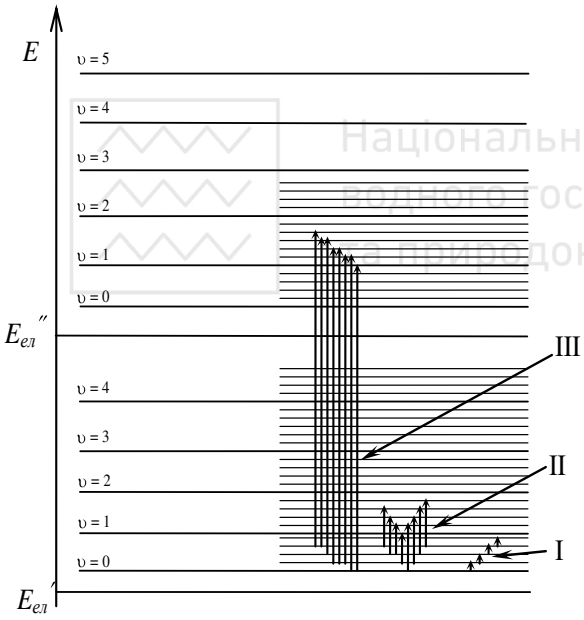


Рис.7.20

Розрізняють наступні типи спектрів поглинання молекул: обертальні (I), коливально-обертальні (II) і електронно-коливально-обертальні (III) (рис. 7.20). Обертальні спектри виникають при переходах між обертальними рівнями молекули однієї електронно-коливальної конфігурації; при цьому виконуються правила відбору $\Delta J = \pm 1$. Енергія поглинутих фотонів

$$h\nu = \Delta E_r = E_{J+1} - E_J = \frac{\hbar^2}{2I}\left[(J+1)(J+2) - J(J+1)\right] = \frac{\hbar^2}{I}(J+1), \quad (7.70)$$

а їх частота $\nu = \frac{\hbar}{2\pi I}(J+1)$.

Остання формула дозволяє за експериментальними значеннями частот (довжин хвиль) обертального спектру визначати момент інерції молекул. Відмітимо, що обертальні спектри лежать у далекій інфрачервоній області ($\lambda = 10^{-4} \div 10^{-3}$ *м*), на межі з ультрарадіодіапазоном.

Коливально-обертальні спектри формуються при переходах між обертальними рівнями молекули в різних коливальних конфігураціях, але однієї електронної конфігурації; при цьому виконуються наступні правила відбору: $\Delta\upsilon = \pm 1$, $\Delta J = \pm 1$. Енергія поглинутих фотонів (для малих υ, коли справедлива формула(7.65))

$$h\nu = \Delta E_\upsilon + \Delta E_r = h\nu_0 \pm \frac{\hbar^2}{I}(J+1), \quad (7.71)$$

а частота $\nu = \nu_0 \pm \frac{\hbar}{2\pi I}(J+1)$.

Такий спектр являє собою смугу близьких ліній, розміщених симетрично відносно уявної ν_0-лінії, яка не реалізується. Зрозуміло, що остання формула дозволяє встановити як момент інерції молекули, так і частоту її власних коливань. Коливально-обертальні смуги лежать в середній ІЧ-області ($\lambda \approx 10^{-5}$ *м*).

Електронно-коливально-обертальні спектри поглинання формуються при переходах між обертальними рівнями молекули в різних електронних конфігураціях; при цьому виконуються правила відбору: $\Delta\upsilon = \pm 1$, $\Delta J = 0, \pm 1$. Отже, кожній парі електронних рівнів відповідає група смуг коливально-обертального спектру. Ці смуги лежать як у близькій ІЧ-області, так і у видимій області ($\lambda \le 10^{-6}$ *м*).

Національний університет
та природокористування

§7.11. Люмінесценція

З точки зору квантової механіки випромінювання тіл зумовлене переходами атомів (молекул, кристалу) із збудженого стану в основний чи нижчий енергетичний стан. Характер випромінювання визначається способом переведення атомів (молекул, кристалу) в збуджений стан. Якщо збудження здійснюється тепловим шляхом, тобто нагріванням тіл, то випромінювання називається тепловим (рівноважним, температурним). Усі інші види збуджень супроводжуються випромінюванням, яке називається люмінесценцією. За С. Вавіловим, *люмінесценція* – це оптичне випромінювання тіла, що є надлишковим над тепловим при цій же температурі в даному спектральному діапазоні; при цьому тривалість свічення τ перевищує 10^{-10} c, тобто не припиняється зразу ж після вимкнення збудження. Розрізняють два види люмінесценції: флуоресценцію, коли $\tau = 10^{-9} \div 10^{-8}$ c, і фосфоресценцію, коли $\tau > 10^{-8} c$.

Крім того, залежно від способу збудження, розрізняють такі види люмінесценції:

- фотолюмінесценція, що виникає при поглинанні речовиною світла;
- електролюмінесценція, що виникає в неоднорідних середовищах під дією сильного електричного поля;
- катодолюмінесценція, що виникає при бомбардуванні речовини електронами;
- хемілюмінесценція, що зумовлена хімічними реакціями в середовищах.

Серед усіх видів люмінесценції найважливішою є фотолюмінесценція, яка збуджується як видимим світлом, так і більш короткохвильовим. Стокс встановив, що довжини хвиль люмінесцентного випромінювання, як правило, більші від довжин хвиль збуджуючого випромінювання. Дійсно, енергія збуджуючого фотона $h\nu_{зб}$ витрачається на створення «люмінесцентного» фотона з енергією $h\nu_{люм}$ і на різні процеси (в т. ч. теплові) неоптичного походження, тобто

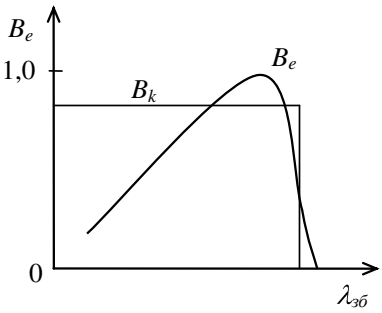


Рис.7.21

Національний університет водного господарства та природокористування

$$h\nu_{зб} = h\nu_{люм} + \Delta E,$$

звідси: $\nu_{зб} > \nu_{люм}$ і $\lambda_{зб} < \lambda_{люм}$.

Важливою характеристикою фотолюмінесценції є квантовий вихід, як відношення числа $N_л$ фотонів люмінесцентного випромінювання до числа $N_з$ збуджуючих фотонів, тобто

$$B_к = \frac{N_л}{N_з}$$

Як правило, значення $B_к$ залишаються постійними (і дещо меншим від одиниці) при малих довжинах хвиль збуджуючого випромінювання і різко падають до нуля, коли енергія збуджуючих фотонів стає недостатньою для переведення атомів речовини в збуджений стан (рис. 7.21). На вказаному рисунку також приведена спектральна залежність енергетичного виходу фотолюмінесценції $B_е$ – відношення енергії люмінесцентного випромінювання до енергії збуджуючого світла, тобто

$$B_е = \frac{E_л}{E_{зб}} = \frac{N_л \cdot h\nu_{люм}}{N_з \cdot h\nu_{зб}}. \qquad (7.72)$$

Якщо припустити, що $B_к = 1$, то формула (7.72) запишеться як $B_е = \frac{\nu_{люм}}{c} \cdot \lambda_{зб}$, з якої випливає лінійна залежність енергетичного виходу від довжини хвилі збуджуючого світла при малих $\lambda_{зб}$.

Фотолюмінесценція та інші види люмінесценції спостерігаються в газах, рідинах і твердих тілах. Зокрема, штучні кристали (ZnS, CdS тощо), леговані певними домішками – активаторами, які мають високий квантовий і енергетичний вихід люмінесценції, називаються кристалофосфорами (люмінофорами). В лампах денного світла реалізуються одночасно як катодолюмінесценція, так і фотолюмінесценція. Перший процес відбувається в газовому середовищі (пари ртуті) за рахунок бомбардування атомів електронами, прискореними електричним полем; при цьому виникає свічення як видимого, так і ультрафіолетового (переважно) діапазонів. Стінки лампи покриті шаром люмінофору, який люмінесціює під впливом УФ-випромінювання. При цьому спектральний склад фотолюмінесцентного випромінювання близький до випромінювання Сонця.

Національний університет

§7.12. Поглинання, спонтанне і вимушене випромінювання. Квантові генератори

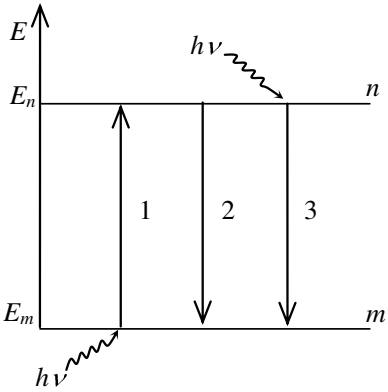


Рис.7.22

7.12.1. Раніше (§6.10) ми розглянули класичну теорію взаємодії світла з речовиною, яка ґрунтувалась на уявленнях про вимушені коливання електронів атомів під дією змінного електричного поля світлової (електромагнітної) хвилі. Тут же цю задачу розглянемо з точки зору квантової механіки в рамках дворівневої моделі, яка передбачає, що атоми речовини можуть перебувати в двох стаціонарних станах з енергіями E_n і E_m (рис. 7.22), при цьому m-стан будемо вважати основним (мінімальна енергія), а n-стан – збудженим. При абсолютному нулі всі атоми перебувають в основному стані, а при $T > 0$ концентрація атомів в різних станах, у відповідності з розподілом Больцмана для ідеального газу,

$$N_m = Ce^{-\frac{E_m}{k_0 T}}; \qquad N_n = Ce^{-\frac{E_n}{k_0 T}},$$

де k_0 – постійна Больцмана, а константа C шукається з умови $N = N_n + N_m$, де N – загальна кількість атомів речовини. Звідси

$$\frac{N_n}{N_m} = e^{-\frac{E_n - E_m}{k_0 T}} = e^{-\frac{\Delta E_{nm}}{k_0 T}}. \qquad (7.73)$$

Зрозуміло, що при $T > 0$ завжди $N_n < N_m$, тобто заселеність рівнів тим менша, чим вища енергія.

Нехай система атомів перебуває в рівновазі з електромагнітним випромінюванням, об'ємна густина енергії якого w_ν, а енергія квантів $h\nu \geq \Delta E_{nm}$. Тоді за А.Ейнштейном (1916 р.) в такій системі можливі три типи переходів:

- поглинання світла – перехід 1;
- спонтанне (самовільне) випромінювання – перехід 2;

– вимушене (індуковане) випромінювання під дією зовнішнього випромінювання – перехід 3.

Інтенсивність ΔN таких переходів, тобто кількість переходів в одиниці об'єму за одиницю часу, зрозуміло, пропорційна до кількості атомів у вихідному стані (N_m чи N_n),а також до густини енергії зовнішнього випромінювання (для вимушених переходів 1 та 3). І тому

для переходів 1: $\Delta N_{mn} = B_{mn} N_m w_\nu$, (7.74а)

для переходів 2: $\Delta N'_{nm} = A_{nm} N_n$, (7.74б)

для переходів 3: $\Delta N_{nm} = B_{nm} N_n w_\nu$, (7.74в)

де A_{nm}, B_{mn}, B_{nm} – коефіцієнти Ейнштейна; при цьому $B_{mn} = B_{nm}$.

Важливо відмітити, що «вимушені» (вторинні) фотони мають таку ж частоту, фазу, поляризацію і напрямок руху, як і «вимушуючі» (первинні) фотони.

За принципом детальної рівноваги інтенсивність переходів 1 повинна дорівнювати сумарній інтенсивності переходів 2 і 3, тобто

$$\Delta N_{mn} = \Delta N'_{nm} + \Delta N_{nm}. \qquad (7.75)$$

Підставляючи в цей вираз формули (7.74), після нескладних перетворень отримаємо

$$w_\nu = \frac{A_{nm}}{B_{nm}} \cdot \frac{1}{\frac{N_m}{N_n} - 1},$$

а з врахуванням (7.73), остаточний вираз для об'ємної густини енергії випромінювання, яке перебуває в рівновазі з атомною випромінюючою системою,

$$w_\nu = \frac{A_{nm}}{B_{nm}} \cdot \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k_0 T}} - 1}. \qquad (7.76)$$

Оскільки таку ізольовану систему можна розглядати як абсолютно чорне тіло, то його випромінювальна здатність пропорційна до густини енергії. І тому

$$r_{VT} \sim \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k_0 T}} - 1}, \qquad (7.77)$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

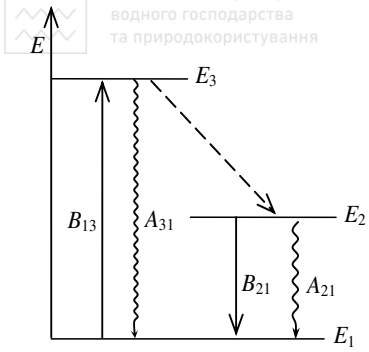


Рис.7.23

що з точністю до коефіцієнта пропорційності співпадає з формулою Планка (§6.11).

7.12.2. Порівняємо інтенсивності двох вимушених переходів в рівноважному стані: поглинання світла (ΔN_{nm}) і вимушеного випромінювання (ΔN_{mn}):

$$\frac{N_{nm}}{N_{mn}} = \frac{B_{nm}N_n w_\nu}{B_{mn}N_n w_\nu} = \frac{N_n}{N_m} = e^{-\frac{\Delta E_{nm}}{k_0 T}} < 1 \qquad (7.78)$$

Оскільки інтенсивність поглинальних переходів перевищує інтенсивність випромінюючих переходів, то в цілому світловий промінь, що взаємодіє з системою, буде поглинатись у відповідності з законом Бугера для інтенсивності світла

$$I = I_0 e^{-\alpha d},$$

де коефіцієнт поглинання $\alpha > 0$.

Зрозуміло, що в такій системі можна здійснити підсилення світла (від'ємне поглинання з $\alpha < 0$), якщо б реалізувалось інверсне заповнення рівнів, тобто $N_n > N_m$. Формально це можливо при T < 0 у формулі (7.78). В рівноважних умовах таку ситуацію в дворівневій моделі (рис. 7.22) реалізувати не можна. Практично інверсний стан середовища здійснюється в квантових генераторах оптичного діапазону (лазерах) і сантиметрового діапазону (мазерах), з використанням трирівневої моделі (рис. 7.23), яка реалізується, наприклад, в кристалі рубіну – окисі алюмінію Al_2O_3 з домішкою Cr^{+3}.

Іони хрому можуть перебувати в трьох станах: E_1 – основний стан, E_2, E_3 – збуджені стани. Випромінювання ксенонової лампи (лампи накачки) переводить іони в збуджений стан E_3 (перехід B_{13}); час життя в цьому стані складає 10^{-8} *с*. Менша частина іонів спонтанно переходить в основний стан (перехід A_{31}), випромінюючи фотони, але більша частина іонів безвипромінювально переходить в стан E_2, який є метастабільним, бо в ньому час життя складає 10^{-3} *с*, тобто на 5 порядків перевищує час життя в звичайному збудженому стані. За рахунок цього здійснюється інверсна заселеність рівнів, тобто $N_2 > N_1$.

Середовище з інверсною заселеністю називається *активним*. Навіть випадковий фотон, породжений при спонтанному переході A_{21}, викликає лавину вимушених переходів B_{21}. Вторинні фотони за частотою і фазою, а також напрямком поляризації співпадають з первинним фотоном. Дзеркала, розміщені на торцях активного середовища (одне з них – напівпрозоре) сприяють розмноженню лавин одного напрямку, перпендикулярного до площини дзеркал. І тому лазерне випромінювання характеризується дуже малим кутовим розходженням, високою монохроматичністю ($\Delta\lambda \approx 0{,}1$Å), строгою когерентністю, а також великою потужністю.

Вказані властивості забезпечують практичне використання лазерних технологій: запис і передача інформації в земних і космічних умовах, обробки матеріалів, точна метрологія, в т.ч. геодезична, безкровна хірургія, голографія тощо.

§7.13. Теплові коливання кристалічної решітки і теплоємність твердих тіл

7.13.1. Більшість твердих тіл володіють кристалічною структурою, тобто є сукупністю великого числа атомів, впорядковано розміщених в просторі, і які тим самим утворюють кристалічну решітку. Оскільки атоми, що перебувають в сусідніх вузлах кристалічної решітки, зазнають взаємного притягання і відштовхування, то потенціальна енергія взаємодії між ними має вигляд потенціальної ями (рис.7.24).

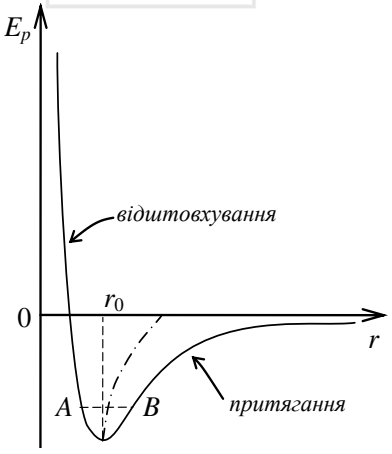


Рис.7.24

В рамках класичної фізики при $T = 0$ атоми повинні перебувати на дні потенціальної ями, на відстані r_0 один від одного. І, звичайно, бути нерухомими. З підвищенням температури енергія атомів зростає, і кожен атом починає здійснювати коливний рух відносно рівноважного положення між точками A і B. При дуже низьких температурах ці коливання можна вважати гармонічними, бо залежність $E_p(r)$ – приблизно параболічна. При вищих температурах, як видно з рис. 7.24, з'являється асиметрія

відхилень від рівноважного положення r_0: коливання стають ангармонічними. За рахунок ангармонізму середня відстань між атомами (штрих-пунктир) з ростом температури збільшується – має місце теплове розширення твердих тіл.

Оскільки три взаємноперпендикулярні напрямки коливань є рівноправними, то можна вважати, що атом у кристалічній решітці володіє трьома коливальними ступенями вільності ($i = 3$). Якщо знехтувати ефектом ангармонізму, то теплові коливання окремого атома можна моделювати сукупністю трьох незалежних лінійних осциляторів. Будемо вважати коливання окремих атомів незалежними. Тоді для одного моля речовини кількість ступенів вільності коливального руху складатиме $3N_A$, де N_A – число Авогадро. В класичній фізиці на одну ступінь вільності коливального руху припадає енергія k_0T, де k_0 – постійна Больцмана. Отже, внутрішня енергія моля твердого тіла

$$U = 3N_A k_0 T = 3RT, \tag{7.79}$$

де R – універсальна газова стала.

Молярна теплоємність тіла

$$C_\mu = \frac{dU}{dT} = 3R. \tag{7.80}$$

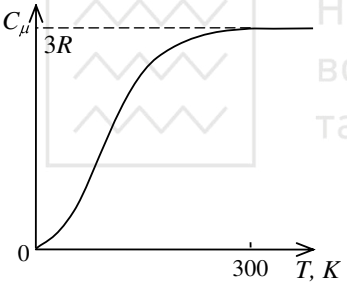


Рис.7.25

Такий результат (закон Дюлонга-Пті) підтверджується експериментально для багатьох простих кристалічних речовин при високих температурах. Але при низьких температурах експеримент (рис.7.25) і класична теорія катастрофічно розходяться. Зокрема, при дуже низьких температурах виконується “закон кубів Дебая” , у відповідності з яким $C_\mu \sim T^3$.

7.13.2. Першу спробу узгодити експеримент з теорією здійснив А. Ейнштейн (1907 р.), який залишивши тезу про незалежність осциляторів, запропонував вважати останні не класичними, а квантовими. Як показано в §7.5, енергія квантового лінійного осцилятора

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$\varepsilon_\upsilon = h\nu(\upsilon + \frac{1}{2}).$$

Ейнштейн припустив, що всі осцилятори коливаються з однаковою частотою ν, а їх розподіл за енергією описується класичною функцією розподілу Максвелла-Больцмана

$$N_{\varepsilon_\upsilon} = \frac{N_0 e^{-\frac{\varepsilon_\upsilon}{k_0 T}}}{\sum_\upsilon e^{-\frac{\varepsilon_\upsilon}{k_0 T}}},$$

де N_0 – загальна кількість осциляторів, а N_{ε_υ} – кількість осциляторів, коливна енергія яких складає ε_υ. Тоді середня енергія одного осцилятора, тобто енергія, що припадає на одну ступінь вільності,

$$<\varepsilon_{кв}> = \frac{\sum_\upsilon N_{\varepsilon_\upsilon} \cdot \varepsilon_\upsilon}{N_0} = \frac{h\nu}{2} + h\nu \frac{\sum_\upsilon \upsilon e^{-\frac{\varepsilon_\upsilon}{k_0 T}}}{\sum_\upsilon e^{-\frac{\varepsilon_\upsilon}{k_0 T}}}. \qquad (7.81)$$

Після математичних перетворень останній вираз запишеться як

$$<\varepsilon_{ê\hat{a}}> = \frac{h\nu}{2} + \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{k_0 T}} - 1}. \qquad (7.82)$$

Внутрішня енергія одного моля твердого тіла

$$U = 3N_A <\varepsilon_{ê\hat{a}}> = \frac{3}{2} N_A h\nu + \frac{3N_A h\nu}{e^{\frac{h\nu}{k_0 T}} - 1},$$

а молярна теплоємність

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$C_\mu = \frac{dU}{dT} = \frac{3N_A(h\nu)^2 e^{\frac{h\nu}{\kappa_0 T}}}{(e^{\frac{h\nu}{\kappa_0 T}} - 1)^2 \kappa_0 T^2}. \qquad (7.83)$$

При високих температурах, коли k_0T>>hν, формула (7.83) дає $C_\mu = 3N_A k_0 = 3R$, тобто закон Дюлонга-Птті. При низьких температурах, коли k_0T<<$h\nu$, отримаємо

$$C_\mu = \frac{3N_A(h\nu)^2}{k_0 T^2} \cdot e^{-\frac{h\nu}{k_0 T}}. \qquad (7.84)$$

Оскільки експоненційна залежність сильніша від степеневої, то (7.84) дає зменшення теплоємності з пониженням температури, що лише якісно узгоджується з експериментом (рис. 7.25), але не забезпечує кількісно виконання "закону кубів Дебая". Для розділення областей високотемпературного і низькотемпературного наближень вводиться характеристична температура Ейнштейна Θ_E, при якій $k_0\Theta_E = h\nu$; звідси $\Theta_E = \frac{h\nu}{k_0}$. Отже, при $T >> \Theta_E$ виконується закон Дюлонга-Птті; при $T << \Theta_E$ виконується залежність (7.84).

7.13.3 Подальше удосконалення теорії, здійснене Дебаєм (1912 р.), полягає в тому, що коливання атомів кристалічної гратки вже не вважаються незалежними, а в кристалі встановлюється система т.з. нормальних коливань з частотою від 0 до $\nu_{\max}$; при цьому в коливанні певної частоти беруть участь усі атоми гратки. Розрахунок дає для кількості нормальних коливань, частоти яких лежать в межах від ν до $\nu+d\nu$, в одному молі речовини

$$dN_\nu = 9N_A \cdot \frac{\nu^2 d\nu}{\nu_{\max}^3}. \qquad (7.85)$$

Поява максимальної частоти $\nu_{\max}$ зумовлена тим, що загальна кількість нормальних коливань повинна дорівнювати кількості ступенів вільності коливного руху атомів моля кристалу, тобто

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$\int_{\nu=0}^{\nu_{\max}} dN_\nu = 3N_A$$

Розглядаючи кожне нормальне коливання як квантовий лінійний осцилятор, для внутрішньої енергії одного моля кристалу отримаємо

$$U = \int_{\nu=0}^{\nu_{\max}} \langle \varepsilon_{кв} \rangle dN_\nu ,$$

а після підстановки формул (7.81) та (7.85) і математичних перетворень

$$U = U_0 + \frac{9N_A h}{\nu_{\max}^3} \int_0^{\nu_{\max}} \frac{\nu^3 d\nu}{e^{\frac{h\nu}{k_0 T}} - 1} . \qquad (7.86)$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Ввівши підстановку $x = \frac{h\nu}{k_0 T}$, отримаємо вираз для молярної теплоємності кристалу

$$C_\mu = \left(\frac{dU}{dT} \right) = \frac{9R}{x_{\max}^3} \int_0^{x_{\max}} \frac{e^x x^4 dx}{(e^x - 1)^2} . \qquad (7.87)$$

За аналогією з попереднім введемо характеристичну температуру Дебая $\Theta_Д$, використавши співвідношення $k_0 \Theta_Д = h\nu_{\max} = \hbar\omega_{\max}$; звідси

$$\Theta_Д = \frac{h\nu_{\max}}{k_0} = \frac{\hbar\omega_{\max}}{k_0} .$$

Оскільки $x_{\max} = \frac{\Theta_Д}{T}$, то (7.87) після інтегрування набуде вигляду

$$C_\mu = 3R \left[12 \left(\frac{T}{\Theta_Д} \right)^3 \int_0^{x_{\max}} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} - \frac{3 \left(\frac{\Theta_Д}{T} \right)}{e^{\frac{\theta_Д}{T}} - 1} \right] .$$

При високих температурах ($T >> \Theta_Д$), коли $x \to 0$, використавши наближення $e^x \approx 1 + x$, отримаємо $C_\mu = 3R$, тобто закон Дюлонга-Пті. При низьких температурах ($T << \Theta_Д$), коли $x_{max} \to \infty$, отримаємо "закон кубів Дебая"

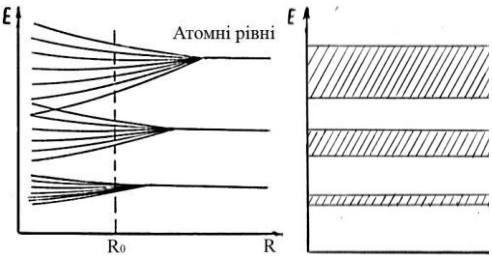
$$C_\mu = 234R\left(\frac{T}{\Theta_Д}\right)^3, \qquad (7.88)$$

який кількісно узгоджується з експериментом (рис.7.25).

В рамках концепції корпускулярно-хвильового дуалізму речовини зміну енергії коливного руху кристалічної гратки можна описати процесами випромінювання чи поглинання особливої квазічастинки – *фонона*, який володіє нульовим спіном і тому належить до класу бозонів (§7.7) .

§7.14. Елементи зонної теорії твердих тіл

7.14.1. При утворенні кристалічної решітки твердих тіл, тобто при зближенні окремих атомів до відстані $\sim 10^{-10}$ *м*, атомні енергетичні рівні повинні розщеплюватись в зони рівнів, оскільки принцип Паулі тепер стосується не окремих атомів, а кристалічної решітки в цілому. Розщеплення тим сильніше, чим менша відстань між атомами і чим вищий енергетичний рівень (рис. 7.26 а). Таким чином, шкала енергій електронів в кристалічній решітці розбивається на зони дозволених енергій і зони заборонених енергій (на рис. 7.26 б заштриховані зони дозволених енергій, які відповідають рівноважній відстані між атомами R_0).

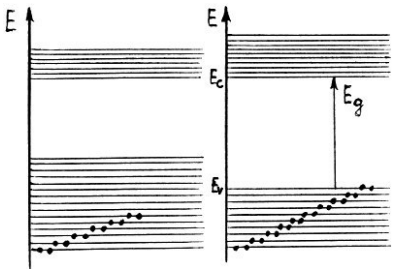


а) б)

Рис. 7.26

Кількість енергетичних рівнів в зонах співмірна з кількістю атомів речовини, тобто $\sim 10^{22} \div 10^{23}$. Оскільки ширина зон $\sim (1 \div 10)$åÂ, то відстань між окремими рівнями $\sim 10^{-22}$ *åÂ*, що значно менше від енергії

теплового руху k_0T. І тому можна вважати розподіл енергій в зонах неперервним.



а) метали б)напівпровідники, діелектрики

Рис. 7.27

У відповідності з принципом Паулі на кожному енергетичному рівні в зонах може перебувати не більше двох електронів з протилежними спінами. Якщо зона утворена з повністю заповненого електронами атомного рівня, то всі рівні такої зони також повністю заповнені. Зрозуміло, що це стосується зон, утворених з глибоких атомних рівнів. Електрони таких зон не можуть брати участь в електричних і теплових явищах, бо ні енергія електричного поля, ні теплова енергія не є достатніми для переводу електрона в сусідню вищу зону, а переходи в межах заповненої зони неможливі.

Інша ситуація в зонах, утворених з частково заповнених рівнів, тобто рівнів валентних електронів. Зрозуміло, що такі зони будуть заповнені також частково. Для прикладу розглянемо зону, утворену з атомного s-рівня, на якому перебуває лише один (валентний) електрон (Li, Na, K тощо). Якщо кристалічна решітка утворена з N атомів, то вказана зона має N рівнів, на яких може розміститись $2N$ електронів. Оскільки валентних електронів лише N, то заповниться лише половина зони (рис. 7.27 а). А це означає, що під впливом зовнішнього збудження (тепло, електричне поле) електрони можуть вільно переходити на вищі рівні в межах однієї зони, тим самим збільшувати свою енергію, тобто прискорюватися. Отже, електрони в частково заповненій зоні є носіями струму. Тому така зона, яку ми назвемо *валентною,* є одночасно *зоною провідності*. В залежності від характеру заповнення валентної зони всі тверді тіла поділяються на метали, з одного боку (рис. 7.27 а), і напівпровідники та діелектрики, з іншого (рис. 7.27 б). В металах валентна зона (v-зона) заповнена частково, всі вищі зони порожні, всі нижчі зони заповнені повністю. В напівпровідниках і діелектриках v-зона заповнена повністю (при $T = 0$) і тому не може бути зоною провідності. Наступна вища зона при $T = 0$ повністю порожня. Ця зона називається зоною провідності (c-зоною), бо при певних умовах ($T \neq 0$) в ній можуть з’явитися

електрони, які будуть носіями струму. Енергетична відстань між дном с-зони (E_c) і стелею v-зони (E_v) називається забороненою зоною $E_g = E_c - E_v$. Якщо $E_g < 2{,}5$еВ, то речовина – напівпровідник, якщо $E_g > 2{,}5$еВ, то – діелектрик.

Появу носіїв струму в напівпровідниках пояснимо, використавши плоску модель кристалічної решітки атомного напівпровідника, наприклад, Ge (рис.7.28). Такий напівпровідник має тетраедричну кристалічну структуру, при якій кожен атом оточений чотирма сусідами. Зв'язок між сусідніми атомами забезпечується двома валентними електронами з протилежними спінами. При $T = 0$ всі валентні електрони перебувають на зв'язках, "зайвих" електронів немає, що відповідає повністю заповненій валентній зоні і порожній зоні провідності.

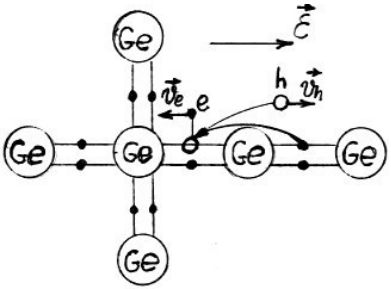


Рис.7.28

При нагріванні кристалу деякі електрони за рахунок енергії теплового руху можуть вийти із зв'язків, стати вільними і в електричному полі напруженістю $\vec{\mathcal{E}}$ набути швидкості напрямленого руху $\vec{v}_{å}$. На звільнене вакантне місце може перейти електрон із сусіднього зв'язку, що рівнозначне рухові дірки (*hole*) в протилежному напрямку зі швидкістю $\vec{v}_h$. Оскільки дірка рухається за полем (електрон – проти поля), то дірку слід розглядати як позитивний заряд $+e$. На енергетичній діаграмі теплова генерація вільних електронів і дірок зображається як перехід електрона з v-зони у с-зону (рис.7.29). Зрозуміло, що чим вища інтенсивність теплового збудження (чим вища температура), тим вища концентрація електронів (n) і дірок (p) у відповідних зонах. Відмітимо, що ця концентрація не перевищує, як правило, 0,1% від кількості енергетичних рівнів в зонах. Отже, електрони є носіями струму в майже порожній зоні провідності, а дірки – в майже повністю заповненій валентній зоні.

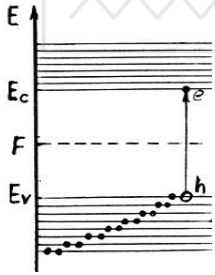


Рис. 7.29

Енергія вільного електрона

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$Å = \frac{m_0 v^2}{2} = \frac{(m_0 v)^2}{2m_0} = \frac{ð^2}{2m_0}, \quad (7.89)$$

де p – імпульс електрона.

В багатьох випадках для опису енергії електронів в металах і напівпровідниках можна користуватись цією ж формулою, але ввівши замість маси електрона m_0 ефективну масу m_n^*, яка може бути як більшою, так і меншою m_0, і яка враховує взаємодію зонних електронів з полем кристалічної гратки. Аналогічно вводиться і ефективна маса зонних дірок m_p^*. І тому енергії електронів і дірок виражаються через їх імпульси наступним чином

$$Å_å = \frac{ð^2}{2m_n^*}; \; Å_h = \frac{ð^2}{2m_ð^*}, \quad (7.90)$$

де відлік енергії ведеться від краю відповідної зони: вверх від E_c для електронів і вниз від E_v для дірок. Співвідношення (7.90) називаються законами дисперсії для зонних носіїв струму.

§7.14.2. Розподіл частинок з напівцілим спіном (ферміонів), в т.ч. і електронів, за енергіями описується квантовою функцією розподілу Фермі-Дірака

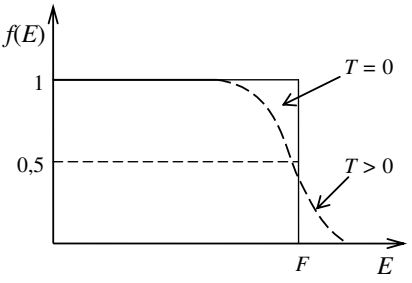


Рис.7.30

$$f(E) = \frac{1}{e^{\frac{E-F}{k_0 T}} + 1}, \quad (7.91)$$

де $f(E)$ – імовірність перебувати електрону на рівні з енергією E, а F – енергія (рівень) Фермі. Зміст останньої зрозумілий з аналізу $f(E)$ при $T = 0$. Якщо $E > F$, то $f(E) = 0$, тобто рівень порожній; якщо $E < F$, то $f(E) = 1$, тобто рівень заповнений. Отже, енергія Фермі відповідає найвищому рівню, який ще заповнений при $T = 0$ (рис. 7.30). При $T > 0$ $f(E) = 1/2$, якщо $E=F$, тобто енергія Фермі відповідає рівню, який при ненульовій температурі заповнений наполовину (рис. 7.30).

При певних умовах, а саме, коли $E - F >> k_0T$, квантовий розподіл Фермі-Дірака переходить в класичний розподіл Максвелла-Больцмана

$$f(E) = A(T)e^{-\frac{E}{k_0T}}. \qquad (7.92)$$

Електронний газ, що описується таким розподілом, називається *невиродженим* газом. В цей же час електронний газ, що описується розподілом Фермі-Дірака, називається *виродженим*. Критерієм виродження є нерівність

$$\frac{nh^3}{2(\pi m_n^* k_0 T)^{3/2}} \gg 1, \qquad (7.93)$$

тобто виродження має місце при високій концентрації електронів, малій їх ефективній масі та низьких температурах. В металах електронний газ завжди вироджений ($n \approx 10^{22}$ *см*$^{-3}$), в напівпровідниках, як правило, невироджений ($n < 10^{18}$ *см*$^{-3}$).

В металах при низьких температурах концентрація електронів зони провідності, енергія яких лежить в інтервалі $E \div E + dE$, складає

$$dn(E) = 2dg(E),$$

де $dg(E)$ – кількість енергетичних рівнів у вказаному інтервалі. Якщо справедливий параболічний закон дисперсії (7.90), то нескладний розрахунок дає

$$dn(E) = \frac{\sqrt{2}(m_n^*)^{3/2}E^{1/2}}{\pi^2\hbar^3}dE.$$

Тоді повна концентрація носіїв у *c*-зоні металу при низьких температурах

$$n = \int_0^F dn(E) = \frac{2\sqrt{2}(m_n^*)^{3/2}}{3\pi^2\hbar^3}F^{3/2} \qquad (7.94)$$

і від температури не залежить. Енергія Фермі

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$F = \frac{\hbar^2}{2m_n^*}(3\pi^2 n)^{2/3},$$

що дає $F \approx 5eB$ при $n \approx 10^{22} см^{-3}$. Середня енергія зонних електронів в металах $< E >= \frac{\int_0^F Edn(E)}{n} = \frac{3}{5}F$, що значно більше від k_0T.

А це означає, що лише незначна кількість електронів, що перебувають на рівнях, близьких до рівня Фермі, може змінити свою енергію при зміні температури. Таким чином, електронний газ в металах практично не вносить вкладу в теплоємність кристалу (див. §7.13), незважаючи на високу загальну концентрацію електронів.

В напівпровідниках рівень Фермі, як правило, лежить в забороненій зоні (рис.7.29), і тому при розрахунку концентрації невироджених електронів в зоні провідності потрібно врахувати, що функція розподілу (7.92) в усьому діапазоні енергій $E > E_c$ менша від одиниці і залежить від температури. І тому

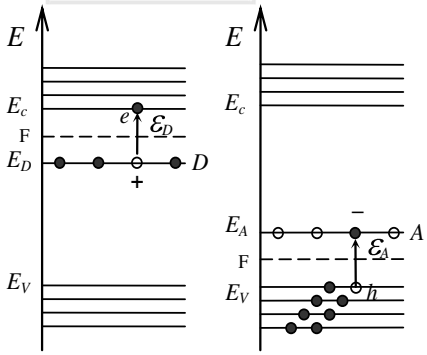


Рис.7.31

$$n = 2\int_{E_c}^{\infty} f(E)dg(E) = A_n e^{-\frac{E_g}{2\kappa_0 T}}, \quad (7.95)$$

де A_n – множник, який слабо залежить від температури і визначається ефективною масою носіїв, а E_g – ширина забороненої зони.

Як слідує з (7.95), з ростом температури концентрація зонних (вільних) електронів збільшується за експоненційним законом. Ця формула справедлива лише для бездомішкового, т.з. *власного*, напівпровідника. Зрозуміло (див. рис. 7.29), що концентрація дірок у валентній зоні дорівнює концентрації електронів в зоні провідності: $n = p = n_i$ – власна концентрація носіїв струму.

Національний університет водного господарства та природокористування

Ситуація радикально змінюється, коли в напівпровідник ввести домішки. Зокрема, коли вводяться донорні домішки, тобто домішки, які легко віддають електрони в с-зону, то $n >> p$; такий домішковий напівпровідник називається *електронним* (*n*-типу). Якщо ж вводяться акцепторні домішки, тобто домішки, які легко захоплюють електрони з v-зони, то $p >> n$; такий домішковий напівпровідник називається *дірковим* (*p*-типу). В класичних напівпровідниках Ge і Si в ролі донорних домішок виступають As, P, а акцепторних – Ga, In.

Оскільки енергія іонізації донорів та акцепторів значно менша від ширини забороненої зони, то енергетичні рівні цих домішок розміщені в забороненій зоні на відстані енергії іонізації ($\varepsilon_Д$, ε_A) від дна зони провідності чи вершини валентної зони, відповідно (рис. 7.31). При низьких температурах, коли іонізація домішок є слабкою, а власна генерація носіїв – несуттєва, концентрація носіїв в зонах запишеться:

для *n*-типу: $$n = B_n e^{-\frac{\varepsilon_Д}{2k_0 T}}, \quad (7.96)$$

для *p*-типу: $$p = B_p e^{-\frac{\varepsilon_A}{2k_0 T}}, \quad (7.97)$$

де B_n і B_p – множники, які слабо залежать від температури, а визначаються концентрацією відповідних домішок і ефективною масою носіїв струму. Отже, і в цьому випадку концентрація носіїв збільшується експонеційно з ростом температури кристалу. Відмітимо, що рівень Фермі в домішкових напівпровідниках розміщений біля країв відповідних зон (рис. 7.31).

§7.15. Електропровідність металів і напівпровідників

Відомо (розділ 3), що густина електричного струму в провідниках (металах, напівпровідниках, електролітах тощо) визначається зарядом носіїв, їх концентрацією n та середньою швидкістю напрямленого (дрейфового) руху $<\vec{v}_{др}>$, зумовленого електричним полем напруженістю $\vec{\varepsilon}$. Якщо носіями струму є електрони, то густина струму $\left(j = \frac{I}{S} \right)$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$j = en < v_{äð} > \qquad (7.98)$$

В слабких електричних полях, де виконується закон Ома, швидкість напрямленого руху лінійно залежить від напруженості електричного поля, тобто

$$< v_{äð} >= \mu_n \cdot \mathcal{E}, \qquad (7.99)$$

де μ_n – рухливість електронів.

Підставляючи (7.99) у (7.98), отримаємо

$$j = en\mu_n \mathcal{E} = \sigma \cdot \mathcal{E}, \qquad (7.100)$$

тобто закон Ома в диференційній формі, де

$$\sigma = en\mu_n \qquad (7.101)$$

– питома електропровідність електронного провідника (металу, напівпровідника *n*-типу).

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Питома електропровідність власного напівпровідника

$$\sigma = \sigma_n + \sigma_ð = å(n\mu_n + ð\mu_ð), \qquad (7.102)$$

де μ_p – рухливість дірок.

Рухливість носіїв визначається так званим часом релаксації τ, який формально можна розглядати як проміжок часу між двома послідовними актами зіткнення (розсіяння) носіїв з недосконалостями кристалу. Основними недосконалостями (відхиленнями від ідеальності) є коливання кристалічної решітки (фонони) і домішки кристалу. В рамках вказаного формалізму середній час релаксації носіїв

$$< \tau >= \frac{< \lambda >}{< v >}, \qquad (7.103)$$

де $< \lambda >$ – середня довжина вільного (між двома послідовними зіткненнями) пробігу носіїв, $< v >$ – середня швидкість теплового (хаотичного) руху носіїв.

Національний університет
та природокористування

Строга квантова теорія дає

$$\mu = \frac{e}{m^*} < \tau >= \frac{e < \lambda >}{m^* < \mathrm{v} >} . \qquad (7.104)$$

Підставляючи (7.104) у (7.101), отримаємо для питомої електропровідності

$$\sigma = \frac{e^2 n < \lambda >}{m_n^* < \mathrm{v} >} . \qquad (7.105)$$

Оскільки в металах концентрація носіїв (електронів у с-зоні) від температури не залежить, то залежність питомої електропровідності визначається лише відношенням $< \lambda > / < \mathrm{v} >$. Виявляється, що, за винятком дуже низьких температур, $< \lambda > / < \mathrm{v} > \sim T^{-1}$. І тому $\sigma \sim T^{-1}$, а питомий опір $\rho = 1/\sigma \sim T$, у відповідності з відомим експериментальним законом $\rho = \rho_0 (1 + \alpha t)$. Відмітимо, що при оціночних розрахунках можна покладати $m_n^* = m_0$.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Принципово інша ситуація в напівпровідниках, де концентрація носіїв експоненційно залежить від температури (7.95–7.97). Рухливість носіїв в напівпровідниках також залежить від температури, але за значно слабшим, степеневим законом

$$\mu = \mu_0 T^{\alpha},$$

де α при різних температурах приймає значення від – 1,5 до + 1,5. Підставляючи (7.95–7.97) у (7.101; 7.102), отримаємо вирази для питомої електропровідності:

власного (*n=p*) напівпровідника $\sigma = en(\mu_n + \mu_p) = c_i e^{-\frac{E_g}{2k_0 T}}$,(7.106)

домішкового n-типу $\sigma = en\mu_n = c_n e^{-\frac{\varepsilon_{\ddot{A}}}{2k_0 T}}$, (7.107)

Національний університет
водного господарства
та природокористування

домішкового р-типу

$$\sigma = ep\mu_p = c_p e^{-\frac{\varepsilon_A}{2k_0T}}, \qquad (7.108)$$

де передекспоненційні множники c_i, c_n, c_p можемо наближено вважати від температури незалежними. Формули (7.106 – 7.108) можна узагальнити у вигляді

$$\sigma = ce^{-\frac{\varepsilon_a}{k_0T}}, \qquad (7.109)$$

де ε_a – енергія активації провідності, яка у власному напівпровіднику дорівнює $\mathring{A}_g/2$, а у домішкових напівпровідниках має зміст половини енергії іонізації донорів чи акцепторів. Отже, питома електропровідність напівпровідників експоненційно збільшується з ростом температури, чим останні принципово відрізняються від металів.

Температурна залежність питомого опору напівпровідникового кристалу, як випливає з (7.109),

$$\rho = \frac{1}{\sigma} = \rho_0 e^{\frac{\varepsilon_a}{k_0T}} \qquad (7.110)$$

або

$$\lg\rho = \lg\rho_0 + \frac{0{,}43\varepsilon_a}{k_0}\cdot\frac{1}{T}.$$

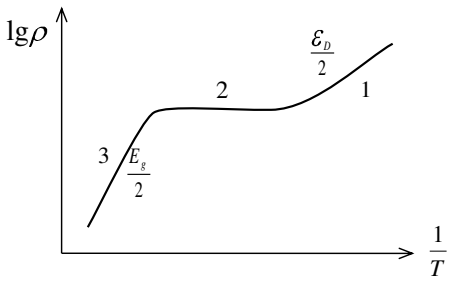


Рис.7.32

В широкій області температур експериментальна залежність $\lg\rho = f\left(\frac{1}{T}\right)$ (рис. 7.32) має три ділянки: 1 – домішкової провідності; 2 – повної іонізації домішок (n = [$Д$] для кристалу n-типу); 3 – власної провідності.

Національний університет
та природокористування

§7.16. Напівпровідникові структури

7.16.1. Однорідні напівпровідникові кристали використовують для виготовлення серії приладів: терморезисторів, фоторезисторів, тензодатчиків, де реалізується залежність опору кристалу від температури, освітленості, зовнішнього тиску. Але значно ширше використовуються прилади (діоди, транзистори, фотодіоди, світлодіоди, лазери, мікросхеми, процесори ЕОМ тощо), виготовлені з використанням напівпровідникових структур: електронно-діркових переходів(*p*-*n*–переходів) і бар'єрів Шоткі. Зокрема, *бар'єр Шоткі* – це контакт металу і напівпровідника із спеціально підібраними роботами виходу електронів з них. *Електронно-дірковий перехід* – це контакт двох областей одного кристалу з різними типами провідності (*p*- і *n*-) (рис. 7.33)

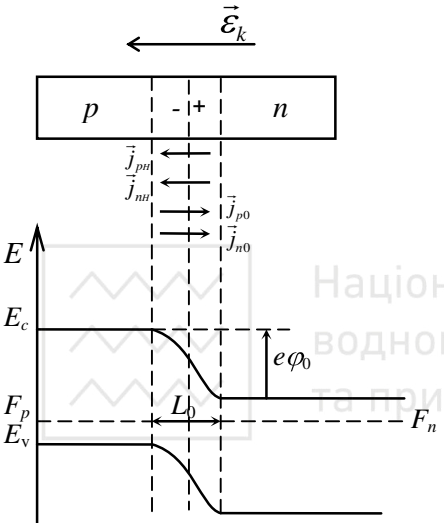


Рис.7.33

Основними носіями в *p*-області є дірки з концентрацією *p*, в *n*-області – електрони з концентрацією *n*. В цей же час у цих областях є і неосновні носії: електрони в *p*-області з концентрацією n_p і дірки в *n*-області з концентрацією p_n. Оскільки повинні виконуватись співвідношення $n \cdot p_n = p \cdot n_p = n_i^2$, а в симетричному *p*-*n*-переході і $p = n$, то мають місце нерівності

$$n >> p_n,\ p >> n_p,\ n >> n_p,\ \text{і}\ \ p >> p_n.$$

Таким чином, на границі областей реалізується сильний градієнт концентрацій електронів і дірок, що викликає дифузію електронів з *n*-області в *p*-область і дірок з *p*-області в *n*-область. Ці дифузійні потоки описуватимемо як дифузійний струм основних носіїв з густинами $\vec{j}_{p0}$ та $\vec{j}_{n0}$ (рис. 7.33). В об'ємі областей локальна нейтральність забезпечується виконанням рівностей $n = N_D^+ - N_A^-$ і $p = N_A^- - N_D^+$ (рис. 7.31). В

приконтактних областях нейтральність порушується: приконтактний шар *p*-області заряджається негативно (заряд нескомпенсованих акцепторів), а приконтактний шар *n*-області заряджається позитивно (заряд нескомпенсованих донорів). Отже, виникає контактне електричне поле $\vec{\varepsilon}_k$ у вигляді подвійного зарядженого шару. Це поле перешкоджає подальшій дифузії основних носіїв, тобто виникає для них потенціальний бар'єр висотою $e\varphi_0$. До такого ж результату можна прийти і з термодинамічних міркувань. Дійсно, рівновага між областями настане, коли вирівняються енергії Фермі в обох областях: $F_p = F_n$. Якщо на рис. 7.31 енергетичну діаграму *p*-типу зафіксувати (умовно заземлити *p*-область), то енергетичну діаграму *n*-типу потрібно опустити так, щоб вирівнялась енергія Фермі. А це призведе до викривлення зон і виникнення бар'єру (рис. 7.33).

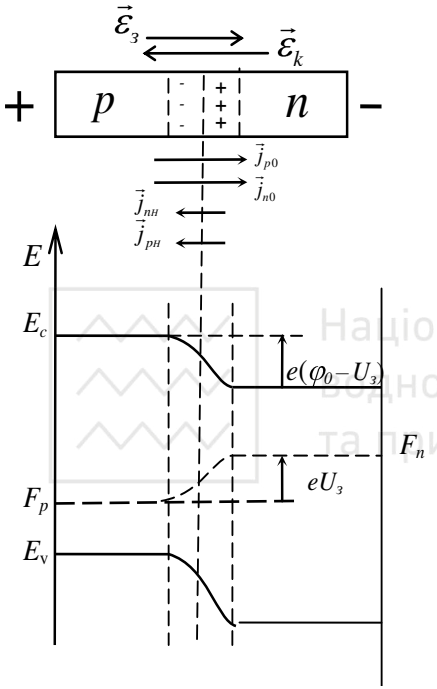


Рис.7.34

Оскільки в області контактного поля рівень Фермі розміщений посередині забороненої зони, що відповідає власному напівпровіднику, то концентрація носіїв в цій області дуже мала $n_i \ll n, p$, а значить, опір дуже великий. І тому ця область називається *запірним шаром*. Ширина цього шару

$$L_0 = \left[\frac{2\varepsilon_0 \varepsilon \varphi_0 (n+p)}{enp} \right]^{1/2}$$

тим менша, чим сильніше леговані *n*- і *p*- області: $L_0 \approx (10^{-6} - 10^{-8})$ *м*.

Густина дифузійних струмів основних носіїв визначаються висотою потенціального бар'єру:

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$j_{p0} = A_p e^{\left(-\frac{e\varphi_0}{k_0 T}\right)};\ j_{n0} = A_n e^{\left(-\frac{e\varphi_0}{k_0 T}\right)}. \qquad (7.111)$$

В цей же час для неосновних носіїв бар'єру немає; більш того, контактне поле прискорює ці носії, викликаючи дрейфові струми неосновних носіїв густиною $\vec{j}_{pн}, \vec{j}_{nн}$. Густина дрейфового струму лінійно залежить від напруженості контактного поля $\vec{\mathcal{E}}_k$ (закон Ома), тобто значно слабше від експоненційної залежності для густини дифузійного струму. І тому дрейфові струми наближено можна вважати постійними. Оскільки вектори густин дифузійного і дрейфового струмів напрямлені протилежно, то повний струм через *p*-*n*-перехід в рівноважних умовах дорівнює нулю, тобто

$$\vec{j} = \vec{j}_{p0} + \vec{j}_{n0} + \vec{j}_{pн} + \vec{j}_{nн} = 0.$$

7.16.2. Прикладемо до *p*-*n*-стуктури зовнішню наругу $U_з$ так, як показано на рис. 7.34; таке ввімкнення називається *прямим*. В цьому випадку напруженість зовнішнього поля $\vec{\mathcal{E}}_з$ напрямлена протилежно до $\vec{\mathcal{E}}_k$, і тому напруженість результуючого поля $(\mathcal{E} = \mathcal{E}_k - \mathcal{E}_з)$ зменшиться, потенціальний бар'єр понизиться на $eU_з$ і стане рівним $e(\varphi_0 - U_з)$. Якщо *p*-область вважати умовно заземленою, то рівень Фермі в *n*-області підніметься на $eU_з$.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

У відповідності з (7.111) густини дифузійних струмів основних носіїв зростуть і стануть рівними

$$j'_{p0} = A_p e^{\left[-\frac{e(\varphi_0 - U_з)}{k_0 T}\right]},$$
$$j'_{n0} = A_n e^{\left[-\frac{e(\varphi_0 - U_з)}{k_0 T}\right]}. \qquad (7.113)$$

Одночасно з тим *p*-область збагатиться додатковими неосновними носіями (електронами), а *n*-область – дірками. Має місце інжекція неосновних носіїв струму. Оскільки густина дрейфового струму неосновних носіїв через *p*-*n*–перехід залишається практично незмінною (рівноважною), то густина повного струму

$$j = (j'_{p0} - j_{pí}) + (j'_{n0} - j_{ní}) \neq 0. \qquad (7.114)$$

Врахувавши, що $j'_{p0} = j_{p\acute{i}}$ і $j'_{n0} = j_{n\acute{i}}$, після підстановки (7.111) та (7.113) отримаємо густину прямого струму

$$j_{пр.} = (j_{рн} + j_{пн})\left[e^{\left(\frac{eU_з}{k_0T}\right)} - 1\right] = j_н\left[e^{\left(\frac{eU_з}{k_0T}\right)} - 1\right], \quad (7.115)$$

де $j_н = (j_{рн} + j_{пн})$ – сумарна густина дрейфового струму неосновних носіїв.

Експоненційний ріст прямого струму з ростом $U_з$ має місце до тих пір, доки $U_з < \varphi_0$. Якщо ж $U_з \geq \varphi_0$, бар'єр на *p-n*-переході зникає, і залежність струму від напруги стає лінійною, у відповідності з законом Ома.

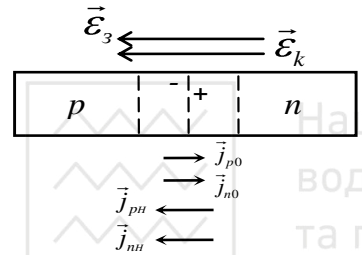


Рис.7.35

Якщо прикласти до *p-n*-структури зовнішню напругу так, як показано на рис. 7.35, то таке ввімкнення називається *зворотним*. У цьому випадку напрямки контактного ($\vec{\mathcal{E}}_k$) і зовнішнього ($\vec{\mathcal{E}}_ç$) полів співпадають, результуюче поле збільшиться, бар'єр зросте на $eU_з$ і стане рівним $e(U_з + \varphi_0)$. При практично незмінному дрейфовому струмі неосновних носіїв струм основних носіїв зменшиться. І через *p-n*-перехід протікатиме слабкий зворотний струм з густиною

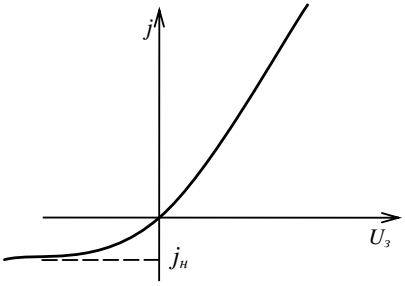


Рис.7.36

$$j_{зв} = j_н\left[e^{\left(-\frac{eU_з}{k_0T}\right)} - 1\right]. \quad (7.116)$$

Формули (7.115) та (7.116) можна об'єднати і користуватися лише першою, вважаючи пряму напругу додатною, а зворотну – від'ємною. Вольт-амперна характеристика *p-n*-переходу, у відповідності з (7.115), матиме вигляд, показаний на рис. 7.36.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Оскільки при кімнатній температурі $k_0T \approx 0{,}025eB$, то вже при зворотній напрузі $|U_з| \approx 0{,}2\,\text{В}$ зворотний струм насичується і його густина стає рівною $|j_н|$, а відношення $\frac{j_{пр}}{|j_{зв}|}$ при вказаній напрузі перевищує три порядки. Отже, *p-n*-перехід (напівпровідниковий діод) забезпечує пропускання струму лише в одному напрямку, тобто випрямляє змінний струм.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Національний університет
та природокористування

Розділ 8. Фізика ядра та елементарних частинок

§8.1. Склад і характеристики ядра

Поняття про ядро атома як центральну позитивно заряджену масивну частину атома, навколо якої рухаються електрони, ввів Е.Резерфорд (1911 р.) на основі своїх дослідів по розсіянню α-частинок речовиною. Позитивний заряд ядра чисельно рівний сумі негативних зарядів електронів нейтрального атома. За обрахунками Резерфорда радіус ядра $r_я \sim 10^{-15}$*м* (радіус атома $r_a \sim 10^{-10}$*м*). Плідність ядерної моделі атома проілюструвала теорія атома водню Н.Бора (1913 р.). Після того як Г. Мозлі (1913 р.) експериментально показав, що позитивний заряд ядра

$$Q = Ze, \tag{8.1}$$

де Z – порядковий номер елемента в таблиці Менделєєва, а e – елементарний електричний заряд, чисельно рівний зарядові електрона ($e = 1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл.), уявлення про ядро атома стало загальноприйнятим.

В ядерній фізиці за одиницю заряду приймають елементарний заряд e, а за одиницю маси – атомну одиницю маси (а. о. м.). 1 а. о. м. рівна $\frac{1}{12}$ маси нукліда вуглецю ${}^{12}_{6}\mathrm{C}$. Очевидно,

$$1\,\text{а.о.м.} = \frac{1}{12}\cdot\frac{12\cdot10^{-3}\,\text{кг}\cdot\text{моль}^{-1}}{N_A} = 1{,}66\cdot10^{-27}\,\text{кг},$$

де $N_A = 6{,}02\cdot10^{23}\,\text{моль}^{-1}$ – число Авогадро. В таких одиницях $Q = Z$ (Z називають *зарядовим* числом ядра), а маси атомів різних елементів виражаються числами, близькими до цілих. Заокруглена до найближчого цілого маса атома даного елемента, виражена в а. о. м., називається *масовим* числом елемента A.

Зарядове число Z і масове число A є основними характеристиками будь-якого ядра, тому ядро даного елемента позначається хімічним символом цього елемента з індексами Z та A ($\frac{A}{Z}\mathrm{X}$). Наприклад, ядро атома водню позначається ${}^{1}_{1}\mathrm{H}$. Цю частинку Резерфорд (1919 р.) назвав протоном (p або ${}^{1}_{1}p$). Оскільки маса електрона $m_e \sim \frac{1}{1836}m_p$, електрон позначають ${}^{0}_{-1}e$.

Спочатку була запропонована протонно-електронна модель будови ядра, згідно з якою ядро ${}^{A}_{Z}\mathrm{X}$ складається з A протонів і $A - Z$

електронів. Однак ця гіпотеза зустрілась з труднощами, однією з яких виявилась так звана «азотна катастрофа» – неможливість пояснити в рамках цієї гіпотези одиничний спін ядра азоту $^{14}_{7}\mathrm{N}$ (в одиницях $\hbar$). Спін цього ядра, яке містило б непарне число протонів і електронів (21), мав би бути напівцілим. Крім того, зі співвідношення невизначеностей випливає, що електрони не можуть входити до складу ядра, бо їх швидкість там була б більшою від c.

У 1932 р. Дж. Чедвік відкрив нову нейтральну елементарну частинку – нейтрон (n або $^{1}_{0}n$). Д.Д. Іваненко і С.М. Гапон (1932 р.) висунули гіпотезу, що ядро атома складається з нуклонів – протонів і нейтронів. Ця гіпотеза була розвинена В. Гейзенбергом і дістала пряме дослідне підтвердження по розщепленню ядер на протони і нейтрони.

Детальне вивчення нуклонів показало, що протон – стабільна елементарна частинка з зарядом +1 і масою $m_p = 1{,}00728\,а.о.м.$ Він має спін $S = 1/2$ (в одиницях $\hbar$) і магнітний момент $\mu_p = +2{,}79\mu_я$, де $\mu_я = \dfrac{e\hbar}{2m_p} = 5{,}05\cdot 10^{-27}\,\text{Дж}\cdot\text{Тл}^{-1}$ – так званий ядерний магнетон. Нейтрон – нейтральна частинка з масою $m_n = 1{,}00867 а.о.м.$, спіном $S = 1/2$ і магнітним моментом $\mu_n = -1{,}91\mu_я$ (знак мінус вказує, що магнітний і спіновий моменти нейтрона антипаралельні); $m_n > m_p$, причому $m_n - m_p = 2{,}5m_e$. У вільному стані нейтрон нестабільний, його середній час життя $\tau \sim 15$ хв.

У відповідності з нуклонною моделлю ядро $^{A}_{Z}\mathrm{X}$ містить A нуклонів, в тому числі Z протонів і $N = A - Z$ нейтронів. Отже, зарядове число Z, яке співпадає з порядковим номером елемента в таблиці Менделєєва, визначає кількість протонів у ядрі і кількість електронів у атомі. Масове число А визначає загальну кількість нуклонів у ядрі.

Ядра з однаковими Z називаються ізотопами, з однаковим A – ізобарами, з однаковими N – ізотонами, з однаковими Z і A (але різними періодами піврозпаду) – ізомерами. Наприклад, протій $^{1}_{1}\mathrm{H}$, дейтерій $^{2}_{1}\mathrm{H}$, тритій $^{3}_{1}\mathrm{H}$ є ізотопами водню; ядра $^{40}_{18}\mathrm{Ar}$, $^{40}_{20}\mathrm{Ca}$ є

Національний університет водного господарства та природокористування

ізобарами. Всього відомо понад 1500 різних ядер, які чим-небудь відрізняються; приблизно $\frac{1}{5}$ з них стабільні, решта – радіоактивні.

В природі зустрічаються елементи з атомним номером Z від 1 до 92 (крім $_{43}\mathrm{Tc}$ і $_{61}\mathrm{Pm}$). Трансуранові елементи, починаючи з $Z = 93$, були одержані штучно шляхом різних ядерних реакцій. Згідно з сучасними уявленнями хімічні елементи виникли в процесі нуклеосинтезу на етапі зоряної еволюції Всесвіту. За час існування Землі ($5\cdot10^9$ р.) трансуранові елементи із-за відносно малого часу життя не збереглися в земній корі. Елементи з 93-го по 101-й були одержані в основному реакторним шляхом. Елементи зі 102-го по 118-й були одержані шляхом бомбардування важких ядер іншими важкими ядрами. Межу періодичної системи елементів повинна визначати нестабільність відносно спонтанного поділу надважких ядер.

Слід враховувати, що сукупність A нуклонів ядра не є класичною статичною системою, це – суто квантова динамічна система. Кожний нуклон, крім спіну $\vec{S}$, внаслідок руху має орбітальний момент імпульсу $\vec{l}$, отже, – і повний момент імпульсу $\vec{J} = \vec{\ell} + \vec{S}$, тому повний момент імпульсу (спін) ядра $\vec{L} = \sum_{i=1}^{A} \vec{J}_i$. Ця величина квантується за законом $L = \sqrt{J(J+1)}\hbar$, де J – спінове ядерне квантове число, що пробігає значення $0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}\ldots$ При парному A спін ядра цілий, при непарному A – напівцілий. Спіни ядер не перевищують декількох одиниць: це свідчить, що спіни більшості нуклонів ядра компенсуються.

Зі спіном ядра зв'язаний його магнітний момент $\vec{\mu}$ співвідношенням $\vec{\mu} = g_я \vec{L} \mu_я$, де $g_я$ – гіромагнітний множник для ядра. Магнітні моменти ядер зумовлені власними магнітними моментами нуклонів і орбітальним рухом протонів. Суттєво, що власні магнітні моменти нуклонів ядра не адитивні. Оскільки L квантується, μ також квантується, тому енергія магнітної взаємодії електрона з ядром набуває дискретних значень. Це приводить до виникнення надтонкої структури спектрів атомів, вивчення якої дає можливість визначати магнітні моменти ядер.

Крім магнітного моменту ядро має також електричний квадрупольний момент eQ, який характеризує відхилення розподілу заряду в ядрі від сферично-симетричного; Q – коефіцієнт, що має розмірність площі. Для сферично-симетричного ядра $Q = 0$; якщо $Q > 0$, ядро витягнуте, якщо $Q < 0$ – сплюснуте.

Ефективний радіус ядра виражається емпіричною формулою

$$r = r_0 \cdot A^{\frac{1}{3}}, \tag{8.2}$$

де r_0 = (1,3 – 1,7) фермі ($Ф$); $1Ф = 10^{-15}м$. Це – розміри тієї області, де проявляється дія ядерних сил. Як видно, об'єм ядра пропорційний до кількості його нуклонів; тому густина ядерної речовини для всіх ядер однакова і є величиною $\sim 10^{17} \frac{кг}{м^3}$.

§8.2. Дефект маси та енергія зв'язку ядра. Ядерні сили

Користуючись таблицею мас ізотопів легко пересвідчитись, що маса ядра $m_я$ завжди менша від суми мас нуклонів, з яких воно складається. Величину

$$\Delta m = \left[Z m_p + (A - Z) m_n \right] - m_я \tag{8.3}$$

називають дефектом маси ядра. Його існування зумовлене тим, що при об'єднанні нуклонів в ядро виділяється енергія. Її можна розрахувати за формулою Ейнштейна

$$\Delta E = \Delta m \cdot c^2, \tag{8.4}$$

де c – швидкість світла у вакуумі. Очевидно, щоб розкласти ядро на невзаємодіючі нуклони, потрібно таку ж енергію затратити. Ця енергія

$$\Delta E = \left\{ \left[Z \cdot m_p + (A - Z) m_n \right] - m_я \right\} \cdot c^2 \tag{8.5}$$

називається енергією зв'язку ядра.

Для практичних застосувань співвідношення (8.5) зручно записувати у вигляді

$$\Delta E = \left\{ \left[Z \cdot m_{^1_1\mathrm{H}} + (A - Z) m_n \right] - m_a \right\} \cdot c^2, \tag{8.6}$$

де $m_{^1_1\mathrm{H}}$ – маса атома водню, а m_a – маса атома, ядро якого розглядається. При переході до наближеної формули (8.6) нехтують малою енергією зв'язку електронів; зручність цієї формули полягає у

Національний університет
водного господарства
та природокористування

тому, що в довідниках наводяться не маси ядер $m_я$, а маси атомів $m_а$. На основі (8.4) можна пересвідчитись, що 1а.о.м. еквівалентна енергії 931,5 *МеВ*; тому, виражаючи фігурну дужку формули (8.6) в а.о.м., для енергії зв'язку ядра в *МеВ* одержують

$$\Delta E = 931{,}5 \cdot \Delta m . \qquad (8.7)$$

Очевидно, енергія зв'язку ядра характеризує міцність ядра. Зручно ввести в розгляд так звану питому енергію зв'язку $\Delta E/A$ (енергія зв'язку, що припадає на один нуклон). Розрахунки показують, що ця величина залежить від масового числа A елемента (рис.8.1).

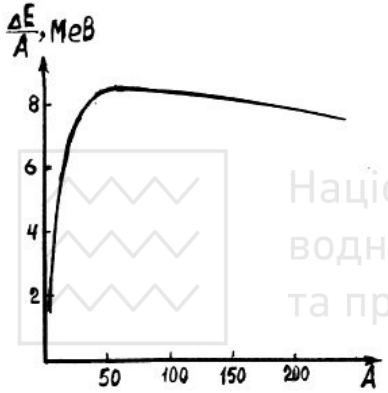


Рис.8.1

Для легких ядер $\Delta E/A$ стрибкоподібно зростає до 6 – 7 МеВ, далі більш повільно зростає до максимального значення 8,7 МеВ для елементів з масовим числом A ~ 50 – 60, а тоді повільно зменшується для важких елементів (наприклад, для $^{238}_{92}\mathrm{U}$ $\Delta E/A = 7{,}6\ МеВ$). Аналіз кривої показує:

– найбільш стійкими є ядра середньої частини таблиці елементів Менделєєва;

– енергетично можливими є два процеси, які повинні супроводжуватися виділенням енергії, – процес поділу важких ядер і процес синтезу легких ядер.

Величезна питома енергія зв'язку ядра свідчить, що між нуклонами в ядрі діють особливі сили, які значно переважають електромагнітну та гравітаційну взаємодію нуклонів. Ядерна взаємодія між нуклонами одержала назву *сильної взаємодії*. Ядерні сили характеризуються такими особливостями:

– короткодіючі: в ядрі, (на відстанях $r \sim 10^{-15}$м) зумовлюють ефективне притягання між нуклонами; поза ядром (при $r > 10^{-14}$м) практично зникають; при $r < 10^{-15}$м стають силами відштовхування і це суттєво, щоб ядро не колапсувало;

– зарядовонезалежні, тобто мають неелектричну природу;

– залежать від взаємної орієнтації спінів нуклонів;

– мають спін-орбітальний характер (залежать від взаємної орієнтації спіна і орбітального момента нуклона);

– є нецентральними (не напрямлені вздовж прямої, що з'єднує центри нуклонів);

– мають властивість насичення, тобто діють лише між найближчими сусідами.

У 1934 р. І.Є. Тамм висунув гіпотезу, що сильна взаємодія повинна мати обмінну природу. По аналогії з електромагнітною взаємодією, яка квантовою електродинамікою описується як процес віртуального обміну електронів фотонами

$$e^- \leftrightarrow e^- + \gamma, \tag{8.8}$$

нуклони в ядрі повинні обмінюватись деякими віртуальними частинками з масою, відмінною від нуля. Дійсно, віртуальними називаються частинки, час життя яких менший того, що визначається співвідношенням невизначеностей

$$\Delta E \cdot \Delta t \sim \hbar, \tag{8.9}$$

де ΔE – невизначеність енергії квантового стану, Δt – тривалість існування цього стану. Очевидно, радіус дії обмінних сил оцінюється величиною

$$r = c \cdot \Delta \mathrm{t}_{\max} = c \cdot \frac{\hbar}{\varepsilon_{\min}} = c \cdot \frac{\hbar}{mc^2} = \frac{\hbar}{mc},$$

тобто він може бути скінченим, якщо маса віртуальної частинки відмінна від нуля.

У 1935 р. Х. Юкава показав, що для пояснення величини ядерних сил слід припустити існування віртуальних частинок з масою у 200–300 разів більшою від маси електрона. Віртуальна частинка може стати реальною, якщо їй надати достатньої енергії. Подібні частинки з масою $m = 207m_e$ у 1936 р. виявили К. Андерсон і С. Неддермайер в космічних променях; вони дістали назву м'юонів (μ-мезонів). Проте, лабораторними дослідженнями було доведено, що м'юони практично не взаємодіють з ядрами, тому не можуть бути носіями ядерних сил. У 1947 р. С. Поуелл і Дж. Оккіаліні виявили в космічних променях ще один тип мезонів, які назвали π-мезонами (піонами). Вони і

Національний університет водного господарства та природокористування

виявились носіями ядерних сил. Існують три типи піонів: π^+, π^-, π^0. Заряд $\pi^{\pm}$–мезонів за абсолютною величиною рівний елементарному зарядові *e*, їх маси: $m_{\pi^{\pm}} = 273 m_e$, $m_{\pi^0} = 264 m_{å}$. Спін усіх π – мезонів $S = 0$, всі вони нестабільні; час життя $\tau_{\pi^{\pm}} = 2{,}6 \cdot 10^{-8} c$, $\tau_{\pi^0} = 0{,}8 \cdot 10^{-16} ñ$. В основному піони розпадаються за схемами:

$$\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu, \quad \pi^- \to \mu^- + \tilde{\nu}_\mu, \quad \pi^0 \to \gamma + \gamma,$$

де $\mu^{\pm}$ – м'юони, $\nu_\mu, \tilde{\nu}_\mu$ - м'юонні нейтрино і антинейтрино, γ – фотони.

За рахунок процесів:

$$p \leftrightarrow n + \pi^+, \tag{8.10}$$

$$n \leftrightarrow p + \pi^-, \tag{8.11}$$

$$p \leftrightarrow p + \pi^0, \qquad n \leftrightarrow n + \pi^0 \tag{8.12}$$

здійснюється обмін нуклонів віртуальними піонами, що приводить до сильної взаємодії нуклонів. Така модель підтверджується дослідами по розсіянню нейтронів на протонах. При проходженні пучка нейтронів через водень у пучку з'являються протони, які мають енергію і напрямок руху нейтронів; відповідне число нерухомих нейтронів виявляється в мішені. Природно припустити, що нейтрон, пролітаючи поблизу протона, захоплює віртуальний π^+-мезон. В результаті нейтрон перетворюється в протон, а протон, який втратив свій заряд, перетворюється в нейтрон (рис. 8.2).

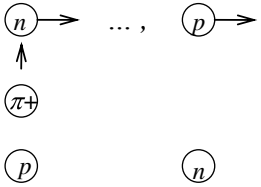


Рис. 8.2

На основі процесів (8.10), (8.11) можна також пояснити магнітні моменти протона і нейтрона. Від'ємний магнітний момент нейтрона зумовлений орбітальним рухом π^-–мезона у віртуальному стані нейтрона (8.11);. аномальний магнітний момент протона (більший від одного магнетона) зумовлений орбітальним рухом π^+–мезона у віртуальному стані протона (8.10).

Незважаючи на пояснення природи ядерних сил, послідовна кількісна теорія ядра донині не побудована, бо являє собою громіздку квантову задачу багатьох тіл, в якій закон дії ядерних сил невідомий. Це спонукає йти по шляху створення моделей ядра, які, за рахунок введення певних параметрів, що підбираються в узгодженні з дослідом, дозволяють простими засобами описувати деяку сукупність властивостей ядра. Найбільш вживаними з них є краплинна та оболонкова моделі ядра.

Краплинна модель ядра (К.Вейцзеккер, Я.І.Френкель, Н.Бор, 1935–1939р.), базуючись на властивості насичення ядерних сил і молекулярних сил в рідині, уподібнює ядро до зарядженої краплини рідини. Це дозволило одержати напівемпіричну формулу для енергії зв'язку ядра і, зокрема, пояснити процеси поділу важких ядер.

Оболонкова модель ядра (М. Гепперт-Майєр, Х. Ієнсен, 1949–1950р.) базується на уявленні, що нуклони рухаються незалежно в усередненому центрально-симетричному полі. У зв'язку з цим виникають дискретні енергетичні рівні, які заповнюються нуклонами на основі принципу Паулі. Ці рівні групуються в оболонки, в кожній з яких може перебувати певне число нуклонів. Повністю заповнена оболонка є особливо стійким утворенням. Такими особливо стійкими (магічними) виявляються ядра, у яких число протонів Z або число нейтронів N рівні: 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126. Ядра, у яких магічними є Z та N, називаються двічі магічними. Їх відомо п'ять: $^{4}_{2}\mathrm{He}$, $^{16}_{8}\mathrm{O}$, $^{40}_{20}\mathrm{Ca}$, $^{48}_{20}\mathrm{Ca}$, $^{208}_{82}\mathrm{Pb}$; вони особливо стійкі.

Відома також узагальнена модель ядра (О. Бор, Б. Моттельсон, 1952 – 1953 рр.), що є спробою синтезу двох попередніх. Проте, кожна з цих моделей не характеризує загальної поведінки ядер.

§8.3. Радіоактивність

8.3.1. Радіоактивність – процес самовільного перетворення деяких (нестабільних) ядер в інші з випромінюванням часток. До радіоактивних перетворень відносяться: α-розпад, β-розпад (з випромінюванням електрона, позитрона чи захопленням орбітального електрона), спонтанний поділ важких ядер, протонна та нейтронна радіоактивність. Радіоактивність нестабільних ядер, які існують у

природі (їх відомо ~ 300), називається природною (А.Беккерель, 1896 р.), а тих, що одержані шляхом ядерних реакцій (їх відомо ~ 1700), – штучною (І. та Ф. Жоліо-Кюрі,1934 р). Обидва види радіоактивності підкоряються одному законові радіоактивного розпаду.

Із-за незалежності радіоактивних перетворень окремих ядер можна вважати, що кількість ядер *dN*, які розпадаються за проміжок часу *dt*, пропорційна до наявного числа ядер *N* і до величини проміжку часу *dt*, тобто

$$dN = -\lambda \cdot N \cdot dt\,, \tag{8.13}$$

де λ – постійна розпаду, яка характеризує ймовірність розпаду кожного ядра за одиницю часу; знак мінус вказує, що число ядер зменшується з часом. Інтегруючи (8.13) при умові $N_{t=0} = N_0$, одержуємо закон радіоактивного розпаду

$$N = N_0 e^{-\lambda t}\,. \tag{8.14}$$

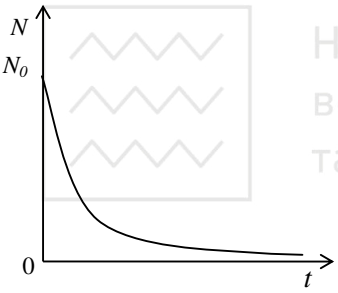


Рис. 8.3

Він показує, що число радіоактивних ядер *N*, які не розпалися до моменту часу *t*, зменшується з часом експоненційно (рис.8.3).

Кількість ядер, які розпались за час *t*,

$$N_0 - N = N_0(I - e^{-\lambda t})\,, \tag{8.15}$$

Час *T*, протягом якого розпадається половина початкової кількості ядер, називається періодом піврозпаду. Підставляючи у (8.15) $t = T$ і $N_0 - N = N_0/2$, одержуємо

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda}\,. \tag{8.16}$$

Період піврозпаду відомих радіонуклідів змінюється в дуже широких межах: від $3\cdot10^{-7}c$ до $5\cdot10^{15}$ років. Очевидно, величина $\tau = \dfrac{N}{\dfrac{dN}{dt}}$ має сенс середнього часу життя ядра, тому з (8.13) випливає

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$\tau = \frac{1}{\lambda}. \qquad (8.17)$$

Виявляється, що в процесі радіоактивного перетворення вихідного (материнського) ядра виникає дочірнє ядро, яке теж може бути радіоактивним. В результаті виникає ряд (сімейство) радіоактивних елементів, генетично зв'язаних між собою. Для природно-радіоактивних елементів відомо 3 таких ряди: ряд торію $^{232}_{90}\mathrm{Th}$, ряд урану $^{238}_{92}\mathrm{U}$, ряд актиноурану $^{235}_{92}\mathrm{U}$; ці елементи започатковують свої ряди, які закінчуються стабільними ізотопами свинцю ($^{208}_{82}\mathrm{Pb}$, $^{206}_{82}\mathrm{Pb}$, $^{207}_{82}\mathrm{Pb}$). Для штучно-радіоактивних елементів відомий ряд нептунію $^{237}_{93}\mathrm{Np}$ (найбільш довгоживучий елемент ряду), який починається з плутонію $^{241}_{94}\mathrm{Pu}$ і закінчується стабільним ізотопом талію $^{205}_{81}\mathrm{Tl}$

З часом у кожному радіоактивному сімействі встановлюється так звана вікова рівновага, при якій швидкості утворення і розпаду проміжних членів ряду зрівнюються, тобто

$$N_1\lambda_1 = N_2\lambda_2. \qquad (8.18)$$

Вікова рівновага встановлюється на протязі десяти періодів піврозпаду найбільш довгоживучого члена ряду. По мірі його розпаду загальний вміст членів ряду в земній корі повільно зменшується. Оскільки для нептунію період піврозпаду складає ~ $\frac{1}{2000}$ середнього віку Землі, членів його ряду в природі немає, вони були одержані штучно. Для $^{238}_{92}\mathrm{U}$ $\lambda_{^{238}_{92}U} = 0{,}001\lambda$ будь-якого іншого елемента його ряду, крім свинцю, для якого $\lambda = 0$. Тому через великі проміжки часу виникає стільки ядер свинцю, скільки розпадається ядер урану, тобто $N_{\mathrm{Pb}} = N_{0\mathrm{U}}\left(1 - e^{-\lambda_{\mathrm{U}} \cdot t}\right)$. Очевидно також, що $N_{\mathrm{Pb}} + N_{\mathrm{U}} = N_{0\mathrm{U}}$. Виключаючи невідому початкову концентрацію ядер урану $N_{0\mathrm{U}}$, одержуємо $t = \frac{1}{\lambda_{\mathrm{U}}} \ln \frac{N_{\mathrm{Pb}} + N_{\mathrm{U}}}{N_{\mathrm{U}}}$. Сучасна концентрація урану та свинцю в уранових рудах може бути виміряна експериментально, що для середнього віку Землі дає величину ~ $4{,}5 \cdot 10^9$ років.

Національний університет

Вже перші дослідники природної радіоактивності (П. та М. Кюрі, Е. Резерфорд) виявили, що радіоактивна речовина є джерелом трьох видів випромінювань: α-, β- і γ-променів.

8.3.2. α-промені являють собою потік ядер гелію $^4_2\mathrm{He}$; α-розпад відбувається за схемою

$$^{\mathrm{A}}_{\mathrm{Z}}\mathrm{X}\rightarrow{}^4_2\mathrm{He}+{}^{\mathrm{A}-4}_{\mathrm{Z}-2}\mathrm{Y}\,. \qquad (8.19)$$

Індекси дочірнього ядра встановлюються на основі законів збереження зарядового і масового чисел: зарядове чи масове число до реакції рівне сумі відповідних чисел після реакції. Звідси випливають так звані правила зміщення; зокрема, при α-розпаді Z дочірнього ядра на 2, а A на 4 менші, ніж у материнського ядра; наприклад,

$$^{238}_{92}\mathrm{U}\rightarrow{}^4_2\mathrm{He}+{}^{234}_{90}\mathrm{Th}\,.$$

Національний університет водного господарства та природокористування

Енергія реакції α-розпаду визначається на основі формули (8.7), де дефект маси реакції

$$\Delta m = m_{^{\mathrm{A}}_{\mathrm{Z}}\mathrm{X}} - (m_{^4_2\mathrm{He}} + m_{^{\mathrm{A}-4}_{\mathrm{Z}-2}\mathrm{Y}})\,. \qquad (8.20)$$

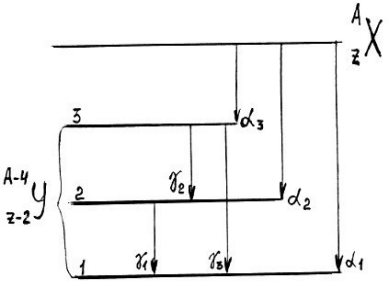


Рис. 8.4

Ця енергія виділяється у вигляді кінетичної енергії продуктів реакції і розподіляється між α-частинкою і дочірнім ядром у відношенні обернено пропорційному до їх мас (це можна показати на основі законів збереження енергії та імпульсу).

Певний радіоактивний елемент випромінює α-частинки декількох чітко визначених груп. Це зумовлено тим, що дочірнє ядро може виникати не тільки в основному стані 1, але і в збуджених станах 2,3,… (рис.8.4). За час існування збуджених станів $\tau \sim (10^{-8} - 10^{-15})$ *с* дочірнє ядро переходить у більш низький чи нормальний стан, випромінюючи γ-квант. Так виникають γ-промені, які, звичайно, супроводжують α-розпад, хоча дочірнє ядро може звільнитись від надлишку енергії також іншими способами:

Національний університет
та природокористування

випромінюючи яку-небудь частинку або іонізуючи атом (процес внутрішньої конверсії).

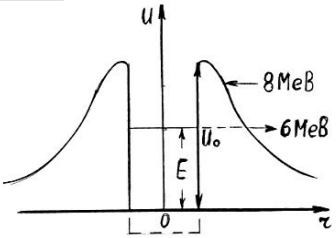


Рис. 8.5

Процес α-розпаду не можна пояснити на основі класичної механіки. Досліди показують, що з радіоактивних ядер випромінюються α-частинки з енергією ~6 *MeB*. В той же час α-частинки з енергією ~8 *MeB* не проникають в ядро. Ядро для α-частинки є потенціальним бар'єром, висота якого U_0 більша від енергії α-частинки E (рис. 8.5). Внутрішня сторона бар'єру зумовлена ядерними силами притягання, зовнішня – силами кулонівського відштовхування. Явище стає зрозумілим на основі квантової механіки: α-частинка виникає в момент радіоактивного розпаду ядра і долає бар'єр ядра за допомогою тунельного ефекту (для мікрочастинки існує відмінна від нуля ймовірність проникнути через бар'єр з енергією меншою від висоти бар'єру; Г. Гамов, 1928 р.).

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Теорія α-розпаду, що спирається на явище тунельного ефекту, підтверджує емпіричний закон Гейгера-Неттола

$$\ln\lambda = A + B\ln R\,, \tag{8.21}$$

де A і B – константи, λ – стала розпаду, R – пробіг α-часинки, який, очевидно, пропорційний до її енергії E. Цей закон показує, що менш стабільні ядра дійсно випромінюють α-частинки з більшою енергією.

8.3.3. Існує три типи β-розпаду: β^--розпад (ядро випромінює електрон ${}^{0}_{-1}\hat{a}$), β^+-розпад (ядро випромінює позитрон ${}^{0}_{+1}e$) і так зване електронне захоплення (ядро поглинає один з електронів *K*–, рідше *L*–, чи *M*– шару свого атома). β^- розпад відбувається за схемою

$$^{A}_{Z}\mathrm{X}\rightarrow {}^{0}_{-1}e + {}^{A}_{Z+1}\mathrm{Y} + {}^{0}_{0}\tilde{\nu}\,, \tag{8.22}$$

з якої випливає, що при β^--розпаді масове число дочірнього ядра не змінюється, а зарядове число змінюється на одиницю; наприклад, ${}^{234}_{90}\mathrm{Th}\rightarrow {}^{0}_{-1}e + {}^{234}_{91}\mathrm{Pa} + {}^{0}_{0}\tilde{\nu}$. Як і при α-розпаді, енергія реакції β-розпаду визначається за дефектом мас реакції і лежить в межах від десятків *кеВ* до десятків *МеВ*.

Національний університет
та природокористування

Пояснення β^--розпаду зустрілось з труднощами:

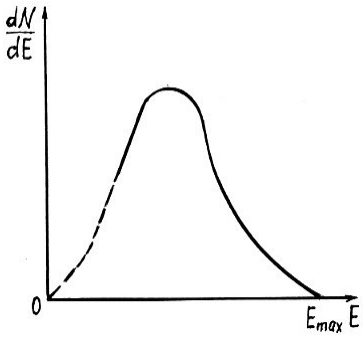


Рис. 8.6

1. незрозумілим було походження електрона (електронів у ядрах немає);
2. незрозумілим був неперервний характер β^--спектрів ядер (мал.8.6);
3. було незрозуміло, чому при β-розпаді не змінюється спін ядра.

Ці труднощі усунули В. Паулі та Е. Фермі (1930–1934 рр.). Вони висунули гіпотезу, що електрон при β^--розпаді виникає в ядрі разом з антинейтрино ${}^0_0\tilde{\nu}$ за рахунок процесу перетворення нейтрона в протон:

$$ {}^1_0 n \rightarrow {}^1_1 p + {}^0_{-1} e + {}^0_0 \tilde{\nu} . \qquad (8.23) $$

Антинейтрино, практично, не має маси і електричного заряду, його спін $S = \frac{1}{2}$. Процес (8.23) можливий енергетично, бо $m_n > m_p$; він пояснює походження електрона при β^--розпаді, а також – незмінність масового числа і зростання зарядового числа дочірнього ядра на одиницю (протон ${}^1_1 p$ залишається в ядрі). Виліт з ядра двох партнерів (електрона і антинейтрино), спіни яких компенсуються, усуває трудність зі спіном при β-розпаді, а також пояснює неперервний характер β^--спектру, бо максимальна енергія β^--розпаду $E_{\max}$ розподіляється між двома партнерами випадково. Походження γ-променів, що супроводжують β^--розпад – таке ж, як і при α-розпаді: дочірнє ядро може виникати у збуджених станах, випромінюючи γ-кванти при переходах у більш низькі стани.

β^+-розпад відбувається за схемою

$$ {}^A_Z X \rightarrow {}^0_{+1} e + {}^A_{Z-1} Y + {}^0_0 \nu , \qquad (8.24) $$

наприклад, ${}^{13}_7 N \rightarrow {}^0_{+1} e + {}^{13}_6 C + {}^0_0 \nu$. Він супроводжується випромінюванням позитрона ${}^0_{+1} e$ і нейтрино ${}^0_0 \nu$, які є

Національний університет
античастинками, відповідно, для електрона ${}^{0}_{-1}e$ і антинейтрино ${}^{0}_{0}\tilde{\nu}$. Цей вид β-розпаду має місце для штучно-радіоактивних ядер, які мають надлишок протонів над нейтронами. Його можна пояснити за рахунок процесу перетворення протона в нейтрон:

$$ {}^{1}_{1}p \rightarrow {}^{1}_{0}n + {}^{0}_{+1}e + {}^{0}_{0}\nu . \qquad (8.25) $$

Для вільного протона цей процес неможливий, бо $m_{\partial} < m_n$; в ядрі ж протон може запозичити потрібну енергію від інших нуклонів ядра.

Реакція електронного захоплення має вигляд

$$ {}^{A}_{Z}\mathrm{X} + {}^{0}_{-1}e \rightarrow {}^{A}_{Z\text{-}1}\mathrm{Y} + {}^{0}_{0}\nu , \qquad (8.26) $$

що можна пояснити перетворенням протона в нейтрон:

$$ {}^{1}_{1}p + {}^{0}_{-1}e \rightarrow {}^{1}_{0}n + {}^{0}_{0}\nu . \qquad (8.27) $$

Захоплення електрона ядром супроводжується характеристичним рентгенівським випромінюванням, яке зумовлене перебудовою електронної оболонки атома внаслідок виникнення електронної вакансії у ній. По цьому випромінюванню Л. Альверс і відкрив *K*-захоплення, у 1937 р. Прикладом цього процесу може бути перетворення калію в аргон:

$$ {}^{40}_{19}\mathrm{K} + {}^{0}_{-1}e \rightarrow {}^{40}_{18}\mathrm{Ar} + {}^{0}_{0}\nu $$

Суттєва для пояснення β-розпаду гіпотеза нейтрино Паулі-Фермі стала початком вивчення так званої слабкої взаємодії, відповідальної за ряд перетворень елементарних часток. Ця гіпотеза була підтверджена експериментально у 1956 році Ф. Райнісом і К. Коуеном. При роботі на реакторі, що давав потужний потік нейтронів (і антинейтрино), їм вдалося підтвердити реакцію

$$ {}^{1}_{1}p + {}^{0}_{0}\tilde{\nu} \rightarrow {}^{1}_{0}n + {}^{0}_{+1}e , \qquad (8.28) $$

яка, фактично, є оберненням реакції (8.23).

У цьому ж році Р. Девіс підтвердив також існування електронного нейтрино ${}^{0}_{0}\nu_e$. Пізніше було виявлено й інші типи нейтрино і

Національний університет водного господарства та природокористування

антинейтрино: м'юонне ($\nu_\mu, \tilde{\nu}_\mu$) і таонне ($\nu_\tau, \tilde{\nu}_\tau$); вони з'являються в процесах взаємодії з м'юонами $\mu^{\pm}$ і $\tau^{\pm}$ – лептонами. Доведено, що ν_e, ν_μ, ν_τ – різні частинки, як і їх античастинки $\tilde{\nu}_e, \tilde{\nu}_\mu, \tilde{\nu}_\tau$.

8.3.4. Важливим для практичних застосувань радіоактивності є поняття активності. Під активністю радіоактивного зразка розуміють число розпадів, які відбуваються в ньому за одиницю часу,

$$J = \frac{|dN|}{dt}. \tag{8.29}$$

З (8.13) випливає, що

$$J = \lambda N, \tag{8.30}$$

тобто активність змінюється з часом за законом

$$J = J_0 e^{-\lambda t}, \tag{8.31}$$

де $J_0 = \lambda N_0$ – активність при $t = 0$. Одиницею активності в СІ є 1 бекерель [*Бк*], що відповідає одному розпадові за секунду. Позасистемними одиницями активності є 1 кюрі [*Кі*] та 1 резерфорд [*Рд*]; 1 *Кі* = $3{,}7 \cdot 10^{10}$ *Бк*, 1 *Рд* = 10^6 *Бк*.

За відомою активністю може бути розрахована експозиційна, поглинута та еквівалентна доза радіації і потужність дози (доза, віднесена до часу опромінення).

Експозиційна доза $Д_{експ}$ є мірою іонізації повітря рентгенівським або γ-випромінюванням. Вона чисельно рівна відношенню сумарного заряду всіх іонів одного знаку ΔQ, створених в елементарному об'ємі повітря вторинними частинками при їх повному гальмуванні, до маси Δm повітря в цьому об'ємі $\left(\dot{A}_{åêñï} = \frac{\Delta Q}{\Delta m} \right)$. Одиницею експозиційної дози є $1 \frac{Êë}{êã}$, позасистемною одиницею – рентген [*P*]; $1P = 2{,}58 \cdot 10^{-4} \frac{Кл}{кг}$. 1 *P* відповідає утворенню $2{,}08 \cdot 10^9$ пар іонів в 1 $см^{-3}$ повітря при нормальних умовах, на це потрібно затратити енергію $8{,}8 \cdot 10^{-3} \frac{Дж}{кг}$.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Поглинута доза $Д_{погл}$ визначається відношенням енергії ΔE, переданої іонізуючим випромінюванням речовині в елементарному об'ємі, до маси речовини в цьому об'ємі $\left(Д_{погл} = \frac{\Delta E}{\Delta m} \right)$. Одиницею поглинутої дози є грей [$Гр$]; $1Гр = 1\frac{Дж}{кг}$. Позасистемною одиницею поглинутої дози є рад; $1рад = 10^{-2} Гр$.

Біологічна дія радіації суттєво залежить від природи проникаючого випромінювання. Для характеристики цього вводиться коефіцієнт якості випромінювання k.

Таблиця 1.

Випромінювання	k
Рентгенівські промені, γ-промені, β-промені	1
Теплові нейтрони	3
Швидкі нейтрони і протони	10
Іони високих енергій	20

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Еквівалентна доза $Д_{екв}$ визначається як добуток поглинутої дози $Д_{погл}$ на коефіцієнт якості випромінювання k, тобто $Д_{екв} = k \cdot Д_{погл}$. Одиницею еквівалентної дози є зіверт [$Зв$], що відповідає поглинутій дозі в 1 $Гр$ при $k = 1$. Позасистемною одиницею є бер, що відповідає поглинутій дозі в 1 рад при $k = 1$; $1бер = 10^{-2} Зв$.

Для вимірювання доз радіації в дозиметрії використовуються прилади різних типів – дозиметри. Природні джерела радіації створюють на території України потужність еквівалентної дози ~ 40 – 200 *мБер/рік*. Еквівалентна доза в 4 – 5 *Зв*, отримана людиною за короткий проміжок часу, може призвести до смерті. Така ж доза, отримана протягом усього життя людини, не викликає помітних змін.

§8.4. Ядерні реакції

8.4.1. Ядерні реакції – перетворення ядер при їх взаємодії з легкими частинками або іншими ядрами. Така взаємодія виникає при зближенні реагуючих частинок до відстаней $\sim 10^{-15}$ *м*. Найбільш

поширеним типом ядерних реакцій є взаємодія легкої частинки a з ядром X, в результаті якої виникають легка частинка b (або b, c, d, …)і ядро Y:

$$\mathrm{X} + a \rightarrow \mathrm{Y} + b\,, \tag{8.32}$$

що скорочено позначають X(a,b)Y. Вживається також лаконічне позначення ядерних реакцій типу (a,b). В якості легких часток можуть фігурувати: нейтрон, протон, дейтрон, α-частинка, γ-квант (інколи – електрон, нейтрино, інші елементарні частинки). Наприклад, перша ядерна реакція, здійснена Е. Резерфордом (1919 р.), мала вигляд: ${}^{14}_{7}\mathrm{N}+{}^{4}_{2}\mathrm{He}\rightarrow{}^{18}_{9}\mathrm{F}\rightarrow{}^{7}_{8}\mathrm{O}+{}^{1}_{1}\mathrm{H}$. Ядерні реакції – основний метод вивчення структури ядра і його властивостей.

Ядерні реакції часто можуть протікати кількома способами, наприклад: ${}^{63}\mathrm{Cu}(p,n){}^{63}\mathrm{Zn}$, ${}^{63}\mathrm{Cu}(p,2n){}^{62}\mathrm{Zn}$, ${}^{63}\mathrm{Cu}(p,pn){}^{62}\mathrm{Cu}$. Сукупність частинок, що зазнають зіткнень, називають вхідним каналом ядерної реакції. Частинки, що народжуються внаслідок ядерної реакції, утворюють вихідний канал ядерної реакції.

Кількісне описання ядерних реакцій з квантово-механічної точки зору може бути тільки статистичним, тому для характеристики ядерних реакцій та різних видів взаємодій в них вводяться поняття виходу ядерної реакції w та ефективного перерізу взаємодії σ.

Вихід ядерної реакції w – доля часток, що зазнали взаємодії. Якщо з потоку часток N, що падають на деяку мішень, зазнають взаємодії ΔN часток, то ймовірність взаємодії $w = \dfrac{\Delta N}{N}$. З другого боку, очевидно, $w = \dfrac{S'}{S}$, де S – площа поверхні мішені, а $S' = \sigma S dn$ – ефективна площа взаємодії; σ – ефективна площа взаємодії одного ядра, d – товщина мішені, n – концентрація ядер мішені. Тому $\dfrac{\Delta N}{N} = \sigma dn$ і

$$\sigma = \frac{\Delta N}{Nnd} \tag{8.33}$$

Величина σ характеризує ймовірність взаємодії в розрахунку на одне ядро в шарі одиничної товщини. Вона має розмірність площі, її прийнято вимірювати в барнах; $1б = 10^{-28}\ м^2$.

Ядерні реакції можна класифікувати: за енергією часток, що їх викликають, за природою часток, за масовим числом ядер, які беруть участь у реакціях; за енергетичним ефектом; за характером ядерних перетворень. Зокрема, розрізняють ядерні реакції:

– при малих, низьких, середніх, значних, високих, і надвисоких енергіях;
– під дією нейтронів, фотонів, заряджених частинок;
– на легких, середніх і масивних ядрах;
– радіаційного захоплення, кулонівського збудження, поділу ядер, ядерного фотоефекту та ін.

У будь-якій ядерній реакції виконуються закони збереження електричного заряду, енергії, імпульсу, момента імпульсу та деякі інші, більш екзотичні, про які йтиме мова у наступному параграфі. Вони відіграють особливо важливу роль, оскільки дозволяють передбачати які з ядерних реакцій можливі.

Енергію реакції можна розрахувати на основі формули (8.7), де Δm – дефект маси реакції, який визначається співвідношенням

$$\Delta m = (m_б + m_а) - (m_y + m_b). \qquad (8.34)$$

Якщо $\Delta m > 0$, енергія виділяється; якщо $\Delta m < 0$, енергія поглинається. При цьому для ендотермічних реакцій $(\Delta m < 0)$ характерним є енергетичний поріг – мінімальне значення енергії часток, що стикаються, при якому реакція може відбуватися.

Стосовно механізму ядерних реакцій при низьких енергіях Н. Бор припустив, що вони здійснюються у два етапи. На першому етапі ядро X захоплює частинку *a*; в результаті цього виникає проміжне компаунд-ядро П (складене ядро). За рахунок енергії частинки *a* (кінетичної та енергії зв'язку), яка перерозподіляється між нуклонами ядра, проміжне ядро стає збудженим. На другому етапі збуджене компаунд-ядро П випромінює частинку *b* і перетворюється в ядро Y; в цілому процес має вигляд

$$X + a \to П \to Y + b\,. \qquad (8.35)$$

Національний університет
та природокористування

Середній час життя компаунд-ядра складає $(10^{-16} - 10^{-12})$ c, він значно більший від часу проходження нуклоном ядра $\tau_я \sim 10^{-22} c$, тому захоплення частинки a і випромінення частинки b – незалежні процеси.

Якщо $b \equiv a$, процес (8.35) називають розсіюванням; власне ядерна реакція має місце, якщо a не тотожне з b. При енергії збудження компаунд-ядра П, меншій необхідної для відокремлення від нього часток, єдиний шлях його перетворення – випромінювання γ-квантів; такий процес називають радіаційним захопленням.

При великих енергіях бомбардуючих часток проміжне ядро не утворюється, процес має вигляд (8.32) і носить назву прямої ядерної взаємодії. Ілюстрацією таких процесів є так звана реакція зриву, коли ядро зриває один з нуклонів з пролітаючого повз нього дейтрона, або зворотна їй реакція підхоплення, коли пролітаючий повз ядро нуклон підхоплює відповідний нуклон ядра з утворенням дейтрона.

Найчисленнішими є реакції, які викликаються нейтронами. Завдяки відсутності електричного заряду нейтрону не доводиться долати потенціальний бар'єр ядра, тому в ядра легко проникають навіть теплові нейтрони з енергією $E \sim 0{,}03$ eB. Як правило, для захоплення нейтронів має місце монотонна залежність $\sigma \sim \frac{1}{v} \sim E^{-\frac{1}{2}}$, однак спостерігаються випадки резонансного захоплення нейтронів. Так, для $^{238}_{92}\mathrm{U}$ σ різко зростає при $E = 7$ eB, досягаючи 23000 барн. Таке резонансне поглинання має місце, коли енергія, внесена нейтроном у компаунд-ядро, рівна тій, яка необхідна для його переводу на збуджений енергетичний рівень.

Цікавою є реакція $^{14}_{7}\mathrm{N}(n,p)^{14}_{6}\mathrm{C}$, яка постійно відбувається в атмосфері Землі під дією нейтронів космічних променів. Вона приводить до виникнення радіовуглецю $^{14}_{6}\mathrm{C}$ з періодом піврозпаду 5730 р. Він служить «годинником» для антропологів, подібно, як уран для геологів.

8.4.2. Важливу групу ядерних реакцій складають реакції поділу важких ядер при їх бомбардуванні нейтронами (О. Ган, Р. Штрасман, О. Фріш, Л. Мейтнер, 1938 р.). При цьому ядро ділиться на декілька

більш легких ядер (найчастіше – на два уламки зі співвідношенням мас 2:3) з випромінюванням 2-3 вторинних нейтронів і виділенням величезної енергії (порядку 1 *МеВ* на нуклон); наприклад,

$$^{235}_{92}\mathrm{U}+^{1}_{0}n\rightarrow^{236}_{92}\mathrm{U}\rightarrow^{94}_{37}\mathrm{Rb}+^{140}_{55}\mathrm{Cs}+2^{1}_{0}n. \qquad (7.36)$$

Мінімальна енергія, необхідна для поділу ядра, називається енергією активації; її вносить в ядро бомбардуючий нейтрон. Це приводить до деформації ядра внаслідок порушення рівноваги кулонівських сил і сил поверхневого натягу (в рамках краплинної моделі ядра), поділу ядра і розлітання уламків з великими швидкостями (Н. Бор, Я.І. Френкель, 1938р.). Уламки виносять понад 80% енергії поділу, ~10МеВ виносять нейтрони, решта енергії виділяється під час β^--перетворень продуктів поділу.

Оскільки відношення числа нейтронів до числа протонів $\frac{N}{Z}$ для середніх ядер ~1,3, а для важких ядер ~1,6, звільнення уламків від надлишку нейтронів і приводить до виникнення вторинних нейтронів. Переважна більшість їх виникає в момент поділу (миттєві нейтрони); однак, ~0,7% вторинних нейтронів виникають з запізненням (запізнілі нейтрони). Вони "випаровуються" β^--радіоактивними уламками вже після поділу ядра з розкидом в часі від 0,05*с* до десятків секунд. Саме це дозволяє плавно керувати ланцюговою реакцією поділу.

Ядерна реакція стає ланцюговою, якщо частинки, що її викликають, виникають як продукти цієї реакції. В реакції типу (8.36), викликаній тепловим нейтроном, вторинні нейтрони є швидкими (з енергією $E > 1$ *МеВ*) в середній кількості $\nu = 2{,}5$ на кожний акт поділу. Якщо частина f загальної кількості вторинних нейтронів буде використана для продовження реакції поділу, то на один нейтрон першого покоління прийдеться

$$k = \nu f \qquad (8.37)$$

нейтронів другого покоління, тому швидкість зміни потоку нейтронів $\frac{dn}{dt} = \frac{n(k-1)}{\tau}$ і

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$n = n_0 e^{\frac{k-1}{\tau}\cdot t}, \qquad (8.38)$$

де n_0 – потік нейтронів при $t = 0$, τ – час життя покоління нейтронів.

Якщо $k-1=0$, здійснюється самопідтримувана ланцюгова реакція, що має місце в ядерних реакторах. При $k-1>0$ реакція перестає бути регульованою і закінчується вибухом; при $k-1<0$ ланцюгова реакція згасає.

Вивчення можливостей реалізації цих умов показало, що природний уран містить ~99,3% ізотопу $^{238}_{92}\mathrm{U}$ і ~0,7% ізотопу $^{235}_{92}\mathrm{U}$. Ядра $^{235}_{92}\mathrm{U}$ діляться як швидкими, так і тепловими нейтронами, ядра $^{238}_{92}\mathrm{U}$ діляться лише швидкими нейтронами з енергією $E > 1$ *МеВ*, але ефективний переріз поділу σ для них малий. Конкуруючими процесами є непружне розсіяння і радіаційне захоплення нейтронів, тому в природному урані ланцюгова реакція поділу самочинно розвинутись не може, вона згасає. Якщо природний уран достатньо збагачений ізотопом $^{235}_{92}\mathrm{U}$, то на швидких нейтронах реалізується співвідношення типу (8.37):

$$k = v_{ef} \cdot f^*, \qquad (8.39)$$

де v_{ef} – середнє число нейтронів на кожний захоплений нейтрон, f^* – коефіцієнт використання швидких нейтронів. З умови $k=1$ визначаються критичні розміри і критична маса атомної бомби, що для $^{235}_{92}\mathrm{U}$ дає R ~ 9 *см* і $m_{кр}$ ~ 50 *кг*. При $m < m_{\hat{e}\partial}$ ядерні заряди можна зберігати; при з'єднанні докритичних мас у надкритичні відбувається атомний вибух, еквівалентний вибуху $2\cdot10^4$ тон тротилу (США, 1945; СРСР, 1949р).

При реалізації ланцюгової реакції поділу на теплових нейтронах необхідне використання сповільнювача нейтронів (важка вода $\mathrm{D_2O}$, графіт, які мало поглинають нейтрони). Тоді стає можливим використання природного урану. Коефіцієнт розмноження теплових нейтронів у цьому випадку визначається співвідношенням:

Національний університет водного господарства та природокористування

$$k = v_{ef}\eta\varphi\theta. \qquad (8.40)$$

Це – так звана формула чотирьох співмножників, де η – коефіцієнт зростання потоку нейтронів за рахунок поділу ядер швидкими нейтронами, φ – доля сповільнюваних нейтронів, які не зазнають поглинання ядрами $^{238}_{92}\mathrm{U}$, θ – коефіцієнт використання теплових нейтронів (не поглинутих домішками і не вилітаючих за межі активної зони). Якщо перші два співмножники залежать лише від активно подільчого матеріалу, другі два суттєво залежать від конструкції пристрою (реактора).

Оптимізація цих коефіцієнтів в уран-графітовому реакторі (реактор гетерогенного типу), де стрижні з природного урану відповідного діаметра складаються у своєрідну решітку з блоками графітового сповільнювача, дозволяє досягти $k = 1$ і за допомогою автоматично регульованих стрижнів з Cd і B, які активно поглинають нейтрони, підтримувати регульовану ланцюгову реакцію поділу ядер на заданому рівні (США, 1942р; СРСР, 1946р). Використання відповідного теплоносія (вода, рідкі метали), який циркулює через активну зону, дозволяє відводити з неї тепло, що виділяється за рахунок утилізації кінетичної енергії уламків поділу, і перетворювати її в енергію пари (атомні двигуни) та електричну енергію (атомні електростанції). Запуск і плавне регулювання роботи атомного реактора можливі за рахунок використання запізнілих нейтронів; його зупинка досягається скиданням в реактор поглинаючих стрижнів з Cd і B, внаслідок чого k стає меншим одиниці.

Оскільки запаси урану на Землі обмежені, перспективним є використання так званих реакторів-бридерів (розмножувачів), які працюють на швидких нейтронах. Тут миттєві нейтрони реактора використовуються частково для підтримання ланцюгової реакції, а частково – для відтворення ядерного пального. За рахунок радіаційного захоплення нейтронів ядрами $^{238}_{92}\mathrm{U}$ виникає ізотоп $^{239}_{92}\mathrm{U}$, який після двох β^--розпадів перетворюється в $^{239}_{94}\mathrm{Pu}$:

$$^{238}_{92}\mathrm{U} + ^{1}_{0}n \xrightarrow{\gamma} ^{239}_{92}\mathrm{U} \xrightarrow{\beta^-} ^{239}_{93}\mathrm{Np} \xrightarrow{\beta-} ^{239}_{94}\mathrm{Pu}$$

Цей ізотоп, як і $^{235}_{92}\mathrm{U}$, являється активно подільчим матеріалом.

На цих засадах базується сучасна ядерна енергетика з усіма її використаннями у мирних і військових цілях та екологічними проблемами, які вона породила. Зокрема, дуже актуальною є проблема поховання радіоактивних відходів, що накопичуються.

8.4.3. Другою групою ядерних реакцій, які супроводжуються виділенням величезної енергії, є термоядерні реакції синтезу більш важких ядер (наприклад, $^4_2\mathrm{He}$) з більш легких (наприклад, ізотопів водню $^1_1\mathrm{H}$, $^2_1\mathrm{H}$, $^3_1\mathrm{H}$). Для їх реалізації необхідні високі температури $(\geq 10^8 K)$, щоб за рахунок кінетичної енергії ядра могли подолати потенціальний бар'єр і зблизитись до відстані 10^{-15} *м* – радіуса дії ядерних сил. В природних умовах такі реакції мають місце в надрах зірок, зумовлюючи їх величезне випромінювання.

Як показав Г.Бете (1938 р), перетворення водню в гелій на зірках здійснюється за допомогою двох циклів (водневого і вуглецевого), які в кінцевому результаті еквівалентні реакції

$$4^1_1\mathrm{H} \rightarrow ^4_2\mathrm{He} + 2^0_{+1}e + 2^0_0\nu . \qquad (8.41)$$

При більш високих температурах реалізуються гелієвий і неоновий цикли, які надзвичайно важливі для розуміння нуклеогенезу – процесу синтезу хімічних елементів. Завдяки величезним размірам зірок на них ідеально вирішується проблема утримування (гравітаційного) і термоізоляції плазми (речовина при $T \sim 10^8 K$ являє собою високоіонізовану плазму). На Землі для цього треба шукати інші підходи.

Термоядерна реакція синтезу на Землі поки-що здійснена лише як вибухова у водневій бомбі (СРСР, США, 1953 р.), де детонатором служить атомна бомба, внаслідок вибуху якої у рівнокомпонентній суміші дейтерію і тритію виникають температура $T \sim 10^8 K$ і тиск $P \sim 10^{12}$ *атм*, що приводить до "підпалювання" термоядерної реакції синтезу

$$^2_1\mathrm{H} + ^3_1\mathrm{H} \rightarrow ^4_2\mathrm{He} + ^1_0n . \qquad (8.42)$$

В цій реакції виділяється енергія ~ 17,6 *МеВ*, яка на одиницю маси реагуючої речовини в 4 рази більша, ніж в реакції поділу; тому енергія термоядерних бомб становить ~ 10^5 – 10^6 *т* тротилового еквіваленту.

Надзвичайно привабливими видаються перспективи керованого термоядерного синтезу (КТС) як з точки зору практичної невичерпності дешевого для КТС пального (дейтерію у водах океанів), так і з огляду на суттєво меншу екологічну загрозу реакторів КТС. Тому вивчення КТС розпочалося ще у 50-ті роки XX століття.

Створення реактора КТС передбачає:

1) одержання плазми потрібної концентрації n, нагрітої до температур ~ $10^8 – 10^9$ K;

2) утримання плазмової конфігурації протягом часу τ, необхідного для протікання термоядерних реакцій.

При цьому повинен виконуватись так званий критерій Лоусона:

$$\begin{aligned} n\tau &\geq 10^{15} см^{-3} \cdot c, \quad T \sim 10^9 K \\ n\tau &\geq 10^{14} см^{-3} \cdot c, \quad T \sim 10^8 K \end{aligned} \tag{8.43}$$

Керовано нагріти речовину до таких температур можна: потужним газовим розрядом, гігантським лазерним імпульсом або бомбардуванням інтенсивним пучком часток. Тому дослідження проблем КТС ведуться в напрямках створення квазістаціонарних реакторів з магнітним утримуванням плазми та імпульсних реакторів з інерційним утримуванням плазми. В обох підходах ще є принципові труднощі, пов'язані з нестійкістю плазмових конфігурацій та проблемою домішок у плазмі, що ведуть до надмірних енергетичних втрат. Але небезпідставним є і оптимізм, що реактор енергетики майбутнього буде побудований.

§8.5. Елементарні частинки та фундаментальні взаємодії

Елементарні частинки в точному розумінні – первинні, далі неподільні частинки, з яких, за припущенням, складається вся матерія. В сучасній фізиці цей термін вживається менш точно для найменування великої групи суб'ядерних часток, які, за винятком протонів, не являються атомами чи атомними ядрами. Крім протонів p, сюди входять: нейтрони n, електрони e, фотони γ, мюони μ, π-мезони, важкі лептони τ, нейтрино ν, «дивні» частинки (K-мезони, гіперони Λ, Σ, Ξ, Ω), J/Ψ-частинки, Υ-частинки, "чарівні", "красиві" частинки, проміжні векторні бозони (w, z), різноманітні резонанси –

всього ~ 400 часток, переважно нестабільних, кількість яких продовжує зростати. Фактично, більшість з них не є елементарними. Частинки, що претендують на роль первинних елементів матерії, прийнято називати істинно елементарними.

Відкриття складного, несподіваного світу елементарних часток – надбання квантово-релятивістської фізики XX століття. Деякі з елементарних часток були відкриті в зв'язку з вивченням будови атома (e^-, γ), ядра (p, n, ν_e) і в космічних променях (e^+, $\mu^\pm$, $\pi^{\pm}_0$, K^{+}_0, Λ^0), решта – на прискорювачах заряджених часток, які з 50-х років XX-століття стали основним інструментом дослідження елементарних часток.

Всі елементарні частинки є об'єктами винятково малих мас і розмірів, що зумовлює квантову специфіку їх поведінки. Найбільш важлива квантова властивість всіх елементарних часток – їх здатність народжуватися і знищуватися (випромінюватися і поглинатися) при взаємодії з іншими частинками.

Різноманітні процеси з елементарними частинками помітно відрізняються за інтенсивністю їх протікання. У зв'язку з цим взаємодії елементарних часток ділять на декілька видів: сильну, електромагнітну, слабку, гравітаційну. Інтенсивність взаємодій прийнято характеризувати безрозмірними параметрами, пов'язаними з квадратами констант зв'язку відповідних взаємодій.

Сильна взаємодія зумовлює найміцніший зв'язок елементарних часток. Для неї параметр $G_S = \dfrac{g^2}{\hbar c} \sim 1$ (g – стала мезон-нуклонної взаємодії), характерний час $\tau_S \sim 10^{-23} c$, радіус дії $r_S \sim 10^{-15} м$. Саме вона забезпечує зв'язок нуклонів у ядрі.

Електромагнітна взаємодія менш інтенсивна, вона характеризується параметрами: $G_e = \dfrac{e^2}{\hbar c} \sim 10^{-2}$ (e – елементарний електричний заряд), $\tau_e \sim 10^{-20} c$, $r_e \sim \infty$. Саме ця взаємодія відповідальна за зв'язок електронів з ядрами в атомах і атомів у молекулах.

Слабка взаємодія, як і сильна, – короткодіюча, її параметри: $G_w = \frac{f^2}{\hbar c} \sim 10^{-10}$ (f – електронно-нейтринний заряд, що відповідає полю слабких взаємодій), $\tau_w \sim 10^{-10} c$, $r_w \sim 10^{-18} м$. Вона відповідальна за повільні процеси β-розпаду ядер та розпад квазістабільних елементарних часток.

Гравітаційна взаємодія універсальна, але в зв'язку з малими масами елементарних часток на характерних для них відстанях $\sim 10^{-15} м$ вона помітної ролі не грає: $G_g \sim 10^{-38}$, $r_g \sim \infty$; однак вона може стати суттєвою на відстанях $\sim 10^{-35} м$.

Слід відмітити, що відносна роль різних взаємодій змінюється з ростом енергії часток. Але різні властивості симетрії сприяють їх розділенню до досить значних енергій. Лише в границі самих великих енергій поділ взаємодій на види, мабуть, втрачає зміст.

В залежності від участі в тих чи інших видах взаємодій елементарні частинки розбиваються на класи: лептони ("слабкі" частинки), адрони ("сильні" частинки) з підкласами мезонів ("середніх" часток) та баріонів ("важких" часток); окрему групу елементарних часток складають частинки, що є носіями різних взаємодій.

Групу лептонів складають: електрон e^-, м'юон μ^-, таон τ^-, відповідні нейтрино (ν_e, ν_μ, ν_τ) та їх античастинки. Спін усіх цих частинок $J = 1/2$, тобто вони є ферміонами (підкоряються статистиці Фермі-Дірака). Маса м'юонів $m_\mu = 207 m_e$, маса таонів $m_\tau = 3498 m_e$, відомості про масу нейтрино недостовірні. Лептони приймають участь у слабкій взаємодії (заряджені – також і в електромагнітній), але не зазнають сильної взаємодії. Лептони можна вважати істинно елементарними частинками, бо на сучасному рівні знань ніякої внутрішньої структури в них не виявлено.

Підгрупу мезонів складають заряджені чи нейтральні адрони, спін яких цілочисельний або дорівнює нулю, тобто вони є бозонами (підкоряються статистиці Бозе-Ейнштейна). Сюди входять піони $\pi^{\pm}_{0}$,

Національний університет
водного господарства
та природокористування

каони $K^{\pm}_{0}$, η-мезон, деони $\tilde{D}^{\pm}_{0}$; $m_K \sim 970\, m_e$, $m_\eta \sim 1074\, m_e$, $m_D \sim 3658\, m_e$. Всі вони нестабільні, розпадаються за рахунок слабкої і електромагнітної взаємодії, приймають участь також у сильній взаємодії.

Підгрупа баріонів об'єднує нуклони (p, n) і гіперони ($\Lambda, \Sigma^{\pm}_{0}$, Ξ^{-0}, Ω^-), маса яких ~ (1,2 – 1,8) m_p. Спін цих адронів напівцілий, тобто вони, як і лептони, є ферміонами. Баріони приймають участь у всіх видах взаємодій.

Відкриті на прискорювачах (починаючи з 60-х років) резонанси, список яких все збільшується, є сильновзаємодіючими короткоживучими частинками. Вони трапляються з цілим і напівцілим спіном, тому, відповідно, відносяться до мезонів або баріонів.

До групи переносників взаємодій відносяться: фотони γ, що є квантами електромагнітного поля, проміжні векторні бозони $w^{\pm}$, z^0, які є переносниками слабкої взаємодії, глюони – кванти поля сильної взаємодії кварків, гіпотетичні гравітони – кванти гравітації. Спін перших трьох типів квантів $J = 1$, спін гравітона $J = 2$, тобто всі ці кванти є бозонами.

Кожна елементарна частинка, поряд зі специфікою притаманних їй взаємодій, описується сукупністю дискретних значень певних фізичних величин, що її характеризують, так званих квантових чисел. Загальними характеристиками всіх елементарних часток є маса m, час життя τ, спін J, електричний заряд Q.

В залежності від часу життя елементарні частинки діляться на стабільні, квазістабільні і нестабільні. Стабільними вважаються електрон ($\tau > 10^{21}$ р), протон ($\tau > 10^{31}$ р), фотон, нейтрино. До квазістабільних відносяться частинки, які розпадаються за рахунок електромагнітної і слабкої взаємодії. Нестабільними є резонанси, які розпадаються за рахунок сильної взаємодії з характерним часом життя $\tau \sim 10^{-23}$ c.

Спін частинки J, що характеризує її власний момент імпульсу, може бути цілим або напівцілим кратним величини $\hbar$ ($\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$, де h –

Національний університет
та природокористування

постійна Планка). В цих одиницях у відомих часток J набуває значень $0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$; серед резонансів зустрічаються частинки і з більшим спіном.

Електричний заряд Q частинки є цілим кратним елементарного заряду e. У відомих елементарних частинок $Q = 0, \pm 1$.

Було помічено, що квантові числа елементарних часток пов'язані з законами збереження, які відображають певні симетрії у природі. Наприклад, закони збереження енергії E, імпульсу $\vec{p}$, момента імпульсу $\vec{L}$ відображають властивості симетрії простору-часу (однорідності часу, однорідності та ізотропності простору). Відповідні закони збереження (а також закон збереження електричного заряду) є точними; вони виконуються у всіх видах взаємодій. Разом з цим, елементарні частинки характеризуються ще рядом квантових чисел, пов'язаних з так званими "внутрішніми" симетріями.

Це, перш за все, – баріонний заряд B. Для всіх баріонів $B = +1$, для антибаріонів $B = -1$, для всіх останніх часток $B = 0$. Має місце закон збереження баріонного заряду, який забороняє перетворення важких часток у легкі (наприклад, протона у позитрон і фотон); вважається, що він може порушуватися.

По-друге, лептонний заряд L трьох різновидів (L_e, L_μ, L_τ). Для всіх лептонів $L = +1$, для антилептонів $L = -1$, для решти часток $L = 0$. Має місце закон збереження лептонного заряду, який забороняє процеси зі зміною L (наприклад, $\nu_e + p \neq e^+ + n$); вважається, що і він може порушуватися.

При розгляді адронів було помічено, що вони розбиваються на групи часток, близьких по масі з подібними властивостями, якщо "виключити" електромагнітну взаємодію (так звані зарядові мультиплети). Для характеристики цього було введене квантове число ізотопічного спіну I, яке пробігає цілі і напівцілі значення. Число часток у мультиплеті $N = 2I + 1$, вони відрізняються значенням проекції ізоспіну $I_з$ і величиною електричного заряду. Наприклад, для нуклонів $I = 1/2$, тому $N = 2 \cdot 1/2 + 1 = 2$ (протон, нейтрон). Має місце закон збереження ізоспіну, але він порушується електромагнітною і слабкою взаємодією.

Важливою характеристикою адронів є так звана внутрішня парність $P=\pm 1$, яка описує поведінку хвильової функції системи часток при інверсії простору (тобто симетрію правого і лівого). Виявилось (1957 р.), що вона порушується слабкою взаємодією. Нею ж порушується і так звана зарядова парність $C=\pm 1$, яка описує симетрію часток та античасток і вводиться для абсолютно нейтральних часток.

Поняття античастинки ввів П. Дірак (1928 р.). Він встановив квантово-релятивістське рівняння для електрона, яке, при заданому імпульсі частинки p, дає власні значення енергії

$$E=\pm\sqrt{p^2c^2+m_e^2c^4}\ , \tag{8.44}$$

тобто дві області значень енергій, розділені забороненим проміжком шириною $2m_ec^2$ (рис.8.7).

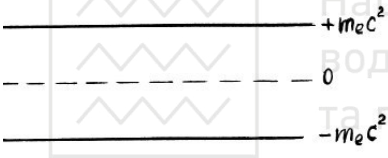


Рис. 8.7

Стани з від'ємною енергією не спостерігаються, оскільки вони заповнені електронами (вакуум системи). Збудження системи зводиться до переходу електрона з заповнених рівнів на вільні; внаслідок цього виникає вільний електрон і вакансія в системі заповнених рівнів – "дірка". Ця вакансія веде себе як електрон з додатніми масою і зарядом, вона одержала назву позитрон. Для виникнення пари електрон-позитрон потрібна мінімальна енергія $2m_ec^2$.

Процес

$$\gamma+\mathrm{X}\rightarrow\mathrm{X}+e^-+e^+ \tag{8.45}$$

описує акт народження пари фотоном; із-за необхідності виконання законів збереження енергії та імпульсу він повинен відбуватись в полі частинки X. Можливий і зворотний процес анігіляції пари

$$e^-+e^+\rightarrow\gamma+\gamma\,. \tag{8.46}$$

Він не вимагає присутності сторонньої частинки, оскільки народжуються два фотони.

Існування позитрона у 1932 р. було підтверджене експериментально (К.Андерсон виявив позитрони в космічних променях). У 1955–1956рр. були відкриті антипротон $\tilde{p}$ і антинейтрон $\tilde{n}$. Античастинки існують і у бозонів: π^-, наприклад, є античастинкою для π^+. Існують і абсолютно нейтральні частинки (γ, π^0,Υ). Вони нездатні анігілювати, але можуть перетворюватися в інші частинки.

Оскільки час життя частинок і античастинок однаковий, можливе, в принципі, існування антиречовини (відкриті ядра антидейтерію, антигелію, антитритію, 1965-1974рр.). Проте, існування антиречовини у Всесвіті астрономами не виявлено.

Найбільша група елементарних часток – адрони – діляться на звичайні, “дивні”, “чарівні”, “красиві”, “істинні” частинки. Цьому поділу відповідає наявність у адронів екзотичних квантових чисел: дивності *S*, чарівності *C*, краси *b*, істинності *t*. Квантове число дивності $S = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$ було введене для пояснення парного народження і відносно великого часу життя *K*–мезонів і гіперонів, які виникають за рахунок сильної взаємодії, а розпадаються за рахунок слабкої взаємодії. Аналогічно були введені квантові числа *C*, *b* для пояснення особливостей народження і розпаду чарівних і красивих часток. Всі ці квантові числа є адитивними: вони зберігаються у сильній та електромагнітній взаємодіях, але не зберігаються у слабкій взаємодії.

Таким чином, кожне квантове число описує певний вид симетрії часток і взаємодій з відповідним законом збереження, який може бути точним чи наближеним. Вивчення цих симетрій привело до класифікації елементарних часток і спроб побудови єдиної теорії фундаментальних взаємодій.

Виділення ізотопічних мультиплетів було першим кроком на цьому шляху, бо проілюструвало плідність концепції симетрії в теорії елементарних часток. Математичний апарат, який використовується для опису симетрій, відомий як теорія груп.

Групою називається множина елементів, для яких визначена операція множення, тобто для елементів a і b існує $c = ab$; існує також одиничний елемент e такий, що $ae = a$, і обернений елемент a^{-1} ($a^{-1} \cdot a = e$). Якщо $ab = ba$, група абелева; у випадку $ab \neq ba$ група неабелева. Елементами групи, зокрема, можуть бути унітарні матриці $U(n)$. Тоді говорять про унітарну унімодулярну групу $SU(n)$. Можна уявити, що матриці групи $SU(n)$ діють на n–компонентні величини в деякому n–мірному просторі (спінори групи). Величини, що перетворюються як добуток спінорів, називаються тензорами. Якщо при дії елементів групи на тензор його перетворені компоненти лінійно виражаються через компоненти вихідного тензора, про нього кажуть як про незвідне представлення групи. У фізичних застосуваннях компоненти незвідних представлень співставляються з певними частинками.

З точки зору теорії груп об'єднання адронів в ізотопічні мультиплети виражає наявність у них симетрії, пов'язаної з групою $SU(2)$, яка діє в ізотопічному просторі. Ізотопічні мультиплети є незвідними представлення групи $SU(2)$, розмірність яких $N = 2I + 1$. Ізотопічні мультиплети розмірності 1, 2, 3, 4 реалізуються на адронах відповідно до значень ізоспіну $I : 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$.

На початку 60-х років виявилося, що звичайні і дивні адрони утворюють більш широкі об'єднання, ніж ізотопічні мультиплети. Такі об'єднання дістали назву унітарні мультиплети; їх виникнення пов'язане з існуванням у адронів більш широкої групи симетрії, а саме – $SU(3)$. Незвідні представлення цієї групи мають розмірність 1, 3, 6, 8, 10, 15… На адронах реалізуються представлення 1, 8, 10. Фундаментальне представлення розмірності 3 чомусь не реалізується.

У 1964 році М.Гел-Ман і Дж.Цвейг висунули гіпотезу: частинки, що відповідають фундаментальному представленню розмірності 3, не є адронами; вони являють собою нову різновидність сильновзаємодіючих часток зі спіном $J = \frac{1}{2}$, з яких побудовані всі адрони. Ці частинки трьох типів (ароматів) були названі кварками: *u* (верхній), *d* (нижній), *s* (дивний).

Національний університет

Спостережувана розмірність унітарних мультиплетів адронів 1, 8, 10 була відтворена в припущенні, що мезони складаються із кварка q і антикварка $\tilde{q}$ ($M = q\tilde{q}$), а баріони – з трьох кварків ($B = qqq$). В подальшому, з врахуванням нових експериментальних фактів (відкриттям τ-лептона, чарівних і красивих адронів) і усвідомленням важливості лептон-кваркової симетрії, ця модель будови адронів була розширена шляхом включення до неї ще трьох ароматів кварків: чарівного c, красивого b, істинного t. З теорії випливають квантові числа кварків, наведені в таблиці 2.

Таблиця 2.

	J	***B***	***I***	***S***	***C***	***b***	***t***	***Q***
u	$^1/_2$	$^1/_3$	$^1/_2$	0	0	0	0	$^2/_3$
d	$^1/_2$	$^1/_3$	$^1/_2$	0	0	0	0	$-^1/_3$
s	$^1/_2$	$^1/_3$	0	–1	0	0	0	$-^1/_3$
c	$^1/_2$	$^1/_3$	0	0	1	0	0	$^2/_3$
b	$^1/_2$	$^1/_3$	0	0	0	1	0	$-^1/_3$
t	$^1/_2$	$^1/_3$	0	0	0	0	1	$^2/_3$

Національний університет водного господарства та природокористування

Привертають увагу дробові значення баріонного та електричного заряду кварків, які не зустрічались у жодної зі спостережуваних часток.

Вся багатоманітність адронів виникає за рахунок різних комбінацій кварків. Зокрема, звичайні адрони побудовані лише із u і d кварків; наприклад: $p = uud$, $n = udd$, $\pi^+ = u\tilde{d}$, $\pi^- = d\tilde{u}$, π^0 являє собою лінійну суперпозицію станів $u\tilde{u}$ і $d\tilde{d}$. Якщо в склад адрона входять s, c, b–кварки, він буде дивним ($S \neq 0$), чарівним ($C \neq 0$), красивим ($b \neq 0$): омега-мінус-гіперон $\Omega^- = sss$ з дивністю $S = -3$, деон $D^+ = c\tilde{d}$ з чарівністю $C = 1$, беон $B^- = b\tilde{u}$, краса якого $b = 1$. Існують і частинки з прихованою чарівністю та красою: $J/\Psi = c\tilde{c}$, $\Upsilon = b\tilde{b}$; у них різниця між числом відповідних кварків і антикварків рівна 0.

Оскільки квантові числа елементарних часток Q, B, L, S, C, b, t – адитивні (для античастинок вони мають протилежний знак),

баріонний і електричний заряд адронів визначається сумуванням відповідних зарядів кварків (антикварків), що входять до складу адрона. Це дає $B = 1$ для баріонів і $B = 0$ для мезонів. Електричний заряд адронів визначається за формулою Гел-Мана-Нішіджіми

$$Q = I_3 + \frac{\mathrm{Y}}{2} \tag{8.47}$$

де $\mathrm{Y} = B + S + C - b$ – так званий гіперзаряд адрона.

В основному стані спін мезонів може бути 0 або 1, а баріонів – $\frac{1}{2}$ чи $\frac{3}{2}$ відповідно до спінових конфігурацій кварків: $\uparrow\downarrow$, $\uparrow\uparrow$;$\downarrow\downarrow\uparrow$, $\uparrow\uparrow\uparrow$. В цьому відношенні гіпотеза кварків спочатку зустрілась з трудністю: хвильова функція адронів, побудованих з однакових кварків (наприклад $\Omega^- = sss$) була симетричною, хоча повинна бути антисиметричною, оскільки кварки – ферміони. Ця трудність була подолана припущенням (М. Боголюбов, Й. Намбу, 1965 р.), що кварки, крім аромату, мають ще внутрішню характеристику “колір”, яка є аналогом електричного заряду. Тоді симетрична по просторових, спінових і унітарних змінних хвильова функція Ω^- може бути антисиметричною по кольорових змінних. Виявилося необхідним для кожного аромату кварка ввести три основні кольори: червоний R, зелений G, синій B; для антикварків – відповідні антикольори $\tilde{R}, \tilde{G}, \tilde{B}$. Введення кольору потроює число різних кварків.

Вибір терміну “колір” зумовлений тим, що з його допомогою можуть бути стисло сформульовані правила побудови адронів: дозволені лише “білі” (безбарвні) комбінації кварків. Цього можна досягти або змішуванням трьох основних кольорів, або комбінуванням основного кольору з відповідним антикольором. Перша можливість реалізується в баріонах, друга – в мезонах. При цьому хвильові функції адронів виявляються інваріантними відносно перетворень групи $SU_c(3)$, що діє в кольоровому просторі. Така симетрія називається калібрувальною інваріантністю (в даному випадку, відносно перетворень кольорів кварків).

Екзотичність властивостей кварків обумовила тривалі експериментальні пошуки їх існування у вільному стані, однак всі

вони закінчились безрезультатно. В зв'язку з цим виникла гіпотеза конфайнменту (полонення) кварків в адронах.

На основі експериментально визначених мас звичайних, дивних, чарівних, красивих адронів можна оцінити ефективну масу кварків в адронах. Такі оцінки приводять до закономірності:

$$m_u \sim m_d < m_s << m_c < m_b << m_t ; \qquad (8.48)$$

тобто можна говорити про легкі і важкі кварки з масами 0,5 – 0,7 *ГеВ* у легких кварків і 1,5 – 22 *ГеВ* у важких.

З'явившись як гіпотетичні структурні елементи адронів, зручні для їх класифікації, в подальшому кварки набули статусу істинно елементарних часток, які завершують ланцюг структурних складових речовини. Ця думка стала переконанням після побудови теорії сильної і електрослабкої взаємодії елементарних часток.

Для опису взаємодії елементарних часток суттєвим є поняття поля як матеріального утворення, в кожній точці якого на частинку діє сила. Поля, що співставляються з елементарними частинками, мають квантову природу. Квантами електромагнітного поля є фотони; кванти інших полів відповідають усім іншим відомим елементарним частинкам. Розрізняють скалярні (однокомпонентні) поля, спінорні (двохкомпонентні) поля, векторні поля… Математично поле описується функцією, що задається в кожній точці простору-часу і має певні трансформаційні властивості відносно перетворень групи Лоренца і груп "внутрішніх" симетрій. Трансформаційні властивості відносно перетворень групи Лоренца задають спін часток (квантів поля): скаляру відповідає $j = 0$, спінору – $j = \frac{1}{2}$, вектору – $j = 1$; число компонентів поля $N = 2j + 1$. Трансформаційні властивості полів відносно перетворень "внутрішніх" просторів задають квантові числа *L*, *B*, *I*, *S*, *C*, *b*, *t*, а також "кольору". Маса елементарних часток не зв'язана з трансформаційними властивостями полів, вона є додатковою характеристикою елементарних часток, але дуже суттєвою, бо визначає область взаємодії: коли дві частинки взаємодіють між собою віртуально, обмінюючись квантом поля, то масивні кванти обумовлюють скінченний радіус дії сил, а безмасові кванти дають нескінченний радіус дії.

Національний університет

Викладені уявлення про взаємодію елементарних часток виникли в квантовій електродинаміці (КЕД), створеній П. Діраком, Р. Фейманом, Дж. Швінгером, С. Томонагою протягом 1928-1948 рр. на основі об'єднання ідей квантової механіки і спеціальної теорії відносності, що дозволило в прекрасному узгодженні з дослідом пояснити електромагнітну взаємодію. За своєю математичною структурою КЕД є локальною калібрувальною теорією з абелевою групою симетрії $U(1)$. Це означає, що закони електромагнітної взаємодії інваріантні відносно перетворень, які виконуються незалежно в кожній точці простору і в кожний момент часу, причому ці перетворення переставні. Виявляється, що і теорія гравітації А. Ейнштейна (ЗТВ) є локальною калібрувальною теорією, але з неабелевою групою симетрії, бо перетворення в ній непереставні. Успіхи таких теорій уже давно надихали фізиків на пошуки шляхів об'єднання фундаментальних сил природи, але пояснити слабку і сильну взаємодію тривалий час не вдавалося, бо, як стало зрозуміло недавно, не були знайдені відповідні локальні калібрувальні теорії.

Національний університет
природокористування

Ситуація змінилася протягом 50-70-х років XX століття. Досліджуючи до яких наслідків призведе заміна глобальної $SU(2)$ – симетрії ізотопічного спіну локальною, Ч. Янг і Р. Мілс (1954 р.) показали, що інваріантність законів фізики при такій заміні зберігається ціною введення в теорію додаткових векторних безмасових полів (аналогічних до електромагнітного поля), які є носіями взаємодії; властивості і число цих полів визначаються властивостями групи "внутрішньої" симетрії. П. Хігс (1964 р.) показав, як за рахунок так званого спонтанного порушення симетрії калібрувальні поля можна зробити масивними. На основі цих ідей і арсеналу КЕД протягом 1966-1971 рр. була побудована теорія сильної взаємодії – квантова хромодинаміка (КХД, Й. Намбу, Ш. Глешоу) і теорія електрослабкої взаємодії (С. Вайнберг, А. Салам, Ш. Глешоу).

В КХД взаємодія між кварками переноситься безмасовими векторними полями, властивості і число яких визначаються неабелевою калібрувальною групою $SU_c(3)$. Кванти цих кольорових полів отримали назву глюонів g; їх є n^2-1, тобто при $n=3$ для групи $SU_c(3)$ 8 різних глюонів. Кожний глюон несе на собі ознаку кольору і антикольору; наприклад $g_{R\tilde{G}}$ – червоно-зелений глюон. Віртуальний обмін кварків глюонами за схемою

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$q_R \leftrightarrow q_G + g_{R\tilde{G}} \tag{8.49}$$

забезпечує локальну інваріантність сильної взаємодії відносно зміни кольору кварків.

Незважаючи на складність структури глюонного поля, КЕД і КХД дуже схожі за формою. Подібність між фотоном і глюоном у тому, що вони мають однаковий спін $j = 1$, нульовий електричний заряд, обоє безмасові, але по кольору глюони не є нейтральними. Це приводить до різної поляризації вакууму фотонними і глюонними полями. За рахунок електронно-позитронних пар заряд електрона в КЕД "екранується" (зменшується з відстанню), поле ж кольорових глюонів в КХД "антиекранує" кольоровий заряд кварка. В результаті сила взаємодії кварків на великих відстанях не змінюється з відстанню, тому неможливо "іонізувати" адрон (вільних кварків, як і глюонів, існувати не може). Модельно глюонне поле аналогічне полю плоского конденсатора; тобто, силові лінії глюонного поля мезона стягується в трубку; це дозволяє уявляти мезон як своєрідну струну з кварком і антикварком на кінцях (рис. 8.8).

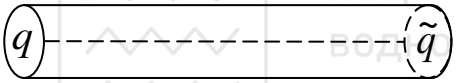


Рис. 8.8

На малих відстанях кварки практично не взаємодіють між собою (асимптотична воля), бо ефективна хромодинамічна константа взаємодії зменшується зі зростанням енергії. Спираючись на асимптотичну волю і гіпотезу конфайнменту кварків в КХД можна описувати процеси, в яких деталі утворення кінцевих станів з кварків і глюонів несуттєві; однак питання спектру мас адронів виходить за межі КХД.

Використання принципу визначальної ролі симетрії у формуванні структури взаємодії дозволило також побудувати теорію слабкої взаємодії. Одночасно був розкритий глибокий внутрішній зв'язок слабкої і електромагнітної взаємодій.

Існування пар лептонів: $e^-, \upsilon_e; \mu^-, \upsilon_\mu; \tau^-, \upsilon_\tau$ з однаковими лептонними зарядами, але з різними масами і електричними зарядами відображає наявність у лептонів симетрії типу ізотопічної з групою $SU_L(2)$. Збереження спіральності (напрямку проекції спіна частинки на напрям її руху) у слабких процесах можна зв'язати з існуванням у

Національний університет
лептонів особливого гіперзаряду У і відповідної зарядової симетрії з групою $U_Y(1)$. В цілому глобальна симетрія електрослабкої взаємодії описується групою $SU_L(2)\cdot U_Y(1)$. Вимога локальності цієї симетрії дає 4 янг-мілсовські безмасові калібрувальні бозони (3 від групи $SU_L(2)$ і 1 від групи$\cdot U_Y(1)$), причому 2 з них заряджені і 2 нейтральні. За рахунок механізму Хігса 3 з них одержують масу (проміжні векторні бозони w^+, w^-, z^0), а четвертий (фотон γ) залишається безмасовим. Вони і є носіями електрослабкої взаємодії: обмін фотонами відповідальний за електромагнітну взаємодію, а проміжними векторними бозонами – за слабку.

Інтригуючими передбаченнями цієї теорії було:

1. обмін нейтральними z^0 -бозонами повинен давати слабкі процеси без зміни заряду часток;
2. очікувані маси проміжних векторних бозонів повинні бути ~ 80-100 *ГеВ*.

Експеримент блискуче підтвердив ці передбачення. Нейтральні слабкі процеси були виявлені у 1973 році, а у 1983 році на зустрічних протон-антипротонних пучках були отримані проміжні векторні бозони з масами 84 *ГеВ* у $w^{\pm}$ і 95 *ГеВ* у z^0.

Локальна калібрувальна квантова теорія полів (КТП), яка сформульована на кварк-лептонному рівні і спирається на групу симетрії $SU_c(3)\cdot SU_L(2)\cdot U_Y(1)$, одержала назву “стандартна модель”. Вона охоплює величезний інтервал енергій (10^2-10^{15} *ГеВ*), і стверджує, що основу фізичного світу складають 17 “елементів”(істинно елементарних часток):

6 лептонів ($e, \nu_e, \mu, \nu_\mu, \tau, \nu_\tau$),

6 кварків (u, d, s, c, b, t),

4 векторних бозони (фотон γ, глюон g, віони w, z),

1 гравітон;

(звичайно, потрібно також врахувати античастинки і кольори).

При цьому має місце лептон-кваркова симетрія, яка проявляється в можливості об’єднання лептонів і кварків у покоління:

Національний університет водного господарства та природокористування

$$\begin{pmatrix}\nu_e\\ e\end{pmatrix}\leftrightarrow\begin{pmatrix}u\\ d\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\nu_\mu\\ \mu\end{pmatrix}\leftrightarrow\begin{pmatrix}c\\ s\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\nu_\tau\\ \tau\end{pmatrix}\leftrightarrow\begin{pmatrix}t\\ b\end{pmatrix}. \qquad (8.50)$$

Сучасний експеримент не дає нічого, що вимагало б виходу за межі "стандартної моделі", теорія ж пропонує нові ідеї.

Перш за все, логічно спробувати об'єднати сильну і електрослабку взаємодії в рамках локальної калібрувальної КТП. В цьому плані в 70-ті роки були запропоновані різні варіанти теорій так званого "великого об'єднання" (ТВО). В цих теоріях за основу вибирається достатньо широка калібровувальна група (наприклад, $SU(5)$) і в таку модель "вкладаються" КХД і електрослабка теорія. Основою подібного об'єднання служить кварк-лептонна симетрія і той факт, що константа сильної взаємодії зменшується зі збільшенням енергії, а електрослабкої зростає. При певній енергії вони можуть зрівнятись, орієнтовно це може відбутись при енергіях $\sim 10^{15}$ *ГеВ*. Локалізація SU(5)-симетрії веде до виникнення додаткових калібрувальних бозонів, відповідальних, зокрема, за перетворення кварків у лептони. Наслідком цього повинна бути нестабільність протона, але з часом життя $\sim 10^{32}$ років із-за великої маси відповідних бозонів. При енергіях $<10^{15}$ *ГеВ* точна SU(5)-симетрія порушується (механізм цього незрозумілий), перетворюючись у "стандартну модель" з відповідними їй взаємодіями.

Слід відмітити, що в ТВО не вписується гравітація, оскільки спін гравітона $J = 2$. Включення гравітації у єдину теорію фундаментальних взаємодій вимагає побудови квантової теорії тяжіння. Певні надії пов'язуються тут з супергравітацією. Супергравітація – теорія з локалізованою калібрувальною суперсиметрією. Перетворення суперсиметрії переміщують бозонні і ферміонні поля, об'єднуючи в одні супермультиплети частинки однакової маси, але різного (цілого і напівцілого) спіну, включаючи гравітон. Енергетична межа суперсиметрії складає $\sim 10^{19}$ *ГеВ*, тому зараз немає її експериментального підтвердження.

З 80-х років увагу теоретиків привернули так звані суперструнні теорії як перспективні кандидати на об'єднання усіх фундаментальних взаємодій, в тому числі і гравітації. Суперструни – одновимірні релятивістські об'єкти з довжиною $\sim 10^{-35}$ *м*, які характеризуються і спіновими ступенями вільності. Числа ферміонних і бозонних

ступенів вільності рівні, що і забезпечує суперсиметрію теорії. Частинки з найнижчою масою в теоріях суперструн включають гравітон зі спіном 2 і "калібрувальні" частинки зі спіном 1. Але є також безмежна кількість масивних часток, які відповідають вищим гармонікам коливної струни. Масовий масштаб визначається натягом струни $T \sim 10^{39} m$. Тому струна настільки коротка, що для більшості застосувань теорії струн не відрізняються від теорії точкових часток, а вищі моди струни настільки масивні, що не можуть бути виявлені безпосередньо. Однак на планківському рівні струнна природа фундаментальних часток суттєва для забезпечення несуперечливості квантової теорії.

Квантова теорія суперструн формулюється у 10-вимірному просторі-часі, але з незрозумілих поки-що причин відбувається компактифікація 6 вимірів до малих розмірів, які не спостерігаються на досліді. Привабливо, що теорія суперструн дозволить практично однозначно вибрати цю компактифікацію, а її топологічні властивості визначать основні риси низькоенергетичної динаміки суперструн, яка описує сучасну фізику елементарних часток, без необхідності підгонки параметрів теорії для узгодження з дослідом.

Таким чином, теорія суперструн органічно включає в себе суперсиметрію, ідею про багатовимірність простору-часу і нелокальність об'єктів – носіїв фундаментальних взаємодій. Суперструнні теорії – спроба синтезу КТП і ЗТВ, мабуть, більш грандіозного, ніж синтез квантової механіки і спеціальної теорії відносності в КЕД, спроба побудови "теорії усього". Ця теорія ще не має елегантного математичного формулювання, в ній не знайдений фізичний принцип типу принципу еквівалентності у ЗТВ. Якщо це буде зроблено, набудуть більш глибокого змісту такі основні поняття фізики як простір, час, поле.

Національний університет

III. Практичні заняття

Магнетизм. Коливання і хвилі

Частина І. Електромагнетизм

1. Основні закони і співвідношення

- **За законом Біо-Савара-Лапласа елемент струму $I \cdot d\vec{l}$ в деякій точці простору створює магнітне поле, індукція якого**

$$d\vec{B} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \times \vec{r}}{r^3},$$

де: $d\vec{l}$ – елемент довжини провідника зі струмом силою I (напрям вектора $d\vec{l}$ співпадає з напрямом струму); $\vec{r}$ – вектор, проведений від елемента $d\vec{l}$ до точки простору; μ_0 – магнітна стала; μ – магнітна проникність середовища (для слабомагнітних речовин – пара- і діамагнетиків – незначно відрізняється від одиниці, у феромагнетиків $\mu \gg 1$ і залежить від зовнішнього магнітного поля – див. приклад 6). Напрям вектора $d\vec{B}$ шукають як напрям векторного добутку $d\vec{l} \times \vec{r}$ або за правилом свердлика. Модуль вектора $d\vec{B}$

$$dB = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{r^2} \sin\alpha, \quad \alpha \equiv \left(\hat{d\vec{l}}, \vec{r} \right).$$

- **Принцип суперпозиції**

$$\vec{B} = \sum_i \vec{B}_i,$$

де: $\vec{B}_i$ – індукція магнітного поля, створеного i-тим провідником зі струмом; $\vec{B}$ – індукція поля, створеного системою багатьох струмів.

- **Зв'язок магнітної індукції з напруженістю $\vec{H}$ магнітного поля**

$$\vec{B} = \mu\mu_0 \vec{H}.$$

- **Нижче виписані формули для модулів напруженостей магнітних полів, виведені на основі закону Біо-Савара-Лапласа і принципу суперпозиції:**

а) для поля в центрі колового струму

$$H = \frac{I}{2R},$$

R – радіус контура;

Національний університет водного господарства та природокористування

б) для поля прямолінійного провідника зі струмом на відстані R від нього

$$H = \frac{I}{4\pi R}\left(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\right),$$

α_1 і α_2 – кути між напрямками векторів $d\vec{l}$ та $\vec{r}$ на початку й кінці провідника;

в) для поля нескінченно довгого провідника зі струмом

$$H = \frac{I}{2\pi R};$$

г) для поля всередині нескінченно довгого соленоїда

$$H = nI;$$

$n = N/l$ – густота витків (N – число витків, що припадає на довжину l соленоїда; $N \cdot I$ – число ампер-витків).

- **В однорідному магнітному полі на прямолінійний провідник зі струмом довжиною l діє сила Ампера**

$$\vec{F}_A = I\vec{l} \times \vec{B};$$

Національний університет водного господарства та природокористування

модуль цієї сили

$$F_A = IBl\sin\alpha,$$

α – кут між напрямками векторів $\vec{l}$ та $\vec{B}$. Напрям сили Ампера знаходять за правилом векторного добутку або за правилом лівої руки ($\vec{B}$ – в долоню!).

- **Модуль сили взаємодії двох довгих паралельних провідників зі струмами**

$$F = \frac{\mu\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} l,$$

де: l – довжина провідника; I_1 та I_2 – сили струмів; d – відстань між провідниками.

- **Сила Лоренца, що діє з боку магнітного поля на рухомий електричний заряд**

$$F_{\ddot{E}} = q\vec{\mathrm{v}} \times \vec{B},$$

де: q – заряд; $\vec{\mathrm{v}}$ – швидкість цього заряду; $\vec{B}$ – магнітна індукція. Напрям сили Лоренца знаходять для позитивного заряду за правилом векторного добутку або за правилом лівої руки (для негативного заряду буде протилежний напрямок сили). Модуль сили Лоренца

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$F_{Л} = |q| \mathrm{v} B \sin\alpha, \quad \alpha \equiv \left(\hat{\vec{\mathrm{v}}, \vec{B}} \right).$$

- **На плоский контур зі струмом у магнітному полі діє момент сили (обертальний момент)**

$$\vec{M} = \vec{P}_m \times \vec{B},$$

де: $\vec{P}_m$ – магнітний момент контура зі струмом;

$$\vec{P}_m = IS\vec{n},$$

I – сила струму, S – площа контура, $\vec{n}$ – одиничний вектор позитивної нормалі до площини контура. Модуль обертального моменту

$$M = P_m B \sin\alpha,$$

$\alpha \equiv \left(\hat{\vec{P}_m, \vec{B}} \right)$, $P_m = IS$.

- **Магнітний потік через деяку плоску поверхню в однорідному магнітному полі**

$$\Phi = BS\cos\alpha,$$

$\alpha \equiv \left(\hat{\vec{B}, \vec{n}} \right)$, $\vec{n}$ – одиничний вектор нормалі до площини, S – площа поверхні.

- **Робота переміщення контура зі струмом у магнітному полі**

$$A = I \cdot \Delta\Phi,$$

де: I – сила струму; $\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1$ – зміна магнітного потоку через площадку, обмежену контуром; індекси “1” та “2” символізують вихідний і кінцевий стани, відповідно.

- **Основний закон електромагнітної індукції:**

$$\mathcal{E}_{інд} = -\frac{d\Phi}{dt},$$

$\mathcal{E}_{інд}$ – ЕРС індукції в контурі, що виникає при зміні магнітного потоку через поверхню, охоплену контуром. Якщо магнітний потік пронизує одночасно багато контурів (наприклад, соленоїд), то в

Національний університет водного господарства та природокористування

законі потрібно замість потоку Ф через один контур писати повний магнітний потік (потокозчеплення) $\Psi = \sum \Phi$.

- **Магнітний потік, створений контуром зі струмом**

$$\Phi = LI,$$

I – сила струму, L – індуктивність контура. У випадку системи з багатьох контурів потокозчеплення $\Psi = LI$, де L – індуктивність цієї системи.

- **Індуктивність соленоїда (довгого порівняно з діаметром)**

$$L = \mu\mu_0 \frac{N^2}{l} S,$$

де: N – число витків, що припадають на ділянку соленоїда довжиною *l*; S – площа поперечного перерізу соленоїда.

- **ЕРС самоіндукції**

$$\mathcal{E}_{si} = -L\frac{dI}{dt},$$

де: L – індуктивність контура; I – сила струму; t – час.

- **Енергія магнітного поля струму**

$$W = \frac{LI^2}{2}.$$

- **Густина енергії магнітного поля**

$$w = \frac{B^2}{2\mu\mu_0}.$$

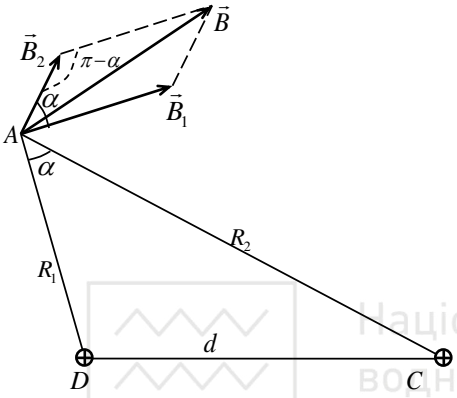
2. Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Два паралельні безмежно довгі провідники D і C, по яких течуть в одному напрямку електричні струми силою $I = 60\,A$, розміщені на відстані $d = 10\,см$ один від другого. Визначити модуль магнітної індукції B поля, створеного провідниками зі струмом у точці A, що на відстані $R_1 = 5\,см$ від одного і $R_2 = 12\,см$ від другого провідника.

Розв'язання

Дано:
I = 60 A
d = 10 см
R_1 = 5 см
R_2 = 12 см
B?

Зобразимо провідники зі струмами перпендикулярно до площини рисунка, тоді решта ліній будуть у цій площині. Напрямки векторів $\vec{B}_1$ та $\vec{B}_2$ індукції магнітних полів, створених у точці A провідниками зі струмами D і C, знаходимо або за правилом векторного добутку (див. закон Біо-Савара-Лапласа), або за правилом свердлика. Оскільки вектор $\vec{B}_1$ перпендикулярний до прямої AD, а $\vec{B}_2$ – до прямої AC, то маємо на рисунку два рівні кути α, як кути зі взаємно перпендикулярними сторонами.



На основі принципу суперпозиції

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2,$$

а модуль вектора $\vec{B}$ знайдемо за теоремою косинусів:

$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2 + 2B_1B_2\cos\alpha}\,. \qquad (1)$$

Модулі магнітної індукції B_1 та B_2 розраховуються за формулами

$$B_1 = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi R_1}, \quad B_2 = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi R_2},$$

μ_0 – магнітна стала, μ – магнітна проникність середовища. Підставляючи ці вирази у формулу (1), маємо

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2} + \frac{2}{R_1R_2}\cos\alpha}\,.$$

Кут α розрахуємо за теоремою косинусів:

$$d^2 = R_1^2 + R_2^2 - 2R_1R_2\cos\alpha\,.$$

Звідси

$$\cos\alpha = \frac{R_1^2 + R_2^2 - d^2}{2R_1R_2}\,.$$

Національний університет
та природокористування

Остаточно робоча формула має вигляд

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{R_1^2}+\frac{1}{R_2^2}+\frac{R_1^2+R_2^2-d^2}{R_1^2R_2^2}}\,.$$

Випишемо необхідні величини в одиницях СІ:

$\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}\ Гн/м$; $\mu = 1$ (для вакууму, оскільки в умові задачі про середовище не згадувалося); $R_1 = 0{,}05\,м$; $R_2 = 0{,}12\,м$; $d = 0{,}1\,м$. Виконаємо розрахунок.

$$B = \frac{4\cdot 3{,}14\cdot 10^{-7}\cdot 60}{2\cdot 3{,}14}\sqrt{\frac{1}{(0{,}05)^2}+\frac{1}{(0{,}12)^2}+\frac{(0{,}05)^2+(0{,}12)^2-(0{,}10)^2}{(0{,}05)^2\cdot(0{,}12)^2}} =$$

$$= 3{,}1\cdot 10^{-4}(Тл).$$

Примітка. Ми виконали розрахунок для однієї з точок А простору, що підходять за умовою задачі. Легко переконатися, що таких точок є безліч, але для кожної з них результат розрахунку буде той самий.

Відповідь: 0,31 мТл.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Приклад 2. Електрон влітає в однорідне магнітне поле перпендикулярно до ліній індукції. Модуль швидкості електрона $\mathrm{v} = 4\cdot 10^7\ м/с$, а модуль індукції магнітного поля $B = 1\,м\,Тл$. Знайти модулі тангенціального a_τ та нормального a_n прискорення електрона в полі.

Дано: $\vec{\mathrm{v}} \perp \vec{B}$
$\mathrm{v} = 4\cdot 10^7\ м/с$
$B = 1\,м\,Тл$
$\vec{B} \notin f(x, y, z)$

a_τ ? a_n ?

Розв'язання

На заряджену рухому частинку в магнітному полі діє сила Лоренца, модуль якої розраховується за формулою

$$F_Л = |q|\mathrm{v}B\sin\alpha,$$

де q – заряд частинки, $\alpha = \left(\hat{\vec{\mathrm{v}}, \vec{B}}\right)$.

Сила Лоренца не виконує механічну роботу, бо $\vec{F}_л \perp \vec{\mathrm{v}}$; з теореми про зміну кінетичної енергії в такому випадку маємо, що кінетична енергія, а внаслідок цього і модуль швидкості частинки, в полі не зміниться. Тому

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$a_\tau = \left|\frac{d\mathrm{v}}{dt}\right| = 0.$$

Сила Лоренца призводить лише до зміни напряму вектора швидкості. Вона є нормальною силою (надає частинці нормального прискорення):

$$\vec{F}_л = m\vec{a}_n,$$

m – маса частинки. Тому у проекціях на напрям вектора $\vec{a}_n$ маємо

$$|q|\mathrm{v}B\sin\alpha = ma_n,$$

звідки

$$a_n = \frac{|q|\mathrm{v}B\sin\alpha}{m}.$$

Остання формула є робочою для розрахунку величини a_n.

Випишемо тепер значення фізичних величин в СІ і виконаємо числовий розрахунок.

$B = 1\cdot10^{-3}\,Тл;\ |q| = 1{,}6\cdot10^{-19}\,Кл;\ m = 9{,}1\cdot10^{-31}\,кг,\ \alpha = \pi/2.$

$$a_n = \frac{1{,}6\cdot10^{-19}\cdot4\cdot10^{-7}\cdot10^{-3}}{9{,}1\cdot10^{-31}} = 7\cdot10^{15}\left(м/с^2\right).$$

Відповідь: $a_\tau = 0$, $a_n = 7\cdot10^{15}\ м/с^2$.

Приклад 3. Плоский квадратний контур зі стороною a = 10 см, по якому тече струм силою I = 100 А, вільно установився в однорідному магнітному полі, модуль індукції якого B = 1 Тл. Визначити роботу A зовнішніх сил при повороті контура навколо осі, що проходить через середини його протилежних сторін, на кут $\varphi = 90^\circ$.

Дано:
a = 10 см
I = 100 А
B = 1 Тл
$B \notin f(x, y, z)$
$\varphi = 90^\circ$

A?

Розв'язання

На контур зі струмом у магнітному полі діє обертальний момент

$$\vec{M} = \vec{P}_m \times \vec{B}, \qquad (1)$$

де $\vec{P}_m$ – магнітний момент контура. Модуль моменту сили

$$M = P_m B\sin\varphi, \qquad (2)$$

$\varphi = \left(\vec{P}_m, \hat{\vec{B}} \right)$; в даній задачі φ є одночасно кутом повороту контура. За умовою задачі у вихідному положенні $M = 0$, а значить $\varphi = 0$, тобто $\vec{P}_m \,||\, \vec{B}$.

Якщо зовнішні сили виведуть контур з положення рівноваги, то виникне момент сили (1), що прагнутиме повернути контур у вихідне положенні. Проти цього моменту і буде виконана шукана робота А. Оскільки момент сили змінний (залежить від кута φ), то спочатку розрахуємо елементарну роботу

$$\delta A = M d\varphi .$$

Підставимо сюди вираз (2) і врахуємо, що $P_m = I \cdot S$, де $S = a^2$ – площа, охоплена контуром. Тоді

$$\delta A = a^2 BI \sin\varphi \, d\varphi .$$

Інтегруючи цей вираз, знайдемо повну роботу при повороті на скінченний кут, рівний $\pi/2$:

$$A = a^2 BI \int_0^{\pi/2} \sin\varphi \, d\varphi = -a^2 BI \cos\varphi \Big|_0^{\pi/2} = a^2 BI .$$

Остаточно

$$A = a^2 BI .$$

Проведемо числовий розрахунок (в одиницях СІ).

$$A = (0{,}1)^2 \cdot 100 = 1(Дж).$$

Відповідь: 1 Дж.

Приклад 4. Коловий дротяний виток площею S = 0,01 м^2 розміщений в однорідному магнітному полі, модуль індукції якого B = 1 Тл. Площина витка перпендикулярна до ліній індукції поля. Знайти середню ЕРС індукції $\langle \mathcal{E}_i \rangle$, що виникає у витку при вимиканні поля протягом часу $\Delta t = 10 мс$.

Національний університет водного господарства та природокористування

Дано:
$S = 0{,}01$ м^2
$B = 1$ Тл
$\vec{B} \notin f(x, y, z)$
$\vec{n} \,||\, \vec{B}$
$\Delta t = 10\,мс$

$\langle \mathcal{E}_i \rangle$?

Розв'язання

Основний закон електромагнітної індукції математично записують так:

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt},$$

де Ф – магнітний потік через поверхню S, $\mathcal{E}_i$ – миттєве значення ЕРС індукції, t – час. Відповідно, середнє значення ЕРС розраховується за формулою

$$\langle \mathcal{E}_i \rangle = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t},$$

де ΔФ – скінченний приріст магнітного потоку за проміжок часу Δt. За означенням

$$\Delta\Phi = \Phi_{кінц.} - \Phi_{поч.},$$

причому кінцеве значення потоку $\Phi_{кінц.} = 0$ за умовою задачі. Початкове значення магнітного потоку розпишемо, виходячи з означення Ф, у частковому випадку однорідного магнітного поля і плоскої поверхні, котру пронизують лінії індукції:

$$\Phi_{поч.} = BS\cos\alpha,$$

де $\alpha = \left(\vec{n}, \vec{B}\right)$, $\vec{n}$ – одиничний вектор нормалі до площини.

Отримуємо робочу формулу

$$\langle \mathcal{E}_i \rangle = \frac{BS\cos\alpha}{\Delta t}.$$

В СІ $\Delta t = 0{,}01c$; $\alpha = 0$ (за умовою задачі).

$$\langle \mathcal{E}_i \rangle = \frac{0{,}01}{0{,}01} = 1(B).$$

Відповідь: 1 В.

Приклад 5. Соленоїд з осердям із немагнітного матеріалу має N = 1200 витків дроту, що тісно прилягають один до другого. При силі струму I = 4 А магнітний потік $\Phi_0 = 6$ мкВб. Визначити індуктивність L соленоїда та енергію W його магнітного поля.

Розв'язання

Національний університет водного господарства та природокористування

Дано: N = 1200, I = 4 А, Φ_0 = 6 мкВб. L? W?

Індуктивність зв'язана з повним магнітним потоком (потокозчепленням) Ψ і силою струму співвідношенням

$$\Psi = LI.$$

Потокозчеплення, у свою чергу,

$$\Psi = N\Phi_0,$$

тому

$$L = \frac{N\Phi_0}{I}.$$

Енергія магнітного поля всякого провідника зі струмом (в тому числі і соленоїда)

$$W = \frac{LI^2}{2}.$$

Підставляючи сюди отриманий вище вираз для індуктивності, маємо

$$W = \frac{IN\Phi_0}{2}.$$

Національний університет водного господарства та природокористування

Числовий розрахунок:

$\Phi_0 = 6\cdot10^{-6}$ Вб, $N = 1{,}2\cdot10^3$;

$$L = \frac{1{,}2\cdot10^3\cdot6\cdot10^{-6}}{4} = 1{,}8\cdot10^{-3}(Гн);$$

$$W = \frac{4\cdot1{,}2\cdot10^3\cdot6\cdot10^{-6}}{2} = 14\cdot10^{-3}(Дж).$$

Відповідь: L = 1,8 мГн, W = 14 мДж.

Приклад 6. На залізний стрижень довжиною 50 см і перерізом 2 см^2 намотаний в один шар провід так, що на кожний сантиметр довжини стрижня припадає 20 витків. Визначити енергію магнітного поля в осерді соленоїда, якщо сила струму в обмотці 0,5 А.

Розв'язання

Дано: l = 50 см, S = 2 см^2, n = 20 см$^{-1}$, I = 0,5 А. W?

Енергію магнітного поля струму розраховують за формулою

$$W = \frac{LI^2}{2},$$

де L – індуктивність системи.

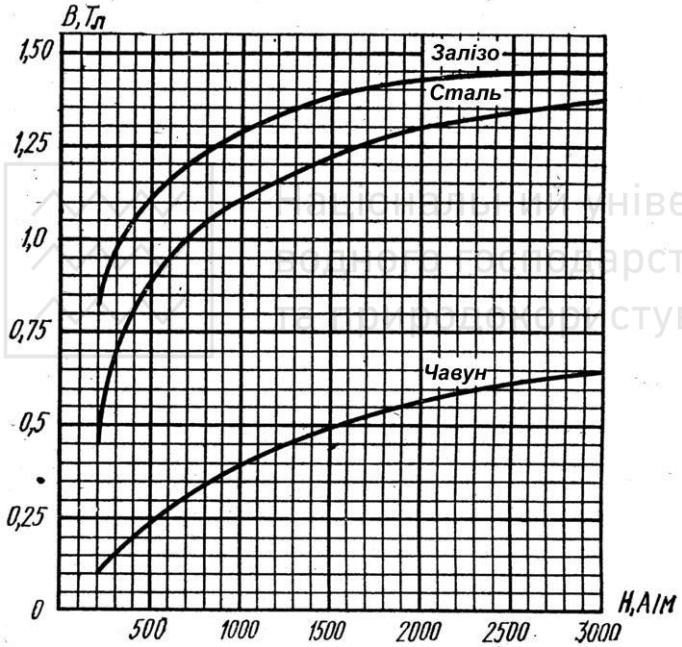
Індуктивність соленоїда

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$L = \mu\mu_0 n^2 V ,$$

де μ – магнітна проникність речовини всередині котушки, μ_0 – магнітна стала, n – щільність витків, V – об'єм соленоїда. Очевидно, що $V = l \cdot S$.

Магнітна проникність феромагнетика (а таким є залізо) не є постійною величиною, а залежить від напруженості зовнішнього магнітного поля. Цю величину можна розрахувати, виходячи зі зв'язку магнітної індукції з напруженістю $\vec{B} = \mu\mu_0 \vec{H}$, скориставшись графіком залежності магнітної індукції від напруженості (експериментальні дані):



Щоб використати графік, треба спочатку розрахувати модуль напруженості магнітного поля соленоїда за формулою

$$H = In .$$

В одиницях СІ $n = 2 \cdot 10^3 м^{-1}$, тому $H = 2 \cdot 10^3 \cdot 0{,}5 = 1000 (А/м)$. З графіка тепер знаходимо, що для заліза в цьому випадку В = 1,3 Тл.

Підставимо тепер формулу для об'єму соленоїда і вираз $\mu\mu_0 = \dfrac{B}{H}$ у співвідношення для розрахунку індуктивності:

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$L = \frac{B}{H} n^2 l S .$$

Шукана енергія тепер

$$W = \frac{1}{2} \frac{B}{H} n^2 I^2 l S .$$

В одиницях СІ: l = 0,5 м; S = $2 \cdot 10^{-4}$ м^2. Тому

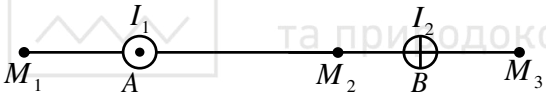
$$W = \frac{1}{2} \frac{1{,}3}{1 \cdot 10^3} \left(2 \cdot 10^3\right)^2 \cdot (0{,}5)^2 \cdot 0{,}5 \cdot 2 \cdot 10^{-4} = 0{,}065 (Дж).$$

Відповідь: 65 мДж.

3. Задачі для самостійного розв'язування

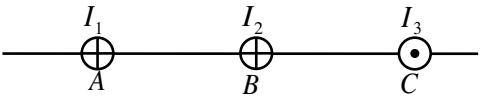
3.1. Поле прямолінійного й колового провідника зі струмом, соленоїда

1. На рис. зображено переріз двох прямолінійних безмежно довгих провідників зі струмами. Відстань AB між провідниками рівна 10 см, сили струмів I_1 = 20 А та I_2 = 30 А. Знайти модулі напруженостей H магнітного поля, створеного двома струмами в точках M_1, M_2 і M_3. Відстані M_1A = 2 см, AM_2 = 4 см та BM_3 = 3 см.



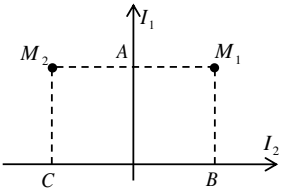
2. Розв'язати попередню задачу, якщо струми течуть в одному напрямку.

3. На рис. зображено переріз трьох прямолінійних безмежно довгих провідників зі струмами. Відстані AB=BC=5 см, сили струмів $I_1 = I_2 = I$ та $I_3 = 2I$. Знайти точки на прямій AC, в яких напруженість магнітного поля, створеного трьома струмами, рівна нулю.



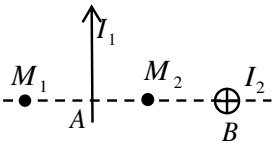
4. Розв'язати попередню задачу, якщо струми течуть в одному напрямку.

5. Два прямолінійні безмежно довгі провідники розміщені перпендикулярно один до другого і знаходяться в одній площині. Знайти модулі напруженостей H_1 і H_2



магнітного поля в точках M_1 та M_2, якщо сили струмів I_1=2А й I_2=3А. Відстані AM_1=AM_2=1 см і BM_1=CM_2=2см.

6. Два прямолінійні безмежно довгі провідники розміщені перпендикулярно один до другого і знаходяться у взаємно перпендикулярних площинах. Знайти модулі напруженостей H_1 та H_2 магнітного поля в точках M_1 і M_2, якщо сили струмів I_1=2А та I_2=3А. Відстані AM_1=AM_2=1см і AB=2см.



7. По довгому вертикальному провіднику зверху вниз тече струм силою I=8А. На якій відстані *a* від нього напруженість, що одержується від складання земного магнітного поля і поля струму, направлена вертикально вверх? Модуль горизонтальної складової напруженості земного поля $H_г$ = 16 А/м.

8. Знайти модуль напруженості H магнітного поля, створеного відрізком AB прямолінійного провідника зі струмом, в точці C, розміщеній на перпендикулярі до середини цього відрізка на відстані *a*=5см від нього. По провіднику тече струм силою I=20А. Відрізок AB провідника видно з точки C під кутом 60°.

9. Розв'язати попередню задачу, якщо сила струму у провіднику I=30А і відрізок провідника видно з точки C під кутом 90°. Точка C розміщена на відстані *a* = 6 см від провідника.

10. Струм силою I=20А тече по довгому провіднику, зігнутому під прямим кутом. Знайти модуль напруженості H магнітного поля в точці, що лежить на бісектрисі цього кута на відстані *a* = 10 см від його вершини.

11. Струм силою I=20А, протікаючи по кільцю з мідного дроту перерізом S=1,0мм^2, створює в центрі кільця магнітне поле напруженістю 178 А/м. Яка різниця потенціалів U прикладена до кінців дроту, що утворює кільце? Питомий опір міді $\rho = 1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом·м.

12. З дроту довжиною *l*=1м зроблена квадратна рамка. По рамці тече струм силою I = 10 А. Знайти модуль напруженості H магнітного поля в центрі рамки.

13. В центрі круглого дротяного витка створюється магнітне поле напруженістю $\vec{H}$ при різниці потенціалів U_1 на кінцях витка. Яку треба прикласти різницю потенціалів U_2, щоб отримати магнітне

поле такої ж напруженості в центрі витка вдвічі більшого радіуса, зробленого з такого ж дроту?

14. По дротяній рамці у формі правильного шестикутника тече струм силою I=2A. В центрі рамки цим струмом створюється магнітне поле напруженістю 33А/м. Знайти довжину l дроту. Примітка: довжина сторони правильного шестикутника рівна радіусу описаного навколо нього кола.

15. Обмотка котушки зроблена з дроту діаметром d=0,8мм. Витки тісно прилягають один до другого. Вважаючи котушку достатньо довгою, знайти напруженість магнітного поля всередині котушки при силі струму I = 1 А.

3.2. Сила Лоренца

16. Потік α-частинок (ядер гелію), прискорених різницею потенціалів U=1 МВ, влітає в однорідне магнітне поле напруженістю 1,2кА/м. Швидкість кожної частинки перпендикулярна до ліній напруженості магнітного поля. Знайти модуль сили F, що діє на частинку.

17. Знайти кінетичну енергію (в електрон-вольтах) протона, що рухається по дузі кола радіусом 60см у магнітному полі з індукцією 1Тл.

18. Протон і електрон, рухаючись з однаковою швидкістю, влітають в однорідне магнітне поле. У скільки разів радіус кривизни R_1 траєкторії протона більший від радіуса кривизни R_2 траєкторії електрона?

19. Протон і електрон, прискорені однаковою різницею потенціалів, влітають в однорідне магнітне поле. У скільки разів радіус кривизни R_1 траєкторії протона більший від радіуса кривизни R_2 траєкторії електрона?

20. На фотографії, отриманій у камері Вільсона, траєкторія електрона в однорідному магнітному полі є дугою радіусом R = 10 см. Модуль індукції поля B = 10 мТл. Знайти кінетичну енергію електрона W (в електрон-вольтах).

21. Заряджена частинка рухається в магнітному полі по колу зі швидкістю, модуль якої рівний $1 \cdot 10^6$ м/с. Модуль індукції магнітного поля рівний 0,3 Тл. Радіус кола 4см. Знайти заряд частинки, якщо відомо, що її кінетична енергія рівна 12кеВ.

22. Протон і α-частинка влітають в однорідне магнітне поле перпендикулярно до ліній індукції. У скільки разів період обертання

T_1 протона в магнітному полі менший від періоду обертання T_2 α-частинки?

23. α-частинка, кінетична енергія якої W = 500 еВ, влітає в однорідне магнітне поле перпендикулярно до ліній індукції. Модуль індукції магнітного поля B=0,1 Тл. Знайти модуль сили F, що діє на α-частинку, і радіус R кола, по якому рухається частинка.

24. Виходячи з умови попередньої задачі, знайти період обертання α-частинки.

25. α-частинка, модуль моменту імпульсу якої $L = 1{,}33 \cdot 10^{-22}\,(кг \cdot м^2)/с$, влітає в однорідне магнітне поле перпендикулярно до ліній індукції. Модуль індукції магнітного поля B=24мТл. Знайти кінетичну енергію W α-частинки.

26. Однозарядні іони ізотопів $^{39}_{19}\mathrm{K}$ та $^{41}_{19}\mathrm{K}$ прискорюються різницею потенціалів U = 300 В; потім вони попадають в однорідне магнітне поле, лінії індукції якого перпендикулярні до напряму їх руху. Модуль вектора магнітної індукції B = 0,08 Тл. Знайти радіуси кривизни R_1 і R_2 траєкторій цих іонів.

27. Знайти відношення *q*/*m* (питомий заряд) для зарядженої частинки, якщо вона, влітаючи з модулем швидкості $1 \cdot 10^6$ м/с в однорідне магнітне поле, модуль напруженості якого 200кА/м, рухається по дузі кола радіусом 8,3см. Напрям руху частинки перпендикулярний до ліній напруженості магнітного поля. Порівняти розраховану величину зі значенням *q*/*m* для електрона, протона і α-частинки.

28. Напруженості магнітного поля $\vec{H}$ та електричного поля $\vec{E}$ направлені однаково; H = 8 кА/м, E = 1 кВ/м. Електрон влітає в таке електромагнітне поле зі швидкістю $1 \cdot 10^5$м/с. Знайти модулі нормального (a_n), тангенціального (a_τ) і повного (a) прискорення електрона, якщо він рухався паралельно до вектора напруженості електричного поля.

29. Розв'язати попередню задачу, якщо електрон рухався перпендикулярно до вектора $\vec{E}$.

30. Індукція магнітного поля $\vec{B}$ та напруженість електричного поля $\vec{E}$ взаємно перпендикулярні; B = 0,5 мТл, E = 1 кВ/м. Пучок електронів влітає в таке електромагнітне поле, причому швидкість $\vec{v}$ їх перпендикулярна до площини, в якій лежать вектори $\vec{B}$ та $\vec{E}$.

Знайти швидкість електронів $\vec{v}$, якщо при одночасній дії обох полів пучок не відхиляється від заданого напряму.

3.3. Закони Ампера, соленоїд, контур зі струмом у магнітному полі, магнітний потік, явище електромагнітної індукції, індуктивність, енергія магнітного поля

31. В однорідному магнітному полі, модуль напруженості якого 79,6 кА/м, розміщена квадратна рамка, площина якої складає з напрямком вектора індукції кут 45°. Довжина сторони рамки 4см. Знайти магнітний потік, що пронизує рамку.

32. В магнітному полі, модуль індукції якого B=0,05Тл, обертається стрижень довжиною $l = 1$ м. Вісь обертання проходить через один з кінців стрижня і паралельна до вектора $\vec{B}$. Знайти магнітний потік Ф, що перетинається стрижнем при кожному оберті.

33. Скільки ампер-витків треба для того, щоб усередині соленоїда малого діаметру і довжиною $l = 30$ см об'ємна густина енергії магнітного поля була рівна $w = 1{,}75$ Дж/м^3?

34. Два прямолінійні довгі паралельні провідники розміщені на відстані $d_1 = 10$ см один від другого. По провідниках в одному напрямку течуть струми силами $I_1 = 20$ А та $I_2 = 30$ А. Яку роботу A_l, що припадає на одиницю довжини провідників, треба виконати, щоб розсунути ці провідники до відстані $d_2 = 20$ см?

35. З дроту довжиною 20 см зроблені квадратний і коловий контури. Знайти модулі моментів сил M_1 та M_2, що діють на кожний контур, розміщений в однорідному магнітному полі з модулем індукції 0,1 Тл. По контурах тече струм силою 2 А. Площина кожного з контурів складає з напрямком магнітної індукції кут 45°.

36. Котушка гальванометра з $N = 400$ витків тонкого дроту, намотаного на прямокутний каркас довжиною $l = 3$ см і шириною $b = 2$ см, підвішена на нитці у магнітному полі, модуль індукції якого $B = 0{,}1$ Тл. По котушці тече струм силою $I = 0{,}1$ мкА. Знайти модуль обертального моменту М, що діє на котушку гальванометра, якщо площина котушки: а)паралельна до вектора магнітної індукції; б) складає кут $\alpha = 60°$ з напрямком магнітної індукції.

37. Коловий контур розміщений в однорідному магнітному полі так, що площина контура перпендикулярна до напрямку магнітної індукції. Модуль напруженості магнітного поля H = 150 кА/м. По контуру тече струм силою $I = 2$ А. Радіус контура $R = 2$ см. Яку роботу А треба виконати, щоб повернути контур на кут $\varphi = 90°$ навколо осі, що співпадає з діаметром контура?

38. В однорідному магнітному полі, модуль індукції якого $B = 0{,}1$ Тл, рухається провідник довжиною $l = 10$ см. Модуль швидкості провідника v = 15 м/с, а вектор $\vec{v}$ направлений перпендикулярно до вектора $\vec{B}$. Знайти індуковану у провіднику ЕРС $\mathcal{E}_i$.

39. Котушка діаметром D = 10 см має N = 500 витків дроту і поміщена в магнітне поле. Знайти середню ЕРС індукції $\langle \mathcal{E}_i \rangle$, що виникає в цій котушці, якщо модуль індукції магнітного поля B зростає протягом часу t = 0.1 с від 0 до 2Тл.

40. Котушка довжиною *l*=20см і діаметром D=3см має N=400 витків. По котушці тече струм силою I=2A. Знайти індуктивність L котушки та магнітний потік Ф, що пронизує площу її поперечного перерізу.

41. Скільки витків дроту діаметром d=0,6мм має одношарова обмотка котушки, індуктивність якої L=1мГн і діаметр D=4см? Витки тісно прилягають один до другого.

42. Соленоїд довжиною $l = 50$ см і площею поперечного перерізу $S = 2$ см^2 має індуктивність L = 0,2 мкГн. При якій силі струму I об'ємна густина енергії магнітного поля всередині соленоїда $w = 1$ мДж/м^3?

43. Скільки витків має котушка, індуктивність якої L = 1 мГн, якщо при силі струму I = 1 А магнітний потік через котушку Ф = 2 мкВб?

44. Квадратна рамка з мідного дроту перерізом $s = 1$ мм^2 поміщена в магнітне поле, модуль індукції якого змінюється з часом за законом $B = B_0 \sin \omega t$, де $B_0 = 0{,}01$ Тл, $\omega = 2\pi/T$ і T = 0,02 с. Площа рамки $S = 25$ см^2. Площина рамки перпендикулярна до напрямку магнітної індукції. Знайти залежність від часу t і найбільше значення: а) магнітного потоку Ф, що пронизує рамку; б) ЕРС індукції $\mathcal{E}_i$, що виникає в рамці; в) силу струму I, що тече по рамці.

45. Через котушку, індуктивність якої *L*=21мГн, тече струм, сила якого змінюється з часом за законом $I = I_0 \sin \omega t$, де $I_0 = 5$ А, $\omega = 2\pi/T$, T = 0,02 с. Знайти залежність від часу t: а) ЕРС самоіндукції $\mathcal{E}_{ci}$, що виникає в котушці; б) енергії W магнітного поля котушки.

Національний університет

Частина ІІ. Коливання і хвилі

1. Основні закони і співвідношення

- **Рівняння гармонічного коливання має вигляд**

$$x = A\sin(\omega_0 t + \alpha)$$

або

$$x = A\cos(\omega_0 t + \alpha),$$

де: x – зміщення коливної точки (чи центра мас тіла) від положення рівноваги; A – амплітуда; t – час; α – початкова фаза; ω_0 – циклічна частота власних незгасаючих коливань (власна циклічна частота).

- **Частота (лінійна)**

$$\nu = \frac{N}{t},$$

період коливань

$$T = \frac{t}{N},$$

де N – число коливань за час t.

Національний університет водного господарства та природокористування

- **Зв'язок циклічної частоти з періодом**

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

- **Формули для розрахунку періоду вільних незгасаючих механічних коливань різних осциляторів:**

а) пружинного маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}};$$

б) математичного маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}};$$

в) фізичного маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}.$$

Тут: m – маса маятника (у випадку а) – це маса матеріальної точки чи тіла, прикріпленого до пружини); k – жорсткість пружини; l – відстань від центра мас маятника до точки підвісу (у випадку б) ця величина співпадає з довжиною нитки); g – прискорення вільного падіння; L – зведена довжина фізичного маятника;

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$L = \frac{I}{ml},$$

де I – момент інерції маятника відносно осі, що проходить через точку підвісу перпендикулярно до площини коливань центра мас.

- **У випадку фізичного маятника рівняння коливань прийнято записувати через кут відхилення φ від положення рівноваги (кутове зміщення)**

$$\varphi = \varphi_{\max} \sin(\omega_0 t + \alpha).$$

- **Кінетична енергія осцилятора**

$$W_k = W \cdot \sin^2(\omega_0 t + \alpha),$$

потенціальна енергія

$$W_i = W \cdot \cos^2(\omega_0 t + \alpha),$$

повна механічна енергія

$$W = \frac{mA^2 \omega_0^2}{2}.$$

- **При складанні двох однаково направлених гармонічних коливань однакової частоти одержується гармонічне коливання тієї ж частоти** з амплітудою

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1)}$$

та з початковою фазою α, що задовільняє рівняння

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{A_1 \sin\alpha_1 + A_2 \sin\alpha_2}{A_1 \cos\alpha_1 + A_2 \cos\alpha_2}.$$

Тут A_1 і A_2 – амплітуди вихідних коливань, α_1 та α_2 – початкові фази.

- **При складанні двох взаємно перпендикулярних гармонічних коливань однакової частоти рівняння траєкторії результуючого руху має вигляд**

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{2xy}{AB}\cos(\alpha_2 - \alpha_1) = \sin^2(\alpha_2 - \alpha_1),$$

A – амплітуда коливання по осі Ox, В – по осі Oy.

- **Рівняння згасаючих коливань**

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha),$$

де: A_0 – амплітуда при $t = 0$; β – коефіцієнт згасання, ω – циклічна частота згасаючих коливань,

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}\ .$$

- **Логарифмічний декремент згасання**

$$\lambda = \beta \cdot T\ .$$

- **Рівняння усталених вимушених коливань**

$$x = A\cos(\omega t + \alpha),$$

де: ω – циклічна частота зовнішньої періодично діючої сили;

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}};$$

$$\mathrm{tg}\alpha = -\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2};$$

F_0 – амплітудне значення змушувальної сили.

- **Резонансна частота**

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}\ .$$

- **Рівняння плоскої хвилі, що поширюється вздовж осі *Ox*:**

$$\zeta(x,t) = A\cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{\mathrm{v}}\right) + \alpha\right)$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

або

$$\zeta(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \alpha),$$

де: $\zeta(x,t)$ – зміщення коливної точки в момент часу t в точці простору з координатою x; A – амплітуда коливань; ω – циклічна частота; v – модуль фазової швидкості хвилі; α – початкова фаза; $k = 2\pi/\lambda$ – хвильове число; $\lambda = \mathrm{v} \cdot T$ – довжина хвилі; T – період коливань.

- **Модуль швидкості звуку в рідині**

$$\mathrm{v} = \sqrt{\frac{1}{\beta \cdot \rho}},$$

де ρ – густина, β – адіабатична стисливість рідини.

- **Модуль швидкості поширення звуку в газах (близьких до ідеального)**

$$\mathrm{v} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}},$$

де γ – коефіцієнт Пуасона (показник адіабати), R – універсальна газова стала, μ – молярна маса, T – абсолютна температура.

- **Закони зміни з часом заряду на обкладках конденсатора $q(t)$ та різниці потенціалів між обкладками $U(t)$ в реальному коливальному контурі за формою однакові, адже *U* та *q* є прямо пропорційними величинами** ($q = C \cdot U$, C – електроємність):

$$q = q_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha),$$
$$U = U_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha),$$

де коефіцієнт згасання коливань $\beta = R/(2L)$, R – активний опір котушки, L – її індуктивність, $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$, $\omega_0^2 = 1/(LC)$, q_0 і U_0 – значення $q_{\max}$ та $U_{\max}$ при t = 0, причому $q_0 = CU_0$.

Закон зміни сили струму $I(t) = \dot{q}(t)$ запишемо лише для ідеального контура (R = 0):

$$I = I_0 \sin(\omega_0 t + \alpha),$$

$I_0 = q_0 \cdot \omega_0$. Період коливань в такому контурі

$$T = 2\pi\sqrt{LC}.$$

- **Період електромагнітних коливань в реальному контурі**

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}}.$$

- **У випадку вимушених електромагнітних коливань** резонанс напруг наступає, якщо циклічна частота зовнішньої періодичної напруги наближається до резонансної частоти контура $\omega_{рез}^{(U)} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$, а резонанс струмів при $\omega_{рез}^{(I)} = \omega_0$.

- **Рівняння плоскої електромагнітної хвилі, що поширюється вздовж осі *Ox***

$$\begin{cases} \vec{E} = \vec{E}_{\max} \cos(\omega t - kx + \alpha), \\ \vec{H} = \vec{H}_{\max} \cos(\omega t - kx + \alpha), \end{cases}$$

де: $\vec{E}$ та $\vec{H}$ – напруженості електричного і магнітного полів хвилі, $\vec{E}_{\max}$ та $\vec{H}_{\max}$ – амплітуди відповідних величин.

- **Зв'язок модулів напруженостей E і H**

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}E = \sqrt{\mu\mu_0}H,$$

де: ε_0 та μ_0 – електрична і магнітна сталі; ε та μ – діелектрична і магнітна проникності середовища.

- **Модуль швидкості поширення електромагнітних хвиль**

$$\mathrm{v} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}},$$

$c = 3{,}00 \cdot 10^8$ *м/с* – електродинамічна стала. Оскільки v залежить від середовища, то й довжина хвилі різна в різних середовищах (період коливань і, відповідно, частота незмінні).

- **Інтенсивність електромагнітної хвилі**

$$I = \frac{1}{2} E_{\max} \cdot H_{\max}.$$

2. Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Матеріальна точка масою m = 5 г здійснює гармонічні коливання з частотою ν_0 = 0,5 Гц. Амплітуда коливань A = 3 см. Визначити: 1) модуль швидкості v точки в момент часу, коли зміщення x = 1,5 см; 2) максимальне значення модуля діючої сили $F_{\max}$; повну енергію W точки.

Дано:
m = 5 г
ν_0 = 0,5 Гц
A = 3 см
x = 1,5 см
v ? $F_{\max}$? W ?

Розв'язання

Рівняння гармонічних коливань має вигляд

$$x = A\sin(\omega_0 t + \alpha),$$

де ω_0 – власна циклічна частота, α – початкова фаза коливань. Продиференціювавши це рівняння, отримаємо вираз для проекції вектора швидкості

$$\mathrm{v}_x = \dot{x} = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \alpha).$$

Щоб пов'язати цю величину зі зміщенням, заданим в умові задачі, піднесемо обидва виписані рівняння до квадрату і додамо одержані вирази:

$$x^2 = A^2 \sin^2(\omega_0 t + \alpha),$$
$$\mathrm{v}_x{}^2 = A^2\omega_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \alpha),$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{\mathrm{v}_x^2}{A^2\omega_0^2}=1.$$

Звідси $\mathrm{v}_x=\pm\omega_0\sqrt{A^2-x^2}$.

Врахуємо тепер зв'язок циклічної частоти з лінійною $\omega_0=2\pi\nu_0$ і вираз модуля вектора через його проекції, котрий в одновимірному випадку зводиться до $\mathrm{v}=|\mathrm{v}_x|$. Остаточно маємо

$$\mathrm{v}=2\pi\nu_0\sqrt{A^2-x^2}\ .$$

Щоб розрахувати величину $F_{\max}$, запишемо другий закон Ньютона у проекціях на напрям вектора прискорення $\vec{a}$:

$$F_x=ma_x.$$

Проекцію прискорення знайдемо як похідну по часу від проекції швидкості

$$a_x=\dot{\mathrm{v}}_x=-A\omega_0^2\sin(\omega_0t+\alpha).$$

Тепер

$$F=|F_x|=A(2\pi\nu_0)^2m|\sin(2\pi\nu_0t+\alpha)|.$$

Очевидно, що $F=F_{\max}$, якщо $|\sin(2\pi\nu_0t+\alpha)|=1$, тому остаточно

$$F_{\max}=(2\pi\nu_0)^2Am.$$

Повну механічну енергію коливної точки розраховують за формулою $W=mA^2\omega_0^2/2$, отже

$$W=2m(\pi A\nu_0)^2.$$

Виписуємо тепер значення величин в міжнародній системі одиниць і виконуємо числовий розрахунок:

$m=5\cdot10^{-3}\,\hat{e}\tilde{a}$; $\grave{A}=3\cdot10^{-2}\,\grave{\imath}$; $x=1{,}5\cdot10^{-2}\,\grave{\imath}$;

$$\mathrm{v}=2\cdot3{,}14\cdot0{,}5\sqrt{\left(3\cdot10^{-2}\right)^2-\left(1{,}5\cdot10^{-2}\right)^2}=8{,}2\cdot10^{-2}\left(м/с\right);$$

$$F_{\max}=\left(2\cdot3{,}14\cdot0{,}5\right)^2\cdot3\cdot10^{-2}\cdot5\cdot10^{-3}=1{,}5\cdot10^{-3}\left(Н\right);$$

$$W=2\cdot5\cdot10^{-3}\left(3{,}14\cdot3\cdot10^{-2}\cdot0{,}5\right)^2=2{,}2\cdot10^{-5}\left(Дж\right).$$

Відповідь: $\mathrm{v}=8{,}2\,см/с$, $F_{\max}=1{,}5\,мН$, $W=22\,мкДж$.

Приклад 2. Записати рівняння коливання, отриманого при складанні двох однаково направлених гармонічних коливань $x_1 = 2\sin\left(5\pi t + \frac{\pi}{2}\right)см$ та $x_2 = 3\sin\left(5\pi t + \frac{\pi}{4}\right)см$.

Розв'язання

Дано:

$x_1 = 2\sin\left(5\pi t + \frac{\pi}{2}\right)см$

$x_2 = 3\sin\left(5\pi t + \frac{\pi}{4}\right)см$

$x(t)$?

Результатом додавання двох гармонічних коливань однакової частоти та однакового напрямку є теж гармонічне коливання тієї ж частоти і того самого напрямку:

$$x = A\sin(\omega_0 t + \alpha),$$

де амплітуда А розраховується за формулою

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\alpha_2 - \alpha_1)},$$

а початкова фаза α знаходиться з рівняння

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{A_1\sin\alpha_1 + A_2\sin\alpha_2}{A_1\cos\alpha_1 + A_2\cos\alpha_2}.$$

Величини A_1, A_2, α_1, α_2 та ω_0 маємо з порівняння загального вигляду рівняння гармонічних коливань і рівнянь з умови задачі:

$$A_1 = 2см,\ A_2 = 3см,\ \alpha_1 = \frac{\pi}{2},\ \alpha_2 = \frac{\pi}{4},\ \omega_0 = 5\pi c^{-1}.$$

Маємо

$$A = \sqrt{2^2 + 3^2 + 2\cdot 2\cdot 3\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right)} = 4{,}6(см),$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\sin\frac{\pi}{2} + 3\sin\frac{\pi}{4}}{2\cos\frac{\pi}{2} + 3\cos\frac{\pi}{4}} = 1{,}943, \quad \alpha = 0{,}35\pi.$$

Тепер рівняння результуючого коливання

$$x = 4{,}6\sin(5\pi t + 0{,}35\pi)см.$$

Відповідь: $x = 4{,}6\sin(5\pi t + 0{,}35\pi)см$.

Приклад 3. Матеріальна точка одночасно бере участь у двох взаємно перпендикулярних гармонічних коливаннях, рівняння яких

Національний університет водного господарства та природокористування

$x = A_1 \cos \omega t$ та $y = A_2 \cos \frac{\omega}{2} t$, де $A_1 = 1см$, $A_2 = 2см$, $\omega = \pi c^{-1}$.

Знайти рівняння траєкторії точки. Побудувати траєкторію з дотриманням масштабу.

Дано:

$x = A_1 \cos \omega t$

$y = A_2 \cos \frac{\omega}{2} t$

$A_1 = 1см$

$A_2 = 2см$

$\omega = \pi c^{-1}$

$y(x)$?

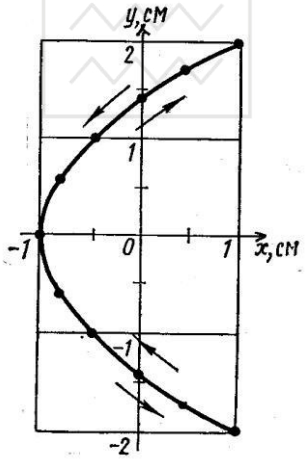
Розв'язання

Щоб знайти рівняння траєкторії (рівняння, що пов'язує змінні x та y), виключимо час t з рівнянь, що задані в умові. Для цього використаємо формулу $\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$. У нас $\alpha = \omega t$, тому маємо

$$y = A_2 \cos \frac{\omega}{2} t = \pm A_2 \sqrt{\frac{1 + \cos \omega t}{2}}.$$

Але з першого рівняння умови задачі $\cos \omega t = \frac{x}{A_1}$, тому остаточно маємо рівняння траєкторії

$$y = \pm A_2 \cdot \sqrt{0{,}5\left(1 + \frac{x}{A_1}\right)}.$$



Це – рівняння параболи, вісь якої співпадає з віссю Оx. З вихідних рівнянь умови задачі бачимо, що зміщення точки по осях координат обмежене, а саме: $|x| \le 1см$, $|y| \le 2см$.

Для побудови траєкторії знайдемо за робочою формулою значення y, що відповідають ряду значень x з інтервалу $|x| \le 1см$, і складемо таблицю:

x, см	-1	-0,75	-0,5	0	+0,5	+1
y, см	0	±0,707	±1	±1,41	±1,73	±2

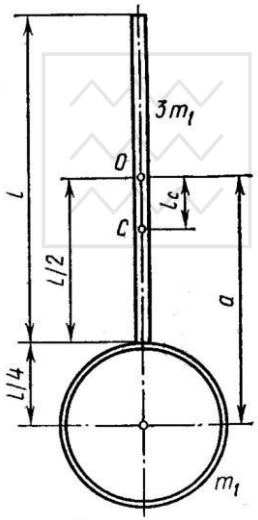
Побудуємо тепер графік.

Відповідь: $y = \pm A_2 \cdot \sqrt{0{,}5\left(1 + \frac{x}{A_1}\right)}$.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Приклад 4. Дано фізичний маятник у формі стрижня довжиною $l = 1$ м і масою $3m_1$ з прикріпленим до одного з його кінців обручем діаметром $d = 0{,}5\,l$ і масою m_1. Горизонтальна вісь Oz маятника проходить через середину стрижня перпендикулярно до нього (див. рис.). Визначити період T коливань такого маятника.

Дано:
$l = 1$ м
$m_{стр} = 3m_1$
$d = 0{,}5\,l$
$m_{обр} = m_1$
T ?



Розв'язання

Період коливань фізичного маятника визначають за формулою

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}},$$

де g – прискорення вільного падіння, L – зведена довжина маятника.

$$L = \frac{I}{ml_c},$$

m – маса маятника, l_c – відстань від центра мас до осі коливань, I – момент інерції маятника відносно цієї осі. Вісь коливань на рисунку проходить через т. O перпендикулярно до площини рисунка. Тепер

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl_c}}. \qquad (1)$$

Момент інерції маятника рівний сумі моментів інерції стрижня I_1 та обруча I_2:

$$I = I_1 + I_2. \qquad (2)$$

Момент інерції стрижня відносно осі, що проходить через його центр мас перпендикулярно до самого стрижня, визначається за формулою $I_1 = \frac{1}{12}m_{стр}l^2$, тому

$$I_1 = \frac{1}{4}m_1l^2.$$

Момент інерції обруча знайдемо з використанням теореми Штейнера $I = I_0 + ma^2$, де: I – момент інерції відносно довільної осі, I_0 – момент інерції відносно осі, що проходить через центр мас (в

Національний університет водного господарства та природокористування

даному випадку обруча) паралельно до заданої осі; a – відстань між цими осями (див. рис.). Одержуємо для обруча

$$I_2 = m_1\left(\frac{l}{4}\right)^2 + m_1\left(\frac{3l}{4}\right)^2 = \frac{5}{8}m_1 l^2.$$

Підставляючи вирази I_1 та I_2 у формулу (2), знайдемо

$$I = \frac{1}{4}m_1 l^2 + \frac{5}{8}m_1 l^2 = \frac{7}{8}m_1 l^2.$$

Відстань l_c розраховуємо, виходячи з означення центра мас системи матеріальних точок (м.т.), точніше, з формули для обчислення координати центра мас

$$X_c = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i},\ i \text{ – номер м.т.}$$

($x = 0$ зручно вибрати в т. O, а саму вісь Ox направити до центра мас обруча; при цьому $X_c = l_c$). Маємо

$$l_c = \frac{0 + m_1(3l/4)}{3m_1 + m_1} = \frac{3}{16}l.$$

Підставляючи у формулу (1) вирази I, l_c та масу маятника ($4m_1$), знайдемо період його коливань:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{7l}{6g}}.$$

Числовий розрахунок:

$$T = 2 \cdot 3{,}14\sqrt{\frac{7}{6 \cdot 9{,}8}} = 2{,}2(c).$$

Відповідь: 2,2 с.

Приклад 5. Амплітуда згасаючих коливань за час $t_1 = 20$ с зменшилася у два рази. У скільки разів вона зменшиться за час $t_2 = 1$ хв?

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Розв'язання

Дано:

$t_1 = 20$ с

$\frac{A_0}{A_1} = 2$

$t_2 = 1$ хв

$\frac{A_0}{A_2}$?

Залежність амплітуди згасаючих коливань від часу визначається співвідношенням

$$A = A_0 e^{-\beta t},$$

де $A_0 = A$ при $t = 0$, β – коефіцієнт згасання. Запишемо згадане співвідношення для моментів часу t_1 і t_2:

$$A_1 = A_0 e^{-\beta t_1},$$

$$A_2 = A_0 e^{-\beta t_2}.$$

Перепишемо цю систему рівнянь у формі

$$\frac{A_0}{A_1} = e^{-\beta t_1},$$

$$\frac{A_0}{A_2} = e^{-\beta t_2}.$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Очевидно, що $e^{\beta t_2} = \left(e^{\beta t_1}\right)^{\frac{t_2}{t_1}}$, тому відразу дістанемо робочу формулу

$$\frac{A_0}{A_2} = \left(\frac{A_0}{A_1}\right)^{\frac{t_2}{t_1}}.$$

Виконаємо числовий розрахунок:

$t_2 = 60c$;

$$\frac{A_0}{A_2} = 2^{\frac{60}{20}} = 8.$$

Відповідь: у вісім разів.

Приклад 6. Знайти жорсткість пружини ресори вагона, вага якого з вантажем $P = 5 \cdot 10^5$ *Н*, якщо при швидкості, модуль якої v = 12 *м/с*, вагон сильно розгойдується внаслідок поштовхів на стиках рейок. Довжина рейки l = 12,8 *м*. Вагон має 4 ресори.

Національний університет водного господарства та природокористування

Дано:
P = $5 \cdot 10^5$ Н
v = 12 м/с
l = 12,8 м
n = 4
k ?

Розв'язання

Значне розгойдування вагона виникає тоді, коли період власних коливань вагона з вантажем співпадає з періодом сили, котра викликає його вимушені коливання.

Період дії змушувальної сили знайдемо, розділивши довжину рейки на модуль швидкості вагона, тобто

$$T = \frac{l}{\mathrm{v}}.$$

Період власних коливань вагона з вантажем (пружинного маятника) визначається за формулою

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_{сист}}},$$

m – маса системи, $k_{сист}$ – жорсткість системи з паралельно з'єднаних однакових пружин. Врахуємо, що потенціальна енергія такої системи стиснених пружин рівна n енергій однієї пружини, адже зміщення x у всіх пружин одне:

$$\frac{k_{сист}x^2}{2} = n\frac{kx^2}{2}.$$

Тому $k_{сист} = n \cdot k$. Разом з тим, $m = P/g$, g – прискорення вільного падіння.

Прирівняємо праві частини двох формул для розрахунку періоду

$$\left(\frac{l}{\mathrm{v}}\right)^2 = 4\pi^2\frac{P}{gnk}.$$

Звідси

$$k = \frac{4P}{gn}\left(\frac{\pi\mathrm{v}}{l}\right)^2.$$

Числовий розрахунок:

$$k = \frac{4 \cdot 5 \cdot 10^5}{9{,}8 \cdot 4}\left(\frac{3{,}14 \cdot 12}{12{,}8}\right)^2 = 4{,}1 \cdot 10^5 (Н/м).$$

Відповідь: 0,41 МН/м.

Приклад 7. Плоска хвиля поширюється вздовж прямої зі швидкістю, модуль якої v = 20 м/с. Дві точки, що розміщені на цій прямій на відстанях $x_1 = 12$ м та $x_2 = 15$ м від джерела хвилі, коливаються з різницею фаз $\Delta\varphi = 0{,}75\pi$. Знайти довжину хвилі λ, написати рівняння хвилі і знайти зміщення вказаних точок в момент часу $t' = 1{,}2c$, якщо амплітуда коливань A = 0,1 м та початкова фаза хвилі $\alpha = 0$.

Розв'язання

Дано:

v = 20 м/с

$x_1 = 12$ м

$x_2 = 15$ м

$\Delta\varphi = 0{,}75\pi$

$t' = 1{,}2c$

A = 0,1 м

$\alpha = 0$

λ ?

$\zeta(x,t)$?

$\zeta(x_1,t')$?

$\zeta(x_2,t')$?

Рівняння плоскої хвилі, що поширюється вздовж осі Ox, має вигляд

$$\zeta(x,t) = A\cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{\mathrm{v}}\right) + \alpha\right), \qquad (1)$$

де: $\zeta(x,t)$ – зміщення в точці, що на відстані x від джерела, в момент часу t; ω – циклічна частота коливань.

Фаза хвилі – аргумент косинуса, тому різниця фаз

$$\Delta\varphi = \omega\left(t - \frac{x_1}{\mathrm{v}}\right) + \alpha - \omega\left(t - \frac{x_2}{\mathrm{v}}\right) - \alpha = \frac{\omega}{\mathrm{v}}(x_2 - x_1).$$

Оскільки $\omega = 2\pi/T$, а довжина хвилі $\lambda = \mathrm{v}\cdot T$ (T – період коливань), то маємо

$$\omega = \frac{2\pi\mathrm{v}}{\lambda} \qquad (2)$$

і $\Delta\varphi = 2\pi(x_2 - x_1)/\lambda$. Звідси

$$\lambda = \frac{2\pi(x_2 - x_1)}{\Delta\varphi}. \qquad (3)$$

Рівняння хвилі (1) тепер запишемо з урахуванням формули (2):

$$\zeta(x,t) = A\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}(\mathrm{v}t - x) + \alpha\right) \qquad (4).$$

Підставимо у робочі формули (3) і (4) значення фізичних величин.

$$\lambda = \frac{2\pi(15-12)}{0{,}75\pi} = 8(м),$$

$$\zeta(x,t) = 0{,}1\cos\left(\frac{\pi}{4}(20t - x)\right)м.$$

Тепер розрахуємо $\zeta(x_1,t')$ та $\zeta(x_2,t')$:

Національний університет водного господарства та природокористування

$$\zeta(x_1,t')=0{,}1\cos\left(\frac{\pi}{4}(20\cdot 1{,}2-12)\right)м=0{,}1\cos(3\pi)м=-0{,}1м;$$

$$\zeta(x_2,t')=0{,}1\cos\left(\frac{\pi}{4}(20\cdot 1{,}2-15)\right)м=0{,}1\cos(2{,}25\pi)м\approx 0{,}71м.$$

Відповідь: $\lambda=8м$; $\zeta(x,t)=0{,}1\cos\left(\frac{\pi}{4}(20t-x)\right)м$; $\zeta(x_1,t')=-0{,}1м$; $\zeta(x_2,t')\approx 0{,}71м$.

Приклад 8. В коливальному контурі, індуктивність якого L = 0,01 Гн, заряд конденсатора зменшується в десять разів за час, рівний періоду коливань $T = 1\cdot 10^{-5}$ с. Визначити опір контура.

Розв'язання

Дано:

$L = 0{,}01$ Гн

$\frac{q(t)}{q(t+T)}=10$

$T = 1\cdot 10^{-5}$ с

R ?

Рівняння згасаючих електромагнітних коливань має вигляд:

$$q(t)=q_0e^{-\beta t}\cos(\omega t+\alpha),$$

де $q(t)$ – заряд у довільний момент часу t, $q_0=q(0)$, β – коефіцієнт згасання, ω – циклічна частота згасаючих коливань, α – початкова фаза.

Національний університет водного господарства та природокористування

Через період коливань заряд стане рівним

$$q(t+T)=q_0e^{-\beta(t+T)}\cos(\omega(t+T)+\alpha).$$

Оскільки $\omega T=2\pi$ (зв'язок циклічної частоти з періодом), то $\cos(\omega(t+T)+\alpha)=\cos(\omega t+\alpha+2\pi)=\cos(\omega t+\alpha)$, тому маємо

$$\frac{q(t)}{q(t+T)}=\frac{q_0e^{-\beta t}}{q_0e^{-\beta(t+T)}}=e^{\beta T}$$

або

$$\beta T=\ln\frac{q(t)}{q(t+T)}.$$

Коефіцієнт згасання для електромагнітних коливань

$$\beta=\frac{R}{2L},$$

тому попереднє співвідношення приймає вигляд

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$\frac{RT}{2L} = \ln\frac{q(t)}{q(t+T)}$$

або

$$R = \frac{2L}{T}\ln\frac{q(t)}{q(t+T)}.$$

Числовий розрахунок:

$$R = \frac{2\cdot 0{,}01}{1\cdot 10^{-5}}\ln 10 = 4{,}6\cdot 10^{3}(Ом).$$

Відповідь: 4,6 кОм.

Приклад 9. Коливальний контур складається з конденсатора, ємність якого C = 1/3·10^{-8} Ф, та котушки з індуктивністю $L = 12\cdot 10^{-6}$ Гн. Знайти період вільних коливань у контурі, коефіцієнт згасання та логарифмічний декремент згасання, якщо опір котушки R = 60 Ом.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Дано:
C = 1/3·10^{-8} Ф
L = 12·10^{-6} Гн
R = 60 Ом

T ? β ? λ ?

Розв'язання

Період згасаючих електромагнітних коливань

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}}.$$

Коефіцієнт згасання

$$\beta = \frac{R}{2L}.$$

Логарифмічний декремент згасання

$$\lambda = \beta T.$$

Підставимо значення фізичних величин у виписані формули:

$$T = \frac{2\cdot 3{,}14}{\sqrt{\frac{1}{12\cdot 10^{-6}\cdot\frac{1}{3}\cdot 10^{-8}} - \left(\frac{60}{2\cdot 12\cdot 10^{-6}}\right)^2}} \approx 15\cdot 10^{-7}(c);$$

$$\beta = \frac{60}{2\cdot 12\cdot 10^{-6}} = 2{,}5\cdot 10^{6}\left(c^{-1}\right);$$

$$\lambda = 2{,}5\cdot 10^{6}\cdot 15\cdot 10^{-7} = 3{,}7.$$

Національний університет водного господарства та природокористування

Відповідь: T = 1,5 мкс; $\beta = 2{,}5\cdot10^6\ с^{-1}$; $\lambda = 3{,}7$.

Приклад 10. Плоска електромагнітна хвиля поширюється в однорідному ізотропному середовищі з діелектричною проникністю $\varepsilon = 2$ та магнітною проникністю $\mu = 1$. Модуль амплітуди напруженості електричного поля хвилі $E_{\max} = 12\,В/м$. Визначити: 1) фазову швидкість хвилі; 2) модуль амплітуди напруженості магнітного поля хвилі.

Розв'язання

Дано:

$\varepsilon = 2$

$\mu = 1$

$E_{\max} = 12\,В/м$

---

v ? H_{max} ?

Фазова швидкість електромагнітних хвиль

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}},$$

Модулі напруженостей електричного і магнітного полів хвилі E та H пов'язані співвідношенням

$$\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon}E = \sqrt{\mu_0\mu}H,$$

де ε_0 і μ_0 – електрична та магнітна сталі.

Оскільки рівняння плоскої хвилі (записане через модулі векторів $\vec{E}$ та $\vec{H}$) має вигляд

$$\begin{cases} E = E_{\max}\cos(\omega t - kx + \alpha) \\ H = H_{\max}\cos(\omega t - kx + \alpha) \end{cases},$$

де ω – циклічна частота, t – час, k – хвильове число, x – відстань від джерела хвилі до точки простору, α – початкова фаза, то маємо аналогічний зв'язок між модулями амплітуд напруженостей:

$$\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon}E_{\max} = \sqrt{\mu_0\mu}H_{\max}.$$

Звідси

$$H_{\max} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0\varepsilon}{\mu_0\mu}}E_{\max}.$$

Числовий розрахунок:

$c = 3{,}0\cdot10^8\ м/с$.

Національний університет

$$\mathrm{v} = \frac{3{,}0 \cdot 10^8}{\sqrt{2}} = 2{,}1 \cdot 10^8 \left(м/с\right);$$

$$H_{\max} = \sqrt{\frac{8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 2}{4 \cdot 3{,}14 \cdot 10^{-7}}} \cdot 12 = 45 \cdot 10^{-3} \left(А/м\right).$$

Відповідь: $\mathrm{v} = 2{,}1 \cdot 10^8$ *м/с*; $H_{\max} = 4{,}5 \cdot 10^{-2}$ *А/м*.

3. Задачі для самостійного розв'язування

3.1. Механічні коливання і хвилі

а) Рівняння незгасаючих гармонічних коливань; швидкість, прискорення, енергія коливної точки

1. Написати рівняння гармонічного коливального руху з амплітудою $A = 50$ *мм*, періодом $T = 4$ *с* і початковою фазою $\varphi = \pi/4$. Знайти зміщення x коливної точки від положення рівноваги при t = 0 та t = 1,5 с. Побудувати графік цього руху.

2. Початкова фаза гармонічного коливання $\varphi = 0$. Через яку частину періоду швидкість точки буде рівна половині від її максимальної швидкості?

3. Протягом якого часу від початку руху точка, що коливається згідно рівняння $x = 7\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$, проходить шлях від положення рівноваги до максимального зміщення?

4. Амплітуда гармонічного коливання $A = 5$ *см*, період $T = 4$ *с*. Знайти максимальні значення модуля швидкості $\mathrm{v}_{\max}$ і модуля прискорення $a_{\max}$ коливної точки.

5. Рівняння руху точки дано у вигляді $x = 2\sin\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4}\right)$ см. Знайти період коливань T, максимальні значення модуля швидкості $\mathrm{v}_{\max}$ і модуля прискорення $a_{\max}$ точки.

6. Рівняння руху точки задано у вигляді $x = \sin\frac{\pi}{6}t$. Знайти моменти часу t, в які досягаються максимальна швидкість і максимальне прискорення.

7. Точка виконує гармонічне коливання з періодом $T = 2c$, амплітудою $A = 50$ *мм*, початковою фазою $\varphi = 0$. Знайти модуль швидкості v точки в момент часу, коли зміщення точки від положення рівноваги $x = 25$ *мм*.

8. Початкова фаза гармонічного коливання $\varphi = 0$. При зміщенні точки від положення рівноваги $x_1 = 2{,}4$ *см* модуль швидкості точки $v_1 = 3$ *см/с*, а при зміщенні $x_2 = 2{,}8$ *см* – $v_2 = 2$ *см/с*. Знайти амплітуду А та період Т цього коливання.

9. Рівняння коливання матеріальної точки масою $m = 16\,г$ має вигляд $x = 2\sin\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{4}\right)$ см. Побудувати графік залежності від часу t (в межах одного періоду) кінетичної W_k, потенціальної W_n і повної W енергії точки.

10. Знайти відношення кінетичної енергії W_k точки, що гармонічно коливається, до її потенціальної енергії W_n для моментів часу: а)t = T/12; б) t = T/8; в) t = T/6. Початкова фаза коливань $\varphi = 0$.

11. Знайти відношення кінетичної енергії W_k точки, що гармонічно коливається, до її потенціальної енергії W_n для моментів часу, коли зміщення точки від положення рівноваги складає: а) $x = A/4$; б) $x = A/2$; в) $x = A$, де A – амплітуда коливань.

12. Повна енергія тіла, що гармонічно коливається, $W = 30$ мкДж; максимальне значення модуля діючої сили $F_{\max} = 1{,}5$ мН. Записати рівняння руху цього тіла, якщо період коливань $T = 2\,c$ і початкова фаза $\varphi = \pi/3$.

13. Амплітуда гармонічних коливань матеріальної точки $A = 2см$, повна енергія коливань $W = 0{,}3$ мкДж. При якому зміщенні x від положення рівноваги модуль діючої на точку сили $F = 22{,}5$ мкН?

б) Складання коливань

14. Написати рівняння руху, що одержується внаслідок складання двох однаково напрямлених гармонічних коливань з однаковим періодом $T = 8\,c$ і однаковою амплітудою $A = 0{,}02\,м$. Різниця фаз між цими коливаннями $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi/4$. Початкова фаза одного з цих коливань рівна нулю.

15. Знайти амплітуду A і початкову фазу φ гармонічного коливання, одержаного від складання однаково напрямлених коливань, заданих

Національний університет водного господарства
рівняннями $x_1 = 4\sin(\pi t)$ см та $x_2 = 3\sin\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$ см. Записати рівняння результуючого коливання. Дати векторну діаграму складання амплітуд.

16. Рівняння двох гармонічних коливань мають вигляд $x_1 = 3\sin(4\pi t)$ см та $x_2 = 6\sin(10\pi t)$ см. Побудувати графік обох коливань. Склавши графічно ці коливання, побудувати графік результуючого руху.

17. Точка бере участь у двох взаємно перпендикулярних коливаннях $x = 2\sin(\omega t)$ м та $y = 2\cos(\omega t)$ м. Знайти траєкторію результуючого руху точки.

18. Точка бере участь у двох взаємно перпендикулярних коливаннях $x = \sin(\pi t)$ та $y = 2\sin\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$. Знайти траєкторію результуючого руху і зобразити її графічно з дотриманням масштабу.

в) Маятники

Національний університет водного господарства
Використання природокористування

19. Кульку, підвішену на нитці довжиною $l = 2$ м, відхиляють на кут $\alpha = 4°$ і спостерігають її коливання. Вважаючи ці коливання незгасаючими гармонічними, знайти швидкість кульки при проходженні нею положення рівноваги.

20. Як зміниться період коливання T математичного маятника при перенесенні його з Землі на Місяць?

21. До пружини підвішене тіло. Максимальна кінетична енергія тіла при коливаннях $W_{k\max} = 1$ Дж. Амплітуда коливань $A = 5$ с*м*. Знайти жорсткість k пружини.

22. Мідна кулька, підвішена до пружини, виконує вертикальні коливання. Як зміниться період коливань, якщо до пружини підвісити замість мідної кульки алюмінієву такого ж радіуса?

23. До пружини підвішене тіло масою $m = 10\,кг$. Знаючи, що пружина під дією сили, модуль якої $F = 9{,}8\,H$, розтягується на $l = 1{,}5\,см$, знайти період Т вертикальних коливань тіла.

24. До гумового шнура довжиною $l = 40\,см$ і радіусом $r = 1\,мм$ підвішена гиря масою $m = 0{,}5\,кг$. Знаючи, що модуль Юнга гуми $E = 3\,МПа$, знайти період Т вертикальних коливань гирі. Врахувати, що жорсткість k гуми пов'язана з модулем Юнга співвідношенням

$k = SE/l$, де S – площа поперечного перерізу шнура, а l – його довжина.

25. Однорідний стрижень довжиною $l = 0{,}5\,м$ виконує малі коливання у вертикальній площині. Він підвішений за свій кінець. Знайти період коливань стрижня.

26. Знайти період коливань стрижня з попередньої задачі, якщо точка підвісу розміщена на відстані $d = 10\,см$ від його верхнього кінця.

27. Обруч діаметром $D = 56{,}5\,см$ висить на цв'яшку, забитому у стінку, і виконує малі коливання у площині, паралельній до стінки. Знайти період коливань T обруча.

28. Однорідна кулька підвішена на нитці, довжина якої l рівна радіусу кульки R. У скільки разів період малих коливань T_1 цього маятника більший від періоду малих коливань T_2 математичного маятника з такою ж відстанню від центра мас до точки підвісу?

г) Згасаючі і вимушені коливання

29. Період згасаючих коливань $T = 4\,с$; логарифмічний декремент згасання $\lambda = 1{,}6$; початкова фаза $\varphi = 0$. При $t = T/4$ зміщення точки $x = 4{,}5$ с$м$. Написати рівняння цього коливання і побудувати його графік у межах двох періодів.

30. Побудувати графік згасаючого коливання, заданого рівнянням $x = e^{-0{,}1t}\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)$ м.

31. Рівняння згасаючих коливань задано у вигляді $x = 5e^{-0{,}25t}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$ м. Знайти модуль швидкості v коливної точки в моменти часу t, рівні: 0, T, $2T$, $3T$, $4T$.

32. Логарифмічний декремент згасання математичного маятника $\lambda = 0{,}2$. У скільки разів зменшиться амплітуда коливань за одне повне коливання маятника?

33. Знайти логарифмічний декремент згасання λ математичного маятника, якщо за час $t = 1$ хв амплітуда коливань зменшилася у два рази. Довжина маятника $l = 1\,м$.

34. До пружини підвішують вантаж, внаслідок чого вона видовжується на $\Delta l = 9{,}8\,см$. Відтягуючи цей вантаж і відпускаючи його, викликають коливання. Яким має бути коефіцієнт згасання β, щоб коливання припинилися за час $t = 10$ с (вважати умовно, що

Національний університет водного господарства та природокористування

коливання припинилися, якщо їх амплітуда впала до 1% від початкової)?

35. Яким має бути коефіцієнт згасання β в попередній задачі, щоб вантаж повернувся в положення рівноваги аперіодично?

36. Яким має бути коефіцієнт згасання β в задачі №34, щоб логарифмічний декремент згасання був рівний $\lambda = 6$?

37. Гиря масою $m = 0{,}2$ *кг*, що висить на пружині, виконує згасаючі коливання з коефіцієнтом згасання $\beta = 0{,}75c^{-1}$. Жорсткість пружини $k = 0{,}5кН/м$. Побудувати резонансну криву, якщо відомо, що максимальне значення модуля зовнішньої сили $F_0 = 0{,}98H$. Для побудови графіка знайти значення амплітуди А вимушених коливань гирі для частот ω зовнішньої періодичної сили, рівних: 0; $0{,}5\omega_0$; $0{,}75\omega_0$; ω_0; $1{,}5\omega_0$; $2\omega_0$, де ω_0 – циклічна частота власних коливань гирі.

38. По грунтовій дорозі пройшов трактор, залишивши сліди у вигляді ряду заглиблень (ямок) на відстані l = 30 см одне від другого. По цій дорозі покотили дитячу коляску з двома однаковими ресорами, кожна з яких прогинається на $x_0 = 2см$ під дією вантажу масою $m_0 = 1кг$. З якою швидкістю котили коляску, якщо від поштовхів на заглибленнях вона завдяки резонансу почала сильно розгойдуватись? Маса коляски М = 10 кг.

д) Пружні хвилі

39. Рівняння незгасаючих коливань у площині $x = 0$ має вигляд $\zeta = \sin(2{,}5\pi t)$ см. Знайти зміщення ζ від положення рівноваги і модуль швидкості v_1 точки, що на відстані $x = 20\,м$ від джерела коливань, для моменту часу t = 1 с після початку коливань. Швидкість поширення коливань v = 100 м/с.

40. Знайти різницю фаз $\Delta\varphi$ коливань двох точок, що на відстанях від джерела коливань $x_1 = 10\,м$ та $x_2 = 16\,м$. Період коливань $T = 0{,}04с$, швидкість їх поширення v = 300 м/с.

41. Знайти різницю фаз $\Delta\varphi$ коливань двох точок, що лежать на промені на відстані $l = 2\,м$ одна від другої, якщо довжина хвилі λ = 1м.

42. Знайти зміщення ζ від положення рівноваги точки, що на відстані $x = \lambda/12$ від джерела коливань, для моменту часу t = T/6 (λ –

довжина хвилі, T – період коливань). Амплітуда коливань $A = 0{,}05м$, початкова фаза $\alpha = \pi/6$.

43. Зміщення від положення рівноваги точки, що на відстані x=4с$м$ від джерела коливань, в момент часу $t = T/6$ рівне половині амплітуди. Знайти довжину λ біжучої хвилі. Початкова фаза $\alpha = \pi/6$.

44. З допомогою ехолота вимірювали глибину моря. Якою була ця глибина, якщо проміжок часу між виникненням звуку та його прийомом виявився рівним $\Delta t = 2{,}5с$? Стисливість води $\beta = 4{,}6 \cdot 10^{-10} Па^{-1}$, густина морської води $\rho = 1{,}03 \cdot 10^3 кг/м^3$.

45. У скільки разів швидкість v_1 поширення звуку в повітрі влітку (t=27°C) більша від швидкості v_2 поширення звуку зимою (t=-33°C)?

3.2. Електромагнітні коливання і хвилі

46. Яку індуктивність L треба ввімкнути в коливальний контур, щоб при ємності $C = 2$ *мкФ* одержати частоту $\nu = 1000$ *Гц*?

47. Коливальний контур складається з конденсатора ємністю 100мкФ і котушки з індуктивністю 400мГн. Конденсатор зарядили до 200В. Протягом якого часу після замикання сила струму в контурі досягне найбільшого значення та якою буде її величина? Опір контура мізерно малий.

48. Коливальний контур складається з конденсатора ємністю 2мкФ та котушки з індуктивністю 1Гн. Заряд конденсатора до замикання контура був $q_0 = 1 \cdot 10^{-6} Кл$. Знайти максимальну силу струму в контурі.

49. Коливальний контур складається з конденсатора ємністю $C = 25$ *нФ* і котушки з індуктивністю $L = 1{,}015$ Гн. Обкладки конденсатора мають заряд $q_0 = 2{,}5 мкКл$. Написати рівняння (з числовими коефіцієнтами) зміни різниці потенціалів U між обкладками конденсатора з часом. Знайти різницю потенціалів у моменти часу T/8, T/4, T/2. Побудувати графік залежності $U(t)$ в межах одного періоду.

50. Закон залежності напруги на конденсаторі від часу в коливальному контурі має вигляд $U = 50\cos\left(10^4 \pi t\right)$, В. Ємність конденсатора дорівнює $C = 0{,}1$ *мкФ*. Знайти закон зміни з часом сили струму в контурі.

51. Для коливального контура із задачі №49 написати рівняння (з числовими коефіцієнтами) зміни з часом t енергії електричного поля

$W_{ел}$, енергії магнітного поля $W_м$ та повної енергії поля W. Знайти енергію електричного поля, енергію магнітного поля і повну енергію поля в моменти часу T/8, T/4, T/2. Побудувати графік цих залежностей в межах одного періоду.

52. Визначити енергію магнітного поля котушки індуктивності коливального контура через 1/8 періоду від моменту початку коливань, якщо найбільша напруга на конденсаторі 500В, а ємність конденсатора 1 *мкФ*. Опір котушки мізерно малий.

53. Рівняння зміни з часом сили струму в коливальному контурі має вигляд $I = -0{,}02\sin(400\pi t)$, А Індуктивність контура $L = 1$ *Гн*. Знайти період T коливань, ємність C контура, максимальну енергію $W_м$ магнітного поля і максимальну енергію $W_{ел}$ електричного поля.

54. Коливальний контур складається з конденсатора ємністю C=7мкФ і котушки з індуктивністю L = 0,23 Гн та опором R = 40 Ом. Окремо взятому конденсатору надано заряд $q_0 = 5{,}6 \cdot 10^{-4}$ *Кл*. Записати: а) закон залежності заряду на обкладках конденсатора від часу; б) закон залежності напруги на конденсаторі від часу.

55. Коливальний контур складається з конденсатора ємністю C = 7 мкФ і котушки з індуктивністю L = 0,23 Гн та опором R = 40 Ом. Обкладки конденсатора мають заряд $q_0 = 0{,}56$ *мКл*. Знайти період T коливань у контурі і логарифмічний декремент згасання λ коливань. Написати рівняння зміни з часом t різниці потенціалів U на конденсаторі.

56. Коливальний контур складається з конденсатора ємністю C = 0,2мкФ і котушки з індуктивністю L = 5,07 мГн. При якому логарифмічному декременті згасання λ амплітуда напруги на конденсаторі U_m за час t = 1мс зменшиться у три рази? Який при цьому опір R контура?

57. Котушка з індуктивністю L = 30 мГн під'єднана до плоского конденсатора з площею пластин $S = 0{,}01 м^2$ і відстанню між ними $d = 0{,}1 мм$. Знайти діелектричну проникність ε середовища між пластинами, якщо контур налаштований на довжину хвилі $\lambda = 750 м$.

58. Радіолокатор виявив у морі підводний човен, відбитий сигнал від якого дійшов до нього за час t = 36мкс. Враховуючи, що діелектрична проникність води $\varepsilon = 81$, визначити відстань від локатора до підводного човна.

59. Електромагнітна хвиля з частотою $\nu = 5$ М$Гц$ переходить з немагнітного середовища з діелектричною проникністю $\varepsilon = 2$ у вакуум. Визначити приріст її довжини хвилі.
60. У вакуумі вздовж осі Ox поширюється плоска електромагнітна хвиля. Модуль амплітуди напруженості електричного поля хвилі дорівнює 50 мВ/м. Визначити інтенсивність хвилі.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Оптика

1. Основні закони і співвідношення

- **Формула тонкої лінзи**

$$\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}=(n_{21}-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right),$$

де відносний показник заломлення $n_{21}=\frac{n_2}{n_1}$, n_2 і n_1 – абсолютні показники заломлення для лінзи та середовища; R_1, R_2 – радіуси кривизни лінзи; a_1, a_2 – віддалі від лінзи до предмета та його зображення. Формула передбачає використання правила знаків.

- **Швидкість світла в середовищі**

$$\upsilon=\frac{c}{n},$$

де c – швидкість світла у вакуумі; n – абсолютний показник заломлення середовища.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

- **Закон заломлення**

$$\frac{\sin i}{\sin r}=n_{21},$$

де i – кут падіння, r – кут заломлення, n_{21} – відносний показник заломлення.

- **Оптична сила лінзи**

$$D=\frac{1}{f},$$

де $f=\dfrac{1}{(n_{21}-1)\left(\dfrac{1}{R_1}-\dfrac{1}{R_2}\right)}$ – фокусна відстань лінзи.

- **Оптичний шлях світлової хвилі**

$$L=n\cdot l,$$

де l – геометричний шлях світлової хвилі в середовищі з абсолютним показником заломлення n.

- **Оптична різниця ходу двох світлових хвиль**

$$\Delta=L_2-L_1.$$

- **Умова максимумів при інтерференції світла**

$$\Delta=\pm k\lambda_0 \quad (k=0,1,2,\ldots).$$

Національний університет водного господарства та природокористування

- **Умова мінімумів при інтерференції світла**

$$\Delta = \pm(2k+1)\frac{\lambda_0}{2}.$$

- **Оптична різниця ходу світлових хвиль, що виникає при відбиванні монохроматичного світла від тонкої плівки**

$$\Delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i} + \frac{\lambda_0}{2},$$

де d – товщина плівки, n – абсолютний показник заломлення плівки.

- **Радіуси світлих кілець Ньютона у відбитому світлі**

$$r_k = \sqrt{(2k-1)R\frac{\lambda_0}{2}} \quad (k = 1,2,3,\ldots),$$

де k – номер кільця; R – радіус кривизни лінзи.

- **Радіуси темних кілець Ньютона у відбитому світлі**

$$r_k = \sqrt{kR\lambda_0} \quad (k = 0,1,2,3,\ldots)$$

- **Умова максимумів для дифракції на щілині шириною** a

$$a\sin\varphi = (2k+1)\frac{\lambda}{2} \quad (k = 1,2,\ldots).$$

- **Умова мінімумів для дифракції на щілині шириною** a

$$a\sin\varphi = 2k\frac{\lambda}{2} \quad (k = 1,2,\ldots).$$

- **Умова головних максимумів для дифракції на дифракційній решітці з періодом** d

$$d\sin\varphi = \pm k\lambda \quad (k = 0,1,2,\ldots).$$

- **Роздільна здатність дифракційної решітки:**

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = k \cdot N,$$

де $\Delta\lambda$ – найменша різниця довжин хвиль двох сусідніх спектральних ліній, при якій ці лінії розділені в спектрі; N – число щілин решітки.

- **Формула Вульфа-Бреггів**

$$2d\sin\theta = k\lambda,$$

де θ – кут між напрямком рентгенівського випромінювання, що падає на кристал і атомною площиною в кристалі; d – відстань між атомними площинами у кристалі.

Національний університет водного господарства та природокористування

- **Закон Брюстера**

$$\mathrm{tg} i_Б = n_{21},$$

де $i_Б$ – кут падіння, при якому відбитий від діелектрика промінь повністю поляризований; n_{21} – відносний показник заломлення.

- **Закон Малюса**

$$I = I_0 \cos^2 \alpha,$$

де I_0 – інтенсивність плоскополяризованого світла, що падає на аналізатор; I – інтенсивність світла після аналізатора; α – кут між площинами пропускань поляризатора і аналізатора.

- **Кут повороту площини поляризації монохроматичного світла при його проходженні через оптично активне середовище:**

а) $\varphi = \alpha l$ (у твердих тілах),

де α – постійна обертання; l – довжина пройденого світлом шляху;

б) $\varphi = \alpha' C l$ (в рідинах)

де α' – питома постійна обертання; C – масова концентрація (густина) оптично активного середовища в розчині.

- **Закон Стефана-Больцмана**

$$E_T = \sigma T^4,$$

де E_T – енергетична світність (інтегральна випромінювальна здатність) абсолютно чорного тіла; σ – постійна Стефана-Больцмана; T – абсолютна температура.

- **Закон зміщення Віна**

$$\lambda_m = \frac{b}{T},$$

де λ_m – довжина хвилі, на яку припадає максимум енергії випромінювання; b – постійна Віна.

- **Енергія фотона**

$$\mathcal{E} = h\nu,$$

де h – постійна Планка; ν – частота фотона.

- **Імпульс фотона**

$$P = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda_0},$$

де λ_0 – довжина хвилі фотона, c – швидкість світла у вакуумі.

Національний університет водного господарства та природокористування

- **Формула Ейнштейна для фотоефекту:**

$$h\nu = A + T_{\max},$$

де A – робота виходу електрона; $T_{\max}$ – максимальна кінетична енергія фотоелектрона.

- **Червона межа фотоефекту**

$$\nu_0 = \frac{A}{h},$$

де ν_0 – мінімальна частота світла, при якій фотоефект ще можливий.

- **Формула Комптона**

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = 2\lambda_c \sin^2 \frac{\theta}{2},$$

де λ_0 – довжина хвилі падаючого рентгенівського кванта на слабо зв'язаний електрон; λ – довжина хвилі розсіяного на кут θ кванта; λ_c – комптонівська довжина хвилі для електрона ($\lambda_c = 2{,}43 пм$).

- **Тиск світла при нормальному падінні на поверхню:**

$$P = \frac{I}{c}(1+\rho),$$

де I – інтенсивність світла; ρ – коефіцієнт відбивання.

- **Короткохвильова межа рентгенівського випромінювання:**

$$\lambda_{\min} = \frac{hc}{eU},$$

де e – елементарний заряд; U – прискорюючи напруга в рентгенівській трубці.

2. Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Поверхні скляного клина утворюють між собою кут $\alpha = 0{,}1'$. На клин падає нормально до його поверхні пучок монохроматичних променів із довжиною хвилі $\lambda = 0{,}5 мкм$. Знайти лінійну віддаль між сусідніми інтерференційними смугами. Показних заломлення світла $n = 1{,}5$.

Розв'язання

Дано:

$$\alpha = 0{,}1' = \frac{3{,}14}{600 \cdot 180} =$$

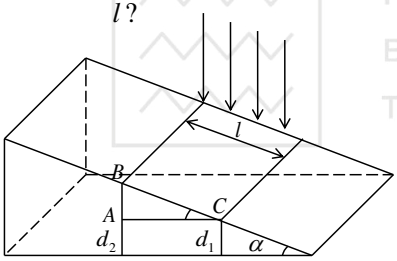
$$= 2{,}907 \cdot 10^{-5}\ радіан$$

$$i = 0°$$

$$\lambda = 0{,}5 мкм = 5 \cdot 10^{-7}\ м$$

$$n = 1{,}5$$

$$l\ ?$$



Розглянемо дві інтерференційні смуги на поверхні клина, які відповідають товщинам d_1 і d_2 та інтерференційним максимумам порядку k_1 і k_2. Оскільки за умовою смуги сусідні, то $k_2 - k_1 = 1$. Умови максимумів для інтерференції на клині (смуги рівної товщини) записані для d_1 і d_2, дають

$$2d_1\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i} = (2k_1 + 1)\frac{\lambda}{2},$$

$$2d_2\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i} = (2k_2 + 1)\frac{\lambda}{2},$$

де $n_1 = 1$ (повітря), $n_2 = n$ (скло клина).

Оскільки промені падають по нормалі, то $i = 0°$, $\sin i = 0$. Враховуючи це і віднімаючи від другого рівняння перше, одержимо:

$$2(d_2 - d_1)n = (k_2 - k_1)\lambda.$$

Звідси

$$d_2 - d_1 = \frac{(k_2 - k_1)\lambda}{2n}.$$

З іншого боку, із ΔABC знаходимо:

$d_2 - d_1 = l \sin\alpha \approx l\alpha$, оскільки для малих кутів $tg\alpha \approx \sin\alpha \approx \alpha$ (радіан). З урахуванням цього запишемо

$$l\alpha = \frac{(k_2 - k_1)\lambda}{2n},$$

звідки

Національний університет водного господарства та природокористування

$$l = \frac{(k_2 - k_1)\lambda}{2n\alpha}.$$

Підставляючи числові дані, одержимо:

$$l = \frac{1 \cdot 5 \cdot 10^{-7}}{2 \cdot 1{,}5 \cdot 2{,}907 \cdot 10^{-5}} \approx 5{,}7 \cdot 10^{-3}(м).$$

Відповідь: 5,7мм.

Приклад 2. Визначити зміщення дзеркала в інтерферометрі Майкельсона, якщо інтерференційна картина змістилась на $m = 100$ смуг. Дослід проводиться з світлом довжиною хвилі $\lambda_0 = 5450\,\text{Å}$.

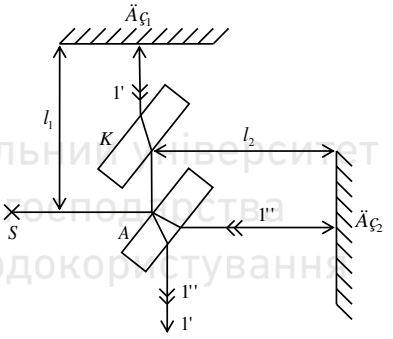
Розв'язання

Дано:

$\lambda_0 = 5450\,\text{Å} = 5{,}450 \cdot 10^{-7}\,м$

$m = 100$ смуг

Δl ?



На малюнку S – джерело світла, A – плоскопаралельна пластинка, задня поверхня якої покрита тонким напівпрозорим шаром срібла; K – така ж, але не посріблена, паралельно розміщена пластинка (компенсатор), $Дз_1$ і $Дз_2$ – взаємно перпендикулярно розміщені дзеркала, l_1 і l_2 – плечі (віддалі до дзеркал) інтерферометра.

Хід, одержання і накладання когерентних променів показано на рисунку.

Оптична різниця ходу променів I' і I''

$$\Delta_1 = 2l_2 - 2l_1 = k\lambda_0.$$

Змістивши, наприклад, дзеркало $Дз_1$ на Δl, одержимо: $l'_2 = l_2 + \Delta l$, тому у другому випадку

$$\Delta_2 = 2l'_2 - 2l_1 = 2(l_2 + \Delta l - l_1) = (k + m)\lambda_0.$$

Тому з одного боку

$$\Delta_2 - \Delta_1 = 2(l'_2 - l_1) - 2(l_2 - l_1) = 2(l_2 + \Delta l - l_1 - l_2 + l_1) = 2\Delta l.$$

З іншого боку,

$$\Delta_2 - \Delta_1 = (k + m)\lambda_0 - k\lambda_0 = m\lambda_0.$$

Отже,

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$2\Delta l = m\lambda_0, \quad \Delta l = \frac{m\lambda_0}{2}.$$

Підставляючи числові значення, одержимо

$$\Delta l = \frac{5{,}460 \cdot 10^{-7} \cdot 100}{2} = 2{,}73 \cdot 10^{-5}(м).$$

Відповідь: 27,3мкм.

Приклад 3. На дифракційну решітку по нормалі падає монохроматичне світло. Період решітки 2мкм. Який найбільший порядок дифракційного максимуму дає ця решітка у випадку червоного $(\lambda_ч = 0{,}7 мкм)$ і фіолетового $(\lambda_ф = 0{,}45 мкм)$ світла. Скільки дифракційних максимумів спостерігається в обох випадках?

Розв'язання

Дано:

$d = 2 мкм$

$\lambda_ч = 0{,}7 мкм$

$\lambda_ф = 0{,}45 мкм$

$k^ч_{\max}$?

$k^ф_{\max}$?

n_r ? $n_ф$?

Використаємо умову максимумів для дифракції на решітці

$$d \sin\varphi = k\lambda,$$

з якої знаходимо порядок спектру

$$k = \frac{d \sin\varphi}{\lambda}.$$

Враховуючи, що $0 \le \varphi \le 90°$, одержимо:

$$k \le \frac{d}{\lambda}.$$

Підставляючи числові значення, знаходимо

$$k^ч_{\max} \le \frac{2}{0{,}7}; \quad k^ч_{\max} \le 2{,}8;$$

$$k^ф_{\max} \le \frac{2}{0{,}45}; \quad k^ф_{\max} \le 4{,}4.$$

Оскільки порядок спектру повинен бути цілим числом, то $k^ч_{\max} = 2$; $k^ф_{\max} = 4$. Число дифракційних максимумів при додатних і від'ємних значеннях k (з врахуванням $k = 0$) дорівнює:

$$n = 2k + 1,$$

тобто $n_ч = 5, n_ф = 9$.

Відповідь: $k^ч_{\max} = 2$, $k^ф_{\max} = 4$ $n_ч = 5, n_ф = 9$.

Національний університет водного господарства та природокористування

Приклад 4. Період дифракційної решітки $d = 0{,}01 мм$. Яку найменшу кількість штрихів *N* повинна мати решітка, щоб дві сусідні жовті лінії натрію ($\lambda_1 = 5890 \text{Å}$ і $\lambda_2 = 5896 \text{Å}$) можна було бачити роздільно у спектрі першого порядку? Визначити найменшу довжину *l* решітки.

Розв'язання

Дано:

$d = 0{,}01 мм = 1 \cdot 10^{-5} м$

$\lambda_1 = 5890 \text{Å} = 5{,}890 \cdot 10^{-7} м$

$\lambda_2 = 5896 \text{Å} = 5896 \cdot 10^{-7} м$

$k = 1$

$N\,?\,l\,?$

Роздільна здатність дифракційної решітки визначається співвідношенням

$$R = \frac{\lambda_{ср}}{\Delta\lambda} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2(\lambda_2 - \lambda_1)}$$

або $R = kN$, де *k* – порядок спектру, *N* – число щілин всієї решітки. Тоді

$$kN = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2(\lambda_2 - \lambda_1)},$$

звідки

$$N = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2(\lambda_2 - \lambda_1)k}.$$

Національний університет водного господарства та природокористування

Підставляючи числові значення одержимо:

$$N = \frac{5{,}896 \cdot 10^{-7} + 5{,}890 \cdot 10^{-7}}{2 \cdot \left(5{,}896 \cdot 10^{-7} - 5{,}890 \cdot 10^{-7}\right) \cdot 1} = 982$$

Довжина решітки

$$l = d \cdot N .$$

Числове значення

$$l = 1 \cdot 10^{-5} \cdot 982 = 9{,}8 \cdot 10^{-3} (м).$$

Відповідь: $N = 982$, $l = 9{,}8 мм$.

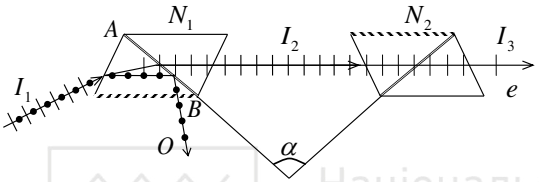
Приклад 5. Два ніколі розташовані так, що кут між площинами коливань складає 60°. 1. У скільки разів зменшиться інтенсивність світла при проходженні через перший ніколь? 2. У скільки разів вменшиться інтенсивність світла при проходженні через обидва ніколі? При проходженні через кожний ніколь на поглинання втрачається по 5% інтенсивності світла.

Розв'язання

Дано:
$\lambda = 60°$
$k = 0{,}05$

$\frac{I_1}{I_2}$?
$\frac{I_1}{I_3}$?

1. Природне світло, падаючи на грань ніколя, внаслідок подвійного променезаломлення розщеплюється на два рівноправні за інтенсивністю промені: звичайний (*o*) і незвичайний (*e*). Площина коливань для незвичайного променя лежить у площині рисунка (площина головного перерізу). Площина коливань для звичайного променя перпендикулярна до площини рисунка. Звичайний промінь (*o*) внаслідок повного внутрішнього відбивання від межі AB відбивається на затемнену поверхню призми і гаситься нею. Незвичайний промінь (*e*) проходить , крізь призму, зменшуючи свою інтенсивність на 5% внаслідок поглинання в товщі призми. Тому



$$I_2 = \frac{1}{2} I_1 (1-k),$$

де I_1 – інтенсивність природного променя, I_2 – інтенсивність променя, який пройшов через перший ніколь N_1 (поляризатор). Тоді

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{I_1}{\frac{1}{2} I_1 (1-k)} = \frac{2}{1-k}.$$

2. Плоскополяризований промінь інтенсивністю I_2 падає на другий ніколь N_2 (аналізатор) і також розщеплюється на звичайний і незвичайний. Звичайний промінь повністю поглинається призмою, а інтенсивність незвичайного променя I_3, котрий виходить із ніколя N_2, визначається законом Малюса (без урахування поглинання світла в N_2)

$$I_3 = I_2 \cos^2 \alpha,$$

де α – кут між площинами коливань у променях з інтенсивностями I_2 та I_3.

Враховуючи втрати інтенсивності внаслідок поглинання в N_2, одержимо

$$I_3 = I_2 (1-k) \cos^2 \alpha.$$

Тоді

Національний університет водного господарства та природокористування

$$\frac{I_1}{I_3}=\frac{I_1}{I_2(1-k)\cos^2\alpha}=\frac{I_1}{0{,}5I_1(1-k)^2\cos^2\alpha}=\frac{2}{(1-k)^2\cos^2\alpha}.$$

Підставляючи числові значення, одержимо:

$$\frac{I_1}{I_2}=\frac{2}{1-0{,}05}=2{,}1;$$

$$\frac{I_1}{I_3}=\frac{2}{(1-0{,}05)^2\cos^2 60^\circ}=8{,}9.$$

Відповідь: $I_1/I_2=2{,}1$; $I_1/I_3=8{,}9$.

Приклад 6. Трубка довжиною $l=10см$ з водним розчином цукру розміщена між паралельними ніколями. Для одержання повного затемнення поля зору аналізатора довелось повернути його на кут 60°. Дослід проводиться з жовтим світлом, для якого питома постійна обертання $\alpha'=66{,}7\frac{град\cdot см^3}{г\cdot дм}$. Визначити концентрацію цукру в розчині.

Національний університет водного господарства та природокористування

Розв'язання

Дано:

$l=10см$

$\varphi_1=60^\circ$

$\alpha'=66{,}7\frac{град\cdot см^3}{г\cdot дм}$

C ?

Спочатку пропускні напрямки поляризатора і аналізатора співпадали і поле зору аналізатора було максимально світлим. Розчин цукру повернув площину поляризації на кут φ і поле зору стало темнішим. Для повного затемнення довелось аналізатор повернути ще на кут $\varphi_1=60^\circ$. Це згідно закону Малюса може бути при умові

$$\varphi_1+\varphi=90^\circ.$$

Отже, кут повороту площини поляризації розчином

$$\varphi=90^\circ-\varphi_1.$$

З другого боку,

$$\varphi=\alpha'\cdot l\cdot C.$$

Звідси

$$C=\frac{\varphi}{\alpha'\cdot l}=\frac{90^\circ-\varphi_1}{\alpha'\cdot l}.$$

Підставляючи числові значення, в СІ одержимо:

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$C = \frac{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}}{66{,}7 \cdot \frac{\pi}{180} \cdot 10^{-2} \cdot 0{,}1} = 450\left(\frac{кг}{м^3}\right).$$

Відповідь: 450кг/м^3.

Приклад 7. Температура вольфрамової спіралі в 25-ватній електричній лампочці дорівнює 3000К. Відношення її енергетичної світності до енергетичної світності абсолютно чорного тіла рівна 0,3, Визначити площу випромінювальної поверхні спіралі. Вважати, що вся споживана потужність йде на випромінювання.

Розв'язання

Дано:

$P = 25Вт$

$T = 3000K$

$\frac{\mathcal{E}_T}{E_T} = 0{,}3$

$\sigma = 5{,}7 \cdot 10^{-8}\ Вт/\left(м^2K^4\right)$

S ?

За визначенням енергетичної світності

$$\mathcal{E}_T = \frac{W}{t \cdot S} = \frac{P}{S}. \qquad (1)$$

За законом Стефана-Больцмана

$$E_T = \sigma T^4. \qquad (2)$$

Розділивши (1) на (2), з урахуванням даних задачі, отримаємо

$$\frac{P}{S\sigma T^4} = 0{,}3.$$

Звідси випливає

$$S = \frac{P}{0{,}3\sigma T^4}. \qquad (3)$$

Підставимо числові дані у (3) і знайдемо шукану площу:

$$S = \frac{25}{0{,}3 \cdot 5{,}7 \cdot 10^{-8} \cdot 81 \cdot 10^{12}} \approx 1{,}8 \cdot 10^{-5}\left(м^2\right).$$

Відповідь: 1,8м^2.

Приклад 8. Кулька радіусом 1см з металу, робота виходу в котрого 2еВ, опромінюється світлом з довжиною хвилі $\lambda = 4500Å$. Визначити заряд кульки, якщо всі електрони віддаляються від її поверхні не більше ніж на 2см.

Розв'язання

Дано:

$r = 1см = 1 \cdot 10^{-2} м$

$d = 2см = 2 \cdot 10^{-2} м$

$A = 2eB = 3{,}2 \cdot 10^{-19} Дж$

$\lambda = 4500Å = 4{,}5 \cdot 10^{-7} м$

---

q ?

В результаті вилітання електронів кулька заряджається позитивно, навколо кульки утворюється електричне поле з різницею потенціалів $U_3 = \varphi_1 - \varphi_2$. Згідно теореми про зміну кінетичної енергії

$$e(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{m\mathrm{v}^2}{2}, \qquad (1)$$

де

$$\varphi_1 = k\frac{q}{r} \text{ та } \varphi_2 = k\frac{q}{r+d} - \qquad (2)$$

потенціал поля сферичного заряду на віддалі r і $r + d$ від центру кулі. Кінетичну енергію електрона можна знайти з рівняння Ейнштейна, виразивши там частоту світла через довжину хвилі, $\nu = c/\lambda$:

$$\frac{m\mathrm{v}^2}{2} = h\frac{c}{\lambda} - A. \qquad (3)$$

Підставимо (2) та (3) в (1) і отримаємо:

$$ekq\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r+d}\right) = h\frac{c}{\lambda} - A.$$

Звідси

$$q = \frac{\left(h\frac{c}{\lambda} - A\right)r(r+d)}{ked}.$$

Підставляючи у (5) числові дані, знаходимо заряд кульки:

$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19} Кл$; $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31} кг$; $k = 9{,}0 \cdot 10^{9} м/Ф$;

$h = 6{,}62 \cdot 10^{-34} Дж \cdot с$; $c = 3{,}0 \cdot 10^{8} м/с$;

$$q = \frac{\left(\frac{6{,}62 \cdot 10^{-34} \cdot 3{,}0 \cdot 10^{8}}{4{,}5 \cdot 10^{-7}} - 3{,}2 \cdot 10^{-19}\right) \cdot 1 \cdot 10^{-2}\left(1 \cdot 10^{-2} + 2 \cdot 10^{-2}\right)}{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 9{,}0 \cdot 10^{9} \cdot 2 \cdot 10^{-2}} =$$

$$= 1{,}2 \cdot 10^{-12}(Кл).$$

Відповідь: 1,2пКл.

Приклад 9. Визначити тиск світла на стінки електричної 100-ватної лампи. Колба лампи є сферичною посудиною радіусом 5см.

Національний університет
та природокористування

Стінки лампи відбивають 4% і пропускають 60% падаючого на них світла. Вважати, що вся спожита потужність, йде на випромінювання.

Розв'язання

Дано:

$P = 100 Вт$

$r = 5 см = 5 \cdot 10^{-2}\ м$

$k = 0{,}04$

$k_1 = 0{,}6$

---

p ?

Очевидно, що фотони, які проходять крізь стінки тіла, виготовленого з прозорої речовини, не чинять тиску на стінки, тому імпульс цих фотонів віднімається із загального імпульсу, що приводить до наступного виразу для тиску світла:

$$p = \frac{I}{c}\left(1 + k - k_1\right) \qquad (1)$$

де k_1 – коефіцієнт пропускання, $I = P/S$ – інтенсивність світла, $S = 4\pi r^2$ – площа поверхні сфери.

Підставляючи останні дві формули у співвідношення (1), одержимо:

$$p = \frac{P}{4\pi r^2 c}\left(1 + k - k_1\right).$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Виконаємо числовий розрахунок.

$c = 3 \cdot 10^8\ м/с$

$$p = \frac{100 \cdot 0{,}44}{4 \cdot 3{,}14 \cdot 25 \cdot 10^{-4} \cdot 3 \cdot 10^8} = 4{,}6 \cdot 10^{-6}\left(Па\right).$$

Відповідь: 4,6мкПа.

Приклад 10. Рентгенівські промені з довжиною хвилі $\lambda_0 = 0{,}1Å$ зазнають комптонівське розсіювання на кристалі нікелю під кутом $\Theta = 90°$. Визначити: 1) зміну довжини хвилі рентгенівських променів при розсіюванні; 2) кінетичну енергію електрона віддачі; 3) імпульс електрона віддачі, 4) довжину хвилі де-Бройля, яка відповідає цьому електрону.

Розв'язання.

Національний університет водного господарства та природокористування

Дано:

$\lambda_0 = 0{,}1\text{Å}$

$\Theta = 90°$

$h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}\ Дж \cdot с$

$\Lambda = 2{,}4 \cdot 10^{-12}\ м$

$c = 3 \cdot 10^8\ м/с$

$\Delta\lambda\ ?\ E_k\ ?\ P_e\ ?\ \lambda_e\ ?,$

1. Використовуючи формулу Комптона

$$\Delta\lambda = 2\lambda_c \sin^2\frac{\Theta}{2},$$

де λ_c – комптонівська довжина хвилі електрона, маємо:

$$\Delta\lambda = 2\lambda_c \sin^2 45° = \lambda_c. \qquad (1)$$

2. Застосуємо закон збереження енергії для зіткнення рентгенівського кванта з майже вільним електроном у кристалі

$$h\nu_0 + m_0c^2 = h\nu + mc^2, \qquad (2)$$

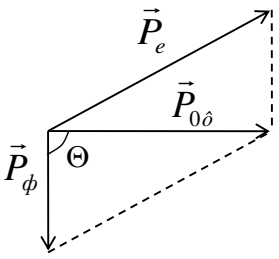
де $\nu_0 = \dfrac{c}{\lambda_0}$ – частота фотона до зіткнення, $\nu = \dfrac{c}{\lambda}$ – після зіткнення, m_0c^2 та mc^2 – енергії електрона, відповідно, до зіткнення і після нього.

Національний університет водного господарства та природокористування

Тепер кінетична енергія електрона $E_k = mc^2 - m_0c^2$ визначається із (2) з урахуванням (1) та очевидного зв'язку $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$:

$$E_k = hc\left(\frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda}\right) = \frac{hc\lambda_c}{\lambda_0(\lambda_0 + \lambda_c)}. \qquad (3)$$

3. Імпульс електрона віддачі знаходимо із закону збереження імпульсу $\vec{P}_{0ф} = \vec{P}_ф + \vec{P}_e$,



звідки

$$\vec{P}_e = \vec{P}_{0ф} - \vec{P}_ф. \qquad (4)$$

Відобразимо співвідношення графічно з урахуванням даних задачі $(\Theta = 90°)$ і знайдемо модуль імпульсу електрона $(P_{\hat{o}} = h/\lambda)$:

$$P_e = \sqrt{P_{0\hat{o}}^2 + P_{\hat{o}}^2} = h\sqrt{\frac{1}{\lambda_0^2} + \frac{1}{(\lambda_0 + \Lambda)^2}} \qquad (5)$$

4. Довжину хвилі де-Бройля знайдемо за формулою:

$$\lambda_e = \frac{h}{P_e}. \qquad (6)$$

Підставляючи числові значення у (3), (5), (6) можна знайти шукані величини.

3. Задачі для самостійного розв'язування

3.1. Геометрична і хвильова оптика

1. Радіус кривизни угнутого сферичного дзеркала 20см. На віддалі 30см від дзеркала поставили предмет висотою 1см. Знайти положення і висоту зображення. Побудувати зображення предмета.
2. Опукле сферичне дзеркало має радіус кривизни 60см. На відстані 10см від дзеркала поставили предмет висотою 2см. Знайти положення і висоту зображення. Побудувати зображення.
3. Промінь світла падає під кутом 30° на плоскопаралельну скляну пластинку і виходить з неї паралельно до падаючого променення. Показник заломлення скла 1,5. Яка товщина пластинки, якщо віддаль між променями рівна 1,94см?
4. На плоскопаралельну скляну $(n=1{,}5)$ пластинку товщиною 5см падає під кутом 20° промінь світла. Визначите величину зміщення променя, що пройшов крізь цю пластинку.
5. Промінь світла падає під кутом *i* на тіло з показником заломлення *n*. Який має бути зв'язок між *i* і *n*, щоб відбитий промінь був перпендикулярний до заломленого?
6. Показник заломлення, скла рівний 1,52. Знайти граничні кути повного внутрішнього відбивання для поверхонь розділу: 1) скло-повітря, 2) вода-повітря, 3) скло-вода.
7. Промінь світла виходить зі скипидару в повітря. Граничний кут повного внутрішнього відбивання для цього променя 42°23′. Яка швидкість світла у скипидарі?
8. На склянку з водою поклали скляну пластинку. Під яким кутом мусить падати на пластинку промінь світла, щоб від поверхні розділу води зі склом відбулося повне внутрішнє відбивання? Показник заломлення скла 1,5, а води 1,32.
9. На дно посудини, заповненої водою до висоти 10см, помістили точкове джерело світла. На поверхні води плаває кругла непрозора пластинка так, що її центр знаходиться над джерелом світла. Який найменшій радіус мусить мати ця пластинка, щоб жоден промінь не зміг вийти через поверхню води?
10. Показники заломлення певного сорту скла для червоного і фіолетового променів рівні, відповідно, 1,51 і 1,53. Знайти граничні

Національний університет
кути повного внутрішнього відбивання, якщо ці промені падають на межу скло-повітря.

11. Монохроматичний промінь падає нормально на бічну поверхню призми і виходить з неї відхиленим на 25°. Показник заломлення матеріалу призми для цього променя 1,7. Знайти заломний кут призми.

12. Знайти головну фокусну відстань кварцової лінзи для ультрафіолетової лінії спектру ртуті $(\lambda_1 = 259 нм)$, якщо головна фокусна віддаль для жовтої лінії натрію $(\lambda_2 = 589 нм)$ дорівнює 16см і показники заломлення кварцу для цих довжин хвиль, відповідно, 1,504 і 1,458.

13. Радіуси кривизни поверхонь двоопуклої лінзи $R_1 = R_2 = 50 см$. Показник заломлення матеріалу лінзи 1,5. Знайти оптичну силу лінзи.

14. За 15см від двоопуклої лінзи, оптична сила якої 10дптр, поставлено перпендикулярно до оптичної осі предмет висотою 2см. Знайти положення і висоту зображення.

15. Лінза з фокусною віддаю 16см дає різке зображення предмета при двох положеннях, відстань між якими 60см. Знайти віддаль від предмета до екрана.

16. Знайти фокусну віддаль лінзи, зануреної у воду, якщо її фокусна віддаль у повітрі дорівнює 20см. Показник заломлення скла, з якого виготовлена лінза, дорівнює 1,6.

17. Плоско-опукла лінза з радіусом кривизни 30см і показником заломлення 1,5 дає зображення предмета зі збільшенням, рівним 2. Знайти віддаль предмета і зображення від лінзи.

18. Знайти збільшення, що дає лупа з фокусною віддаллю 2см: 1) для нормального ока з віддаллю найкращого зору 25см; 2)для короткозорого ока з віддаллю найкращого зору 15см.

19. Чому повинні бути рівні радіуси кривизни поверхонь, що обмежують лупу, щоб вона давала збільшення для нормального ока Г=10? Показник заломлення скла, з якого виготовлено лупу, дорівнює 1,5.

20. У досліді Юнга отвори освітлювалися монохроматичним світлом з довжиною хвилі $\lambda = 600 нм$, віддаль між отворами 1мм і віддаль від отворів до екрана 3м. Знайти положення трьох перших світлих смуг.

21. На мильну плівку $(n = 1{,}33)$ падає біле світло під кутом 45°. При якій найменшій товщині плівки відбиті промені будуть забарвлені у

жовтий колір $(\lambda = 600нм)$?

22. На скляний клин падає нормально пучок світла $(\lambda = 582нм)$. Кут клина дорівнює 20″. Яке число темних інтерференційних смуг припадає на одиницю довжини клина? Показник заломлення скла 1,5.

23. Кільця Ньютона утворюються між плоским склом і лінзою з радіусом кривизни 8,6м. Монохроматичне світло падає нормально. Вимірюваннями встановлено, що діаметр четвертого темного кільця (вважаючи центральну темну пляму за нульову) дорівнює 9мм. Знайти довжину хвилі падаючого світла.

24. Віддаль між п'ятим і двадцять п'ятим світлими кільцями Ньютона дорівнює 9мм. Радіус кривизни лінзи 15мм. Знайти довжину хвилі монохроматичного світла, що падає нормально на установку. Спостереження проводиться у відбитому світлі.

25. В установці для спостереження кілець Ньютона простір між лінзою і скляною пластинкою заповнений рідиною. Визначити показник заломлення рідини , якщо радіус третього світлого кільця дорівнює 3,65мм. Спостереження ведеться у прохідному світлі. Радіус кривизни лінзи 10 м. Довжина хвилі світла 589 нм.

26. Для вимірювання показника заломлення аміаку в одне із плечей інтерферометра Майкельсона помістили відкачану трубку довжиною $l = 14см$. Кінці трубки закриті плоскопаралельними стеклами. Після заповнення трубки аміаком інтерференційна картина для довжини хвилі $\lambda = 590нм$ змістилась на 180 смуг. Знайти показник заломлення аміаку.

27. На поверхню скляного об'єктива $(n = 1{,}5)$ нанесена тонка плівка, показник заломлення якої $n_2 = 1{,}2$ (просвітлююча плівка). При якій найменшій товщині цієї плівки відбудеться максимальне послаблення відбитого світла в середній частині видимого спектру.

28. Вирахувати радіуси перших п'яти зон Френеля, якщо віддаль від джерела до хвильової поверхні дорівнює 1м, віддаль від хвильової поверхні до точки спостереження також дорівнює 1м.

29. Дифракційна картина спостерігається на відстані 4м від точкового джерела монохроматичного світла $(\lambda = 500нм)$. На середині мій екраном і джерелом світла розміщена діафрагма з круглим отвором. При якому радіусі отвору центр дифракційних кілець, що спостерігаються на екрані, буде найтемнішим?

30. На діафрагму а круглим отвором падає нормально паралельний

Національний університет водного господарства та природокористування

пучок монохроматичного світла $(\lambda = 600нм)$. На екрані спостерігається дифракційна картина. При якій найбільшій відстані між діафрагмою і екраном у центрі дифракційної картини ще буде спостерігатися темна пляма? Діаметр отвору 1,96мм.

31. На щілину шириною 20мм падає нормально паралельний пучок монохроматичного світла з довжиною хвилі $\lambda = 500нм$. Знайти ширину зображення щілини на екрані, що віддалений від щілини на $l = 1м$. Шириною зображення вважати відстань між першими дифракційними мінімумами, які розміщені по обидва боки від головного максимуму освітленості.

32. На щілину падає нормально паралельний пучок монохроматичного світла з довжиною хвилі λ. Ширина щілини рівна 6λ. Під яким кутом буде спостерігатись третій дифракційний мінімум світла?

33. Чому рівна стала дифракційної решітки, якщо для того, щоб побачити червону лінію $(\lambda = 700нм)$ у спектрі другого порядку, зорову трубу потрібно встановити під кутом 30° до осі коліматора? Скільки штрихів нанесено на 1см довжини цієї решітки? Світло падає на решітку нормально.

34. Скільки штрихів на 1мм довжини має дифракційна решітка, якщо зелена лінія ртуті $(\lambda = 546,1нм)$ у спектрі першого порядку спостерігається під кутом I9°8'?

35. На дифракційну решітку нормально падає пучок світла від розрядної трубки, яка заповнена гелієм. На яку лінію у спектрі третього порядку накладається червона лінія гелію $(\lambda = 670нм)$ спектра другого порядку?

36. Знайти найбільший порядок спектру для жовтої лінії натрію $(\lambda = 589нм)$, якщо стала дифракційної решітки дорівнює 2мкм.

37. На дифракційну решітку нормально падає пучок монохроматичного світла. Максимум третього порядку спостерігаються під кутом 35°43′ до нормалі. Знайти сталу решітки, виражену в довжинах хвиль падаючого світла.

38. Скільки максимумів дає дифракційна решітка попередньої задачі.

39. Чому рівна стала дифракційної решітки, якщо ця решітка може розділити у першому порядку лінії спектра калію $(\lambda_1 = 404,4нм)$ і $(\lambda_2 = 404,7нм)$? Ширина решітки 3см.

40. Чому рівна стала дифракційної решітки шириною 2,5см, щоб у

Національний університет
водного господарства
та природокористування

першому порядку був розділений дублет натрію ($\lambda_1 = 589 нм$) і ($\lambda_2 = 598{,}6 нм$)?

41. Стала дифракційної решітки шириною 2,5см дорівнює 2мкм. Яку різницю довжин хвиль може розділити ця решітка в області жовтих променів ($\lambda = 600 нм$) у спектрі другого порядку?

42. Визначити кут повної поляризації при відбиванні світла від скла, показник заломлення якого дорівнює 1,57.

43. Граничний кут повного відбивання для деякої речовини дорівнює 45°. Чому дорівнює для цієї речовини кут повної поляризації?

44. Під яким кутом до горизонту мусить знаходитися Сонце, щоб його промені, відбиті від поверхні озера, були максимально поляризовані?

45. Чому дорівнює показник заломлення скла, якщо при відбиванні від нього світла відбитий промінь буде максимально поляризований при куті заломлення 30°?

46. Чому дорівнює кут між головними площинами поляризатора і аналізатора, якщо інтенсивність природного світла, що пройшло через поляризатор і аналізатор, зменшується у чотири рази? Поглинанням світла знехтувати.

47. Природне світло проходить через поляризатор і аналізатор, поставлені так, що кут між їх головними площинами рівний α. Як поляризатор, так і аналізатор поглинають і відбивають 8% світла, що падає на них. Виявилося, що інтенсивність променя, котрий вийшов з аналізатора, дорівнює 9% інтенсивності природного променя, падаючого на поляризатор. Знайти кут α.

48. Визначити товщину кварцової пластинки, для якої кут повертання площини поляризації монохроматичного світла певної довжини хвилі $\varphi = 180°$. Постійна обертання у кварці для даної довжини хвилі $\alpha = 0{,}52 \; град/мм$.

49. Визначити масову концентрацію C цукрового розчину, якщо при проходженні світла через трубку довжиною $l = 20 см$ з цим розчином площина поляризації світла повертається на кут $\varphi = 180°$. Питома постійна обертання α' цукру рівна $1{,}17 \cdot 10^{-2} \; град \cdot м^2 / кг$.

50. Розчин глюкози з масовою концентрацією $C_1 = 0{,}21 г/см^3$, що знаходиться у скляній трубці, повертає площину поляризації монохроматичного світла, котре проходить через розчин, на кут $\varphi_1 = 24°$. Визначити масову концентрацію C глюкози у другому

розчині у трубці такої ж довжини, якщо він обертає площину поляризації на кут $\varphi_1 = 18°$.

51. Кут φ повертання площини поляризації жовтого світла натрію при проходженні через трубку з розчином цукру рівний 40°. Довжина трубки $l = 20 \text{см}$. Питома постійна обертання α' цукру рівна $1{,}17 \cdot 10^{-2}$ рад·м^2/кг. Визначити густину ρ розчину.

3.2. Квантова оптика

52. Знайти температуру груби, якщо відомо, що з отвору в неї розміром 6,1см^2 випромінюється за 1с 8,28кал. Випромінювання вважати близьким до випромінювання абсолютно чорного тіла.

53. Яку кількість енергії випромінює Сонце за 1хв? Випромінювання Сонця вважати близьким до випромінювання абсолютно чорного тіла. Температуру поверхні Сонця прийняти Т=6800К.

54. Потужність випромінювання абсолютно чорного тіла дорівнює 34кВт. Знайти температуру цього тіла, якщо відомо, що його площа поверхні 0,6м^2.

55. Діаметр вольфрамової спіралі в електричній лампочці дорівнює 0,3мм, довжина спіралі 3см. При ввімкненні лампочки в коло з напругою 127 В через лампочку іде струм силою 0,31А. Знайти температуру лампочки. Вважати, що при встановленні рівноваги вся теплота, що виділяється в нитці, йде на випромінювання. Відношення енергетичних світностей вольфраму і абсолютно чорного тіла при даній температурі дорівнює 0,31.

56. Знайти сонячну сталу, тобто кількість енергії, що надсилає Сонце кожну хвилину через площу 1см^2, яка перпендикулярна до сонячних променів і знаходиться від Сонця на такій же відстані від нього, що і Земля. Температуру поверхні Сонця прийняти 5800К. Випромінювання Сонця вважати близьким до випромінювання абсолютно чорного тіла.

57. Потужність випромінювання абсолютно чорного тіла дорівнює 10кВт. Знайти площу поверхні цього тіла, якщо відомо, що довжина хвилі, на яку припадає максимум спектральної густини енергетичної світності, дорівнює 700 нм.

58. При нагріванні абсолютно чорного тіла довжина хвилі, на яку припадає максимум спектральної густини енергетичної світності, змінилася від 690 до 500нм. У скільки разів збільшилася при цьому енергетична світність тіла.

59. На яку довжину хвилі припадав максимум спектральної густини енергетичної світності абсолютно чорного тіла, що має температуру, котра дорівнює температурі тіла людини, тобто 37°С? В котрій частині спектру знаходиться це випромінювання?
60. Абсолютно чорне тіло знаходиться при температурі Т=2900К. В результаті охолодження тіла довжина хвилі, на яку припадає максимум спектральної густини енергетичної світності, змінилася на $\Delta\lambda = 9\,\text{мкм}$. До якої температури T_2 охолодилося тіло?
61. Поверхня тіла нагріта до температури 1000К. Потім одна половина цієї поверхні нагрівається на 100К, друга – охолоджується на 100К. У скільки разів змінилася при цьому енергетична світність поверхні цього тіла?
62. Чорна кулька охолоджується від температури 27°С до 20° С. На скільки змінилася довжина хвилі, що відповідає максимуму спектральної густини енергетичної світності?
63. 1. Знайти, на скільки зменшиться маса Сонця за рік внаслідок випромінювання. 2. Вважаючи випромінювання Сонця сталим, знайти, за який час маса Сонця зменшиться вдвічі. Температуру поверхні Сонця вважати 5800К.
64. Знайти енергію та імпульс фотона, якщо йому відповідає довжина хвилі 1,6пм.
65. З якою швидкістю мусить рухатись електрон, щоб його кінетична енергія дорівнювала енергії фотона з довжиною хвилі $\lambda = 520\,\text{нм}$?
66. З якою швидкістю мусить рухатись електрон, щоб його імпульс дорівнював імпульсу фотона з довжиною хвилі $\lambda = 520\,\text{нм}$?
67. Імпульс, який переносить монохроматичний пучок фотонів через площадку $S = 2\,\text{см}^2$ за час $t = 0{,}5\,\text{хв}$, дорівнює $3\cdot10^{-7}\,\text{ерг}\cdot\text{см}/\text{с}$. Знайти для цього пучка інтенсивність, тобто енергію, яка проходить через одиницю площі за одиницю часу.
68. При якій температурі кінетична енергія молекули двохатомного газу буде дорівнювати енергії фотона з довжиною хвилі $\lambda = 589\,\text{нм}$.
69. Знайти енергію фотона, імпульс якого дорівнює, імпульсу молекули водню при температурі 20°С. Швидкість молекули вважати рівною середній квадратичній швидкості.
70. Знайти червону межу фотоефекту для літію, натрію, калію і цезію.
71. Червона межа фотоефекту для деякого металу дорівнює 275нм. Яку мінімальну енергію повинен мати фотон, щоб відбувся фотоефект?

72. Знайти затримуючий потенціал для електронів, що вилітають при опроміненні калію світлом з довжиною хвилі 330нм.
73. Червона межа фотоефекту для деякого металу дорівнює 275нм. Знайти: 1) роботу виходу електронів з цього металу; 2) максимальну швидкість електронів, що вириваються світлом з довжиною хвилі 180нм; 3) максимальну кінетичну енергію електронів.
74. Знайти частоту світла, що вириває з поверхні металу електрони, які повністю затримуються оберненим потенціалом 3В. Фотоефект починається при частоті світла $6\cdot10^{14}\,Ãö$. Знайти роботу виходу електрона для цього металу.
75. При фотоефекті з платинової поверхні затримуючий потенціал виявився рівним 0,8В. Знайти: 1) довжину хвилі опромінювання, яке застосовується при цьому; 2) максимальну довжину хвилі, при якій ще можливий фотоефект.
76. Кванти світла з енергією 4,9еВ вивирають електрони із металу з роботою виходу 4,5еВ. Знайти максимальний імпульс, який передається поверхні металу при вильоті кожного електрона.
77. Знайти сталу Планка *h*, якщо відомо, що електрони, котрі вириваються з поверхні металу світлом з частотою $2{,}2\cdot10^{15}\,Ãö$, повністю затримуються оберненим потенціалом 6,6В, а електрони, котрі вириваються світлом з частотою $4{,}6\cdot10^{15}\,Ãö$ – потенціалом 16,5В.
78. Знайти тиск світла на стінки електричної 100-ватної лампи. Колба лампи є сферою радіусом 5 см. Стінки лампи відбивають 4% і пропускають 6% падаючого на них світла. Вважати, що вся споживана потужність іде на випромінювання.
79. На поверхню площею $100см^2$ щохвилинно падає 63Дж світлової енергії. Знайти тиск світла у випадках, коли поверхня: 1) повністю відбиває промені; 2) повністю поглинає їх.
80. Монохроматичне світло $(\lambda = 490нм)$ падає нормально на поверхню і створює тиск $5\cdot10^{-6}\,Ïà$. Скільки квантів світла падає щосекунди на одиницю площі цієї поверхні? Коефіцієнт відбивання рівний 0,25.
81. Якою була довжина хвилі рентгенівського випромінювання, якщо при комптонівському розсіюванні цього випромінювання графітом під кутом 60° довжина хвилі після розсіювання виявилася рівною 25,4пм?

Національний університет
та природокористування

82. Рентгенівські промені з довжиною хвилі $\lambda_0 = 20$її здійснюють комптонівське розсіювання під кутом 90°, Знайти 1) зміну довжини хвилі при розсіюванні 2) кінетичну енергію електрона віддачі, 3) імпульс електрона віддачі.

83. В явищі Комптона енергія падаючого фотона розподілилася порівну між електроном віддачі і розсіяним фотоном. Кут розсіювання дорівнює $\pi/2$. Знайти енергію і імпульс фотона після розсіювання.

84. Енергія рентгенівських променів дорівнює 0,6МеВ. Знайти кінетичну енергію електрона віддачі, якщо відомо, що довжина хвилі рентгенівських променів після комтонівського розсіювання змінилася на 20%.

85. Яку енергію має фотон, якщо його довжина хвилі дорівнює комтонівській довжині хвилі електрона.

86. До електродів рентгенівської трубки прикладена різниця потенціалів 60кВ. Найменша довжина хвилі рентгенівських променів, отриманих у цій трубці, складає 1,94нм. Знайти з цих даних постійну Планка.

87. Знайти короткохвильову межу суцільного рентгенівського спектру, якщо до рентгенівської трубки прикладена різниця потенціалів: 1) 30кВ; 2) 40кВ; 3) 50кВ.

88. Знайти короткохвильову межу суцільного рентгенівського спектру, якщо відомо, що зменшення прикладеної до рентгенівської трубки напруги на 23кВ збільшує шукану довжину хвилі у два рази.

Національний університет
та природокористування

Елементи атомної фізики і квантової механіки

1. Основні закони і співвідношення

1.1. Воднеподібні атоми в теорії Бора. Гіпотеза де Бройля. Співвідношення невизначеностей

- **Момент імпульсу орбітального руху електрона у стаціонарному стані**

$$L = m\upsilon r = n\hbar,$$

Де: m, υ, r – маса, лінійна швидкість, радіус колової орбіти електрона, відповідно; $\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$ – постійна Дірака; h – постійна Планка; n – квантове число стаціонарного стану $(n = 1,2,3\ldots)$.

- **Радіус *n*-ої стаціонарної орбіти**

$$r_n = a_0 \frac{n^2}{Z},$$

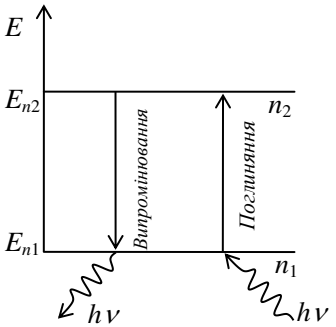
де a_0 – борівський радіус, тобто радіус першої борівської орбіти електрона в атомі водню, Z – порядковий номер елемента (H, He, Li…) в періодичній системі Д.І. Менделєєва.

- **Енергія електрона у стаціонарному стані**

$$E_n = -Rhc\frac{Z^2}{n^2}, \quad E_n = -\frac{E_i}{n^2},$$

де R – постійна Рідберга, c – швидкість світла у вакуумі, E_i – енергія іонізації атома.

- **Випромінювання і поглинання світла атомом**



Енергія випроміненого (поглинутого) фотона

$$h\nu = E_{n2} - E_{n1}$$

де ν – частота випромінювання.

Узагальнена серіальна формула Бальмера для довжин хвиль випромінювання воднеподібних атомів

$$\frac{1}{\lambda} = RZ^2\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right),$$

де: n_1 – квантове число стану, на який

Національний університет
відбувається перехід електрона; n_2 – квантове число стану, з якого відбувається перехід електрона $(n_2 \geq n_1 + 1)$.

1.2. Хвильові властивості мікрочастинок

- **Довжина і частота хвилі де Бройля**

$$\lambda = \frac{h}{p}; \quad \nu = \frac{E}{h},$$

де p – імпульс частинки, E – її енергія.

- **Зв'язок модуля імпульсу з кінетичною енергією для:**

класичної частинки – $p = \sqrt{2mE_k}$,

релятивістської частинки – $p = \frac{1}{c}\sqrt{E_k(E_k + 2E_0)}$,

де m – маса частинки, E_k – її кінетична енергія, E_0 – її енергія спокою.

- **Фазова і групова швидкості хвилі де Бройля**

$$\upsilon = \frac{\omega}{k}; \quad u = \frac{d\omega}{dk},$$

де $\omega = 2\pi\nu = \frac{E}{\hbar}$ – циклічна частота, $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{p}{\hbar}$ – хвильове число.

- **Співвідношення невизначеностей Гайзенберга**

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar,$$
$$\Delta y \cdot \Delta p_y \geq \hbar,$$
$$\Delta z \cdot \Delta p_z \geq \hbar,$$
$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar,$$

Δ характеризує невизначеність відповідних величин: координати, імпульсу, енергії, часу.

1.3. Рівняння Шрьодінгера і його розв'язки

- **Рівняння Шрьодінгера для стаціонарних станів**

$$\hat{H}\Psi = E\Psi,$$

де $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\hat{\nabla}^2 + U(x, y, z)$ – оператор Гамільтона, $\hat{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа, U – оператор

Національний університет водного господарства та природокористування

потенціальної енергії частинки, Ψ – хвильова функція, $|\Psi|^2 = \Psi \cdot \Psi^*$ – густина ймовірності, E – енергія частинки.

- **Середнє значення фізичних величин *f*, що характеризують частинку,**

$$\langle f \rangle = \int\limits_{(V)} f|\Psi|^2 dV .$$

- **Частинка в потенціальному ящику з нескінченно високими стінками:**

енергія частинки

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} n^2 ,$$

де m – маса частинки, l – ширина ящика, $n = 1,2,3,...$ – квантове число стану;

хвильова функція

$$\Psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi x}{l} ,$$

де x – координати частинки $(0 \le x \le l)$.

- **Прозорість (ймовірність тунелювання) прямокутного потенціального бар'єру**

$$D \cong \exp\left[-\frac{2l}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - E)} \right],$$

де l – ширина бар'єру, U_0 – висота бар'єру, E – енергія частинки.

- **Енергія квантового лінійного осцилятора**

$$E_\upsilon = \hbar\omega_0 \left(\upsilon + \frac{1}{2} \right) = h\nu_0 \left(\upsilon + \frac{1}{2} \right),$$

де $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ – власна циклічна частота осцилятора масою m, $\upsilon = 1,2,3,...$ – коливальне квантове число, k – коефіцієнт пропорційності у виразі для квазіупружної сили.

- **Воднеподібний атом у квантовій теорії:**

енергія електрона – $E_n = -Rhc \frac{Z^2}{n^2}$,

де $n = 1,2,3,...$ – головне квантове число;

Національний університет
та природокористування

орбітальний момент імпульсу електрона – $L_\ell = \hbar\sqrt{\ell(\ell+1)}$,

де $\ell = 0,1,2,\ldots,n-1$ – орбітальне (азимутальне) квантове число;

проекція орбітального моменту імпульсу електрона на напрямок z – $L_{\ell z} = \hbar m_\ell$,

де $m_\ell = 0,\pm1,\pm2,\ldots\pm\ell$ – магнітне квантове число;

хвильова функція електрона (у сферичних координатах)

$$\Psi_{n,\ell,m_\ell}(r,\vartheta,\varphi) = R_{n\ell}(r)Y_{\ell,m_\ell}(\vartheta,\varphi),$$

де $R_{10} = \frac{2}{a_0^{3/2}}\exp\left(-\frac{r}{a_0}\right)$; $R_{20} = \frac{2}{(2a_0)^{3/2}}\exp\left(-\frac{r}{2a_0}\right)\left(1-\frac{r}{2a_0}\right)$;

$Y_{00} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}$; $Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\vartheta$; a_0 – борівський радіус;

стани електрона з різними значеннями ℓ

ℓ	0	1	2	3	4 …
стан	s	p	d	f	g ...

Національний університет
водного господарства
та природокористування

- **Власний момент імпульсу електрона**

$$L_s = \hbar\sqrt{s(s+1)},$$

де $s = \frac{1}{2}$ – спінове квантове число;

проекція цього моменту на напрямок z – $L_{sz} = m_s\hbar$,

де $m_s = \pm s = \pm\frac{1}{2}$ – магнітне спінове квантове число.

- **Квантові числа електронів у складних атомах:**

$$n, \ell, m_\ell, m_s;$$

кількість електронів: у шарі – $2n^2$, в оболонці – $2(2\ell+1)$;

електронна конфігурація атомів

$$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10}\ldots$$

- **Формула Мозлі для розрахунку довжин хвиль характеристичного рентгенівського випромінювання**

$$\frac{1}{\lambda} = R(Z-\sigma)^2\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right),$$

де σ – постійна екранування ($\sigma = 1$ для *K*-серії), n_1 – головне квантове число шару, на який відбувається перехід електрона ($n_1 = 1$ для *K*-серії); n_2 – головне квантове число шару, з якого відбувається перехід електрона ($n_2 \geq n_1 + 1$).

2. Приклади розв'язування задач

1. Частинку будемо вважати класичною, якщо $\upsilon < 0{,}1c$ або $E_k < 0{,}01E_0$ (значення енергії спокою E_0 деяких частинок подані в довіднику). В інших випадках необхідно користуватись формулами релятивістської механіки.

2. При використанні співвідношень невизначеностей необхідно врахувати, що невизначеність деякої фізичної величини не може перевищувати значення самої величини; тому покладають, як правило, $\Delta p_x \approx p_x$, $\Delta x \approx x$ або $\Delta x \approx l/2$, де l – лінійний розмір простору перебування частинки.

3. При оцінці мінімального значення енергії частинки використовується класичний вираз для механічної енергії; для одновимірного руху вираз $E = \frac{p_x^2}{2m} + U(x)$ досліджується на екстремум, при цьому попередньо враховується, що $p_x = \frac{\hbar}{x}$ (див. зауваження 2).

4. При інтегруванні виразів, в які входить хвильова функція, елементарний об'єм: $dV \to dx$ – для одновимірного руху; $dV = 4\pi r^2 dr$ – для об'єктів з центральною симетрією.

Для полегшення розрахунків деякі інтеграли подані в довіднику.

Приклад 1. Початково нерухомий електрон пройшов прискорюючу різницю потенціалів *U*. Знайти довжину хвилі де Бройля електрона у двох випадках: 1) $U_1 = 51B$; 2) $U_2 = 510\hat{e}B$.

Розв'язання

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Дано:
$m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг
$U_1 = 51$ В
$U_2 = 510$ кВ
λ?

За гіпотезою де-Бройля

$$\lambda = \frac{h}{p}. \qquad (1.1)$$

Імпульс електрона виразимо через його кінетичну енергію

$$E_k = eU,$$

e – елементарний заряд.

Якщо врахувати, що енергія спокою електрона $E_0 = mc^2 = 510$ êåÂ, то у випадку «1» переконуємося, що електрон класичний. Тому

$$p_1 = \sqrt{2mE_{k1}}. \qquad (1.2)$$

У випадку «2» електрон релятивістський і

$$p_2 = \frac{1}{c}\sqrt{E_{k2}\left(E_{k2} + 2E_0\right)}. \qquad (1.3)$$

Підставляючи (1.2) та (1.3) в (1.1), отримаємо:

$$\lambda_1 = \frac{h}{\sqrt{2mE_{k1}}},$$

$$\lambda_2 = \frac{hc}{\sqrt{E_{k2}\left(E_{k2} + 2E_0\right)}}.$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Врахуємо, що $E_{k1} = 51$ åÂ $= 10^{-4} E_0 = 10^{-4} mc^2$, тому

$$\lambda_1 = \frac{h}{\sqrt{2 \cdot 10^{-4} m^2 c^2}} = \frac{10^2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{h}{mc} = \frac{10^2}{\sqrt{2}} \lambda_c,$$

де $\lambda_c = \frac{h}{mc} = 2{,}43 \cdot 10^{-12}$ ì – комптонівська довжина хвилі електрона. Отже

$$\lambda_1 = \frac{10^2}{1{,}41} \cdot 2{,}43 \cdot 10^{-12} = 1{,}7 \cdot 10^{-10} (\text{ì})$$

У другому випадку $E_{k2} = 510$ êåÂ $= E_0$ і тому

$$\lambda_2 = \frac{hc}{\sqrt{E_0\left(E_0 + 2E_0\right)}} = \frac{hc}{E_0\sqrt{3}} = \frac{hc}{mc^2\sqrt{3}} = \frac{h}{mc\sqrt{3}} = \frac{\Lambda}{\sqrt{3}};$$

$$\lambda_2 = \frac{2{,}43 \cdot 10^{-12}}{1{,}73} = 1{,}4 \cdot 10^{-12} (\text{ì}).$$

Відповідь: $\lambda_1 = 0{,}17$ íì ; $\lambda_2 = 1{,}4$ íì .

Приклад 2. Кінетична енергія електрона в атомі водню є величиною порядку 10еВ. Оцінити мінімальний лінійний розмір атома.

Розв'язання

Дано:
$E_k = 10eB$
$m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг
$l_{\min}$?

Використаємо співвідношення невизначеностей координати Δx та проекції імпульсу Δp електрона

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar . \qquad (2.1)$$

Якщо лінійний розмір атома l, то покладемо $\Delta x = \frac{l}{2}$, а $\Delta p_x = p$. Підставивши ці значення у (2.1) і зберігши знак рівності, що відповідає $l_{\min}$, отримаємо

$$\frac{l_{\min} p}{2} = \hbar . \qquad (2.2)$$

Оскільки при $E_k = 10$ åÂ електрон класичний, то

$$p = \sqrt{2mE_k} . \qquad (2.3)$$

Об'єднавши (2.2) і (2.3), отримаємо

$$l_{\min} = \frac{\sqrt{2}\hbar}{\sqrt{mE_k}} . \qquad (2.4)$$

Виконаємо числовий розрахунок:

$\hbar = 1{,}05 \cdot 10^{-34}$ Äæ · ñ, $E_k = 1{,}6 \cdot 10^{-18}$ Äæ ;

$$l_{\min} = \frac{1{,}41 \cdot 1{,}05 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-18}}} \approx 1{,}2 \cdot 10^{-10} (\text{ì}) .$$

Відповідь: 0,12 нм.

Приклад 3. Оцінити мінімальне значення повної енергії лінійного гармонічного осцилятора.

Розв'язання

Повна класична енергія лінійного гармонічного осцилятора

$$E = E_k + U = \frac{p^2}{2m} + \frac{kx^2}{2} . \qquad (3.1)$$

Використаємо співвідношення невизначеностей (зберігши знак рівності), поклавши $\Delta x = x$ та $\Delta p_x = p$. Отримаємо

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$xp = \hbar\,. \tag{3.2}$$

Підставимо p з (3.2) у (3.1):

$$E = \frac{\hbar^2}{2mx^2} + \frac{kx^2}{2}\,. \tag{3.3}$$

Дослідимо (3.3) на екстремум, прирівнявши до нуля першу похідну від E по x:

$$-\frac{\hbar^2}{mx^3} + kx = 0\,.$$

Визначивши звідси $x = \left(\frac{\hbar^2}{km}\right)^{\frac{1}{4}}$ і підставивши його в (3.3), отримаємо мінімальне значення $E_{\min}$

$$E_{\min} = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{km}{\hbar^2}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{k}{2}\left(\frac{\hbar^2}{km}\right)^{\frac{1}{2}} = \hbar\left(\frac{k}{m}\right)^{\frac{1}{2}} = \hbar\omega_0\,.$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Відмітимо, що цей результат всього у два рази перевищує точне значення енергії нульових коливань квантовомеханічного гармонічного осцилятора

$$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega_0\,.$$

Приклад 4. Частинка в потенціальному ящику шириною l перебуває в першому збудженому стані. Знайти ймовірність знаходження частинки в інтервалі $\frac{1}{4}l$, який рівновіддалений від стінок ящика.

Розв'язання

Дано:
$n = 2$
$x_1 = \frac{3}{8}l$
$x_2 = \frac{5}{8}l$

W ?

Імовірність W знайти частинку в інтервалі $x_1 < x < x_2$ визначається інтегралом

$$W = \int_{x_1}^{x_2} |\Psi_n|^2\,dx\,, \tag{4.1}$$

де Ψ_n – нормована власна хвильова функція

$$\Psi_n = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{n\pi x}{l}\,. \tag{4.2}$$

Національний університет
та природокористування

Підставляючи (4.2) в (4.1), отримаємо

$$W = \frac{l}{2}\int_{\frac{3}{8}l}^{\frac{5}{8}l} \sin^2\frac{2\pi x}{l}\,dx. \qquad (4.3)$$

Використаємо відповідний інтеграл з довідника:

$$W = \frac{2}{l}\left(\frac{1}{2}x - \frac{l}{8\pi}\sin\frac{4\pi x}{l}\right)\Bigg|_{\frac{3}{8}l}^{\frac{5}{8}l} = \frac{2}{l}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{5}{8}l - \frac{3}{8}l\right) - \frac{l}{8\pi}\left(\sin\frac{5}{2}\pi - \sin\frac{3}{2}\pi\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi} = 0{,}091.$$

.

Відповідь: 0,091.

Приклад 5. Протон і електрон, які пройшли однакову прискорюючу різницю потенціалів $|\Delta\varphi| = 10\,\hat{e}\hat{A}$, налітають на прямокутний потенціальний бар'єр шириною $d = 0{,}1\,\hat{i}\hat{i}$ і висотою $U_0 = 20\,\hat{e}\mathring{a}\hat{A}$. У скільки разів відрізняються прозорості бар'єру для електрона і протона?

Дано:

$|\Delta\varphi| = 10\ кВ = 1\cdot10^4\ В$

$U_0 = 20\ кеВ = 3{,}2\cdot10^{-15}\ Дж$

$d = 0{,}1\ пм = 1\cdot10^{-13}\ м$

$m_e = 9{,}1\cdot10^{-31}\ кг$

$m_p = 1{,}67\cdot10^{-27}\ кг$

$\dfrac{D_e}{D_p}$?

Розв'язання

Оскільки заряди протона і електрона однакові за абсолютною величиною $(|q_e| = q_p = e)$, то їх кінетичні енергії після прискорення однакові і рівні

$$E = e|\Delta\varphi|. \qquad (5.1)$$

Запишемо формули прозорості бар'єру для електронів D_e і для протонів D_p

$$D_e \approx \exp\left[-\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m_e(U_0 - E)}d\right], \qquad (5.2)$$

$$D_p \approx \exp\left[-\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m_p(U_0 - E)}d\right]. \qquad (5.3)$$

Поділивши (5.2) на (5.3), з урахуванням (5.1) отримаємо

Національний університет водного господарства та природокористування

$$\frac{D_e}{D_p} \approx \exp\left[-\frac{2}{\hbar}\sqrt{2\left(U_0 - e|\Delta\varphi|\right)}d\left(\sqrt{m_p} - \sqrt{m_e}\right)\right]. \quad (5.4)$$

Оскільки формули (5.2) та (5.3) наближені, то при підрахунках можна опустити $\sqrt{m_e}$, бо $m_p >> m_e$, і записати (5.4) у вигляді:

$$\frac{D_e}{D_p} \approx \exp\left[-\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m_p\left(U_0 - e|\Delta\varphi|\right)}d\right]. \quad (5.5)$$

Підставимо числові значення:

$$\frac{D_e}{D_p} \approx \exp\left[-\frac{2}{1{,}05\cdot 10^{-34}}\sqrt{2\cdot 1{,}67\cdot 10^{-27}\left(3{,}2\cdot 10^{-15} - 1{,}6\cdot 10^{-15}\right)}\cdot 10^{-13}\right] \approx 70.$$

Відповідь: у 70 разів.

Приклад 6. Квантовий лінійний гармонічний осцилятор масою $1\cdot 10^{-28}$ кг, на котрий діє квазіпружна сила $f = -10^2 x$, перебуває в основному стані. Чи може цей осцилятор поглинути квант з довжиною хвилі $\lambda = 1{,}8$ *ìêì* ?

Дано:

$m = 1\cdot 10^{-28}$ *кг*

$k = 1\cdot 10^{2}$ *Н/м*

$\lambda = 1{,}8$ *мкм* $= 1{,}8\cdot 10^{-6}$ *м*

$\dfrac{\varepsilon_{\hat{o}}}{\Delta E_{1,0}}$?

Розв'язання

Енергія поглинутого фотона повинна бути не меншою від відстані між основним і першим збудженим енергетичними рівнями осцилятора, тобто повинна виконуватись нерівність

$$\frac{\varepsilon_{\hat{o}}}{\Delta E_{10}} = \frac{\varepsilon_{\hat{o}}}{E_1 - E_0} \geq 1. \quad (6.1)$$

Врахуємо, що енергія фотона

$$\varepsilon_{\hat{o}} = \frac{hc}{\lambda}, \quad (6.2)$$

а енергія осцилятора E_υ в стані з коливальним квантовим числом υ

$$E_\upsilon = \hbar\omega_0\left(\upsilon + \frac{1}{2}\right). \quad (6.3)$$

Підставляючи (6.2) і (6.3) в (6.1), отримаємо після скорочення на $\hbar$

$$\frac{\varepsilon_{\hat{o}}}{\Delta E_{10}} = \frac{2\pi c}{\lambda\omega_0}. \quad (6.4)$$

Національний університет водного господарства та природокористування

Врахувавши, що

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \tag{6.5}$$

отримаємо

$$\frac{\mathcal{E}_{\hat{o}}}{\Delta E_{10}} = \frac{2\pi c}{\lambda}\sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{6.6}$$

Підставимо в (6.6) числові значення:

$c = 3{,}0 \cdot 10^8$ ì /ñ;

$$\frac{\mathcal{E}_{\hat{o}}}{\Delta E_{10}} = \frac{6{,}28 \cdot 3 \cdot 10^8}{1{,}8 \cdot 10^{-6}}\sqrt{\frac{10^{-28}}{10^2}} = 1{,}05 > 1.$$

Оскільки, умова (6.1) виконується, то фотон поглинається квантовим осцилятором.

Відповідь: може.

Приклад 7. Знайти середнє значення потенціальної енергії електрона в полі ядра атома водню, що перебуває в основному стані.

Розв'язання

Дано:

$Z = 1$

$n = 1$

$l = 0$

$m_l = 0$

$\langle U \rangle$?

Середнє значення потенціальної енергії U знайдеться як

$$\langle U \rangle = \int_{(V)} |\Psi|^2 U(r) dV. \tag{7.1}$$

В основному стані, тобто в 1*s*-стані, власна нормована хвильова функція має вигляд

$$\Psi_{100} = R_{10} Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} \exp\left(-\frac{r}{a_0}\right), \tag{7.2}$$

де α_0 – борівськкй радіус.

Класична потенціальна енергія електрона в полі ядра

$$U(r) = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}. \tag{7.3}$$

Підставивши (7.2), (7.3) в (7.2), з урахуванням того, що елементарний об'єм $dV = 4\pi r^2 dr$, отримаємо

$$\langle U \rangle = -\frac{4\pi e^2}{4\pi^2 \varepsilon_0 a_0^3}\int_0^\infty \exp\left(-\frac{2r}{a_0}\right) dr = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a_0}. \tag{7.4}$$

Національний університет
та природокористування

Підставимо числові значення:

$e = 1{,}60 \cdot 10^{-19}\ Кл$, $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ Ф/м$, $a_0 = 5{,}29 \cdot 10^{-11}\ м$;

$$\langle U \rangle = -\frac{\left(1{,}60 \cdot 10^{-19}\right)^2}{12{,}56 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 5{,}29 \cdot 10^{-11}} = -4{,}36 \cdot 10^{-18}\ (Дж) = -27{,}2\ еВ.$$

Відповідь: -27,2 еВ.

Приклад 8. Атом водню, що перебував у збудженому стані, перейшов у нижчий сусідній стан, випромінивши квант енергії з довжиною хвилі $\lambda = 121{,}5\ нм$. До якої серії належить спектральна лінія цього кванту? Знайти можливу зміну моменту імпульсу орбітального руху електрона (в одиницях $\hbar$) при такому переході.

Розв'язання

Дано:

$Z = 1$

$\lambda = 121{,}5\ нм = 1{,}215 \cdot 10^{-7}\ м$

$n_2 - n_1 = 1$

n_1? ΔL?

Використаємо узагальнену формулу Бальмера для атома водню $(Z = 1)$:

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right), \qquad (8.1)$$

де n_1 і n_2 – головні квантові числа станів. Звідси

$$\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} = \frac{1}{\lambda R}. \qquad (8.2)$$

Підставимо числові значення λ і сталої Рідберга ($\lambda = 1{,}215 \cdot 10^{-7}\ м$, $R = 1{,}097 \cdot 10^7\ м^{-1}$):

$$\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} = \frac{1}{121{,}5 \cdot 10^{-9} \cdot 1{,}097 \cdot 10^7} = 0{,}75. \qquad (8.3)$$

Оскільки $n_2 = n_1 + 1$, то (8.3) можливе лише при $n_1 = 1$ і $n_2 = 2$. Отже, ми маємо справу зі спектральною лінією серії Лаймана. Зрозуміло, що в даній ситуації, коли верхнім є *p*-стан $(l_2 = 1)$, а нижнім – *s*-стан $(l_1 = 0)$ (інші варіанти відпадають за правилами відбору), легко знайти зміну модуля орбітального моменту імпульсу електрона як

$$\Delta L = L_{l_2} - L_{l_1} = \hbar\left[\sqrt{l_2(l_2+1)} - \sqrt{l_1(l_1+1)}\right]$$

$$\Delta L = \hbar\sqrt{1(1+1)} = \hbar\sqrt{2}.$$

Відповідь: 1) до серії Лаймана; 2) $\hbar\sqrt{2}$.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Приклад 9. Записати електронну конфігурацію атома $\mathrm{Mg}(Z=12)$ в основному стані.

Розв'язання

В основному (незбудженому) стані електрони заповнюють шари і оболонки з мінімальною енергією (не порушуючи принцип Паулі). Тому 2 електрони заповнять *K*-шар (*s*-оболонка), 8 електронів заповнять *L*-шар (*s*- і *p*-оболонки) і 2 електрони розмістяться в *M*-шарі (s-оболонка). Отже, електронна конфігурація атома магнію має вигляд

$$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2.$$

Приклад 10. Визначити найменшу довжину хвилі в *K*-серії характеристичного рентгенівського спектру міді $(Z=29)$.

Розв'язання

Дано:
$Z = 29$
$\sigma = 1$
$n_1 = 1$
$\lambda_{\min}$?

Лінії *K*-серії виникають при переході електрона на вакантне місце в *K*-шарі $(n_1 = 1)$ з вищих шарів. Найменшій довжині хвилі відповідає найбільша енергія фотона. Отже, в даній задачі електрон переходить з найвищого заповненого шару. Якщо розглянути електронну конфігурацію міді $\left(1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^1\right)$, то таким є *N*-шар $(n_2 = 4)$.

Використаємо формулу Мозлі, врахувавши, що стала екранування для *K*-серії $\sigma = 1$:

$$\frac{1}{\lambda} = (Z-\sigma)^2 R\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right).$$

Стала Рідберга $R = 1{,}097 \cdot 10^7$ ì $^{-1}$;

$$\frac{1}{\lambda_{\min}} = (29-1)^2 \cdot 1{,}1 \cdot 10^7 \left(1 - \frac{1}{16}\right) = 8{,}09 \cdot 10^9 \left(\text{ì}^{-1}\right);$$

$$\lambda_{\min} = 1{,}24 \cdot 10^{-10} \text{ ì}.$$

Відповідь: 0,124 нм.

3. Задачі для самостійного розв'язування

1. Знайти швидкість електрона на другій борівській орбіті іона He^+.
2. Знайти період обертання електрона на третій борівській орбіті атома водню.
3. Знайти частоту обертання електрона на першій борівській орбіті іона Li^{++}.
4. Знайти найбільшу і найменшу довжини хвиль серії Пашена у спектрі випромінювання атома водню.
5. Знайти найменшу і найбільшу енергії фотона в серії Лаймана спектру випромінювання іона He^+.
6. Знайти енергію іонізації іона Li^{++} та найменшу довжину хвилі у спектрі випромінювання цього іона.
7. Атом водню в основному стані поглинає квант світла з довжиною хвилі $\lambda = 102{,}6 нм$. Знайти радіус борівської орбіти електрона у збудженому стані.
8. Знайти довжину хвилі де Бройля електрона та протона, якщо їх кінетична енергія 1,02 *МеВ*.
9. Знайти дебройлівську довжину хвилі релятивістського електрона, який підлітає до анода рентгенівської трубки, якщо довжина хвилі короткохвильової границі гальмівного рентгенівського спектру $\lambda_{min} = 10{,}0 пм$.
10. Знайти швидкість частинки, дебройлівська довжина хвилі якої дорівнює комптонівській довжині.
11. Електрон рухається по колу радіусом $r = 0{,}5 см$ в однорідному магнітному полі з індукцією $B = 8 мТл$. Визначити довжину хвилі де Бройля цього електрона.
12. Яку прискорюючу різницю потенціалів повинен пройти електрон, щоб його довжина хвилі де Бройля дорівнювала 0,1*нм*?
13. Дифракційний максимум першого порядку спостерігається при дзеркальному відбиванні електронного пучка від поверхні деякого монокристалу при куті ковзання 30°, Знайти, яку прискорюючу різницю потенціалів пройшли електрони, якщо постійна решітки кристалу $d = 0{,}24 нм$.
14. Скільки довжин хвиль де Бройля вкладається на третій борівській орбіті атома водню?

15. Частинка рухається зі швидкістю v. Знайти фазову і групову швидкість хвилі де Бройля у класичному та релятивістському випадках.

16. Електрон з кінетичною енергією 15*еВ* перебуває в металевій порошині діаметром 1*мкм*. Визначити відносну невизначеність швидкості цього електрона.

17. Електрон з кінетичною енергією 10*еВ* падає на щілину шириною $a = 10 нм$ (мислений експеримент). Вважаючи, що в момент проходження щілини невизначеність координати електрона $\Delta y = a$, оцінити отриману при цьому відносну невизначеність імпульсу.

18. Використавши співвідношення невизначеностей, оцінити найнижчий енергетичний рівень електрона в атомі водню; лінійні розміри атома $l \approx 0{,}1 нм$.

19. У скільки разів дебройлівська довжина хвилі частинки менша від невизначеності її координати, якщо відносна невизначеність імпульсу складає 1%?

20. Прийнявши, що мінімальна енергія нейтрона в ядрі дорівнює 10 *МеВ*, оцінити лінійний розмір ядра.

21. Припустивши, що невизначеність координати рухомої частинки дорівнює дебройлівській довжині хвилі, визначити відносну невизначеність імпульсу цієї частинки.

22. Використовуючи співвідношення невизначеностей $\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar$, визначити відносну ширину спектральної лінії $\left(\frac{\Delta \nu}{\nu}\right)$ випромінювання атома при переході його із збудженого стану (час життя $\tau = 10^{-8} c$) в основний $(\tau = \infty)$. Довжина хвилі випромінювання $\lambda = 600 нм$.

23. Частинка масою *m* рухається в потенціальному полі $U = \frac{cx^4}{2}$ (*c* – константа) Використавши співвідношення невизначеностей, оцінити мінімальне значення повної енергії частинки.

24. Для частинки в консервативному полі сил розділити рівняння Шредінгера на координатну та часову частини і розв'язати останню.

25. Частинка перебуває в потенціальному ящику. Між якими сусідніми енергетичними рівнями відносна відстань більша: між першим і другим чи двадцять першим і двадцять другим?

26. Електрон перебуває у прямокутній потенціальній ямі шириною $l = 0{,}2 нм$, енергія електрона в ямі 37,8 еВ. Знайти квантове число енергетичного рівня.

27. Знайти середнє значення координати електрона в потенціальному ящику шириною *l*.

28. Електрон перебуває в потенціальному ящику шириною *l*. В яких точках інтервалу $(0 < x < l)$ густина ймовірності перебування електрона однакова на першому і другому енергетичних рівнях? Розв'язок проілюструвати графічно.

29. Яка ймовірність знайти частинку в основному стані в середній третині потенціального ящика?

30. Знайти прозорість прямокутного бар'єру для електронів, якщо $U_0 - E = 1 еВ$, а ширина бар'єру $l = 0{,}5 нм$.

31. Електрон з енергією E = 9 еВ налітає на потенціальний бар'єр висотою 10 еВ. При якій ширині бар'єру його прозорість для електрона складає 0,1 ?

32. Потенціальний бар'єр має ширину 0,1 *нм*. При якій різниці енергій $U_0 - E$ прозорість цього бар'єру для електронів складає 10^{-3}?

33. Знайти енергію нульових коливань квантового лінійного осцилятора масою $1 \cdot 10^{-30}$ кг, на якого діє квазіпружна сила $f = -0{,}01x$.

34. Чи може при кімнатній температурі одноатомна молекула за рахунок енергії теплового руху перевести осцилятор попередньої задачі з основного у збуджений стан?

35. Знайти енергію фотона, що випромінюється квантовим лінійним осцилятором з масою $1 \cdot 10^{-26}$ *еа*, на якого діє квазіпружна сила $f = -10^2 x$.

36. Чи може поглинутися інфрачервоний фотон $(\lambda = 1 \cdot 10^2$ *імім* $)$ квантовим лінійним осцилятором з масою $1 \cdot 10^{-25}$ *кг*, на якого діє квазіпружна сила $f = -10^3 x$?

37. Хвильова функція основного стану квантового лінійного осцилятора має вигляд $\Psi(x) = \sqrt{\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}} \exp\left(-\frac{\alpha^2 x^2}{2}\right)$, де $\alpha = \sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}}$.

Знайти середнє значення потенціальної енергії осцилятора.

38. Знайти середнє значення кулонівської сили, що діє на електрон в атомі водню у стані 2*s*.

39. Знайти середню відстань електрона від ядра в атомі водню, який перебуває в основному стані.

40. Атом водню перебуває в основному стані. Знайти ймовірність перебування електрона в області, обмеженій сферою радіусом $r = a_0$ ($a_0 = 52{,}9$*її* – борівський радіус).

41. Атом водню перебуває в основному стані. Яка ймовірність знайти електрон на відстані від ядра, не меншій від борівського радіуса?

42. Електрон в атомі водню перебуває в *d*-стані. Визначити орбітальний момент імпульсу електрона і його проекцію на вибраний напрямок *z*.

43. Визначити повну енергію і орбітальний момент імпульсу електрона у 2p-стані в атомі водню.

44. Визначити спіновий момент імпульсу електрона і проекцію цього моменту на вибраний напрямок.

45. Знайти число електронів у атомах, у котрих в основному стані заповнені: 1) *K*- і *L*-шари, 3*s*-оболонка і наполовину 3*p*-оболонка; 2) *K*-, *L*-, *M*-шари і 4*s*-, 4*p*-, 4*d*-оболонки.

46. Записати електронну конфігурацію атомів: 1) бору $(Z = 5)$; 2) вуглецю $(Z = 6)$; 3) натрію $(Z = 11)$.

47. При дослідженні лінійчастого рентгенівського спектру деякого елементу знайдено, що довжина хвилі K_β-лінії складає 76 пм. Котрий це елемент?

48. Визначити енергію фотона, який відповідає K_α-лінії в характеристичному рентгенівському спектрі марганцю $(Z = 25)$.

49. Визначити найбільшу довжину хвилі в *K*-серії характеристичного рентгенівського спектру скандію $(Z = 21)$.

50. В атомі вольфраму $(Z = 74)$ електрон перейшов з *M*-шару в *L*-шар. Визначити довжину хвилі випроміненого рентгенівського кванта.

51. При якій найменшій напрузі на рентгенівській трубці починають заявлятися лінії *K*-серії характеристичного рентгенівського спектру міді $(Z = 29)$?

Національний університет

Фізика ядра та елементарних частинок

1. Основні закони і співвідношення

1.1. Будова ядра, енергія зв'язку

- **Ядро** $^{\mathbf{Z}}_{\mathbf{A}}\mathbf{X}$, де Z – зарядове число (співпадає з порядковим номером в періодичній таблиці Д.І. Менделєєва), A – масове число, складається з Z протонів і $N = A - Z$ нейтронів.
- **Енергія зв'язку ядра**

$$\Delta E = \Delta m c^2,$$

Δm — дефект маси ядра,

$$\Delta m = Z m_p + (A - Z) m_n - m_{\ddot{y}}$$

або

$$\Delta m = Z m_{^1_1\mathrm{H}} + (A - Z) m_n - m_{\grave{a}\grave{o}},$$

де m_p – маса протона, m_n – маса нейтрона, $m_я$ – маса ядра, m_{am} – маса атома, $m_{^1_1\mathrm{H}}$ – маса атома водню $^1_1\mathrm{H}$. Тут маси потрібно брати в кг, $c = 3 \cdot 10^8$ *м/с*, а енергія зв'язку виражатиметься в *Дж*. Для розрахунку енергії зв'язку зручно користуватись формулою

$$\Delta E = 931{,}5 \Delta m, \ \grave{I}\mathring{a}\hat{A},$$

при цьому усі маси, необхідні для розрахунку Δm, потрібно брати в а.о.м., з точністю до п'ятого знаку після коми.

Національний університет водного господарства та природокористування

- **Питома енергія зв'язку ядра**

$$\Delta E_0 = \frac{\Delta E}{A}, \ \grave{I}\mathring{a}\hat{A} \ / \acute{i}\acute{o}\hat{e}\ddot{e}\ddot{i}\acute{i} \ .$$

1.2. Радіоактивність

- **Схеми розпадів**

α-розпад: $^A_Z X \to ^{A-4}_{Z-2} Y + ^4_2\mathrm{He} + (\gamma)$,

β⁻-розпад: $^A_Z X \to ^A_{Z+1} Y + ^0_{-1} e + ^0_0 \tilde{\nu}$, ($^0_{-1}e$ – електрон, $^0_0\tilde{\nu}$ – антинейтрино),

β⁺-розпад: $^A_Z X \to ^A_{Z-1} Y + ^0_{+1} e + ^0_0 \nu$ ($^0_{+1}e$ – позитрон, $^0_0\nu$ – нейтрино).

- **Закон радіоактивного розпаду**

$$N = N_0 e^{-\lambda t}$$

Національний університет водного господарства та природокористування

де N_0 – кількість радіоактивних ядер при $t = 0$, N – кількість радіоактивних ядер в момент часу t, λ – постійна розпаду,

$$\lambda = \frac{|dN|}{Ndt}.$$

- **Період напіврозпаду**

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda} = \tau \ln 2,$$

τ – середній час життя ядра.

- **Кількість ядер, які розпадуться за час t,**

$$|\Delta N| = N_0 - N = N_0\left(1 - e^{-\lambda t}\right).$$

- **Активність радіоактивного препарату**

$$J = \frac{|dN|}{dt} = \lambda N = J_0 e^{-\lambda t},$$

J_0 – активність при $t = 0$.

Національний університет водного господарства та природокористування

- **Одиниці активності**

1 Бк (*беккерель*) = 1 розп/с;
1 Рд (*резерфорд*) = 10^6 Бк;
1 Кі (*Кюрі*) = $3{,}7 \cdot 10^{10}$ Бк.

1.3. Ядерні реакції

- **Енергія (тепловий ефект) ядерної реакції** $X + a \to Y + b$

$$Q = \Delta E = 931{,}5\Delta m,$$

де $\Delta m = (m_x + m_a) - (m_y + m_b)$ – дефект маси реакції (тут маси необхідно брати в а.о.м.).

- **Реакція поділу (можливий варіант ланцюгової реакції)**

$$^{235}_{92}\mathrm{U} + ^{1}_{0}n \to ^{236}_{92}\mathrm{U} \to ^{34}_{37}\mathrm{Rb} + ^{140}_{55}\mathrm{Cs} + 2\,^{1}_{0}n, \quad \Delta E = 200 \text{ìåÂ}.$$

- **Реакція синтезу**

$$^{2}_{1}\mathrm{H} + ^{3}_{1}\mathrm{H} \to ^{4}_{2}\mathrm{He} + ^{1}_{0}n, \quad \Delta E = 17{,}6 \text{ìåÂ}.$$

2. Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Знайти питому енергію зв'язку ядер $^{3}_{1}\mathrm{H}$ і $^{3}_{2}\mathrm{He}$. Котре з цих ядер стійкіше?

Національний університет водного господарства та природокористування

Розв'язання

Енергія зв'язку ядра $\Delta E = 931{,}5\Delta m$, *ÌåÂ* , де дефект маси ядра

$$\Delta m = Zm_{{}^1_1\mathrm{H}} + (A-Z)m_n - m_{ày} .$$

Питома енергія зв'язку

$$\frac{\Delta E}{A} = 931{,}5\frac{Zm_N + (A-Z)m_n - m_{aò}}{A} .$$

Для ядра ${}^3_1\mathrm{H}$:

$$\left(\frac{\Delta E}{A}\right)_{{}^3_1\mathrm{H}} = 931{,}5\frac{1\cdot 1{,}00783 + 1\cdot 1{,}00867 - 3{,}01603}{3} \cong 2{,}83\,(ÌåÂ\ /íóêëîí)$$

Для ядра ${}^3_2\mathrm{He}$:

$$\left(\frac{\Delta E}{A}\right)_{{}^3_2\mathrm{He}} = 931{,}5\frac{1\cdot 1{,}00783 + 2\cdot 1{,}00867 - 3{,}01603}{3} \cong 2{,}58\,(ÌåÂ\ /íóêëîí)$$

Оскільки $\left(\frac{\Delta E}{A}\right)_{{}^3_1\mathrm{H}} > \left(\frac{\Delta E}{A}\right)_{{}^3_2\mathrm{He}}$, ядро ${}^3_1\mathrm{H}$ стійкіше.

Відповідь: 2,83 МеВ/нуклон; 2,58 МеВ/нуклон; ядро ${}^3_1 H$ стійкіше.

Приклад 2. Ізотоп ${}^{24}_{11}\mathrm{Na}$ – β-радіоактивний, період його напіврозпаду Т=14,8год. Підрахувати кількість атомів, котрі розпадуться за: 1) 10год; 2) 0,01с в 1мг даного препарату. Визначити початкову активність цього препарату, а також його активність через проміжок часу $\tau = 10T$.

Розв'язування

Національний університет водного господарства та природокористування

Дано:

$^{24}_{11}$Na

T = 14,8год

$t_1 = 10$ год

$t_2 = 0{,}01c$

m = 1 мг = $1\cdot10^{-6}$кг

$\mu = 24\cdot10^{-3}$ êã/ ìîëü

$\tau = 10T$

$|\Delta N_1|$? $|\Delta N_2|$? J_0 ? J ?

Число радіоактивних атомів зменшується з часом за законом

$$N = N_0 e^{-\lambda t}, \qquad (1)$$

де N_0 – початкова кількість атомів, N – в момент t, λ – стала радіоактивного розпаду. Число атомів, які розпалися до моменту t,

$$|\Delta N| = N_0 - N = N\left(1 - e^{-\lambda t}\right). \qquad (2)$$

Якщо врахувати, що $\lambda = \dfrac{\ln 2}{T}$, то (2) набуває вигляду

$$|\Delta N| = N_0\left(1 - 2^{-\frac{t}{T}}\right). \qquad (2.3)$$

Але $N_0 = \dfrac{m}{\mu}N_A$, де μ – молярна маса, N_A – стала Авогадро, тому

$$|\Delta N| = \frac{m}{\mu}N_A\left(1 - 2^{-\frac{t}{T}}\right). \qquad (2.4)$$

Національний університет водного господарства та природокористування

Враховуючи числові дані, одержуємо

$$\Delta N_1 = \frac{10^{-6}}{24\cdot10^{-3}}6{,}02\cdot10^{23}\left(1 - 2^{-\frac{10}{14{,}8}}\right) = 9\cdot10^{18} \text{ (атомів)}.$$

У другому випадку $2^{-\frac{t}{T}} = 2^{-\frac{0{,}01}{14{,}8\cdot3600}} \cong 2\cdot10^{-1.9\cdot10^{-7}}$; такий вираз підраховувати незручно. Але, якщо врахувати, що показник експоненти у (2) в цьому випадку $\lambda t_2 = \dfrac{t_2}{T}\ln 2 << 1$, цю експоненту можна розкласти в ряд і обмежитися першими двома членами ряду: $e^{-\frac{t_2}{T}\ln 2} \cong 1 - \dfrac{t_2}{T}\ln 2$. Тоді

$$|\Delta N_2| = \frac{m}{\mu}N_A\frac{t_2}{T}\ln 2 = \frac{10^{-6}\cdot6{,}02\cdot10^{23}\cdot0{,}01\cdot0{,}693}{24\cdot10^{-3}\cdot14{,}8\cdot3600} \cong 3\cdot10^{12} \text{ (атомів)}.$$

Активність радіоактивного зразка

Національний університет водного господарства та природокористування

$$J = \frac{|dN|}{dt} = \lambda N . \qquad (2.5)$$

Очевидно, $J_0 = \lambda N_0 = \frac{\ln 2}{T} \cdot \frac{m}{\mu} N_A$; $J = J_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$.

Тому

$$J_0 = \frac{0{,}693 \cdot 10^{-6} \cdot 6{,}02 \cdot}{14{,}8 \cdot 3{,}6 \cdot 10^3 \cdot 24 \cdot 10^{-3}} = 3{,}3 \cdot 10^{11} (Á\hat{e});$$

$$J = 3{,}3 \cdot 10^{14} \cdot 2^{-\frac{10T}{T}} = 3{,}2 \cdot 10^{11} (Á\hat{e}).$$

Відповідь: $9 \cdot 10^{18}$; $3 \cdot 10^{12}$; 0,33 ТБк; 0,32 ТБк.

Приклад 3. В реакції ${}^{14}_{7}\mathrm{N}(\alpha, p)X$ кінетична енергія α-частинки $E_\alpha = 7{,}7$ МеВ. Визначити зарядове і масове число ядра, що виникає; дати символічний запис реакції, визначити її енергетичний ефект. Знайти, під яким кутом до напрямку руху α-частинки вилітає протон, якщо відомо, що його кінетична енергія $E_p = 5{,}9$ МеВ.

Розв'язання

Дано:

${}^{14}_{7}\mathrm{N}$

$E_a = 7{,}7 Ì åÂ$

$E_p = 5{,}9 Ì åÂ$

$Z ? A ? Q ? \varphi ?$

Розглядувана реакція відбувається за схемою

$${}^{4}_{2}\mathrm{He} + {}^{14}_{7}\mathrm{N} \rightarrow {}^{1}_{1}\mathrm{H} + {}^{A}_{Z}\mathrm{X}.$$

На основі законів збереження зарядового і масового чисел одержуємо: 2+7=1+Z і 4+14=1+A. Це дає: Z=8, A=17; значить, виникає ядро ізотопу кисню ${}^{17}_{8}\mathrm{O}$, тому остаточно, реакція набуває вигляду:

$${}^{4}_{2}\mathrm{He} + {}^{14}_{7}\mathrm{H} \rightarrow {}^{1}_{1}\mathrm{H} + {}^{17}_{8}\mathrm{O}.$$

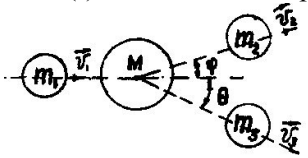
Енергія реакції Q визначається через дефект маси реакції:

$$Q = 931{,}5 \Delta m,\ Ì åÂ = 931{,}5 \left[\left(m_{{}^{4}_{2}\mathrm{He}} + m_{{}^{14}_{7}\mathrm{N}} \right) - \left(m_{{}^{1}_{1}\mathrm{H}} + m_{{}^{17}_{8}\mathrm{O}} \right) \right], Ì åÂ .$$

Підставляючи числові дані, одержуємо:

$Q = 931{,}5 [(4{,}00260 + 14{,}00307) - (1{,}00787 + 16{,}99913)] = -1{,}2 (Ì åÂ)$;

знак (-) означає, що енергія в цій реакції поглинається.



Графічно розглядувану реакцію можна зобразити на малюнку:

Національний університет водного господарства та природокористування

Тут m_1, m_2, m_3 – маси α-частинки, ядра азоту, протона і ядра кисню (наближено будемо користуватися масовими числами); ядро азоту вважається нерухомим, $\vec{\upsilon}_1$, $\vec{\upsilon}_2$, $\vec{\upsilon}_3$ – швидкості відповідних частинок, $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$ – їх імпульси, E_1, E_2, E_3 – кінетичні енергії. Легко переконатися, що енергії розглядуваних частинок значно менші від їх енергій спокою, тому можна користуватися формулами класичної механіки. На основі законів збереження енергії та імпульсу одержуємо:

$$E_1 + Q = E_2 + E_3, \tag{3.1}$$

$$\vec{P}_1 = \vec{P}_2 + \vec{P}_3. \tag{3.2}$$

За теоремою косинусів

$$P_3^2 = P_1^2 + P_2^2 - 2P_1P_2\cos\varphi. \tag{3.3}$$

Оскільки $E = \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{P^2}{2m}$, де $P = m\upsilon$, то

$$P^2 = 2mE. \tag{3.4}$$

Тому рівняння (3.3) набуває вигляду

$$E_3 = \frac{m_1}{m_3}E_1 + \frac{m_2}{m_3}E_2 - \frac{2\cos\varphi}{m_3}\sqrt{m_1m_2E_1E_2}. \tag{3.5}$$

Виключаючи з (3.1) і (3.5) енергію E_3, одержуємо

$$\cos\varphi = \frac{m_2+m_3}{2}\sqrt{\frac{E_2}{m_1m_2E_1}} - \frac{m_3-m_1}{2}\sqrt{\frac{E_1}{m_1m_2E_2}} - \frac{m_3}{2}\frac{Q}{\sqrt{m_1m_2E_1E_2}} \tag{3.6}$$

Підставивши числові значення в рівняння (3.6), отримаємо

$$\cos\varphi = \frac{1+17}{2}\sqrt{\frac{5{,}9}{4\cdot1\cdot7{,}7}} - \frac{17-4}{2}\sqrt{\frac{7{,}7}{4\cdot1\cdot5{,}9}} + \frac{17}{2}\cdot\frac{1{,}2}{\sqrt{4\cdot1\cdot7{,}7\cdot5{,}9}} \cong 1$$

і $\varphi = 0$. Таким чином, протон і ядро віддачі продовжують рухатися в напрямку падаючої α-частинки.

Відповідь: Z = 8, A = 17, Q = -1,2 МеВ, φ = 0.

3. Задачі для самостійного розв'язування

1. Знайти питому енергію зв'язку ядер:

а) $^{7}_{3}\mathrm{Li}$; б) $^{14}_{7}\mathrm{N}$;

в) $^{27}_{13}\mathrm{Al}$; г) $^{63}_{29}\mathrm{Cu}$; д) $^{200}_{80}\mathrm{Hg}$.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

2. Який ізотоп утворюється з $^{232}_{90}\mathrm{Th}$ після чотирьох α-розпадів та двох β^--розпадів?

3. Який ізотоп утворюється з $^{238}_{92}\mathrm{U}$ після трьох α-розпадів та двох β^--розпадів?

4. Який ізотоп утворюється з $^{238}_{92}\mathrm{U}$ після двох β^--розпадів та одного α-розпаду?

5. Деякий радіоактивний ізотоп має постійну розпаду $4\cdot10^{-7}\,c^{-1}$. Через який проміжок часу розпадеться 75% від початкової кількості атомів?

6. Скільки атомів радону розпадається за одну добу з числа $N=10^6$ атомів?

7. Знайти масу радону, активність якого $J=3{,}7\cdot10^{10}\,Á\hat{e}$.

8. Знайти масу полонію $^{210}_{84}\mathrm{Po}$, активність якого $J=3{,}7\cdot10^{10}\,Á\hat{e}$.

9. Знайти постійну розпаду радону, якщо відомо, що число атомів радону зменшується за 1 добу на 18,2%.

10. Знайти активність 1мкг полонію.

11. Дописати позначення, яких не вистачає в реакціях:

а) $^{27}_{13}\mathrm{Al}(\mathrm{n},\alpha)X$; б) $^{19}_{9}\mathrm{F}(p,X)^{16}_{8}\mathrm{O}$;

в) $^{55}_{25}\mathrm{Mn}(X,n)^{55}_{28}\mathrm{Fe}$; г) $X(p,\alpha)^{22}_{11}\mathrm{Na}$.

12. Розрахувати енергетичний ефект реакцій:

а) $^{7}_{3}\mathrm{Li}+^{1}_{1}\mathrm{H}\rightarrow2^{4}_{2}\mathrm{He}$; б) $^{2}_{1}\mathrm{H}+^{3}_{2}\mathrm{He}\rightarrow^{1}_{1}\mathrm{H}+^{4}_{2}\mathrm{He}$;

в) $^{6}_{3}\mathrm{Li}+^{2}_{1}\mathrm{H}\rightarrow2^{4}_{2}\mathrm{He}$; г) $^{6}_{3}\mathrm{Li}+^{1}_{1}\mathrm{H}\rightarrow^{3}_{2}\mathrm{He}+^{4}_{2}\mathrm{He}$;

д) $^{7}_{3}\mathrm{Li}+^{2}_{1}\mathrm{H}\rightarrow^{8}_{4}\mathrm{Be}+^{1}_{0}n$; е) $^{9}_{4}\mathrm{Be}+^{2}_{1}\mathrm{H}\rightarrow^{10}_{5}\mathrm{B}+^{1}_{0}n$.

13. При бомбардуванні ізотопу азоту $^{14}_{7}\mathrm{N}$ нейтронами одержується ізотоп вуглецю $^{14}_{6}\mathrm{C}$, що виявляється β^--радіоактивним. Записати рівняння обох реакцій.

14. При бомбардуванні ізотопу літію $^{6}_{3}\mathrm{Li}$ дейтонами $^{2}_{1}\mathrm{H}$ виникають дві α-частинки. При цьому виділяється енергія $Q=22{,}3MeB$. Знаючи маси дейтона і α-частинки, знайти масу ізотопу літію $^{6}_{3}\mathrm{Li}$.

15. Штучний ізотоп азоту $^{13}_{7}\mathrm{N}$ одержується бомбардуванням ядер вуглецю $^{12}_{6}\mathrm{C}$ дейтонами. Записати рівняння реакції. Знайти кількість теплоти, поглинуту при цій реакції.

16. Реакція $^{10}_{5}\mathrm{B}(n,\alpha)X$ йде при бомбардуванні бору тепловими нейтронами. Записати рівняння реакції. Яка енергія виділяється при цій реакції?

17. При бомбардуванні ізотопу літію $^{6}_{3}\mathrm{Li}$ дейтонами утворюються дві α-частинки, які розлітаються симетрично під кутом φ до напрямку швидкості бомбардуючих дейтонів. Яку кінетичну енергію мають α-частинки, якщо енергія бомбардуючих дейтонів 0,2 МеВ? Знайти кут φ.

18. При бомбардуванні ізотопу літію $^{7}_{3}\mathrm{Li}$ протонами утворюються дві α-частинки. Кінетична енергія кожної α-частинки в момент їх виникнення 9,15МеВ. Яка енергія протонів?

19. Яку енергію (в кіловат-годинах) можна одержати від поділу одного грама урану $^{235}_{92}\mathrm{U}$, якщо при кожному акті ділення ядра виділяється енергія 200МеВ?

20. Яка маса урану $^{235}_{92}\mathrm{U}$ витрачається за одну добу на атомній електростанції потужністю 5000кВт? ККД вважати рівним 17%. При кожному акті ділення ядра виділяється енергія 200МеВ.

21. При вибуху водневої бомби протікає термоядерна реакція утворення гелію з дейтерію і тритію. Написати рівняння реакції. Знайти енергію, що виділяється при цій реакції. Скільки енергії можна одержати при утворенні одного грама гелію?

22. Знайти найменшу енергію γ-кванта, достатню для розкладу дейтона γ-променями: $^{2}_{1}\mathrm{H}+h\nu\rightarrow{}^{1}_{1}\mathrm{H}+{}^{1}_{0}n$.

23. Позитрон і електрон об'єднуються, утворюючи два фотони. Знайти енергію кожного з фотонів, вважаючи початкову енергію часток зникаюче малою. Яка довжина хвилі цих фотонів?

24. Електрон і позитрон утворюються фотоном з енергією 2,62МеВ. Яка була повна кінетична енергія позитрона і електрона в момент виникнення?

25. Нерухомий нейтральний π-мезон перетворюється у два фотони. Знайти енергію кожного фотона. Маса π-мезона $m_{o\pi}=264{,}2m_0$, де m_0 – маса електрона.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

26. Нейтрон і антинейтрон об'єднуються, утворюючи два фотони. Знайти енергію кожного з фотонів, вважаючи початкову енергію частинок безмежно малою.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

IV. Лабораторний практикум
Магнетизм. Коливання і хвилі

Лабораторна робота № 4.1

Вивчення гальванометра магнітоелектричної системи

Мета роботи: визначити внутрішній опір гальванометра, ціну поділки по струму і по напрузі.

Теоретичні відомості

(теорію до даної роботи див. також у конспекті лекцій, §§3.10-3.11, 4.1)

Гальванометр магнітоелектричної системи служить для вимірювання малих постійних струмів і напруг $(I \sim (10^{-8} \div 10^{-5})A$; $U \sim (10^{-6} \div 10^{-2})B)$. В основі роботи гальванометра лежить дія магнітного поля на рамку з електричним струмом.

Контур зі струмом характеризується магнітним моментом

$$\vec{P}_м = IS\vec{n}, \qquad (1)$$

де I – сила струму, S – площа контура, $\vec{n}$ – одиничний вектор нормалі до площини контура, зв'язаний з напрямком струму правилом правого гвинта (рис.1). Якщо контур зі струмом вмістити в магнітне поле, то на нього діятиме обертаючий момент сили $\vec{M} = \vec{P}_м \times \vec{B}$ або в скалярній формі

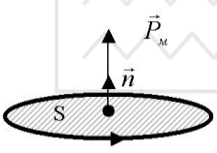
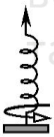


Рис.1.



$$M = P_м B \sin\alpha, \qquad (2)$$

де $\vec{B}$ – вектор магнітної індукції, α – кут між $\vec{P}_м$ і $\vec{B}$ (рис.2). В стані рівноваги магнітний момент рамки напрямлений паралельно до ліній магнітної індукції (площина рамки перпендикулярна до $\vec{B}$). Чим більший кут між $\vec{P}_м$ і $\vec{B}$, тим більший за величиною момент сили повертає рамку в положення стійкої рівноваги. Цей обертаючий момент, згідно з (1) і (2), пропорційний силі струму в рамці. Цим користуються при конструюванні вимірювальних приладів магнітоелектричної системи. Схема такого приладу подана на рис.3. В магнітному полі постійного магніту NS між нерухомим циліндром A, виготовленим з м'якого заліза, і полюсними башмаками $N'S'$

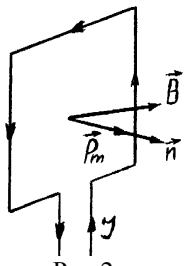


Рис.2

Національний університет

знаходиться прямокутна котушка (рамка) *K*. Вона укріплена на двох півосях, на одній з яких закріплена вказівна стрілка приладу. За кінцем стрілки розміщена шкала. Струм до рухомої котушки підводиться через дві спіральні пружини. У відсутності струму ці пружини утримують рамку в рівноважному положенні, коли її площина паралельна до $\vec{B}$.

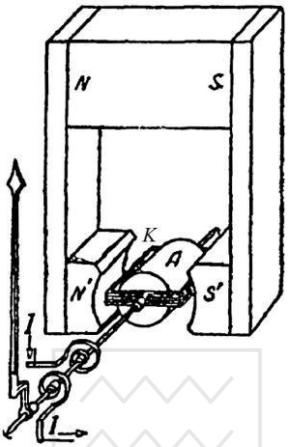


Рис.3

При проходженні через котушку вимірюваного струму на неї діє з боку магнітного поля обертаючий момент сили, пропорціональний силі струму. Під дією цього моменту котушка *K* повернеться на кут α, при якому обертаючий момент зрівноважиться протидіючим моментом, створеним пружинами. Оскільки момент пружних сил пропорційний куту закручування пружини, то із рівності обертаючого і протидіючого моментів випливає, що величина кута повороту пропорційна силі струму. Відповідно і відхилення вказівної стрілки приладу пропорціональне силі струму

$$^{2} = \hat{e}_{з} n , \qquad (3)$$

де $\hat{e}_{з}$ – коефіцієнт пропорціональності , який називається ціною поділки приладу по струму, n – кількість поділок, на яку відхилилась стрілка при вимірюванні. З (3) знайдемо $\hat{e}_{з} = I / n$, тобто ціна поділки гальванометра по струму дорівнює силі струму, який викликає зміщення стрілки приладу на одну поділку.

Згідно з законом Ома, спад напруги на гальванометрі

$$U = IR_g , \qquad (4)$$

де R_g – внутрішній опір гальванометра. З формули (3) і (4) одержимо

$$U = \kappa_i R_g \cdot n = \text{к}_\text{V} n , \qquad (5)$$

де

$$\hat{e}_v = \hat{e}_{з} \cdot R_g \qquad (6)$$

ціна поділки гальванометра по напрузі. Для визначення R_g, $\hat{e}_{з}$ та κ_v використаємо схему, подану на рис.4. Тут G – досліджуваний гальванометр, V – вольтметр, $R_1; R_0; R$; – магазини опорів.

Згідно закону Ома, сила струму на ділянці АС

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$I = \frac{U}{R_{AC}}, \qquad (7)$$

де U – напруга на клемах джерела, R_{AC} – опір дільниці кола, який рівний

$$R_{AC} = R_{AB} + R. \qquad (8)$$

Підставляючи вираз (8) у формулу (7), одержимо

$$I = \frac{U}{R_{AB} + R} \qquad (9)$$

звідки

$$U = IR_{AB} + IR.$$

Очевидно, що

$$R_{AB} = \frac{R_0(R_1 + R_g)}{R_0 + (R_1 + R_g)}. \qquad (10)$$

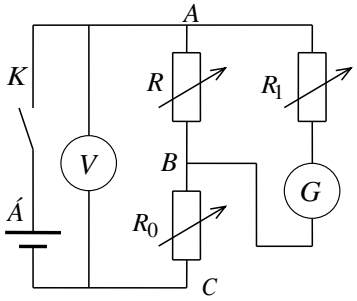


Рис.4

В загальному випадку зі зміною R_1 змінюється R_{AB} і сила струму I.

Спад напруги на дільниці AB дорівнює

$$U_{AB} = I_1(R_1 + R_g) = I_1^1 R_0, \qquad (11)$$

де I_1 – сила струму, що проходить через гальванометр, I_1^1 – сила струму, що проходить через опір R_0.

За законом Кірхгофа

$$I = I_1^1 + I_1. \qquad (12)$$

Розв'язуючи систему рівнянь (9), (11) і (12) відносно I_1, одержимо

$$I_1 = \frac{UR_0}{(R_{AB} + R)(R_g + R_0 \cdot R_1)} = \hat{e}_з n_1. \qquad (13)$$

Нехай $R_1 = 0$. Тоді струм, згідно з (13)

$$I_2 = \frac{UR_0}{(R'_{AB} + R)(R_g + R_0)} = \kappa_i n_2, \qquad (14)$$

де

$$R'_{AB} = \frac{R_0 R_g}{R_0 + R_g}. \qquad (15)$$

Із формули (13)

$$UR_0 = \kappa_i n_1 (R_{AB} + R)(R_1 + R_g + R_0), \qquad (16)$$

а з виразу (14)

$$UR_0 = \kappa_i n_2 (R'_{AB} + R)(R_g + R_0). \qquad (17)$$

Прирівнюючи праві частини одержаних виразів і в (16) і (17), маємо

$$\kappa_i n_1 (R_{AB} + R)(R_1 + R_g + R_0) = \kappa_i n_2 (R'_{AB} + R)(R_g + R_0). \qquad (18)$$

Підставляючи значення R_{AB} і R'_{AB} із (10) та (15) в (18) і розв'язуючи одержане рівняння відносно R_g, маємо

$$R_g = \frac{n_1 R_1}{n_2 - n_1} - \frac{RR_0}{R + R_0}. \qquad (19)$$

Ціну поділки по струму визначаємо із рівняння (14)

$$\kappa_i = \frac{UR_0}{n_2 R_g (R + R_0) + RR_0}. \qquad (20)$$

Хід роботи

1. Скласти електричну схему подану на рис.5, де $Б$ – джерело постійного струму, G – гальванометр, $R; R_0; R_1$ – магазини опорів, П – перемикач, за допомогою якого змінюють напрямок струму в гальванометрі, $\hat{e}$ – ключ, V – вольтметр. Опір R має бути великим; магазин опорів R_1 та R_0 виведені на нуль. Перевірити, чи суміщена стрілка гальванометра з нулем шкали.

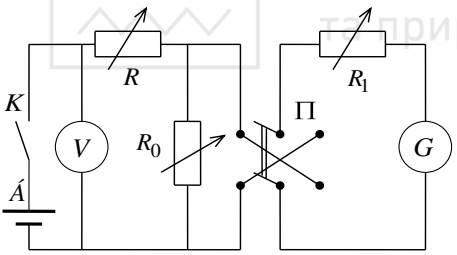


Рис.5

2. Замкнути ключ К і підібрати опір R_0 такий, щоб стрілка гальванометра відхилилась майже до кінця шкали. Записати показ гальванометра n_2 та значення опору R_0. Перемикачем П змінити напрямок струму через гальванометр і записати показ гальванометра n_2^1.

3. Підібрати опір R_1 такий, щоб покази гальванометра n_1 становили близько $0{,}4n_2$ (в цьому випадку точність вимірювань R_g буде найбільшою). Записати значення опору R_1, а також покази гальванометра n_1 і n_1^1 при двох напрямках струму.

4. Провести ще два таких досліди при незмінних опорах $R_0; R_1; R$.

5. Знайти n_1 ср і n_2 ср.

6. Записати покази вольтметра.

7. Обчислити похибки прямих вимірювань для величин n_1, n_2, R, R_0, R_1.

8. Користуючись формулами 19, 20 і 6, обчислити R_g, к$_i$, κ_v.

9. Обчислити абсолютну та відносну похибки вимірювання R_g за формулами (21) і (22).

$$\Delta R_g = \sqrt{\left(\frac{n_2 R_1 \Delta n_1}{(n_2 - n_1)^2}\right)^2 + \left(\frac{n_1 R_1 \Delta n_2}{(n_2 - n_1)^2}\right)^2 + \left(\frac{n_1 \Delta R_1}{n_2 - n_1}\right)^2 + \left(\frac{R_0^2 \Delta R}{(R + R_0)^2}\right)^2 + \left(\frac{R^2 \Delta R_0}{(R + R_0)^2}\right)^2} . \quad (21)$$

$$\varepsilon = \pm \frac{\Delta R_g}{R_g} . \quad (22)$$

10. Записати кінцевий результат.

Таблиця вимірювань

$R =$ $R_0 =$ $R_1 =$ $U =$ $(\Delta R_0) =$ $(\Delta R_0)_0 =$ $(\Delta R_1)_0 =$

$(\Delta n_1)_0 = (\Delta n_2)_0 = 0{,}5$ под.

№ п/п	n_1	n_1'	n_2	n_2'
1 2 3				
Ср.	$n_{1cp} =$		$n_{2cp} =$	

Контрольні запитання

1. Що називається магнітним моментом контура зі струмом? Які його величина, напрямок, одиниця?
2. Записати вираз для момента сили, що діє на контур зі струмом, вміщений в магнітне поле.
3. При якій орієнтації контура зі струмом в магнітному полі обертаючий момент максимальний? В якому випадку він дорівнює нулю?
4. Яка будова і принцип дії гальванометра магнітоелектричної системи?

5. Дайте визначення ціни поділки гальванометра по струму і по напрузі. Встановіть зв'язок між $\hat{e}_I$ та $\hat{e}_V$.

6. Покажіть, що кут повороту рухомої частини гальванометра прямо пропорційний силі струму.

7. Чи можна гальванометром магнітоелектричної системи вимірювати змінні струми? Відповідь обґрунтуйте.

Лабораторна робота № 4.2

Перевірка закону Ампера

Мета роботи: перевірити закон Ампера; обчислити індукцію магнітного поля.

Опис установки

Установка для перевірки закону Ампера зображена на рис.1. Вона складається з фізичного маятника *A* і електромагніта *M*. Фізичний маятник тут – мідний провідник, зігнутий у вигляді прямокутної рамки.

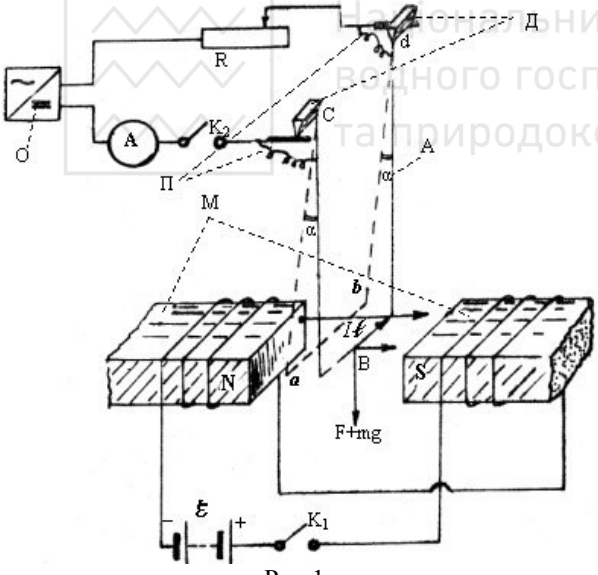


Рис.1

Сторона рамки *ab* довжиною ℓ розміщена між полюсами електромагніта *M* перпендикулярно до ліній магнітної індукції; на протилежному до провідника *ab* кінці маятника закріплені опорні тригранні призми *D*, що опираються на спеціальні латунні підшипники. Біля опорних призм до кінців *c* і *d* припаяні легкі гнучкі провідники *П*, за допомогою котрих провідник *ab* включають в електричне коло. Струм в провіднику *ab* можна змінювати за допомогою реостата *R* і вимірювати амперметром *A*. Електромагніт *M*

живиться від джерела напруги. Коло, в котре включений провідник *ab*, одержує напругу від джерела напруги.

Теоретичні відомості

(теорію до даної роботи див. також у конспекті лекцій, §§4.1, 4.4, 5.1, 5.3)

Нехай у магнітному полі з індукцією $\vec{B}$ знаходиться лінійний елемент струму $Id\vec{\ell}$. На нього з боку поля діє сила, величина і напрямок котрої визначаються законом Ампера

$$d\vec{F}_A = Id\vec{\ell} \times \vec{B}, \tag{1}$$

або у скалярній формі

$$dF_A = Id\ell B \sin\alpha, \tag{2}$$

де α – кут між $d\vec{\ell}$ та $\vec{B}$.

Сила, що діє на провідник зі струмом скінченої довжини, знаходиться з (1) або (2) інтегруванням по всій довжині провідника $F_A = I \int\limits_{(\ell)} Bd\ell \sin\alpha$.

(3)Зокрема, для прямолінійного провідника в однорідному магнітному полі ($\vec{B} = const$) з (3) одержимо

$$F_A = I\ell B \sin\alpha. \tag{4}$$

Напрямок сили Ампера знаходиться за правилом лівої руки (рис.2).

Щоб одержати формулу для обчислення сили Ампера в даній лабораторній роботі, розглянемо рівняння руху фізичного маятника (рамки *abcd*) Цей маятник здійснює коливання відносно осі *cd*. Застосуємо до нього основний закон динаміки обертального руху твердого тіла

$$I \cdot \ddot{\varphi} = M, \tag{5}$$

де I – момент інерції маятника відносно осі *cd*, $\ddot{\varphi}$ –кутове прискорення, M – головний момент зовнішніх сил відносно цієї осі.

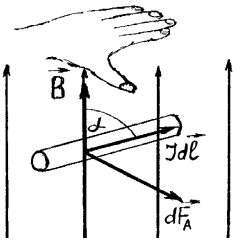


Рис.2

У відсутності струму обертовий момент створює сила тяжіння (прикладена до центра мас маятника).

$$M_1 = -mgr_1 \sin\varphi, \tag{6}$$

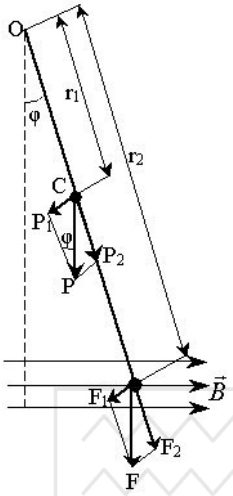
де r_1 відстань від осі обертання до центра мас, φ – кут відхилення маятника від положення рівноваги, m – маса маятника. Знак "–" показує, що момент сили тяжіння обертає маятник в бік, протилежний відхиленню від рівноваги.

Якщо через провідник *ab*, що знаходиться в магнітному полі електромагніта *M*, проходить електричний струм, то на

маятник, крім сили тяжіння, діє сила Ампера. Напрямок сили Ампера, в залежності від напрямку струму, або співпадає з напрямком сили тяжіння, або протилежний до нього. Сила Ампера прикладена до провідника *ab* і створює момент сили

$$M_2 = \pm F_A \cdot r_2 \sin\varphi\,, \quad (7)$$

де r_2 – відстань від провідника ab до осі обертання. Знак "–" в (7) відноситься до випадку, коли сила Ампера напрямлена вниз (рис.3), а знак "+" – коли вгору (рис.4).



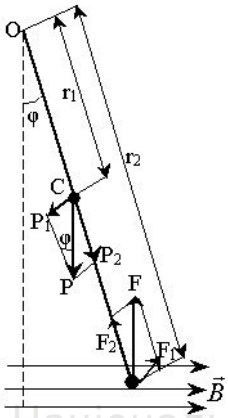


Рис.3 Рис.4

Після підстановки (7) і (6) в (5) одержимо

$$I\ddot{\varphi} = -mgr_1 \sin\varphi \mp F_A r_2 \sin\varphi\,.$$

Для малих кутів $\sin\varphi \simeq \varphi$, тому, якщо кут відхилення малий, останнє рівняння можна записати у вигляді

$$I\ddot{\varphi} \simeq -(mgr_1 \pm F_A r_2)\varphi_1\,, \text{ або } \ddot{\varphi} + (\frac{mgr_1 \pm F_A r_2}{I})\varphi = 0\,.$$

Введемо позначення

$$\omega^2 = \frac{mgr_1 \pm F_A r_2}{I}\,, \quad (8)$$

тоді останнє рівняння набуде вигляду

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \cdot \varphi = 0\,. \quad (9)$$

Вираз (9) – диференціальне рівняння вільних гармонічних коливань, розв'язок котрого

$$\varphi = \varphi_0 \sin\omega t\,, \quad (10)$$

де φ_0 – амплітудне значення кута відхилення, ω – власна циклічна частота, квадрат якої визначається рівнянням (8). Якщо струм в провіднику *ab* відсутній, то $F_A = 0$, і маятник коливається з циклічною частотою ω_0. З (8) тоді

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$\omega_0^2 = \frac{mgr_1}{I}. \qquad (11)$$

З (8) і (11) знайдемо $\omega^2 - \omega_0^2 = \pm\frac{F_A \cdot r_2}{I}$, або

$$F_A = \pm\frac{I(\omega^2 - \omega_0^2)}{r_2}. \qquad (12)$$

Циклічна чистота пов'язана з періодом коливань співвідношенням $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Врахувавши це, а також виразивши I з (11), запишемо рівняння (12) у вигляді

$$F_A = \pm\frac{mgr_1}{r_2}\left[(\frac{T_0}{T})^2 - 1\right],$$

де T_0 і T – періоди коливань маятника у відсутності та при наявності струму, відповідно. Відношення $\frac{T_0}{T}$ можна замінити відношенням проміжків часу $\frac{t_0}{t}$, за які маятник здійснив однакову кількість коливань. Тоді останнє рівняння набуде вигляду

$$F_A = \pm c\left[(\frac{t_0}{t})^2 - 1\right], \qquad (13)$$

де $c = \frac{mgr_1}{r_2}$ – постійна лабораторної установки, яка вказана в її паспорті. Таким чином, вимірявши t_0 і t, за формулою (13) можна розрахувати силу Ампера для кількох значень сили струму і побудувати графік залежності $F_A(I)$. Оскільки напрямок струму в провіднику ab перпендикулярний до ліній магнітної індукції (див. рис.1), то формула (4) для сили Ампера набуде вигляду

$$F_A = IB\ell, \qquad (14)$$

де ℓ – довжина провідника ab.

В даній лабораторній роботі індукція магнітного поля B залишається незмінною, тому залежність F_A має бути пропорційною. В цьому суть перевірки закона Ампера. Визначивши F_A для даного значення сили струму, з (14) можна визначити індукцію магнітного поля

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$B = \frac{F_A}{I\ell}. \qquad (15)$$

Хід роботи

1. Скласти електричне коло за схемою рис.1.
2. Виміряти час заданої викладачем кількості коливань маятника як без струму (t_0; ключ $К_2$ розімкнений), так і при вказаних значеннях сили струму (t; ключ $К_2$ замкнений). Результати вимірювань записати в таблицю **Увага!** Ключ *К*, має бути замкненим як при вимірюванні часу *t*, так і t_0 – щоб виключити вплив струмів Фуко.
3. Обчислити за формулою (13) силу Ампера для кожного значення сили струму; результати записати в таблицю 1.
4. Побудувати графік залежності F_A ; вибрати з графіка три експериментальні точки, які лежать на графіку або щонайменше віддалені від нього. Для цих точок порахувати за формулою (15) індукцію магнітного поля. Результати записати в таблицю 2.
5. Визначити середнє значення В.

Таблиці вимірювань

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Таблиця 1

c= .

№ п/п	1	2	3	4	5	6	7
I(А)	0	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5
t(с)							
F_A(Н)							

Таблиця 2

ℓ = .

№ п/п	I(А)	F_A(Н)	B(Тл)
1			
2			
3			
ср			$B_{ср}$=

Контрольні запитання

1. Сформулювати і записати закон Ампера. Як визначається напрямок сили Ампера?

2. При якій орієнтації провідника зі струмом у магнітному полі сила Ампера максимальна?
3. Дати визначення вектора магнітної індукції, вказати його одиницю в СІ.
4. Які коливання називаються вільними, гармонічними? Записати диференціальне рівняння вільних гармонічних коливань та його розв'язок.
5. Дати визначення основних характеристик гармонічних коливань (амплітуди, частоти, періода, циклічної частоти, фази). Встановити зв'язок між циклічною частотою і періодом.
6. Що таке фізичний маятник? Вивести диференціальне рівняння вільних гармонічних коливань фізичного маятника. Чи будуть коливання маятника гармонічними при великих амплітудах?
7. Як впливає сила Ампера на період коливань фізичного маятника в даній лабораторній роботі? Як зміниться період коливань маятника при зміні напрямку струму на протилежний?
8. Вивести робочу формулу для обчислення сили Ампера. Чому при її виведенні не враховують індукційні струми?

Лабораторна робота № 4.3

Визначення питомого заряду електрона методом магнетрона

Мета роботи: виміряти питомий заряд електрона методом магнетрона.

Теоретичні відомості

(теорію до даної роботи див. також у конспекті лекцій, §§3.17, 4.5)

Найпростіший магнетрон – це вакуумний діод, що знаходиться в однорідному магнітному полі соленоїда, індукція котрого напрямлена вздовж осі системи. Діод складається з циліндричного порожнистого анода радіуса R і катода у вигляді дротини малого радіуса. Катод розміщений вздовж осі циліндричного анода.

Електрони, що вилітають з розжареного катода під дією електричного поля, створеного між анодом і катодом, прямують до анода. При цьому силами поля виконується робота

$$A = e \cdot U \,, \qquad (1)$$

де U – різниця потенціалів між анодом і катодом, e – елементарний заряд. За рахунок цієї роботи збільшується кінетична енергія електрона. Тому маємо

$$eU = \frac{m\upsilon^2}{2} \,, \qquad (2)$$

де m – маса електрона, υ – його швидкість. З (2) знайдемо швидкість

$$\upsilon = \sqrt{\frac{r \cdot e \cdot U}{m}}. \qquad (3)$$

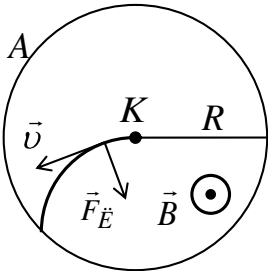


Рис.1

При наявності магнітного поля, вектор індукції котрого напрямлений вздовж осі катода, на електрон крім електричного поля буде діяти сила Лоренца, що перпендикулярна до вектора швидкості електрона $\vec{\upsilon}$ і вектора індукції магнітного поля $\vec{B}$. На рис.1 зображено зріз магнетрона площиною , перпендикулярною до катода К (як і до анода А та вектора індукції $\vec{B}$). Кривою зображена траєкторія руху електрона при наявності дії електричного і магнітного полів. Сила Лоренца дорівнює

$$\vec{F}_{\ddot{e}} = -\mathring{a}\vec{\upsilon} \times \vec{A}. \qquad (4)$$

Оскільки $\vec{\upsilon}$ і $\vec{B}$ перпендикулярні, то величина сили Лоренца

$$F_{л} = e \cdot \upsilon \cdot B. \qquad (5)$$

Якби швидкість електрона була постійною за величиною, то величина сили Лоренца також була б постійною. Електрон рухався б по колу (сила Лоренца при цьому виконує роль доцентрової сили). Маємо

$$\frac{m \cdot \upsilon^2}{r} = e \cdot \upsilon \cdot B. \qquad (6)$$

Звідси знаходимо радіус кола, по якому рухається електрон

$$r = \frac{m \cdot \upsilon}{e \cdot B}. \qquad (7)$$

Однак, величина швидкості електрона не постійна, тому електрон описує не коло, а більш складну криву. В лампі з катодом і анодом у вигляді коаксіальних циліндрів, коли радіус катода набагато менший радіуса анода, найбільша напруженість електричного поля біля самого катода. Внаслідок цього швидкість електрона суттєво змінюється біля самого катода, а далі є величиною майже постійною. Тому наближено можна вважати, що електрон у магнетроні рухається по колу.

З виразу (7) видно, що чим більша індукція магнітного поля В, тим менший радіус кривизни траєкторії електронів. При деякому критичному значенні індукції магнітного поля $B_к$ електрони, не долітаючи до анода, починають рухатися по колу радіусом $r_к = \frac{R}{2}$. При

цьому сила анодного струму I_a повинна різко зменшуватися (рис.2). Дослід показує, що при критичному значенні індукції магнітного поля анодний струм не падає стрибком до нуля, а плавно зменшується (рис.3). Такий хід залежності анодного струму частково пояснюється тим, що електрон, який вилетів з катода, вже має деяку швидкість. Величина її визначається тепловим рухом електронів всередині катода. Щоб зменшити вплив початкових швидкостей, потрібно працювати при більших прискорюючих напругах.

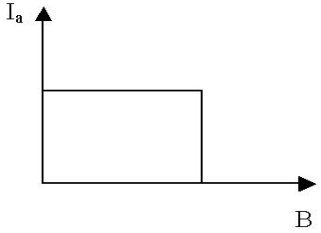


Рис.2

Крім того, плавний спад кривої $I_a = f(B)$ зумовлений некоаксіальністю катода і анода, наявністю залишкового газу в лампі, неоднорідністю поля соленоїда по висоті анода і т.д.

Із співвідношення (3) і (7) та з врахуванням, що $r_к = \frac{R}{2}$, одержимо

$$\frac{e}{m} = \frac{8U}{R^2 \cdot B_к^2}. \qquad (8)$$

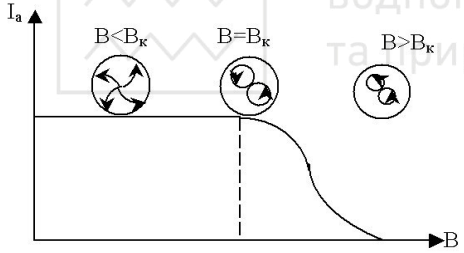


Рис.3

Індукція магнітного поля соленоїда, довжина ℓ якого співмірна з діаметром d, находиться за формулою

$$\hat{A}_{\hat{e}\eth} = \frac{\mu_0 \cdot N \cdot {}^{2}\tilde{n}\hat{e}}{\sqrt{\ell^2 + d^2}}, \qquad (9)$$

де $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ Гн/м$; N – число витків соленоїда.

Остаточно, підставляючи (9) у (8), маємо

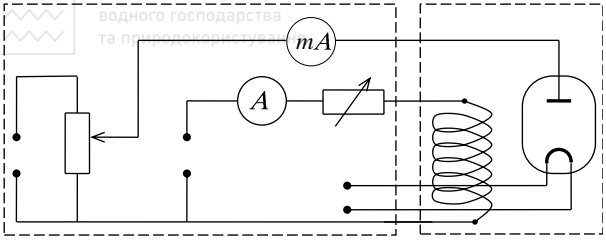
$$\frac{e}{m} = \frac{8U(\ell^2 + d^2)}{R^2 (N \cdot I_{ск} \cdot \mu_0)^2}. \qquad (10)$$

Співвідношення (10) є робочою формулою для визначення питомого заряду.

Опис експериментальної установки та хід виконання роботи

1. Експериментальна установка складається з модуля ФПЕ–03, блока живлення (БЖ), міліамперметра. Принципова схема представлена на рис.4.

Національний університет водного господарства та природокористування



БЖ ФПЕ-03

Рис.4

2. Скласти схему, показану на рис.4.

3. Встановити анодну напругу $U_a \approx 100B$ по вольтметру блока живлення.

4. Змінюючи силу струму в соленоїді при постійній анодній напрузі, зняти залежність анодного струму від струму соленоїда $I_a = f(I_c)$. Дані занести в таблицю.

5. Побудувати графік залежності $I_a = f(I_c)$ і визначити на ньому критичний струм $I_{\text{кр}}$. Значення $^2_{кр}$ вибирається на кривій $I_a = f(I_c)$ в точці, де I_a починає спадати.

6. Обчислити відносну і абсолютну похибки вимірювання питомого заряду. Користуючись паспортними даними приладів, відносну похибку можна обчислити за формулою

$$\varepsilon = \left[(\frac{\Delta U}{U})^2 + (\frac{2\Delta R}{R})^2 + (\frac{2\Delta \mu_0}{\mu_0})^2 + (\frac{2\Delta I_{\text{кр}}}{I_{\text{кр}}})^2 + +(\frac{\Delta N}{N})^2 + (\frac{2\Delta \ell}{\ell})^2 + (\frac{2\Delta d}{d})^2 \right]^{1/2}.$$

Абсолютна похибка обчислюється за формулою.

$$\Delta(\frac{e}{m}) = \pm\varepsilon \cdot \frac{e}{m}.$$

7. Записати кінцевий результат.

Таблиця вимірювань

U=, l=, d=, R=, N=, $\mu_{0=}$, $I_{ск}$=

$_{\Delta}U_0$=, $_{\Delta}l_0$=, $_{\Delta}d_0$=, $_{\Delta}R_0$=, $_{\Delta N0}$=, $_{\Delta}(\mu_{0})_0$=, $_{\Delta}(I_{ск})_0$=

I_a										
I_c										

Контрольні запитання

1. Яка будова магнетрона? Практичне використання магнетрона.
2. Описати електромагнітне поле в магнетроні.
3. Довести, що сила Лоренца не виконує роботи.

4. При яких умовах виникає сила Лоренца? Яка величина і напрям сили Лоренца?

5. Чому в залежності $^{2}_{\grave{a}} = f(I_c)$ відсутній різкий спад?

6. Вивести робочу формулу.

Лабораторна робота № 4.4

Вивчення магнітного поля соленоїда за допомогою датчика Холла

Мета роботи: ознайомитися з холлівським методом вимірювання індукції магнітного поля; дослідити залежність індукції магнітного поля в центрі соленоїда від струму; дослідити осьову неоднорідність магнітного поля в соленоїді.

Теоретичні відомості

(теорію до даної роботи див. також у конспекті лекцій, §§4.2-4.3)

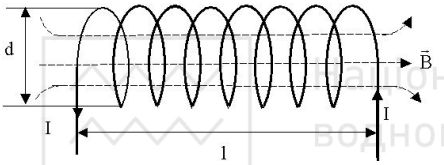


Рис.1

1. Соленоїд є системою послідовно з'єднаних однакових колових струмів (рис.1), тому для розрахунку індукції B магнітного поля в довільній точці на осі соленоїда потрібно спочатку розглянути магнітне поле на осі колового струму (одного витка соленоїда) (рис.2). Виберемо елемент струму $Id\vec{\ell}$. Вектор індукції магнітного поля, породженого цим елементом в точці А, положення котрої задається радіус-вектором $\vec{r}$, визначається законом Біо-Савара-

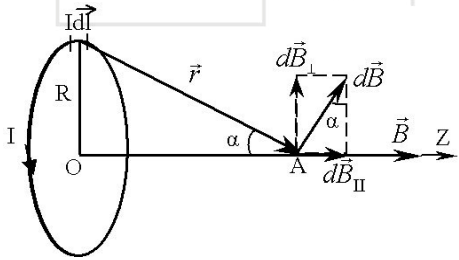


Рис.2

Лапласа (у вакуумі)

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\vec{\ell} \times \vec{r}}{r^3}, \qquad (1)$$

де $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнітна стала. При цьому dB можна розкласти на дві складові: $d\vec{B}_{||}$ – паралельну до осі Z і $d\vec{B}_{\perp}$ – перпендикулярну до цієї осі. За принципом суперпозиції вектор індукції магнітного поля, створеного коловим струмом, тобто усіма елементами струму,

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$\vec{B} = \oint\limits_{(\ell)} d\vec{B} = \oint\limits_{(\ell)} d\vec{B}_{||} + \oint\limits_{(\ell)} d\vec{B}_{\perp} = \oint\limits_{(\ell)} d\vec{B}_{||} . \qquad (2)$$

Тут враховано, що для усякого елементу $Id\vec{\ell}$ знайдеться симетричний елемент, що дає складову $d\vec{B}_{\perp}$ протилежного напрямку. Якщо врахувати, що $d\vec{B}_{||}$ усіх елементів напрямлені вздовж осі Z, а також, що $\mathrm{dB}_{||} = dB\sin\alpha = \dfrac{R}{r}dB$ і $\mathrm{d}\vec{\ell} \perp \vec{\mathrm{r}}$, то після підстановки (1) у (2) отримаємо для індукції магнітного поля на осі колового струму

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi R}\frac{Rd\ell}{r^3} = \frac{\mu_0 IR^2}{2r^3} . \qquad (3)$$

Зауважимо, що в центрі колового струму ($\mathrm{r} = \mathrm{R}$)

$$\mathrm{B} = \frac{\mu_0 I}{2R} .$$

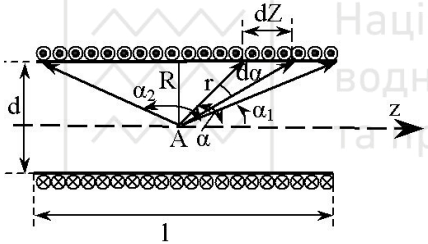


Рис.3

2. Для розрахунку індукції магнітного поля соленоїда розглянемо його осьовий переріз (рис.3),припускаючи постійність щільності намотки вздовж осі *Z*. Якщо на одиницю довжини соленоїда припадає n витків, то на ділянці довжиною *dz* буде *ndz* витків, які в точці *A* створять магнітне поле з індукцією

$$dB = \frac{\mu_0 IR^2}{2r^3}\cdot ndz . \qquad (4)$$

Врахувавши, що $\mathrm{r} = \dfrac{\mathrm{R}}{\sin\alpha}$, $\mathrm{dz} = \dfrac{\mathrm{rd}\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{Rd\alpha}{\sin^2\alpha}$, після інтегрування (4) по всій довжині соленоїда отримаємо для індукції магнітного поля на осі соленоїда

$$B = \int\limits_{(\ell)} dB = \frac{\mu_0 In}{2}\int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2}\sin\alpha\mathrm{d}\alpha = \frac{\mu_0 In}{2}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2) . \qquad (5)$$

Якщо соленоїд дуже довгий ($d << \ell$), то $\alpha_1 = 0$ і $\alpha_2 = \pi$. Тоді

$$\mathrm{B} = \mu_0 In . \qquad (6)$$

Зауважимо, що формулу (6) можна отримати, використавши теорему про циркуляцію вектора індукції магнітного поля. Для дуже довгого соленоїда магнітне поле практично однорідне (силові лінії еквідистантні і паралельні до осі соленоїда). Для реальних соленоїдів, коли нерівність $d < \ell$ слабка, поле найсильніше в центрі соленоїда і зменшується при наближенні до його кінців.

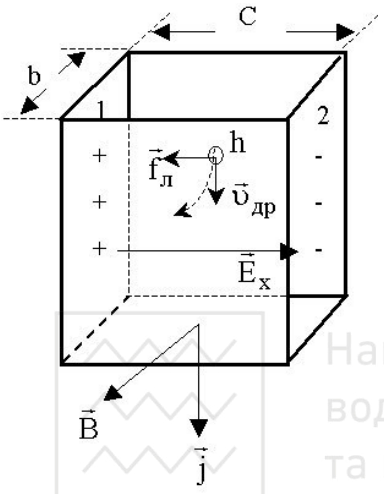


Рис.4

3. Для визначення індукції магнітного поля на осі соленоїда в цій роботі використовуються напівпровідникові датчики, дія яких грунтується на ефекті Холла,–датчики Холла (ДХ) (рис.4). Нехай для ДХ використано напівпровідниковий кристал з дірковою провідністю (носії струму – дірки (hole)). Якщо вздовж такого кристалу протікає електричний струм з густиною $\vec{j}$ і він розміщений в поперечному магнітному полі з індукцією $\vec{B}$, то на носії струму, заряд яких e, і які рухаються з дрейфовою швидкістю $\vec{\upsilon}_{äð}$, буде діяти сила Лоренца

$$f_л = e\upsilon_{др} \cdot B. \qquad (7)$$

Ця сила, як видно з рис.4, буде відхиляти носії до грані 1, і між гранями 1 та 2 виникне поперечне холлівське поле з напруженістю $\vec{A}_õ$, значення якої визначене з умови рівноваги $(f_л = eE_x)$ становить

$$E_x = \upsilon_{др} \cdot B. \qquad (8)$$

Різниця потенціалів між гранями 1, 2 або холлівська напруга складає

$$U_x = E_x \cdot c = c\upsilon_{др}B. \qquad (9)$$

Якщо врахувати, що густина струму пов'язана з $\upsilon_{др}$ і концентрацією носіїв P співвідношенням $j = ep\upsilon_{др}$, то (9) перепишеться як

$$U_x = \frac{jB}{ep} \cdot c = \frac{I \cdot Bc}{ep \cdot bc} = \frac{1}{ep} \cdot \frac{IB}{b} = R_x \frac{IB}{b}, \qquad (10)$$

де I – сила струму через кристал, а $R_x = \frac{1}{ep}$ – постійна Холла.

Оскільки значення b і R_x є фіксованими параметрами ДХ, а сила струму через кристал підтримується постійною (для ДХ цієї роботи $I = 4mA$), то доцільно ввести коефіцієнт пропорційності $\hat{E}_{\tilde{o}} = \dfrac{b}{R_x I}$, і тоді (10) запишеться як

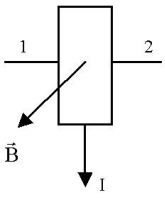


Рис.5

$$B = K_x U_x . \qquad (11)$$

Отже, для визначення значення індукції магнітного поля соленоїда достатньо виміряти холлівську напругу між контактами 1–2 ДХ (рис.5) і помножити її на $\hat{E}_{\tilde{o}}$. Ситуація дещо ускладнюється можливою нееквіпотенціальністю контактів 1, 2, що приво-дить до появи напруги нееквіпотенціальності $\Delta U_{\text{н.е.}}$ навіть при відсутності магнітного поля. В цьому випадку

$$U_x = U'_x - \Delta U_{\text{н.е.}}, \qquad (12)$$

де U'_x – напруга, що вимірюється вольтметром з великим вхідним опором (чи потенціометром), приєднаним безпосередньо до контактів 1, 2 ДХ. Параметри $\hat{E}_{\tilde{o}}$ і $\Delta U_{\text{н.е.}}$, а також кількість витків N, довжина ℓ і діаметр d соленоїда задаються як паспортні дані блоку соленоїда.

4. Блок-схема експериментальної установки показана на рис.6.

Блок живлення забезпечує регульований (регулятор Р) струм через соленоїд ($I_c = 0{,}3 \div 1{,}7 A$) який вимірюється амперметром А, а також струм ДХ (I=4mA). Датчик Холла розміщений на рухомому штоці з міліметровою шкалою, нульова позначка якої фіксує положення ДХ в центрі соленоїда. Напруга на зондових контактах датчика Холла вимірюється цифровим вольтметром з точністю до третього знаку після коми.

Хід роботи

Завдання 1. Дослідження залежності магнітної індукції в центрі соленоїда від струму соленоїда.

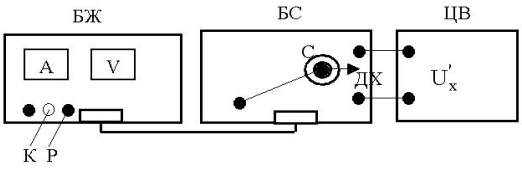


Рис.6

1. Скласти схему, показану на рис.6 (при потребі).
2. Розмістити шток з ДХ в трубі соленоїда в положенні “0” по шкалі (центр соленоїда).
3. Ввімкнути в мережу ~220В БЖ і ЦВ, поставивши перемикач К в положення $U \geq 5B$.

4. Виміряти напругу U'_x при різних значеннях струму соленоїда $I_c = (0{,}4 \div 1{,}6)$А, з кроком $(0{,}2 \div 0{,}3)$ А. Дані занести в таблицю 1.

5. За формулою (12) розрахувати U_x, а за (11) – B при всіх значеннях струму I_c.

6. Побудувати графік залежності $B = f(I_c)$. Зробити висновок.

Завдання 2. Дослідження осьової неоднорідності магнітного поля соленоїда.

1. Встановити задане викладачем значення I_c.

2. Переміщуючи шток з ДХ вздовж осі соленоїда з кроком $\Delta z = 1$см, виміряти U'_x, розрахувати U_x і B. Дані занести в табл.2.

3. Побудувати графік залежності $\hat{A} = f(z)$. Зробити висновок.

4. Для центру соленоїда розрахувати B за формулами (5) та (6). Результати порівняти з експериментом; зробити висновки.

У звіт включити: мету роботи, блок-схему установки, формули (5), (6), (11), (12), табл.1, 2 з відповідними графіками, розрахунками та висновками.

Таблиці вимірювань

$K_x =$ $\Delta U_{\text{н.е.}} =$ Таблиця 1

№ виміру	$^2\tilde{n}$, А	U'_x, В	U_x, В	B, Тл
1				
2				
3				
4				
5				
6				

N = $\ell =$ $d =$ $I_c =$ $n = \frac{N}{\ell} =$ Таблиця 2

Z, ìì	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	95
U'_x, B											
U_x, B											
B, Òë											

Національний університет водного господарства

Контрольні запитання

1. Записати і пояснити закон Біо-Савара-Лапласа.
2. Вивести формулу для індукції магнітного поля на осі або в центрі колового струму.
3. Вивести формулу для індукції магнітного поля в центрі дуже довгого соленоїда, користуючись теоремою про циркуляцію вектора індукції магнітного поля.
4. Пояснити, в чому полягає ефект Холла.

Лабораторна робота № 4.5

Визначення горизонтальної складової напруженості магнітного поля Землі

Мета роботи: виміряти горизонтальну складову напруженості магнітного поля Землі.

Теоретичні відомості

(теорію до даної роботи див. також у конспекті лекцій, §§ 4.1, 4.2)

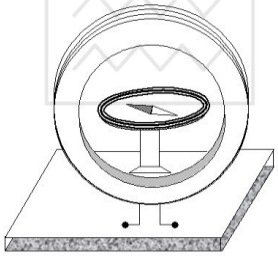


Рис.1

Тангенс-гальванометр – прилад для вимірювання горизонтальної складової напруженості магнітного поля Землі, складається з вертикально встановленої колової рамки, на яку намотано кілька витків ізольованого дроту. В центрі рамки знаходиться маленька магнітна стрілка, що може вільно обертатися в горизонтальній площині (рис.1)

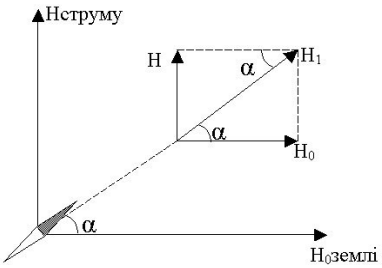


Рис.2

Якщо по рамці проходить електричний струм, то напруженість створеного ним магнітного поля можна розрахувати за законом Біо-Савара-Лапласа. В центрі кола вона визначається за формулою

$$H = \frac{IN}{2R}, \qquad (1)$$

де I – сила струму в рамці, N – кількість витків, R – радіус кола. Напрямок $\vec{H}$ визначається за правилом свердлика і співпадає з нормаллю до площини рамки. Крім того, навколо Землі існує магнітне поле,

напрямок напруженості якого співпадає з напрямком магнітного меридіана. При проходженні струму через котушку напруженість результуючого магнітного поля, згідно з принципом суперпозиції, дорівнює векторній сумі напруженостей поля Землі і поля колового струму. Якщо площина колового струму збігається з площиною магнітного меридіана, то горизонтальна складова напруженості магнітного поля Землі $\vec{H}_0$ лежить у площині колового струму, а напруженість $\vec{H}$ магнітного поля струму перпендикулярна до цієї площини, отже і до $\vec{H}_0$. За принципом суперпозиції результуюча напруженість $\vec{H}_1 = \vec{H} + \vec{H}_0$ може бути знайдена геометрично за правилом паралелограма (рис.2). Магнітна стрілка, котра у відсутності струму орієнтувалася вздовж $\vec{H}_0$, при проходженні струму через рамку повертається на деякий кут α і встановлюється вздовж напрямку результуючого поля $\vec{H}_1$. Як видно з рис.2

$$H_0 = \frac{H}{tg\alpha}. \qquad (2)$$

Підставивши (1) в (2), одержимо

$$H_0 = \frac{IN}{2Rtg\alpha}. \qquad (3)$$

Хід роботи

1. Повертаючи тангенс-гальванометр у горизонтальній площині, встановити його так, щоб кінець магнітної стрілки збігався з нулем шкали.

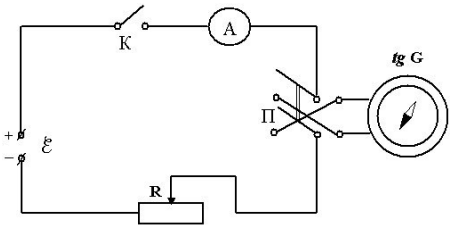


Рис.3

2. Повертаючи рамку, встановити площину її витків паралельно до магнітної стрілки.
3. Скласти схему згідно рис.3.
4. Замкнути ключ К (перемикач П замкнений в довільному положенні) і за допомогою реостата підібрати таку силу струму, щоб кут відхилення стрілки α був близьким до 45° (в цьому випадку похибка вимірювань буде найменшою). Виміряти кути відхилення стрілки α_1 і α_2 по обох її кінцях. Змінивши перемикачем П напрямок струму на протилежний, виміряти кути відхилення стрілки α_3 і α_4.

5. Дослід повторити ще два рази при незмінній силі струму, результати записати в таблицю і усереднити.

6. За формулою (3) знайти H_0.

7. Знайти абсолютні похибки прямих вимірювань величин $^2, \alpha, R$.

8. Знайти абсолютну та відносну похибки вимірювання H_0 за формулами (4) і (5).

$$\varepsilon = \pm\sqrt{(\frac{\Delta I}{I})^2 + (\frac{\Delta R}{R})^2 + (\frac{2\Delta \alpha}{\sin 2\alpha})^2}\ . \qquad (4)$$

$$\Delta H_0 = \varepsilon H_0 . \qquad (5)$$

Увага! Величина $\Delta\alpha$ в (5) має бути виражена в *радіанах*.

9. Записати кінцевий результат.

Таблиця вимірювань

$I =$ $\Delta I_0 =$ $N =$ $R =$ $\Delta R_0 =$ $\Delta\alpha_0 =$

№ п/п	α_1	α_2	α_3	α_4
1				
2				
3				
ср	$\alpha_{ср} =$			

Національний університет водного господарства та природокористування

Контрольні запитання

1. Сформулювати і записати закон Біо-Савара-Лапласа та принцип суперпозиції для магнітного поля.
2. Який зв'язок між магнітною індукцією та напруженістю магнітного поля? В яких одиницях вимірюються В та Н?
3. Вивести формулу для напруженості магнітного поля в центрі колового струму.
4. Пояснити будову і принцип дії тангенс-гальванометра. Вивести робочу формулу.
5. Чому магнітна стрілка тангенс-гальванометра повинна бути невеликого розміру?
6. Від чого залежить кут відхилення стрілки в даній роботі?
7. Чому похибка вимірювань найменша, коли кут відхилення α близький до 45°?

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Лабораторна робота №4.6

Визначення прискорення вільного падіння за допомогою оборотного маятника

Мета роботи: вивчити основні фізичні властивості оборотного маятника і визначити за його допомогою прискорення вільного падіння.

Теоретичні відомості

(теорію до даної роботи див. також у конспекті лекцій, §§5.1-5.3)

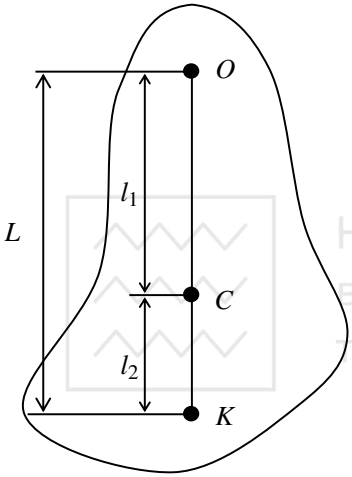


Рис. 1

Оборотний маятник – частковий випадок фізичного маятника. Фізичним маятником називається будь-яке тверде тіло, котре може коливатися у полі тяжіння навколо горизонтальної осі, що не проходить через його центр мас. Точка перетину O осі з вертикальною площиною, що проходить через центр мас C маятника називається точкою підвісу. При рівноважному положенні маятника точки O і C знаходяться на одній вертикалі, причому центр мас розміщений нижче точки підвісу (рис. 1). Якщо відхилити маятник на невеликий кут і відпустити його, то він буде здійснювати гармонічні коливання з періодом

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}, \qquad (1)$$

де g – прискорення вільного падіння, L – зведена довжина фізичного маятника,

$$L = \frac{I}{ml}. \qquad (2)$$

I – момент інерції маятника відносно осі обертання, що проходить через точку O, m – маса маятника, l – віддаль від осі обертання до центра мас.

Точка K, що лежить на лінії OC і віддалена від точки O на зведену довжину L маятника, називається центром коливань. Якщо такий маятник буде здійснювати коливання відносно осі, що проходить через точку K, то період коливань буде рівний періоду коливань відносно осі,

що проходить через точку O. Тому точки K і O називають спряженими. Маятник, котрий може коливатися відносно двох спряжених точок, називається оборотним.

Покажемо, що періоди коливань відносно осей, що проходять через точки K і O, однакові. Позначимо зведену довжину фізичного маятника при коливаннях відносно осі, що проходить через точку K, через L'. Якщо доведемо, що $L' = L$, то цим згідно з формулою (1) буде доведено, що періоди коливань відносно осей, котрі проходять через точки K і O, однакові.

Зведені довжини при коливаннях маятника відносно осей, що проходять через точки K і O,

$$L = \frac{I_1}{ml_1}, \quad L' = \frac{I_2}{ml_2}, \tag{3}$$

де I_1 і I_2 – моменти інерції маятника відносно відповідних осей. За теоремою Штейнера

$$I_1 = I_0 + ml_1^2, \quad I_2 = I_0 + ml_2^2 \tag{4}$$

(I_0 – момент інерції маятника відносно осі, що проходить через центр мас).

З (2) і (3) одержимо

$$L' = \frac{I_0 + ml_2^2}{ml_2}. \tag{5}$$

З рис. 1 видно, що $l_2 = L - l_1$. Підставляючи це співвідношення у (5), одержимо

$$L' = \frac{I_0 + ml_1^2 - mLl_1}{m(L - l_1)} + L. \tag{6}$$

Враховуючи перше з рівнянь (4), з (6) одержимо $L' = L$, що і потрібно було довести.

Практично підібрати такі точки O і K, відносно яких періоди коливань маятника були б однакові, важко. Оскільки періоди коливань дещо відрізняються, то згідно з формулами (1), (3) та (4) маємо

$$T_1^2 = \frac{4\pi^2 (I_0 + ml_1^2)}{mgl_1}, \quad T_2^2 = \frac{4\pi^2 (I_0 + ml_2^2)}{mgl_2}. \tag{7}$$

Виключаючи з рівнянь (7) I_0, знайдемо

Національний університет водного господарства та природокористування

$$g = \frac{4\pi^2 (l_1 + l_2)(l_1 - l_2)}{l_1 T_1^2 - l_2 T_2^2}. \qquad (8)$$

Якщо маятник оборотний, тобто $T_1 = T_2 = T$, то з (3) одержимо

$$g = \frac{4\pi^2 L}{T^2}. \qquad (9)$$

Остання формула використовується для визначення прискорення вільного падіння.

Опис експериментальної установки

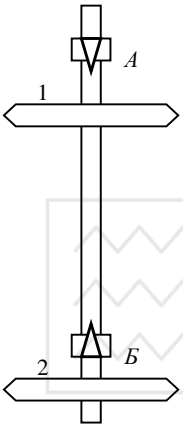


Рис. 2

Основою експериментальної установки є оборотний маятник (рис. 2). На стержні маятника розміщені дві опорні призми *А* та *Б*, які своїми ребрами можуть опиратись на верхній кронштейн установки, а маятник – здійснювати гармонічні коливання навколо горизонтальної осі, що співпадає з ребром призми. На стержні маятника розміщені також вантажі-сочевиці 1 та 2. Сочевиці кріпляться на стержні за допомогою гвинтів.

На нижньому кронштейні, положення якого на вертикальній колонці можна змінювати, розміщений фотодатчик. Він використовується для автоматичного підрахунку числа повних коливань і автоматичного запуску та зупинки мілісекундоміра, та вимірює час коливань. Лічильник коливань і мілісекундомір запускаються кнопкою «*Сброс*». Зупинка обох автоматичних лічильників здійснюється натисканням на клавішу «*Стоп*».

Хід роботи

1. Ввімкнути прилад в мережу електричного струму і натиснути кнопку «*Сеть*». На індикаторах обох лічильників висвітяться нулі.
2. Підвісити маятник так, щоб він опирався на призму *А* (рис.2). Відхилити маятник на невеликий кут (4-5°) від положення рівноваги і відпустити. Маятник почне коливатися. Натиснути клавішу «*Сброс*», лічильники почнуть рахувати коливання та час.
3. Відрахувати 50 коливань, клавішею «*Стоп*» вимкнути лічильники. Кнопку «*Стоп*» треба натискати тоді, коли на індикаторі висвітиться цифра 49.
4. Підвісити маятник на призмі *Б* і виконати пункти 2-3. Порівняти часи коливань, вони не повинні відрізнятись більше, як на 0,05 с. Якщо ця умова не виконується, то необхідно регулювати положення призм і

сочевиць, поки ця умова не буде виконана.

5. Визначити віддаль L між робочими ребрами призм A і $Б$ по сантиметрових насічках на стержні.

6. Знявши маятник з верхнього кронштейна і поклавши на призму, визначити віддалі l_1 та l_2 центра мас від робочих ребер призм А і Б відповідно.

7. Записати приладові похибки мілісекундоміра Δt_0 та вимірювання віддалі між робочими ребрами призм ΔL_0.

Таблиця вимірювань

$\Delta t_0 =$, $\Delta L_0 =$.

n	t_1	t_2	T_1	T_2	L	l_1	l_2
	с	с	с	с	10^{-2} м	10^{-2} м	10^{-2} м

Обробка результатів вимірювань

1. За формулою $T = \frac{t}{n}$ обчислити періоди коливань T_1 та T_2.

2. За формулою (9) визначити прискорення вільного падіння, підставляючи замість T значення T_1 .

3. Обчислити похибки періоду коливань за формулою

$$\Delta T' = T_1 - T = -\frac{l_2 T_1 - T_2}{l_1 - l_2}.$$

Приладову похибку вимірювання періоду $\Delta T_{пр}$ можна вважати рівною нулю, оскільки секундомір вимірює час з точністю до 1мс. Тому $\Delta T = \Delta T'$.

4. Знайти відносну похибку вимірювань за формулою

$$\varepsilon = \sqrt{\left(2\frac{\Delta \pi}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{\Delta L}{L}\right)^2 + \left(2\frac{\Delta T}{T}\right)^2} .$$

Обчислити абсолютну похибку $\Delta g = \varepsilon g$.

5. Записати кінцевий результат вимірювання.

Контрольні запитання

1. Які коливання називають гармонічними? Записати рівняння гармонічного коливання. Що таке амплітуда, фаза, частота коливання?

2. Який зв'язок існує між циклічною частотою і періодом коливання?
3. Який маятник називають фізичним ? Записати і пояснити диференціальне рівняння гармонічних коливань фізичного маятника.
4. Записати і пояснити вираз для періоду коливань фізичного маятника.
5. Що таке зведена довжина фізичного маятника? Як вона залежить від величин, що характеризують маятник ?
6. Які точки називають центром обертання і центром коливань? Який маятник називають оборотним?
7. Чому при виконанні досліду амплітуди коливань маятника повинні бути невеликими?

Лабораторна робота №4.7

Вивчення згасаючих коливань у коливальному контурі та визначення його параметрів

Мета роботи: вивчити залежність амплітуди згасаючих коливань від часу, визначити коефіцієнт згасання, період коливань, індуктивність і активний опір контура.

Теоретичні відомості і опис експериментальної установки

(теорію до даної роботи див. також у конспекті лекцій, §5.7)

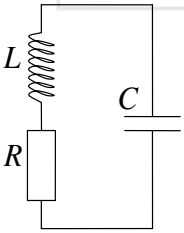


Рис. 1

Коливальний контур складається з котушки і конденсатора (рис.1). На цьому рисунку L – індуктивність котушки, R – її активний опір, C – ємність конденсатора. Якщо в контурі збудити вільні коливання, то вони будуть згасаючими. Напругу на конденсаторі можна записати у вигляді

$$U = U_m \cos(\omega t + \alpha), \tag{1}$$

де U_m – амплітуда коливання, ω – частота власних коливань контура, α – початкова фаза коливання, t – час. Амплітуда вільних коливань U_m зменшується з часом за експоненціальним законом

$$U_m = U_0 e^{-\beta t}, \tag{2}$$

де U_0 – початкове значення амплітуди, β – коефіцієнт згасання,

$$\beta = \frac{R}{2L}. \tag{3}$$

Циклічна частота власних коливань контура

Національний університет водного господарства та природокористування

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}\ , \tag{4}$$

де

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \tag{5}$$

ω_0 – частота власних коливань при відсутності згасання.

Нехай ми спостерігаємо згасаючі коливання не з початкового моменту часу $t = 0$, а з моменту t_0, коли амплітуда була U_0'. Величина $t' = t - t_0$ – це час, відрахований від початкового моменту t_0. Тоді для моменту t_0 з (2) отримаємо

$$U_0' = U_0 e^{-\beta t_0}\ . \tag{6}$$

Поділивши рівність (2) на рівність (6), отримаємо

$$U_m = U_0' e^{-\beta t'}\ .$$

З останньої рівності випливає, що експоненціальний закон зменшення амплітуди справедливий при довільному виборі початкового моменту відліку часу.

Будемо відраховувати час через певне ціле число коливань *k*. Якщо *T* період коливання, то $t = kT$. З формули (2) отримаємо

$$\ln\frac{U_0}{U_m} = \beta T k\ . \tag{7}$$

З рівності (7) випливає, що при експоненціальному законі зменшення амплітуди з часом залежність $\ln\frac{U_0}{U_m}$ від *k* має бути лінійною. З цієї лінійної залежності можна визначити добуток βT.

Період коливання можна знайти, вимірюючи час *t N* повних коливань $T = \frac{t}{N}$. Час *t* вимірюється за допомогою осцилографа, $t = l\tau$ де *l* – довжина лінії розгортки по осі *X*, що відповідає *N* повним коливанням, τ – час, що відповідає одній поділці осі *X*. Тоді одержимо

$$T = \frac{\tau l}{N}\ . \tag{8}$$

Визначивши таким способом *T*, а за формулою (7) добуток βT, можна знайти коефіцієнт згасання β.

Використаємо зв'язок між циклічною частотою і періодом коливань

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \tag{9}$$

З (4), (5) і (9) знайдемо

$$L = \frac{T^2}{C\left(4\pi^2 + \beta^2 T^2\right)}. \tag{10}$$

Цю рівність можна використати для визначення індуктивності контура при відомій ємності конденсатора C.

Активний опір контура R, можна знайти з (3)

$$R = 2\beta L. \tag{11}$$

Коливальний контур знаходиться всередині спеціальної установки і періодично збуджується імпульсами струму з частотою 100 Гц.

Хід роботи

1. Перемикач осцилографа «*Вольт/Деление*» перевести в положення найменшої чутливості (найбільшого значення).
2. Ручку регулювання яскравості променя осцилографа «☼» поставити в середнє положення, а ручку регулювання синхронізації «*Стабильность*» – у крайнє праве положення.
3. Перемикач виду синхронізації поставити в положення «*От сети*», перемикач полярності сигналу синхронізації – в положення негативного сигналу.
4. Ввімкнути живлення осцилографа «*Сеть*».
5. Ручками регулювання положення променя «↔», «↕» і яскравості «☼» добитися появи розгортки і розмістити її посередині екрану так, щоб вона співпадала з лінією координатної сітки.
6. Ручками яскравості «☼» і фокусування променя «⊙» добитися, щоб лінія розгортки була вузькою і світилась не дуже яскраво.
7. Ввімкнути живлення генератора згасаючих коливань.
8. Перемикачем «*Вольт/Деление*» добитися, щоб зображення по осі Y займало всю робочу частину екрана.
9. Ручками регулювання синхронізації «*Стабильность*», «*Уровень*» добитись стійкого зображення згасаючих коливань.
10. Ручку плавного регулювання «*Время/деление*» поставити в крайнє праве положення. Перемикачем добитися, щоб зображення по осі X зайняло всю робочу частину екрану. Ціна поділки по осі X τ визначаються за положенням перемикача «*Время/деление*». Ціну поділки τ та її похибку $\Delta\tau$ записати над таблицею. Похибка $\Delta\tau$ знаходиться по паспорту осцилографа.
11. Виміряти довжину розгортки l по осі X, в межах якої вкладається

ціле число N коливань. Оцінити похибку Δl. Вимірювання ведеться по масштабній сітці. Результати записуються над таблицею. Записати також ємність конденсатора C і її похибку ΔC.

12. Переміщуючи ручкою «↔» зображення по екрану, заміряти амплітуди $U_0, U_1, \ldots, U_k$ в той момент, коли дане коливання суміщене з вертикальним масштабом координатної сітки. Початкову добре видиму амплітуду приймаємо за U_0. Результати записуємо в таблицю.

Таблиця вимірювань

$\tau =$; $\Delta\tau_0 =$; $N =$; $l =$; $\Delta l_0 =$; $C =$; $\Delta C_0 =$.

k	1	2	3	4	5	6	7	8
U_k								
$\ln\frac{U_0}{U_k}$								

Національний університет водного господарства та природокористування

Обробка результатів вимірювань

1. Побудувати графік залежності $\ln\frac{U_0}{U_k}$ від k. Провести пряму, що найбільше наближена до експериментальних точок, і визначити тангенс кута нахилу цієї прямої до осі X, рівний βT. Оцінити абсолютну похибку $\Delta(\beta T)$.

2. За формулою (8) знайти період коливань контура. Обчислити за формулою $\frac{\Delta T}{T} = \sqrt{\left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\tau}{\tau}\right)^2}$ відносну похибку, по якій визначається абсолютна похибка ΔT. Записати результат вимірювання T з похибкою.

3. За формулою $\beta = \frac{(\beta T)}{T}$ знайти коефіцієнт згасання контура β. Відносна похибка визначається із співвідношення

$$\frac{\Delta\beta}{\beta} = \sqrt{\left(\frac{\Delta(\beta T)}{\beta T}\right)^2 + \left(\frac{\Delta T}{T}\right)^2}.$$

Знайти абсолютну похибку і записати результат вимірювання β з похибкою.

4. За формулою (10) знайти індуктивність контура. Відносна похибка результату визначається за формулою

$$\frac{\Delta L}{L}=\sqrt{\left(\frac{8\pi^2\Delta T}{T\left(4\pi^2+T^2\beta^2\right)}\right)^2+\left(\frac{2T^2\beta\Delta\beta}{4\pi^2+T^2\beta^2}\right)^2+\left(\frac{8\pi\Delta\pi}{4\pi^2+T^2\beta^2}\right)^2+\left(\frac{\Delta C}{C}\right)^2}.$$

Знайти абсолютну похибку ΔL і записати результат вимірювання з похибкою.

5. За формулою (11) обчислити активний опір контура R. Відносна похибка результату знаходиться з виразу

$$\frac{\Delta R}{R}=\sqrt{\left(\frac{\Delta\beta}{\beta}\right)^2+\left(\frac{\Delta L}{L}\right)^2}.$$

Знайти абсолютну похибку і записати результат вимірювання з похибкою.

Контрольні запитання

1. Вивести диференціальне рівняння згасаючих коливань в коливальному контурі.
2. Записати і пояснити розв'язок диференціального рівняння згасаючих коливань у контурі.
3. Записати і пояснити вираз для залежності амплітуди згасаючих коливань від часу.
4. Який фізичний зміст коефіцієнта згасання? Як він зв'язаний з активним опором контура?
5. Записати і пояснити вирази для частоти власних коливань контура при відсутності і наявності згасання.
6. Як зв'язаний період коливання з циклічною частотою?
7. Яка теоретично повинна бути залежність $\ln\frac{U_0}{U_k}$ від k? Чи виконується вона на практиці?
8. Що є одиницею індуктивності в СІ? Дати визначення цієї одиниці.

Лабораторна робота №4.8

Вивчення вимушених коливань у контурі

Мета роботи: вивчити залежність напруги на конденсаторі коливального контура від частоти і визначити основні параметри контура.

Теоретичні відомості і опис експериментальної установки

(теорію до даної роботи див. також у конспекті лекцій, §§5.8, 5.15)

Розглянемо вимушені коливання в коливальному контурі (рис.1), що складається з конденсатора ємністю C, котушки з індуктивністю L і активного опору R. Змушувальна змінна напруга U змінюється за гармонічним законом,

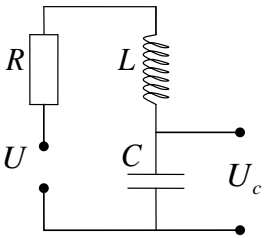


Рис. 1

$$U = U_0 \cos \omega t, \quad (1)$$

де U_0 – амплітудне значення змушувальної напруги, ω – циклічна частота.

Диференціальне рівняння вимушених коливань

$$\frac{d^2U_C}{dt^2} + 2\beta \frac{dU_C}{dt} + \omega_0^2 U_C = \omega_0^2 U_0 \cos \omega t, \quad (2)$$

де U_C – напруга на конденсаторі, β – коефіцієнт згасання, ω_0 – частота власних коливань контура при відсутності згасання.

$$\beta = \frac{R}{2L}, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (3)$$

Розв'язок диференціального рівняння (2) для віддалених моментів часу має вигляд

$$U_C = U_{C_0} \cos(\omega t + \alpha), \quad (4)$$

$$U_{C_0} = \frac{U_0 \omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}, \quad (5)$$

$$tg\alpha = -\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (6)$$

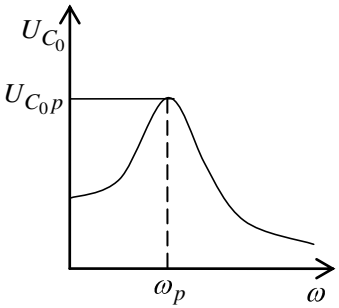


Рис. 2

З розв'язку (4) випливає, що напруга на конденсаторі здійснює гармонічні коливання ($U_{\tilde{N}_0}$ – амплітуда напруги, α – початкова фаза коливання).

З виразу (5) видно, що амплітуда вимушених коливань залежить від частоти змушувальної напруги ω. Ця залежність графічно показана на рис. 2.

При деякій частоті ω_p амплітуда коливань максимальна. Ця частота називається резонансною частотою, а явище збільшення амплітуди

коливань, коли частота коливань наближається до резонансної, називається резонансом.

Резонансну частоту можна знайти з умови $\frac{dU_{\tilde{N}_0}}{d\omega} = 0$ Розв'язуючи дане рівняння, отримаємо

$$\omega_p^2 = \omega_0^2 - 2\beta^2. \tag{7}$$

Резонансне значення амплітуди знайдемо з (5), підставляючи туди (7)

$$U_{\tilde{N}_{0\delta}} = \frac{U_0\omega_0^2}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \tag{8}$$

З виразів (5) та (8) знайдемо

$$k = \left(\frac{U_{C_0}}{U_{C_{0p}}}\right)^2 = \frac{4\beta^2\left(\omega_0^2 - \beta^2\right)}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}. \tag{9}$$

Знайдемо частоти, на яких $k = 1/2$. Розв'язуючи квадратне рівнянні (9) відносно ω^2 при $k = 1/2$ і замінюючи ω_0^2 через ω_p^2 згідно (7), отримаємо

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= \omega_p^2 - 2\beta\sqrt{\omega_p^2 + \beta^2}, \\ \omega_2^2 &= \omega_p^2 + 2\beta\sqrt{\omega_p^2 + \beta^2}. \end{aligned} \tag{10}$$

З рівняння (10) можна знайти ω_p^2 і β^2:

$$\omega_p^2 = \frac{\omega_2^2 + \omega_1^2}{2}, \tag{11}$$

$$\beta^2 = -\frac{\omega_p^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{\omega_p^2}{2}\right)^2 + \left(\frac{\left(\omega_2^2 - \omega_1^2\right)^2}{16}\right)}. \tag{12}$$

Рівності (11) і (12) використовуються для практичного визначення ω_p^2 і β^2. Визначати ω_p^2 по максимуму резонансної кривої незручно, тому що при резонансі *k* слабо залежить від ω і при визначенні ω_p по максимуму залежності *k* від ω допускається велика похибка. При $k = 1/2$ параметр *k* сильно залежить від частоти, тому визначення ω_p за формулою (11) буде точнішим.

Схема установки подана на рис.3.

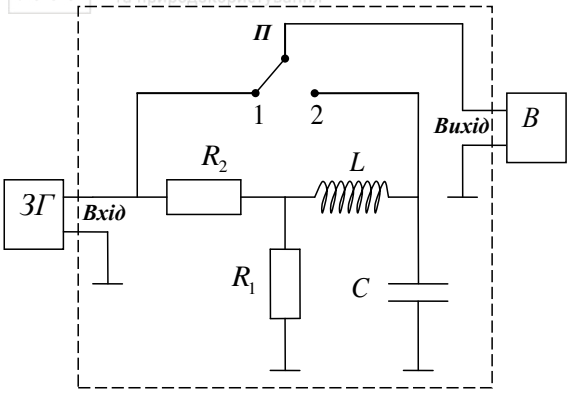


Рис. 3

Електричний контур змонтований у спеціальній установці і живиться від звукового генератора ЗГ, частоту коливань якого можна змінювати. Внутрішній опір звукового генератора повинен бути невеликим – не більше 100 Ом. Напруга на конденсаторі U_C вимірюється за допомогою вольтметра з великим внутрішнім опором (щоб не шунтував контур). Цим же вольтметром контролюється напруга на вході контура, щоб амплітуда коливань змушувальної напруги на всіх частотах була однаковою. Перемикачем *П*, вмонтованим в установці, вольтметр можна підключити на вхід контура (положення 1), або до конденсатора коливального контура (положення 2).

Хід роботи

1. Пересвідчитися в тому, що перемикач «Род работы» цифрового вольтметра встановлено в положення «*Un*», а ручку «*Предел измерения*» встановити в положення «*10V*». Ручку регулювання амплітуди звукового генератора «*Рег.выхода*» вивести вліво. Якщо внутрішній опір генератора не повинен перевищувати 100 Ом.
2. Поставити перемикач *П* в положення 1. Дати приладам прогрітися протягом 5хв.
3. Встановити частоту генератора 2кГц і ручкою «*Усиление*» встановити на вході контура напругу $U_k = 5B$. Цю напругу необхідно буде підтримувати постійною при проведенні вимірювань у всьому діапазоні частот.
4. Поставити перемикач *П* в положення 2 і виміряти напругу U_C на конденсаторі при заданій початковій частоті.
5. Послідовно задаючи частоти генератора в інтервалі 2÷10кГц і підрегульовуючи напругу U_k в положенні 1 перемикача П, виміряти напругу U_C на кожній частоті з заданого діапазону.

6. Записати над таблицею приладову похибку вимірювання частоти, напруги, напругу на контурі U_k, ємність конденсатора C і її похибку ΔC.

Таблиця вимірювань

$\Delta f_0 =$; $\Delta U_0 =$; $U_k =$; $C =$; $\Delta C_0 =$.

f								
U_C								
$k = \left(\frac{U_C}{U_{\tilde{N}_{0p}}} \right)^2$								

Обробка результатів вимірювання

1. Для всіх значень частоти визначити величину $k = \left(\frac{U_C}{U_{\tilde{N}_{0\partial}}} \right)^2$ і результати записати в таблицю.
2. На міліметровому папері побудувати графік залежності k від f. На рівні $k = 1/2$ провести пряму, паралельну осі f Визначити частоти f_1 і f_2, що відповідають точкам перетину цієї прямої з графіком залежності k від f.
3. За формулою $\omega = 2\pi f$ знайти частоти ω_1 та ω_2.
4. Користуючись формулою (11), знайти резонансну частоту ω_p.
5. За формулою (12) визначити коефіцієнт згасання β.
6. За формулою (7) визначити квадрат частоти власних коливань контура при відсутності згасання ω_0^2.
7. Користуючись другою формулою (3), визначити індуктивність контура L.
8. За першою формулою (3) знайти активний опір R.

Контрольні запитання

1. Які коливання називаються вимушеними?
2. Вивести диференціальне рівняння вимушених електромагнітних коливань у контурі.

3. Записати і пояснити розв'язок диференціального рівняння вимушених коливань.
4. Записати і пояснити залежність амплітуди вимушених коливань від частоти. Нарисувати відповідний графік.
5. Що таке резонанс? Записати і пояснити вираз для резонансної частоти коливального контура.
6. Що таке коефіцієнт згасання? Як він пов'язаний з активним опором контура?
7. Як зв'язана частота власних коливань при відсутності згасання в індуктивністю і ємністю контура?
8. Чому резонансна частота визначається не по максимальному значенню величини k, а по значеннях k на рівні $1/2$?

Лабораторна робота №4.9

Визначення швидкості звуку в повітрі

Мета роботи: вивчити особливості поширення звукових хвиль в різних середовищах і визначити швидкість звуку в повітрі.

Теоретичні відомості і опис експериментальної установки

(теорію до даної роботи див. також у конспекті лекцій, §§5.8, 5.15)

Поздовжні хвилі з частотами 20*Гц*-20*кГц* називають звуковими. Поширюючись у повітрі і досягаючи людського вуха, вони спричиняють специфічні відчуття, яке називають звуком. Рівняння звукової хвилі можна записати у вигляді

$$\xi = a\cos\omega\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right), \qquad (1)$$

де ξ – зміщення частинок, яке відбувається у напрямку поширення хвилі, що співпадає з віссю *X*, ω – циклічна частота коливання, a – амплітуда коливання, υ – швидкість хвилі.

Періодичність хвильового процесу у просторі (по координаті *x*) характеризується довжиною хвилі. Довжина хвилі – віддаль, на яку поширюється хвиля за період

$$\lambda = \upsilon T, \qquad (2)$$

де T – період коливання. Враховуючи (2) і те, що $\omega = 2\pi/T$, рівність (1) можна записати у вигляді

$$\xi = a\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right). \qquad (3)$$

Аргумент косинуса у формулі (3) називається фазою хвилі

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$\varphi = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right). \quad (4)$$

Установка для визначення швидкості звуку в повітрі складається з джерела звуку – гучномовця, який живиться від звукового генератора, та приймача – мікрофона. Вони знаходяться всередині закритого оргсклом простору. Віддаль між випромінювачем і приймачем регулюється за допомогою рукоятки і вимірюється за допомогою міліметрової шкали. Вимірювання фази в різних точках звукової хвилі здійснюється за допомогою фігур Лісажу. Електричні коливання з гучномовця і мікрофона підводяться до входів «*X*» і «*Y*» осцилографа. Внаслідок складання взаємно-перпендикулярних коливань одної частоти промінь осцилографа описує або еліпс, або пряму лінію в залежності від зсуву фаз.

Нехай фаза коливання гучномовця виражається у вигляді

$$\varphi_0 = \omega t + \alpha = \frac{2\pi}{T}t + \alpha, \quad (5)$$

фаза коливання при деякій віддалі x_1 між мікрофоном і гучномовцем згідно з (4)

$$\varphi_1 = \frac{2\pi}{T}\left(\frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda}\right). \quad (6)$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Різниця фаз між коливаннями гучномовця та мікрофона

$$\Delta\varphi_1 = \varphi_0 - \varphi_1 = \alpha + 2\pi\frac{x_1}{\lambda}. \quad (7)$$

Нехай фігурою Лісажу, що відповідає зсуву фаз (7), буде пряма лінія, тоді

$$\Delta\varphi_1 = k_1\pi, \; k_1 = 0,1,2,\ldots. \quad (8)$$

З (7) і (8) одержимо:

$$k_1\pi = \alpha + 2\pi\frac{x_1}{\lambda}. \quad (9)$$

Аналогічно, якщо при віддалі між гучномовцем і мікрофоном x_2 знову спостерігається пряма лінія, то

$$k_2\pi = \alpha + 2\pi\frac{x_2}{\lambda}. \quad (10)$$

З (9) та (10) маємо

$$(k_2 - k_1)\pi = 2\pi\frac{x_2 - x_1}{\lambda}.$$

Звідси знайдемо, враховуючи, що $\lambda = \upsilon/\nu$ (ν – частота),

$$\upsilon = \frac{2(x_2 - x_1)\nu}{k}, \qquad (11)$$

де $k = k_2 - k_1$ – ціле число.

Формула (11) використовується для визначення швидкості звуку в повітрі.

Хід роботи

1. Перемикач на задній стінці електронного блока установки поставити в положення «*Воздух*» Ручки «*Рег.выхода*» повернути вліво до упору. Ввімкнути вилку в розетку електричної мережі і тумблер включення установки «*Сеть*». Дати установці прогрітися на протязі 5хв.
2. Ручку регулювання яскравості променя осцилографа поставити в крайнє ліве положення і ввімкнути осцилограф для прогріву на 5хв.
3. Після прогріву осцилографа поволі ввести яскравість, відрегулювати розгортку і положення променя на екрані осцилографа. Чутливість осцилографа по входу *Y* повинна бути невеликою.
4. Перемикачем ввімкнути частотний діапазон 0,5÷1,5 *кГц*. Ручками грубого і плавного регулювання виставити частоту, близьку до 1200 *Гц*. Повернути ручку «*Рег.выхода*» вправо на невеликий кут. Ручками регулювання чутливості осцилографа на вході *Y*, тривалості розгортки, ручкою «*Рег.выхода*» установки добитися неспотвореного зображення сигналу синусоїди, що подається з мікрофона, майже на весь екран осцилографа.
5. Встановити мінімальну віддаль між випромінювачем і приймачем. Перемкнути осцилограф з режиму автоматичної розгортки у режим розгортки по входу *X*. На екрані повинно появитися зображення у вигляді еліпса. Відрегулювати його розміри, зручні для спостереження. Збільшуючи віддаль між випромінювачем і приймачем добитися, щоб еліпс перетворився у пряму лінію. Зафіксувати і записати у таблицю віддаль x_1 між випромінювачем і приймачем.
6. Збільшуючи віддаль між випромінювачем і приймачем, добитися, щоб знову утворилася пряма лінія. Записати в таблицю x_2 і k, що відповідають їй. Треба мати на увазі, що для першого значення x_2 після x_1, коли фігурою Лісажу буде пряма лінія, $k = 1$, для другого $k = 2$ і т.д. Записати також значення частоти ν.
7. Змінюючи віддаль між випромінювачем і приймачем на всю можливу величину, кілька разів виміряти x_1, x_2, k, ν.

8. Записати приладові похибки віддалі Δx_0 та частоти $\Delta \nu_0$.
9. Вивести вліво ручку регулювання яскравості осцилографа і ручку «*Рег.выхода*» установки. Виключити осцилограф і установку.

Таблиця вимірювань

$\Delta x_0 =$, $\Delta \nu_0 =$.

№ п.п.	x_1	x_2	k	$z = \dfrac{x_2 - x_1}{k}$	$\Delta z = \lvert z_i - z_{cp} \rvert$	ν	$\Delta \nu$
1.							
2.							
3.							
4.							
5.							
сер							

Обробка результатів вимірювання

1. Обчислити значення швидкості звуку за формулою (11).
2. Визначити відносну похибку вимірювання за формулою $\varepsilon = \sqrt{\left(\dfrac{\Delta z}{z}\right)^2 + \left(\dfrac{\Delta \nu}{\nu}\right)^2}$.
3. Знайти абсолютну похибку швидкості $\Delta \upsilon = \varepsilon \upsilon$.
4. Записати кінцевий результат вимірювання.

Контрольні запитання

1. Що таке хвиля? Довжина хвилі?
2. Записати і пояснити рівняння плоскої хвилі.
3. Які коливання називають звуковими?
4. Що таке фаза хвилі і від чого вона залежить?
5. Коли виникають фігури Лісажу? В якому випадку спостерігається пряма лінія?
6. Коли виникають стоячі хвилі? Записати і пояснити рівняння плоскої хвилі.
7. Що таке вузли та пучності? Знайти координати вузлів і пучностей.
8. Яка віддаль між сусідніми вузлами (пучностями); між сусідніми вузлом та пучністю?

Національний університет водного господарства та природокористування

Лабораторна робота №4.10

Вимірювання довжини хвилі і частоти електромагнітних коливань

Мета роботи: вивчити особливості поширення електромагнітних хвиль по двохпровідній лінії, визначити довжину хвилі і частоту електромагнітних коливань.

Теоретичні відомості

(теорію до даної роботи див. також у конспекті лекцій, §5.16)

Електромагнітна хвиля може поширюватись не тільки у вільному просторі, а й по двохпровідній лінії. Як і у вільному просторі, електромагнітна хвиля в двохпровідній лінії є поперечною, тобто вектори напруженості електричного і магнітного полів коливаються у взаємноперпендикулярних напрямках. Як і у вільному просторі коливання векторів $\vec{E}$ і $\vec{H}$ відбуваються синфазно в просторі і часі:

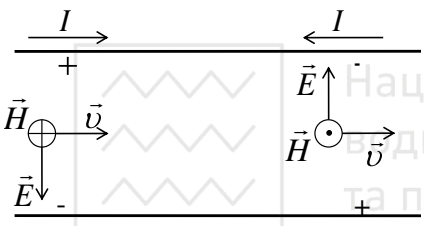


Рис. 1

$$E = E_m \cos\omega\left(t - \frac{x}{v}\right), \qquad H = H_m \cos\omega\left(t - \frac{x}{v}\right). \tag{1}$$

де E_m і H_m – амплітудні значення напруженостей електричного і магнітного полів (вони залежать від координат y і z), v – швидкість поширення хвилі, ω – циклічна частота коливання, x – координата, в напрямку поширення хвилі (вісь x розміщена вздовж двохпровідної лінії). Напрямки векторів напруженості електричного і магнітного полів у площині двохпровідної лінії показані на рис.1.

Змінне електричне поле викликає появу струму у провідниках лінії і різниці потенціалів (напруги) між ними. Напруга і сила струму описується рівняннями, подібними до (1). Звідси видно, що всяку хвильову величину можна описувати однаковим хвильовим рівнянням

$$\xi = \xi_m \cos\omega\left(t - \frac{x}{v}\right), \tag{2}$$

де під ξ можна розуміти напруженості електричного або магнітного поля, силу електричного струму чи напругу.

Хвильовий процес характеризується довжиною хвилі, яка дорівнює віддалі, що проходить хвиля за період

$$\lambda = vT\,. \tag{3}$$

Довжина хвилі λ визначає періодичність хвильового процесу по координаті x. Пройшовши шлях рівний λ, хвиля змінює свою фазу на 2π.

Якщо у формулі (2) скористуватися зв'язком $\omega = 2\pi/T$, то рівняння біжучої хвилі можна записати у вигляді

$$\xi = \xi_m \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right). \qquad (4)$$

При накладанні двох хвиль однакової частоти, що поширюються у протилежних напрямках, утворюється стояча хвиля. Така ситуація виникає при відбиванні біжучї хвилі від перешкоди. Рівняння хвилі, що поширюється у протилежному напрямку, осі x можна знайти з (4) заміною x на $-x$. Тоді в результаті накладання двох хвиль, що поширюються у протилежних напрямках, одержуємо рівняння стоячої хвилі

$$\xi = 2\xi_m \cos 2\pi \frac{x}{\lambda} \cos \omega t\,. \qquad (5)$$

З рівняння (5) видно, що в кожній точці стоячої хвилі здійснюються гармонічні коливання з циклічною частотою ω, тобто рівняння цього коливання можна записати у вигляді

$$\xi = A\cos \omega t\,, \qquad (6)$$

де A – амплітуда коливання у стоячій хвилі. З порівняння (5) і (6) одержимо

$$A = 2\xi_m \cos 2\pi \frac{x}{\lambda}\,. \qquad (7)$$

З рівності (7) видно, що амплітуда коливання в стоячій хвилі залежить від положення точки (через координату x). Точки, в яких амплітуда коливань максимальна, називаються пучностями. В пучностях $\cos 2\pi \frac{x}{\lambda} = \pm 1$. Звідси одержуємо координату пучності

$$x_n = k\frac{\lambda}{2},\ k = 0,1,2,3\ldots. \qquad (8)$$

З формули (8) видно, що віддаль між двома сусідніми пучностями дорівнює $\lambda/2$.

Точки, в яких амплітуда коливання дорівнює нулю, називаються вузлами. Для вузлів $\cos 2\pi \frac{v}{x} = 0$, звідси координати вузлів

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$x_в = (k+1)\frac{\lambda}{4}. \qquad (9)$$

З формули (9) видно, що віддаль між двома сусідніми вузлами дорівнює $\lambda/2$. З (8) та (9) можна знайти віддаль між сусідніми вузлом і пучністю. Вона дорівнює $\lambda/4$.

Положення вузлів і пучностей на двохпровідній лінії залежить від крайових умов на кінці лінії. Якщо на кінці лінія розімкнута, то там утворюється пучність напруги і вузол струму. Якщо ж лінія на кінці коротко замкнута, то там утворюється пучність струму і вузол напруги. Звідси видно, що вузли і пучності напруги зміщені відносно вузлів і пучностей струму на $\lambda/4$.

В даній роботі фіксуються пучності напруги. По лінії пересувається місток з невеликою лампочкою, яка приєднана до лінії за допомогою ковзних контактів. У пучностях напруги лампочка яскраво спалахує. Координати пучності дорівнюватимуть

$$x_{nk} = x_0 + l_k, \qquad (10)$$

де $l = \lambda/2$, k – номер пучності, x_0 – початкове зміщення лінійної шкали.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Хід роботи

1. Ввімкнути установку та прогріти її на протязі 5хв.
2. Переміщуючи місток по лінії, визначити положення пучностей. Координати пучностей x_{nk} і записати в таблицю.
3. Оцінити приладову похибку вимірювання координат пучностей Δx_0.

Таблиця вимірювань

$\Delta x_0 =$.

Номер k	0	1	2	3	4	5	6	7
x_{nk}								
$l_k = x_{nk+1} - x_{nk}$								
$\lvert\Delta l_k\rvert$								

Обробка результатів вимірювання

1. Знайти різницю координат двох сусідніх пучностей $l_k = x_{nk+1} - x_{nk}$, визначити середнє значення цієї величини.
2. Обчислити модуль відхилення кожного значення l_k від середнього

l_{cp} $|\Delta l_k| = |l_k - l_{cp}|$.

3. За формулою $\lambda = 2l$ обчислити довжину хвилі.

4. Знайти відносну похибку λ за формулою $\varepsilon_\lambda = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = 2\frac{\Delta l}{l}$. Визначити абсолютну похибку $\Delta\lambda = \varepsilon_\lambda \lambda$.

5. Записати кінцевий результат вимірювання λ.

6. За формулою $\nu = \frac{c}{\lambda}$ визначити частоту генератора (c – швидкість світла у вакуумі).

7. Обчислити відносну похибку частоти за формулою $\varepsilon_\nu = \frac{\Delta\nu}{\nu} = \sqrt{\left(\frac{\Delta c}{c}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right)^2}$.

8. Знайти абсолютну похибку $\Delta\nu = \varepsilon_\nu \nu$ і записати результат вимірювання ν з похибками.

Контрольні запитання

1. Дати визначення та записати рівняння електромагнітної хвилі. Що таке довжина хвилі?
2. Який напрямок мають вектори напруженості електричного і магнітного полів при поширенні електромагнітної хвилі вздовж двохпровідної лінії?
3. Коли утворюються стоячі хвилі? Записати і пояснити рівняння стоячої хвилі.
4. Який характер має коливальний рух у стоячій хвилі? Що таке вузли і пучності?
5. Знайти координати вузлів і пучностей.
6. Яка віддаль між двома сусідніми вузлами, пучностями, сусідніми вузлом і пучністю?
7. Який зв'язок існує між частотою коливань і довжиною хвилі?
8. Які крайові умови виконуються на кінці двохпровідної лінії в залежності від того, замкнута лінія чи розімкнута?

Оптика. Елементи квантової механіки. Атомне ядро

Лабораторна робота № 5.1

Визначення довжини світлової хвилі за допомогою біпризми Френеля

Мета роботи: спостерігаючи інтерференційну картину, одержану за допомогою біпризми Френеля, визначити довжину світлової хвилі.

Теоретичні відомості

(теорію до даної роботи див. також у конспекті лекцій, §§6.2, 6.3)

Як відомо, фаза світлової хвилі більшості джерел змінюється швидко і хаотично з часом. Це відбувається тому, що фази коливань різних атомів не зв'язані, а випромінювання атома триває дуже короткий час ($10^{-8}\,c$). Для одержання когерентних світлових пучків застосовується поділ одного пучка на два. В обох пучках фаза буде змінюватись однаково, тому різниця фаз не буде залежати від часу, тобто такі світлові пучки будуть когерентними. Під час накладання когерентних світлових пучків спостерігається інтерференційна картина з нерівномірною освітленістю. Місця, де інтенсивність максимальна, називаються максимумами, а де інтенсивність мінімальна – мінімумами.

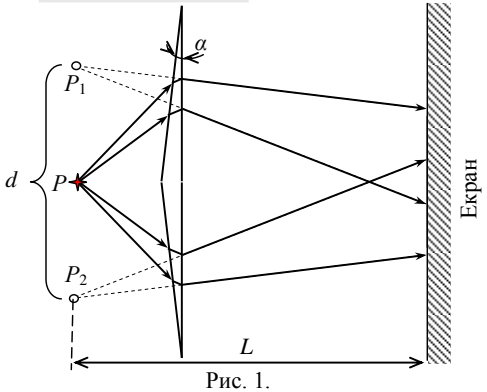


Рис. 1.

Когерентні світлові пучки можна утворити за допомогою біпризми Френеля. Біпризма Френеля – це подвійна скляна призма з невеликим заломлюючим кутом α (рис. 1).

Біпризма освітляється світлом, що проходить через щілину, розташовану паралельно ребру призми. Тому можна вважати, що щілина є точковий джерелом світла P. Промені, котрі падають на верхню і нижню частини біпризми, після проходження крізь неї розходяться. Можна показати, що у випадку малого заломного кута призми α та великої відстані L від джерела P уявні продовження заломлених променів перетнуться в точках P_1 та P_2 (рис. 1). Ці точки є уявними зображеннями реального

джерела P, і виконують роль точкових когерентних джерел світла.

Промені, що виходять з уявних джерел P_1 та P_2 накладаються. Оскільки вони когерентні, то за біпризмою на екрані утворюється інтерференційна картина у вигляді чергування темних та світлих смуг, якщо світло монохроматичне, або кольорових смуг, якщо світло біле. Розподіл інтенсивності освітленості екрану у випадку монохроматичного світла зображений на рис.2.

Опис експериментальної установки та вивід робочої формули

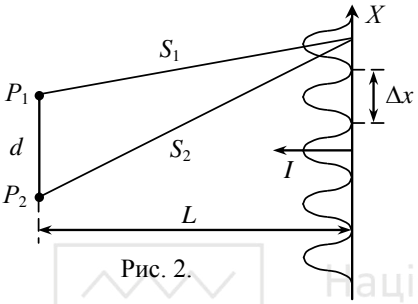


Рис. 2.

Можна показати, що ширина інтерференційної смуги від двох точкових когерентних джерел дорівнює

$$\Delta x = \frac{L}{d}\lambda \qquad (1)$$

Під час виконання цієї лабораторної роботи вимірюється ширина a певної кількості k інтерференційних смуг за допомогою окулярного мікрометра. Тоді ширину смуги у цьому випадку можна визначити за формулою

$$\Delta x = \frac{a}{k} \qquad (2)$$

Віддаль між уявними джерелами світла d безпосередньо виміряти не можна. Для її знаходження між біпризмою і площиною екрана (площиною окулярного мікрометра) розміщується збиральна лінза. Її положення підбирається таким чином, щоб в окулярному мікрометрі було видно зображення уявних джерел (у вигляді двох чітких світлих ліній). Вимірюється віддаль c між зображеннями джерел. Згідно формули лінійного збільшення лінзи отримаємо

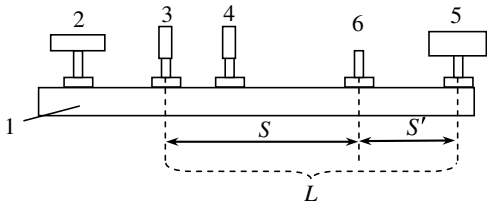


Рис. 3.

$$d = \frac{cS}{S'}. \qquad (3)$$

де S – віддаль від лінзи до предмета (щілини); S' – віддаль від лінзи до зображення (площини окулярного мікрометра). З формул (1), (2) та (3) знаходимо вираз для довжини світлової хвилі

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$\lambda = \frac{aSc}{kLS'}. \qquad (4)$$

Установка, для визначення довжини хвилі схематично зображена на рис.3. На цьому рисунку: 1 – оптична лава; 2 – джерело світла; 3 – щілина; 4 – біпризма Френеля; 5 – окулярний мікрометр; б – додатковий рейтер для установки лінзи.

Хід роботи

1. Ввімкнути живлення джерела світла. Регулюючи його положення, добитися, щоб промінь потрапляв на щілину.

2. Регулюючи ширину щілини і положення окулярного мікрометра, добитися чіткої інтерференційної картини.

3. Відрахувати якомога більше число k інтерференційних смуг. Користуючись окулярним мікрометром, визначити координати a_1 та a_2 крайніх смуг. Дослід для визначення a_1 та a_2 повторити кілька разів.

4. Закріпити на оптичній лаві між біпризмою і окулярним мікрометром збиральну лінзу.

5. Відрегулювати положення лінзи так, щоб чітко було видно зображення обох джерел. У цьому положенні виміряти віддаль між лінзою і щілиною S і лінзою та площиною окулярного мікрометра S'.

6. Заміряти координати зображень джерел c_1 та c_2.

7. Зміщуючи лінзу, знову виконати пункти 5 та 6, вимірюючи кілька разів значення величин S, S', c_1, c_2.

8. Виміряти за допомогою лінійки віддаль L між щілиною і площиною окулярного мікрометра.

Таблиця вимірювань

$k =$ $L =$

№ п/п	a_1	a_2	a	S	S'	c_1	c_2	c
CI								
1 2 3 4 5								
Сер								

Обробка результатів вимірювань

1. Для кожного виміру визначити $a = a_2 - a_1$, $c = c_2 - c_1$ Знайти середні значення величин a, c, S, S'.
2. За формулою (4) знайти довжину хвилі світла λ.
3. Обчислити відносну та абсолютну похибки експерименту за формулами (5) і записати кінцевий результат.

$$\varepsilon = \sqrt{\left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\Delta S}{S}\right)^2 + \left(\frac{\Delta S'}{S'}\right)^2 + \left(\frac{\Delta c}{c}\right)^2 + \left(\frac{\Delta L}{L}\right)^2}\ ,\ \Delta\lambda = \varepsilon\lambda \quad (5)$$

Контрольні запитання

Які хвилі називаються когерентними?

1. Які є способи отримання когерентних світлових пучків?
2. Що таке інтерференція?
3. Записати і пояснити умови максимуму і мінімуму інтерференції світла.
4. Який вигляд має інтерференційна картина від двох точкових когерентних джерел на плоскому екрані? Записати і пояснити умови максимуму і мінімуму для цього випадку.
5. Нарисувати хід променів у призмі. У якому випадку призма створює уявне зображення точкового, джерела світла і де воно знаходиться?
6. Як у даній роботі знаходиться віддаль між уявними джерелами світла?
7. Вивести робочу формулу.

Лабораторна робота № 5.2

Визначення радіуса кривизни лінзи за допомогою кілець Ньютона

Мета роботи: дослідити інтерференцію світла на сферичному клині і визначити радіус кривизни лінзи.

Теоретичні відомості

(теорію до даної роботи див. також у конспекті лекцій, §§6.2-6.4)

Одним із найцікавіших випадків інтерференції світла є так звані кільця Ньютона. Якщо на плоску скляну пластинку E (рис. 1) покласти опуклим боком плоско-опуклу лінзу L з дуже великим радіусом кривизни R (кілька метрів), то, при освітленні монохроматичним (одноколірним) світлом, починаючи від місця стикання лінзи зі скляною пластинкою, спостерігається декілька концентричних темних і світлих кілець або, при освітлені білим світлом, райдужних кілець. Ці кільця дістали назву кілець Ньютона. Кільця Ньютона утворюють

геометричні місця точок, в яких різниця ходу когерентних світлових променів стала внаслідок сталої товщини середовища (тому їх називають смугами однакової товщини). Зазначене явище є результатом інтерференції когерентних променів на дуже тонкому повітряному прошарку, товщина якого d поступово збільшується від місця дотику. Цей прошарок утворюється між кривою поверхнею лінзи і плоскою поверхнею пластинки. Кільця Ньютона можна спостерігати як у відбитому, так і в прохідному світлі. У першому випадку у центрі кільець буде темна пляма, а в другому – світла. Кільця у відбитому світлі видно краще, ніж в прохідному.

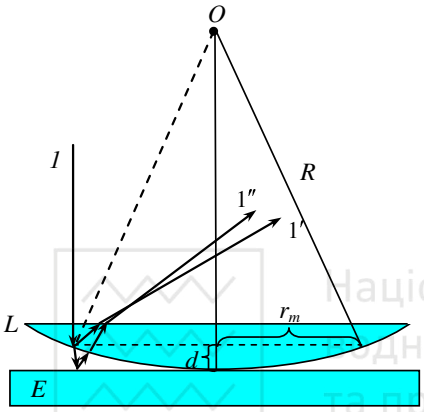


Рис. 1.

На рис.1 зображено утворення двох когерентних променів 1′ та 1″ з одного променя 1. Оскільки, між лінзою L і пластинкою E знаходиться повітря ($n = 1$) і пучок світла падає нормально до пластинки та практично до нижньої поверхні лінзи (кривизна лінзи мала), то оптична різниця ходу Δ світлових променів 1′ та 1″ у цьому випадку буде дорівнювати

$$\Delta = 2d + \frac{\lambda}{2},$$

де d – товщина повітряного прошарку в певному місці. Доданок $\frac{\lambda}{2}$ в останній формулі виникає тому, що під час відбивання хвилі від межі середовища з більшим показником заломлення її фаза змінюється на π.

Як відомо, умови мінімумів та максимумів інтерференції когерентних променів математично виражаються так:

$$\Delta_{\min} = (2m+1)\frac{\lambda}{2}, \quad \Delta_{\max} = 2m\frac{\lambda}{2},$$

де m – ціле число, котре в цьому випадку визначає порядковий номер кільця.

Згідно трьох останніх формул умова виникнення темних кілець матиме вигляд:

$$2d = m\lambda. \qquad (1)$$

Величина d може бути виражена за теоремою Піфагора через радіус

кривизни лінзи R і радіус темного інтерференційного кільця r_m. З рис. 1 знаходимо, що

$$r_m^2 = R^2 - (R-d)^2 = (2R-d)d\,.$$

Якщо d мале порівняно з R, то

$$r_m^2 = 2Rd\,. \qquad (2)$$

З рівнянь (1) та (2) слідує, що

$$r_m^2 = mR\lambda\,. \qquad (3)$$

З формули (3) видно, що залежність r_m^2 від номера кільця m лінійна, тобто може бути представлена у вигляді

$$r_m^2 = \alpha m\,, \qquad (4)$$

де α – коефіцієнт пропорційності, що має розмірність площі. З формул (3) і (4) визначимо радіус кривизни лінзи:

$$R = \frac{\alpha}{\lambda}\,. \qquad (5)$$

Опис експериментальної установки

Дослід виконується за допомогою стереоскопічного мікроскопа, в одному з окулярів якого вмонтовано джерело монохроматичного світла відомої довжини хвилі λ.

Для оцінки лінійних розмірів видимого під мікроскопом об'єкта застосовується окуляр зі шкалою. Окуляр вставляють в одну з окулярних трубок.

В таблиці 1 вказано, якій величині об'єкта відповідає одна поділка шкали окуляра при всіх збільшеннях мікроскопа. Щоб визначити лінійні розміри об'єкта, необхідно порахувати число поділок шкали, яке вкладається в його вимірювальну ділянку. Це число треба помножити на число, вказане в перевідній таблиці 1, що відповідає тому збільшенню мікроскопа, за якого проводилося вимірювання.

Таблиця 1

Збільшення на шкалі ручок	Одна поділка шкали відповідає величині об'єкта (в *мм*)
1	0,1
2	0,15
4	0,025
7	0,014

Хід роботи

Ввімкнути освітлювач і перевірити, чи освітлюється поле зору мікроскопа.

Обертаючи діоптрійне кільце на окулярі, добитися різкого зображення шкали.

Покласти на предметний столик мікроскопа пристрій для спостереження кілець Ньютона.

Переміщувати пристрій "кільця Ньютона" так, щоб точка стикання лінзи і пластинки – темна пляма – опинилася точно в центрі поля зору мікроскопа. Кільця Ньютона повинні бути виразно помітні. Якщо цього немає, то потрібно налагодити фокусування мікроскопа.

Заміряти радіуси темних кілець Ньютона відповідно до їх номерів (з урахуванням збільшення об'єктива). Значення довжини світлової хвилі λ вказується лаборантом чи викладачем.

Таблиця вимірювань

$\lambda =$

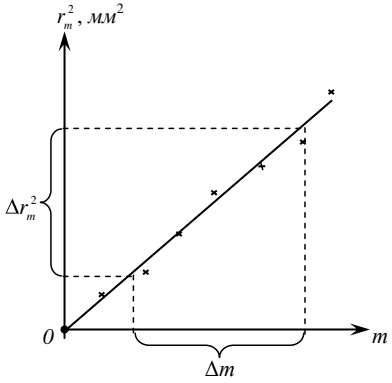
m	1	2	3	4	5	6
r_m,						
r_m^2,						

Національний університет водного господарства та природокористування

Обробка результатів вимірювань

1. Обчислити для кожного кільця значення квадратів їх радіусів і результати занести до таблиці.

2. На міліметровому папері побудувати графік залежності r_m^2 від m у вигляді прямої, що найкраще наближається до експериментальних точок (рис. 2).



3. Вибрати на координатній осі абсцис довільний інтервал Δm та за допомогою графіка визначити на осі ординат відповідний йому інтервал (рис. 2).

4. Згідно формули (4) коефіцієнт α дорівнює тангенсу кута нахилу цієї прямої до осі m. Обчислити значення цього коефіцієнта за формулою

$$\alpha = \frac{\Delta r_m^2}{\Delta m}.$$

5. За формулою (5) визначити радіус кривизни лінзи.

6. Оцінити похибку величини, порівнявши отриманий результат із паспортним значенням R, і записати кінцевий результат.

Контрольні запитання

1. У чому полягає явище інтерференції світла?
2. Зависати і пояснити умови максимумів і мінімумів світла у випадку інтерференції когерентних променів.
3. Докладно пояснити як утворюються інтерференційні кільця Ньютона.
4. Як зміниться картина кілець Ньютона при розгляданні їх у прохідному світлі?
5. Чому інтерференційна картина зникає при збільшенні віддалі між лінзою і пластинкою?
6. Чому радіус кривизни лінзи повинен бути великим?
7. Чому під час виконанні експерименту промені повинні падати перпендикулярно до нижньої пластинки?
8. Де густіше розміщені інтерференційні кільця – в центрі чи на периферії? Чому?
9. Вивести і пояснити формули для радіусів світлого і темного інтерференційних кілець Ньютона.

Лабораторна робота № 5.3

Вивчення дифракції світла

Мета роботи: 1) перевірити метод зон Френеля у випадку дифракції світла на щілині; 2) визначити довжину світлової хвилі за допомогою дифракційної решітки.

Теоретичні відомості

(теорію до даної роботи див. також у конспекті лекцій, §§6.5-6.6)

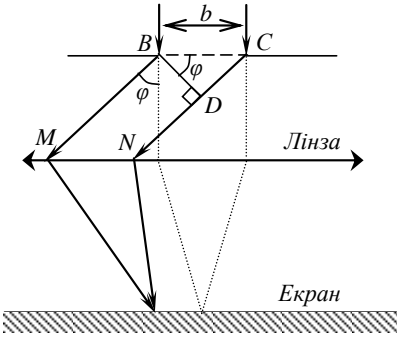


Рис. 1.

Амплітуда світлових коливань під час дифракції визначається за принципом Гюйгенса-Френеля. Взагалі це складна математична задача. Однак, у деяких простих і важливих практичних випадках наближене значення результуючої амплітуди може бути знайдено методом зон Френеля.

Нехай паралельний пучок монохроматичного світла падає

нормально на довгу прямокутну щілину *BC* шириною *b* (рис. 1).

Згідно принципу Гюйгенса-Френеля точки щілини є когерентними вторинними джерелами, коливання котрих відбуваються в одній фазі, бо площина щілини збігається з хвильовою поверхнею падаючої хвилі.

Хвиля, що дифрагує під кутом φ збирається лінзою на екрані. Щілину *BC* можна розбити на зони Френеля у вигляді смуг таким чином щоб оптична різниця ходу променів *CD* містила ціле число *k* половин довжин хвилі $\lambda/2$. При цьому ширина кожної зони буде дорівнювати $\frac{\lambda}{2}\sin\varphi$. Всі зони у певному напрямі випромінюють світло однаково. У випадку інтерференції світла від кожної пари сусідніх зон амплітуда результуючих коливань дорівнює нулю, оскільки ці зони спричиняють коливання з однаковими амплітудами, але протилежними фазами.

Якщо у щілині вкладається парне число ($2k$) зон Френеля, то амплітуда коливань у точці спостереження дорівнює нулю. Ця умова може бути записана у вигляді

$$b\sin\varphi = k\lambda,\ \mathrm{k} = 1, 2, 3, \ldots \qquad (1)$$

Під кутом φ, що задовольняє умові (1), спостерігається дифракційний мінімум.

Якщо у щілині вкладається непарне число зон Френеля ($2k+1$), то коливання від усіх зон, крім однієї, взаємно гасяться. У цьому випадку під певним кутом φ спостерігається дифракційний максимум, умова якого записується так

$$b\sin\varphi = (2k+1)\frac{\lambda}{2}. \qquad (2)$$

При збільшенні кута φ число зон Френеля, що вкладаються у щілині, збільшується, а площа кожної зони зменшується. Це призводить до зменшення амплітуди (освітленості) зі збільшенням кута дифракції. У напрямку $\varphi = 0$ вся щілина світить як одна зона. Тому в центрі дифракційної картини спостерігається максимум найбільшої інтенсивності. Залежність інтенсивності від кута дифракції φ зображена на рисунку 3.

Дифракцію світла можна спостерігати не лише від однієї щілини, а й від системи багатьох вузьких щілин – дифракційної решітки. Для цього треба в установці, зображеній на рис. 1, замість щілини розмістити дифракційну решітку. В результаті спостерігається значно складніша дифракційна картина, котра для монохроматичного світла складається із чергування основних та побічних мінімумів і максимумів

освітленості. Розрахунки показують, що положення k-того основного максимуму відповідає формулі:

$$d\sin\varphi = k\lambda,\ \mathrm{k} = 0, 1, 2, 3, \ldots \qquad (3)$$

де d – період дифракційної решітки (відстань між двома сусідніми щілинами), φ – кут дифракції. За формулою (3) можна визначити довжину світлової хвилі.

Опис експериментальної установки та виведення робочої формули

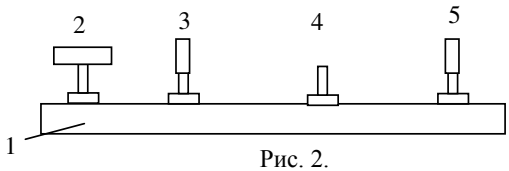


Рис. 2.

Схема установки зображена на рис. 2. На цьому рисунку: 1 – оптична лава; 2 – газовий лазер; 3 – рейтер для установки щілини або дифракційної решітки; 4 – рейтер для установки збиральної лінзи з відомою фокусною відстанню; 5 – екран з затискачами, якими можна затискати аркуш паперу.

Світло від лазера падає на щілину, дифрагує і на екрані виникає дифракційна картина. Якщо ширина щілини значно менша ніж віддаль до екрану $b \ll L$ (рис. 3), то промені, що виходять від країв щілини і потрапляють у певну точку екрану, є практично паралельними (як у випадку, зображеному на рис. 1). За цих обставин умова (1) для щілини виконується досить точно.

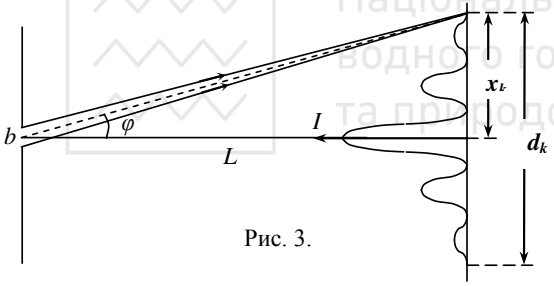


Рис. 3.

Для утворення на екрані чіткої дифракційної картини від дифракційної решітки застосовується збиральна лінза, яка закріплюється в рейтері 4, а сам рейтер розміщується так, щоб екран знаходився у фокальній площині лінзи.

Завдання 1

Перевірка методу зон Френеля при дифракції світла на щілині

З рис. 3 видно, що

$$x_k = \frac{d_k}{2} \qquad (4)$$

та

Національний університет водного господарства та природокористування

$$\sin\varphi = \frac{x_k}{\sqrt{L^2 + x_k^2}}, \tag{5}$$

де d_k – віддаль між двома мінімумами одного порядку, L – віддаль від щілини до екрану. З (1) та (5) отримаємо

$$\frac{x_k}{\sqrt{L^2 + x_k^2}} = \frac{\lambda}{b} k\ . \tag{6}$$

Із рівняння (6) випливає, що при виконанні умови (1) вираз

$$f(k) = \frac{x_k}{\sqrt{L^2 + x_k^2}} \tag{7}$$

є прямо пропорційною функцією від k. Тому графіком залежності $f(k)$ від k повинна буди пряма лінія, що проходить через початок координат. Саме це й перевіряється у лабораторній роботі.

Зауважимо, що у випадку $x_k << L$ функція $f(k)$ має вигляд

$$f(k) = \frac{x_k}{L}\ . \tag{8}$$

Національний університет водного господарства та природокористування

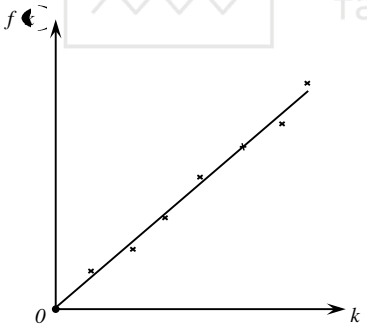


Рис. 4.

Хід роботи

1. Встановити в рейтер 3 щілину.
2. Закріпити на екрані чистий аркуш паперу.
3. Увімкнути лазер. Відрегулювати положення щілини так, щоб на екрані спостерігалась чітка дифракційна картина і добре було видно не менше семи мінімумів.
4. Відмітити олівцем положення 7-8 мінімумів по обидва боки від середини дифракційної картини.
5. Зняти аркуш паперу і за допомогою штангенциркуля визначити віддалі d_k для мінімумів однакового порядку та занести їх значення до таблиці 1.
6. Виміряти віддаль L від щілини до екрану.
7. За формулою (4) обчислити значення величин x_k для кожного k.
8. Для кожного значення k за формулою (8) обчислити значення $f(k)$.
9. На міліметровому папері побудувати графік залежності $f(k)$ від k у вигляді прямої, що найкраще наближається до експериментальних

точок (рис. 4).

10.Зробити висновок про справедливість методу зон Френеля під час дифракції світла на вузькій щілині.

Таблиця вимірювань

$L=$

k	1	2	3	4	5	6	7
d_k,							
x_k,							
$f(k)$,							

Завдання 2

Визначення довжини світлової хвилі

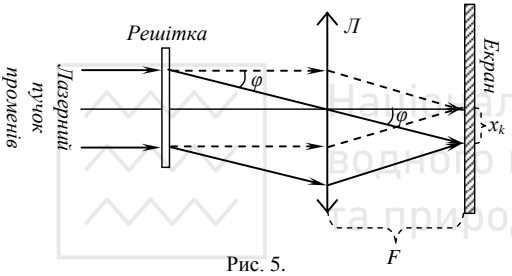


Рис. 5.

Щоб спостерігати дифракцію лазерних променів від дифракційної решітки, потрібно в експериментальній установці (рис. 2) у рейтері 3 розмістити дифракційну решітку, а у рейтері 4 – збиральну лінзу з відомою фокусною відстанню. При цьому екран повинен знаходитись у фокальній площині лінзи (див. теоретичні відомості до лабораторної роботи № 5.4).

Якщо через x_k позначити координату k-того головного дифракційного максимуму, то, як видно з рисунку 5, синус кута φ можна знайти за формулою

$$\sin\varphi = \frac{x_k}{\sqrt{F^2 + x_k^2}}. \qquad (9)$$

Підставляючи вираз для синуса φ згідно (9) у формулу (3), отримаємо вираз для знаходження довжини світлової хвилі

$$\lambda = \frac{x_k d}{k\sqrt{F^2 + x_k^2}}. \qquad (10)$$

Для точнішого визначення величини x_k у цій лабораторній роботі пропонується вимірювати відстань d_k між двома головними максимумами одного порядку. Тоді згідно формули (4) вираз (10)

набуває виду

$$\lambda = \frac{d_k d}{k\sqrt{4F^2 + d_k^2}}. \qquad (11)$$

Хід роботи

1. Установити в рейтер 3 дифракційну решітку, а в рейтер 4 – лінзу.
2. Установити рейтер 4 від екрану на відстані, що відповідає фокусній відстані лінзи.
3. Закріпити на екрані чистий аркуш паперу.
4. Увімкнути лазер. Відрегулювати положення решітки так, щоб на екрані спостерігалась чітка дифракційна картина.
5. Відмітити олівцем положення першого головного максимуму по обидва боки від середини дифракційної картини.
6. Зняти аркуш паперу і за допомогою штангенциркуля визначити віддаль d_1 між цими максимумами та занести його значення до таблиці 2.
7. За написами на дифракційній решітці встановити її період d.
8. За формулою (11) обчислити значення довжини хвилі лазерного випромінювання.
9. Записати до таблиці значення приладових похибок вимірювання Δd_1 та ΔF.
10. Обчислити відносну та абсолютну похибки експерименту за формулами (12) і записати кінцевий результат.

$$\varepsilon = \sqrt{\left(\frac{4F^2\Delta d_1}{\left(F^2 + d_1^2\right) d_1}\right)^2 + \left(\frac{4F\Delta F}{4F^2 + d_1^2}\right)^2}, \quad \Delta\lambda = \varepsilon\lambda. \qquad (12)$$

Таблиця 2

	d_1	Δd_1	F	ΔF	d
СІ					

Контрольні запитання

Що таке дифракція світла? Сформулюйте умови спостереження дифракції світла.

Чим відрізняється дифракція Фраунгофера від дифракції Френеля?

У чому полягає суть методу зон Френеля?

Вивести умови максимуму та мінімуму освітленості у випадку дифракції на щілині.

Під час виведення формули (1) передбачається що світлові промені проходять крізь лінзу (рис. 1). Чому під час виконання цієї лабораторної роботи лінза була відсутня (рис. 3), хоча для виведення робочої формули застосовувалася формула (1)?

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Лабораторна робота № 5.4

Визначення довжини світлової хвилі за допомогою дифракційної решітки

Мета роботи: визначити довжину світлової хвилі за допомогою дифракційної решітки.

Теоретичні відомості

(теорію до даної роботи див. також у конспекті лекцій, §§5.9, 6.5-6.6)

Найпростіша дифракційна решітка – це система з великого числа (до 1000 на 1*мм*) однакових щілин. Віддаль між серединами сусідніх щілин називають сталою решітки або її періодом (*d*).

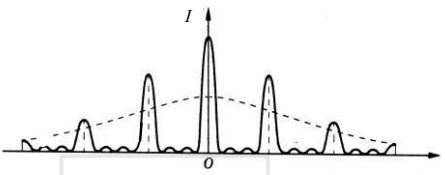


Рис. 1.

Під час проходження через решітку світло дифрагує під різними кутами *α*. Паралельні дифраговані промені збираються лінзою у фокальній площині. Дифракційна картина спостерігається у вигляді низки максимумів та мінімумів. На рисунку 1 зображено розподіл інтенсивності світла *I* від кута дифракції *α*. Максимуми великої інтенсивності називаються головними, а малої – побічними.

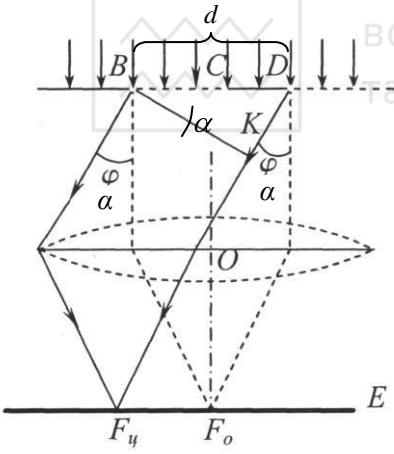


Рис. 2

Розглянемо два паралельні дифраговані промені, які йдуть від країв двох сусідніх щілин (рис. 2). *BK* – перпендикуляр до цих променів, а *DK* – їх різниця ходу. Як видно з рисунка, ця різниця ходу дорівнює $DK = d\sin\alpha$. Їй відповідає різниця фаз

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} DK = \frac{2\pi}{\lambda} d\sin\alpha. \qquad (1)$$

Така ж різниця фаз буде між результуючими коливаннями двох

сусідніх щілин.

Для розрахунку дифракційної картини використаємо метод векторних діаграм для додавання коливань від щілин решітки. Амплітуда результуючого коливання може бути знайдена як векторна сума амплітуд коливань від усіх щілин. Різниця фаз між коливаннями, спричиненими надходженням хвиль від сусідніх щілин, дорівнює куту між двома сусідніми векторами (рис. 3).

У випадку, коли результуюча амплітуда коливань дорівнює нулю, виникає мінімум інтенсивності. Векторний многокутник повинен бути замкнутий (рис. 4).

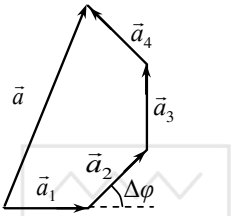


Рис. 3.

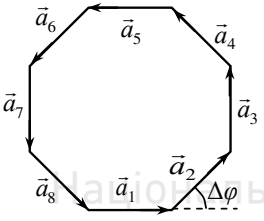


Рис. 4.

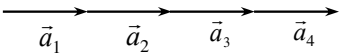


Рис. 5.

Якщо N – число щілин решітки, то у випадку мінімуму освітленості матиме місце співвідношення $N\Delta\varphi = 2\pi k'$, де k' – ціле число, яке не повинно бути кратним N.

Якщо k' кратне N, то різниця фаз буде кратною 2π:

$$\Delta\varphi = 2\pi\frac{k'}{N} = 2\pi k \tag{2}$$

(k – ціле число). Тоді спостерігається головний максимум. Векторне додавання коливань для цього випадку показане на рис. 5.

Умову головного максимуму можна отримати з виразів (1) та (2)

$$d\sin\alpha = k\lambda\,. \tag{3}$$

Ціле число k називають порядком головного максимуму. Амплітуда коливань для головного максимуму дорівнює $a = Na_1$. Тому інтенсивність головного максимуму пропорційна $N^2a_1^2$.

Умову мінімуму у випадку k', не кратному N, можна теж отримати з виразів (1) та (2).

$$d\sin\alpha = \frac{k'}{N}\lambda\,. \tag{4}$$

Умова (4) визначає лише ті мінімуми, в яких нульова інтенсивність

отримується внаслідок накладання коливань від усіх щілин. Можливі і мінімуми, зумовлені тим, що під певним кутом α амплітуда коливань від кожної щілини дорівнює нулю. У цьому випадку повинна виконуватися умова мінімуму для кожної щілини

$$b\sin\alpha = k''\lambda, \qquad (5)$$

де b – ширина однієї щілини (див. теоретичні відомості до лабораторної роботи № 3), k'' – довільне ціле число.

Співвідношення (4) і (5) описують умови всіх мінімумів, що спостерігаються на екрані від дифракційної решітки.

Якщо джерело випромінює немонохроматичне світло, то решітка розкладає його в спектр. При $\alpha = 0$ виникає максимум нульового порядку. Його положення співпадає для всіх довжин хвиль. По обидві сторони від центрального максимуму розташовані максимуми різних порядків.

Опис експериментальної установки та виведення робочої формули

Схема експериментальної установки зображена на рисунку 6. Джерелом світа $Д$ є лампа розжарення, від якої промені потрапляють на діафрагму. Отвір діафрагми можна вважати точковим джерелом світла, яке повинно знаходитись у фокусі збиральної лінзи $Л_1$. Тоді промені, що проходять крізь цю лінзу утворюють паралельний пучок світла, який опромінює дифракційну решітку як показано на рисунку. Для отримання чіткої дифракційної картини потрібно на шляху променів, що пройшли крізь решітку, розмістити іншу збиральну лінзу $Л_2$, так щоб екран знаходився у її фокальній площині.

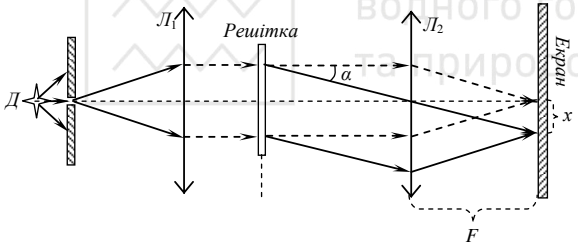


Рис. 6.

Як видно з рис. 6, синус кута дифракції α можна визначити за формулою

$$\sin\alpha = \frac{x}{\sqrt{F^2 + x^2}}, \qquad (6)$$

де x – координата k-того максимуму освітленості для певної довжини хвилі (кольору світла) дифракційного спектру, F – фокусна відстань другої лінзи.

Тоді довжину світлової хвилі λ, що спричиняє відчуття того чи

іншого кольору, згідно формули (3) можна визначити так

$$\lambda = \frac{xd}{k\sqrt{F^2 + x^2}}. \qquad (7)$$

Хід роботи

1. Закріпити на екрані чистий аркуш паперу.
2. Розмістити на оптичній лаві лінзу $Л_1$ на її фокусній відстані від діафрагми (рис. 6).
3. Розмістити екран на фокусній відстані від лінзи $Л_2$ (рис. 6).
4. Між лінзами встановити дифракційну решітку. На екрані утвориться кольоровий дифракційний спектр. Змінюючи положення решітки, відрегулювати його чіткість та добитися того, щоб на екрані було видно 3-4 головні максимуми освітленості.
5. Записати значення періоду дифракційної решітки d та фокусної відстані другої лінзи F.
6. Позначити олівцем на аркуші паперу, що прикріплений до екрану, по обидві сторони дифракційної картини положення декількох головних максимумів освітленості однакового кольору (колір задається викладачем).
7. Зняти аркуш з екрану та виміряти штангенциркулем віддаль $2x$ між максимумами однакових порядків.
8. За результатами вимірювань обчислити для максимумів кожного порядку значення координати x та занести їх до таблиці.

Таблиця вимірювань

$L =$ $d =$

Порядок k					Середнє значення
x,					
λ,					
$\Delta\lambda$,					

Обробка результатів вимірювань

1. Обчислити довжину хвилі для кожного порядку за формулою (7). Результати занести до таблиці.
2. Обчислити середнє значення довжини хвилі $\lambda_{ср}$.
3. Оцінити похибку величини, записати кінцевий результат.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Контрольні запитання

1. Яке явище називається дифракцією світла?
2. Що називається фронтом хвилі і хвильовою поверхнею?
3. Сформулювати принцип Гюйгенса.
4. Який вид дифракції називається дифракцією Френеля, а який – дифракцією Фраунгофера?
5. Що таке дифракційна решітка та її період?
6. В чому полягає метод векторних діаграм для знаходження результуючої амплітуди коливань, спричинених хвилями від усіх щілин решітки?
7. Якій умові повинно задовольняти зміщення фаз між коливаннями двох сусідніх щілин, щоб спостерігався дифракційний максимум? Вивести умову головного дифракційного максимуму.
8. Якій умові повинен задовольняти зсув фаз між коливаннями двох сусідніх щілин, щоб спостерігався дифракційний мінімум? Вивести умови дифракційних мінімумів.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Лабораторна робота № 5.5

Перевірка закону Малюса

Мета роботи: порівняти дійсні значення відношень інтенсивностей поляризованого світла, що потрапляє і виходить з аналізатора за різних значень кута поляризації, з їх значеннями згідно закону Малюса.

Теоретичні відомості

(теорію до даної роботи див. також у конспекті лекцій, §6.8)

Як відомо, світло – це електромагнітна хвиля, в котрій у взаємно перпендикулярних напрямках коливаються вектори напруженості електричного ($\vec{E}$) та магнітного ($\vec{H}$) полів. Вектори напруженості коливаються у напрямках, перпендикулярних до напрямку поширення хвилі. Світло, в якому коливання вектора $\vec{E}$ (його ще називають *світловим вектором*) відбуваються лише в одній площині, називається *плоскополяризованим*. Якщо існує тільки переважний напрямок коливань світлового вектора, то світло називається *частково поляризованим*.

У природних джерел світла світлові хвилі випромінюються кожним атомом незалежно. Внаслідок цього напрямок коливань вектора $\vec{E}$ (або $\vec{H}$) світлової хвилі, залишаючись перпендикулярним до напрямку поширення, весь час змінює своє положення в просторі. Тому природне

світло *неполяризоване*.

Площина, в котрій відбуваються коливання вектора $\vec{E}$, називається *площиною поляризації*. У природного світла площин поляризації безліч, у плоскополяризованого – одна.

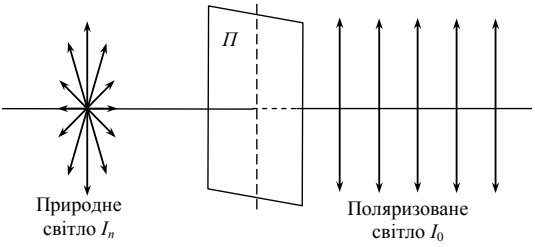


Рис. 1.

Явище виділення плоскополяризованого світла з природного або частково поляризованого називається *поляризацією світла*, а прилади за допомогою яких його здійснюють – *поляризаторами*. На рис.1 схематично зображено процес поляризації світла, що пройшло крізь поляризатор *П* (стрілки вказують напрямки коливань світлових векторів $\vec{E}$). У цьому випадку площина поляризації співпадає із площиною рисунка. Якщо на поляризатор падає природне світло інтенсивністю I_n, то з нього виходить поляризоване світло інтенсивністю $I_0 = \frac{I_n}{2}$.

Національний університет водного господарства та природокористування

Відрізнити поляризоване світло від природного можна за допомогою *аналізатора*, роль якого може виконувати будь-який поляризатор. Його розміщують по ходу поляризованого променя.

Нехай на аналізатор *A* падає поляризований промінь інтенсивністю I_0 (рис. 2). Вектор $\vec{E}_0$ падаючого поляризованого світла коливається під кутом α до площини поляризації аналізатора. Цей вектор можна розкласти на дві складові, одна з яких $E = E_0 \cos\alpha$ – паралельна до вищевказаної площини (див. рис. 2). Лише ця складова буде пропущена аналізатором, а складова, перпендикулярна до площини поляризації, буде поглинута аналізатором. Оскільки інтенсивність світла пропорційна квадрату амплітуди коливань світлового вектора, то інтенсивність світла *I*, що

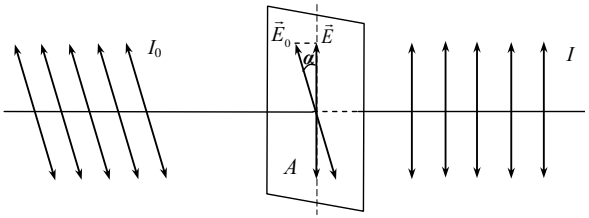


Рис. 2.

пройшло крізь аналізатор, можна визначити за формулою

$$I = I_0 \cos^2 \alpha \,. \qquad (1)$$

Співвідношення (1) є математичним записом закону Малюса.

Опис експериментальної установки

Експериментальна установка складається із світлонепроникного циліндра, вздовж осі якого знаходиться: джерело світла *Д* (лампа розжарення), розміщене у фокальній площині збиральної лінзи *Л*, поляризатор *П*, аналізатор *А* та фотоелемент *Ф*, приєднаний до гальванометра *Г* (рис. 3). Аналізатор можна повертати навколо осі циліндра, змінюючи положення його площини поляризації.

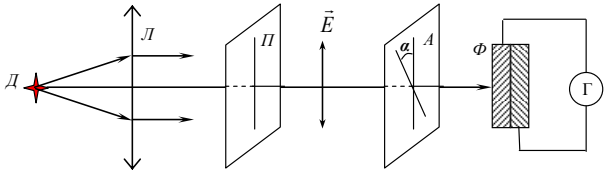


Рис. 3.

За допомогою лінзи створюється потік паралельних світлових променів від джерела, що проходять спочатку крізь поляризатор, а потім крізь аналізатор. Пройшовши крізь аналізатор, світло потрапляє на фотоелемент. Сила струму *i* в колі фотоелемента, що вимірюється гальванометром, пропорційна до інтенсивності світла *I*. Тому

$$\frac{i}{i_0} = \frac{I}{I_0}, \qquad (2)$$

де i_0 – максимальна сила струму за максимальної інтенсивності світла I_0 ($\alpha = 0$).

Хід роботи

1. Виставити покажчик кута повороту аналізатора на нуль і, обертаючи поляризатор, добитися проходження через гальванометр струму максимальної сили.

2. Регулюючи силу струму лампочки розжарення освітлювача та змінюючи режим роботи кола гальванометра, добитися відхилення стрілки гальванометра на всю шкалу і записати це значення i_0 в таблицю.

3. Обертаючи аналізатор, зняти покази гальванометра для кожного з кутів від 0 до 90°. Відповідні значення кутів α та сил струмів *i* занести до таблиці.

4. Для кожного з кутів α розрахувати функцію

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$y = \frac{i}{i_0}. \qquad (3)$$

5. Для кожного значення кута α обчислити значення квадрату його косинуса ($\cos^2\alpha$) та занести результат до таблиці.

6. Побудувати графік залежності y від $\cos^2\alpha$. Згідно закону Малюса ця залежність повинна зводиться до виразу $y = \cos^2\alpha$.

7. За графіком залежності y від $\cos^2\alpha$ зробити висновок щодо виконання закону Малюса.

Таблиця вимірювань

i_0 =

α,									
i,									
$y = \frac{i}{i_0}$									
$\cos^2\alpha$									

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Контрольні запитання

1. Яке світло називають плоскополяризованим?
2. Яка причина того, що природне світло неполяризоване?
3. Записати і сформулювати закон Малюса.
4. Записати формулу і пояснити закон Брюстера.
5. У чому полягає суть явища подвійного променезаломлення.
6. Пояснити принцип роботи призми Ніколя.

Лабораторна робота № 5.6

Визначення концентрації цукру в розчині поляриметром

Мета роботи: визначити концентрацію цукру в розчині за допомогою обертання площини поляризації світла.

Теоретичні відомості

(теорію до даної роботи див. також у конспекті лекцій, §§6.8-6.9)

Як відомо, світло – це електромагнітна хвиля, в котрій у взаємно перпендикулярних напрямках коливаються вектори напруженості

електричного ($\vec{E}$) та магнітного ($\vec{H}$) полів. Вектори напруженості коливаються у напрямках, перпендикулярних до напрямку поширення хвилі. Світло, в якому коливання вектора $\vec{E}$ (його ще називають *світловим вектором*) відбуваються лише в одній площині, називається *плоскополяризованим*. Якщо існує тільки переважний напрямок коливань світлового вектора, то світло називається *частково поляризованим*.

У природних джерел світла світлові хвилі випромінюються кожним атомом незалежно. Внаслідок цього напрямок коливань вектора $\vec{E}$ (або $\vec{H}$) світлової хвилі, залишаючись перпендикулярним до напрямку поширення, весь час змінює своє положення в просторі. Тому природне світло *неполяризоване*.

Площина, в котрій відбуваються коливання вектора $\vec{E}$, називається *площиною поляризації*. У природного світла площин поляризації безліч, у плоскополяризованого – одна.

Явище виділення плоскополяризованого світла з природного або частково поляризованого називається *поляризацією світла*, а прилади за допомогою яких його здійснюють – *поляризаторами* (див. ще розділ «Теоретичні відомості» до лабораторної роботи № 5.5).

Під час проходження плоскополяризованого світла через деякі речовини спостерігається обертання площини поляризації. Речовини, які мають таку властивість, називаються *оптично активними*. До них належать кристалічні тіла (кварц, кіновар), чисті рідини (скипидар, нікотин) і розчини оптично активних речовин в неактивних розчинниках (водні розчини цукру, винної кислоти).

Кристалічні речовини, наприклад, кварц краще обертають площину поляризації тоді, коли світло поширюється вздовж оптичної осі кристалу. Кут обертання прямо пропорційний шляху ℓ, що проходить промінь у кристалі

$$\varphi = \alpha_1 \cdot \ell \qquad (1)$$

Коефіцієнт α_1 називається *сталою обертання*. Стала обертання залежить від довжини хвилі світла (дисперсія обертальної здатності).

У розчинах кут обертання площини поляризації пропорційний не лише шляху проходження променя в розчині ℓ, а й концентрації c активної речовини

$$\varphi = \alpha \cdot c \cdot \ell \qquad (2)$$

де α *– питома обертальна здатність розчину*.

В залежності від напрямку обертання площини поляризації оптично

активні речовини діляться на *право-* і *лівообертальні*. Напрямок обертання відносно променя не залежить від напрямку його поширення в оптично активному середовищі.

Згідно сучасних уявлень плоскополяризований промінь, входячи в оптично активну речовину, розбивається на два поляризовані по колу промені, в яких вектор $\vec{E}$ обертається у протилежних напрямках, поширюючись з різною швидкістю. Іншими словами, плоскополяризований промінь можна уявити як суперпозицію двох поляризованих по колу хвиль з однаковими частотами і амплітудами. Якщо швидкості поширення обох хвиль неоднакові, то при проходженні через речовину один із векторів буде повертатись на інший кут, ніж другий, внаслідок чого площина коливань результуючого вектора повернеться на певний кут відносно свого початкового положення.

Різниця у швидкостях поширення світла з різним напрямком колової поляризації зумовлена асиметрією молекул або асиметричним розміщенням атомів у кристалі.

Опис експериментальної методики

Вищеописане явище лежить в основі експериментальної методики визначення концентрації цукру в розчині. Цим методом користуються в медицині, в органічній хімії, харчовій промисловості тощо.

Схема установки (поляриметра), за допомогою якої визначається концентрація цукру, зображена на рис.1

Джерело світла *Д* разом з лінзою *Л* утворює паралельний пучок променів, які поляризуються поляризатором *П.* Поляризоване світло проходить через трубку *Т* довжиною ℓ з розчином цукру.

Розчин цукру повертає площину поляризації, кут повороту якої можна визначити за допомогою аналізатора *А*. Таке визначення можна було б здійснити, повертаючи аналізатор доти, доки інтенсивність світла за наявності трубки стане такою ж, як і за її відсутності. Однак око мало чутливе до абсолютного значення інтенсивності, тому в установці є спеціальний пристрій – бікварцева пластинка *Б*. Бікварц складається з двох склеєних кварцових пластинок, вирізаних перпендикулярно до їх оптичної осі. Склеєні поверхні паралельні до ходу променя і розділяють поле зору на дві однакові частини. Одна частина обертає площину поляризації праворуч, а друга – на такий же кут ліворуч. Якщо аналізатор повернути так, що його площина поляризації буде перпендикулярною до площини коливань, то без бікварцу поле зору повинне бути темним. Оскільки пластинки бікварцу

повертають площину поляризації на однаковий кут у протилежних напрямках, то у випадку перпендикулярності площини поляризації аналізатора і площини коливань променів обидві частини поля зору повинні бути освітлені однаково. Якщо дещо повернути аналізатор, освітленість однієї половини поля зору зменшиться, а другої – збільшиться. При обертанні аналізатора в іншу сторону освітленість полів змінюється. Зміна освітленості частин поля зору під час переходу аналізатора через положення, коли його площина перпендикулярна до площини коливань, відбувається дуже різко. Тому установка на однаково освітлене поле зору виявляється дуже чутливою. В поляриметрі поле зору розглядається за допомогою окуляра *О* (рис. 1).

Для відліку кутів повертання площини аналізатора відносно площини поляризатора у приладі є шкала, проградуйована в градусах, з відповідним оптичним пристроєм для вимірювання значень кутів. Шкала ноніуса дозволяє виміряти кут з точністю до десятих частин градуса. В поляриметрі є змінні світлофільтри *С*, за допомогою яких можна вибрати зручну для дослідження спектральну область світла.

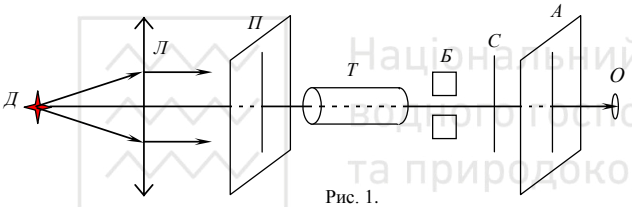


Рис. 1.

В роботі використовуються трубки з відомою і невідомою концентраціями розчину однакової довжини ℓ. Це полегшує експериментальне визначення концентрації цукру. Дійсно, нехай кут обертання площини поляризації світла розчином цукру відомої концентрації c_0 згідно (2) дорівнює

$$\varphi_0 = \alpha \cdot c_0 \cdot \ell\,, \tag{3}$$

а невідомої – дорівнює

$$\varphi = \alpha \cdot c \cdot \ell\,. \tag{4}$$

Тоді, розв'язуючи систему рівнянь (3) і (4), одержимо робочу формулу

$$c = c_0 \frac{\varphi}{\varphi_0} \tag{5}$$

Хід роботи

1. Відкрити кришку поляриметра, вийняти трубки з розчинами і закрити кришку.

2. Ввести жовтий світлофільтр.

3. Навести окуляр зорової трубки на найбільшу різкість, щоб межа між частинами поля зору була чіткою.

4. Обертаючи аналізатор, досягти однакової освітленості поля зору (у випадку зміни положення аналізатора освітленість частин поля зору різко змінюється). Відмітити це так зване нульове положення аналізатора φ_{01}. Нульове положення визначити не менше трьох разів, збиваючи перед кожним виміром попереднє налаштування.

5. Переконатися, що в трубках з розчином немає бульбашок повітря. Якщо є бульбашка, то шляхом доливання відповідного розчину необхідно її видалити (цю операцію виконує лаборант).

6. Помістити трубку з розчином цукру відомої концентрації у поляриметр і закрити кришку.

7. Окуляром відрегулювати чіткість межі розділу поля зору. Повертаючи аналізатор, добитися однакової освітленості частин поля зору. Зняти відлік кута повороту φ_{02}. Дослід повторити декілька разів, збиваючи перед кожним виміром попереднє налаштування.

8. Знайти значення кута φ_0 за формулою

$$\varphi_0 = \varphi_{02} - \varphi_{01}.$$

9. Замінити трубку з розчином відомої концентрації трубкою з розчином невідомої концентрації. Описаним в п. 5-7 методом визначити кут, що визначає положення площини поляризації φ_2. Дослід повторити декілька разів.

10. Знайти значення кута φ за формулою

$$\varphi = \varphi_2 - \varphi_{01}.$$

11. За формулою (5) обчислити концентрацію цукру досліджуваного розчину

12. Дати оцінку похибкам вимірювань і записати кінцевий результат.

Таблиця вимірювань

$c_0 =$ $\Delta c_0 =$

№п/п	φ_{01}	φ_{02}	φ_2
1			
2			
3			
4			
5			

Сер			

Національний університет водного господарства та природокористування

Контрольні запитання

1. Яке світло називається поляризованим?
2. Що таке площина коливань і площина поляризації?
3. Чому природне світло неполяризоване?
4. Яким способом можна дістати поляризоване світло?
5. В чому полягає явище подвійного променезаломлення? Чим відрізняється промінь звичайний від незвичайного?
6. Пояснити явище подвійного променезаломлення.
7. Які речовини називаються оптично активними? Від чого залежить кут повороту площини поляризації в кристалах, чистих рідинах, розчинах?
8. Як пояснити обертання площини поляризації оптично-активними речовинами?
9. Для чого в експериментальній установці користуються бікварцом?
10. Чи залежить кут обертання площини поляризації від товщини бікварцу?

Національний університет водного господарства та природокористування

Лабораторна робота №5.7

Дослідження залежності енергетичної світності абсолютно чорного тіла від його температури та перевірка закону Стефана-Больцмана

Мета роботи: перевірити закон Стефана-Больцмана.

Теоретичні відомості

(теорію до даної роботи див. також у конспекті лекцій, §6.11)

Тепловим випромінюванням називається електромагнітне випромінювання, що зумовлене збудженням атомів та молекул тіла внаслідок їх теплового руху.

Інтенсивність теплового випромінювання характеризує величина потоку енергії (Ф). Потоком енергії називається енергія, котру випромінює поверхня тіла за 1 с.

$$\Phi = \frac{dE}{dt}. \tag{1}$$

Потік енергії з одиниці поверхні тіла називається енергетичною світністю (інтегральна випромінювальна здатність).

$$R = \frac{d\Phi}{dS}. \tag{2}$$

Потік енергії, віднесений до певного інтервалу довжин хвиль від λ до $\lambda + d\lambda$, буде $d\Phi_\lambda = r_\lambda dSd\lambda$, звідки

$$r_\lambda = \frac{d\Phi_\lambda}{dSd\lambda} = \frac{dR_\lambda}{d\lambda}, \quad (3)$$

де r_λ – спектральна густина енергетичної світності (спектральна випромінювальна здатність) тіла.

Енергетична світність зв'язана зі своєю спектральною густиною співвідношенням

$$R = \int r_\lambda d\lambda. \quad (4)$$

Планк, на основі квантових уявлень вивів аналітичний вираз функції $r_{\lambda,T}$. Ця функція отримала назву функції Планка (див. конспект лекцій). Інтегруючи функцію Планка по всьому спектру випромінювання, отримуємо закон Стефана-Больцмана: енергетична світність *R* абсолютно чорного тіла пропорційна четвертому степеню його температури:

$$R_T = \int_0^\infty r_{\lambda,T} d\lambda = \sigma T^4. \quad (5)$$

Національний університет водного господарства та природокористування

Опис установки

1. Установка складається з об'єкта дослідження (печі), вимірювального пристрою і термостовпчика, виконаних у вигляді конструктивно закінчених виробів, що встановлюються на лабораторному столі і сполучаються між собою з'єднувальними кабелями.

2. Піч є моделлю абсолютно чорного тіла і виконана як закрита термоізольована електропіч з отвором на передній стінці. У її склад входять нагрівальний пристрій, вбудований в теплозахисний корпус, термопара для вимірювання температури всередині печі контактним способом, регульоване джерело живлення, призначене для розігрівання печі до температури 800°С та регулювання швидкості нагрівання і вентилятори для охолодження печі.

На передній панелі об'єкта дослідження розміщені:

- отвір для виходу випромінювання печі;

вимикач "*МЕРЕЖА*", призначений для вмикання живлення печі (вмикання живлення відображається підсвічуванням перемикача);

вимикач "*ВЕНТ.*", - призначений для вмикання живлення вентиляторів при охолодженні печі (вмикання вентиляторів відображається світлодіодом, установленим над вимикачем "*ВЕНТ.*").

Примітка: у зв'язку з тим, що напруга живлення вентиляторів подається з вимірювального пристрою, робота печі можлива тільки при підключеному до неї та ввімкненому вимірювальному пристрою.

На верхній кришці розташована ручка регулювання швидкості нагрівання печі. Шкала, на верхній кришці подана в умовних одиницях швидкості нагрівання.

На задній панелі об'єкта дослідження розташовані роз'єм для підключення мережевого шнура і кабель з роз'ємом для підключення об'єкта дослідження до вимірювального пристрою.

Об'єкт дослідження за допомогою мережевого шнура підключається до мережі 220В, 50Гц.

3. Вимірювальний пристрій виконаний у вигляді конструктивно закінченого виробу. У ньому застосовані аналого-цифрові перетворювачі з індикацією і нормувальними підсилювачами для вимірювання й індикації температури печі і термо-е.р.с. термостовпчика.

На передній панелі вимірювального пристрою розміщені наступні елементи керування й індикації:

- індикатор мВ, призначений для індикації напруги термо-е.р.с. термостовпчика;
- індикатор °С, призначений для індикації температури в печі.

На задній панелі вимірювального пристрою розташований вимикач "*МЕРЕЖА*", мережевий шнур з вилкою і роз'єм для підключення об'єкта дослідження і термостовпчика.

Вимірювальний пристрій за допомогою мережевого шнура підключається до мережі 220В, 50Гц.

4. Термостовпчик є датчиком потоку випромінювання (потужності випромінювання) і має кабель для підключення його до вимірювального пристрою. За допомогою стійки термостовпчик установлюється на штативі. В якості термочутливого елемента застосовується батарея хромель-копелевих термопар.

5. Принцип дії установки оснований на лабораторному дослідженні моделі абсолютно чорного тіла (печі) методом вимірювання температури контактним і оптичним способами. За допомогою термопари контактним способом вимірюється температура в печі, а за допомогою термостовпчика вимірюється приріст потоку випромінювання (потужності випромінювання), що виходить з печі.

6. У процесі виконання лабораторної роботи знімається залежність термо-е.р.с. термостовпчика від температури печі при фіксованій відстані між термостовпчиком і вихідним отвором печі.

7. Режим роботи установки переривчастий, через кожні 2 години роботи робиться перерва на 15-20хв.

8. Категорично забороняється нагрівання печі до температури понад 850 °С та робота установки без нагляду.

Хід роботи

1. Установіть термостовпчик так, щоб втулка на передній панелі термостовпчика ввійшла в отвір на передній панелі печі. При цьому відстань від випромінювача з площею $S_{вип} = \frac{\pi \cdot 0{,}01^2}{4} = 7{,}85 \cdot 10^{-5} м^2$ до приймача з площею $S_{пр} = \frac{\pi \cdot 0{,}008^2}{4} = 5{,}03 \cdot 10^{-2} м^2$ дорівнює L=(0.045÷0.050) м.

2. Підключіть мережеві шнури об'єкта дослідження і вимірювального пристрою до мережі. Увімкніть вимірювальний пристрій вимикачем "*МЕРЕЖА*" на його задній панелі і дайте прогрітися протягом 5хв (при цьому на індикаторах °С і мВ повинні встановитися значення 000 і 0,00, відповідно.

3. Увімкніть піч за допомогою вимикача "*МЕРЕЖА*" (при цьому ручка "*ШВИДКІСТЬ НАГРІВАННЯ*" повинна знаходитися в положенні "*МГМ*"). Для запобігання перегріву корпусу печі увімкніть за допомогою вимикача "*ВЕНТ.*" вентилятори охолодження. Повертаючи ручку "*ШВИДКІСТЬ НАГРІВАННЯ*", добийтеся того, щоб піч почала нагріватися. При цьому ручку "*ШВИДКІСТЬ НАГРІВАННЯ*" поставте у положення «5», а після досягнення температури 700°С – у положення «6».

4. Поступово нагріваючи піч, зніміть залежність напруги U термостовпчика від температури t в печі.

5. За таблицею 2 знаходимо потужність випромінювання $Ф$.

6. За формулою $R = \frac{Ф}{S}$ знайдіть енергетичну світність тіла. Отримані значення R вносіть у таблицю.

7. Побудуйте графік залежності $lg\ R$ від $lg\ T$.

8. За формулою $k = tga = \frac{\Delta \lg R}{\Delta \lg T}$ знайдіть коефіцієнт нахилу прямолінійної залежності $lg\ R$ від $lg\ T$.

9. Зробіть висновок (якщо коефіцієнт нахилу прямої приблизно дорівнює 4, то закон Стефана - Больцмана виконується).

10. Продовжте пряму до перетину з віссю lgT. Координати точки

Національний університет водного господарства та природокористування

перетину дорівнюють $\lg T=1{,}8$ і $\lg R=0$, що відповідає $T=64K$ і $R=1\,\frac{Вт}{м^2}$.

11. Підставивши значення R і T у рівність $R=\sigma T^4$, знайдіть значення σ. Зробіть висновок.

Таблиця вимірювань

$S = 1{,}85\cdot 10^{-6}\ м^2$

№п/п	$t,°C$	T, K	U, мВ	$Ф$, Вт	R, Вт/м^2
1.					
2.					
3.					
...	...	...	...	...	...
10.					
сер.					

Таблиця залежності напруги термостовпчика (U) від потужності випромінювання печі ($Ф$).

U, мВ	$Ф$, мВт	U, мВ	$Ф$, мВт	U, мВ	$Ф$, мВт
0,02	0,234	1,22	38,792	4,67	149,35
0,04	0,928	1,42	45,108	5,08	162,292
0,07	2,052	1,64	52,05	5,5	175,824
0,13	3,64	1,87	59,296	5,93	189,952
0,19	5.69	2,13	67,184	6,38	204,392
0,26	8,16	2,37	75,384	6,85	219,78
0,35	11,13	2,65	84,398	7,36	235,848
0,46	14,544	2,95	93,76	7,87	252,48
0,58	18,468	3,26	103,782	8,4	269,88
0,72	22,8	3,58	114,224	8,98	287,98
0,87	27,654	3,92	125,258	9,55	306,39
1,05	33,072	4,29	137,088	9,87	316,518

Контрольні запитання

1. Яке випромінювання називають тепловим? Чим воно відрізняється від інших видів випромінювання?
2. Що таке енергетична світність?
3. Що таке спектральна густина енергетичної світності і який її зв'язок з енергетичною світністю?

4. В чому суть закону Кірхгофа?
5. Що таке абсолютно чорне тіло і як практично можна побудувати його модель?
6. Нарисуйте криві розподілу енергії у спектрі випромінювання абсолютно чорного тіла.
7. Запишіть формулу Релея-Джинса. При яких припущеннях вона одержана?
8. В чому полягає «ультрафіолетова катастрофа»?
9. Записати формулу Планка і пояснити, на основі яких припущень вона одержана.
10. В чому суть закону Стефана-Больцмана?

Лабораторна робота №5.8

Дослідження зовнішнього фотоефекту

Мета роботи: 1) зняти вольт-амперні характеристики; 2) перевірити закон обернених квадратів.

Теоретичні відомості

(теорію до даної роботи див. також у конспекті лекцій, §6.12)

При опромінюванні речовини з малою роботою виходу з її поверхні вже в області світла спостерігається виліт електронів і це явище називається фотоефектом. Фотоефект пояснюється фотонною теорією світла, а саме: при взаємодії з речовиною світло проявляє корпускулярні властивості і його можна розглядати як потік фотонів з енергією $h\nu$ і імпульсом $h\nu/c$ (де h – постійна Планка, ν – частота світла, c – швидкість світла у вакуумі). При зіткненні фотона з електроном фотокатода енергія фотона повністю передається електрону і енергетичний баланс цього процесу описується рівнянням Ейнштейна:

$$h\nu = A + E_{\max}, \qquad (1)$$

де $E_{\max}$ – максимальна кінетична енергія фотоелектрона, A – робота виходу електрона з катода.

Електрони, що вилітають з катода, прискорюються під дією різниці потенціалів між катодом і анодом і рухаються в напрямку анода, створюючи фотоелектричний струм. Чим більша освітленість катода, тим більша кількість електронів вибивається з його поверхні і тим більша буде сила струму насичення, яка спостерігається при високих анодних напругах. Оскільки освітленість катода E обернено пропорційна до квадрату віддалі r від освітлювача до катода, то і сила струму насичення буде обернено пропорційна до r^2. Тобто

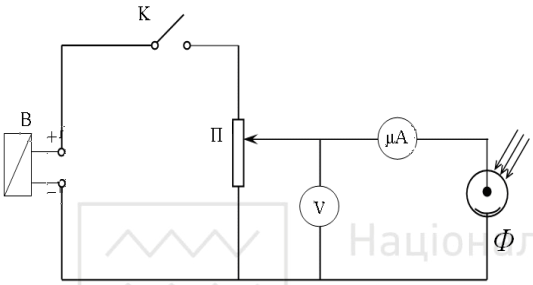
Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$\frac{I_{1\,нас}}{I_{2\,нас}} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2, \qquad (2)$$

де $I_{1\,нас}$ та $I_{2\,нас}$ - сили фотострумів насичення для віддалей відповідно r_1 та r_2. Співвідношення (2) називають законом обернених квадратів.

Опис установки

Для дослідження зовнішнього фотоефекту використовують електричну схему показану на рис. Напруга, що подається на фотоелемент *Ф* від джерела постійного струму *В*, змінюється за допомогою потенціометра *П* і вимірюється вольтметром *V*. Сила фотоструму вимірюється за допомогою мікроамперметра μА. Електричне коло замикається за допомогою ключа *К*.



Хід роботи

1. Розмістити освітлювач, по можливості, найближче до фотоелемента і виміряти віддаль між ними r_1. Увімкнути освітлювач.

2. Збільшуючи напругу між катодом і анодом від нуля до максимально допустимої напруги, зняти вольт-амперну характеристику фотоелемента при даній освітленості, записуючи для 10-12 значень напруги відповідні їм значення сили струму. При цьому слід отримати не менше трьох різних значень напруги, при яких сила струму вже не зростає, тобто наступає насичення.

3. Змінити віддаль між освітлювачем і фотоелементом на r_2, відсунувши освітлювач на 2-3см далі від фотоелемента, і повторити п. 2.

4. Дані r_1 та r_2, *U* та *I* занести в таблицю з відповідним значенням *r*.

5. Побудувати на одному графіку вольт-амперні характеристики для двох різних віддалей від освітлювача до фотоелемента.

6. Визначити сили фотострумів насичення в обох випадках і знайти їх відношення $\frac{I_{1\,нас}}{I_{2\,нас}}$. Окремо знайти відношення $\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2$ і порівняти його з попереднім відношенням.

7. Зробити висновок стосовно виконання співвідношення (1).

Таблиці вимірювань

Таблиця 1

r_1 =

I, μA										
U, B										

Таблиця 2

r_2 =

I, μA										
U, B										

Національний університет водного господарства та природокористування

Контрольні запитання

1. Що таке фотоефект?
2. Пояснити природу виникнення фотоефекту
3. Нарисувати і пояснити вольт-амперну характеристику фотоефекту.
4. Сформулювати закони фотоефекту.
5. Записати і пояснити рівняння Ейнштейна для фотоефекту.
6. Пояснити будову і принцип дії вакуумного фотоелемента.

Лабораторна робота №5.9

Вивчення залежності опору термістора від температури

Мета роботи: експериментально перевірити теоретичну залежність опору напівпровідника від температури і визначити ширину забороненої зони.

Теоретичні відомості

(теорію до даної роботи див. також у конспекті лекцій, §§7.6, 7.8, 7.14-7.15)

Термістори – це прилади, в яких використовується залежність електричного опору напівпровідника від температури. Ця залежність має вигляд

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$R = R_0 e^{\frac{E}{2kT}} \qquad (1)$$

де R_0 – деяка постійна величина, E – ширина забороненої зони для власних напівпровідників і енергія іонізації домішок для домішкових напівпровідників, k – постійна Больцмана, T – абсолютна температура.

Термістори використовуються для вимірювання температури, швидкості потоку рідин і газів, потужності електромагнітного випромінювання. Найменша потужність, яку можна вимірювати з допомогою термісторів, порядку 10^{-10} Вт . Якщо такий термістор помістити у фокус параболічного дзеркала, то можна виявити об'єкти з температурою, вищою від температури оточуючого середовища (літаки, танки, кораблі інші тіла) на віддалі кількох кілометрів. З допомогою високочутливого термістора вдалось зафіксувати інфрачервоні промені, відбиті від поверхні Місяця.

Прологарифмуємо вираз (1).

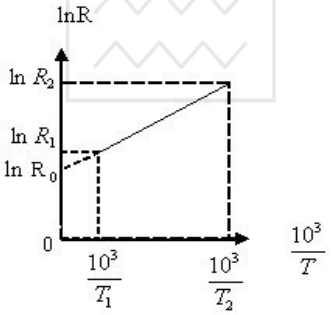


Рис.1

$$\ln R = \ln R_0 + \frac{E}{2kT} \qquad (2)$$

Співвідношення (2) можна записати у вигляді, зручному для практичних розрахунків:

$$\ln R = \ln R_0 + \frac{E}{2 \cdot 10^3 k} \cdot \frac{10^3}{T} \qquad (3)$$

З формули (3) видно, що залежність $\ln R$ від $\frac{10^3}{T}$ лінійна (див. рис.1). Знаходячи $\ln R_1$ і $\ln R_2$ для двох температур T_1 і T_2, можна одержати

$$E = \frac{2 \cdot 10^3 k (\ln R_2 - \ln R_1)}{\frac{10^3}{T_2} - \frac{10^3}{T_1}}. \qquad (4)$$

Опис установки

Досліджуваний в даній роботі термістор знаходиться у пробірці з маслом. Для вимірювання температури туди ж вставляється термометр. Масло є діелектриком і одночасно забезпечує однаковість температури термістора і термометра. Провідники від термістора виводяться під клеми, що знаходяться на непровідній пластинці, в якій закріплена

пробірка. Пробірка кріпиться на штативі, за допомогою якого її можна опускати в колбу з водою, що знаходиться на електроплитці. При нагріванні води підігрівається і масло в пробірці, а, значить, термістор і термометр. Опір термістора вимірюється за допомогою електричного містка, який під'єднується до клем установки.

Хід виконання роботи

1. Ознайомитися з експериментальною установкою і методикою вимірювання опору електричним містком.

2. Під'єднати місток до клем термістора.

3. Опустити пробірку з термістором в колбу з водою: закріпити її на штативі.

4. Увімкнути електроплитку в мережу і нагріти масло в пробірці до температури, дещо вищої від 80° С. При цьому нагрівник через 3-5 хв. потрібно вимикати, щоб масло встигло прогрітися до температури води. Ні в якому разі не нагрівати воду до кипіння!

5. Вимкнути електроплитку. Підняти тримач штатива і вийняти пробірку з води. В повітрі пробірка буде охолоджуватися і температура її знижуватиметься.

6. Виміряти опір термістора при температурі 80° С. Вимірювання потрібно починати до підходу температури до 80°С, щоб встигнути зробити грубий баланс містка. Точний баланс робиться в момент, коли температура досягає точно 80°С.

7. При охолодженні подібним способом вимірювати опір термістора через кожні 5-6° (в залежності від зручності відліку по шкалі термометра). Результати вимірювань занести в таблицю.

Таблиця вимірювань

$\Delta t = \Delta T =$ $\Delta R =$

t, °С											
T, К											
$10^3/T$											
R, Ом											
$\ln R$											

Обробка результатів вимірювань

1. Обчислити величини $\frac{10^3}{T}$ і $\ln R$.

Національний університет водного господарства

2. Побудувати графік залежності $\ln R$ від $\frac{10^3}{T}$.

3. Провести пряму, яка найбільше наближається до експериментальних точок.

4. Визначити E як тангенс кута нахилу прямої до осі $\frac{10^3}{T}$.

5. Зробити висновки.

Контрольні запитання

1. Назвати квантові числа, які визначають стан електрона в атомі. Які значення вони приймають? Записати формули для фізичних величин, які вони визначають.
2. Якими квантовими числами визначається енергія в атомі? Нарисувати схему енергетичних рівнів. Що таке виродження?
3. Сформулювати принцип Паулі.
4. Як пояснює зонна теорія поділ тіл на метали і діелектрики? Нарисувати відповідні зонні схеми.
5. Які тіла називаються напівпровідниками?
6. Що таке дірка? Як вона рухається в електричному полі?
7. Записати формулу для густини струму через концентрацію носіїв струму.
8. Записати формулу для концентрації носіїв струму у власному напівпровіднику.
9. Як залежить опір напівпровідників від температури? І чому?

Лабораторна робота №5.10

Дослідження вольт-амперної характеристики напівпровідникового діода

Мета роботи: експериментально перевірити теоретичне рівняння вольт-амперної характеристики напівпровідникового діода.

Теоретичні відомості

(теорію до даної роботи див. також у конспекті лекцій, §§7.6-7.8, 7.14-7.16)

Загальна сила струму I через p-n перехід (рівняння вольт-амперної характеристики напівпровідникового діода) описується співвідношенням

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$I = I_0\left(e^{\frac{eU}{kT}} - 1\right), \qquad (1)$$

де e – елементарний заряд, U – зовнішня напруга, прикладена до p-n переходу, k – постійна Больцмана, T – абсолютна температура. З рівняння (1) видно, що при великих від'ємних напругах $I \approx I_0$,тобто струм майже постійний. Практично такий результат досягається при напругах порядку 1В. З (1) отримуємо

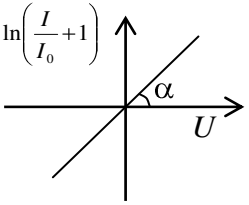


Рис. 1

$$\ln\left(\frac{I}{I_0}+1\right) = \frac{eU}{kT}. \qquad (2)$$

З (2) випливає, що залежність $\ln\left(\frac{I}{I_0}+1\right)$ від U пропорційна (рис.1) і тангенс кута нахилу такої залежності $\mathrm{tg}\alpha = e/(kT)$. Для кімнатної температури (290К) в СІ $\mathrm{tg}\alpha = 40{,}0$.

Опис установки

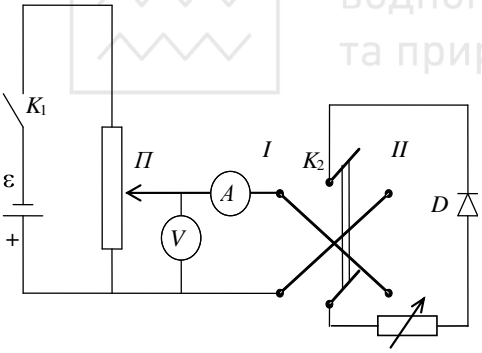


Рис. 2

Експериментальна схема для зняття вольт-амперної характеристики діода показана на рис.2. Там D - напівпровідниковий діод, K_1 – перемикач живлення, K_2 - перемикач для зміни полярності напруги, прикладеної до діода. Багатомежовий амперметр A використовується для вимірювання сили струму через діод. Багатомежовий вольтметр V використовується для вимірювання напруги, що знімається з потенціометра $П$.

Хід роботи

1. Зібрати електричну схему.

2. Поставити перемикач K_2 в положення 1 для зняття прямої частини вольт-амперної характеристики і за допомогою магазину опорів виставити опір 1кОм. Замкнути ключ K_1.

3. Виміряти напругу і силу струму через певний інтервал. Результати записати в таблицю.

4. Перемикач K_2 перевести в положення 2 і згідно з пунктами 2 та 3 зняти зворотну характеристику, перемкнувши опір на 10 кОм.

5. Для кожного виміру знайти величину $\ln\left(\frac{I}{I_0}+1\right)$.

6.Побудувати на міліметровому папері графік залежності $\ln\left(\frac{I}{I_0}+1\right)$ від U.

7.Знайти тангенс кута нахилу прямої. Порівняти експериментальне значення tgα з теоретичним.

8.Зробити висновки.

Таблиця вимірювань

Напрям струму	№ вимірювання	I, А	R, кОм	$\ln\left(\frac{I}{I_0}+1\right)$	U, В
прямий	1.				
	2.				
	3.				
	. . .				
	12.				
зворотний	1.				
	2.				
	3.				
	. . .				
	12.				

Національний університет водного господарства та природокористування

Контрольні запитання

1. Назвати квантові числа, які задають стан електрона в атомі. Які значення вони приймають? Записати формули для фізичних величин, які вони визначають.

2. Якими квантовими числами визначається енергія електрона в атомі? Намалювати схему енергетичних рівнів. Що таке виродження?

3. Сформулювати принцип Паулі.
4. Як пояснює зонна теорія поділ тіл на метали і діалекти? Нарисувати відповідні зонні схеми.
5. Які тіла називаються напівпровідниками ?
6. Що таке дірка? Як вона рухається в електричному полі?
7. Записати формулу для густини струму через концентрацію носіїв струму.
8. Що таке p-n - перехід? Як він утворюється?
9. Нарисувати вольт-амперну характеристику напівпровідникового діода. Як можна пояснити різні ділянки цієї характеристики?

Лабораторна робота №5.11

Дослідження закону поглинання γ – променів

Мета роботи: експериментально перевірити закон поглинання γ -променів і визначити коефіцієнт поглинання

Теоретичні відомості

(теорію до даної роботи див. також у конспекті лекцій, §8.3)

Поглинання γ-квантів речовиною веде до зменшення інтенсивності випромінювання, що підлягає закону

$$I = I_0 e^{-\mu x}, \quad (1)$$

де I_0 – інтенсивність падаючого випромінювання, I – інтенсивність випромінювання, яке пройшло крізь шар речовини товщиною x, μ – коефіцієнт поглинання. Коефіцієнт поглинання μ залежить від трьох факторів, пов'язаних з такими ефектами, як: фотоелектричне поглинання (μ_ϕ), комптонівське розсіювання ($\mu_к$) і генерація електронно-позитронних пар (μ_n). Фотоелектричне поглинання відбувається на сильно зв'язаних електронах і відповідає за явище фотоефекту, при якому передається повна енергія γ-кванта. Комптонівське розсіювання відбувається на слабозв'язаних електронах, яким передається частина енергії γ - кванта. Утворення електронно-позитронних пар відбувається в електричному полі ядер при енергіях більших $2m_0c^2 = 1{,}02\text{МеВ}$. Таким чином, повний коефіцієнт поглинання γ - квантів при проходженні їх через речовину, рівний сумі коефіцієнтів відповідно для трьох розглянутих процесів: $\mu = \mu_\Phi + \mu_\text{К} + \mu_\Pi$.

Враховуючи, що інтенсивність випромінювання пропорційна кількості N γ-квантів, які фіксуються лічильником γ-випромінювання,

співвідношення (1) набуде вигляду

$$N = N_0 e^{-\mu x} = N_0 e^{-\mu n d}, \qquad (2)$$

де N_0 – кількість γ-квантів при відсутності перешкоди, N – кількість γ-квантів після проходження випромінювання через n пластинок загальною товщиною d.

Прологарифмуємо (2) і запишемо вираз для μ

$$\mu = \frac{\frac{1}{d}\ln\frac{N_0}{N}}{n} = \frac{f(x)}{n}, \qquad (3)$$

де

$$f(x) = \frac{1}{d}\ln\frac{N_0}{N}. \qquad (4)$$

Якщо при експериментальній перевірці виявляється, що $f(x)$ дійсно пропорційно залежить від n, то це буде означати, що виконується закон поглинання (4). Нахил функції $f(x)$ до осі n визначає коефіцієнт поглинання μ.

$$\mu = \frac{f(x)}{n} \qquad 5)$$

Національний університет водного господарства та природокористування

Опис установки

Для дослідження поглинання γ-променів, їх джерело монтують у спеціальну кювету. В цю ж кювету монтуються поглиначі так, що вони знаходяться між джерелом γ – роменів і детектором, підключеним до лічильника.

Хід виконання роботи

1. Увімкнути установку в мережу. Натиснути кнопку «*Сеть*» і прогріти установку декілька хвилин.

2. Задавши час експозиції (не менше 100с), натиснути «*Сброс*», потім «*Пуск*». Після закінчення часу експозиції та зупинки підрахунку числа імпульсів фонового випромінювання, записати число імпульсів $N_ф$.

3. Контейнер з радіоактивним препаратом поставити отвором в бік віконця лічильника. Натиснути кнопки «*Сброс*» і «*Пуск*». Після зупинки лічби записати значення N_0'.

4. Виміряти штангенциркулем товщину пластинки поглинача зі свинцю і поставити пластинку між отвором контейнера та віконцем лічильника. Знайти значення N' і записати в таблицю.

5. Збільшуючи кількість пластинок, для кожного випадку знайти

відповідне значення N' і записати його в таблицю, збільшуючи число пластинок до 6-7 штук. Кожного разу слід натискати кнопки «*Сброс*» і «*Пуск*».

6. За формулами $N_0 = N_0' - N_ф$ та $N = N' - N_ф$ визначити N_0 – число γ-квантів, що дає джерело при відсутності поглинача і N – число γ-квантів, що проходять поглинач товщиною nd, де n – кількість пластинок, d – товщина однієї пластинки.

7. За формулою (4) визначити $f(n)$ для кожного n.

8. Побудувати графік залежності $f(n)$ від n і зробити висновок відносно виконання закону поглинання.

9. Визначити коефіцієнт поглинання μ γ-променів речовиною пластинок як тангенс кута нахилу прямої графіка $f(n)$ до осі n.

Таблиця вимірювань

$N_ф =$; $N_0' =$; $N_0 =$; $d =$.

N	1	2	3	4	5	6	7
N'							
N							
$f(n)$, м$^{-1}$							

Національний університет водного господарства та природокористування

Контрольні запитання

1. Записати і пояснити закон радіоактивного розпаду.
2. Що таке α-розпад? Схема α-розпаду.
3. Що таке β-розпад? Схема β-розпаду.
4. Пояснити механізм γ-випромінювання.
5. Записати і пояснити закон поглинання. Що таке коефіцієнт поглинання?
6. Які складові коефіцієнта поглинання?

Національний університет
водного господарства

V. Питання до поточного контролю

1. Закон Біо-Савара-Лапласа: сформулювати, записати математично (векторна і скалярна форма) і роз'яснити позначення.
2. В чому полягає якісна різниця між електростатичним і магнітним полем? Як ця різниця проявляється?
3. Описати магнітне поле соленоїда (ідеального, реального, всередині, зовні).
4. Як діє магнітне поле на провідник зі струмом та рухомий електричний заряд?
5. Чи виконує сила Лоренца механічну роботу? Відповідь обґрунтувати.
6. Як діє магнітне поле (однорідне, неоднорідне) на контур зі струмом? Вказати технічне застосування цього явища.
7. Суть явища електромагнітної індукції, теоретичне пояснення, основний закон, технічне застосування.
8. Як відбувається намагнічування тіл? Як класифікують магнетики?
9. Дати означення коливального руху; як класифікують коливання (за якими ознаками)?
10. Дати означення основних характеристик коливань і вказати зв'язки між ними.
11. Чи залежить від часу кінетична енергія тіла, що гармонічно коливається? Потенціальна енергія? Повна механічна енергія? Якщо залежить, то за яким законом?
12. Гармонічний осцилятор (означення з роз'ясненням згадуваних понять, приклади).
13. Як виглядає результуючий рух матеріальної точки, що одночасно бере участь у двох однаково напрямлених та у двох взаємно перпендикулярних коливаннях однієї частоти? Різних частот?
14. Причина згасання коливань. Суть явища резонансу.
15. Що періодично змінюється з часом у коливальному контурі і що є причиною цього?
16. Як залежить частота згасаючих електромагнітних коливань від параметрів контура (подати відповідний математичний вираз і роз'яснити позначення)?
17. Чому у випадку електромагнітних коливань спостерігаються два види резонансу? Як розраховують резонансні частоти для них?

Національний університет
природокористування

18. Записати рівняння плоскої біжучої гармонічної хвилі (з роз'ясненням всіх величин).

19. Плоска і сферична, поздовжня і поперечна, пружна і електромагнітна хвилі: що мають спільного і чим відрізняються?

20. Подати закони відбивання і заломлення електромагнітних хвиль на межі двох середовищ (з роз'ясненням відповідних понять).

21. Означення інтерференції світла. Звідки беруться когерентні хвилі?

22. Умови екстремумів інтерференційної картини (з роз'ясненням відповідних понять).

23. Коли світло поширюється прямолінійно, а коли – ні?

24. Що мають спільного, а що різне у явищ інтерференції та дифракції (з точки зору означень, спостережуваних картин, їх пояснень)?

25. В чому різниця між дифракцією Френеля і дифракцією Фраунгофера (з точки зору означень і практики спостереження явищ)?

26. Чому дифракційна решітка є спектральним приладом (відповідь обґрунтувати математично)?

27. Що таке дисперсія світла, дисперсія показника заломлення, дисперсія діелектричної проникності? Як пов'язані ці явища? Що є причиною їх існування (з точки зору теорії)?

28. Зобразити графічно і пояснити хід кривої поглинання світла речовиною і кривої дисперсії в області резонансної частоти.

29. Пояснити механізм поширення світла в речовині. Що таке коефіцієнт поглинання?

30. Чому природне світло не є поляризованим? Як поляризують світло?

31. Що таке: а) площина коливань; б) площина поляризації; в) площина поляризатора?

32. Як з допомогою пластинки кварцу, наприклад, вияснити – поляризований чи неполяризований світловий промінь?

33. Що мають спільного, а чим відрізняються «звичайний» і «незвичайний» промені (за поведінкою та за природою)?

34. Формулювання і математичний запис законів Малюса і Брюстера.

35. Що називають тепловим випромінюванням? Чому воно рівноважне? Від чого залежить його інтенсивність?

36. Означення характеристик теплового випромінювання; записати одиниці цих величин в СІ.

37. Формулювання і математичний запис законів теплового випромінювання.

38. В чому суть «ультрафіолетової катастрофи»? Пояснити графічно.

39. Сформулювати закони зовнішнього фотоефекту. В чому протиріччя цих законів та класичної електромагнітної теорії світла?

40. Запишіть рівняння Ейнштейна для фотоефекту. Які міркування покладені в основу цього рівняння?

41. В чому полягає різниця між класичним та квантовомеханічним описом стану системи?

42. Від яких квантових чисел залежать хвильові функції стаціонарних станів атомів? Котрі фізичні величини і як саме визначають ці числа? Які значення вони приймають?

43. Зобразіть і поясніть схему енергетичних рівнів атома водню. Котрим переходам тут відповідають відомі у спектроскопії серіальні формули?

44. У якому співвідношенні перебувають теорія Бора і послідовна квантовомеханічна теорія атома?

45. В чому суть протонно-нейтронної моделі атомних ядер? Охарактеризуйте згадані частинки.

46. Які властивості ядерних сил?

47. Що таке дефект маси та енергія зв'язку ядра? Як їх розраховують (в СІ та в позасистемних одиницях)?

48. Чим відрізняється ядерна реакція від радіоактивності? Котрі закони задовольняються у згаданих процесах?

49. Які типи ядерних реакцій відомі? Як розраховують енергію ядерної реакції?

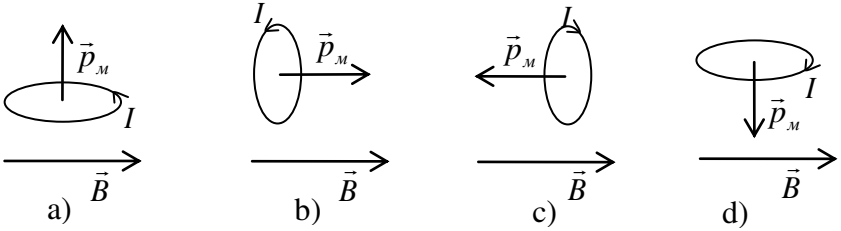
50. Як класифікують елементарні частинки? Що таке античастинки? Кварки?

Національний університет водного господарства та природокористування

VI. Тренінгові тестові програми для змістових і підсумкового модулів

Змістовий модуль IV
Магнетизм

1. Рамка зі струмом знаходиться в магнітному полі. Яке положення рамки буде положенням стійкої рівноваги?



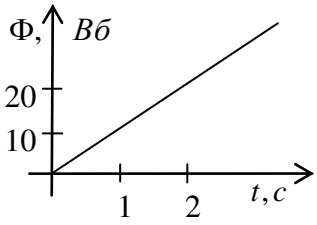
2. Заряд влітає в однорідне магнітне поле з індукцією $\vec{B}$ із швидкістю $\vec{v}$ під гострим кутом α до напрямку поля. Якою буде траєкторія руху заряду?

a) коло; b) пряма; c) спіраль; d) парабола.

3. Два однакових магніти одночасно починають падати з однієї висоти через закріплені на однаковій висоті провідні кільця. Перший магніт пролітає через замкнене кільце, другий – через розімкнене. Який магніт впаде раніше?

a) перший; b) другий; c) одночасно; d) це буде залежати від мас магнітів.

4. Магнітний потік, що пронизує контур, змінюється з часом як показано на малюнку. Визначити ЕРС індукції, що виникає в контурі.



a) $\mathcal{E}_i = 10B$; b) $\mathcal{E}_i = 0{,}1B$;

c) $\mathcal{E}_i = 0$; d) $\mathcal{E}_i = 0{,}01B$.

5. Рамка рівномірно обертається в однорідному магнітному полі. Як зміниться максимальне значення ЕРС індукції, якщо частоту обертання збільшити вдвічі?

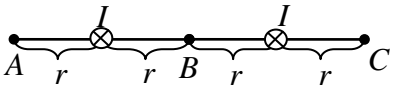
a) не зміниться; b) збільшиться в 2 рази;

c) зменшиться в 2 рази; d) збільшиться в 4 рази.

Національний університет водного господарства та природокористування

6. Два провідники розміщені так, як показано на малюнку. По провідниках течуть струми однакової величини і напрямку. В якій точці напруженість результуючого магнітного поля найменша?

a) A; b) B; c) C;
d) напруженість у всіх точках однакова.



7. Довгий соленоїд складається з N витків дроту. По соленоїду тече струм силою *I*. Як треба зменшити кількість витків соленоїда, щоб при збільшенні сили струму в 2 рази напруженість магнітного поля в соленоїді залишилось незмінною?

a) не треба змінювати; b) збільшити в 2 рази;
c) зменшити в 2 рази; d) зменшити в 4 рази.

Коливання і хвилі

1. Два тіла однакової маси, які прикріплені до пружин, здійснюють гармонічні коливання. Жорсткість першої пружини в n разів більша ніж у другої. Чому дорівнює відношення періодів коливань цих тіл?

a) $\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{n}$; b) $\frac{T_1}{T_2} = \frac{1}{\sqrt{n}}$; c) $\frac{T_1}{T_2} = n$; d) $\frac{T_1}{T_2} = \frac{1}{n}$.

2. На двох пружинах підвісили вантажі з однаковими масами. Видовження першої пружини виявилось більшим, ніж другої. Який вантаж коливатиметься з більшим періодом?

a) перший; b) другий; c) періоди коливання будуть однакові;
d) вірної відповіді немає.

3. Як залежить повна енергія вільних гармонічних коливань від часу?

a) здійснює коливання з часом; b) лишається незмінною;
c) зменшується з часом; d) збільшується з часом.

4. Додаються два гармонічні коливання однакової частоти і одного напрямку. При якій різниці початкових фаз амплітуда результуючого коливання буде максимальною?

a) 0; b) π; c) $\frac{\pi}{2}$; d) $\frac{\pi}{4}$.

Національний університет водного господарства та природокористування

5. Як треба змінити довжину математичного маятника, щоб період коливань збільшився у 2 рази?

a) збільшити у 2 рази; b) збільшити у 4 рази;
c) зменшити у 2 рази; d) зменшити у 4 рази.

6. В яких із перелічених середовищ здатна поширюватись пружна поперечна хвиля?

a) у газах; b) у рідинах; c) в твердих тілах; d) у вакуумі.

7. Який з наведених далі виразів відповідає відстані між сусідніми вузлами стоячої хвилі?

a) 0,25 λ; b) 0,5 λ; c) λ; d) 2 λ.

8. Який вираз визначає частоту електромагнітних коливань в реальному коливному контурі?

a) $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$; b) $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$; c) $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} + \frac{R^2}{4L^2}}$;

d) правильної відповіді немає.

Національний університет водного господарства та природокористування

Змістовий модуль V
Оптика

1. Котра людина краще бачить у воді, ніж у повітрі?

a) з нормальним зором; b) далекозора;
c) короткозора; d) нічого не бачить.

2. Оптична різниця ходу визначається за формулою:

a) $\Delta x = x_2 - x_1$; b) $\Delta = n_2 x_2 - n_1 x_1$;

c) $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta$; d) правильної відповіді немає.

3. Умова максимуму інтерференції світла має вигляд:

a) $\Delta = 2k\frac{\lambda}{2}$; b) $\Delta = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$;

c) $\Delta\varphi = 2k\pi$; d) $\Delta\varphi = (2k+1)\pi$.

4. Умова мінімуму інтерференції світла має вигляд:

a) $\Delta = 2k\frac{\lambda}{2}$; b) $\Delta = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$;

c) $\Delta\varphi = 2k\pi$; d) $\Delta\varphi = (2k+1)\pi$.

5. Дифракція Френеля спостерігається на круглому отворі. У центрі дифракційної картини на екрані спостерігається

Національний університет водного господарства та природокористування

максимум інтерференції, якщо кількість зон, що укладаються в отворі, дорівнює:

a) 1; b) 2; c) 3; d) 4.

6. Дифракція Фраунгофера спостерігається на плоскій щілині. Умова дифракційних мінімумів має вигляд:

a) $a\sin\varphi = \pm 2k\dfrac{\lambda}{2}$; b) $a\sin\varphi = \lambda$;

c) $a\sin\varphi = \pm(2k+1)\dfrac{\lambda}{2}$; d) $a\sin\varphi = \dfrac{\lambda}{2}$.

7. Дифракція Фраунгофера спостерігається на дифракційній решітці. Головні максимуми спостерігаються за умови:

a) $d\sin\varphi = \lambda$; b) $a\sin\varphi = \pm k\lambda$;

c) $d\sin\varphi = \pm k\lambda$; d) $d\sin\varphi = \pm\left(k + \dfrac{P}{N}\right)\lambda$.

8. Роздільна здатність дифракційної решітки залежить:

a) від кута дифракції; b) кількості щілин решітки;

c) сталої дифракційної решітки; d) порядку спектра.

9. Згідно умови Брюстера $\mathrm{tg}\,i_б = n_{21}$

a) відбите і заломлене світло частково поляризоване;

b) відбите і заломлене світло повністю поляризоване;

c) відбите світло повністю поляризоване, а заломлене поляризоване частково;

d) відбите і заломлене світло не поляризоване.

10. Призма Ніколя – це пристрій, який слугує:

a) для спостереження явища дисперсії світла;

b) спостереження подвійного променезаломлення світла;

c) отримання поляризованого світла;

d) спостереження інтерференції поляризованих променів.

11. Що називають енергетичною світністю тіла?

a) кількість енергії, випромінюваної всією поверхнею тіла за одиницю часу;

b) кількість енергії, випромінюваної тілом в одиничному спектральному інтервалі за одиницю часу;

c) кількість енергії, що випромінюється тілом в одиничному спектральному інтервалі за одиницю часу;

d) кількість усієї енергії, що випромінюється одиницею площі тіла за одиницю часу.

12. Який з наведених виразів відповідає кванту енергії?

a) $\frac{h\nu}{c}$; b) mc^2; c) $h\nu$; d) $\frac{h}{\nu}$.

13. У якого з тіл максимум випромінювання припадатиме на найменшу довжину хвилі?

a) розплавлений свинець; b) спіраль розжареної електроплитки;
c) поверхня нагрітої праски; d) розжарена спіраль лампочки.

14. Як змінюється довжина хвилі розсіяного рентгенівського випромінювання при ефекті Комптона?

a) зменшується; b) не змінюється;
c) збільшується; d) не визначено.

15. Як залежить швидкість фотоелектронів від довжини хвилі, що падає на фотокатод?

a) зростає зі зменшенням довжини хвилі;
b) зростає зі збільшенням довжини хвилі;
c) спадає зі зменшенням довжини хвилі.

16. Від чого залежить гранична частота фотоелемента?

a) від речовини фотокатода; b) від речовини анода;
c) від площі фотокатода; d) від форми фотокатода.

Елементи квантової механіки

1. Скільки довжин хвиль де-Бройля на другій коловій орбіті електрона в атомі водню?

a) одна; b) дві; c) чотири; d) правильної відповіді немає.

2. У скільки разів відрізняються значення найбільших довжин хвиль у серіях Лаймана спектрів випромінювання атома H та іона Li^{++}?

a) 2; b) 4; c) 9; d) 16.

3. У скільки разів відрізняються довжини хвиль де-Бройля двох електронів, які прискорились електричним полем з напругами 1 та 100 *В*?

a) 5; b) 10; c) 50; d) 100.

4. Користуючись співвідношенням Гайзенберга, оцінити ширину максимального енергетичного рівня, на якому час життя електрона складає $6{,}5\cdot10^{-4}$ *с*?

a) $\Delta E = 10^{-10} eB$; b) $\Delta E = 10^{-12} eB$;

c) $\Delta E = 5\cdot10^{-12} eB$; d) $\Delta E = 10^{-13} eB$.

5. Фізичний зміст має:

a) хвильова функція Ψ; b) $|\Psi|^2$; c) $\frac{\Psi}{\Psi^*}$; d) $\Psi' - \Psi^*$.

6. Стаціонарне рівняння Шрьодінгера для вільної частинки:

a) $-\frac{\hbar^2}{2m}\hat{\nabla}^2\Psi = E\Psi$; b) $\hat{H}\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}$;

c) $\Delta\Psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E-U)\Psi = 0$; d) правильної відповіді немає.

7. Як зміниться відстань між енергетичними рівнями частинки в потенціальному ящику, якщо його ширину збільшити в 2 рази?

a) не зміниться; b) зменшиться в 2 рази;

c) збільшиться в 2 рази; d) зменшиться в 4 рази.

8. На квантовий лінійний осцилятор масою $m = 10^{-25}$ *кг* діє квазіпружна сила $f = -10^3 x$. Цей осцилятор може поглинути квант світла з енергією:

a) 0,066 *eB*; b) 0,132 *eB*; c) 0,198 *eB*; d) 0,264 *eB*.

9. Електрон атома водню в основному стані описується наступним набором чотирьох квантових чисел:

a) 2, 0, 1, $\frac{1}{2}$; b) 1, 0, 0, $\frac{1}{2}$; c) 1, 1, 0, $\frac{1}{2}$; d) 1, 1, 1, 1.

10. Кількість електронів атома, в якому повністю заповнені *K*– і *L*– шари, 3*s*–оболонка та наполовину 3*p*-оболонка.

a) $N = 10$; b) $N = 12$; c) $N = 15$; d) $N = 18$.

11. Характеристичне рентгенівське випромінювання виникає в рентгенівських трубках:

a) при гальмуванні електронів на аноді;

b) при вибиванні електронів з анода світлом;

c) при переході електронів між енергетичними рівнями глибоких шарів атома;

d) при збудженні валентних електронів.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Атомне ядро

1. Вказати носіїв ядерної взаємодії?

a) γ-кванти; b) μ-мезони; c) електрони; d) π-мезони.

2. В котрих ядер питома енергія зв'язку найбільша?

a) легких; b) середніх; c) важких; d) трансуранових.

3. Котра з формул визначає енергію зв'язку ядра $^4_2\mathrm{He}$?

a) $\Delta E = c^2\left(4m_p - m_{\mu e}\right)$; b) $\Delta E = c^2\left(4m_n - m_{\mu e}\right)$;

c) $\Delta E = c^2\left(2m_p + 2m_n - m_{\mathrm{He}}\right)$; d) $\Delta E = c^2\left(2m_p + 2m_n + m_{\mathrm{He}}\right)$.

4. Котра з формул визначає кількість ядер, що розпалися за час t?

a) $N = N_0 e^{-\lambda t}$; b) $\dfrac{dN}{dt} = -\lambda N$;

c) $N_0 - N = N_0\left(1 - e^{-\lambda t}\right)$; d) $\dfrac{N_0}{\lambda} = N_0 e^{-\lambda T}$.

5. Як змінюється заряд ядра після одного α-розпаду і двох β-розпадів?

a) збільшується на 1; b) зменшується на 1;

c) зменшується на 2; d) не змінюється.

6. При яких радіоактивних перетвореннях виникає нейтрино?

a) при α-розпаді; b) при β-розпаді;

c) разом з γ-випромінюванням; d)при виході нейтрона.

7. В котрому випадку ядерна реакція відбувається з виділенням енергії?

a) $\Delta m > 0$; b) $\Delta m = 0$; c) $\Delta m < 0$; d) $\Delta m >> 0$.

8. Вказати, які частинки утворюються в реакціях:

a) $^{14}_7\mathrm{N} + ^1_0n \rightarrow ^{11}_5\mathrm{B} + \ldots$; b) $^{14}_7\mathrm{N} + ^4_2\mathrm{He} \rightarrow ^{17}_5\mathrm{O} + \ldots$; c)

$^9_4\mathrm{Be} + ^4_2\mathrm{He} \rightarrow ^{12}_6\mathrm{C} + \ldots$; d) $^{27}_{13}\mathrm{Al} + ^1_0n \rightarrow ^{28}_{14}\mathrm{Si} + \ldots$.

9. Яким має бути коефіцієнт розмноження нейтронів реактора, що працює у стаціонарному режимі?

a) $k = 1$; b) $k = 1{,}005$; c) $k = 0{,}995$; d) $k >> 1$.

10. Які елементарні частинки вважаються зараз істинно елементарними?

a) 6 лептонів; b) 6 кварків;

c) 5 переносників взаємодії; d) 17 перерахованих часток.

Національний університет водного господарства та природокористування

VII. Індивідуальна робота (розрахункова робота)

3 семестр (РР №2; ч. 1, 2, 3, 4)
14 індивідуальних задач по темах: “Магнетизм, коливання і хвилі”, “Хвильова оптика”, “Квантова оптика”, “Ядро”.

VIII. Самостійна робота студентів стаціонару

№ з/п		Кількість годин
		III семестр
1.	Опрацювання аудиторного лекційного курсу	15
2.	Підготовка до практичних занять	6
3.	Підготовка до лабораторних занять	7
4.	Підготовка до МКР та підсумкового контролю	48
Всього		**76**

Національний університет водного господарства та природокористування

IX. Методи тестування

III семестр

- Перевірка рівня знань шляхом усного і письмового (тестового) опитування на практичних і лабораторних заняттях.
- Захист завдань РР.
- Модульний контроль (тестовий контроль):
    - Змістовий модуль IV. Магнетизм. Коливання
    - Змістовий модуль V. Оптика. Елементи квантової механіки. Атомне ядро
    - Підсумковий модульний контроль

X. Методичні вказівки для виконання контрольних робіт студентами заочної форми навчання

Робоча програма

Магнетизм

Магнітне поле та його характеристики. Магнітний момент контура. Вектор індукції магнітного поля, напруженість поля. Закон Біо-Савара-Лапласа для елемента струму. Принцип суперпозиції. Магнітне поле прямолінійного та колового струму.

Теорема про циркуляцію вектора $\vec{B}$, поле соленоїда.* Дія магнітного поля на струм, закон Ампера. Сила Лоренца. Магнітна взаємодія струмів.* Дія магнітного поля на контур зі струмом.*

Магнітний потік. Робота переміщення контура зі струмом у магнітному полі. Явище електромагнітної індукції. Закон Фарадея, правило Ленца. Явище самоіндукції, е.р.с. самоіндукції; індуктивність контура і соленоїда.* Явище взаємоіндукції.* Енергія магнітного поля, густина енергії магнітного поля.

Магнітні моменти електронів та атомів.* Діамагнетизм, парамагнетизм.* Намагніченість. Магнітне поле в магнетику.* Теорема про циркуляцію вектора $\vec{H}$ для магнетика. Феромагнетики, їх намагнічування, домени.*

Електромагнітні коливання та хвилі

Вільні незгасаючі та згасаючі коливання в коливальному контурі. Диференціальне рівняння електромагнітних коливань та його розв'язки. Формула Томсона. Вимушені електромагнітні коливання, резонанс. Закон Ома для кола змінного струму.*

Поняття про електромагнітне поле. Рівняння Максвела в інтегральній формі.* Хвильове рівняння.* Рівняння плоскої електромагнітної хвилі. Швидкість електромагнітних хвиль. Вектор Умова-Пойнтінга.* Експериментальне дослідження електромагнітних хвиль.* Шкала електромагнітних хвиль.*

Елементи геометричної та хвильової оптики

Принцип Гюйгенса. Закони відбивання та заломлення світла. Повне внутрішнє відбивання. Тонка лінза, формула тонкої лінзи.* Оптична сила лінзи та системи лінз.* Збільшення.*

Інтерференція світла, способи її спостереження, когерентність. Умови максимумів та мінімумів для інтерференції когерентних променів. Розрахунок інтерференційної картини від двох точкових когерентних джерел.* Інтерференція світла на тонких пластинках.*

Застосування інтерференції.*

Дифракція світла. Принцип Гюйгенса-Френеля. Метод зон Френеля.* Дифракція Фраунгофера на щілині і на решітці. Роздільна здатність решітки. Дифракція рентгенівських променів.*

Природне і поляризоване світло. Поляризація при відбиванні і заломленні, закон Брюстера. Аналіз поляризованого світла, закон Малюса. Подвійне променезаломлення, його пояснення і застосування.* Обертання площини поляризації.*

Взаємодія світла з речовиною.* Дисперсія світла та її пояснення.* Розсіяння світла, закон Релея.* Поглинання світла, закон Бугера.*

Квантова оптика

Теплове випромінювання. Абсолютно чорне тіло. Закон Кірхгофа. Закони випромінювання абсолютно чорного тіла та їх пояснення. Гіпотеза про кванти енергії Планка.

Корпускулярні властивості світла. Енергія та імпульс фотона. Фотоефект. Тиск світла, ефект Комптона.* Корпускулярно-хвильовий дуалізм властивостей світла.

Елементи атомної фізики і квантової механіки

Ядерна модель атома Резерфорда та її труднощі.* Постулати Бора, теорія Бора та її труднощі.*

Корпускулярно-хвильовий дуалізм властивостей матерії, гіпотеза Луї де Бройля та її дослідне підтвердження. Співвідношення невизначеностей Гайзенберга та їх фізичний зміст.* Поняття про хвильову функцію, її статистичний зміст, рівняння Шрьодінгера.*

Застосування рівняння Шрьодінгера до частинки в потенціальній ямі, атома водню, багатоелектронного атома.* Квантові числа, спін електрона. Принцип Паулі; пояснення періодичного закону елементів Менделєєва.* Застосування рівняння Шрьодінгера до гармонічного осцилятора, потенціального бар'єру.*

Фізика ядра та елементарних частинок

Склад і характеристики ядра, моделі ядра. Дефект маси, енергія зв'язку ядра, ядерні сили.

Радіоактивність. Закон радіоактивного розпаду, активність. α- і β-розпад та їх пояснення; походження γ-променів.

Ядерні реакції. Реакція ділення важких ядер; ланцюгова реакція, реактори. Термоядерні реакції синтезу легких ядер. Проблема керованого термоядерного синтезу. Класи елементарних частинок і види фундаментальних взаємодій.* Істинно елементарні частинки.* Проблема об'єднання фундаментальних взаємодій.*

Національний університет
водного господарства
та природокористування

1. Основні закони та співвідношення
Магнетизм. Електромагнітні коливання та хвилі

Магнетизм

- **Закон Біо-Савара-Лапласа (скалярна форма запису)**

$$dB = \mu\mu_0 \frac{Idl\sin\alpha}{4\pi r^2},$$

де: $d\vec{B}$ – модуль вектора магнітної індукції поля, створеного елементом струму $Id\vec{l}$; I – сила струму; dl – модуль елемента довжини провідника, напрямленого по струму; r - модуль вектора, проведеного від елемента струму до точки спостереження; α - кут між елементом струму і вектором $\vec{r}$; μ - магнітна проникність середовища; μ_0 - магнітна стала.

- **Модуль магнітного моменту витка зі струмом**

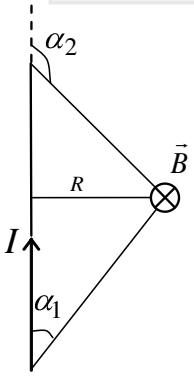
$$P_m = IS,$$

S - площа, охоплена витком.

- **Принцип суперпозиції для магнітних полів**

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^{N} \vec{B}_i,$$

де $\vec{B}_i$ та $\vec{B}$ - вектор магнітної індукції поля, створеного в даній точці окремим струмом і всіма N струмами, відповідно.



- **Модуль вектора індукції магнітного поля скінченного прямолінійного провідника зі струмом**

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi R}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2),$$

де: I - сила стуму, R - відстань від провідника до точки спостереження, α_1 та α_2 - кути між напрямком струму та напрямком на точку спостереження на початку і кінці провідника.

- **Модуль вектора індукції магнітного поля нескінченно довгого прямолінійного провідника зі струмом**

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi R}.$$

- **Модуль вектора індукції магнітного поля в центрі колового**

Національний університет водного господарства та природокористування

струму

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{2R},$$

R - радіус кільця.

- **Модуль вектора індукції магнітного поля всередині нескінченно довгого соленоїда**

$$B = \mu\mu_0 In,$$

n - число витків на одиниці довжини соленоїда.

- **Зв'язок між магнітною індукцією $\vec{B}$ та напруженістю $\vec{H}$ магнітного поля**

$$\vec{B} = \mu\mu_0 \vec{H}.$$

- **Скалярна форма запису закону Ампера у випадку однорідного магнітного поля і прямолінійного провідника зі струмом**

$$F_A = IBl\sin\alpha,$$

l - довжина провідника, α - кут між напрямком стуму і вектором $\vec{B}$.

- **Модуль сили Лоренца**

$$F_Л = |q|\upsilon B\sin\alpha,$$

де: q - заряд, υ - модуль швидкості руху заряду, B – модуль вектора магнітної індукції зовнішнього магнітного поля, α - кут між напрямками векторів $\vec{\upsilon}$ та $\vec{B}$.

- **Магнітний потік у випадку однорідного магнітного поля і плоскої поверхні**

$$\Phi = B_n \cdot S,$$

де: B_n - проекція вектора $\vec{B}$ на нормаль $\vec{n}$ до поверхні, S - площа поверхні.

- **Робота сили Ампера по нескінченно малому переміщенню провідника зі струмом силою I у зовнішньому магнітному полі**

$$dA = Id\Phi,$$

де $d\Phi$ - магнітний потік, що перетнув провідник.

- **Повна робота по переміщенню провідника зі струмом у зовнішньому магнітному полі**

$$A = I\Delta\Phi,$$

$\Delta\Phi$ - скінченний магнітний потік, який перетнув провідник.

Національний університет водного господарства та природокористування

- **Робота по переміщенню контура зі струмом у магнітному полі**

$$A = I\Delta\Phi,$$

$\Delta\Phi$ - зміна магнітного потоку через поверхню, охоплену контуром.

- **Миттєве і середнє значення е.р.с. індукції в контурі при зміні з часом магнітного потоку через поверхню, охоплену контуром**

$$\mathcal{E}_{інд.} = -\frac{d\Phi}{dt}; \qquad \langle \mathcal{E}_{інд.} \rangle = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}.$$

- **Е.р.с. індукції в контурі зі змінним струмом**

$$\mathcal{E}_{ci} = -L\frac{dI}{dt},$$

L - індуктивність контура.

- **Індуктивність довгого соленоїда**

$$L = \mu\mu_0 n^2 V,$$

V – об'єм соленоїда.

Національний університет водного господарства та природокористування

- **Енергія магнітного поля контура зі струмом**

$$W_м = \frac{LI^2}{2}.$$

- **Енергія магнітного поля всередині довгого соленоїда (енергія однорідного магнітного поля)**

$$W_м = \frac{\mu\mu_0 H^2 V}{2},$$

H – модуль напруженості магнітного поля в соленоїді.

- **Густина енергії магнітного поля**

$$\omega_м = \frac{B^2}{2\mu\mu_0}.$$

Вільні незгасаючі електромагнітні коливання

- **Кінематичне рівняння вільних незгасаючих електромагнітних коливань**

$$q = q_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

q_0 - амплітудне значення заряду на обкладках конденсатора, ω_0 - власна частота, t – час, φ_0 – початкова фаза коливань.

- **Власна частота (циклічна частота вільних незгасаючих**

Національний університет
та природокористування

електромагнітних коливань)

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

C – електроємність конденсатора, L – індуктивність котушки.

- **Закон зміни сили струму в котушці ідеального контура**

$$I = I_0 \cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right),$$

де: $I_0 = q_0\omega_0$ - амплітудне значення сили струму.

- **Період вільних електромагнітних коливань в ідеальному контурі**

$$T = 2\pi\sqrt{LC} \quad .$$

- **Повна енергія електромагнітних коливань**

$$W_{ел} = \frac{q_0^2}{2C} = \frac{LI_0^2}{2} = const\,.$$

Національний університет
та природокористування

Вільні згасаючі електромагнітні коливання

- **Кінематичне рівняння згасаючих електромагнітних коливань**

$$q = q_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi_0).$$

- **Частота згасаючих коливань**

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}\,,$$

ω_0 – власна частота коливань.

- **Коефіцієнт згасання**

$$\beta = \frac{R}{2L} = \frac{1}{\tau},$$

R – активний опір контура, τ – час релаксації.

Рівняння плоскої електромагнітної хвилі

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$\begin{cases} \vec{E} = \vec{E}_0 \cos\omega\left(t - \dfrac{x}{\upsilon}\right), \\ \vec{H} = \vec{H}_0 \cos\omega\left(t - \dfrac{x}{\upsilon}\right), \\ \vec{E} \perp \vec{H} \perp \vec{\upsilon}, \end{cases}$$

де: $\vec{E}$ та $\vec{H}$ – напруженості електричного й магнітного полів, відповідно; $\vec{E}_0$ і $\vec{H}_0$ – амплітуди напруженостей електричного і магнітного полів; ω – циклічна частота; x – координата точки простору, якої досягла хвиля в момент часу t; $\vec{\upsilon}$ – фазова швидкість хвилі.

- **Зв'язок між миттєвими значеннями напруженостей $\vec{E}$ та $\vec{H}$**

$$\varepsilon\varepsilon_0 E^2 = \mu\mu_0 H^2,$$

де ε_0 – електрична стала, μ_0 – магнітна стала, ε – діелектрична проникність середовища, μ – магнітна проникність.

- **Швидкість поширення електромагнітних хвиль у вакуумі та середовищі**

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}; \quad \upsilon = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}.$$

- **Об'ємна густина енергії електромагнітної хвилі**

$$w_{ел.м.} = \frac{EH}{\upsilon}.$$

- **Інтенсивність електромагнітної хвилі**

$$I = \frac{1}{2} E_0 H_0.$$

Геометрична та хвильова оптика

Геометрична оптика

- **Закон заломлення світла**

$$\frac{\sin i_1}{\sin i_2} = n_{21},$$

де: i_1 – кут падіння, i_2 – кут заломлення, n_{21} – відносний показник

Національний університет
заломлення другого середовища відносно першого.

- **Відносний показник заломлення**

$$n_{21} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{\upsilon_1}{\upsilon_2},$$

де n_2 та n_1 – абсолютні показники заломлення середовищ; $n_2 = \frac{c}{\upsilon_2}$, $n_1 = \frac{c}{\upsilon_1}$, c – швидкість світла у вакуумі; υ_1 та υ_2 – швидкості світла у першому й другому середовищах.

- **Умова для визначення граничного кута $i_{гр}$ при повному внутрішньому відбиванні**

$$\sin i_{гр} = n_{21}.$$

- **Оптична сила тонкої лінзи**

$$\Phi = (n_{21} - 1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right),$$

Національний університет водного господарства та природокористування

де $n_{21} = \frac{n_2}{n_1}$, n_2 та n_1 – абсолютні показники заломлення матеріалу лінзи та оточуючого середовища; R_1 і R_2 – радіуси кривизни поверхонь, що обмежують лінзу.

- **Оптична сила лінзи**

$$\Phi = \frac{1}{f},$$

f – фокусна відстань лінзи (для збирної лінзи $\Phi > 0$, для розсіювальної – $\Phi < 0$).

Хвильова оптика

Інтерференція та дифракція

- **Оптична довжина шляху**

$$L = n \cdot l,$$

l – геометрична довжина шляху хвилі в середовищі з показником заломлення n.

- **Оптична різниця ходу двох світлових хвиль**

$$\Delta = L_2 - L_1.$$

- **Зв'язок різниці фаз з оптичною різницею ходу світлових**

Національний університет водного господарства та природокористування

хвиль

$$\Delta\varphi = 2\pi\frac{\Delta}{\lambda};\quad \lambda = \frac{\lambda_0}{n},$$

λ – довжина хвилі у середовищі, λ_0 – довжина хвилі у вакуумі.

- **Умова максимуму та мінімуму інтенсивності при інтерференції**

$$\Delta^{\max} = \pm k\lambda_0,\ k = 0,1,2,\ldots,$$

$$\Delta^{\min} = \pm(k+1)\frac{\lambda_0}{2},\ k = 0,1,2,\ldots.$$

- **Координати інтерференційних максимумів та мінімумів, відповідно**

$$x_k^{\max} = \pm\frac{k\lambda L}{d},$$

$$x_k^{\min} = \pm\frac{(k+1)\lambda L}{2d},$$

де: L – відстань від екрана до джерел світла, d – відстань між джерелами (за початок відліку прийнята рівновіддалена від джерел світла точка екрану).

- **Відстань між інтерференційними смугами на екрані**

$$\Delta x = \frac{L\lambda}{d}.$$

- **Оптична різниця ходу світлових хвиль, що виникає при відбиванні монохроматичного світла від тонкої плівки (клина)**

$$\Delta = 2d\sqrt{n_2^2 - n_1^2\sin^2 i_1} \pm \frac{\lambda_1}{2},$$

де: d – товщина плівки (пластинки, клина); n_1 та n_2 – абсолютні показники заломлення середовища й матеріалу плівки, відповідно; i_1 – кут падіння променів на плівку; λ_1 – довжина світлової хвилі у середовищі з показником заломлення n_1.

- **Умови максимумів та мінімумів інтенсивності світла при інтерференції на плоскопаралельній пластинці (плівці, клині) у відбитому світлі**

$$\max:\quad 2d\sqrt{n_2^2 - n_1^2\sin^2 i_1} = (k+1)\frac{\lambda_1}{2},\ k = 0,1,2,\ldots,$$

Національний університет водного господарства та природокористування

$$\min: \; 2d\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i_1} = k\lambda_1, \; k = 0,1,2,\ldots.$$

- **Радіуси темних кілець Ньютона у відбитому світлі**

$$r_k = \sqrt{\frac{k\lambda R}{n}}, \; k = 1,2,3,\ldots,$$

де R – радіус кривизни лінзи, k – номер кільця, n – показник заломлення матеріалу клина, λ – довжина хвилі у середовищі з показником заломлення n.

- **Радіуси світлих кілець Ньютона у відбитому світлі**

$$r_k = \sqrt{\left(k - 1\right)\frac{R}{n}\frac{\lambda}{2}}, \; k = 1,2,3,\ldots.$$

- **Умова спостереження максимумів та мінімумів при дифракції Фраунгофера на прямокутній щілині**

$$\max: \; b\sin\varphi = \pm\left(2m+1\right)\frac{\lambda}{2}, \; m = 1,2,3,\ldots,$$

$$\min: \; b\sin\varphi = \pm 2m\frac{\lambda}{2}, \; m = 1,2,3,\ldots,$$

де b – ширина щілини, φ – кут дифракції, m – порядок дифракційного максимуму (мінімуму).

Національний університет водного господарства та природокористування

- **Умова головних дифракційних максимумів при нормальному падінні світла на дифракційну решітку**

$$d\sin\varphi = \pm m\lambda, \; m = 0,1,2,\ldots,$$

d – період решітки, φ – кут дифракції, m – порядок дифракційного максимуму.

- **Роздільна здатність дифракційної решітки**

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = mN,$$

де $\delta\lambda$ – найменша різниця довжин хвиль двох сусідніх спектральних ліній, при якій ще можливо їх бачити роздільно у спектрі m-го порядку, отриманого за допомогою решітки з N щілинами.

Природне та поляризоване світло

- **Закон Малюса**

$$I = I_0 \cos^2\alpha,$$

де: I_0 – інтенсивність поляризованого світла, що падає на аналізатор;

Національний університет

I – інтенсивність світла, що виходить з аналізатора; α – кут між площинами пропускання аналізатора та поляризатора.

- **Закон Брюстера**

$$\mathrm{tg} i_B = n_{21},$$

i_B – кут Брюстера, n_{21} – відносний показник заломлення середовищ.

- **Зменшення інтенсивності природного світла при проходженні через ідеальний поляризатор**

$$I_0 = \frac{1}{2} I_{пр},$$

де I_0 – інтенсивність поляризованого світла, $I_{пр}$ – інтенсивність природного світла, що падає на поляризатор.

Квантова оптика

Теплове випромінювання

- **Енергетична світність (інтегральна випромінювальна здатність)**

$$E_T = \frac{W}{S \cdot t},$$

W – енергія, що випромінюється з поверхні тіла площею S за час t у всьому спектральному діапазоні.

- **Поглинальна здатність**

$$A_{\nu,T} = \frac{dW_{погл}}{dW_{пад}},$$

де $dW_{пад}$ – енергія електромагнітних хвиль, падаючих на одиницю площі поверхні тіла за одиницю часу, $dW_{погл}$ – поглинута тілом енергія у діапазоні частот від ν до $\nu + d\nu$.

- **Закон Стефана-Больцмана**

$$E_T = \sigma T^4,$$

де E_T – енергетична світність абсолютно чорного тіла, T – абсолютна температура, σ – постійна Стефана-Больцмана.

- **Закон зміщення Віна**

$$\lambda_m = \frac{b}{T},$$

λ_m – довжина хвилі, на яку припадає максимум спектральної густини енергетичної світності абсолютно чорного тіла, b – стала Віна, T –

Національний університет
та природокористування
абсолютна температура.

Фотоефект. Ефект Комптона

- **Рівняння Ейнштейна для фотоефекту**

$$h\nu = A + \frac{m\upsilon_{\max}^2}{2},$$

де: $h\nu$ – енергія фотона, A – робота виходу електрона з металу, $\frac{m\upsilon_{\max}^2}{2}$ – максимальна кінетична енергія фотоелектрона, h – стала Планка, ν – частота світла.

- **Червона межа фотоефекту**

$$\nu_0 = \frac{A}{h}.$$

- **Імпульс фотона**

$$p = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda_0},$$

c – швидкість поширення світла у вакуумі, λ_0 – довжина світлової хвилі у вакуумі.

- **Комптонівське зміщення довжини хвилі**

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = 2\frac{h}{mc}\sin^2\frac{\Theta}{2},$$

де: $\Delta\lambda$ – зміна довжини рентгенівської хвилі внаслідок розсіювання на майже вільному електроні речовини, λ_0 – довжина падаючої хвилі, λ –довжина хвилі, розсіяної під кутом Θ, m – маса електрона.

- **Комптонівська довжина хвилі частинки**

$$\lambda_K = \frac{h}{mc},$$

m – маса відповідної частинки.

Елементи атомної фізики і квантової механіки. Воднеподібний атом Бора. Постулати Бора. Спектральні лінії

- **Енергія кванта світла, що випромінюється або поглинається**

$$h\nu = E_{n2} - E_{n1},$$

Національний університет водного господарства та природокористування

де E_{n2}, E_{n1} – енергія електрона у станах, між якими відбувається перехід.

- **Радіус *n*-ої стаціонарної орбіти електрона у воднеподібних атомах**

$$r_n = a_0 \frac{n^2}{z},$$

де z – порядковий номер елемента у таблиці Д.І. Менделєєва, a_0 – радіус першої борівської орбіти електрона у атомі водню (борівський радіус).

- **Повна механічна енергія електрона у воднеподібних атомах**

$$E_n = -E_i \frac{z^2}{n^2}.$$

- **Енергія іонізації атома водню**

$$E_i = Rhc,$$

R – стала Рідберга.

- **Енергія, що випромінюється (при $n_2 > n_1$) або поглинається (при $n_2 < n_1$) атомом водню при переходах між енергетичними рівнями з квантовими числами n_1 та n_2**

$$h\nu = E_i\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right).$$

- **Узагальнена формула Бальмера**

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right),$$

де λ – довжини випромінених світлових хвиль, n_2 – квантове число стану, з якого відбувається перехід, n_1 – квантове число стану, у який переходить атом.

- **Спектральні серії**

серія Лаймана (ультрафіолетова область спектру)

$$n_1 = 1,\ n_2 = 2,3,4,\ldots;$$

серія Бальмера (видима область спектру)

$$n_1 = 2,\ n_2 = 3,4,5,\ldots;$$

решта серій відповідають інфрачервоній області спектру.

Національний університет
водних ресурсів

Квантова механіка

Гіпотеза де Бройля. Співвідношення невизначеностей Гайзенберга. Статистичний зміст хвильової функції, застосування рівняння Шрьодінгера.

- **Довжина хвилі де Бройля**

$$\lambda = \frac{h}{p},$$

h – стала Планка, p – модуль імпульсу частинки.

- **Класична формула зв'язку модуля імпульсу частинки з її кінетичною енергією**

$$p = \sqrt{2mE_k},$$

m – маса частинки, E_k – кінетична енергія.

- **Співвідношення невизначеностей Гайзенберга для координат *x* та відповідних проекцій імпульсів p_x мікрочастинок**

$$\Delta x \Delta p_x \geq \hbar,$$

Δx – невизначеність координати частинки, Δp_x – невизначеність її проекції імпульсу, $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ – постійна Дірака.

- **Ймовірність знаходження частинки в елементарному об'ємі dV (статистичний зміст хвильової функції)**

$$dw = |\Psi|^2 dV,$$

$|\Psi|^2$ – густина ймовірності, $\Psi(x, y, z, t)$ – хвильова функція, що задає стан мікрочастинки.

- **Нормована хвильова функція електрона в основному стані атома водню**

$$\Psi(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} \exp\left(-\frac{r}{a_0}\right),$$

де a_0 – радіус першої борівської орбіти, r – відстань електрона від ядра.

- **Власна нормована хвильова функція, що описує основний стан частинки в одновимірному прямокутному потенціальному ящику**

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$\Psi_n(x) = \pm\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\left(\frac{\pi x}{l}n\right),$$

$n = 1, 2, 3, \ldots$ квантове число стану частинки, l – ширина потенціального ящика.

- **Енергія частинки в потенціальному ящику в різних станах** n

$$E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ml^2}n^2,$$

m – маса частинки.

- **Квантові числа електрона в атомі водню та фізичні величини, що визначаються ними:**

головне квантове число $n = 1, 2, 3, \ldots$;

енергія електрона в атомі водню $E_n = -hcR\frac{1}{n^2}$;

орбітальне квантове число $l = 0, 1, 2, \ldots, n-1$;

квадрат моменту імпульсу орбітального руху електрона $L_l^2 = \hbar^2 l(l+1)$;

магнітне квантове число $m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm l$;

проекція орбітального моменту імпульсу на вісь z (вибраний напрямок) $L_{lz} = \hbar m_l$.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Фізика ядра та елементарних частинок

- **Дефект маси ядра**

$$\Delta m = Z \cdot m_{^1\mathrm{H}} + (A - Z)m_n - m_{am},$$

де: Z – зарядове число; A – масове число; $m_{^1\mathrm{H}}$ – маса атома водню; m_n – маса нейтрона; m_{am} – маса атома, для ядра якого розраховується Δm.

- **Енергія зв'язку ядра**

$$\Delta E = \left(Z \cdot m_{^1\mathrm{H}} + (A - Z)m_n - m_{am}\right)\cdot c^2$$

або у позасистемних одиницях

$$\Delta E = 931{,}5\Delta m,$$

де маси частинок підставляють в а.о.м., а ΔE одержують у

Національний університет водного господарства та природокористування

мегаелектрон-вольтах (МеВ); $c = 3{,}00 \cdot 10^8$ *м/с*, ($931{,}5 MeB / a.o.м. = c^2$).

- **Закон радіоактивного розпаду**

$$N = N_0 \exp(-\lambda t),$$

де: N – кількість радіоактивних ядер, які не розпалися до моменту часу t; N_0 – початкова кількість ядер (при $t = 0$); λ – стала радіоактивного розпаду.

- **Зв'язок сталої радіоактивного розпаду з періодом T напіврозпаду**

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T}.$$

- **Активність радіоактивного препарату**

$$J = \lambda N.$$

- **Схема α-розпаду та β⁻-розпаду**

$$^A_Z X \to ^4_2 \text{He} + ^{A-4}_{Z-2} Y; \quad ^A_Z X \to ^0_{-1} e + ^A_{Z+1} Y + ^0_0 \tilde{\nu},$$

$^0_0\tilde{\nu}$ – антинейтрино.

Національний університет водного господарства та природокористування

- **Енергія ядерної реакції**

$$\Delta E = c^2 (\Sigma m_1 - \Sigma m_2)$$

або у позасистемних одиницях

$$\Delta E = 931{,}5 (\Sigma m_1 - \Sigma m_2),$$

де Σm_1 – сума мас частинок до реакції; Σm_2 – сума мас частинок після реакції; c – швидкість світла у вакуумі.

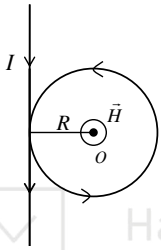
2. Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Прямолінійний нескінченно довгий провідник, по якому тече струм силою $I = 2\text{А}$, утворює петлю радіусом $R = 10\text{см}$. Знайти напруженість та індукцію магнітного поля в центрі петлі.

Розв'язання

Дано:
$I = 2\text{А}$
$R = 10\text{см}$

$B\,?\,H\,?$



За принципом суперпозиції напруженість результуючого поля у точці O дорівнює векторній сумі напруженостей полів, створених прямолінійним провідником і петлею (коловим струмом).

$$\vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2 .$$

У випадку вибраного на рисунку площини напрямку струму вектори $\vec{H}_1$ та $\vec{H}_2$ направлені перпендикулярно до рисунку "до нас", тому так само направлений і вектор $\vec{H}$, а

$$H = H_1 + H_2 .$$

Модулі напруженостей H_1 і H_2 розрахуємо, виходячи з формул для відповідних модулів індукцій:

$$B_1 = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi R}$$

– для поля безмежно довгого провідника зі струмом;

$$B_2 = \frac{\mu\mu_0 I}{2R}$$

– для поля в центрі колового витка.

Зв'язок модулів індукції і напруженості магнітного поля

$$B = \mu\mu_0 H ,$$

μ_0 – магнітна стала, μ – магнітна проникність середовища.

Маємо

$$H_1 = \frac{B_1}{\mu\mu_0} = \frac{I}{2\pi R},\ H_2 = \frac{I}{2R},$$

$$H = \frac{I}{2R}\left(\frac{1}{\pi} + 1\right).$$

Останнє співвідношення – робоча формула для модуля напруженості поля. Формула зв'язку B з H буде одночасно робочою для розрахунку модуля індукції магнітного поля.

Національний університет водного господарства та природокористування

Національний університет
та природокористування

Виконаємо числовий розрахунок

$R = 0{,}1\text{м}$; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м; $\mu = 1$ (для вакууму, оскільки середовище у даній задачі не згадувалося).

$$H = \frac{2}{2 \cdot 0{,}1}\left(\frac{1}{3{,}14} + 1\right) = 13\left(\frac{\text{А}}{\text{м}}\right),$$

$$B = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 10^{-7} \cdot 1 \cdot 13 = 1{,}66 \cdot 10^{-5}\ (\text{Тл}).$$

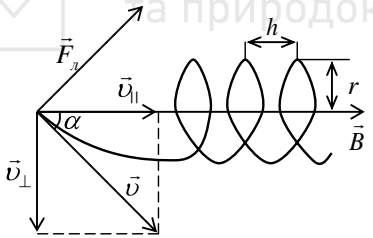
Відповідь: $H = 13\text{А/м}$, $B = 17\text{мкТл}$.

Приклад 2. Електрон зі швидкістю $\vec{\upsilon}$ влітає в магнітне поле з індукцією $\vec{B}$ під кутом α до ліній поля. По якій траєкторії рухатиметься електрон? Знайти параметри траєкторії електрона. Чому дорівнює робота сили, що діє на електрон?

Розв'язання

Дано: υ, B, α, $r\,?\ h\,?\ A\,?$

На електрон з боку магнітного поля діє сила Лоренца, напрямлена перпендикулярно до швидкості електрона і до вектора магнітної індукції. Як відомо з механіки, сила, перпендикулярна до швидкості, спричиняє рівномірний рух по колу, бо надає тілу нормального прискорення. Радіус кола знайдемо з другого закону Ньютона:



$$F_Л = ma_n,$$

де m – маса електрона.

Враховуючи, що $F_Л = e\upsilon B\sin\alpha$, маємо

$$e\upsilon_\perp B = \frac{m\upsilon_\perp^2}{r},$$

де $\upsilon_\perp = \upsilon\sin\alpha$ (див рис., e – елементарний заряд). Отже,

$$r = \frac{m\upsilon_\perp}{eB} = \frac{m\upsilon\sin\alpha}{eB}.$$

Одночасно електрон рухатиметься вздовж поля рівномірно зі швидкістю, модуль якої $\upsilon_{||} = \upsilon\cos\alpha$. Суперпозиція цих двох рухів (по колу в площині, перпендикулярній до ліній магнітної індукції, і

Національний університет водного господарства та природокористування

рівномірного прямолінійного руху вздовж напрямку $\vec{B}$ поля) визначить результуючий рух, траєкторією якого буде гвинтова лінія (спіраль). Крок спіралі – відстань між сусідніми витками, тобто відстань, яку пройде електрон вздовж ліній індукції за один період обертання:

$$h = \upsilon_{||} T .$$

Період (час одного оберту) знайдемо зі співвідношення

$$T = \frac{2\pi r}{\upsilon_{\perp}} = \frac{2\pi m \upsilon_{\perp}}{eB\upsilon_{\perp}} .$$

Отже,

$$h = \upsilon_{||} \frac{2\pi m}{eB} = \frac{2\pi\, m\upsilon\cos\alpha}{eB} .$$

Оскільки сила Лоренца напрямлена перпендикулярно до швидкості, роботи вона не виконує ($A = 0$).

Відповідь: траєкторія – спіраль з радіусом $r = \frac{m\upsilon\sin\alpha}{eB}$ та кроком $h = \frac{2\pi\, m\upsilon\cos\alpha}{eB}$; $A = 0$.

Національний університет водного господарства та природокористування

Приклад 3. В однорідному магнітному полі, модуль вектора індукції якого $B = 0{,}6\text{Тл}$, рівномірно рухається провідник довжиною $l = 20\text{см}$. По провіднику тече струм силою $I = 4\text{А}$. Швидкість руху провідника напрямлена перпендикулярно до ліній магнітної індукції, її модуль $\upsilon = 0{,}2\text{м/с}$. Знайти роботу переміщення провідника за $t = 10\text{с}$ руху та потужність, необхідну для цього.

Розв'язання

Дано:
$B = 0{,}6\text{Тл}$
$l = 20\text{см}$
$I = 4\text{А}$
$\upsilon = 0{,}2\text{м/с}$
$\alpha = 90°$
$t = 10\text{с}$

$A\,?\;P\,?$

На провідник зі струмом, поміщений у магнітне поле, діє сила Ампера $\vec{F}_A$, модуль якої у випадку однорідного магнітного поля і прямолінійного провідника

$$F_A = IBl\sin\alpha,$$

де α – кут між напрямком струму та індукцією магнітного поля. За умовою задачі $\alpha = 90°$, тобто $\sin\alpha = 1$.

Робота по переміщенню провідника

$$A = FS,$$

де S – пройдений провідником шлях. Враховуючи, що $S = \upsilon t$, отримаємо

$$A = IBl\upsilon t.$$

Потужність, що необхідна для руху, виражається формулою

$$P = \frac{A}{t}.$$

Останні два вирази для A та P є робочими формулами. Підставимо числові значення фізичних величин і виконаємо розрахунок.

$l = 0{,}2\text{м}$;

$$A = 4 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 10 = 0{,}96\,(\text{Дж}),$$

$$P = \frac{0{,}96}{10} = 0{,}096\,(\text{Вт}).$$

Відповідь: $A = 0{,}96\text{Дж}$, $P = 0{,}096\text{Вт}$.

Приклад 4. В однорідному магнітному полі, модуль індукції якого B, рівномірно обертається з частотою ν рамка площею S. Вісь обертання лежить у площині рамки і перпендикулярна до ліній індукції поля. Визначити максимальну ЕРС індукції, що виникає в рамці. Якої сили струм протікатиме в рамці, якщо її опір R?

Розв'язання

Дано:
B
ν
S
R

$\mathcal{E}_{i\max}\,?\;I\,?$

При рівномірному обертанні рамки в однорідному магнітному полі магнітний потік через площину рамки змінюється з часом за законом

$$\Phi = B \cdot S\cos(\omega t),$$

де $\omega = 2\pi\nu$ – модуль кутової швидкості обертання рамки. Це випливає з означення магнітного потоку у випадку однорідного магнітного поля і плоскої поверхні

Національний університет
та природокористування

$\Phi = B_n S = BS\cos\alpha$; кут α є одночасно кутом повороту: $\alpha = \omega t$. Отже,

$$\Phi = BS\cos 2\pi\nu t .$$

За основним законом електромагнітної індукції при зміні магнітного потоку в рамці індукується електрорушійна сила

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt} = 2\pi\nu BS\sin(\pi\nu t).$$

Максимального значення е.р.с. досягає в ті моменти часу, коли $\sin(\omega t) = 1$, тобто

$$\mathcal{E}_{i\max} = 2\pi\nu BS .$$

Згідно з законом Ома по рамці потече струм силою

$$I = \frac{\mathcal{E}_i}{R} .$$

Тому

$$I = \frac{2\pi\nu BS}{R}\sin(\pi\nu t).$$

Відповідь: $\mathcal{E}_{i\max} = 2\pi\nu BS$, $I = \frac{2\pi\nu BS}{R}\sin(\pi\nu t)$.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Приклад 5. Соленоїд довжиною 20см і діаметром 3см містить 400 витків. По соленоїду тече струм силою 2А. Знайти: 1) індуктивність соленоїда L; 2) магнітний потік Φ, що перетинає площу його поперечного перерізу; 3) енергію магнітного поля $W_м$ в соленоїді; 4) модуль вектора індукції магнітного поля B в соленоїді; 5) середнє значення електрорушійної сили самоіндукції $\langle\mathcal{E}_{ci}\rangle$, котра індукується в соленоїді, якщо протягом 0,01с зменшити до нуля силу струму в ньому.

Розв'язання

Дано:
$l = 20$см
$d = 3$см
$I = 2$А
$N = 400$
$\Delta t = 0{,}01$с

$L?\ W_м?\ B?\ \Phi?\ \langle\mathcal{E}_{ci}\rangle?$

Всередині соленоїда зі струмом створюється однорідне магнітне поле, лінії індукції якого паралельні до осі соленоїда. За межами соленоїда поле практично відсутнє, отже, можна вважати, що все магнітне поле зосереджене всередині соленоїда.

Індуктивність соленоїда обчислюється за формулою

$$L = \mu\mu_0 n^2 lS , \qquad (1)$$

де $S = \pi d^2/4$ – площа поперечного перерізу соленоїда; $n = N/l$ – кількість витків на одиниці довжини соленоїда; μ – магнітна проникність середовища; μ_0 – магнітна стала.

З урахуванням останніх співвідношень формулу (1) запишемо у вигляді

$$L = \frac{\mu\mu_0 N^2 \pi d^2}{4l}. \qquad (2)$$

Енергія магнітного поля соленоїда

$$W_м = \frac{LI^2}{2}. \qquad (3)$$

Індукція магнітного поля всередині соленоїда

$$B = \mu\mu_0 nI = \frac{\mu\mu_0 NI}{l}.$$

Остаточно

$$B = \frac{\mu\mu_0 NI}{l}. \qquad (4)$$

Магнітний потік через поперечний переріз соленоїда

$$\Phi = BS\cos\alpha,$$

де α – кут між перпендикуляром до площини поперечного перерізу і напрямком ліній магнітної індукції. Оскільки всередині соленоїда ці лінії напрямлені паралельно до осі, то $\alpha = 0$ і $\cos\alpha = 1$. Отже,

$$\Phi = \frac{B\pi d^2}{4}. \qquad (5)$$

Середнє значення е.р.с. самоіндукції

$$\langle E_{ci} \rangle = -L\frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{LI}{\Delta t}, \qquad (6)$$

бо $\Delta I = 0 - I = -I$.

Співвідношення (2), (3), (4), (5) та (6) є робочими формулами.

Виконаємо числовий розрахунок

$l = 0{,}2$м; $d = 3\cdot10^{-2}$м; $\Delta t = 1\cdot10^{-2}$с; $\mu_0 = 4\pi\cdot10^{-7}$ Гн/м; $\mu = 1$;

$$L = \frac{4\cdot3{,}14\cdot10^{-7}\cdot400^2\cdot3{,}14\cdot(3\cdot10^{-2})^2}{4\cdot0{,}2} = 7{,}1\cdot10^{-4}\ (\text{Гн});$$

$$W_м = \frac{7{,}1\cdot10^{-4}\cdot2^2}{2} = 1{,}4\cdot10^{-3}\ (\text{Дж});$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$B = \frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot 10^{-7} \cdot 2 \cdot 400}{0{,}2} = 5{,}0 \cdot 10^{-3}\ (\text{Тл});$$

$$\Phi = \frac{5{,}0 \cdot 10^{-3} \cdot 3{,}14 \cdot (1 \cdot 10^{-2})^2}{4} = 3{,}6 \cdot 10^{-6}\ (\text{Вб});$$

$$\langle E_{ci} \rangle = \frac{7{,}1 \cdot 10^{-4} \cdot 2}{1 \cdot 10^{-2}} = 0{,}14\ (\text{В}).$$

Відповідь: $L = 7{,}1 \cdot 10^{-4}$ Гн; $W_м = 1{,}4 \cdot 10^{-3}$ Дж; $B = 5{,}0 \cdot 10^{-3}$ Тл; $\Phi = 3{,}6 \cdot 10^{-6}$ Вб; $\langle E_{ci} \rangle = 0{,}14$ В.

Приклад 6. Закон зміни з часом напруги на обкладинках конденсатора в ідеальному коливальному контурі має вигляд $U = 50\cos(10^4 \pi t)$ (В). Ємність конденсатора дорівнює $C = 1 \cdot 10^{-7}$ Ф. Знайти: 1) період коливань; 2) індуктивність контура; 3) закон зміни з часом сили струму в котушці.

Дано:

$U = 50\cos(10^4 \pi t)$ (В)

$C = 1 \cdot 10^{-7}$ Ф

$T - ?\ L - ?\ I(t) - ?$

Розв'язання

За умовою задачі в контурі існують вільні незгасаючі електромагнітні коливання, амплітуда є величина стала. Закон зміни напруги на обкладинках конденсатора має вигляд $U = U_0 \cos \omega_0 t$. Порівнявши його з заданим в умові задачі законом, знайдемо, що $\omega_0 = 10^4 \pi\, c^{-1}$, а період коливань

$$T = \frac{2\pi}{\omega},\ T = \frac{2\pi}{10^4 \pi} = 2 \cdot 10^{-4}\ (\text{с}).$$

За формулою Томсона період коливань в ідеальному контурі

$$T = 2\pi\sqrt{LC},$$

звідки знайдемо індуктивність контура.

$$L = \frac{T^2}{4\pi^2 C}.$$

Виконаємо числовий розрахунок

$$L = \frac{(2 \cdot 10^{-4})^2}{4 \cdot 3{,}14^2 \cdot 1 \cdot 10^{-7}} = 1{,}0 \cdot 10^{-2}\ (\text{Гн}).$$

Закон залежності сили струму в контурі від часу

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$I = -I_0 \sin(\omega_0 t),$$

де $I_0 = q_0\omega_0$. Амплітудні значення заряду q_0 і напруги U_0 пов'язані співвідношенням $C = q_0/U_0$ (означення електроємності конденсатора). Тому маємо

$$I_0 = CU_0\omega_0 \text{ та } I = -U_0C\omega_0 \sin(\omega_0 t).$$

Підставивши числові значення величин, отримаємо:

$$I = -50\cdot10^{-7}\cdot10^4\cdot\pi\cdot\sin(10^4\pi t) = -0{,}16\sin(10^4\pi t) \text{ (А)}.$$

Відповідь: Т=0,2мс; L=10мГн; $I = -0{,}16\sin(10^4\pi t)$ А.

Приклад 7. Коливальний контур складається з конденсатора ємністю 7мкФ і котушки індуктивністю 0,23Гн та опором 40 Ом. Конденсатор заряджено зарядом $5{,}6\cdot10^{-4}$Кл. Знайти: 1) закон залежності заряду на обкладинках конденсатора від часу; 2) закон залежності напруги на обкладинках конденсатора від часу; 3) енергію електричного поля в конденсаторі через 0,01с після початку коливань; 4) довжину хвилі, на яку резонуватиме контур.

Розв'язання

Дано:

$C = 7мкФ = 7\cdot10^{-6}Ф$

$L = 0{,}23$Гн

$R = 40$Ом

$q_0 = 5{,}6\cdot10^{-4}$Кл

$t_1 = 0{,}01$с

$q(?)\ U(?)\ W_{ел}?\ \lambda?$

В коливальному контурі, що складається з ємності, індуктивності та активного опору, відбуваються згасаючі електромагнітні коливання за законом

$$q = q_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t), \quad (1)$$

де коефіцієнт згасання

$$\beta = \frac{R}{2L}, \quad (2)$$

циклічна частота згасаючих коливань

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \beta^2}\ . \quad (3)$$

Напруга на обкладках конденсатора зв'язана з зарядом конденсатора та його ємністю співвідношенням $U = q/C$, тому, з урахуванням формули (1), запишемо закон залежності напруги від часу у вигляді

$$U(t) = \frac{q_0}{C} e^{-\beta t}\cos(\omega t). \quad (4)$$

Енергія електричного поля в конденсаторі

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$W_{ел} = \frac{q^2}{2C} = \frac{(q_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t))^2}{2C}. \qquad (5)$$

Резонанс спостерігається при співпаданні періодів електромагнітних коливань у контурі та хвилі, яку прийматиме контур,

$$T_к = T_{хв}.$$

Період коливань у контурі $T_к = 2\pi/\omega$, ω обчислюється за формулою (3). Період коливань в електромагнітній хвилі $T_{хв} = \lambda/\upsilon_{хв}$. Прирівнюючи ці два вирази, отримаємо

$$\frac{2\pi}{\omega} = \frac{\lambda}{\upsilon_{хв}},$$

звідки

$$\lambda = \frac{2\pi\upsilon_{хв}}{\omega} \qquad (6)$$

($\upsilon_{хв}$ – швидкість світла у вакуумі).

Підставивши числові значення величин у формули (2), (3), (1), (4), (5) та (6), знайдемо:

$$\beta = \frac{40}{2\cdot 0{,}23} = 87\ (\text{с}^{-1});$$

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{0{,}23\cdot 7\cdot 10^{-6}} - 87^2} = 780\ (\text{с}^{-1});$$

$$q(t) = 5{,}6\cdot 10^{-4} e^{-87t}\cos(80t)\ (\text{Кл});$$

$$U(t) = \frac{5{,}6\cdot 10^{-4}}{7\cdot 10^{-6}} e^{-87t}\cos(80t) = 80 e^{-87t}\cos(80t)\ (\text{В});$$

$$W_{ел} = \frac{(q(t))^2}{2C} = \frac{(5{,}6\cdot 10^{-4}\cdot e^{-87\cdot 0{,}01}\cos(80\cdot 0{,}01))^2}{2\cdot 7\cdot 10^{-6}} = 1{,}7\cdot 10^{-6}\ (\text{Дж});$$

$$\lambda = \frac{2\cdot 3{,}14\cdot 3{,}0\cdot 10^8}{780} = 2{,}4\cdot 10^6\ (\text{м}).$$

Відповідь: $q(t) = 5{,}6\cdot 10^{-4} e^{-87t}\cos(80t)$ Кл; $U(t) = 80 e^{-87t}\cos(80t)$ В; $W_{ел} = 1{,}7\cdot 10^{-6}$ Дж; $\lambda = 2{,}4\cdot 10^6$ м.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Приклад 8. У вакуумі вздовж осі x розповсюджується плоска електромагнітна хвиля, інтенсивність якої $I = 21{,}2\,\text{мкВт}/\text{м}^2$. Визначити амплітуду напруженості електричного поля хвилі.

Розв'язання

Дано:

$\varepsilon = 1$

$\mu = 1$

$I = 21{,}2\,\text{мкВт}/\text{м}^2$

E_0 ?

Інтенсивність електромагнітної хвилі

$$I = \frac{1}{2} E_0 H_0. \qquad (1)$$

Як відомо, між миттєвими значеннями напруженостей електричного та магнітного полів у біжучій електромагнітній хвилі існує зв'язок

$$\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}\,E = \sqrt{\mu\mu_0}\,H.$$

Оскільки коливання величин E та H синфазні, то

$$\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}\,E_0 = \sqrt{\mu\mu_0}\,H_0,$$

звідки

$$H_0 = \frac{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}\,E_0}{\sqrt{\mu\mu_0}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\,E_0, \qquad (2)$$

(для вакууму $\varepsilon = \mu = 1$).

Підставивши (2) в (1), отримаємо

$$I = \frac{1}{2} E_0^2 \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}},$$

і остаточно

$$E_0 = \sqrt{2I\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}}.$$

Виконаємо числовий розрахунок.

$I = 2{,}12 \cdot 10^{-5}\ \text{Вт}/\text{м}^2$; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \text{Гн}/\text{м}$; $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \Phi/\text{м}$;

$$E_0 = \sqrt{2{,}12 \cdot 10^{-5} \cdot 2\sqrt{\frac{12{,}57 \cdot 10^{-7}}{8{,}85 \cdot 10^{-12}}}} = 0{,}126\left(\frac{\text{В}}{\text{м}}\right).$$

Національний університет водного господарства та природокористування

Відповідь: $E_0 = 0{,}126\,\text{В/м}$.

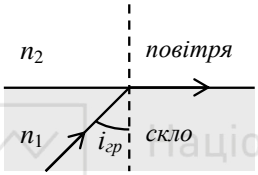
Приклад 9. Показник заломлення скла дорівнює $n_1 = 1{,}52$. Знайти граничний кут повного внутрішнього відбивання для межі розділу "скло-повітря" та швидкість поширення світла у склі.

Розв'язання

Дано: $n_1 = 1{,}52$

$i_{гр} \,?\, \upsilon \,?$

Якщо світловий промінь падає на межу розділу двох середовищ під кутом $i_{гр}$, то заломлений промінь ковзає по межі розділу цих середовищ (явище спостерігається лише при переході променя з оптично більш густого середовища в оптично менш густе середовище).



Граничний кут повного внутрішнього відбивання знаходиться із співвідношення

$$\sin i_{гр} = n_{21} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{1}{n_1}$$

(в нашому випадку світло переходить зі скла в повітря, абсолютний показник заломлення якого $n_2 = 1$). Отже,

$$\sin i_{гр} = \frac{1}{1{,}52}, \quad i_{гр} = 41°8'.$$

Швидкість поширення світла у прозорому середовищі

$$\upsilon = \frac{c}{n_1} = \frac{3{,}00 \cdot 10^8}{1{,}52} = 1{,}97 \cdot 10^8 \left(\frac{\text{м}}{\text{с}}\right).$$

Відповідь: $i_{гр} = 41°8'$, $\upsilon = 1{,}97 \cdot 10^8$ м/с.

Приклад 10. Промінь падає на плоску скляну пластинку товщиною $d = 3\text{см}$ під кутом $i_1 = 70°$. Визначити зміщення променя всередині пластинки, якщо показник заломлення скла $n = 1{,}5$.

Розв'язання

Національний університет водного господарства та природокористування

Дано: $d = 3\text{см}$; $i_1 = 70°$; $n = 1{,}5$; x?

Із закону заломлення світла знайдемо кут заломлення i_2:

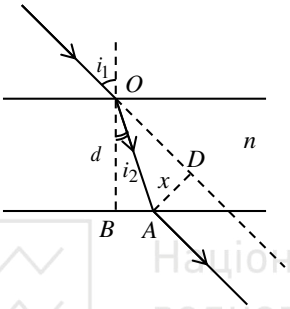
$$\frac{\sin i_1}{\sin i_2} = n;$$

(показник заломлення повітря близький до одиниці); звідси

$$\sin i_2 = \frac{\sin i_1}{n};\ \sin i_2 = \frac{\sin 70°}{1{,}5} = 0{,}594;\ i_2 = 39°.$$

З трикутника OAB знайдемо гіпотенузу OA:

$$OA = \frac{OB}{\cos i_2} = \frac{d}{\cos i_2}.$$



З трикутника OAD знайдемо шукане зміщення

$$x = OA\sin(i_1 - i_2) = \frac{d}{\cos i_2}\sin(i_1 - i_2);$$

$$x = \frac{3\sin(70° - 39°)}{\cos 39°} = 2(\text{см}).$$

Відповідь: $x = 2\text{см}$.

Приклад 11. Яку оптичну силу матиме у воді опукла лінза, оптична сила якої у повітрі складає 5дптр?

Розв'язання

Дано: $n_c = 1{,}6$; $n_в = 1{,}33$; $\Phi_1 = 5\text{дптр}$; Φ_2 ?

Оптична сила лінзи обчислюється за формулою

$$\Phi = \left(\frac{n_2}{n_1} - 1\right)\cdot\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right),$$

де: R_1 та R_2 – радіуси кривизни поверхонь, що обмежують лінзу; n_2 – показник заломлення матеріалу лінзи; n_1 – показник заломлення середовища, в якому знаходиться лінза. Тому оптична сила лінзи, що знаходиться у повітрі

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$\Phi_1 = (n_c - 1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right), \qquad (1)$$

а оптична сила цієї ж лінзи у воді

$$\Phi_2 = \left(\frac{n_c}{n_в} - 1\right)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right). \qquad (2)$$

Звідси

$$\frac{\Phi_2}{\Phi_1} = \frac{\left(\frac{n_c}{n_в} - 1\right)}{(n_c - 1)};$$

$$\Phi_2 = \Phi_1 \frac{\left(\frac{n_c}{n_в} - 1\right)}{(n_c - 1)};$$

$$\Phi_2 = 5\frac{\left(\frac{1{,}6}{1{,}33} - 1\right)}{1{,}6 - 1} = 1{,}7 \text{ (дптр)}.$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Відповідь: Φ_2=1,7дптр.

Приклад 12. Пучок природного світла падає на скляну пластинку. Відбитий від пластинки промінь виявився повністю поляризованим. Знайти кут між падаючим і відбитим променями.

Розв'язання

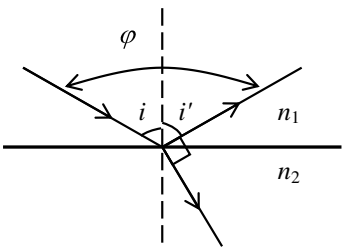
Дано: $i = i_B$; $n_c = 1{,}6$; φ — ?

Відбитий від діелектрика промінь буде максимально поляризований при виконанні умови Брюстера

$$\operatorname{tg} i_B = \frac{n_2}{n_1};$$

у нашому випадку $\operatorname{tg} i_B = n_c$ (світло падає на скло з повітря).

За законом відбивання кут відбивання дорівнює куту падіння



$$i = i' = \frac{\varphi}{2},$$

а за умовою задачі $i = i_B$. Тому

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = n_c,$$

$$\frac{\varphi}{2} = \operatorname{arctg} n_c,$$

$$\varphi = 2\operatorname{arctg} n_c.$$

$$\varphi = 2\operatorname{arctg} 1{,}6 = 116°.$$

Відповідь: $\varphi = 116°$.

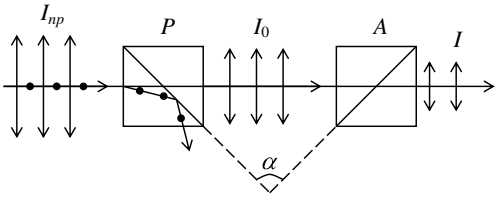
Приклад 13. Два ніколі розміщені так, що кут між їх площинами пропускання становить $\alpha = 60°$. Визначити, у скільки разів зменшиться інтенсивність природного світла: 1) при проходженні через один ніколь; 2) при проходженні через обидва ніколі. При проходженні через ніколь втрачається 5% інтенсивності падаючого світла.

Розв'язання

Дано:
$\alpha = 60°$
$k = 0{,}05$

$\frac{I_{пр}}{I_0} ? \frac{I_{пр}}{I}$?

Позначимо інтенсивність природного світла, яке падає на перший ніколь, $I_{пр}$; інтенсивність поляризованого світла, що падає на другий ніколь – I_0; інтенсивність поляризованого світла, що виходить з другого ніколя – I.



Відомо, що природне світло, яке пройшло через ніколь, поляризується і його інтенсивність зменшується вдвічі. Якщо врахувати ще втрати інтенсивності при поглинанні в ніколі, то остаточно отримаємо:

$$I_0 = \frac{1}{2} I_{пр} (1 - k); \qquad (1)$$

звідси знайдемо

$$\frac{I_{пр}}{I_0} = \frac{2}{1-k};$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$\frac{I_{пр}}{I_0} = \frac{2}{1-0{,}05} = 2{,}1$$

(інтенсивність зменшується у 2,1 рази).

На другий ніколь (аналізатор) падає вже плоскополяризоване світло інтенсивністю I_0. Інтенсивність світла, що виходить з другого ніколя (без врахування поглинання світла) визначається законом Малюса

$$I = I_0 \cos^2 \alpha,$$

а з урахуванням цього поглинання

$$I = I_0 (1-k) \cos^2 \alpha. \qquad (2)$$

Підставивши у (2) формулу (1), отримаємо

$$I = \frac{1}{2} I_{пр} (1-k) \cos^2 \alpha.$$

Звідси

$$\frac{I_{пр}}{I} = \frac{2}{(1-k)\cos^2 \alpha};$$

$$\frac{I_{пр}}{I} = \frac{2}{(1-0{,}05)\cos^2 60^\circ} = 8{,}9$$

(після проходження через два ніколі інтенсивність зменшиться у 8,9 разів).

Відповідь: $I_{пр}/I_0 = 2{,}1;\ I_{пр}/I = 8{,}9$.

Приклад 14. На скляний клин з малим кутом при вершині α нормально до його поверхні падає паралельний пучок монохроматичного світла з довжиною хвилі $\lambda_0 = 6 \cdot 10^{-7}$ м. При цьому на кожному сантиметрі довжини клина утворюється 10 інтерференційних смуг. Знайти кут клина α. Спостереження ведеться у відбитому світлі.

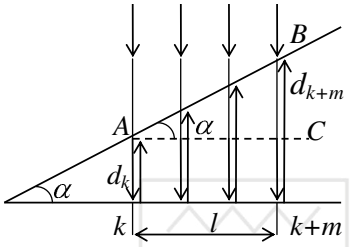
Розв'язання

Дано:
$\lambda_0 = 6\cdot10^{-7}$ м
$l = 1$см
$m = 10$
$i_1 = 0$
α ?

Умова максимумів при інтерференції на пластинці у відбитому світлі має вигляд:

$$2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i_1} = (2k+1)\frac{\lambda_0}{2} \qquad (1)$$

де i_1 – кут падіння (в даній задачі $i_1 = 0$), d – товщина плівки (клину) у тому місці, де спостерігається світла смуга за номером k. Нехай довільній світлій смузі за номером k відповідає товщина клина d_k, а смузі з номером $(k+m)$ – товщина d_{k+m}.



Тоді на основі (1)

$$2d_k n = (2k+1)\frac{\lambda_0}{2} \Rightarrow d_k = \frac{(2k+1)\lambda_0}{4n},$$

$$2d_{k+m}n = (2(k+m)+1)\frac{\lambda_0}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_{k+m} = \frac{(2(k+m)+1)\lambda_0}{4n}.$$

З трикутника ΔABC (див. рис.), враховуючи, що m смуг вкладається на відстані l, знайдемо

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{d_{k+m} - d_k}{l} = \frac{(2k+2m+1-2k-1)\lambda_0}{4nl} = \frac{m\lambda_0}{2nl}.$$

Враховуючи, що кут α малий, маємо

$$\alpha \approx \frac{m\lambda_0}{2nl}.$$

Підставимо числові значення:

$l = 1\cdot10^{-2}$м ; $n = 1{,}5$

$$\alpha \approx \frac{10\cdot6\cdot10^{-7}}{2\cdot1{,}5\cdot10^{-2}} = 2\cdot10^{-4}\,(\text{рад}).$$

Відповідь: $\alpha = 2\cdot10^{-4}$рад.

Приклад 15. Знайти відстань між третім і шістнадцятим темними кільцями Ньютона, якщо відстань між другим і двадцятим темними кільцями дорівнює 4,8мм. Простір між лінзою і скляною пластинкою заповнений рідиною з показником заломлення 1,3. Спостереження ведеться у відбитому світлі.

Розв'язання

Дано:

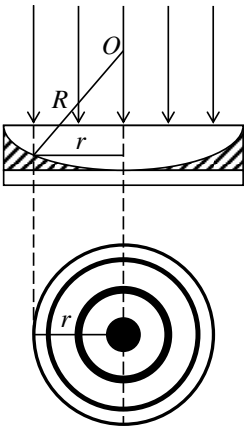
$n = 1{,}3$

$\Delta l_1 = 4{,}8$мм

$k_1 = 2; k_2 = 20$

$k_3 = 3; k_4 = 16$

Δl_2 ?



Радіуси темних кілець Ньютона у відбитому світлі знаходяться зі співвідношення

$$r_k = \sqrt{\frac{kR\lambda}{n}},$$

де n – показник заломлення речовини, що заповнює простір між лінзою та пластинкою, R – радіус кривизни лінзи, λ – довжина світлової хвилі, k – номер кільця.

Таким чином, відстань між другим і двадцятим темними кільцями

$$\Delta l_1 = \sqrt{\frac{k_2 R\lambda}{n}} - \sqrt{\frac{k_1 R\lambda}{n}} = \sqrt{\frac{R\lambda}{n}}\left(\sqrt{k_2} - \sqrt{k_1}\right). \quad (1)$$

Відстань між третім і шістнадцятим кільцями

$$\Delta l_2 = \sqrt{\frac{k_4 R\lambda}{n}} - \sqrt{\frac{k_3 R\lambda}{n}} = \sqrt{\frac{R\lambda}{n}}\left(\sqrt{k_4} - \sqrt{k_3}\right). \quad (2)$$

З (1) знайдемо $\sqrt{\frac{R\lambda}{n}} = \frac{\Delta l_1}{\sqrt{k_2} - \sqrt{k_1}}$ і підставимо у (2).

Отримаємо

$$\Delta l_2 = \frac{\Delta l_1}{\left(\sqrt{k_2} - \sqrt{k_1}\right)}\left(\sqrt{k_4} - \sqrt{k_3}\right).$$

Отримана формула і є робочою. Підставивши числові значення, отримаємо

$$\Delta l_2 = \frac{4{,}8\left(\sqrt{16} - \sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{20} - \sqrt{2}\right)} = 3{,}6\,(\text{мм}).$$

Відповідь: $\Delta l_2 = 3{,}6$ мм.

Приклад 16. В досліді Юнга щілини освітлювалися монохроматичним світлом з довжиною хвилі $\lambda_0 = 6 \cdot 10^{-7}$ м, відстань між щілинами 1мм і відстань від щілини до екрана 3м. Знайти положення третьої світлої смуги.

Розв'язання

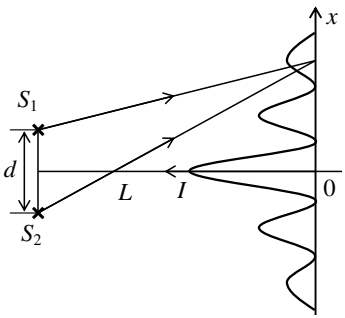
Національний університет водного господарства та природокористування

Дано:
$\lambda_0 = 6 \cdot 10^{-7}$ м
$d = 1$мм
$L = 3$м
$k = 3$
x_3 ?

На екрані внаслідок інтерференції когерентних променів, що йдуть від щілин, утвориться інтерференційна картина – чергування темних і світлих смуг. Координати світлих смуг визначаються за формулою

$$x_k = \pm \frac{k\lambda L}{d},$$

(за початок відліку прийнята точка екрана, рівновіддалена від щілин; для неї $k = 0$). Підставимо числові значення: $d = 1 \cdot 10^{-3}$ м;



$$x_3 = \pm \frac{3 \cdot 6 \cdot 10^{-7} \cdot 3}{1 \cdot 10^{-3}} = \pm 5{,}4 \cdot 10^{-3}\ \text{м}.$$

Національний університет водного господарства та природокористування

Відповідь: ±5,4мм.

Приклад 17. На щілину шириною $b = 2 \cdot 10^{-6}$ м падає нормально паралельний пучок монохроматичного світла з довжиною хвилі $\lambda = 5{,}89 \cdot 10^{-7}$ м. Знайти кути, в напрямку яких спостерігатимуться максимуми світла.

Розв'язання

Дано:
$b = 2 \cdot 10^{-6}$ м
$\lambda = 5{,}89 \cdot 10^{-7}$ м
$\varphi^{\max}$?

Центральний максимум при дифракції світла на щілині спостерігається у напрямку $\varphi^{\max} = 0°$. Умова вторинних максимумів при дифракції на щілині:

$$b \sin\varphi = \pm\left(k + 1\right)\frac{\lambda}{2},\ k = 1,2,3,\ldots.$$

Отже,

$$\sin\varphi^{\max} = \pm\frac{\left(2k+1\right)\lambda}{2b}.$$

Знайдемо всі можливі напрямки, враховуючи що $\left|\sin\varphi\right| \le 1$:

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$\sin\varphi_1^{\max}=\frac{3\lambda}{2b}=\frac{3\cdot 5{,}89\cdot 10^{-7}}{2\cdot 2\cdot 10^{-6}}=0{,}442\Rightarrow\varphi_1^{\max}=\pm 26^\circ;$$

$$\sin\varphi_2^{\max}=\frac{5\lambda}{2b}=\frac{5\cdot 5{,}89\cdot 10^{-7}}{2\cdot 2\cdot 10^{-6}}=0{,}736\Rightarrow\varphi_2^{\max}=\pm 47^\circ 24';$$

$$\sin\varphi_3^{\max}=\frac{7\lambda}{2b}=\frac{7\cdot 5{,}87\cdot 10^{-7}}{2\cdot 2\cdot 10^{-6}}=1{,}04.$$

Отже, вже третій максимум не спостерігається.

Відповідь: $\varphi_1^{\max}=\pm 26^\circ$, $\varphi_2^{\max}=\pm 47^\circ 24'$.

Приклад 18. На дифракційну решітку нормально до її поверхні падає біле світло. Стала решітки рівна 2мкм.

1. Визначити найбільший порядок дифракційного максимуму, який дає ця решітка для зеленого світла з довжиною хвилі $\lambda_1=5{,}5\cdot 10^{-7}$ м.
2. На яку лінію λ у спектрі третього порядку накладається червона лінія ($\lambda_2=7\cdot 10^{-7}$ м) у спектрі другого порядку?
3. Яку різницю довжин хвиль може розділити ця решітка в області жовтих ($\lambda_3=6\cdot 10^{-7}$ м) променів у спектрі другого порядку? Ширина решітки 2см.

Розв'язання

Національний університет водного господарства та природокористування

Дано:

$d = 2\text{мкм} = 2 \cdot 10^{-6}\text{м}$

$\lambda_1 = 5{,}5 \cdot 10^{-7}\text{м}$

$a = 2\text{см} = 2 \cdot 10^{-2}\text{м}$

$\lambda_2 = 7 \cdot 10^{-7}\text{м}$

$\lambda_3 = 6 \cdot 10^{-7}\text{м}$

$k_2 = 2$

$k_3 = 3$

$k_4 = 2$

$k_{\max}\,?\;\lambda\,?\;\delta\lambda\,?$

1. Положення головних максимумів для дифракційної решітки визначається формулою

$$d\sin\varphi = k\lambda,$$

звідки

$$k = \frac{d\sin\varphi}{\lambda}.$$

Оскільки $\sin\varphi \le 1$, то $k \le \frac{d}{\lambda}$ (k – ціле число, порядок дифракційного максимуму). Тому

$$k_{\max} = \frac{d}{\lambda}.$$

Отже,

$$k_{\max} = \frac{2 \cdot 10^{-6}}{5{,}5 \cdot 10^{-7}} = 3.$$

2. З формули $d\sin\varphi = k\lambda$ знайдемо

$$\sin\varphi = \frac{k\lambda}{d}.$$

Оскільки лінії, котрим відповідають довжини хвиль λ_2 та λ, накладаються, тобто спостерігаються під однаковим кутом, то

$$\frac{k_2\lambda_2}{d} = \frac{k_3\lambda}{d} \text{ або } k_2\lambda_2 = k_3\lambda,$$

звідки

$$\lambda = \frac{k_2\lambda_2}{k_3},$$

$$\lambda = \frac{2 \cdot 7 \cdot 10^{-7}}{3} = 4{,}7 \cdot 10^{-7}\ \text{м}.$$

3. Роздільна здатність дифракційної решітки визначається за формулою

$$\frac{\lambda}{\delta\lambda} = kN,$$

де N – загальна кількість штрихів решітки.

Очевидно, що $N = a/d$. Отже

$$\frac{\lambda_3}{\delta\lambda} = k_4\frac{a}{d} \Rightarrow \delta\lambda = \frac{\lambda_3 d}{k_4 a}.$$

Національний університет водного господарства та природокористування

$$\delta\lambda = \frac{6\cdot10^{-7}\cdot 2\cdot10^{-6}}{2\cdot 2\cdot10^{-2}} = 3\cdot10^{-11}\ (\text{м}).$$

Відповідь: $k_{\max}=3$; $\lambda = 0{,}47$мкм ; $\delta\lambda = 30$пм .

Приклад 19. Потужність випромінювання абсолютно чорного тіла $N = 34$кВт . Знайти температуру T цього тіла, якщо відомо, що його поверхня має площу $S = 0{,}6\text{м}^2$. На яку довжину хвилі припадає максимум випромінювальної здатності тіла?

Розв'язання

Дано:
$N = 34$кВт
$S = 0{,}6\text{м}^2$
$T\,?\ \lambda_m\,?$

Закон Стефана-Больцмана

$$E_T = \sigma T^4,$$

E_T – енергетична світність абсолютно чорного тіла, $\sigma = 5{,}67\cdot10^{-8}\ \text{Вт}/(\text{м}^2\cdot\text{К}^4)$ – постійна Стефана-Больцмана. За означенням енергетичної світності

$$E_T = \frac{W}{S\cdot t},$$

де t – час, W – енергія випромінювання. Але $W/t = N$, тому маємо рівняння

$$\sigma T^4 = \frac{N}{S},$$

звідки

$$T = \sqrt[4]{\frac{N}{\sigma S}}\ .$$

Виконаємо числовий розрахунок:

$N = 34\text{кВт} = 3{,}4\cdot10^4\ \text{Вт}$;

$$T = \sqrt[4]{\frac{3{,}4\cdot10^{-4}}{5{,}67\cdot10^{-8}\cdot 0{,}6}} = 1{,}0\cdot10^3\ (\text{К}).$$

Закон зміщення Віна:

$$\lambda_m = \frac{b}{T},$$

де $b = 2{,}9\cdot10^{-3}\ \text{м}\cdot\text{К}$ – стала Віна. Тому

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$\lambda_m = \frac{2{,}9\cdot 10^{-3}}{1{,}0\cdot 10^{3}} = 2{,}9\cdot 10^{-6}\ (\text{м}).$$

Відповідь: $T = 1{,}0\cdot 10^{3}\,\text{К}$; $\lambda_m = 2{,}9\cdot 10^{-6}\,\text{м}$.

Приклад 20. Знайти частоту ν світла, що вириває з металу електрони, які повністю затримуються різницею потенціалів $U = 3\text{В}$. Фотоефект починається при частоті світла $\nu_0 = 6\cdot 10^{14}\,\text{Гц}$. Знайти роботу виходу A електрона з металу.

Розв'язання

Дано:

$U = 3\text{В}$

$\nu_0 = 6\cdot 10^{14}\,\text{Гц}$

ν? A?

Рівняння Ейнштейна для фотоефекту

$$h\nu = A + E_k^{\max}, \qquad (1)$$

де $h = 6{,}63\cdot 10^{-34}\,\text{Дж}\cdot\text{с}$ – стала Планка, $E_k^{\max}$ – максимальна кінетична енергія фотоелектронів, $h\nu$ – енергія фотона. За означенням червоної межі фотоефекту

$$h\nu_0 = A. \qquad (2)$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Застосувавши до фотоелектрона у зовнішньому електричному полі теорему про зміну кінетичної енергії та вираз для роботи сил електростатичного поля, одержуємо

$$E_k^{\max} = eU, \qquad (3)$$

тут $e = 1{,}60\cdot 10^{-19}\,\text{Кл}$ – елементарний заряд.

Роботу виходу електрона знайдемо за формулою (2):

$$A = 6{,}63\cdot 10^{-34}\cdot 6\cdot 10^{14} = 3{,}98\cdot 10^{-19}\ (\text{Дж}) = 2{,}48\text{еВ}.$$

Частоту світла знайдемо з (1) з використанням (3):

$$\nu = \frac{A + eU}{h},$$

$$\nu = \frac{3{,}98\cdot 10^{-19} + 1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 3}{6{,}63\cdot 10^{-34}} = 1{,}32\cdot 10^{15}\ (\text{Гц}).$$

Відповідь: $\nu = 1{,}32\cdot 10^{15}\,\text{Гц}$; $A = 2{,}48\text{еВ}$.

Приклад 21. В результаті ефекту Комптона рентгенівський квант при зіткненні з електроном був розсіяний на кут $\Theta = 90°$. Енергія розсіяного кванта $E_2 = 0{,}4\text{МеВ}$. Визначити енергію кванта E_1 до

Національний університет водного господарства та природокористування

розсіяння.

Розв'язання

Дано:
$\Theta = 90°$
$E_2 = 0{,}4\text{МеВ}$
E_1 ?

Використаємо вираз для розрахунку комптонівського зміщення хвилі $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$

$$\Delta\lambda = 2\frac{h}{mc}\sin^2\frac{\Theta}{2}, \qquad (1)$$

де h – постійна Планка, m – маса електрона, c – швидкість світла у вакуумі.

Виразимо довжини хвиль λ_1 та λ_2 через енергії E_1 та E_2 відповідних квантів, виходячи з виразу для енергії $E = hc/\lambda$. Тоді замість (1) маємо:

$$\frac{hc}{E_2} - \frac{hc}{E_1} = \frac{hc}{mc^2}2\sin^2\frac{\Theta}{2}.$$

Звідси

$$E_1 = \frac{E_2 mc^2}{mc^2 - E_2 \cdot 2\sin^2\left(\frac{\Theta}{2}\right)} = \frac{E_2 E_0}{E_0 - 2E_2\sin^2\left(\frac{\Theta}{2}\right)},$$

де $E_0 = mc^2$ – енергія спокою електрона ($E_0 = 0{,}511\text{МеВ}$). Остаточно робоча формула має вигляд

$$E_1 = \frac{E_2 E_0}{E_0 - 2E_2\sin^2\left(\frac{\Theta}{2}\right)}. \qquad (2)$$

Виконаємо числовий розрахунок у позасистемних одиницях (у (2) входить лише одна розмірна фізична величина – енергія):

$$E_1 = \frac{0{,}4 \cdot 0{,}511}{0{,}511 - 2 \cdot 0{,}4 \cdot \sin^2\left(\frac{90°}{2}\right)} = 1{,}85\text{МеВ}.$$

Відповідь: $E_1 = 1{,}85\text{МеВ}$.

Приклад 22. Визначити енергію E та імпульс p фотона, якому відповідає довжина хвилі $\lambda = 380\text{нм}$.

Розв'язання

Національний університет водного господарства та природокористування

Дано: $\lambda = 380$нм

E? p?

Енергія фотона $E = h\nu$, імпульс $p = h\nu/c$, де h – стала Планка, ν – частота, c – швидкість світла у вакуумі. Виразимо шукані величини через довжину хвилі, використавши зв'язок $\nu = c/\lambda$:

$$E = \frac{hc}{\lambda};\ p = \frac{h}{\lambda}.$$

Виконаємо числовий розрахунок.

$\lambda = 380\text{нм} = 3{,}80\cdot10^{-7}$ м; $h = 6{,}63\cdot10^{-34}$ Дж·с; $c = 3{,}00\cdot10^{8}$ м/с;

$$E = \frac{6{,}63\cdot10^{-34}\cdot3{,}00\cdot10^{8}}{3{,}80\cdot10^{-7}} = 5{,}23\cdot10^{-19}\,(\text{Дж}) = 3{,}27\,(\text{еВ});$$

$$p = \frac{6{,}63\cdot10^{-34}}{3{,}80\cdot10^{-7}} = 1{,}74\cdot10^{-27}\left(\frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}}\right).$$

Відповідь: E=3,27еВ, p=1,74·10^{-27}кг·м/с.

Приклад 23. Електрон в атомі водню перейшов з четвертого енергетичного рівня на другий. Знайти енергію випроміненого при цьому фотона.

Національний університет водного господарства та природокористування

Розв'язання

Дано: $n_2 = 4$

$n_1 = 2$

E?

Узагальнена формула Бальмера:

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right);$$

оскільки $\lambda = \dfrac{c}{\nu}$, то

$$\nu = Rc\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right),$$

де n_1 та n_2 – номери рівнів атома водню, R – стала Рідберга, c – швидкість світла у вакуумі, ν – частота випроміненого фотона.

Енергія фотона

$$E = h\nu = hRc\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right).$$

Але $hRc = E_i$ – енергія іонізації атома водню ($E_i = 13{,}6$еВ). Тому остаточно

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$E = E_i\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right).$$

Підставимо числові значення в отриману формулу

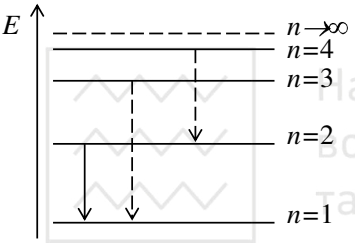
$$E = 13{,}6\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2}\right) = 2{,}55\,\text{еВ}.$$

Відповідь: $E = 2{,}55\,\text{еВ}$.

Приклад 24. В яких межах має перебувати енергія частинок, щоб при збудженні атомів водню ударами цих частинок спектр водню мав лише одну спектральну лінію?

Розв'язання

Дозволені значення енергії електрона в атомі водню визначаються виразом



$$E_n = -\frac{1}{n^2}E_i,\ n = 1,2,3,\ldots \quad (1)$$

E_i – енергія іонізації (13,6еВ).

Будемо виходити з того, що перед «бомбардуванням» атом перебував в основному стані (з енергією $E_1 = -13{,}6eB$). Звернемося до схеми енергетичних рівнів і проаналізуємо можливі варіанти.

1.Якщо бомбардувати атом частинками, які можуть віддати при зіткненні енергію $E < E_2 - E_1$, то атом цю енергію не зможе поглинути (квантовий характер поглинання і випромінювання передбачає, що енергія атома може змінюватися при цьому лише порціями $h\nu = E_m - E_n$, де m і n будь-які не співпадаючі головні квантові числа).

2.Якщо $E = E_2 - E_1$, то атом поглинає цю енергію і переходить у перший збуджений стан, що відповідає $n = 2$; через час, рівний часу життя збудженого стану (він порядку 10^{-8}с), атом переходить у вихідний (основний) стан, випромінюючи такий же квант. У спектрі випромінювання появиться перша лінія серії Лаймана.

3.Якщо $E_2 - E_1 < E < E_3 - E_1$ то, очевидно, ніяких додаткових ліній у спектрі випромінювання не буде, оскільки будь-яка енергія з цього інтервалу недостатня для переведення атома у другий збуджений стан

Національний університет водного господарства та природокористування

$n = 3$.

4.Якщо частинка здатна передати атому енергію $E = E_3 - E_1$, то поглинаючи її, він переходить у другий збуджений стан. У спектрі випромінювання потім з'являються додатково друга лінія серії Лаймана і перша лінія серії Бальмера (на схемі пунктирні).

5.Наступне збільшення енергії частинок може лише збільшити число спектральних ліній. Щоб спектр атома мав тільки одну лінію, енергія збудження має бути в межах $E_2 - E_1 \le E < E_3 - E_1$.

Використовуючи формулу (1), знайдемо максимальне і мінімальне значення енергії:

$$E_3 - E_1 = E_i\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) = 12{,}1\text{еВ},$$

$$E_2 - E_1 = E_i\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) = 10{,}2\text{еВ}.$$

Відповідь: $10{,}2\text{еВ} \le E < 12{,}1\text{еВ}$.

Приклад 25. Електрон, початковою швидкістю якого можна знехтувати, пройшов прискорюючу різницю потенціалів $U = 51\text{В}$. Знайти довжину хвилі де Бройля λ.

Розв'язання

Дано:

$U = 51\text{В}$

λ ?

На основі гіпотези де Бройля

$$\lambda = \frac{h}{p}, \qquad (1)$$

h – постійна Планка, p – модуль імпульсу частинки. Імпульс частинки можна визначити, якщо відома її кінетична енергія E_k. У класичній механіці зв'язок модуля імпульсу з кінетичною енергією

$$p = \sqrt{2mE_k}, \qquad (2)$$

де m – маса частинки.

Формула (1) з урахуванням співвідношення (2) запишеться так:

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mE_k}}. \qquad (3)$$

Як відомо, кінетична енергія електрона, що пройшов прискорюючу різницю потенціалів U, рівна $E_k = eU$ (e – елементарний заряд). Тоді вираз (3) приймає вигляд

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2meU}}.$$

Числовий розрахунок:

$h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж·с; $m = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг; $e = 1{,}60 \cdot 10^{-19}$ Кл;

$$\lambda = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2 \cdot 9{,}11 \cdot 10^{-31} \cdot 1{,}60 \cdot 10^{-19} \cdot 51}} = 1{,}7 \cdot 10^{-10}$$ м.

Відповідь: $\lambda = 0{,}17$ нм.

Приклад 26. Атом водню перебуває у стані $1S$. Визначити ймовірність w знаходження електрона в атомі всередині сфери радіусом $0{,}1a_0$ (a_0 – радіус першої борівської орбіти). Хвильова функція, що описує цей стан, вважається відомою.

Розв'язання

Ймовірність виявити електрон в елементарному об'ємі dV визначається рівністю

$$dw = |\Psi|^2 dV \qquad (1)$$

(див. статистичний зміст хвильової функції).

Нормована хвильова функція електрона в основному стані атома водню має вигляд

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} \exp\left(-\frac{r}{a_0}\right).$$

Завдяки сферичній симетрії Ψ-функції ймовірність виявити електрон на відстані r однакова у всіх напрямках. Тому елемент об'єму dV, що відповідає однаковій густині ймовірності, можна подати у вигляді об'єму сферичного шару радіусом r і товщиною dr:

$$dV = 4\pi r^2 dr.$$

Тепер формула (1) приймає вигляд

$$dw = \frac{4}{a_0^3} \exp\left(-\frac{2r}{a_0}\right) r^2 dr.$$

Введемо безрозмірну змінну $\rho = r/a_0$. При цьому

$$r^2 = \rho^2 a_0^2,\ dr = a_0 d\rho,\ dw = 4e^{-2\rho}\rho^2 d\rho.$$

Ймовірність виявлення електрона у скінченному об'ємі сфери знайдемо, інтегруючи dw у межах від $\rho_1 = 0$ до $\rho_2 = 0{,}1$ (це

Національний університет
та природокористування

відповідає зміні r від 0 до $0{,}1a_0$).

$$w = 4\int_0^{0{,}1} \rho^2 e^{-2\rho} d\rho .$$

Цей інтеграл беруть по частинах точно, але тут легше знайти його наближено, використавши розклад експоненти в ряд і обмежившись при малому ρ першими двома членами ряду $e^{-2\rho} = 1 - 2\rho$:

$$w = 4\int_0^{0{,}1} \rho^2 d\rho - 8\int_0^{0{,}1} \rho^3 d\rho = \left(\frac{4}{3}\rho^3 - \frac{8}{4}\rho^4\right)\Big|_0^{0{,}1} = \left(\frac{4}{3} - 0{,}2\right)\cdot 10^{-3} = 1{,}1\cdot 10^{-3}.$$

Відповідь: $w = 1{,}1\cdot 10^{-3}$.

Приклад 27. Кінетична енергія електрона в атомі водню має порядок величини 10еВ. Використовуючи співвідношення невизначеностей, оцінити мінімальні лінійні розміри атома.

Розв'язання

Дано: $E_k \sim 10$еВ

$l_{\min}$?

Співвідношення невизначеностей для координати та імпульсу має вигляд:

$$\Delta x \Delta p_x \geq \hbar ,$$

де Δx – невизначеність координати частинки, Δp_x – невизначеність проекції її імпульсу, $\hbar$ – постійна Дірака ($\hbar = h/2\pi$).

Нехай атом має лінійний розмір l, тоді електрон атома буде знаходитись десь у межах області з невизначеністю $\Delta x = l/2$. Співвідношення невизначеностей можна записати в цьому випадку у вигляді

$$\frac{l}{2}\Delta p_x \geq \hbar ,$$

звідки

$$l \geq \frac{2\hbar}{\Delta p_x} .$$

Фізично розумна (обґрунтована) невизначеність імпульсу Δp у всякому разі не повинна перевищувати значення самого імпульсу p, тобто $\Delta p \leq p$.

Модуль імпульсу p пов'язаний з кінетичною енергією E_k

співвідношенням

$$p = \sqrt{2mE_k}\ ,$$

m – маса електрона.

Замінимо тепер Δp_x значенням $\sqrt{2mE_k}$ (така заміна не збільшить l). Перейшовши від нерівності до рівності, одержимо робочу формулу

$$l_{\min} = \frac{2\hbar}{\sqrt{2mE_k}}\ .$$

Виконаємо числовий розрахунок:

$\hbar = 1{,}05 \cdot 10^{-34}$ Дж·с; $E_k = 10$еВ $= 10 \cdot 1{,}60 \cdot 10^{-19}$ Дж

$$l_{\min} = \frac{2 \cdot 1{,}05 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2 \cdot 9{,}11 \cdot 10^{-31} \cdot 10 \cdot 1{,}60 \cdot 10^{-19}}} = 1{,}2 \cdot 10^{-10}\ \text{м}.$$

Відповідь: $l_{\min} = 0{,}12$нм.

Приклад 28. Електрон у збудженому атомі водню знаходиться у $3p$-стані. Визначити зміну модуля його орбітального моменту при переході атома в основний стан.

Розв'язання

Зміну модуля орбітального моменту імпульсу атомного електрона знайдемо як різницю модулів моментів у кінцевому (основному) і початковому (збудженому) станах, тобто

$$\Delta L = L_{\ell 2} - L_{\ell 1}\ .$$

Модуль орбітального моменту L_ℓ залежить лише від орбітального квантового числа ℓ:

$$L_\ell = \hbar\sqrt{l(l+1)}\ .$$

В основному стані $\ell = 0$, тому $L_{\ell 2} = 0$. У збудженому $3p$-стані $\ell = 1$ і $L_{\ell 1} = \sqrt{2}\hbar$. Отже, зміна модуля орбітального моменту електрона

$$\Delta L = -\sqrt{2}\hbar\ .$$

Виконаємо числовий розрахунок

$\hbar = 1{,}05 \cdot 10^{-34}$ Дж·с;

$$\Delta L = -\sqrt{2} \cdot 1{,}05 \cdot 10^{-34} = -1{,}48 \cdot 10^{-34}\ \text{Дж} \cdot \text{с}.$$

Знак мінус показує, що момент зменшився.

Відповідь: $\Delta L = -1{,}48 \cdot 10^{-34}$ Дж·с.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Приклад 29. Хвильова функція $\Psi(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi}{l} x$ описує основний стан частинки в безмежно глибокому прямокутному ящику шириною l. Розрахувати ймовірність знаходження частинки в малому інтервалі $\Delta l = 0{,}01l$ поблизу стінки $(0 \le x \le \Delta l)$.

Розв'язання

Ймовірність того, що частинка буде виявлена в інтервалі dx (від x до $x + dx$), пропорційна цьому інтервалу і квадрату модуля хвильової функції, що описує даний стан:

$$dw = |\Psi(x)|^2 dx .$$

Повна ймовірність (для заданого скінченного інтервалу) знаходиться шляхом інтегрування:

$$w = \frac{2}{l} \int_0^{0{,}01l} \sin^2 \frac{\pi}{l} x \, dx . \qquad (1)$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

В заданому інтервалі зміни x має місце нерівність $\frac{\pi}{l} x \ll 1$, тому можна записати, що $\sin^2 \frac{\pi}{l} x \approx \left(\frac{\pi}{l} x \right)^2$. Тоді вираз (1) приймає вигляд

$$w = \frac{2}{l} \int_0^{0{,}01l} \left(\frac{\pi}{l} x \right)^2 dx = \frac{2\pi^2}{l^3} \int_0^{0{,}01l} x^2 dx = \frac{2\pi^2}{l^3} \frac{x^3}{3} \Bigg|_0^{0{,}01l} = \frac{2\pi^2}{3} 10^{-6} = 6{,}6 \cdot 10^{-6} .$$

Відповідь: $6{,}6 \cdot 10^{-6}$.

Приклад 30. Радіоактивний натрій $^{24}_{11}\mathrm{Na}$ розпадається, викидаючи β-частинки. Період напіврозпаду 14,8год. Розрахувати число атомів, що розпадуться за: 1) $t_1 = 10 год$; 2) $t_2 = 0{,}01c$ в 1мг даного препарату. Яка початкова активність препарату?

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Розв'язання

Дано:

$^{24}_{11}\mathrm{Na}$,

$T = 14{,}8 год$

$m = 1 мг$

1) $t_1 = 10 год$

2) $t_2 = 0{,}01 c$

---

n_1, n_2, J_0 ?

Закон радіоактивного розпаду

$$N = N_0 \exp(-\lambda t),$$

де N_0 – число цілих атомів при $t = 0$, N – через t секунд, λ – постійна розпаду. Кількість атомів, що розпалися за час t,

$$n = N_0 - N = N_0(1 - \exp(-\lambda t)). \qquad (1)$$

Врахуємо зв'язок постійної λ з періодом напіврозпаду T:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T},$$

тоді (1) набуде вигляду

$$n = N_0\left(1 - 2^{-\frac{t}{T}}\right). \qquad (2)$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Число атомів N_0 в масі m речовини виразимо через молярну масу μ:

$$N_0 = \frac{mN_A}{\mu}, \qquad (3)$$

N_A – стала Авогадро.

Підставляючи (3) у (2), одержимо

$$n = \frac{mN_A}{\mu}\left(1 - 2^{-\frac{t}{T}}\right).$$

Підставило числові дані:

$m = 1 мг = 1 \cdot 10^{-6} кг$; $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23} моль^{-1}$; $\mu = 24 \cdot 10^{-3} кг/моль$;

$T = 14{,}8 год = 5{,}33 \cdot 10^4 c$;

1) $t_1 = 10 год = 3{,}60 \cdot 10^4 c$; 2) $t_2 = 0{,}01 c$;

У випадку 1):

$$n_1 = \frac{1 \cdot 10^{-6} \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23}}{24 \cdot 10^{-3}}\left(1 - 2^{-\frac{3{,}60}{5{,}33}}\right) = 9 \cdot 10^{18}.$$

Національний університет водного господарства та природокористування

У випадку 2):

$$n_2 = \frac{1\cdot 10^{-6}\cdot 6{,}02\cdot 10^{23}}{24\cdot 10^{-3}}\left(1-2^{-\frac{0{,}01}{53300}}\right) = 3\cdot 10^{12}.$$

Активність препарату визначається формулою:

$$J = \lambda N = \frac{N\ln 2}{T}.$$

Початкова активність J_0

$$J_0 = \frac{N_0\ln 2}{T},$$

що, з урахуванням формули (3), дає

$$J_0 = \frac{mN_A\ln 2}{\mu T}.$$

Підставимо числові значення в отриману формулу:

$$J_0 = \frac{1\cdot 10^{-6}\cdot 6{,}02\cdot 10^{23}\cdot 0{,}693}{24\cdot 10^{-3}\cdot 5{,}33\cdot 10^{4}} = 3{,}3\cdot 10^{14}\ \text{Бк}.$$

Національний університет водного господарства та природокористування

Відповідь: $n_1 = 9\cdot 10^{18}$, $n_2 = 3\cdot 10^{12}$, $J_0 = 3{,}3\cdot 10^{14}$ Бк.

Приклад 31. При зіткненні α-частинки з ядром бору $^{10}_{5}\text{B}$ відбулася ядерна реакція, в результаті якої утворилися два нові ядра. Одним з цих ядер було ядро атома водню $^{1}_{1}\text{H}$. Визначити зарядове і масове число другого ядра, подати символічний запис ядерної реакції і визначити її енергетичний ефект.

Розв'язання

Позначимо невідоме ядро символом $^{A}_{Z}\text{X}$. Оскільки α-частинка – це ядро $^{4}_{2}\text{He}$, то реакція запишеться так:

$$^{4}_{2}\text{He} + ^{10}_{5}\text{B} \rightarrow ^{1}_{1}\text{H} + ^{A}_{Z}\text{X}.$$

Застосуємо закони збереження масового числа і заряду. Маємо:

$$4+10 = 1+A \rightarrow A = 13,$$
$$2+5 = 1+Z \rightarrow Z = 6.$$

Значить, невідоме ядро є ядром ізотопу вуглецю $^{13}_{6}\text{C}$, тобто остаточно реакція виглядає так:

Національний університет водного господарства та природокористування

$$^4_2\text{He} + ^{10}_5\text{B} \rightarrow ^1_1\text{H} + ^{13}_6\text{C}.$$

Енергія ядерної реакції ΔE у позасистемних одиницях розраховується за формулою

$$\Delta E = 931\left(m_{\text{He}} + m_{\text{B}}\right) - \left(m_{\text{H}} + m_{\text{C}}\right).$$

При числових розрахунках за цією формулою маси ядер замінюють масами нейтральних атомів (маси атомних електронів у різниці зникають). Підставляючи маси атомів в а.о.м. в розрахункову формулу, одержимо ΔE у МеВ.

$$\Delta E = 931\left(4{,}00260 + 10{,}01294\right) - \left(00783 + 13{,}00335\right) = 4{,}1\,(\text{МеВ}).$$

Відповідь: $Z = 4$, $A = 13$, $^4_2\text{He} + ^{10}_5\text{B} \rightarrow ^1_1\text{H} + ^{13}_6\text{C}$, $\Delta E = 4{,}1$МеВ.

Приклад 32. Скільки енергії виділяється при утворенні одного грама гелію з протонів і нейтронів?

Розв'язання

Дано:

$M = 1 \cdot 10^{-3}$ кг

Не

E ?

При утворенні ядра з протонів і нейтронів виділиться енергія, рівна енергії зв'язку ΔE цих частинок у ядрі

$$\Delta E = c^2\left(Zm_{^1_1\text{H}} + (A - Z)m_n - m_{am}\right),$$

де c – швидкість світла у вакуумі; Z і A – зарядове та масове число; m_{am} – маса атома, енергія зв'язку якого розраховується; $m_{^1_1\text{H}}$ – маса атома водню; m_n – маса нейтрона. При утворенні N ядер виділяється енергія

$$E = N \cdot \Delta E.$$

Число частинок виражається через масу речовини M:

$$N = \frac{M}{\mu} N_A,$$

μ – молярна маса, N_A – стала Авогадро.

Розв'язок системи виписаних трьох рівнянь (робоча формула) має вигляд

$$E = \frac{Mc^2}{\mu} N_A\left(Zm_{^1_1\text{H}} + (A - Z)m_n - m_{^4_2\text{He}}\right).$$

Числовий розрахунок:

$m_{^1_1\text{H}} = 1{,}00783 a.o.м.$; $m_{^4_2\text{He}} = 4{,}00260 a.o.м.$; $m_n = 1{,}00867 a.o.м.$; $A = 4$;

$Z=2$; $1 а.о.м.=1{,}66\cdot10^{-27}$ кг; $c=3{,}0\cdot10^{8}$ м/с; $N_A=6{,}02\cdot10^{23}$ моль$^{-1}$; $\mu=4\cdot10^{-3}$ кг/моль.

$$E=\frac{1\cdot10^{-3}\left(3{,}00\cdot10^{8}\right)^{2}\cdot6{,}02\cdot10^{23}}{4\cdot10^{-3}}\left(2\cdot1{,}00783+\left(4-2\right)\cdot1{,}00867-4{,}00260\right)\times$$

$$\times1{,}66\cdot10^{-27}=6{,}8\cdot10^{11}\left(\text{Дж}\right).$$

Відповідь: 0,68 ТДж.

3. Задачі для самостійного розв'язування

1. По двох нескінченно довгих провідниках течуть у протилежних напрямках струми силою $I_1=10A$ та $I_2=15A$. Відстань між провідниками $a=10$см. Визначити напруженість магнітного поля в точці на відстані $r_1=15$см від першого та $r_2=10$см від другого провідника. [17,4А/м].

2. По витку радіусом $R=10$см тече струм силою $I=50A$. Виток поміщений в однорідне магнітне поле з індукцією $B=0{,}2$Тл. Визначити момент сили, що діє на виток, якщо площина витка складає кут $\varphi=60°$ з лініями магнітної індукції. [0,157Н·м].

3. Електрон рухається в однорідному магнітному полі з індукцією $B=0{,}1$мТл по гвинтовій лінії (спіралі) радіусом $R=5$см і кроком $h=20$см. Визначити швидкість υ електрона. [$1{,}04\cdot10^{6}$м/с].

4. Виток з дроту опором $R=1$мОм знаходиться в однорідному магнітному полі з індукцією $B=0{,}4$Тл. Площина витка складає з напрямком ліній індукції кут $\varphi=90°$. Визначити заряд q, який протече по витку, якщо його витягнути з поля. Площа кільця $S=10\text{см}^2$. [0,4Кл].

5. По обмотці соленоїда індуктивністю $L=0{,}2$Гн тече струм силою I=10А. Визначити енергію $W_м$ магнітного поля соленоїда. [10Дж].

6. На мильну плівку з показником заломлення $n=1{,}33$ падає нормально пучок монохроматичного світла. Відбите світло в результаті інтерференції має найбільшу інтенсивність. Визначити найменшу можливу товщину плівки $d_{\min}$. [0,113мкм].

7. Радіус другого темного кільця Ньютона у відбитому світлі

$r_2 = 0{,}4$мм. Визначити радіус кривизни плоско-опуклої лінзи в цьому досліді. Довжина хвилі падаючого світла $\lambda = 0{,}64$мкм. [125мм].

8. На дифракційну решітку нормально падає пучок монохроматичного світла. Максимум третього порядку спостерігається під кутом $\varphi_1 = 30°$. На який кут φ_2 відхиляється дифракційною решіткою максимум четвертого порядку? [41°50′].

9. На скільки відсотків зменшується інтенсивність світла після проходження через призму Ніколя, якщо втрати світла складають 10%? [55%].

10. Довжина хвилі, на яку припадає максимум енергії випромінювання абсолютно чорного тіла, $\lambda_m = 0{,}6$мкм. Визначити температуру T тіла. [4,82кК].

11. На пластину падає монохроматичне світло з довжиною хвилі $\lambda = 0{,}42$мкм. Фотострум припиняється при затримуючій різниці потенціалів $U = 0{,}95$В. Визначити роботу A виходу електронів з поверхні пластинки. [2еВ].

12. Визначити кут Θ розсіювання рентгенівського кванта, який зіткнувся з майже вільним електроном, якщо довжина хвилі при цьому змінилася на $\Delta\lambda = 3{,}63$пм. [120°].

13. Визначити енергію E фотона, що випромінюється при переході електрона в атомі водню з третього енергетичного рівня на основний. [12,1еВ].

14. Визначити довжину хвилі де Бройля для електрона, що пройшов прискорюючу різницю потенціалів $U = 22{,}5$В. [0,258нм].

15. Електрон знаходиться у прямокутному потенціальному ящику шириною $l = 0{,}2$нм. Енергія електрона становить $E = 37{,}8$еВ. Визначити номер n енергетичного рівня. [2].

16. Частинка в потенціальному ящику перебуває в основному стані. Яка ймовірність знайти частинку в середній третині ящика? [0,609].

17. Визначити енергію зв'язку ΔE ядра дейтерію ${}^{2}_{1}\mathrm{H}$ та тритію ${}^{3}_{1}\mathrm{H}$. [2,22еВ; 8,47МеВ].

18. Визначити активність J радіоактивного препарату ${}^{98}_{38}\mathrm{Sr}$ масою $m = 0{,}1$мкг. [543кБк].

4. Таблиці варіантів до контрольних робіт

Таблиця варіантів до ***контрольної роботи №2*** для спеціальностей,

Національний університет водного господарства та природокористування

навчальним планом яких передбачено дві контрольні роботи

Варіант	**Номери задач**							
0.	20	30	50	60	79	89	107	127
1.	1	31	51	61	70	80	98	118
2.	12	22	52	62	71	91	99	119
3.	3	43	53	63	72	82	100	120
4.	14	24	54	64	73	93	101	121
5.	5	35	55	65	74	84	102	122
6.	16	26	56	66	75	95	103	123
7.	7	37	57	67	76	86	104	124
8.	18	28	58	68	77	97	105	125
9.	9	39	59	69	78	88	106	126

Таблиця варіантів до ***контрольної роботи №3*** для спеціальностей, навчальним планом яких передбачено чотири контрольні роботи

Варіант	**Номери задач**							
0.	1	11	24	33	41	44	51	61
1.	2	18	26	35	33	45	52	62
2.	3	17	27	40	42	46	53	63
3.	9	20	21	31	43	47	54	64
4.	4	16	28	39	41	48	55	65
5.	5	19	22	38	33	49	56	66
6.	6	15	29	32	38	50	57	67
7.	10	14	30	37	43	44	58	68
8.	7	13	25	34	41	45	59	69
9.	8	12	23	36	42	46	60	58

Таблиця варіантів до ***контрольної роботи №4*** для спеціальностей, навчальним планом яких передбачено чотири контрольні роботи

Варіант	**Номери задач**							
0.	79	83	89	98	107	117	127	126(а)
1.	70	80	87	90	98	108	118	125(б)
2.	71	81	86	91	99	109	119	124(а,г)
3.	72	82	85	92	100	110	120(а,г)	121
4.	73	83	84	93	101	111	121	124(в,е)
5.	74	84	87	94	102	112	120(б,в)	122
6.	75	82	85	95	103	113	123	124(а,в)
7.	76	81	86	96	104	114	122	124(б,д)
8.	77	80	87	97	105	115	121	125(а)

9.	78	84	88	95	106	116	120(в,г)	126(б)

5. Задачі до контрольних робіт

1. Знайти напруженість магнітного поля, яке створене двома однаково напрямленими паралельними струмами ($I_1 = 10$А та $I_2 = 20$А), що знаходяться на відстані 20см один від одного, в точці, яка віддалена на 5см від першого і на 15см від другого струму.
2. По провіднику, зігнутому у формі квадрата зі стороною 10см, тече струм силою 5А. Визначити напруженість магнітного поля в центрі квадрата.
3. Довжина колового провідника 1м. По провіднику тече струм силою 10А. Знайти індукцію магнітного поля в центрі кола та магнітний момент витка зі струмом.
4. По двох довгих паралельних провідниках, розміщених на відстані $d = 5$см один від одного, течуть однакові струми ($I = 10$А) у протилежних напрямках. Визначити індукцію та напруженість магнітного поля в точці, яка знаходиться на відстані $r = 5$см від кожного провідника.
5. По двох прямолінійних безмежно довгих провідниках, розміщених так, як показано на рисунку, течуть струми ($I_1 = 10$А та $I_2 = 5$А). Знайти напруженість магнітного поля в точках M і N, якщо $OM = 10$см; $ON = 5$см; $OA = 10$см.

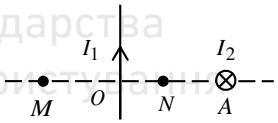


Рис. до №5

6. По провіднику, що має форму прямокутника зі сторонами $a = 8$см та $b = 12$см, тече струм ($I = 50$А). Визначити напруженість та індукцію магнітного поля в центрі прямокутника. Чому дорівнює модуль магнітного моменту цього контура?
7. З провідника довжиною 30см виготовлено замкнений контур у вигляді рівностороннього трикутника. По контуру тече струм силою 6А. Як і на скільки зміниться напруженість магнітного поля в центрі контура, якщо йому надати форму кола? Сила струму залишається незмінною.
8. Безмежно довгий провідник зігнуто під кутом 90°. Знайти напруженість магнітного поля в точці A, що лежить на бісектрисі прямого кута на відстані $r = 10$см від його вершини, якщо по провіднику тече струм силою $I = 1$А.

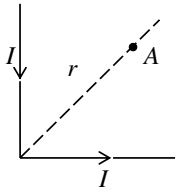


Рис. до №8

9. Модуль напруженості магнітного поля в центрі

колового витка 500А/м. Модуль магнітного моменту витка $P_м = 6А·м^2$. Обчислити силу струму та радіус витка.

10. По двох довгих прямолінійних провідниках, розміщених на відстані 10см, течуть струми ($I_1 = 10А$ та $I_2 = 15А$) в одному напрямку. Визначити напруженість магнітного поля в точці на відстані r_1 = 8см від першого та r_2 = 6см від другого провідника.

11. Визначити радіус і крок спіралі, по якій буде рухатися електрон, що влітає зі швидкістю, модуль якої $\upsilon = 2 \cdot 10^7$м/с, в однорідне магнітне поле з індукцією $4 \cdot 10^{-3}$Тл під кутом 30° до ліній індукції поля.

12. Електрон влетів в однорідне магнітне поле, модуль напруженості якого становить $8 \cdot 10^4$ А/м, перпендикулярно до ліній напруженості поля. Яким буде період його обертання?

13. В однорідному магнітному полі, модуль індукції якого B=0,01Тл, знаходиться прямолінійний провідник довжиною 20см. Визначити силу, що діє на провідник, якщо по ньому тече струм силою I=50А, а кут між напрямком струму та напрямком індукції магнітного поля $\varphi = 30°$.

14. Протон влетів у магнітне поле перпендикулярно до ліній магнітної індукції і почав рухатися по дузі радіусом 10см. Визначити модуль швидкості протона та період його обертання, якщо B=1Тл.

15. Визначити період обертання електрона по коловій орбіті в магнітному полі з модулем індукції B=1Тл.

16. Електрон рухається в однорідному магнітному полі, модуль індукції якого B=0,2Тл, по коловій орбіті. Радіус орбіти R=0,2см. Знайти силу, що діє на електрон.

17. Електрон рухається в магнітному полі, модуль індукції якого $B = 4 \cdot 10^{-3}$ Тл, по колу радіусом R=0,8 см. Чому дорівнює кінетична енергія електрона?

18. Яка потужність потрібна для того, щоб провідник довжиною 40см переміщувати зі швидкістю, модуль якої 5м/с, перпендикулярно до ліній індукції магнітного поля, якщо модуль індукції $B = 1 \cdot 10^{-2}$ Тл і по провіднику тече струм силою 20А?

19. При переміщенні провідника довжиною 20см, по якому тече струм силою 6А, на відстань 20см в однорідному магнітному полі перпендикулярно до ліній індукції поля було виконано роботу 2Дж. Знайти модуль індукції магнітного поля.

20. Між полюсами електромагніта в горизонтальному магнітному полі знаходиться прямолінійний провідник, розміщений

Національний університет
горизонтально, причому він перпендикулярний до ліній індукції поля. Якої сили струм треба пропустити через провідник, щоб він зависнув, якщо модуль індукції магнітного поля В 0,02Тл і маса одиниці довжини провідника $m_l = 0{,}01 кг/м$?

21. Виток радіусом 2см знаходиться у магнітному полі, модуль напруженості якого $2 \cdot 10^4$ А/м. Лінії напруженості перпендикулярні до площини витка. По витку тече струм силою 10А. Яку роботу треба виконати, щоб повернути виток навколо осі, що співпадає з одним із діаметрів, на 180°?

22. Квадратна рамка зі стороною 10см, що містить 200 витків, обертається в однорідному магнітному полі навколо осі, перпендикулярної до ліній індукції поля. Чому дорівнює модуль індукції поля, якщо рамка робить 8 обертів за секунду і максимальна е.р.с. індукції в рамці 20В?

23. Виток радіусом 2см знаходиться в магнітному полі, модуль напруженості якого $8 \cdot 10^4$ А/м. Площина витка перпендикулярна до ліній напруженості поля. Чому дорівнює опір витка, якщо при зникненні поля по витку протікає заряд $1 \cdot 10^{-3}$ Кл?

Національний університет
водних ресурсів та природокористування

24. Замкнений контур у вигляді рамки площею $50 см^2$ рівномірно обертається в однорідному магнітному полі, модуль напруженості якого $2 \cdot 10^4$ А/м, з частотою 14об/с. Вісь обертання перпендикулярна до ліній напруженості поля. Визначити максимальну е.р.с. індукції, що виникає у контурі.

25. Визначити е.р.с. самоіндукції, що виникає у провіднику з індуктивністю 2Гн, якщо сила струму в ньому рівномірно змінюється за 0,2 секунди від нуля до 50А. Яка енергія при цьому буде витрачена на створення індукційного струму?

26. Рамка площею $S = 50 см^2$, що містить 100 витків, рівномірно обертається в однорідному магнітному полі ($B = 4 \cdot 10^{-2}$ Тл). Визначити максимальну е.р.с. індукції, якщо вісь обертання лежить у площині рамки і перпендикулярна до ліній індукції поля, а рамка обертається з частотою 960 об/хв.

27. На непровідний циліндр довжиною $l = 50$ см і площею поперечного перерізу $S = 4 см^2$ намотаний в один шар дріт діаметром d=0,2мм так, що витки щільно прилягають один до одного. Визначити індуктивність соленоїда.

28. Всередині соленоїда, що містить n=8 витків/см, розміщено коловий виток діаметром d=4см. Площина витка складає $\alpha = 60°$ з віссю соленоїда. Визначити магнітний потік, що пронизує виток, якщо по обмотці соленоїда тече струм силою I=1А.

29. Плоский виток, по якому тече струм силою 5А, вільно установився в однорідному магнітному полі, модуль індукції якого В=0,4Тл. Площа витка S=200$см^2$. Підтримуючи силу струму у витку незмінною, його повернули на кут $\alpha = 40°$ навколо осі, що лежить у площині витка. Визначити виконану при цьому роботу.

30. Соленоїд містить N=600 витків. При силі струму 10А магнітний потік через площу поперечного перерізу соленоїда становить Ф=$8 \cdot 10^{-5}$ Вб. Визначити індуктивність соленоїда та енергію магнітного поля в соленоїді.

31. Коливальний контур містить ємність 2мкФ. Якою має бути індуктивність контура, щоб отримати коливання частотою 1000 Гц?

32. Конденсатор складається з двох дисків радіусом 10см кожний. Відстань між дисками 1см. Діелектрик-повітря. Паралельно до конденсатора приєднана котушка індуктивністю $1 \cdot 10^{-3}$ Гн. Знайти період електромагнітних коливань у контурі.

33. Коливальний контур складається з котушки індуктивністю $4 \cdot 10^{-3}$ Гн і конденсатора, ємність якого може змінюватися від $1 \cdot 10^{-7}$ Ф до $5 \cdot 10^{-7}$ Ф. Опір контура малий. Визначити інтервал довжин хвиль, на які резонує контур.

34. Визначити енергію магнітного поля котушки індуктивності ідеального коливального контура через 1/8 періоду після початку коливань, якщо максимальна напруга на обкладинках конденсатора $U_{\max} = 500B$, а ємність конденсатора $1 \cdot 10^{-6}$ Ф.

35. Коливальний контур складається з конденсатора ємністю 0,025мкФ та котушки з індуктивністю 1,015Гн. Конденсатор заряджено електричним зарядом $q_0 = 2{,}5 \cdot 10^{-6}$ Кл. 1. Записати рівняння залежності напруги на обкладках конденсатора від часу. 2. Записати закон залежності сили струму в котушці від часу.

36. Коливальний контур складається з конденсатора ємністю 2мкФ та котушки індуктивністю 1Гн. Конденсатор заряджено електричним зарядом $q_0 = 1 \cdot 10^{-6}$ Кл. Знайти максимальну силу струму в котушці.

37. Чому дорівнює відношення енергії магнітного поля коливального

Національний університет
водного господарства
та природокористування

контура до енергії його електричного поля в момент часу $t = T/8$?

38. Коливальний контур складається з індуктивності $1 \cdot 10^{-2}$ Гн, ємності 0,405мкФ та опору 2Ом. У скільки разів зменшиться напруга на конденсаторі за один період?

39. Коливальний контур складається з конденсатора ємністю 0,2мкФ і котушки індуктивністю $5{,}07 \cdot 10^{-3}$ Гн. Чому дорівнює опір котушки, якщо напруга на конденсаторі за $1 \cdot 10^{-3}$ с зменшилася у три рази?

40. Рівняння зміни сили струму в коливальному контурі має вигляд $I = 0{,}02\sin 400\pi t$ (А). Індуктивність контура L=1Гн. Знайти: 1) ємність контура; 2) максимальний заряд на конденсаторі.

41. Електромагнітна хвиля з частотою 4МГц переходить з немагнітного середовища з діелектричною проникністю $\varepsilon = 3$ у вакуум. На скільки зміниться при цьому довжина хвилі?

42. У вакуумі вздовж осі x поширюється плоска електромагнітна хвиля. Амплітуда напруженості електричного поля хвилі складає 18,8В/м. Визначити інтенсивність хвилі.

43. Плоска електромагнітна хвиля поширюється в однорідному середовищі з $\varepsilon = 2$ і $\mu = 1$. Амплітуда напруженості електричного поля хвилі $E_0 = 12$ В/м. Визначити: 1) швидкість поширення хвилі в цьому середовищі; 2) амплітуду напруженості магнітного поля хвилі.

44. Визначити показник заломлення води, якщо людина, що знаходиться під водою, бачить сонце під кутом 70° до горизонту, тоді як насправді висота сонця над горизонтом 63°.

45. Визначити, на скільки плоскопаралельна пластинка зі скла товщиною 8см зміщує світловий промінь, що падає на неї під кутом 60°.

46. Світловий промінь виходить зі скипидару в повітря. Граничний кут повного внутрішнього відбивання для цього променя $42°23'$. .Знайти швидкість світла у скипидарі.

47. Потрібно виготовити плоскоопуклу скляну лінзу з оптичною силою 6 дптр. Визначити радіус кривизни опуклої поверхні лінзи.

48. Стовп забито у дно річки. Частина стовпа $h_1 = 1м$ знаходиться над водою. Знайти довжину тіні від стовпа на поверхні і на дні річки, якщо висота Сонця над горизонтом $\alpha = 30°$, а глибина річки $h_2 = 2м$.

49. Світловий промінь падає на межу розділу води і скла. При якому куті падіння відбитий промінь буде перпендикулярний до заломленого?

50. Світловий промінь падає на плоскопаралельну скляну пластинку під кутом $i = 60°$. Знайти товщину пластинки d, якщо при виході з неї промінь змістився на 20мм.

51. На мильну плівку $(n = 1{,}33)$ падає паралельний пучок білого світла під кутом 60°. При спостереженні у відбитому світлі плівка здається зеленою $(\lambda_3 = 5{,}2 \cdot 10^{-7}\,м)$. Визначити мінімальну товщину плівки.

52. На поверхню скляної пластинки $(n_1 = 1{,}6)$ нанесено прозору плівку $(n_2 = 1{,}4)$, яка опромінюється пучком монохроматичного червоного світла $(\lambda = 7{,}0 \cdot 10^{-7}\,м)$, що падає з повітря перпендикулярно до поверхні плівки. Яку найменшу товщину повинна мати плівка, щоб світло не відбивалося?

53. Відстань між першим і другим темними кільцями Ньютона при спостереженні їх у відбитому світлі 0,6мм. Визначити відстань між дев'ятим і десятим кільцями.

54. На скляну пластинку покладено опуклою стороною плоско-опуклу скляну лінзу. Радіус п'ятнадцятого темного кільця Ньютона у відбитому світлі R=3мм. Знайти головну фокусну відстань лінзи. Довжина хвилі падаючого світла $\lambda = 5 \cdot 10^{-7}\,м$.

55. Знайти показник заломлення рідини, яка заповнює простір між скляною пластинкою і лінзою, якщо при спостереженні у відбитому світлі $(\lambda = 6 \cdot 10^{-7}\,м)$ радіус сьомого темного кільця Ньютона дорівнює 1,5мм. Радіус кривизни лінзи 1,2м.

56. Відстань L від щілин до екрану у досліді Юнга дорівнює 1м. Визначити відстань між щілинами, якщо на відрізку екрана довжиною $l = 1см$ укладається $N = 10$ темних інтерференційних смуг. Довжина хвилі $\lambda = 7 \cdot 10^{-7}\,м$.

57. На тонку гліцеринову плівку товщиною $d = 1{,}5 \cdot 10^{-6}\,м$ нормально до її поверхні падає біле світло. Визначити довжини хвиль видимого діапазону $(0{,}4 \le \lambda \le 0{,}8\,мкм)$, які послаблюватимуться внаслідок інтерференції.

58. На тонкий скляний клин падає нормально паралельний пучок світла $(\lambda = 5 \cdot 10^{-7}\,м)$. Відстань між сусідніми темними інтерференційними смугами у відбитому світлі $b = 0{,}5\,мм$. Визначити кут α при вершині клина.

59. На екрані отримані дифракційні спектри за допомогою

дифракційної решітки, яка містить 500 штрихів на 1мм довжини і розміщена паралельно до екрана. Приймаючи довжини хвиль граничних видимих променів $\lambda_ч = 7{,}8 \cdot 10^{-7}\,м$ та $\lambda_ф = 3{,}9 \cdot 10^{-7}\,м$, знайти ширину спектра першого порядку. Відстань від решітки до екрана дорівнює 1,6м.

60. Скільки штрихів на одиниці довжини має дифракційна решітка, якщо зелена лінія ртуті $\lambda = 5{,}461 \cdot 10^{-7}\,м$ у спектрі першого порядку спостерігається під кутом 19°18′ ? Чому дорівнює роздільна здатність цієї решітки у спектрі першого порядку, якщо її ширина дорівнює 2см?

61. На дифракційну решітку, що містить 5 штрихів на 1мм довжини, падає жовте монохроматичне світло $\lambda = 6 \cdot 10^{-7}\,м$. Знайти загальну кількість дифракційних максимумів, котрі дає ця решітка. Яку різницю довжин хвиль в області жовтого світла у спектрі другого порядку може розділити ця решітка, якщо її ширина 2см?

62. Стала дифракційної решітки в $n = 4$ рази більша від довжини світлової хвилі монохроматичного світла, що падає нормально на її поверхню. Визначити кут α між двома першими симетричними дифракційними максимумами.

63. Постійна дифракційної решітки $d = 4 \cdot 10^{-6}\,м.$ На решітку падає нормально світло а довжиною хвилі $\lambda = 5{,}8 \cdot 10^{-7}\,м.$ Максимум якого найбільшого порядку дає ця решітка?

64. На дифракційну решітку падає нормально паралельний пучок білого світла. На яку довжину хвилі у спектрі четвертого порядку накладається межа $\lambda = 7{,}8 \cdot 10^{-7}\,м$ спектру третього порядку?

65. На непрозору пластину з вузькою щілиною падає нормально плоска монохроматична хвиля з $\lambda = 6 \cdot 10^{-7}\,м.$ Кут відхилення променів, що відповідають другому дифракційному максимуму, $\varphi = 20°$. Визначити ширину щілини.

66. Пучок природного світла послідовно проходить через два ніколі, площини пропускання яких утворюють між собою кут $\alpha = 40°$. Кожний ніколь поглинає 15% падаючого на нього світла. Знайти, у скільки разів пучок світла, що виходить з другого ніколя, послаблений у порівнянні з пучком, що падає на перший ніколь.

67. Кут α між площинами пропускання поляроїдів дорівнює 50°.

Природне світло, що проходить через таку систему, послаблюється в 4 рази. Яку частину інтенсивності падаючого світла поглинає поляроїд?

68. Пучок світла, що поширюється у скляній посудині з гліцерином, відбивається від дна посудини. При якому куті падіння відбитий промінь максимально поляризований?

69. Паралельний пучок світла переходить з гліцерину у скло так, що промінь, відбитий від межі розділу цих середовищ максимально поляризований. Визначити кут між падаючим і заломеним променями.

70. Абсолютно чорне тіло має температуру $T_1 = 2900K$. Внаслідок охолодження тіла довжина хвилі, на яку припадає максимум спектральної густини енергетичної світності, змінилася на $\Delta\lambda = 9$мкм . До якої температури T_2 охолодилося тіло?

71. Температура T абсолютно чорного тіла змінилася при нагріванні від 1000 до 3000К. У скільки разів збільшилася при цьому його енергетична світність? На скільки змінилася довжина хвилі, на котру припадає максимум спектральної густини енергетичної світності?

72. На яку довжину хвилі припадає максимум спектральної густини енергетичної світності абсолютно чорного тіла з температурою, рівною температурі людського тіла, тобто 310К?

73. При нагріванні абсолютно чорного тіла довжина хвилі, на яку припадає максимум спектральної густини енергетичної світності, змінилася від 690 до 500нм. У скільки разів збільшилася при цьому енергетична світність тіла?

74. В яких областях спектру лежать довжини хвиль, що відповідають максимуму спектральної густини енергетичної світності, якщо джерелом світла є: а) спіраль електричної лампочки $(T = 3000K)$; б) поверхня Сонця $(T = 6000K)$; в) атомна бомба, в якій в момент вибуху розвивається температура $T \approx 1 \cdot 10^7 K$? Випромінювання вважати близьким до випромінювання абсолютно чорного тіла.

75. Потужність випромінювання абсолютно чорного тіла 10кВт. Знайти площу поверхні тіла, якщо максимум його спектральної густини енергетичної світності припадає на довжину хвилі $\lambda = 700нм$.

76. Яку енергетичну світність має абсолютно чорне тіло, якщо максимум його спектральної густини енергетичної світності припадає на довжину хвилі $\lambda = 484нм$?

77. Яку енергетичну світність має свинець, що твердне? Відношення енергетичних світностей свинцю та абсолютно чорного тіла для даної температури рівне 0,6. Температура плавлення свинцю $327°C$.

78. Яку потужність випромінювання має Сонце? Випромінювання Сонця вважати близьким до випромінювання абсолютно чорного тіла. Температура поверхні Сонця $T = 5800K$.

79. Знайти температуру T печі, якщо відомо, що випромінювання з отвору в ній площею $S = 6{,}1\text{см}^2$ має потужність $N = 34{,}6\text{Вт}$. Випромінювання вважати близьким до випромінювання абсолютно чорного тіла.

80. Довжина світлової хвилі, що відповідає червоній межі фотоефекту для деякого металу, $\lambda_0 = 275нм.$ Знайти мінімальну енергію фотона, що викликав фотоефект.

81. Довжина світлової хвилі, що відповідає червоній межі фотоефекту для деякого металу, $\lambda_0 = 275нм.$ Знайти роботу виходу електрона з металу, максимальну швидкість електронів, що вириваються з металу світлом з довжиною хвилі $\lambda = 180нм$, і максимальну кінетичну енергію електронів.

82. Знайти затримуючу різницю потенціалів U для електронів, що вириваються при освітленні калію світлом з довжиною хвилі $\lambda = 330нм$.

83. При фотоефекті з платинової поверхні електрони повністю затримуються різницею потенціалів $U = 0{,}8B$. Знайти довжину хвилі застосованого опромінення і граничну довжину хвилі λ_0, за якої ще можливий фотоефект.

84. З якою швидкістю має рухатися електрон, щоб його кінетична енергія була рівна енергії фотона з довжиною хвилі $\lambda = 520нм$?

85. З якою швидкістю має рухатися електрон, щоб його імпульс був рівний імпульсу фотона з довжиною хвилі $\lambda = 520нм$?

86. З якою швидкістю має рухатися електрон, щоб його кінетична енергія була рівна енергії фотона з довжиною хвилі $\lambda = 640нм$?

87. Рентгенівські промені з довжиною хвилі $\lambda_0 = 70{,}8пм$ зазнають комптонівського розсіяння на парафіні. Знайти довжину хвилі рентгенівських променів, розсіяних у напрямках: а) $\Theta = \pi/2$; б) $\Theta = \pi$.

88. Яка була довжина хвилі рентгенівського випромінювання, якщо при комптонівському розсіянні цього випромінювання графітом під кутом $\Theta = 60°$ довжина хвилі розсіяного випромінювання виявилася рівною 25,4пм?

89. Довжина хвилі λ фотона рівна комптонівській довжині λ_k електрона. Визначити енергію та імпульс фотона.

90. Яку найменшу енергію (в електрон-вольтах) повинні мати електрони, щоб при збудженні атомів водню ударами цих електронів спектр водню мав три спектральні лінії? Знайти довжини хвиль цих ліній.

91. Яку найменшу енергію (в електрон-вольтах) повинні мати електрони, щоб при збудженні атомів водню ударами цих електронів появилися всі лінії всіх серій спектру водню? Яку найменшу швидкість повинні мати ці електрони?

92. Знайти найменшу $\lambda_{\min}$ і найбільшу $\lambda_{\max}$ довжини хвиль спектральних ліній водню у видимій області спектру.

93. Знайти найбільшу довжину хвилі в ультрафіолетовій області спектру водню. Яку найменшу швидкість повинні мати електрони, щоб при збудженні атомів водню ударами електронів появилася ця лінія?

94. В яких межах мають лежати довжини хвиль монохроматичного світла, щоб при збудженні атомів водню квантами цього світла спостерігалися три спектральні лінії?

95. Знайти довжину хвилі де Бройля для електронів, що пройшли різницю потенціалів $U_1 = 1B$ та $U_2 = 100B$.

96. Знайти довжину хвилі де Бройля для протонів, що пройшли різницю потенціалів $U_1 = 1B$ та $U_2 = 100B$.

97. Знайти довжину хвилі де Бройля для електрона з кінетичною енергією 10кеВ.

98. Частинка перебуває у збудженому стані $n = 2$ в потенціальному ящику шириною l. Визначити, в яких точках інтервалу $0 < x < l$ густина ймовірності $|\Psi(x)|^2$ місцезнаходження частинки максимальна і мінімальна.

99. Електрон перебуває в потенціальному ящику шириною l. В яких точках інтервалу $0 < x < l$ густина ймовірності знаходження електрона на першому і другому енергетичних рівнях однакова? Розрахувати густину ймовірності для цих точок.

100. Частинка в потенціальному ящику перебуває в основному стані. Яка ймовірність знайти частинку в крайній третині ящика?

101. Визначити повну енергію і модуль орбітального моменту імпульсу електрона у $2p$-стані в атомі водню.

102. Яка ймовірність знайти частинку в основному стані в середній третині потенціального ящика?

103. Електрон перебуває у прямокутному потенціальному ящику шириною $l = 0{,}2 нм$, енергія електрона в ящику 37,8еВ. Знайти квантове число енергетичного рівня.

104. Частинка знаходиться в потенціальному ящику. Між якими сусідніми енергетичними рівнями відносна відстань більша: між першим і другим, чи двадцять першим і двадцять другим?

105. Використовуючи співвідношення невизначеностей, оцінити ширину l одновимірного потенціального ящика, в котрому мінімальна енергія електрона $E_{\min} = 10 eB$.

106. Електрон в атомі водню перебуває в f-стані. Знайди модуль орбітального моменту імпульсу L_l електрона і максимальне значення проекції моменту імпульсу L_{lz} на напрям зовнішнього магнітного поля.

107. Електрон в атомі водню перебуває в d-стані. Визначити модуль орбітального моменту імпульсу електрона і його проекцію на вибраний напрям Z.

108. Скільки атомів полонію розпадається за 1 добу з $N_0 = 1 \cdot 10^6$ атомів?

109. Скільки атомів радону розпадається за одну добу з $N_0 = 1 \cdot 10^6$ атомів?

110. Знайти активність одного грама радію.

111. Знайти масу радону, активність якого рівна $3{,}7 \cdot 10^{10} Бк$.

112. Знайти постійну розпаду радону, якщо відомо, що число атомів радону зменшується за одну добу на 18,2%.

113. Який ізотоп утворюється з $^{232}_{90}\mathrm{Th}$ після чотирьох α-розпадів і двох β^--розпадів?

114. Який ізотоп утворюється з $^{238}_{92}\mathrm{U}$ після трьох α-розпадів і двох β^--розпадів?

115. Який ізотоп утворюється з $^{239}_{92}\mathrm{U}$ після двох β^--розпадів і одного α-розпаду?

116. Який ізотоп утворюється з $^{8}_{3}\mathrm{Li}$ після одного β^--розпаду і одного α-розпаду?

Національний університет водного господарства та природокористування

117. Який ізотоп утворюється з $^{128}_{51}\mathrm{Sb}$ після чотирьох β^--розпадів?

118. При вибуху водневої бомби протікає термоядерна реакція утворення гелію з дейтерію і тритію. Написати рівняння реакції. Знайти енергію ΔE, що виділяється при цій реакції. Яку енергію E можна одержати при утворенні одного грама гелію?

119. Яку енергію (в кіловат-годинах) можна одержати від поділу одного грама урану $^{235}_{92}\mathrm{U}$, якщо за кожного акту розпаду виділяється енергія $\Delta E = 200 MeB$?

120. Внести невистачаючі позначення в реакціях:

а) $^{27}_{13}\mathrm{M}(\ldots,x)^{26}_{12}\mathrm{Mg}$; б) $^{27}_{13}\mathrm{Al}(\ldots,n)\ldots$;

в) $^{63}_{29}\mathrm{Cu}(\ldots,x)^{62}_{29}\mathrm{Cu}$; г) $\mathrm{X}(\ldots,n)^{181}_{74}\mathrm{W}$.

121. При бомбардуванні ізотопу літію $^6_3\mathrm{Li}$ дейтонами (ядрами дейтерію $^2_1\mathrm{H}$) утворюються дві α-частинки. При цьому виділяються енергія $\Delta E = 22{,}3 MeB$. Знаючи маси дейтона та α-частинки, знайти масу ізотопу літію $^6_3\mathrm{Li}$.

Національний університет водного господарства та природокористування

122. Знайти енергію ΔE, що виділяється при реакції
$^9_4\mathrm{Be}+^2_1\mathrm{H}\rightarrow{}^{10}_5\mathrm{B}+^1_0n$.

123. Знайти енергію ΔE, що виділяється при реакції
$^7_3\mathrm{Li}+^2_1\mathrm{H}\rightarrow{}^8_4\mathrm{Be}+^1_0n$.

124. Написати невистачаючі позначення в реакціях:

а) $^{27}_{13}\mathrm{Al}(\ldots,\alpha)\ldots$; б) $^{19}_9\mathrm{F}(p,x)^{16}_8\mathrm{O}$; в) $^{55}_{25}\mathrm{Mn}(\ldots,n)^{55}_{26}\mathrm{Fe}$;

г) $^{27}_{13}\mathrm{Al}(\ldots,p)\ldots$; д) $^{14}_7\mathrm{N}(\ldots,x)^{14}_6\mathrm{C}$; е) $\mathrm{X}(p,\alpha)^{22}_{11}\mathrm{Na}$.

125. Знайти енергію ΔE, що виділяється при реакціях:

а) $^2_1\mathrm{H}+^3_2\mathrm{He}\rightarrow{}^1_1\mathrm{H}+^4_2\mathrm{He}$; б) $^6_3\mathrm{Li}+^2_1\mathrm{H}\rightarrow{}^4_2\mathrm{He}+^4_2\mathrm{He}$.

126. Знайти енергію ΔE, що виділяється при реакціях:

а) $^2_1\mathrm{H}+^2_1\mathrm{H}\rightarrow{}^2_1\mathrm{H}+^3_1\mathrm{H}$; б) $^2_1\mathrm{H}+^2_1\mathrm{H}\rightarrow{}^3_2\mathrm{He}+^1_0n$.

127. Знайти енергію ΔE, що поглинається при реакції
$^{14}_7\mathrm{N}+^4_2\mathrm{He}\rightarrow{}^1_1\mathrm{H}+^{17}_8\mathrm{O}$.

XI. Довідкові дані

1. Основні фізичні сталі

Постійна	Авогадро	$N_A = 6{,}02\cdot10^{23}$ моль$^{-1}$
	Больцмана	$k = 1{,}38\cdot10^{-23}$ Дж/К
	Віна	$b = 2{,}90\cdot10^{-3}$ м·К
	Дірака	$\hbar = 1{,}05\cdot10^{-34}$ Дж·с
	Планка	$h = 6{,}63\cdot10^{-34}$ Дж·с
	Рідберга	$R = 1{,}097\cdot10^{7}$ м$^{-1}$
	Стефана – Больцмана	$\sigma = 5{,}67\cdot10^{-8}$ Вт/(м^2·К^4)
Гравітаційна стала		$G = 6{,}67\cdot10^{-11}\ Н\cdot м^2/кг^2$
Універсальна газова стала		R = 8,31 Дж/(К·моль)
Елементарний заряд		$e = 1{,}60\cdot10^{-19}$ Кл
Електрична стала		$\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot10^{-12}$ Ф/м
Магнітна стала		$\mu_0 = 12{,}57\cdot10^{-7}$ Гн/м
Швидкість світла у вакуумі		$c = 3{,}00\cdot10^{8}$м/с
Енергія іонізації атома водню		$E_i = 2{,}18\cdot10^{-18}$ Дж (13,6еВ)
Радіус першої борівської орбіти		$a_0 = 0{,}529\cdot10^{-10}$ м
Комптонівська довжина хвилі електрона		$\lambda_K = 2{,}43\cdot10^{-12}$ м
Маса та енергія спокою електрона		$m_e = 9{,}11\cdot10^{-31}$ кг (0,00055а.о.м.); E_0=0,51МеВ
Маса та енергія спокою протона		$m_p = 1{,}673\cdot10^{-27}$ кг (1,00728 а.о.м.); E_0=938МеВ
Маса та енергія спокою нейтрона		$m_n = 1{,}675\cdot10^{-27}$ кг (1,00867а.о.м.); E_0=939МеВ
Маса та енергія спокою α-частинки		$m_\alpha = 6{,}64\cdot10^{-27}\ кг$; (4,00149 *а.о.м.*); $E_0 = 3733\ МеВ$

Маса Землі	$M_З = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ кг
Маса Місяця	$M_М = 7{,}35 \cdot 10^{22}$ кг
Радіус Землі	$R_З = 6{,}38 \cdot 10^{6}$ м
Радіус Місяця	$R_М = 1{,}74 \cdot 10^{6}$ м
Електрон-вольт	1еВ=$1{,}60 \cdot 10^{-19}$ Дж
Кіловат-година	1кВт·год=$3{,}60 \cdot 10^{6}$ Дж
Атомна одиниця маси	1 а.о.м. = $1{,}66 \cdot 10^{-27}$ кг

2. Густини деяких речовин

Тверді тіла			
Речовина	**ρ, кг/м^3**	**Речовина**	**ρ, кг/м^3**
Алюміній	$2{,}71 \cdot 10^{3}$	Мідь	$8{,}93 \cdot 10^{3}$

3. Моменти інерції деяких тіл відносно їх осей симетрії:

а) стрижня, відносно осі, що проходить через його середину перпендикулярно до нього,

$$I = \frac{1}{12} ml^2,$$

m – маса, l – довжина стрижня;

б) обруча, відносно осі, що проходить через його центр перпендикулярно до площини, в якій знаходиться обруч,

$$I = \frac{1}{4} mD^2,$$

D – діаметр, m – маса обруча;

в) кульки, відносно осі, що проходить через її центр,

$$I = \frac{2}{5} mR^2,$$

R – радіус, m – маса кульки.

4. Робота виходу електронів

Речовина	**еВ**	**Дж**	**Речовина**	**еВ**	**Дж**
Платина	5,3	$8{,}5 \cdot 10^{-19}$	Калій	2,0	$3{,}2 \cdot 10^{-19}$

Національний університет водного господарства та природокористування

5. Показник заломлення

Вода	1,33	Скло	1,5–1,9
Гліцерин	1,47	Скипидар	1,48

6. Періоди напіврозпаду деяких радіоактивних ізотопів

Ізотоп	Елемент	Період напіврозпаду
Кальцій	$^{45}_{20}Ca$	164 доби
Стронцій	$^{90}_{38}Sr$	28 років
Полоній	$^{210}_{84}Po$	138 діб
Радон	$^{222}_{86}Rn$	3,82 доби
Радій	$^{226}_{88}Ra$	1590 років
Уран	$^{235}_{92}U$	$7{,}1 \cdot 10^8$ років
Уран	$^{238}_{92}U$	$4{,}5 \cdot 10^9$ років

7. Порядкові номери (z) і відносні атомні маси (A) деяких хімічних елементів

Елемент	Символ	z	A
Водень	H	1	1
Гелій	He	2	4
Вуглець	C	6	12
Азот	N	7	14
Кисень	O	8	16
Фтор	F	9	19
Натрій	Na	11	23
Магній	Mg	12	24
Алюміній	Al	13	27
Кремній	Si	14	28
Сірка	S	16	32
Хлор	Cl	17	35
Мідь	Cu	29	64
Цезій	Cs	55	133

Національний університет
водного господарства
та природокористування

8. Атомні маси деяких ізотопів

Ізотоп		Символ	Маса, а.о.м.
Водень	протій	$^{1}_{1}H$	1,00783
	дейтерій	$^{2}_{1}H$	2,01410
	тритій	$^{3}_{1}H$	3,01605
Гелій		$^{3}_{2}He$	3,01603
		$^{4}_{2}He$	4,00260
Літій		$^{6}_{3}Li$	6,01512
		$^{7}_{3}Li$	7,01600
Берилій		$^{7}_{4}Be$	7,01693
		$^{8}_{4}Be$	8,00531
		$^{9}_{4}Be$	9,01218
Бор		$^{10}_{5}B$	10,01294
Вуглець		$^{12}_{6}C$	12,0000
Азот		$^{13}_{7}N$	13,00574
		$^{14}_{7}N$	14,00307
Кисень		$^{17}_{8}O$	16,99913
Магній		$^{23}_{12}Mg$	22,99413
		$^{24}_{12}Mg$	23,98504
Алюміній		$^{27}_{13}Al$	26,98754
Кремній		$^{30}_{14}Si$	29,97377
Кальцій		$^{40}_{20}Ca$	39,96257
Кобальт		$^{56}_{27}Co$	55,93984
Мідь		$^{63}_{29}Cu$	62,92960
Кадмій		$^{112}_{48}Cd$	111,90276
Ртуть		$^{200}_{80}Hg$	199,96832

Уран	$^{235}_{92}\mathrm{U}$	235,04393
	$^{238}_{92}\mathrm{U}$	238,05353

9. Деякі інтеграли

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax} dx = \frac{n!}{a^{n+1}}; \quad (a \geq 0);$$

$$\int_0^\infty x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4} a^{-3/2};$$

$$\int x^n e^{ax} dx = \frac{1}{a} x^n e^{ax} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax} dx;$$

$$\int \sin^2 ax dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4a} \sin 2ax;$$

$$\int x \cos ax dx = \frac{1}{a} x \sin ax - \frac{1}{a^2} \cos ax.$$

10. Префікси для утворення кратних одиниць

Префікс	Позначення		Числове значення	Префікс	Позначення		Числове значення
тера	*Т*	*T*	10^{12}	піко	*п*	*p*	10^{-12}
гіга	*Г*	*G*	10^{9}	нано	*н*	*n*	10^{-9}
мега	*М*	*M*	10^{6}	мікро	*мк*	μ	10^{-6}
кіло	*к*	*k*	10^{3}	мілі	*м*	*m*	10^{-3}

XII. Рекомендована література

Література до лекційного курсу

1. Трофимова Т.И. Курс физики.–М., "Высшая школа", 1990.
2. Детлаф А.А., Яворский В.М. Курс физики.–М., "Высшая школа", 1989.
3. Савельев И.В. Курс физики.–М., "Наука", 1989, т.1–3.
4. Зачек І.Р., Кравчук І.М., Романишин Б.М. та ін. Курс фізики. За ред. Лопатинського І.Є., Львів, “Бескид Біт” 2002.
5. Олексин Д.І., Мороз В.М. Загальна фізика. Частина 1. Конспект лекцій для студентів заочної форми навчання. Рівне, 2002, 073-89.
6. Дубчак Д.І., Ковалець М.О., Орленко В.Ф., Никонюк Є.С., Шляховий В.Л. Загальна фізика. Частина 2. Конспект лекцій для студентів заочної форми навчаня. Рівне, 2002, 073-90.
7. Кучерук І.М. та ін. Загальний курс фізики. У трьох томах, К., 1999.
8. Физическая энциклопедия, т.т. 1-5. Гл. ред. А.М. Прохоров. М., «Большая Российская Энциклопедия», 1998.

Література до практичних занять, РР та КР

1. Волькенштейн В.С. Сборник задач по общему курсу физики,–М., "Наука", I985-I989.
2. Иродов И.Е. Задачи по общей физике.–М., “Наука”, 1987.
3. Савельев И.В. Сборник вопросов и задач по общей физике.–М., "Наука", 1982.
4. Чертов А.Г., Воробьев А.А., Федоров М.В. Задачник по физике.–М., "Высшая школа", 1988.

Література до лабораторних занять

1. Кортнев А.В. Практикум по курсу общей физики.–М., "Высшая школа", 1972.
2. Майсова Н.Н. Практикум по курсу общей физики. М., “Высшая школа” 1972.
3. Вадець Д.І., Троцюк М.Й., Орленко В.Ф., Тучак С.С. Методичні вказівки до лабораторних робіт з фізики "Фізичні вимірювання і обробка результатів вимірювання", Рівне, 1992, шифр 073-41.

Національний університет водного господарства та природокористування

Національний університет водного господарства та природокористування

Зміст

Вступ **3**
І. Опис предмету навчальної дисципліни **4**
1.1. Тематичний план та розподіл навчального часу 4
1.2. Розподіл балів, що присвоюються студентам, і шкала оцінювання 6
1.3. Програма курсу загальної фізики 6

ІІ. Лекційний курс **11**
Розділ 4. Магнетизм 11
§4.1. Магнітне поле і його характеристики. Дія магнітного поля на контур зі струмом. Принцип суперпозиції. Класифікація магнетиків 11
§4.2. Закон Біо-Савара-Лапласа. Магнітне поле прямолінійного та колового струмів 14
§4.3. Циркуляція вектора напруженості магнітного поля. Вихровий характер магнітного поля. Поле довгого соленоїда 16
§4.4. Дія магнітного поля на струм; сила Ампера. Магнітна взаємодія струмів 18
§4.5. Сила Лоренца. Рух електричних зарядів у магнітному полі 19
§4.6. Магнітний потік. Теорема Гауса для магнітного поля 21
§4.7. Робота переміщення провідника та контура зі струмом в магнітному полі 22
§4.8. Явище електромагнітної індукції. Закон Фарадея. Правило Ленца 23
§4.9. Індуктивність контура. Явище самоіндукції. Енергія магнітного поля 25
§4.10. Магнітне поле в речовині 28
§4.11. Вихрове електричне поле 32
§4.12. Струми зміщення. Теорема про циркуляцію вектора напруженості магнітного поля (закон повного струму) 33
§4.13. Система рівнянь Максвелла. Електромагнітне поле 35

Розділ 5. Коливання і хвилі **37**
§5.1. Гармонічні коливання. Диференціальне рівняння гармонічних коливань та його розв’язок. Амплітуда, фаза, частота, період коливань 37
§5.2. Математичний маятник 38
§5.3.Фізичний маятник 39
§5.4. Енергія гармонічних коливань 40

§5.5. Додавання однаково направлених гармонічних коливань однакової частоти 41
§5.6. Додавання взаємно перпендикулярних коливань 42
§5.7. Згасаючі коливання 44
§5.8. Вимушені коливання 46
§5.9. Поняття хвилі, рівняння хвилі. Поздовжні і поперечні хвилі. Фронт хвилі і хвильові поверхні. Довжина хвилі, хвильове число, фазова швидкість 48
§5.10. Хвильове рівняння 50
§5.11. Енергія пружної хвилі 52
§5.12. Групова швидкість і дисперсія хвиль 54
§5.13. Стоячі хвилі 55
§5.14. Електромагнітні коливання 56
§5.15. Вимушені електромагнітні коливання 58
§5.16. Електромагнітні хвилі. Шкала електромагнітних хвиль 60
§5.17. Енергія електромагнітних хвиль. Вектор Умова-Пойнтінга 62

Розділ 6. Оптика 63
§6.1. Елементи геометричної оптики: закони відбивання і заломлення світла; тонкі лінзи 63
§6.2. Монохроматичні світлові хвилі 66
§6.3. Інтерференція світла 67
§6.4. Інтерференція світла на тонких плівках 70
§6.5. Дифракція світла. Принцип Гюйгенса - Френеля. Метод зон Френеля 75
§6.6. Дифракція Фраунгофера 77
§6.7. Дифракція рентгенівських променів 81
§6.8. Поляризація світла. Типи і способи поляризації 82
§6.9. Інтерференція поляризованих променів. Обертання площини поляризації 84
§6.10. Дисперсія світла 86
§6.11. Квантова природа випромінювання. Теплове випромінювання 89
§6.12. Фотоефект 92
§6.13. Тиск світла 94
§6.14. Ефект Комптона 95
§6.15. Гальмівне рентгенівське випромінювання 97

Розділ 7. Елементи атомної фізики, квантової механіки і фізики твердого тіла 99

§7.1. Ядерна модель атома. Борівський воднеподібний атом. Спектральні серії 99
§7.2. Корпускулярно-хвильовий дуалізм матерії; гіпотеза де Бройля. Співвідношення невизначеностей Гайзенберга 103
§7.3. Хвильова функція та її зміст. Рівняння Шрьодінгера 108
§7.4. Частинка в одновимірній прямокутній потенціальній ямі. Проходження частинки через потенціальний бар'єр 112
§7.5. Квантовий лінійний гармонічний осцилятор 115
§7.6. Воднеподібні атоми в квантовій механіці. Квантові числа 117
§7.7. Магнітний момент атомів. Досліди Штерна і Герлаха. Власний момент електрона (спін). Ферміони і бозони 121
§7.8. Принцип Паулі. Стани електронів в складних атомах 124
§7.9. Характеристичне рентгенівське випромінювання 128
§7.10. Енергія молекул. Молекулярні спектри 130
§7.11. Люмінесценція 135
§7.12. Поглинання, спонтанне і вимушене випромінювання. Квантові генератори 137
§7.13. Теплові коливання кристалічної решітки і теплоємність твердих тіл 140
§7.14. Елементи зонної теорії твердих тіл 145
§7.15. Електропровідність металів і напівпровідників 151
§7.16. Напівпровідникові структури 155

Розділ 8. Фізика ядра та елементарних частинок 160
§8.1. Склад і характеристики ядра 160
§8.2. Дефект маси та енергія зв'язку ядра. Ядерні сили 163
§8.3. Радіоактивність 167
§8.4. Ядерні реакції 175
§8.5. Елементарні частинки та фундаментальні взаємодії 183

III. Практичні заняття 199
Магнетизм. Коливання і хвилі 199
Частина I. Електромагнетизм 199
1. Основні закони і співвідношення 199
2. Приклади розв'язування задач 202
3. Задачі для самостійного розв'язування 210
Частина II. Коливання і хвилі 216
1. Основні закони і співвідношення 216
2. Приклади розв'язування задач 220
3. Задачі для самостійного розв'язування 232

Оптика 240
1. Основні закони і співвідношення 240
2. Приклади розв'язування задач 244
3. Задачі для самостійного розв'язування 254
Елементи атомної фізики і квантової механіки 263
1. Основні закони і співвідношення 263
2. Приклади розв'язування задач 267
3. Задачі для самостійного розв'язування 276
Фізика ядра та елементарних частинок 280
1. Основні закони і співвідношення 280
2. Приклади розв'язування задач 281
3. Задачі для самостійного розв'язування 285

IV. Лабораторний практикум 288
Магнетизм. Коливання і хвилі 288
Лабораторна робота № 4.1
Вивчення гальванометра магнітоелектричної системи 288
Лабораторна робота № 4.2
Перевірка закону Ампера 293
Лабораторна робота № 4.3
Визначення питомого заряду електрона методом магнетрона 298
Лабораторна робота № 4.4
Вивчення магнітного поля соленоїда за допомогою датчика Холла 302
Лабораторна робота № 4.5
Визначення горизонтальної складової напруженості магнітного поля Землі 307
Лабораторна робота №4.6
Визначення прискорення вільного падіння за допомогою оборотного маятника 310
Лабораторна робота №4.7
Вивчення згасаючих коливань у коливальному контурі та визначення його параметрів 314
Лабораторна робота №4.8
Вивчення вимушених коливань у контурі 318
Лабораторна робота №4.9
Визначення швидкості звуку в повітрі 323
Лабораторна робота №4.10
Вимірювання довжини хвилі і частоти електромагнітних коливань 327
Оптика. Елементи квантової механіки. Атомне ядро 331
Лабораторна робота № 5.1

Визначення довжини світлової хвилі за допомогою біпризми Френеля 331
Лабораторна робота № 5.2
Визначення радіуса кривизни лінзи за допомогою кілець Ньютона .. 334
Лабораторна робота № 5.3
Вивчення дифракції світла 338
Лабораторна робота № 5.4
Визначення довжини світлової хвилі за допомогою дифракційної решітки 344
Лабораторна робота № 5.5
Перевірка закону Малюса 348
Лабораторна робота № 5.6
Визначення концентрації цукру в розчині поляриметром 351
Лабораторна робота №5.7
Дослідження залежності енергетичної світності абсолютно чорного тіла від його температури та перевірка закону Стефана-Больцмана 356
Лабораторна робота №5.8
Дослідження зовнішнього фотоефекту 361
Лабораторна робота №5.9
Вивчення залежності опору термістора від температури 363
Лабораторна робота №5.1
Дослідження вольт-амперної характеристики напівпровідникового діода 366
Лабораторна робота №5.11
Дослідження закону поглинання γ-променів 369

V. Питання до поточного контролю 372

VI. Тренінгові тестові програми для змістових і підсумкового модулів 375
Змістовий модуль IV 375
Змістовий модуль V 377

VII. Індивідуальна робота (розрахункова робота) 382

VIII. Самостійна робота студентів стаціонару. 382

IX. Методи тестування. 382

X. Методичні вказівки для виконання контрольних робіт студентами заочної форми навчання **383**
1. Основні закони та співвідношення 385
2. Приклади розв'язування задач 399
3. Задачі для самостійного розв'язування 431
4. Таблиці варіантів до контрольних робіт 432
5. Задачі до контрольних робіт 434

XI. Довідкові дані **446**

XII. Рекомендована література **451**

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Зміст

Вступ **3**
І. Опис предмету навчальної дисципліни **4**
1.1. Тематичний план та розподіл навчального часу **4**
1.2. Розподіл балів, що присвоюються студентам, і шкала оцінювання **6**
1.3. Програма курсу загальної фізики **6**

ІІ. Лекційний курс **11**
Розділ 4. Магнетизм **11**
§4.1. Магнітне поле і його характеристики. Дія магнітного поля на контур зі струмом. Принцип суперпозиції. Класифікація магнетиків **11**
§4.2. Закон Біо-Савара-Лапласа. Магнітне поле прямолінійного та колового струмів **14**
§4.3. Циркуляція вектора напруженості магнітного поля. Вихровий характер магнітного поля. Поле довгого соленоїда **16**
§4.4. Дія магнітного поля на струм; сила Ампера. Магнітна взаємодія струмів **18**
§4.5. Сила Лоренца. Рух електричних зарядів в магнітному полі **19**
§4.6. Магнітний потік. Теорема Гауса для магнітного поля **21**
§4.7. Робота переміщення провідника та контура зі струмом в магнітному полі **22**
§4.8. Явище електромагнітної індукції. Закон Фарадея. Правило Ленца **23**
§4.9. Індуктивність контура. Явище самоіндукції. Енергія магнітного поля **25**
§4.10. Магнітне поле в речовині **28**
§4.11. Вихрове електричне поле **32**
§4.12. Струми зміщення. Теорема про циркуляцію вектора напруженості магнітного поля (закон повного струму) **33**
§4.13. Система рівнянь Максвелла. Електромагнітне поле **35**

Розділ 5. Коливання і хвилі **37**
§5.1. Гармонічні коливання. Диференціальне рівняння гармонічних коливань та його розв'язок. Амплітуда, фаза, частота, період коливань **37**
§5.2. Математичний маятник **38**
§5.3.Фізичний маятник **39**

Національний університет водного господарства та природокористування

§5.4. Енергія гармонічних коливань 40
§5.5. Додавання однаково направлених гармонічних коливань однакової частоти 41
§5.6. Додавання взаємно перпендикулярних коливань 42
§5.7. Згасаючі коливання 44
§5.8. Вимушені коливання 46
§5.9. Поняття хвилі, рівняння хвилі. Поздовжні і поперечні хвилі. Фронт хвилі і хвильові поверхні. Довжина хвилі, хвильове число, фазова швидкість 48
§5.10. Хвильове рівняння 50
§5.11. Енергія пружної хвилі 52
§5.12. Групова швидкість і дисперсія хвиль 54
§5.13. Стоячі хвилі 55
§5.14. Електромагнітні коливання 56
§5.15. Вимушені електромагнітні коливання 58
§5.16. Електромагнітні хвилі. Шкала електромагнітних хвиль 60
§5.17. Енергія електромагнітних хвиль. Вектор Умова-Пойнтінга 62

Розділ 6. Оптика 63
§6.1. Елементи геометричної оптики: закони відбивання і заломлення світла; тонкі лінзи 63
§6.2. Монохроматичні світлові хвилі 66
§6.3. Інтерференція світла 67
§6.4. Інтерференція світла на тонких плівках 70
§6.5. Дифракція світла. Принцип Гюйгенса - Френеля. Метод зон Френеля 75
§6.6. Дифракція Фраунгофера 77
§6.7. Дифракція рентгенівських променів 81
§6.8. Поляризація світла. Типи і способи поляризації 82
§6.9. Інтерференція поляризованих променів. Обертання площини поляризації 84
§6.10. Дисперсія світла 86
§6.11. Квантова природа випромінювання. Теплове випромінювання 89
§6.12. Фотоефект 92
§6.13. Тиск світла 94
§6.14. Ефект Комптона 95
§6.15. Гальмівне рентгенівське випромінювання 97

Національний університет
Умови використання

Розділ 7. Елементи атомної фізики, квантової механіки і фізики твердого тіла 99
§7.1. Ядерна модель атома. Борівський воднеподібний атом. Спектральні серії 99
§7.3. Хвильова функція та її зміст. Рівняння Шрьодінгера108
§7.4. Частинка в одновимірній прямокутній потенціальній ямі. Проходження частинки через потенціальний бар'єр 112
§7.5. Квантовий лінійний гармонічний осцилятор 115
§7.6. Воднеподібні атоми в квантовій механіці. Квантові числа 117
§7.7. Магнітний момент атомів. Досліди Штерна і Герлаха. Власний момент електрона (спін). Ферміони і бозони 121
§7.8. Принцип Паулі. Стани електронів в складних атомах 124
§7.9. Характеристичне рентгенівське випромінювання 128
§7.10. Енергія молекул. Молекулярні спектри 130
§7.11. Люмінесценція 135
§7.12. Поглинання, спонтанне і вимушене випромінювання. Квантові генератори 137
§7.13. Теплові коливання кристалічної решітки і теплоємність твердих тіл 140
§7.14. Елементи зонної теорії твердих тіл 145
§7.15. Електропровідність металів і напівпровідників 151
§7.16. Напівпровідникові структури 155

Розділ 8. Фізика ядра та елементарних частинок 160
§8.1. Склад і характеристики ядра 160
§8.2. Дефект маси та енергія зв'язку ядра. Ядерні сили 163
§8.3. Радіоактивність 167
§8.4. Ядерні реакції 175
§8.5. Елементарні частинки та фундаментальні взаємодії 183

III. Практичні заняття 199
Магнетизм. Коливання і хвилі 199
Частина I. Електромагнетизм 199
1. Основні закони і співвідношення 199
2. Приклади розв'язування задач 202
3. Задачі для самостійного розв'язування 210
Частина II. Коливання і хвилі 216
1. Основні закони і співвідношення 216
2. Приклади розв'язування задач 220
3. Задачі для самостійного розв'язування 232

Оптика 240
1. Основні закони і співвідношення 240
2. Приклади розв'язування задач 244
3. Задачі для самостійного розв'язування 254
Елементи атомної фізики і квантової механіки 263
1. Основні закони і співвідношення 263
2. Приклади розв'язування задач 267
3. Задачі для самостійного розв'язування 276
Фізика ядра та елементарних часток 280
1. Основні закони і співвідношення 280
2. Приклади розв'язування задач 281
3. Задачі для самостійного розв'язування 285

IV. Лабораторний практикум 288
Розділ 4. Магнетизм. Коливання і хвилі 288
Лабораторна робота № 4.1
Вивчення гальванометра магнітоелектричної системи 288
Лабораторна робота № 4.2
Перевірка закону Ампера 293
Лабораторна робота № 4.3
Визначення питомого заряду електрона методом магнетрона 298
Лабораторна робота № 4.4
Вивчення магнітного поля соленоїда за допомогою датчика Холла 302
Лабораторна робота № 4.5
Визначення горизонтальної складової напруженості магнітного поля Землі 307
Лабораторна робота №4.6
Визначення прискорення вільного падіння за допомогою оборотного маятника 310
Лабораторна робота №4.7
Вивчення згасаючих коливань у коливальному контурі та визначення його параметрів 314
Лабораторна робота №4.8
Вивчення вимушених коливань у контурі 318
Лабораторна робота №4.9
Визначення швидкості звуку в повітрі 323
Лабораторна робота №4.10
Вимірювання довжини хвилі і частоти електромагнітних коливань 327

Розділ 5. Оптика. Елементи квантової механіки. Атомне ядро ... 331
Лабораторна робота № 5.1
Визначення довжини світлової хвилі за допомогою біпризми Френеля ... 331
Лабораторна робота № 5.2
Визначення радіуса кривизни лінзи за допомогою кілець Ньютона ... 334
Лабораторна робота № 5.3
Вивчення дифракції світла ... 338
Лабораторна робота № 5.4
Визначення довжини світлової хвилі за допомогою дифракційної решітки ... 344
Лабораторна робота № 5.5
Перевірка закону Малюса ... 348
Лабораторна робота № 5.6
Визначення концентрації цукру в розчині поляриметром ... 351
Лабораторна робота №5.7
Дослідження залежності енергетичної світності абсолютно чорного тіла від його температури та перевірка закону Стефана-Больцмана ... 356
Лабораторна робота №5.8
Дослідження зовнішнього фотоефекту ... 361
Лабораторна робота №5.9
Вивчення залежності опору термістора від температури ... 363
Лабораторна робота №5.1
Дослідження вольт-амперної характеристики напівпровідникового діода ... 366
Лабораторна робота №5.11
Дослідження закону поглинання γ-променів ... 369

V. Питання до поточного контролю ... 372

VI. Тренінгові тестові програми для змістових і підсумкового модулів ... 375
Змістовий модуль IV ... 375
Змістовий модуль V ... 377

VII. Індивідуальна робота (розрахункова робота) ... 382

VIII. Самостійна робота студентів стаціонару. ... 382

Національний університет
водного господарства

IX. Методи тестування. 382

X. Методичні вказівки для виконання контрольних робіт студентами заочної форми навчання 383
1. Основні закони та співвідношення 385
2. Приклади розв'язування задач 399
3. Задачі для самостійного розв'язування 431
4. Таблиці варіантів до контрольних робіт 432
5. Задачі до контрольних робіт 434

XI. Довідкові дані 446

XII. Рекомендована література 451

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Національний університет
водного господарства
та природокористування

IX. Рекомендована література

Література до лекційного курсу

1. Трофимова Т.И. Курс физики.–М., "Высшая школа", 1990.
2. Детлаф А.А., Яворский В.М. Курс физики.–М., "Высшая школа", 1989.
3. Савельев И.В. Курс физики.–М., "Наука", 1989, т.1–3.
4. Зачек І.Р., Кравчук І.М., Романишин Б.М. та ін. Курс фізики. За ред. Лопатинського І.Є., Львів, “Бескид Біт” 2002.
5. Олексин Д.І., Мороз В.М. Загальна фізика. Частина 1. Конспект лекцій для студентів заочної форми навчання. Рівне, 2002, 073-89.
6. Дубчак Д.І., Ковалець М.О., Орленко В.Ф., Никонюк Є.С., Шляховий В.Л. Загальна фізика. Частина 2. Конспект лекцій для студентів заочної форми навчаня. Рівне, 2002, 073-90.
7. Кучерук І.М. та ін. Загальний курс фізики. У трьох томах, К., 1999.
8. Физическая энциклопедия, т.т. 1-5. Гл. ред. А.М. Прохоров. М., «Большая Российская Энциклопедия», 1998.

Література до практичних занять; РР та КР

1. Волькенштейн В.С. Сборник задач по общему курсу физики,–М., "Наука", I985-I989.
2. Иродов И.Е. Задачи по общей физике.–М., “Наука”, 1987.
3. Савельев И.В. Сборник водросов и задач по общей физике.–М., "Наука", 1982.
4. Чертов А.Г., Воробьев А.А., Федоров М.В. Задачник по физике.–М., "Высшая школа", 1988.

Література до лабораторних занять

1. Кортнев А.В. Практикум по курсу общей физики.–М., "Высшая школа", 1972.
2. Майсова Н.Н. Практикум по курсу общей физики. М., “Высшая школа” 1972.
3. Вадець Д.І., Троцюк М.Й., Орленко В.Ф., Тучак С.С. Методичні вказівки до лабораторних робіт з фізики "Фізичні вимірювання і обробка результатів вимірювання", Рівне, 1992, шифр 073-41.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Навчальне видання

Загальна фізика

Частина ІІ

Інтерактивний комплекс навчально-методичного забезпечення

За редакцією
Олексина Д.І., Орленка В.Ф.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Технічний редактор *С.В. Ящук*
Комп'ютерний набір, верстка *Б.П. Рудик*

Підписано до друку хх-хх-2009р. Формат $60\times84^{1}/_{16}$. Папір друкарський №1. Гарнітура Times. Друк різографічний. Ум.-друк арк. 3,6. Обл.-вид. арк. 3,7. Тираж 540 примірників. Зам. №ххх.

Редакційно-видавничий центр
Національного університету водного господарства та природокористування
33028, Рівне, вул. Соборна, 11.

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції РВ №31 від 26.04.2005р.