

Н. К. З.  
ОПЫТНО-МЕЛИОРАТИВНАЯ ЧАСТЬ.  
ВЫПУСК 30.

---

Проф. Н. Е. Жуковский.

I.

О снежных заносах.

II.

О снежных заносах и заилении рек.

III.

Просачивание воды через плотины.

(Посмертное издание под ред. Н. Е. Ченцова).



МОСКВА.

1923.

13920

7

551.5+

У

Ж-86

Н. К. З.  
ОПЫТНО-МЕЛИОРАТИВНАЯ ЧАСТЬ.  
ВЫПУСК 30.

Проф. Н. Е. Жуковский.



сд

I.

О снежных заносах.

II.

О снежных заносах и заилении рек.

III.

Просачивание воды через плотины.

(Посмертное издание под ред. Н. Е. Ченцова).



проверено  
1923 г.

И



МОСКВА.  
1923.

621.6

## ПРЕДИСЛОВИЕ.

---

Настоящий выпуск Опытной-Мелиоративной части посвящает посмертному изданию не напечатанных статей профессора Николая Егоровича Жуковского, посвященных теоретическому объяснению трех вопросов, имеющих громаднейшее значение в практике мелиоративного дела; именно: 1) вопросу о снежных заносах, основного при постановке увлажнительных работ по снегозадержанию; 2) вопросу о заилении рек и каналов, имеющего столь существенное значение в деле орошения и, наконец, 3) вопросу о просачивании воды под плотинами, являющемуся основным в деле мелиоративно-гидротехнического строительства.

К двум впервые печатающимся статьям приложена ранее изданная статья о снежных заносах, как тесно связанная с остальными статьями и напечатанная в малодоступном для читателей издании.

Издание настоящих статей сделано по постановлению Технического Комитета Управления Мелиораций и Вод. Хоз. НКЗ, признавшего большую важность их для мелиораторов и с согласия наследников и душеприказчиков покойного проф. Н. Е. Жуковского, за что ОмЧ приносит свою признательность.

Редакцию статей вел преподаватель Московск. Высш. Техн. Учил. Н. Е. Ченцов, которому ОмЧ считает долгом выразить свою благодарность

*Опытной-Мелиоративной Части Н. К. З.*

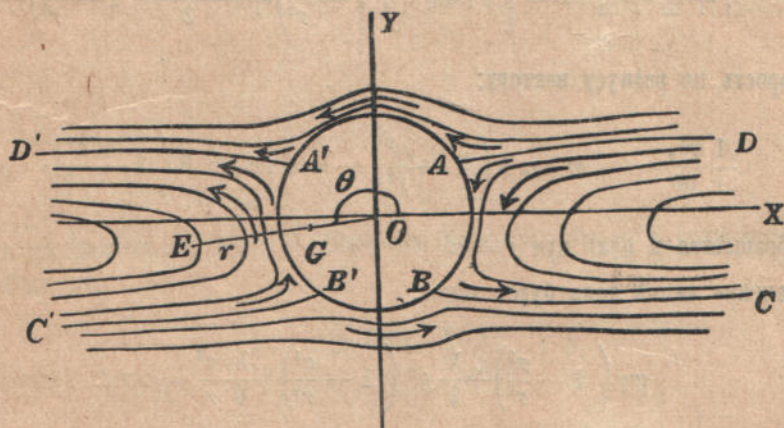
---



## О снежных заносах \*).

§ 1. Когда вьюга несет низовой снег и встречает на своем пути неподвижные предметы, тогда перед преградой образуется снежная выемка, а на некотором расстоянии от преграды — снежный бугор. В этой заметке я даю объяснение упомянутого явления, предполагая, что преграждающий предмет есть выступающий из снега весьма длинный круглый цилиндр радиуса основания  $a$  с горизонтальной осью, перпендикулярную направлению ветра.

§ 2. Направим [фиг. (1)] ось  $oz$  по оси цилиндра, ось  $ox$  навстречу ветру и ось  $oy$  по вертикали вверх.



Фиг. 1.

Скорость ветра во время вьюги быстро возрастает при удалении от поверхности земли. Представим ее формулою:

$$u = -w - \lambda y. \quad (1)$$

Этой формуле соответствует функция тока:

$$\psi_1 = -wy - \frac{\lambda y^2}{2} = -wr \sin \theta - \frac{\lambda}{2} r^2 \sin^2 \theta. \quad (2)$$

\* ) Статья напечатана впервые в 1911 г. в „Сборнике статей, посвященных проф. Г. К. Суслову“.

потому что при этом проекции скорости  $u$  и  $v$  на оси  $ox$  и  $oy$  будут

$$u = \frac{\partial \psi_1}{\partial y} = -w - \lambda y,$$

$$v = -\frac{\partial \psi_1}{\partial x} = 0.$$

Величины  $r$  и  $\theta$  представляют радиус вектор относительно точки  $o$  и угол, образуемый этим радиусом с осью  $ox$ , считая его против стрелки часов.

Для того, чтобы на поверхности цилиндра скорость по нормали была равна нулю, прибавим к данному течению еще два другие, выражаемые функциями токов  $\psi_2$  и  $\psi_3$ :

$$\psi_2 = \frac{wa^2y}{r^2} = \frac{wa^2 \sin \theta}{r}, \quad (3)$$

$$\psi_3 = \frac{\lambda a^4(x^2 - y^2)}{4r^4} = \frac{\lambda a^4(1 - 2 \sin^2 \theta)}{4r^2}. \quad (4)$$

Функция тока сложного течения будет:

$$\psi_0 = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 = - \left[ wr \sin \theta \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right) + \frac{\lambda r^2 \sin^2 \theta}{2} \left( 1 - \frac{a^4}{r^4} \right) + \frac{\lambda a^4}{4r^2} \right] \quad (5)$$

и даст скорость по радиусу вектору:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \psi_0}{\partial \theta} = -w \cos \theta \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right) - \lambda r \sin \theta \cos \theta \left( 1 - \frac{a^4}{r^4} \right), \quad (6)$$

которая обращается в нуль при  $r = a$ .

Уравнение линий тока будет такое:

$$wy \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right) + \frac{\lambda}{2} y^2 \left( 1 - \frac{a^4}{r^4} \right) + \frac{\lambda}{4} \frac{a^4}{r^2} = \text{const}. \quad (7)$$

При

$$\text{Const.} = \frac{\lambda}{4} a^2$$

мы найдем отдельную линию токов, уравнение которой распадается на два множителя:

$$\left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \left[ wy + \frac{\lambda}{2} y^2 \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right) - \frac{\lambda a^2}{4} \right] = 0. \quad (8)$$

Приравнявая нулю первый множитель, получаем уравнение окружности перпендикулярного сечения цилиндра, а, приравнявая нулю второй множитель, получаем уравнение некоторой кривой четвертого порядка:

$$y^2 \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right) + \frac{2w}{\lambda} y - \frac{a^2}{2} = 0, \quad (9)$$

которая симметрична относительно оси  $oy$ .



Чтобы исследовать вид этой кривой, решим уравнение (9) относительно  $r^2$ :

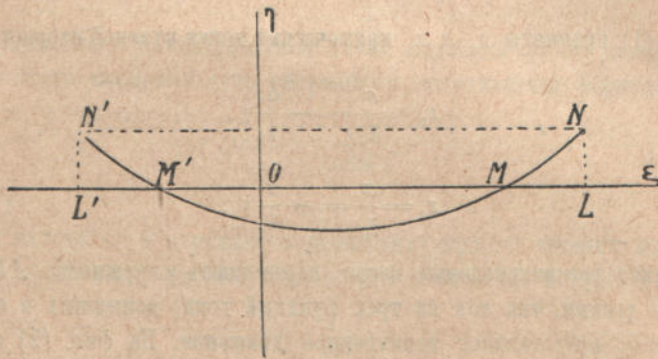
$$r^2 = \frac{a^2 y^2}{-y^2 - \frac{2w}{\lambda} y + \frac{a^2}{2}} = \frac{2a^2}{\frac{a^2}{y^2} - \frac{4w}{\lambda a} \frac{a}{y} - 2},$$

потом подставим

$$\frac{a^2}{r^2} = \eta, \quad \frac{a}{y} = \xi.$$

Это даст нам уравнение параболы:

$$2\eta = \xi^2 - \frac{4w}{\lambda a} \xi - 2, \quad (10)$$



Фиг. 2.

которая изображена на фиг. (2). Парабола пересекает ось  $o\xi$  в точках  $M$  и  $M'$ , имеющих абсциссы:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{2w}{\lambda a} + \sqrt{\frac{4w^2}{\lambda^2 a^2} + 2}, \\ \xi_2 &= \frac{2w}{\lambda a} - \sqrt{\frac{4w^2}{\lambda^2 a^2} + 2}. \end{aligned} \quad (11)$$

Определенные по этим абсциссам величины:

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{a}{\xi_1} = -\frac{a}{2} \xi_2, \\ y_2 &= \frac{a}{\xi_2} = -\frac{a}{2} \xi_1 \end{aligned} \quad (12)$$

дают нам значения ординат  $y_1$  и  $y_2$  точек кривой, выраженной ур. (9), для  $r = \infty$ . Ордината  $y_1$  положительна, а ордината  $y_2$  отрицательна и по абсолютной величине более  $y_1$ . Это показывает, что кривая, выраженная ур. (9), имеет четыре ветви [фиг. (1)], из которых ветви  $AD$  и  $A'D'$  расстилаются по асимптоте, параллельной оси  $ox$  и

отстоящей от нее на расстояние  $y_1$ , а ветви  $BC$  и  $B'C'$  расстилаются по асимптоте, параллельной оси  $ox$  и отстоящей от этой оси на расстояние  $y_2$ .

Так как  $\eta$  должно быть положительно и не более 1, то  $\xi$  может на фиг. (2) изменяться только от  $OM$  до  $OL$  или от  $OM'$  до  $OL'$ , при чем

$$LN = L'N' = 1.$$

Абсциссы  $OL = \xi_3$  и  $OL' = \xi_4$  найдутся, положив в ур. (10)  $\eta = 1$ . Они будут иметь величины:

$$\begin{aligned} \xi_3 &= \frac{2w}{\lambda a} + \sqrt{\frac{4w^2}{\lambda^2 a^2} + 4}, \\ \xi_4 &= \frac{2w}{\lambda a} - \sqrt{\frac{4w^2}{\lambda^2 a^2} + 4}, \end{aligned} \quad (13)$$

и дадут на фиг. (1) ординаты  $z_3$  и  $z_4$  критических точек нулевой скорости  $A, A', B, B'$ :

$$\begin{aligned} z_3 &= \frac{a}{\xi_3} = -\frac{a}{4} \xi_4, \\ z_4 &= \frac{a}{\xi_4} = -\frac{a}{4} \xi_3. \end{aligned} \quad (14)$$

В этих точках рассматриваемые ветви пересекают окружность  $ABB'A'$  под некоторыми косыми углами, так как из трех функций тока, вошедших в состав функции  $\psi_0$ , функция тока  $\psi_1$  представляет завихренное движение. На фиг. (2) видно, что непрерывному уменьшению  $\eta$  от 1 до 0 соответствует непрерывное уменьшение по абсолютной величине  $\xi$  от  $\xi_3$  до  $\xi_1$  или от  $\xi_4$  до  $\xi_2$ . Это показывает нам, что ветви  $AD, A'D', BC,$  и  $B'C'$  с возрастанием  $r$  непрерывно приближаются к своим асимптотам.

Все возможные линии токов, получаемые с помощью ур. (7) при различных значениях  $\text{const.}$ , представляют четыре группы линий: линии, располагающиеся сверху линии  $D'A'AD$ ; линии, располагающиеся снизу линии  $CBB'C'$ ; линии, заключенные внутри контура  $DABC$ ; линии, заключенные внутри контура  $D'A'B'C'$ . Две последние группы линий, будучи симметричны друг относительно друга по отношению оси  $oy$ , имеют форму, аналогичную параболам, при чем все их вершины расположены снизу оси  $x'ox$ . Последнее обстоятельство можно доказать, отыскивая точки прикосновения окружностей, проведенных из центра  $O$ , с рассматриваемыми линиями токов. В таких точках скорость  $\frac{1}{r} \frac{\partial \psi_0}{\partial \theta}$  по радиусу вектору есть нуль, поэтому из ур. (6) получаем:

$$\cos \theta = 0, \quad (15)$$

или

$$\sin \theta = -\frac{wr}{\lambda(r^2 + a^2)}. \quad (16)$$

Первое равенство показывает, что для линий первой и второй группы все точки прикосновения лежат на оси  $oy$ , из второго равенства следует, что все точки прикосновения для линий третьей и четвертой группы ниже оси  $x'ox$ . При этом из форм. (16) следует, что данное расстояние  $r$  точки прикосновения  $E$  вполне определяет направление вектора  $oE$  и ему симметричного вектора с правой стороны.

На фигуре (1) изображены линии токов всех четырех упомянутых групп и обозначены стрелками направления скоростей течения.

§ 3. Прибавим еще к изученному в предыдущем параграфе плоскопараллельному течению жидкости течение, вызываемое вихревой площадкой  $E$  [фиг. (3)] и ее зеркальным изображением  $G$  относительно круга  $ABB'A'$ , так что

$$OG \cdot OE = a^2.$$

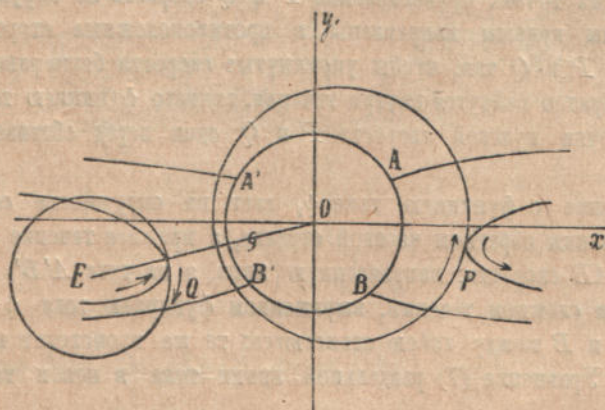
При этом примем, что оба вихря имеют одно и то же напряжение  $k$ , но вихрь с центром  $E$  вращается по стрелке часов, а вихрь с центром  $G$  — против стрелки часов. Движение жидкости, вызываемое парой указанных вихрей, имеет функцию тока:

$$\psi_3 = -\frac{k}{\pi} \lg \frac{e}{g}, \quad (18)$$

где  $e$  и  $g$  суть расстояния рассматриваемой точки жидкости  $M$  от центров вихрей  $E$  и  $G$ . Линии токов этого движения суть окружности, выраженные формулою:

$$\frac{e}{g} = \text{const}, \quad (19)$$

между которыми находится и окружность перпендикулярного сечения нашего цилиндра. Вследствие этого прибавление упомянутого нового течения не нарушает условия равен-



Фиг. 3.

ства нулю нормальных скоростей на поверхности цилиндра. Место точки  $E$  и напряжение вихря  $k$  выберем так, чтобы центр вихревой площадки  $E$  оставался неподвижным. Этот центр будет получать скорость, во-первых, от движения, описанного в § 2, и, во-вторых, от действия вихря  $G$ . Так как последняя скорость перпендикулярна вектору  $GE$ , то место  $E$  надо выбрать под условием удовлетворения ур. (16), при котором скорость от функции тока  $\psi_0$  направлена перпендикулярно к радиусу вектору  $OE = r$ . Эта скорость будет направлена, как показывают стрелки фиг. (1) вверх; скорость же от действия вихря  $G$  на частицу жидкости  $E$  будет направлена вниз, так как вихрь  $G$  вращает против стрелки часов. Для того, чтобы вихрь  $E$  был неподвижен, нужно

только, чтобы абсолютные величины обеих скоростей были между собою равны, т. е. чтобы

$$\frac{k}{\pi G E} = \frac{kr}{\pi(r^2 - a^2)} = \frac{\partial \psi_0}{\partial r}.$$

На основании форм. (5) это равенство принимает вид:

$$\frac{kr}{\pi(r^2 - a^2)} = - \left[ w \sin \theta \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right) + \lambda \sin^2 \theta \left( r + \frac{a^4}{r^3} - \frac{\lambda a^4}{2r^3} \right) \right].$$

Если подставим сюда значение  $\sin \theta$  из форм. (16), то найдем для определения  $k$  по заданному  $r$  нижеследующую формулу:

$$\frac{k}{\pi(r^2 - a^2)\lambda} = \frac{a^4}{r^4} \left[ \frac{2w^2}{\lambda^2 a^2} \frac{1}{\left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right)^2} + \frac{1}{2} \right]. \quad (20)$$

Задавшись расстоянием  $r$  точки  $E$  от  $O$ , мы определяем по форм. (16) угол  $\theta$ , а по форм. (20) напряжение вихря  $k$ , и таким образом получаем неподвижную вихревую площадку  $E$ .

От действия вихрей  $E$  и  $G$  частицы жидкости текут по окружностям, выраженным форм. (19), в направлении, указанном на фиг. (3) стрелками. Каждая из окружностей, данных форм. (19), прикасается к линиям токов третьей и четвертой группы семейства  $\psi_0 = \text{const.}$ , и в этих точках прикосновения  $P$  и  $Q$  скорость по окружности и скорость по параболическим кривым направлены в противоположные стороны. Мы можем выбрать эти точки  $P$  и  $Q$  так, чтобы упомянутые скорости были равны по абсолютной величине. Таким образом найдутся внутри течения, данного функцией тока  $\psi = \psi_0 + \psi_1$ , две критические точки нулевой скорости  $P$  и  $Q$ : одна перед обтекаемым цилиндром, другая за ним.

Так как течение с функцией тока  $\psi_1$  дает на окружности сечения цилиндра скорость в направлении обратной часовой стрелки, а прежнее течение с функцией тока  $\psi_0$  дает на дуге  $AB$  скорость, направленную вниз, а на дуге  $A'B'$  скорость, направленную вверх, то в сложном течении, выраженном функцией тока  $\psi = \psi_0 + \psi_1$ , критические точки  $A$  и  $B$  между собою сдвигаются; то же происходит и с критическими точками  $A'$  и  $B'$ . Уравнение (7) раздельной линии тока в новом течении заменится уравнением:

$$\left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \left[ wy + \frac{\lambda}{2} y^2 \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right) - \frac{\lambda a^2}{4} \right] - lg \left( \frac{e}{g} \right) = 0. \quad (21)$$

Так как при  $r = a$ ,  $\frac{e}{g} = \text{const.}$ , то в состав раздельной линии тока входит окружность перпендикулярного сечения цилиндра, и, так как при  $r = \infty$ ,  $\frac{e}{g} = 1$ , то ветви предельной кривой заключены между асимптотами, указанными в § 2. Но присутствие критических точек  $P$  и  $Q$  изменяет вид предельной кривой вблизи цилиндра, как показано на фиг. (4). Все остальные линии токов образуют 6 групп: верхние линии токов, расположенные над кривой  $DPAA'D'$ ; нижние линии токов, расположенные под кривой  $CPBB'QC'$ ; замкнутые линии токов на подветренной стороне, заключенные

в контуре  $APB$ ; замкнутые линии токов за цилиндром, заключенные внутри петли  $QH$ ; параболообразные линии, заключенные внутри контура  $DPC$ ; линии токов, заключенные внутри контура  $D'A'B'HC'$ .

Направления движения жидкости по всем этим линиям токов указаны на фиг. (4) стрелками.

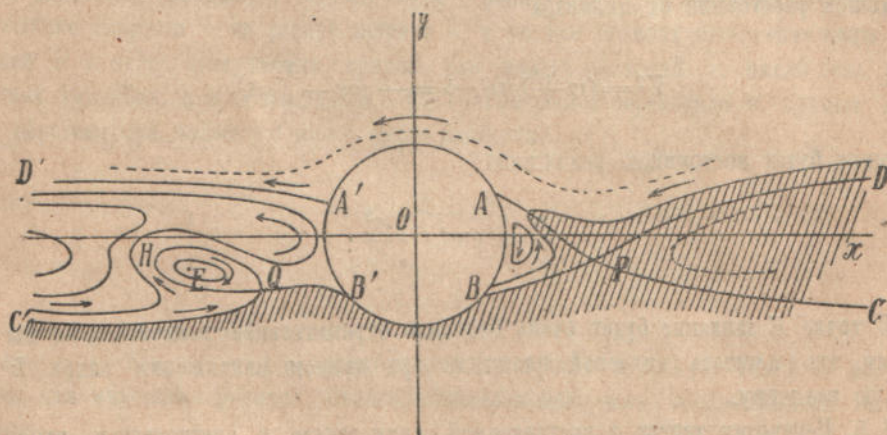
§ 4. Найденное нами течение воздуха, охарактеризованное функцией тока

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4, \quad (22)$$

есть установившееся движение, потому что оно плоскопараллельное и имеет постоянную скорость вращения частиц около оси, перпендикулярной плоскости движения. Находящаяся же в течении вихревая площадка  $E$  неподвижна. Скорость вращения частиц  $\omega$  выражается формулою:

$$2\omega = \Delta\psi,$$

где  $\Delta$  знак второго дифференциального параметра.



Фиг. 4.

Согласно форм. (1), (2), (3), (4) и (18)

$$\Delta\psi_1 = -\lambda,$$

$$\Delta\psi_2 = wa^2 \frac{\partial}{\partial y} [\Delta(\lg r)] = 0,$$

$$\Delta\psi_3 = -\frac{\lambda}{4} a^4 \frac{\partial^2}{\partial^2 y} [\Delta(\lg r)] = 0.$$

$$\Delta\psi_4 = \frac{k}{\pi} \Delta \left[ \lg \left( \frac{e}{g} \right) \right] = 0,$$

и потому

$$\omega = -\frac{\lambda}{2}. \quad (23)$$

Давление  $p$  во всякой точке нашего потока найдется по уравнениям гидродинамики.

Принимая во внимание, что все рассмотренные нами течения имеют функции тока и потому не дают изменения объема, будем считать плотность воздуха  $\rho$  за постоянную величину и напишем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} \right) &= -2\omega v = -\lambda \frac{d\psi}{dx}, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} \right) &= 2\omega u = -\lambda \frac{d\psi}{dy}. \end{aligned} \quad (24)$$

Интегрирование дает для всякой точки течения:

$$\frac{p}{\rho} = \text{const} - \frac{V^2}{2} - \lambda\psi. \quad (25)$$

На большом расстоянии от цилиндра

$$V^2 = (w + \lambda y)^2; \quad \psi = -wy - \frac{\lambda}{2} y^2,$$

и давление будет постоянной величиною

$$\frac{p}{\rho} = \text{const} - \frac{w^2}{2}.$$

В точке  $E$  давление будет очень большою отрицательною величиною, но мы предполагаем, что площадь вихревой площадки при данном напряжении вихря  $k$  имеет конечную величину.

§ 5. Переходим теперь к поставленной нами задаче и предполагаем, что определенный функциею тока  $\psi$  поток воздуха несет вниз снежные частицы, а поверхность снежного покрова ограничена [фиг. (4)] линиею  $DPBB'QC'$ . Тогда снег, наносимый по поверхности  $DP$ , будет бросаться слоем некоторой толщины в направлении  $PA$ ; струя, несущая этот слой, в точке  $A$  цилиндрической преграды будет разделяться на две. Часть ее будет перебрасываться через цилиндр, а другая часть по линии  $ABP$  будет возвращаться к точке  $P$ . Вследствие этого около точки  $P$  будет образовываться снежный нанос, свешивающийся по направлению к цилиндру, а перед цилиндром образуется снежная выемка. За цилиндром будет область медленного движения воздуха, но на некотором расстоянии разовьется вихрь  $E$ , крутящий снег и образующий бугор  $Q$ . Сделанное здесь теоретическое объяснение движения снега подходит довольно близко к наблюдениям снежных заносов перед продолговатыми преградами.

## О снежных заносах и заилении рек.<sup>1)</sup>

§ 1. Гидравлическая скорость. Мы будем называть гидравлической скоростью ту скорость, с которой падают снежинки или снежная пыль в спокойном воздухе, а равно и ту скорость, с которой падают в спокойной воде подвешенные в ней частицы песка или ила. На основании наблюдений Эйфеля и Лукьянова следует принять, что мелкие частицы при малых скоростях подвержены силе сопротивления жидкости, прямо пропорциональной скорости. Лукьянов<sup>2)</sup> испытывал в аэродинамической трубе шарики различных диаметров (начиная от 0,028 м) и строил графики, откладывая по оси абсцисс произведение скорости  $v$  на радиус шарика  $r$ , а на оси ординат отношение силы сопротивления  $R$  к  $\pi r^2 v^2$ . Получаемые кривые для малых значений  $rv$  имели вид равно-сторонних гипербол; при возрастающем же  $rv$  гиперболы переходили в прямые линии. Таким образом, при малых  $rv$  имеет место равенство:

$$\frac{R}{\pi r^2 v^2} = \frac{A}{rv},$$

т. е.

$$R = A\pi r v.$$

Сила сопротивления выхлвт пропорциональной скорости и радиусу. Такой же результат дала бы нам известная формула Стокса, определяющая силу сопротивления по одной вязкости:

$$R = 6\pi\mu rrv,$$

где  $\mu$  коэффициент вязкости, а  $\rho$  плотность жидкости. В предлагаемом нами анализе мы будем полагать

$$R = kv$$

в предположении, что  $k$  определено из наблюдения над предельною скоростью и весом частиц. Когда частица веса  $mg$  ниспадает равномерно со скоростью  $v$ , тогда

$$kv = mg,$$

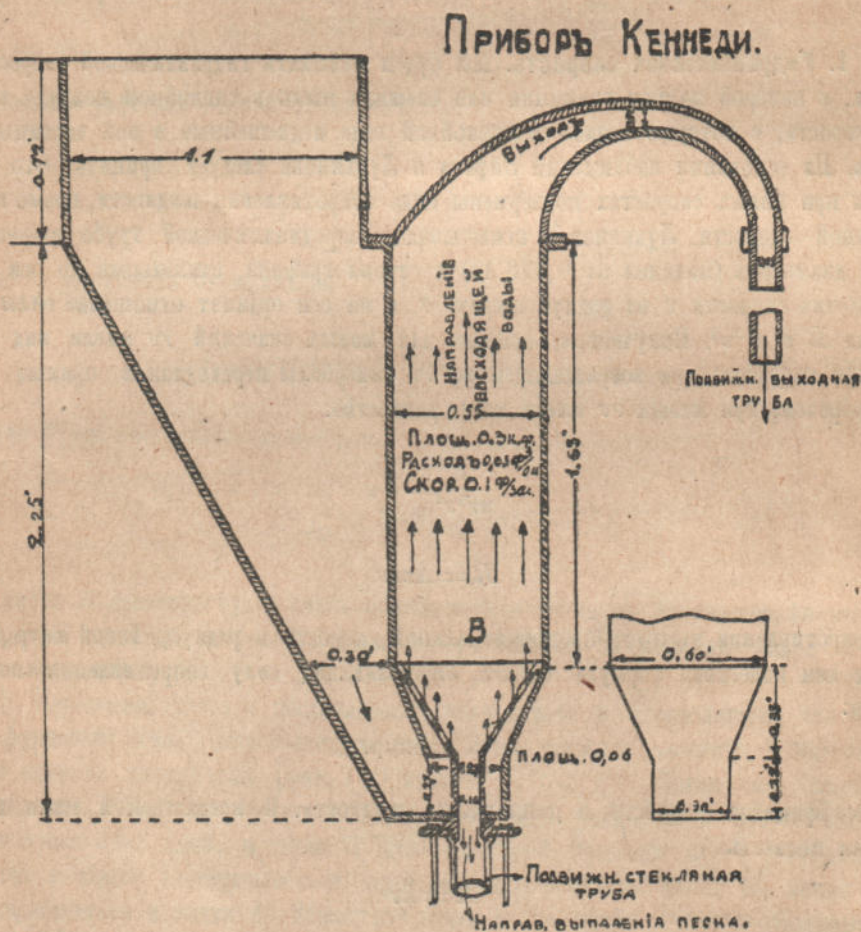
$$v = \frac{mg}{k}.$$

Эта формула и определяет гидравлическую скорость.

<sup>1)</sup> Статья была отлитографирована в 1919 г. в „Трудах Центрального Аэрогидродинамического Института“ и вся разошлась.

<sup>2)</sup> Joukovski. Bases theoriques de l'aeronautique, p. 60, Paris, 1916.

При исследовании вопросов ирригации подвешенные частицы разделяют обыкновенно на категории по их гидравлической скорости, или, как говорят, гидравлическому размеру. Для этого пользуются приборами Кеннеди, изображенным на фиг. (1). *A* представляет резервуар с водой, в которой подвешены твердые частицы; *B* сосуд, через который снизу вверх перегоняется с различными скоростями струя воды; в нижней части этого сосуда имеются отверстия, в которые втягивается вода из сосуда *A*. Эта вода перемешивается с водой резервуара *B*, текущую вверх с данной скоростью  $v$ . Те частицы, вес которых может удерживаться скоростью  $v$ , т.-е. которые имеют гидравли-



Фиг. 1.

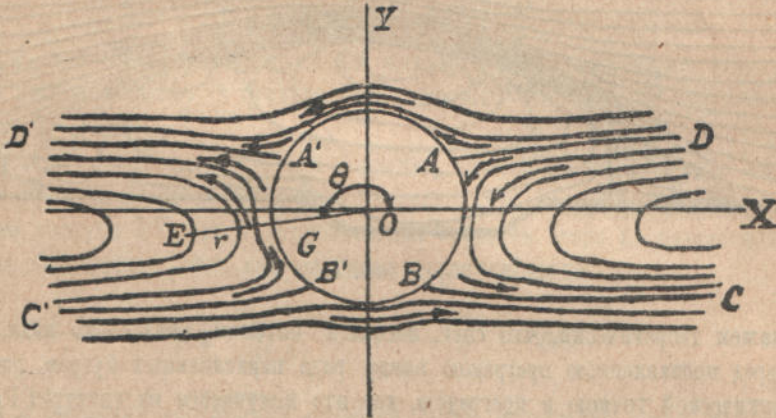
ческую скорость меньшую  $v$ , будут подниматься вверх и переходить в резервуар *D*. Таким образом, меняя скорость в сосуде *B*, можно отделить частицы различных гидравлических размеров.

§ 2. О аэродинамических спектрах. В моем сочинении «О снежных заносах» напечатанном в 1911 г. <sup>1)</sup>, рассматривается спектр линий тока потока с параллельными горизонтальными вихревыми прямолинейными шнурами постоянного напряжения, который обтекает весьма длинный горизонтальный круглый цилиндр. Рассмотрение этого

<sup>1)</sup> См. первую статью настоящей брошюры.



спектра, изображение которого дано на фиг. 2, разъясняет причину образования перед продолговатыми преградами снежной выемки перед самой преградой и снежного бугра, следующего за нею, считая с подветренной стороны. Но в моей статье так же, как и в работе Н. А. Рынина <sup>1)</sup>, в которой вычерчены наблюдения над аэродинамическими спектрами потока, обтекающего модели выемок железнодорожного полотна с поставленными снежными заграждениями, не выяснена основная причина насаждения снега в определенные места. Эта причина сделалась мне понятной, когда я обратил внимание на то, что снежный бугор складывается из ряда последовательных полос. Такая раба замечается как на снеге, так и на песчаных наносах в реках.



Фиг. 2.

Способ Д. П. Рябушинского фотографирования аэродинамических спектров с помощью плаунового порошка, насаждающего на плоскость, на которую поставлены обтекаемые тела, подтверждает мою мысль о насаждении легких частиц в виде ряда полос. Способ состоит в том, что половина испытуемой модели помещается в аэродинамической трубе на горизонтальный мост, покрытый слоем порошка плауна, потом труба приводится в действие, и одновременно листу, на котором насыпаны споры плауна, наносится снизу легкий удар молотком, так что порошок подбрасывается и наносится потоком воздуха на модель; после этого действие трубы прекращается; лист, на котором образовались полосы порошка, вынимается из трубы, и вид полос фотографируется.

Я думаю, что такие фотографии представляют не аэродинамические спектры, а скорее расположения снежных заносов перед преграждающими предметами и за ними.

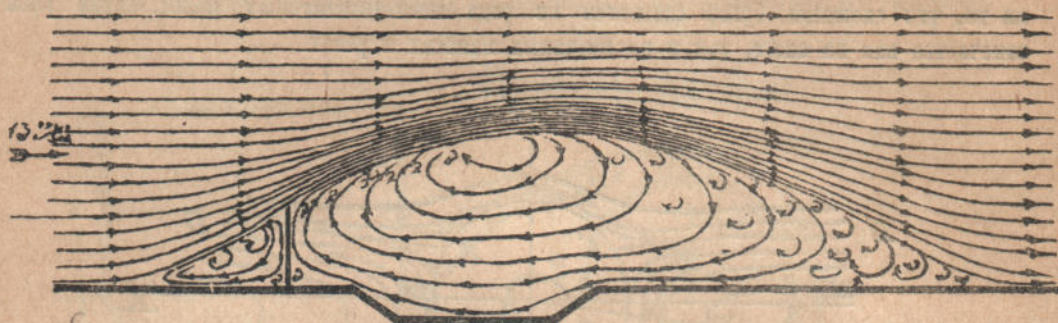
На фиг. (3) дана фотография Д. П. Рябушинского для потока, обтекающего прямоугольную пластинку. Мы видим на ней перед обтекаемым предметом выемку, затем параллельные бугры.



Фиг. 3.

<sup>1)</sup> Труды Аэродинамической Лаборатории Института Путей Сообщения. Стр. 259. Вып. II, Петроград. 1914 г.

§ 3. Теория спектров Рябушинского и снежных отложений перед преградой. Так как поток, скользя по горизонтальной плоскости, завихривается, то, встречая преграду, он не доходит до нее с образованием критической точки нулевой скорости на самой преграде, а образует такую точку перед преградой, развивая перед преградой завихренное пространство так, как это видно на спектре, полученном Н. А. Рыным в Аэродинамической Лаборатории Петроградского Института Путей Сообщения, изображенном на фигуре (4).

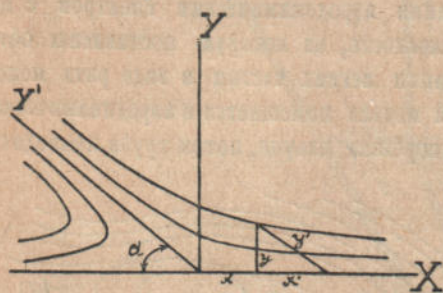


Фиг. 4.

Докажем теоретически, что снег, несомый потоком указанного вида, будет напосытаться перед поставленной преградой в виде ряда параллельных бугров, расположенных между критической точкой и преградой, как это получается на спектрах Рябушинского.

Прежде всего заметим, что воздух под атмосферным давлением при малых скоростях можно рассматривать как несжимаемую жидкость; с другой стороны, как показано

в моем сочинении «Кинематика жидкого тела»<sup>1)</sup>, вблизи критической точки нулевой скорости линии токов для несжимаемой жидкости можно рассматривать как гиперболы. Примем критическую точку за начало двух систем координат: косоугольных  $x'o'y'$  и прямоугольных  $xoy$ , при чем горизонтальные оси  $ox'$  и  $ox$  у них совпадают, а ось  $oy'$  направлена по асимптоте гипербол, выражающих линии токов вблизи критической точки (фиг. 5).



ФИГ. 5.

Функция тока в косоугольных координатах представится тогда формулою:

$$\psi = -A x'y'.$$

Подставляем сюда значения прямоугольных координат, пользуясь формулами перехода:

$$x' = x - y \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha},$$

$$y' = \frac{y}{\sin \alpha}.$$

Получаем:

$$\psi = -\frac{A}{\sin \alpha} (xy + y^2 \cotg \alpha). \quad (1).$$

<sup>1)</sup> Сочинения Н. Е. Жуковского. Т. I. Стр. 32.

По этой функции тока проекции  $u$  и  $v$  скорости ветра на прямоугольные оси  $ox$  и  $oy$  выражаются так:

$$u = \frac{d\psi}{dy} = -\frac{A}{\sin \alpha} [x + 2y \cotg \alpha]; \quad (2)$$

$$v = -\frac{d\psi}{dx} = A \frac{y}{\sin \alpha}.$$

Если бы по этим формулам мы определили напряжение вихря

$$\xi = \frac{1}{2} \left( \frac{dv}{dx} - \frac{du}{dy} \right) = \frac{A \cos \alpha}{\sin^2 \alpha},$$

то увидели бы, что рассматриваемый поток жидкости имеет постоянное завихривание и тем большее, чем  $\alpha$  меньше (с практической стороны, чем дальше критическая точка от обтекаемой преграды).

На основании сказанного в § 1 мы примем, что силы, действующие на летящую частицу снега, или порошка в опыте Рябушинского, суть сила веса частицы  $mg$  и сила сопротивления воздуха  $kV$ , где  $V$  относительная скорость ветра по отношению к летящей частицы. Слагающие этих сил по осям координат будут

$$k \left( u - \frac{dx}{dt} \right), \quad k \left( v - \frac{dy}{dt} \right) - mg,$$

так как  $u$  и  $v$  проекции абсолютной скорости ветра. Вследствие этого дифференциальные уравнения частицы снега, увлекаемой рассматриваемым потоком жидкости, представляется в следующем виде:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -k \left( \frac{Ax}{\sin \alpha} + A2y \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{dx}{dt} \right)$$

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = -mg + k \left( A \frac{y}{\sin^2 \alpha} - \frac{dy}{dt} \right),$$

где согласно формуле Стокса  $k = 6 \pi \eta r$ .

Напишем эти уравнения в виде:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k dx}{m dt} + \frac{Ak}{m \sin \alpha} x + 2 \frac{Ak \cos \alpha}{m \sin^2 \alpha} y = 0, \quad (3') \quad (3).$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{k dy}{m dt} - \frac{Ak}{m \sin \alpha} y + g = 0. \quad (3'').$$

Общий интеграл второго будет:

$$y = C_2 e^{\lambda t} + C_1 e^{\lambda_1 t} + \frac{m \sin \alpha}{Ak} g, \quad (4)$$

где  $\lambda$  и  $\lambda_1$  суть корни квадратного уравнения

$$\lambda^2 + \frac{k}{m} \lambda - \frac{Ak}{m \sin \alpha} = 0, \quad (5)$$

т.е.

$$\lambda = -\frac{k}{2m} + \sqrt{\frac{k^2}{4m^2} + \frac{Ak}{m \sin \alpha}},$$

$$\lambda_1 = -\frac{k}{2m} - \sqrt{\frac{k^2}{4m^2} + \frac{Ak}{m \sin \alpha}}.$$

(5')

Если предположить, что при  $t=0$  частица находилась на поверхности земли и была подброшена вверх с вертикальной скоростью  $v_0$ , то для определения произвольных постоянных  $C$  и  $C_1$  будем иметь уравнения:

$$C + C_1 + \frac{m \sin \alpha}{Ak} g = 0,$$

$$\lambda C + \lambda_1 C_1 = v_0.$$

Решая их относительно  $C$  и  $C_1$ , найдем:

$$C = \frac{1}{\lambda - \lambda_1} \left( v_0 + \lambda_1 \frac{m \sin \alpha}{Ak} g \right),$$

$$C_1 = -\frac{1}{\lambda - \lambda_1} \left( v_0 + \lambda \frac{m \sin \alpha}{Ak} g \right).$$

(6).

Так как на основании форм. (5')  $\lambda$  есть величина положительная, а  $\lambda_1$  отрицательно, то  $C_1$  отрицательно, а  $C$  может быть отрицательно или положительно, при чем первое будет иметь место при

$$v_0 < -\lambda_1 \frac{m \sin \alpha}{Ak} g.$$

(7).

При существовании этого неравенства кривая, выраженная ур. (4), с беспредельным возрастанием  $t$  дает  $y = -\infty$ , но, так как при  $t=0$ ,  $y=0$ , а  $\frac{dy}{dt} = v_0$  величине положительной, то эта кривая сначала поднимается над осью абсцисс в положительную сторону, а потом переходит в сторону отрицательных  $y$ . Отсюда следует, что, в случае существования неравенства (7), по прошествии некоторого времени  $t=\tau$  снежная частица опять упадет на землю. Если же это неравенство обращается в равенство, то, будучи нулем при  $t=0$ ,  $y$  обращается опять в нуль только при  $t=\infty$ . Точно так же  $y$  не обращается более в нуль, если знак неравенства в формуле (7) будет  $>$ .

Переходим теперь к интегрированию первого ур. (3), в котором надо вместо  $y$  подставить выражение (4). Сначала составляем общий интеграл дифференциального уравнения без последней части:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k dx}{m dt} + \frac{Ak}{m \sin \alpha} x = 0.$$

Он будет:

$$x = D e^{\mu t} + D_1 e_1^{\mu_1 t},$$

(8).

и  $\mu_1$  корни уравнения

$$\mu^2 + \frac{k}{m} \mu + \frac{Ak}{m \sin \alpha} = 0, \quad (9)$$

$$\mu = -\frac{k}{2m} + \sqrt{\frac{k^2}{4m^2} - \frac{Ak}{m \sin \alpha}}, \quad (9')$$

$$\mu_1 = -\frac{k}{2m} - \sqrt{\frac{k^2}{4m^2} - \frac{Ak}{m \sin \alpha}}. \quad (9'')$$

Сделаем предположение, что подкоренная величина в форм. (9') отрицательна, и положим:

$$\beta^2 = \frac{k^2}{g^2 m^2} \left( \frac{Ag}{\sin \alpha} - \frac{mg}{k} - \frac{g^2}{4} \right).$$

Здесь  $\frac{mg}{k}$  есть скорость падения снежинок в покойном воздухе, а  $\frac{Ag}{\sin \alpha}$ , на основании формулы (2), есть скорость воздуха у самой земли ( $y=0$ ) на расстоянии  $x=g$  от критической точки 0 (фиг. 5). Предположение о положительности  $\beta^2$  соответствует допущению, что во время вьюги среднее геометрическое этих двух скоростей более

$$\frac{g}{2} = 4,9 \frac{m}{\text{sec}}.$$

В сделанном предположении интеграл (8) представляется в виде

$$x = (E \cos \beta t + E_1 \sin \beta t) e^{-\frac{k}{2m} t}. \quad (8')$$

Для получения интеграла ур-ия (3') нужно к выражению (8') приложить какой-нибудь частный интеграл (первого) ур. 3'. Таким интегралом является выражение

$$x_1 = B e^{\lambda t} + B_1 e^{\lambda_1 t} - 2 \frac{m}{Ak} g \cos \alpha, \quad (10)$$

так как по подстановке в ур. (3') вместо  $x$  этого значения ( $x=x_1$ ), а вместо  $y$  интеграла (4) члены, не содержащие времени, сокращаются; надлежащим же подбором  $B$  и  $B_1$  можно будет обратить в нуль и коэффициенты при членах, содержащих время, которое войдет в выражение только в виде  $e^{\lambda t}$  и  $e^{\lambda_1 t}$ .

Подстановка дает нам

$$e^{\lambda t} \left[ B \left( \lambda^2 + \frac{k}{m} \lambda + \frac{Ak}{m \sin \alpha} \right) + 2C \frac{Ak \cos \alpha}{m \sin^2 \alpha} \right] + e^{\lambda_1 t} \left[ B_1 \left( \lambda_1^2 + \frac{k}{m} \lambda_1 + \frac{Ak}{m \sin \alpha} \right) + 2C_1 \frac{Ak \cos \alpha}{m \sin^2 \alpha} \right] = 0.$$

Чтобы удовлетворить этому условию при всяком  $t$ , надо положить, принимая во внимание ур. (5):

$$B = -C \cotg \alpha, \\ B_1 = -C_1 \cotg \alpha.$$

Вследствие этого наш частный интеграл будет иметь вид:

$$x_1 = -\cotg \alpha (C e^{\lambda t} + C_1 e^{\lambda_1 t}) - 2 \frac{m}{Ak} g \cos \alpha. \quad (10')$$

Прикладывая его к выр. (8'), найдем искомый общий интеграл первого из ур. (3):

$$x = (E \cos \beta t + E_1 \sin \beta t) e^{-\frac{k}{2m} t} - \cotg \alpha (C e^{\lambda t} + C_1 e^{\lambda_1 t}) - 2 \frac{m}{Ak} g \cos \alpha. \quad (11),$$

Определим здесь произвольные постоянные так, чтобы при  $t=0$ ,  $x=x_0$ ,

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{A}{\sin \alpha} x_0,$$

т.-е. чтобы частица сначала, до момента подскакивания, согласно ф-р. (2) скользила по поверхности снега со скоростью потока воздуха. Так как 2-ая скобка в ур. (11) есть на основании ф-рм. (4):

$$y = m \frac{\sin \alpha}{Ak} g,$$

а  $y=0$  при  $t=0$ , то будем иметь:

$$E = x_0 + \frac{m}{Ak} g \cos \alpha.$$

С другой стороны, производная по времени от упомянутой скобки на основании сказанного должна быть  $v_0$ ; поэтому

$$-\frac{A}{\sin \alpha} x_0 = E_1 \beta - \frac{k}{2m} E - \cotg \alpha v_0.$$

Отсюда

$$E_1 = \cotg \alpha \frac{v_0}{\beta} + \frac{k}{2m} \frac{x_0}{\beta} - \frac{A}{\sin \alpha} \frac{x_0}{\beta} + \frac{\cos \alpha}{2A} \frac{g}{\beta}.$$

Подставляем в ф-рм. (11) найденные значения коэффициентов  $E$  и  $E_1$  и отбираем члены, содержащие множителем  $x_0$ :

$$x = x_0 \left[ \cos \beta t - \left( \frac{A}{\beta \sin \alpha} - \frac{k}{2m\beta} \right) \sin \beta t \right] e^{-\frac{k}{2m} t} + \left[ \frac{m}{Ak} g \cos \alpha \cos \beta t + \left( \cotg \alpha \frac{v_0}{\beta} + \frac{\cos \alpha}{2A\beta} g \right) \sin \beta t \right] m e^{-\frac{k}{2m} t} - \cotg \alpha y - \frac{m}{Ak} g \cos \alpha. \quad (12).$$

Эта формула приводит нас к заключению, выставленному в начале § 3.

Если определим некоторое время  $t = \tau$  под условием:

$$\operatorname{tg} \beta t = \frac{\beta}{\frac{A}{\sin \alpha} - \frac{k}{2m}} \quad (13),$$

и предположим, что это время соответствует времени падения на землю снежинок, имеющих скорость  $v_0$ , удовлетворяющую неравенству (7), то увидим, что все эти снежинки упадут в одно и то же место, при каком бы значении  $x_0$  они ни поднялись на воздух. Так как ур. (13) удовлетворяется и при всяких значениях

$$\beta t = \beta \tau + n\pi,$$

то все снежинки, имеющие скорость  $v_0$ , соответствующую этим различным временам падения, будут располагаться в виде полос, определяемых абсциссами:  $-\frac{k}{2m\beta} (\beta\tau + n\pi)$

$$x = \left[ \frac{m}{Ak} g \cos \alpha \cos (\beta\tau + n\pi) + \left( \operatorname{ctg} \alpha \frac{v_0}{\beta} + \frac{\cos \alpha}{2A\beta} g \right) \sin (\beta\tau + n\pi) \right] e - \frac{m}{Ak} \cos \alpha g. \quad (14)$$

По мере возрастания  $n$ , эти абсциссы приближаются к предельному значению

$$x = -\frac{m}{Ak} \cos \alpha g,$$

которое будет соответствовать наиболее высокой полосе снежного заноса.

Предложенный анализ хорошо объясняет наблюдения Д. П. Рябушинского и, по моему мнению, входит в глубь явления снежных заносов.

Если  $\frac{A}{\sin \alpha}$  не достаточно велико и  $\beta^2$  отрицательно, то  $\beta$  будет мнимая величина  $\beta' i$ , и форм. (13) представится с помощью гиперболического тангенса

$$\operatorname{tgh} \beta' t = \frac{\beta'}{\frac{k}{2m} - \frac{A}{\sin \alpha}} \quad (15)$$

В этом случае имеется только одно определенное время полета и одна определенная скорость, при которых частицы, поднявшиеся на воздух при различных  $x$ , упадут в одно и то же место, определяемое по форм. (14), при чем в ней надо заменить  $\beta\tau + n\pi$  на  $\beta' i \tau$ . Занос будет состоять только из одного бугра, расположенного за критической точкой.

§ 4. Снежные отложения за преградой. Перейдем теперь к рассмотрению движения снежинок в вихревом потоке воздуха, расположившемся за преградой над выемкою железнодорожного полотна, как это представлено было на нашей фиг. (4).

Предполагая для простоты, что линии токов суть подобные эллипсы (фиг. 6) что соответствует равномерно завихренному полю, найдем для функции тока выражение:

$$\psi = q \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right),$$

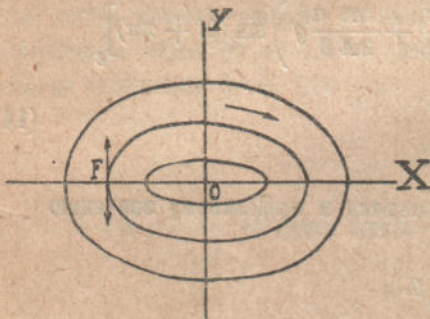
откуда компоненты скорости  $u$ ,  $v$  будут:

$$\begin{aligned} u &= \frac{d\psi}{dy} = \frac{2q}{b^2} y, \\ v &= -\frac{d\psi}{dx} = -\frac{2q}{a^2} x. \end{aligned} \quad (16)$$

Если по этим компонентам составить угловую скорость вращения частицы жидкости, то найдем постоянную величину

$$\omega = \frac{1}{2} \left( \frac{du}{dy} - \frac{dv}{dx} \right) = q \left( \frac{1}{b^2} + \frac{1}{a^2} \right). \quad (17)$$

Дифференциальные уравнения снежинки принимают при этом вид:



Фиг. 6.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{kdx}{mdt} - \frac{k2q}{mb^2} y = 0,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{kdy}{mdt} + \frac{k2q}{ma^2} x + g = 0. \quad (18)$$

Отыскиваем частные интегралы этих уравнений, отбросив сначала постоянную часть  $g$ :

$$x = he^{\lambda t},$$

$$y = h'e^{\lambda t}.$$

Для определения  $\lambda$ ,  $h$  и  $h'$  будем иметь уравнения:

$$h\lambda^2 + \frac{k}{m} \lambda h - \frac{k2q}{mb^2} h' = 0,$$

$$h'\lambda^2 + \frac{k}{m} \lambda h' + \frac{k2q}{ma^2} h = 0.$$

Отсюда

$$\frac{h'}{h} = \frac{\lambda + \frac{k}{m} \lambda}{\frac{k2q}{mb^2}}, \quad \frac{h}{h'} = -\frac{\lambda^2 + \frac{k}{m} \lambda}{\frac{k2q}{ma^2}} \quad (19)$$

Перемножая, находим для определения  $\lambda$  уравнение:

$$\left( \lambda^2 + \frac{k}{m} \lambda \right)^2 = -\left( \frac{k}{m} \right)^2 \frac{4q^2}{a^2 b^2}, \quad (20)$$

которое дает нам

$$\lambda^2 + \frac{k}{m} \lambda = \pm \frac{k2q}{mab} i, \quad (20')$$

где

$$i = \sqrt{-1}.$$



Искомые четыре корня будут заключаться в формуле:

$$\lambda = -\frac{k}{2m} \pm \sqrt{\frac{k^2}{4m^2} \mp i \frac{k2q}{mab}} \quad (21)$$

Если положим

$$\begin{aligned} \frac{k^2}{4m^2} &= R \cos \nu, & \frac{k2q}{mab} &= R \sin \nu, \\ R &= \sqrt{\frac{k^4}{16m^4} + \frac{k^2 4q^2}{m^2 a^2 b^2}}, \\ \operatorname{tg} \nu &= \frac{2q}{ab} \frac{4m}{k} = \frac{8qm}{abk}, \end{aligned} \quad (21)$$

то все четыре корня  $\lambda$  будут представлены в виде:

$$\lambda = -\frac{k}{2m} \pm \sqrt{R} \left( \cos \frac{\nu}{2} \mp i \sin \frac{\nu}{2} \right). \quad (22)$$

Взявши в скобке  $+$ , будем иметь частный интеграл:

$$\begin{aligned} x = h e & \left( -\frac{k}{2m} + \sqrt{R} \cos \frac{\nu}{2} \right) t e^{\sqrt{R} \sin \frac{\nu}{2} i t} = \\ & = h e \left( -\frac{k}{2m} + \sqrt{R} \cos \frac{\nu}{2} \right) t \left[ \cos \left( \sqrt{R} \sin \frac{\nu}{2} t \right) + \right. \\ & \left. + i \sin \left( \sqrt{R} \sin \frac{\nu}{2} t \right) \right]; \end{aligned} \quad (23)$$

$$y = h' e \left( -\frac{k}{2m} + \sqrt{R} \cos \frac{\nu}{2} \right) t \left[ \cos \left( \sqrt{R} \sin \frac{\nu}{2} t \right) + i \sin \left( \sqrt{R} \sin \frac{\nu}{2} t \right) \right].$$

На основании форм. (19) и (20)

$$\frac{h'}{h} = + i \frac{b}{a}.$$

Чтобы избежать лишнего выражения интегралов, сложим два интеграла вида (23), взявши в скобке форм. (23) один раз  $(+)$ , а другой раз  $(-)$  и сложив полученные частные интегралы. Найдем:

$$\begin{aligned} x = h e & \left( -\frac{k}{2m} + \sqrt{R} \cos \frac{\nu}{2} \right) t \cos \left[ \left( \sqrt{R} \sin \frac{\nu}{2} \right) t \right], \\ y = h \frac{b}{a} e & \left( -\frac{k}{2m} + \sqrt{R} \cos \frac{\nu}{2} \right) t \sin \left[ \left( \sqrt{R} \sin \frac{\nu}{2} \right) t \right]. \end{aligned}$$

Одинаковое рассуждение можно повторить, взявши сначала  $h$  минимым, и тогда получится частный интеграл:

$$x = -H e^{\left(-\frac{k}{2m} + \sqrt{R} \cos \frac{\nu}{2}\right) t} \sin \left[ \left( \sqrt{R} \sin \frac{\nu}{2} \right) t \right],$$

$$y = H \frac{b}{a} e^{\left(-\frac{k}{2m} + \sqrt{R} \cos \frac{\nu}{2}\right) t} \cos \left[ \left( \sqrt{R} \sin \frac{\nu}{2} \right) t \right].$$

Сумма двух пар указанных интегралов приведет нас к паре интегралов с двумя произвольными постоянными

$$x = aA e^{\left(-\frac{k}{2m} + \sqrt{R} \cos \frac{\nu}{2}\right) t} \cos \left( \sqrt{R} \sin \frac{\nu}{2} t + E \right),$$

$$y = bA e^{\left(-\frac{k}{2m} + \sqrt{R} \cos \frac{\nu}{2}\right) t} \sin \left( \sqrt{R} \sin \frac{\nu}{2} t + E \right).$$

24)

Также найдем другую пару интегралов, взявши в форм. (22) перед скобкой знак (—).

$$x = aB e^{-\left(\frac{k}{2m} + \sqrt{R} \cos \frac{\nu}{2}\right) t} \cos \left( \sqrt{R} \sin \frac{\nu}{2} t + E_1 \right),$$

$$y = bB e^{-\left(\frac{k}{2m} + \sqrt{R} \cos \frac{\nu}{2}\right) t} \sin \left( \sqrt{R} \sin \frac{\nu}{2} t + E_1 \right).$$

(25)

Степень  $e$  в формулах (25) отрицательна; легко показать, что в форм. (24) она выходит положительной. Действительно, неравенство

$$\sqrt{R} \cos \frac{\nu}{2} > \left( \frac{k}{2m} \right)$$

даст

$$R \frac{1 + \cos \nu}{2} > \left( \frac{k^2}{4m^2} \right),$$

или

$$R > \frac{k^2}{2m^2} - R \cos \nu,$$

что, согласно с форм. (21<sup>1</sup>), приводит к очевидному неравенству:

$$\sqrt{\frac{k^4}{16m^4} + \frac{k^2}{m^2} \frac{4q^2}{a^2b^2}} > \left( \frac{k^2}{4m^2} \right).$$

Общий интеграл уравнений (18) без постоянного  $g$  представится суммой интегралов (24) и (25). Если же сохранить в дифференциальных уравнениях член  $g$ , то их общий интеграл представится суммой значений координат, данных выражениями (24) и выражениями:

$$x = aB e^{-\left(\frac{k}{2m} + \sqrt{R} \cos \frac{\nu}{2}\right) t} \cos \left(\sqrt{R} \sin \frac{\nu}{2} t + E_1\right) - \frac{mg}{k} \frac{a^2}{2q}, \quad (26).$$

$$y = bB e^{-\left(\frac{k}{2m} + \sqrt{R} \cos \frac{\nu}{2}\right) t} \sin \left(\sqrt{R} \sin \frac{\nu}{2} t + E_1\right).$$

Движение снеговой частицы в рассматриваемом случае складывается из двух движений, выраженных форм. (24) и (26). Первое движение совершается по траекториям:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = A^2 e^{2\left(-\frac{k}{2m} + \sqrt{R} \cos \frac{\nu}{2}\right) t},$$

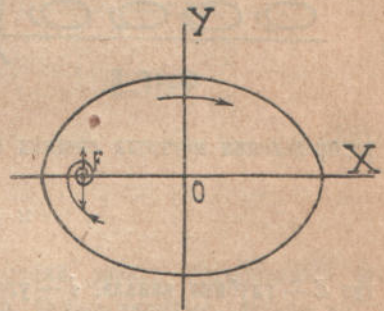
а второе по траекториям:

$$\frac{\left(x + \frac{mg}{k} \frac{a^2}{2q}\right)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = B^2 e^{-2\left(\frac{k}{2m} + \sqrt{R} \sin \frac{\nu}{2}\right) t}.$$

Первые траектории представляют эллипсы, подобные и концентрические линиям токов, с возрастающими осями, а вторые траектории представляют эллипсы, подобные линиям токов данного потока, но центры их смещены по оси  $ox$  влево в некоторую точку  $F$ , при чем

$$OF = \frac{mg}{k} \frac{a^2}{2q}, \quad (29)$$

а полуоси постоянно убывают, стремясь в пределе к нулю. В общем случае, если  $A \neq 0$ , то снежинка выбрасывается из эллиптического вихря. Но, если начальные данные удовлетворяют условию  $A = 0$ , то снежинка, совершая спиралеобразный путь, приближается к точке  $F$ , как это представлено на фиг. 7.



ФИГ. 7.

Можно сказать, что при этом условии вихрь втягивает в себя снежинки, приближая их к точке  $F$ . Вступив в точку  $F$ , снежинка будет в равновесии, так как, приравнявая ее вес скорости, умноженной на  $k$ , будем иметь

$$mg = k \frac{2q}{a^2} OF,$$

откуда

$$OF = \frac{mga}{2kq}$$

что согласно с форм. 29.

§ 5. Заилие рек. Формула Кеннеди. Изложенный в предыдущем параграфе анализ может послужить для разрешения основной задачи ирригации об условии заилиения каналов.

Если вышерассмотренный эллиптический вихрь был бы поднят вверх общим течением жидкости, то он мог бы удерживать подвешенные в нем твердые частицы, помещенные согласно их гидравлического размера  $\frac{mg}{k}$  в определенной точке  $F$  на большой горизонтальной оси вихря.

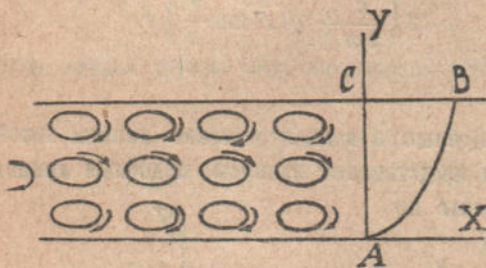
Предполагаем сначала, что жидкость, в которой имеются твердые частицы, течет горизонтально с малою среднею скоростью  $v$ , меньшею той скорости  $v_0$ , которая соответствует числу Рейнольда

$$R = \frac{\rho v_0 d}{\mu}, \quad (30)$$

где  $d$  глубина канала, а  $\mu$ —коэффициент вязкости.

Течение будет совершаться горизонтальными слоями, и твердые частицы будут ниспадать на дно с малыми скоростями  $\frac{mg}{k}$ , соответствующими их гидравлическим размерам. Канал будет заливаться.

Когда же средняя скорость превосходит ту, которая соответствует числу Рейнольда тогда завихренный поток завертывается в отдельные эллиптические вихри, как это



Фиг. 8.

представлено на фиг. (8). Центры этих эллиптических вихрей движутся горизонтально со скоростями  $u$ , возрастающими по мере удаления от дна канала. Это будет местная средняя скорость, которая, согласно теории Буссинека, будет следовать параболическому закону и представится на фиг. (8) параболою  $AB$ .

Если предположить, что центры эллипсов на дне канала неподвижны, то закон распределения местных средних скоростей выразится формулою:

$$u = \frac{4gp}{H} \sin i [d^2 - (d - y)^2], \quad (31),$$

где  $d$  — глубина канала,  $i$  — угол наклона дна к горизонту, а  $H$  — некоторый коэффициент, который при движении, перешедшем за Рейнольдово число, согласно Буссинека, выражается формулою:

$$H = \alpha v d, \quad (32),$$

где  $v$  — средняя скорость всего течения, а  $\alpha$  — постоянное, зависящее от вязкости. Форм.

(31) дает на дне при  $y = 0$ ,  $u = 0$ , а на свободной поверхности при  $y = d$ ,  $\frac{du}{dy} = 0$ , что и должно быть.

Полагая в форм. (31)  $y = d$  и внося в нее значение  $H$  из форм. (32), получим для скорости на свободной поверхности

$$u_d = \frac{4gp \sin i d}{\alpha \cdot v}$$

Так как, согласно параболическому распределению скоростей,

$$v = \frac{2}{3} u,$$

то для средней скорости получаем обыкновенную гидравлическую формулу:

$$v^2 = Ad \sin i. \quad (33).$$

Угловая скорость частицы жидкости на расстоянии  $y$  от дна будет

$$\omega = \frac{1}{2} \frac{du}{dy} = \frac{4gp}{H} \sin i (d - y). \quad (34).$$

Эта угловая скорость будет уменьшаться по мере удаления от дна канала и обратится в нуль на свободной поверхности. Применяя для определения  $\omega$  форм. (17):

$$\omega = q \left( \frac{1}{b^2} + \frac{1}{a^2} \right), \quad (17)$$

мы должны будем допустить, что при постоянных  $a$  и  $b$  величина  $q$  уменьшается с уменьшением глубины слоя до нуля. Заметим, что, если бы мы стали определять сумму скоростей, сообщенных точке жидкости всеми вихревыми шнурами, представленными на фиг. (8), приложив к этим шнурам их зеркальные изображения в свободной поверхности, то получили бы для скорости  $u$  выражение (31) <sup>1)</sup>.

Обращаясь теперь к фиг. (7), заметим, что для определенного гидравлического размера  $\frac{mg}{k}$  существует, согласно форм. (29), определенная точка  $F$ , в которой эта частица может быть подвешена. Если  $a$  и  $q$  даны, то наибольший гидравлический размер подвешенной частицы найдется из уравнения:

$$a = \frac{mg a^2}{k 2q}, \quad (35).$$

или

$$\frac{mg}{k} = \frac{2q}{a}.$$

Так как  $q$  уменьшается с высотой, то гидравлический размер подвешенных частиц увеличивается по мере приближения к дну канала. Самые тяжелые частицы могут быть подвешены только около дна. Предполагая, что полуоси эллиптических вихревых шнуров около дна зависят от его шероховатости, найдем из форм. (35) наибольшее значение  $q$  под условием, чтобы не осаждались подвешенные частицы наибольшего гидравлического размера.

Соединяя форм. (17) и (34), в которую подставляем значение  $H$ , получаем для дна при  $y = 0$

$$q \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) = \frac{4gp \sin i}{\alpha} \frac{d}{vd},$$

<sup>1)</sup> См. мою статью „Насадки и диффузоры аэродинамических труб“. Труды Расчетно-Испытательного Бюро, вып. 6, 1918 г.

и, так как по (33):

$$\sin i d = \frac{v^2}{A},$$

то

$$q \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) = \frac{4 g \rho v}{\alpha A d}. \quad (36).$$

Под условием, чтобы осаждение не происходило вплоть до частиц наибольшего гидравлического размера, будем иметь постоянство левой части этого уравнения; поэтому и правая часть будет постоянна, и мы найдем линейную связь между  $d$  и  $v$ :

$$d = Bv. \quad (37).$$

Эта формула выведена в предположении, что центры вихревых шнуров, прилегающих к дну, неподвижны. На самом деле, они должны перемещаться со скоростью

$$\frac{2q}{b^2} b = \frac{2q}{b},$$

для того чтобы частицы жидкости, непосредственно прилегающие ко дну, не имели скорости, т.-е. чтобы эллиптические шнуры двигались по дну наподобие гусеничных тракторов. В силу этого обстоятельства действительная средняя скорость будет более той, которая стоит в формуле (37), и мы должны будем подставить в нее  $\left( v - \frac{2q}{b} \right)$ , где  $q$  и  $b$  зависят от шероховатости дна и наибольшего гидравлического размера неосаждаемых частиц. Таким образом, получается формула:

$$d = B \left( v - \frac{2q}{b} \right), \quad (38),$$

которая по нашему мнению должна бы заменить степенную формулу Кеннеди:

$$v = 0,87 d^{0,64}. \quad (39).$$

Эта формула была выведена из ряда наблюдений над ирригационными каналами Индии, при чем выбирались каналы, не подвергавшиеся заилению, и определялась их средняя скорость  $v$  и глубина  $d$ .

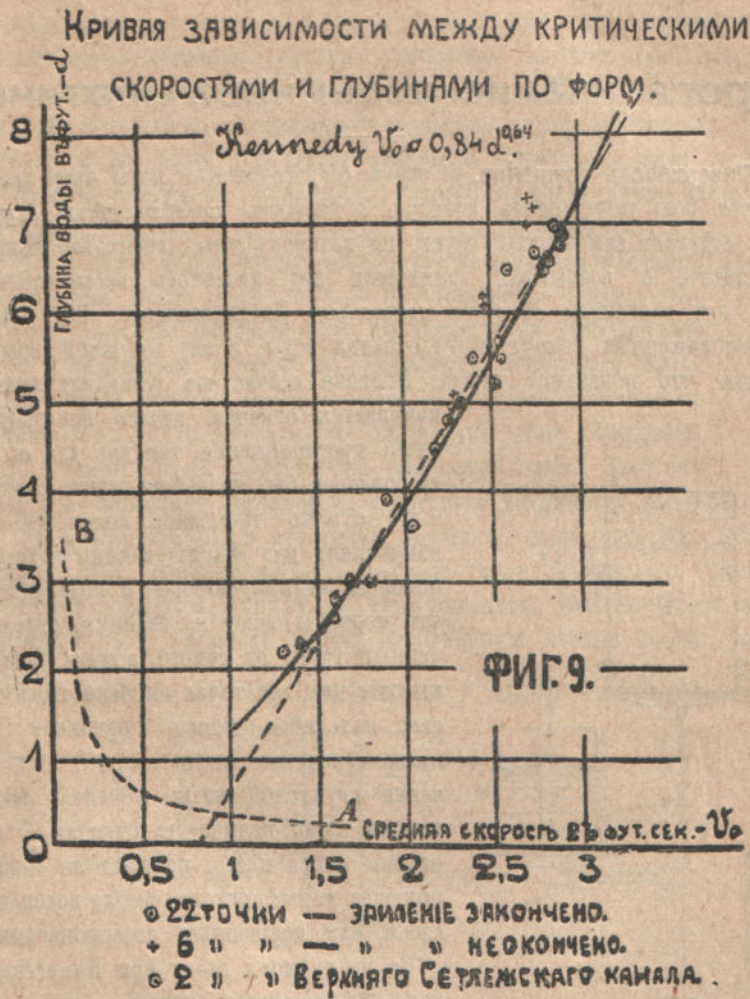
На фиг. (9) дана графика кривой Кеннеди  $OC$ . По оси абсцисс откладывается средняя скорость  $v$ , а по оси ординат глубина канала  $d$ . Легко усмотреть, что изгиб найденной кривой охарактеризовался, главным образом, желанием провести ее через начало координат; между тем около этого начала нет наблюдаемых точек. Да они и не могли бы получиться, так как до перехода чрез Рейнольдово число непременно происходит заиление, а, на основании форм. (30), точки нашей графики, перешедшие за число Рейнольда, лежат за некоторою гиперболою  $VA$ , удовлетворяющею уравнению:

$$vd = \frac{\mu R}{\rho}. \quad (40).$$

Все же точки наблюдения, расположенные над гиперболою, весьма близко лежат к прямой  $AD$ , пересекающей ось абсцисс в некоторой точке  $D$ .

Таким образом, выведенное нами линейное соотношение (38) находит оправдание на графике Кеннеди. Отрезок  $OD$ , согласно нашей теории, будет по форм. (35):

$$OD = \frac{2q}{b} = \frac{mg}{k} \cdot \frac{a}{b}. \quad (41).$$



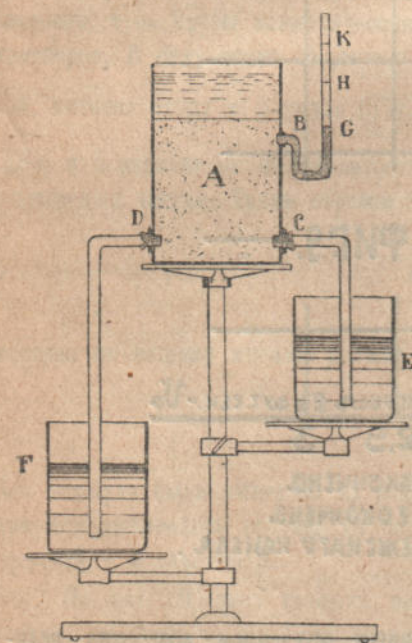
Для определения  $\frac{a}{b}$  надо заняться обстоятельным изучением колебания величины и направления скорости в данной точке жидкости.

## Просачивание воды через плотины.<sup>1)</sup>

§ 1. Поверхность осушения. В задаче о просачивании воды через плотины играет весьма важную роль поверхность, которую я называю *поверхностью осушения*. Эта поверхность отделяет замоченный грунт, по которому течет грунтовая вода, от сухого грунта. В задаче о водосборах грунтовая вода вводилась рассмотрение подобной поверхности под названием *воронка осушения*. Предполагалось, что уровни трубок Нортонна, расположенных вокруг места откачки воды, лежат на такой воронке. Но то обстоятельство, что показание трубок Нортонна сейчас же устанавливается, когда

начинается откачка, делало невероятным упомянутое предположение, так как для его оправдания требовалось бы, чтобы из грунта в короткое время было отнято громадное количество воды. При изысканиях над Мытищенскими водосборами установилось мнение, которое и подтвердилось на деле, что нортонны дают не границу, отделяющую смоченный грунт от сухого, а дают пьезометрические высоты для тех точек смоченного грунта, в которых находится конец нортонной трубки. Эти пьезометрические высоты зависят от скорости течения грунтовой воды и сейчас же устанавливаются, когда начинается откачка. Это будет одинаково иметь место, прикрыт ли слой, в котором помещен конец нортонна, сверху водонепроницаемым слоем или осушенным водопропускным слоем.

Во время моих работ при Комиссии по изысканиям Мытищенского водосбора мною был построен и продемонстрирован в заседании Московского Отделения Русского Физико-Химического Общества фильтрационный аппарат, рассмотрение которого имеет большое значение для интересующего нас вопроса.



ФИГ. 1.

Сосуд *A* наполнялся насыщенным водою песком. К нему присоединился манометр *B* и две трубки *C* и *D*. Оконечности манометра *B* и трубок *C* и *D* вставлялись в песок, будучи обернуты кисеею. Конец манометрической трубки помещался немного ниже верхней поверхности песка. Трубки *C* и *D* опускались в сосуды с водою *E* и *F*, при чем сосуд *F* ставился ниже сосуда *E*. Опыт производился так. Поверх поверхности песка наливалось немного воды, которая, проникая через толщу песка, изливалась

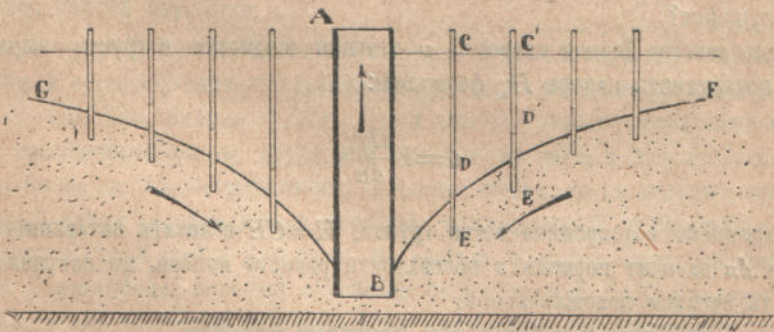
<sup>1)</sup> Посмертное издание под ред. преп. Московского Высшего Технического Училища Н. Г. Ченцова. Статья была написана проф. Н. Е. Жуковским в 1920 г.



в трубки *C* и *D* в сосуды *E* и *F*. Манометр *B* будет при этом показывать высоту *H*, немного меньшую высоты уровня воды в сосуде *A*. Так будет продолжаться до тех пор, пока уровень воды в сосуде *A* не дойдет до поверхности песка. Когда это произойдет, и поверхность песка начнет осушаться, тогда вода перестанет вытекать в сосуд *E*, а, наоборот, начинает вытекать из этого сосуда через песок в более низко стоящий сосуд *F*. Весь аппарат начинает работать, как сифон. Показание манометра опускается до некоторого уровня *G*, так что в точке прикрепления манометра под осушенным слоем мы имеем некоторый вакуум, измеряемый высотой *BG*. Эта высота до некоторой степени увеличивается при опускании вниз сосуда *F*, но существует некоторый предельный вакуум, который может выдержать осушенная поверхность песка. Он зависит от свойства грунта и тем более, чем грунт мельче. К сожалению, мною не было тогда произведено обратного опыта, но объяснение, которое я тогда давал действию моего аппарата, дает надежду на удачу этого обратного опыта. Он будет состоять в том, что на осушенную поверхность песка будет насыпан слой сухого песка той же породы. После этого сосуд *F* предполагается поднять над сосудом *A*, так что вода под напором будет проникать через насыщенный песок сосуда *A* и изливаться в сосуд *E*. Небольшое количество воды пройдет через смоченный верхний слой в сосуд *A* и будет вталкиваться меж сухими песчинками. Надо ожидать, что вследствие этого образуется раздельный слой, который будет выдерживать некоторый напор. Этот напор обозначится на показании манометра *B*, которое поднимется над *H* на высоту *HK*, которая не может превзойти некоторой величины, зависящей от свойств песка. Когда этот предельный напор превзойден, то вода будет вступать в сухой песок и будет его постепенно насыщать; при этом надо ожидать, что мы будем получать не вполне насыщенный песок, а массу песка, наполненную частью водою, частью пузырьками воздуха.



Фиг. 2.



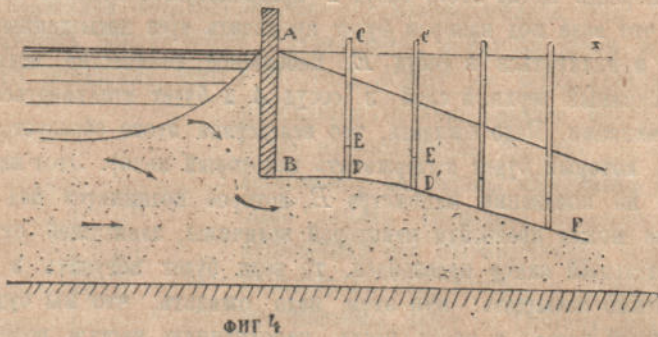
фиг. 3.

Объяснение, которое я давал действию моего фильтрационного аппарата, состоит в следующем. Я предполагаю, что на поверхности осушенного слоя, от которого вода оттягивается, образуются капиллярные воронки, как это изображено на верхней части фиг. (2). Эти воронки дают скачек понижения давления, когда мы переходим через осушенный слой. Если вода не оттягивается от поверхности смоченного песка, а, наоборот, выталкивается через эту поверхность в сухой грунт, то надо ожидать, что образуются капиллярные мешочки, как это изображено на нижней части фиг. (2). Эти мешочки дают при переходе через поверхность раздела сверху вниз скачек повышения давления, максимальная величина которого будет зависеть от свойства грунта. Если поверхность осушения образовалась при откачке воды из водосбора, то на ней надо ожидать скачка

понижения давления и предполагать, что пьезометрические трубки, концы которых расположены на этой поверхности, покажут нам присутствие за этою поверхностью некоторого постоянного вакуума.

На фиг. (3) изображена такая поверхность  $GBF$ .  $AB$  представляет водосбор, а  $CD$ ,  $C'D'$ ,  $C''D''$  суть трубы Нортон, которые все дают одно и то же понижение  $DE = h$  против границы  $BDF$  поверхности осушения.

Если же поверхность осушения образовалась при просачивании воды через плотину, как это представлено на фиг. (4), то надо ожидать, что пробивающаяся через нижний грунт плотины вода образует поверхность осушения  $BF$ , на которой будет иметься постоянный скачек повышения давления. Мы предполагаем на фиг. (4), что вода просачивается через дно водоместилца  $GA$ , задерживается шпунтом  $AB$  и, прорываясь под него, образует поверхность осушения  $BF$ , во всех точках которой получается постоянный скачек повышения давления  $ED = h$ , который показали бы трубки Нортон концы которых расположены на поверхности осушения  $BF$ .



В чем же с математической стороны заключается условие, характеризующее поверхность осушения?

Согласно закону Дюпюи скорость  $v$  течения жидкости в грунте выражается по изменению потерянному напора  $H_\gamma$  формулою:

$$v = k \frac{dH_\gamma}{dn},$$

где  $k$ —коэффициент водопроницаемости грунта,  $H = CE$  величина потерянному напора,  $\gamma$  плотность и  $dn$  элемент нормали к поверхности равного напора, по направлению которого скорость считаем положительной.

Мы будем называть потенциальною функциею функцию

$$\varphi = k\gamma H.$$

Эта функция вследствие условия несжимаемости удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\Delta_2 \varphi = 0.$$

Когда речь идет о плотинах, то задачу можно рассматривать как плоскую и считать  $\varphi$  функциею координат  $x, y$  на плоскости  $xOy$ , перпендикулярной к плетине.

Вместе с потенциальною функциею  $\varphi$  здесь рассматривается функция тока  $\psi$ , которая тоже удовлетворяет ур. Лапласа  $\Delta_2 \psi = 0$ . Эти два семейства поверхностей

$$\varphi = \text{const и } \psi = \text{const}$$

имеет два взаимноортогональных изотермических семейства линий: эквипотенциальные линии и линии тока. По второму семейству происходит течение грунтовой воды, скорости которой ортогональны первому семейству. Приращение  $\varphi$  при переходе от одной эквипотенциальной линии к другой дает нам приращение напора, а приращение  $\psi$  при переходе от одной линии тока к другой дает нам количество жидкости, протекающее между этими двумя линиями. Отсчитывая в задаче фиг. (3) и фиг. (4) потерянный напор  $H_{\gamma}$  от горизонтали  $AC$ , за которую на фиг. (4) удобно принять продолжение уровня воды в водовместителе, а на фиг. (3) горизонталь, к которой асимптотически приближаются воронки осушения, мы будем иметь:

$$H = CE = CD + DE,$$

где  $H = \frac{\varphi}{k_{\gamma}}$ ,  $DE = h$  есть постоянный напор или вакуум, выдерживаемый поверхностью осушения, а  $CD = y$  есть расстояние точки поверхности осушения от некоторой горизонтальной линии. Отсюда следует, что для всех точек поверхности осушения имеет место равенство:

$$\frac{\varphi}{k_{\gamma}} = y + h,$$

или

$$\varphi - k_{\gamma}y = +hk_{\gamma}. \quad (1)$$

Но вместе с этим поверхность осушения есть поверхность тока, т. е. на ней  $\psi = \text{const}$ . Таким образом мы получаем искомое математическое условие, характеризующее поверхность осушения.

*Поверхность осушения есть такая поверхность тока  $\psi = \text{const}$ , на которой  $\varphi - k_{\gamma}y$  есть величина постоянная.*

## § 2. Течение грунтовой воды под гидравлическими сооружениями без образования поверхностей осушения.

До сих пор разрабатывалась теория течения грунтовой воды под гидравлическими сооружениями в предположении, что границами грунта, по которому движется вода, являются линии  $\varphi = \text{const}$  или линии  $\psi = \text{const}$ . Через первые—эквипотенциальные линии—вода входит в насыщенный водою грунт или выходит из него, а вторые границы—линии тока—представляют водонепроницаемые бетонные стенки, вдоль которых протекает вода. Поставленная таким образом задача являлась тождественной с задачей о конформном преобразовании одной части плоскости на другую и могла быть разрешаема методом Шварца и Христоффеля, который с успехом был применен Н. Н. Павловским ко многим задачам из теории плотин и изложен в его сочинении, представленном, под названием «Тезисы теории движения грунтовых вод под гидротехническими сооружениями», в Управление Ирригационных работ в Туркестане.

Во всех этих задачах границы  $\varphi = \text{const}$  суть некоторые горизонтальные линии, а границы  $\psi = \text{const}$  представляют ломаные контуры.

Я думаю, что задача в этом виде более просто разрешается моим способом образующих и направляющих сетей, нежели методами конформного преобразования Шварца и Христоффеля.

Мой способ был напечатан еще в 1890 году в моей статье «Видоизменение метода Бирхгофа»<sup>1)</sup> и применительно к данному вопросу располагается нижеследующим обра-

<sup>1)</sup> Н. Е. Жуковский.—Видоизменение метода Кирхгофа для определения движения жидкости в двух измерениях при постоянной скорости, данной на неизвестной линии тока. Москва, Математический Сборник, т. XV, 1890 г.

зом. Представляя сопряженные функции переменных  $x$  и  $y$ , функции  $\varphi$  и  $\psi$ , являются коэффициентами действительной и мнимой части некоторой функции комплексного переменного  $z = x + yi$ , где  $i = \sqrt{-1}$ . Назовем эту функцию через

$$\chi = \varphi + \psi i.$$

Введем вспомогательное комплексное переменное

$$u = \xi + \eta i$$

и будем рассматривать его значения на полуплоскости под осью  $O\xi$ . Будем рассматривать  $\chi$  и  $z$  как функции  $u$ , однозначные, непрерывные и конечные для всех точек полуплоскости и могущие иметь полюсы и точки разветвления только на оси  $O\xi$ . При выборе таких функций коэффициенты их действительных и мнимых частей для всех точек полуплоскости представятся однозначными функциями  $\xi$  и  $\eta$ . Приравнявая эти коэффициенты постоянным, мы получим на полуплоскости две сети взаимноортогональных линий (разделяющих плоскость на бесконечно малые квадраты):

$$\varphi = \text{const}, \psi = \text{const}.$$

$$x = \text{const}, y = \text{const}.$$

Я называю первую сеть линий образующую сеть, а вторую сеть — направляющую сеть. Переменное  $\chi$  мы выражаем такую функцию от  $u$ :

$$\chi = m \int \frac{u}{\sqrt{(u - c_1)(u - c_2)(u - c_3) \dots}}, \quad (2)$$

где  $c_1 < c_2 < c_3 < \dots$  суть действительные количества, а  $m = \pm 1$  или  $m = \pm \sqrt{-1}$ . Интеграл берется по какому-нибудь контуру на рассматриваемой полуплоскости от постоянной точки до какой-нибудь точки  $u$ . Когда мы ведем интеграцию по оси  $O\xi$ , то под интегральной функцией в форм. (2) поочередно делается то мнимой, то действительной. Если всех скобок под корнем четное число, то при изменении  $u$  от  $c_1$  до  $c_2$  корень будет мнимый, при изменении  $u$  от  $c_2$  до  $c_3$  — действительный и т. д. Ввиду этого при передвижении по оси  $O\xi$  будет поочередно оставаться постоянной то действительная, то мнимая часть функции  $\chi$ . Это показывает, что образующая сеть, подходя к оси  $O\xi$ , охватывает своими линиями отрезки этой оси, которые поочередно становятся то линиями  $\varphi = \text{const}$ , то линиями  $\psi = \text{const}$ . Точки  $c_1, c_2, c_3, \dots$  я называю фокусами образующей сети. Если два фокуса сливаются, например  $c_1 = c_2 = e$ , то из под корня в форм. (2) выходит множитель  $u - e$ . Мы называем в этом случае точку  $e$  полюсом образующей сети. Одна линия из семейства линий образующей сети охватывает полюс  $e$ , а бесчисленное множество линий другого семейства пересекаются в этой точке. Мы будем подбирать  $m$  так, чтобы линия, охватывающая полюс, была  $\varphi = \text{const}$ , а линии, его пересекающие, принадлежали семейству  $\psi = \text{const}$ . Легко усмотреть, что в полюсе  $u = e$  постоянное значение  $\varphi$  устремляется к логарифмической бесконечности, а значения  $\psi$  прирастают на определенную величину. По смыслу задачи фильтрации мы будем подбирать  $m$  так, чтобы в бесконечность обращалось  $\varphi$ , а  $\psi$  получало при переходе через точку  $u = e$  приращение. Величина этого приращения согласно форм. (2) определится выражением:

$$i\Delta\psi = \int \frac{qd(\rho e^{\theta i})}{\rho e^{\theta i} \sqrt{(e - c_3)(e - c_4) \dots}}$$

Интеграция совершается по полукругу бесконечно малого радиуса  $\rho$ , обходящему полюс  $e$  (мы считаем число фокусов  $c_3, c_4$  четным и берем  $m=1$ ). Получаем:

$$\Delta\psi = \frac{2\pi q}{V(e-c_3)(e-c_4)}. \quad (3)$$

Что касается до функции  $z$ , то мы будем приписывать ей, смотря по задачам, значения:

$$\begin{aligned} z &= \xi + \eta i, \\ z &= l g \frac{(u-e)}{\beta}, \\ z &= \alpha^{1/2} (\xi + \eta i - e)^{1/2}, \\ z &= m \int \frac{h du}{V(u-b_1)(u-b_2)(u-b_3)\dots}, \end{aligned} \quad (5)$$

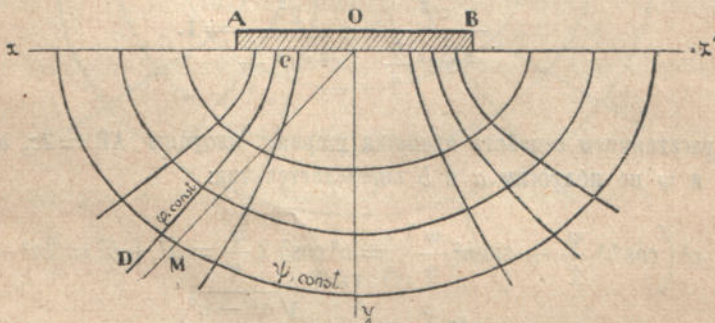
где  $\alpha, \beta, e, h, b_1, b_2, \dots$  действительные величины. Таким образом, направляющая сеть будет представляться или координатною сеткой, или системою концентрических полуокружностей и радиусов, имеющих центр в точке  $e$  на оси  $Oz$ , или будет иметь такой же вид, как образующая сеть, характеризуемая форм. (2). Предположив, что направляющая и образующая сеть на полуплоскости  $\xi\eta$  вычерчены, мы сейчас же можем получить любую линию тока или эквипотенциальную линию интересующей нас задачи. Взявши на полуплоскости  $\xi\eta$  линию образующей сети  $\psi = \text{const}$ , мы во всех ее точках найдем значения  $x$  и  $y$  действительного течения грунтовой воды. Но в задачах фильтрации, по большей части, нужно только определить основные элементы фильтрации: падение напора и количество фильтруемой жидкости. Для этого нет нужды знать все линии тока, а достаточно только рассмотреть изменение  $\phi$  и  $\psi$  на границах течения грунтовой воды.

Ниже мы даем решение четырех основных задач, которые трактуются в тезисах Н. Н. Павловского.

### § 3. Фильтрация под плотиную чрез бесконечный фильтрующий слой.

На фиг. (5) представлена схема рассматриваемого течения грунтовой воды. Для направляющей сети берем в форм. (5):

$$z = \xi + \eta i,$$



Фиг. 5.

т. е. полагаем:

$$x = \xi, \quad y = \eta^2.$$

<sup>1)</sup> Т.е. направляющую сетью являются два семейства, прямых, параллельных координатным осям.

Для образующей сети полагаем в формуле (2):  $c_1 = -c$ ;  $c_2 = c$ ;  $m = i$ .  
Получаем для образующей сети:

$$\frac{\varphi}{q} + \frac{\psi}{q} i = - \int \frac{du}{\sqrt{c^2 - u^2}} = \operatorname{arccos} \frac{u}{c}.$$

Обернем эту формулу:

$$\cos \frac{\varphi}{q} \cosh \frac{\psi}{q} + i \sin \frac{\varphi}{q} \sinh \frac{\psi}{q} = \frac{x}{c} + i \frac{y}{c},$$

и сравниваем действительные и мнимые части:

$$x = c \cdot \cos \frac{\varphi}{q} \cosh \frac{\psi}{q},$$

$$y = c \cdot \sin \frac{\varphi}{q} \sinh \frac{\psi}{q}. \quad (6)$$

Мы получим здесь уравнения линий тока и эквипотенциальных линий в водоносном грунте. Исключая из форм. (6) параметр  $\frac{\varphi}{q}$ , находим для линий тока семейство софокусных эллипсов:

$$\frac{x^2}{c^2 \cos^2 h^2 \frac{\psi}{q}} + \frac{y^2}{c^2 \sin^2 h^2 \frac{\psi}{q}} = 1, \quad (7)$$

а, исключая из ур. (6) параметр  $\frac{\psi}{q}$ , с помощью соотношения:

$$\cosh^2 \frac{\psi}{q} - \sinh^2 \frac{\psi}{q} = 1,$$

получаем для эквипотенциальных линий семейство софокусных гипербол:

$$\frac{x^2}{c^2 \cos^2 \frac{\varphi}{q}} - \frac{y^2}{c^2 \sin^2 \frac{\varphi}{q}} = 1. \quad (8)$$

Фокусным расстоянием семейств является ширина плотины  $AB = 2c$ , а величина параметров  $\varphi$  и  $\psi$  по полуосям  $a$  и  $b$  определяется так:

$$\left. \begin{aligned} c^2 \left( \cos^2 h^2 \frac{\psi}{q} + \sin^2 h^2 \frac{\psi}{q} \right) &= c^2 \cosh^2 2 \frac{\psi}{q} = a^2 + b^2 = 2a^2 - c^2 \\ \operatorname{tg} \frac{\varphi}{q} &= \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

На линии тока, непосредственно прилегающей к  $AB$  (фиг. 5), имеем  $b = 0$  и  $a = c$  а потому

$$\cosh 2 \frac{\psi}{q} = 1,$$

$$\frac{2 \frac{\psi}{q} - 2 \frac{\psi}{q}}{e \frac{\psi}{q} + e} = 1,$$

откуда  $\psi = 0$ . Так как приращения  $\psi$  между двумя линиями тока дают нам количество жидкости, протекающей между этими линиями, то количество жидкости, протекающее под плотиною до определенной линии тока, представляется величиною  $\psi$ , определяемою по первой форм. (9).

Что касается до величины  $q$ , то она определяется из второй форм. (9) по потерянному напору. Согласно этой формуле, потерянный напор представляется углом  $\theta$ , который эллипсита  $OM$  соответствующей гиперболы  $CD$  образует с осью  $ox$ . Так как этот угол при переходе по линии тока от  $A$  до  $B$  (фиг. 5) изменяется от  $0$  до  $\pi$ , то весь потерянный напор  $\varphi_0$  определяется из уравнения:

$$\frac{\varphi_0}{q} = \pi,$$

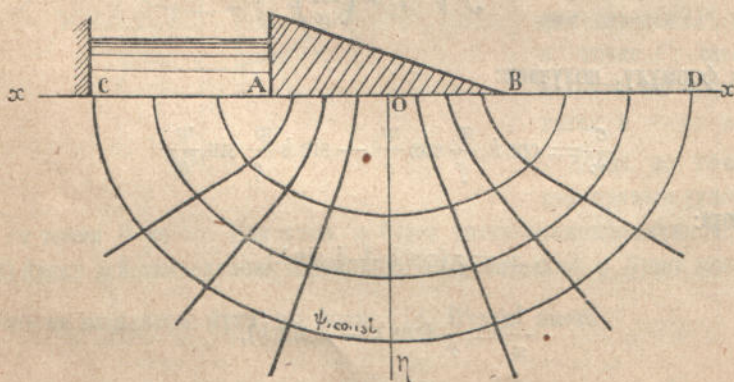
откуда

$$q = \frac{\varphi_0}{\pi}. \quad (10)$$

На основании первой форм. (9) количество  $\psi$  жидкости, протекающей в единицу времени между плотиною и линиею тока, соответствующею эллипсу с полуосью  $a$ , будет получаться из формулы:

$$\cos h \frac{2 \pi \psi}{\varphi_0} = \frac{2 a^2}{c^2} - 1, \text{ или } \cos h \frac{\pi \psi}{\varphi_0} = \frac{a}{c}. \quad (11)$$

Эта величина будет беспрельдно расти с возрастанием  $a$ . Но, так как размер водовместилища не беспрельдно велик, как изображено на фиг. (5), а имеет конечную ширину  $CA = a - c$  (фиг. 6), то можно с приближением принять эллипс  $CD$  за гранич-



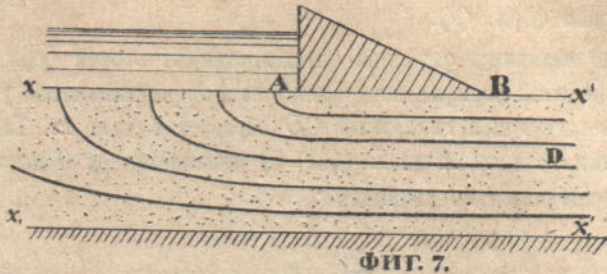
Фиг. 6.

ную поверхность тока течения жидкости в грунте, тем более, что скорость течения по эллипсам убывает по мере их удаления от фокусного расстояния  $AB$ .

Количество воды, протекающей чрез плотину ширины  $2c$  при ширине водовместилища  $a - c$  будет, таким образом, определяться по форм. (11).

§ 4. Фильтрация через водоносный слой, заключенный в водонепроницающем грунте.

Мы предположим теперь, что вода, просачивающаяся через дно резервуара, движется между двумя водонепроницаемыми поверхностями, как это изображено на фиг. (7). На  $xA$  мы имеем постоянное значение для  $\varphi$ ; на  $Ax'$  постоянное значение для  $\psi$ , и, наконец, на  $x_1x_1'$  — опять постоянное значение для  $\psi$ .



Образующая сеть этой задачи получается из форм. (2), если положить:

$$c_1 = -c, c_2 = c_3 = 0, c_4 = -c, m = -i;$$

взяв вместо  $q$  постоянную величину  $cq$ , получаем:

$$\chi = \varphi + \psi i = -i \int \frac{qc \, du}{u \sqrt{u^2 - c^2}} = -iq \int \frac{\frac{c \, du}{u^2}}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{u^2}}} = iq \int \frac{d\left(\frac{c}{u}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{c}{u}\right)^2}} \quad (12)$$

Умножаем обе части на  $i$ :

$$\frac{\varphi i}{q} - \frac{\psi}{q} = - \int \frac{d\left(\frac{c}{u}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{c}{u}\right)^2}} = \arccos \frac{c}{u}.$$

Обертывая эту формулу, получаем:

$$\frac{c}{u} = \cos h \frac{\varphi}{q} \cos \frac{\psi}{q} - \sin h \frac{\varphi}{q} \sin \frac{\psi}{q}.$$

Подставляем сюда:

$$u = r(\cos \lambda + i \sin \lambda),$$

$$\frac{1}{u} = \frac{1}{r}(\cos \lambda - i \sin \lambda),$$

и сравниваем действительные и мнимые части, умножив полученные равенства на  $c$ :

$$\frac{c^2}{r} \cos \lambda = c \cdot \cos h \frac{\varphi}{q} \cos \frac{\psi}{q},$$

$$\frac{c^2}{r} \sin \lambda = c \cdot \sin h \frac{\varphi}{q} \sin \frac{\psi}{q}. \quad (13)$$



Соответствующая этим формулам сеть представляет инверсию из начала координат эллиптической сети, данной формулами (6), с той разницею, что теперь  $\varphi = \text{const}$  на эллипсах, а  $\psi = \text{const}$  на гиперболах.

Для инвертирования нужно угол  $\lambda$  каждого радиуса вектора с осью  $O\xi$  оставить без перемены, а радиус вектор  $\rho$  изменить на  $r = \frac{c^2}{\rho}$ . При этом получится ортогональная изотермическая сеть, представленная на фиг. (8). В ней расстояние между фокусами  $FF' = 2c$ .

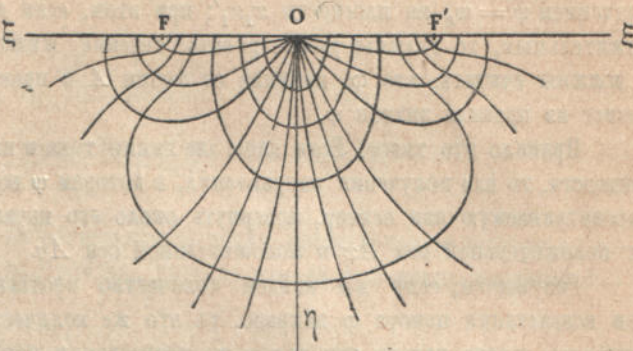
За направляющую сеть мы примем систему concentрических кругов, проведенных из точки  $O$ , и их радиусы (фиг. 9) при чем, согласно второй форм. (5), в которой примем

$$\beta = c, e = a,$$

положим:

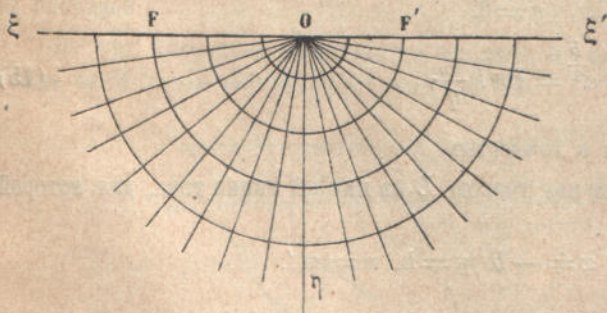
$$x = a \lg \frac{r}{c}, \quad (14)$$

$$y = \alpha \lambda.$$



Фиг. 8.

Наложим образующую сеть (фиг. 8) на направляющую (фиг. 9), так, чтобы оси координат совпали и пойдем по оси  $\xi 0$  от  $\infty$  до точки  $F$ . Мы будем при этом на основании форм. (13) иметь постоянное значение для  $\varphi$ . Далее, перемещаясь от точки  $F'$  до  $O$ , будем иметь, на основании той же форм. (13), постоянно значение для  $\psi$ .



Фиг. 9

Величина  $y$ , на основании равенства  $\lambda = 0$ , согласно форм. (14), будет на всем этом протяжении  $y = 0$ . Что касается величины  $x$ , то по первой форм. (14) она будет положительна на бесконечном отрезке  $\xi F$ , перейдет чрез  $0$  в точке  $F'$ ; сделается отрицательной на отрезке  $F'O$  и обратится в  $-\infty$  в точке  $O$ .

Дойдя до точки  $O$ , повернем под прямым углом вниз и пойдем по оси  $O\eta$  от точки  $O$  до  $\infty$ . При этом  $u$  будет чисто мнимой величиною, а вторая часть форм. (12) будет действительною величиною, следовательно  $\varphi$  будет постоянно. Так как

$\lambda = \frac{\pi}{2}$ , то на всем этом пути по форм. (14) будем иметь

$$y = \alpha \frac{\pi}{2}.$$

Все рассматриваемое нами течение на плоскости  $\xi\eta$  мы будем считать представленным в квадранте  $\xi O\eta$ . В действительном течении на плоскости фиг. (7) мы будем иметь  $\varphi = \text{const}$  на бесконечном отрезке  $xA$ , при чем точка  $A$  на фиг. (7) соответствует точке  $F$  на фиг. (8). На отрезке  $Ax'$  будем иметь  $\psi = \text{const}$ , и, наконец, на прямой  $x_1x_1'$  будем иметь тоже  $\psi = \text{const}$ . Это соответствует тому течению, которое мы искали.

Определим теперь количество протекающей жидкости. Примем, что на прямой  $Ax'$  имеем  $\psi = 0$ ; тогда значение  $\psi$  на прямой  $x_1x_1'$  и будет это количество. Если в точке  $A$  имеем  $\psi = 0$ , то согласно форм. (13), в которой надо положить  $r = c$ ,  $\lambda = 0$ , получаем

$$1 = \cos h \frac{\Phi}{q}.$$

Это показывает, что в точке  $A$   $\Phi = 0$ . Количество протекающей жидкости представится значением  $\psi = \psi_0$  на плоскости  $x_1x_1'$ ; при этом, если мы считаем это значение  $\psi_0$  положительным, то должны рассматривать течение жидкости на фиг. (7) справа налево и должны считать, что  $\Phi$ , начиная от точки  $A$  в правую сторону возрастает. Это вытекает из правила знаков  $\psi$ .

Правило это такое: Если даны две линии тока и направление текущей между ними жидкости, то для получения направления, в котором  $\psi$  возрастает, надо скорость течения, рассматриваемую как вектор, повернуть около его начала на прямой угол в направлении от положительной оси  $Ax$  к положительной оси  $Ay$ .

Разумеется, если мы найдем количество протекающей жидкости справа налево при возрастании напора  $\Phi$  направо, то это же количество будет выражать протекающую жидкость справа налево при таком же возрастании напора справа налево.

Рассмотрим теперь точку  $B$  (фиг. 7).

Для нее по сказанному  $\psi = 0$ ,  $\lambda = 0$ ,  $x = -b$ ,  $\Phi = \Phi_0$ .

По форм. (14) и (13) имеем для этой точки:

$$-b = \alpha \lg \frac{r}{c}, \quad r = ce^{-\frac{b}{\alpha}},$$

$$y = 0,$$

$$e^{\frac{b}{\alpha}} = \cos h \frac{\Phi_0}{q}, \tag{15}$$

при чем второе ур. (13) обращается в тождество.

Переходим к точке  $D$ , лежащей под точкою  $B$  на нижней линии тока, для которой

$$\lambda = \frac{\pi}{2}, \quad x = -b, \quad y = h, \quad \Phi = \Phi_0'.$$

Получаем:

$$r = ce^{-\frac{b}{\alpha}}, \quad y = h = \alpha \frac{\pi}{2},$$

$$0 = \cos h \frac{\Phi_0'}{q} \cos \frac{\Psi_0}{q}, \tag{16}$$

$$e^{\frac{b}{\alpha}} = \sin h \frac{\Phi_0'}{q} \sin \frac{\Psi_0}{q}.$$

Второе ур. (16) дает нам:

$$\frac{\Psi_0}{q} = \frac{\pi}{2} \tag{17}$$

Третье же принимает вид:

$$e^{\frac{b}{\alpha}} = \sin h \frac{\Phi_0'}{q}. \tag{18}$$

Так как с беспределным возрастанием  $b$  напоры  $\varphi$  и  $\varphi'$  беспределно возрастают согласно форм. (16) и (17), то при достаточно большом  $b$  можно считать  $\varphi$  и  $\varphi'$  большими величинами и полагать:

$$\cos h \frac{\varphi}{q} = \sin h \frac{\varphi}{q} = \frac{1}{2} e^{\frac{\varphi}{q}}.$$

Таким образом при достаточно большой длине плотины  $AB=b$  уравнения (15) и (18) делаются тождественными и обращаются в

$$\frac{b}{e^{\alpha}} = \frac{1}{2} e^{\frac{\varphi_0}{q}},$$

или

$$\frac{\varphi_0}{q} = \frac{b}{\alpha} + \lg 2. \quad (19)$$

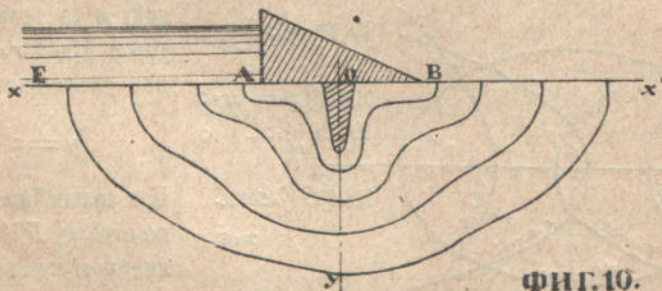
Из ур. (17) (16) и (19) получаем окончательную формулу, определяющую количество просачивающейся воды по разности напоров  $\varphi_0$ , глубине канала  $h$  и длине плотины  $b$ :

$$\psi = \frac{\pi}{2} \frac{\varphi_0}{\frac{b}{\frac{\pi}{2} h} + \lg 2} = \frac{\pi}{2} \frac{\varphi_0 h}{\frac{2b}{\pi} + h \lg 2}. \quad (20)$$

### § 5. Фильтрация воды под плотину со шпунтом.

Мы рассмотрим для простоты случай одного шпунта, симметрично расположенного под плотиной.

На фиг. (10) дана схема такого течения. По симметрии очевидно, что ось  $ODy$  должна быть эквипотенциальной поверхностью.



ФИГ. 10.

За образующую сеть в этой задаче мы принимаем эллиптическую сеть, изображенную на фиг. (5), которую повторяем на рис. (11), а направляющую сеть составляем по третьей форм. (5), приняв сначала  $e=0$ . Полагая

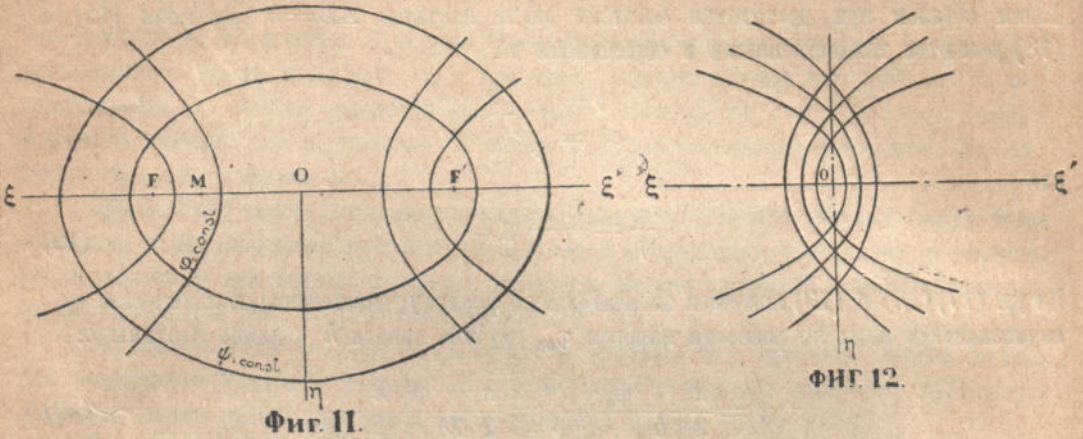
$$\xi + \eta i = r (\cos \lambda + i \sin \lambda),$$

найдем для направляющей сети:

$$\begin{aligned} x &= \alpha^{\frac{1}{2}} r^{\frac{1}{2}} \cos \frac{\lambda}{2}, \\ y &= \alpha^{\frac{1}{2}} r^{\frac{1}{2}} \sin \frac{\lambda}{2}. \end{aligned} \quad (21)$$

Эта сеть представит нам семейство взаимно ортогональных софокусных парабол, имеющих фокус в начале координат (фиг. 12).

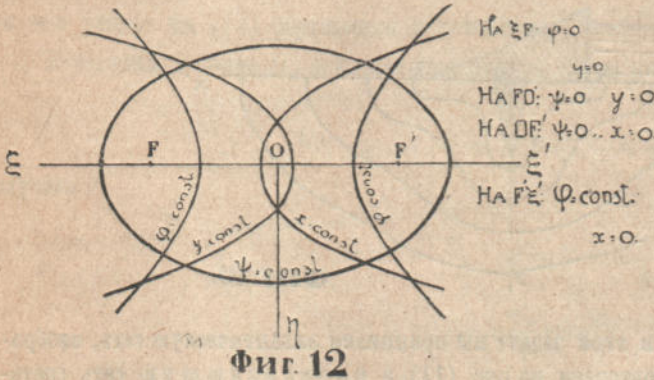
На параболах, обращенных вогнутостью в левую сторону (правая парабола), мы будем иметь постоянное значение для  $y$ , а на параболах, обращенных вогнутостью в правую сторону, будем иметь постоянное значение для  $x$ . Накладываем теперь сеть фиг. (11) на сеть фиг. (12) так, чтобы оси совпали (фиг. 12'). Пойдем от  $+\infty$  до  $-\infty$



по прямой, прилегающей бесконечно близко к оси  $\xi\xi'$  (немного ниже  $\xi\xi'$ ). Для всех точек пути  $\xi F'$  мы будем иметь  $\varphi = 0$  и, так как чрез эти точки проходит правая парабола (форм. 21) с параметром  $y = 0$ , то во всех их будем иметь изменяющийся  $x$  при  $y = 0$ . На отрезке  $FF'$  имеем  $\psi = 0$ . При этом от  $F$  до  $O$  чрез точки бесконечно тонкого эллипса будут проходить правые параболы и мы будем иметь  $y = 0$  при изменяющемся  $x$ .

Вступая в точку  $O$  в начале отрезка  $OF'$ , мы увидим, что правые параболы сразу заменятся левыми. Мы получим на всем отрезке  $OF'$ , значение  $x = 0$  при возрастающем  $y$ . Когда мы дойдем до точки  $F'$  (для которой будет  $r = c$ ) это значение увеличится до

$$y = a^{1/2} c^{1/2}.$$



При дальнейшем передвижении по отрезку  $F'\xi'$  постоянною величиною делается  $\varphi$ ; координата  $x$  будет тоже оставаться постоянною  $x = 0$ , координата же  $y$  будет продолжать возрастать до бесконечности.

Таким образом вся полуплоскость, расположенная на фиг. (5) под осью  $\xi\xi'$  [мы предполагаем, что на фиг. (5) — буквы  $x$  и  $y$  заменены на  $\xi$  и  $\eta$ ], на фиг. (10) превратится в квадрант  $xOy$ .

Течение, симметричное данному и расположенное в квадранте  $yOx'$ , в котором на оси  $Oy$  будут скорости, одинаковые по величине и направлению с скоростями вышенного течения, сомкнувшись с ним, дает все течение грунтовой воды в нашей задаче со шпунтом.

Разрешим вопрос о количестве протекающей воды под плотину со шпунтом. Форм. (6), в которых мы заменим  $x$  и  $y$  на  $\xi = r \cos \lambda$ ,  $\eta = r \sin \lambda$ , напишутся так:

$$\begin{aligned} r \cos \lambda &= c \cos \frac{\varphi}{q} \cos h \frac{\psi}{q}, \\ r \sin \lambda &= c \sin \frac{\varphi}{q} \sin h \frac{\psi}{q}. \end{aligned} \quad (22)$$

Для точки  $A$  (фиг. 10) мы имеем  $\lambda = 0$  и  $r = c$ . Это требует, чтобы в рассматриваемой точке было  $\varphi = 0$  и  $\psi = 0$ . При этом, так как на всем отрезке  $Ax$  (соответствующем  $A\xi'$ ) функция  $\varphi$  должна быть постоянна, т. е. нулем, то, с возрастанием  $r$ ,  $\psi$  будет беспредельно возрастать. Согласно правилу: для получения направления, в котором возрастает  $\psi$ , надо вектор, представляющий скорость, повернуть около его начала в направлении от положительной оси  $Ox$  к положительной оси  $Oy$ , — заключаем, что формулы (22) дают нам на фиг. (10) течение жидкости с правой стороны на левую. Функция  $\varphi$  при этом возрастает, идя под плотину в правую сторону. Но, разумеется, количество протекшей жидкости при таком расположении будет тоже самое, как при течении слева направо, изображенном на фиг. (10). Надо будет только, чтобы напор  $\varphi$  в точке  $B$  в первой задаче был равен разности напоров в точках  $A$  и  $B$  в данной задаче. Определение  $\psi$  по разности напоров в точках  $A$  и  $B$  и данным  $c$  и  $a$  по ур. (22) будет такое же, как определение этой величины по форм. (6).

Полагая для точки  $E$  (фиг. 10)

$$\varphi = 0, \quad \lambda = 0, \quad r = a,$$

найдем:

$$\cos h \frac{\psi}{q} = \frac{a}{c}. \quad (23)$$

С другой стороны для точки  $D$  имеем  $\lambda = \pi$ ,  $r = c$ ,  $\psi = 0$ , и функция  $\varphi$  имеет значение  $\frac{\varphi_0}{2}$ , равное половине разности всего напора, удерживаемого плотиною. Поэтому первая форм. (22) дает для этой точки

$$\cos \frac{\varphi_0}{2q} = -1.$$

Отсюда заключаем, что

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_0}{2q} &= \pi, \\ q &= \frac{\varphi_0}{2\pi}. \end{aligned} \quad (24)$$

Исключая с помощью этой формулы  $q$  из форм. (23), находим:

$$\cos h \frac{2\pi\psi}{\varphi_0} = \frac{a}{c}. \quad (25)$$

Здесь надо выразить  $a$  через величину  $OE = a_0$  и  $c$  через величину  $OA = c_0$ . На основании форм. (21) имеем при  $\lambda = 0$ ,  $r = a$ :

$$a_0 = \alpha^{1/2} a^{1/2}, \quad c_0 = \alpha^{1/2} c^{1/2},$$

откуда

$$a = \frac{a_0^2}{\alpha}, \quad c = \frac{c_0^2}{\alpha}.$$

Подставляя в форм. (25), находим:

$$\cos h \frac{2\pi\psi}{\Phi_0} = \frac{a_0^2}{c_0^2}, \quad (26)$$

где  $2c_0$  на фиг. (10) будет ширина плотины  $AB$ .

Сравниваем форм. (26) с форм. (11), отбросив в форм. (11) величину  $(-1)$ . Видим, что количество воды, протекающей без шпунта, более количества воды, протекающей при шпунте.

Рассмотренный нами случай, полученный из третьей форм. (5) при  $e=0$ , дает нам на фиг. (10)

$$AO = OD = c_0.$$

т.е. соответствует длине шпунта, равной половине ширины плотины. Для получения формулы, выражающей количество протекающей воды при произвольной длине шпунта, надо положить

$$x + yi = \alpha^{1/2} (\xi - e + \eta i)^{1/2}.$$

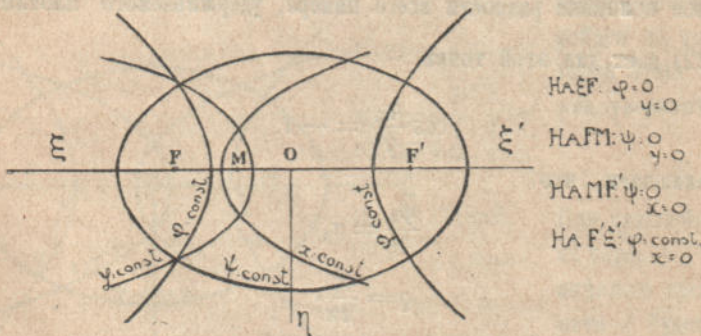
Полагаем

$$\xi - e = \rho \cos \mu, \quad \eta = \rho \sin \mu. \quad (27)$$

Получаем:

$$\begin{aligned} x &= \alpha^{1/2} \rho^{1/2} \cos \frac{\mu}{2}, \\ y &= \alpha^{1/2} \rho^{1/2} \sin \frac{\mu}{2}. \end{aligned} \quad (28)$$

Форм. (28) показывает, что направляющая сеть будет по прежнему состоять из софокусных взаимноортогональных парабол (фиг. 12), только теперь, в силу соотношения



Фиг. 12''

(27), надо будет при наложении направляющей сети на образующую поместить фокус парабол на ось  $O\xi$  в точку  $M$  фиг. (11) на расстояние  $OM=e$  от точки  $O$  и считать  $x$  и  $y$  (форм. 28) от этой точки. Мы принимаем  $e < c$ , так что этот фокус попадает на отрезок  $OF$  фиг. 12''.

Предполагая, что такое наложение сетей друг на друга сделано, пойдем от  $+\infty$  к  $-\infty$  по оси  $\xi\xi'$ . Рассуждая по предыдущему, найдем, что на пути  $\xi F$  будем иметь  $\psi=0, y=0, x$  изменяющийся; на пути  $FM$  будем иметь  $\psi=0, y=0, x$  изменяющимся; при переходе на отрезок  $MF'$  получаем  $\psi=0, x=0, y$  изменяю-

щийся, и наконец на отрезке  $F\xi$  получаем  $\varphi = \text{const}$ ,  $x = 0$ ,  $y$  бесконечно возрастающий. Величина  $\rho$  в форм. (28) представляет расстояние рассматриваемой точки сети (фиг. 14) от  $M$ , а угол  $\mu$  для точек отрезка  $\xi M$  будет равен 0, и для точек отрезка  $M\xi'$  будет равен  $\pi$ . На основании этого форм. (28) дают нам расположение линии тока, изображенное на фиг. (13). Здесь

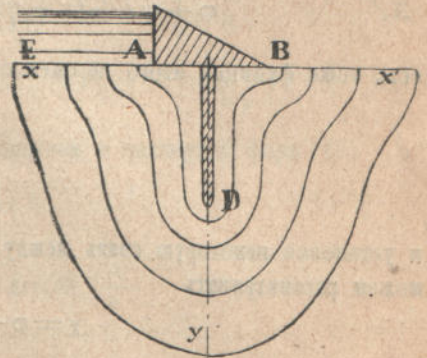
$$\begin{aligned} AM &= \alpha^2 (c - e)^2, \\ MD &= \alpha^{1/2} (c + e)^2. \end{aligned} \quad (29)$$

К полученному течению, заключенному в квадранте  $xMy$ , мы присоединяем симметричное течение, заключенное в квадранте  $yMx'$ , так чтобы скорости на отрезке  $Dy$  были одинаковы по величине и по направлению. Тогда получим все искомое течение, изображенное на фиг. (13). Количество протекающей воды определится по форм. (25), в которой  $a$  и  $c$  надо заменить элементами, взятыми на фиг. 13. Введем обозначения:

$$ME = a_0, \quad MA = c_0, \quad MD = h.$$

На основании форм. (29) и аналогичного выражения для  $a_0$  имеем:

$$\begin{aligned} c_0 &= \alpha^2 (c - e)^2, \\ a_0 &= \alpha^2 (a - e)^2, \\ h &= \alpha^2 (c + e)^2. \\ \frac{1}{\alpha} (a_0^2 - c_0^2) &= a - c, \\ \frac{1}{\alpha} (a_0^2 + h^2) &= a + c, \end{aligned}$$



Фиг. 13.

откуда

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2\alpha} [2a_0^2 - (c_0^2 - h^2)], \\ c &= \frac{1}{2\alpha} (h^2 + c_0^2). \end{aligned} \quad (30)$$

Подставляем выражение (30) в форм. (25). Получаем:

$$\cosh h \frac{2\pi\psi}{\varphi} = \frac{2a_0^2 - c_0^2 + h^2}{h^2 + c_0^2}. \quad (31)$$

При  $h = c$  эта формула обращается в форм. (28); если же  $h$  мало сравнительно с  $c$ , то

$$\frac{2a_0^2 - c_0^2 + h^2}{h^2 + c_0^2} = \frac{\frac{2a_0^2}{c_0^2} - 1 + \frac{h^2}{c_0^2}}{1 + \frac{h^2}{c_0^2}} \approx \frac{2a_0^2}{c_0^2} - 1,$$

и форм. (31) обращается в форм. (11). Увеличение  $\frac{h}{c}$  уменьшает правую часть форм. (31), т. е. увеличение длины шпунта при той же ширине резервуара и плотины уменьшает количество протекающей жидкости. При приближении  $h$  к  $\infty$  вторая часть форм. (31) обращается в 1, и мы получаем  $\psi = 0$ , т. е. плотина жидкость не пропускает.

§ 6. Движение грунтовой воды с образованием поверхности осушения.

В § I разъяснено, что на поверхности осушения  $\varphi = k\gamma y$  есть величина постоянная; вместе с этим эта поверхность должна быть поверхностью тока, т. е. на ней должно быть  $\psi = \text{const}$ . Чтобы отыскать течение, которое ограничено известными поверхностями тока и эквипотенциальными поверхностями и подлежащее определению поверхностью осушения рассмотрим две изотермические ортогональные сети, из которых первая сеть, которую будем называть образующей сетью, состоит из линий

$$\varphi = \text{const} \text{ и } \psi = \text{const},$$

а вторая сеть, которую будем называть направляющей сетью, состоит из линий

$$\varphi - k\gamma y = \text{const}, \quad \psi + k\gamma x = \text{const}.$$

Так как  $\chi = \varphi + \psi i$  есть функция мнимого переменного  $z = x + yi$  и

$$\varphi + \psi i + (x + yi)k\gamma i = \varphi - k\gamma y + (\psi + k\gamma x)i$$

есть тоже функция этого переменного, то, положив

$$\theta_1 = \varphi - k\gamma y, \tag{32}$$

$$\theta_2 = \psi + k\gamma x,$$

и установив некоторую связь между  $z = x + yi$  и мнимым переменным  $u = \xi + \eta i$  можем рассматривать

$$\chi = \varphi + \psi i \text{ и } \theta = \theta_1 + \theta_2 i$$

как функции мнимого переменного  $u$ . Зададим теперь на полуплоскости  $\xi\eta$  выражение  $\chi$  и  $\theta$  в функции от  $u$  в виде форм. (2) и (5) (четвертая формула):

$$\chi = m \int \frac{q du}{\sqrt{(u - c_1)(u - c_2)(u - c_3) h \dots}}, \tag{2}$$

$$\theta = m \int \frac{h du}{\sqrt{(u - b_1)(u - b_2)(u - b_3) \dots}}. \tag{5}$$

Мы будем иметь на отрезке  $c_n c_{n+1}$  оси абсцисс или  $\varphi = \text{const}$ , или  $\psi = \text{const}$ , а на отрезке  $b_n b_n$ , будем иметь  $\theta_1 = \text{const}$ , или  $\theta_2 = \text{const}$ . Если на рассматриваемом отрезке одновременно  $\varphi = \text{const}$  и  $\theta_1 = \text{const}$ , то мы найдем горизонтальную эквипотенциальную поверхность; если же на этом отрезке имеем одновременно  $\psi = \text{const}$  и  $\theta_2 = \text{const}$ , то мы получим вертикальную стенку для поверхности тока; наконец, если на рассматриваемом отрезке  $\psi = \text{const}$  и  $\theta_1 = \text{const}$ , то это будет соответствовать поверхности осушения.

§ 7. Просачивание воды под плотину со шпунтом с образованием поверхности осушения.

Предположим, что стена плотины  $BD$  водонепроницаема. Эта стенка погружена на глубину  $AD$  в водопроницаемый грунт. Вода, находящаяся в резервуаре на глубине  $BA = h$ , проникает сквозь его горизонтальное дно  $CA$ ; потом вода, примы-



кающая к плотине, движется по вертикальной поверхности тока  $BD$  и, устремляясь при точке  $D$  в водопроницаемый грунт, образует поверхность осушения  $DE$ , которая может пересечь земляной край плотины  $BE$  и образовать в точке  $E$  выход воды за плотину.

Построим для этой задачи образующую и направляющую сети. Для первой сети берем в форм. (2) под корнем только один множитель и полагаем  $m = -i$

$$\chi = \varphi + \psi i = -i \int \frac{q du}{(u - c_1)^{\frac{1}{2}}} = -2qi(u - c_1)^{\frac{1}{2}}.$$

Подставляем сюда

$$u - c = r(\cos \lambda + i \sin \lambda).$$

Получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\varphi}{2q} &= r^{\frac{1}{2}} \sin \frac{\lambda}{2}, \\ \frac{\psi}{2q} &= -r^{\frac{1}{2}} \cos \frac{\lambda}{2}. \end{aligned} \quad (33).$$

Это семейство представляет софогусные параболы, имеющие фокус  $F$  на расстоя-

нии  $OF = c_1$ . Для получения направляющей сети полагаем в четвертой форм. (5)

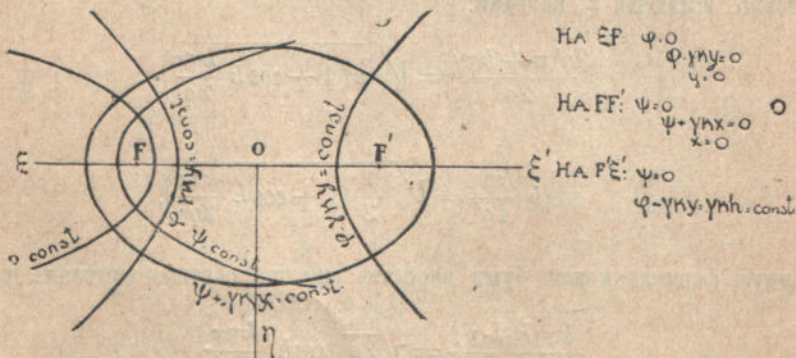
$$-b_1 = b_2 = e.$$

Будем иметь:

$$\theta = - \int \frac{q' du}{\sqrt{e^2 - u^2}} = q' \arccos \frac{u}{e}.$$

Отсюда находим:

$$\begin{aligned} \xi &= e \cos \frac{\varphi - k\gamma y}{2q'} \cos h \frac{\psi + k\gamma x}{2q'}, \\ \eta &= e \sin \frac{\varphi - k\gamma y}{2q'} \sin h \frac{\psi + k\gamma x}{2q'}. \end{aligned} \quad (34).$$



Фиг. 15.

Это будет эллиптическая сеть, построенная (фиг. 15) на фокусном расстоянии  $FF'$ . Предположив ее совмещенною с параболическою сетью так, как представлено на фиг. (15), пойдем по оси  $\xi\xi'$ . На отрезке  $\xi F$  имеем по формуле (34):

$$\eta = 0, \quad \frac{\varphi - k\gamma y}{2q'} = 0,$$

и по форм. (33):

$$\lambda = 0, \quad \varphi = 0;$$

посему  $y = 0$ ; на отрезке  $FF''$  получаем по форм. (34):

$$\eta = 0, \quad \psi + k\gamma x = 0,$$

и, по форм. (33),  $\lambda = \pi$ ,  $\psi = 0$ ; а посему  $x = 0$ ; наконец, на отрезке  $F\xi'$  имеем по форм. (34):

$$\eta = 0, \quad \frac{\varphi - k\gamma y}{2q'} = \pi, \quad \varphi - k\gamma y = 2q' \pi = hk\gamma$$

и, по форм. (33):

$$\lambda = \pi, \quad \psi = 0;$$

посему мы будем иметь  $F\xi'$  поверхность осушения, определяемую по постоянно величине

$$k\gamma h = 2q' \pi. \quad (35)$$

Составим теперь уравнение этой линии осушения  $DE$  (фиг. 14).

Первая форм. (34) дает на отрезке  $F\xi'$

$$\xi = -e \cos h \frac{k\gamma x}{2q'},$$

по первой же форм. (33) находим, обращая внимание на фиг. (15):

$$\frac{\varphi}{2q} = (e - \xi)^{\frac{1}{2}}.$$

Но на отрезке  $F\xi'$

$$\frac{\varphi - k\gamma y}{2q'} = \pi, \quad \varphi = 2q' \pi + k\gamma y;$$

следовательно, исключая  $\xi$ , находим:

$$\frac{2q' \pi + k\gamma y}{2q} = \sqrt{e \left(1 + \cos h \frac{k\gamma x}{2q'}\right)}.$$

Так как

$$\cos h \frac{k\gamma x}{4q'} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \cos h \frac{k\gamma x}{2q'}\right)},$$

то найденную формулу можно будет написать еще так, обращая внимание на форм. (35):

$$\frac{k\gamma(h+y)}{2q} = \sqrt{2e} \cosh \frac{k\gamma x}{4q'}. \quad (36)$$

Входящий сюда параметр  $q'$  определяется по форм. (35):

$$q' = \frac{k\gamma h}{2\pi},$$

что же касается до параметра  $q \sqrt{e}$ , то его мы определяем по высоте шпунта  $AD = H$ .

Подставляя в форм. (36)  $x=0$ ,  $y=H$ , найдем:

$$\frac{2k\gamma(h+H)}{2q} = \sqrt{2e}$$

Следовательно,

$$\frac{h+y}{h+H} = \cosh \frac{k\gamma x}{4q'}$$

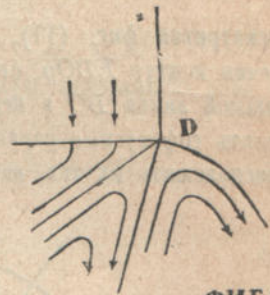
Так как по (35)

$$2q' = \frac{k\gamma h}{\pi},$$

то уравнение кривой осушения представляется в такой простой форме:

$$\frac{h+y}{h+H} = \cosh \frac{\pi x}{2\pi} \quad (37).$$

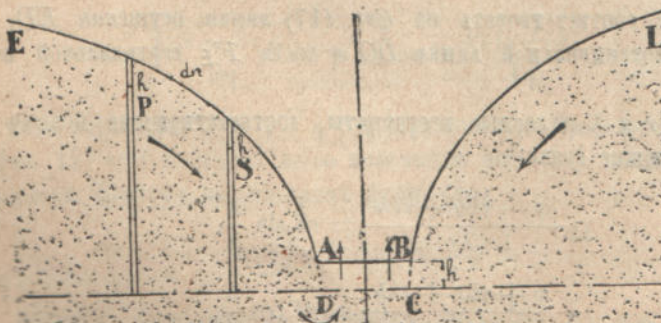
Так как  $\frac{d^2y}{dx^2}$  положителен, то линия осушения располагается к горизонтальной оси  $Ox$  своей вогнутой стороной, как это изображено на фиг. (14). То обстоятельство, что мы считаем координату  $x$  на линии  $DE$  отрицательной, не влияет на форм. (34), так как  $\cosh$  четная функция. В точке  $D$  на фиг. (14) направление скорости движения подпочвенной воды изменяется скачком. Это показывает, что точка  $D$  является критической точкой нулевой скорости, и линии токов возле этой точки расположены так, как представлено на фиг. (16).



ФИГ. 16.

### § 8. Воронка осушения.

Мы рассмотрим эту задачу при течении грунтовой воды в двух измерениях. Предположим, что горизонтальный водосбор отсасывает на единицу своей длины из водоносного слоя количество воды  $2Q$ ; при этом вследствие продолжительности действия водосбора около него в песках водоносного слоя образовалась поверхность осушения.



ФИГ. 17.

Пусть  $ABCD$  фиг. (17) будет живое сечение водосбора, в котором вода вытекает из  $DC$  вверх, а  $ED$  и  $CL$  симметрично расположенные правая и левая поверхность осушения. Согласно сказанному в конце § 1 на поверхностях осушения мы должны иметь

$\varphi - k\gamma y = h k \gamma$ , где согласно нашей фиг. (17)  $y$  есть отрицательная ордината, а  $h$  есть подвешенная волосностью высота. Это можно увидеть и непосредственно на фиг. (17). Жидкость течет от  $E$  к  $D$  под разностью напоров

$$PQ - ST = \frac{d}{dn} (-PQ),$$

так что

$$\frac{\varphi}{k\gamma} = -PQ;$$

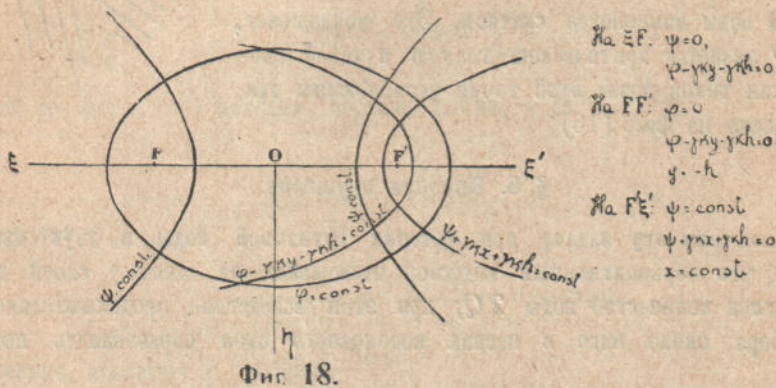
но

$$PQ = (-y) - h;$$

следовательно:

$$-\frac{\varphi}{k\gamma} = -y - h, \quad \varphi - k\gamma y = k\gamma h.$$

Рассматривая фиг. (17), мы будем иметь для половины границы рассматриваемого течения контур  $ED Oy$ , состоящий из линии осушения  $ED$ , горизонтальной эквипотенциальной линии  $DO$  и вертикальной линии тока  $Oy$ . Здесь за направляющую сеть надо принять софокусные параболы, а за образующую сеть софокусные эллипсы и гиперболы и расположить их так, как это представлено на фиг. (18).



Часть  $\xi F$  будет соответствовать на фиг. (17) линии осушения  $ED$ , часть  $FF'$  — горизонтальной эквипотенциальной линии  $DO$  и часть  $F'\xi$  — вертикальной поверхности тока  $Oy$ .

Называя через  $r$  и  $\lambda$  полярные координаты, соответствующие полюсу  $F'$ , устанавливаем нижеследующие связи:

$$\frac{\varphi - \gamma k y - \gamma k h}{2q} = r^2 \sin \frac{\lambda}{2}, \quad (38)$$

$$\frac{\psi + \gamma k x + \gamma k h}{2q} = r^2 \cos \frac{\lambda}{2},$$

$$\xi = e \cos \frac{\psi}{2q'} \cosh \frac{\varphi}{2q'}, \quad (39)$$

$$\eta = e \sin \frac{\psi}{2q'} \sinh \frac{\varphi}{2q'}$$

На отрезке  $\xi F$  будем иметь по форм. (38) при  $\lambda = 0$ ,  $\varphi - \gamma ky = \gamma kh$ ; по форм. (39) при  $\eta = 0$  будем иметь  $\psi = 0$ , что дает нам линию осушения; на отрезке  $FF'$  по форм. (38) будем иметь при  $\lambda = 0$ ,  $\varphi - \gamma ky = \gamma kh$ , а по форм. (39) при  $\eta = 0$ ,  $\varphi = 0$ : следовательно,  $y = -h$ , что дает горизонтальную эквипотенциальную поверхность; наконец, на  $F'\xi'$  при  $\lambda = \pi$  имеем:

$$\psi + \gamma kx + \gamma kh = 0,$$

а по форм. (39) при  $\eta = 0$  имеем:

$$\psi = 2\pi q', \quad (40)$$

откуда

$$x = -\frac{2\pi q' - \gamma kh'}{\gamma k}.$$

При этом, приписывая постоянному  $h'$  значение

$$h' = -\frac{2\pi q'}{\gamma k},$$

найдем  $x = 0$ , т. е. отрезок  $F\xi'$  представит нам вертикальную поверхность тока  $Oy$ .

Составим теперь уравнение линии осушения  $DE$ .

Согласно второй форм. (38) и фиг. (18) имеем при  $\lambda = 0$ ,  $\psi = 0$ :

$$\frac{k\gamma x - 2\pi q'}{2q} = (e + \xi)^{\frac{1}{2}} \quad (41)$$

С другой стороны первая форм. (39) дает при  $\eta = 0$ :

$$\begin{aligned} \psi &= 0, \quad \varphi = k\gamma(y + h), \\ \xi &= e \cos h \frac{k\gamma(y + h)}{2q'}, \end{aligned} \quad (42)$$

Исключаем  $\xi$  из ур. (41) и (42):

$$\frac{k\gamma x - 2\pi q'}{2q} = \sqrt{e \left(1 + \cos h \frac{k\gamma(y + h)}{2q'}\right)},$$

или

$$\frac{k\gamma x - 2q'\pi}{2q} = \sqrt{2e \cosh h \frac{k\gamma(y + h)}{4q'}}. \quad (43)$$

Входящие сюда параметры  $q'$  и  $\sqrt{e} q$  определяются так. Приращение  $\psi$  от точки  $D$  до точки  $O$  (фиг. 17) есть половина всего количества воды  $2Q$ , высасываемого на единицу длины водосбора. Поэтому на основании форм. (40)

$$\psi = 2\pi q' = -Q, \quad 2q' = -\frac{Q}{\pi}.$$

С другой стороны, если ширина водосбора есть  $2b$ , то при  $x = b$  мы должны иметь  $y = -h$ . Посему

$$\begin{aligned} \frac{k\gamma x + Q}{2q} &= \sqrt{2e \cos h \frac{k\gamma(y + h)}{4q'}} = \\ &= \sqrt{2e \cos h \left[ -\frac{\pi k\gamma(y + h)}{2Q} \right]}, \end{aligned}$$

а также

$$\frac{k\gamma b + Q}{2q} = \sqrt{2e}.$$

Разделяем друг на друга эти два равенства:

$$\frac{k\gamma x + Q}{k\gamma b + Q} = \cosh \frac{\pi k\gamma (y' - h)}{2Q}. \quad (44)$$

Это будет уравнение линии осушения  $ED$ , при чем ордината  $y'$  откладывается на фиг. (17) вверх. То обстоятельство, что  $\frac{d^2x}{dy'^2}$  есть положительная величина, показывает что кривая  $ED$  обращена к оси  $Oy$  своею выпуклою стороною, как изображено на фиг. (17). Кривая осушения вполне определяется по ширине водосбора и по количеству  $2Q$  отсасываемой им воды. Решенная здесь задача одинаково относится и к задаче о питании реки водоносным слоем. При этом интересно указать, что, определяя из ур. (44) величину  $y'$  по заданному  $x$ , мы находим глубину колодцев на расстоянии  $x$  от реки.

---



# Труды Гидро модульной Части.

- Выпуск 1. Отчет Гидро модульной Части за 1913 год. Часть I. Организация, программы и методы работ. 1914. Стр. XII+338+49.
- „ 2. Отчет Гидро модульной Части за 1913 г. Часть II. Описание и результаты работ в Туркестане и Закавказье. 1914. Стр. XIX+392+344.
- „ 3. Материалы по изучению гидро модуля, т. I. А. Н. Костяков. Обзор оросительных норм в разных странах. 1914. VII+160.
- „ 4. Приложение к Инструкции по производству гидро модульных исследований. 1914. Стр. 50.
- „ 5. А. Н. Костяков. Гидро модульная часть; предмет, задачи и значение ее работ. 1915. Стр. 39.
- „ 6. А. Н. Костяков. Основные элементы расчета осушительных систем; материалы, программы и методы их изучения. 1916. Стр. VII+403. *Удостоено премии Академии Наук.*
- „ 7. Отчет Гидро модульной Части за 1914 г. Гидро модульные исследования в Европейской России в 1914 г. Стр. 150.
- „ 8. Материалы по изучению водопользования в Туркестане в 1914 году. 1916. Стр. VII+527.
- „ 9. Материалы по изучению оптимального модуля орошения в Туркестане в 1914 году. 1916. Стр. VII+230.
- „ 10. Материалы по изучению водопользования на Кавказе (готовится к печати).
- „ 11. А. Н. Костяков. Диаграммы водопользования (метод построения их). 1918. Стр. 20.
- „ 12. Общий отчет Гидро модульной Части за 1915 год. 1918. Стр. 55.
- „ 13. Материалы по изучению водопользования в Туркестанском крае в 1915 г. (печатается).
- „ 14. С. К. Кондрашев. Водопользование Ширабадской и Сурханской долин Бухарского Ханства. Стр. 49. 1918.
- „ 15. А. Н. Костяков. Основные элементы расчета оросительных систем и их изучение. 1918. Стр. 435+XII.
- „ 16. Н. М. Тулайков. Солонцы, их улучшение и использование. 1922. Стр. 234.
- „ 17. А. Т. Кирсанов. Культура болот. 1918. Стр. 135.
- „ 18. И. И. Касаткин. Усиление влагооборота, как очередная задача народного хозяйства в России. 1921. Стр. 39.
- „ 19. М. А. Боголепов. Наступающее возмущение климата. 1921. Стр. 30.
- „ 20. С. К. Кондрашев. Вода в орошаемом хозяйстве. 1922. Стр. 16.
- „ 21. В. В. Заорская-Александрова и И. Г. Александров. Перспективы развития орошения в Фергане. 1922. Стр. 63.
- „ 22. М. А. Боголепов. Причины неурожаев и голода в России в историческое время. 1922 г. Стр. 40.
- „ 23. К. В. Космачевский. Организация хлопководческих хозяйств на орошаемых землях Туркестана. 1922. Стр. 126.
- „ 24. А. Н. Костяков. Задачи и нужды исследований в области мелиорации в России. 1923. Стр. IV+140.
- „ 25. И. Г. Александров. Регулирование стока. 7. Свп-Дарьи и перспективы орошения в ее бассейне. 1923. Стр. 82.
- „ 26. Е. В. Оппоков. К вопросу о нормах стока для осушительных каналов. 1923. Стр. 40.
- „ 27. И. А. Шаров. Увлажнение и сток. 1923. Стр. 36.
- „ 28. И. А. Шаров. Орошаемое хозяйство Закаспийской области. 1923. Стр. 48.
- „ 29. И. А. Шаров. Опыт выяснения мелиоративных задач уезда (Клинский у., Моск. губ.). 1923. Стр. 80.