

БЕЛИХОВ, П. А., проф.

На
№

624/04

8-27

ТЕОРИЯ ИНЖЕНЕРНЫХ СООРУЖЕНИЙ.

==
ВЫПУСК I.
==

С 200 РИСУНКАМИ.



ГОСУДАРСТВЕННОЕ ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО.

Москва — 1924 г.

ИНЖЕНЕРНО-ПРОМЫШЛЕННАЯ БИБЛИОТЕКА.

(Название без звездочек—имеются в продаже,
названия со звездочками—находятся в печати).

Цены в золотом исчислении.

- Александров, В. А., проф. Электрическое оборудование современных автомобилей и мотоциклов. М. 1923 г. 190 стр. 197 рис. Ц. 2 р. 40 к.
- Его же. Практические работы по электротехнике. М. 1923 г. 511 стр. 340 рис. Ц. 6 р.
- Анисимов, Н. И., инж. Плотины водоудержательные и водоподъемные. (Конспект лекций). Ч. I. Водоудержательные плотины. М. 1923 г. 68 стр. 94 рис. Ц. 1 р.
- Аппель. Элементы математического анализа, часть I. Функции одного независимого переменного. Под редакц. проф. И. И. Привалова. М. 1924 г. 220 стр. 105 рис. Ц. 3 р. 20 к.
- Баранов, А. А., инж.-техн. Сушка тканей. М. 1923 г. 20 стр. 2 диагр. Ц. 55 к.
- Барбот де-Марри, Е. Н., горн. инж. Драгирование россыпных месторождений золота и платины. М. 1924 г. 112 стр. 25 рис. Ц. 2 р. 20 к.
- Баумгартен, Ф. Р., Психотехника. Б. 1922 г. 246 стр. 110 рис. Ц. 2 р. 75 к.
- Берлов, М. Н., проф. Детали машин. Вып. I. Болтовые и клиновые соединения. П. 1921 г. 116 стр. Ц. 4 р. 70 к.
- Его же. Детали машин. Вып. II. Клепка балок и колон. М. 1922 г. 69 стр. Ц. 2 р. 60 к.
- Его же. Детали машин. Вып. IV. Передаточные механизмы. М. 1922 г. 64 стр. 12 табл. Ц. 3 р. 65 к.
- Его же. Детали машин. Вып. X. Графостатика. Ч. I. М. 1922 г. 100 стр. Ц. 4 р. 40 к.
- Будников, П. П., проф. Глина и глиняные изделия, глазури, фарфоровые краски и стекло. М. 1923 г. 99 стр. Ц. 80 к.
- Его же. Техно-химический анализ. М. 1923 г. 151 стр. Ц. 1 р. 20 к.
- Бурдаков, А. А., инж. Из практики с центробежными насосами. Руководство для инженеров, техников и студентов. М. 1923 г. 170 стр. 150 рис. 12 табл. Ц. 1 р. 90 к.
- Бухонов, И., инж. Угарное и вигоневое прядение. Производство одежной и гигроскопической ваты. М. 1923 г. 80 стр. Ц. 1 р. 30 к.
- Ванков, С. Н., проф. О нормализации металлообработ. промышл. М. 1921 г. 24 стр. Ц. 11 к.
- Васильев, Ч. А., проф. Связь фактор (для гладкой и пушистой пряжи). М. 1922 г. 179 стр. 13
- Визент, В. табл. Ц. 44 к.
- Винкель, Г. нгл. инж.-мех. 8 стр. Ц. 3 р.
- Винтерботт, И. лов резанием.
- Гавриленко, Ч. вах. Б. 1923 г.
- Гипплер, В. 37 42 стр. 8 рис.
- Глебов, С. Ц. 4 рис. Ц.
- Горенштейн, Г. ампов. Перев.
- Гофмейстер, по 4 стр. Ц.
- Демьянов, Дрейер, J. Я. М. 1922 г.
- 39 7 стр. 177 рис.
- Жуковский, Ц. 7-е 162 стр.
- Его же. 19
- Его же. Заметки по вариационному исчислению. М. 1923 г. 27 стр. Ц. 33 к.
- Зуев, М. Д., проф. Свекло-сахарное производство. Дефекция и сатурация. М. 1922 г. 580 стр. Ц. 4 р. 55 к.
- Ирион, Е., инж. Новейшие испытательные машины. Б. 1920 г. 80 стр. 62 рис. Ц. 80 к.
- Нацнельсон, М. Н. Приготовление синтетических химико-фармацевтических препаратов. Практические работы для химиков, медиков и фармацевтов. Под ред. проф. Чичибабина. М. 1923 г. 299 стр. 69 рис. Ц. 3 р. 60 к.
- Нашкаров, Н. А., проф. Графические таблицы для расчета железобетонных сооружений. М. 1923 г. 34 стр. 14 табл. 8 черт. Ц. 65 к.
- Кестнер, Е. А., проф. Курс паровозов с атласом. М. 1922 г. 554 стр. Ц. 5 р. 85 к.
- Кирилов, Г. М., инж. Районные отопительно-силовые станции. М. 1923 г. 49 стр. 40 рис. Ц. 95 к.
- Комаров, Н. С., инж. Холод. Руководство по холодильному делу. М. 1924 г. 500 стр. 223 рис. Ц. 4 р. 90 к.

5145

Пролетарии всех стран, соединяйтесь!

Р. С. Ф. С. Р.

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ОТДЕЛ В. С. Н. Х.

Б. Серия 4. Инженерно-Промышленная Библиотека. № XIII—12.

ВЕЛИХОВ, П. А., ПРОФ.

У

624.04
В-27

ТЕОРИЯ ИНЖЕНЕРНЫХ СООРУЖЕНИЙ.

ОПЫТ СЛИТНОГО ИЗЛОЖЕНИЯ ОСНОВ
СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ
И СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ.

5145

Переселенцев
Иван Г. в Киев

Сча

Выпуск I.

Теория внешних сил.— Основы Сопротивления Материалов. — Исследование статически-определимого бруса и статически-определимой балки. — Давление сыпучих тел и подпорные стенки.

С 200 РИСУНКАМИ.



ГОСУДАРСТВЕННОЕ ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО.

Москва — 1924 г.

И

Перепечатка без разрешения
Гостехиздата не допускается.

ОТ АВТОРА.

Настоящий выпуск представляет собою часть общего курса Теории Инженерных Сооружений и, главным образом, посвящен исследованию статически-определимого бруса. Выпуск *второй* должен содержать в себе исследование шарнирно-стержневых *статически определимых* ферм, плоских и пространственных; выпуск *третий*— *изложение основных теорем Теории Сооружений*, дающих ключ к исследованию любых статически-неопределимых систем, как жестких (рамы), так и шарнирно-стержневых (фермы), и *применение этих теорем* к отдельным статически-неопределимым случаям: неразрезные балки и фермы, двухшарнирные и бесшарнирные арки и арочные фермы и т. д.

Но настоящий выпуск имеет и самостоятельное значение, ибо в нем целиком изложены „Основы Сопротивления Материалов“.

Немалую помощь мне при составлении настоящего выпуска оказали записи моих лекций, составленные студентом Московского Института Инженеров Путей Сообщения С. С. Крюковским; искреннюю признательность я высказываю ему, затем студентам Виталь, Селезневу, Полякову и другим, подготовлявшим оригиналы чертежей, а также и уважаемому И. Ф. Маслову и вообще всем своим многочисленным добрым друзьям, словом и делом помогавшим мне в моей работе.

Горячее желание мое сводится к тому, чтобы эта книга помогла читателям, и прежде всего студентам Высших Технических Учебных Заведений разобраться в тех интересных, но сложных понятиях, которые должны быть усвоены инженером для правильного расчета инженерных сооружений; но, далеко не будучи уверен в отсутствии недочетов в своей книге, я прошу своих читателей сообщить мне свой отзыв о ней в целом и об отдельных главах ее; всякое замечание будет принято с благодарностью.

Итак в добрый путь, моя книга, я бы хотел, чтобы ты оказалась полезной своим читателям.

П. Велихов.

Москва 1924 год.

Институт Инженеров Путей Сообщения

В В Е Д Е Н И Е.

..... „Наука сокращает
Нам опыты быстротекущей жизни“.

Пушкин.

Задачи всякой науки сводятся прежде всего к тому, чтобы изучить *сущность* той или иной категории явлений, установить законы, которым подчиняются эти явления, и таким путем *объяснить их, используя* данную категорию явлений для каких-либо *практических* целей во благо человечества, для чего подлежат выяснению вопросы: *что* в данной категории надлежит использовать, *и как* использовать наилучшим способом. Таким образом, как выражается А. Е. Love в своем классическом курсе Теории Упругости, деятели науки стремятся прежде всего *познать* мир, а затем — *и сделать его более удобным* для человечества. При этом истинная наука характеризуется, во-первых, *объективностью* своих методов, а во-вторых, *строгой системой* во всем своем построении, системой, определяющей каждому явлению свое место и в результате *упрощающей* понимание всей совокупности явлений. Основанная на этих принципах наука действительно позволяет нам заменить опыт нашей быстро текущей личной жизни коллективным опытом всех предшествовавших нам поколений. И перед нами стоит лишь высокая обязанность, усвоив опыт предшествовавших поколений и пополнив его своим личным, хотя и кратковременным опытом, передать совокупность знаний, накопленных в данной области, нашим преемникам, т. е. последующим поколениям — нашим потомкам.

Все выше сказанное целиком относится и к той науке, к изучению которой мы приступаем — *учению о жизни сооружений*. Действительно, сооружения *живут* — все частицы, их составляющие, находятся в беспрепятственном движении, а всякая *нагрузка*, на них действующая, изменяет условия этого движения и заставляет сооружения *работать*; эта работа постепенно *утомляет* сооружения, и после известного срока работы материал сооружений часто оказывается *перерожденным*, и сооружение теряет способность воспринимать нагрузку и подлежит замене — умирает. И вот, законы всех этих внутренних движений, этой *внутренней жизни* и следует знать инженеру, чтобы наилучше эти законы использовать, и как бы руководить сооружением в течение всей его жизни. Подходящим названием для науки, ставящей перед собой такую задачу, является название: „*Теория Инженерных Сооружений*“. Ниже мы разясним в кратком историческом обзоре,

какие иные названия и по каким причинам давались этой науке, но в ее современном состоянии, когда она овладела всеми выше перечисленными приемами истинной науки, она заслуживает уже наименования „Теории Сооружений“.

Действительно, и в ней на первое место ставится изучение *сущности* тех явлений, которые возникают в *упругих твердых телах*, из которых создаются все инженерные сооружения, когда на эти сооружения действуют те или иные *силы*; далее устанавливаются *законы* упругих явлений, и дается *объяснение* этих явлений.

И наконец, на основании всего этого материала, наша наука, как наука прикладная, устанавливает наилучшие методы *проектирования и расчета* сооружений, при чем под этими методами подразумеваются приемы, позволяющие *выяснить те условия работы*, в которых находится данное сооружение при любых заданных внешних воздействиях, и придать сооружению *наивыгоднейшие формы* для этой работы.

При этом Теория Сооружений отнюдь не вмешивается в *творчество* инженера, создающего, т.-е. проектирующего то или иное сооружение: всякое сооружение должно быть *самоценностью* и создаваться свободным процессом творчества, учитывающего *все* стоящее перед сооружением задачи.

Конечно, теория *рекомендует* наивыгоднейшие *общие формы* сооружения, она же устанавливает *разумные границы* применения тех или иных материалов и тех или иных размеров — и все же творец-конструктор должен создавать сооружение почти так же, как ваятель лепит статую — быть *свободным* в своих действиях, ибо истый инженер, хорошо проникшийся *общими идеями* теории с одной стороны и специальными задачами творчества в избранной им отрасли с другой — неизбежно в самом процессе творчества создает сооружение, в котором требования теории будут сочетаться с требованиями практики. Слишком же *слепое* подчинение указаниям теории может дать сооружение схематичное, не жизненное, как, конечно, и творчество, не считающееся вовсе с общими идеями теории, может дать сооружение неразумное и нецелесообразное.

Истинный инженер по тому и узнается, что *он умеет* сочетать теорию с практикой и *не видит между ними противоречий* даже там, где таковые *кажутся* имеющими место.

Итак, теория не низводит творчества инженера на уровень механического применения рекомендуемых ею схем, но все же она *необходима* инженеру, и *только она* позволяет ему разумно творить, проверять правильность намечаемых им в процессе творчества форм и размеров сооружений, *обеспечить* сооружение от всяких случайностей.

Та же теория позволяет изучить работу и таких сооружений, которые возводились в разное время чисто интуитивно, без помощи теории, древними строителями и архитекторами, а иногда и непосредственно создавались самой природой, и нередко прекрасно исполняют свое назначение, являясь образцами, заслуживающими даже и до сего времени подражания, но зато

нередко таят в себе грозные возможности разрушения и существуют долгие годы лишь случайно, по счастливому сочетанию обстоятельств.

Чтобы еще яснее выявить роль *теории* в творчестве инженера, проектирующего и возводящего сооружения, следует здесь отчетливо охарактеризовать те требования, которым должно удовлетворять *каждое* инженерное сооружение.

Прежде всего сооружение должно быть *целесообразно*, то-есть удовлетворять своему прямому назначению, что достигается приданием ему должных *общих* (генеральных) размеров и вообще проектированием его *в соответствии с заданием*.

Во-вторых, сооружение должно быть *прочно, жёстко и устойчиво* т.-е. не должно разрушаться от действия на него внешних сил, должно лишь незначительно изменять под влиянием внешних сил свои размеры и должно сохранять те общие геометрические формы, которые ему приданы при его возведении. Установление условий, при которых все эти требования удовлетворяются, входит всецело в область ведения Теории Инженерных Сооружений.

В-третьих, сооружение должно быть *конструктивно*. Это требование заключается в том, чтобы общие формы и все детали сооружения были в соответствии со специфическими свойствами и особенностями того материала, из которого сооружение изготовляется, и чтобы сооружение было запроектировано *жизненно и просто*. В этой области инженер-конструктор особенно имеет проявить и выявить свой творческий талант, сочетая требования конструктивности с требованиями теории. При этом неизбежно примириться с тем, что под влиянием конструктивных требований *вес* сооружения оказывается большим того, который мог бы ожидаться в результате теоретического расчета. Эта разница иногда доходит до 50% и более, но рассматривается, как *целесообразный корректив* к отвлеченным требованиям теории.

В-четвертых, сооружение должно быть *экономично*, каковое требование удовлетворяется отсутствием *лишних* частей и *лишних* размеров в сооружении и вообще осуществляется почти само собой при должном соблюдении первых трех требований. Должно быть сооружение, именно в целях действительной его экономичности, и *достаточно долговечным*, что осуществляется путем выбора должного для него материала в соответствии с общим заданием.

И наконец, в-пятых, сооружение должно быть *красиво*, удовлетворять *эстетическим* требованиям, как бы сливаясь с окружающей его природой — источником всего прекрасного и целесообразного.

И тут можно сказать, что красота достигается не внешними украшениями, не наружной отделкой, а общей целесообразностью сооружения в целом и в деталях, которая *чувствуется и неспециалистом*, и заставляет его признать сооружение легким, изящным, солидным, смелым, т.-е. красивым, ибо *прекрасное* и есть гармония формы с содержанием. В огромном большинстве случаев удовлетворение первых четырех требований уже делает сооружение красивым.

Все предыдущее изложение дает достаточное объяснение того значения, которое имеет Теория Сооружений для всякого инженера-строителя и прежде всего для инженера-конструктора, избравшего своей специальностью проектирование инженерных сооружений, но в большой мере и для того инженера-строителя, который избирает своей специальностью *постройку* или *эксплоатацию* различных сооружений. Ибо для того, чтобы хорошо строить и эксплуатировать сооружение, надо работу его *понимать*; в частности для инженеров путей сообщения любой специальности детальное и любовное изучение Теории Сооружений стало уже издавна *здоровой традицией*.

Выясним теперь связь нашей науки с другими, входящими в общий план инженерного образования, и покажем ее *место* среди них.

Все *естественно-исторические* науки, изучаемые будущим инженером: Математика, Механика, Физика и Химия, необходимы для правильного понимания курса Теории Сооружений и для возможности *научного* и в то же время *простого* его изложения.

Высшая Математика и в частности анализ бесконечно малых, дает инженеру тот *метод*, который *упрощает* изучение самых сложных явлений, а в некоторых случаях позволяет изучать явления, которые без анализа вовсе недоступны для исследователя.

Механика дает те незыблемые законы равновесия и движения, на которых, как на фундаменте покоится *все здание* Теории Сооружений, а *Физика* и *Химия*, особенно первая, тесно связаны с нашей наукой и общностью проблем и общностью методов, и так же, как и Теория Сооружений, обе стремятся прежде всего к тому, чтобы выяснить *строение материи* и сущность явлений, в ней происходящих, — и целые отделы Физики: учение об электромагнитных волнах, акустика, кристаллология, сейсмология, учение о строении земли — имеют тесную органическую связь с учением об упругих телах. И Химия в той части ее, которая освещает вопрос о *строении* вещества, о кристаллизации, о термодинамических явлениях — также переплетает свои работы с работами лиц, изучающих упругие явления, а последние работы о строении атома и об электрической сущности материи (кинетическая теория материи) определенно устанавливают, что все упругие свойства тел зависят прежде всего от структуры их атомов.

Итак, Теория Сооружений, как центр инженерно-строительного образования, освещается и согревается лучами, посылаемыми *точными* науками.

И в то же время Теория Сооружений сама посылает от себя лучи, — дает те приемы, которые *неизбежно необходимы* при проектировании инженеру-строителю любой специальности: и мосты, и конструкции специального назначения, и железнодорожные сооружения и все виды гидротехнических сооружений, да вообще любые сооружения — все это проектируется по методам Теории Сооружений, и интимная внутренняя жизнь всех этих сооружений именно в этой науке изучается.

Таким образом, Теория Сооружений поистине стоит в *центре* инженерно-строительного образования, и едва ли какая иная из инженерных наук может сравниться с ней по значению ее для инженера-строителя.

На этом мы заканчиваем общую характеристику нашей науки и дадим теперь краткий обзор тех этапов, через которые она прошла по пути своего развития.

Каждая естественно-историческая наука проходит в своем развитии следующие ступени: прежде всего явления, интересующие данную науку, *наблюдаются*, как они происходят в природе, и на основании этих наблюдений делаются некоторые *умозрительные* выводы, более или менее остроумные и более или менее близкие к истине.

Далее наука переходит на *опытный путь* и тут уже устанавливает путем научно поставленных опытов *основные законы явлений*.

Период этот самый важный в развитии естественно-исторической науки, ибо лишь *факты*, добытые из *опытов*, действительно объективно-бесспорно характеризуют явление.

Наконец, на основании результатов опытов создается стройная *теория*, т.-е. явлению дается *формулировка*, и эта теория в свою очередь позволяет сделать из нее ряд *выводов* и *приложить* эти выводы к жизни.

Через эти же стадии прошла и наука о сооружениях. С незапамятных времен стремилось человечество уяснить себе *строение материи*, а попутно и *работу материалов в сооружениях*, и история древнего мира знает такие имена, как философы *Анаксагор* (500—428 гг. до Р. Х.), *Демокрит* (460—370 гг. до Р. Х.) и *Аристотель* (384—322 гг. до Р. Х.), обсуждавшие вопрос о *строении материи*, и механики и строители *Архит* (430—365 гг. до Р. Х.), *Архимед* (287—212 гг. до Р. Х.), *Витрувий* (жил в I-м веке по Р. Х.) и другие, пытавшиеся выработать *приемы расчета сооружений*. Все эти мыслители и ученые основывались лишь на *умозрительных* соображениях, часто весьма остроумных, но не имевших *объективной ценности*, ибо они не были подтверждены *опытом*.

Эпоха Возрождения дала нам такие умы, как *Леонардо да-Винчи* (1452—1519 гг.), *Галилей* (1564—1642 гг.) и другие ученые того времени, и эти деятели первые оценили значение *опыта* и поставили его во главу угла. С *Галилея* (работы в Венецианском арсенале в 1638 гг.), создавшего первые *приборы для испытания материалов* и выработавшего *приемы* этих испытаний, начинается эра *опытных* изучений упругих явлений в твердых телах, и в 1678 году *Роберт Гук* (Нooke, 1635—1702 гг.), уже дает почти одновременно с *Мариоттом* (Mariotte, 1620—1684 гг.) свой *закон-гипотезу* о том, что упругие изменения формы тела *линейно* зависят от действующих на тело сил, закон, лежащий в основе современной Теории Сооружений. Позднейшие работы *Якова Бернулли* (James Bernoulli, 1654—1705 гг.) *Кулона* (Coulomb, 1736—1806 гг.) и других ученых завершаются трудами *Юнга* (Young, 1773—1829 гг.), установившего *упругие постоянные* для ряда тел и давшего в 1803 году первый *курс по Сопротивлению Материалов*.

В начале 19-го века расцветает *теория*. Предвестниками этого периода были в XVIII веке *Даниил Бернулли* (Daniel Bernoulli, 1700—1782 гг.) *Эйлер* (Leonhard Euler, 1707—1783 гг.) и другие, но лишь с момента появления в 1821 году труда *Навье* (Navier, 1785—1836 гг.), посвященного устано-

влению теории упругих явлений (*Mémoire sur les lois de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques*, — вышел в свет 14 мая 1821 года), следует считать начало той науки, которая ныне выросла в стройную Теорию Сооружений. Блестящая плеяда французских ученых, работавших одновременно с Навье и несколько позднее его, а именно: Ламе (Lamé, 1795—1870 гг.), Клапейрон (Clapeyron, 1799—1864 гг.), Коши (Cauchy, 1789—1857 гг.), Пуассон (Poisson, 1781—1840 гг.) и Сен Венан (Saint Venant, 1797—1886 гг.) — исчерпывающе осветили многие вопросы Сопротивления Материалов и Теории Упругости, а последующие работы англичан Грина (Green, 1783—1841 гг.), Максвелла (Maxwell, 1831—1879 гг.), лорда Кельвина (Lord Kelvin, 1824—1907 гг.) и итальянцев *Betti*, *Castigliano* и многих других, еще более углубили созданную Навье теорию и, связав ее с началами Термодинамики и Математической Физики, а также с началами Общей Энергетики, дали ей широкое обобщение. Из немецких ученых этого периода следует отметить Клебша (Clebsch, 1833—1872 гг.), Кирхгоффа (Kirchhoff, 1824—1887 гг.), а частью и великого Гельмгольца, прямо или косвенно способствовавших расцвету той же общей теории.

Однако, весь этот период не дал еще *практических приложений*, и наука, интересуясь вопросами *Сопротивления Материалов* (*Résistance des Matériaux, Festigkeitslehre, Strength of Materials*) еще не давала ответа на вопрос о том, *как рассчитывать сооружения*. И если в области чистой теории первыми и виднейшими работниками были французы, англичане и частью итальянцы, давшие сообразно характеру их национального гения блестящие и смелые обобщения, часто даже и не исчерпывающе обоснованные, но глубоко верные философски, то усердно всегда ищущие приложения научных проблем к реальной жизни немецкие ученые первые дали нам приемы, позволяющие общие теории прилагать к расчету сооружений. Так, трудами швейцарских инженеров Кюльмана и Риттера и немецких ученых Винклера, Вейрауха, Мора, Мюллера-Бреслау и других создалась наука о расчете сооружений: „Строительная Механика“ или Статика Сооружений (*Mécanique appliquée aux constructions, Baumechanik, Applied Mechanics*), в некоторых своих частях особо широко применяющая графические и особенно графо-аналитические (точнее: геометрические) приемы исследования; эти геометрические приемы иногда излагаются отдельно в особой науке, называемой *Графической Статикой*.

Жизнь перемешала все эти названия, и прежде всего определенно *исчезает* название Графическая Статика, которое не может рассматриваться даже, как название *части курса*, ибо графические (геометрические) приемы возможны, законны и даже желательны во всех отделах курса, но это суть лишь частичные приемы, а не самодовлеющая наука, да и притом приемы, идущие параллельно с аналитическим исследованием. Не более удачно и название „*Статика Сооружений*“, как бы подчеркнуто ограничивающее исследование случаями полной *неподвижности* сооружения, тогда как в настоящее время вопросы *динамики* в Теории Сооружений, изучающей, как мы уже не раз говорили, жизнь сооружений, находящихся в постоянном колебательном движении и часто подвергающихся ударам извне, играют не малую роль.

И даже сама „Строительная Механика“, как наука, раздельная от „Сопротивления Материалов“, трудно с этой последней размежевывается: темы столь переплетаются, что резко их разделить нельзя, почему и выдвигается ныне новый термин: наука — „Теория Сооружений“, охватывающая все вопросы, подлежащие освещению при изучении жизни сооружений.

Конечно, и в этой науке первоначально подлежат изложению начала так называемого „Сопротивления материалов“, как науки об упругих свойствах элементов сооружений, а затем уже излагаются приемы расчета целых сооружений, — т.-е. темы, входившие по прежней терминологии в круг ведения Статики Сооружений (Строительной Механики), и такая последовательность будет иметь место и в настоящем курсе.

В заключение нам остается отметить, что и русские ученые также вложили свою лепту в сокровищницу Теории Сооружений.

Если мы обратимся к истории нашей науки, то мы встретим в ней имена *Остроградского* и *Журавского*, много способствовавших развитию теории упругих тел, а ныне мы уже можем назвать ряд имен ученых и инженеров последних десятилетий, своими трудами способствовавших успехам нашей науки. Среди ученых можно назвать академиков *В. А. Стеклова* и *А. Н. Крылова*, а среди инженеров — проф. *Ф. С. Ясинского* (1856—1899 гг.), и его приемника и ученика проф. *Н. Н. Митинского*. (умер в 1912 г.), выдающегося инженера-мыслителя проф. *В. Л. Кирпичева* (умер в 1916 г.) и нашего талантливое современника проф. *С. П. Тимошенко*. Среди лиц, много способствовавших широкому применению современных методов к расчету инженерных сооружений в России, следует назвать проф. *П. К. Худякова*, столь плодотворно применяющего геометрические методы к проблемам Сопротивления Материалов, и проф. *Л. Д. Проскуракова*, давшего в своих курсах ясное и отчетливое освещение многих вопросов Строительной Механики и особенно развившего теорию шарнирных стержневых ферм в применении к мостовым сооружениям.

Ныне наука „Теория Сооружений“ трудами всех вышеперечисленных ученых и многих других, кои не упоминаются в нашем обзоре за его краткостью, занимает прочное место среди других инженерных наук; сочетая результаты наблюдений и опытов с выводами теории, она продолжает неуклонно развиваться и совершенствоваться, углубляя и в тоже время упрощая свои методы и давая посильное решение проблемы, перед ней стоящей: *изучить упругие явления, происходящие в твердых телах при действии на них внешних сил, и выработать на основании этого изучения наиболее рациональные методы расчета сооружений.*

К изложению главных основ этой науки мы и перейдем, не претендуя в настоящем издании на исчерпывающее изложение столь обширной темы и намереваясь лишь указать *вкратце* те методы и соображения, которые приводят к современным приемам расчета инженерных сооружений.

ГЛАВА I.

Общие положения.

§ 1. Материя.

Так как упругие явления развиваются в той *материи*, которая образует все тела природы, то нам надо прежде всего знать, каково *строение* этой материи.

Первый вопрос, который возникает при изучении строения материи, есть вопрос о том, состоит ли она из *отдельных*, достаточно отдаленных друг-от-друга *частичек*, или она *непрерывно* заполняет ту геометрическую *форму*, в которой она заключена. В зависимости от того или иного решения этого вопроса находятся и *приемы исследования* общих и в частности упругих свойств материи, и *формулировка самых законов*, характеризующих эти свойства. Таким образом, приступая к изучению упругих явлений, необходимо выяснить себе строение той материи, в которой эти явления развиваются.

Древние философы Греции первые пытались разрешить эту проблему, при чем их этот вопрос интересовал с точки зрения общих законов мироздания, и среди этих философов мы имеем как убежденных сторонников гипотезы *непрерывности материи*: *Анаксагора* (500—428 гг. до Р. Х.) и *Аристотеля* (384—322 гг. до Р. Х.), так и талантливых провозвестников современной *атомистической теории*: *Демокрита* (460—370 гг. до Р. Х.) и позднее *Эпикура* (347—271 гг. до Р. Х.). В сущности и *Анаксагор* с *Аристотелем* исходили из гипотезы *дробления* вещества на отдельные частицы и первые провозгласили идею сохранения вещества и даже частично и идею сохранения энергии, так что и их работы являются ценными провозвестниками начал современной физики, но их частички *непрерывно* прилегают друг к другу, и дробление тела на такие частицы, по их учению, можно совершать *беспредельно* (косвенно и это положение напоминает современное учение о строении твердого кристаллического вещества). *Демокрит* же первый провозгласил, что: „*ничего не существует, кроме атомов и пустого пространства; их сочетание составляет мир*“. Он же развил еще более, и притом глубже, чем *Анаксагор*, и идею сохранения вещества в природе. Конечно, обе школы основывали свои соображения на *умозрительных посылах*, и здесь нелишне привести для уяснения тех путей, которыми идет наука в эти первые периоды ее развития, те наивные мотивы, которыми они оправдывали свое учение, и которые позднее, в книге *Тита Лукреция Кара* (95—55 гг. до Р. Х.) „О природе вещей“ (*De rerum natura*) нашли и свое поэтическое изложение.

Демокрит и его ученики указывали на невозможность какого-либо движения в природе при непрерывности материи, ибо, по их мнению, в этом случае ни один предмет не уступил бы своего места другому:

Quapropter locus est intactus, inane vacansque;
Quod si non esset, nulla ratione moveri
Res possent; namque, officium quod corporis exstat
Officere atque obstare, id in omni tempore adesset
Omnibus; haud igitur quicquam procedere posset,
Principium quoniam cedendi nulla daret res.

Lucretius — De rerum natura, p. 335

Но и Анаксагор с его школой не уступали, и в виде возражения, указывали на движение рыб в воде говоря:

Cedere squamigeris latices nitentibus aiunt
Et liquidas aperire vias, quia post loca pisces
Linqunt, quo possint cedentes confluere undae...

Ibid. 373.

Эта экскурсия в область древних веков важна для нас потому, что она указывает, сколь проникновенно древние мыслители чисто интуитивно подходили к сокровенным тайнам природы.

И в настоящее время обе гипотезы подлежат нашему изучению, ибо современная физика устанавливает, как незыблемую истину, гипотезу *атомистическую*, а чистая и прикладная *механика* пользуются в своих исследованиях, как *рабочей гипотезой*, гипотезой *непрерывности материи*. Причина того, что механика опирается на гипотезу непрерывности, заключается в том, что представление о *непрерывности* и бесконечной делимости материи, как представление *геометрическое*, сводит наши исследования к анализу бесконечно малых элементов материи и позволяет пользоваться всем богатым аппаратом современной Высшей Математики, и прежде всего Анализом бесконечно малых, а *атомистическая гипотеза*, придавая *индивидуальность* отдельным частичкам, заставляет прибегать к методам *арифметическим*, к изучению комбинаций *отдельных* единиц, каковая тема, частично затрагиваемая в *Теории Чисел* и в *Теории Вероятностей*, требует использования особых наук — *Молекулярной Физики* и *Статистической Механики* для изучения взаимодействия этих единиц. Последняя наука, сложная и ныне мало еще разработанная, потому носит название „*Статистической*“, что применяет методы, аналогичные методам научной Статистики, которая тоже изучает взаимоотношение и взаимодействие отдельных индивидуальных единиц, составляющих человеческое общество.

И вот современная Механика, а также и излагаемая нами Теория Сооружений, при своих исследованиях *условно* применяют гипотезу непрерывности, почему эта гипотеза и называется „*рабочей*“, т.-е. *удобной для работы с ней*, ибо хотя она и неполно охватывает явление, но с *вполне достаточной точностью* его характеризует.

Для того, чтобы установить степень применимости и точности гипотезы непрерывности, нам надо прежде представить себе, хотя бы в самых общих чертах, сущность атомистической теории в современном ее состоянии.

Из исследователей ближайших к нам столетий, первым лицом, сравнительно детально разработавшим идею атомистического строения тел, был *Бескович* из Рагузы, славянин (1711 — 1787 гг.).

По определению *Босковича* каждый атом есть неделимая частица материи, имеющая определенное положение в пространстве, способная к движению, т.-е. обладающая инерцией, и обладающая определенной массой, как бы сосредоточенной в центре частички. Каждые два атома притягиваются друг к другу по закону тяготения. При этом *Боскович* полагал, что при малых расстояниях между атомами (менее 0,025 мм), частички отчасти отталкиваются, отчасти притягиваются, а при больших расстояниях только притягиваются. Бесконечным возрастанием сил отталкивания при сближении частиц *Боскович* объяснял невозможность слияния двух частей в одну. Расположение же атомов в данном объеме, который кажется исследователю совершенно заполненным материей, *Боскович* сравнивал с расположением войск на некоторой территории, обеспечивающим неприкосновенность территории от войск неприятеля, ибо на всякий удар извне войны-атомы отвечают контр-ударом.

Конечно, и теория *Босковича* также еще является чисто умозрительной и имеет в себе много слабых сторон и наивных положений.

Накопец в XIX веке *Дальтон* (1766—1844 гг.) дал окончательную формулировку идее атомистического строения тел.

Не излагая излишне подробно дальнейших перипетий, через которые прошел этот вопрос, дадим краткое описание современных воззрений на предмет.

Все тела природы состоят из сочетания неделимых элементов-атомов. Сам атом, в сущности, есть пустота, в которой расположены взаимно уравновешенные электрические заряды двух знаков — ничтожное по размерам положительное электрическое ядро — *протон* и быстро вращающиеся вокруг него по особым орбитам, столь же ничтожные по размерам, отрицательные электрические заряды — *электроны*. Каждый электрон по размерам представляет лишь $1:10^{10}$ всего объема атома. Если ядро и его электроны *электрически уравновешены*, то атом *электрически нейтрализован*, если же от уравновешенного атома один или несколько электронов (отрицательных зарядов) *отделились*, атом оказывается *наэлектризованным* — становится *ионом*. Так как электроны находятся в постоянном движении, то можно сказать, что каждый атом ведет себя, как коробка, или *целлюлька* (cellule), в которой спрятан волчок. Любопытно, что движение электронов *необходимо*, ибо иначе притяжение разноименных электричеств уничтожило бы, *убило* материю.

Вот как идеи *Босковича*, высказанные в 1750 году, претворяются в достижения 1924 года.

В дальнейшем мы не будем уже интересоваться внутренним устройством атома, отметим лишь в заключение, что современные физики и интересующие нас упругие явления объясняют электрическим строением материи. По современной теории всякий кристалл состоит из ионизованных атомов, а кристалл, как мы знаем из Химии, и есть характерный представитель упругого твердого тела. При этом силы притяжения между соседними частицами суть силы взаимодействия между ионами, а силы отталкивания — силы взаимодействия между электронными орбитами.

В виде курьеза можно еще раз добавить, что еще в XVII веке один английский физик, *Вильям Питти*, пытаясь объяснить строение материи, предположил, что материя складывается из сочетания двух элементов — „мужского“ и „женского“ — взаимно переплетающихся и так действующих друг-на-друга, что одноименные элементы отталкиваются, а разноименные — притягиваются. Нельзя не отметить, что так именно и ведут себя электрические заряды.

Возьмем теперь два соседних атома (см. рис. 1) и предположим, что они непосредственно не прилегают друг к другу, что, конечно, в общем

случае и имеет место. Назовем средний размер каждого атома через a_0 , а расстояние между их центрами — через a , и выясним, как изменяется это расстояние.

Прежде всего самая величина a_0 уже достаточно точно, в настоящее время, установлена. При нормальных температуре и давлении ($t^\circ = 0^\circ \text{C}$, $p = 760$ мм ртутного столба) a_0 равно корню кубическому из *атомного объема* данного вещества, который в свою очередь равен *атомному весу* (не условному, отнесенному к водороду, а действительному, выраженному в весовых единицах), деленному на *плотность* данного тела. Для простейших тел действительные атомный вес и объем оказываются порядка 10^{-24} г или см^3 , а a_0 — порядка 10^{-8} сантиметров.

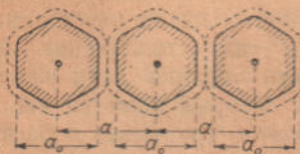


Рис. 1. Схема расположения соседних атомов.

Таким образом, мы можем по этим указаниям легко определить значение a_0 для всех тел природы по их атомным и удельным весам. Переходя теперь к величине a , отметим, что она не есть величина постоянная. Прежде всего, даже при постоянных температуре и давлении частицы тел находятся в непрерывном *равномерно беспорядочном* движении, и a есть лишь *среднее* расстояние между центрами частиц, которые в твердом теле совершают малые колебания, в жидком — более значительные, а в газообразном — весьма значительные. При изменении же температуры и давления изменяется и a , при чем при изменении температуры *все* тело стремится видоизменить свою форму, сохраняя *подобие* прежней форме, а при изменении величины давления величина a также соответственно изменяется (см. рис. 2), хотя

этому изменению междучастичные силы всегда оказывают некоторое противодействие. Характер этих изменений величины a и будет темой наших дальнейших исследований, здесь мы отметим лишь, что как при нормальных температуре и давлении, так и при изменении этих величин, *цельность* тела поддерживается теми внутренними силами притяжения и отталкивания, которые действуют между соседними и вообще близкими друг к другу частицами. Схематически для двух частиц можно себе представить *силы отталкивания* в виде двух сил, действующих между центрами частиц, а *силы притяжения* — в виде групп сил, расположенных на отдельной поверхности, отделяющей частицы друг-от-друга, или, если частицы раздвинуты друг-от-друга, на наружной поверхности частиц

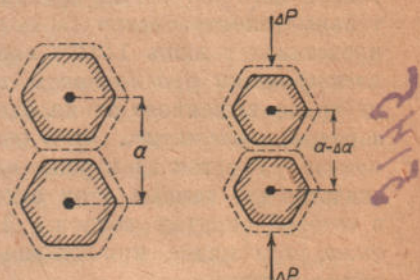


Рис. 2. Изменение величины a при увеличении внутреннего давления на величину ΔP .

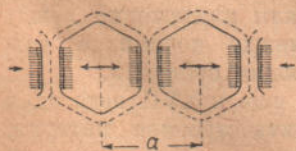


Рис. 3. Силы взаимодействия между соседними атомами.

Важно для дальнейшего запомнить, что такие силы, и весьма значительные, *имеют место* и при температуре 0°C и при $p = 760$ мм ртутного столба, и при *изменении* t и p они, как правило, лишь *изменяют* свою величину, а не появляются впервые.

В пространстве схему взаимодействия атомов хорошо представить себе в виде *четырёх* точек-атомов, образующих собой вершины *правильного тетраэдра* и соединённых между собой по *ребрам* тетраэдра жесткими пружинами (числом *шесть*), способными работать и на растяжение

и на сжатие (см. рис. 4). Это — модель упругого напряженного состояния в пространстве. В Теории Упругости мы увидим, что степень напряженности этих шести пружин нечерпывающе иллюстрирует напряженное состояние данного района упругого тела.

Особую геометрическую стройность в расположении атомов мы замечаем в твердых кристаллических телах, представляющих нормальное состояние всякого затвердевшего тела.

Кристаллы состоят из геометрического сочетания атомов, почти столь же тесно прилегающих друг к другу, как шары, сложенные в кучу, и потомудвигающихся, под влиянием температуры, весьма медленно и с ничтожными размахом.

Геометрическое расположение атомов сводится в этом случае к тому, что все атомы в кристалле располагаются в узлах некоторой, так называемой кристаллографической решетки, определяемой пятью данными (см. рис. 5а): тремя углами между плоскостями решетки (между осями координат на нашем рисунке) и постоянным отношением расстояний a_2 и a_3 к расстоянию a_1 .

Подсчет показал, что эти расстояния по существу суть те же ранее изученные нами величины a . В зависимости от изменения этих-то пяти данных и имеется шесть кристаллографических систем:

Модель напряженного состояния точки.

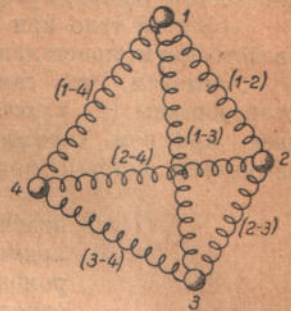


Рис. 4. Модель упругого напряженного состояния в пространстве — схема взаимодействия четырех атомов.

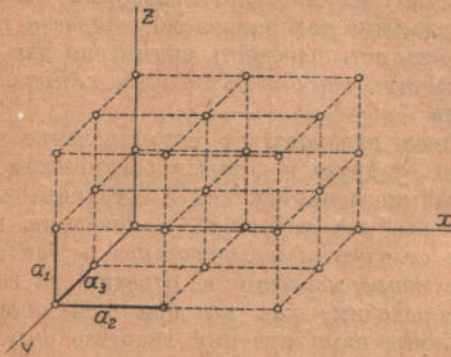


Рис. 5а. Общая схема кристаллографической решетки.

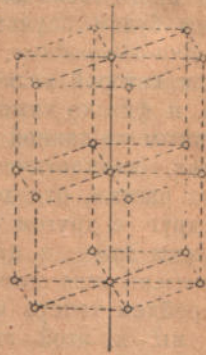


Рис. 5б. Та-же схема для шестигульной системы.

1. *Правильная*, в которой все углы прямые и оба отношения $\left(\frac{a_2}{a_1} \text{ и } \frac{a_3}{a_1}\right)$ равны единице. В этой системе кристаллизуются многие простые тела (алмаз, золото, железо).
2. *Прямоугольная*, в которой все углы прямые, $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_1}$, но не равно единице (халкопирит, касситерит).
3. *Ромбическая*, в которой все углы прямые, но $\frac{a_2}{a_1} \neq \frac{a_3}{a_1} \neq 1$ (сера, топаз).
4. *Одноклиномерная*, в которой угол между двумя горизонтальными осями не прямой и $\frac{a_2}{a_1} \neq \frac{a_3}{a_1}$ в общем случае (ортоклаз, малахит).

5. *Триклиномерная*, в которой все три угла не прямые и $\frac{a_2}{a_1} \neq \frac{a_3}{a_1} \neq 1$. (плагноклазы). Особняком стоит.

6. *Шестиугольная система*, в которой три вертикальные плоскости, образующие друг с другом углы в 120° , пересечены рядом горизонтальных плоскостей (кварц, графит, корунд, лед) (см. рис. 5b).

Каждое тело при своей кристаллизации принимает *определенную*, ему свойственную кристаллическую форму.

Заметим, что самые *формы*, которые принимают кристаллы, весьма разнообразны (22 класса). Но они все вписываются в один из этих 6 случаев, при чем характерным является число плоскостей геометрической симметрии, которые могут быть проведены в каждой системе:

в правильной	9
„ прямоугольной	5
„ ромбической	3
„ одноклиномерной	1
„ триклиномерной	0
„ шестиугольной	7

Ясно, что все эти плоскости *геометрической симметрии* суть и плоскости симметрии для всех *физико-химических* и, в частности, *упругих свойств*.

Позднее, изучая в *Теории Упругости* идеальное упругое твердое тело, мы увидим, как на упругих свойствах тел отражается наличие в их строении того или иного числа плоскостей симметрии, но в Теории Инженерных Сооружений мы будем изучать также упругие материалы, которые мы примем за *аморфно-однородные*, т. е. обладающие так называемой *шаровой изотропией*, при которой *каждая* плоскость есть плоскость симметрии для данной частицы, и физико-химические свойства *одинаковы по всем направлениям*, проведенным из данной точки тела.

Итак, атомистическая гипотеза предполагает существование индивидуальных частиц, отделенных друг от друга некоторым расстоянием и связанных друг с другом силами взаимного притяжения и отталкивания, *действующими даже и при нормальных температуре и давлении и лишь изменяющими свое значение при изменении температуры и давления*.

Перейдем теперь к гипотезе *непрерывности* и ответим на вопросы: *почему мы к этой гипотезе переходим, как мы при ней оперируем, и в какой степени точны получаемые нами при этой гипотезе результаты*.

Мы переходим к гипотезе непрерывности, во-первых *потому*, что операции с непрерывными функциями проще и удобнее, чем с отдельными индивидуальными единицами, а во-вторых и *потому*, что таким путем мы заменяем все возможное *разнообразие действительных строений* тел единой *эквивалентной любому строению схемой*, т. е. *обобщаем и схематизируем явление*, что является обычным и излюбленным методом всякой точной науки.

Наконец и не настолько разработана сейчас в деталях атомистическая теория, чтобы мы могли оперировать с окончательно установленными значениями a_1 , a_2 , a_3 и других постоянных, без которых теоретическое исследование взаимодействия атомов невозможно, а в среде некристаллической исключительно трудно; в *непрерывной же среде* эти величины не имеют такого значения, и характеристика материи сводится к меньшему числу подлежащих определению постоянных.

Теперь выясним, *как мы оперируем с непрерывной средой*. Прежде всего в ней мы *также* делим тело на частицы, но размеры этих частиц,

суть dx, dy, dz , т. е. дифференциалы наших текущих координат (см. рис. 6а). Две соседние частицы, взятые в разрезе, здесь уже *всегда* плотно прилегают друг к другу и так же реагируют друг на друга, как и два соседних атома; расстояние между их центрами — dx — изменяется под влиянием тех же причин, как и a ; имеются силы притяжения и силы отталкивания на поверхности соприкосновения (см. рис. 6б), но только *все* эти величины: размеры

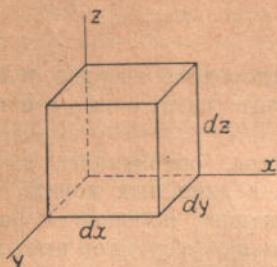


Рис. 6а. Схема частицы по гипотезе непрерывности.



Рис. 6б. Взаимодействие соседних частиц по гипотезе непрерывности.

dx, dy, dz , силы притяжения и силы отталкивания — изменяются *непрерывным* образом, для каждой частицы могут быть взяты достаточно и *произвольно* малыми (в пределе — *бесконечно* малыми), и силы в пределах каждой площадочки в виду ее малости могут считаться 1) приложенными центрально и 2) распределенными равномерно по поверхности раздела.

В чем же *разница* с атомистической гипотезой? *Только* в том, что частица *не* индивидуализирована, вырезается *произвольно* и *всегда* прилегает к соседней. Она является как-бы *моделью* атома.

Ответим теперь на последний *вопрос*: в какой степени точны получаемые результаты. Это определяется так: частицы dx, dy, dz должны быть *настолько* малы, сравнительно с генеральными размерами тела X_0, Y_0, Z_0 , чтобы мы получили возможность пользоваться Анализом бесконечно малых, и *настолько* велики сравнительно с размерами мельчайшей индивидуальной частицы a_1, a_2, a_3 , чтобы индивидуальные свойства *каждой* частицы в элементе dx, dy, dz не могли выявляться (см. рис. 7).

Если назвать через L отношение среднего измерения тела C_0

$$C_0 = \frac{X_0 + Y_0 + Z_0}{3}$$

к среднему измерению частицы a_0

$$a_0 = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3},$$

т. е. выразить C_0 в масштабе a_0 , то средним возможным размером частицы dx, dy, dz , наиболее удовлетворяющим выше формулированным условиям, следует признать такой, который в \sqrt{L} раз *менее* C_0 и в \sqrt{L} раз

более a_0 . Очевидно, что *степень точности* будет $\frac{1}{\sqrt{L}}$ в тех единицах

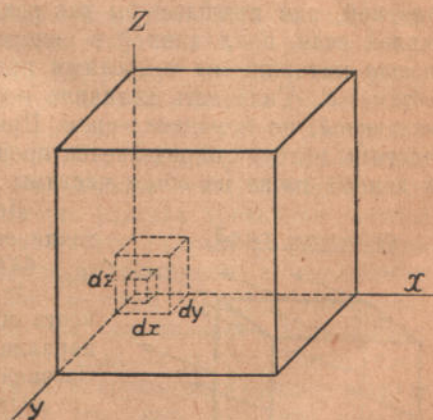


Рис. 7. Определение степени точности (наибольший куб имеет размеры X_0, Y_0, Z_0 , а наименьший — a_1, a_2, a_3).

длины, которые приняты для измерения C_0 (т. е. в масштабе C_0 , принятого за единицу).

Можно искать среднее по *объему*, а не по *линейному измерению* значение частицы dx, dy, dz и тогда, так как отношение общего объема тела к объему мельчайшей частицы есть L^3 , то средний возможный объем $dx \cdot dy \cdot dz$ будет $\sqrt[3]{L^3}$ и степень точности будет равна $\frac{1}{\sqrt[3]{L^3}}$, но обычно из осторожности принимают $\frac{1}{\sqrt[3]{L}}$.

Приведем два примера: совершенно однородное твердое тело с размерами, выраженными в сантиметрах, состоит из атомов, с поперечным размером в $3 \cdot 10^{-8}$ см.

Степень точности результатов исследования, основанного на гипотезе непрерывности, будет $1,7 \cdot 10^{-4} = 0,00017$ см в линейных мерах.

Второй пример — масса портланд-цементного порошка с размерами, выражаемыми в сантиметрах: отдельные крупинки в среднем имеют диаметр $5 \cdot 10^{-3}$ см.

Степень точности результатов по гипотезе непрерывности $7 \cdot 10^{-2} = 0,07$ см.

Можно принимать эту степень точности и как *отвлеченную*, уже по отношению ко *всем* единицам, соразмерным с генеральными размерами тела — т. е. к весу и т. д., если взять отношение этой линейной величины 0,07 см к 1 сантиметру.

Итак, мы видим, что *рабочая гипотеза непрерывности среды*, не нарушая сущности наших представлений о материи, с весьма достаточной точностью позволяет нам изучать явления, происходящие в материи.

§ 2. Сила.

Источником всякой силы является *материя*, а так как материя имеет *объемное* расположение, то и естественно, что *все силы должны быть по существу объемными*, т. е. по какому-либо закону распределяться по *объему* тела. Конечно, если бы мы пользовались в наших исследованиях атомистической теорией, нам пришлось бы как раз ввести понятие о *сосредоточенной* весьма малой силе, приложенной в центре атома, но, принимая гипотезу *непрерывности* материи, мы тем самым при изучении сил *должны* исходить из сил *объемных*. Сила есть величина *векториальная*, т. е. определяется не только *величиной*, но и *направлением*. При этом *величина* объемной силы для данной частицы материи определяется произведением *напряженности* объемной силы в данной точке на *объем* частицы.

Объемная сила.

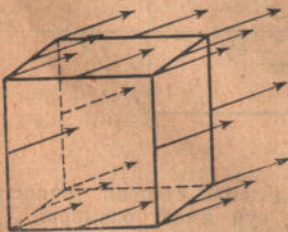


Рис. 8. Объемная сила.

Ясно, что *напряженность* силы в данной точке есть предел, к которому стремится дробь $\lim \frac{\Delta \Sigma P}{\Delta v}$, где $\Delta \Sigma P$ условно обозначает совокупность малых сосредоточенных сил, действующих параллельно друг другу в объеме Δv (см. рис 8). Обозначим эту напряженность через γ .

Очевидно что измерение этой величины γ будет: $\frac{\text{сила}}{\text{длина}^3}$, т. е. $F^1 \cdot L^{-3}$ (обыкновенно g/cm^3 или m/m^3). По умножении на объем получим элементарную силу

$$\gamma \cdot dx \cdot dy \cdot dz = \gamma \cdot dv = F^1.$$

Характерными примерами такой силы являются: сила тяжести (вес), сила магнитного притяжения, сила центробежная и т. д.

Направление этого вектора определяется тем, что в бесконечно малой единице объема все силы, образующие своей совокупностью объемную силу, могут и *должны* считаться параллельными друг другу, и этим, условно общим для сил данной группы направлением, и определяется *направление* вектора в данной точке. Разлагая это направление на три, получим $\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$, как составляющие напряженности по трем осям координат. В общем случае $\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$ суть функции от x, y, z , т.е. по существу от ω .

Повторим еще раз, что в сущности *все* силы объемны, и все дальнейшие виды сил, которые мы будем описывать, вводятся в науку лишь *условно* в виде сил, эквивалентных действительным, т.е. объемным.

В первую очередь следует разобрать *поверхностные силы* (см. рис. 9). Вместо того, чтобы рассматривать *объемные силы*, действующие в районе, прилегающем с двух сторон к некоей плоскости ab , мысленно проведенной *внутри* тела или *по границе соприкосновения* двух тел, и выражающие собой взаимодействие между верхним и нижним районами, можно *заменить их эквивалентными* им силами *поверхностными*, напряженностью которых на единицу площади, разделяющей оба района, назовем через p . Примем, что



Рис 9. Поверхностная внутренняя сила в плоскости раздела тела ab .

$$p \cdot \Delta\omega = \lim \sum \gamma \cdot \Delta v,$$

где $\Delta\omega$ есть достаточно малый элемент площади, а Δv соответственные достаточно малые элементы объема. Ясно, что

$$p = \lim \frac{\sum \gamma \cdot \Delta v}{\Delta\omega}.$$

Направление вектора p (ибо p есть также векториальная величина) определяется, как и в объемных силах, из предположения, что в достаточно малом объеме все объемные силы параллельны, а поверхностные имеют одинаковое с ними направление. Это можно формулировать и так, что объемные силы в пределе для малого объема стремятся к параллелизму, к тому же стремятся и поверхностные силы для малого элемента площади.

Поверхностная напряженность называется *напряжением* и имеет измерение $F^1 \cdot L^{-2}$ (обыкновенно $кг/см^2$). Величина же $p \cdot \Delta\omega$ имеет измерение силы $F\Gamma$. Составляющая напряжения, *нормальная* к поверхности, называется *нормальным напряжением* (n), а лежащая на поверхности—*тангенциальным* (t). Напряжения бывают *внутренние* (если плоскость раздела проведена *внутри* тела) и *поверхностные*, или *внешние* (если плоскость раздела разделяет два отдельных тела). Вторые часто не называются напряжением, а называются

поверхностной внешней нагрузкой, как бы *передающей давление* от одного тела на другое. Напр., слой земли, нагружающий прямоугольную плиту (см. рис. 10), есть *поверхностная внешняя нагрузка* на эту плиту, и на этом примере ясно, что нагрузка создана по существу *объемными силами*—весом земли— и лишь условно приводится к *поверхностной*. Ясно, что p должно быть

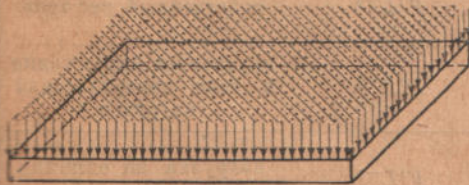
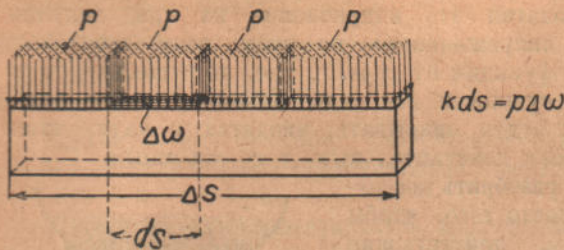


Рис. 10. Поверхностная внешняя сила (нагрузка).

разложено на p_x, p_y, p_z и что все эти три величины в общем случае могут быть функциями от x, y, z , т.е. от ω .

Еще более условно понятие о линейной или погонной нагрузке (см. рис. 11). В некоторых случаях, когда тело имеет большое протяжение и малое поперечное сечение, когда оно имеет длинное ребро — мы иногда условно заменяем



поверхностную нагрузку на единицу площади p такой же на единицу длины ребра k по формуле:

$$k \cdot \Delta s = \lim \Sigma p \cdot \Delta \omega = \lim \Sigma \gamma \cdot \Delta v,$$

где k есть напряженность поверхностной линейной нагрузки — т.е. нагрузка на единицу длины (погонная), Δs — достаточно малый

Рис. 11. Погонная или линейная нагрузка.

элемент ребра и $\Delta \omega$ и Δv — достаточно малые элементы площади и объема в районе Δs

$$k = \lim \frac{\Sigma p \cdot \Delta \omega}{\Delta s} = \lim \frac{\Sigma \gamma \cdot \Delta v}{\Delta s}$$

Измерение $k = F^1 \cdot L^{-1}$ (обычно — кг/м или т/м)

$$k \cdot \Delta s = F^1.$$

Направление вектора k определяется по прежнему, как предел, к которому стремится направление равнодействующей сил $p \cdot \Delta \omega$ или сил $\gamma \cdot \Delta v$. Можно определить k_x, k_y, k_z как функции от x, y, z или от s .

И наконец, как дальнейшее упрощение, применяется при исследованиях и понятие о сосредоточенной силе, хотя такой силы быть не может, ибо сила, сосредоточенная в одной точке, развивает под собой бесконечно большое напряжение, которого не может выдержать ни один материал. Но условно сосредоточенная сила выводится по формуле

$$P = \lim \Sigma k \cdot \Delta s = \lim \Sigma p \cdot \Delta \omega = \lim \Sigma \gamma \cdot \Delta v$$

где все обозначения прежние.

Измерение силы $P = F^1$. Направление силы P определяется по предыдущему, как предел, к которому стремится направление $\Sigma k \cdot \Delta s$ или $\Sigma p \cdot \Delta \omega$, или $\Sigma \gamma \cdot \Delta v$.

Силу эту также можно разложить на составляющие P_x, P_y, P_z .

В результате можно составить следующую таблицу:

Характер силы.	Напряженность.	Измерение напряженности.	Типичные примеры.
Объемная	$\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$	$F^1 L^{-3}$	собственный вес тела.
Поверхностная . .	p_x, p_y, p_z	$F^1 L^{-2}$	внутреннее напряжение в теле; поверхностная нагрузка.
Линейная погонная.	k_x, k_y, k_z	$F^1 L^{-1}$	нагрузка на единицу длины ребра.
Сосредоточенная .	P_x, P_y, P_z	$F^1 L^0$	отдельная внешняя сила, действующая на сооружение (условная).

Но все же фактически все силы — объемные.

Давление от колеса паровоза, катящегося по рельсу (см. рис. 12), есть объемная сила его веса, но она может быть приведена к *поверхностной* силе по *поверхности* соприкасания, *линейной* по *длине* соприкасания и наконец к *сосредоточенной* (условно) в *точке* соприкасания.

Все выше перечисленные виды сил определяются, как векторы, *шестью факторами*:

1) *Тремя* составляющими по осям координат, определяющими *величину* вектора. Ясно, что, напр., для *сосредоточенной* силы

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}.$$

В понятие *величины* входит и *знак* вектора.

Три составляющие определяют и *направление* силы

$$\cos \alpha_x = \frac{P_x}{P}; \quad \cos \alpha_y = \frac{P_y}{P}; \quad \cos \alpha_z = \frac{P_z}{P}.$$

2) *Тремя* координатами x_0, y_0, z_0 , определяющими *одну из точек* прохождения этого вектора, т. е. его *положение*. Для исследования взаимодействия сил, рассматриваемых без изучения их влияния на упругие тела, важно лишь их *положение*, а не *точка приложения*, т. е. их можно переносить по их *направлению*, не изменяя их действия.

Но при изучении *упругих* явлений важна и *точка приложения*, а не только *положение*, и тогда те-же координаты x_0, y_0, z_0 уже должны быть даны, как координаты точки приложения.

Правильнее в этом случае сказать, что *кроме* координат x, y, z одной из точек силового направления должно быть дано еще расстояние l от этой точки до точки фактического приложения силы.

В обоих случаях *три* координаты x_0, y_0, z_0 определяют *три* момента, образуемых данной силой относительно осей координат:

$$M_z = P_y \cdot x_0 - P_x \cdot y_0$$

$$M_y = P_z \cdot y_0 - P_y \cdot z_0$$

$$M_x = P_x \cdot z_0 - P_z \cdot x_0$$

Ясно, что *шесть* выше перечисленных данных определяют вектор и аналитически и графически, т. е. позволяют и *вычислить* все его элементы и *построить* его в пространстве (см. рис. 13).

При желании эту силу можно *перенести* в начало координат, и тогда она будет определяться *тремя составляющими* P_x, P_y, P_z (теми же самыми

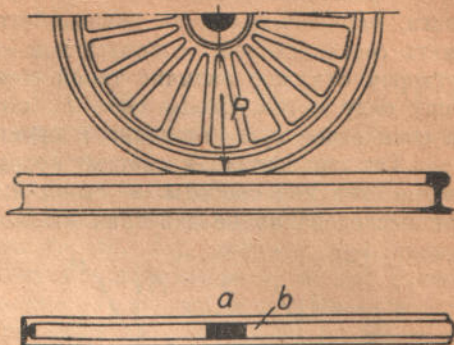


Рис. 12. Передача давления от колеса на рельс.

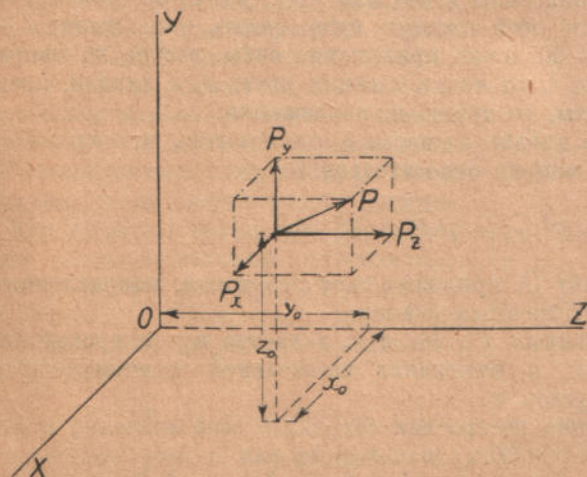


Рис. 13. Изображение силы в пространстве (y_0 есть вертикальная, а z_0 — горизонтальная координата).

по величине) и *три* пары M_x, M_y, M_z , имеющими то-же значение, как и моменты силы P относительно начала координат, и направленными своими векторами по этим осям.

Равнодействующий вектор пар в этом случае должен лежать в плоскости, перпендикулярной равнодействующему вектору сил, т.-е. не может иметь составляющей, совпадающей по направлению с равнодействующим вектором сил, ибо наличие такой составляющей не позволило бы привести нашу силу к той *единой* силе P , которая нам задана, так как указало бы на совместное существование в пространстве *силы и пары*.

Так как начало и систему координат мы выбираем произвольно (имеем *шесть степеней свободы* в своем выборе), то следовательно *всякую* силу при исследовании ее действия мы можем перенести в *произвольную* точку

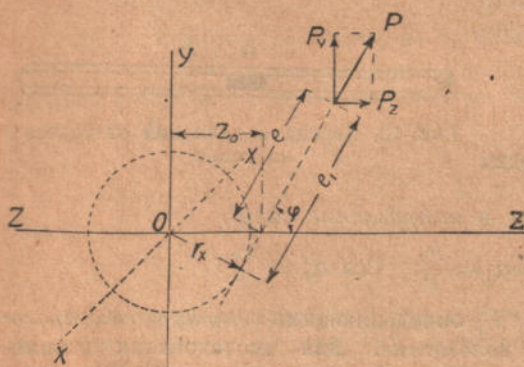


Рис. 14. Изображение силы на плоскости YZ .

и разложить эту силу и вызываемые ею пары по *произвольным* осям.

Если мы предполагаем, что все действующие силы расположены в *одной* плоскости, каковое предположение, конечно, весьма условно и на деле трудно осуществимо, но часто принимается при исследованиях, то мы можем иметь дело лишь с *линейными* нагрузками и с *сосредоточенными* силами. В этом случае вектор определяется (в плоскости YZ) *тремя* данными, а именно (см. рис. 14):

1) *двумя* составляющими P_y и P_z , определяющими и *величину* $P = \sqrt{P_y^2 + P_z^2}$ и *направление* $\text{tg } \varphi = \frac{P_y}{P_z}$.

2) *одним* плечом r_x относительно оси X , или, что то же самое, координатой z_0 или y_0 (достаточно *одной* из этих координат), определяющей точку пересечения направления силы с OZ или с OY , т.-е. ее *положение*.

Для определения *точки приложения* надо задать еще длину l — расстояние от точки z_0 , O — до точки приложения силы, взятое по направлению силы, или расстояние l_1 от точки касания круга r_x с линией, представляющей направление силы, до точки ее приложения.

Ясно, что и здесь сила вполне задается *аналитически* и *графически* этими *тремя* данными. Ее момент относительно OX

$$M_x = P \cdot r_x = \sqrt{P_z^2 + P_y^2} \cdot r_x$$

и ее можно перенести в точку O , приложив пару с вектором, направленным по OX , равную M_x с соответственным знаком.

Построение силы по данным P_y, P_z и r_x делается путем проведения из точки O круга радиуса r_x и отыскания касательной к этому кругу, наклоненной к оси OZ под углом φ .

Ясно, что все предыдущие построения сохраняют свое значение и для исследования *объемных, поверхностных и погонных* сил.

Понятие „*пары*“ в применении к нашим проблемам будет исчерпывающе разъяснено позднее, но здесь полезно запомнить, что „*пара*“ есть сочетание двух *параллельных* и *равных* друг другу сил, *противоположно* направленных: *вектор пары* есть перпендикуляр к плоскости ее действия и может быть переносим *параллельно* самому себе без изменения действия

пары, им выражаемой; знак пары положителен при вращении по солнцу и отрицателен при обратном вращении.

Итак, сила задается *шестью* величинами в пространстве и *тремя* величинами на плоскости.

§ 3. Упругая энергия.

Упругие свойства твердых тел и основные законы упругости.

Выше уже было сказано, что при определенной температуре t и определенном давлении p расстояние между двумя соседними частицами твердого тела имеет определенное характерное для данного тела значение a (при изучении непрерывной среды за такое значение можем принять расстояние между центрами двух соседних частичек dx, dy, dz), которое при *увеличении* температуры и *уменьшении* давления *увеличивается*, а при *уменьшении* температуры и *увеличении* давления — *уменьшается*. Имеется еще зависимость величины a от напряжения электрического поля, но мы этого обстоятельства касаться не будем.

Рассмотрим сначала случай, когда температура *не изменяется*, а изменяется лишь *давление*. Мы будем трактовать термин „давление“ распространительно, понимая под ним все те внешние поверхностные и внутренние объемные нагрузки, которые испытывает тело в течение всего времени его *работы* под этими нагрузками (для сооружения — в течение всего времени его *службы*).

Эти внешние и внутренние нагрузки, действуя на тело, прежде всего *изменяют* соотношение и *величину* тех первичных внутренних сил, которые обуславливают целостность тела, т. е. создают новые *дополнительные внутренние силы*, которые и оказывают на тело свое действие. Так как значения *первичных внутренних сил* мы не знаем, то мы принимаем его за условный нуль, и внутренними силами считаем те *дополнительные к первичным внутренние силы*, которые вызываются нагрузкой.

Наблюдая экспериментально и изучая действие нагрузки, а также и возникающих в теле под влиянием нагрузки внутренних сил, на все тело, как целое (см. рис. 15), мы прежде всего констатируем *изменение формы* тела, при чем надо различать два вида изменения формы: 1) *деформацию* каждой малой частички тела, ограниченной ребрами dx, dy, dz , т. е. *изменение формы именно и только этой частицы*, зависящее прежде всего от *внутренних сил* вокруг этой частицы и 2) *перемещение* каждой точки тела с начальными координатами x, y, z , взятыми относительно некоторых осей координат, *неразрывно связанных* с телом, т. е. изменение значений этих координат, обозначаемое обычно так:

$$\Delta x = u; \Delta y = v; \Delta z = w$$

и зависящее уже от совокупного действия внешних нагрузок и внутренних сил.

Совершенно очевидно, что как деформации, так и перемещения в сооружениях должны быть чрезвычайно малы сравнительно с основными *генеральными* размерами тела, так что мы имеем полное право считать, что

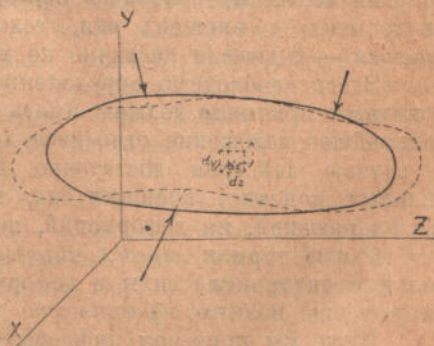


Рис 15. Деформации и перемещения нагруженного внешними силами упругого тела.

эти *генеральные* размеры во время деформации остаются неизменными, а изменяются лишь *местные* размеры. Это утверждение позволяет нам раз навсегда принять, что *взаимное расположение внешних сил во время деформации тела не меняется*.

Ясно также, что *перемещения* происходят от накопления деформаций, и потому порядок их малости на одну степень ниже сравнительно с порядком малости деформаций, т.-е. перемещения по величине значительнее деформаций.

Наконец, ясно, что перемещения u, v, w , т.-е. приращения координат x, y, z , суть функции этих координат, а поскольку внешние нагрузки изменяются во времени, должны быть в пределах нашего исследования и функциями времени (последний случай имеет место лишь при динамическом действии сил).

Длительное и всестороннее изучение упругих явлений, производившееся в течение трех последних веков, установило следующее основное положение, являющееся краеугольным камнем теории упругих явлений:

Если внешние силы, действующие на упругое твердое тело, не очень значительны, а именно таковы, что *внутренние силы* и деформации, ими вызываемые, *ни в одной точке тела* не переходят некоторых определенных границ, характерных для данного тела (пределов упругости), то работа, затраченная внешними силами на перемещение точек их приложения, *воспринимается телом в обратимой форме*, а именно в форме накопления в теле *упругой энергии*, равной по величине и противоположной по знаку работе внешних сил и способной по прекращении действия внешних сил *восстановить полностью первоначальную форму тела*, т.-е. осуществляется первый закон термодинамики о сохранении энергии в изолированной системе.

Из этого положения вытекает, как следствие, что при значениях сил, *превосходящих* выше определенные пределы, процесс *перестает быть обратимым* в полной мере, часть работы внешних сил превращается в необратимые формы энергии, в частности, в тепловую, электрическую, магнитную (осуществляется второй закон термодинамики — *происходит рассеяние и обесценение энергии*) и тело по прекращении действия сил лишь *частично восстанавливает* свою форму — поскольку часть внешней энергии все же превратилась в *упругую*; наконец, при *чрезмерном* значении внутренних и внешних сил, тело просто *распадается* на части — *разрушается* — и даже и частично не может восстановить своей формы.

Здесь необходимо определенно указать, что в сооружениях по вполне понятным причинам должны иметь место лишь *обратимые процессы*, и все дальнейшее изложение относится лишь к теории *обратимого* процесса, т.-е. к случаю действия достаточно незначительных (относительно незначительных, конечно), внешних сил, ни в одной точке тела не создающих ни напряжений, ни деформаций, переходящих за *пределы упругости*.

Самый термин "*предел упругости*", таким образом, определяет те предельные внутренние силы и деформации, которые для данного тела гарантируют еще полную *обратимость* процесса.

Ниже мы приведем цифровые данные, характеризующие эти пределы для ряда материалов.

Следует лишь отметить, что к сожалению, тщательные научные исследования упругих явлений заставляют признать, что *идеально-упругих тел в природе нет*, и что вообще *всякий процесс в природе частично необратим* (одна из формулировок второго начала термодинамики), чем и объясняется так называемая "*усталость*" металла в мостах и другие аналогичные явления, связанные с постепенной потерей телом его упругих свойств. Однако *отступления* от идеально упругих свойств для ряда тел

в пределах малых сил столь ничтожны, что мы их игнорируем и в дальнейшем будем всегда рассматривать сооружения, как составленные из идеально упругих тел, обеспечивающих полную обратимость всех процессов в пределах нормальных условий их работы.

Из предыдущего изложения можно вывести одно характерное определение для упругого тела, данное Клапейроном и позднее лордом Кельвином:

Идеально-упругое твердое тело всегда имеет форму, зависящую лишь от тех нагрузок, которые в данный момент действуют на тело, но не зависящую от того, как нагрузки росли от нуля, т.е. каковы были нагрузки в предшествовавшие моменты времени, если, конечно, эти предшествовавшие нагрузки никогда не переходили предела упругости— иначе говоря, на теле не остается никакого следа его предыдущих состояний, как бы разнообразны и далеки от данного состояния они ни были, даже если нагрузки предыдущих состояний превышали конечные нагрузки, не переходя за пределы упругости. Для идеально-упругого монолитного моста это означает, что и миллионный проходящий по нему поезд на ту же величину должен прогнуть его, как и первый пропущенный поезд. На деле это немного не так — все процессы частично необратимы, металл перерождается и перекристаллизовывается, мост не монолитен, узловые соединения расшатываются — и прогиб под поездом с годами растет; но приблизительно это должно быть так, и формально мы должны требовать, чтобы мост мог пропустить один-два миллиона поездов и не изменять при этом ни в чем своих упругих свойств, одинаково реагировал на каждый новый поезд— это ведь и значит, что процесс должен быть обратимым.

Цифра миллион получается, если принять, что мост однопутный и пропускает 20 пар поездов в день; это дает 15 тысяч поездов в год и миллион поездов за 70 лет службы моста — но двухпутные мосты пропускают иногда у больших станций и гораздо большее число поездов в день. Нельзя не отметить, что паровозная и вагонная оси подвергаются еще большему числу нагрузок, ибо совершают до четырехсот миллионов оборотов за время своей службы, а ось паровой турбины— до 15 миллиардов оборотов. Эта способность сооружения постоянно восстанавливать свою форму, с течением времени им утрачиваемая, позволяет сравнить работу сооружения с работой живой организм, который также в период полноты своих сил восстанавливает эти силы после каждой работы, а к старости уже теряет эту способность, и даже обычная старческая болезнь — склероз тканей — очень напоминает перерождение и перекристаллизацию „усталого“ металла (см. курсы лабораторных исследований материалов).

Такова качественная характеристика идеально-упругого процесса, — перейдем к его количественной оценке.

В 1678 году Роберт Гук (Robert Hooke) в своей статье „De potentia restitutiva“, высказал положение, ставшее основным законом Теории Упругости и Теории Сооружений, что деформация тела в упругих пределах пропорциональна силам, ее вызывающим (см. рис. 16), т.е. применяя наши прежние обозначения

$$\frac{\Delta a}{\Delta P} = \text{Constans.}$$

Он выразил это положение в латинской фразе: ut tensio, sic vis. Почти одновременно, в 1680 г. аналогичную мысль высказал Мариотт. Сама постоянная (constans) различна для разных тел природы.

Множество экспериментальных исследований, произведенных с 1678 г. до сего дня, приводит к заключению, что для тел природы закон этот не совсем правилен, и как общее правило Δa растет быстрее ΔP , но в то же

время отклонения эти столь незначительны, что, как *рабочая гипотеза*, закон Гука должен быть принят для большинства тел природы в пределах их упругих свойств.

В то же время *теоретические исследования* показывают, что для *идеально упругих тел* закон Гука должен рассматриваться, как закон природы, что подтверждается, например, свойством упругих тел совершать строго *изохронные колебания* (Стокс).

В результате, как ни рассматривать закон Гука, — считать ли его законом природы, или рабочей гипотезой (см. рис. 17). — он существенно *упрощает* все наши расчеты и соображения и в то же время для ряда металлов, со вполне достаточной точностью совпадает с данными опыта. В дальнейшем мы *положим закон Гука в основу* всех наших рассуждений, отметив здесь, что он говорит о пропорциональности деформаций действующим силам, что же касается пропорциональности этим силам *перемещений*, то хотя, как общее правило, это также имеет место, однако все же это есть вопрос особый, требующий *специального* изучения, которое будет дано ниже.

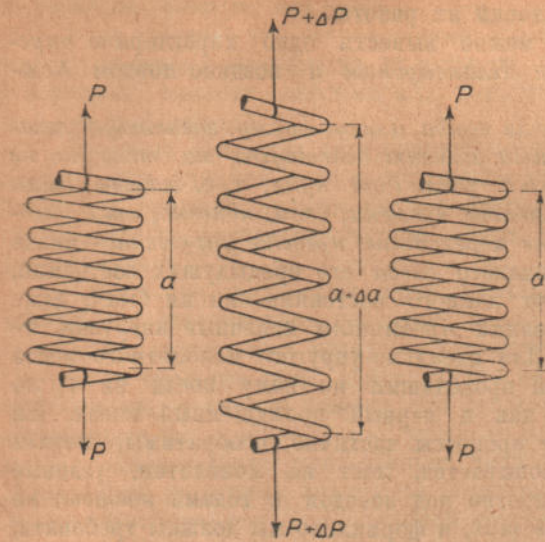


Рис. 16. Закон Гука в применении к деформациям пружины (опыты Гука производились над пружинами).

Было бы неосторожно проводить какие-либо аналогии, не достаточно обоснованные, но нельзя не отметить, что закон Гука выражает то же стремление твердого тела сохранить постоянство в своих главных характеристиках, которое для газов выражается законом Бойля-Мариотта-Гей-Люссака,

$$\frac{pv}{T} = \text{Constans.}$$

Конечно, в твердом теле объем уменьшается *не пропорционально* росту сжимающей силы, но все же при сжатии объем *уменьшается*, и при повышении температуры *увеличивается* аналогично газовому уравнению. Можно найти некоторую аналогию даже с основными законами Ньютона, если только говорить об изменении формы.

Как первый закон Ньютона говорит о консервативности покоя или прямолинейного равномерного движения, так и сущность упругих явлений можно формулировать, как консервативность *формы*, изменяющейся лишь под действием сил (первый закон гласит: *Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus a viribus impressis cogitur statum suum mutare*).

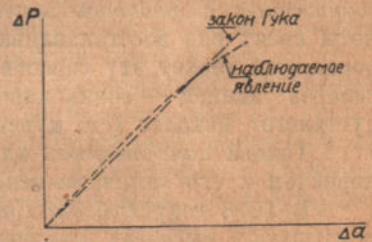


Рис. 17. Отклонения от закона Гука.

И как второй закон устанавливает пропорциональность *изменения движения* величине приложенной силы, так и закон Гука устанавливает аналогичную пропорциональность для *изменения формы* (второй закон гласит: *Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressae et fieri secundum lineam rectam, qua vis illa imprimitur*).

И наконец третий закон равенства действия и противодействия целиком применим к упругим явлениям (*Actioni semper aequalem et contrariam esse reactionem, sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse aequales et in partes contrarias dirigi*).

Не следует придавать значения таким аналогиям, но нам было полезно вспомнить основные законы Ньютона, частично применимые и для упругих явлений.

Отметим еще одну особую формулировку закона Гука. Если он верен, то верно положение о *независимости действия на тело отдельных сил*. Это даже не требует доказательств, ибо ясно, что напр., *порядок* появления сил, *закон их возрастания* от нуля, *цельность* или *дробность* их, и т. д., на результат их действия не влияют.

Закон *независимости действия сил* следует выводить из закона Гука так:

Если сила, состоящая из n силовых единиц, вызвала деформацию, равную $n \cdot \Delta$, то каждая силовая единица вызвала деформацию Δ . Ясно, что мы можем разбить наши n силовых единиц на несколько отдельных групп, например, так:

- (1-ая группа) — 2 силовых единицы
- (2-ая ") — 7 " "
- (3-ая ") — 5 " "
- (4-ая ") — $(n - 14)$ сил единиц,

и ясно, что первая группа вызовет деформацию 2Δ , вторая — 7Δ , третья — 5Δ и четвертая $(n - 14) \cdot \Delta$. И уже конечно все равно, в каком порядке проявлялось действие этих сил. *Одна третья группа вызовет 5Δ независимо от одной первой группы, вызывающей 2Δ и т. д.* Это и есть сущность идеи о *независимости действия сил*, которая, как мы увидим ниже, имеет большие приложения в нашей теории, но по отношению к *перемещениям* нуждается иногда в некоторых *ограничениях* (см. главу об устойчивости деформаций).

Остается еще сказать о действии *температуры* (см. рис. 18).

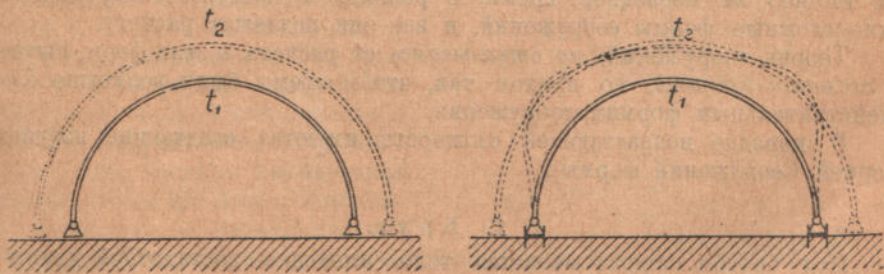


Рис. 18. Действие температуры на упругое тело; левая конструкция не препятствует расширению, а правая препятствует: не допускает расхождения опор.

Как общее правило, изменение температуры, равномерное для всего тела, стремится превратить данное однородное тело в другое, *подобное* прежнему. Если устройство сооружения не оказывает этому препятствия, то изменение формы *происходит*, и никаких новых дополнительных вну-

тренних сил *не развивается*. Но если устройство сооружения оказывает этому препятствие, то тело принуждено принять форму, *не подобную прежней*, величины *a* оказываются, следовательно, *не соответствующими* данной температуре, и в теле неизбежно развиваются внутренние силы такой величины, чтобы своим действием создать обстановку, *соответствующую* вынужденному значению *a*. Ниже будет дано подробное пояснение этого явления.

Заканчивая главу об упругих явлениях, отметим, что таким образом эти явления суть *частный случай превращения механической энергии в упругую, причем обратное выявление упругой энергии осуществляется* по прекращении действия нагрузки в процессе восстановления формы деформированного действовавшей нагрузкой тела.

§ 4. Методы исследования сооружений.

Из предыдущего изложения совершенно ясно, какие задачи стоят перед нами при исследовании сооружений.

Нам необходимо выяснить, *какие внутренние силы вызываются* в заданном всеми своими размерами сооружении *различными* возможными *нагрузками*, каким *деформациям* подвергаются при этом отдельные *частицы* сооружения, каковы оказываются *перемещения* отдельных точек всего сооружения и — в конечном результате — какова *предельная возможная* для данного сооружения *нагрузка*, и каковы общие перспективы *работы* сооружения. Желательно уметь решать и обратную задачу: *по данной нагрузке* найти безопасные и экономичные *размеры* сооружения во всех его частях.

Таковы основные проблемы Теории Сооружений. Главная трудность, которая при этом возникает, есть *сложность формы* сооружений. Если создавать сооружение независимо от требований теории и не подгонять его под удобные для расчета формы, то сооружение может принять исключительно сложные очертания.

Представим себе для примера такое сооружение: монолитный железобетонный храм и притом еще не вполне симметричный, лишь с одной продольной плоскостью симметрии. Купол опирается на барабан, барабан — на полушаровой свод, свод — на паруса, паруса — на арки, арки — на колонны и пилястры, а все это — на фундамент, и вдобавок никаких металлических связей или затяжек внутри здания не допускается. При расчете такого сооружения приходится иметь дело с исключительно сложными формами. А между тем именно за последнее время, с развитием железобетона, появились такие сложные формы сооружений, и все они подлежат расчету.

Теория сооружений, *не отказываясь* от расчета и этих форм, пытается их *схематизировать*, но притом так, чтобы схемы были возможно *ближе* к действительным формам сооружения.

В порядке возрастающей сложности имеются следующие изучаемые Теорией Сооружений формы:

1. Б р у с.

Под брусом подразумевается тело, имеющее достаточной длины *ось* и незначительное сравнительно с длиной этой *оси* *поперечное сечение* (см. рис. 19).

Определение это в достаточной степени условно и, как мы увидим ниже, применяется весьма распространительно.

Относительно *оси* установим, что она есть *геометрическое место центров тяжести последовательных поперечных сечений* и может быть прямой, плоской кривой или кривой двойкой кривизны. Она может состоять (см. рис. 20) из *отдельных участков* различной кривизны, *жестко соеди-*

ненных между собой и притом или *плавно*, (т.-е. с общей касательной в месте соединения) или *под углом* (т.-е. с определенным неизменным углом между граничными касательными).

Относительно же *поперечных сечений* установим, что под ними подразумевается сечения бруса, перпендикулярные и его оси. Они могут *изменяться* по длине бруса по какому угодно закону.

При изучении всякого бруса принимается обыкновенно *гипотеза* (также *рабочая* по выше данному определению), что *плоские поперечные сечения бруса при всяком изменении формы его оси остаются плоскими и перпендикулярными к оси в ее новом положении* (т.-е. все точки какого-либо попе-

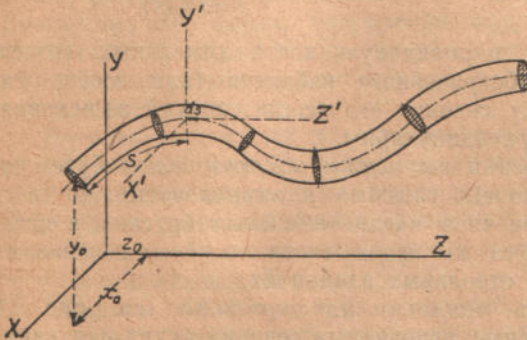


Рис. 19. Брус в пространстве.

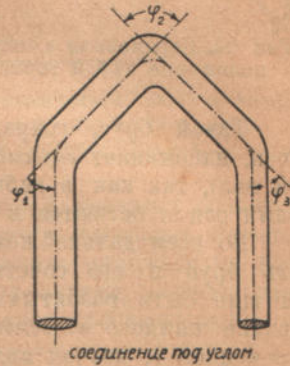


Рис. 20. Соединение между собой отдельных участков бруса.

речного сечения *остаются* и после деформации в плоскости, перпендикулярной касательной к оси бруса, т.-е. в плоскости, определяемой *главной нормалью и бинормалью*).

Таким образом, поперечные сечения принимаются как бы за бесконечно жесткие, не имеющие толщины пластинки, жестко соединенные с осью и механически следующие за ее искривлениями (см. рис. 21). Гипотеза эта не вполне верна, ибо на деле сечения: 1) немного искривляются и 2) немного отклоняются от перпендикулярности к оси при изменениях ее формы — однако эти отступления столь *незначительны*, что ими *целесообразно пренебречь*. Гипотеза эта, впервые высказанная Бернулли, носит его имя. Принятие этой гипотезы с математической точки зрения имеет то громадное значение, что, приняв ее, мы *интересуемся при изучении действия каких либо сил, лишь изменением формы оси бруса*, ибо все остальные точки бруса, на оси не находящиеся, перемещаются в соответствии с перемещениями оси, и следовательно, перемещение *всех* точек есть функция лишь *одной* независимой переменной ds — элемента длины бруса.

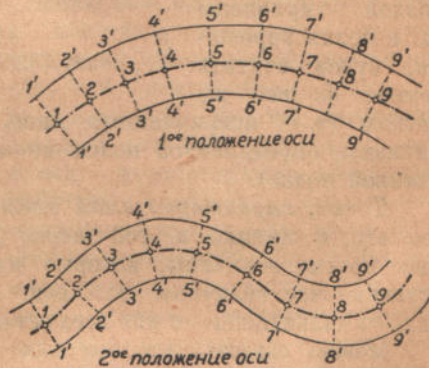


Рис. 21. Изменение положений поперечных сечений бруса при деформациях его оси.

Эта переменная определяется так (см. рис. 22): мы задаемся какой-нибудь начальной точкой оси, определяя ее координатами x_0, y_0, z_0 , и далее принимаем за аргумент (независимую переменную) длину оси s , измеряемую от этой точки (как бы путем прижатия к оси неизменяемого гибкого масштаба). Ясно, что какому-нибудь определенному значению s соответствует лишь одна определенная точка оси с вполне определенными координатами, и это положение справедливо и для плоской, и для двойко искривленной оси, т. е.

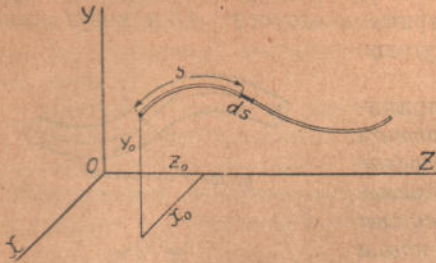


Рис. 22. Переменная s , определяющая положение любой точки оси бруса.

Ясно, что какому-нибудь определенному значению s соответствует лишь одна определенная точка оси с вполне определенными координатами, и это положение справедливо и для плоской, и для двойко искривленной оси, т. е.

$$\begin{aligned} x &= f_1(s) \\ y &= f_2(s) \\ z &= f_3(s). \end{aligned}$$

Такой брус, сохраняющий перпендикулярность отдельных сечений к оси, напоминает гибкий вал зубо-врачебного кабинета (или вообще гибкий вал), так как в гибком валу сечения его всегда следуют за искривлениями оси и остаются к ней перпендикулярными.

Во всем дальнейшем изложении мы почти исключительно будем изучать брус и его сочетания, иногда сложные и замысловатые, но всегда могущие быть разбитыми на конечное число отдельных брусков, а исследование каждого отдельного бруса мы будем вести по одной независимой переменной s , изучая явления в отдельных элементах.

Эти элементы могут быть прямыми или кривыми (см. рис. 23), в зависимости от чего их граничные поперечные сечения будут или параллельны друг другу или наклонены друг к другу на угол $d\varphi$.

Эти — то элементки и будут объектом нашего самого серьезного внимания; при этом для случая бруса двойкой кривизны мы, в целях упрощения, будем считать элемент ds все же

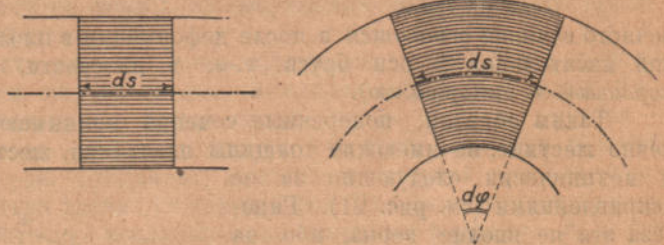


Рис. 23. Прямые и кривые элементы оси бруса.

плоским (т. е. искривленным лишь в так называемой плоскости главной кривизны, определяемой положением главной нормали и касательной к оси в данной точке).

Точка, характеризующая элементом ds , конечно, находится на середине его, и именно к этой точке будет отнесено и значение аргумента s и все другие величины, которые мы будем определять, а определив интересующие нас величины для оси, мы сможем найти таковые, как будет видно из дальнейшего, и для всех остальных точек нашего поперечного сечения.

Можно сказать, что мы как бы вводим особую систему координат: s, x', y' , где s определено выше, а x' и y' суть вторая и третья координаты, задаваемые обязательно в плоскости $X' Y'$, перпендикулярной данной точке оси. Такая система координат вполне возможна и законна (можно, например, указать на тороидальную систему координат) при условии предварительного задания очертания оси в пространстве.

Остается лишь отметить, что исключительная разработанность теории бруса приводит к тому, что во-первых, многие сооружения, трудно

подводимые под понятие системы брусьев, пытаются подводить под это понятие, иногда даже *слишком отдаляясь* при такой схематизации *от действительных форм* сооружения, например, полусферовой кирпичный или железобетонный купол рассматривают, как каркас, состоящий из меридиональных и кольцевых горизонтальных брусьев (см. рис. 24), а *во-вторых*, при проектировании сооружений проектируют их так, чтобы их можно было без натяжки *подвести под систему брусьев*.

С обоими этими тенденциями надо решительно бороться: с первой — потому что современная Теория Сооружений *не боится* сложных форм и *знает* приемы их расчета, а со второй — потому что формы сооружения должны быть продиктованы соображениями целесообразности, а не страхом перед сложным расчетом.

Но следует в то же время констатировать, что фактически большинство сооружений отчасти даже по свойствам самого материала (бревна, брусья, доски в деревянных конструкциях; некоторые специальные прокатные формы в металлических), отчасти по характеру заданий, *целесообразно проектировать, как систему брусьев*, и тогда такому проектированию не может быть препятствий.

Сложнее обстоит дело в каменных, железобетонных и в некоторых металлических (корпус судна) сооружениях — там с одними брусьями обойтись нецелесообразно, и возникает необходимость применить, а следовательно и изучить, другие более сложные формы. Такой формой, следующей за брусом по сложности, является также еще условная форма:

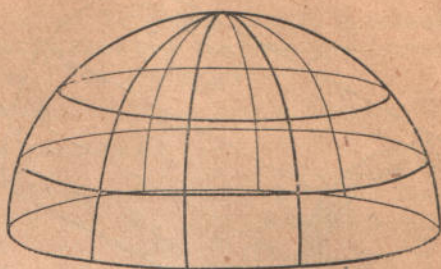


Рис. 24. Схематическое изображение сплошного полусферового купола в виде системы брусьев.

2. Пластинка.

Пластинка есть тело, образуемое приданием различным сложным геометрическим поверхностям не очень значительной толщины (таковы: оболочки, скорлупки, и в частности на плоскости — листы) (см. рис. 25). Как в брусее мы принимаем за бесконечно жесткую пластинку *поперечное сечение*,

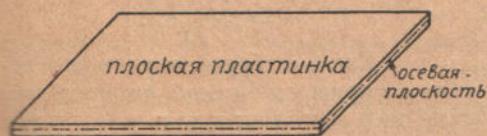


Рис. 25. Плоские и пространственные пластинки.

заставляя его автоматически следовать за изменениями оси, так в пластинке мы за бесконечно жесткий стержень принимаем *толщину*, устанавливая следующую рабочую гипотезу: *Все точки, находящиеся, при начальном положении образующей или „срединной“ поверхности пластинки, на прямой линии, перпендикулярной к этой поверхности в какой-либо ее точке, остаются на прямой, перпендикулярной к поверхности пластинки в той же точке, и при ее новом положении* (см. рис. 26).

Заметим, что какова бы ни была поверхность, к каждой ее точке можно восставить лишь один

перпендикуляр. *Срединная поверхность* есть образующая форма, которой придана та или иная толщина. Как в бруске такое ограничение приводило к одной независимой переменной ds , так и в пластинке принятая гипотеза

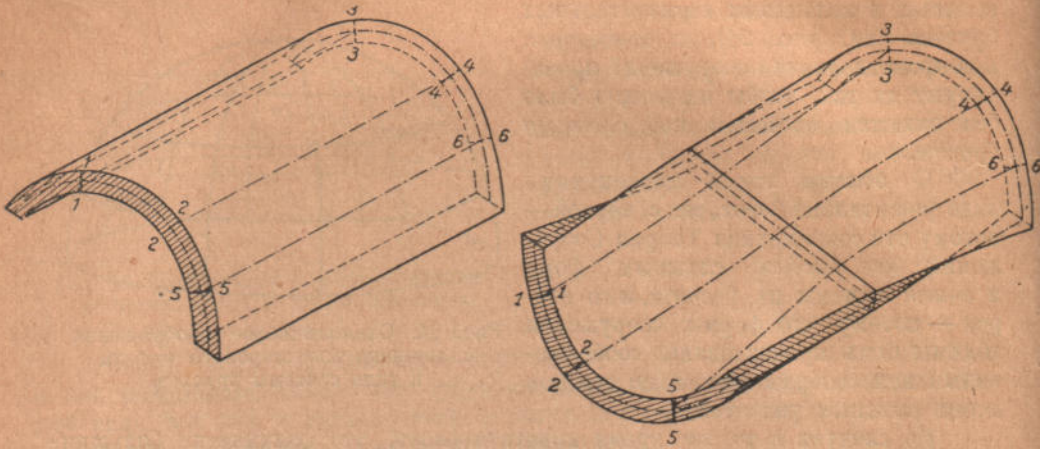


Рис. 26. Пластинка до и после деформации.

ограничивает исследование двумя независимыми переменными — ds_x и ds_y (если OZ направлена перпендикулярно к поверхности пластинки), ибо, (см. рис 27) задав какую-либо начальную точку на поверхности тремя

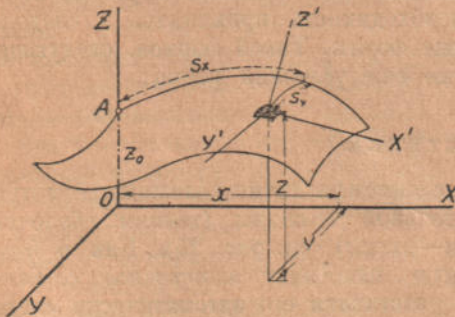


Рис. 27. Независимые переменные пластинки.

координатами (напр., o, o, z_0 — точка A), мы можем от этой точки дойти до любой искомой посредством двух величин: длины s_x , получаемой измерением кривой, приходящейся в разрезе поверхности плоскостью ZOX и длины s_y , получаемой в разрезе поверхности плоскостью, параллельной ZOY и проходящей через рассматриваемую точку x, y, z , т.е.

$$\begin{aligned} x &= f_1(s_x, s_y) \\ y &= f_2(s_x, s_y) \\ z &= f_3(s_x, s_y). \end{aligned}$$

Как и в бруске, изучив изменения формы *срединной поверхности* пластинки, мы сможем найти все нужные нам величины и для любой точки толщинного стерженька. И здесь мы имеем своеобразную систему трех координат: s_x, s_y, z' , где s_x и s_y описаны выше, а z' берется всегда перпендикулярно к поверхности пластинки в данной точке. Такая система координат также вполне законна и возможна, если форма поверхности задана наперед (в сущности это будет как бы пространство двух измерений, как брус есть пространство одного измерения).

Теория пластинок имеет широкое применение в металлическом кораблестроении, в некоторых видах машиностроения, при возведении тонких куполов и частично в металлических (листы) и железобетонных (плиты и тонкие стенки) гражданских конструкциях. Заметим все же, что теория бруса имеет исключительно обширное применение, сравнительно с теорией пластинок.

Отметим еще раз, что иногда, чтобы не прибегать к пользованию теорией пластинок, пластинку заменяют перекрещивающимися брусками; например, тонкий купол, как было указано выше, или просто тонкую плиту заменяют системой перекрещивающихся стержней — это можно делать, но не всегда, и лишь с большой осторожностью.

Если ни брус, ни пластинка не выражают собою хорошо истинной схемы всего сооружения в целом или какой-либо его детали — приходится прибегать к высшей геометрической форме. Таковой будет:

3. Тело трех измерений.

Классическим (и очень сложным) для расчета примером такого тела будет весомый шар, лежащий на столе (см. рис. 28). Его неизбежно рассматривать в *трех* измерениях. *Три* переменными будут dx , dy , dz . Точка задается *тремя* координатами x , y , z , или какими-либо другими *тремя* координатами в другой системе координат.

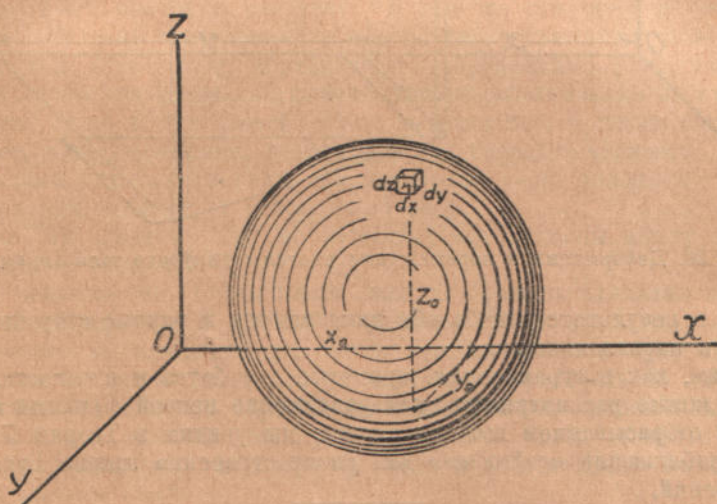


Рис. 28. Тело трех измерений.

Это есть самый общий подход к делу. Задача оказывается весьма сложной и изучается в *Теории Упругости*. Это наука, являющаяся отделом математической физики и освещающая целый ряд важнейших проблем естествознания, занимается частично и брусками и пластинками, но ее общие выводы, прежде всего, принадлежат телам 3-х измерений. В плане нашего издания Теории Упругости будет посвящена *отдельная книга*, хотя некоторыми положениями Теории Упругости мы будем пользоваться в течение всего курса.

Здесь отметим лишь, что и Теория Упругости допускает некоторое и весьма серьезное геометрическое упрощение в своих исследованиях, а именно она принимает, что каждый элемент тела Δx , Δy , Δz , перемещаясь из точки x , y , z в новую точку $x+v$, $y+w$, $z+w$, деформируется, но с сохранением параллелизма своих граней и ребер (плоско параллельная деформация), т.е. превращается в *косугольный параллелепипед*, а не в *неправильный шестиугольник* с непараллельными противоположными гранями и ребрами (см. рис. 29). Это положение в сущности должно рассматриваться, как *приближение*, достаточно точное для бесконечно малого элемента Δx , Δy , Δz , но, конечно, не вполне верное, ибо если бы такое приближение имело место, то прямой брус не мог бы изогнуться, так как

в цепи кубиков, идущих от края до края, сохранение параллелизма граней потребовало бы сохранения параллелизма и двух крайних торцевых вертикальных плоскостей, что при изгибе, конечно, не имеет места, ибо торцевые

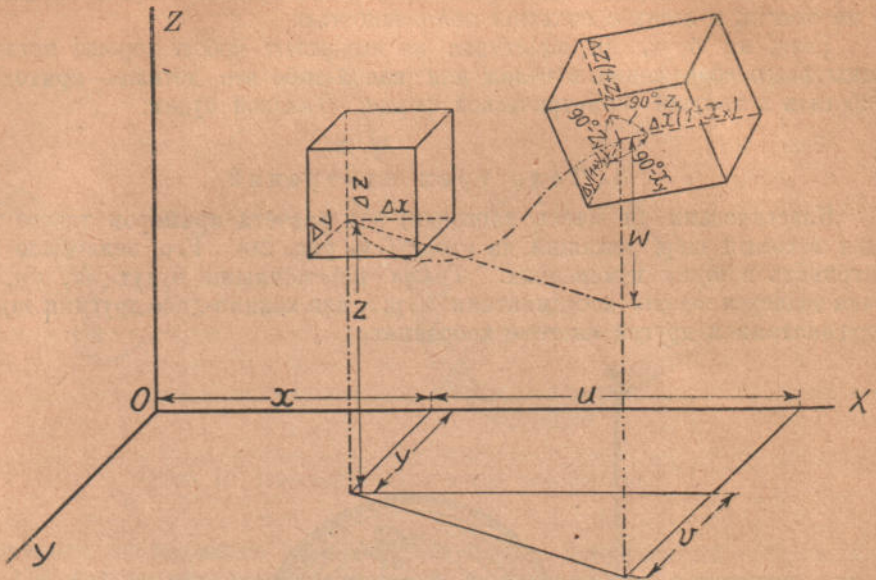


Рис. 29. Деформации и перемещения частицы упругого тела Δx , Δy , Δz .

плоскости в результате изгиба обе наклоняются в разные стороны и перестают быть параллельными.

Так же, как и ограничения, принятые для бруса и плоскости, это приближение можно рассматривать, как разложение некоей функции по строке Тейлора с отбрасыванием высших членов; мы увидим в Теории Упругости, что это приближение необходимо для распространения закона Гука на тело 3-х измерений.

Итак, заменяя сооружение сочетанием брусьев, пластинок и тел 3-х измерений, мы изучаем принятую нами *схему* и выясняем условия работы идеального, схематизированного сооружения. Ясно, что *фактически* сооружение работает несколько иначе, и более того, ряд сооружений, *построенных даже по одной расчетной схеме*, но по проектам разных авторов, может работать различно, ибо отдельные сооружения будут существенно отличаться друг от друга *конструктивными* особенностями, несущими на себе печать *индивидуальности* автора проекта. И наконец даже ряд сооружений, построенных по тем же чертежам *того-же* автора будет в общем случае также работать *различно*, индивидуально, в зависимости от условий изготовления и сборки, от свойств данных партий материала, от условий службы и обслуживания сооружения и даже от характера местности (податливость основания, температурные условия). И лишь особые *экспериментальные* обследования данного *индивидуума-сооружения* позволяют выяснить его *индивидуальные* особенности; однако задача Теории Инженерных Сооружений не идет столь далеко; она заключается в том, чтобы научить нас изучать работу тех условий, хотя и близких к действительному сооружению *схем*, которыми мы *заменяем* сооружение.

К изучению работы этих *схем*, а прежде всего *бруса* и его сочетаний мы и перейдем.

ГЛАВА II.

Теория внешних сил.

§ 1. Внешние активные силы и общие приемы их изучения. Веревочно-стержневой многоугольник.

Силы, действующие на сооружения, разделяются на *активные* и *реактивные*. Изучая жизнь какого либо сооружения, мы прежде всего встречаемся с заданными нам *активными* силами.

Под термином „*активные силы*“ подразумеваются все те действующие на сооружение силы, которые задаются самым назначением сооружения и составляют его полезную нагрузку. К ним же относится и собственный вес, как *неизбежная постоянная нагрузка* на сооружение. Большая часть активных сил суть *силы*, вертикально направленные вниз, так как они создаются *силой тяжести*, но, конечно, такого *ограничения* не существует, и активные силы могут иметь *любое* направление, а также быть силами объемными, поверхностными, погонными или сосредоточенными. *Реактивными* силами называются силы сопротивления *опор*, положение и направление которых зависит от *устройства* опор.

Ниже мы увидим, что по существу нет разницы между активными и реактивными силами.

На чертеже мы будем наши силы изображать схематически в виде стрелок соответствующей длины (в зависимости от принятого масштаба). Как известно из предыдущего, точка приложения сил при статическом их изучении не имеет значения (силы можно переносить по направлению их действия). Обычно на чертеже силы изображают приложенными к геометрической оси данного тела, но лишь для определенности рисунка. Чертеж, изображающий в масштабе тело и действующие на него силы, называют „*полем сил*“.

Выше уже отмечено, что активные силы на плоскости задаются тремя факторами: 1) величиной силы $\pm R$ (может быть положительна и отрицательна); 2) направлением силы (углом, образованным положительным направлением силы с положительным направлением оси OX) $\pm \alpha$; 3) плечом силы (определяющим положение силы относительно начала координат) $\pm r$.

Зная аналитическое выражение силы ($\pm R$; $\pm \alpha$; $\pm r$) можно построить ту же силу и графически. Однако, неправильно было бы считать графическое изображение силы за какой то самостоятельный путь исследования, отдельный от аналитического;—графическое изображение силы есть только выражение в другой форме той же величины, заданной аналитической формулой. Как уже неоднократно отмечалось, имеется и 4-й фактор, определяющий силу в пространстве—это точка ее приложения. Но в этой главе мы будем говорить только о сложении и разложении сил по законам статики, а в статике точка приложения силы для нас безразлична. Конечно, этого нельзя сказать о Теории Сооружений; само собой очевидно, что с точки зрения этой науки представится громадная разница, действуют ли например *внешние* силы на сооружение только поверхностно, или они приложены *внутри* тела, *дают ли* они сверху, или *привешены* снизу тела и т. д.

Можно в статике задать силу на плоскости и такими тремя факторами: ($\pm X$; $\pm Y$; $\pm r$) здесь $\pm X$ —составляющая нашей силы по оси OX $\pm Y$ —составляющая по оси OY , а $\pm r$ имеет прежнее значение. Подобное

задание, будучи вполне эквивалентно вышеприведенному, часто с удобством применяется на практике. Могут быть и другие формы аналитических выражений определяющих данную силу, важно лишь отметить, что число их всегда должно равняться на плоскости *трём*.

В Теории Сооружений мы рассматриваем только такие системы, которые находятся в *равновесии*; действительно, если бы это условие не было соблюдено, то сооружение, находясь под действием неуравновешенной силы, пришло бы в *движение*, чего мы, конечно, не можем допустить в инженерных сооружениях, основанных на принципе полной устойчивости и неподвижности. Однако, задаваемые нам активные силы в общем случае сами себя не уравновешивают и дают равнодействующую, отличную от нуля; достаточно вспомнить, что они *все* большей частью обращены вниз (силы тяжести). Поэтому нам надо суметь *уравновесивать* данные внешние активные силы с какими-то реактивными. Имеем две интерпретации этой проблемы — аналитическую и графическую. При аналитической интерпретации условия равновесия, как известно из механики, выражаются так:

$$\begin{aligned}\Sigma X &= 0 \\ \Sigma Y &= 0 \\ \Sigma M &= 0,\end{aligned}$$

т.-е. сумма проекций на оси координат OX и OY всех сил (активных и реактивных), действующих на тело, должна равняться нулю, и сумма моментов всех сил, относительно какой-нибудь вполне произвольной точки данной плоскости, также должна равняться нулю. Это 3-е условие равновесия можно выразить и в другой форме, а именно:

$$\Sigma Yx - \Sigma Xy = 0,$$

сумма составляющих по оси OY , умноженных на их расстояния до оси OY и составляющих по оси OX , умноженных на их расстояния до оси OX — должна равняться нулю (суммы берутся алгебраически).

Можно взять и такие условия равновесия:

$$\begin{aligned}\Sigma X &= 0 \\ \Sigma M_1 &= 0 \\ \Sigma M_2 &= 0,\end{aligned}$$

где ΣM_1 и ΣM_2 — суммы моментов относительно двух каких-либо точек; эта система уравнений будет вполне эквивалентна прежней. Вообще условия равновесия можно варьировать различным образом, лишь бы число их (независимых одно от другого) равнялось *трём*. Укажем еще на такую систему уравнений:

$$\begin{aligned}\Sigma M_1 &= 0 \\ \Sigma M_2 &= 0 \\ \Sigma M_3 &= 0,\end{aligned}$$

Очевидно, что в этом случае необходимо лишь соблюсти условие, чтобы три точки 1, 2 и 3 не лежали на одной прямой, ибо иначе третье уравнение будет тождеством. Все эти уравнения приводятся в элементарной статике.

Раньше чем перейти к *уравновешиванию* внешних активных сил, действующих на данное сооружение, силами реактивными, заменим временно активные силы некоторой *равнодействующей* им силой R_0 . Конечно, подобная замена возможна только в пределах статических исследований, ибо очевидно, что для сопротивления материалов и теории сооружений будет огромная разница между совокупным действием сил на тело, или действием только одной силы, их заменяющей. Итак, ищем равнодействующую силу, которую заранее аналитически выражаем в таком виде

($+R_0; +a_R; +r_R$). Для возможности равновесия всей системы необходимо допустить существование, так называемой *замыкающей* силы, равной и противоположной равнодействующей ($-R_0; +a_R; +r_R$) и вполне уравновешивающей нашу систему. Угол α и плечо r , как для равнодействующей, так и для замыкающей, будут одни и те же и с тем-же знаком, разница будет только в знаке самой силы. Получив замыкающую силу, мы затем разложим ее на *реактивные силы*, которые и обусловят собой должное равновесие всей системы. Таким образом, схема нашей работы такова: данные активные силы заменяем их равнодействующей, затем получаем величину и направление замыкающей, а ее уже разлагаем на реактивные силы. Поэтому введение в исследование равнодействующей и замыкающей сил не должно нас смущать в том отношении, что в сопротивлении материалов мы не можем допустить подобного преобразования: преобразование это совершенно условное и временное и служит нам только для того, чтобы получить значение реактивных сил, соответствующих истинному положению вещей.

Аналитически задача решается так:

Приведа уравнение равновесия нашей системы к каноническому виду, т.-е. собирая члены, содержащие известные величины, в одну — а содержащие неизвестные — в другую сторону, получаем окончательно такие три результата из уравнения равновесия системы:

$$\begin{aligned} + X_{R_0} &= - \Sigma X \\ + Y_{R_0} &= - \Sigma Y \\ + R_0 \cdot r_{R_0} &= - \Sigma P \cdot r, \end{aligned}$$

где X_{R_0} , Y_{R_0} суть составляющие R_0 , а P , X и Y — отдельные активные силы и их составляющие. (Знак минус в правой части здесь объясняется тем, что для того, чтобы получить величину замыкающей, а не равнодействующей силы, мы должны переменить знак при R_0 и его составляющих).

Обратимся к графической интерпретации того же вопроса, еще раз напомнив, что она является лишь иллюстрацией тех выводов, которые мы сделали, изучая аналитические формулы.

Графический метод — построение веревочно-стержневого многоугольника (иногда его называют нитяно-стержневым, что, как мы увидим ниже, даже более правильно). Возьмем на поле сил, для ясности построений, только четыре силы и попытаемся привести систему в состояние равновесия, т.-е. отыскать равнодействующую, а затем и замыкающую (см. рис. 30).

Где либо на стороне от поля сил берем произвольную точку и откладываем от нее одну из наших активных сил, взятую в произвольном масштабе, затем, вслед за ней, откладываем вторую, третью и т. д. — все активные силы. В результате этого построения получаем так называемый *план сил*, который может получиться или в виде замкнутого многоугольника, или же в виде не замкнутой цепочки. Как известно из статики, система сил, находящихся в равновесии, должна в результате этого построения дать замкнутый многоугольник. Поэтому, в случае, когда получится цепочка сил, а этот случай для активных сил, как нами выше объяснено, почти всегда и имеет место, мы должны, уравновесивая нашу систему, замкнуть ее некоторым вектором, указывающим нам величину и направление как равнодействующей, так и замыкающей, так как они лишь взаимно противоположны по знаку. Порядок, в котором на плане сил мы откладывали наши активные силы, как уже было указано, является вполне произвольным, и конечно, при всех возможных случаях этого построения, мы должны получать одну и ту же величину равнодействующей. Теперь положим равнодействующей в поле сил. Возьмем на плане

сил какую-либо точку O , которую мы назовем *полюсом*, и соединим этот полюс с вершинами нашего силового многоугольника; линии, соединяющие полюс с вершинами многоугольника мы будем называть *лучами*. Положение полюса на плане сил вполне произвольно; как будет показано дальше, положение полюса не повлияет на конечный результат наших построений, однако для удобства и большей точности построений выбирают его так, чтобы два крайних луча образовывали приблизительно прямую, и во всяком случае, не очень острый и не очень тупой угол.

Возвратимся к полю сил. *Выбираем на первой силе какую-либо произвольную точку*, а из нее проводим два направления, параллельные двум первым лучам плана сил. Этим мы разлагаем первую силу по правилу параллелограмма сил на две, соответственно выбранным направлениям, и ясно, что по величине новые силы будут равны длине соответственных лучей в масштабе плана сил, ибо все лучи на плане сил суть силы и изме-

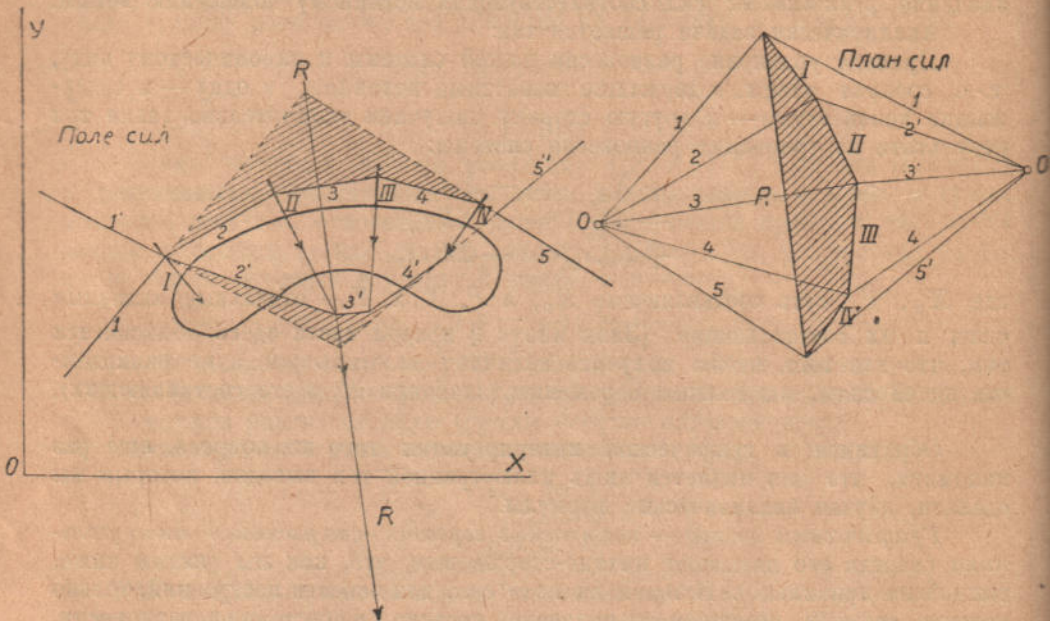


Рис. 30. Построение веревочно-стержневого многоугольника в двух вариантах.

ряются в масштабе сил. Продолжим составляющую, параллельную второму лучу до пересечения со второй силой, которую также разлагаем на две: одну из ее составляющих делаем равной и противоположной по величине и по направлению предыдущей второй составляющей первой силы, а вторую выбираем параллельной и равной третьему лучу плана сил. Продолжая эти построения далее, мы, первоначально удвоив число наших сил, в результате, благодаря их попарному взаимному уничтожению, придем к двум только силам (параллельным крайним лучам плана сил), на пересечении которых после сложения их по правилу параллелограмма сил получаем в поле сил величину, направление и искомое положение равнодействующей силы, откуда определяем и величину уравновешивающей замыкающей силы. Так как желательно, для точности построения, получить пересечение крайних лучей по возможности близкое к прямому углу (этим более точно определится положение равнодействующей силы)—то, как было указано выше, полюс нужно выбирать на основании этого соображения. Полученная на поле сил фигура называется веревочно-стержневым многоугольником —

термин этот нужно понимать в таком смысле, как-бы наши активные силы действуют не на самое наше тело — сооружение, а именно на этот многоугольник, и притом состоящий из реальных идеально-жестких, способных сопротивляться сжатию и растяжению стержней, каждый из которых будет находиться под действием взаимно противоположных сил, взаимно друга уничтожающих, кроме двух крайних стержней. Однако и действующие на эти крайние стержни силы так же будут взаимно уравновешенными, так как мы ввели в систему „замыкающую силу“, как раз уравновешивающую эти крайние силы.

Докажем теперь, что всякий веревочно-стержневой многоугольник есть модель мгновенно равновесного и притом наиболее экономичного сооружения, способного полностью воспринять данные активные внешние силы.

Действительно, представим себе, что силы 1, 2, 3 и 4, изображенные на рис. 31 в двух вариантах, восприняты конструкцией, состоящей для первого варианта из трех жестких стержней 1—2; 2—3; 3—4 и двух

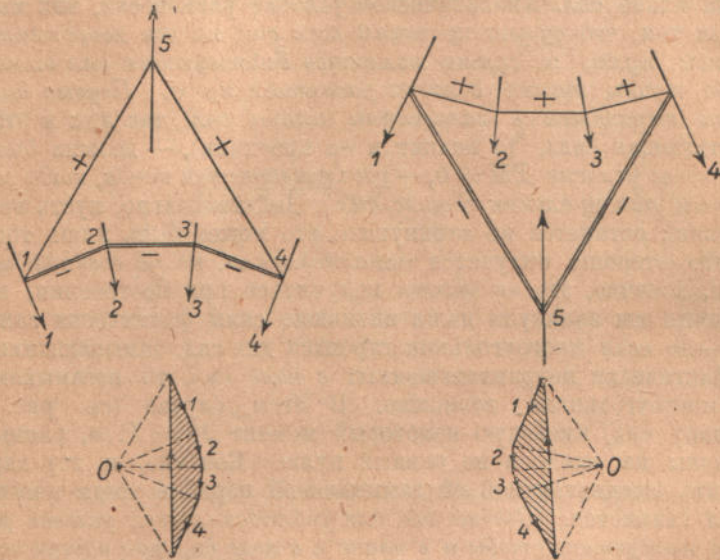


Рис. 31. Веревочно-стержневой многоугольник, как модель мгновенно-равновесного сооружения (в двух вариантах).

гибких веревок-нитей 1—5 и 5—4, а для второго — из трех гибких веревок нитей 1—2; 2—3; 3—4 и двух жестких стержней 1—5 и 5—4. Ясно, что обе конструкции во-первых, уравновешивают все данные силы, ибо как раз воспринимают все те десять сил, на которые наши пять данных сил разлагаются, при чем жесткие стержни сжимаются (что обозначается знаком —), а гибкие нити — растягиваются (что обозначается знаком +); во-вторых, дают лишь мгновенное уравновешивание, ибо ничтожное изменение какой-либо из активных сил (а такое изменение неизбежно в работе сооружения и происходит почти непрерывно), уже требует другой равновесной конструкции, так как форма веревочно-стержневого многоугольника меняется. Наконец, в-третьих, эта конструкция безусловно экономична, ибо состоит всего из 5 простых прямых элементов без всяких сложных узлов и соединений.

Конечно, сооружение получается вроде карточного домика или спичечной конструкции, но принципиально такое сооружение возможно и облегчает изучение разных возможных форм сооружений, чем мы ниже и воспользуемся весьма широко.

Это то свойство нашего многоугольника и дает ему наименование *веревочно- или нитяно-стержневого*.

Веревочных многоугольников можно построить сколько угодно, но конечное положение и величина замыкающей и равнодействующих сил очевидно остаются неизменными, независимо от выбранного нами метода построения. Например, на рис. 31 построено два таких многоугольника, соответственно полюсам O и O' , что очевидно не повлияло на конечный результат, оставшийся в обоих случаях одинаковым.

Определив величину и направление сил равнодействующей и замыкающей, мы замыкающую в свою очередь можем заменить *реактивными* силами, возникающими в опорах и обуславливающими равновесие всего сооружения (см. след. §). На практике строят веревочно-стержневой многоугольник более или менее механически, со сторонами, параллельными лучам плана сил, определяют пересечение крайних его сторон и из точки пересечения проводят направление равнодействующей, параллельно замыкающей на плане сил. Аналитическое условие равновесия, как мы помним, выражается тем, что *сумма проекций всех сил на оси координат должна быть равной нулю, и сумма моментов действующих сил относительно какой-либо точки также должна равняться нулю*. Первые два условия графически выразятся в замыкании плана сил, так как в этом случае равнодействующая сила, (а значит и ее проекции), — должна быть равной нулю, а *третье условие $\Sigma M = 0$, — удовлетворяется тогда, когда замкнется и веревочный многоугольник в поле сил*. Действительно, пусть веревочный многоугольник останется не замкнутым; это может быть лишь тогда, когда крайние его стороны получатся параллельными, но не совпадающими друг с другом и, конечно, это не может получиться при построении, нами описанном, когда мы замкнули наши активные силы фактически замыкающей их силой, — но если многоугольник строится для сил, замыкающихся в плане сил, но фактически неуравновешенных в поле сил, то незамыкание веревочного многоугольника возможно. В этом случае (см. рис. 32) мы получим пару сил, имеющую некоторый момент $M = P \cdot a$, равный произведению силы на плечо и не равный нулю. Конечно, и эту пару можно уравновесить эквивалентной ей замыкающей парой и тогда многоугольник в поле сил замкнется. *Вообще же для соблюдения всех условий равновесия графически требуется, чтобы и в плане и в поле сил при нашем построении образовывались бы замкнутые фигуры*.

Отметим еще некоторые свойства веревочно-стержневого многоугольника.

Прежде всего надо помнить, что при проведении многоугольника мы располагаем *тремя* степенями свободы, т.-е. для данной системы сил можем построить трижды бесчисленное множество веревочно-стержневых многоугольников, и каждый из них будет мгновенно равновесным сооружением. Действительно: 1) *в плане сил* мы можем выбрать *любые две* координаты для полюса — это дает *две* степени свободы; 2) *в поле сил* мы можем *начать разложение с любой точки любой* силы, но здесь мы не можем уже задать этой точки *двумя* координатами: в виду определенного направления каждой силы задание *одной* координаты уже предreshает значение *другой*, и таким образом мы располагаем *лишь одной* (третьей) *последней* степенью свободы.

Можно задаться *направлением двух составляющих и точкой разложения* какой либо силы в поле сил и таким путем тоже использовать все *три* степени свободы. Наконец в дальнейшем мы увидим, что можно также задаться *тремя* не находящимися на одной прямой точками, через которые должен в поле сил пройти многоугольник.

Между прочим, эти три степени свободы позволяют очень хорошо разобрать вопрос о *переносе пары в любое место на плоскости ее действия*.

Представим себе, что нам дали у точки A пару сил P, a (см. рис. 33). Требуется перенести ее в произвольную точку B , придав силам произволь-

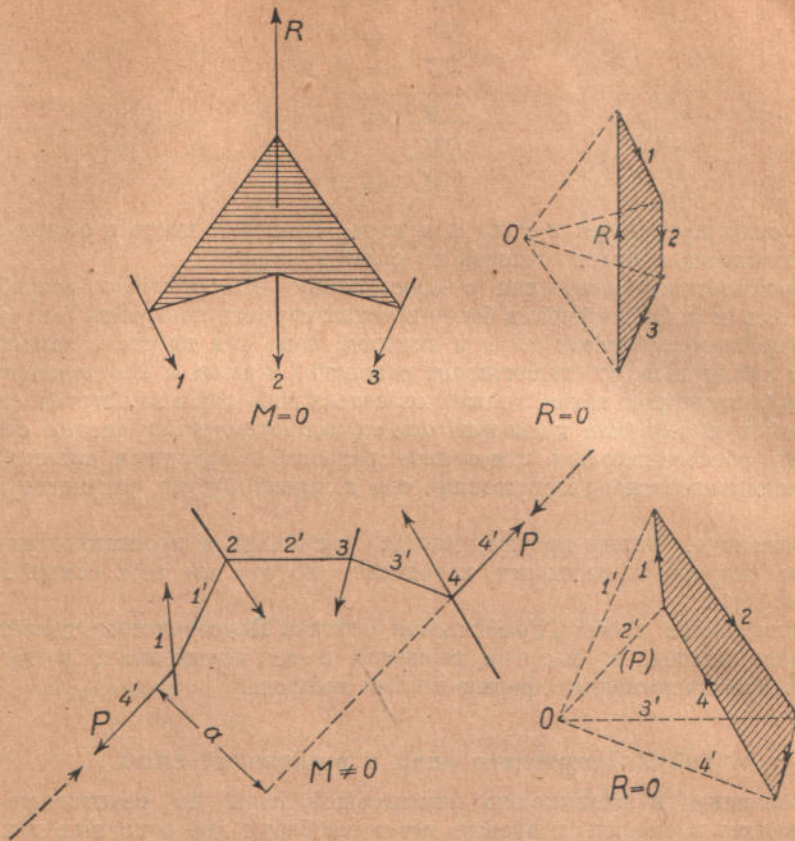


Рис. 32. Случай полного уравновешивания заданных сил и приведения их к паре.

ное направление и величину $\frac{P}{2}$, а плечу — соответствующую величину $2a$. Так как задание выражено *тремя* данностями, то оно осуществимо. Действительно, следует лишь в плане сил взять полюс O на линии, параллельной $\frac{P'}{2}$, и на расстоянии $\frac{P'}{2}$ от начала многоугольника сил (все расстояния в плане сил имеют масштаб сил) и первый луч разложения в поле сил совместить с заданным новым направлением $\frac{P'}{2}$, проведенным через точку B , чтобы получить новую пару, перенесенную в назначенное место и имеющую заданные значения сил и плеч.

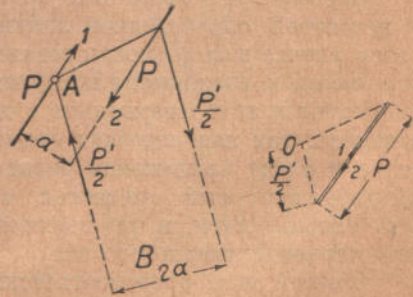


Рис. 33. Перенос пары в любое место плоскости.

Если речь идет о *пространственном* действии сил, то вопрос несколько *осложняется*: вместо *трех* данностей мы все время будем иметь дело с *шестью*.

Каждая внешняя сила будет задана *шестью* величинами, равнодействующая всех активных сил, а также и замыкающая, являющаяся

равнодействующей всех реактивных сил, определяются из *шести* уравнений равновесия:

$$\begin{aligned}\Sigma X &= 0 \\ \Sigma Y &= 0 \\ \Sigma Z &= 0 \\ \hline \Sigma M_x &= 0 \\ \Sigma M_y &= 0 \\ \Sigma M_z &= 0\end{aligned}$$

и если силы приведутся к силе и к паре, что имеет место в общем случае, то и замыкающая будет состоять из силы и пары.

Графические построения в пространстве недостаточно разработаны, но и здесь можно, особенно в более простых случаях построить (см. рис. 34): *пространственный план сил*, в котором цепь сил вместе с замыкающей должны замкнуться, что гарантирует равенство R нулю, и *пространственное поле сил*, в котором также должна оказаться возможной замкнутая система стержней и нитей (или несколько *отдельных замкнутых* систем стержней и нитей) обеспечивающая мгновенное равновесие заданным силам (модель мгновенно равновесного сооружения), чем и гарантируется равенство всех M нулю.

Возможно, между прочим, иногда применить и проектирование всей системы сил на 3 плоскости координат, но это не есть самый лучший и общий путь.

В настоящее время „Графическая Статика Пространства“ делает крупные шаги вперед, и мы еще вернемся к ее положениям, когда будем изучать пространственные фермы во 2-м выпуске.

§ 2. Устройство опор и реактивные силы.

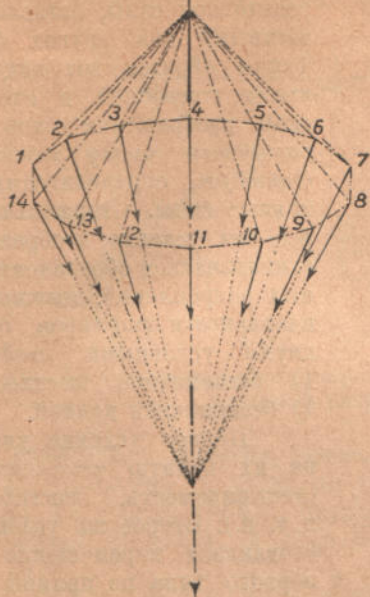
Обратимся к разложению замыкающей силы на реактивные силы, возникающие в опорах, и прежде всего разберем два основных типа опор для случая, когда все силы действуют в одной плоскости. Опорами называются технические конструктивные устройства, на которые опирается сооружение, и в которых развиваются реактивные силы. В строительной механике иногда их называют еще опорными закреплениями.

Все опоры на плоскости могут рассматриваться, как комбинации *двух типов* (см. рис. 35).

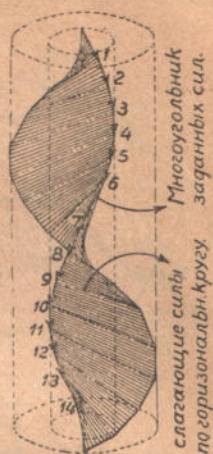
Первый тип опор — это *опоры*, обладающие небольшой подвижностью по некоторой определенной линии (*шарнирно-подвижная опора* — тип I). В этом случае в опоре может возникать одна — и только одна сила, — *перпендикулярная* к возможному перемещению опоры. Схематически такую опору изображают в виде стерженька с двумя идеальными (без трения) шарнирами на концах, так как подобная схема совершенно ясно указывает нам направление и точку приложения реактивной силы. (Очевидно, что через подобный двухшарнирный стерженец может пройти только сила, совпадающая с его направлением, и что верхняя точка такого стерженька может двигаться лишь перпендикулярно его оси).

Второй тип опор соответствует какой-либо вполне неподвижной точке нашего тела (*шарнирно неподвижная опора* — тип II); в этом случае возможно только *вращение* нашего тела вокруг этой точки, *перемещение же* самой точки — невозможно. Здесь мы имеем *два неизвестные* фактора определяющих реактивную силу: *ее величину и направление* (или, что то же — ее вертикальную и горизонтальную составляющие) — известен же нам только *один фактор* — точка приложения или вернее положение силы. Такая опора схема-

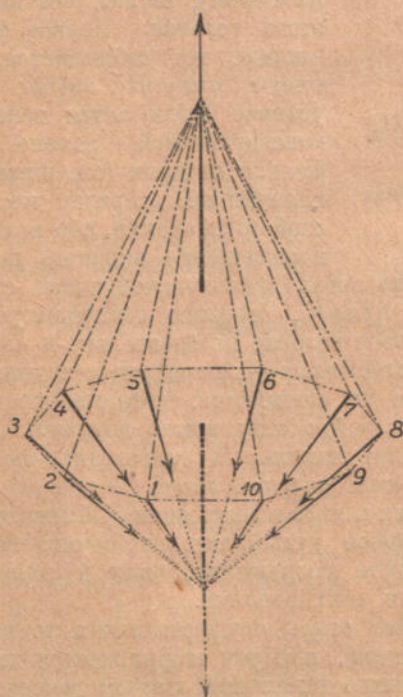
Пространственное поле сил.



Пространственный план сил.



Пространственное поле сил.



Пространственный план сил.

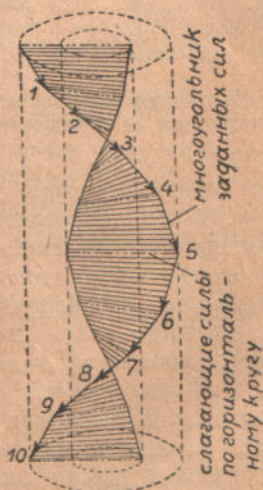


Рис. 34. Частные случаи построения пространственных многоугольников сил и пространственных веревочно-стержневых многоугольников (нижние точечные конусы и нижние пунктирные стрелки в полях сил указывают лишь на положение равнодействующей активных сил).

тически изображается в виде комбинации двух стерженьков с двумя шарнирами каждый, при чем верхний шарнир является общим для обоих стержней. Эта схема действительно определяет нам только точку приложения

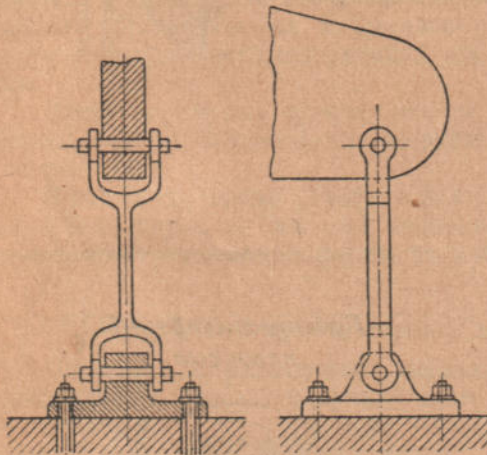
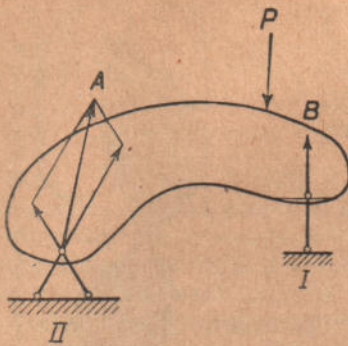


Рис. 35. Типы опор на плоскости и условная конструкция одностержневой опоры.

стержня столь ничтожно, что при не очень значительной длине стержня может считаться направленным *по прямой*, стержню перпендикулярной. Для шарнирно-неподвижной опоры второе условие необязательно и ненужно.

В опоре второго типа (с двумя стержнями — «шарнирно-неподвижной») мы задаем два направления, дающие те слагающие, которые определяют нашу реактивную силу. Но так как *любую* силу можно получить из бесчисленного множества комбинаций двух каких-либо слагающих, *то выбор направлений стерженьков шарнирно-неподвижной опоры является вполне произвольным*, и мы можем рисовать их в *любом* положении. Обычно изображают их, полагаясь на свое инженерное чутье, так, чтобы они наглядно характеризовали работу опоры в данном сооружении, чаще и *правильнее* всего в горизонтальном и вертикальном направлениях.

Следует отметить, что *технически* опоры осуществляются по возможности ближе к их теоретической схеме, при чем шарнирно-неподвижная опора (см. рис. 36 левый) имеет возможно идеальный шарнир между двумя «балансирами», из коих нижний и может быть заменен двумя стержнями, хотя бы, например, идущими через головки нижних болтов; шарнирно-подвижная опора (см. рис. 36 правый) отличается от неподвижной тем, что

реактивной силы, оставляя неизвестными два других фактора. Таким образом мы видим, что *число стержней* в схематическом изображении опор всегда равняется *числу неизвестных факторов*, определяющих реактивные силы. Стерженьки, которые мы условно изображаем на схематическом обозначении опорных закреплений, должны, кроме идеальности шарниров, обладать двумя условными свойствами: 1) бесконечной жесткостью и 2) бесконечной длиной.

Первое условие указывает на их полную *неизменяемость* (несжимаемость, нестигаемость и т. п.). Второе же условие обуславливает перемещение опоры первого типа по прямой линии, *перпендикулярной* к направлению реактивной силы, а не по дуге круга, как может казаться на первый взгляд, без введения этого условия. Первое условие иногда не соблюдается, если имеют *упругую опору*; второе условие соблюдается точно при конструктивной замене стерженька катками (см. ниже); при наличии же стержня не имеет особого значения, ибо возможное перемещение верхнего шарнира

под нижний балансир подведены катки, и они то условно и заменяются *одним* стержнем, *перпендикулярным* плоскости катания катков. Иногда впрочем и фактически шарнирно-подвижная опора осуществляется в виде высокой колонны с двумя шарнирами; тогда она называется „качающейся опорой“.

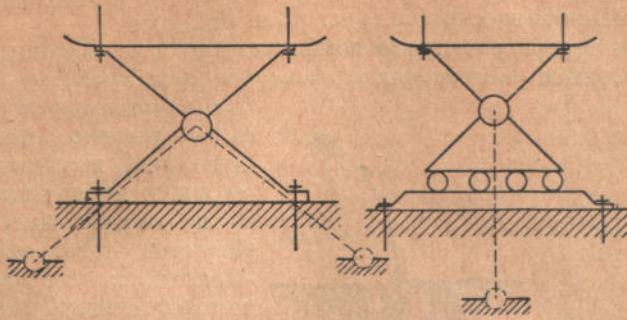


Рис. 36. Конструкция опор первого (правый рисунок) и второго (левый рисунок) типа.

Так называемые *плоские неподвижные* и *плоские скользящие опоры* вообще *нерациональны* и ныне не допускаются в мостах, но, если они применены, то, строго говоря, первую следует заменить *двумя парами* пересекающихся стержней, а вторую — *двумя* параллельными стержнями, (см. рис. 37).

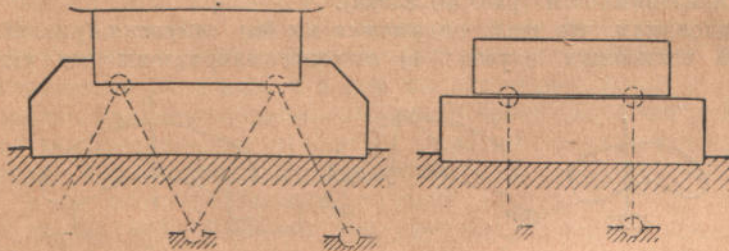


Рис. 37. Конструкция плоских неподвижных и плоских скользящих опор.

Конечно, шарниры на концах стерженьков должны быть *идеальными*, т. е. допускать поворачивание *без трения* и следовательно *без сопротивления*.

Рассмотренные нами два типа опор, конечно, являются лишь условными символами, обладающими идеальными свойствами. Однако на практике мы с неизменным успехом заменяем *любые конструктивные опоры* различными комбинациями этих *идеальных опор*. Например, в простейшем примере балки, заделанной концами в стену, которую обычно грубо изображают так, как показано на рис. 38 сверху, мы видим возможность вполне реально изобразить по *вышеуказанному* методу истинную работу балки, находящейся в этих условиях. Как видно из схемы, будучи *заделана наглухо*, наша балка *все же имеет* некоторую подвижность, обеспечивающую ей возмож-

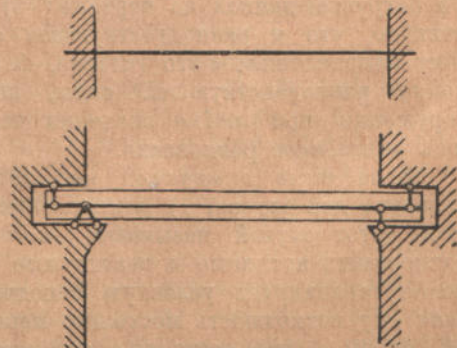


Рис. 38. Приближенное и точное обозначение закреплений заделанной в стену балки.

ность различных температурных и упругих деформаций. На рис. 39 изображен колос ржи, также наглядно определяющий условия своего закрепления при условном обозначении.

При изображении бруса *верхний шарнир* стерженька следует считать находящимся на *оси бруса* и как-бы *пронизывающим брус*, не нарушая его цельности и непрерывности (см. рис. 35 и 38).

Разберем теперь различные комбинации *опор* и выясним, какие из них наилучшим образом *обеспечивают* *должную неподвижность* сооружения.



Рис. 39. Колос ржи.

Неподвижность эту надо понимать условно, ибо небольшие движения, вызываемые температурными и упругими явлениями и не изменяющие генеральных размеров тела, свободно допускаются в сооружении и не мешают считать его *неподвижным*. Вообще же сооружение только тогда удовлетворяет условию неподвижности, когда *неподвижность* эта вполне гарантирована

при *любой комбинации* действующих сил. Поэтому простейший случай *одной одностержневой опоры*, допускающей только одно определенное направление активных действующих сил, которое можно уравновесить сопротивлением этой опоры, не удовлетворяет условию гарантированной раз навсегда неподвижности (рис. 40 слева).

Предположим, что *тело опирается на два стержня* (рис. 40 справа); имеем два возможных случая: 1) стержни направлены под углом один



Рис. 40. Устройство опор, не гарантирующее неподвижности сооружения: один или два стержня.

к другому — равновесие возможно только в случае, если на пересечении обоих направлений приложена равнодействующая активных сил — условие совершенно произвольное и исключительное, и не могущее гарантировать полную неподвижность сооружения при любой нагрузке, а лишь мгновенную при нагрузке, данной на чертеже; 2) стержни обоих опор параллельны — очевидно, что и равнодействующая сила должна быть также параллельна этому направлению, а это условие, фиксируя только одно возможное направление равнодействующей силы, не может дать неподвижность всему сооружению при *любом значении сил*. Во всех этих случаях получается лишь *мгновенное равновесие*.

Если *тело опирается на три стержня* (см. рис. 41), то можно различать два случая, 1) *направление стержней не пересекается в одной точке* (этот случай называют „классическим“). Тут всегда возможно уравновесить активные и реактивные силы. Поэтому эта комбинация опор вполне гарантирует условную неподвижность сооружения, в то же время давая ему возможность несколько передвигаться (за счет подвижно-шарнирной опоры), что постоянно является необходимым вследствие упругих перемещений и температурных воздействий, 2) *все три стержня пересекаются в одной точке*, или же (что то же самое) они параллельны

(см. рис. 41 справа). В первом случае все сооружение может как-бы покачиваться вокруг точки пересечения, и надлежащая устойчивость его не будет всегда обеспечена. Если же все три стержня будут параллельны, мы получим комбинацию подвижную и вполне аналогичную, в смысле устойчивости, случаю

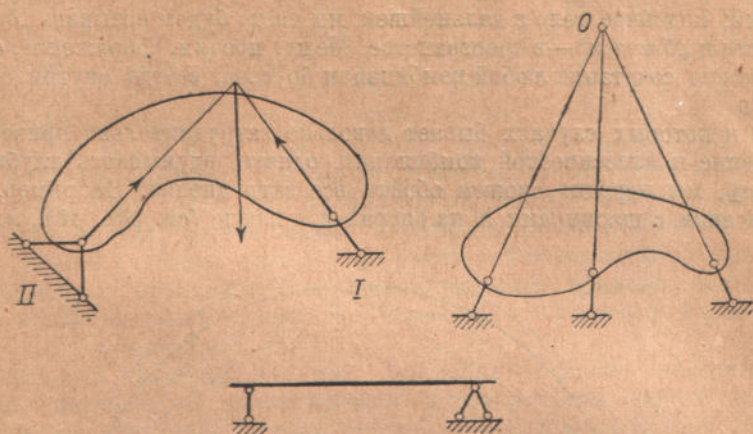


Рис. 41. Случай трех стержней: слева — классический, справа — недопустимый, внизу — классический для балки.

параллельности двух стержней, т.е. должны допустить для создания мгновенного равновесия только одно возможное направление равнодействующей силы. Интересен случай трех отдельных непересекающихся стержней — он принципиально возможен, и с ним мы встретимся позже не раз.

Наконец разберем случай четырех и более стержней (см. рис. 42), при чем будем предполагать, что в это число всегда входит и классическая комбинация, т.е. стержни не все параллельны и не все пересекаются в одной точке и из них можно избрать три классических. Здесь будем иметь так называемую статически неопределимую систему; не нужно думать, что в этом случае мы не можем изучить работу нашего сооружения. Если мы и называем эту систему „неопределимой“, то мы добавляем к этому термину слово „статически“ (т.е. эта система неразрешима только в области статических исследований, так как требует для своего решения еще и знания законов упругости). Вглядываясь внимательно в эту схему, мы сможем уловить и самую идею подобных конструкций: тело, будучи первоначально поднято на три стерженька классической группы, (напр., два крайних левых и крайний правый) затем подхватывается еще несколькими „лишними“ опорными стержнями, еще более гарантирующими ему должную неподвижность (как бы предохраняющими его от „провеса“ частей, лежащих между основными опорами). Статически-неопределимые случаи подлежат серьезному изучению, и им мы посвятим дальнейшие выпуски, в настоящем выпуске мы дадим общую теорию бруса, применимую и для статически неопределимых случаев, но детально рассмотрим и исследуем лишь статически-определимые задачи. Возвращаясь к области статически-определимых случаев, мы, суммируя все наши выводы, приходим к заключению, что единственный возможный случай, вполне гаран-



Рис. 42. Статически-неопределимый случай; два крайних левых стержня и один крайний правый могут быть приняты за классические.

тирующий нам должное *статическое* разложение замыкающей силы на реактивные — это *классическая комбинация трех стержней*.

Конечно, все произведенные исследования относились только к сооружению, неизменяемому внутри самого себя, т.е. неспособному изменить своих *генеральных* размеров под влиянием упругих и температурных воздействий; подобное тело в дальнейшем мы часто будем называть „*диском*“ на плоскости и „*блоком*“ — в пространстве. Между прочим, сооружение, состоящее из *жесткого* сочетания любой комбинации брусьев, всегда внутри себя неизменяемо.

В некоторых случаях бывает довольно затруднительно привести наше сооружение к классической комбинации, однако, вдумываясь глубже в конструкцию, мы нередко сможем обойти все затруднения. Например, в случае расчета арки с шарнирами и на опорах и в ключе (см. рис. 43), мы должны

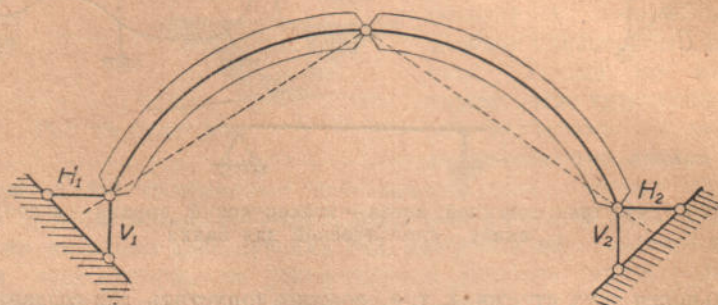


Рис. 43. Арка с тремя шарнирами.

рассматривать все перекрытие, как комбинацию двух дисков, причем, например, левый диск служит как бы громадным стержнем, который в сочетании с неподвижно шарнирной опорой правой половины и служит третьим классическим стерженьком для правого диска.

Чтобы окончательно исчерпать вопрос об опорных закреплениях и больше к нему не возвращаться, скажем еще несколько слов об *опорах в пространстве*, так как пока все наше изложение относилось только к плоскостному расположению сил. Если на плоскости мы имеем два основных типа опор (одно- и двухстержневые), то в пространстве 3-х измерений будет уже три типа опор (см. рис. 44).

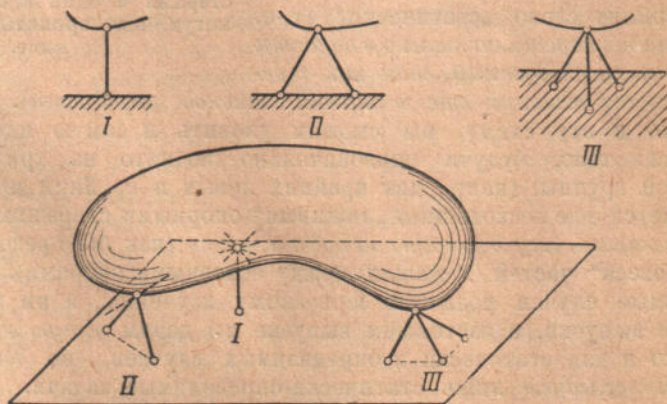


Рис. 44. Типы опор в пространстве и их работа в классическом случае.

Помня, что стержни наших схематически изображенных опор являются условно бесконечно или достаточно длинными, приходим к выводу, что *опора 1-го типа* допускает перемещение опорной точки в некоторой плоскости, перпендикулярной к направлению стерженька, *опора 2-го типа* — допускает передвижение по некоторой прямой и, наконец, *опора 3-го типа* — фиксирует определенную неподвижную точку. Не останавливаясь на деталях, прямо перейдем к „классическому случаю“ неподвижности сооружения в пространстве. Число стержней опорных закреплений в этом случае должно равняться шести, ибо мы имеем шесть уравнений равновесия, при чем стержни должны быть так расположены, чтобы через них или их продолжение нельзя было провести одну прямую. Образцовый пример подобного устройства дал лорд Кельвин, рекомендовавший идеальный геодезический инструмент, один из уравнильных винтов которого опирается в углубленную ямочку, другой передвигается по некоторой прямой канавке, а третий свободно скользит по некоторой площадке. Здесь будет уместно еще раз напомнить наше мнемоническое правило, что „число стержней всегда равняется числу неизвестных, подлежащих определению при отыскании реактивных сил“.

Выяснив на вышеприведенных примерах условия неподвижности сооружения, перейдем к аналитической интерпретации наших выводов, при чем прямо обратимся к классическому расположению трех опорных стержней на плоскости.

Аналитически условие равновесия системы выражается так:

$$\begin{aligned}\Sigma X &= 0, \\ \Sigma Y &= 0, \\ \Sigma M &= 0.\end{aligned}$$

Обозначим через A_1 , A_2 и A_3 те реактивные силы, которые возникают в соответственных опорах и через P заданные активные силы. Тогда считая направление активных сил, идущих сверху вниз, за положительное а направление реактивных — за отрицательное, мы можем наши условия равновесия написать в таком каноническом виде:

$$A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2 + A_3 \cos \alpha_3 = \Sigma P \cos \alpha_p \quad \dots \dots (1)$$

$$A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2 + A_3 \sin \alpha_3 = \Sigma P \sin \alpha_p \quad \dots \dots (2)$$

$$A_1 \cdot r_1 + A_2 \cdot r_2 + A_3 \cdot r_3 = \Sigma P \cdot r_p \quad \dots \dots (3)$$

где α есть угол наклона стерженьков и сил P к положительному направлению оси OX , а r — плечи сил A и P относительно начала координат.

Решая эту систему линейных уравнений, получаем решение такого вида

$$A_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad A_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \quad A_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$$

где знаменатель Δ — общий для всех формул, и составлен, как известно из теории детерминантов, только из коэффициентов левых частей наших уравнений, т. е. он не зависит от нагрузки, действующей на сооружение, а зависит лишь от генеральных размеров его. Ниже мы еще вернемся не раз к пользованию теорией детерминантов (определителей), так как мы постоянно будем иметь дело с системами линейных уравнений со многими неизвестными, здесь лишь напомним, что решение такой системы всегда выражается дробями с знаменателем, называемым общим детерминантом уравнений и не зависящим от постоянных членов уравнений. Если детерминант отличен от 0, то мы имеем дело с разрешимым, т. е. классическим случаем. В случае трех параллельных или трех сходящихся в одной точке стержней, детерминант оказывается равным нулю. Итак, можно

изучать условия неподвижности сооружения, не зная величины действующих на него сил, а зная лишь *генеральные его размеры*, что вполне естественно, ибо неподвижность есть признак общий, не зависящий от данной нагрузки.

Найдем теперь *графически* реактивные силы, заданные по точкам приложения и направлению, т.-е. по трем стерженькам, если известны все активные силы, действующие на данное сооружение.

Предположим, что даны 5 активных сил (см. рис. 45). Прежде всего строим *план сил* и находим величину и направление как равнодействующей, так и замыкающей силы, затем строим на *поле сил* веревочно-стержневой многоугольник, получая и здесь величину и направление равнодействующей силы. Заменяв равнодействующую замыкающей, ей взаимно-противополож-

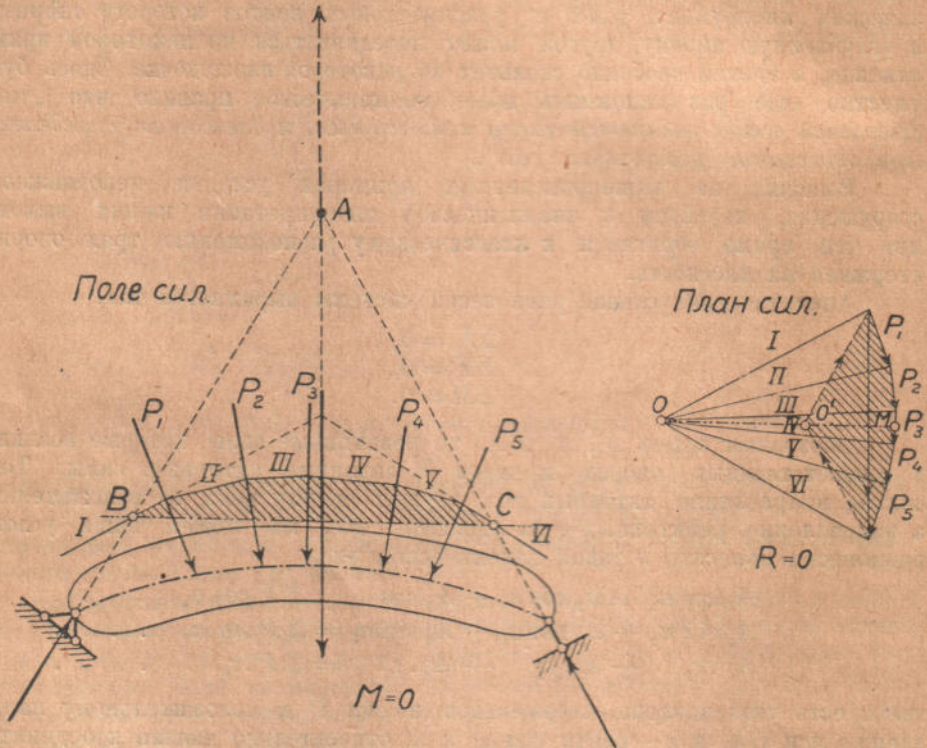


Рис. 45. Графическое нахождение реактивных сил.

ной, мы сведем задачу к разложению этой замыкающей силы на реактивные силы, возникающие в опорных креплениях. Одна из этих сил нам известна по своему *направлению*, так как в *одностержневой шарнирно-подвижной опоре* может существовать только сила, совпадающая по направлению с направлением стерженька. На пересечении этого направления с направлением замыкающей получаем точку *A*, куда и переносим замыкающую силу, для разложения ее на реактивные, при чем направление второй из них найдется, если соединим точку *A* с опорной точкой двухстержневой опоры. Для нахождения *величины* реактивных сил снова обращаемся к *плану сил*, проводя на нем два луча, параллельных направлению реактивных сил, а также линию *OM*, параллельную *BC*, где точки *B* и *C* определены на *поле сил* пересечением направлений реактивных сил и крайних сторон веревочного многоугольника. Эта линия *BC* называется *смыкающей*, а соответственный лучом — *смыкающим*. На пересечении

этих трех прямых мы находим точку O' , определяющую нам искомые величины опорных реакций, при чем нахождение этой точки O' как раз на линии OM служит контролем. Уравновесив теперь при помощи веревочно-шарнирного многоугольника все наши силы, мы получаем реактивные силы в совершенно реальной форме; они ни чем не отличаются от действующих на наше сооружение активных сил. Теперь мы можем освободить наше сооружение от всех закреплений, вообразить себе его под действием всех активных и всех реактивных сил перенесенным в любую точку пространства и даже повернутым вместе с силами в любое положение: оно всюду будет сохранять свое равновесие. При этом любые из действующих на тело сил мы можем считать за реактивные, приняв остальные за действующие активные силы, причем можно допустить и мгновенное равновесие, т.-е. принять любую одну силу за реактивную — равнодействующая всех остальных всегда будет ей равна и противоположна и совпадать с ней по направлению.

Разберем еще один случай — когда равнодействующая сила получается параллельной направлению подвижной опоры, и поэтому нельзя вышеизложенным способом найти точку разложения замыкающей силы и направление другой реактивной силы.

В этом случае направление другой реактивной силы получается также параллельным направлению первой силы и равнодействующей, так как уравновешивание всей системы возможно только при этом условии. Далее уже не представит затруднения найти на поле сил направление замыкающей прямой BC , доведя крайние лучи до пересечения с направлением опорных реакций, и, проведя в плане сил OM параллельную BC , произвести и самое разложение замыкающей силы, при чем, (см. напр. рис. 47) силовые векторы замыкающей и реактивных сил получатся совпадающими по направлению, т.-е. линия OM лишь разделит замыкающую на две части.

Для случая параллельных сил мы можем рассуждать следующим образом: при полном равновесии сил линия, смыкающая многоугольник в поле сил, должна быть параллельна соответствующему лучу в плане сил. Но, так как направление смыкающей в поле сил находится легко, путем сведения крайних лучей до направления реактивных сил и соединения полученных точек пересечения, то мы легко находим и соответствующий луч, а следовательно и значение опорных реакций в плане сил. Интересно отметить еще раз, что и здесь в сущности при замкнутом многоугольнике в поле сил мы все данные силы, т.-е. и активные, и реактивные удаляем путем разложения, и полученные силы все попарно уничтожаются.

§ 3. Кривые давления.

До сих пор мы выбирали полюс плана сил где-либо в стороне от силовой цепочки, но так как положение его вполне произвольно, то полюс можно выбрать и где-либо на самой силовой цепочке, например, в точке O_3 , в которой сходятся обе реактивные силы. При этом получается следующее (см. рис. 46):

Пока полюс O находится в стороне от силового контура, многоугольник в поле сил замыкается, когда же полюс приближается к контуру, величина силы, направленной по смыкающей стороне быстро уменьшается, высота многоугольника увеличивается, и крайние лучи по направлению приближаются к реактивным силам, наконец, в пределе, когда полюс попадает на контур, т.-е. в точку O_3 , величина смыкающего луча равна 0, смыкающая линия в поле сил пропадает, и крайние лучи совпадают с направлением опорных сил. Полученная линия называется линией или кривой давления. Она не дает замкнутой фигуры в поле сил, хотя и соответствует слу-

чаю полного равновесия. Название *кривой давления* дается этой фигуре потому, что каждый ее промежуточный элемент, как ясно из плана сил, есть равнодействующая всех левых и соответственно всех правых сил для данного участка, т. е. наша линия прямо указывает, как действует на данный участок сооружения (как давит на него) совокупность приложенных к сооружению слева и справа сил.

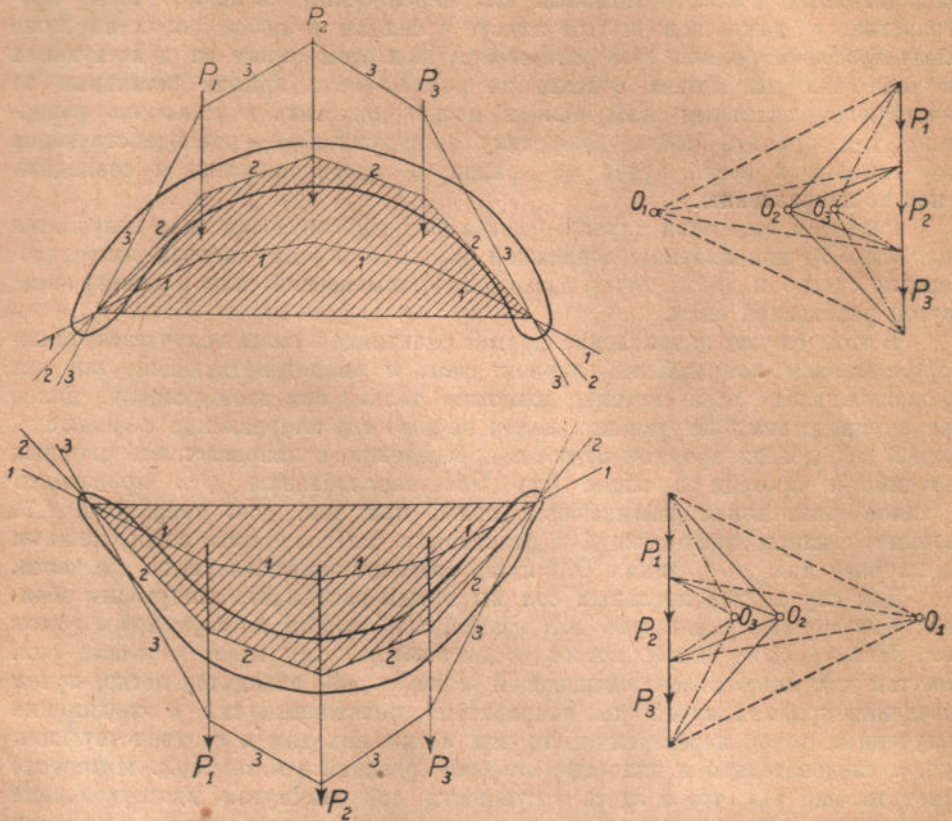


Рис. 46. Перемещение полюса и превращение веревочно-стержневого многоугольника в кривую давления (точка смыкания силовой цепочки — O_3).

Ясно, что для *вертикальных* опорных сил такая линия давлений возможна лишь при наклонности некоторых активных сил (см. рис. 47).

Кривой давления наша фигура называется потому, что при наличии сил не сосредоточенных, а сплошных, ломаная линия давлений, да и сам веревочно-стержневой многоугольник превращаются в *кривую* (см. рис. 48). Представим себе сплошную нагрузку с погонной интенсивностью, *перпендикулярной ее направлению*, равной p кг/м (такую нагрузку обозначают сплошной полосой в определенном условном масштабе для p — она может прилагаться и к кривому брусу, но ее интенсивность целесообразнее брать перпендикулярно к ее направлению). Если протяженность такой нагрузки — l , то ее полная величина — pl .

Очевидно, что для построения веревочно-стержневой кривой или кривой давления, мы должны *разбить нашу сплошную полосу на возможно большее число малых сил* ($p \Delta l$), и ясно, что, чем больше будет таких сил, тем более наш многоугольник будет приближаться к кривой. Поэтому

в дальнейшем мы часто будем говорить о веревочно-стержневой кривой и о кривой давления.

Возвращаясь теперь к вопросу о значении веревочно-стержневого многоугольника, как модели мгновенно-равновесного сооружения, укажем, что рис. 46-й в его вариациях позволяет нам установить по виду возможных мгновенно равновесных фигур некоторое представление о характерных типах сооружений:

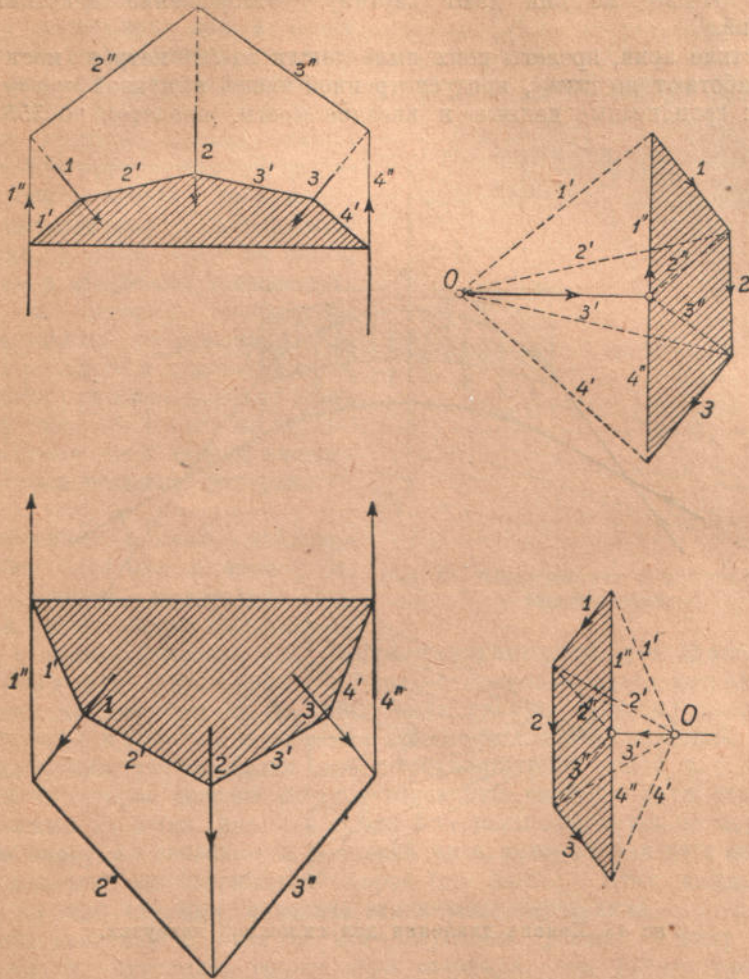


Рис. 47. Кривые давления для вертикальных опорных реакций.

а) *изогнутая кверху* кривая давления дает нам прототип идеальной *арки*, характерной чертой которой является *сжатие* всех ее элементов, и *опорные реакции* которой в общем случае и в частности даже и при *вертикальных* активных силах *наклонны* и *сходятся* кверху—это сооружение состоит из одного ряда стержней—одного пояса.

б) *изогнутая книзу* кривая давления дает прототип идеальной *цепи* (висячей системы), все элементы которой *вытянуты*, а опорные реакции в общем случае и даже и при *вертикальной* нагрузке *наклонны* и *расходятся* кверху.

Этот тип сооружений также *однопоясной*.

в) замкнутый веревочно-стержневой многоугольник есть первообраз балочного сооружения с наклонными или гораздо чаще с вертикальными опорными силами. Здесь имеются и сжатые стержни (сжатый пояс) — по верху и вытянутые стержни (вытянутый пояс) — по низу.

Система типично двустоящая.

Но, конечно, сооружения рис. 46-го лишь мгновенно равновесны. Ничтожное изменение в распределении сил — и наши карточные домики рухнут. И все же они дают картину — отображение действительных сооружений.

Жесткие арки, пролеты коих ныне дошли до 300 метров (мост в Нью-Йорке) работают по схеме, предусмотренной нашей выпуклой *кверху* кривой давления; грандиозные цепные и висячие мосты, пролетом до 555 метров

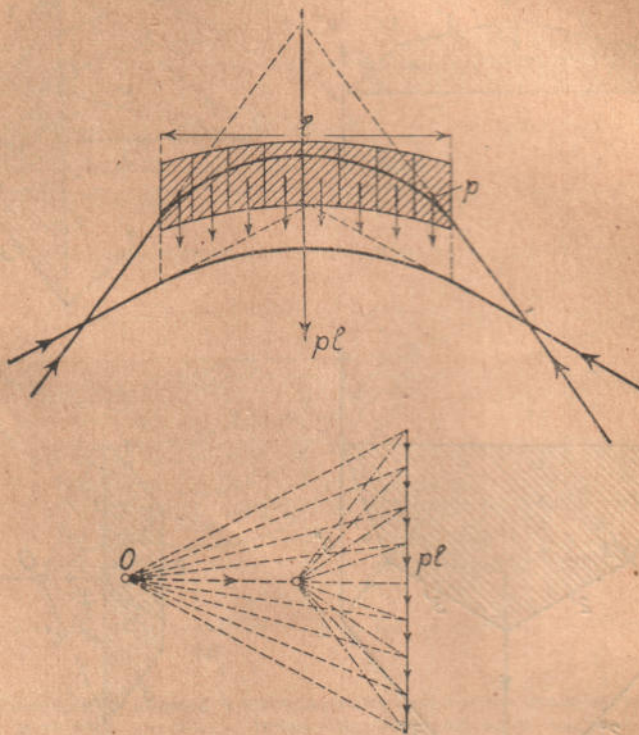


Рис. 48. Кривая давления для сплошной нагрузки.

(р. Детройт в Соед. Штатах; имеется проект моста через р. Гудзон пролетом 1036 м) похожи на изогнутую *книзу* кривую давления, а балочные мосты (пролеты каковых без консолей-выступов дошли уже до 230 м, а с консолями до 547 м), работают в своих *главнейших* частях именно так, как наш веревочно-стержневой многоугольник со *смыкающей* стороной.

Позднее, в теории ферм, мы вернемся к этому вопросу, а здесь отметим лишь еще возможность изучить на наших кривых степень целесообразности больших подъемов в балочной ферме. Действительно, возьмем силы, изображенные на рис. 49, и попытаемся их уравновесить мгновенной балочной конструкцией с верхним криволинейным поясом (для чего, как видно из предыдущего, надо полюс брать *слева* от сил). Ясно, что при полюсе O мы имеем *не длинные* сжатые стержни (см. поле сил), но *большую* силу, идущую по каждому стержню (см. план сил), а при полюсе O'' —

очень длинные стержни (см. поле сил), но небольшую силу по каждому (см. план сил). Вытянутый стержень имеет во всех случаях ту же длину, но при переходе от O к O'' нагрузка его тоже сильно уменьшается.

Так как цена сооружения зависит от его веса, а вес пропорционален и длине, и нагрузке стержня, то наилучшее решение оказывается где-то посередине, и очень высокая конструкция также невыгодна, как и очень низкая. Можно подсчитать при данной нагрузке наивыгоднейшую высоту — она оказывается теоретически близкой к половине пролета; однако, такую высоту по конструктивным соображениям допустить нельзя: сооружение делается неустойчиво в поперечном направлении, и много весят те связи, которых нет в мгновенно равновесных системах, и которые необходимы в действительных сооружениях для связывания верхнего и нижнего поясов. Поэтому конструктивно выгодно брать $\frac{1}{5}$ — $\frac{1}{8}$ от пролета. Но все же первые общие указания здесь даются нашими мгновенно равновесными фигурами.

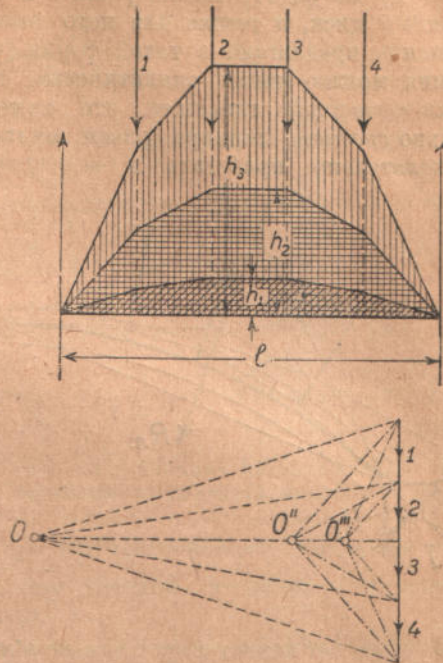


Рис. 49. Исследование наивыгоднейшей высоты балки.

Построение кривых давления имеет особое значение в арках, ось которых, очевидно, желательно подбирать так, чтобы она по возможности сливалась с кривой давления для наиболее характерной для данной арки нагрузки, ибо в этом случае сила центрально сжимает отдельные элементы арки и вовсе не изгибает их (см. следующую главу). Поэтому построению кривой давления в арке мы и посвятим еще несколько соображений.

Предположим, что мы имеем дело с трехшарнирной аркой, т.-е. с такой конструкцией, которая состоит из двух отдельных частей — двух отдельных дисков. Каждый диск (см. рис 50) с одной стороны опирается на шарнирно-подвижную опору, а с другой — на соседний диск, который для него является, как бы подвижной одностержневой опорой (см. выше). Итак, каждый диск опирается на три стержня, и задача статически определима.

Кривая давления в этом случае безусловно должна, в виду идеальности шарниров, проходить через три шарнира, чем используются все три степени свободы веревочно-стержневого многоугольника, т.-е. такой многоугольник может быть лишь один. Проходить же через 3 точки-шарниры кривая давления должна потому, что всякий идеальный шарнир (без трения) в уравновешенной системе, находящейся в состоянии покоя, не может иметь относительно своей оси какого-либо момента от внешних сил, ибо таковой момент должен был бы вызвать вращение (и в виду идеальности шарнира и осуществил бы его), а мы интересуемся сооружением в состоянии покоя и в этом, состоянии действие сил, левее и правее шарнира находящихся, должно проходить через ось шарнира.

Решить нашу задачу легко: найдя равнодействующую левых сил R_l , разлагаем ее по трем стержням левого диска, т.-е. фактически по двум направлениям, а равнодействующую правых сил R_p — по трем стержням правого диска, т.-е. опять же по двум направлениям, и задача решена.

Найдя равнодействующую правых и левых опорных реакций R_I и R_{II} и поместив полюс в точке их пересечения O' , мы построим нашу кривую давления.

Ту же задачу можно решить и аналитически, рассматривая *отдельно каждый диск*, и решая для него *три уравнения равновесия*. Иногда это решение предлагают в такой форме, что *четыре* опорных силы *всего* сооружения можно найти аналитически, *присоединив* к трем уравнениям статики *четвертое*, гласящее, что момент *левых* (или *правых*) сил относительно *среднего шарнира* равен нулю. Это правильно, но принципиально нежелательно прибегать к *четвертому* уравнению. Лучше установить,

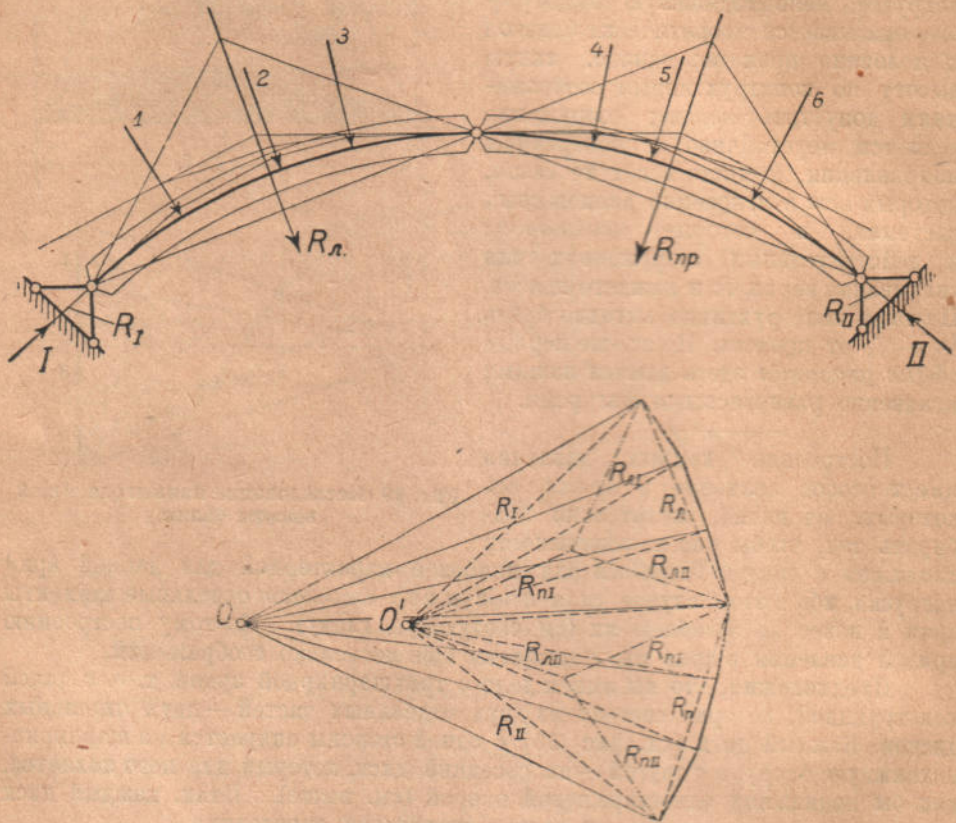


Рис. 50. Исследование трехшарнирной арки.

как правило, что для *каждого отдельного диска* можно писать *лишь три уравнения*. Решение, конечно, будет то же.

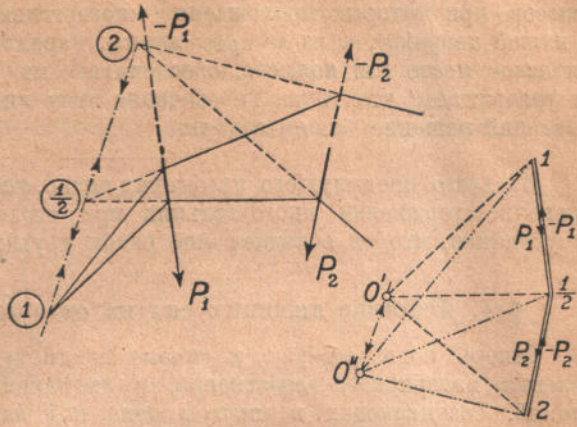
Также можно решить и всякую задачу о проведении многоугольника через три точки.

Иногда задачу о проведении веревочно-стержневого многоугольника через три точки решают при помощи теоремы, гласящей, что *при перемещении полюса по какой-либо прямой в плане сил, точки пересечения всех соответственных лучей в поле сил оказываются на прямой, параллельной пути полюса*.

Докажем эту теорему (см. рис. 51).

Сделаем построение при обоих полюсах и установим, что лучи 1 пересеклись в точке (1), лучи 1—2 пересеклись в точке $\left(\frac{1}{2}\right)$, а лучи 2—в точке (2).

Докажем, что линия $(1) - \left(\frac{1}{2}\right) - (2)$ параллельна линии $O' - O''$. Предположим, что второе построение сделано не для сил P_1 и P_2 , а для сил $-P_1$ и $-P_2$. Но так как ясно что силы P_2 и $-P_2$ должны дать равнодействующую O , то и четыре силы, на которые мы их разложили на плане сил $\left[\left(O' - \frac{1}{2}\right); \left(O' - 2\right); \left(O'' - \frac{1}{2}\right); \left(O'' - 2\right) \right]$, должны уравновеситься в поле сил. Эти четыре силы пересекаются попарно в точках $\left(\frac{1}{2}\right)$ и (2) , и чтобы они взаимно уничтожались, необходимо, чтобы равнодействующая сил $\left(O' - \frac{1}{2}\right)$



и $\left(O'' - \frac{1}{2}\right)$, а также сил $\left(O' - 2\right)$ и $\left(O'' - 2\right)$ совпадали обе с линией $\left(\frac{1}{2}\right) - (2)$ в поле сил. Для этого необходимо, чтобы эта линия была параллельна линии $O' - O''$, как дающей в плане сил как раз направление нужных равнодействующих.

Рис. 51. Теорема о влиянии перемещения полюса на вид веревочно-стержневой многоугольника.

Помощью этой теоремы мы решаем задачу о трех точках так (см. рис. 52):

1) берем произвольный полюс O и строим веревочно-стержневой многоугольник так, чтобы средний луч прошел через средний шарнир;

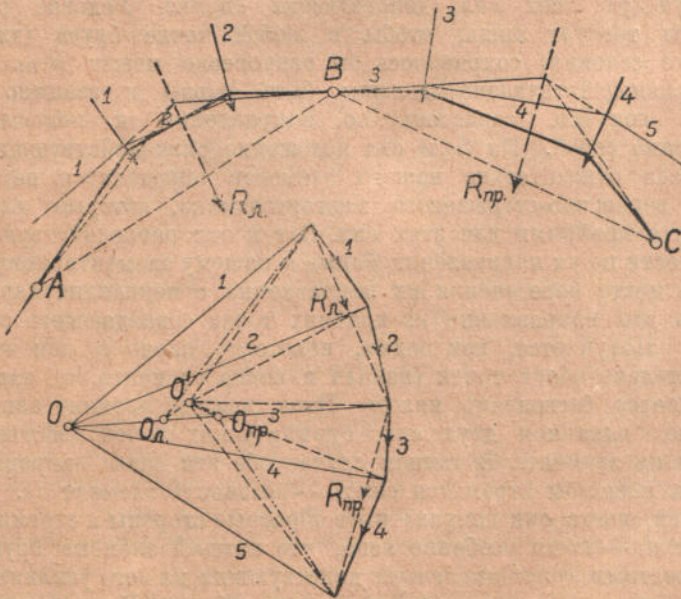


Рис. 52. Проведение кривой давления через 3 заданные точки.

2) найдя равнодействующую левых сил, ищем такой полюс, при котором бы левая часть веревочного многоугольника прошла через шарниры A и B

с сохранением направления среднего луча. Очевидно, что таким полюсом будет O лев.

3) Отыскиваем так же O пр.

4) Проводя из O лев. линию, параллельную AB (геометрическое место полюсов, при которых прохождение многоугольника через A и B обеспечено по нашей теореме), а из O прав. линию, параллельную BC (такое же геометрическое место для полюсов, обеспечивающих прохождение через B и C), мы утверждаем, что точка пересечения этих линий O' будет полюс, обеспечивающий решение нашей задачи.

Из всего предыдущего изложения видно, какое реальное значение имеет веревочно-стержневой многоугольник при исследовании сооружений. Ниже мы убедимся, что он обладает еще рядом других важных свойств.

§ 4. Действие внешних сил на отдельный элемент бруса.

Теперь подойдем уже к самому предмету курса, к вопросам „Сопrotivления материалов“ собственно, и займемся рассмотрением различных явлений, возникающих в упругом теле под влиянием внешних сил. Тело наше возьмем в форме бруса, и сначала для большей простоты рассуждений предположим, что наш брус плоский, т.-е. пока будем иметь дело только с двумя измерениями. Вырежем из нашего бруса, в любой его точке, двумя бесконечно-близкими друг к другу сечениями, некоторый бесконечно-малый элемент ds и обратимся к его изучению (см. рис. 53).

Пусть наш брус является вполне уравновешенным, т.-е. пусть и план и поле сил образуют замкнутые фигуры. Хотя наша система и является уравновешенной, но взяв некоторый разрез по элементу ds бруса, мы для этого разреза в общем случае получим некоторую неравную нулю равнодействующую всех сил, действующих на наш элемент *слева*, и *такую же* равнодействующую всех сил, действующих *справа*. Условие равновесия всей системы требует лишь, чтобы в любой точке бруса (для любого элементарного сечения) сохранялось бы равновесие плеча R пр и R лев., т.-е. обе равнодействующие должны быть равны и взаимно противоположны и, конечно, совпадать по направлению и положению, что получается само собой. На *поле* сил положение равнодействующих правых или левых сил относительно нашего элемента определится пересечением тех сторон веревочно-стержневого многоугольника, которые для нашего сечения явятся крайними для этих сил. Затем эти равнодействующие силы можно перенести по их направлению ближе к нашему элементарному сечению, а именно на место пересечения их направления с перпендикулярами, опущенными на это направление из крайних точек совпадающего с сечением элемента ds . Получается, как видим, некоторое плечо r , конечно *одинаковое* относительно обоих точек (начала и конца элемента ds), так как наш элемент является бесконечно малым. Итак, каждый элемент нашего бруса находится под влиянием двух сил, суммирующих собой действие правых и левых сил на элемент. В данном случае обе эти силы направлены друг против друга и как бы стремятся сжать — раздавить элемент ds . Но может быть и случай, когда они направлены в обратные стороны и стремятся разорвать элемент ds — тогда особенно ясно, что каждый элемент бруса должен обладать известным *сопротивлением* действующим на него усилиям и *как бы связывать собой в виде мостика две половины бруса*. В нашем случае силы стремятся раздавить элемент ds . Сопrotivление материалов именно и изучает эти возникающие в каждом элементе бруса усилия и дает нам возможность вычислять должные размеры сооружения, гарантирующие ему надлежащую сопротивляемость этим усилиям.

В статике доказывалась теорема о разложении данной силы по данному полюсу. Не останавливаясь здесь на ее доказательстве, припомним ее формулировку— „каждую силу, действующую на твердое тело, можно перенести в любую точку плоскости, заменив ее там некоторой силой и парой, при чем действие силы на тело от этого не изменится“. Графически пару принято изображать вектором, направленным перпендикулярно к плоскости ее действия, при чем иногда круговая стрелка, окружающая вектор, указывает направление вращающего момента пары; можно определить это направление и стрелкой, помещаемой на векторе, и указывающей знак

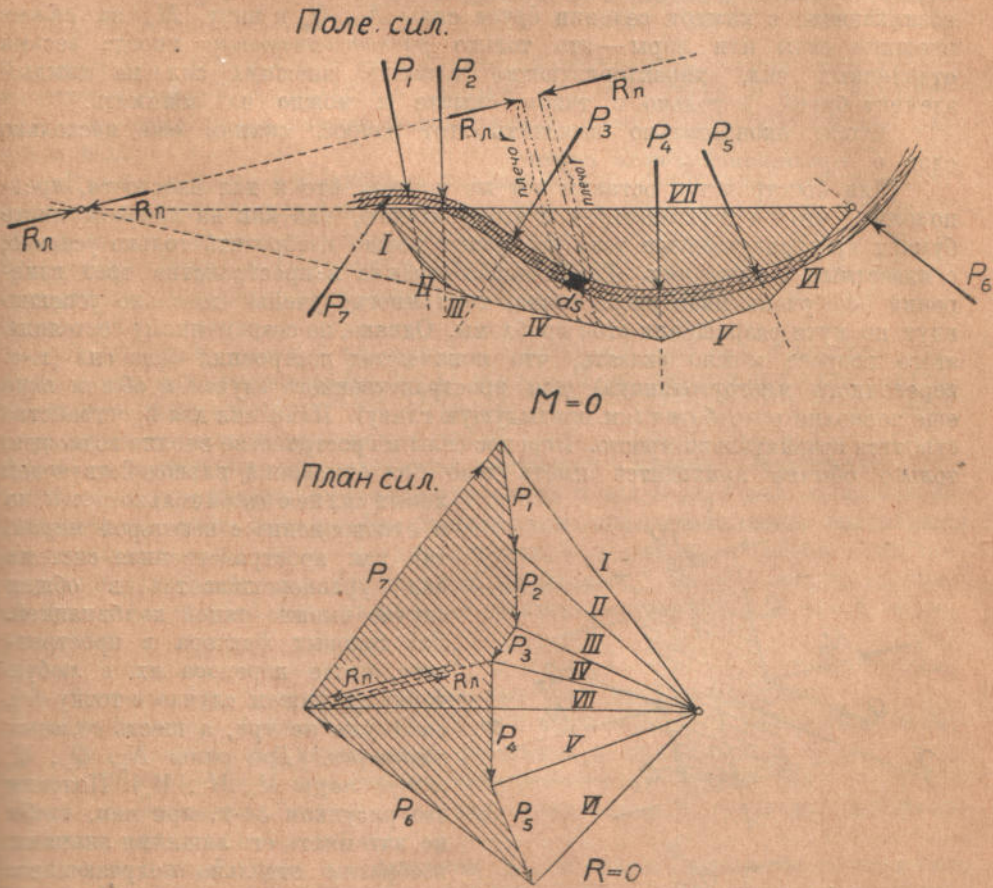


Рис. 53. Действие внешних сил на элемент ds .

момента. Перенесем, на основании этой теоремы, R левую в левую точку нашего элемента ds (см. рис. 53). Получаем, кроме нашей силы, которую разлагаем в направлении осей OZ и OY , проводимых по направлению касательной и нормали к оси бруса в точке ds , еще и некоторую результирующую пару с моментом M_x и вектором, направленным перпендикулярно к плоскости чертежа. Окончательно получаем: слагающие нашей силы по осям координат: N_z и Q_y и пару с моментом M_x . N_z есть нормальная сила (Normalkraft), а Q_y —поперечная (Querkraft). Переносим R пр. в правую крайнюю точку элемента ds и, делая те же построения, получаем еще три вектора: $-N_z$; $-Q_y$; $-M_x$. Теперь уже более ясно видно, под действием внешних шести (именно шести) сил находится каждый элемент нашего плоского

бруса. Все эти силы взаимно уравниваются, что, конечно, возможно лишь при наличии известной прочности, жесткости и устойчивости элемента, так как иначе силы Q_y и $-Q_y$ унесут обе половинки нашего тела одну вверх, другую вниз, силы N_z и $-N_z$ разорвут или раздают элемент ds , а пары сил M_x и $-M_x$ отнесут обе половинки нашего бруса в разные стороны, вращая (кувыркая) их в противоположных направлениях.

Так как мы имеем дело с бесконечно-малым элементом ds , то очевидно, что силы Q_y и $-Q_y$ ни в каком случае не образуют собой пары, как могло бы показаться на первый взгляд. Точно так же было бы ошибкой считать возникающие в каждом сечении бруса силы N_z , Q_y и пару M_x за самые внешние силы или пары—это только равнодействующие иногда весьма отдаленных сил, характеризующие влияние внешних сил на каждый элемент бруса, и только в таком смысле и можно их понимать.

Чтобы окончательно выяснить этот вопрос, скажем еще несколько слов о пространственном случае.

Для пространства оставим тот же чертеж, что и для плоскости, предположив, что он соответствует и этому случаю, так как на плоском листе бумаги пространственные тела все равно можно изобразить только условно, с известным искажением. Графическая статика в пространстве трех измерений еще очень мало разработана, хотя многие ученые довольно успешно идут по пути разрешения этой проблемы. Однако, по современному состоянию этого вопроса можно сказать, что пока метод построения поля сил (т.-е. веревочного многоугольника) для пространственного случая в общем виде еще не вполне разработан (см. предыдущую главу). План сил для пространства строится сравнительно просто. Перенос силы в пространстве вполне возможен, только обычно приходится иметь дело при отыскании равнодействующей

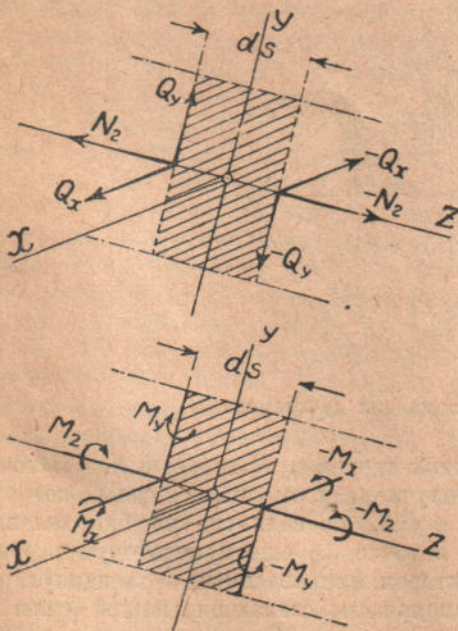


Рис. 54. Действие сил на элемент ds .

левых сил не с одной только силой, но и одновременно с некоторой парой, так как пространственная система сил уравнивается в общем случае именно такой комбинацией. Два силовых фактора в пространстве, после переноса их в любую точку (в нашем случае в точку ds), дают уже не три, а шесть силовых факторов. (Три силы N_z , Q_x , Q_y и три пары M_x , M_y , M_z). Поясним это рисунком 54-м, при чем, чтобы не затемнять его лишними линиями, изобразим отдельно получающиеся силы и отдельно пары. На деле, конечно, обе эти схемы сливаются в одну. Разберем различные комбинации шести пространственных силовых факторов. Если имеются только силы N_z и $-N_z$, то получаем явление, называемое „растяжением или сжатием“ элемента ds . Если имеются только Q_y и $-Q_y$, получаем „сдвиг в вертикальной плоскости“. Q_x и $-Q_x$ вызывают сдвиг в горизонтальной плоскости.

Если имеем M_x и $-M_x$, то получаем кручение элемента ds , а если имеем M_y и $-M_y$, то получаем изгиб элемента ds в вертикальной плос-

кости. M_y и $-M_z$ вызывают изгиб в горизонтальной плоскости. Выпишем все это в табличку.

силы	N_z	сжатие или растяжение,
	Q_y	сдвиг в вертикальной плоскости,
	Q_x	сдвиг в горизонтальной плоскости,
пары	M_z	кручение вокруг оси OZ ,
	M_x	изгиб в плоскости чертежа,
	M_y	изгиб в плоскости, перпендикулярной чертежу.

Оси OX , OY и OZ в этом случае обыкновенно первоначально располагаются по касательной (OZ), по главной нормали (OY), и по бинормали (OX), но ниже будет указан более рациональный выбор направления для OY и OX .

В этом анализе мы охватили все возможные комбинации действующих в любом сечении бруса усилий и при том независимо от того, имеем ли мы дело со статически определимой, или со статически неопределимой проблемой. Итак, этих усилий может быть только *шесть*, и „Соппротивление Материалов“ выполнит свою задачу, изучив эти 6 основных явлений.

Возвратимся снова к плоскостному расположению сил и зададим себе вопрос: как изменяются силы N_z , Q_y и пары M_x на протяжении длины бруса. Обозначим наши силы так: $N_z = f_1(s)$; $Q_y = f_2(s)$; $M_x = f_3(s)$, и постараемся себе выяснить зависимость между траекторией (длиной) бруса и действующими на отдельные его элементы внешними силами. Оказывается, что метод веревочно-шарнирного многоугольника и здесь дает нам возможность ответить на этот вопрос. Но раньше чем дать графическое пояснение, мы выльям нашу идею в аналитической форме (для общего случая трех измерений), т.-е. в форме, так называемых *шести строк*, связывающих между собой все главнейшие факторы, интересующие нас в брусе, а именно:

- 1) нагрузку внешних сил k_x , k_y , k_z и вызываемые ею внутренние силы;
- 2) силы N_z , Q_y и Q_x и вызываемые ими внутренние силы;
- 3) моменты (пары) M_x , M_y , M_z и вызываемые ими внутренние силы;
- 4) кривизны оси, вызываемые действием внешних сил;
- 5) углы наклона оси, вызываемые действием внешних сил;
- 6) перемещения точек оси, как окончательный результат действия внешних сил.

В настоящей главе мы затронем только связь между тремя первыми „строками“, но для полноты картины мы заранее перечислили все факторы, связанные между собой последовательной связью.

Так как мы захватываем вопрос в самой общей форме, то мы должны предположить, что наша нагрузка сплошная и распределена по всей длине бруса (это касается как активных, так и реактивных сил) т.-е. мы должны видеть явление в его истинном виде, не вводя никаких условных сосредоточенных сил. Нагрузку эту можно рассматривать состоящей в *любой* точке из трех составляющих, параллельных местным координатным осям, проведенным в *изучаемой* точке. Обозначим составляющие нагрузки через k_x , k_y , k_z , подразумеваемая под этими символами только напряженность наших сил, приходящаяся на единицу длины бруса. Самые же нагрузки, действующие в *каждой* точке на наш брус, в этом обозначении выразятся в таком виде:

$$k_x \cdot ds \quad k_y \cdot ds \quad k_z \cdot ds.$$

Возникающая в нашем элементе нормальная сила N_z очевидно представляет собой совокупность действия составляющих нагрузок вида $k_z ds$, расположенных по пути s , т.-е. получаем:

$$N_z = N_z^o + \int_0^s k_z ds,$$

(приняв за начало измерения аргумента s действительное начало бруса и обозначив пройденный до рассматриваемого элемента путь через s). Подобно этому

$$Q_y = Q_y^o + \int_0^s k_y ds \quad \text{и} \quad Q_x = Q_x^o + \int_0^s k_x ds.$$

Итак, можем сказать, что возникающие в любом поперечном сечении бруса силы представляют собой некоторые интегралы от нагрузки. Если мы начинаем интегрирование не с начала бруса, или, если левую опорную реакцию берем, как сосредоточенную силу, то появляются еще и произвольные постоянные интегрирования, которые и указаны во всех формулах. Эти произвольные постоянные вполне уместны потому, что в сущности мы имеем интеграл неопределенный, ибо выражение одинаково справедливо для любой точки бруса. Дабы значение значков x, y, z стало яснее, полезно представить себе, что мы выбираем особую систему координат, в которой первым аргументом будет величина s , а вторым и третьим — величины x и y , для каждой точки оси проводимые по новому направлению: нормали и бинормали к оси. Такая система координат возможна при заранее заданном очертании оси бруса (сравни тороидальные координаты). Для этой системы формулы 6-ти строк становятся особенно общими.

Как было выяснено раньше, кроме сил N_z, Q_x и Q_y в элементе возникают еще некоторые пары сил с моментами M_x, M_y, M_z . Силы, образующие эти пары сил, суть равнодействующие соответствующих (слева от нашего сечения лежащих) сил, а так как мы наши силы разложили параллельно координатным осям и, как известно, момент равнодействующей равен сумме моментов составляющих, то, очевидно, что напр. M_x должен быть составлен из сумм моментов элементарных слагающих сил, направленных параллельно оси OY , умноженных на соответствующие плечи, минус суммы моментов элементарных составляющих сил, направленных параллельно оси OZ , умноженных на соответственные плечи. (Третье элементарные составляющие сил, параллельные оси OX , на величину момента M_x не влияют). Момент по длине бруса накапливается по закону $M_{s+\Delta s} = M_s + R_s \cdot \Delta s$, что для M_x дает $M_{x+\Delta x} = M_x + Q_y \cdot \Delta z - N_z \cdot \Delta y$, а потому результирующий момент, равный сумме таких накоплений, распространенной по всему пути накопления, можно представить себе для всех трех моментов в виде определенных интегралов:

$$M_x = M_x^o + \int_0^s Q_y \cdot dz - \int_0^s N_z \cdot dy,$$

$$M_y = M_y^o + \int_0^s N_z \cdot dx - \int_0^s Q_x \cdot dz,$$

$$M_z = M_z^o + \int_0^s Q_x \cdot dy - \int_0^s Q_y \cdot dx.$$

И здесь могут быть произвольные постоянные M_x^0 , M_y^0 , M_z^0 , если исследование начнется не с начала бруса. При выборе вышеназванной системы координат формулы приобретают особо общее значение.

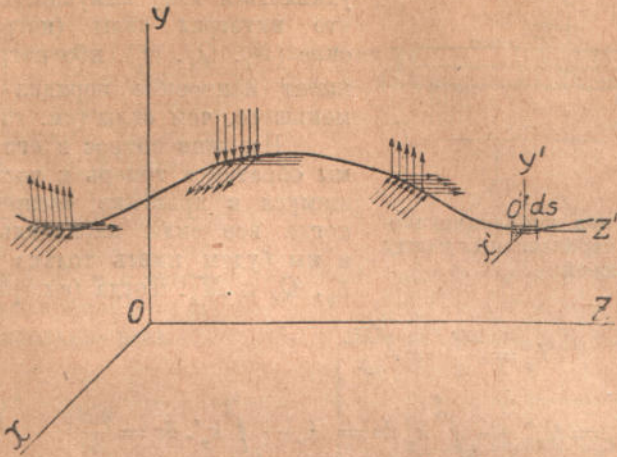


Рис. 55. Закон образования сил и моментов.

Значит, моменты возникающих в нашем сечении пар зависят от составляющих сил, являясь их интегралами, а следовательно их можно выразить, как двойные кратные интегралы от нагрузки, взятые в пределах длины траектории s . Рассматривая полученные для моментов формулы, мы видим, что они напоминают знакомые нам из Теоретической Механики выражения моментов $M_z = X \cdot y - Y \cdot x$ и т. д. Выпишем все полученные нами результаты в особую таблицу:

Измерение порядка FL^{-1}	Измерение порядка FL^0	Измерение порядка FL^1
k_x	$Q_x = Q_x^0 + \int_0^s k_x \cdot ds$	$M_y = M_y^0 + \int_0^s N_z dx - \int_0^s Q_x dz,$
k_y	$Q_y = Q_y^0 + \int_0^s k_y \cdot ds$	$M_x = M_x^0 + \int_0^s Q_y \cdot dz - \int_0^s N_z dy,$
k_z	$N_z = N_z^0 + \int_0^s k_z \cdot ds$	$M_z = M_z^0 + \int_0^s Q_x dy - \int_0^s Q_y \cdot dx.$

Подчеркнуты величины, имеющие значение для случая действия сил в двух измерениях, если OX перпендикулярно чертежу.

Три написанных нами столбца и являются первыми тремя строчками более общей теоремы „шести строк“, с которой во всей ее полноте, мы встретимся ниже. Эти три строки аналитически выражают зависимость между нагрузкой и возникающими в любом сечении бруса силами N_z , Q_x , Q_y и парами M_x , M_y , M_z .

Конечно, разобранный случай соответствует только случаю сплошным образом распределенной нагрузки, когда и приходится производить инте-

гирование; в случае условных сосредоточенных сил интегрирование заменяется суммированием. Нагрузка еще не есть самая сила, а сила, отнесенная

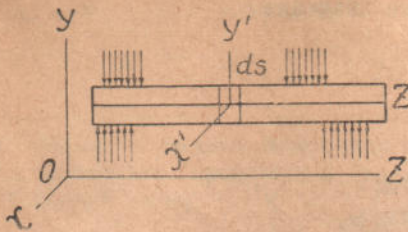


Рис. 56. Случай сил, перпендикулярных оси балки и параллельных между собой.

к единице длины, поэтому не нужно удивляться тому кажущемуся парадоксу, что интеграл силы (нагрузки) равен силе (N_x, Q_x, Q_y), ибо нагрузка по оси имеет измерение порядка на единицу меньшего, чем силы (см. таблицу).

Изложив вопрос в его общем виде, мы обратимся теперь к часто встречающемуся в практике частному случаю, когда все силы параллельны оси OY и мы будем иметь только три фактора: k_y, Q_y и M_x . Тогда (см. рис. 56):

$$k_y = \frac{\partial Q_y}{\partial z} = \frac{\partial^2 M_x}{\partial z^2}$$

$$Q_y = Q_y^o + \int_0^z k_y ds = A_o - \int_0^{z_0} k'_y ds = \frac{\partial M_x}{\partial z}$$

$$M_x = M_x^o + \int_0^z Q_y dz = M_x^o + A_o z - \int_0^{z_0} \int_0^z k'_y ds dz.$$

Из этих формул видно, что нагрузка является второй производной от момента, взятой по z ; поперечная сила — первой производной от момента по z ; момент в свою очередь можно представлять в виде двойного интеграла от нагрузки, взятого дважды по z . Все это непосредственно следует из чисто математических преобразований наших общих уравнений. Мы не всегда вводим в наши формулы произвольную постоянную интегрирования, так как в тех случаях, когда предполагаем, что начинаем подсчет от самой начальной точки, принимаемой нами за нуль, левее которой ни бруса, ни нагрузки нет, то произвольные постоянные оказываются равными нулю. Если же, как это обычно и бывает, начальные силы имеют какое-либо значение, отличное от нуля, т.-е. мы начинаем исследование не с самой начальной точки бруса, то необходимо ввести в наши формулы соответственное значение произвольных постоянных A_o и M_o . A_o в данном случае обозначает результирующую силу, выражающую совокупность сил, накопившихся левее нашей начальной точки; такое же значение имеет M_o . Нагрузки k_x и k_y пишем в формуле со значком ', т.-е. k'_x, k'_y — этим указываем, что эти элементарные нагрузки идут уже не от начальной точки бруса, а от некоторого конечного начального значения левых сил и принимаем k' , идущее книзу, за положительную величину. Обычно k' идут книзу, т.-е. уменьшают Q_y , (если ось OY направлена вверх).

Геометрическое представление любого двойного кратного интеграла

$$\int_0^{z_0} \int_0^z f(z) dz dz \text{ или } \int_0^{z_0} dz \int_0^z f(z) dz$$

может быть получено в виде некоторого объема (см. рис. 57), равного

$$\int_0^{z_0} f(z) (z_0 - z) dz$$

и в нашем частном случае

$$\int_0^{z_0} k_y (z_0 - z) dz,$$

т.е. как-раз моменту от k_y относительно точки z_0 (см. рис. 56). Рисунок 57 не требует объяснения: на нем в плоскости YOZ нанесена кривая $y = f(z)$, искомый двойной интеграл дается объемом, заключенным между плоскостями координат, плоскостью $z + z' = z_0$ и цилиндрической поверхностью, с образующей параллельной OZ' и с направляющей в виде кривой $y = f(z)$.

Действительно, ведь

$$\int_0^{z_0} \int_0^z y \cdot dz dz$$

можно рассматривать, как

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \sum_{z=0}^{z=z_0} \int_0^z y \cdot dz \cdot \Delta z.$$

Но значение этой суммы не изменится от перестановки порядка слагаемых, т.е.

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \sum_{z=0}^{z=z_0} \int_0^z y \cdot dz \cdot \Delta z = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \sum_{z=0}^{z=z_0} \int_0^z y \cdot dz \cdot \Delta z.$$

И вот, рассекая наш объем вертикальными плоскостями, параллельными YOZ , на расстояниях Δz друг от друга, мы и получим в сумме

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \sum_{z=0}^{z=z_0} \int_0^z y \cdot dz \cdot \Delta z$$

как это видно из примера одного промежуточного элемента, отмеченного нами густой заштриховкой, а рассекая плоскостями, перпендикулярными первым, мы для каждого объема будем иметь его значение $y (z_0 - z) dz$, т.е. весь объем равен

$$\int_0^{z_0} y (z_0 - z) dz$$

Заканчивая аналитическую интерпретацию идеи шести (пока еще ~~несколько~~) строк, напомним еще раз, что связь между тремя нашими строками всегда имеет тот вид, который нами выше приведен, и потому интеграция нагрузки всегда укажет нам на значение нужных нам сил N_x , Q_x , Q_y и моментов M_y , M_x и M_z и что начинать эту интеграцию можно с любого места сооружения — следует лишь за произвольные постоянные интегрирования принять значения величин N_x^0 , Q_x^0 , Q_y^0 и M_x^0 , M_y^0 , M_z^0 , имеющие место в той точке, с которой начинается интеграция, под влиянием *всех*

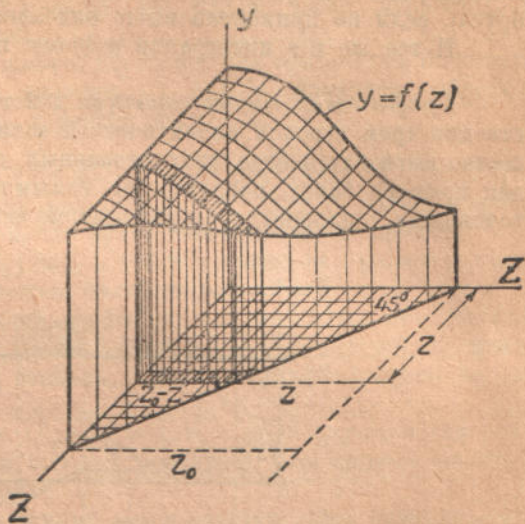


Рис. 57. Графическое изображение краткого интеграла.

более левых нагрузок. При этом только оси X, Y, Z , в начальной точке следует брать параллельно таковым же осям в рассматриваемом сечении.

Кончатъ интеграцию тоже можно, где-угодно; выше уже указано, что мы имеем дело с неопределенным интегралом (почему и берем произвольные постоянные при интегрировании), но, конечно, обычно интеграцию доводят до конца сооружения, проведя ее через все промежуточные точки и беря, конечно, для каждой точки свою систему координат (в случае не прямого бруса), если не применена выше описанная особая система координат.

И все же все интеграции ведутся по одному аргументу ds .

Графическая интерпретация действия сил на элемент бруса, соответственно трем строкам аналитической зависимости, позволяет то же соотношение выразить в виде трех связанных друг с другом чертежей. Возьмем для примера балку, нагруженную самыми разнообразными силами, сосредоточенными, сплошными, неравномерно-сплошными и т. д. (см. рис. 58).

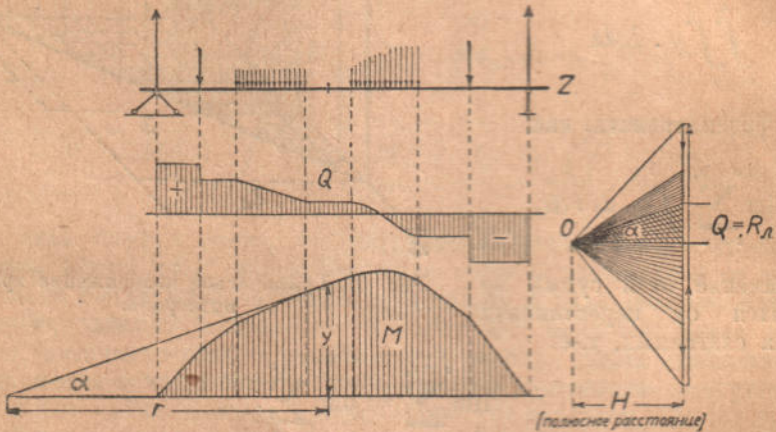


Рис. 58. Три строки для простой балки.

Понятно, что поле сил, где изображены все эти силы, вполне заменяет нам первую строчку аналитической формулы, изображающую нагрузки k_y . На второй строке чертежа отложены в известном масштабе поперечные силы (равнодействующие левых сил)—это вполне аналогично второй аналитической строке. Наконец, третья строка чертежа—уже знакомый нам веревочно-стержневой многоугольник—эпюра моментов—соответствует третьей аналитической строке, ибо $Q_y = \operatorname{tg} \alpha \cdot H$, а из подобия треугольников с углом α в поле и плане сил $\frac{y}{Q_y} = \frac{r}{H}$ т. е. $y \cdot H = Q_y \cdot r = M_x$.

Для данной системы H —величина постоянная и, выбрав ее, например, равной одной силовой единице, имеем $y = Q_y \cdot r = M_x$, т. е. в известном масштабе наш веревочный многоугольник является линией, выражающей закон изменения моментов M_x (такая линия называется эпюрой моментов).

Кроме того, из получающейся формулы $Q_y = \operatorname{tg} \alpha \cdot H$ видим, что Q_y пропорциональна тангенсу угла наклона моментной эпюры, — есть производная момента по dz , что было выведено и аналитическими формулами.

Графический метод, требуя, правда, тщательного вычерчивания, избавляет нас от грубых просчетов (вдвое, в десять раз), всегда могущих получиться от рассеянности при аналитическом методе, и дает при этом вполне достаточную для практики точность, но конечно, целесообразнее всего вести построение и подсчеты параллельно.

Если глубже вдуматься в только что изложенный пример, то мы можем вывести из него ряд важных положений.

1) Построением веревочно-стержневого многоугольника мы фактически производим двойное интегрирование той функции, которая выражает нашу нагрузку, при чем первый интеграл определяется при помощи многоугольника сил на плане сил, а второй — при посредстве ординат веревочно-стержневого многоугольника в поле сил.

Этим свойством нашего построения мы будем часто пользоваться в дальнейших наших исследованиях.

2) Установленная нами зависимость позволяет нам предвидеть по характеру нагрузки закон изменения поперечных сил и моментов; обратно, по виду эпюры моментов — указать характер нагрузки.

Ясно, действительно, что:

на участке без нагрузки Q будет постоянной величиной (в частности, но не всегда, равной 0), а M будет наклонной прямой т.-е. кривой первой степени; (в частности, при $Q = 0$, M будет горизонтальной прямой),

на участке с постоянной нагрузкой Q будет наклонной прямой (кривая первой степени), а M — кривой второй степени (параболой);

на участке с нагрузкой, изменяющейся по какому-нибудь степенному закону (например $k_y = \alpha_n z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \dots + \alpha_0$) Q изменится по кривой, высшей на одну степень, а M — по кривой, высшей на две степени;

под сосредоточенным грузом Q дает уступ, а M — перелом (на деле сосредоточенного груза не должно быть, а потому Q дает крутое падение, а M — крутой загиб).

Обратные указания остаются такими же, и следует лишь отметить, что при M постоянном Q должно равняться 0, и нагрузки на данном участке быть не может.

Кроме того Q равно 0 там, где M дает максимум или минимум, и вся площадь Q должна равняться нулю, ибо на правой опоре $M_x = 0$.

3) Внимательное изучение веревочно-стержневого многоугольника — линии моментов в его новом значении — позволяет нам теперь ясно представить, как данная группа уравновешенных сил, действующих на сооружение, создает эти моменты. Действительно (см. рис. 59), двигаясь по линии ab слева направо, мы сначала до точки 1 не обнаруживаем никакого действия нашей группы девяти сил (что, между прочим, указывает, что они находятся, как будет видно из дальнейшего, в равновесии), и лишь в точке (1) сила P_1 , как бы бросает в пространство вправо снап лучей с раструбом α ; это есть возрастающий беспредельно по линейному закону момент от этой силы (можно возразить, что такой же снап должен быть направлен и влево — и таковой снап действительно имеется, но, как мы покажем ниже, он уничтожается действием остальных сил, рассматриваемых справа налево). В точке (2) этот снап ослабляется действующими с обратным знаком снапом лучей от силы P_2 — почему и происходит перелом линии M . То же имеет место в точках (3), (4), (5), (6), (7) и (8), и, наконец, в точке (9) последняя сила P_9 бросает вправо как-раз такой снап, который полностью уничтожает остаток лучей от предыдущих сил (результатирующий снап) — и, начиная с точки 9 вправо, мы вновь выходим на путь, свободный от всякого влияния наших девяти сил.

Идя таким же путем справа налево, мы докажем, что и направленные влево пучки так же уравновешиваются полностью к точке (1) и левее ее.

Но стоит нам, не нарушая значения всех девяти сил, сдвинуть силу P_9 вправо на величину Δ (см. рис. 59 сила (P_9), что равносильно прибавлению силы — $P_9 \cdot \Delta$, как равновесие нарушится, система, очевидно, будет приведена в движение, и, действительно, двигаясь слева направо, мы получим удаляющийся

в бесконечность вправо пучок *параллельных* лучей—*пару*, а при движении справа налево—тот же пучок, удаляющийся в бесконечность влево. Эпюра Q при этом не изменится. Конечно, при наличии трех и более опорных стержней этот случай *невозможен*.

Вышеизложенное понимание ординат веревочно-стержневого многоугольника допускает еще более глубокое применение его при исследовании *мгновенно-равновесных* систем, а впоследствии и систем жестких, неизменяемых (так называемых *ферм*). Действительно, наш многоугольник не только *дает* мгновенно-равновесную форму, но и *указывает* распределение поперечных сил и моментов по длине этой формы — ясно и без объяснений, какое значение это может и должно иметь при исследовании данной формы.

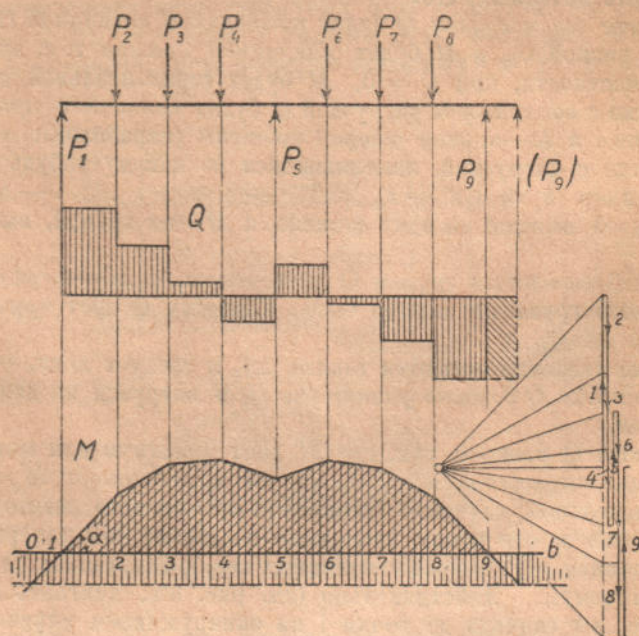


Рис. 59. Образование моментов и возможность неуравновешенной нагрузки.

4) Все вышеизложенное применимо и к пространственному случаю. Если мы имеем случай пространственного действия сил и будем изучать действие этих сил на элемент ds , оси координат которого проведены, как всегда, по направлению касательной (OZ), главной нормали (OY) и бинормали (OX), и если мы проведем основные оси координат параллельно этим осям (что, как мы увидим ниже, даже не необходимо), то мы можем поступить так: спроектируем ось бруса и все нагрузки на три плоскости координат; при этом на каждой плоскости будем иметь две нагрузки, например, на плоскости YOZ (см. рис. 60) нагрузки k_y и k_z . Изучая сначала действие нагрузки k_y , т. е. строя от нее одной веревочно-стержневой многоугольник, мы найдем эпюру Q_y и ту часть M_x , которая вызывается действием величин k_y . При этом многоугольник сил всегда замкнется для всего бруса, но веревочно-стержневой многоугольник может и не замкнуться, а дать в бесконечность пару, например, знака — и величиной M_x' . Далее, изучим действие нагрузки k_z , которая дает N_x и ту часть M_x , которая создается величиной k_z . Опять многоугольник сил будет замкнут, а момент может дать в бесконечность пару M_x'' , но всегда $M_x' + M_x'' = 0$ для конца бруса.

Так же можно разложить действие по остальным двум плоскостям координат и в результате получить для данной точки все шесть величин $\{N_x, Q_x, Q_y$ и M_x, M_y, M_z .

Можно, конечно, иметь оси X, Y и Z и непараллельные осям X', Y' и Z' , брать нагрузки k_x, k_y и k_z и, найдя значения N_x, Q_x, Q_y и M_x, M_y, M_z пересчитать их для данной точки, на N_x', Q_x', Q_y' и M_x', M_y', M_z' соответственно удобным для данной точки осям, ибо шесть данностей, к которым приводится любая система сил в пространстве, отнесенные к определенному полюсу, могут быть различны по величине в зависимости от направления осей, но в сумме приводятся к той-же равнодействующей комбинации силы и пары.

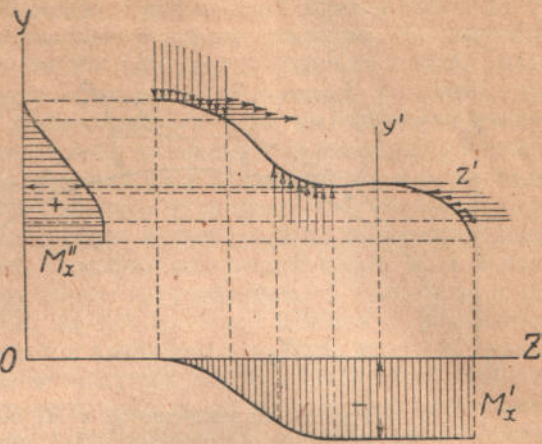


Рис. 60. Проекция пространственных сил на плоскость YOZ.

5) Наконец, при изучении непараллельных сил на плоскости можно или поступать так, как сейчас изложено, т.е. разложить их на два направления, параллельных основным или местным осям координат и исследовать силы по каждому направлению отдельно, или же вести построение сразу для непараллельных сил, как это будет изложено ниже. В самом деле, предположим, что нас интересует участок ds с осями OZ' и OY' (см. рис. 61). Построим общий план сил и общий веревочно-стержневой многоугольник по обычным приемам. Ясно, что на плане сил мы можем легко найти равнодействующую левых сил R и разложить ее там же на N_x' и Q_y' . Остается найти величину M_x' (или, что то же самое, это важно запомнить вообще, M_x). Но и тут мы имеем аналогично с параллельными силами два подобных треугольника в поле сил и на плане сил, если проведем в поле сил из точки ds линию, параллельную R , между соответствующими крайними лучами. Действительно

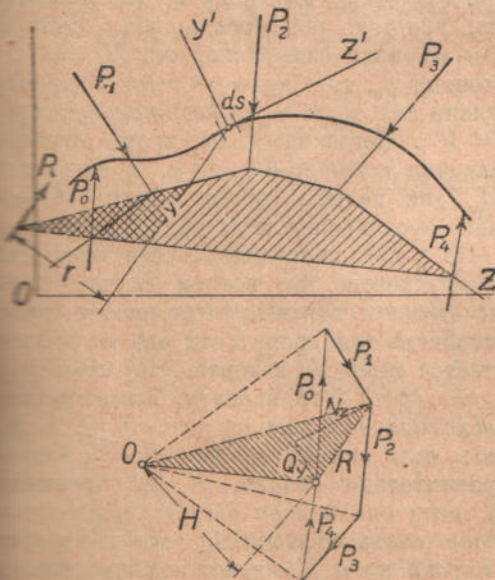


Рис. 61. Нахождение M_x в любой точке плоского бруса при непараллельных силах.

$\frac{y}{R} = \frac{r}{H}$ и $y \cdot H = R \cdot r$,
т.е. y в масштабе полюсного расстояния H (переменного для каждой равнодействующей) равен M_x .

т.е. y в масштабе полюсного расстояния H (переменного для каждой равнодействующей) равен M_x .

Этим способом можно исследовать и пространственный случай, разлагая силы по плоскостям координат и не производя разложения по осям.

Остается рассмотреть еще один особый случай (см. рис. 62). Если мы привели наш веревочно-стержневой многоугольник к кривой давления,

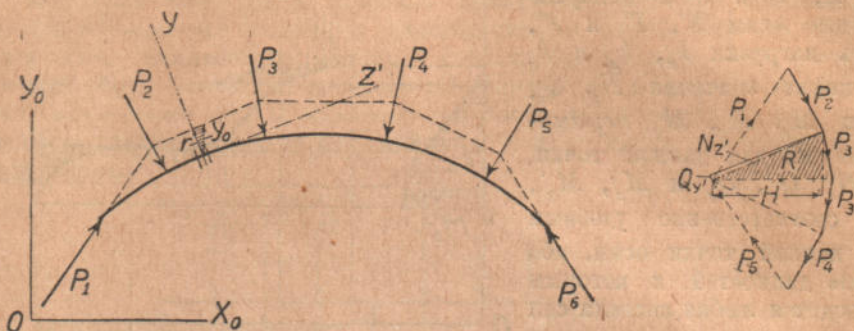


Рис. 62. Нахождение Q_y и M_x по кривым давления.

т.-е. начало координат поместили в плане сил в *начальной* (считая по расположению сил слева направо) контурной точке силового многоугольника, то отыскание величин N_x и Q_y производится по прежнему на плане сил. Но отыскать M_x (или M_x') на поле сил посредством веревочно-стержневого многоугольника нельзя (ибо такого замкнутого многоугольника при этом построении нет) и проведение из точки ds линии, параллельной R , дало бы пересечение с соответственным лучом (2—3) на бесконечности, т.-е. $y = \infty$ при $h = 0$ где h — местный полюс: $y \cdot h = \infty \cdot 0$, т.-е. получим *неопределенность*. Но в этом и нет надобности, ибо дело решается проще. Сила R известна из плана сил, а плечо r — из поля сил. Ясно, что $M_x = R \cdot r$. Если же мы в поле сил возьмем величину y_0 , т.-е. *вертикальную* ординату заштрихованной нами кривой, а в плане сил H , т.-е. *горизонтальную* проекцию R , то мы увидим, что $y_0 \cdot H = R \cdot r$. Когда все силы, кроме опорных реакций, вертикальны, то H есть величина *постоянная* и y_0 в известном *постоянном* масштабе выражает M_x для нашего бруса. Этим обстоятельством пользуются при изучении арок посредством кривой давления, когда активные силы вертикальны. Но и при непараллельности этих сил пользование плечом не представляет трудности. Во всяком случае ясно, что кривая давления самым своим положением характеризует работу бруса. Большею частью кривая давления строится для арки. Если она *совпадает* с осью арки, то $Q_y = 0$ и $M_x = 0$; остается лишь N_x , которая, если активные силы в плане сил расположены по дуге круга (что, впрочем, бывает редко), на всей длине еще и постоянна; если она *недалека от оси*, то Q_y и M_x малы, N_x более или менее постоянно; если она *далека от оси, но почти параллельна ей*, то Q_y мало, M_x сравнительно велико, N_x по прежнему имеет большое значение; и наконец, если она *далека от оси и непараллельна ей*, то Q_y становится *побольше* (очень большим Q_y все же в арке редко бывает), M_x достаточно значительно, но и N_x играет важную роль.

При этом в арке N_x почти всегда *отрицательно*, т.-е. *сжимает* брус, и M_x , следовательно, *положительно* тогда, когда кривая давления *выше* оси и наоборот; если кривая *выше*, то арка изгибается *вниз*, а если кривая *ниже*, то арка выпучивается *вверх*. Так как под сильной нагрузкой какой либо одной половины арки, эта половина, конечно, изгибается *вниз*, а противоположная выпучивается *вверх*, то и говорится, что нагрузка, расположенная

поверху арки, *притягивает* к себе кривую давления, потому что под нагрузкой она идет *выше* оси.

Для висячей системы N_z положительно, т.-е. растягивает; M_x следовательно положительно тогда, когда кривая давления идет *ниже* оси — опять же нагрузка, расположенная *под* цепью, *притягивает* кривую давления

Если ось арки или цепи *совпадает* с кривой давления, то получится мгновенно-равновесная система—это мы уже знаем. Если же кривая давления уходит от оси, то мгновенно-равновесная система *рушится*, как карточный домик — в арке и в цепи *одинаково*, если мы составили данную арку или цепь из *отдельных* „веревочно-стержневых“ элементов. *Стержни* распадутся в узлах, а *веревочки* изменят свое положение, у них не будет хватать длины, или они окажутся *черезчур* длинными, т.-е. *система нарушится*. Но если стержни и цепи связаны между собой по длине сооружения непрерывно и столь *жестко*, что способны воспринять кроме N_z и момент и поперечные силы, то система будет существовать и работать — и при отходе кривой давления от ее оси, но уже не будет мгновенно-равновесной. То обстоятельство, что „веревочки“ в вытянутой (висячей) мгновенно-равновесной *цепи* якобы *могут* приспособляться к новым нагрузкам, изменяя свое взаимное положение, чего отдельные стерженьки в мгновенно-равновесной *арке* сделать *не могут*, принципиальной разницы между обоими системами не делает, ибо какие-либо изменения во взаимном положении „веревочек“ для жесткой системы *недопустимы* с точки зрения правильного исполнения ею ее назначения, и, кроме того, эти изменения требуют проведения „веревочек“, у каждой силы через *блоки* так как *каждая* новая нагрузка *нуждается* в *новых* длинах для *отдельных* веревочек, и, если они по длине неизменяемы, то они *вовсе* *негодны* и *не могут* приспособиться к новой нагрузке; одна же *сквозная* веревочка, пропущенная у точек приложения сил через *блоки*, которая только и может легко приспособиться к новой нагрузке, нами к веревочному многоугольнику *не приравняется*.

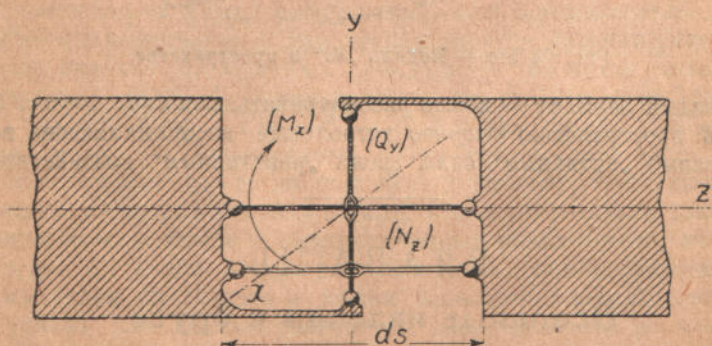


Рис. 63. Модель элемента ds на плоскости.

На этом мы заканчиваем главу о действии внешних сил на брус и переходим к более подробному изучению тех явлений растяжения, сжатия, изгиба, кручения и изгиба, которые мы уже несколько осветили в настоящей главе, выяснив здесь *самые* условия их возникновения.

В заключение этой главы выскажем лишь еще одно соображение, которое полезно привести здесь, чтобы лучше уяснить себе ту схему работы элемента ds , которую мы кладем в основу наших расчетов. Если бы мы захотели заметить элемент ds , стерженьками, *построить* механическую

модель элемента ds то легко убедились бы (см. рис. 63), что на плоскости таких стерженьков должно быть *три* (не пересекающихся в одной точке), а в пространстве *шесть* (через которых нельзя провести одну прямую). Только при этом числе стерженьков плоские сечения остаются плоскими и перпендикулярными оси, и соединение левой части с правой оказывается жестким. Но из этой схемы вытекает:

Деталь среднего узла

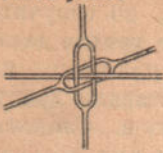


Рис. 63 bis.

1) Отыскание N_x, Q_y, M_x на плоскости и $N_x, Q_x, Q_y, M_x, M_y, M_z$ в пространстве можно рассматривать, как отыскание сил, действующих по нашим трем или шести стерженькам, заменяющим элемент ds в его модели, причем *каждой силе и каждой паре соответствует свой стерженьок*, с той лишь оговоркой, что „моментные“ стерженьки привлекают к дополнительной параллельной с ними работе и стерженьки „силовые“ (см. рис. 63 bis).

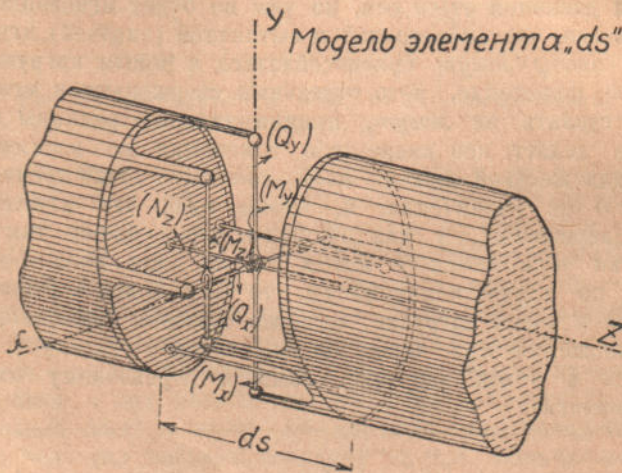


Рис. 63 bis. — Модель „ ds “ в пространстве.

2) Каждый элемент ds можно рассматривать, как *классическое* (и в плоскости и в пространстве) *опорное* устройство, воспринимающее все левые или все правые „активные“ силы своим „реактивным“ воздействием.

ГЛАВА III.

Основные явления в брус

§ 1. Растяжение и сжатие.

Приступая к изучению отдельных явлений, напомним еще раз, что мы все эти явления будем рассматривать лишь в пределах упругости и будем иметь в виду лишь материал, обладающий шаровой изотропией, т.е. дающий по всем направлениям *одинаковые* упругие свойства, что же касается до статической определенности или статической неопределенности системы, то здесь мы не будем делать *никаких ограничений*, а дадим *общую теорию бруса*, одинаково применимую к элементу бруса, принадлежащему к *любому* виду сооружений, ибо в конце-концов для каждого сооружения мы должны найти и находим $N_x, Q_x, Q_y, M_x, M_y, M_z$ в *любом*

сечения бруса, а изучению действия этих величин на элемент бруса ds в самом общем случае и посвящены ближайшие главы.

Как известно из предыдущего, явления *растяжения и сжатия* возникают в бруске от действия на него нормальных сил N_x , при чем, если эти силы в нашем элементе направлены друг против друга, мы имеем дело с *сжатием*, если обратно — с *растяжением*. Таким образом, характер этих явлений один и тот же, разница только в знаке, почему в дальнейшем мы подробно остановимся на растяжении, а затем, по аналогии, выясним легко и характер явления сжатия.

Все вообще наблюдаемые в бруске явления, конечно, сначала надлежащим образом изучаются *экспериментально*, и та стройная и красивая теория, которую мы в дальнейшем будем излагать, выработана на основании *опытных* данных, конечно надлежаще обработанных в смысле полного их освобождения от различных *случайных* факторов, всегда отклоняющих результаты опытных данных в ту или другую сторону. Обработка эта делается в сторону „идеализации“ материала, в сторону освобождения опытных данных от неизбежных отклонений, вызываемых несовершенством отдельных строительных материалов и условиями самого производства опыта. В дальнейшем будем иметь дело с условным идеальным материалом, обладающим всеми свойствами идеально-упругого тела, т.-е. вполне возвращающимся в свое первоначальное состояние после прекращения действия на него сил. Цифровые данные нас пока интересовать не будут — мы опишем явление в его общей форме, выражая результаты наших рассуждений в виде буквенных *формул*.

При изучении любого явления, как уже было указано ранее, нас будут интересовать следующие явления:

- 1) *Деформации* элемента ds .
- 2) *Перемещения* отдельных точек бруса (как следствие деформации отдельных элементов).
- 3) *Внутренние силы*, в элементе возникающие и называемые *напряжениями*, когда они отнесены к единице площади.
- 4) *Соотношения* между *напряжениями и деформациями*.
- 5) *Работа упругих сил*, при данном упругом явлении развивающаяся.

Изучая явления *растяжения*, прежде всего условимся считать те силы, которые вызвали силу N_x , приложенными не в самом элементе, а где-то в дальних частях бруса. Силы N_x с этой точки зрения уже не являются собственно силами, а представляют собою *совокупность воздействия тех далеких сил*, которые где-то на наш брус действуют, т.-е. лишь их равнодействующую. Оговорка эта необходима, чтобы отбросить в данном случае раз навсегда всякую мысль о сосредоточенных силах — ведь, очевидно, что только тогда, когда мы имеем дело с силами, приложенными в далеких точках, мы будем иметь дело в нашем элементе с такими напряжениями, которые успели уже вполне равномерно распределиться по всему нашему сечению. Вообще говоря, в практических вопросах очень часто приходится иметь дело и с силами, приложенными непосредственно близ интересующего нас сечения, но пока мы будем брать только далеко приложенные силы, как гарантирующие нам равномерность распределения напряжений.

В дальнейшем, пользуясь полученными здесь выводами, мы сможем обобщить наши формулы и для близких к изучаемому элементу сил.

Получаемое при растяжении удлинение элемента, т.-е. раздвижение *поперечных* сечений мы принимаем происходящим *параллельно* первоначальному *сечению* сечения, т.-е. исходим из обычной гипотезы плоских сечений. *Опытные* данные для *средних* частей бруса, *достаточно далеких от концов*, где приложены растягивающие силы — подтверждают эту точку зрения. Все наши выводы мы будем делать для весьма малого элемента — элемента ds ;

удлинение Δds будет малой величиной еще более низшего порядка, чем ds , но обстоятельство это не должно нас смущать, так как нас будет интересовать *относительное удлинение* $i = \frac{\Delta ds}{ds}$, отвлеченная величина, имеющая вполне реальный смысл, при чем величина эта, как показывает опыт, не зависит от длины рассматриваемой части бруса, оставаясь для любой длины в пределах равномерного действия силы N_z постоянной. (Это положение не следует смешивать с законом Гука—это особое положение, почти очевидное само по себе). Величина i имеет измерение порядка L^0 и выражается очень малыми дробями. Перемещение каждого элемента будет $\Delta ds = i \cdot ds$, а общее перемещение для всей длины l (см. рис. 64) будет очевидно выражаться так:

$$\Delta l = \int_0^l i ds \text{ — (измерение порядка } L^1) \text{ — интеграл деформации.}$$

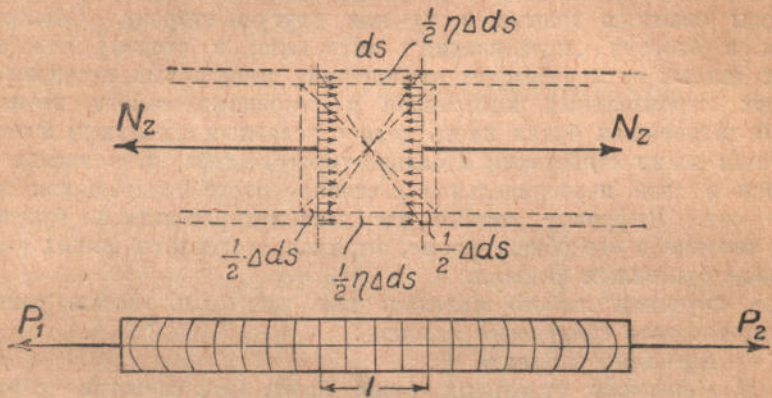


Рис. 64. Растяжение элемента ds (внизу показана постепенность выравнивания напряжений по сечению от далекой силы).

Далее, мы считаем, что внутри тела возникают равномерно распределенные внутренние силы—напряжения. Эти внутренние силы должны быть направлены в сторону, противоположную силам N_z , откуда получаем такое условие равновесия: $N_z = \int^{\omega} n \cdot d\omega$ (n — нормальное напряжение), так как равнодействующая внешних сил должна равняться совокупности внутренних сил. Покуда n в написанной формуле стоит под знаком интеграла, формула эта является вполне бесспорной, отвечая даже случаю неравномерно распределенных напряжений. Принимая рабочую гипотезу о равномерности напряжений, получаем

$$N_z = n \cdot \omega,$$

или

$$n = \frac{N_z}{\omega}.$$

Называя постоянное соотношение между напряжением и деформацией (модуль или коэффициент упругости) через E , найдем

$$E = \frac{n}{i} \quad \text{и} \quad i = \frac{N_z}{E \cdot \omega}$$

Соотношение между напряжениями и деформациями E уже давно интересовало ученых, и впервые было сформулировано в знаменитом законе Гука (1678 г.) и Mariotte'a (1680 г.), установивших постоянство величины E для данного материала при любом значении n и i , а научно этот вопрос

освещен особенно ярко в половине прошлого столетия Клапейроном в его диаграмме, характеризующей результаты опытных исследований с теоретической точки зрения. Клапейрон, чье имя стоит в числе пяти почетных имен ученых, создавших Строительную механику (Навье, Коши, Ламе́, Пуассон и Клайперон), в своей диаграмме, справедливой для всех вообще деформаций, возникающих в телах независимо от рода действующих усилий, а не только для деформаций растяжения—сжатия, удивительно изящно и просто пояснил сущность закона Гука (см. рис. 65).

Из диаграммы следует прежде всего, что $\text{tg } \alpha = \frac{n}{i} = E = \text{const}$ (где E различно для разных материалов). Величина E называется коэффициентом или модулем упругости и иногда носит название „модуля Юнга“ в честь ученого, введшего это понятие в науку. Ясно, что E имеет измерение *напряжения* (кг/см^2). Модулю Юнга ранее давали несколько неудачное определение, называя его тем напряжением, которое требуется, чтобы под его действием тело удлинилось бы вдвое. Это действительно следует из нашей формулы, принимая $i = 1$, но так как нет таких материалов, которые могут удлиниться *вдвое*, оставаясь в пределах упругости, то в настоящее время это определение считается неприемлемым. Надо помнить, что предельное „упругое“ i выражается обыкновенно в тысячных и десятитысячных долях единицы.

Ряд ученых (Вертгейм, Фессенден) указали на наличие связи между E и A (атомным объемом—объемом, занимаемым одним атомом) в такой форме:

$$EA^2 = \text{Const.}$$

Получается таким образом некоторая мировая упругая постоянная.

Формула эта $EA^2 = \text{Const}$ заслуживает большого внимания. Она выражает ту мысль, которая уже была отмечена в главе о строении материи, а именно, что строение атома предредшает *все* свойства материи. За последние годы этим вопросом вновь стали много заниматься физики и химики. Выяснилось, что формула Вертгейма, во-первых лучше выражает явление в виде $EA^n = \text{Const}$, где степень n несколько отлична от 2, хотя и близка к 2, а во-вторых, что такая формула справедлива лишь для физически однородных во всех направлениях тел. Упругость кристаллов, например, в конх упругие свойства *различны по разным* направлениям, не может быть непосредственно определена этой формулой. Во всяком случае, наличие функциональной зависимости между E и A несомненно, и вопрос идет лишь о форме этой зависимости. Напомним, что A есть частная от деления действительного веса атома на его удельный вес.

Возвращаясь к диаграмме Клапейрона, зададим себе вопрос, изменяется ли характер явления от закона роста напряжения. Прежде всего коснемся вопроса *о быстроте роста*. Если сила начнет возрастать с *бесконечно большой скоростью*, то получаем, так называемую, *мгновенную* силу, имеющую совершенно особый динамический характер, о ней будет сказано ниже. Возрастание силы с *очень большими скоростями* также изменяет характер явления, но *скорости возрастания, меньшие скорости распространения звука в данном материале*, не влияют на конечное состояние системы, ибо сами деформации распространяются со скоростью звука, будучи как известно, и источниками звука (см. акустику). Вообще же влияние закона роста силы пояснено диаграммами рис. 65, где в левой части чертежа на одной оси отложено напряжение, а на другой—время возрастания силы (в секундах), и показано несколько случаев возможных законов возрастания силы, подобранных так, что для всех кривых конечное значение силы одно и то же и достигается одинаково в течение 4-х секунд (что соответствует в правых диаграммах точке 4).

Изменение силы может даже перейти конечное свое значение, т. е. сила под конец может даже уменьшиться против своего предыдущего высшего

значения и даже временно иметь другой знак, но состояние системы будет характеризоваться только конечной величиной действующей силы, если пределы упругости не превзойдены. Случай, отмеченный на левой диаграмме кривой (IV), на правой диаграмме Клапейрона соответствует в нашем примере также линии (IV). Движущаяся в этой диаграмме по прямой точка к концу явления повернет назад от своего крайнего значения, вернется в точку (4) и окончательное состояние системы будет зависеть только от окончательного значения действующей силы.

Остановимся на этом вопросе несколько подробнее. Диаграммы соотношения между n и t (временем) ограничены только одним требованием, — чтобы величина n не выходила за пределы упругости, которые обозначены условно на рис. 65 двумя горизонтальными границами вверху (для растяжения) и внизу (для сжатия). Диаграммы же соотношения между n и Δ следует рассматривать, как типичные диаграммы лабораторных испытаний материала. До предела упругости эти диаграммы теоретически дают наклонные прямые, почему предел упругости есть практически и предел пропорциональности. При сжатии диаграмма остается прямой, но наклон иногда бывает другой, хотя в ряде материалов, напр., в железе, стали, в дереве, мы имеем одинаковый наклон и для растяжения, и для сжатия, каковой случай и изображен на наших фигурах. И вот, представим себе, что на таких лабораторных диаграммах мы отмечаем особо точки, соответствующие концам первой, второй, третьей и четвертой секунды опыта. Очевидно, что эти точки все окажутся на той же самой прямой, и разница будет лишь в том, что в одном случае они равномерно распределятся по длине этой прямой, в другом — сосредоточатся в начале прямой,

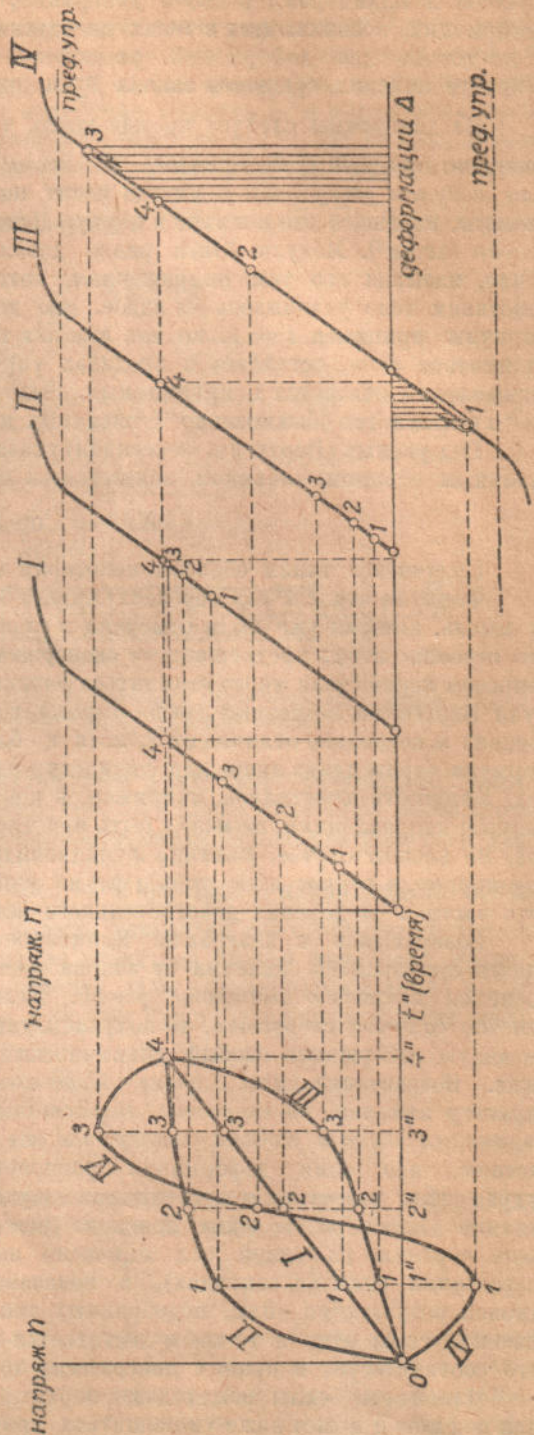


Рис. 65. Диаграммы Клапейрона, иллюстрирующие сущность закона Гука и обратимость упругих явлений.

в третьем — в конце прямой, а в четвертом — разместятся в различных точках той же прямой, частью *ниже* 0, а частью *выше* конечной точки.

Повторяем еще раз, что мы даем как бы *стилизованные* диаграммы, ибо на деле *прямая* линия соблюдается редко, и зависимость, особенно близ предела упругости, получается степенная, хотя степень мало отличается от единицы.

Сравнивая эти диаграммы, Клапейрон вывел такое заключение: „идеально упругое тело характеризуется тем, что конечное его состояние не зависит от пути, по которому тело дошло до этого состояния“. (Положение это было впоследствии принято и лордом Кельвином, и с него он начинает свою статью об упругости в Британской Энциклопедии). Правая диаграмма в известном масштабе характеризует соотношение между ростом силы N_z и перемещений отдельных точек Δds . *Работа* внешних сил на всю площадь ω и на длину ds , выражаемая произведением последовательных (во времени) значений величин $n \cdot \omega$ на соответствующие элементы перемещения $di \cdot ds$, на диаграмме выражается определенным интегралом, приводимым к площади треугольника (где ds есть как-бы постоянная величина):

$$\int_0^{i_0} n \cdot \omega \cdot di \cdot ds = \omega \cdot ds \int_0^{i_0} n \cdot di = \frac{1}{2} n_0 \omega \cdot i_0 ds = + \frac{1}{2} N_z \cdot \Delta ds.$$

Знак $+$ в этом случае мы взяли потому, что направление внешней силы совпадает с направлением пути, пройденным каждой точкой при ее перемещении. Если в некотором промежуточном значении сила проходила через максимум или через обратный знак, то, как видно из чертежа, работа внешних сил все же будет равна той же окончательной площади, ибо *лишние* площади взаимно сократятся.

Работа *внутренних* сил, как направленных *против* направления перемещения (см. рис. 64) *всегда по существу отрицательна* и равна $- \frac{1}{2} n \omega \cdot i \cdot ds$ (знак 0 мы далее не ставим, так как само n выражает в общем виде переменное значение n_0). Обе эти работы должны быть равны и взаимно противоположны, т.-е. получаем выражение:

$$+ \frac{1}{2} N_z \cdot \Delta ds - \frac{1}{2} n \cdot \omega \cdot i ds = 0.$$

Это выражает закон сохранения энергии (первый закон термодинамики). *Работа внешних сил* для элемента ds (travail exterieur)

$$dT_e = + \frac{1}{2} N_z \cdot \Delta ds = + \frac{1}{2} \frac{N_z^2}{E\omega} ds,$$

так как

$$\Delta ds = i \cdot ds = \frac{n}{E} ds = \frac{N_z}{E\omega} ds.$$

Из этих формул видно, что dT_e пропорциональна *квадрату* внешней силы N_z .

Величину $E\omega$ принято называть *жесткостью* при растяжении (и сжатии), ибо деформация растет *обратно пропорционально* величине $E\omega$.

Работа внутренних сил для элемента бруса ds (travail interieur) получает такое значение:

$$dT_i = - \frac{1}{2} n \omega \cdot i \cdot ds = - \frac{1}{2} \frac{n^2}{E} \omega ds = - \frac{1}{2} E\omega \cdot i^2 ds,$$

т.-е. работа внутренних сил пропорциональна *квадрату* внутреннего напряжения — (n^2) , а также и *квадрату* удлинения (i^2) .

На единицу объема мы получим:

$$T_{(v)} = \frac{n^2}{2E}.$$

Из соотношения $i \cdot ds = \Delta ds$ выводим $i = \frac{\Delta ds}{ds} = \frac{N_s}{E\omega}$,

т.е. удлинение $i = \frac{\text{сила}}{\text{жесткость при растяжении}}$.

Рассматривая формулу работы внутренних сил мы видим, что в нее не входит значение условной силы N_s , которую мы ввели лишь для возможности изучения нашего явления, как величину условную, поскольку она является лишь равнодействующей внешних сил. (Точно так же мы поступили при уравнивании внешних сил, вводя равнодействующую и равную ей замыкающую силу, а затем заменяя последнюю реактивными силами). Можно назвать N_s и иначе—величиной, обратной равнодействующей внутренних сил.

До сих пор мы рассматривали только удлинение, происходящее в теле при растяжении, однако на деле тело всегда кроме того что укорачивается в поперечных направлениях, что объясняется стремлением материи сохранить свой объем. Только газ и отчасти жидкость вполне компенсируют одно изменение другим. В твердых же телах всегда при этом получается все же некоторое изменение объема, т.е. при растяжении $\varepsilon > 0$ (где ε —приращение объема). Поперечное сжатие при растяжении характеризуется так называемым коэффициентом Пуассона η , который указывает, насколько поперечное сжатие ηi менее удлинения i . Если для определения ε отбросим члены с высшими степенями, то получим $\varepsilon = i(1 - 2\eta)$.

Действительно, представим себе брусок, длиной ds и поперечных размеров 1×1 (см. рис. 66). Его первоначальный объем $1 \cdot 1 \cdot ds = ds$. Его объем после деформации:

$$(1 + i)(1 - \eta i)^2 ds = \approx [1 + i(1 - 2\eta)] ds,$$

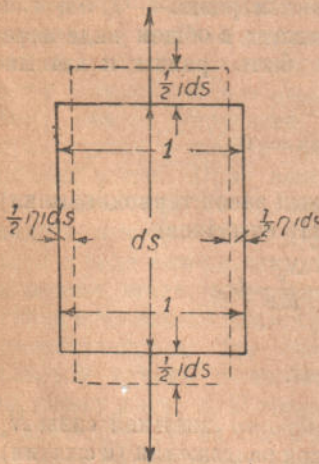


Рис. 66. Поперечное сжатие при растяжении.

где отброшены члены с i^2 и i^3 за их малостью. Отсюда $\varepsilon = i(1 - 2\eta)$. Самое значение коэффициента Пуассона непостоянно. Пуассон, именем которого названо настоящее отношение, исходя из гипотезы молекулярных сил, вывел, что $\eta = 0,25$. Действительно, некоторые тела, как например, некоторые сорта стекла, пник дают величины, близкие к $0,25$, однако многие другие тела, как напр. железо, сталь, медь дают иные значения (обыкновенно для железа и стали принимается $0,30$, для меди и никкеля — $0,33$). Пробка дает даже $0,00$, т.е. вовсе не сжимается поперек оси растяжения, а каучук и парафин — почти $0,50$, т.е. дают $\varepsilon = 0$. Цифра выше $0,50$ получена ни в каком материале не была, — она бы указала что при растяжении $\varepsilon < 0$, что невероятно.

Ныне принимается, что теоретически для идеально упругого однородного по всем направлениям тела $\eta = 0,25 = \text{Const}$, что еще более подтверждает верность идей Вертгейма ($EA^n = \text{Const}$); для отдельных же несовершенных тел природы η приходится определять каждый раз отдельно.

Отметим еще здесь, что сокращение площади поперечного сечения все же столь незначительно, что при определении n и E принимают всегда начальное значение ω .

На этом мы заканчиваем обзор явления растяжения; при сжатии характер явления остается тем же, не изменятся даже и знаки в выражениях работ, почему на сжатии мы останавливаться не будем. Коэффи-

циент E , как показывают экспериментальные данные, остается неизменным для идеально-упругих тел как при растяжении, так и при сжатии, но для некоторых строительных материалов он довольно существенно различается. Явление Пуассона остается в силе и при сжатии, но сводится уже к *поперечному расширению* с сохранением того же значения ν .

Цифровое значение отдельных величин, характеризующих свойства отдельных строительных материалов, а также и характеристику тех отклонений от классических явлений идеальной упругости, которые наблюдаются в отдельных материалах и при наличии особых условий, а особенно изучение явлений, происходящих за пределами упругости, мы считаем правильным излагать в особом курсе *Материаловедения*, но все же для главнейших строительных материалов мы приведем и здесь некоторые характерные цифры, дабы в дальнейшем были ясны хотя бы приблизительные значения входящих в формулы величин, при чем наряду с пределами упругости укажем и допускаемые в сооружениях рабочие напряжения.

Таблица представляется в таком виде:

МАТЕРИАЛЫ.	E кг/см. ²		Предел упругости n кг/см. ²		Допускаемое в сооружениях n_0 кг/см. ²	
	Растяж.	Сжатие.	Растяж.	Сжатие.	Растяж.	Сжатие.
Рельсовая сталь	2,20. 10 ⁶	2,20. 10 ⁶	3000	3000	1800	1800
Мостовое железо	2,15. 10 ⁶	2,15. 10 ⁶	2200	2200	1400	1400
Чугун серый литейный	0,80. 10 ⁶	1,00. 10 ⁶	1000	4000	250	1000
Гранит	24,0. 10 ⁴	30. 10 ⁴	15	300	5	70
Бетон	14,0. 10 ⁴	21. 10 ⁴	20	140	8	50
Дуб	11,0. 10 ⁴	11. 10 ⁴	450	150	140	90
Сосна	10,0. 10 ⁴	11. 10 ⁴	300	150	120	80

Из этой таблицы мы должны между прочим усмотреть, какое громадное значение имеет E и как, следовательно, ничтожно ν , даже при пределе упругости (напр., для мостового железа около 0,001). Кроме того, мы видим, насколько *допускаемые в сооружениях напряжения ниже пределов упругости (в несколько раз, а именно от 1,5 до 4 раз)*. Это последнее обстоятельство объясняется частью неуверенностью в полной однородности материала, а частью тем, что сооружение в течение своей жизни нередко под влиянием случайных причин — толчков, ударов, местной сосредоточенной нагрузки и т. д. переходит за те пределы напряжения, которые определены в нем расчетом, а допустить переход напряжений за пределы упругости *невозможно* — приходится иметь *запас прочности*. Кроме того, *неизбежная необратимость процесса (усталость материала)* конечно, особенно дает себя знать ближе к пределу упругости, и этих высоких напряжений следует избегать. Наконец, нельзя не учесть и того, что мы рассчитываем *схему*, работает же иное, лишь похожее на схему сооружение — и оно работает не совсем так, как схема, хотя и очень близко к ней; вот еще причина, требующая расчета с неизбежным *запасом*. Но, чем более совершенствуется

производство строительных материалов, чем лучше сами эти материалы, чем точнее применяемые методы расчета, тем более коэффициент прочности (k) (отношение между n и n_0 в нашей таблице) должен приближаться к единице. В мостовом металле мы уже настолько уверены в материале и в точности наших расчетов, что величина k для некоторых точных расчетов падает почти до 1,50 (предел упругости—около 2200 кг/см², допускаемое напряжение—около 1400 кг/см²). Но доведение коэффициента до единицы никогда не будет иметь места, и было бы недопустимо и принципиально в виду явлений усталости, т.-е. частичной необратимости почти всякого упругого явления, даже если бы расчеты идеально точно выражали действительные условия работы сооружения. Приведенная таблица имеет значение и для всех явлений, которые будут рассмотрены ниже, ибо все явления сводятся к сочетанию растяжения со сжатием.

Мы не можем закончить параграфа о растяжении и сжатии, не коснувшись вопроса о том, как проходит это явление в *кривом брус*, т.-е.

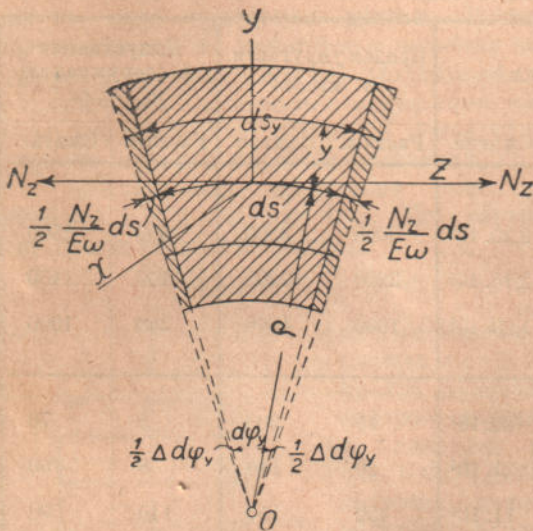


Рис. 67. Растяжение в кривом брус.

(см. рис. 67) в таком, первоначальной форма которого есть дуга некоторого радиуса ρ . Сила N_z в этом случае направлена по OZ , т.-е. по прямой, касательной к срединной точке элемента ds (при исследовании характера удлинений можно считать элементы ds прямыми). Ясно, что по закону Гука отдельные волокна ds , получают удлинения, пропорциональные их длине, а так как эта длина пропорциональна расстоянию $(\rho + y)$ от центра начальной кривизны, то конечные плоскости, раздвинувшись при растяжении, останутся сходящимися в том же центре O . И таким образом, кроме линейной деформации $i \cdot ds = \frac{N_z}{Ew} ds$

в кривом брус появляется угловая деформация:

$$\Delta d\varphi_y = \frac{N_z}{E \cdot \omega \cdot \rho_y} ds.$$

Если брус двойной кривизны, то такую формулу можно написать и для $\Delta d\varphi_x$. Ниже, при рассмотрении совместного действия разных явлений, мы увидим, что эти угловые деформации войдут в выражение полной упругой работы бруса.

§ 2. Сдвиг.

Явление сдвига, к изучению которого мы приступаем, интересно и само по себе, в своем чистом виде, но в работе инженерного сооружения, за редкими исключениями, приходится большей частью рассматривать сдвиг в различных комбинациях с другими явлениями. Ниже мы увидим, в чем здесь дело, и от чего это зависит. На рис. 68 изображен так называемый положительный сдвиг, который считается таковым при указанном расположении поперечных сил, т.-е. когда левая сила смотрит вверх. Обратим еще раз внимание на то обстоятельство, что в виду бесконечной малости элемента ds

силы $+Q$ и $-Q$ ни коим образом нельзя смешивать с парой сил (см. рис. 68). Это — совпадающие одна с другой противоположные силы, характеризующие поперечные силы, возникающие в левой и правой половине бруса. Итак, явление

положительного сдвига заключаются в том, что вся левая часть сечения стремится несколько подняться кверху, а вся правая — несколько опуститься книзу, оставаясь при этом параллельной своему первоначальному положению. Выше (излагая идею 6-ти строк), мы вывели такое соотношение (которое в Строительной Механике иногда носит название теоремы

Шведлера) $Q_y = \frac{\partial M_x}{\partial z}$. Из

этой формулы следуют, что сдвиг, возможный только при существовании силы Q_y , может

иметь реальную величину только при наличии момента и притом переменного, ибо $\frac{\partial \text{const}}{\partial z} = 0$. Так как мы желаем изучить явление в его

чистом виде, т.е. без наличия момента, который вызовет изгибающее усилие — то нам придется условно допустить, что каким либо способом нам удалось получить явление сдвига в его чистом виде (без параллельно возникающих изгибающих сил) на деле же, как было указано, приходится иметь дело с комбинацией сдвига и изгиба и лишь в кручении мы сможем наблюдать чистый сдвиг.

Обращаясь к нашему рис. 68, видим, что под действием сдвига наш прямоугольник обратился в несколько искривленный параллелограмм. Деформация, которая нас будет интересовать, выразится величиной бокового смещения сторон нашего прямоугольника $= \Delta' ds$. Относительная же деформация, которую обозначим буквой θ , вполне аналогичная величине i в случае растяжения (сжатия), — величина отвлеченная и имеющая реальный

смысл, получится в таком виде: $\theta = \frac{\Delta' ds}{ds}$. Так как оба направления эти перпендикулярны одно к другому, то отношение их можно представить в виде tg угла между ними, а так как угол этот очень мал, то можно

положить: $\text{tg } \theta = \theta = \frac{\Delta' ds}{ds}$. Итак, удобно меру сдвига дать в угловой мере (хотя, вообще говоря, это величина вполне отвлеченная, ибо представляет собой отношение двух длин). Значит, мерой сдвига нам будет служить угол θ . Как видно из чертежа, каждая из сил Q_y , приложенных в данном элементе, вызывает в брус соответствующие тангенциальные напряжения,

при чем очевидно, что $Q_y = \int t \cdot d\omega$, где t — напряжение внутренних тангенциальных сил в отдельной точке сечения. Напомним здесь, что тангенциальным напряжением (t) называется внутреннее напряжение, действующее в плоскости сечения, а не перпендикулярно к нему. Однако, нельзя утверждать, что t остается постоянным на всем протяжении сечения, (впоследствии мы

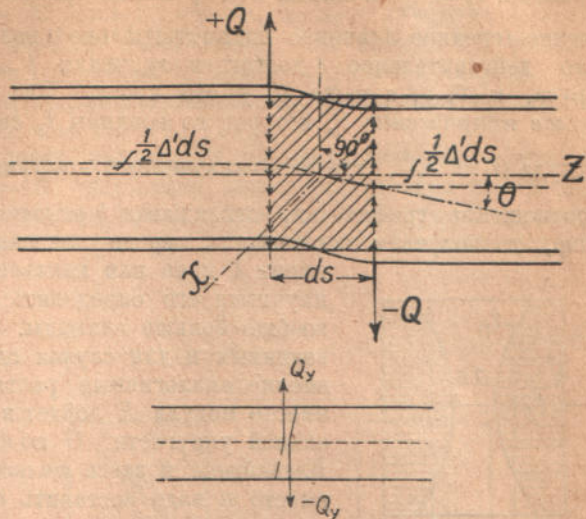


Рис. 68. Сдвиг (внизу показана схема действия сил Q_y).

убедимся в этом и непосредственно, изучая комбинации сдвига с другими явлениями), поэтому t нельзя взять за знак интеграла. Но можно написать условно: $t_0 = \frac{Q}{\omega}$ понимая под t_0 только какое-то условное среднее напряжение (среднее значение подынтегральной величины). Далее мы покажем, что действительное t достигает значения t_{max} большей частью на оси бруса, и t_{min} , а чаще 0, у его краев. Нас будет интересовать всегда осевое напряжение t_s , которое со средним t_0 связано соотношением $t_s = kt_0$, откуда $Q_y = \frac{t_s \cdot \omega}{k}$, где k — отвлеченный коэффициент. Если изобразить это

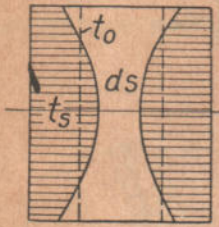


Рис. 69. Распределение t по сечению.

соотношение графически, откладывая t условно перпендикулярно к сечению, то получаем зависимость, вроде показанной на рис. 69. Коэффициент k пока нам неизвестен, но в дальнейшем мы научимся его определять; из рис. 69 видно, что он вообще больше единицы. Закон Гука считаем справедливым и для случая сдвига, что дает соотношения, вполне аналогичные растяжению. Для сдвига только вместо модуля E войдет в формулу „модуль тангенциальной упругости“ G по формуле $G\theta = t_s$. Диаграмма Клапейрона и здесь полностью остается в силе, лишь вместо n надо поставить t , а вместо i — θ . Ниже мы докажем, что G не представляет собой самостоятельной величины, а является функцией модуля E , составляя теоретически $\frac{2}{5}$ от E . Опытное определение G

также возможно и даже необходимо, но осуществимо только при опытах на кручение.

Выведем теперь чрезвычайно важный закон неизбежной парности тангенциальных напряжений, который мы предварительно выясним на примере.

Возьмем пакет склеенных досок, расположенный на 2-х опорах и нагруженный по середине силой P (см. рис. 70). В этом случае, хотя активная сила и действует поперек волокон, стремясь перерезать их в вертикальном направлении, но очевидно из непосредственного опыта, что возникают еще и другие напряжения, стремящиеся сдвинуть доски одну относительно другой в горизонтальном направлении. Напряжение это равно тангенциальному усилию, и, если бы клей, которым доски склеены, оказался плохого качества, то доски бы сдвинулись одна по другой (так как тангенциальное сопротивление волокон было бы во много раз более сопротивления клея). Значит, существование поперечных вертикальных тангенциальных сил повлекло за собой появление некоторых продольных горизонтальных тангенциальных же сил.

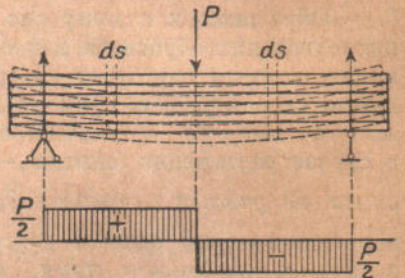


Рис. 70. Работа пакета досок.

Чтобы строже доказать парность касательных напряжений (см. рис. 71), выделим из плоского бруса (т.-е. имеющего по оси OX постоянную толщину $=1$ и подверженного действию сил, работающих исключительно в плоскости YOZ) небольшой квадратик $dy \cdot dz$ и рассмотрим, в каких условиях он находится при сдвиге бруса силами Q_y и $-Q_y$. Ясно, что на вертикальных гранях действуют какие-то напряжения $t_{(y)}$, за малостью частицы одинаковые с обеих сторон, но различные по знаку. Но, так как наша частица находится в равновесии—это наш постулат, или предварительное требование—

то силки $t_{(y)} \cdot dy$ и $-t_{(y)} \cdot dy$ вполне частицу *уравновесить не могут* — их равнодействующая хотя и равна нулю, но они дают относительно Ox пару $-(t_{(y)} dy) \cdot dz$. Для уничтожения этой пары должна появиться другая пара $+(t_{(z)} dz) dy$ по формуле $M_x = t_{(z)} dz \cdot dy - t_{(y)} dy \cdot dz = 0$, откуда $t_{(z)} = t_{(y)}$ т.е. неизбежно появление *парного* касательного напряжения $t_{(z)}$, равного по напряженности $t_{(y)}$. Для упрощения значков *условимся* впредь при напряжениях t писать значок, соответствующий оси, им *перпендикулярной*, напр., наши *оба* t назовем t_x , т.е. $t_{(y)} = t_{(z)} = t_x$.

Рассмотренный нами сдвиг называется *не чистым* потому, что он сопровождается *поворачиванием* диагоналей нашего квадратика при деформации на некоторый угол, т.е., как принято говорить в Теории Упругости, *вращением* частицы, как целого (см. рис. 72). Пример *чистого* сдвига

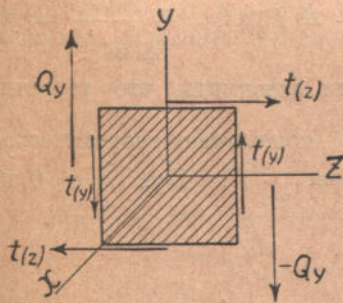


Рис. 71. Парность тангенциальных напряжений.

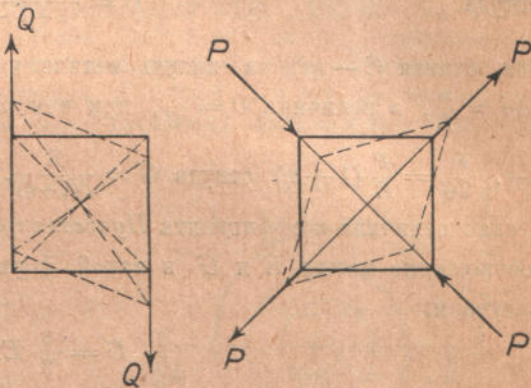


Рис. 72. Не чистый и чистый сдвиги.

изображен на том же рисунке рядом и имеет место тогда, когда одна диагональ растягивается, а другая сжимается равными силами. Тогда частица *деформируется* также, как в предыдущем случае, но, как целое, *не вращается* (диагонали сохраняют свое положение). Сущность этой разницы будет ясна позднее.

Перейдем теперь к определению зависимости между E и G .

Пусть имеем некоторый квадратик (см. рис. 73), подверженный растягивающему усилию P (где P — результирующая далеких сил). Если первоначально стороны квадратика были равны единице, то теперь они будут соответственно: $(1+i)$ и $(1-\eta i)$. Возьмем разрез нашего квадратика по одной из его диагоналей, разлагая действующие силы на параллельные и перпендикулярные плоскости разреза. Получаем две растягивающие силы, стремящиеся оторвать обе половинки одну от другой, и две силы, производящие сдвиг. Мы видим таким образом, что и самое простое явление растяжения вообще сопровождается сдвигом. Назовем через θ угол сдвига двух диагоналей друг относительно друга. Имеем из правого чертежа:

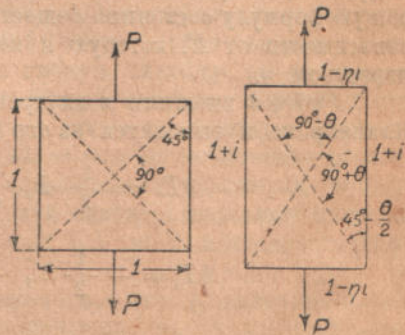


Рис. 73. Зависимость между E и G .

$$\frac{1-\eta i}{1+i} = \operatorname{tg} \left(45^\circ - \frac{\theta}{2} \right) = \frac{1 - \frac{\theta}{2}}{1 + \frac{\theta}{2}}$$

Последнее преобразование сделано по формуле

$$\operatorname{tg}(a - \beta) = \frac{\operatorname{tga} - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tga}\operatorname{tg}\beta}$$

при чем по малости угла θ принято $\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \frac{\theta}{2}$. Совершая перемножение, получаем:

$$1 - \frac{\theta}{2} + i - \theta \frac{i}{2} = 1 + \frac{\theta}{2} - \eta i - \frac{\eta i \theta}{2}$$

или

$$i + \eta i = \theta \left(1 + \frac{i}{2} - \frac{\eta i}{2} \right)$$

откуда

$$\theta = \frac{2(i + \eta i)}{2 + i - \eta i}$$

или, считая $(i - \eta i)$ за малую величину, близкую к нулю, $\theta = i(1 + \eta)$, но $i = \frac{n}{E}$, а величина $\theta = \frac{t}{G}$, при чем $n = \frac{P}{1} = P$, а $t = \frac{P \sin 45^\circ}{\frac{1}{\sin 45^\circ}} = \frac{P}{2}$

т.-е. $\frac{P}{2G} = \frac{P}{E} (1 + \eta)$ откуда $G = \frac{E}{2(1 + \eta)}$. Если вспомнить, что теоретическая величина коэффициента Пуассона $\eta = 0,25$, то получаем теоретическое соотношение между E и G в такой форме: $G = \frac{2}{5} E$. При $\eta = 0,33$ получаем:

$$G = \frac{3}{8} E.$$

На практике, как известно, η изменяется в некоторых пределах, но все же модуль G в общем бывает близок к значению $\frac{E}{2}$, достигая его при $\eta = 0$. Опыты на кручение подтверждают эту формулу.

Формула $EA^2 = \text{constans}$, на которую мы уже указывали раньше, говорит нам, что в идеальном теле единственный независимый модуль—это модуль E , модуль же тангенциальной упругости G , как не входящий в эту общую формулу состояния вещества, должен быть в некоторой функциональной зависимости от E , которую и можно вывести при $\eta = 0,25$ и вообще при известном η .

Работа внешних и внутренних сил при сдвиге подчиняется закону Клапейрона и выводится из его диаграммы. Получаем

$$\partial T_e = \frac{1}{2} k_y \frac{Q_y^2}{G\omega} ds \text{ или } \frac{1}{2} k_x \frac{Q_x^2}{G\omega} ds;$$

$$\partial T_i = -\frac{1}{2} k'_y \frac{t_y^2 \cdot \omega}{G} ds = -\frac{1}{2} k'_y G\omega \theta_y^2 ds$$

или

$$\approx -\frac{1}{2} k'_x \frac{t_x^2 \cdot \omega}{G} ds = -\frac{1}{2} k'_x G\omega \theta_x^2 ds$$

здесь

$$k'_x = \frac{1}{k_x}$$

и

$$k'_y = \frac{1}{k_y}.$$

Опять все выражения получаются в квадратичной форме. Величины k_x и k_y т.-е. коэффициенты приведения для осей X и Y , конечно, могут быть и различны.

В кривом брусе явление несколько осложняется, особенно в брусе двойкой кривизны—но для упрощения дальнейших выводов мы этих осложнений рассматривать не будем.

Относительно численного значения предельных t отметим, что как опыт, так и некоторые теоретические соображения указывают, что t при пределе упругости равно от 0,60 до 0,80 от такового же n для главнейших однородных материалов (металлы).

§ 3. Изгиб.

Изгиб получается при действии на данное сечение моментов M_x и $-M_x$. (или M_y и $-M_y$).

Условимся считать за положительный такой изгиб, который показан на рис. 74, т. е. при котором ось бруса изгибается вниз. Момент M_x следует рассматривать, как результирующее действие далеко приложенных активных сил. Ось $+O.V$ считается направленной вниз. Сделано это для того, чтобы перемещения, возникающие в нашей оси от положительного момента, соответствовали бы и положительному направлению оси. Мы

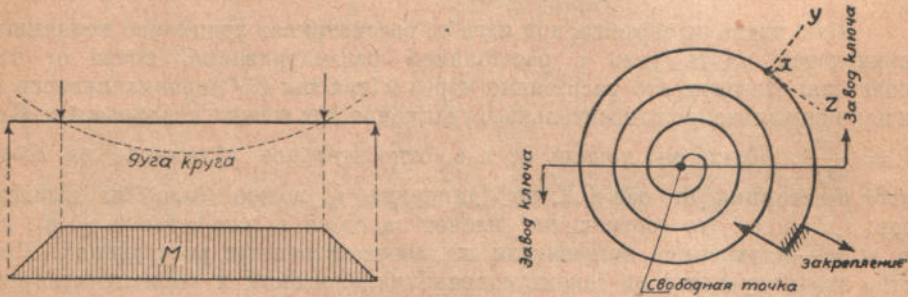


Рис. 74. Случай чистого изгиба: линейка и часовая пружина.

будем подобно прежним нашим выводам, рассматривать изгиб в его чистом виде, когда, кроме действующих пар, никаких других сил нет. В противоположность сдвигу, чистый изгиб очень легко вполне точно осуществить на практике. Например, взяв гибкую линейку за противоположные концы, двумя пальцами за каждый, и нажимая ими в разные стороны, мы в средней части линейки (между средними пальцами)—получаем вполне чистый изгиб, ибо в этом случае $Q_y = 0$ а $M = \text{Constans}$ по всей длине линейки между пальцами. Другим классическим примером чистого изгиба является часовая плоская пружинка, при заводе изгибаемая и отнюдь не закручиваемая вокруг бинормальных осей OX всех последовательных сечений (см. рис. 74).

Обращаясь теперь к рисунку 76, замечаем, что в явлении изгиба каждая сторона нашего элемента ds повернется на некоторый угол вокруг оси OX , проходящей через некоторую точку (центр тяжести сечения, как впоследствии будет доказано).

Явление это ясно само по себе. Оно очень наглядно проявляется при лабораторных опытах, сразу обнаруживающих растяжение выпуклой и сжатие вогнутой стороны. При переломе дерева иногда удается получить прекрасные экземпляры, в коих сжатая часть сечения проявляет смятость фибр, растущую от края к середине, а вытянутая часть дает длинные выступающие волокна, вырванные при переломе и выступающие тем далее, чем более мы удалимся от нейтральной оси.

Заметим еще, что *вращение* таким образом *происходит* *вокруг* *векторов* *изгибающей* *пары*. Ниже мы увидим, что это положение строго справедливо лишь при особом выборе осей координат OY и OX .

Нас будет интересовать в этом явлении угол $d\varphi$, на который повернутся противоположные стороны элемента ds .

В самом деле, еще из теорем механики известно, что работа пары сил равна произведению двух данных сил на их путь $2P \cdot \rho \alpha$ или, что то же, произведению пары на угол: $P \cdot 2\alpha \cdot \rho = M \varphi$. Поэтому *всегда*, *когда* *приходится* *иметь* *дело* *с* *парой* *сил*, *мерой* *деформации* *является* *угол*. Принятая нами ранее рабочая гипотеза о перпендикулярности сечений к оси, независимо от происходящих деформаций, заставляет нас и в данном случае считать, что в явлении изгиба самая ось должна изогнуться по некоторой дуге, которую, по малости ds , можем принять за дугу круга. Обозначив радиус кривизны этой дуги через ρ , получаем

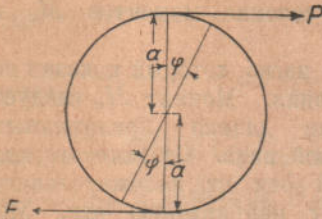


Рис. 75. Работа пары.

$$ds = \rho \cdot d\varphi; \quad \frac{1}{\rho} = \frac{d\varphi}{ds}; \quad d\varphi = \frac{ds}{\rho}.$$

Как видно из чертежа, при изгибе, рассматривая удлинение величины ds , приходится иметь дело с расстоянием рассматриваемой точки от точки поворота. Назовем это расстояние через y (так как OY перпендикулярно OX) и напишем значение относительного удлинения для точки с координатой y . Имеем $i_y = \frac{\Delta ds_y}{ds_y}$. Если бы мы узнали i_1 , т. е. относительное удлинение на *единичном* расстоянии от оси OX , то удлинение i_y можно было бы вычислить так: $i_y = i_1 y$. Это соотношение влечет за собой и равенство $n_y = n_1 \cdot y$ где n_y и n_1 — внутренние напряжения на соответственных расстояниях. Равенство это получается из закона сохранения плоскости и перпендикулярности сечений и вытекает из закона Гука и из формул для растяжения и сжатия.

Здесь мы видим, что изгиб есть сочетание растяжения и сжатия. Вопрос о том, вытекает ли из закона сохранения плоскости и закон распределения *напряжений* по формуле плоскости, не так прост, как кажется с первого взгляда. Ниже мы увидим, что во многих случаях эти два положения одновременно не имеют места (напр. в случае кривого бруса). Кроме того, явление осложняется еще и тем, что при изгибе поперечные сечения в сжатых элементах расширяются, а в вытянутых — сжимаются, и таким образом кроме продольной кривизны ρ , возникает еще поперечная кривизна R (см. чертеж 76).

Перейдем к определению величины n_1 . На нашем рисунке имеем два подобных треугольника. Один из них образован осью элемента ds и двумя радиусами ρ , пересекающимися в центре кривизны, а другой можно получить, приложив друг к другу два маленьких треугольничка, основания которых отстоят от оси на расстоянии y . Из их подобия имеем:

$$\frac{ds}{\rho} = \frac{\Delta ds_y}{y},$$

или

$$\frac{ds}{\rho} = \frac{\Delta ds_y}{y} = \frac{i_y}{y} ds = i_1 \cdot ds,$$

но

$$\frac{ds}{\rho} = d\varphi,$$

поэтому окончательно

$$d\varphi = i_1 ds$$

и

$$\frac{1}{\rho} = i_1.$$

Величина $\frac{1}{\rho}$ называется *кривизной* и обратна радиусу кривизны. Мы будем иногда обозначать ее ρ' . Ее измерение L^{-1} (длина в минус первой степени).

Для того, чтобы найти значение n_1 , используем три уравнения равновесия системы сил, применив их к действующей в изгибе паре и возникающим в элементе внутренним напряжениям:

1) Проекция всех внешних и внутренних сил на горизонтальную ось должна равняться нулю. За отсутствием внешних сил (ибо пары дают $R = 0$ пишем:

$$\int_{\min y}^{\max y} n_y \cdot d\omega = 0; \quad n_1 \cdot \int_{\min y}^{\max y} y d\omega = 0; \quad \int_{\min y}^{\max y} y d\omega = 0.$$

Из этого уравнения видно, что начало координат должно помещаться в центре тяжести сечения, так как только в этом случае статический момент сил равный $\int y d\omega$, может равняться нулю.

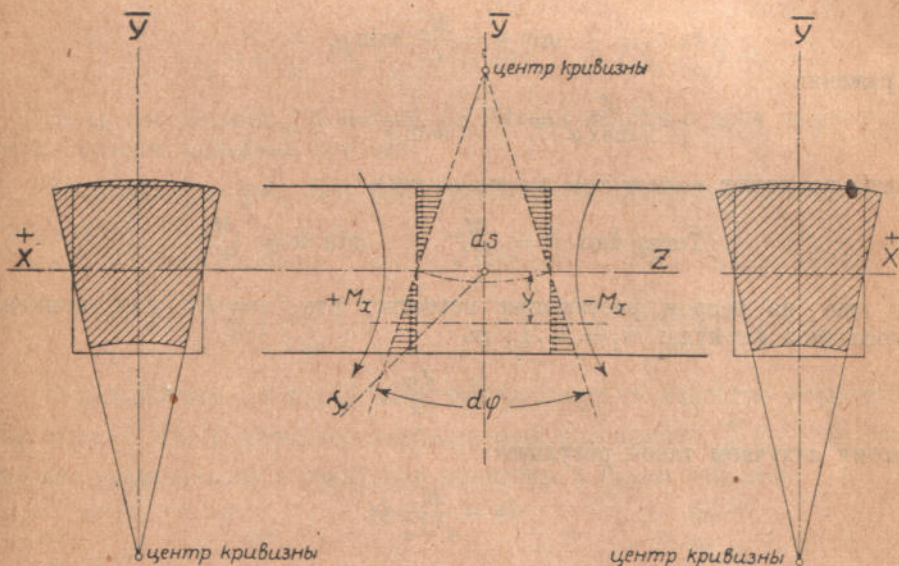


Рис. 76. Явление изгиба элемента ds (по бокам показаны искривления поперечных сечений, ρ —есть расстояние центра продольной кривизны до элемента ds).

2) Проекция всех вообще сил на вертикальную ось должна равняться 0. Так как мы имеем дело с чистым изгибом, не допускающим существования каких либо других сил, кроме действующей пары, то второе уравнение равновесия доказывает невозможность существования внутренних тангенциальных сил при чистом изгибе.

3) Возникающие в данном сечении внутренние моменты должны быть равны и противоположны внешним моментам

$$M_x = \int_{\min y}^{\max y} n_y \cdot d\omega \cdot y = \int_{\min y}^{\max y} n_1 y d\omega y = n_1 \cdot \int_{\min y}^{\max y} y^2 d\omega.$$

Интеграл $\int_{\min y}^{\max y} y^2 \cdot d\omega$, с которым мы здесь впервые встретились, имеет очень

большое значение в Строительной Механике и называется моментом инерции сечения относительно оси OX . Впоследствии мы покажем, почему этой геометрической величине дано подобное название.

Момент инерции сокращенно обозначают символом:

$$I_x = \int_{\min y}^{\max y} y^2 d\omega.$$

Итак:

$$n_1 = \frac{M_x}{I_x}.$$

Здесь n_1 есть особое *характеристическое* напряжение с измерением $(F^1 L^{-3})$. Обычное же $n_y = n_1 \cdot y = \frac{M_x}{I_x} y$ и имеет измерение обычное, т.е. $(F^1 L^{-2})$

$$\max n = \frac{M_x}{I_x} \cdot \max y$$

$$\min n = \frac{M_x}{I_x} \cdot \min y.$$

Выражения

$$\frac{I_x}{\max y} = W'_x; \quad \frac{I_x}{\min y} = W''_x$$

иногда называют моментами сопротивления.

$$\text{Тогда } \max n = \frac{M_x}{W'_x} \quad \min n = \frac{M_x}{W''_x}$$

Но еще из теорем растяжения известно, что $n = E i$ или, применяя к последней формуле: $n_1 = E \cdot i_1$, но

$$i_1 = \frac{d\varphi}{ds},$$

поэтому получаем такой результат

$$d\varphi = \frac{M_x}{EI_x} ds.$$

Нельзя не обратить внимания на красивую аналогию этих формул с ранее полученными для растяжения, сжатия и сдвига. Как там, так и здесь, возникающее в данном сечении *напряжение* выражается формулой такого вида: $\frac{\text{причина}}{\text{геометр. фактор}}$, а *деформации* во всех этих случаях имеют такой вид: $\frac{\text{причина}}{\text{физико-геометр. фактор}} ds$. Знаменатель этой последней формулы носит общее название *жесткости*, ибо чем тело жестче, тем менее оно деформируется. Итак, жесткость изгиба есть EI_x .

Из формулы

$$\frac{M_x}{EI_x} ds = d\varphi$$

можно вывести

$$\frac{1}{\rho} = - \frac{M}{EI},$$

откуда видно, что при M постоянном и при постоянной жесткости радиус кривизны действительно постояен, т.е. брус под действием чистого изгиба изгибается по дуге круга, Знак минус поставлен здесь потому, что в наших

формулах положительная ось OY направлена вниз, и в то же время при положительном моменте радиус кривизны направлен в сторону отрицательных Y -ов. Если бы мы направили OY вверх, знак — пришлось бы заменить знаком +. Строго говоря, уже и в формуле

$$d\varphi = \frac{M_x}{EI_x}$$

надо бы было проставить знак —, ибо при + OY книзу положительный момент дает отрицательное $d\varphi$, что можно легко проверить, расположив ось бруса по оси OZ и беря $d\varphi$ между последовательными касательными.

Работа на основании той же диаграммы Клапейрона получится по следующей формуле:

$$\begin{aligned} \partial T_e &= + \frac{1}{2} \frac{M_x^2}{EI_x} \cdot ds, \quad \text{или} \quad + \frac{1}{2} \frac{M_y^2}{EI_y} \cdot ds \\ \partial T_i &= - \frac{1}{2} \frac{(n_x)_1^2}{E} I_x ds, \quad \text{или} \quad - \frac{1}{2} \frac{(n_y)_1^2}{E} I_y ds \\ &= - \frac{1}{2} EI_x \left(\frac{1}{\rho_x}\right)^2 ds, \quad \text{или} \quad - \frac{1}{2} EI_y \left(\frac{1}{\rho_y}\right)^2 ds. \end{aligned}$$

Здесь два столбца указывают на случай действия двух перпендикулярных своими векторами пар сил.

Величина $\frac{1}{\rho}$, как известно из анализа, может быть заменена формулой:

$$\frac{1}{\rho_x} = \frac{\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}}{\left(1 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}, \quad \frac{1}{\rho_y} = \frac{\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}}{\left(1 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

В дальнейшем мы будем часто игнорировать за малостью знаменатель этих формул, ибо угловые перемещения осей, выраженные $\frac{\partial y}{\partial z}$ и $\frac{\partial x}{\partial z}$ ничтожны, особенно сравнительно с радиусами кривизны и будем считать:

$$\frac{1}{\rho_x} = \rho_x^1 = \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} \quad \text{и} \quad \frac{1}{\rho_y} = \rho_y^1 = \frac{\partial^2 x}{\partial z^2}$$

где ρ_x^1 и ρ_y^1 суть величины обратные радиусам кривизны, т.-е. „кривизны“. Получим тогда:

$$\partial T_i = - \frac{1}{2} EI_x \left(\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}\right)^2 ds \quad \text{или} \quad - \frac{1}{2} EI_y \left(\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}\right)^2 ds.$$

Теперь мы остановим свое внимание на действии чистого изгиба на кривой брус, взяв для простоты брус хотя и кривой, но плоский, а не двойкой кривизны, тем более, что при двойкой кривизне можно вести рассмотрение также по двум плоскостям отдельно.

Примем для выводов: $\rho_{x_0} = \rho; \rho'_{x_0} = \rho'$

Возьмем брус с отрицательной начальной кривизной $\rho = \rho_{x_0}$ и подвергнем его действию двух пар M_x и $-M_x$. Поперечное измерение по OX считаем равным единице. Исходя из гипотезы сохранения плоских сечений, мы видим, что конечные сечения бруса повернутся вокруг некоторой оси, которую мы принимаем параллельной OX , но уже не считаем обязательно

совпадающей с центром тяжести — осью бруса. Найдем относительное удлинение i_y в случайном волокне ds_y ,

$$i_y = \frac{ds'_y - ds_y}{ds_y},$$

но, как видно из чертежа:

$$\begin{aligned} ds'_y &= (\rho' + y) d\varphi'_o; & d\varphi'_o &= \frac{(1 + i_o) ds}{\rho'} \\ ds_y &= (\rho + y) d\varphi_o; & d\varphi_o &= \frac{ds}{\rho} \end{aligned}$$

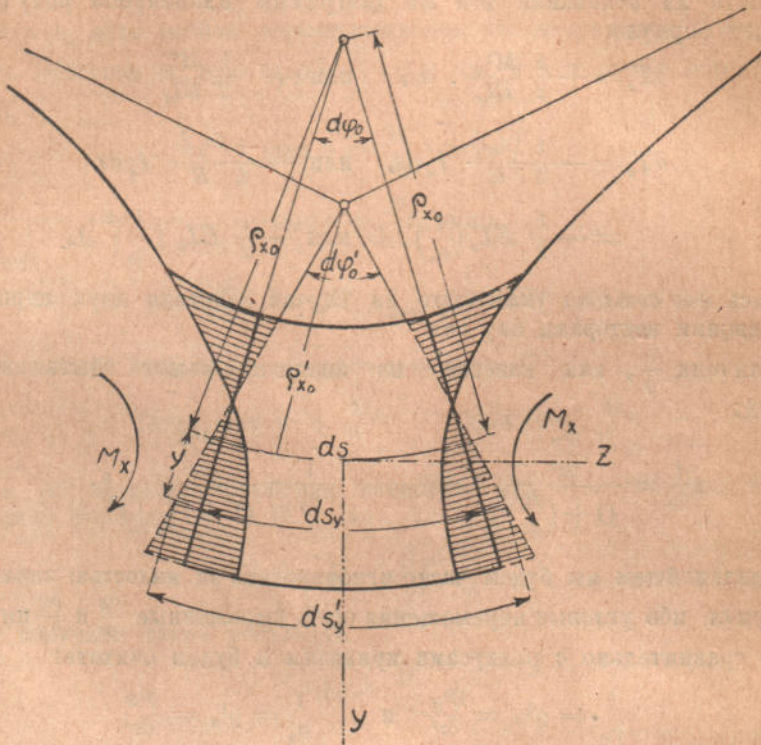


Рис. 77. Изгиб бруса большой кривизны; ρ'_{x_0} есть новый радиус оси бруса, измеряемый до ds .

Здесь под i_o обозначено удлинение по оси бруса, которое предполагается имеющим место, что и подтверждается ниже.

Отсюда

$$i_y = \frac{(1 + \frac{y}{\rho'}) (1 + i_o) ds - (1 - \frac{y}{\rho}) ds}{(1 + \frac{y}{\rho}) ds} = \frac{1 + i_o + \frac{y}{\rho'} + \frac{y i_o}{\rho'} - 1 - \frac{y}{\rho} + (\frac{y i_o}{\rho} - \frac{y i_o}{\rho})}{1 + \frac{y}{\rho}}$$

Таким образом в числителе мы искусственно прибавляем и вычитаем величину $\frac{y i_o}{\rho}$.

Получим:

$$i_y = i_o + (1 + i_o) \left(\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho} \right) \frac{y}{1 + \frac{y}{\rho}}$$

Если бы здесь $i_o = 0$, а $\rho = \infty$, мы получили бы $i_y = \frac{y}{\rho}$ т.е. формулу прямого бруса. Ясно далее, что

$$n_y = E i_y = E i_o + E (1 + i_o) \left(\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho} \right) \frac{y}{1 + \frac{y}{\rho}}.$$

Чтобы связать n_y с M_x , возьмем уравнение равенства всех моментов нулю

$$M_x = \int_{\min y}^{\max y} n_y y \cdot d\omega = E i_o \int_{\min y}^{\max y} y d\omega + E (1 + i_o) \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho} \right) \int_{\min y}^{\max y} \frac{y^2 d\omega}{1 + \frac{y}{\rho}}.$$

В этом выражении заметим, что $\int_{\min y}^{\max y} y d\omega$ относительно оси, проходящей через центр тяжести равен 0, а величину

$$\int_{\min y}^{\max y} \frac{y^2 d\omega}{1 + \frac{y}{\rho}}$$

назовем I'_x (момент инерции кривого бруса). Заметим, что это выражение при $\rho = \infty$ превращается в обыкновенный I_x , а в общем виде может быть раскрыто так:

$$\int \frac{y^2 d\omega}{1 + \frac{y}{\rho}} = \int y^2 d\omega \left(1 - \frac{y}{\rho} + \frac{y^2}{\rho^2} - \frac{y^3}{\rho^3} \dots \right)$$

т.е. в отдельных случаях легко поддается расчету с любой степенью точности. Наше выражение для M при $i_o = 0$ и $\rho = \infty$ дает

$$M_x = \frac{E I_x}{\rho'}$$

т.е. старую формулу. В общем же виде пишем

$$M_x = E (1 + i_o) \left(\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho} \right) I_x.$$

Отсюда

$$n_y = E i_o + \frac{M_x}{I_x} \cdot \frac{y}{1 + \frac{y}{\rho}}$$

выражение, легко приводимое к $n_y = \frac{M_x}{I_x} y$ для прямого бруса. Но в то время, как в прямом бруске мы получаем n_y по закону прямой (т.е. собственно по закону плоскости), в кривом бруске, где y имеется и в знаменателе, мы получаем *гиперболическую* кривую (гиперболический цилиндр).

Значение n_y очевидно равно 0 при каком то отрицательном значении y , получаемом из формулы

$$E i_o + \frac{M_x}{I_x} \cdot \frac{y}{1 + \frac{y}{\rho}} = 0$$

а при $y = -\rho$, т.е. в центре начальной кривизны, $n_y = \infty$ т.е. асимптотой нашей гиперболы служит перпендикуляр, восстановленный к радиусу кривизны в центре кривизны. Это отмечено на нашем рисунке 77.

Точные экспериментальные исследования, основанные на использовании оптических свойств деформированного стекла, показали, что именно гипотеза *плоских сечений* и *гиперболически изменяющихся напряжений* особенно близка к истине, а большие напряжения, получающиеся при приближении к центру кривизны, показывают, что особенно страдают от изгиба кривые бруска малого радиуса кривизны и большой толщины. Ясно, что медленный рост напряжений в наружных волокнах и быстрый их рост во внутренних, объясняется необходимостью создать внутреннюю пару сил, уравновешивавшую пару внешнюю, и на *коротком* участке сжатия должны развиваться *большие* напряжения, а на *длинном* участке растяжения — *малые*, дабы

$$\int_{\min y}^{\max y} n_y \cdot d\omega = 0$$

и в то же время

$$\int_{\min y}^{\max y} n_y \cdot y \cdot d\omega = M_x.$$

Перейдем теперь к определению i_0 . Напишем выражение

$$\int_{\min y}^{\max y} n_y \cdot d\omega = 0.$$

Получим

$$\int_{\min y}^{\max y} n_y \cdot d\omega = \int_{\min y}^{\max y} E i_0 \cdot d\omega + \frac{M_x}{I_x} \int_{\min y}^{\max y} \frac{y \, d\omega}{1 + \frac{y}{\rho}} = 0,$$

вставим под знак второго интеграла

$$+ \frac{y^2}{\rho} - \frac{y^2}{\rho},$$

получим

$$E i_0 \omega + \frac{M_x}{I_x} \left(\int \frac{(y + \frac{y^2}{\rho}) \, d\omega}{1 + \frac{y}{\rho}} - \frac{1}{\rho} \int \frac{y^2 \, d\omega}{1 + \frac{y}{\rho}} \right) = 0$$

или, так как $\int y \, d\omega = 0$, а первый интеграл как раз равен $\int y \, d\omega$

$$E i_0 \omega = \frac{M_x}{\rho} \text{ и } i_0 = \frac{M_x}{E \cdot \omega \cdot \rho}.$$

Итак в кривом бруске продольная ось при *чистом* изгибе удлиняется на величину

$$i_0 \, ds = \frac{M_x}{E \omega \rho} \, ds.$$

В выражениях работы мы вспомним позднее об этой величине.

Остается найти точное значение $\Delta d\varphi_0$.

$$\Delta d\varphi_0 = d\varphi'_0 - d\varphi_0 = \frac{1+i_0}{\rho'} \cdot ds - \frac{1}{\rho} \cdot ds.$$

В третий раз прибавим и вычтем нечто, а именно, на этот раз, $\frac{i_0 ds}{\rho}$ получим:

$$\begin{aligned} \Delta d\varphi_0 &= \frac{1+i_0}{\rho'} \, ds - \frac{1+i_0}{\rho} \, ds + \frac{i_0}{\rho} \, ds = (1+i_0) \left(\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho} \right) \, ds + \frac{M_x}{E \omega \rho^2} \, ds = \\ &= \frac{M_x}{E I_x} \, ds + \frac{M_x}{E \omega \rho^2} \, ds. \end{aligned}$$

Резюмируя наши выводы относительно влияния изгиба на кривой брус большой кривизны, мы замечаем следующее:

1) напряжения изменяются на высоте сечения по гиперболе (в пределе, при $\rho = \infty$ гипербола становится прямой),

2) имеется удлинение оси $i_0 ds = \frac{M}{E \omega \rho} ds$ (в пределе при $\rho = \infty$ это удлинение равно 0).

3) Имеется дополнительное увеличение угла $\frac{M}{E \omega \rho^2} ds$ (в пределе при $\rho = \infty$ этот прирост угла равен 0).

4) величина I_x заменяется величиной I'_x (в пределе, при $\rho = \infty$, I'_x превращается в I_x).

Итак, *прямой брус есть частный случай кривого*. Является лишь вопрос: *при какой кривизне необходимо учитывать кривизну, и при какой — можно ее игнорировать*. Точные подсчеты показывают, что это зависит от отношения между толщиной бруса h и начальным радиусом ρ .

Когда $\frac{\rho}{h} = 1$, то разница в напряжениях доходит до 50%, если сравнивать напряжения, получаемые по формулам для прямого и для кривого бруса.

Когда же $\frac{\rho}{h} = 4$, то разница уже не превосходит 10%, а при $\frac{\rho}{h} = 10$, разница выражается в 3%.

Неудивительно поэтому, что при изучении арок и сводов, в коих при больших пролетах $\frac{\rho}{h} = 40$, при средних $\rho = 15-10$ и лишь при очень малых — ниже 4, кривизна бруса *при изучении деформаций игнорируется*, но, конечно учитывается вполне точно *при определении действия внешних сил*.

§ 4. Кручение.

Сначала разберем явление кручения для бруса круглого сечения. Кручение происходит, как известно, под действием пар M_z , при чем условились считать его положительным при том расположении, которое дано на чертеже, т.-е. по признаку, аналогичному с магнитной стрелкой — движение *по солнцу* для наблюдателя, смотрящего из положительных точек оси OZ на начало координат (движение *право-винтовое*).

Как и в наших предыдущих исследованиях, мы будем считать активные силы приложенными в далеких частях бруса, и тогда пара M_z выражает собой лишь результирующее действие этих далеких сил (см. рис. 78).

Инженер-строитель вообще сравнительно редко учитывал до сего времени это интересное явление, ибо многие подходящие случаи им игнорировались. Но мы приведем здесь несколько практических примеров, когда приходится сталкиваться с кручением, чтобы показать, что инженер строительной специальности вовсе не редко встречается с этим явлением даже в пределах своей специальной отрасли.

I. Дверной вагонный ключ.

В первые мгновения, когда мы нажимаем пальцами на рукоятку ключа, чтобы, повернув его, открыть замок, в стержне ключа возбуждается кручение вполне

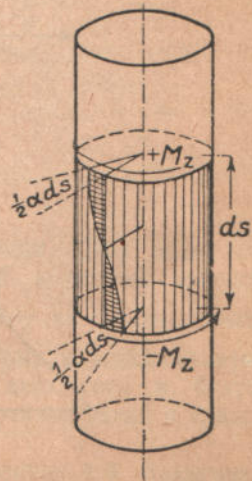


Рис. 78. Явление кручения.

в чистом виде. Явление это развивается до тех пор, пока мы не преодолеем инерции (упругого сопротивления) замка и тогда, если бы мы имели постоянное сопротивление замка во время всей работы поворачивания, стержень в дальнейшем уж более не закручивался бы, оставаясь на все время поворачивания в той степени закрученности, какой он достиг в первые мгновения начала поворота.

II. Работа вала в механической мастерской (см. рис. 79).

В утренние часы каждого рабочего дня, когда пускают в ход машину-двигатель, можно наблюдать закручивание рабочего вала, пока сила двигателя не преодолеет инерции машин - орудий.

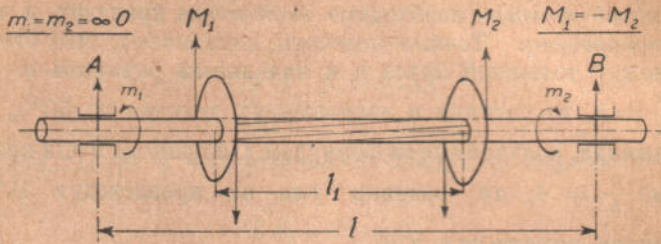


Рис. 79. Кручение вала в мастерской.

Затем во все время рабочего дня, если сопротивление машин - орудий останется постоянным, степень закручивания вала останется неизменной, но вал все время, однако, реагирует на каждое изменение работы машин-орудий, закручиваясь еще более при включении нового станка, раскручиваясь при поломке или отдыхе другого. Трение же в опорах настолько ничтожно, что оно в расчет закручивания даже не вводится вовсе.

III. Коническая пружина (см. рис. 80).

В любом элементе такой пружины возникает кручение под действием слагающей пары M_z .

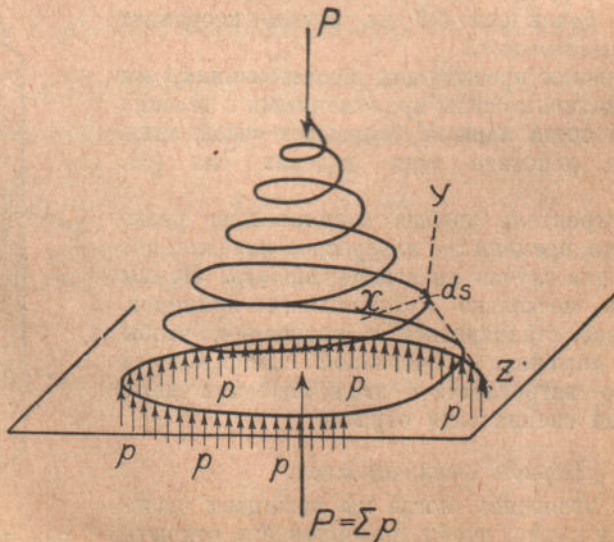


Рис. 80. Коническая пружина.

Вообще случай конической пружины представляет собой очень интересный пример работы бруса. Действительно, если нас интересует работа какого нибудь элемента ds , то, по вышеизложенным правилам, мы должны отсечь всю вышележащую часть и все приложенные к ней силы перенести в точку ds , разложив их по осям OZ , OX , OY , совпадающим соответственно с касательной, главной нормалью и бинормалью к оси бруса в точке ds . Касательная пойдет касательно к образующему конусу, но под углом к горизонту, равным наклону витка; главная нормаль пойдет перпендикулярно к касательной и к образующей конуса в данном месте; бинормаль пойдет перпендикулярно к ним обоим, т.-е. образует некоторый угол с образующей.

Но все же OZ будет почти горизонтально, OX — почти горизонтально, и OY почти вертикально (а при цилиндрической рессоре OX будет даже строго горизонтально, а OY — лежать в вертикальной плоскости, касательной к цилиндру). Ясно, что при разложении единственной верхней силы P (снизу опорная реакция равномерно распределяется по последнему плоскому витку рессоры на двух третях последнего витка), мы получим большое Q_y и малые Q_x и особенно N_x , большое M_z и малое M_x (M_y всегда равно 0). Так что фактически работа сводится к сдвигу и кручению.

IV. Работа рельса на закруглении (см. рис. 81).

На закруглении, как известно, возникает усилие, стремящееся опрокинуть рельс. Очевидно, что это усилие возбуждает кручение нашего рельса в поперечном направлении, при чем в опорных точках его (в костылях)

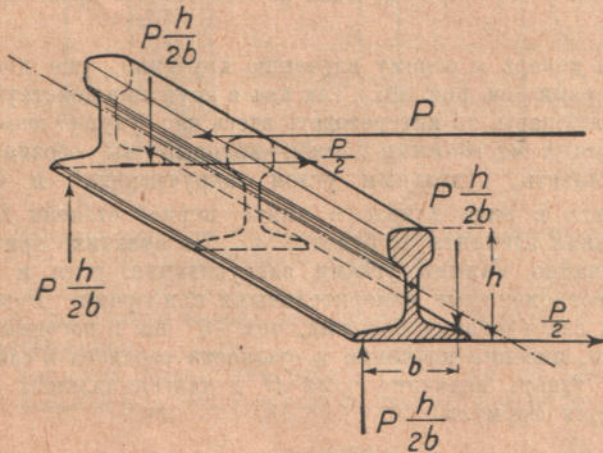


Рис. 81. Кручение рельса.

возникают опорные реакции, согласно указанным стрелкам. При величине горизонтальной силы P и высоте рельса h наибольший крутящий момент будет $\pm \frac{Ph}{4}$. Здесь мы, конечно, изображаем только одну из составляющих общую нагрузку рельса сил, совершенно игнорируя огромную вертикальную составляющую веса проходящего поезда, так как силы веса, хотя и будут несравненно более, но главным образом возбуждают в рельсе изгиб и сдвиг, мало влияя на величину кручения.

Много примеров можно привести и из чисто строительной практики. Так, круговой балкон часто опирают на заделанный в стену выступающий полукругом вперед брус, типа двутавровой балки (см. рис. 82). Если рассмотрим

сечение ds , близкое к стене, то сила P , приложенная посредине такой балки, *крутит* сечение вокруг OZ парой $+\frac{Pl}{2}$ и *изгибает* то же сечение вокруг OY парой $+Pf$.

Можно было бы еще привести множество примеров, например, кручение всякой основной продольной балки AA двумя ей поперечными BB , если они жестко с ней связаны, но мы ограничиваемся и вышеприведенными примерами, чтобы не заходить слишком далеко. Настоящие примеры приведены лишь для того, чтобы связать наше изложение с практическими случаями, дабы таким образом жизнь каждого сооружения чувствовалась инженером, и дабы он научился на этих примерах быстро определять, *как* именно и *почему* именно *так* любая часть сооружения работает.

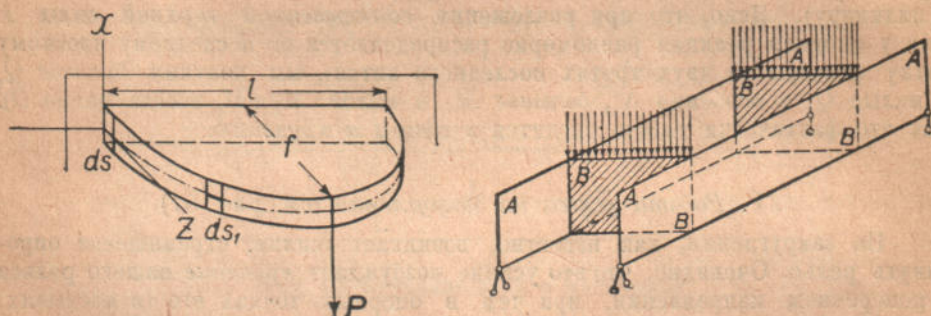


Рис. 82. Примеры кручения из строительной практики.

Перейдем теперь к самому изучению кручения, уже достаточно освещенного примерами (см. рис. 83). Так как в кручении действующим усилием является *момент* пары, то интересовать здесь нас будут *угловые деформации*. Угол *закручивания на единицу длины*, который мы обозначим через α , явится, так сказать, „удельным углом закручивания“ и поэтому будет иметь измерение в виде длины в минус первой степени L^{-1} . Полный угол закручивания элемента ds будет $\alpha \cdot ds$. На практике приходится иметь дело с чрезвычайно малыми углами закручивания, хотя и вполне точно измеряемыми современными измерительными приборами. Редко приходится встречать угол закручивания больший, чем $15''$ на 1 погонный метр.

Как видно, явление кручения в сущности сводится к сдвигу, и нашей задачей будет узнать величину угла θ и тангенциальных напряжений t . Мы ранее вывели формулы:

$$\theta = \frac{\gamma ds}{ds}; \quad t = G\theta.$$

Значит, все дело сводится к определению угла θ .

Заметим здесь, что t действует в плоскости, перпендикулярной *любому* радиусу, а *отнюдь не* в плоскости, перпендикулярной OZ : посему его обозначение, t_r , а не t_t .

Взяв в нашем круглом бруске какую-либо срединную точку, отстоящую от оси на расстоянии r , мы получаем (см. рис. 83):

$$\theta_r = \frac{ar ds}{ds} = a \cdot r \text{ и соответственно } t_r = G \cdot a \cdot r.$$

Теперь можно найти и t_1 (для радиуса $r=1$). Это t_1 аналогично n_1 в изгибе и имеет то же измерение.

Получим

$$t_1 = Ga \text{ и } t_r = t_1 \cdot r.$$

Момент внешних сил должен равняться моменту сил внутренних:

$$M_z = \int_0^{\max r} t_r \cdot r \cdot d\omega = \int_0^{\max r} t_1 \cdot r \cdot r \cdot d\omega = t_1 \int_0^{\max r} r \cdot r \cdot d\omega = t_1 \int_0^{\max r} (x^2 + y^2) d\omega = t_1 I_z.$$

Получился еще новый геометрический фактор I_z , который мы также назовем моментом инерции, и который как впоследствии можно будет показать, именно так и должен называться.

Итак, имеем:

$$t_1 = \frac{M_z}{I_z}; \quad \alpha = \frac{M_z}{GI_z}; \quad \alpha ds = \frac{M_z}{GI_z} \cdot ds.$$

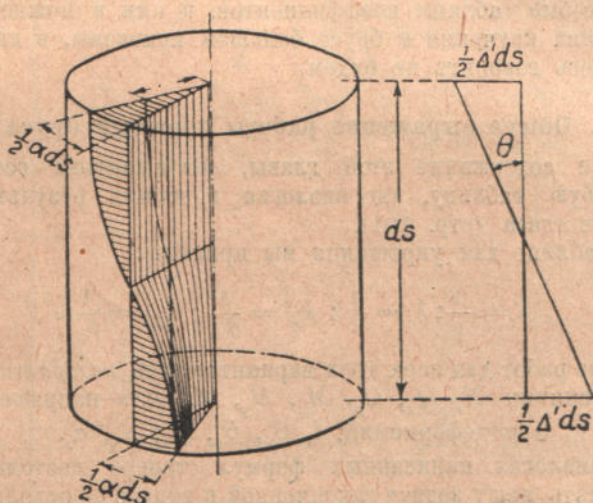


Рис. 83. Явление кручения элемента ds . Верхние стрелки отмечают расстояние единицу.

По этой-то формуле и можно при опытах, определив α , вычислить G для данного материала.

Остается написать выражение работ, опять же используя диаграмму Клапейрона, в которой для этого случая n_1 следует заменить t_1 , а i — углом α . Получим:

$$\partial T_e = + \frac{1}{2} \frac{MM_z^2}{GI_z} ds;$$

$$\partial T_i = - \frac{1}{2} \frac{t_1^2}{G} I_z ds = - \frac{1}{2} GI_z \alpha^2 ds.$$

Вот и все выводы, которые могут нас интересовать в кручении. Очевидно, что GI_z есть жесткость кручения.

Остается еще обобщить эти выводы для бруса произвольного сечения, а не именно круглого, который мы пока рассматривали.

Оказывается, что кручение представляет собою очень сложное явление и специально изучается лишь в Теории Упругости, где для некоторых сечений удастся дать удовлетворительное разрешение вопроса. Мы коснемся здесь этой проблемы только вскользь. Установлено, что в любом брусе любого сечения существуют всегда две взаимно перпендикулярных оси (так

называемые главные оси инерции, см. ниже), которые и являются как бы носителями явления кручения в его чистом виде. Эти оси остаются при кручении взаимно перпендикулярными и перпендикулярными к оси бруса. Вообще же говоря, два квадрата из тех четырех, на которые главные оси кручения делят всякое сечение, будут при этом кручении выпучиваться, два — вдавливаться. Явление, как видно, очень сложного характера, но его можно свести к тем же нашим формулам, только введя в них условно некоторый поправочный отвлеченный коэффициент λ . Наша формула для угла α тогда напишется так

$$\alpha = \lambda \frac{M_z}{GI_z}.$$

Соответственно изменятся и другие формулы. Для круглого сечения $\lambda = 1$, а для других типов сечений, помимо чисто теоретических выводов, делалось много экспериментальных исследований (например опыты Баха) составлялись особые таблицы коэффициентов, и ими и можно пользоваться.

Об явлениях кручения в брус большой кривизны, в виду сложности вопроса, мы здесь говорить не будем.

§ 5. Общее выражение работы элемента бруса ds .

Резюмируя содержание этой главы, мы выпишем все полученные формулы в особую таблицу, где аналогия в наших результатах особенно ясно бросится в глаза (стр. 101).

В этой таблице для упрощения мы приняли:

$$\rho' = \frac{1}{\rho}; \lambda' = \frac{1}{\lambda}; k_x' = \frac{1}{k_x}; k_y' = \frac{1}{k_y}.$$

Выражение работ для всех трех вариантов есть *квадратичная функция или силовых величин* $N_x, Q_x, Q_y, M_x, M_y, M_z$, или напряжений: n_x, t_y, t_z (n_x), (n_y) , (t_x) , или деформаций: $i, \theta_x, \theta_y, \rho'_x, \rho'_y, \alpha_z$.

Полная аналогия написанных формул теперь настолько ясна, что мы можем считать нашу задачу законченной и вопрос об отдельных явлениях в прямом брусе вполне исчерпанным.

Нам следует лишь теперь выяснить, какие изменения вносятся в таблицу для бруса большой кривизны. Касаясь только тех явлений, которые мы рассмотрели в брус большой кривизны, т. е. *растяжения, сжатия и изгиба*, и оставляя в стороне осложнения, возникающие в этом случае при *сдвиге и кручении*, отметим:

1) Выражения I_x и I_y придется везде брать со значками, т. е., фактически вместо

$$\int_{\min y}^{\max y} y^2 \cdot d\omega \quad \text{брать} \quad \int_{\min y}^{\max y} y^2 \cdot d\omega \left(1 - \frac{y}{\rho_0} + \frac{y^3}{\rho_0^3} \cdot \cdot \right)$$

2) Деформацию изгиба придется дополнить членом

$$\frac{M}{E\omega\rho_0^3} ds,$$

каковой член войдет и в выражение работ в виде

$$\frac{1}{2} \frac{M^2}{E\omega\rho_0^3} ds.$$

Впрочем, как имеющий в знаменателе ρ_0^3 , он считается малым и часто опускается.

Таблица работы элемента ds
(для бруса прямого или малой кривизны).

Вид деформации	Силы	Мера деформации	Жесткость	Характеристическое напряжение	Закон Гука	Работа		
						∂T_s	∂T_s через внутреннее напряжение	∂T_s через внутреннюю деформацию
Растяжение или сжатие	N_z	$i, ds = \frac{N_z}{E_0} ds$	E_0	$n_z = \frac{N_z}{\omega}$	$n_z = Ei$ $E = \frac{n_z}{\epsilon}$	$+\frac{1}{2} \frac{N_z^2}{E_0} ds$	$-\frac{1}{2} \frac{n_z^2 \omega}{E} ds$	$-\frac{1}{2} E_0 \cdot i^2 \cdot ds$
	Q_x Q_y	$\theta_x \cdot ds = k_x \frac{Q_x ds}{G_0}$ $\theta_y \cdot ds = k_y \frac{Q_y ds}{G_0}$	G_0	$t_y = k_x \frac{Q_x}{\omega}$ $t_x = k_y \frac{Q_y}{\omega}$	$t = G\theta$ $G = \frac{t}{\theta}$	$+\frac{1}{2} k_x \frac{Q_x^2}{G_0} ds$ $+\frac{1}{2} k_y \frac{Q_y^2}{G_0} ds$	$-\frac{1}{2} k'_x \frac{t_y^2 \omega}{G} ds$ $-\frac{1}{2} k'_y \frac{t_x^2 \omega}{G} ds$	$-\frac{1}{2} k'_x G_0 \theta_x^2 ds$ $-\frac{1}{2} k'_y G_0 \theta_y^2 ds$
Погнутие	M_x M_y	$\varrho'_x \cdot ds = \frac{M_x ds}{EJ_x}$ $\varrho'_y \cdot ds = \frac{M_y ds}{EJ_y}$	EJ_x EJ_y	$(n_x)_1 = \frac{M_x}{J_x}$ $(n_y)_1 = \frac{M_y}{J_y}$	$(n)_1 = E \cdot \varrho_1$ $E = \frac{(n)_1}{\varrho'_1}$	$+\frac{1}{2} \frac{M_x^2}{EJ_x} ds$ $+\frac{1}{2} \frac{M_y^2}{EJ_y} ds$	$-\frac{1}{2} \frac{(n_x)_1^2 J_x}{E} ds$ $-\frac{1}{2} \frac{(n_y)_1^2 J_y}{E} ds$	$-\frac{1}{2} E J_x \varrho'_x ds$ $-\frac{1}{2} E J_y \varrho'_y ds$
	M_z	$a \cdot ds = \lambda \frac{M_z ds}{GJ_z}$	GJ_z	$(t_z)_1 = \lambda \frac{M_z}{J_z}$	$(t)_1 = Ga$ $G = \frac{(t)_1}{a}$	$+\frac{1}{2} \lambda \frac{M_z^2}{GJ_z} ds$	$-\frac{1}{2} \lambda' \frac{t_z^2 J_z}{G} ds$	$-\frac{1}{2} \lambda' G J_z a^2 ds$

Значёк при t (t_x, t_y, t_z) указывает на направление оси, перпендикулярной плоскости действия напряжения t .

3) Угловой поворот, вызванный силой N_z , действует в направлении пары M_x (или M_y), при чем при отрицательной начальной кривизне он увеличивает действие положительной пары M_x . Ясно, что (при наличии M_x и M_y) пара M_x , напр., окажется в состоянии сверх своей обычной работы произвести работу

$$+ M_x \cdot \frac{N_z}{E\omega\varrho_0} ds = \frac{M_x N_z}{E\omega\varrho_0} ds$$

в каком-то выражении множитель $\frac{1}{2}$ отсутствует, ибо M_x находит деформацию уже готовой и сразу ее использует.

4) Взаимно—удлинение оси, вызванное парой M_x (или M_y) используется силой N_z , если таковая действует, при чем опять же при отрицательной начальной кривизне удлинения, вызванные положительным значением пары M_x , действуют в направлении положительного значения N_z . Получим работу

$$+ \frac{N_z M_x}{E\omega\varrho_0} ds.$$

Отсутствие коэффициента $\frac{1}{2}$ объясняется также, как и в предыдущем случае. Мы видим, что эти выражения совпадают с предыдущими, ибо $N_z M_x = M_x N_z$.

Итак в выражение работы может войти несколько новых членов, имеющих в числителе M_x^2 , M_y^2 , $M_x N_z$, $M_y N_z$, т.-е. и новые члены все квадратичные. Если бы мы изучили явления сдвига и кручения в кривом бруске, то получили бы добавочные члены того же типа, т.-е. квадратичные, но со множителями Q_x , Q_y , M_z возвышенными в квадрат или перемноженными попарно между собой или с величинами N_z , M_x , M_y . Во всех этих членах в знаменателе должно стоять ϱ_0 или даже ϱ_0^2 .

Обычно они игнорируются и, как выше указано, с достаточным с технической точки зрения основанием. Следует помнить, что ϱ_0 в этих формулах есть начальный радиус кривизны в отличие от ϱ , вызванного изгибом.

Но во всяком случае устанавливается следующее положение: *Выражение работы есть однородная функция второй степени или от равнодействующих внешних сил, или от характеристических внутренних напряжений, или от величин внутренних деформаций.*

Перейдем теперь к исследованию отдельного сечения и здесь подойдем вплотную к моментам инерции, изучению которых и будет посвящена вся следующая глава.

Отметим лишь еще раз то обстоятельство, что наши исследования о растяжении, сжатии, сдвиге, изгибе и кручении имеют самый общий характер и одинаково применимы и для статически-определимых и для статически неопределимых случаев; важно лишь предварительно определить для каждого данного случая N_z , Q_x , Q_y , M_x , M_y , M_z по всей длине входящих в сооружение брусков—а так как мы выше указывали, что и в статически неопределимых сооружениях эта задача всегда разрешима, то и выводы наши имеют самое общее значение при данных силах и парах N_z, \dots, M_z .

ГЛАВА IV. Исследование сечения

§ 1. Общие положения и аналитические формулы.

Выписанные нами в предыдущей таблице формулы содержали в себе два различных геометрических фактора: площадь сечения— ω и момент инерции I . Выясним себе значение этой последней величины. Момент инерции входит в выражение *жесткости* при изгибе и кручении, т.е. характеризует наибольшую жесткость, наибольшую сопротивляемость сечения изгибу и кручению: наибольший радиус кривизны ρ (наименьшая кривизна) и наименьший угла кручения α получаются именно при большом значении этой величины I . Когда мы исследуем работу какого либо бруса, желая выяснить себе наиболее благоприятные условия его сопротивляемости изгибу и кручению, то из наших формул, выражающих внутренние напряжения и деформации бруса, видим, что многие входящие в них величины являются зафиксированными, определенными уже самим условием задачи, таковы заданные очертания оси, заданная нагрузка и заданные (в зависимости от материала) упругие свойства. Величиной же, которую мы можем *подобрать* при расчете балки, и является как раз момент инерции I , и тщательно подбирая его величину, мы сможем в конечном итоге всегда наметить такие размеры поперечных сечений, при которых наш брус будет наилучшим образом сопротивляться внешним усилиям. Таким образом, задача исследования сечения неизбежно сводится к изучению величины момента инерции I , дающего нам возможность вполне охарактеризовать сопротивление и работу данного сечения.

Мы уже говорили ранее, что момент инерции есть фактор *геометрический*, так как заключает в себе лишь измерения длины. Однако, в отличие от другого геометрического фактора — площади ω , не зависящей даже от относительного расположения обоих ее измерений (длины и ширины), момент инерции,

$$I_x = \int_{\min y}^{\max y} y^2 \cdot d\omega$$

очень зависит от этого расположения, вообще от *распределения* материала по высоте, и если величина ω является *одинаковой* для всех 3-х изображенных на рис. 84 площадей, то этого совершенно нельзя сказать о величине I_x , получающейся во всех случаях различной, а именно:

$$I_{\text{лев.}} = 10000 \cdot I_{\text{прав.}} \text{ при } \omega = \text{constans.}$$

Значит для момента инерции I имеет существенное значение не только *величина площади*, но и *распределение материала по сечению*, а также

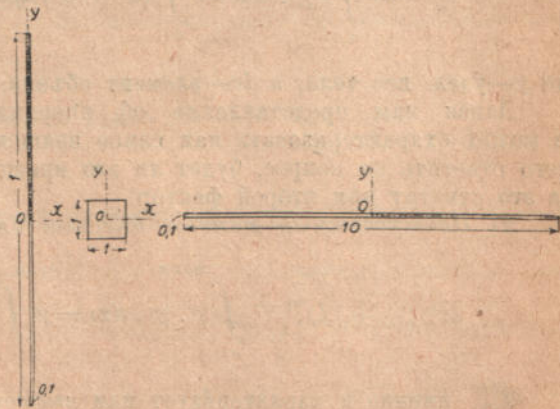


Рис. 84. Изменение величины I при перераспределении в расположении составляющих элементов той же площади (высота левой площади равна 10).

и положение самой площади относительно расчетной оси, иначе говоря, та же площадь и даже та же фигура (фиг. 1 и 3 рис. 84-го), различно повернутые, дают различные моменты инерции относительно, напр., горизонтальной оси, отличающиеся, как отмечено выше, в 10000 раз.

Момент инерции

$$I_z = \int_0^{\max r} r^2 \cdot d\omega,$$

как увидим ниже, зависит также от распределения материала ω , но уже не от избранного направления осей OX и OY .

Чтобы объяснить себе самую идею момента инерции, а также и происхождение самого этого термина, обратимся на время к теоретической механике и вспомним главу о моменте инерции масс. Эта величина встречалась при изучении вращения тела вокруг некоторой оси, и тогда нам приходилось считаться с 2-я факторами:

1) Полярный момент инерции массы относительно оси вращения характеризующий сопротивляемость массы вращению. Из формулы

$$I_z^{(m)} = \int_0^{\max r} r_z^2 \cdot dm,$$

где dm —элемент массы, видно, что сопротивляемость тела вращению, так сказать, инерция тела возрастает пропорционально количеству массы и квадрату расстояния отдельных элементов тела от оси вращения. Формулу эту можно преобразовать еще и так:

$$I_z^{(m)} = \int_0^{\max r} r_z^2 \cdot dm = \int_0^{\max r} (x^2 + y^2) dm = \gamma \int_0^{\max r} (x^2 + y^2) dv.$$

где γ —удел. вес тела, а dv —элемент объема.

Давая нам представление об инерции тела, формула эта все же не может охарактеризовать нам самое вращение его. Мы не сможем прежде всего ответить на вопрос, будет ли это вращение плавное, или нет и т. д. На это ответит нам второй фактор:

2) Центробежный момент инерции массы

$$I_{xy}^{(m)} = \int_0^{\max r} x \cdot y \cdot dm = \gamma \int_0^{\max r} x \cdot y \cdot dv.$$

$I_{xy}^{(m)}$ именно и характеризует нам чистоту вращения, при чем, когда центробежный момент инерции массы равен нулю, то движение устанавливается наиболее спокойное. Заметим еще, что в то время, как величина $I_z^{(m)}$ может быть, только положительной, $I_{xy}^{(m)}$ может быть как положительным, так и отрицательным, и в частности может равняться и нулю.

Оказывается, что существуют всегда такие три оси, относительно которых полярные $I_1^{(m)}$, $I_2^{(m)}$ и $I_3^{(m)}$ таковы, что соответственные им центробежные моменты $I_{12}^{(m)}$, $I_{13}^{(m)}$ и $I_{23}^{(m)}$ равняются нулю. Такие три оси можно всегда найти для любой вполне произвольной точки тела (а не только для центра тяжести его), и они обладают еще и тем свойством, что для них один из полярных моментов инерции получает значение

$I^{(m)}$ minimum; другой $I^{(m)}$ maximum а третий — некоторое среднее промежуточное значение. Такие оси называются *главными осями инерции массы*, а проведенные через центр тяжести — *главными центральными осями инерции массы*.

Эти формулы Теоретической Механики показывают нам, что моменты инерции пропорциональны чисто геометрическому фактору (измерение длины в 5-й степени при постоянной плотности при вынесении γ за знак интеграла), а поэтому по существу являются величинами геометрическими. Точное их измерение $M^1 \cdot L^2$.

Постараемся провести некоторую аналогию для нашего элемента ds . Согласно принятой нами основной схеме модель нашего элемента (см. рис. 85) представляет собой отрезок оси ds , оканчивающийся двумя бесконечно тонкими (толщина Δdz) и бесконечно жесткими пластинками площадью ω (такие пластинки, применяемые иногда как образцы прокатных сортов железа: рельсов, швеллеров, уголков и т. д., в этом случае называются *темплатами*).

Посмотрим, к чему сводится действие наших пар M_z , M_x и M_y на эту модель.

Начнем с крутящей пары M_z ; она стремится повернуть пластинку вокруг оси OZ . Ясно, что с точки зрения Теоретической Механики инерция сопротивления поворачиванию или момент инерции равен

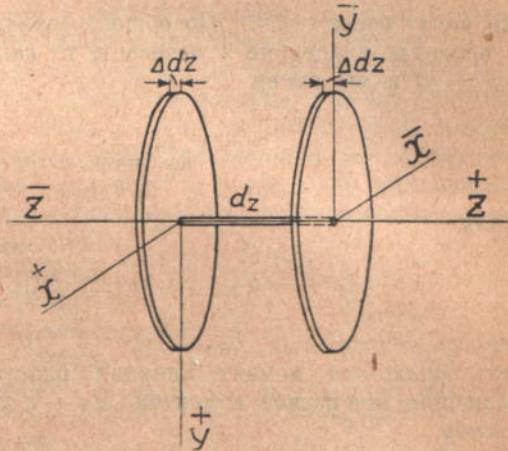


Рис. 85. Темплата, поясняющие сущность моментов инерции.

$$I_z^{(m)} = \int_0^{\max r} r_z^2 \cdot dm, \text{ но у нас } dm = \gamma \cdot \Delta dz \cdot \Delta \omega$$

и так как γ и Δdz суть по всей площади величины постоянные, то

$$I_z^{(m)} = (\gamma \cdot \Delta dz) \cdot \int_0^{\max r} r_z^2 \cdot d\omega = (\gamma \cdot \Delta dz) \int_0^{\max r} (x^2 + y^2) d\omega$$

и если исключить постоянное $(\gamma \cdot \Delta dz)$, то $\int (x^2 + y^2) d\omega$ и будет характеристикой момента инерции или просто моментом инерции сечения. Здесь измерение уже L^4 . Ясно, теперь, откуда происходит название, ибо

$$I_z = \int_0^{\max r} (x^2 + y^2) d\omega = \int_0^{\max r} r^2 \cdot d\omega$$

есть действительно мера сопротивления кручению.

Перейдем теперь к *изгибающему* моменту, напр. к M_x . Ясно, что M_x стремится повернуть пластинку вокруг оси OX . Сопротивление „массы“ пластинки поворачиванию будет

$$I_x^{(m)} = \int_0^{\max r} r_x^2 \cdot dm, \quad \text{но} \quad dm = \gamma \cdot \Delta dz \cdot \Delta \omega$$

и мы получим:

$$I_x^{(m)} = (\gamma \cdot \Delta dz) \int_0^{\max r} r_x^2 \cdot d\omega.$$

Но чему равен r_x^2 ? По общей формуле он равен $z^2 + y^2$, но так как в пределах пластинки z исчезает, то как бы „случайно“, в данном примере $r_x^2 = y^2$ и мы имеем

$$I_x^{(m)} = \gamma \cdot \Delta dz \int_{\min y}^{\max y} y^2 \cdot d\omega.$$

Итак

$$I_x = \int_{\min y}^{\max y} y^2 \cdot d\omega$$

есть *полярный* момент инерции пластинки относительно оси OX — оси вращения при изгибе моментом M_x — и характеризует меру сопротивления изгибу.

Также

$$I_y = \int_{\min x}^{\max x} x^2 \cdot d\omega,$$

откуда выходит (также „случайно“, ибо в пространстве этой зависимости нет), что $I_x + I_y = I_z$. Также, конечно, и

$$I_{xy} = \int_0^{\max r} xy \cdot d\omega$$

и имеет то же измерение L^4 и то же принципиальное значение, как и в массах — указывает меру инерционной асимметрии, при данных осях. Ясно, что надо избегать этой инерционной асимметрии, и дальше мы докажем, что OX и OY надо выбирать так, чтобы $I_{xy} = 0$, что дает так называемые *главные* или даже (при оперировании в центре тяжести) — *главные центральные оси инерции*.

С геометрической точки зрения за оси OX и OY желательно брать (особенно в кривом брусе двойкой кривизны) *главную нормаль* и *бинормаль*, но с точки зрения лучшего учета работы материала мы будем впредь предпочитать *главные оси инерции*, которые не всегда совпадают с *главной нормалью* и *бинормалью*. Ниже мы еще вернемся к выбору осей, когда выясним и докажем роль главных осей инерции. OZ проводится всегда по касательной, и ясно, что значение I_z не зависит от направления осей OX и OY , ибо $r_z^2 = x^2 + y^2 = \text{invariants}$ (инвариантно). Перейдем теперь к нахождению моментов инерции сечения.

Пусть задано некоторое сечение и требуется найти для него, относительно двух взаимно перпендикулярных случайных осей, значения

$$I_x = \int_{\min y}^{\max y} y^2 \cdot d\omega; \quad I_y = \int_{\min x}^{\max x} x^2 \cdot d\omega \quad \text{и} \quad I_{xy} = \int_0^{\max r} xy \cdot d\omega$$

а также и направление *главных осей*, т.е. тот угол α , на который нужно повернуть наши оси, чтобы получить такие I_x и I_y при которых $I_{xy} = 0$, т.е. при которых инерционной асимметрии нет.

Как и всегда, задачу эту можно решить двумя способами — *аналитически и графически*. Сначала остановимся на *аналитическом* методе, заметив однако, что применять его с удобством возможно для тел только с определенными простыми геометрическими очертаниями. Поэтому в *общем* случае обычно разделяют исследуемое сечение на множество квадратиков или вообще таких элементарных площадей, для которых I легко поддаются подсчету, и берут их настолько малыми, чтобы возможно было считать за такие же фигуры даже и крайние отрезки, получаемые на криволинейных очертаниях контура, а затем переводят все эти легко вычисляемые моменты инерции отдельных фигурок к заданной оси, выражая общий момент инерции, как сумму таких приведенных моментов. Так как при этом придется пользоваться теоремой, выражающей зависимость между моментами инерции, взятыми для двух параллельных осей, отстоящих одна от другой на расстоянии c , то выведем эту зависимость.

Пусть известен момент инерции

$$I_x = \int y^2 \cdot d\omega$$

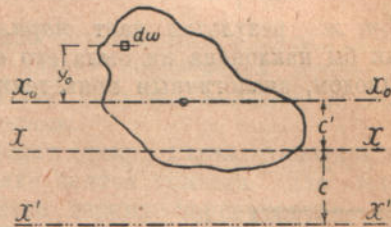


Рис. 86. Зависимость между I_x и $I_{x'}$

относительно некоторой оси XX . Момент $I_{x'}$ относительно оси $X'X'$ имеет такой вид:

$$I_{x'} = \int_{\min y}^{\max y} (y + c)^2 d\omega = I_x + 2c \int_{\min y}^{\max y} y d\omega + c^2 \cdot \omega.$$

Полученная формула в общем имеет довольно сложный вид, но значительно упрощается, когда первая ось проходит через центр тяжести сечения. В самом деле, ведь тогда

$$\int_{\min y}^{\max y} y \cdot d\omega = 0$$

(как статический момент) и мы получаем:

$$I_{x'} = I_{x_0} + c^2 \cdot \omega \quad \text{или} \quad I_{x_0} = I_{x'} - c^2 \cdot \omega$$

Итак, из всех параллельных осей, наименьший момент инерции дает ось, проходящая через центр тяжести. В таком виде нам придется широко применять эту формулу, годную, очевидно, лишь тогда, когда *одна из осей* проходит через центр тяжести.

Выведем теперь значение I для 3-х простейших сечений: прямоугольника, треугольника и круга, которые особенно часто встречаются в практике, и на которые всегда можно разложить почти *любое* сложное сечение.

Прямоугольное сечение (см. рис. 87).

Имеем относительно оси, проходящей через основание:

$$I_{x'} = \int_0^h y^2 \cdot d\omega = a \int_0^h y^2 \cdot dy = a \left[\frac{y^3}{3} \right]_{y=0}^{y=h} = \frac{ah^3}{3},$$

и относительно центральной оси:

$$I_x = a \left[\frac{y^3}{3} \right]_{y^2 = -\frac{h}{2}}^{y^2 = +\frac{h}{2}} = \frac{a^3 h}{12}.$$

Итак:

$$I_{x'} = \frac{ah^3}{12}; \quad I = \frac{a^3 h}{12}.$$

Тот же результат получим и по формуле

$$I_x = I_{x'} - c^2 \cdot \omega = \frac{ah^3}{3} - \left(\frac{h}{2}\right)^2 \cdot ah = \frac{ah^3}{12}.$$

Заметим, что отношение

$$\frac{I_x}{I_y} = \frac{h^2}{a^2}.$$

Тот же результат дает параллелограмм с основанием a и высотой h , как бы наклонена ни была его сторона к основанию—это легко проверить выводом, аналогичным приведенному.

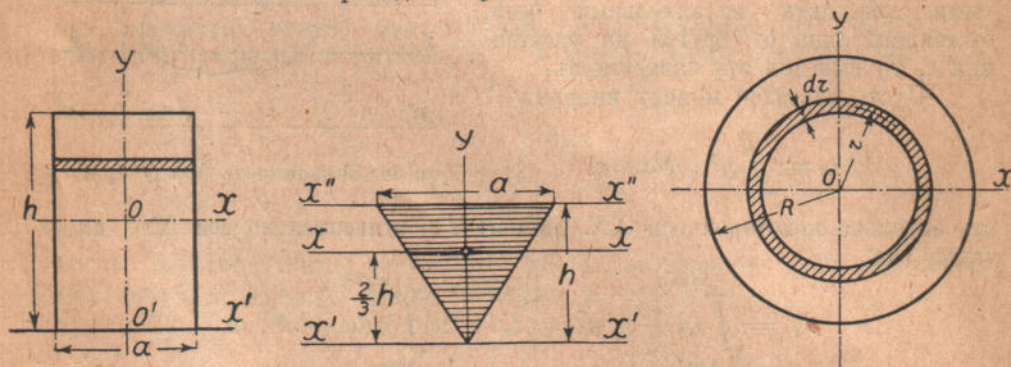


Рис. 87. Моменты инерции простейших сечений.

Треугольник (см. рис. 87).

Поставим сначала треугольник на вершину и найдем $I_{x'}$. Ясно, что $d\omega = a_y \cdot dy$ и мы получим:

$$I_{x'} = \int_0^h a_y \cdot y^2 dy = \int_0^h \frac{a}{h} y^3 \cdot dy = \frac{a}{h} \int_0^h y^3 \cdot dy = \frac{ah^3}{4}.$$

Отсюда

$$I_x = \frac{ah^3}{4} - \frac{ah}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}h\right)^2 = \frac{ah^3}{36}$$

и, наконец,

$$I_{x''} = \frac{ah^3}{36} + \frac{ah}{2} \left(\frac{1}{3}h\right)^2 = \frac{ah^3}{12}.$$

Формулы годятся и для косоугольного неравнобокого треугольника без изменения значения входящих в них букв.

Круглое сечение (см. рис. 87).

Найдем I относительно оси OZ ; имеем, принимая $d\omega = 2\pi r \cdot dr$:

$$I_z = \int_0^{\max r} r^2 \cdot d\omega = \int_0^{\max r} 2\pi r \cdot r^2 \cdot dr = 2\pi \left| \frac{r^4}{4} \right|_0^R = \frac{\pi R^4}{2}.$$

Из формулы:

$$I_z = I_x + I_y$$

имеем

$$I_x = I_y = \frac{I_z}{2} = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi D^4}{64}.$$

Для кольца легко найти

$$I_x = I_y = \frac{\pi (D_1^4 - D_2^4)}{64}.$$

Этим заканчиваем изложение аналитического способа и переходим к графическому.

§ 2. Графический метод нахождения моментов инерции.

Возьмем поперечное сечение какого-либо бруса вполне произвольного очертания и проследим на этом примере задачу определения моментов инерции и др., связанных с ними величин, попутно выясняя и все могущие нас интересовать теоретические вопросы.

Выбираем две случайных оси координат (напр., параллельно краям бумаги) и прежде всего определим положение центра тяжести. Для этого разбиваем наше сечение системой множества взаимно-перпендикулярных параллельных линий на элементарные квадратiki некоторой определенной площади каждый. Если число их окажется достаточно большим, то даже граничащие с контурами неправильные площадки (треугольники и т. д.) могут быть приняты за полные квадратiki, и площадь сечения Ω_0 может быть легко подсчитана. Переходя теперь к определению I_x , сгруппируем вместе площади одного горизонта и увидим, что наше сечение разбилось на элементарные длинные полоски с площадями $d\omega = b \cdot dy$, где b — соответственная ширина в данном горизонте.

Силы тяжести, принимая равномерное распределение материала по сечению, являются пропорциональными площадям наших элементарных полосок. Поэтому, выбрав определенный масштаб для этих площадей — векторов, пропорциональных силам тяжести, мы могли бы, построив соответственный план сил и веревочный многоугольник, найти и направление равнодействующей, т. е. получить линию, на которой расположен центр тяжести. Сделав два подобных построения для двух перпендикулярных осей, мы на пересечении линий равнодействующих получим положение нашего центра тяжести. В нашем случае мы эти построения осуществляем таким образом: подсчитав площади $d\omega$ наших полосок, мы все эти площади приведем к какой-либо общей ширине a_0 и таким образом получим различные величины высот h , пропорциональные нашим площадям. Величину a_0 подберем так, чтобы величины h могли бы быть нами откладываемы в плане сил в натуральную величину. Вот эти-то линейные отрезки h мы и принимаем за векторы, могущие изобразить нам величины и направления сил тяжести. Преимущество этого приема заключается в том особом изяществе, которое мы получаем, откладывая в плане сил линейные величины и при том в натуральную величину (иначе нам пришлось бы в линейных

отрезках выразить квадратные единицы площади, и построение требовало бы введения *особого масштаба*). При построении *плана сил* выбираем

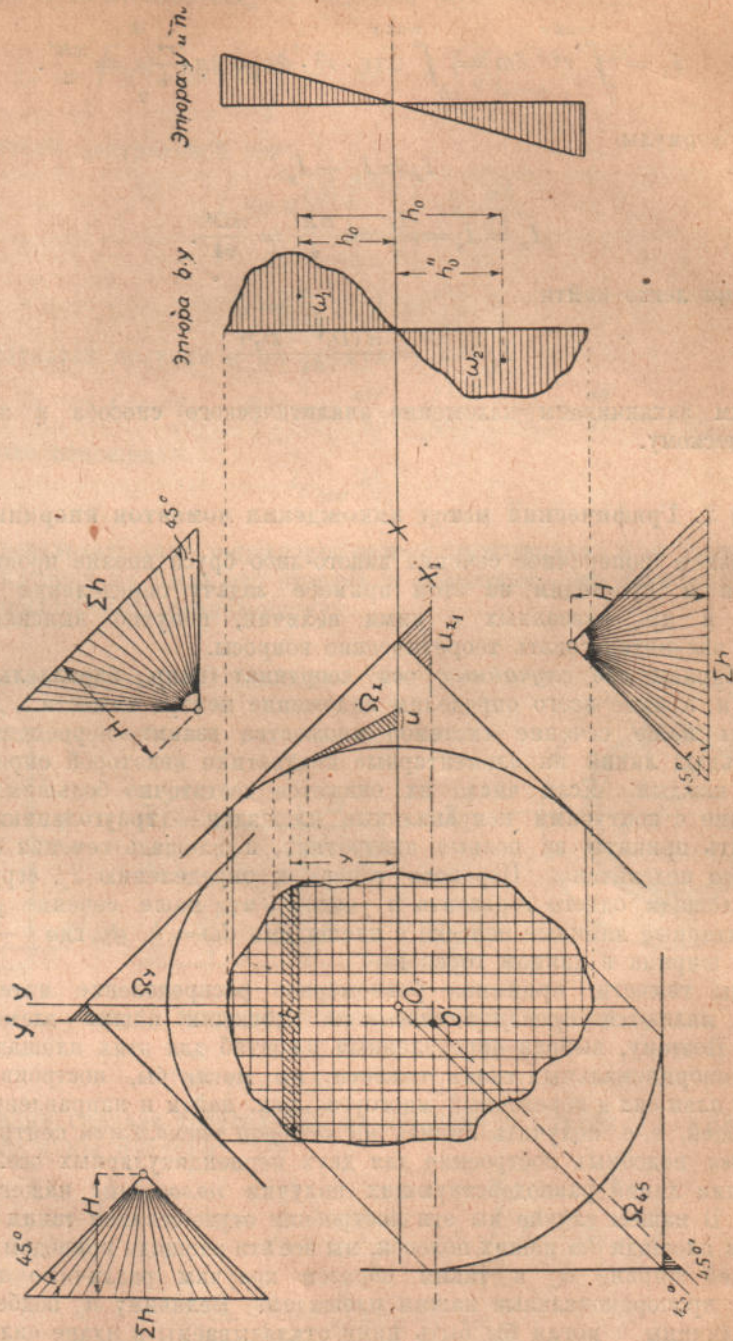


Рис. 88. Графическое нахождение моментов инерции.

крайние лучи под углами в 45° к направлению отрезка Σh . Тогда полюсное расстояние H выразится таким образом:

$$H = \frac{\Sigma h}{2} = \frac{\Omega_0}{2a}, \text{ ибо } \Omega_0 = \Sigma h \cdot a$$

Мы увидим далее, что это представит собой громадное удобство, хотя проведение лучей под 45° и не обязательно. Для нахождения центра тяжести достаточно сделать только 2 таких построения, но в виду того, что для определения центробежного момента инерции I_{xy} (см. ниже) придется сделать еще одно такое же построение для оси под 45° , то мы построим и 3-ю фигуру с направлением сил тяжести под 45° одновременно с двумя первыми (это дает контроль правильности определения центра тяжести,—все три направления равнодействующих должны сходиться в одной точке). Докажем теперь, что *площади фигур, образованных веревочными многоугольниками*, путем продолжения их крайних сторон до оси, относительно которой ищется I , в известном масштабе *изображают величину моментов инерции*. Разберем сначала тот случай, когда момент инерции определяется относительно осей, проходящих через центр тяжести. Возьмем опять нашу полоску $d\omega$, заштрихованную на чертеже, и выделим на площади Ω_x соответствующий элементарный треугольник, образованный крайними (для нашей полоски) лучами и осью X . Обозначив основание его через u , получаем площадь его в виде

$$\frac{uy}{2} = \Delta\Omega_x.$$

Но вспомним, что отрезок u подчиняется формуле $uH = rR$, где H —полюсное расстояние, R —равнодействующая сила, которая, в виду нашего решения считать высоты приведенных площадей за силы, равна h , а r —соответствует ординате y .

Отсюда выводим

$$u = \frac{hy}{H}$$

и, следовательно,

$$\Delta\Omega_x = \frac{hy^2}{2H}.$$

Суммируя теперь различные площади наших полосок, получаем

$$\Sigma\Delta\Omega_x = \Omega_x = \frac{\Sigma hy^2}{2H} = \frac{\Sigma hay^2}{2Ha} = \frac{\Sigma\Delta\omega \cdot y^2}{2Ha} = \frac{I_x}{Q_0}.$$

Действительно: $\Sigma\Delta\omega \cdot y^2 = I_x$, по определению момента инерции, $2H = \Sigma h$, потому что крайние лучи плана сил были направлены под 45° ; а произведение $\Sigma ha = Q_0$ (площади нашего сечения).

Отсюда получаем изящное выражение для момента инерции:

$$I_x = Q_0 \cdot \Omega_x \dots \dots \dots \text{(формула Mohr'a)}.$$

Совершенно также строятся и остальные две фигуры — для оси OY и для оси 45° , но там, конечно, квадратикки группируются в полоски *по иному и в ином порядке*. Если принять такое же направление крайних лучей и тот же масштаб сил (или вернее то же a), то отношение $\Omega_x; \Omega_y; \Omega_{45}$ пропорционально отношению $I_x; I_y; I_{45}$ и прямо указывает их относительные значения. Измерение, конечно, равно L^4 , и если площадь Q_0 определена не в натуральную величину, то следует ввести поправку на *квадрат* линейного масштаба чертежа; такую же поправку *всегда* необходимо ввести на *квадрат* того же линейного масштаба для определения истинного значения Ω_x и других площадей в поле сил. Так что, если, напр., фигура дана в половинном масштабе и площадки снимались по размерам *чертежа*, то поправка будет $(\frac{1}{2})^4$, т.е. надо увеличить в 16 раз полученный результат. Заметим, что и здесь мы пользуемся веревочным многоугольником, как двой-

ным интегратором, и отрезки u на какой-либо оси характеризуют *статический момент* площадей относительно этой оси. Эти отрезки на горизонте центра тяжести в сумме дают 0, если учесть, что некоторые из них положительные, а некоторые отрицательные, а выше и ниже его дают реальные отрезки между крайними лучами, вроде отрезка U_x на оси X_1 . Далее мы пользуемся площадью многоугольника, как *третьим* интегралом, и получаем момент высшей степени — момент инерции.

Заметим еще относительно *точности* построения, что идеально точный результат получился бы, если бы веревочно-стержневой многоугольник превратился в кривую. Но на рис. 88 видно, что от этого превращения он весьма мало бы увеличился — на 1—2%, а то и менее. Эта ошибка *аналитически* объясняется тем, что мы, разделив сечение на квадратики, игнорируем I каждого квадратика относительно *собственной* оси и вместо точной формулы:

$$I_x = \Sigma I_0 + \Sigma \omega e^2,$$

как бы применяем формулу:

$$I_x = \Sigma \omega e^2,$$

но разница, как можно доказать подсчетом, уже при 30—40 элементах — ничтожна.

В случае, когда момент инерции будет определяться относительно другой какой-либо оси, не проходящей через центр тяжести (напр., нашей первой случайной оси), характер наших рассуждений не изменится, разница будет только в том, что к нашей площади *прибавится* еще площадь треугольника, образованного осью и 2-мя направлениями крайних лучей. Этот треугольник в сущности и дает нам член $\omega \cdot \bar{c}^2$. Итак, способ Мора дает нам возможность определения моментов инерции для *любого* сечения и относительно *любой* оси. Существует еще множество графических методов построения моментов инерции, но на них мы останавливаться не будем. Укажем только еще на один метод, дающий попутно возможность построения „*плеча внутренней пары*“ и вообще имеющий некоторое принципиальное значение.

Построим где-либо на продолжении нашей оси (проходящей через центр тяжести сечения) перпендикулярную ей линию, снесем на нее границы, или еще лучше, горизонтальные оси центров тяжести наших полосок и на этих ординатах будем откладывать величины $b \cdot y$ (т.-е. произведения ординат y центров тяжести наших полосок на ширину полосок b). В результате получится некоторая фигура, закономерно зависящая от изменения величины $b \cdot y$, площадь которой на каком-либо участке, по высоте, при достаточно малой толщине полосок, является, очевидно, *статическим моментом соответственной части сечения относительно ОХ*. Получилась, значит, *эпюра статических моментов относительно ОХ*. Фигура эта, как видно из чертежа, состоит из двух площадей ω_1 и ω_2 (положительной и отрицательной), при чем $\omega_1 = \omega_2$ (так как статический момент *всего* сечения относительно оси, проходящей через центр тяжести = 0). Пересечение контура этой фигуры с осью соответствует *нулевой* ординате, так как здесь ордината $y = 0$; так же и на краях эпюры, вообще говоря, получаем иногда нулевые точки, если ширина b для крайних точек равна 0 (если бы случайно контур сечения в этой точке был параллелен нашей оси, то получилась бы и в этом случае определенная начальная ширина b , и эпюра началась бы не с нулевой ординаты).

Найдем обычными построениями центры тяжести обеих площадей ω_1 и ω_2 . Получаем, как расстояние между ними, величину h_0 , которая, как мы

увидим ниже, и есть так называемое „плечо внутренней пары“. Оказывается, что момент инерции

$$I_x = \omega_1 \cdot h_0 = \omega_2 \cdot h_0$$

(ибо обе площади должны быть равны).

В самом деле:

$$I_x = \int_{\min y}^{\max y} b \cdot y^2 \cdot dy,$$

ибо

$$d\omega = b \cdot dy.$$

Имеем

$$\begin{aligned} I_x &= \int_{\min y}^{\max y} b \cdot y^2 \cdot dy = \int_0^{\max y} (b \cdot y \cdot dy) \cdot y + \int_{\min y}^0 (b \cdot y \cdot dy) \cdot y = \\ &= \omega_1 \cdot h_0' + \omega_2 \cdot h_0'' = \omega_1 h_0 = \omega_2 h_0, \end{aligned}$$

ибо

$$\omega_1 = \omega_2$$

и

$$h_0' + h_0'' = h_0.$$

Преобразования основаны на том, что $\int by \cdot dy = \omega$, значит $by \cdot dy = d\omega$, а $\int (by \cdot dy) \cdot y =$ статическому моменту = произведению всей площади (как равнодействующей) на расстояние до центра тяжести, которое обозначим для ω_1 и ω_2 через h_0' и h_0'' . Итак, теорема доказана и „плечо внутренней пары“ h_0 действительно дает возможность определить момент инерции при помощи простой формулы $\omega_1 \cdot h_0$.

Чтобы понять происхождение термина: „плечо внутренней пары“, обратимся к теории изгиба. Мы вывели в свое время, что изгибающий момент M_x выражается такой формулой:

$$M_x = \int_{\min y}^{\max y} n_y \cdot y \cdot d\Omega_0 = n_1 \int_{\min y}^{\max y} y \cdot d\Omega_0 \cdot y = n_1 \int_{\min y}^{\max y} (by \cdot dy)y,$$

где n_y —внутренние силы напряжения, возникающие при изгибе, а $\Delta\Omega_0 = b \cdot dy$. Полное тождество интеграла этой формулы с интегралом, получающимся при получении эпюры статических моментов, указывает нам, что наша эпюра в известном масштабе (в масштабе единичного напряжения) выражает собой полную напряженность внутренних сил на разных горизонтах, возникающую при изгибе. Действительно, если откладывать величины $n_1 \cdot b \cdot y$ вместо $b \cdot y$, то фигура, хотя и в ином масштабе, останется *таже*, а между тем, ведь $n_1 \cdot b \cdot y \cdot dy = n_y \cdot d\omega$, т.е. равно внутреннему напряжению на данном горизонте, умноженному на площадь соответственной полоски, т.е. полной внутренней силе на данном горизонте, а равнодействующая всех таких внутренних сил равна площади всей фигуры, т.е. нулю. Ясно теперь, что все внутренние напряжения при изгибе можно всегда привести к эквивалентной *паре* с некоторым плечом h_0 , и момент этой пары, по своему эффекту, вполне заменяет полное действие всех внутренних напряжений при изгибе. Вот эта-то пара и носит название „внутренней пары“, а отрезок h_0 поэтому и должен называться „плечом внутренней пары“.

Мы видим, что в формулу момента инерции $I_x = \int y^2 \cdot d\omega$ под знак интеграла входит квадрат *переменной* величины y , которую поэтому нельзя

вынести за знак интеграла. Однако, можно всегда подобрать такую величину q_x , чтобы

$$\int y^2 \cdot d\Omega_0 = q_x^2 \cdot \int d\Omega_0 = q_x^2 \cdot \Omega_0.$$

Величина q_x , следовательно, представляет собой некоторую среднюю величину ординаты y , величину постоянную для каждого данного сечения и вполне эквивалентную по своему эффекту переменному параметру y (так-называемое *среднее значение подынтегральной величины*). Тогда формула момента инерции для этого обозначения получает очень простой вид:

$$I_x = q_x^2 \cdot \Omega_0,$$

где

$$q_x^2 = \frac{I_x}{\Omega_0}; \quad q_x = \sqrt{\frac{I_x}{\Omega_0}}.$$

Величина q носит название *радиуса инерции* и является вполне реальной величиной с измерением (L^1). Это есть плечо модели жесткости (см.

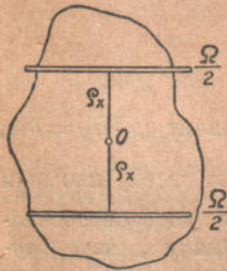


Рис. 89. Модель жесткости.

рис. 89) относительно оси, проходящей через центр тяжести сечения. В самом деле, жесткость выражается произведением модуля упругости (величина постоянная для каждого данного случая) на момент инерции, в свою очередь равный произведению площади Ω_0 на квадрат радиуса инерции. Если возьмем условную фигуру, указанную на чертеже, где два диска, равных по величине каждый половине площади нашего сечения Ω_0 , как бы насажены на шпильку перпендикулярно к ней с длиной их плеч от оси O , равной q_x , то жесткость (сопротивляемость) этой условной фигурки будет характеризоваться величиной:

модуль упругости \times момент инерции,

который для этого случая равен

$$I_x = 2 \cdot q_x^2 \cdot \frac{\Omega_0}{2} = q_x^2 \cdot \Omega_0,$$

т.-е. имеет ту же величину, что и для самого нашего сечения. Значит, модель жесткости с парным плечом, равным радиусу инерции, вполне эквивалентна по своей сопротивляемости рассматриваемому сечению. Необходимо ясно представить себе, что q должно быть *менее*, чем y наиболее удаленных точек, и *более*, чем расстояние точки O до центра тяжести каждой половины.

Для оси, проходящей через центр тяжести, принято изображать модель жесткости так, как показано на чертеже, т.-е. откладывая по обе стороны оси на расстояниях q_x значения *половины* Ω_0 . Для других осей соблюдение этого условия не обязательно, и модель жесткости относительно произвольной оси может быть изображена и с одним плечом, т.-е. *все* сечение можно заменить односторонним диском. Правильнее было бы, казалось, принять за правило в каждую сторону откладывать ту часть площади, которая приходится выше данной оси, но давать, конечно, в обе стороны *то же* плечо q .

§ 3. Главные оси.

Мы видели ранее, что центробежный момент инерции массы I_{xy}^m характеризует как бы *чистоту* вращения тела при поворачивании его около оси, при чем значению $I_{xy}^m = 0$ соответствует наиболее спокойное вращение — наиболее благоприятные условия.

Поэтому, желая выяснить себе те направления осей, по которым сечение лучше всего сопротивляется внешним силам, мы должны их находить по нулевому значению центробежного момента I_{xy} . Положим, что для нашего сечения известны значения трех моментов инерции относительно некоторых *случайных* осей (двух взаимно перпендикулярных и третьей — наклоненной к ним под произвольным углом — обычно в 45°).

Найдем для этого случая положение главных осей инерции, отметив, что все дальнейшее изложение ведется *без* оговорки, что O совпадает с центром тяжести сечения, т.е. справедливо для любой точки O .

Нам известны значения I_x , I_y и I_{45} . Пусть новые оси OX' и OY' повернуты относительно прежних на угол α (см. рис. 90). Имеем формулы преобразования координат

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \alpha + y \sin \alpha \\ y' &= y \cos \alpha - x \sin \alpha. \end{aligned}$$

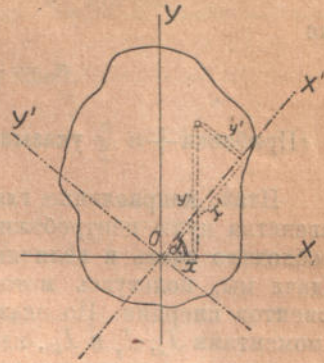


Рис. 90. Перемена осей координат.

Тогда, называя элемент площади через $d\omega$:

$$\begin{aligned} I_{x'} &= \int y_1^2 \cdot d\omega = \int (y \cos \alpha - x \sin \alpha)^2 d\omega = \\ &= \int y^2 \cos^2 \alpha d\omega - \int 2xy \sin \alpha \cos \alpha d\omega + \int x^2 \sin^2 \alpha d\omega = \\ &= I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - I_{xy} \sin 2\alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{y'} &= \int x^2 \cos^2 \alpha d\omega + \int 2xy \sin \alpha \cos \alpha d\omega + \int y^2 \sin^2 \alpha d\omega = \\ &= I_y \cos^2 \alpha + I_x \sin^2 \alpha + I_{xy} \sin 2\alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{x'y'} &= \int (xy \cos^2 \alpha - x^2 \sin \alpha \cos \alpha + y^2 \sin \alpha \cos \alpha - xy \sin^2 \alpha) d\omega = \\ &= I_{xy} \cos^2 \alpha - I_y \cdot \frac{1}{2} \sin 2\alpha + I_x \cdot \frac{1}{2} \sin 2\alpha - I_{xy} \sin^2 \alpha = \\ &= \frac{1}{2} (I_x - I_y) \sin 2\alpha + I_{xy} \cos 2\alpha \end{aligned}$$

Выпишем полученные результаты отдельно:

$$I_{x'} = I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - I_{xy} \sin 2\alpha$$

$$I_{y'} = I_x \sin^2 \alpha + I_y \cos^2 \alpha + I_{xy} \sin 2\alpha$$

$$I_{x'y'} = \frac{1}{2} (I_x - I_y) \sin 2\alpha + I_{xy} \cos 2\alpha.$$

Заметим, что при сложении первых двух строк получаем:

$$I_{x'} + I_{y'} = I_x + I_y,$$

т.е. сумма моментов инерции при вращении осей остается *постоянной* и равной некоторому *инварианту*, вполне определенному для каждой системы. В случае пространственного расположения осей инвариантность суммы трех моментов инерции масс также имеет место (там имеем три момента инерции соответственно трем осям координат). Определим теперь угол α_0

главных осей относительно случайных осей. Из условия, что для главных осей $I_{x'y'} = 0$ получаем:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y},$$

или

$$\alpha_0 = \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(-\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y} \right) + n \frac{\pi}{2}.$$

(Прибавка $+ n \frac{\pi}{2}$ указывает на две взаимно перпендикулярных оси).

Итак, направление главных осей определено и получилось из условия равенства нулю центробежного момента; причем для получения угла α_0 необходимо знать и величину I_{xy} , а между тем, при графическом решении задачи мы, пользуясь методом Мора, получали только значение простых моментов инерции. Но оказывается, что существует зависимость между I_{xy} и моментами I_x , I_y и I_{45} , где I_{45} —момент инерции относительно оси, взятой непременно в 1-м квадранте и под углом в 45° . Действительно, если $\alpha = 45^\circ$, то $\sin \alpha = \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и первое из наших уравнений дает:

$$I_{45} = I_x \cos^2 45^\circ + I_y \sin^2 45^\circ - I_{xy} \cdot \sin 90^\circ$$

$$I_{45} = \frac{1}{2} (I_x + I_y) - I_{xy}$$

$$I_{xy} = \frac{1}{2} (I_x + I_y) - I_{45}.$$

Поэтому мы при графическом решении задачи и брали еще третью ось, проходящую под 45° к первой (конечно эта ось может проходить и во 2-ом и 4-м квадранте, но угол тогда будет уже 135° или минус 45° , и наша формула переменит знаки у тех ее членов, которые зависят от этого угла). Можно взять третью ось и под *любым* другим углом.

Определим теперь максимальное и минимальное значение моментов инерции, т.е. найдем такое положение осей, при котором один из моментов инерции давал бы наибольшее, а другой наименьшее значение (что это случится одновременно, указывает инвариантность их сумм). Так как I_x и I_y являются переменными величинами, функциями угла α , то значения I можно найти обычным методом дифференциального исчисления.

$$\frac{\partial I_x}{\partial \alpha} = -2I_x \cos \alpha \sin \alpha + 2I_y \sin \alpha \cos \alpha - 2I_{xy} \cos 2\alpha = 0.$$

$$I_x \sin 2\alpha - I_y \sin 2\alpha + 2I_{xy} \cos 2\alpha = 0.$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y}; \quad \alpha_0 = \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(-\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y} \right) + n \frac{\pi}{2}.$$

Итак оказалось, что наибольшему и наименьшему значению моментов инерции соответствует *то же* положение осей, которое нашлось из условия нулевого значения центробежного момента инерции. Значит, главные оси можно определить также и из значения максимума и минимума моментов инерции. Обозначим эти значения значками I_1 и I_2 и найдем теперь и самую их величину. Для решения вопроса: имеем ли мы дело

с максимумом или минимумом функции, нужно, как известно, выяснить знак 2-й производной; при чем для некоторого удобства возьмем $\frac{1}{4} \frac{\partial^2 I_x}{\partial \alpha^2}$.

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{\partial^2 I_x'}{\partial \alpha^2} = -\frac{1}{2} (I_x - I_y) \cos 2\alpha + I_{xy} \sin 2\alpha.$$

Так как

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{I_{xy}}{\frac{1}{2} (I_x - I_y)} = -\frac{m}{n}$$

то, как известно из тригонометрии

$$\sin 2\alpha_0 = \mp \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2}} = \mp \frac{I_{xy}}{\sqrt{\left[\frac{1}{2} (I_x - I_y)\right]^2 + I_{xy}^2}}$$

и

$$\cos 2\alpha_0 = \pm \frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2}} = \pm \frac{\frac{1}{2} (I_x - I_y)}{\sqrt{\left[\frac{1}{2} (I_x - I_y)\right]^2 + I_{xy}^2}}.$$

Отсюда

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{\partial^2 I_x'}{\partial \alpha^2} = \frac{\left(\frac{1}{2} (I_x - I_y)\right)^2 + I_{xy}^2}{\pm \sqrt{\left[\frac{1}{2} (I_x - I_y)\right]^2 + I_{xy}^2}} = \mp \sqrt{\left[\frac{1}{2} (I_x - I_y)\right]^2 + I_{xy}^2}.$$

Исследуя полученное значение $\frac{\partial^2 I_x'}{\partial \alpha^2}$ видим, что знак здесь зависит только от знака при корне, ибо подкоренное выражение существенно положительно, при чем положительному значению радикала соответствует минимальное значение (I_2) момента инерции, а отрицательному — максимальное значение момента инерции. Наконец, для нахождения самой величины этих моментов инерции, нам нужно знать выражение $\sin^2 \alpha$ и $\cos^2 \alpha$ через 2α . Имеем:

$$I_x^1 = I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - I_{xy} \sin 2\alpha = \frac{1}{2} (I_x + I_y) + \frac{1}{2} (I_x - I_y) \cos 2\alpha - I_{xy} \sin 2\alpha.$$

Значение тригонометрических величин здесь нам уже известно (это выражение удобно и для взятия производной).

Так как уже было выяснено, что максимум или минимум нашей функции зависит лишь от знака корня или что то же, от знака при $\sin 2\alpha$, то пишем:

$$\begin{aligned} \frac{\max}{\min} I_x' &= \frac{1}{2} (I_x + I_y) \pm \frac{\left[\frac{1}{2} (I_x - I_y)\right]^2 + I_{xy}^2}{\sqrt{\left[\frac{1}{2} (I_x - I_y)\right]^2 + I_{xy}^2}} = \\ &= \frac{1}{2} (I_x + I_y) \pm \sqrt{\left[\frac{1}{2} (I_x - I_y)\right]^2 + I_{xy}^2} \end{aligned}$$

Значит

$$\begin{aligned} \max I &= I_1 = \frac{1}{2} (I_x + I_y) + \sqrt{\left[\frac{1}{2} (I_x - I_y)\right]^2 + I_{xy}^2} \\ \min I &= I_2 = \frac{1}{2} (I_x + I_y) - \sqrt{\left[\frac{1}{2} (I_x - I_y)\right]^2 + I_{xy}^2}. \end{aligned}$$

Остается еще сказать несколько слов об осях наибольшей инерционной асимметрии, т.е. о таком положении осей, которому соответствует

наихудшее, т.е. наибольшее по абсолютной величине значение момента инерции I_{xy} .

Очевидно, что принцип решения задачи остается тот же, что и выше; опять нужно взять производную, но уже от центробежного на этот раз момента инерции по углу α , приравнять ее значение нулю и т. д. Обозначим угол этих осей инерционной асимметрии по отношению к данным значком α_{00} и получим

$$\operatorname{tg} 2\alpha_{00} = + \frac{\frac{1}{2} (I_x - I_y)}{I_{xy}}$$

т.е. получается величина взаимно-обратная (по величине и знаку) $\operatorname{tg} 2\alpha_0$, или

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 \cdot \operatorname{tg} 2\alpha_{00} = - 1.$$

В Аналитической геометрии доказывалось, что такая зависимость между тангенсами углов влечет за собой взаимную перпендикулярность направлений. Вспомнив, что мы имеем дело с двойными углами ($2\alpha_0$ и $2\alpha_{00}$), видим, что *оси наибольшей асимметрии повернуты на 45° относительно главных осей.*

Значение $\frac{\max}{\min} I_{xy}$ путем несложных преобразований приводится к виду

$$\frac{\max}{\min} I_{xy} = \pm \sqrt{\left[\frac{1}{2} (I_x - I_y)\right]^2 + I_{xy}^2} = \pm \frac{I_1 - I_2}{2}.$$

Если обозначим соответствующие такому значению центробежного момента инерции моменты инерции через I_{x_0} и I_{y_0} то получим

$$I_{x_0} = I_{y_0} = \frac{I_1 + I_2}{2}.$$

Действительно, пользуясь для этого случая формулой

$$I_{x_1} = \frac{1}{2} (I_x + I_y) + \frac{1}{2} (I_x - I_y) \cos 2\alpha - I_{xy} \sin 2\alpha$$

и имея в виду, что при

$$\operatorname{tg} 2\alpha_{00} = + \frac{\frac{1}{2} (I_x - I_y)}{I_{xy}}$$

$$\sin 2\alpha_{00} = \pm \frac{\frac{1}{2} (I_x - I_y)}{\sqrt{\left[\frac{1}{2} (I_x - I_y)\right]^2 + I_{xy}^2}}$$

$$\cos 2\alpha_{00} = \pm \frac{I_{xy}}{\sqrt{\left[\frac{1}{2} (I_x - I_y)\right]^2 + I_{xy}^2}}$$

найдем

$$\begin{aligned} I_{x_0} &= \frac{1}{2} (I_x + I_y) \pm \frac{\frac{1}{2} (I_x - I_y) \cdot I_{xy} - \frac{1}{2} (I_x - I_y) \cdot I_{xy}}{\sqrt{\left[\frac{1}{2} (I_x - I_y)\right]^2 + I_{xy}^2}} = \frac{1}{2} (I_x + I_y) = \\ &= \frac{1}{2} (I_1 + I_2). \end{aligned}$$

Между прочим, при последних подстановках мы могли заметить, что формула I_{x_1} давала нам всегда два значения, в зависимости от знака \sin и \cos и вообще позволяла найти I для любого угла поворота α . Поэтому I_x ,

часто и называется, I_a , а формулой I_y пользоваться не приходится: — она *исключается в первую* при избрании другого знака для \sin и \cos .

Мы видели, что сумма обоих моментов инерции для каждой системы осей является величиной постоянной. Величина эта обозначается значком I_z ; согласно выше данному определению моментов инерции I_z выражается такой формулой:

$$I_z = \int_0^{\max r} r^2 \cdot d\omega = \int_0^{\max r} (x^2 + y^2) d\omega.$$

Итак

$$I_x + I_y = I_{x_1} + I_{y_1} = I_1 + I_2 = I_z.$$

§ 4. Геометрические методы изучения моментов инерции.

Мы рассмотрим здесь только два таких метода, хотя в литературе излагается их множество. Первый из этих методов *немецкий*, впервые предложенный *Кульманом*, но более детально разработанный *Мором*, почему обычно и носит имя этого второго ученого. Он вполне точен, удобен для практического применения и дает возможность детально и исчерпывающе изучить поставленную нам задачу. Но в нем нет того изящества и цельности построения, которое дал француз Ламэ в своем „эллипсе инерции“, который мы изложим, как второй метод исследования вопроса. По идее Мора на координатной оси X , в известном масштабе откладываем I_x и I_y , при чем осей подбираем, так чтобы $I_x > I_y$. Затем от полученных точек, перпендикулярно оси OX в противоположном направлении отложим отрезки I_{xy} , при чем направления их должны быть взяты в зависимости от знака центробежного момента таким образом, чтобы они как бы вращали диаграмму по часовой стрелке, если знак I_{xy} положительный, и наоборот. Затем из точки O' проведем круг радиусом $O'C$.

Очень важно в этом построении избрать правильно оси координат.

Во-первых OX должна быть *параллельна* той оси, которая дает *больший* из двух „случайных“ моментов инерции.

Во-вторых *положительное* направление OY должно быть избрано так, чтобы I_{xy} , при посредстве которого мы определяем I_{xy} , оказалось в *первом*, или, что тоже самое, в *третьем* квадранте. Таким образом, если при обычном направлении случайных осей I_{xy} была во-втором или четвертом квадранте, OY в круге Мора надо направить *вниз*, и при *положительных* I_{xy} давать им вращение, *обратное* часовой стрелке, а при отрицательных I_{xy} — наоборот.

Отметим еще, что на нашей фигуре 91-ой

$$OO' = \frac{1}{2} (I_x + I_y) = \frac{1}{2} (I_1 + I_2); \quad CO' = \frac{1}{2} (I_x - I_y)$$

и радиус

$$CO' = \sqrt{\left[\frac{1}{2} (I_x - I_y)\right]^2 + I_{xy}^2} = \frac{1}{2} (I_1 - I_2)$$

так что заранее можно сказать, что

$$O - (1) = \frac{1}{2} (I_x + I_y) + \sqrt{\left(\frac{1}{2} (I_x - I_y)\right)^2 + I_{xy}^2} = I_1$$

и

$$O - (2) = \frac{1}{2} (I_x + I_y) - \sqrt{\left(\frac{1}{2} (I_x - I_y)\right)^2 + I_{xy}^2} = I_2.$$

Проведем через начало координат направление *новой оси*, лежащей под углом α по отношению к прежней. Докажем, что если через полученную нами в первом построении точку C провести линию CB параллельно новой

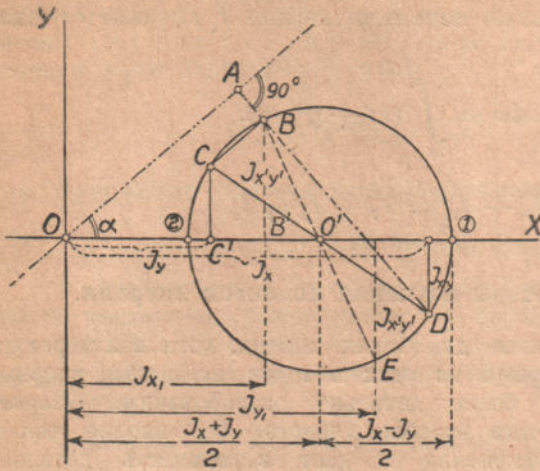


Рис. 91. Круг Мора.

оси, то точка B определит нам значение новых моментов инерции I_x , I_y и I_{xy} . Достаточно будет доказать теорему только для отрезков I_x и I_{xy} , ибо I_y , как вполне очевидно, найдется на круге по симметрии с I_x .

Вспомним формулы для значений моментов инерции, относительно повернутых осей.

Возьмем на нашем чертеже ломаную линию „топорик“ OAB , образующий собой прямой угол, так как он равен углу CBO , опирающемуся на диаметр. OA можно представить себе, как проекцию на новую ось „зигзага“, образованного I_x и I_{xy} . Следовательно,

$$\overline{OA} = I_x \cos \alpha - I_{xy} \sin \alpha.$$

Отрезок AB есть проекция на направление 2-ой новой оси „зигзага“ образованного I_y и I_{xy} . Отсюда

$$\overline{AB} = I_y \sin \alpha - I_{xy} \cos \alpha.$$

Проектируя теперь весь „топорик“ OAB на вертикальную ось, получаем:

$$\begin{aligned} \overline{BB'} &= \overline{OA} \cdot \sin \alpha - \overline{AB} \cos \alpha = I_x \cos \alpha \sin \alpha - I_{xy} \sin^2 \alpha - I_y \sin \alpha \cos \alpha + \\ &+ I_{xy} \cos^2 \alpha = \frac{1}{2} (I_x - I_y) \sin 2\alpha + I_{xy} \cos 2\alpha = \underline{I_{x'y'}}. \end{aligned}$$

Проектируя тот же „топорик“ OAB на горизонтальную ось, имеем:

$$\overline{OB'} = \overline{OA} \cdot \cos \alpha + \overline{AB} \sin \alpha = I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - I_{xy} \sin 2\alpha = \underline{I_x'}.$$

т. е. получились совершенно те же формулы, которые мы ранее выводили теоретическим путем. Значит, построения Мора правильны, и мы действительно получим на его диаграмме любые значения моментов инерции, в зависимости от принятого направления осей.

Исследуем теперь, пользуясь кругом Мора, все изменения значений моментов инерции, которые могут представиться при поворачивании осей (см. рис. 92).

Будем следить за движением точки B , памятуя, что расстояние проекции этой точки на горизонтальный диаметр от начала координат O есть величина $I_x' = I_x$, а длина перпендикуляра, опущенного из той же точки на тот же диаметр, есть величина $I_{x'y'}$ для новых осей.

Если мы проведем из точки B линию горизонтальную, т. е. BB_1 , то получим, конечно, наше основное, „случайное“ значение I_x и наше основное значение I_{xy} (со знаком $+$, как расположенное выше диаметра — по

положительному направлению OY). Далее будем двигаться по кругу обратно часовой стрелке, *увеличивая* α .

Давая углу α небольшое значение, мы получим постепенное *уменьшение* I_x , соответственное *увеличению* I_{y_1} (ибо ясно, что точка O всегда будет *равноотстоящей* от точек, определяющих концы отрезков I_x и I_{y_1}) и *увеличение* $I_{x_{y_1}}$. Если мы возьмем линию BB_3 , то получим $I_x = I_y$ и *max* $I_{x_{y_1}}$ который, конечно, равен нашему радиусу т.е.

$$+ \sqrt{\left[\frac{1}{2} (I_x - I_y) \right]^2 + I_{xy}^2}$$

(между прочим, это выражение в целом есть тоже *инвариант*, ибо при любых случайных осях должно получиться *то же* значение *max*. $I_{x_{y_1}}$ равное притом $\frac{I_1 - I_2}{2}$). Это будет угол α_{00} .

Далее I_x станет уже *менее* I_{y_1} и $I_{x_{y_1}}$ станет также *уменьшаться*. Если проведи линию, *касательную* к кругу (точка B_5), то мы получим $I_x = I_y$ и $I_{y_1} = I_x$ — наши начальные моменты инерции, сохранив свое значение, поменяются местами; $I_{x_{y_1}}$ остается *положительным*. Заметим, что мы здесь еще не повернулись на 90° (иначе $I_{x_{y_1}}$ *переменит бы* знак), так что обмен значениями между I_x и I_y происходит и до такого поворота. Идя дальше, мы увидим, что наше I_{x_1} стремится к своему минимуму, одновременно I_{y_1} — к максимуму, а $I_{x_{y_1}}$ — к нулю, что и достигается на линии BB_7 . Далее имеем опять возрастание I_x , до линии BB_9 , дающей угол $\alpha = 90^\circ$. Здесь опять I_x и I_y , обменявшись значками, сохраняют свое старое значение, но $I_{x_{y_1}}$ уже равно по величине, но противоположно по знаку первоначальному I_{xy} (чего и следовало ожидать для поворота на 90°).

Этим кончается движение в пределах возможных *положительных* значений угла α . Далее начнем двигаться уже опять от точки B , но в направлении *отрицательных* углов α . Здесь мы найдем угол α_0 (для хорды BB_{10}), который и определяет направление главной оси I_1 ; при I_{xy} *положительном* α_0 всегда будет отрицательно. По правилам тригонометрии

$$\angle \alpha_0 = \frac{1}{2} \angle \varphi_0 = \frac{1}{2} \angle BO'B_7, \text{ а } \operatorname{tg} \varphi_0 = \operatorname{tg} 2\alpha_0 = - \frac{I_{xy}}{\frac{1}{2} (I_x - I_y)}$$

что совпадает с нашей формулой. Тут же мы видим, что угол между этой осью и осью, дающей *max* I_{xy} , равен 45° , ибо этот угол опирается на целый квадрант. Между прочим, можно проверить тут же и значение угла α_{00} , ибо

$$\alpha_{00} = \frac{1}{2} \varphi_{00}; \operatorname{tg} \varphi_{00} = \operatorname{tg} 2\alpha_{00} = + \frac{\frac{1}{2} (I_x - I_y)}{I_{xy}},$$

как видно из чертежа.

При дальнейшем движении точки B мы доходим до хорды BB_{11} , дающей вновь начальные значения I_x и I_y , но другой знак I_{xy} . Эта хорда перпендикулярна касательной в точке B ; $\operatorname{tg} \alpha$ в этом случае вдвое больше α_0 .

Наконец, хорда BB_{12} дает *min*. I_{xy} и на хорде BB_0 круг замыкается.

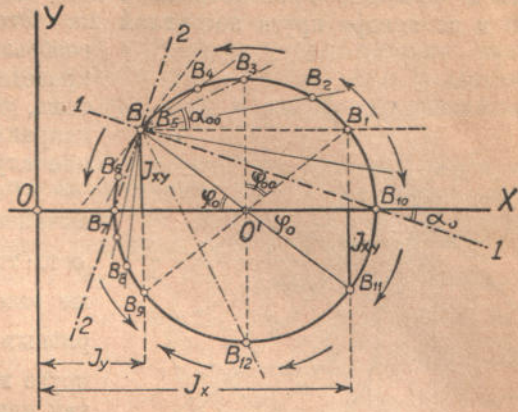


Рис. 92. Исследование круга Мора.

Иногда приходится решать обратную задачу, т.е. имея заданными положение и величину главных осей, выяснить различные случаи положения произвольных осей. Диаграмма Мора для этого случая изображается так, как показано на рис. 93. Заметим, что здесь направление оси под заданным углом α можно проводить не только из конца диаметра под этим углом, но и из центра круга под углом 2α . Это видно из чисто геометрических соображений. На рис. 93 оси нарочно проведены не параллельно краям чертежа, чтобы указать на независимость направления главных осей от направления случайных.

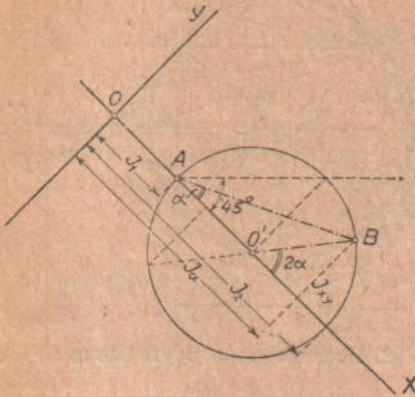


Рис. 93. Круг Мора для главных осей.

Все исследования при этом чрезвычайно упрощаются. Заметим, что круг остается того же радиуса $\frac{I_1 - I_2}{2}$ и с тем же расстоянием от точки O до точки O' , равным $\frac{I_1 + I_2}{2}$. При изучении этого круга можно особенно отчетливо увидеть, как изменяется I_x и I_y , и особенно легко проверить все формулы. Очень ясно здесь, что при I_1 , близком к I_2 , круг все уменьшается, а при $I_1 = I_2$ круг превращается в точку, и тогда $I_x = I_1 = I_2 = \text{const}$ и $I_{xy} = 0$ для всех осей.

Вообще необходимо научиться на глаз находить направление главных осей в фигуре, особенно когда их проводишь через центр тяжести, что почти всегда и приходится делать, хотя все предыдущее изложение не имело этой оговорки, и все приведенные построения годны и для любой точки в сечении и даже вне его. Главные оси, проходящие через центр тяжести, называются главными центральными осями. Они имеют для нас особое значение. Заслуживает внимание любопытный факт, что в каждой фигуре на той главной центральной оси, относительно которой момент инерции наибольший, можно найти две точки, отстоящие от центра тяжести

в обе стороны на величину $a = \sqrt{\frac{I_1 - I_2}{\omega}}$, в коих моменты инерции I_1 и I_2 равны между собою, $I_{xy} = 0$, а следовательно круг Мора обращается в точку — все I_x равны между собой. Это положение легко доказать.

При нахождении главных осей следует помнить, что оси геометрической симметрии всегда будут главными осями, ибо обеспечивают для I_{xy} значение нуль. Если таких осей две — то главные оси этим уже даны (напр. в эллипсе, в двутавре); но если имеется и одна ось симметрии (напр. в рельсе, в корытном железе, в равнобедренном уголке) то и тут обе оси известны — одна есть ось симметрии, а другая — перпендикуляр к ней, (если, конечно, точка, для которой ищут главные оси, дана на оси симметрии — хотя бы и не на центре тяжести).

В сложных фигурах надо искать на глаз главные оси так, чтобы ось 22 как бы пронизала всю массу насквозь, равномерно распределив материал слева и справа от себя, а ось 11 должна как бы ускользать от массы, и в результате обе оси должны распределить массу на четыре квадранта так, чтобы 1-й и 3-й, дающие плюсы для I_{xy} , скомпенсировались 2-м и 4-м, дающими минусы. Если точка взята вне сечения, то одна из главных осей (22) проходит вблизи центра тяжести (но не непременно через него), чтобы 1-й и 2-й квадранты, (тут уже 3-го и 4-го не будет вовсе) уравновесили между собой значение I_{xy} .

Большое значение имеет такой подбор контура сечения, чтобы при данном ω дать наилучшие, т.е. наибольшие I . Конечно, для какой-либо одной оси это было бы достигнуто вытягиванием сечения перпендикулярно этой оси; но так как в общем случае действия сил всегда почти необходимо достаточное значение и другого момента инерции, то приходится проектировать сечение с достаточным I_2 при большом I_1 . Это целое искусство, и до сего времени продолжают изучать некоторые сечения (напр. рельс, двутавр) в целях улучшения их жесткости, а иногда и выдвигают новые сечения, целесообразные по рациональному и выгодному расположению материала.

Круг Мора может быть применен и для пространственного изучения моментов инерции масс, когда имеем 3 главные оси. Здесь приходится все же сделать известное отступление от нашего метода. Придется отдельно изучать на круге изменение моментов I_x и I_y , считая $I_3 = I_z$ за постоянное; на другом круге счастье $I_2 = I_y$ за постоянное и выяснит зависимость между двумя другими и т. д. Каждый из этих кругов в этом случае выражает изменение так называемых экваториальных моментов инерции относительно плоскостей, проходящих через какую-либо координатную ось при совмещении координатных осей с главными осями инерции. Для общего же случая, когда нас интересует значение моментов инерции относительно плоскости случайной и не перпендикулярной ни к одной из главных осей, ответ на наш вопрос дает площадь, заштрихованная на рис. 94.

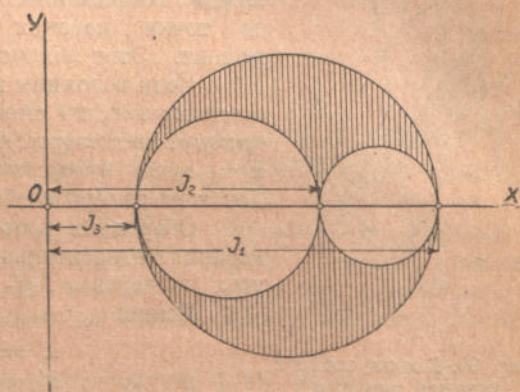


Рис. 94. Круги Мора для 3-х измерений.

Заметим, что макс. I_{xy} получается здесь в плоскости, перпендикулярной к средней по значению I координатной оси, и равен $\frac{I_1 + I_2}{2}$. Очевидно, что сами оси OX и OY должны в этом случае делить пополам угол между осями $O1$ и $O3$, а третьей осью остается $O2$.

Все-же пользование диаграммой Мора для пространственного случая очень сложно. Приходится строить целых 3 фигуры вместо одной, и исследование получается достаточно сложное.

§ 5. Эллипс инерции Ламэ.

Из основных формул относительно главных осей (полагая центрбежный момент равным нулю), находим:

$$I_x = I_1 \cos^2 \alpha + I_2 \sin^2 \alpha,$$

$$I_{xy} = \frac{1}{2} (I_1 - I_2) \sin 2\alpha.$$

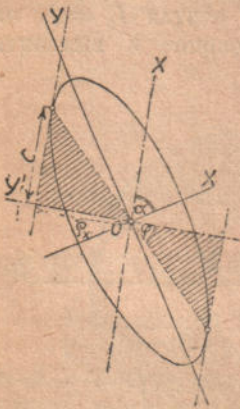
Выразим эти формулы через радиусы инерции:

$$\rho_x^2 = \rho_1^2 \cos^2 \alpha + \rho_2^2 \sin^2 \alpha,$$

$$I_{xy} = \frac{1}{2} (\rho_1^2 - \rho_2^2) \sin 2\alpha.$$

Первая из этих формул вполне заменяет нашу первую строку. Вторая формула вводит еще некоторый коэффициент ω (площадь сечения). Если мы теперь пожелаем графически изобразить изменения радиусов инерции (от которых так легко перейти к моментам инерции), то задача решится вполне точно, при чем характер 1-го уравнения показывает, что эта графическая зависимость несомненно выразится кривой 2-го порядка (уравнение квадратное). Центробежный момент на диаграмме очевидно выразится не в своей точной величине, а некоторым пропорциональным ей отрезком.

Идея построения и заключается в том, чтобы найти эту кривую, причем оказывается что это — эллипс, построенный, как на полюсах, на отрезках ρ_1 и ρ_2 , проведенных перпендикулярно к тем осям, которые они характеризуют. При этом расстояние от центра до касательной к эллипсу, проведенной параллельно любой оси, является точной величиной соответственного радиуса инерции, а отрезок c на этой касательной, от перпендикуляра до конца сопряженного с новой осью диаметра, т.е. до точки касания — характеризует центробежный момент. Этот эллипс и называется эллипсом Ламэ.



Если вспомним то, что выше говорилось о „модели жесткости“, то сможем определить эллипс Ламэ, как кривую, по которой как бы скользит модель жесткости при своем вращении, никогда в нее не проникая. Докажем теперь свойства эллипса:

Обозначим координаты интересующей нас точки касания относительно новых осей (повернутых на угол α) через x', y' (см. рис. 95).

Имеем

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \alpha + y \sin \alpha \\ y' &= y \cos \alpha - x \sin \alpha. \end{aligned}$$

Рис. 95. Вывод свойств эллипса инерции.

Уравнение нашего эллипса таково:

$$\frac{y'^2}{\rho_1^2} + \frac{x'^2}{\rho_2^2} = 1. \dots \dots \dots (1).$$

Тангенс угла наклона касательной к нему:

$$\operatorname{tga} = - \frac{x'}{y'} \cdot \frac{\rho_1^2}{\rho_2^2} \dots \dots \dots (2).$$

Вторая формула дает:

$$x^2 = y^2 \cdot \frac{\rho_2^4}{\rho_1^4} \cdot \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha};$$

Из первой формулы:

$$y^2 \left(\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{\rho_2^2}{\rho_1^4} \cdot \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \right) = 1.$$

Отсюда

$$y^2 = \frac{1}{\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{\rho_2^2 \sin^2 \alpha}{\rho_1^4 \cos^2 \alpha}} = \frac{\rho_1^4 \cos^2 \alpha}{\rho_1^2 \sin^2 \alpha + \rho_2^2 \sin^2 \alpha} = \frac{\rho_1^4 \cos^2 \alpha}{\rho_a^2}.$$

Следовательно,

$$y = \pm \frac{\rho_1^2 \cos \alpha}{\rho_a}; \quad x = \pm \frac{\rho_2^2 \sin \alpha}{\rho_a}.$$

Переходим к новым осям:

$$\begin{aligned} y' &= \pm \frac{\rho_1^2 \cos^2 \alpha + \rho_2^2 \sin^2 \alpha}{\rho_a} = \pm \rho_a \\ x' &= \pm \frac{1}{2} \frac{(\rho_1^2 - \rho_2^2) \sin^2 \alpha}{\rho_a} = \pm \frac{I_{xy}}{\rho_a \cdot \omega}. \end{aligned}$$

Итак, теорема доказана—интересующие нас отрезки действительно дают значения соответственного радиуса инерции и величины, пропорциональной центробежному моменту инерции.

Заметим, что

$$\frac{x'}{y'} = \operatorname{tg} \varphi = \frac{I_{xy}}{\rho_a \cdot \omega \cdot \rho_a} = \frac{I_{xy}}{I_a},$$

$$I_{xy} = I_a \cdot \operatorname{tg} \varphi.$$

Как видно из рис. 95, угол φ указывает на отклонение сопряженного диаметра эллипса от перпендикулярности к другому сопряженному диаметру (не следует смешивать угла φ с углом α): значит, центробежный момент инерции можно выразить через угол между сопряженными диаметрами, равный для нашего эллипса мере инерционной асимметрии.

Можно написать еще такое значение центробежного момента:

$$I_{xy} = \pm x' \cdot y' \cdot \omega$$

(легко выводится из формул для x' и y').

На эллипсе Ламэ также можно произвести подробное исследование различных изменений моментов инерции. Моменты I_a , характеризуемые соответственными радиусами инерции, можно изучать непосредственно, а для момента $I_{x,y} = I_a \operatorname{tg} \varphi = x' \cdot y' \cdot \omega$, удобнее пользоваться последней формулой. Напр., при помощи аналитической геометрии можно доказать, что максимальное значение произведения (x' , y') будет при $\alpha = 45^\circ$ и т. д. Несомненно, результаты исследования по методу Ламэ вполне тождественны с выводами Мора.

Эллипс Ламэ для пространственного случая (при изучении $I^{(m)}$) обращается в трех-осный эллипсоид, и изменение, которое приходится делать для этого случая—это то, что радиусы инерции, которые применяются и при изучении моментов инерции масс, в эллипсоиде откладываются не перпендикулярно к своим осям, а по их направлению, и самое уравнение эллипсоида имеет вид

$$\rho_x^2 \cdot x^2 + \rho_y^2 y^2 + \rho_z^2 \cdot z^2 = 1,$$

или

$$I_x^m x^2 + I_y^m y^2 + I_z^m \cdot z^2 = 1,$$

т.-е. откладываются по осям величины, обратно пропорциональные *корням квадратным* из моментов инерции. Величины ρ в этом случае имеют следующее значение

$$\rho_x = \sqrt{\frac{I_x^{(m)}}{\Sigma m}}$$

ГЛАВА V.

Общий случай действия сил на брус.

§ 1. Общие положения.

Возьмем брус произвольного очертания, расположенный в пространстве. Он не должен быть, однако, слишком кривым, ибо мы предположим, что *каждый* элемент его можно считать за прямой. Выше мы уже указали, что если радиус кривизны ρ меньше $4h$, где h — высота бруса в данной точке, то приходится уже считаться с кривизной, вводя некоторую поправку. Впрочем, поправка эта не влияет на общий характер наших формул, выражаясь только некоторыми добавочными членами, но так как обычно далее мы будем иметь дело с брусками малой кривизны, то поэтому и не будем учитывать в настоящей главе влияния этих членов.

Предположим, что на наш брус действует некоторая нагрузка, которую мы выразим через „погонную нагрузку“ (приходящуюся на единицу длины, параллельно соответственной оси). Вспомним, что интегралы нагрузки дают выражения нормальной и поперечной сил, а интегралы нормальной и поперечной сил дают моменты. При этом поперечные силы, как производные момента, могут иметь реальную величину только при условии существования переменных моментов. Так как численные значения моментов получаются наибольшими по сравнению с другими силовыми факторами, то при изучении *общего случая действия сил на брус нас главным образом будут интересовать моменты*, ибо брус больше всего будет страдать от тех напряжений, которые зависят от моментов, т. е. самые опасные напряжения возникают от действия *изгиба и кручения*. Тем не менее нельзя совершенно забывать о напряжениях, вызываемых силами N , Q_x , Q_y и даже о так называемых местных внутренних напряжениях; ведь нагрузка p в *конечном результате* вызывает в бруске какое-либо из четырех основных явлений (растяжение или сжатие, сдвиг, изгиб и кручение), но на ось бруса эта нагрузка передается посредством местных внутренних напряжений; для оценки среднего значения всех этих напряжений обратимся к их изучению.

Постараемся прежде всего представить себе яснее, каков *механизм передачи местной нагрузки на тело*. Рассмотрим случай нагрузки p . В каком либо

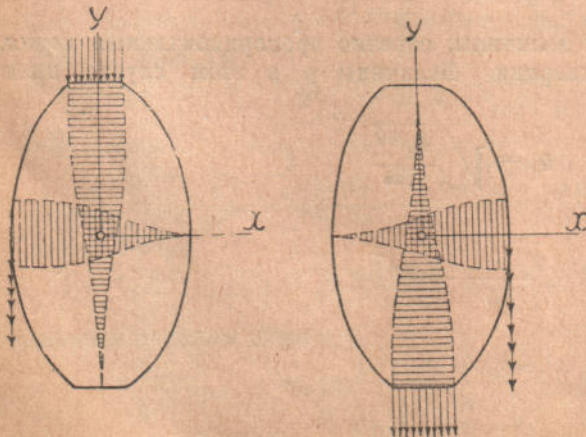


Рис. 96. Передача местной нагрузки на ось бруса.

сечении, (см. рис. 96) эта нагрузка может быть приложена или сверху, или снизу, или с одного из боков. Если рассмотреть первый случай, то ясно, что нагрузка *сминает* верхние фибры тела, а затем по мере углубления внутрь тела, интенсивность сминания уменьшается, нагрузка *рассасывается*, как мы это докажем ниже, и к нижним волокнам сминание сходит к нулю. Нагрузка снизу действует обратно, разрывая фибры, и нако-

нец нагрузки с боков производят внутренние сдвиги до тех пор, пока не рассосутся в сечении целиком.

Нагрузка p_x действует так же, а нагрузка p_x будучи приложена по контуру, вызывает сдвиги на очертанных концентрических контурах и в результате также передается на ось (см. ниже, рис. 106).

Это и суть местные напряжения, но они, как вызванные *первой строкой* нашей шестистрочной схемы упругих явлений, наименее обращают на себя внимание, хотя они и вовсе не так незначительны.

Напряжения, вызванные N_x , Q_x и Q_y , более серьезны, особенно напряжения от N_x — это напряжения *второй строки*. И наконец, напряжения от M_x , M_y , M_z суть наиболее важные — напряжения *третьей строки*.

Выпишем в особой таблице все силовые факторы, могущие действовать на наше сечение, при чем местные внутренние напряжения, как редко достигающие практически важной величины, укажем в скобках:

Нагрузка	Напряжение.	Сила.	Напряжение.	Пара.	Напряжение.
p_z	(n) (t)	N_x	$n = \frac{N_x}{\omega}$	M_x	$t_{(1)} = \frac{M_x}{I_x}$
p_x	(n) (t)	Q_x	$t_y = k_x \frac{Q_x}{\omega}$	M_x	$(n_x)_1 = \frac{M_x}{I_x}$
p_y	(n) (t)	Q_y	$t_x = k_y \frac{Q_y}{\omega}$	M_y	$(n_y)_1 = \frac{M_y}{I_y}$
	(Первая строка).		(Вторая строка).		(Третья строка).

Посмотрим *сначала*, как ведет себя наше сечение под действием трех факторов, создающих *нормальные* напряжения, *затем* — под действием других трех факторов, создающих *тангенциальные* напряжения t , и, наконец, коснемся и воздействия местных напряжений.

Итак, для первого случая имеем три силовых фактора: N_x , M_x , M_y . Рассматривать порознь действие двух групп факторов мы можем, основываясь на *законе независимости действия сил*, т.е. на законе Гука, ибо закон Гука и есть закон независимости действия сил.

§ 2. Исследование общего случая действия сил на брус.

Изучим, следовательно, общий случай действия сил на брус и начнем с действия нормальных напряжений.

Имеем
$$n = \frac{N_x}{\omega}; \quad (n_y)_1 = \frac{M_y}{I_y}; \quad (n_x)_1 = \frac{M_x}{I_x}$$

Начертим в крупном масштабе наш элемент ds (см. рис. 97).

Продольную силу N_x будем считать действующей на сжатие.

Рассмотрим внимательно рис. 97 и посмотрим, как влияют на деформацию элемента ds отдельные элементы внешних сил N_x , M_x , M_y .

1. Сжимающая сила N_x *придвигает* две конечные плоскости друг другу навстречу, оставляя их вертикальными и параллельными.

2. Момент M_x *поворачивает* оба сечения вокруг горизонтальных осей X , сближая верхние волокна и раздвигая нижние. Нейтральная ось $n = 0$, т.е. та ось, по которой напряжения равны 0, если и возникает

(она может оказаться вне пределов сечения при достаточно большом значении N_z), то остается параллельной оси OX —горизонтальной.

3. Момент M_y поворачивает вокруг осей OY оба сечения, под действием момента M_x уже переставшие быть горизонтальными и немного наклонившиеся со сближением кверху.

Получается результирующая нейтральная ось — $n=0$, именно $0'0'$, очевидно прямая и отделяющая район сжатия от района растяжения — все это хорошо видно на рисунке.

Относительно действия сил на брус можно принять две гипотезы:

- а) плоскостное распределение деформаций (закон Бернулли),
- б) плоскостное распределение напряжений (закон Навье).

Мы примем закон Бернулли. По существу обе гипотезы не равноценны, но для нашего случая, без особой ошибки, можно считать, что и напряжения распределены по сечению по закону плоскости.

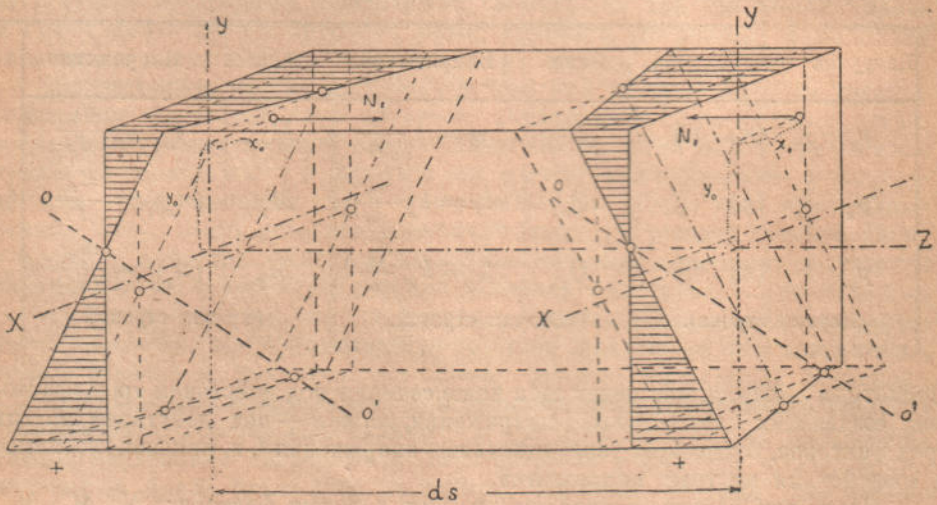


Рис. 97. Деформация элемента ds под влиянием N_z , M_x и M_y .

Итак, памятуя общее выражение для плоскости, пишем:

$$i = ax + by + c; \quad n = Ei; \quad n = Ax + By + C.$$

Напишем все шесть уравнений равновесия, обратив особое внимание на первые три.

$$N_z = \int n \cdot d\omega = A \int x d\omega + B \int y d\omega + C \cdot \omega \dots \dots \dots (1)$$

$$M_x = \int ny d\omega = A \int xy d\omega + B \int y^2 d\omega + C \int y d\omega \dots \dots \dots (2)$$

$$M_y = \int nx d\omega = A \int x^2 d\omega + B \int xy d\omega + C \int x d\omega \dots \dots \dots (3)$$

$$M_z = \int t_z \cdot r d\omega \dots \dots \dots (4)$$

$$Q_y = \int t_y \cdot d\omega \dots \dots \dots (5)$$

$$Q_x = \int t_x \cdot d\omega \dots \dots \dots (6)$$

Интегралы $\int x d\omega$ и $\int y d\omega$ равны нулю, если начало координат помещено в центре тяжести сечения; интеграл $\int xy d\omega$ равен нулю, если оси координат совмещены с главными центральными осями инерции.

Конечно, можно решить наши три первые линейные уравнения относительно трех неизвестных A , B и C , и не вводя этих условий, но тогда значения величин A , B и C будут весьма сложные и неудобные для вычислений.

Итак, если начало координат проходит через центр тяжести, и если к тому же направление осей совпадает с главными центральными осями инерции, то мы получим простые выражения для наших коэффициентов:

$$C = \frac{N_z}{\omega}; B = \frac{M_x}{I_x}; A = \frac{M_y}{I_y}$$

а напряжение n :

$$n = Ax + By + C = \frac{M_y}{I_y} x + \frac{M_x}{I_x} y + \frac{N_z}{\omega}$$

или в другой форме:

$$n = (n_1)_y \cdot x + (n_1)_x \cdot y + n_0,$$

так что при x и y равных 0, напряжение n всегда равно $\frac{N_z}{\omega}$.

С этого времени мы уже раз навсегда должны зафиксировать положение наших координатных осей: ось OZ , как мы и раньше определяли, совпадает с направлением касательной к элементу, а оси X и Y — совпадают с главными центральными осями.

Итак мы уже не можем в дальнейшем совмещать OY с главной нормалью, а OX — с бинормалью — чисто геометрическая ориентировка уступает свое место ориентировке физико-механической. Это обстоятельство особенно имеет значение при кручении бруса двойкой кривизны, где главная нормаль и бинормаль особенно ярко выражены и особенно интенсивно меняются. Тут бывает важно установить два обстоятельства:

1) Совпадают ли в начальном сечении геометрические и физико-механические оси, т. е. главная нормаль с осью 2-2, а бинормаль с осью 1-1, — ибо при совпадении вопрос о системе координат решается благополучно, в противном случае все формулы усложняются.

2) Закручиваются ли главные оси инерции с той же угловой скоростью, как главная нормаль с бинормалью (собственно бинормаль) или с большей или меньшей скоростью. В первом случае мы имеем дело с так называемым (терминология инж. П. А. Вальтера, посвятившего этому вопросу специальное исследование) нормально закрученным бруском, во втором случае — с недокрученным, а в третьем — с перекрученным.

Введение этих определений очень помогает разобраться во всей сложности явлений, происходящих в брусе двойкой кривизны.

Перейдем теперь к исследованию нашего случая (одних только нормальных напряжений). Имеем три силовых фактора N_z , M_x и M_y ; из них в будущем мы M_x и M_y часто также будем называть условно „силами“. Рассмотрим отдельные случаи:

1) $M_x = M_y = 0$ $n = \frac{N_z}{\omega}$; растяжение или сжатие.

2) $N_z = M_y = 0$ $n = \frac{M_x}{I_y} \cdot y$; простой поперечный изгиб.

3) $N_z = 0$ $n = \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x$; косой изгиб (не все силы

действуют в плоскости одной из главных осей).

$$4) M_y = 0 \quad n = \frac{M_x}{I_x} y + \frac{N_z}{\omega} \quad \text{сжатие с простым изгибом}$$

(сюда же относится, но с некоторыми оговорками, и продольный изгиб).

$$5) N_z \neq 0; \quad M_x \neq 0; \quad M_y \neq 0$$

$$n = \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x + \frac{N_z}{\omega} = \frac{N_z}{\omega} \left(1 + \frac{y_0}{\varrho_x^2} y + \frac{x_0}{\varrho_y^2} x \right) \quad \text{общий случай.}$$

Здесь в последнем случае $y_0 = \frac{M_x}{N_z}$, т.-е. условное плечо, на которое нужно отнести силу N_z чтобы получить момент M_x , а $x_0 = \frac{M_y}{N_z}$, т.-е. условное плечо, на которое нужно отнести силу N_z , чтобы получить момент M_y .

Таким образом, x_0 и y_0 суть координаты условной точки приложения силы (см. рис. 97).

Для общего случая действия сил на брус под действием одних только нормальных напряжений, когда сила N_z есть реальная внешняя сила, приложенная с эксцентриситетом, мы получаем явление *неравномерного сжатия*. Случай этот, как видно, есть тот сравнительно редкий случай, когда x_0 и y_0 — реальные координаты. Вообще же сила N_z есть только равнодействующая отдаленных внешних сил.

Как видно из рисунка 97-го, мы получаем в нашем элементе деформации разных знаков (растяжение и сжатие), при чем в общем случае очевидно существует некоторая линия, по которой никаких деформаций не происходит (иногда, конечно, эта линия может оказаться и за пределами сечения). Пересечение ее с плоскостью сечения называется *нулевой линией* (00' на нашем чертеже), которая, есть, конечно, *прямая*, и все линии одинаковых напряжений будут параллельны этой нулевой линии — *прямые*. Они будут отстоять одна от другой на равных расстояниях, если определяемые величины напряжений n составляют арифметическую прогрессию. Перейдем к изучению этой нулевой линии, за которой напряжение меняет свой знак, и к способам ее определения. Выпишем основные формулы:

$$n = \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x + \frac{N_z}{\omega}$$

$$M_x = N_z \cdot y_0$$

$$M_y = N_z \cdot x_0$$

$$n = \frac{N_z y_0}{\varrho_x^2 \omega} y + \frac{N_z \cdot x_0}{\varrho_y^2 \omega} x + \frac{N_z}{\omega} = \frac{N_z}{\omega} \left(1 + \frac{y_0 y}{\varrho_x^2} + \frac{x_0 x}{\varrho_y^2} \right).$$

Все линии одинаковых напряжений очевидно параллельны друг другу. Будем называть *силовой линией* такую линию, которая получится, если провести прямую от точки с координатами x_0, y_0 — (точка условного приложения силы N_z) до начала координат; при $N_z = 0$ *силовой линией* назовем след плоскости, перпендикулярной к вектору равнодействующего момента,

или, что тоже, плоскости действия сил т.-е. прямую, удовлетворяющую условию

$$\operatorname{tga} = \frac{M_x}{M_y}.$$

Теперь будем искать взаимоотношение между силовой и нулевой линиями. Предположим, что задача решена и положение нулевой линии найдено: Выбираем новые координатные оси OU и OV параллельно и перпендикулярно направлению нулевой линии OO (см. рис. 98).

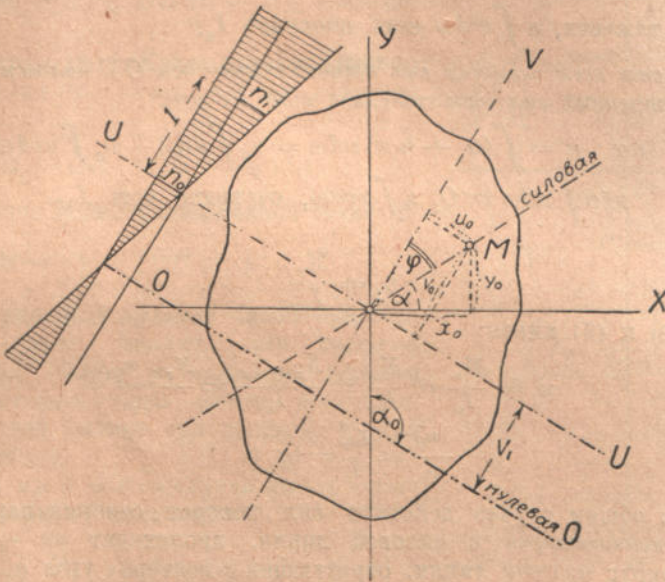


Рис. 98. Взаимоотношение между силовой и нулевой линиями.

Для этих осей каждому значению координаты v соответствует линия одинаковых напряжений, ибо ясно, что

$$n = n_0 + n_1 \cdot v, \quad \text{где } n_0 \text{ есть напряжение по } OU.$$

В старых осях координат уравнение нулевой линии, т.-е. линии пересечения плоскости нулевых напряжений с плоскостью сечения (чертежа) напишется так:

$$n = \frac{N_z}{\omega} \left(1 + \frac{y_0 y}{\rho_x^2} + \frac{x_0 x}{\rho_y^2} \right) = 0$$

дифференцируя по dx , получим:

$$0 = 0 + \frac{y_0}{\rho_x^2} y' + \frac{x_0}{\rho_y^2}; \quad \operatorname{tga}_0 = y' = - \frac{x_0^2 \rho_x^2}{y_0^2 \rho_y^2}.$$

Возьмем на нашем сечении любую точку (u, v) и пишем для нее 3 условия равновесия:

1. Проекция всех сил на ось OZ должна равняться нулю.

$$N_z = \int n d\omega = \int (n_0 + n_1 \cdot v) d\omega = n_0 \int d\omega + n_1 \int v \cdot d\omega = n_0 \cdot \omega, \\ (\text{ибо } \int v d\omega \text{ равен нулю, как статический момент}).$$

Итак

$$n_0 = \frac{N_z}{\omega} \dots \dots \dots (1).$$

Значит, все точки, расположенные по оси OU , имеют то же напряжение, как если бы сила была приложена в центре тяжести.

2. Момент всех внешних сил относительно оси OU должен быть равен моменту внутренних сил относительно той же оси.

$$M_u = \int n \cdot d\omega \cdot v = \int (n_0 + n_1 \cdot v) v d\omega = n_0 \int v \cdot d\omega + n_1 \int v^2 d\omega = \\ = n_1 \cdot I_u, \dots \dots \dots (2)$$

ибо $\int v d\omega = 0$, как статический момент относительно оси, проходящей через центр тяжести, а $\int v^2 d\omega$ есть очевидно I_u .

3. Момент всех внешних сил относительно оси OV должен равняться моменту внутренних сил относительно той же оси.

$$M_v = \int n \cdot d\omega \cdot u = \int (n_0 + n_1 v) u d\omega = n_0 \int u d\omega + n_1 \int uv d\omega = n_1 I_{uv} \\ \text{ибо } \int u d\omega = 0, \text{ а } \int uv d\omega, \text{ очевидно есть } I_{uv}.$$

Итак,

$$n_1 = \frac{M_v}{I_{uv}} \dots \dots \dots (3)$$

из формул (2) и (3) имеем:

$$n_1 = \frac{M_u}{I_u} = \frac{M_v}{I_{uv}} = \frac{N_z \cdot v_0}{I_u} = \frac{N_z \cdot u_0}{I_{uv}}$$

отсюда:

$$\frac{u_0}{v_0} = \frac{I_{uv}}{I_u} = \text{tg } \varphi.$$

Итак, в общем случае действия сил поворот сечения парой, вектор которой перпендикулярен к силовой линии, происходит не вокруг этого вектора, а вокруг нулевой линии, образующей с вектором угол φ . Потому-то такой изгиб и называется *косым*.

Ясно, что таким образом наши выводы, сделанные при изучении *чистого изгиба*, справедливы лишь тогда, когда вектор пары совпадает с одной из главных осей инерции.

Если сравнить полученную формулу, выражающую $\text{tg } \varphi$, с одной из формул, выведенных выше при исследовании эллипса инерции, то легко увидим, что силовая и нулевая линии по направлению их являются сопряженными диаметрами эллипса инерции.

Значит, направление нулевой линии легко получить, или пользуясь формулой для $\text{tg } \varphi$, или же при помощи эллипса инерции, графическим путем т. е. путем отыскания сопряженного диаметра к силовой линии.

Остается еще найти положение нулевой линии. Из формулы $n = n_0 + n_1 \cdot v$, пользуясь первым и вторым условиями равновесия, имеем:

$$n = \frac{N_z}{\omega} + \frac{M_u}{I_u} v$$

для нулевой линии $n = 0$; $v = v_1$

и получаем

$$\frac{N_z}{\omega} + \frac{M_u}{I_u} v_1 = 0; \quad v_1 = - \frac{q_u^2}{v_0}; \quad v_1 \cdot v_0 = - q_u^2$$

значит, соответствующий радиус инерции является средней пропорциональной между искомой величиной v_1 и известной нам v_0 .

Те-же соотношения сохраняются и для проекций v_1 , v_0 , q_u на силовую линию, т.е. (см. рис. 99) $OM \cdot OB = -OA^2$

Отсюда становится ясным способ нахождения положения нулевой линии, приведенный на рис. 99, где средней пропорциональной является уже не радиус инерции, а радиус вектор эллипса, взятый по силовой линии.

Исследуем нашу задачу. Положение нулевой линии определяется отрезком OB .

$$OB = -\frac{OA^2}{OM}$$

1) При $OM = 0$, $OB = -\frac{OA^2}{0} = -\infty$

нулевой линии нет. (Когда сила приложена в центре тяжести, имеем случай простого сжатия).

2) При $OM = OA$ $OB = -OA$
нулевая линия симметрична данной точке M .

3) При $OM = \infty$ $OB = 0$.

Пара сил является нулевой силой при бесконечном плече. Значит, если система внешних сил свелась к паре, то нулевая линия проходит через центр тяжести. (Такой случай бывает при простом и при косом изгибах).

Итак, мы в общем случае имеем трехчленную формулу напряжения:

$$n = \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x + \frac{N_z}{\omega} = (n_1)_x \cdot y + (n_1)_y x + n_o = \frac{N_z}{\omega} \left(1 + \frac{y_o}{\rho_x^2} y + \frac{x_o}{\rho_y^2} x \right)$$

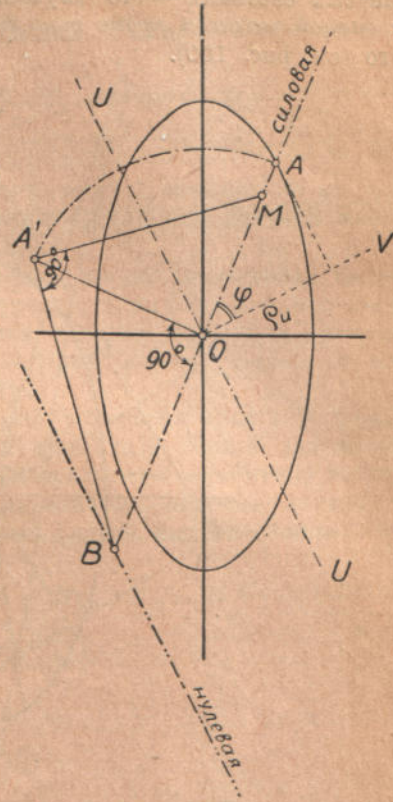


Рис. 99. Построение нулевой линии.

Формула эта охватывает самый общий случай пространственного действия сил. Ясно, что если нам приходится иметь дело с плоско расположенными силами, не совпадающими с плоскостью главных осей, то приходится искусственно перейти к пространственной формуле, разложив действие сил на две плоскости главных осей.

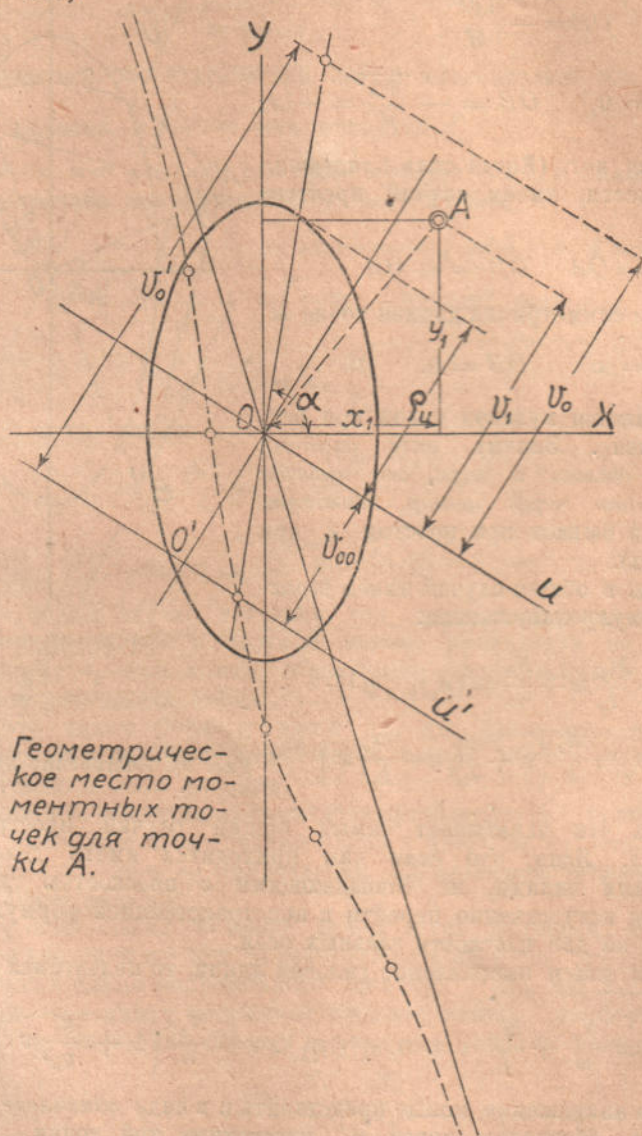
Если мы знаем направление силовой линии, то пользуемся двухчленной формулой.

$$n = \frac{N_z}{\omega} + \frac{M_u}{I_u} v = n_o + (n_1)_u \cdot v = \frac{N_z}{\omega} \left(1 + \frac{v_o}{\rho_u^2} v \right).$$

В этом случае напряжение можно представить и в виде одночленной формулы. В самом деле, обозначим через v_o' расстояние той точки, для которой желаем определить напряжение, до нулевой линии (известной нам по положению и направлению). Текущая координата этой точки $v = v_o' - v_1$ (где v_1 есть координата нулевой линии), тогда из двухчленной формулы

$$n = \frac{N_z}{\omega} \left(1 + \frac{v_o}{\rho_u^2} v \right) = \frac{N_z}{\omega} \left(1 + \frac{v_o}{\rho_u^2} (v_o' - v_1) \right) = \frac{N_z}{\omega} \left(1 + \frac{v_o v_o'}{\rho_u^2} - \frac{v_o v_1}{\rho_u^2} \right) = \frac{N_z}{\omega} \left(1 + \frac{v_o v_o'}{\rho_u^2} - 1 \right) = \frac{M_u}{I_u} v_o'.$$

Большой интерес представляет также еще иной несколько измененный вид одночленной формулы, на котором мы остановимся подробнее, ибо он представляет собой интересную аналогию с явлениями, происходящими в стержневых системах — это случай, когда мы, как и выше, ищем напряженне в данной точке и кроме того знаем направление силовой линии. Разберем его (см. рис. 100).



Геометрическое место моментных точек для точки А.

Рис. 100. Исследование одночленной формулы.

Имеем точку с координатами x_1 , y_1 , и направление силовой линии, заданное углом α . Пусть v_0 будет переменное значение плеча силы N_2 , остающейся лишь все время на одной силовой линии, а v_1 — постоянное значение координаты нашей точки относительно оси OU .

Проведем линию $O'U'$, параллельную OU , на расстоянии v_{00} , выбранном так, чтобы

$$v_{00} \cdot v_1 = \rho_u^2.$$

Тогда *переменное* плечо силы N_z относительно новой оси $O'U'$ будет v_o' и $v_o' = v_o + v_{oo}$.

Обратимся к обычной двухчленной формуле

$$n = \frac{N_z}{\omega} \left(1 + \frac{v_o \cdot v_1}{\rho_u^2} \right); \text{ так как } v_o = v_o' - v_{oo},$$

$$\text{то } n = \frac{N_z}{\omega} \left(1 + \frac{v_o' \cdot v_1}{\rho_u^2} - \frac{v_{oo} \cdot v_1}{\rho_u^2} \right) = \frac{N_z \cdot v_o' \cdot v_1}{\omega \rho_u^2} = \frac{M_u'}{I_u} v_1$$

Итак, точка x_1, y_1 имеет свою специфическую моментную ось для данной силовой линии. Можно условно даже говорить и о моментной точке на пересечении данной силовой линии с линией $O'U'$.

Можно построить и геометрическое место таких моментных точек для всех возможных силовых линий. Легко усмотреть из рис. 100, что получается кривая, асимметрически прилегающая к тому диаметру эллипса, который сопряжен с диаметром, проходящим через заданную точку, и вся находящаяся на одной стороне этого диаметра.

Позднее, при изучении теории ферм, мы установим аналогию между только что разобранный нами специфической моментной точкой для любой точки сечения бруса и так называемой в теории ферм моментной точкой Риттера. Здесь отметим лишь, что так называемый ядровый момент, о котором речь будет ниже, есть лишь частный случай нашего общего.

Итак имеем:

а) трехчленная формула

$$n = \frac{N_z}{\omega} \left(1 + \frac{x_o x}{\rho_v^2} + \frac{y_o y}{\rho_u^2} \right)$$

б) двухчленная формула

$$n = \frac{N_z}{\omega} \left(1 + \frac{v_o v}{\rho_u^2} \right)$$

в) одночленная формула

$$n = \frac{M_u'}{I_u} v.$$

Но, конечно, переход к более простым формулам требует: для двухчленной — фиксации силовой линии по определенному направлению, для одночленной — фиксации и силовой линии, и изучаемой точки.

§ 3. Ядро сечения.

Итак, как было изложено выше, в случае, если сила N_z приложена с эксцентриситетом, получаем неравномерное сжатие, вызывающее в сечении в общем случае напряжения и растяжения и сжатия. Часто приходится иметь дело с таким строительным материалом, который хорошо работает только на одно сжатие или одно растяжение, и значит, приходится решать задачу о пределе допустимого эксцентриситета, полагая нулевые линии занимающими предельное возможное положение — совпадающими с контуром сечения.

И вот площадь, определяющая пределы допустимого эксцентриситета приложения внешних сил, и называется ядром сечения. Покула сила (реально или условно) приложена внутри ядра сечения, имеем дело с напряжениями одного знака. Когда сила попадает на самый контур ядра сечения, все же имеем дело с однозначными напряжениями, сходящими на-нет

у внешнего очертания сечения. Наконец, когда точка приложения вышла за пределы ядра сечения, получаем, очевидно, напряжения разных знаков.

Если изобразить закон изменения напряжений графически на так называемой эпюре напряжений, построенной для какой-либо линии, перпендикулярной OU , то получаем графическую иллюстрацию сделанных нами выводов в виде, представленном на рис. 101.

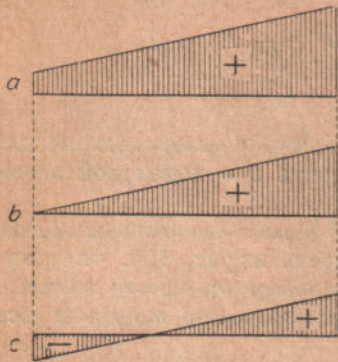


Рис. 101. Эпюры напряжений в разных случаях действия растягивающей силы:

- a — сила внутри ядра сечения;
- b — сила на контуре ядра;
- c — сила вне ядра.

Построение ядра сечения, очевидно, сводится к нахождению по заданному ряду последовательных предельных желательных положений нулевой линии — соответственных положений силовых линий и точек. Значит, придется решать задачу, обратную той, которую мы разбирали на предыдущих страницах.

Можно легко доказать, что если вращать нулевую линию вокруг какой-либо на ней лежащей точки, то соответствующая точка приложения силы движется по прямой. Наоборот, если сила станет на точку вращения нулевой линии, то нулевая линия будет той прямой, по которой при первом предположении двигалась точка приложения силы. В самом деле, в общем виде мы имеем такую формулу для определения нулевой линии

$$n = \frac{N_z}{\omega} \left(1 + \frac{x_0 x}{\rho_y^2} + \frac{y_0 y}{\rho_x^2} \right) = 0$$

координаты (x, y) соответствуют точке B , лежащей на нулевой линии, а координаты (x_0, y_0) соответствуют точке приложении силы M , лежащей на силовой линии (см. рис. 99).

Если предположить $(x, y) = \text{constans}$, а координаты (x_0, y_0) считать переменными, то действительно получаем уравнение прямой, и наоборот, если $(x_0, y_0) = \text{constans}$, то опять же получаем прямую для соотношения x к y .

Значит, ядро сечения представляет собой многоугольник с тем же числом сторон, сколько обволакивающий наше сечение контур нулевых линий имеет вершин. Для каждой линии внешнего контура теми же построениями, что и в рис. 99-м, находим по точке на силовом контуре (вершины многоугольника ядра сечения).

Разберем вид ядра сечения для простейшего из сечений — *прямоугольного*. Если сечение имеет размеры a, h , то (см. рис. 102)

$$\rho_x = \sqrt{\frac{I_x}{\omega}} = \frac{\sqrt{3}}{6} h = 0,29h$$

$$\rho_y = \sqrt{\frac{I_y}{\omega}} = \frac{\sqrt{3}}{6} a = 0,29a.$$

Если обволакивающие нулевые линии провести по краям сечения, то значение величин v_x и v_y определяется по формуле:

$$v_x = \frac{\rho_x^2}{h} = \frac{h}{6}$$

$$v_y = \frac{\rho_y^2}{a} = \frac{a}{6}.$$

Следовательно, ядро сечения представит собой ромб, занимающий по высоте и по ширине $\frac{1}{3}$ сечения.

Если ширина $a = \infty$ или вообще достаточно велика, что принимают, например, в арках и сводах, то ромб превращается в горизонтальную полосу, занимающую среднюю треть сечения. Отсюда и происходит обычное пожелание,

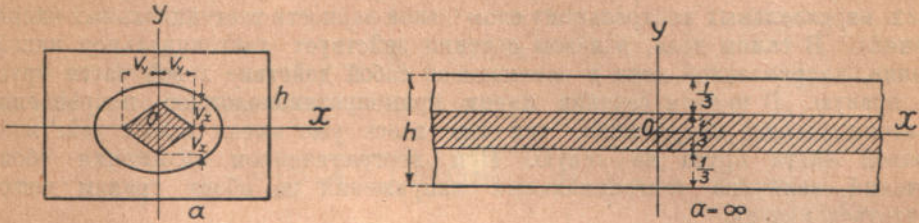


Рис. 102. Ядро сечения для прямоугольника конечной и бесконечной ширины.

чтобы кривая давления шла по средней трети арки — в этом случае мы гарантированы от растяжения материала свода, ибо если назвать y_0 — плечо приложения силы N_x — через c , то формула напряжений напишется в этом случае так:

$$\frac{\max}{\min} n = \frac{N_x}{\omega} \left(1 \pm \frac{6c}{h} \right).$$

Если мы захотим искать напряжения на верхнем или нижнем краю свода при вертикальности всех сил, а следовательно, и силовой линии, то ясно из соображений предыдущего параграфа, относящихся к одночленной формуле, что напряжение n выразится так:

$$\max n = \frac{M_x'}{I_x} \cdot \frac{h}{2}$$

M_x' называется *ядровым моментом* и берется относительно противоположного данному крайнему волокну края ядра.

Вот и все, что можно сказать об общем случае действия сил на брус, когда мы имеем дело с одними только нормальными напряжениями. Обратимся теперь к изучению тангенциальных напряжений.

§ 4. Тангенциальные напряжения.

Пишем общие условия равновесия тела в пространстве

$$(1) \dots \dots N_x = \int n d\omega \qquad M_x = \int t_x \cdot r \cdot d\omega \dots \dots (4)$$

$$(2) \dots \dots M_x = \int n y d\omega \qquad Q_y = \int t_y \cdot d\omega \dots \dots (5)$$

$$(3) \dots \dots M_y = \int n x d\omega \qquad Q_x = \int t_x \cdot d\omega \dots \dots (6)$$

Три первых уравнения уже нами подробно изучены. Займемся тремя остальным факторами, зависящими от тангенциальных напряжений.

Для начала выберем случай простого поперечного изгиба который, как будет указано далее, характеризуется тем, что для него, помимо момента $M_x \neq 0$ имеется еще поперечная сила $Q_y \neq 0$. Момент M_x , как уже нам известно, вызовет в элементе нашего бруса нормальные напряжения, а сила Q_y — касательные (тангенциальные) напряжения, которые, работая на сдвиг, будут перекашивать наш элемент, искажая его углы.

Вырежем из нашего элемента небольшой брусочек (на расстоянии y от нейтрального слоя) и разберем условия его равновесия. Прежде всего рассмотрим, под действием каких сил находится эта частица нашего бруса. Момент M_x дает уже вполне известные нормальные напряжения n ; поперечная сила Q_y вызывает в плоскости сечения тангенциальные напряжения, и такие же по величине тангенциальные напряжения возникают и в плоскостях, параллельных нейтральному слою (закон парности тангенциальных напряжений). В самом деле, в левом сечении действует тангенциальное напряжение, направленное вниз и заменяющее собой действие левой части бруса на правую. В правом сечении имеем прямопротивоположное направление тангенциального напряжения, так как здесь уже имеем дело с действием правой части бруса на левую. При неограниченном сближении обоих сечений величина тангенциальных напряжений по обоим граням может считаться равной.

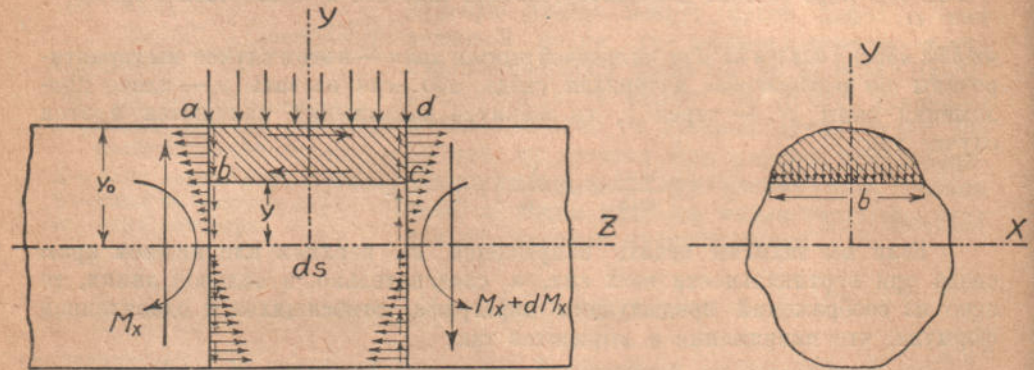


Рис. 103. Тангенциальные напряжения при изгибе.

Пишем условие равновесия заштрихованного элементика, для чего составляем проекцию всех сил, на него действующих, на ось OZ . Касательные тангенциальные напряжения, действующие по граням ab и cd , при проектировании дают 0. Касательные напряжения в плоскости bc дают — $t_y b ds$. Касательное напряжение на наружной поверхности ad существовать не может, ибо там нет наклонных внешних сил.

Наконец, нормальные напряжения, изменяющиеся по закону

$$n = \frac{M_x}{I_y} y,$$

дадут для левой грани выражение

$$- \frac{M_x}{I_x} \int_y^{y_0} y b dy,$$

а для правой грани, где момент внешних сил можно принять $M_x + dM_x$, получаем для проекции на ось OZ такое выражение:

$$+ \frac{M_x + dM_x}{I_x} \int_y^{y_0} y b dy.$$

Суммируя эти выражения, получаем условие равновесия в виде:

$$0 = -t_y \cdot ds \cdot b + \frac{\partial M_x}{I_x} \int_y^{y_0} y b dy,$$

откуда

$$t_y = \frac{Q_y \cdot S_y}{I_x \cdot b},$$

так как

$$\frac{\partial M_x}{\partial s} = Q_y, \text{ а } \int_y^{y_0} y b dy = \int_y^{y_0} y d\alpha = S_y, \text{ т.е.}$$

статическому моменту *относительно центра тяжести* всей вышележащей (заштрихованной на чертеже) площадки.

Итак, закон распределения тангенциальных напряжений найден в форме $t = \frac{QS}{Ib}$. Отсюда имеем такое выражение:

$$Q_y = \int t_y \cdot d\omega = \frac{Q_y}{I} \int_{\min y}^{\max y} S \cdot dy \text{ или } I = \int_{\min y}^{\max y} S \cdot dy$$

Значит, если построить на оси OY диаграмму, откладывая на ординатах значение статических моментов *всей вышележащей части сечения* S_y , то площадь этой эюры статических моментов равна соответственному моменту инерции.

Закон изменения тангенциальных напряжений удобно изучать графически, путем построения особых эюр.

Нам уже известно, что площадь эюры by дает нам выражение статического момента. Если же откладывать по другой оси значения пройденных площадей первой эюры статических моментов, т.е. взять интегральную кривую от первой кривой, то по доказанному получаем выражение момента инерции в виде площади этой фигуры.

Тангенциальное напряжение

$$t = \frac{Q}{I} \cdot \frac{S}{b} = \frac{Q}{\frac{I}{S} \cdot b}$$

Максимального своего значения эта величина достигает на нейтральной оси, где статический момент приобретает свое максимальное значение S_1 (полуплощадь эюры by). Вспомним, что $I = S_1 \cdot h_1$, значит, $\max t = \frac{Q}{b_1 \cdot h_1}$ где b_1 — ширина сечения по нейтральной оси, h_1 — плечо внутренней пары.

$$\text{Итак } \max t = \frac{Q}{h_1 b_1} = k \frac{Q}{\omega}$$

Величину $h_1 b_1$ можно представить себе, как площадь некоторого условного прямоугольника, изображенного на рис. 104. То же $\max t$ можно выразить и через площадь сечения ω , введя коэффициент $k = \frac{\omega}{h_1 b_1}$, коэффициент *повышения* напряжения посредине сечения, как это и бывает в огромном большинстве случаев, так как $k > 1$ за редкими исключениями.

Из формулы касательных напряжений $t = \frac{Q}{I} \cdot \frac{S}{b}$ видно, что так как $\frac{Q}{I}$ — число постоянное, то закон изменения t можно графически изобразить на эпюре $\frac{S}{b}$, при чем, когда $b = \text{constans}$, получаем фигуры вполне аналогичные диаграмме S ; когда b убывает к середине, эпюра эта более выпучивается к нейтральной оси и — наоборот.

Диаграммы эти иногда принимают и иные формы и в частности при значительном увеличении b к середине, могут давать t , падающее по значению к середине.

Таким образом, нами выведены выражения тангенциальных напряжений и показано, что своей максимальной величины они достигают большей

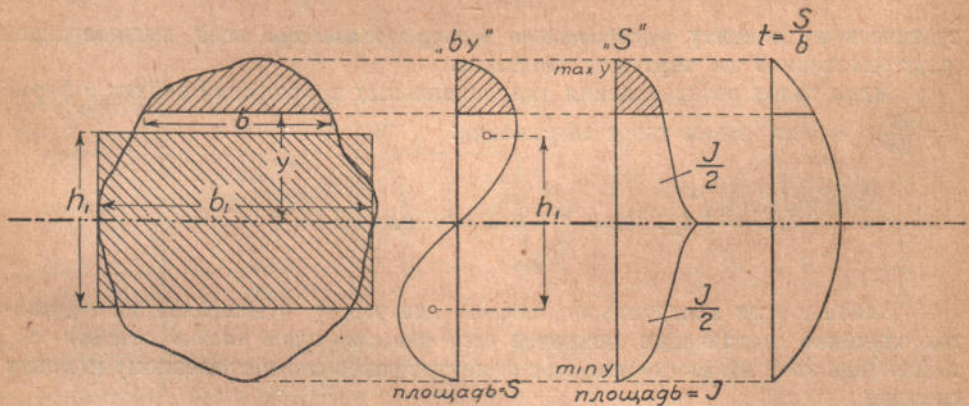


Рис. 104 Построение эпюр by , S и t .

частью на нейтральной оси, которая (для случая простого изгиба) проходит через центр тяжести.

Можно принять, что максимальное результирующее напряжение, равное геометрической сумме составляющих тангенциальных напряжений, возникает большей частью в центре тяжести (как точке пересечения обеих нейтральных осей) и может быть выражено формулой:

$$\max t = \sqrt{\left(\frac{Q_x}{h_x b_x}\right)^2 + \left(\frac{Q_y}{h_y b_y}\right)^2}$$

где h_x и h_y суть соответственные плечи внутренней пары.

Отметим лишь, что при выводе величин t мы принимали, что по ширине b они всегда распределяются равномерно; в Теории Упругости доказывается, что это положение не совсем верно.

§ 5. Местные напряжения.

В заключение обратимся к исследованию *местных напряжений* которые выражают закон *рассасывания* нагрузки p по брусу, т.-е. закон *передачи ее на ось*, и начнем со случая простого поперечного изгиба.

Рассмотрим тот же вырезок, который мы рассматривали в предыдущем параграфе (см. рис. 105).

Проектируем действующие силы на ось OY , обозначив через (n_y) местные напряжения смятия

$$(n_y) b_y \cdot ds - p_y \cdot b \cdot ds + \frac{Q}{I} \int_y^{\min y} S \cdot dy - \frac{Q - p_y \cdot ds}{I} \int_y^m S \cdot dy = 0,$$

откуда

$$(n) = p_y \cdot \frac{b_o}{b_y} \left(1 - \frac{1}{I} \int_y^{\min y} S dy \right) = \\ = \frac{p_y}{I} \cdot \frac{b_o}{b_y} \left(I - \int_y^{\min y} S \cdot dy \right)$$

Если произвести интегрирование, что очень удобно делать по эпюрам рис. 104 и представить себе эти местные внутренние напряжения в графической форме, получаем фигуру, начинающуюся с p_y , имеющую на оси $1/2 p_y$ и внизу нуль.

Совершенно так же, но с другим знаком, будут выражаться местные нормальные внутренние напряжения и для случая нагрузки, параллельной оси OY , но приложенной снизу. Нагрузка, параллельная OY , но приложенная сбоку, дает только тангенциальные внутренние напряжения, к которым мы и перейдем (см. рис. 106).

Проектируя на ось OY все силы, действующие на выделенную часть элемента ds , получаем:

$$(t_x) h_x ds - p_y' h_o \cdot ds + \\ + \frac{p_y' h_o ds}{I} \int_x^{\min x} S' \cdot dx = 0.$$

Напряжение называется (t_x) , ибо действует в плоскости, перпендикулярной оси OZ ; здесь S' — статический момент отрезанных вертикальных элементов площади относительно OX , т. е. той же, которая принималась выше.

$$(t_x) = p_y' \cdot \frac{h_o}{h_x} \left(1 - \frac{1}{I} \int_x^{\min x} S' dx \right) = \\ = \frac{p_y'}{I} \cdot \frac{h_o}{h_x} \left(I - \int_x^{\min x} S' dx \right).$$

Закон падения по ширине тот же.

Остается еще разобрать нагрузку p_x , параллельную оси OZ (см. рис. 107); она может быть приложена только ко внешнему контуру (как это имеет, напр., место при испытании круглого бруска в Механической Лаборатории). Поэтому здесь мы будем иметь дело только с тангенциальными местными напряжениями.

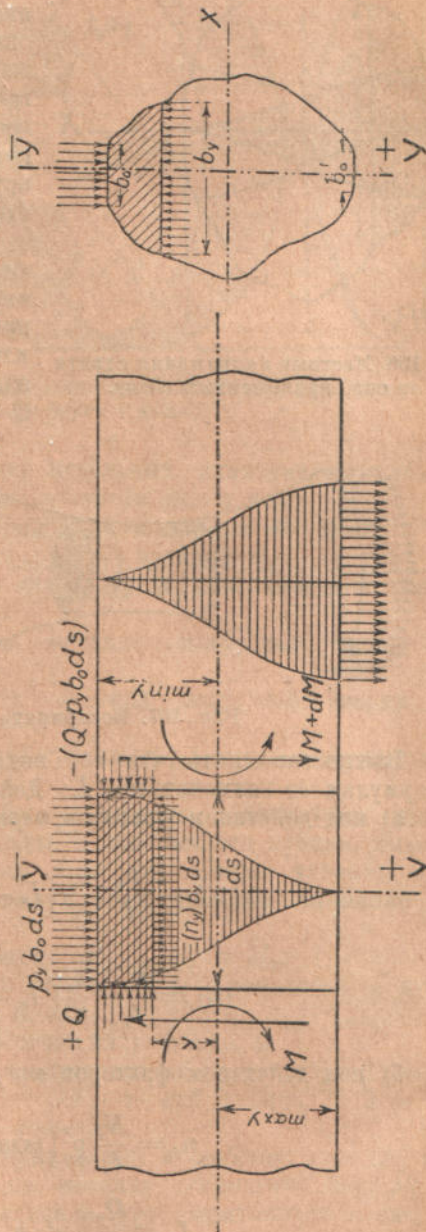


Рис. 105. Местные напряжения при изгибе от сил, приложенных сверху или снизу.

Для простоты представим себе круглое сечение и вывода делать не будем — ясно, что мы снова получим те же, уже знакомые нам, фигурки, выражающие графически закон изменения тангенциальных напряжений, передающих нашу нагрузку на ось.

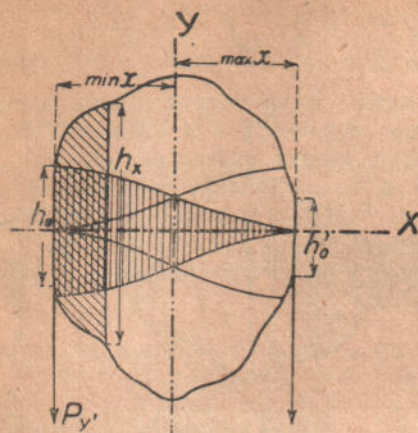


Рис. 106. Местные напряжения сдвига от сил, приложенных сбоку.

В этом случае тангенциальные напряжения уменьшаются, потому что они компенсируются нормальными напряжениями, которые мы условно предполагаем равномерно распределенными по всему сечению. Кривые здесь быстрее переходят к нулю, так как площади круговых колец растут по квадратичной формуле.

Таков механизм передачи местных нагрузок на ось. Ясно, что как t может иметь место лишь при наличии Q , т.е. при изменяющемся моменте, так и (n) или (t) могут иметь место лишь при наличии p , т.е. при изменяющемся Q или N .

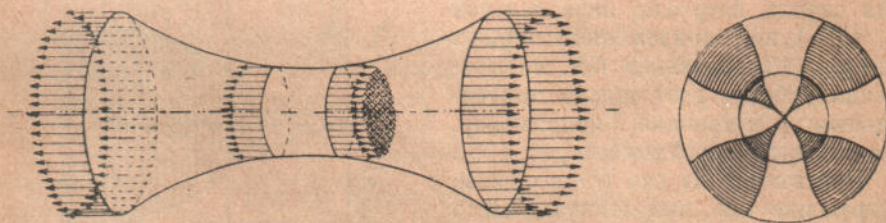


Рис. 107. Восприятие брусом нагрузки p_z .

Важно запомнить, что все виды напряжений могут быть сведены к формулам со знаменателем I . Действительно:

а) под действием факторов первой строки (p_x, p_y, p_z)

$$(n_y) = \frac{p_y}{I} \cdot \frac{b_o}{b_y} \left(I_x - \int S dy \right);$$

$$(t_z) = \frac{p_y'}{I_x} \cdot \frac{h_o}{h_x} \left(I_x - \int S' dx \right) \text{ и т. п.};$$

б) под действием факторов второй строки (N_z, Q_x, Q_y)

$$n_z = \frac{N_z}{I_z} \varrho_o^2 \left(\text{здесь } \varrho_o = \sqrt{\frac{I_z}{\omega}} \right);$$

$$t_x = \frac{Q_y}{I} \cdot \frac{S_y}{b_y} \text{ и такое же } t_y;$$

в) под действием факторов третьей строки (M_x, M_y, M_z)

$$n_z = \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x;$$

$$t_z = \frac{M_x}{I_z} r.$$

Вырежем в заключение из нашего бруса (приняв его за тело круглого сечения) элемент ds и выделим на его поверхности 2 очень малых, немного клиновидных кубика, как показано на рис. 108. Нормальные напряжения бомбардируют его со всех сторон. Тангенциальные напряжения (такие, которые превращают квадратики в ромбы) также действуют по всем 3 граням кубика. Это вполне ясно видно на нашем перспективном чертеже. Значит, действительно, каждый кубик (элемент бруса) находится под одновременным действием 6 различных напряжений, что не всегда удастся отчетливо себе представить.

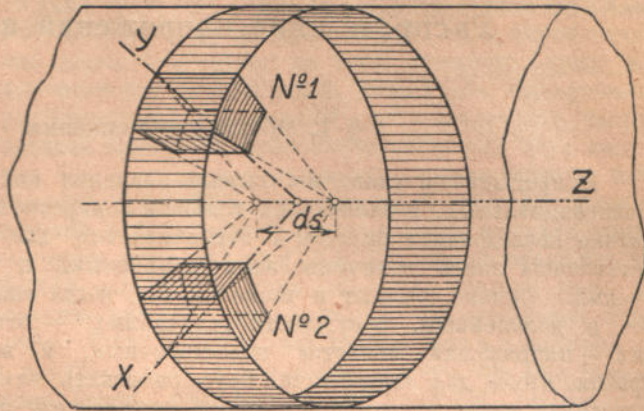


Рис. 108. Напряжения в отдельных элементах бруса („колесо“).

Постараемся разобраться в работе отдельных клиновидных кубиков. Возьмем кубик № 1. В общем случае действия сил в нем:

- 1) Напряжения n_z вызываются силой N_z и парами M_x и M_y .
- 2) Напряжения t_y вызываются парой M_x и силой Q_x .
- 3) Напряжения t_x вызываются силой Q_y и поверхностной нагрузкой p_z .
- 4) Напряжения (n_y) вызываются местной нагрузкой сверху или снизу p_y .
- 5) Напряжения (n_x) вызываются местной нагрузкой сверху или снизу p_x .
- 6) Напряжения (t_z) вызываются нагрузками p_x' и p_y' , действующими сбоку.

Для кубика № 2 можно было бы установить аналогичные зависимости. То же можно было бы установить и для каждого кубика, вырезанного по любому радиусу. Эту таблицу надо хорошенько усвоить, чтобы понять смысл явлений в брус. Обращает, напр., на себя внимание следующее:

- а) n_z особенно важно — оно зависит от N_z , M_x и M_y ;
- б) t_x и t_y также важны, ибо t_y в кубике № 1 (и конечно, t_x в кубике № 2) сочетают влияние M_x и одного из Q ;
- в) (n_y), (n_x) и (t_z) суть лишь местные напряжения, и
- г) M_x дает t_x , т. е. напряжение в плоскости, перпендикулярной любому радиусу (для кубика № 1 радиус — OY , а для кубика № 2 — OX), что же касается до t_z , то M_x его не вызывает.

Это последнее обстоятельство весьма важно и особенно ясно для круглого бруса, в котором каждое отдельное сечение совершенно внутри себя при кручении не изменяется. Обыкновенно это формулируется так, что при кручении имеются напряжения t в плоскостях, перпендикулярных радиусу, но вовсе не имеется таковых в плоскостях, перпендикулярных касательной, а также перпендикулярных оси бруса. Но (t_z) играет роль в создании крутящей пары M_x , ибо именно оно передает боковые (т. е. создающие кручение) нагрузки p_x' и p_y' на ось.

ГЛАВА VI.

Распределение напряжений в точке.

§ 1. Общие соображения.

В предыдущей главе мы вывели значения напряжений — нормальных и тангенциальных, возникающих в любом поперечном сечении нашего бруса. Обычно исследование на этом и заканчивается; для расчета балки считают достаточным знать величины этих напряжений в плоскостях поперечных сечений. Однако, бывают и такие случаи, когда знание этих, как мы увидим в дальнейшем, в сущности „случайных“ — отнесенных к случайным осям — напряжений является недостаточным, и вопрос ставится таким образом, чтобы для любой точки бруса разыскать *наибольшие, могущие в ней возникнуть напряжения* и определить *направление тех площадок действия, которым эти напряжения соответствуют*. Мы приходим таким образом к новой задаче — *изучению распределения напряжений в точке* (см. рис. 109).

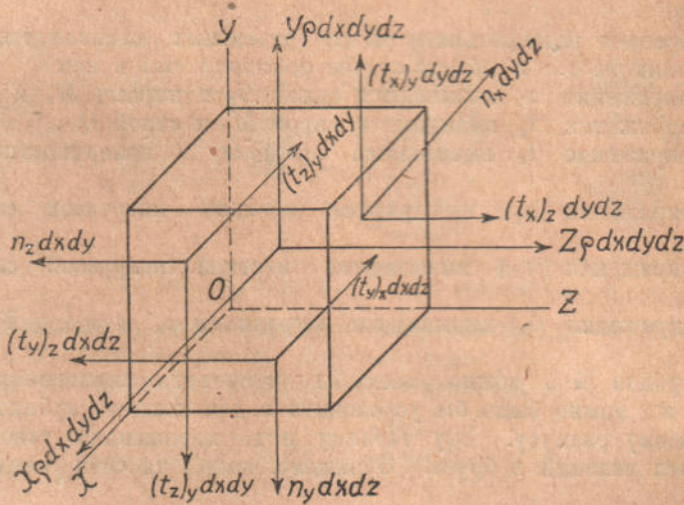


Рис. 109. Распределение напряжений в элементарном кубике.

Если рассмотреть элементарный кубик с гранями dx , dy , dz , вырезанный вокруг какой-либо точки тела трех измерений, то мы можем, изучая силы, действующие на этот кубик, или, что тоже самое, в этой точке, прийти к следующим заключениям:

1) кубик $dx \cdot dy \cdot dz$ — может обладать некоторой *объемной силой*, которая, как общее правило, принимается *пропорциональной массе кубика*, исходя из ранее высказанного положения, что именно *материя является источником всякой силы*. Так как направление этой силы неопределенно, то мы считаем ее имеющей все три составляющие, и называем их

$$X\rho \, dx \, dy \, dz; \quad \rho \, dx \, dy \, dz \quad \text{и} \quad Z\rho \, dx \, dy \, dz,$$

где X , Y , Z составляющие силы, приходящиеся на единицу массы, а ρ — количество массы в единице объема.

В виду малости кубика эти силы считаются приложенными в его центре.

2) *поверхностные силы* действуют на *каждый* из шести граней кубика. Происхождение их может быть двоякое: — если данная грань есть *наружная* грань тела, т.е. если мы рассматриваем один из *краевых наружных* кубиков, то эта поверхностная сила есть *внешняя* нагрузка (такая наружная грань может иметь и *свой наклон* и не всегда подойдет под параллелизм осям X , Y , и Z , если они заданы случайно, но этого сложного случая мы пока не рассматриваем); если же *данная* грань есть грань *внутренняя*, или если мы вообще рассматриваем *вырезанный из внутренних частей* кубик, то наша поверхностная сила есть *сила взаимодействия* двух соседних граней друг на друга, *неизбежная* в упругом теле, подверженном действию объемных и поверхностных внешних сил — напомним, что нас интересует только та дополнительная величина этой силы, которая вызвана этими внешними силами, *начального же значения сил взаимодействия* мы не знаем, и их из рассмотрения выключаем (как уже было указано в самом начале изложения), имея между прочим в виду и то, что эти *начальные силы взаимно уравновешиваются*. Было бы ошибочно думать, что мы считаем их *малыми* — величина их неизвестна, и скорее можно думать, что они весьма значительны. Современная Теория Относительности учит нас, что *начальный запас живой силы в теле* равен половине его массы умноженной на *квадрат скорости света* (300000 км/сек), т.е. $\frac{mc^2}{2} = \frac{mg \cdot c^2}{2g}$ в то время, как изменения в этом запасе, вызываемые внешними нагрузками, выражаются всего на всего $\frac{n^2}{2E}$ на каждый $см^3$ — величина, прямо исчезающая сравнительно с первой. Посему и *начальные силы взаимодействия* в статическом случае упругого равновесия могут быть весьма значительны (работы акад. Иоффе).

Возвращаясь к *поверхностным силам* и считая их за малостью площадки приложенными в центрах тяжести площадок, мы должны считать, что в общем случае для *твердого тела поверхностные силы могут быть наклонны к площадкам действия*, а потому, разлагая эти наклонные силы на три составляющие, мы получим для трех граней, параллельных трем плоскостям координат и *совпадающих с ними*, трижды три т.е. девять *поверхностных сил*, которые мы обозначим так:

$n_x \, dy \, dz$	$n_y \, dx \, dz$	$n_z \, dx \, dy$	силы нормальные
$(t_x)_y \, dy \, dz$	$(t_y)_z \, dx \, dz$	$(t_z)_x \, dx \, dy$	силы тангенци-
$(t_x)_z \, dy \, dz$	$(t_y)_x \, dx \, dz$	$(t_z)_y \, dx \, dy$	альные.

Для нормальных сил приняты знаки осей, коим они параллельны, а для тангенциальных — согласно ранее принятому условию основной знак (в скобках) указывает на ось, *перпендикулярную плоскости действия* данной силы, а знак за скобками — на ось, параллельно которой *сила действует*. Произведения дифференциалов указывают на *площадки действия*.

Но кроме девяти сил, нами отмеченных, на противоположных параллельных гранях действуют еще девять таких же сил, но отличающихся от них в двух отношениях:

1) они направлены противоположно предыдущим, ибо в каждом направлении должны взаимно уравновеситься;

2) одинаковые по значкам силы отличаются друг от друга на свой дифференциал, ибо, как общее правило, они непостоянны и представляют непрерывную функцию, изменяющуюся от точки к точке, и потому должны изменять свое значение и на протяжении дифференциалов dx , dy , dz .

Таким образом, если в нижней грани действует сила $-n_y dx dz$, то в верхней грани мы уже имеем силу $+(n_y + dn_y) dx dz$ и т. д.

При этом знак плюс мы придаем и силе и ее дифференциалу на *наружных*, несовпадающих с осями координат гранях, принимая, что *возрастание* аргумента влечет за собой *возрастание функции*.

Итак, имеем $18 + 3 = 21$ действующих сил. Они должны подчиняться законам равновесия, и если написать шесть уравнений равновесия, мы получим

А) Возьмем сначала выражения равенства нулю *моментов* относительно трех осей. Если игнорировать моменты от дифференциалов, как величины *другого порядка малости* сравнительно с моментами от полных сил, то мы получим:

$$(1) \quad M_x = 0; \quad (t_x)_y \partial x \partial y \partial z = (t_x)_z \partial x \partial y \partial z$$

или

$$(t_x)_y = (t_x)_z = t_x$$

(реже называют $t_{yz} = t_{zy}$)

$$(2) \quad M_y = 0; \quad (t_y)_x \partial x \partial y \partial z = (t_y)_z \partial x \partial y \partial z$$

или

$$(t_y)_x = (t_y)_z = t_y$$

(реже называют $t_{xz} = t_{zx}$)

$$(3) \quad M_z = 0; \quad (t_z)_x \partial x \partial y \partial z = (t_z)_y \partial x \partial y \partial z$$

или

$$(t_z)_x = (t_z)_y = t_z$$

(реже называют $t_{xy} = t_{yx}$).

Итак, мы имеем лишь *три различных* тангенциальных напряжения вокруг точки, вместо шести. Закон парности касательных напряжений при плоском сдвиге есть, следовательно, лишь *частный случай*.

В) Возьмем выражения равенства нулю проекций сил на оси X, Y, Z и для стройности формул применим обозначения t_{xy} , t_{yz} , t_{zx} вместо t_x , t_y , t_z . Здесь войдут только дифференциалы и объемные силы.

$$(4) \quad \Sigma X = 0; \quad \partial n_x \cdot \partial y \partial z + \partial(t_x)_x \cdot \partial x \partial z + \partial(t_y)_x \cdot \partial x \partial y = -\rho X \partial x \partial y \partial z$$

или

$$\frac{\partial n_x}{\partial x} + \frac{\partial t_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial t_{xz}}{\partial z} = -\rho X$$

(все величины одного порядка)

$$(5) \quad \Sigma Y = 0; \quad \partial(t_x)_y \cdot \partial y \partial z + \partial n_y \partial x \partial z + \partial(t_z)_y \cdot \partial x \partial y = -\rho Y \partial x \partial y \partial z$$

или

$$\frac{\partial t_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial n_y}{\partial y} + \frac{\partial t_{yz}}{\partial z} = -\rho Y$$

(все величины одного порядка)

$$(6) \quad \Sigma Z = 0 \quad \frac{\partial t_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial t_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial n_z}{\partial z} = -\rho Z$$

(все величины одного порядка).

Выведенные нами три последних дифференциальных уравнения суть знаменитые дифференциальные уравнения равновесия упругого тела, принадлежащие Навье (1821 год). Мы не будем их изучать в настоящее время, отметив, что они рассматриваются подробно лишь в Теории Упругости.

Приведенные нами соображения устанавливают, что в самом общем случае пространственного действия сил в каждом элементе (каждой точке) тела надо знать для уяснения его упругого состояния шесть различных напряжений: три нормальных и три тангенциальных. Однако, изучение вопроса во всей его полноте представляет значительные трудности, и мы обратимся к более скромной задаче — изучим распределение напряжений в точке в случае плоскостного и совпадающего с одной из главных осей инерции расположения действующих сил. Отметим лишь здесь, что те шесть величин, которые определяют напряженное состояние точки, могут быть получены и по схеме рис. 4 (см. выше) если задаться напряженным состоянием каждого из шести ребер изображенного на этом рисунке тетраэдра — модели.

§ 2. Плоскостное действие сил (плоская задача).

Как известно, в случае плоского действия сил, мы имеем три силовых фактора: N_x , Q_y и M_x . Легко установить, что в этом случае и напряжения у точки сводятся к трем величинам n_x , n_y и t_x . Без затруднения находим величины нормальных напряжений: в плоскости поперечного сечения — n_x , в плоскости параллельной нейтральному слою — n_y , и тангенциального в плоскости YZ — t_x . В Теории Упругости эти напряжения, как ясно из предыдущего, связываются двумя дифференциальными уравнениями:

$$\frac{\partial n_y}{\partial y} + \frac{\partial t_x}{\partial z} = -\rho Y; \quad \frac{\partial n_x}{\partial z} + \frac{\partial t_x}{\partial y} = -\rho Z.$$

Их исследованием мы здесь заниматься не будем.

Перейдем теперь к выяснению общей обстановки вокруг нашей точки. Если мы представим ее в виде многоугольника с очень большим числом сторон (для простоты на рис. 110 взято 8), то ясно, что не на одних гранях, параллельных осям координат, будут действовать внутренние силы. Они будут действовать по всем граням, как бы защищая данный район от проникновения в него окружающих масс, (как атомы Бёсковича или современные электроны), будут действовать, как капля жидкости под давлением, с той лишь разницей, что в твердом теле: 1) напряжения не будут по всем направлениям одинаковы, 2) напряжения не будут обязательно перпендикулярны к граням действия и 3) нормальные составляющие напряжений не будут обязательно напряжениями сжатия (что имеет место в жидкостях), т.-е. не будут обязательно направлены от точки (ибо такое направление внутренних сил и дает сжатие — см. выше простое

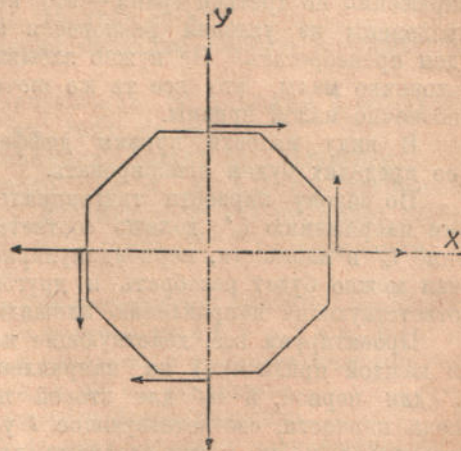


Рис. 110. Сопrotивление точки.

растяжение и сжатие). И вот оказывается важным установить, каковы же напряжения по *разным* граням и какие из них наибольшие. Ибо, следовательно, для любой площадки, проводимой близ нашей точки, должны существовать нормальные и тангенциальные напряжения, очевидно, зависящие от угла наклона α этой площадки к осям координат. Величину этих напряжений можно определить таким образом: напряжения в теле изменяются непрерывно; поэтому, если взять на бесконечно близком расстоянии от нашей точки плоскость параллельную изучаемому нами направлению, то величина неизвестных нам напряжений n_y' и t_x' для этой бесконечно близкой плоскости может считаться одинаковой, как и в данной точке по тому же направлению. Вырежем же из нашего тела элементарную призмочку, имеющую основанием заштрихованную нами площадку, а высотой — ширину бруска, равную единице (см. рис. 111).

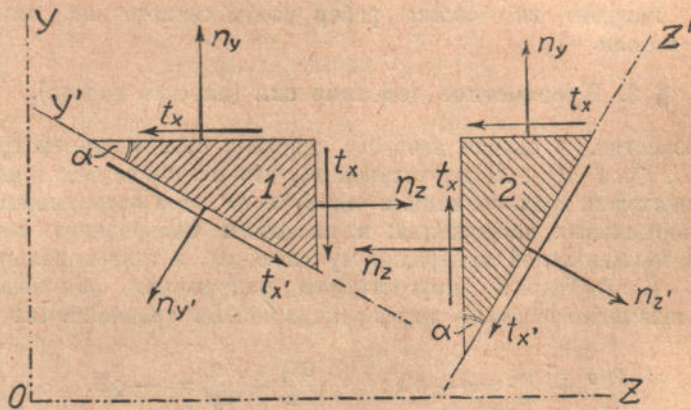


Рис. 111. Распределение напряжений в точке.

Напряжения, действующие по двум граням этой призмочки, нам известны, напряжения по третьей грани — это искомые n_y' и t_x' и они могут быть определены из условия равновесия этой призмочки. Объемными силами будем пренебрегать. Не нужно забывать, что размеры этого треугольника бесконечно малы, это все та же *точка*, но которую мы мыслим в виде бесконечно малой призмы.

В виду малости призмы дифференциальные приросты напряжений в ее пределах будем игнорировать.

По закону парности тангенциальных напряжений, предположенному нами напряжению t_x' должно соответствовать равное ему другое напряжение t_x' в плоскости, перпендикулярной к первой. Поэтому для той же точки можно будет разобрать и другой случай распределения напряжений, соответствующий направлению площадки по оси Z' .

Проектируем все, действующие на наши обе призмочки, силы (отдельно для каждой призмочки) на направление новых нормальных напряжений (n_y' для первой, и n_z' для второй призмочки). — Заметим, что согласно закона парности, соответствующие t у вершины могут или сходиться или расходиться, но не могут следовать друг за другом „по шерsti“.

Подберем размеры так, чтобы площадь грани Y' оказалась равной площади грани $Z' = F$.

Площади вертикальных граней тогда будут $F \sin \alpha$ и $F \cos \alpha$.
 Площади горизонтальных граней „ „ $F \cos \alpha$ и $F \sin \alpha$.

Имеем тогда для первого и второго случая:

$$\begin{cases} n_y' \cdot F - n_y F \cos^2 \alpha - n_x F \sin^2 \alpha + t_x F \sin \alpha \cos \alpha + t_x F \sin \alpha \cos \alpha = 0 \\ n_x' \cdot F - n_y F \sin^2 \alpha - n_x F \cos^2 \alpha - t_x F \sin \alpha \cos \alpha - t_x F \sin \alpha \cos \alpha = 0 \end{cases}$$

или

$$n_y' = n_x \sin^2 \alpha + n_y \cos^2 \alpha - t_x \sin 2 \alpha$$

$$n_x' = n_x \cos^2 \alpha + n_y \sin^2 \alpha + t_x \sin 2 \alpha.$$

Для вывода закона изменения тангенциальных напряжений, проектируем все силы, действующие на наши призмочки, на направления t_x и t_x' :

$$\begin{cases} t_x' F + t_x F \sin^2 \alpha - t_x F \cos^2 \alpha - n_y F \sin \alpha \cos \alpha + n_x F \sin \alpha \cos \alpha = 0 \\ t_x' F - t_x F \cos^2 \alpha + t_x F \sin^2 \alpha - n_y F \sin \alpha \cos \alpha + n_x F \sin \alpha \cos \alpha = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_x' = \frac{n_y - n_x}{2} \sin 2 \alpha + t_x \cos 2 \alpha \\ t_x' = \frac{n_y - n_x}{2} \sin 2 \alpha + t_x \cos 2 \alpha \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} t_{x'} = t_x' \\ t_{x'} = t_x' \end{array} \right.$$

Если вспомним формулы, выведенные нами ранее для моментов инерции, то бросается в глаза полное их математическое подобие. Конечно, это подобие именно лишь математическое, потому, что между напряжениями и моментами инерции полной аналогии быть не может, ибо измерение момента инерции L^4 , а измерение напряжений $F^1 L^{-2}$, напряжение мы изучаем в плоскости, проходящей перпендикулярно к сечению через ось бруса — моменты инерции рассматриваются в плоскости сечения. Аналогия чисто внешняя, т.-е. обе формулы имеют вид

$$A_\alpha = A_x \cos^2 \alpha + A_y \sin^2 \alpha - A_{xy} \sin 2 \alpha \text{ и т. д.}$$

Однако, раз структура формул одинакова, к ним можно применить те же (чисто математические) рассуждения, что и к формулам момента инерции. Именно, можно прямо написать (без вывода) выражения для максимума и минимума нормальных напряжений, для угла α_0 и т. д.

Закон изменения напряжений можно, очевидно, изучать и графически, на круге Мора или на эллипсе Ламэ.

Выпишем таблицу формул для напряжений, по аналогии с формулами выведенными для моментов инерции (см. табл. на стр. 150).

В формулах аналогий обратим внимание только на следующее:

1) знаки при t_x' , а следовательно при α_0 и α_{00} , противоположны знакам при $I_{x'y'}$, α_0 и α_{00} в моментах инерции, — но это не имеет особенного значения, ибо всегда имеется и взаимное t_x' , получающееся при повороте осей на 90° , с другим знаком.

2) при построении эллипса Ламэ для сохранения аналогии необходимо взять за знаменатели уравнения т.-е. за полуоси, не n_1^2 и n_2^2 , а n_1 и n_2 , ибо моментам инерции, а следовательно и квадратам радиусов инерции соответствуют первые степени напряжения, а не их квадраты.

На этом вопросе мы ниже остановимся более подробно.

Аналогия, таким образом, для обоих этих столбцов полнейшая — вместо I_x нужно брать напряжение n_x , вместо I_y — напряжение n_y , и наконец взамен центробежного момента $I_{x'y'}$ напряжение t_x с обратным знаком. Заметим, что при выводе формул напряжений мы всюду принимали за положительное направление — направление напряжений n_y' , n_x' , t_x' , указанное на чертеже

НА ПРЯЖЕНИИ.

$$n_{x'} = n_x \cos^2 \alpha + n_y \sin^2 \alpha + t_x \sin 2\alpha$$

$$n_{y'} = n_x \sin^2 \alpha + n_y \cos^2 \alpha - t_x \sin 2\alpha$$

$$n_{x'} + n_{y'} = n_x + n_y = n_1 + n_2$$

$$-t_{x'} = \frac{n_x - n_y}{2} \sin 2\alpha - t_x \cos 2\alpha$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = + \frac{t_x}{\frac{1}{2}(n_x - n_y)}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_{00} = - \frac{\frac{1}{2}(n_x - n_y)}{t_x}$$

$$\max_{\min} n = \frac{1}{2}(n_x + n_y) \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}(n_x - n_y)\right)^2 + t_x^2}$$

$$\max_{\min} t_x = \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}(n_x - n_y)\right)^2 + t_x^2} = \frac{n_1 - n_2}{2}$$

$$n_{z_{\text{on}}} = n_{y_{\text{on}}} = \frac{n_1 + n_2}{2}$$

МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ

$$I_{x'} = I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - I_{xy} \sin 2\alpha$$

$$I_{y'} = I_x \sin^2 \alpha + I_y \cos^2 \alpha + I_{xy} \sin 2\alpha,$$

$$I_{x'} + I_{y'} = I_x + I_y = I_1 + I_2,$$

$$I_{x'y'} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha + I_{xy} \cos 2\alpha$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = - \frac{I_{xy}}{\frac{1}{2}(I_x - I_y)},$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_{00} = + \frac{\frac{1}{2}(I_x - I_y)}{I_{xy}},$$

$$\max_{\min} I = \frac{1}{2}(I_x + I_y) \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}(I_x - I_y)\right)^2 + I_{xy}^2}$$

$$\max_{\min} I_{xy} = \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}(I_x - I_y)\right)^2 + I_{xy}^2} = \frac{I_1 - I_2}{2},$$

$$I_{x_{00}} = I_{y_{00}} = \frac{I_1 + I_2}{2}.$$

стрелками. Наши формулы в смысле знаков, конечно, будут справедливы лишь постольку, поскольку разбираемый нами в практике случае дает те же направления этих напряжений, что и в разобранным нами случае. Если направление напряжений получается отличным от теоретического, то приходится очень внимательно считаться со знаком, меняя его на обратный и, таким образом, несколько видоизменяя наши формулы.

§ 3. Исследование напряжений кругом Мора.

Перейдем к графической иллюстрации закона изменения напряжений и прежде всего отметим тот факт, что напряжения измеряются величиной $F^1 L^{-2}$ т.-е. измерением не линейным, — при изображении напряжений неизбежно придется иметь дело с некоторым условным масштабом. Аналогия в построениях будет часто внешняя, напр., тот же эллипс Ламэ, изображаемый для иллюстрации моментов инерции непременно в натуральную величину, — придется в применении к напряжениям строить в условном масштабе. Обратимся сначала к построению *круга Мора* (см. рис. 112).

Положим, что нам известны напряжения n_x, n_y, t_x . В отличие от моментов инерции напряжения n_x и n_y могут быть и *разных знаков*, в этом случае построение круга Мора, хотя в принципе и останется тем же самым, что и для однозначного случая, но по внешности будет несколько отличаться от привычной нам картины. Не будем здесь приводить доказательства правильности построений Мора, оно ни чем не отличается от *подобных же рассуждений для моментов инерции*, и прямо обратимся к графическому изображению. Как видно из рис. 112-го, на круге Мора очень легко определить величину и направление *максимальных и минимальных напряжений*, которые мы будем называть *главными* (прежде употреблялся еще термин — *косые напряжения*, но он не удачен, не выражает сущности явления и потому должно его избегать), и мы будем иметь дело или с *главными* напряжениями, или с напряжениями, действующими по *случайным* осям. Не забудем, что напряжения n действуют на перпендикулярные им площадки и не будем смешивать направления напряжений и положения площадок.

Рассмотрим отдельные случаи:

1) *Напряжения n_x и n_y одного знака* (полная внешняя аналогия с диаграммой Мора для I_x и I_y) — правый верхний рисунок.

Главные оси напряжений указывают на существование таких перпендикулярных этим осям площадок, на коих сопротивление проникновению внешних масс наибольшее, и совсем нет тангенциальных напряжений.

Можно построить тот же круг, и по заданным главным напряжениям; он будет еще проще и компактнее, но

значение величины $OO^1 = \frac{n_x + n_y}{2}$ и радиуса $= \sqrt{\left(\frac{1}{2}(n_x - n_y)\right)^2 + t_x^2}$

останутся те же — правый нижний рисунок.

При равенстве двух главных напряжений (напр., жидкость) круг превращается в точку.

2) *Напряжения n_x и n_y разного знака* (в моментах инерции такого случая быть не может).

Строим все попрежнему, но, учитывая знак — получим новую по виду, но по существу *ту же* диаграмму, с *тем же* значением OO^1 и радиуса — левый верхний рисунок.

Как видно из рисунка, помещенного посредине, в этом случае существуют два направления a' и a'' , для которых тангенциальное напряжение

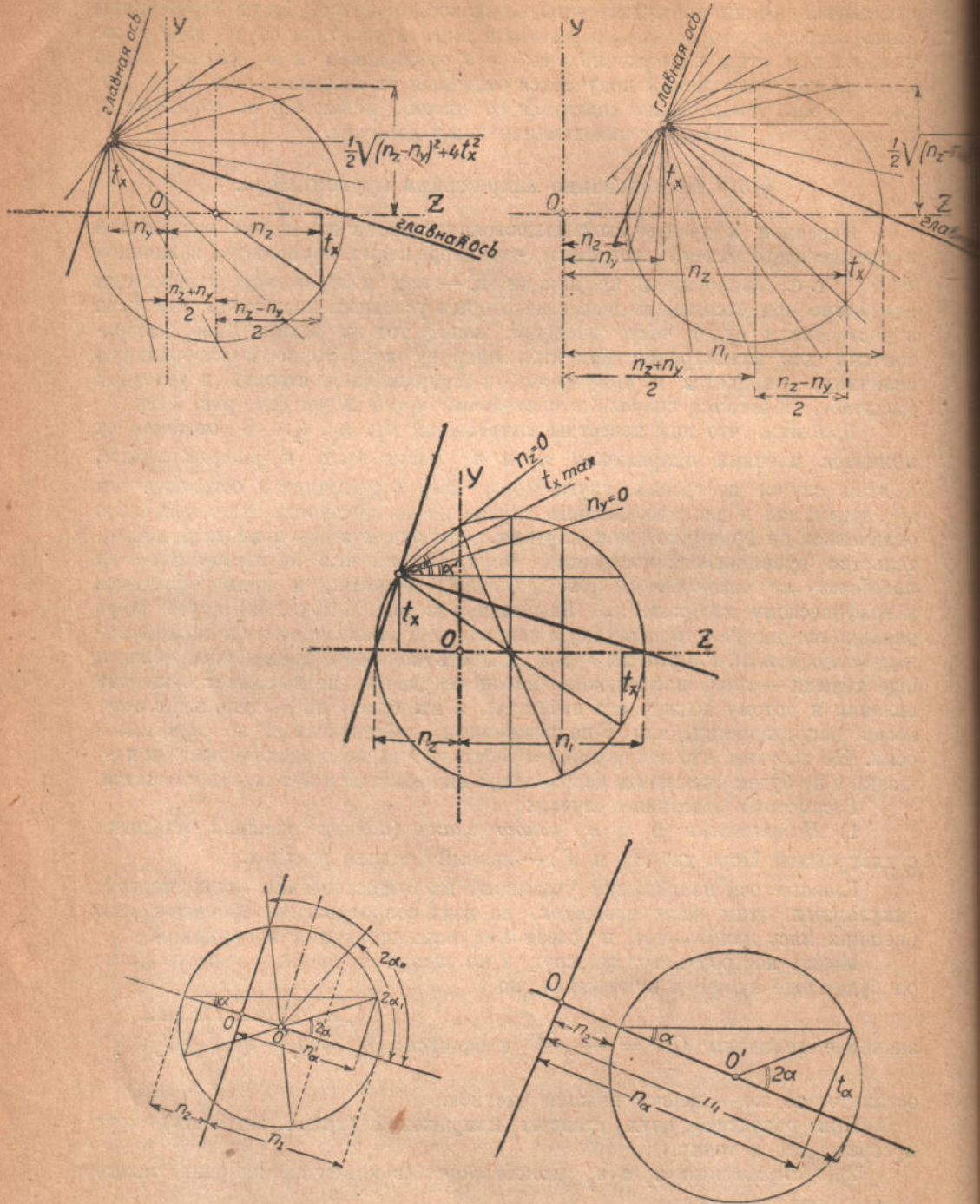


Рис. 112. Пользование кругом Мора для изучения напряжений.

Наверху — напряжения разного (слева) и одного (справа) знака.

Посредине — отыскание мест перехода n через нуль (перемена знака).

Внизу — круг Мора для главных осей; разнозначные напряжения слева, равнозначные — справа.

получает некоторое определенное значение, не максимальное, но вообще говоря, большое, и для которых одно из нормальных напряжений обращается в нуль. Посередине между этими направлениями лежит направление, соответствующее максимуму тангенциального напряжения t_x , при котором $n_y = n_z = \frac{n_1 + n_2}{2}$. В этом случае можно убедиться, что в пределах между углами α' и α'' оба напряжения n одного знака, равного большому из двух данных напряжений n_x и n_y .

Если будем вести построение для главных осей (левый нижний рисунок), то опять можно легко выделить напряжения, соответствующие обращению в нуль одного из нормальных напряжений. Это будут направления α' и α'' . И опять же в пределах этих двух направлений оба напряжения n_x и n_y будут одного знака.

Типичный случай простого растяжения (рис. 113) можно рассматривать, как случай, когда одно из нормальных напряжений обращается в нуль ($n_y = 0$) и, значит, имеем дело только с n_x . Из построения круга Мора видно, что и для этого случая имеются свои t , и максимум тангенциальных напряжений получается для направления под 45° к направлению действующей силы.

Для этого направления $t_x = \frac{n_x}{2}$ т.-е. приобретает очень солидную величину. Поэтому в механической лаборатории при испытаниях часто удается видеть на образце, подвергающемся растяжению или сжатию, трещины, идущие под углом около 45° к оси. Вследствие того, что на практике всегда приходится иметь дело еще и с местными

внутренними явлениями трения, ибо мы наблюдаем трещины (так называемые линии Людерса) лишь за пределом упругости, то точной величины этого угла ровно в 45° мы никогда не получим, однако в общем весьма близко к нему приближаемся. Следовательно, и такое простое на первый взгляд явление, как чистое растяжение или сжатие, в сущности, довольно сложно и сопровождается еще и сдвигом в наклонных плоскостях.

Рассматривая явление чистого сдвига (см. рис. 114), приходим к заключению, что и здесь не обойтись без растяжения и сжатия. Действительно, диагонали нашего квадрата, направленные под 45° , работают на чистое растяжение и сжатие. Изучим это явление на круге Мора, при чем обнаружим, что по главным осям тангенциальных напряжений нет, а нормальные дают максимум и с разными знаками.

Два построения чертежа 114-го, конечно, изображают одно и то же явление, только под разными углами зрения, при чем первый чертеж мы построили, исходя из задания чистого сдвига, а второй — из задания растяжения одной диагонали и сжатия другой, приводящего к тому же.

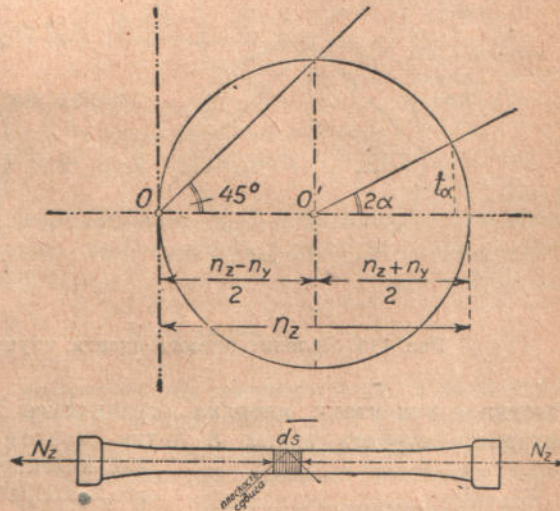


Рис. 113. Исследование кругом Мора случая простого растяжения.

В заключение скажем еще несколько слов о построении круга Мора для пространственного случая распределения напряжений. В виду полной

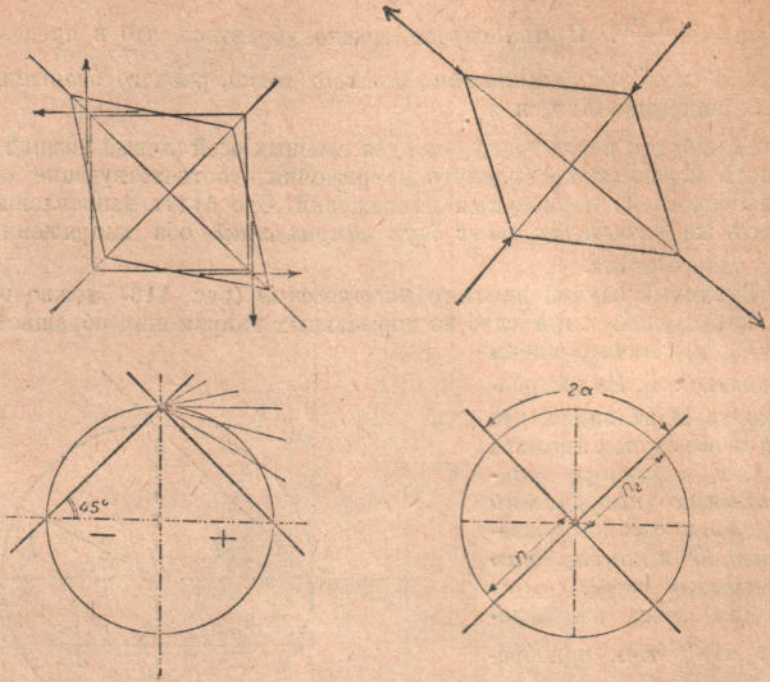


Рис. 114. Явление чистого сдвига, изученное кругом Мора.

аналогии с моментами инерции ограничимся указанием, что здесь так же приходится строить целых 3 круга, причем для общего случая, когда направление силовой площадки пересекает все 3 координатные оси, придется пользоваться заштрихованной на чертеже площадью. Максимум t оказывается в плоскости, делящей пополам наибольшую и наименьшую оси и равен $\frac{n_1 - n_3}{2}$. Если все нормальные напряжения равны (напр., жидкость), то все три круга сливаются в точку.

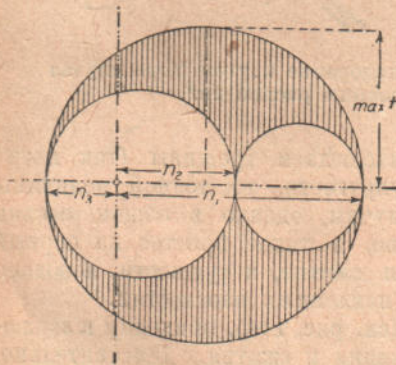


Рис. 115. Круг Мора в трех измерениях.

Очевидно, изучая общий случай действия сил на тело, нельзя ограничиваться выяснением значения напряжений по случайным осям; надо для всех точек нашего тела найти величину главных напряжений

§ 4. Сложное сопротивление и идеальные главные напряжения.

При изучении распределения напряжений в какой-либо точке, вырезанной из тела (при плоской задаче), мы находим наибольшие напряжения, действующие они-то и являются наиболее опасными

и ее сравнить с наибольшими допустимыми для материала напряжениями. Однако, является вопрос, напряжения-ли производят в материале те разрушения, которые делают его непригодным для работы в сооружениях, или *деформации*. Существует взгляд, что именно *деформации* указывают на меру опасности, угрожающей материалу, и посему является необходимым знать, каковы же те главные *деформации*, которые возникают в теле при данных *главных напряжениях*. Легко сообразить, что при двух главных напряжениях n_1 и n_2 (см. рис. 116) относительная деформация по направлению напряжения n_1 согласно ранее выведенных формул равна:

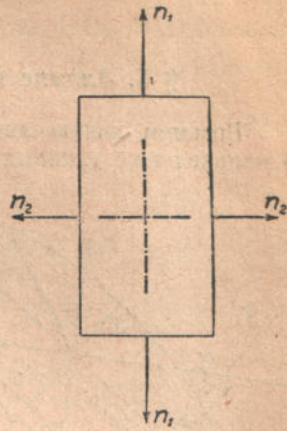


Рис. 116. Определение идеальных главных напряжений.

$$i_1 = \frac{n_1}{E} - \eta \frac{n_2}{E} = (1 - \eta) \frac{n_x + n_y}{2} + (1 + \eta) \sqrt{\left(\frac{1}{2}(n_x - n_y)\right)^2 + t_x^2}$$

Если принять $\eta = 0,25$, то мы имеем:

$$i_1 = \frac{3}{4E} \frac{n_x + n_y}{2} + \frac{5}{4E} \sqrt{\left(\frac{1}{2}(n_x - n_y)\right)^2 + t_x^2}$$

а фиктивное напряжение, эквивалентное этой деформации, т.-е. могущее вызвать такую же деформацию при простом растяжении (при линейном напряженном состоянии) равно:

$$[n_1] = \frac{3}{4} \frac{n_x + n_y}{2} + \frac{5}{4} \sqrt{\left(\frac{1}{2}(n_x - n_y)\right)^2 + t_x^2}.$$

Это фиктивное напряжение, фактически не имеющее места в данной точке, но характеризующее ее деформацию, нередко называется *идеальным главным напряжением* (название „идеальный“ здесь не совсем удачно). По нему иногда производят проверку размеров при сложном сочетании явлений (*сложное сопротивление*). Формула эта часто называется формулой Сен-Венана, по имени французского ученого Barré de Saint-Venant, много поработавшего в области Теории упругости.

В заключение этого §-а необходимо указать, что существует и еще одно воззрение на причины разрушения тел, гласящее, что такой причиной являются прежде всего и исключительно *сдвиги*. Это воззрение имеет себе оправдание в явлениях, происходящих при разрушении тел, которое всегда начинается *со сдвигов* (см. § 3 этой главы — случай чистого растяжения — и начало главы о сыпучих телах). При таком воззрении наиболее опасно

$$t_{\max} = \frac{n_1 - n_2}{2}.$$

По теории опасности *нормальных напряжений* критической величиной, следовательно, является —

$$\text{По теории опасности продольных деформаций — } \frac{n_1}{[n_1]}.$$

$$\text{По теории опасности сдвигов — } \frac{n_1 - n_2}{2}.$$

В пространстве вопрос осложняется, но и тут мы имеем соответственные аналогии. Величины n_1 n_2 n_3 находятся, как главные напряжения. „Идеальные“ главные напряжения суть: $[n_1] = n_1 - \eta(n_2 + n_3)$ и т. д.

Наибольшее тангенциальное напряжение в пространстве:

$$\max. t = \frac{n_1 - n_3}{2}$$

§ 5. Эллипс напряжений и директрисные кривые.

Возьмем какую-либо точку на сечении нашего бруса и проведем оси по направлению главных напряжений. Поставим себе задачу — определить величину напряжений n_α и t_α , соответствующих некоторому данному нам направлению, определенному углом α .

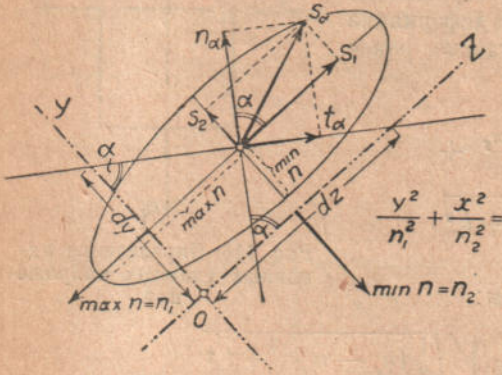


Рис. 117. Построение эллипса напряжений.

Как мы это делали и раньше, отодвигаем нашу силовую площадку на бесконечно-близкое расстояние, получаем некоторый треугольник, по сторонам которого действуют напряжения n_1 , n_2 , n_α и t_α (тангенциальные напряжения по главным граням равны нулю). Неизвестные нам напряжения n_α и t_α можем себе представить в виде некоторого результирующего напряжения s_α .

Рассмотрим теперь условия равновесия элементарной призмочки с основанием, равным нашему треугольнику, и высотой d_z (см. рис. 117).

$$\left. \begin{array}{l} 1) \Sigma Z = 0. \\ n_1 dy = s_1 \frac{dy}{\cos \alpha} \text{ или } n_1 = \frac{s_1}{\cos \alpha} \\ 2) \Sigma Y = 0 \\ n_2 dz = s_2 \frac{dz}{\sin \alpha} \text{ или } n_2 = \frac{s_2}{\sin \alpha} \end{array} \right\} \operatorname{tg} \alpha = \frac{s_2 \cdot n_1}{s_1 \cdot n_2}.$$

Третье уравнение уже использовано при доказательстве парности тангенциальных напряжений ($t_{yz} = t_{xy} = t_x$).

Какую фигуру будет чертить на бумаге вектор s_α , если изменять все время величину угла α , т. е. менять направление силовой площадки?

Примем отрезки s_x и s_y за текущие координаты z и y нашей точки.

Тогда $\operatorname{tg} \alpha = \frac{n_1 \cdot y}{n_2 \cdot z}$ и кроме того:

$$\begin{array}{lll} z = n_1 \cos \alpha & \cos \alpha = \frac{z}{n_1} & \cos^2 \alpha = \frac{z^2}{n_1^2} \\ y = n_2 \sin \alpha & \sin \alpha = \frac{y}{n_2} & \sin^2 \alpha = \frac{y^2}{n_2^2} \end{array}$$

Складывая имеем:
$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \frac{z^2}{n_1^2} + \frac{y^2}{n_2^2} = 1.$$

Получилось уравнение эллипса, который и является эллипсом напряжений; он представляет своими векторами, равными s_α , изменение результирующего напряжения s_α в зависимости от изменения направления силовой площадки. Кроме того, если провести какую-либо касательную к этому эллипсу под углом α к оси OZ , то новая координата y , точки касания при перемене

осей на OZ' и OY' , параллельные и перпендикулярные новому направлению, как-раз равна величине s_a , отнесенной к площадке, параллельной этой касательной и проведенной через точку O .

Докажем это, решая совместно выражение угла наклона касательной и уравнение эллипса

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{z \cdot n_1^2}{y \cdot n_2^2}; \dots \dots \dots (1)$$

$$\frac{z^2}{n_1^2} + \frac{y^2}{n_2^2} = 1. \dots \dots \dots (2)$$

откуда

$$\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{z^2 n_1^4}{y^2 n_2^4} \quad \text{и} \quad z^2 = \frac{y^2 n_2^4 \sin^2 \alpha}{n_1^4 \cos^2 \alpha}.$$

Подставим это в уравнение эллипса

$$\frac{y^2}{n_1^2} + \frac{y^2 \cdot n_2^2 \sin^2 \alpha}{n_1^4 \cos^2 \alpha} = 1 \quad \text{или} \quad y^2 = \frac{n_1^4 \cos^2 \alpha}{n_1^2 \cos^2 \alpha + n_2^2 \sin^2 \alpha}.$$

Откуда

$$y = + \frac{n_1^2 \cos \alpha}{\sqrt{n_1^2 \cos^2 \alpha + n_2^2 \sin^2 \alpha}}; \quad z = - \frac{n_2^2 \sin \alpha}{\sqrt{n_1^2 \cos^2 \alpha + n_2^2 \sin^2 \alpha}}.$$

Производя перемену осей, получаем:

$$y_1 = \sqrt{n_1^2 \cos^2 \alpha + n_2^2 \sin^2 \alpha} = s_a$$

что и требовалось доказать.

К сожалению, оба эти свойства эллипса не имеют исчерпывающего характера — первое дает величину и направление s_a , но не дает площадки действия, а второе дает величину и площадку действия, но не дает направления.

Итак, самого направления силовой площадки мы определить для данного вектора не можем. Не имеем мы возможности и решить вопрос о знаке напряжений (отделить районы растяжения и сжатия), так как напряжения n_1 и n_2 входят в уравнение под знаком второй степени, значит от знака своего не зависят. Поэтому применение указанного эллипса, вообще говоря, ограничено, обычно применяют его совместно с другой фигурой, представляющей уже полную аналогию с построенным эллипсом инерции. Кривая эта будет директриссной по отношению к разобранному нами эллипсу напряжений т.е. даст направления площадок и напряжений, и как мы увидим ниже, уравнение ее имеет вид

$$\frac{z^2}{n_1} + \frac{y^2}{n_2} = 1.$$

Для доказательства обратимся к эллипсу инерции, которому эта кривая должна быть вполне аналогична; действительно, имеем:

Для моментов инерции:

$$I_a = I_1 \cos^2 \alpha + I_2 \sin^2 \alpha$$

$$Q_a^2 = Q_1^2 \cos^2 \alpha + Q_2^2 \sin^2 \alpha$$

$$\frac{y^2}{Q_1^2} + \frac{z^2}{Q_2^2} = 1$$

Для напряжений:

$$n_a = n_1 \cos^2 \alpha + n_2 \sin^2 \alpha$$

$$\sqrt{(n_a)^2} = (\sqrt{n_1})^2 \cos^2 \alpha + (\sqrt{n_2})^2 \sin^2 \alpha,$$

$$\frac{z^2}{n_1} + \frac{y^2}{n_2} = \pm 1.$$

Математическая аналогия между обоими формулами полнейшая; выше мы уже доказывали, что первая из этих формул дает уравнение эллипса,

поэтому можно а priori утверждать, что и второе уравнение также дает эллипс (когда n_1 и n_2 одного знака) — директрисный „эллипс напряжений“. Как видно, действительно получилось уравнение кривой, но уже с другими осями.

Для случая, когда напряжения n_1 и n_2 — различных знаков, получаем уравнение директрисной кривой в виде:

$$\frac{z^2}{n_1} - \frac{y^2}{n_2} = \pm 1.$$

т.е. вместо эллипса получаем директрисную „гиперболу напряжений“. Конечно, все выводы, сделанные нами ранее для директрисного эллипса напряжений, целиком относятся и к случаю директрисной гиперболы, все дело только в перемене знака. На гиперболе уже ясно разделен район растяжения и сжатия, всегда можно найти силовую площадку и вычислить значения напряжений. Самое полное решение вопроса будет при одновременном пользовании обоими этими фигурами. Тогда, если они обе вычерчены в одной и той же системе координат, всегда можно путем простых геометрических построений получить для любой, заданной нам силовой площадки, направление результирующего напряжения, которое и разлагается на искомые n_a и t_a .

При исследовании круга Мора, для случая разнозначных напряжений n_1 и n_2 нами уже было указано, что существуют 2 направления, для которых одно из нормальных напряжений

обращается в нуль, при чем другое имеет некоторое, вообще говоря, большее значение. На гиперболе напряжений также можно наметить эти два направления — это очевидно будут асимптоты ее; в самом деле, нетрудно убедиться, что для асимптот одно из нормальных напряжений действительно

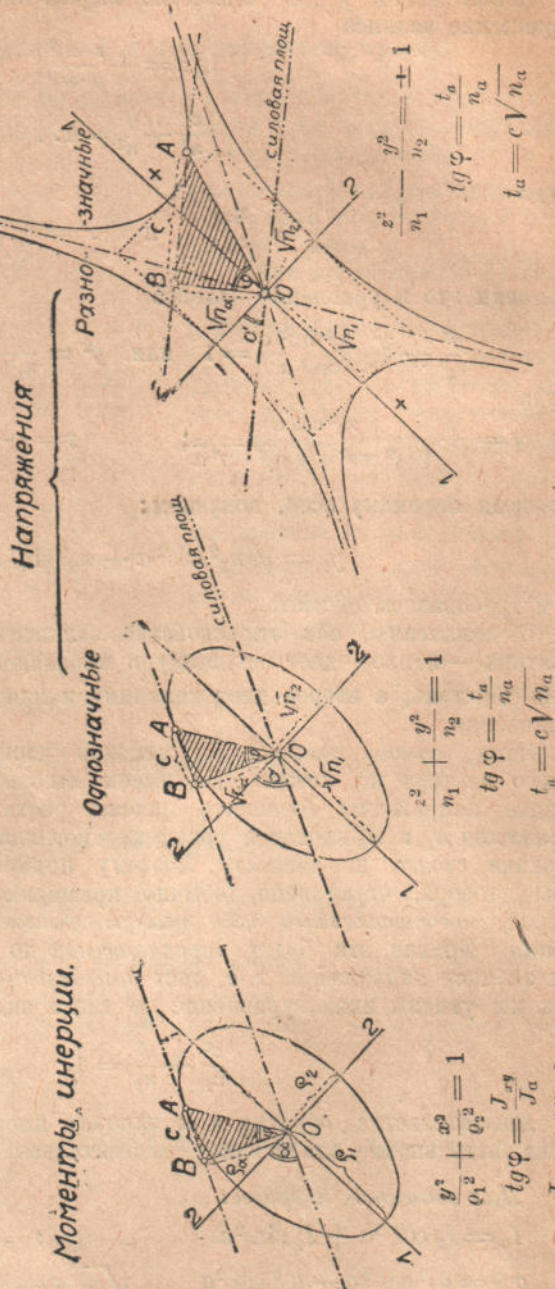


Рис. 118. Аналогия между эллипсами инерции и директрисными кривыми.

обращается в нуль, ибо касательная к гиперболе, параллельная к асимптоте, совпадает с самой асимптотой.

Докажем еще, что силовая площадка параллельна касательной к директрисной кривой, проводимой в точке, определяемой направлением равнодействующего напряжения.

Имеем уравнение директрисной кривой

$$\frac{z^2}{n_1} + \frac{y^2}{n_2} = \pm 1.$$

Дифференцируя, получаем

$$\frac{2z}{n_1} + \frac{2yy'}{n_2} = 0.$$

Отсюда угловой коэффициент касательной, тангенс угла наклона ее:

$$\operatorname{tg} \beta = -\frac{n_2 \cdot z}{n_1 \cdot y}.$$

Обозначив угол нормали к директрисной кривой через γ , получаем

$$\operatorname{tg} \gamma = -\frac{1}{\operatorname{tg} \beta} = \frac{n_1 \cdot y}{n_2 \cdot z}.$$

Вспомним значение угла наклона α силовой площадки к оси OY .
Выше мы вывели

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{n_1 \cdot y}{n_2 \cdot z},$$

т.е.

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \gamma.$$

а поэтому действительно наша касательная параллельна силовой площадке

Два примера пользования комбинациями обеих наших кривых, т.е. эллипсом напряжений и директрисной кривой (эллипс или гипербола) показаны на рис. 119-м.

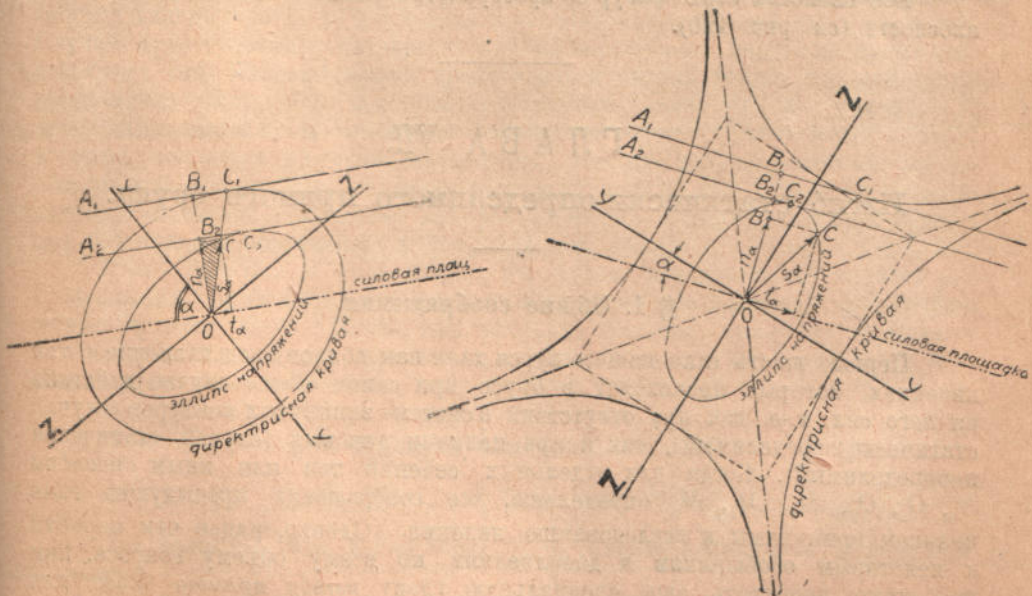


Рис 119. Зависимость между эллипсом напряжений и деректрисной кривой.

Пусть задано направление некоей площадки, проводим касательную к директрисному эллипсу, параллельно направлению площадки.

Точка касания определит нам направление равнодействующего для этой площадки напряжения, величину которого находим по эллипсу напряжений и разлагаем на искомые n_a и t_a ; при этом проверкой может быть то обстоятельство, что касательная к эллипсу напряжения, параллельная площадке, должна отстоять от центра тяжести на величину $OB_2 = \sqrt{n_a^2 + t_a^2} = s_a$ (см. рис. 119).

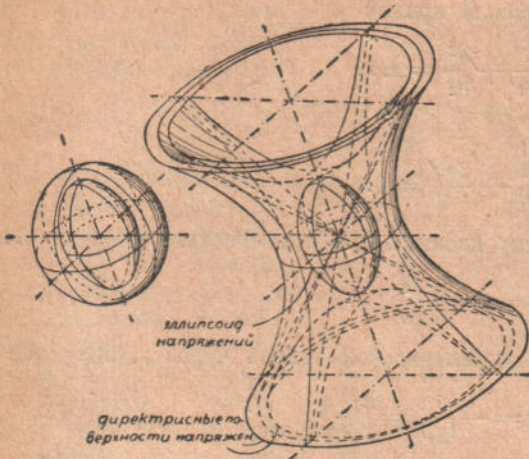


Рис. 120. Эллипсоиды и директрисные поверхности в пространстве.

Рассматривая 2-й пример, мы видим, что второй принципиально ничем не отличается от первого, но только напряжения n_a могут получаться двух знаков.

В пространстве эллипсоид напряжений превращается в эллипсоид напряжений

$$\frac{x^2}{n_1^2} + \frac{y^2}{n_2^2} + \frac{z^2}{n_3^2} = 1,$$

директрисные же фигуры — или в эллипсоиды или в два гиперболоида, в зависимости от знаков n в формуле

$$\frac{x^2}{n_1} + \frac{y^2}{n_2} + \frac{z^2}{n_3} = \pm 1.$$

Все свойства этих фигур в пространстве аналогичны таковым же на плоскости (см. рис. 120).

ГЛАВА VII.

Изгиб статически-определимого прямого бруса.

§ 1. Общие соображения.

Первые шесть глав нашего курса дали нам полное представление о тех явлениях, которые происходят в бруске при самом общем случае действия на него сил, т. е. как при отсутствии в системе замкнутых контуров (случай статически-определимый), так и при наличии таковых (случай статически неопределимый). Когда для отдельных сечений тем или иным способом $N_x, Q_x, Q_y, M_x, M_y, M_z$ определены, все соображения предыдущих глав целиком применимы к исследованию явления. Однако, ранее чем перейти к некоторым обобщениям и дополнениям по всему объему вопроса, нам необходимо посвятить еще специальную главу *изгибу прямого бруса* для простейшего статически-определимого случая, как явлению, особенно важ-

ному для инженера и требующему специального освещения. Отметим, что изгиб может иметь разный характер, согласно следующей таблице:

Чистый изгиб. Простой поперечный изгиб. (Плоскостные случаи)		Косой изгиб. (Пространственный случай).	Продольный изгиб. (Особое явление).
$N_x = 0$	$N_x = 0$	$N_x = 0$	$N_x \neq 0$
$Q_y = 0$	$Q_y \neq 0$	$Q_x = Q_y = 0$	$(Q_y = 0)$
$M_x \neq 0$	$M_x \neq 0$	$M_x \neq M_y \neq 0$	$(M_x = 0)$

Изучение *изгиба* для инженера-строителя должно стоять во главе угла, так как именно с *изгибом* приходится ему, главным образом, иметь дело в своей инженерной практике, и в изучении его должен лежать центр тяжести его работы. Раньше нам уже приходилось встречаться с явлением изгиба в его чистом виде, когда из всех силовых факторов, действующих на брус, имелся налицо лишь изгибающий момент M_x , действующий в одной из главных плоскостей и дающий нам „чистый изгиб“ бруса. На деле, однако, в громадном большинстве случаев мы имеем дело с определенной системой параллельных сил, которая в данном сечении приводится к определенной равнодействующей того же направления *поперечной силе* Q и *вызванной переносом этой равнодействующей в сечение — паре сил с моментом* M . Момент M очевидно, будет работать на изгиб, а поперечная сила Q вызовет в сечении тангенциальное напряжение. Поэтому случай „простого поперечного изгиба“ в сущности представляет собой некоторую комбинацию явлений, но, в виду своего громадного распространения в инженерной практике, часто, не вполне правильно, называется просто „изгибом“. Когда изгибающий момент не совпадает с плоскостью одной из главных осей, он может быть разложен на направления этих осей (M_x и M_y) и мы получаем комбинированный случай одновременного изгиба в обоих этих плоскостях, но так как по закону независимости действия сил, окончательная деформация нашего бруса может быть представлена как геометрическая сумма отдельных деформаций в плоскостях главных осей, то мы и можем рассматривать каждый изгиб *отдельно*. Случай этот особенно интересен *пространственным* расположением действующих сил. Наконец, может представиться случай изгиба под действием продольной силы N , при чем поперечная сила Q и момент M при этом близки к нулевому значению — это „*продольный изгиб*“, который, несмотря на свои особенности, все же только *частный случай* общего явления изгиба, отличаясь от него только тем, что в продольном изгибе нам иногда неизвестна наперед та форма, которую наш брус примет под действием приложенных к нему сил (см. ниже).

Итак, начиная с этой главы, мы будем изучать *изгиб* во всех его проявлениях, особенно детально останавливаясь на *простом поперечном изгибе прямого бруса — балки*, как наиболее близком инженеру-строителю и в частности путейцу, чаще всего имеющему дело с параллельными вертикальными силами.

§ 2. Простой поперечный изгиб

$$N_x = 0, \quad Q_y \neq 0, \quad M_x \neq 0.$$

Предположим, что $EI = \text{const}$ (т.е. имеем *постоянное* поперечное сечение).

Так как все действующие силы нами заданы одного направления — параллельными оси OY , то и направление опорных реакций так же должно

быть того же направления, и является как-бы зафиксированным нашим заданием. Поэтому можно было бы в этом случае обе опоры условно изобразить с одним только стерженьком (ибо число стерженьков равно числу неизвестных). Если мы все же левую опору рисуем с 2-мя стерженьками, то только для того, чтобы показать, что наша балка при случае может воспринять и *любую* иначе расположенную систему сил, действующих в плоскости, в частности отдельные силы наклонные и горизонтальные.

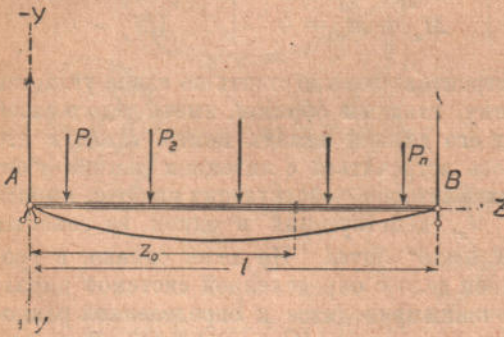


Рис. 121. Простой поперечный изгиб.

Мы уже ранее говорили об *идеи шести строк*, выяснив на трех первых строках, что существует интересная математическая зависимость между нагрузкой, поперечной силой и моментом, и обещав вернуться к этому вопросу в главе об изгибе. Теперь нам предстоит разработать эту идею во всей ее полноте, ибо в изгибе мы именно и имеем дело с действующими силами (нагрузкой), поперечной силой Q_y и моментом M_x . Припомним, какие выражения мы получили для трех первых строк:

(1) Нагрузка

$$p_y = \frac{\partial Q_y}{\partial z} = \frac{\partial^2 M_x}{\partial z^2}.$$

(2) Поперечная сила

$$Q_y = A_o - \int_0^{z_o} p_y \cdot dz = \int_0^{z_o} p_y' \cdot dz = \frac{\partial M_x}{\partial z}.$$

(3) Момент

$$\begin{aligned} M_x &= (M_o) + \int_0^{z_o} Q_y dz = (M_o) + A_o z_o - \int_0^{z_o} \int_0^z p_y \cdot dz dz = \\ &= (M_o) + A_o z_o - \int_0^{z_o} p_y (z_o - z) dz = (M_o) + \int_0^{z_o} \int_0^z p_y' dz dz = \\ &= (M_o) + \int_0^{z_o} p_y' (z_o - z) dz. \end{aligned}$$

Формулы эти заключают в себе произвольные постоянные интегрирования, так как, *во-первых*, мы имеем дело с *неопределенным* интегралом, ибо верхний предел z_o есть величина в сущности переменная — текущая координата, а *во-вторых* — мы начинаем подсчет не с нулевого значения действующих сил, и уже сразу, на опоре, встречаем некоторую начальную величину опорной реакции A_o , которая и входит в наши формулы в виде постоянной интегрирования. Другая постоянная интегрирования M_o — т.-е. момент на опоре, в условиях нашей задачи равна нулю, заметим однако, что это совсем не общее правило и могут быть другие случаи, например в балке с консолями, т.-е. с частями, выступающими за опоры, где *получается вполне определенное значение величины M_o на опоре*. Наши формулы выше написаны и в другой форме, именно можно учесть в интеграле попе-

речной силы также и величину опорной реакции, условно сочтя ее за сплошную силу, каковой она фактически и является, будучи все же распределенной на некоторой длине, тогда выражение поперечной силы получается без постоянного интегрирования и выражается через p_y' (где p_y' — напряженность внешних сил с учетом и опорной реакции и с предположением, что знак + при p_y' соответствует силе, направленной вверх).

В окончательном виде наши три первые строки напишутся так:

$$(1) \quad p_y = \frac{\partial Q_y}{\partial z} = \frac{\partial^2 M_x}{\partial z^2} \dots \dots \dots (n_y) = \frac{p_y}{I_x} \left(I - \int_{\max y}^y S dy \right)$$

$$(2) \quad Q_y = A_0 - \int_0^{z_0} p_y \cdot dz = \frac{\partial M_x}{\partial z} \dots \dots \dots t_x = \frac{Q_y}{I_x} \cdot \frac{S}{b}$$

$$(3) \quad M_x = A_0 z_0 - \int_0^{z_0} p_y (z_0 - z) dz \dots \dots \dots n_y = \frac{M_x}{I_x} \cdot y$$

О графическом методе подсчета этих величин нам уже приходилось говорить выше и придется к этому вопросу еще несколько раз возвращаться в дальнейшем, поэтому сейчас не будем на этом останавливаться.

В рассматриваемом случае мы имеем дело с так называемой „статически-определимой“ системой, т.е. такой комбинацией действующих сил, при которой для их полного уравнивания достаточно применить лишь 3 уравнения статического равновесия, наш брус поэтому опирается только на 3 стерженька „классической комбинации опор“.

На деле, однако, часто приходится иметь дело с большим числом опор, и 3 статических уравнения являются недостаточными для выяснения значения отдельных реактивных сил — имеем так называемый „статически-неопределимый“ случай, для разрешения которого нужно еще ввести некоторые добавочные условия, а именно условия, налагаемые на *изменение формы* бруса. Поэтому, хотя в настоящей главе мы изучаем статически-определимый случай, однако, приступая к изучению изгиба, мы должны изучить и изменение формы бруса, так как такое изучение, конечно, необходимое и полезное и при исследовании статически-определимых случаев, впоследствии принесет нам громадную пользу при изучении статически-неопределимых систем, которые мы всегда будем приводить к условным статически-определимым схемам.

В главе о чистом изгибе мы выяснили, что под действием изгибающего момента M брус прогибается, при чем кривизна „упругой линии“, т.е. той линии, которую брус в этом случае из себя представляет, выражается формулой $\frac{1}{\rho} = -\frac{M}{EI}$ и получается таким образом для чистого изгиба в виде некоторой *постоянной* величины, т.е. в чистом изгибе брус изгибается по дуге круга. В простом поперечном изгибе мы имеем дело еще с поперечной силой Q_y , вызывающей в элементе тангенциальные напряжения и поэтому и некоторое перекашивание сечения. Оно уже не останется плоским и перпендикулярным к оси бруса, как мы предполагали с большим основанием в случае чистого изгиба. Формула $\frac{1}{\rho} = -\frac{M}{EI}$ уже не будет вполне справедлива, и, вообще говоря, нужно было бы захватить вопрос гораздо глубже, чтобы дать исчерпывающее освещение проблемы. Однако, опытные исследования последнего времени показали, что искривление поперечных сечений в поперечном изгибе настолько мало, что для практических целей с успехом можно им пренебречь, и для определения кривизны пользоваться формулой $\frac{1}{\rho_y} = -\frac{M_x}{EI_x}$. Радиус кривизны

связан определенными формулами с углами наклона и прогибами, а поэтому уравнение упругой линии можно будет получить из выражения для кривизны, даваемого в Аналитической Геометрии:

$$\rho' = \frac{1}{\rho} = \frac{\pm \frac{\partial^2 y}{\partial z^2}}{\left[1 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2\right]^{3/2}} = \frac{\pm y''}{[1 + y'^2]^{3/2}}$$

Интегрируя два раза это дифференциальное уравнение, мы должны получить уравнение самой упругой линии. Однако формула все же слишком сложна, интеграция затруднительна, и мы делаем еще одно упрощение: величина y' , т.е. производная от величины прогиба, графически выражаемая тангенсом угла между касательной к упругой линии и осью OZ —вообще величина малая, так как упругая линия очень пологая (величина прогиба обычно около $1/1000$ пролета, т.е. y' около $5' - 10'$). В знаменателе формулы тангенс этого малого угла входит еще во 2-й степени, значит величина y'^2 ничтожно мала по сравнению с единицей, и в знаменателе формулы мы ее отбрасываем. Тогда получаем упрощенную формулу

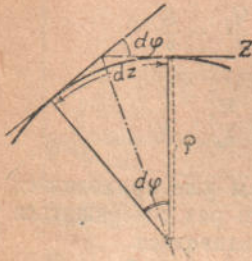


Рис. 122. Элементарный вывод значения

$$\rho' = \frac{1}{\rho} = \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\partial y'}{\partial z} = \pm \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = \pm y''$$

или

$$y'' = - \frac{M_x}{EI_x}$$

Здесь мы сделали 2 допущения: во-первых, воспользовались для поперечного изгиба выражением кривизны, выведенным из условия плоскостного и перпендикулярного к оси расположения сечения и во вторых—пренебрегли величиной y'^2 . Возьмем уже детально изученный нами случай чистого изгиба и посмотрим, насколько справедливы будут наши допущения. Величина кривизны $\frac{1}{\rho}$, как выведенная именно для этого случая—будет безусловно справедлива, однако, приравнявая ее выражению y'' , мы делаем некоторую ошибку, и поэтому для упругой линии, которая для этого случая *должна быть дугой окружности*, получаем *квадратную параболу*. Это есть следствие вводимого нами в общем исследовании вопроса упрощения. Впрочем, надо сказать, что квадратная парабола очень близко подходит к дуге круга, а потому ошибка получается практически ничтожной (1%—2%).

Итак мы имеем для второй производной уравнения упругой линии вполне определенное выражение. Выполняя двойное интегрирование, получаем

$$(4) \dots \dots y'' = \rho' = \frac{1}{\rho} = - \frac{M_x}{EI_x} = \frac{\partial y'}{\partial z} = \frac{\partial^2 y}{\partial z^2}$$

$$(5) \dots \dots y' = \frac{\partial y}{\partial z} = y'_0 + \int_0^{z_0} y'' dz = y'_0 - \int_0^{z_0} \frac{M_x}{EI_x} dz$$

$$(6) \dots \dots y = (y_0) + \int_0^{z_0} y' \cdot dz = (y_0) + \int_0^{z_0} (y'_0 + \int_0^z y'' dz) dz = \\ = (y_0) + y'_0 z_0 + \int_0^{z_0} \int_0^z y'' dz dz = (y_0) + y'_0 \cdot z_0 - \int_0^{z_0} \frac{M_x(z_0 - z)}{EI_x} dz.$$

(y_0) — как значение прогиба на опоре, в условиях нашей задачи = 0.

Бросается в глаза полная математическая аналогия между написанными 3-мя строчками и теми, которые были выведены ранее. Там мы доказывали, что интеграл нагрузки — это поперечная сила, а интеграл поперечной силы — это момент, и здесь можно провести эту внешнюю аналогию дальше, и сказать, что если интеграл кривизны есть угол наклона упругой линии, а интеграл угла наклона — самая упругая линия (величина прогибов), то можно представить себе кривизны, как некоторую условную нагрузку, интегрируя которую, мы получаем условную поперечную силу $(Q_y) = y'$ (угол наклона) и условные моменты $(M_x) = y$ (прогиб). Остается, значит, только связать три первых строчки с тремя последними, так сказать перекинуть мостик между обоими этими группами. Оказывается, что четвертая строка вполне определенно связана с третьей: кривизна, принимаемая за новую условную нагрузку, получается из значения момента разделением его на EI (пока принимаем EI за constans) и переменою знака. Теперь ясна вполне „идея шести строк“. Имеем между всеми интересующими нас в изгибе факторами такую зависимость:

F^1	(1) . . . $F^1 L^{-1}$	$p_y = + EI f^{IV}(z)$	$p_y = EI f^{IV}(z)$
	(2) . . . $F^1 L^0$	$Q_y = - EI f'''(z) =$ $= \int_0^{z_0} p_y' \cdot dz$	$Q_y = \int_0^{z_0} p_y' dz$
	(3) . . . $F^1 L^1$	$M_x = - EI f''(z) =$ $= \int_0^{z_0} \int_0^z p_y' \cdot dz dz$	$M_x = \int_0^{z_0} \int_0^z p_y' dz dz$
L^0	(4) . . . L^{-1}	$y'' = f'(z)$	$y'' = - \frac{1}{EI} \int_0^{z_0} \int_0^z p_y' dz dz$
	(5) . . . L^0	$y' = f'(z) =$ $= y_0' + \int_0^{z_0} y'' dz$	$y' = y_0' - \frac{1}{EI} \int_0^{z_0} \int_0^z \int_0^z p_y' dz dz dz$
	(6) . . . L^1	$y = f(z) =$ $= \int_0^{z_0} \int_0^z y'' dz dz$	$y = (y_0) + y_0' \cdot z_0 -$ $- \frac{1}{EI} \int_0^{z_0} \int_0^z \int_0^z \int_0^z p_y' dz dz dz dz$

Поэтому, идея шести строк может быть формулирована таким образом: „Все моуции нас интересоват в поперечном изгибе величины связаны между собой твердой математической зависимостью, и если их расположить в шести строчках, в такой последовательности: нагрузка, поперечные силы, моменты, кривизна, улы наклона и проибы, то оказывается, что каждая последующая строчка получается интеграцией предыдущей. Исключением является лишь переход от третьей строки к четвертой, так как выражение кривизны получается из выражения момента непосредственно“.

Принимая за p_y' нагрузку, включающую в себя и опорные реакции, и ту нагрузку, которая создает опорные моменты, если таковые имеются, мы считаем равными нулю произвольные постоянные интегрирования в 2, 3-ей, а следовательно и в 4-ой строках.

Заметим еще, что выведенная нами на примере поперечного изгиба зависимость эта, как далее будет доказано, равным образом может быть использована и вообще для всех проблем Теории сооружений, красной нитью проходя через все ее отделы, а поэтому справедливо может быть поставлена во главе угла, являясь как бы схемой многих отделов нашего предмета. Во всяком случае та же схема будет нами применена для шарнирно-стержневых систем брусьев, т.-е. ферм, во втором выпуске нашего курса.

§ 3. Графо-аналитическое исследование изгиба. Теория шести строк в общей форме.

Мы видим, таким образом, что при аналитическом методе изучения изгиба, все нужные нам величины, получаются методом последовательной интеграции. Способ этот, однако часто является несколько громоздким, утомительным и даже бывают случаи, когда интеграция вообще является трудно выполнимой. Поэтому во многих случаях выгоднее, вместо аналитического подсчета, применять геометрическое решение задачи. Раньше мы уже отчасти изложили его сущность. Дело сводится к построению эюр поперечных сил (действительных — Q_y для верхних строчек и условных (Q_y) — для нижних) и кривых, характеризующих изменение момента, получаемых, как веревочно-

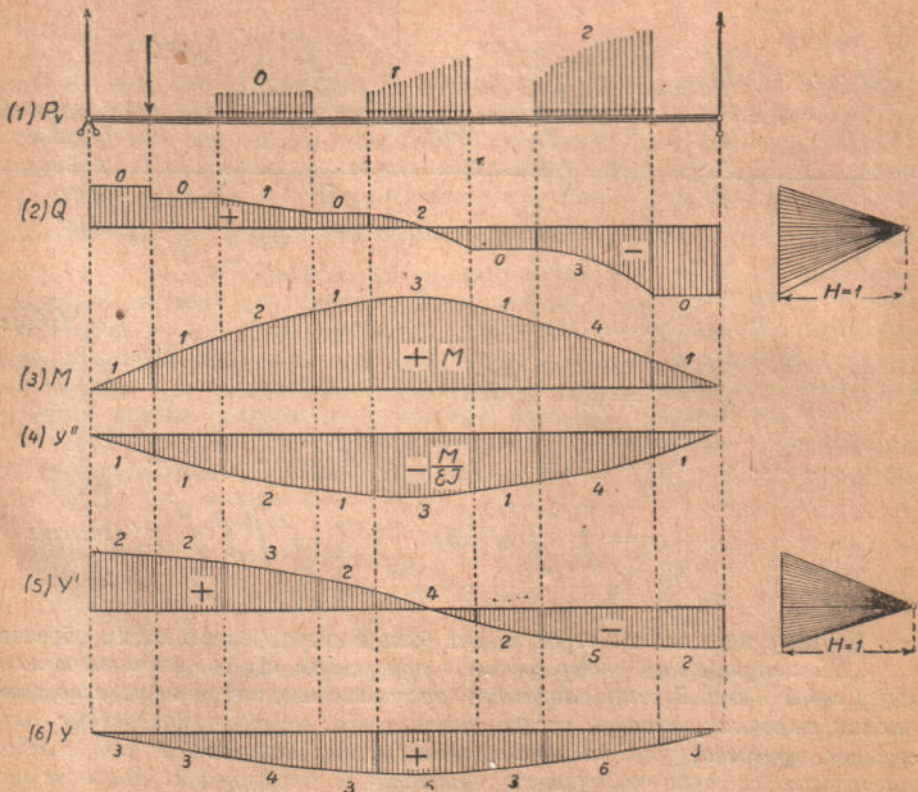


Рис. 123. Графическое исследование шести строк.

стержневые многоугольники и дающих действительные моменты — M_x для верхних строчек и условные (M_x) — для нижних.

В случае *статически-определимой системы* мы ведем наш подсчет сверху (последовательным интегрированием), так как произвольные постоянные интегрирования всегда могут быть определены. В *статически-неопределимой системе приходится* идти снизу вверх (последовательным дифференцированием) ибо там, как будет видно из III выпуска нашего курса, самое определение „лишних“ статически-неопределимых величин совершается путем написания выражений, определяющих упругие перемещения и повороты отдельных точек. Разберем пример графического метода шести строк для статически-определимой системы.

При построении 4-й строки масштаб может быть изменен в EI раз, тогда получается фигура, симметричная верхней, что, конечно, значительно упрощает построения. Верхние три эпюры построены в *силовом* масштабе, нижние три — в *угловом*, так что наверху $H=1$ силовой единице и внизу $H=1$ угловой единице — радиану. Так как переход от строчки к строчке соответствует интегрированию, повышающему на единицу порядок нашей функции, то порядок наших кривых постепенно растет книзу, как и обозначено на чертеже; и при том *ордината* каждой строки равна левой *площади* предыдущей строки. Кривая прогиба не может быть 1-го порядка; за исключением, впрочем, того случая, когда все левые силы совершенно уравновешены, а в нагрузке есть перерыв; 2-го порядка она бывает в виде редкого исключения (под постоянным значением момента), обычно бывает она 3-го порядка (кубическая парабола — между сосредоточенными силами) и 4-го порядка (под сплошной равномерной нагрузкой). Наконец, в более редких случаях бывают кривые прогиба и высших порядков (5-го и 6-го).

В дополнение к графической иллюстрации теоремы 6-ти строк, чтобы уже больше к ней не возвращаться, выпишем здесь аналитические формулы, ее выражающие, но уже в общем виде, и с подробными обозначениями. Имеем 3 первых строки для самого общего пространственного случая.

$$(1) \quad p_x' \qquad p_y' \qquad p_z'$$

(все нагрузки даны на единицу длины s).

$$(2) \quad Q_x = A_x + \int_0^s p_x' ds \quad Q_y = A_y + \int_0^s p_y' ds \quad N_z = A_z + \int_0^s p_z' + d_z$$

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} M_x = M_x^0 + (A_y z_0 - A_z y_0) + \int_0^s Q_y dz - \int_0^s N_z \cdot dy \\ M_y = M_y^0 + (A_x z_0 - A_z x_0) + \int_0^s Q_x dz - \int_0^s N_z \cdot dx \\ M_z = M_z^0 + (A_y x_0 - A_x y_0) + \int_0^s Q_y dx - \int_0^s Q_x dy \end{array} \right.$$

Конечно, как мы говорили и выше, при системе координат, отнесенной к *изучаемому* сечению, интегралы, взятые не до этого сечения, дают величины $N_z, Q_x, Q_y, M_x, M_y, M_z$, отнесенные к осям изучаемого сечения, но могущие быть замененными эквивалентной им группой $N_z', Q_x', Q_y', M_x', M_y', M_z'$, уже отнесенной к осям того сечения, до которого доведено интегрирование.

В плоской задаче все значительно упрощается, многих выражений не будет.

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & p_y' && p_z' \\
 (2) \quad & Q_y = A_y + \int_0^s p_y' ds && N_z = A_z + \int_0^s p_z' ds \\
 (3) \quad & M_x^o = M_x + (A_y z_o - A_z y_o) + \int_0^s Q_y \cdot dz - \int_0^s N_z \cdot dy .
 \end{aligned}$$

При этом, те же три строки дают и значение соответствующих напряжений.

Наконец, когда плоско расположенные силы к тому же еще перпендикулярны оси бруса (поперечный изгиб), получаем формулы, приведенные выше в этом же параграфе. При всех этих выражениях надо помнить, что интеграция выражается *одним* интегралом, лишь если интегрируемая функция на всем протяжении интеграции непрерывна и остается *той же*. Иначе всякий интеграл мы должны разделить на ряд *отдельных* интегралов.

Возможно дать теперь же и выражение *трех последних строк* для пространственного случая, хотя подробнее этой общей проблемы мы коснемся значительно позднее. Теперь отметим лишь, что брус *двойной кривизны* имеет *две кривизны*: 1) *кривизну изгиба*, зависящую от угла поворота касательной $\frac{1}{R}$ и 2) *кривизну кручения*, зависящую от угла поворота бинормали $\frac{1}{T}$. При этом кривизну изгиба можно разложить по двум плоскостям, проведенным через касательную и главные оси инерции на две отдельные кривизны изгиба $\frac{1}{R_y}$ и $\frac{1}{R_x}$. Эти три кривизны $\frac{1}{R_x}$, $\frac{1}{R_y}$, $\frac{1}{T}$ можно, поскольку они возникли в результате действия *внешних сил*, связать с моментами M_x , M_y , M_z и таким образом образовать четвертую строку:

$$\frac{1}{R_x} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} = -\frac{M_y}{EI_y}; \quad \frac{1}{R_y} = \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = -\frac{M_x}{EI_x}$$

и наконец

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = \frac{M_z}{GI_z} \dots \dots \dots (4)$$

ибо относительно последней величины очевидно, что $\frac{1}{T}$ есть как раз угол закручивания на единицу длины, который может быть выражен через $\frac{M_z}{GI_z}$.

Здесь $u = \Delta x$; $v = \Delta y$; $w = \Delta z$.

Члены с w появляются при брусках *большой кривизны*.

Любопытно отметить, что структура этих производных совершенно соответствует структуре обычных уравнений Статике, приравнивающих нулю моменты относительно осей координат (см. третью строку в общем виде).

Вывод этих формул будет дан позже. *Пятая строка*, представляющая интеграл четвертой по dz , дает:

$$\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}; \quad \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}; \quad \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y};$$

то-есть самые *углы поворота*, определяемые последовательно в плоскостях XOZ , YOZ и XOY .

Наконец, *шестая* строка после соответствующих интеграций дает нам u, v, w .

В этом общем случае, таким образом *три* нагрузки P_x, P_y, P_z , в моментах *переплетают* свое воздействие; и также *три* конечные величины u, v, w в кривизнах тоже *переплетают* свое воздействие.

§ 4. Балка на 2-х опорах. Эпюры и инфлюентные линии.

Обращаемся теперь к исследованию *простого поперечного изгиба балки, свободно лежащей на 2-х опорах*. При изучении этого явления применяют два совершенно различных метода: или строят так называемые *эпюры* или *инфлюентные линии* (*линии влияния*).

Сущность *первого* метода заключается в том, что полагая данную *нагрузку* (лучше всего груз, равный силовой единице) *неподвижной* в определенном сечении, мы передвигаем ее по нашей балке и графически изображаем все изменения интересующей нас величины от точки к точке на так называемых „эпюрах“. (Этот метод мы применяли уже при графической интерпретации теоремы „6-ти строк“).

При *втором* методе мы выбираем какое-либо *определенное* сечение и для этого *неподвижного сечения* изучаем все изменения нашей подлежащей определению величины при движении по балке груза, равного силовой единице. В результате получаются так называемые *линии влияния* или *инфлюентные линии*, характеризующие изменения силовых факторов в *данном сечении* соответственно различным точкам положения груза.

Принципиально рассуждая, разницы между обоими этими методами нет; ведь постоянная неподвижная нагрузка может рассматриваться, как подвижная, задержавшаяся в определенном положении на некоторый момент времени, и обратно, подвижная может рассматриваться, для каждого ее частного положения на балке, как неподвижная. Какой из этих двух методов предпочтительнее применить в том или другом случае—иногда бывает трудно указать вперед; во всяком случае архитектору, имеющему дело с неподвижными нагрузками, более подходит пользоваться методом *эпюр*; для его расчета лучше будет предположить наихудшее, самое невыгодное положение нагрузки, считая ее в этом положении за неподвижную—чем мыслить свою нагрузку подвижной. Инженеру-строителю, наоборот, именно приходится рассчитывать свои мосты, набережные и другие сооружения, главным образом на сопротивляемость их воздействию перемещающегося поезда или другой нагрузки того же рода (трамвая, автомобилей, экипажей, толпы и т. п.)—значит инженеру-строителю *инфлюентные линии* по своей идее ближе чем *эпюры*. И если ему приходится иной раз иметь дело с постоянной нагрузкой, то он этот случай постоянной нагрузки сводит к линиям влияния, считая постоянную нагрузку лишь за частный случай подвижной нагрузки. И так *инфлюентные линии* для подвижной нагрузки—*суть линии, выражающей закон изменения какой либо величины, отнесенной к определенному месту пролета, при передвижении груза, равного единице, по всему пролету*. Наоборот—*все ординаты эпюры* для постоянной нагрузки *отнесены к случаю определенного места приложения силы*, но зато выражают значение данной величины в *разных точках пролета*.

Заметим еще раз, что все замечания, относившиеся к графическому построению „шести строк“, в смысле последовательной интеграции, очевидно применимы *только к эпюрам*, а не к инфлюентным линиям, „шесть строк“ имеют место и во втором случае, как характеризующие те *шесть величин*, которые нас интересуют при исследовании явления, но здесь уже *нет последовательной интеграции* от одной строки к другой.

С математической точки зрения вопрос ставится так:

Если назвать через z_1 расстояние груза до одной из опор, а через z_{II} расстояние точки до той же опоры, то все интересующие нас величины суть функции двух факторов, а именно:

$$Q = f_1(z_1, z_{II}), \quad (2)$$

$$M = f_2(z_1, z_{II}), \quad (3)$$

$$y' = \varphi_1(z_1, z_{II}), \quad (5)$$

$$y = \varphi_2(z_1, z_{II}). \quad (6)$$

Если принять $z_1 = \text{constans}$, то мы получим *эпюры*, а если принять $z_{II} = \text{constans}$, то мы получим *инфлюентные линии*, и только в этом случае мы будем иметь дело с фигурами на *плоскости*; общий же вид наших выражений требовал бы *пространственного* изображения.

Число построений при пользовании методом эпюр или методом инфлюентных линий остается то же, ибо мы, остановив свое внимание, скажем, на 20 точках, должны, напр., для M построить 20 эпюр или 20 же инфлюентных линий. И, наконец, ясно, что, найдя все ординаты для единичных эпюр, мы уже нашли все ординаты и для инфлюентных линий, ибо 20 эпюр так же дают *все* значения наших функций, как и 20 инфлюентных линий.

§ 5. Детальное исследование эпюр и инфлюентных линий.

Разберем поперечный изгиб балки, лежащей на двух опорах, в случае одного только груза и притом равного единице. Все выводы, которые мы здесь получим, конечно, легко можно будет распространить и для любого груза и даже для любой системы грузов, так как, по закону независимости действия сил, достаточно изучить явления в бруске от *каждой* из действующих сил отдельно, чтобы получить окончательное явление, как геометрическую сумму отдельных действий. Но пример изгиба „единичного“, в виду своей универсальности, должен быть особенно тщательно нами изучен.

Займемся сначала эпюрами (см. рис. 124).

Прежде всего строим эпюру *поперечных сил* Q_v , считая положение единичного груза на балке зафиксированным. Покуда мы будем идти по первой ветви балки (т.-е. по части ее от левой опоры до точки приложения груза) у нас слева все время будет одна лишь опорная реакция A , определяемая из условия равенства нулю момента всех сил относительно точки B .

Имеем:

$$A \cdot l - 1(l - z_1) = 0; \quad A = \frac{l - z_1}{l}.$$

Графически величину реакции A легко получить указанным на рис. 124 построением наклонной линии, имеющей на левой опоре ординату *единицу*, а на правой — 0, так как из подобия треугольников как раз выходит нужное нам соотношение для ординаты этой линии, приходящейся под грузом. Значит, эпюру поперечных сил для первой ветви мы легко получим. Опорная реакция B может быть определена из уравнения момента относительно точки A :

$$-Bl + 1 \cdot z_1 = 0; \quad B = \frac{z_1}{l}.$$

Сумма обеих опорных реакций действительно дает всегда величину единицу.

$$\frac{l - z_1 + z_1}{l} = 1.$$

Итак, поперечная сила Q для первой ветви равна опорной реакции A , т.-е. имеем $Q_{(1)} = A = \frac{l-z_1}{l}$, а для второй ветви, мы, помимо силы A , будем иметь еще нагрузку $P = 1$ с обратным знаком, т.-е. имеем

$$Q_{(2)} = A - 1 = \frac{l-z_1-l}{l} = -\frac{z_1}{l}.$$

Можно также сказать, что

$$Q_{(2)} = -B = -\frac{z_1}{l}.$$

Геометрическое место *перехода ординат* с ветви на ветвь на эпюрах Q легко найдем, проводя наклонные линии от левой опоры с начальной ординатой 1—к правой, и от правой с начальной ординатой 1—к левой. При помощи этих линий мы строим сетку эпюр (см. рис. 124). Остается вопрос, каково же Q под грузом? Вопрос праздный, ибо Q есть равнодействующая *левых* сил, и если груз левее сечения, то берем левую ветвь и обратно. Стоять же *над* точкой *сосредоточенный* груз не может, ибо *сосредоточенных* грузов не бывает. Поскольку он эквивалентен сплошной нагрузке, мы имеем фактически не вертикальный уступ, а близкую к вертикали наклонную линию.

Переходим к определению *момента*. Графически его можно получить построением веревочного многоугольника, но на этом останавливаться не будем. Аналитически имеем для первой ветви

$$M_{(1)} = Az_{11} = \frac{(l-z_1)z_{11}}{l}.$$

Для второй ветви удобнее момент определять от сил, действующих *справа*; не забывая, однако, переменить знак момента на обратный.

$$M_{(2)} = B(l-z_{11}) = \frac{(l-z_1)z_{11}}{l}.$$

Формулы, как видно, симметричны. Можно $M_{(2)}$ получить и из $M_{(1)}$ по формуле:

$$M_{(2)} = M_{(1)} - 1(z_{11} - z_1) = \frac{(l-z_1)z_{11} - l(z_{11} - z_1)}{l} = \frac{(l-z_1)z_1}{l}.$$

При построении эпюры мы полагали неподвижное зафиксированное положение точки приложения единичного груза, т.-е. в наших обозначениях считали $z_1 = \text{constans}$. Переменной координатой являлась лишь величина z_{11} , и мы имели несомненное уравнение *прямой линии*. Итак, момент в каждой ветви изменяется по закону прямой, а поэтому эпюра моментов действительно имеет вид треугольника (как ранее было получено графическим методом). Графически эти прямые легко построить, откладывая под грунтом отрезки, соответственно равные $\frac{(l-z_1)z_1}{l}$, ибо в случае, когда мы рассматриваем сечение под грузом, т.-е. считаем $z_{11} = z_1$, получаем формулу момента под грузом в виде

$$M = \frac{(l-z_1)z_1}{l}.$$

Это будет высота нашего треугольника, изображающего эпюру моментов. Можно построить его и путем отложения на левой опоре z_1 , а на правой— $(l-z_1)$ и соединения этих двух ординат прямыми с противоположными опорами. Линии пересекутся под точкой приложения груза и дадут: линия, падающая слева—влияние левой опорной реакции, а падающая справа—правой.

Зададим себе вопрос, по какому закону будет изменяться наибольший момент, момент под грузом, по мере движения груза по балке. Уравнение момента под грузом для этого случая (при z , — переменном) будет второй степени, и является уравнением параболы. Максимум этого выражения, очевидно будет при

$$z_1 = \frac{l}{2} \text{ и тогда имеем } \max M = \frac{(l - \frac{l}{2})^2}{l} = \frac{l}{4}.$$

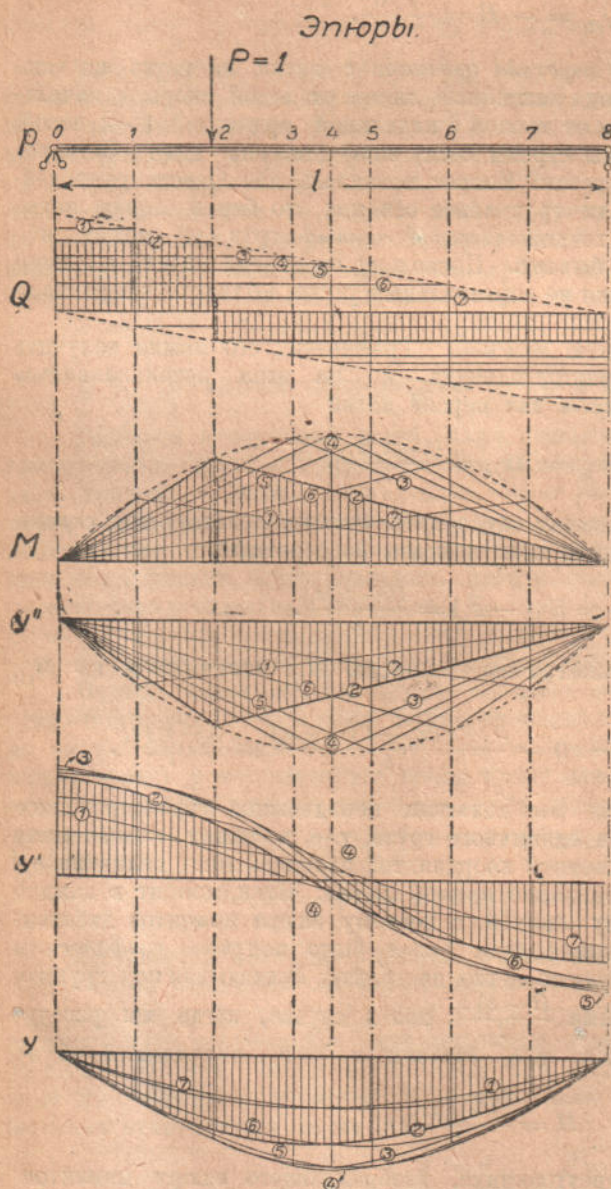


Рис. 124. Сетки эпюр для шести строк.

Значит, построение четвертой строки затруднения не представляет. Далее, как уже было разъяснено в теореме шести строк, принимаем *площадь* эпюры

Значит, вершина этой параболы лежит на середине пролета, и самую параболу легко построить, зная значение ее стрелки $= \frac{1}{4}l$. Так как эта кривая по условию есть геометрическое место точек — вершин эпюры моментов, то, имея эту кривую, простым вписанием в нее, получаем любую эпюру моментов, т.-е. можем построить *сетку эпюр* (см. рис. 124).

Любопытно, что, *по построении эпюр*, мы можем, проведя в любом сечении сквозную вертикальную ординату, проверить законы равновесия. Так, такая ордината в эпюрах Q дает нам $A + B - 1 = 0$, а в эпюрах M : $M_A - M_B - M_I = 0$, где M_A — момент от левой опорной реакции, измеряемый от горизонтальной линии до *продолженного* левого наклона, M_B — момент от правой опорной реакции, измеряемый от горизонтальной линии до *продолженного* правого наклона, а M_I — момент от силы, равной единице, измеряемый *между* двумя наклонами.

Кривизна балки y'' , с небольшой ошибкой (см. выше) принимается нами за $y'' = -\frac{M}{EI}$.

y'' за условную нагрузку с измерением площадок L' и повторяем все наши построения. Обратимся к нахождению условных опорных реакций и условных моментов, отметив, что, согласно предыдущему, условные опорные реакции суть ничто иное, как величины y'_0 , т.е. тангенсы углов наклонов на опорах, условные поперечные силы суть тангенсы углов наклона в разных местах, а условные моменты от условной нагрузки, уравновешенной условными опорными реакциями, дают величины y .

Условная поперечная сила, которая должна быть приравнена величине y' , найдется по общей формуле:

$$y' = A' - \int_0^l \frac{M}{EI} dz.$$

Условные опорные реакции найдутся из уравнения момента относительно опорных точек площади эпюры y'' . В случае действия одного груза составим уравнение равенства нулю момента условной нагрузки относительно правой опоры:

$$A' \cdot l - M_B \text{ от площади эпюры} = 0; \quad A' = \frac{M_B \text{ от площади эпюры}}{l}.$$

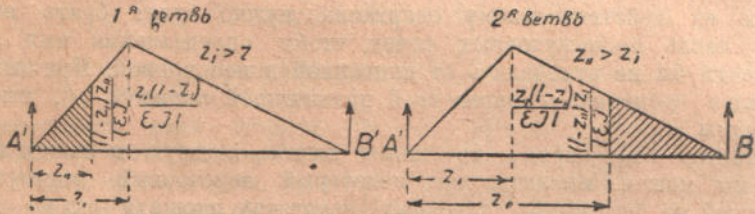


Рис. 125. Вывод углов наклона и прогибов.

Площадь всего треугольника

$$\frac{l}{2} \cdot \frac{z_1(l-z_1)}{EI} = \frac{z_1(l-z_1)}{2EI}.$$

Расстояние от какой-либо опоры до центра тяжести равно сумме горизонтальных проекций расстояний двух вершин до той вершины, относительно которой берется момент, деленной на три. Итак, это расстояние равно

$$\frac{l + (l - z_1)}{3}.$$

Момент площади дает:

$$\frac{z_1(l-z_1)(2l-z_1)}{6EI}.$$

Таким образом, условная опорная реакция равна

$$A' = \frac{(2l-z_1)(l-z_1)z_1}{6EI}.$$

Составляем подобное же уравнение, но относительно левой опоры:

$$B' \cdot l - M_A \text{ от площади эпюры} = 0,$$

$$M_A \text{ от площади эпюры} = \frac{z_1(l-z_1)}{2EI} \cdot \frac{l+z_1}{3} = \frac{z_1(l+z_1)(l-z_1)}{6EI},$$

$$B' = \frac{z_1(l+z_1)(l-z_1)}{6EI}.$$

Переходим к определению (Q').

Для первой ветви имеем:

$$y'_{(1)} \text{ равно условной опорной реакции } A', \text{ минус площадь заштрих. треугольника} = \\ (Q')_{(1)} = y'_{(1)} = \frac{(2l - z_1)(l - z_1)z_1}{6EI} - \frac{(l - z_1)z_{II}^2}{2EI}.$$

Для второй ветви имеем:

$y'_{(2)}$ равно минус условной опорной реакции B' , плюс площадь заштрихованного треугольника =

$$-(Q')_{(2)} = -y'_{(2)} = \frac{z_1(l - z_1)(l + z_1)}{6EI} - \frac{(l - z_{II})^2 z_1}{2EI}.$$

Таким образом, условную поперечную силу (Q') мы, пользуясь выведенными формулами, можем определить для любого сечения в нашем пролете, а значит можем построить и самую эпюру этих условных (Q') , т.е. эпюру тангенсов углов наклона y' .

Так как четвертая строка (кривизна y'') получалась у нас в виде треугольника, т.е. мы имели дело с линией первого порядка, а переход к ниже лежащей строке соответствует интеграции — то эпюра y' должна получиться состоящей из отрезков кривых второго порядка (порядок кривой при интегрировании повышается на единицу). Чтобы получить эту кривую возможно ближе к ее действительному очертанию, нужно будет брать возможно большее число промежуточных точек, чтобы определяемая ими ломаная линия почти бы не отличалась от вписанной в нее кривой. При этом ясно, что каждая ордината y' равна всей предыдущей площади y'' , вычтенной из величины y'_0 .

Остается еще определить линию изгиба, которую в нашем представлении мы можем мыслить, как некоторый веревочный многоугольник, построенный на фиктивных (условных) нагрузках площади эпюры кривизны при полюсном расстоянии плана сил, равном отвлеченной единице (L^0 — радиана). Графическое построение этой линии не представляет ничего нового, на нем мы останавливаться не будем. Скажем только, что так как все ординаты нижних строк, согласно нашим формулам, являются разделенными на множитель EI , т.е. на очень большую величину, то все они, по числовому своему значению, чрезвычайно малы; в углах это $5'—10'$, между тем как радиана — более 57° . Поэтому, если взять полюсное расстояние H , как это теоретически желательно, т.е. равным угловой единице, то H получится *чрезвычайно велико, далеко выходя за пределы чертежа*. Значит, приходится отказаться от мысли получить изгиб без искажения (как бы в фотографическом виде т.е. еще уменьшенной в масштабе чертежа копией действительности). Поневоле берем

$H = \frac{1}{n}$, где n — произвольно заданное большое число. Величины прогибов получатся тогда в искаженном увеличенном виде (и только теперь, по малости действительных прогибов, они будут заметны на чертеже). Чтобы узнать, насколько увеличены эпюры прогибов, нужно знаменатель выражения полюсного расстояния разделить на показатель масштаба чертежа.

Имеем $n = n_1, n_2$, где n есть знаменатель формулы $H = \frac{1}{n}$, n_1 — линейный масштаб чертежа балки и n_2 — избранное увеличение масштаба прогибов. Очевидно, что можно подобрать эти величины так ($n = n_1$), чтобы величины прогибов получались в натуральную величину, хотя бы и давая искаженную форму балки.

Для графо-аналитическим методом, нам придется, как известно, вычислять условные моменты от наших условных нагрузок (т.е. от площадей четвертой строки).

Первая ветвь. Слева нашего сечения имеем опорную реакцию A' , дающую момент $A' \cdot z_1$, и сплошную нагрузку в виде площади заштрихованного треугольника, дающую момент с обратным знаком. При этом плечо момента для этого случая, равное $1/3$ суммы проекций расстояний вершин треугольника до моментной точки, представляется в таком виде: $1/3 z_1$. Итак имеем:

$$[M]_{(1)} = y_{(1)} = \frac{(2l - z_1)(l - z_1)z_1}{6EI} z_1 - \frac{(l - z_1)z_1^2}{2EI} \cdot \frac{1}{3} z_1 = \\ = \frac{(l - z_1)z_1^3}{6EI} (2lz_1 - z_1^2 - z_1^2).$$

Вторая ветвь. Слева нашего сечения имеем опорную реакцию A' и сплошную нагрузку, выражаемую суммой площадей треугольника и трапеции. Вычисления усложняются, и проще будет обратиться к вполне законному приему облегчения, а именно: начать *вычисления справа*, конечно, не забывая учесть перемену знака момента. Получаем

$$[M]_{(2)} = y_{(2)} = \frac{z_1(l + z_1)(l - z_1)}{6EI} (l - z_1) - \frac{(l - z_1)^2 z_1}{2EI} \cdot \frac{1}{3} (l - z_1) = \\ = \frac{(l - z_1)z_1}{6EI} (2lz_1 - z_1^2 - z_1^2).$$

Опять, как и для третьей строки, можем отметить полную *симметричность* этих формул для обеих ветвей. Достаточно только переименовать z -ты при переходе с одной ветви на другую, чтобы получить ту-же формулу. Вообще кривая прогиба (упругая линия), конечно, не разбивается на ветви в смысле появления перелома между ветвями, а получается совершенно плавной. По измерению переменной (z_1 для эпюр) видим, что это — кривая третьей степени — т.-е., кубическая парабола, как это и выводилось нами из условия „шести строк“.

Полученные нами формулы для эпюр трех нижних строк могут быть выражены и в другой форме, в других обозначениях, что еще значительно упростит их структуру. Преобразования эти мы произведем в дальнейшем, одновременно и для эпюр и для инфлюэнтных линий, к которым мы теперь и переходим:

Инфлюэнтные линии, которых мы уже отчасти касались выше, как известно, представляют собой линии, выражающие закон изменения какой-либо величины, отнесенной к определенному сечению пролета, при перемещении груза, равного единице, по всему пролету. Между эпюрами и инфлюэнтными линиями, таким образом, существует коренное различие. В условиях нашей задачи, когда для построения эпюр мы задавались также единичным грузом — мы получаем все же внешне большое сходство между обоими методами. Нужно однако заметить, что вообще говоря, эпюры чаще строятся для *заданной системы грузов*, а инфлюэнтные линии — для *условной единич-*

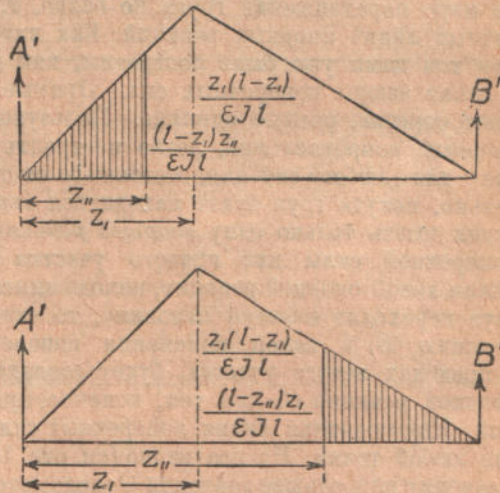


Рис. 126. Прогибы для левой и правой ветвей.

ной нагрузки. Поэтому обязательных совпадений в обоих построениях вообще не получается; и если это и будет иметь место в некоторых построениях, то лишь в результате построения эпюр для единичного груза. Инфлюэнтные линии оказываются очень полезными и для случая *сплошной нагрузки*, и для случая *системы грузов*, где общее значение интересующей нас величины может быть выражено в виде простой суммы ординат инфлюэнтных линий, определенных под каждым грузом в отдельности и выражающих влияние каждого из грузов на данную величину. Неопенимые услуги оказывают они и при нахождении абсолютного наибольшего значения данной величины, т. е. для определения наименее выгоднейшего положения данной системы грузов на балке.

Сохраняя те же обозначения, что и в разобранных нами эпюрах, мы, переходя к инфлюэнтным линиям, должны положить $z_n = \text{constans}$, z_n — переменная величина, (здесь попрежнему z_n — расстояние сечения от левой опоры, z_n — расстояния точки приложения силы от той-же опоры).

Построим для нашей балки инфлюэнтные линии поперечных сил. Выше мы вывели такие формулы для величины опорных реакций:

$$A = \frac{l - z_1}{l}; B = \frac{z_1}{l}$$

Так как, при теперешнем нашем выводе z_n является величиной переменной, то формулы эти должны выражать закон *изменения* опорных реакций по мере передвижения груза по балке, т. е. являются *уравнениями* инфлюэнтных линий опорных реакций. Как видно, это — прямые линии, которые при том нами уже были построены, как вспомогательные линии, при определении эпюры поперечных сил. Прямые эти на опорных ординатах отсекают отрезки, равные единице. Пользуясь этими инфлюэнтными линиями опорных сопротивлений, легко построить инфлюэнтные линии поперечных сил для любого сечения, отстоящего от точки A на расстоянии z_n . Действительно, куда груз будет находиться *вправо* от сечения, *налево* от него мы будем иметь только одну *опорную реакцию* A , и значит инфлюэнтная линия поперечной силы для правого участка выразится отрезком инфлюэнтной линии левой опорной реакции, находящимся в этих границах. Наоборот, когда груз переходит в *левую* половину, то *справа* от сечения имеем одну только реакцию B , и закон изменения поперечной силы для нашего сечения, в пределах левого участка, будет совпадать с инфлюэнтной линией правой опорной реакции B , при чем, конечно, придется переменить знак на обратный. Инфлюэнтная линия поперечных сил поэтому строится без затруднений для любой точки. Из нее видно (см. рис. 127), что единственный груз вызывает в сечении наибольшее значения Q (положительное или отрицательное), когда он находится непосредственно над сечением (собственно на расстоянии ds вправо или влево — ведь сечение наше есть дифференциально малый элемент нашей балки). Поэтому не нужно смущаться этим уступом — скачком в инфлюэнтной линии — если груз условно принят стоящим над уступом, то фактически он лишь эквивалентен сплошной нагрузке, которая придется частью справа, частью слева, или даже целиком справа или слева. Для расчета из двух ординат инфлюэнтной линии — положительной и отрицательной, надо брать *отнюдь не сумму, отнюдь не разность*, а *большую* по абсолютному значению.

Сравнивая построение инфлюэнтных линий поперечных сил с эпюрами тех же сил, видим, что и здесь балка разделяется на два обособленных участка. В эпюрах точкой раздела служила точка приложения силы, и мы назвали первой ветвью ту, которая зависела от изменения левой опорной реакции A . В инфлюэнтных линиях точкой раздела является само сечение, и от левой опорной реакции A зависит уже правый участок балки, который

мы для аналогичности наших выводов и назовем первой ветвью. Таким образом, обозначения инфлюэнтных линий как бы *обратны* обозначениям эпюры, в одном случае граница обеих ветвей получалась на расстоянии z_1 , в другом — на расстоянии z_2 . В одном случае первый участок, зависящий от левой опорной реакции, находился в левой половине балки; — в другом случае первый участок пришлось принять в правой ее части.

Формулы для поперечной силы в случае построения инфлюэнтных линий ничем не будут отличаться от формул для эпюр;

$$Q_{(1)} = +A = + \frac{l - z_1}{l}$$

$$Q_{(2)} = -B = - \frac{z_1}{l},$$

разница только в том, что абсцисса z_1 здесь уже рассматривается, как величина переменная.

Инфлюэнтная линия момента M найдется из таких соображений: груз, передвигающийся по первой ветви (в правой половине балки) дает опорную реакцию A , и момент левых сил для данного сечения изменяется по закону Az_2 ; величина z_2 остается постоянной, значит закон изменения момента аналогичен закону изменения опорной реакции, при чем вводится только еще некоторый коэффициент. Очевидно, что отложив на левой опоре величину z_2 (взамен единицы, которую мы имели для инфлюэнтной линии опорной реакции), мы получаем инфлюэнтную линию в пределах первой ветви. Когда груз движется по второй (левой) ветви, имеем справа от сечения одну только реакцию B , момент правых сил $= B \cdot (l - z_2)$. Знак при этом меняем на обратный, поэтому имеем положительную величину момента. Ясно, что закон изменения момента (уравнение инфлюэнтной линии) и в этом случае

Инфлюэнтные линии

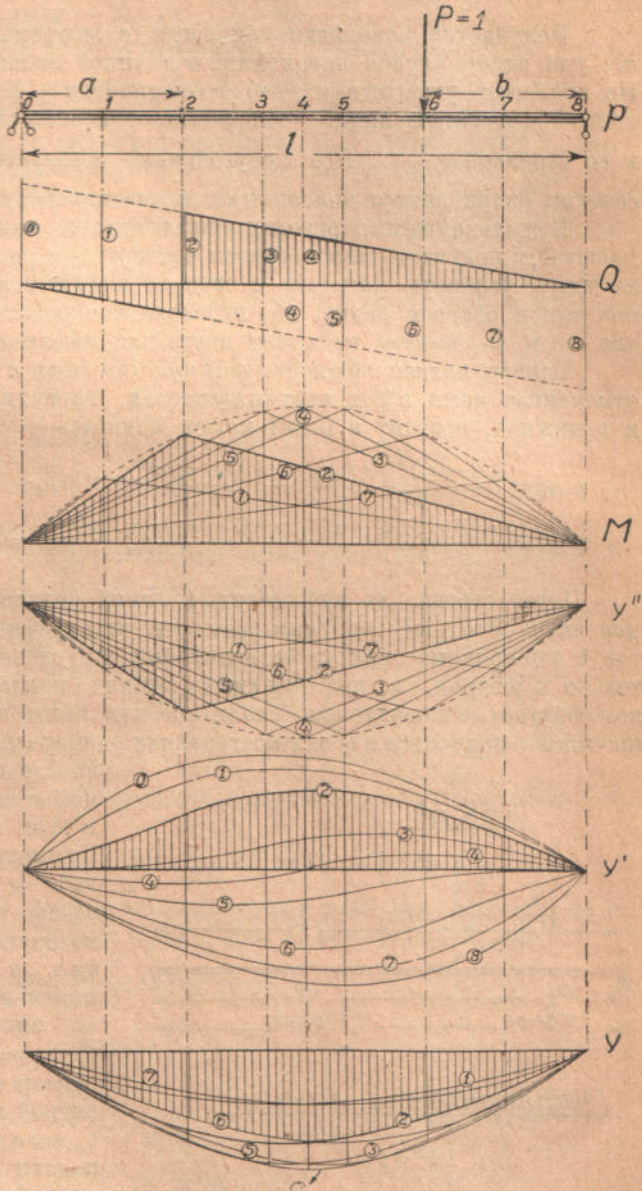


Рис. 127. Построение инфлюэнтных линий для 6 строк.

аналогичен закону изменения опорной реакции, умноженной на постоянный коэффициент $(l - z_n)$. Значит, на правой опоре следует отложить не единицу, а величину $(l - z_n)$. Имеем формулы:

$$M_{(1)} = Az_n = \frac{(l - z_1)z_n}{l}; \quad M_{(2)} = B(l - z_n) = \frac{(l - z_1)z_1}{l}$$

Получается полнейшая аналогия с эпюрами, разница только в том, что для одного случая переменной величиной является z_n , а для другого — z_1 . По аналогии утверждаем, что геометрическое место вершин треугольников инфлюентных линий — парабола с вершиной на середине пролета и со стрелкой $= \frac{1}{4}l$. Все треугольники инфлюентных линий для любого сечения балки явятся вписанными в эту параболу.

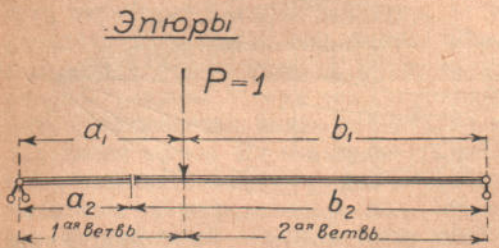
В дальнейшем переводим инфлюентную линию моментов в угловой масштаб, и получаем таким образом четвертую строку. Ее уже *нельзя* принять за новую условную нагрузку и строить инфлюентные линии для загруженной таким образом балки, ибо интегральная зависимость установлена *только* для эпюр, и *очевидно* не имеет места для инфлюентных линий.

Однако, полная общность *формул* для эпюр и для инфлюентных линий, отмеченная нами в 3-х верхних строках, очевидно, должна иметь место и в нижних, поэтому а priori можем написать

$$\begin{aligned} +y'_{(1)} &= \frac{(2l - z_1)(l + z_1)z_1}{6EI} - \frac{(l - z_1)z_n^2}{2EI}; & y_{(1)} &= \frac{(l - z_1)z_n}{6EI} (2lz_1 - z_1^2 - z_n^2) \\ -y'_{(2)} &= \frac{z_1(l - z_1)(l - z_1)}{6EI} - \frac{(l - z_n)^2 z_1}{2EI}; & y_{(2)} &= \frac{(l - z_n)z_1}{6EI} (2lz_n - z_n^2 - z_1^2). \end{aligned}$$

Пятая строка для инфлюентных линий получается совершенно иная чем для эпюр. Это еще раз указывает нам, что графические построения моментов и поперечных сил (действительных и условных) могут применяться только к эпюрам, в инфлюентных линиях придется для нижних строчек пользоваться исключительно аналитическим методом. Шестая строка — линия прогибов — получится в обоих построениях одинаковой, обоснования к чему мы

впоследствии докажем (в „основной теореме“), а пока убедимся в этом на подсчете ее ординат. Симметричность формул для прогиба y уже сама говорит, что здесь совершенно безразлично, которую из величин z_1 и z_n считать за постоянную, которую за переменную. А если это так, то значит эпюра прогибов от груза $= 1$, стоящего в точке z_1 , одновременно является и инфлюентной линией прогиба для точки z_n , если $z_1 = z_n$; они полностью совпадают одна с другой. Несколько ниже, при других обозначениях, эта симметричность станет особенно ясной. Если это так, то можно вывести заключение, что груз, стоящий в какой-либо точке m балки, вызывает в некоторой точке n такой же прогиб, какой возникает в самой точке m , если



Инфлюэнтные линии.

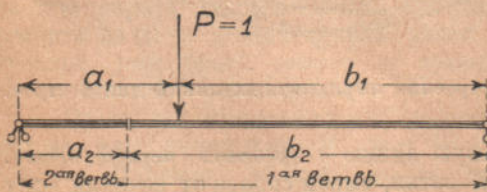


Рис. 128. Новые обозначения для упрощения формул.

груз поместить в точку n (в дальнейшем мы выведем некий закон взаимности — Максвелля — который объяснит нам это явление).

Преобразуем теперь полученные нами формулы для Q , M , y' , y , введя некоторые новые обозначения.

Как видно из рис. 128, разница с прежними обозначениями заключается в том, что мы называем

$$z_1 = a_1; \quad z_n = a_2; \quad l - z_1 = b_1; \quad l - z_n = b_2;$$

при этом условимся обозначать через a (без значка) *меньшее* из двух a_1 и a_2 , и через b — *меньшее* из двух b_1 и b_2 . Поэтому, например для первой ветви эпюры имеем $a_2 < a_1$, значит a_2 называем просто a . Для той же точки $b_1 < b_2$, значит b_1 принимаем за b и т. д.

Формулы для эпюр и инфлюэнтных линий, если обозначить обе ветви так как показано на чертеже, вполне тождественны, имеем в новых обозначениях

$$Q_{(1)} = \frac{l - a_1}{l} = \frac{b_1}{l} = \frac{b}{l};$$

$$Q_{(2)} = -\frac{a_1}{l} = -\frac{a}{l}$$

$$M_{(1)} = \frac{(l - z_1) z_n}{l} = \frac{(l - a_1) a_2}{l} = \frac{b_1 a_2}{l} = \frac{ab}{l}$$

$$M_{(2)} = \frac{(l - z_n) z_1}{l} = \frac{b_2 \cdot a_1}{l} = \frac{ab}{l}$$

$$y'_{(1)} = \frac{(2l - a_1)(l - a_1) a_1}{6EI} - \frac{(l - a_1) a_2^2}{2EI} = \frac{b_1}{6EI} [(2l - a_1) a_1 - 3a_2^2] = \\ = \frac{b}{6EI} (l^2 - b^2 - 3a^2)$$

$$-y'_{(2)} = \frac{a_1(l - a_1)(l + a_1)}{6EI} - \frac{(l - a_1)^2 a_1}{2EI} = \frac{a_1}{6EI} [l^2 - a_1^2 - 3b_2^2] = \\ = \frac{a}{6EI} [l^2 - a^2 - 3b^2]$$

$$y_{(1)} = \frac{b_1 a_2}{6EI} [2la_1 - a_1^2 - a_2^2] = \frac{ab}{6EI} [(2l - a_1) a_1 - a_2^2] = \\ = \frac{ab}{6EI} (l^2 - b^2 - a^2)$$

$$y_{(2)} = \frac{b_2 a_1}{6EI} [2la_2 - a_2^2 - a_1^2] = \frac{ab}{6EI} (l^2 - a^2 - b^2)$$

Выпишем полученные результаты, напомним еще раз, что эти формулы равным образом годны и для эпюр и для инфлюэнтных линий.

$$Q_{(1)} = \frac{b}{l}; \quad Q_{(2)} = -\frac{a}{l}$$

$$M = \frac{ab}{l}$$

$$y'_{(1)} = \frac{b}{6EI} (l^2 - b^2 - 3a^2); \quad y'_{(2)} = -\frac{a}{6EI} (l^2 - a^2 - 3b^2)$$

$$y = \frac{ab}{6EI} (l^2 - a^2 - b^2)$$

Как видно, формулы для моментов и прогибов получаются одинаковыми для обеих ветвей; впрочем это видно было и ранее, из симметричности наших первоначальных формул:

Формулы для y' тоже можно слить в одну, напр. в первую, если для другой ветви итти подсчетом справа налево.

Формулы верны в пределах $a + b \leq l$.

По формуле для y , здесь приведенной, составлена нижепомещенная таблица

Ясно, что *горизонтальные* строки дают здесь эпюры, а *вертикальные* — инфлюентные линии. Между прочим, приведенная таблица подсчитана тщательно и может служить для построения эпюр и инфлюентных линий для $EI\gamma$ при любом пролете, если, конечно, EI есть величина постоянная. Заслуживает внимания то обстоятельство, что в таблице наблюдается симметрия коэффициентов относительно двух диагоналей, как и следовало ожидать. Черными линиями обозначены районы наибольших прогибов и прогибы под грузами.

О пространственном изображении интересующих нас величин будет сказано ниже.

Остается еще вопрос о том, возможны ли эпюры и инфлюентные линии не для одиночных грузов, а для какой-либо сложной нагрузки, состоящей из системы грузов. Конечно, возможно, например, построить для паровоза с тендером типа 1921 г. (см. ниже) все эпюры и все инфлюентные линии. Однако, такое решение не будет общим, между тем как при построении *единичных* фигур мы получаем *универсальное* решение. Но все же наши фигуры, особенно эпюры, часто строятся и для систем, о чем в следующей главе будет сказано подробно.

Г Л А В А VIII.

Исследование явлений изгиба в частных случаях.

§ 1. Общее исследование выведенных формул.

Применим теперь наши формулы к исследованию задачи и прежде всего обратимся к тангенсам углов наклона упругой линии к оси OZ . При каком значении расстояния z , груза от левой опоры получим максимальный тангенс на опоре?

Из самой формулы для y' видно, что эта величина наибольшая на опорах. Нужно, значит, найти максимумы условных опорных реакций A' и B' , которые и суть углы наклона на опорах.

$$A' = \frac{(2l-a)(l-a)a}{6EI} = \frac{2al^2 - 3a^2l + a^3}{6EI}$$

Производная числителя по a дает:

$$2l^2 - 6al + 3a^2 = 0$$

$$a = l \pm \sqrt{l^2 - \frac{2}{3}l^2} = l \left(1 \pm \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right).$$

Очевидно, что получаем максимум, (это можно доказать и по знаку второй производной). Из обоих знаков полученного выражения для расстояния a , в условиях нашей задачи, конечно, выбираем знак минус (для балки с консолями был бы верен и знак плюс). Подставляя численные значения $\frac{\sqrt{3}}{3}$ получаем для максимума угла наклона на опоре значение: $a = 0,423 l$ (положение груза, дающее максимум угла наклона на левой опоре).

Максимальный угол наклона на правой опоре найдется дифференцированием выражения опорной реакции B' , при чем, идя с правой стороны,

из той же формулы $a' = l(1 - \frac{\sqrt{3}}{3})$, где a' уже будет расстояние груза до правой опоры, очевидно получаем: $a = 0,577 l$ (положение груза, дающее максимум угла наклона на правой опоре).

Чему равен тангенс угла наклона для точки под грузом?

Если точка приходится под грузом, то нужно положить $a + b = l$; получаем:

$$y'_a = \operatorname{tga}_0 = \frac{a \cdot b}{3EI} (b - a).$$

Знак этого выражения зависит от знака $(b - a)$.

Пока a меньше $\frac{1}{2} l$ и $(b - a) > 0$, эта величина положительна.

Пока a больше $\frac{1}{2} l$ и $(b - a) < 0$, эта величина отрицательна.

Когда же $a = \frac{1}{2} l$ и $(b - a) = 0$, то $\operatorname{tga}_0 = 0$.

Значит максимальный прогиб получается, когда груз стоит посередине, вообще же нулевое значение угла (максимальный прогиб) приходится между грузом и серединой.

Можно применять и такие формулы для tang . углов на опорах (α —для левой опоры, β — для правой).

$$\operatorname{tga} = \frac{a_1 \cdot b_1 (l + b_1)}{6EI} \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{a_1 \cdot b_1 (l + a_1)}{6EI}.$$

Конечно, они вполне аналогичны нашим выше приведенным формулам и легко из них выводятся.

Нахождение места наибольшего прогиба (места, где условная поперечная сила равна 0).

$$\text{Из формулы прогиба имеем: } y = \frac{a \cdot b}{6EI} (l^2 - a^2 - b^2).$$

Полагаем расстояние до груза $b = \text{constans}$, причем b считаем справа, и находим, дифференцированием y по a , максимум этого выражения:

$$\frac{dy}{da} = l^2 b - b^3 - 3ba^2 = 0; \quad l^2 - b^2 - 3a^2 = 0.$$

$$a_0 = \sqrt{\frac{l^2 - b^2}{3}}$$

(абсцисса точки наибольшего прогиба).

Можно прямо приравнять нулю значение y' . Получаем тот же результат.

Где находится точка наибольшего прогиба, когда груз занимает крайнее правое положение, т.-е. стоит на правой опоре ($b = 0$)?

$$a_0 = \sqrt{\frac{l^2}{3}} = \frac{l}{\sqrt{3}} = 0,577 l$$

Для груза стоящего посередине, точка максимального прогиба совпадает с серединой балки

$$a_0 = \left[\sqrt{\frac{l^2 - b^2}{3}} \right] b = \frac{l}{2} = 0,5 l$$

Значит a_0 изменяется в пределах

0,423 l
0,500 l
0,577 l

Когда сила занимает крайнее положение на опоре, вернее, дифференциально ему близкое — точка наибольшего прогиба находится в той же половине балки, на расстоянии $0,423 l$ от опоры. По мере движения груза по балке, движется в ту же сторону (но гораздо медленнее) и точка наибольшего прогиба, и в середине пролета груз наконец ее догоняет.

Итак, в одном и том же месте сосредоточен: наиболее асимметричный максимальный прогиб (при грузе, стоящем y самой опоры) и местоположение груза, дающего наибольший угол наклона на опоре.

Найдем еще прогиб под грузом ($a + b = l$)

$$y = \frac{a^2 b^2}{3EI}; \text{ при } a = \frac{l}{2} \text{ имеем } y = \frac{l^3}{48EI}.$$

Формулы эти нам пригодятся.

На рисунках 124 (эпюры) и 127 (инфл. линии), на которых все величины построены для шести различных точек пролета, хорошо виден закон изменения Q , M , y^4 , y' и y .

Чтобы окончательно покончить с общим случаем поперечного изгиба, разберем еще случай *переменного поперечного сечения*, что довольно часто встречается на практике. До сих пор мы предполагали $EI = \text{const}$, теперь это произведение явится уже величиной переменной.

Аналитически это будет означать, что EI нельзя будет выносить за знаки интегралов.

Графически — переменный момент инерции создает лишь небольшое осложнение в эпюре y'' . Получаются уступы, между которыми эпюра изменяется по закону, характерному для данного участка (см. рис. 129). Однако, несмотря на такое небольшое осложнение, разумное изменение жесткости даже несколько нивелирует явление, — кривая прогиба получается, как веревочно-стержневой многоугольник от более равномерной нагрузки, ибо, конечно, EI растет более или менее параллельно росту момента в правильно сконструированном сооружении.

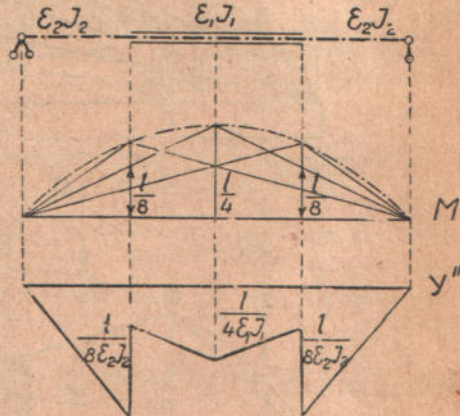


Рис. 129. Линия y'' при переменном EI .

§ 2. Частные случаи изгиба балки, лежащей на двух опорах.

Раньше чем перейти к рассмотрению отдельных случаев, отметим, что мы будем предпочтительно пользоваться методом *эпюр* как дающим *интегральную зависимость* между последовательными строками, но впредь будем строить эпюры непосредственно от *всей* заданной нагрузки, не расчленяя ее на единицы. Но конечно, построенные нами выше *сетки* эпюр и инфлюентных линий, в сущности, уже исчерпывающе отвечают на все частные случаи. Возьмем, например сетку эпюр и инфлюентных линий моментов (см. рис. 130) и найдем момент в точке a от грузов P_1 и P_2 , стоящих в точках 1 и 2 и от сплошной нагрузки p , заполняющей всю правую половину пролета.

Методом *эпюр* мы должны поступить так:

а) от грузов P_1 и P_2 момент в точке a соответственно равен

$$P_1 y_1 + P_2 y_2$$

б) от сплошной нагрузки p момент в точке a равен сумме небольших грузов $p dz$, умноженных на соответственные ординаты последовательных эюр, проведенных для единичного груза из разных точек правой половины груза пролета. Ординаты эти, по мере удаления изучаемого участка нагрузки с правой опоры влево изменяются от нуля по закону прямой до максимального значения y_3 .

Получим:

$$M_a = P_1 y_1 + P_2 y_2 + p \cdot \frac{1}{2} y_3 \cdot \frac{l}{2} = P_1 y_1 + P_2 y_2 + \frac{pl}{2} \cdot \frac{y_3}{2}.$$

Последний член есть результат суммирования произведений выражений $p dz$ на множители, возрастающие от 0 до y_3 по длине $\frac{l}{2}$. Ясно, что

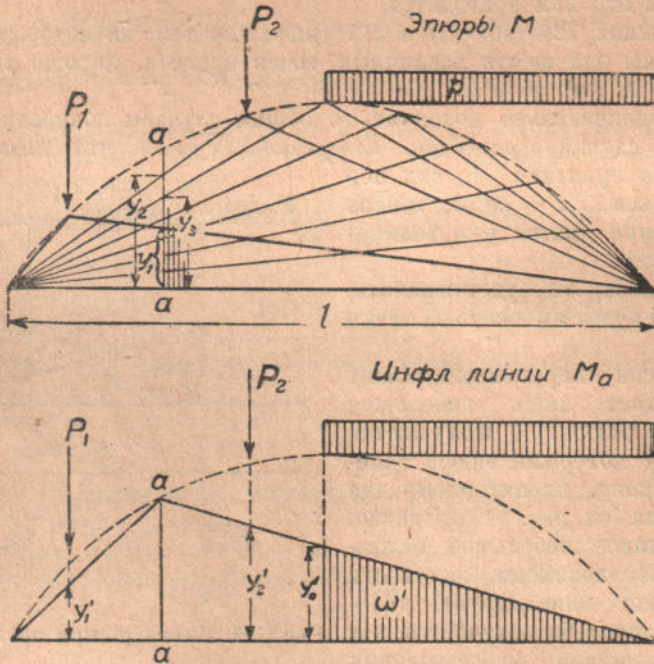


Рис. 130. Пользование эпюрами и инфлюентными линиями при данной нагрузке.

надо полную нагрузку $\frac{pl}{2}$ умножить на среднюю ординату $\frac{0+y_3}{2}$ или, что то же, напряженность нагрузки p умножить на площадь треугольника, образуемую умножением ординат y на dz , т.-е. p умножить на $\frac{1}{2} y_3 \cdot \frac{l}{2}$.

Методом инфлюентных линий мы действуем еще проще — берем инфлюентную линию для точки a и пишем

$$M_x = P_1 y_1' + P_2 y_2' + \int_{z=\frac{1}{2}l}^{z=0} pdz \cdot y = \Sigma Py + p \int_{z=\frac{1}{2}l}^{z=0} y dz = \Sigma P \cdot y + p \omega.$$

Эта общая формула для пользования инфлюентными линиями особенно наглядно показывает, как можно и сосредоточенную и сплошную нагрузки, а следовательно и всякую постоянную нагрузку, изучить на инфлюентных линиях. Очевидно, что ординаты y_1, y_2, y_3 — те же.

Сплошная равномерно распределенная нагрузка (см. рис. 131):

$$Q_y = \frac{p}{2} (l - 2z)$$

$$M_x = \frac{p \cdot z (l - z)}{2}$$

$$\max M_x = \left[\frac{p \cdot z (l - z)}{2} \right]_{z = \frac{l}{2}} = \frac{pl^2}{8}$$

$$EIy'' = -\frac{p}{2} (lz - z^2)$$

$$EIy' = C - \frac{p}{2} \left(\frac{lz^2}{2} - \frac{z^3}{3} \right)$$

$$EIy = D + C \cdot z - \frac{p}{2} \left(\frac{lz^3}{6} - \frac{z^4}{12} \right)$$

Так как $y_{z=0} = 0$, то $(D) = 0$

Так как $y_{z=l} = 0$, то $C = \frac{pl^3}{24}$.

Получим:

$$y'' = \frac{p}{2EI} (z^2 - lz);$$

$$y' = \frac{p}{24EI} (l^3 - 6lz^2 + 4z^3)$$

$$y = \frac{p}{24EI} (l^3z - 2lz^3 + z^4);$$

$$\max y = \frac{5}{384EI} pl^4.$$

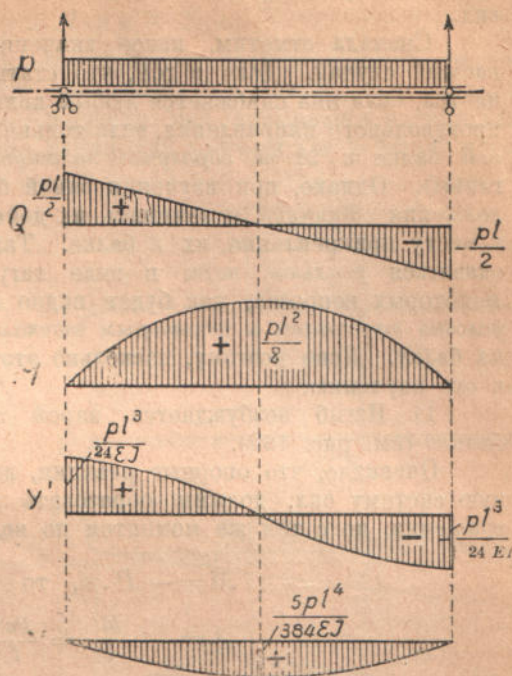


Рис. 131. Сплошная равномерно-распределенная нагрузка.

Общий случай действия многих сил P аналитически дает:

$$-EIy'' = M = A \cdot z - \sum P(z - c), \text{ где } c \text{—расстояние от } A \text{ до } P \quad (4)$$

$$EIy' = C - \left(A \frac{z^2}{2} - \sum P \frac{(z - c)^2}{2} \right) \quad (5)$$

$$EIy = (D) + C \cdot z - \left(A \cdot \frac{z^3}{6} - \sum P \frac{(z - c)^3}{6} \right), \text{ где } (D) = 0 \quad (6)$$

Приравнявая $y_{z=l} = 0$, найдем:

$$C = \frac{1}{l} \left(A \frac{l^3}{6} - \sum P \frac{(z - c)^3}{6} \right), \text{ т.е. } C = \frac{(M_B)}{l} = (A'),$$

ибо если в любой эпюре моментов все отдельные участки ломаной линии продолжить до правой опоры, то выражение C геометрически получится, как момент всех площадей с их знаками относительно B , деленный на l .

Отсюда

$$EIy' = (A') - \left(A \frac{z^2}{2} - \sum P \frac{(z - c)^2}{2} \right) = (Q')$$

$$EIy = (A')z - \left(A \frac{z^3}{6} - \sum P \frac{(z - c)^3}{6} \right) = (M').$$

Последние равенства ясны из того же построения (рекомендуется произвести такое построение и найти значение площадей и моментов от них от 0 до какого-либо z).

Рассмотрим теперь случай, когда *изгиб возбуждается парой сил*. Пара сил может рассматриваться, как комбинация двух отдельно действующих сил.

Сначала отметим, какое значение имеет для нас самый рассматриваемый случай. Дело в том, что статическая определенность балки сохраняется, если она снабжается любым количеством *отростков* и *продолжений* произвольного направления, если только они: 1) *жестко прикреплены к основной балке* и 2) *не образуют замкнутых контуров* (см. рис. 140 в конце главы). Однако, при изучении самой балки целесообразно отростки и продолжения *откинуть* и заменить их действие силой и парой, приложенными к месту прикрепления их к балке. Таким именно образом на балке могут оказаться *реальные пары* в виде нагрузки. Кроме того, для решения некоторых вопросов, как будет видно из дальнейшего, мы должны будем *условно прилагать к некоторым точкам балки пары* и изучать их действие на балку. Ясно поэтому, насколько этот случай для нас важен. Перейдем к его изучению.

1) Изгиб возбуждается парой сил (*плечо пары параллельно оси балки*) (см. рис. 132).

Очевидно, что опорные реакции, долженствующие уравновесить заданную систему сил, должны образовать также *пару сил* противоположного вращения, но с тем же моментом по величине. Поэтому, если

$$M = -P \cdot a, \text{ то } M + A \cdot l = 0$$

$$A = -\frac{M}{l} = \frac{Pa}{l} = -B.$$

Опорные реакции таким образом определены, и равенство $A = -B$ и указывает на наличие реактивной пары. Поперечная сила найдется по инфлюенте

$$Q = Py, -Py_{,,} = Pa \operatorname{tg} a = M \operatorname{tg} a.$$

Для нашего частного случая, когда момент в пределах плеча a представляет прямолинейный участок, можно поперечную силу представить в виде произведения $M \operatorname{tg} a$, где a — угол наклона инфлюенты.

Так же найдутся и все остальные величины, при чем, *если на участке a инфлюентная линия имеет вид прямой, наклоненной под известным углом a , то искомая величина найдется, как видно на примере Q , умножением M на $\operatorname{tg} a$.*

Эпюры дают ясную картину того, как работает балка.

2) Изгиб возбуждается парой сил, *плечо которой перпендикулярно оси* (см. тот-же рис. 132).

Это есть уже случай отростков в чистом виде.

Опорная реакция найдется из условия

$$A = \frac{P \cdot a}{l} = -B.$$

В этом случае, оказывается, можно уже *все* величины представлять в виде произведения $M \operatorname{tg} a$, ибо плечо пары *по оси* стремится к нулю, сила к бесконечности, и в пределе $(Py, - Py_{,,})$ дает $M \operatorname{tg} a$, причем, в случае криволинейного вида инфлюентной линии, надо взять *tangens* угла касательной к этой кривой. То, что в предыдущем примере являлось частным случаем — здесь приобретает характер общего закона. Итак, мы попутно нашли еще одно лишнее применение метода инфлюентных линий, сводящееся к тому, что *при действии сосредоточенной пары*, вместо ординаты

инфлюэнтной линии надо брать tg касательной к ней, т.е. искомая посредством инфлюэнтной линии величина X в общем виде находится так:

$$X = \sum P y + \sum M \operatorname{tg} a + \sum p \omega.$$

где P суть сосредоточенные силы, M — сосредоточенные пары, p — сплошные нагрузки; y суть ординаты инфлюэнтных линий под силами, $\operatorname{tg} a$ — тангенсы под парами, а ω — площади под сплошными нагрузками. На рис. 132 даны как инфлюэнтные линии, так и эпюры для действия пары.

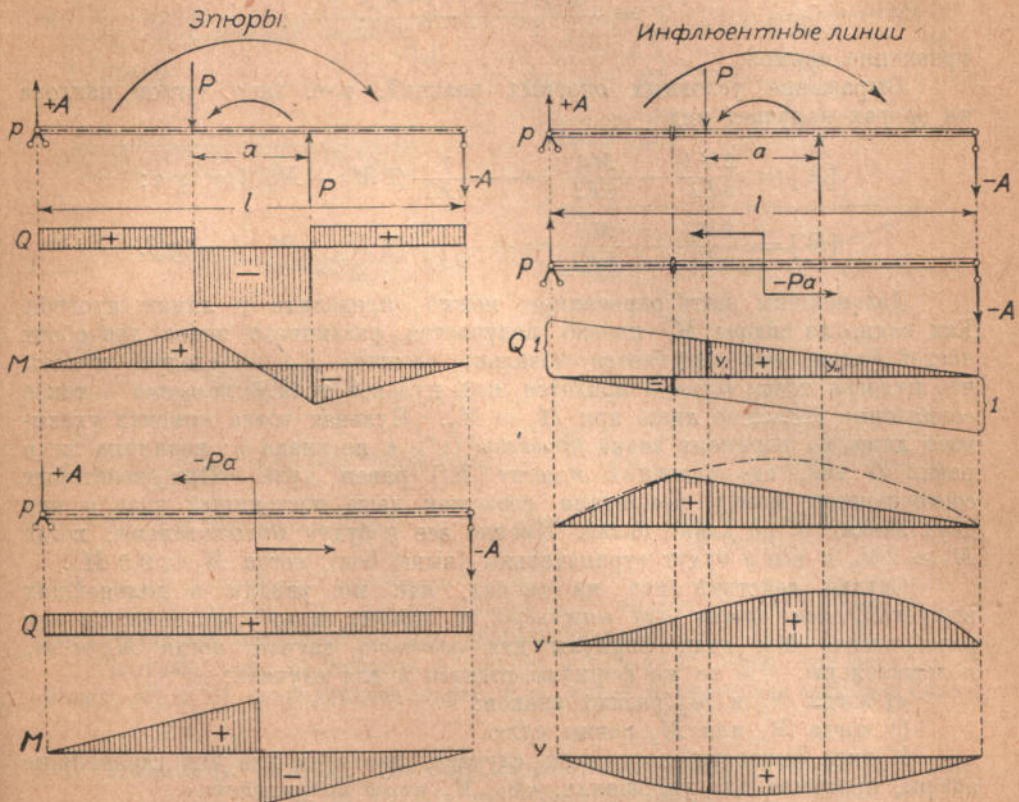


Рис. 132. Исследование действия пары на балку, лежащую на двух опорах.

Наконец, разберем случай, когда две пары возникают на двух опорах, т.е. момент на опорах не равен нулю, как мы до сих пор получали, а имеет некоторую вещественную величину. Случай этот часто встречается на практике, особенно в балках с консолями, если консоль нагружена какой-либо системой сил. Возможно, как выше указано, и сосредоточенное приложение пары на опоре при помощи „отростков“. Пусть оба момента дают вращение в одну и ту же сторону, и поэтому приходится иметь дело с их суммой.

Дадим исследование этого случая.

3) Изгиб возбуждается парой, возникающей на опоре. Разберем случай, когда пары возникают на каждой из опор, и обе положительны (рис. 133).

Опорные реакции, очевидно, должны составить пару с моментом, равным сумме $M_1 + M_2$. Плечо реактивной пары — пролет балки l . Значит, величина опорной реакции

$$A = -\frac{M_1 + M_2}{l}; \quad B = \frac{M_1 + M_2}{l}.$$

Поперечная сила, как видно из эпюры, получается постоянной и равной по величине левой опорной реакции.

Эпюра моментов получается в виде наклонной прямой

$$M = C + \int_0^z Q dz = C + \int_0^z -\frac{M_1 + M_2}{l} dz = M_1 - \frac{M_1 + M_2}{l} z = \\ = \frac{M_1(l-z)}{l} - \frac{M_2 z}{l}$$

уравнение прямой.

Выражение условных опорных реакций, т.е. tang. углов наклона на опорах получает вид

$$[A'] = \frac{2M_1 l}{6EI} - \frac{M_2 l}{6EI} = + \frac{1}{6EI} (2M_1 - M_2) l = \text{tg } \alpha; \\ [B'] = \frac{2M_2 l}{6EI} - \frac{M_1 l}{6EI} = + \frac{1}{6EI} (2M_2 - M_1) l = \text{tg } \beta.$$

Дальнейшим интегрированием можно определить и линию прогиба. Как видно из эпюры M , прогиб получается различного знака для обеих частей балки, она изгибается довольно сложно. Но не следует думать, что нулевая точка прогиба придется под нулевой точкой момента — такое совпадение возможно лишь при $M_1 = M_2$. Нулевая точка момента указывает лишь на перемену знака кривизны (y''), а не знака y ; величина же y равна 0 там, где условный момент $[M']$ равен нулю. При некоторых соотношениях между моментами возможен даже постоянный знак y при двух знаках y'' по длине балки. Именно все y будут положительны, когда $M_1 \geq 2M_2$ и все y будут отрицательны (выше оси), когда $M_1 \leq 0,5 M_2$.

Случай действия пар на опорах, как мы увидим в дальнейших выпусках, очень важен для инженера, и потому надо хорошенько в нем разобраться. Мы дали формулы для основного случая, когда M_1 и M_2 положительны. Но те же формулы годятся и для случаев:

- а) когда M_1 и M_2 разных знаков;
- б) когда M_1 или M_2 равны нулю.

В виду важности всех этих случаев, нарисуем для них главнейшие эпюры, принимая для упрощения, что M , всегда положительно.

1-й случай — M_1 и M_2 положительны — рассмотрен выше, дает „перекрученную трапецию“, как эпюру M .

2-й случай — M_2 отрицательно, дает, если за M_2 считать его численное значение (модуль)

$$A = -B = -\frac{M_1 - M_2}{l}; \quad M = M_1 - \frac{M_1 - M_2}{l} z = \frac{M_1(l-z)}{l} + \frac{M_2 z}{l}; \\ \text{tg } \alpha = \frac{1}{6EI} (2M_1 + M_2); \\ \text{tg } \beta = \frac{1}{6EI} (2M_2 + M_1),$$

причем фактически линия M будет или понижаться (если $M_1 > M_2$) или повышаться (если $M_1 < M_2$), или оставаться прямой (если $M_1 = M_2$). Линия y вся изгибается вниз, т.е. и y'' и y' сохраняют свой знак.

Для $M_1 = M_2$ получим круговой, т.е. чистый изгиб.

3-й случай — $M_2 = 0$.

Вставляем в формулы $M_2 = 0$, получим то же, что и для второго случая.

При M_1 отрицательном получают аналогичные результаты.

Строго говоря, специальный вывод даже не нужен, ибо перемена знака в нужных местах автоматически приводит случаи рис. 133 к случаям рис. 134.

Из формул видно, что Q больше при одинаковом знаке M_1 и M_2 , а M дольше держится на больших значениях при разных знаках M_1 и M_2 .

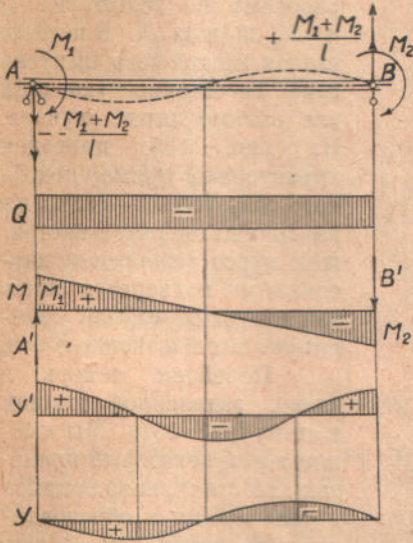


Рис. 133. Пары на опорах.

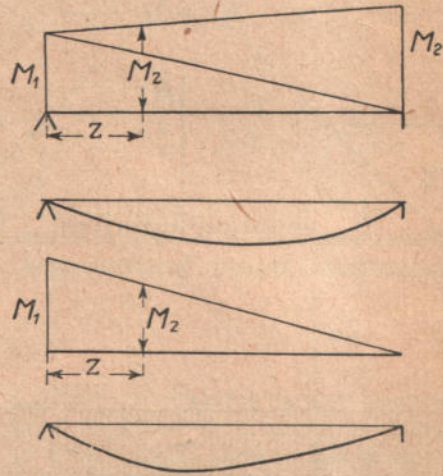


Рис. 134. Разные случаи действия пар на опорах.

Угол поворота на опорах больше при разных знаках и наибольший прогиб так же значительнее при разных знаках.

Поэтому, если не считать большего значения Q , изгиб при одинаковых знаках M_1 и M_2 —предпочтительнее, т.е. менее напрягает и изгибает балку.

§ 3. Наклонные опоры. Балка, заделанная одним концом в стену, а на другом свободно висящая.

Есть еще несколько случаев статически определимых балок, т.е. таких систем, которые поддаются расчету по одним только уравнениям равновесия. Как известно, имеется три уравнения статического равновесия, поэтому для статической определенности системы требуется, чтобы число неизвестных составляющих опорных реакций не превышало трех. Так как число стерженьков на опорах и выражает это число неизвестных, то, следовательно статически определенными будут лишь типы балок с трехопорными стержнями. Кроме рассмотренного нами классического случая, возможны еще:

- 1) балка, заделанная одним концом в стену, а другим свободно висящая,
- 2) балка с консолями.

Действительно, в обоих этих случаях мы имеем по три знакомых нам стерженька „классической комбинации“. Никаких других примеров статически определимых балок с вертикальными опорными реакциями от вертикальных параллельных сил мы не укажем, ибо вне этих трех типов подобрать классически три стерженька для создания вертикальных опорных реакций нельзя. Но несомненно статически определенными будут еще случаи:

а) трех *отдельных* опорных стержней, не пересекающихся в одной точке (хотя бы один из них должен быть *не вертикален* и давать горизонтальную составляющую даже от вертикальных сил),

б) двух опор, из коих одна шарнирно-неподвижна, а другая шарнирно-подвижна, но *не вертикальна* — ясно, что здесь *от вертикальных* сил получаются *горизонтальные* составляющие на опорах, и отдельные сечения

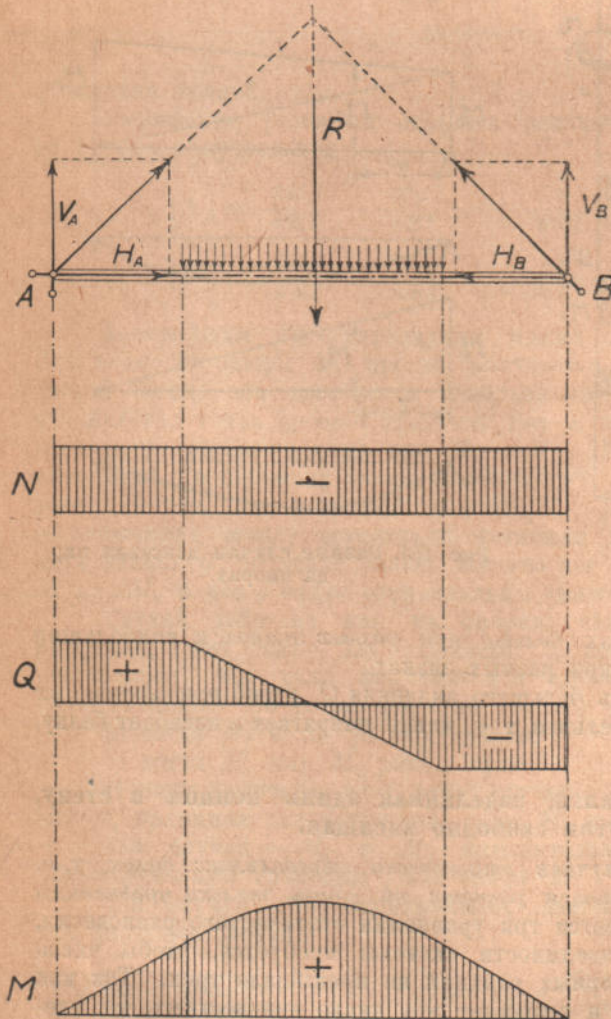


Рис. 135. Балка на наклонных опорах.

работают не только на Q и M, но и на N. В первых главах настоящего выпуска дано достаточно указаний для разбора этих случаев. На рис. 135 приведен характерный пример подобного сооружения — балка на наклонных опорах. В настоящем курсе *детальному* изучению мы подвергаем лишь классический случай *поперечного* изгиба, когда $N=0$.

Перейдем теперь к балке, заделанной концом в стену (рис. 136). Мы мыслим в ней некоторый придаток „хвостик“, находящийся в теле стены и обуславливающий закрепление балки. На границе стены имеем вполне неподвижное горизонтальное положение оси балки, а значит, приходим к условию, что в этой точке $\text{tg } \alpha = 0$, так как мы этим фиксируем горизонтальность оси балки в точке выхода ее из стены. В этом большая разница с консольной балкой — там изгиб консоли и *угол наклона ее на опоре* являются вполне произвольными. „Хвостик“ балки, заделанной концом в стену, мы будем считать бесконечно-жестким, ибо иначе он сам мог бы изгибаться и давать $\text{tg } \alpha = 0$ (на чертеже это обстоятельство

символически обозначено штриховкой). О длине хвостика мы ничего не знаем, да это и несущественно, если исходить из предположения бесконечной его жесткости. Целесообразно, однако, (но не обязательно) считать длину этого хвостика равной единице, тогда величина момента получается одного цифрового значения с силой, действующей на конце хвостика. Обратимся теперь к исследованию этой балки, она между прочим является аналогичной консоли, и потому нам далее более легко будет перейти и к более сложному случаю консольной балки. Мы будем рисовать эту балку с заделанными концами то с правой, то с левой стороны, ибо, очевидно, что это

все равно. Для одного случая начертим эпюры, для другого инфлюэнтные линии (см. рис. 136).

Формулы эпюр для крайнего левого положения груза будут P следующие:

$$Q = -P; \quad M = -P(l - z)$$

$$EIy'' = P(l - z),$$

$$EIy' = (C) + \int P(l - z) dz = \frac{Pl^2}{2} - \frac{P}{2}(l - z)^2$$

$$EI y = D + C(l - z_0) + \int_1^{z_0} \frac{P}{2}(l - z)^2 dz = \frac{Pl^3}{3} - \frac{Pl^2}{2}(l - z_0) + \frac{P(l - z)^3}{6}$$

Из последней формулы видно, что максимальный прогиб получается при $z = l$

$$\max y = \frac{Pl^3}{3EI}.$$

Когда сила расположена не на конце консоли, то участок между концом консоли и точкой приложения силы не имеет нагрузки (как видно из сетки эпюр сил Q). Теоретически говоря, его в этом случае можно без всякого ущерба для сооружения даже *отбросить*. Очевидно, что конец консоли *не деформируется*, он остается таким же *прямым*, как и раньше, и *только перемещается*, поворачивается, как целое (и иногда довольно значительно) на угол φ наклона касательной упругой линии к горизонту в точке приложения груза. Задача настолько проста, что можно даже и не определять опорных реакций; впрочем, вычислить их очень просто. Внешние силы создают некоторый момент, который при силе, приложенной на расстоянии z от опоры, выражается так: $\max M = -Pz$. В опоре должен возникнуть реактивный момент той же величины, этот момент представляется в виде произведения реактивной силы внутреннего верхнего стерженька B , на длину хвоста, нам вообще неизвестную. Поэтому мы определяем не силу B , а сразу опорный момент M_1 . Чем меньше длина хвоста, тем больше должна быть реактивная сила B на внутреннем стерженьке, так как она должна дать вполне определенную величину M_1 , и тем больше будет реактивная сила A , очевидно равная $P + B$. В этом большом значении A главный недостаток консольных конструкций. Практически эта большая величина опорной реакции A дает себя знать выкрашиванием материала стены у края балки. Итак, на опоре мы можем мыслить две силы—одну сверху B , уравнивающую внешнюю силу путем создания пары, и другую снизу A , уравнивающую как нагрузку, так и заземляющую силу B .

Эпюра Q по мере приближения к опоре точки приложения груза, уменьшает свою полную площадь. Кажущееся внешнее сходство с инфлюэнтными линиями, однако, очень обманчиво: в тех при изучении Q для опоры, наоборот, получается максимальное значение площади инфлюэнтной линии. Разница в знаках обусловлена тем, что в эпюрах мы шли слева, а в инфлюэнтных линиях — справа. 6-я строка — линия прогибов, для обоих построений сделанная для z , и z_1 , равных l , получается вполне тождественной, как впрочем и следовало ожидать по закону взаимности (доказательство этого положения будет дано ниже). Заметим здесь, что в практи-

ческом отношении нас при любых случаях, главным образом, будут интересовать 1-ая, 3-ья и 6-ая строки, рассмотрением которых мы иногда и будем ограничиваться.

Кстати, на этом примере можно наглядно пояснить еще то обстоятельство, что интеграция сводится к суммированию *площадей* предыдущей строки. Так, прямоугольник Q дает наклонную прямую для M и т. д.

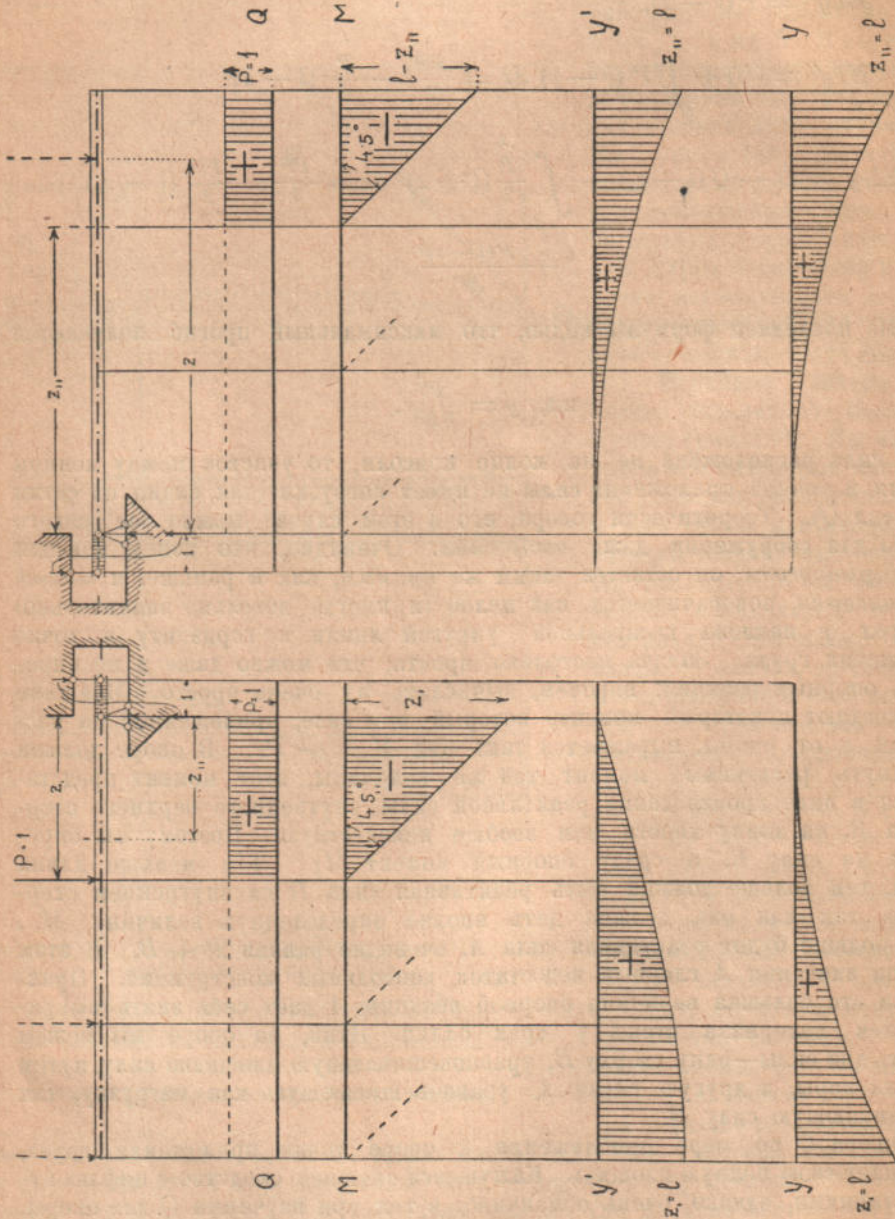


Рис. 136. Балка, одним концом заделанная, а другим свободно висящая (надево — эпюры, а направо — инфлюенты).

Интересен еще для этого случая вопрос об условной опорной реакции $[A']$ и $[B']$ от условной нагрузки $\frac{M}{EI} dz$. В данном случае (если принять, что $[A']$ берется на *свободном* конце, а $[B']$ — на *заделанном*) мы заранее видим, что $[B']$ должно равняться *нулю*, ибо на заделанном конце $\text{tg } B = 0$. Итак, условные опорные реакции должны оказаться лишь на *свободном*

конце. Ясно, что они сведутся: к силе $[A']$ равной $\operatorname{tg} \alpha$ и к условной опорной паре $[M']$ равной y_{\max} . Эти результаты указывают, что на свободном конце сразу развивается уступ линии y , равный y_{\max} , и уклон линии y , равный $\operatorname{tg} \alpha$, т. е. заделка для условной нагрузки оказывается у свободного конца.

§ 4. Консольная балка.

Исследование консольной балки приводится к простому совместному рассмотрению действия груза на балку, лежащую на двух опорах и на две балки-консоли, как бы с частично заделанным концом. Как видно, покуда груз находится внутри пролета, консоль является незагруженной, теоретически ее можно даже вообразить отрезанной от балки, и это не повлияет на условие равновесия балки в целом. Консоли в этом случае *никаких деформаций не претерпевают*, они только *перемещаются* на некоторый

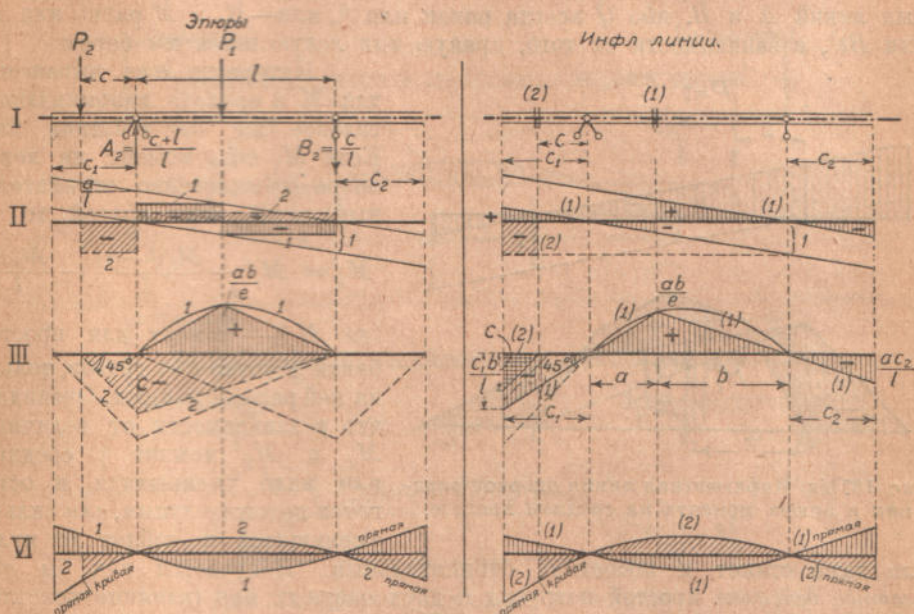


Рис. 137. Консольная балка.

угол, оставаясь совершенно прямыми и совпадая с направлением касательной к упругой линии на опорах, каковое направление есть величина *переменная*, зависящая от нагрузки; этим консоли отличаются от заделанных балок § 3-го, кои при отсутствии нагрузки становятся *горизонтальными* по всей своей длине. Построение эпюр для груза, находящегося внутри пролета, не вносит ничего нового. Когда груз стоит на консоли, он дает себя чувствовать и в самом пролете; действительно, вынос нам задан по своей величине; значит, величину опорной реакции для противоположащей опоры мы подсчитать можем. В самом деле:

Составляем уравнение момента относительно левой опоры:

$$-Pc - Bl = 0 \quad B = -\frac{Pc}{l}.$$

Из уравнения момента относительно правой опоры:

$$-P(c+l) + Al = 0 \quad A = P \frac{c+l}{l}.$$

$$A + B = P.$$

В виду того значения, которое имеет выражение A и B в консольных балках, остановимся на нем несколько подробнее. Когда груз — единица в своем движении от правой опоры налево доходит до опоры A , то он дает этой опоре значение единицы. Когда он идет дальше и вступает на консоль, значение реакции A продолжает увеличиваться по той же прямой, ибо изменилось здесь лишь то, что рычаг первого рода превратился в рычаг второго рода — вид же уравнения остался тот же. Обратное, перемещение груза единица правее правой опоры вызывает в опоре A отрицательную реакцию по той же прямой. В сущности, формула всегда такова;

$$A = \frac{1 \cdot (l - z)}{l};$$

где z — расстояние от левой опоры до груза, считая положительное расстояние *вправо*. Такова же линия B . Теперь ясно, что для нахождения Q и M мы должны будем просто иметь в виду новый общий вид инфлюэнтных линий A и B , ибо Q всегда равен или A , или $-B$, а M равно или Az или Bz' , в зависимости от того, вправо или левую ветвь мы берем.

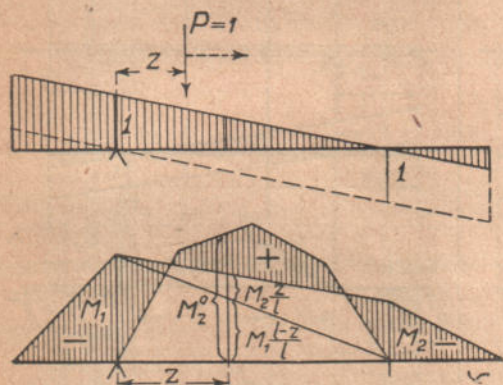


Рис. 137 bis. Инфлюэнтная линия опорной реакции и эпюра момента на среднем пролете.

или даже станет и посредине отрицательным. Получается как бы *совместное действие* простой нагрузки и двух опорных пар (влияние консолей заменяется влиянием опорных пар). При этом углы наклона на опорах могут или сохранить свой обычный знак, или оказаться оба (или один из них) равными нулю, или даже иметь необычные обратные знаки. Случай нулевых тангенсов, очевидно, соответствующий нулевым значениям условных реакций A' и B' и фактически сводящийся к случаю балки, как бы мгновенно заделаной в стену, как легко усмотреть из рис. 138-го, для *сплошной* нагрузки соответствует опорным моментам $-\frac{pl^2}{12}$, и моменту посредине $+\frac{pl^2}{24}$, ибо лишь в этом случае площадь параболы: $\frac{2}{3} \cdot l \cdot \frac{pl^2}{8}$, как-раз равна площади прямоугольника $\frac{pl^2}{12} \cdot l$ и $[A'] = [B'] = 0$.

Так как $M_{1/2} = \frac{pl^2}{8}$ в простой балке и сумма моментов на опоре и посредине всегда равна $\frac{pl^2}{8}$, то желательно иметь такую длину консолей a , чтобы момент от них на опорах, равный $\frac{pa^3}{2}$, уменьшал $\frac{pl^2}{8}$ пополам, для чего необходимо, чтобы $a = \frac{\sqrt{2}}{4} l = 0,353 l$.

Интересно еще выражение для M в пролете, напоминающее такое же от действия пар. Если M_1 есть момент на левой опоре (обыкновенно отрицательный), а M_2 — на правой, то

$$M_z = M_2^0 - \frac{M_1(l-z)}{l} - \frac{M_2 z}{l},$$

где M_2^0 — момент для простой балки в точке z от грузов, только на ней расположенных. Очевидно, что в зависимости от величины M_1 и M_2 момент у середины или мало уменьшится и останется положительным, или сильно уменьшится и дойдет до нуля,

Для мгновенной заделки необходимо иметь $a = \frac{\sqrt{6}}{6} l = 0,408 l$.

Графические построения очевидны. Из них видно, что когда груз стоит на консоли, он влияет на средний пролет балки, но не оказывает влияния на другую консоль.

Эпюра моментов для груза на консоли дает, по аналогии с балкой с заделанным концом, направление линии под углом в 45° , а в пределах пролета найдется простым сведением полученной на левой опоре ординаты к нулю у правой опоры.

Обращаемся к *инфлюэнтным линиям*. Если сечение находится в пролете (между опорами), то в пределах пролета построение инфлюэнтных линий ни чем не отличается от обычного. Однако, когда единичный груз выходит на консоль, то он все же оказывает свое влияние на сечение — инфлюэнтные линии должны, значит, быть *продолжены* и далее, согласно

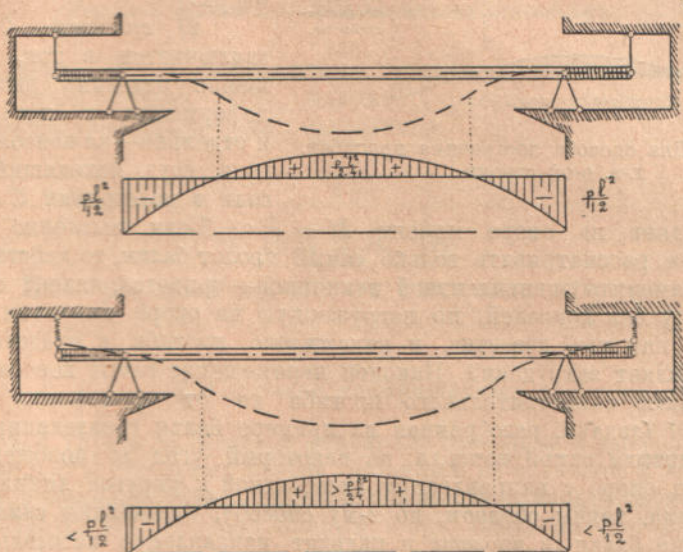


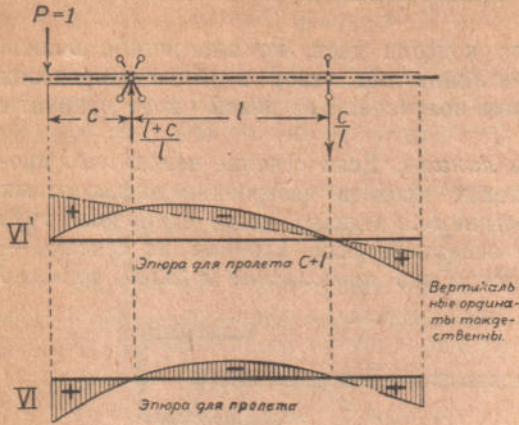
Рис. 138. Закрепление полное и частичное.

с тем, как изменяется дальше A или B , т.е. по прямой. В этом и сказывается большая разница между обоими случаями: эпюры для груза, стоящего в пределах пролета, ни чем не отличались от обычных, а инфлюэнтные линии получили некоторые дополнительные части. Наконец, когда сечение выбрано на самой консоли, то, пока груз находится в пролете, он вообще не оказывает влияния на консоль, а, значит, инфлюэнтной линии в пределах среднего пролета не получается вовсе. Когда изучаются точки консоли, и консоль нагружена, инфлюэнтные линии ни чем не отличаются от построенных нами для балки с заделанным концом.

Остается еще определить линию прогиба для случая, когда груз расположен на консоли. Ибо для груза в пролете нового ничего нет. Как уже много раз указывалось, 6-ая строка для обоих схем — эпюр и инфлюэнтных линий должна получиться совершенно одинаковой. Для построения 6-й строки можно рекомендовать два метода (см. рис. 139-й):

1) подсчитывают величины опорных реакций и считают их за действующие активные силы. Ведь величины опорных реакций уравновешивают нашу нагрузку, значит, вся система в равновесии и любые силы могут быть приняты за реактивные.

Теперь условно сочтем в нашей балке *крайние*, т.-е. расположенные на краях консоли *силы* за реактивные, т.-е. за опорные реакции. Этот прием дает нам возможность свести случай на балку без консолей. Затем, из условия равенства нулю прогиба на действительных опорах, находим на чертеже направление горизонтальной оси балки и поворачиваем весь чертеж до совпадения этого направления с горизонтальным.



Правая консоль не дает изгиба и изобразится прямой линией, совпадающей с направлением касательной к искривленной линии оси у правой опоры.

2) *сущность 2-го способа* заключается в том, что совершенно отдельно рассматривают деформации в пролете балки и отдельно—на консолях. В самом деле, груз, находящийся на консоли в расстоянии C от опоры,

очевидно дает на опоре момент $M = P \cdot c$. Если мысленно *отбросить консоль*, т.-е. рассматривать только самый пролет балки, то действие консоли придется заменить эквивалентной величиной—придется, значит считать, что имеем балку без консолей, но нагруженную на опоре моментом $M = P \cdot c$. Задача эта нам уже известна, и нахождение прогиба в пределах пролета не представляет затруднений. Наконец, перемещение самой консоли найдется *суммированием* самостоятельного прогиба ее от приложения на конце груза $P=1$ (задача, разобранный на примере балки с заделанным концом) и поворачивания самой консоли на некоторый угол до положения, совпадающего на опоре с направлением касательной к упругой линии в пролете.

Сначала, таким образом, по 2-му способу, определяют самостоятельно перемещение балки в *пролете* и находят направление касательных, определяющих повернутые положения консолей. Затем для нагруженной консоли находят свои собственные величины прогибов, откладывая их от направления касательной вниз. Здесь нужно бы было откладывать эти ординаты на перпендикуляре к касательной, но в виду чрезвычайной малости углов наклона (макс. 5—10 минут), без всякой почти ошибки можем отложить эти отрезки на *вертикальном* направлении, как это сделано и на рисунке 139. Очевидно, что результаты этих построений получаются вполне тождественными для обоих способов. На практике обычно прибегают к первому способу.

Заметим вообще, что в Строительной Механике, особенно при изучении изгиба, можно мысленно разделять балку на любые отдельные части, изучая отдельно явления в каждой из этих искусственно выделенных частей.

Принципиально рассуждая, можно взять какой-угодно малый отрезок балки, и, изучив его, получить правильное представление о сущности явления в этом участке, если только знать влияние отброшенных слева и справа частей, т.-е. выражаясь математически, *все произвольные постоянные интегрирования*: величины Q_0 и M_0 , а также величины y'_0 и y_0 в начале или в конце рассматриваемого участка.

В настоящей главе мы рассмотрели только случай прямого бруса и опорных устройств с вертикальными от вертикальных сил опорными реакциями. Но тот же метод применим и для весьма сложных схем,

например, для схемы криволинейного бруса с наклонными опорами (из 3-х стерженьков) и со многими даже многостепенными отрезками. Конечно, эюры осложнятся значительно и должны строиться для сил N ,

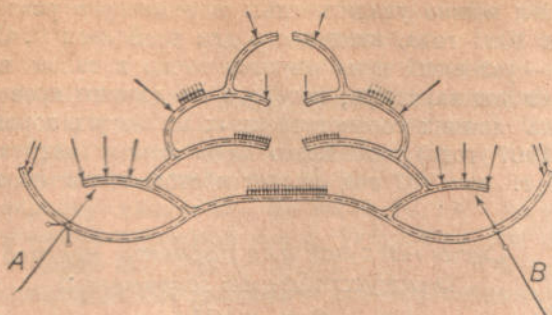


Рис. 140. Балка с многостепенными отрезками.

Q и для момента M , а инфлюентные линии станут значительно сложнее, но все же принципиально схема, например, рисунка 140-го разрешима и является совершенно статически определимой.

ГЛАВА IX.

Поперечный изгиб от системы грузов.

§ 1. Общие соображения.

Системой грузов называется неизменно связанная в одно целое комбинация нескольких отдельных грузов, заданных по величине и своему относительному положению. Таким образом, положение равнодействующей R этой системы является вполне определенным, и при движении системы по балке, равнодействующая передвигается совместно с системой. При изображении системы мы примем некоторые условные обозначения (см. рис. 141):

В общем случае

$$P_1 \neq P_2 \neq P_3 \neq P_4 \neq P_5$$

$$d_1 \neq d_2 \neq d_3 \neq d_4$$

Системы грузов чрезвычайно часто встречаются на практике. Достаточно указать, например, надвигающийся по мосту поезд, который безусловно представляет собой определенную систему грузов, неизменно между собой связанных. Наши мосты и другие железнодорожные сооружения рассчитываются применительно к так называемому *нормальному поезду*, причем вес и размеры его по мере развития техники все время прогрессируют. Бывают

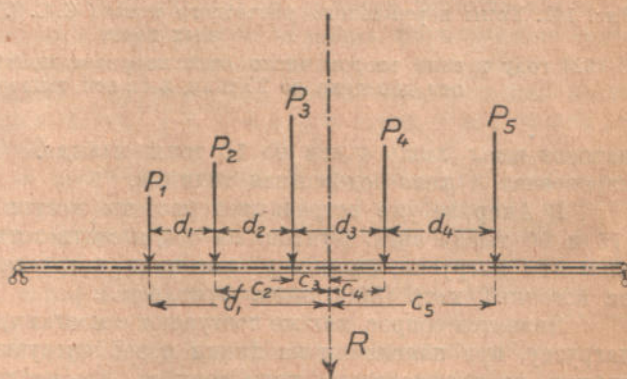


Рис. 141. Система грузов.

примеры и таких систем, в которые, помимо сосредоточенных сил, входят еще и сплошные нагрузки (например, нормальный поезд последних русских норм заменяет линию вагонов полосой сплошной нагрузки).

На рис. 142-м можно увидеть типы нормального расчетного железнодорожного поезда 1921 года, введенного для всей сети С. С. С. Р.

Этот поезд — условный и не имеется точно в таком виде на линиях, но он представляет тот максимум, которого не должны превосходить поезда, обращающиеся на линиях соответственных железных дорог. Предыдущий расчетный тип (1907 года) имел всего *пять* осей с нагрузкой по 20 тонн на ось, а с 1896 г. по 1907 год расчет мостов велся поездом, в котором

Схемы нагрузок для расчета мостов
и искусственных сооружений

Нагрузка 6 тонн на погонный метр.
Размеры в миллиметрах.

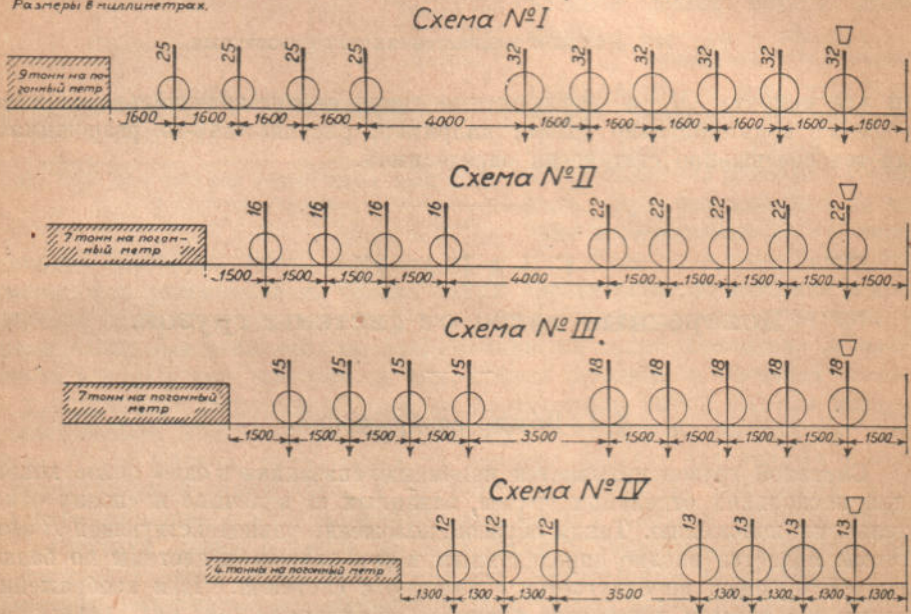


Рис. 142. Типы нормального расчетного поезда С. С. С. Р. для 4-х категорий железных дорог.

В 1924 году в типе втором число осей паровоза принято *шесть*, нагрузка на эти оси доведена до 25 тонн, а на оси тендера до 20 тонн.

паровоз имел лишь 4 оси по 15 тонн каждая. Так быстро прогрессирует паровозная и железнодорожная техника.

В Америке уже встречаются расчеты мостов и на 33 и даже 41 тонну (75 и 90 тысяч англ. фунтов) на ось, и соответственно повышены и другие элементы нагрузки, например, погонная нагрузка принимается до 12 тонн на погонный метр (8000 англ. фунт./фут.).

Является вопрос, как же поступают с мостами, рассчитанными на старую нагрузку, при появлении на линии новой нагрузки. Вопрос этот довольно сложен, но прежде всего надо помнить, что мосты, за исключением разве каменных, не вечны, и металлические и железобетонные мосты нормально имеют 60 и не более 75 лет службы, а посему ко времени появления новых нагрузок они обыкновенно частично уже отслуживают свой срок, их материал перерождается, сооружение как бы заболевает склерозом (хрупкостью) своих тканей и уже не годно к работе. Затем, расчет ведется

на быстро двигающийся поезд с двумя паровозами впереди, а можно пускать поезд по старому мосту медленно или с одним лишь паровозом, или держать на данном перегоне специальный не тяжелый паровоз. Конечно, это — паллиативы, а лучше будет мост *усилить*, увеличив его размеры, а еще лучше — построить новый.

И все же, несмотря на эти неприятные обстоятельства, *не признается целесообразным* загадывать на десятки лет вперед и считать мосты на исключительно высокие нагрузки; да и невозможно загадать так далеко — нельзя предвидеть, *как* будут расти нагрузки. Конечно, в 1896 году не предвидели ни возможности нагрузки в *32 тонны* на каждую ось, ни шестиосных паровозов. Ныне, например, считается, что выше 40 тонн на ось проектировать паровоз *не экономично*, но нельзя быть уверенным, что 40 тонн не будут превзойдены лет через 10—15.

Так же обстоит дело с нагрузками от автомобилей, а именно от грузовиков тракторного типа, кои ныне дошли до 15 тонн на ось, и с другими типами нагрузок.

Во всяком случае мостостроение ни коим образом не должно ставить препятствий появлению новых сильных нагрузок; ведь путь служит для организации *по нему* транспорта, является подсобной конструкцией, *обстановкой* для транспорта, и, если транспорту *выгодно* пользоваться именно такими нагрузками, путь *должен к ним приспособиться*.

Таково положение дела с типами нагрузок. Вернемся вновь к изучению системы грузов.

По закону независимости действия сил можно изучить *систему* суммированием составляющих действий от *каждой* из сил. Здесь особенно годится метод инфлюентных линий, потому что общее воздействие здесь непосредственно получается в виде уже выведенной выше формулы:

$$X = \Sigma P \cdot y + \Sigma M \operatorname{tg} \alpha + \Sigma p \cdot \omega.$$

Однако, мы не остановимся здесь на этом методе расчленения, а дадим еще несколько общих указаний.

При изучении действия системы прежде всего *уравновешиваем* нашу систему, т. е. находим реактивные силы, чтобы балка находилась в состоянии равновесия. Искомые опорные реакции найдем обычным приемом, из условий равенства нулю моментов всех активных и реактивных сил относительно опор. Правильнее при этом сначала определить опорную реакцию в точке *B*, вообще там, где *y* нас показана *одностержневая* опора, фиксирующая самым своим устройством направление реактивной силы, а для этого сначала составляем уравнение момента по точке *A*. Далее при решении задачи ограничиваемся построением только 1-й, 3-й и 6-й строк — ибо только они представляют существенный интерес.

Как моменты, так и прогибы, строим графически, как веревочно-стержневые многоугольники, соответственно от действительных нагрузок и от моментных площадей, деленных на *EI*. Полученные кривые можно *проверить* и даже построение кривых можно заменить *вычислением* любой ординаты, ибо, например, *y'* равно *условной поперечной силе*, а *y* — *условному моменту*, и их величины можно *вычислить*, имея *вычисленные* ординаты изгибающих моментов. — Это уже будет графо-аналитический метод.

Метод интеграции (аналитический) также применим, но он тяжеловеснее графо-аналитического метода, приводя к большему количеству вычислений.

Все же следует признать, что графо-аналитический метод определяет нам линию прогиба по *точкам*, от нашего усердия зависят взять их большее или меньшее число, но *уравнения* кривой в отдельных случаях мы не получим. Интеграция же дает нам именно *уравнение* кривой прогиба и других

величин, теоретически давая нам возможность определить значение интересующей нас величины для *любой*, вполне произвольной, точки.

Громоздкость аналитического метода обуславливается тем, что приходится интегрировать *отдельно каждый участок между соседними грузами*. Таким образом, в случае, например, 5-ти грузов, стоящих на пролете, получаем 6 ветвей, шесть отдельных интегрирований, Для вычисления произвольных постоянных интегрирования, число которых весьма значительно (например, в пролете, где имеем 5 грузов и 2 опорных реакции, получаем 6 ветвей и 12 произвольных постоянных *в двух нижних строках*), приходится составлять сложные уравнения и решить 12 уравнений. Уравнения определяются условиями: во-первых — *нулевого прогиба* на обоих опорах (2 условия), во-вторых — равенства прогибов и тангенсов углов наклона *для границ* ветвей ($2 \times 5 = 10$ условий). Число условий (12) действительно равно числу неизвестных произвольных постоянных, и это будет иметь место *всегда*, ибо при n ветвях имеем $(n - 1) \cdot 2 + 2 = n$ уравнений, система уравнений разрешима, но операции эти требуют сложных вычислений.

Вот потому-то графо-аналитический метод рекомендуется предпочтительно перед чисто аналитическим, тем более, что этот метод есть лишь строго законная математически (см. стр. 185) *геометрическая интерпретация аналитических* выводов, самым *видом* получающихся кривых предохраняющая от *грубых* ошибок и позволяющая отдельные ординаты *вычислять*, как условные (Q) и (M).

Можно сказать, что в то время, как при аналитическом методе невозможны ошибки в долях самых малых величин, но возможно случайно пропустить множитель 2 или $\frac{1}{2}$, или не на месте поставить запятую (ошибка в 10 или 100 раз), при методе графо-аналитическом и даже чисто графическом возможно получить неточный результат в пределах $1 - 4\%$, но невозможно ошибиться вдвое или в десять раз, ибо на чертеже эта ошибка бросилась бы в глаза: чертеж, следовательно, регулирует ход наших вычислений.

§ 2. Пространственное изучение величин Q, M, y', y для простой балки.

В одном из предыдущих параграфов мы отметили, что величины Q, M, y', y — которые мы изучаем, выражаются в сущности *поверхностями*, построенными в координатной системе, в ней мы имеем в основании оси OZ' и OZ'' (с обычным для нас значением величин z, z''), а по вертикальному направлению — ординаты, определяющие значение самой искомой величины.

Зная формулы эпюр и инфлюентных линий для всех четырех величин, постараемся изобразить их в пространстве для *одинокого* груза.

1) *Величина Q* . Ясно, что и z, z'' изменяются от O до l так, что основанием нашей поверхности будет квадрат $l \times l$. *Диагональ* этого квадрата, идущая от точки O , даст *поперечную силу под грузом*, т.-е. как известно, *эпюру*; сечения плоскостями, параллельными QOZ'' , должны дать *эпюры*, а плоскостями, параллельными QOZ' — *инфлюенты*. Получим, очевидно, поверхность, изображенную на рис. 143а, которая говорит сама за себя.

2) *Величина M* . Общие соображения предыдущего построения остаются в силе.

Общее выражение

$$M = \frac{(l - z'')z'}{l}$$

т.-е., получается кривая поверхность второго порядка. Ординаты над диагональю, т.-е.

$$M_{z', z''} = \frac{(l - z)z}{l}$$

суть ординаты параболы. Получаются две равнобочные *линейчатые* поверхности — косые плоскости или так называемые гиперболические параболоиды.

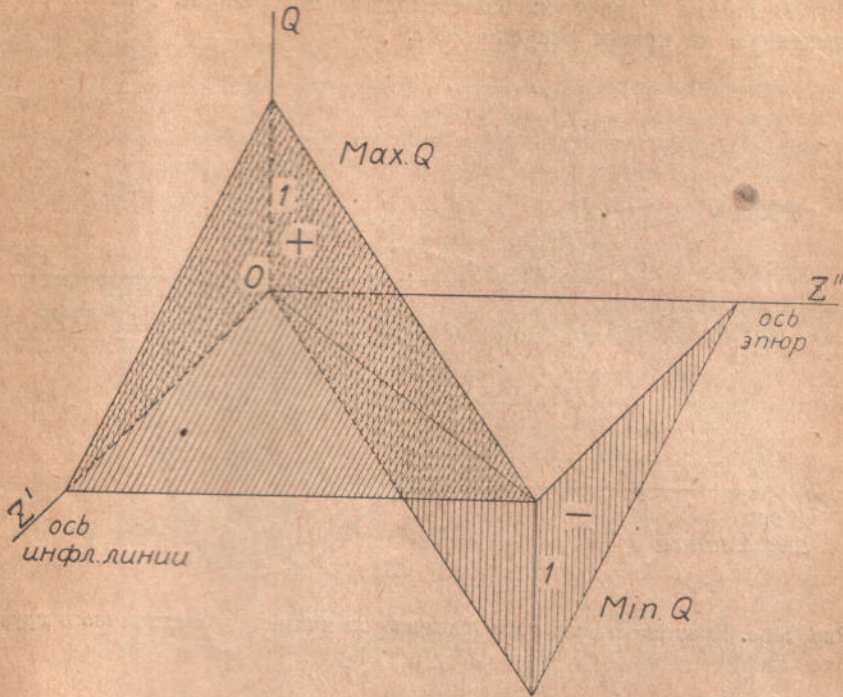


Рис. 143а. Пространственное изображение величины Q от единичного груза.

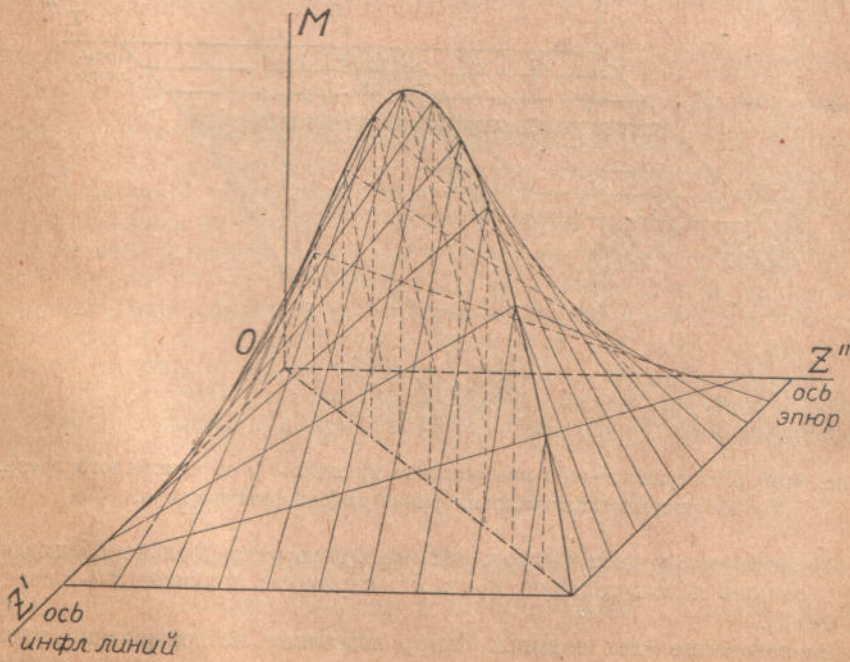


Рис. 143б. Пространственное изображение величины M от единичного груза.

Эпюры и инфлюенты суть треугольники (см. рис. 143b). Поверхность—второй степени

3) Величина y' дает уже более сложную поверхность третьей степени, изображенную на нашем рисунке 143с.

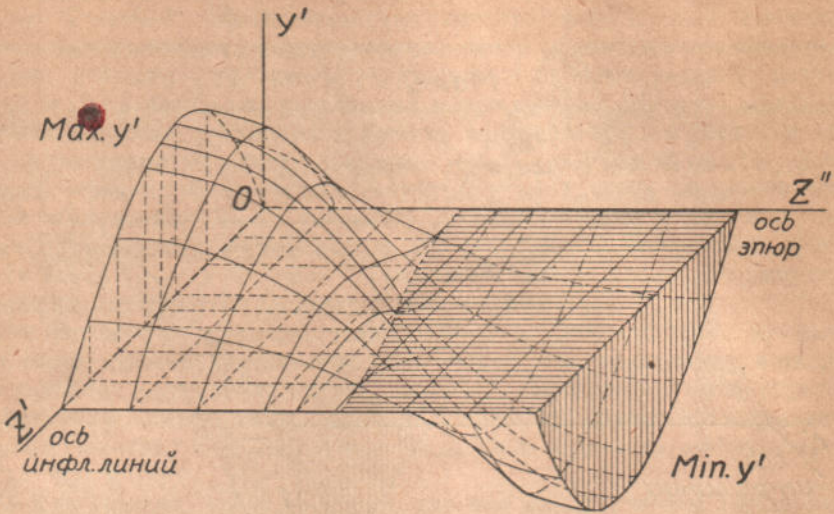


Рис. 143с. Пространственное изображение величины y' от единичного груза.

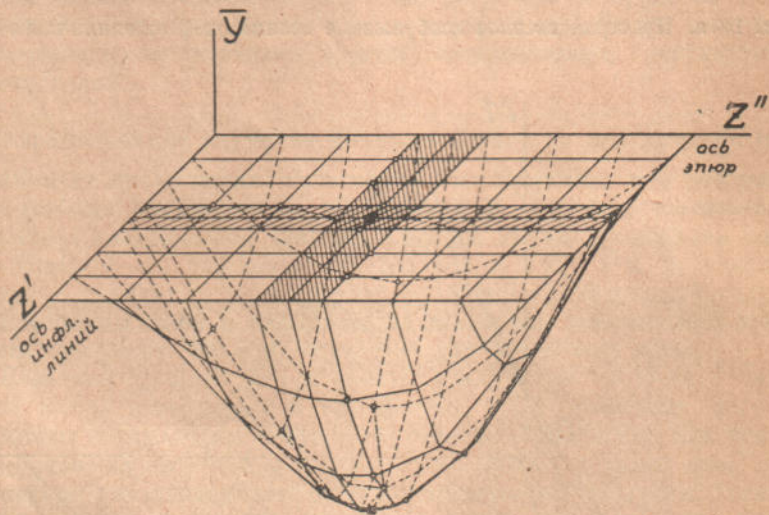


Рис. 143d. Пространственное изображение величины y от единичного груза.
На рисунке заштрихован район наибольших прогибов.

4) Величина y дает фигуру, симметричную относительно обеих диагоналей и сплошь положительную, при чем поверхность получается 4-й степени. (рис. 143d).

Исследование этих четырех фигур позволяет исчерпывающе уяснить сущность всех тех комбинаций, которые только могут встретиться в простой балке при любом положении груза.

§ 3. Абсолютный наибольший момент от системы грузов.

При *единичном* грузе абсолютный максимум момента совпадал с наибольшей ординатой диагональной параболы. Однако, вопрос об абсолютном наибольшем моменте нас интересует главным образом в случае *системы* грузов. Здесь дело получается более сложное. Введем в наши обозначения системы еще величину R_n , т.-е. равнодействующую левых сил относительно нашего сечения и назовем через z_n расстояние от левой опоры до *изучаемого* в общем случае n -ого груза. c_n — есть расстояние груза P_n до R .

Получим:

$$M = \frac{R(l - c_n - z_n)z_n}{l} - R_n \cdot c_n$$

Полученное выражение для M также есть выражение ряда поверхностей 2-й степени. Для изучения их обратим внимание на то, что

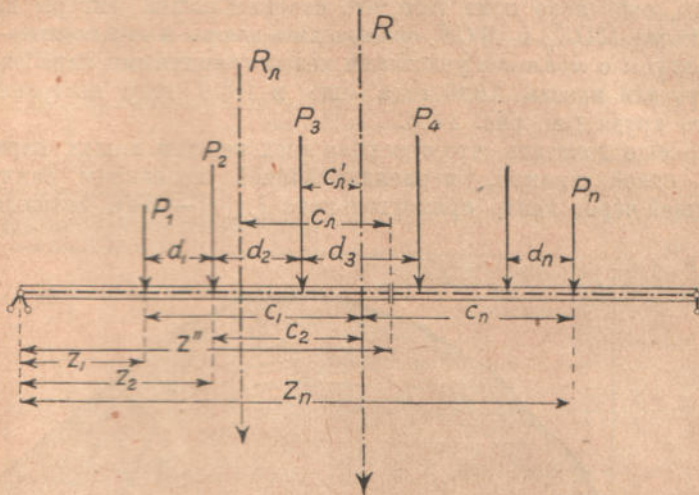


Рис. 144. Схема для абсолютного наибольшего момента от системы грузов.

в интересующем в настоящее время нас конкретном случае шести осей паровоза 1921 года прежде всего интересно отметить, что пределы перемещения паровоза определяются величиной $l - \Sigma d$, и посему основание той пространственной фигуры, которую мы в данном случае ищем, мы найдем уже не в виде квадрата, а в виде вытянутого прямоугольника. На этом прямоугольнике линии, соответствующие моментам под грузами, выразятся, во-первых, линией, проведенной из точки O под 45° к оси OZ'' , а во-вторых, параллельными ей линиями, отсекающими на оси OZ'' и на противоположной ей стороне прямоугольника отрезки $d_1 - d_2 - d_3 - d_4 - d_5$.

Легко усмотреть, что последняя из этих линий придется в противоположный угол нашего прямоугольника. Над каждой из этих линий пройдет парабола по формуле

$$M_{(z_n = z_n)} = \frac{R(l - c_n - z)z}{l} - R_n \cdot c_n = \frac{R(l - c_n - z)z}{l} - (M_n^a)$$

В этой формуле *первый* член выражает квадратную параболу, с *постоянным* параметром — $\frac{R}{l}$ (коэффициент при z^2 и есть *основной* параметр параболы), а *второй* член для *каждой* параболы есть величина *постоянная* и указывает, с какой ординаты (очевидно *нулевой* для первого груза и *отрицательной* для остальных) *началась бы* наша парабола у плоскости MOZ' , если бы ее

можно было вывести за пределы основания. Такая же постоянная величина ($M_{н}^{пр}$), дала бы значение конечной ординаты нашей параболы у плоскости, проведенной параллельно плоскости MOZ' у противоположного конца фигуры. На деле наша парабола может давать реальные значения лишь при прохождении ее над узким прямоугольником $l \times (l - \Sigma d)$. Дальнейшие ее части были бы справедливы лишь при наличии длинных консолей с обеих сторон балки, тогда параболы можно было бы продолжать во всю длину. Фактической же их границей для простой балки являются, конечно, эпюры моментов для крайних положений системы, при коих она вся остается на пролете, легко вычисляемые и могущие быть построенными хотя бы методом веревочно-стержневого многоугольника. Они и показаны на нашей фигуре, где проведены и граничные параболы. Семь поверхностей, их окружающие, суть также линейчатые поверхности — гиперболические параболоиды, что можно легко доказать, исследуя общее выражение M , но что кроме того, еще ясно и из того, что сечение нашей фигуры плоскостями, параллельными MOZ_{II} и MOZ , должно дать эпюры и инфлюэнты — очевидно, ломаные фигуры с прямыми участками между граничными параболой. Такая поверхность для поезда 1896 года еще в 1903 году построена автором настоящего труда (см. рис. 146).

Легко еще доказать, что проекции всех вершин наших парабол приходятся на одной прямой, перпендикулярной проекциям самих парабол и проходящей через центр прямоугольника $l \times (l - \Sigma d)$. Докажем это.

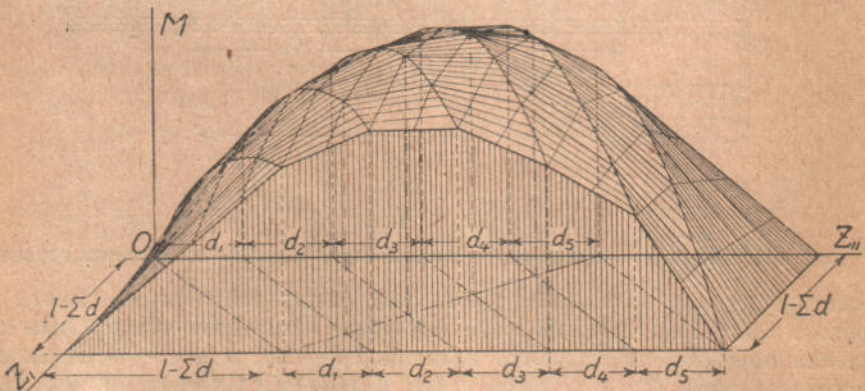


Рис. 145а. Аксонометрическое изображение поверхности моментов.

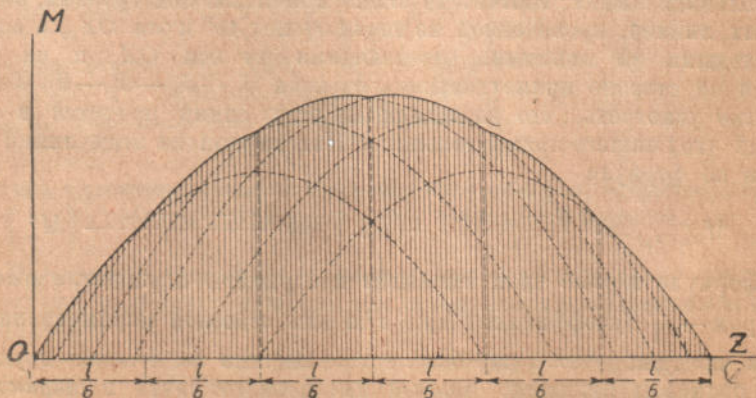
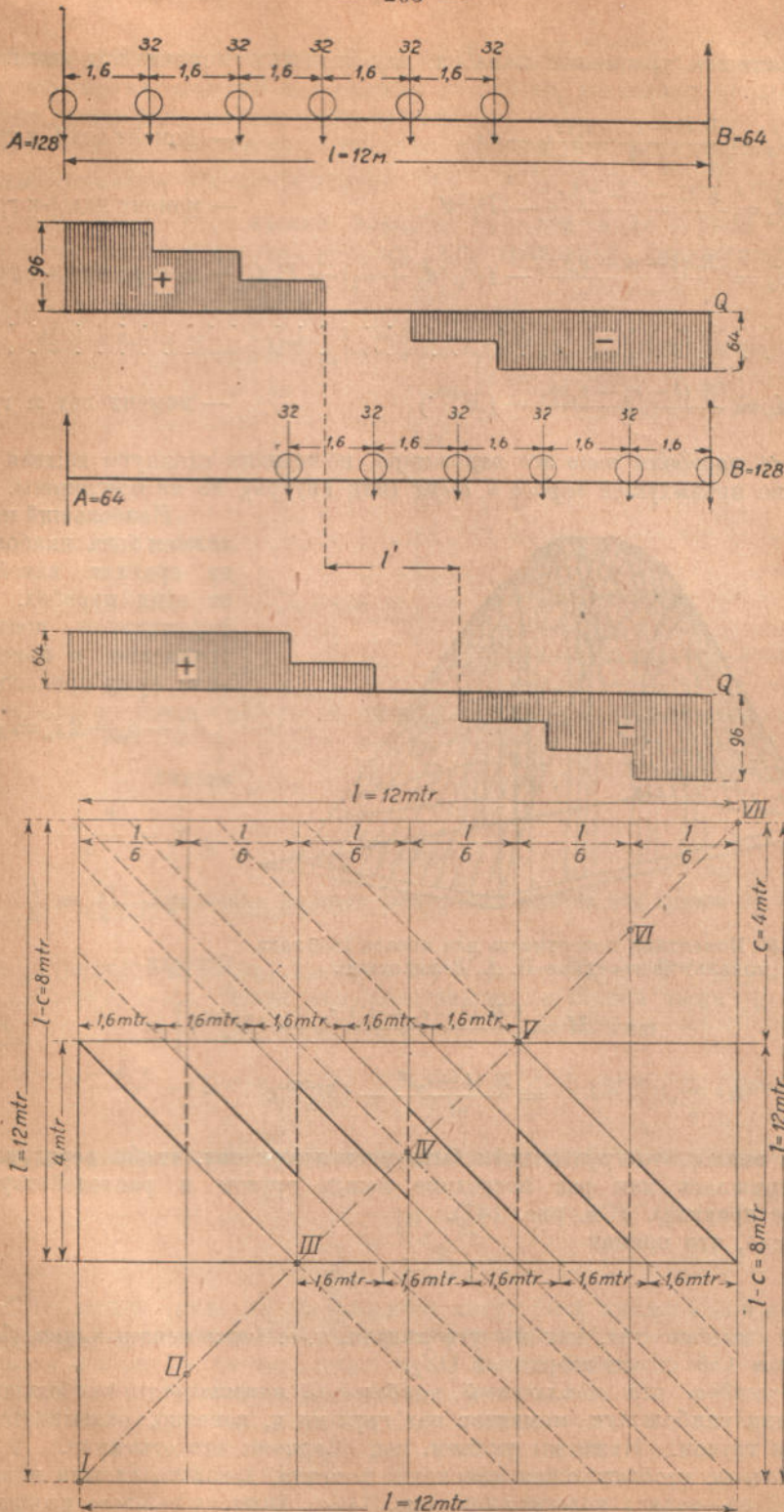


Рис. 145б. Проекция поверхности на плоскость MOZ .



Римскими цифрами указаны вершины отдельных параболоидов.
 Рис. 145с. Крайние положения поезда и план фигуры (принято 6 осей по 32 тонны).

Напишем уравнение парабол, выражающих момент под каким-либо грузом:

$$M_1 = \frac{R(l - c_1 - z_n)z_n}{l} - 0 \quad \text{— момент под 1-м грузом,}$$

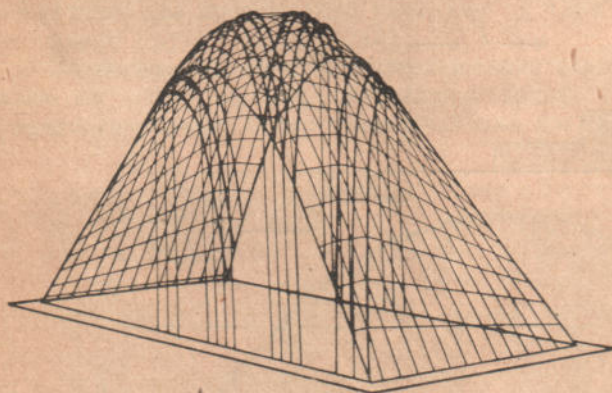
$$M_2 = \frac{R(l - c_2 - z_n)z_n}{l} - P_1 \cdot d_1, \quad \text{— момент под 2-м грузом,}$$

$$M_3 = \frac{R(l - c_3 - z_n)z_n}{l} - (P_1(d_1 + d_2) + P_2 d_2) \quad \text{— момент под 3-м грузом,}$$

.....

$$M_n = \frac{R(l - c_n - z_n)z_n}{l} - (M_n^{\text{тев.}}) \quad \text{— момент под } n \text{ грузом}$$

Все параболы *того же параметра*, но немного сдвинуты каждая относительно предыдущей *вправо и вверх* (или *внутри*), но *не повернуты*.



Наибольший момент должен быть наибольшей из ординат какой-либо из этих парабол. Дифференцируем последнее уравнение и приравниваем нулю производную:

$$l - c_n - 2z_n = 0.$$

значит

$$z_n = \frac{l - c_n}{2}$$

$$z_n + \frac{c_n}{2} = \frac{l}{2}$$

Рис. 146. Моментная поверхность для поезда 1896 года (модель, построенная П. А. Велиховым).

Отсюда

$$\begin{aligned} \max M &= \left[\frac{R(l - c_n - z_n)z_n}{l} - (M_n^{\text{тев.}}) \right] = \\ &= \frac{R(l - c_n)^2}{4l} - (M_n^{\text{тев.}}). \end{aligned}$$

Отсюда видно, что груз должен быть расположен так, чтобы середина пролета пришлась как раз посередине между грузом и равнодействующей (золотое правило). (См. рис. 147).

Ясно, что прямая

$$z = \frac{l}{2} - \frac{c_n}{2}$$

пройдет именно так, как мы утверждали, т.-е. *через центр плана фигуры под углом 135° к оси координат OZ_n*.

Очевидно, что *абсолютный наибольший момент* есть наибольший из частичных наибольших моментов под грузами и, конечно, оказывается под средним грузом. Ниже мы укажем, как *облегчить* его отыскание.

Модель, изображающая изменение момента, довольно сложна и вычерчивание ее—задача нелегкая (см. рис. 145а). Поэтому ее часто изображают в виде проекции на вертикальную плоскость *MOZ'*, и тогда получается фигура, изображенная на рис. 145б.

Докажем теперь, что точки пересечения наших парабол, изображающих закон изменения момента под каждым из грузов, разделяют пролет балки на части, пропорциональные этим грузам.

Заметим, что параметр всех этих парабол для всех грузов данной системы одинаков, ибо коэффициент при z_n^2 , а именно $-\frac{R}{l}$, постоянен. Определим точку пересечения каких-то n -ной и $(n+1)$ -ой парабол, а для этого решим совместно систему двух уравнений, определяющих эти кривые. Имеем:

$$\frac{R(l - c_n - z)z}{l} - (M^{\text{лев.}})_n = \frac{R(l - c_{n+1} - z)z}{l} - (M^{\text{лев.}})_{n+1}.$$

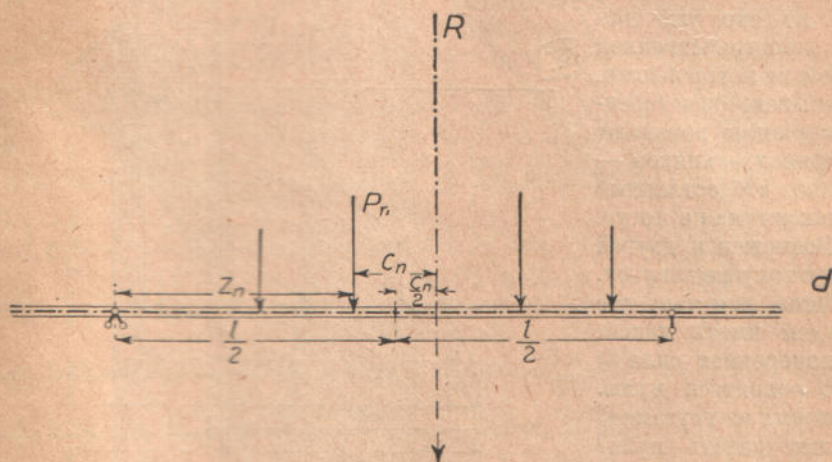


Рис. 147. Положение, дающее наибольший момент под грузом P_n .

Из Теоретической механики известно, что $M_{n+1} = M_n + (R^{\text{лев.}})_n \cdot d_n$ и кроме того $c_{n+1} = c_n - d_n$. Делая эти подстановки во второй части уравнения; имеем

$$\frac{R(l - c_n - z)z}{l} - (M^{\text{лев.}})_n = \frac{R(l - c_n + d_n - z)z}{l} - (M^{\text{лев.}})_n - (R^{\text{лев.}})_n \cdot d_n.$$

Отсюда, по раскрытии скобок и приведении подобных членов, окончательно получаем

$$\frac{z}{l} = \frac{(R^{\text{лев.}})_n}{R}.$$

Совершенно такие же рассуждения могут быть применены и к остальным грузам, а следовательно, наша теорема доказана, *точки пересечения соседних парабол, по снесении этих точек на ось балки, делят ее на части, пропорциональные грузам.*

Если мы вдумаемся теперь в смысл *продолжения* наших парабол, то поймем, что они дают влияние на среднюю часть пролета от системы, частично перешедшей на консоль. Что означает, например, нулевая ордината на *правом* конце первой *левой* параболы? (см. рис. 148 правый поезд).

Легко сообразить, что в этом случае система сдвинулась настолько, что *первый* груз стал в этой нулевой точке — но он отстоит от *левой*

опоры на $2 \cdot \frac{l-c_1}{2} = l - c_1$, т.-е. от *правой* опоры на c — иначе говоря, R придется как раз на *правой* опоре, и реакция $A = 0$, а $B = R$. Очевидно, что *эюра* M примет вид, показанный на рисунке *справа*.

Для второго нуля слева мы будем иметь уже фигуру, показанную на том же рисунке 148 *слева*. Здесь имеются и положительный и отрицательный участки.

Остается еще сказать несколько слов о том, какие же из парабол дают надежду на получение по ним абсолютного наибольшего момента. Ответ на это уже дан самой пространственной фигурой, из которой ясно, что лишь некоторые (средние) вершины попадают над прямоугольником — очевидно, что остальные дать максимума не могут.

Возможен и другой подход к тому же вопросу.

Ясно, что там, где мы будем иметь максимум, поперечная сила Q должна равняться нулю. Под какими же грузами Q не может давать нуля? Для этого прежде всего установим, что A имеет свой максимум (крайнее *левое* положение системы) и свой минимум (крайнее *правое* положение системы), аналогичные пределы имеет и B . Грузы, отсчитываемые слева, сумма которых менее минимума A , не могут дать под собой абсолютного максимума моментов, а также и грузы, отсчитываемые справа, сумма которых менее минимума B . Остается лишь несколько грузов средних, из которых и следует сделать выбор.

Главная трудность в отыскании абсолютного наибольшего момента заключается не в самих операциях, которые мы описываем, а в *выборе системы*. Надо из бесконечной вереницы грузов, даваемой в типовой нагрузке, выбрать такую группу грузов, которая наилучше покрыла бы пролет. Ниже будет объяснено, что этому очень помогают инфлюентные линии.

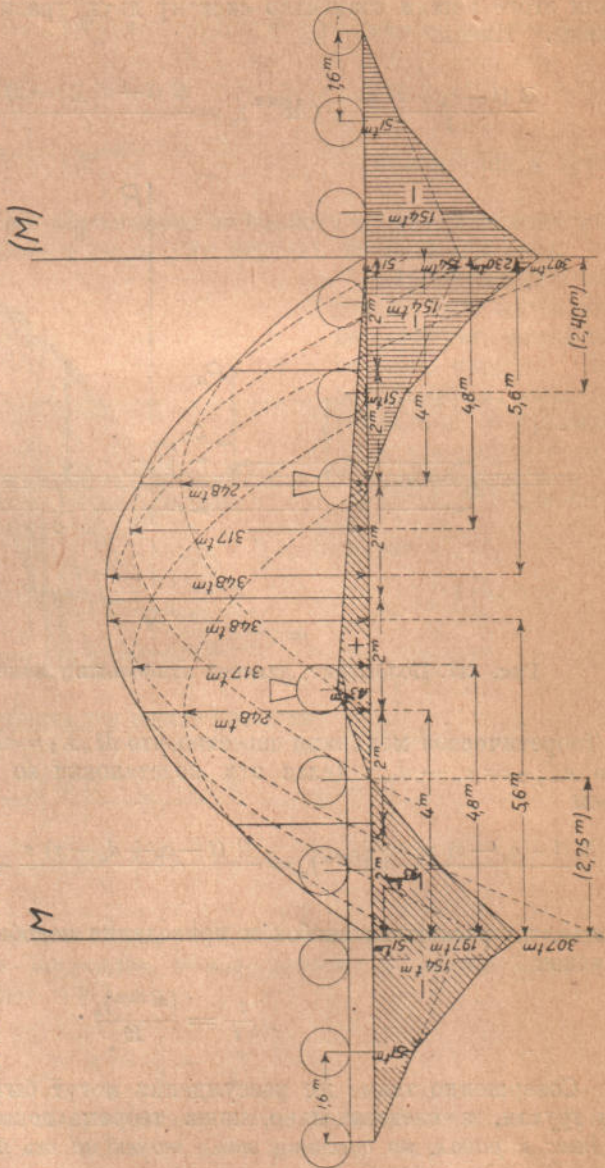


Рис. 148. Переход системы на консоль.

В заключение этого параграфа мы приведем краткое изложение метода, рекомендуемого инженером И. М. Рабиновичем для построения в какой-либо точке балочного пролета инфлюентной линии от системы проходящих грузов (см. рис. 149).

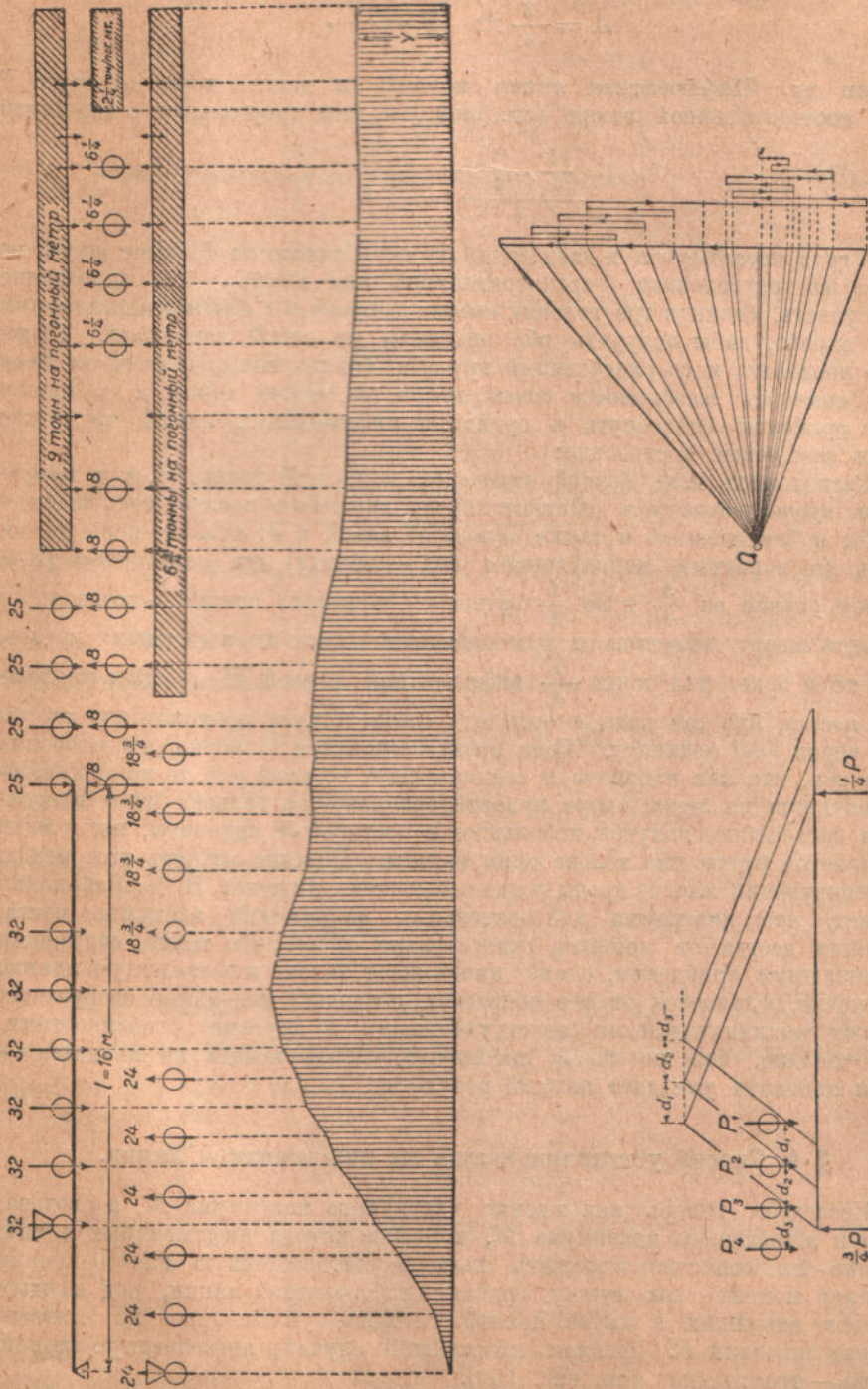


Рис. 149. Построение инфлюентной линии от системы грузов (метод инж. И. М. Рабиновича).

Возьмем пролет l и на нем точку $z_n = \frac{l}{4}$ (для примера). Предположим, что проходят шесть колес паровоза 1921 года. Первое колесо, стоя на точке $\frac{l}{4}$, дает определенные опорные реакции

$$A = \frac{3}{4} P; \quad B = \frac{P}{4}.$$

Отметим их. Инфлюэнтная линия момента в данной точке от груза P равна соответственной эюре (см. выше) и дает треугольник с вершиной

$$\frac{\frac{l}{4} \cdot \frac{3}{4} l}{l} = \frac{3}{16} l.$$

Второй груз *запоздывает* и дает ординату по абсциссе на d_1 более *левую*, но от того же треугольника (рассматриваемого, как эюра). Это запоздание можно учесть, сдвинув треугольник *вместе с грузом и с опорными реакциями* на d_1 вправо, дабы получить обе ординаты на одной вертикали. То же можно проделать и со следующими грузами. Но так как *суммирование эюр* можно заменить *построением одной эюры от суммы грузов*, а в нашем случае ординаты эюр суть и ординаты инфлюэнтных линий, то можно сделать следующее построение:

Расположить над балкой *вправо* от изучаемой точки, (т.-е. в направлении, *противоположном* действительному движению поезда), весь поезд — хотя бы и бесконечный и также *вправо* от левой и от правой опоры расположить (с обратным направлением сил — кверху) два *реактивных* (т.-е. в нашем случае по $\frac{3}{4}$ и по $\frac{1}{4}$ грузовых нагрузок) поезда — после этого построить эюру моментов от *уравновешенной системы* всех наших грузов, и она то и будет для точки $\frac{l}{4}$ инфлюэнтной линией $M_{0,251}$ *при прохождении поезда*, при чем каждая ордината соответствует прохождению *первого* груза через *эту* ординату. Если поезд бесконечен (конечно, односторонне бесконечен, так как паровозы и тендеры идут *во главе его*), то наша инфлюэнта начнется на левой опоре нулевой ординатой, а дальше будет продолжаться бесконечно, получая небольшие и постоянные ординаты, когда идти над пролетом будут уже только одни вагоны. Полезно изучить этот метод, иллюстрирующий многие предыдущие положения. Инженер И. М. Рабинович отмечает, что диаграмма действительных напряжений элемента моста, зависящих всегда от момента, относительно какой-либо точки, снимаемая самопишущими приборами, очень напоминает такую инфлюэнтную линию, но, конечно, отличается от нее постольку, поскольку отдельные сооружения обладают индивидуальными (конструктивными и другими) особенностями.

Очевидно, что по такой инфлюэнте катать поезда не придется — каждая ордината уже дает полный результат.

§ 4. Способ установки поезда на инфлюэнтной линии.

Исследуем теперь нахождение частичного максимума M , а следовательно и абсолютного максимума M , помощью метода инфлюэнтных линий, вспомнив их свойство выражать каждую интересующую нас величину (например момент) как сумму ординат инфлюэнтной линии, под каждым из грузов, входящих в состав данной системы, умноженных на соответственные значения P . Возьмем простейший случай, инфлюэнтную линию момента — треугольник (см. рис. 150).

Дадим системе случайное положение на пролете

$$M = \sum P y \text{ (по свойству инфлюентных линий).}$$

Чтобы убедиться в том, является-ли наше случайное положение системы именно таким, при котором получается максимум M , двигаем всю систему на очень малую величину Δz вправо, и находим отношение $\frac{\Delta M}{\Delta z}$, которое

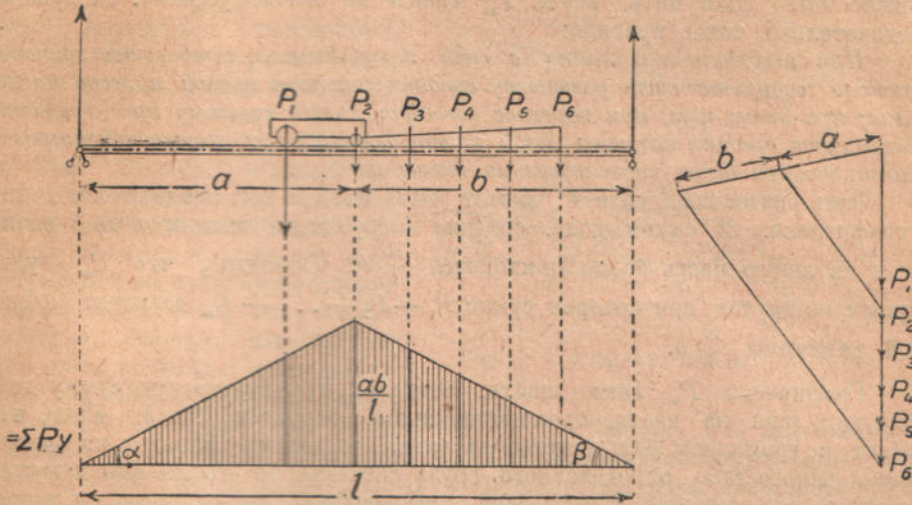


Рис 150. Критическое положение системы для треугольной инфлюентной линии.

при Δz — бесконечно малом обращается в производную $\frac{\partial M}{\partial z}$, которая для максимума M должна иметь нулевое значение.

$$\Delta M = R_{\text{лев.}} \Delta z \cdot \text{tg } \alpha - R_{\text{прав.}} \Delta z \cdot \text{tg } \beta.$$

Если

$$\frac{\Delta M}{\Delta z} = R_{\text{лев.}} \text{tg } \alpha - R_{\text{прав.}} \text{tg } \beta = 0$$

(условие максимума момента), то

$$\frac{R_{\text{лев.}}}{R_{\text{прав.}}} = \frac{\text{tg } \beta}{\text{tg } \alpha} = \frac{\frac{ab}{l} : b}{\frac{ab}{l} : a} = \frac{a}{b}.$$

Окончательно получаем такое условие для самого опасного расположения системы (т.-е. для максимума M): $\frac{R_{\text{лев.}}}{R_{\text{прав.}}} = \frac{a}{b}$. Можно это условие выразить и в другой форме:

Производная

$$\frac{\partial M}{\partial z} = R_{\text{л.}} \frac{h}{a} - R_{\text{п.}} \frac{h}{b} = h \left(\frac{R_{\text{лев.}}}{a} - \frac{R_{\text{прав.}}}{b} \right).$$

Знак этой производной зависит от знака выражения, стоящего в скобках. Пока $\frac{R_{\text{лев.}}}{a}$, т.-е. средняя нагрузка на единицу длины левой ветки балки больше $\frac{R_{\text{прав.}}}{b}$ (средней нагрузки правой части), — приращение ΔM будет положительное, момент будет возрастать, и для нахождения максимума M нужно систему продолжать двигать вправо. Наконец, настанет время, когда

из левой в правую ветвь перейдет какой-то груз R_m , при котором $\frac{R_{\text{прав.}}}{b}$ окажется больше $\frac{R_{\text{лев.}}}{a}$, и значит мы начнем получать отрицательные приращения ΔM .

Очевидно, что мы прошли через значение максимума M , которое должно было наступить, когда P_m стоял на точке раздела. Получаем, следовательно, такое правило:

При инфлюентной линии в виде треугольника, наибольшее значение момента соответствует равенству средних нагрузок правой и левой части балки; при этом груз, при переходе которого через вершину при движении поезда слева средняя нагрузка левой части делается меньше средней нагрузки правой, должен быть расположен на точке раздела.

Этот раздельный груз P_m может быть найден как аналитически, так и графически. В самом деле, средняя нагрузка на всем пролете l равна $\frac{R}{l}$ и на левую часть балки приходится $\frac{R}{l} a$. Очевидно, что P_m будет первым из грузов, при котором сумма $P_1 + P_2 + \dots + P_m$ делается больше этой величины $\frac{R}{l} a$.

Графически P_m легко найти, разделяя геометрическую сумму действующих сил на части, пропорциональные отрезкам a и b . Если, что бывает в громадном большинстве случаев, это деление попадет на *протяжении* какого-либо определенного груза системы, то его именно и нужно поместить на *вершине* треугольной инфлюентной линии; тогда он может работать на *обе* эти ветви, распределяясь между ними по нашему усмотрению. В том редком случае, когда точка засечется не на каком-либо грузе, а *между* ними на границе двух грузов, положение системы становится неопределенным, и для максимума M безразлично, если система немного в пределах промежутка между теми грузами, между которыми попала наша точка раздела, передвинется в ту или другую сторону. В пределе для этого случая возможно, чтобы на вершине инфлюентной линии стоял *тот или другой* из двух соседних грузов.

Легко усмотреть, что такой случай будет соответствовать как раз тем точкам на проекции пространственной эпюры, где одна парабола пересекается с другой. Эти точки, ведь, именно и указывают, что в них момент под двумя соседними грузами *одинаков*. Соответствующий участок линейчатой поверхности в этом случае дает между двумя параболой *горизонтальную* прямую, перпендикулярную плоскости MOZ ". Случай этот встречается сравнительно редко, как будет выяснено в последующих параграфах.

§ 5. Узловая передача нагрузки.

Соображения конструктивного характера заставляют инженера в огромном большинстве случаев передавать нагрузку на балку не по всей ее длине, а только в некоторых определенных точках, называемых *узлами*. Причина такого устройства сооружений заключается в том, что сооружения большого пролета l , вообще больших размеров, обыкновенно состоят из двух (или даже из большего числа) балок, расставленных на значительное (до 6—10 метр.) расстояние друг от друга. При таком расстоянии движущуюся между балками нагрузку экономически невыгодно передавать на эти балки сплошным поперечным настилом, изображенным на рис. 151 сверху (хотя иногда это и делается). Большей частью применяют нижнюю схему рис. 151-го, т. е. на балки ставят на известном расстоянии *поперечные балочки* АА, на них опирают маленькие *продольные балочки* ВВ и уже на них кладут

поперечный настил C . На нашем рисунке, например, таким путем пролет настила уменьшился *втрое*, сравнительно с верхней схемой, отчего M уменьшилось *в девять раз* (по формуле $M = \frac{pl^2}{8}$), и при том же напряжении n можно взять *в девять раз меньший* момент

сопротивления $\frac{I}{\max. y}$.

Конечно, зато появились продольные балочки BB и поперечные AA , но расчет показывает, что все же в сумме это выгоднее. Расстояние между узлами называется *панелью*. Выясним, в каких же условиях оказывается в этом случае наша главная балка. Очевидно, что передача на нее действующей нагрузки будет происходить через узлы, на которые нагрузка, стоящая как бы на отдельных свободных продольных балочках BB передается по закону

рычага (конечно, для этого необходимо, чтобы балочки BB действительно в каждом пролетике были *отдельные*; когда это не соблюдается, явление усложняется, и приходится, строго говоря, уже пользоваться формулами неразрезных балок, которые будут приведены в следующих выпусках). Посмотрим, как это отразится на эпюрах и на инфлюентах Q и M (после определения M величины y' и y определяются по прежнему). Начнем с *эпюр*. Первоначальная эпюра M имеет надломы *под грузами*, но при наличии *узлов*, от узла до узла

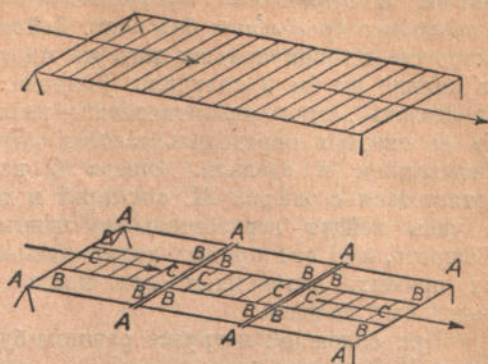


Рис. 151. Узловая передача нагрузки.

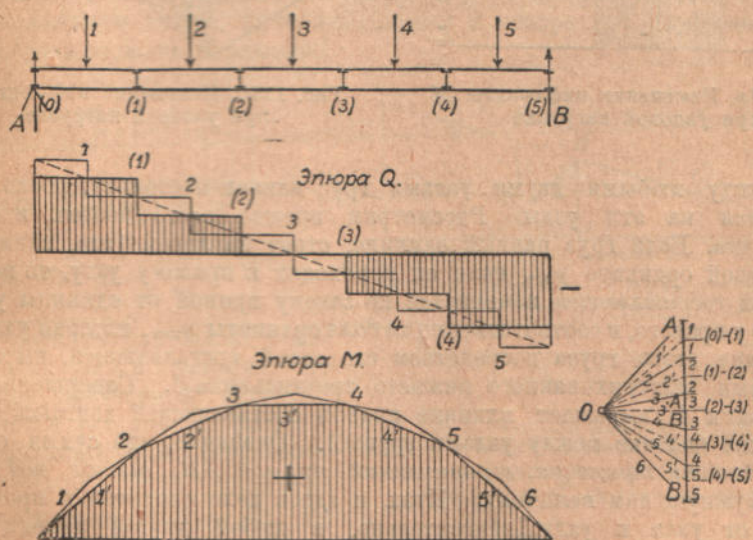


Рис. 152. Эпюры Q и M при узловой нагрузке.

нагрузки *нет*, и посему надломы могут быть только *под узлами*. С другой стороны под узлом прежние ординаты M не имеют оснований меняться, ибо они учитывают точно момент *всех* левых для данного узла сил. Ясно,

следовательно, что *сохранив ординаты под узлами и соединив их прямыми*, мы получим *эпюру моментов при узловой нагрузке*. Итак, эпюра M получается вписыванием в эпюру при *прямой нагрузке* ломаной линии с вершинами под узлами. Легко увидеть, что моменты между узлами получаются меньше, а *отрезаемые треугольники или многоугольники суть моменты в отдельных продольных балочках*. Действительно, ведь если бы мы захотели построить их при помощи того же многоугольника сил и того же полюса, мы именно их бы и получили. Конечно, здесь можно поступить для вывода так сказать „строго аналитически“ — разложить нагрузку каждой балочки на две ее опоры и определить *узловые нагрузки* — но ведь мы *это самое* своим вписыванием и сделали. Эпюра Q изменится существенно, но в полном соответствии с эпюрой M , с которой в данном случае мы и начали: от узла до узла пойдут горизонтальные прямые. Из многоугольника сил легко усмотреть, что эти прямые дадут возможность по расстоянию их от прежних прямых, полученных при *прямой нагрузке*, найти опорные реакции продольных балочек.

При сплошной нагрузке разница будет лишь в том, что первоначальная линия M — кривая.

Переходим к инфлюентам, и начнем опять с M — для какой-либо точки между узлами (в панели) (см. рис. 153а).

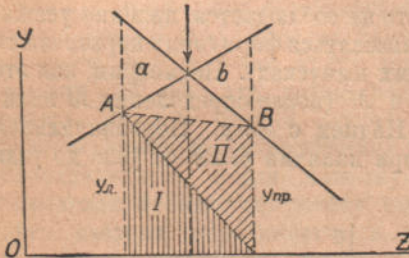


Рис. 153а. Изменение инфлюенты M при узловой нагрузке.

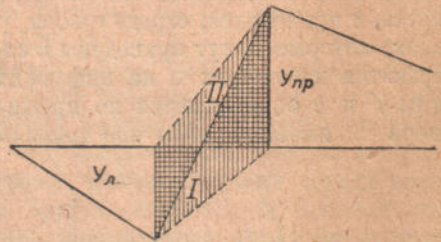


Рис. 153б. Изменение инфлюенты Q при узловой нагрузке.

Между любыми двумя узлами груз влияет постольку, поскольку он разложится на эти узлы. Рассмотрим прежде всего панель, в которой взята точка. Если груз равен единице, стоит на левом узле, влияние его равно левой ординате $u_{лев}$. Если он переходит к правому узлу, то величина его *левой составляющей* изменяется по закону прямой от единицы у левого узла до 0 у правого, и соответственно та *доля* ординаты $u_{лев}$, которая указывает на влияние этого груза посредством его *левой составляющей*, выражается ординатами заштрихованного нижнего треугольника I. Совершенно также треугольник II выражает влияние *правой составляющей* движущегося по продольной балочке между узлами груза I. Очевидно, что сумма ординат, т. е. *ордината трапеции, ограниченной прямой AB, взятой под грузом*, и дает нужную нам величину. Итак, и здесь дело сводится к проведению прямой от узла к узлу. Действительно, в любой другой панели нужно рассуждать так же, и только случайно, в виду того, что в нашем случае вне изучаемой панели идут прямые постоянного наклона, такое вписывание не отразится на их виде. В изучаемой панели отсеченный треугольник как раз есть инфлюентная линия M для продольной балочки и именно для той ее точки, которая приходится над *точкой большой балки*, относительно которой определяется момент. Действительно, маленькие треугольнички a и b подобны треугольникам A и B , которые получаются, если их стороны продолжить до

опорных ординат, (на рисунке этого не сделано) и, следовательно, в маленьких, так же, как и в больших, основания (вертикальные) равны высотам (горизонтальным) — а это и есть построение, дающее фигуру инфлюентной линии M (см. выше).

Для узла инфлюента останется неизменной, т.-е. сохранит вид треугольника, и она-то и является для нас наиболее важной, ибо наибольшие моменты бывают в узле. Поэтому, инфлюенту M между узлами редко строят.

Перейдем теперь к инфлюентам Q . Начнем также с точки в панели. Нет никаких оснований что-либо изменить в наших предыдущих соображениях и по прежнему следует соединить прямыми линиями все ординаты под узлами. От ближайшей левой к ближайшей правой ординате переход в этом случае совершится по *перекрученной трапеции*, заштрихованной на рис. 153в и также могущей быть изображенной, как *алгебраическая* сумма двух треугольников с начальными ординатами $U_{лев}$ или $U_{прав}$ и с конечными — 0.

В отличие от M , здесь нас всегда при узловой нагрузке будет интересовать именно инфлюента для точек в панелях, причем интересно отметить, что для *всех* точек в одной какой-либо панели инфлюента остается *такой же*. Инфлюента Q в узле не имеет под собой почвы, ибо так как мы рассматриваем узел, как *точку*, то нам надо каждую силу определенно отнести или к левым, или к правым силам, ибо этого требует самое определение Q , как равнодействующей *левых* сил, и невозможность реально представить *сосредоточенную* силу, а отнеся силы к той или иной *панели*, мы уже опять нуждаемся в определении Q для *панели*, а не для узла.

Относительно абсолютного наибольшего момента ясно, что при этих условиях он определяется, как наибольший из моментов *под узлами*. Эюра наибольших моментов под узлами представляет для сплошной нагрузки, независимо от того, будет ли эта нагрузка p — постоянная или k — переменная, ломаную линию, приближающуюся к квадратной параболе, ибо для каждого узла площадь инфлюенты равна:

$$\frac{1}{2} \frac{ab}{l} \cdot l = \frac{ab}{2}$$

$$\max M = \frac{pab}{2} + \frac{kab}{2},$$

$$\text{абсол. Мах } M = \frac{pl^2}{8} + \frac{kl^2}{8}.$$

Эюра максимальных и минимальных Q в панелях от сплошной постоянной нагрузки выражается уступчатой фигурой с горизонтальными отрезками, проведенными через ординаты наклонной прямой ($+\frac{pl}{2}$ на

левой; $-\frac{pl}{2}$ на правой опоре), взятые в *середине панелей*, ибо для любой панели разность площадей треугольников ede и abc в инфлюентных линиях равна разности площадей трапеции $fdeo_1$ и ao_1gb т.-е. разность площадей при узловой нагрузке будет та же, как и разность площадей для *середины* панели при непосредственной нагрузке (точка o_1 взята *посередине* панели).

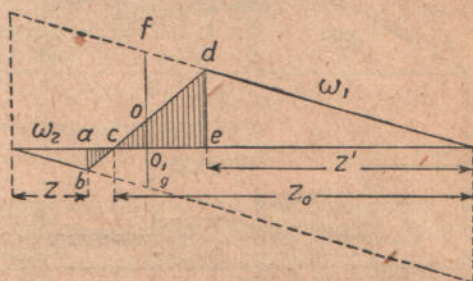


Рис. 154. Равенство полной площади инфлюенты Q в панели таковой же площади инфлюенты Q в середине панели при непосредственном действии не узловой нагрузки.

Действительно

$$\Delta cde - \Delta abc = \square odeo_1 + \Delta coo_1 - \Delta abc,$$

прилагая и вычитая равные fdo и bgo треугольники, получим:

$$\begin{aligned} \Delta cde - \Delta abc &= \square odeo_1 + \Delta fdo + \Delta coo_1 - (\Delta abc + \Delta bgo) = \\ &= \square fdeo_1 - (\Delta abc + \Delta bgo - \Delta coo_1) = \square fdeo_1 - \square abgo_1, \end{aligned}$$

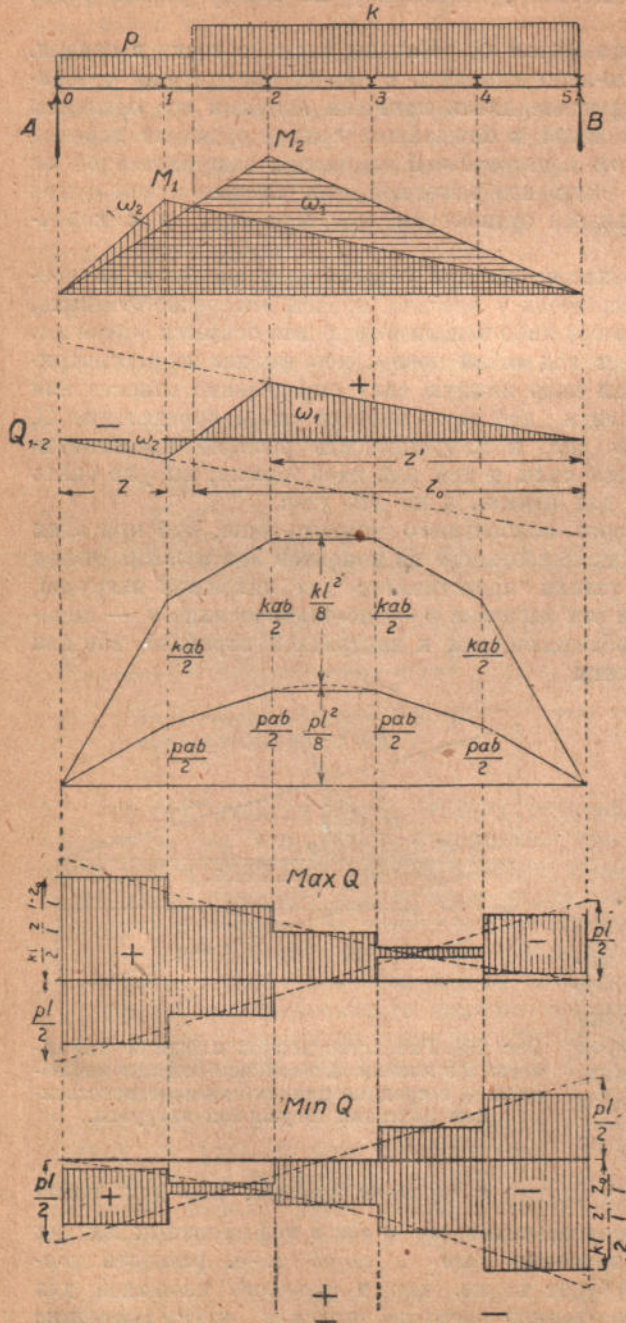


Рис. 155. Сплошная нагрузка постоянная и подвижная.

что и требовалось доказать. Да и кроме того ясно, что именно в середине панели мы получаем распределение сил на левые и правые одинаковое и при прямой и при узловой нагрузке.

Для сплошной подвижной нагрузки k мы имеем

$$\max Q = k\omega_1$$

$$\text{и } \min Q = k\omega_2.$$

Легко видеть, что,

$$\omega_1 = \frac{1}{2} \frac{z_1}{l} z_0$$

$$\text{и } \omega_2 = \frac{1}{2} \frac{z}{l} (l - z_0)$$

Это удобно представить для построения в таком виде

$$\max Q = \frac{k \cdot l}{2} \cdot \frac{z'}{l} \cdot \frac{z_0}{l}$$

$$\text{и } \min Q = -\frac{kl}{2} \cdot \frac{z}{l} \cdot \frac{l - z_0}{l}$$

В результате получаем ступеньки, показанные на чертеже. Для прямой (не узловой) передачи будем иметь кривые по формуле

$$\begin{aligned} \max Q &= + \frac{kz_1^2}{2l} \text{ и } \min Q = \\ &= - \frac{kz^2}{2l} \text{ где } z_1 + z = l \end{aligned}$$

Если сложить вместе влияния p и k , то мы получим, откладывая для k плюсы *вверх*, а для p плюсы *вниз* (для более удобного сложения ординат), две фигуры, рассмотрение которых укажет, что у левой опоры при данном соотношении k и p (k при небольших пролетах значительно больше p , при

пролетах около 100—120 м почти равно p , а далее делается менее его—таковы соотношения для железнодорожных однопутных мостов)—имеется забронированный участок с обязательным положительным Q , у правой опоры—таковой же забронированный участок с обязательным отрицательным Q , и лишь в середине Q может быть и положительным, и отрицательным а, следовательно и нулем. Очевидно, лишь в этом среднем районе возможен наибольший момент при любой протяженности по пролету нагрузки k , ибо при шах M мы должны иметь $Q=0$.

При изучении действия поезда диаграммы от подвижной нагрузки становятся менее закономерными и не поддаются выражению их готовыми формулами, но так как всегда можно подыскать сплошную нагрузку, эквивалентную поезду, по формуле $k \cdot \omega = \Sigma P \cdot y$ где k есть искомая сплошная нагрузка, ω —площадь той части инфлюэнтной линии, которая загружена поездом, а $\Sigma P \cdot y$ влияние поезда, определенное по ординатам,—то в общем фигуры действия поезда мало отличаются от разобранных. Конечно $k \neq \frac{\Sigma P}{z_0}$, где z_0 —длина загруженной части пролета, но близко к этой величине и при больших пролетах стремится к сплошной вагонной нагрузке.

Нами выше разобран более обычный случай равных панелей, идущих от опоры к опоре. Реже встречаются, но возможны и панели, перекрывающие опору, или идущие через конец консоли на берег и т. д. Пример таких панелей показан на рис. 156 с указанием, как следует в этом

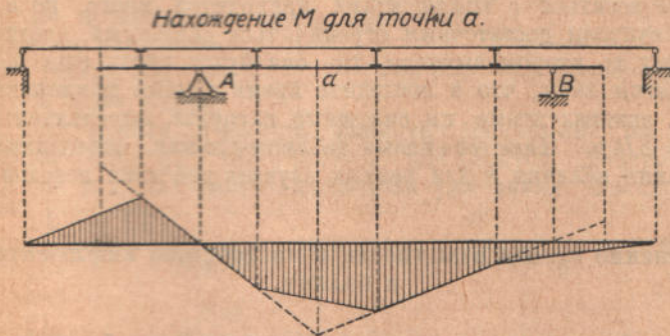


Рис. 156. Особые ненормальные панели.

случае поступать с инфлюэнтной (взята инфлюэнта момента посредине для консольной балки). Легко усмотреть из чертежа, что данные выше правила остаются в силе, но фигура инфлюэнтной существенно искажается. Такие случаи бывают не часто. Чаще других встречается переходная балочка, показанная над левым концом консоли, сводящая ординату у берега к нулю. Такая балочка смягчает нарастание нагрузки от движущегося поезда, который при крутом вертикальном окончании инфлюэнтной, характерном для концов консолей, сразу дает конечное значение ряду величин (опорным реакциям, Q и M), когда первый груз вступает на конец консоли. Переходная же балочка дает постепенное нарастание нагрузки и уменьшает этим ее динамичность.

В виду того, что при узловой нагрузке мы можем уже встретиться с инфлюэнтной не треугольной и не могущей быть разделенной на треугольные участки, а с инфлюэнтной многоугольной (криволинейные инфлюэнтные возможны лишь в статических неопределимых системах, о которых не говорится в настоящем выпуске), скажем несколько слов о том, как находить

в них наименее выгодное положение системы. Представим себе многоугольник с наклонами $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_5$ и с равнодействующими $R_1 \dots R_5$.

Для нахождения знака прироста искомой величины мы должны попеременно найти значение величины $\Sigma R_t \operatorname{tg} \alpha$ — и по ее знаку судить о том, следует ли двигать поезд вправо или влево. При этом случае, вообще более сложном, чем случай треугольной фигуры, надо обратить внимание на два обстоятельства:

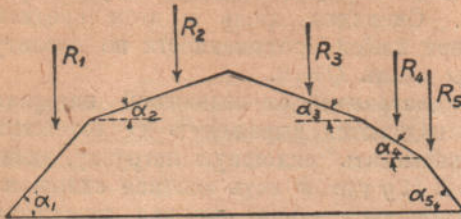


Рис. 157. Многоугольная инфлюента.

1) Переход *любого* груза через *любую* из вершин уже изменяет распределение R , а потому здесь *нельзя* следить за проходом грузов над какой-либо *одной* вершиной, хотя бы и наивысшей, а как бы считать, что при движении поезда слева направо *каждое* прохождение *какого-либо* груза через *какую-либо* вершину дает сигнал тревоги — указывает на необходимость проверки значения величины $\Sigma R_t \operatorname{tg} \alpha$.

2) При сложных формах линий возможны даже от *одной* системы *два* максимума, и следует не ограничиваться первым найденным максимумом, а искать дальше, если *не очевидно*, что полученный максимум есть наибольший.

Вообще возиться с инфлюентами приходится много, но в *настоящем* выпуске мы считаем достаточным ограничиться сказанным, предполагая развить эту тему во втором выпуске, где она будет иметь еще большее значение. Отметим лишь, что в последнее время широко применяются, вместо *систем сил*, эквивалентные им сплошные нагрузки, определяемые по формуле $k \cdot \omega = \Sigma P \cdot y$. Имеются целые таблицы-книжки, определяющие, напр., значение таких величин k для разных случаев действия поездов 1921 года.

Вообще возиться с инфлюентами приходится много, но в *настоящем* выпуске мы считаем достаточным ограничиться сказанным, предполагая развить эту тему во втором выпуске, где она будет иметь еще большее значение. Отметим лишь, что в последнее время широко применяются, вместо *систем сил*, эквивалентные им сплошные нагрузки, определяемые по формуле $k \cdot \omega = \Sigma P \cdot y$. Имеются целые таблицы-книжки, определяющие, напр., значение таких величин k для разных случаев действия поездов 1921 года.

§ 6. Применение метода взаимности к построению инфлюентных линий в балках.

В дальнейших выпусках нашего курса будет подробно развит так называемый *метод взаимности* (принцип Максвелля) и указаны широкие области его применения во всевозможных случаях. Но и в *настоящем* выпуске, в котором мы доказали для поперечного изгиба наличие взаимности между перемещениями в точках a и b , а именно, что $y = \frac{ab}{6EI} (l^2 - a^2 - b^2)$, мы можем использовать этот закон взаимности для нашей проблемы. Мы доказали, что эпюра прогиба и инфлюента прогиба идентичны, и что $y_{on} = y_{inf}$; из этого следует, что сила, равная единице, приложенная к точке $z = a$ дает в точке $z_1 = b$ такое же *линейное* перемещение, какое сила, приложенная в точке $z_1 = b$, даст в точке $z = a$. Но еще любопытнее то, что сила единица, приложенная в точке a (см. рис. 158) дает некоторое *угловое* перемещение в точке b , выраженное углом α (угол α можно найти из рассмотрения *эпюры* y) пара же единица, приложенная в точке b , дает такое же *линейное* перемещение в точке a . Действительно, это линейное перемещение измеряется, как известно из предыдущего, $\operatorname{tg} \beta$ (обычный способ измерения влияния момента: $X = M \operatorname{tg} \beta$). Но $\operatorname{tg} \beta$ есть тангенс угла наклона *эпюры* (или, что тоже, *инфлюенты*) под местом приложения пары $M = 1$, т. е. $\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha$. Нам не должно в последнем случае смущать приравнивание угла линейному перемещению, ведь речь идет об *угле*, выз-

ванном *единичной силой* и, следовательно, измерение его есть $\frac{L^0}{F^1}$, и о *перемещении*, вызванном *единичным моментом*, и, следовательно, измерение его есть $\frac{L^1}{F^1 L^1} = \frac{L^0}{F^1}$ т.-е. то же самое, и возможно равенство $\text{tg } \alpha = y_a$.

На основании вышезложенного укажем новый способ построения инфлюэнт и разберем его лишь для простой балки с консолями для *A* и *M*, повторив еще раз, что полное освещение вопроса будет дано в третьем выпуске, а для шарнирно стержневых ферм во втором выпуске.

Найдем инфлюэнту опорной реакции *A*. Для этого представим на время, что наш левый опорный стержень обладает упругостью, и приложим по его направлению вверх силу $P=1$. Такая сила, действуя на нашу балку и растягивая опорный стерженек, повернет всю балку вокруг правой опоры, не деформируя ее, и придаст ей наклонное положение, показанное на рис. 158а. Мы сразу видим,

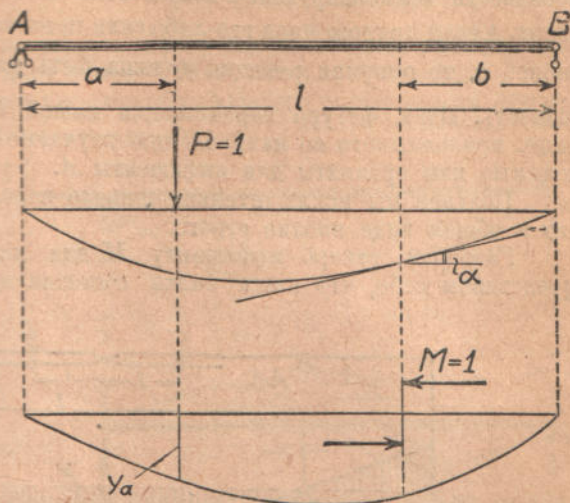
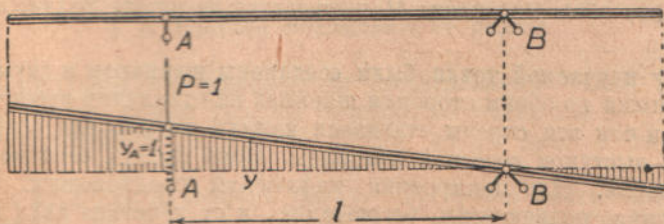


Рис. 158. Идея взаимности.

что новая фигура, если за масштаб принять перемещение по направлению нашего стерженька, и будет искомой инфлюэнт. Действительно, она имеет тот же вид, как ранее выведенная уже линия. Рассмотрим какую-



159а. Инфлюэнта *A*, построенная по методу Maxwell'a.

нибудь ординату y . Это есть перемещение данной точки, вызванное единичной силой, приложенной по направлению стерженька. Но в то же время ясно, что единичная сила, приложенная по этой ординате, как имеющая меньшее плечо относительно точки *B*, как-раз на величину y переместит (но уж сожмет) наш опорный стерженек, так как различные силы, действующие в пролете, а также и на консолях, переместят стерженек (если он признан упругим) на величину, во столько раз меньшую (или большую), величины y_a , получившейся от действия силы, приложенной непосредственно над стерженьком, во сколько раз z меньше (или больше) l или, что то же, во сколько раз y меньше (или больше) y_a . Отрицательные y показывают, что перемещение опоры будет в *другую* сторону. Но ведь на деле то перемещения *нет* — какова же должна быть сила опорной реакции *A*, кото-

рая не допустит перемещения и как бы осуществит случай бесконечно жесткого стерженька, который и имеет на деле место? Ясно, что сила эта должна быть по закону Гука пропорциональна перемещению, которое она должна произвести в данной упругой системе, и так как внешняя сила, равная единице, приложенная на опоре, произвела перемещение y_A вверх то, очевидно, опорная реакция должна равняться единице, чтобы произвести компенсирующее воздействие внешних сил перемещение на y_A вверх. А если приложенная где-либо сила производит перемещение стерженька, равное y , то опорная реакция должна быть равна $\frac{y}{y_A}$, что и требовалось доказать. Итак, фигура перемещения нашей балки от груза, равного единице, приложенного по направлению изучаемой нами опоры, дает все необходимые нам ординаты для инфлюенты A .

Позднее мы исключительно широко используем этот метод и докажем его в общем виде вполне строго.

Разберем теперь инфлюенту M для какой-либо точки (рис. 159в). Представим себе, что наша балка состояла из двух половинок, и что эти

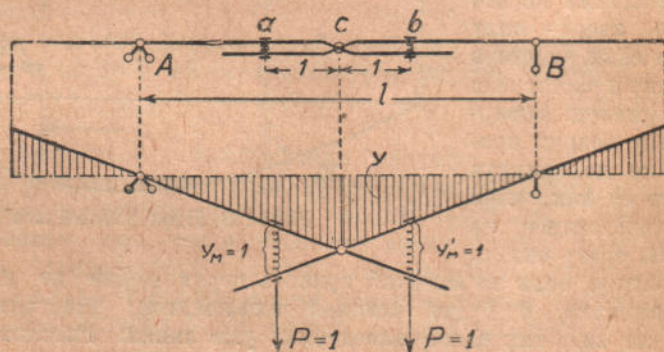


Рис. 159в. Инфлюента M , построенная по методу Maxwell'a.

половинки у изучаемой точки были соединены шарниром и двумя скрепами, расположенными по обоим сторонам шарнира на единичном расстоянии справа и слева, при чем эти скрепы стягивали каждую из половинок основных балок с хвостом — выступом соседней половины. Пока скрепы бесконечно жестки, балка — цельная. Для построения инфлюенты предположим, что скрепы стали упругими, подвижными, расшатались и от действия двух пар, равных единице, т.е. образующихся от единичных сил, приложенных с единичными плечами в точках a и b согласно чертежу — разошлись на величины $y_M = y'_M$, которые примем в нашем масштабе за единицу. Что означает собой любая ордината y ? Она, во-первых, указывает, насколько оседет данная точка при разладке стыка, то-есть от действия двух пар, равных единице, на разлаженный стык, во-вторых, укажет, насколько сила, приложенная в данной точке, раскроет стык (т.е. на какой угол она его раскроет, ибо $\frac{y_A}{1}$ есть в сущности тангенс угла α , а за малостью — самый угол, и уж, конечно, чем сила ближе к опоре B , тем меньше она способна раскроить стык), а в третьих — укажет, что восстанавливающая пара, которая вновь сделает стык жестким, должна быть во столько раз меньше (или больше) единичной пары, приложенной к разладившемуся стыку, во сколько раз y меньше (или больше) y_A . Итак и здесь мы доказали наше положение, хотя значительно менее наглядно, чем мы сможем это сделать в последующих выпусках.

Как общее правило, надо *расковать* тот элемент сооружения, для которого мы строим инфлюенту, построить малое движение, которому при этом сооружение подвергнется, и в известном масштабе, равном перемещению (линейному или угловому) рассматриваемой точки, ординаты, характеризующие передвижения остальных точек, и будут ординатами нашей инфлюенты. Если речь идет об опорных стержнях, надо временно считать их упругими, если речь идет об изгибающих моментах, надо временно поместить в изучаемой точке *упругий шарнир*.

Настоящее изложение—предварительное; так называемая основная теорема Строительной Механики дает общее и исчерпывающее освещение этого вопроса. Скажем лишь еще несколько слов об инфлюенте угла поворота. Мы тут

уже сразу можем сказать (см. рис. 159с) что инфлюента, напр., угла на опоре получится, если на опоре приложить пару, равную единице, и построить перемещения балки. В масштабе $y_A = 1$ все ординаты дадут нам инфлюенту; тоже можно сделать для середины. Построение перемещений в обоих случаях можно сделать точно, по аналитическому или графо-аналитическому методу—надо будет только знать значение EI .

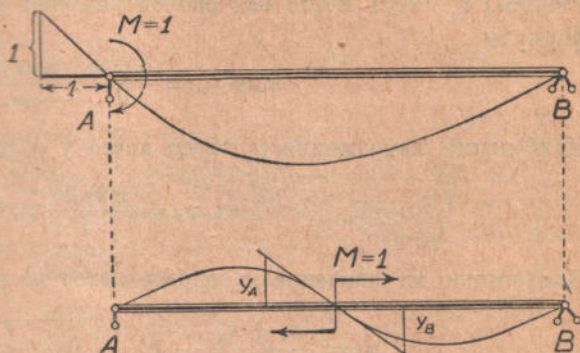


Рис. 159с. Инфлюенты y' , построенные по методу Maxwell'a для $z = 0$ и $z = \frac{l}{2}$

В этом методе особенно интересно то, что он сразу дает представление о том, *какой общий вид должна иметь наша инфлюента*—а это очень важно хотя бы для проверки аналитического построения.

§ 7. Полное исследование балки.

Все предыдущие соображения об исследовании балки, изложенные в последних главах, можно вкратце систематизировать так:

При исследовании балки мы можем иметь дело с двумя типами заданий:

1. Дана нагрузка и размеры балки. Требуется найти опасные напряжения, сравнить их с допускаемыми и в случае надобности исправить размеры.

2. Дана нагрузка и допускаемые напряжения. Требуется подобрать размеры балки.

Рассмотрим каждый из случаев отдельно, помятуя, что *руководящей нитью нам должны всегда служить шесть строк*.

I. Дана нагрузка и размеры.

Рассматриваем сначала отдельно *постоянную* нагрузку, в каком бы виде она ни была задана. Найдя *опорные* реакции (прежде всего!), строим эпюры Q и M от всей нагрузки сразу (методом веревочно-стержневого многоугольника). Далее изучаем *подвижную* нагрузку уже методом *инфлюентных* линий, при чем также строим в результате фигуры наибольших Q и M (Q —для панелей, M —для узлов). Затем выясняем те точки *по пролету*, в которых имеются: 1) наибольшее Q (обыкновенно у опор), 2) наибольшее M (обыкновенно у середины пролета) и 3) наипасное сочетание Q и M (около $1/4$ пролета, но немного ближе к середине). Первое

сечение опасно напряжением t_x , второе — напряжением n_x , а третье — напряжениями n_1 и n_2 и $\max t_x$. Необходимо, чтобы ни одно из напряжений n не превосходило предельного нормального напряжения, допускаемого для данного материала. При этом одинаково опасны, конечно, и напряжения n_x , и напряжения n_1 и n_2 . Если исходить из гипотезы опасности для материала значительных деформаций, следует проверку вести по формуле „идеальных“ главных напряжений; если же исходить из гипотезы сдвигов, проверку надо вести на $\max t_x$, допуская не более 50%—60% от основного допускаемого нормального напряжения. Эти операции называются проверкой на прочность. Наибольшее простое (т.-е. вертикально или горизонтально направленное) t_x имеет место над опорой большей частью у нейтральной оси по формуле

$$\max t_x = \frac{\max Q}{I} \cdot \frac{\max S}{b_{\text{сред.}}}$$

Наибольшее напряжение n_x имеет место у середины пролета по формуле

$$\max n_x = \frac{\max M}{I} \max y.$$

Наибольшее же значение n_1 определяется по формуле

$$n_1 = \frac{n_x + n_y}{2} + \sqrt{\left[\frac{1}{2}(n_x - n_y)\right]^2 + t_x^2},$$

которая, при n_y (местное напряжение) = 0, приводится к виду

$$n_1 = \frac{n_x}{2} + \sqrt{\left(\frac{n_x}{2}\right)^2 + t_x^2}.$$

Эта формула требует для своего максимума одновременного большого значения и n_x и t_x , т.-е. одновременного большого значения M и Q .

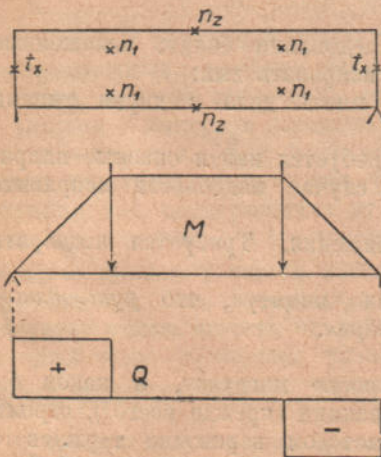


Рис. 160. Расчет балки под действием скака.

Такое значение следует поискать между опорой и серединой пролета. Иногда оно определяется сразу, напр., при действии на пролет двух равных грузов (случай шпалы, поперечной балки); именно, под грузами величины M и Q одновременно имеют свои максимальные значения. При сплошной нагрузке, и всякой иной, на нее похожей, (напр., поезд) такую проверку производят на четверти пролета. По высоте наиболее опасное место получится там, где сечение, обычно имеющее форму, близкую к двутавровому (см. рис. 162) как наиболее выгодную в смысле момента инерции, переходит из широкого (большое a) в узкое (малое b). Здесь и n_x еще достаточно велико и t_x уже достаточно велико (см. рис. 160). На рис. 161 показан характерный вид эпюр n_x , t_x , n_1 , n_2 , $\max t_x$ и $\min t_x$ для зетообразного сечения причем для точек, взятых на верхней

и нижней четверти, а также для срединной точки — построены еще и эллипсы напряжений и директрисные кривые. Напомним здесь кстати

еще раз, что *пересечение* эллипсов с директрисными кривыми не имеет никакого реального значения, ибо эллипсы и директриссы неизбежно строятся в *разном* масштабе. Любопытно еще при рассмотрении диаграммы отметить, что $\min n$, начавшись наверху с тем же знаком, как и n_z , сохраняет его и внизу, т.-е. там, где n_z уже положительно: для $\max n$ имеет место обратное явление. Итак, даже у самых краев балки, наряду с *растяжением* нижних волокон наблюдаются *сжимающие* напряжения в некоторых нап-

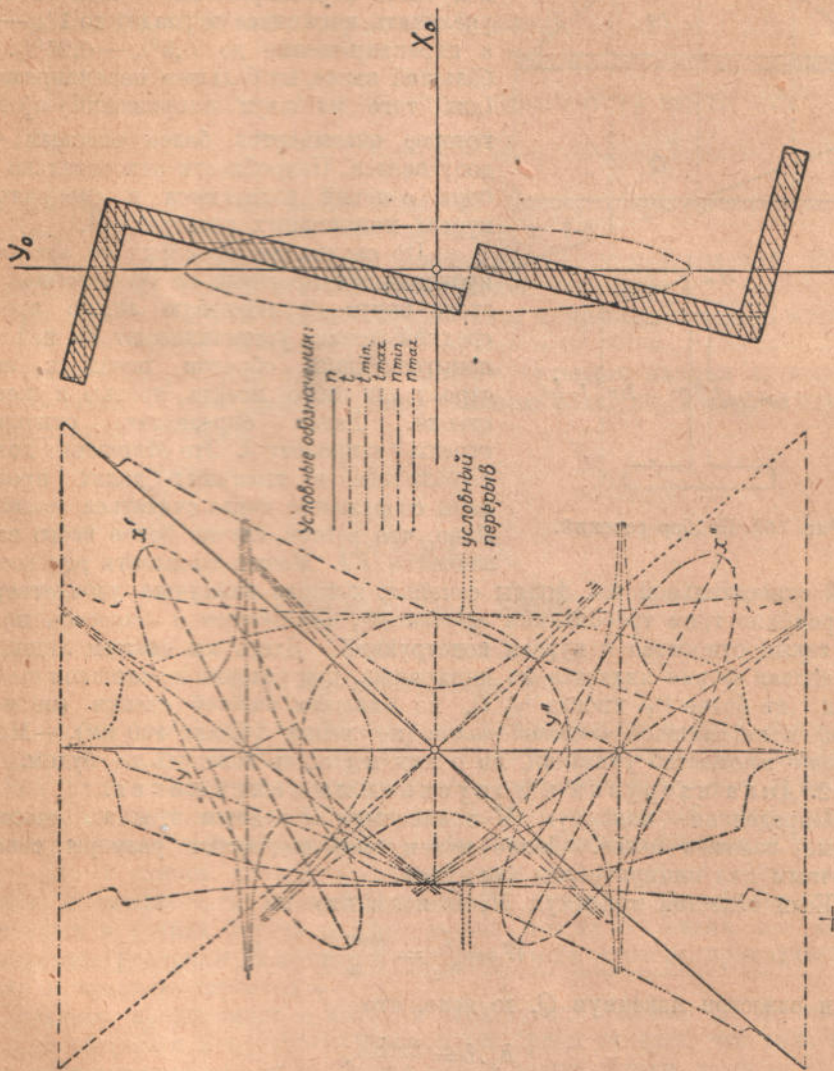


Рис. 161. Эпюры напряжений, эллипсы и директрисные кривые.

влениях (поэтому-то директрисса и есть гипербола), в верхних волокнах — обратно. Если игнорировать n_y , то *одна из ассимптотических линий* наших гипербол на *любом* горизонте должна быть горизонтальной, ибо на горизонтальной площадке при отсутствии или не учете местного напряжения нормального напряжения *нигде* по высоте нет.

Отыскав $\max n$ и $\max t$, сравниваем их с допускаемыми напряжениями материала. Конечно, одновременно удовлетворить обоим напряжениям,

т.е. оба получить в обрез равными предельным допускаемым—трудно, хотя и желательно. При *постоянном* сечении обыкновенно мы стараемся выбрать сечение, в *обрез* (без запаса) удовлетворяющее n_2 по середине и с *запасом* удовлетворяющее t_x на опоре. При *переменном* сечении можно и обоим напряжениям удовлетворить в обрез, что будет наиболее экономично.

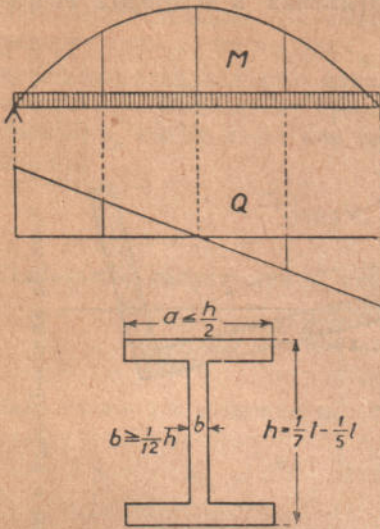


Рис. 162. Подбор сечений.

Если в данном сечении окажется *запас*, следует сечение немного уменьшить, если получится перенапряжение — надо сечение увеличить, пока запас не упадет до $1^0/0$ — $2^0/0$, а перенапряжение до $0,5^0/0$ — $0,25^0/0$. Ни бóльший запас, ни бóльшее перенапряжение (для того из двух напряжений n_2 и t_x , которое оказывается более опасным) — не допускается. Подробности относительно подбора сечений излагаются в специальных курсах инженерных конструкций.

По окончании проверки на *прочность* производится проверка на *жесткость*. Для этого берут инфлюэнтную линию прогиба средней точки, устанавливают на ней наименьшим образом поезд и затем строят для этого поезда третью и шестую строки. Далее определяют отношение стрелы f к пролету l . Это отношение должно выражаться в тысячных долях пролета, дабы сооружение могло считаться *жестким*. Ясно, что в этом случае более всего важно значение EI . Можно высказать ряд соображений

относительной той формы сечения, которая наилучше удовлетворяет одновременно трем требованиям *прочности, жесткости и легкости*, но эта тема также относится к курсам конструкций. Здесь мы скажем лишь, что двутавровая форма является из наилучших, при условии не слишком *высокой* стенки (не более $1/7$, иногда $1/5$ l), не слишком *тонкой* стенки (не менее 10 мм), и не слишком *широкой* полки (не свыше $1/2$ h или 400 мм).— Можно дать еще множество указаний, но о них мы здесь говорить не будем.

2. Дана нагрузка и допускаемые напряжения.

Определение максимум M и максимум Q ведется тем же способом, который изложен выше. Далее путем *проб* подбирают размеры сечения по точным или эмпирическим формулам.

Если известен максимум M , то ясно, что

$$W = \frac{I}{h/2} = \frac{\max M}{n}$$

и если известен максимум Q , то ясно, что

$$h_0 \cdot b = \frac{\max Q}{t},$$

где n и t суть допускаемые напряжения, h_0 есть плечо внутренней пары, а b — ширина сечения по нейтральной оси. Для двутавра $h_0 = \approx 0,8 h$, а b , как мы уже выше сказали, не менее 10 мм, а в прокатанном цельном двутавре равно $\frac{1}{12}$ — $\frac{1}{10} h$. Итак, мы можем найти h по эмпирической формуле

$$0,8 \cdot h \cdot 0,08 \cdot h = \frac{\max Q}{t}.$$

Эту величину следует исправить на конструктивно целесообразное отношение $\frac{h}{l}$, о котором мы уже говорили (в среднем $\frac{1}{7} - \frac{1}{6} l$).

Зная h , можем найти и b , как $\frac{1}{10} - \frac{1}{12} l$, или как 10—15 мм, и нам остается найти I . Но и I в двутавре приближенно равно $2 \cdot \omega \left(\frac{h}{2}\right)^2$, где ω есть площадь каждой из двух полок. Ясно, что эмпирически

$$W = \omega \cdot h \quad \text{и} \quad \omega = \frac{\max M}{n \cdot h}.$$

Между прочим, последняя формула грубо выражает ту мысль, что

$$n \cdot \omega \cdot h = M,$$

т. е., что внутренняя пара равна внешней. После выбора размеров сечения, производят его проверку так, как описано в п. 1-м.

Здесь также необходимо внести конструктивные исправления. В более сложных случаях подбор сечений существенно усложняется.

По выборе сечения прогиб определяется и проверяется тем же порядком, как и в первом случае.

Вообще вопрос этот сложен и требует большого навыка и конструктивного чутья. Здесь указаны лишь главные вехи, по которым идут при решении этой проблемы.

ГЛАВА X.

Продольный изгиб.

§ 1. Происхождение явления.

Обычно продольный изгиб считают возникающим в виду совершенно неизбежного, хотя и очень малого, *эксцентриситета* в приложении продольной силы. Вследствие невозможности идеально точно выточить самый стержень, подверженный действию продольной сжимающей силы, идеально точно приложить действующую силу как раз в центре сечения и т. п. причин — уже с самого начала действия силы мы получаем таким образом момент и вызываемый им изгиб. Конечно, это явление возникает только в длинных и тонких брусах, вернее только в этих условиях это явление приобретает реальную величину, с которой очень и очень приходится считаться и практику-строителю.

Однако, предпосылка о наличии эксцентриситета нам не нужна — для большей общности и цельности вывода мы будем считать, что сила приложена *идеально-центрально* (с теоретической точки зрения даже *нужно* сделать подобное предположение), тогда картина будет такова: первоначально совершенно прямой стержень сначала (1) работает на сжатие, затем (2) по мере увеличения силы, немного прогибается, устойчиво держась несколько мгновений на некоторой небольшой стрелке (*пружинит*) и наконец (3) резко изгибается; явление в этой третьей стадии приобретает катастрофический характер и может окончиться даже переломом образца, хотя возможен и катастрофический изгиб без разрушения тела и даже без перехода им предела упругости, если тело очень гибко и упруго. Ниже мы докажем, что подобные явления совершенно неизбежны, никоим образом не зависят от

внецентренности приложения силы, а заложены в самой сущности явления, и докажем это, исходя из принципа устойчивости деформаций, принятого современной Теорией Упругости. Соображения в кратких словах сводятся к следующему:—в теле *трех измерений* под действием данной системы внешних сил, может существовать только одна устойчивая форма равновесия, возникает *только одна* определенная единственно возможная форма деформированного тела. Когда же имеем дело с телом *двух или одного измерения* (тонкая пластинка, длинный стержень), то оказывается, что форма деформированного тела иногда не может быть предсказана заранее—может быть *несколько* разнообразных форм деформированного тела, способных воспри-

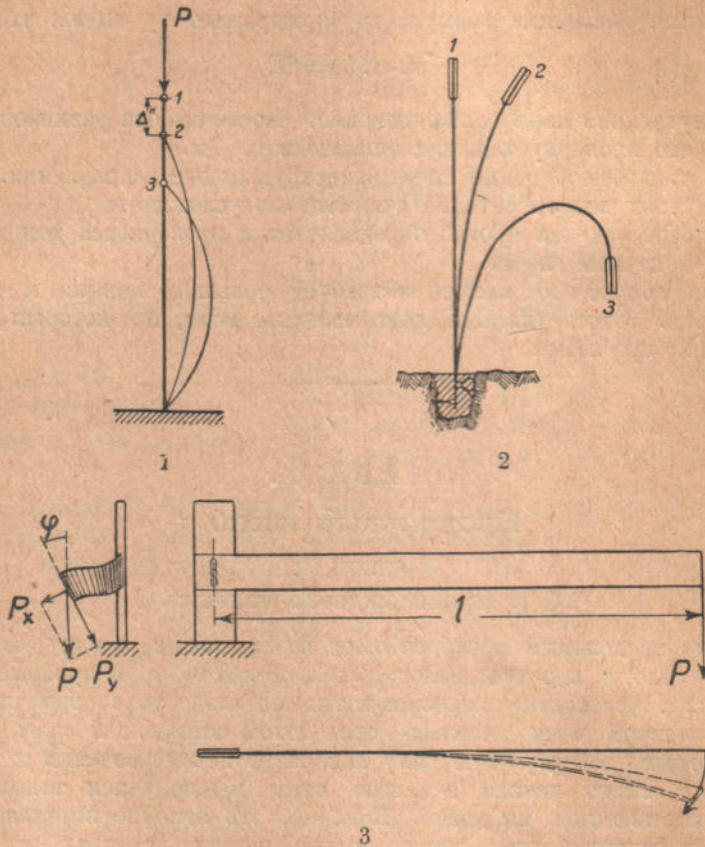


Рис. 163. Три примера неустойчивой деформации.

нять данную систему действующих сил. Имея дело с явлением такого порядка, мы не можем заранее предсказать ту или другую форму деформации,—явление происходит по весьма сложному закону, и под влиянием обстоятельств, которые ниже будут указаны, может протекать тем или иным путем.

Леонард Эйлер, более ста лет тому назад, изучая продольный изгиб, показал с помощью вариационного исчисления, что для тонкого и длинного стержня (приближающегося к телу первого измерения) может существовать великое множество различных упругих линий, с одинаковым успехом могущих воспринять данную нагрузку.

Современная наука изучает эти вопросы более простыми методами, приходя однако к тем же результатам. Формула Эйлера — одна из старейших

в Строительной механике и в то же время одна из наиболее бесспорных. Заметим предварительно, что со случаем неустойчивости изучаемой формы деформации нам придется встречаться не только в продольном изгибе, но и при других явлениях, как мы покажем на нескольких примерах, к которым и обращаемся.

I. Представим себе прямой легкий стержень-тросточку, подверженный действию *абсолютно центральной* сжимающей силы. Первоначально, пока сжимающая сила не достигла известного предела, тросточка устойчиво сопротивляется ее действию, работая на простое сжатие и оставаясь прямой. Затем можно подметить вторую фазу явления — тросточка слегка изогнется, сохраняя однако, при известной величине вполне центральной действующей силы, устойчивое положение. Наконец, когда будет превзойден известный предел, тросточка, почти мгновенно круто изгибается, выскальзывает из рук и может даже сломаться, — явление носит катастрофический характер. Отметим себе три стадии происходящего здесь явления, обозначенные на рис. 163 цифрами — эти три стадии мы сможем проследить и на других примерах.

II. Колос ржи в поле также может иллюстрировать явление продольного изгиба. В начале лета, когда вес колоса еще незначителен, стебель свободно сопротивляется этому весу, оставаясь совершенно прямым. Затем, по мере созревания колоса, можно бывает подметить и второе явление — устойчивого продольного изгиба. Наконец, когда нагрузка перейдет некоторую критическую величину — мгновенно наступает третья фаза явления, могущая и не вызвать перелома колоса, но уже катастрофическая. Как и в прежнем примере — первые две фазы характеризуются устойчивостью в сохранении исходного очертания конструкции, чего никоим образом нельзя сказать о третьей фазе явления. Принято называть символом $P_{кр}$ (груз критический) тот груз, которому соответствует *переход в третье состояние*, и при котором возможно мгновенное равновесие *второго состояния*.

III. Возьмем, наконец, еще один пример неустойчивости деформации, на этот раз дающий нам более сложную комбинацию происходящих явлений. Обыкновенная линейка-рейшина, установленная и закрепленная на краю стола *в строго вертикальном положении*, подвергается действию изгибающей силы, приложенной на ее конце и *точно* совпадающей по своему направлению с плоскостью линейки. Однако, как бы тщательно мы ни поставили опыт, рейшина неизбежно при достаточном грузе выйдет из вертикального положения, вывернувшись на сторону. В конце концов придется встретиться уже с комбинацией двух изгибов и кручения, ибо выворачивание, *во-первых*, поворачивает ось и создает *косой изгиб*, а *во-вторых*, создает момент кручения — крутит рейшину.

Можно еще указать на пример круглого закручиваемого стержня; при известном значении крутящего момента закручивание осложняется завиванием — ось стержня стремится принять очертание *спирали*.

Обращаясь к продольному изгибу, заметим, что он уже давно привлекает внимание ученых, исследовавших вопрос не только с теоретической точки зрения, но и по опытным данным лабораторий. Результат опытов указывает на то, что если сопоставлять с одной стороны значения действующего груза P , а с другой — величины получающихся прогибов, то можно установить при правильной и точной постановке опытов, что прогиб сначала почти не обнаруживается при возрастании силы P , но затем, близ некоторой точки $P_{кр}$, сразу катастрофически изменяет свою величину с ничтожной на бесконечно большую. Существование „критической точки“, таким образом, подтверждается и опытными данными.

Иллюстрируем наши экспериментальные данные математическими формулами. Назовем *первичным явлением* 1-ю фазу процесса (см. примеры

тросточки и рейшины), *вторичное явление* пусть соответствует появлению дополнительных категорий деформаций.

Первичное явление: 1-й и 2-й пример — сжатие. 3-й пример — простой изгиб.

Вторичное явление: 1-й и 2-й примеры — изгиб, 3-й пример — косо́й изгиб и кручение.

С математической точки зрения первичное явление, не заключая в себе ничего нового, нам неизвестного, характеризуется равенством нулю суммы *внешней и внутренней работы* $T_e = -T_i$. Затем наступает вторичное явление — внешняя сила совершает напр. при продольном изгибе некоторую дополнительную работу, определяемую, например, в 1-м примере перемещением Δ'' конца трости из положения 1-го в положение 2-е, внутренние силы также совершают дополнительную работу уже *изгиба*, и при этом может оказаться (ниже будем сравнивать *абсолютные значения* величин T_e и T_i):

1) *Дополнительная работа внешних сил < дополнительной работы внутренних т.е.* $\Delta T_e < \Delta T_i$ или

$$P \cdot \Delta'' < \frac{1}{2} \int_0^s \frac{M^2}{EI} ds$$

Никаких неожиданных сюрпризов мы не получаем, явление протекает в границах *первой стадии* (устойчивого состояния) — тело из первой стадии не выходит.

2) *Дополнительная работа внешних сил > дополнительной работы внутренних сил т.е.* $\Delta T_e > \Delta T_i$.

$$P \cdot \Delta'' > \frac{1}{2} \int_0^s \frac{M^2}{EI} ds$$

Явление приобретает катастрофический характер — третья стадия.

3) *Дополнительные работы равны одна другой т.е.* $\Delta T_e = \Delta T_i$.

$$P \cdot \Delta'' = \frac{1}{2} \int_0^s \frac{M^2}{EI} ds$$

Наблюдаем переход из первой в третью стадию *через вторую*.

Это характерно для одного только момента — критической силы. Невольно мы зададим себе вопрос, отчего же, по какой причине происходит это явление, характерное между прочим тем, что при нем *закон независимости действия сил не имеет места*, ибо небольшая добавка силы у критического груза вызывает громадное изменение в величинах перемещений, и в разрешении этого вопроса натолкнемся на некоторые трудности.

Эйлер доказал математическим путем, что две сжимающие силы могут быть уравновешены не только одной прямолинейной осью, но и множеством криволинейных упругих линий, и вывод этот не потерял своего значения и по настоящее время для объяснения изучаемого нами явления.

За последнее время новые исследования в этой области заставили вспомнить стройную теорию, или вернее принцип „наибольшего покоя“, провозглашенный еще французским ученым Мопертюи и дающий новое освещение Теории Упругих сил. Согласно принципу Мопертюи (принцип наименьшего действия), все упругие явления, возникающие в телах, подчиняются

одной и той же идее: доставить рассматриваемому телу состояние *наибольшего покоя* (упругого), наступающего тогда, когда оно переходит в такое состояние, что приложенные к нему силы не легко смогут вывести его из этого состояния. Например, та тросточка, с которой нам уже приходилось встречаться, перейдя в третью стадию явления, стремится настолько изменить свою форму, чтобы совершенно сблизиться своими концами, ибо тогда ее действительно трудно будет вывести из этого состояния (упругого покоя). Между прочим, этому принципу имеется аналогия во втором законе термодинамики — „законе обезценения энергии“.

Прежде чем перейти к выводу формул продольного изгиба, скажем еще несколько слов для иллюстрации положения о влиянии соотношения между величинами ΔT_e и ΔT_i на ход явления.

Мы исходим из положения, что идеально центрированная продольная сила, работая на сжатие длинного стержня, совершенно неизбежно приводит к явлению продольного изгиба, между дополнительными внешней и внутренней работами. Это явление имеет некоторую аналогию со следующим опытом: круглый шар расположен внутри полого полушария, и на него давит вертикальный штифт, нагруженный грузом P . Несмотря на идеальную точность постановки опыта, все же при некоторой величине груза P шарик весом Q неизбежно начнет двигаться вбок и вверх. Это произойдет как раз тогда, когда $P \cdot \Delta y$ станет равным $Q \cdot \Delta y'$, что получается при определенном соотношении между P и Q . И здесь имеет место принцип Мопертюа.

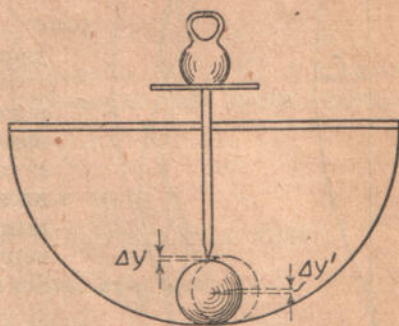


Рис. 164. Пример неустойчивого равновесия, зависящего от величины действующей силы.

Несмотря на идеальную точность постановки опыта, все же при некоторой величине груза P шарик весом Q неизбежно начнет двигаться вбок и вверх. Это произойдет как раз тогда, когда $P \cdot \Delta y$ станет равным $Q \cdot \Delta y'$, что получается при определенном соотношении между P и Q . И здесь имеет место принцип Мопертюа.

§ 2. Классический вывод формулы Эйлера.

(Непосредственная интеграция).

Продольную ось назовем OZ . Буквой f обозначим стрелку наибольшего прогиба, возникающего по середине (из условия симметрии). f — вообще величина очень малая (исчезающе малая), и хотя существование ее при переходной второй мгновенной стадии нам определенно известно, но точная ее величина не поддается учету; впоследствии мы увидим, что она, входя в первоначально написанные нами формулы, после математических преобразований сокращается, оставаясь, таким образом, нам неизвестной и ненужной для цифрового определения.

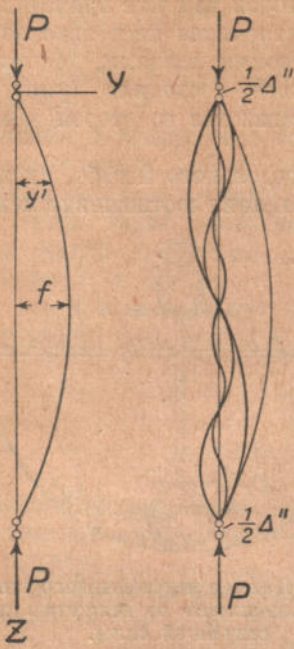
Между прочим, самая возможность и даже неизбежность выгиба при достаточной силе, хотя бы и центральной, может быть объяснена на основах теории вероятности тем, что вероятность сохранения вертикальной оси при некоторых условиях равна нулю.

Действительно, представим себе обычные примеры мгновенного равновесия из физики — например конус, стоящий на вершине; ясно, что он *может* теоретически так стоять, и ясно, что он *никогда* так не станет — *никогда не устоит* — вероятность мгновенного равновесия равна нулю.

Имеем формулу, известную нам из теории простого изгиба:

$$EIy'' = -M; \quad y'' = -\frac{M}{EI} \quad (\text{здесь } I \text{ есть, конечно, } \min I)$$

но $M = Py$, значит $y'' = -\frac{P}{EI} y$. Величина $\frac{P}{EI}$ существенно положительна и может быть в математической форме выражена так:



$$\frac{P}{EI} = a^2$$

где

$$a = \sqrt{\frac{P}{EI}},$$

тогда получаем

$$y'' = -a^2 y.$$

Задача свелась к интегрированию этого дифференциального уравнения.

Для получения общего решения дифференциального уравнения, достаточно, как известно, знать два его произвольных решения, и тогда общее решение может быть представлено, как сумма двух частных с произвольными постоянными. В нашем уравнении данному аргументу удовлетворяют такие функции: $\sin az$ и $\cos az$.

В самом деле

$$\begin{aligned} (\sin az)' &= + a \cos az & (\cos az)' &= - a \sin az \\ (\sin az)'' &= - a^2 \sin az & (\cos az)'' &= - a^2 \cos az \end{aligned}$$

Рис. 165. Классический вывод формулы Эйлера.

Итак, проверка показала, что эти функции действительно являются частными решениями нашего уравнения. Поэтому, в общем виде наше y (т.-е. упругая линия) имеет вид:

$$y = A \sin az + B \cos az$$

(где A и B — числовые коэффициенты — произвольные постоянные интегрирования). Формула эта между прочим совершенно аналогична формуле дрожания струны. Этой интересной аналогии мы коснемся в дальнейшем изложении.

Два частных решения дифференциального уравнения $y'' = -a^2 y$ написаны нами в порядке случайного их нахождения. Однако, к этому же результату можно подойти и путем строгих математических рассуждений. Подставим в наше уравнение

$$y' = -a \cdot y$$

вместо y показательную функцию e^{mz} .

$$y = e^{mz}; \quad y' = m^2 e^{mz};$$

но

$$y'' = -a^2 y$$

т. е.

$$m^2 e^{mz} = -a^2 \cdot e^{mz},$$

откуда

$$m^2 = -a^2$$

$$\begin{aligned} m_1 &= + ai & y_1 &= e^{aiz} = (e^{iz})^a \\ m_2 &= - ai & y_{11} &= e^{-aiz} = (e^{-iz})^a \end{aligned}$$

Представим комплексные выражения $e^{\pm iz}$ в тригонометрической форме
 $e^{+iz} = b_1 (\sin z + i \cos z)$; $e^{-iz} = b_2 (\sin z - i \cos z)$

здесь b_1 и b_2 — некоторые комплексные числа.

Имеем по формуле Муавра:

$$(e^{+iz})^a = y_1 = C_1 (\sin az + i \cos az)$$

$$(e^{-iz})^a = y_2 = C_2 (\sin az - i \cos az)$$

$$y = y_1 + y_2 = (C_1 + C_2) \sin az + i (C_1 - C_2) \cos az$$

Здесь

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= b_1^a \\ C_2 &= b_2^a \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{комплексные} \\ \text{числа} \end{array}$$

Полученные нами комплексные коэффициенты C_1 и C_2 в условиях нашей задачи являются сопряженными; обозначим их таким образом:

$$C_1 = n + mi; \quad C_2 = n - mi.$$

Отсюда:

$$C_1 + C_2 = 2n = A \text{ (вещественное число)}$$

$$i(C_1 - C_2) = i 2mi = -2m = B \text{ (вещественное число).}$$

Делая соответствующую подстановку, вновь получаем:

$$y = A \sin az + B \cos az,$$

где A и B — некоторые вещественные коэффициенты.

Формула эта, в условиях нашей задачи может быть упрощена. В самом деле, из условия равенства нулю прогиба y на верхнем шарнире ($z = 0$) получаем $B = 0$.

Далее из значения y_{\max} имеем $A = f$. В самом деле: в месте, где $y = \max$, $y' = aA \cos az = 0$; a и A — веществ. числа, значит $\cos az = 0$, но y_{\max} бывает при $z = \frac{l}{2}$ т.е. $\cos a \frac{l}{2} = 0$ Отсюда $\sin \frac{al}{2} = 1$;

$$y_{\max} = A \sin \frac{al}{2} = A = f.$$

Формула наша получает такой вид:

$$y = f \sin az,$$

т.е. линия прогиба — синусоида.

Из симметричности нашего бруса и действующих на него нагрузок заключаем, что в середине бруса мы должны получить прогиб y или равный f , или равный нулю (если имеем несколько волн)

$$y = (f \sin az)_{z = \frac{l}{2}} = f \text{ или } 0;$$

потому

$$(\sin az)_{z = \frac{l}{2}} = 1 \text{ или } 0.$$

Итак,

$$(\sin az)_{z = \frac{l}{2}} = \sin \frac{al}{2} = 1 \text{ или } 0,$$

откуда

$$\frac{al}{2} = \frac{n\pi}{2}; \quad a = \frac{n\pi}{l}$$

Значит, для прогиба в любой точке получаем

$$y = f \sin \frac{n\pi}{l} z$$

n —число целое и положительное и может иметь различные значения, например, имеем $(a = \sqrt{\frac{P}{EI}})$

$n = 1;$	$y = f \sin \frac{\pi z}{e};$	$al = \pi;$	$P_1 = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$
$n = 2;$	$y = f \sin \frac{2\pi z}{e};$	$al = 2\pi;$	$P_2 = \frac{2^2 \cdot \pi^2 EI}{l^2}$
...
$n = m;$	$y = f \sin \frac{m\pi z}{l};$	$al = m\pi;$	$P_m = \frac{m^2 \cdot \pi^2 \cdot EI}{l^2}$

Таким образом, упругая линия в продольном изгибе — синусоида, могущая давать любое число „пучностей“, что в соответственное число раз увеличивает и критическую силу. Например, если имеем 2 пучности, можно критическую силу увеличить в 4 раза и т. п. Как видно, величина силы растет весьма быстро, но получить кривую даже с 2-мя пучностями, а особенно — дальнейшие формы продольного изгиба, практически совершенно неосуществимо. Опять же и здесь можно сказать, что *вероятность высших форм равна нулю*. Их мы можем себе представить лишь теоретически (см. рис. 165). Впрочем, высокие мачты радиотелеграфа, *заранее расчленен-*

Радио мачта (с большим числом волн)

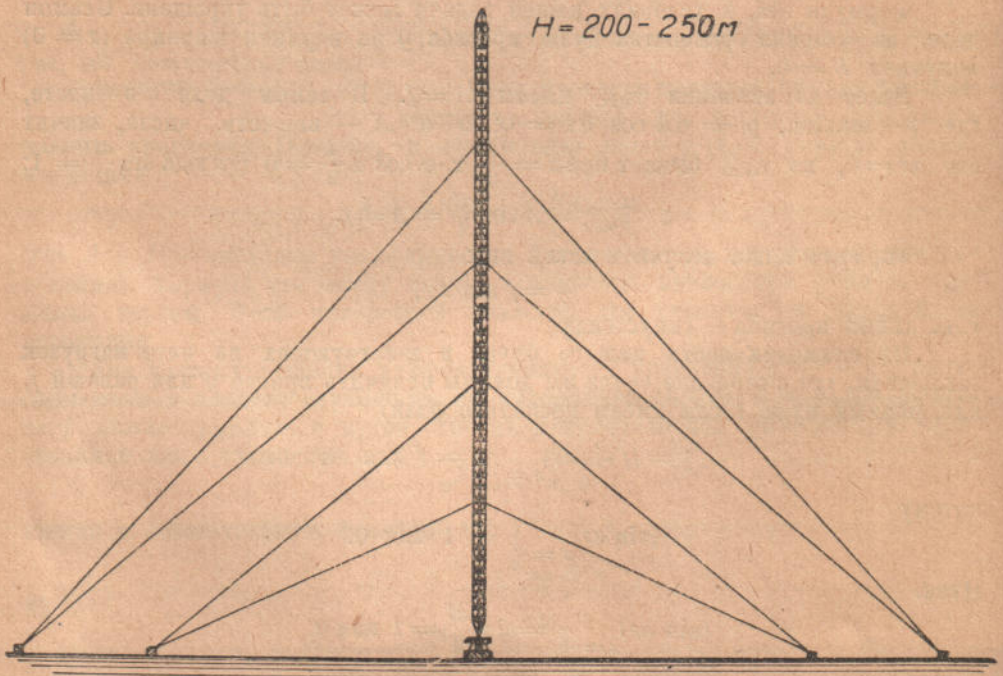


Рис. 166. Радиомачта с большим числом волн, для высот от 200 до 250 м.

ные вантами, обеспечивают нередко ряд узлов и пучностей, предусмотренных в высших формах формулы Эйлера (см. рис. 166).

Итак практическое значение имеет лишь формула, характеризующая явление 1-го порядка, а это и есть основная формула Эйлера:

$$P_1 = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

или

$$n_{кр} = \frac{P_{кр}}{\omega} = \pi^2 E \left(\frac{\rho}{l} \right)^2$$

Нам нужно заботиться, чтобы расчетная сила не превышала величины P_1 и даже была в несколько раз менее ее.

Частные случаи формулы Эйлера (сообразно со способом закрепления балки),

Формула Эйлера выведена нами для вполне свободной балки, закрепленной на концах идеальными шарнирно-неподвижными опорами. На практике, однако, особенно часто встречаются три случая, показанных на рисунке 167.

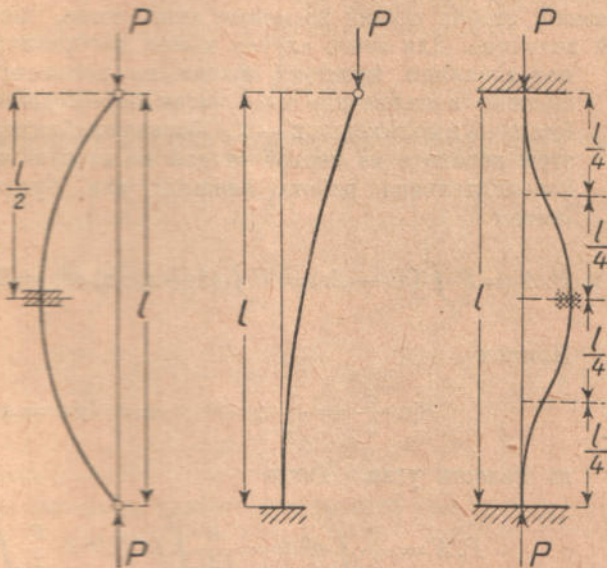


Рис. 167. Три частных случая формулы Эйлера.

Середина закреплена

$$P = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

Один конец закреплён

$$P = \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{EI}{l^2}$$

Оба конца закреплёны

$$P = 4\pi^2 \frac{EI}{l^2}$$

Общая формула

$$P = k \frac{\pi^2 EI}{l^2},$$

где

$$k = 1, \frac{1}{4}, 4.$$

Принимая еще коэффициент безопасности m , окончательно получаем расчетную формулу Эйлера в таком виде

$$P = \frac{k}{m} \cdot \frac{\pi^2 EI}{l^2}.$$

За коэффициент безопасности следует принять для металла—4 или 5; для дерева и бетона—8.

Объясним происхождение коэффициента k . Когда середина балки условно закреплена, мы тем самым как бы фиксируем нулевой прогиб в средней точке.

фактически то же условие соблюдалось и при прогибе свободной с шарнирами на концах балки. Формулы, поэтому, вполне совпадают.

Когда закреплен один конец, то случай этот можно свести к предыдущему. В самом деле, половина балки в 1-м случае и является как бы такой балкой с одним закрепленным концом. Отсюда получаем формулу для 2-го случая.

Наконец, для балки с закрепленными концами имеем 4 ветви, равные по длине $\frac{l}{4}$, изгибающиеся, как балка с одним заделанным концом. Делая подстановку, получаем требуемую формулу.

§ 3. Вывод формулы Эйлера способом выравнивания дополнительных работ.

Положим, что имеем явление продольного изгиба во 2-й его стадии. Как выше указано, вторая стадия возможно лишь тогда, когда $\Delta T_i = \Delta T_e$ по абсолютной величине. Для этого случая можем вообразить концы бруса, под влиянием простого сжатия из положения 1—1 перешедшие в наложение 2—2, затем перешедшими из положения 2—2 в положение 2'—2'. Обозначим сближение концов при этом переходе из первой стадии во вторую через Δ'' . Тогда дополнительная работа внешних сил будет $\Delta T_e = P \cdot \Delta''$. Имеем

$$P \cdot \Delta'' = P \int_0^l (ds - dz) = P \int_0^l (1 - \cos \alpha) ds = 2P \int_0^l \sin^2 \frac{\alpha}{2} ds.$$

Примем

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2}; \quad \alpha = \operatorname{tg} \alpha = y'$$

по малости угла. Тогда

$$P \cdot \Delta'' = \frac{P}{2} \int_0^l \alpha^2 ds = \frac{P}{2} \int_0^l (y')^2 ds = \frac{P}{2} \int_0^l (y')^2 dz$$

Примем упругую линию, по которой изогнется балка, за дугу синусоиды, тогда:

$$y = f \sin \frac{\pi z}{l}; \quad y' = \frac{f\pi}{l} \cos \frac{\pi z}{l}; \quad y'' = -\frac{f\pi^2}{l^2} \sin \frac{\pi z}{l}$$

Подставляем в выражение последнего интеграла значение y' :

$$\begin{aligned} P \cdot \Delta'' &= \frac{P}{2} \int_0^l \left(\frac{f\pi}{l} \cos \frac{\pi z}{l} \right)^2 dz = \frac{Pf^2\pi^2}{2l^2} \int_0^l \cos^2 \frac{\pi z}{l} dz = \frac{Pf^2\pi^2}{4l^2} \int_0^l \left(1 + \cos \frac{2\pi z}{l} \right) dz = \\ &= \frac{Pf^2\pi^2}{4l^2} \left(l + \frac{Pf^2\pi^2}{4l^2} \int_0^l \cos \frac{2\pi z}{l} dz \right) = \frac{Pf^2\pi^2}{4l} \end{aligned}$$

$\int_0^l \cos \frac{2\pi z}{l} dz$ равен 0, как площадь косинусоиды, взятая в пределах полной окружности.

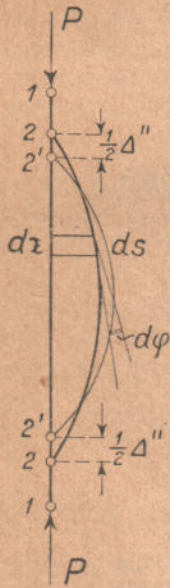


Рис. 168. Две стадии в явлении продольного изгиба.

Итак, дополнительная работа внешних сил:

$$\Delta T_l = P \cdot \Delta'' = \frac{P f^2 \pi^2}{4l}.$$

Заметим, что

$$\Delta'' = \frac{1}{2} \int_0^l (y')^2 ds$$

выражает сближение концов в продольном изгибе, но оказывается годной и для любого явления, при котором происходит сближение концов, независимо от формы кривой. Например в простом поперечном изгибе (см. рис. 169).

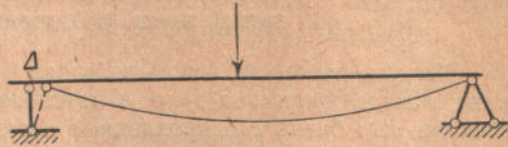


Рис. 169. Горизонтальное сдвигение \$\Delta z\$ подвижной опоры при поперечном изгибе.

$$\Delta z = \frac{1}{2} \int_0^l (y')^2 ds.$$

Определим теперь дополнительную работу внутренних сил:

$$\begin{aligned} \Delta T_i &= \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{EI} ds = \frac{EI}{2} \int_0^l \left(\frac{1}{\rho}\right)^2 ds = \frac{EI}{2} \int_0^l (y'')^2 ds = \\ &= \frac{EI}{2} \int_0^l \left[-\frac{f \pi^2}{l^2} \sin \frac{\pi z}{l}\right]^2 dz = \frac{EI f^2 \pi^4}{2l^4} \int_0^l \sin^2 \frac{\pi z}{l} dz = \\ &= \frac{EI f^2 \pi^4}{4l^4} \int_0^l \left(1 - \cos \frac{2 \pi z}{l}\right) dz = \frac{EI f^2 \pi^4}{4l^4} \left(l - \int_0^l \cos \frac{2 \pi z}{l} dz\right) = \\ &= \frac{EI f^2 \pi^4}{4l^3} \end{aligned}$$

Итак, дополнительная работа внутренних сил

$$\Delta T_i = \frac{EI f^2 \pi^4}{4l^3}$$

со знаком минус, которого мы не пишем, ибо нас интересует абсолютное значение \$\Delta T_i\$.

Если внешняя сила \$P\$ невелика, то дополнительная работа внешних сил меньше \$\Delta T_i\$, имеем первую стадию, выпучивание *невозможно*.

Если внешняя сила \$P\$ велика, то \$\Delta T_e > \Delta T_i\$, получаем катастрофический характер явления (3-я стадия); выпучивание *неизбежно*.

Наконец, когда \$\Delta T_e = \Delta T_i\$, наблюдается вторая стадия:

$$\frac{P f^2 \pi^2}{4l} = \frac{EI f^2 \pi^4}{4l^3},$$

отсюда

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \dots \dots \dots \text{(формула Эйлера)}$$

или

$$n_{кр} = \frac{P_{кр}}{\omega} = \pi^2 E \left(\frac{\rho}{l}\right)^2$$

(величина \$f\$ опять сократилась).—Здесь \$\rho\$—наименьший радиус инерции сечения.

Вывод этот, очень изящный, однако, имеет один крупный недостаток: он требует предварительного знания упругой формы бруса, которую мы

положили за синусоиду (на основании 1-го вывода). Поэтому этот способ вывода формулы Эйлера не является вполне самостоятельным, а скорее должен считаться лишь за прекрасный контрольный метод, лишний раз подтверждающий правильность основного рассуждения. Изложим в заключение еще один вывод формулы Эйлера, по своей наглядности заслуживающий большого внимания.

§ 4. Вывод формулы Эйлера из формулы прогиба, определяемого, как момент от моментной нагрузки.

Мы уже говорили, что свободная работающая на продольный изгиб балка, покуда мы имеем дело с прогибом 2-й стадии, может быть представлена, как балка с закрепленной серединой. Значит, этот случай можно себе мыслить, как изгиб 2-х балочек, симметричных друг-другу, закрепленных одним из концов и работающих на изгиб. Тот сравнительно редкий случай, когда этот продольный изгиб возможен, и балка устойчиво держится на некоторой небольшой стрелке прогиба f , очевидно, должен рассматриваться, как случай равновесия. Мы здесь имеем дело с уравновешенной системой сил, заставляющих обе наши полубалочки работать на изгиб и вызывающих на концах прогиб f . Выше, в теории простого поперечного изгиба, мы доказывали, что прогиб уравновешенной балки можно себе представить, как условный момент, от некоторой угловой нагрузки $\frac{M}{EI} ds$. Эюра моментов для нашего примера будет какой-то кривой линией, совпадающей по очертанию с ординатами нашей выгнутой оси и отличающейся от них лишь на множитель P ,

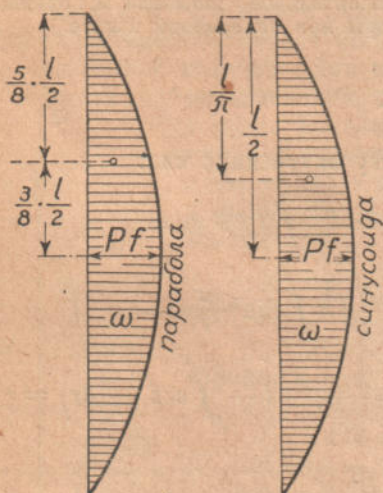


Рис. 170. Вывод формулы Эйлера из формулы прогиба балки.

т.е. $M_x = P \cdot y$.

Для первого приближения попробуем считать кривую за параболу. Особой ошибки при этом мы не сделаем. В пределах практических исследований не приходится особенно заботиться о точном виде кривой. Вполне достаточно подобрать кривую так, чтобы ее концы и середина совпадали бы с истинными их положениями — чтобы она удовлетворяла начальным условиям задания — и мы не получим ошибки большей нескольких $\frac{0}{0}\%$, если например, вместо параболы, возьмем для упрощения дугу круга и даже две прямых линии и т. п.

Площадь параболического сегмента равна $\frac{2}{3}$ описанного прямоугольника

$$\omega = \frac{2}{3} Pf \frac{l}{2} = \frac{P \cdot f \cdot l}{3}$$

Расстояние до центра тяжести $= \frac{5}{8} \frac{l}{2}$. Условный момент на концах, равный прогибу конца относительно середины $= f$, напишется так

$$[M_x] = f = \frac{Pfl}{3} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{EI}$$

Отсюда

$$P = \frac{9,6 \cdot EI}{l^2} = \infty \frac{\pi^2 EI}{l^2}.$$

Заметим, что $\pi^2 = 9,86 = \infty 9,60$. Поэтому, с незначительной ошибкой в 2,5% (вызванной тем, что кривая моментной эпюры принималась нами за параболу) получилась все та же формула Эйлера. Интересно, что стрелка наибольшего прогиба f опять не вошла в окончательную формулу, сократившись после алгебраических преобразований. Прогиб f —малая исчезающая величина, бесспорно существующая, но не поддающаяся определению.

Если считать моментную кривую за синусоиду (допущение, основанное лишь на предварительном знании вида упругой линии и на том, что синусоида наравне с параболой, удовлетворяет начальным условиям задания—вывод опять-таки не вполне самостоятелен), то мы получим: Полуплощадь синусоиды:

$$\omega = \frac{Pfl}{\pi}$$

Плечо этой полуплощади относительно нулевой ординаты

$$c = \frac{l}{\pi}$$

Эти два выражения получены из уравнения синусоиды:

$$y = Pf \sin \frac{\pi x}{l}$$

путем элементарной интеграции.

Условный момент угловой нагрузки

$$[M_1] = f = \frac{Pfl}{\pi} \cdot \frac{l}{\pi} \cdot \frac{1}{EI}$$

Отсюда

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \dots \dots \dots \text{(формула Эйлера).}$$

или

$$n_{кр} = \frac{P_{кр}}{\omega} = \pi^2 E \left(\frac{c}{l} \right)^2$$

Как видно, этот 3-й вывод формулы Эйлера удивительно прост и нагляден—почему заслуживает большого внимания.

Формула Эйлера, вывод которой базировался на принципе возможности нескольких форм деформаций для тел одного измерения, очевидно может быть применима: 1) только к брусам достаточной длины, как приближающимся к телу одного измерения и 2) в пределах упругости материала. Поэтому эта по существу абсолютно верная формула все же имеет известный предел своего применения и для коротких брусков оказывается уже неприменимой. Покажем это на примере испытания образца деревянного бруска. Образец деревянный, сечением 1 кв. см.

В этих условиях разрушающий груз простого сжатия был бы 500 кг. Предел упругости достигается при 200 кг. Модуль упругости дерева $E = \infty 100.000$ кг/см, $\pi^2 = \infty 10$. Момент инерции сечения:

$$I = \frac{a^4}{12} = 0,083 \text{ см}^4.$$

Определим критический груз при разных длинах l по формуле Эйлера.

Длина образца.	Разрушающий груз
$l = 10$ см	833 кг
$l = 15$ „	370 „
$l^2 = 20$ см	208 кг
$l^2 = 100$ „	8,3 „

Если брать части бруска короткой длины (напр. 10 см) то значе- ние критического груза получается, по формуле Эйлера, даже *большим, чем разрушающий груз* при работе бруска на простое сжатие. Здесь формула Эйлера абсолютно не подходит; затем есть некоторый участок длины бруса, когда величина разрушающего груза превышает предел упругости (у нас между 15 и 20 см)—формула также неприменима. Наконец, при достижении определенной длины—формула становится совершенно справедливой и при- менимой. Какое опасное явление представляет собой продольный изгиб, видно из величины критического груза для $l=100$ см; уже при $P=8,3$ кг явление принимает совершенно недопустимый в практических случаях характер, а между тем 8,3 кг в 60 раз меньше 500 кг.

Предел применения формулы Эйлера является функцией длины бруса и формы его поперечного сечения и оценивается отношением $\frac{l}{\rho}$, где l —длина бруса, а ρ —радиус инерции сечения. Из предыдущих сообра- жений видно, что для дерева например, в нашем случае, когда

$$\rho = \sqrt{\frac{0,083}{1}} = \infty 0,3 \text{ см,}$$

формула Эйлера совершенно неприменима, и критический груз превы- шает разрушающий груз, если

$$\frac{l}{\rho} \leq 40.$$

Применение формулы Эйлера также невозможно, критический груз выходит за пределы упругости, если

$$\frac{l}{\rho} \leq 70.$$

При дальнейшем возрастании этого отношения формула Эйлера вполне соответствует действительности и прекрасно подтверждается опытами. Для других материалов имеем другие пределы, вообще от 40 до 75—первая цифра и от 70 до 120—вторая.

Формула Эйлера имеет еще один чисто практический недостаток. Мы привыкли оценивать работу сечения и вести самый расчет его по вели- чине наибольших в нем возникающих *напряжений*. Так составлены и наши технические условия, и здесь именно и заключается неудобство формулы Эйлера, дающей нам непосредственно величину *критического груза*, а не значение допустимого в сечении *напряжения*. Для практики удобнее было бы иметь другую формулу, непосредственно выражающую величину пре- дельного допустимого при продольном изгибе напряжения, по которому привычным путем и можно было бы подсчитать должные размеры сечения. Поэтому формула Эйлера, совершенно бесспорная по существу, в то же время далеко не пользуется должной популярностью и обычно применяются фор- мулы другого типа, из коих долгое время имела успех формула Навье, иногда называвшаяся еще формулой Шварца-Ренкина. Расчет балки по этой формуле сводился к случаю простого сжатия, с введением некоторого поправочного коэффициента. Ныне этот коэффициент дается нормами.

§ 5. Эмпирические расчетные формулы.

Формула Навье в свое время выводилась так:

Возьмем брус, работающий на продольный изгиб, и выясним, под действием каких напряжений находится точка, соответствующая наиболь- шей стрелке прогиба f при ее расстоянии от оси бруса e : (см. рис. 170)

$$\max n = \frac{P}{\omega} + \frac{M}{I} e = \frac{P}{\omega} + \frac{Pfe}{I} = \frac{P}{\omega} \left(1 + \frac{fe}{\rho^2} \right).$$

Это напряжение является суммой напряжений от сжатия и от изгиба, достигая своего максимума для точки f , дающей наибольшую величину изгибающего момента. Очевидно, что этого максимума не должно превышать фактическое наибольшее допустимое напряжение в сечении:

$$n_0 = \frac{P}{\omega}$$

Основное же допускаемое напряжение от простого сжатия пусть будет n . Следовательно

$$\frac{n_0}{n} = \frac{1}{1 + \frac{fe}{\rho^2}} = \varphi$$

(коэффициент Навье). Итак, имеем формулу Навье в таком виде:

$$n_0 = n \cdot \varphi,$$

где φ есть коэффициент уменьшения основного напряжения n .

В выражение коэффициента φ кроме известных нам величин e и ρ , входит еще неизвестный нам прогиб f , к определению которого мы и переходим:

Напряжение от изгиба равняется

$$n_1 = \frac{Pfe}{I} = E \cdot i,$$

но

$$P = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \dots \dots \dots \text{(по Эйлеру).}$$

Делая подстановку, получаем:

$$\frac{\pi^2 EI}{l^2} \cdot \frac{fe}{I} = E \cdot i,$$

или

$$f = \frac{i l^2}{\pi^2 e}.$$

Поэтому окончательно получаем:

$$\varphi = \frac{n_0}{n} = \frac{1}{1 + \frac{i}{\pi^2} \cdot \frac{l^2}{\rho^2}} = \frac{1}{1 + \frac{i}{\pi^2} \left(\frac{l}{\rho}\right)^2},$$

или приближенно:

$$\varphi = \frac{1}{1 + 0,1 i \left(\frac{l}{\rho}\right)^2}.$$

Недостаток вывода заключается в том, что при нем явление продольного изгиба смешивается с сочетанием сжатия с поперечным изгибом, и в том, что формула Эйлера, годная лишь в пределах упругости, распространяется на все значения $\frac{l}{\rho}$.

В расчетах обыкновенно принимали такие значения коэффициента $0,1i$

для железа и стали	= 0,0008
„ чугуна	= 0,0007
„ дерева	= 0,0002
„ бетона	= 0,0001

Величины эти имели эмпирический характер и периодически пересматривались при введении новых норм.

Итак, по формуле Навье расчет продольного изгиба велся по формуле простого сжатия, путем понижения допускаемого по этой формуле сопротивления на определенный коэффициент φ .

Современные взгляды на этот предмет таковы, что для эмпирической формулы следует исходить из кривой фактических определенных экспериментами критических напряжений и, понижая эти напряжения путем деления их на коэффициент запаса, который осторожнее брать большим для гибких стоек (с большим $\frac{l}{\rho}$), получить рациональную таблицу коэффициентов снижения φ основного допускаемого напряжения n . Опыты последних лет позво-

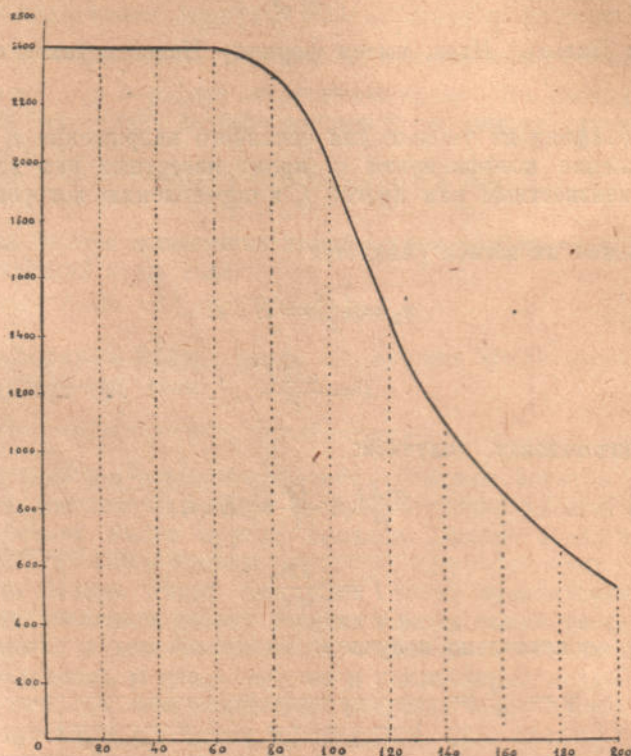


Рис. 171. Кривая изменения критических напряжений для мостового литого железа в функции от $\frac{l}{\rho}$ (ординаты — напряжения n кг/см², абсциссы — $\frac{l}{\rho}$).

лили достаточно точно установить для мостового литого металла кривую критических грузов в функции от $\frac{l}{\rho}$ (см. рис. 171). Оказывается, что между 0 и 60 эта кривая остается постоянной на горизонте предела текучести (2400 кг/см²), ниже 120 хорошо совпадает с формулой Эйлера. По этой-то кривой НКПС установил свою таблицу снижения допускаемых напряжений в функции от $\frac{l}{\rho}$, которая приведена на стр. 241. Коэффициент снижения φ , данный на этой странице, получается, как произведение двух коэффициентов: 1) отношение критического напряжения при данном значении $\frac{l}{\rho}$ к критическому напряжению при нулевом значении $\frac{l}{\rho}$, т.е. к 2400 кг/см² (см. рис. 171) и 2) специальный коэффициент безопасности,

равный 0,87 при нулевом значении $\frac{l}{\rho}$ и падающий до 0,40 при значении $\frac{l}{\rho}$, близком к 200. В результате φ от 0,87 при $\frac{l}{\rho} = 0$ падает до 0,08 при $\frac{l}{\rho} = 200$.

Получим следующую таблицу:

$\frac{l}{\rho}$	φ	$\frac{l}{\rho}$	φ
0	0,870	110	0,437
10	0,845	120	0,352
20	0,820	130	0,287
30	0,796	140	0,237
40	0,771	150	0,196
50	0,746	160	0,164
60	0,722	170	0,138
70	0,688	180	0,116
80	0,642	190	0,098
90	0,583	200	0,080
100	0,515	—	—

Значения величин φ для промежуточных значений $\frac{l}{\rho}$ могут быть определяемы путем интерполяции.

§ 6. Колебания струны.

В заключение этой главы дадим краткое изложение теории колебания струны и покажем, какая глубокая аналогия существует между этим явлением и выведенными нами условиями возникновения продольного изгиба.

Обозначим через Δ количество массы на единицу длины струны. Имеем по принципу Д'Аламбера (см. Аналитическая Механика):

$$\Delta \cdot ds \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = V$$

или

$$\Delta \cdot ds \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = H \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} ds$$

$$\Delta \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = H \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

Здесь v — есть отклонение от положения равновесия, параллельное оси y , вызывающее колебание, а V — сила, действующая параллельно той же оси. Ясно, что

$$\frac{v}{ds} = \frac{H}{V},$$

откуда

$$V = H \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} ds.$$

Введем новое обозначение: $\Delta = \frac{1}{\mu}$, имеем:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = H\mu \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}.$$

А priori можем написать, что отклонение v , вызывающее колебание струны, должно изменяться по закону синуса (по теории гармонических колебаний). Итак,

$$v = y \sin pt;$$

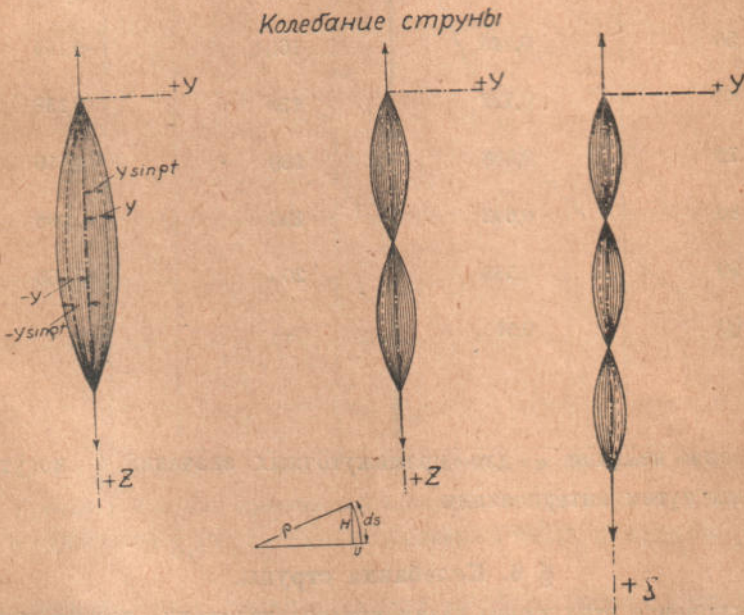


Рис. 172. Колебания дрожащей струны.

здесь p — частота колебаний в 2π секунд; вообще же формула v указывает, что каждое y имеет еще свое колебание $\sin pt$, дающее максимум ординаты $\pm y$, и минимум — нуль. Поэтому

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -p^2 y \sin pt;$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} \sin pt.$$

Получаем:

$$-p^2 y \sin pt = H\mu \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} \sin pt;$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = -\frac{p^2}{H\mu} y.$$

Итак, при исследовании вида кривой $y = f(z)$ влияние времени ($\sin pt$) исключается.

Коэффициент $\frac{p^2}{H\mu}$ — величина безусловно положительная и может быть выражена так:

$$\frac{p^2}{H\mu} = a^2;$$

откуда

$$a = \sqrt{\frac{p^2}{H\mu}}.$$

Получаем уже знакомую нам формулу:

$$y'' = -a^2 y.$$

Это дифференциальное уравнение дрожания струны вполне аналогично дифференциальному уравнению Эйлера для продольного изгиба.

Отсюда получаем подобными же рассуждениями, что и выше:

$$y = f \sin \frac{\pi z}{l}; \quad p_1^2 = 1^2 \cdot \frac{\pi^2 H\mu}{l^2};$$

$$y = f \sin \frac{2\pi z}{l}; \quad p_2^2 = 2^2 \cdot \frac{\pi^2 H\mu}{l^2};$$

$$\dots \dots \dots$$

$$y = f \sin \frac{n\pi z}{l}; \quad p_n^2 = n^2 \cdot \frac{\pi^2 H\mu}{l^2}.$$

Эта аналогия, с которой мы здесь впервые встретились, красной нитью проходит через всю теорию устойчивости, и мы к ней еще неоднократно вернемся.

Сравнивая формулы:

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

и

$$p^2 = \frac{\pi^2 H\mu}{l^2},$$

мы видим, что критический груз выражается так же, как квадрат числа колебаний в 2π секунд и лишь вместо EI имеется $H\mu$ [вместо $(F^1 L^2)$ имеем $(L^2 T^{-2})$].

Эта аналогия столь красива, что желательно сказать о ней еще несколько слов. В самом деле, не может не показаться странным, что и растяжение и сжатие стержня вызывают одинаковые явления — те же формы искривления. Между тем, причина этого заключается в том, что тела, выведенные из состояния покоя — *простого сжатия* в первом случае и *простого растяжения* во втором, как бы ищут тех форм, которые им позволят сохранить хотя бы мгновенное упругое равновесие и эти формы одинаковы в обоих случаях — это суть, как их называл Эйлер, *elastica* — возможные упругие формы стержня.

Конечно, при сжатии — явлении статическом, одновременно возможна лишь одна форма — большей частью низшая, а при растяжении, как явлении динамическом, мы имеем дело с одновременным появлением всех форм — в теории звука они известны как дополнительные колебания к основному.

В дальнейших выпусках мы распространим эту аналогию на все явления *устойчивости*. Наше исследование возможности или невозможности *продольного изгиба* данного стержня называется проверкой на *устойчивость*, и современная Теория Сооружений требует производства этой проверки наряду с проверкой сооружений на *прочность* и на *жесткость*.

По этому поводу заметим, что прочность зависит от I , жесткость от макс. EI , а устойчивость от мин. EI , ибо, конечно, продольный изгиб будет всегда происходить в направлении *минимальной жесткости*.

ГЛАВА XI.

Расчет брусьев с переменным модулем упругости. — Железобетон.

§ 1. Сущность вопроса.

Во всех предыдущих соображениях мы исходили из предпосылки, что материал, из коего состоит брус, однороден и, в частности, во всех своих точках имеет одинаковый модуль упругости E . Однако, на деле такое обстоятельство весьма часто не имеет места как в тех материалах, которые обладают *неодинаковыми E при растяжении и сжатии* (каков, напр., бетон), так и при применении в сечении двух *различных материалов с совершенно разными E* , что имеет место в *железобетоне*, где в состав сечения входят бетон и железо. Возникает вопрос о том, как рассчитывать такие брусья, и применимы ли к ним ранее разобранные нами теории.

Если вспомнить те приемы, при помощи которых мы выводили наши основные формулы, то мы увидим, что основой их являлось установление *равновесия* между внешними и внутренними силами, а главной рабочей гипотезой была гипотеза о *сохранении плоских сечений*. Эти-то положения и применяются целиком к разбираемым нами случаям. Мы увидим ниже, что здесь придется лишь дать несколько более распространительное толкование понятию *жесткости*. Рассмотрим отдельно явления растяжения и сжатия, и явления изгиба и кручения. Что касается до явлений сдвига, то они определяются, как производные явлений изгиба.

§ 2. Растяжение и сжатие.

Рассмотрим случай растяжения элемента ds бруса, сечение которого с основным модулем упругости E заключает в себе группы продольных волокон с модулями E_2 и E_3 (см. рис. 173). Очевидно, что здесь мы

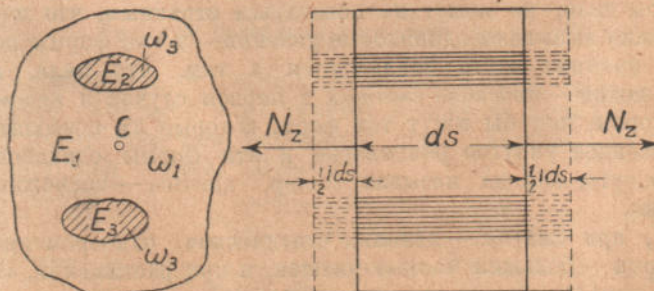


Рис. 173. Растяжение сечения с разнородными модулями упругости.

можем иметь дело лишь с разными материалами, что имеет место, напр., в железобетоне, ибо тела с разными E при растяжении и сжатии для нашего случая простого растяжения или простого сжатия будут иметь по всему сечению постоянное E .

Найдем i . Как известно, $i = \frac{N}{E\omega}$, и нам надо знать значение $E\omega$ для данного случая. Но так как очевидно, что

$$E\omega = \sum E \cdot \Delta\omega,$$

то для нашего случая

$$E\omega = E_1 \cdot \omega_1 + E_2 \cdot \omega_2 + E_3 \cdot \omega_3 = E_1 \left(\omega_1 + \frac{E_2}{E_1} \omega_2 + \frac{E_3}{E_1} \omega_3 \right).$$

Называя

$$\frac{E_2}{E_1} = m_2 \text{ и } \frac{E_3}{E_1} = m_3, \quad (\text{отвлеченные коэффициенты})$$

получим:

$$E\omega = E_1(\omega_1 + m_2 \cdot \omega_2 + m_3 \omega_3) = E_1(\omega_1),$$

где

$$(\omega_1) = \omega_1 + m_2 \omega_2 + m_3 \omega_3;$$

(ω_1) называется *площадью, приведенной к модулю инерции основного материала*.

Вполне логично здесь и центр тяжести этой приведенной площади найти, как центр тяжести отдельных приведенных площадок, т.е. для определения центра тяжести принимать площади ω_2 и ω_3 как бы упруго-уплотненными соответственно в m_2 и m_3 раз.

Очевидно, что

$$n_{(1)} = \frac{N}{(\omega_1)},$$

т.е. напряжение в основном материале $n_{(1)}$ получится, если N разделить на приведенную площадь.

Соответственно

$$n_{(2)} = m_2 \cdot \frac{N}{(\omega_1)} = m_2 \cdot n_{(1)},$$

т.е. в m_2 раз больше, а

$$n_{(3)} = m_3 \cdot \frac{N}{(\omega_1)} = m_3 \cdot n_{(1)},$$

т.е. в m_3 раз больше.

Условия равновесия напишутся так:

$$n_{(1)} \cdot \omega_1 + n_{(2)} \cdot \omega_2 + n_{(3)} \cdot \omega_3 = n_{(1)}(\omega_1 + m_2 \omega_2 + m_3 \omega_3) = n_{(1)} \cdot (\omega_1) = N.$$

Это последнее уравнение говорит само за себя. Получающийся центр тяжести, могущий не совпадать с геометрическим центром тяжести, называется *упругим центром тяжести*.

Смысл этих выводов ясен: он гласит, что если два соседних волокна из двух разных материалов должны удлиниться на *одинаковую* величину, а это требование вытекает из закона сохранения плоских сечений, то напряжение в них должно быть пропорционально их E , ибо только в этом случае

$$\frac{n_1}{E_1} = i_1 = \frac{n_2}{E_2} = i_2.$$

Явление сжатия ничем не отличается от явления растяжения.

§ 3. Изгиб и кручение.

Рассмотрим то же сечение, которое мы рассматривали в предыдущем параграфе и подвергнем его чистому изгибу.

При этом нейтральную ось совместим с *упругим* центром тяжести сечения.

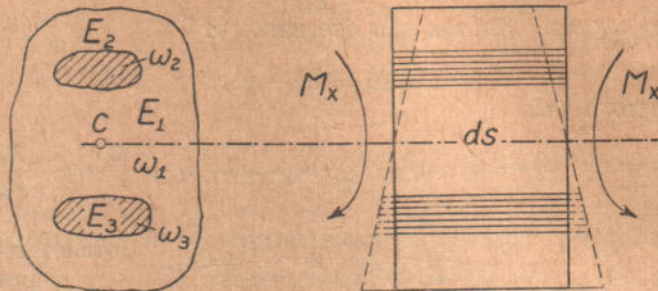


Рис 174. Изгиб бруса с разными значениями E по сечению.

Начнем опять с выражения деформации:

$$d\varphi = \frac{M}{EI} ds;$$

но

$$EI = \Sigma E \cdot \Delta I = E_1 I_1 + E_2 I_2 + E_3 I_3 = E_1 (I_1 + m_2 I_2 + m_3 I_3) = E_1 (I_1)$$

и

$$(I_1) = I_1 + m_2 I_2 + m_3 I_3.$$

Отсюда

$$n_{1(1)} = \frac{M}{(I_1)};$$

$$n_{1(2)} = m_2 n_{1(1)};$$

$$n_{1(3)} = m_3 n_{1(1)}.$$

И, конечно, для любого горизонта

$$n_{(1)} = n_{1(1)} \cdot y;$$

$$n_{(2)} = n_{1(2)} \cdot y;$$

$$n_{(3)} = n_{1(3)} \cdot y.$$

И только в этом случае мы получим равновесие

$$M = \Sigma n \cdot y \cdot d\omega = n_{1(1)} \cdot (I_1).$$

Выяснив себе картину, происходящую при *изгибе*, мы можем разобраться по тому же приему и в явлении *сдвига*. Действительно,

$$t = \frac{QS}{Ib}.$$

Для нашего случая

$$t_1 = Q \frac{(S_1)}{(I_1) b_1},$$

т.-е. и здесь можно получить все необходимые нам величины, исходя из приведенных к *основному* материалу выражений S , I и b :

$$\max t_1 = \frac{Q}{(h_0) \cdot b_1},$$

где

$$(h_0) = \frac{(I_1)}{(\max S_1)},$$

t_2 и t_3 будут больше в m_2 и m_3 раз сравнительно с t_1 в том же горизонте, если модули G находятся в таком же соотношении, как и модули E .

В дальнейших параграфах, при применении этих общих выводов к железобетону, мы укажем, какие практические результаты получаются.

Рассмотрим теперь *кручение*.

Для упрощения исследования берем сечение круглое, и ограничиваемся двумя материалами, располагая второй концентрическим кольцом. Примем ту же последовательность вывода

$$\alpha ds = \frac{M_z}{GI_z} ds.$$

$$GI_z = \Sigma G \cdot \Delta I_z = G_1(I_{1z} + m_2' I_{2z} + m_3' I_{3z}) = G_1(I_{1z}),$$

где

$$m_2' = \frac{G_2}{G_1};$$

$$m_3' = \frac{G_3}{G_1}.$$

Откуда

$$(I_{1z}) = I_{1z} + m_2' I_{2z} + m_3' I_{3z}.$$

Очевидно, что единичные (на радиусе, равном единице) t дадут

$$t_{1(1)} = \frac{M_z}{(I_{1z})};$$

$$t_{1(2)} = m_2' t_{1(1)};$$

$$t_{1(3)} = m_3' t_{1(1)};$$

а общие формулы для t будут

$$t_{(1)} = t_{1(1)} \cdot r;$$

$$t_{(2)} = t_{1(2)} \cdot r;$$

$$t_{(3)} = t_{1(3)} \cdot r.$$

В результате, равновесие будет обеспечено по уравнению:

$$M_z = \Sigma (t \cdot r \cdot \Delta \omega) = t_{1(1)} \cdot (I_{1z}).$$

Величины m_2' и m_3' почти всегда равны величинам m_2 и m_3 .

Таковы общие формулы для интересующего нас явления.

Теперь перейдем к изучению частных случаев, в частности к *изгибу однородного тела с разными E для растяжения и сжатия*.

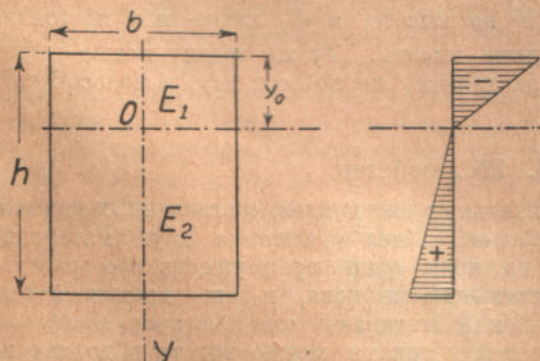


Рис. 176. Изгиб однородного тела с разными E для растяжения и сжатия.

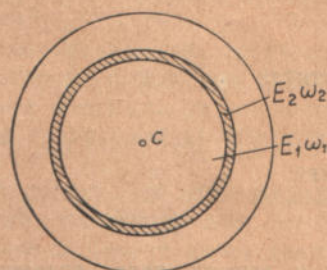


Рис. 175. Кручение при различных E и G .

Примером такого тела для нас является бетон, в коем $E_{\text{раст.}} = 56.000 \text{ кг/см}^2$, а $E_{\text{сжат.}} = 140.000 \text{ кг/см}^2$, и притом еще эта цифра средняя для практически встречающихся напряжений, вообще же она *изменяется с ростом напряжений*. Рассмотрим сначала изгиб в предположении, что $E_{\text{раст.}} = \text{const}$ и $E_{\text{сжат.}} = \text{const}$. Пусть сечение прямоугольно и изгиб чистый. Найдем сначала упругий центр тяжести. Здесь вопрос стоит несколько

сложнее, чем в предыдущих параграфах, ибо мы не знаем *величины* площади растяжения и площади сжатия.

Назовем через y_0 ту часть высоты сечения, которая укажет нам горизонт нейтральной оси, и обозначим буквами E_1 и E_2 модули сжатой и вытянутой частей (пусть $\frac{E_2}{E_1} = m_2$). Для нахождения y_0 воспользуемся *уравнением равновесия*:

$$\int n d\omega = N = 0$$

или

$$n_{1(\Omega)} \left[\int_0^{-y_0} y d\omega + m_2 \int_0^{h-y_0} y d\omega \right] = 0,$$

откуда

$$m_2 \frac{(h-y_0)^2}{2} = \frac{y_0^2}{2}$$

или

$$\frac{y_0^2}{(h-y_0)^2} = \frac{E_2}{E_1},$$

т.е. высоту надо разделить на части, обратно пропорциональные корням из модулей E . Полученное уравнение эквивалентно выражению $(S_1) = 0$.

Второе уравнение равновесия, как известно, приводит к формуле

$$n_{1(\Omega)} = \frac{M}{(I_1)}.$$

Теперь, когда мы знаем положение нейтральной оси, значение (I_1) легко определяется по формуле:

$$(I_1) = I_1 + m_2 I_2 = \frac{b y_0^3}{3} + m_2 \frac{b(h-y_0)^3}{3}.$$

Если принять E за величину переменную, т.е. за какую-нибудь функцию n_1 , а следовательно и y , то, зная закон изменения E , задачу нахождения y_0 можно решить аналитически, исходя из уравнения

$$\int_{-y_0}^{h-y_0} m_y y d\omega = 0,$$

где m_y есть отвлеченный коэффициент, равный величине $\frac{E_y}{E_1}$, в которой E_y есть переменное значение E по высоте, а E_1 какое-либо постоянное значение E , например, на середине высоты. Ту же задачу можно решить графически, ища *горизонт* центра тяжести не полосок bdy , а полосок m_bdy (измерение остается то же).

§ 4. Железобетон.

Одним из наиболее употребительных материалов, составленных из различных тел, является *железобетон*. Идея сочетания двух материалов в инженерных конструкциях, из коих один преимущественно работает на сжатие, а другой — на растяжение, не нова, и еще древние зодчие, при возведении сводчатых сооружений стягивали *каменные* арки *железными* затяжками-связями (такие связи между арками можно видеть и до сих пор в наших старинных церквях и в старом Кремлевском Дворце), заставляя *камень* работать на *сжатие*, а *железо* на *растяжение*, что обим материалам

особенно свойственно. Также в стропилах *деревянные сжатые* ноги издавна схватываются по низу *железной растянутой* стяжкой. Ту же цель преследует и железобетонное сооружение, при чем учитывается то, что бетон хорошо сопротивляется сжатию, а железо — растяжению.

В конце XIX века мы имеем лишь робкие попытки применить этот новый материал, но в XX веке он получил общее признание, прекрасно изучен и продолжает широко распространяться, несмотря на некоторые серьезные присущие ему недостатки, на которые именно в последние годы стали обращать особое внимание. Мы не можем и не будем здесь много говорить о свойствах железобетона, ибо это есть тема специального курса железобетонных конструкций, но все же скажем о нем хотя бы несколько общих слов раньше, чем перейдем к изучению основных приемов его расчета.

Прежде всего, *возможность* применения железобетона, как строительного материала, обуславливается тем, что железо хорошо *сцепляется* с бетоном, что *коэффициент температурного расширения* обоих материалов почти одинаков, и что *ржавления* железа в бетоне при правильном производстве работ почти не наблюдается.

Главные *достоинства* железобетона сводятся к тому, что это материал сравнительно *дешевый*, что возводимые из него постройки *моноклитны* и жестки, и совершенно *не стеснены в своих формах* (могут иметь самые замысловатые формы и в целом, и в деталях) и что *железобетонные сооружения работают*, как показал опыт последних двух — трех десятилетий, в большинстве случаев *исправно* и не требуют за собой особо тщательного надзора и ухода.

Главные же *недостатки* этого материала заключаются в том, что в *вытянутых зонах* его, усиленных железом, *повидимому, неизбежны небольшие трещины* (фиссуры — fissures) в бетоне, вызывающие между прочими ржавление железа вследствие проникновения через фиссуры к железу воздуха и вредных газов, что бетон *не очень хорошо высит* действие *высоких и низких температур, морской воды*, и даже вообще быстро *текущей проточной воды*, что он *сравнительно хрупок* и плохо переносит динамическую нагрузку и, наконец, что его *моноклитность* *делает его чрезмерно жестким* и является причиной развития в нем дополнительных напряжений, особенно при значительных колебаниях температуры и под влиянием неизбежной в бетоне *усадки*. Кроме того, железобетон звуко- и теплопроводен, что делает его нежелательным материалом для стен жилых зданий. Наконец, недавнее применение железобетона (практически с 1900 года) не дает нам уверенности в его долговечности. Можно было бы указать еще на *трудность расчета* сложного монолита, но мы уже говорили в нашем предисловии, что это никоим образом *не есть* недостаток конструкции, если она целесообразна по существу. Да и приемы расчета ныне достаточно разработаны и упрощены, а замечательное стремление в *интересах целесообразности* сделать работу железобетона статически *определенной* приводит еще к большему упрощению расчета.

По совокупности *достоинства* железобетона велики, с недостатками можно бороться, и этот материал в настоящее время занимает одно из первых мест среди других видов сооружений.

Переходя к методам расчета, отметим, что речь может идти только о распределении напряжений в сечении, ибо определение значений сил N_x , Q_x , Q_y , M_x , M_y производится по обычным приемам Теории Сооружений. Наконец, отметим, что наше изложение методов расчета будет кратким и будет иметь целью лишь связать эти методы с общими началами Теории Сооружений, за подробностями же расчета и в частности за расчетами конструктивных деталей мы отсылаем к специальным курсам.

§ 5. Растяжение, сжатие и простой изгиб железобетона.

Железобетон редко в целом своем виде встречается в чисто *вытянутых* элементах; однако, все же в подвесках и в затяжках арочных железобетонных мостов иногда считают удобным применить, дабы не нарушать общего типа конструкции, также железобетонные стержни с расположением железа (арматуры) у наружного края сечения (прямоугольного или многоугольного очертания). Если допустить работу бетона на растяжение (т. е. считать $E_{\text{раст.}} \neq 0$), то мы получим (называя $E_1 = \infty 55000$ кг/см² — модуль бетона, а $E_2 = \infty 2200000$ кг/см² — модуль железа)

$$n_{(1)} = \frac{N}{(\omega_1)}; \quad n_{(2)} = m_2 \frac{N}{(\omega_1)} = 40 \frac{N}{(\omega_1)};$$

$$(\omega_1) = \omega_1 + 40 \omega_2.$$

Если допустить $n_{(1)} = 15$ кг/см², то $n_{(2)}$ будет лишь 600 кг/см²; если же допустить для $n_{(2)}$ — 1000 кг/см², то мы получим для бетона целых 25 кг/см².

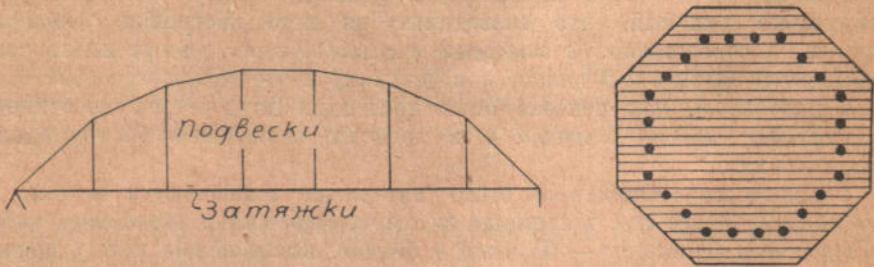


Рис. 177. Работа железобетона на растяжение.

В одном случае мы не используем полностью железа (*независимо от его количества*), а в другом вызовем перенапряжение бетона и возможность появления в нем трещин (фиссур). Это неравенство отношений между допускаемыми напряжениями и между модулями упругости в двух рядом лежащих волокнах того же бруса представляет слабое место железобетона.

Еще более наглядно обнаруживается это слабое место, если вести расчет в предположении, что бетон вовсе не участвует в работе растяжения, каковое предположение эквивалентно допущению, что $E_1 = 0$. Конечно, в этом случае, во избежание получения неопределенных выражений (напр. $0 \cdot \infty$ для $n_{(2)}$), надо за основной материал взять *железо*, и формулы примут следующий вид:

$$n_{(2)} = \frac{N}{(\omega_2)}; \quad n_{(1)} = \frac{E_1}{E_2} n_{(2)} = 0;$$

$$(\omega_2) = \omega_2 + \frac{E_1}{E_2} \omega_1 = \omega_2.$$

В этом случае мы можем, допуская для $n_{(2)}$ высшее допускаемое напряжение — 1000 кг/см², получить, без выявления этой цифры в расчете, *фактическое* напряжение бетона по соседству с железом в 25 кг/см², каковая цифра для бетона недопустима.

При изучении изгиба мы еще встретимся с этим случаем.

Случай сжатия подчиняется тем же формулам, но тут $m = \frac{2100000}{140000} = 15$, почему при $n_{(2)} = 1000$ кг/см² получим $n_{(1)} = 1000 : 15 = 67$ кг/см², т. е.

немного высокую цифру, но все же более допустимую для сжатия, чем 25 кг/см^2 для растяжения. Таким образом, в сжатых элементах железобетона лучше используется.

Изгиб. Основные формы, с которыми приходится встречаться в железобетонных конструкциях при простом поперечном изгибе суть:

- 1) *плита (прямоугольное сечение)* с одиночной или двойной арматурой;
- 2) *тавровое сечение* с одиночной или двойной арматурой.

Сечения эти обыкновенно встречаются во взаимной комбинации, так как типичное железобетонное сооружение — перекрытие горизонтальной плоскости, применимое и в гражданских сооружениях (междуэтажное перекрытие) и в мостах — (перекрытие полотна) обычно имеет вид, показанный на рис. 178, т. е. состоит из прямоугольных плит, опирающихся на тавровые

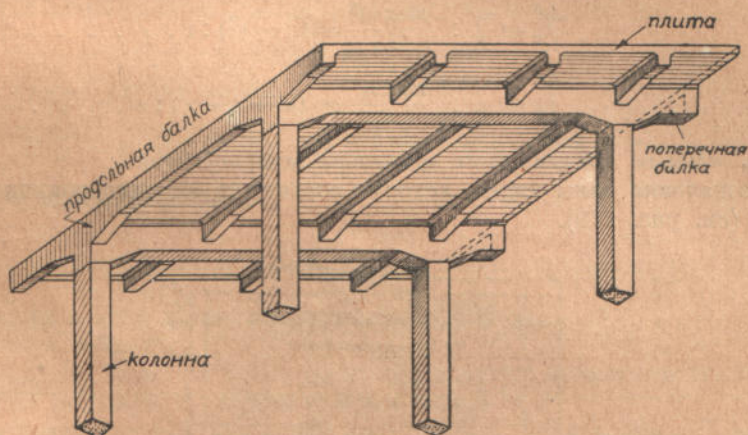


Рис. 178. Основные формы железобетонных конструкций.

ребра, при чем горизонтальный пояс тавра образуют те же плиты в частях, прилегающих к ребрам (размер той части плиты, которая может рассматриваться, как входящая в состав полки тавра, т. е. как работающая *двойко* — и как часть плиты, и как часть ребра — определяется особыми нормами, основываемыми частью на конструктивных, частью на теоретических соображениях).

Плита заделана концами в ребра — и потому она изгибается частью вниз, частью вверх; оттого то и имеется в ней часто и нижняя, и верхняя арматура.

Рёбристая балка — тавр — также частично заделана своими концами; в сущности она представляет собой неразрезную балку — ясно, что и в ней полезно иметь иногда нижнюю, иногда верхнюю арматуру, а иногда и обе одновременно.

Так как случай одной арматуры может рассматриваться, как частный случай двух арматур, то мы и рассмотрим оба типа сечения в предположении наличия двух арматур и сначала дадим общие формулы, применимые и к плите и к тавру.

Если сечение задано, то заданы h , b (обычно в плите приравняемое единице), ω_f^0 (площадь верхней (ober) железной арматуры) и ω_f^u (площадь нижней (unter) железной арматуры).

Кроме того задано M .

Требуется найти:

1. n_b (наибольшее напряжение бетона);
2. n_f^0 (напряжение верхней арматуры);

3. n_f (напряжение нижней арматуры);
т.-е. три величины; однако для их определения предварительно *необходимо* знать:

4. e — горизонт нейтральной линии.

Для нахождения этих 4-х неизвестных мы имеем четыре уравнения. 1 и 2 — Два уравнения равновесия

$$\int n d\omega = 0. \dots \dots \dots (1)$$

$$\int n.y. d\omega = M \dots \dots \dots (2)$$

3 и 4 — Два уравнения, гарантирующие для *каждого* из арматурных горизонтов соблюдение закона *плоских сечений*

$$\frac{i_f^0}{i_b^0} = \frac{n_f^0}{E_f} : \frac{\max n_b^0}{E_b} = (e - c') : e \dots \dots \dots (3)$$

$$\frac{i_f^u}{i_b^0} = \frac{n_f^u}{E_f} : \frac{\max n_b^0}{E_b} = (h - e - c) : e \dots \dots \dots (4)$$

Это суть *четыре классических уравнения железобетона*.

Обозначения даны такие, которые соответствуют одновременно и плите и тавру (см. рис. 179).

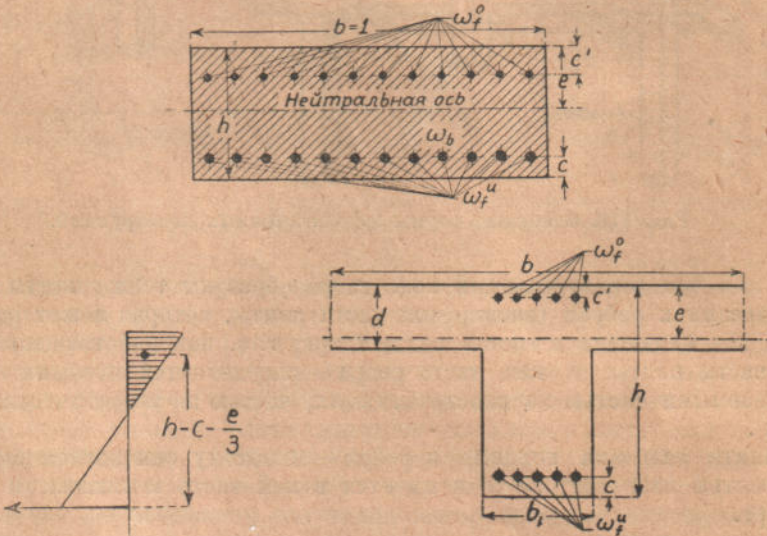


Рис. 179. Прямоугольное и тавровое сечения с двойной арматурой.

При этом следует запомнить:

- а) речь идет о *плоских сечениях*, а не о распределении *напряжений* по закону плоскости; напряжения здесь закону плоскости не подчиняются, ибо они очевидно должны дать *скачек* в местах перехода от бетона к железу;
- б) если бы число арматурных горизонтов было не 2, а n , то можно было бы написать n уравнений по закону плоских сечений;
- в) последние уравнения *всегда* приводятся к тому удлинению бетона, которое соответствует *сжатию* этого материала, ибо работа бетона на растяжение, как правило, не принимается во внимание.

Порядок решения таков:

Сперва из уравнения (1), которое, как известно, эквивалентно уравнению $(S_1) = 0$, находим упругий центр тяжести, т.-е. величину e . После этого,

вычислив $\max n_b^0$ из уравнения (2), переходим к определению напряжений в арматурах.

Решение первого уравнения возможно в двух предположениях: или мы считаем бетон *не работающим на растяжение вовсе*: $E_{b-раст.} = 0$, или мы считаем его работу при *обоих знаках*

$$E_{b \text{ раст.}} \neq 0.$$

Принципиальной разницы не будет.

В первом случае уравнение (1) напишется так:

$$\frac{be^2}{2} + m_f \cdot \omega_f^0 (e - c') = m_f \omega_f'' (h - e - c),$$

где

$$m_f = \frac{E_f}{E_b \text{ сжат.}}$$

Во втором случае имеем

$$\frac{be^2}{2} + m_f \omega_f^0 (e - c') = m_b b_b \frac{(h - e)^2}{2} + m_f \omega_f'' (h - e - c),$$

где b_1 для плиты равно b и

$$m_b = \frac{E_{b \text{ раст.}}}{E_b \text{ сжат.}}$$

Иногда в этом случае принимают условно $m_b = 1$.

Отсюда найдем e .

Здесь, как и *всегда* в железобетоне, площадь бетона берется полностью *без вычета* площади, занятой железом.

Из уравнения (2), приведенного к бетону, найдем $\max n_b^0$ после чего можем найти и величины напряжений в арматурах по уравнениям (3) и (4).

Возможно решить и обратную задачу: зная M и допустимые напряжения n_b и n_f , найти h , ω_f'' , ω_f^0 , а также, конечно и e . Опять имеем 4 уравнения с четырьмя неизвестными. Здесь уже сначала находим из (3) и (4) уравнений e и h , а затем из (1) и (2) ω_f'' и ω_f^0 .

Для одиночной арматуры все формулы, очевидно, существенно упрощаются.

§ 6. Частные случаи.

Приведем здесь наиболее употребительные формулы для прямоугольного и ребристого сечений, которые все получаются из наших четырех уравнений.

А. Одиночная арматура, бетон на растяжение не работает.

$$e = \frac{m \omega_f}{b} \left(\sqrt{1 + \frac{2b(h-c)}{m \omega_f}} - 1 \right);$$

$$n_b = \frac{M}{\frac{b \cdot e}{2} (h - c - \frac{e}{3})}; \quad n_f = \frac{M}{\omega_f (h - c - \frac{e}{3})}.$$

Если мы задумаемся в значение выражения, стоящего в знаменателе двух последних формул $(h - c - \frac{e}{3})$, то мы увидим, что это есть плечо внутренней пары (см. рис. 179), а так как $I = \max S \cdot h_0$, то можно и последние формулы представить в виде

$$n_b = \frac{M}{(I_1)} \cdot e; \quad n_f = m_f \frac{M}{(I_1)} (h - c - e).$$

Действительно;

$$\frac{M}{\frac{bc}{2} \left(h - c - \frac{e}{3} \right)} = \frac{M}{\frac{be^2}{2} \left(h - c - \frac{e}{3} \right)} \cdot e$$

и

$$\frac{M}{\omega_f \cdot \left(h - c - \frac{e}{3} \right)} = m_f \frac{M}{m_f \omega_f (h - c - e) \left(h - c - \frac{e}{3} \right)} \cdot (h - c - e).$$

Ясно, что

$$\frac{be^2}{2} = m \omega_f (h - c - e) = \max. (S),$$

а

$$\frac{be^2}{2} \left(h - c - \frac{e}{3} \right) = m_f \omega_f (h - c - e) \left(h - c - \frac{e}{3} \right) = (I).$$

Если задаться желательным предельным напряжением

$$n_b = 40 \text{ кг/см}^2 \text{ и } n_f = 1000 \text{ кг/см}^2,$$

то имеем

$$h - a = 0,390 \sqrt{\frac{M}{b}},$$

$$\omega_f = 0,00293 \sqrt{Mb}$$

и

$$e = 0,375 (h - a).$$

Б. Двойная арматура, бетон на растяжение не работает.

$$e = \frac{m(\omega_f^0 + \omega_f^u)}{b} + \sqrt{\left(\frac{m(\omega_f^0 + \omega_f^u)}{b} \right)^2 + \frac{2m}{b} (\omega_f^0 c' + \omega_f^u (h - e))},$$

$$n_b = \frac{M}{\frac{be^2}{2} \left(h - c - \frac{e}{3} \right) + m \omega_f^0 \frac{e - c'}{e} (h - c_1 - e)}.$$

И здесь знаменатель, по умножении на e , даст

$$\frac{be^2}{2} \left(h - c - \frac{e}{3} \right) + m \omega_f (e - c') (h - c_1 - e) = (I_1).$$

Для случая учета работы бетона на растяжение формулы получаются более сложные, особенно если принять *разные* E на растяжение и сжатие: они все выводятся из тех же 4-х уравнений. Мы здесь эти формулы приводить не будем, отсылая интересующихся к специальным курсам и отмечая лишь еще раз, что большей частью принимается $E_{\text{раст.}} = E_{\text{сжат.}}$ для упрощения расчета, а именно, $E_b = 140000 \text{ кг/см}^2$ (русск. норма 1922 г.), что и дает $m_f = 15$.

В. Ребристые тавровые сечения с двойной арматурой.

Если мы не допускаем работы бетона на растяжение, и горизонтальная полка (плита) настолько толста, что можно предположить прохождение нейтральной оси в пределах полки, то в этом случае, как это совершенно ясно, остаются в силе все формулы для простой прямоугольной плиты шириной b , и только железо, конечно, располагается и вверх и вниз лишь на ширине b_1 . Но если нейтральная ось приходится вне полки (что бывает довольно редко при неучете работы бетона на растяжение и довольно часто (почти всегда)

при учете этой работы), то формулы усложняются в своих результатах, оставаясь по существу все теми же.

$$\begin{aligned} (1) \quad & \int n. d\omega = 0, \\ (2) \quad & \int n.y. d\omega = 0, \\ (3) \quad & i_f^0 : i_b^0 = (e - c') : e, \\ (4) \quad & i_f^u : i_b^0 = (h - c - e) : e, \end{aligned}$$

что эквивалентно выражению $(S_1) = 0$.

Приведем и здесь несколько вытекающих из этих уравнений формул в окончательном виде.

Тавровое сечение с одиночной арматурой — бетон на растяжение не работает — нейтральная ось проходит в пределах ребра (см. рис. 179).

e определяется из уравнения $(S_1) = 0$, а именно:

$$\frac{b_1 e^2}{2} + e(m\omega_f + d(b - b_1)) = m(h - c)\omega_f + \frac{(b - b_1)d^2}{2}.$$

Кроме e полезно определить y_0 — расстояние от нейтральной оси до точки приложения равнодействующей внутренних сил сжатия бетона.

Из данных нами формул вытекает:

$$y_0 = \frac{2}{3} \frac{[bc^3 - (b - b_1)(e - d)^3]}{[be^2 - (b - b_1)(e - d)^2]}.$$

Тогда, очевидно, сама равнодействующая R равна

$$R = \frac{M}{h - c - e + y_0}$$

где $(h - c - e + y_0)$ — плечо внутренней пары и

$$n_f = \frac{R}{\omega_f} = \frac{M}{\omega_f(h - c - e + y_0)}.$$

Отсюда легко найти и величину n_b .

Можно написать и выражение для (I_1)

$$\begin{aligned} (I_1) &= \left(\frac{be^2}{2} - \frac{(b - b_1)(e - d)^2}{2} \right) (h - e - c + y_0) = \\ &= m\omega_f(h - e - c)(h - e - c + y_0). \end{aligned}$$

§ 7. Тангенциальные напряжения.

Теперь перейдем к определению тангенциальных напряжений (см. рисунок 180).

Применяя ранее выведенную формулу

$$t = \frac{Q}{(I)} \cdot \frac{(S)}{b}$$

и беря I и S приведенными к бетону, мы видим, что величина S как для прямоугольного, так и для таврового сечения растет до нейтральной оси, а далее (в предположении, что бетон не работает на растяжение) остается постоянной до горизонта нижней арматуры.

Ясно, что

$$\max t = \frac{Q}{bh_0}$$

и имеет место на нейтральной оси и ниже ее.

Нами уже даны значения h_0 для разных случаев—ими и следует пользоваться.

Конечно, и здесь должно иметь место равенство $\int t d\omega = Q$, но уже в этом равенстве мы ниже нейтральной оси должны положить для бетона $d\omega = 0$ и брать *лишь усиленную площадь железа*, фактически же бетон имеется, и сдвиги в нем происходят с *постоянным напряжением*.

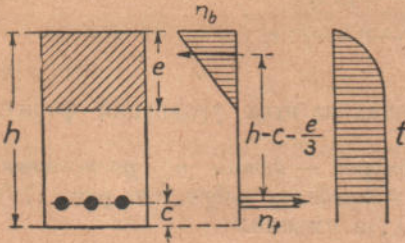


Рис. 180. Сдвиг в железобетоне при изгибе.

Иногда еще проверяют железо на *выдергивание его из бетона*.

Взяв в продольной плоскости, проходящей через арматуру, участок размером $b \times 1$ мы напишем условие равновесия между силой сдвига в бетоне, распределенной на площади $b \times 1$ и силой сопротивления бетона выдергиванию из него железа, распределенной на поверхности сопряжения железа и бетона, равной $s \times 1$, если s —периметр всех стержней арматуры в данном горизонте. Имеем

$$t \cdot b \cdot 1 = t_u \cdot s \cdot 1.$$

Откуда

$$t_{cu} = \frac{t \cdot b}{s} = \frac{Q}{s(h-c-y_0)},$$

т.-е. если $b = s$, то $t_u = t$.

Напряжение t не должно превышать 5 кг/см^2 , а t_{cu} — 6 кг/см^2 .

Заканчивая этим рассмотрение простого изгиба, заметим, что в районе растяжения бетон, соседний с железом, безусловно *перенапрягается*—там то и развиваются те трещинки фиссуры, о которых мы говорили выше. Для устранения этих трещин, во-первых, требуют иногда проверки работы бетона на растяжение с недопущением чрезмерных напряжений, а во-вторых, ищут более „пластичного“, т.-е. способного немного тянуться, бетона, что, конечно, должно препятствовать развитию трещин. Большие надежды подает в этом отношении *глинозёмистый портланд цемент*, изготовляемый уже во многих европейских странах.

Конечно, при конструировании железобетонных сооружений возникает еще целый ряд вопросов, подлежащих разрешению. Так, арматуру приходится *переводить* снизу вверх там, где M меняет свой знак; тангенциальные напряжения оказываются столь значительными, что ту часть поперечной силы, которая не может быть воспринята бетоном, следует воспринять частью переводимыми снизу вверх прутьями, частью особыми железными *хомутами*, вертикально расположенными в теле бетона; в наклонных направлениях развиваются *главные нормальные напряжения*, которые также приходится воспринимать переводимыми прутьями, во многих элементах железобетонных сооружений развивается *кручение* и т. д.—все эти вопросы подробно освещаются в курсах железобетонных конструкций, тем более, что и решаются они в большой мере применительно к некоторым конструктивным соображениям.

§ 8. Совместное действие изгиба и сжатия.

Случай этот особо часто имеет место в арках, где, в зависимости от положения кривой давления, на ряду со сжатием развиваются и более или менее значительные изгибающие моменты. Здесь можно различить *два*

случая: 1) все сечение сжато и 2) часть сечения сжата, а часть вытянута, (при чем бетон можно в вытянутой зоне считать работающим или не работающим). Оба случая изображены на рисунке 181.

В однородном сечении гарантией сжатия всего сечения является нахождение кривой давления в ядре сечения. Некоторую аналогию можно найти и здесь.

$$n = \frac{N}{(\omega_1)} \pm \frac{M}{(I_1)} \max y = \frac{N}{(\omega_1)} \left(1 \pm y_0 \frac{(\omega_1)}{(I_1)} \max y \right)$$

где y_0 — плечо силы N , а $\max y$ — расстояние наиболее удаленной оси, т. е. e кверху и $(h - e)$ — книзу, (обычно $\max y$, в виду симметрии, равно или близко к $\frac{h}{2}$ при распространении сжатия на всю площадь).

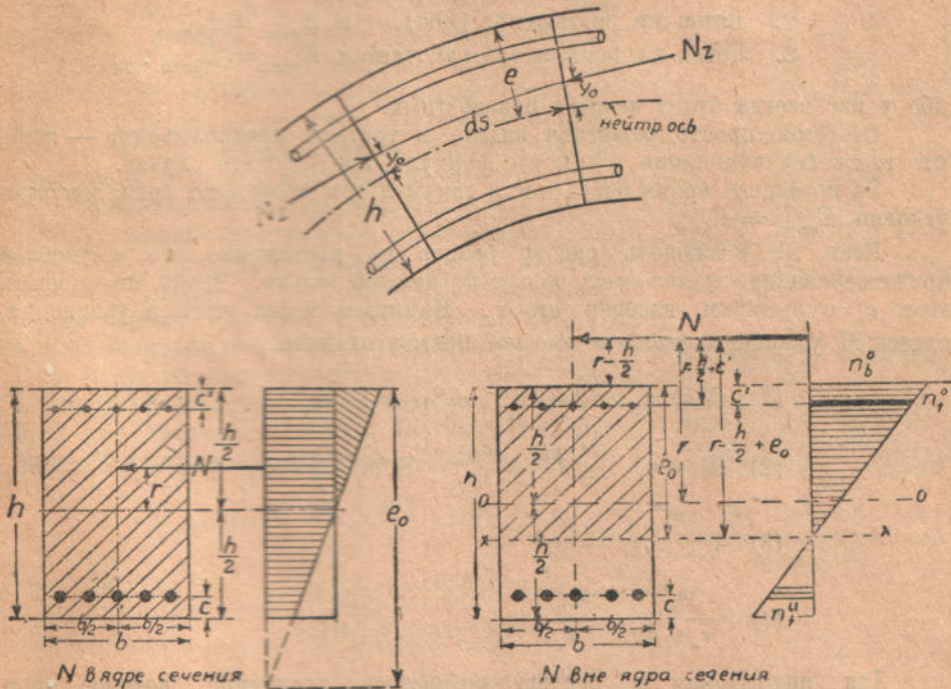


Рис. 181. Сочетание изгиба со сжатием.

Ясно, что для отсутствия растяжения, необходимо, чтобы

$$y_0 \leq \frac{(I_1)}{(\omega_1) \max y}$$

Эту величину можно всегда определить (см. ниже) принимая для всего сечения бетон с постоянным $E_{\text{сжат}}$ ибо в результате, ведь, все же весь бетон будет сжат. Таким путем мы найдем границы ядра сечения для железобетона.

Вообще наша задача решается теми же четырьмя классическими уравнениями, но в первом $\int n d\omega = N$ и $(S_1) \neq 0$.

Они дают

$$e = \frac{\frac{bh}{2} + m(\omega_f''(h-c) + \omega_f^{\circ}c_1)}{bh + m(\omega_f'' + \omega_f^{\circ})}$$

где e есть горизонт нейтральной оси при $N = 0$, но при работе всего бетона с одинаковым E .

$$(\omega_1) = bh + m(\omega_f^u + \omega_f^o)$$

$$(I_1) = \frac{bh^3}{12} + bh\left(e - \frac{h}{2}\right)^2 + m\omega_f^u(h - e - c)^2 + m\omega_f^o(e - c_1)^2.$$

Этих данных достаточно для решения всех вопросов.

2-й случай.—Кривая давления вышла из ядра сечения железобетонного бруса.

Имеем те же 4 классических уравнения, видоизмененных лишь наличием N . Они позволяют решить вопрос в любом предположении:

1. Бетон на растяжение не работает,
2. Бетон на растяжение работает и $E_{\text{раст.}} \neq E_{\text{сжат.}}$,
3. Бетон на растяжение работает и $E_{\text{раст.}} = E_{\text{сжат.}}$,

ибо у нас всегда будет четыре неизвестных.

Особенно просто решается задача в третьем предположении — ясно, что здесь без изменения годны все формулы предыдущего случая.

За последнее время очень часто таким путем проверяют арки, допуская условно $E_{\text{сжат.}} = E_{\text{раст.}}$.

Если же исключить работу бетона на растяжение, то e удобнее придать значение расстояния сверху до нулевой точки. Чтобы не смешать этого e с прежним, назовем его e_0 . Напишем наши четыре уравнения, отнеся M условно к середине высоты прямоугольника.

$$(1) \quad N = n_b^o \cdot \frac{be_0}{2} + n_f^o \cdot \omega_f^o + n_f^u \cdot \omega_f^u$$

$$(2) \quad M = n_b^o \cdot \frac{be_0}{2} \left(\frac{h}{2} - \frac{e_0}{3}\right) + n_f^o \omega_f^u \left(\frac{h}{2} - c_1\right) + n_f^u \omega_f^u \left(\frac{h}{2} - c\right)$$

$$(3) \quad \frac{n_f^u}{h - c - e_0} = \frac{mn_b^o}{e_0}$$

$$(4) \quad \frac{n_f^o}{e_0 - c_1} = \frac{mn_b^o}{e_0}$$

Для нахождения e_0 имеем кубическое уравнение, которое при $\omega_f^o = \omega_f^u$ пишется так:

$$e_0^3 - 3\left(\frac{h}{2} - \frac{M}{N}\right)e_0^2 + 12\frac{M}{N} \cdot \frac{m\omega_f}{b}e_0 - 6\frac{m\omega_f}{b}\left[\frac{M}{N}h + 2\left(\frac{h}{2} - c\right)^2\right] = 0.$$

Имеется множество таблиц и номограмм, облегчающих решение этого уравнения. Как и следовало ожидать, здесь положение нулевой линии зависит от эксцентрициитета силы N .

§ 9. Продольный изгиб в железобетонных стержнях.

Формула допускаемых напряжений принимается по типу Навье, а именно:

$$n_b' = \frac{n_b}{1 + 0,0001 \left(\frac{l}{\rho}\right)^2},$$

где

$$\rho^2 = \frac{(I_1)}{(\omega_1)}.$$

Что касается до значения величин (ω_1) , и (I) то они равны поперечному

$$(\omega_1) = \omega_b + m\omega_f \quad \text{и} \quad (I_1) = I_b + mI_f.$$

Для предотвращения чрезмерного насыщения стоек железом принято принимать в расчет в сжатых железобетонных стойках в полном размере только количество железа, не превращающее 2% площади сечения; избыточное количество железа учитывается только в размере одной четверти (например, при 4% берется $2 + 2 \cdot 0,25 = 2,5\%$ железа).

В случае применения так называемой *спиральной* арматуры (см. рис. 182), заключающейся в том, что *снаружи* основной арматуры помещается обмотка по винтовой линии, которая не должна иметь длину хода, большую $\frac{1}{5}$ наименьшего размера колонны, то такую обмотку учитывают сугубо, имея ввиду ее сопротивление поперечному расширению при сжатии, проявляющееся, конечно, в результате *уменьшением деформации от продольного сжатия*. Для нее принят следующий условный и чисто эмпирический метод:

Заменяют *обмотку* эквивалентным ей по объему железа количеством *продольной* арматуры, и полученную дополнительную площадь, *удвоив ее*, вводят в расчетную площадь железа и при определении (ω_1) , и при определении (I_1) , а следовательно и ρ .

Если, например, колонна имеет диаметр D , а спиральная арматура—диаметр d и n витков на 1 пог. сантиметр высоты, то искомая эквивалентная площадь ω_{ff} конечно, найдется так:

$$\omega_{ff} = n\pi D \cdot \frac{\pi d^2}{4} = \frac{n\pi^2}{4} \cdot Dd^2$$

получим

$$(\omega_1) = \omega_b + m(\omega_f + 2\omega_{ff})$$

$$(I_1) = I_b + m(I_f + 2I_{ff}).$$

Существует еще ограничение, что (I_1) не может быть более $2I_b$.

Заканчивая главу о железобетоне, отметим, что принципы, положенные в основу расчета железобетона, немного условны, но все же исходят из основной нашей рабочей гипотезы—*сохранение плоских сечений*. Неясным остается до сего дня вопрос о работе бетона в растянутой зоне и о степени опасности так называемых *фиссур* в этой зоне; однако, конструктивные и экономические преимущества железобетона столь велики, что техника широко использует этот материал, не закрывая глаз на его недостатки, но борясь с ними и парализуя их. Опыт ближайших десятилетий должен показать, насколько железобетонные сооружения, пролеты коих (в арочных мостах) дошли уже до 170 метров (мост *La Roche St. Bernard*), окажутся еще и *долговечными*, ибо ныне, как уже выше указано, срок их существования измеряется лишь двумя, максимум—тремя десятками лет.

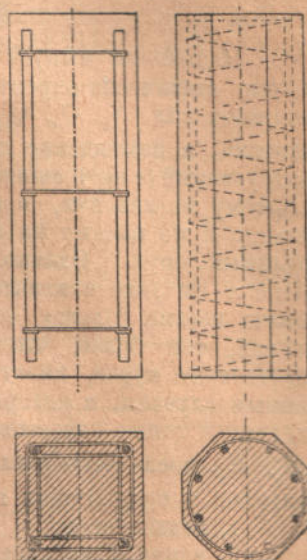


Рис. 182. Колонны с обыкновенной и спиральной арматурой.

ГЛАВА XII.

Некоторые особые явления в брусѣ, вызываемые осадками опор, действием температуры и динамической нагрузкой.

§ 1. Общие соображения.

Настоящий выпуск главным образом посвящен детальному изучению бруса статически-определимого, т.-е. такого, в котором нахождение всею внешних сил (N_x, Q_x, Q_y, M_x, M_y) производится на основании законов статики, а нахождение деформаций и перемещений также совершается без затруднений (*в виду статической определенности модели элемента бруса ds*). Поэтому те явления, о которых мы будем говорить в настоящей главе, иногда и не влияют на изученный нами в этом выпуске статически-определимый брус. Однако, все же мы считаем уместным именно в этом первом выпуске охарактеризовать сущность тех явлений, которые будут иметь весьма большое значение при изучении сложных инженерных сооружений, тем более, что *общая теория бруса*, данная в первых главах настоящего курса, имеет применение *полностью* и к статически неопределимым случаям, в которых, в результате тех или иных вычислений всегда делаются также известными для *любого* сечения величины N_x, Q_x, Q_y, M_x, M_y , после чего исследования идут дальше уже тем же путем, который изложен в предыдущих главах. К этим явлениям относятся:

- 1, осадка опор,
- 2, влияние температуры и
- 3, динамическое действие нагрузки.

Рассмотрим каждое из явлений отдельно.

§ 2. Осадка опор и ее влияние.

Представим себе какой-нибудь брус или даже вообще какое-нибудь плоское тело, опирающееся:

- а) на три классических стержня,
- б) на четыре стержня (второй случай в отношении опорных реакций будет статически неопределимым).

Мы считали до сего времени, что опоры неподвижны. Представим себе, что они способны давать *осадку* (см. рис. 183). Это может случиться двумя путями: или то *основание*, на которое опирается данный стержень, способно осесть сразу на некоторую конечную величину Δl , при чем стержень, оставаясь бесконечно жестким, не изменяет своей длины l , но все же опускается и увлекает за собой сооружение; или основание неизбежно, по самый стержень *упруг* и уменьшает свою длину *пропорционально силе*, через него передаваемой, (или, что реже бывает, в функциональной, т.-е. даже не линейной зависимости от этой силы). Первый случай называется— *опора с осадкой*, а второй— *упругая опора* (см. верхнюю часть рис. 183-го).

Можно возразить, что в этой классификации отсутствует случай *упругого основания*, ибо основание предполагается или неизбежным или *оседающим сразу*, но дело в том, что случай упругого основания введен во *вторую* комбинацию, ибо при нашей схеме условных обозначений опор можно упругость основания выразить упругостью опорного

стержня. Нам важно здесь разделить два случая:—осадка не зависит от силы, воспринятой стержнем, и осадка от этой силы зависит.

Конечно, предполагаем осадки все же незначительными, т.е. не изменяющими генеральных размеров сооружения. Пусть осадки произойдут по всем трем стержням классического случая и произойдут ассиметрично — левая опора сильно осядет, а правая выпрет вверх. Ясно, что при этом ничего в условиях действия внешних сил на наше сооружение не изменится, так как ничтожное изменение плеч внешних, например, вертикальных сил, вызванное наклоном оси (в то время, как силы остаются вертикальными), а также возможное ничтожное изменение наклона одиночного опорного стержня должно игнорировать. Никаких деформаций в соору-

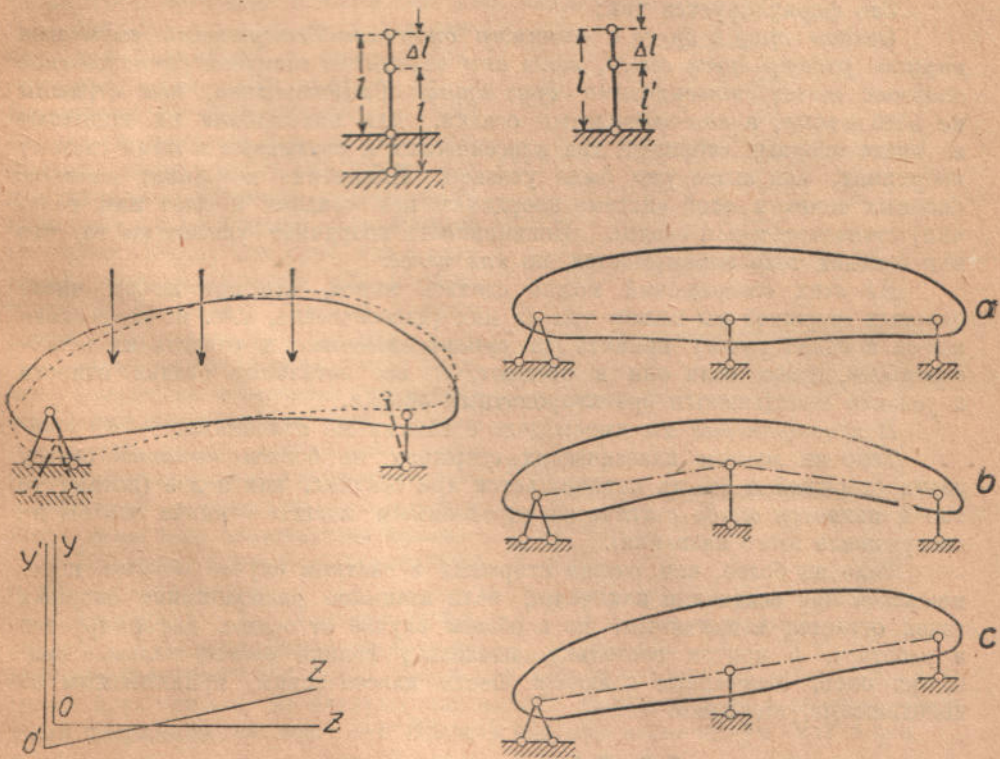


Рис. 183. Влияние осадочности и упругости опор на работу сооружения.

жении самым перемещением опор не вызывается, и если связать систему координат заранее с телом, взяв O в шарнире неподвижной опоры, и направив OZ на верхний шарнир подвижной опоры, то при новом положении тела, расположение заданных сил и заданного очертания тела остается таким же по отношению к системе координат: тело повернулось, как целое.

Таковыми же останутся опорные реакции, силы N_x, Q_x, Q_y, M_x, M_y и т. д., ибо уравнения статики останутся те же. Это будет одинаково справедливо и для простой и для упругой осадки.

Итак, незначительная осадка отдельных опор на работу статически определимого в отношении опорных стержней бруса совершенно не влияет.

Если же мы обратим наше внимание на сооружение на четырех стержнях, то тут мы увидим иную картину (см. рис. 183). Представим себе, что

крайние опоры опустились вниз, а средняя выперла кверху просто от несовершенства основания под крайними опорами, даже и без действия внешних сил (случай б) (предполагаем сооружение невесомым). Ясно, что сооружение искривится, деформируется и разовьет дополнительную работу. Средняя опора будет здесь как бы силой, изгибающей брус кверху. Однако можно представить себе случай такой осадки опор, при которой деформаций не будет. Это будет тогда, когда все опоры осадут *соответственно* и сохранят свое взаимное положение, напр., останутся на той же прямой, даже если сама прямая наклонится (случай с), или *останутся на вершинах того же треугольника* (или, при большом числе стержней, на вершинах того же многоугольника), даже если треугольник (или многоугольник) сам и повернется, как целое.

Это формулируется так:

Осадки опор в брус с лишними опорными стержнями вызывают упругую работу бруса всегда, когда они изменяют взаимное расположение опорных точек относительно друг друга. Следовательно, нам страшны не абсолютные, а *относительные* осадки. Для нахождения их выделяют из числа опорных стержней три классических и связывают с ними систему координат, как выше уже было указано. Изменение координат *лишних* опорных точек в этой системе координат при осадках и дает нам величину *относительных* осадок. Неизменность координат укажет на то, что при осадках тело перемещается, но как целое.

Из этих соображений можно сделать вывод, что при любом числе опорных стержней мы можем три из них (классические, т. е. не пересекающиеся в одной точке) принять за *ориентировочные* и считать их *неподвижными*, даже если они и оседают, а все остальные осадки отнести к условно неподвижным ориентировочным опорам.

В пространстве мы имеем дело с такими же явлениями.

Тело на *шести* классических стержнях не боится *никаких* осадок своих стержней и всегда перемещается при осадках, как целое (потому то оно и является *всегда* статически определенным внешне — иначе оно бы не заслуживало этого названия).

Тело на более, чем *шести* стержнях в частном случае *может* перемещаться при осадках и как целое, если взаимное расположение опорных точек остается неизменным, но в общем случае от осадок деформируется и работает, и притом постольку, поскольку велики *относительные* смещения опор, отнесенные к любым шести классическим, принимаемым за неподвижные, стержням.

§ 3. Действие температуры.

Действие температуры может быть двояким:

- 1) равномерный нагрев всех точек тела;
- 2) односторонний (неравномерный) нагрев с поверхности.

Случая распределения нагрева неравномерно *внутри* тела мы не рассматриваем за сложностью и редкостью этого случая.

Рассмотрим каждый из двух основных случаев отдельно:

1. Равномерный нагрев или охлаждение.

Мы уже указывали, что равномерный нагрев или охлаждение имеют целью превратить тело в другое, *подобное* прежнему. Если к этому не встречается *препятствий*, то тело изменяет свои формы, но никаких дополнительных напряжений в нем не развивается — опорные реакции, а так же N_x, Q_x, Q_y, M_x, M_y остаются *прежними*. Каждый элемент ds удлиняется на $\alpha \cdot t \cdot ds$, где α — коэффициент, линейного расширения, а t — приращение температуры. *Статически определенная система на трех или на шести*

стержней всегда обеспечивает телу возможность такого расширения или сужения, при чем конечно, размеры тела и плечи сил немного меняются, одиночный стержень немного наклоняется в ту или иную сторону, но это мы игнорируем, ибо генеральные размеры сооружения не меняются.

Итак, температура не действует на статически определимые системы.

В системах с лишним числом стержней вопрос обстоит иначе—там иногда возможно превращение тела в подобное без давления на опорные стержни, иногда невозможно.

Возьмем прямой брус, заделанный двумя концами в стену; несмотря на то, что он опирается на пять стержней, он может давать подобные фигуры, не давая на опорные стержни—это потому, что все опоры на одной прямой и стержень прямой, так что для сохранения подобия он должен только удлиниться, оставаясь прямым (см. рис. 184).

Если же возьмем арку, заделанную двумя концами в стену (шесть стержней), или даже арку с двумя шарнирами (четыре стержня), то они не могут превратиться в подобные фигуры, ибо в высоту они имеют, как выпуклое тело, возможность свободного повышения и понижения, а в ширину не имеют. Между тем ясно, что в этих арках при расширении их в тело, подобное прежнему, стрелки должны расти пропорционально пролету.

Итак, при лишнем числе опорных стержней изменение температуры вызывает упругие деформации и упругую работу всякий раз, когда расположение опорных стержней препятствует сохранению подобия при нагревании или охлаждении тела.

Все эти соображения справедливы и для пространства.

Рассмотрим на элементе бруса, каковы же те температурные силы, которые развиваются в брус, когда что либо препятствует его расширению (напр. брус прямой, но наглухо заделанный концами, т.е. с шестью опорными стержнями; см. рис. 184). Назовем искомую термическую силу через N_t . Ясно, что $N_t = i_t \cdot E \omega = \mp \alpha t \cdot E \omega$. При этом при повышении температуры внутренняя сила, уничтожающая желательное для температуры удлинение $i_t = \alpha t$ будет силой сжимающей и наоборот, почему и знаки перед α поставлены \mp .

С термическими силами мы часто будем встречаться впоследствии. Отметим лишь, что N_t бывает весьма значительно.

Если взять железо, то для него при пределе упругости, т.е. при 2200 кг/см^2 , $i = \frac{2200}{2200000} = \infty 0,001$, а при нагревании на 100°

$$i_t = \alpha t = 0,000014 \cdot 100 = 0,0014.$$

Очевидно и напряжение получится соответственно равное $2200 \cdot 1,4 = 3080 \text{ кг/см}^2$, т.е. выше предела упругости. Отметим, еще, что в бетонных и железобетонных сооружениях имеет место усадка бетона при твердении на воздухе, эквивалентная понижению температуры до 15° C и также вызывающая при заделке концов соответственные напряжения.

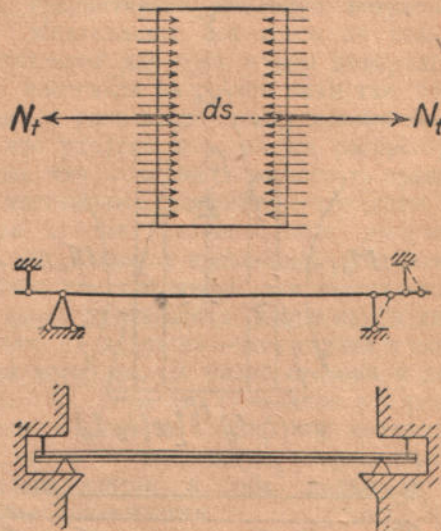


Рис. 184. Равномерное изменение температуры.

2. *Неравномерный нагрев* (см. рис. 185).

Если существует *разница температур* с двух сторон бруса (t_2 и t_1), то удлинения верхних и нижних волокон будут *неодинаковы*, результатом чего явится образование угла $\Delta\varphi_1$ между первоначально параллельными краями элемента ds

$$\Delta\varphi_1 = \frac{\alpha(t_2 - t_1)}{h} ds$$

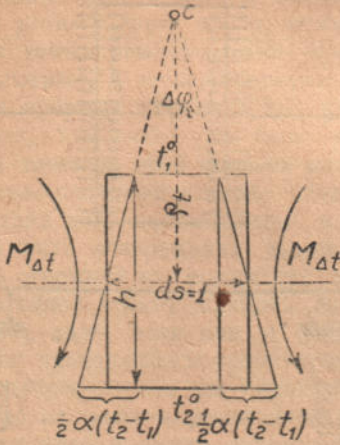
и весь брус искривится по дуге круга радиусом

$$\rho_1 = \frac{h}{\alpha(t_2 - t_1)}$$

так как $\Delta\varphi_1 = \frac{ds}{\rho_1}$.

Если этому перемещению существует *препятствие*, совершенно не допускающее искривления, то в бруске должна возникнуть некая *термическая пара* по формуле

$$M_{\Delta t} = \frac{EJ}{\rho_1} = \frac{\alpha(t_2 - t_1)}{h} EJ$$



Случай *полной* невозможности искривления почти не встречается, но самое значение $M_{\Delta t}$ в его полном виде нам еще пригодится.

Впрочем, можно представить себе прямой брус, лежащий на совершенно жесткой плоскости, притянутый к ней и охлаждаемый сверху.

Опять же легко усмотреть, что при трех классических стержнях *всегда* искривление бруса осуществимо и, следовательно, термической пары *нет*; в статически же неопределимых случаях, при неупругих



Рис. 185. Неравномерное изменение температуры.

опорных стержнях, такому искривлению *всегда* встречаются препятствия. и та или иная доля $M_{\Delta t}$ *всегда* имеется.

Итак, N_i и $M_{\Delta t}$, как реальные силы, встречаются не всегда и, конечно, *не всегда достигают своего полного значения* в отдельных элементах ds даже и в статически-неопределимых системах, ибо ясно, что не во всех элементах имеется *полное* препятствие сближению, расхождению или искривлению.

Однако, величины эти и именно в том их *полном* значении, которое показано выше, удобно вводить, как условные силы, для определения полных термических деформаций тела, именно в статически—определимых случаях, т. е. тогда, когда N_i и $M_{\Delta t}$, как силы, *навверное* отсутствуют.

Действительно, как узнать удлинение оси прямого бруса от нагрева? Оно будет именно такое, как будто *действует* беспрепятственно сила N_i .

Как узнать прогиб посредине прямого бруса от неравномерного нагрева? Он будет именно таков, как будто действует беспрепятственно пара $M_{\Delta t}$, постоянная по всему пролету.

Итак, когда внутренних термических сил и пар нет, и температура вызывает полностью свойственные ее деформации и перемещения, надо условно прибавлять термические силы и пары к наличным действительным силам и парам именно для определения полных деформаций и перемещений. Как мы увидим ниже, именно этот прием позволит нам узнать для случаев, когда термические деформации стеснены, или даже сведены к нулю, истинное значение термических сил и пар в отдельных элементах сооружения. (См. выпуск III).

§ 4. Динамическое действие нагрузки.

Во всех тех расчетах и соображениях, которые имеются в настоящем выпуске, мы исходили из предположения так называемого *статического действия сил*, которое характеризуется тем, что каждая из действующих сил, независимо от всех остальных, сравнительно медленно возрастает от 0 до своего конечного значения. Медленность эта вовсе не должна быть чрезмерной, но должна быть достаточной для того, чтобы деформации и перемещения успевали возникать и поспевали за ростом силы так, дабы в каждый момент наблюдалось статическое равновесие между силами внешними и внутренними; в виду того, что упругие деформации распространяются в теле со скоростью звука, ясно, что силы могут возрастать сравнительно быстро (некоторые подсчеты показывают, например, что даже та скорость, с которой возрастает внутри орудия давление газов, выбрасывающее артиллерийский снаряд, еще не является чрезмерной и действие этого давления на стенки орудия можно рассматривать, как статическое).

Однако, бывает случай, когда силы прилагаются мгновенно и даже с некоторым *ускорением* по направлению их действия—этот случай и называется случаем *динамического действия нагрузки*. В малой степени и движущийся поезд действует динамически, ибо, хотя его громадное ускорение направлено горизонтально, однако, под влиянием ассиметрии механизма и явления подпрыгивания, он дает, хотя и ничтожную, вертикальную составляющую ускорения—вертикальные удары, а баба, падающая на головку сваи, уже определенно действует динамически.

Это то динамическое действие и надо изучать и уметь его оценивать.

Изучение этого явления можно обобщить.

Возьмем любые из изученных нами явлений: растяжение, сжатие, изгиб, сдвиг и кручение. Во всех этих явлениях по закону Гука некая сила вызывает некое перемещение точки приложения силы, являющееся результатом накопления тех или иных деформаций. Назовем это перемещение под действием статической силы P_{st} через f_{st} . Мы умеем его определить во всех случаях, показанных на рис. 186.

Представим себе, что та же сила P падает с некоторой высоты h (в частности h может равняться и 0, но сила должна возникнуть мгновенно—мы увидим из дальнейшего, что не все интересующие нас факторы зависят от h).

Примером мгновенного возникновения силы при $h=0$ является напр., случай мгновенного отрыва от сооружения тяжелого груза, к нему подвешенного. В момент отрыва мгновенно как бы возникает сила, противоположная упавшему грузу.

Наш падающий груз в определенный момент времени коснется упругого тела, занимающего первоначальное свое положение, и будет продолжать опускаться вместе с упругим телом, встречая со стороны тела противодействие, пропорциональное величине опускания, но не равное активному действию силы; здесь, следовательно, действие не равно противодействию, и потому происходит колебание. Это положение есть следствие закона Гука. Пусть

$f_{st} = \alpha P_{st}$; напишем по началу д'Аламбера уравнение движения точки тела, на которую упал груз P_{st} , считая, что точка колеблется вместе с грузом.

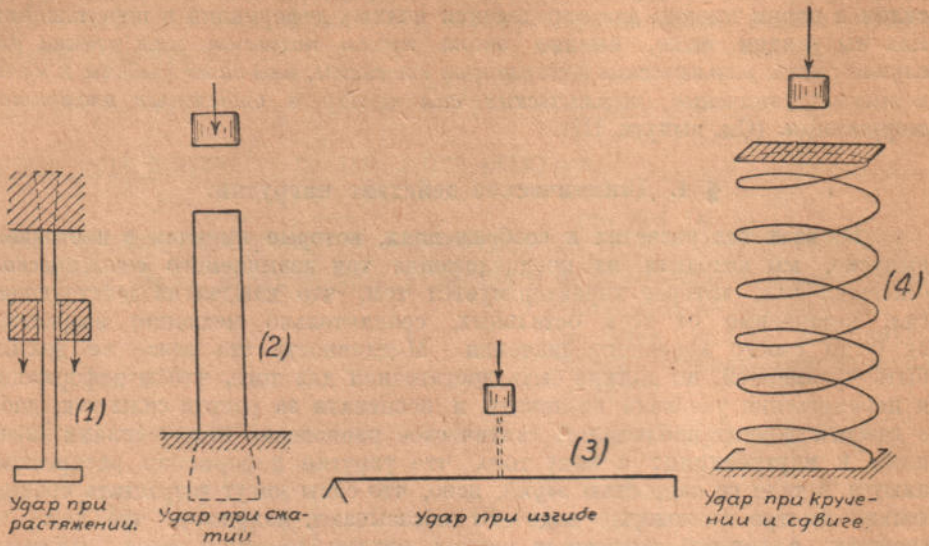


Рис. 186. Различные случаи удара, воспринимаемого упругим телом.

Очевидно, надо писать так, принимая за переменную координату f_i :

$$\frac{P_{st}}{g} \cdot \frac{\partial^2 f_i}{\partial t^2} = P_{st} \left(1 - \frac{f_i}{f_{st}}\right),$$

или

$$\frac{\partial^2 f_i}{\partial t^2} = \frac{g}{f_{st}} (f_{st} - f_i).$$

Назовем

$$\sqrt{\frac{g}{f_{st}}} = k$$

и

$$f_i - f_{st} = f_i^0,$$

откуда

$$\frac{\partial^2 f_i}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f_i^0}{\partial t^2}$$

и

$$\frac{\partial^2 f_i^0}{\partial t^2} = -k^2 f_i^0.$$

Отсюда, как известно (см. главу о продольном изгибе)

$$f_i^0 = A \sin kt + B \cos kt; \quad \frac{\partial f_i^0}{\partial t} = Ak \cos kt - Bk \sin kt.$$

Из начальных условий движения известно, что при

$$t = 0 \quad f_i^0 = -f_{st}; \quad \frac{\partial f_i^0}{\partial t} = \sqrt{2gh},$$

откуда

$$f_i^0 = \sqrt{2hf_{st}} \sin kt - f_{st} \cos kt.$$

Найдем макс f_i^0 .

Приравнивая нулю

$$\frac{\partial f_i^0}{\partial t},$$

имеем

$$\sqrt{2hf_{st}} \cos kt_0 + f_{st} \sin kt_0 = 0,$$

или

$$\operatorname{tg} kt_0 = -\sqrt{\frac{2h}{f_{st}}},$$

откуда

$$\sin kt_0 = \pm \sqrt{\frac{2h}{2h + f_{st}}}; \quad \cos kt_0 = \mp \sqrt{\frac{f_{st}}{2h + f_{st}}}$$

и

$$\frac{\max}{\min} f_i^0 = \pm \sqrt{2hf_{st} + f_{st}^2}.$$

Это и есть амплитуда колебания.

Соответственно

$$\frac{\max}{\min} f_i = f_{st} \pm \sqrt{2hf_{st} + f_{st}^2}.$$

Исследуя эту формулу, видим, что при $h = 0$

$$\frac{\max}{\min} f_i = f_{st} \pm f_{st} = f_{st} (1 \pm 1)$$

т.-е. f_i меняется от $2f_{st}$ до 0.

Перемещения оказываются вдвое более статических.

Если h велико сравнительно с f_{st} , то имеем приближенно

$$\frac{\max}{\min} f_i^0 = \pm \sqrt{2hf_{st}}$$

что очень напоминает знаковую формулу Гидравлики. В этом случае можно принять $f_i^0 = \sqrt{2hf} \cdot \sin kt$

Отыскивая

$$\max \frac{\partial f_i^0}{\partial t},$$

найдем

$$\sqrt{(2h+f)g} = \infty \sqrt{2gh}$$

Но самое интересное в полученном результате то, что колебание должно быть *вечным* — это настоящее перпетуум-мобиле первого рода *при условии отсутствия сопротивления среды и наличия идеально упругого тела*. Выходит так, что стоит поместить идеально упругое тело в вакуум, придать ему идеальную ударную нагрузку, напр., бросить на него маленькую гиричку или просто дать ему толчок, и оно будет колебаться *вечно*. Это и верно, но ни идеального вакуума, ни идеально упругого тела найти нельзя, да и такое перпетуум-мобиле не будет способно произвести никакой работы.

Конечно, мы составили собственно уравнения колебания груза P , приравняв их к колебаниям ударяемого тела, но эти колебания происходят совместно.

Идем дальше — найдем время одного колебания. Так как для нашей кривой полным периодом будет 2π , то время одного колебания найдется по формуле

$$t_1 = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{f_{st}}{g}},$$

т.-е. 1) не зависит от *высоты* падения груза (на этом основана и вся теория музыкальных инструментов) и

2) равно времени колебания математического маятника, длиной $l = f_{st}$, т.-е. очень короткого. Ясно, что k — есть частота колебаний в 2π секунд, как было уже отмечено при изучении колебания струны при продольном изгибе.

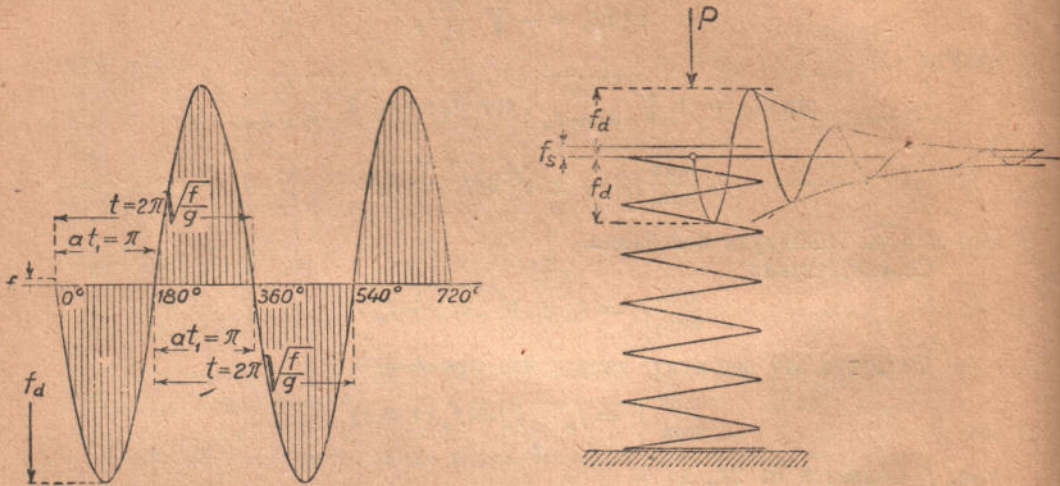


Рис. 187. Незатухающие и затухающие колебания.

На деле, конечно, колебания *затухают*. Это подтверждается и лабораторным путем, и теоретически. Если принять, что сопротивление пропорционально *скорости* колебаний, напр., по формуле

$$R = -\varphi \frac{\partial f_t^0}{\partial t},$$

то уравнение движения уже будет иметь три члена:

$$\frac{P_{st}}{g} \cdot \frac{\partial^2 f_t^0}{\partial t^2} = P_{st} \left(1 - \frac{f_t^0}{f_{st}}\right) - \varphi \frac{\partial f_t^0}{\partial t},$$

что даст в результате дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial^2 f_t^0}{\partial t^2} + \frac{\varphi g}{P_{st}} \cdot \frac{\partial f_t^0}{\partial t} + k^2 \cdot f_t^0 = 0.$$

Пусть

$$\frac{\varphi g}{P_{st}} = 2m \quad \text{и} \quad \sqrt{\frac{g}{f_{st}}} = k.$$

Получим уравнение:

$$f^{0''} + 2mf^{0'} + k^2 f^0 = 0.$$

Решая его при помощи показательных функций, подобно тому, как мы решали аналогичное уравнение при продольном изгибе, получим, принимая $f_t^0 = e^{at}$.

$$a^2 e^{at} + 2mae^{at} + k^2 e^{at} = 0,$$

характеристическое уравнение будет $a^2 + 2ma + k^2 = 0$, откуда

$$a = -m \pm \sqrt{m^2 - k^2} = -m \pm i\sqrt{k^2 - m^2}.$$

Здесь мы ставим k впереди m , так как k значительно больше m в виду малости коэффициента φ , могущего равняться даже нулю, а главное, дабы получить мнимую величину.

Частные решения нашего дифференциального уравнения:

$$y_1 = e^{(-m + i\sqrt{k^2 - m^2})t}$$

$$y_2 = e^{(-m - i\sqrt{k^2 - m^2})t}$$

Комбинируя эти решения, получаем новые два решения:

$$y_{(1)} = \frac{y_1 + y_2}{2} = e^{-mt} \cos \sqrt{k^2 - m^2} t$$

$$y_{(2)} = \frac{y_1 - y_2}{2} = e^{-mt} \sin \sqrt{k^2 - m^2} t.$$

В результате общее решение будет.

$$f_t^0 = e^{-mt} (A \sin \sqrt{k^2 - m^2} t + B \cos \sqrt{k^2 - m^2} t).$$

Уравнение, приводящееся к прежнему уравнению при $\varphi = 0$, что дает и $m = 0$.

Для малых колебаний можно принять:

$$f_t^0 = e^{-mt} \cdot f_0^0 \sin \sqrt{k^2 - m^2} t,$$

где f_0^0 — амплитуда, а $\sqrt{k^2 - m^2}$ — частота колебаний в 2π секунд.

Мы не будем здесь производить дальнейших исследований, предполагая возвратиться к вопросу о динамических нагрузках в дальнейших выпусках, отметим лишь, что можно построить две показательные кривые

$$\pm f_0^0 \cdot e^{-mt},$$

которые будут обволакивающими для наших затухающих размахов. Величина f_0^0 здесь есть наибольшее отклонение от положения равновесия при первом размахе (без сопротивления).

Величина m есть интенсивность затухания.

§ 5. Явление резонанса.

Интересно еще отметить, что те же явления — колебания упругого, нагруженного хотя бы собственным весом или специальной нагрузкой, тела можно получить, отведя известную точку тела (напр., верх пружины) от ее положения равновесия на величину, положим, a . Эффект будет эквивалентен случаю падению груза, давящего на пружину, с высоты, дающей

$$\max f_t^0 = f_0^0 = a.$$

Такую операцию называют приведением системы в состояние *свободного* колебания, величина k (см. выше) называется частотой *собственных* колебаний системы, в отличие от *вынужденных* колебаний, которые могут быть вызваны каким-либо возбудителем, непрерывно приводящим систему в колебание извне.

При этом (это будет доказано точно в позднейших выпусках), если частота вынужденных колебаний равна частоте собственных колебаний, то теоретически амплитуда колебаний равна *бесконечности* и сооружение разрушается *целиком*. Иначе говоря, стоит подойти к громадному сооружению, небольшим ударом привести его в колебание и определить частоту его собственных колебаний, а затем вызвать в нем хотя бы на короткий срок

вынужденные колебания той же частоты, хотя бы и ничтожной силы, и громадное сооружение тотчас покорно *рухнет*.

Оно и понятно: в этом случае на диаграммы рисунка 187, особенно в незатухающем случае будут *накладываться* амплитуда за амплитудой от *каждого* толчка, при чем наибольшие ординаты как-раз будут совпадать — очевидно, что они скоро дадут ∞ .

К счастью, нет идеально упругих тел и есть сопротивление среды, что и спасает сооружения. Это явление и называется явлением резонанса, ибо обнаруживается тогда, когда собственные и вынужденные колебания *резонируют*.

Резюмируя все сказанное относительно динамического действия нагрузки, отметим, что ничтожная высота падения силы уже увеличивает перемещение точки приложения силы более чем вдвое; а если высота падения в 9 раз более статического перемещения, то максимальное перемещение уже *в четыре* раза ($f_{st} \pm \sqrt{9f_{st}^2}$) более статического. *Во столько же раз это увеличивает* по закону Гука и напряжения, ибо эквивалентная динамическому перемещению сила входит в выражение напряжения в той же степени, как и в выражение прогиба, и сооружение работает усиленно и повышено.

Необходимо, следовательно, уметь учитывать динамические влияния.

Не менее важно и *понять* всю опасность явлений резонанса. Они будут освещены полностью позднее, но уже и при ознакомлении с основами курса необходимо иметь об этих явлениях некоторое понятие.

ГЛАВА XIII.

Равновесие сыпучих тел.

§ 1. Общие соображения.

В предыдущих главах мы изучали явления, происходящие в упругих сплошных твердых телах. Но в природе нередко встречаются в непосредственном соседстве с твердыми телами, и в частности—с частями сооружений, тела *сыпучие*, занимающие, как мы увидим ниже, некоторое среднее место между твердыми и капельно жидкими телами; поэтому нам необходимо изучать и явления, происходящие внутри этих тел. При этом вопрос об условиях, в которых находятся всевозможные сыпучие тела, как, напр., земля, песок, зерно, угольная пыль, цементный клинкер, цементный порошок и т. д., очень важно осветить с двух сторон:

- 1) исследовать явления, происходящие *внутри* сыпучих тел и
- 2) определить давление сыпучего тела на окружающие его твердые тела.

Это необходимо для возможности *расчета всевозможных поддерживающих сыпучее тело сооружений*, как-то: подпорных стенок или набережных, если речь идет о земле или другом грунте, и стен закровов, элеваторов, силосов и т. п., если мы рассматриваем вопросы об устройстве хранилищ для того или другого сыпучего материала.

Явления, происходящие внутри сыпучего тела, в свою очередь, могут быть рассматриваемы с двух точек зрения, которые проведены в *двух методах исследования*, основания которым положили Рэнкин и Кулон.

Метод Рэнкина состоит в изучении вопроса чисто теоретически и в установлении общей теории, которая распространяет на сыпучие тела

законы, выведенные для тел упругих как твердых, так и жидких. Иначе говоря, путем ряда допущений, *сыпучие тела подчиняются общим законам тел упругих* и после этого на общих основаниях решается вопрос о давлении внутри сыпучих тел.

Метод Кулона основан на выделении из массы сыпучего тела объема определенного очертания, который предполагается могущим иметь некоторое перемещение относительно окружающих частей, остающихся неподвижными. При этом *двигающаяся часть рассматривается, как одно целое твердое тело*, подчиняющееся в своем движении общим законам равновесия и работающее, как клин, вдавливающийся между двумя щеками. Из условий равновесия этой части мы и получаем зависимости, характеризующие собой давление внутри сыпучего тела.

Из выражения же внутреннего давления, полученного тем или другим методом, уже нетрудно получить силу давления сыпучего тела на окружающие его твердые тела.

В целом ряде простейших случаев оба метода дают приблизительно, а иногда и совершенно одинаковые результаты. Но в более или менее сложных случаях, как, напр., при взаимодействии двух тел с различными коэффициентами сыпучести, получается уже некоторое различие, в зависимости от применения того или другого метода, и вопрос о методе является уже спорным.

Исследования последнего времени приближаются в своей основе более к методу Рэнкина, но мы рассмотрим и тот и другой методы, в виду широкого распространения, которое получил метод Кулона.

§ 2. Метод Рэнкина.

Характеристика сыпучего тела, как тела упругого.

Для того, чтобы подчинить сыпучие тела общим законам тел упругих, нам надо рассмотрение явлений в них вести тем же самым путем, как и в телах твердых или жидких, и поставить сыпучие тела, охарактеризовав их свойства, в общую цепь упругих тел.

Как нам известно, какое-либо рассматриваемое нами тело — твердое или жидкое — в любой, находящейся внутри его точке, имеет некоторые внутренние напряжения, изучение которых позволяет нам построить эллипсоид напряжений с тремя, вообще говоря, *различными осями*. И это построение одинаково возможно, когда напряжения одинаковых или различных знаков.

При этом для изучения явлений внутри сплошного тела мы, как известно, выделяем из него частицу такой величины, что размеры ее очень малы в сравнении со всей массой тела (почему весом этой частицы мы пренебрегаем), самую же эту частицу считаем состоящей из бесчисленного множества еще более мелких частичек. Взаимодействия этих частичек выражаются тем, что к каждой из них приложены некоторые силы и пары. Рассматривая теперь нашу большую выделенную частицу, мы, в виду ее малости, заменяем эти бесчисленные *отдельные силы эквивалентными им равномерно распределенными силами*, равнодействующая которых, опять же в виду малости размеров частицы, считается приложенной в центре тяжести отдельных наружных поверхностей большой частицы. Дальнейшие выводы приводят уже нас, последовательно, к эллипсоиду напряжений, решающему все вопросы о напряжениях внутри тела.

В основе, повторяем (это теперь особенно важно), лежат два допущения:

1) Мы выделяем частицу тела, размеры которой бесконечно малы (или достаточно малы) в сравнении со всем телом.

2) Эта частица бесконечно велика (или достаточно велика) в сравнении с элементарными частичками, ее составляющими.

Рассматривая сущность явлений дальше, замечаем:

В упругом твердом теле внутренние напряжения могут быть нормальными напряжениями *растяжения или сжатия* и, кроме того, возможны также и *тангенциальные* напряжения.

В идеальной жидкости возможны только *напряжения сжатия*, но не *растяжения*, *тангенциальные же напряжения возникнуть вовсе не могут*.

В твердом теле тангенциальное напряжение, являясь следствием причин двух категорий, может быть выражено двучленной формулой:

$$t = \gamma + f \cdot n,$$

где напряжение γ возникает оттого, что частицы тела скреплены друг с другом силами сцепления, в твердом теле очень сильно сопротивляющимися сдвигу. Второй же член напряжения сдвига $+f \cdot n$, является следствием существования силы трения (здесь $f = \operatorname{tg} \varphi$ есть коэффициент трения) между частицами твердого тела, которая, несомненно, имеет место в теле всегда, даже и когда нет сцепления. При этом в сплошном твердом теле значение величины γ очень велико в сравнении с трением $f \cdot n$, и в теле даже становится возможным, благодаря большому сцеплению, напряжение *растяжения*.

При лабораторных испытаниях устанавливается, что при увеличении давления на твердое тело, при достижении им некоторого предела, так-наз. *давления истечения*, или „практического видимого предела упругости“, тело приобретает *пластичное состояние*, т.-е. в нем проявляется *текучесть*, частицы тела начинают сдвигаться относительно друг друга. При этом в нашей формуле, очевидно, уменьшается член γ , зависящий от сцепления, и увеличивается трение $f \cdot n$, но все-таки, *пока тело твердое, хотя бы и в пластичном состоянии, γ доминирует над $f \cdot n$* . Важно понять, что $f \cdot n$ есть трение как бы между *молекулами* тела. В *пластичном теле* тангенциальное напряжение не может превзойти некоторого предела.

В *идеальной жидкости* тангенциальных напряжений возникнуть не может. В жидкости же *вязкой* величина напряжения t , как только жидкость приходит в движение, развивается (как некоторая *пассивная* сила сопротивления движению), но лишь до известной предельной величины, при чем здесь уже главную роль играет трение $f \cdot n$, т.-е. $f \cdot n > \gamma$; сцепление между частицами жидкости ничтожно.

Переходя теперь к рассмотрению вопроса о том, какими упругими свойствами обладает *сыпучее* тело, мы замечаем, что те два основных допущения, которые мы делали при рассмотрении упругих явлений в твердых телах, для тел сыпучих уже не являются бесспорными и одинаково возможными во всех случаях. Это происходит потому, что отдельные частицы сыпучего тела, вообще говоря, слишком велики, для того, чтобы считать их бесконечно малыми по сравнению с вырезаемым объемом тела. И для того, чтобы можно было принять эти допущения, вырезаемый объем должен быть настолько велик, что считать его бесконечно малым, по сравнению со всей массой тела можно только в том случае, если эта последняя—очень больших размеров. Но как только эти допущения оказываются возможными, так сейчас и картина явлений в сыпучих телах приближается к таковой же в телах твердых, и лишь роль отдельных частичек играют отдельные зерна сыпучего тела.

Так что теоретические исследования *Рэнкина*, строго говоря, допустимы только для масс сыпучего тела весьма больших размеров. На практике же сыпучие тела, рассматриваемые нами, вообще занимают более или менее ограниченные размеры. Чем меньше масса сыпучего тела и чем крупнее отдельные зерна его, тем менее может быть применима к нему теория

Рэнкина, главные выводы которой будут изложены ниже. Поэтому к цементному порошку, например, теория может быть применима без особенных натяжек, в виду чрезвычайно малой величины крупинок (проходят через сито в 8000—10000 отверстий на 1 см²). То же можно сказать, но уже с большей осторожностью и относительно земли, мелкого песка и т. д. К зерну наша теория является уже менее применимой, в цементном клинкере (размер его — в крупную горошину) уже оказывается весьма трудно согласиться с нашими допущениями и т. д.

степень применимости теории Рэнкина для различных сыпучих материалов обуславливается, главным образом, величиной отдельных зерен.

Сделав эти оговорки, мы все последующее изложение будем вести, приняв возможность наших двух допущений.

По своим упругим свойствам сыпучее тело может быть поставлено посредине между пластичным телом и вязкой жидкостью, так как в нем невозможно напряжение растяжения, возможно лишь сжатие, но тангенциальное напряжение может развиваться и в спокойном состоянии, а не только при движении. Сильно насыщенное водой, сыпучее тело может приблизиться по свойствам к вязкой жидкости (разжиженный чернозем), а иногда его можно поставить ближе к твердому телу, если оно, например, хорошо сжато и спрессовано (земля, глина).

Резюмируя все вышесказанное, мы можем сказать, что все тела по своим упругим свойствам, могут быть поставлены в следующий ряд, по мере изменения этих свойств.

1. *Тела твердые сплошные* — возможны напряжения растяжения (+*n*), сжатия (−*n*) и тангенциальные ($\pm t$) = $\gamma + f.n$, в которых доминирует величина γ .

2) *Тела пластичные* — возможны (+*n*) и (−*n*), напряжение же ($\pm t$) не больше некоторого предела (доминирует все же γ , но менее).

3) *Тела сыпучие*, — невозможно растяжение, возможно сжатие, возможно ($\pm t$) как в покое, так и при движении (доминирует уже *f.n*).

4) *Вязкая жидкость*, — невозможно (+*n*), возможно (−*n*) возможно ($\pm t$) только при движении (доминирует *f.n*).

5) *Идеальная жидкость*, — возможно только сжатие (−*n*).

§ 3. Внутреннее трение в твердых и сыпучих телах.

Прежде чем перейти к самим выводам Рэнкина, нам будет полезно, для дальнейшего изложения, еще несколько осветить вопрос о сдвиге и внутреннем трении в твердом теле, тангенциальные напряжения которого, как мы только что выяснили, выражаются формулой

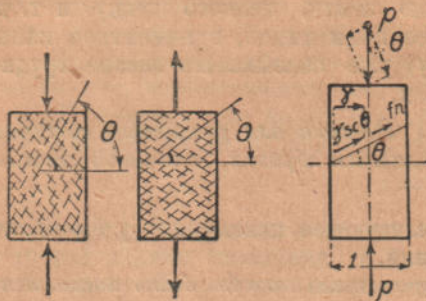
$$t = \gamma + f.n.$$

Выше уже было указано, что на поверхности твердого тела, подверженного действию сжимающих или растягивающих сил, вскоре за пределом упругости появляются характерные линии, представляющие из себя тончайшие следы сдвигов, — так называемые *линии сдвигов*, *линии Людерса*, идущие приблизительно под углом 45° к горизонту. При этом при сжатии этот угол немного круче, при растяжении же — несколько положе угла 45° (рис. 188). Эти линии, как мы сейчас докажем, являются результатом некоторой подвижки частиц нашего тела относительно друг друга от возникновения больших тангенциальных напряжений.

Возьмем в призматическом теле с поперечным сечением = 1², подверженном действию сжимающих сил *p*, плоскость под некоторым углом θ

к горизонту (рис. 188) и рассмотрим условия равновесия сил на этой плоскости.

Сила, действующая по направлению нашей плоскости равна $p \cdot \sin \theta$ и стремится сдвинуть одну часть тела по другой. Сопротивляются же этому



сдвигу две силы: внутренняя тангенциальная сила, являющаяся следствием сцепления частиц тела и равная $\frac{\gamma}{\cos \theta} = \gamma \sec \theta$, а затем тангенциальная сила, равная $f \cdot p \cdot \cos \theta$.

Поэтому уравнение равновесия, если равновесие имеет место, имеет вид:

$$p \cdot \sin \theta = \gamma \cdot \sec \theta + f \cdot p \cos \theta.$$

Отсюда действующая сила

$$p = \frac{\gamma \sec \theta}{\sin \theta - f \cos \theta}$$

Рис 188. Линии сдвигов при разрушении тел.

Если мы будем искать теперь значение угла θ , при котором сила p , необходимая для равновесия, или, что тоже, для начала нарушения равновесия, будет наименьшей, то этим самым мы определим и направление интересующих нас волосных линий — трещин появляющихся на теле. Действительно, в плоскости, проведенной под углом θ , который получится, если мы приравняем нулю производную p по θ , равновесие будет существовать при минимальной силе p . Поэтому при возрастании p от нуля в этой плоскости раньше всего должен произойти сдвиг, который и выразится волосными трещинами.

Итак, для определения угла θ_0 , определяющего направление плоскости, наиболее опасной для сдвига, пишем уравнение:

$$\frac{\partial p}{\partial \theta} = 0.$$

Выражение

$$p = \frac{\gamma \sec \theta}{\sin \theta - f \cos \theta} = \frac{\gamma}{\frac{1}{2} \sin 2\theta - f \cos^2 \theta}$$

Поэтому

$$\frac{\partial p}{\partial \theta} = \frac{-\gamma \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \cos 2\theta + f 2 \cos \theta \sin \theta \right)}{\left(\frac{1}{2} \sin 2\theta - f \cos^2 \theta \right)^2}$$

Приравнявая нулю, мы получаем

$$\cos 2\theta_0 + f \sin 2\theta_0 = 0,$$

откуда

$$f = \operatorname{tg} \varphi = -\operatorname{ctg} 2\theta_0.$$

где φ есть угол трения.

А для этого необходимо должно быть:

$$2\theta_0 - \varphi = 90^\circ$$

откуда

$$\theta_0 = 45^\circ + \frac{\varphi}{2}$$

Если же у нас будет *растяжение*, то в уравнении равновесия сила трения войдет со знаком минус, так как нормальное давление $n = p \cdot \cos \theta$ будет

отрицательным, как направленное не к плоскости, а от нее. Поэтому мы, в конце концов, получим выражение:

$$\cos 2\theta_0 - f \sin 2\theta_0 = 0$$

откуда

$$f = \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{ctg} 2\theta_0$$

для чего должно быть

$$2\theta_0 + \varphi = 90^\circ$$

откуда

$$\theta_0 = 45^\circ - \frac{\varphi}{2}.$$

Поэтому, измерив более или менее точно угол θ_0 , образованный между линией, перпендикулярной к действующей силе и линиями первых трещин, появляющихся в теле при его сжатии (или растяжении), мы сможем из выведенных формул определить угол трения, как:

$$\varphi = \pm (2\theta_0 - 90^\circ)$$

На приведенной теории основано также то известное обстоятельство, что при разрушении (сжатием) очень многих твердых материалов получаются два конуса и отдельное тело вращения кольцевидной формы. Так, это хорошо наблюдается при раздавливании чугунных цилиндров, или цементных кубиков. При этом при чистом цементе угол θ_0 образующей конуса с горизонтом немногим больше 45° . Но чем больше в цементе песка, тем этот угол круче. Это происходит от того, что угол φ внутреннего трения от прибавления песка увеличивается.

Необходимо ясно понимать, что здесь речь идет об угле внутреннего трения, как-бы между молекулами внутри тела, при чем это внутреннее трение начинает проявляться после начального движения части, происходящего уже за пределами упругости.

Все вышесказанное имеет целью указать на аналогию между твердыми и сыпучими телами.

Если мы обратимся теперь к телам сыпучим, то здесь вопрос о нахождении коэффициента внутреннего трения, т.е. трения частиц друг о друга, значительно упрощается, так как достаточно с известными предосторожностями насыпать кучу из нашего материала, чтобы получить угол трения в виде угла образующей нашего конуса с горизонтом. Этот угол для сыпучих тел называется *углом естественного откоса*.

По существу очевидно, что таким же путем можно было бы определить и коэффициент внутреннего трения тел, еслибы мы могли насыпать такую кучу из материальных частичек данного тела. По невозможности этого приходится прибегать к вышеописанному косвенному пути.

Угол естественного откоса для данного сыпучего тела не есть величина постоянная, а зависит от многих условий: от влажности, уплотненности тела, правильного насыпания и т. д.

Дадим здесь несколько примеров для углов естественного откоса различных материалов:

Глина при естественной влажности дает откос $\sim 45^\circ$, при полной сухости $\sim 40^\circ$, в насыщенном же водой состоянии—только $\sim 17^\circ$.

Песок при естественной влажности $\sim 40^\circ$, при сухости— $\sim 35^\circ$, при насыщении— $\sim 24^\circ$.

Чернозем при естественной влажности $\sim 45^\circ$, при сухости $\sim 40^\circ$, а насыщенный $\sim 27^\circ$.

Зерно дает разные величины, а именно: *пшеница* $\sim 23^\circ$, *рожь* $\sim 30^\circ$, *ячмень, горох и кукуруза* $\sim 35^\circ$.

Уголь и руда средней крупности дают $\sim 45^\circ$ и сухой известковый порошок $\sim 50^\circ$.

Для определения силы сцепления γ в сыпучих телах можно исходить из предельной высоты, в которой данный материал может еще держаться вертикальным откосом. Как выше указано, эта величина незначительна.

§ 4. Вывод формулы Рэнкина.

Пусть мы имеем достаточно большой объем сыпучего тела (рис. 189а) и в нем будем рассматривать условия, в которых находится точка, достаточно далекая от краев.

Напряженное состояние в этой точке распределяется по всем направлениям, и при этом очевидно, что в горизонтальной плоскости при сим-

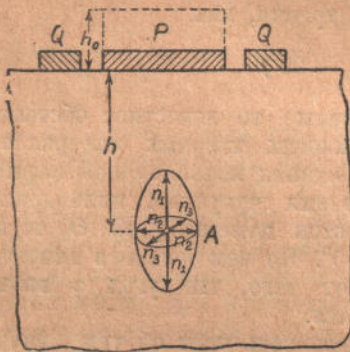


Рис. 189а.

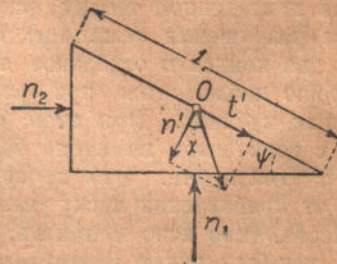


Рис. 189б.

Внутренние напряжения в сыпучих телах.

метричности верхней внешней нагрузки относительно вертикали, проходящей через нашу точку, по любому направлению давление будет одинаково. Ясно, поэтому, что эллипсоид напряжений, в виду симметричности явления относительно вертикальной оси, будет эллипсоидом вращения относительно одной из своих осей, а именно—вертикальной n_1 , т.е.

$$n_2 = n_3.$$

При этом ясно, что все три напряжения суть напряжения сжатия, т.е.

$$n_1, n_2, n_3 < 0,$$

так как мы имеем дело с сыпучим телом.

Принимая все вышеприведенные оговорки и допущения, мы смотрим, следовательно, на наше тело, как на упругое.

Напряжение n_1 при первом приближении пропорционально глубине рассматриваемой точки и плотности материала δ , т.е. равно весу вышележащего столба тела с основанием $= l^2$:

$$n_1 = \delta \cdot h.$$

Эта формула вполне аналогична формуле гидростатического давления жидкости, но у последней все три напряжения равны между собой:

$$n_1 = n_2 = n_3;$$

в сыпучем же теле, как увидим ниже. n_1 сильно отличается от равных между собой n_2 и n_3 и бывает иногда больше, а иногда и меньше их. Вяснить это отличие и стремятся выводы *Рэнкина*.

Наша гидростатическая формула для n_1 будет справедлива и в том случае, если на поверхности тела имеется какая-нибудь нагрузка P , так как тогда достаточно только эту нагрузку заменить эквивалентной загрузкой из материала нашего сыпучего тела и высоту этой нагрузки h_0 прибавить к h :

$$n_1 = \delta (h + h_0)$$

Важно запомнить, что гидростатическая формула для вертикального давления n_1 не всегда имеет место. Если глубина сыпучей массы значительна, и она заключена между сравнительно близкими друг к другу стенками, как это имеет место в силосах элеваторов, а частично и в мостовых береговых *высоких* устоях с парными откосными стенками, то вертикальное давление растет в глубину, не пропорционально глубине опускания, а значительно медленнее, ибо часть вертикального давления, благодаря трению материала о стенки сосуда, в который он заключен, воспринимается самими стенками, и внутри массы давление оказывается меньше гидростатического.

Наиболее употребительная формула, оценивающая это обстоятельство (формула *Янсена* для пшеницы — см. работы Д. В. Шумского и К. М. Дубяга) имеет, например, принимая вес пшеницы 800 кг/м^3 , а коэффициент трения пшеницы по стенке в 0,40, следующий вид (формула эмпирическая)

$$n_1 = 4,5 R (1 - e^{-0,176\mu}) \text{ кг/см}^2,$$

где R есть так называемый гидравлический радиус сечения силоса в см, т.е. отношение его площади к его-же периметру, а $\mu = \frac{h}{R}$, т.е. есть отвлеченный коэффициент, показывающий, сколько раз гидравлический радиус укладывается в высоте столба.

Из формулы видно, что n_1 растет весьма медленно от нуля, а при $\mu = \infty$ дает асимптотическое значение $4,5 R$. На рис. 190 изображена

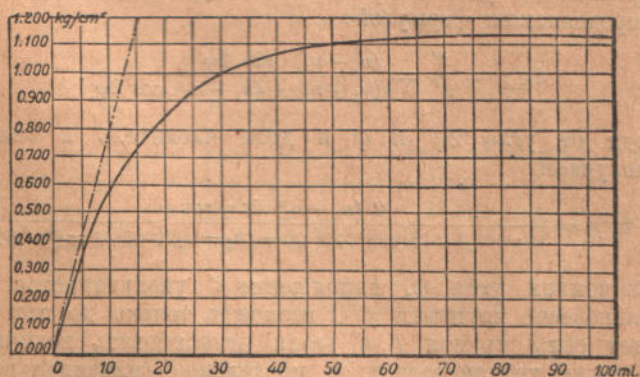


Рис. 190. Закон возрастания давления в массе сыпучего тела, заключенной в сосуд с вертикальными стенками.

кривая возрастания n_1 с глубиной, принимая R за 250 см (что соответствует диаметру круглого силоса в 10 метров или стороне квадратного силоса в 10 метров). На той же фигуре показана и гидростатическая прямая. Мы видим, как от нее быстро отстает кривая *Янсена*, и как эта последняя кривая быстро приближается к асимптоте уже при высотах в 30 метров и выше.

Аналогичные явления наблюдаются во всяких шахтных печах, напр., в доменных, где спускающаяся масса значительной своей частью передает свой вес через трение стенкам, а не поддону. Нечто подобное наблюдается и в недрах земли, где тоннель, напр., проведенный в сыпучих, немассивных породах, конечно, не несет на себе всего веса вышележащей массы грунта, образующего некоторый естественный свод.

Итак, n_1 не всегда определяется по гидростатической формуле. Впрочем, при расчете *невысоких* (метров 10 высоты и ниже) подпорных стенок, а также и стенок закровов, рекомендуется принимать гидростатическую формулу, и применение ее даже *обязательно* при расчете глубины заложения оснований железнодорожных и иных сооружений и давления на стенки устоя мостов.

Итак, n_1 так или иначе определяется.

Продолжим наши исследования дальше.

Вырезаем из тела частицу около точки A в виде прямоугольной призмы с \perp -ными гранями, параллельными n_1 и n_2 (рис. 189b) и косой гранью, площадью равной квадратной единице. Так как n_1 и n_2 — главные напряжения, то, как известно, тангенциальные напряжения на \perp -ных плоскостях равны нулю. Напряжение же: нормальное n' и тангенциальное t' на косой плоскости найдутся по известным формулам перехода от главных осей к случайным, написанным в несколько измененном виде, который легко получить из ранее данной формулы

$$n' = \frac{n_1 + n_2}{2} + \frac{n_1 - n_2}{2} \cos 2\psi$$

$$t' = \frac{n_2 - n_1}{2} \sin 2\psi$$

При этом t' здесь, как мы выяснили, зависит, главным образом, от внутреннего трения

Равнодействующая обоих напряжений на плоскости, составляющей угол ψ с горизонтом, будет направлена под углом χ с нормалью к нашей плоскости, определяемым формулой:

$$\operatorname{tg} \chi = \frac{t'}{n'} = \frac{(n_2 - n_1) \cdot \sin 2\psi}{(n_1 + n_2) + (n_1 - n_2) \cdot \cos 2\psi}$$

Переходя от угла 2ψ к ψ и деля числитель и знаменатель на $\cos^2 \psi$, мы получаем

$$\operatorname{tg} \chi = \frac{2(n_2 - n_1) \sin \psi \cos \psi}{(n_1 + n_2)(\sin^2 \psi + \cos^2 \psi) + (n_1 - n_2)(\cos^2 \psi - \sin^2 \psi)}$$

С увеличением угла ψ , напряжение t' увеличивается, n' — уменьшается, и равновесие крупины у O возможно только до тех пор, пока t' не превзойдет силы трения $f \cdot n'$ (если игнорировать величину γ). При этом угол χ также увеличивается, и предельное (максимальное) значение χ получится, когда

$$t' = f \cdot n'$$

но тогда

$$\max \operatorname{tg} \chi = \frac{t'}{n'} = f = \operatorname{tg} \varphi$$

Мах χ не может превзойти угла трения φ , который мы считаем для нашего тела определенным заранее, так как мы рассматриваем условия *равновесия*, и как только частица O начнет сползать, мы не можем применить наши формулы.

Теперь для того, чтобы найти наибольшее значение χ в функции от ψ нам надо взять производную от χ по ψ .
Так как

$$\partial \operatorname{tg} \chi = \frac{\partial \chi}{\cos^2 \chi} \quad \text{и} \quad \partial \operatorname{tg} \psi = \frac{\partial \psi}{\cos^2 \psi}.$$

то

$$\frac{\partial \chi}{\partial \psi} = \frac{\partial \operatorname{tg} \chi}{\partial \operatorname{tg} \psi} \cdot \frac{\cos^2 \psi}{\cos^2 \chi} = \frac{\cos^2 \psi}{\cos^2 \chi} \cdot \frac{(n_1 + n_2 \operatorname{tg}^2 \psi)(n_2 - n_1) - 2(n_2 - n_1) \operatorname{tg}^2 \psi \cdot n_2}{(n_1 + n_2 \operatorname{tg}^2 \psi)^2}.$$

Приравнявая производную нулю, мы получаем, сокращая:

$$n_1 - n_2 \cdot \operatorname{tg}^2 \psi_0 = 0,$$

откуда

$$\operatorname{tg} \psi_0 = \pm \sqrt{\frac{n_1}{n_2}}.$$

Подставляя найденное значение $\operatorname{tg} \psi_0$ в формулу, выражающую $\operatorname{tg} \chi$, мы найдем нужный нам $\max \chi = \chi_0$

$$\operatorname{tg} \chi_0 = \pm \frac{n_2 - n_1}{2n_1} \sqrt{\frac{n_1}{n_2}} = \pm \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{n_2}{n_1}} - \sqrt{\frac{n_1}{n_2}} \right)$$

Приравнявая теперь согласно предыдущего, угол χ_0 углу трения φ , мы получаем:

$$\pm \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{n_2}{n_1}} - \sqrt{\frac{n_1}{n_2}} \right) = \operatorname{tg} \varphi = f.$$

Решаем это равенство относительно отношения $\frac{n_2}{n_1}$.

Обозначив $\frac{n_2}{n_1} = x$, получим уравнение:

$$\pm \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) = 2f,$$

или

$$x \mp 2f \sqrt{x} - 1 = 0.$$

Отсюда

$$\sqrt{x} = \sqrt{\frac{n_2}{n_1}} = \pm f \pm \sqrt{f^2 + 1}.$$

Относительно знаков надо заметить, что положительному значению угла χ_0 соответствует в последнем равенстве знак (+) при f , отрицательному же значению χ_0 — знак (—) при f . Возвышая теперь в квадрат обе части, мы для 1-го случая (+), получим:

$$\frac{n_2}{n_1} = 2f^2 + 1 \pm 2f \sqrt{f^2 + 1},$$

а для второго случая (знак —),

$$\frac{n_2}{n_1} = 2f^2 + 1 \mp 2f \sqrt{f^2 + 1}.$$

Отсюда мы пишем в окончательном виде формулу Рэнкина, определяющую давление выпуклого тела в горизонтальном направлении в зависимости от давления вертикального, как:

$$n_2 = n_3 = \mu \cdot n_1$$

где

$$\mu = 2f^2 + 1 \pm 2f \sqrt{f^2 + 1}.$$

§ 5. Исследование формулы Рэнкина.

Нам теперь надо выяснить в полученной формуле смысл и значение двойного знака.

Рассматриваемая нами частица по отношению к окружающей ее массе сыпучего тела может находиться в двух состояниях:

1) или она сама производит давление на окружающие частицы, которые этому давлению сопротивляются силами n_1 , n_2 , n' и t' ;

2) или наоборот, — окружающие частицы давят на нашу силами n_1 , n_2 , n' и t' , а она только сопротивляется этому давлению.

1) Первый случай есть обыкновенное явление передачи давления, когда выделенная нами частица производит по собственной инициативе активное давление. Клин, видный из рис. 189, *вдвигается в массу тела*, почему в предельном случае тангенциальное напряжение t' , будучи равно силе трения, должно быть направлено противоположно тому, как на рис. 189, угол χ_0 должен быть другого знака (т.е. —), чему соответствует, как мы видели выше, знак (—) при f , почему формула коэффициента μ будет

$$\mu = 2f^2 + 1 - 2f\sqrt{f^2 + 1}.$$

Так, напр., для случая сухого песка, когда угол трения $\varphi = 35^\circ$, имеем:

$$f = \operatorname{tg} 35^\circ = 0,7,$$

$$\mu = 2 \cdot 0,7^2 + 1 - 2 \cdot 0,7 \sqrt{0,7^2 + 1} = 1,98 - 1,71 = 0,27,$$

то-есть

$$n_2 = n_3 = \mu \cdot n_1 = 0,27n_1.$$

Иначе говоря, *наибольшее активное давление сухого песка в горизонтальном направлении составляет только около $\frac{1}{4}$ от вертикального давления.*

Итак, тогда как в жидкости давление передается по всем направлениям с одинаковой силой (закон Паскаля), *в сыпучих телах поперечное горизонтальное активное давление составляет только $\frac{1}{3}$ — $\frac{1}{5}$ вертикального.*

2) Если мы теперь представим, что вместо груза p (рис. 189а) на наше тело будет действовать давление Q — только по бокам, по отношению к A , то, как известно, по середине произойдет выпучивание грунта, и в этом случае частица A проявит пассивное противодействие окружающим частицам. Клин *выдвигается из массы тела*, тангенциальная сила t^0 имеет направление, как на рис. 189b. Угол χ_0 положителен, почему в выражении для μ при f должен быть взят знак (+), и мы получим:

$$\mu = 2f^2 + 1 + 2f\sqrt{f^2 + 1}.$$

Для сухого песка это составит

$$\mu = 1,98 + 1,71 = 3,69,$$

$$n_2 = n_3 = 3,69 n_1.$$

Иначе говоря, *наибольшее сопротивление сухого песка в горизонтальном направлении в $3\frac{1}{2}$ раза больше вертикального давления, вызывающего это сопротивление.*

Итак, мы видим, что пассивное сопротивление сыпучего тела значительно больше активного давления (в 9—12 раз).

Двойное значение коэффициента μ станет нам еще более ясным, если мы найдем зависимость между углами φ и φ .

Мы видим, что

$$\operatorname{tg} \chi_0 = \mp \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{n_2}{n_1}} - \sqrt{\frac{n_1}{n_2}} \right)$$

$$\operatorname{tg} \psi_0 = \pm \sqrt{\frac{n_1}{n_2}}$$

мы получим:

$$\operatorname{tg} \chi_0 = \pm \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \psi_0} - \operatorname{tg} \psi_0 \right) = \pm \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \psi_0}{2 \operatorname{tg} \psi_0} = \pm \operatorname{Ctg} 2\psi_0.$$

В случае активного давления угол χ_0 , как мы видели, будучи равен углу φ , должен быть, как и этот последний, отрицательным, т.-е.

$$\operatorname{tg} \chi_0 = \operatorname{tg} \varphi = - \operatorname{Ctg} 2\psi_0,$$

откуда, как и для твердого тела, мы получаем:

$$\psi_0 = 45^\circ + \frac{\varphi}{2},$$

как значение наибольшего угла наклонной плоскости при активном давлении, после которого уже начинается сползание одной части по другой. Эту плоскость можно назвать *плоскостью сдвига при активном воздействии*.

При направлении угла χ_0 в другую сторону (+), мы получаем:

$$\operatorname{tg} \chi_0 = \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{Ctg} 2\psi'_0,$$

откуда угол

$$\psi'_0 = 45^\circ - \frac{\varphi}{2},$$

где ψ'_0 определяет *плоскость сдвига при пассивном противодействии*.

Так как давления горизонтальное и вертикальное связаны формулой

$$n_1 + n_2 \operatorname{tg}^2 \psi_0 = 0,$$

то

$$n_2 = n_1 \operatorname{ctg}^2 \psi_0 = n_1 \operatorname{tg}^2 (90^\circ - \psi_0).$$

Подставляя же сюда найденные нами значения ψ_0 и ψ'_0 , мы получим для случая активного сопротивления:

$$n_1 = n_2 \operatorname{tg}^2 (90^\circ - \psi_0) = n_1 \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right),$$

т.-е. коэффициент

$$\mu = \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right).$$

Величину же *пассивного противодействия* получаем в виде

$$n_2' = n_1 \operatorname{tg}^2 (90^\circ - \psi'_0) = n_1 \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right),$$

т.-е. коэффициент

$$\mu' = \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right).$$

§ 6. Метод Кулона.

В основе второго метода исследования явлений внутри сыпучего тела и определения давления сыпучего тела на подпорную стенку, метода *Кулона* и *Понселе*, лежат опыты *Кулона*, впоследствии повторенные рядом иссле-

дователей до Мюллера Бреслау включительно, при помощи которых определяется, какая часть сыпучего материала *работает* при пассивном и при активном действии материала на стенку.

Схема всех этих опытов, в общих чертах, заключается в следующем:

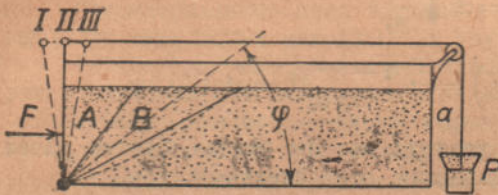


Рис. 191. Опыт с сыпучим телом.

Возьмем ящик (рис. 191) со стеклянными боковыми стенками. Две другие стенки сделаем: заднюю *a* — неподвижной, переднюю *b* — могущей поворачиваться на шарнире под действием груза *P*, величину которого можно медленно менять, подсыпая к нему песку или подливая воды. Ящик наполним сыпучим телом, которое хотим исследовать, и затем возь-

мем груз *P*, настолько малым, чтобы он был меньше ожидаемого давления n_2 нашего материала на подвижную стенку. Пока груз *P* будет меньше того груза P_0 , при котором впервые давление n_2 на стенку будет уравновешено этим грузом, до тех пор стенка будет немного раскрываться, и в материале нашего сыпучего тела в момент раскрытия стенки произойдет некоторая подвижка частиц, при чем эта подвижка захватывает известный район материала (некоторую призму *A*), отграниченный от остальной неподвижной массы по некоторой линии, которую можно для упрощения расчета принимать за *прямую*.

Когда груз достигает значения $P_0 = n_2$, будет равновесие, и некоторая мгновенная неподвижность стенки, но активными частицами останутся попрежнему частицы выше отмеченной призмы. Это давление P_0 соответствует активному давлению сыпучего тела на стенку. Достижением силы P_0 оканчивается I период явления.

II период будет протекать все время, пока мы далее будем увеличивать нагрузку от P_0 до некоторого P_{00} , при котором еще не происходит в материале никакой значительной подвижки. Этот период дает нам предельные величины сопротивления стенки (от P_0 до P_{00}), при которых значительного движения стенки нет, несмотря на то, что стенка все же немного вдавливается в материал сыпучего тела.

III период наступает, как только нагрузка перешла через величину P_{00} , происходит передвижка материала *внутрь*, при чем в этой передвижке участвует значительно *большая* часть материала, чем в I случае. Линия, отграничивающая теперь район передвижки, будет также некоторая кривая, которую можно считать *прямой*, и которая *не меняет* своего положения с увеличением давления выше P_{00} (призме *B*).

Это давление P_{00} соответствует пассивному сопротивлению сыпучего тела, и мы на приведенных опытах подтверждаем раньше выведенное положение, что *пассивное сопротивление сыпучего тела значительно больше активного его давления*.

Очевидно, что район *A* (фиг. 191) соответствует активным частицам, всегда переходящим в *наступление* на стенку, а район *B* — частицам резервным, в наступление не переходящим, но в *отражении* наступления на материал участвующим.

Из предыдущего еще очевидно, что, когда мы ищем величину *сопротивления* стенки, подверженной *активному* давлению земли, то максимальное сопротивление следует принять равным P_0 , а когда нас интересует *противодействие* земляной массы активному воздействию на нее стенки — следует иметь в виду минимальное возможное противодействие — величину P_{00} .

§ 7. Отыскание активного давления сыпучего тела на стенку в общем случае.

Пусть мы имеем подпорную стенку (рис. 192), наклоненную под углом ε к вертикали, и на нее справа действует грунт (или вообще какое нибудь сыпучее тело), верхний уровень которого наклонен к горизонту под некоторым углом α , который, конечно, должен быть меньше угла естественного откоса грунта φ ; так что прямая, проведенная из точки b под углом φ к горизонту, вообще говоря, *должна пересечься* с линией уровня грунта, выходящей из A , и только в предельном случае, когда $\alpha = \varphi$, эти две прямые параллельны.

На основании опытов Кулона мы заключаем, что только некоторая доля частиц может *активно действовать* на стенку, в пассивном же сопротивлении грунта, как мы знаем, также участвует некоторая определенная доля частиц грунта, но много ббльшая, чем в активном действии.

При этом *сдвиг частиц для случая активного действия* происходит по некоторой кривой bx проходящей, как установлено опытами, *внутри* тр-ка, образуемого линией bC естественного откоса φ ; *сдвиг частиц при пассивном сопротивлении* произойдет по кривой, проходящей *вне* тр-ка AbC . Для дальнейших соображений, мы обе кривые считаем, как это делает и Кулон, прямыми.

Мы прежде всего рассмотрим *случай активного давления земли* и постараемся отыскать истинное положение прямой сдвига bx т.-е. следа плоскости обрушения. Эта задача, разрешенная Понселе, является чисто теоретической задачей рассмотрения условий равновесия призмы Abx , которую мы считаем *твердым телом, независимым от остальной массы грунта*. Хотя нами и сделано, таким образом, довольно много допущений, но конечные результаты, которые мы получим из рассмотрения нашей призмы Abx , находящейся в равновесии под влиянием собственного веса и воздействия окружающих тел, оказываются более или менее близкими к действительности и к теории Рэнкина.

Призма Abx представляет из себя *клин, входящий в массу*, при чем левая его щека опирается на материал *подпорной* стенки, а правая — на материал грунта. Ширину клина принимаем равной 1-це (\perp к плоскости рисунка).

Силы, действующие на клин, суть:

- 1) Собственный вес, равный

$$Q = \text{плоч. } Abx \cdot \delta \cdot 1,$$

где δ — вес куб. единицы материала.

- 2) Сила R_0 противодействия *подпорной* стенки, которая, если только стенка совершенно гладкая, будет перпендикулярна к плоскости стенки. Вообще же могут быть любые наклоны силы R_0 по отношению к нормали, но наибольший из наклонов не может быть больше угла трения φ_0 клина со стенкой. Этот угол будет иметь место как раз в момент движения клина, а этот момент нам наиболее интересен, как дающий максимальное значение R_0 . При этом надо заметить, что угол φ_0 должен быть непременно меньше угла φ т. е. угле естественного откоса грунта, так как в противном случае произойдет не скольжение земли по кладке, а земли по земле, потому что сыпучее тело прилипнет к стенке, а это несколько изменит наши расчеты. В дальнейших приложениях мы часто будем считать $\varphi_0 = 0$, так как такое предположение менее благоприятно при расчете устойчивости стенки, но в настоящем исследовании сохраним за φ_0 самостоятельное значение.

- 3) Сила R противодействия инертной части нашего сыпучего тела, направленная под углом ε нормалью к плоскости обрушения, не большим

тангенциальные силы приравняем только силам трения, игнорируя сцепление γ , но это идет только в пользу большей надежности нашего расчета, так как увеличивает действие сил R и R_0 .

Рассматривая теперь момент начала движения клина, мы найдем условия равновесия наших трех сил, и нашей главной задачей является определение наибольшей величины сопротивления стенки R_0 , равной искомому нами давлению на стенку. У нас направление плоскости обрушения bx взято произвольно, и весь вопрос теперь состоит в отыскании правильного направления этой плоскости, при котором R_0 получит свою наибольшую величину. Иначе говоря

$$R_0 = f(i)$$

и нам надо найти такое значение этого угла — i , при котором будет иметь место max. R_0 .

Итак, прежде всего нам надо найти соотношение между силами при случайном угле i , а для этого делаем следующее построение Понселе.

Откладываем при точке b угол, равный $\varphi + \varphi_0$, и находим точку O пересечения его второй стороны с продолжением линии уровня грунта. Проводим далее из точек A и X две прямые AT и Xx , параллельные линии естественного откоса bC , и прямую Ay , параллельную Xb — линии обрушения, при чем Ay есть, пока что, линия случайная, тогда как первые две линии, определенные (по направлению).

Строим в стороне многоугольник сил mnp и находим, из рассмотрения чертежа, углы его

$$\angle n = \angle (R_0, Q) = 90^\circ - \varphi_0 - \varepsilon$$

$$\angle p = \angle (R, Q) = 90^\circ - \varphi - i$$

$$\angle m = \angle (R, R_0) = \varphi + \varphi_0 + \varepsilon + i.$$

Далее замечаем, что в треугольнике xXb

$$\angle xXb = 90^\circ - \varphi - i; \quad \angle xbX = \varphi + \varphi_0 + \varepsilon + i,$$

следовательно, треугольник xXb подобен треугольнику npm и

$$\angle Xxb = \angle n = 90^\circ - \varphi_0 - \varepsilon.$$

Пишем пропорцию

$$\frac{R_0}{Q} = \frac{bx}{xX},$$

откуда

$$R_0 = Q \cdot \frac{bx}{xX}.$$

Сила Q , как мы знаем, пропорциональна площади треугольника AbX , но

$$\text{пл. } AbX = \text{пл. } ybX.$$

потому что $Ay \parallel bX$, поэтому мы пишем

$$Q = \frac{1}{2} \delta \cdot by \cdot yX \cdot \sin byX.$$

Но не трудно заметить, что

$$yX \cdot \sin byX = xX \cdot \sin bxX$$

как проекции прямых yX и xX на прямую, перпендикулярную к by .

Подставляем:

$$Q = \frac{1}{2} \delta \cdot by \cdot xX \cdot \sin bTA.$$

Теперь находим выражение для R_0 :

$$R_0 = \frac{1}{2} \delta \cdot by \cdot xX \cdot \sin bTA \frac{bx}{Xx} = \frac{1}{2} \delta bx \cdot by \cdot \cos (\varphi_0 + \varepsilon).$$

В этом выражении переменны только произведение $bx \cdot by$, а потому исследуем его отдельно. Из чертежа имеем:

$$bx = Ob - Ox$$

$$by = Ob - Oy.$$

Перемножая, получим:

$$bx \cdot by = Ob^2 - Ox \cdot Oy - Ob \cdot (Ox + Oy).$$

Первый член правой части есть величина постоянная, т.-е. независящая от направления линии обрушения (угла i). Истинный смысл второго члена мы найдем, если напишем две пропорции на основании параллельности прямых

$$Ay \parallel Xb; \quad AT \parallel Xx$$

$$\frac{Oy}{Ob} = \frac{OA}{Ox} = \frac{OT}{Ox}.$$

Отсюда

$$Ox \cdot Oy = Ob \cdot OT,$$

т.-е. $Ox \cdot Oy$ есть также величина, не зависящая от угла i , т.-е. постоянная.

Нам надо найти $\max. R_0$, но это будет тогда, когда будет наибольшим произведение $bx \cdot by$, которое есть разность между постоянной величиной $Ob^2 - Ob \cdot OT$ и переменной $Ob(Ox + Oy)$. Поэтому максимум $bx \cdot by$ соответствует минимуму $(Ox + Oy)$. Но, так как произведение этих двух отрезков есть величина постоянная, равная $Ob \cdot OT$, то заключаем, что минимум $(Ox + Oy)$ будет иметь место, когда оба отрезка равны между собой, т.-е.

$$Ox = Oy = Ox_0,$$

где величина Ox_0 — средняя пропорциональная между Ox и Oy , а также и между постоянными отрезками Ob и OT

$$Ox_0^2 = Ob \cdot OT.$$

Найдя эту среднюю пропорциональную, например, как касательную, проведенную из точки O к полуокружности, построенной на $bT = Ob - OT$ (квадрат касательной равен произведению секущей на ее внешнюю часть), и, отложив ее на Ob , мы найдем точку x_0 , которая должна обладать свойствами и точки x и точки y , почему прямая x_0A должна быть параллельна действительной плоскости обрушения, и эта последняя найдется проведением $bx_0 \parallel Ax_0$. Это обстоятельство с несомненностью вытекает из того, что попрежнему

$$\frac{Ox_0}{Ob} = \frac{OT}{Ox_0},$$

а, следовательно, проведение линии x_0X_0 параллельно TA дает и

$$\frac{OT}{Ox_0} = \frac{OA}{Ox_0},$$

откуда

$$\frac{Ox_0}{Ob} = \frac{OA}{Ox_0},$$

что и требовалось доказать.

Итак, прямая x_0X_0 окажется параллельной направлению естественного откоса bC , так как этим свойством точки x обладает теперь точка x_0 .

Так как отрезки OA , Ox_0 и OC соответственно пропорциональны отрезкам OT , Ox_0 и Ob , то точка x_0 на прямой OC может быть найдена построением, совершенно подобным построению на Ob , т.е. проведением из O касательной к полуокружности, построенной на AC , и отложением длины этой касательной Ox_0 .

Возможно также все эти построения произвести и на *третьей* стороне треугольника OCb — на Cb , если провести прямую $AT' \parallel Ob$, построить полуокружность на CT' , и длину касательной к ней из точки b засечь в точку x'_0 . Тогда прямая $x'_0x_0 \parallel Ob$ должна обязательно пройти через точку x_0 , так как построение на прямой bC совершенно подобно построению на OC .

Можно, наконец, на любой из трех сторон треугольника ObC , для нахождения нужной нам средней пропорциональной, сделать построение по теореме: хорда есть средняя пропорциональная между диаметром и проекцией своей на диаметр, для чего нам придется строить большие круги на сторонах треугольника ObC и восставлять перпендикуляры из точек T , A и T' (см. чертеж).

Итак, плоскость обрушения, соответствующая активному действию грунта, найдется совершенно определенно любым из 6-ти построений средней пропорциональной на сторонах треугольника, образованного линией грунта, линией естественного откоса, проведенной из подошвы стенки, и прямой, составляющей с направлением стенки угол $\varphi + \varphi_0$.

Теперь мы сможем найти и наибольшую величину сопротивления стенки R_0 , если в формулу, его определяющую, подставим вместо величины $bx \cdot by$ величину bx_0^2 , так как при слиянии точек x и y в точку x_0 не произошло никакой потери в свойствах этих точек.

Итак,

$$\max R_0 = \frac{1}{2} \delta \cdot bx_0^2 \cdot \cos (\varphi_0 + \varepsilon).$$

Так как расстояние bx_0 находится в прямой геометрической зависимости от треугольника OCb и отрезка Ab , дающего длину стенки, то ясно, что bx_0 пропорционально высоте h стенки и ее длине Ab . Отсюда мы можем заключить, что закон распределения давлений по высоте стенки есть парабола, а, следовательно, закон распределения напряжений— прямая линия. Эти выводы мы можем иметь и из теории Ранкина (см. ниже).

Величину $\max R_0$ мы можем найти графически, как площадь треугольника bx_0k (фиг. 198), в котором $x_0k = x_0b$, так как

$$\angle bx_0k = \angle n = 90^\circ - (\varphi_0 + \varepsilon)$$

и мы имеем по известной теореме тригонометрии:

$$\begin{aligned} \text{пл. } bx_0k &= \frac{1}{2} bx_0 \cdot x_0k \cdot \sin bx_0k = \frac{1}{2} bx_0^2 \sin (90 - \varphi_0 + \varepsilon) = \\ &= \frac{1}{2} bx_0^2 \cos (\varphi_0 + \varepsilon) = \frac{1}{\delta} \max R_0 \end{aligned}$$

Треугольник, дающий $\max R_0$, может быть построен также и на стороне $x_0x'_0$ (см. чертеж).

Итак, для стенки любой высоты мы можем чисто графически определить величину полного активного давления на нее сыпучего тела. Направление же давления будет—под углом φ_0 с нормалью к стенке.

§ 8. Обобщение метода и частные случаи.

В предыдущем изложении у нас отсыпка была по прямой линии, наклоненной под углом к горизонту. Покажем теперь, как применить наш метод отыскания активного давления земли к различным видам и направлению линии отсыпки, а также и линия самой подпорной стенки.

1. Криволинейное очертание линии отсыпки (рис. 193).

Нетрудно заметить, из рассмотрения рис. 192, что площадь треугольника AbX_0 , которая пропорциональна весу O работающей массы сыпучего тела, равна:

$$\text{Пл. } AbX_0 = \text{пл. } bx_0X_0 = \text{пл. } bx'_0X_0.$$

Иначе говоря, *плоскость обрушения проходит таким образом, что отделяемая ею активная площадь материала равна площади треугольника ограниченного линией обрушения, линией естественного откоса и прямой, проходящей под углом $\varphi + \varphi_0$ к стенке.*

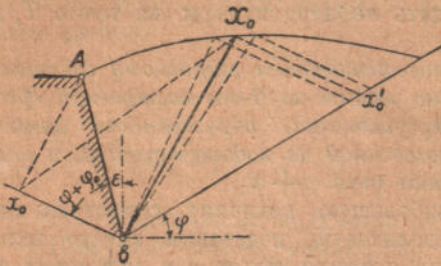


Рис. 193. Криволинейное очертание линии отсыпки.

мы найдем нужный нам отрезок bx_0 , по которому $\max R_0$ найдется по формуле:

$$\max R_0 = \frac{1}{2} \delta \cdot bx_0^2 \cdot \cos(\varphi_0 + \varepsilon).$$

Применяя это правило к рассматриваемому нами случаю криволинейной отсыпки (рис. 193), мы заключаем, что найдем плоскость обрушения, если проведем ее таким образом (действуя путем проб), чтобы площадь bAX_0 была равна площади $bX_0x'_0$, при чем $X_0x'_0 \parallel bx_0$. Проводя же затем прямую $Ax_0 \parallel bX_0$,

2. Отсыпка по прямой, наклоненной к горизонту под углом естественного откоса.

Покуда угол $\alpha < \varphi$, прямые AC и bC (рис. 194а) пересекаются в определенной точке, и построение средней пропорциональной на bC для отыскания точки X_0 , а затем и тр-ка X_0bk , выражающего своей площадью искомой нами давление $\max R_0$, производится вполне точно и определено.

Если же $\alpha = \varphi$, то наши прямые (AC и bC) пересекутся в бесконечности, полуокружность TC делается бесконечно большой, касательная к ней также, почему точка x'_0 , а следовательно и x_0 , будут в бесконечности.

Отсюда вытекает, что в случае отсыпки под углом естественного откоса плоскость обрушения совпадает с плоскостью естественного откоса.

Поэтому прямые Ax_0 и AT сливаются с направлением отсыпки. Таким образом, продолжив линию отсыпки до пересечения с прямой, проведенной под углом $\varphi + \varphi_0$ к стенке из ее подошвы, мы найдем нужный нам отрезок

$$bx_0 = bT = bO$$

по которому строим треугольник x_0bk (см. чертеж), дающий нам величину давления $\max R_0$.

Точку приложения его найдем на общих основаниях (см. ниже), направление — под углом $(90^\circ - \varphi)$ к стенке.

3. Вертикальная стенка. Горизонтальная отсыпка.
Отсутствие трения о стенку.

Мы имеем (рис. 194b).

$$\varphi_0 = 0; \quad \varepsilon = 0; \quad \alpha = 0.$$

Производя все построения *Понселе*, мы видим, что средняя пропорциональная между OT и Ob есть катет OA прямоугольного треугольника OAb .

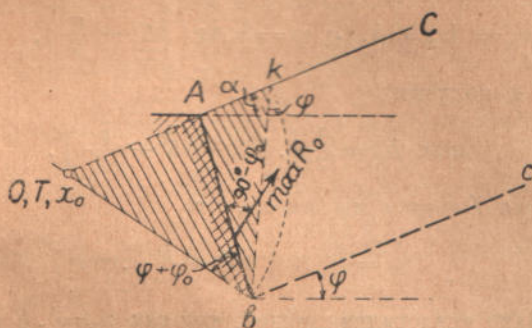


Рис. 194а. Случай, когда $\alpha = \varphi$.

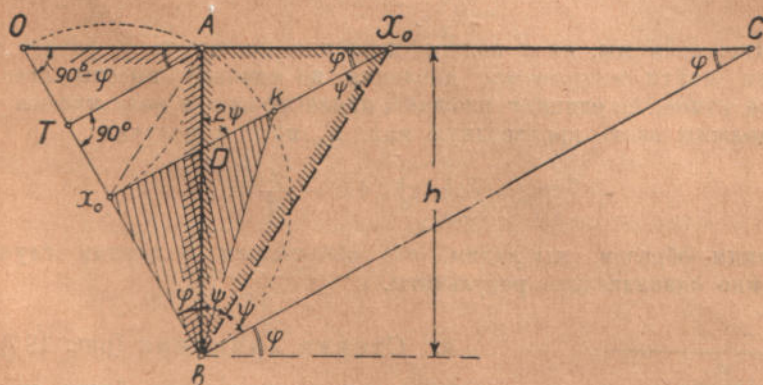


Рис. 194b. Случай, когда $\varphi_0 = 0, \quad \varepsilon = 0, \quad \alpha = \gamma$.

Отложив $Ox_0 = OA$ и проведя $x_0X_0 \parallel bC$, мы найдем плоскость обрушения bX_0 , при чем замечаем, что,

$$AX_0 = bx_0,$$

т.е. трапеция bx_0AX_0 — равнобокая и

$$\angle AX_0b = \angle x_0bX_0,$$

а следовательно, и

$$\angle DX_0b = \angle DbX_0 = \varphi,$$

но ясно, что $\angle ADX_0$ как внешний по отношению к треугольнику bDX_0 равен 2φ , а поэтому и $\angle AbC = 2\varphi$.

Иначе говоря, плоскость обрушения делит пополам угол между стенкой и линией естественного откоса.

Угол ψ , как не трудно заметить, равен

$$\psi = \frac{90 - \varphi}{2} = 45^\circ - \frac{\varphi}{2}.$$

Величина активного давления найдется по формуле

$$\max R_0 = \frac{1}{2} \delta \cdot b x_0^2 \cdot \cos(\varphi_0 + \varepsilon) = \frac{1}{2} \delta \cdot b x_0^2,$$

что пропорционально площади треугольника $x_0 k b$,

Подставляем

$$b x_0 = A x_0 = h \cdot \operatorname{tg} \psi = h \cdot \operatorname{tg} \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right),$$

в нашу формулу и получим:

$$\max R_0 = \frac{1}{2} \delta \cdot h^2 \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right).$$

По теории же Рэнкина мы имеем, что

$$n_2 = n_1 \operatorname{tg} \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right),$$

т.е. формула вполне аналогичная нашей, так как $n_1 = \delta \cdot h$ и интегрирование по длине стенки дает

$$R = \frac{1}{2} \delta \cdot h^2 \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right).$$

И обратно, если мы, имея полное давление на высоте h , равное $\max. R_0$, пожелаем найти *напряжение* давления на единицу высоты стенки, или, что тоже самое, на единицу площади, прилегающую к низу нашего участка, т мы должны взять производную $\max. R_0$ по h и получим:

$$n_2 = \delta \cdot h \cdot \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right).$$

Таким образом, мы видим, что обе теории в данном случае дают совершенно совпадающие результаты.

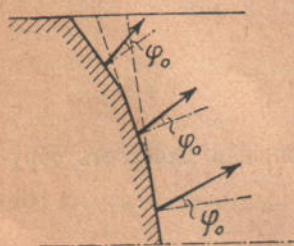


Рис. 195. Ломанная стенка многоугольного очертания.

4. Стенка ломанная (рис. 195).

Общие основания расчета будут следующие: доводим каждую грань стенки до вершины и вводим в расчет каждую грань, как часть целой стенки, после чего определяем по величине, положению и направлению равнодействующую давления на ту часть расчетной стенки, которая составляет данную грань, отдельно. Применяются иногда и более точные методы, учитывающие роль отдельных призм сыпучего тела. Мы на этих методах останавливаться не будем.

§ 9. Пассивное давление (сопротивление) сыпучего тела.

В предыдущих параграфах сыпучее тело, давя на стенку, производило активную работу, стенка же оказывала этому давлению пассивное сопротивление.

противодействие. Как мы уже знаем, здесь район массы сыпучего тела, участвующий в сопротивлении, значительно больше, чем в первом случае. Этот объем сыпучего тела ограничиваем некоторой случайной прямой bX (в действительности это кривая, но мы, по Кулону, считаем ее прямой, проведем ее только более полого, чем линия естественного откоса). При этом нам необходимо, для возможности применения нашего построения, задаться таким наклоном уровня отсыпки, чтобы он пересекался с ожидаемым нами направлением скольжения (прямая AX).

Призма, условия равновесия которой мы теперь будем рассматривать, есть призма AbX , которая работает здесь уже как *реактивная*, т.е. наш клин стремится *выдвинуться* из окружающих его тел, испытывая на одной своей щеке давление стенки, на другой — сопротивление инертной массы сыпучего тела; силой же сопротивления является вес клина.

Итак, силы, действующие на клин, суть:

1) Вес Q_1 = площ. $AbX \cdot \delta$.
 2) Действие стенки R'_0 , отклоненное от нормали к ней на угол трения φ_0 *вниз*, так как трение на щеках реактивно работающего клина действует *вниз*.

3) Сопротивление R' неподвижной массы сыпучего тела, действующее под углом φ к нормали *влево* (в реактивном клине).

Мы рассматриваем момент начала движения клина, и нашей задачей здесь является отыскание, из условий равновесия сил Q , R' , R'_0 , такого направления линии сдвига, чтобы значение силы R'_0 было *наименьшим*, так как здесь сила R'_0 — есть полезное действие, и нам важно найти минимум R'_0 , при котором уже происходит сдвиг, в запас прочности при расчете сооружения.

Для наших исследований нам здесь надо лишь *повторить построение Понселе* во всех деталях, но при новых условиях работы клина, при чем изменение построения будет соответствовать только изменению характера действия наших сил.

Так как у нас трение направлено в *другую* сторону, чем это было при активном действии, то угол φ откладываем в *другую* сторону от горизонтали, — *вниз* (прямая откоса bC), сумму же $\varphi_0 + \varphi$ откладываем *вправо* от стенки — получаем основную прямую нашего построения bO . Далее все построения (*при тех же обозначениях, как и на рис. 193*) будут совершенно аналогичны произведенным нами при активном действии сыпучего тела.

Так, проводим прямые:

$$AT \text{ и } Xc \parallel bC,$$

$$Ay \parallel Xb.$$

Строим силовой многоугольник *тпр* (рис. 196), углы которого легко определяются из чертежа:

$$\angle n = 90^\circ + \varphi_0 - \varepsilon$$

$$\angle p = 90^\circ + \varphi - i$$

$$\angle m = -\varphi - \varphi_0 + \varepsilon + i.$$

Мы видим, что разница с предыдущим только в знаках углов φ и φ_0 , что и понятно. Силы R'_0 и R' получаются здесь, поэтому, значительно больше силы Q_1 .

Совершенно так же, из подобия треугольников xXb и *прт*, имеем:

$$\frac{R'_0}{Q'} = \frac{bx}{xX}.$$

Далее из рассуждений, вполне аналогичных приведенным выше, находим величину

$$Q' = \frac{1}{2} \delta \cdot by \cdot yX \cdot \sin by X,$$

но

$$yX \cdot \sin by X = xX \cdot \sin bx X = xX \cdot \sin (90^\circ + \varphi_0 - \varepsilon).$$

Поэтому

$$R'_0 = \frac{1}{2} \delta \cdot by \cdot bx \cos(-\varphi_0 + \varepsilon).$$

Опять разница в знаке при φ_0 . Далее исследуем произведение $bx \cdot by$

$$bx = Ob + Ox$$

$$by = Ob + Oy$$

$$\frac{bx \cdot by = Ob^2 + Ox \cdot Oy + Ob(Ox + Oy)}{}$$

Пишем далее пропорцию:

$$\frac{Oy}{Ob} = \frac{OA}{OX} = \frac{OI}{Ox},$$

откуда

$$Oy \cdot Ox = Ob \cdot OT$$

есть величина постоянная.

Искомый нами $\min R'_0$ найдется при $\min (by \cdot bx)$, чему соответствует $\min. (Ox + Oy)$, а для этого необходимо, опять таки чтобы

$$Ox = Oy = Ox_0,$$

и этот отрезок Ox_0 найдется, как средняя пропорциональная между Ob и OT :

$$Ox_0^2 = Ox \cdot Oy = Ob \cdot OT.$$

Эту среднюю пропорциональную находим попрежнему или в виде касательной к кругу, построенному на bT , или в виде хорды круга, построенного на Ob .

Теперь мы находим действительное положение линии, ограждающей призму сопротивления в виде

$$bX_0 \parallel Ax_0.$$

Мы видим, что действительное значение призмы сопротивления получилось больше, чем мы предполагали.

Кроме двух вариантов построения средней пропорциональной на стороне Ob , можно и здесь также сделать еще по два построения на других сторонах треугольника OCb (см. чертеж), и во всех случаях мы получим одну единственную точку X_0 .

Итак, искомая нами величина

$$\min R'_0 = \frac{1}{2} \delta \cdot bx_0^2 \cdot \cos(\varepsilon - \varphi)$$

И здесь графически она измеряется площадью тр-ка x_0bk , в которой $x_0k = x_0b$. Равный этому тр-к может быть построен и на x_0x' , а именно $\triangle X_0x_0'm$.

Характер силы и ее возрастания с возрастанием высоты стенки здесь совершенно те же, что и в случае активного действия земли.

получим знакомый нам из теории Рэнкина вид:

$$\min R'_0 = \frac{1}{2} \delta \cdot h^2 \cdot \operatorname{tg}^2\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right),$$

напряжение же n'_2 , согласно вышеизложенного, получится

$$n'_2 = \frac{\partial R'_0}{\partial h} = \delta h \operatorname{tg}^2\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right).$$

И здесь мы видим, что конечные результаты обеих теорий сходятся.

В сущности этого и следовало ожидать, ибо мы в обоих выводах изучали равновесие некоего *клина*, только в теории Рэнкина это был малый клин с бесконечно малыми рёбрами, а в теории Кулона — клин значительных размеров.

ГЛАВА XIV.

Практические применения теорий Рэнкина и Кулона.

§ 1. Глубина заложения оснований.

Покажем прежде всего, как, применяя формулы Рэнкина или Кулона, можно определить *глубину заложения основания* какого-нибудь *солидного сооружения*.

Пусть h_1 (см. рис. 198) — искомая глубина сооружения, а h — высота земляного столба, эквивалентного по весу нашему сооружению. Определим соотношение между высотами h_1 и h , если нам известна эта последняя и физическая постоянная грунта φ .

В точке O активное давление, которое оказывает масса нашего столба, должно быть равно пассивному сопротивлению массы грунта, так как иначе невозможно устойчивое равновесие. Применяя формулы Рэнкина, мы получаем

$$\delta h \operatorname{tg}^2\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right) = \delta h_1 \operatorname{tg}^2\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right).$$

где δ — вес куб. единицы грунта.

Отсюда

$$\frac{h}{h_1} = \frac{\operatorname{tg}^2\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right)}{\operatorname{tg}^2\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right)}$$

что для φ около 35° дает $h = \sim 14 h_1$.

Если учесть *трение* оседающего сооружения своими боковыми стенками о грунт, то значение h получится *гораздо меньшим*.

§ 2. Давление грунта на стенку.

Выводы Рэнкина являются более или менее справедливыми для точек, достаточно удаленных от стенки; если же мы берем точку вблизи стенки, то эллипсоид напряжений уже теряет, вообще, до известной степени свою

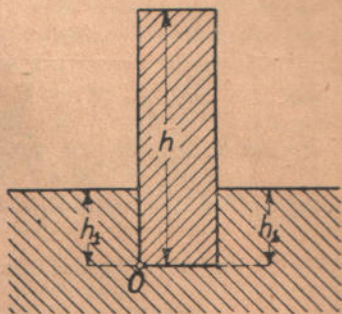


Рис. 198. Глубина заложения основания.

симметричность, n_2 не равно n_3 , и применение формулы Рэнкина допустимо только с рядом ограничивающих условий. Аналогичные допущения, в сущности, необходимы и для метода Кулона.

Главным, но не необходимым для вывода построения Кулона допущением является то, что мы поверхность стенки считаем обыкновенно совершенно гладкой и трение между нашим сыпучим телом и стенкой совершенно отсутствующим. Затем наклон стенки должен быть не больше наклонов плоскостей активного или пассивного давления, так как иначе применение построения Кулона делается уже невозможным. И, наконец, форма стенки должна быть возможно более простой.

В результате все же выводы в главнейших случаях дают одинаковые результаты, и к исследованию этих результатов мы и перейдем.

Выясним прежде всего, по какому закону изменяется давление на стенку по высоте стенки. Стенку принимаем сначала вертикальной, т.е. перпендикулярной к плоскости уровня земли, которая в свою очередь должна быть горизонтальной (см. рис. 199а).

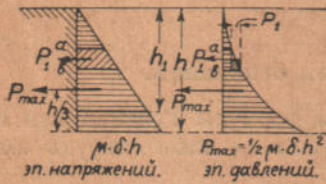


Рис. 199а. Стенка вертикальная, $h_0 = 0$.

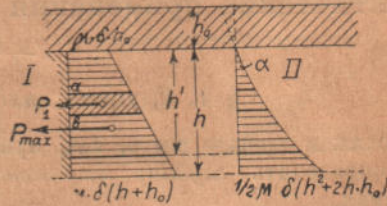


Рис. 199б. Стенка вертикальная, $h_0 \neq 0$.

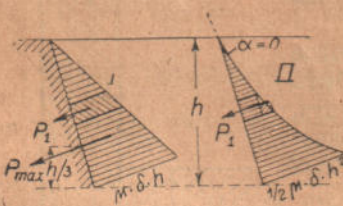


Рис. 199с. Стенка наклонная, $h_0 = 0$.

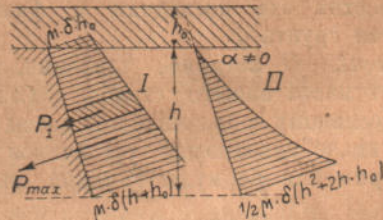


Рис. 199д. Стенка наклонная, $h_0 \neq 0$.

Рис. 199. Эпюры распределения давлений и напряжений по длине стенки в разных частных случаях.

Если стенка гладкая и угол трения равен нулю, то давление на любую точку нашей стенки будет направлено перпендикулярно к ней, так как только в этом случае возможно равновесие. Искомое нами давление n_2 (на единицу площади), как мы знаем, пропорционально вертикальному давлению n_1 , которое, в свою очередь, пропорционально h или $h_0 + h$, если есть давление на поверхность земли. Рассмотрим эти два случая отдельно: 1-й Случай. Давления на поверхность земли нет. (рис. 199а).

Напряжения n_2 по высоте изменяются пропорционально $\mu \cdot \delta \cdot h'$, так как на любой глубине залегания рассматриваемой точки

$$n_2 = \mu \cdot n_1 = \mu \cdot \delta \cdot h,$$

на верхнем уровне земли

$$h' = 0; \quad n_2 = 0.$$

Наибольшей глубине h соответствует наибольшее давление

$$\mu \cdot \delta \cdot h.$$

Эпюра напряжений представляет из себя треугольник, любая ордината которого дает напряжение в любой точке стенки, т.е. давление на единицу площади.

Интегрируя наши элементарные силы давления по высоте стенки, мы сможем найти силу давления на всю стенку, или любую часть ее. Так, полная сила давления на стенку по величине найдется, как площадь нашего треугольника напряжений:

$$P_{\max} = \frac{1}{2} \mu \cdot \delta \cdot h^2.$$

Точка же приложения ее — на $\frac{1}{3}$ от основания.

Равнодействующая давлений на малом участке ab найдется по величине, как площадь трапеции (см. рис. 199a), точка же приложения ее — в центре тяжести этой трапеции.

Хотя эпюры напряжений нам вполне достаточно, но мы можем построить эпюру давлений, если против конца любой площади стенки (считая от вершины) отложим на перпендикуляре силу, как результат интегрирования напряжений всех вышележащих площадочек.

При $h' = 0$ мы имеем $P = 0$.

$$\text{При } h' = h \quad \text{„} \quad \text{„} \quad P_{\max} = \frac{1}{2} \mu \cdot \delta \cdot h^2$$

Ясно, что кривая давлений — квадратная парабола, дающая нам столь же исчерпывающие ответы на все вопросы о давлении на стенку, как и эпюра напряжений, так как любая ордината ее дает нам величину давления на всю вышележащую площадь, точка же приложения этого давления опять таки на $\frac{1}{3}$ глубины, считая от ординаты.

Равнодействующая давлений P_1 на малом участке найдется, как разность соответствующих ординат эпюры давлений (см. черт.ж). Точка же приложения этой равнодействующей найдется, если мы построим прямоугольник, равновеликий площадке эпюры давлений, имеющей основание P_1 и высоту ab . Площадь S этой площадки (черт. 199a), как не трудно выяснить из чертежа, равна

$$S = \Sigma \partial P_1 \cdot x_1,$$

площадь же равновеликого ей прямоугольника равна $P_1 \cdot x_0$ почему построением этого прямоугольника, мы находим плечо

$$x_0 = \frac{S}{P_1}$$

определяющее искомую точку приложения силы P_1 . Нашим построением, собственно говоря, мы выражаем ту мысль, что момент равнодействующей P_1 (относительно b) равен сумме моментов составляющих ∂P_1 .

2-й Случай. Давление на поверхности есть (см. рис. 199b). Высота нагрузки грунтом, эквивалентная внешним силам, пусть будет h_0 . Тогда при $h' = 0$ напряжение будет не нуль, а $\mu \cdot \delta \cdot h_0$, при $h' = h$ напряжение будет равно $\mu \delta (h + h_0)$. Откладывая эти величины по перпендикулярам к стенке, мы получим эпюру напряжений, в виде трапеции, площадь которой будет равна равнодействующей полного давления

$$P_{\max} = \frac{\mu \cdot \delta (h + h_0) + \mu \delta h_0}{2} h = \frac{1}{2} \mu \delta (h^2 + 2hh_0).$$

Точка же приложения этой равнодействующей—в центре тяжести всей трапеции. Частичная сила (напр., на площадке ab) здесь найдется совершенно так же, как и в первом случае.

Кривая давления найдется совершенно аналогично предыдущему— это будет также парабола, ордината которой внизу равна полной силе

$$P_{\max} = \frac{1}{2} \mu \delta (h^2 + 2hh_0)$$

вверху— нулю, но тогда как в первом случае парабола касательна к направлению стенки (производная $\frac{\partial P}{\partial h}$ при $h = 0$ равна также нулю), здесь производная

$$\frac{\partial P}{\partial h} = \frac{1}{2} \mu \delta (2h + 2h_0) = \mu \delta (h + h_0)$$

при $h = 0$ будет постоянной величиной, равной

$$\mu \cdot \delta \cdot h_0 = \operatorname{tg} \alpha$$

т.-е. парабола пересекает стенку в вершине под острым углом, что и следовало ожидать, ибо в эпюре напряжений треугольник заменился трапецией.

Пользование кривой давлений ничем не отличается от первого случая.

Если стенка будет наклонна к горизонту, то величины напряжений и усилий откладываем, опять таки, перпендикулярно к стенке и получаем фигуры, совершенно аналогичные предыдущим и в том, и в другом случае (рис. 199 *c* и *d*).

Пользование этими фигурами для нахождения напряжений, полных и частичных давлений также ничем не отличается от предыдущего.

В действительности стенка *никогда не будет совершенно гладкой*, как мы предполагали, почему угол трения будет не равен нулю, а равнодействующая давлений, не нарушая равновесия, может направиться и под некоторым углом φ_1 с нормалью к стенке, не большим угла трения нашего сыпучего тела о стенку. Можно, имея в виду этот угол, строить соответственным образом и эпюры давлений, и эпюры напряжений.

Но, так как для подпорного сооружения более опасной является сила, нормальная к стенке, так как она легче *отпрокидывает* стенку, т.-е. дает больший эксцентриситет равнодействующей относительно опоры, то считая стенку гладкой и рассчитывая ее на вышеизложенных основаниях, мы этим только будем действовать в пользу прочности сооружения.

§ 3. Расчет подпорных стенок.

Определив при помощи предыдущих построений *величину и положение* сил давления грунта, воды или какого нибудь сыпучего тела на подпорную стенку, а также, приняв *направление* этого давления перпендикулярным к плоскости стенки, или же наклонным, мы сможем теперь перейти к расчету самых подпорных стенок на общих основаниях. При этом самым опасным соседом для подпорной стенки является *вода*, так как для нее, как мы знаем,

$$\mu = 1 \quad \text{и} \quad n_2 = n_3 = n_1 = \delta \cdot h.$$

Пусть на нашу стенку (см. рис. 200а) действующие силы определены: это будет сила веса Q в центре тяжести и сила P справа—от нашего сыпучего или жидкого тела,—определяемая на вышеизложенных основаниях. Давление на стенку предположим с одной стороны.

Расчет должен быть произведен с точки зрения:

- 1) прочности и устойчивости всего тела в целом и
- 2) прочности и устойчивости отдельных частей его.

Вопросы жесткости и устойчивости деформаций здесь в виду больших размеров тела по всем направлениям не имеют значения.

Но кардинальным вопросом является вопрос о том, какую фигуру принять за *схему* нашего сооружения. Обычно, несмотря на то, что стенка имеет соизмеримые высоту и толщину, ее все же приравнивают к брусу, принимая за ось такого бруса геометрическое место центров тяжести последовательных горизонтальных (или иногда перпендикулярных к оси, если ось наклонна или криволинейна) сечений. Легко понять, взглянув на типические профили стенок (см. рис. 200 б), насколько это неверно. Тем не менее, этот именно подход применяется обычно. Наиболее правильным решением вопроса было бы рассмотрение явления в *трех* измерениях. При этом, так как из трех измерений одно весьма велико (перпендикулярная к плоскости чертежа длина подпорной стенки), а поперечное к этому измерению сечение можно признать постоянным, силы же — расположенными в плоскости поперечных сечений, вопрос приводится к так называемой *плоской задаче теории упругости* (которую отнюдь нельзя смешивать с задачей о пластинке, ибо к пластинке наш случай привести нельзя).

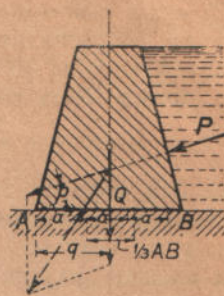


Рис. 200 а. Условия равновесия подпорной стенки.

Кроме того весьма неясным остается вопрос о том, как осуществляется закрепление конца сечения в грунте, т.е. на каких гранях и по какому закону развиваются в грунте реактивные силы, долженствующие уравновесить собой активные силы и вызываемую ими γ места закрепления стенки активную пару.

Практически к этим вопросам подходят пока довольно грубо, сводя задачу к брусу, заделанному в грунт и торчащему вертикально, и решают последовательно два выше формулированных вопроса.

1) *Решаем 1-й вопрос.* Если равнодействующая наших двух сил выходит за ребро А (рис. 200 а), то стенка сможет вращаться около А и так как мы считаем опору способной *противляться только сжатию*, то может и даже фактически должно произойти *опрокидывание* стенки.

Если равнодействующая *проходит внутри опорной площади*, то здесь могут быть два случая:

а) Сила проходит в *средней трети* опорной площади, — в этом случае, наиболее желательном, работает вся опорная площадь и на одно только сжатие.

б) Сила выходит из средней трети основания, — в этом случае некоторая часть опорной площади работает на растяжение, а так как такая работа невозможна по характеру закрепления в грунте, то поступают следующим образом: утраивают расстояние точки встречи силы с опорной площадью до ближайшего ребра и считают опору работающей на неравномерное сжатие, но только в этом пределе по формуле $\max n = \frac{2N}{3c}$, где N есть вертикальная составляющая действующих сил, а c — расстояние точки ее приложения до внешнего ребра (рис. 200 а).

Допускаемое напряжение на сжатие грунта зависит от его качеств и колеблется от 20 кг/см² до 2 кг/см².

Итак, для прочности всей опорной стенки в целом необходимы три условия: 1) *Равнодействующая внешних сил не должна выходить из пределов*

опоры. 2) Равнодействующая по возможности должна проходить в средней трети ширины опоры. 3) Напряжение в грунте не должно превышать допустимого.

Иногда производят еще дополнительный расчет, по которому все внешние силы делятся на две категории: 1) силы опрокидывающие (давление земли, и 2) силы сопротивляющиеся (вес стенки) и затем ставят условие, чтобы момент сопротивляющейся силы (у нас $M_c = Q \cdot q$ по рис. 200а) была по крайней мере на 40% больше момента силы опрокидывающей ($M_o = P \cdot p$); т.е. должно быть соблюдено неравенство:

$$M_c \geq 1,40 M_o$$

Эта формула дает некоторый эксцентриситет приложения равнодействующей по отношению к ребру А, но совершенно не определяет величины его, т. к., если $M_c = M_o$, то сила пройдет через А, если же $M_c > M_o$, то она пройдет внутри сечения, но мы не имеем никакой гарантии, что при 1,40 она пройдет именно через среднюю треть сечения, что очень важно.

2) Перейдем ко второму вопросу: для того, чтобы проверить размеры отдельных элементов стенки, мы ее рассматриваем, как брус с осью, и в каждом сечении можем, на общих основаниях, найти и нормальную силу N_z и поперечную Q , и сгибающий момент M , что нам в особенности легко будет сделать, зная для каждого горизонта равнодействующую всех внешних сил (вес вышележащей части и давление сыпучего тела на вышележащую площадь стенки), и построив по ней кривую давления. При этом расчете должное внимание надо обращать не только на N_z , но и на поперечную силу Q , в особенности в самом нижнем сечении: необходимо делать проверку на сдвиг по горизонтальной составляющей равнодействующей силы, принимая во внимание лишь сопротивление трения $f \cdot n$, а в нижнем сечении и имея в виду коэффициент трения кладки по грунту. Игнорирование величины γ вполне естественно в нижнем сечении, но в верхних сечениях, в коих сцепление слоев кладки значительно, это игнорирование γ не вполне основательно, и за последнее время сопротивление сцепления кладки γ начали также учитывать.

Рассматривая рис. 200 а, мы видим, что стенка тем выгоднее, чем более сдвинут центр тяжести ее от центра опорной площади на встречу давлению земли.

§ 4. Формы (профиля) стенок.

Выгодно стенку, на которую производится давление, делать прямой, а противоположную — наклонной (рис. 200 б). Еще большее выдвигание стенки против давления (рис. 200—с и д), хотя еще более выгодно с точки зрения использования материала, но на практике почти никогда не применяется, т.к. во-первых, вызывает при исполнении затруднения техниче-

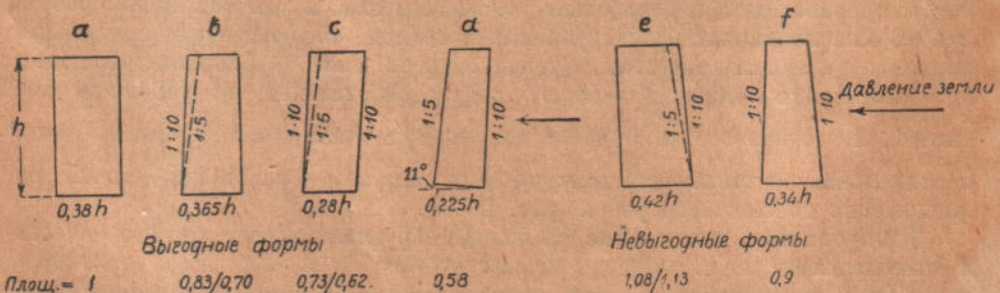


Рис. 200б. Навыгоднейшие формы стенок.

ского и экономического характера, а во-вторых, если стенки служат крайними опорами для моста, то увеличивают пролет его, на что почти никогда не идут.

На рис. 200b приведен для сравнения ряд форм поперечных сечений подпорных стенок, подобранный таким образом, что все стенки выдерживают при одинаковом напряжении материала одинаковую величину давления земли справа, при чем площадь первой стенки (*a*) принята за единицу, а остальные площади выражены через нее. Ширина основания дана в функции высоты. Сразу видно, что наимыгоднейшей является форма *d*, близко к ней стоит форма *e*, формы же наиболее употребительные (*e* и *f*) по вышеизложенным мотивам наиболее невыгодны.

Стенки закровов и элеваторов находятся в несколько иных условиях расчета, которые указываются в специальных курсах.

Также несколько своеобразны и условия работы водоудержательных плотин. Их часто проектируют в плане в виде арки, выпуклостью обращенной к напорной воде, а вогнутой частью—к нижнему бьефу; в этом случае все сооружение можно рассматривать, как горизонтальную арку, сжимаемую действием воды и закрепленную концами в грунт. Поперечным сечением такой арки будет поперечное сечение нашей плотины. Современные плотины достигли уже высоты более 100 метров (плотина Camarasa близ Барселоны в Испании). Поперечное сечение плотины Camarasa представляет прямоугольный треугольник, с катетом высотой в 100 метров, обращенным к воде, и гипотенузой, обращенной к нижнему бьефу; ширина подошвы 76 метров.

В Соединенных Штатах составляется проект плотины Boudler Canyon высотой в 210 метров.

ОГЛАВЛЕНИЕ.

	СТР.
От автора	3
Введение	5
<hr/>	
Глава I. — Общие положения.	13
§ 1. Материя	20
§ 2. Сила	25
§ 3. Упругая энергия	30
§ 4. Методы исследования сооружений	30
<hr/>	
Глава II. — Теория внешних сил.	37
§ 1. Внешние активные силы. Вережно-стержневой многоугольник	44
§ 2. Устройство опор и реактивные силы	53
§ 3. Кривые давления	60
§ 4. Действие внешних сил на отдельный элемент бруса	60
<hr/>	
Глава III. — Основные явления в брус.	74
§ 1. Растяжение и сжатие	82
§ 2. Сдвиг	87
§ 3. Изгиб	95
§ 4. Кручение.	100
§ 5. Общее выражение работы элемента бруса	100
<hr/>	
Глава IV. — Исследование сечения.	103
§ 1. Общие положения и аналитические формулы	109
§ 2. Графический метод, нахождения моментов инерции	114
§ 3. Главные оси	119
§ 4. Геометрические методы изучения моментов инерции	123
§ 5. Эллипс инерции Ламé	123
<hr/>	
Глава V. — Общий случай действия сил на брус.	126
§ 1. Общие положения	127
§ 2. Исследование общего случая	135
§ 3. Ядро сечения	137
§ 4. Тангенциальные напряжения	140
§ 5. Местные напряжения	140
<hr/>	
Глава VI. — Распределение напряжений в точке.	144
§ 1. Общие соображения	147
§ 2. Плоскостное действие сил (плоская задача)	151
§ 3. Исследование напряжений кругом Мора	154
§ 4. Сложное сопротивление и идеальные главные напряжения	154
§ 5. Эллипс напряжений и директрисные кривые	15

Глава VII. — Изгиб статически-определимого прямого бруса.	СТР.
§ 1. Общие соображения	160
§ 2. Простой поперечный изгиб	161
§ 3. Графо-аналитическое исследование изгиба. Общая теория 6-и строк	166
§ 4. Балки на 2-х опорах. Эпюры и инфлюэнтные линии	169
§ 5. Детальное исследование эпюр и инфлюэнтных линий	170
 Глава VIII. — Исследование явлений изгиба в частных случаях.	
§ 1. Общее исследование выведенных формул	181
§ 2. Частные случаи изгиба балки, лежащей на двух опорах	183
§ 3. Наклонные опоры. Балка, заделанная одним концом в стену, а на другом свободно висящая	189
§ 4. Консольная балка	193
 Глава IX. — Поперечный изгиб от системы грузов.	
§ 1. Общие соображения	197
§ 2. Пространственное изучение величин Q , M , y' и y для простой балки	200
§ 3. Абсолютный наибольший момент от системы грузов	203
§ 4. Способ установки поезда на инфлюэнтной линии	210
§ 5. Узловая передача нагрузки	212
§ 6. Применение метода взаимности к построению инфлюэнтных линий в балках.	218
§ 7. Полное исследование балки	221
 Глава X. — Продольный изгиб.	
§ 1. Происхождение явления	225
§ 2. Классический вывод формулы Эйлера	229
§ 3. Вывод формулы Эйлера способом выравнивания дополнительных работ	234
§ 4. Вывод формулы Эйлера из формул прогиба	236
§ 5. Эмпирические расчетные формулы	238
§ 6. Колебания струны	241
 Глава XI. — Расчет брусьев с переменным модулем упругости. — Железобетон.	
§ 1. Сущность вопроса	244
§ 2. Растяжение и сжатие	244
§ 3. Изгиб и кручение	246
§ 4. Железобетон	248
§ 5. Растяжение, сжатие и простой изгиб железобетона	250
§ 6. Частные случаи	253
§ 7. Тангенциальные напряжения	255
§ 8. Совместное действие изгиба и сжатия	256
§ 9. Продольный изгиб в железобетонных стержнях	258
 Глава XII. — Некоторые особые явления в бруссе, вызываемые осадками опор, действием температуры и динамическим действием нагрузки.	
§ 1. Общие соображения	260
§ 2. Осадка опор и ее влияние	260
§ 3. Действие температуры	262
§ 4. Динамическое действие нагрузки	265
§ 5. Явление резонанса	269

Глава XIII. — Равновесие сыпучих тел.

стр.

§ 1.	Общие соображения	270
§ 2.	Метод Рэнкина	271
§ 3.	Внутреннее трение в твердых и сыпучих телах	273
§ 4.	Вывод формулы Рэнкина	276
§ 5.	Исследование формулы Рэнкина	280
§ 6.	Метод Кулона	281
§ 7.	Отыскание активного давления сыпучего тела на стенку в общем случае	288
§ 8.	Обобщение метода и частные случаи	288
§ 9.	Пассивное давление (сопротивление) сыпучего тела	290
§ 10.	Частные случаи пассивного сопротивления	294

Глава XIV. — Практические применения теорий Рэнкина и Кулона.

§ 1.	Глубина заложения оснований	295
§ 2.	Давление грунта на стенку	295
§ 3.	Расчет подпорных стенок	298
§ 4.	Формы (профиля) стенок	300

Государственное Техническое Издательство.

МОСКВА, Ильинка, Юшнов пер, д. 6. Тел. 2-56 34.

- Креутер, Ф. Расчет и возведение каменных водоудержательных плотин. Перевод с нем. инж. Н. Анисимова. М. 1923 г. 35 стр. 19 черт. Ц. 50 к.
- Крылов, А. М. Минеральные и растительные масла для поливки инструментов, смазки машин, двигателей и разных механизмов. П. 1919 г. 89 стр. 7 рис. Ц. 85 к.
- Крылов, А. П. О специальных сортах стали. М. 1922 г. 200 стр. 32 рис. Ц. 2 р. 20 к.
- Куколевский, И. И., проф. Сборник нормалей деталей машин. М. 1922 г. 96 табл. 97 черт. Ц. 3 р. 25 к.
- Кюн, В. О предельных допусках в машиностроении. Перевод с немецкого проф. А. Д. Гатцука. Б. 1923 г. 246 стр. Ц. 3 р.
- Лахтин, Н. К., проф. и Кашкаров, Н. А., проф. Железобетон. Часть I. Пособие для студентов и техников по проектированию и выполнению железобетонных сооружений. М. 1924 г. 171 стр. 114 рис. Ц.
- Левансон, Л. Б., проф. Общая теория машин (статики и динамика машин). М. 1923 г. 192 стр. 140 рис. Ц. 2 р. 20 к.
- Его же. Кинематика механизмов. М. 1923 г. 200 стр. 262 рис. Ц. 2 р. 20 к.
- Ломоносов, Ю. В. Тяговые расчеты. Б. 1922 г. 298 стр. 121 рис. Ц. 4 р. 15 к.
- Луньянов, П. М., инж.-техн. Производство серной кислоты методом контактного окисления. М. 1922 г. 502 стр. 166 рис. Ц. 4 р. 95 к.
- Малер, Г., проф. Задачник по физике, с ответами. Перев. с нем. изд. под ред. проф. В. Д. Зернова. М. 1923 г. 115 стр. Ц. 1 р.
- Мартенс, Л. Литые колеса для подвижного состава железных дорог. Чугунные закаленные Гриффина и стальные Девиса. М. 1923 г. 181 стр. 150 черт. Ц. 5 р. 20 к.
- Меншутин, Б. Н., проф. Курс общей (неорганической) химии. М. 1924 г. 373 стр. 85 рис. Ц. 5 р.
- Мещерский, И. В., проф. Сборник задач по теоретической механике. П. 1923 г. 140 стр. 367 рис. Ц. 1 р. 60 к.
- Моск. О-во Любит. Астрономии. Астрономический календарь на 1923 год. Под ред. инж. В. Ветчинкина. П. 1923 г. 120 стр. Ц. 1 р. 20 к.
- Новосильцев, И. С., инж. Подземная откачка подвижными двигателями. М. 1924 г. 72 стр. 53 рис. Ц. 1 р. 35 к.
- Оплегейм, К. А., проф. Деревянные шпалы на русских железных дорогах с точки зрения народного хозяйства. М. 1921 г. 109 стр. Ц. 1 р. 20 к.
- Его же. Успехи заграничной техники и новейшие течения в области устройства рельсового пути (за 1912—22 гг.). М. 1923 г. 288 стр. 197 рис. Ц. 4 р. 50 к.
- Орлов, М. М., проф. Лесная вспомогательная книжка для таксации и технических расчетов. М. 1922 г. 361 стр. (76 табл.) Ц. 3 р. 90 к.
- Передерий, Г. П., проф. Курс железобетонных мостов. Изд. 2-е. П. 1923 г. 512 стр. 626 рис. Ц. 7 р. 80 к.
- Перельман, И. Я., инж. Электрификация. Программа общего курса лекций для высших технических учебных заведений. М. 1923 г. 16 стр. Ц. 28 к.
- Его же. Электрификация сельского хозяйства. П. 1923 г. 80 стр. Ц. 95 к.
- Его же. Электрификация мелкой и кустарной промышленности. М. 1923 г. 80 стр. 15 рис. Ц. 1 р. 20 к.
- Пуансо, Л. Начало статики. Под ред. проф. А. Н. Долгова. П. 1920 г. 213 стр. 91 рис. Ц. 1 р. 20 к.
- Ридлер, А., проф. Лабораторное испытание автомобиля. М. 1924 г. 48 стр. 44 рис.
- Салесский, Б. Таблицы для сахароваров. Б. 1923 г. 340 стр. Ц. 3 р. 50 к. в папке.
- Соловьев, С. М., проф. Основной курс низшей геодезии. Ч. I. М. 1922 г. 232 стр. 253 рис. Ц. 2 р. 75 к.
- Его же. То же. Ч. II-я. М. 1924 г. 322 стр. 268 рис. Ц. 4 р. 50 к.
- Соловьяко, И. Л., инж.-электрот. Электрическое оборудование трамвайных вагонов гор ж. д. с электрической тягой. Практическое руководство для инженеров. М. 1922 г. 96 стр. 87 рис. Ц. 1 р. 10 к.
- Сухаревский, М., проф. Взрывчатые вещества и взрывные работы. Справочное руковод. для инженеров, техников и студентов. Т. I. М. 1923 г. 916 стр. 444 рис. Ц. 8 р.
- Его же. То же. Т. II. М. 1923 г. 462 стр. 447 рис. Ц. 7 р. 50 к.
- Тейлор, Ф. Искусство резать металлы. Б. 1922 г. 356 стр. 99 рис. 11 вкладн. табл. и черт. Ц. 4 р.
- Труфанов, А. А., инж. Речная гидрология. М. 1923 г. 84 стр. 11 рис. Ц. 1 р. 30 к.
- Федорович, О. М., проф. Каменные работы. Изд. 2-е. М. 1922 г. 276 стр. 274 рис. Ц. 3 р. 90 к.
- Федоровский, Н. М., проф. Курс минералогии. Часть I-я. Генезис минералов. М. 1923 г. 200 стр. 83 рис. Ц. 2 р. 75 к.
- Его же. Часть II-я. Описание минералов. М. 1923 г. 175 стр. 112 рис. Ц. 1 р. 85 к.
- Его же. Часть III-я. Определение минералов. М. 1923 г. 174 стр. 15 рис. Ц. 1 р. 85 к.
- Хавс, Г., проф. Железо, сталь и другие сплавы. Перевод с англ. И. И. Жукова. Б. 1923 г. 535 стр. 123 рис. Ц. 5 р. (в переплете).
- Худяков, П. К., проф. Геометрический метод исследования упругой линии согнутой балки. Б. 1923 г. 129 стр. 69 рис. Ц. 1 р. 10 к.

Государственное Техническое Издательство.

МОСКВА, Ильинка, Юшков пер., д. 6. Тел 2-56-34.

- Худяков, П. К. Как рассчитывать на крепость части машин и сооружений (курс сопротивл. материалов без высшей математики). М. 1922 г. 633 стр. 256 рис. Ц. 7 р. 80 к. (в переплете).
- Хютте. Справочная книга для инженеров, архитекторов и студентов. 10-е изд. Ч. I. Б. 1921 г. 1242 стр. 732 рис. Ц. 7 р. 80 к.
- Его же. То же. Ч. II. Б. 1921 г. 1395 стр. 1330 рис. Ц. 7 р. 80 к.
- Его же. То же. Ч. III. Б. 1921 г. 1009 стр. 1058 рис. Ц. 7 р. 80 к.
- Холмогоров, И. М., проф. Машиностроительное черчение. П. 1922 г. 38 стр. 35 черт. Ц. 80 к.
- Черновский, Н. Ф. Век машин, или столетие непрерывных успехов технического творчества. М. 1923 г. 24 стр. Ц. 33 к.
- Чечотт, Г. О., проф. Проектирование и устройство простейших сортировочных для обогащения каменных углей. М. 1923 г. 96 стр. 122 рис. Ц. 2 р. 20 к.
- Шенфер, К. И., проф. Коллекторные двигатели переменного тока. М. 1921 г. 188 стр. 190 рис. Ц. 2 р. 30 к.
- Шмидт, Гарри. Теория относительности. М. 1922 г. 160 стр. 5 рис. Ц. 65 к.
- Шмидт, О., проф. Химия для учеников. Б. 1923 г. 192 стр. 58 рис. Ц. 2 р. 50 к.
- * Анисимов, Н. И., инж. Плотины вододержательные и водоподъемные (конспект лекций). Часть II-я. Водоподъемные плотины.
- * Аппель, П., проф. Элементы математического анализа. Часть II. Перев. с франц. под ред. проф. И. И. Привалова.
- * Берлов, М. Н., проф. Детали машин. Выпуски III, V, VI, VII, VIII и IX.
- * Броунов, П. И., проф. Метеорология.
- * Его же. Атмосферная оптика
- * Виттинг. Дифференциальное и интегральное исчисления.
- * Демьянов, Н. Я., проф. Органическая химия. Ч. III.
- * Жуковский, Н. Е., проф. Теоретические основы воздухоплавания.
- * Клейнгольц, А., инж. Формулы для расчета рамных конструкций.
- * Лахтин, Н. К., проф. и Кашарев, Н. А., проф. Железобетон. Ч. II и III.
- * Моск. О-ва Любит. Астрономический календарь на 1924 г. Под ред. инж. В. П. Ветчинкина.
- * Настюков, А. М., проф. Техническая химия.
- * Орлов, П. М., проф. Таблицы приращений прямоугольных координат.
- * Павлов, Н. Н., проф. Расчеты в технике.
- * Подольский, И. С., проф. Строительная механика. Ч. I. (Сопротивление материалов).
- * Сиолов, П. Д., проф. Номография.
- * Станкевич, И. В., проф. Теоретическая механика. Ч. I и II.
- * Стиль, А. Электрическая передача энергии.
- * Стреловский, Н. С., инж. Разводные мосты.
- * Худяков, П. К., проф. Из практики русского строительства.

М. М. К. УРОЧНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ для строительных работ в метрических и русских мерах (офици. издан.), в переплете. М. 1923 г. 334 стр. Ц. 12 р.

О'Рурк, инж. **ТАБЛИЦЫ УМНОЖЕНИЯ**. (Карманный справочник). Незаменимое пособие в отношении быстроты вычислений при технических, коммерческих и валютных расчетах. П. 1923 г. Ц. 2 р. 50 к.

Н. Т. О.

„ГОСТЕХИЗДАТ“.

В. С. Н. Х.

ПРАВЛЕНИЕ: Москва, Ильинка, Юшков пер., 6. Тел. 2-56-34.

КНИЖНЫЕ МАГАЗИНЫ:

Москва:

Покровка, 28.
Петровка, 10, тел. 1-95-34.
Разгуляй, 38/2, тел. 1-95-51.
Волхонка, 6, тел. 2-70-69.

Ленинград.

Загородный, 4, тел. 1-69-37.