

Міністерство освіти і науки України
Національний університет водного господарства та
природокористування
Навчально-науковий інститут автоматики, кібернетики та
обчислювальної техніки
Кафедра комп'ютерних наук та прикладної математики

04-01-53М

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

з навчальної дисципліни
«Методи розв'язування некоректних задач»
для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського)
рівня за освітньо-професійною програмою
«Прикладна математика» спеціальності
113 «Прикладна математика»
денної та заочної форми навчання

Рекомендовано
науково-методичною радою з
якості ННІ АКOT
Протокол № 9
від 30 серпня 2021 р.

Рівне – 2021

Методичні вказівки з навчальної дисципліни «Методи розв'язування некоректних задач» для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня за освітньо-професійною програмою «Прикладна математика» спеціальності 113 «Прикладна математика» денної та заочної форми навчання [Електронне видання] / Бомба А. Я., Бойчура М. В. – Рівне : НУВГП, 2021. – 30 с.

Укладачі: Укладачі: Бомба А. Я., д.т.н., професор кафедри комп'ютерних наук та прикладної математики; Бойчура М. В., к.т.н., молодший науковий співробітник Науково-дослідної частини.

Відповідальний за випуск: Турбал Ю. В., д.т.н., професор, завідувач кафедри комп'ютерних наук та прикладної математики.

Керівник групи забезпечення спеціальності 113 «Прикладна математика»: Прищеп О. В., доцент кафедри комп'ютерних наук та прикладної математики, кандидат фізико-математичних наук, доцент.

© А. Я. Бомба,
М. В. Бойчура, 2021
© НУВГП, 2021

Зміст

Передмова (замість вступу)	4
1. Узагальнення поняття розв'язку, псевдорозв'язок (л. 1-2).....	5
2. Метод регуляризації (л. 3-5)	10
3. Коректність за Адамаром і Тихоновим. Постановки задач, приклади коректно та некоректно поставлених задач (л. 6).....	13
4. Задачі ідентифікації параметрів квазіідеальних полів числовими методами комплексного аналізу (л. 7-8-9)	15
5. Оглядова лекція. Приклади розв'язання типових задач (л. 10, л.з. 1-8)	24
6. Список рекомендованої літератури	30

Передмова (замість вступу)

Даний курс має на меті ознайомити студентів з питаннями дослідження та наближеного розв'язування обернених задач математичної фізики. Основна увага приділяється оберненим задачам реконструкції граничних значень та реконструкції границі у теорії потенціалу. При цьому спершу розглядаються загальні проблеми розв'язування некоректних задач на операторному рівні. Далі вивчені методи застосовуються. При цьому, основний акцент ставиться на вивченні основних принципів розв'язування нестійких задач (головним чином – за А. Адамаром), зокрема задач електричної томографії. Також ставиться більш загальна мета – знайомство зі станом питання в одному з найбільш перспективних напрямків сучасної математики, пов'язаним з розв'язком некоректних задач, що, в свою чергу, дає можливість аналізувати процеси та явища в галузях майбутньої діяльності студентів як фахівців.

Головним завданням курсу є ознайомлення студентів із нелінійними некоректними оберненими задачами математичної фізики, чисельними методами їх розв'язування та рекомендаціями щодо використання, а також розглянути основні методи розв'язання некоректних задач; продемонструвати застосування теоретичних відомостей до розв'язку практичних задач, зокрема, задач томографії прикладених потенціалів.

У результаті вивчення навчальної дисципліни студент повинен знати: основні методи регуляризації некоректних задач; ідеї класичних методів ідентифікації; основні типи некоректних задач та методи їх розв'язання, які розглядаються в вивченому курсі; методи регуляризації побудови наближених розв'язків некоректно поставлених задач та вміти: складати план ідентифікації; обирати та застосовувати методи ідентифікації в залежності від природи поставленої оберненої коефіцієнтної задачі; застосовувати регуляризуючі методи для лінійних і нелінійних обернених задач; використовувати здобуті знання для розв'язування некоректних задач; наводити приклади використання різних методів при розв'язанні задач; будувати математичні моделі, які мають деякі похибки.

При вивченні курсу використовуватимуться досягнення наукової школи НУВГП «Математичне та комп'ютерне моделювання керованих нелінійних процесів», результати виконання

держбюджетних наукових тем: «Розвиток методів комплексного аналізу і теорії збурень моделювання нелінійних процесів з керуванням, ідентифікацією та оптимізацією», «Математичне та комп'ютерне моделювання техногенних керованих процесів в пористих середовищах з бар'єрами за умов ідентифікації».

Взагалі дане видання представлятиме деяку збірку-мінімум основних фактів з теорії та методів розв'язання некоректно поставлених задач. А для здобуття більш повного обсягу знань автори даного посібника посилають студентів, в першу чергу, до підручника *Охріменко М. Г., Фартушиний І. Д., Кулик А. Б. Некоректно поставлені задачі та методи їх розв'язування: підручник. Київ : «Політехніка», 2016. 225 с.* та монографії *Бомба А. Я., Бойчура М. В. Методи комплексного аналізу в задачах ідентифікації: монографія. Рівне : НУВГП, 2020. 188 с.*

Зазначимо, що даний курс є основою для курсу «Методи ідентифікації», що планується для магістрів спеціальності «Прикладна математика».

Зауваження: в кінці назв кожного з підрозділів в дужках зазначено нумерацію відповідних лекцій. В кінці останнього розділу наведені приклади розв'язання базових задач.

1. Узагальнення поняття розв'язку, псевдорозв'язок (л. 1-2)

Ключові слова: матриця, визначник, системи лінійних алгебраїчних рівнянь, норми векторів та матриць, методи розв'язання СЛАР (зокрема, ітераційні методи, метод Гаусса-Зейделя), міра коректності (обумовленості матриці); аналіз похибок обчислень (випадок близькості до нуля визначника системи), малі за модулем власні значення, наявність великих елементів в оберненій матриці, необхідність узагальнення поняття розв'язку, псевдорозв'язок

1.1. Вивчення даного курсу почнемо із такого важливого поняття, як погано обумовлені системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР). Такі системи представлятимемо у вигляді:

$$Ax = b, \quad (1.1)$$

$$\text{де } A = (a_{i,j})_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

відповідно A – матриця розмірності $m \times n$, b – вектор-стовпець вільних членів, x – вектор-стовпець-розв’язок (при цьому, $(x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n) = x^T$ – транспонований вектор x).

При цьому, міру близькості векторів та матриць характеризуватимемо їх нормами. Пригадаємо, що формально нормою вектора x [1] називають невід’ємне число $\|x\|$, що задовольняє умови:

- 1* $\|x\| > 0$, якщо $x \neq 0$ і $\|0\| = 0$;
- 2* $\|cx\| = |c| \cdot \|x\| \quad \forall c \in \mathbf{R}$;
- 3* $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ («нерівність трикутника»).

Прикладами норми вектора є:

- 1 \wedge $\|x\|_I = \max_{i=1, \dots, n} |x_i|$;
- 2 \wedge $\|x\|_{II} = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$;
- 3 \wedge $\|x\|_{III} = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2} = \sqrt{(x, x)}$.

Аналогічно вводиться поняття норми матриці, як невід’ємного числа $\|A\|$, що задовольняє умови:

- 1* $\|A\| > 0$, якщо $A \neq 0$ і $\|0\| = 0$, якщо $A \equiv 0$;
- 2* $\|cA\| = |c| \cdot \|A\| \quad \forall c \in \mathbf{R}$;
- 3* $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$;
- 4* $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$.

Прикладами норм матриць є:

- 1 \wedge $\|A\|_I = \max_{i=1, \dots, m} \sum_{k=1}^n |x_{i,k}|$;
- 2 \wedge $\|A\|_{II} = \max_{i=1, \dots, n} \sum_{k=1}^m |x_{i,k}|$;
- 3 \wedge $\|A\|_{III} = \sqrt{\lambda_{\max}}$;
- 4 \wedge $\|A\|_{IV} = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{m,n} |a_{i,j}|^2}$,

де λ_{\max} – найбільше власне число матриці $A^T A$ (A^T – транспонована до A матриця).

СЛАР називатимемо сумісною, якщо вона має хоча б 1 розв'язок, визначеною, якщо вона має єдиний розв'язок, і невизначеною, якщо вона має більше одного розв'язку (нескінчену кількість розв'язків).

Пропонуємо студентам систематизувати знання з методів розв'язання СЛАР згідно [1] в послідовності: методи Гауса, простої ітерації, Гауса-Зейделя тощо. В результаті відповідного аналізу приходимо до висновку, що зустрічаються випадки, коли малі похибки (які можуть виникати при вимірюванні, обчисленні, заокругленні елементів матриць або правих частин при заданні коефіцієнтів) призводять до великих похибок в розв'язку. Такі СЛАР називають некоректно поставленими (погано обумовленими). Природньо, що виникає проблема розв'язку таких погано обумовлених задач.

1.2. Числом обумовленості (мірою коректності) $\mu(A)$ матриці A назвемо число

$$\mu(A) = \max_{x \neq 0, \xi \neq 0} \left[\frac{\|Ax\| \cdot \|\xi\|}{\|A\xi\| \cdot \|x\|} \right] = \left[\frac{\max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}}{\max_{\xi \neq 0} \frac{\|A\xi\|}{\|\xi\|}} \right] = \sqrt{\frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\min}}},$$

де σ_{\max} , σ_{\min} – максимальне та мінімальне власне значення матриці $A^T A$. Легко бачити, що: $\mu(A) \geq 1$ (лише $\mu(E) = 1$, де E –

одичина матриця); $\mu(cA) = \mu(A)$ ($\forall c \in \mathbf{R}$); $\mu(A) = \frac{\max |d_{i,i}|}{\min |d_{i,i}|}$,

якщо A – діагональна матриця; $\mu(A) = \mu(A^{-1})$; $\mu(A) = \infty$, якщо A – вироджена матриця.

Величина $\mu(A)$ відіграє велику роль в оцінці похибки при збуренні вихідних даних системи (1.1) (див. §7 в [1]). В залежності від цієї величини дану матрицю (систему) називатимемо добре обумовленою, погано обумовленою тощо. Прикладом дуже погано обумовленої матриці є, наприклад, матриця Гільберта (див. §6 в

[1]).

Прикладами великих похибок можуть бути наступні:

1) не вірна організація обчислень, наприклад, якщо розв'язувати систему

$$\begin{cases} 0.0001x_1 + 0.5x_2 = 0.5, \\ 0.4x_1 - 0.3x_2 = 0.1 \end{cases}$$

(розв'язком, заокругленим до чотирьох вірних знаків, якої є $x_1 = 0.9999$, $x_2 = 0.9998$) методом Гаусса, виключаючи невідоме x_1 з другого рівняння і заокруглюючи до чотирьох знаків, одержимо $x_2 = 1$, $x_1 = 0$;

2) близькість до нуля визначника системи, наприклад,

$$\begin{cases} 3x_1 - 7.0001x_2 = 0.9998, \\ 3x_1 - 7x_2 = 1 \end{cases} \quad (\text{єдиний розв'язок системи } x_1 = 5, x_2 = 0),$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 7x_2 = 0.9999, \\ 3x_1 - 7x_2 = 1 \end{cases} \quad (\text{система несумісна}),$$

$$\begin{cases} 6x_1 - 14x_2 = 2, \\ 3x_1 - 7x_2 = 1 \end{cases} \quad (\text{система має безліч розв'язків}).$$

Також погано обумовленими є системи, квадратичні матриці яких мають малі за модулем власні значення (в цьому випадку кажуть, що розв'язок «розхитується» в напрямку в напрямку власних векторів, які відповідають малим власним значенням). Пригадаємо, що власні значення одержують в результаті розв'язання рівняння

$$\det(A - \lambda E) = 0.$$

Поганій обумовленості даної матриці «сприяє» наявність великих елементів у відповідній оберненій матриці. При цьому, обернену матрицю A^{-1} називатимемо нестійкою, якщо малим збуренням елементів даної матриці A відповідають великі зміни елементів A^{-1} .

1.3. Величину \bar{x} , яка реалізує мінімум нев'язки

$$\|A\bar{x} - b\|^2 = \min_x \left\{ \|A\bar{x} - b\|^2 : x \in Rn \right\}, \quad (^\circ)$$

називатимемо узагальненим розв'язком (1.1) в сенсі методу найменших квадратів. Легко бачити, що \bar{x} задовольняє системі

рівнянь

$$A^T A \bar{x} = A^T \bar{b}. \quad (*)$$

Через X позначимо множину розв'язків даної системи (*), а, отже, (°).

Задавши деякий фіксований вектор x^0 (називатимемо його пробним) розглянемо задачу на мінімум

$$\min \left\{ \|x - x^0\|^2 : x \in \bar{X} \right\}. \quad (°*)$$

Розв'язок її \tilde{x} (легко бачити, що він існує і єдиний) назвемо псевдорозв'язком задачі (1.1). В [1] проілюстровано, що псевдорозв'язок нестійкий відносно збурення елементів матриці (див. приклад 9.1, §9).

2. Метод регуляризації (л. 3-5)

Ключові слова: метод регуляризації Тихонова та його застосування, способи вибору параметра регуляризації, різні регуляризуючі методи та алгоритми; регуляризуючі методи квазірозв'язків та нев'язки

Метод регуляризації (Тихонова) стосовно розв'язання некоректно поставлених задач на початку проілюструємо на прикладі розв'язання погано обумовлених систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

Для отримання стійкого розв'язку СЛАР $Ax = b$ з погано обумовленою матрицею A (великим числом її обумовленості) скористаємось з ідеєю Тихонова для отримання наближеного розв'язку x_α , так званого, регуляризуючого нормального рівняння $(A^T A + \alpha E)x_\alpha = A^T b$, де $\alpha > 0$ – регуляризуючий параметр, отриманий тим чи іншим методом. В [1] §10 описаний один із варіантів відшукування оптимального значення такого параметра, в літературі також описаний, так званий, метод L -кривої його знаходження.

В даному підрозділі наведемо декілька прикладів розв'язання погано обумовлених систем з використанням принципу регуляризації, описаного в [1] §10.

Приклад 1. Знайти псевдорозв'язок СЛАР (за умови, що $(x^*, y^*) = (0, 0)$)
$$\begin{cases} 3x_1 - 7x_2 = 0.9999, \\ 3x_1 - 7x_2 = 1, \end{cases}$$
 яка, очевидно, є несумісною (розв'язок в звичайному сенсі не існує).

Розв'язання. Маємо: $A = \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ 3 & -7 \end{bmatrix}$, $A^T = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -7 & -7 \end{bmatrix}$,
 $A^T A = \begin{bmatrix} 18 & -42 \\ -42 & 98 \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} 0.9999 \\ 1 \end{bmatrix}$, $A^T \vec{b} = \begin{bmatrix} 5.9997 \\ -13.9996 \end{bmatrix}$.

В розгорнутій формі система $A^T Ax = A^T b$ є невизначеною (друге рівняння одержується з першого множенням на $-7/3$) і має вигляд

$$\begin{cases} 18x_1 - 42x_2 = 5.9997, \\ -42x_1 + 98x_2 = -13.9993. \end{cases}$$

Її розв'язок $\left(x_1, \frac{18x_1 - 5.9997}{42}\right)$. Тоді, очевидно, мінімальну відстань від точки $(0,0)$ до відповідної прямої знайдемо як мінімум функціоналу $\left(x_1^2 + \left(\frac{18x_1 - 5.9997}{42}\right)^2\right)$. В результаті прирівнювання до нуля похідної від даного виразу та розв'язання відповідного рівняння приходимо до знаходження координат $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ цієї прямої до точки $(0,0)$ з округленням до чотирьох знаків, а саме: $\tilde{x}_1 \approx 0.05172$, $\tilde{x}_2 \approx -0.12068$.

1.1. Тепер розглянемо деяку наближену систему (стосовно вихідної)

$$A_h \mathbf{x} = \mathbf{b}_\delta,$$

$$\text{де } A_h = \begin{bmatrix} 3 & -7.0001 \\ 3 & -7 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_\delta = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \|\mathbf{b}_\delta - \mathbf{b}\| = 0.0001, \quad \delta = 0.0001,$$

$h = 0.0001$, тобто систему

$$\begin{cases} 3x_1 - 7.0001x_2 = 1, \\ 3x_1 - 7x_2 = 1. \end{cases}$$

Вибираючи параметр регуляризації аналогічно до §10 (1), а саме:

$$\alpha = \sqrt{\delta} = \sqrt{h} = 0.01, \quad \text{відповідну систему } (A_h^T A_h + \alpha E) \mathbf{x} = A_h^T \mathbf{b}_h$$

$$\text{представимо у вигляді } \begin{cases} 18.01x_1 - 42.0003x_2 = 6, \\ -42.0003x_1 + 98.0114x_2 = -14.0001. \end{cases} \quad \text{Вона}$$

має єдиний розв'язок $\tilde{\mathbf{x}} = (x_1^\alpha, x_2^\alpha)^T = (0.0511719, -0.11938)^T$, що апроксимує одержаний псевдорозв'язок $\tilde{\mathbf{x}}$ (з точністю до трьох вірних знаків).

1.2. У випадку такої наближеної системи

$$\begin{cases} 3x_1 - 7.0001x_2 = 0.9998, \\ 3x_1 - 7x_2 = 1 \end{cases} \quad \text{та} \quad \alpha = 0.01 \quad \text{одержимо}$$

$$\tilde{\mathbf{x}} = (x_1^\alpha, x_2^\alpha)^T = (0.04546, -0.123347)^T. \quad \text{Оскільки тут } \delta = \varepsilon = 0.0002,$$

$h = 0.0001 < \varepsilon$, $\alpha = \sqrt{\varepsilon}$, то матимемо точність $\approx \sqrt{\varepsilon} = 0.014$ (дещо гірша в порівнянні з попереднім випадком).

Приклад 2. Розглянемо знову несумісну систему (що не має звичайного єдиного розв'язку)

$$\begin{cases} x_1 + 0x_2 = 1, \\ 0x_1 + 0x_2 = 1. \end{cases}$$

Наближену систему виберемо у вигляді

$$\begin{cases} x_1 + 0x_2 = 1, \\ 0x_1 + \varepsilon x_2 = 1, \end{cases}$$

тобто $A_\varepsilon = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{bmatrix}$, $b_\delta = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, звідси $A_\varepsilon^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{bmatrix}$, $A_\varepsilon^T A_\varepsilon = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon^2 \end{bmatrix}$,

$A_\varepsilon^T \bar{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ \varepsilon \end{bmatrix}$. Звідси маємо відповідну систему

$$\begin{cases} (1 + \alpha)x_1 + 0x_2 = 1, \\ 0x_1 + (\varepsilon^2 + \alpha)x_2 = \varepsilon, \end{cases}$$

а її розв'язок при $\alpha = \sqrt{\varepsilon}$: $x^{\approx\sqrt{\varepsilon}} = \left(\frac{1}{1 + \sqrt{\varepsilon}}, \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\varepsilon^{3/2} + 1} \right)^T$. Бачимо, що

похибка

$$\begin{aligned} \|\tilde{x} - x^{\approx\sqrt{\varepsilon}}\| &= \sqrt{(\tilde{x}_1 - x_1^{\approx\sqrt{\varepsilon}})^2 + (\tilde{x}_2 - x_2^{\approx\sqrt{\varepsilon}})^2} = \\ &= \sqrt{\frac{\varepsilon}{(1 + \sqrt{\varepsilon})^2} + \frac{\varepsilon}{(\varepsilon^{3/2} + 1)^2}} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$.

3. Коректність за Адамаром і Тихоновим.

Постановки задач, приклади коректно та некоректно поставлених задач (л. 6)

Задача вважається коректною за Адамаром, якщо: її розв'язок існує; єдиний; стійкий (тобто неперервно залежить від вихідних даних задачі), або, іншими словами, образно «нестрого» кажучи, малим збуренням вихідних даних відповідають малі відхилення в розв'язку. Прикладами коректно поставлених задач, наприклад, є:

- 1) задача знаходження розв'язку СЛАР у випадку суттєво відмінного від нуля визначника (у випадку досить близьких до нуля визначників можуть виникати, як ми бачили у попередніх розділах, «комп'ютерні проблеми» стосовно існування розв'язку, єдиності та стійкості);
- 2) класичні задачі Коші, Діріхле, Неймана, різні змішані задачі, що обґрунтовані в курсах звичайних диференціальних рівнянь, рівнянь математичної фізики тощо.

В якості некоректно поставленої задачі наведемо знаменитий приклад Адамара: розглядається наступна задача Коші для рівняння Лапласа:

$$u_{tt}(x,t) = -u_{xx}(x,t), \quad t > 0;$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = \frac{1}{k} \sin kx.$$

Легко бачити, що її розв'язком є функція:

$$u_k(x,t) = \frac{\operatorname{sh} kt}{k^2} \sin kx.$$

Бачимо, що при $k \rightarrow +\infty$ вираз $\frac{1}{k} \sin kx \rightarrow 0$ (по x); отже, розв'язок також повинен прямувати до нуля. Однак, у загальному випадку, коли $x \neq \pi n$, $n = 0, \pm 1, \dots$, $u_k(x,t)$ не прямує до нуля при $k \rightarrow +\infty$. Тому, неперервної залежності від початкових умов немає, і відповідно, задача поставлена некоректно.

Прикладами некоректно поставлених також є переважна більшість задач геології (електрорезистивної томографії тощо), взагалі задач томографії. Означення, запропоноване Адамаром надто звужує клас коректно поставлених задач, є недостатньо природнім, практичним. Виникає необхідність вводити більш «розпливчаті», «ширші» поняття, зокрема, поняття умовно

коректних задач, «квазікоректних» тощо. Одним із таких узагальнень є означення коректно поставлених задач за Тихоновим. Суттєвим тут моментом є введення, так званого, поняття множини коректності. Умови коректно поставленої задачі за А. М. Тихоновим

- 1) розв'язок задачі існує на множині коректності;
- 2) розв'язок задачі єдиний;
- 3) малим змінам даних задачі відповідають малі зміни розв'язку на множині коректності.

Очевидно, що із коректності за Адамаром випливає коректність за Тихоновим, але зворотнє твердження є неправильним. Наведемо приклади задач, некоректно поставлених за Адамаром, але коректно поставлених за Тихоновим.

Особливе місце розроблені методи набувають при розв'язанні, так званих, обернених задач геоелектрики [11]. Обернені задачі геофізики полягають, зокрема, у визначенні характеру середовища (ідентифікації його параметрів) за даними геофізичних полів. Особливістю таких задач є те, що спостереження відповідних ефектів часто носить інтегральний характер (тобто є деяким сумарним ефектом від усіх другорядних ефектів джерел полів, що виникають в результаті наявностей неоднорідностей середовища). У результаті, поле, що спостерігається є малочуттєвим навіть до великих змін характеристик середовища, якщо, наприклад, ці зміни такі, що їх впливи на поле компенсують одне одного. Це означає, що існують середовища з характеристиками (зокрема, провідностями), що сильно відрізняються одне від одного, яким відповідають близькі геофізичні поля, тобто обернені задачі геофізики є нестійкими. Так як поля завжди вимірюються з деякою похибкою, то виникає проблема визначення наближеного розв'язку оберненої задачі, близького до істинного. Ігнорування ж нестійкості оберненої задачі може привести до неправильних результатів при інтерпретації геофізичних даних. Такого роду проблеми вивчені в математичній теорії регуляризації прямих та обернених некоректно поставлених задач, результати якої широко використовується чи не в усіх областях сучасної фізики. Основні положення теорії регуляризації були розроблені А. М. Тихоновим [5, 8].

4. Задачі ідентифікації параметрів квазіідеальних полів числовими методами комплексного аналізу (л. 7-8-9)

4.1. Загальна (описова) постановка задачі з точки зору математичної фізики.

Задачі ідентифікації параметрів квазіідеальних полів з точки зору математичної фізики полягають в знаходженні коефіцієнта провідності $\sigma = \sigma(x, y, \varphi, \varphi'_x, \dots)$ та розв'язків рівняння (4.1) за всеможливих умов Діріхле-Неймана (4.2) (більш точну постановку такої задачі можна знайти в [4])

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\sigma(x, y, \varphi, \mathbf{grad} \varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\sigma(x, y, \varphi, \mathbf{grad} \varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = 0; \quad (4.1)$$

$$\varphi(M)|_{\partial G} = f(M), \quad \sigma \frac{\partial \varphi(M)}{\partial n} \Big|_{\partial G} = g_f(M); \quad (4.2)$$

$$f \in \{f(M)\} \longleftrightarrow g_f \in \{g_f(M)\},$$

де $\sigma = \sigma(x, y, \varphi, \varphi'_x, \dots)$ – шуканий коефіцієнт провідності, $\varphi = \varphi(x, y)$ – квазіпотенціал в точці (x, y) , M – біжуча точка границі, \vec{n} – зовнішня нормаль, $f(M)$ і $g_f(M)$ – наперед задані функції (f – задає розподіл квазіпотенціалу, $g_f(M)$ – відповідна локальна швидкість).

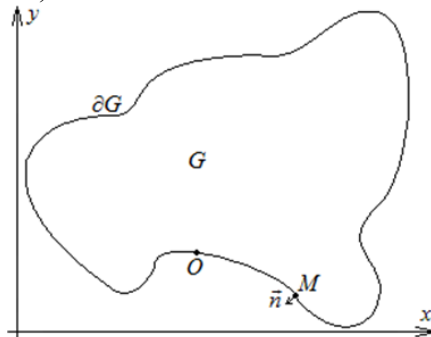


Рис. 4.1. Область дослідження

4.2. Загальна постановка задачі з точки зору комплексного аналізу

Задачі електроімпедансної томографії прийнято будувати на припущенні, що сила струму вздовж ділянок контакту електрода з

тілом є сталою (див., напр., [9]). Проте заслуговує на існування підхід, при якому «відсутнє» таке спрощення (що, тим самим, забезпечує більшу математичну відповідність, а отже – певний вигреш в ітераційному процесі реконструкції). Зокрема, пропонується проводити розрахунок поверхонь густин струму (швидкостей) із застосуванням числових методів квазіконформних відображень, ефективність і здатність вирішення різного роду задач якого була неодноразово доведена (див. підрозділ 1.2, [10]). Він, на відміну від досить точних, але хоч і «повільних» методів, а також недуже точних, але «швидких» методів, є, в певному сенсі, «золотою серединкою». Окрім цього, особливості числових методів квазіконформних відображень дозволяють уникати застосування «ортогоналізуючої» (і ресурсоємної) складової задач аналізу та забезпечують можливість реалізації нового підходу до реконструкції зображення, при якому крок ідентифікації коефіцієнта провідності проводиться із застосуванням математичних особливостей методу побудови поля швидкостей. Більше того, немає потреби виконання обернення матриць, що, в багатьох випадках, дозволяє уникати ресурсоємної процедури регуляризації. Все це в комплексі ще більше пришвидшує виконання загального алгоритму. Тому на даному початковому етапі при проектуванні реконструкції зображення методами імпедансної томографії доцільно використовувати математичні моделі, що мають місце в геології, промисловості, частково в медицині (зокрема коли за рахунок малих частот струму реактивною складовою можна знехтувати) та в деяких класах задач інших сфер (зокрема, в гідродинаміці), з екстраполяцією на більш складні моделі у перспективі.

Відповідно до цього, для початку, в якості об'єкта дослідження розглядається гладке суцільне електро- чи гідропроникне тіло одиначної висоти. Тобто маємо однозв'язну криволінійну плоску область G_z , обмежену гладкою замкненою кривою $\partial G_z = \{z = (x, y) : x = \tilde{x}(\tau), y = \tilde{y}(\tau), \tilde{x}(0) = \tilde{x}(2\pi) = \tilde{x}_0, \tilde{y}(0) = \tilde{y}(2\pi) = \tilde{y}_0, \text{ де } \tilde{x}(\tau), \tilde{y}(\tau) - \text{визначені неперервно диференційовані функції, } O(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0) - \text{ задана початкова точка відліку, параметр } \tau \in [0, 2\pi]\}$ (рис. 4.2, а). Вважаємо, що відповідно поле є квазіідеальним, а отже, рух всередині нього

здійснюється за законами типу Ома, Дарсі тощо $\vec{j} = \sigma \text{grad} \varphi$ [1, 2, 3, 9], де $\varphi^{(p)} = \varphi^{(p)}(x, y)$ – квазіпотенціал поля, $\sigma = \sigma(x, y)$ – коефіцієнт провідності, $\vec{j}^{(p)} = (\mathbf{j}_x^{(p)}(x, y), \mathbf{j}_y^{(p)}(x, y))$ – густина (локальна швидкість) струму. Відповідна задача томографії прикладених квазіпотенціалів передбачає відшукування коефіцієнта провідності за заданою серією замірів характеристик поля на ∂G_z .

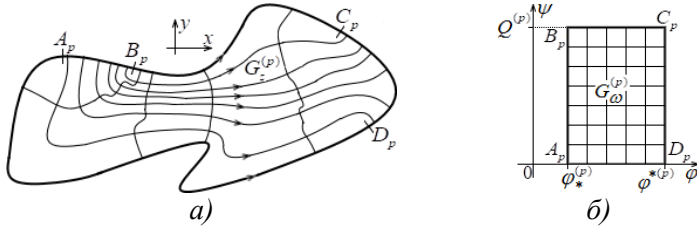


Рис. 4.2. Типова гідродинамічна сітка (а) і відповідна область комплексного квазіпотенціалу (б)

На практиці у найпростіших випадках повну процедуру томографічних досліджень доцільно здійснювати наступним чином [9]. Шляхом пропускання частинок через ділянку $A_p B_p$, їх переміщень (за рахунок різниці потенціалів) в тілі та в процесі виходу через $C_p D_p$ і одночасного заміру характеристик поля на межі досліджуваного об'єкта здійснюється формування граничних умов виду $\varphi|_{A_p B_p} = \varphi_*^{(p)}$, $\varphi|_{C_p D_p} = \varphi^{*(p)}$ ($\varphi^{*(p)} - \varphi_*^{(p)} > 0$, $\varphi_*^{(p)}$, $\varphi^{*(p)}$

– прикладені квазіпотенціали) і $\varphi^{(p)}(M)|_{B_p C_p} = \bar{\varphi}^{(p)}(M)$,

$$\varphi^{(p)}(M)|_{A_p D_p} = \underline{\varphi}^{(p)}(M), \quad \sigma \frac{\partial \varphi^{(p)}(M)}{\partial n} \Big|_{A_p B_p} = \Psi_*^{(p)}(M),$$

$$\sigma \frac{\partial \varphi^{(p)}(M)}{\partial n} \Big|_{C_p D_p} = \Psi^{*(p)}(M) \text{ (додаткові умови) [2, 3, 9]. Тут } B_p C_p$$

та $A_p D_p$ – непроникні лінії течії, індекс $p = 1, 2, \dots$ називатимемо

номером інжекції [2, 3], функції $\bar{\varphi}^{(p)}(M) = \bar{\varphi}^{(p)}(\tau, \dots)$

$$(\tau_C^{(p)} \leq \tau \leq \tau_B^{(p)}), \quad \underline{\varphi}^{(p)}(M) = \underline{\varphi}^{(p)}(\tau, \dots) \quad (\tau_A^{(p)} \leq \tau \leq \tau_D^{(p)}),$$

$\Psi_*^{(p)}(M) = \Psi_*^{(p)}(\tau, \dots) \quad (\tau_B^{(p)} \leq \tau \leq \tau_A^{(p)}), \quad \Psi^{*(p)}(M) = \Psi^{*(p)}(\tau, \dots)$
 $(\tau_D^{(p)} \leq \tau \leq \tau_C^{(p)})$ як і в [3] можуть бути побудовані шляхом
інтерполювання експериментально отриманих їх значень $\bar{\varphi}_{\bar{i}}^{(p)}$,
 $\underline{\varphi}_{\underline{i}}^{(p)}$, $\Psi_{*j_*}^{(p)}$, $\Psi_{j^*}^{*(p)}$ при деяких $\tau = \bar{\tau}_{\bar{i}}^{(p)}$, $\tau = \underline{\tau}_{\underline{i}}^{(p)}$, $\tau = \tau_{*j_*}^{(p)}$,
 $\tau = \tau_{j^*}^{*(p)}$ на ділянках $B_p C_p$, $A_p D_p$, $A_p B_p$, $C_p D_p$, відповідно. У
сукупності із законом руху $\vec{j}^{(p)} = \sigma \text{grad} \varphi^{(p)}$, заданням структури
функції $\sigma = \sigma(x, y, \varphi, \varphi'_n)$, умовами непроникності
 $\left. \frac{\partial \varphi^{(p)}}{\partial n} \right|_{B_p C_p} = \left. \frac{\partial \varphi^{(p)}}{\partial n} \right|_{A_p D_p} = 0$ та, при необхідності, умовами

«склеювання» [3], отримується остаточна постановка задачі томографії прикладених квазіпотенціалів [2, 3, 4, 9].

Згідно ідеї методу квазіконформних відображень [10], вводяться
функції течії $\psi^{(p)}(x, y)$, комплексно спряжені до $\varphi^{(p)}(x, y)$
 $(p = \overline{1, \tilde{p}})$. Це забезпечує можливість зведення вихідної задачі до
задачі на квазіконформні відображення фізичних областей $G_z^{(p)}$
(рис. 4.2, а) на відповідні області комплексного квазіпотенціалу
 $G_\omega^{(p)}$ (рис. 4.2, б) у вигляді:

$$\sigma \frac{\partial \varphi^{(p)}}{\partial x} = \frac{\partial \psi^{(p)}}{\partial y}, \quad \sigma \frac{\partial \varphi^{(p)}}{\partial y} = -\frac{\partial \psi^{(p)}}{\partial x};$$

$$\varphi^{(p)} \Big|_{A_p B_p} = \varphi_*^{(p)}, \quad \varphi^{(p)} \Big|_{C_p D_p} = \varphi^{*(p)}, \quad \psi^{(p)} \Big|_{A_p D_p} = 0, \quad \psi^{(p)} \Big|_{B_p C_p} = Q^{(p)};$$

$$\int_{MN} \sigma \frac{\partial \varphi^{(p)}}{\partial n} dl = Q^{(p)}, \quad M \in B_p C_p, N \in A_p D_p;$$

$$\varphi^{(p)}(M) \Big|_{B_p C_p} = \bar{\varphi}^{(p)}(M), \quad \varphi^{(p)}(M) \Big|_{A_p D_p} = \underline{\varphi}^{(p)}(M),$$

$$\psi^{(p)}(M) \Big|_{A_p B_p} = \psi_*^{(p)}(M), \quad \psi^{(p)}(M) \Big|_{C_p D_p} = \psi^{*(p)}(M),$$

при (за необхідності) заданих умовах «склеювання» [3], де $G_\omega^{(p)} = \{(\varphi, \psi) : \varphi_*^{(p)} \leq \varphi \leq \varphi^{*(p)}, 0 \leq \psi \leq Q^{(p)}\}$; $Q^{(p)}$ – потоки векторного поля через контактні поверхні, $\psi_*^{(p)}(M) = \int_{A_p M} \Psi_*^{(p)}(M) dl$, $\psi^{*(p)}(M) = \int_{D_p M} \Psi^{*(p)}(M) dl$; dl – елемент дуги відповідної кривої. Тут шуканими є функції $\sigma = \sigma(x, y, \varphi, \varphi'_n)$ та $\varphi^{(p)}(x, y)$, $\psi^{(p)}(x, y)$ для кожної з інжекцій ($p = \overline{1, \tilde{p}}$).

4.3. Обернена задача томографії прикладених квазіпотенціалів (на відображення $G_\omega \rightarrow G_z$)

Розглянемо (як і в п. 4.2) квазіідеальні процеси руху частинок (зокрема, електричних зарядів) в однозв'язній криволінійній області (пластинці, томографічному перерізі тощо) G_z (рис. 4.2, а), обмеженій гладкою замкненою кривою $\partial G_z = \{(x, y) : x = \tilde{x}(\tau), y = \tilde{y}(\tau), 0 \leq \tau \leq 2\pi, \tilde{x}(0) = \tilde{x}(2\pi) = \tilde{x}_0, \tilde{y}(0) = \tilde{y}(2\pi) = \tilde{y}_0, \partial e \tilde{x}(\tau), \tilde{y}(\tau) \text{ – визначені неперервно диференційовані функції, } O(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0) \text{ – задана початкова точка відліку}\}$.

Припускаємо, що переміщення електричних зарядів в області G_z проходить за лінійним законом типу Ома, Дарсі тощо $\vec{j}^{(p)} = \sigma \text{grad} \varphi^{(p)}$ при умовах: $\text{div} \vec{j}^{(p)} = 0$ (неперервності), $\varphi|_{A_p B_p} = \varphi_*^{(p)}$, $\varphi|_{C_p D_p} = \varphi^{*(p)}$ ($\varphi^{*(p)} - \varphi_*^{(p)} > 0$, $\varphi_*^{(p)}$, $\varphi^{*(p)}$ –

прикладені квазіпотенціали) та $\left. \frac{d\varphi^{(p)}}{dn} \right|_{B_p C_p} = \left. \frac{d\varphi^{(p)}}{dn} \right|_{A_p D_p} = 0$

(непроникності) і $\varphi^{(p)}(M)|_{B_p C_p} = \bar{\varphi}^{(p)}(M)$,

$\varphi^{(p)}(M)|_{A_p D_p} = \underline{\varphi}^{(p)}(M)$, $\sigma \left. \frac{\partial \varphi^{(p)}(M)}{\partial n} \right|_{A_p B_p} = \Psi_*^{(p)}(M)$,

$\sigma \left. \frac{\partial \varphi^{(p)}(M)}{\partial n} \right|_{C_p D_p} = \Psi^{*(p)}(M)$ (додаткові умови) [2, 3, 9], де M –

біжуча точка відповідної кривої; $\vec{j}^{(p)} = (j_x^{(p)}(x, y), j_y^{(p)}(x, y))$ – густина (локальна швидкість) струму; $\varphi^{(p)} = \varphi^{(p)}(x, y)$ – квазіпотенціал поля такий, що $A_p B_p$ та $C_p D_p$ – еквіпотенціальні лінії; $B_p C_p$ та $A_p D_p$ – непроникні граничні лінії течії; A_p, B_p, C_p, D_p – відмічені точки на ∂G_z ; $p = 1, 2, \dots$ – деякий параметр (номер інжекції [2, 3]); \vec{n} – зовнішня нормаль до відповідної ділянки границі даної області; $\Psi^{(p)} = \Psi^{(p)}(x, y)$ – локальні швидкості (тобто маємо, так звану, модель шунта [3, 9]).

Функції $\bar{\varphi}^{(p)}(M) = \bar{\varphi}^{(p)}(\tau, \dots)$ $\left(\tau_C^{(p)} \leq \tau \leq \tau_B^{(p)} \right)$,
 $\underline{\varphi}^{(p)}(M) = \underline{\varphi}^{(p)}(\tau, \dots)$ $\left(\tau_A^{(p)} \leq \tau \leq \tau_D^{(p)} \right)$, $\Psi_*^{(p)}(M) = \Psi_*^{(p)}(\tau, \dots)$
 $\left(\tau_B^{(p)} \leq \tau \leq \tau_A^{(p)} \right)$, $\Psi^{*(p)}(M) = \Psi^{*(p)}(\tau, \dots)$ $\left(\tau_D^{(p)} \leq \tau \leq \tau_C^{(p)} \right)$, як і в [3],
можуть бути побудовані шляхом інтерполювання експериментально отриманих їх значень $\bar{\varphi}_{\bar{i}}^{(p)}$, $\underline{\varphi}_{\underline{i}}^{(p)}$, $\Psi_{*j_*}^{(p)}$, $\Psi_{j^*}^{*(p)}$ при деяких $\tau = \bar{\tau}_{\bar{i}}^{(p)}$, $\tau = \underline{\tau}_{\underline{i}}^{(p)}$, $\tau = \tau_{*j_*}^{*(p)}$, $\tau = \tau_{j^*}^{*(p)}$ на ділянках $B_p C_p$, $A_p D_p$,
 $A_p B_p$, $C_p D_p$, відповідно $\left(\varphi_*^{(p)} \leq \underline{\varphi}_{\underline{i}}^{(p)} \leq \varphi^{*(p)} \right)$, $\left(\varphi_*^{(p)} \leq \bar{\varphi}_{\bar{i}}^{(p)} \leq \varphi^{(p)} \right)$,
 $\Psi_{*j_*}^{(p)} > 0$, $\Psi_{j^*}^{*(p)} > 0$, $0 \leq \bar{i}^{(p)} \leq \bar{m}^{*(p)} + 1$, $0 \leq \underline{i}^{(p)} \leq \underline{m}_*^{(p)} + 1$,
 $0 \leq j_*^{(p)} \leq n_*^{(p)} + 1$, $0 \leq j^{*(p)} \leq n^{*(p)} + 1$). У загальному випадку, коефіцієнт провідності шукаємо у вигляді:

$$\sigma \left(x, y, \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial n}, a_0, \dots, a_s \right) = F_\sigma \left(x, y, \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial n}, a_0, \dots, a_s \right),$$

де a_k ($k = 0, \dots, s$) – параметри, що знаходяться в процесі розв'язання задачі, $F_\sigma \left(x, y, \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial n}, a_0, a_1, \dots, a_s \right)$ – задана функція.

Інжекції струму через томографічний переріз моделюватимемо наборами значень $\{\tau_A^{(p)}, \tau_B^{(p)}, \tau_C^{(p)}, \tau_D^{(p)}\}$, згідно яких,

$$A_p = \left(\tilde{x}(\tau_A^{(p)}), \tilde{y}(\tau_A^{(p)}) \right), \quad B_p = \left(\tilde{x}(\tau_B^{(p)}), \tilde{y}(\tau_B^{(p)}) \right),$$

$$C_p = \left(\tilde{x}(\tau_C^{(p)}), \tilde{y}(\tau_C^{(p)}) \right), \quad D_p = \left(\tilde{x}(\tau_D^{(p)}), \tilde{y}(\tau_D^{(p)}) \right) \quad (\text{відповідну}$$

границю області G_z із даними чотирма відміченими точками позначимо через $\partial G_z^{(p)}$).

Задача полягає у знаходженні розв'язку задачі томографії прикладених квазіпотенціалів за умовами кожної інжекції (розрахунок електродинамічних сіток, полів швидкостей та реконструкції зображення коефіцієнта провідності).

Найбільш поширений підхід до розв'язання прямої задачі томографії прикладених квазіпотенціалів заснований на використанні методу скінченних елементів, який, проте, не в повній мірі задовольняє умови неперервності, чим порушує закон збереження на елементі сітки і області в цілому. Відтак для дискретизації функцій і параметрів математичної моделі томографії прикладених квазіпотенціалів з урахуванням принципу електрогідродинамічної аналогії використаємо метод скінченних різниць, а для відшукування невідомої функції електричного квазіпотенціалу $\varphi^{(p)}(x, y)$ – дещо модифікований алгоритм чисельного розв'язання крайових задач на квазіконформні відображення областей різної геометричної конфігурації, обмежених лініями течії та еківквізіпотенціальними лініями [10] (з урахуванням відповідних переваг методу).

Тоді шляхом введення функцій течії $\psi^{(p)}(x, y)$, комплексно спряжених до функцій $\varphi^{(p)}(x, y)$ ($p = \overline{1, \bar{p}}$), аналогічно до [10], приходимо до серії більш загальних крайових задач на квазіконформні відображення $\omega = \omega^{(p)}(z) = \varphi^{(p)}(x, y) + i\psi^{(p)}(x, y)$ фізичних областей $G_z^{(p)}$ (рис. 4.2, а) на відповідні області комплексного квазіпотенціалу $G_\omega^{(p)}$ (рис. 4.2, б).

Беручи до уваги апріорну рівномірність задання вузлів сіток в $G_\omega^{(p)}$ доцільно здійснювати різницеву постановку задачі саме в них. Тоді обернені нелінійні крайові задачі на квазіконформні відображення $z = z^{(p)}(\omega) = x^{(p)}(\varphi, \psi) + iy^{(p)}(\varphi, \psi)$ областей $G_\omega^{(p)}$ на $G_z^{(p)}$ при невідомих $\varphi^{(p)}(x, y)$, $\psi^{(p)}(x, y)$ та $\sigma = \sigma(x, y, \varphi, \varphi'_n, a_0, \dots, a_s)$, аналогічно до [2, 3, 10], зводяться до розв'язання систем еліптичних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\sigma} \frac{\partial x^{(p)}}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\sigma \frac{\partial x^{(p)}}{\partial \psi} \right) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\sigma} \frac{\partial y^{(p)}}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\sigma \frac{\partial y^{(p)}}{\partial \psi} \right) = 0, \quad \forall (x^{(p)}, y^{(p)}) \in G_z^{(p)} \end{cases}$$

за умов:

$$\begin{aligned} x^{(p)}(\varphi_*^{(p)}, \psi) &= \tilde{x}(\tau_*^{(p)}(\psi)), & y^{(p)}(\varphi_*^{(p)}, \psi) &= \tilde{y}(\tau_*^{(p)}(\psi)), \\ x^{(p)}(\varphi, Q^{(p)}) &= \tilde{x}(\bar{\tau}^{(p)}(\varphi)), & y^{(p)}(\varphi, Q^{(p)}) &= \tilde{y}(\bar{\tau}^{(p)}(\varphi)), \\ x^{(p)}(\varphi^{*(p)}, \psi) &= \tilde{x}(\tau^{*(p)}(\psi)), & y^{(p)}(\varphi^{*(p)}, \psi) &= \tilde{y}(\tau^{*(p)}(\psi)), \\ x^{(p)}(\varphi, 0) &= \tilde{x}(\underline{\tau}^{(p)}(\varphi)), & y^{(p)}(\varphi, 0) &= \tilde{y}(\underline{\tau}^{(p)}(\varphi)); \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \tilde{x}'(\tau_1) \frac{\partial y^{(p)}(\varphi_*^{(p)}, \psi_*^{(p)}(\tau_1, \dots))}{\partial \varphi} - \tilde{y}'(\tau_1) \frac{\partial x^{(p)}(\varphi_*^{(p)}, \psi_*^{(p)}(\tau_1, \dots))}{\partial \varphi} = 0, \\ \tilde{x}'(\tau_2) \frac{\partial y^{(p)}(\varphi^{*(p)}, \psi^{*(p)}(\tau_2, \dots))}{\partial \varphi} - \tilde{y}'(\tau_2) \frac{\partial x^{(p)}(\varphi^{*(p)}, \psi^{*(p)}(\tau_2, \dots))}{\partial \varphi} = 0, \\ \tilde{x}'(\tau_3) \frac{\partial y^{(p)}(\underline{\varphi}^{(p)}(\tau_3, \dots), 0)}{\partial \psi} - \tilde{y}'(\tau_3) \frac{\partial x^{(p)}(\underline{\varphi}^{(p)}(\tau_3, \dots), 0)}{\partial \psi} = 0, \\ \tilde{x}'(\tau_4) \frac{\partial y^{(p)}(\bar{\varphi}^{(p)}(\tau_4, \dots), Q^{(p)})}{\partial \psi} - \tilde{y}'(\tau_4) \frac{\partial x^{(p)}(\bar{\varphi}^{(p)}(\tau_4, \dots), Q^{(p)})}{\partial \psi} = 0, \\ \tau_1 \in [\tau_B^{(p)}; \tau_A^{(p)}], \tau_2 \in [\tau_D^{(p)}; \tau_C^{(p)}], \tau_3 \in [\tau_A^{(p)}; \tau_D^{(p)}], \tau_4 \in [\tau_C^{(p)}; \tau_B^{(p)}], \end{cases}$$

де $\tau = \tau_*^{(p)}(\psi)$, $\tau = \bar{\tau}^{(p)}(\varphi)$, $\tau = \tau^{*(p)}(\psi)$, $\tau = \underline{\tau}^{(p)}(\varphi)$
 $(\varphi_*^{(p)} \leq \varphi \leq \varphi^{*(p)})$, $0 \leq \psi \leq Q^{(p)}$ – функції, побудовані шляхом

інтерполювання експериментально отриманих їх значень $\tau_{*j_*}^{(p)}$, $\bar{\tau}_i^{(p)}$,
 $\tau_{j_*}^{*(p)}$, $\underline{\tau}_i^{(p)}$ при деяких аргументах $\psi_*^{(p)}(\tau_{*j_*}^{(p)}) = \int_{A_p, \tau_{*j_*}^{(p)}} \Psi_*^{(p)}(\tau_{*j_*}^{(p)}) dl$,

$\bar{\varphi}_i^{(p)}$, $\psi^{*(p)}(\tau_{j_*}^{*(p)}) = \int_{D_p, \tau_{j_*}^{*(p)}} \Psi^{*(p)}(\tau_{j_*}^{*(p)}) dl$, $\underline{\varphi}_i^{(p)}$ на ділянках $A_p B_p$,

$B_p C_p$, $C_p D_p$ та $A_p D_p$, відповідно; dl – елемент дуги відповідної кривої.

Традиційно реконструкцію коефіцієнта провідності здійснюють за умови мінімізації функціоналів виду

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(\bar{p})}, \mathbf{y}^{(1)}, \dots, \mathbf{y}^{(\bar{p})}, \mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_s) = \\ = \sum_{p=1}^{\bar{p}} \left(\sigma(\mathbf{x}^{(p)}, \mathbf{y}^{(p)}, \mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_s) - f(\mathbf{x}^{(p)}, \mathbf{y}^{(p)}) \right)^2 + \\ + \eta \cdot \Omega[\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(\bar{p})}, \mathbf{y}^{(1)}, \dots, \mathbf{y}^{(\bar{p})}, \mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_s] \rightarrow \min, \end{aligned}$$

де Ω – стабілізуючий функціонал; η – параметр регуляризації;
 $f(\mathbf{x}^{(p)}, \mathbf{y}^{(p)})$ – функція, що характеризує фактичний розподіл коефіцієнта провідності на p -й інжекції.

5. Оглядова лекція. Приклади розв'язання типових задач

(л. 10, л.з. 1-8)

5.1. Синтез методів і узагальнення задач.

5.2. Постановка творчих завдань досліджень.

5.2.1. Використовуючи надані бібліотечні функції розв'язати задачу томографії прикладених квазіпотенціалів методом, наведеними в [2], підібравши оптимально, при цьому, параметр регуляризації.

5.2.2. Опрацювати [11], і використовуючи ідеї розділу 3 [3], сформулювати (поставити) та розв'язати аналогічні модельні задачі геології.

5.2.3. Використовуючи ідеї п.3.3. із [3] перенести постановки та метод розв'язання задач геофізики [11] (гл. 8) із «площини на простір».

5.2.4. Застосувати метод регуляризації Тихонова до моделювання характеристик квазіідеальних полів у водоймах.

5.3. Приклади розв'язання типових завдань.

5.3.1. Чи є визначеною система рівнянь
$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$
 при заданих $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$?

5.3.1.1. $a_1 = 1, b_1 = 2, c_1 = 5, a_2 = 1, b_2 = -1, c_2 = -1$

Розв'язання. Так, дана система є визначеною і має єдиний розв'язок (оскільки головний визначник відмінний від нуля) $x = 1, y = 2$.

5.3.1.2. $a_1 = 22, b_1 = 4, c_1 = 122, a_2 = -5, b_2 = -6, c_2 = -43$
(розв'язати самостійно)

5.3.1.3. $a_1 = 3, b_1 = 2, c_1 = 1, a_2 = 6, b_2 = 4, c_2 = 2$

Розв'язання. Оскільки основний визначник та допоміжні є рівними 0 (друге рівняння одержується з першого множенням на деякий множник), то система має безліч розв'язків, тобто не є сумісною.

5.3.1.4. $a_1 = 22, b_1 = 4, c_1 = 122, a_2 = 220, b_2 = 40, c_2 = 1220$
(розв'язати самостійно)

$$5.3.1.5. \mathbf{a}_1 = 1, \mathbf{b}_1 = 2, \mathbf{c}_1 = 5, \mathbf{a}_2 = 1, \mathbf{b}_2 = 2, \mathbf{c}_2 = -1$$

Розв'язання. Система не має розв'язків, оскільки головний визначник є рівним 0, а допоміжні – відмінні від 0 (ранг розширеної матриці більший за ранг головної).

$$5.3.1.6. \mathbf{a}_1 = 22, \mathbf{b}_1 = 4, \mathbf{c}_1 = -122, \mathbf{a}_2 = -44, \mathbf{b}_2 = -8, \mathbf{c}_2 = 128$$

(розв'язати самостійно)

5.3.2. Знайти наближено число коректності (обумовленості)

$$\text{матриці } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{1,1} & \mathbf{a}_{1,2} \\ \mathbf{a}_{2,1} & \mathbf{a}_{2,2} \end{pmatrix} \text{ при заданих } \mathbf{a}_{1,1}, \mathbf{a}_{1,2}, \mathbf{a}_{2,1}, \mathbf{a}_{2,2} ?$$

$$5.3.2.1. \mathbf{a}_{1,1} = 10, \mathbf{a}_{1,2} = 61, \mathbf{a}_{2,1} = 0, \mathbf{a}_{2,2} = 18$$

Розв'язання

Число обумовленості шукається за формулою:

$$\mu = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}},$$

де λ_{\min} та λ_{\max} – мінімальне та максимальне власні значення матриці $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$. Для знаходження числа обумовленості спочатку обчислимо добуток $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 61 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 61 \\ 0 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 & 610 \\ 610 & 4045 \end{pmatrix}.$$

Далі, для обчислення власних значень λ_{\min} та λ_{\max} , запишемо наступний визначник:

$$|\mathbf{A}^T \mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}| = 0.$$

Перепишемо це у розгорнутому вигляді

$$\begin{vmatrix} 100 - \lambda & 610 \\ 610 & 4045 - \lambda \end{vmatrix} = (100 - \lambda)(4045 - \lambda) - 610 \cdot 610 = 0.$$

Здійснивши елементарні перетворення, отримаємо квадратне рівняння:

$$\lambda^2 - 4145\lambda + 32400 = 0,$$

Розв'яжемо його стосовно $\lambda_{1,2}$:

$$\mathbf{D} = 4145^2 - 4 \cdot 1 \cdot 32400 = 17051425,$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{4145 \pm \sqrt{17051425}}{2}.$$

Обчислимо λ_{\min} та λ_{\max}

$$\lambda_{\min} \approx \frac{4145 - 4129.3371138719}{2} \approx 7.8314430640447,$$

$$\lambda_{\max} \approx \frac{4145 + 4129.3371138719}{2} \approx 4137.168556936.$$

Остаточно, число обумовленості рівне

$$\mu = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}} \approx 0.043508.$$

Відповідь: $\mu \approx 0.043508$.

5.3.2.2. $\mathbf{a}_{1,1} = 73, \mathbf{a}_{1,2} = 70, \mathbf{a}_{2,1} = 31, \mathbf{a}_{2,2} = 24$
(розв'язати самостійно)

5.3.2.3. $\mathbf{a}_{1,1} = 5, \mathbf{a}_{1,2} = 18, \mathbf{a}_{2,1} = 85, \mathbf{a}_{2,2} = 83$
(розв'язати самостійно)

5.3.3. Знайти міру виродженості матриці $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{1,1} & \mathbf{a}_{1,2} \\ \mathbf{a}_{2,1} & \mathbf{a}_{2,2} \end{pmatrix}$,

якщо її норма вводиться за формулою $\|\mathbf{A}\| = \max_{i=1,2} \sum_{k=1}^2 |\mathbf{a}_{i,k}|$,

при заданих $\mathbf{a}_{1,1}, \mathbf{a}_{1,2}, \mathbf{a}_{2,1}, \mathbf{a}_{2,2}$?

5.3.3.1. $\mathbf{a}_{1,1} = 25.2, \mathbf{a}_{1,2} = 62, \mathbf{a}_{2,1} = 24, \mathbf{a}_{2,2} = 59$

Розв'язання

Міру виродженості даної матриці шукатимемо за формулою:

$$d(\mathbf{A}) = \frac{1}{\|\mathbf{A}^{-1}\|}.$$

Знайдемо спершу обернену матрицю до даної

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 25.2 & 62 \\ 24 & 59 \end{pmatrix}$, наприклад, за формулою:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{a}_{2,2}}{\Delta} & -\frac{\mathbf{a}_{1,2}}{\Delta} \\ -\frac{\mathbf{a}_{2,1}}{\Delta} & \frac{\mathbf{a}_{1,1}}{\Delta} \end{pmatrix},$$

де Δ – визначник матриці \mathbf{A} . Обчислимо його

$$\Delta = \begin{vmatrix} 25.2 & 62 \\ 24 & 59 \end{vmatrix} = 25.2 \cdot 59 - 24 \cdot 62 = -1.2.$$

Остаточню \mathbf{A}^{-1} має вигляд:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -49.1(6) & 51.(6) \\ 20 & -21 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо тепер $\|\mathbf{A}^{-1}\|$ із використанням норми

$$\|\mathbf{A}\| = \max_{i=1,2} \sum_{k=1}^2 |\mathbf{a}_{i,k}| :$$

$$\|\mathbf{A}^{-1}\| = \max(|-49.1(6)| + |51.(6)|, |20| + |-21|),$$

$$\|\mathbf{A}^{-1}\| = \max(100.8(3), 41),$$

$$\|\mathbf{A}^{-1}\| = 100.8(3).$$

$$\text{Остаточню } \mathbf{d}(\mathbf{A}) = \frac{1}{\|\mathbf{A}^{-1}\|} = \frac{1}{100.8(3)} \approx 0.00991736.$$

Відповідь: $\mathbf{d}(\mathbf{A}) \approx 0.00991736$.

$$5.3.3.2. \mathbf{a}_{1,1} = 44, \mathbf{a}_{1,2} = 47, \mathbf{a}_{2,1} = 60, \mathbf{a}_{2,2} = 64$$

(розв'язати самостійно)

$$5.3.3.3. \mathbf{a}_{1,1} = 0.5, \mathbf{a}_{1,2} = 3, \mathbf{a}_{2,1} = 12, \mathbf{a}_{2,2} = 61$$

(розв'язати самостійно)

5.3.4.1. Умови коректно поставленої задачі за Ж. Адамаром

Відповідь: розв'язок існує, він єдиний та неперервно залежний від даних задачі

5.3.4.2. Умови коректно поставленої задачі за А. М. Тихоновим

Відповідь: розв'язок існує на множині коректності, він єдиний та

малим змінам даних задачі відповідають малі зміни розв'язку

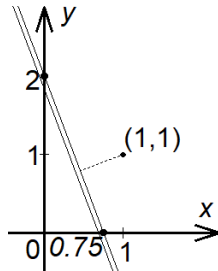
5.3.5.1. Знайти наближено з точністю δ розв'язок системи рівнянь

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2, \end{cases} \text{ що найближче віддалений від точки } (x^*, y^*), \text{ якщо}$$

$a_1 = a_2 = -8$, $b_1 = b_2 = -3$, $c_1 = -6$, $c_2 = -5.98$, $x^* = 1$, $y^* = 1$, $\delta = 0.1$
(підказка: скористатись тим, що $|c_1 - c_2| < \delta$)

Розв'язання

На рисунку зображено відповідні дві прямі та опорна точка (x^*, y^*) . Оскільки відстань між заданими паралельними кривими менша заданої точності, то координати довільної точки, наприклад, першої із даних прямих можемо прийняти за наближений розв'язок (точного розв'язку задача, очевидно, не має). Залишається знайти точку на даній прямій, що найближче розташована опорної точки $(1,1)$. Це можна зробити, наприклад, записавши рівняння прямої, що проходить через точку $(1,1)$, перпендикулярно до заданої прямої, а в результаті розв'язання відповідної системи рівнянь знайти точку їх перетину, або записати вираз для знаходження відстані між точкою $(1,1)$ та біжучою точкою $(x, \frac{6-8x}{3})$ прямої $-8x - 3y = -6$. Тоді абсцису шуканої точки знайдемо в результаті прирівнювання до 0 похідної від даного виразу та розв'язання відповідного рівняння.



Відповідь: $x=0.450959$, $y=0.79411$.

5.3.5.2. Знайти наближено з точністю δ розв'язок системи рівнянь

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2, \end{cases} \text{ що найближче віддалений від точки } (x^*, y^*), \text{ якщо}$$

$$a_1 = a_2 = 2, \quad b_1 = b_2 = -5, \quad c_1 = 8, \quad c_2 = 8.02, \quad x^* = 1, \quad y^* = 7, \quad \delta = 0.1$$

(підказка: скористатись тим, що $|c_1 - c_2| < \delta$)

(розв'язати самостійно)

5.3.6. Розглянемо СЛАР з погано обумовленою матрицею

$$\begin{cases} x_1 + 0.99x_2 = 1.99, \\ 0.99x_1 + 0.98x_2 = 1.97 \end{cases} \quad (\text{переконатись самостійно, що число її}$$

обумовленості $\mu(A) = 39600$), а розв'язок $\tilde{x} = (1.0, 1.0)^T$. Також переконатись самостійно, що розв'язок досить «близької» системи

$$\begin{cases} x_1 + 0.99x_2 = 1.989903, \\ 0.99x_1 + 0.98x_2 = 1.970106, \end{cases} \quad \text{як і слід було очікувати, суттєво}$$

відрізняється від \tilde{x} , а саме: $\bar{x}_\delta = (3.0, -1.0203)^T$ (тут

$\overline{\Delta b} = \bar{b}_\delta - \bar{b} = (-0.000097, 0.000106)^T$, $\delta \approx 0.0001$). Безумовно, що така велика «відхиленість» пояснюється великим числом обумовленості матриці. Регуляризований же розв'язок (згідно методу регуляризації, описаного вище), заокруглений до п'яти знаків, є $\bar{x}^\alpha = (0.98985, 1.0002)^T$.

6. Список рекомендованої літератури

1. Охріменко М. Г., Фартушний І. Д., Кулик А. Б. Некоректно поставлені задачі та методи їх розв'язування: підручник. Київ : «Політехніка», 2016. 225 с.
2. Bomba A., Boichura M. Identification of Burst Parameters using Numerical Quasiconformal Mapping Methods. *International Journal of Applied Mathematics*. 2020. Vol. 33 (5). P. 903–917.
3. Бомба А. Я., Бойчура М. В. Методи комплексного аналізу в задачах ідентифікації: монографія. Рівне : НУВГП, 2020. 188 с.
4. Calderón A. On an inverse boundary value problem. *Numerical Analysis and its Applications to Continuum Physics: Seminar organized by the Department of Mathematics, University of Chicago and the Laboratorio de Calcula of the Centro Brasileiro de Pesquisas Fisicas, Rio de Janeiro (Rio de Janeiro, March 24, 1980)*. Rio de Janeiro, 1980. P. 65–73.
5. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. Москва : Наука, 1979. 284 с.
6. Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П. Некорректные задачи математической физики и анализа. Москва : Наука, 1980. 287 с.
7. Бакушинский А. Б., Гончарский А. В. Некорректные задачи. Численные методы и приложения. Москва : Издательство Московского университета, 1989. 199 с.
8. Тихонов А. Н. Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация. Москва : Наука, 1983. 200 с.
9. Пеккер Я. С., Бразовский К. С., Усов В. Ю. и др. Электроимпедансная томография: монография. Томск : НТЛ, 2004. 192 с.
10. Бомба А. Я., Каштан С. С., Пригорницький Д. О., Ярощак С. В. Методи комплексного аналізу: монографія. Рівне : НУВГП, 2013. 415 с.
11. Светов Б. С. Основы геоэлектрики. Москва : Издательство ЛКИ, 2008. 656 с.
12. Рівненська обласна універсальна бібліотека. URL: <http://libr.rv.ua/> (дата звернення: 21.12.2018).
13. Наукова бібліотека НУВГП. URL: <http://lib.nuwm.edu.ua/> (дата звернення: 21.12.2018).
14. Національна бібліотека ім. В. І. Вернадського: URL: <http://www.nbuv.gov.ua/> (дата звернення: 21.12.2018).